

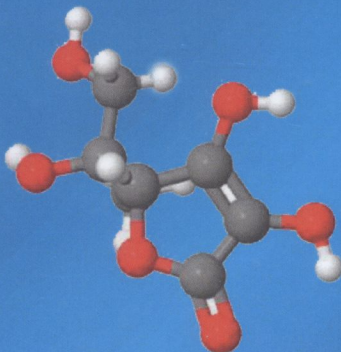
539.3

H16

Тарас Нагірний,
Костянтин Червінка

**ТЕРМОДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ
ТА МЕТОДИ ТЕРМОМЕХАНІКИ
ІЗ ВРАХУВАННЯМ
ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ТА СТРУКТУРНОЇ
НЕОДНОРІДНОСТЕЙ**

ОСНОВИ НАНОМЕХАНІКИ I



Львів 2012

539.3

H16

Тарас Нагірний, Костянтин Червінка

a

a

**ТЕРМОДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ
ТА МЕТОДИ ТЕРМОМЕХАНІКИ
РАХУВАННЯМ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ
ТА СТРУКТУРНОЇ
НЕОДНОРІДНОСТЕЙ**

ОСНОВИ НАНОМЕХАНІКИ I



ББК 22.251

УДК 539.3

Н 16

Нагірний Т.С., Червінка К.А.

Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки I. [Текст] : монографія / – Нагірний Т.С., Червінка К.А. – Львів : Сполом, 2012. – 264 с.

Бібліогр.: с. 253-263 (155 назв).

З використанням методів термодинаміки нерівноважних процесів та нелінійної механіки запропоновано підхід до побудови моделей, що враховують структурну неоднорідність матеріалу, а також інерційність процесів, що протікають у тілі. На прикладі модельних задач для пружного, термопружного, електропровідного неферомагнітного твердих тіл та бінарного твердого розчину вивчено ефекти, пов'язані з приповерхневою неоднорідністю, зокрема розмірні ефекти, та інерційністю. Запропоновано підхід до побудови основ механіки пористих наноматеріалів.

Для науковців, викладачів і студентів.

Нагірний Т.С., Червінка К. А. Термодинамические модели и методы термомеханики с учетом приповерхностной и структурной неоднородностей. Основы наномеханики I. – Львов: Сполом, 2012. – 264 с.

463 489

В монографии с использованием методов термодинамики неравновесных процессов и нелинейной механики предложен подход к построению моделей, которые учитывают структурную неоднородность материала, а также инерционность процессов, протекающих в теле. На примере модельных задач для упругого, термоупругого, электропроводного неферомагнитного твердых тел и бинарного твердого раствора изучены эффекты, связанные с приповерхностной неоднородностью, включая масштабные эффекты, и инерционностью. Предложен подход к построению основ механики пористых наноматериалов.

Taras Nahirnyj, Kostiantyn Tchervinka. Thermodynamical models and methods of thermomechanics taking into account nearsurface and structural nonhomogeneity. Bases of nanomechanics I. – Lviv: Spolom, 2012. – 264 p.

In the monograph with use of methods of thermodynamics of non-equilibrium processes and nonlinear mechanics the approach to creation of models which consider structural heterogeneity of material and inertia of processes in body is proposed. Using as an example the model problems for elastic, thermoelastic, electroconductive non-ferromagnetic bodies and binary solid solution the effects associated to nearsurface non-homogeneity, including size effects, and inertia are studied. The approach to creation of bases of mechanics of porous nanomaterials is offered.

Затверджено до друку Вченою радою Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

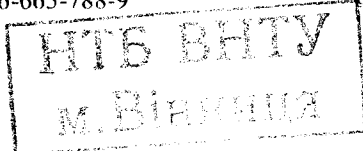
Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. *О.Р.Гачкевич*

д-р фіз.-мат. наук, проф. *Ю.З.Повстенко*

ISBN 978-966-665-788-9

© Нагірний Т.С., Червінка К.А., 2012



***Пам'яті українського вченого-механіка
Ярослава Йосиповича Бурака***

ЗМІСТ

| | |
|--|-----------|
| Вступ | 9 |
| 1. Загальні положення математичного моделювання | 14 |
| 1.1. Поняття математичної моделі | 14 |
| 1.2. Загальна схема математичного моделювання | 15 |
| 1.3. Вимоги до математичних моделей | 18 |
| 2. Термодинамічні методи математичного моделювання | 20 |
| 2.1. Підхід Ейлера та Лагранжа | 20 |
| 2.2. Загальна форма балансового рівняння | 21 |
| 2.3. Приклади балансових рівнянь | 24 |
| 2.4. Загальна схема формулювання визначальних співвідношень | 28 |
| 3. Локально градієнтний підхід у термомеханіці. Базові співвідношення | 30 |
| 3.1. Балансові рівняння | 30 |
| 3.2. Визначальні співвідношення | 32 |
| 3.3. Локальна градієнтність та структурна неоднорідність | 38 |
| 3.4. Постановка крайових задач | 39 |
| 3.5. Локально градієнтний підхід та нелокальні теорії | 44 |
| 3.6. Постулювання оборотної складової потоку маси | 46 |
| 3.7. Узгодженість співвідношень моделей | 49 |
| 4. Приповерхнева неоднорідність у структурно неоднорідних пружних тілах | 52 |
| 4.1. Ключова система рівнянь моделі пружного тіла із врахуванням структурної неоднорідності | 52 |
| 4.2. Приповерхнева неоднорідність у тілах простої геометричної конфігурації | 53 |
| 4.2.1. Шар. Приповерхнева неоднорідність. Поверхневий натяг. Розмірний ефект межі міцності | 53 |
| 4.2.2. Приповерхневі явища в тілах циліндричної геометрії | 67 |
| 4.2.2. Приповерхневі явища в тілах сферичної геометрії | 72 |

| | |
|--|------------|
| 4.3. Рівноважні приконтактні явища в тілах простої геометричної конфігурації | 78 |
| 4.3.1. Пружний півпростір, що контактує з шаруватою плівкою | 78 |
| 4.3.2. Сферичне включення у безмежному середовищі | 85 |
| 4.3.3. Хімічний потенціал на границі контакту | 88 |
| 5. Динамічні задачі для деформівних пружних тіл із врахуванням структурної та приповерхневої неоднорідності | 91 |
| 5.1. Крайові задачі, що описують вклад поверхневого фактора в акустичну емісію | 91 |
| 5.1.1. Вихідна система рівнянь | 91 |
| 5.1.2. Динамічна поведінка півпростору при миттєвій зміні хімічного потенціалу на його поверхні..... | 94 |
| 5.1.3. Динамічна поведінка середовища зі сферичною порожниною при миттєвій зміні хімічного потенціалу на його поверхні | 98 |
| 5.1.4. Динамічна поведінка середовища з циліндричною порожниною | 105 |
| 5.1.5. Миттєве встановлення хімічного потенціалу у системі шар-два півпростори | 109 |
| 5.2. Хвильові процеси у деформівних тілах із врахуванням приповерхневої неоднорідності | 116 |
| 5.2.1. Вихідна система рівнянь | 116 |
| 5.2.2. Вплив приповерхневої неоднорідності на власні частоти коливань шару | 119 |
| 6. Вплив температури на ефекти приповерхневої неоднорідності | 126 |
| 6.1. Вплив температури на приповерхневу неоднорідність у тілах простої геометричної конфігурації | 126 |
| 6.1.1. Закономірності приповерхневої неоднорідності у термопружному шарі | 126 |
| 6.1.2. Термомеханічні поля у суцільному циліндрі | 131 |
| 6.1.3. Приповерхневі явища в тілах сферичної геометрії ... | 137 |
| 6.2. Вплив температури на частоти власних коливань структурно неоднорідного шару | 144 |
| 7. Приповерхнева неоднорідність у твердих розчинах | 150 |

| | |
|---|------------|
| 7.1. Ключова система рівнянь моделі пружного твердого розчину із врахуванням структурної неоднорідності скелету | 150 |
| 7.2. Рівноважні приповерхневі явища в бінарних твердих розчинах..... | 156 |
| 7.2.1. Рівноважний стан двокомпонентного шару..... | 157 |
| 7.2.2. Рівноважний стан насиченої кулі..... | 164 |
| 7.3. Механодифузійні процеси у бінарних твердих розчинах ... | 169 |
| 7.3.1. Дифузійне насичення півпростору..... | 170 |
| 7.3.2. Дифузійне насичення шару | 174 |
| 7.4. Структурна неоднорідність та два шляхи дифузії | 177 |
| 8. Термодинамічні моделі неферромагнітних електропровідних твердих тіл із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей..... | 180 |
| 8.1. Балансові та визначальні рівняння | 180 |
| 8.2. Рівноважний стан шару | 186 |
| 8.3. Приповерхневі явища у кулі | 192 |
| 8.4. Динамічна поведінка півпростору при раптовому встановленні на його поверхні заданих значень хімічного потенціалу та заряду..... | 195 |
| 9. Термодинамічні моделі узагальненої термомеханіки | 205 |
| 9.1. Функції впливу в реологічних кінетичних рівняннях, що приводять до врахування інерційності потоку ентропії | 205 |
| 9.2. Врахування інерції деформації в узагальненій термомеханіці | 207 |
| 9.2.1. Хвильові процеси. Вплив інерції деформації на власні частоти коливань шару | 212 |
| 9.2.2. Розмивання фронту хвилі при ударному навантаженні півпростору | 217 |
| 9.3. Врахування інерції деформації в узагальненій термомеханіці твердих розчинів | 218 |
| 9.4. Врахування інерції зміни мікроструктури..... | 226 |
| 9.4.1. Миттєве утворення поверхні півпростору | 229 |
| 9.4.2. Миттєве утворення сферичної порожнини у середовищі | 231 |
| 9.5. Моделі, що враховують вібраційне пришвидшення необоротних процесів | 236 |
| 9.5.1. Модель вібродифузії | 236 |

| | |
|---|-----|
| 10. Основи механіки пористих наноматеріалів | 241 |
| 10.1. Структура і механічні властивості наноматеріалів | 241 |
| 10.2. Моделювання пружних властивостей пористих наноматеріалів..... | 243 |
| 10.3. Розмірний ефект модулів пружності тонких плівок та волокон | 245 |
| Література | 253 |

ВСТУП

Одним з головних завдань механіки деформівного твердого тіла є прогнозування деформаційних, міцнісних та інших експлуатаційних параметрів деталей машин і елементів конструкцій та приладів, які в процесі виготовлення й експлуатації перебувають у складних умовах взаємодії з оточенням. В основі прогнозування лежать теоретичні моделі для кількісного опису полів різної фізичної природи у деформівних системах. Такі моделі повинні бути адекватними до реальних об'єктів, поведінку яких вони описують, тобто вони повинні достатньо повно враховувати структуру і властивості матеріалу, а також характер зовнішньої дії, яка часто буває високоінтенсивною.

Коректне врахування структури матеріалу та енергії зв'язку є особливо актуальним у зв'язку з широким використанням у точному машино- та приладобудуванні, а також медицині, тонких плівок, волокон, тонкопліткових прошарків та покриттів, пористих наноматеріалів тощо. Інтенсивний розвиток нанотехнологій та зусилля, спрямовані на класифікацію досліджень, пов'язаних з нанотехнологіями, виокремили такі галузі як нанофізика, нанохімія, наномеханіка, нанобіологія та інші [115, 130, 132, 138]. Дослідження у цих областях спрямовані на вивчення наноелементів та наноструктур. Відомо, що такі об'єкти характеризуються співвимірністю вкладів поверхневого та об'ємного факторів в енергію, а неоднорідність фізико-механічних полів обумовлює існування у рівноважному стані термодинамічних сил при одночасній відсутності термодинамічних потоків [95]. Приповерхнева та структурна неоднорідність впливають на протікання фазових перетворень, поширення тріщин та крихке руйнування, змочування і розтікання та інші процеси. З ними пов'язують різного роду розмірні ефекти, у тому числі межі міцності, модулів пружності тощо.

Не вдаючись до огляду обширної літератури, присвяченої приповерхневій та структурній неоднорідностям, зазначимо, що за об'ємного підходу нерівноважні процеси із врахуванням приповерхневої та приконтатної неоднорідностей описують в рамках моделей електропровідного неферромагнітного твердого тіла та твердого розчину, в

основу яких покладено уявлення про електронну будову тіла, зокрема, подвійний електричний шар [7, 13, 31]. При цьому приповерхнева неоднорідність полів іншої фізичної природи зумовлена неоднорідністю електричного потенціалу.

При врахуванні інерційності теплових та дифузійних процесів зазвичай за основу приймають реологічні співвідношення між термодинамічними потоками та силами [64, 104]. Разом із тим, авторам не відомі роботи, у яких дано термодинамічне обґрунтування врахування інерційності полів різної фізичної природи та вивчено ефекти зв'язаності таких процесів.

У даній роботі з використанням методів термодинаміки нерівноважних процесів та механіки спадкових середовищ запропоновано підхід та побудовано математичні моделі для кількісного вивчення взаємозв'язаних фізико-механічних процесів у деформівних твердих тілах із врахуванням структурної неоднорідності (енергії зв'язку) та приповерхневої неоднорідності, а також інерційності деформації, теплових та дифузійних процесів і процесу зміни структури. На цій основі розроблено основи механіки наноелементів та запропоновано підхід до побудови основ механіки пористих наноматеріалів.

Монографія складається з вступу та десяти розділів.

У вступі обговорено загальне поняття математичної моделі, головні вимоги до таких моделей, а також наведено загальну схему математичного моделювання.

Другий розділ присвячено термодинамічним методам математичного моделювання взаємозв'язаних процесів. Записано загальний вигляд балансового рівняння і як часткові випадки сформульовано рівняння нерозривності, збереження ентропії, дифузійне рівняння, рівняння збереження заряду та енергії. Ці ж рівняння записано також у випадку нехтування конвективною складовою потоків. На закінчення розділу представлено загальну схему формулювання визначальних співвідношень моделей.

У третьому розділі запропоновано підхід до формулювання основних співвідношень, що описують взаємозв'язані механічні, теплові та дифузійні процеси у деформівних твердих тілах із врахуванням структурної неоднорідності (енергії зв'язку). Підхід базується на основних положеннях термодинаміки нерівноважних процесів, а саме загальноприйнятих балансових рівняннях та виокремленні незатухаючої

пам'яті у реологічному рівнянні, що пов'язує вектор потоку маси та градієнт хімічного потенціалу основної підсистеми (скелету). Показано, що незатухаюча пам'ять пов'язана із структурою матеріалу. Це дозволило модифікувати рівняння балансу маси континууму центрів мас та ввести у простір параметрів стану густину середовища та спряжений параметр – хімічний потенціал, а також градієнт хімічного потенціалу. Зазначено, що збурення хімічного потенціалу можна ототожнити зі збуренням енергії зв'язку. Проведено порівняння з нелокальними теоріями механіки. Для термопружного середовища показано, що, виключивши з розгляду хімічний потенціал, визначальне співвідношення, яке пов'язує тензор напружень та тензор деформації можна привести до нелокального вигляду. При цьому нелокальність властива лише кульовим складовим цих тензорів.

Четвертий розділ присвячено вивченню приповерхневої неоднорідності та ефектів пов'язаних з приповерхневою неоднорідністю у деформівних пружних тілах канонічної форми. Показано, що запропонований підхід дозволяє описувати поведінку тонких плівок та волокон, а також малих частинок. Значну увагу зосереджено на вивченні поверхневого натягу і межі міцності та їх розмірних ефектів. Вказано на узгодженість одержаних результатів з відомими в літературі експериментальними даними. На прикладі контактних задач обговорено питання визначення хімічного потенціалу на границі контакту.

У п'ятому розділі дано постановку та на прикладі модельних задач досліджено розв'язки динамічних задач пружності, що описують вклад поверхневого фактору в акустичну емісію при раптовому утворенні в тілі нових поверхонь. В останньому підрозділі запропоновано методику вивчення впливу приповерхневої неоднорідності на хвильові процеси та досліджено вплив такої неоднорідності на частоти власних коливань шару для різних умов на його поверхнях.

У шостому розділі вивчено вплив постійної температури на ефекти, пов'язані з приповерхневою неоднорідністю. Відомі в літературі експериментальні використано для оцінки коефіцієнтів.

Сьомий розділ присвячено вивченню приповерхневої неоднорідності у двокомпонентних твердих розчинах. Сформульовано основні співвідношення моделі деформівного твердого розчину із врахуванням структурної неоднорідності підсистеми скелету та на прикладі

модельних задач вивчено вплив домішок на приповерхневу неоднорідність у твердих розчинах у стаціонарному стані та в процесі насичення. Особливу увагу зосереджено на вивченню впливу домішок на поверхневий натяг, межу міцності та їх розмірні ефекти. В останньому параграфі, на основі одержаних результатів та результатів відомої в літературі моделі дифузії, що враховує два шляхи дифузії, підтверджено, що запропоновані моделі за локально градієнтного підходу в термомеханіці враховують структуру середовища.

У восьмому розділі сформульовано основні співвідношення механіки електропровідних неферромагнітних твердих тіл та вивчено закономірності приповерхневої неоднорідності. Встановлено зокрема, що подвійний електричний шар є наслідком врахування приповерхневої неоднорідності енергії зв'язку та сил кулонівської взаємодії. Показано, що розмірним ефектам, у тому числі межі міцності, властиві два характерні розміри, один з яких пов'язаний з енергією зв'язку, а інший з електронною підсистемою тіла. В останньому параграфі дано постановку задачі та вивчено вклад поверхневого фактору в акустичну емісію при раптовому виникненні поверхні електропровідного неферромагнітного півпростору.

У дев'ятому розділі запропоновано підхід до побудови моделей узагальненої термомеханіки, що враховують інерційність різних форм руху. Показано, що енергію руху (кінетичну енергію) можна трактувати як потенціальну функцію, означену у просторі імпульсів форм руху, які розглядаємо у рамках моделі. Параметрами, спряженими до імпульсів, є відповідні швидкості. Встановлено, що врахування інерційності процесів теплопровідності та дифузії приводить до реологічних кінетичних рівнянь для векторів потоків ентропії та дифузії. Врахування ж зв'язаності потоків та взаємозв'язаності імпульсів може бути враховано шляхом належного вибору функцій впливу в реологічних кінетичних рівняннях. Побудовано модель деформівного твердого тіла, що враховує інерційність процесу деформування та вивчено на цій основі вплив інерційності деформування на хвильові процеси та власні частоти коливань шару, а також на розмивання фронту хвилі при ударному навантаженні півпростору. У цьому ж розділі сформульовано основні співвідношення моделі, що враховує інерційність зміни структури та вивчено її вклад в акустичну емісію при миттєвому утворенні поверхні півпростору і сферичної порожнини у середовищі.

Останній параграф присвячено формулюванню моделі вібродифузії та розробці методики розв'язування відповідних крайових задач.

У десятому розділі запропоновано підхід до побудови основ механіки деформівних твердих тіл, виконаних з пористого наноматеріалу. Основну увагу зосереджено на вивченні розмірних ефектів модулів пружності.

Розділ 1.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

У даному розділі обговорено загальні положення математичного моделювання та вимоги до математичних моделей.

1.1. Поняття математичної моделі

Математичні моделі є основою досліджень явищ та процесів різної природи і походження, у тому числі фізичних, механічних, економічних, соціальних. Вони дозволяють використовувати математичні методи для дослідження та прогнозування протікання процесів, заповнити точні методи аналізу, обчислювати оптимальні умови поведінки об'єктів тощо.

Використання математичного апарату базується на понятті математичної моделі. З метою вступу до поняття математичної моделі розглянемо приклад, на якому в літературі часто ілюструють поняття такої моделі. Нехай тягар масою m коливається вздовж прямої у горизонтальній площині під дією невагомої пружини жорсткості k . Приймаємо, що відсутнє тертя між вантажем та площиною і нас цікавить лише характер й частота коливань. Виберемо систему координат таким чином, щоб вісь Ox збігалася з лінією коливань, а її початок перебував у точці рівноваги вантажу. Використовуючи другий закон Ньютона, рівняння, що описує коливання вантажу запишемо у вигляді

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad (1.1)$$

де t – час, x – координата точки, у якій перебуває вантаж.

Розв'язком рівняння (1.1) є

$$x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\tau\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\tau\right),$$

де C_1, C_2 – сталі, для визначення яких слід використати початкові умови. На основі розв'язку можемо ствердити, що вантаж коливається довкола точки рівноваги $x = 0$ з частотою $\nu_0 = \sqrt{k/m}$ та довільною сталою амплітудою. Цей висновок є наслідком аналізу розв'язку диференціального рівняння. Даний приклад приводить нас до наступного поняття математичної моделі:

рівняння чи систему рівнянь, які є математичним описом умов і законів функціонування системи, називаємо математичною моделлю розглядуваної системи.

Зрозуміло, що рівняння (1.1) описує не усі властивості розглядуваної механічної системи. Для дослідження амплітуди необхідно сформулювати початкові умови. Зазвичай рух тіла на площині супроводжується тертям, яке приводить до зникання коливань. Однак такої інформації на основі розв'язку рівняння (1.1) одержати ми не можемо. Це ілюструє твердження про те, що в загальному випадку необхідно говорити про математичну модель реальної системи відносно визначеної множини її властивостей. Відносно іншої множини властивостей системи рівняння (система рівнянь), а отже і математична модель, буде іншою.

1.2. Загальна схема математичного моделювання

Розглянутий вище приклад дозволяє сформулювати загальну схему застосування математики в процесі дослідження різного роду систем. Аналізуючи його, можна виокремити такі етапи математичного моделювання [108, 111]:

- реальна система (об'єкт),
- змістовна модель (фізична, біологічна, хімічна, ...),
- математична модель,
- розв'язування та дослідження математичної задачі.

Обговоримо коротко дії, притаманні кожному з цих етапів моделювання. На *першому етапі* описується досліджувана реальна система (об'єкт) та характеризується її взаємодія з довкіллям. Такий опис, зазвичай, виконується словесно.

На *другому етапі*, базуючись на реальному об'єкті, конкретизуємо процеси, які будемо досліджувати, а також формулюємо його властивості у термінах конкретної науки. Таким чином, будуємо механічну, фізичну, біологічну чи іншу модель, яку часто називають концептуальною моделлю. В процесі побудови такої моделі формулюємо гіпотези (постулати та наближення). В результаті приходимо до спрощеного опису поведінки реальної системи, враховуючи лише ті властивості, які є об'єктом нашого дослідження. У розглянутому вище прикладі наближення зводяться до лінійної залежності сил пружності пружини від її видовження, нехтування опором повітря, масою пружини та силою тертя між тілом та площиною, на якій воно коливається, а також до розгляду тіла як матеріальної точки.

На основі концептуальної моделі записуємо відповідні рівняння, тобто переносимо опис на площину формальної математичної мови і таким чином формулюємо математичну модель. Це складає *третій етап* математичного моделювання.

На *четвертому етапі* проводимо дослідження математичної моделі. Складається він з загального аналізу одержаних рівнянь та розв'язування відповідної математичної задачі (наприклад крайової задачі математичної фізики чи задачі Коші). На цьому етапі слід провести аналіз отриманого розв'язку, сформулювати висновки, що стосуються закономірностей поведінки розглядуваної системи, інтерпретувати одержані результати, а також провести порівняння одержаних результатів з відомими результатами, одержаними іншими методами, а також експериментальними результатами. Останню процедуру називають верифікацією моделі. У першу чергу при дослідженні моделі перевагу слід віддати аналітичним методам. Якщо ж закономірності розглядуваних процесів встановлено (на основі вивчення моделі для канонічних областей) важливого значення набуває опрацювання числових методів дослідження.

До представлених вище етапів можна додати ще етап комп'ютерної симуляції. Сьогодні, коли швидко зростають можливості комп'ютерної техніки, цей етап є важливим хоч би з точки зору подання одержаних результатів. Слід пам'ятати однак, що цей етап є тільки допоміжним і в його основі лежать попередньо опрацьовані та проаналізовані математичні моделі.

Представлені етапи моделювання тісно пов'язані між собою і один з них може суттєво впливати на інші. Якщо, наприклад, на четвертому етапі ми не можемо досягнути мети через обчислювальні труднощі, необхідно тоді спростити концептуальну або математичну модель.

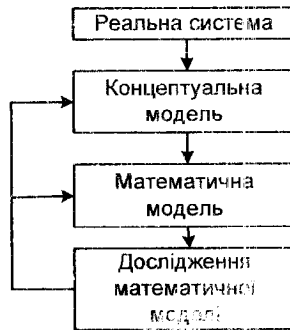
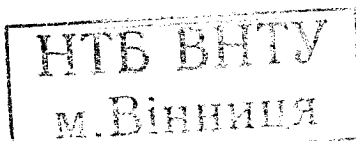


Рис. 1.1. Загальна схема математичного моделювання

Кожній реальній системі (об'єктові) можна поставити у відповідність значну кількість математичних моделей. Спричинено це, зазвичай, необхідністю вивчення різних його властивостей. Однак і при дослідженні тих самих властивостей можна використовувати різноманітні математичні моделі, наприклад лінійні та нелінійні, неперервні та дискретні, детерміновані й стохастичні. Порівняння результатів вивчення реальної системи, одержаних на основі різних моделей є важливим етапом дослідження. Таке порівняння дозволяє підтвердити вірогідність одержаних результатів, а також збагатити дослідження реальної системи.



Слід зазначити, що різні реальні об'єкти чи концептуальні моделі можуть мати одну і ту ж математичну модель. Відомо, що рівняння Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

в залежності від трактування функції φ , описує цілий ряд процесів у тому числі теплових, дифузійних, електричних. Струм j у електричному колі, що складається з опору R , індукційності L та конденсатора ємності C описують рівнянням

$$L \frac{d^2 j}{dt^2} + R \frac{dj}{dt} + \frac{1}{C} j = 0.$$

Таке ж рівняння

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

описує коливання вантажу масою m на горизонтальній площині, якщо врахувати силу тертя у наближенні лінійної залежності від швидкості.

1.3. Вимоги до математичних моделей

Можна сформулювати цілий ряд вимог до математичних моделей [108, 111]. Однак, на нашу думку, головними вимогами є *вірогідність* та *простота* моделі. Під вірогідністю, зазвичай, розуміють правильний якісний та кількісний опис реального об'єкту у моделі. Слід пам'ятати, що розглядають лише основні властивості, сформульовані на другому етапі моделювання. Тому можемо стверджувати, що кожна модель є вірогідною за певного наближення, а саме відносно вибраних властивостей і не описує (майже не описує) властивостей, які не були означені як основні на другому етапі моделювання. Так модель (1.1) не є вірогідною, якщо нас цікавить затухання коливань.

Якщо орієнтуватися виключно на вірогідність, то перевагу слід віддати складним, у тому числі нелінійним, моделям. Однак такі

моделі вимагають значних зусиль для їх дослідження, а часто одержання точних результатів є неможливим. Ці обставини можуть вимагати спрощення моделі на третьому етапі, або ж альтернативою є використання наближених методів розв'язування. Виникає питання, яким чином одержаний результат описує концептуальну модель. Відповідальним за це є верифікація моделі. Може виявитися, що неточність обчислень є настільки великою, що нелінійна модель описує явище (поведінку системи) гірше, ніж лінійна. Тому важливого значення набуває простота моделі та її продуктивність. Вимоги вірогідності та простоти зазвичай є суперечливими між собою. Тому можна ствердити, що ідеальної математичної моделі, навіть для вибраних властивостей, не існує.

Розділ 2.

ТЕРМОДИНАМІЧНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

У даному розділі обговорено термодинамічні методи математичного моделювання. Наведено загальний вигляд балансового рівняння і як часткові випадки сформульовано рівняння нерозривності, збереження ентропії, дифузійне рівняння, рівняння збереження заряду та енергії. Ці ж рівняння записано при нехтуванні конвективною складовою потоків. Представлено загальну схему формулювання визначальних співвідношень.

2.1. Підхід Ейлера та Лагранжа

Нижче зосередимо увагу на побудові математичних моделей деформівних твердих тіл з використанням методів термодинаміки нерівноважних процесів. Зумовлено це тим, що термодинаміка базується на балансових рівняннях, які можна застосовувати до опису різноманітних явищ і процесів, а тому можна її трактувати як методологію побудови математичних моделей механіки деформівного твердого тіла.

В процесі формулювання балансових рівнянь, які називають також рівняннями збереження, звичайно використовують підходи Ейлера та Лагранжа [109, 110]. Опис довільного руху (змін) проводять відносно деякої системи відліку – *системи координат*. Звичайно таку систему координат пов'язують з простором, у якому перебуває об'єкт дослідження. Далі таку систему координат будемо означати $\{0, x\}$, а координати – x_1, x_2, x_3 . Приймаємо, що проведено індивідуалізацію точок розглядуваного об'єкта, тобто введено координати, пов'язані з матеріальними точками об'єкта дослідження. Можна це зробити шляхом приписування матеріальним точкам координат простору, у яких вони перебували у початковий момент часу $\tau = 0$. Такі координати

будемо позначати ξ_i ($i=1, 2, 3$). Називають їх координатами Лагранжа або змінними Лагранжа.

Використовуючи підхід Лагранжа, виокремлюємо фізично малий елемент тіла і проводимо опис його руху (поведінки). Такий елемент повинен мати властивості досліджуваного тіла або відповідного середовища. Виділений фізично малий елемент у різні моменти часу перебуває в різних областях простору. Тому рівняння руху можна записати у вигляді

$$x_i = x_i(\{\xi_j\}, \tau) \quad i=1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Тут і далі $\{\varphi_j\}$ означає множину функцій для усіх значень індексу. У випадку, що розглядається, $\{\xi_j\}$ означає множину ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

При підході Ейлера спостереження відбувається за елементами середовища (тіла), які перебувають у виділеній області простору [110]. У цій області у різні моменти часу перебувають різні фізично малі елементи тіла. Тому рівняння руху має вигляд

$$\xi_i = \xi_i(\{x_j\}, \tau) \quad i=1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Зазначимо, що як у першому так і у другому підході можна використовувати як змінні Лагранжа, так і змінні Ейлера.

2.2. Загальна форма балансового рівняння

Рівняння балансу формулюємо для адитивних величин, тобто для величин, які безпосередньо залежать від маси чи об'єму розглядуваної системи. Означимо адитивну величину як F_V , тобто

$$F_V = \int_{(V)} \rho f dV \equiv \int_{(V)} F dV,$$

де ρ – густина середовища, поведінку якого описуємо; F і f відповідно питомі величини відносно одиничного об'єму та маси середовища. За підходу Лагранжа (V) є довільно виділеною підобластю тіла, яка змінюється з плином часу, тоді як за підходу Ейлера (V) є областю простору, що не змінюється з часом.

Закон збереження адитивної величини у довільно виділеній області (V), обмеженій поверхнею (∂V), стверджує, що зміна цієї величини може відбуватися винятково за рахунок потоку через поверхню (∂V) та її виробництва в області (V) [2, 58, 109], тобто

$$\frac{dF_V}{dt} = - \int_{(\partial V)} \vec{n} \cdot \vec{J}_F d\Sigma + \int_{(V)} \sigma_F dV, \quad (2.3)$$

де \vec{J}_F – вектор потоку адитивної величини через поверхню (∂V); σ_F – виробництво цієї величини в області (V); \vec{n} – одинична зовнішня до поверхні (∂V) нормаль; символом " \cdot " відзначено скалярний добуток, тому $\vec{n} \cdot \vec{J}_F$ є нормальною до поверхні (∂V) складовою вектора потоку \vec{J}_F . За додатній приймаємо потік, скерований до тіла, тому перед поверхневим інтегралом є знак мінус.

За підходу Лагранжа спостереження проводять за довільно виділеною областю тіла, яка у різні моменти часу займає різні області (V) евклідового простору. Тому область (V) є областю, яка змінюється з плином часу. Враховуючи залежність області від часу можна записати

$$\begin{aligned} \frac{dF_V}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho f dV = \int_{(V)} \left(\frac{d(\rho f)}{dt} + \rho f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) dV, \\ \frac{dF_V}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{(V)} F dV = \int_{(V)} \left(\frac{dF}{dt} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) dV, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де \vec{v} – вектор швидкості; $\vec{\nabla}$ – вектор-оператор Гамільтона.

Застосовуючи до поверхневого інтегралу формулу Гауса-Остроградського та враховуючи довільність області (V), з (2.4) одержуємо наступні рівняння збереження у локальній формі

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho f)}{dt} + \rho f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \sigma_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_f, \\ \frac{dF}{dt} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \sigma_F - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_F. \end{aligned} \quad (2.5)$$

За підходу Ейлера область (V) є областю простору, у якій перебувають різні підобласті тіла. Ця область не змінюється з часом. Позначаючи потік величини F через поверхню (∂V) як \vec{J}_F^e , а її виробництво як σ_F^e , одержуємо таку локальну форму балансового рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sigma_F^e - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_F^e. \quad (2.6)$$

Потік через нерухому поверхню простору має дві складові. Одна з них пов'язана з конвективним перенесенням величини разом з середовищем, тоді як друга є потоком відносно середовища. Тому

$$\vec{J}_F^e = \vec{v}F + \vec{J}_F.$$

Іноді в літературі опис процесів проводиться відносно початкової геометричної конфігурації. Вводячи у розгляд густину, вектор потоку та виробництво величини F відносно початкової геометричної конфігурації (відзначатимемо їх індексом „0”)

$$\{F, \sigma_F\} dV = \{F_0, \sigma_{F0}\} dV_0, \quad \vec{n} \cdot \vec{J}_F d\Sigma = \vec{n}_0 \cdot \vec{J}_{F0} d\Sigma_0,$$

де $dV_0, d\Sigma_0$ об'єм та площа поверхні розглядуваної фізично малої області тіла у початковий момент часу, балансове рівняння для величини F відносно початкової геометричної конфігурації записуємо у вигляді

$$\frac{d}{dt} \int_{(V_0)} F_{V0} dV_0 = - \int_{(\partial V_0)} \vec{n}_0 \cdot \vec{J}_{F0} d\Sigma_0 + \int_{(V_0)} \sigma_{F0} dV_0. \quad (2.7)$$

Враховуючи довільність розглядуваної області та використовуючи теорему Гауса-Остроградського [60], одержуємо

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \sigma_{F0} - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{F0}. \quad (2.8)$$

У наступному підрозділі записано рівняння, які часто використовують у науковій літературі. Рівняння ці можна одержати застосувавши загальну методику формулювання балансових рівнянь для конкретного процесу. Зараз запишемо їх як часткові випадки загальної форми рівнянь (2.5).

2.3. Приклади балансових рівнянь

Рівняння нерозривності. Приймаємо

$$f = 1, \quad \sigma_f = 0, \quad \vec{J}_f = 0.$$

Тоді з першого рівняння системи рівнянь (2.5) (далі будемо використовувати позначення використані у першому рівнянні системи (2.5)) одержуємо рівняння нерозривності у вигляді

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.9)$$

Враховуючи, що повна похідна за часом пов'язана з частковою похідною формулою

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla},$$

одержуємо наступний вигляд рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.10)$$

Рівняння (2.9), (2.10) часто називають рівняннями збереження маси (балансу маси).

Використовуючи (2.9), рівняння збереження адитивної величини, віднесеної до одиниці маси, перетворюємо до вигляду

$$\rho \frac{df}{dt} = \sigma_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_f. \quad (2.11)$$

Рівняння збереження ентропії. Приймаємо, що адитивною величиною є ентропія

$$f = s, \quad \sigma_f = \sigma_s, \quad \vec{J}_f = \vec{J}_s,$$

де s – густина ентропії; \vec{J}_s – вектор потоку ентропії; σ_s – виробництво ентропії. Тоді одержуємо рівняння збереження ентропії у вигляді

$$\frac{d(\rho s)}{dt} + \rho s \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sigma_s - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s$$

або

$$\rho \frac{ds}{dt} = \sigma_s - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s. \quad (2.12)$$

Згідно з другим законом термодинаміки виробництво ентропії у кожній точці для довільного моменту часу є невід'ємним

$$\sigma_s \geq 0.$$

Ці положення покладають в основу формулювання кінетичних рівнянь.

Дифузійне рівняння. Приймаємо, що

$$f = c_k, \quad \sigma_f = \sigma_m^k, \quad \vec{J}_f = \vec{J}_m^k,$$

де $c_k \equiv \rho_k / \rho$ – концентрація k -ої компоненти; $\rho = \sum_k \rho_k$ – густина континууму центрів мас ($k = 1 - N$, N – кількість компонент, що утворюють твердий розчин); \vec{J}_m^k – вектор потоку маси k -ої компоненти; σ_m^k – виробництво маси k -ої компоненти.

Тоді з (2.5), (2.11) одержуємо дифузійне рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_k}{dt} + \rho_k \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \sigma_m^k - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m^k, \\ \rho \frac{dc_k}{dt} &= \sigma_m^k - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m^k. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Такі рівняння широко використовують при описі процесів типу хімічних реакцій. У випадку, коли обмін масою між розглядуваними підсистемами твердого розчину відсутній, а також відсутні зовнішні джерела маси, необхідно прийняти

$$\sigma_m^k = 0, \quad k = 1 - N.$$

Зазвичай в літературі при дослідженні дифузійних процесів використовують друге рівняння системи (2.13), яке записано на величини, віднесені до одиниці маси. Перше ж рівняння цієї системи рівнянь записано на величин віднесених до одиниці об'єму. Використання величин віднесених до одиниці маси є вигідним тоді, коли тіло є

однорідним і густина континууму центрів мас ρ не залежить від координат.

Рівняння збереження заряду. Приймаємо, що

$$f = \omega, \quad \sigma_f = \sigma_\omega, \quad \vec{J}_f = \vec{J}_\omega,$$

де ω – густина електричного заряду; \vec{J}_ω – вектор потоку заряду; σ_ω – виробництво заряду.

Тоді з (2.5), (2.11) одержуємо рівняння збереження електричного заряду у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho\omega)}{dt} + \rho\omega\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \sigma_\omega - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\omega, \\ \rho \frac{d\omega}{dt} &= \sigma_\omega - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\omega. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Рівняння збереження енергії. Приймаємо, що

$$f = u, \quad \sigma_f = \sigma_u, \quad \vec{J}_f = \vec{J}_u,$$

де u – густина енергії; \vec{J}_u – вектор потоку енергії; σ_u – виробництво енергії.

Тоді на основі (2.5), (2.11) записуємо рівняння збереження енергії у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho u)}{dt} + \rho u \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \sigma_u - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_u, \\ \rho \frac{du}{dt} &= \sigma_u - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_u. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для термодинамічно замкнутих систем, які не взаємодіють із зовнішнім середовищем необхідно прийняти, що зовнішні джерела енергії відсутні, тобто $\sigma_u = 0$.

Записані вище балансові рівняння є нелінійними за рахунок нелінійності конвективної складової похідної за часом. У науковій літературі широко використовуються лінеаризовані системи рівнянь. Як було зазначено вище, пов'язано це з простішими методами їх

розв'язування та аналізу. Запишемо рівняння збереження, представлені вище, для випадку, коли нехтується конвективними складовими потоків та похідної за часом для величин віднесених до одиниці маси та одиниці об'єму. Такі рівняння широко використовують у механіці деформівного твердого тіла за лінійного наближення.

Рівняння нерозривності.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0. \quad (2.16)$$

Дане рівняння є базовим в класичних теоріях механіки деформівного твердого тіла.

Рівняння збереження адитивної величини

$$\rho \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial(\rho f)}{\partial \tau} = \sigma_f - \bar{\nabla} \cdot \bar{J}_f. \quad (2.17)$$

Для питомої величини, віднесеної до одиниці об'єму F , одержуємо

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \sigma_F - \bar{\nabla} \cdot \bar{J}_F. \quad (2.18)$$

Зазначимо також, що рівняння вигляду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \psi(\varphi, \tau),$$

де ψ є відомою функцією, називають еволюційним рівнянням величини φ .

Рівняння збереження ентропії.

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial s}{\partial \tau} &= \sigma_s - \bar{\nabla} \cdot \bar{J}_s, \\ \frac{\partial S}{\partial \tau} &= \sigma_S - \bar{\nabla} \cdot \bar{J}_S, \end{aligned} \quad (2.19)$$

де $S = \rho s$.

Дифузійне рівняння.

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial \tau} = \sigma_\rho^k - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\rho^k$$

або

$$\frac{\partial c_k}{\partial \tau} = \sigma_c^k - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c^k. \quad (2.20)$$

Рівняння збереження заряду.

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \sigma_\omega - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\omega,$$

або

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = \sigma_\Omega - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\Omega. \quad (2.21)$$

де $\Omega = \rho\omega$.**Рівняння збереження енергії.**

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} = \sigma_u - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_u,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \sigma_U - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_U. \quad (2.22)$$

У рівняннях збереження, записаних для питомих величин відносно одиниці об'єму, змінено індекс у виробництві та векторі потоку.

В одне балансове рівняння входять три невідомі величини, а саме: адитивний параметр, вектор потоку та виробництво. Це означає, що при описі процесу до балансових рівнянь необхідно додати інші рівняння. Цими рівняннями є визначальні рівняння.

2.4. Загальна схема формулювання визначальних співвідношень

В процесі побудови математичної моделі з використанням термодинамічних методів [1, 2, 50, 67, 110] потрібно записати рівняння збере-

ження для кожного з розглядуваних процесів, а також рівняння збереження сумарної енергії. До рівнянь збереження необхідно додати відповідні визначальні співвідношення. Під визначальними співвідношеннями зазвичай розуміють рівняння стану та кінетичні рівняння. Перші з них пов'язують базові та спряжені параметри стану, тоді як другі є співвідношеннями, що пов'язують термодинамічні потоки і сили. Приймається при цьому, що причиною виникнення та існування термодинамічних потоків є термодинамічні сили [33, 52].

У загальній схемі формулювання визначальних співвідношень виокремлюють наступні етапи:

- Формулювання рівняння балансу повної енергії. Слід пам'ятати, що потік енергії повинен враховувати усі форми зміни енергії.
- Формулювання рівняння балансу для кожної з форм руху, розглядуваних у рамках моделі.
- Врахування у рівнянні балансу повної енергії балансових рівнянь кожної з форм руху.
- Означення (постулювання) простору базових параметрів стану та термодинамічних потоків.
- Формулювання визначальних співвідношень.

Зазначимо, що постулювання простору базових параметрів стану та загальної форми залежності спряжених параметрів стану від базових, а також термодинамічних потоків від сил у літературі часто називають принципом макроскопічного детермінізму.

Розділ 3.

ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНИЙ ПІДХІД У ТЕРМОМЕХАНІЦІ. БАЗОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ

У даному розділі представлено підхід до формулювання основних співвідношень, що описують взаємозв'язані механічні, теплові та дифузійні процеси у деформівних твердих тілах із врахуванням структурної неоднорідності. Розділ базується на роботах [9-11, 18, 21, 42, 69, 76, 78, 82, 83, 124, 118, 141].

3.1. Балансові рівняння

Розглянемо деформівне тверде тіло (область (V) евклідового простору обмежена поверхнею (∂V)), що перебуває в умовах тепломасообміну з оточенням. За базові процеси у тілі приймаємо механічні, теплові та дифузійні процеси.

За вихідне положення, як зазначено у попередньому розділі, приймаємо рівняння балансу повної енергії. Вважаємо, що повну енергію E можна подати у вигляді суми внутрішньої U та кінетичної K енергій

$$E = U + K. \quad (3.1)$$

Енергію K далі будемо називати також енергією руху.

Рівняння балансу енергії E , записане при нехтуванні конвективною складовою потоку та похідної за часом (таке наближення приймаємо далі) у локальній формі, має вигляд

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{v} - T\vec{j}_s - H\vec{j}_m), \quad (3.2)$$

де $\hat{\sigma}$ – тензор напружень Коші; \vec{j}_m – вектор потоку маси; T, H – абсолютна температура та хімічний потенціал. При розгляді твердих

розчинів під $H\vec{j}_m$ слід розуміти суму $\sum_i H^{(i)}\vec{j}_m^{(i)}$ по усіх складових твердого розчину.

Порівнюючи дане рівняння із співвідношенням (2.5) можна ствердити, що у даному випадку

$$\vec{J}_F = -(\hat{\sigma} \cdot \vec{v} - T\vec{j}_s - H\vec{j}_m), \quad \sigma_F = 0.$$

Поряд з балансовим рівнянням (3.2) повинні справджуватися балансові рівняння для відповідних форм руху. У даному випадку це рівняння балансу імпульсу, ентропії та маси, які для прийнятого вище наближення мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} &= \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}, \\ \frac{\partial S}{\partial \tau} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s + \sigma_s, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де \vec{k}_v – імпульс механічного поступального руху. Зазначимо також, що при розгляді твердих розчинів рівняння балансу маси записуємо для кожної з компонент цього розчину, а також, що згідно з другим законом термодинаміки виробництво ентропії є невід’ємним у кожній точці у кожен момент часу ($\sigma_s \geq 0$) [33, 52].

Використовуючи співвідношення (3.3), рівняння балансу повної енергії перетворюємо до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial \tau} &= \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} + \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + H \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + T \frac{\partial S}{\partial \tau} - \\ &- T\sigma_s - \vec{j}_s \cdot \vec{\nabla} T - \vec{j}_m \cdot \vec{\nabla} H, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де \hat{e} – тензор деформації.

У даному розділі для приросту кінетичної енергії dK приймемо відоме у літературі подання у вигляді скалярного добутку вектора швидкості \vec{v} та приросту вектора імпульсу $d\vec{k}_v$

$$dK = \vec{v} \cdot d\vec{k}_v. \quad (3.5)$$

Залежність енергії руху K від імпульсів інших форм руху буде розглянуто у розділі 9 при побудові узагальнених моделей термомеханіки.

Використовуючи подання (3.5), рівняння балансу повної енергії перетворюємо до вигляду

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + H \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + T \frac{\partial S}{\partial \tau} - T \sigma_s - \vec{j}_s \cdot \vec{\nabla} T - \vec{j}_m \cdot \vec{\nabla} H. \quad (3.6)$$

Дане рівняння в літературі часто називають рівнянням балансу внутрішньої енергії хоч не має воно вигляду балансового рівняння. Рівняння (3.6) є базовим при формулюванні визначальних співвідношень моделі.

3.2. Визначальні співвідношення

Наступним кроком є конкретизація просторів, у яких визначені питома внутрішня енергія U та термодинамічні потоки \vec{j}_s, \vec{j}_m . В рамках класичної моделі термопружного твердого тіла (твердого розчину) приймають

$$U = U(S, \rho, \hat{e}),$$

$$\vec{j}_i = \vec{j}_i(-\vec{\nabla} T, -\vec{\nabla} H; U), \quad i = \{s, m\}. \quad (3.7)$$

Останнє рівняння відображає той факт, що причиною виникнення термодинамічних потоків \vec{j}_s, \vec{j}_m є сили, за які у даному випадку прийнято

$$\vec{F}_T \equiv -\vec{\nabla} T, \quad \vec{F}_H \equiv -\vec{\nabla} H.$$

Параметрична залежність потоків \vec{j}_s, \vec{j}_m від внутрішньої енергії U вказує на те, що нерівноважні процеси розглядаються на базі відповідного стану. Тому співвідношення (3.7) повинні підпорядковуватися умові

$$\vec{j}_i(0, 0; U) = 0, \quad i = \{s, m\}. \quad (3.8)$$

Оскільки одним з параметрів стану є температура, то за сили часто приймають

$$\vec{F}_T \equiv -\frac{\vec{\nabla}T}{T}, \quad \vec{F}_H \equiv -\frac{\vec{\nabla}H}{T}.$$

Більш загальним порівняно з (3.7) випадком є постулювання, що залежність між термодинамічними потоками \vec{j}_s, \vec{j}_m та термодинамічними силами є функціональною [51, 56, 57, 62, 106]

$$\vec{j}_i(\tau) = \mathbf{J}_i \left(\begin{matrix} \tau \\ \zeta=0 \end{matrix} \right) (-\vec{\nabla}T(\tau), -\vec{\nabla}H(\tau), -\vec{\nabla}T(\zeta), -\vec{\nabla}H(\zeta); U), \quad i = \{s, m\}, \quad (3.9)$$

де $\mathbf{J}_i = \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \zeta=0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \zeta=0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \zeta=0 \end{matrix} \right\}$ – функціонали, що перетворюють актуальні значення сил $\vec{F}_T(\tau), \vec{F}_H(\tau)$ та їх історії $\vec{F}_T(\zeta), \vec{F}_H(\zeta)$ ($0 \leq \zeta < \tau$) на актуальні значення відповідних потоків.

Для ізотропних тіл, у випадку лінійної залежності між термодинамічними потоками та силами, можна записати

$$\vec{j}_i(\tau) = G_{is} * \vec{F}_T + G_{im} * \vec{F}_H, \quad (3.10)$$

де

$$G_{ij} * \varphi \equiv \int_0^\tau G_{ij}(\tau, \zeta) \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta, \quad i, j \equiv \{s, m\}, \quad (3.11)$$

$G_{ij}(\tau, \zeta)$ – функції впливу.

Відомо, що вибором функції впливу у згортці Стільт'єса (3.11) можна конкретизувати вигляд залежності, у даному випадку термодинамічних потоків від сил. Так, врахування залежності функції впливу від змінної інтегрування приводить до врахування залежності від історії; не врахування такої залежності перетворює функціональну залежність у функційну; якщо ж функція впливу є пропорційною до дельта-функції різницевого аргументу, то у такому випадку говорять про незатухаючу пам'ять про деяку подію у початковий момент часу.

Якщо для функцій впливу $G_{ij}(\tau, \zeta)$, у випадку одноконтинуумного твердого тіла, прийняти подання

$$\begin{aligned} G_{mm}(\tau, \zeta) &= -g_{mm} \delta(\tau - \zeta), & G_{ss}(\tau, \zeta) &= g_{ss}(\tau, \zeta) = g_{ss}(\tau, 0), \\ G_{ms}(\tau, \zeta) &= G_{sm}(\tau, \zeta) = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

то для термодинамічних потоків \vec{j}_s, \vec{j}_m одержуємо

$$\vec{j}_s = -g_{ss} \vec{\nabla} T, \quad \vec{j}_m = g_{n,m} \frac{\partial(\vec{\nabla} H)}{\partial \tau}. \quad (3.13)$$

Таке подання для функції впливу $G_{mm}(\tau, \zeta)$ відповідає врахуванню структури (мікроструктури) матеріалу, яка виникає у початковий момент часу. Ілюстрація цього наведена у наступному підрозділі, а також у сьомому розділі.

Як згадувалось раніше, коефіцієнти у формулах (3.13) можуть залежати від параметрів стану. Тому для узгодженості (3.13) з класичною теорією теплопровідності для \vec{j}_s приймаємо

$$\vec{j}_s = -\lambda_{ss} \frac{\vec{\nabla} T}{T}, \quad (3.14)$$

де

$$\lambda_{ss} = g_{ss} T.$$

Подання (3.10), (3.12) змінює рівняння балансу маси до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho + g_{mm} \nabla^2 H) = 0 \quad (3.15)$$

та вимагає введення до повної енергії доданку

$$\frac{1}{2} g_{mm} \vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} H.$$

Тут прийнято, що коефіцієнти λ_{ss}, g_{mm} є сталими.

Оскільки повна енергія є сумою внутрішньої та кінетичної енергії, тому природно цей доданок відносити до внутрішньої енергії. Будемо позначати його далі U' . Зазначимо також, що для виробництва ентропії на основі (3.14) одержуємо

$$\sigma_s = -\vec{j}_s \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T} = \lambda_{ss} \frac{\vec{\nabla} T}{T} \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T}. \quad (3.16)$$

В рамках моделі класичного однокомпонентного термопружного твердого тіла рівняння Гіббса для внутрішньої енергії U має вигляд

$$dU = T dS + \hat{\sigma} : d\hat{e}$$

(враховано рівняння балансу маси для класичної моделі термопруж-ного тіла), а простором визначення внутрішньої енергії є ентропія S та тензор деформації $\hat{\epsilon}$

$$U = U(S, \hat{\epsilon}). \quad (3.17)$$

У випадку, що розглядається, простором визначення внутрішньої енергії є ентропія S , густина ρ , тензор деформації $\hat{\epsilon}$ та градієнт хімічного потенціалу $\vec{\nabla}H$, а для її приросту маємо наступне рівняння

$$dU = T dS + H d\rho + \hat{\sigma} : d\hat{\epsilon} + dU'. \quad (3.18)$$

На основі аналізу (3.18) можна ствердити, що хімічний потенціал є енергією, яку потрібно затратити для того щоб перенести мислено виділену матеріальну точку з нескінченності у розглядувану точку тіла (у загальному – щоб змінити густину на одиницю). Якщо врахувати, що матеріальна точка на нескінченності за межами тіла є вільною, а у тілі вона зв'язана і разом з іншими утворює скелет тіла, то можна стверджувати, що збурення хімічного потенціалу, відносно значення цього потенціалу у безмежному вільному від зовнішнього навантаження середовищі, дорівнює збуренню енергії зв'язку.

Для термодинамічного потенціалу U рівняння, що пов'язують базові параметри стану $S, \rho, \hat{\epsilon}$ зі спряженими $T, H, \hat{\sigma}$, мають вигляд

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad H = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \hat{\epsilon}}. \quad (3.19)$$

Якщо за термодинамічний потенціал вибрати енергію F , яка пов'язана з внутрішньою енергією U співвідношенням Лежандра¹ [50, 67]

¹ Нехай потенціальну функцію Ψ означено в просторі параметрів $\{y^j\}$, а її приріст описується формулою

$$d\Psi = x_j dy^j,$$

у якій за індексом, що повторюється проводиться підсумовування від 1 до N .

Перетворення, яке вводить іншу потенціальну функцію Φ

$$\Phi = \Psi - x_1 y^1,$$

означену в іншому в порівнянні з Ψ , просторі параметрів

$$\Phi = \Phi(x_1, \{y^j\}), \quad j = 2 - N$$

називаємо перетворенням Лежандра. Для приросту $d\Phi$ одержуємо

$$F = U - TS - H\rho, \quad (3.20)$$

то рівняння для приросту dF має вигляд

$$dF = -S dT - \rho dH + \hat{\sigma} : \hat{e} + dU'. \quad (3.21)$$

Енергія F означена у просторі температури T , хімічного потенціалу H , тензора деформації \hat{e} та градієнта хімічного потенціалу $\vec{\nabla}H$

$$F = F(T, H, \hat{e}, \vec{\nabla}H). \quad (3.22)$$

Параметрами спряженими до T , H , \hat{e} відповідно є $S, \rho, \hat{\sigma}$.

Рівняння стану для потенціалу F мають вигляд

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad \rho = -\frac{\partial F}{\partial H}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \hat{e}}. \quad (3.23)$$

Оскільки вільна енергія залежить від градієнта хімічного потенціалу, то модель допускає існування у рівноважному стані локальної неоднорідності розглядуваних полів. Це узгоджується з базовими положеннями теорії поверхневих явищ про те, що густина (хімічний потенціал – енергія зв'язку) у рівноважному стані для тіла скінчених розмірів змінюються при відході від поверхні у глибину тіла.

Дальша конкретизація моделі пов'язана з конкретизацією визначальних співвідношень та початкового стану тіла. За початковий стан тіла приймемо стан однорідного ізотропного середовища вільного від силового навантаження з параметрами

$$T = T_*, \quad S = S_*, \quad H = H_*, \quad \rho = \rho_*, \quad \hat{e} = 0, \quad \hat{\sigma} = 0.$$

Приймемо енергію F квадратичною функцією у просторі збурень базових параметрів стану

$$\theta = T - T_*, \quad \eta = H - H_*, \quad \hat{e} = \hat{e} - 0, \quad (3.24)$$

тобто

$$F = F_* - S_*\theta - \rho_*\eta + \frac{1}{2}a_{ee}e^2 + \alpha_{ee}\hat{e} : \hat{e} + a_{eT}e\theta +$$

$$d\Phi = -y^j dx_j + x_j y^j, \quad j = 2 - N.$$

Перетворення Лежандра широко використовується в термодинаміці необоротних процесів для зміни базових параметрів стану.

$$+ a_{em}e\eta + a_{mt}\eta\theta + \frac{1}{2}a_{mm}\eta^2 + \frac{1}{2}a_{tt}\theta^2 - \frac{1}{2}g_{mn}\bar{\nabla}\eta \cdot \bar{\nabla}\eta, \quad (3.25)$$

де a_{ij}, α_{ee} – характеристики матеріалу $i, j = \{e, m, t\}$; $e = \hat{e} : \hat{I}$, \hat{I} – одиничний тензор.

Враховуючи подання (3.25) в (3.23), одержуємо явний вигляд рівнянь стану для $S, \rho, \hat{\sigma}$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 2\alpha_{ee}\hat{e} + (a_{ee}e + a_{et}\theta + a_{em}\eta)\hat{I}, \\ s &\equiv S - S_* = -a_{et}e - a_{tt}\theta - a_{mt}\eta, \\ \rho - \rho_* &= -a_{em}e - a_{mt}\theta - a_{mm}\eta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Сформульована вище система рівнянь, яка складається з рівнянь балансу імпульсу та ентропії (перше та друге рівняння системи (3.3)), балансу маси (3.15), виразу для виробництва ентропії (3.16) разом з рівняннями стану (3.26), формулою для імпульсу механічного поступального руху

$$\vec{k}_v = \rho \vec{v}, \quad (3.27)$$

а також співвідношенням Коші для тензора деформації

$$\hat{e} = \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla} \otimes \vec{u} + (\bar{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right] \quad (3.28)$$

складають повну систему рівнянь моделі термопружного тіла із врахуванням енергії зв'язку. Тут \vec{u} – вектор переміщення, \otimes – символ діадного добутку, індексом "T" відзначено транспонування.

В рамках лінеаризованого наближення, яке часто приймається при дослідженні термопружних процесів, слід лінеаризувати імпульс механічного поступального руху, тобто прийняти його у вигляді

$$\vec{k}_v = \rho_* \vec{v}, \quad (3.29)$$

та лінеаризувати рівняння балансу ентропії, яке, враховуючи вираз для виробництва ентропії, записуємо у вигляді

$$T_* \frac{\partial s}{\partial \tau} = \lambda_{ss} \nabla^2 T. \quad (3.30)$$

3.3. Локальна градієнтність та структурна неоднорідність

Як згадувалось вище, локальна градієнтність у модельному описі пов'язана із врахуванням незатухаючої пам'яті про деяку подію у початковий момент часу. З метою конкретизації цієї події зупинимось детальніше на другому визначальному співвідношенні системи (3.23). Є очевидним, що похідну енергії F по H необхідно трактувати як похідну по параметру стану H при постійних решті параметрів стану, зокрема при постійній температурі та деформації. Виникає природне питання: яким чином може змінюватися густина довільно виокремленого фізично малого елемента, якщо його температура та деформація не змінюються. З іншого боку густина є властивістю матеріалу, тобто величиною, значення якої приписується матеріалу і її величина наводиться у довідниках. Тому важко уявити, яким чином даному матеріалу можна приписати різні густини. Для пояснення цього, а одночасно для конкретизації події, яка мала місце у початковий момент часу зупинимось детальніше на довільно виділеному фізично малому елементі (рис. 3.1). Цьому елементу в термомеханіці приписують значення температури T та деформації $\hat{\epsilon}$, які можуть змінюватися при переході до іншого елемента. Густина ж в класичній термомеханіці, зазвичай, приймається такою ж для усіх фізично малих елементів.

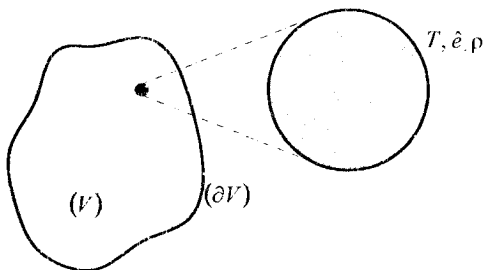


Рис. 3.1. Фізично малий елемент термомеханічного тіла

Уявімо собі, що в початковий момент часу у тілі виникла структура, наприклад пори чи включення іншого матеріалу. Довільно виділені фізично малі елементи у цих випадках схематично можна

зобразити як на рисунку 3.2 об'єктами *a)* і *b)*. За одноконтинуумного підходу ми проводимо осереднення і приходимо до однорідного фізично малого елемента.

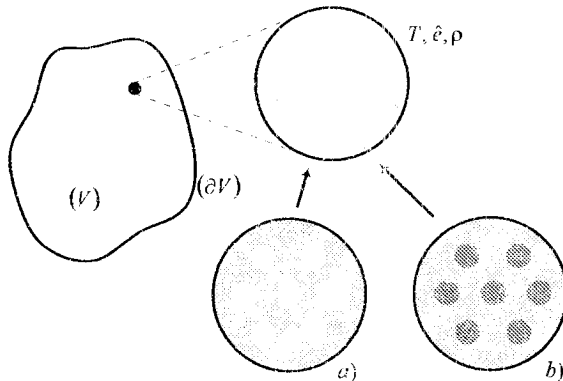


Рис. 3.2. Фізично малий елемент термопружного тіла із врахуванням структури

У цьому випадку можна стверджувати, що як і температура та деформація, так і густина можуть змінюватися при переході від одного локального елемента до іншого.

3.4. Постановка крайових задач

При розв'язуванні конкретних задач математичної фізики до сформульованої системи рівнянь необхідно приєднати відповідні початкові та граничні умови. Оскільки за початковий стан розглядуваного тіла прийнято стан безмежного однорідного вільного від силового навантаження середовища, матеріал якого є ідентичним матеріалу тіла, то початковими умовами є

$$\begin{aligned} \vec{u} = 0, \quad \vec{v} = 0, \quad \hat{\sigma} = 0, \quad \hat{\epsilon} = 0, \quad \theta = 0, \\ s = 0, \quad \eta = 0, \quad \rho = \rho_*, \quad \text{при } \tau = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Якщо умови (3.31) використати у (3.15) та врахувати, що початковий стан є однорідним, то рівняння балансу маси можна проінтегрувати за часом. Тоді воно набуває вигляду

$$\rho + g_{mm} \nabla^2 \eta = \rho_*. \quad (3.32)$$

Якщо на частині (∂V_σ) поверхні тіла (∂V) задано вектор зусиль $\vec{\sigma}_a$, а на частині (∂V_u) цієї поверхні – вектор переміщення \vec{u}_a , то відповідні граничні умови мають вигляд [59, 96]

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} &= \vec{\sigma}_a \quad \text{на поверхні } (\partial V_\sigma), \\ \vec{u} &= \vec{u}_a \quad \text{на поверхні } (\partial V_u). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Тут $(\partial V_\sigma) \cup (\partial V_u) = (\partial V)$.

Для теплових процесів прийємо граничні умови першого, другого чи третього роду задачі теплопровідності, коли на частинах поверхні тіла (∂V) задано температуру, перпендикулярну до поверхні складову теплового потоку чи конвективний теплообмін [64, 104]

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_a \quad \text{на поверхні } (\partial V_t), \\ \vec{n} \cdot \vec{j}_q &= j_a \quad \text{на поверхні } (\partial V_j), \\ \vec{n} \cdot \vec{j}_q - B_q(\theta - \theta_a) &= 0 \quad \text{на поверхні } (\partial V_q), \end{aligned} \quad (3.34)$$

де \vec{j}_q – вектор теплового потоку, який пов'язаний з вектором потоку ентропії співвідношенням $\vec{j}_q = T \vec{j}_s$; B_q – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні тіла; $\theta_a = T_a - T_*$, $(\partial V_t) \cup (\partial V_j) \cup (\partial V_q) = (\partial V)$.

Для густини та хімічного потенціалу прийємо умови першого роду

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_a \quad \text{на поверхні } (\partial V_\eta), \\ \rho &= \rho_a \quad \text{на поверхні } (\partial V_\rho), \end{aligned} \quad (3.35)$$

де

$$\eta_a = H_a - H_*, \quad (\partial V_\eta) \cup (\partial V_\rho) = (\partial V).$$

Останні умови відображають той факт, що у безмежному однорідному ізотропному середовищі кожна точка зазнає однакової дії оточення в

кожному з напрямків. На поверхні ж тіла точки перебувають під дією внутрішніх областей тіла, в той час як дія зі сторони навколишнього середовища ("вакууму") відсутня, тому $H_a \neq H_*$ і як наслідок $\eta_a \neq 0$. У даній монографії використовується гранична умова на хімічний потенціал η . Фізичне обґрунтування граничної умови на густину та відмінності закономірностей приповерхневої неоднорідності порівняно з використанням граничної умови на η наведено у роботах [5, 71-73, 89].

Якщо розглядуване тіло контактує з іншим тілом по поверхні $(\partial V') \subset (\partial V)$, то умови спряження термомеханічних полів на цій поверхні (умови ідеального термомеханічного контакту) приймемо у вигляді

$$\begin{aligned} n \cdot \hat{\sigma}^{(1)} &= n \cdot \hat{\sigma}^{(2)}, & \bar{u}^{(1)} &= \bar{u}^{(2)}, \\ \theta^{(1)} + T_*^{(1)} &= \theta^{(2)} + T_*^{(2)}, & \bar{n}^{(1)} \cdot \bar{j}_q^{(1)} &= \bar{n}^{(2)} \cdot \bar{j}_q^{(2)}, \\ \eta^{(1)} + H_*^{(1)} &= \eta^{(2)} + H_*^{(2)}, & g_{mm}^{(1)} \bar{n}^{(1)} \cdot \bar{\nabla} \eta^{(1)} &= g_{mm}^{(2)} \bar{n}^{(2)} \cdot \bar{\nabla} \eta^{(2)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

де "1,2" – символи, що вказують на поля та одиничні зовнішні нормалі до поверхні у першому та другому контактуючому тілах.

У випадку необмежених тіл граничні умови необхідно доповнити умовами обмеженості термомеханічних полів на безмежності в області тіла.

Якщо граничні умови задано в напруженнях, то за розв'язуючу функцію замість вектора переміщення \bar{u} вигідно вибрати тензор напруження $\hat{\sigma}$. У цьому випадку до рівняння руху необхідно приєднати умову сумісності деформації [96, 110]

$$\text{Ink} \hat{\epsilon} \equiv \bar{\nabla} \times \hat{\epsilon} \times \bar{\nabla} = 0, \quad (3.37)$$

у якій $\bar{\nabla} \times \hat{\epsilon} \times \bar{\nabla}$ слід розуміти як $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \hat{\epsilon})^T$.

Приймаючи за ключові функції вектор переміщення \bar{u} , збурення температури θ та хімічного потенціалу η , ключову лінеаризовану систему рівнянь моделі записуємо у вигляді

$$\alpha_{ee} \mathbf{V}^2 \bar{u} + (\alpha_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + a_{e\theta} \bar{\nabla} \theta + a_{e\eta} \bar{\nabla} \eta = \rho_* \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (a_{ii} T_* \theta + a_{ei} T_* \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + a_{mi} T_* \eta) + \lambda_{ss} \nabla^2 \theta = 0,$$

$$g_{mm} \nabla^2 \eta - a_{mm} \eta - a_{mi} \theta - a_{em} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0. \quad (3.38)$$

На основі системи рівнянь (3.38) можна формулювати різні типи задач локально градієнтної термомеханіки, такі як: зв'язана динамічна, зв'язана квазістатична, незв'язана динамічна, незв'язана квазістатична та інші.

