

621.01

047

О. Г. ОЗОЛ

ТЕОРИЯ
МЕХАНИЗМОВ
И МАШИН



О. Г. ОЗОЛ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Перевод
У. Я. ДЗИНТАРСА

Под редакцией
С. Н. КОЖЕВНИКОВА

✓ М

05
2000

ЧИТ. ЗАП-2



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

УДК 62-50
Классификация

34.41
О-47
УДК 621.01

Озол О. Г. Теория механизмов и машин. Пер. с латыш./Под ред. С. Н. Кожевникова.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 432 с.

Книга посвящена исследованию структуры и классификации механизмов, кинематическому анализу механизмов, учению о силах и кинестатике, динамике машин и механизмов, синтезу механизмов.

Изложенная в книге структурная теория относится ко всем современным механизмам, а классификация тесно связана с методами их расчета. Вместо обычно рассматриваемых идеализированных механизмов описываются механизмы с деформируемыми, неточно изготовленными твердыми элементами. Особое внимание уделяется учению о связях в механизмах, позволяющему уже по структурной схеме судить об их эксплуатационных свойствах и технологичности конструкций. Наряду с классическими излагаются новые, более универсальные и точные методы кинематического анализа, метрического синтеза, кинестатики и динамики, удобные для использования вычислительной техники.

Книга предназначена для специалистов по теории механизмов и машин, инженеров производства и конструкторских бюро, а также для студентов технических специальностей.

Илл. 368, библи. 107 назв.

Рецензент:

доктор технических наук П. Н. Решетников

388641

Ольгерт Густавович Озол

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Редакторы Б. Н. Складнев, И. М. Овчинникова

Техн. редактор И. Ш. Аксельрод

Корректоры О. А. Вугусова, Т. С. Вайсберг

ИБ № 12278

Сдано в набор 10.11.83. Подписано к печати 02.08.84. Т-13500. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 27. Условн. кр.-отт. 27. Уч.-изд. л. 29,38. Тираж 14 000 экз. Заказ № 882. Цена 2 р. 10 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука». 630077, г. Новосибирск-77, Станиславского, 25.

© Izdevniecība «Zvaigzne», 1974

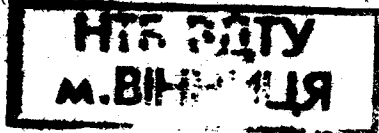
© Перевод на русский язык,

Издательство «Наука»,

Главная редакция

физико-математической литературы, 1984

О 2702000000—135 148—84
053 (02)—84



СОДЕРЖАНИЕ

От редактора	7
Введение	9
§ 1. Основные понятия	9
§ 2. Характеристика курса теории механизмов и машин	11
§ 3. Историческое развитие теории механизмов и машин	11

ЧАСТЬ I. СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Раздел 1. Основные понятия структурной теории	16
§ 1.1. Составные части механизма	16
§ 1.2. Подвижные соединения	17
§ 1.3. Кинематические цепи	25
§ 1.4. Кинематическая и структурная схемы механизма	28
Раздел 2. Связи и подвижность механизма	31
§ 2.1. Свойства связей	31
§ 2.2. Избыточные связи	34
§ 2.3. Универсальные структурные формулы	38
§ 2.4. Плоские, сферические и цилиндрические механизмы	41
§ 2.5. Определение и устранение избыточных связей	45
§ 2.6. Динамические связи	49
§ 2.7. Механизмы с внешними связями	52
Раздел 3. Структура и классификация плоских механизмов	56
§ 3.1. Принцип построения механизма	56
§ 3.2. Плоские механизмы с внешними парами	59
§ 3.3. Плоские механизмы с внутренними парами	63
Раздел 4. Классификации и примеры механизмов	65
§ 4.1. Разные подходы к классификации механизмов	65
§ 4.2. Основные классификации и примеры механизмов	66

ЧАСТЬ II. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Раздел 5. Графическая кинематика плоских механизмов	80
§ 5.1. Положения звеньев механизма и траектории точек	80
§ 5.2. Теоретические основы определения скоростей	84
§ 5.3. Теоретические основы определения ускорений	90
§ 5.4. Масштабные коэффициенты при построениях	93
§ 5.5. Определение скоростей и ускорений в диадных механизмах	94
§ 5.6. Метод динамических диаграмм	99
§ 5.7. Графическая кинематика кулачковых механизмов	101
Раздел 6. Аналитическая кинематика плоских механизмов	103
§ 6.1. Методы и понятия аналитической кинематики	103
§ 6.2. Метод треугольников	105
§ 6.3. Аналитическая кинематика диадных механизмов	112
§ 6.4. Шарнирный четырехзвенник	116
§ 6.5. Кривошипно-ползунный механизм	117

§ 6.6.	Коромыслово-ползуновый механизм	122
§ 6.7.	Механизмы высших классов	123
Раздел 7. Кинематика передач вращения		128
§ 7.1.	Передачи с неподвижными осями	128
§ 7.2.	Передачи с подвижными осями	131
§ 7.3.	Зубчато-рычажные механизмы	138
§ 7.4.	Карданная передача	140
Раздел 8. Кинематика пространственных механизмов		143
§ 8.1.	Методы кинематики пространственных механизмов	143
§ 8.2.	Пространственный шарнирный четырехзвенник	148
§ 8.3.	Механизмы качающейся шайбы и качающейся вилки	151
§ 8.4.	Винтовые механизмы	153

ЧАСТЬ III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ В ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМАХ

Раздел 9. Метод кинетостатики и силы инерции		156
§ 9.1.	Кинетостатика механизмов	156
§ 9.2.	Определение сил инерции звеньев	159
Раздел 10. Кинетостатика механизмов с низшими парами		164
§ 10.1.	Значение структурных групп в кинетостатике	164
§ 10.2.	Аналитическая и графическая кинетостатика диад	166
§ 10.3.	Кинетостатический расчет механизмов	169
§ 10.4.	Определение реакций в двухкратном шарнире	172
§ 10.5.	Аналитическая кинетостатика структурных групп второго класса	173
§ 10.6.	Принцип Даламбера — Лагранжа и рычаг Жуковского	175
Раздел 11. Определение реакций в механизмах с высшими парами		178
§ 11.1.	Определение реакций в кинематических парах кулачковых механизмов	178
§ 11.2.	Определение реакций в кинематических парах зубчатых механизмов	181
Раздел 12. Трение в подвижных соединениях		185
§ 12.1.	Виды и свойства трения	185
§ 12.2.	Трение в поступательных парах и на наклонной плоскости	190
§ 12.3.	Трение в винтовых парах	197
§ 12.4.	Трение в шарнирах	198
§ 12.5.	Трение в подшипниках качения	202
§ 12.6.	Трение скольжения в высших кинематических парах	203
§ 12.7.	Сопrotивление при перемещении транспортных средств и при работе каткового транспортера	205

ЧАСТЬ IV. ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Раздел 13. Определение движения механизмов		208
§ 13.1.	Характеристика машинного агрегата и общие положения	208
§ 13.2.	Приведение масс	213
§ 13.3.	Приведение сил	216
§ 13.4.	Дифференциальные уравнения движения машинного агрегата и приведение сил инерции	218
§ 13.5.	Интегрирование дифференциальных уравнений движения	223
§ 13.6.	Определение закона движения ведущего звена при силах, зависящих от положения механизма	225
§ 13.7.	Решение уравнения движения при силах, зависящих от скорости	228
§ 13.8.	Определение движения, вызванного силами, зависящими от скорости и положения	230
§ 13.9.	Агрегаты с несколькими подвижностями. Упругая муфта	235

Раздел 14. Критерии энергетической полезности механизмов	239
§ 14.1. Критерии энергетической полезности и зависимости между ними	239
§ 14.2. Коэффициент полезного действия составной системы	242
§ 14.3. Критерии полезности низших кинематических пар и червячной передачи	244
§ 14.4. Коэффициенты полезного действия высших кинематических пар	246
§ 14.5. Коэффициент полезного действия планетарных зубчатых механизмов	248
§ 14.6. Определение коэффициента полезного действия стержневого механизма	252
Раздел 15. Регулирование хода машинного агрегата	253
§ 15.1. Определение неравномерности скорости ведущего звена при стационарном движении	253
§ 15.2. Определение момента инерции маховика	258
§ 15.3. Конструктивное выполнение, размещение и эффективность маховика	265
§ 15.4. Регулирование неперiodических изменений скорости	267
§ 15.5. Кинестатика центробежного регулятора	271
Раздел 16. Уравновешивание плоских механизмов	274
§ 16.1. Воздействие механизма на фундамент и задача уравновешивания	274
§ 16.2. Определение положения и движения центра масс	279
§ 16.3. Уравновешивание механизмов добавочными грузами	281
§ 16.4. Уравновешивание механизмов вращающимися противовесами. Силовой метод. Дублирование механизмов	284
§ 16.5. Уравновешивание роторов	290
§ 16.6. Экспериментальное уравновешивание роторов (балансировка)	294
Раздел 17. Экспериментальное исследование и моделирование механизмов	301
§ 17.1. Цель и метод эксперимента	301
§ 17.2. Измерение механических величин	303
§ 17.3. Физическое моделирование	309
§ 17.4. Математическое моделирование	312
ЧАСТЬ V. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ	
Раздел 18. Общие вопросы проектирования механизмов	315
§ 18.1. Структурный и метрический синтез	315
§ 18.2. Оптимальный синтез	321
§ 18.3. Ошибки, надежность и масса механизмов	323
Раздел 19. Синтез механизмов с высшими парами	326
§ 19.1. Центроидные механизмы	327
§ 19.2. Механизмы взаимно огибающих кривых	329
§ 19.3. Фрикционные механизмы	331
§ 19.4. Мальтийские механизмы	333
Раздел 20. Синтез кулачковых механизмов	337
§ 20.1. Задача синтеза кулачковых механизмов	337
§ 20.2. Законы движения толкателя	340
§ 20.3. Основные размеры кулачковых механизмов	344
§ 20.4. Построение профиля кулачка	349
§ 20.5. Расчет пружины	352
§ 20.6. Влияние упругости толкателя на закон движения толкателя	353
§ 20.7. Изготовление кулачков	355
§ 20.8. Кулачково-фрикционные механизмы	355
§ 20.9. Кулачково-зубчатые механизмы	357

Раздел 21. Синтез зубчатых передач	358
§ 21.1. Зубчатые передачи и предъявляемые к ним требования	358
§ 21.2. Основные размеры зубчатых колес	360
§ 21.3. Эвольвентное зацепление	361
§ 21.4. Износ профилей и трение во внешнем зацеплении	367
§ 21.5. Минимальное число зубьев	369
§ 21.6. Изготовление зубчатых колес	372
§ 21.7. Корригированные зубчатые колеса	373
§ 21.8. Зубчатые колеса с косыми зубьями	377
§ 21.9. Зацепление Новикова	380
§ 21.10. Конические зубчатые колеса	381
§ 21.11. Гиперболоидные, винтовые и гипоидные колеса	384
§ 21.12. Червячная передача	387
§ 21.13. Условия соосности, монтажа и соседства в зубчатых передачах с неподвижными и подвижными осями	389
Раздел 22. Синтез плоских стержневых механизмов	392
§ 22.1. Задачи и методы синтеза стержневых механизмов	392
§ 22.2. Теорема Грасгофа	397
§ 22.3. Теорема Робертса — Чебышева	398
§ 22.4. Синтез четырехзвенных механизмов по заданному коэффициенту увеличения средней скорости обратного хода	399
§ 22.5. Синтез кривошипно-ползунных передаточных механизмов	401
§ 22.6. Синтез шарнирных четырехзвенных передаточных механизмов	405
§ 22.7. Синтез шарнирных четырехзвенных направляющих механизмов	408
Список литературы	426
Предметный указатель	430

ОТ РЕДАКТОРА

Предлагаемая вниманию читателей книга О. Г. Озола содержит изложение основных разделов курса теории механизмов и машин и обобщает многолетние исследования автора. Эти исследования сочетаются с практической направленностью, что свидетельствует о тесной связи автора с прикладными вопросами, в частности с сельскохозяйственным машиностроением.

Недостаточная надежность сельхозмашин, с исследованиями которых автор был непосредственно связан, работая в Латвийской сельскохозяйственной академии (Елгава), поставила ряд вопросов, и прежде всего вопрос о причинах быстрого износа механизмов, частых авариях машин во время их работы. Проблема повышения надежности машин и оборудования не снята до сих пор. Однако одно сейчас совершенно ясно, а именно, что недостаточная надежность определялась главным образом структурными дефектами механизмов, которые давали себя знать в первую очередь в машинах с легко деформируемыми корпусами в форме рамных конструкций. В процессе работы машин, в которых опорные детали механизмов монтируются на элементах рамной конструкции, не исключено защемление элементов кинематических пар при деформации рамы, если механизмы не обладают свойством адаптации ко всем возможным деформациям основания и неточностям изготовления и монтажа.

В неадаптирующихся к деформациям основания механизмах наблюдаются интенсивный износ трущихся поверхностей в подвижных соединениях, сопровождаемый большим расходом энергии; накопление усталостных разрушений; усиленный шум во время работы.

Отсутствие адаптивных свойств механизмов объясняется наличием в них избыточных связей, наложенных при замыкании ветвей открытой кинематической цепи. Использование аналитических зависимостей между подвижностью механизма и связями, наложенными элементами кинематических пар, в форме структурных формул для плоского и пространственного механизмов не является надежным средством определения статической определимости механизма. Важно знать не только число избыточных связей, но и подвижное соединение или контур, в которые они внесены. Структурные формулы, в том числе и Сомова — Малышева, на второй вопрос ответа не дают.

Рассмотренные автором зависимости между структурными элементами кинематической цепи не только позволяют устранить указанное затруднение, но и определить направление структурного синтеза по заданным условиям на входе и выходе механизма.

Отличительной особенностью публикуемой книги О. Г. Озола является нетрадиционное изложение аналитического метода исследования плоских

механизмов (в основу которого положен метод, названный автором «метод треугольников»), метода метрического синтеза плоских четырехзвенного и кривошипно-ползунного механизмов, метода кинестатического расчета плоских механизмов. Применение метода треугольников для определения кинематических параметров плоских механизмов, полученных наложением статически определимых групп Ассур, позволяет производить расчет на ЭВМ так же, как и предлагаемый метод определения реакций на элементах кинематических пар. Затруднение может вызвать только определение функций положения трехпроводковых и более сложных групп Ассур, для которых в качестве исходных должны быть найдены каким-либо способом, например графически, приближенные значения, после чего могут быть определены поправки методом Ньютона.

При конкретной реализации метода расчета групп Ассур следует иметь в виду, что для расчетов на ЭВМ достаточно только получить первое приближенное решение графическим методом.

В новом положении при ограниченном шаге вычисления функций положения звеньев может быть выполнено при использовании метода Ньютона — Рафсона (см.: Кожевников С. Н. Кинематический анализ структурных групп второго класса.— В сб.: Теория механизмов, № 26.— Киев: Вища школа, 1979, с. 4—9).

Следует отметить, что, наряду с изложением некоторых традиционных методов анализа и синтеза механизмов, в отдельных разделах приведены оригинальные приемы, например, метод ортогональных (повернутых) скоростей и другие методы. К числу последних необходимо отнести методы синтеза стержневых механизмов по заданным условиям, в частности по различному числу положений.

Как мне представляется, особого внимания заслуживает метод аналитического определения координат круговых точек и центров по четырем заданным положениям шатуна. Имея в виду, что все расчеты можно и, по-видимому, нужно производить на цифровых вычислительных машинах, можно утверждать, что предложенный метод позволяет исключить те трудности, которые возникают обычно при построении кривых Бурмейстера методами кинематической и проективной геометрии.

В процессе редактирования сохранены стиль и особенности изложения. В то же время редактор счел необходимым в отдельных местах сделать замечания, поясняющие или дополняющие изложение автора.

С. Н. Кожевников

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Основные понятия

Слова *механизм* и *машина* часто употребляют как синонимы для обозначения таких технических устройств, характерной особенностью которых является механическое движение. В данной книге эти слова будем употреблять в отличительных значениях.

Условимся, что *механизмом* является система твердых и деформируемых тел, которая предназначена для реализации требуемых движений и передачи сил.

С точки зрения механики механизм является *связанной механической системой*. Однако не каждая такая система является механизмом. Связанных механических систем в природе огромное количество и их строение очень различно. Примерами применяемых в технике связанных механических систем являются различные технические устройства: сооружения, приборы, приспособления, машины, автоматизированные поточные линии и т. п.

В соответствии с вышеприведенным многие технические устройства, например, машины, по своему строению и принципу работы являются механизмами и комплексами механизмов. В некоторых технических устройствах механизмами являются составные части этих устройств.

Понятие механизма не имеет тесной связи с применением того технического устройства, в состав которого входит данный механизм. Один и тот же механизм может быть использован во многих отличающихся друг от друга технических устройствах.

Понятие машины имеет самую тесную связь с ее применением. *Машиной* является техническое устройство, которое предназначено для механизации какого-либо процесса. В зависимости от вида механизированного процесса выделяем энергетические, технологические, транспортные, контрольные, управляющие, а также логические машины.

Энергетические машины разделяются на силовые машины (или машины-двигатели) и трансформирующие машины. Силовые машины энергию разного вида (термическую, электрическую) преобразуют в механическую энергию или механическую энергию какой-то среды (воды, воздуха), преобразуют в практически применяемую механическую энергию.

Трансформирующие машины механическую энергию преобразуют в какой-то другой вид энергии (электрогенератор) или изменяют форму механической энергии (компрессор, который сжимает воздух для питания пневматических машин).

Объединение двигателя с машиной — потребителем механической энергии — называют *машинным агрегатом*.

Технологические машины, в которых необходимые операции выполняют механизмы, а контроль и управление — человек, называются *полуавтоматами*. *Автоматом* называется машина, механизмы которой выполняют межоперационный контроль параметров технологического процесса, реагируют на их отклонения от нормы и соответственно корректируют режим работы машины, а также, если необходимо, останавливают машину. Комплексы машин с подобными автоматическими свойствами называются *автоматическими поточными линиями*.

В кибернетике, которая исследует законы протекания самых разнообразных процессов, машиной называется система, способная двигаться к определенной цели.

Для иллюстрации понятий *механизации* и *автоматизации* приведена табл. 1, согласно которой внедрение машины А

Таблица 1

Устройство	Энергию для совершения операции дает	Энергию для контроля и управления дает	Путь к цели, в зависимости от обстоятельств, выбирает	Цель определяет	Пример
Орудие Машина А	человек человек или животное	человек »	человек »	человек »	коса ручная косилка конной тяги
Машина 1	машина	»	»	»	косилка тракторной тяги
Машина 2	»	машина	»	»	паровая машина
Машина 3	»	»	машина	»	управляемая с помощью ЭВМ автоматическая поточная линия

является малой механизацией, внедрение машины 1 — механизацией, внедрение машины 2 — автоматизацией, внедрение машины 3 — комплексной автоматизацией. Некоторые процессы, например точение, можно реализовать только механизированным путем.

Машины являются важным компонентом производительных сил общества. При длительной физической работе человек может развить мощность примерно 0,1 л. с., а мощность работающих в сельском хозяйстве Латвии двигателей на одного рабочего примерно в 170 раз больше. Этот пример характеризует огромное общественное значение машинной техники.

§ 2. Характеристика курса теории механизмов и машин

Теория механизмов и машин является наукой, объединяющей методы исследования и конструирования машин. Общее свойство всех машин то, что они или являются простыми механизмами, или состоят из ряда механизмов. Отсюда вытекают главные задачи курса теории механизмов и машин:

1) *анализ механизмов*, т. е. исследование структуры, кинематики и динамики известных или проектируемых механизмов с целью их усовершенствования и улучшения их эксплуатационных качеств, а также с целью получения данных для прочностных и технологических расчетов;

2) *синтез механизмов*, т. е. разработка новых, соответствующих заданным требованиям механизмов.

Синтез механизмов сложнее и менее разработан, чем анализ. Однако полученные при анализе выводы помогают решать задачи синтеза.

Теорию механизмов и машин иногда называют *алгеброй машиностроения*. Это — самая общая наука, которая дает теоретические основы исследования и конструирования машин. Так как механизмы имеются не только в машинах, то данный курс относится также к приборам, приспособлениям, инструментам, сооружениям и другим техническим устройствам.

Машины и другие технические устройства в связи с их применением рассматриваются в специальных курсах (двигатели внутреннего сгорания, сельскохозяйственные машины, металлообрабатывающие станки и др.).

Очень тесные связи теория механизмов и машин имеет с теоретической механикой, от которой она отделилась в ходе исторического развития. Вначале эта наука называлась прикладной механикой. В настоящее время теорию механизмов и машин часто называют *механикой машин*.

§ 3. Историческое развитие теории механизмов и машин

Историю теории механизмов и машин можно разделить на четыре периода, конечные рубежи которых следующие: для I периода — начало XIX века, для II периода — середина XIX века, для III периода — II половина XIX века и начало XX века, для IV периода — настоящее время.

I период. Теория механизмов и машин могла появиться тогда, когда в результате творческого труда многих поколений изобретателей человечество имело уже определенное множество механизмов, и интересы общества требовали развития машиностроения. До этого прошло больше чем две тысячи лет. Этот период можно назвать *предысторией механики машин* или *периодом эмпирического машиностроения*.

Первые, изготовленные из дерева, кожи и волокна машины предназначались главным образом для переноса и преобразова-

ния сил. Поэтому Архимед (III столетие до нашей эры) считал, что машины состоят из «простых машин», т. е. из рычагов, винтов, клиньев, блоков и лебедок. Подъемные устройства, механизмы мельниц и камнебросающие механизмы описал римлянин Витрувий (I столетие до нашей эры).

В условиях феодализма техника машин развивалась медленно. Механизм часов был изобретен в X столетии. Печатание книг в Китае началось в XI столетии, а в Европе — в XV столетии. Начиная с XIII столетия темпы развития техники повысились, особенно в северной части Италии.

Леонардо да Винчи (1452—1519) сконструировал много новых машин и механизмов. Врач из Милана — Кардано (1501—1576) дал определение передаточного числа зубчатой передачи. В XV столетии в Москве были построены большие сложные механизмы часов. В XVII столетии в России энергию воды использовали не только для мельниц, но также для привода следующих механизмов: мехов, ковочных молотов, возвратно-поступательно движущихся пил и больших сверл при изготовлении пушек.

В конце XVII столетия французский врач Папен изобрел паровую машину для привода водяных насосов. В период с 1712 г. по 1725 г. русский инженер Нартов изобрел ряд копировальных станков, снабженных суппортами.

В 1735 г. англичанин Вайет изобрел ткацкий станок, который приводился в действие животным. К. Маркс считал, что с изобретением этой машины началась промышленная революция XVIII века. Ньюкомен (1711), Ползунов (1763), Уатт (1765) и другие упорно продолжали усовершенствование паровой машины.

В 1782 г. Уатт получил патент на паровую машину двойного действия, которая вскоре стала универсальным двигателем. Началось быстрое развитие машинной техники.

В XVIII столетии в Западной Европе и в России были организованы первые училища военных, горных и строительных инженеров, в которых машины рассматривались в курсе механики. В 1724 г. в Лейпциге вышла из печати большая работа Лоупольда (1674—1727) «Театр машин». В 1675 г. датский астроном Ремер предложил использовать циклоиды для профилей зубьев зубчатых колес часовых механизмов. Теорию эвольвентного зацепления и проблемы динамики машин рассматривал Эйлер (1707—1783), член Петербургской академии наук.

Долго главным принципом расчета движения машин было так называемое «золотое правило механики» (что выигрываем в силе, то теряем в скорости). В конце XVIII столетия Карно (1753—1823) пришел к понятию механической работы и к уравнению движения машины в форме теоремы об изменении кинетической энергии. На основе исследований Амонтона (1683—1705) и Кулона (1736—1806) в первом приближении выяснились законы трения.

II период. Первая половина XIX столетия является началом развития теории механизмов и машин. Новая республика Франции заботилась о подготовке инженерных кадров. В 1794 г. в Париже была основана Политехническая школа, в которой с 1808 года начался курс лекций по теории механизмов и машин. Этот курс был подготовлен долголетним трудом Монжа (1746—1818) и его сотрудников Ашета, Ланца и Бетанкура (1758—1824). Курс уже не содержал теорию «простых машин», а механизмы — «элементарные машины» — были систематизированы по их функциям преобразования движений; в числе механизмов рассматривались и механизмы с деформирующимися элементами.

Испанский инженер русской службы Бетанкур последние 17 лет своей жизни работал в Петербурге, главным образом в основанном в 1809 г. Институте корпуса дорожных инженеров путей сообщения, в котором он в 1811 г. начал читать теорию механизмов и машин. Первый оригинальный учебник в России по механике машин опубликовал в 1823 г. профессор Петербургского университета Д. С. Чижов (1785—1853).

В первой половине XIX столетия механика машин в основном развивалась во Франции, хотя уровень развития техники был выше в Англии. В 1818—1820 гг. в Париже появился курс механики машин Борньи в восьми томах, а в 1822 г. — трехтомная работа Кристиана. В этой работе термин «механизм» уже употребляется в современном смысле. В 1829 г. Кориолис (1792—1843) опубликовал работу «Расчет движения машин», в которой уже широко было использовано понятие механической работы. Понселе (1788—1867) исследовал силы инерции в машинах, разработал основы теории регулирования и применения маховика. В 1849 г. Лабуле опубликовал курс теории механизмов, в котором уже приводится понятие о кинематической паре. В разработке основ кинематической геометрии успехов добились Савари (1797—1841) и Шаль (1793—1880). Оливье (1793—1858) исследовал пространственные зацепления.

Пока во Франции создавались основы механики машин, в Англии уже конструировали металлорежущие станки, гидравлический пресс, паровой молот, дерево-строгальный станок, винтонарезные и зуборезные станки и много других машин и приспособлений. В подготовке инженерных кадров Англия отставала от Франции и России: на первой мировой выставке (1851) изделия Англии получили почти все медали, а на второй мировой выставке (1867) — лишь небольшую часть. Первые технические кафедры в Лондонском университете образовались только в 1841 г. В том же году вышел из печати труд Виллиса (1800—1875) «Принципы механизмов».

В Германии учебники механизмов в трех томах с 1845 г. по 1854 г. опубликовал Вейсбах (1806—1861).

Большая роль в создании русской школы механики машин принадлежит выдающемуся Петербургскому математику и механику Остроградскому (1801—1862). Два учебника по механике

машин в первой половине XIX столетия написал его ученик Ястржембский (1808—1872). В Московском университете лекции по математике и механике читал Брашман (1796—1866). Знаменитый курс механики его ученика Ершова (1818—1867) вышел из печати в 1854 г. Высказанные в нем идеи развили дальше ученые Московского технического училища.

III период. Вторая половина XIX столетия и начало XX столетия являются периодом фундаментальных достижений теории механизмов и машин, в которых самыми результативными были русские и немецкие ученые.

Петербургский математик и механик Чебышев (1821—1894) в результате выдающихся исследований разработал основы структурной теории, теории шарнирных механизмов и основы аналитического синтеза механизмов. Он сконструировал много интересных механизмов и в 1869 г. опубликовал структурную формулу плоских механизмов. Математические основы регулирования машин разработал Вышнеградский (1831—1895), а основы теории гидродинамической смазки — Петров (1836—1920); оба они были учениками Остроградского. В 1887 г. Сомов (1852—1919) опубликовал первую универсальную структурную формулу. Гохман *) (1851—1916) впервые предложил классификацию кинематических пар по числу наложенных связей. В его публикации в 1889 г. дана математическая зависимость между числом кинематических пар, звеньев и числом замкнутых контуров механизмов.

Особое признание получила книга немецкого ученого Рело (1829—1905) «Теоретическая кинематика», которая вышла из печати в Брауншвейге в 1875 г. и в которой даны понятия кинематической пары и кинематической цепи, а также рассматриваются некоторые другие, примененные позже в теории механизмов понятия. Деформируемые элементы Рело считает звеньями механизма. Дальнейшее развитие идей Рело принадлежит Грасгофу (1826—1893) и другим ученым. Грюблер (1851—1935), который с 1886 по 1896 г. был профессором Рижского политехнического института, опубликовал в 1883 г. структурную формулу плоских механизмов. Работы Чебышева тогда были мало известны. Поэтому продолжительное время формула Грюблера была принята как исторически первая структурная формула. Метод планов скоростей и ускорений разработали Мор (1835—1918) и Мемке (1857—1944). Теоретические основы геометрического синтеза механизмов разработал видный немецкий ученый Бурместер (1840—1927), а основы графической динамики — Виттенбауэр (1857—1922).

В Англии своими работами признание получили Кейли (1821—1895), Сильвестр (1814—1897), Кемпе (1849—1922), Робертс (1827—1913). Идеи Рело в 1886 г. популяризировал Кенеди (1847—1928) в книге «Механика машин».

*) Работа Гохмана выполнена после опубликования труда Рело и является существенным развитием его идей.— *Прим. ред.*

Большой вклад в гидромеханику и в теорию механизмов внес «отец русской авиации» Жуковский (1847—1921), а в кинематику механизмов и в динамику машин — Мерцалов (1866—1948). Оба они являлись профессорами Московского высшего технического училища. В годы первой мировой войны рациональные идеи структурной теории и классификации механизмов предложил петроградский профессор Ассур (1878—1920).

IV период. После Великой Октябрьской социалистической революции стремительное развитие науки началось в Советском Союзе. Вскоре появились многие учебники по механике машин, например, книга автора второй универсальной структурной формулы А. Малышева (1879—1962) «Кинематика механизмов» (1933)*. В сельскохозяйственной технике и в теории механизмов значительными были труды В. Горячкина (1868—1935). Учеником Горячкина и Мерцалова являлся виднейший специалист нашей страны по теории механизмов и машин академик И. П. Артоболевский. Под его руководством работал Семинар по теории механизмов и машин, публикации которого хорошо известны во всем мире.

Исследования советских ученых характеризуются высоким математическим уровнем. Исследования охватывают все отрасли теории механизмов и машин, которые частично отражены в данной книге. Все шире в исследованиях учитываются реальные свойства механизмов, в расчетах все шире применяются ЭВМ. Ценных результатов в научных исследованиях и в педагогической деятельности достигли: И. Артоболевский (1905—1977), С. Артоболевский (1908—1964), Г. Баранов (1899—1968), А. Бессонов, А. Боголюбов, Н. Бруевич, В. Гавриленко (1899—1977), Я. Геронимус, Ф. Диментберг, В. Добровольский (1880—1957), Вяч. Зиновьев (1899—1975), Х. Кетов (1887—1948), С. Кожевников, Н. Колчин (1894—1975), Н. Левитский, М. Новиков (1915—1956), Л. Петрокас (1909—1982), К. Рагульскис, Н. Раевский (1892—1973), Л. Решетов, С. Черкудинов, В. Юдин (1905—1975) и многие другие советские ученые.

Из зарубежных ученых своими исследованиями в области теории механизмов и машин получили известность Х. Альт (1899—1954), Г. Бегельзак, Р. Бейер (1892—1960), Я. Денавит, Р. Краус, Ф. Кросли, В. Лихтенхельдт, К. Лук, Мейер цур Капеллен, А. Морецкий, Я. Мюллер, Я. Одерфельд, В. Ресснер, В. Росс, Х. Ротбарт, Э. Терплан, Я. Фолмер, Ф. Фрейденштейн, К. Хайн, Р. Хартенберг и многие другие.

В 1969 г. образовалась международная федерация специалистов по теории механизмов и машин (ИФТОММ), президентом которой был избран академик И. Артоболевский. Таким образом, советские ученые получили заслуженное признание.

*) Вопросы, касающиеся структуры механизмов, рассмотрены А. П. Малышевым в сочинениях: Прикладная механика, в. 1. Структура и синтез механизмов.— Томск, 1923; Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры.— Томск, 1929.— *Прим. ред.*

СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Структуру механизмов необходимо освоить, чтобы получить возможность:

- 1) понять законы строения и работу механизмов;
- 2) судить о технологичности конструкций механизмов и их эксплуатационных свойствах;
- 3) использовать аналогичные методы анализа и синтеза для родственных групп механизмов;
- 4) систематизировать механизмы и с помощью классификации охватить все огромное количество механизмов.

Раздел 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ

§ 1.1. Составные части механизма

Составные части механизма называются *элементами механизма*.

Чтобы механизм мог производить требуемые движения и передавать необходимые силы, по крайней мере несколько его элементов должны иметь достаточную жесткость, т. е. должны быть твердыми телами. Входящие в механизм главные твердые тела, образующие между собой подвижные соединения, называются *звеньями механизма*.

Звенья являются главными элементами механизма, без которых механизм невозможен.

Необязательно, чтобы звенья были монолитными твердыми телами; обычно звено состоит из нескольких неподвижно соединенных элементов или *деталей*. Все детали звена движутся вместе как одно твердое тело. Подвижные соединения ограничивают относительные перемещения звеньев, позволяя только такие движения, какие необходимы для функционирования механизма. Поэтому через подвижные соединения, называемые кинематическими парами, можно передавать силы от одного звена к другому.

Иногда звенья, соединенные данным подвижным соединением, непосредственно не соприкасаются. Тела, которые находятся между звеньями подвижного соединения и передают силы от

одного звена к другому, называются *промежуточными элементами* (шарики, ролики), а само соединение называют *кинематическим соединением*.

Пружины в основном используются не для передачи сил в подвижном соединении, а для замыкания подвижного соединения, т. е. для получения такой силы, которая обеспечивает нормальную работу подвижного соединения, прижимая звенья соединения друг к другу и сохраняя контакт промежуточных элементов со звеньями. Такие пружины, так же как буфера для смягчения ударов и смазочные материалы для уменьшения трения, называют *дополнительными элементами*.

Звено механизма, которое принимается как неподвижное, называется *стойкой* или *станиной*.

Пример 1.1. Механизм прибора для измерения какой-то физической величины показан на рис. 1.1. Датчик физической величины (на рисунке не показан) воздействует на звено 1, заставляя его перемещаться возвратно-поступательно. Звено 1 со станиной 4 образует подвижное соединение 14.

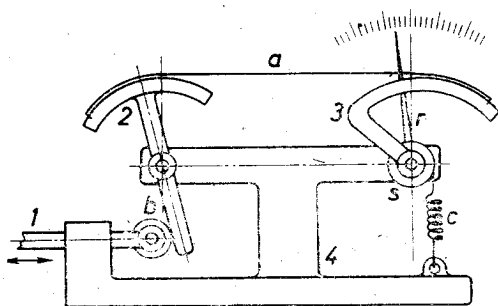


Рис. 1.1.

называемое поступательной парой. Звено 1 через промежуточный элемент — ролик *b* — воздействует на звено 2, которое со станиной имеет подвижное соединение 24, называемое шарниром. Звено 2 через промежуточный элемент — гибкую связь *a* — воздействует на звено 3, поворачивая его вокруг неподвижной оси шарнира 34.

Для замыкания подвижных соединений 23 и 12 служит пружина *c*, которая в данном случае является дополнительным элементом. Шкив 5 пружины *c* и стрелка *r* прибора являются деталями звена 3. Кривизна рабочей поверхности звена 3 подобрана так, чтобы шкала прибора имела равномерные деления, хотя датчик перемещает звено 1 непропорционально изменению измеряемой физической величины.

§ 1.2. Подвижные соединения

Чтобы разобраться в механизме, необходимо очень внимательно проанализировать подвижные соединения данного механизма. Все главные свойства механизма зависят от подвижных соединений.

Сначала рассмотрим подвижные соединения, звенья которых непосредственно соприкасаются. Такие подвижные соединения без промежуточных элементов называют *кинематическими па-*

рами. Поверхности, линии и точки, по которым соприкасаются звенья, называются *элементами кинематической пары*. При этом принято, что звенья являются абсолютно твердыми и абсолютно точными.

Кинематические пары, элементами которых являются поверхности, называют *низшими кинематическими парами*. Если звенья соприкасаются по линиям и точкам, то *кинематические пары* называют *высшими* *).

Низшие кинематические пары позволяют передавать большие усилия, более технологичны и меньше изнашиваются, чем высшие кинематические пары.

Известны три кривые, имеющие во всех точках одинаковые радиусы кривизны и кручения: прямая, окружность и простая винтовая линия. Эти кривые обладают важным свойством: отрезок кривой можно переместить по самой кривой. Поэтому возможно конструировать низшие кинематические пары, выбирая для этой цели поверхности, которые состоят из соответствующих этим кривым элементов площади. Такими поверхностями являются плоскость, круглый цилиндр, поверхности шара и винта.

Возможно образование шести различных кинематических пар. Названия этих пар, соответственно рис. 1.2, следующие: *a* — шарнир или *вращательная пара* (цилиндрический шарнир);

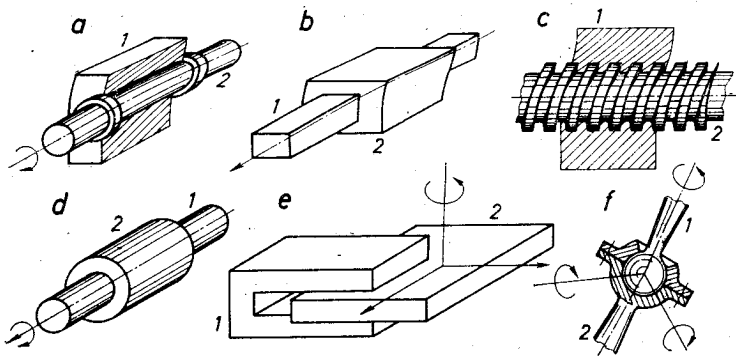


Рис. 1.2.

b — *поступательная пара*, *c* — *винтовая пара*, *d* — *цилиндрическая пара*, *e* — *плоскостная пара*, *f* — *шаровая пара* (сферический шарнир).

Число высших кинематических пар неограниченное. Некоторые из них показаны на рис. 1.3 и 1.4. С помощью высших кинематических пар можно получить огромное множество вариантов разных относительных движений двух звеньев. Из-за зна-

*) Разделение кинематических пар на низшие и высшие дано Рело. Более правильно было бы разделить кинематические пары по характеру контакта их элементов, а именно на *поверхностные*, *линейчатые* и *точечные*. — *Прим. ред.*

чительных контактных напряжений рабочие поверхности высших пар необходимо тщательно механически и термически обрабатывать.

Кинематическая пара существует, если ее элементы действительно соприкасаются, т. е. если она замкнута. Существуют два вида замыкания кинематических пар — *силовое замыкание* и

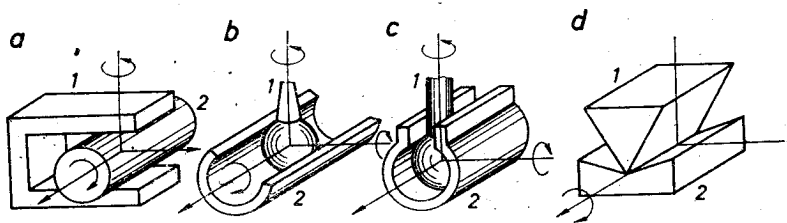


Рис. 1.3.

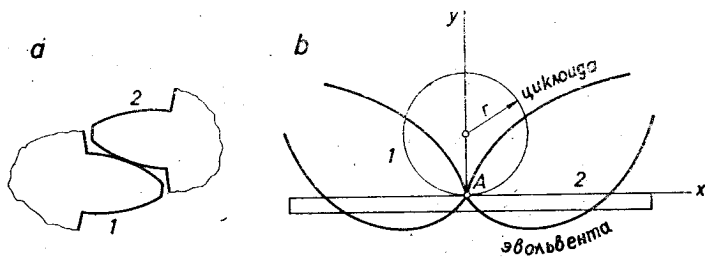


Рис. 1.4.

геометрическое замыкание. Элементы геометрически замкнутой пары не могут отделяться друг от друга из-за конструктивных особенностей. Все представленные на рис. 1.2 пары показаны в геометрически замкнутом исполнении. Такими являются также пары *a*, *b*, *c* на рис. 1.3, а пара *d* должна замыкаться с помощью силы тяжести, силы упругости пружины или какой-либо другой силы.

Геометрически замкнутые пары разделяются на *самостоятельно* и *несамостоятельно замкнутые*. Самостоятельно замкнутая пара выполнена так, что элементы самой пары полностью обеспечивают соприкосновение обоих звеньев. При геометрическом замыкании несамостоятельно замкнутых пар принимают участие также другие подвижные соединения. Примером несамостоятельно замкнутой пары является пара *a* зацепления зубчатой передачи (рис. 1.4).

Если кинематическая пара допускает одинаковые относительные траектории точек обоих звеньев, то эту пару называют *обратимой*. Элементы обратимой кинематической пары конструктор может обменять между звеньями, не изменяя при этом относительного движения звеньев. Обратимыми являются все низшие кинематические пары. О высших парах этого в общем

случае нельзя сказать. Так, например, если в паре *b*, показанной на рис. 1.4, цилиндр 1 без скольжения катится по плоскости 2, то траекторией точки *A* цилиндра относительно плоскости является циклоида, а траектория точки *A* плоскости при ее движении относительно цилиндра является эвольвентой. Поэтому данная фрикционная пара необратима.

Главным свойством кинематической пары является то относительное движение, которое пара позволяет своим звеньям. Так, например, шарнир позволяет образующим его звеньям совершать только относительное вращение вокруг общей оси. Поэтому шарнирами следует назвать также обе пары, показанные

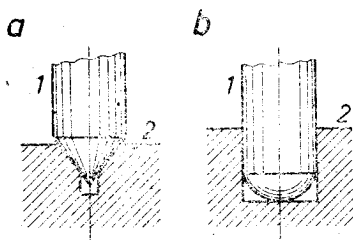


Рис. 1.5.

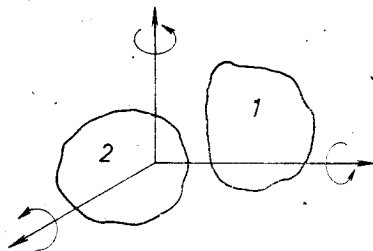


Рис. 1.6.

на рис. 1.5. Вторая из них, кроме поверхностного соприкосновения, имеет также соприкосновение в точке.

Подвижные соединения можно разделить на группы по числу возможных независимых подвижностей. *Подвижностями* или *степенями свободы* называют поступательные и вращательные компоненты относительного движения, которые возможны при движении одного звена пары относительно другого.

Если с одним звеном подвижного соединения, например, со звеном 2 (рис. 1.6) связать прямоугольную систему координат, то каждую из подвижностей звена 1 в движении относительно звена 2 можно представить как поступательное или вращательное движение вдоль или вокруг одной из координатных осей. Каждая подвижность должна быть независимой, т. е. выполняться отдельно, без возникновения каких-то других движений. Если бы звено 1 в движении относительно звена 2 было бы свободным, то число подвижностей f такого необыкновенного соединения было бы $f=6$. Эти подвижности — три вращения и три поступательных перемещения — показаны стрелками на рис. 1.6.

Если $f < 6$, то подвижное соединение налагает на относительное движение s ограничений или s связей. Для каждого подвижного соединения всегда

$$s + f = 6. \tag{1.1}$$

Число наложенных подвижным соединением связей принято считать номером *класса соединения*.

Таким образом, можно образовать пять классов подвижных соединений: V, IV, III, II, I, которым соответствуют число наложенных соединений связей $s = 5, 4, 3, 2, 1$ и число подвижностей соединения $f = 1, 2, 3, 4, 5$.

Шарнир, поступательная пара и винтовая пара являются единственными низшими одноподвижными парами, т. е. они являются кинематическими парами V класса. На первый взгляд кажется, что винтовая пара имеет две подвижности, потому что допускает как вращение, так и поступательное перемещение. Однако между поступательным перемещением z и углом поворота φ существует зависимость

$$\frac{z}{\varphi} = \frac{h}{2\pi}, \quad (1.2)$$

где h — шаг винта.

Упомянутые две подвижности независимы в цилиндрической паре, которая действительно двухподвижная, т. е. пара IV класса. Плоскостная и шаровая пары являются трехподвижными, т. е. парами III класса. Подвижности кинематических пар показаны стрелками*) на рис. 1.2 и 1.3. Таким образом, высшие пары a и b на рис. 1.3 — четырехподвижные, т. е. пары II класса, c — трехподвижная, т. е. пара III класса, d — двухподвижная, т. е. пара IV класса.

Пара зацепления a на рис. 1.4 является парой II класса, если зубья соприкасаются по прямой, но I класса, если зубья бочкообразны или имеет место перекося осей колес. Таким образом, в первом случае правильность зацепления зависит от параллельности осей зубчатых колес. Фрикционная пара b на рис. 1.4 является высшей парой V класса, если силы трения обеспечивают чистое качение, т. е. когда поступательное перемещение в направлении качения и вращение связаны уравнением**)

$$x = r\varphi. \quad (1.3)$$

Отметим очень важное обстоятельство: число наложенных подвижным соединением связей (номер класса) равняется числу независимых компонент реакций — сил и моментов (пар сил), которые одно звено соединения может передать другому звену. Каждой компоненте поступательного перемещения, устраненной с помощью связи, соответствует компонента реакции связи, направленной параллельно соответствующей оси, а каждому устраненному вращению — компонента момента реакции вокруг соответствующей оси. Таким образом, каждая связь позволяет передать через подвижное соединение одну силу или один мо-

*) В обозначении поступательных перемещений автором допущены отступления от ГОСТ 2.721—74.— *Прим. ред.*

**) Чистое качение цилиндра по плоскости можно обеспечить при помощи гибких нерастяжимых лент, огибающих в противоположных направлениях цилиндр. При этом один из концов каждой ленты закреплен на цилиндре, а второй на плоскости.— *Прим. ред.*

мент. Так, например, шарнир позволяет передать три компонента силы и две компоненты момента, поступательная пара — три компонента момента и две компоненты силы, шаровая пара — три компонента силы, и т. д.

Условимся, что между двумя звеньями может быть только одно подвижное соединение. Это значит, что могут существовать разветвленные соединения. Примеры шарниров, имеющих две ветки: вал на двух подшипниках, петли дверей.

Обычно подвижные соединения являются *однократными*, т. е. они образуются только двумя звеньями. Однако возможны также многократные соединения. Примером является показанный на рис. 1.7 двухкратный шарнир, который образует тремя

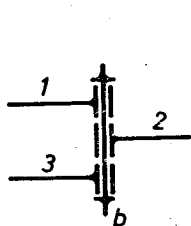


Рис. 1.7.

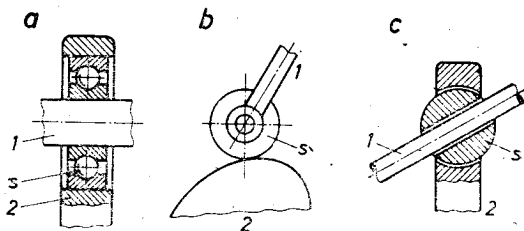


Рис. 1.8.

звеньями. Такой шарнир обычно имеет промежуточный элемент — болт *b*.

Очень широко используются в практике *подвижные соединения с твердыми промежуточными элементами*. Несколько примеров соединений такого типа показаны на рис. 1.8: *a* — радиальный шариковый подшипник (V класс); *b* — соединение с роликом, которое служит для уменьшения трения в высшей паре (II класс, если соприкосновение по прямой; I класс, если соприкосновение в точке); *c* — соединение, имеющее одинаковую подвижность с высшей парой *b* на рис. 1.3 (дополнительную подвижность шарообразного промежуточного элемента *s* не учитываем). Последний пример показывает, что с помощью твердых промежуточных элементов некоторые высшие пары можно преобразовать в подвижные соединения с

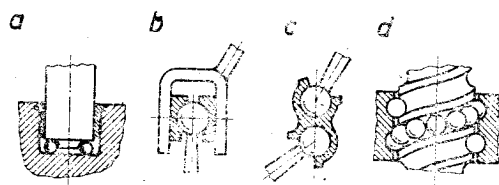


Рис. 1.9.

поверхностным соприкосновением, уменьшая таким образом трение. Аналогичными примерами служат соединения *b* и *c* на рис. 1.9.

Сравнительно большое трение в винтовой паре можно уменьшить с помощью шариков. В этом случае для шариков соединения *d* (рис. 1.9) необходимо сделать обводной канал, по кото-

рому шарики могут сходиться с витков на одном конце гайки и возвращаться в витки на другом конце. Соединения *a* и *d* на рис. 1.9 V класса, а *b* и *c* — I класса.

Подвижные соединения с упругими промежуточными элементами показаны на рис. 1.10 и 1.11. Соединение *a* (рис. 1.10) имеет такие же подвижности, как высшая пара *b* (рис. 1.3).

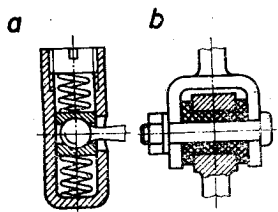


Рис. 1.10.

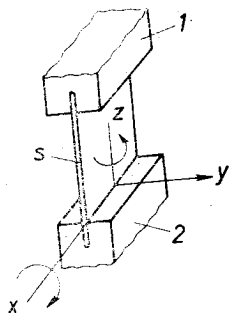


Рис. 1.11.

Однако предварительно сжатые пружины позволяют переносить аксиальные силы желаемой величины. Если силы слишком велики, пружины, деформируясь, предохраняют механизм от перегрузок. Таким образом, до определенного предела такое соединение действует как шаровая пара. Соединение *b* (рис. 1.10) является широко распространенным соединением с резиновыми втулками.

Звенья 1 и 2 (рис. 1.11) соединены упругой стальной лентой *s*. Такое соединение передает силы вдоль осей *x* и *z* и момент вокруг оси *y*.

Подвижностями этого соединения являются перемещение вдоль оси *y* и вращения вокруг осей *x* и *z*. Таким образом, как силовой, так и кинематический анализ дает один и тот же результат: данное соединение относится к III классу.

Подвижные соединения с гибкими промежуточными элементами давно применяются в машинах, в подъемных устройствах, в приборах. В приборе, показанном на рис. 1.1, подвижное соединение 23 является соединением I класса, так как промежуточный элемент *a* (тонкий тросик) на относительное движение соединяемых звеньев может наложить только одну связь. Эта связь выражается как определенная зависимость между углами поворота звеньев 2 и 3.

Подобную связь между шкивами реализует ремень *s* (рис. 1.12). Если ремень тонкий, длинный и гибкий, то эту связь можно считать единственной. Если же ремень короткий, широкий и негибкий, или вместо ремня поставлена стальная лента, то гибкий промежуточный элемент *s* накладывает еще две связи, обеспечивая весьма точное расстояние между осями шкивов 1 и 2 и параллельность этих осей. Заметим, что эти

связи повторяются, так как они уже наложены с помощью шарниров 13 и 23.

Подвижные соединения с жидким промежуточным элементом встречаются реже, так как жидкость не всегда играет роль промежуточного элемента. В гидромеханизме объемного типа, показанном на рис. 1.12, масло позволяет передать силу от одного поршня на другой и весьма точно определяет их относительное

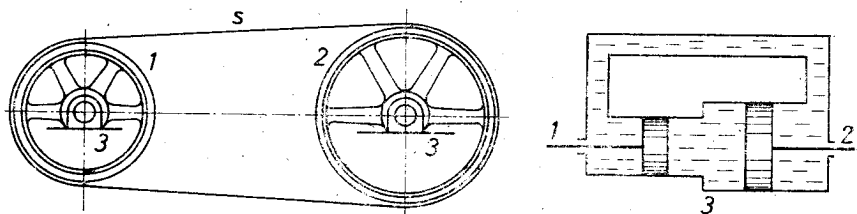


Рис. 1.12.

движение. В подвижных соединениях с гибкими и жидкими промежуточными элементами соединенные звенья могут находиться сравнительно далеко друг от друга.

Гибкие звенья — ремни, цепи, канаты, так же как и жидкость в замкнутом поршнями объеме (рис. 1.12); можно рассматривать как кинематические связи, устанавливающие вполне определенное соотношение между перемещениями звеньев, связываемых ими. Кинематическая связь эквивалентна кинематической паре I класса.

В этом обзоре были рассмотрены подвижные соединения пяти различных типов.

Может возникнуть вопрос: возможны ли также соединения шестого и нулевого класса? Да, возможны: их примеры показаны на рис. 1.13.