Якщо знехтувати інерційністю механічних процесів, то з (3.38) одержуємо систему рівнянь квазістатичної термопружності із врахуванням енергії зв'язку

$$\alpha_{ee} \nabla^2 \bar{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + a_{ei} \bar{\nabla} \theta + a_{em} \bar{\nabla} \eta = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (a_{ii} T_* \theta + a_{ei} T_* \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + a_{mi} T_* \eta) + \lambda_{ss} \nabla^2 \theta = 0,$$

$$g_{mm} \nabla^2 \eta - a_{mm} \eta - a_{mi} \theta - a_{em} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0. \quad (3.39)$$

Якщо у квазістатичному наближенні за ключові функції вибрати тензор напружень $\hat{\sigma}$, збурення температури θ та хімічного потенціалу η , то розв'язуюча система рівнянь моделі має вигляд

$$\bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad \bar{\nabla} \times \left\{ \hat{\sigma} - \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} [a_{ee} \sigma + 2\alpha_{ee} (a_{ei} \theta + a_{em} \eta)] \hat{I} \right\} \times \bar{\nabla} = 0,$$

$$\nabla^2 \eta - \kappa_{\eta}^2 \eta - \kappa_{\theta}^2 \theta - \kappa_{\sigma}^2 \sigma = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (c_v^* \theta + \alpha_{ie}^* T_* \sigma + \alpha_{mi}^* T_* \eta) + \lambda_{ss} \nabla^2 \theta = 0, \quad (3.40)$$

де $\sigma = \hat{\sigma} : \hat{I}$, \hat{I} – одиничний тензор,

$$\kappa_{\eta}^2 = \frac{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})a_{mm} - 3\alpha_{em}^2}{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})g_{mm}}, \quad \kappa_{\theta}^2 = \frac{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})a_{mi} - 3a_{ei}a_{em}}{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})g_{mm}},$$

$$\kappa_{\sigma}^2 = \frac{a_{em}}{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})g_{mm}}, \quad c_v^* = T_* \left(a_{ii} - \frac{3a_{ei}^2}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \right),$$

$$\alpha_{ie}^* = \frac{a_{ei}}{3\alpha_{ee} + 2\alpha_{ee}}, \quad \alpha_{mi}^* = a_{mi} - \frac{3a_{ei}a_{em}}{3\alpha_{ee} + 2\alpha_{ee}}.$$

Аналіз систем рівнянь (3.39), (3.40) показує, що врахування структурної неоднорідності в межах розглядуваної моделі приводить до зміни закономірності поширення тепла порівняно з класичною моделлю термопружного тіла. Дане положення узгоджується з результатами представленими в [112, 134]. У рівноважному ж стані розподіл температури не залежить від хімічного потенціалу і є таким же як у класичній термопружності.

При нехтуванні впливом напружень на температуру та хімічний потенціал, останні визначасмо із взаємозв'язаної системи рівнянь

$$\nabla^2 \eta - \kappa_\eta^2 \eta - \kappa_\theta^2 \theta = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (c_v^* \theta + \alpha_{mi}^* T^* \eta) + \lambda_{ss} \nabla^2 \theta = 0. \quad (3.41)$$

При відомих θ і η вектор переміщення та компоненти тензора напружень визначасмо з першого рівняння системи (3.39) та першого і другого рівнянь системи (3.40). За такого наближення

$$\kappa_\eta^2 = \frac{a_{mm}}{g_{mm}}, \quad \kappa_\theta^2 = \frac{a_{mi}}{g_{mm}}, \quad c_v^* = T_v \alpha_{ii}, \quad \alpha_{mi}^* = a_{mi}.$$

Якщо ж нас цікавить винятково стаціонарний стан, то в системі рівнянь (3.38) необхідно покласти рівними нулю похідні за часом. В результаті одержуємо

$$\alpha_{ee} \nabla^2 \vec{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee}) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{ei} \vec{\nabla} \theta + a_{em} \vec{\nabla} \eta = 0,$$

$$g_{mm} \nabla^2 \eta - a_{mm} \eta - a_{mi} \theta - a_{em} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0,$$

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (3.42)$$

3.5. Локально градієнтний підхід та нелокальні теорії

В теорії деформівного твердого тіла широко використовують моделі, у яких залежність між тензорами напружень та деформацій є нелокальною. Базуючись на приведених вище співвідношеннях, запишемо визначальне рівняння для тензора напружень, якщо виключити з розгляду хімічний потенціал. За ізотермічного наближення рівняння стану для тензора напружень та рівняння балансу маси, відповідно до (3.26), (3.32), мають вигляд

$$\hat{\sigma} = 2\alpha_{ee}\hat{e} + (a_{ee}e + a_{em}\eta)\hat{I},$$

$$\nabla^2\eta - \kappa_m^2\eta - \kappa_e^2e = 0,$$

де

$$\kappa_m^2 = \frac{a_{mm}}{g_{mm}}, \quad \kappa_e^2 = \frac{a_{em}}{g_{mm}}.$$

Виключивши з них хімічний потенціал, одержуємо диференціальне співвідношення, яке пов'язує тензори напруження та деформації

$$(\nabla^2 - \kappa_m^2)\hat{\sigma} = 2\alpha_{ee}(\nabla^2 - \kappa_m^2)\hat{e} + [a_{ee}\nabla^2e - (a_{ee}\kappa_m^2 - a_{em}\kappa_e^2)e]\hat{I}. \quad (3.43)$$

Воно є просторово нелокальним для кульових складових

$$(\nabla^2 - \kappa_m^2)\sigma = (3a_{ee} + 2\alpha_{ee})\left[\nabla^2e - \left(\kappa_m^2 - \frac{3a_{em}}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}}\kappa_e^2\right)e\right]$$

і локальним для девіаторних складових

$$\text{dev}\hat{\sigma} = 2\alpha_{ee}\text{dev}\hat{e}$$

тензорів напруження та деформації.

Легко показати, що для термопружного тіла рівнянням аналогічним до (3.43) є

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \kappa_m^2)\hat{\sigma} = & 2\alpha_{ee}(\nabla^2 - \kappa_m^2)\hat{e} + [a_{ee}\nabla^2e - (a_{ee}\kappa_m^2 - a_{em}\kappa_e^2)e + \\ & + ((\nabla^2 - \kappa_m^2)a_{et} + \kappa_t^2a_{em})\theta]\hat{I}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

де

$$\kappa_i^2 = \frac{a_{mi}}{g_{mm}}.$$

Якщо ж розглядати стаціонарний температурний стан, для якого оператор Лапласа від температури дорівнює нулеві, то дане співвідношення спрощується до

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \kappa_m^2) \hat{\sigma} = 2\alpha_{ee} (\nabla^2 - \kappa_m^2) \hat{e} + [a_{ee} \nabla^2 e - (a_{ee} \kappa_m^2 - a_{em} \kappa_e^2) e - \\ - (\kappa_m^2 a_{ei} - \kappa_i^2 a_{em}) \theta] \hat{i}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Зазначимо, що для кульових складових тензорів напруження та деформації для нестационарного температурного режиму справджується співвідношення

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \kappa_m^2) \sigma = (3a_{ee} + 2\alpha_{ee}) \left[\nabla^2 e - \left(\kappa_m^2 - \frac{3a_{em}}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \kappa_e^2 \right) e \right] + \\ + 3 \left[(\nabla^2 - \kappa_m^2) a_{ei} + \kappa_i^2 a_{em} \right] \theta, \end{aligned}$$

тоді як для постійної за координатою температури воно має вигляд

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \kappa_m^2) \sigma = (3a_{ee} + 2\alpha_{ee}) \left[\nabla^2 e - \left(\kappa_m^2 - \frac{3a_{em}}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \kappa_e^2 \right) e \right] + \\ + 3(\kappa_i^2 a_{em} - \kappa_m^2 a_{ei}) \theta, \end{aligned} \quad (3.46)$$

Залежність же між дивідаторами тензорів напруження та деформації як і раніше є просторово локальною. Зазначимо, що у роботі [68] побудовано математичну модель, яка враховує тензорний характер хімічного потенціалу, та показано, що для такої моделі просторова нелокальність властива як для кульових, так і для дивідаторних складових тензорів напруження та деформації.

Як згадувалось раніше, у науковій літературі для опису механічних процесів із врахуванням ефектів локальної неоднорідності широко використовують співвідношення нелокальної теорії пружності [63, 98, 126-128, 135-137, 152] та ін. Така теорія є феноменологічною. У ній залежність між тензорами напружень $\hat{\sigma}$ і деформацій \hat{e} у загальному випадку приймається у вигляді інтегрального співвідношення за просторовими координатами

$$\hat{\sigma}(\vec{r}) = \int_{(V)} \hat{G}(\vec{r} - \vec{\zeta}) : \hat{\varepsilon}(\vec{\zeta}) d\vec{\zeta}, \quad (3.47)$$

де підінтегральна функція впливу $\hat{G}(\cdot)$ є тензорною функцією віддалі між розглядуваною \vec{r} та біжучою $\vec{\zeta}$ точками. Дане співвідношення відображає той факт, що напруження у розглядуваній точці тіла залежать від деформацій як у цій, так і у сусідніх точках. Параметри, що характеризують нелокальність, часто пов'язують зі структурою середовища. За певних обмежень, накладених на функцію впливу $\hat{G}(\cdot)$, визначальне співвідношення для тензора напружень спрощують до вигляду

$$\hat{\sigma} = \hat{A} : (1 + b\nabla^2) \hat{\varepsilon}.$$

У рамках такого підходу у науковій літературі проведено широкий комплекс досліджень поведінки деформівних твердих тіл, у тому числі із врахуванням масштабних ефектів та приповерхневих явищ, пошкоджуваності матеріалу тощо. Потрібно зазначити, що даний підхід, як і інші феноменологічні підходи, зустрічається зі значними труднощами при врахуванні впливу немеханічних процесів, у тому числі теплових, на характер деформування тіла.

3.6. Постулювання оборотної складової потоку маси

В роботах [10, 118] та інших локально градієнтний підхід в термомеханіці базувався на представленні термодинамічних потоків \vec{j}_s, \vec{j}_m у вигляді

$$\vec{j}_s = -\frac{\partial \bar{\pi}_s}{\partial \tau} + \vec{j}_{so}, \quad \vec{j}_m = -\frac{\partial \bar{\pi}_m}{\partial \tau} + \vec{j}_{mo}. \quad (3.48)$$

Вектори $\bar{\pi}_s, \bar{\pi}_m$ було названо векторами пружних зміщень ентропії та маси, а вектори $\vec{j}_{so}, \vec{j}_{mo}$ – необоротними складовими потоків ентропії та маси. Зрозуміло, що для одноконтинуумного твердого тіла $\vec{j}_{mo} = 0$. Подання (3.48) модифікує рівняння балансу внутрішньої енергії до

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + H \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + T \frac{\partial S}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T \cdot \frac{\partial \vec{\pi}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} H \cdot \frac{\partial \vec{\pi}_m}{\partial \tau} - T \sigma_s - \vec{j}_{so} \cdot \vec{\nabla} T - \vec{j}_{mo} \cdot \vec{\nabla} H. \quad (3.49)$$

Приймаючи для виробництва ентропії σ_s

$$\sigma_s = -\vec{j}_{so} \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T} - \vec{j}_{mo} \cdot \frac{\vec{\nabla} H}{T}, \quad (3.50)$$

з (3.49) для приросту внутрішньої енергії dU записуємо таке рівняння Гіббса

$$dU = H d\rho + T dS + \vec{\nabla} T \cdot d\vec{\pi}_s + \vec{\nabla} H \cdot d\vec{\pi}_m + \hat{\sigma} : d\hat{e}. \quad (3.51)$$

Таким чином, внутрішня енергія U є потенціальною функцією, означеною в просторі густини ρ , ентропії S , векторів пружних зміщень ентропії та маси $\vec{\pi}_s, \vec{\pi}_m$ відповідно, а також тензора деформації \hat{e} . Параметрами, спряженими до векторів $\vec{\pi}_s, \vec{\pi}_m$ є градієнти температури та хімічного потенціалу. Рівняння стану записані для градієнтів температури та хімічного потенціалу мають вигляд

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial U}{\partial \vec{\pi}_s}, \quad \vec{\nabla} H = \frac{\partial U}{\partial \vec{\pi}_m}.$$

Подання (3.48) та рівняння Гіббса (3.51) дозволило розширити принцип локальної термодинамічної рівноваги на локально градієнтні системи. Подання (3.48) змінює також балансові рівняння ентропії та маси до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (S - \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_s) &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{so} + \sigma_s, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_m) &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{mo}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

В дальших дослідженнях було прийнято, що необоротна складова потоку маси властива лише для підсистеми каркасу, у тому числі і при розгляді твердих розчинів. Для узгодженості з класичною теорією теплопровідності було прийнято також $\vec{\pi}_s = 0$.

Ключова система рівнянь, записана при введенні векторів $\vec{\pi}_s, \vec{\pi}_m$ та врахуванні наближень, представлених у абзаці вище, є ідентичною

до системи рівнянь, отриманої для функціональної залежності між потоками та силами, тобто для подання (3.9)-(3.12), яке розглядаємо у даній монографії. Іншими словами, якщо за ключові функції вибрати вектор переміщення \vec{u} , збурення температури θ та хімічного потенціалу η , то ключова лінеаризована система рівнянь моделі, записана при введенні векторів $\vec{\pi}_s, \vec{\pi}_m$, має вигляд (3.38).

Розгляд функціональної залежності між потоками та силами дозволяє привідкрити природу локальної неоднорідності, у тому числі вектора $\vec{\pi}_m$. На основі результатів підрозділу 3.3 можна стверджувати, що представлення

$$\vec{j}_m = -\frac{\partial \vec{\pi}_m}{\partial \tau}$$

є постулатом, який дозволяє врахувати структуру матеріалу, тобто дане співвідношення є постулюванням зміни густини фізично малого елемента за рахунок зміни структури матеріалу. При цьому слід вважати, що така зміна відбулася одночасно з постулюванням існування вектора $\vec{\pi}_m$.

Значимо також, що прийнявши $\vec{\pi}_s = 0$, з (3.51) одержуємо

$$dU = H d\rho + T dS + \vec{\nabla} H \cdot d\vec{\pi}_m + \hat{\sigma} : d\hat{e}.$$

Однак простір параметрів

$$\rho, S, \vec{\pi}_m, \hat{e}$$

не можна трактувати як простір базових параметрів стану (незалежних параметрів), оскільки в силу рівняння балансу маси, яке у даному випадку для однокомпонентного тіла зводиться до

$$\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_m = \rho_*,$$

не можна зреалізувати зміни густини ρ при сталому $\vec{\pi}_m$ і навпаки, чого вимагає загальноприйняте розуміння рівнянь стану. Тому простір параметрів $\rho, S, \vec{\pi}_m, \hat{e}$ слід трактувати як розширений простір параметрів стану, а вектор $\vec{\pi}_m$ як внутрішній параметр.

3.7. Узгодженість співвідношень моделей

На завершення розділу наведемо формулу, яка випливає з рівняння балансу енергії (3.2), якщо не використовувати балансових рівнянь. Для прийнятого вище наближення, з (3.2) одержуємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial \tau} - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} - T \frac{\partial S}{\partial \tau} - H \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \\ & = \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} - \frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} \right) \cdot \vec{v} - \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s - \sigma_s \right) T - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m \right) H - \\ & \quad - T \sigma_s - \vec{j}_s \cdot \vec{\nabla} T - \vec{j}_m \cdot \vec{\nabla} H. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Якщо прийняти, що внутрішня та кінетична енергії є функціями та постулювати простори визначення цих енергій у вигляді

$$U = U(S, \rho, \hat{e}), \quad K = K(\vec{k}_v), \quad (3.54)$$

то на основі (3.53) запишемо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{e}} - \hat{\sigma} \right) : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial U}{\partial S} - T \right) \frac{\partial S}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} - H \right) \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial K}{\partial \vec{k}_v} - \vec{v} \right) \cdot \frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} = \\ & = \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} - \frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} \right) \cdot \vec{v} - \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s - \sigma_s \right) T - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m \right) H - \\ & \quad - T \sigma_s - \vec{j}_s \cdot \vec{\nabla} T - \vec{j}_m \cdot \vec{\nabla} H. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Приймаючи, що дане співвідношення повинно виконуватися для довільних швидкостей (деформації, ентропії тощо), а також температури і хімічного потенціалу, одержуємо балансові рівняння імпульсу, ентропії та маси, визначальні співвідношення та вираз для виробництва ентропії.

Дане співвідношення повинно виконуватися для усіх моделей термомеханіки. Тому модифікація одного з доданків даного співвідношення повинна компенсуватися іншим доданком. Так, якщо прийняти, що внутрішня енергія є функціоналом, означеним в просторі актуальних значень ентропії $S(\tau)$, густини $\rho(\tau)$, деформації $\hat{e}(\tau)$ ($\Xi(\tau) \equiv (S(\tau), \rho(\tau), \hat{e}(\tau))$) та їх історій $\Xi(\zeta)$ ($0 \leq \zeta < \tau$)

$$U = \overset{\tau}{U}(\Xi(\tau), \Xi(\zeta)),$$

то співвідношення (3.55) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \overset{\tau}{U}}{\partial \hat{e}} - \hat{\sigma} \right) : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \overset{\tau}{U}}{\partial S} - T \right) \frac{\partial S}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \overset{\tau}{U}}{\partial \rho} - H \right) \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial K}{\partial \bar{k}_v} - \bar{v} \right) \frac{\partial \bar{k}_v}{\partial \tau} = \\ & = \left(\bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} - \frac{\partial \bar{k}_v}{\partial \tau} \right) \cdot \bar{v} - \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} + \bar{\nabla} \cdot \bar{j}_s - \sigma_s \right) T - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \bar{\nabla} \cdot \bar{j}_m \right) H - \\ & \quad - T \sigma_s - \bar{j}_s \cdot \bar{\nabla} T - \bar{j}_m \cdot \bar{\nabla} H - \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$- \delta_S \overset{\tau}{U}(\Xi(\tau), \Xi(\zeta) | S(\zeta)) - \delta_\rho \overset{\tau}{U}(\Xi(\tau), \Xi(\zeta) | \rho(\zeta)) - \delta_e \overset{\tau}{U}(\Xi(\tau), \Xi(\zeta) | \hat{e}(\zeta)),$$

де

$$\delta_h \overset{\tau}{U}(\Xi(\tau), \Xi(\zeta) | \mathcal{H}(\zeta)) = \overset{\tau}{U}(\Xi(\tau), \mathcal{H}(\zeta) + \delta \mathcal{H}(\zeta), \Xi^*(\zeta)) - \overset{\tau}{U}(\Xi(\tau), \Xi(\zeta)),$$

$$\mathcal{H}(\zeta) \cup \Xi^*(\zeta) = \Xi(\zeta).$$

Бачимо, що постулювання внутрішньої енергії функціоналом у просторі актуальних значень та історій ентропії, густини та деформації не змінює вигляду балансових рівнянь, однак приводить до модифікації визначальних співвідношень і вигляду для виробництва ентропії порівняно з випадком, коли внутрішня енергія є функцією. У даному випадку на основі (3.56) записуємо такі визначальні співвідношення для напружень, температури і хімічного потенціалу

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial \overset{\tau}{U}}{\partial \hat{e}} \Big|_{\zeta=0}, \quad T = \frac{\partial \overset{\tau}{U}}{\partial S} \Big|_{\zeta=0}, \quad H = \frac{\partial \overset{\tau}{U}}{\partial \rho} \Big|_{\zeta=0}$$

та вираз для енергії розсіяння

$$T \sigma_s = - \bar{j}_s \cdot \bar{\nabla} T - \bar{j}_m \cdot \bar{\nabla} H -$$

$$-\delta_S \overset{\tau}{U}(\Xi(\tau), \Xi(\zeta) | S(\zeta)) - \delta_\rho \overset{\nu}{U}(\Xi(\tau), \Xi(\zeta) | \rho(\zeta)) - \delta_e \overset{\tau}{U}(\Xi(\tau), \Xi(\zeta) | \hat{\alpha}(\zeta)).$$

У деяких інших випадках розширення моделі порівняно з (3.54) може приводити до модифікації як визначальних, так і балансових рівнянь. Один з таких випадків, а саме врахування інерції деформації, буде розглянуто у дев'ятому розділі.

Розділ 4.

ПРИПОВЕРХНЕВА НЕОДНОРІДНІСТЬ У СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ПРУЖНИХ ТІЛАХ

У даному розділі на прикладі модельних задач вивчено закономірності приповерхневої неоднорідності у пружних тілах. Розділ базується на роботах [4, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 21, 26, 36, 37, 42, 75, 76, 80, 82, 83, 92, 118, 124, 148].

4.1. Ключова система рівнянь моделі пружного тіла із врахуванням структурної неоднорідності

Розглянемо структурно неоднорідне деформівне тверде тіло, що займає область (V) евклідового простору, обмежену поверхнею (∂V) . За базовий процес у тілі приймаємо процес деформування.

Приймаючи за ключові функції вектор переміщення \vec{u} та збурення хімічного потенціалу η , ключову лінеаризовану систему рівнянь моделі записуємо у вигляді

$$\alpha_{ee}\nabla^2\vec{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee})\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + a_{em}\vec{\nabla}\eta = \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2},$$
$$g_{mm}\nabla^2\eta - a_{mm}\eta - a_{em}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0. \quad (4.1)$$

Ключова система рівнянь статичної пружності із врахуванням структурної неоднорідності (енергії зв'язку), записана на вектор переміщення \vec{u} та збурення хімічного потенціалу η , є такою

$$\alpha_{ee}\nabla^2\vec{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee})\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + a_{em}\vec{\nabla}\eta = 0,$$
$$g_{mm}\nabla^2\eta - a_{mm}\eta - a_{em}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0. \quad (4.2)$$

Якщо за ключові функції вибрати тензор напружень $\hat{\sigma}$ та збурення хімічного потенціалу η , то розв'язуюча система рівнянь моделі має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad \bar{\nabla} \times \left[\hat{\sigma} - \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} (a_{ee}\sigma + 2\alpha_{ee} a_{em}\eta) \hat{I} \right] \times \bar{\nabla} = 0, \\ \nabla^2 \eta - \kappa_{\eta}^2 \eta - \kappa_{\sigma}^2 \sigma = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Використаємо сформульовані системи рівнянь для вивчення закономірностей механічних полів у тілах простої геометричної конфігурації.

4.2. Приповерхнева неоднорідність у тілах простої геометричної конфігурації

4.2.1. Шар. Приповерхнева неоднорідність. Поверхневий натяг. Розмірний ефект межі міцності.

Розглянемо вільний від зовнішнього силового навантаження ізотропний шар, віднесений до прямокутної декартової системи координат $\{x, y, z\}$, який займає область $|x| \leq l$. Вважаємо, що на поверхнях шару $x = l$, $x = -l$ задано постійне, відмінне від нуля значення хімічного потенціалу η_a . За початковий стан тіла приймаємо стан вільного від силового навантаження безмежного середовища, густина та хімічний потенціал якого дорівнюють відповідно ρ_* , H_* , а матеріал є ідентичним до матеріалу шару.

За такої зовнішньої дії в тілі реалізується одновимірна за координатою x ситуація

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x), \quad \hat{e} = \hat{e}(x), \quad \eta = \eta(x), \quad \rho = \rho(x).$$

Оскільки поверхні шару $x = l$, $x = -l$ вільні від силового навантаження, то за розв'язуючу систему рівнянь доцільно вибрати систему (4.3), яка у розглядуваному одновимірному випадку, зводиться до нас-

тупної системи рівнянь, записаної на нормальні компоненти тензора напружень та хімічний потенціал

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} &= 0, \\ \frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} &= \frac{d^2\sigma_{zz}}{dx^2} = a_0 \frac{d^2\eta}{dx^2}, \\ \frac{d^2\eta}{dx^2} - \kappa_\eta^2 \eta - \kappa_\sigma^2 \sigma &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

де $\sigma_{\gamma\gamma}$ – компоненти тензора напружень, $\gamma = \{x, y, z\}$;

$$a_0 = 2 \frac{\alpha_{ee} \alpha_{em}}{2\alpha_{ee} + a_{ee}}.$$

Граничними умовами задачі є

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \eta = \eta_a \equiv H_a - H_* \quad (4.5)$$

при $x = l$, $x = -l$.

Систему співвідношень (4.4), (4.5) необхідно доповнити умовами рівності нулю головного вектора та головного моменту зусиль у довільних поперечних перерізах $y = const$, $z = const$ шару

$$\int_{-l}^l \sigma_{\gamma\gamma} dx = 0, \quad \int_{-l}^l x \sigma_{\gamma\gamma} dx = 0, \quad \gamma = \{y, z\}. \quad (4.6)$$

Розв'язком системи рівнянь (4.4), що справджує умови (4.5), (4.6), є

$$\eta(x) = \eta_a \left\{ \left[1 - \frac{\alpha \operatorname{th}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} \right] \frac{\operatorname{ch}(\xi x)}{\operatorname{ch}(\xi l)} + \frac{\alpha \operatorname{th}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} \right\},$$

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{zz}(x) = a_0 \eta_a \left\{ \left[1 - \frac{\alpha \operatorname{th}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} \right] \frac{\operatorname{ch}(\xi x)}{\operatorname{ch}(\xi l)} - \right.$$

$$\left. \frac{(1-\alpha) \operatorname{th}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} \right\},$$

$$\sigma_{xx}(x) = 0, \quad (4.7)$$

де

$$\xi^2 = \kappa_\eta^2 + 2\kappa_\sigma^2 a_0, \quad \alpha = 2a_0 \frac{\kappa_\sigma^2}{\xi^2}.$$

Якщо знехтувати впливом тензора деформації на хімічний потенціал (густину), тобто прийняти $\kappa_\sigma = 0$ ($\alpha = 0$), то із співвідношень (4.7) для хімічного потенціалу та ненульових компонентів тензора напружень одержуємо

$$\eta(x) = \eta_a \frac{\operatorname{ch}(\kappa_\eta x)}{\operatorname{ch}(\kappa_\eta l)},$$

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{zz}(x) = a_0 \eta_a \left(\frac{\operatorname{ch}(\kappa_\eta x)}{\operatorname{ch}(\kappa_\eta l)} - \frac{\operatorname{th}(\kappa_\eta l)}{\kappa_\eta l} \right). \quad (4.8)$$

Аналіз формул (4.7) показує, що хімічний потенціал η дорівнює η_a на поверхнях $x = \pm l$ і зменшується у глибину тіла, досягаючи свого найменшого значення

$$\eta(0) = \frac{\eta_a}{\operatorname{ch}(\xi l)} \left\{ 1 - \alpha \frac{\operatorname{th}(\xi l) - \operatorname{sh}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} \right\} \quad (4.9)$$

на серединній поверхні $x = 0$ шару. Для шарів, товщини яких справджують співвідношення $\xi l \gg 1$ (далі такі шари будемо називати товстими), збурення хімічного потенціалу на серединній поверхні практично дорівнює нулеві, тобто $H \approx H_*$. Для таких шарів неоднорідність у розподілі η носить приповерхневий характер, а глибинні області шару мають властивості безмежного середовища. Хімічний

потенціал у кожній точці тонкого шару (далі такі шари будемо називати також тонкими плівками), суттєво відрізняється від хімічного потенціалу безмежного середовища. Це ілюструють графіки на рис. 4.1, на якому представлено розподіл η/η_a по товщині шару при $\alpha = 0$, $\kappa_\eta l = 2,5, 10, 30$ (криві 1-4).

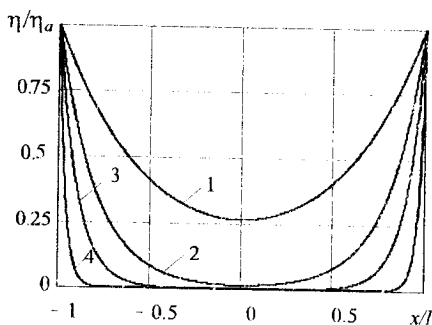


Рис.4.1. Розподіл хімічного потенціалу в шарі

Аналіз співвідношень (4.9) показує, що залежність хімічного потенціалу на серединній поверхні шару від коефіцієнта зв'язаності α зменшується зі збільшенням товщини шару. Це ілюструють графіки на рис. 4.2 для $\kappa_\eta l = 2,5, 10, 30$ (криві 1-4).

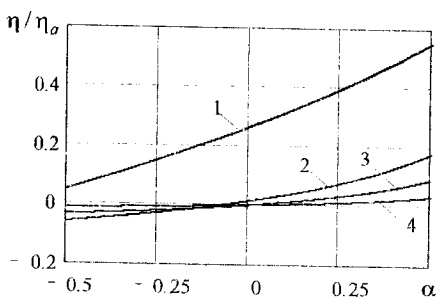


Рис.4.2. Залежність хімічного потенціалу на серединній поверхні шару від коефіцієнта зв'язаності

Аналіз формули (4.7) для ненульових напружень $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ показує, що вони монотонно зменшуються при відході від поверхонь шару $x = \pm l$ від своїх максимальних значень

$$\sigma_{yy}(\pm l) = a_0 \eta_a \left\{ 1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} \right\}, \quad (4.10)$$

досягаючи мінімального значення на серединній поверхні

$$\sigma_{yy}(0) = \frac{a_0 \eta_a}{\text{ch}(\xi l)} \left\{ 1 - \frac{\alpha \text{th}(\xi l) + (1 - \alpha) \text{sh}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} \right\}. \quad (4.11)$$

Для тонких плівок „напруженим” є увесь шар, тоді як для товстих шарів напруженими є лише вузькі приповерхневі області. Напруження σ_{yy}, σ_{zz} у глибинних областях товстого шару практично дорівнюють нулю. Це й ілюструють графіки на рис. 4.3 на якому показано розподіл напружень σ_{yy}/σ_0 ($\sigma_0 = a_0 \eta_a$) у шарі при $\alpha = 0$, $\kappa_\eta l = 2, 5, 10, 30$ (криві 1-4).

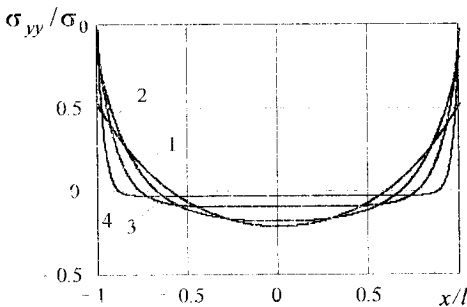


Рис.4.3. Розподіл напружень у шарі

Зі збільшенням товщини шару поверхневі напруження зростають, досягаючи свого усталеного значення $a_0 \eta_a$, що відповідає значенню

поверхневих напружень у півпросторі. Напруження ж на серединній поверхні шару прямують до нуля. На цій основі можна стверджувати, що поверхневим напруженням властивий розмірний ефект. Залежність напружень σ_{yy}/σ_0 від товщини шару (параметра $L \equiv \kappa_\eta l$) на поверхнях $x = \pm l$, $x = 0$ (криві 1,2) при $\alpha = 0$ показано на рис. 4.4. Залежність напружень σ_{yy}/σ_0 від параметра α при $x = \pm l$, $x = 0$ (відповідно суцільні та штрих-пунктирні лінії) при $L = 3,30$ (криві 1-2) представлено на рис.4.5.

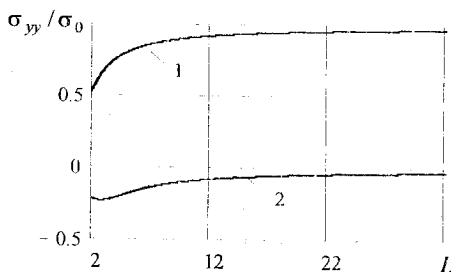


Рис.4.4. Залежність напружень від товщини шару

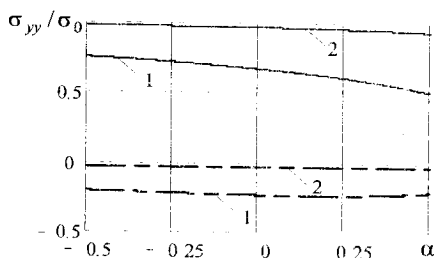


Рис.4.5. Залежність напружень від коефіцієнта зв'язаності

На основі проведених досліджень можна зробити висновок, що врахування структурної неоднорідності (введення в параметри стану η і $\bar{V}\eta$, а тим самим збурення енергії зв'язку і градієнта збурення енергії зв'язку) дозволяє описувати у тривимірному підході приповерхневу неоднорідність пружного тіла. Вагомим при цьому є положення про те, що хімічний потенціал на поверхні тіла H_a відріз-

няється від хімічного потенціалу у безмежному середовищі з того ж матеріалу ($H_a \neq H_*$). Аналіз формул показує, що характерним розміром області приповерхневої неоднорідності є параметр ξ^{-1} . Якщо товщина шару є співвимірною з характерним розміром області приповерхневої неоднорідності, то неоднорідність притаманна усій області тіла і говоримо тоді про тонкі плівки. Якщо ж товщина шару набагато більша від характерного розміру області приповерхневої неоднорідності, то неоднорідність притаманна лише вузьким приповерхневим областям тіла і говоримо тоді про товсті плівки або шари.

Поверхневий натяг. В теорії поверхневих явищ широко використовують поняття поверхневого натягу f_p [13], який є інтегральною характеристикою приповерхневих напружень в області, де вони є розтягуючими, тобто

$$f_p = \int_{x_a}^l \sigma_{yy}(x) dx, \quad (4.12)$$

де x_a – точка переходу розтягуючих напружень σ_{yy} у стискаючі

$$\sigma_{yy}(x_a) = 0 \quad (4.13)$$

На основі (4.7), (4.12) знаходимо

$$f_p = a_0 \eta_a \left\{ \left[1 - \frac{\alpha \operatorname{th}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} \right] \frac{\operatorname{sh}(\xi l) - \operatorname{sh}(\xi x_a)}{\xi \operatorname{ch}(\xi l)} - \frac{(1 - \alpha) \operatorname{th}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} (l - x_a) \right\}. \quad (4.14)$$

Наступночі впливом деформації на густину (у цьому випадку $\xi = \kappa_n$), для шарів, товщина яких справджує нерівність

$$\exp(\kappa_{\eta} l) \gg \kappa_{\eta} l,$$

використовуючи (4.14), з (4.13) знаходимо

$$x_a = l \left[1 - \frac{\ln(\kappa_{\eta} l)}{\kappa_{\eta} l} \right]. \quad (4.15)$$

Враховуючи формулу (4.15) в (4.14), для поверхневого натягу f_p у вільному від силового навантаження шарі одержуємо

$$f_p = \frac{a_0 \eta_a}{\kappa_{\eta}} \left\{ 1 - \frac{1}{\kappa_{\eta} l} \left[1 + \ln(\kappa_{\eta} l) \right] \right\}. \quad (4.16)$$

Бачимо, що зі збільшенням товщини шару поверхневий натяг зростає, прямує до свого усталеного значення

$$f_p^0 = \frac{a_0 \eta_a}{\kappa_{\eta}}. \quad (4.17)$$

Така поведінка натягу f_p при зміні товщини l є аналогічною до залежності максимальних напружень від l (див. формулу (4.10)). Однак напруження „швидше” досягають свого усталеного значення, що рівнозначне тому, що розмірний ефект по різному проявляється при дослідженні поверхневих напружень та натягу. Тому f_p не є однозначною характеристикою поверхневих напружень, а суттєво залежить від розміру області (точки x_a), у якій приповерхневі напруження є розтягуючими.

Якщо в основу прийняти результати експериментальних досліджень [95] для алюмінію, зокрема представлені на рис. 27 цієї роботи, то для коефіцієнта κ_{η} можна прийняти оцінку $\kappa_{\eta} = 5 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$. В [119] для поверхневого натягу алюмінію на межі з повітрям приведено значення 1.9 Н/м. Будемо вважати його значенням поверхневого натягу для масивного зразка $f_p^0 = 1.9 \text{ Н/м}$. Використовуючи формулу (4.16) для поверхневих напружень у півпросторі знаходимо

$$\sigma_0 \equiv a_0 \eta_a = 9.5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

Міцність шару. Як показано вище, у тілі вільному від силового навантаження існують ненульові напруження, спричинені наявністю поверхні. Тому, їх необхідно враховувати при розрахунку параметрів міцності деформівних твердих тіл, у тому числі тонких плівок. В літературі залежність інтенсивності силового навантаження, що приводить до руйнування тіла, від характерного розміру тіла називають розмірним ефектом межі міцності, а також масштабним ефектом або ефектом шкали. У роботі далі використовуватимемо перший термін. На прикладі шару розглянемо можливість опису такого ефекту у рамках побудованої моделі.

Нехай деформівний шар, що займає область $-l \leq x \leq l$, перебуває під дією силового навантаження $\vec{F} = \{0, 2\sigma_a l, 0\}$. Його рівноважний стан описується системою співвідношень (4.4), (4.5) та умовами

$$\int_{-l}^l \sigma_{yy}(x) dx = 2\sigma_a l, \quad \int_{-l}^l x \sigma_{yy}(x) dx = 0 \quad (4.18)$$

$$\int_{-l}^l \sigma_{zz}(x) dx = 0, \quad \int_{-l}^l x \sigma_{zz}(x) dx = 0 \quad (4.19)$$

у поперечних перерізах $y = \text{const}$, $z = \text{const}$.

Розв'язком даної крайової задачі є

$$\eta(x) = \frac{1}{1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l}\right)} \left\{ \left[(1 - \alpha) \eta_a + \sigma_a \frac{\kappa_\sigma^2}{\xi^2} \right] \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} + \alpha \eta_a \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} - \sigma_a \frac{\kappa_\sigma^2}{\xi^2} \right\},$$

$$\sigma_{yy}(x) = \frac{1}{1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l}\right)} \left\{ \left[(1 - \alpha) a_0 \eta_a + \frac{1}{2} \alpha \sigma_a \right] \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - (1 - \alpha) a_0 \eta_a \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} - \sigma_a \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(2 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right] \right\},$$

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{1}{1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right)} \left\{ \left[(1 - \alpha) a_0 \eta_a + \frac{1}{2} \alpha \sigma_a \right] \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \left[(1 - \alpha) a_0 \eta_a + \frac{1}{2} \alpha \sigma_a \right] \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right\}. \quad (4.20)$$

Якщо прийняти, що зовнішнє силове навантаження є розтягуючим ($\sigma_a > 0$), то максимальними розтягуючими напруженнями є напруження σ_{yy} на поверхнях $x = \pm l$ шару

$$\sigma_{yy}(\pm l) = \frac{1}{1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right)} \left\{ (1 - \alpha) a_0 \eta_a \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) + \sigma_a \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right] \right\}. \quad (4.21)$$

В основу першої класичної теорії міцності [65] покладено положення про те, що руйнування матеріалу відбувається тоді, коли головне максимальне напруження σ_1 досягає критичного для даного матеріалу значення, яке позначимо σ_p (теоретична межа міцності). У розглядуваному випадку плоского напруженого стану при відсутності дотичних напружень $\sigma_1 = \sigma_{yy}$. Вважаємо, що тіло зруйнується миттєво, якщо хоча б в одній точці напруження досягнуть значення σ_p . Використовуючи формулу (4.21), для зовнішнього силового навантаження, що приводить до руйнування шару σ_a^{kr} , одержуємо

$$\sigma_a^{kr} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right)} \left\{ \sigma_p \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right] - (1 - \alpha) a_0 \eta_a \left[1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right] \right\}. \quad (4.22)$$

Для „товстих” шарів ($\xi l \gg 1$) значення силового навантаження, що приводить до їх руйнування описується формулою

$$\sigma_a^{kr} = 2 \frac{1-\alpha}{2-\alpha} (\sigma_p - a_0 \eta_a) \equiv \sigma_+ . \quad (4.23)$$

У цьому випадку σ_+ є межею міцності, що встановлюється на основі експериментальних досліджень на товстих зразках. Зазначимо, що величину σ_+ приймають за характеристику матеріалу і її значення наводяться у довідниках.

Використовуючи останнє позначення, формулу (4.23) перетворюємо до вигляду

$$\sigma_a^{kr} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right)} \left\{ a_0 \eta_a \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} + \frac{1}{2} \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \sigma_+ \left[\left(1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right) \right] \right\} . \quad (4.24)$$

Якщо вплив кулової складової тензора напружень на хімічний потенціал є нехтувально малим, тобто $\alpha = 0$, то формули (4.23), (4.24) спрощуються до вигляду

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_p - a_0 \eta_a \equiv \sigma_+ . \quad (4.25)$$

для товстих шарів та

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_+ + a_0 \eta_a \frac{\text{th}(\kappa_\eta l)}{\kappa_\eta l} \quad (4.26)$$

для тонких плівок.

Якщо

$$\exp(\kappa_\eta l) \gg \kappa_\eta l ,$$

то формулу (4.26) можна спростити до

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_+ + a_0 \eta_a \frac{1}{\kappa_\eta l} \equiv \sigma_+ + \frac{\sigma_0}{\kappa_\eta l} . \quad (4.26')$$

Праву сторону співвідношень (4.24), (4.26), (4.26') можна трактувати як таку, що описує вплив розмірів шару на межу міцності (роз-

мірний ефект межі міцності). Бачимо, що зі збільшенням товщини шару, величина прикладеного до шару силового навантаження, що приводить до його руйнування σ_a^{kr} , зменшується, прямує до σ_+ . З формул (4.24), (4.26) для σ_a^{kr} одержуємо обмеження

$$\sigma_p > \sigma_a^{kr} \geq \sigma_+. \quad (4.27)$$

Така поведінка межі міцності узгоджується з відомими результатами експериментальних досліджень [39, 54, 133, 153, 155], а також результатами, отриманими на основі статистичних теорій міцності [97, 117, 153].

Зрозуміло, що рівноважний стан шару, що контактує з навколишнім середовищем, яке не чинить на нього силової дії, описує система співвідношень (4.4), (4.5), у яких потрібно замінити η_a на η_a^* . На основі отриманих вище співвідношень можна стверджувати, що хімічний потенціал на поверхні тіла є найбільшим. Взаємодія частинки з оточенням приводить до зменшення її хімічного потенціалу, а тому $\eta_a > \eta_a^*$. З формул (4.24), (4.26) випливає, що шар в оточенні, яке приводить до встановлення на його поверхнях $x = \pm l$ хімічного потенціалу $\eta_a^{(1)}$ витримує більшу інтенсивність зовнішнього силового навантаження (є міцнішим) порівняно з шаром, в оточенні, яке приводить до встановлення на його поверхнях $x = \pm l$ хімічного потенціалу $\eta_a^{(2)}$, величина якого є більшою від $\eta_a^{(1)}$, тобто

$$\sigma_a^{kr2} - \sigma_a^{kr1} = \alpha_0 (\eta_a^{(1)} - \eta_a^{(2)}) \frac{\text{th}(\kappa_\eta l)}{\kappa_\eta l} < 0, \quad (4.28)$$

де σ_a^{kr2} , σ_a^{kr1} – інтенсивності силового навантаження, що приводять до крихкого руйнування шару в 2-му та 1-му оточенні. Така поведінка межі міцності узгоджується з відомими експериментальними даними [55]. Так, для волокон кам'яної солі у воді $\sigma_a^{kr} = 150$ МПа, в той час як у повітрі $\sigma_a^{kr} = 0.4$ МПа, тобто міцність волокон у воді майже у 400 рази вища. Зазначимо, що умова $\eta_a > 0$ відповідає розтягуючим поверхневим напруженням у вільному від силового навантаження шарі.

Зрозуміло, що даний підхід можна використати до опису розмірного ефекту межі текучості. При цьому під σ_p слід розуміти напруження, при якому матеріал переходить у пластичний стан (теоретична межа текучості).

Зазначимо також, що експериментальні роботи вказують на прояв розмірного ефекту межі міцності для тіл, характерний розмір яких порядку 10^{-2} м [97]. Така поведінка пов'язана з утворенням у приповерхневих областях стійких структур дефектів, що приводить до суттєвого розширення області приповерхневої неоднорідності. Зрозуміло, що даний підхід можна використати для опису такої залежності, змінивши трактування коефіцієнта k_{η} .

Дослідимо, чи зміниться прояв розмірного ефекту межі міцності, якщо за розрахунковий прийняти деформаційний критерій. Використовуючи визначальне співвідношення для тензора деформації у вигляді

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2\alpha_{ee}} \hat{\sigma} - \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(a_{em}\eta + \frac{a_{ee}}{2\alpha_{ee}} \sigma \right) \hat{i} \quad (4.29)$$

та враховуючи, що у розглядуваному випадку

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{\perp} + \sigma_{\parallel},$$

одержуємо

$$e_{yy} = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(\frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} \sigma_{\perp} + \frac{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{2\alpha_{ee}} \sigma_{\parallel} - a_{em}\eta \right).$$

При відсутності зовнішнього силового навантаження

$$e_{yy} = e_{yy}^* = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(\frac{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{2\alpha_{ee}} \sigma_{\parallel} - a_{em}\eta \right).$$

Внаслідок дії силового навантаження деформація змінюється на величину

$$e_{yy} - e_{yy}^* = \frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})} \sigma_{\perp}. \quad (4.30)$$

Отже, приходимо до висновку, що розмірний ефект межі міцності відсутній, якщо за розрахунковий вибрано деформаційний критерій, а за початковий стан – стан реального тіла вільного від силового

навантаження. Це узгоджується з результатами роботи [133], у якій експериментальними методами встановлено зменшення статичної міцності тонких (5-10 мкм) керамічних плівок на основі аморфного оксиду алюмінію при збільшенні їх товщини. У цій же роботі показано, що такий ефект відсутній, якщо в основу прийняти деформаційний критерій міцності. З наведеного вище випливає, що розмірний ефект міцності спричинений напружено-деформованим станом, зумовленим наявністю поверхні тіла. У другому випадку за відліковий вибрано саме такий стан, а тому розмірний ефект межі міцності у такому експерименті не може бути виявленим.

В основу четвертої теорії міцності покладено твердження про досягнення енергією формозміни граничного значення

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} = \Sigma_+, \quad (4.31)$$

де Σ_+ – межа міцності, що встановлюється на стандартних зразках; σ_i – головні напруження ($i = 1-3$).

За розрахунків напруження приймаємо напруження $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ на поверхнях $x = \pm l$ шару. У даному випадку $\sigma_1 = \sigma_{yy}, \sigma_2 = \sigma_{zz}, \sigma_3 = \sigma_{xx}$. Для знаходження значення силового навантаження, що приводить до руйнування тіла σ_a^{kr} , з (4.20), (4.31) одержуємо рівняння

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2} \mathfrak{I} + \frac{\alpha^2}{4} \mathfrak{I}^2\right) \sigma_a^{kr^2} + (1 - \alpha)(1 + \alpha \mathfrak{I}) a_0 \eta_a \mathfrak{I} \sigma_a^{kr} + (1 - \alpha)^2 (a_0 \eta_a \mathfrak{I})^2 = \Sigma_+^2, \quad (4.32)$$

де

$$\mathfrak{I} = \left[1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l}\right] / \left\{1 - \alpha \left[1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l}\right]\right\}.$$

Розв'язок рівняння (4.32) є громіздким. Тому дальший аналіз проведемо у наближенні

$$\alpha = 0, \quad \frac{a_0 \eta_a}{2 \Sigma_+} \ll 1.$$

У цьому випадку рівняння (4.32) набуває вигляду

$$\sigma_a^{kr^2} + a_0 \eta_a \mathfrak{T} \sigma_a^{kr} + (a_0 \eta_a \mathfrak{T})^2 - \Sigma_+^2 = 0, \quad (4.33)$$

у якому

$$\mathfrak{T} = 1 - \frac{\text{th}(\kappa_\eta l)}{\kappa_\eta l}.$$

Його розв'язком є

$$\sigma_a^{kr} = \Sigma_+ - \frac{a_0 \eta_a}{2} \left[1 - \frac{\text{th}(\kappa_\eta l)}{\kappa_\eta l} \right]. \quad (4.34)$$

Якщо σ_\pm є інтенсивністю силового навантаження, що приводить до руйнування товстого шару, тобто

$$\sigma_\pm = \Sigma_\pm - \frac{a_0 \eta_a}{2},$$

то з (4.34) одержуємо

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_\pm + \frac{a_0 \eta_a}{2} \frac{\text{th}(\kappa_\eta l)}{\kappa_\eta l}. \quad (4.35)$$

Порівнюючи формулами (4.26), (4.35) бачимо, що в межах прийнятих наближень, вплив товщини шару на величину $\sigma_a^{kr} - \sigma_\pm$, розрахований на основі четвертої теорії міцності, є у два рази меншим порівняно з таким впливом, розрахованим на основі першої теорії міцності.

4.2.2. Приповерхневі явища в тілах циліндричної геометрії

Розглянемо ізотропний структурно неоднорідний порожнистий пружний циліндр, який займає область $R_B \leq r \leq R_3$ у циліндричній системі координат $\{r, \varphi, z\}$. Поверхні $r = R_3$, $r = R_B$ циліндра вільні від силового навантаження і на них задано постійне значення хімічного потенціалу η рівне η_a . За таких умов у циліндрі реалізується одновимірна за координатою r ситуація

$$\eta = \eta(r), \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}(r), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r).$$

Згідно з (4.2), при нехтуванні впливом кульової складової тензора деформації на хімічний потенціал η , визначається він з рівняння Гельмгольца

$$\frac{d^2\eta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} - \kappa_\eta^2 \eta = 0 \quad (4.36)$$

і справджує умови

$$\eta = \eta_a \quad (4.37)$$

на поверхнях $r = R_3$, $r = R_B$ циліндра. Для зменшення громіздкості далі індекс η у рівнянні (4.36) будемо опускати, тобто приймемо

$$\kappa_\eta^2 = \kappa^2.$$

При відомому хімічному потенціалі η , у випадку плоскої деформації, ненульові компоненти u_r вектора переміщення \vec{u} та σ_{rr} , $\sigma_{\phi\phi}$, σ_{zz} тензора напружень $\hat{\sigma}$ визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} u_r(r) &= -\frac{a_0}{2\alpha_{ee}} \left[\frac{1}{r} \int_{R_B}^r \eta(\rho) \rho d\rho + \frac{1}{R_3^2 - R_B^2} \left(\frac{R_B^2}{r} + \frac{\alpha_{ee} r}{\alpha_{ee} + \alpha_{ee}} \right) \int_{R_B}^{R_3} \eta(\rho) \rho d\rho \right], \\ \sigma_{rr}(r) &= a_0 \left[\frac{1}{r^2} \int_{R_B}^r \eta(\rho) \rho d\rho - \frac{1}{R_3^2 - R_B^2} \left(1 - \frac{R_B^2}{r^2} \right) \int_{R_B}^{R_3} \eta(\rho) \rho d\rho \right], \\ \sigma_{\phi\phi}(r) &= a_0 \left[\eta(r) - \frac{1}{r^2} \int_{R_B}^r \eta(\rho) \rho d\rho - \frac{1}{R_3^2 - R_B^2} \left(1 + \frac{R_B^2}{r^2} \right) \int_{R_B}^{R_3} \eta(\rho) \rho d\rho \right], \\ \sigma_{zz}(r) &= a_0 \left[\eta(r) - \frac{\alpha_{ee}}{(R_3^2 - R_B^2)(\alpha_{ee} + \alpha_{ee})} \int_{R_B}^{R_3} \eta(\rho) \rho d\rho \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Якщо ж циліндр вільний від силового навантаження і допускаються осьові переміщення, то, задовольняючи граничні умови в сенсі Сен-Венана, для компоненти σ_{zz} замість останнього співвідношення системи (4.38) запишемо

$$\sigma_{zz}(r) = a_0 \left(\eta(r) - \frac{2}{R_3^2 - R_B^2} \int_{R_B}^{R_3} \eta(\rho) \rho d\rho \right). \quad (4.39)$$

Наведемо формули які впливають з (4.38), (4.39) при $R_B = 0$ та $R_3 \rightarrow \infty$, тобто для суцільного циліндра та безмежного середовища з циліндричною порожниною.

Для середовища з циліндричною порожниною одержуємо

$$u_r(r) = -\frac{a_0}{2\alpha_{ee}} \frac{1}{r} \int_{R_B}^r \eta(\rho) \rho d\rho,$$

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{a_0}{r^2} \int_{R_B}^r \eta(\rho) \rho d\rho, \quad \sigma_{zz}(r) = a_0 \eta(r),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = a_0 \left(\eta(r) - \frac{1}{r^2} \int_{R_B}^r \eta(\rho) \rho d\rho \right). \quad (4.40)$$

Для суцільного циліндра

$$u_r(r) = -\frac{a_0}{2\alpha_{ee}} \left[\frac{1}{r} \int_0^r \eta(\rho) \rho d\rho + \frac{\alpha_{e'e'}}{R_3^2 (\alpha_{ee} + \alpha_{e'e'})} \int_0^{R_3} \eta(\rho) \rho d\rho \right],$$

$$\sigma_{rr}(r) = a_0 \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r \eta(\rho) \rho d\rho - \frac{1}{R_3^2} \int_0^{R_3} \eta(\rho) \rho d\rho \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = a_0 \left(\eta(r) - \frac{1}{r^2} \int_0^r \eta(\rho) \rho d\rho - \frac{1}{R_3^2} \int_0^{R_3} \eta(\rho) \rho d\rho \right),$$

$$\sigma_{zz}(r) = a_0 \left[\eta(r) - \frac{\alpha_{e'e'}}{R_3^2 (\alpha_{ee} + \alpha_{e'e'})} \int_0^{R_3} \eta(\rho) \rho d\rho \right]. \quad (4.41)$$

Для порожнистого циліндра розв'язком рівняння (4.36), який справджує граничні умови (4.37) є

$$\eta(r) = \frac{\eta_a}{K_0(\kappa R_B)I_0(\kappa R_3) - I_0(\kappa R_B)K_0(\kappa R_3)} \left[(K_0(\kappa R_B) - K_0(\kappa R_3))I_0(\kappa r) - (I_0(\kappa R_3) - I_0(\kappa R_B))K_0(\kappa r) \right], \quad (4.42)$$

де $I_0(\cdot)$, $K_0(\cdot)$ – модифікована функція Бесселя та функція Макдональда 0-го порядку.

Враховуючи (4.42), для компонент $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}$ тензора напружень, з (4.38) одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) = & a_0 \eta_a \left\{ \frac{1}{\kappa r} (d_1 I_1(\kappa r) + d_2 K_1(\kappa r)) + \right. \\ & + \frac{1}{R_3^2 - R_B^2} \left[\frac{R_B R_3}{r^2} \left(\frac{d_1}{\kappa} (-R_3 I_1(\kappa R_B) + R_B I_1(\kappa R_3)) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{d_2}{\kappa} (R_3 K_1(\kappa R_B) - R_B K_1(\kappa R_3)) \right) + \frac{d_1}{\kappa} (R_B I_1(\kappa R_B) - R_3 I_1(\kappa R_3)) + \\ & \left. \left. + \frac{d_2}{\kappa} (-R_B K_1(\kappa R_B) + R_3 K_1(\kappa R_3)) \right] \right\}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) = & a_0 \eta_a \left\{ d_1 \left(I_0(\kappa r) - \frac{1}{\kappa r} I_1(\kappa r) \right) + d_2 \left(K_0(\kappa r) + \frac{1}{\kappa r} I_1(\kappa r) \right) - \right. \\ & - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{R_3^2 - R_B^2} \left[\frac{R_B R_3}{r^2} \left(d_1 (R_B I_1(\kappa R_3) - R_3 I_1(\kappa R_B)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - d_2 (R_B K_1(\kappa R_3) - R_3 K_1(\kappa R_B)) \right) + \right. \\ & \left. + d_1 (R_3 I_1(\kappa R_3) - R_B I_1(\kappa R_B)) - d_2 (R_3 K_1(\kappa R_3) - R_B K_1(\kappa R_B)) \right] \right\}, \\ \sigma_{zz}(r) = & a_0 \eta_a \left\{ d_1 I_0(\kappa r) + d_2 K_0(\kappa r) - \right. \\ & - \frac{1}{\kappa} \frac{a_{ee}}{(R_3^2 - R_B^2)(a_{ee} + \alpha_{ee})} \left[d_1 (I_1(\kappa R_3) - R_B I_1(\kappa R_B)) - \right. \end{aligned}$$

$$-d_2(K_1(\kappa R_3) - R_B K_1(\kappa R_B)) \left. \right\}, \quad (4.43)$$

де $I_1(\cdot)$, $K_1(\cdot)$ – модифікована функція Бесселя та функція Макдональда 1-го порядку,

$$d_1 = \frac{K_0(\kappa R_B) - K_0(\kappa R_3)}{K_0(\kappa R_B) I_0(\kappa R_3) - I_0(\kappa R_B) K_0(\kappa R_3)},$$

$$d_2 = \frac{I_0(\kappa R_c) - I_0(\kappa R_i)}{K_0(\kappa R_B) I_0(\kappa R_3) - I_0(\kappa R_B) K_0(\kappa R_3)}.$$

Розподіл хімічного потенціалу та ненульових компонент вектора переміщення і тензора напружень у вільному від силового навантаження суцільному циліндрі (область $r \leq R$) описується формулами

$$\eta(r) = \eta_a \frac{I_0(\kappa r)}{I_0(\kappa R)},$$

$$u_r(r) = \frac{a_0 \eta_a}{2\alpha_{ee}} \frac{1}{I_0(\kappa R)} \left[I_1(\kappa r) + \frac{\alpha_{ee}}{a_{ee} + \alpha_{ee}} \frac{r}{R} I_1(\kappa R) \right],$$

$$\sigma_{rr}(r) = -\frac{a_0 \eta_a}{\kappa R I_0(\kappa R)} \left[\frac{R}{r} I_1(\kappa r) - I_1(\kappa R) \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = -\frac{a_0 \eta_a}{\kappa R I_0(\kappa R)} \left[\kappa R I_0(\kappa r) - I_1(\kappa R) - \frac{R}{r} I_1(\kappa r) \right],$$

$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{a_0 \eta_a}{\kappa R I_0(\kappa R)} [\kappa R I_0(\kappa r) - 2I_1(\kappa R)] \quad (4.44)$$

Для безмежного середовища з циліндричною порожниною (область $r \geq R$) одержуємо

$$\eta(r) = \eta_a \frac{K_0(\kappa r)}{K_0(\kappa R)},$$

$$u_r(r) = -\frac{a_0 \eta_a}{2\alpha_{ee}} \frac{1}{\kappa K_0(\kappa R)} \left[\frac{R}{r} K_1(\kappa R) - K_1(\kappa r) \right],$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r) &= -\frac{a_0 \eta_a}{\kappa r K_0(\kappa R)} \left[K_1(\kappa r) - \frac{R}{r} K_1(\kappa R) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) &= -\frac{a_0 \eta_a}{\kappa R K_0(\kappa R)} \left[\frac{R}{r} K_1(\kappa R) - K_1(\kappa r) - \kappa r K_0(\kappa r) \right], \\ \sigma_{zz}(r) &= a_0 \eta_a \frac{K_0(\kappa r)}{K_0(\kappa R)}\end{aligned}\quad (4.45)$$

На рисунку 4.6 представлено результати числового дослідження напружень σ_{rr}/σ_0 , $\sigma_{\varphi\varphi}/\sigma_0$, σ_{zz}/σ_0 (рис. а, б, в відповідно) у вільному від силового навантаження суцільному циліндрі при $\kappa R = 5, 7, 10, 30$ (криві 1-4). Розподіл напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} аналогічний до розділу напружень σ_{yy} , σ_{zz} у шарі. Напруження ж σ_{rr} в усій області тіла є стискаючими. Вони зростають за абсолютною величиною від нуля на поверхні тіла до свого екстремального значення σ_r^M на осі циліндра. Зі збільшенням радіуса циліндра R напруження σ_r^M зменшується до нуля. Випадок співвимірності підобластей тіла, у яких напруження є неоднорідними та „майже однорідними” відповідає тонким волокнам.

4.2.3. Приповерхневі явища в тілах сферичної геометрії

Розглянемо вільну від силового навантаження порожнисту кулю, що займає область $R_B \leq r \leq R_3$ у сферичній системі координат $\{r, \varphi, \psi\}$. Приймемо, що на її поверхнях $r = R_B$, $r = R_3$ задано постійне значення хімічного потенціалу рівне η_a . При розглядуваній зовнішній дії в тілі реалізується одновимірна за координатою r ситуація.

Хімічний потенціал η справджує однорідне рівняння Гельмгольца, яке в сферичних координатах має вигляд

$$\frac{d^2 \eta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\eta}{dr} - \kappa^2 \eta = 0 \quad (4.46)$$

та граничні умови (4.37) на поверхнях $r = R_B$, $r = R_3$ кулі.

Надалі обмежимося розглядом двох випадків: суцільної кулі та сферичної порожнини у безмежному середовищі. Для суцільної кулі

(область $r \leq R$) розв'язком рівняння (4.46), що справджує граничну умову (4.37) на поверхні $r = R$ та умову обмеженості при $r \rightarrow 0$ є

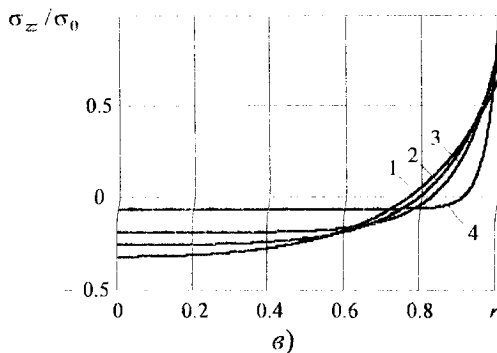
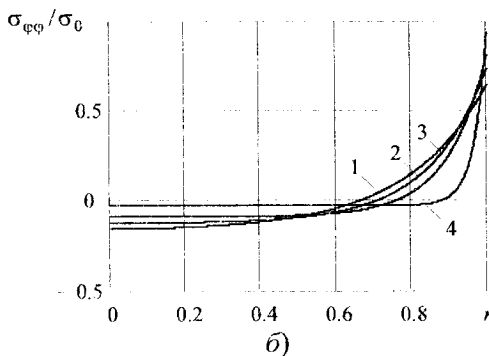
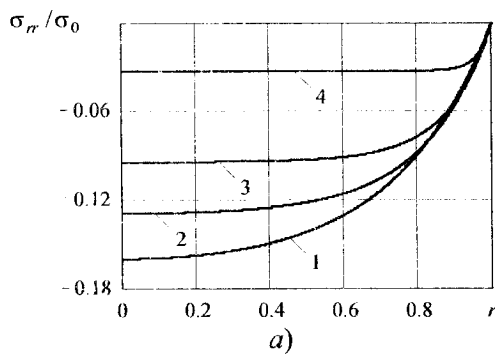


Рис.4.6. Розподіл напружень у циліндрі

$$\eta = \eta_a \frac{R \operatorname{sh}(\kappa r)}{r \operatorname{sh}(\kappa R)}. \quad (4.47)$$

Ненульові компоненти вектора переміщення \vec{u} та тензора напружень $\hat{\sigma}$ визначаються формулами

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{a_0 \eta_a}{2\alpha_{ee}} \frac{R}{\kappa^2 r^2} \left(s_{\kappa r} + \frac{4\alpha_{ee}}{3\alpha_{ee} + 2\alpha_{ee}} \frac{r^3}{R^3} s_{\kappa} \right), \\ \sigma_{rr} &= -2a_0 \eta_a \frac{1}{\kappa^2 R^2} \left(s_{\kappa} - \frac{R^3}{r^3} s_{\kappa r} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} &= -a_0 \eta_a \frac{1}{\kappa^2 R^2} \left(2s_{\kappa} + \frac{R^3}{r^3} s_{\kappa r} - \kappa^2 \frac{R^3}{r} \frac{\operatorname{sh}(\kappa r)}{\operatorname{sh}(\kappa R)} \right), \end{aligned} \quad (4.48)$$

де

$$s_{\kappa} = \frac{\kappa R \operatorname{ch}(\kappa R) - \operatorname{sh}(\kappa R)}{\operatorname{sh}(\kappa R)}, \quad s_{\kappa r} = \frac{\kappa r \operatorname{ch}(\kappa r) - \operatorname{sh}(\kappa r)}{\operatorname{sh}(\kappa R)}. \quad (4.49)$$

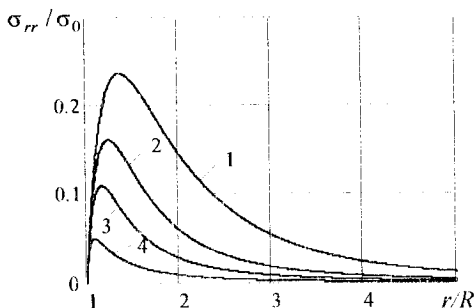
Для безмежного середовища зі сферичною порожниною (область $r \geq R$) маємо

$$\eta = \eta_a \frac{R}{r} \exp(\kappa(R-r)), \quad (4.50)$$

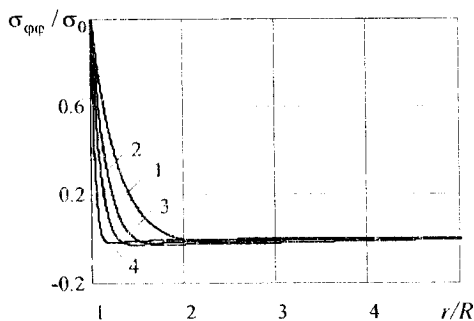
$$\begin{aligned} u_r &= \frac{a_0 \eta_a}{2\alpha_{ee}} \frac{R}{\kappa^2 r^2} [(1 + \kappa r) \exp(\kappa(R-r)) - 1 - \kappa R], \\ \sigma_{rr} &= 2a_0 \eta_a \frac{R}{\kappa^2 r^3} [1 + \kappa R - (1 + \kappa r) \exp(\kappa(R-r))], \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} &= a_0 \eta_a \frac{R}{\kappa^2 r^3} [(1 + \kappa r + \kappa^2 r^2) \exp(\kappa(R-r)) - 1 - \kappa R]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Аналіз формул для напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ у середовищах зі сферичною та циліндричною порожнинами показує, що при прямуванні до нуля радіуса порожнини, величина напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ залишається обмеженою.

Розподіл напружень $\sigma_{rr}/\sigma_0, \sigma_{\varphi\varphi}/\sigma_0$ у середовищі зі сферичною порожниною показано відповідно на рис.4.7-а,б. Криві 1-4 відповідають $\kappa R = 2, 5, 10, 30$.



а)



б)

Рис.4.7. Розподіл напружень у середовищі зі сферичною порожниною

Для оцінки впливу кривини на поверхневі напруження проведемо порівняння розв'язків задач для шару та суцільної кулі, а також шару та циліндра. В результаті одержуємо

$$\sigma_k \equiv \sigma_{\varphi\varphi}^K(R=l) - \sigma_{yy}(l) = -a_0 \eta_a \frac{1}{\kappa l} \left(3 \frac{\kappa l \operatorname{th}(\kappa l) - 1}{\kappa l} - \operatorname{th}(\kappa l) \right),$$

$$\sigma_c \equiv \sigma_{\varphi\varphi}^H(R=l) - \sigma_{yy}(l) = -a_0 \eta_a \frac{1}{\kappa l} \left(2 \frac{I_1(\kappa l)}{I_0(\kappa l)} - \operatorname{th}(\kappa l) \right), \quad (4.52)$$

де індексами «К» та «Ц» відзначено напруження у кулі та циліндрі відповідно.

При прямуванні характерного розміру тіла до безмежності поверхневі напруження у кулі і циліндрі прямують до значень відповідних напружень у шарі. Найбільшими поверхневими напруженнями є напруження у шарі, меншими у циліндрі і найменшими у кулі. Це й ілюструють графіки на рис.4.8, де показано залежність σ_k/σ_0 , σ_c/σ_0 (штрихова та суцільна лінії відповідно) від параметра $L \equiv \kappa l$.

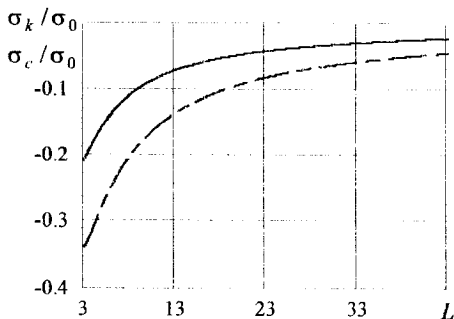


Рис.4.8. Залежність поверхневих напружень σ_k , σ_c від характерного розміру тіла

Поверхневий натяг f_p у кулі визначають за формулою [13]

$$f_p = \frac{1}{2\pi R} \int_{r_a}^R \int_0^{2\pi} r \sigma_{\varphi\varphi} dr, \quad (4.53)$$

де точка r_a точка переходу приповерхневих розтягуючих напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ у стискаючі, яка справджує рівняння

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r_a) = 0.$$

Використовуючи третє співвідношення системи (4.51), для f_p одержуємо

$$f_p = \frac{a_0 \eta_a}{\kappa^2 R^2} \left[s_{\kappa} (R^2 - r_a^2) + \right.$$

$$+ \frac{\kappa R^3}{\text{sh}(\kappa R)} \left(\frac{\text{sh}(\kappa R)}{\kappa R} - \frac{\text{sh}(\kappa r_a)}{\kappa r_a} - \text{ch}(\kappa R) + \text{ch}(\kappa r_a) \right) \Bigg]. \quad (4.54)$$

У наближенні $\exp(\kappa R) \gg \kappa R$, для точки r_a переходу розтягуючих напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ у стискаючі та поверхневого натягу одержуємо

$$r_a = R \left(1 - \frac{\ln(\kappa R)}{\kappa R} \right),$$

$$f_p = \frac{a_0 \eta_a}{\kappa} \left[1 - \frac{2}{\kappa R} - \frac{\ln(\kappa R)}{\kappa R} \left(2 - \frac{\ln(\kappa R)}{\kappa R} \right) \right]. \quad (4.55)$$

Порівняння формул (4.15), (4.16) та (4.55) показує, що за прийнятого наближення положення точки x_a переходу розтягуючих напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ у стискаючі у шарі співпадає зі значенням точки r_a для напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ у кулі. Поверхневий натяг у шарі є більшим від поверхневого натягу у кулі, радіус якої дорівнює півтовщині шару ($R=l$). Для розглядуваного матеріалу, зі збільшенням характерного розміру тіла ($L \equiv R=l$), поверхневий натяг прямує до свого усталеного значення. При цьому значення поверхневого натягу у кулі прямує до величини натягу у шарі. Це ілюструють графіки на рис.4.9, на якому представлено залежність приведенного поверхневого натягу f_p/f_p^0 ($f_p^0 \equiv a_0 \eta_a / \kappa$) у шарі (крива 1) та кулі (крива 2) від параметра $L = \kappa l = \kappa R$.

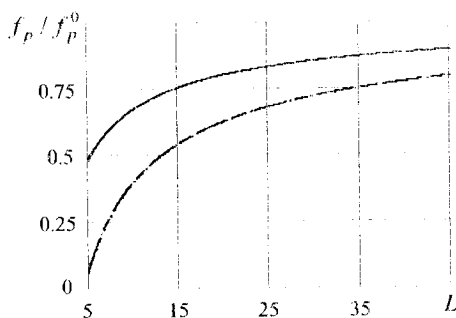


Рис.4.9. Залежність поверхневого натягу у кулі та шарі від характерного розміру тіла

4.3. Рівноважні приконтактні явища в тілах простої геометричної конфігурації

Вище показано, що врахування структурної неоднорідності (енергії зв'язку) дозволяє в об'ємному підході описувати закономірності фізико-механічних полів у приповерхневій області тіла. Значний науковий та практичний інтерес має дослідження таких закономірностей у приконтактних областях. Вивчимо вплив контактуючого тіла на приповерхневу неоднорідність на прикладі пружних тіл простої геометричної конфігурації.

4.3.1. Пружний півпростір, що контактує з шаруватою плівкою

Розглянемо кусково-однорідне тіло (півпростір-двошарова плівка), віднесене до системи координат $\{x, y, z\}$, яке займає область $x \leq l_2$ ($x \leq 0$ – півпростір, $0 \leq x \leq l_1$, $l_1 \leq x \leq l_2$ – контактуючі шари). Вважаємо, що тіло вільне від зовнішнього силового навантаження. На поверхнях контакту $x = 0$, $x = l_1$ приймаємо умови ідеального контакту (випадок 1), чи допускаємо проковзування плівки відносно півпростору (випадок 2).

Механічні поля у півпросторі та шаруватій плівці, при нехтуванні впливом деформації на густину, справджують систему рівнянь

$$\frac{d\sigma_{xx}^{(i)}}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\sigma_{yy}^{(i)}}{dx^2} = \frac{d^2\sigma_{zz}^{(i)}}{dx^2} = a_0^{(i)} \frac{d^2\eta^{(i)}}{dx^2},$$

$$\frac{d^2\eta^{(i)}}{dx^2} - \kappa_i^2 \eta^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (4.56)$$

$$u_x^{(i)} = -\frac{a_0^{(i)}}{2\alpha_{ee}^{(i)}} \int \eta^{(i)}(x) dx - \frac{a_{ee}^{(i)} + 2\alpha_{ee}^{(i)}}{2\alpha_{ee}^{(i)}(3a_{ee}^{(i)} + 2\alpha_{ee}^{(i)})} \left(C_2 \frac{x^2}{2} + C_1 x \right) -$$

$$-\frac{a_{ee}^{(i)} + 2\alpha_{ee}^{(i)}}{4\alpha_{ee}^{(i)}(3a_{ee}^{(i)} + 2\alpha_{ee}^{(i)})} C_2 (y^2 + z^2) + C_5,$$

$$u_y^{(i)} = \frac{a_{ee}^{(i)} + 2\alpha_{ee}^{(i)}}{2\alpha_{ee}^{(i)}(3a_{ee}^{(i)} + 2\alpha_{ee}^{(i)})} (C_2 x + C_1) y,$$

$$u_z^{(i)} = \frac{a_{ee}^{(i)} + 2\alpha_{ee}^{(i)}}{2\alpha_{ee}^{(i)}(3a_{ee}^{(i)} + 2\alpha_{ee}^{(i)})} (C_2 x + C_1) z.$$

Тут “0” – індекс, що відзначає механічні поля у півпросторі; “1” – індекс, що відзначає механічні поля у контактуючому з півпростором шарі; “2” – індекс, що відзначає механічні поля у зовнішньому шарі.

Зазначимо, що останні три рівняння системи (4.56) отримано з використанням співвідношення Коші в припущенні про одновимірність деформації та $e_{xy} = 0$, $e_{xz} = 0$.

Граничні умови приймаємо у вигляді

$$\eta^{(2)} = \eta_{2a}, \quad \sigma_{xx}^{(2)} = 0 \quad (4.57)$$

на поверхні шару $x = l_2$;

$$|\eta^{(0)}| < K_\eta = const, \quad |\hat{\sigma}^{(0)}| < K_\sigma = const \quad (4.58)$$

в області півпростору при $x \rightarrow -\infty$;

$$\eta^{(j)} + H_*^{(j)} = \eta^{(j+1)} + H_*^{(j+1)}, \quad g_{mm}^{(j)} \frac{d\eta^{(j)}}{dx} = -g_{mm}^{(j+1)} \frac{d\eta^{(j+1)}}{dx},$$

$$\sigma_{xx}^{(j)} = \sigma_{xx}^{(j+1)}, \quad u_x^{(j)} = u_x^{(j+1)}, \quad j = 0, 1 \quad (4.59)$$

на поверхнях $x = 0$, $x = l_1$, а також

$$u_y^{(1)} = u_y^{(2)}, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} \quad (4.60)$$

на поверхні $x = l_1$ і

$$u_y^{(0)} = u_y^{(1)}, \quad u_z^{(0)} = u_z^{(1)} \quad (4.61)$$

на поверхні $x = 0$ для випадку 1.

У випадку 2 напруження у покритті повинні справджувати умову самозрівноваженості

$$\int_0^{l_1} \sigma_{yy}^{(1)}(x) dx + \int_{l_1}^{l_2} \sigma_{yy}^{(2)}(x) dx = 0. \quad (4.62)$$

Розв'язок системи рівнянь (4.56), який справджує умови (4.57)-(4.62) має вигляд

$$\begin{aligned} \eta^{(0)} &= \frac{1}{D} \left\{ \alpha_{10} H_{10} [\alpha_{21} \operatorname{ch}(\kappa_1 l_1) \operatorname{ch}(k_2^1) + \operatorname{sh}(\kappa_1 l_1) \operatorname{sh}(k_2^1)] + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{20} [\eta_{2a} + H_{21} \operatorname{ch}(k_2^1)] \right\} \exp(\kappa_0 x), \\ \eta^{(1)} &= \frac{1}{D} \left\{ (\eta_{2a} + H_{21} \operatorname{ch}(k_2^1)) [\alpha_{20} \operatorname{ch}(\kappa_1 x) + \alpha_{21} \operatorname{sh}(\kappa_1 x)] - \right. \\ &\quad \left. - H_{10} [\operatorname{sh}(k_2^1) \operatorname{ch}(\kappa_1 (l_1 - x)) + \alpha_{21} \operatorname{ch}(k_2^1) \operatorname{sh}(\kappa_1 (l_1 - x))] \right\}, \\ \eta^{(2)} &= \frac{1}{D} \{ \eta_{2a} [r_{10} \operatorname{sh}(\kappa_2 (x - l_1)) + \alpha_{20} r_{01} \operatorname{ch}(\kappa_2 (x - l_1))] - \\ &\quad - (H_{10} + r_{10} H_{21}) \operatorname{sh}(\kappa_2 (l_2 - x)) \}; \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\sigma_{xx}^{(i)} = 0, \quad \sigma_{yy}^{(i)} = \sigma_{zz}^{(i)} = a_0^{(i)} \eta^{(i)} \quad (4.64)$$

у випадку 1 та

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(i)} &= 0, \quad \sigma_{yy}^{(i)} = \sigma_{zz}^{(i)} = a_0^{(i)} \eta^{(i)} + \\ &+ \frac{1}{D l_2} \left\{ - \frac{a_0^{(1)}}{\kappa_1} \left[\alpha_{21} (\eta_{2a} + H_{21} \operatorname{ch}(k_2^1)) (r_{10} - 1) - \right. \right. \\ &\quad \left. - H_{10} [\operatorname{sh}(k_2^1) \operatorname{sh}(\kappa_1 l_1) + \alpha_{21} \operatorname{ch}(k_2^1) (\operatorname{ch}(\kappa_1 l_1) - 1)] \right\} - \\ &- \frac{a_0^{(2)}}{\kappa_2} \left[\eta_{2a} [r_{10} (\operatorname{ch}(k_2^1) - 1) + \alpha_{20} r_{01} \operatorname{sh}(k_2^1)] - \right. \\ &\quad \left. - (H_{10} + r_{10} H_{21}) (\operatorname{ch}(k_2^1) - 1) \right] \Bigg\} \end{aligned} \quad (4.65)$$

у випадку 2.

Тут

$$\alpha_{ij} = \frac{g_{mn}^{(i)} \kappa_l}{g_{mn}^{(j)} \kappa_j},$$

$$H_{ij} = H_*^{(i)} - H_*^{(j)}, \quad k_2^1 = \kappa_2(l_2 - l_1),$$

$$D = \alpha_{20} r_{01} \operatorname{ch}(k_2^1) + r_{10} \operatorname{sh}(k_2^1),$$

$$r_{ij} = \operatorname{ch}(\kappa_i l_i) + \alpha_{ij} \operatorname{sh}(\kappa_i l_i). \quad (4.66)$$

Аналіз формул (4.63)-(4.65) показує, що при однакових характеристиках матеріалів півпростору та контактуючих шарів зникає приконтактна неоднорідність механічних полів, а система півпростір-двошарова плівка поводить себе як суцільний півпростір. На цій основі з одержаного розв'язку (4.63)-(4.65), прийнявши характеристики (властивості) шарів "1" і "2" однаковими, як частковий випадок запишемо формули, що описують рівноважні механічні поля в системі півпростір-шар. Зберігаючи для шару індекс "1", одержуємо

$$\eta^{(0)} = \frac{\eta_{1a} + H_{10} \operatorname{ch}(\kappa_1 l)}{r_{01}} \exp(\kappa_0 x), \quad (4.67)$$

$$\eta^{(1)} = \frac{\eta_{1a} [\operatorname{sh}(\kappa_1 x) + \alpha_{10} \operatorname{ch}(\kappa_1 x)] - H_{10} \operatorname{sh}(\kappa_1 (l-x))}{r_{01} \alpha_{10}}, \quad (4.68)$$

$$\sigma_{yy}^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{\eta_{1a} + H_{10} \operatorname{ch}(\kappa_1 l)}{r_{01}} \exp(\kappa_0 x), \quad (4.69)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = a_0^{(1)} \left[\eta_{1a} \frac{\operatorname{sh}(\kappa_1 x) + \alpha_{10} \operatorname{ch}(\kappa_1 x)}{r_{01} \alpha_{10}} - H_{10} \frac{\operatorname{sh}(\kappa_1 (l-x))}{r_{01} \alpha_{10}} \right] \quad (4.70)$$

у випадку 1 та

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = \frac{a_0^{(1)}}{\alpha_{10} r_{01}} \left[\eta_{1a} \left(\operatorname{sh}(\kappa_1 x) + \alpha_{10} \operatorname{ch}(\kappa_1 x) + \frac{1-r_{10}}{\kappa_1 l} \right) - \left(\operatorname{sh}(\kappa_1 (l-x)) - \frac{\operatorname{ch}(\kappa_1 l) - 1}{\kappa_1 l} \right) H_{10} \right] \quad (4.71)$$

у випадку 2.

Значимо, що при відсутності контактуючого шару (тобто у півпросторі) вирази для хімічного потенціалу $\eta^{(0)}$ та напружень $\sigma_{yy}^{(0)}$ мають вигляд:

$$\eta^{(0)} = \eta_a \exp(\kappa_0 x), \quad \sigma_{yy}^{(0)} = a_0^{(0)} \eta_a \exp(\kappa_0 x). \quad (4.72)$$

Порівнюючи формули (4.69) та (4.72) для напружень $\sigma_{yy}^{(0)}$ при $x = 0$, бачимо, що наявність контактуючого шару приводить до зменшення розтягуючих поверхневих напружень у півпросторі, порівняно з півпростором без покриття, чи перетворює їх у стискаючі.

З формул (4.68) слідує, що для характеристик матеріалів шару і півпростору, а також товщин l таких, що справджують умову

$$\kappa_1 l = \operatorname{arccsh} \left(\frac{H_{0*} - H_{0a}}{H_{0*} - H_{1*}} \right), \quad (4.73)$$

хімічний потенціал $H^{(0)}$ у півпросторі, що контактує з одношаровою плівкою не залежить від координати x і дорівнює своєму початковому значенню $H_*^{(0)}$.

Аналіз формул (4.64), (4.65) показує, що при ідеальному контакті напруження на зовнішній поверхні покриття (одно- чи двошарової плівки) є постійними і рівними

$$\sigma_{yy}^{(n)*} = \sigma_{zz}^{(n)*} = \eta_{na} a_0^{(n)}, \quad (4.74)$$

тобто вони повністю визначаються поверхневим значенням хімічного потенціалу та характеристиками матеріалу зовнішнього (n -го) шару.

Залежно від знаку H_{10} контактні напруження у шарі (півпросторі) можуть бути як розтягуючими, так і стискаючими. При цьому умова проковзування приводить до зменшення напружень на вільній поверхні шару. Це ілюструють графіки на рис. 4.10, 4.11. На рис. 4.10 показано розподіл приведених напружень $\sigma_{yy}^{(1)}/\sigma_0^{(1)}$ у шарі при ідеальному контакті з півпростором при $\alpha_{10} = 0.5$, $\zeta_1 \equiv \kappa_1 l = 5, 10, 30$ (криві 1-3), $H_{10}/\eta_{1a} = 0.5; -0.5$ (суцільні та штрих-пунктирні лінії), $\sigma_0^{(1)} = a_0^{(1)} \eta_{1a}$. На рис. 4.11 показано розподіл напружень $\sigma_{yy}^{(1)}/\sigma_0^{(1)}$ у шарі при проковзуванні на поверхні контакту шару з півпростором при для тих же параметрів.

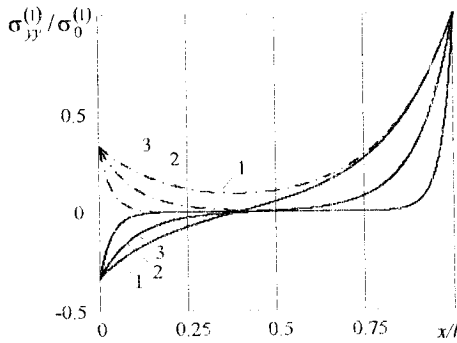


Рис.4.10. Розподіл напружень у шарі при ідеальному контакті з півпростором

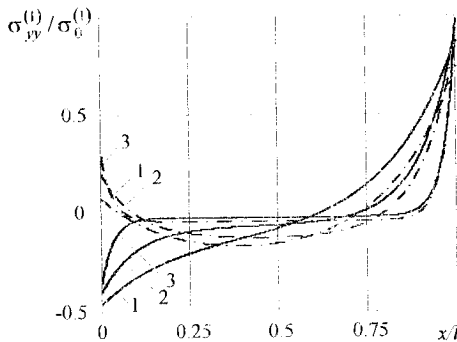


Рис.4.11. Розподіл напружень у шарі при проколюванні на поверхні контакту з півпростором

Для встановлення впливу контактуючого тіла (півпростору) на поверхневі напруження на вільній поверхні шару проведемо порівняння напружень у вільному σ_{yy}^b та контактуючому з півпростором σ_{yy}^p шарах. Результати числового дослідження приведених напружень $\sigma_w \equiv (\sigma_{yy}^b - \sigma_{yy}^p) / \sigma_0^{(I)}$ на вільній поверхні тіла показано на рис. 4.12. Криві 1-4 відповідають $H_{10} / \eta_{1a} = 0.8; 0.4; -0.4; -0.8$. При цьому на поверхні контакту $x = 0$ приймалися умови, що відповідають випадку 2.

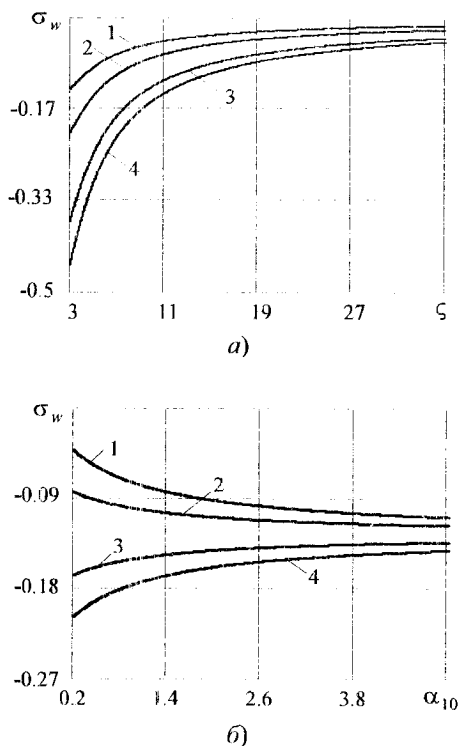


Рис.4.12. Залежність приведених напружень σ_w на вільній поверхні шару, що контактує з півпростором, від товщини шару (рис. а) та параметра α_{10} (рис. б)

На основі проведених обчислень можна стверджувати, що нанесення покриття на тіло зменшує у ньому розтягуючі поверхневі напруження або приводить до виникнення у ньому стискаючих поверхневих напружень. Вибором характеристик (фізичних та геометричних) покриття можна ефективно регулювати величину напружень як на вільній поверхні покриття, так і на поверхні тіла, а тим самим керувати параметрами міцності тіла та покриття.

4.3.2. Сферичне включення у безмежному середовищі

Деформівну систему сферичне включення у безмежному середовищі віднесемо до сферичної системи координат $\{r, \varphi, \psi\}$, центр якої співпадає з центром кулі радіуса R . Неоднорідний рівноважний стан, що встановлюється в системі, зумовлений відмінністю початкових значень хімічних потенціалів навколишнього середовища $H_*^{(0)}$ та кулі $H_*^{(1)}$.

Система рівнянь, що описує рівновагу такого кусково-однорідного тіла, записана для хімічних потенціалів $\eta^{(i)}$ та ненульових компонент $u^{(i)} \equiv u_r^{(i)}$ вектора переміщення $\vec{u}^{(i)}$, має вигляд

$$\frac{d^2 \eta^{(i)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\eta^{(i)}}{dr} - \kappa_i^2 \eta^{(i)} = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u^{(i)}) \right] = m_i \frac{d\eta^{(i)}}{dr}, \quad i = 0; 1, \quad (4.75)$$

де

$$m_i = -\frac{a_{em}^{(i)}}{a_{ee}^{(i)} + 2\alpha_{ee}^{(i)}} \equiv -\frac{a_m^{(i)}}{2\alpha_{ee}^{(i)}},$$

індекс $i = 0$ відповідає оточенню, а $i = 1$ – кулі.

Умови спряження на поверхні $r = R$ є такими

$$\eta^{(0)} = \eta^{(1)} + H_{10}, \quad u^{(0)} = u^{(1)},$$

$$\begin{aligned} & (a_{ee}^{(0)} + 2\alpha_{ee}^{(0)}) \frac{du^{(0)}}{dr} + 2a_{ee}^{(0)} \frac{u^{(0)}}{r} + a_{em}^{(0)} \eta^{(0)} = \\ & = (a_{ee}^{(1)} + 2\alpha_{ee}^{(1)}) \frac{du^{(1)}}{dr} + 2a_{ee}^{(1)} \frac{u^{(1)}}{r} + a_{em}^{(1)} \eta^{(1)}, \end{aligned}$$

$$g_{mm}^{(0)} \frac{d\eta^{(0)}}{dr} = -g_{mm}^{(1)} \frac{d\eta^{(1)}}{dr}. \quad (4.76)$$

Приймаємо також умови обмеженості розв'язку на безмежності в середовищі та у центрі кулі

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} |\eta^{(0)}| < A_0, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} |\eta^{(1)}| < A_1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} |u^{(0)}| < B_0, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} |u^{(1)}| < B_1. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Для хімічного потенціалу та ненульових компонент тензора напружень з (4.75)-(4.77) одержуємо

$$\begin{aligned} \eta^{(0)} &= -D_0 \frac{R}{r} \exp(\kappa_0(R-r)), \\ \eta^{(1)} &= D_1 \frac{R}{r} \operatorname{sh}(\kappa_1 r); \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= 2a_0^{(0)} D_0 \frac{R}{r} \left[\frac{1 + \kappa_0 r}{\kappa_0^2 r^2} \exp(\kappa_0(R-r)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^2}{r^2} \left(d_1 \frac{D_1 m_1}{D_0 m_0} \frac{\kappa_1 R \operatorname{ch}(\kappa_1 R) - \operatorname{sh}(\kappa_1 R)}{\kappa_1^2 R^2} - \frac{1 + \kappa_0 R}{\kappa_0 R^2} \right) \right], \\ \sigma_{rr}^{(1)} &= 2a_0^{(1)} D_1 \left(\frac{R}{r} \frac{\kappa_1 r \operatorname{ch}(\kappa_1 r) - \operatorname{sh}(\kappa_1 r)}{\kappa_1^2 r^2} - d_2 \frac{\kappa_1 R \operatorname{ch}(\kappa_1 R) - \operatorname{sh}(\kappa_1 R)}{\kappa_1^2 R^2} \right), \\ \sigma_{\psi\psi}^{(0)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= -a_0^{(0)} D_0 \frac{R}{r} \left[\frac{1 + \kappa_0 r + \kappa_0^2 r^2}{\kappa_0^2 r^2} \exp(\kappa_0(R-r)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^2}{r^2} \left(d_1 \frac{D_1 m_1}{D_0 m_0} \frac{\kappa_1 R \operatorname{ch}(\kappa_1 R) - \operatorname{sh}(\kappa_1 R)}{\kappa_1^2 R^2} - \frac{1 + \kappa_0 R}{\kappa_0 R^2} \right) \right], \\ \sigma_{\psi\psi}^{(1)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} &= -a_0^{(1)} D_1 \left(\frac{R}{r} \frac{\kappa_1 r \operatorname{ch}(\kappa_1 r) - (1 + \kappa_0^2 r^2) \operatorname{sh}(\kappa_1 r)}{\kappa_1^2 r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2d_2 \frac{\kappa_1 R \operatorname{ch}(\kappa_1 R) - \operatorname{sh}(\kappa_1 R)}{\kappa_1^2 R^2} \right), \end{aligned} \quad (4.79)$$

де

$$D_0 = \frac{\alpha_{10}}{z_r} (1 - H_{10}) \operatorname{ch}(\kappa_1 R), \quad D_1 = \frac{1}{z_r} (1 - H_{10}),$$

$$z_r = \operatorname{sh}(\kappa_1 R) + \alpha_{10} \operatorname{ch}(\kappa_1 R),$$

$$d_1 = 3 \frac{a_{ee}^{(1)} + 2\alpha_{ee}^{(1)}}{4\alpha_{ee}^{(0)} + 3a_{ee}^{(1)} + 2\alpha_{ee}^{(1)}}, \quad d_2 = \left(1 - \frac{\alpha_{ee}^{(0)}}{\alpha_{ee}^{(1)}} \right) \frac{3a_{ee}^{(1)} + 2\alpha_{ee}^{(1)}}{4\alpha_{ee}^{(0)} + 3a_{ee}^{(1)} + 2\alpha_{ee}^{(1)}}.$$

Аналіз розв'язку показує, що характер приконтактної неоднорідності у кулі є таким же, як і характер приповерхневої неоднорідності у шарі системи шар-півпростір.

Для дослідження впливу кривини на приконтактні явища порівняємо одержаний розв'язок з формулами, що описують рівноважний стан шару (область $|x| \leq l_1$), що контактує з півпросторами (області $x \leq -l_1$, $x \geq l_1$). Величини, які відносяться до шару відзначатимемо індексом "1", а індексами "0", "2" – величини, що відносяться до півпросторів $x \leq -l_1$, $x \geq l_1$ відповідно. Вважаємо, що фізико-механічні характеристики півпросторів є однаковими.

Рівноважний стан такої системи, в межах прийнятих наближень, описується співвідношеннями (4.56) та відповідно модифікованими умовами (4.57)-(4.61). Розв'язок даної системи рівнянь, записаний для хімічного потенціалу в області шару та ненульових компонент тензора напружень в кусково-однорідному тілі має вигляд

$$\eta^{(1)}(x) = \frac{H_{01}\alpha_{01}}{r_{01}} \operatorname{ch}(\kappa_1 x), \quad (4.80)$$

$$\sigma_{yy}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(0)} = -a_0^{(0)} H_{01} \frac{\operatorname{sh}(\kappa_1 l_1)}{r_{01}} \exp(\kappa_0(l_1 + x)),$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = a_0^{(1)} H_{01} \frac{\alpha_{01}}{r_{01}} \operatorname{ch}(\kappa_1 x),$$

$$\sigma_{yy}^{(2)} = \sigma_{zz}^{(2)} = -a_0^{(0)} H_{01} \frac{\operatorname{sh}(\kappa_1 l)}{r_{01}} \exp(\kappa_0(l_1 - x)), \quad (4.81)$$

де $H_{01} = 1 - H_{10}$.

Аналіз одержаних співвідношень показує, що залежність поверхневих напружень від кривини є аналогічною до такої залежності, вивченої у підрозділі 4.2.

Якщо шар перебуває у навколишньому середовищі, яке не чинить на нього силової дії, то при нехтуванні впливом деформації на густину, його хімічний потенціал описується співвідношенням (4.80), а напруження $\sigma_{yy}^{(1)}$ – співвідношенням

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = a_0^{(1)} H_{01} \frac{\alpha_{01}}{r_{01}} \operatorname{ch}(\kappa_1 l_1) \left(\frac{\operatorname{ch}(\kappa_1 x)}{\operatorname{ch}(\kappa_1 l_1)} - \frac{\operatorname{th}(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1 l_1} \right). \quad (4.82)$$

Дана формула є аналогічною до формули для напружень σ_{yy} у шарі, на поверхнях якого задано постійні значення хімічного потенціалу. Порівнюючи (4.81), (4.82) з формулами (4.57), бачимо, що контактну задачу можна звести до крайової, приймаючи

$$\eta_a = \frac{H_{01} \alpha_{01}}{r_{01}} \operatorname{ch}(\kappa_1 l_1) = \frac{H_{10} \alpha_{01}}{1 + \alpha_{01} \operatorname{th}(\kappa_1 l_1)}.$$

Це підтверджує висновок третього підрозділу, який стосується зростання міцності шару у навколишньому середовищі, що не чинить на нього силової дії, порівняно з міцністю шару в середовищі, що приймається в наближенні вакууму.

4.3.3. Хімічний потенціал на границі контакту

Для визначення хімічного потенціалу, що встановлюється на границі контакту розглянемо систему двох контактуючих шарів, яка віднесена до прямокутної декартової системи координат $\{x, y, z\}$, так що площина $z=0$ співпадає з площиною контакту шарів. Вважаємо, що система перебуває в умовах, у яких

$$e_{yy} = e_{zz} = 0, \quad (4.83)$$

а на її зовнішніх поверхнях $x = -l_0$, $x = l_1$ задано значення $\eta_a^{(i)}$, $i = 0, 1$ хімічних потенціалів $\eta^{(i)}$.

За розглядуваної зовнішньої дії хімічні потенціали $\eta^{(i)}$ справджують третє рівняння системи (4.56) для $i = 0, 1$, умови

$$\begin{aligned}\eta^{(0)} &= \eta_a^{(0)} \quad \text{при } x = -l_0, \\ \eta^{(1)} &= \eta_a^{(1)} \quad \text{при } x = l_1\end{aligned}\quad (4.84)$$

та умови ідеального контакту (4.59) (для $j = 0$) на поверхні $x = 0$.

Розв'язок даної крайової задачі, записаний для хімічного потенціалу, має вигляд

$$\begin{aligned}\eta^{(0)} &= \frac{1}{D} \left\{ \eta_a^{(0)} [\operatorname{sh}(\kappa_1 l_1) \operatorname{ch}(\kappa_0 x) - \alpha_{10} \operatorname{ch}(\kappa_1 l_1) \operatorname{sh}(\kappa_0 x)] + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{10} \operatorname{sh}(\kappa_0 (l_0 + x)) [\eta_a^{(1)} + H_{10} \operatorname{ch}(\kappa_1 l_1)] \right\}, \\ \eta^{(1)} &= \frac{1}{D} \left\{ \eta_a^{(1)} [\operatorname{ch}(\kappa_0 l_0) \operatorname{sh}(\kappa_1 x) + \alpha_{10} \operatorname{sh}(\kappa_0 l_0) \operatorname{ch}(\kappa_1 x)] + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh}(\kappa_1 (l_1 - x)) [\eta_a^{(0)} - H_{10} \operatorname{ch}(\kappa_0 l_0)] \right\},\end{aligned}\quad (4.85)$$

де

$$D = \operatorname{ch}(\zeta_0 l_0) \operatorname{sh}(\zeta_1 l_1) + \alpha_{10} \operatorname{sh}(\zeta_0 l_0) \operatorname{ch}(\zeta_1 l_1).$$

Аналогічно як і у попередньому підрозділі, хімічний потенціал, що встановлюється на поверхні контакту шарів визначається їх фізичними та геометричними характеристиками. Якщо прийняти, що маса у поперечному перерізі тіла $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ у початковий момент часу, коли приповерхнева неоднорідність відсутня, дорівнює масі в актуальний момент часу, то у незв'язаній постановці одержуємо

$$\begin{aligned}H_{10} \equiv H_*^{(1)} - H_*^{(0)} &= \frac{1}{g_{mm}^{(0)} \alpha_{10} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa_0 l_0)} \right) + g_{mm}^{(1)} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa_1 l_1)} \right)} \times \\ &\times \left\{ \eta_a^{(1)} \left[g_{mm}^{(1)} \left(1 + \alpha_{10} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa_1 l_1)} \right) - g_{mm}^{(0)} \alpha_{10} \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa_1 l_1)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \eta_a^{(0)} \left[g_{mm}^{(0)} \left(1 + \alpha_{10} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa_0 l_0)} \right) - g_{mm}^{(1)} \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa_0 l_0)} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.86)$$

Для товстих шарів, товщини яких справджують нерівності $\kappa_0 l_0 \gg 1$, $\kappa_1 l_1 \gg 1$, з (4.86) запишемо

$$H_{10} = (1 + a_{10}) \frac{\eta_a^{(1)} g_{mm}^{(1)} - \eta_a^{(0)} g_{mm}^{(0)}}{g_{mm}^{(0)} \alpha_{10} + g_{mm}^{(1)}}. \quad (4.87)$$

Таке значення хімічного потенціалу встановлюється на межі контакту двох півпросторів.

Якщо характеристики контактуючих шарів є однаковими, то з (4.86) одержуємо $H_{10} = 0$ і як результат відсутність приконтактної неоднорідності.

Розділ 5.

ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНИХ ТІЛ ІЗ ВРАХУВАННЯМ СТРУКТУРНОЇ ТА ПРИПОВЕРХНЕВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ

Дано постановку та досліджено розв'язки динамічних задач пружності із врахуванням структурної неоднорідності для тіл простої геометричної конфігурації, що описують вклад поверхневого фактору в акустичну емісію при раптовому утворенні в них нових поверхонь. В останньому підрозділі запропоновано методику вивчення впливу приповерхневої неоднорідності на хвильові процеси та досліджено вплив такої неоднорідності на частоти власних коливань шару. Розділ базується на роботах [9, 14, 77, 123, 124].

5.1. Крайові задачі, що описують вклад поверхневого фактору в акустичну емісію

5.1.1. Вихідна система рівнянь

Відомо, що при утворенні чи зникненні вільної поверхні у тілі виникають механічні коливання у мегагерцевому частотному діапазоні (акустична емісія) [65]. Така ж ситуація спостерігається і у тому випадку, коли в тілі виникають вклучення іншого матеріалу. Використаємо одержані вище співвідношення для опису вкладу приповерхневої неоднорідності в акустичну емісію у деформівному пружному тілі. Враховуючи, що причиною неоднорідності фізико-механічних полів, зумовленої наявністю поверхні, є приповерхнева неоднорідність хімічного потенціалу, утворення вільної поверхні тіла чи вклучення моделюємо заданням відповідного значення хімічного потенціалу на новоутвореній поверхні.

Розглянемо ізотропне деформівне тверде тіло, яке займає область (V) евклідового простору і обмежене поверхнею (∂V) . Вважаємо, що

тіло виділено з безмежного однорідного середовища, яке характеризується хімічним потенціалом H_* та густиною ρ_* . Стан такого середовища приймаємо за початковий стан тіла при миттєвому утворенні всієї поверхні тіла. Якщо в тілі в момент часу $\tau = +0$ виникає нова вільна від силового навантаження поверхня $(\partial V')$, то вважатимемо, що на ній миттєво встановлюється постійне значення хімічного потенціалу, яке дорівнює H_a . Таке припущення є наслідком результатів четвертого розділу. У випадку виникнення включення (область (V'') обмежена поверхнею $(\partial V'')$) вважатимемо, що величина потенціалу H , який встановлюється на поверхні контакту $(\partial V'')$ дорівнює рівноважному значенню хімічного потенціалу у новоутвореній кусково-однорідній системі.

Механічні поля в тілі справджують рівняння балансу імпульсу механічного поступального руху та балансу маси, які мають вигляд

$$\frac{\partial \bar{k}_v}{\partial \tau} - \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho + g_{mm} \nabla^2 \eta) = 0. \quad (5.1)$$

Система рівнянь (5.1) разом з визначальними співвідношеннями, які відповідно до (3.23), (3.24) приймаємо у вигляді

$$\bar{k}_v = \rho \bar{v}, \quad \rho = \rho_* - a_{mm} \eta - a_{em} e,$$

$$\hat{\sigma} = 2\alpha_{ee} \hat{e} + (a_{ee} e + a_{em} \eta) \hat{I}, \quad (5.2)$$

виразами, що пов'язують вектор швидкості \bar{v} та тензор деформації \hat{e} з вектором переміщення \bar{u} , складає повну систему рівнянь моделі пружного тіла із врахуванням структурної неоднорідності (енергії зв'язку). Ця система рівнянь є нелінійною за рахунок нелінійності імпульсу механічного поступального руху \bar{k}_v . Її можна лінеаризувати, якщо знехтувати впливом кульової складової e тензора деформації \hat{e} і хімічного потенціалу η на імпульс \bar{k}_v , тобто прийняти для нього вигляд (3.29).

Якщо за розв'язуючі функції вибрати вектор переміщення \bar{u} та хімічний потенціал η , то лінеаризоване рівняння руху набуває вигляду

$$\alpha_{ee} \nabla^2 \bar{u} + (\alpha_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + \alpha_{em} \bar{\nabla} \eta - \rho_* \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} = 0. \quad (5.3)$$

Якщо за розв'язуючі функції вибрати тензор напружень $\hat{\sigma}$ та хімічний потенціал η , то до системи рівнянь (5.1), (5.3) необхідно додати умову сумісності тензора деформації (3.37).

Сформульована вище система рівнянь разом з відповідними граничними та початковими умовами дозволяє описувати динамічні механічні поля у структурно неоднорідних деформівних системах, зокрема, досліджувати вклад поверхневого фактору в акустичну емісію при виникненні в тілах нових поверхонь, а також у випадку, коли такі поверхні зникають. Якщо у тілі виникають включення іншого матеріалу, то співвідношення, приведені вище, необхідно записувати для кожного з контактуючих тіл.

При формулюванні крайових умов, як згадувалось вище, за початковий стан тіла (область (V)) обмежена поверхнею $(\partial V) \cup (\partial V')$, приймаємо стан тіла, у якого така поверхня відсутня (область $(V) \cup (V')$) обмежена поверхнею (∂V) . Тому крайові умови для тіла, вільного від силового навантаження, при утворенні в ньому вільної поверхні запишемо у вигляді

$$\hat{\sigma} \cdot \bar{n} = 0, \quad \eta = \eta_a \quad \text{на поверхні } (\partial V) \cup (\partial V') \quad (5.4)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^0(\bar{r}), \quad \eta = \eta^0(\bar{r}), \quad (5.5)$$

при $\tau = 0$ в області (V) , де $\hat{\sigma}^0(\bar{r})$ – напруження у тілі, що займає область (V) з поверхнею (∂V) ; $\eta^0(\bar{r})$ – хімічний потенціал у тілі, що займає область (V) , обмежену поверхнею (∂V) .

При виникненні в тілі (область (V)) обмежена поверхнею (∂V)) внутрішнього пружного включення (область (V'')) обмежена поверхнею $(\partial V'')$) приймаємо

$$\hat{\sigma} \cdot \bar{n} = 0, \quad \eta = \eta_a \quad \text{на поверхні } (\partial V),$$

умови ідеального механічного контакту (3.33) та

$$\eta = \eta_a^* \quad \text{на поверхні } (\partial V''), \quad (5.6)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_*^0(\vec{r}), \quad \eta = \eta_*^0(\vec{r}) \quad (5.7)$$

при $\tau = 0$ в області (V) , де η_a^* – рівноважне значення хімічного потенціалу на поверхні (∂V) у новоутвореній кусково-однорідній системі; $\hat{\sigma}_*^0(\vec{r})$ – рівноважні напруження у тілі без включення; $\eta_*^0(\vec{r})$ – рівноважний хімічний потенціал у тілі без включення.

У випадку безмежних тіл умови (5.4)-(5.7) необхідно доповнити умовами обмеженості розв'язку на безмежності в області тіла.

Зауважимо, що наведена вище постановка динамічних задач пружності із врахуванням енергії зв'язку не враховує причин утворення нових поверхонь чи включень у тілі. Такі причини в рамках моделі пружного тіла природно пов'язати з силовою зовнішньою дією. Для лінеаризованих задач математичної фізики динамічна поведінка тіла є суперпозицією коливань, зумовлених силовим та поверхневим факторами. У даному випадку розглядається вплив приповерхневої неоднорідності, що супроводжує виникнення нових поверхонь, на динамічну поведінку деформівних тіл.

Застосуємо сформульовану вище систему рівнянь до дослідження вкладу поверхневого фактору в акустичну емісію. Будемо нехтувати при цьому впливом кульової складової e тензора деформації $\hat{\epsilon}$ на хімічний потенціал η .

5.1.2. Динамічна поведінка півпростору при миттєвій зміні хімічного потенціалу на його поверхні

Для дослідження динамічної поведінки ізотропного деформівного півпростору (область $x \geq 0$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$) вихідну систему рівнянь перетворюємо до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \kappa^2 \eta \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial \tau^2} = - \frac{a_0}{2c_2^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2},$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = (1 - 2\beta^2) \sigma_{xx} + a_0 \eta, \quad (5.8)$$

де

$$c_1 = \sqrt{(a_{ee} + 2\alpha_{ee})/\rho^*}, \quad c_2 = \sqrt{\alpha_{ee}/\rho^*}, \quad \beta = c_2/c_1.$$

Вважаємо, що в початковий момент часу виникає уся поверхня тіла. Тому, відповідно до (5.4), (5.5), крайові умови та умови обмеженості розв'язку приймаємо у вигляді

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{n} = 0, \quad \eta = \eta_a \quad \text{на поверхні } x = 0, \quad (5.9)$$

$$\hat{\sigma} = 0, \quad \eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad \text{в області } x > 0, \quad (5.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{xx} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \eta = 0. \quad (5.11)$$

Розв'язком першого рівняння системи (5.8), який справджує умови (5.9)-(5.11) є

$$\eta = \eta_a \exp(-kx) \Theta(\tau), \quad (5.12)$$

де

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau = 0 \\ 1 & \text{при } \tau > 0 \end{cases}.$$

Друге рівняння системи (5.8) розв'язуємо, використовуючи перетворення Лапласа [60] за часом τ

$$\begin{aligned} \varphi^L(x, p) &= \int_0^{\infty} \varphi(x, \tau) \exp(-p\tau) d\tau, \\ \varphi(x, \tau) &= \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \varphi^L(x, p) \exp(p\tau) dp. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Його розв'язком, який справджує крайові умови (5.9)-(5.11) у просторі зображень, є

$$\sigma_{xx}^L = -\eta_a \frac{a_0}{2\beta^2} \frac{p}{p^2 - c_1^2 x^2} \left[\exp\left(-\frac{px}{c_1}\right) - \exp(-kx) \right]. \quad (5.14)$$

Використовуючи теорему запізнення [60], у просторі дійсного часу τ одержуємо

$$\sigma_{xx}(x, \tau) = -\frac{a_0}{2\beta^2} \eta_a \left[\operatorname{ch} \left(c_1 \kappa \left(\tau - \frac{x}{c_1} \right) \right) \Theta \left(\tau - \frac{x}{c_1} \right) - \exp(-\kappa x) \operatorname{ch}(c_1 \kappa \tau) \Theta(\tau) \right]. \quad (5.15)$$

Для компонент $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ тензора напружень $\hat{\sigma}$ із співвідношень (5.8), (5.12), (5.15) слідує

$$\sigma_{yy}(x, \tau) = \sigma_{zz}(x, \tau) = -\frac{1-2\beta^2}{2\beta^2} a_0 \eta_a \left\{ \operatorname{ch} \left(c_1 \kappa \left(\tau - \frac{x}{c_1} \right) \right) \Theta \left(\tau - \frac{x}{c_1} \right) - \exp(-\kappa x) \left[\operatorname{ch}(c_1 \kappa \tau) + \frac{2\beta^2}{1-2\beta^2} \right] \Theta(\tau) \right\}. \quad (5.16)$$

Зазначимо, що в усталеному режимі ($\tau \rightarrow \infty$) напруження σ_{xx} дорівнюють нулю, а розподіл напружень σ_{yy}, σ_{zz} визначається збуренням хімічного потенціалу η .

Аналіз формул (5.15), (5.16) показує, що через довільний переріз півпростору $x_0 = \text{const}$ фронт стискаючої хвилі розширення проходить в момент часу $\tau = x_0 / c_1$. Після проходження фронту хвилі величина напружень σ_{xx} у розглядуваній точці зменшується за абсолютною величиною до нуля, а напруження σ_{yy}, σ_{zz} прямують до своїх рівноважних значень $\sigma_{yy}^0, \sigma_{zz}^0$

$$\sigma_{yy}^0 = \sigma_{zz}^0 = a_0 \eta_a \exp(-\kappa x). \quad (5.17)$$

Зазначимо також, що рівноважні поверхневі напруження $\sigma_{yy}^0, \sigma_{zz}^0$ є розтягуючими.

Стрибки $[\sigma_{xx}], [\sigma_{yy}]$ компонент σ_{xx}, σ_{yy} тензора напружень при переході через фронт хвилі визначаються першими доданками у формулах (5.15), (5.16) відповідно. Незалежно від віддалі між розглядуваною точкою та поверхнею, що утворилася, вони дорівнюють

$$[\sigma_{xx}] = -\frac{a_0}{2\beta^2} \eta_a,$$

$$[\sigma_{yy}] = [\sigma_{zz}] = -\frac{1-2\beta^2}{2\beta^2} a_0 \eta_a. \quad (5.18)$$

Результати числового дослідження приведених напружень σ_{xx}/σ_0 , σ_{yy}/σ_0 , проведеного за формулами (5.15), (5.16) представлено на рис. 5.1-5.3 для $\sigma_0 = a_0 \eta_a$, $\nu = 0.19$. Перед фронтом хвилі напруження є розтягуючим і при відході від фронту у глибину тіла зменшуються за експоненційним законом, що й ілюструють графіки на рис.5.1, на якому зображено розподіл у глибину півпростору напружень σ_{xx}/σ_0 , σ_{yy}/σ_0 (відповідно суцільна та штрих-пунктирна лінії) при $kc_1\tau = 6$.

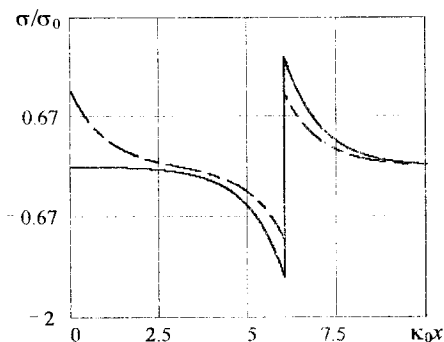


Рис.5.1. Розподіл у глибину півпростору приведених напружень при миттєвому утворенні його поверхні

Після проходження фронту в області, що не перетинається з областю приповерхневої неоднорідності, напруження σ_{xx} , σ_{yy} є стискаючими і зменшуються за абсолютною величиною до нуля. Для точок x_0 , віддалених від поверхні тіла ($kx \gg 1$), напруження у початковий момент часу дорівнюють нулю і при $\tau \rightarrow x_0/c_1$ зростають, досягаючи максимального значення при $\tau = x_0/c_1 - 0$. При $\tau = x_0/c_1$ напруження терплять стрибок, величина якого визначається формулами (5.18) і стають стискаючими. Далі з ростом часу в області

$\kappa x_0 \gg 1$ напруження σ_{xx}, σ_{yy} прямують до нуля за експоненціальним законом. Для точок x_0 , що лежать в області приповерхневої неоднорідності, напруження в момент часу $\tau \rightarrow +0$ відрізняються від нуля, а при $\tau \rightarrow \infty$ прямують до своїх рівноважних значень. Це й ілюструють графіки на рис.5.2, на якому зображено зміну з часом приведених напружень σ_{xx}/σ_0 , σ_{yy}/σ_0 (відповідно суцільна та штрих-пунктирна лінії) при $\kappa x = 6$.

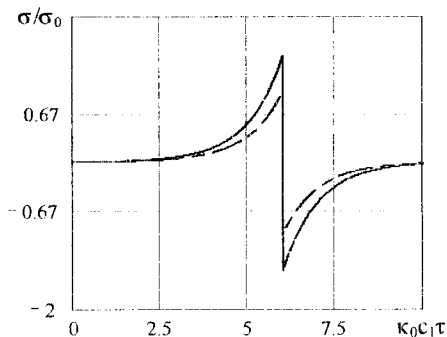


Рис.5.2. Зміна з часом приведених напружень у внутрішній точці півпростору при миттєвому утворенні його поверхні

В області приповерхневої неоднорідності величина напружень перед і за фронтом хвилі залежить від координати x , тоді як у глибинних областях тіла їх величина є практично постійною. Це й ілюструють графіки на рис.5.3, на якому представлено розподіл у глибину півпростору приведених напружень σ_{xx}/σ_0 , σ_{yy}/σ_0 (відповідно суцільна та штрих-пунктирна лінії) перед фронтом $\tau = x/c_1 - 0$ та за фронтом $\tau = x/c_1 + 0$ хвилі (відповідно криві 1,2).

5.1.3. Динамічна поведінка середовища зі сферичною порожниною при миттєвій зміні хімічного потенціалу на його поверхні

Використаємо систему рівнянь (5.1)-(5.3) для опису вкладу приповерхневої неоднорідності в акустичну емісію при утворенні в

безмежному середовищі сферичної порожнини радіуса R . З цією метою подамо вектор переміщення у вигляді суми потенціальної і соленоїдальної складових [58, 96]

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi}. \quad (5.19)$$

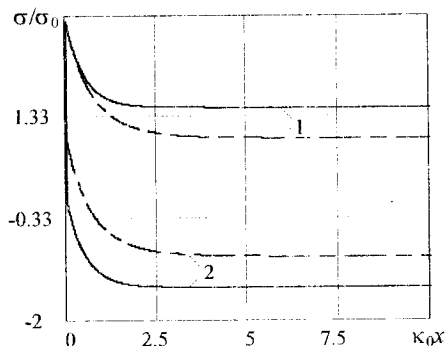


Рис.5.3. Розподіл у глибину півпростору напружень перед та за фронтом хвилі розширення

У розглядуваному випадку

$$\vec{\psi} \equiv 0, \quad (5.20)$$

а тому

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\psi. \quad (5.21)$$

Система вихідних співвідношень, записана для потенціалу переміщення ψ та хімічного потенціалу η у сферичній системі координат $\{r, \varphi, \theta\}$, центр якої співпадає з центром сферичної порожнини, набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \kappa^2 \eta \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = m \eta, \quad (5.22)$$

де

$$m = -\frac{a_0}{2\alpha_{ee}}.$$

Відповідно до (3.26), (5.2), (5.21), ненульові компоненти σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\theta\theta}$ тензора напружень $\hat{\sigma}$ при відомому потенціалі ψ визначаємо за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -4\frac{\rho_*c_2^2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \rho_*\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= -2\rho_*c_2^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - 2\rho_*c_2^2\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \rho_*\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}.\end{aligned}\quad (5.23)$$

У розглядуваному випадку, як і у попередньому підрозділі, в початковий момент часу виникає уся поверхня тіла. Тому для знаходження механічних полів маємо систему рівнянь (5.22), (5.23) в області $r \geq R$, крайові умови

$$-4\rho_*c_2^2\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \rho_*\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} = 0, \quad \eta = \eta_a \quad \text{на поверхні } r = R, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0, \quad \psi = 0, \quad \eta = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial r} = 0 \quad (5.25)$$

для $\tau > 0$ при $r > R$, а також умови обмеженості полів на безмежності

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \eta = 0. \quad (5.26)$$

Розв'язком першого рівняння системи (5.22) є перше співвідношення системи (4.50) помножене на одиничну функцію $\Theta(\tau)$. Друге рівняння цієї системи розв'язуємо, використовуючи перетворення Лапласа (5.13). У просторі зображень, для знаходження гармонічного потенціалу, одержуємо рівняння

$$\frac{d^2\psi^L}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi^L}{dr} - \frac{p^2}{c_1^2}\psi^L = \frac{m}{p}\eta(r), \quad (5.27)$$

граничну умову

$$-\frac{4\mu}{R}\frac{\partial\psi^L}{\partial r} + \rho_*p^2\psi^L = 0 \quad (5.28)$$

при $r = R$ та умову

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi^L = 0. \quad (5.29)$$

З системи співвідношень (5.27)-(5.29) для функції ψ^L одержуємо наступний вираз

$$\psi^L = m\eta_a c_1^2 f(p) \frac{R}{r} \left\{ \left[1 + 4 \frac{c_2 \beta}{R} \varphi(p) (\kappa c_1 - p) \right] \exp\left(-\frac{p}{c_1}(r-R)\right) - \exp(-\kappa(r-R)) \right\}, \quad (5.30)$$

де

$$f(p) = \frac{1}{p(p^2 - \kappa^2 c_1^2)}, \quad \varphi(p) = \frac{1}{p^2 + 4 \frac{c_2^2}{R^2} \left(1 + R \frac{p}{c_1}\right)}.$$

Для компоненти u_r^L вектора перемішень та компонент $\sigma_{rr}^L, \sigma_{\varphi\varphi}^L, \sigma_{\theta\theta}^L$ тензора напружень із співвідношень (5.21), (5.23), (5.30) одержуємо

$$u_r^L = -m\eta_a c_1^2 f(p) \frac{R}{r} \left\{ \left[1 + 4 \frac{c_2 \beta}{R} \varphi(p) (\kappa c_1 - p) \right] \left(1 + r \frac{p}{c_1} \right) \times \exp\left(-\frac{p}{c_1}(r-R)\right) - (1 + \kappa r) \exp(-\kappa(r-R)) \right\},$$

$$\sigma_{rr}^L = m\eta_a p_a c_1^2 f(p) \frac{R}{r} \left\{ \left[p^2 + 4 \frac{c_2^2}{r^2} \left(1 + r \frac{p}{c_1} \right) \right] \left[p^2 + 4 \frac{c_2^2}{R^2} (1 + \kappa R) \right] \times \varphi(p) \exp\left(-\frac{p}{c_1}(r-R)\right) - \left[p^2 + 4 \frac{c_2^2}{r^2} (1 + \kappa r) \right] \exp(-\kappa(r-R)) \right\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^L = \sigma_{\theta\theta}^L = -m\eta_a p_a c_1^2 f(p) \frac{R}{r} \left\{ \left[1 + 4 \frac{c_2 \beta}{R} \varphi(p) (\kappa c_1 - p) \right] \left[p^2 (2\beta^2 - 1) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{c_2^2}{r^2} \left(1 + r \frac{p}{c_1} \right) \exp \left(- \frac{p}{c_1} (r - R) \right) + \\
& + \left[p^2 - 2 \frac{c_2^2}{r^2} (1 + \kappa r + \kappa^2 r^2) \right] \exp(-\kappa(r - R)) \Bigg\}. \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Використовуючи обернене перетворення Лапласа та теорему про згортку, в області оригіналів знаходимо

$$\begin{aligned}
u_r = m\eta_a \frac{R}{\kappa^2 r^2} & \Bigg\{ (1 + \kappa r) [\operatorname{ch}(\kappa c_1 \tau) - 1] \exp(\kappa(R - r)) \Theta(\tau) - \\
& - \left[\operatorname{ch}(\kappa c_1 \tau_r) + \operatorname{sh}(\kappa c_1 \tau_r) - 1 - 4\kappa^2 R r A \left(\frac{\kappa r - 1}{\kappa r} (\exp(-\kappa c_1 \tau_r) - 1) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\kappa R - 2\beta^2}{2} \left[\exp(-p_1 \tau_r) \left(\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \sin(-p_2 \tau_r) - \cos(-p_2 \tau_r) \right) + 1 \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\beta^2}{4} \left[\exp(-p_1 \tau_r) \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \sin(-p_2 \tau_r) + \cos(-p_2 \tau_r) \right) - 1 \right] \right] \right\} \Theta(\tau_r) \Bigg\}, \\
\sigma_{rr} = m\eta_a \rho_* c_1^2 \frac{R}{r} & \Bigg\{ - \exp(\kappa(R - r)) \left[\left(1 + 4\beta^2 \frac{\kappa r + 1}{\kappa^2 r^2} \right) \operatorname{ch}(\kappa c_1 \tau) - \right. \\
& - \left. 4\beta^2 \frac{\kappa r + 1}{\kappa^2 r^2} \right] \Theta(\tau) + \left[\left(1 + 4 \frac{\beta^2}{\kappa^2 r^2} \right) \operatorname{ch}(\kappa c_1 \tau_r) + 4 \frac{\beta^2}{\kappa r} \operatorname{sh}(\kappa c_1 \tau_r) - \right. \\
& - \left. 4 \frac{\beta^2}{\kappa^2 r^2} - 4 \frac{A\beta^2}{\kappa r} \right] - D_1 \frac{R^2}{r^2} [\exp(-\kappa c_1 \tau_r) - 1] + \\
& + 2\kappa R \left[- A_1 \left[\exp(-p_1 \tau_r) \left(\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \sin(-p_2 \tau_r) - \cos(-p_2 \tau_r) \right) + 1 \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -B_1 \left[\exp(-p_1 \tau_r) \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \sin(-p_2 \tau_r) + \cos(-p_2 \tau_r) \right) - 1 \right] \Theta(\tau_r) \Bigg\}, \\
 \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = & m \mu_a \rho_* c_1^2 \frac{R}{r} \left\{ -\exp(\kappa(R-r)) \left[1 - 2 \frac{\beta^2}{\kappa^2 r^2} (1 + \kappa r + \kappa^2 r^2) \right] \times \right. \\
 & \times \operatorname{ch}(\kappa c_1 \tau) + 2 \frac{\beta^2}{\kappa^2 r^2} (1 + \kappa r + \kappa^2 r^2) \Bigg\} \Theta(\tau) + \\
 & + (1 - 2\beta^2) \left[\left[\left(1 - \frac{2}{\kappa^2 r^2} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right) \operatorname{ch}(\kappa c_1 \tau_r) - \frac{2}{\kappa r} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \operatorname{sh}(\kappa c_1 \tau_r) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2}{\kappa^2 r^2} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right] - 4 \frac{A\beta^2}{\kappa r} \left(-B_2 [\exp(-\kappa c_1 \tau_r) - 1] + \right. \right. \quad (5.32) \\
 & \left. \left. + \frac{\kappa R}{2} \right\} - C_2 \beta^2 \left[\exp(-p_1 \tau_r) \left(\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \sin(-p_2 \tau_r) - \cos(-p_2 \tau_r) \right) + 1 \right] - \right. \\
 & \left. - D_2 \beta^2 \left[\exp(-p_1 \tau_r) \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \sin(-p_2 \tau_r) + \cos(-p_2 \tau_r) \right) - 1 \right] \right] \Theta(\tau_r) \Bigg\},
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 p_1 = 2 \frac{c_2 \beta}{R}, \quad p_2 = \frac{2c_2}{R} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \tau_r = \tau - \frac{R-r}{c_1}, \\
 A = \frac{\beta^2}{\beta^2 (\kappa R - 2)^2 + \kappa^2 R^2 (1 - \beta^2)}, \quad A_1 = \kappa R \left(1 - \frac{R}{r} \right) - 1 + \frac{R^2}{r^2}, \\
 B = \frac{1}{\beta^4} \left[\left(\frac{R}{r} - 2\beta^2 \right) (\kappa R - 2\beta^2) + 4\beta^2 (1 - \beta^2) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{\kappa^2 R^2}{\beta^2} + 4(1 - \kappa r), \\
 B_1 &= 2 \left(1 - \frac{R}{r} \right) (\kappa R - 2) - \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) (\kappa R - 2\beta^2), \\
 B_2 &= \frac{1}{1 - 2\beta^2} \frac{R^2}{r^2} \left[\kappa^2 R^2 \frac{1 - 2\beta^2}{\beta^2} + 2(\kappa R - 1) \right], \\
 C_2 &= 2 \left(2 + \frac{1}{1 - 2\beta^2} \frac{R}{r} \right) \frac{\kappa R - 2\beta^2}{\beta^2} - 4 \frac{1 - 2\beta^2}{\beta^2} + \frac{1}{1 - 2\beta^2} \frac{R^2}{r^2} \left(2 \frac{r}{R} - \frac{1}{\beta^2} \right), \\
 D_2 &= \left[-2 \frac{1 - 2\beta^2}{\beta^2} + \frac{1}{1 - 2\beta^2} \frac{R^2}{r^2} \left(2 \frac{r}{R} - \frac{1}{\beta^2} \right) \right] \frac{\kappa R - 2\beta^2}{\beta^2} - \\
 &\quad - 4 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \left(2 + \frac{1}{1 - 2\beta^2} \frac{R}{r} \right). \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

Співвідношення (5.32), (5.33) описують динамічну поведінку середовища зі сферичною порожниною при миттєвому встановленні в ньому у початковий момент часу хімічного потенціалу, розподіленого згідно формули (4.50), тобто значення хімічного потенціалу спричиненого наявністю поверхні тіла. У розглядуваній точці з координатою $r = r_0$ в момент часу $\tau = (r_0 - R)/c_1$ напруження $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\theta\theta}$ терплять стрибки $[\sigma_{rr}], [\sigma_{\varphi\varphi}], [\sigma_{\theta\theta}]$ величиною

$$[\sigma_{rr}] = m\pi_a \rho_* c_1^2 \frac{R}{r} = \frac{a_0 \eta_a}{2\beta^2} \frac{R}{r}, \tag{5.34}$$

$$[\sigma_{\varphi\varphi}] = [\sigma_{\theta\theta}] = (1 - 2\beta^2) m\pi_a \rho_* c_1^2 \frac{R}{r} = a_0 \eta_a \frac{1 - 2\beta^2}{2\beta^2} \frac{R}{r}. \tag{5.35}$$

Після проходження фронту хвилі напруження $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\theta\theta}$ у даній точці прямують до своїх стаціонарних значень, що описуються формулами (4.50).

5.1.4. Динамічна поведінка середовища з циліндричною порожниною

Розглянемо ізотропне деформівне тверде тіло, що займає область $r \geq R$ у циліндричній системі координат $\{r, \varphi, z\}$. Вважаємо, що тіло миттєво виділено з безмежного однорідного середовища, хімічний потенціал та густина якого дорівнюють H_* , ρ_* відповідно. Поверхня тіла $r = R$ вільна від силового навантаження і при $\tau > 0$ на ній задається постійне ненульове значення збурення хімічного потенціалу η_a .

Вводячи у розгляд потенціал переміщення ψ співвідношенням (5.21), систему рівнянь та граничні умови поставленої задачі запишемо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \kappa^2 \eta \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = m \eta \quad (5.36)$$

в області $r > R$,

$$-\frac{2c_2^2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = 0, \quad \eta = \eta_a \quad (5.37)$$

на поверхні $r = R$.

Граничні умови (5.37) доповнюємо умовами обмеженості розв'язку на безмежності в області тіла

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \eta = 0. \quad (5.38)$$

Початкові умови приймаємо нульовими

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0, \quad \psi = 0, \quad \eta = 0 \quad (5.39)$$

в області тіла при $\tau = 0$.

При відомих η і ψ ненульові компоненти вектора переміщення та тензора напружень знаходимо за формулами

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\
 \sigma_{rr} &= -\frac{2\rho_* c_2^2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \rho_* \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= -2\rho_* c_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \rho_* \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \\
 \sigma_{zz} &= -2\rho_* c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \rho_* \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}. \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

Для прийнятих крайових умов (5.37)-(5.39), розв'язком першого рівняння системи (5.36) є

$$\eta = \eta_a \frac{K_0(\kappa r)}{K_0(\kappa R)} \Theta(\tau). \quad (5.41)$$

Друге рівняння системи (5.36) розв'язуємо, використовуючи перетворення Лапласа за часом τ . Його розв'язком, що справджує крайові умови, у просторі зображень є

$$\psi^L = a^L K_0(\kappa r) + b^L K_0\left(\frac{pr}{c_1}\right), \quad (5.42)$$

де

$$\begin{aligned}
 a^L &= \frac{\eta_a m}{p \left(\kappa^2 - \frac{p^2}{c_1^2} \right) K_0(\kappa r)}, \\
 b^L &= -a^L \frac{2\rho_* c_2^2 \kappa K_1(\kappa R) + \rho_* R p^2 K_0(\kappa R)}{p \left[a_0 c_1 K_1\left(\frac{p}{c_1} R\right) + \rho_* R p K_0\left(\frac{p}{c_1} R\right) \right]}. \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

Знаходження зворотного перетворення Лапласа пов'язане зі значними труднощами. Тому дослідимо частковий випадок – механічні поля у тілі для малих часів. Прийнемо для функцій Макдональда наближення [49]

$$K_n(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} \exp(-x) \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{8x} + \frac{4n^2 - 1}{(8x)^2} \frac{4n^2 - 9}{2} \right], \quad (5.44)$$

що відповідає великим значенням аргумента x .

У результаті для динамічного потенціалу ψ^L одержуємо

$$\begin{aligned} \psi^L = & a^L K_0(\kappa r) - \frac{\eta_a}{\rho_* \sqrt{Rr}} \frac{1}{p^2} \exp\left(-\frac{r-R}{c_1} p\right) \times \\ & \times \frac{\left(\rho_* R p^2 + a_0 \kappa c_1^2 \frac{K_1(\kappa R)}{K_0(\kappa R)} \right) \left(p^2 - \frac{c_1}{8r} p + \frac{1}{2} \left(\frac{3c_1}{8r} \right)^2 \right)}{p \left(p^2 - c_1^2 \kappa^2 \right) \left[p^2 + \left(a_0 - \frac{\rho_*}{8} \right) \frac{c_1}{\rho_* R} p + \frac{3}{8\rho_*} \left(a_0 + \frac{\rho_*}{16} \right) \left(\frac{c_1}{R} \right)^2 \right]}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Вирази для ненульових компонент вектора переміщень та тензора напружень у просторі зображень визначаємо із співвідношень

$$\begin{aligned} u_r^L &= \frac{\partial \psi^L}{\partial r}, \\ \sigma_{rr}^L &= -\frac{2\rho_* c_2^2}{r} \frac{\partial \psi^L}{\partial r} + \rho_* p^2 \psi^L, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^L &= -2\rho_* c_2^2 \frac{\partial^2 \psi^L}{\partial r^2} + \rho_* p^2 \psi^L, \\ \sigma_{zz}^L &= -2\rho_* c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi^L}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^L}{\partial r} \right) - \rho_* p^2 \psi^L, \end{aligned} \quad (5.46)$$

враховуючи формулу (5.45). Внаслідок громіздкості приводити їх тут не будемо.

Використовуючи зворотнє перетворення Лапласа, у просторі оригіналів для ненульових компонент вектора переміщення u_r та тензора напружень σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} одержуємо такі вирази

$$u_r = \frac{\eta_a m}{\kappa K_0(\kappa R)} [\operatorname{ch}(c_1 \kappa t) - 1] K_1(\kappa r) - \frac{\eta_a}{c_1 \rho_* \sqrt{Rr}} \Theta \left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \sum_{k=1}^4 \frac{B_k(r)}{J_k} \left(\exp \left[\left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) l_k \right] - 1 \right) + B_5(r) \left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) \right\}, \\
\sigma_{rr} &= -2\rho_* c_2^2 \frac{1}{r} u_r(r) + \frac{\eta_a}{K_0(\kappa R)} \rho_* \operatorname{ch}(c_1 \kappa \tau) K_0(\kappa r) + \\
& + \frac{\eta_a}{\sqrt{Rr}} \Theta \left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) \sum_{k=1}^5 A_k(r) \exp \left[\left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) l_k \right], \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= 2\rho_* c_2^2 \frac{1}{r} u_r(r) + \frac{\eta_a}{K_0(\kappa R)} K_0(\kappa r) \left[(\rho_* - a_0) \operatorname{ch}(c_1 \kappa \tau) + a_0 \right] + \\
& + \frac{\eta_a}{\sqrt{Rr}} (1 - 2\beta^2) \Theta \left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) \sum_{k=1}^5 A_k(r) \exp \left[\left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) l_k \right], \\
\sigma_{zz} &= \frac{\eta_a}{K_0(\kappa R)} K_0(\kappa r) \left[(\rho_* - a_0) \operatorname{ch}(c_1 \kappa \tau) + a_0 \right] + \\
& + \frac{\eta_a}{\sqrt{Rr}} (1 - \beta^2) \Theta \left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) \sum_{k=1}^5 A_k(r) \exp \left[\left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) l_k \right], \quad (5.47)
\end{aligned}$$

де l_k ($k = \overline{1,5}$) – корені многочлена $D(l)$:

$$D(l) = l \left[l^2 - c_1^2 \kappa^2 \right] \left[l^2 - \left(\frac{\rho_*}{8} - a_0 \right) \frac{c_1}{\rho_* R} l + \frac{3}{8\rho_*} \left(a_0 + \frac{3\rho_*}{16} \left(\frac{c_1}{R} \right)^2 \right) \right],$$

$$A_k(r) = \frac{A(l_k)}{D_1(l_k)}, \quad B_k(r) = \frac{B(l_k)}{D_1(l_k)},$$

$$D_1(l_k) = \frac{dD(l)}{dl} \Big|_{l=l_k} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^5 (l_k - l_i),$$

$$A(l) = - \left(\rho_* R l^2 + a_0 \kappa c_1^2 \frac{K_1(\kappa R)}{K_0(\kappa R)} \right) \left(l^2 - \frac{c_1}{8r} l + \frac{1}{2} \left(\frac{3c_1}{8r} \right)^2 \right),$$

$$B(l) = - \left(\rho_* R l^2 + a_0 \kappa c_1^2 \frac{K_1(\kappa R)}{K_0(\kappa R)} \right) \left(l^2 + \frac{3c_1}{8r} l - \frac{15}{2} \left(\frac{3c_1}{8r} \right)^2 \right). \quad (5.48)$$

Зазначимо, що із співвідношень (5.45), (5.46), використовуючи граничну теорему [60]

$$\lim_{p \rightarrow 0} p f^{(L)}(p) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) \quad (5.49)$$

одержуємо рівноважний розподіл механічних полів у розглядуваному тілі (формули (4.51)).