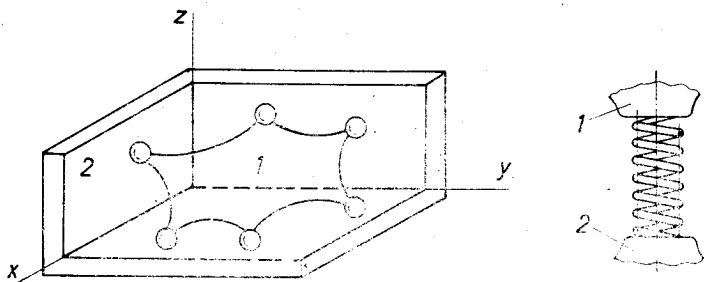


Рис. 1.13.

Неподвижные соединения звеньев являются статически определенными. Если тела 1 и 2 на рис. 1.13 соприкасаются в трех точках в плоскости xy , в двух точках в плоскости yz и в одной точке в плоскости xz , то, игнорируя трение, все шесть реакций

(сил, действующих между телами) можно рассчитать с помощью уравнений равновесия тела 1.

Если ликвидируем точку соприкосновения в плоскости xz , получим высшую поступательную пару с подвижностью в направлении оси y . Если ликвидируем точки соприкосновения в плоскостях xz и yz , пара 12 преобразуется в точечную пару с тремя подвижностями, как и в плоскостной паре. Отсюда видно, что класс точечной пары определяется числом точек соприкосновения звеньев. Пару 12 можно рассматривать как разветвленную пару, каждая ветвь которой является парой I класса.

Подвижное соединение нулевого класса называется *динамическим соединением*. Оно позволяет передавать силы определенной величины и направления, не ограничивая перемещения. Если, например, два свободных тела соединяем с помощью пружины, то получаем динамическое соединение.

§ 1.3. Кинематические цепи

Кинематической цепью называется совокупность звеньев, образующих подвижные соединения.

Число подвижных соединений одного звена обозначаем α . Звенья, у которых $\alpha = 1$, называют *полуповодками* (свободно вращающийся шкив, педаль велосипеда), а звенья, у которых $\alpha = 2$, — *двухпарными* или *поводками*. Звенья, у которых $\alpha > 2$, называют *многопарными* или *базисными звеньями*. В схемах

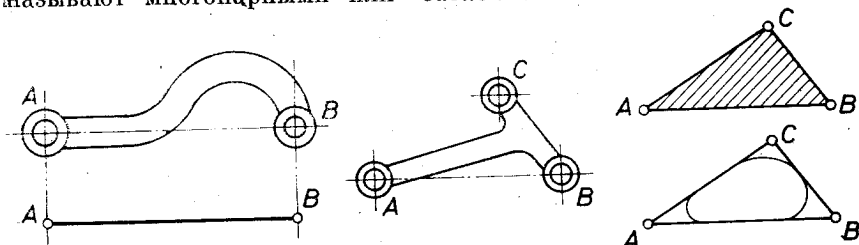


Рис. 1.14.

кинематических цепей полуповодки и поводки изображают отрезками прямых, а базисные звенья — треугольниками, четырехугольниками и т. д. (рис. 1.14).

Если, исследуя кинематические цепи, интересуются их общими свойствами, то в таких исследованиях используют *структурные схемы* кинематических цепей. Многократные соединения обычно изображаются как однократные, например, двойной шарнир в виде двух простых шарниров.

Цепи, состоящие только из поводков и полуповодков, называются *простыми цепями*. Они могут быть *открытые* (а) и *замкнутые* (b) (рис. 1.15).

Цепи, содержащие базисные звенья, называются *сложными цепями*; они могут быть: *a* — открытыми, *b* — полуоткрытыми, *c* — полузамкнутыми, *d* — замкнутыми (рис. 1.16).

Для всех упомянутых кинематических цепей (без разрывов и без внешних соединений) пригодна *главная геометрическая зависимость*

$$p = n + k - 1, \quad (1.4)$$

где *p* — число подвижных соединений (каждое многократное соединение нужно считать столько раз, какова его кратность), *n* — число звеньев, *k* — число замкнутых контуров.

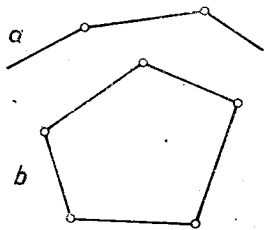


Рис. 1.15.

Действительно, как видно из рис. 1.15, для простых цепей формула (1.4) пригодна, так как для простой открытой цепи $p = n - 1$, а для замкнутой цепи $p = n$. Сложные цепи можно получить из простых, присоединяя новые звенья и образуя новые соединения. Ни одна из этих операций не нарушает зависимость (1.4), так как при увеличении *p* на одну единицу в первом случае увеличивается *n*, а во втором — *k* также на единицу.

По предложению Г. Баранова [6] класс кинематической цепи принимают равным числу ее замкнутых контуров *k*.

Базисные звенья называются треугольниками, четырехугольниками и т. д., т. е. α -угольниками. Для кинематических цепей, очевидно, действительны следующие формулы:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{\alpha_{\max}} = n, \quad (1.5)$$

$$\dots n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + \alpha_{\max} n_{\alpha_{\max}} = 2p, \quad (1.6)$$

где n_1 — число полуповодков, n_2 — число поводков, n_3 — число треугольников и т. д.

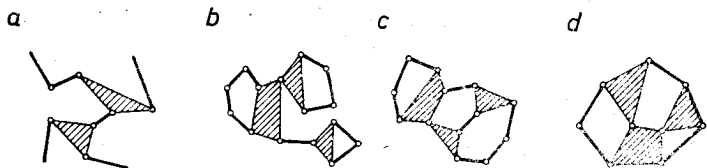


Рис. 1.16.

Формула (1.6) выражает число элементов подвижных соединений звеньев цепи. Подставляя в формулу (1.4) величины *p* и *n* из формул (1.6) и (1.5), получаем уравнение базисных звеньев

$$n_3 + 2n_4 + \dots + (\alpha_{\max} - 2)n_{\alpha_{\max}} = 2(k - 1) + n_1, \quad (1.7)$$

где для замкнутых цепей $n_1 = 0$ и $\alpha_{\max} \leq k + 1$, полузамкнутых цепей $n_1 = 0$ и $\alpha_{\max} \leq 2k$, полуоткрытых цепей $n_1 = 0$ и $\alpha_{\max} \leq 2k - 1$, а для открытых цепей $k = 0$ и $\alpha_{\max} \leq n_1$.

Можно доказать, что число нечетно-угловых базисных звеньев в неоткрытых кинематических цепях всегда четное [63]. В этих цепях, обходя все контуры и периферию цепи по одному разу, каждое соединение встречаем два раза. Поэтому

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k + \gamma_{k+1} = 2p, \quad (1.8)$$

где γ_i — число сторон соответствующих контуров и сторон периферии.

Для анализа общих свойств кинематических цепей применяют топологию. Топология исследует свойства объекта, сохраняющиеся при топологических преобразованиях, в которых каждой точке данного объекта соответствует одна определенная точка

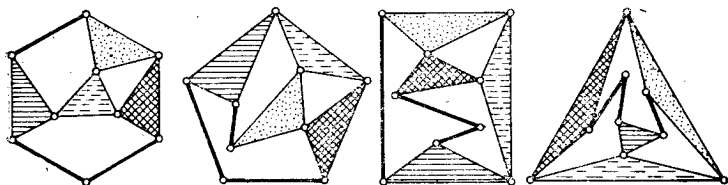


Рис. 1.17.

в преобразованном объекте — и наоборот; кроме этого, преобразование непрерывное. На рис. 1.17 показаны топологические преобразования некоторой кинематической цепи; в каждом из этих преобразований какой-то контур стал периферией. Преобразования получаем, деформируя данную цепь (можно вообразить, что звенья изготовлены из резины), но не разрывая ее. Каждое базисное звено везде обозначено одной и той же штриховкой.

Кинематическая цепь является трехмерным объектом. Однако ее структурную схему всегда можно изобразить плоской. Действительно — каждое соединение можно считать как точку; с помощью топологического преобразования все соединения базисных звеньев, у которых $\alpha > 3$, переносят в плоскости, пересекающие эти звенья, и сохраняют только точки этих пересечений, а остальные точки отбрасывают. Таким образом получается пространственная цепь с плоскими базисными звеньями. Наконец, с помощью топологического преобразования все звенья переносят в одну из плоскостей, получая плоскую структурную схему.

Если в структурной схеме звенья не пересекаются или пересечение можно устранить с помощью топологического преобразования, то соответствующую кинематическую цепь называем *однослойной*, в противном случае — *многослойной*. Можно доказать [56], что среди цепей первых трех классов многослойные не имеются, а среди цепей четвертого класса имеется одна мно-

гослойная цепь *b* (рис. 1.18). Цепь *a* в этом рисунке однослойная, так как ее можно образовать без пересечения звеньев.

Число замкнутых контуров *k* кинематической цепи удобнее всего определять по структурной схеме цепи, воображая, что площадь каждого контура образуется воображаемой пленкой, натянутой по краям контура. Контур, звенья которого не имеют пленки, по крайней мере на одной из сторон, образуют периферию. Периферия также является замкнутым контуром, но на него не натянута сплошная пленка. Каждая замкнутая или полузамкнутая цепь *k*-го класса имеет *k* замкнутых контуров и одну периферию. Если возникают трудности, класс цепи всегда можно определить по формуле (1.4).

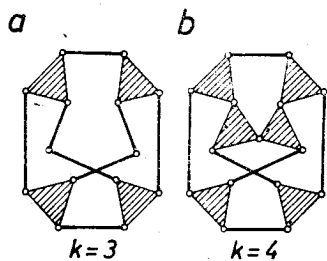


Рис. 1.18.

В технике больше всего используются механизмы с замкнутыми кинематическими цепями. Возможные формы первых трех классов этих цепей показаны на рис. 1.19. *Формой* называем упрощенное изображение цепи, в котором показаны только базисные звенья и возможные цепочки поводков; отдельные поводки не показаны. Базисные звенья изображены в виде кружков.

В технике больше всего используются механизмы с замкнутыми кинематическими цепями. Возможные формы первых трех классов этих цепей показаны на рис. 1.19. *Формой* называем упрощенное изображение цепи, в котором показаны только базисные звенья и возможные цепочки поводков; отдельные поводки не показаны. Базисные звенья изображены в виде кружков.

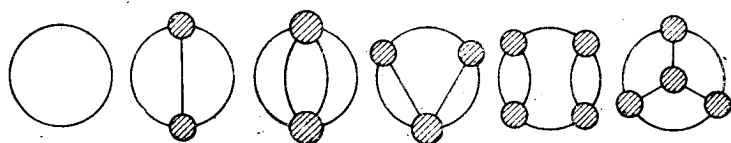


Рис. 1.19.

Видно, что в каждом из первых двух классов имеется только одна форма, но в третьем классе четыре. В высших классах число форм быстро увеличивается, например, у замкнутых цепей четвертого класса имеются 17 форм.

§ 1.4. Кинематическая и структурная схемы механизма

Механизм и кинематическая цепь — понятия близкие. *Механизмом* называем такую кинематическую цепь, которая предназначена для воспроизведения требуемых движений и передачи необходимых сил, при этом у механизма указана станина, если такая имеется. Таким образом, не каждую кинематическую цепь называем механизмом.

Механизм можно изобразить техническим чертежом, полуконструктивной, кинематической и структурной схемами.

Принцип составления кинематической схемы следующий: в кинематической схеме следует показать только то, что имеет значение в исследовании движения механизма. Кинематическая

схема конкретного механизма изображается в масштабе, и на ней показывают все размеры, необходимые для определения движения. Желательно отметить также классы подвижных соединений (если не задана структурная схема механизма).

В кинематической схеме звенья изображаются упрощенно (рис. 1.14) и используются условные обозначения подвижных соединений. Некоторые из них показаны на рис. 1.20: *a* — шарнир, *b* — поступательная пара, *c* — двойной шарнир, *d* — шаровая пара, *e* и *f* — шарнир, одно звено которого — станина. Станину принято отмечать небольшой штриховкой.

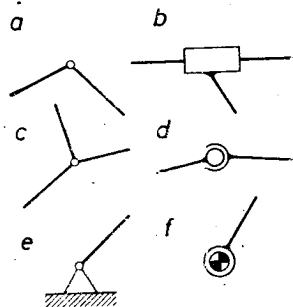


Рис. 1.20.

Кинематическая схема является основой расчета механизма, а при структурном анализе и выборе метода расчета пригодна структурная схема механизма, в которой символически изображаются звенья и подвижные соединения. В структурной схеме необходимо отметить классы подвижных соединений и желательно показать также ведущие цепи. Многократные шарниры не разделяются на простые шарниры.

Ведущими цепями называем кинематические цепи, у которых задано относительное движение звеньев. Наиболее простым случаем ведущей цепи является ведущий двухзвенник. Число ведущих цепей механизма N называем разрядом механизма.

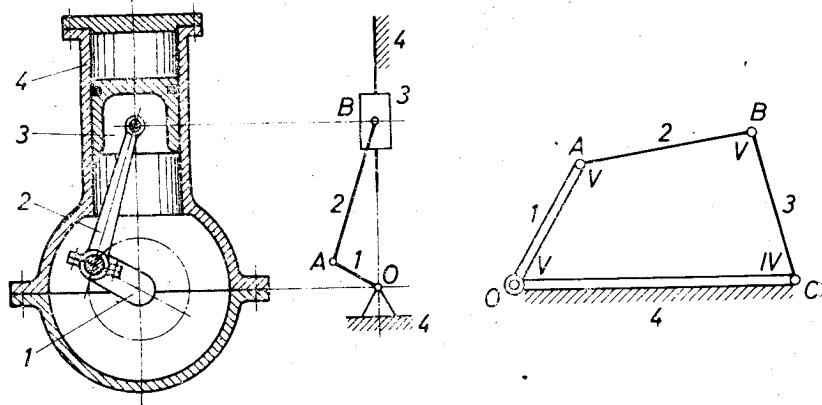


Рис. 1.21.

В структурных схемах проводки ведущих цепей и ведущие подвижные соединения изобразим двойными линиями; базисные звенья ведущих цепей — штриховой линией.

На рис. 1.21 показаны полуконструктивная, кинематическая и структурная схемы механизма компрессора. Рассматриваемый механизм называют кривошипно-ползунным механизмом. Этот

механизм применяется в двигателях внутреннего сгорания, в паровых машинах, в насосах, в штамповочных прессах (но не с круглым ползуном) и во многих других машинах. Звено 1 (коленчатый вал) в теории механизмов называют *кривошипом*, звено 2 — *шатунном*, звено 3 — *ползуном*. Вообще кривошипом называют звено, которое может вращаться, совершая полный оборот вокруг своей оси, а шатуном — звено, которое находится в сложном плоскопараллельном или в пространственном движении и не образует кинематических пар со стойкой. В структурной схеме в качестве ведущей показана цепь 14. Часто так поступают и тогда, когда движущим звеном является звено 3 (как это

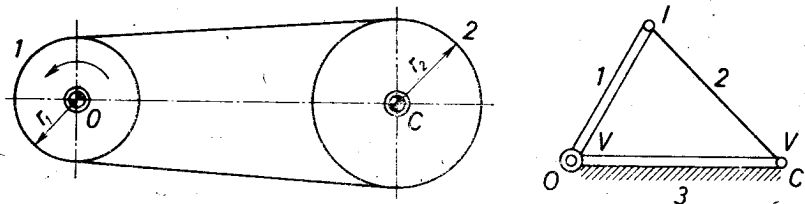


Рис. 1.22.

бывает в двигателях). Если ведущая или движущая цепь содержит станину, то согласно традициям вместо терминов *ведущая* или *движущая цепь* применяют термины *ведущее* или *движущее* звено.

На рис. 1.22 показаны кинематическая и структурная схемы ременной передачи. Полукоструктивная схема этой передачи

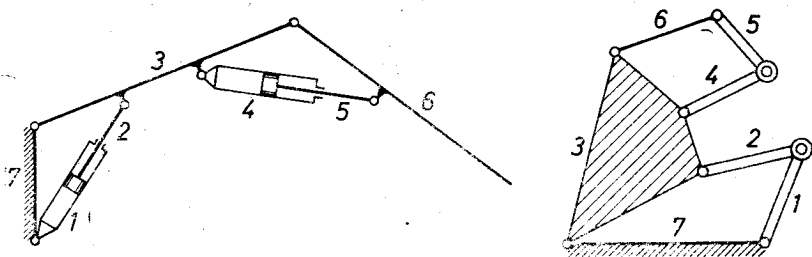


Рис. 1.23.

дана на рис. 1.12. Принято, что ремень узкий и гибкий, поэтому кинематической связи 12 присвоен I класс. Ведущей цепью является 13.

Оба рассмотренных механизма являются механизмами первого разряда, так как каждый из них имеет только одну ведущую цепь. Кинематическая и структурная схемы механизма второго разряда показаны на рис. 1.23. Такой механизм применяется в экскаваторах, погрузчиках и в других машинах. Здесь имеются две ведущие цепи — гидроцилиндры, которые одновременно являются также движущими цепями. Из структурной схемы видно, что в этом механизме использована полузамкнутая кинематическая цепь II класса.

СВЯЗИ И ПОДВИЖНОСТЬ МЕХАНИЗМА

§ 2.1. Свойства связей

В первом разделе было отмечено, что свойства механизма зависят от типа подвижных соединений. Было показано, что подвижные соединения накладывают на относительное движение соответствующих звеньев одну, две, три, четыре или пять связей. Каждая наложенная связь ликвидирует одно из шести независимых относительных движений, какие были возможны, если бы соединение не существовало, и позволяет передать одну силу или момент произвольной величины (разумеется, не превышая предел прочности) с одного звена на другое. Такие подвижные соединения называем *кинематическими соединениями*.

Теперь рассмотрим свойства связей, наложенных кинематическими соединениями.

Самыми распространенными в механизмах являются *геометрические связи*; они ограничивают относительные перемещения звеньев. Такие связи накладывают все обычные кинематические пары и подвижные соединения с твердыми промежуточными элементами. Однако здесь возможно исключение, выходящее за пределы геометрических связей. Рассмотрим этот случай.

Показанная на рис. 2.1 высшая кинематическая пара (шар на плоскости) накладывает на относительное движение звеньев только одну геометрическую связь, уравнение которой

$$z_c - r = 0.$$

Это означает, что ликвидировано относительное перемещение в направлении оси z и возможно передавать одну силу вдоль оси z .

Таким образом, рассматриваемая пара I класса или пара с пятью подвижностями, т. е. у этой пары число связей $s=1$, а число подвижностей $f=5$.

Для задания положения шара 1 относительно плоскости 2 необходимо пять обобщенных координат: x_c , y_c и три угла Эйлера. Таким образом, число обобщенных координат равняется подвижности кинематической пары.

Вследствие трения возможна передача небольших сил в направлении осей x и y . Если же трение настолько велико, что скольжения нет, то передаваемые силы в направлении осей x и y могут меняться в широких пределах, и относительное скольжение в этих направлениях невозможно.

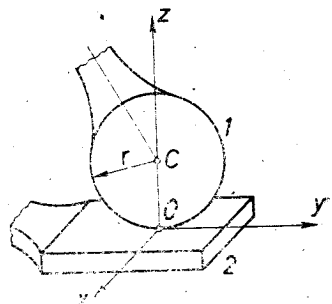


Рис. 2.1.

Это означает, что появились две новые связи. Уравнения этих связей

$$\omega_x r + \dot{y}_c = 0, \quad \omega_y r - \dot{x}_c = 0$$

содержат производные координат. Эти уравнения связей не интегрируются. Такие связи Герц в 1894 г. назвал *неголономными связями*. Теперь $s = 3$, $f = 3$, а для определения положения шара относительно плоскости необходимы все те же пять упомянутых координат. Таким образом, в случае неголономных связей подвижность кинематической пары меньше числа обобщенных координат. В общем случае

$$f = n_q - s^{ne}, \quad (2.1)$$

где n_q — число обобщенных координат, s^{ne} — число неголономных связей.

На рис. 2.2 показана передача трением между цилиндрическими катками или фрикционная передача, состоящая из четырех звеньев и добавочного элемента a . Выясним, какие связи на движение звеньев накладывает высшая кинематическая пара 12, которая образуется в месте соприкосновения колес трения.

Оба цилиндрических колеса соприкасаются по общей образующей, совпадающей с осью x . Пара 12 ликвидирует относительное перемещение вдоль оси y и вращение вокруг оси z , накладывая таким образом две геометрические связи. Если трение настолько велико, что относительного скольжения между колесами нет, то наложена еще одна связь, которая характеризуется кинематической зависимостью

$$v_P = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad \text{или} \quad \dot{\varphi}_1 r_1 = \dot{\varphi}_2 r_2.$$

Интегрируя и принимая, что в начале $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$, получаем

$$\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2} \varphi_1.$$

Полученное уравнение связи выражает зависимость между угловыми перемещениями колес. Таким образом, эта связь также как будто получается геометрической. Однако фактически скольжение во фрикционной передаче имеется, и уравнение третьей связи выглядит так:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{r_1}{r_2} \dot{\varphi}_1 (1 - \xi),$$

где ξ — коэффициент скольжения, зависящий от нагрузки и свойств фрикционных поверхностей. На практике можно

принять, что

$$0 < \xi \leq 0,03.$$

Связь, которая только приближенно является геометрической и которая наложена также в ременной передаче (рис. 1.22), назовем *псевдокинематической*. Псевдокинематические связи характерны для кинематических соединений с деформируемыми промежуточными элементами.

Геометрические, неголономные и псевдокинематические связи называем *кинематическими связями*, так как ранее показано, что они накладывают ограничения на скорости. Правда, в уравнениях геометрических связей имеются только перемещения, однако, дифференцируя их, можно получить зависимости между скоростями. Таким образом, каждая геометрическая связь является кинематической, а не наоборот, так как уравнения неголономных связей неинтегрируемы.

Теперь можем сказать, что *кинематические пары накладывают на движение своих звеньев кинематические связи*. Обычно кинематические связи называют просто связями; и мы в основном будем соблюдать эту традицию.

Связи в механизмах обычно *постоянны*. Однако возможны также *переменные* связи. Механизмы с переменными связями называют *механизмами переменной структуры*. Покажем примеры двух таких механизмов: в одном примере изменение связей определяется конструкцией механизма, во втором примере связи меняет человек или автоматическое устройство (регулятор).

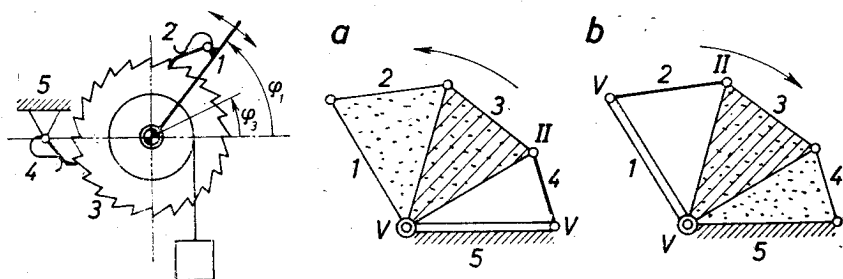


Рис. 2.3.

В показаном на рис. 2.3 храповом механизме ведущее звено 1 находится в качательном движении и приводит храповое колесо 3 в однонаправленное вращение с перерывами, реализуя зависимость

$$\dot{\varphi}_3 = \xi \dot{\varphi}_1,$$

где с большой вероятностью коэффициент $\xi = 1$, если $\dot{\varphi}_1 > 0$, а если $\dot{\varphi}_1 < 0$, то $\xi = 0$. В первом случае звенья 1, 2 и 3 движутся как одно целое тело (структурная схема a), а во втором

случае звенья 3 и 4 присоединяются к станине (структурная схема *b*). Храповой механизм имеет свойство выпрямителя движения.

На рис. 2.4 показана кинематическая схема механизма привода впускного клапана двигателя. Звено 1, вращаясь вокруг неподвижной оси 15, приводит в движение клапан 4. Движение клапана зависит от соприкосновения звеньев в высшей паре 36.

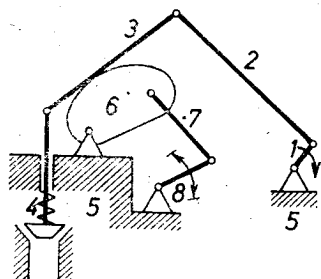


Рис. 2.4.

Если соприкосновения нет, клапан не поднимается, так как звенья 1, 2 и 3 могут свободно двигаться, не поднимая клапан. Соприкосновение в паре 36 и вместе с тем высоту и продолжительность подъема регулирует человек или регулятор, поворачивая звено 8 в одном или другом направлении.

В заключение отметим, что свойства механизма зависят не только от свойств каждой связи, наложенной на механизм, но также и от числа связей

и их взаимодействия. Этот очень важный для практики и теории вопрос рассмотрим в следующем параграфе.

§ 2.2. Избыточные связи

В механизмах, в которых с помощью подвижных соединений наложены кинематические связи, возможно, что некоторые связи повторяют ограничения, наложенные другими связями. Эти связи называют *избыточными связями*.

Конечно, избыточные связи не ликвидируют степени свободы звеньев, так как это совершенно уже другими связями. Поэтому избыточные связи называют также *пассивными* или *лишними* связями. Эти термины не будем использовать, так как желаем учитывать явления в механизмах, вызванные деформируемостью и неточностью звеньев; при этом избыточные связи не являются пассивными, и в некоторых механизмах они также не лишние. Воображаемый механизм с абсолютно точными и абсолютно твердыми звеньями называют *идеализированным механизмом*.

Избыточные связи имеют следующие свойства:

- 1) устранение избыточных связей не влияет на кинематику идеализированного механизма;
- 2) каждая избыточная связь увеличивает статическую неопределенность механизма.

Таким образом, в механизмах с избыточными связями реакции становятся зависимыми от деформаций звеньев, и необходимо точно соблюдать по крайней мере несколько размеров. Эти обстоятельства имеют очень большое значение при проектировании и эксплуатации машин.

Различают три типа избыточных связей. Рассмотрим их отдельно.

А. *Избыточные связи на элементах кинематических пар.* В кинематической паре второго класса a (рис. 1.3) цилиндр с плоскостью соприкасается на отрезке прямой. Эта пара накладывает на относительное движение звеньев две геометрические связи и позволяет передавать по одной компоненте силы и момента. Однако для реализации этой функции в идеализированном механизме достаточно было бы соприкосновения обоих звеньев только в двух точках упомянутого отрезка прямой.

Поступая аналогично, в любой кинематической паре соприкосновение в поверхностях можно заменить соприкосновением в точках, число которых равняется классу пары. Этот вопрос затронут в конце § 1.2 и иллюстрирован на рис. 1.13, где было показано, что такие пары точечного соприкосновения статически определимы. То же самое касается также соприкосновения твердых промежуточных элементов в кинематических соединениях. Следовательно, соприкосновение во всех остальных точках создает в неограниченном количестве избыточные связи. В результате этого реакции поверхностей становятся статически неопределимыми, и для их расчета необходимо применять гипотезы о распределении напряжений в контактных поверхностях.

Эти избыточные связи первого типа желательны, так как они снижают контактные давления, увеличивают допустимую нагрузку на подвижные соединения и уменьшают износ. Эти связи можно создать с помощью ручной обработки (шабровка) или обработкой на металлорежущих станках. Число этих связей увеличивают, прирабатывая легко нагруженный механизм в условиях хорошей смазки (обкатка механизма).

Б. *Избыточные связи в разветвленных подвижных соединениях.* В § 1.2 мы условились, что между двумя звеньями возможно только одно подвижное соединение. На практике это часто является разветвленным соединением, которое состоит из отдельных частичных соединений, называемых *ветвями*. Главным показателем качества конструкции разветвленного соединения является количество избыточных связей σ . Чем больше σ в данном соединении, тем точнее необходимо его изготовить, тем чувствительнее соединение к деформациям и самозаклиниванию, тем труднее его монтаж и демонтаж. Вредное влияние избыточных связей снижается, если модули упругости звеньев сильно отличаются друг от друга.

Эти избыточные связи второго типа возникают из-за образования замкнутых контуров внутри соединения. Число этих контуров на единицу меньше числа ветвей соединения. На рис. 2.5 показан ряд соединений с двумя ветвями, в структурной схеме i которых имеется один контур — двуугольник. Для каждой конструкции указано число имеющихся в ней избыточных связей σ , которое можно определить по формуле

$$\sigma = \sum s_i - s, \quad (2.2)$$

где $\sum s_i$ — фактически наложенное число связей с помощью ча-

стичных соединений; $s = 6 - f$ — в соответствии с формулой (1.1) минимальное число связей, которое необходимо для того, чтобы подвижность разветвленного соединения была равна f .

На рис. 2.5 показана эволюция шарнира с двумя ветвями, в результате чего получается оптимальная конструкция h для опоры вала в двух подшипниках. Соединяя параллельно две цилиндрические пары, получаем поступательную пару j , у которой

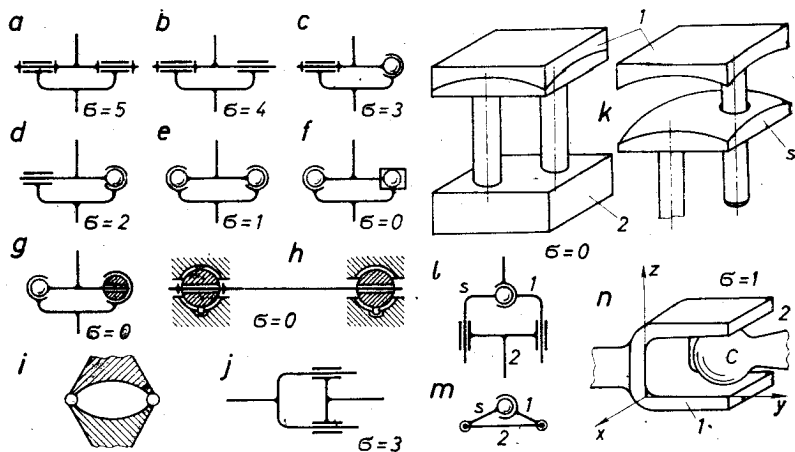


Рис. 2.5.

имеются три избыточные связи. Для их устранения можно одно из звеньев поступательной пары с двумя ветвями представить, например, составным, части которого в качестве звеньев входят в состав шаровой кинематической пары m (рис. 2.5). Подвижные соединения, созданные с такой целью, называем *разгрузочными соединениями*. Поступая таким образом, получаем нормально работающий механизм m , в котором имеется промежуточное звено s . При изготовлении штампов пригоден практический вариант этой конструкции k . Важно учитывать, чтобы центр шаровой пары не находился в одной плоскости с осями цилиндрических пар. Обоснование этого условия станет ясным после ознакомления с применением универсальных структурных формул для определения числа повторяющихся связей. Структурные формулы применимы для разветвленных соединений, если принять их как двухзвеньевые механизмы.

Кинематическая пара n первого класса (рис. 2.5) накладывает на движение звеньев *двухстороннюю кинематическую связь*, но это, как показывает формула (2.2), невозможно без появления одной повторяющейся связи. Действительно, одновременное соприкосновение в обеих точках требует высокой точности изготовления и создает статическую неопределенность. Уравнения

связей, наложенных обоими частичными соединениями, есть $z_c - r = 0$, где r — радиус шара. Следовательно, повторяющиеся связи второго типа описываются тождественными уравнениями.

В. *Избыточные связи в замкнутых кинематических цепях.* Если говорят об избыточных связях, то обычно имеют в виду избыточные связи в замкнутых кинематических цепях. Это потому, что от этих связей больше всего зависят эксплуатационные свойства и технологичность механизма.

Избыточные связи этого типа образуются в замкнутых контурах кинематических цепей, когда подвижные соединения имеют особое размещение или звенья имеют особые размеры. Эти связи родственны избыточным связям второго типа, но их труднее обнаружить. Уравнения избыточных связей тождественны [62].

Главным средством определения избыточных связей третьего типа являются универсальные структурные формулы, которые рассмотрим в следующем параграфе. Пока отметим, что механизмы без избыточных связей должны удовлетворять следующему условию: *если пересечь какое-либо звено механизма, то одна половина пересеченного звена относительно второй половины имеет все шесть степеней свободы (критерий пересечения).*

На рис. 2.6 в двух проекциях показан механизм, который предназначен для перемещения точки приложения силы P в горизонтальной плоскости. Пересекая, например, звено 2, приходим к заключению, что невозможно осуществить вертикальное поступательное перемещение звеньев 1 и 2. Следовательно, в механизме имеется избыточная связь. Если, например, ликвидируем точечную пару 23, кинематика идеализированного механизма сохраняется. Однако напряжения в звеньях увеличились бы, если только вследствие неточного изготовления в предыдущем механизме они не были слишком велики.

Избыточную связь можно ликвидировать и другим путем, например, заменяя шарнир 12 или 13 цилиндрической парой.

Вследствие нагрузки, температуры и неточности изготовления в механизмах с избыточными связями возникают дополнительные напряжения, которые увеличивают износ и снижают коэффициент полезного действия. Изготовление таких механизмов дороже, затруднен их монтаж и демонтаж, существует угроза заклинивания и поломок. Для хотя бы частичного устранения этих недостатков часто увеличивают зазоры в подвижных сое-

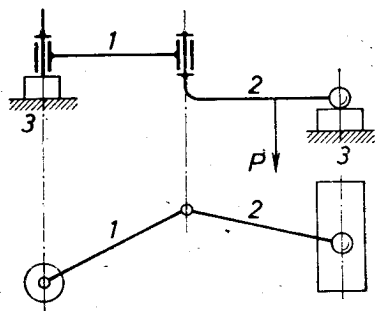


Рис. 2.6.

динениях, что в свою очередь вызывает удары и ускоренный износ. Распределение давлений на поверхностях соприкосновения кинематических соединений в новом механизме очень неравномерное. Поэтому необходима продолжительная обкатка механизма. Чтобы уменьшить деформации, звенья необходимо изготавливать с большим запасом прочности. Вредное влияние избыточных связей в механизмах отметил Л. Решетов в 1934 г. [72].

Из-за указанных причин во многих случаях предпочтение следует отдавать механизмам без избыточных связей. Эти статически определимые механизмы могут быть изготовлены с меньшей точностью. Ошибки размеров не вызывают дополнительных напряжений или неравномерного распределения напряжений. Реакции не зависят от деформаций, а только от нагрузки; поэтому их легко определить. Деформации звеньев практически не влияют на работу механизма. Элементы кинематических пар в новом механизме уже соприкасаются по всей площади, а обкатка необходима только для образования повторяющихся связей первого типа А. Очень ценным свойством этих механизмов является самоустанавливаемость звеньев, т. е. звенья под воздействием нагрузки сами занимают положения, соответствующие фактическим погрешностям изготовления и монтажа. Однако самоустанавливаемости звеньев более или менее мешает трение, которое необходимо уменьшить. Механизмы без избыточных связей надежны в работе и служат долго. Поэтому эти механизмы необходимо максимально внедрять в народное хозяйство. Особенно это относится к сельскохозяйственным машинам, которые должны быть легкими, дешевыми и должны работать в условиях перегрузок, при сильных деформациях корпуса машины.

Однако в отдельных случаях наличие минимального числа избыточных связей необходимо, чтобы увеличить допустимую нагрузку на звенья механизма, если точным изготовлением, увеличенной жесткостью звеньев и тщательной обкаткой достигнута работоспособность избыточных связей (например, двигателя внутреннего сгорания). Иногда избыточные связи используют также для других целей, например, для устранения неопределенных положений механизма (§ 4.2).

§ 2.3. Универсальные структурные формулы

Важным кинематическим параметром механизма является его подвижность w . *Подвижностью механизма называется число степеней свободы звеньев кинематической цепи механизма относительно одного из звеньев.*

Согласно выводам теоретической механики подвижность механизма можно выразить следующим образом:

$$w = n_q - s^{ne} + \sigma^{ne}, \quad (2.3)$$

где n_q — число обобщенных координат, т. е. минимальное число координат, которое необходимо для определения относительного положения всех звеньев механизма; $s^{не}$ — число неголономных связей; $\sigma^{не}$ — число неголономных избыточных связей.

Пример 2.1. Определить подвижность модели (рис. 2.7) для исследования движения механизма одноосного прицепа.

Решение. Положение механизма определяют четыре обобщенные координаты: x , φ и два угла, фиксирующие положение колес относительно звена 2. В местах соприкосновения колес с основанием 5 две геометрические связи устраняют перемещение перпендикулярно к плоскости основания, две неголономные связи определяют вращение звеньев, а две неголономные связи устраняют боковое соскальзывание колес. Среди последних

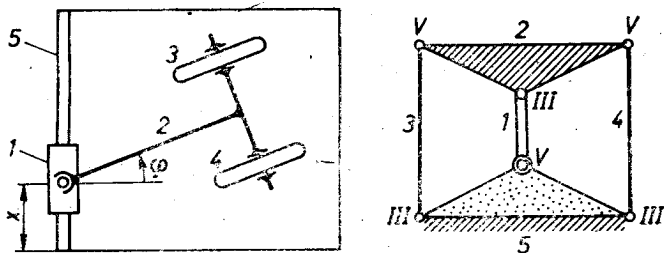


Рис. 2.7.

одна связь повторяется, так как для устранения бокового соскальзывания кинематически достаточно одной связи. Помещая найденные значения в формулу (2.3), получаем подвижность механизма

$$w = 4 - 4 + 1 = 1.$$

Примечание. Связи колес с основанием выяснены раньше, при рассмотрении рис. 2.1.

Обычно неголономные связи в механизмах не имеют. Тогда подвижность механизма равняется числу обобщенных координат, которое у большинства механизмов равняется 1. Кривошипно-ползунный механизм (рис. 1.21) имеет $w = 1$, так как достаточно задать, например, угол поворота кривошипа, чтобы положение всех звеньев стало известным. Механизмы с подвижностью $w = 1, 2, \dots$ называют механизмами *принужденного движения*, если задана каждая из обобщенных координат $q = w$.

Из определения подвижности вытекает, что подвижность механизма равна минимальному числу связей, после наложения которых все звенья механизма становятся относительно неподвижными.

Структурными формулами принято называть математические выражения подвижности через структурные параметры механизма.

Известны три различные универсальные структурные формулы: опубликованная в 1887 г. формула П. Сомова [76]:

$$w = (n - 1) + f - p - 5k + \sigma, \quad (2.4)$$

опубликованная в 1923 г. формула А. Малышева [49]:

$$w = 6(n - 1) - s + \sigma. \quad (2.5)$$

и опубликованная в 1962 г. формула автора данной работы [59] *)

$$w = f - 6k + \sigma, \quad (2.6)$$

в которых n — число звеньев, p — число кинематических пар, k — число замкнутых контуров, f — общее число подвижностей кинематических соединений, s — общее число связей, наложенных кинематическими соединениями, σ — число избыточных связей. Формулы Сомова и Малышева представлены здесь в несколько измененной форме. Оригинальную формулу Малышева получим, если в формуле (2.5) заменим s и f их значениями

$$s = 5p_V + 4p_{IV} + 3p_{III} + 2p_{II} + p_I,$$

$$f = p_V + 2p_{IV} + 3p_{III} + 4p_{II} + 5p_I.$$

Здесь p_V, p_{IV}, \dots означает число кинематических пар разных классов. Используя зависимость (1.4) и учитывая, что в каждом механизме должно быть выполнено условие

$$f + s = 6p, \quad (2.7)$$

каждой из структурных формул можно придать вид остальных двух формул. Это значит, что структурные формулы не являются независимыми. Все три формулы выражают одну и ту же зависимость и поэтому они равнозначны. Приводим здесь доказательства обеих простейших формул, так как это поможет понять сущность структурных формул.

Доказательство формулы Малышева: n звеньев перед введением кинематических соединений имеют $6(n - 1)$ степеней свободы, так как одно звено принято неподвижным; при образовании кинематических пар число степеней свободы уменьшается на величину $(s - \sigma)$, так как среди s связей имеются σ избыточных связей, которые не уменьшают число степеней свободы. Вычитая из первого члена второй, получаем формулу (2.5).

Доказательство формулы (2.6) следующее. Строим механизм постепенно, по шагам, показанным на рис. 2.8. В открытой кинематической цепи не имеется повторяющихся связей. Поэтому подвижность системы a есть

$$w_a = f_A + f_B + f_C + f_D = f_a.$$

Если кинематическое соединение E накладывает $s_E = 6 - f_E$ связей, между которыми σ_1 связей повторяют какие-то другие связи

*) Тремя годами позже П. Сомова Гохманом (Основы познания пар и механизмов. Кинематика машин.— Одесса, 1890, т. I.— 248 с.) опубликованы варианты структурных формул без учета избыточных связей, совпадающие по строению с формулами Малышева и Озола (см.: Кожевников С. Н. Основания структурного синтеза механизмов.— Киев: Наукова думка, 1979).— Прим. ред.

контура I , то

$$w_b = f_a - [(6 - f_E) - \sigma_1] = f_1 - 6 + \sigma_1.$$

Подвижности системы c и системы d следующие:

$$w_c = w_b + f_F + f_G,$$

$$w_d = w_c - [(6 - f_H) - \sigma_2] = f_1 + f_2 - 6 \cdot 2 + \sigma_1 + \sigma_2.$$

Видно, что выражения подвижностей всех четырех систем, показанных на рис. 2.8, соответствуют формуле (2.6).

Для механизмов без избыточных связей и с одноподвижными парами, формула (2.6) выглядит так:

$$w = \bar{p} - 6k.$$

Подставляя здесь $w = 1$ и $k = 1$, находим, что наиболее простым механизмом без избыточных связей и с одноподвижными парами

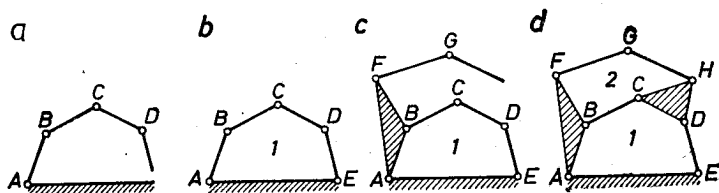


Рис. 2.8.

является семизвенный механизм. Пример такого механизма — шарнирное соединение валов (рис. 4.23, справа, стр. 78), которое позволяет валам занимать любое относительное положение.

Пример 2.2. Определить число повторяющихся связей для механизма, показанного на рис. 2.7.

Решение. Уже в примере 2.1 выяснено, что подвижность этого механизма $w = 1$. Согласно структурной схеме механизма и формулам (2.5) и (2.6) получаем следующие результаты:

$$\sigma = w - 6(n - 1) + s = 1 - 6(5 - 1) + 24 = 1,$$

$$\sigma = w - f + 6k = 1 - 12 + 6 \cdot 2 = 1.$$

Применяя формулу (2.6), обычно оперируют с меньшими числами.

§ 2.4. Плоские, сферические и цилиндрические механизмы

Любой механизм является трехмерным объектом, так как он находится в трехмерном пространстве и на него действует пространственная система сил. Поэтому полное исследование механизмов возможно только в трехмерном пространстве, где каждое свободное тело имеет 6 степеней свободы.

Известны также три двумерных пространства — поверхности, на которых неизменяемая фигура имеет больше, чем одну степень свободы. Эти поверхности следующие: плоскость и шаровая поверхность, на которых свободная фигура имеет 3 степени свободы, поверхность круглого цилиндра, на которой эта фигура

имеет 2 степени свободы. Используются также механизмы, траектории точек звеньев которых находятся в параллельных плоскостях или на поверхностях концентрических сфер или коаксиальных цилиндров. В этих механизмах можно провести одну из вышеупомянутых поверхностей так, чтобы она пересекала звенья или их продолжения и эти сечения могли двигаться на поверхностях как неизменяемые фигуры. Таким образом получаем изображение механизма на определенной поверхности, на которой звенья представляются как фигуры, а подвижные соединения — как двумерные соединения.

Видно, что по виду траекторий точек звеньев механизмы можно разделить на *объемные* и *поверхностные* механизмы. Поверхностные механизмы в свою очередь можно разделить на *плоские*, *сферические* и *цилиндрические* механизмы. Самыми распространенными являются плоские механизмы, к ним относится большинство всех вышерассмотренных механизмов. Со сферическими и цилиндрическими механизмами будем знакомиться далее в этой работе.

В задачах анализа и синтеза плоских механизмов часто достаточно и одновременно выгодно пользоваться не действительным механизмом, а его изображением, так как последнее проще. Это возможно потому, что изображение имеет следующие важные свойства:

1) *связи, в том числе повторяющиеся, разлагаются на нормальные и тангенциальные связи, из-за чего*

2) *подвижность изображения равна подвижности действительного механизма.*

Нормальные связи не позволяют перемещений, перпендикулярных к поверхности. Исследуя движение изображения, нормальные связи не нужно учитывать. Приходится только считать, что фигуры, т. е. изображения звеньев, вынуждены двигаться на поверхности.

Тангенциальные связи ограничивают движение изображений звеньев на поверхности. Они накладываются изображениями подвижных соединений, т. е. двумерными соединениями. Чтобы их не спутать с действительными соединениями, будем называть число тангенциальных связей, наложенных двумерными соединениями, не классом соединения, а *порядком*. На плоскости и сфере возможны соединения первого и второго порядка, а на цилиндрической поверхности — только первого порядка. На плоскости соединения второго порядка образуются из шарниров, поступательных, цилиндрических и шаровых пар, а также из высших пар с чистым качением, а соединения первого порядка — из высших одноконттактных пар с качением и скольжением. Это свидетельствует о том, что изображение весьма неполно отражает действительный плоский механизм. Так, например, шарнир, цилиндрическая и шаровая пара на плоскости изображаются как двумерный шарнир, а цилиндрическая пара (в механизме поршневой машины) так же, как поступательная пара.

Поступая аналогично тому, как при доказательстве формул (2.5) или (2.6), но подставляя вместо числа степеней свободы 6 число степеней свободы ν , которое может быть 3 или 2, получаем структурные формулы поверхностных механизмов

$$w = \nu(n - 1) - s_t + \sigma_t, \quad (1)$$

$$w = f_t + \nu k + \sigma_t, \quad (2)$$

где s_t — число тангенциальных связей, σ_t — число тангенциальных избыточных связей, f_t — общее число тангенциальных подвижностей подвижных соединений. Разумеется, в каждом отдельном соединении $s_t + f_t = \nu$, а во всем механизме

$$s_t + f_t = \nu_p. \quad (3)$$

Подставляя в формулах (1) и (2) $\nu = 3$ и

$$s_t = 2p_2 + p_1, \quad f_t = p_2 + 2p_1,$$

где p_2 и p_1 являются числами двумерных подвижных соединений второго и первого порядка, получаем структурные формулы плоских и сферических механизмов

$$w = 3(n - 1) - 2p_2 - p_1 + \sigma_t, \quad (2.8)$$

$$w = p_2 + 2p_1 - 3k + \sigma_t. \quad (2.9)$$

Формула (2.8) называется *формулой Чебышева*, а формулу (2.9) в 1962 г. опубликовал автор этой работы [59].

Исторически первую структурную формулу

$$3m - 2(n + \nu) = 1 \quad (4)$$

в 1869 г. доложил на конгрессе естествоведов в Москве и в 1870 г. опубликовал Чебышев [41]. В этой формуле m — число подвижных звеньев, n и ν — числа подвижных и неподвижных плоских шарниров.

В 1883 г. Грюблер опубликовал аналогичную формулу

$$2g - 3n + 4 = 0, \quad (5)$$

где g — число плоских шарниров и поступательных пар, n — число звеньев. Формулы (4) и (5) подходят для случаев, когда $w = 1$, $p_1 = 0$, $\sigma_t = 0$. Их называют критериями принужденного движения плоских механизмов с низшими парами с одним входным звеном.

Если в формулу (2.9) подставить $p_1 = 0$, $p_2 = p = n + k - 1$, $\sigma_t = 0$, получим очень простую структурную формулу

$$w = (n - 1) - 2k, \quad (2.10)$$

которая применима для плоских и сферических механизмов с одноподвижными парами, без тангенциальных избыточных связей.

То, что для сферических механизмов пригодна формула Чебышева, впервые в 1936 г. доказал Артоболевский [2].

Подставляя в формулы (1) и (2) $v=2$ и $s_i=f_i=p$, где p — число подвижных соединений, получаем структурные формулы цилиндрических механизмов

$$w = 2(n - 1) - p + \sigma_i, \quad (2.11)$$

$$w = p - 2k + \sigma_i. \quad (2.12)$$

Для цилиндрических механизмов формулу (2.11) начали применять В. Добровольский и И. Артоболевский, а формулу (2.12) в 1962 г. опубликовал автор этой работы [59].

Формулы (2.8) и (2.11) в литературе обычно приводят без последнего члена. Это делается потому, что в поверхностных механизмах тангенциальные избыточные связи встречаются нечасто.

Тангенциальные избыточные связи в плоских механизмах появляются тогда, когда в них имеются *кинематически пассивные звенья* или *слишком жесткие кинематические пары*. Кинематически пассивные звенья соединяют точки, расстояние между которыми в идеализированном механизме не меняется, причем кинематика механизма сохраняется также при отсутствии этих звеньев. Если какое-нибудь подвижное соединение второго порядка можно заменить соединением первого порядка, не изменяя при этом кинематику механизма, то такое соединение является слишком жестким.

В показанных на рис. 2.9 плоских механизмах пассивным является звено 5 в механизме *a*; слишком жесткой является пара 12 в механизме *b*. В фрикционном механизме *d* имеется тангенциальная повторяющаяся связь, так как фрикционная пара 12

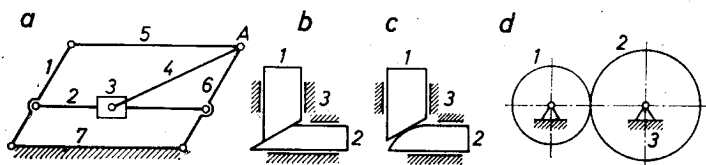


Рис. 2.9.

является слишком жесткой и ее можно заменить зубчатой парой (рис. 4.11, стр. 72).

Универсальные структурные формулы в основном применяют для определения избыточных связей пространственных и поверхностных механизмов, а структурные формулы поверхностных механизмов — для определения подвижности механизмов.

Пример 2.3. Определить подвижность плоских механизмов, показанных на рис. 2.9.

Решение. Расчет производится по формулам (2.8) или (2.9), учитывая, что механизм *a* имеет $n = 7$, $p_2 = 9$ (шарнир *A* двойной, поэтому считается два раза), $p_1 = 0$, $k = 3$, $\sigma_i = 1$; механизм клиньев *b* имеет $n = 3$, $p_2 = 3$, $p_1 = 0$, $k = 1$, $\sigma_i = 1$; механизм клиньев *c* имеет $n = 3$, $p_2 = 2$, $p_1 = 1$, $\sigma_i = 0$; фрикционный механизм *d* имеет $n = 3$, $p_2 = 3$, $p_1 = 0$, $k = 1$, $\sigma_i = 1$. Таким образом, находим, что подвижность всех механизмов равняется 1, т. е. они все являются механизмами принужденного движения.

§ 2.5. Определение и устранение избыточных связей

В § 2.2 мы пришли к выводу, что следует стремиться к конструированию механизмов без избыточных связей. Теперь выясним возможности определения и устранения этих связей.

Наиболее удобным средством для определения числа избыточных связей являются универсальные структурные формулы (2.5) и (2.6). Так как они содержат два неизвестных — подвижность механизма w и число избыточных связей σ , то подвижность w следует находить заранее. Во многих случаях это нетрудно, если использовать координатный анализ и формулу (2.3). В плоских механизмах w можно определить по формулам (2.8) и (2.9), так как σ , обычно можно установить, внимательно изучая кинематическую схему. Однако для определения σ недостаточно выяснения подвижностей механизма в общем случае. Необходимо

выяснить возможность появления элементарных подвижностей, которые имеют место только в особых положениях идеализированного механизма. Сказанное лучше всего пояснить на примерах.

На рис. 2.10 показан трехзвенный механизм, у которого центр A шаровой пары вынужден двигаться по кривой a сечения поверхностей двух круглых цилиндров радиусов r_1 и r_2 . Поэтому $w = 1$, и, согласно формуле (2.6), число повторяющихся связей

$$\sigma = w + 6k - f = 1 + 6 \cdot 1 - 7 = 0.$$

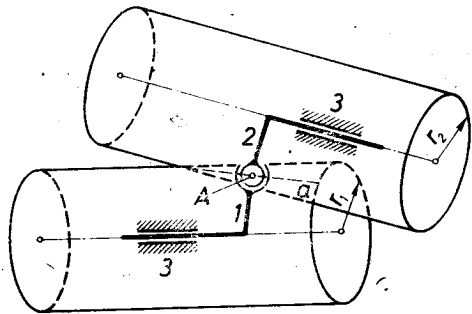


Рис. 2.10.