З формул (5.47) випливає, що ненульові компоненти $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}$ тензора напружень мають стрибки при $\tau = (r - R)/c_1$, величина яких визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned} [\sigma_{rr}] &= \frac{\eta_a}{\sqrt{Rr}} \sum_{k=1}^5 A_k(r) \exp \left[\left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) l_k \right], \\ [\sigma_{\varphi\varphi}] &= [\sigma_{zz}] = \frac{\eta_a}{\sqrt{Rr}} (1 - 2\beta^2) \sum_{k=1}^5 A_k(r) \exp \left[\left(\tau - \frac{r-R}{c_1} \right) l_k \right]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Вирази (5.49) відображають характер миттєвого виникнення поля хімічного потенціалу і описують поширення фронту хвилі розширення. Після проходження фронту напруження $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}$ у розглядуваній точці прямують до своїх рівноважних значень.

5.1.5. Миттєве встановлення хімічного потенціалу у системі шар-два півпростори

Розглянемо кусково-однорідне деформівне тверде тіло, віднесене до прямокутної декартової системи координат $\{x, y, z\}$, що складається з шару (область $-l \leq x \leq l$), який контактує з півпросторами (області $x \leq -l$ та $x \geq l$), фізико-механічні характеристики яких однакові. Вважаємо, що така система виникла миттєво з однорідного ізотропного середовища, характеристики якого такі ж як у півпросторів $x \leq -l, x \geq l$.

Для даної моделі, задання на поверхнях $x = \pm l$ значення хімічного потенціалу, рівного значенню рівноважного потенціалу у розгляду-

ваній шаруватій системі, еквівалентне миттєвому встановленню у тілі хімічного потенціалу, що описується системою рівнянь

$$\frac{d^2\eta^{(0)}}{dx^2} - \kappa_0^2\eta^{(0)} = 0,$$

$$\frac{d^2\eta^{(i)}}{dx^2} - \kappa_i^2\eta^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.51)$$

справджує умови спряження

$$\eta^{(0)} = \eta^{(2)} + H_{10}, \quad \frac{d\eta^{(0)}}{dx} = \gamma_{10} \frac{d\eta^{(2)}}{dx} \quad (5.52)$$

на поверхні $x = l$,

$$\eta^{(0)} = \eta^{(1)} + H_{10}, \quad \frac{d\eta^{(0)}}{dx} = \gamma_{10} \frac{d\eta^{(1)}}{dx} \quad (5.53)$$

на поверхні $x = -l$, а також умови обмеженості розв'язку на безмежності при $x \rightarrow \pm\infty$. Тут індекс $i = 0$ відповідає шару $l \geq x \geq -l$, $i = 1$ – півпростору $x \leq -l$, а $i = 2$ – півпростору $x \geq l$; $\gamma_{10} = -g_{mm}^{(1)} / g_{mm}^{(0)}$.

На основі приведеного вище для хімічного потенціалу можемо записати

$$\eta^{(0)} = b_0 \operatorname{ch}(\kappa_0 x) \Theta(\tau),$$

$$\eta^{(1)} = -b_1 \exp(\kappa_1(x+l)) \Theta(\tau),$$

$$\eta^{(2)} = -b_1 \exp(\kappa_1(x-l)) \Theta(\tau), \quad (5.54)$$

де

$$b_0 = \frac{\kappa_{10}\gamma_{10}H_{10}}{\operatorname{sh}(\kappa_0 l) + \kappa_{10}\gamma_{10}\operatorname{ch}(\kappa_0 l)}, \quad b_1 = \frac{H_{10}\operatorname{sh}(\kappa_0 l)}{\operatorname{sh}(\kappa_0 l) + \kappa_{10}\gamma_{10}\operatorname{ch}(\kappa_0 l)}, \quad \kappa_{10} = \frac{\kappa_1}{\kappa_0}.$$

Вектор переміщення визначатимемо приймаючи

$$u_z^{(j)} = u_y^{(j)} = 0, \quad j = \overline{0, 2} \quad (5.55)$$

Тоді ненульові компоненти $u_x^{(j)}$ (індекс "x" далі опускаємо) векторів переміщення $\vec{u}^{(j)}$ справджують рівняння

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^{(0)2}} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \tau^2} = \frac{q_0}{\kappa_0} \frac{d\eta^{(0)}}{dx},$$

$$\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^{(i)2}} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial \tau^2} = \frac{q_1}{\kappa_1} \frac{d\eta^{(i)}}{dx}, \quad i=1,2, \quad (5.56)$$

умові спряження

$$u^{(0)} = u^{(1)}, \quad (a_{ee0} + 2\alpha_{ee0}) \frac{du^{(0)}}{dx} + a_{em0} \eta^{(0)} =$$

$$= (a_{ee1} + 2\alpha_{ee1}) \frac{du^{(1)}}{dx} + a_{em1} \eta^{(1)} \quad (5.57)$$

на поверхні $x = -l$,

$$u^{(0)} = u^{(2)}, \quad (a_{ee0} + 2\alpha_{ee0}) \frac{du^{(0)}}{dx} + a_{em0} \eta^{(0)} =$$

$$= (a_{ee1} + 2\alpha_{ee1}) \frac{du^{(2)}}{dx} + a_{em1} \eta^{(2)} \quad (5.58)$$

на поверхні $x = l$, а також умови обмеженості розв'язку на безмежності при $x \rightarrow \pm\infty$ та нульові початкові умови

$$u^{(j)} = 0, \quad \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u^{(j)}}{\partial \tau} = 0, \quad j = \overline{0,2} \quad \text{при } \tau = 0, \quad (5.59)$$

де

$$q_k = -\frac{a_{emk} \kappa_k}{a_{eek} + 2\alpha_{eek}}, \quad k = 0,1.$$

При відомих переміщеннях $u^{(j)}$ та хімічних потенціалах $\eta^{(j)}$, компоненти тензора напружень визначасмо за формулами

$$\sigma_{xx}^{(0)} = (a_{ee0} + 2\alpha_{ee0}) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + a_{em0} \eta^{(0)},$$

$$\sigma_{yy}^{(0)} = a_{ee0} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + a_{em0} \eta^{(0)},$$

$$\sigma_{xx}^{(i)} = (a_{eel} + 2\alpha_{eel}) \frac{du^{(i)}}{dx} + a_{eml}\eta^{(i)},$$

$$\sigma_{yy}^{(i)} = a_{eel} \frac{du^{(i)}}{dx} + a_{em0}\eta^{(i)} \quad i = 1, 2. \quad (5.60)$$

Для розв'язування системи рівнянь (5.56)-(5.59) використовуємо перетворення Лапласа. В результаті у просторі зображень маємо крайову задачу

$$\frac{d^2 u^{(0)L}}{dx^2} - \frac{p^2}{c_1^{(0)2}} u^{(0)L} = \frac{q_0}{\kappa_0} \frac{d\eta^{(0)L}}{dx},$$

$$\frac{d^2 u^{(i)L}}{dx^2} - \frac{p^2}{c_1^{(i)2}} u^{(i)L} = \frac{q_1}{\kappa_1} \frac{d\eta^{(i)L}}{dx} \quad i = 1, 2 \quad (5.61)$$

в області тіла,

$$u^{(0)L} = u^{(1)L}, \quad (a_{ee0} + 2\alpha_{ee0}) \frac{du^{(0)L}}{dx} + a_{em0}\eta^{(0)L} =$$

$$= (a_{eel} + 2\alpha_{eel}) \frac{du^{(1)L}}{dx} + a_{eml}\eta^{(1)L} \quad (5.62)$$

на поверхні $x = -l$,

$$u^{(0)L} = u^{(2)L}, \quad (a_{ee0} + 2\alpha_{ee0}) \frac{du^{(0)L}}{dx} + a_{em0}\eta^{(0)L} =$$

$$= (a_{eel} + 2\alpha_{eel}) \frac{du^{(1)L}}{dx} + a_{eml}\eta^{(1)L} \quad (5.63)$$

на поверхні $x = l$ та

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u^{(1)L} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u^{(2)L} = 0. \quad (5.64)$$

Розв'язок задачі (5.61)-(5.64) є таким

$$u^{(0)L} = -\varphi_0(p) \frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \operatorname{sh}(\kappa_0 x) + \left[\frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \varphi_1(p) \left(1 - \frac{p}{\kappa_1 c_1^{(1)}} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \varphi_0(p) \left[\operatorname{sh}(\kappa_1 l) + \frac{\rho_{0*} P}{\rho_{1*} c_1^{(1)} \kappa_1} \operatorname{ch}(\kappa_0 l) \right] \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{p}{c_1^{(0)}} x \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right) + r_{01} \operatorname{ch} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right)}, \\
 & u^{(1)L} = - \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \varphi_1(p) \exp[\kappa_1(l+x)] + \\
 & + r_{01} \left[\frac{p}{\kappa_0 c_1^{(0)}} \left(\kappa_{01} \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \frac{\rho_{0*}}{\rho_{1*}} \varphi_1(p) - \frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \varphi_0(p) \operatorname{ch}(\kappa_0 l) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right) + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \varphi_1(p) + \frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \varphi_0(p) \operatorname{sh}(\kappa_0 l) \right) \operatorname{ch} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{p}{c_1^{(0)}} x \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right) + r_{01} \operatorname{ch} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right)}, \\
 & u^{(2)L} = \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \varphi_1(p) \exp[\kappa_1(l-x)] - \\
 & - r_{01} \left[\frac{p}{\kappa_0 c_1^{(0)}} \left(\kappa_{01} \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \frac{\rho_{0*}}{\rho_{1*}} \varphi_1(p) - \frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \varphi_0(p) \operatorname{ch}(\kappa_0 l) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right) + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \varphi_1(p) + \frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \varphi_0(p) \operatorname{sh}(\kappa_0 l) \right) \operatorname{ch} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right) \right] \times \\
 & \times \frac{\exp \left(\frac{p}{c_1^{(1)}} (l-x) \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right) + r_{01} \operatorname{ch} \left(\frac{pl}{c_1^{(0)}} \right)}, \tag{5.65}
 \end{aligned}$$

де

$$\Phi_k(p) = \frac{\kappa_k^2 c_1^{(k)2}}{p(p^2 - \kappa_k^2 c_1^{(k)2})}, \quad r_{01} = \frac{\rho_{0*} c_1^{(0)}}{\rho_{1*} c_1^{(1)}}. \quad (5.66)$$

Вирази для компонент тензора напружень у просторі зображень через їх громізdkість приводити не будемо. При переході у простір оригіналів використовуємо теорему зміщення, представлення гіперболічних функцій через експоненти, а також формулу

$$\frac{1}{1 + d \exp\left(-p \frac{2l}{c_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-d)^n \exp\left(-p \frac{2ln}{c_0}\right). \quad (5.67)$$

Кінцево для ненульових компонент вектора переміщення та тензора напружень у півпросторі “2” (область $x \geq l$) одержуємо

$$\begin{aligned} u^{(2)} = & \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \exp[\kappa_1(l-x)] [\text{ch}(\kappa_1 c_1^{(1)} \tau) - 1] \Theta(\tau) + \\ & + \frac{r_{01}}{1 + r_{01}} \left\{ \left[\frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \text{ch}(\kappa_0 l) \text{sh}(\kappa_0 c_1^{(0)} (\tau - \tau_*^{(2)})) - \right. \right. \\ & - \frac{1}{r_{01}} \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \text{sh}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_*^{(2)})) + \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} (1 - \text{ch}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_*^{(2)}))) + \\ & \left. \left. + \frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \text{sh}(\kappa_0 l) (1 - \text{ch}(\kappa_0 c_1^{(0)} (\tau - \tau_*^{(2)}))) \right] \Theta(\tau - \tau_*^{(2)}) + \right. \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} m^n \left[(m-1) \left(\frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \text{ch}(\kappa_0 l) \text{sh}(\kappa_0 c_1^{(0)} (\tau - \tau_n^{(2)})) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{r_{01}} \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \text{sh}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_n^{(2)})) \right) + \right. \\ & \left. + (1+m) \left(\frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} (1 - \text{ch}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_n^{(2)}))) \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{b_0 q_0}{\kappa_0^2} \left. \text{sh}(\kappa_0 l) \left[1 - \text{ch}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_n^{(2)})) \right] \right\} \Theta(\tau - \tau_n^{(2)}), \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(2)} = & \rho_{1*} c_1^{(1)2} \left\{ - \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \exp[\kappa_1 (l - x)] \text{ch}(\kappa_1 c_1^{(1)} \tau) \Theta(\tau) + \right. \\ & + \frac{r_{01}}{1 + r_{01}} \left[\left(\frac{b_1 q_1}{\kappa_1} \left[\frac{1}{r_{01}} \text{ch}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_n^{(2)})) + \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \text{sh}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_n^{(2)})) \right] + \frac{b_0 q_0}{\kappa_0} \left[\text{sh}(\kappa_0 l) \text{sh}(\kappa_0 c_1^{(0)} (\tau - \tau_n^{(2)})) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{ch}(\kappa_0 l) \text{ch}(\kappa_0 c_1^{(0)} (\tau - \tau_n^{(2)})) \right] \right] \Theta(\tau - \tau_n^{(2)}) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} m^n \left((m-1) \left(\frac{1}{r_{01}} \frac{b_1 q_1}{\kappa_1} \text{ch}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_n^{(2)})) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{b_0 q_0}{\kappa_0} \text{ch}(\kappa_0 l) \text{ch}(\kappa_0 c_1^{(0)} (\tau - \tau_n^{(2)})) \right) \right] + \\ & + (1+m) \left(\frac{b_1 q_1}{\kappa_1} \text{sh}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_n^{(2)})) + \right. \\ & \left. + \frac{b_0 q_0}{\kappa_0} \text{sh}(\kappa_0 l) \text{sh}(\kappa_0 c_1^{(0)} (\tau - \tau_n^{(2)})) \right) \left. \right\} \Theta(\tau - \tau_n^{(2)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(2)} = & (1 - 2\beta_1^2) \rho_{1*} c_1^{(1)2} \left\{ - \frac{b_1 q_1}{\kappa_1^2} \exp[\kappa_1 (l - x)] \left[\frac{2\beta_1^2}{1 - 2\beta_1^2} + \text{ch}(\kappa_0 c_1^{(0)} \tau) \right] \Theta(\tau) + \right. \\ & + \frac{r_{01}}{1 + r_{01}} \left[\left(\frac{b_1 q_1}{\kappa_1} \left[\frac{1}{r_{01}} \text{ch}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_n^{(2)})) + \text{sh}(\kappa_1 c_1^{(1)} (\tau - \tau_n^{(2)})) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b_0 q_0}{\kappa_0} \left[\text{sh}(\kappa_0 l) \text{sh}(\kappa_0 c_1^{(0)} (\tau - \tau_n^{(2)})) - \text{ch}(\kappa_0 l) \text{ch}(\kappa_0 c_1^{(0)} (\tau - \tau_n^{(2)})) \right] \right] \right] \Theta(\tau - \tau_n^{(2)}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} m^n \left\{ (m-1) \left(\frac{1}{r_{01}} \frac{b_1 q_1}{\kappa_1} \operatorname{ch}(\kappa_1 c_1^{(1)}(\tau - \tau_n^{(2)})) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{b_0 q_0}{\kappa_0} \operatorname{ch}(\kappa_0 l) \operatorname{ch}(\kappa_0 c_1^{(0)}(\tau - \tau_n^{(2)})) \right) + \right. \\
& \quad \left. + (1+m) \left(\frac{b_1 q_1}{\kappa_1} \operatorname{sh}(\kappa_1 c_1^{(1)}(\tau - \tau_n^{(2)})) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{b_0 q_0}{\kappa_0} \operatorname{sh}(\kappa_0 l) \operatorname{sh}(\kappa_0 c_1^{(0)}(\tau - \tau_n^{(2)})) \right) \Theta(\tau - \tau_n^{(2)}) \right\}, \quad (5.69)
\end{aligned}$$

де

$$\beta_1 = \frac{c_2^{(1)}}{c_1^{(1)}}, \quad m = \frac{1-r_{01}}{1+r_{01}}, \quad \tau_n^{(2)} = \frac{l-x}{c_1^{(1)}} + \frac{2l}{c_1^{(0)}}(n+1), \quad \tau_*^{(2)} = \frac{l-x}{c_1^{(1)}}.$$

Аналіз розв'язку показує, що у перерізі $x = \text{const}$ півпростору в моменти часу $\tau_* = (x-l)/c_1^{(1)}$, $\tau_n = (x-l)/c_1^{(1)} + 2l(n+1)/c_1^{(0)}$ переміщення $u^{(2)}$ має злом, що значить, що ненульові компоненти тензора напружень терплять скачок. Нахил дотичних до кривих $u^{(2)}(\tau)$ зменшується з часом. При $\tau \rightarrow \infty$ у реальній системі, яка зазвичай є в'язкопружною, коливання затухають, а розподіл механічних полів прямує до рівноважного. Така поведінка деформівної системи узгоджується з результатами робіт [37, 38] дослідження коливних систем з приєднаними масами.

5.2. Хвильові процеси у деформівних твердих тілах із врахуванням приповерхневої неоднорідності

5.2.1. Вихідна система рівнянь

У даному підрозділі зупинимося на методиці вивчення хвильових процесів у деформівних пружних тілах із врахуванням приповерхневої неоднорідності.

Система рівнянь, що описує поведінку структурно неоднорідного деформівного пружного тіла має вигляд (5.1), (5.2). Приймаючи за розв'язуючі функції вектор переміщення \vec{u} та збурення хімічного потенціалу η , перетворюємо її до вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(\rho_* - a_{mn}\eta - a_{em}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right] = \\ & = \alpha_{ee} \nabla^2 \dot{\vec{u}} + (a_{ee} + \alpha_{ee}) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{em} \vec{\nabla} \eta, \\ & \nabla^2 \eta - \kappa_m^2 \eta - \kappa_e^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Перше рівняння цієї системи є нелінійним за рахунок нелінійності імпульсу механічного поступального руху \vec{k}_v .

У даному випадку розглядаємо тіла, що перебувають в умовах комплексної зовнішньої дії: періодичного силового навантаження та постійної в часі дії оточення на тіло. Постійна в часі дія полягає на тому, що на поверхні тіла (∂V) задається (встановлюється) значення хімічного потенціалу H_a , що відрізняється від значення цього потенціалу у внутрішніх областях тіла. Це значення далі вважатимемо сталим у часі. Тому розв'язок системи рівнянь (5.70) природно подати у вигляді суми коливної $\tilde{\vec{u}}$, $\tilde{\eta}$ та повільно змінної у часі $\bar{\vec{u}}$, $\bar{\eta}$ складових

$$\vec{u} = \bar{\vec{u}} + \tilde{\vec{u}}, \quad \eta = \bar{\eta} + \tilde{\eta}. \quad (5.71)$$

Таке розбиття виконаємо за допомогою операції осереднення функції $f \equiv \{\vec{u}, \eta, \rho, \hat{\sigma}, \hat{\epsilon}\}$ на періоді τ_0 зовнішньої дії [3, 41, 66]

$$\bar{f}(\tau) = \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau}^{\tau+\tau_0} f(\xi) d\xi. \quad (5.72)$$

На цій основі далі складову \bar{f} будемо називати також осередненою складовою.

З формули (5.72) випливає, що

$$\frac{d^n \bar{f}}{d\tau^n} = \frac{d^n \bar{f}}{d\tau^n}. \quad (5.73)$$

Приймаємо також наближення [3]

$$\overline{f\Phi} \approx \bar{f}\bar{\Phi}, \quad \widetilde{f\Phi} \approx 0, \quad \bar{\Phi} \approx 0, \quad (5.74)$$

яке звичайно використовується при дослідженні нелінійних хвильових процесів.

Співвідношення (5.74) виконуються точно, якщо \bar{f} є періодичною функцією часу, що справедливо для усталеного режиму коливань.

Використовуючи подання (5.71), з (5.70) одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left[\rho_* - a_{mm}\bar{\eta} - a_{em}\bar{\nabla} \cdot \bar{u} - a_{mm}\tilde{\eta} - a_{em}\bar{\nabla} \cdot \tilde{u} \right] \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right) \right\} = \\ = \alpha_{ee} \nabla^2 (\bar{u} + \tilde{u}) + (a_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot (\bar{u} + \tilde{u})) + a_{em} \bar{\nabla} (\bar{\eta} + \tilde{\eta}), \\ \nabla^2 (\bar{\eta} + \tilde{\eta}) - \kappa_m^2 (\bar{\eta} + \tilde{\eta}) - \kappa_e^2 \bar{\nabla} \cdot (\bar{u} + \tilde{u}) = 0. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Виконуючи операцію осереднення (5.72) на періоді коливань, та нехтуючи осередненою складовою сили інерції, з системи (5.75) одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha_{ee} \nabla^2 \bar{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + a_{em} \bar{\nabla} \bar{\eta} = 0, \\ \nabla^2 \bar{\eta} - \kappa_m^2 \bar{\eta} - \kappa_e^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0; \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(\rho_* - a_{mm}\bar{\eta} - a_{em}\bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} - \left(a_{mm}\tilde{\eta} + a_{em}\bar{\nabla} \cdot \tilde{u} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right] = \\ = \alpha_{ee} \nabla^2 \tilde{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \tilde{u}) + a_{em} \bar{\nabla} \tilde{\eta}, \\ \nabla^2 \tilde{\eta} - \kappa_m^2 \tilde{\eta} - \kappa_e^2 \bar{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Отже, знаходження розв'язку системи рівнянь (5.76), (5.77) зводиться до послідовного визначення постійних у часі складових \bar{u} , $\bar{\eta}$ на основі системи рівнянь (5.76) при наступному визначенні коливних складових розглядуваних полів \tilde{u} , $\tilde{\eta}$ із співвідношень (5.77). Якщо хвильові процеси розглядати у наближенні основної гармоніки, то перше рівняння системи (5.77) спрощується до вигляду

$$\left(\rho_* - a_{mm}\bar{\eta} - a_{em}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = \alpha_{ee} \nabla^2 \tilde{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee}) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{em} \vec{\nabla} \tilde{\eta}, \quad (5.78)$$

тобто стає воно лінійним рівнянням зі змінними коефіцієнтами.

Сформульована вище система рівнянь описує хвильові процеси у деформівних пружних тілах із врахуванням приповерхневої неоднорідності. Зазначимо, що у випадку малих коливань, причина яких не пов'язана з періодичною зміною хімічного потенціалу, останнім доданком у рівнянні (5.78) можна знехтувати, тобто записати це рівняння у вигляді

$$\left(\rho_* - a_{mm}\bar{\eta} - a_{em}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = \alpha_{ee} \nabla^2 \tilde{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee}) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \quad (5.79)$$

За такого наближення друге рівняння системи (5.77) є рівнянням для знаходження $\tilde{\eta}$ при відомому \tilde{u} .

5.2.2. Вплив приповерхневої неоднорідності на власні частоти коливань шару

Застосуємо сформульовану вище систему рівнянь для дослідження впливу приповерхневої неоднорідності на частоти власних коливань пружного шару, який займає область $|x| \leq l$ евклідового простору. Будемо нехтувати при цьому впливом деформації на густину. У такому наближенні для знаходження полів

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}(x), \quad \vec{u} = (\tilde{u}_x(x, \tau), 0, 0)$$

маємо систему рівнянь

$$\frac{d^2 \bar{\eta}}{dx^2} - \kappa^2 \bar{\eta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \left(1 - \frac{a_{mm}}{\rho_*} \bar{\eta} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tau^2} = 0. \quad (5.80)$$

Розв'язок першого рівняння системи рівнянь (5.80), який справджує граничні умови

$$\bar{\eta} = \eta_a \quad (5.81)$$

на поверхнях $x = \pm l$ шару має вигляд (4.8), де необхідно прийняти $\kappa_{\Pi} = \kappa$.

Враховуючи (4.8), друге рівняння системи (5.80) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \left(1 - A \frac{\text{ch}(\kappa x)}{\text{ch}(\kappa l)} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tau^2} = 0, \quad (5.82)$$

де

$$A = \frac{a_{mm} \Pi_a}{\rho_*}.$$

Оскільки тіло перебуває під дією періодичного навантаження, то розв'язок рівняння (5.82) шукаємо у вигляді

$$\tilde{u}_x(x, \tau) = u(x) \exp(i\omega \tau). \quad (5.83)$$

Для знаходження амплітуди коливань $u(x)$ із (5.82), (5.83) одержуємо рівняння

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 (1 - \alpha_1 \text{ch}(\kappa x)) u = 0, \quad (5.84)$$

де

$$k = \frac{\nu}{c_1}, \quad \alpha_1 = \frac{A}{\text{ch}(\kappa l)}.$$

Далі обмежимося розглядом шарів, товщини яких є значно більшими характерного розміру області приповерхневої неоднорідності, тобто справджується $\exp(\kappa l) \gg \kappa l$. Тому розв'язок рівняння (5.84) можна подати у вигляді розвинення за малим параметром α_1

$$u(x) = u_0(x) + \alpha_1 u_1(x) + \alpha_1^2 u_2(x) + \dots \quad (5.85)$$

Тоді для визначення нульового та першого наближень за параметром α_1 одержуємо рівняння

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + k^2 u_0 = 0,$$

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + k^2 u_1 = k^2 \operatorname{ch}(kx) u_0, \quad (5.86)$$

Розв'язок рівнянь (5.86) має вигляд

$$\begin{aligned} u_0 &= A_0 \cos(kx) + B_0 \sin(kx), \\ u_1 &= A_0 \left[\cos(kx) + \frac{k}{2} (-V_1(x) \cos(kx) + V_2(x) \sin(kx)) \right] + \\ &+ B_0 \left[\sin(kx) + \frac{k}{2} (-V_3(x) \cos(kx) + V_1(x) \sin(kx)) \right], \end{aligned} \quad (5.87)$$

де

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{\kappa} \operatorname{sh}(kx) + \frac{1}{\kappa^2 + 4k^2} (\kappa \operatorname{sh}(kx) \cos(2kx) + 2k \operatorname{ch}(kx) \sin(2kx)), \\ V_3 &= \frac{1}{\kappa} \operatorname{sh}(kx) - \frac{1}{\kappa^2 + 4k^2} (\kappa \operatorname{sh}(kx) \cos(2kx) + 2k \operatorname{ch}(kx) \sin(2kx)), \\ V_1 &= \frac{1}{\kappa^2 + 4k^2} (\kappa \operatorname{sh}(kx) \sin(2kx) - 2k \operatorname{ch}(kx) \cos(2kx)). \end{aligned} \quad (5.88)$$

Наступний етап дослідження пов'язаний з конкретизацією розглядуваної системи, тобто з конкретизацією граничних умов.

Нерухомі поверхні шару. Тоді

$$u(-l) = 0, \quad u(l) = 0. \quad (5.89)$$

Для першого наближення за параметром α_1 з (5.87), (5.89) одержуємо

$$\begin{aligned} &A_0 \left[(1 + \alpha_1) \cos(kl) + \frac{\alpha_1 k}{2} (-V_1(l) \cos(kl) + V_2(l) \sin(kl)) \right] + \\ &+ B_0 \left[(1 + \alpha_1) \sin(kl) + \frac{\alpha_1 k}{2} (-V_3(l) \cos(kl) + V_1(l) \sin(kl)) \right] = 0, \\ &A_0 \left[(1 + \alpha_1) \cos(kl) - \frac{\alpha_1 k}{2} (V_1(-l) \cos(kl) + V_2(-l) \sin(kl)) \right] + \end{aligned}$$

$$+ B_0 \left[-(1 + \alpha_1) \sin(kl) + \frac{\alpha_1 k}{2} (V_3(-l) \cos(kl) + V_1(-l) \sin(kl)) \right] = 0. \quad (5.90)$$

Необхідною умовою існування нетривіального розв'язку системи рівнянь (5.90) є рівність нулю визначника даної системи. Обмежувачись лінійним за α_1 наближенням, одержуємо

$$(1 + 2\alpha_1) \sin(2kl) + \alpha_1 k (V_2(l) \sin^2(kl) - V_3(l) \cos^2(kl)) = 0 \quad (5.91)$$

Для товстих ($\exp(\kappa l) \gg \kappa l$) шарів можна прийняти

$$\text{sh}(\kappa l) \approx \text{ch}(\kappa l) \approx \frac{1}{2} \exp(\kappa l). \quad (5.92)$$

За такого наближення рівняння (5.91) спрощується і набуває вигляду

$$\left(1 + \frac{2Ak^2}{\kappa^2 + 4k^2} \right) \sin(2kl) = \frac{4Ak^3}{\kappa(\kappa^2 + 4k^2)} \cos(2kl). \quad (5.93)$$

Тут знехтувано величинами порядку α ; порівняно з 1.

Якщо поверхневі явища не враховувати, то рівнянням, аналогічним до (5.93) є

$$\sin(2kl) = 0. \quad (5.94)$$

Його розв'язок дає хвильові числа

$$k_0 = \frac{\pi n}{2l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.95)$$

Враховуючи, що $k_0 = v/c_1$, з (5.95) отримують частоти власних коливань шару з нерухомими поверхнями

$$v_p = \frac{\pi n c_1}{2l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.96)$$

На цій основі можна стверджувати, що рівняння (5.93) є трансцендентним рівнянням для знаходження частот власних коливань шару з врахуванням риповерхневої неоднорідності.

Для шарів, товщини яких є значно більшими характерного розміру області поверхневої неоднорідності природно прийняти

$$k = k_0 + k_1, \quad (5.97)$$

де

$$k_1 / k_0 \ll 1. \quad (5.98)$$

Для k , у першому наближенні за малим параметром $\gamma \equiv k_1 / k_0$, з (5.93) одержуємо

$$k = \frac{\pi n}{2l} \left[1 + \left(\frac{\pi n}{2} \right)^2 \frac{2A}{(\kappa l)^3} \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.99)$$

Це відповідає таким значенням власних частот

$$\omega_n = \frac{\pi n c_1}{2l} \left[1 + \left(\frac{\pi n}{2} \right)^2 \frac{2A}{(\kappa l)^3} \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.100)$$

Шар, одна поверхня якого нерухома, а інша – вільна. Тоді

$$u(-l) = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=l} = 0. \quad (5.101)$$

У даному випадку одержуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} & A_0 \left[(1 + \alpha_1) \cos(kl) - \frac{\alpha_1 k}{2} (V_1(-l) \cos(kl) + V_2(-l) \sin(kl)) \right] + \\ & + B_0 \left[-(1 + \alpha_1) \sin(kl) + \frac{\alpha_1 k}{2} (V_3(-l) \cos(kl) + V_1(-l) \sin(kl)) \right] = 0. \\ & A_0 \left[-(1 + \alpha_1) k \sin(kl) + \frac{\alpha_1 k}{2} (V_1(l) k \sin(kl) + V_2(l) k \cos(kl) - \right. \\ & \left. - V_1'(l) \cos(kl) + V_2'(l) \sin(kl)) \right] + B_0 \left[(1 + \alpha_1) k \cos(kl) + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_1 k}{2} (V_3(l) k \sin(kl) + V_1(l) k \cos(kl) - V_3'(l) \cos(kl) + V_1'(l) \sin(kl)) \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.102)$$

де

$$V_i'(l) \equiv \left. \frac{dV_i}{dx} \right|_{x=l}.$$

У прийнятому вище наближенні, для знаходження хвильового числа k з (5.102) одержуємо

$$(1 + \alpha_1) \operatorname{ctg}(2kl) + \frac{Ak}{\kappa} = 0. \quad (5.103)$$

Якщо поверхневі явища не враховувати, то рівнянням, відповідним до (5.103), є

$$\cos(2kl) = 0. \quad (5.104)$$

Обмежуючись першим наближенням за малим параметром γ , одержуємо такий розв'язок рівняння (5.103)

$$k = \frac{\pi(2n+1)}{4l} \left(1 + \frac{A}{2\kappa l} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.105)$$

Тому власними частотами коливань шару з одною вільною поверхнею є

$$\nu_n = \frac{\pi(2n+1)c_1}{2l} \left(1 + \frac{A}{2\kappa l} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.106)$$

Шар з вільними поверхнями. Граничними умовами для амплітуди вектора переміщень є

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-l} = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=l} = 0. \quad (5.107)$$

Виконуючи процедуру, аналогічну до приведеної вище, одержуємо наступне трансцендентне рівняння

$$\left(\frac{2Ak^2}{\kappa^2 + 4k^2} - 1 \right) \sin(2kl) + Ak \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{\kappa}{\kappa^2 + 4k^2} \right) \cos(2kl) = 0 \quad (5.108)$$

для знаходження хвильового числа k .

У першому наближенні за малим параметром γ , для власних частот одержуємо

$$\nu_n = \frac{\pi n c_1}{2l} \left(1 + \frac{A}{\kappa l} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.109)$$

Порівнюючи вирази (5.100), (5.106) та (5.109) для власних частот ν_n , бачимо, що у шарі з нерухомими поверхнями вплив приповерх-

невої неоднорідності на v_n нехтувально малий. У шарі з вільними поверхнями такий вплив є у два рази більшим порівняно з шаром, одна поверхня якого нерухома, а друга вільна.

Зазначимо, що при врахуванні залежності густини від деформації для осередненої складової $\bar{\rho}$ можна записати

$$\bar{\rho} = \rho_* - a_{\eta\eta}\bar{\eta} - a_{\sigma\eta}\bar{\sigma}. \quad (5.110)$$

Враховуючи розв'язки (4.7), бачимо, що у цьому випадку для хвиль основної гармоніки справедливі одержані вище результати, однак при цьому необхідно врахувати, що

$$k = k_* \frac{v}{c_1}, \quad (5.111)$$

де

$$k_* = \frac{\alpha \operatorname{th}(\xi l)}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} - \frac{\eta_a}{\rho_*} [2a_{\sigma\eta} a_0 (1 + \alpha) + a_{\eta\eta} \alpha] \operatorname{th}(\xi l),$$

$$A = \frac{(1 - \alpha) \eta_a \xi l (2a_{\sigma\eta} a_0 + a_{\eta\eta})}{\xi l \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]} - \frac{\eta_a}{\rho_*} [2a_{\sigma\eta} a_0 (1 + \alpha) + a_{\eta\eta} \alpha] \operatorname{th}(\xi l),$$

та провести спрощення, які відповідають прийнятим наближенням.

При визначенні частот власних коливань, незалежно від умов закріплення шару, значення хімічного потенціалу на них приймалося рівним η_a . Це відповідає відсутності контактуючого тіла. Разом з тим одержаний розв'язок показує, що вплив приповерхневої неоднорідності в околі нерухомої поверхні шару на частоти власних коливань є нехтувально малим. Тому впливом тіла, що приводить до закріплення поверхні при дослідженні таких частот можна знехтувати.

Розділ 6.

ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРИ НА ЕФЕКТИ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ

У даному розділі на прикладі модельних задач вивчено вплив температури на закономірності приповерхневої неоднорідності та пов'язані з нею ефекти. Розділ базується на роботах [27, 46, 74, 84, 90, 91, 93, 94, 118, 146, 150].

6.1. Вплив температури на приповерхневу неоднорідність у тілах простої геометричної конфігурації

6.1.1. Закономірності приповерхневої неоднорідності у термопружному шарі

Розглянемо структурно неоднорідний ізотропний термопружний шар, який у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$ займає область $|x| \leq l$. Приймаємо, що поверхні шару $x = l$, $x = -l$ вільні від силового навантаження, а на безмежності при $y \rightarrow \pm\infty$ шар навантажено зусиллями σ_a . Вважаємо, що на бокових поверхнях шару задано постійні відмінні від нуля значення збурень хімічного потенціалу η_a та температури θ_a . За початковий стан тіла приймаємо стан вільного від силового навантаження структурно неоднорідного безмежного середовища, густина, хімічний потенціал та температура якого дорівнюють відповідно ρ_* , H_* , T_* , а матеріал є ідентичним до матеріалу шару.

За розглядуваної зовнішньої дії в тілі реалізується одновимірна за координатою x ситуація

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x), \quad \eta = \eta(x), \quad \theta = \theta(x).$$

Оскільки на поверхнях шару $x=l$, $x=-l$ задано силове навантаження, то за розв'язуючу систему рівнянь доцільно вибрати систему (3.40), яка у розглядуваному одновимірному випадку є такою

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} &= 0, \\ \frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} &= \frac{d^2\sigma_{zz}}{dx^2}, \quad \frac{d^2\sigma}{dx^2} = 2a_0 \frac{d^2\eta}{dx^2}, \\ \frac{d^2\eta}{dx^2} - \kappa_\eta^2\eta - \kappa_\sigma^2\sigma - \kappa_\theta^2\theta &= 0, \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Тут $a_0 = 2\alpha_{ee}a_{em}/(2\alpha_{ee} + a_{ee})$.

Систему рівнянь доповнюємо умовами на поверхнях $x=l$, $x=-l$

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \eta = \eta_a, \quad \theta = \theta_a \quad (6.2)$$

та умовами

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sigma_{yy} dx = \sigma_a, \quad \int_{-l}^l \sigma_{zz} dx = 0, \quad \int_{-l}^l x \sigma_\eta dx = 0, \quad \gamma = \{y, z\}. \quad (6.3)$$

у довільних поперечних перерізах $y = \cos \eta t$, $z = \sin \eta t$ шару.

Розв'язком системи рівнянь (6.1), що справджує умови (6.2), (6.3) є

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \eta_a + \frac{\eta_a^{(x)}}{\chi_l(\xi l)} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right), \\ \theta(x) &= \theta_a, \quad \sigma_{xx}(x) = 0, \\ \sigma_{yy}(x) - \sigma_a &= \sigma_{zz}(x) = a_0 \frac{\eta_a^{(x)}}{\chi_l(\xi l)} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

де

$$\begin{aligned} \chi_l(\xi l) &= 1 - \alpha [1 - \text{th}(\xi l)/(\xi l)], \quad \alpha = 2a_0\kappa_\sigma^2/\xi^2, \\ \eta_a^{(x)} &= (\kappa_\eta^2\eta_a + \kappa_\sigma^2\sigma_a + \kappa_\theta^2\theta_a)/\xi^2, \quad \xi^2 = \kappa_\eta^2 + 2a_0\kappa_\sigma^2. \end{aligned}$$

Якщо знехтувати впливом тензора напружень на хімічний потенціал, тобто прийняти $\kappa_\sigma = 0$, то із співвідношень (6.4) для хімічного

потенціалу та ненульових компонентів тензора напружень одержуємо співвідношення

$$\eta(x) = \eta_a \frac{\text{ch}(\kappa_\eta x)}{\text{ch}(\kappa_\eta l)},$$

$$\sigma_{yy}(x) - \sigma_a = \sigma_{zz}(x) = a_0 \eta_a \left(\frac{\text{ch}(\kappa_\eta x)}{\text{ch}(\kappa_\eta l)} - \frac{\text{th}(\kappa_\eta l)}{\kappa_\eta l} \right). \quad (6.5)$$

Аналіз формул (6.4) показує, що характер розподілу хімічного потенціалу та напружень по товщині шару такий самий, як і у випадку пружного тіла. Однорідна температура не змінює характеру розподілу полів, впливаючи на їхні значення (характерні значення $\eta_a^{(x)}$). При цьому залежність характерних значень як хімічного потенціалу так і напружень від температури є лінійною. Як і в моделі пружного тіла (розділ 4), за відсутності силового навантаження ($\sigma_a = 0$) напруження $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$, які зумовлені відмінністю енергії зв'язку на поверхні та у внутрішніх областях тіла, є самозрівноваженими. Вони монотонно зменшуються при відході від поверхонь шару, досягаючи мінімального значення на серединній поверхні шару.

Поверхневі напруження визначаються формулою

$$\sigma_{yy}(\pm l) - \sigma_a = \sigma_{zz}(\pm l) = \frac{\kappa_\eta^2 \eta_a + \kappa_\sigma^2 \sigma_a + \kappa_\theta^2 \theta_a}{2\kappa_\sigma^2} \left(\frac{1}{\chi_l(\xi l)} - 1 \right). \quad (6.6)$$

Зі збільшенням товщини шару їх значення прямують до значень поверхневих напружень у півпросторі

$$\sigma_{yy}^* - \sigma_a = \sigma_{zz}^* = a_0 \left(\eta_a + \frac{\kappa_\sigma^2}{\kappa_\eta^2} \sigma_a + \frac{\kappa_\theta^2}{\kappa_\eta^2} \theta_a \right). \quad (6.7)$$

Поверхневий натяг. На основі одержаного розв'язку, а також формул (4.12), (4.13) вивчимо вплив температури на поверхневий натяг у шарі.

Оскільки температура входить лише у характерне значення хімічного потенціалу $\eta_a^{(x)}$, то на основі аналізу виразу для напружень бачимо, що однорідна температура не впливає на положення точки переходу розтягуючих приповерхневих напружень у стискаючі. Нех-

туючи впливом деформації на густину, для точки переходу розтягуючих приповерхневих напружень у стискаючі одержуємо співвідношення

$$x_a = \frac{1}{\xi} \operatorname{arcch} \left(\frac{\operatorname{sh}(\xi l)}{\xi l} \right),$$

яке у наближенні $\exp(\xi l) \gg \xi l$ спрощується до вигляду (4.15). У роботі [121] показано, що температура практично не впливає на значення x_a також у процесі нагріву (охолодження) шару.

Для поверхневого натягу, у прийнятому вище наближенні, знаходимо

$$f_p = \frac{a_0}{\xi} \frac{\eta_a^{(x)}}{\chi_l(\xi l)} \left(1 - \frac{\ln(\xi l)}{\xi l} - \frac{1}{\xi l} \right). \quad (6.8)$$

При цьому для $\chi_l(\xi l)$ справедливо

$$\chi_l(\xi l) = 1 - \alpha \left(1 - \frac{1}{\xi l} \right).$$

Із зростанням товщини шару поверхневий натяг прямує до значення поверхневого натягу у півпросторі

$$f_p^\infty = \frac{a_0}{\xi} \left(\eta_a + \frac{\kappa_n^2}{\kappa_n^2} \theta_a \right). \quad (6.9)$$

Лінійна залежність поверхневого натягу від температури узгоджується з даними з літератури.

Міцність шару. З наведеного вище випливає, що зміна температури θ_a приводить до зміни значень поверхневих напружень. Тому слід чекати, що опосередковано через поверхневі напруження температура впливатиме і на міцність шару.

Якщо прийняти, що зовнішнє силове навантаження є розтягуючим ($\sigma_a > 0$), то найбільшими розтягуючими напруженнями у шарі є напруження $\sigma_{yy}(\pm l)$, які описуються співвідношенням (6.6). Використаємо критерій першої класичної теорії міцності та формулу (6.6) для визначення інтенсивності зовнішнього силового навантаження, що приводить до крихкого руйнування шару σ_a^{kr} . У результаті одержуємо

$$\sigma_a^{kr} = 2 \frac{1-\alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l}\right)}{2-\alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l}\right)} \left\{ \sigma_p - \frac{\kappa_\eta^2 \eta_a + \kappa_\theta^2 \theta_a}{2\kappa_\sigma^2} \frac{\alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l}\right)}{1-\alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l}\right)} \right\}. \quad (6.10)$$

Для товстих, порівняно з областю приповерхневої неоднорідності, шарів ($\xi l \gg 1$) значення силового навантаження, що приводить до руйнування шару описується формулою

$$\sigma_{\infty}^{kr} = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \left(\sigma_p - \frac{\kappa_\eta^2 \eta_a + \kappa_\theta^2 \theta_a}{\kappa_\sigma^2} \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \right). \quad (6.11)$$

При $\theta_a = 0$ для σ_{∞}^{kr} запишемо

$$\sigma_{\infty}^{kr} = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \left(\sigma_p - \frac{\kappa_\eta^2}{\kappa_\sigma^2} \eta_a \right) \equiv \sigma_+. \quad (6.12)$$

У цьому випадку σ_+ є межею міцності, що встановлюється на основі експериментальних досліджень на товстих зразках при початковій температурі.

Використовуючи останнє позначення, формулу (6.10) перетворюємо до вигляду

$$\sigma_a^{kr} = \frac{2\chi_l}{1+\chi_l} \left[\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)} \sigma_+ - \frac{1-\chi_l}{2\chi_l} \frac{\kappa_\theta^2}{\kappa_\sigma^2} \theta_a + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{1-\chi_l}{\chi_l} \right) \frac{\kappa_\eta^2}{\kappa_\sigma^2} \eta_a \right]. \quad (6.13)$$

Праву сторону даного співвідношення можна трактувати як таку, що описує вплив температури на міцність та розмірний ефект міцності тонких плівок. Зі збільшенням товщини шару із співвідношення (6.13) одержуємо вираз залежності від температури межі міцності товстих шарів

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_+ - \frac{\alpha}{2-\alpha} \frac{\kappa_\theta^2}{\kappa_\sigma^2} \theta_a. \quad (6.14)$$

Зі збільшенням температури значення силового навантаження, що приводить до руйнування шару, зменшується за лінійним законом. Така поведінка межі міцності узгоджується з відомими експериментальними даними для багатьох матеріалів у широкому діапазоні температур [28, 29]. Зазначимо, що дане співвідношення може бути використане також для визначення матеріальних сталих моделі. Якщо в основу покласти експериментальні дані вивчення залежності межі міцності ніобієвого сплаву 10ВМЦ від температури [28] та використати метод регресійного аналізу, приймаючи, що у відліковому стані температура дорівнює температурі першого експерименту, для параметрів моделі одержуємо таку оцінку

$$\sigma_+ \approx 566.68 \text{ МПа}, \quad \frac{\alpha}{2 - \alpha} \frac{\kappa_\theta^2}{\kappa_\sigma^2} \approx 0.46 \text{ МПа/К}.$$

При цьому відхилення експериментальних даних від теоретичної кривої не перевищує 1.3 %. На рис. 6.1 суцільною лінією зображено залежність межі міцності шару від абсолютної температури, обчисленої за формулою (6.14) для наведених вище параметрів. Знаком “◊” відзначено експериментальні дані, приведені у роботі [28].

6.1.2. Термомеханічні поля у суцільному циліндрі

Розглянемо безмежний ізотропний деформівний круговий циліндр, який у циліндричній системі координат $\{r, \varphi, z\}$ займає область $|r| \leq R_c$. Приймаємо, що циліндр навантажений на безмежності (при $z \rightarrow \pm\infty$) розтягуючими зусиллями інтенсивності σ_a ($\sigma_a > 0$), а його бокова поверхня $r = R_c$ вільна від силового навантаження і на ній задано сталі, відмінні від нуля, значення збурень температури θ_a і хімічного потенціалу η_a .

За розглядуваної зовнішньої дії у тілі реалізується одновимірна за координатою r ситуація

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}(r), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r), \quad \eta = \eta(r), \quad \theta = \theta(r),$$

яка описується системою рівнянь

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0,$$

$$r \frac{d^2\sigma_{\varphi\varphi}}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} - \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{a_{ee}\sigma + 2\alpha_{ee}a_{em}\eta + 2\alpha_{ee}a_{e1}\theta}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \right) \right],$$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{a_{ee}\sigma + 2\alpha_{ee}a_{em}\eta + 2\alpha_{ee}a_{e1}\theta}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \right),$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \kappa_{\eta}^2 \eta - \kappa_{\sigma}^2 \sigma - \kappa_{\theta}^2 \theta = 0. \quad (6.15)$$

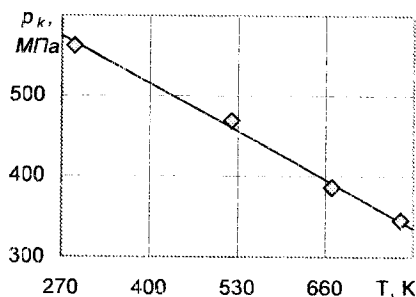


Рис. 6.1. Залежність міцності шару від температури

Дану систему рівнянь доповнюємо граничними умовами

$$\sigma_{rr}|_{r=R_c} = 0, \quad \theta|_{r=R_c} = \theta_a, \quad \eta|_{r=R_c} = \eta_a \quad (6.16)$$

на поверхні $r = R_c$ циліндра, умовами обмеженості розв'язку

$$\begin{aligned} |\theta(r)| < \infty, \quad |\eta(r)| < \infty, \quad |\sigma_{rr}(r)| < \infty, \\ |\sigma_{\varphi\varphi}(r)| < \infty, \quad |\sigma_{zz}(r)| < \infty \quad \text{при } r < R_c, \end{aligned} \quad (6.17)$$

а також умовою що відповідає навантаженню циліндра на безмежності зусиллями σ_a у напрямку осі циліндра

$$\frac{i}{\pi R_c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_c} \sigma_{zz} r dr d\varphi = \sigma_a. \quad (6.18)$$

Розв'язком даної задачі є

$$\theta(R) = \theta_a,$$

$$\eta(R) = \eta_a + \frac{1}{\xi^2} \frac{\sigma_a \kappa_\sigma^2 + \eta_a \kappa_\eta^2 + \theta_a \kappa_\theta^2}{I_0(R_1) - \alpha \left(I_0(R_1) - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right)} [I_0(R) - I_0(R_1)],$$

$$\sigma_{rr}(R) = \frac{a_0}{\xi^2} \frac{\sigma_a \kappa_\sigma^2 + \eta_a \kappa_\eta^2 + \theta_a \kappa_\theta^2}{I_0(R_1) - \alpha \left(I_0(R_1) - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right)} \left[\frac{I_1(R)}{R} - \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(R) = \frac{a_0}{\xi^2} \frac{\sigma_a \kappa_\sigma^2 + \eta_a \kappa_\eta^2 + \theta_a \kappa_\theta^2}{I_0(R_1) - \alpha \left(I_0(R_1) - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right)} \left[I_0(R) - \frac{I_1(R)}{R} - \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right],$$

$$\sigma_{zz}(R) = p + \frac{a_0}{\xi^2} \frac{\sigma_a \kappa_\sigma^2 + \eta_a \kappa_\eta^2 + \theta_a \kappa_\theta^2}{I_0(R_1) - \alpha \left(I_0(R_1) - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right)} \left[I_0(R) - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right], \quad (6.19)$$

де $R = \xi r$ -- безрозмірна радіус-координата біжучої точки циліндра, $R_1 = \xi R_c$ -- безрозмірний радіус циліндра.

Приймаючи за характерні значення хімічного потенціалу та напружень відповідно величини

$$\eta^{(x)} = \frac{1}{\xi^2} (\sigma_a \kappa_\sigma^2 + \eta_a \kappa_\eta^2 + \theta_a \kappa_\theta^2),$$

$$\sigma^{(x)} = \frac{a_0}{\xi^2} (\sigma_a \kappa_\sigma^2 + \eta_a \kappa_\eta^2 + \theta_a \kappa_\theta^2),$$

розв'язок (6.19) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 \theta(R) &= \theta_a, \\
 \eta(R) &= \eta_a + \eta^{(x)} \frac{I_0(R) - I_0(R_1)}{I_0(R_1) - \alpha \left(I_0(R_1) - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right)}, \\
 \sigma_{rr}(R) &= \sigma^{(x)} \frac{I_1(R) - \frac{I_1(R)}{R} - \frac{I_1(R_1)}{R_1}}{I_0(R_1) - \alpha \left(I_0(R_1) - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right)}, \\
 \sigma_{\varphi\varphi}(R) &= \sigma^{(x)} \frac{I_0(R) - \frac{I_1(R)}{R} - \frac{I_1(R_1)}{R_1}}{I_0(R_1) - \alpha \left(I_0(R_1) - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right)}, \\
 \sigma_{zz}(R) &= \sigma_a + \sigma^{(x)} \frac{I_0(R) - 2 \frac{I_1(R)}{R}}{I_0(R_1) - \alpha \left(I_0(R_1) - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1} \right)}. \tag{6.20}
 \end{aligned}$$

На основі порівняння даних співвідношень з відповідними виразами для моделі структурно неоднорідного пружного тіла (розділ 4) можна стверджувати, що з точністю до характерних значень вони співпадають. Як і у шарі, постійна температура не змінює характеру розподілу напружень у циліндрі, впливаючи на їх значення. Напруження σ_{rr} дорівнюють нулю на поверхні циліндра і монотонно зменшуються, досягаючи мінімальних значень на осі циліндра $R = 0$. Напруження $\sigma_{\varphi\varphi}$ та σ_{zz} є найбільшими на поверхні циліндра $R = R_1$, де вони є розтягуючими, та монотонно зменшуються до своїх найменших значень, що досягаються на осі циліндра. У ненавантажених циліндрах ($\sigma_a = 0$) великого, порівняно з розміром приповерхневої неоднорідності, радіуса ($R_1 \gg 1$) напруження суттєво відрізняються від нуля лише у вузькій області біля поверхні циліндра, тоді як у

циліндричних тілах, для яких значення R_1 співвимірне з одиницею (тонких волокон), напруження є суттєвими в усій області тіла.

У циліндрі, навантаженому розтягуючими зусиллями ($\sigma_a > 0$), найбільшими напруженнями є поверхневі напруження $\sigma_{\pm\pm}$

$$\sigma_{\pm\pm}^{[R]} = \sigma_a + \frac{\alpha_0}{\xi^2} \frac{\sigma_a \kappa_\sigma^2 + \eta_a \kappa_\eta^2 + \theta_a \kappa_\theta^2}{1 - \alpha \left(1 - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1 I_0(R_1)} \right)} \left[1 - 2 \frac{I_1(R_1)}{R_1 I_0(R_1)} \right]. \quad (6.21)$$

Зі збільшенням радіуса циліндра R_1 ці напруження монотонно зростають, прямуючи до значень поверхневих напружень у півпросторі.

Вплив температури на міцність циліндра та розмірний ефект міцності. Використовуючи критерій першої класичної теорії міцності, та наближення прийняті при вивченні межі міцності у попередньому підрозділі з умови $\sigma_{\pm\pm}(R_1) = \sigma_p$ одержуємо значення інтенсивності силового навантаження, що приводить до крихкого руйнування циліндра

$$\sigma_a^{kr} = \frac{2\sigma_p - \left(\frac{\kappa_\eta^2}{\kappa_\sigma^2} \eta_a + \frac{\kappa_\theta^2}{\kappa_\sigma^2} \theta_a \right) f_c(R_1)}{2 + f_c(R_1)}. \quad (6.22)$$

Тут

$$f_c(R_1) = \alpha \left(1 - \frac{2I_1(R_1)}{R_1 I_0(R_1)} \right) / \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{2I_1(R_1)}{R_1 I_0(R_1)} \right) \right].$$

Використовуючи позначення для інтенсивності силового навантаження, що приводить до руйнування товстих тіл при початковій температурі, на основі (6.22) запишемо співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_a^{kr} = & \frac{1}{2 + f_c(R_1)} \left[\left(2 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \sigma_+ + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} - f_c(R_1) \right) \frac{\kappa_\eta^2}{\kappa_\sigma^2} \eta_a - f_c(R_1) \frac{\kappa_\theta^2}{\kappa_\sigma^2} \theta_a \right], \end{aligned} \quad (6.23)$$

яке можна трактувати як таке, що описує вплив температури на міцність циліндра та її розмірний ефект. Зі зростанням температури міцність циліндра зменшується за лінійним законом. Дане співвідношення є аналогічним до відповідного співвідношення, одержаного для шару.

Зазначимо також, що на основі формул (6.13), (6.23) для інтенсивності силового навантаження, що приводить до руйнування шару та циліндра можна одержати співвідношення, які описують вплив кривини поверхні на межу міцності.

Поверхневий натяг. Обчислення поверхневого натягу проведемо за формулою

$$f_p = \frac{1}{R_1} \int_{R_a}^{R_1} \sigma_{\varphi\varphi} r \, dr, \quad (6.24)$$

де R_a – точка переходу розтягуючих напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ у стискаючі.

Враховуючи (6.22), визначення безрозмірної координати $R_a = \xi r_a$ точки переходу розтягуючих напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ у стискаючі зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$I_0(R) - \frac{I_1(R)}{R} = \frac{I_1(R_1)}{R_1}. \quad (6.25)$$

Обмежимося наближенням $\exp(\xi R_1) \gg \xi R_1$ та врахуємо, що у даному випадку точка R_a близька до поверхні циліндра $R = R_1$. Для модифікованих функцій Бесселя скористаємося асимптотичними розкладами [113]

$$I_0(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(R)}{\sqrt{R}} \left[1 + \frac{1}{8} \frac{1}{R} + \frac{9}{128} \frac{1}{R^2} + \frac{75}{1024} \frac{1}{R^3} + o\left(\frac{1}{R^3}\right) \right],$$

$$I_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(R)}{\sqrt{R}} \left[1 - \frac{3}{8} \frac{1}{R} - \frac{15}{128} \frac{1}{R^2} - \frac{105}{1024} \frac{1}{R^3} + o\left(\frac{1}{R^3}\right) \right].$$

У такому наближенні для R_a одержуємо

$$R_a = R_1 - \ln(R_1). \quad (6.26)$$

Обмежуючись доданками порядку $1/R_1$, для поверхневого натягу у тонких волокнах на основі (6.20), (6.24), (6.26) запишемо

$$f_p = \frac{a_0}{\xi^3(1-\alpha)} \left(\eta_a \kappa_\eta^2 + \theta_a \kappa_\theta^2 \right) \left[1 - \frac{\ln(R_1)}{R_1} - \frac{5-\alpha}{2R_1(1-\alpha)} \right]. \quad (6.27)$$

Порівняння даного співвідношення з відповідним виразом попереднього підрозділу вказує на те, що поверхневі натяги у достатньо товстих шарі та циліндрі, характерні розміри яких є однакові, практично співпадають. Поверхневий натяг у тонкій плівці є більшим за відповідний поверхневий натяг у тонких волокнах.

6.1.3. Приповерхневі явища в тілах сферичної геометрії

Розглянемо порожнисту деформівну структурно неоднорідну кулю, внутрішній радіус якої R_B , а зовнішній – R_3 . Вважаємо, що внутрішня та зовнішня поверхні кулі перебувають під дією нормального до поверхні силового навантаження відповідно інтенсивності $p_1 = const$ і $p_2 = const$, а також, що на поверхнях кулі задано постійні, відмінні від нуля, значення збурень температури та хімічного потенціалу. Виберемо сферичну систему координат $\{r, \varphi, \psi\}$ так, щоб її початок координат співпадав з центром кулі. Зазначимо, що дана задача може бути покладена в основу визначення експлуатаційних параметрів тонкостінних резервуарів.

За розглядуваної зовнішньої у тілі встановлюється стаціонарний стан, у якому ненульові компоненти тензора напружень σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\psi\psi}$, температура θ та хімічний потенціал η залежать лише від радіальної координати.

Приймаючи за розв'язуючі функції σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\psi\psi}$, θ , η ключову систему рівнянь можна записати у вигляді

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\psi\psi}}{r} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\psi\psi} = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\sigma - \frac{4\alpha_{ee} a_{em}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \eta - \frac{4\alpha_{ee} a_{et}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \theta \right) \right) = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\eta}{dr} - \kappa_\eta^2 \eta - \kappa_\sigma^2 \sigma - \kappa_\theta^2 \theta = 0. \quad (6.28)$$

Граничні умови приймаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_{r=R_B} &= -p_1, & \theta|_{r=R_B} &= \theta_a, & \eta|_{r=R_B} &= \eta_{a1}, \\ \sigma_{rr}|_{r=R_3} &= -p_2, & \theta|_{r=R_3} &= \theta_a, & \eta|_{r=R_3} &= \eta_{a2}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

Розв'язок сформульованої задачі має вигляд

$$\begin{aligned} \theta(R) &= \theta_a, \\ \eta(R) &= C_1 \frac{\text{ch}(R)}{R} + C_2 \frac{\text{sh}(R)}{R} - C_3 \beta - C_4 \frac{\beta}{R}, \\ \sigma_{rr}(R) &= 2a_0 \left(C_1 \frac{R \text{sh}(R) - \text{ch}(R)}{R^3} + \right. \\ &\quad \left. + C_2 \frac{r \text{ch}(R) - \text{sh}(R)}{R^3} - \frac{\alpha'}{3} C_3 - \frac{\alpha'}{2R} C_4 - 2\theta_a' \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}(R) &= \sigma_{\psi\psi}(R) = a_0 \left(C_1 \frac{R^2 \text{ch}(R) - R \text{sh}(R) + \text{ch}(R)}{R^3} + \right. \\ &\quad \left. + C_2 \frac{R^2 \text{sh}(R) - R \text{ch}(R) + \text{sh}(R)}{R^3} - \frac{2\alpha'}{3} C_3 - \frac{\alpha'}{2} C_4 - 4\theta_a' \right), \end{aligned} \quad (6.30)$$

де

$$\begin{aligned} R &= \xi r, & R_1 &= \xi R_B, & R_2 &= \xi R_3, & \theta_a' &= \frac{\kappa_\theta^2 \theta_a}{12a_0 \kappa_\sigma^2}, \\ \alpha' &= \frac{\kappa_\sigma^2}{\xi^2} - \frac{1}{2a_0}, & \beta &= \frac{\kappa_\sigma^2}{\xi^2}, & C_j &= \frac{\delta_j}{\delta}, & j &= 1-4, \end{aligned}$$

$$\delta = (R_1 - R_2) \left\{ R_1^2 R_2^2 \operatorname{sh}(r_1 - r_2) \left(\frac{\alpha'}{3} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left[(R_1^2 + R_2^2) \operatorname{sh}(R_1 - R_2) + R_1 R_2 (R_1 - R_2) \operatorname{ch}(R_1 - R_2) \right] \frac{\alpha' \beta}{3} \right\},$$

$$\delta_1 = (R_1 - R_2) \left\{ R_1^2 R_2^2 \left[\eta_2^p \operatorname{sh}(R_1) - \eta_1^p \operatorname{sh}(R_2) \right] \left(\frac{\alpha'}{3} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left[q_2 R_1^2 \operatorname{sh}(R_1) - q_1 R_2^2 \operatorname{sh}(R_2) + \eta_1^p R_1^2 (R_2 \operatorname{ch}(R_2) - \operatorname{sh}(R_2)) \right] \frac{\alpha' \beta}{3} + \right.$$

$$\left. + \left[q_1 (R_2 \operatorname{ch}(R_2) - \operatorname{sh}(R_2)) - q_2 (R_1 \operatorname{ch}(R_1) - \operatorname{sh}(R_1)) \right] \beta^2 \right\},$$

$$\delta_2 = -(R_1 - R_2) \left\{ - R_1^2 R_2^2 \left[\eta_2^p \operatorname{ch}(R_1) - \eta_1^p \operatorname{ch}(R_2) \right] \left(\frac{\alpha'}{3} \right)^2 + \left[q_2 R_1^2 \operatorname{ch}(R_1) - \right.$$

$$\left. - q_1 R_2^2 \operatorname{ch}(R_2) + \eta_2^p R_2^2 (R_1 \operatorname{sh}(R_1) - \operatorname{ch}(R_1)) - \eta_1^p R_1^2 (R_2 \operatorname{sh}(R_2) - \operatorname{ch}(R_2)) \right] \frac{\alpha' \beta}{3} + \right.$$

$$\left. + \left[q_1 (R_2 \operatorname{sh}(R_2) - \operatorname{ch}(R_2)) - q_2 (R_1 \operatorname{sh}(R_1) - \operatorname{ch}(R_1)) \right] \beta^2 \right\},$$

$$\delta_3 = \left\{ (q_1 R_2^2 - q_2 R_1^2) \operatorname{sh}(R_1 - R_2) + \right.$$

$$\left. + \eta_1^p R_2 \left[R_1^2 - R_1 R_2 \operatorname{ch}(R_1 - R_2) + R_2 \operatorname{sh}(R_1 - R_2) \right] + \right.$$

$$\left. + \eta_2^p R_1 \left[R_2^2 - R_1 R_2 \operatorname{ch}(R_1 - R_2) - R_1 \operatorname{sh}(R_1 - R_2) \right] \right\} \frac{\alpha'}{3} +$$

$$+ \left\{ q_1 \left[R_2 \operatorname{ch}(R_1 - R_2) + \operatorname{sh}(R_1 - R_2) - R_2 \right] + \right.$$

$$\left. + q_2 \left[R_1 \operatorname{ch}(R_1 - R_2) - \operatorname{sh}(R_1 - R_2) - R_1 \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_1^p [(1 - R_1 R_2) \operatorname{sh}(R_1 - R_2) - (R_1 - R_2) \operatorname{ch}(R_1 - R_2)] + \\
& + \eta_2^p [(R_1 R_2 - 1) \operatorname{sh}(R_1 - R_2) + (R_1 - R_2) \operatorname{ch}(R_1 - R_2)] \Big\} \beta, \\
& \delta_4 = \Big\{ (-q_1 R_2^3 + q_2 R_1^3) \operatorname{sh}(R_1 - R_2) - \\
& - \eta_1^p R_2 [R_2^2 (-R_1 \operatorname{ch}(R_1 - R_2) + \operatorname{sh}(R_1 - R_2)) + R_1^3] + \\
& + \eta_2^p R_1 [R_2^2 (R_2 \operatorname{ch}(R_1 - R_2) + \operatorname{sh}(R_1 - R_2)) - R_2^3] \Big\} \frac{\alpha'}{3} + \\
& + \Big\{ q_1 R_2 [R_2 \operatorname{ch}(R_1 - R_2) + \operatorname{sh}(R_1 - R_2) - R_1] - \\
& - q_2 R_1 [R_1 \operatorname{ch}(R_1 - R_2) - \operatorname{sh}(R_1 - R_2) + R_1] + \\
& + (\eta_1^p R_2 - \eta_2^p R_1) [R_1 R_2 \operatorname{sh}(R_1 - R_2) + (R_1 - R_2) \operatorname{ch}(R_1 - R_2) - \operatorname{sh}(R_1 - R_2)] \Big\} \beta, \\
& \eta_1^p = \left(\eta_{a1} + \frac{\kappa_\theta^2}{\xi^2} \theta_a \right) R_1, \quad \eta_2^p = \left(\eta_{a2} + \frac{\kappa_\theta^2}{\xi^2} \theta_a \right) R_2, \\
& q_1 = \left(\frac{\kappa_\theta^2}{\xi^2} \frac{\theta_a}{3} - \frac{p_1}{2a_0} \right) R_1^3, \quad q_2 = \left(\frac{\kappa_\theta^2}{\xi^2} \frac{\theta_a}{3} - \frac{p_2}{2a_0} \right) R_2^3. \quad (6.31)
\end{aligned}$$

При однакових значеннях хімічного потенціалу на внутрішній та зовнішній поверхнях сфери

$$\eta_{a1} = \eta_{a2} = \eta_a,$$

розв'язок (6.31) спрощується до вигляду

$$\theta(R) = \theta_a,$$

$$\eta(R) = \eta_a - \left(\frac{R_1^3}{R} \frac{p_1}{2a_0} - \frac{R_2^3}{R} \frac{p_2}{2a_0} + \frac{R_1^3 - R_2^3}{R} (\gamma_h \eta_a + \gamma_t \theta_a) \right) \frac{g_1(R, R_1, R_2)}{B},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(R) &= -\frac{R_1^3}{R_1^3 - R_2^3} \frac{R^3 - R_2^3}{R^3} \frac{p_1}{2a_0} - \frac{R_2^3}{R_1^3 - R_2^3} \frac{R_1^3 - R^3}{R^3} \frac{p_2}{2a_0} \\ &+ \left(\frac{R_1^3}{R^3} p_1 - \frac{R_2^3}{R^3} p_2 + \frac{R_1^3 - R_2^3}{R^3} 2a_0 (\gamma_h \eta_a + \gamma_r \theta_a) \right) \frac{g_2(R, R_1, R_2)}{B}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(R) = \sigma_{\psi\psi}(R) &= -\frac{1}{2} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_2^3} \frac{2R^3 + R_2^3}{R^3} p_1 + \frac{1}{2} \frac{R_2^3}{R_1^3 - R_2^3} \frac{R_1^3 + 2R^3}{R^3} p_2 + \\ &+ \left(\frac{R_1^3}{R^3} \frac{p_1}{2} - \frac{R_2^3}{R^3} \frac{p_2}{2} + \frac{R_1^3 - R_2^3}{R^3} 2a_0 (\gamma_h \eta_a + \gamma_r \theta_a) \right) \frac{g_3(R, R_1, R_2)}{B}, \quad (6.32) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} g_1(R_1, R_2, R_3) &= R_1 \operatorname{sh}(R_2 - R_3) + R_2 \operatorname{sh}(R_3 - R_1) + R_3 \operatorname{sh}(R_1 - R_2), \\ g_2(R, R_1, R_2) &= R_1 \left(\frac{R^3 - R_2^3}{R_1^3 - R_2^3} f_1(R_2, R_1) - f_1(R_2, R) \right) - \\ &- R_2 \left(\frac{R_1^3 - R^3}{R_1^3 - R_2^3} f_1(R_1, R_2) - f_1(R_1, R) \right), \\ g_3(R, R_1, R_2) &= R_1 \left(\frac{2R^3 + R_2^3}{R_1^3 - R_2^3} f_1(R_2, R_1) + f_1(R_2, R) + R^2 \operatorname{sh}(R - R_2) \right) - \\ &- R_2 \left(-\frac{R_1^3 + 2R^3}{R_1^3 - R_2^3} f_1(R_1, R_2) + f_1(R_1, R) + R^2 \operatorname{sh}(R - R_1) \right), \\ B &= h_1(R_1, R_2, R_1) + h_1(R_2, R_1, R_2), \end{aligned}$$

$$h_1(R_1, R_2, R_3) = R_1 f_1(R_2, R_3) + \gamma_h R_3^3 \operatorname{sh}(R_1 - R_2),$$

$$f_1(R_1, R_2) = R_1 - R_2 \operatorname{ch}(R_2 - R_1) + \operatorname{sh}(R_2 - R_1),$$

$$\gamma_h = -\frac{1}{6} \frac{\kappa_\eta^2}{a_0 \kappa_\sigma^2}, \quad \gamma_t = -\frac{1}{3} \frac{a_{et}}{a_{em}} + \left(\gamma_h - \frac{1}{3} \right) \frac{\kappa_0^2 - 4\alpha_{ee} a_{et} (a_{ee} + 2\alpha_{ee})}{\xi^2}.$$

На рис. 6.2 показано розподіл приведених напружень

$$\sigma_r^{pr}(R) = \frac{\sigma_{rr}(R)}{\sigma^{(x)}}, \quad \sigma_\phi^{pr}(R) = \frac{\sigma_{\phi\phi}(R)}{\sigma^{(x)}},$$

($\sigma^{(x)} = 2a_0(\gamma_h \eta_a + \gamma_t \theta_a)$) у ненавантаженій порожнистій кулі (відповідно суцільна та пунктирна лінії) при $\gamma_h = 1.0$, $R_1 = 50$, $R_2 = 75$.

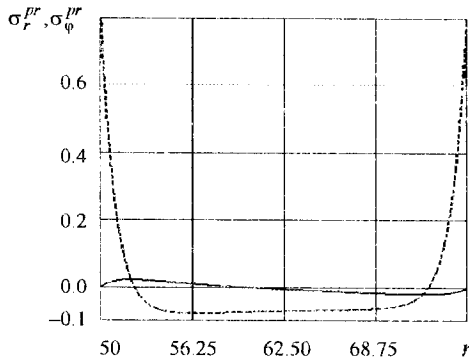


Рис. 6.2. Розподіл напружень у кулі.

На основі розв'язку (6.32) можна стверджувати, що напруження $\sigma_{\phi\phi}(R)$ максимального значення набувають на поверхнях кулі, причому

$$\sigma_{\phi\phi}(R_1) - \sigma_{\phi\phi}(R_2) = \frac{P_1}{2} - \frac{P_2}{2}.$$

Тому, якщо внутрішня та зовнішня поверхні вільні від силового навантаження, то найбільшими напруженнями будуть напруження $\sigma_{\phi\phi}(R_1)$ і $\sigma_{\phi\phi}(R_2)$, які рівні між собою. Якщо внутрішня поверхня кулі вільна від силового навантаження, а на зовнішній поверхні $p_2 > 0$, то

$$\sigma_{\phi\phi}(R_1) - \sigma_{\phi\phi}(R_2) < 0$$

і найбільшими стають напруження $\sigma_{\varphi\varphi}(R_2)$ на зовнішній поверхні. Нарешті, коли зовнішня поверхня порожнистої кулі вільна від силового навантаження, а на внутрішній поверхні $p_1 > 0$, то найбільшими будуть напруження $\sigma_{\varphi\varphi}(R_1)$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(R_1) = -\frac{2R_1^3 + R_2^3}{R_1^3 - R_2^3} \frac{p_1}{2} + a_0 \left[\frac{p_1}{2a_0} + \frac{R_1^3 - R_2^3}{R^3} (\gamma_h \eta_a + \gamma_l \theta_a) \right] \frac{g_3(R_1, R_1, R_2)}{B}.$$

Наведений вище аналіз можна покласти в основу визначення інтенсивності силового навантаження, що приводить до крихкого руйнування кулі відповідно до методики, наведеної у попередніх підрозділах. Так, для кулі навантаженої лише на внутрішній поверхні зусиллям $p_1 \equiv \sigma_a$, одержуємо

$$\sigma_a^{kr} = \frac{2\sigma_p - 6a_0(\gamma_h \eta_a + \gamma_l \theta_a) \left[1 + \frac{1 - 3\gamma_h (R_1^3 - R_2^3) \text{sh}(R_1 - R_2)}{3B} \right]}{1 - (1 - 3\gamma_h) \frac{R_1^3 \text{sh}(R_1 - R_2)}{B}}. \quad (6.33)$$

Як частковий випадок (6.31) запишемо формули, що описують рівноважний стан суцільної кулі радіуса R_2 . Цей розв'язок має вигляд

$$\theta(R) = \theta_a,$$

$$\eta(R) = \eta_a + \left(\frac{p_2}{2a_0} + \gamma_h \eta_a + \gamma_l \theta_a \right) \frac{R_2^2 (R_2 \text{sh}(R) - R \text{sh}(R_2))}{(\text{sh}(R_2) - R_2 \text{ch}(R_2) + \gamma_h R_2^2 \text{sh}(R_2)) r},$$

$$\sigma_{rr}(R) = -p_2 - 2a_0 \left(\frac{p_2}{2a_0} + \gamma_h \eta_a + \gamma_l \theta_a \right) \times \frac{(R_2 \text{ch}(R_2) - \text{sh}(R_2)) R^3 - (R \text{ch}(R) - \text{sh}(R)) R_2^3}{(\text{sh}(R_2) - R_2 \text{ch}(R_2) + \gamma_h R_2^2 \text{sh}(R_2)) R^3},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(R) = -p_2 - a_0 \left(\frac{p_2}{2a_0} + \gamma_h \eta_a + \gamma_t \theta_a \right) \times \\ \times \frac{2(R_2 \operatorname{ch}(R_2) - \operatorname{sh}(R_2))R^3 - (R^2 \operatorname{sh}(R) - R \operatorname{ch}(R) + \operatorname{sh}(R))R_2^3}{(\operatorname{sh}(R_2) - R_2 \operatorname{ch}(R_2) + \gamma_h R_2^2 \operatorname{sh}(R_2))R^3} \quad (6.34)$$

На основі одержаного розв'язку запишемо вираз для поверхневого натягу у суцільній кулі, вільній від зовнішнього силового навантаження. Повторюючи викладки попередніх параграфів та приймаючи аналогічні наближення, для точки переходу приповерхневих розтягуючих напружень у стискаючі та поверхневого натягу відповідно одержуємо

$$R_a = R_2 - \ln\left(\frac{R_2}{2}\right). \\ f_p = \frac{a_0}{\xi \gamma_h} (\gamma_h \eta_a + \gamma_t \theta_a) \left[1 - \frac{2}{R_2} \ln\left(\frac{R_2}{2}\right) \right]. \quad (6.35)$$

Порівнюючи вирази для поверхневих натягів у шарі, циліндрі та кулі, приходимо до висновку, що найбільшим є поверхневий натяг у шарі, меншим у циліндрі і найменшим у кулі. Їх залежність від температури є лінійною, що узгоджується з результатами, одержаними методами фізики твердого тіла [53].

6.2. Вплив температури на частоти власних коливань структурно неоднорідного шару

Використовуючи методика, представлену у п'ятому розділі, вивчимо вплив температури на частоти власних коливань термопружного шару. Приймаючи за розв'язуючі функції вектор переміщення \vec{u} , збурення хімічного потенціалу η та температури θ , ключову систему рівнянь, що описує поведінку деформівного термопружного тіла із врахуванням приповерхневої неоднорідності запишемо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left[\rho^* - a_{mm} \eta - a_{em} \bar{\nabla} \cdot \vec{u} - a_{m\theta} \theta \right] \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_{ee} \nabla^2 \bar{u} + (\alpha_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + a_{em} \bar{\nabla} \eta + a_{ei} \bar{\nabla} \theta, \\
&\frac{\partial}{\partial \tau} (a_{uT_*} \bar{\theta} + a_{ei} T_* \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + a_{mi} T_* \eta) + \lambda_{ss} \nabla^2 \bar{\theta} = 0, \\
&\nabla^2 \bar{\eta} - \kappa_m^2 \bar{\eta} - \kappa_e^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{u} - \kappa_l^2 \bar{\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Тут $\kappa_m^2 = a_{mm} / g_{mm}$, $\kappa_e^2 = a_{em} / g_{mm}$, $\kappa_l^2 = a_{ei} / g_{mm}$.

Застосувавши методику осереднення та наближення, використані у підрозділі 5.2, записуємо такі системи рівнянь на осереднені та коливні складові розглядуваних полів

$$\begin{aligned}
&\alpha_{ee} \nabla^2 \bar{u} + (\alpha_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + a_{em} \bar{\nabla} \bar{\eta} + a_{ei} \bar{\nabla} \bar{\theta} = 0, \\
&\nabla^2 \bar{\theta} = 0, \\
&\nabla^2 \bar{\eta} - \kappa_m^2 \bar{\eta} - \kappa_e^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{u} - \kappa_l^2 \bar{\theta} = 0;
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \tau} \left([\rho_* - a_{mm} \bar{\eta} - a_{em} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} - a_{mi} \bar{\theta}] \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} \right) = \\
&= \alpha_{ee} \nabla^2 \bar{u} + (\alpha_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + a_{em} \bar{\nabla} \bar{\eta} + a_{ei} \bar{\nabla} \bar{\theta}, \\
&a_{ei} T_* \frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + a_{uT_*} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} + a_{mi} T_* \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau} = -\lambda_{ss} \nabla^2 \bar{\theta}, \\
&\nabla^2 \bar{\eta} - \kappa_m^2 \bar{\eta} - \kappa_e^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{u} - \kappa_l^2 \bar{\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Аналогічно як і вище, система (6.37) описує рівноважний стан, а (6.38) – хвильові процеси у термопружному тілі із врахуванням приповерхневої неоднорідності. Застосуємо ці системи рівнянь для вивчення впливу температури на власні частоти поперечних коливань шару (область $|x| \leq l$) за різних умов закріплення його поверхонь $x = \pm l$.

На основі аналізу (6.37), (6.38) бачимо, що, як і у випадку пружного тіла, при нехтуванні зв'язаністю коливних складових розглядуваних полів дослідження поперечних коливань шару $|x| \leq l$ можна

проводити у два етапи. На першому етапі визначаємо осереднені складові полів з системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + \frac{1}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \frac{d}{dx} (a_{em}\bar{\eta} + a_{el}\bar{\theta}) &= 0, \\ \frac{d^2\bar{\eta}}{dx^2} - \kappa_e^2 \frac{d\bar{u}}{dx} - \kappa_m^2\bar{\eta} - \kappa_l^2\bar{\theta} &= 0, \\ \frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

при наступному вивченні механічних коливань на основі рівняння

$$(a_{ee} + 2\alpha_{ee}) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \left(\rho_* - a_{em} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - a_{ml} \bar{\theta} - a_{mm} \bar{\eta} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}. \quad (6.40)$$

Для розв'язку системи рівнянь (6.39), що справджує граничні умови

$$\begin{aligned} \bar{\theta}|_{x=\pm l} &= \theta_a, \quad \bar{\eta}|_{x=\pm l} = \eta_a, \\ \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{1}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} (a_{em}\bar{\eta} + a_{el}\bar{\theta}) \right]_{x=\pm l} &= 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

при нехтуванні впливом деформації на хімічний потенціал, можна записати

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(x) &= \theta_a, \quad \bar{\eta}(x) = \eta_a + \left(\eta_a + \frac{\kappa_l^2}{\kappa_m^2} \theta_a \right) \left(\frac{\text{ch } \kappa_m x}{\text{ch } \kappa_m l} - 1 \right), \\ \frac{d\bar{u}(x)}{dx} &= - \frac{a_{em}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(\eta_a + \frac{\kappa_l^2}{\kappa_m^2} \theta_a \right) \frac{\text{ch } \kappa_m x}{\text{ch } \kappa_m l} + \frac{a_{em}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(\frac{\kappa_l^2}{\kappa_m^2} - \frac{a_{el}}{a_{em}} \right) \theta_a. \end{aligned}$$

Для усталених у часі коливань, розв'язок \tilde{u} рівняння (6.40) подаємо у вигляді (5.85). Тоді для визначення амплітуди коливань $u(x)$ одержуємо рівняння

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 \left(1 + A \frac{\text{ch}(\kappa x)}{\text{ch}(\kappa l)} \right) u = 0, \quad (6.42)$$

де

$$\kappa \equiv \kappa_m, \quad a = b \left(\eta_a + \frac{\kappa_l^2}{\kappa^2} \theta_a \right) / (\rho_* + \gamma \theta_a), \quad b = \frac{a_{em}^2}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} - a_{mm},$$

$$k^2 = \frac{\nu^2}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} (\rho_* + \gamma \theta_a), \quad \gamma = \frac{a_{em}^2}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(\frac{a_{el}}{a_{em}} + \frac{a_{ml}}{a_{mm}} \right).$$

Використовуючи розв'язки розв'язку за малим параметром $\alpha_1 \equiv A/\text{ch}(\kappa l) \ll 1$, та, обмежившись першим наближенням розв'язання $u(x) \approx u_0(x) + \alpha_1 u_1(x)$, для $u_0(x), u_1(x)$ одержуємо систему рівнянь (5.86). Їх загальний розв'язок має вигляд (5.87), (5.88).

Сконкретизуємо цей розв'язок для таких граничних умов: випадок 1 – поверхні шару зацімлені, випадок 2 – одна поверхня шару зацімлена, а інша вільна, та випадок 3 – поверхні шару вільні.

Поверхні шару зацімлені. З (5.87), (5.88) та граничних умов

$$u(-l) = 0, \quad u(l) = 0$$

одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження сталих A_0 і B_0 . Повторюючи процедуру підрозділу 5.2 для хвильових чисел одержуємо

$$k = \frac{\pi n}{2l} \left[1 - \left(\frac{\pi n}{2} \right)^2 \frac{2b}{(\xi l)^3} \frac{\eta_a + \theta_a \xi_0^2 / \xi^2}{\rho_* + \gamma \theta_a} \right], \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (6.43)$$

Це відповідає таким значенням власних частот

$$\nu_n = \frac{\pi n}{2l} \left[1 - \left(\frac{\pi n}{2} \right)^2 \frac{2b}{(\xi l)^3} \frac{\eta_a + \theta_a \xi_0^2 / \xi^2}{\rho_* + \gamma \theta_a} \right] \frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma \theta_a / \rho_*}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (6.44)$$

Якщо додатково прийняти, що вплив температури на густину є малим, тобто $\gamma \theta_a / \rho_* \ll 1$, то дане співвідношення спрощується до вигляду

$$v_n = \frac{\pi n c_1}{2l} \left[1 - \left(\frac{\pi n}{2} \right)^2 \frac{2b}{(\xi l)^3} \frac{\eta_a + \theta_a \xi_0^2 / \xi^2}{\rho_*} \right]. \quad (6.45)$$

Одна поверхня шару зацімлена, а інша вільна. У цьому випадку

$$k = \frac{\pi(2n+1)}{4l} \left(1 - \frac{b}{2\xi l} \frac{\eta_a + \theta_a \xi_0^2 / \xi^2}{\rho_* + \gamma \theta_a} \right), \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$v_n = \frac{\pi(2n+1)}{4l} \left(1 - \frac{b}{2\xi l} \frac{\eta_a + \theta_a \xi_0^2 / \xi^2}{\rho_* + \gamma \theta_a} \right) \frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma \theta_a / \rho_*}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (6.46)$$

Поверхні шару вільні. У цьому випадку для хвильових чисел та частот власних коливань одержуємо

$$k = \frac{\pi n}{2l} \left(1 - \frac{b}{\xi l} \frac{\eta_a + \theta_a \xi_0^2 / \xi^2}{\rho_* + \gamma \theta_a} \right), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$v_n = \frac{\pi n}{2l} \left[1 - \frac{b}{\xi l} \frac{\eta_a + \theta_a \xi_0^2 / \xi^2}{\rho_* + \gamma \theta_a} \right] \frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma \theta_a / \rho_*}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (6.47)$$

З (6.44), (6.46), (6.47) випливає, що якісна залежність v_n від температури є однаковою для розглядуваних умов закріплення поверхонь шару, разом з тим множники $2/(\xi l)^3, 1/(2\xi l), 1/(\xi l)$ можуть суттєво змінити кількісну залежність. Зрозуміло, що така залежність є суттєвішою для тонких плівок, порівняно з товстими шарами. Зі зростанням товщини шару вплив температури на власні частоти зменшується, прямиючи відповідно до

$$v_1^{(n)} = \frac{\pi n}{2l} \frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma \theta_a / \rho_*}},$$

$$v_2^{(n)} = \frac{\pi(2n+1)}{4l} \frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma \theta_a / \rho_*}},$$

$$v_3^{(n)} = \frac{\pi n}{2l} \frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma \theta_a / \rho_*}}.$$

Порівнюючи дані співвідношення з аналогічними для моделі пружного тіла (розділ 5), бачимо, що вираз $c_1/\sqrt{1+\gamma\theta_a/\rho_*}$ можна трактувати як залежність швидкості поширення пружної хвилі від збурення температури. Тобто, для шарів, товщини яких значно більші від характерного розміру області гриповерхневої неоднорідності, вплив температури на частоти власних коливань можна враховувати опосередковано через залежність від температури швидкості поширення пружної хвилі.

Розділ 7.

ПРИПОВЕРХНЕВА НЕОДНОРІДНІСТЬ У ТВЕРДИХ РОЗЧИНАХ

У даному розділі представлено основні співвідношення моделі деформівного твердого розчину із врахуванням структурної неоднорідності підсистеми скелету та на прикладі модельних задач вивчено закономірності приповерхневої неоднорідності у твердих розчинах. Розділ базується на роботах [8, 10, 12, 16-18, 27, 43-46, 69, 79, 84-88, 141-143].

7.1. Ключова система рівнянь моделі пружного твердого розчину із врахуванням структурної неоднорідності скелету

Розглянемо двокомпонентне структурно неоднорідне деформівне тверде тіло, яке займає область (V) евклідового простору, обмежену поверхнею (∂V) . За базові процеси у тілі приймаємо процеси деформування, теплопровідності та дифузії.

Рівняння балансу енергії E , при нехтуванні конвективними складовими потоків, має вигляд

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\sigma} \cdot \vec{v} - T \vec{j}_s - \sum_{i=0}^1 H_i \vec{j}_{mi} \right), \quad (7.1)$$

де індексом “0” відзначено підсистему скелету, а індексом “1” – підсистему домішок.

Враховуючи у даному співвідношенні рівняння балансу імпульсу та ентропії (3.3), різняння балансу маси підсистем скелету та домішок у вигляді

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{mi}, \quad i = 0, 1, \quad (7.2)$$

а також співвідношення для приросту кінетичної енергії (3.5), одержуємо таке рівняння балансу внутрішньої енергії

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} = \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^1 H_i \frac{\partial p_i}{\partial \tau} + T \frac{\partial S}{\partial \tau} - \\ - T \sigma_s - \bar{j}_s \cdot \bar{\nabla} T - \sum_{i=0}^1 \bar{j}_{mi} \cdot \bar{\nabla} H_i. \end{aligned} \quad (7.3)$$

На основі аналізу даного співвідношення за термодинамічні сили приймаємо

$$\bar{F}_T \equiv -\bar{\nabla} T, \quad \bar{F}_{H_i} \equiv -\bar{\nabla} H_i, \quad i = 0; 1.$$

Вважаємо, що залежність між термодинамічними потоками \bar{j}_s, \bar{j}_m та силами є функціональною

$$\bar{j}_i(\tau) = \mathbf{J}\alpha \left(-\bar{\nabla} T(\tau), -\bar{\nabla} H(\tau); -\bar{\nabla} T(\zeta), -\bar{\nabla} H(\zeta); U \right), \quad (7.4)$$

де $\mathbf{J}\alpha = \left\{ \left. \begin{matrix} \tau & \tau \\ \left\{ \mathbf{J}s; \mathbf{J}m \right\} \\ \zeta=0 & \zeta=0 \end{matrix} \right\} \right\}$ – функціонали, що перетворюють актуальні значення сил $\bar{F}_T(\tau), \bar{F}_{H_i}(\tau)$ та їх історії $\bar{F}_T(\zeta), \bar{F}_{H_i}(\zeta)$ ($0 \leq \zeta < \tau; i = 0; 1$) на актуальні значення відповідних потоків.

Для ізотропних тіл у випадку лінійної залежності між термодинамічними потоками та силами можна записати

$$\bar{j}_i(\tau) = G_{is} * \bar{F}_T + G_{im0} * \bar{F}_{H_0} + G_{im1} * \bar{F}_{H_1}, \quad i = \{s, m0, m1\}. \quad (7.5)$$

Для функцій впливу у випадку розглядуваного двокомпонентного твердого розчину приймаємо подання

$$\begin{aligned} G_{m0m0}(\tau, \zeta) = -g_{mm} \delta(\tau - \zeta) + g_{m0m0}(\tau, 0), \\ G_{ss}(\tau, \zeta) = g_{ss}(\tau, 0), \quad G_{sm0}(\tau, \zeta) = G_{m0s}(\tau, \zeta) = g_{sm0}(\tau, 0), \\ G_{sm1}(\tau, \zeta) = G_{m1s}(\tau, \zeta) = g_{sm1}(\tau, 0), \quad G_{m1m1}(\tau, \zeta) = g_{m1m1}(\tau, 0), \\ G_{m0m1}(\tau, \zeta) = g_{m0m1}(\tau, 0), \quad G_{m1m0}(\tau, \zeta) = g_{m1m0}(\tau, 0). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Такий вибір функції впливу відповідає врахуванню структури (мікροструктури) середовища, яка виникає у початковий момент часу та наближенню, яке зазвичай приймається для домішок, а саме наближення ідеального газу.

Із співвідношень (7.5), (7.6) одержуємо наступні вирази для потоків $\vec{j}_s, \vec{j}_{m0}, \vec{j}_{m1}$

$$\begin{aligned}\vec{j}_s &= -g_{ss}\vec{\nabla}T - g_{sm0}\vec{\nabla}H_0 - g_{sm1}\vec{\nabla}H_1, \\ \vec{j}_{m0} &= g_{mm}\frac{\partial(\vec{\nabla}H_0)}{\partial\tau} - g_{sm0}\vec{\nabla}T - g_{m0m0}\vec{\nabla}H_0 - g_{m0m1}\vec{\nabla}H_1, \\ \vec{j}_{m1} &= -g_{sm1}\vec{\nabla}T - g_{m1m0}\vec{\nabla}H_0 - g_{m1m1}\vec{\nabla}H_1.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Як і раніше вважаємо, що коефіцієнти у формулах (7.7) можуть залежати від параметрів стану, зокрема температури.

Подання (7.6), (7.7) дозволяє записати рівняння балансу ентропії та маси у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial\tau} &= -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_s + \sigma_s, \\ \frac{\partial\rho_s}{\partial\tau} &= -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m^{(1)}, \\ \frac{\partial}{\partial\tau}(\rho_0 + g_{mm}\nabla^2 H_0) &= -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m^{(0)},\end{aligned}\quad (7.8)$$

де

$$\begin{aligned}\vec{j}_m^{(0)} &= -g_{sm0}\vec{\nabla}T - g_{m0m0}\vec{\nabla}H_0 - g_{m0m1}\vec{\nabla}H_1, \quad \vec{j}_m^{(1)} = \vec{j}_{m1}, \\ \sigma_s &= -\frac{1}{T}(\vec{j}_s\cdot\vec{\nabla}T + \vec{j}_m^{(0)}\cdot\vec{\nabla}H_0 + \vec{j}_m^{(1)}\cdot\vec{\nabla}H_1).\end{aligned}$$

Воно вимагає також введення до повної енергії доданку

$$U' = \frac{1}{2}g_{mm}\vec{\nabla}H_0\cdot\vec{\nabla}H_0.$$

При вивченні твердих розчинів поряд з системами каркасу та домішок вводять у розгляд континуум центрів мас, для якого потік маси \vec{j}_m дорівнює нулеві. Приймаючи

$$\vec{j}_m = \vec{j}_m^{(0)} + \vec{j}_m^{(1)}, \quad (7.9)$$

друге рівняння системи (7.8) можемо замінити таким рівнянням балансу маси континууму центрів мас

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1 + g_{mm} \nabla^2 H_0) = 0. \quad (7.10)$$

Таким чином, приходимо до висновку, що внутрішня енергія U визначена в просторі ентропії S , густин підсистем скелету і домішок ρ_0, ρ_1 , градієнта хімічного потенціалу скелету $\vec{\nabla} H_0$ та тензора деформації \hat{e}

$$U = U(S, \rho_0, \rho_1, \vec{\nabla} H_0, \hat{e}), \quad (7.11)$$

а для її приросту dU справджується рівняння

$$dU = T dS + H_0 d\rho_0 + H_1 d\rho_1 + \hat{c} : d\hat{e} + dU'. \quad (7.12)$$

Параметрами, спряженими до $S, \rho_0, \rho_1, \hat{e}$ відповідно є температура T , хімічні потенціали H_0, H_1 та тензор напруження \hat{c} . Рівняння стану, що пов'язують параметри T, H_0, H_1, \hat{c} зі спряженими, відповідно до (7.12), мають вигляд

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad H_0 = \frac{\partial U}{\partial \rho_0}, \quad H_1 = \frac{\partial U}{\partial \rho_1}, \quad \hat{c} = \frac{\partial U}{\partial \hat{e}}. \quad (7.13)$$

Для термодинамічного потенціалу F , пов'язаного з U перетворенням Лежандра

$$F = U - TS - H_0 \rho_0 - H_1 \rho_1, \quad (7.14)$$

рівняння стану для $S, \rho_0, \rho_1, \hat{c}$ мають вигляд

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad \rho_0 = -\frac{\partial F}{\partial H_0}, \quad \rho_1 = -\frac{\partial F}{\partial H_1}, \quad \hat{c} = \frac{\partial F}{\partial \hat{e}}. \quad (7.15)$$

При цьому простором визначення енергії F є температура T , хімічні потенціали H_0, H_1 , градієнт хімічного потенціалу скелету $\vec{\nabla} H_0$ та тензор деформації \hat{e}

$$F = F(T, H_0, H_1, \vec{\nabla} H_0, \hat{e}). \quad (7.16)$$

За початковий стан тіла приймемо стан вільного від силового навантаження структурно неоднорідного ізотропного середовища з параметрами

$$T = T_*, \quad S = S_*, \quad H_0 = H_{0*}, \quad H_1 = H_{1*},$$

$$\rho_0 = \rho_{0*}, \quad \rho_1 = \rho_{1*}, \quad \hat{e} = 0, \quad \hat{\sigma} = 0.$$

Енергію F приймемо квадратичною функцією у просторі збурень базових параметрів стану

$$\theta = T - T_*, \quad \eta_0 = H_0 - H_{0*}, \quad \eta_1 = H_1 - H_{1*}, \quad \hat{e} = \hat{e} - 0, \quad (7.17)$$

тобто

$$\begin{aligned} F = & F_* - S_*\theta - \rho_{0*}\eta_0 - \rho_{1*}\eta_1 + \alpha_{ee}\hat{e} : \hat{e} + a_{e\theta}\theta + \frac{1}{2}a_{ee}e^2 + \frac{1}{2}a_{\theta\theta}\theta^2 + \\ & + a_{e\theta 0}e\eta_0 + a_{e\theta 1}e\eta_1 + a_{\theta 0}\eta_0\theta + a_{\theta 1}\eta_1\theta + \\ & + a_{m0m1}\eta_0\eta_1 + \frac{1}{2}a_{m0m0}\eta_0^2 + \frac{1}{2}a_{m1m1}\eta_1^2 + \frac{1}{2}g_{mm}\bar{\nabla}\eta_0 \cdot \bar{\nabla}\eta_0, \end{aligned} \quad (7.18)$$

де a_{ij} , α_{ee} – характеристики матеріалу ($i, j = \{e, m0, m1, t\}$).

На основі (7.15), використовуючи (7.18), записуємо такий явний вигляд рівнянь стану для $\hat{\sigma}$, S , ρ_0 , ρ_1

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 2\alpha_{ee}\hat{e} + (a_{ee}e + a_{e\theta}\theta + a_{e\theta 0}\eta_0 + a_{e\theta 1}\eta_1)\hat{I}, \\ s &\equiv S - S_* = -a_{\theta}e - a_{\theta 0}\eta_0 - a_{\theta 1}\eta_1 - a_{e\theta}e, \\ \rho_0 - \rho_{0*} &= -a_{m0m0}\eta_0 - a_{m0m1}\eta_1 - a_{m0}\theta - a_{e\theta 0}e, \\ \rho_1 - \rho_{1*} &= -a_{m0m1}\eta_0 - a_{m1m1}\eta_1 - a_{m1}\theta - a_{e\theta 1}e. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Приймаючи за ключові функції вектор переміщення \bar{u} , збурення хімічного потенціалу скелету і домішок η_0, η_1 та збурення температури θ , ключову лінеаризовану систему рівнянь моделі записуємо у вигляді

$$\alpha_{ee}\nabla^2\bar{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee})\bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + a_{e\theta}\bar{\nabla}\theta + a_{e\theta 0}\bar{\nabla}\eta_0 + a_{e\theta 1}\bar{\nabla}\eta_1 = \rho_* \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2},$$

$$\begin{aligned}
 & -a_{II}T_* \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - a_{eI}T_* \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}{\partial \tau} - a_{m0}T_* \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - a_{mI}T_* \frac{\partial \eta_I}{\partial \tau} = \\
 & = g_{ss} \nabla^2 \theta + g_{sm0} \nabla^2 \eta_0 + g_{smI} \nabla^2 \eta_I, \\
 & -a_{m0mI} \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - a_{mImI} \frac{\partial \eta_I}{\partial \tau} - a_{mI} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - a_{eImI} \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}{\partial \tau} = \\
 & = g_{smI} \nabla^2 \theta + g_{mIm0} \nabla^2 \eta_0 + g_{mImI} \nabla^2 \eta_I, \\
 & \nabla^2 \eta_0 - \kappa_0^2 \eta_0 - \kappa_I^2 \eta_I - \kappa_I^2 \theta - \kappa_e^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \tag{7.20}
 \end{aligned}$$

де враховано нульові початкові умови для збурень розглядуваних механотермодифузійних полів, а також малість збурення температури θ порівняно з початковою температурою тіла T_* ;

$$\begin{aligned}
 \kappa_0^2 &= \frac{a_{m0mI} + a_{mIm0}}{g_{mm}}, & \kappa_I^2 &= \frac{a_{mImI} + a_{mImI}}{g_{mm}}, \\
 \kappa_I^2 &= \frac{a_{m0} + a_{mI}}{g_{mm}}, & \kappa_e^2 &= \frac{a_{eImI} + a_{eIm0}}{g_{m0I}}.
 \end{aligned}$$

Якщо у (7.20) врахувати умову

$$\vec{j}_m^{(0)} + \vec{j}_m^{(I)} = 0,$$

то ця система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 & -a_{II}T_* \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - a_{eI}T_* \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}{\partial \tau} - a_{m0}T_* \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - a_{mI}T_* \frac{\partial \eta_I}{\partial \tau} = \\
 & = g_{ss} \nabla^2 \theta + g_{smI} (\nabla^2 \eta_I - \nabla^2 \eta_0), \\
 & -a_{m0mI} \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - a_{mImI} \frac{\partial \eta_I}{\partial \tau} - a_{mI} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - a_{eImI} \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}{\partial \tau} = \\
 & = g_{smI} \nabla^2 \theta + g_{mImI} (\nabla^2 \eta_I - \nabla^2 \eta_0), \\
 & \nabla^2 \eta_0 - \kappa_0^2 \eta_0 - \kappa_I^2 \eta_I - \kappa_I^2 \theta - \kappa_e^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \tag{7.21}
 \end{aligned}$$

де g_{mI} – кінетичний коефіцієнт.

При математичному формулюванні крайових задач до сформульованих вище систем рівнянь необхідно додати відповідні початкові та граничні умови.

7.2. Рівноважні приповерхневі явища в бінарних твердих розчинах

Система рівнянь, що описує стаціонарний стан бінарних твердих розчинів за ізотермічного наближення, записана на \vec{u} , η_0, η_1 має вигляд

$$\begin{aligned} \alpha_{ee} \nabla^2 \vec{u} + (\alpha_{ee} + \alpha_{ee}) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{em0} \bar{\nabla} \eta_0 + a_{em1} \bar{\nabla} \eta_1 &= 0, \\ \nabla^2 \eta_0 - \nabla^2 \eta_1 &= 0, \\ \nabla^2 \eta_0 - \kappa_0^2 \eta_0 - \kappa_1^2 \eta_1 - \kappa_e^2 \bar{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Якщо за розв'язуючі функції вибрати хімічні потенціали η_0, η_1 та тензор напруження $\hat{\sigma}$, то ключовою системою рівнянь моделі є

$$\begin{aligned} \nabla^2 \eta_0 - \nabla^2 \eta_1 &= 0, \\ \nabla^2 \eta_0 - \kappa_{\eta_0}^2 \eta_0 - \kappa_{\eta_1}^2 \eta_1 - \kappa_{\sigma}^2 \sigma &= 0, \\ \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} &= 0, \\ \bar{\nabla} \times \left[\hat{\sigma} - \frac{2\alpha_{ee}}{3\alpha_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(\frac{a_{eee}}{2\alpha_{ee}} \sigma + a_{em0} \eta_0 + a_{em1} \eta_1 \right) \hat{I} \right] \times \bar{\nabla} &= 0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

де

$$\kappa_{\sigma}^2 = \frac{\kappa_e^2}{2\alpha_{ee} + 3\alpha_{ee}} \quad \kappa_{\eta_i}^2 = \kappa_i^2 - \frac{3\kappa_e^2 a_{emi}}{2\alpha_{ee} + 3\alpha_{ee}}, \quad i = 1, 2.$$

При нехтуванні впливом деформації на хімічні потенціали скелету та домішок останнє рівняння системи (7.22) набуває вигляду

$$\nabla^2 \eta_0 - \kappa_0^2 \eta_0 - \kappa_1^2 \eta_1 = 0. \quad (7.24)$$

За такого наближення методика дослідження механодифузійних полів зводиться до послідовного визначення хімічних потенціалів

скелету та домішок при наступному визначенні вектора переміщень та тензорів напружень і деформації.

7.2.1. Рівноважний стан двокомпонентного шару

Розглянемо віднесений до прямокутної декартової системи координат $\{x, y, z\}$ шар, який займає область $|x| \leq l$. Вважаємо, що шар перебуває під дією силового навантаження $\vec{F} = \{0, 2\sigma_a l, 0\}$ при $y \rightarrow \infty$, а на вільних від силового навантаження поверхнях шару $x = l$, $x = -l$ задано постійне, відмінне від нуля значення хімічного потенціалу скелету η_{a0} та домішок η_{a1} .

За розглядуваної зовнішньої дії в тілі реалізується одновимірна за координатою x ситуація

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x), \quad \eta_i = \eta_i(x), \quad i = 0; 1.$$

За розв'язуючі функції приймаємо тензор напруження $\hat{\sigma}$ та хімічні потенціали компонент твердого розчину η_0, η_1 . Систему рівнянь (7.22) у цьому випадку записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} - \kappa_{\eta_0}^2 \eta_0 - \kappa_{\eta_1}^2 \eta_1 - \kappa_{\sigma}^2 \sigma &= 0, \\ \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} - \frac{d^2 \eta_1}{dx^2} &= 0, \\ \frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 \sigma_{yy}}{dx^2} = \frac{d^2 \sigma_{yz}}{dx^2} &= a_0 \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} + a_1 \frac{d^2 \eta_1}{dx^2}, \end{aligned} \quad (7.25)$$

де

$$a_i = 2 \frac{\alpha_{ee} \alpha_{emi}}{2\alpha_{ee} + \alpha_{ee}}, \quad i = 1, 2.$$

Задача про визначення рівноважних розподілів хімічних потенціалів η_0, η_1 та ненульових компонент $\sigma_{\beta\beta}$ ($\beta = \{x, y, z\}$) тензора напружень зводиться до знаходження розв'язку системи рівнянь (7.25) при умовах

$$\eta_0 = \eta_{a0}, \quad \eta_1 = \eta_{a1}, \quad \sigma_{xx} = 0 \quad (7.26)$$

на поверхнях $x = l$, $x = -l$ шару та умовах (4.18), (4.19) відповідно у поперечних перерізах $z = const$ та $y = const$.

Розв'язком задачі, записаним на хімічні потенціали та ненульові компоненти тензора напружень, є

$$\begin{aligned}\eta_0(x) &= \eta_{a0} + \frac{\kappa_{\eta 0}^2 \eta_{a0} + \kappa_{\eta 1}^2 \eta_{a1} + \kappa_{\sigma}^2 \sigma_a}{\xi_1^2 + 2(a_0 + a_1)N\kappa_{\sigma}^2} \left(\frac{\text{ch}(\xi_1 x)}{\text{ch}(\xi_1 l)} - 1 \right), \\ \eta_1(x) &= \eta_{a1} + \frac{\kappa_{\eta 0}^2 \eta_{a0} + \kappa_{\eta 1}^2 \eta_{a1} + \kappa_{\sigma}^2 \sigma_a}{\xi_1^2 + 2(a_0 + a_1)N\kappa_{\sigma}^2} \left(\frac{\text{ch}(\xi_1 x)}{\text{ch}(\xi_1 l)} - 1 \right), \\ \sigma_{yy}(x) &= \sigma_a + (a_0 + a_1) \frac{\kappa_{\eta 0}^2 \eta_{a0} + \kappa_{\eta 1}^2 \eta_{a1} + \kappa_{\sigma}^2 \sigma_a}{\xi_1^2 + 2(a_0 + a_1)N\kappa_{\sigma}^2} \left(\frac{\text{ch}(\xi_1 x)}{\text{ch}(\xi_1 l)} - \frac{\text{th}(\xi_1 l)}{\xi_1 l} \right), \\ \sigma_{zz}(x) &= \sigma_{yy}(x) - \sigma_a,\end{aligned}\quad (7.27)$$

де

$$\xi_1^2 = \kappa_{\eta 0}^2 + \kappa_{\eta 1}^2 + 2(a_0 + a_1)\kappa_{\sigma}^2, \quad N = \frac{\text{th}(\xi_1 l)}{\xi_1 l} - 1.$$

При нехтуванні впливом тензора напружень на хімічні потенціали компонент твердого розчину співвідношення (7.27) спрощуються і набувають вигляду

$$\begin{aligned}\eta_0(x) &= \eta_{a0} + \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\mathfrak{g}_1^2} \left(\frac{\text{ch}(\mathfrak{g}_1 x)}{\text{ch}(\mathfrak{g}_1 l)} - 1 \right), \\ \eta_1(x) &= \eta_{a1} + \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\mathfrak{g}_1^2} \left(\frac{\text{ch}(\mathfrak{g}_1 x)}{\text{ch}(\mathfrak{g}_1 l)} - 1 \right), \\ \sigma_{yy}(x) &= \sigma_a + (a_0 + a_1) \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\mathfrak{g}_1^2} \left(\frac{\text{ch}(\mathfrak{g}_1 x)}{\text{ch}(\mathfrak{g}_1 l)} - \frac{\text{th}(\mathfrak{g}_1 l)}{\mathfrak{g}_1 l} \right), \\ \sigma_{zz}(x) &= \sigma_{yy}(x) - \sigma_a.\end{aligned}\quad (7.28)$$

де

$$\mathfrak{g}_1^2 = \kappa_0^2 + \kappa_1^2.$$

На рис. 7.1-7.7 представлено результати числового дослідження механодифузійних полів при відсутності зовнішнього силового навантаження ($\sigma_a = 0$). На рисунку 7.1 показано розподіл хімічних потенціалів скелету η_0/η_{a0} (суцільні лінії) та домішок η_1/η_{a0} (штрихові лінії) по товщині шару при $\kappa_0 l = 3,5, 3,0$ (криві 1-3), $a_0 \kappa_\sigma^2 / \kappa_0^2 = 0,2$, $\kappa_1^2 / \kappa_0^2 = 0,1$, $a_1 / a_0 = 0,4$, $\eta_{a1} / \eta_{a0} = 0,5$. Бачимо, що розподіл домішок є аналогічним до розподілу хімічного потенціалу скелету. На основі порівняння графіків на рис. 4.1 і 7.1 бачимо, що наявність домішок у гілі може приводити до суттєвої зміни хімічного потенціалу каркасу у внутрішніх областях тіла.

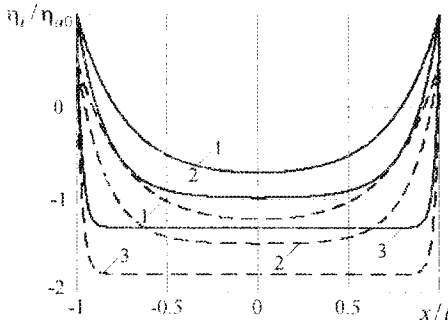


Рис. 7.1. Розподіл хімічного потенціалу скелету та домішок у шарі

Залежність хімічних потенціалів скелету та домішок від коефіцієнта зв'язаності κ_σ^2 суттєво збільшується зі збільшенням цього коефіцієнта. Ілюструють це графіки на рис. 7.2, на яких показано залежність хімічних потенціалів η_0/η_{a0} (суцільні лінії) та η_1/η_{a0} (штрихові лінії) від $a_0 \kappa_\sigma^2 / \kappa_0^2$ на серединній поверхні шару $x=0$ при $\kappa_0 l = 3,10$ (криві 1-2), $\kappa_1^2 / \kappa_0^2 = 0,1$, $a_1 / a_0 = 0,4$, $\eta_{a1} / \eta_{a0} = 0,5$.

На рисунку 7.3 показано залежність хімічних потенціалів скелету η_0/η_{a0} (суцільні лінії) та домішок η_1/η_{a0} (штрихові лінії) від параметра $\kappa_{10} = \kappa_1^2 / \kappa_0^2$ при $x/l = 0,8$, $\kappa_0 l = 2,3$ (криві 1,2), $a_0 \kappa_\sigma^2 / \kappa_0^2 = 0,2$, $a_1 / a_0 = 0,4$, $\eta_{a1} / \eta_{a0} = 0,5$.

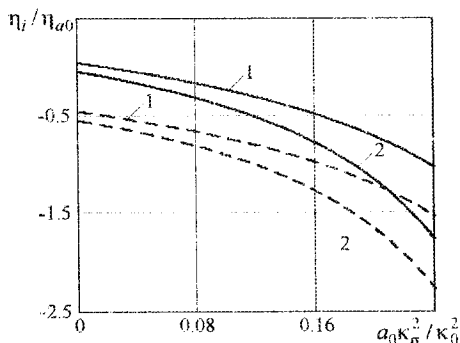


Рис.7.2. Залежність хімічних потенціалів скелету та домішок від параметра κ_{σ}

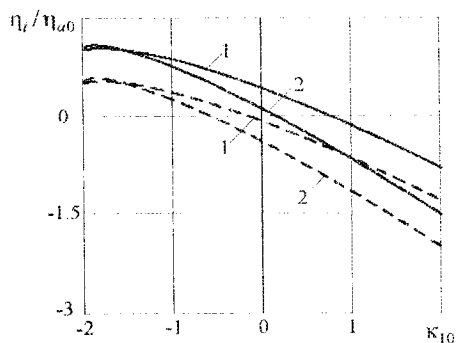


Рис.7.3. Залежність хімічних потенціалів скелету та домішок від параметра κ_{10}

На рисунку 7.4 показано залежність приведених напружень σ_{yu}/σ_0 ($\sigma_0 = a_0\eta_{0a}$) на зовнішніх (суцільні лінії) та серединній (штрихові лінії) поверхнях шару від параметра $\kappa_{10} \equiv \kappa_1^2/\kappa_0^2$ при $\kappa_0 l = 3.30$ (криві 1,2), $a_0\kappa_{\sigma}^2/\kappa_0^2 = 0.2$, $a_1/a_0 = 0.1$, $\eta_{a1}/\eta_{a0} = 0.5$. Бачимо, що зі збільшенням відношення κ_1^2/κ_0^2 поверхневі напруження збільшуються тоді як напруження на серединній поверхні шару зменшуються. Для товстих шарів напруження на його серединній поверхні практично не залежать від величини κ_{10} .

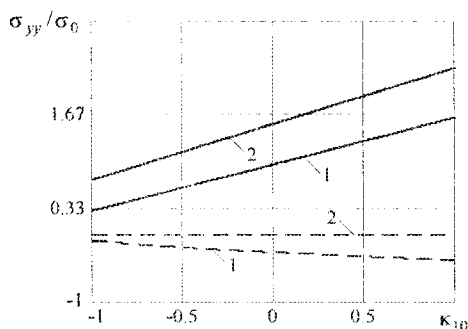


Рис.7.4. Залежність напружень на зовнішній та середній поверхнях шару від параметра κ_{10}

На рисунку 7.5 показано залежність приведених поверхневих напружень σ_{yy}/σ_0 від $a_0\kappa_\sigma^2/\kappa_0^2$ при $\kappa_0 l = 10$, $\eta_{a1}/\eta_{a0} = 0.5$, $\kappa_1^2/\kappa_0^2 = 0.4$, $a_1/a_0 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ (криві 1-4). Зі збільшенням параметра $a_0\kappa_\sigma^2/\kappa_0^2$ величина поверхневих розтягуючих напружень зростає.

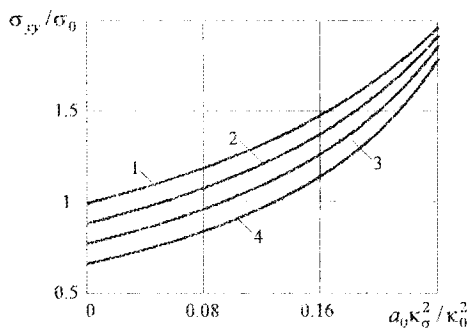


Рис.7.5. Залежність поверхневих напружень від параметра $a_0\kappa_\sigma^2/\kappa_0^2$

Аналіз одержаних результатів показує, що залежність напружень σ_{yy}/σ_0 від товщини шару (параметра $\kappa_0 l$) є аналогічною до залежності у бездомішковому тілі.

Використаємо одержані вище співвідношення для вивчення впливу домішок на величину силового навантаження, що приводить до руйнування шару. Як і раніше приймаємо, що шар зруйнується мит-

тево, якщо хоча б в одній його точці напруження досягнуть значення σ_p . Максимальними розтягуючими напруженнями є напруження σ_{yy} на поверхнях $x = \pm l$ шару, які згідно з (7.26) описуються формулою

$$\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_a - \left(\kappa_{\eta 0}^2 \eta_{a0} + \kappa_{\eta 1}^2 \eta_{a1} + \kappa_{\sigma}^2 \sigma_a \right) \frac{(a_0 + a_1)N}{\xi_1^2 + 2(a_0 + a_1)N\kappa_{\sigma}^2}. \quad (7.29)$$

На цій основі, в рамках першої класичної теорії міцності, для інтенсивності силового навантаження, що приводить до руйнування шару одержуємо

$$\sigma_a^{kr} = \frac{\sigma_p \left(\xi_1^2 + 2(a_0 + a_1)N\kappa_{\sigma}^2 \right) + (a_0 + a_1)N \left(\kappa_{\eta 0}^2 \eta_{a0} + \kappa_{\eta 1}^2 \eta_{a1} \right)}{\xi_1^2 + (a_0 + a_1)N\kappa_{\sigma}^2}. \quad (7.30)$$

Оскільки N залежить від товщини шару (див. (7.27)), то дана формула описує також вплив домішок на розмірний ефект силового навантаження, що приводить до руйнування шару.

Порівнюючи формулу (7.30) з (4.21) бачимо, що величина

$$\mathfrak{R} = \sigma_p \left(\frac{\xi_1^2 + 2(a_0 + a_1)N\kappa_{\sigma}^2}{\xi_1^2 + (a_0 + a_1)N\kappa_{\sigma}^2} - \frac{1 + \alpha N_1}{1 + \alpha N_1 / 2} \right) + (a_0 + a_1)N \frac{\kappa_{\eta 0}^2 \eta_{a0} + \kappa_{\eta 1}^2 \eta_{a1}}{\xi_1^2 + (a_0 + a_1)N\kappa_{\sigma}^2} - (1 - \alpha) a_0 \eta_a \frac{N_1}{1 + \alpha N_1 / 2} \quad (7.31)$$

де $N_1 = \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} - 1$, описує вплив домішок на інтенсивність силового навантаження, що приводить до руйнування шару.

При нехтуванні впливом тензора напружень на хімічні потенціали підсистем твердого розчину з (7.31) одержуємо

$$\mathfrak{R} = (a_0 + a_1) \frac{\kappa_{\eta 0}^2 \eta_{a0} + \kappa_{\eta 1}^2 \eta_{a1}}{\mathfrak{g}_1^2} \left(\frac{\text{th}(\mathfrak{g}_1 l)}{\mathfrak{g}_1 l} - 1 \right) - a_0 \eta_{a0} \left(\frac{\text{th}(\kappa_{\eta} l)}{\kappa_{\eta} l} - 1 \right) \quad (7.32)$$

для тонких плівок та

$$\mathfrak{R} = a_0 \eta_{a0} - (a_0 + a_1) \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\mathfrak{g}_1^2} \quad (7.33)$$

для товстих шарів.

Опускаючи проміжні викладки, запишемо формули, аналогічні до формул, одержаних на основі четвертої теорії міцності у 4 розділі. При $\kappa_\sigma = 0$ вони є такими

$$\begin{aligned} \sigma_\sigma^{kr} &= \Sigma_+ - \frac{1}{2} (a_0 + a_1) \frac{\eta_{a0} + \kappa_{10}^2 \eta_{a1}}{1 + \kappa_{10}^2} \left(1 - \frac{\text{th}(\kappa_0 \mathfrak{g} l)}{\kappa_0 \mathfrak{g} l} \right), \\ \sigma_a^{kr} &= \Sigma_+ + \frac{1}{2} \left[a_0 \eta_a - (a_0 + a_1) \frac{\eta_{a0} + \kappa_{10}^2 \eta_{a1}}{1 + \kappa_{10}^2} \left(1 - \frac{\text{th}(\kappa_0 \mathfrak{g} l)}{\kappa_0 \mathfrak{g} l} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Тут для інтенсивності силового навантаження, що приводить до руйнування товстого бездомішкового шару збережено позначення Σ_+ та використано позначення

$$\mathfrak{g} = 1 + \kappa_{10}^2, \quad \kappa_{10}^2 = \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2}.$$

Поверхневий натяг. Використаємо одержані вище співвідношення для вивчення впливу домішок на поверхневий натяг f_p у вільному від силового навантаження шарі. З умови $\sigma_{yy}(x_a) = 0$, використовуючи формули (7.27) при $\sigma_a = 0$, для точки x_a переходу розтягуючих приповерхневих напружень σ_{yy} у стискаючі у товстих шарах ($\exp(\xi_1 l) \gg \xi_1 l$) знаходимо

$$x_a = l \left[1 - \frac{\ln(\xi_1 l)}{\xi_1 l} \right]. \quad (7.35)$$

На цій основі для поверхневого натягу f_p при $\kappa_\sigma = 0$ одержуємо

$$f_p = (a_0 + a_1) \frac{\eta_{a0} + \kappa_{10}^2 \eta_{a1}}{\kappa_0 \mathfrak{g}^3} \left\{ 1 - \frac{1}{\kappa_0 \mathfrak{g} l} [1 + \ln(\kappa_0 \mathfrak{g} l)] \right\}. \quad (7.36)$$

Порівнюючи дану формулу з виразом для поверхневого натягу у бездомішковому тілі (4.15) бачимо, що величина

$$F_p = (a_0 + a_1) \frac{\eta_{a0} + \kappa_{j0}^2 \eta_{a1}}{\kappa_0 \vartheta^3} \left\{ 1 - \frac{1}{\kappa_0 \vartheta l} [1 + \ln(\kappa_0 \vartheta l)] \right\} - \\ - \frac{a_0 \eta_{a0}}{\kappa_0} \left\{ 1 - \frac{1}{\kappa_0 l} [1 + \ln(\kappa_0 l)] \right\}. \quad (7.37)$$

описує вплив домішок на поверхневий натяг у шарі та його розмірний ефект. В залежності від характеристик матеріалу та домішок, наявність у тілі домішок може привести як до збільшення, так і до зменшення поверхневого натягу.

Зі збільшенням товщини шару поверхневий натяг зростає, прямуючи до значення поверхневого натягу у півпросторі, насиченому домішками

$$f_p = (a_0 + a_1) \frac{\eta_{a0} + \kappa_{j0}^2 \eta_{a1}}{\kappa_0 \vartheta^3}. \quad (7.38)$$

7.2.2. Рівноважний стан насиченої кулі

Розглянемо вільну від силового навантаження двокомпонентну кулю радіуса R , яку віднесено до сферичної системи координат $\{r, \varphi, \psi\}$, початок якої співпадає з центром кулі. Вважаємо, що на поверхні $r = R$ задано постійні за координатами φ, ψ значення хімічних потенціалів скелету η_{a0} та домішок η_{a1} .

За розв'язуючі функції виберемо ненульову компоненту u вектора перемішень $\vec{u} = (u, 0, 0)$ та хімічні потенціали η_0, η_1 . На основі (7.22) систему рівнянь, що описує рівноважний стан кулі запишемо у вигляді

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\frac{d\eta_0}{dr} - \kappa_e^2 u \right) \right] - \kappa_0^2 \eta_0 - \kappa_1^2 \eta_1 = 0, \\ \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} (\eta_0 - \eta_1) \right] = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] - \frac{d}{dr} (m_0 \eta_0 + m_1 \eta_1) = 0, \quad (7.39)$$

де

$$m_i = -\frac{a_{emi}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}, \quad i = 1, 2.$$

Граничні умови та умови обмеженості розв'язку мають вигляд

$$2\alpha_{ee} \frac{du}{dr} + a_{ee} \left(\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} \right) + a_{em0} \eta_0 + a_{em1} \eta_1 = 0, \\ \eta_0 = \eta_{a0}, \quad \eta_1 = \eta_{a1} \quad (7.40)$$

на поверхні $r = R$ кулі та

$$\lim_{r \rightarrow 0} |u| = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |\eta_0| < K_0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |\eta_1| < K_1. \quad (7.41)$$

Якщо вектор переміщення \vec{u} та хімічні потенціали η_0, η_1 відомі, то ненульові компоненти $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\theta\theta}$ тензора напружень $\hat{\sigma}$ визначаємо за формулами

$$\sigma_{rr} = 2\alpha_{ee} \frac{du}{dr} + a_{ee} \left(\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} \right) + a_{em0} \eta_0 + a_{em1} \eta_1, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} = 2\alpha_{ee} \frac{u}{r} + a_{ee} \left(\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} \right) + a_{em0} \eta_0 + a_{em1} \eta_1. \quad (7.42)$$

Розв'язок задачі (7.39)-(7.41) для хімічних потенціалів та ненульових компонент тензора напружень є таким

$$\eta_0(r) = \eta_{a0} + B_1 \left(\frac{R \operatorname{sh}(\zeta r)}{r \operatorname{sh}(\zeta R)} - 1 \right), \\ \eta_1(r) = \eta_{a1} + B_1 \left(\frac{R \operatorname{sh}(\zeta r)}{r \operatorname{sh}(\zeta R)} - 1 \right); \quad (7.43)$$

$$\sigma_{rr}(r) = \left(a_{ee} + \frac{2}{3} \alpha_{ee} \right) B_2 + a_{em0} \eta_{a0} + a_{em1} \eta_{a1} -$$

$$-4\alpha_{ee}B_1 \frac{R}{r} \left(\frac{1}{\zeta r} \frac{\text{ch}(\zeta r)}{\text{sh}(\zeta R)} - \frac{1}{\zeta^2 r^2} \frac{\text{sh}(\zeta r)}{\text{sh}(\zeta R)} - \frac{1}{3R} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \sigma_{\psi\psi}(r) = 2\alpha_{ee}B_1 \left[(m_0 + m_1) \frac{R}{r} \left(\frac{1}{\zeta r} \frac{\text{ch}(\zeta r)}{\text{sh}(\zeta R)} - \frac{1}{\zeta^2 r^2} \frac{\text{sh}(\zeta r)}{\text{sh}(\zeta R)} - \frac{1}{3R} \right) - (m_0 + m_1) \left(\frac{R}{r} \frac{\text{sh}(\zeta r)}{\text{sh}(\zeta R)} - 1 \right) \right] + \left(a_{ee} + \frac{2}{3}\alpha_{ee} \right) B_2 + a_{em0}\eta_{a0} + a_{em1}\eta_{a1}. \quad (7.44)$$

Тут

$$B_1 = \eta_{a0} \frac{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})\kappa_0^2 + 3(a_{ee} + 2\alpha_{ee})\kappa_e m_0^2}{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})\zeta^2 - 4\alpha_{ee}\kappa_e^2(m_0 + m_1)(3C_1 - 1)} + \eta_{a1} \frac{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})\kappa_1^2 + 3(a_{ee} + 2\alpha_{ee})\kappa_e^2 m_1}{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})\zeta^2 - 4\alpha_{ee}\kappa_e^2(m_0 + m_1)(3C_1 - 1)},$$

$$B_2 = m_0\eta_{a0} + m_1\eta_{a1} + \frac{1}{\kappa_e^2} \left[\zeta^2 B_1 + (\eta_{a0} - \eta_{a1}) (\kappa_1^2 + m_1\kappa_e^2) - \zeta^2 \eta_{a0} \right],$$

$$\zeta^2 = \kappa_0^2 + \kappa_1^2 + (m_0 + m_1)\kappa_e^2,$$

$$C_1 = \frac{1}{\zeta^2 R^2} (\zeta R \text{cth}(\zeta R) - 1).$$

Якщо знехтувати впливом деформації на хімічні потенціали підсистем твердого розчину, то дані співвідношення спрощуються і для хімічних потенціалів та ненульових компонент тензора напружень набувають вигляду

$$\eta_0(r) = \eta_{a0} + \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\vartheta_1^2} \left(\frac{R}{r} \frac{\text{sh}(\vartheta_1 r)}{\text{sh}(\vartheta_1 R)} - 1 \right),$$

$$\eta_1(r) = \eta_{a1} + \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\vartheta_1^2} \left(\frac{R}{r} \frac{\text{sh}(\vartheta_1 r)}{\text{sh}(\vartheta_1 R)} - 1 \right),$$

$$\sigma_{rr}(r) = 2(a_0 + a_1) \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\vartheta_1^4 R^2} \left(S_3 - \frac{R^3}{r^3} S_{3r} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \sigma_{\psi\psi}(r) = -(a_0 + a_1) \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\vartheta_1^4 R^2} \left(2S_3 + \frac{R^3}{r^3} S_{3r} - \right.$$

$$\left. - \vartheta_1^2 \frac{R^3}{r} \frac{\text{sh}(\vartheta_1 r)}{\text{sh}(\vartheta_1 R)} \right), \quad (7.45)$$

де

$$S_3 = \frac{\vartheta_1 R \text{ch}(\vartheta_1 R) - \text{sh}(\vartheta_1 R)}{\text{sh}(\vartheta_1 R)}, \quad S_{3r} = \frac{\vartheta_1 r \text{ch}(\vartheta_1 r) - \text{sh}(\vartheta_1 r)}{\text{sh}(\vartheta_1 R)}.$$

Аналіз співвідношень (7.45) показує, що найбільшими напруженнями є меридіональні та кільцеві напруження на поверхні кулі

$$\sigma_{\varphi\varphi}(R) = \sigma_{\psi\psi}(R) = (a_0 + a_1) \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\vartheta_1^4 R^2} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{\vartheta_1 R} \left(\frac{1}{\vartheta_1 R} - \text{cth}(\vartheta_1 R) \right) \right] \quad (7.46)$$

При $R \rightarrow \infty$ напруження $\sigma_{\varphi\varphi}(R) = \sigma_{\psi\psi}(R)$ прямують до значень поверхневих напружень у півпросторі.

Поверхневий натяг f_p у кулі знаходимо, використовуючи формули (4.52), (7.45). Для куль, радіус яких є значно більшим від характерного розміру області приповерхневої неоднорідності ($\exp(\zeta_1 R) \gg \zeta_1 R$), при нехтуванні впливом деформації на хімічні потенціали підсистем твердого розчину, для точки переходу приповерхневих розтягуючих напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ у стискаючі та для f_p знаходимо

$$r_a = R \left(1 - \frac{\ln(\vartheta_1 R)}{\vartheta_1 R} \right),$$

$$f_p = (a_0 + a_1) \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\vartheta_1^3} \left[1 - \frac{2}{\vartheta_1 R} - \frac{\ln(\vartheta_1 R)}{\vartheta_1 R} \left(2 - \frac{\ln(\vartheta_1 R)}{\vartheta_1 R} \right) \right]. \quad (7.47)$$

Порівнюючи дану формулу з виразом для поверхневого натягу у бездомішковій кулі, бачимо, що величина

$$F_p = (a_0 + a_1) \frac{\kappa_0^2 \eta_{a0} + \kappa_1^2 \eta_{a1}}{\vartheta_1^3} \left[1 - \frac{2}{\vartheta_1 R} - \frac{\ln(\vartheta_1 R)}{\vartheta_1 R} \left(2 - \frac{\ln(\vartheta_1 R)}{\vartheta_1 R} \right) \right] - \frac{a_0 \eta_{a0}}{\kappa_0} \left[1 - \frac{2}{\kappa_0 R} - \frac{\ln(\kappa_0 R)}{\kappa_0 R} \left(2 - \frac{\ln(\kappa_0 R)}{\kappa_0 R} \right) \right] \quad (7.48)$$

описує вплив домішок на поверхневий натяг у кулі та його розмірний ефект. Якщо додатково знехтувати впливом домішок на підсистему скелету, то дана формула спрощується до

$$F_p = \frac{a_0}{\kappa_0} \left[(1 + a_{10}) \kappa_1^2 \eta_{a1} + a_1 \eta_{a0} \right] \times \left[1 - \frac{2}{\kappa_0 R} - \frac{\ln(\kappa_0 R)}{\kappa_0 R} \left(2 - \frac{\ln(\kappa_0 R)}{\kappa_0 R} \right) \right]. \quad (7.49)$$

Наявність домішок у кулі, в залежності від характеристик підсистем твердого розчину, може приводити як до збільшення так і до зменшення поверхневого натягу. Це ілюструють графіки на рис.7.6, на якому представлено залежність від товщини шару приведенного поверхневого натягу $F_1 = F_p / f_p^0$ (f_p^0 – поверхневий натяг у півпросторі без домішок) для $\kappa_{10}^2 = 0.1$, $w = 0.1; 0.4; 0.6; 0.8; 1.2; 1.6$ (криві 1-6) ($w = (1 + a_{10}) (1 + \kappa_{10}^2 \eta_{1\alpha} / \eta_{0\alpha}) / (1 + \kappa_{10}^2)^{3/2}$). При сталих характеристиках відмінність між поверхневими натягами в однокомпонентній та двокомпонентній кулях збільшується за абсолютною величиною зі збільшенням радіуса кулі.

Аналогічно як і у бездомішкових тілах, зі збільшенням радіуса кулі вплив кривини поверхні на величину приведенного поверхневого натягу зменшується, що ілюструють графіки на рис. 7.7, на якому пред-

ставлено залежність $F_1 = (f_p^{кулі} - f_p^{шарі}) / f_p^0$ від характерного розміру (параметра $k = \kappa_0 R = \kappa_0 l$) при $w = 0.2; 0.8; 1.6$ (криві 1-3).

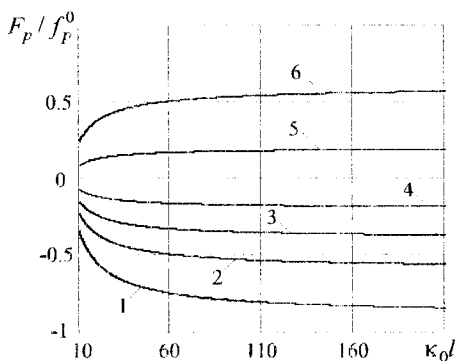


Рис.7.6. Вплив домішок на поверхневий натяг у кулі

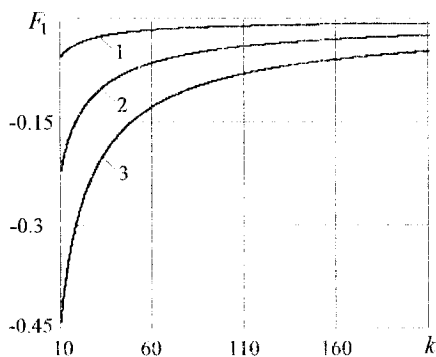


Рис.7.7. Залежність відносного поверхневого натягу від характерного розміру

7.3. Механодифузійні процеси у бінарних твердих розчинах

На основі сформульованих вище співвідношень дослідимо, за квазістатичного наближення, механодифузійні процеси у бінарних півпросторі та шарі. Будемо нехтувати при цьому впливом деформації та напружень на процес дифузії.