Результат будет иной при некоторых частных, относительных положениях осей цилиндров и значениях их радиусов.

Если при произвольном (неспециальном) положении осей $r_2 = 0$, то кривая a является точкой на поверхности цилиндра 1, звено 1 становится неподвижным, а звено 2 может свободно вращаться вокруг своей оси. Поэтому опять $w = 1$ и $\sigma = 0$. Если при этом также $r_1 = 0$, то вокруг своей оси может вращаться и звено 1, поэтому $w = 2$ и $\sigma = 1$. Наличие этой избыточной связи требует весьма точного изготовления механизма: необходимо обеспечить пересечение осей цилиндров в точке A .

Если поверхности обоих цилиндров пересекаются по двум общим образующим, то звенья 1 и 2 движутся поступательно как одно целое тело с $w = 1$ и $\sigma = 0$; получаем качественную разветвленную поступательную пару m (рис. 2.5). Если цилиндры соприкасаются по общей образующей, то, наряду с поступательным движением, появляются также связанные элементарные вращения

звеньев 1 и 2 вокруг своих осей, поэтому $w = 2$ и $\sigma = 1$. Действительно, оси цилиндров тогда должны быть параллельны и находиться на расстоянии $r_1 + r_2$ друг от друга. Теперь понятно, почему у разветвленной поступательной пары (рис. 2.5) центр сферы и оси цилиндрических пар не должны находиться в одной плоскости. Если $r_2 = 0$, то ось цилиндра 2 преобразуется в образующую цилиндра 1, и механизм имеет две конечные подвижности, т. е. $w = 2$ и $\sigma = 1$. Если оси цилиндров совпадают, а $r_1 = r_2 \neq 0$, то и в этом случае $w = 2$ и $\sigma = 1$; а если $r_1 = r_2 = 0$, то $w = 3$ и $\sigma = 2$.

Наконец, рассмотрим особый случай, когда обе цилиндрические поверхности соприкасаются в одной общей точке. Если оси цилиндров взаимно перпендикулярны, то каждое подвижное звено имеет элементарное вращение и независимое от него элементарное поступательное движение, которое связано с элементарным вращением и поступательным движением другого звена. Если угол между осями цилиндров не равен нулю, то элементарное вращение одного звена и независимое от него поступательное движение связано с элементарным винтовым движением второго звена. Следовательно, в рассмотренных случаях $w = 2$ и $\sigma = 1$. Если не учитывать элементарные подвижности, то не только не будет найдена избыточная связь, но может сложиться также неверное представление о непригодности структурных формул, так как при $w = 0$ получилось бы $\sigma = -1$.

Соответствующие элементарным подвижностям повторяющиеся связи называют *элементарными избыточными связями*. Для разных специальных вариантов данного механизма (рис. 2.10) эти связи постоянны.

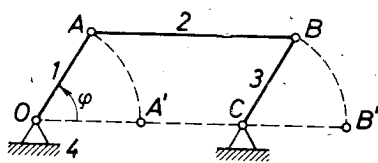


Рис. 2.11.

Показанный на рис. 2.11 плоский механизм называется *шарнирным параллелограммом*. Его подвижность $w = 1$, так как достаточно одной координаты для фиксации положения механизма.

Принимаем, что все подвижные соединения — шарниры, т. е. кинематические пары V класса. Тогда по формуле (2.6) число избыточных связей

$$\sigma = w + 6k - f = 1 + 6 \cdot 1 - 4 = 3.$$

Механизм имеет 20 связей: 8 тангенциальных и 12 нормальных*). Согласно формуле (2.9) число тангенциальных повторяющихся связей

$$\sigma_t = w + 3k - f_t = 1 + 3 \cdot 1 - 4 = 0.$$

*) К тангенциальным связям необходимо отнести по две проекции реакций в шарнирах на плоскость; к нормальным — проекции реакций на нормаль к плоскости и по две проекции векторов реактивных моментов на плоскость. — Прим. ред.

Следовательно, все повторяющиеся связи имеются среди нормальных связей. Однако в положении $OA'B'C$ механизма появляется элементарная дополнительная подвижность.

Если в этом положении зафиксируем ведущее звено 1, то звенья 2 и 3 смогут элементарно поворачиваться вокруг шарниров A и C . Видно, что в этом положении $w = 2$, и по формулам (2.6) и (2.9) получаем, что $\sigma = 4$, $\sigma_i = 1$. Следовательно, в этом случае элементарная избыточная связь — мгновенная, она появляется при прохождении механизма через особое положение.

Чтобы выяснить, сколько всего избыточных связей имеется в плоских механизмах, вычтем из формулы (2.6) формулу (2.9) и получим

$$\sigma = 3k - (f - f_i) + \sigma_i. \quad (2.13)$$

Следовательно, в плоских механизмах без тангенциальных повторяющихся связей вносятся 3 избыточные связи на каждый замкнутый контур, если подвижность двумерного подвижного соединения не отличается от подвижности действительного соединения.

Для устранения избыточных связей можно воспользоваться двумя методами: 1) *снижение класса кинематических пар* и 2) *введение разгрузочных соединений* *).

После устранения избыточных связей в подвижных соединениях появляется возможность небольших перемещений, которые при работе механизма используются для «дыхания» механизма, т. е. для движений, вызванных неточностями изготовления, монтажа и деформациями. В результате этого реализуется самоустанавливаемость механизма. Так, например, в механизме клиньев (рис. 2.9) плоскостная пара 12 для деформаций оставляет две подвижности: поступательное движение — перпендикулярно плоскости рисунка и вращение — вокруг оси, которая перпендикулярна плоскости пары. Преобразуя пару 12 в поступательную пару, число повторяющихся связей увеличиваем на 2, в результате чего образуется механизм клиньев a (рис. 2.12), который имеет 4 повторяющиеся связи в его единственном контуре **).

На рис. 2.12 показано устранение повторяющихся связей в механизме клиньев путем постепенного снижения класса кинематической пары 12. В конструкции e снижен также класс пары 23. В конструкции g использован промежуточный элемент, позволяющий получить соприкосновение по поверхностям. Промежуточный элемент со звеном 2 образует шаровую пару, которую можно рассматривать как разгрузочное соединение, вмонтированное в звено 2. Этим показано применение второго метода устра-

*) Имеется в виду увеличение числа звеньев контура.

***) Клиновой механизм — без избыточных связей, если кинематическая пара 12 точечная. Принимая пару 12 плоскостной, налагаем 3 связи (две лишние), а если пара 12 поступательная, то налагается 5 связей, из которых 4 лишние.

нения избыточных связей. В работе [62] показано, что для механизма цилиндрических клиньев $w=1$ и $\sigma=0$. Однако оказывается [86], что, если $\delta_1 + \delta_2 = \alpha$, то появляется элементарная подвижность и $\sigma=1$; поэтому механизм следует изготовить так, чтобы было $\delta_1 + \delta_2 < \alpha$; тогда действительно $\sigma=0$.

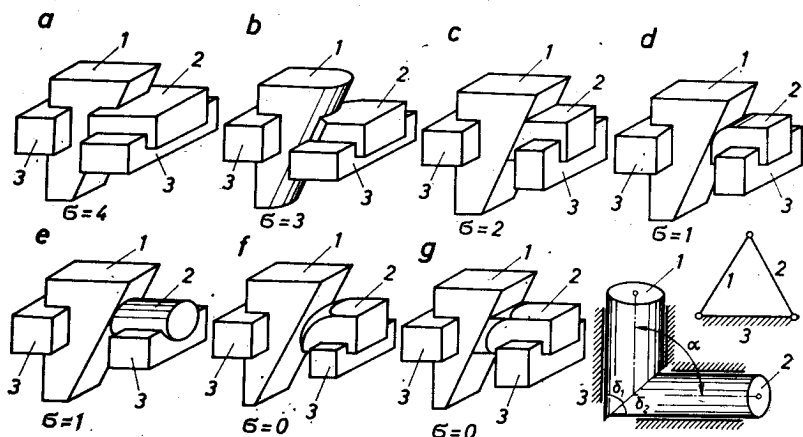


Рис. 2.12.

Устранить три избыточные связи в шарнирном четырехзвезднике можно, заменяя шарниры A и B (рис. 2.11) шаровыми парами. Тогда $w=2$, так как шатун AB получает «плавающее» движение — вращение вокруг своей оси, $\sigma=0$ и механизм становится нечувствительным к изменениям положений осей O и C .

Такой механизм можно использовать и как пространственный механизм.

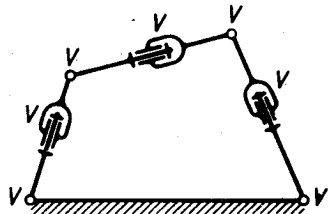


Рис. 2.13.

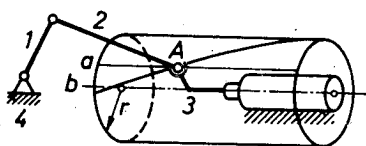


Рис. 2.14.

Устранение избыточных связей с помощью разгрузочных соединений показано на рис. 2.13. В результате получен упомянутый в § 2.3 пример семизвездного механизма с неподвижными парами.

Во фрикционном механизме тангенциальную избыточную связь устраняют с помощью разгрузочного шарнира 34 (рис. 2.2).

В кривошипно-ползунном механизме поршневой машины (рис. 1.21) имеются 2 избыточные связи. Если кинематическая пара 34 является действительной поступательной парой, как это

имеет место в штамповочных прессах, то $\sigma = 3$. Устранить обе избыточные связи в механизме поршневой машины можно, например, заменой пары 23 шаровым шарниром. Однако для того, чтобы не появлялось плавающее вращение поршня, что привело бы к $\sigma = 1$, механизм нужно построить так, как показано на рис. 2.14. Тогда центр A шаровой пары будет располагаться на образующей a воображаемого цилиндра, если ось кривошипа перпендикулярна линии скольжения поршня, или по винтовой линии b , если это условие не выполнено. Однако передача сил в этом механизме невыгодна. Поэтому желательно искать другое решение.

§ 2.6. Динамические связи

Геометрические связи ограничивают перемещения связанных тел и создают возможности передачи сил, которые называют реакциями связей. *Реакции связей имеют особые свойства: они зависят от других, действующих на механизм сил, а также от движения механизма.* Целесообразно расширить понятие связи и ввести в теорию механизмов и машин понятие *динамическая связь*. Первые исследования с использованием понятия динамической связи провели А. Малышев [49] и С. Кожевников [36].

На рис. 2.15 дана принципиальная схема гидродинамического сцепления. Сцепление состоит из насоса и турбины. При вращении ротора 1 насоса в механизме возникает поток жидкости,

который заставляет вращаться ротор 2 турбины. Гидродинамическое сцепление является трехзвенным механизмом, имеющим следующие подвижные соединения: шарниры 13, 23 и динамическое соединение 12. Динамическое соединение не накладывает ни одной геометрической или кинематической связи, однако передает момент сил от звена 1 на звено 2. Этот момент зависит от движения звеньев, от сопротивления движению жидкости и от сил, приложенных к звену 2. Так как передаваемый через соединение 12 момент имеет свойства реакции связей, то можем сказать, что в гидродинамическом сцеплении имеется динамическая связь. Подвижное соединение 12 является динамическим соединением, т. е. является соединением нулевого класса. Если валы 1 и 2

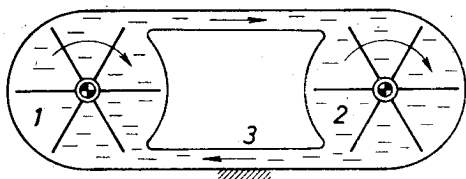


Рис. 2.15.

связать зубчатой, цепной или ременной передачей, то динамическая связь в механизме исчезнет, и соединение 12 станет кинематическим, так как между двумя звеньями существует вполне определенное соотношение скоростей (§ 1.2).

Изображенный на рис. 2.16 механизм имеет три звена: станину 3, вертикальный вал 2 и звено 1, которое может качаться

относительно оси шарнира 12. Подвижность механизма $w = 2$. Одна из подвижностей используется для привода вала 2 с угловой скоростью ω , а на вторую подвижность с помощью силы притяжения земли наложена динамическая связь, уравнение которой

$$\alpha = \arccos \frac{g}{l\omega^2}. \quad (6)$$

При выводе этого уравнения не учтено трение в шарнире 12 и вес стержня 1.

Встречаются и другие механизмы, в которых движение передается с помощью пружины (пружинный молот) или с помощью трения (фрикционное сцепление). Центробежный регулятор воздействует на органы впуска двигателя с силой, зависящей от скорости вращения, от сил тяжести противовесов, а также от сил сопротивления. Однорельсовый гироскопический вагон не опрокидывается. Движение ведомого звена вибратора (например, грохота) зависит от скорости вращения и масс неуравновешенных грузов и от сил сопротивления. Между несколькими, отдельно приводимыми электродвигателями вибраторов возможна самосинхронизация. Эти и другие механизмы с динамическими связями исследовали Кобринский [34], Лавендел [43], Рагульскис [69] и другие ученые.

Механизмы с динамическими связями таят в себя огромные возможности по реализации передачи движений и сил самого различного характера. В этом можно убедиться, рассматривая подвижные соединения на рис. 2.17, где использованы электромагнитные силы, силы трения, сопротивления текущей жидкости,

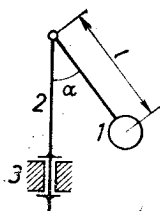


Рис. 2.16.

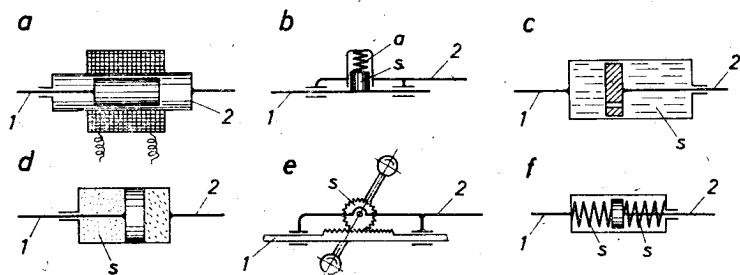


Рис. 2.17.

давления газа, силы инерции и упругости. Каждое из этих соединений, кроме геометрических связей, накладывает также одну динамическую связь. Однако любое из них может накладывать динамическую связь только тогда, когда относительное движение звеньев 1 и 2 не определено геометрическими или кинематическими связями механизма.

Эти и другие примеры позволяют выразить понятие динамической связи следующим образом: *если механическая система*

имеет степень свободы, соответствующее движение которой зависит от сил, имеющих свойства реакции связей, то эта механическая система имеет динамическую связь.

Видно, что динамическую связь называть связью можно только условно, так как в действительности она является степенью свободы с особым действием сил. Однако термин *динамическая связь* соответствует интуитивному понятию связи. Кроме того, существуют механизмы, в которых, в зависимости от нагрузки и регулировки, кинематическая связь превращается в динамическую, а граница зависит от допущения. Желательно, чтобы в этих случаях во всем диапазоне регулировки сохранилось общее название — *связь*. Таким примером служит гидромеханизм, показанный на рис. 2.18. Если кран 3 закрыт, нагрузка на поршень 2 небольшая, утечки между поршнями и цилиндрами практически не имеется и жесткость корпуса 4 большая, то уравнение связи, наложенной соединением 12, следующее:

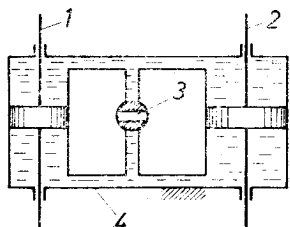


Рис. 2.18.

$$v_2 = v_1 \frac{F_1}{F_2} (1 - \xi), \quad (7)$$

где v_1 и v_2 — скорости поршней, F_1 и F_2 — действующие площади поршней, а $\xi = 0$. Следовательно, связь — кинематическая. Если нагрузку увеличиваем, появляется небольшая утечка, стенки корпуса несколько деформируются, жидкость несколько сжимается и поэтому ξ получает небольшое положительное значение. Такую связь уже раньше мы назвали *псевдокинематической*.

Если открываем кран 3, коэффициент ξ быстро увеличивается и становится функцией нагрузки, вязкости жидкости и скорости v_1 . Теперь связь динамическая.

Кинематические связи ограничивают относительные перемещения звеньев и скорости, но позволяют передавать силы, изменяющиеся в широких пределах. Если заданы движения ведущих звеньев, и число этих звеньев равняется подвижности механизма, то в механизмах с кинематическими связями движения всех остальных звеньев можно определить с помощью кинематического расчета.

Динамические связи не ограничивают ни перемещения, ни скорости, но позволяют передавать только определенные силы, зависящие от относительного движения, нагрузки и других факторов.

В механизмах с кинематическими связями заданному движению ведущих звеньев соответствуют определенные движения ведомых звеньев, которые не зависят от передаваемых сил. Если упомянутое соответствие приблизительное, то в механизме имеются псевдокинематические связи. В случае динамических связей для определения движения ведомых звеньев в зависимости от

движения ведущих звеньев обычно необходимо интегрирование дифференциальных уравнений. Поэтому иногда динамические связи называют *дифференциальными связями* [43].

О характере связей механизма можно судить по параметру, называемому *гибкостью механизма* [68]. Математическое выражение гибкости:

$$z = \frac{\partial v_Q}{\partial Q}, \quad v_P = \text{const}, \quad (2.14)$$

где Q — полезное сопротивление (нагрузка), v_Q — средняя скорость точки приложения силы Q , v_P — скорость точки приложения движущей силы P .

В механизмах с геометрическими связями гибкость равна нулю.

§ 2.7. Механизмы с внешними связями

Во всех вышерассмотренных механизмах, за исключением механизма, показанного на рис. 2.16, имеются только *внутренние связи*, которые наложены с помощью подвижных соединений и связывают звенья механизма. В технике часто встречаются механизмы, в которых имеются также внешние связи. Внешние связи ограничивают движение звеньев механизма относительно внешних тел, не принадлежащих к механизму, и налагаются с помощью внешних подвижных соединений.

Внешними телами могут быть: 1) рабочие тела, 2) среда, 3) остальные внешние тела, с которыми соприкасается или в силовом поле которых находится механизм.

Рабочие тела прикладывают к механизму движущую силу или движущий момент, а также силу полезного сопротивления или момент полезного сопротивления. Эти силы называют *главными силами*. Воздействие рабочих тел на механизм может быть одностороннее (человек вращает рукоятку, почва воздействует на плуг) или двухстороннее (сила давления газа воздействует как на поршень, так и на крышку цилиндра). Иногда рабочие тела входят в состав механизма (электромагниты генератора или электродвигателя).

Среда воздействует на механизм силами вредного сопротивления, а также силами Архимеда и гидродинамическими подъемными силами. Среда может быть также в роли рабочего тела (ветряной двигатель, вентилятор).

В обычных условиях механизмы находятся в поле силы тяжести Земли, и в большинстве случаев к механизмам приложены также контактные силы тел, связанных с землей.

Внешние тела могут наложить на механизм внешние геометрические связи только тогда, когда эти тела твердые (рельсы, шоссе). Внешние динамические связи может наложить земля (конический центробежный регулятор), среда (присоединенный к транспортному средству пропеллер вращается), рабочие тела.

Механизмы с внешними связями не всегда имеют станину (транспортные средства). Каждый механизм с внешними связями может быть рассмотрен: 1) изолированно от внешних тел и 2) в рабочем положении, когда действуют внешние связи.

Условимся называть *подвижностью механизма* число степеней свободы механизма в изолированном от внешних тел положении, так как в этом случае обнаруживаются все его возможные движения; за тело отсчета принимаем станину, а если ее нет — землю или другое внешнее тело. Тогда универсальные структурные формулы (2.5) и (2.6) можно написать так:

$$w = 6(n - \xi) - s_i + \sigma_i, \quad (2.15)$$

$$w = f_i - (6k + \xi - 1) + \sigma_i, \quad (2.16)$$

где $\xi = 1$, если станина имеется, и $\xi = 0$, если станины нет; индексом i обозначены внутренние параметры механизма. Формулу (2.3) теперь следует писать так:

$$w = n_q - s_i^{ne} + \sigma_i^{ne}. \quad (2.17)$$

При проектировании механизма необходимо следить за тем, чтобы подвижность была достаточна для обеспечения всех предназначенных степеней свободы. Рассуждая таким образом, можно написать *внешнюю структурную формулу механизма*:

$$w = c + b + d + s_a - \sigma_a - w_a, \quad (2.18)$$

где c — число основных подвижностей, которое на единицу меньше, чем число независимых главных сил; b — число дополнительных подвижностей; их имеют отдельные звенья или группы звеньев, и они предназначены для достижения совместного действия механизма и внешних тел; k к ним принадлежат также подвижности «плавающих» звеньев; d — число динамических связей; s_a — число внешних геометрических связей; σ_a — число внешних избыточных связей; w_a — уменьшение числа степеней свободы внешних тел в результате действия внешних связей механизма.

Подвижность механизма в рабочем положении, когда действуют внешние связи, называют *рабочей подвижностью*; ее выражение

$$w_D = c + b + d. \quad (2.19)$$

Если внешних связей нет, то $w = w_D$.

Приравнивая выражения (2.15) и (2.18), получаем *уравнение баланса подвижностей*:

$$6(n - \xi) + w_a = c + b + d + s - \sigma, \quad (2.20)$$

которое можно использовать для проверки правильности структурного строения механизма.

Из обеих последних формул следует выражение для числа повторяющихся связей

$$\sigma = s + w_D - w_a - 6(n - \xi), \quad (2.21)$$

которое так же, как остальные формулы этого параграфа, действительно для всех механизмов. Механизм является o -кратно статически неопределимым, не считая статическую неопределимость опор станины. Если желаем учесть статическую неопределимость опор станины, то в число s связей необходимо включить также неизвестные величины реакций опор станины и принять $\xi = 0$.

Общее число избыточных связей равняется сумме внутренних и внешних повторяющихся связей, т. е. $\sigma = \sigma_i + \sigma_a$, где

$$\sigma_i = s_i + w - 6(n - \xi), \quad (2.22)$$

$$\sigma_a = s_a - w_a - (w - w_D). \quad (2.23)$$

В заключение отметим, что анализ состава связей является неотъемлемой составной частью структурного синтеза каждого механизма, так как в ходе этого анализа конструктор вынужден дополнительно изучить вопросы, касающиеся важных свойств механизма. Анализ состава связей пригоден также для оценки уже построенных механизмов.

Пример 2.4. Проанализировать связи неуправляемой тележки (рис. 2.19), которая состоит из корпуса и четырех колес, вращающихся на осях, жестко прикрепленных к корпусу.

Решение. Тележка имеет 5 звеньев и 8 подвижных соединений: 4 внутренних шарнира (V класса) и 4 внешних соединения колес с поверхностью дороги. Если принять, что в этих соединениях имеется точечный контакт и трение настолько большое, что скольжение невозможно, то эти соединения III класса. Следовательно, $w_D = 1$ и $s = 32$. Так как внешние связи не уменьшают подвижность внешних тел, то $w_a = 0$ и по формуле (2.21) число повторяющихся связей

$$\sigma = 32 + 1 - 0 - 6(5 - 0) = 3.$$

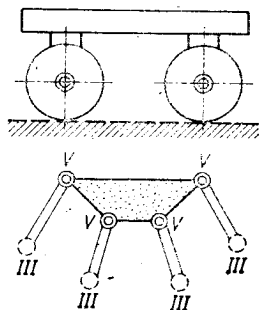


Рис. 2.19.

Внутренние неголономные связи не имеются. Поэтому согласно формуле (2.17) подвижность механизма $w = n_q = 10$, так как для определения положения корпуса необходимо 6 координат и для определения положения колес относительно корпуса — 4 координаты. По формуле (2.23)

$$\sigma_a = 12 - 0 - (10 - 1) = 3.$$

Следовательно, все повторяющиеся связи внешние. Легко представить себе, что одна из них дополнительно ограничивает вертикальные перемещения, для устранения которых достаточно было трех колес, а остальные две дополнительно ограничивают горизонтальные перемещения, перпендикулярные к направлению движения, для устранения которых достаточно было двух колес — одного переднего и одного заднего. Из 12 внешних связей 8 являются неголономными, две из которых повторяются.

Конструктор должен решить, какие избыточные связи следует устранить, а какие оставить, обеспечивая их работоспособность.

На твердой дороге вертикальная избыточная связь будет действовать только тогда, когда поверхность дороги будет плоской. Эту связь можно устранить, например, устроив разгрузочный шарнир, который позволяет оси передних колес поворачиваться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с направлением движения. В таком случае $n = 6$, $s = 37$, $w_D = 1$, $w = 11$. По формуле (2.21) получаем $\sigma = 2$. Следовательно, остались две пов-

творящиеся связи, действительность которых обеспечена одновременно с устранением вертикальной повторяющейся связи. Эти повторяющиеся связи полезны, так как они способствуют лучшей устойчивости тележки на дороге, уменьшая опасность бокового соскальзывания.

Если желаем создать управляемую тележку, то необходимо дать возможность осям передних колес поворачиваться вокруг вертикальной оси шарнира. В таком случае $n = 7$, $s = 42$, $w_D = 2$, $\sigma = 2$.

Пример 2.5. Проанализировать связи механизма навесной системы трактора (рис. 2.20).

Решение. Механизм имеет 9 звеньев. Связи накладывают кинематические пары: 11 внутренних ($s_i = 40$) и 3 внешних (тело a , $s_a = 9$). Принимая за станину корпус трактора, находим, что подвижность (когда корпус навесной машины, т. е. тело a , не присоединен) $w = n_q = 10$. Она распределяется так: основная подвижность вместе с ведущими звеньями 1 и 2, две поперечные подвижности звеньев 4 и 7 и звеньев 5 и 8, пять плавающих вращательных движений звеньев 4, 5, 6, 7 и 8 и два вращательных движения звена 6 вокруг двух перпендикулярных ему осей. По формуле (2.22) число внутренних повторяющихся связей

$$\sigma_i = 40 + 10 - 6(9 - 1) = 2.$$

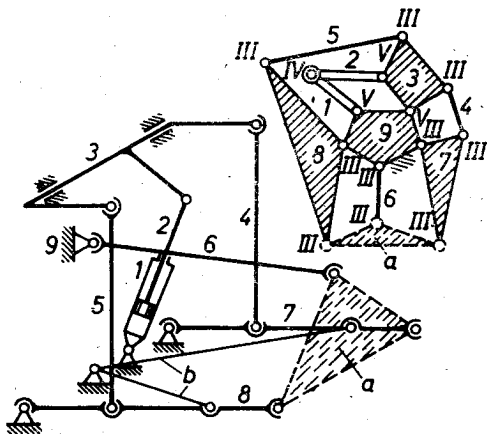


Рис. 2.20.

Возникает вопрос, где находятся эти повторяющиеся связи? Замкнутые контуры, содержащие звенья 4 и 5, слишком подвижны, чтобы в них имелись повторяющиеся связи. С помощью любой из формул (2.5), (2.6), (2.15), (2.16), (2.22) можно определить, что в контуре звеньев 1, 2, 3, 9 имеются связи $\sigma = \sigma_i = 2$; для этого контура $w = 1$, $n = 4$, $s = s_i = 19$, $f = f_i = 5$, $\xi = 1$. Эти повторяющиеся связи можно ликвидировать, заменяя, например, шарниры 23 и 19 шаровыми парами. Тогда снятые четыре связи ликвидируют две повторяющиеся связи и создают два «плавающих» вращения звеньев 1 и 2. Плавающие вращения способствуют равномерному износу, поэтому они не являются вредными.

После присоединения навесной машины появляются 9 внешних связей. Шесть из них ликвидируют степени свободы ($w_a = 6$) корпуса навесной рабочей машины, так как корпус ее не может двигаться независимо от навесного механизма, а последние три снижают подвижность механизма и могут создать внешние повторяющиеся связи. В рабочем положении основная подвижность навесного механизма $s = 1$ и дополнительные подвижности $b = 6$; они состоят из вышеупомянутых пяти «плавающих» вращений и из одной поперечной подвижности звеньев 4, 5, 6, 7, 8 вместе с навесной машиной. Так как динамических связей нет, то по формуле (2.19) рабочая подвижность $w_D = 7$ и по формуле (2.23) число внешних повторяющихся связей $s_a = 0$. Цепи b не учитывались, так как их задача — ограничить поперечную подвижность в транспортном положении.

Примечание. Использованный в этом примере метод отыскания повторяющихся связей по отдельным контурам не дает возможности найти все повторяющиеся связи тогда, когда некоторые из них принадлежат к нескольким контурам. Поэтому необходимо рассматривать одновременно некоторые или даже все контуры. Такой случай имеется в кинематической цепи центробежного регулятора в следующем примере.

Пример 2.6. Проанализировать связи механизма непрямого автоматического регулирования (рис. 2.21).

Решение. Механизм имеет 11 звеньев и 14 кинематических пар, класс которых показан на структурной схеме. Для облегчения определения подвижности принимаем, что вал 1 не вращается. Получаем воображаемый плоский механизм с 10 звеньями (звенья I и II сливаются), в котором 12 пар второго порядка и 1 пара первого порядка. Судя по кинематической схеме, число избыточных тангенциальных связей $\sigma_1 = 0$. Подвижность воображаемого плоского механизма по формуле (2.9) следующая:

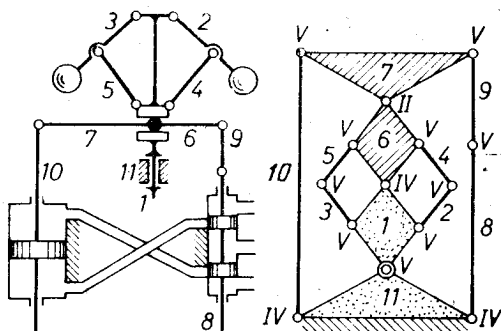


Рис. 2.21.

$$w_i = 12 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 0 = 2.$$

Добавляя условно неучтенное вращение регулятора, получим, что подвижность действительного механизма $w = 3$. Это можно объяснить следующим образом: $w = c + d = 1 + 2$. Одну динамическую связь на шары регулятора накладывает Земля своим гравитационным полем, вторую — рабочая жидкость, создавая обратную связь. Следовательно, обе динамические связи

являются внешними, а внешних геометрических связей нет. Согласно формуле (2.6) число избыточных связей

$$\sigma = w + 6k - f = 3 + 6 \cdot 4 - 20 = 7.$$

Легко установить, что пять из этих связей содержит центробежный регулятор, вращающаяся кинематическая цепь которого напоминает кривошипно-ползунный механизм с двумя кривошипами, двумя шатунами и круглым ползуном. В каждом контуре, рассматривая их отдельно, имеются две избыточные связи, а в обоих вместе — пять. Следовательно, одна избыточная связь принадлежит одновременно обоим контурам. Регуляторы изготавливаются на специальных заводах, поэтому вопрос об упомянутых избыточных связях актуален для этих заводов. Остальные две избыточные связи относятся к цепи поршня золотника и их можно устранить, заменяя шарниры 710 и 89 шаровыми парами.

Проверяем данный механизм с помощью уравнения баланса подвижностей (2.20):

$$6(11 - 1) + 0 = 1 + 0 + 2 + 64 - 7.$$

Примечание. Минимальная подвижность обычного переуправляемого механизма $w_{\min} = 1$. Автоматическое регулирование делает движущую силу зависимой от нагрузки или наоборот. В случае прямого регулирования $w_{\min} = 2$, а непрямого — $w_{\min} = 3$.

Раздел 3

СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 3.1. Принцип построения механизма

Еще в начале XX века Л. Ассур опубликовал общий принцип, который связывает способ привода механизма со структурой механизма [3, 5]. *Принцип Ассура образования механизма* следующий.

Механизм состоит из ведущей и ведомой цепей. Ведущая цепь, или начальный механизм, состоит из станины и присоединенных к ней одного или нескольких ведущих звеньев, движение которых задано. Звенья, не принадлежащие к ведущей цепи, составляют ведомую цепь. Если ведомая цепь, отсоединенная от ведущей цепи и присоединенная к станине теми же самыми подвижными соединениями, образует плоскую статически определенную ферму, то во многих случаях ведомую цепь можно разделить на части, каждая из которых обладает теми же общими свойствами, как ведомая цепь в целом. Эти части ведомой цепи называют *структурными группами*.

Очень важны следующие обстоятельства:

1) кинематический и кинестатический расчет каждой структурной группы можно производить отдельно от механизма;

2) число структурных групп, применяемых на практике, невелико по сравнению с огромным количеством механизмов. Поэтому выгодно разработать алгоритмы расчета для каждой структурной группы и по этим алгоритмам проводить расчет всех механизмов. Таким образом получаем простой принцип расчета механизмов, который тесно связан со структурой механизма.

Принцип Ассура не является универсальным. Это заметили уже в 1955 г. Кожевников и Цехнович [38]. Оказывается, что в современных машинах встречаются механизмы, ведущая цепь которых не содержит станину и механизмы, имеющие несколько ведущих цепей. Учитывая это, удалось разработать расширенный принцип Ассура [63, 60], который в главных чертах следующий.

Механизм состоит из N ведущих цепей и одной ведомой цепи. Число N ведущих цепей равно разряду механизма; ведущие цепи могут и не содержать станину.

Ведущие цепи состоят только из *ведущих звеньев*, которые связаны между собой *ведущими соединениями*. Ведущими называем звенья, движение которых удобно считать заданным. Наиболее простые возможные виды ведущих цепей показаны на рис. 3.1.

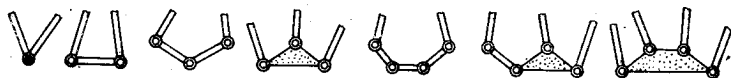


Рис. 3.1.

Между числом ведущих звеньев n_0 и числом ведущих соединений p_0 существует зависимость, подтверждаемая рисунком 3.1:

$$p_0 = n_0 - N. \quad (3.1)$$

Видно, что одно ведущее звено не может существовать. Согласно традиции о таком звене можно говорить тогда, когда ведущая цепь содержит станину. Существуют механизмы, ни одна из ведущих цепей которых станину не содержит.

На практике можно встретить механизмы, которые состоят только из ведущих цепей. К таким механизмам относятся широ-

ко известные двухзвенные механизмы: электрогенератор, электромотор, турбина, центробежный насос, мясорубка, двери, щипцы и многие другие.

Ведомая цепь содержит все звенья и все подвижные соединения, за исключением ведущих звеньев и ведущих соединений. В механизмах высших разрядов ($N > 1$) ведомая цепь может состоять из нескольких частей, между которыми имеются разрывы. С помощью *крайних соединений* ведомая цепь присоединена к ведущим цепям и ведущие цепи соединены между собой. В противном случае возникают *изолированные крайние соединения*, каждое из которых создает один разрыв ведомой цепи.

По предложению И. Артоболевского порядком ведомой цепи называют число крайних соединений этой цепи [2, 6]. Порядок показывает, во скольких местах ведомая цепь соединена с ведущими цепями. Это означает, что порядок изолированного крайнего соединения равняется 2. В общем случае порядок ведомой цепи

$$r = r_1 + 2r_2, \quad (3.2)$$

где r_1 — число обычных крайних соединений, r_2 — число изолированных крайних соединений.

Можно доказать [60], что между структурными параметрами механизма и ведомой цепи существует следующая универсальная зависимость:

$$r = k - \kappa + N, \quad (3.3)$$

где k — число замкнутых контуров кинематической цепи механизма, κ — число замкнутых контуров ведомой цепи, причем каждый разрыв принимается за отрицательный контур.

Возможны механизмы, которые состоят только из ведомой цепи, например, автомобильный одноосный прицеп (рис. 2.7).

Если одну из N ведущих цепей принять за главную и отделить от механизма, а каждую из остальных $N - 1$ ведущих цепей считать как одно звено с переменными размерами, то получим *условную ведомую цепь*, которая не имеет разрывов и изолированных крайних звеньев. Условную ведомую цепь во многих

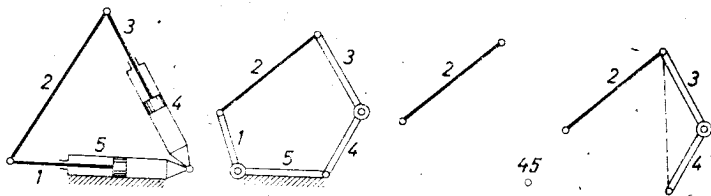


Рис. 3.2.

случаях можно разделить на структурные группы по аналогии с ведомыми цепями механизмов первого разряда. Условная ведомая цепь имеет большое значение в кинематике и кинетостатике механизмов высших разрядов.

На рис. 3.2 представлена кинематическая схема, структурная схема, структурная схема ведомой цепи механизма и структурная схема условной ведомой цепи двухцилиндрового гидростатического механизма. Ведомая цепь состоит из звена 2 и изолированного крайнего соединения 45, а условная ведомая цепь — из двух звеньев: из звена 2 и из звена 34 переменной длины. При работе обоих цилиндров можно переместить шарнир 23 в любую точку плоскости (в пределах, зависящих от размеров механизма). Для этого механизма $N = 2$, $p_0 = 2$, $n_0 = 4$, $k = 1$, $\kappa = -1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r = 4$.

Описанный принцип построения механизма универсален. Однако в технике самыми распространенными являются плоские механизмы. Поэтому дальше рассмотрим структуру и классификацию плоских механизмов.

§ 3.2. Плоские механизмы с низшими парами

Рассмотрим плоские механизмы со станиной, в состав которых входят только плоские шарниры и поступательные пары или соответствующие им кинематические соединения, накладывающие только внутренние постоянные геометрические связи, причем тангенциальных избыточных связей нет. Структурные формулы (§ 2.4) этих механизмов следующие:

$$w = 3(n - 1) - 2p, \quad (3.4)$$

$$w = p - 3k, \quad (3.5)$$

$$w = (n - 1) - 2k. \quad (3.6)$$

Подставляя в формулу (3.6) $w = 1$, получаем зависимость

$$n = 2(k + 1),$$

которая показывает, что число звеньев плоских механизмов *принудительного движения с низшими парами является четным числом*. Обозначим число звеньев ведомой цепи через n' , а число подвижных соединений через p' . Тогда

$$n = n_0 + n', \quad p = p_0 + p'. \quad (4)$$

У рассмотренных механизмов подвижность равна числу ведущих пар, т. е. $w = p_0$. Учитывая это и формулы (1) и (3.1), из формул (3.4), (3.5) и (3.6) получаем зависимости, относящиеся к ведомым цепям плоских механизмов с низшими парами:

$$p' = \frac{3}{2}(n' + N - 1), \quad (3.7)$$

$$p' = 3k, \quad (3.8)$$

$$n' = 2k - (N - 1). \quad (3.9)$$

На структурные группы, как уже было отмечено, можно разделить только условные ведомые цепи и ведомые цепи механизмов первого разряда. Отличие состоит в том, что у первых имеются звенья переменных размеров, а у вторых — не имеются. Это

означает, что при исследовании вопроса о разложении ведомой цепи на структурные группы достаточно исследовать ведомые цепи первого разряда.

В соответствии с последними формулами строение ведомых цепей первого разряда подчиняется следующим законам:

$$n' = 2k, \quad (3.10)$$

$$p' = 3k, \quad (3.11)$$

где k — число замкнутых контуров механизма и одновременно также число замкнутых контуров фермы ведомой цепи. Фермой ведомой цепи называем систему, получаемую присоединением крайних соединений ведомой цепи к станине.

Соответствующие формулам (3.10) и (3.11) величины показаны в таблице:

k	1	2	3	4
n'	2	4	6	8
p'	3	6	9	12

Структурные группы находят, постепенно образуя соответствующие формулам (3.10) и (3.11) или таблице фермы ведомых цепей, которые можно построить с k контурами, $n' + 1$ звеньями и p' кинематическими соединениями согласно формам кинематических цепей, данным на рис. 1.19. Из каждой найденной фермы, отбросив по одному звену, можно получить ведомые цепи. Те ведомые цепи, которые невозможно больше разделить на заранее найденные простые цепи, называют структурными группами.

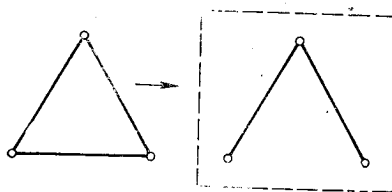


Рис. 3.3.

Этот метод предложил Г. Баранов [6], который назвал число замкнутых контуров кинематической цепи классом цепи, а класс ведомой цепи принял равным классу фермы, соответствующей ведомой цепи.

На рис. 3.3 показано, как из единственной фермы первого класса образуется единственная ведомая цепь первого класса, которая одновременно является и структурной группой первого класса или *диадой*. Механизмы, у которых действительная или условная ведомая цепь состоит из диад, называют *диадными механизмами* или механизмами первого класса. Диадные механизмы являются самыми распространенными плоскими механизмами с низшими парами.

Заменяя один или два шарнира поступательными парами, получаем остальные четыре модификации диады, показанные на

рис. 3.4. Заменить все три шарнира поступательными парами невозможно, так как после присоединения к станине получим не неподвижную, статически определимую ферму, а механизм с подвижностью $w = 1$. Следовательно, возможны только пять модификаций диад.

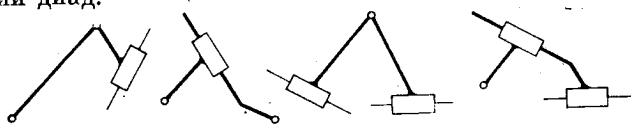


Рис. 3.4.

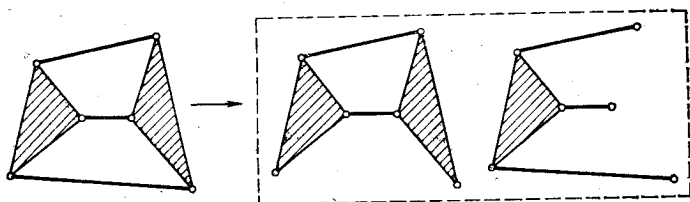


Рис. 3.5.

Для лучшей передачи сил модификации диад стараются выполнить так, чтобы шарниры располагались на линиях скольжения поступательных пар; это не соблюдено на рис. 3.4.

На рис. 3.5 показано, как из фермы второго класса образуются две структурные группы второго класса, одна — второго порядка, а другая — третьего порядка. Часть шарниров и здесь можно заменить поступательными парами.

Возможна еще одна ферма второго класса, соответствующая вышеприведенным условиям но полученные из этой фермы ведомые цепи состоят из диад рис. 3.6.

Механизмы, в которых какая-нибудь из обеих групп второго класса является группой высшего класса, называют механизмами второго класса. Следовательно, класс механизма равняется классу структурной группы высшего класса действительной или условной ведомой цепи механизма. Вообще класс механизма зависит от того, какие звенья выбраны за ведущие.

Число структурных групп третьего класса равно 11. Три из них показаны на рис. 3.7. По расчету Баранова в четвертом классе имеется 161 структурная группа. На практике основное значение имеют структурные группы первого и второго класса. Однако, например, в механизмах лесопильных рам имеются также структурные группы третьего и четвертого класса.

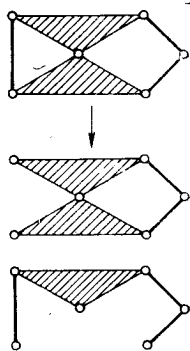


Рис. 3.6.

Для наиболее распространенных групп разработаны алгоритмы кинематического и кинетостатического расчета.

Чем выше класс группы, тем выше сложность и трудоемкость ее расчета. Следовательно, структурный анализ ведомой цепи дает прогноз методики расчета. Однако, как выяснил У. Дзинтарс

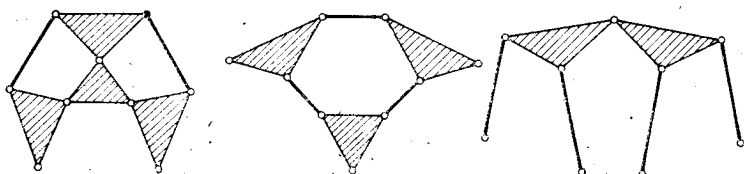


Рис. 3.7.

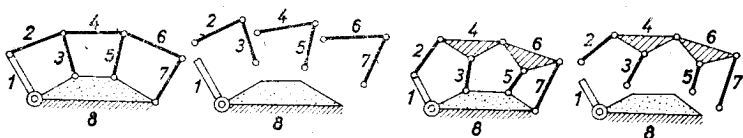


Рис. 3.8.

[22], структурная схема является надежным индикатором расчета тогда, когда многократные шарниры показаны и в структурной схеме как многократные. В противном случае, если, следуя традициям, многократные шарниры разделить на простые, получим слишком плохой прогноз. Сказанное пояснено на рис. 3.8: оставляя двойные шарниры в структурной схеме механизма, приходим к выводу, что механизм является диадным; а разделяя двойные шарниры, — что механизм имеет третий класс, так как содержит структурную группу третьего класса, показанную на рис. 3.7.

Пример 3.1. На рис. 3.9 показан механизм горизонтального строгального станка (*шпинг*). Разделить ведомую цепь механизма на структурные группы, определить разряд и класс механизма.

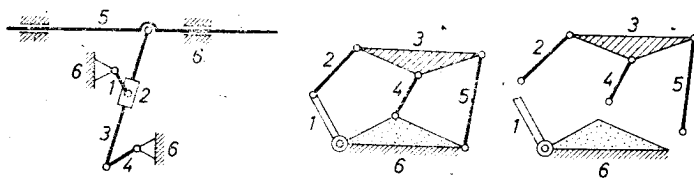


Рис. 3.9.

Решение. Нарисовав структурную схему механизма и отделив ведомую цепь 16, устанавливаем, что ведомая цепь состоит из одной структурной группы второго класса третьего порядка. Следовательно, механизм является механизмом первого разряда второго класса.

Пример 3.2. На рис. 3.10 показан гидрофицированный механизм подъема плуга. Разделить ведомую цепь на структурные группы, определить разряд и класс механизма.

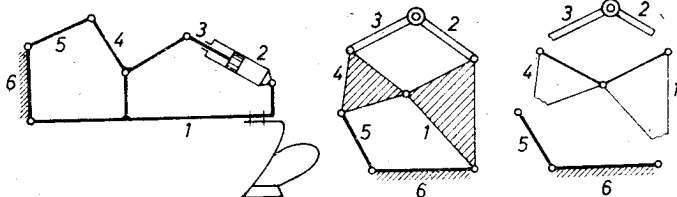


Рис. 3.10.

Решение. Поступая аналогично предыдущему, находим, что ведомая цепь механизма состоит из двух диад. Следовательно, механизм является механизмом первого разряда первого класса (диадный механизм первого разряда)*).

§ 3.3. Плоские механизмы с высшими парами

Рассмотрим плоские механизмы, в которых, кроме шарниров и поступательных пар, имеется по крайней мере одна высшая кинематическая пара первого порядка, накладывающая на относительное движение образующих ее звеньев в плоскости одну тангенциальную связь. Такая пара является одноконтактной и в ней звенья катятся и скользят одно по другому; например, зубчатая пара (рис. 1.4), пара между кулачком и роликом (рис. 1.8). Напротив, фрикционная пара (на рис. 2.2 пара 12) и многоконтактные высшие пары являются парами второго порядка, не входящими в группу рассматриваемых пар.

В таких механизмах тангенциальных избыточных связей обычно нет, поэтому структурные формулы (2.8) и (2.9) можно записать так:

$$w = 3(n - 1) - 2p_2 - p_1, \quad (3.12)$$

$$w = f_t - 3k, \quad (3.13)$$

где число тангенциальных подвижностей кинематических пар механизма $f_t = p_2 + 2p_1$. Если учесть, что эти подвижности являются суммой подвижностей ведущих и ведомых пар, т. е. $f_t = f_{ot} + f'_t$, а $f_{ot} = w$, то из формулы (3.13) вытекает, что

$$f'_t = 3k. \quad (3.14)$$

Сравнивая с формулой (3.11), видим, что в ведомой цепи рассматриваемых механизмов число тангенциальных подвижностей кинематических пар на каждый замкнутый контур механизма,

*) Если из механизма на рис. 3.10 выделить ведущую группу 23, то ведомая цепь будет представлять собой шарнирный четырехзвенник с неподвижным звеном 6. Звенья 5, 6, оставшиеся после отделения звеньев 1 и 4, не образуют диаду. Решение будет правильным, если за ведущую цепь принять 16.—Прим. ред.

так же как и в плоских механизмах с низшими парами, равняется 3.

Кинематический расчет плоских механизмов с высшими парами можно произвести методами, используемыми для плоских механизмов с низшими парами, если заранее высшие пары условно заменить низшими. Эту операцию выполняют согласно рис. 3.11. В точке соприкосновения S кривых e_1 и e_2 высшей пары проводят общую нормаль; на этой нормали находятся центры кривизны C_1 и C_2 данных кривых. Воображают, что в центрах кривизны имеются шарниры, их соединяют условным звеном O . Если

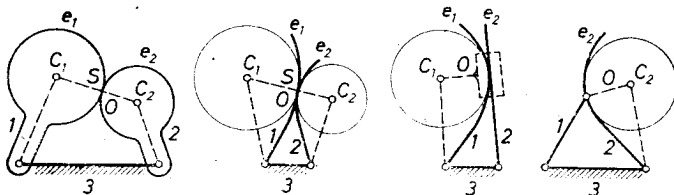


Рис. 3.11.

радиусы кривизны кривых e_1 и e_2 постоянны, то полученный заменяющий механизм, звенья которого показаны штриховой линией, пригоден для неограниченного количества положений. Таким является первый из показанных на рис. 3.11 механизмов. Если радиусы кривизны не постоянны, то заменяющий механизм — мгновенный и пригоден только для трех бесконечно близких положений механизмов, так как круги кривизны соприкасаются с кривыми e_1 и e_2 только в трех бесконечно близких точках.

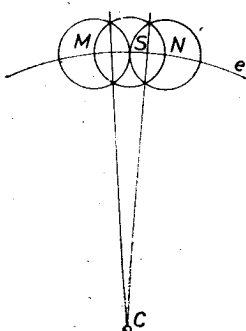


Рис. 3.12.

Такими являются остальные три механизма, показанные на рис. 3.11. Если какая-нибудь из кривых является прямой, то вместо шарнира следует вводить поступательную пару, так как поступательную пару можно считать шарниром с бесконечно удаленным центром.

Приближенный графический способ определения центра кривизны показан на рис. 3.12. В точке соприкосновения S проводят небольшую окружность, которая пересекает кривую e в точках M и N . Вокруг этих точек как центров проводим такие же окружности. Через точки пересечения окружностей проводим прямые, пересекающиеся

в точке C , которая приблизительно соответствует центру кривизны кривой e в точке S .

В результате замены получаем условный механизм с низшими парами определенного разряда и класса, для кинематического расчета которого пригодны соответствующие методы расчета механизмов с низшими парами.

КЛАССИФИКАЦИИ И ПРИМЕРЫ МЕХАНИЗМОВ

§ 4.1. Разные подходы к классификации механизмов

Применение теории механизмов и машин и исследования в этой области науки связаны главным образом с применением какой-то систематизации или классификации, так как из огромного количества механизмов по определенным признакам необходимо выделить механизмы, соответствующие данному случаю.

Так как главные свойства механизма зависят от его строения, уже давно возникла необходимость создать общую *структурную классификацию* механизмов. Однако создать такую классификацию оказалось очень трудно, так как здесь существует своеобразный «волшебный круг»: систематически исследовать механизмы можно только тогда, когда имеется какая-то классификация, а создать научно обоснованную классификацию можно только на основе исследований.

Народы древних культур считали, что каждая машина является комбинацией «простых машин» (рычагов, клиньев, винтов, блоков, лебедок). На этой основе не удалось создать в какой-то степени приемлемую классификацию. Поэтому до начала XIX века механизмы и машины классифицировались по их применению.

Монж и его сотрудники (см. введение, § 3) все существующие и возможные машины распределили на 420 групп по принципу преобразования движения. Позже эту классификацию переработал Виллис, не учитывая механизмы с деформируемыми элементами и считая их непригодными для количественного исследования.