7.2.1. Дифузійне насичення півпростору

Розглянемо бінарний півпростір, який займає область $x \geq 0$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$. Вважаємо, що для часу $\tau > 0$ на вільній від силового навантаження поверхні тіла задано постійні значення хімічних потенціалів скелету η_{a0} та домішки η_{a1} .

Для прийнятого вище наближення, при нехтуванні впливом хімічного потенціалу домішки на хімічний потенціал каркасу, ключову систему рівнянь моделі відносно хімічних потенціалів компонент твердого розчину та компонент тензора напруження записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} - \kappa_0^2 \eta_0 &= 0, \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} &= -d_1 \left(\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{\gamma\gamma} - a_0 \eta_0 - a_1 \eta_1) = 0, \quad \gamma = \{y, z\}, \end{aligned} \quad (7.50)$$

де

$$d_1 = -\frac{g_{m1}}{a_{m1m1}}.$$

Приймаємо, що у початковий момент часу $\tau = 0$ збурення розглядуваних полів у тілі відсутні. Тоді граничні та початкові умови, а також умови обмеженості розв'язку на нескінченності в області тіла запишемо у вигляді

$$\eta_1 = 0, \quad \text{при} \quad \tau = 0; \quad (7.51)$$

$$\eta_0 = \eta_{a0}, \quad \eta_1 = \eta_{a1}, \quad \sigma_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \tau > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\eta_0| < K_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |\eta_1| < K_1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |\sigma_{\beta\beta}| < K_\beta, \quad \beta = \{x, y, z\}, \quad (7.52)$$

де K_0, K_1, K_β – сталі.

В задачах дифузійного насичення доцільно ввести у розгляд безрозмірні час та координати. За розглядуваної одновимірної у просторі ситуації введемо їх за формулами

$$X = \kappa_0 x, \quad t = d_1 \kappa_0^2 \tau. \quad (7.53)$$

Враховуючи (7.53), перші два співвідношення системи рівнянь (7.50) перетворюємо до вигляду

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial X^2} - \eta_0 = 0, \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X^2}.$$

Розв'язок першого рівняння цієї системи, що справджує умови (7.51), (7.52) має вигляд

$$\eta_0 = \eta_{a0} \exp(-X). \quad (7.55)$$

Друге рівняння системи (7.54) розв'язуємо, використовуючи перетворення Лапласа за часом t . Це рівняння, записане в просторі зображень, є таким

$$\frac{d^2 \eta_1^L}{dX^2} - p \eta_1^L = \frac{1}{p} \frac{d^2 \eta_0^L}{dX^2}. \quad (7.56)$$

Розв'язком рівняння (7.56), що справджує умови (7.51), (7.52), записані в просторі зображень, є

$$\eta_1^L(X, p) = \frac{1}{p} \left[\eta_{a1} \exp(-X p^{1/2}) + \frac{\eta_{a0}}{p-1} \left(\exp(-X p^{1/2}) - \exp(-X) \right) \right]. \quad (7.57)$$

Використовуючи обернене перетворення Лапласа, в просторі дійсного часу t одержуємо

$$\eta_1(X, t) = (\eta_{a1} - \eta_{a0}) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2\sqrt{t}} \right) + \eta_{a0} \exp(-X) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \eta_{a0} \exp(t) \left[\exp(X) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) - \right. \\
& \left. - \exp(-X) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{t} - \frac{X}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (7.58)
\end{aligned}$$

З останнього співвідношення для усталеного режиму ($t \rightarrow \infty$) одержуємо формулу

$$\eta_1(X) = \eta_{a1} - \eta_{a0} [1 - \exp(-X)], \quad (7.59)$$

яка узгоджується з результатами другого підрозділу.

Зауважимо, що в рамках класичної теорії дифузії, для густини домішки ($\rho_1 = a_{mm}^{11} \eta_1$ (хімічного потенціалу)) справедлива формула [154]

$$\rho_1(X, t) = a_{mm}^{11} \eta_1(X, t) = a_{mm}^{11} \eta_{a1} \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2\sqrt{t}} \right). \quad (7.60)$$

Порівнюючи її з виразом (7.58) бачимо, що складова η_1^* хімічного потенціалу η_1

$$\begin{aligned}
\eta_1^*(X, t) = & -\eta_{a0} \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2\sqrt{t}} \right) + \eta_{a0} \exp(-X) + \\
& + \frac{1}{2} \eta_{a0} \exp(t) \left[\exp(X) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) - \right. \\
& \left. - \exp(-X) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{t} - \frac{X}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (7.61)
\end{aligned}$$

описує вплив приповерхневої неоднорідності скелету на процес дифузійного насичення півпростору.

При $\eta_{a0}/\eta_{a1} < 0$ зі збільшенням координати від нуля до деякого значення X_0 хімічний потенціал η_1 зростає від η_{a1} на поверхні до свого максимального значення. При дальшому зростанні координати хімічний потенціал монотонно зменшується, прямуючи до нуля. Це ілюструють графіки на рис. 7.8, на якому представлено розподіл при-

веденого хімічного потенціалу η_1/η_{a1} у півпросторі для $t=8$, $\eta_{a0}/\eta_{a1} = 0.6; 0.3; 0; -0.8; -1.2$ (криві 1-5). Крива 3 відповідає класичній моделі дифузії.

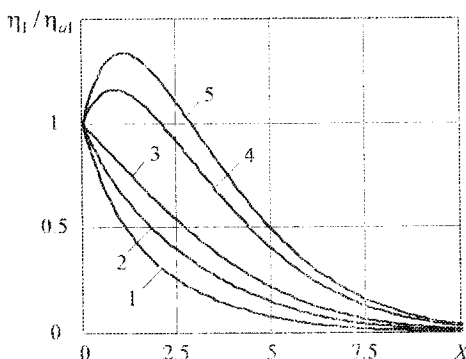


Рис.7.8. Розподіл хімічного потенціалу домішки у півпросторі в процесі насичення

Одержаний результат узгоджується з експериментальними даними [40], згідно з якими максимум у розподілі домішок при насиченні тіла домішками досягається на деякій віддалі від поверхні, з якої проводиться насичення. При $\eta_{a0}/\eta_{a1} > 0$ хімічний потенціал у кожній точці тіла є меншим від хімічного потенціалу, обчисленого за класичною теорією. З ростом часу η_1 виходить на свій усталений рівень. Зміну в часі хімічного потенціалу η_1/η_{a1} при $X=1$, $\eta_{a0}/\eta_{a1} = 0.6; 0.3; 0; -0.8; -1.2$ (криві 1-5) показано на рис. 7.9.

З рівнянь (7.50), (7.52) випливає, що для прийнятого наближення ненульові компоненти $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ тензора напружень $\hat{\sigma}$ містять дві складові:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)}. \quad (7.62)$$

Складова $\sigma^{(0)}$ є пропорційною до хімічного потенціалу каркасу, а складова $\sigma^{(1)}$ — до хімічного потенціалу домішки. Вони з точністю до множників a_0, a_1 визначаються значеннями хімічних потенціалів η_0, η_1 . В процесі насичення при $\eta_{a0}/\eta_{a1} < 0$ складова $\sigma^{(1)}$ досягає

свого максимального значення у внутрішній області півпростору, тоді як складова $\sigma^{(0)}$ монотонно зменшується при відході від поверхні у глибину півпростору.

7.2.2. Дифузійне насичення шару

Розглянемо вільний від силового навантаження шар, віднесений до прямокутної декартової системи координат $\{x, y, z\}$, який займає область $|x| \leq l$. Вважаємо, що на поверхні $x=l$ шару задано постійні значення хімічних потенціалів скелету η_{a0} та домішки η_{a1} . Поверхня $x=-l$ шару масоізольована відносно домішки, а η_0 на ній дорівнює η_{a0} .

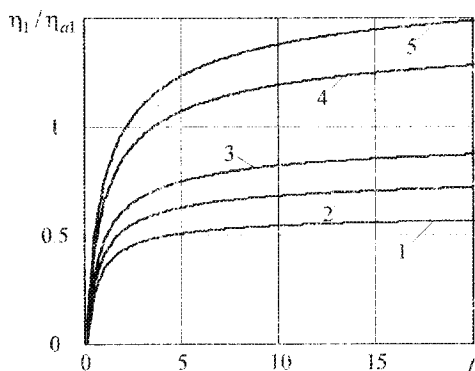


Рис.7.9. Зміна з часом хімічного потенціалу домішки у внутрішній точці півпростору

Ненульові складові механодифузійних полів у тілі описуються системою рівнянь (7.50). Враховуючи результати попереднього параграфу та позначення $L = \kappa_0 l$, крайові умови задачі запишемо у вигляді

$$\eta_1(X) = -\eta_{a0} \left(1 - \frac{\text{ch}(X)}{\text{ch}(L)} \right) + \eta_1^0 \quad (7.63)$$

при $\tau = 0$,

$$\eta_0 = \eta_{0a}, \quad -\frac{\partial \eta_0}{\partial X} + \frac{\partial \eta_1}{\partial X} = 0$$

при $X = -L$,

$$\eta_0 = \eta_{0a}, \quad \eta_1 = \eta_{1a}, \quad \sigma_{xx} = 0 \quad (7.64)$$

при $X = L$.

До даних співвідношень необхідно додати умови рівності нулю головного вектора та головного момента зусиль у довільних поперечних перерізах $y = const$, $z = const$ шару (4.5).

У рамках прийнятих наближень хімічний потенціал каркасу є постійним в часі, а його розподіл по товщині шару описує перше рівняння системи (7.50). Його розв'язком, що справджує сформульовані граничні умови, є

$$\eta_0(X) = \eta_{0a} \frac{\text{ch}(X)}{\text{ch}(L)}. \quad (7.65)$$

Для розв'язування другого рівняння системи (7.50) застосуємо перетворення Лапласа за часом t . У просторі зображень його розв'язком, що справджує крайові умови, є

$$\eta_1(X, p) = \frac{1}{p} \left[(\eta_{0a} - \eta_1^0) \frac{\text{ch}((X+1)\sqrt{p})}{\text{ch}(2\sqrt{p})} - \eta_{av} \left(1 - \frac{\text{ch}(X)}{\text{ch}(L)} \right) + \eta_1^0 \right]. \quad (7.66)$$

Для знаходження оберненого перетворення Лапласа використаємо теорему Ващенко-Захарченка [60]. У результаті одержуємо

$$\begin{aligned} \eta_1(X, t) = & \eta_{av} + (\eta_{0a} - \eta_1^0) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{v_k} \cos \left(\frac{v_k}{2} \left(\frac{X}{L} + 1 \right) \right) \times \\ & \times \exp \left(-\frac{v_k^2 t}{4} \right) - \eta_{av} \left(1 - \frac{\text{ch}(X)}{\text{ch}(L)} \right), \end{aligned} \quad (7.67)$$

де

$$v_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}.$$

Аналіз співвідношення (7.67) показує, що хімічний потенціал домішки η_1 у шарі практично досягає свого усталеного значення при $t_* = 16/\pi^2$.

На рис. 7.10, 7.11 показано розподіл по координаті X приведенного хімічного потенціалу $\eta_c = \eta_1/\eta_{a1}$ відповідно в процесі дегазації та насичення шару. Дані представлені на рис.7.10 відповідають $L=20$, $\eta_{a0}/\eta_{a1} = 0.2$, $\eta_1^0/\eta_{a1} = 2$, $t = 0.0; 0.1; 0.5; 1; 2; 10$ (криві 1-6).

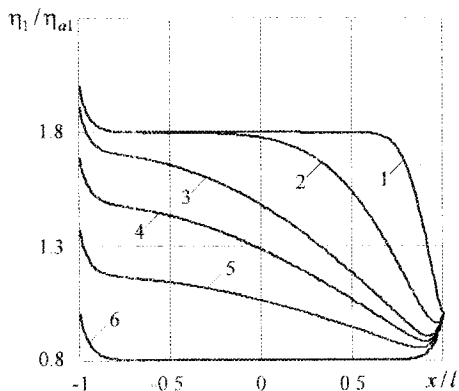


Рис.7.10. Розподіл хімічного потенціалу домішок у шарі з одною масоізольованою поверхнею в процесі його дегазації

На рис. 7.11 розподіл хімічного потенціалу представлено для $L=20$, $\eta_{a0}/\eta_{a1} = 0.2$, $\eta_1^0/\eta_{a1} = 0.2$, $t = 0.0; 0.1; 0.5; 1; 2; 10$ (криві 1-6).

Зауважимо, що початкове значення хімічного потенціалу домішки при насиченні співпадає з кінцевим значенням при дегазації.

Важливим є встановлення часу, за який на масоізольованій поверхні тіла $X = -L$ хімічний потенціал домішки (густина домішок) досягає заданого значення η_1^f . З (7.67) одержуємо формулу

$$\eta_1^f(-L, t) = \eta_{a1} + (\eta_{a1} - \eta_1^0) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{\nu_k} \exp\left(-\frac{\nu_k^2 t}{4}\right), \quad (7.68)$$

яка служить основою для визначення цього часу.

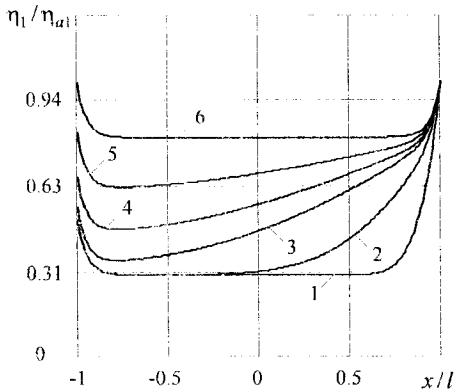


Рис.7.11. Розподіл хімічного потенціалу домішки у шарі з одною масоїзольованою поверхнею в процесі його насичення

При відомих хімічних потенціалах каркасу та домішок, з рівнянь (7.50) та відповідних крайових умовах, для ненульових компонент тензора напружень одержуємо

$$\sigma_{yy}(X,t) = \sigma_{zz}(X,t) = (a_0 + a_1)\eta_{a0} \left(1 - \frac{\text{ch}(X)}{\text{ch}(L)} \right) - a_1\eta_{a1} - a_0\eta_{a0} - a_1(\eta_{a1} - \eta_1^0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{\nu_k} \cos\left(\frac{\nu_k}{2}\left(\frac{X}{L} + 1\right)\right) \exp\left(-\frac{\nu_k^2 t}{4}\right) \quad (7.69)$$

Аналіз розподілу напружень по товщині шару та його зміни в часі показує, що він є аналогічним до розподілу та зміни в часі хімічного потенціалу домішки.

7.4. Структурна неоднорідність та два шляхи дифузії

Нижче обмежимося розглядом наближення, у якому нехтуємо впливом деформації на хімічні потенціали та густини підсистем твердого розчину. У цьому випадку, приймаючи за розв'язуючі функції збурення густин підсистем твердого розчину ρ_0, ρ_1 , для усталеного режиму

рівняння балансу маси континууму центрів мас та домішки, використовуючи рівняння стану, можна записати у вигляді

$$\rho_0 + \rho_1 - b_1 \nabla^2 (\rho_0 + b_{21} \rho_1) = 0, \quad (7.70)$$

$$\nabla^2 (\rho_0 + a_{21} \rho_1) = 0, \quad (7.71)$$

де a_{21}, b_1, b_{21} – сталі.

Розв'язком рівняння (7.71) є

$$\rho_0 = -a_{21} \rho_1 + \Phi(\vec{r}) \quad (7.72)$$

де $\Phi(\vec{r})$ – довільна гармонічна функція.

Враховуючи співвідношення (7.72), рівняння (7.70) перетворюємо до вигляду

$$\nabla^2 \rho_1 - d_1 \rho_1 = \Phi(\vec{r}), \quad (7.73)$$

де

$$d_1 = \frac{1 - a_{21}}{b_1(b_{21} - a_{21})}.$$

У рамках моделі дифузії, що враховує два шляхи дифузії, для концентрацій домішок, що перебувають на першому та другому шляхах, записують такі рівняння для стаціонарного стану [25, 122]

$$\begin{aligned} \alpha_1 \nabla^2 c_1 &= \gamma(c_1 - c_2), \\ \alpha_2 \nabla^2 c_2 &= -\gamma(c_1 - c_2), \end{aligned} \quad (7.74)$$

де c_i – концентрація домішки на i -ому шляху, α_i, γ – сталі.

Вводячи у розгляд сумарну концентрацію домішки співвідношенням

$$c = c_1 + c_2,$$

на основі (7.74) можемо записати рівняння

$$\nabla^2 c + \frac{\gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2} c = \Phi(\vec{r}), \quad (7.75)$$

яке, при відповідному трактуванні коефіцієнтів, співпадає з рівнянням (7.73).

В останньому випадку розглядається дифузія домішкової речовини у середовищі, в якому існують два шляхи дифузії, наприклад внутрішні області та границі зерен. Це черговий раз доводить, що запропонований підхід дозволяє враховувати структуру, у даному випадку мікроструктуру, середовища.

Розділ 8.

ТЕРМОДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРО- ПРОВІДНИХ НЕФЕРОМАГНІТНИХ ТІЛ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ТА СТРУКТУРНОЇ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ

У даному розділі вивчено ефекти, пов'язані з приповерхневою неоднорідністю у деформівних електропровідних неферромагнітних твердих тілах із врахуванням структурної неоднорідності та сил кулонівської взаємодії. Розділ базується на роботах [10, 15, 70, 76, 82, 83, 149, 151].

8.1. Балансові та визначальні рівняння

Розглядаємо деформівне електропровідне неферромагнітне тверде тіло, що перебуває в умовах теплообміну із зовнішнім середовищем. За базові процеси, що відбуваються у тілі, приймаємо процеси деформування, тепло- та електропровідності.

Рівняння збереження енергії E , записане у локальній формі при нехтуванні конвективною складовою потоків, має вигляд

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\sigma} \cdot \vec{v} - \vec{T}\vec{j}_s - H\vec{j}_m - \Phi\vec{j}_\omega - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right), \quad (8.1)$$

де \vec{E}, \vec{B} – вектори напруженості електричного та індукції магнітного полів, Φ – термодинамічний електричний потенціал [13].

Приймаємо, що повну енергію E можна подати у вигляді суми внутрішньої U , кінетичної K енергій та енергії U_e електромагнітного поля [13, 102, 103]

$$E = U + K + U_e. \quad (8.2)$$

Поряд з балансовим рівнянням (8.1) повинні справджуватися рівняння балансу енергії електромагнітного поля

$$U_e = (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) / 2, \quad (8.3)$$

імпульсу механічного поступального руху \vec{k}_v , ентропії S , маси і заряду ω , а також рівняння Максвелла [103]. У локальній формі приймаємо їх у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_e}{\partial \tau} &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - (\vec{j}_\omega + \omega \vec{v}) \cdot \vec{E}, \\ \frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} &= \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{F}_e, \\ \frac{\partial S}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s &= \sigma_s, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega &= 0, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} + \mu_0 (\vec{j}_\omega + \omega \vec{v}), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \quad \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \omega. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Тут \vec{F}_e – поперемоторна сила, для якої справедливо [13]

$$\vec{F}_e = (\vec{j}_\omega + \omega \vec{v}) \times \vec{B} + \omega \vec{E}, \quad (8.6)$$

ϵ_0, μ_0 – діелектрична проникність та магнітна стала, $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0$ – вектор напруженості магнітного поля. Зазначимо також, що рівняння для електромагнітного поля записано в наближенні повільно рухомих середовищ, коли швидкість \vec{v} значно менша швидкості поширення електромагнітної хвилі у вакуумі.

Враховуючи співвідношення (8.3)–(8.6), а також співвідношення (3.5) для приросту кінетичної енергії, з рівняння балансу повної енергії (8.1) одержуємо

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = T \frac{\partial S}{\partial \tau} + H \frac{\partial p}{\partial \tau} + \Phi \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \tau} - \\ - T \sigma_s - \vec{\nabla} T \cdot \vec{j}_s - \vec{\nabla} H \cdot \vec{j}_m - (\vec{\nabla} \Phi - \vec{E}') \cdot \vec{j}_\omega, \quad (8.7)$$

де

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.8)$$

Як і раніше приймаємо, що залежність між термодинамічними потоками $\vec{j}_s, \vec{j}_m, \vec{j}_\omega$ та термодинамічними силами $\vec{F}_T \equiv -\vec{\nabla} T$, $\vec{F}_H \equiv -\vec{\nabla} H$, $\vec{F}_W \equiv -(\vec{\nabla} \Phi - \vec{E}')$ є функціональною

$$\vec{j}_i(\tau) = \mathbf{J} \mathbf{i} \left(\vec{F}_T(\tau), \vec{F}_H(\tau), \vec{F}_W(\tau); \vec{F}_T(\zeta), \vec{F}_H(\zeta), \vec{F}_W(\zeta); U \right), \quad i = \{s, m, \omega\}, \quad (8.9)$$

де $\mathbf{J} \mathbf{i} = \left\{ \mathbf{J} \mathbf{s}; \mathbf{J} \mathbf{m}; \mathbf{J} \mathbf{\omega} \right\}$ – функціонали, що перетворюють актуальні

значення сил $\vec{F}_T(\tau)$, $\vec{F}_H(\tau)$, $\vec{F}_W(\tau)$ та їх історії $\vec{F}_T(\zeta)$, $\vec{F}_H(\zeta)$, $\vec{F}_W(\zeta)$ ($0 \leq \zeta < \tau$) на актуальні значення відповідних потоків.

Для ізотропних однокомпонентних твердих тіл у випадку лінійної залежності між термодинамічними потоками та силами, можна записати

$$\vec{j}_i(\tau) = G_{is} * \vec{F}_T + G_{im} * \vec{F}_H + G_{i\omega} * \vec{F}_W, \quad i = \{s, m, \omega\}. \quad (8.10)$$

Розглянемо такі функції впливу у співвідношеннях (8.10), (3.11)

$$G_{ss}(\tau, \zeta) = g_{ss}(\tau, 0), \quad G_{sm}(\tau, \zeta) = G_{ms}(\tau, \zeta) = 0, \quad G_{s\omega}(\tau, \zeta) = g_{s\omega}(\tau, 0),$$

$$G_{mm}(\tau, \zeta) = -g_{mm} \delta(\tau - \zeta), \quad G_{m\omega}(\tau, \zeta) = G_{\omega m}(\tau, \zeta) = -g_{m\omega} \delta(\tau - \zeta),$$

$$G_{\omega s}(\tau, \zeta) = g_{\omega s}(\tau, 0), \quad G_{\omega\omega}(\tau, \zeta) = -g_{\omega\omega} \delta(\tau - \zeta) + g_{\omega\omega}(\tau, 0). \quad (8.11)$$

Подання (8.11) змінює рівняння балансу маси та заряду до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho + g_{mm} \nabla^2 H + g_{m\omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi - \vec{E}') \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\omega + g_{\omega\omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi - \vec{E}') + g_{m\omega} \nabla^2 H \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega \quad (8.12)$$

та конкретизує вигляд термодинамічних потоків $\vec{j}_s, \vec{j}_\omega$

$$\begin{aligned}\vec{j}_s &= -g_{ss}\vec{\nabla}T - g_{s\omega}(\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}'), \\ \vec{j}_\omega &= -g_{\omega s}\vec{\nabla}T - g_{\omega\omega}(\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}').\end{aligned}\quad (8.13)$$

Слід пам'ятати, що коефіцієнти $g_{ss}, g_{s\omega}, g_{\omega s}, g_{\omega\omega}$ залежать від параметрів стану, зокрема температури. Така залежність повинна підпорядковуватися умові

$$\sigma_s = -\frac{1}{T}(\vec{j}_s \cdot \vec{\nabla}T + \vec{j}_\omega \cdot (\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}')) \geq 0. \quad (8.14)$$

Відповідно до загальних положень термомеханіки електропровідних тіл приймаємо

$$g_{ss} = \frac{\lambda_{ss}}{T}, \quad g_{s\omega} = \frac{\lambda_{s\omega}}{T}, \quad g_{\omega s} = \frac{\lambda_{\omega s}}{T}, \quad g_{\omega\omega} = \frac{\lambda_{\omega\omega}}{T}.$$

Подання (8.11) вимагає також введення до внутрішньої енергії доданків

$$\frac{1}{2}g_{mm}\vec{\nabla}H \cdot \vec{\nabla}H + g_{m\omega}\vec{\nabla}H \cdot (\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}') + \frac{1}{2}g_{\omega\omega}(\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}') \cdot (\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}'). \quad (8.15)$$

які, як і раніше, позначатимемо U' .

На основі міркувань, наведених вище, приходимо до висновку, що простором визначення внутрішньої енергії є ентропія S , густина ρ , електричний заряд ω , градієнти хімічного $\vec{\nabla}H$ і термодинамічного електричного $\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}'$ потенціалів та тензор деформації \hat{e}

$$U = U(S, \rho, \omega, \vec{\nabla}H, \vec{\nabla}\Phi - \vec{E}', \hat{e}),$$

а для її приросту маємо наступне рівняння

$$dU = T dS + H d\rho + \Phi d\omega + \hat{\sigma} : d\hat{e} + dU'. \quad (8.16)$$

Якщо за термодинамічний потенціал вибрати енергію F , яка пов'язана з внутрішньою енергією U співвідношенням Лежандра

$$F = U - TS - H\rho - \Phi\omega,$$

то рівняння для її приросту має вигляд

$$dF = -S dT - \rho dH - \omega d\Phi + \hat{\sigma} : d\hat{e} + dU', \quad (8.17)$$

а простором її визначення є температура T , хімічний H та термодинамічний електричний Φ потенціали, а також градієнти хімічного $\vec{\nabla}H$ і термодинамічного електричного $\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}'$ потенціалів та тензор деформації \hat{e}

$$F = F(T, H, \Phi, \vec{\nabla}H, \vec{\nabla}\Phi - \vec{E}', \hat{e}).$$

Наслідком (8.17) є такі рівняння стану для $S, \rho, \omega, \hat{\sigma}$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad \rho = -\frac{\partial F}{\partial H}, \quad \omega = -\frac{\partial F}{\partial \Phi}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \hat{e}}. \quad (8.18)$$

Для квадратичного подання функції F у просторі збурень базових параметрів у вигляді

$$\begin{aligned} F = F_* - S_*\theta - \rho_*\eta + \alpha_{ee}\hat{e} : \hat{e} + \frac{a_{ee}}{2}e^2 + \frac{a_{mm}}{2}\eta^2 + \frac{a_{\theta\theta}}{2}\theta^2 + \frac{a_{\omega\omega}}{2}\Phi^2 + \\ + a_{em}e\eta + a_{e\theta}e\theta + a_{e\omega}e\Phi + a_{m\eta}\eta\theta + a_{m\omega}\eta\Phi + a_{\theta\omega}\theta\Phi + \\ + \frac{1}{2}g_{mm}\vec{\nabla}\eta \cdot \vec{\nabla}\eta + g_{m\omega}\vec{\nabla}\eta \cdot (\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}') + \frac{1}{2}g_{\omega\omega}(\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}') \cdot (\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}'), \end{aligned}$$

на основі (8.18), для $S, \rho, \omega, \hat{\sigma}$ запишемо такий явний вигляд рівнянь стану

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 2\alpha_{ee}\hat{e} + (a_{ee}e + a_{em}\eta + a_{e\theta}\theta + a_{e\omega}\Phi)\hat{I}, \\ s \equiv S - S_* &= -a_{e\theta}e - a_{m\eta}\eta - a_{\theta\theta}\theta - a_{\theta\omega}\Phi, \\ \rho - \rho_* &= -a_{em}e - a_{mm}\eta - a_{m\theta}\theta - a_{m\omega}\Phi, \\ \omega &= -a_{e\omega}e - a_{m\omega}\eta - a_{\theta\omega}\theta - a_{\omega\omega}\Phi. \end{aligned} \quad (8.19)$$

При цьому за відліковий стан прийнято стан безмежного однорідного електронейтрального середовища, вільного від силового навантаження із густиною ρ_* та ентропією S_* .

Сформульовані визначальні співвідношення (8.19) разом із балансовими рівняннями, співвідношенням Коші та рівняннями Максвелла для вакууму

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_c = -\frac{\partial \vec{E}_c}{\partial \tau}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_c = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_c}{\partial \tau},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_c = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_c = 0 \quad (8.20)$$

(індексом «с» відзначено вектори електромагнітного поля у вакуумі) складають повну систему рівнянь локально градієнтної моделі термопружного електропровідного неферомагнітного твердого тіла із врахуванням структурної неоднорідності та термодинамічного електричного потенціалу.

Приймаючи за розв'язуючі функції вектор переміщення \vec{u} , температуру θ , хімічний η та термодинамічний електричний Φ потенціали, ключову лінеаризовану систему рівнянь моделі записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} & \alpha_{ee} \nabla^2 \vec{u} + (\alpha_{ee} + \alpha_{ee}) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{e\theta} \vec{\nabla} \theta + a_{e\eta} \vec{\nabla} \eta + a_{e\Phi} \vec{\nabla} \Phi = \rho_* \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \\ & T_* \frac{\partial}{\partial \tau} (a_{\theta\theta} \theta + a_{e\theta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{\eta\theta} \eta + a_{\Phi\theta} \Phi) + \\ & + \lambda_{\theta\theta} \nabla^2 \theta + \lambda_{\theta\Phi} \nabla^2 \Phi + \frac{\lambda_{\theta\theta}}{\epsilon_0} (a_{e\theta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{\eta\theta} \eta + a_{\Phi\theta} \theta + a_{\omega\theta} \Phi) = 0, \\ & g_{\eta\eta} \nabla^2 \eta + g_{\eta\Phi} \nabla^2 \Phi - \left(a_{e\eta} + g_{\eta\omega} \frac{a_{e\omega}}{\epsilon_0} \right) (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \\ & - \left(a_{\eta\eta} - g_{\eta\omega} \frac{a_{\eta\omega}}{\epsilon_0} \right) \eta - \left(a_{\eta\theta} - g_{\eta\omega} \frac{a_{\theta\omega}}{\epsilon_0} \right) \theta - \left(a_{\eta\Phi} - g_{\eta\omega} \frac{a_{\omega\Phi}}{\epsilon_0} \right) \Phi = 0, \\ & T_* \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left(1 - \frac{g_{\omega\omega}}{\epsilon_0} \right) (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{\eta\omega} \eta + a_{\theta\omega} \theta + a_{\omega\Phi} \Phi) - \right. \\ & \left. - g_{\eta\omega} \nabla^2 \eta - g_{\omega\Phi} \nabla^2 \Phi \right\} - \lambda_{\omega\theta} \nabla^2 \theta - \lambda_{\omega\Phi} \nabla^2 \Phi - \\ & - \frac{\lambda_{\omega\omega}}{\epsilon_0} (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{\eta\omega} \eta + a_{\theta\omega} \theta + a_{\omega\Phi} \Phi) = 0; \quad (8.21) \\ & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} + \mu_0 \kappa_{\eta\omega} \frac{\partial (\vec{\nabla} \eta)}{\partial \tau} + \mu_0 \kappa_{\omega\Phi} \frac{\partial (\vec{\nabla} \Phi - \vec{E})}{\partial \tau} \end{aligned}$$

$$-\frac{\mu_0 \lambda_{\omega\omega}}{T_*} (\vec{\nabla} \Phi - \vec{E}') - \frac{\mu_0 \lambda_{\omega\omega}}{T_*} \vec{\nabla} \theta,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = -\frac{1}{\epsilon_0} (\alpha_{\omega\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \alpha_{\omega\omega} \theta + \theta_{\omega\omega} \eta + \alpha_{\omega\omega} \Phi). \quad (8.22)$$

Ключова система рівнянь, що описує рівноважний стан тіла за ізотермічного наближення, записана для функцій $\hat{\sigma}, \eta, \Phi$, є такою

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \left\{ (3a_{ee} + 2\alpha_{ee}) \hat{\sigma} - [a_{ee} \sigma + 2\alpha_{ee} (a_{em} \eta + a_{e\omega} \Phi)] \hat{l} \right\} \times \vec{\nabla} = 0,$$

$$\kappa_{mm} \nabla^2 \eta + \kappa_{m\omega} \nabla^2 \Phi - a_m \eta - a_\omega \Phi - a_\sigma \sigma = 0,$$

$$\epsilon_0 \nabla^2 \Phi + a_{m\omega} \eta + a_{\omega\omega} \Phi + a_{\omega\sigma} \sigma = 0. \quad (8.23)$$

При формулюванні задач математичної фізики ці системи рівнянь необхідно доповнити відповідними крайовими умовами.

Сформульовані співвідношення використаємо для вивчення, за ізотермічних умов, приповерхневої неоднорідності у шарі та кулі, а також вкладу приповерхневої неоднорідності у електроакустичну емісію при раптовому виникненні поверхні півпростору.

8.2. Рівноважний стан шару

Розглянемо електропровідний неферомагнітний структурно неоднорідний шар, що займає область $|x| \leq l$ у декартовій системі координат $\{x, y, z\}$. Приймаємо, що на вільних від силового навантаження поверхнях тіла $x = \pm l$ задано збурення хімічного η_a та термодинамічного електричного Φ_a потенціалів. На безмежності при $y \rightarrow \pm\infty$ шар навантажено розтягуючим зусиллям σ_a .

За таких умов у тілі реалізується одновимірна за координатою x ситуація, що описується системою рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{xx}}{dx} &= 0, & \frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} &= \frac{d^2\sigma_{zz}}{dx^2}, \\
\frac{d^2}{dx^2}(\sigma - \beta_{\sigma\eta}\eta - \beta_{\sigma\Phi}\Phi) &= 0, \\
\frac{d^2\eta}{dx^2} - \beta_{\eta\eta}\eta - \beta_{\eta\sigma}\sigma - \beta_{\eta\Phi}\Phi &= 0, \\
\frac{d^2\Phi}{dx^2} - \beta_{\Phi\eta}\eta - \beta_{\Phi\sigma}\sigma - \beta_{\Phi\Phi}\Phi &= 0,
\end{aligned} \tag{8.24}$$

де

$$\begin{aligned}
\beta_{\sigma\eta} &= \frac{4\alpha_{ee}\alpha_{em}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}, & \beta_{\sigma\Phi} &= \frac{4\alpha_{ee}\alpha_{e\Phi}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}, \\
\beta_{\eta\eta} &= \frac{1}{g_{mm}} \left(a_{mm} - \frac{3a_{em}^2}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \right), & \beta_{\eta\Phi} &= \frac{1}{g_{mm}} \left(a_{m\Phi} - \frac{3a_{em}\alpha_{e\Phi}}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \right), \\
\beta_{\eta\sigma} &= \frac{a_{em}}{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})g_{mm}}, & \beta_{\Phi\eta} &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(a_{m\Phi} - \frac{3a_{em}\alpha_{e\Phi}}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \right), \\
\beta_{\Phi\Phi} &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(a_{\omega\omega} - \frac{3a_{e\omega}^2}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \right), & \beta_{\Phi\sigma} &= \frac{a_{e\sigma}}{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})\epsilon_0}.
\end{aligned}$$

Крайовими умовами задачі є

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \eta = \eta_a, \quad \Phi = \Phi_a. \tag{8.25}$$

Повинні також виконуватися умови (4.18), (4.19) у довільних поперечних перерізах $y = const$, $z = const$ шару.

Значимо також, що з узгодженості початкового електронейтрального та актуального станів випливає, що сумарний по товщині шару заряд повинен дорівнювати нулеві. Тому

$$\int_{-l}^l \omega(x) dx = 0. \tag{8.26}$$

Дане співвідношення можна трактувати як в'язь на поверхневі значення η_a , Φ_a . Це підтверджує твердження про те, що стан вільного від

силового навантаження тіла є самоорганізаційним, тобто значення хімічного та термодинамічного електричного потенціалів, що встановлюються на поверхні тіла залежать винятково від його геометричних і фізичних параметрів.

Розв'язок задачі (8.24)–(8.26) має вигляд

$$\begin{aligned} \eta - \eta_a &= A_1 \left(\frac{\operatorname{ch} \xi_1 x}{\operatorname{ch} \xi_1 l} - 1 \right) + A_2 \left(\frac{\operatorname{ch} \xi_2 x}{\operatorname{ch} \xi_2 l} - 1 \right), \\ \Phi - \Phi_a &= A_1 \frac{\xi_1^2 - a^2}{b^2} \left(\frac{\operatorname{ch} \xi_1 x}{\operatorname{ch} \xi_1 l} - 1 \right) + A_2 \frac{\xi_2^2 - a^2}{b^2} \left(\frac{\operatorname{ch} \xi_2 x}{\operatorname{ch} \xi_2 l} - 1 \right), \\ \sigma - \sigma_a &= \sum_{k=1}^2 A_k \left(\beta_{\sigma\eta} + \beta_{\sigma\varphi} \frac{\xi_k^2 - a^2}{b^2} \right) \left(\frac{\operatorname{ch} \xi_k x}{\operatorname{ch} \xi_k l} - \frac{\operatorname{th} \xi_k l}{\xi_k l} \right), \\ \sigma_{yy} - \sigma_a &= \sigma_{zz} = \frac{1}{2} (\sigma - \sigma_a), \quad \sigma_{xx} = 0. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Тут

$$\xi_1, \xi_2 - \text{додатні корені рівняння } (\xi^2 - a^2)(\xi^2 - d^2) = b^2 c^2,$$

$$a^2 = \beta_{\eta\eta} + \beta_{\sigma\eta} \beta_{\eta\sigma}, \quad b^2 = \beta_{\eta\varphi} + \beta_{\sigma\varphi} \beta_{\eta\sigma},$$

$$c^2 = \beta_{\varphi\eta} + \beta_{\sigma\eta} \beta_{\varphi\sigma}, \quad d^2 = \beta_{\varphi\varphi} + \beta_{\sigma\varphi} \beta_{\varphi\sigma},$$

$$A_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\Delta} \left\{ \frac{\beta_{\eta\sigma} \sigma_a + \beta_{\eta\eta} \eta_a + \beta_{\eta\varphi} \Phi_a}{a^2} \left(\chi_{c(3-k)} + \frac{\chi_{d(3-k)}}{\xi_{3-k}^2 / d^2 - 1} \right) - \frac{\beta_{\varphi\sigma} \sigma_a + \beta_{\varphi\eta} \eta_a + \beta_{\varphi\varphi} \Phi_a}{c^2} \left[\chi_{ak} + \left(\frac{\xi_k^2}{a^2} - 1 \right) \chi_{bk} \right] \right\}, \quad k = 1, 2,$$

$$\Delta = \left[\chi_{a1} + \left(\frac{\xi_1^2}{a^2} - 1 \right) \chi_{b1} \right] \left[\chi_{c2} + \frac{\chi_{d2}}{\xi_2^2 / d^2 - 1} \right] -$$

$$- \left[\chi_{a2} + \left(\frac{\xi_2^2}{a^2} - 1 \right) \chi_{b2} \right] \left[\chi_{c1} + \frac{\chi_{d1}}{\xi_1^2 / d^2 - 1} \right],$$

$$\chi_{qk} = 1 - D_q \left(1 - \frac{\text{th}(\xi_k l)}{\xi_k l} \right), \quad q = a, b, c, d, \quad k = 1, 2,$$

$$D_a = \frac{\beta_{\sigma\eta} \beta_{\eta\sigma}}{a^2}, \quad D_b = \frac{\beta_{\sigma\varphi} \beta_{\varphi\sigma}}{b^2}, \quad D_c = \frac{\beta_{\sigma\eta} \beta_{\varphi\sigma}}{c^2}, \quad D_d = \frac{\beta_{\sigma\varphi} \beta_{\varphi\sigma}}{d^2}.$$

Аналіз приповерхневої неоднорідності у шарі проведемо при відсутності зовнішнього силового навантаження, тобто при $\sigma_a = 0$. У цьому випадку розв'язок (8.27), при нехтуванні впливом напружень на хімічний та термодинамічний електричний потенціали, а також електричного потенціалу на густину, набуває вигляду

$$\eta = \eta_a \frac{\text{ch}(\xi_m x)}{\text{ch}(\xi_m l)},$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[\Phi_\sigma - \eta_a \frac{a}{\xi_m^2 - \xi_\omega^2} \right] \left(\frac{\text{ch}(\xi_\omega x)}{\text{ch}(\xi_\omega l)} - 1 \right) + \eta_a \frac{a}{\xi_m^2 - \xi_\omega^2} \left(\frac{\text{ch}(\xi_m x)}{\text{ch}(\xi_m l)} - 1 \right), \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= \left(\Phi_a + \eta_a \frac{a_m^\omega a}{\xi_m^2 - \xi_\omega^2} \right) \left(\frac{\text{ch}(\xi_m x)}{\text{ch}(\xi_m l)} - \frac{\text{th}(\xi_m l)}{\xi_m l} \right) + \\ &+ a_m^\omega \left(\Phi_a - \eta_a \frac{a}{\xi_m^2 - \xi_\omega^2} \right) \left(\frac{\text{ch}(\xi_\omega x)}{\text{ch}(\xi_\omega l)} - \frac{\text{th}(\xi_\omega l)}{\xi_\omega l} \right), \end{aligned} \quad (8.28)$$

де

$$\xi_m^2 = \beta_{\eta\eta}, \quad \xi_\omega^2 = \beta_{\varphi\varphi}, \quad a = \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0}, \quad a_m^\omega = \frac{a_{e\omega}}{a_{em}}.$$

З умови електронейтральності шару, в рамках розглядуваного наближення, для товстих шарів ($\xi_\omega l \gg 1$, $\xi_m l \gg 1$) одержуємо

$$\Phi_a \xi_\omega (\xi_\omega + \xi_m) + \eta_a a = 0. \quad (8.29)$$

Використовуючи (8.29), два останні співвідношення (8.28) перетворюємо до вигляду

$$\Phi = \Phi_a \left[\left(1 + \frac{\xi_\omega}{\xi_m - \xi_\omega} \right) \frac{\text{ch}(\xi_\omega x)}{\text{ch}(\xi_\omega l)} + \frac{\xi_\omega}{\xi_m - \xi_\omega} \frac{\text{ch}(\xi_m x)}{\text{ch}(\xi_m l)} \right],$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = a_0 \eta_a \left[\left(1 - a_m^\omega \chi \frac{\xi_\omega}{\xi_m - \xi_\omega} \left(\frac{\operatorname{ch}(\xi_m x)}{\operatorname{ch}(\xi_m l)} - \frac{\operatorname{th}(\xi_m l)}{\xi_m l} \right) \right) + \right. \\ \left. + a_m^\omega \chi \frac{\xi_m}{\xi_m - \xi_\omega} \left(\frac{\operatorname{ch}(\xi_\omega x)}{\operatorname{ch}(\xi_\omega l)} - \frac{\operatorname{th}(\xi_\omega l)}{\xi_\omega l} \right) \right], \quad (8.30)$$

де $\chi = \Phi_a / \eta_a$.

Використовуючи рівняння стану та прийняті вище наближення, для електричного заряду запишемо

$$\omega = -a_{\omega\omega} \Phi_a \left[\left(1 + \frac{\xi_\omega}{\xi_m - \xi_\omega} \right) \frac{\operatorname{ch}(\xi_\omega x)}{\operatorname{ch}(\xi_\omega l)} + \frac{\xi_m^2}{\xi_\omega^2} \frac{\xi_\omega}{\xi_m - \xi_\omega} \frac{\operatorname{ch}(\xi_m x)}{\operatorname{ch}(\xi_m l)} \right]. \quad (8.31)$$

На рис. 10.1 показано розподіл по товщині шару приведених електричних заряду $\Omega = \omega / (a_{\omega\omega} \Phi_a)$ (суцільна лінія) та потенціалу $\varphi = \Phi / \Phi_a$ (штрихова лінія) при $\xi_\omega / \xi_m = 2$, $\xi_m l = 10$.

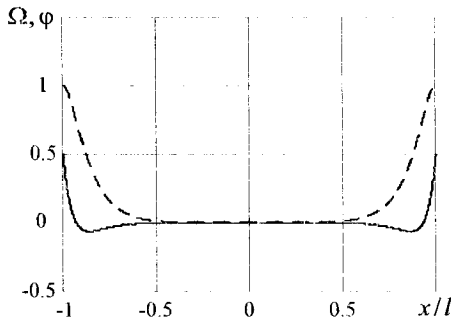


Рис.8.1. Розподіл по товщині шару заряду та термодинамічного електричного потенціалу

Якщо знехтувати впливом хімічного потенціалу на густину заряду, то перша формула системи (8.30) та формула (8.31) співпадають з результатами досліджень механотермоелектричних явищ в електропровідних тілах, одержаними у припущенні $\rho = const$, $\eta = const$ [13].

Аналіз одержаного розв'язку вказує на існування у шарі двох характерних розмірів області приповерхневої неоднорідності. Один з них (ξ_m^{-1}) пов'язаний із приповерхневою неоднорідністю енергії

зв'язку (хімічного потенціалу), тоді як другий (ξ_{ω}^{-1}) – із кулонівською взаємодією заряджених частинок. Бачимо що врахування локальної градієнтності хімічного потенціалу (структурної неоднорідності) приводить до якісних та кількісних змін у розподілі електричного заряду. У приповерхневій області тіла заряд утворює подвійний електричний шар. Можна стверджувати, що в рамках розглядуваної моделі подвійний електричний шар спричинений взаємозв'язаністю хімічного потенціалу (енергії зв'язку) та термодинамічного електричного потенціалу. На основі узгодження одержаних результатів з сучасною теорією про будову подвійного електричного шару [119] можна стверджувати, що $\xi_{\omega} \gg \xi_m$.

Аналіз розподілу напружень по товщині шару показує, що він є аналогічним до розподілу напружень, визначеного в рамках моделі пружного тіла із врахуванням енергії зв'язку у четвертому розділі. При цьому величина відношення ξ_{ω} / ξ_m практично не впливає на цей розподіл.

Для вивчення залежності міцності електропровідного шару, використаємо методіку представлену в четвертому розділі. Прийmemo за основу першу класичну теорію міцності та наближення крихкого руйнування. У цьому випадку для розтягуючого силового навантаження ($\sigma_a > 0$) розрахунковими є напруження σ_{yy} на поверхнях шару. На основі розв'язку задачі, в рамках прийнятих наближень, для інтенсивності силового навантаження σ_a^{kr} , що приводить до руйнування шару, одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_a^{kr} = \sigma_+ + a_0 \eta_a \left[\left(1 - \chi a_m^{\omega} \frac{\xi_{\omega}}{\xi_m - \xi_{\omega}} \right) \frac{\text{th}(\xi_m l)}{\xi_m l} + \right. \\ \left. + \chi a_m^{\omega} \frac{\xi_m}{\xi_m - \xi_{\omega}} \frac{\text{th}(\xi_{\omega} l)}{\xi_{\omega} l} \right]. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Тут

$$\sigma_+ = \sigma_p - a_0 \eta_a (1 - \chi a_m^{\omega}) \quad (8.33)$$

є межею міцності для товстих шарів ($\xi_{\omega} l \gg 1$, $\xi_m l \gg 1$). Зазначимо також, що з огляду на (8.29), наведені вище формули можна записати як у термінах η_a , так і в термінах Φ_a .

Як і приповерхневій неоднорідності, інтенсивності силового навантаження, що приводить до руйнування шару, властиві два характерні розміри, один з яких пов'язаний із приповерхневою неоднорідністю хімічного потенціалу (енергії зв'язку), а інший з кулонівською взаємодією заряджених частинок.

8.3. Приповерхневі явища у кулі

Розглянемо рівноважний стан електропровідної кулі радіуса R , яка вільна від силового навантаження і на її поверхні задано постійні значення хімічного та термодинамічного електричного потенціалів.

За розглядуваної зовнішньої дії, у сферичній системі координат $\{r, \varphi, \psi\}$, до якої віднесено тіло, механічні та електричні поля залежать лише від радіальної координати r і характеризуються такими ненульовими компонентами

$$u_r = u_r(r), \quad \eta = \eta(r), \quad \Phi = \Phi(r), \quad \sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{\gamma\gamma}(r), \quad \gamma = \{r, \varphi, \psi\}. \quad (8.34)$$

Система рівнянь, що описує електромеханічні поля у кулі при нехтуванні впливом деформації на хімічний та термодинамічний електричний потенціали має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} (g_{mm} \eta + g_{m\omega} \Phi) \right) - a_m \eta - a_\omega \Phi &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0} \eta + \frac{a_{\omega\omega}}{\varepsilon_0} \Phi &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right) &= a_0 \left(\frac{d\eta}{dr} + a_m^\omega \frac{d\Phi}{dr} \right), \end{aligned} \quad (8.35)$$

де

$$a_m = a_{mm} - g_{m\omega} \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0}, \quad a_\omega = a_{\omega\omega} - g_{m\omega} \frac{a_{\omega\omega}}{\varepsilon_0}.$$

До цієї системи рівнянь необхідно приєднати умови

$$\eta = \eta_a, \quad \Phi = \Phi_a,$$

$$(\alpha_{ee} + 2\alpha_{ee}) \frac{du_r}{dr} + 2\alpha_{ee} \frac{u_r}{r} + a_{em}\eta + a_{e\Phi}\Phi = 0 \quad (8.36)$$

на поверхні $r = R$ кулі та умови обмеженості розв'язку при $r \rightarrow 0$.

При відомих переміщеннях, хімічному та термодинамічному електричному потенціалах ненульові компоненти тензорів деформації $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, e_{\psi\psi}$ та напружень $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\psi\psi}$ визначаємо за формулами

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\psi\psi} = \frac{u_r}{r},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = 2\alpha_{ee}e_{\gamma\gamma} + a_{ee}e + a_{em}\eta + a_{e\Phi}\Phi, \quad \gamma = \{r, \varphi, \psi\}. \quad (8.37)$$

Розв'язком сформульованої задачі є

$$\eta = (A\xi_1^2 + B) \frac{\eta_a + (A\xi_2^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \frac{R \operatorname{sh}(\xi_1 r)}{r \operatorname{sh}(\xi_1 R)} - (A\xi_2^2 + B) \frac{\eta_a + (A\xi_1^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \frac{R \operatorname{sh}(\xi_2 r)}{r \operatorname{sh}(\xi_2 R)},$$

$$\Phi = - \frac{\eta_a + (A\xi_2^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \frac{R \operatorname{sh}(\xi_1 r)}{r \operatorname{sh}(\xi_1 R)} + \frac{\eta_a + (A\xi_1^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \frac{R \operatorname{sh}(\xi_2 r)}{r \operatorname{sh}(\xi_2 R)},$$

$$u_r = a_0 R \left(H_3 \frac{\eta_a + (A\xi_1^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} S_{\xi_1 r} + H_1 \frac{\eta_a + (A\xi_2^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} S_{\xi_2 r} \right) + a_0 r \frac{4\alpha_{ee}}{3\alpha_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(H_3 \frac{\eta_a + (A\xi_1^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} S_{\xi_1 R} + H_1 \frac{\eta_a + (A\xi_2^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} S_{\xi_2 R} \right),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= 4\alpha_{ee}a_0 \left[H_3 \frac{\eta_a + (A\xi_1^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \left(\frac{R}{r} S_{\xi_1 r} + S_{\xi_1 R} \right) + \right. \\
&\quad \left. + H_1 \frac{\eta_a + (A\xi_3^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \left(\frac{R}{r} S_{\xi_2 r} + S_{\xi_2 R} \right) \right], \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= 2\alpha_{ee}a_0 \left\{ H_3 \frac{\eta_a + (A\xi_1^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \left[\frac{R}{r} \left(S_{\xi_1 r} - \frac{\text{sh}(\xi_1 r)}{\text{sh}(\xi_1 R)} \right) + 2S_{\xi_1 R} \right] + \right. \\
&\quad \left. + H_1 \frac{\eta_a + (A\xi_2^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \left[\frac{R}{r} \left(S_{\xi_2 r} - \frac{\text{sh}(\xi_2 r)}{\text{sh}(\xi_2 R)} \right) + 2S_{\xi_2 R} \right] \right\}, \quad (8.38)
\end{aligned}$$

де

$$A = \frac{\varepsilon_0}{a_{m\omega}}, \quad B = \frac{a_{\omega\omega}}{a_{m\omega}},$$

$$H_1 = a_m^\omega (A\xi_1^2 + B) - 1, \quad H_3 = 1 - a_m^\omega (A\xi_2^2 + B),$$

$$S_{\gamma R} = \frac{\gamma R \text{ch}(\gamma R) - \text{sh}(\gamma R)}{\gamma^2 R^2 \text{sh}(\gamma R)}, \quad S_{\gamma r} = \frac{\gamma r \text{ch}(\gamma r) - \text{sh}(\gamma r)}{\gamma^2 r^2 \text{sh}(\gamma R)}, \quad \gamma = \{\xi_1, \xi_2\};$$

слід пам'ятати також про прийняті наближення при визначенні коренів ξ_1, ξ_2 характеристичного рівняння.

Якщо знехтувати впливом термодинамічного електричного потенціалу на хімічний потенціал і врахувати співвідношення (8.29), то у формулах (8.38) множники

$$H_3 \frac{\eta_a + (A\xi_1^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)}, \quad H_1 \frac{\eta_a + (A\xi_2^2 + B)\Phi_a}{A(\xi_1^2 - \xi_2^2)}$$

необхідно замінити відповідно на

$$-\Phi_a \xi_\omega \left(a_m^\omega \frac{\xi_m + \xi_\omega}{a} + \frac{1}{\xi_m - \xi_\omega} \right), \quad \Phi_a \frac{\xi_m}{\xi_m - \xi_\omega}. \quad (8.39)$$

Аналіз рівноважного розподілу механічних полів у приповерхневих областях шару та кулі показує, що при виконанні умови (8.29) та $\xi_\omega \gg \xi_m$ вплив термодинамічного електричного потенціалу на харак-

тер розподілу $u_r, \sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$ є нехтувально малим і залежність напружень від радіуса є аналогічною до відповідної залежності, одержаної в рамках моделі пружного тіла із врахуванням енергії зв'язку.

8.4. Динамічна поведінка півпростору при раптовому встановленні на його поверхні заданих значень хімічного потенціалу та заряду

Зміни, що вносить урахування подвійного електричного шару в акустичну емісію, дослідимо на прикладі півпростору. Вважаємо, що структурно неоднорідний ізотропний деформівний півпростір (область $x \geq 0$) миттєво виділено із безмежного середовища, електричний потенціал якого дорівнює нулю, а хімічний потенціал та густина дорівнюють відповідно H_*, ρ_* . Приймаємо, що поверхня $x = 0$ тіла вільна від силового навантаження і на ній миттєво встановлюються значення хімічного потенціалу та густини заряду (термодинамічного електричного потенціалу) рівні η_a, ω_a (Φ_a).

За розв'язуючі функції приймаємо $\eta, \omega, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$. Такий вибір розв'язуючих функцій приводить до простішої ключової системи рівнянь порівняно із системою рівнянь, якщо замість ключової функції ω вибрати потенціал Φ . Будемо нехтувати при цьому впливом механічного поля на хімічний потенціал η та заряд ω . Тоді лінеаризована система рівнянь для розглядуваної одновимірної за координатою x ситуації має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \xi_m^2 \eta \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \xi_\omega^2 \omega - \lambda_\omega \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + a_{m\omega} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial \tau^2} = m_m \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + b_0^\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} \right),$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{a_{ee}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \sigma_{xx} - \frac{2\alpha_{ee} a_{em}^*}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} (\eta + b_0^\omega \omega), \quad (8.40)$$

де

$$\lambda_\omega = -\frac{a_{\omega\omega}}{\lambda_{\omega\omega}}, \quad b_0^\omega = \frac{a_{e\omega}}{a_{\omega\omega}}, \quad m_m = \rho_* \frac{a_{em}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}, \quad a_{em}^* = \frac{a_{e\omega} a_{m\omega}}{a_{\omega\omega}} - a_{em}.$$

Система рівнянь (8.40) разом з умовами

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \eta = \eta_a, \quad \omega = \omega_a \quad \text{на поверхні } x = 0,$$

$$\sigma_x = 0, \quad \eta = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{при } \tau = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{xx} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \omega = 0 \quad (8.41)$$

дають математичне формулювання задачі.

Розв'язком першого рівняння системи (8.40), що справджує умови (8.41) є

$$\eta = \eta_a \exp(-\xi_m x) \Theta(\tau).$$

Для знаходження заряду ω та напружень σ_{xx} використаємо перетворення Лапласа за часом τ . У просторі зображень для ω^L, σ_{xx}^L одержуємо

$$\begin{aligned} \omega^L &= \frac{1}{p} \left(\omega_a - \frac{\eta_0}{\lambda_\omega (p - c_\omega)} \right) \exp \left[-(\lambda_\omega p + \xi_\omega^2)^{1/2} x \right] + \\ &\quad + \frac{\eta_0}{\lambda_\omega p (p - c_\omega)} \exp(-\xi_m x), \\ \sigma_{xx}^L &= m_m c_1^2 \frac{p}{p^2 - c_1^2 \xi_m^2} \left[\eta_a + \frac{a_m^\omega \eta_0}{\lambda_\omega (p - c_\omega)} \right] \left[\exp \left(-\frac{px}{c_1} \right) - \exp(-\xi_m x) \right] + \\ &\quad + m_m c_1^2 a_m^\omega \left[\omega_a - \frac{\eta_0}{\lambda_\omega (p - c_\omega)} \right] \frac{p}{p^2 - c_1^2 (\lambda_\omega p - \xi_m^2)} \times \\ &\quad \times \left[\exp \left(-\frac{px}{c_1} \right) - \exp \left(-(\lambda_\omega p + \kappa_\omega^2)^{1/2} x \right) \right], \quad (8.42) \end{aligned}$$

де

$$c_{\omega} = \frac{\xi_m^2 - \xi_{\omega}^2}{\lambda_{\omega}}, \quad \eta_0 = a_{\text{ню}} \xi_m^2 \eta_a.$$

У просторі дійсного часу одержуємо

$$\begin{aligned} \omega(X, t) = & \frac{\eta_0}{\xi_{\omega}^2 - 1} \left\{ \exp(-\xi_{\omega}^m X) \left[\exp\left(\left(\xi_{\omega}^2 - 1\right)t\right) - 1 \right] - \right. \\ & - \frac{1}{2} \exp\left(\left(\xi_{\omega}^2 - 1\right)t\right) \left[\exp(-\xi_{\omega}^m X) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - \xi_{\omega}^m t^{1/2}\right) + \right. \\ & \left. \left. + \exp(\xi_{\omega}^m X) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + \xi_{\omega}^m t^{1/2}\right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\omega_a + \frac{\eta_0}{\xi_{\omega}^2 - 1} \right) \left[\exp(-X) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - t^{1/2}\right) + \right. \\ & \left. + \exp(X) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + t^{1/2}\right) \right], \\ \sigma_{xx}(X, t) = & m_m c_1^2 \left\{ \eta_a \left[\exp(-\xi_{\omega}^m X) \operatorname{ch}\left(\frac{\xi_{\omega}^m}{\varphi} t\right) - \right. \right. \\ & - \operatorname{ch}\left(\frac{\xi_{\omega}^m}{\varphi} (t - \varphi X) \Theta(t - \varphi X)\right) - b_0^{\omega} \eta_a \left\{ \exp(-\xi_{\omega}^m X) \left[A_1 \exp\left(\left(\xi_{\omega}^2 - 1\right)t\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_1 \exp\left(\frac{\xi_{\omega}^m}{\varphi} t\right) + C_1 \exp\left(-\frac{\xi_{\omega}^m}{\varphi} t\right) \right] - \left[A_1 \exp\left(\left(\xi_{\omega}^2 - 1\right)(t - \varphi X)\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_1 \exp\left(\frac{\xi_{\omega}^m}{\varphi} (t - \varphi X)\right) + C_1 \exp\left(-\frac{\xi_{\omega}^m}{\varphi} (t - \varphi X)\right) \Theta(t - \varphi X) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_2 \eta_0 \left\{ - \exp \left(\left(\xi_{\omega}^{m^2} - 1 \right) (t - \varphi X) \right) \Theta(t - \varphi X) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \exp \left(\left(\xi_{\omega}^{m^2} - 1 \right) t \right) \left[\exp(-\xi_{\omega}^m X) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - \xi_{\omega}^m t^{1/2} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \exp(\xi_{\omega}^m X) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + \xi_{\omega}^m t^{1/2} \right) \right] \right\} + \\
& + \left(b_0^{\omega} \omega_a \frac{p_1}{p_1 - p_2} - \eta_0 B_2 \right) \left\{ \exp(p_1(t - \varphi X)) \Theta(t - \varphi X) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \exp(p_1 t) \left[\exp(-X \sqrt{p_1 + 1}) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - [(p_1 + 1)t]^{1/2} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \exp(X \sqrt{p_1 + 1}) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + [(p_1 + 1)t]^{1/2} \right) \right] \right\} - \\
& - \left(b_0^{\omega} \omega_a \frac{p_2}{p_1 - p_2} + \eta_0 C_2 \right) \left\{ \exp(p_2(t - \varphi X)) \Theta(t - \varphi X) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \exp(p_2 t) \left[\exp(-X \sqrt{p_2 + 1}) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - [(p_2 + 1)t]^{1/2} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \exp(X \sqrt{p_2 + 1}) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + [(p_2 + 1)t]^{1/2} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(X, t) = \sigma_{zz}(X, t) = & (1 - 2\beta^2) m_m c_1^2 \left\{ \left[\eta_a \operatorname{ch} \left(\frac{\xi_{\omega}^m}{\varphi} t \right) + \right. \right. \\
& + \frac{2\beta^2}{1 - 2\beta^2} \left(\eta_a - \frac{b_0^{\omega} \eta_0}{\xi_{\omega}^{m^2} - 1} \right) \left. \right] \exp(-\xi_{\omega}^m X) + \eta_a \operatorname{ch} \left(\frac{\xi_{\omega}^m}{\varphi} (t - \varphi X) \right) \Theta(t - \varphi X) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[b_0^\omega \left(A_1 \eta_a + \frac{2\beta^2}{1-2\beta^2} \frac{\eta_0}{\xi_\omega^{m^2-1}} \right) \exp\left(\left(\xi_\omega^{m^2}-1\right)t\right) + \right. \\
 & + b_0^\omega \eta_a \left[B_1 \exp\left(\frac{\xi_\omega^m}{\varphi} t\right) + C_1 \exp\left(-\frac{\xi_\omega^m}{\varphi} t\right) \right] \left. \right] \exp(-\xi_\omega^m X) + \\
 & + b_0^\omega \eta_a \left[A_1 \exp\left(\left(\xi_\omega^{m^2}-1\right)(t-\varphi X)\right) + B_1 \exp\left(\frac{\xi_\omega^m}{\varphi}(t-\varphi X)\right) + \right. \\
 & \quad \left. + C_1 \exp\left(-\frac{\xi_\omega^m}{\varphi}(t-\varphi X)\right) \right] \Theta(t-\varphi X) \left. \right] - \\
 & - A_2 \eta_0 \exp\left(\left(\xi_\omega^{m^2}-1\right)(t-\varphi X)\right) \Theta(t-\varphi X) + \\
 & + \frac{1}{2} \eta_0 \left(A_2 - \frac{2\beta^2}{1-2\beta^2} \frac{b_0^\omega}{\xi_\omega^{m^2-1}} \right) \exp\left(\left(\xi_\omega^{m^2}-1\right)t\right) \times \\
 & \quad \times \left[\exp(-\xi_\omega^m X) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - \xi_\omega^m t^{1/2}\right) + \right. \\
 & \quad \left. + \exp(\xi_\omega^m X) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + \xi_\omega^m t^{1/2}\right) \right] + \\
 & + \left(b_0^\omega \omega_a \frac{p_1}{p_1-p_2} - \eta_0 B_2 \right) \left\{ \exp(p_1(t-\varphi X)) \Theta(t-\varphi X) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \exp(p_1 t) \left[\exp(-X\sqrt{p_1+1}) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - ((p_1+1)t)^{1/2}\right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. + \exp(X\sqrt{p_1+1}) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + ((p_1+1)t)^{1/2}\right) \right] \right\} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{2\beta^2}{1-2\beta^2} \beta_0^\omega \left(\omega_a + \frac{\eta_0}{\xi_\omega^{m^2} - 1} \right) \exp(-X) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - t^{1/2} \right) + \\
& \left. + \exp(X) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + t^{1/2} \right) \right\}. \quad (8.43)
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
t &= \frac{\xi_\omega^2}{\lambda_\omega} \tau, \quad X = \xi_\omega x, \quad \eta_0 = \alpha_{m\omega} \xi_m^2 \eta_a, \quad \beta = \frac{c_2}{c_1}, \\
A_1 &= \frac{\varphi^2(\xi_\omega^{m^2} - 1)}{\varphi^2(\xi_\omega^{m^2} - 1) - \xi_\omega^{m^2}}, \quad B_1 = \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\xi_\omega^m - \varphi(\xi_\omega^m - 1)}, \\
C_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\varphi}{\xi_\omega^m + \varphi(\xi_\omega^m - 1)}, \quad A_2 = \frac{\varphi^2(\xi_\omega^{m^2} - 1)}{(\xi_\omega^{m^2} - 1 - p_1)(\xi_\omega^{m^2} - 1 - p_2)}, \\
B_2 &= \frac{p_1}{(p_1 + 1 - \xi_\omega^{m^2})(p_1 - p_2)}, \quad C_2 = \frac{p_2}{(p_2 + 1 - \xi_\omega^{m^2})(p_2 - p_1)}, \\
p_{1,2} &= \frac{1}{2\varphi^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\varphi^2} \right), \quad \varphi = \frac{\xi_\omega}{\lambda_\omega c_1}, \quad \xi_\omega^m = \frac{\xi_m}{\xi_\omega}. \quad (8.44)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що в усталеному режимі ($\tau \rightarrow \infty$) напруження σ_{xx} дорівнюють нулю, а розподіл напружень σ_{yy}, σ_{zz} визначається розподілом збурення хімічного потенціалу η та електричного заряду ω (термодинамічного електричного потенціалу Φ).