Первую частично структурную классификацию в 1875 г. опубликовал Рело [104]. В зависимости от вида звеньев и кинематических пар механизмы были распределены на 6 групп: винтовые механизмы, кривошипные механизмы, зубчатые механизмы, механизмы блоков и шкивов, кулачковые механизмы и храповые механизмы. Однако в этой классификации для храповых механизмов характерно функциональное свойство (преобразование движения).

Первую структурную классификацию, связывающую строение механизма со способом его привода, разработал Л. Ассур (§ 3.1).

Немецкий ученый Р. Франке определил механизм как преобразователь сил и энергии и на этой основе разработал очень общую схему классификации технических устройств [97]. Некоторые устройства по этой классификации не содержат ни одного подвижного звена. Эта классификация выходит за пределы теории механизмов и машин. В практике инженеров и конструкторов пригодными оказались разные *функциональные классификации*, по которым механизмы распределяют на группы в зависимости от их функционального назначения в машинах

(например: механизмы торможения, фиксации, захвата и т. п.). Комбинируя функциональные и структурные свойства, получаем смешанные классификации. Их обычно используют для составления атласов механизмов [1, 37].

§ 4.2. Основные классификации и примеры механизмов

Рассмотрим основные классификации механизмов. Параллельно с этим ознакомимся с примерами механизмов, с построением разных механизмов из данной кинематической цепи, с разными способами построения одного и того же механизма, с точками возврата и мертвыми точками в механизмах.

Универсальную структурную классификацию можно получить, систематизируя механизмы по характеру связей. Связи являются общими и заодно абстрактными структурными признаками, от которых существенно зависят свойства механизма. В основу классификации ставим таблицу связей:

I: 1) механизмы, имеющие только геометрические и кинематические связи,

2) механизмы, имеющие также динамические связи;

II: 1) механизмы, имеющие только постоянные связи,

2) механизмы, имеющие также переменные связи;

III: 1) механизмы, имеющие только внутренние связи,

2) механизмы, имеющие также внешние связи;

IV: 1) механизмы без избыточных связей,

2) механизмы, имеющие избыточные связи.

Взяв из каждой совокупности, обозначенной римскими цифрами, один признак, с помощью четырех арабских цифр можно охарактеризовать любую из 16 групп механизмов. Так, например, группа 1122 включает механизмы, имеющие только геометрические и кинематические постоянные связи, между которыми имеются внешние и избыточные связи. Все указанные в этой классификации типы связей рассмотрены в разделе 2.

Наложённые подвижными соединениями связи механизма ограничивают относительные подвижности звеньев, но оставляют звеньям определенные возможности абсолютных движений. Поэтому в соответствии с § 2.4 механизмы можно классифицировать по характеру траекторий точек звеньев так:

1) поверхностные механизмы:

а) плоские механизмы,

б) сферические механизмы,

в) цилиндрические механизмы;

2) объёмные механизмы.

Объёмные механизмы содержат одно или несколько звеньев, траектории точек которых являются кривыми, не находящимися в параллельных плоскостях, на поверхностях концентрических сфер или коаксиальных цилиндров.

Часто механизмы подразделяют только на две группы:

1) плоские механизмы; 2) пространственные механизмы. Про-

странственные механизмы охватывают объемные, сферические и цилиндрические механизмы.

Каждая группа механизмов из указанных классификаций имеет различные методы анализа и синтеза. С методами расчета механизмов тесно связано разделение механизмов по разрядам, в зависимости от числа ведущих цепей (§ 3.1).

При выборе метода расчета имеет значение классификация механизмов в зависимости от размещения станины. Согласно этой классификации механизмы делятся на 3 семейства:

- 1) механизмы, у которых станина является звеном ведущей цепи;
- 2) механизмы, у которых станина является звеном ведомой цепи;
- 3) механизмы без станины.

Для прогнозирования метода расчета механизма очень пригодна предложенная Ассуром классификация плоских механизмов с низшими парами в зависимости от структуры ведомой цепи. Согласно этой классификации класс механизма равен классу структурной группы наивысшего класса, которая входит в состав действительной или условной ведомой цепи.

Механизмы в зависимости от физических свойств звеньев, промежуточных элементов и рабочих тел разделяют так: 1) механизмы с твердыми элементами; 2) механизмы, имеющие упругие промежуточные элементы; 3) механизмы, имеющие гибкие промежуточные элементы (звенья); 4) гидромеханизмы — гидростатические и гидродинамические механизмы, в которых силы передаются с помощью гидростатического или гидродинамического давления; 5) пневматические механизмы; 6) электрические механизмы, в которых твердые рабочие тела создают электромагнитное поле.

В теории механизмов, машиностроении и в практике эксплуатации машин пригодным оказался улучшенный вариант структурной классификации Рело: в зависимости от вида звеньев и подвижных соединений механизмы разделяют на следующие группы: 1) стержневые механизмы; 2) кулачковые механизмы; 3) зубчатые механизмы; 4) фрикционные механизмы; 5) механизмы с гибкой связью; 6) винтовые и клиновые механизмы. Кроме того, возможны разные комбинации упомянутых механизмов, например, зубчато-стержневые механизмы, винто-стержневые механизмы и др.

Стержневые механизмы характеризуются относительно большими длинами звеньев. Звенья обычно соединены низшими кинематическими парами. Звено, которое имеет соединение со станиной и которое относительно станины может совершить полный оборот, называют *кривошипом*. Если звено, соединенное со станиной, не может совершить полный оборот, оно называется *коромыслом*. Звено, совершающее сложное плоскопараллельное или пространственное движение, называется *шатун*ом. Одно из звеньев поступательной пары называют *ползуном*, второе — *направля-*

ющей. В поршневых машинах ползун называют поршнем, а направляющую — цилиндром. Подвижная направляющая поступательной пары называется *кулисой*.

Самыми распространенными являются плоские четырехзвенные стержневые механизмы. Они могут иметь четыре шарнира (шарнирные четырехзвенники), три шарнира и одну поступательную пару или два шарнира и две-поступательные пары.

На рис. 4.1 показан *шарнирный четырехзвенник* общего назначения, анализу и особенно синтезу которого посвящены очень

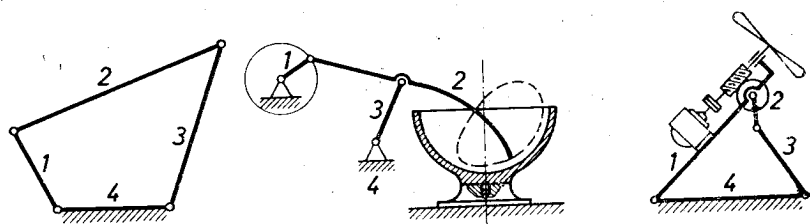


Рис. 4.1.

многие исследования. Там же показаны два применения этого механизма: тестомеситель и «клапняющийся» вентилятор. В первом случае ведущая цепь содержит станину, а во втором — нет. В зависимости от соотношения длин звеньев возможны однокривошипные и двухкривошипные шарнирные четырехзвенники, а также такие, у которых кривошипа нет.

На рис. 4.2 показан очень широко распространенный *кривошипно-ползунный механизм*; если дезаксиал $e \neq 0$, то такой механизм называют дезаксиальным,

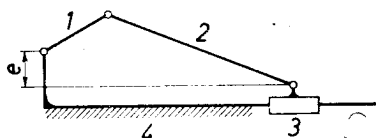


Рис. 4.2.

но если $e = 0$, то — центральным кривошипно-ползунным механизмом. Шарнир 23 обычно находится на средней линии направляющей поступательной пары.

На рис. 4.3 показано, как из одной и той же кинематической цепи можно получить различные механизмы, принимая за станину разные звенья: *a* — кривошипно-ползунный механизм, *b* — механизм с вращающейся кулисой, *c* — механизм с качающимся ползунком и *d* — коромысло-ползунный механизм.

Четыре различных конструктивных исполнения этой же кинематической цепи показаны на рис. 4.4. Первые две из них называют *эксцентриковыми механизмами*. В первом варианте звено 4 охватывает звено 1 (эксцентрик) и звено 3. Во втором варианте звено 2 охватывает эксцентрик. В третьем варианте звено 3 охватывает звено 2, а в четвертом варианте (схема плунжерного насоса) — наоборот. *Плунжером* называют поршень, длина которого значительно превышает диаметр.

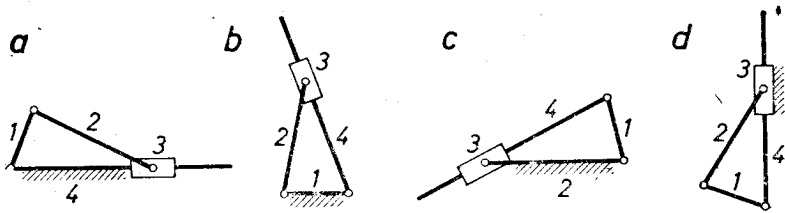


Рис. 4.3.

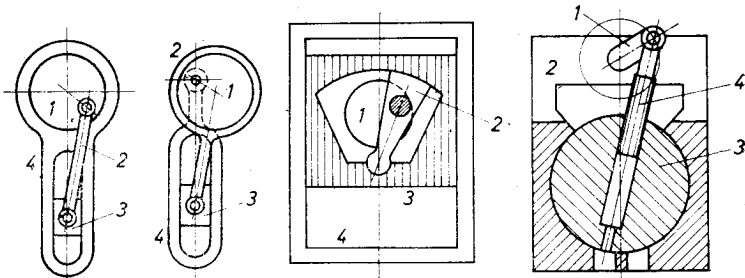


Рис. 4.4.

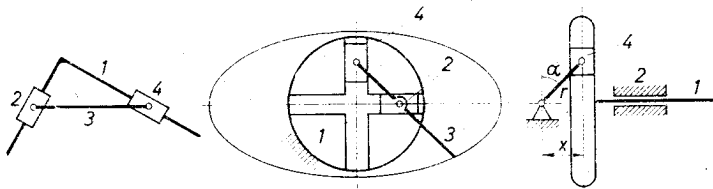


Рис. 4.5.

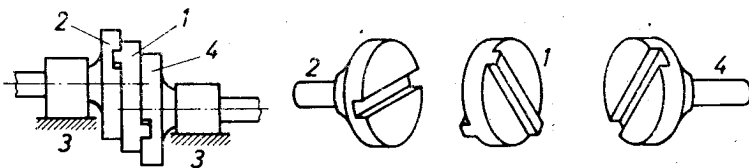


Рис. 4.6.

Создавая четырехзвенные механизмы с двумя поступательными парами, следует учитывать, что обе линии скольжения не должны быть параллельны. В противном случае относительное движение в некоторых кинематических парах невозможно.

Если в состав двух поступательных пар входит одно звено, получаем кинематическую цепь, показанную на рис. 4.5. Если при этом станиной является звено 1, то получаем механизм, у которого точки шатуна 3 при движении описывают эллипсы. Если станиной является звено 2 или звено 4, то получаем так называемый *синусный механизм* (или *кулису Вольфа*), у которого перемещение ползуна выражается как $x = r \sin \alpha$. Если станиной сделаем звено 3, то можем получить показанную на рис. 4.6 муфту Ольдгема, которая применяется для соединения двух параллельных несоосно расположенных валов.

Если обе поступательные пары образованы разными звеньями, то можно получить показанный на рис. 4.7 *тангенсный механизм*, у которого перемещение ползуна 3 выражается как $x = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

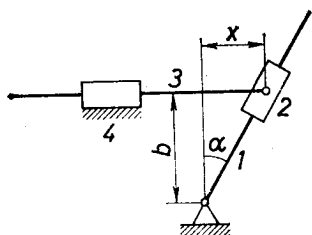


Рис. 4.7.

В стержневых механизмах встречаются неопределенные положения, которые называют мертвыми или положениями возврата, в зависимости от того, какое из звеньев является ведущим. Установленный в мертвом положении механизм не может приводиться в движение силой, приложенной к ведущему звену. При трогании механизма из мертвого положения возможны два разных направления движения ведомых звеньев.

Если, например, у центрального кривошипно-ползунного механизма ведущим звеном является ползун, то механизм имеет два мертвых положения, т. е. две точки изменения направления движения, которые соответствуют крайним положениям ползуна. Если ведущим звеном является кривошип, то кривошипно-ползунный механизм не имеет неопределенных положений. Показанный на рис. 2.11 шарнирный параллелограмм имеет два неопределенных положения, когда все шарниры располагаются на одной прямой.

Необходимое движение в вышеупомянутых точках иногда обеспечивается за счет кинетической энергии механизма. В других случаях применяют кинематические методы (рис. 4.8). В многоцилиндровых двигателях между кривошипами выбирают углы, отличающиеся от 180° и 0° . Подобный метод используют для исключения неопределенных положений в механизмах шарнирного параллелограмма (мертвых точек этот механизм не имеет). Введение дополнительного звена связано с увеличением числа избыточных связей; в шарнирном параллелограмме появляется даже одна тангенциальная избыточная связь.

Другим кинематическим методом является образование зубьев на шатуне и впадин на стойке в области полюс шатуна в ме-

стах, соответствующих мертвым и неопределенным положениям механизма. Примером служит показанный на рис. 4.9 механизм шарнирного антипараллелограмма, у которого противоположные стороны одинаковы, но не параллельны; полоиды шатуна являются эллипсами.

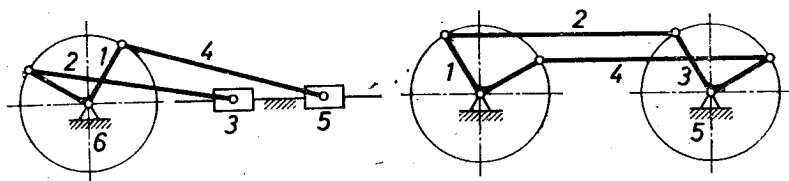


Рис. 4.8.

Кулачковые механизмы дают возможность достаточно легко обеспечить заданную или выбранную зависимость между движениями ведущего и ведомого звеньев. Ведущее и ведомое звенья образуют высшую пару; оба звена соединены низшими парами с третьим звеном механизма, которое обычно является станиной. Высшая пара состоит из специально выполненной рабочей поверхности (профиля) ведущего звена и из ролика или профиля ведомого звена. Ведущее звено называется кулачковым валом, кулачковой шайбой, кулачковым цилиндром, кулачковым конусом и просто *кулачком*. Ведомое звено обычно называется *толкателем*.

Некоторые примеры кулачковых механизмов показаны на рис. 4.10. Механизмы *a, b, f, g* преобразуют вращение ведущего звена 1 в возвратно-поступательное движение толкателя 2, т. е. совершают трансформацию вращения — поступательное движение. Механизм *c* совершает преобразование вращения — вращение, механизм *d* — поступательное движение — вращение, *e* — поступательное движение — поступательное движение. Если эксцентриситет $e \neq 0$, то механизм *a* называется *дезаксиальным* (смещенным) *кулачковым механизмом*, если $e = 0$, то *центральный*. В механизмах *f* и *g* высшая пара замыкается геометрически. Профиль кулачковой шайбы механизма *f* состоит из дуг окружностей двух разных радиусов. В начале и в конце каждого хода толкатель может находиться в *положении покоя*, пока кулачковая шайба поворачивается на некоторый угол. Кулачковые механизмы ограниченного движения типа вращение — вращение показаны на рис. 3.11.

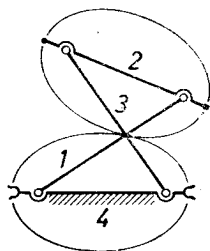


Рис. 4.9.

Зубчатые передачи в технике широко применяются для передачи вращательного движения между параллельными (рис. 4.11) и непараллельными валами. Оси этих валов или неподвижны, или некоторые из них могут быть подвижными. В последнем случае зубчатые механизмы называются *планетарными*. Зубчатые колеса, вращающиеся на подвижных осях, называются *спутниками*. Пла-

нетарные механизмы, подвижность которых больше 1, называются *дифференциальными передачами* или просто дифференциалами.

Обычно зубья колес размещены на поверхности круглого цилиндра или конуса. Если радиус цилиндра становится бесконечно

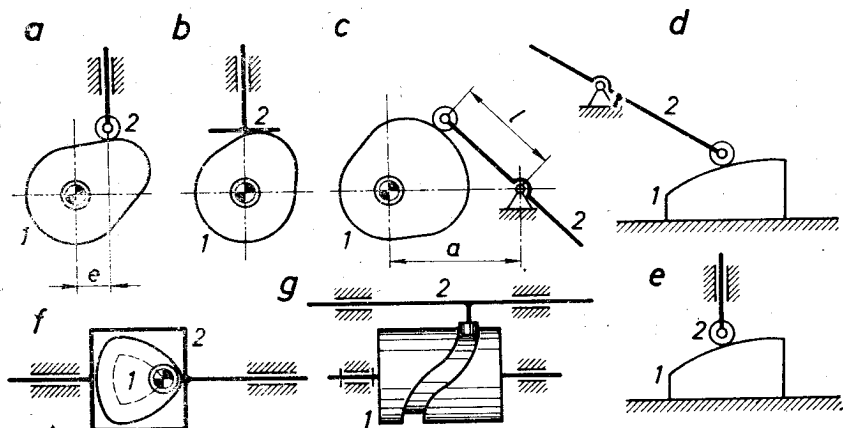


Рис. 4.10.

большим, получаем *зубчатую рейку*. В передачах, состоящих только из круглых зубчатых колес и зубчатых реек, отношения скоростей звеньев постоянны. В передачах с некруглыми шестернями отношения скоростей непостоянны.

Самыми распространенными являются цилиндрические и конические зубчатые колеса с прямыми или косыми зубьями. Эти зубья катятся и скользят один по другому в радиальном направлении, аналогично тому, как это происходит в кулачковых механизмах без ролика. В этих зубчатых колесах можно наметить

воображаемые цилиндры или конусы качения, которые катятся один по другому аналогично качению цилиндров или конусов в фрикционных механизмах (рис. 2.2). При точном изготовлении этих механизмов зубья соприкасаются по прямой.

Зубчатое колесо с одним или несколькими винтовыми зубьями (витками) на-

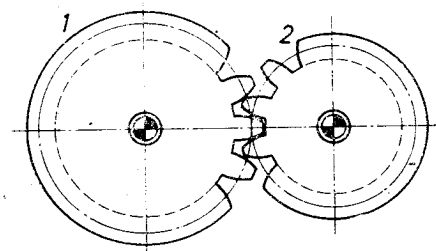


Рис. 4.11.

зывают *червяком*, а соответствующую зубчатую передачу — *червячной передачей*. В червячной передаче зубья также соприкасаются по линии. Цилиндрические зубчатые колеса с непараллельными осями, с винтовыми зубьями и точечным соприкосновением между зубьями называют *винтовыми колесами*.

Если оси зубчатых колес непараллельны и не пересекаются в одной точке, то зубья скользят один по другому не только в радиальном, но и в продольном направлении зубьев. В этих случаях контакт по линии можно осуществить, если зубья разместить на поверхностях однополостных гиперболоидов вращения. Такие зубчатые колеса называются *гиперболоидными*. Их трудно изготовить, поэтому вместо гиперболоидных колес применяют вышеупомянутые винтовые колеса или гипоидные колеса. В гипоидных колесах зубья размещены на тех частях гиперболоидов, которые можно приблизительно заменять конусами. У гипоидных колес колес зубья винтообразные.

Цепные передачи напоминают ременные передачи (рис. 4.22), но, в отличие от них, скольжение цепи относительно зубчатого колеса (*звездочки*) невозможно. Чем меньше зубьев имеет ведущая звездочка, тем большая неравномерность движения ведомой звездочки.

Звездчатые механизмы

(рис. 4.12) позволяют преобразовать непрерывное вращение в прерывистое вращение одного направления или, применяя соответствующую рейку, получить трансформацию: поступательное движение — вращение и наоборот. Прерывистое движение с остановкой выходного звена может быть воспроизведено также механизмом мальтийского креста (рис. 4.13).

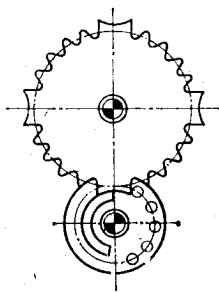


Рис. 4.12.

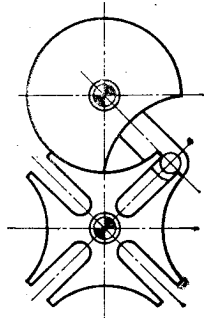


Рис. 4.13.

Зубчатый храповой механизм показан на рис. 2.3. Храповые механизмы применяют: 1) для преобразования возвратно-поступательного или вращательного движений в поступательное или вращательное движение одного направления с остановками, 2) для обеспечения возможности какого-то движения только в одном направлении, 3) для автоматического включения и выключения какой-то передачи (фрикционный храповой механизм в заднем колесе велосипеда), 4) для быстрой остановки.

Фрикционные механизмы применяют для передачи вращения между двумя валами (рис. 2.2). Рабочие поверхности цилиндрических или конических фрикционных колес часто покрывают кожей или другим фрикционным материалом для увеличения трения. На рис. 4.14 показан фрикционный вариатор. Передвигая колесо 2, которое вращается вместе с валом 1, получаем бесступенчатое изменение скорости вращения диска 3. Встречаются также фрикционные бесступенчатые вариаторы других типов.

На рис. 4.15 показаны два фрикционных храповых механизма, разрешающих движение диску относительно собачки или рожка только против часовой стрелки. Если ось фрикционной собачки

вращать вокруг оси диска, то показанный на рис. 4.15 механизм обращается во фрикционный храповой механизм. Его включение более плавное, чем у зубчатых храповых механизмов. Из второго показанного механизма может быть получена муфта свободного хода. Ременная передача (рис. 1.12) является самым распространенным примером механизмов с гибкой связью.

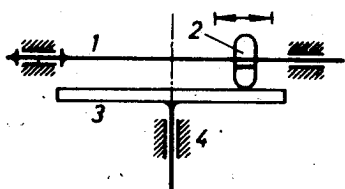


Рис. 4.14.

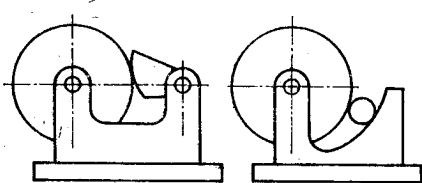


Рис. 4.15.

Примеры *клиновых механизмов* показаны на рис. 2.12. Пример *зубчато-рычажного механизма* показан на рис. 4.16. Этот механизм состоит из шарнирного четырехзвенника, со станиной которого связано зубчатое колесо *a* (такое колесо называют *солнечным*), сателлитов *4, 5, 6* и колеса *7*. Приводя в движение звено *1*, зубчатое колесо *7* получает определенное движение, так как согласно формуле (3.12) подвижность этого механизма

$$w = 3(n - 1) - 2p_2 - p_1 = 3(8 - 1) - 2 \cdot 8 - 4 = 1.$$

На рис. 4.17 показан пример *стержне-винтового механизма*. Такие механизмы применяют в разных прессах.

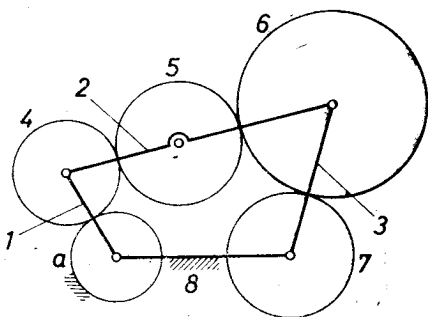


Рис. 4.16.

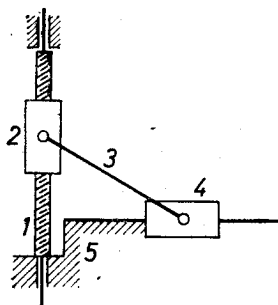


Рис. 4.17.

Отметим два примера функциональных классификаций; одну очень общую, вторую сравнительно детализированную.

Согласно первой классификации различают две большие группы механизмов:

- 1) направляющие механизмы,
- 2) передаточные механизмы.

В *направляющих механизмах* одна из точек шатуна описывает желаемую траекторию или какой-либо шатун занимает по-

очередно необходимые положения. Направляющие механизмы обычно являются стержневыми механизмами.

Передаточные механизмы осуществляют требуемую зависимость между перемещениями или скоростями ведущих и ведомых звеньев. С помощью передаточных механизмов осуществляется необходимый закон движения ведомых звеньев.

К передаточным механизмам относятся кулачковые, зубчатые, фрикционные, клиновые, винтовые, а также механизмы с гибкой связью и часть стержневых механизмов.

Как пример направляющих механизмов можно отметить прямолинейное движение. В разных самопишущих аппаратах и машинах необходимо какую-то точку звена перемещать на определенное расстояние по прямой. Эту задачу желательно осуществить с помощью механизма, в котором нет поступательной пары, так как она имеет относительно большое трение.

Наиболее просто создать точное эллиптическое прямолинейное движение. Как известно из кинематики, если отрезок AB своими концами скользит по двум неподвижным взаимно перпендикулярным прямым, то точки неограниченно длинной прямой AB описывают эллипсы, осями которых являются неподвижные прямые (рис. 4.18). Средняя точка C отрезка AB движется по окружности с центром в точке O пересечения неподвижных прямых. Если в точках O и C поставить шарниры, а в точке B поступательную пару, то точка A при повороте звена OC опи-

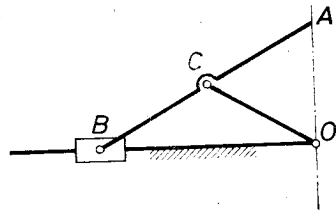


Рис. 4.18.

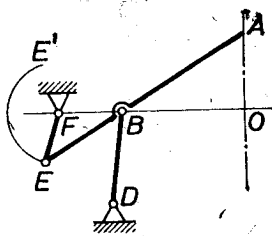


Рис. 4.19.

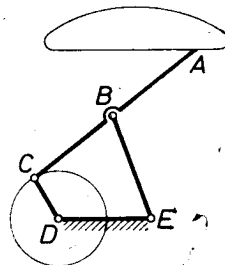


Рис. 4.20.

шет прямую AO . Это прямолинейное движение имеет поступательную пару, и описываемая точкой A прямая проходит через шарнир O .

На рис. 4.19 показан механизм приближенного эллиптического прямолинейного движения или прямолинейного движения Эванса. Если принять $EF = 1$, $BE = 1,92$, $BA = 2,92$, $BD = 2$, $FB = 2,3$, то траектория точки A на некотором участке будет мало отличаться от прямой AO .

На рис. 4.20 показано одно из прямолинейных движений Чебышева, у которого $CD = 1$, $DE = 2$, $BC = BA = BE = 2,5$.

К направляющим механизмам принадлежат также трансформаторы кривых, которые данную кривую по какому-то закону преобразуют в другую кривую.

На рис. 4.21 показан *транслятор*, который данную кривую без изменений переносит на другое место. Транслятор состоит из двух параллелограммов. Поэтому звено AB находится в поступательном движении, в котором, как известно из кинематики,

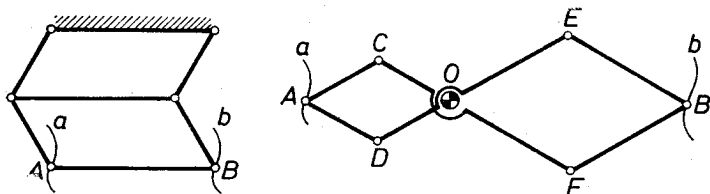


Рис. 4.21.

траектории всех точек твердого тела тождественны. Там же показан пантограф, который изменяет масштаб данной кривой. Пантограф состоит из двух параллелограммов. Кривая b больше или меньше кривой a в k раз, где $k = OE : OC$. Подвижность транслятора и пантографа $w = 2$, что необходимо для проведения точки A по произвольно выбранной кривой.

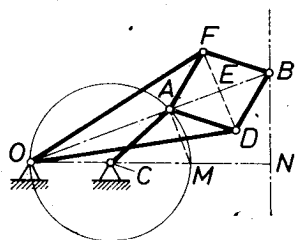


Рис. 4.22.

В группу трансформаторов кривых входят также *инверсоры*. Если точку A провести по данной кривой, а точка B находится на луче OA , который проходит через неподвижный центр инверсии O , и всегда выполнено условие $OA \cdot OB = \text{const}$, то описываемую точкой B кривую называют *инверсией данной кривой*.

Если у механизма (рис. 4.22), в котором $OF = OD$ и $AFBD$ является ромбом, отнимем звено CA , то получим инверсор.

Действительно,

$$\begin{aligned} OB \cdot AO &= (OE + EB)(OE - EB) = (OE)^2 - (EB)^2 = \\ &= (OF^2 - FE^2) - (BF^2 - FE^2) = (OF)^2 - (BF)^2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Подвижность инверсора $w = 2$. Если к инверсору присоединено звено $CA = CO$, то точка A движется по окружности, а точка B перемещается по прямой BN . Так как прямоугольные треугольники OAM и ONB подобны, то $OA : OM = ON : OB$. Поэтому $ON \cdot OM = OA \cdot OB = \text{const}$ и также $ON = \text{const}$. Это означает, что инверсией окружности, проходящей через центр инверсии, является прямая. Полученный механизм называется *прямиллом Понселье — Липкина*. Если окружность не проходит через центр инверсии, то оказывается, что инверсией этой окружности является другая окружность.

В заключение отметим еще одну функциональную классификацию, согласно которой механизмы разделяются на следующие группы:

1) передачи вращательного движения, которые позволяют ведомому звену придать равномерное или приближенное равномерное вращение (зубчатые передачи с круглыми цилиндрическими или коническими шестернями, с винтовыми или гипоидными колесами; червячная передача; фрикционная передача с круглыми цилиндрическими или коническими поверхностями качения; ременные, тросовые или цепные передачи);

2) передачи, позволяющие ступенчато изменять скорость вращения ведомого звена (зубчатые коробки передач, ступенчатые ремешные передачи);

3) вариаторы, позволяющие непрерывно изменять скорость вращения ведомого звена (гидравлические или фрикционные вариаторы, вариаторы с гибким промежуточным элементом, импульсные вариаторы);

4) механизмы, сообщающие ведомому звену вращение с переменной угловой скоростью (передачи с некруглыми колесами или некруглыми звездочками, кулачковые механизмы с толкателем коромыслового типа, шарнирный четырехзвенник с двумя кривошипами, механизмы с качающейся или вращающейся кулисой, зубчато-стержневые механизмы, звездчатые механизмы, кулачково-зубчатые механизмы);

5) механизмы, сообщающие ведомому звену возвратно-поступательное движение с переменной или на каком-то участке постоянной скоростью (кривошипно-ползунный механизм, синусный механизм, многостержневые механизмы, кулачковые механизмы, механизмы с зубчатой рейкой, гидравлические механизмы);

6) механизмы эпизодического движения, в которых одно или несколько звеньев периодически останавливаются, некоторое время находятся в покое и затем начинают движение заново (кулачковые механизмы, звездчатые механизмы, храповые механизмы, стержневые механизмы с периодической остановкой нескольких звеньев);

7) реверсивные механизмы, позволяющие по желанию изменить направление движения одного или нескольких звеньев;

8) сцепления, постоянно соединяющие валы и позволяющие этим валам совершать относительные движения (муфта Оядгема, карданная передача); муфты, позволяющие по желанию соединять и отсоединять валы (фрикционные, зубчатые и кулачковые муфты); сцепления, автоматически соединяющие и отсоединяющие валы (центробежные сцепления, муфты свободного хода, например, муфта свободного хода инерционного трансформатора момента, предохранительные устройства). Три сцепления первого типа показаны на рис. 4.23; у них нет повторяющихся связей, поэтому они позволяют соединяемым валам совершать все шесть относительных движений (воображая, что подшипник одного вала подвижный, т. е. воображаемым сечением отделен от стани-

ны); последний из них является примером семизвенного механизма, упомянутого в § 2.3. Жесткие сцепления валов к механизмам не относятся;

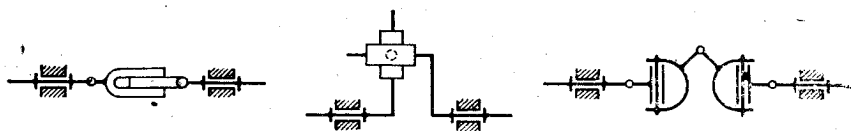


Рис. 4.23.

- 9) регуляторы и модераторы;
- 10) фиксирующие механизмы;
- 11) механизмы захватов;
- 12) тормозные механизмы;
- 13) механизмы, вычерчивающие кривые (прямоила, эллипсограф, параболографы);
- 14) трансформаторы кривых (трансляторы, пантографы, инверсоры);
- 15) механизмы для математических операций и логического управления.

Эту функциональную классификацию можно дополнить и детализировать в зависимости от цели применения.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Кинематический анализ механизмов имеет три главные задачи:

- 1) определение траекторий точек и положений звеньев механизма,
- 2) определение угловых и линейных скоростей звеньев механизма и их точек,
- 3) определение угловых и линейных ускорений звеньев механизма и их точек.

Результаты кинематического анализа необходимы для разработки рабочего процесса механизма и для проектирования механизма. При проектировании механизма скорости используются для расчета сил, мощностей, износостойкости, а также для определения действительного движения машины и ускорений; без ускорений невозможно рассчитать нагрузку звеньев и подвижных соединений. Кинематический анализ существующего или проектируемого механизма проводится, если задано или принято движение ведущих цепей.

Задачи кинематического анализа можно решать графическими или аналитическими методами.

Графические методы наглядны и во многих случаях просты, но точность полученных результатов не всегда достаточна, возникают трудности при анализе механизмов высших классов и разрядов, и также механизмов, ведущая цепь которых не содержит станину. Графические методы становятся неудобными, если размеры звеньев механизма слишком различны.

Указанные недостатки почти не имеют у аналитических методов. Они позволяют механизировать значительную часть работ, выполняемых при кинематическом анализе. Полученные в ходе анализа математические зависимости являются средством познания движения механизма и оценки структурных свойств, размеров звеньев и влияния движения ведущих цепей.

ГРАФИЧЕСКАЯ КИНЕМАТИКА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 5.1. Положения звеньев механизма
и траектории точек

Кинематический анализ механизма обычно выполняют для целого *кинематического цикла*, т. е. для периода движения, в конце которого все звенья занимают исходные положения при сохранении направления движения входного звена. *Планом механизма* называют кинематическую схему механизма, соответствующую данному положению ведущих цепей. Если кинематический цикл соответствует одному обороту какого-то звена, связанного со станиной, то обычно это звено принимается как ведущее, его полный оборот делится на 12 или больше одинаковых частей, и для каждого положения ведущего звена строят план механизма. Если в их число не входят планы, соответствующие крайним положениям возвратно движущихся звеньев, то эти планы строят дополнительно. Таким образом заставляют механизм «двигаться на бумаге».

Для кинематического анализа каждый план механизма вычерчивается отдельно. Однако, если необходимо начертить траекторию какой-то точки, то все планы совмещают на одном чертеже, и положения этой точки соединяются линией.

Планы двудных механизмов можно начертить при помощи так называемого *метода засечек*: положение средней пары, соответствующее заданным положениям элементов крайних пар двуды, находят, определяя точки пересечения окружностей или точки касания окружностей и прямых.

На рис. 5.1 показаны траектории некоторых точек шатуна, центра шарнира A кривошипа и центра шарнира B коромысла. Положения центра шарнира A выбраны произвольно, а положения шарнира B получены засечками на траектории центра шарнира B длиной AB шатуна из точек A как из центров. Коромысло занимает крайние положения тогда, когда направления кривошипа и шатуна совпадают. Эти положения могут быть найдены засечками на траектории точки B из точки O как из центра радиусами $b - r$ и $b + r$. Здесь $b = AB$ и $r = OA$. Положения какой-либо точки M шатуна получаем построением треугольника ABM на отрезке AB . Соединяя полученные точки, получаем траекторию точки M . Траектории, описываемые различными точками шатуна, называются *шатунными кривыми*.

Планы механизмов второго и высших классов невозможно начертить только методом засечек; здесь применим метод геометрических мест, принцип которого показан на рис. 5.2 при определении положения обеих шарнирных групп второго класса. Положения крайних шарниров A, B, C заданы. Следует определить положения всех четырех звеньев группы. В обоих случаях поло-

жение шарнира E находится в точке пересечения окружности e и кривой e' . Кривую e' получаем, разведя звенья, образующие шарнир E , и строя планы положений для полученного шарнирного четырехзвенника. В структурной группе третьего порядка

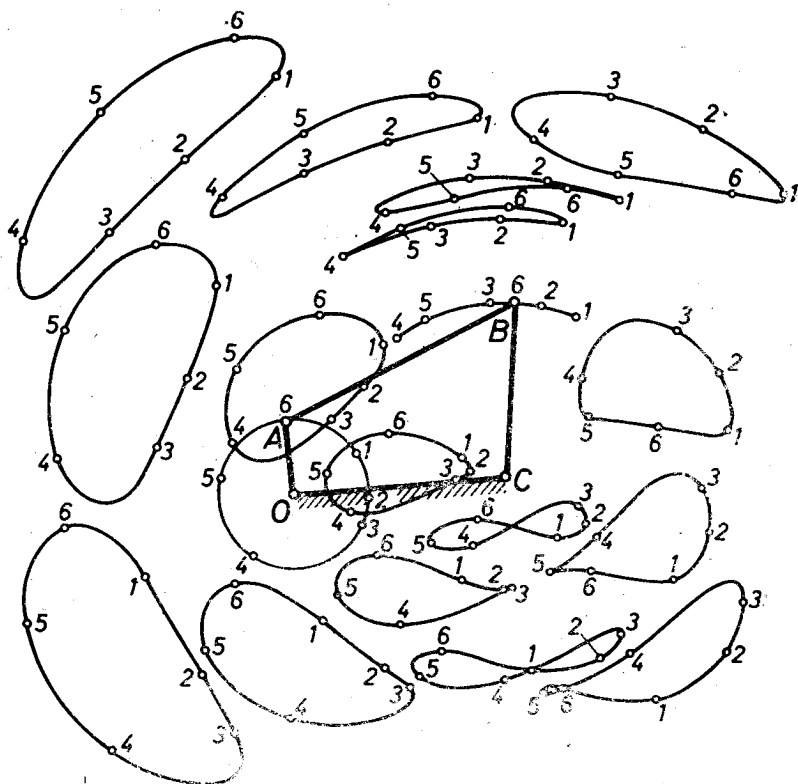


Рис. 5.1.

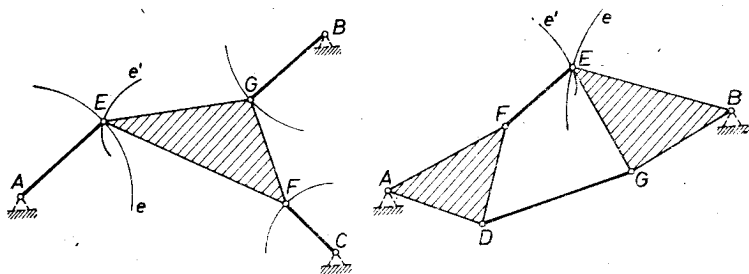


Рис. 5.2.

кривая e' является траекторией точки E шатуна шарнирного четырехзвенника $CFGB$, а в группе второго порядка — кривой, которую получаем при движении шарнирного четырехзвенника.

ADGB, откладывая от точки *F* действительную длину звена *FE* на отрезке *FE* переменной длины.

В конструкциях механизмов широко используют изобилие форм траекторий плоскопараллельно движущегося звена. При конструировании механизмов эпизодического движения и также в других случаях необходимо определить центр кривизны данной траектории в заданной точке. Это можно определить с помощью уравнения Эйлера — Савари *).

На рис. 5.3 показаны центроиды плоскопараллельно движущегося звена, мгновенный центр вращения *P*, круг перегиба диаметром *L*, центр перегиба *W*₀, произвольная точка *M* звена и центр кривизны *C* траектории этой точки.

Как известно из теоретической механики, ускорение точки *M*:

$$\bar{a} = \bar{a}_P + \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \omega^2 \bar{r},$$

где $a_P = \omega^2 L$ — ускорение мгновенного центра вращения; ω, ϵ — угловая скорость и ускорение. Проектируя векторную сумму на нормаль к траектории, получаем нормальное ускорение точки *M*:

$$a_n = \omega^2 r - L\omega^2 \sin \psi.$$

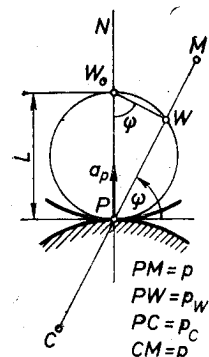


Рис. 5.3.

Из теоретической механики известно, что

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(p\omega)^2}{\rho}. \quad (5.0)$$

Приравнявая оба выражения и учитывая, что $L \sin \psi = p_W$, получаем уравнение Эйлера — Савари:

$$\rho = \frac{p^2}{p - p_W}. \quad (5.1)$$

Подставляя здесь $\rho = p + p_c$, получаем другой вид уравнения Эйлера — Савари:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_c} = \frac{1}{p_W}. \quad (5.2)$$

Полученные при помощи формулы (5.2) результаты показаны на рис. 5.4, где видно расположение центров кривизны C_1, C_2, \dots траекторий разных точек M_1, M_2, \dots одного луча. Аналогичные условия имеются также и на других лучах. Исключением являются точки касательной *T* центроид, у которых $p_W = 0$, поэтому, согласно с формулой (5.1), $\rho = p$. Следовательно, центры кривизны траекторий точек касательной центроид находятся в мгновенном центре вращения. Это значит, что радиус кривизны траектории мгновенного центра вращения, как точки подвижной плоскости, равен нулю, поэтому точка подвижной плоскости, которая совпадает с мгновенным центром вращения, находится на пике своей траектории. Следовательно, пики имеются только у траекторий точек подвижной центроиды. В неподвижной плоскости все пики размещены на неподвижной центроиде.

У точек, которые находятся внутри окружности перегибов, участки траекторий вогнуты, а у точек, находящихся вне круга перегибов, наоборот,

* Формула Эйлера — Савари приводится в отечественной литературе: Артоболевский И. И., Блох З. Ш., Добровольский В. В. Синтез механизмов. — М.: Гостехиздат, 1944, и др. издания. — Прим. ред.

который удобен для графического построения любой из связанных точек M, W, P, C , если три остальные известны. Построение, которое базируется на трех подобных треугольниках, показано на рис. 5.6. Для определения, например, точки C , произвольно проводят из точки M луч, на котором выбирается точка E и соединяется с точками W и P . Проведя соответственно параллельные прямые PF и FC , получаем центр кривизны C траектории точки M .

Следовательно, для определения центра кривизны траектории какой-то точки шатунной плоскости сперва следует построить круг перегибов и после этого применить формулу (5.3). Однако эта формула пригодна также для построения окружности перегибов. В шарнирном четырехзвеннике с помощью этой формулы на лучах обоих звеньев, вращающихся вокруг неподвижных центров, легко найти точки перегиба W_1 и W_2 этих лучей и через точки W_1, W_2 и P провести круг перегиба для траекторий точек шатуна. В кривошипно-ползунном механизме точку W_1 находим при помощи формулы (5.3) на луче кривошипа, а точка W_2 находится в шарнире ползуна, так как она движется по прямой.

Несколько сложнее строится круг перегиба для качающейся кулисы (рис. 5.7). Сперва находим мгновенный центр вращения P шатуна и точку

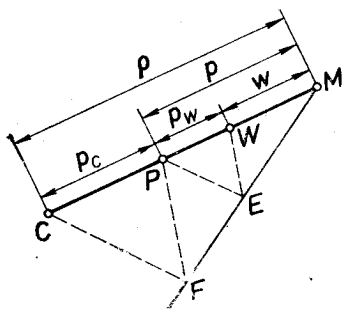


Рис. 5.6.

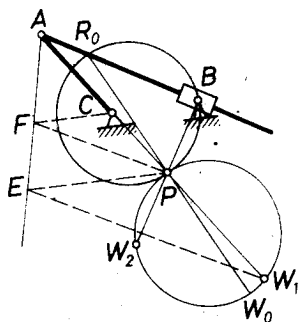


Рис. 5.7.

круга перегиба W_1 на луче точки A кулисы. Можно заметить, что точка B является точкой возврата, так как через нее проходит прямая AB подвижной плоскости. Отложив $PW_2 = PB$, находим точку круга перегиба W_2 плоскости кулисы и через точки W_1, W_2, P проводим круг перегибов. На рис. 5.7 показана также окружность возврата PBR_0 кулисы.

§ 5.2. Теоретические основы определения скоростей

Определение скоростей рассмотрено в курсе теоретической механики. В данной работе рассмотрим *метод повернутых скоростей*, согласно которому определение скоростей производится на плане механизма.

Если векторы скоростей точек механизма поворачиваем все в одном направлении на прямой угол, получаем *повернутые скорости* v . Так как действительные скорости точек звена перпендикулярны прямым, соединяющим эти точки с мгновенным центром вращения, то повернутые скорости размещаются на этих прямых, и для точек одного звена все направлены или к мгновенному центру вращения или от него.

Основная теорема, используемая при определении скоростей, следующая: *концы повернутых скоростей точек плоскопараллельно движущейся прямой лежат на параллельной прямой.*

Действительно, проекции скоростей точек прямой AB (рис. 5.8) на эту прямую равны, т. е. $AA' = BB'$, поэтому проекции повернутых скоростей на перпендикулярное прямой AB направление также равны, т. е. $AA_1 = BB_1$, где $AA_1 = AA'$ и $BB_1 = BB'$. Следовательно, прямая ab , которую образуют концы повернутых скоростей точек прямой AB , параллельна прямой AB .

Из доказанной теоремы следует вывод: *фигура, образуемая концами повернутых скоростей точек звена, подобна фигуре, которую образуют точки самого звена, и соответствующие стороны обеих фигур параллельны.*

На рис. 5.9 показано построение скоростей для точек одного звена. Даны повернутые скорости двух точек A и B ; следует определить повернутую скорость третьей точки C этого звена и угловую скорость звена. Скорость точки C находят, построив $\triangle abc \sim \triangle ABC$. Если точки A, B, C находятся на одной прямой, то, согласно теореме о подобии фигур, через точку a проводят

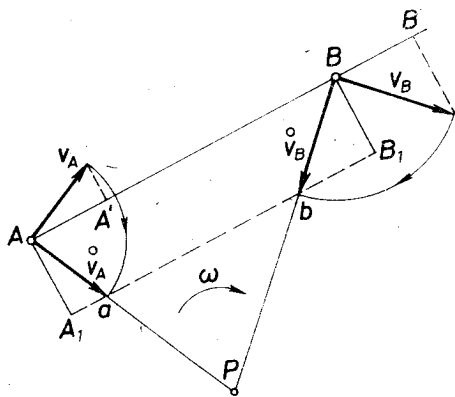


Рис. 5.8.

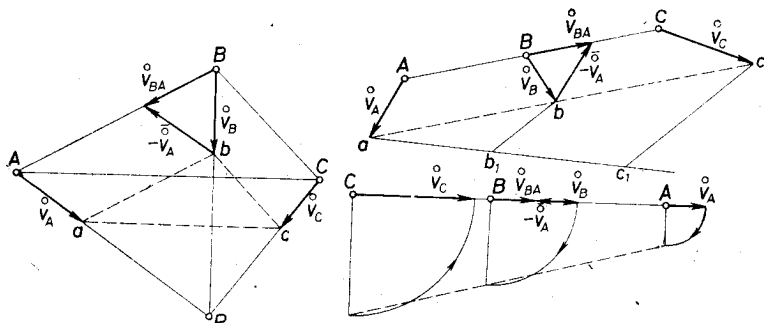


Рис. 5.9.

произвольную прямую; откладывают на ней отрезки ab_1 и b_1c_1 , пропорциональные или равные отрезкам AB и BC ; соединив b_1 с b и проводя от точки c_1 параллельно отрезку b_1b прямую, находят конец c искомой повернутой скорости v_c . Если v_A и v_B находятся на прямой ABC , то в этом случае v_c определяют по дей-

ствительным скоростям, аналогично предыдущему случаю, т. е. с помощью произвольной прямой ab_1c_1 (рис. 5.9 справа).

Угловая скорость звена

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \frac{v_{BA}}{AB}, \quad (5.4)$$

где $v_{BA} = (\bar{v}_B - \bar{v}_A)$ — относительная скорость точки B при вращении вокруг точки A .

Чтобы при построении скоростей можно было переходить от одного звена к другому, необходимо найти такую точку, скорости которой в обоих звеньях одинаковы. Эта точка называется *относительным полюсом*.

Выясним, как определить относительный полюс для относительного движения двух произвольно выбранных звеньев i и k механизма. На рис. 5.10 показаны звенья i и k , их абсолютные

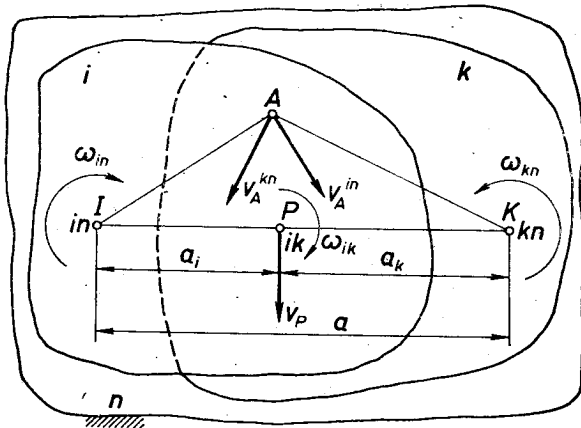


Рис. 5.10.

полюсы I и K (которые можно обозначить также in и kn , так как станиной механизма является n) и относительный полюс P или ik . Так как должно выполняться

$$\bar{v}_P^{in} = \bar{v}_P^{kn} = \bar{v}_P, \quad (A)$$

то относительный полюс может находиться только на *прямой полюсов* IK потому, что только на этой прямой скорости точек звеньев i и k могут быть геометрически равными. Согласно условию (A) и рис. 5.10 для определения относительного полюса пригодны уравнения

$$\omega_{in} \cdot a_i = \omega_{kn} \cdot a_k, \quad (5.5)$$

$$a_i + a_k = a. \quad (5.6)$$

Если угловые скорости звеньев i и k одного направления, то относительный полюс располагается, как показано на рис. 5.11,

а вместо уравнения (5.6) следует написать уравнение

$$a_i - a_k = a. \quad (5.7)$$

Из уравнения (5.5) следует

$$\frac{\omega_{in}}{\omega_{kn}} = \frac{a_k}{a_i}. \quad (5.8)$$

Следовательно, относительный полюс находится на прямой полюсов, которая проходит через абсолютные полюсы и делит расстояние между ними внутренним или внешним образом на отрезки, обратно пропорциональные абсолютным угловым скоростям.

Относительная угловая скорость, с какой происходит вращение вокруг относительного полюса, определяется из векторной суммы

$$\bar{\omega}_{in} = \bar{\omega}_{ik} + \bar{\omega}_{kn}. \quad (5.9)$$

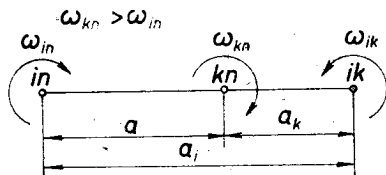


Рис. 5.11.

Не всегда для определения относительного полюса необходимо применять формулы (5.5)—(5.7). Отметим случаи, когда относительный полюс можно определить проще.

1. Если две подвижные кривые катятся одна по другой без скольжения, то эти кривые являются относительными центроидами, и их точка соприкосновения — относительным полюсом. Примером служит фрикционная передача, показанная на рис. 5.12, для которой согласно формуле (А) скорость относительного полюса

$$v_P = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \quad (5.10)$$

2. Если две подвижные кривые катятся и скользят одна по другой (рис. 5.13), то относительный полюс звеньев, принадлежащих этим кривым, находится на общей нормали, проведенной

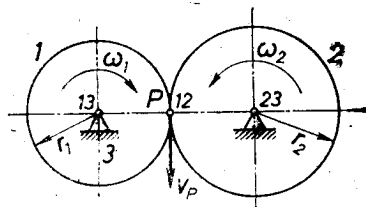


Рис. 5.12.

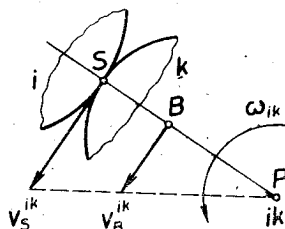


Рис. 5.13.

в точке соприкосновения обеих кривых, и скорость точки соприкосновения

$$v_S^{ik} = \omega_{ik} \cdot SP. \quad (5.11)$$

Сказанное вытекает из соображения, что относительные скорости ориентированы по отношению к относительному полюсу

так же, как абсолютные скорости по отношению к абсолютному полюсу. На рис. 5.14 показано, как, используя упомянутое свойство, определяется полюс зацепления P зубчатой передачи.

3. Если два подвижных звена соединены шарниром, то центр шарнира является относительным полюсом. Поэтому, если одна

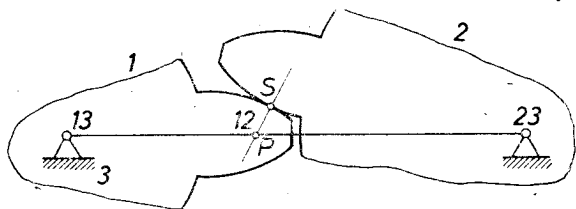


Рис. 5.14.

часть прямой, проведенной через шарнир, принадлежит одному звену, а вторая — другому звену, то концы повернутых скоростей точек этой прямой находятся на одной параллельной прямой в обоих звеньях (рис. 5.15).

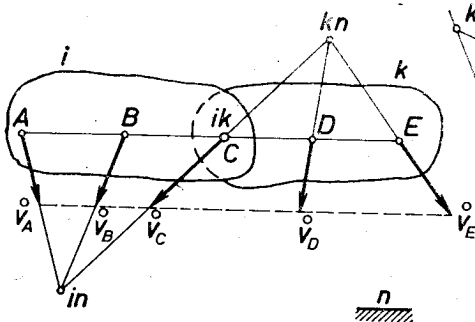


Рис. 5.15.

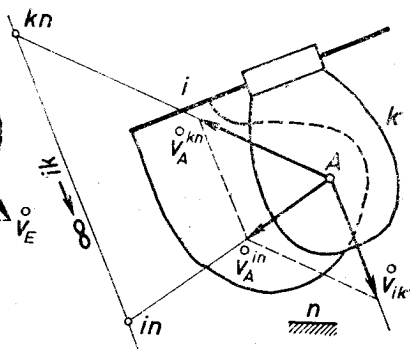


Рис. 5.16.

4. Если два звена образуют поступательную пару (в механизме имеется кулиса), то относительный полюс находится в бесконечности на прямой, перпендикулярной к направлению скольжения (рис. 5.16). В таких случаях для построения скоростей необходимо применить закон параллелограмма скоростей

$$\bar{v}_A^{in} = \bar{v}_{ik} + \bar{v}_A^{kn}. \quad (5.12)$$

В качестве тела k переносного движения рекомендуется выбрать то из звеньев поступательной пары, полюс kn которого легко найти на плане механизма.

Если применять формулу (5.12) для других целей, то может случиться, что относительное движение не является поступательным. Тогда вместо v_{ik} следует писать v_A^{ik} .

5. Если два звена непосредственно не соприкасаются, то полюс можно определить по теореме о 3-х мгновенных центрах

вращения: через искомый полюс проходят прямые, на каждой из которых находятся два других полюса; если в индексах этих полюсов зачеркиваются одинаковые цифры, то остается обозначение искомого полюса. Так, например, полюс 24 шарнирного четырехзвенника находится на пересечении прямых полюсов 12-14 и 23-34 (рис. 5.17).

Для всяких двух звеньев в их относительном движении имеется один полюс, поэтому число всех полюсов для плоского механизма

$$P = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (5.13)$$

где n — число звеньев.

Так как для всяких трех звеньев имеется одна прямая полюсов, то число таких прямых

$$T = C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \quad (5.14)$$

Результаты обеих последних формул следующие:

n	2	3	4	5	6	10
P	1	3	6	10	15	45
T	0	1	4	10	20	120

В заключение отметим кинематическое значение некоторых отрезков в четырехзвенных механизмах.

Применяя формулу (А) к относительным полюсам R и A шарнирного четырехзвенника (рис. 5.17), можно записать, что

$$v_R = \omega_1 \cdot OR = \omega_3 \cdot CR, \quad v_A = \omega_1 \cdot OA = \omega_2 \cdot PA.$$

Из этих равенств следует пропорция

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3}. \quad (5.15)$$

Следовательно, угловые скорости шарнирного четырехзвенника относятся друг к другу, как обратные значения показанных на рис. 5.7 высот треугольников.

Применяя формулу (А) к относительному полюсу R кривошипно-ползунного механизма (рис. 5.18), получаем

$$v_B = \omega_1 h. \quad (5.16)$$

Можно доказать [99], что экстремальные значения отношений скоростей звеньев 1 и 3 кривошипно-ползунного механизма и шарнирного четырехзвенника имеются тогда, когда $PR \perp AB$.

Если поставить приведенный на рис. 5.18 кривошипно-ползунный механизм на звено 1, то получим механизм с вращающейся кулисой (рис. 5.19).

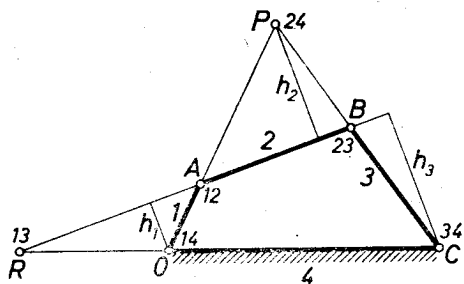


Рис. 5.17.

Так как относительная скорость в поступательной паре зависит только от угловой скорости $\omega_{14} = \omega_{41} = \omega_4$, то, согласно формуле (5.16), получаем для кулисного механизма

$$v_{34} = \omega_4 \cdot h. \quad (5.17)$$

Применяя формулу (5.12) для точки B (рис. 5.19), получаем прямоугольный треугольник $\vec{v}_B^{31} = \vec{v}_{34}^{41} + \vec{v}_B^{41}$, гипотенуза которого BA , один катет перпен-

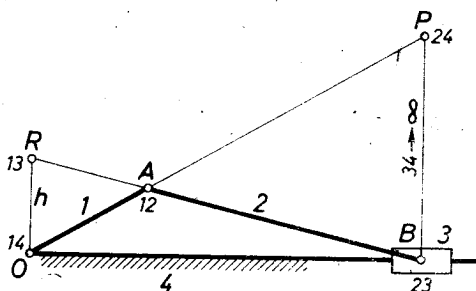


Рис. 5.18.

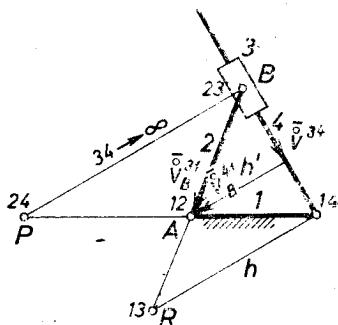


Рис. 5.19.

дикулярна, а другой — параллелен направлению скольжения. Из равенств

$$\frac{v_B^{31}}{v_{34}^{41}} = \frac{\omega_2 \cdot BA}{v_{34}^{41}} = \frac{BA}{h'},$$

следует, что

$$v_{34} = \omega_2 h'. \quad (5.18)$$

Следовательно, в механизме вращающейся кулисы согласно формулам (5.17) и (5.18)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{h}{h'}. \quad (5.19)$$

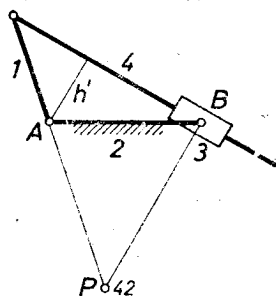


Рис. 5.20.

Если механизм с вращающейся кулисой (рис. 5.19) устанавливаем на звено 2, то получаем механизм с качающейся кулисой (рис. 5.20), у которого, согласно формуле (5.18),

$$v_{43} = \omega_1 \cdot h', \quad (5.20)$$

так как относительная скорость в поступательной паре зависит только от угловой скорости $\omega_{21} = \omega_{12} = \omega_1$.

§ 5.3. Теоретические основы определения ускорений

Векторы ускорений точек звеньев механизма определяются с помощью планов ускорений, рассматриваемых в курсах теоретической механики. Дополнительно рассмотрим определение относительного нормального ускорения и ускорения Кориолиса, прямо используя векторы скоростей.

Вообразая, что плоское движение звена механизма (рис. 5.21) состоит из поступательного движения с системой координат вместе с точкой A и относительного вращения звена вокруг точки A , ускорение точки B , согласно теореме о сумме ускорений $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$, состоит из переносного и относительного ускорения.

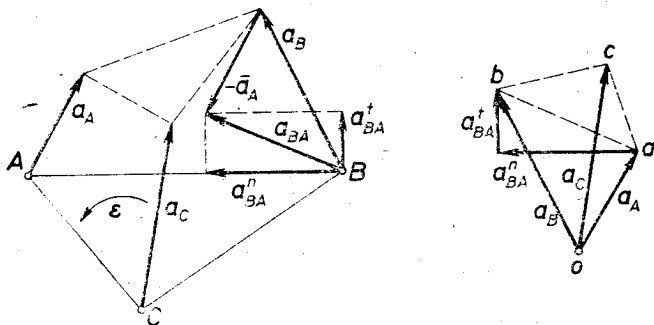


Рис. 5.21.

Ускорение Кориолиса в данном случае равняется нулю. Следовательно,

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t, \quad (5.21)$$

где относительное нормальное ускорение и относительное тангенциальное ускорение выражаются, как во вращательном движении:

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB, \quad a_{BA}^t = \varepsilon \cdot AB.$$

Из последнего выражения угловое ускорение звена

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^t}{AB}, \quad (5.22)$$

и его направление определяются направлением a_{BA}^t при воображаемом вращении звена вокруг точки A , как вокруг неподвижной точки. При заданных ω и ε определяются относительные тангенциальное и нормальное a_{BA}^t и a_{BA}^n ускорения и находится ускорение точки B . Ускорение a_C третьей точки C рассматриваемого звена определяется построением с учетом того, что фигура плана относительных ускорений подобна фигуре, которую образуют точки самого звена, т. е. $\triangle abc \sim \triangle ABC$. Необходимо учитывать, что вершины подобных фигур должны следовать друг за другом при обходе этих фигур по периметру в одной последовательности.

Относительное нормальное ускорение можно определить по формуле

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB = \frac{(\omega \cdot AB)^2}{AB} = \frac{v_{BA}^2}{AB} \quad (5.23)$$

или построить графически, учитывая, что относительная вращательная скорость v_{BA} является средней пропорциональной между a_{BA}^n и AB .

Ввиду того, что катет является средней пропорциональной величиной между гипотенузой и своей проекцией на нее, относительное нормальное ускорение можно построить так, как показано на рис. 5.22. Первое построение пригодно в том случае,

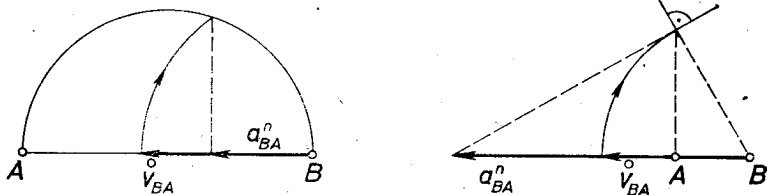


Рис. 5.22.

когда вектор v_{BA} меньше расстояния AB , а второе построение — при $AB < v_{BA}$. Если точка A неподвижна, то $v_{BA} = v_B$ и $a_{BA}^n = a_B^n$. Следовательно, нормальное ускорение в абсолютном движении точки B также может быть найдено рассмотренным методом.

Если между двумя подвижными звеньями имеется поступательная пара (рис. 5.23), то для построения ускорений необходимо применить закон о суммировании ускорений

$$\bar{a}_A^{in} = \bar{a}_{ik}^n + \bar{a}_A^{kn} + \bar{a}_k^{ih}. \quad (5.24)$$

Индексы первых членов звеньев должны совпадать с индексами

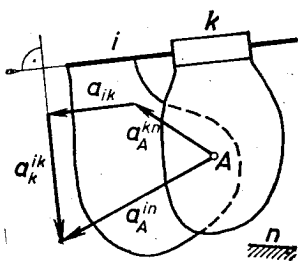


Рис. 5.23.

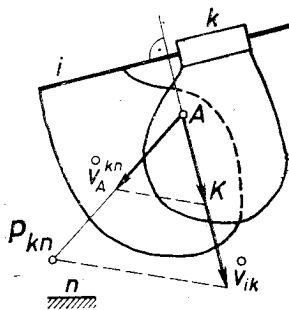


Рис. 5.24.

параллелограмма скоростей (5.12), полученного для этой поступательной пары. Ускорение Кориолиса можно вычислить по формуле

$$\bar{a}_k^{ih} = 2\bar{\omega}_{kn} \times \bar{v}_{ik} \quad (5.25)$$

или построить следующим образом (рис. 5.24): конец относительной повернутой скорости v_{ik} соединяют с полюсом переносного

движения P_{kn} , и от конца переносной повернутой скорости v_A^{hn} проводят параллельную линию; эта линия на прямой относительной повернутой скорости отсекает вектор AK , который геометрически равен половине ускорения Кориолиса. Действительно,

$$\frac{AK}{v_{ik}} = \frac{v_A^{hn}}{AP_{kn}} = \omega_{kn}, \quad AK = \omega_{kn} \cdot v_{ik},$$

а в плоском движении

$$a_h^{ik} = 2\omega_{kn} \cdot v_{ik}. \quad (5.26)$$

Поворачивая обе повернутые скорости в том или в другом направлении на 90° , видим, что в обоих случаях соблюдается правило направлений, установленное формулой (5.25). Следовательно,

$$\overline{AK} = \frac{1}{2} \overline{a_h^{ik}}. \quad (5.27)$$

Если относительное движение не поступательное, то в предыдущих формулах вместо ускорений a_{ik} и a_h^{ik} следует писать a_A^{ik} и a_A^{ih} .

§ 5.4. Масштабные коэффициенты при построениях

Графические построения выполняются при строго выбранных или рассчитанных масштабных коэффициентах. Если план механизма выполнен в масштабе $1:M$, то масштабный коэффициент длины

$$k_s = 0,001 \cdot M \text{ (м/мм)}, \quad (5.28)$$

и действительное значение любой длины будет $b = k_s \cdot \tilde{b}$ метров, где \tilde{b} — соответствующая длина в миллиметрах на плане механизма.

Если масштабный коэффициент скоростей $k_v \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right)$ и масштабный коэффициент ускорений $k_a \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right)$, то скорость и ускорение точки M определяются так:

$$v_M = k_v \tilde{v}_M \text{ (м/с)}, \quad a_M = k_a \cdot \tilde{a}_M \text{ (м/с}^2\text{)}, \quad (1)$$

где \tilde{v}_M и \tilde{a}_M — длины (в миллиметрах) графически построенных векторов.

Масштабный коэффициент скорости можно выбрать произвольно или определить, принимая вектор скорости точки A вращающегося ведущего звена за k_1 -ю часть от длины ведущего звена (рис. 5.25), т. е. принимая $k_1 = \frac{\tilde{v}_A}{OA}$,

$$v_A = \omega_1 \cdot OA = \omega_1 k_s \cdot \overline{OA}, \quad v_A = k_v \tilde{v}_A = k_v k_1 \overline{OA}.$$

Приравнявая оба выражения, получаем формулу для определения

масштабного коэффициента скоростей:

$$k_v = \frac{\omega_1 k_s}{k_1} \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right). \quad (5.29)$$

Если планы ускорений строят на базе аналитически определенных ускорений, то масштабный коэффициент ускорений можно выбрать произвольно. Если нормальные ускорения и ускорения Кориолиса строят графически, то согласно рис. 5.25 и 5.24,

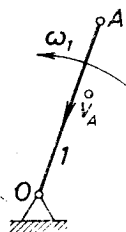


Рис. 5.25.

$$a_{An} = \frac{v_A^2}{OA} = \frac{(k_v \tilde{v}_A)^2}{k_s \cdot OA} = \frac{k_v^2}{k_s} \cdot \frac{v_A^2}{OA} = \frac{k_v^2}{k_s} \tilde{a}_{An},$$

$$\frac{1}{2} a_{ik}^{th} = \omega_{hn} v_{ik} = \frac{v_A \cdot v_{ik}}{AP} = \frac{k_v^2 \tilde{v}_A \cdot \tilde{v}_{ik}}{AP} = \frac{k_v^2}{k_s} \frac{1}{2} \tilde{a}_{ik}.$$

Видно, что формула для расчета масштабного коэффициента ускорений следующая:

$$k_a = \frac{k_v^2}{k_s} \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right). \quad (5.30)$$

Выясним, какая часть от длины звена OA является нормальным ускорением точки A . Из формул (5.30) и (5.29) следует, что

$$k_a = \frac{\omega_1^2 k_s}{k_1^2}. \quad (5.31)$$

Из выражения (1) получим

$$k_a = \frac{a_{An}}{\tilde{a}_{An}} = \frac{\omega_1^2 k_s \widehat{OA}}{k_2 \widehat{OA}} = \frac{\omega_1^2 k_s}{k_2}.$$

Сопоставляя с (5.31), получаем выражение

$$k_2 = k_1^2, \quad (5.32)$$

которое показывает, что длины векторов ускорений будут мало отличаться от длин векторов скоростей тогда, когда $k_1 \approx 1$.

§ 5.5. Определение скоростей и ускорений в диадных механизмах

Если в диадных механизмах первого разряда ведущая цепь содержит станину и между подвижными звеньями поступательных пар (кулисы) не имеется, то для определения скоростей достаточно применить теорему о параллельных прямых, а для определения ускорений — формулу (5.21); если кулисы в состав механизма включены, то необходимо использовать также закон параллелограмма скоростей (5.12) и теорему Кориолиса (5.24).

Решение таких задач показано в примерах 5.1, 5.2 и 5.4. Первый из них решен численно, остальные — в общем виде.

В диадных механизмах первого разряда, ведущая цепь которых не содержит станину, усложняется построение положений механизма; закон параллелограмма скоростей и теорему Кориолиса здесь необходимо применять не только для механизмов с кулисрами. Анализ таких механизмов показан на примерах 5.3 и 5.5. Подобные условия справедливы также для диадных механизмов высших разрядов.

Для определения скоростей и ускорений сначала необходимо использовать шарнирные точки и только после этого остальные интересующие нас точки.

Если определена скорость какой-то точки B и ее нормальное ускорение, то на прямой повернутой скорости можно найти центр кривизны траектории точки B , определяя по формуле (5.0) радиус кривизны или построив центр кривизны графически как точку A на рис. 5.22.

Графические методы кинематического анализа механизмов высших классов значительно сложнее. Здесь возможно определить скорости методом повернутых скоростей, используя для этого относительные и абсолютные полюса. Построение плана скоростей можно начать с любого звена, и масштаб скоростей найти после построения скорости ведущего звена. В отдельных случаях упомянутое начальное звено можно выбрать так, чтобы класс механизма был наиболее низким. Если, например, в механизме шепинга (рис. 3.9) за начальное звено выбирается звено 4 или 5, то построение плана скоростей в этом механизме проводится, как в диадном механизме второго класса.

Если расстояния между некоторыми шарнирами невелики по сравнению с другими размерами механизма, то для определения скоростей и ускорений, без значительного увеличения ошибок, возможно понижение класса механизма путем объединения этих шарниров. Если бы, например, структурная схема показанного на рис. 3.9 механизма шепинга являлась кинематической схемой какого-то механизма, то объединение шарниров 23 и 34 в одном двойном шарнире превратило бы механизм второго класса в диадный механизм.

Пример 5.1. Кривошип 1 поршневой машины (рис. 5.26) вращается равномерно с частотой 95 мин⁻¹. Определить скорость v_B и ускорение a_B поршня 3, скорость v_C и ускорение a_C точки C шатуна 2, а также угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ϵ_2 шатуна в положении, когда $\varphi = 20^\circ$. Даны следующие размеры: $OA = 250$ мм, $AB = 730$ мм, $AC = 340$ мм, $e = 107$ мм.

Решение. Если механизм изображен в масштабе 1:10, то $k_s = 0,01$ м/мм. Угловая скорость кривошипа $\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = 10$ с⁻¹. Принимаем $k_1 = 1,4$, тогда $k_v = \omega_1 \cdot k_s / k_1 = 0,0715$ (м/с)/мм и $k_a = k_v^2 / k_s = 0,51$ (м/с²)/мм.

Скорости определяем по методу повернутых скоростей. Скорость точки C находим, используя мгновенный центр скоростей $P = P_{24}$, а если этот центр находится вне пределов чертежа, то, например, через b_1 проведем

произвольную прямую и на ней отложим $b_1 C_1 = BC$ и $b_1 A_1 = BA$; проводим прямую $A_1 a_1$ и через C_1 — параллельный ей отрезок $C_1 c_1$. Измеряем длины построенных векторов скоростей в миллиметрах и определяем численные значения скоростей: $v_B = k_v \cdot \bar{v}_B = 0,0715 \cdot 20,5 = 1,46$ м/с, $v_C = k_v \cdot \bar{v}_C = 1,68$ м/с, $v_{BA} = k_v \cdot \bar{v}_{BA} = 2,43$ м/с. Действительные скорости получим вращением всех повернутых скоростей на 90° в направлении, в каком следует повернуть v_A , чтобы он стал действительным, т. е. в данном случае — в направлении движения часовой стрелки. Следовательно, поршень движет-

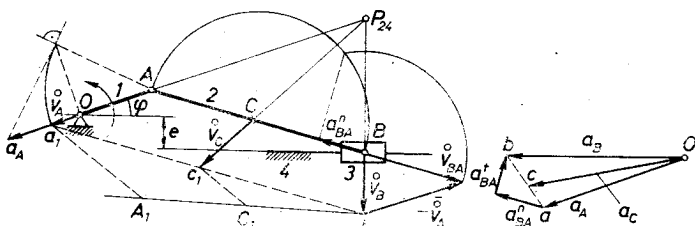


Рис. 5.26.

ся влево, а шатун, как показывает направление вектора v_{BA} , вращается в направлении движения часовой стрелки с угловой скоростью

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{2,43}{0,73} = 3,34 \text{ с}^{-1}.$$

Тот же самый результат получим по следующей формуле:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

Точка A в данном случае имеет только нормальное ускорение, которое строим по методу, показанному на рис. 5.22. Аналогично строим a_{BA}^n . Откладываем a_A от произвольно выбранной точки O и строим план ускорений согласно уравнению для точки B шатуна $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t$. Так как линия действия вектора a_B известна, то это уравнение можем построить непосредственно. Конец вектора a_C находим на прямой ab , учитывая, что $ac : ab = AC : AB$. Получаем $a_B = k_a \tilde{a}_B = 0,51 \cdot 59 = 30,1$ м/с², $a_C = k_a \tilde{a}_C = 27,0$ м/с², $a_{BA}^t = k_a \tilde{a}_{BA}^t = 6,64$ м/с², $\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{AB} = \frac{6,64}{0,73} = 9,1 \text{ с}^{-2}$. Приложив вектор a_{BA}^t в точке B , видим, что ε_2 направлено противоположно ω_2 . Следовательно, в заданном положении механизма угловая скорость шатуна уменьшается. Так как v_B и a_B имеют одно направление, то поршень движется ускоренно.

Пример 5.2. Дезаксиальный механизм вращающейся кулисы (рис. 5.27) приводится в движение звеном I , вращающимся с угловой скоростью $\omega_1 = \text{const}$.

Определить относительную скорость скольжения v_{21} и ускорение a_{21} , а также угловую скорость ω_3 и угловое ускорение ε_3 .

Решение. Так как в механизме имеется кулиса, то строим параллелограмм скоростей $\bar{v}_A^{24} = \bar{v}_{21} + \bar{v}_A^{14}$, заранее приняв масштаб k_1 . На прямой AO отложим вектор \bar{v}_A^{14} , повернутой скорости точки A , если принять, что эта точка принадлежит звену I , т. е. $v_A^{14} = \omega_1 \cdot OA$. Эта скорость в данном случае принята за переносную скорость, так как необходимый для построения ускорения Кориолиса полюс переносного движения 14 , т. е. точка O , находится в пределах чертежа. Таким образом находим v_{21} и $v_A = v_A^{24} = v_A^{34}$. Поэтому $\omega_3 = v_A / AB$.

Согласно теореме Кориолиса $\bar{a}_A^{24} = \bar{a}_A^{14} + \bar{a}_{21}^{21} + \bar{a}_h^{21}$, где $\bar{a}_A^{24} = \bar{a}_A^{34} = \bar{a}_A$. Определяем a_A^{14} как нормальное ускорение, а кориолисово ускорение a_h^{21} по методу, показанному на рис. 5.24. Так как сумма не зависит от последовательности слагаемых, то от точки O сперва отложим a_A^{14} , потом приложим

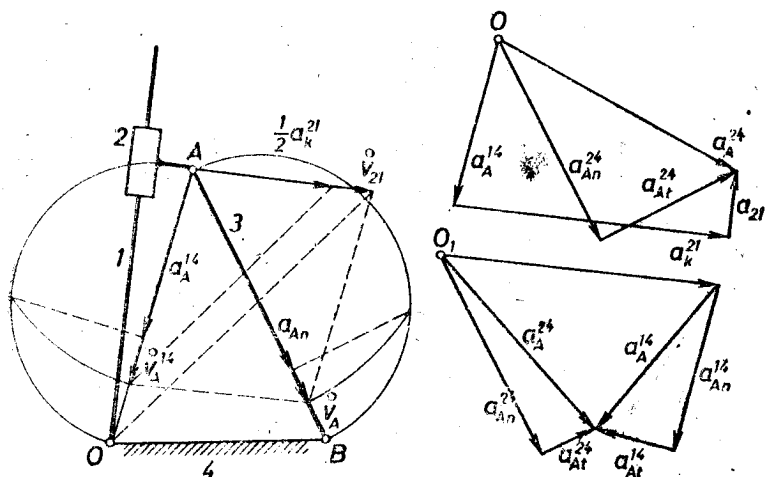


Рис. 5.27.

к его концу a_h^{21} и через конец a_h^{21} проведем прямую, параллельную направлению скольжения. Кроме этого, $\bar{a}_A^{24} = \bar{a}_A^{34} = \bar{a}_{An} + \bar{a}_{At}$. Строим a_{An} , отложим его от точки O и через конец a_{An} проведем прямую, перпендикулярную к AB . Эта прямая пересекается с вышеупомянутой прямой, и план ускорений закончен. Из этого плана находим a_{21} и приходим к выводу, что $e_3 = a_{At}/AB$ направлено по движению часовой стрелки. Проведенные построения пригодны для любого направления вращения звена I .

Пример 5.3. Механизм вращающейся кулисы (рис. 5.27) приводится в движение ведущей цепью 12 (например, гидроцилиндр); ползун 2 скользит со скоростью $v_{21} = \text{const}$ по звену I . Определить угловые скорости и угловые ускорения звеньев I и 3 .

Решение. В выбранном масштабе отложим v_{21} и строим параллелограммы скоростей, как в предыдущем примере. С помощью найденных скоростей определяем угловые скорости:

$$\omega_1 = v_A^{14}/OA, \quad \omega_3 = v_A/AB.$$

Так как $a_{21} = 0$, то векторное уравнение для ускорений: $\bar{a}_A^{24} = \bar{a}_{An}^{14} + \bar{a}_{At}^{14} + \bar{a}_h^{21}$. Определяем и откладываем a_h^{21} от точки O_1 . От конца a_h^{21} отложим вектор a_{An}^{14} , который найден аналогично a_A^{14} в предыдущем примере. Че-

рез конец a_{An}^{14} проводим прямую, перпендикулярную к OA . Так как $\bar{a}_A^{24} = \bar{a}_A^{34} = \bar{a}_{An}^{24} + \bar{a}_{At}^{24}$, то, отложив от O_1 a_{An}^{24} , замыкаем план ускорений. Определяем угловые ускорения: $e_1 = a_{At}^{14}/OA$, $e_3 = a_{At}^{24}/AB$. Ведущая цепь механизма станину не содержит. Однако графические построения произведены аналогично предыдущему примеру, в котором при анализе механизма станина являлась звеном ведущей цепи.

Пример 5.4. Шестизвездный механизм (рис. 5.28) приводится в движение кривошипом 1, который вращается ускоренно с угловой скоростью ω_1 и угловым ускорением ϵ_1 . Определить ω_5 и ϵ_5 в данном положении механизма.

Решение. Принимаем $k_1 = 1$, тогда v_A и a_{At} изображаются вектором AO и $k_v = \omega_1 \cdot k_s$. Для четырехзвенника определяем скорости, используя теорему о параллельных прямых (см. § 5.2), а для кулисы согласно уравнениям $\vec{v}_E^{46} = \vec{v}_{45}^{56} + \vec{v}_E^{56}$, где $\vec{v}_E^{56} = 0$. Так как звенья 4 и 5 образуют

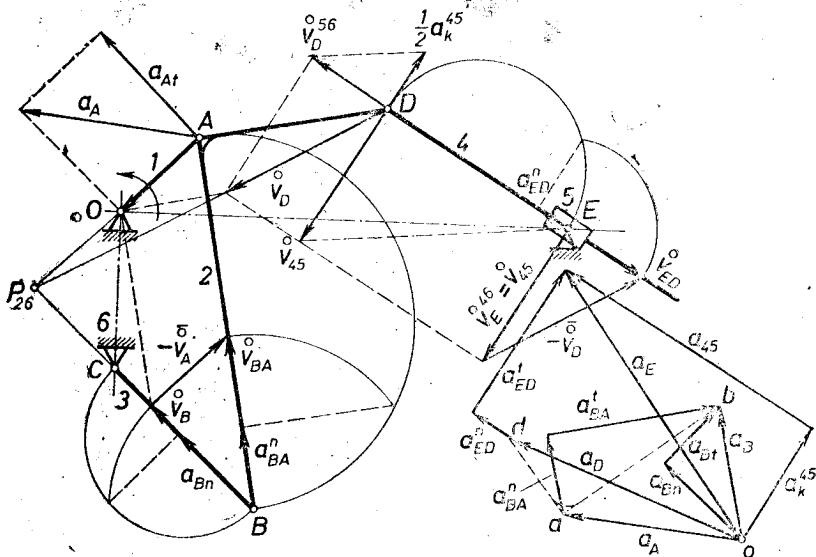


Рис. 5.28.

поступательную пару, то $\omega_5 = \omega_4 = v_{ED}/DE$ и, как показывает направление v_{ED} , вращение звеньев 4 и 5 совпадает с вращением часовой стрелки.

Определяем $a_{At} = \epsilon_1 \cdot OA$ и, разделив его на масштаб $k_a = k_v^2/k_s$, получаем a_{At} (в миллиметрах); на плане ускорений строим $\vec{a}_A = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At}$. Ускорение точки B находим при помощи уравнения $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$ для звена 2 и уравнения $\vec{a}_B = \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt}$ для звена 3. Находим a_D , построив на плане ускорений $\triangle abd \sim \triangle ABD$. Написав для звена 4 уравнение $\vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{a}_{ED}^n + \vec{a}_{ED}^t$, находим на плане ускорений линию действия ускорения a_{ED}^t . Кроме этого, $\vec{a}_E = \vec{a}_E^{46} = \vec{a}_E^{56} + \vec{a}_{45} + \vec{a}_k^{45}$, где $a_E^{56} = 0$. Но построение ускорения Кориолиса в точке E в данном случае невозможно (все построения приводит к одной прямой). Так как в относительном поступательном движении 45 ускорения Кориолиса для всех точек звена 4 одинаковы, то строим a_k^{45} для точки D, заранее образуя параллелограмм $\vec{v}_D = \vec{v}_D^{46} = \vec{v}_{45} + \vec{v}_D^{56}$, и, отложив от точки O найденный вектор a_k^{45} , замыкаем план ускорений. Для звеньев поступательной пары $\epsilon_5 = \epsilon_4 = a_{ED}^t/DE$ и, как показывает направление a_{ED}^t , угловое ускорение ϵ_5 направлено противоположно ω_5 .

Пример 5.5. Показанный на рис. 5.29 шарнирный четырехзвенник является стержневым механизмом «кладящегося» вентилятора (рис. 4.1). Ме-

ханизм приводится в движение ведущей цепью 12; звено 2 вращается относительно звена 1 с заданной угловой скоростью $\omega_{21} = \text{const}$. Определить $\omega_1, \omega_3, \varepsilon_1, \varepsilon_3$.

Решение. Принимаем $k_1 = 1,75$ и строим параллелограмм $v_B = \bar{v}_B^{34} = \bar{v}_B^{24} = \bar{v}_B^{21} + \bar{v}_B^{14}$. С учетом масштабного коэффициента $k_v = \omega_{21} \cdot k_s / k_1$ определяем численные значения построенных скоростей v_B^{14} и v_B и определяем

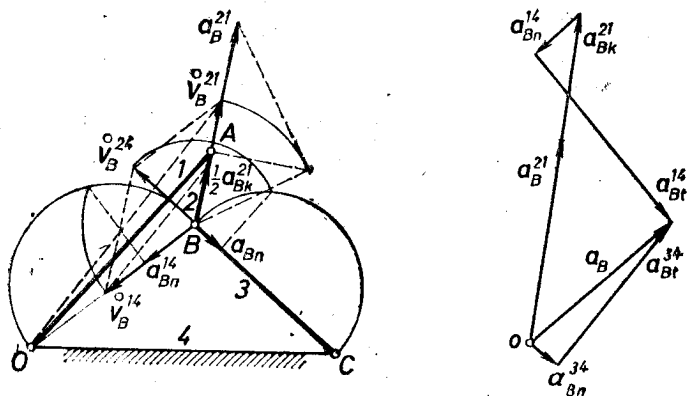


Рис. 5.29.

угловые скорости $\omega_1 = v_B^{14}/OB$, $\omega_3 = v_B/CB$. Относительное ускорение a_B^{21} точки B строим как нормальное ускорение. Уравнение для определения ускорений записываем в форме $\bar{a}_B = \bar{a}_B^{34} = \bar{a}_B^{24} = \bar{a}_B^{21} + \bar{a}_{Bn}^{14} + \bar{a}_{Bt}^{14} + \bar{a}_{Bh}^{21}$. Ускорения a_{Bn}^{14} и a_{Bh}^{21} определяем, как и ранее. На плане ускорений от точки O последовательно отложим a_B^{21} , a_{Bh}^{21} , a_{Bn}^{14} и через конец последнего проводим направление a_{Bt}^{14} , на котором находится конец вектора a_B . Кроме того, для звена 3 имеем $\bar{a}_B = \bar{a}_{Bn} + \bar{a}_{Bt}$. Определяем отрезок a_{Bn} и, отложив его от точки O , через его конец проводим направление a_{Bt} , которое, пересекаясь с прямой a_{Bt}^{14} , определяет конец вектора a_B и одновременно также a_{Bt}^{14} и a_{Bt} . С учетом масштабного коэффициента $k_a = k_v^2/k_s$ определяем численные значения a_{Bt}^{14} и a_{Bt} и угловые ускорения $\varepsilon_1 = a_{Bt}^{14}/OB$, $\varepsilon_3 = a_{Bt}/CB$.

Примечание. Относительное движение 2I в данном случае является вращением, а не поступательным движением, как в предыдущих примерах. Поэтому, согласно § 5.3, векторы относительной скорости, относительного ускорения и ускорения Кориолиса для точек звена 2 разные, и их следует писать с обозначением соответствующей точки (в данном случае — точки B).

Для звена 2 абсолютная угловая скорость $\omega_2 = \omega_1 \pm \omega_{21}$, а угловое ускорение $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Верхний знак применим тогда, когда ω_1 и ω_{21} одного направления, нижний знак — когда ω_1 и ω_{21} направлены противоположно.

§ 5.6. Метод кинематических диаграмм

Наглядное представление о положении, изменениях скорости и ускорения какой-то точки или звена механизма дают кинематические диаграммы, в которых методом предыдущего параграфа

или каким-либо другим методом определенные кинематические величины изображены как функции времени или как функции положения ведущего звена.

Диаграммы скоростей и ускорений можно также построить способом графического дифференцирования графика перемещений. Метод кинематических диаграмм является простым, но особенно точным методом определения скоростей и ускорений.

Для получения кинематических диаграмм точки A механизма, сначала при помощи плана механизма строит диаграмму перемещение — время этой точки. Принимаем, что такой диаграммой является диаграмма $s = s(t)$, показанная на рис. 5.30. Эта диаграмма строится при заданных масштабных коэффициентах k_s и k_t . На оси абсцисс влево от начала координат, на расстоянии B_1 мм, выбирается полюс Q и через него проводятся лучи, параллельные в соответствующие моменты времени $\theta, 1, 2, \dots$ касательным к кривой $s = s(t)$. Полученные отрезки $00', 01', 02', \dots$ откладываются как ординаты диаграммы $v = v(t)$ от соответствующих тем же моментам времени точек оси абсцисс. Таким образом получается диаграмма скорости в функции времени. Посту-

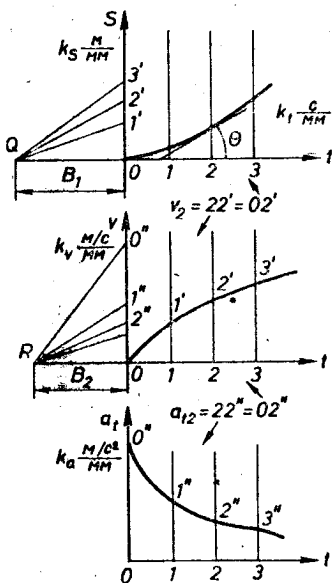


Рис. 5.30.

пая аналогично, получаем диаграмму $a_t = a_t(t)$.

Если траектория точки A прямая, то тангенциальное ускорение a_t является полным ускорением.

Масштабный коэффициент скорости определяется так:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{k_s \tilde{d}_s}{k_t \tilde{d}_t} = \frac{k_s}{k_t} \operatorname{tg} \theta = \frac{k_s}{k_t} \frac{\tilde{v}}{B_1} = k_v \tilde{v}, \quad (5.33)$$

$$k_v = \frac{k_s}{k_t B_1} \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Аналогично определяется масштабный коэффициент ускорения

$$k_a = \frac{k_v}{k_t B_t} \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}. \quad (5.34)$$

Строя кинематические диаграммы, следует учитывать (рис. 6.19, стр. 119), что точке перегиба дифференцируемой кривой соответствует экстремум полученной при дифференцировании кривой, а при экстремуме дифференцируемой кривой полученная путем дифференцирования кривая пересекает ось абсцисс. Если

движение периодическое, то в начале и в конце периода кривая имеет одинаковые ординаты и взаимно параллельные касательные. Если в начале и в конце какого-то промежутка времени ординаты дифференцируемой кривой одинаковы, то в этом промежутке времени сумма положительных и отрицательных площадей полученной при дифференцировании кривой равняется нулю.

Если траектория точки A является прямой, то дифференцируя диаграмму $a = a(t)$, получаем диаграмму $j = j(t)$. Вектор

$$\bar{j} = \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d^2\bar{v}}{dt^2} = \frac{d^3\bar{r}}{dt^3} \quad (5.35)$$

называют *рывком* или *резкостью* (по английски — *jerk*); он характеризует изменение сил. Величину j называют также *градиентом ускорения* или *пульсом*. Чем он больше, тем рассматриваемый процесс ближе к удару.

Метод кинематических диаграмм пригоден также для анализа вращательного движения звена, только на рис. 5.30 и в формулах (5.33), (5.34) вместо перемещения s следует писать угол поворота ψ данного звена в радианах, вместо скорости v угловую скорость $\omega = \dot{\psi}$ и вместо ускорения a угловое ускорение $\epsilon = \dot{\omega}$.

Размерность масштабных коэффициентов следующая: $K_\psi \left(\frac{\text{рад}}{\text{мм}} \right)$,

$$K_\omega \frac{\text{с}^{-1}}{\text{мм}}, \quad K_\epsilon \frac{\text{с}^{-2}}{\text{мм}}.$$

§ 5.7. Графическая кинематика кулачковых механизмов

С кулачковыми механизмами мы ознакомились в § 4.2. Если для анализа этих механизмов желаем использовать метод кинематических диаграмм, то необходимо научиться строить диаграмму перемещение — время толкателя. Для этой цели очень полезен

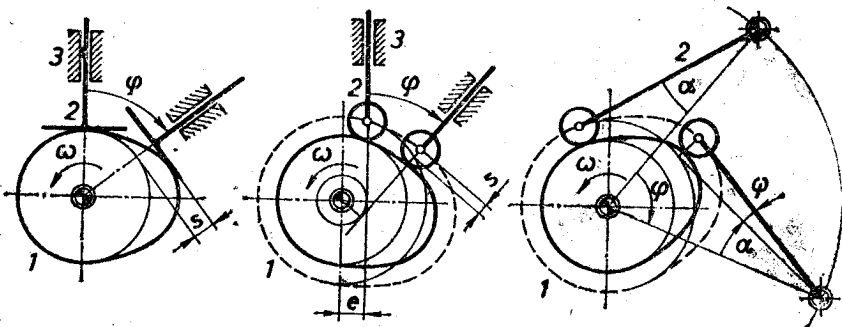


Рис. 5.31.

принцип обращения движения (инверсии): станине механизма условно придается такое движение, что кулачок становится неподвижным, а толкатель, сохраняя свое предыдущее движение,

получает дополнительное движение, противоположное движению кулачка. Таким образом создается возможность удобно определять положение толкателя, соответствующее каждому положению кулачка.

Примеры применения принципа обращения движения приведены на рис. 5.31, на котором показано, как найти поступательное перемещение s толкателя или угол поворота ψ коромысла, соответствующие заданному углу поворота φ кулачковой шайбы. Если закон вращения $\varphi = \varphi(t)$ известен (обычно $\omega = \omega(t)$), то можно начертить диаграмму $s = s(t)$ или $\psi = \psi(t)$ и, дважды графически дифференцируя ее, получить диаграммы скорости и ускорения или угловой скорости и углового ускорения толкателя.

Более точные результаты можно получить, применяя графический метод кинематического анализа, описанный в § 5.5, но тогда высшую пару заранее необходимо заменить низшими, согласно рис. 3.11. Рассмотрим один пример такого типа.

Пример 5.6. Кулачковый механизм (рис. 5.32) приводится в движение круглой эксцентричной кулачковой шайбой, которая вращается с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Найти скорость и ускорение толкателя как функции угла поворота φ шайбы.

Решение. Высшую пару 12 заменяем низшими парами, введя фиктивное дополнительное звено O , которое изображено штриховой линией. Получается четырехзвенный механизм с низшими парами, кинематически эквивалентный синусному механизму, показанному на рис. 4.5.

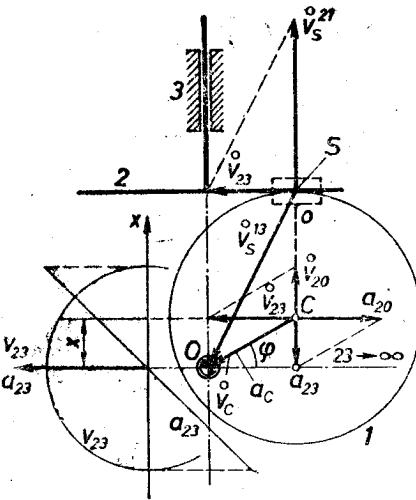


Рис. 5.32.

В механизме имеется кулиса, поэтому для воображаемого шарнира C строим параллелограмм скоростей $v_{23} = v_{20} + v_{C}^{03}$, из которого определяется скорость толкателя v_{23} . Масштабный коэффициент скоростей $k_v = \omega k_r$, так как принято, что $k_l = 1$. Из треугольника скоростей $v_{23} = v_C \cos \varphi = \omega \cdot OC \cdot \cos \omega t$, т. е. толкатель движется по гармоническому закону.

Диаграмма скорость — перемещение толкателя представляет собой окружность (если $k_l \neq 1$, то эллипс).

Переносное движение ползуна 2 является поступательным движением. Поэтому ускорение Кориолиса равняется нулю. План

ускорений, соответствующий уравнению $\bar{a}_{23} = \bar{a}_{20} + \bar{a}_C^{03}$, строим, исходя из точки C . Видно, что вектор ускорения толкателя a_{23} равен координате x толкателя. Следовательно, диаграмма $a_{23} = a_{23}(x)$ является прямой, как это и должно быть в гармоническом движении. Так как $k_l = 1$, то прямая x ось x составляет угол 45° .

Реальный механизм имеет три полюса: $13 \equiv O$, 12 совпадает с концом вектора a_{23} , а 23 находится в бесконечности на прямой полюсов. В рассматриваемом примере радиусы кривизны обоих профилей (окружность и прямая) высшей пары постоянны, поэтому замещающий механизм пригоден

для всех положений механизма. В общем случае в каждом положении следует строить другой замещающий механизм.

Примечание. Скорость v_{20} является скоростью скольжения ползуна в кулисе замещающего механизма. Скорость скольжения v_S^{21} в точке соприкосновения высшей пары можно получить, построив параллелограмм скоростей $\vec{v}_{23} = \vec{v}_S^{21} + \vec{v}_S^{13}$, где $v_S^{13} = \omega \cdot OS$.

Видно, что скорость толкателя можно построить без замещения высшей пары низшими. Так, например, в кулачковом механизме с роликом (рис. 5.33) скорость толкателя $\vec{v}_{23} = \vec{v}_A^{21} + \vec{v}_A^{13}$, где $v_A^{13} = \omega \cdot OA$.

На рис. 5.33 механизм показан в положении, когда ролик соприкасается с точкой профиля кулачка, в которой сопрягаются дуги окружностей, проведенных из центров C_1 и C_2 . Поэтому в таком положении происходит скачкообразный переход от замещающего механизма, который образуется из кривошипа OC_1 , шатуна C_1A и ползуна 2, на замещающий механизм, который состоит из кривошипа OC_2 , шатуна C_2A и ползуна 2 (эти замещающие механизмы являются дезаксиальными кривошипно-ползунными механизмами).

Такой переход, как видно, не изменяет скорость толкателя, а, согласно рис. 5.26, внезапно изменяет ускорение толкателя. Это означает, что в момент перехода происходит жесткий удар, величина которого зависит от изменения ускорения и величины масс, приводимых в движение толкателем.

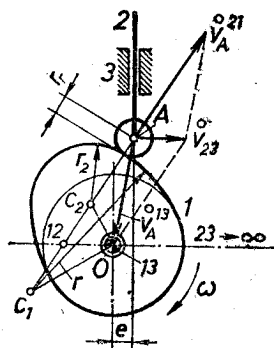


Рис. 5.33.

Раздел 6

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КИНЕМАТИКА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 6.1. Методы и понятия аналитической кинематики

Аналитические методы кинематического анализа механизмов имеют значительные преимущества, указанные в начале этой части книги. Развитие и распространение технических вычислительных средств способствует усовершенствованию и внедрению этих методов.

В зависимости от вида применяемых математических способов аналитические методы кинематики плоских механизмов можно разделить на методы векторной алгебры, комплексных чисел и координатные методы.

Для краткой характеристики аналитических методов рассмотрим шарнирный четырехзвенник (рис. 6.1). Даны длины звеньев

механизма и положение, скорость и ускорение ведущего звена OA , т. е. дано φ , $\omega = \dot{\varphi}$ и $\varepsilon = \ddot{\varphi}$. Необходимо найти положения, скорости и ускорения остальных звеньев.

Эту задачу кинематического анализа можем решить, составляя векторное уравнение, например, $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OC} + \overline{CB}$, и проектируя его на координатные оси. Таким образом, получаем уравнения

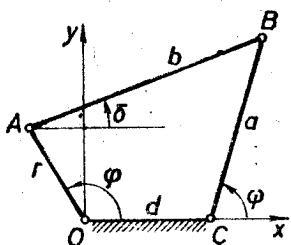


Рис. 6.1.

$$\begin{aligned} r \cos \varphi + b \cos \delta &= d + a \cos \psi, \\ r \sin \varphi + b \sin \delta &= a \sin \psi, \end{aligned} \quad (6.1)$$

которые определяют положение механизма, так как из них можем найти неизвестные углы δ и ψ и определить координаты шарнира B . Дифференцируя уравнения (6.1) по времени, находим угловые скорости и ускорения звеньев.

Принимая ось y в качестве оси мнимых величин и определяя положения точки механизма комплексными числами, оба уравнения (6.1) можем выразить одним уравнением

$$re^{i\varphi} + be^{i\delta} = d + ae^{i\psi}, \quad (6.2)$$

дифференцируя которое по времени, получим зависимости между скоростями и ускорениями.

Координатные методы позволяют определить положение механизма без участия векторов или комплексных чисел. С одним из этих координатных методов — методом треугольников — ознакомимся в этом разделе.

Угол ψ можно принять за *обобщенную координату* механизма. Выражение координаты ψ ведомого звена

$$\psi = \psi(\varphi) \quad (6.3)$$

называют *функцией положения*. Если ведомое звено движется поступательно, то функция положения имеет вид

$$s = s(\varphi). \quad (6.4)$$

Первые две производные функции положения по обобщенной координате называют *передаточными функциями* первого и второго порядка [89]. Передаточные функции зависят от структуры и геометрии механизма, но не зависят от движения.

Скорость точек ведомого звена или его угловая скорость

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{ds}{d\varphi}, \\ \dot{\psi} &= \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\psi}{d\varphi}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

ускорение точек или угловое ускорение ведомого звена

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= \frac{d}{dt} \left[\omega \frac{ds}{d\psi} \right] = \varepsilon \frac{ds}{d\psi} + \omega^2 \frac{d^2s}{d\psi^2}, \\ \ddot{\psi} &= \frac{d}{dt} \left[\omega \frac{d\psi}{d\varphi} \right] = \varepsilon \frac{d\psi}{d\varphi} + \omega^2 \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Видно, что скорость и ускорение ведомого звена можем получить, перемножая передаточные функции первого и второго порядка с угловой скоростью, с угловым ускорением и с квадратом угловой скорости ведущего звена. Следовательно, с помощью передаточных функций выражаются такие скорости и ускорения ведомого звена, какие имелись бы, если бы угловая скорость и ускорение ведущего звена были равны 1. Поэтому передаточные функции называют также *аналогами скоростей и ускорений*.

Таким образом, не зная действительного движения механизма, все же можно оценить его кинематические свойства. Если $\omega = \text{const}$, то графические изображения функций положения и обих передаточных функций не отличаются от кинематических диаграмм ведомого звена. Безразмерные функции положения и передаточные функции кривошипно-ползунного механизма (выражение координаты ползуна, деленное на длину кривошипа $s = x$ и ее производные по углу поворота кривошипа) показаны на рис. 6.19.

Для получения математических выражений функции положения и передаточных функций можем использовать любой из аналитических методов кинематики механизмов. Эти выражения вообще являются сложными даже для четырехзвенных механизмов, а для механизмов второго и высших классов не существуют как явные функции.

В этом разделе сперва рассмотрим кинематический анализ диадных механизмов методом треугольников [22, 52, 57] и после этого функции положения и передаточные функции некоторых, наиболее распространенных четырехзвенных механизмов. Аналитическую кинематику кулачковых механизмов отдельно не будем рассматривать, так как после формальной замены высших пар низшими (§ 3.3) для них пригодны методы диадных механизмов.

§ 6.2. Метод треугольников

Расчет диадных механизмов методом треугольников ведется последовательно, аналогично графическому расчету, когда в определенной последовательности строятся прямые и окружности. Формулы расчета заранее составлены для всех случаев. Решение систем уравнений и дифференцирование уравнений почти не нужно. Метод одинаково пригоден как для простых диадных механизмов, ведущая цепь которых содержит станину, так и для механизмов, станина которых является звеном ведомой цепи, а также для механизмов высших разрядов. Метод тесно связан

со структурой механизма, так как расчет диад ведется в такой же последовательности, в какой из них образуется ведомая цепь.

В механизмах высших разрядов одну из N ведущих цепей принимаем в качестве *главной*, а остальную часть механизма называем *условной ведомой цепью* (§ 3.1) и разделяем на диады, каждую из оставшихся $N - 1$ ведущих цепей рассматривая как звено переменной длины. Диады с одним поводком переменной длины показаны на рис. 3.2. Заранее не известно, какие звенья в каждом конкретном механизме будут переменной длины. Поэтому формулы составлены в предположении, что все звенья переменной длины. Благодаря такому принципу метод становится универсальным, но формулы получаются длинными. Однако для каждого конкретного случая эти формулы значительно сокращаются.