Як граничний випадок з (8.43) одержуємо такий рівноважний розподіл заряду у півпросторі

$$\omega(X, t) = \left(\omega_a + \frac{\eta_0}{\xi_m^2 - \xi_\omega^2} \right) \exp(-X) + \frac{\eta_0}{\xi_m^2 - \xi_\omega^2} \exp(-\xi_\omega^m X). \quad (8.45)$$

Якщо у даній формулі за допомогою співвідношення (8.29), запи-саного у вигляді

$$a_{m\omega}\eta_a = \varepsilon_0 \xi_\omega (\xi_m + \xi_\omega) \Phi_a, \quad (8.46)$$

виключити коефіцієнт зв'язності $a_{m\omega}$, що входить у вираз для η_0 , то в результаті одержимо

$$\omega(X) = -a_{\omega\omega} \Phi_a \frac{\xi_\omega^m}{\xi_\omega^m - 1} \left[\exp(-X) - \xi_\omega^m \exp(-\xi_\omega^m X) \right]. \quad (8.47)$$

Зауважимо, що при виконанні умови (8.46)

$$\frac{\eta_0}{\xi_\omega^{m^2} - 1} = -a_{\omega\omega} \Phi_a \frac{\xi_\omega^{m^2}}{\xi_\omega^m - 1}, \quad \omega_a + \frac{\eta_0}{\xi_\omega^{m^2} - 1} = -a_{\omega\omega} \Phi_a \frac{\xi_\omega^m}{\xi_\omega^m - 1}.$$

Порівнюючи формули (8.43) та (4.16), (4.17), для складових σ_{xy}^* , σ_{yy}^* , зумовлених електричним зарядом, одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^*(X, t) = & m_m c_1^2 \left\{ -b_0^\omega \eta_a \left\{ \exp(-\xi_\omega^m X) \left[A_1 \exp\left((\xi_\omega^{m^2} - 1) t \right) + \right. \right. \right. \\ & + B_1 \exp\left(\frac{\xi_\omega^m}{\varphi} t \right) + C_1 \exp\left(-\frac{\xi_\omega^m}{\varphi} t \right) \left. \right\} - \left[A_1 \exp\left((\xi_\omega^{m^2} - 1) (t - \varphi X) \right) + \right. \\ & + B_1 \exp\left(\frac{\xi_\omega^m}{\varphi} (t - \varphi X) \right) + C_1 \exp\left(-\frac{\xi_\omega^m}{\varphi} (t - \varphi X) \right) \left. \right\} \Theta(t - \varphi X) \left. \right\} + \\ & + A_2 \eta_0 \left\{ -\exp\left((\xi_\omega^{m^2} - 1) (t - \varphi X) \right) \Theta(t - \varphi X) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \exp\left((\xi_\omega^{m^2} - 1) t \right) \left[\exp(-\xi_\omega^m X) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - \xi_\omega^m t^{1/2} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \exp(\xi_\omega^m X) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + \xi_\omega^m t^{1/2} \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(b_0^\omega \omega_a \frac{p_1}{p_1 - p_2} - B_2 \eta_0 \right) \left\{ \exp(p_1(t - \varphi X)) \Theta(t - \varphi X) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \exp(p_1 t) \left[\exp(-X \sqrt{p_1 + 1}) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - ((p_1 + 1)t)^{1/2} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \exp(X \sqrt{p_1 + 1}) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{1/2} + ((p_1 + 1)t)^{1/2} \right) \right] \right\} - \\
& - \left(b_0^\omega \omega_a \frac{p_2}{p_1 - p_2} + \eta_0 C_2 \right) \left\{ \exp(p_2(t - \varphi X)) \Theta(t - \varphi X) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \exp(p_2 t) \left[\exp(-X \sqrt{p_2 + 1}) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - ((p_2 + 1)t)^{1/2} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \exp(X \sqrt{p_2 + 1}) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + ((p_2 + 1)t)^{1/2} \right) \right] \right\}, \\
\sigma_{yy}^*(X, t) = \sigma_{zz}^*(X, t) = & (1 - 2\beta^2) m_m c_1^2 \left\{ - \left[b_0^\omega \left(A_1 \eta_a + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2\beta^2}{1 - 2\beta^2} \frac{\eta_0}{\xi_\omega^{m^2} - 1} \right) \exp \left(\left(\xi_\omega^{m^2} - 1 \right) t \right) + \right. \\
& \left. + b_0^\omega \eta_a \left[B_1 \exp \left(\frac{\xi_\omega^m}{\varphi} t \right) + C_1 \exp \left(- \frac{\xi_\omega^m}{\varphi} t \right) \right] \right\} \exp \left(- \frac{\xi_\omega^m}{\varphi} X \right) + \\
& + b_0^\omega \eta_a \left[A_1 \exp \left(\left(\xi_\omega^{m^2} - 1 \right) (t - \varphi X) \right) + B_1 \exp \left(\frac{\xi_\omega^m}{\varphi} (t - \varphi X) \right) \right] + \\
& \left. + C_1 \exp \left(- \frac{\xi_\omega^m}{\varphi} (t - \varphi X) \right) \right] \Theta(t - \varphi X) \Big|_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -A_1 \eta_0 \exp\left(\left(\xi_\omega^{m^2} - 1\right)(t - \varphi X)\right) \Theta(t - \varphi X) + \\
 & + \frac{1}{2} \eta_0 \left[A_2 - \frac{2\beta^2}{1 - 2\beta^2} \frac{b_0^\omega}{\xi_\omega^{m^2} - 1} \right] \exp\left(\left(\xi_\omega^{m^2} - 1\right)t\right) \times \\
 & \times \left[\exp\left(-\xi_\omega^m X\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - \xi_\omega^m t^{1/2}\right) + \right. \\
 & \left. + \exp\left(\xi_\omega^m X\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + \xi_\omega^m t^{1/2}\right) \right] + \\
 & + \left(b_0^\omega \omega_a \frac{p_1}{p_1 - p_2} - \eta_0 B_2 \right) \left\{ \exp(p_1(t - \varphi X)) \Theta(t - \varphi X) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \exp(p_1 t) \left[\exp\left(-X \sqrt{p_1 + 1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - ((p_1 + 1)t)^{1/2}\right) + \right. \\
 & \left. \left. + \exp\left(X \sqrt{p_1 + 1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + ((p_1 + 1)t)^{1/2}\right) \right] \right\} - \\
 & - \left(b_0^\omega \omega_a \frac{p_2}{p_1 - p_2} + \eta_0 C_2 \right) \left\{ \exp(p_2(t - \varphi X)) \Theta(t - \varphi X) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \exp(p_2 t) \left[\exp\left(-X \sqrt{p_2 + 1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - ((p_2 + 1)t)^{1/2}\right) + \right. \\
 & \left. \left. + \exp\left(X \sqrt{p_2 + 1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + ((p_2 + 1)t)^{1/2}\right) \right] \right\} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{2\beta^2}{1 - 2\beta^2} b_0^\omega \left(\omega_a + \frac{\eta_0}{\xi_\omega^{m^2} - 1} \right) \left[\exp(-X) + \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2} t^{-1/2} - t^{1/2}\right) \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ \exp(X) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2} t^{-1/2} + t^{1/2} \right) \Bigg\}.$$

Аналіз формул (8.43) показує, що у довільному перерізі $X_0 = \text{const}$ півпростору скачки $[\sigma_{xx}], [\sigma_{yy}]$ компонент σ_{xx}, σ_{yy} тензора напружень дорівнюють

$$\begin{aligned} [\sigma_{xx}] &= m_m c_1^2 \left[\eta_a + b_0^\omega \eta_a (A_1 + B_1 + C_1) - \eta_0 (A_2 + B_2 + C_2) + b_0^\omega \omega_a \right], \\ [\sigma_{yy}] &= [\sigma_{zz}] = (1 - 2\beta^2) m_m c_1^2 \left[\eta_a + b_0^\omega \eta_a (A_1 + B_1 + C_1) - \right. \\ &\quad \left. - \eta_0 (A_2 + B_2 + C_2) + b_0^\omega \omega_a \right]. \end{aligned} \quad (8.48)$$

При цьому доданки

$$\begin{aligned} [\sigma_{xx}^*] &= m_m c_1^2 \left[b_0^\omega \eta_a (A_1 + B_1 + C_1) - \eta_0 (A_2 + B_2 + C_2) + b_0^\omega \omega_a \right], \\ [\sigma_{yy}^*] &= [\sigma_{zz}^*] = (1 - 2\beta^2) m_m c_1^2 \left[b_0^\omega \eta_a (A_1 + B_1 + C_1) - \right. \\ &\quad \left. - \eta_0 (A_2 + B_2 + C_2) + b_0^\omega \omega_a \right]. \end{aligned}$$

описують вклад електричного заряду у величину скачка напружень σ_{xx}, σ_{yy} .

Розділ 9.

ТЕРМОДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОМЕХАНІКИ

Запропоновано підхід та побудовано моделі термомеханіки, що враховують інерційність розглядуваних форм руху (теплової, дифузійної, деформування, зміни мікроструктури). Розділ написано на основі робіт [10, 15, 19, 20, 22-24, 36, 76, 81, 82, 124].

9.1. Функції впливу в реологічних кінетичних рівняннях, що приводять до врахування інерційності потоку ентропії

Вище показано, що вибір незатухаючої пам'яті у співвідношенні, що пов'язує вектор потоку маси з градієнтом хімічного потенціалу приводить до врахування структурної неоднорідності матеріалу. Нижче розглянуто функції впливу у реологічних кінетичних рівняннях, що приводять до скінченної швидкості поширення тепла та домішок.

Розглянемо ізотропне локально неоднорідне деформівне тверде тіло, у якому за базові приймаємо процеси деформування та теплопровідності. Вважаємо, що залежність між потоком ентропії та відповідною термодинамічною силою є функціональною, а функція впливу є експоненційною, тобто

$$\vec{j}_s = -\frac{1}{d_{ss}^*} \frac{\vec{\nabla}T}{T} + \int_0^\tau \frac{1}{d_{ss}^*} \exp\left(\int_\tau^\xi \frac{b_{ss}^*}{d_{ss}^*} d\zeta\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\vec{\nabla}T}{T}\right) d\xi. \quad (9.1)$$

Дане інтегральне співвідношення можна звести до наступного диференціального рівняння

$$d_{ss}^* \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \tau} - b_{ss}^* \vec{j}_s = \frac{\vec{\nabla}T}{T} \quad (9.2)$$

або

$$\frac{\partial(d_{ss}^* \bar{j}_s)}{\partial \tau} - b_s \bar{j}_s = \frac{\bar{\nabla} T}{T}, \quad (9.3)$$

де

$$b_s = \frac{\partial d_{ss}^*}{\partial \tau} + b_{ss}^*.$$

Позначимо

$$\bar{k}_s = d_{ss}^* \bar{j}_s \quad (9.4)$$

і назвемо \bar{k}_s імпульсом потоку ентропії.

Враховуючи (9.4), рівняння (9.3) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} - b_s \bar{j}_s = \frac{\bar{\nabla} T}{T}. \quad (9.5)$$

Використовуючи співвідношення (9.5) та вважаючи енергію розсіяння $T\sigma_s$ квадратичною функцією термодинамічних потоків (у даному випадку потоку ентропії), на основі рівняння балансу повної енергії можемо записати

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial \tau} = \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{k}_v}{\partial \tau} + \bar{j}_s \cdot \frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + H \frac{\partial p}{\partial \tau} + T \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial U'}{\partial \tau}. \quad (9.6)$$

Тут враховано результати третього розділу, які стосуються залежності внутрішньої енергії від градієнта хімічного потенціалу. Не зменшуючи загальності, при розгляді узагальнених моделей останній доданок у співвідношенні (9.6) можна оминати.

Приймаючи для швидкості внутрішньої енергії співвідношення (3.18), з (9.6) для приросту енергії руху dK одержуємо

$$dK = \bar{v} \cdot d\bar{k}_v + \bar{j}_s \cdot d\bar{k}_s. \quad (9.7)$$

За умови потенціального опису енергія руху K є потенціальною функцією означеною в просторі імпульсів розглядуваних форм руху, у даному випадку імпульсу механічного поступального руху \bar{k}_v та імпульсу потоку ентропії \bar{k}_s , тобто

$$K = K(\bar{k}_v, \bar{k}_s; U). \quad (9.8)$$

Зрозуміло, що рух відбувається на базі розглядуваного стану, тому повинно виконуватися співвідношення

$$K(0,0;U) = 0.$$

Параграми, спряженими до імпульсів \vec{k}_v , \vec{k}_s , є відповідно вектор швидкості механічного поступального руху \vec{v} та вектор потоку ентропії \vec{j}_s . Для цих векторів на основі (9.7) записуємо такі визначальні співвідношення

$$\vec{v} = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_v}, \quad \vec{j}_s = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_s}. \quad (9.9)$$

Узагальнюючи сказане вище, можна стверджувати, що повна енергія є сумою внутрішньої та кінетичної енергій. Простором визначення внутрішньої енергії є параметри стану, тоді як кінетичної енергії (енергії руху) – імпульси розглядуваних форм руху.

Перетворенням Лежандра

$$K = L - \vec{v} \cdot \vec{k}_v - \vec{j}_s \cdot \vec{k}_s \quad (9.10)$$

можна ввести у розгляд енергію L , означену в просторі швидкостей \vec{v} , \vec{j}_s , для приросту якої справджується

$$dL = -\vec{k}_v \cdot d\vec{v} - \vec{k}_s \cdot d\vec{j}_s. \quad (9.11)$$

Визначальними співвідношеннями для потенціалу L є

$$\vec{k}_v = -\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}, \quad \vec{k}_s = -\frac{\partial L}{\partial \vec{j}_s}. \quad (9.12)$$

Конкретний вигляд визначальних співвідношень (9.9), (9.12) пов'язаний з конкретизацією явного вигляду потенціалів K , L .

9.2. Врахування інерції деформації в узагальненій термомеханіці

Розглянемо деформівне тверде тіло, яке перебуває під дією силового навантаження в умовах теплообміну із зовнішнім середовищем. За визначальні процеси приймемо процеси деформування та теплопровідності. Означимо внутрішню енергію U в просторі ентропії S ,

густини ρ , градієнта хімічного потенціалу $\vec{\nabla}\eta$ та тензора деформації $\hat{\varepsilon}$

$$U = U(S, \rho, \vec{\nabla}\eta, \hat{\varepsilon}). \quad (9.13)$$

Енергію руху K означаємо в просторі імпульсів механічного поступального руху \vec{k}_v , потоку ентропії \vec{k}_s та деформації \hat{k}_e

$$K = K(\vec{k}_v, \vec{k}_s, \hat{k}_e). \quad (9.14)$$

Параметрами спряженими до \vec{k}_v , \vec{k}_s , \hat{k}_e приймаємо відповідно вектор швидкості \vec{v} , вектор потоку ентропії \vec{j}_s та тензор швидкості деформації $\hat{\varepsilon}$.

Згідно з (9.13), (9.14) та визначенням спряжених параметрів для приростів dU приймаємо рівняння (3.15), а для приросту енергії руху dK співвідношення

$$dK = \vec{v} \cdot d\vec{k}_v + \vec{j}_s \cdot d\vec{k}_s + \hat{\varepsilon} : d\hat{k}_e. \quad (9.15)$$

Наслідком даного рівняння є такі визначальні співвідношення для швидкостей

$$\vec{v} = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_v}, \quad \vec{j}_s = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_s}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{\partial K}{\partial \hat{k}_e}. \quad (9.16)$$

Вони при заданій енергії K дають явний вигляд залежності швидкостей \vec{v} , \vec{j}_s , $\hat{\varepsilon}$ від імпульсів \vec{k}_v , \vec{k}_s , \hat{k}_e .

Перетворенням Лежандра

$$K = K^* - \vec{v} \cdot \vec{k}_v - \vec{j}_s \cdot \vec{k}_s - \hat{\varepsilon} : \hat{k}_e \quad (9.17)$$

вводимо у розгляд енергію K^* означену в просторі \vec{v} , \vec{j}_s , $\hat{\varepsilon}$. Для її приросту на основі (9.15), (9.17) записуємо рівняння

$$dK^* = -\vec{k}_v \cdot d\vec{v} - \vec{k}_s \cdot d\vec{j}_s - \hat{k}_e : d\hat{\varepsilon}. \quad (9.18)$$

Наслідком цього рівняння є такі визначальні співвідношення для імпульсів

$$\vec{k}_v = -\frac{\partial K^*}{\partial \vec{v}}, \quad \vec{k}_s = -\frac{\partial K^*}{\partial \vec{j}_s}, \quad \hat{k}_e = -\frac{\partial K^*}{\partial \hat{\varepsilon}}. \quad (9.19)$$

Враховуючи рівняння балансу маси та ентропії, а також визначальні співвідношення, з рівняння балансу енергії, для прийнятого вище наближення нехтування конвективною складовою потоку енергії, одержуємо

$$\left(\frac{\partial \bar{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial (\bar{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \right) \cdot \bar{v} + \left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \bar{\nabla} T \right) \cdot \bar{j}_s + T \sigma_s = 0. \quad (9.20)$$

Далі при формулюванні основних співвідношень моделі можливі два випадки:

- процес деформування є недисипативним;
- процес деформування вважаємо дисипативним.

Недисипативний процес деформування. У цьому випадку приймаємо, що справджується співвідношення

$$\frac{\partial \bar{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial (\bar{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad (9.21)$$

яке є рівнянням руху у випадку врахування інерційностей механічного поступального руху та деформування. Як наслідок, з (9.20) одержуємо вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s = -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \bar{\nabla} T \right) \cdot \bar{j}_s. \quad (9.22)$$

Оскільки виробництво ентропії σ_s є білінійною формою термодинамічних потоків і сил, то на основі аналізу останнього співвідношення за термодинамічну силу потрібно прийняти

$$-\frac{1}{T} \frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} - \frac{\bar{\nabla} T}{T}.$$

Для лінійної залежності між термодинамічними потоком і силою запишемо таке кінетичне рівняння

$$\bar{j}_s = -\frac{\beta_{ss}}{T} \left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \bar{\nabla} T \right), \quad (9.23)$$

де β_{ss} – кінетичний коефіцієнт. Дане співвідношення можна записати у вигляді рівняння балансу імпульсу потоку ентропії

$$\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \frac{T}{\beta_{ss}} \bar{j}_s + \bar{\nabla} T = 0. \quad (9.24)$$

Дисипативний процес деформування. У цьому випадку як теплову, так і механічну форми руху вважаємо дисипативними. Тому на основі співвідношення (9.20) за термодинамічні потоки необхідно прийняти вектори швидкості \bar{v} та потоку ентропії \bar{j}_s , а за термодинамічні сили

$$\frac{\partial \bar{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial(\bar{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma}, \quad \frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \bar{\nabla} T.$$

У лінійному наближенні для ізотропного твердого тіла записуємо такі кінетичні рівняння

$$\frac{\partial \bar{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial(\bar{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \beta_{vv} \bar{v} + \beta_{vs} \bar{j}_s = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \bar{\nabla} T + \beta_{ss} \bar{j}_s + \beta_{sv} \bar{v} = 0, \quad (9.25)$$

де $\beta_{vv}, \beta_{vs}, \beta_s, \beta_{sv}$ – кінетичні коефіцієнти.

Приймемо для енергії K^* таке подання

$$K^* = -\frac{1}{2} d_{vv} \bar{v} \cdot \bar{v} - \frac{1}{2} d_{ss} \bar{j}_s \cdot \bar{j}_s - \frac{1}{2} d_{ee}^k \varepsilon^2 - d_{ee} \hat{\varepsilon} : \hat{\varepsilon}, \quad (9.26)$$

де $\varepsilon = \hat{\varepsilon} : \hat{I}$.

Використовуючи (9.19), (9.26), записуємо явний вигляд визначальних співвідношень для імпульсів \bar{k}_v , \bar{k}_s , \hat{k}_e

$$\bar{k}_v = d_{vv} \bar{v}, \quad \bar{k}_s = d_{ss} \bar{j}_s, \quad \hat{k}_e = d_{ee}^k \hat{\varepsilon} \hat{I} + 2d_{ee} \hat{\varepsilon}. \quad (9.27)$$

Враховуючи ці співвідношення, систему рівнянь (9.25) перетворюємо до вигляду

$$\frac{\partial(d_{vv} \bar{v})}{\partial \tau} - \frac{\partial(\bar{\nabla} \cdot (d_{ee}^k \hat{\varepsilon}))}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial(\bar{\nabla} \cdot (d_{ee} \hat{\varepsilon}))}{\partial \tau} - \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \beta_{vv} \bar{v} + \beta_{vs} \bar{j}_s = 0,$$

$$\frac{\partial(d_{ss}\bar{j}_s)}{\partial\tau} + \bar{\nabla}T + \beta_s\bar{j}_s + \beta_{sv}\bar{v} = 0. \quad (9.28)$$

Якщо ж механічний рух приймаємо недисипативним, то з (9.21), (9.24), (9.26) одержуємо

$$\frac{\partial(d_{vv}\bar{v})}{\partial\tau} - \frac{\partial(\bar{\nabla}(d_{ee}^k\hat{\varepsilon}))}{\partial\tau} - 2\frac{\partial(\bar{\nabla}\cdot(d_{ee}\hat{\varepsilon}))}{\partial\tau} - \bar{\nabla}\cdot\hat{\sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial(d_{ss}\bar{j}_s)}{\partial\tau} + \bar{\nabla}T + \beta_s\bar{j}_s = 0, \quad (9.29)$$

При $d_{ee}^k = 0$, $d_{ee} = 0$, $d_{ss} = 0$, враховуючи, що рух розглядається на базі локального стану (коефіцієнти можуть залежати від параметрів стану), з (9.29) одержуємо рівняння руху та кінетичне рівняння для вектора потоку ентропії класичної термомеханіки. Зазначимо також, що з другого рівняння системи (9.28) при $d_{ss} = 0$ одержуємо рівняння для вектора потоку ентропії \bar{j}_s у вигляді

$$\bar{j}_s = -\frac{1}{\beta_s}\bar{\nabla}T - \frac{\beta_{sv}}{\beta_s}\bar{v}. \quad (9.30)$$

Тут, як і раніше, коефіцієнти β_s, β_{sv} можуть залежати від параметрів стану, у тому числі від температури.

Якщо коефіцієнти d_{ee}^k , d_{ee} є постійними або проведено лінеаризацію імпульсів \bar{k}_v , \hat{k}_e , то перше рівняння системи (9.29) можна записати у вигляді

$$d_{vv}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\tau} - d_{ee}^k\frac{\partial(\bar{\nabla}\hat{\varepsilon})}{\partial\tau} - 2d_{ee}\frac{\partial(\bar{\nabla}\cdot\hat{\varepsilon})}{\partial\tau} - \bar{\nabla}\cdot\hat{\sigma} = 0. \quad (9.31)$$

Якщо врахувати, що вектор потоку ентропії \bar{j}_s пов'язаний з вектором потоку тепла \bar{j}_q співвідношенням

$$\bar{j}_s = \frac{1}{T}\bar{j}_q,$$

та прийняти

$$d_{ss} = Td_{ss}^0, \quad \beta_s = \frac{T}{\lambda_t}, \quad \tau_r = \lambda_t d_{ss}^0,$$

то друге рівняння системи (9.29) приводимо до відомого в літературі вигляду

$$\tau_r \frac{\partial \vec{j}_q}{\partial \tau} + \vec{j}_q = -\lambda_t \bar{\nabla} T. \quad (9.32)$$

Дане співвідношення є одним з базових положень узагальненої термомеханіки і носить назву узагальненого закону теплопровідності [64, 104]. У ньому τ_r є часом релаксації теплового потоку, а λ_t коефіцієнтом теплопровідності. Значимо також, що у [104] перший доданок рівняння (9.32) називають тепловою інерцією теплового потоку, а для коефіцієнта τ_r для металів приводять значення порядку 10^{-11} с.

Якщо у початковий момент часу $\tau = 0$ у локальному елементі задано скачок градієнта температури

$$\bar{\nabla} T = \bar{T}_0 \Theta(\tau),$$

то з (9.32) одержуємо

$$\vec{j}_q = -\lambda_t \bar{T}_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_r}\right) \right] \Theta(\tau). \quad (9.33)$$

Таким чином, можна стверджувати, що коефіцієнт τ_r впливає на швидкість виходу теплового потоку на усталений рівень і не впливає на величину цього рівня.

9.2.1. Хвильові процеси. Вплив інерції деформації на власні частоти коливань шару

У цьому підрозділі обмежимося розглядом ізотермічних процесів у випадку, коли механічний рух є недисипативним. Тому розглядаємо рівняння (9.31), яке, враховуючи визначальне співвідношення для тензора напружень та формулу Коші для тензора деформації, приводимо до вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [\rho_* \vec{u} - d_{ee} \nabla^2 \vec{u} - (d_{ee} + d_{ee}^k) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] = \\ & = \alpha_{ee} \nabla^2 \vec{u} + (a_{ee} + \alpha_{ee}) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{em} \vec{\nabla} \eta \end{aligned} \quad (9.34)$$

Тут враховано, що у лінеаризованому наближенні $d_{vv} = \rho_*$. До даного співвідношення за розглядуваного підходу необхідно прислати рівняння

$$\nabla^2 \eta - \kappa_m^2 \eta - \kappa_e^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (9.35)$$

При розгляді хвильових процесів для вектора переміщення використаємо подання (5.19). Тоді система рівнянь (9.34), (9.35) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\vec{\psi} - d_2^2 \nabla^2 \vec{\psi}) = c_2^2 \nabla^2 \vec{\psi}, \\ & \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\psi - d_1^2 \nabla^2 \psi) = c_1^2 \nabla^2 \psi + d_m^2 \eta, \\ & \nabla^2 \eta - \kappa_m^2 \eta - \kappa_e^2 \nabla^2 \psi = 0, \end{aligned} \quad (9.36)$$

де

$$d_2^2 = \frac{d_{ee}}{\rho_*}, \quad d_1^2 = \frac{2d_{ee} + d_{ee}^k}{\rho_*}, \quad d_m^2 = \frac{a_{em}}{\rho_*}.$$

Таким чином, для знаходження $\vec{\psi}$ маємо перше рівняння системи (9.36). Для ψ з другого та третього рівнянь системи (9.36) одержуємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [-d_1^2 \nabla^4 \psi + (1 + d_1^2 \kappa_m^2) \nabla^2 \psi - \kappa_\eta^2 \psi] = \\ & = c_1^2 \nabla^4 \psi - c_1^2 (\kappa_m^2 - d_m^2 \kappa_e^2) \nabla^2 \psi. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Аналіз записаних рівнянь проведемо для одновимірної за координатою x ситуації. У цьому випадку система рівнянь, що описує механічні коливання зводиться до

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\vec{\psi} - d_2^2 \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial x^2} \right) = c_2^2 \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial x^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[-d_1^2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + (1 + d_1^2 \kappa_m^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \kappa_\eta^2 \Psi \right] = \\ = c_1^2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} - c_1^2 (\kappa_m^2 - d_m^2 \kappa_e^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Дана система рівнянь описує плоскі поздовжні та поперечні хвилі в структурно неоднорідному пружному середовищі із врахуванням інерції деформації. При цьому врахування інерції деформації та структурної неоднорідності приводить до розгляду деформівного твердого тіла як тіла з дисперсією. Враховуючи, що

$$\tilde{\Psi}(x, \tau) = \{ \Psi(x, \tau), 0, 0 \}$$

та приймаючи

$$\{ \Psi, \psi \} = A_{\Psi, \psi} \exp[i(kx - \nu \tau)] + B_{\Psi, \psi} \exp[i(kx + \nu \tau)], \quad (9.39)$$

одержуємо такі дисперсійні співвідношення

$$\begin{aligned} \nu = W_1(k) = \frac{kc_1 \sqrt{k^2 + \kappa_m^2 - \kappa_e^2 d_m^2}}{\sqrt{\kappa_m^2 + (1 + d_1^2 \kappa_m^2)k^2 + d_1^2 k^4}}, \\ \nu = W_2(k) = \frac{kc_2}{\sqrt{1 + d_2^2 k^2}} \end{aligned} \quad (9.40)$$

відповідно для поздовжніх та поперечних хвиль.

Важливими характеристиками у середовищах з дисперсією є фаза C та групові \mathbf{C} швидкості. Вони за означенням дорівнюють [116, 120]

$$C = \frac{W(k)}{k}, \quad \mathbf{C} = \frac{dW}{dk} \quad (9.41)$$

Враховуючи дисперсійні співвідношення (9.40), з (9.41) одержуємо

$$C_\Psi = \frac{c_1 \sqrt{k^2 + \kappa_m^2 - \kappa_e^2 d_m^2}}{\sqrt{\kappa_m^2 + (1 + d_1^2 \kappa_m^2)k^2 + d_1^2 k^4}},$$

$$\begin{aligned}
 C_{\psi} = c_1 \frac{[\kappa_m^2 + (1 + d_1^2 \kappa_m^2)k^2 + d_1^2 k^4](2k^2 + \kappa_m^2 - \kappa_e^2 d_m^2)}{(k^2 + \kappa_m^2 - \kappa_e^2 d_m^2)^{1/2} [\kappa_m^2 + (1 + d_1^2 \kappa_m^2)k^2 + d_1^2 k^4]^{3/2}} \\
 - c_1 k^2 \frac{(k^2 + \kappa_m^2 - \kappa_e^2 d_m^2)(2d_1^2 k^2 + 1 + d_1^2 \kappa_m^2)}{(k^2 + \kappa_m^2 - \kappa_e^2 d_m^2)^{1/2} [\kappa_m^2 + (1 + d_1^2 \kappa_m^2)k^2 + d_1^2 k^4]^{3/2}}, \\
 C_{\Psi} = \frac{c_2}{\sqrt{1 + d_2^2 k^2}}, \\
 \mathbf{C}_{\Psi} = \frac{c_2}{(1 + d_2^2 k^2)^{3/2}}, \tag{9.42}
 \end{aligned}$$

де індекси ψ, Ψ вказують на поздовжні та поперечні хвилі відповідно.

При нехтуванні ефектами, пов'язаними з структурною неоднорідністю, для $C_{\psi}, \mathbf{C}_{\psi}$ одержуємо

$$C_{\psi} = \frac{c_1}{\sqrt{1 + d_1^2 k^2}}, \quad \mathbf{C}_{\psi} = \frac{c_1}{(1 + d_1^2 k^2)^{3/2}}. \tag{9.43}$$

Аналіз дисперсійних співвідношень для поздовжніх та поперечних хвиль показує, що відмінність дисперсійних кривих зумовлена врахуванням структурної неоднорідності (локальної градієнтності хімічного потенціалу). Слід зазначити, що у середовищах з дисперсією довільне початкове збурення розділяється на групи коливань, що поширюються з однаковою груповою швидкістю [116]. Важливою характеристикою групової швидкості є те, що вона співпадає зі швидкістю поширення енергії, яка переноситься даною групою хвиль.

Вплив інерції деформації на частоти власних коливань.

Дослідження впливу інерції деформації на частоти власних коливань проведемо на прикладі шару (область $l \geq x \geq 0$ у прямокутній декартовій системі координат), поверхня $x=l$ якого нерухома, а на поверхні $x=0$ задано перпендикулярне до неї переміщення за гармонійним законом з амплітудою u_a та частотою ϑ . Будемо нехтувати при цьому локальною градієнтністю хімічного потенціалу. Для розглядуваного зовнішнього навантаження та прийнятих наближень рівняння (9.34) набуває вигляду

$$\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(u - d_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9.44)$$

де u – x -компонента вектора переміщень.

Для амплітуди $u(x)$ коливань шару ($u(x, \tau) = u(x) \exp(i\omega \tau)$) з рівняння (9.44) та граничних умов

$$u(0) = u_a, \quad u(l) = 0 \quad (9.45)$$

одержуємо

$$u(x) = u_a \frac{\sin(k(l-x))}{\sin(kl)}, \quad (9.46)$$

де

$$k^2 = \frac{\nu^2}{c_1^2 - d_1^2 \nu^2}.$$

Бачимо, що врахування інерції деформації приводить до зміни власних частот ν_n коливань шару

$$\nu_n = \frac{\pi n c_1}{l} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} d_1^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.47)$$

порівняно з власними частотами

$$\nu_n^* = \frac{\pi n c_1}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

для моделі класичного пружного тіла. Зрозуміло, що така залежність зростає з підвищенням порядку резонансу (значення n). При прямуванні n до безмежності власні частоти прямують до скінченної межі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \frac{c_1}{d_1}, \quad (9.48)$$

яка не залежить від товщини шару. Оцінки показують, що при $n=1$ вплив інерції деформації стає вагомим для тонких плівок, коли суттєвими є ефекти приповерхневої неоднорідності.

Відзначимо, що рівняння аналогічне до (9.44) було одержано Лявом при описі хвиль у круглому в перерізі стержні із врахуванням поперечної інерції.

9.2.2. Розмивання фронту хвилі при ударному навантаженні півпростору

Розглянемо пружний півпростір (область $x \geq 0$), на поверхні $x = 0$ якого задано переміщення

$$u_x \equiv u = u_a \Theta(\tau), \quad u_a = \text{const}. \quad (9.49)$$

Динамічна поведінка півпростору описується рівнянням (9.44), граничною умовою (9.49) та умовою обмеженості розв'язку на безмежності в області тіла.

Для одержання розв'язку задачі використаємо методику [105], розроблену для дослідження поведінки круглого у перерізі стержня з врахуванням інерції поперечних коливань. Перейдемо від змінних x, t до змінних X, Y за формулами

$$X = x + c_1 t, \quad Y = x - c_1 t. \quad (9.50)$$

Використовуючи (9.50), рівняння (9.44) перетворюємо до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{d_1^2}{4} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial Y^4} - 4 \frac{\partial^4 u}{\partial X^2 \partial Y^2} \right) = 0. \quad (9.51)$$

Врахуємо, що у напрямку X поширення прямої хвилі швидкості та деформації змінюються мало, тоді як у поперечному напрямку Y ці величини мають стрибок. Тому похідні по Y будуть значно більшими від похідних по X . У зв'язку з цим у попередньому рівнянні в дужках збережемо більший доданок. За такого наближення одержуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{d_1^2}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial Y^4} = 0. \quad (9.52)$$

Заміною

$$\zeta = Y \left(\frac{3}{4} d_1^2 X \right)^{-1/3}. \quad (9.53)$$

дане рівняння перетворюємо до рівняння Ері

$$\frac{d^2 \zeta}{d\zeta^2} - \zeta \zeta = 0, \quad (9.54)$$

де

$$\mathfrak{S} = \frac{du}{d\zeta}.$$

Розв'язком цього рівняння, записаним у безрозмірних величинах

$$t = \frac{c_1 \tau}{\sqrt{d_1^2}}, \quad \chi = \frac{X}{\sqrt{d_1^2}}, \quad (9.55)$$

який справджує крайові умови, є

$$u = u_a \left(\frac{1}{3} - \int_0^{z(\chi, t)^{1/3}} \sqrt{z} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right) dz \right), \quad (9.56)$$

де

$$z(\chi, t) = \frac{3}{4} (\chi - t)(\chi + t)$$

Бачимо, що врахування інерції деформації приводить до розмивання фронту хвилі порівняно з класичною моделлю пружного тіла.

9.3. Врахування інерції деформації в узагальненій термомеханіці твердих розчинів

Розглянемо твердий розчин, який перебуває під дією силового навантаження в умовах тепломасообміну з оточенням. За визначальні процеси приймаємо процеси деформування, теплопровідності та дифузії. З огляду на це доволіно виділену підсистему тіла розглядаємо як відкриту термодинамічну систему, через поверхню якої здійснюється тепломасообмін з оточенням. Не зменшуючи загальності нехтуватимемо ефектами локальної неоднорідності.

Означимо внутрішню енергію U у просторі ентропії S , густини домішок ρ_1 та тензора деформації \hat{e} . Енергію руху K означимо в просторі імпульсів механічного поступального руху \vec{k}_v , потоку ентропії \vec{k}_s , потоку домішок \vec{k}_m та деформації \hat{k}_e , тобто

$$U = U(S, \rho_1, \hat{e}), \quad K = K(\bar{k}_v, \bar{k}_s, \bar{k}_{m1}, \hat{k}_e). \quad (9.57)$$

Параметрами спряженими до імпульсів $\bar{k}_v, \bar{k}_s, \bar{k}_{m1}, \hat{k}_e$ приймаємо відповідні швидкості, тобто вектор швидкості \vec{v} , вектор потоку ентропії \vec{j}_s , вектор потоку домішок \vec{j}_{m1} та тензор швидкості деформації \hat{e} . Відповідно до цього та результатів сьомого розділу для приростів dU, dK приймаємо

$$dU = TdS + H_1 d\rho_1 + \hat{\sigma} : d\hat{e},$$

$$dK = \vec{v} \cdot d\bar{k}_v + \vec{j}_s \cdot d\bar{k}_s + \vec{j}_{m1} \cdot d\bar{k}_{m1} + \hat{e} : d\hat{k}_e. \quad (9.58)$$

Результатом першого співвідношення системи (9.58) є рівняння стану термопружного твердого розчину, розширений варіант яких представлено у сьомому розділі. На основі другого співвідношення системи (9.58) записуємо такі визначальні рівняння

$$\vec{v} = \frac{\partial K}{\partial \bar{k}_v}, \quad \vec{j}_s = \frac{\partial K}{\partial \bar{k}_s}, \quad \vec{j}_{m1} = \frac{\partial K}{\partial \bar{k}_{m1}}, \quad \hat{e} = \frac{\partial K}{\partial \hat{k}_e}. \quad (9.59)$$

Перетворенням Лежандра

$$L = K - \vec{v} \cdot \bar{k}_v - \vec{j}_s \cdot \bar{k}_s - \vec{j}_{m1} \cdot \bar{k}_{m1} - \hat{e} : \hat{k}_e \quad (9.60)$$

вводимо у розгляд енергію L , простором визначення якої є вектори швидкості \vec{v} , потоку ентропії \vec{j}_s , потоку домішок \vec{j}_{m1} та тензор швидкості деформації \hat{e}

$$L = L(\vec{v}, \vec{j}_s, \vec{j}_{m1}, \hat{e}). \quad (9.61)$$

Визначальні співвідношення записані для енергії L мають вигляд

$$\vec{k}_v = -\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}, \quad \vec{k}_s = -\frac{\partial L}{\partial \vec{j}_s}, \quad \vec{k}_{m1} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{j}_{m1}}, \quad \hat{k}_e = -\frac{\partial L}{\partial \hat{e}}. \quad (9.62)$$

Використовуючи процедуру, представлену у попередньому підрозділі, з рівнянь балансу енергії, маси та ентропії одержуємо

$$\left(\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \right) \cdot \vec{v} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T \right) \cdot \vec{j}_s + \left(\frac{\partial \bar{k}_{m1}}{\partial \tau} + \vec{\nabla} H_1 \right) \cdot \vec{j}_{m1} + T \sigma_s = 0. \quad (9.63)$$

Як і раніше, дальша конкретизація моделі пов'язана з конкретизацією характеру механічного руху, тобто розглядом його як дисипативного чи недисипативного.

Механічний рух недисипативний. У цьому випадку виконується співвідношення (9.21). Тому для енергії розсіяння на основі (9.63) запишемо

$$T \sigma_s = - \left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T \right) \cdot \vec{j}_s - \left(\frac{\partial \bar{k}_{m1}}{\partial \tau} + \vec{\nabla} H_1 \right) \cdot \vec{j}_{m1}. \quad (9.64)$$

Дана формула стверджує, що термодинамічними силами є

$$- \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T \right), \quad - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \bar{k}_{m1}}{\partial \tau} + \vec{\nabla} H_1 \right).$$

Оскільки процеси теплопровідності та дифузії відбуваються на базі рівноважного стану, тому за термодинамічні сили можна також прийняти

$$- \frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} - \vec{\nabla} T, \quad - \frac{\partial \bar{k}_{m1}}{\partial \tau} - \vec{\nabla} H_1.$$

У випадку лінійної залежності між термодинамічними потоками і силами кінетичні рівняння моделі можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}_s}{\partial \tau} + b_{ss} \vec{j}_s + b_{sm}^{(1)} \vec{j}_{m1} + \vec{\nabla} T &= 0, \\ \frac{\partial \bar{k}_{m1}}{\partial \tau} + b_{ms} \vec{j}_s + b_{mm}^{(1)} \vec{j}_{m1} + \vec{\nabla} H_1 &= 0. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Зосередимося на дослідженні ефектів зумовлених взаємозв'язаністю процесів.

Для енергії руху L приймаємо подання

$$2L = -d_{vy} \vec{v} \cdot \vec{v} - d_{ss} \vec{j}_s \cdot \vec{j}_s - d_{mm} \vec{j}_{m1} \cdot \vec{j}_{m1} - d_{sm} \vec{j}_s \cdot \vec{j}_{m1}. \quad (9.66)$$

Враховуючи визначальні співвідношення (9.62), для імпульсів потоків ентропії \vec{k}_s та домішки \vec{k}_{m1} одержуємо

$$\begin{aligned}\vec{k}_s &= d_{ss}\vec{j}_s + d_{sm}\vec{j}_{m1}, \\ \vec{k}_{m1} &= d_{sm}\vec{j}_s + d_{mm}\vec{j}_{m1}\end{aligned}\quad (9.67)$$

Підставляючи (9.67) у (9.65), одержуємо наступні кінетичні рівняння

$$\begin{aligned}d_{ss}\frac{\partial\vec{j}_s}{\partial\tau} + d_{sm}\frac{\partial\vec{j}_{m1}}{\partial\tau} + b_s\vec{j}_s + b_s^{(m)}\vec{j}_{m1} + \vec{\nabla}T &= 0, \\ d_{sm}\frac{\partial\vec{j}_s}{\partial\tau} + d_{mm}\frac{\partial\vec{j}_{m1}}{\partial\tau} + b_m^{(s)}\vec{j}_s + b_m\vec{j}_{m1} + \vec{\nabla}H_1 &= 0,\end{aligned}\quad (9.68)$$

де

$$b_\alpha = \frac{\partial d_{\alpha\alpha}}{\partial\tau} + b_{\alpha\alpha}, \quad b_\alpha^{(\beta)} = \frac{\partial d_{\alpha\beta}}{\partial\tau} + b_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad \alpha, \beta = \{s, m\}.$$

Якщо не враховувати спряженості термодифузійних процесів у (9.66), то дана система рівнянь спрощується до

$$\begin{aligned}d_{ss}\frac{\partial\vec{j}_s}{\partial\tau} + b_s\vec{j}_s + \vec{\nabla}T &= 0, \\ d_{mm}\frac{\partial\vec{j}_{m1}}{\partial\tau} + b_m\vec{j}_{m1} + \vec{\nabla}H_1 &= 0.\end{aligned}\quad (9.69)$$

Таким чином, ми одержали реверсівні кінетичні рівняння для термодинамічних потоків \vec{j}_s, \vec{j}_{m1} , розв'язком яких є

$$\begin{aligned}\vec{j}_s &= -\int_0^\tau \left(\frac{1}{d_{ss}} \vec{\nabla}T \right) \exp\left(\int_\tau^\xi \frac{b_s}{d_{ss}} d\xi \right) d\xi, \\ \vec{j}_{m1} &= -\int_0^\tau \left(\frac{1}{d_{mm}} \vec{\nabla}H_1 \right) \exp\left(\int_\tau^\xi \frac{b_m}{d_{mm}} d\xi \right) d\xi.\end{aligned}\quad (9.70)$$

Якщо величини $b_s/d_{ss}, b_m/d_{mm}$ є постійними, то співвідношення (9.70) спрощуються до вигляду

$$\vec{j}_s = -\int_0^\tau \frac{1}{d_{ss}} \vec{\nabla}T \exp\left(\frac{b_s}{d_{ss}} (\xi - \tau) \right) d\xi,$$

$$\vec{j}_{m1} = - \int_0^\tau \frac{1}{d_{mm}} \vec{\nabla} H_1 \exp\left(\frac{b_m}{d_{mm}}(\zeta - \tau)\right) d\zeta. \quad (9.71)$$

Це означає, що для подання термодинамічних потоків у функціональному вигляді

$$\vec{j}_s = \int_0^\tau G(\tau, \zeta) \vec{\nabla} T(\zeta) d\zeta, \quad \vec{j}_{m1} = \int_0^\tau R(\tau, \zeta) \vec{\nabla} H_1(\zeta) d\zeta$$

функції впливу є експоненційними функціями різницевого аргументу

$$G(\tau, \zeta) = - \frac{1}{d_{ss}} \exp\left(\frac{b_s}{d_{ss}}(\zeta - \tau)\right),$$

$$R(\tau, \zeta) = - \frac{1}{d_{mm}} \exp\left(\frac{b_m}{d_{mm}}(\zeta - \tau)\right). \quad (9.72)$$

Якщо у системі рівнянь (9.68) знехтувати доданками, що відповідають за спряження імпульсів, тобто прийняти $d_{sm} = 0$, то система кінетичних рівнянь набуває вигляду

$$d_{ss} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \tau} + b_s \vec{j}_s + b_s^{(m)} \vec{j}_{m1} + \vec{\nabla} T = 0,$$

$$d_{mm} \frac{\partial \vec{j}_{m1}}{\partial \tau} + b_m^{(s)} \vec{j}_s + b_m \vec{j}_{m1} + \vec{\nabla} H_1 = 0. \quad (9.73)$$

Дану систему рівнянь можна перетворити до вигляду

$$\frac{\partial^2 \vec{j}_s}{\partial \tau^2} + c_{s1} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \tau} + c_{s2} \vec{j}_s = c_{st} \frac{\partial (\vec{\nabla} T)}{\partial \tau} + c_{st} \vec{\nabla} T + c_{sm} \vec{\nabla} H_1,$$

$$\vec{j}_{m1} = -b_s^{(m)-1} \left(d_{ss} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \tau} + b_s \vec{j}_s + \vec{\nabla} T \right), \quad (9.74)$$

де

$$c_{s1} = \frac{d_{mm} b_{ss} + d_{ss} b_{mm}}{d_{ss} d_{mm}}, \quad c_{s2} = \frac{b_{mm} b_{ss} - b_{sm}^2}{d_{ss} d_{mm}},$$

$$c_{ii} = -\frac{1}{d_{ss}}, \quad c_{si} = \frac{b_{ss}}{d_{ss}d_{mm}}, \quad c_{sm} = -\frac{b_{mm}}{d_{ss}d_{mm}},$$

та прийнято, що b_{sm} , b_{ss} , d_{ss} є сталими.

У цьому випадку рівняння для вектора потоку ентропії \vec{j}_s є рівнянням вимушених коливань, яке в залежності від знаку виразу

$$p^2 \equiv c_{s1} - 4c_{s2}$$

має один із розв'язків

$$\vec{j}_s = \begin{cases} \frac{2}{p} \int_0^\tau \chi(\zeta) \exp\left(\frac{1}{2}c_{s1}(\tau - \zeta)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(\tau - \zeta)\right) d\zeta \\ \frac{2}{p} \int_0^\tau \chi(\zeta) \exp\left(\frac{1}{2}c_{s1}(\tau - \zeta)\right) \sin\left(\frac{1}{2}p(\tau - \zeta)\right) d\zeta, \\ \frac{2}{p} \int_0^\tau \chi(\zeta) \exp\left(\frac{1}{2}c_{s1}(\tau - \zeta)\right) (\tau - \zeta) d\zeta \end{cases} \quad (9.75)$$

де

$$\chi(\zeta) = c_{ii} \frac{\partial(\vec{\nabla}T(\zeta))}{\partial\tau} + c_{si} \vec{\nabla}T(\zeta) + c_{sm} \vec{\nabla}H_1(\zeta).$$

Порівнюючи (9.70) з (9.75) бачимо, що врахування взаємозв'язаності потоків \vec{j}_s , \vec{j}_{m1} приводить до якісної зміни залежності цих потоків від сил $\vec{\nabla}T, \vec{\nabla}H_1$.

Якщо врахувати взаємозв'язаність імпульсів \vec{k}_s , \vec{k}_{m1} , тобто прийняти $d_{sm} \neq 0$, то систему рівнянь для знаходження потоків \vec{j}_s , \vec{j}_{m1} можна привести до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{j}_s}{\partial \tau^2} + l_1 \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \tau} + l_2 \vec{j}_s &= \frac{\partial}{\partial \tau} (l_3 \vec{\nabla}H_1 + l_4 \vec{\nabla}T) + l_5 \vec{\nabla}H_1 + l_6 \vec{\nabla}T, \\ \vec{j}_{m1} &= d_1 \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \tau} + d_2 \vec{j}_s + d_3 \vec{\nabla}H_1 + d_4 \vec{\nabla}T, \end{aligned} \quad (9.76)$$

де

$$d_1 = \frac{d_{mm}d_{ss} - d_{sm}^2}{b_{mm}d_{sm} - b_{sm}d_{mm}}, \quad d_2 = \frac{d_{mm}b_{ss} - b_{sm}d_{sm}}{b_{mm}d_{sm} - b_{sm}d_{mm}}, \quad d_3 = \frac{d_{mm}}{b_{mm}d_{sm} - b_{sm}d_{mm}},$$

$$d_3 = -\frac{d_{sm}}{b_{mm}d_{sm} - b_{sm}d_{mm}}, \quad l_1 = 2 \frac{d_{mm}b_{ss} - b_{sm}d_{sm}}{d_{mm}d_{ss} - d_{sm}^2},$$

$$l_2 = \frac{(d_{sm}b_{ss} - b_{sm}d_{ss})(b_{sm}d_{mm} - b_{mm}d_{sm})}{(d_{mm}d_{ss} - d_{sm}^2)^2} + \\ + \frac{(d_{mm}b_{ss} - b_{sm}d_{sm})(b_{sm}d_{sm} - b_{mm}d_{ss})}{(d_{mm}d_{ss} - d_{sm}^2)^2},$$

$$l_3 = -\frac{d_{sm}}{d_{mm}d_{ss} - d_{sm}^2}, \quad l_4 = -\frac{d_{mm}}{d_{mm}d_{ss} - d_{sm}^2},$$

$$l_5 = \frac{d_{ss}(b_{sm}d_{mm} - b_{mm}d_{sm}) + d_{sm}(b_{ss}d_{mm} - b_{sm}d_{sm})}{(d_{mm}d_{ss} - d_{sm}^2)^2},$$

$$l_6 = \frac{d_{sm}(b_{mm}d_{sm} - b_{sm}d_{mm}) + d_{mm}(b_{sm}d_{sm} - b_{ss}d_{mm})}{(d_{mm}d_{ss} - d_{sm}^2)^2}.$$

Розв'язком першого рівняння системи (9.76) є (9.75), у якому потрібно прийняти

$$\vec{\chi} = \frac{\partial}{\partial \tau} (l_3 \vec{\nabla} H_1 + l_4 \vec{\nabla} T) + l_5 \vec{\nabla} H_1 + l_6 \vec{\nabla} T. \quad (9.77)$$

Таким чином, приходимо до висновку, що врахування взаємозв'язаності імпульсів \vec{k}_s , \vec{k}_{m1} приводить до модифікованих коефіцієнтів та ускладнення залежності потоку \vec{j}_s від термодинамічної сили $\vec{\nabla} H_1$. Аналогічним чином ускладнюється залежність \vec{j}_{m1} від сили $\vec{\nabla} T$. Із співвідношень (9.71), (9.75), (9.77) слідує також, що врахування взаємозв'язаності полів приводить до ускладнення функцій впливу у реологічних співвідношеннях, що пов'язують термодинамічні потоки та сили.

Механічний рух дисипативний. У цьому випадку за термодинамічні сили слід прийняти

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma},$$

$$-\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T \right), \quad -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \vec{k}_{ml}}{\partial \tau} + \vec{\nabla} H_l \right). \quad (9.78)$$

Використовуючи принцип Онзагера, систему лінійних кінетичних рівнянь моделі записуємо у вигляді

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + b_{vv} \vec{v} + b_{vs} \vec{j}_s + b_{vm}^{(1)} \vec{j}_{ml} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + b_{sv} \vec{v} + b_{ss} \vec{j}_s + b_{sm}^{(1)} \vec{j}_{ml} + \vec{\nabla} T = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{k}_{ml}}{\partial \tau} + b_{mv}^{(1)} \vec{v} + b_{ms}^{(1)} \vec{j}_s + b_{mm}^{(1)} \vec{j}_{ml} + \vec{\nabla} H_l = 0. \quad (9.79)$$

Порівнюючи дану систему рівнянь із системою (9.65) бачимо, що рівняння (9.79) містять доданок, пропорційний до вектора швидкості. Тому потоки ентропії та домішок у середовищі, в кінцевому результаті, будуть залежати від швидкості цього середовища.

Перше рівняння системи (9.79) є рівнянням руху, до якого при формулюванні крайових задач математичної фізики необхідно приєднати рівняння балансу маси та ентропії. На основі другого та третього рівнянь системи (9.79) одержуємо кінетичні рівняння для векторів потоку ентропії \vec{j}_s та домішки \vec{j}_{ml} . Аналіз цих рівнянь є аналогічним до проведеного вище. Тому, зважаючи на громіздкість формул та малу новизну результатів проводити його тут не будемо.

Зазначимо, що для двокомпонентного твердого розчину, нехтуючи інерційністю дифузійного процесу та приймаючи $b_{ms}^{(1)} = 0$, для вектора дифузійного потоку одержуємо

$$\vec{j}_{ml} = -\frac{1}{b_{mm}^{(1)}} \vec{\nabla} H_l - \frac{b_{mv}^{(1)}}{b_{mm}^{(1)}} \vec{v}. \quad (9.80)$$

Дане рівняння є узагальненням закону Фіка і широко використовується при вивченні дифузії у рухомих середовищах.

9.4. Врахування інерції зміни мікроструктури

У попередніх підрозділах розглянуто моделі, що враховують інерційність потоків ентропії та домішок, а також процесу деформації. Зупинимось тут на моделі, що враховує інерційність зміни структури¹ (інерційність встановлення градієнта хімічного потенціалу). З цією метою розглянемо структурно неоднорідне деформівне термопружне тверде тіло, у якому за базові процеси приймаємо процеси деформування, теплопровідності та зміни структури. Відповідно до третього розділу, внутрішню енергію U означимо у просторі ентропії S , густини ρ та градієнта хімічного потенціалу $\vec{\nabla}\eta$. Енергію руху K означимо у просторі імпульсів механічного поступального руху \vec{k}_v та зміни структури \vec{k}_m

$$K = K(\vec{k}_v, \vec{k}_m). \quad (9.81)$$

Параметрами спряженими до імпульсів \vec{k}_v , \vec{k}_m приймаємо відповідні швидкості. На цій основі для приросту енергії dK запишемо рівняння

$$dK = \vec{v} \cdot d\vec{k}_v + \vec{j}_m \cdot d\vec{k}_m, \quad (9.82)$$

наслідком якого є наступні визначальні співвідношення

$$\vec{v} = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_v}, \quad \vec{j}_m = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_m}. \quad (9.83)$$

Для енергії L

$$L = K - \vec{v} \cdot \vec{k}_v - \vec{j}_m \cdot \vec{k}_m \quad (9.84)$$

простором визначення є вектори швидкості \vec{v} та потоку маси \vec{j}_m

$$L = L(\vec{v}, \vec{j}_m), \quad (9.85)$$

а визначальні співвідношення, записані для цієї енергії, мають вигляд

¹ Такі задачі по всій ймовірності мають теоретичний характер, оскільки зміна мікроструктури матеріалу навіть якщо й можлива, то відбувається значно повільніше від деформування. У переважній більшості практичних задач природно прийняти, що вона не змінюється.

$$\vec{k}_v = -\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}, \quad \vec{k}_m = -\frac{\partial L}{\partial \vec{j}_m}. \quad (9.86)$$

Використовуючи процедуру, представлену у попередньому підрозділі, з рівнянь балансу енергії, імпульсу механічного поступального руху, маси та ентропії одержуємо

$$\bar{\nabla} T \cdot \vec{j}_s + \left(\frac{\partial \vec{k}_m}{\partial \tau} + \bar{\nabla} H \right) \cdot \vec{j}_m + T \sigma_s = 0. \quad (9.87)$$

Дальша конкретизація моделі пов'язана з конкретизацією залежності термодинамічних потоків від сил. Приймаємо для вектора потоку ентропії класичне для термопружності подання, а також вважаємо, що вектор потоку маси \vec{j}_m однозначно визначається історією сили

$$-\frac{\partial \vec{k}_m}{\partial \tau} - \bar{\nabla} H,$$

тобто

$$\vec{j}_m = G_{mm} * \left(-\frac{\partial \vec{k}_m}{\partial \tau} - \bar{\nabla} H \right). \quad (9.88)$$

Приймаючи положення про незатухаючу пам'ять, тобто вибираючи функцію впливу $G_{mm}(\tau, \xi)$ у вигляді

$$G_{mm}(\tau, \xi) = g_{mm} \delta(\tau - \xi), \quad (9.89)$$

співвідношення (9.88) запишемо у вигляді

$$\vec{j}_m = g_{mm} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \vec{k}_m}{\partial \tau} + \bar{\nabla} H \right). \quad (9.90)$$

Нехтуючи у поданні енергії L перехресними ефектами, тобто приймаючи її у вигляді

$$2L = -d_{vv} \vec{v} \cdot \vec{v} - d_{mm} \vec{j}_m \cdot \vec{j}_m, \quad (9.91)$$

на основі визначальних співвідношень (9.86) для імпульсів \vec{k}_v , \vec{k}_m запишемо

$$\vec{k}_v = d_{vv} \vec{v}_s, \quad \vec{k}_m = d_{mm} \vec{j}_m. \quad (9.92)$$

Друге співвідношення системи (9.92) дозволяє перетворити рівняння (9.90) до вигляду

$$g_{mm}d_{mm}\frac{\partial^2\vec{j}_m}{\partial\tau^2}-\vec{j}_m+g_{mm}\frac{\partial\vec{\nabla}H}{\partial\tau}=0, \quad (9.93)$$

Прийнято при цьому, що $d_{mm} = \text{const}$.

Враховуючи дане співвідношення, рівняння балансу маси перетворюємо до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(-g_{mm}d_{mm}\frac{\partial^2\rho}{\partial\tau^2}+\rho+g_{mm}\vec{\nabla}^2H\right)=0. \quad (9.94)$$

Таким чином, повна система рівнянь моделі складається з рівняння руху (3.3), рівняння балансу маси (9.94) і визначальних співвідношень для тензора напружень, густини та імпульсу механічного поступального руху. Якщо за ключові функції вибрати вектор переміщення та збурення хімічного потенціалу, а за початковий стан – стан вільного від зовнішнього навантаження середовища, матеріал якого ідентичний матеріалу розглядуваного тіла, то ключову систему рівнянь моделі можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_{ee}\nabla^2\vec{u}+(\alpha_{ee}+\alpha_{ee})\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})+a_{em}\vec{\nabla}\eta &= \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}, \\ \vec{\nabla}^2\eta-\kappa_m^2\eta-\kappa_e^2\vec{\nabla}\cdot\vec{u} &= \frac{1}{c_\eta^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}+\frac{1}{c_u^2}\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})}{\partial\tau^2}, \end{aligned} \quad (9.95)$$

де

$$c_\eta^2 = -\frac{1}{d_{mm}a_{em}}, \quad c_u^2 = -\frac{1}{d_{mm}a_{em}},$$

та проведено лінеаризацію імпульсу механічного поступального руху, тобто прийнято, що $d_{vv} = \rho_*$.

Використаємо дану систему рівнянь для опису акустичної емісії у деяких тілах канонічної форми. Будемо нехтувати при цьому впливом деформації на хімічний потенціал.

9.4.1. Миттєве утворення поверхні півпростору

Розглянемо пружний ізотропний півпростір, віднесений до прямокутної декартової системи координат $\{x, y, z\}$, що займає область $x \geq 0$. Вважаємо, що у початковий момент часу $\tau = 0$ стан тіла є таким же як стан вільного від зовнішнього навантаження безмежного середовища, з якого виділено півпростір. Для часу $\tau > 0$ на вільній від силового навантаження поверхні $x = 0$ задаємо постійне відмінне від нуля значення хімічного потенціалу η_a .

За розглядуваної зовнішньої дії у тілі реалізується одновимірною за координатою x ситуація, яка при нехтуванні впливом деформації на хімічний потенціал описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} (a_{ee} + 2\alpha_{ee}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + a_{em} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \rho_* \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \kappa^2 \eta &= \frac{1}{c_\eta^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (9.96)$$

крайовими умовами

$$(a_{ee} + 2\alpha_{ee}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + a_{em} \eta = 0, \quad \eta = \eta_a \quad (9.97)$$

на поверхні $x = 0$ при $\tau > 0$, умовами

$$u_x = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (9.98)$$

в області $x \geq 0$ при $\tau = 0$, а також умовами обмеженості розв'язку на безмежності в області тіла.

Перейдемо до безрозмірних величин згідно формул

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{c_1 \kappa}, \quad \xi_1 = \frac{x}{\kappa}, \quad u_x(x, \tau) = \frac{a_{em} H_*}{\rho_* \kappa c_1^2} u(\xi_1, t), \\ \eta(x, \tau) &= H_* \mathcal{H}(\xi_1, t), \quad \hat{\sigma}(x, \tau) = (3 - 4\nu^2) H_* \rho_* c_1^2 \hat{s}(\xi_1, t) \end{aligned} \quad (9.99)$$

У безрозмірних величинах система рівнянь (9.96) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial h}{\partial \xi_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_1^2} - h = \frac{1}{q} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}, \quad (9.100)$$

де $q = c_n^2 / c_1^2$.

Розв'язок сформульованої задачі, записаний у безрозмірних величинах, є таким

$$h(\xi_1, t) = h_a \left[1 - \xi_1 \int_{\xi_1/q}^t \frac{J_1(\sqrt{q(\zeta^2 - \xi_1/q)})}{\sqrt{\zeta^2 - \xi_1/q}} d\zeta \right] \Theta\left(t - \frac{\xi_1}{\sqrt{q}}\right),$$

$$u(\xi_1, t) = h_a \left\{ \Theta(t - \xi_1) d \sin(d(t - \xi_1)) + \right.$$

$$\left. + \Theta\left(t - \frac{\xi_1}{\sqrt{q}}\right) \sqrt{q} \int_{\xi_1/q}^t J_0(\sqrt{q(\zeta^2 - \xi_1^2/q)}) [1 + d^2 \cos(d(t - \zeta))] d\zeta \right\},$$

$$s_{xx}(\xi_1, t) = h_a d^2 \left\{ \Theta(t - \xi_1) \cos(d(t - \xi_1)) - \Theta\left(t - \frac{\xi_1}{\sqrt{q}}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\cos\left(d\left(t - \frac{\xi_1}{\sqrt{q}}\right)\right) - \xi_1 \int_{\xi_1/q}^t \frac{J_1(\sqrt{q(\zeta^2 - \xi_1/q)}) \cos(d(t - \zeta))}{\sqrt{\zeta^2 - \xi_1^2/q}} d\zeta \right] \right\},$$

$$s_{yy}(\xi_1, t) = s_{zz}(\xi_1, t) = h_a (1 - 2\beta^2) d^2 \left\{ \Theta(t - \xi_1) \cos(d(t - \xi_1)) - \right.$$

$$\left. - \Theta\left(t - \frac{\xi_1}{\sqrt{q}}\right) \left[\cos\left(d\left(t - \frac{\xi_1}{\sqrt{q}}\right)\right) - \frac{2\beta^2}{(1 - 2\beta^2) d^2} \right] \right\}$$

$$-\xi_1 \int_{\xi_1/q}^t \frac{J_1\left(\sqrt{q(\zeta^2 - \xi_1/q)}\right)}{\sqrt{\zeta^2 - \xi_1/q}} \left\{ \cos(d(t-\zeta)) - \frac{2\beta^2}{(1-2\beta^2)t^2} \right\} d\zeta \Bigg\}, \quad (9.101)$$

де

$$d = \sqrt{\frac{q}{1-q}}.$$

Аналіз одержаного розв'язку показує, що через довільний переріз $\xi_1 = \text{const}$ півпростору проходять два фронти хвилі відповідно з швидкістю поширення збурень хімічного потенціалу та швидкістю поширення поздовжньої пружної хвилі в безмежному середовищі (одиниця в безрозмірних величинах). Така закономірність динамічних процесів дозволяє встановити віддаль до поверхні, що утворилася на основі значень швидкостей пружних хвиль та поширення збурень хімічного потенціалу у даному матеріалі.

Після проходження фронту хвилі напруження та хімічний потенціал прямують до своїх рівноважних значень

$$s_{xx}^0 = 0, \quad s_{yy}^0 = s_{zz}^0 = 2h_a \beta^2 \exp(-\xi_1), \quad h^0 = h_a \exp(-\xi_1), \quad (9.102)$$

які характеризують приповерхневу неоднорідність у півпросторі.

9.4.2. Миттєве утворення сферичної порожнини у середовищі

Використаємо систему рівнянь (9.96) до опису поведінки середовища, у якому раптово виникає сферична порожнина. З цією метою розглянемо необмежене пружне тіло віднесене до сферичної системи координат $\{r, \varphi, \psi\}$, яке займає область $r \geq r_0$. Стан тіла для часу $\tau = 0$ відповідає стану вільного від силового навантаження однорідного пружного середовища, яке характеризується хімічним потенціалом H_* та густиною ρ_* . Для часу $\tau > 0$ приймаємо, що на вільній від силового навантаження поверхні $r = r_0$ задано постійне відмінне від нуля значення хімічного потенціалу η_a .

За сформульованих умов динамічні процеси у тілі мають центральну симетрію. Перейшовши до безрозмірних величин за форму-

лами (9.99), у яких замінюємо x на r , а ξ_1 на R , систему рівнянь, що описує динамічну поведінку тіла записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= h, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial h}{\partial R} - h - \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned} \quad (9.103)$$

де Φ – потенціал переміщення.

При відомих потенціалі переміщення Φ та хімічному потенціалі h ненульові компоненти тензора напружень визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} s_{rr} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + (1 - 2\beta^2) \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} - h, \\ s_{\varphi\varphi} = s_{\psi\psi} &= (1 - 2\beta^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + (1 - \beta^2) \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} - h. \end{aligned} \quad (9.104)$$

Крайові умови, записані на безрозмірні величини, мають вигляд

$$\begin{aligned} h(R, 0) = 0, \quad \frac{\partial h(R, 0)}{\partial R} = 0, \quad \Phi(R, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} = 0 \quad \text{при } R > R_0, \\ h(R_0, t) = h_a, \quad s_{rr}(R_0, t) = 0 \quad \text{при } t > 0, \end{aligned} \quad (9.105)$$

до яких додаємо умову обмеженості розв'язку на безмежності в області тіла.