Тремя составными частями метода треугольников являются формулы изменяемого треугольника, алгоритмы диад и формулы для определения параметров третьей точки. До рассмотрения каждой части в отдельности, для сокращения записи принимаем следующий порядок: если заданы какие-то длины или углы механизма, то считаем известными также первые две производные по времени этих величин; если следует определить значения каких-то длин или углов, то необходимо найти также их две производные по времени.

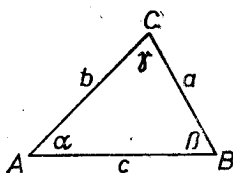


Рис. 6.2.

Формулы изменяемого треугольника. Применяя метод треугольников, необходимо найти неизвестные длины сторон и углы изменяемого треугольника (рис. 6.2). Для этого достаточно рассмотреть три случая.

Первый случай. Даны a, b, c ; определить α, β, γ ;

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{bc \sin \alpha} [\dot{a}a - \dot{b}(b - c \cos \alpha) - \dot{c}(c - b \cos \alpha)],$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{bc \sin \alpha} \{ \ddot{a}a - \ddot{b}(b - c \cos \alpha) - \ddot{c}(c - b \cos \alpha) + \dot{a}^2 -$$

$$- \dot{b}^2 - \dot{c}^2 - \dot{\alpha}^2 bc \cos \alpha + 2[\dot{b}\dot{c} \cos \alpha - (\dot{b}c + \dot{c}b)\dot{\alpha} \sin \alpha] \}. \quad (6.7)$$

Подставляя в эти формулы $\alpha = \beta, b = a, a = b$ или $\alpha = \gamma, c = a, a = c$, получаем формулы для расчета β и γ .

Второй случай. Задано a, b, γ ; определить c ;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma},$$

$$\dot{c} = \frac{1}{c} [\dot{a}(a - b \cos \gamma) + \dot{b}(b - a \cos \gamma) + ab \dot{\gamma} \sin \gamma],$$

$$\ddot{c} = \frac{1}{c} \{ \ddot{a}(a - b \cos \gamma) + \ddot{b}(b - a \cos \gamma) + \dot{a}^2 + \dot{b}^2 - \dot{c}^2 +$$

$$+ ab(\ddot{\gamma} \sin \gamma + \dot{\gamma}^2 \cos \gamma) + 2[(\dot{a}b + \dot{b}a)\dot{\gamma} \sin \gamma - \dot{a}\dot{b} \cos \gamma] \}. \quad (6.8)$$

Третий случай. Задано a, b, α ; определить β, c :

$$\beta = \arcsin \left(\frac{b}{a} \sin \alpha \right),$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{a \cos \beta} (\dot{b} \sin \alpha - \dot{a} \sin \beta + b \dot{\alpha} \cos \alpha), \quad (6.9)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{a \cos \beta} [\ddot{b} \sin \alpha - (\ddot{a} - a \dot{\beta}^2) \sin \beta + b (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + 2 (\dot{b} \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{a} \dot{\beta} \cos \beta)];$$

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta, \quad (6.10)$$

$$\dot{c} = \dot{b} \cos \alpha + \dot{a} \cos \beta - b \dot{\alpha} \sin \alpha - a \dot{\beta} \sin \beta,$$

$$\ddot{c} = (\ddot{b} - b \dot{\alpha}^2) \cos \alpha + (\ddot{a} - a \dot{\beta}^2) \cos \beta - (b \ddot{\alpha} + 2 \dot{b} \dot{\alpha}) \sin \alpha - (a \ddot{\beta} + 2 \dot{a} \dot{\beta}) \sin \beta.$$

Во многих механизмах образуются прямоугольные треугольники, для которых вышеприведенные формулы упрощаются. Поэтому целесообразно написать также формулы прямоугольного треугольника для трех случаев. Обозначения выбираем, принимая, что угол $\gamma = 90^\circ$ (рис. 6.2).

Первый случай. Задано a, b ; определить c, α :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \dot{c} = \frac{1}{c} (a \dot{a} + b \dot{b}), \quad (6.11)$$

$$\ddot{c} = \frac{1}{c} (a \ddot{a} + b \ddot{b} + \dot{a}^2 + \dot{b}^2 - \dot{c}^2);$$

$$\alpha = \arctg \frac{a}{b}, \quad \dot{\alpha} = \frac{1}{b} (\dot{a} - \dot{b} \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha, \quad (6.12)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{b} \left[\ddot{a} \cos^2 \alpha - \ddot{b} (1 + \cos 2\alpha) - \left(\frac{\dot{b}}{2} + \dot{\alpha} \dot{a} \right) \sin 2\alpha \right].$$

Второй случай. Задано a, c ; определить b, α :

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad \dot{b} = \frac{1}{b} (c \dot{c} - a \dot{a}), \quad (6.13)$$

$$\ddot{b} = \frac{1}{b} (c \ddot{c} - a \ddot{a} + \dot{c}^2 - \dot{a}^2 - \dot{b}^2);$$

$$\alpha = \arcsin \frac{a}{c}, \quad \dot{\alpha} = \frac{1}{c \cos \alpha} (\dot{a} - \dot{c} \sin \alpha), \quad (6.14)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{c \cos \alpha} [\ddot{a} - (\ddot{c} - c \dot{\alpha}^2) \sin \alpha - 2 \dot{c} \dot{\alpha} \cos \alpha].$$

Третий случай. Задано a, α ; определить b :

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = a \operatorname{tg} \beta, \quad \dot{b} = \dot{a} \operatorname{tg} \beta + \frac{a \dot{\beta}}{\cos^2 \beta}, \quad (6.15)$$

$$\ddot{b} = \ddot{a} \operatorname{tg} \beta + \frac{a \ddot{\beta} + 2 \dot{\beta} (\dot{a} + a \dot{\beta} \operatorname{tg} \beta)}{\cos^2 \beta}.$$

Алгоритмы диад дают возможность по заданному положению и движению элементов крайних кинематических пар диады определить положение и движение звеньев диады. Рассмотрим диады всех пяти модификаций.

Диада первой модификации (рис. 6.3). Ферма диады образует переменный треугольник ABC . Задано x_A, y_A, x_B, y_B, a, b ; определить $\theta_a, \theta_b, x_C, y_C$:

$$\theta = \arctg \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad (6.16)$$

$$c = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \quad (6.17)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{c} [(\dot{y}_B - \dot{y}_A) \cos \theta - (\dot{x}_B - \dot{x}_A) \sin \theta], \quad (6.18)$$

$$\dot{c} = (\dot{x}_B - \dot{x}_A) \cos \theta + (\dot{y}_B - \dot{y}_A) \sin \theta; \quad (6.19)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{c} [(\ddot{y}_B - \ddot{y}_A) \cos \theta - (\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) \sin \theta - 2\dot{\theta} \dot{c}], \quad (6.20)$$

$$\ddot{c} = (\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) \cos \theta + (\ddot{y}_B - \ddot{y}_A) \sin \theta + c \cdot \dot{\theta}^2. \quad (6.21)$$

По формулам (6.7) находим α, β и после этого определяем

$$\begin{aligned} \theta_a &= \theta - \beta + \pi, & \dot{\theta}_a &= \dot{\theta} - \dot{\beta}, & \ddot{\theta}_a &= \ddot{\theta} - \ddot{\beta}, \\ \theta_b &= \theta + \alpha, & \dot{\theta}_b &= \dot{\theta} + \dot{\alpha}, & \ddot{\theta}_b &= \ddot{\theta} + \ddot{\alpha}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Если вершины треугольника ABC следуют друг за другом по направлению движения часовой стрелки, то знаки углов α и β меняются на отрицательные.

Наконец, определим положение и движение шарпира C :

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + b \cos \theta_b, & \dot{x}_C &= \dot{x}_A + \dot{b} \cos \theta_b - b \dot{\theta}_b \sin \theta_b, \\ y_C &= y_A + b \sin \theta_b, & \dot{y}_C &= \dot{y}_A + \dot{b} \sin \theta_b + b \dot{\theta}_b \cos \theta_b, \\ \ddot{x}_C &= \ddot{x}_A + \ddot{b} \cos \theta_b - b(\ddot{\theta}_b \sin \theta_b + \dot{\theta}_b^2 \cos \theta_b) - 2\dot{b} \dot{\theta}_b \sin \theta_b, \\ \ddot{y}_C &= \ddot{y}_A + \ddot{b} \sin \theta_b + b(\ddot{\theta}_b \cos \theta_b - \dot{\theta}_b^2 \sin \theta_b) + 2\dot{b} \dot{\theta}_b \cos \theta_b. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Если диада содержит станину, то вообразим, что на рис. 6.3 станину изображает отрезок AB , звено BC совсем отсутствует, а расстояние a задано. Неизвестные θ_b, x_C, y_C находим по формулам (6.7), (6.22), (6.23).

Диада второй модификации (рис. 6.4). Дано $x_A, y_A, \theta, b, d, e$; найти θ_b, x_C, y_C . Для решения строим прямоугольный треугольник ABC . Определяем длину катета и ее производные

$$c = e - d, \quad \dot{c} = \dot{e} - \dot{d}, \quad \ddot{c} = \ddot{e} - \ddot{d}. \quad (1)$$

Катет a определяем по формулам (6.13), заменяя в них b на a, c на b, a на c , а угол α по формулам (6.14), заменяя в них c на b . Расчет заканчиваем, применяя формулы (6.22), (6.23).

Если звено c поступательной парой является станией (рис. 6.4), то эту задачу формулируем и решаем аналогично толь-

ко что рассмотренной задаче, заменяя в формулах (6.24) c на a и в формулах (6.13) b на c , c на b .

Если станиной является звено без поступательной пары (рис. 6.4), то $x_A, y_A, \theta, d, c, e$ известны; следует определить θ_b . Этот угол находим по формулам (1), заменяя c на a ; дальше используем формулы (6.13), (6.14) и (6.22).

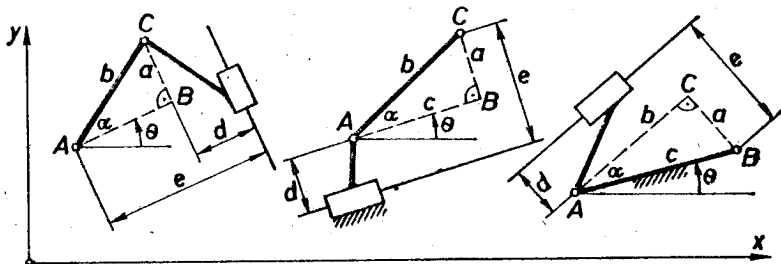


Рис. 6.4.

Диада третьей модификации (рис. 6.5). Даны x_A, y_A, x_B, y_B, b ; требуется найти θ_b . Находим θ и c по формулам (6.16)–(6.21) и a по формулам (6.13), заменяя в них b на a , a на b ; расчет заканчиваем по формулам (6.14) и (6.22).

Если одно из звеньев диады является станиной (рис. 6.5), то известны x_A, y_A, θ, b, a ; необходимо найти x_C, y_C . Находим c по формулам (6.13), заменяя в них b на c , c на b , и находим α по формулам (6.14), заменяя в них c на b . Расчет заканчиваем по формулам (6.22) и (6.23).

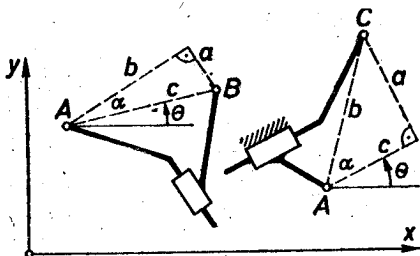


Рис. 6.5.

Диада четвертой модификации (рис. 6.6). Здесь отсутствует изменяемый треугольник. Задано $r_A, r_B, \theta_A, \theta_B, c_A, c_B$; определить x_C, y_C . Вычисляем величины $a = r_A + c_A, b = r_B - c_B, \delta = \theta_A - \theta_B$ и координаты точки C находим из уравнений

$$x_C \cos \theta_A + y_C \sin \theta_A = a, \quad x_C \cos \theta_B + y_C \sin \theta_B = b \quad (6.24)$$

как точку пересечения двух прямых, заданных в нормальной форме. Если обозначим $\Delta = 1/\sin \delta$, то

$$x_C = \Delta (b \sin \theta_A - a \sin \theta_B), \quad y_C = \Delta (a \cos \theta_B - b \cos \theta_A),$$

$$\dot{x}_C = \Delta (\dot{b} \sin \theta_A - \dot{a} \sin \theta_B + b \dot{\theta}_A \cos \theta_A - a \dot{\theta}_B \cos \theta_B - x_C \dot{\delta} \cos \delta),$$

$$\dot{y}_C = \Delta (\dot{a} \cos \theta_B - \dot{b} \cos \theta_A - a \dot{\theta}_B \sin \theta_B + b \dot{\theta}_A \sin \theta_A - y_C \dot{\delta} \cos \delta),$$

$$\ddot{x}_C = \Delta [\ddot{b} \sin \theta_A - \ddot{a} \sin \theta_B + b (\ddot{\theta}_A \cos \theta_A - \dot{\theta}_A^2 \sin \theta_A) - \ddot{\delta} \cos \delta - \dot{\delta}^2 \sin \delta] -$$

$$- a (\ddot{\theta}_B \cos \theta_B - \dot{\theta}_B^2 \sin \theta_B) + 2 (\dot{b} \dot{\theta}_A \cos \theta_A - \dot{a} \dot{\theta}_B \cos \theta_B - \dot{x}_C \dot{\delta} \cos \delta) - x_C (\ddot{\delta} \cos \delta - \dot{\delta}^2 \sin \delta), \quad (6.25)$$

$$\ddot{y}_C = \Delta \left[\ddot{a} \cos \theta_B - \ddot{b} \cos \theta_A - a (\ddot{\theta}_B \sin \theta_B + \dot{\theta}_B^2 \cos \theta_B) + \right. \\ \left. + b (\ddot{\theta}_A \sin \theta_A + \dot{\theta}_A^2 \cos \theta_A) - 2 (\dot{a} \dot{\theta}_B \sin \theta_B - \dot{b} \dot{\theta}_A \sin \theta_A + \dot{y}_C \dot{\delta} \cos \delta) - \right. \\ \left. - y_C (\ddot{\delta} \cos \delta - \dot{\delta}^2 \sin \delta) \right].$$

Обычно в механизмах шарнир C находится в точке пересечения обеих линий скольжения поступательных пар. Тогда расчет диады отпадает, так как можем непосредственно использовать формулы изменяемого треугольника для контура кинематической цепи. Если одно звено диады, например CB ,

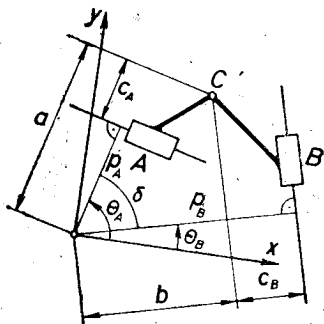


Рис. 6.6.

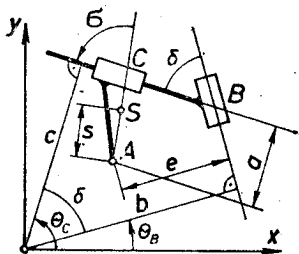


Рис. 6.7.

является станиной, то известны δ , θ_B , x_C , y_C , а неизвестным является $\theta_A = \theta_B + \delta$.

Диада пятой модификации (рис. 6.7). Задано x_A , y_A , b , θ_B , a , δ , e ; определить θ_C , c . Вычисляем $\theta_C = \theta_B + \delta$ и после этого находим $c = x_A \cos \theta_C + y_A \sin \theta_C + a$,

$$\dot{c} = \dot{x}_A \cos \theta_C + \dot{y}_A \sin \theta_C + \dot{a} - \dot{\theta}_C (x_A \sin \theta_C - y_A \cos \theta_C), \\ \ddot{c} = \ddot{x}_A \cos \theta_C + \ddot{y}_A \sin \theta_C + \ddot{a} - \ddot{\theta}_C (x_A \sin \theta_C - y_A \cos \theta_C) - \\ - 2\dot{\theta}_C (\dot{x}_A \sin \theta_C - \dot{y}_A \cos \theta_C) - \dot{\theta}_C^2 (c - a). \quad (6.26)$$

Если звено AC является станиной, то единственное неизвестное $\theta_B = \theta_C - \delta$. Если звено BC является станиной, то заданы θ_C , b , θ_B , a , δ , e . Неизвестные x_A , y_A находим из уравнений

$$x_A \cos \theta_B + y_A \sin \theta_B = b - e, \quad x_A \cos \theta_C + y_A \sin \theta_C = c - a, \quad (6.27)$$

которые подобны уравнениям (6.24). Поэтому решение дают формулы (6.25), если в них произвести соответствующие подстановки и учесть, что $\dot{\theta}_C = \dot{\theta}_B$, $\ddot{\theta}_C = \ddot{\theta}_B$, $\dot{\delta} = 0$, $\ddot{\delta} = 0$. Видно, что в диадах первой модификации имеется изменяемый косоугольный треугольник, в диадах второй и третьей модификации — воображаемый изменяемый прямоугольный треугольник, а в остальных диадах треугольник совсем отсутствует.

Если желаем определить движение любой точки обоих звеньев диады при помощи приведенных формул для третьей точки, то необходимо знать движение двух точек каждого звена. Однако для звена с одной поступательной парой задано или определено движение только одной точки, а для звена с двумя поступательными парами движение ни одной из точек не задано. Покажем, как получить движение двух точек каждого звена.

Движение звена AC (рис. 6.7) определено величинами x_A, y_A, θ_C . Выбрав точку S , заданную координатами s, σ , находим движение этой точки по формулам (6.23), заменяя в них C на S , b на s, θ_b на $\theta_C + \pi/2 - \sigma, \dot{b} = 0, \ddot{b} = 0, \dot{\theta}_b$ на $\dot{\theta}_C, \ddot{\theta}_b$ на $\ddot{\theta}_C$.

Движение звена BC (рис. 6.7) определено величинами θ_B, b, θ_C и s . Поэтому координаты точки B можем найти из уравнений

$$x_B \cos \theta_B + y_B \sin \theta_B = b, \quad x_B \cos \theta_C + y_B \sin \theta_C = c, \quad (6.28)$$

которые аналогичны уравнениям (6.24). Поэтому x_B, y_B находим при помощи формул (6.25), производя в них соответствующие подстановки и учитывая, что $\dot{\theta}_C = \dot{\theta}_B, \ddot{\theta}_C = \ddot{\theta}_B, \delta = 0, \dot{\delta} = 0$. Таким образом, этот случай приведен к предыдущему.

Формулы для определения положения и движения третьей точки C могут быть составлены, если известны положение и параметры движения двух точек A и B этого звена. Для вывода этих формул, согласно рис. 6.8, выбираем подвижную систему координат u и z . Отрезок AB принимаем за единицу длин относительных координат. Если относительные координаты измеряются в единицах длин абсолютных координат, то их обозначаем u_1, z_1 . Проектируя векторное выражение

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{u_1} + \overline{z_1}$$

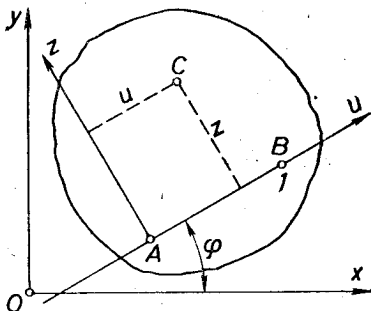


Рис. 6.8.

на оси неподвижной системы координат Oxy , получаем

$$x_C = x_A + u_1 \cos \varphi - z_1 \sin \varphi, \quad y_C = y_A + u_1 \sin \varphi + z_1 \cos \varphi.$$

Замещая в этих формулах

$$\cos \varphi = \frac{x_B - x_A}{AB}, \quad \sin \varphi = \frac{y_B - y_A}{AB}, \quad u = \frac{u_1}{AB}, \quad z = \frac{z_1}{AB},$$

получаем формулы для определения координат третьей точки

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + u(x_B - x_A) - z(y_B - y_A), \\ y_C &= y_A + u(y_B - y_A) + z(x_B - x_A). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Переменными величинами в формулах (6.29) являются абсолютные координаты точек; по отношению к ним формулы линейные. Поэтому производные этих формул по времени отличаются от самих формул только тем, что вместо абсолютных координат $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$ записаны производные этих координат. Таким образом, эти формулы пригодны также для определения скорости и ускорения точки C , если известны скорости и ускорения точек A и B .

§ 6.3. Аналитическая кинематика диадных механизмов

Применяя метод треугольников, кинематический анализ механизма начинаем с выяснения структуры механизма, т. е. выделения ведущих цепей и структурных групп. Геометрические параметры звеньев (длины и углы) диад и изменяемых треугольников желательнее обозначать символами, применяемыми в § 6.2; это облегчает применение основных формул. Если имеются несколько диад и изменяемых треугольников, то можно применять индексы.

Сначала определяют положение механизма. После определения абсолютных или относительных координат ведущих цепей используют для расчета алгоритмы диад. Если шарниры находятся на линиях скольжения поступательных пар, расчет упрощается: вместо алгоритмов диад для контуров кинематической цепи можно использовать формулы для изменяемого треугольника. Если положение двух точек на каком-то звене известно, то положение (а также скорость и ускорение) других точек этого звена определяют формулами для третьей точки. Далее определяют скорости и ускорения, помещая в основных формулах соответствующие конкретному случаю численные значения величин. Необходимые для расчета формулы можно также получить, дифференцируя заранее написанные выражения для координат, характеризующих положения звена или точки; это обстоятельство целесообразно использовать для контроля правильности выбора формул.

Применение метода треугольников показано в нижеприведенных примерах; среди них имеются графически решенные примеры предыдущего раздела.

Пример 6.1. Поршневую машину (рис. 6.9) приводит в движение кривошип 1. Его частота вращения 95 мин^{-1} . Определить скорость и ускорение поршня 3, скорость и ускорение точки S шатуна 2, а также угловую скорость и ускорение шатуна в момент времени, когда $\varphi = 20^\circ$. Дано $OA = r = 250 \text{ мм}$, $AC = b = 730 \text{ мм}$, $A = e = 107 \text{ мм}$.

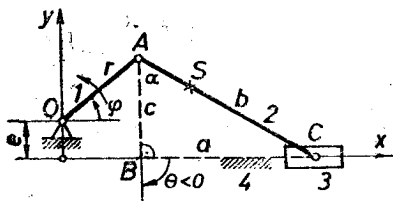


Рис. 6.9.

Решение. Механизм состоит из ведущей цепи 14 и диады второй модификации 23. Прямоугольный треугольник ABC изображен в соответствии с алгоритмом расчета этой диады (рис. 6.4).

Положение. Ведущая цепь: $x_A = r \cos \varphi = 0,235 \text{ м}$; $y_A = c = e + r \sin \varphi = 0,193 \text{ м}$. Диада 23: $a = \sqrt{b^2 - c^2} = 0,704 \text{ м}$; $\alpha = \arcsin(a/b) = 74,7^\circ$; $x_C = x_A + a = 0,939 \text{ м}$.

Скорости: $\dot{x}_A = -r\dot{\varphi} \sin \varphi = -0,851 \text{ м/с}$, где $\dot{\varphi} = \pi n/30 = 9,95 \text{ с}^{-1}$; $\dot{y}_A = \dot{c} = r\dot{\varphi} \cos \varphi = 2,34 \text{ м/с}$; $\dot{a} = -c\dot{\alpha}/a = -0,64 \text{ м/с}$; $\dot{\theta}_b = \dot{\omega}_2 = \dot{\alpha} = -a/(b \cos \alpha) = -3,33 \text{ с}^{-1}$; $\dot{x}_C = \dot{v}_3 = \dot{x}_A + \dot{a} = -1,49 \text{ м/с}$; $\dot{x}_S = \dot{x}_A + u(\dot{x}_C - \dot{x}_A) = -1,15 \text{ м/с}$, $\dot{y}_S = \dot{y}_A - u\dot{y}_A = 1,25 \text{ м/с}$, где $u = AS/AC = 0,466$; $v_S = \sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2} = 1,70 \text{ м/с}$.

Ускорения: $\ddot{x}_A = -r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -23,25 \text{ м/с}^2$; $\ddot{y}_A = \ddot{c} =$
 $= -r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = -8,46 \text{ м/с}^2$; $\ddot{a} = -\frac{1}{a}(c\ddot{c} + \dot{c}^2 + \dot{a}^2) = -6,07 \text{ м/с}^2$; $\dot{\theta}_b =$
 $= \varepsilon_2 = \ddot{\alpha} = \frac{\ddot{a} + b\dot{\alpha}^2 \sin \alpha}{b \cos \alpha} = 9,03 \text{ с}^{-2}$; $\ddot{x}_C = a_3 = \ddot{x}_A + \ddot{a} = -29,32 \text{ м/с}^2$;
 $\ddot{x}_S = \ddot{x}_A + u(\ddot{x}_C - \ddot{x}_A) = -26,08 \text{ м/с}^2$; $\ddot{y}_S = \ddot{y}_A - u\ddot{y}_A = -4,52 \text{ м/с}^2$; $a_S =$
 $= \sqrt{\ddot{x}_S^2 + \ddot{y}_S^2} = 26,45 \text{ м/с}^2$.

Примечание. Если показанный на рис. 6.9 эксцентриситет $e = 0$, то получаем центральный кривошипно-ползунный механизм (рис. 6.10), для замкнутой контура ABC которого выгодно использовать формулы изменяемого треугольника. Подставляя $\dot{a} = 0$, $\dot{b} = 0$, $\dot{a} = 0$, $\dot{b} = 0$, в формулах (6.9), (6.10) получаем непосредственно выражения угловой скорости и ускорения (с противоположным знаком) шатуна и также выражения скорости и ускорения ползуна.

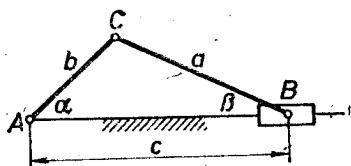


Рис. 6.10.

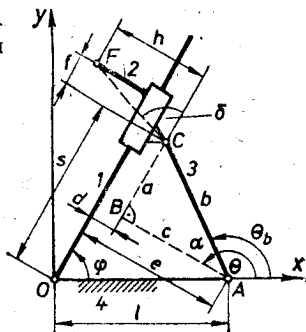


Рис. 6.11.

Пример 6.2. На рис. 6.11 показан дезаксиальный механизм вращающейся кулисы. Дано φ , $\dot{\varphi} = \text{const}$; найти v_C , v_F , v_{2I} , ω_3 , a_C , a_F , a_{2I} , ε_3 .

Решение. Механизм состоит из ведущей цепи 14 и диады второй модификации 23. Поэтому используем тот же самый алгоритм, что и в предыдущем примере.

Положим: $\theta = \varphi + 90^\circ$; $e = l \sin \varphi$; $c = e - d$; $a = \sqrt{b^2 - c^2}$;
 $\alpha = \arcsin(a/b)$; $\theta_b = \theta - \alpha$; $s = a + l \cdot \cos \varphi$; $m = CF$; $\delta = \arctg(h/l)$;
 $\theta_m = \varphi + \delta$; $x_C = x_A + b \cos \theta_b$; $y_C = b \sin \theta_b$; $x_F = x_C + m \cos \theta_m$; $y_F =$
 $= y_C + m \sin \theta_m$.

Скорости: $\dot{\theta} = \dot{\varphi}$; $\dot{e} = l\dot{\varphi} \cos \varphi$; $\dot{c} = \dot{e}$; $\dot{a} = -c\dot{\varphi}/a$; $\dot{\alpha} = a/(b \cos \alpha)$;
 $\dot{\theta}_b = \dot{\theta} - \dot{\alpha} = \omega_3$; $\dot{s} = a - l\dot{\varphi} \sin \varphi = v_{2I}$; $v_C = b\dot{\theta}_b$; $\dot{\theta}_m = \dot{\varphi}$. Далее по формулам (6.23) находим \dot{x}_C , \dot{y}_C , \dot{x}_F , \dot{y}_F , $v_F = \sqrt{\dot{x}_F^2 + \dot{y}_F^2}$.

Ускорения: $\ddot{\theta} = \ddot{\varphi} = 0$; $\ddot{e} = -l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi$; $\ddot{c} = \ddot{e}$; $\ddot{a} = -\frac{1}{a}(\dot{a}^2 + \dot{c}^2 +$

$+ c\ddot{c})$; $\ddot{\alpha} = \frac{\ddot{a} + b\dot{\alpha}^2 \sin \alpha}{b \cos \alpha}$; $\ddot{\theta}_b = -\ddot{\alpha} = \varepsilon_3$; $\ddot{s} = \ddot{a} - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = a_{2I}$; $a_C =$
 $= b \sqrt{\omega_3^2 + \varepsilon_3^2}$; $\ddot{\theta}_m = 0$.

Определяем \ddot{x}_C , \ddot{y}_C , \ddot{x}_F , \ddot{y}_F по формулам (6.23) и $a_F = \sqrt{\ddot{x}_F^2 + \ddot{y}_F^2}$.

Примечание. Если рассматриваемый механизм приводится в движение поршнем в цилиндре, то ведущей цепью является 12, а ведомая цепь состоит из звеньев 34. В этом случае дано s , \dot{s} , \ddot{s} ; следует найти ω_3 ; ε_3 . В этом случае решение упрощается. Так как угол OAC

$$\beta = \arccos [(b^2 + l^2 - s^2 - d^2)/(2bl)],$$

то $\omega_3 = -\ddot{\beta}$ и $\varepsilon_3 = -\ddot{\beta}$ находим непосредственно по формулам (6.7). Так как $\varphi = \psi + \kappa$, где $\psi = \arcsin \frac{b \sin \beta}{\sqrt{s^2 + d^2}}$ и $\kappa = \arctg \frac{d}{s}$, то $\omega_1 = \dot{\varphi}$ и $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}$ находим непосредственно по формулам (6.9) и (6.12).

Пример 6.3. Показанный на рис. 6.12 механизм приводится в движение кривошипом 1. Дано $\varphi, \dot{\varphi} = \text{const}$; найти скорость и ускорение ползуна 6.

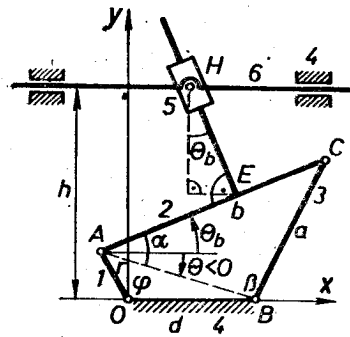


Рис. 6.12.

Решение. Механизм состоит из ведущей цепи 14, диады первой модификации 23 и диады четвертой модификации 56

$$x_A = r \cdot \cos \varphi, \quad y_A = r \cdot \sin \varphi.$$

Величины $\theta, c = AB, \alpha, \theta_b, x_E, y_E$ и их производные находим по формулам (6.16) — (6.23) и (6.7). Так как $x_H = x_E - (h - y_E) \operatorname{tg} \theta_b$, то, согласно формулам (6.15),

$$v_6 = \dot{x}_E + \dot{y}_E \operatorname{tg} \theta_b - \frac{(h - y_E) \dot{\theta}_b}{\cos^2 \theta_b},$$

$$a_6 = \ddot{x}_E + \ddot{y}_E \operatorname{tg} \theta_b + \frac{1}{\cos^2 \theta_b} [2 \dot{y}_E \dot{\theta}_b - (h - y_E) \cdot (\ddot{\theta}_b + 2 \dot{\theta}_b^2 \operatorname{tg} \theta_b)].$$

Пример 6.4. Шестизвенный механизм (рис. 6.13) приводится в движение кривошипом 1. Дано $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$; найти ω_5, ε_5 .

Решение. Механизм состоит из ведущей цепи 16, диады первой модификации 23 и диады третьей модификации 45. Ось координат выбираем согласно рис. 6.13; $x_A =$

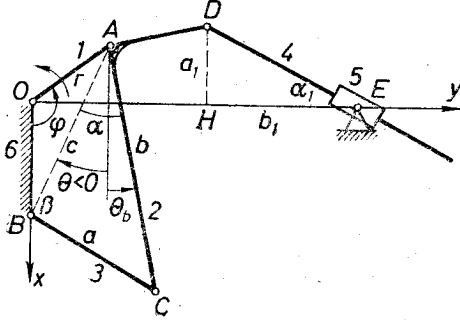


Рис. 6.13.

$= r \cos \varphi, \quad x_A = -r \varphi \sin \varphi;$
 $\dot{x}_A = -r(\dot{\varphi} \sin \varphi + \varphi^2 \cos \varphi);$
 $y_A = r \sin \varphi, \quad \dot{y}_A = r \dot{\varphi} \cos \varphi,$
 $\ddot{y}_A = r(\dot{\varphi} \cos \varphi - \varphi^2 \sin \varphi).$ Величины $\theta, c, \alpha, \theta_b, x_C, y_C$ и их производные находим по формулам (6.16) — (6.23) и (6.7), а x_D, y_D по формулам (6.29). Для изменяемого прямоугольного треугольника DHE, у которого $a_1 = -x_D, b_1 = OE - y_D$, по формулам (6.12) определяем $\alpha_1, \alpha_1 = -\omega_5, \alpha_1 = -\varepsilon_5.$

Пример 6.5. Решить пример 5.5 аналитически.

Решение. Механизм клапанного вентилятора (рис. 5.29) состоит из ведущей цепи 12 и ведомой цепи 34, содержащей станину 4. Дано $\angle OAB = \varphi, \varphi = \text{const}$. Определяем зависящую от движения ведущей цепи длину $c = OB$ и ее производные по формулам (6.8), а углы $\alpha = \angle COB, \beta = \angle OCB, \delta = \angle BOA$ и их производные по формулам (6.7).

Ответ: $\omega_1 = \dot{\alpha} + \dot{\delta}, \varepsilon_1 = \ddot{\alpha} + \ddot{\delta}, \omega_3 = -\dot{\beta}, \varepsilon_3 = -\ddot{\beta}.$

Пример 6.6. Механизм подъема плуга (рис. 6.14) приводится в движение гидроцилиндром. Дано: $AB = c, \dot{c} = \text{const}$; найти скорость v и ускорение a подъема плуга.

Решение. Механизм состоит из ведущей цепи 12, диады 84 первой модификации и цепи 56. Обозначаем $BC = a$, $AC = b$ и по формулам (6.7) определяем $\dot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$, $\dot{\gamma}$.

$$\text{Ответ: } v = v_C = \dot{\gamma} \cdot EC; \quad a = a_C = EC \sqrt{\dot{\gamma}^4 + \ddot{\gamma}^2}.$$

Пример 6.7. Механизм, показанный на рис. 6.15, приводится в движение звеном 1. Даны α , $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$; найти v_C , a_C и относительные скорости и ускорения ползуна и направляющих 1 и 3.

Решение. Механизм состоит из ведущей цепи 14 и диады пятой модификации 23. Контур ABC является изменяемым прямоугольным треугольником с постоянной гипотенузой c . Поэтому траектория точки C является

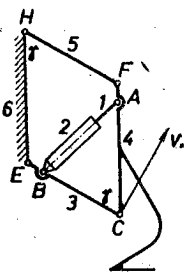


Рис. 6.14.

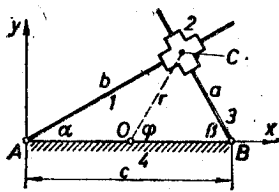


Рис. 6.15.

окружностью с центром в середине гипотенузы, и угол, определяющий положение радиуса $r = OC$, равняется $\varphi = 2\alpha$. Следовательно, $v_C = \dot{\varphi}r = \dot{\alpha} \cdot c$, $a_C = r \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} = c \sqrt{4\dot{\alpha}^4 + \ddot{\alpha}^2}$. Так как $b = c \cos \alpha$, $a = c \sin \alpha$, то относительные скорости скольжения $v_{21} = \dot{b} = -\dot{\alpha} \sin \alpha$, $v_{23} = \dot{a} = \dot{\alpha} \cos \alpha$ и относительные ускорения скольжения $a_{21} = \ddot{b} = -\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha$, $a_{23} = \ddot{a} = \ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha$.

Пример 6.8. Механизм экскаватора (рис. 6.16) приводится в движение одновременно двумя гидроцилиндрами. Даны расстояния AB , CE и по-

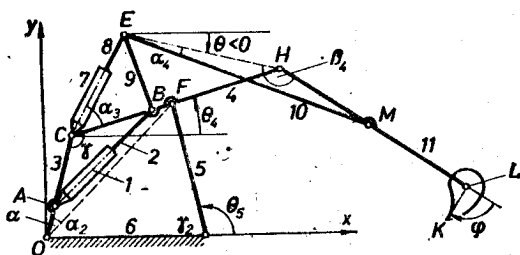


Рис. 6.16.

стоянные скорости изменения этих расстояний. Провести кинематический анализ механизма.

Решение. Этот механизм второго разряда содержит две ведущие цепи 12 и 78. Положение точки L диады 10, 11 определяется положением точек H и E , при этом положение точки H шатуна 4 определяется режимом работы ведущей цепи 12, а положение точки E — режимом работы ведущих

цепей 12 и 78. Возможна работа ведущих цепей совместная или раздельная. Ход расчета для режима совместной работы ведущих цепей следующий.

По формулам (6.7) и (6.8) определяем $\gamma, OF, \alpha, \alpha_2, \gamma_2$; тогда $\theta_3 = \alpha + \alpha_2, \theta_5 = \pi - \gamma_2$ и $x_c = OC \cdot \cos \theta_3, y_c = OC \cdot \sin \theta_3, x_F = GF \cdot \cos \theta_5, y_F = GF \cdot \sin \theta_5$; по формулам (6.29) находим x_E, y_E, x_H, y_H и по (6.16), (6.18), (6.20) определяем θ_4 . По формулам (6.7) определяем α_3 , тогда $\theta_7 = \theta_4 + \alpha_3, x_E = x_c + CE \cdot \cos \theta_7, y_E = y_c + CE \cdot \sin \theta_7$. Исходя из найденного движения точек E и H , определяем положение звеньев диады EMH по формулам (6.16) — (6.23), находя величины $\theta < 0, \alpha_4 < 0, \beta_4 < 0, \theta_{10}, \theta_{11}, x_M, y_M$. Движение центра ковша определяет $x_L = x_M + ML \cdot \cos \theta_{11}, y_L = y_M + ML \cdot \sin \theta_{11}$. Все указанные формулы дают не только положение, но также скорости и ускорения. Если известен закон относительного вращения ковша $\varphi = \varphi(t)$, то положение и движение зубьев ковша определяют координаты $x_K = x_L + LK \cdot \cos(\theta_{11} - \varphi), y_K = y_L + LK \cdot \sin(\theta_{11} - \varphi)$.

§ 6.4. Шарнирный четырехзвенник

С шарнирным четырехзвенником — этим очень широко распространенным механизмом — мы ознакомились в § 4.2.

В четырех из вышерассмотренных примеров шарнирный четырехзвенник является составной частью кинематической цепи.

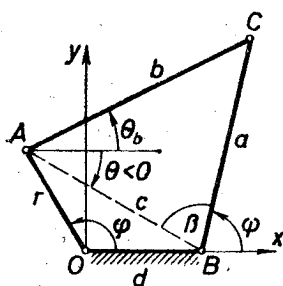


Рис. 6.17.

Шарнирный четырехзвенник используется как направляющий и как передаточный механизм. Особенно в последнем случае важно знать передаточные функции и функции положения этого механизма.

Для получения аналитических выражений функции положения $\psi = \psi(\varphi)$ используем метод треугольников. Так как на рис. 6.17 $\theta < 0$, то $\beta = \pi - \psi + \theta$ и

$$\cos \beta = -\cos(\theta - \psi) = -\cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi. \quad (1)$$

Кроме этого,

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \sin \theta = \frac{-r \sin \varphi}{c}, \quad \cos \theta = \frac{d - r \cos \varphi}{c},$$

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi}, \quad c^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi. \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в формулу (1), получаем функцию положения в явном виде:

$$\psi = \arccos \frac{m \pm k \sqrt{1 + k^2 - m^2}}{1 + k^2}, \quad (6.30)$$

где

$$m = \frac{B^2 - A^2 - D^2 - 1 + 2D \cos \varphi}{2A(D - \cos \varphi)}, \quad k = \frac{\sin \varphi}{D - \cos \varphi},$$

$$A = \frac{a}{r}, \quad B = \frac{b}{r}, \quad D = \frac{d}{r}.$$

Исключив угол δ из уравнений (6.1), получим функцию положения в неявном виде:

$$C - D_1 \cos \varphi + D \cos \psi = \cos(\varphi - \psi), \quad (6.31)$$

где

$$C = \frac{r^2 + a^2 + d^2 - b^2}{2ar}, \quad D_1 = \frac{d}{a}.$$

Дифференцируя уравнение (6.31) по времени, находим обе передаточные функции:

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} \frac{D_1 \sin \varphi + \sin(\varphi - \psi)}{D \sin \psi + \sin(\varphi - \psi)} = \dot{\varphi} \Phi; \quad (6.32)$$

$$\ddot{\psi} = \ddot{\varphi} \Phi + \frac{D_1 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - D \dot{\psi}^2 \cos \psi + (\dot{\varphi} - \dot{\psi})^2 \cos(\varphi - \psi)}{D \sin \psi + \sin(\varphi - \psi)}. \quad (6.33)$$

Формулы (6.30), (6.32), (6.33) выражают положение, скорость и ускорение ведомого звена BC как явные функции от размеров механизма и от положения, скорости и ускорения ведущего звена OA .

§ 6.5. Кривошипно-ползунный механизм

Кривошипно-ползунный механизм является распространенным стержневым механизмом. Поэтому большое значение имеет исследование движения ползуна в зависимости от движения кривошипа и размеров механизма.

Кривошипно-ползунный механизм можно задавать длиной кривошипа r , длиной шатуна b и дезаксиалом e , или величинами r , $\lambda = r/b$ и $\kappa = e/b$. В геометрически подобных механизмах безразмерные параметры λ и κ соответственно равны.

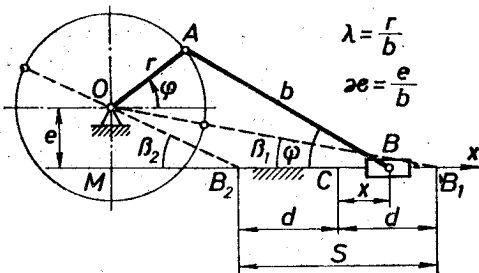


Рис. 6.18.

Согласно рис. 6.18 ход ползуна $S = MB_1 - MB_2$. Выражая MB_1 и MB_2 из прямоугольных треугольников OMB_1 и OMB_2 , у которых $OB_1 = b + r$ и $OB_2 = b - r$, находим

$$S = 2r\sigma, \quad (6.34)$$

где $\sigma = \frac{1}{2\lambda} [\sqrt{(1 + \lambda)^2 - \kappa^2} - \sqrt{(1 - \lambda)^2 - \kappa^2}]$. Значения коэффициента σ даны в табл. 6.1. Видно, что ход центрального кривошипно-ползунного механизма $S = 2r$, а ход дезаксиального — $S > 2r$. Величина λ небольшая для относительно длинных шатунов, а σ почти не зависит от λ ; так как

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \approx 1 + \frac{\kappa^2}{2},$$

то в этих случаях можно применять формулу

$$S \approx 2r \left(1 + \frac{\kappa^2}{2} \right). \quad (6.35)$$

Функцию положения кривошипно-ползунного механизма выражаем как перемещение шарнира B относительно средней точки

Таблица 6.1

$\lambda \backslash \kappa$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	1	1	1	1	1	1
0,1	1,0050	1,0051	1,0053	1,0056	1,0060	1,0068
0,2	1,0206	1,0209	1,0216	1,0228	1,0249	1,0284
0,3	1,0483	1,0489	1,0506	1,0541	1,0598	1,0697
0,4	1,0911	1,0924	1,0964	1,1041	1,1180	1,1457

S хода ползуна, т. е.

$$x = MB_1 - MB_2 - d = r \cos \varphi + b \cos \psi - (b - r) \cos \beta_2 - r\sigma^*$$

или

$$x = r \left(\cos \varphi + \frac{\cos \psi}{\lambda} + K \right), \quad (6.36)$$

где $K = \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \cos \beta_2 - \sigma$ и $\beta_2 = \arcsin \frac{\kappa}{1 - \kappa}$ постоянны, а $\psi = \arcsin (\kappa + \lambda \sin \varphi)$ — переменный угол. Дифференцируя выражение (6.36) по времени, получаем обе передаточные функции — выражения скорости и ускорения ползуна:

$$v = -r\omega (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \psi), \quad (6.37)$$

$$a = -r\varepsilon (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \psi) - r\omega^2 \left(\cos \varphi - \sin \varphi \operatorname{tg} \psi + \frac{\lambda \cos^2 \varphi}{\cos^3 \psi} \right), \quad (6.38)$$

где ω и ε являются угловой скоростью и угловым ускорением кривошипа.

Далее рассмотрим только равномерное вращение кривошипа ($\varepsilon = 0$). Тогда перемещение, скорость и ускорение ползуна можем выразить так:

$$x = rX, \quad v = r\omega V, \quad a = r\omega^2 A. \quad (6.39)$$

Здесь X , V , A являются безразмерными величинами, выражения которых приведены в предыдущих формулах. Единицей безразмерного перемещения является длина кривошипа, единицей безразмерной скорости — скорость центра пальца кривошипа, еди-

*) Более простое выражение для функции перемещения получается в том случае, если положение центра шарнира B определять относительно точки M . Такой вид функции перемещения ползуна чаще всего используется при расчетах. — Прим. ред.

ницей безразмерного ускорения — ускорение центра пальца кривошипа. Если бы ползун двигался гармонически, то соответствующие выражения были бы следующими:

$$X = \cos \varphi, \quad V = -\sin \varphi, \quad A = -\cos \varphi, \quad X^2 + V^2 = 1, \quad A = -X.$$

Графики безразмерных величин движения ползуна, построенные согласно формулам (6.36)—(6.39) как функции угла поворота кривошипа, показаны на рис. 6.19, а на рис. 6.20 — как функции

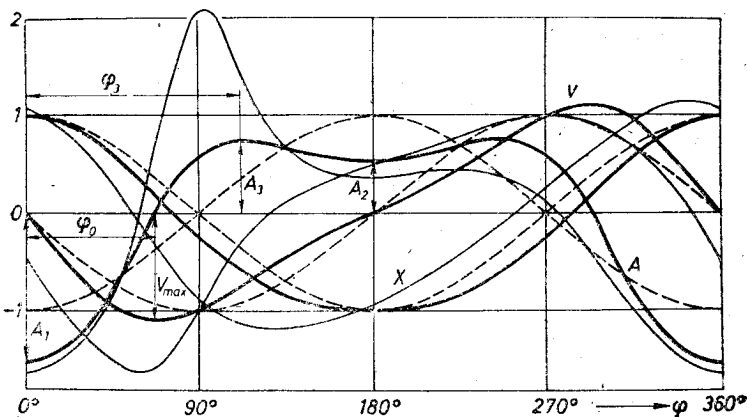


Рис. 6.19.

безразмерного перемещения ползуна. Для каждой функции даны три кривые: кривые дезаксального механизма (тонкие линии) с $\kappa = 0,4$ и $\lambda = 0,5$, кривые для центрального механизма (жирные линии) с $\kappa = 0$ и $\lambda = 0,5$ и кривые, характеризующие гармоническое движение (штриховые линии). Видно (рис. 6.19), что движение ползуна центрального кривошипно-ползунного механизма симметрично по отношению к крайним точкам хода ползуна. При гармоническом законе движения симметрия имеет место также по отношению к средней точке хода ползуна, так как кривые X , V , A на рис. 6.19 являются гармониками, а на рис. 6.20 кривая V в функции X представляет собой окружность с радиусом 1 и центром посередине хода, а кривая A является прямой, проходящей под углом 45° через среднюю точку хода.

Рассмотрим центральный кривошипно-ползунный механизм, у которого $\kappa = 0$, $\beta_2 = 0$, $\sigma = 1$, а $0 \leq \lambda \leq 1$, так как в противном случае невозможен полный оборот кривошипа.

Если $\lambda = 0$ и $\epsilon = 0$, то формулы (6.36)—(6.38) описывают гармоническое движение; этот же результат дает при равномерном вращении кривошипа синусный механизм (рис. 4.5). Поэтому синусный механизм называют также механизмом с бесконечно длинным шатуном. Следовательно, чем меньше λ , тем движение ползуна ближе к гармоническому. При увеличении λ движение ползуна все больше отличается от гармонического движения, по

когда $\lambda = 1$, становится опять гармоническим. В этом особом предельном случае кривошип и шатун одинаковой длины (рис. 4.18), точки шатуна описывают эллипсы и длина хода ползуна $S = 4r$.

Средняя скорость ползуна центрального кривошипно-ползунного механизма

$$v_{\text{ср}} = \frac{2S}{T} = \frac{2 \cdot 2r}{2\pi/\omega} = r\omega \frac{2}{\pi} = 0,6366 r\omega, \quad (6.40)$$

а максимальную скорость можем определить по формуле (6.37), если в нее подставить $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 — угол поворота кривошипа,

соответствующий максимальной скорости ползуна. Приравнявая нулю выражение, заключенное в последних скобках формулы (6.38), находим

$$\sin \varphi_0 = \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{3}[1 + 4\cos(\delta - 120^\circ)]}, \quad (6.41)$$

где

$$\delta = \frac{1}{3} \arccos \frac{11 - 27\lambda^2}{16}.$$

Кривошип перпендикулярен шатуну в момент времени, когда угол поворота кривошипа равен

$$\varphi_0 = \arcsin(1/\sqrt{1 + \lambda^2}); \quad (6.42)$$

это следует (рис. 6.18, когда $e = 0$) из прямоугольного треугольника

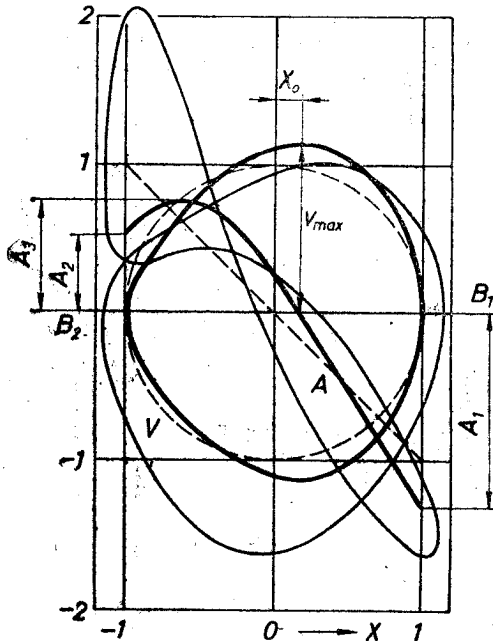


Рис. 6.20.

OAB . Угол, соответствующий средней точке C , т. е. среднему положению ползуна,

$$\varphi_0 = \arccos(\lambda/2), \quad (6.43)$$

что можно установить, рассмотрев равнобедренный треугольник OAB . Подставляя φ_0 и φ_0 в формулу (6.36), находим координату, соответствующую максимальной скорости в положении, когда кривошип перпендикулярен шатуну. Эти величины даны в табл. 6.2. Видно, что при движении в сторону кривошипа ползун достигает максимальной скорости после момента, когда кривошип перпендикулярен шатуну. Обычно это происходит до средней точки, но, если $\lambda > 0,864$, то после средней точки. Минимальное φ_0 имеется в механизме с $\lambda = 0,7906$, а максимальное $X_0 = 0,152$ имеется в механизме с $\lambda \approx 0,5$.

Углы поворота кривошипа, соответствующие экстремальным значениям ускорения ползуна, находим, дифференцируя по углу φ выражение, заключенное в последних скобках формулы (6.38), и приравняв его нулю. Два экстремальных значения

$$a_1 = -r\omega^2(1 + \lambda), \quad a_2 = r\omega^2(1 - \lambda) \quad (6.44)$$

находятся в мертвых точках B_1, B_2 , когда $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 180^\circ$, а третье появляется в механизмах при угле $90^\circ < \varphi_3 < 180^\circ$.

Таблица 6.2

λ	φ_0	φ_s	φ_c	x_0	x_s	v_{\max}
0	90°	90°	90°	0	0	1
0,2	$79^\circ 07'$	$78^\circ 41'$	$84^\circ 16'$	0,0916	0,0990	1,020
0,4	$70^\circ 33'$	$68^\circ 12'$	$78^\circ 28'$	0,1484	0,1926	1,079
0,6	$65^\circ 28'$	$59^\circ 02'$	$72^\circ 32'$	0,1451	0,2770	1,180
0,8	$63^\circ 26'$	$51^\circ 20'$	$66^\circ 25'$	0,0703	0,3508	1,352
1	90°	45°	60°	-1	0,4142	2

если $\lambda > 0,2638$. Это третье экстремальное значение a_3 становится по абсолютному значению наибольшим, если $\lambda > 0,88$.

Для кинематического расчета движения кривошипно-ползунного механизма часто используются приближенные формулы. Если в формулу (6.36) подставляем $\cos \psi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$, разложенный в ряд бинома Ньютона, а степени синусов заменяем косинусами кратных углов, то получаем

$$x = r \left[\cos \varphi - \frac{1}{\lambda} (1 - A_0 - A_2 \cos 2\varphi - A_4 \cos 4\varphi - \dots) \right]. \quad (6.45)$$

Дифференцируя эту формулу по времени, находим, что

$$v = -r\omega \left[\sin \varphi + \frac{1}{\lambda} (2A_2 \sin 2\varphi + 4A_4 \sin 4\varphi + \dots) \right], \quad (6.46)$$

$$a = -r\omega^2 \left[\cos \varphi + \frac{1}{\lambda} (4A_2 \cos 2\varphi + 16A_4 \cos 4\varphi + \dots) \right]. \quad (6.47)$$

Коэффициенты в этих формулах

$$A_0 = 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{3}{64} \lambda^4 - \frac{5}{256} \lambda^6 - \dots$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{16} \lambda^4 + \frac{15}{512} \lambda^6 + \dots$$

$$A_4 = -\frac{1}{64} \lambda^4 - \frac{3}{256} \lambda^6 - \dots$$

очень быстро уменьшаются при увеличении индекса (см. табл. 6.3). Если в формуле (6.36) сохраним только два первых члена разложения $\cos \psi$, то получим:

$$x \approx r \left(\cos \varphi - \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi \right). \quad (6.48)$$

Таблица 6.3

λ	A_0	A_2	A_4	A_6
0,143	0,994874	0,005126	-0,000007	0,00000002
0,286	0,979272	0,020838	-0,000411	0,00000410

Дифференцируя это выражение по времени, получим формулы

$$v \approx -r\omega(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi), \quad (6.49)$$

$$a \approx -r\omega^2(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi), \quad (6.50)$$

которые широко используют в теории поршневых машин. Погрешности этих формул характеризует табл. 6.4.

Таблица 6.4

λ	$(\delta X)_{\max}$	$\varphi(\delta X)_{\max}$	$(\delta V)_{\max}$	$\varphi(\delta V)_{\max}$	$(\delta A)_{\max}$	$\varphi(\delta A)_{\max}$
0	0	90°	0	60°	0	90°
0,1	0,0004		0,0002	60°03'	0,0005	
0,3	0,0035		0,0047	60°28'	0,0145	
0,5	0,0179		0,0237	61°21'	0,0774	
0,7	0,0584		0,0791	63°13'	0,2802	
0,9	0,1768		0,2546	68°08'	1,1647	
1	0,5		1	90°	∞	

§ 6.6. Коромысло-ползунный механизм

Если в дезаксиальном кривошипно-ползунном механизме (рис. 6.18) шатун настолько короткий, что кривошип не может совершить полный оборот, то такой механизм называют *коромысло-ползунным механизмом*.

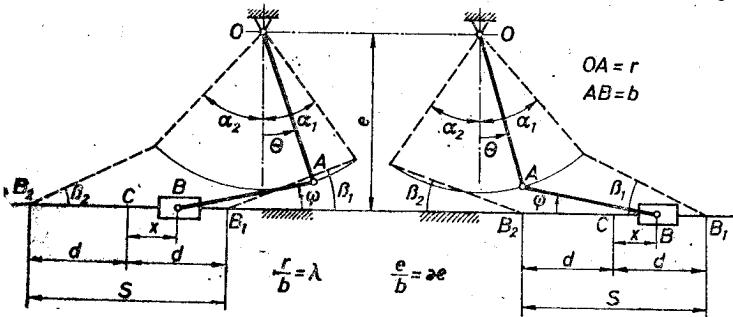


Рис. 6.21.

ловом-ползунным механизмом. Параметр λ здесь близок 1 и больше 1. Поэтому приближенные формулы дают большие погрешности. Точные формулы, которые так же, как формулы (6.36)—

(6.38), выведены согласно рис. 6.21, следующие:

$$S = 2r\sigma, \quad (6.51)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \mp \frac{1}{\lambda} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \right], \quad (6.52)$$

$$x = r \left(\sin \theta \mp \frac{\cos \psi}{\lambda} \pm K \right), \quad (6.53)$$

$$v = r\dot{\theta} (\cos \theta \pm \sin \theta \operatorname{tg} \psi), \quad (6.54)$$

$$a = r\ddot{\theta} (\cos \theta \pm \sin \theta \operatorname{tg} \psi) \pm r\dot{\theta}^2 \left(\mp \sin \theta + \cos \theta \operatorname{tg} \psi + \frac{\lambda \sin^2 \theta}{\cos^3 \psi} \right), \quad (6.55)$$

где верхние знаки относятся к левому механизму (рис. 6.21), а нижние — к правому. Для левого механизма $K = \sin \alpha_2 + \frac{\cos \beta_2}{\lambda}$, для правого механизма $-K = \sin \alpha_1 + \frac{\cos \beta_1}{\lambda} - \sigma$. Если

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, то $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\sigma = \sin \alpha$, $K = (\cos \beta)/\lambda$. Предыдущие формулы значительно упрощаются, если длина шатуна $b \rightarrow \infty$. Тогда образуется механизм, показанный на рис. 6.22, для которого

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2), \quad (6.56)$$

$$x = r (\sin \theta + K), \quad (6.57)$$

$$v = r\dot{\theta} \cos \theta, \quad (6.58)$$

$$a = r(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta). \quad (6.59)$$

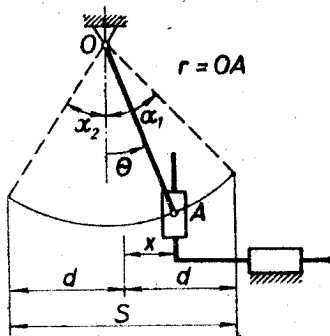


Рис. 6.22.

Здесь $K = \sigma - \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 - \sigma$. Последние формулы можно применять вместо формул (6.51)–(6.55) только при небольших λ .

§ 6.7. Механизмы высших классов

Все рассмотренные в предыдущем разделе механизмы являются механизмами I класса, т. е. диадными механизмами. Они являются единственными механизмами, для которых задача кинематического анализа аналитически решается без приближенного решения трансцендентных уравнений. Чтобы получить представление об аналитической кинематике механизмов высших классов, рассмотрим анализ шарнирных механизмов II класса по методу треугольников [22, 52, 57].

Ведомая цепь механизмов II класса содержит по крайней мере одну из двух структурных групп II класса (рис. 3.5), которые можно получить из одной и той же фермы. Ферма шарнирной диады представляет собой изменяемый треугольник, на кинематике которого базируется кинематический анализ диадных механизмов по методу треугольников; алгоритмы расчета диад

и формулы третьей точки являются дополнительными элементами метода. По такой же схеме можно получить расчетные формулы механизмов высших классов: сначала рассматривают кинематику изменяемых ферм, в качестве которых рассматриваются соответствующие структурные группы, потом составляются алгоритмы расчета этих групп. Формулы (6.29) используются для определения кинематических параметров любой точки звена, если они заданы или определены для двух других точек этого звена.

В ферме (рис. 6.23), из которой могут быть получены шарнирные группы II класса, имеются два замкнутых контура, внутренние углы которых α_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) подлежат расчету; некоторые из них могут быть отрицательными или равняться нулю.

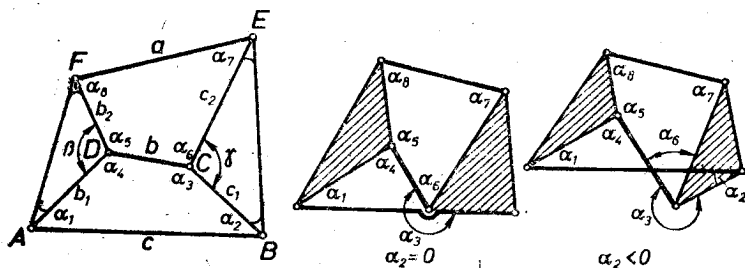


Рис. 6.23.

Уравнение, связывающее противоположные диагонали четырехугольника и углы со сторонами четырехугольника, называется *уравнением диагонали*. Так, например, уравнение диагонали BD следующее:

$$(BD)^2 = c^2 + b_1^2 - 2cb_1 \cos \alpha_1 = b^2 + c_1^2 - 2bc_1 \cos \alpha_3.$$

Для расчета углов α_i можем написать следующие *уравнения положения*:

$$\begin{aligned} a_1 \cos \alpha_1 + a_3 \cos \alpha_3 + b_{13} &= 0, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi &= 0, \\ a_2 \cos \alpha_2 + a_4 \cos \alpha_4 + b_{24} &= 0, & \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 - 2\pi &= 0, \\ a_5 \cos \alpha_5 + a_7 \cos \alpha_7 + b_{57} &= 0, & \alpha_3 + \alpha_6 - (2\pi - \gamma) &= 0, \\ a_6 \cos \alpha_6 + a_8 \cos \alpha_8 + b_{68} &= 0, & \alpha_4 + \alpha_5 - (2\pi - \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Первые четыре уравнения являются уравнениями диагоналей, пятое и шестое — *уравнениями замкнутости контуров*, седьмое и восьмое — *уравнениями обхода внутренних шарниров C и D*. Выражения коэффициентов уравнений (6.60) следующие:

$$\begin{aligned} a_1 &= cb_1, & a_5 &= bb_2, & b_{13} &= 1/2 (b^2 - c^2 - b_1^2 + c_1^2), \\ a_2 &= cc_1, & a_6 &= bc_2, & b_{24} &= 1/2 (b^2 - c^2 - c_1^2 + b_1^2), \\ a_3 &= -bc_1, & a_7 &= -ac_2, & b_{57} &= 1/2 (a^2 + b^2 - b_2^2 + c_2^2), \\ a_4 &= -bb_1, & a_8 &= -ab_2, & b_{68} &= 1/2 (a^2 + b^2 - c_2^2 + b_2^2). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Уравнения положения (6.60) можем решать только приближенно, но с необходимой точностью. Согласно методу Ньютона неизвестные α_i заменяются приближенными значениями, которые можно получить хотя бы из чертежа фермы. Тогда правые части уравнений (6.60) не будут равны нулю, а будут

равны величинам f_i , которые называют *погрешностями*. Для уменьшения погрешностей составляем для каждого уравнения положения $f_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8) = 0$ соответствующее уравнение коррекции

$$\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_8} \Delta \alpha_8 + f_i = 0,$$

в котором величины $\Delta \alpha_i$ являются коррекциями углов α_i . Аналогичные уравнения получаем, если один или два раза дифференцируем по времени любое уравнение положения (6.60), только места коррекций $\Delta \alpha_i$ занимают угловые скорости $\dot{\alpha}_i$ или ускорения $\ddot{\alpha}_i$. Поэтому коррекции углов, скоростей и ускорений определяем, решая следующие линейные *рабочие уравнения*:

$$\begin{aligned} A_1 \xi_1 + A_3 \xi_3 &= B_1, & \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= B_5, \\ A_2 \xi_2 + A_4 \xi_4 &= B_2, & \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 + \xi_8 &= B_6, \\ A_5 \xi_5 + A_7 \xi_7 &= B_3, & \xi_3 + \xi_6 &= B_7, \\ A_6 \xi_6 + A_8 \xi_8 &= B_4, & \xi_4 + \xi_5 &= B_8, \end{aligned} \quad (6.62)$$

где во всех случаях

$$A_i = a_i \sin \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

Если рабочие уравнения используем как уравнения коррекций, то $B_i = f_i$, $i = 1, 2, 3, 4$; $B_i = -\dot{f}_i$, $i = 5, 6, 7, 8$.

При решении рабочих уравнений (6.62) полученные коррекции $\Delta \alpha_i = \xi_i$ прибавляем к начальным значениям углов α_i и получаем улучшенные значения этих углов. Подстановка последних в уравнения положения (6.60) и определяет уменьшенные погрешности f_i . Если они допустимы, то определение положения завершено. В противном случае улучшение приближения следует повторить. Точность полученного приближения характеризуется только совокупностью всех погрешностей; возможно, что при уменьшении средней величины погрешностей кака-то отдельная погрешность f_i увеличивается.

Необходимо отметить, что в механизмах высших классов и высших разрядов в условную ведомую цепь могут входить не только поводки переменной длины, но также изменяемые базовые звенья (рис. 6.24). Поэтому углы γ и β следует признать переменными.

Если предположить, что все размеры фермы переменные, то коэффициенты B_i рабочих уравнений для расчета угловых скоростей $\dot{\alpha}_i = \xi_i$ будут выражаться равенствами:

$$\begin{aligned} B_1 &= \dot{b} (b - c_1 \cos \alpha_3) - \dot{c} (c - b_1 \cos \alpha_1) + \dot{c}_1 (c_1 - b \cos \alpha_3) - \dot{b}_1 (b_1 - c \cos \alpha_1), \\ B_2 &= \dot{b} (b - b_1 \cos \alpha_4) - \dot{c} (c - c_1 \cos \alpha_2) + \dot{b}_1 (b_1 - b \cos \alpha_4) - \dot{c}_1 (c_1 - c \cos \alpha_2), \\ B_3 &= \dot{a} (a - c_2 \cos \alpha_7) - \dot{b} (b - b_2 \cos \alpha_6) + \dot{c}_2 (c_2 - a \cos \alpha_7) - \dot{b}_2 (b_2 - b \cos \alpha_6), \\ B_4 &= \dot{a} (a - b_2 \cos \alpha_8) - \dot{b} (b - c_2 \cos \alpha_6) + \dot{b}_2 (b_2 - a \cos \alpha_8) - \dot{c}_2 (c_2 - b \cos \alpha_6), \\ B_5 &= 0, \quad B_6 = 0, \quad B_7 = -\dot{\gamma}, \quad B_8 = -\dot{\beta}. \end{aligned}$$

Коэффициенты B_i рабочих уравнений для расчета угловых ускорений $\ddot{\alpha}_i = \xi_i$ следующие:

$$\begin{aligned} B_1 &= \ddot{b} (b - c_1 \cos \alpha_3) - \ddot{c} (c - b \cos \alpha_1) + \ddot{c}_1 (c_1 - b \cos \alpha_3) - \\ &- \ddot{b}_1 (b_1 - c \cos \alpha_1) + \dot{b}^2 - \dot{c}^2 - \dot{b}_1^2 + \dot{c}_1^2 - a_1 \dot{\alpha}_1^2 \cos \alpha_1 + a_3 \dot{\alpha}_3^2 \cos \alpha_3 + \\ &+ 2[\dot{c} \dot{b}_1 \cos \alpha_1 - \dot{b} \dot{c}_1 \cos \alpha_3 + (\dot{b} c_1 + \dot{c}_1 b) \dot{\alpha}_3 \sin \alpha_3 - (c b_1 + b_1 c) \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1], \end{aligned}$$

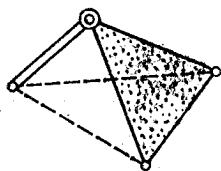


Рис. 6.24.

$$B_2 = [c_1 = b_1, \alpha_3 = \alpha_4, b_1 = c_1, \alpha_1 = \alpha_2, a_1 = a_2, a_3 = a_4],$$

$$B_3 = [b = a, c_1 = c_2, \alpha_3 = \alpha_7, c = b, b_1 = b_2, \alpha_1 = \alpha_5, a_1 = a_5, a_3 = a_7],$$

$$B_4 = [b = a, c_1 = b_2, \alpha_3 = \alpha_8, c = b, b_1 = c_2, \alpha_1 = \alpha_6, a_1 = a_6, a_3 = a_8],$$

$$B_5 = 0, \quad B_6 = 0, \quad B_7 = -\ddot{\gamma}, \quad B_8 = -\ddot{\beta}.$$

Коэффициенты B_2, B_3, B_4 получаем из B_1 , совершая указанные в квадратных скобках изменения. Система рабочих уравнений (6.62) имеет следующее свойство: если две неизвестные ξ_3 и ξ_4 или ξ_5 и ξ_6 найдены, то последние два и первые четыре уравнения становятся явными выражениями остальных шести неизвестных.

Упомянутые две неизвестные находим при помощи формул Крамера:

$$\xi_3 = \Delta_3/\Delta, \quad \xi_4 = \Delta_4/\Delta,$$

определителя которых следующие:

$$\Delta = C_7^{\Delta_3} + C_8^{\Delta_4}, \quad \Delta_3 = \sum_1^8 C_i^{\Delta_3} \cdot B_i, \quad \Delta_4 = \sum_1^8 C_i^{\Delta_4} \cdot B_i.$$

Коэффициенты C_i , необходимые для расчета определителей, даны в табл. 6.5.

Таблица 6.5

	C_1	C_4	C_5	C_6
Δ_3	$A_1 A_8 (A_5 - A_7)$	$A_1 A_8 (A_4 - A_2)$	$A_1 A_2 A_8 (A_7 - A_6)$	$A_1 A_7 (A_3 - A_4) \times$ $\times (A_6 - A_8)$
Δ_4	$A_2 A_7 (A_8 - A_6)$	$A_2 A_8 (A_1 - A_3)$	$A_1 A_2 A_7 (A_6 - A_8)$	$A_2 A_7 (A_8 - A_1) \times$ $\times (A_6 - A_8)$
	C_2	C_4	C_5	C_6
Δ_3	$A_1 A_8 (A_5 - A_7)$	$A_1 A_7 (A_4 - A_2)$	$A_1 A_7 A_8 (A_2 - A_4)$	$A_1 A_8 (A_3 - A_4) \times$ $\times (A_5 - A_7)$
Δ_4	$A_1 A_7 (A_8 - A_6)$	$A_2 A_7 (A_1 - A_3)$	$A_2 A_7 A_8 (A_3 - A_1)$	$A_2 A_8 (A_3 - A_1) \times$ $\times (A_5 - A_7)$

Когда все неизвестные ξ_i определены, пятое и шестое рабочие уравнение можно использовать для проверки расчета.

Алгоритмы шарнирных групп II класса. Группа второго порядка (рис. 6.25). Дано $x_A, y_A, x_B, y_B, a, b, b_1, b_2, \beta, c_1, c_2, \gamma$. Определить $\theta_1, \theta_2, \theta_b, \theta_a, x_C, y_C, x_D, y_D, x_E, y_E, x_F, y_F$.

По формулам (6.16) — (6.21) находим θ и c , а после этого рассмотренным выше методом определяем α_i . Теперь

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \alpha_1, & \theta_2 &= \theta - \alpha_2 + \pi, & \theta_b &= \theta_1 + \alpha_4 - \pi, & \theta_a &= \theta_1 + \alpha_8 - \beta, \\ x_C &= x_B + c_1 \cos \theta_2, & y_C &= y_B + c_1 \sin \theta_2, \\ x_D &= x_A + b_1 \cos \theta_4, & y_D &= y_A + b_1 \sin \theta_1; \\ x_F &= x_A + b_3 \cos (\theta_1 + \beta_1), & y_F &= y_A + b_3 \sin (\theta_1 + \beta_1); \\ x_E &= x_B + c_3 \cos (\theta_2 - \gamma_1), & y_E &= y_B + c_3 \sin (\theta_2 - \gamma_1). \end{aligned}$$

Производные этих формул можем написать по образцу формул (6.22) и (6.23).

Группа третьего порядка (рис. 6.26). Дано $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, a, b, c, b_1, b_2, \beta$. Определить $\theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta, x_E, y_E, x_F, y_F, x_G, y_G$. По формулам (6.16) — (6.24) определяем $\theta_1, \theta_2, c_1, c_2$ и $\gamma = \theta_2 - \theta_1$, а после этого

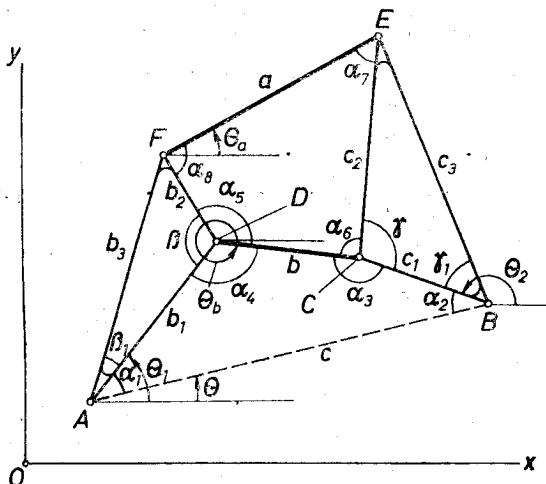


Рис. 6.25.

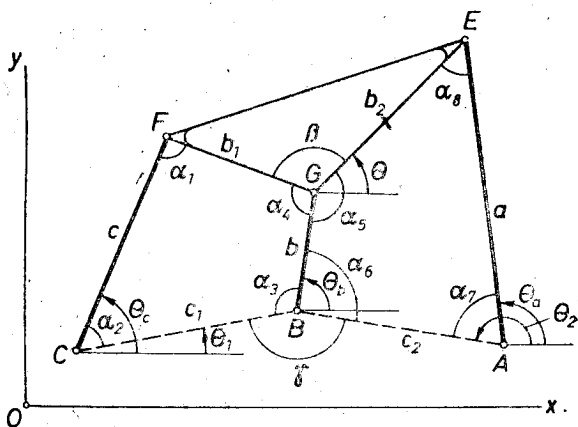


Рис. 6.26.

α_i , как в предыдущем случае. Теперь

$$\begin{aligned} \theta_a &= \theta_2 - \alpha_7, & \theta_b &= \theta_1 - \alpha_3 + \pi, & \theta_c &= \theta_1 + \alpha_2, & \theta &= \theta_b + \alpha_5 - \pi \\ x_E &= x_A + a \cos \theta_a, & y_E &= y_A + a \sin \theta_a; \\ x_F &= x_C + c \cos \theta_c, & y_F &= y_C + c \sin \theta_c; \\ x_G &= x_B + b \cos \theta_b, & y_G &= y_B + b \sin \theta_b. \end{aligned}$$

Производные этих формул можем написать так же, как в предыдущем случае. Видно, что кинематические расчеты образованных из одной фермы структурных групп почти идентичны.

У. Дзинтарс разработал метод [22], который позволяет структурные группы высших классов с поступательными парами приводить к шарнирным структурным группам и разработал алгоритмы нескольких структурных групп третьего класса. Можно доказать [52], что предложенный здесь метод позволяет провести кинематический анализ структурной группы любого класса. Трудоемкость расчета увеличивается вместе с классом группы. В уравнениях положения появляются более высокие степени косинусов, так как увеличивается число сторон замкнутых контуров фермы структурных групп. Однако рабочие уравнения всегда линейны.

Раздел 7

КИНЕМАТИКА ПЕРЕДАЧ ВРАЩЕНИЯ

§ 7.1. Передачи с неподвижными осями

Для передачи вращательного движения от ведущего к ведомому валу используют механизмы, позволяющие обеспечить изменение скорости, направления вращения или положения оси ведомого вала. Передача вращательного движения возможна при помощи зубчатых, фрикционных и других механизмов (§ 4.2).

В *простой передаче* имеются только два вала. Если в передаче имеются также промежуточные валы, то такая передача называется *сложной*.

Передачным отношением передачи вращения называется отношение угловых скоростей ω валов или их частот вращения n . Передачное отношение от вала I к валу n

$$u_{In} = \frac{\omega_I}{\omega_n} = \frac{n_I}{n_n} \quad (7.1)$$

а от вала n к валу I

$$u_{nI} = \frac{\omega_n}{\omega_I} = \frac{1}{u_{In}}$$

Следовательно, передачные отношения, определенные с противоположных концов передачи, являются обратными величинами.

В передачах, у которых крайние валы параллельны, $u_{In} > 0$, если крайние валы вращаются в одном направлении; $u_{In} < 0$, если эти валы вращаются в противоположных направлениях. Обычно в передачах вращения передачное отношение $u_{In} = \text{const}$, и его численное значение зависит от некоторых параметров передачи.

Кинематические схемы наиболее часто применяемых простых передач вращения показаны на рис. 7.1; первые две являются фрикционными или зубчатыми передачами, последняя — ременная или цепная передача. В обеих первых передачах окружности изображают относительные полюды; они в фрикционных передачах совпадают с поверхностями трения, а в зубчатых передачах — с воображаемыми окружностями качения, которые сопри-

касаются в относительном центре вращения P или полюсе зацепления (рис. 5.14). Скорость точек окружностей, совпадающих с P во всех трех передачах, $v_P = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Поэтому абсолютная величина передаточного отношения этих передач

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

а знак передаточного отношения у первой передачи — отрицательный, а у остальных двух — положительный. Число зубьев z пропорционально радиусам r или диаметрам колес, поэтому в простых передачах

$$u_{12} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (7.2)$$

В зубчатых передачах выражение передаточного отношения через радиусы или диаметры применимо только тогда, когда нет скольжения между зубьями вдоль образующей профиля (цилиндрические и конические колеса); выражение передаточного отношения через числа зубьев является универсальным (червяк можно считать колесом, число зубьев которого равно числу витков, часто $z = 1$); оно пригодно также для цепных передач.

В сложной передаче с n валами каждые два соседних вала образуют простую передачу; произведение их передаточных отношений следующее:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \dots \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}.$$

Следовательно,

$$u_{1n} = u_{12} \cdot u_{23} \dots u_{(n-1)n}, \quad (7.3)$$

т. е. передаточное отношение сложной передачи равно произведению передаточных отношений простых передач, входящих в эту составную передачу.

Применяя эту формулу для зубчатой передачи, показанной на рис. 7.2, получаем

$$u_{16} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \left(-\frac{z_5}{z_4}\right) \left(+\frac{z_6}{z_5}\right) = \frac{z_2 z_3 z_5 z_6}{z_1 z_2 z_3 z_5}.$$

Видим, что на числовое значение передаточного отношения промежуточное колесо 4 не влияет. Такие колеса называют *паразит-*

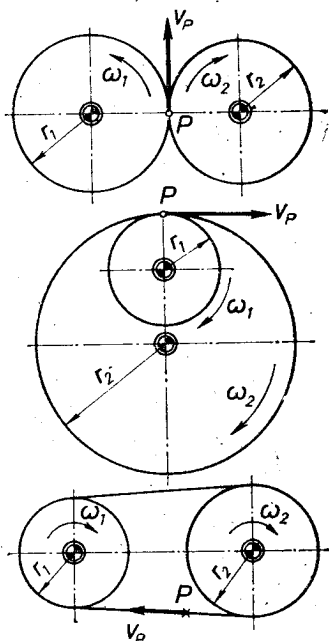


Рис. 7.1.

ными колесами; они устанавливаются для изменения направления вращения и связи между валами с большим межосевым расстоянием.

Часто на каждом промежуточном валу жестко посажены два колеса; тогда каждые два соседних вала сложной передачи образуют одну *ступень*. На рис. 7.2 показана четырехступенчатая сложная передача.

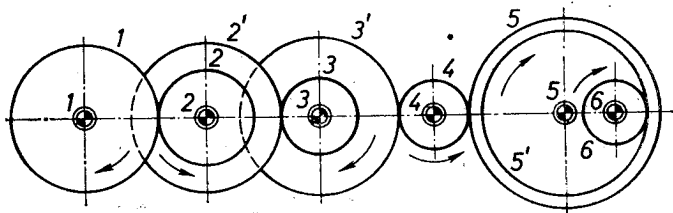


Рис. 7.2.

Для определения передаточного отношения сложной зубчатой передачи с параллельными осями удобна формула:

$$u_{1n} = (-1)^k \frac{z_2 \dots z_n}{z_1 \dots z_k} \quad (7.4)$$

где k — число внешних зацеплений; в числителе — произведение чисел зубьев ведомых колес, а в знаменателе — произведение чисел зубьев ведущих колес, паразитные колеса не учитываются. Передаче по рис. 7.2 соответствует $k=4$. Вместо множителя $(-1)^k$ можно использовать также метод стрелок, показанный на рис. 7.2.

При определении направления вращения выходного вала в конических зубчатых передачах множитель $(-1)^k$ неприменим,

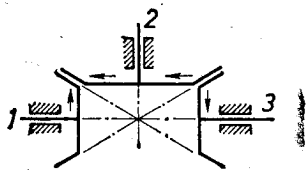


Рис. 7.3.

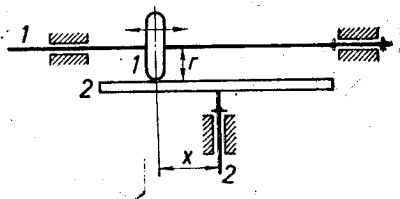


Рис. 7.4.

а метод стрелок пригоден. Так, например, для показанной на рис. 7.3 передачи $u_{13} = -z_3/z_1$.

Передачи вращения, у которых оси ведущих и ведомых валов совпадают, называют *соосными* передачами (рис. 7.3 и 7.5). Если передача увеличивает скорость вращения, то ее называют *мультипликатором*, если уменьшает — *редуктором*. Передачи, которые позволяют ступенчато и непрерывно изменять передаточное отношение, называют коробками передач и *вариаторами*. Пример бесступенчатого фрикционного вариатора представлен на рис. 7.4,

для которого $u_{12} = x/r$; колесо 1 может передвигаться по шлицевому валу 1 и изменять координату x , вместе с этим и передаточное отношение.

Пример 7.1. Определить частоту вращения и направление вращения ведомого вала 5 редуктора (рис. 7.5), если частота вращения ведущего вала — n_1 мин⁻¹.

Решение. По формуле (7.4)

$$u_{15} = (-1)^3 \frac{z_3 z_4 z_5}{z_1 z_2 z_4}, \quad n_5 = \frac{n_1}{u_{15}},$$

следовательно, ведомый вал 5 вращается противоположно валу 1.

Примечание. Данный редуктор трехступенчатый. На практике принимают для одной ступени $u_{\max} \approx 5$, поэтому для трехступенчатого редуктора $u_{\max} \approx 5^3 = 125$. Большие передаточные отношения можно получить с небольшим числом колес, если использовать зубчатые передачи с подвижными осями.

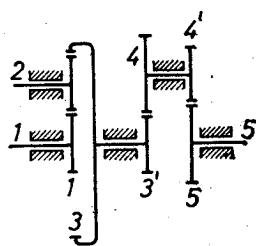


Рис. 7.5.

§ 7.2. Передачи с подвижными осями

Передачи вращения, у которых одна или несколько осей вращения зубчатых колес подвижны, называют *планетарными передачами*, а колеса с осями, связанными с вращающимся водилом, — *сателлитами*. Число сателлитов обычно 2—4. Если в передаче имеется неподвижное зубчатое колесо, то оно называется *солнечным колесом*. Планетарные передачи можно разделить на следующие группы: 1) планетарные передачи, 2) дифференциальные передачи, 3) замкнутые дифференциальные передачи, 4) комбинированные планетарные передачи. Кинематический расчет всех этих передач может быть произведен с помощью формулы Виллиса и формул типа (7.4).

Для вывода формулы Виллиса рассмотрим показанный на рис. 7.6 планетарный механизм. Водило H и центральное колесо n вращаются вокруг одной и той же неподвижной оси. Остальные колеса являются сателлитами. Механизм имеет $n+2$ звеньев; согласно формуле (3.12) его подвижность $w = 3(n+1) - 2(n+1) - (n-1) = 2$. Поэтому, если водило остановим, механизм превратится в зубчатую передачу с неподвижными осями, и его передаточное отношение, согласно формуле (7.4), будет равно

$$u_{1n}^H = (-1)^k \frac{z_n}{z_1} \dots \quad (7.5)$$

При движении механизма абсолютные угловые скорости крайних колес и водила следующие: ω_1 , ω_n , ω_H . Если зададим всему ме-

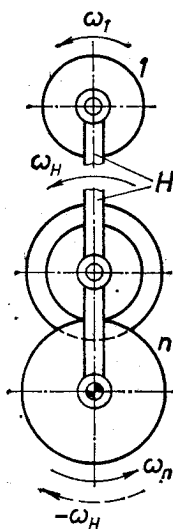


Рис. 7.6.

ханизму общую угловую скорость $(-\omega_H)$ вокруг неподвижной оси, то водило становится неподвижным, а крайние колеса приобретут угловые скорости $\omega_1 - \omega_H$ и $\omega_n - \omega_H$, отношение которых

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_n - \omega_H} = u_{1n}^H. \quad (7.6)$$

В формуле Виллиса (7.6) угловые скорости можно заменить пропорциональными им частотами вращения n ; можно поменять местами индексы 1 и n , не меняя их в механизме; можно индекс 1 заменить индексом какого-либо промежуточного колеса, чтобы определить его скорость вращения. Формула Виллиса остается верной также тогда, когда механизм преобразуем так, что ось колеса 1 совпадает с осью неподвижного колеса и водила H ; тогда колесо 1 также является центральным, и механизм преобразуется в соосную планетарную передачу, которая наиболее часто применяется в технике.

Планетарные передачи. Их характерной чертой является неподвижное солнечное колесо.

Если в механизме на рис. 7.6 остановим колесо n , то получим планетарную передачу с $\omega = 1$. Поэтому она имеет только два крайних вала: на одном посажено колесо 1, на втором — водило H . Выражение для передаточного отношения между этими валами получим, если в формуле Виллиса (7.6) положим $\omega_n = 0$:

$$u_{1H} = 1 - u_{1n}^H. \quad (7.7)$$

Эта формула называется формулой планетарной передачи.

Пример 7.2. Простая планетарная передача a состоит из двух одинаковых колес (рис. 7.7). Сколько оборотов вокруг своей оси совершает колесо 1, обкатываясь один раз вокруг неподвижного колеса 2, если $z_1 = z_2$?

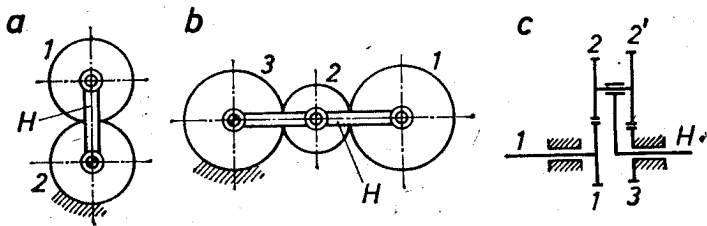


Рис. 7.7.

Решение. Согласно формуле (7.7) передаточное отношение данной планетарной передачи $u_{1H} = 1 - u_{12}^H = 1 - (-1)^1 \frac{z_2}{z_1} = 2$. Следовательно, $\omega_1 = 2\omega_H$, т. е. одному обороту водила H соответствуют два оборота сателлита 1.

Пример 7.3. Механизм Фергюсона b (рис. 7.7) имеет одинаковые колеса 1 и 3. Определить угловую скорость колеса 1.

Решение.

$$u_{1H} = 1 - u_{13}^H = 1 - (-1)^2 \frac{z_3}{z_1} = 1 - 1 = 0 = \frac{\omega_1}{\omega_H}.$$

Поэтому $\omega_1 = 0$. Сателлит 1 совершает круговое поступательное движение.

Пример 7.4. Механизм Давида с (рис. 7.7) имеет четыре колеса со следующими числами зубьев: $z_1 = 100$, $z_2 = 101$, $z_2' = 100$, $z_3 = 99$. Определить передаточное отношение.

Решение.

$$u_{1H} = 1 - u_{13}^H = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} = \frac{1}{10\,000} = \frac{\omega_1}{\omega_H}.$$

Следовательно, водило H вращается в 10 000 раз быстрее колеса I . Однако такой механизм, как это показывает расчет коэффициента полезного действия (пример 14.3, стр. 252), использовать как мультипликатор нельзя, так как механизм самотормозящийся. Как редуктор такой механизм может быть применен; тогда 10 000 оборотам водила H соответствует один оборот колеса. Однако коэффициент полезного действия такого механизма очень низкий.

Пример 7.5. На рис. 7.8 показан винтонарезной механизм. Нарезая резьбу в гайке, метчик соединен с валом I , а вал 3 заторможен. При холостом ходе метчик соединен с валом 3 , а вал I заторможен. Определить частоту вращения метчика при рабочем и холостом ходах. Определить частоту вращения сателлита 2 в подшипнике. Задано $z_1 = 100$, $z_2 = 50$, $z_2' = 100$, $z_3 = 50$, $n_4 = 100$ мин⁻¹.

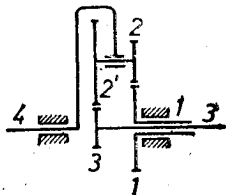


Рис. 7.8.

Решение. При рабочем ходе

$$u_{14} = 1 - u_{13}^{(4)} = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad n_1 = 75 \text{ мин}^{-1}.$$

При холостом ходе

$$u_{34} = 1 - u_{31}^{(4)} = 1 - \frac{1}{u_{13}^{(4)}} = 1 - 4 = -3; \quad n_3 = -300 \text{ мин}^{-1}.$$

Частота вращения в подшипнике 24 следующая: $n_{24} = n_2 - n_4$. Согласно формуле Виллиса

$$\frac{n_2 - n_4}{n_3 - n_4} = u_{23}^{(4)}, \quad n_2 - n_4 = u_{23}^{(4)} (n_3 - n_4); \quad u_{23}^{(4)} = -\frac{z_3}{z_2}.$$

Подставляя $n_3 = 0$ и $n_3 = -300$ мин⁻¹, находим, что при рабочем ходе $n_{24} = 50$ мин⁻¹, а при холостом ходе $n_{24} = 200$ мин⁻¹.

Примечание. Показанный на рис. 7.8 механизм является дифференциальной передачей, которая преобразуется в планетарную передачу только при заторможенных валах 3 или 1 .

Встречаются также планетарные передачи a с разгруженным водилом (рис. 7.9) и планетарные передачи b , у которых один из центральных валов соединен с сателлитом не с помощью зубчатых колес, а в результате использования какого-либо другого механизма, например, муфты сцепления в форме шарнирного параллелограмма.

Планетарную передачу с разгруженным водилом можно рассматривать как соединение двух простых планетарных передач, имеющих общее солнечное колесо и водило. Произведение передаточных отношений этих простых планетарных передач, выражаемых формулой (7.3), является передаточным отношением

составной передачи, т. е.

$$u_{14} = u_{1H}u_{H4} = \frac{u_{1H}}{u_{4H}} = \frac{1 - u_{13}^H}{1 - u_{43}^H} = \frac{1 + z_3/z_1}{1 - z_2'z_3/z_4z_2}$$

В планетарной передаче с подвешенным на поводках сателлитом (рис. 7.9, б) вал 3 и сателлит 1 вращаются синхронно, т. е.

$$u_{1H} = 1 - u_{12}^H = 1 - \frac{z_2}{z_1} = u_{3H}.$$

Для получения особенно сложных траекторий иногда применяют

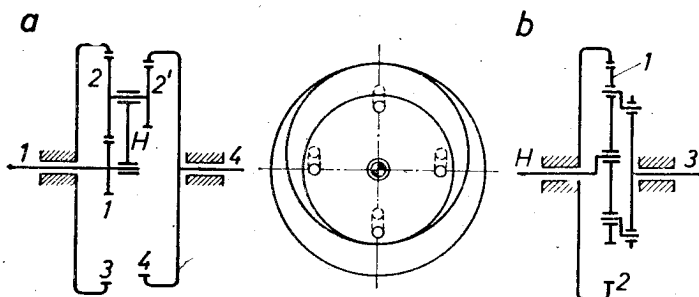


Рис. 7.9.

бипланетарные передачи, которые состоят из внешней и внутренней планетарных передач. Внешняя планетарная передача имеет водило, сателлиты и неподвижное солнечное колесо. Солнечное колесо внутренней планетарной передачи жестко соединено с водилом внешней планетарной передачи, а роль водила внутренней планетарной передачи выполняет сателлит внешней планетарной передачи. Сателлит внутренней планетарной передачи в таком случае получает сложное плоское движение, угловую скорость которого можно определить, дважды применяя формулу планетарной передачи.

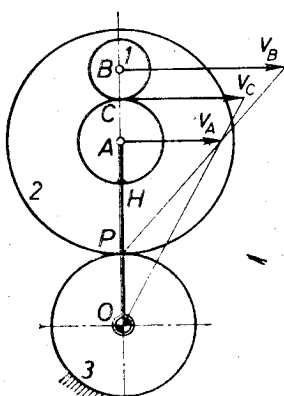


Рис. 7.10.

Пример бипланетарной передачи показан на рис. 7.10. Здесь внешняя планетарная передача состоит из солнечного колеса 3, водила H и сателлита 2, а внутренняя — из солнечного колеса, жестко связанного с водилом H, водила 2 и сателлита 1, точки которого описывают сложные траектории. Передаточное отношение данной бипланетарной передачи

$$\frac{\omega_1}{\omega_H} = u_{1H} = 1 - u_{13}^H; \quad u_{1H} = 1 + \left(1 + \frac{r_H}{r_1}\right) \frac{r_3}{r_2}. \quad (a)$$

Так же как другие задачи этого параграфа, эту задачу можно решать методом планов скоростей.

В произвольном масштабе строятся скорости мгновенных центров колес A , B и полюса зацепления C . Согласно формуле (5.4)

$$\omega_1 = \frac{v_B - v_C}{r_1}, \quad (6)$$

где

$$v_B = \omega_2(r_1 + r_2 + r_H) = \frac{\omega_H(r_2 + r_3)}{r_2}(r_1 + r_2 + r_H), \quad v_C = \omega_H(r_2 + r_3 + r_H).$$

Подставляя эти выражения в формулу (6), получаем результат (а).

Аналогично бипланетарной передаче можно построить трипланетарные и полипланетарные передачи.

Дифференциальные передачи. Планетарные механизмы, у которых подвижность $w = 2$, называют дифференциальными передачами. Следовательно, механизм (рис. 7.6), который был применен в качестве примера для вывода формулы Виллиса, является дифференциальной передачей. Дифференциальные передачи выполняются так, чтобы геометрические оси всех трех крайних валов совпадали (рис. 7.8).

Дифференциальную передачу применяют, если необходимо: 1) от двух независимо вращающихся валов приводить третий вал, 2) от одного вала приводить два вала, позволяя им вращаться с различными угловыми скоростями, которые зависят от сил сопротивления, приложенных к этим валам.

Примером первого типа применения является дифференциальная передача — сумматор, которая пригодна для реализации математического выражения

$$\varphi_H = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2. \quad (1)$$

Действительно, формуле Виллиса (7.6) можем придать следующий вид:

$$\omega_H = \frac{1}{1 - u_{1n}^H} \omega_1 + \frac{1}{1 - u_{n1}^H} \omega_n. \quad (7.8)$$

Интегрируя это выражение и подставляя $n = 2$, получаем выражение (1).

Вторым примером применения этой передачи является дифференциальная передача автомобиля (рис. 7.11). На концах полуосей 1 и 2 закреплены конические зубчатые колеса, которые находятся в зацеплении с сателлитами 3. Водило H коробчатой конструкции приводится в движение колесом a карданного вала. Учитывая рис. 7.3, подставляем в формулу (7.8)

$$\omega_{12}^H = -\frac{z_2}{z_1} = -1 \text{ и получаем формулу дифференциала автомобиля} \quad (7.9)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_H.$$

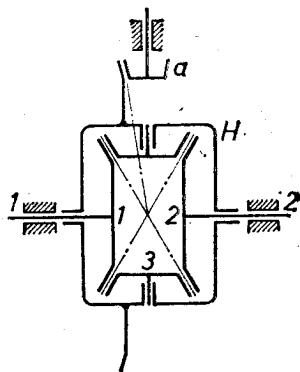


Рис. 7.11.

Если автомобиль передвигается по прямой и оба ведущие колеса катятся без скольжения, то $\omega_1 = \omega_2 = \omega_H$, т. е. звенья дифференциальной передачи движутся как одно твердое тело. Однако на поворотах дороги ведущие колеса вращаются с разной скоростью. Если одно из колес остановить ($\omega_1 = 0$), то $\omega_2 = 2\omega_H$, т. е. второе колесо будет вращаться в два раза быстрее водила. Если $\omega_H = 0$, то $\omega_1 = -\omega_2$, т. е. если ведущие колеса освободим от соприкосновения с дорогой, затормозим карданный вал и будем вращать одно колесо, то второе колесо будет вращаться в обратном направлении с такой же скоростью.

Пример 7.6. На какой угол повернется вал 4 механизма, рассмотренного в примере 7.5, если вал 1 поворачиваем на 60° в направлении, принятом за положительное, а вал 3 — на такой же угол в противоположном направлении?

Решение. Согласно формуле (7.8)

$$\varphi_4 = \frac{1}{1 - u_{13}^{(4)}} \varphi_1 + \frac{1}{1 - u_{31}^{(4)}} \varphi_3 = \frac{4}{3} \cdot 60^\circ - \frac{1}{3} (-60^\circ) = 100^\circ.$$

Следовательно, вал 4 поворачивается в положительном направлении на 100° .

Замкнутые дифференциальные передачи. Дифференциальная передача имеет 3 крайних вала — два ведущих и один ведомый или наоборот. Если вращаем один вал, то оба остальных вращаются со скоростями, зависящими от сил. Но если между любыми двумя валами устроим связь в виде зубчатой передачи, то получаем замкнутую дифференциальную передачу, подвижность которой $w = 1$.

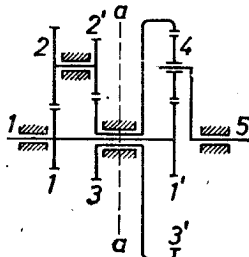


Рис. 7.12.

Пример замкнутой дифференциальной передачи показан на рис. 7.12. Направо от сечения $a-a$ находится дифференциальная передача с соосными валами 1', 3', 5; налево — связь между валами 1 и 3, которую реализуют колеса 3, 2', 2, 1 с неподвижными осями. Формула Виллиса и уравнение связи

$$\frac{\omega_1 - \omega_5}{\omega_3 - \omega_5} = u_{13}^{(5)} = (-1)^1 \frac{z_3'}{z_1'}, \quad u_{31} = (-1)^2 \frac{z_2' z_1}{z_3' z_2}$$

позволяют определить передаточное отношение этой передачи

$$u_{15} = (u_{13}^{(5)} - 1) / (u_{13}^{(5)} u_{31} - 1).$$

Пример 7.7. Определить частоту вращения барабана 4 электротали (рис. 7.13), если вал 1 приводится в движение с $n_1 = 880 \text{ мин}^{-1}$.

Дано $z_1 = 24$, $z_2 = 52$, $z_2' = 21$, $z_3 = 78$, $z_3' = 18$, $z_4 = 78$, $z_5 = 30$.

Решение. Механизм является замкнутой дифференциальной передачей, которая состоит из дифференциальной передачи с крайними звеньями 1, 3, 4 и из колес связи 4, 5, 3'. Применяя формулу Виллиса для диффе-

ренциальной передачи

$$\frac{n_1 - n_4}{n_3 - n_4} = u_{13}^{(4)}, \quad \frac{u_{14} - 1}{u_{34} - 1} = u_{13}^{(4)}, \quad u_{14} = 1 + u_{13}^{(4)}(u_{34} - 1),$$

где $u_{13}^{(4)} = (-1)^1 z_2 z_3 / z_1 z_2'$, и уравнение связи $u_{34} = (-1)^1 z_4 / z_3'$, определяем $u_{14} = n_1/n_4 = 44$. Следовательно, но, $n_4 = n_1/u_{14} = 20 \text{ мин}^{-1}$.

Комбинированные передачи

являются объединением разных передач в одной. Для определения передаточного отношения таких передач сперва необходимо проанализировать состав передачи, затем, используя формулу (7.3), следует написать выражение для общего передаточного отношения и выразить каждый из множителей через параметры передачи — числа зубьев, радиусы или диаметры окружностей центров, применяя формулы (7.2), (7.4), (7.6), (7.7).

Пример 7.8. Определить частоту вращения ведомого звена 6, представленного на рис. 7.14 мультипликатора. Между валами 5 и 6 включен бесступенчатый клиноременный вариатор, мгновенное передаточное отношение которого зависит от взаимного расстояния обеих частей дисков вариатора. Дано $n_1 = 90 \text{ мин}^{-1}$, $z_1 = z_2' = 25$, $z_2 = z_3 = 20$, $z_4 = 100$, $z_5 = 20$, $d_5 = 600 \text{ мм}$, $d_6 = 150 \text{ мм}$.

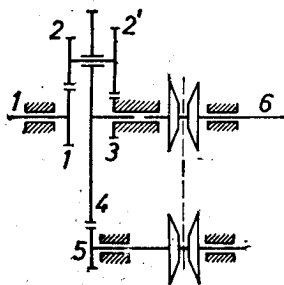


Рис. 7.14.

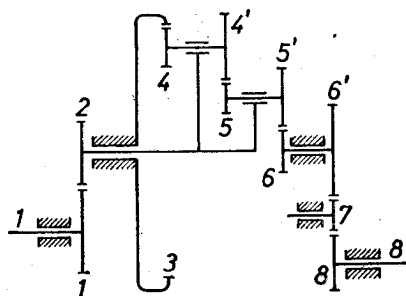


Рис. 7.15.

Решение. Заметим, что в механизме имеется солнечное колесо 3. Это означает, что в механизм включена простая планетарная передача. В данном случае планетарная передача заключена между валами 1 и 4, а валы 4 и 6 соединяет передача с неподвижными осями. Следовательно,

$$u_{16} = u_{14} \cdot u_{46};$$

$$u_{14} = 1 - u_{13}^{(4)} = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'} = \frac{9}{25}; \quad u_{46} = (-1)^2 \frac{z_5 d_6}{z_4 d_5} = \frac{1}{20}.$$

Ответ. Ведомый вал 6 мультипликатора вращается в том же направлении, как и ведущий вал 1 с частотой $n_6 = 5000 \text{ мин}^{-1}$.

Пример 7.9. Определить передаточное отношение u_{18} для показанной на рис. 7.15 передачи.

Решение. Механизм состоит из планетарной передачи 26 и передач 12 и 68 с неподвижными осями. Поэтому $u_{18} = -u_{12} \cdot u_{26} \cdot u_{68}$. Для первой передачи $u_{12} = (-1)^1 z_2/z_1$. Для планетарной передачи

$$u_{62} = 1 - u_{63}^{(2)} = 1 - (-1)^2 \frac{z_5' \cdot z_4' \cdot z_3}{z_6 \cdot z_5 \cdot z_4}; \quad u_{26} = \frac{1}{u_{62}}.$$

Для третьей передачи $u_{68} = (-1)^2 z_8/z_6$.

§ 7.3. Зубчато-рычажные механизмы

Зубчато-рычажные механизмы пригодны для реализации сложных законов движения или траекторий точек, а также для передачи вращения между валами с переменным расстоянием между ними. В кинематическом расчете этих механизмов применимы методы кинематического анализа рычажных механизмов и зубчатых передач.

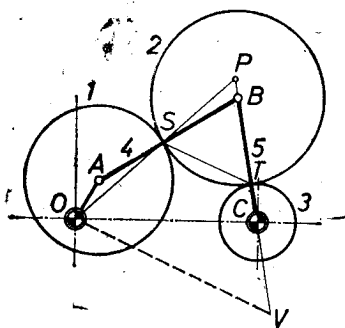


Рис. 7.16.

Рассмотрим зубчато-рычажный механизм (рис. 7.16), который построен на базе шарнирного четырехзвенника. Механизм приводится в движение эксцентричным колесом 1, которое одновременно является кривошипом шарнирного четырехзвенника $OABC$. Оси колес 1, 2 и 3 совпадают с осями шарниров A , B и C . Согласно формуле (3.12) подвижность механизма $w = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 2 = 1$. Определяем гра-

фически и аналитически угловую скорость ведомого колеса 3 в заданном положении, принимая ω_1 известной.