Розв'язком першого рівняння системи (9.104), що справджує крайові умови є

$$\begin{aligned} h(R, t) &= h_a \Theta(t - (R - R_0)/\sqrt{q}) \times \\ &\times \frac{R_0}{R} \left[1 - (R - R_0) \int_{(R - R_0)/\sqrt{q}}^t \frac{J_1\left(\sqrt{q}(\zeta^2 - (R - R_0)^2/q)\right)}{\sqrt{\zeta^2 - (R - R_0)^2/q}} d\zeta \right]. \end{aligned} \quad (9.106)$$

Для радіальної компоненти u вектора переміщення та компоненти s_{rr} тензора напружень одержуємо

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{h_a}{R} \Big|_{\Theta(t-R+R_0)} \left[\frac{1}{R} - \frac{c}{c^2 + 4a^2 R_0^2} \times \right. \\
 & \times \left[\left(2R_0 + \frac{c}{R} \right) \cos\left(\frac{t-R+R_0}{a}\right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{2aR_0}{R} \right) \sin\left(\frac{t-R+R_0}{a}\right) \right] + \\
 & + \frac{2}{c^2 + 4a^2 R_0^2} \exp\left(\frac{t-R+R_0}{2bR_0}\right) \left[R_0 \left(c - 2a^2 \frac{R_0}{R} \right) \cos(k(t-R+R_0)) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{bkR_0} \left(R_0(2a^2 + bR_0^2) - (c^2 - 2a^2(c - R_0^2)) \frac{1}{R} \right) \sin(k(t-R+R_0)) \right] + \\
 & + 2\sqrt{q} \int_0^{t-R+R_0} J_0(\sqrt{q}\zeta) \left[\frac{R_0}{2R} + \frac{R_0}{c^2 + 4a^2 R_0^2} \times \right. \\
 & \times \left. \left(\left(2R_0 + \frac{cd}{R} \right) \cos\left(\frac{t-R+R_0-\zeta}{a}\right) - \left(\frac{c}{a} - \frac{2ad}{R} \right) \sin\left(\frac{t-R+R_0-\zeta}{a}\right) \right) \right] - \\
 & - \left(\frac{R_0}{2R} \left(1 + \frac{4R_0R + 2cd}{c^2 + 4a^2 R_0^2} \right) \cos(k(t-R+R_0-\zeta)) - \right. \\
 & - \left. \frac{1}{bkR_0} \left[1 - \frac{R_0}{2R} + \frac{2(2a^2 - bR_0^2)R - dR_0(2a^2 + bR_0^2)}{R(c^2 + 4a^2 R_0^2)} \right] \right) \times \\
 & \times \sin(k(t-R+R_0-\zeta)) \exp\left(\frac{R-R_0-t+\zeta}{bR_0}\right) \Big|_{\zeta} - \\
 & - \Theta\left(t - (R-R_0)/\sqrt{q}\right) \left[\left[1 - \cos\left(\frac{t - (R-R_0)/\sqrt{q}}{a}\right) \right] \frac{1}{R} - \right. \\
 & - \left. \left(1 - \frac{R}{R_0} \right) \int_{(R-R_0)/\sqrt{q}}^t \frac{J_1\left(\sqrt{q}(\zeta^2 - (R-R_0)^2/q)\right)}{\sqrt{\zeta^2 - (R-R_0)^2/q}} \left[1 - \cos\left(\frac{t-\zeta}{a}\right) \right] d\zeta + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{qa^2}} \int_{(R-R_0)/\sqrt{q}}^t J_0\left(\sqrt{q(\zeta^2 - (R-R_0)^2/q)}\right) \left\{ 1 - q \left[1 - \cos\left(\frac{t-\zeta}{a}\right) \right] \right\} d\zeta \Big|, \\
& s_{rr} = \frac{2R_0}{bR} \left\{ -\Theta(t - (R-R_0)/\sqrt{q}) \left[\frac{1}{R^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{b}{2a^2} - \frac{1}{R^2} \right) \cos\left(\frac{t - (R-R_0)/\sqrt{q}}{a}\right) \right] + \right. \\
& \quad + \frac{1}{R} \int_{(R-R_0)/\sqrt{q}}^t J_0\left(\sqrt{q(\zeta^2 - (R-R_0)^2/q)}\right) \left[1 + \frac{1}{a^2} \cos\left(\frac{t-\zeta}{a}\right) \right] d\zeta - \\
& \quad - \frac{R-R_0}{R^2} \int_{(R-R_0)/\sqrt{q}}^t \frac{J_1\left(\sqrt{q(\zeta^2 - (R-R_0)^2/q)}\right)}{\sqrt{\zeta^2 - (R-R_0)^2/q}} \left[1 - \left(1 - \frac{bR^2}{2a^2} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \cos\left(\frac{t-\zeta}{a}\right) \right] d\zeta \Big| + \Theta(t - R + R_0) \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{b}{2a^2} - \frac{1}{R^2} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \cos\left(\frac{t - R + R_0}{a}\right) \right] + \frac{R_0 - R}{ka^2 R R_0} \sin(k(t - R + R_0)) \exp\left(-\frac{t - R + R_0}{a}\right) - \\
& \quad - \frac{R_0(2a^2 R_0 - cR - bR_0 R^2)}{(4a^2(R_0^2 - a^2) - bR_0^4) R^2} \left[2 \cos\left(\frac{t - R + R_0}{a}\right) - \frac{c}{aR_0} \sin\left(\frac{t - R + R_0}{a}\right) - \right. \\
& \quad \left. - \left(2 \cos(k(t - R + R_0)) - \frac{2a^2 - bR_0^2}{a^2 k R_0} \sin(k(t - R + R_0)) \right) \exp\left(\frac{R - R_0 - t}{bR_0}\right) \right] + \\
& \quad + \frac{\sqrt{q}}{R^2} \int_0^{t-R+R_0} J_0(\sqrt{q\zeta}) \left[\left(\frac{R^2}{qa^2} + R_0^2 \right) \cos\left(\frac{t - R + R_0 - \zeta}{a}\right) + \right. \\
& \quad \left. + R_0^2 - \frac{(R_0^2(b^2 R_0^2 - 2t(1/q + a^2)) + 4a^2)(R^2 - R_0^2) + 2R_0^2(R - R_0)^2}{4a^2 - b^2 R_0^4} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\cos\left(\frac{t-R+R_0-\zeta}{a}\right) - \cos(k(t-R+R_0-\zeta)) \exp\left(-\frac{t-R+R_0-\zeta}{bR_0}\right) \right] + \\
 & + \frac{R_0 \left((b^2 R_0^2 - 2l/q - 1)(R^2 - R_0^2) + (R - R_0)^2 \right)}{a(2a^2 + b^2 R_0^2)} \sin\left(\frac{t-R+R_0-\zeta}{a}\right) + \\
 & + \frac{1}{a^2 b k R_0 (4a^2 - b^2 R_0^2)} \left[\left(\left(\frac{2l}{q} - b^2 R_0^2 \right) \left[l R_0^2 \left(\frac{1}{q} + a^2 \right) - 2a^2 - b^2 R_0^4 \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. + l \left[b^2 R_0^4 - 2l R_0^2 \left(\frac{1}{q} + a^2 \right) + \frac{4a^2}{q} \right] \right) (R^2 - R_0^2) - \left(2a^2 \left(\frac{2a^2}{q} + l R_0^2 \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{1}{q} + 1 \right) b^2 R_0^4 \right) (R^2 - R_0^2) \right] \sin(k(t-R+R_0-\zeta)) \times \\
 & \left. \times \exp\left(-\frac{t-R+R_0-\zeta}{bR_0}\right) \right] d\zeta \Big|_0^1. \tag{9.107}
 \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{\frac{1}{q} - 1}, \quad b = \frac{1}{\beta^2} - 1, \quad k = \frac{\sqrt{2 - 3\beta^2}}{\beta b R_0}, \quad d = \frac{1}{q} - a^2 R_0, \\
 c &= 2a^2 - b R_0^2, \quad l = b - 1.
 \end{aligned}$$

З формул (9.106), (9.107) видно, що через довільний переріз тіла $r = r_1 > r_0$ проходять два фронти пружних хвиль з швидкостями c_1 поздовжньої пружної хвилі та c_Π поширення збурень хімічного потенціалу. Величини стрибків напружень на фронтах визначаються формулами

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{rr}]_1 &= [\sigma_{rr}]_{\Pi} = \frac{\sigma_* R_0}{a^2 R}, \quad [\sigma_{\varphi\varphi}]_1 = [\sigma_{\varphi\varphi}]_{\Pi} = \left(1 - \frac{2}{\beta^2} \right) \frac{\sigma_* R_0}{a^2 R}, \\
 [\sigma_{\varphi\varphi}]_{\Pi} &= [\sigma_{\varphi\varphi}]_{\Pi} = \left(1 - 2 \frac{\beta^2}{q} \right) \frac{\sigma_* R_0}{a^2 R}, \tag{9.108}
 \end{aligned}$$

де індексами "l", "η" відзначено стрибки, що поширюються зі швидкостями c_l і c_η відповідно,

$$\sigma_* = -a_{em} H_*.$$

При $\tau \rightarrow \infty$ напруження та хімічний потенціал прямують до своїх рівноважних значень представлених у четвертому розділі. Зазначимо також, що у [34, 35] доведено теореми існування та єдиності, а також одержано умови неперервної залежності від вихідних даних узагальненого розв'язку та розв'язку майже скрізь мішаних задач для системи рівнянь (9.96).

9.5. Моделі, що враховують вібраційне пришвидшення необоротних процесів

Експериментальні дослідження вказують на суттєве, навіть на два порядки, пришвидшення механічними коливаннями необоротних процесів таких як дифузія, релаксація залишкових напружень, повзучість тощо. Моделі, що описують таке пришвидшення будемо називати вібраційними, тобто моделями вібродифузії, віброрелаксації тощо. У даному підрозділі запропоновано підхід до побудови таких моделей. Знехтувано при цьому ефектами, пов'язаними зі структурною неоднорідністю.

9.5.1. Модель вібродифузії

Двокомпонентний твердий розчин, що складається з підсистем каркасу та домішок розглядаємо як в'язкопружне тіло. Не зменшуючи загальності, виберемо модель Кельвіна-Фойгта [30, 107], для якої тензор напружень $\hat{\sigma}$ є сумою оборотної $\hat{\sigma}'$ та необоротної $\hat{\sigma}''$ складових

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}' + \hat{\sigma}'' . \quad (9.109)$$

Легко показати, що для розглядуваної моделі енергія розсіяння $T\sigma_s$ описується формулою

$$T\sigma_s = -(\vec{\nabla}T) \cdot \vec{j}_s - (\vec{\nabla}H_1) \cdot \vec{j}_{m1} + \hat{\sigma}'' : \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \tau} . \quad (9.110)$$

На цій основі запишемо такі кінетичні рівняння у загальній формі

$$\begin{aligned}\bar{j}_s &= \bar{j}_s \left(-\frac{\bar{\nabla}T}{T}, -\frac{\bar{\nabla}H_1}{T}, \frac{\hat{\sigma}''}{T}; U \right), \\ \bar{j}_{m1} &= \bar{j}_{m1} \left(-\frac{\bar{\nabla}T}{T}, -\frac{\bar{\nabla}H_1}{T}, \frac{\hat{\sigma}''}{T}; U \right), \\ \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} \left(-\frac{\bar{\nabla}T}{T}, -\frac{\bar{\nabla}H_1}{T}, \frac{\hat{\sigma}''}{T}; U \right).\end{aligned}\quad (9.111)$$

З третього рівняння цієї системи у лінійному наближенні для ізотропного тіла, враховуючи порядок тензорності сил, запишемо таке кінетичне рівняння

$$\hat{\sigma}'' = \lambda_0^e \frac{1}{T} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau}.$$

Враховуючи дане співвідношення, кінетичні рівняння для потоків ентропії та домішки можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{j}_s &= \bar{j}_s \left(-\frac{\bar{\nabla}T}{T}, -\frac{\bar{\nabla}H_1}{T}, \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau}; U \right), \\ \bar{j}_{m1} &= \bar{j}_{m1} \left(-\frac{\bar{\nabla}T}{T}, -\frac{\bar{\nabla}H_1}{T}, \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau}; U \right).\end{aligned}\quad (9.112)$$

Таким чином швидкість деформації введено у простір означення потоків ентропії та маси. Далі приймемо наступні наближення:

- залежність термодинамічних потоків від градієнтів температури та хімічного потенціалу домішки є лінійною,
- залежність термодинамічних потоків від швидкості деформації (інваріантів тензора швидкості деформації) може бути суттєвою,
- якщо градієнти температури та хімічного потенціалу домішки дорівнюють нулеві, то вектори потоків ентропії та домішки дорівнюють нулеві.

За такого наближення кінетичні рівняння (9.113) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{j}_s &= -\lambda_{ss}(\{J\}) \frac{\bar{\nabla} T}{T} - \lambda_{sm}(\{J\}) \frac{\bar{\nabla} H_1}{T}, \\ \bar{j}_{m1} &= -\lambda_{ms}(\{J\}) \frac{\bar{\nabla} T}{T} - \lambda_{mm}(\{J\}) \frac{\bar{\nabla} H_1}{T},\end{aligned}\quad (9.113)$$

де кінетичні коефіцієнти $\lambda_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = \{s, m\}$) залежать від інваріантів тензора швидкості деформації $\{J\} = \{J_1, J_2, J_3\}$.

За ізотермічного наближення для вектора потоку домішки запишемо

$$\bar{j}_{m1} = -\gamma_{mm}(\{J\}) \bar{\nabla} H_1, \quad (9.114)$$

де $\gamma_{mm}(\{J\}) = \lambda_{mm}(\{J\})/T$.

Оскільки нас цікавлять повільно змінні на періоді коливань складові, то використовуємо операцію осереднення на періоді коливань (див. підрозділ 5.2), одержуємо такі рівняння рівноваги і балансу маси

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \tau} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{j}_{m1} \quad (9.115)$$

та визначальні співвідношення

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_1 &= -\frac{\partial F(\bar{H}_1, \bar{e}, \bar{H}_1, \bar{e})}{\partial H_1}, \quad \bar{\sigma} = -\frac{\partial F(\bar{H}_1, \bar{e}, \bar{H}_1, \bar{e})}{\partial \bar{e}}, \\ \bar{\sigma}^* &= \lambda_e \frac{\partial \bar{e}}{\partial \tau}, \quad \bar{j}_{m1} = -\gamma_{mm}(\{J\}) \bar{\nabla} H_1.\end{aligned}\quad (9.116)$$

Зазначимо, що при формулюванні рівнянь для осереднених складових знехтувано осередненою складовою сили інерції у зв'язку з її малістю.

На основі (5.71)–(5.74) для коливних складових одержуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} &= \rho \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial \tau} = -\bar{\nabla} \cdot \tilde{j}_{m1}, \\ \tilde{\rho}_1 &= -\frac{\partial F(\tilde{H}_1, \tilde{e}, \tilde{H}_1, \tilde{e})}{\partial H_1}, \quad \tilde{\sigma} = -\frac{\partial F(\tilde{H}_1, \tilde{e}, \tilde{H}_1, \tilde{e})}{\partial \tilde{e}}, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}' + \tilde{\sigma}^*,\end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}^n = \lambda_e \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau}, \quad \tilde{J}_{m1} = -\overline{\gamma_{mm}(\{J\})} \vec{\nabla} \tilde{H}_1, \quad (9.117)$$

За лінеаризованого наближення, визначальні співвідношення для коливних складових мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= 2\mu \tilde{e} + \left[\lambda \tilde{e} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_m \tilde{H}_1 + \lambda_1 \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau} \right] \hat{I} + \mu_1 \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau}, \\ \tilde{\rho}_1 &= \alpha_{mm} \tilde{H}_1 + (3\lambda + 2\mu) \alpha_m \tilde{e}, \quad \tilde{j}_{m1} = -\gamma_{mm}^0 \vec{\nabla} \tilde{H}_1, \end{aligned} \quad (9.118)$$

де $\alpha_m, \alpha_{mm}, \lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1, \gamma_{mm}^0$ – сталі.

На основі (9.117), (9.118), ключову систему рівнянь записану на \tilde{u} , \tilde{H}_1 подасмо у вигляді

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \tilde{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \tilde{u}) + (3\lambda + 2\mu) \alpha_m \vec{\nabla} \tilde{H}_1 + \\ + \frac{\partial}{\partial \tau} (\mu_1 \nabla^2 \tilde{u} + (\lambda_1 + \mu_1) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \tilde{u})) = \rho_* \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}, \\ \alpha_{mm} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \tau} + (3\lambda + 2\mu) \alpha_m \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \tilde{u})}{\partial \tau} - \gamma_{mm}^0 \nabla^2 \tilde{H}_1 = 0. \end{aligned} \quad (9.119)$$

Таким чином, в рамках прийнятого наближення, коливні складові не залежать від усереднених складових розглядуваних полів.

Розглядаючи осереднені на періоді коливань складові, зупинимосся більш детально на кінетичному рівнянні для вектора потоку домішки. Очевидно, що швидкість зміни коливних складових є значно більшою від швидкості зміни осереднених складових. Тому

$$\frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau} \gg \frac{\partial \bar{e}}{\partial \tau}.$$

На цій основі можна записати

$$\bar{\gamma}_{mm}(\{J\}) = \bar{\gamma}_{mm} \left(\left\{ J \left(\frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau} \right) \right\} \right) \approx \bar{\gamma}_{mm} \left(\left\{ \left\{ J \left(\frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau} \right) \right\} \right\} \right),$$

а також

$$\bar{j}_{m1} = \bar{\gamma}_{mm} \left(\left\{ J \left(\frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau} \right) \right\} \right) \bar{\nabla} \bar{H}_1.$$

Отже, для прийнятих наближень, кінетичне рівняння для вектора потоку домішки у середовищі, що коливається, має класичний вигляд, однак кінетичний коефіцієнт залежить від інваріантів швидкості деформації, а отже від амплітуди та частоти коливань. Тому для опису дифузії у середовищі, що коливається, дифузійне рівняння для повільно змінної на періоді коливань концентрації домішки можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial \tau} - \nabla^2 \left(\bar{\gamma}_{mm}^* \left(\left\{ J \left(\frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau} \right) \right\} \right) \bar{c}_1 \right) = 0$$

або

$$\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial \tau} - \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{\gamma}_{mm}^{**}(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_a) \bar{\nabla} \bar{c}_1 \right) = 0. \quad (9.120)$$

У випадку резонансних коливань амплітуда $\bar{\mathbf{u}}_a$ залежить від координати, а тому дане рівняння є диференціальним рівнянням в часткових похідних зі змінними коефіцієнтами. Поза резонансом (9.120) є класичним рівнянням дифузії, коефіцієнт дифузії якого залежить від амплітуди і частоти механічних коливань.

Якщо обмежитися залежністю кінетичного коефіцієнта від другого інваріанта тензора швидкості деформації, то можна стверджувати, що кінетичний коефіцієнт залежить від амплітуди та квадрата частоти коливань.

Розділ 10.

ОСНОВИ МЕХАНІКИ ПОРИСТИХ НАНОМАТЕРІАЛІВ

У даному розділі запропоновано підхід до опису процесу деформування пружних тіл, виконаних з пористого наноматеріалу, які проявляють розмірні ефекти модулів пружності. Розділ базується на роботах [144, 145, 147, 151].

10.1. Структура і механічні властивості наноматеріалів

У сучасній інженерній практиці інтенсивно використовують нанoelementи, а саме наночастинки, наноплівки та нановолокна. Значні зусилля спрямовано на створення матеріалів із специфічними властивостями з метою підвищення ефективності та надійності деталей і приладів, побудованих з їх використанням. Як слідує з попередніх розділів, особливості поведінки тіл нанометрового характерного розміру пов'язані з суттєвою неоднорідністю фізико-механічних полів, зумовленою наявністю поверхні.

Сьогодні промислово отримують нанокристалічні зразки, твердість та міцність яких у разі перевищують відповідні характеристики суцільного матеріалу. Складність вивчення розмірних ефектів у наноматеріалах зумовлена залежністю властивостей таких матеріалів від розміру нанoelementів, їх складу та розподілу основних компонент, пористості, наявності дефектів і залишкових напружень, наявності аморфних фаз тощо [1]. Зменшення розмірів зерен є відомим способом покращення міцнісних властивостей матеріалу [48].

Експериментальні дослідження наноматеріалів, як правило, зосереджено на дослідженні фізико-механічних властивостей окремих нанoelementів, у тому числі залежності їх пружних модулів від

характерного розміру. При цьому для визначення модулів пружності тонких шарів використовують методи спектроскопії поверхневих акустичних хвиль, Брілюєнівське розсіювання світла, еліпсометричну порометрію, наноіндентування та інші [140]. При дослідженні біонаноматеріалів значну увагу звертають на вивчення корозійних, мутагенних та канцерогенних властивостей, а також на методи отримання матеріалів, які за фізичним і хімічним властивостям близькі до біологічних тканин.

В практиці наноеlementи часто є компонентами складніших структур. Вони широко використовуються у нанокomпозитах – структурованих матеріалах із середнім розміром однієї із фаз у нанодіапазоні, або ж у однофазному наноматеріалі [47].

Зазвичай наноматеріали складаються із наноеlementів одного типу (волокна, трубки, плівки тощо) і володіють високим ступенем пористості (рис.10.1).

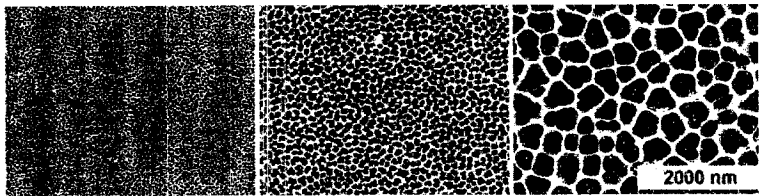


Рис. 10.1. Типова структура пористого наноматеріалу

Консолідація газофазних, молекулярних та твердотільних кластерів шляхом пресування та подальшого спікання приводить до утворення наноструктур [114]. Тому можна прийняти, що механічні властивості наноматеріалу визначаються двома чинниками: типом і властивостями наноеlementів, із яких складається наноматеріал, а також технологією формування наноматеріалу, яка визначає, зокрема, ступінь пористості отриманого матеріалу. Коефіцієнт пористості ϕ (частина об'єму, зайнята порами) у наноматеріалах часто сягає 80% і більше [125].

Під характерним розміром матеріалу розумітимемо характерний розмір наноеlementів, які його складають (рис.10.2). У промислових зразках наноматеріалу характерний розмір наноеlementів залежить від особливостей процесу виготовлення та технологічних вимог.

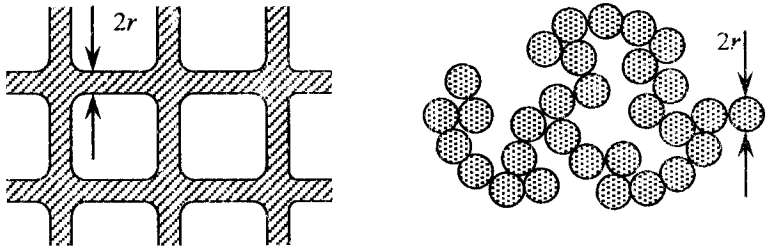


Рис. 10.2. Характерний розмір наноструктур

10.2. Моделювання пружних властивостей пористих наноматеріалів

Аналіз багатьох теоретичних і експериментальних досліджень дозволяє стверджувати, що поведінку пружного деформівного пористого матеріалу можна описати класичним рівнянням руху (рівноваги) і визначальним співвідношенням

$$\hat{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \hat{e} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e\hat{I}, \quad (10.1)$$

у якому для модуля Юнга E та коефіцієнта Пуассона ν справедливо

$$E = E_0 \varphi_E(\phi), \quad \nu = \nu_0 \varphi_\nu(\phi). \quad (10.2)$$

Тут E_0, ν_0 – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона суцільного матеріалу, φ_E, φ_ν – функції, такі, що $\varphi_E(0) = \varphi_\nu(0) = 1$.

Функції φ_E, φ_ν , зазвичай, визначають на основі експериментальних досліджень і вони достатньо добре описані у науковій літературі. Зазвичай, вказують на лінійне чи близьке до такого зменшення модуля Юнга і коефіцієнта Пуассона при зростанні пористості матеріалу. На рис. 10.3 наведено залежності модуля Юнга і коефіцієнта Пуассона від коефіцієнта пористості ϕ для заліза [61].

Припустимо, що наноматеріал є пористим із коефіцієнтом пористості ϕ і складається із наноелементів характерного розміру r . Тоді для його опису можна використати співвідношення (10.1), (10.2), приймаючи, що модуль Юнга E_0 та коефіцієнт Пуассона ν_0 залежать від характерного розміру r

$$\hat{\sigma} = \frac{E_0(r)\varphi_E(\phi)}{1 + \nu_0(r)\varphi_\nu(\phi)} \hat{e} + \frac{\nu_0(r)E_0(r)\varphi_\nu(\phi)\varphi_E(\phi)}{[1 + \nu_0(r)\varphi_\nu(\phi)][1 - 2\nu_0(r)\varphi_\nu(\phi)]} e\hat{I}. \quad (10.3)$$

При вивченні поведінки конкретних тіл необхідно брати до уваги тип наноелементів, які формують наноматеріал. У цьому випадку у формулі (10.3) слід використати відповідну конкретну залежність модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від характерного розміру наноелемента. Співвідношення (10.3) є визначальним співвідношенням, що враховує пористість наноматеріалу та характерний розмір наноелементів, які його складають.

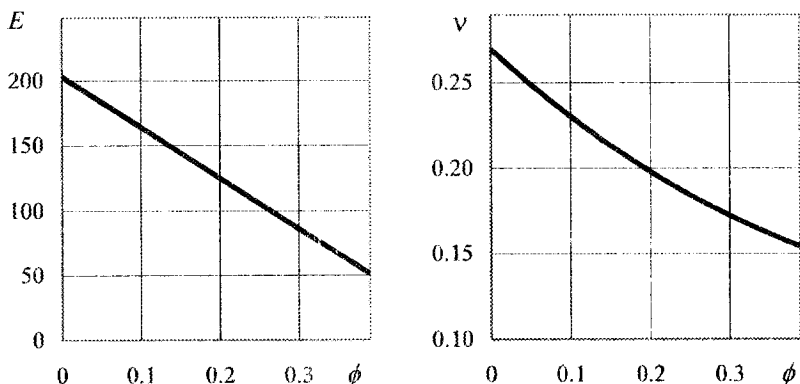


Рис. 10.3. Вплив пористості ϕ на модуль Юнга E (ГН/м²) і коефіцієнт Пуассона ν для заліза [61]

При використанні наведених формул для опису напружено-деформованого стану пористих наноматеріалів необхідно визначити експериментально чи розрахувати теоретично залежність модулів E_0, ν_0 від характерного розміру наноелементів, які є основою наноматеріалу. Для встановлення такої залежності використаємо спів-

відношення моделей, побудованих за локально градієнтного підходу у термомеханіці.

10.3. Розмірний ефект модулів пружності тонких плівок та волокон

На основі ключової системи рівнянь (3.40) дослідимо розмірний ефект модулів пружності шару та циліндра.

Шар. Розглянемо ізотропний термопружний шар (область $|x| \leq l$ у декартовій системі координат $\{x, y, z\}$). На безмежності шар навантажено зусиллями $p_y \geq 0$. Приймаємо, що на поверхнях шару $x = \pm l$ задано нормальне до поверхні силове навантаження p_x , збурення хімічного потенціалу η_a та температури θ_a .

На основі (3.40) записуємо таку систему рівнянь, що описує рівноважний стан шару

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} = \frac{d^2\sigma_{zz}}{dx^2}, \quad \frac{d^2\sigma}{dx^2} = b_m \frac{d^2\eta}{dx^2}, \\ \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} - \kappa_\eta^2 \eta - \kappa_\sigma^2 \sigma - \kappa_\theta^2 \theta = 0, \end{aligned} \quad (10.4)$$

де $b_m = 4\alpha_{ee}\alpha_{em}/(\alpha_{ee} + 2\alpha_{ee}) \equiv 2\alpha_0$.

Крайові умови та умови у довільних поперечних перерізах шару приймаємо такими

$$\begin{aligned} \theta|_{x=\pm l} = \theta_a, \quad \eta|_{x=\pm l} = \eta_a, \quad \sigma_{xx}|_{x=\pm l} = p_x, \\ \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sigma_y dx = p_y, \quad \int_{-l}^l \sigma_z dx = 0, \quad \int_{-l}^l x \sigma_y dx = 0, \quad \int_{-l}^l x \sigma_z dx = 0. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Розв'язок задачі (10.4), (10.5) має вигляд

$$\begin{aligned} \eta(x) = \eta_a + \frac{\chi}{\zeta_l} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right), \\ \theta(x) = \theta_a, \quad \sigma_{xx}(x) = p_x, \end{aligned}$$

$$\sigma_{yy}(x) - p_y = \sigma_{zz}(x) = \frac{b_m \chi}{2 \zeta_l} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right). \quad (10.6)$$

Тут

$$\chi = \frac{\kappa_\sigma^2 (p_x + p_y) + \kappa_\eta^2 \eta_a + \kappa_\theta^2 \theta_a}{\xi^2}, \quad \zeta_l = 1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right),$$

$$\alpha = b_m \frac{\kappa_\sigma^2}{\xi^2}, \quad \xi^2 = \kappa_\eta^2 + b_m \kappa_\sigma^2.$$

Обчислимо компоненти e_{xx}, e_{yy} тензора деформації \hat{e} на основі співвідношення

$$\hat{e} = \frac{1}{2\alpha_{ee}} \hat{\sigma} - \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(\frac{a_{ee}}{2\alpha_{ee}} \sigma + a_{em} \eta + a_{e\theta} \theta \right) \hat{i}, \quad (10.7)$$

отриманого з (3.26), та знайденого розв'язку (10.6).

У результаті одержуємо

$$e_{xx} = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left[\frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} p_x - \frac{a_{ee}}{\alpha_{ee}} p_y - a_{em} \eta_a - a_{e\theta} \theta_a + \right. \\ \left. + \frac{a_{em} \chi}{\zeta_l} \left(1 - \frac{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} + \frac{2\alpha_{ee}}{a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right],$$

$$e_{yy} = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left[-\frac{a_{ee}}{2\alpha_{ee}} p_x + \frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} p_y - \right. \\ \left. - a_{em} \eta_a - a_{e\theta} \theta_a + \frac{a_{em} \chi}{\zeta_l} \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) \right]. \quad (10.8)$$

Отримані співвідношення містять дві складові. Одна з них спричинена дією силового навантаження p_x, p_y , тоді як інша – заданням на поверхнях шару ненульових значень η_a, θ_a . Модулі пружності пов'язані зі складовими, зумовленими силовим навантаженням. Для вивчення цих складових розглянемо величини

$$e_x^{ef} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l [e_{xx}(x)] - [e_{xx}(x)]_{p_x=0, p_y=0} dx,$$

$$e_y^{ef} = [e_{yy}(x)] - [e_{yy}(x)]_{p_x=0, p_y=0}. \quad (10.9)$$

На основі (10.8) для e_x^{ef} , e_y^{ef} записуємо

$$e_x^{ef} = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left[\frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} p_x - \frac{a_{ee}}{2\alpha_{ee}} p_y + (p_x + p_y) \Psi(\xi/l) \right],$$

$$e_y^{ef} = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left[-\frac{a_{ee}}{2\alpha_{ee}} p_x + \frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} p_y + (p_x + p_y) \Psi(\xi/l) \right], \quad (10.10)$$

де

$$\Psi(\xi/l) = \frac{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{4\alpha_{ee}} \frac{1 - \zeta_l(\xi/l)}{\zeta_l(\xi/l)}.$$

Розглянемо деформацію шару спричинену силовим навантаженням у напрямку осі Oy ($p_x = 0, p_y > 0$). У цьому випадку із (10.10) для e_x^{ef} та e_y^{ef} одержуємо

$$e_x^{ef} = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(-\frac{a_{ee}}{2\alpha_{ee}} + \Psi(\xi/l) \right) p_y,$$

$$e_y^{ef} = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(\frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} + \Psi(\xi/l) \right) p_y. \quad (10.11)$$

Відношення прикладеного навантаження до видовження, спричиненого прикладеним навантаженням, у напрямку дії навантаження визначається модулем Юнга E , а відношення поперечного видовження до поздовжнього – коефіцієнтом Пуассона ν , тобто

$$e_y^{ef} = \frac{p_y}{E}, \quad e_x^{ef} = -\nu \frac{p_y}{E}.$$

Тому

$$E = \frac{P_y}{e_y^{ef}} = \alpha_{ee} \frac{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{a_{ee} + (1 + \alpha_{ee})\Psi(\xi l)},$$

$$\nu = -\frac{e_x^{ef}}{e_y^{ef}} = \frac{1}{2} \frac{a_{ee} - 2\alpha_{ee}\Psi(\xi R)}{a_{ee} + \alpha_{ee}(1 + \Psi(\xi R))}. \quad (10.12)$$

Дані співвідношення описують розмірний ефект модулів пружності. Слід зазначити, що однорідна температура не впливає на цей ефект.

При нехтуванні зв'язністю між тензором деформації чи напружень та енергією зв'язку у визначальних співвідношеннях ($\alpha = 0$) співвідношення (10.12) спрощуються до вигляду

$$E_0 = \frac{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})\alpha_{ee}}{a_{ee} + \alpha_{ee}}, \quad \nu_0 = \frac{a_{ee}}{2(a_{ee} + \alpha_{ee})}.$$

Якщо прийняти, що $\alpha_{ee} = \mu$, $a_{ee} = \lambda$, то дані формули співпадають з формулами, які пов'язують модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона зі сталими Ляме μ , λ .

Перевіримо ізотропний характер розмірного ефекту модулів пружності. Розглянемо з цією метою напружено-деформований стан шару навантаженого у напрямку осі $0x$ ($p_x > 0, p_y = 0$). У цьому випадку для складових e_x^{ef} та e_y^{ef} з (10.10) одержуємо

$$e_x^{ef} = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(\frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} + \Psi(\xi l) \right) p_x,$$

$$e_y^{ef} = \frac{1}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \left(-\frac{a_{ee}}{2\alpha_{ee}} + \Psi(\xi l) \right) p_x. \quad (10.13)$$

Використовуючи ці співвідношення, для модулів пружності запишемо

$$E = \frac{p_x}{e_x^{ef}} = \alpha_{ee} \frac{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{a_{ee} + (1 + \alpha_{ee})\Psi(\xi l)},$$

$$\nu = -\frac{e_y^{ef}}{e_x^{ef}} = \frac{1}{2} \frac{a_{ee} - 2\alpha_{ee}\Psi(\xi R)}{a_{ee} + \alpha_{ee}(1 + \Psi(\xi R))}.$$

Порівнюючи ці вирази із співвідношеннями (10.12), бачимо, що за різних умов навантаження шару отримано однакові вирази, які описують розмірний ефект пружних модулів. Таким чином, встановлено ізотропний характер розмірних ефектів модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона.

Використовуючи формули [96]

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)},$$

на основі (10.12), запишемо вирази, що описують розмірний ефект для сталих Ляме μ , λ , а також модулів зсуву G та всестороннього стиску K

$$\mu = G = \alpha_{ee},$$

$$\lambda = \left(a_{ee} - \frac{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{2} \frac{1 - \zeta_l(\xi l)}{\zeta_l(\xi l)} \right) \left(1 + 3 \frac{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{4\alpha_{ee}} \frac{1 - \zeta_l(\xi l)}{\zeta_l(\xi l)} \right)^{-1},$$

$$K = \left(a_{ee} + \frac{2}{3}\alpha_{ee} \right) \left(1 + 3 \frac{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{4\alpha_{ee}} \frac{1 - \zeta_l(\xi l)}{\zeta_l(\xi l)} \right)^{-1}. \quad (10.14)$$

У рамках розглянутої моделі модуль зсуву не проявляє розмірного ефекту, що є очевидним наслідком скалярного характеру енергії зв'язку (хімічного потенціалу), врахування якої зумовлює опис розмірного ефекту.

Для товстих, порівняно із областю приповерхневої неоднорідності, шарів ($\exp(\xi l) \gg 1$) на основі (10.12), (10.14) можна записати

$$E(\xi l) = E_\infty \left(1 + \frac{b_E}{\xi l} \right), \quad \nu(\xi l) = \nu_\infty \left(1 + \frac{b_\nu}{\xi l} \right),$$

$$\lambda(\xi l) = \lambda_\infty \left(1 + \frac{b_\lambda}{\xi l} \right), \quad K(\xi l) = K_\infty \left(1 + \frac{b_K}{\xi l} \right), \quad (10.15)$$

де

$$E_{\infty} = (3a_{ee} + 2\alpha_{ee}) \left(\frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} + \Psi_{\infty} \right)^{-1},$$

$$\nu_{\infty} = \left(\frac{a_{ee}}{\alpha_{ee}} - \Psi_{\infty} \right) \left(\frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} + \Psi_{\infty} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{\infty} = \frac{a_{ee} - 2\alpha_{ee}\Psi_{\infty}}{1 + 3\Psi_{\infty}}, \quad K_{\infty} = \frac{1}{3} \frac{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{1 + 3\Psi_{\infty}},$$

$$\Psi_{\infty} = \frac{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{4\alpha_{ee}} \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \quad b_E^{-1} = (1 - \alpha) \left(1 + \frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}\Psi_{\infty}} \right),$$

$$b_V = \frac{\Psi_{\infty}}{1 - \alpha} \left[\left(\frac{a_{ee}}{2\alpha_{ee}} - \Psi_{\infty} \right)^{-1} + \left(\frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}} + \Psi_{\infty} \right)^{-1} \right],$$

$$b_{\lambda} = \frac{(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})\Psi_{\infty}}{(1 - \alpha)(a_{ee} - 2\alpha_{ee}\Psi_{\infty})(1 + 3\Psi_{\infty})}, \quad b_K = \frac{3\Psi_{\infty}}{(1 - \alpha)(1 + 3\Psi_{\infty})}.$$

На основі (10.15) можна стверджувати, що величини $E_{\infty}, \nu_{\infty}, \lambda_{\infty}, K_{\infty}$ є модулями пружності, визначеними для товстих шарів. Вони є сталими величинами і не залежать від товщини шару.

Суцільний циліндр. Використаємо розв'язок задачі (6.15)–(6.18)

$$\eta(r) = \eta_a + \frac{\chi}{\zeta_c} \left(\frac{I_0(\xi r)}{I_0(\xi R)} - 1 \right),$$

$$\sigma_{rr}(r) = a_0 \frac{\chi}{\zeta_c} \left(\frac{I_1(\xi r)}{\xi r I_0(\xi R)} - \frac{I_1(\xi R)}{\xi R I_0(\xi R)} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = a_0 \frac{\chi}{\zeta_c} \left(\frac{I_0(\xi r)}{I_0(\xi R)} - \frac{I_1(\xi r)}{\xi r I_0(\xi R)} - \frac{I_1(\xi R)}{\xi R I_0(\xi R)} \right),$$

$$\sigma_{zz}(r) = p + a_0 \frac{\chi}{\zeta_c} \left(\frac{I_0(\xi r)}{I_0(\xi R)} - \frac{2I_1(\xi r)}{\xi R I_0(\xi R)} \right), \quad (10.16)$$

де $\chi = (\kappa_{\sigma}^2 p + \kappa_{\eta}^2 \eta_a) / \xi^2$, $\zeta_c = 1 - \alpha \{ 1 - 2I_1(\xi R) [\xi R I_0(\xi R)] \}$, $p \equiv \sigma_a$, для

дослідження впливу кривини поверхні на прояв розмірного ефекту модулів пружності.

Використовуючи співвідношення (10.7) при $\theta = 0$, запишемо вираз для осової компоненти тензора деформацій

$$e_{zz} = \frac{a_{ee} + \alpha_{ee}}{\alpha_{ee}(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})} p - \frac{a_{em}}{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}} \eta_a + \frac{a_0(a_{ee} + 2\alpha_{ee})}{2\alpha_{ee}(3a_{ee} + 2\alpha_{ee})} \chi \left(1 - \frac{2I_1(\xi R)}{\xi R I_0(\xi R)} \right). \quad (10.17)$$

На цій основі із співвідношень

$$E = \frac{p}{e_{zz}}, \quad \nu = -\frac{e_{trans}}{e_{axial}},$$

одержуємо формули для модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона

$$E = \alpha_{ee} \frac{3a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{a_{ee} + \alpha_{ee}(1 + \Psi(\xi R))},$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{a_{ee} - 2\alpha_{ee}\Psi(\xi R)}{a_{ee} + \alpha_{ee}(1 + \Psi(\xi R))}$$

де

$$\Psi(\xi R) = \frac{a_{ee} + 2\alpha_{ee}}{4\alpha_{ee}} \frac{1 - \zeta_c(\xi R)}{\zeta_c(\xi R)}.$$

Отримані співвідношення з точністю до функції ζ у виразі для Ψ співпадають із формулами (10.12), отриманими для шару. Тому аналіз залежності модулів пружності від характерного розміру L зводиться до аналізу такої залежності функцій

$$\zeta_l(L) = 1 - \alpha \left(1 - \frac{\text{th}(L)}{L} \right), \quad \zeta_c(L) = 1 - \alpha \left(1 - \frac{2I_1(L)}{LI_0(L)} \right).$$

При цьому для шару за характерний розмір L приймаємо його приведену півтовщину, а для циліндра – його приведений радіус. Відмінність між функціями $\zeta_l(L)$, $\zeta_c(L)$ зменшується із зростанням розміру L та зменшення коефіцієнта зв'язності α . Це й ілюструють графіки

на рисунку 10.4, на якому показано залежність від характерного розміру L функцій ζ_l , ζ_c (відповідно суцільні та штрихові лінії) для $\alpha = 0.1; 0.25$ (криві 1,2).

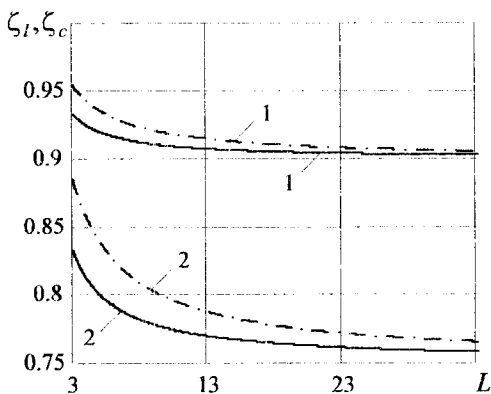


Рис. 10.4. Залежність від характерного розміру

Використовуючи наближення

$$I_n(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 - \frac{k-1}{8z} + \frac{(k-1)(k-9)(k-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right], \quad k = 4n^2, \quad |z| \gg 1,$$

для товстих волокон одержуємо

$$E(\xi R) = E_\infty \left(1 + \frac{2b_E}{\xi R} \right), \quad v(\xi R) = v_\infty \left(1 + \frac{2b_v}{\xi R} \right). \quad (10.18)$$

Порівнюючи ці формули із відповідними виразами для шару, бачимо, що вплив характерного розміру та модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона у циліндрі є у два рази суттєвішим порівняно з шаром.

На завершення розділу зазначимо, що подібні вирази для модулів пружності можна одержати на основі моделей твердого розчину та електропровідного неферомагнітного твердого тіла та оцінити таким чином вплив домішок та електронної підсистеми на розмірні ефекти цих модулів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андриевский Р.А., Рагуля А.В. *Наноструктурные материалы*. – М, 2005, – 192 с.
2. Базаров И.П. *Термодинамика*. – М.: Высш. школа, 1991. – 376 с.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
4. Боженко Б.Л., Нагірний Т.С. До чисельного розв'язування варіаційних задач локально-градієнтної механіки з використанням апроксимації рухомих найменших квадратів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2004, 47, № 2. – С. 124-128.
5. Бойко З., Нагірний Т. До оцінки параметрів моделі структурно неоднорідного твердого тіла // *Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.* – 2012, вип. 76. – С.99-108.
6. Бренд Д.Р. *Теория линейной вязкоупругости*. – М.: Мир, 1965. – 390 с.
7. Бурак Я.И., Галапац Б.П. *Термодинамические основы и исследование поверхностных явлений в электропроводных телах* // *Физ.-хим. мех. матер.* – 1981, 17, № 5. – С. 59-66.
8. Бурак Я.И., Грицина О.Р., Нагирный Т.С. *Визначальні співвідношення узагальненої електротермомеханіки N-компонентного твердого розчину* // *Фіз.-хім. мех. матер.* – 1991, №1. – С.9-13.
9. Бурак Я.И., Зозуляк Ю.Д., Нагирный Т.С. *Вопросы математического моделирования и оптимизации в локально-градієнтной термомеханике* // *Известия РАН, МТТ*, 1994, №2. – С.170-176.
10. Бурак Я.И., Нагирный Т.С. *Математическое моделирование локально-градієнтных процессов в инерционных термомеханических системах* // *Прикл. мех.* – 1992, 28, №12. – С.3-23.
11. Бурак Я.И., Нагирный Т.С. *Термодинамические основы локально-градієнтной термомеханики* // *Труды Всесоюз. конф. „Термодинамика необратимых процессов”*. – М.: Наука, 1992. – С. 16-20.
12. Бурак Я.И., Грицина О.Р., Нагірний Т.С. *Моделирование та дослідження механічних та концентраційних полів у приконтактних областях двокомпонентних кусково-однорідних систем* // *Фіз.-хім. мех. матер.* – 1994, №1. – С.78-88.
13. Бурак Я.И., Галапац Б.П., Гнідець Б.М. *Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах*. – К.: Наук. думка, 1978. – 232 с.

14. Бурак Я.Й., Говда Ю.І., Нагірний Т.С. *Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень* // Доп. НАН України. – 1996, №2. – С.39-43.
15. Бурак Я.Й., Грицина О.Р., Нагірний Т.С. *Визначальні співвідношення узагальненої електротермомеханіки* // ДАН УРСР, Сер.А. – 1990, №9. – С.32-35.
16. Бурак Я.Й., Грицина О.Р., Нагірний Т.С. *Механодифузійні процеси у тілпросторі з врахуванням поверхневих явищ* // ДАН України. – 1992, №11. – С.37-40.
17. Бурак Я.Й., Грицина О.Р., Нагірний Т.С. *Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів* // ДАН України, Сер.А. – 1991, №11. – С.47-51.
18. Бурак Я.Й., Грицина О.Р., Нагірний Т.С. *Про термодинамічне моделювання приповерхневих явищ в термомеханіці* // ДАН УРСР, Сер.А. – 1991, № 9. – С. 66-70.
19. Бурак Я.Й., Зозуляк Ю.Д., Нагірний Т.С. *Визначальні співвідношення інерційної локально-нерівноважної термопружності* // ДАН України. – 1993, №6. – С.48-53.
20. Бурак Я.Й., Нагірний Т.С. *Деякі питання термодинамічного моделювання континуальних систем* // Праці Наукового товариства ім.Шевченка, Львів, НТШ, 1997, 1. – С.520-525.
21. Бурак Я.Й., Нагірний Т.С. *Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням приповерхневих явищ* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1993. – № 4. – С. 24-30.
22. Бурак Я.Й., Нагірний Т.С. *Термодинамічні аспекти узагальненої термомеханіки* // ДАН УРСР, Сер.А. – 1990, №8. – С.34-37.
23. Бурак Я.Й., Нагірний Т.С. *Термодинамічні аспекти узагальненої термомеханіки в'язкопружних тіл з врахуванням інерції деформаційного руху* // ДАН УРСР, Сер.А. – 1990, №11. – С.22-25.
24. Бурак Я.Й., Нагірний Т.С. *Термодинамічні основи локально-градієнтної узагальненої термомеханіки* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1992, вип.35. – С.20-24.
25. Бурак Я.Й., Чапля Є.Я. *Континуальні моделі нелінійної термомеханіки бінарних систем* // Фіз.-хім. мех. матер. – 1995. – № 4. – С.7-15.
26. Бурак Я.И., Нагирный Т.С., Грицина О.Р., Червинка К.А. *Поверхностные напряжения и некоторые вопросы прочности* // Proc. 2 Int. Conf. "Strength, Durability and Stability of Materials and Structures" (Sept. 16-18, 1999, Panevezys, Lithuania), Kaunas, Technologija, 1999. – P.167-172.

27. Бурак Я.И., Нагирный Т.С., Грицина О.Р., Червинка К.А. *Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность* // Проблемы прочности. – 2000, № 6. – С.35-43.
28. Бухановский В.В., Борисенко В.А., Харченко В.К. *Механические характеристики молибденовых сплавов систем Mo-Al-B и Mo-Zr-B в диапазоне температур 290.2270 К* // Проблемы прочности. – 1995. – № 11-12. – С. 70-79.
29. Бухановский В.В., Борисенко В.А., Харченко В.К. *Характеристики кратковременной прочности и пластичности ниобиевого сплава 10ВМЦ системы Nb-W-Mo-Zr в диапазоне температур 290.2270 К* // Проблемы прочности. – 1996. – № 6. – С. 113-120.
30. Виноградов Г.В. *Реология полимеров*. – М.: Химия, 1977. – 440 с.
31. Галапац Б.П., Юзевич В.Н. *Влияние контактных явлений на упруго-деформированное состояние электропроводных тел* // Физ.-хим. мех. матер. – 1977, № 4. – С. 82-85.
32. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. *Моделі термомеханіки намагнетованих і поляризованих електропровідних деформованих твердих тіл* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 3. – С. 19-37.
33. Гленсдорф П., Пригожин И. *Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций*. – М.: Мир, 1973. – 280 с.
34. Говда Ю.І. *Про енергетичні простори одного додатно визначеного оператора* // Мат. студії. – 1998. – Т.10, В1. – С.79-84.
35. Говда Ю.І. *Умови коректності деяких крайових задач для однієї системи рівнянь гіперболічного типу* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1997, вип.48. – С. 60-67.
36. Говда Ю.І., Нагирный Т.С. *Класифікація задач локально-градієнтної механіки та одна динамічна задача для середовища зі сферичною порожниною* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 1997, вип.47. – С.107-115.
37. Головатий Ю.Д. *Про помірно сингулярні сім'ї компактних операторів у задачах теорії сильно неоднорідних середовищ* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996, вип.45. – С.113-123.
38. Головатий Ю.Д. *Спектральні свойства колебательных систем с присоединенными массами и эффект локальных колебаний* // Тр. Московского матем. об-ва. – 1996. – С.113-123.
39. Гольдштейн З.В., Мосаков А.Б. *Мультифрактальная геометрия разрушения и масштабный эффект* // ДАН (Россия). – 1993. – 329, №4. – С. 429-431.
40. Горелкинский Ю.В., Невинный Н.Н. *Исследования поведения атомарного водорода в субмикронных пленках SiO₂ на Si* // Поверхность: Физика, химия, механика. – 1994, № 6. – С. 79-85.

41. Гребенников Е. А. *Метод усреднения в прикладных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 256 с.
42. Грицина О., Нагірний Т., Червінка К. *Локально градієнтний підхід у термомеханіці* // Фіз.-мат. модел. та інформ. техн. – 2006, Вип. 3. – С. 72-83.
43. Грицина О.Р., Нагірний Т.С. *Вплив кривини поверхні та домішок на поверхневий натяг у кулі* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001, **44**, № 1. – С. 130-134.
44. Грицина О.Р., Нагірний Т.С. *Моделювання і дослідження впливу домішок на міцність розтягнутого циліндра* // Машинознавство. – 2002, № 4. – С. 12-15.
45. Грицина О.Р., Нагірний Т.С. *Рівноважний стан насиченої домішками кулі з покриттям з урахуванням приповерхневих явищ* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000, **43**, № 2. – С. 171-175.
46. Грицина О.Р., Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Механотермодифузійні процеси у розтягнутій пластині із врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002, **45**, № 1. – С.123-127.
47. Гузь А.Н., Рушицкий Я.Я. *Наноматериалы. О механике наноматериалов* // Прикл. мех. – 2003, **39**, № 11. – С. 36-66.
48. Гусев А.И., Ремпель А.А. *Нанокристаллические материалы.* – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 224 с.
49. Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы.* – М.: Наука, 1973. – 228 с.
50. Де Гроот С., Мазур П. *Неравновесная термодинамика.* – М.: Мир, 1964. – 456 с.
51. Дей У.А. *Термодинамика простых сред с памятью.* – М.: Мир, 1974. – 190 с.
52. Дьярмати И. *Неравновесная термодинамика.* – М.: Мир, 1974. – 304 с.
53. Задумкин С.Н., Пугачевич П.П. *Температурная зависимость поверхностного натяжения металлов* // Докл. АН СССР. – 1962. – 146, № 6. – С. 1363-1366.
54. Иванов А.Г. *Динамическое разрушение и масштабные эффекты* // Прикл. мех. и техн. физика. – 1994. – 35, №3. – С. 116-130.
55. Иоффе А.Ф. *Физика кристаллов.* – М.-Л: Госиздат, 1929. – 192 с.
56. Карнаухов В.Г. *Связанные задачи термовязкоупругости.* – Киев: Наук. думка, 1982. – 258 с.
57. Карнаухов В.Г., Гуменюк Б.П. *Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел.* – Киев: Наук. думка, 1990. – 304 с.

58. Коваленко А.Д. *Основы термоупругости*. – Киев: Наук.думка, 1970. – 307 с.
59. Коваленко А.Д. *Термоупругость*. – К.: Вища школа, 1975. – 216 с.
60. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике (Для научных работников и инженеров)*. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
61. Кривулина Э. Ф. *Термоупругое состояние плит и цилиндров, выполненных из сплошных и пористых материалов*: автореферат дис. ... канд. техн. наук: 01.02.04 / Кривулина Э. Ф. – Саратов, РИЦ СГТУ, 2006. – 21 с.
62. Кристинсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. – 340 с.
63. Кунин И.А. *Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости*. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
64. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. – М., Высшая школа, 1967. – 600 с.
65. *Механика разрушения и прочность материалов*: Справ. пособие: В 4 т. / Под ред. Панасюка В.В. – Киев. Наук. думка. –1988. – Т.3: Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения. – 436 с.
66. Митропольский Ю.А. *Метод усреднения в нелинейной механике*. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.
67. Мюнстер А. *Химическая термодинамика*. – М.: Мир, 1971. – 295 с.
68. Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Модель термопружкого твердого тіла з урахуванням ефектів локальної градієнтності та тензорного характеру хімічного потенціалу // Доп. НАН України. – 2000, № 2. – С. 50-53.*
69. Нагірний Т.С. *Термоупругі процеси в вязкоупругих телах с учетом градиентности полей температуры и химического потенциала // Мат.методы и физ.-мех. поля. – 1989, вып.29. – С. 34-37.*
70. Нагірний Т.С. *Уравнения термомеханики электропроводных пьезомагнитных тел с учетом структурных превращений // Мат. Методы и физ.-мех. поля. – 1990, вып.31. – С. 21-24.*
71. Нагірний Т., Бойко З. *Вивчення розмірних ефектів у тонких волокнах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012, 55, № 1. – С. 130-137.*
72. Нагірний Т., Бойко З. *Напружений стан і приповерхнева неоднорідність структурно неоднорідного порожнистого циліндра // Фіз.-мат. модел. та інформ. техн. – 2012, Вип. 15. – С. 56-64.*
73. Нагірний Т., Бойко З. *Про один підхід до формулювання крайових задач нелокальної теорії пружності // Фіз.-мат. модел. та інформ. техн. – 2011, Вип. 14. – С. 95-104.*

74. Нагірний Т., Червінка К. *До опису впливу температури на міцність деформівних твердих тіл* // *Машинознавство*. – 2004, №3. – С. 9-12.
75. Нагірний Т., Червінка К. *До визначення хімічного потенціалу на поверхні деформівного твердого тіла* // *Фіз.-мат. модел. та інформ. техн.* – 2008, Вип. 8. – С. 130-138.
76. Нагірний Т.С. *До питання про вибір функцій впливу в реологічних кінетичних рівняннях механіки суцільного середовища* // *Доп. НАН України*. – 1992, № 2. – С. 49-53.
77. Нагірний Т.С. *До питання про опис акустичної емісії та оцінки амплітуди механічних коливань у півпросторі при утворенні його поверхні* // *ДАН України*. – 1993, №8. – С.17-20.
78. Нагірний Т.С. *Моделювання термопружного деформування твердих тіл із внутрішніми ступенями вільності* // *Фіз.-хім. мех. матер.* – 1991, № 3. – С. 79-83.
79. Нагірний Т.С. *Напружений стан та розподіл домішок у півпросторі з покриттям із врахуванням приповерхневої неоднорідності* // *В: Моделювання та інформаційні технології*, Київ, НАН України, 2002 – (Збірник наукових праць, вип. 15) – С. 15-22.
80. Нагірний Т.С. *Поверхневі напруження в шарі. Поверхневий натяг та міцність шару* // *Мат. методи та фіз.мех. поля*. – 1999, 42, № 4. – С. 111-115.
81. Нагірний Т.С. *Про врахування інерції деформації в узагальненій термомеханіці* // *Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.* 1997, вип.48. – С.136-139.
82. Нагірний Т.С. *Термодинамічний підхід до формулювання конститутивних співвідношень термомеханічних реологічних систем* // *Доп.НАН України*. – 1997, №2. – С. 52-56.
83. Нагірний Т.С. *Термодинамічні моделі та методи у локально градієнтній термомеханіці з врахуванням приповерхневих явищ* // *Автореф. докт. дис.* Львів, 1998. – 32 с.
84. Нагірний Т.С., Грицина О.Р., Червінка К.А. *Локально градієнтний підхід та вплив температури і домішок на поверхневі напруження у шарі* // *Фіз.-мат. модел. та інформ. техн.* – 2004, Вип.1. – С.38-49.
85. Нагірний Т.С., Грицина О.Р. *Вплив домішок на приповерхневу неоднорідність та міцність циліндра в процесі його насичення* // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2000, 43, № 3. – С. 122-126.
86. Нагірний Т.С., Грицина О.Р. *Вплив домішок на приповерхневу неоднорідність та міцність шару в процесі його насичення* // *Доп. НАН України*. – 2001, № 4. – С. 51-57.
87. Нагірний Т.С., Грицина О.Р. *Дослідження впливу домішок на міцність розтягнутого циліндра* // *Машинознавство*. – 1999, № 8. – С. 13-18.

88. Нагірний Т.С., Грицина О.Р. *Локальна неоднорідність та міцність розтягнутого шару в процесі дифузійного насичення* // В: Математичні проблеми механіки неоднорідних структур . Т. 1 .- Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики, 2000. – С.54-57.
89. Нагірний Т.С., Червінка К.А., Бойко З.В. *До вибору крайових умов у задачах локально градієнтного підходу в термомеханіці* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011, **54**, № 3. – С. 199-206.
90. Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Математичне моделювання та дослідження впливу температури на локальну неоднорідність шару* // Матеріали конф. "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур", Т.1, – Львів, 2000. – С.91-95.
91. Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Моделювання та дослідження впливу температури на власні коливання шару* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2002, вип.60. – С.102-108.
92. Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Моделювання хвильових процесів у деформованих твердих тілах з врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999, вип.54. – С.117-124.
93. Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Напружено-деформований стан і міцність локально неоднорідного шару в процесі нагрівання* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005, **48**, № 4. – С. 178-183.
94. Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Поверхневі напруження в шарі. Вплив температури на приповерхневий натяг та міцність* // Доп. НАН України. – 2000, № 10. – С.57-62.
95. Непийко С.А. *Физические свойства малых металлических частиц.* – К.: Наук. думка, 1985. – 246 с.
96. Новацкий В. *Теория упругости.* – М.: Мир, 1975. – 872 с.
97. Писаренко Г.С., Трощенко В.Т. *Статистичні теорії міцності та їх застосування до металокерамічних матеріалів.* – К.: В-во АН УРСР. – 1964. – 106 с.
98. Повстенко Ю.З. *Нелокальна і градієнтна теорії пружності та їх застосування до опису дефектів в твердих тілах* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003, **46**, № 2. – С. 136-146.
99. Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З. *Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах.* – К.: Наук. думка, 1985. – 200 с.
100. Подстригач Я.С. *Диффузионная теория неупругости металлов* // Журнал прикладной механики и теоретической физики. – 1965. – № 2. – С. 67-72.

101. Подстригач Я.С. *Об одной нелокальной теории деформирования твердых тел* // Прикл. мех. – 1967, 3, № 2. – С. 71-76.
102. Подстригач Я.С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. *Термоупругость электропроводных тел.* – К.: Наук. думка, 1977. – 247 с.
103. Подстригач Я.С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф. *Магнитотермоупругость электропроводных тел.* – К.: Наук. думка, 1982. – 293 с.
104. Подстригач Я.С., Коляно Ю. М. *Обобщенная термомеханика.* – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
105. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела.* – М.: Наука, 1979. – 744 с.
106. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел.* – М.: Наука, 1977. – 384 с.
107. Рейнер М. *Реология.* М.: Наука, 1965. – 224 с.
108. Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 320с.
109. Седов Л.И. *Введение в механику сплошной среды.* – М.: Физматгиз, 1962. – 284 с.
110. Седов Л.И. *Механика сплошной среды: В 2-х т.* – М.: Наука, 1976. – т.1. – 536 с; – т.2. – 576 с.
111. Скурихин В.И., Шифрин В.Б., Дубровский В.В. *Математическое моделирование.* – К.: Техніка, 1983. – 269 с.
112. Сорокин А.П., Гонор В.К., Мальцев В.Г., Митрошин В.Г., Полионов В.П., Портяной А.Г., Портяной Г.А., Сердунь Е.Н. *Изучение температуропроводности сложных гетерогенных систем типа "капиллярно-пористая матрица – несмачивающая жидкость"* // Труды регионального конкурса научных проектов в области естественных наук. Выпуск 12. Калуга: Изд-во АНО "Калужский научный центр", 2007, с. 499-511.
113. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовца, И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
114. Суздаев И.П. *Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов.* М.: КомКнига, 2006. – 592 с.
115. Суздаев И.П. *Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов / И. П. Суздаев.* – Москва: КомКнига, 2006. – 592 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).
116. Тау А.С. *Линейные волны в средах с дисперсией // Нелинейные волны.* – М.: Мир. – 1977. – С. 54-90.
117. Турко В.П. *Простая модель масштабного эффекта на основе гипотезы локальных объемов* // Пробл. прочности. – 1986. – № 4. – С. 34-38.

118. *Фізико-математичне моделювання складних систем* / Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний та ін.; під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.
119. Фролов Ю.Г. *Курс коллоидной химии. Поверхностные явления и дисперсные системы*. — М.: Химия, 1989. — 462 с.
120. Хейес У.Д. *Введение в теорию распространения волн // Нелинейные волны*. — М.: Мир. — 1977. — С. 13-53.
121. Червінка К.А. *Про перерозподіл напружень у локально неоднорідному шарі при його нагріві* // Конф. молод. учених із сучас. проблем мех. і матем. ім. акад. Я.С.Підстригача / Тези доп. — Львів, 24-27 травня. — 2005. — 336 с. — С.63-64.
122. Aifantis E.C., Hill M.J. *On the theory of diffusion in media with double diffusivity. I. Basic mathematical results* // Q. J. Mech. Appl. Math. 1980, 33. — 1-21.
123. Burak Ja.I., Nagirny T.S. *To describe the contribution of interface factor on acoustical emission in solids* // Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Mechanika. — 2002, z. 60, nr 197. — P. 67-75.
124. Burak Ya., Nagirnyi T. *Mathematical modelling of the nonequilibrium processes in locally nonhomogeneous thermoelastic systems* // Zeszyty naukowe politechniki Rzeszowskiej, Nr.151, Mechanika, z.48, p.21-28. IX sympozjum dynamiki konstrukcji, Rzeszow-Jawor, 1996.
125. Coussy O. *Poromechanics*. — Wiley, 2004. — 315 p.
126. Edelen D.G., Green A.E., Laws N. *Nonlocal Continuum Mechanics* // Arch.Rat.Mech.Anal. — 1971. — 43, № 1. — P. 36-44.
127. Eringen A.C. *Nonlocal continuum description of lattice dynamics and applications* // "Constitut. Model. Deformat. Proc. Army Res. Off. Workshop Const. Models, Blacksburg, Va, March 24-26, 1986". — Philadelphia, 1987. — P.59-80.
128. Eringen A.C., Edelen D.G. *On Nonlocal Elasticity* // Int. J. Eng. Sci. — 1972. — Vol. 10, No 3. — P. 233-248.
129. Ghoniem N.M. *Multiscale modelling of nanomechanics and micro-mechanics: an overview* / N. M. Ghoniem et al. // Phil. Mag. — 2003. — Vol. 83. — P. 3475-3528.
130. Gleiter M. *Advanced structural and functional materials / Nanocrystalline materials*. — Koln, Germany, 1991. — P.1-37.
131. Guo J. G., Zhao Y. P. *The size-dependent elastic properties of nanofilms with surface effects* // J. Appl. Phys. — 2005. — Vol. 98, № 7. — P. 074306-11.
132. *Handbook of nanophase and nanostructured materials*, vol.1-4, eds: Z.L.Wang, Y.Liu, Z.Zhang, Kluwer academic/Plenum publishers. New York, 2002.

133. Jono M., Sugeta A., Kimura T., Konzaki S. *Observations of fracture origins and evaluations of fracture strength of aluminium oxide ceramic thin films* // J.Soc.Mater.Sci.Jap. – 1992. – 41, 470. – P. 1668-1674.
134. Jou D. *Nonclassical heat transport and nonequilibrium thermodynamics* // Proc. Inter. Symp. on Trends in Continuum Phys. – Poznan (Poland). – 1998. – Word Scientific. – 1999. – P. 170-179.
135. Kröener E. *Elasticity theory of materials with long range cohesive forces* // Int.J.of Solids and Structures. – 1967. – 3, № 5. – P. 731-742.
136. Krumhansl J. A. *Some considerations on the relation between solid state physics and generalized continuum mechanics* / Proc. of the IUTAM symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications. – 1967. – P. 298-311.
137. Lazar M., Maugin G.A. *A note on line forces in gradient elasticity* // Mechanics Research Communications. – 2006 – Vol. 33, Issue 5. – P. 674-680.
138. Mazurkiewicz A., Dobrodziej J., Poteralska B. *Nanonauki i nanotechnologie: stan i perspektywy rozwoju*. W-wo Instytutu Technologii Eksploatacji, Radom, 2007 – 605 s.
139. *Microacoustic evaluation of elastic parameters of highly porous silicon layers* / A. Doghmane, Z. Hadjoub, M. Doghmane, F. Hadjoub // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. — 2006. — V. 9, No 3. — P. 4-11.
140. Mogilnikov K.P., Baklanov M.R. *Determination of Young's Modulus of Porous Low-k Films by Ellipsometric Porosimetry* // Electrochemical and Solid-State Letters. – 2002, Vol. 5, Issue 12. – P. F29-F31.
141. Nagirny T.S., Burak Ja.I. *Thermodynamical models of continual description of the coupled processes in thin-film systems* // B: Trends in continuum physics : TRECOP '98 . – Singapore: World Scientific Publishing, 1998, Word Scientific 1999. – P. 263-276.
142. Nahirny Taras, Hrytsyna Olha. *Mathematical modeling and investigation of tanks strength from a material saturated by admixtures* // B: Studia i Materiały (Technika; 2). – 2001, № 52. – С. 49-59.
143. Nahirny Taras, Hrytsyna Olha. *Strength of a stretched layer with admixtures* // Materials Science. – 2000, Vol. 36, No 4. – С. 575-580.
144. Nahirnyi T., Tchervinka K. *On size effect of elastic modules in thin fibres* // Фіз.-мат. модел. та інформ. техн. – 2010, Вип. 12. – P. 128-133
145. Nahirnyi T., Tchervinka K. *On an approach to construction the basic of nanomaterials mechanics* // Фіз.-мат. модел. та інформ. техн. – 2010, Вип. 11. – P.113-120.

146. Nahirnyj T., Tchervinka K. *Modelling and Investigation of temperature effect on strenght of spherical tanks // Thin-walled vessels*. 3rd Conf. Karłów, Polska, 2004. – Poznań-Karlow, Poland. – P.229-238.
147. Nahirnyj T., Tchervinka K. *On size effect of mechanical properties of thermoelastic solids // Фіз.-мат. модел. та інформ. техн.* – 2009, Вип. 10. – С.75-83.
148. Nahirnyj T. *Local gradient approach in thermomechanics and some problems of strength // III Sympozjum mechaniki zniszczenia materiałów i konstrukcji*. Augustów, Polska, 2005. – Białystok, 2005. – С. 253-256.
149. Nahirnyj T., Tchervinka K. *Interface Phenomena and Interaction Energy at the Surface of Electroconductive Solids // Computational Methods in Science and Technology*, 2008, 14(2). – 105–110.
150. Nahirnyj T., Tchervinka K. *Surface tension and strength of local nonhomogeneous cylinder in the process of heating // Фіз.-мат. модел. та інформ. техн.* – 2008, Вип. 7. – С. 30-39.
151. Nahirnyj T., Tchervinka K. *To description of size effect of elastic moduli in eleciroconductive nonferromagnetic thin films // Фіз.-мат. модел. та інформ. техн.* – 2011, Вип. 13. – С. 112-120.
152. Peerlings R.H.J., de Borst R., Brekelmans W.A.M., Geers M.G.D. *Wave propagation and localisation in nonlocal and gradient-enhanced damage models // Proc. of 2nd European Mechanics of Materials Conference on Mechanics of Materials with Intrinsic Length Scale: Phisics, Experiments, Modelling, and Aplications.* – Magdeburg (Germany). – 1998. – P. 283-290.
153. Schols F., Kuhn G. *Statistischer Gropeneinflub unter mechrachsiger Wechselbelastung // Material Wiss. und Werkstoffechn.* – 1988. – 19, No.9. – P. 306-311.
154. Shewmon P. *Diffusion in Solids.* – Pennsylvania, TSM, 1989. – 246 p.
155. Shulson E.M., Briggs E.M., Baker I. *The strength and ductility of Ni₃Si // Acta metal. mater.* – 1990, 38, No. 2. – P.207-213.

Наукове видання

Нагірний Тарас, Червінка Костянтин

**ТЕРМОДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ
ТА МЕТОДИ ТЕРМОМЕХАНІКИ
ІЗ ВРАХУВАННЯМ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ
ТА СТРУКТУРНОЇ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ**

ОСНОВИ НАНОМЕХАНІКИ I

Авторська редакція

Підписано до друку 1.12.2012р. Формат 60x84/16
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк різнографія.
Умовн. друк арк. 15.34
Наклад 150 пр. Зам. №939

Видавництво «СПОЛОМ» 79008, Україна, м. Львів, вул. Краківська
Тел/факс: (380-32) 297-55-47. E-mail: spolom@mail.lviv.ua
Свідоцтво держреєстру серія ДК, № 2038 від 02.02.2005

Надруковано в друкарні ТзОВ «Сплайн»
79005 Україна, м. Львів, вул. Дж. Дудаєва, 15
Тел.: (380-32) 243-76-13
Свідоцтво держреєстру серія ДК, № 2537 від 23.06.2006