Графическое решение в данном случае простое. Принимаем, что повернутая скорость точки A равна $v_A = \omega_1 \cdot OA = AO$. Так как принято, что $\omega_1 = 1$, то концы векторов повернутых скоростей точек колеса 1 находятся в мгновенном центре O колеса 1. Поэтому скорость точек центроид колес 1 и 2, совпадающих с полюсом S , одинакова и изображается отрезком $SO = v_S$. Повернутая скорость центра B колеса 2 находится на прямой BC . Поэтому точка P является абсолютным мгновенным центром вращения колеса 2. Повернутую скорость точки T зубчатого колеса 2 $v_T = TV$ строят методом параллельных прямых (рис. 5.8). Точка T является относительным мгновенным центром колес 2 и 3, поэтому $\omega_3 = + \frac{v_T}{CT}$.

При аналитическом расчете сначала определяем угловые скорости ω_4 и ω_5 звеньев шарнирного четырехзвенника, применяя при этом метод, данный в предыдущем разделе. Каждое из звеньев 4 и 5 вместе со смонтированными на их концах колесами мо-

жем рассматривать как дифференциальную передачу и для каждой из них написать формулу Виллиса:

$$\frac{\omega_2 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = u_{21}^{(4)} = (-1)^1 \frac{z_1}{z_2}; \quad \frac{\omega_3 - \omega_5}{\omega_2 - \omega_5} = u_{32}^{(5)} = (-1)^1 \frac{z_2}{z_3}.$$

Задачу решаем, определяя ω_2 из первого уравнения и после этого ω_3 из второго уравнения.

Меняя размеры звеньев, можем получить разнообразные движения колеса 3, даже с остановкой и реверсом.

Пример 7.10. Механизм (рис. 7.17) предназначен для передачи вращения от вала 1 к валу 2; расстояние между ними меняется. Колеса 1 и 2 одинаковы; $\omega_1 = \text{const}$. Определить ω_2 как функцию угла φ и скорости $v_B = \dot{x}$.

Решение. Абсолютную угловую скорость колеса 3 определяем с помощью формулы Виллиса, учитывая, что $\omega_H = \dot{\varphi}$:

$$\frac{\omega_3 - \dot{\varphi}}{\omega_1 - \dot{\varphi}} = u_{13}^H = -\frac{R}{r};$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \left(1 + \frac{R}{r} \right) - \frac{R}{r} \omega_1.$$

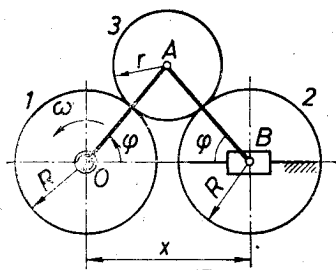


Рис. 7.17.

Аналогично определяем угловую скорость ω_2 , учитывая, что $\omega_H = -\dot{\varphi}$:

$$\frac{\omega_2 + \dot{\varphi}}{\omega_3 + \dot{\varphi}} = u_{23}^H = -\frac{r}{R}; \quad \omega_2 = -\dot{\varphi} \left(1 + \frac{r}{R} \right) - \frac{r}{R} \omega_3.$$

Заменяя в последнем выражении ω_3 , получаем

$$\omega_2 = \omega_1 - 2\dot{\varphi} \left(1 + \frac{r}{R} \right).$$

Так как $x = 2(r + R) \cos \varphi$, то $\dot{x} = -2(r + R) \dot{\varphi} \sin \varphi$ и

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\dot{x}}{R \sin \varphi}.$$

Пример 7.11. Механизм (рис. 7.18) приводится в движение валом 3, на котором неподвижно посажены колеса 3 и 3'. Вокруг оси O с различными скоростями вращаются колеса 0 и 1; последнее неподвижно связано со стержнем 1. Колесо 2 также движется вместе со стержнем 2. Длины 1 стержней 1 и 2 одинаковы. Дано $z_1 = z_2 = z_3'$, $z_0 = z_3 = 2z_1$. Вначале оба стержня совпадают с осью y, т. е. $\alpha = 90^\circ$, $\delta = 0$ движутся следующим образом: $\alpha = 90^\circ - kt$, $\delta = -ukt$, где $u = \delta/\alpha$ является отношением угловой скорости стержня 2 относительно стержня 1 к абсолютной угловой скорости стержня 1. В начальный момент времени точка B совпадает с точкой O, а затем двигается в первом квадранте. Выяснить характер траектории точки B.

Решение. Траектория точки B зависит не только от начального положения механизма, но также от передаточного отношения u .

Стержень 1 вместе с колесами 0, 2, 5 подобен дифференциальной передаче, показанной на рис. 7.6. Колеса 3, 3', 4 накладывают связь между водилом 1 и центральным колесом 0. Следовательно, данный зубчато-рычажный

механизм является замкнутой дифференциальной передачей. Поэтому

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_1} = \frac{\dot{\delta}}{\omega_0 - \dot{\alpha}} = \frac{\dot{\delta}/\dot{\alpha}}{\omega_0/\dot{\alpha} - 1} = \frac{u}{u_{01} - 1} = u_{20}^{(1)},$$

откуда $u = u_{20}^{(1)}(u_{01} - 1)$. Подставляя сюда

$$u_{20}^{(1)} = (-1)^2 \frac{z_0}{z_2} = \frac{2z_1}{z_1} = 2, \quad u_{01} = (-1)^3 \frac{z_3 z_1}{z_0 z_3} = -\frac{2z_1^2}{2z_1^2} = -1,$$

получаем $u = -4$. Теперь законы вращательного движения обеих стержней выражаются так: $\alpha = 90^\circ - kt$, $\delta = 4kt$.

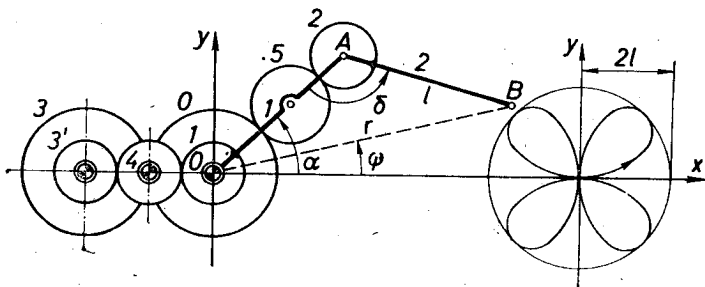


Рис. 7.18.

Из рис. 7.18 видно, что $r = 2l \sin(\delta/2)$ и $\psi = \alpha + \delta/2 - 90^\circ$, $r = 2l \sin 2kt$ и $\psi = kt$. Следовательно, уравнение траектории точки B в полярных координатах будет

$$r = 2l \cdot \sin 2\psi.$$

При $l = 1$ в декартовых координатах получаем

$$(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2.$$

Эта кривая шестого порядка — одна из *роз Гвидо Гранди* — показана на рис. 7.18.

§ 7.4. Карданная передача

Передача вращательного движения между валами 1 и 2, оси которых пересекаются в одной точке, с помощью конических колес становится невыгодной, если угол β между этими валами приближается к 180° ; зубчатые колеса получаются очень большими. В этих случаях применяют карданный шарнир, который называют также *универсальным шарниром* или *шарниром Гука*. Первые сведения о карданном шарнире относятся к XIII столетию; математик Кардано описал его в XVI столетии, а в XVII столетии его запатентовал Гук. Карданный шарнир по сравнению с коническими колесами имеет то преимущество, что угол β и его дополнение до 180° — угол α — может меняться в ходе вращения валов. Однако карданный шарнир имеет также недостаток: внутри цикла передаточное отношение u_{12} — переменное.

Этот недостаток можно устранить, разумно объединяя два карданных шарнира. Такое объединение двух карданных шарниров называют *карданной передачей*.

Карданный шарнир принадлежит к сферическим механизмам (§ 2.4) и по своей структуре является сферическим шарнирным четырехзвенником (рис. 7.19).

Оси всех четырех шарниров пересекаются в одной точке O . Если эта точка сходится в бесконечность, то сферический шарнирный четырехзвенник преобразуется в плоский шарнирный четырехзвенник. С целью более выгодной передачи сил оба подвижных шарнира сферического шарнирного четырехзвенника конструктивно выполняют как двухветвенные шарниры и получают карданный шарнир (рис. 7.20). Шатун 3 сферического шарнирного четырехзвенника преобразован в крестообразный карданный шарнир, а кривошипы 1 и 2 выполнены в форме вилок.

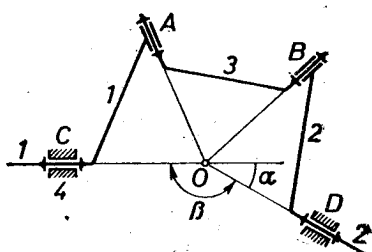


Рис. 7.19.

Определим функцию положения карданного шарнира, т. е. зависимость между углами поворота φ_1 и φ_2 валов 1 и 2, которые измеряем так, как показано на рис. 7.20. Выберем на вилках

сферического шарнирного четырехзвенника преобразован в крестообразный карданный шарнир, а кривошипы 1 и 2 выполнены в форме вилок.

Определим функцию положения карданного шарнира, т. е. зависимость между углами поворота φ_1 и φ_2 валов 1 и 2, которые измеряем так, как показано на рис. 7.20. Выберем на вилках

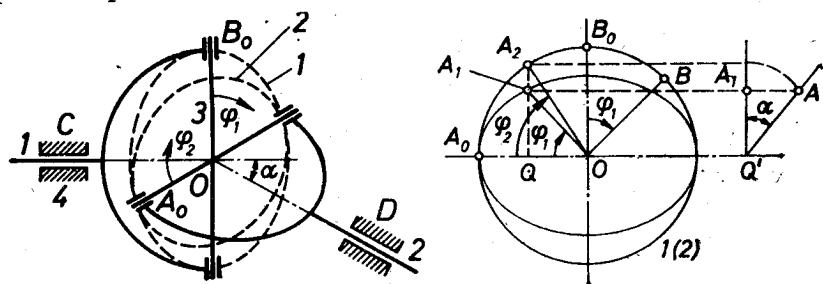


Рис. 7.20.

точки B и A на равных расстояниях от O и плоскость проекций перпендикулярно оси вала 1. Траектория точки B на выбранную плоскость проектируется в окружность, а точки A — в эллипс.

Если вал 1 поворачивается на угол φ_1 , то точка B из положения B_0 переходит в положение B , а точка A из положения A_0 переходит в положение A и проектируется в точку A_1 на плоскость 1 движения точки B . Угол BOA_1 — прямой. Если плоскость 2 повернуть вокруг линии пересечения OA_0 , плоскостей 1 и 2 на угол α , то плоскость 2 совпадает с плоскостью 1 и точка A_1 займет положение A_2 . Следовательно, если вал 1 поворачивается на угол $\varphi_1 = \angle B_0OB$, то вал 2 поворачивается на угол

$$\varphi_2 = A_0 O A_2 \text{ и}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{Q A_2}{Q A_1} = \frac{Q' A}{Q' A_1} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Отсюда функция положения карданного шарнира

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \alpha}. \quad (7.10)$$

Дифференцируя функцию положения по времени и принимая, что $\alpha = \operatorname{const}$, получаем выражение для угловой скорости ведомого вала

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}, \quad (7.11)$$

откуда передаточное отношение

$$u_{12} = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}{\cos \alpha}. \quad (7.12)$$

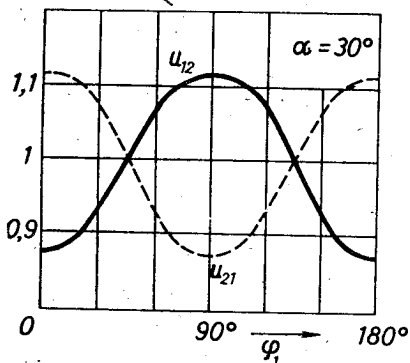


Рис. 7.21.

График, изображающий изменение передаточного отношения, представлен на рис. 7.21. Там же штриховой линией показана кривая u_{21} , которая выражает $\omega_2 = f(\omega_1)$, если $\omega_1 = \operatorname{const} = 1$. Следовательно, во

время одного оборота вал 2 дважды достигает $\omega_{2 \max} = \omega_1 / \cos \alpha$ и дважды $\omega_{2 \min} = \omega_1 \cos \alpha$, т. е. период колебания угловой скорости вала 2 равен времени полуоборота, и степень неравномерности вращения

$$\delta = \frac{\omega_{2 \max} - \omega_{2 \min}}{\omega_{2 \text{ ср}}} = \frac{\omega_1 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right)}{\omega_1} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}. \quad (7.13)$$

Изменение δ в функции α характеризует следующая таблица:

α	0	5°	10°	15°	20°	30°
δ	0	0,0076	0,0306	0,0693	0,1245	0,2887

Следовательно, при увеличении угла α степень неравномерности вращения вала 2 быстро возрастает. Это является большим недостатком карданного шарнира. Если карданный шарнир используется для привода больших масс, то при движении этих масс с непрерывно изменяющимися ускорениями возникнут значительные периодические динамические силы, которые дополнительно нагружают карданный шарнир и другие элементы механизма.

Упомянутые недостатки можно устранить, применяя вместо карданного шарнира карданную передачу (рис. 7.22), у которой вилки промежуточного вала 3 находятся в одной плоскости. Согласно формуле (7.10) можем написать

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_3 \cos \alpha_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_3 \cos \alpha_2. \quad (7.14)$$

Если все три оси располагаются в одной плоскости и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\omega_1 = \omega_2$. Следовательно, если вилки промежуточного вала находятся в одной плоскости и углы между промежуточным валом и валами 1 и 2 одинаковы (рис. 7.23), то валы 1 и 2

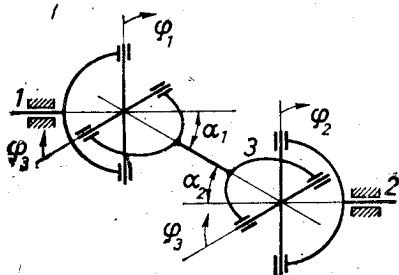


Рис. 7.22.

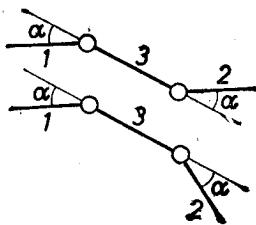


Рис. 7.23.

вращаются синхронно. В этом случае, при равномерном вращении вала 1, вал 2 также вращается равномерно, а неравномерно вращается только промежуточный вал 3. Угловое ускорение последнего можно определить, дифференцируя по времени выражение (7.11):

$$\varepsilon = \frac{\omega_1^2 c (1 - c^2) \sin 2\varphi_1}{(\cos^2 \varphi_1 + c^2 \sin^2 \varphi_1)^2} \quad (7.15)$$

где $c = 1/\cos \alpha$.

Эта формула справедлива при постоянных α и ω_1 и пригодна также для определения углового ускорения ведомого вала 2 одинарного карданного шарнира.

Если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то, исключая из формул (7.14) угол φ_3 , можно получить функцию положения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1, \alpha_1, \alpha_2)$, и дифференцируя, определить угловую скорость и ускорение вала 2.

Раздел 8

КИНЕМАТИКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 8.1. Методы кинематики пространственных механизмов

Необходимость реализации пространственных движений и получения желательных законов движения способствует все большему распространению пространственных механизмов, несмотря на значительную сложность их расчета.

Положения звеньев механизма в трехмерном пространстве математически труднее описать, чем на плоскости. На плоскости звено можно изобразить отрезком прямой или вектором, а в пространстве звено должно изображаться проекциями в трехосной системе координат. В пространстве поля векторов скоростей и ускорений точек звеньев сложнее, чем в плоскости, хотя концы векторов скоростей и ускорений точек любой прямой твердого тела также находятся на прямых, и расстояния между ними пропорциональны расстояниям между точками тела. Как и в плоском движении, проекции скоростей точек твердого тела на линию, их соединяющую, равны. Проекции ускорений двух точек прямой на другую прямую, ей параллельную, отличаются между собой на величину проекции относительного нормального ускорения на эту прямую. Концы векторов скоростей и ускорений точек любой плоскости твердого тела находятся на соответствующих плоскостях, однако подобные фигуры вообще не образуют.

Упомянутые обстоятельства затрудняют кинематические исследования графическими методами. Однако разработаны методы графического построения планов положений, скоростей и ускорений пространственных механизмов, с использованием методов начертательной геометрии. Из этих построений можно получить также аналитические зависимости. Однако более перспективными являются аналитические методы [44].

Аналитические методы кинематического анализа пространственных механизмов можно разделить на три группы: 1) методы, которые основываются на использовании аналитической геометрии и векторной алгебры, 2) методы, в которых используются гиперкомплексные числа и дуальные числа, бивекторы и винты, 3) методы, в которых используются матрицы и тензоры. Применяются также комбинации упомянутых методов.

Рассмотрим некоторые основные элементы упомянутых методов.

1. Координаты точек A, B, \dots обозначаем $x_A, y_A, z_A, x_B, \dots$

Проекция орта (единичного вектора) e_{AB} прямой AB на координатные оси x_{AB}, y_{AB}, z_{AB} являются направляющими косинусами этой прямой. Поэтому

$$\bar{e}_{AB} = x_{AB}\bar{i} + y_{AB}\bar{j} + z_{AB}\bar{k}.$$

Косинус угла между векторами AB и CD выражается так:

$$\cos \delta = \bar{e}_{AB} \cdot \bar{e}_{CD} = x_{AB}x_{CD} + y_{AB}y_{CD} + z_{AB}z_{CD}. \quad (8.1)$$

Если вектор EF (рис. 8.1) перпендикулярен прямым AB и CD , то его орт

$$\begin{aligned} \bar{e}_{EF} &= \frac{\bar{e}_{AB} \times \bar{e}_{CD}}{\sin \delta} = \frac{y_{AB}z_{CD} - z_{AB}y_{CD}}{\sin \delta} \bar{i} + \frac{z_{AB}x_{CD} - x_{AB}z_{CD}}{\sin \delta} \bar{j} + \\ &+ \frac{x_{AB}y_{CD} - y_{AB}x_{CD}}{\sin \delta} \bar{k} = x_{EF}\bar{i} + y_{EF}\bar{j} + z_{EF}\bar{k}. \quad (8.2) \end{aligned}$$

Если прямая орта \vec{e}_{EF} пересекает прямые AB и CD в точках E и F , то отрезок EF является кратчайшим расстоянием между прямыми AB и CD . В этом случае длины отрезков $AE = l_{AE}$, $EF = l_{EF}$ и $CF = l_{CF}$ можно найти, проектируя замкнутый векторный контур

$$l_{AE} + l_{EF} - l_{AC} - l_{CF} = 0$$

на оси координат

$$\begin{aligned} l_{AE}x_{AB} + l_{EF}x_{EF} - l_{CF}x_{CD} &= l_{AC}x_{AC}, \\ l_{AE}y_{AB} + l_{EF}y_{EF} - l_{CF}y_{CD} &= l_{AC}y_{AC}, \\ l_{AE}z_{AB} + l_{EF}z_{EF} - l_{CF}z_{CD} &= l_{AC}z_{AC}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Решая эти уравнения по формулам Крамера или по методу Гаусса, можно найти искомые длины.

Прямую AB в пространстве можно задавать (рис. 8.2) с помощью координат двух ее точек или координатами какой-то точки A прямой и углами σ и ψ . Однако вместо 6 или 5 параметров можно обойтись 4 параметрами, например, φ , ρ , s , γ . Если прямая AB находится в плоскости Oxy , то $s = 0$, $\gamma = 90^\circ$, а φ и ρ являются параметрами нормальной формы прямой в плоскости.

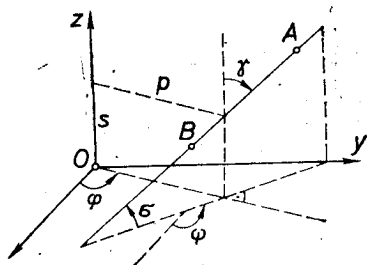


Рис. 8.2.

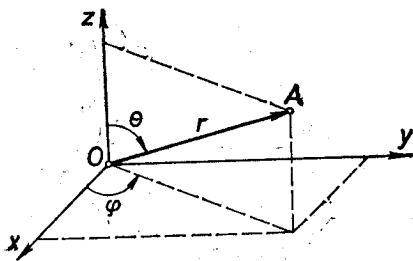


Рис. 8.3.

Иногда выгодно использовать сферические координаты (рис. 8.3), с помощью которых декартовы координаты выражаются так:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (8.4)$$

Если векторы a_1 и a_2 в декартовых координатах заданы своими проекциями x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 , то косинус угла между этими векторами

$$\cos \delta = \frac{\vec{a}_1 \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{[(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)]^{1/2}}. \quad (8.5)$$

Присвоив всем величинам формулы (8.4) индексы 1, а потом 2, и подставляя их в формулу (8.5), получаем

$$\cos \delta = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2. \quad (8.6)$$

2. Объединение декартовых и сферических координат позволяет обра-
 вовать гиперкомплексные числа, которые пригодны в кинематике простран-
 ственных механизмов. Плоскость Oxy (рис. 8.3) принимают за плос-
 кость чисел Гаусса, где Ox является реальной осью и Oy мнимой осью;
 единицей мнимой оси является $i = \sqrt{-1}$. Ось Oz также принята в качестве
 мнимой оси с единицей j . Тогда точку A можно рассматривать как отобра-
 жение гиперкомплексного числа r , модуль этого числа $r_0 = OA$. Гиперком-
 плексное число следующее:

$$r = x + iy + jz = r_0 \sin \theta e^{i\varphi} + jr_0 \cos \theta = r_0 (e^{i\varphi} \sin \theta + j \cos \theta), \quad (8.7)$$

где $\varphi = \text{arctg}(y/x)$, $\theta = \text{arctg}(\sqrt{y^2 + z^2}/x)$, $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Замкнутый контур пространственного механизма иногда удобно запи-
 сывать как сумму гиперкомплексных чисел, которая равна нулю. Прирав-
 нивая нулю реальную и мнимую части этой суммы, получаем три уравне-
 ния положения:

3. Для составления уравнений кинематического анализа пространствен-
 ных механизмов можно применить алгебру матриц. Таким образом обеспе-
 чивается однозначность операций вычисле-
 ния, которая удобна для машинизации
 этих операций. Рассмотрим трансфор-
 мацию координат с помощью матриц и ма-
 тричное уравнение замкнутого контура ки-
 нематической цепи.

На рис. 8.4 показана старая система
 координат $O_2x_2y_2z_2$ и новая система $O_1x_1y_1z_1$,
 в которых точку A задают радиусы-век-
 торы \bar{r}_1 и \bar{r}_2 ; в новой системе начальную
 точку старой системы определяет радиус-
 вектор \bar{r}_{O_2} .

Для получения квадратичной матрицы
 принимаем, что точки пространства во
 всех системах координат имеют также
 четвертую координату t , орт которой \bar{m}
 перпендикулярен всем остальным ортам.
 Численное значение этой координаты во
 всех системах координат равняется
 $t_1 = t_2 = \dots = 1$. Согласно этому равен-

ство $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 + \bar{r}_{O_2}$ в развернутом виде следующее:

$$\begin{aligned} x_1\bar{i}_1 + y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1 + t_1\bar{m}_1 = \\ = x_2\bar{i}_2 + y_2\bar{j}_2 + z_2\bar{k}_2 + t_2\bar{m}_2 + a_1\bar{i}_1 + b_1\bar{j}_1 + c_1\bar{k}_1 + t_1\bar{m}_1. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Скалярно умножая обе части этого уравнения поочередно на $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1, \bar{m}_1$,
 получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{i}_2\bar{i}_1x_2 + \bar{j}_2\bar{i}_1y_2 + \bar{k}_2\bar{i}_1z_2 + a_1, \\ y_1 &= \bar{i}_2\bar{j}_1x_2 + \bar{j}_2\bar{j}_1y_2 + \bar{k}_2\bar{j}_1z_2 + b_1, \\ z_1 &= \bar{i}_2\bar{k}_1x_2 + \bar{j}_2\bar{k}_1y_2 + \bar{k}_2\bar{k}_1z_2 + c_1, \\ 1 &= 0 + 0 + 0 + 1. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Эти уравнения объединяем в одном уравнении матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которое коротко напомним так:

$$\bar{r}_1 = M_{12}\bar{r}_2. \quad (8.10)$$

Следовательно, переход от старой координатной системы (обозначим ее 2) к новой системе (обозначим ее 1) осуществим умножением квадратичной матрицы M_{12} на столбцовую матрицу \bar{r}_2 . Если оси координат x, y, z обозначаем соответственно цифрами 1, 2, 3, то, согласно уравнениям (8.9), элемент a_{uv} ($u, v = 1, 2, 3$) матрицы M_{12} является косинусом угла, который образует ось u новой системы с осью старой системы v , а a_{14}, a_{24}, a_{34} являются координатами начальной точки старой системы O_2 в новой системе.

Для перехода от системы 1 к системе 2 выражаем из уравнения (8.8)

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 - \bar{r}_{O_2} = \bar{r}_1 + \bar{r}_{O_1}$$

или в развернутом виде

$$x_2 \bar{i}_2 + y_2 \bar{j}_2 + z_2 \bar{k}_2 + t_2 \bar{m}_2 = x_1 \bar{i}_1 + y_1 \bar{j}_1 + z_1 \bar{k}_1 + t_1 \bar{m}_1 + a_{21} \bar{i}_2 + b_{21} \bar{j}_2 + c_{21} \bar{k}_2 + t_2 \bar{m}_2.$$

Скалярно умножая обе части этого уравнения последовательно на $\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2, \bar{m}_2$, получаем уравнение

$$\bar{r}_2 = M_{21} \bar{r}_1. \quad (8.11)$$

Оказывается, что матрица M_{21} является обратной матрицей матрицы M_{12} , т. е. $M_{21} = M_{12}^{-1}$. Помещая выражение (8.11) в формулу (8.10), получаем

$$\bar{r}_1 = M_{12} M_{21} \bar{r}_1 = M_{12} M_{12}^{-1} \bar{r}_1 = M_{11} \bar{r}_1 = E \bar{r}_1.$$

Следовательно: 1) матрица многократного перехода является произведением матрицы частичных переходов; 2) возвращение в начальную систему происходит посредством единичной матрицы

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что для механизма, звенья которого образуют замкнутый контур, можно написать уравнение матриц замкнутости этого контура. Так, например, для пространственного четырехзвенного механизма, с каждым звеном которого связана система координат, уравнение замкнутости следующее:

$$M_{12} M_{23} M_{34} M_{41} = E. \quad (8.12)$$

Умножая матрицы, получаем на левой стороне квадратичную матрицу четвертого порядка, элементы которой содержат параметры механизма. Приравняв каждый элемент этой матрицы соответствующему элементу единичной матрицы, получаем ряд уравнений положения механизма. Дифференцируя последние по времени, находим зависимости между скоростями и ускорениями.

Если уравнение (8.12) применяем при анализе плоского шарнирного четырехзвенника, то получаем зависимости (6.1), которые можно получить гораздо проще, проектируя на координатные оси замкнутый векторный многоугольник, соответствующий звеньям шарнирного четырехзвенника.

4. Принимаем, что имеется вектор $\overline{AB} = \bar{q}$, который в системе $O_2 x_2 y_2 z_2$ задан своими проекциями x_2, y_2, z_2 . В системе $O_1 x_1 y_1 z_1$ проекции этого вектора не зависят от относительного положения начальных точек обеих систем. Поэтому уравнения (8.9) упрощаются:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} x_2 + a_{12} y_2 + a_{13} z_2, & y_1 &= a_{21} x_2 + a_{22} y_2 + a_{23} z_2, \\ z_1 &= a_{31} x_2 + a_{32} y_2 + a_{33} z_2. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Если необходимо по координатам двух точек A и B в системах $O_2 x_2 y_2 z_2$ и $O_1 x_1 y_1 z_1$ определить относительный поворот обеих систем, т. е.

косинусы a_{ij} в формулах (8.13), то x_2, y_2, z_2 и x_1, y_1, z_1 являются разностями координат обеих точек одинакового обозначения в каждой системе, следовательно, являются известными величинами. Для определения девяти неизвестных направляющих косинусов к уравнениям (8.13) прибавляем шесть уравнений из аналитической геометрии:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Между направляющими косинусами осей и углами Эйлера существуют следующие зависимости [44]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ a_{12} &= -(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta), & a_{13} &= \sin \varphi \sin \theta, \\ a_{21} &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ a_{22} &= -(\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta), & a_{23} &= -\cos \varphi \sin \theta, \\ a_{31} &= \sin \psi \sin \theta, & a_{32} &= \cos \psi \sin \theta, & a_{33} &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Используя заранее найденные направляющие косинусы и некоторые из последних формул, можем определить углы Эйлера относительно поворота обеих систем.

§ 8.2. Пространственный шарнирный четырехзвенник

Шарнирными четырехзвенниками называют четырехзвенные механизмы, подвижные соединения которых являются цилиндрическими и сферическими шарнирами. Известны три модификации шарнирного четырехзвенника только с цилиндрическими шарнирами: плоский шарнирный четырехзвенник (оси шарниров параллельны), сферический шарнирный четырехзвенник (оси шарниров пересекаются в одной точке) и открытый в начале XX столетия механизм Бенета — Верховского [93]. Если за длину звена принимаем кратчайшее расстояние между двумя соседними осями и за скрученность — угол между этими осями, то механизм Бенета — Верховского является таким пространственным шарнирным четырехзвенником, противолежащие звенья которого одинаковой длины и с одной скрученностью. Все упомянутые механизмы имеют три избыточные связи.

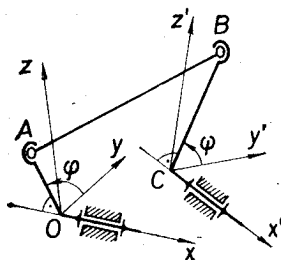


Рис. 8.5.

В машинах часто встречаются пространственный шарнирный четырехзвенник без повторяющихся связей; он с помощью

двух цилиндрических шарниров присоединен к станине, а его шатун с кривошипом и коромыслом образует два сферических шарнира (рис. 8.5); шатун в этом случае имеет свободное вращение вокруг своей продольной оси. Рассмотрим кинематический анализ этого механизма по методу В. Зиновьева [29], который относится к первой (из трех упомянутых в предыдущем параграфе) группе

методов. Заданы все размеры и движение кривошипа OA . Начнем с определения положения, которое является наиболее сложным и создает базу для определения скоростей и ускорений.

Проектируя векторный контур $Oxyz$ на координатные оси

$$l_{OA} + l_{AB} - l_{CB} - l_{OC} = 0,$$

получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} l_{OA}x_{OA} + l_{AB}x_{AB} - l_{CB}x_{CB} - l_{OC}x_{OC} &= 0, \\ l_{OA}y_{OA} + l_{AB}y_{AB} - l_{CB}y_{CB} - l_{OC}y_{OC} &= 0, \\ l_{OA}z_{OA} + l_{AB}z_{AB} - l_{CB}z_{CB} - l_{OC}z_{OC} &= 0. \end{aligned} \quad (8.15)$$

В этих уравнениях

$$x_{OA} = 0, \quad y_{OA} = \cos \varphi, \quad z_{OA} = \sin \varphi,$$

x_{AB} , y_{AB} , z_{AB} и x_{CB} , y_{CB} , z_{CB} являются неизвестными направляющими косинусами. Для определения последних трех неизвестных выбираем дополнительную правую систему координат $Cx'y'z'$ так, что ось Cx' совпадает с осью вращения коромысла и ось Cy' перпендикулярна оси Oz . В дополнительной системе

$$x'_{CB} = 0, \quad y'_{CB} = \cos \psi, \quad z'_{CB} = \sin \psi.$$

Приведем эти величины, которые являются проекциями орта \bar{e}_{CB} в дополнительной системе, к основной системе $Oxyz$. По формулам (8.13)

$$\begin{aligned} x_{CB} &= x'_x x'_{CB} + x'_y y'_{CB} + x'_z z'_{CB}, \\ y_{CB} &= y'_x x'_{CB} + y'_y y'_{CB} + y'_z z'_{CB}, \\ z_{CB} &= z'_x x'_{CB} + z'_y y'_{CB} + z'_z z'_{CB}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Направляющие косинусы x'_x , y'_x , z'_x оси Cx' известны, так как они определяются размерами механизма. Направляющие косинусы оси Cy' определяем по формуле (8.2), подставляя в нее $AB = Oz = z$, $CD = Cx' = x'$ и учитывая, что $x_z = 0$, $y_z = 0$, $z_z = 1$:

$$x'_y = -\frac{y'_x}{\sin(zx')}, \quad y'_y = \frac{x'_x}{\sin(zx')}, \quad z'_y = 0. \quad (8.17)$$

Направляющие косинусы оси Cz' также определяем по формуле (8.2), подставляя в нее $AB = Cx' = x'$, $CD = Cy' = y'$:

$$x'_z = y'_x z'_y - z'_x y'_y, \quad y'_z = z'_x x'_y - x'_x z'_y, \quad z'_z = x'_x y'_y - y'_x x'_y. \quad (8.18)$$

Подставляя результаты (8.17) и (8.18) в формулы (8.16), превращаем их в явные выражения трех неизвестных косинусов с известными величинами $\cos \psi$ и $\sin \psi$. Из уравнений (8.15) следуют

направляющие косинусы оси шатуна

$$\begin{aligned}x_{AB} &= \frac{1}{l_{AB}} (l_{CB}x_{CB} + l_{OC}x_{OC} - l_{OA}x_{OA}), \\y_{AB} &= \frac{1}{l_{AB}} (l_{CB}y_{CB} + l_{OC}y_{OC} - l_{OA}y_{OA}), \\z_{AB} &= \frac{1}{l_{AB}} (l_{CB}z_{CB} + l_{OC}z_{OC} - l_{OA}z_{OA}).\end{aligned}\quad (8.19)$$

Возведя эти выражения в квадрат и учитывая, что

$$x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2 = 1,$$

получаем функцию положения, которая позволяет определить соответствующий каждому углу φ угол ψ . Направление шатуна определяем с помощью формул (8.19), заранее вычислив выражения (8.16).

Скорости и ускорения определяем, дифференцируя по времени найденные уравнения и применяя формулы кинематики твердого тела.

Описанный расчет охватывает все возможные пространственные шарнирные четырехзвенники, так как на рис. 8.5 этот механизм показан в общем виде. Расчет намного упрощается, если оси кривошипа и коромысла перпендикулярны [55]. Модификация такого часто встречаемого пространственного шарнирного четы-

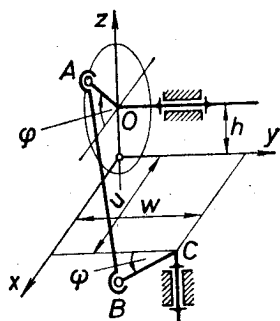


Рис. 8.6.

рехзвенника показана на рис. 8.6. Определяем движение коромысла CB , принимая, что кривошип OA вращается с угловой скоростью $\omega = \text{const}$.

Механизм имеет пять безразмерных величин

$$B = b/r, \quad C = c/r, \quad U = u/r, \quad W = w/r, \quad H = h/r,$$

где $r = OA$, $b = AB$, $c = CB$. Если в уравнении

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = b^2$$

заменяем $x_A = r \cos \varphi$, $y_A = 0$, $z_A = h + r \sin \varphi$, $x_B = u + c \sin \psi$, $y_B = w - c \cos \psi$, $z_B = 0$ и обозначим

$$A = \frac{1}{2C} (B^2 - C^2 - U^2 - W^2 - H^2 - 1), \quad U_1 = \frac{u}{c}, \quad H_1 = \frac{h}{c},$$

$$\Phi = U - \cos \varphi, \quad \Phi_1 = A + U_1 \cos \varphi - H_1 \sin \varphi, \quad Q = W^2 + \Phi^2,$$

то получим уравнение

$$\Phi \sin \psi - W \cos \psi = \Phi_1,$$

решение которого дает нам следующую функцию положения:

$$\psi = \arctg \frac{W}{\Phi} + \arcsin \frac{\Phi_1}{\sqrt{Q}}. \quad (8.20)$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получаем выражения угловой скорости и ускорения коромысла:

$$\dot{\psi} = -\omega \frac{W+S}{Q} \sin \varphi, \quad (8.21)$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{\omega^2 \sin^2 \varphi}{Q} \left[\frac{D\Phi_1}{R^3} + \left(Q \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - 2\Phi \right) \frac{W+S}{Q} \right], \quad (8.22)$$

В этих формулах

$$S = \frac{PQ + \Phi\Phi_1}{R}, \quad P = U_1 + H_1 \operatorname{ctg} \varphi, \quad R = \sqrt{Q - \Phi_1^2},$$

$$D = W^2 (1 - P^2) - (P\Phi - \Phi_1)^2 - \frac{QH_1 R^2}{\Phi_1 \sin^2 \varphi}.$$

Если $h = 0$, то

$$P = U_1 = \operatorname{const}, \quad \Phi_1 = A + U_1 \cos \varphi,$$

$$D = W^2 (1 - U_1^2) - (A + U_1 \cos \varphi)^2 = \operatorname{const}.$$

Коромысла рассматриваемого пространственного шарнирного четырехзвенника иногда (например, в жатках зерновых комбайнов) приводят в движение шатун и ползун (рис. 6.21). Движение ползуна можно определить по формулам § 6.6, подставляя в них вместо θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ величины ψ , $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, вычисленные по приведенным здесь формулам.

§ 8.3. Механизмы качающейся шайбы и качающейся вилки

Механизмы качающейся шайбы (рис. 8.7) и качающейся вилки (рис. 8.8) являются сферическими четырехзвенными механизмами, так как абсолютные и относительные оси вращения всех трех подвижных звеньев пересекаются в одной точке O .

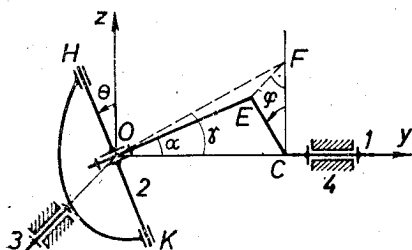


Рис. 8.7.

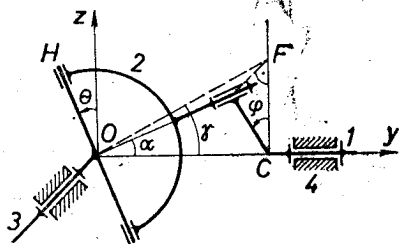


Рис. 8.8.

Оба механизма пригодны для преобразования непрерывного вращения звена 1 в качательное движение вала 3. Эти механизмы применяются в сельскохозяйственных машинах, в насосах, в гидромоторах и др. С кинематической точки зрения оба меха-

низма одинаковы. Поэтому достаточно рассмотреть только один из них. Рассмотрим механизм качающейся шайбы. Все приведенные ниже формулы пригодны также для механизма качающейся вилки; в этом можно убедиться, если сравнить кинематические схемы обоих механизмов.

Качающаяся шайба 2 шарнирно связана с коленом вала 1 (рис. 8.7). Ось симметрии шайбы совпадает с прямой OE и образует с осью вала 1 угол α . Шарнир O обычно выполняется в форме шарикового или роликового подшипника, а звено 2 является внешним кольцом этого подшипника, которое имеет два радиальных шипа, входящих в состав цилиндрических пар H и K . Вместо цилиндрических пар можно образовать цилиндрические шарниры, но тогда увеличивается число избыточных связей.

Механизм имеет два постоянных параметра: угол α и угол между валами 1 и 3, который при работе механизма может также изменяться, но обычно этот угол равен 90° . Кинематический анализ приводится для этого последнего случая. Сперва определим функцию положения $\theta = \theta(\varphi)$ механизма.

Ось OH качается в плоскости Oyz , перпендикулярной оси вала 3. Наличие шарнира O обеспечивает перпендикулярность OH и OE . След OF плоскости, проведенной через ось вала 3, и прямой OE , также перпендикулярен направлению OH , являющемуся нормалью к проведенной плоскости, так как направление OH перпендикулярно двум прямым, лежащим в этой плоскости, т. е. прямой OE и оси вала 3. Следовательно:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta = \frac{FC}{OC} = \frac{EC \cos \varphi}{OC} = \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi.$$

Таким образом,

$$\theta = \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi). \quad (8.23)$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем угловую скорость вала 3

$$\dot{\theta} = -\omega \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \theta \sin \varphi. \quad (8.24)$$

Принимая угловую скорость ω вала 1 постоянной и дифференцируя выражение (8.24), получаем угловое ускорение вала 3

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \frac{\sin 2\theta}{2 \cos^2 \alpha} (\cos 2\theta + \sin^2 \alpha). \quad (8.25)$$

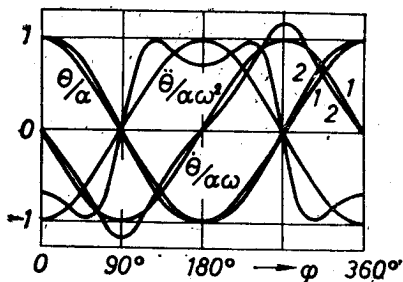


Рис. 8.9.

Определенные по трем последним формулам безразмерные величины θ/α , $\dot{\theta}/\alpha\omega$, $\ddot{\theta}/\alpha\omega^2$ показаны на рис. 8.9. Для кривых 1 угол $\alpha = 10^\circ$, а для кривых 2 угол $\alpha = 40^\circ$. Кривые 1 мало отличаются от синусоид, а кривые 2 — очень значительно. При увеличении угла α от 10° до 40° увеличивается максимальная угловая скорость вала 3; число экстремальных значений углового

ускорения в цикле увеличивается от 2 до 6, и изменение углового ускорения вблизи положений механизма $\varphi = 90^\circ$ и $\varphi = 270^\circ$ становится более резким.

Последнее обстоятельство показывает, что увеличение угла α вызывает увеличение рыжка (§ 5.6) и соответственно снижение долговечности. Если $\alpha \leq 24^\circ 06'$, то вал 3 имеет только два экстремальных значения углового ускорения в цикле [46].

В жатках сельскохозяйственных машин коромысло 3 приводит в движение шатун и ползун (рис. 6.21). Движение ползуна можно определить по формулам § 6.6, подставляя в них найденные здесь $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$.

§ 8.4. Винтовые механизмы

Среди механизмов с подвижностью $w = 1$ и числом звеньев, большим чем 2, имеются такие, у которых все подвижные соединения — только шарниры или только поступательные пары (рис. 2.12). Однако возможны и такие механизмы, у которых все подвижные соединения — только винтовые пары (рис. 8.10). Такие механизмы называются *винтовыми механизмами* и относятся к цилиндрическим механизмам. Поэтому их подвижность можно определить по формулам (2.11) и (2.12). Так, например, у трехзвенного винтового механизма (рис. 8.10)

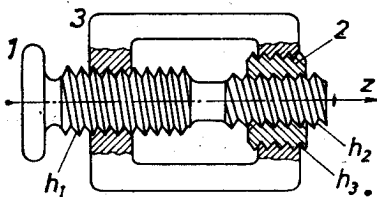


Рис. 8.10.

$$w = 2(n - 1) - p = 2(3 - 1) - 3 = 1;$$

$$w = p - 2k = 3 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Это означает, что существует однозначная функция положения

$$z_{23} = f(h_1, h_2, h_3, \varphi_{13}),$$

где z — аксиальное перемещение, h — шаг винта, φ — угол поворота. Определим эту функцию.

Шаг правого винта считаем положительным, левого винта — отрицательным. Так, на рис. 8.10 ось z направлена вправо, поэтому винт 1 с правой нарезкой при его вращении по часовой стрелке, если смотреть по направлению оси z , перемещается вдоль положительного направления z .

Из законов параллелограмма линейных и угловых скоростей следует, что

$$v_{23} = v_{21} + v_{13}, \quad \omega_{23} = \omega_{21} + \omega_{13}.$$

Умножая эти уравнения на промежуток времени Δt , получаем аналогичные зависимости между перемещениями:

$$z_{23} = z_{21} + z_{13}, \quad (1)$$

$$\varphi_{23} = \varphi_{21} + \varphi_{13}. \quad (2)$$

Согласно формулам (1.2) и (2)

$$z_{21} = \varphi_{21} \frac{h_2}{2\pi} = (\varphi_{23} - \varphi_{13}) \frac{h_2}{2\pi} = \left(z_{23} \frac{2\pi}{h_3} - \varphi_{13} \right) \frac{h_2}{2\pi} = z_{23} \frac{h_2}{h_3} - \varphi_{13} \frac{h_2}{2\pi}, \quad (3)$$

$$z_{13} = \varphi_{13} \frac{h_1}{2\pi}. \quad (4)$$

Подставляя выражения (3) и (4) в выражение (1), получаем искомую функцию положения

$$z_{23} = \frac{h_1 - h_2}{1 - h_2/h_3} \frac{\varphi_{13}}{2\pi}. \quad (8.26)$$

Возможность практической реализации этой функции зависит от величины шага резьбы и трения в винтовой паре.

Шарнир и поступательную пару можно считать предельными случаями винтовой пары, когда шаг $h = 0$ или $h = \infty$. Заменяя

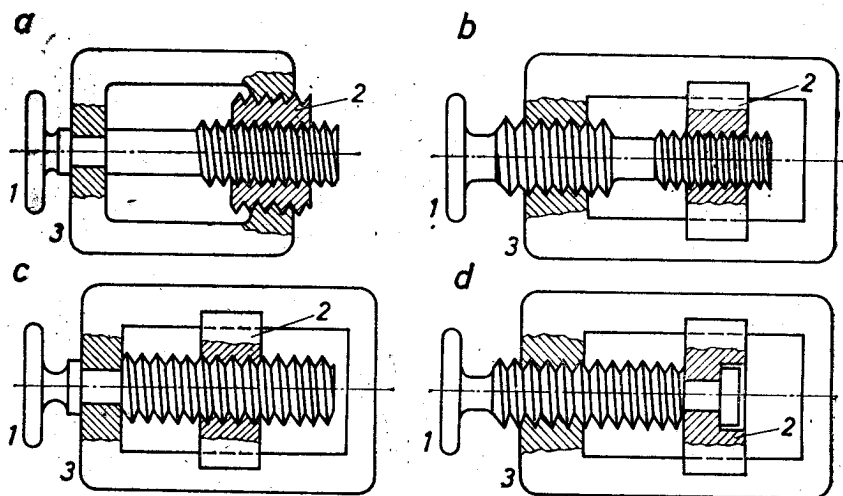


Рис. 8.11.

в трехзвенном механизме одну или две винтовые пары шарнирами или поступательными парами, получаем варианты, показанные на рис. 8.11.

В варианте *a* шаг $h_1 = 0$. В варианте *b* шаг $h_3 = \infty$ и

$$z_{23} = (h_1 - h_2) \frac{\varphi_{13}}{2\pi}. \quad (8.27)$$

Если h_1 и h_2 имеют одинаковые знаки, то вариант *b* представляет собой так называемый дифференциальный винт, который позволяет с помощью крупных резьб получить малые аксиальные пере-

мещения, т. е. с помощью небольших крутящих моментов получить большие аксиальные силы.

В варианте *c* шаги $h_1 = 0$, $h_3 = \infty$ и

$$z_{23} = -h_2 \frac{\varphi_{13}}{2\pi}.$$

В варианте *d* шаги $h_2 = 0$, $h_3 = \infty$ и

$$z_{23} = h_1 \frac{\varphi_{13}}{2\pi}.$$

Все рассмотренные здесь механизмы имеют 4 повторяющиеся связи, которые требуют строгого совпадения осей всех кинематических пар. В вышеприведенных расчетах ничего не меняется, если вместо резб треугольного профиля применять резбы прямоугольной, трапецидальной или другой формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ В ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМАХ

Определение сил в действующем механизме необходимо для:

- 1) расчета сечений и поверхностей соприкосновения звеньев и других элементов механизма,
- 2) обеспечения смазки и отвода тепла,
- 3) расчета фундамента машины,
- 4) выбора двигателя или рабочей машины в системе двигатель — рабочая машина.

Определение сил в механизме удобнее всего выполнить графическим или аналитическим методом кинетостатики.

Раздел 9

МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ И СИЛЫ ИНЕРЦИИ

§ 9.1. Кинетостатика механизмов

Действующие на звенья механизма силы разделяются на шесть групп:

1) движущая сила P (например, сила давления газа на поршень двигателя внутреннего сгорания, сила тяги трактора, приложенная к плугу) или движущий момент M_P (момент электромагнитного поля статора, приложенный к якорю электромотора, момент, приложенный с помощью ремня к шкиву рабочей машины);

2) сила полезного сопротивления Q (сила давления воды на поршень насоса) или момент полезного сопротивления M_Q (момент гидродинамического сопротивления жидкости, приложенный к ротору центробежного насоса);

3) силы тяжести звеньев G ;

4) силы F и моменты M_F вредного сопротивления (трение в подвижных соединениях и сопротивление среды);

5) силы T и моменты M_T упругости, которые создают аккумуляторы потенциальной энергии механизма, упругие промежуточные элементы в динамических соединениях (упругая муфта) или дополнительные элементы (пружины замыкания высших пар);

6) нормальные реакции R , с которыми звенья в подвижных соединениях воздействуют друг на друга.

Силы первых трех групп и частично также силы четвертой группы к механизму прикладываются внешними телами (§ 2.7), а действующие в подвижных соединениях силы и моменты трения, силы упругости и нормальные реакции являются внутренними силами механизма, которые, согласно закону Ньютона, в механизме действуют попарно. В этой части курса рассмотрим расчет реакций и сил трения.

Наибольшее внимание уделим определению реакций, так как они являются быстро меняющимися силами, имеющими при движении механизма другие значения, чем в положении покоя; от них главным образом зависит конструкция звеньев и подвижных соединений. Нормальные реакции вначале определяют, не учитывая трение в подвижных соединениях, а после этого с помощью этих нормальных реакций определяют силы и моменты трения. Трение частично оказывает влияние на нормальные реакции. Поэтому, в случае необходимости, расчет нормальных реакций повторяют, заранее приложив к звеньям найденные силы и моменты трения.

Если механизм находится в положении покоя, то все приложенные к нему силы находятся в равновесии. При движении равновесия нет, так как часть сил расходуется на ускорение или замедление масс. Однако условия равновесия сил при движении формально можно записать, применяя метод кинетостатики.

Кинетостатика является основанным на принципе Даламбера учением об определении сил в подвижной механической системе. В теории механизмов принцип Даламбера можно выразить так: *если ко всем действующим на механизм силам прибавим силы инерции и моменты сил инерции подвижных звеньев, то получаем уравновешенную систему сил, из условий равновесия которой можно определить неизвестные силы реакций.*

Если условно приложим силы инерции ко всем частицам массы, движущимся с ускорениями, то можно определить не только неизвестные, действительно приложенные к звеньям силы, но также внутренние напряжения и деформации звеньев.

Нормальные реакции по методу кинетостатики можно определить, если выполнены следующие условия:

- 1) известны законы движения звеньев механизма,
- 2) известны массы звеньев и распределение масс в звеньях,
- 3) известна движущая сила или сила полезного сопротивления,
- 4) механизм в плоскости статически определен.

Первое условие необходимо для определения сил инерции и других сил, зависящих от движения, второе — для определения сил инерции и сил тяжести, третье — для определения соответствующих нагрузке механизма нормальных реакций, четвертое — для возможности определения реакций из уравнений статики.

Для кинетостатического расчета проектируемого механизма принимаем такое движение ведущего звена, которое приблизительно соответствует его действительному движению; обычно оно соответствует равномерному вращению ведущего звена. Массы

звеньев, центры масс и моменты инерции выбирают согласно опыту и данным практики. Законы изменения движущей силы или полезного сопротивления заданы при проектировании; для кинестатического расчета необходимо задать закон изменения только одной из упомянутых *главных сил*, так как, приложив к механизму обе, не получим равновесие сил, потому что обоим главным силам соответствует определенное движение механизма, которое в общем случае не совпадает с принятым в кинестатическом расчете движением. При заданном законе изменения одной из упомянутых сил в результате кинестатического расчета находят не только неизвестные нормальные реакции, но также закон изменения второй главной силы, которая соответствует принятому движению механизма и которая называется *уравновешивающей силой* (уравновешивающим моментом). В механизме имеются $s + 1$ главных сил, где s — число основных подвижностей механизма соответственно формуле (2.18). Плоский механизм статически определим, если в нем не имеется тангенциальных избыточных связей (§ 2.4). Кинестатический расчет

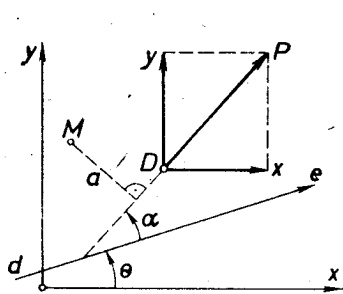


Рис. 9.1.

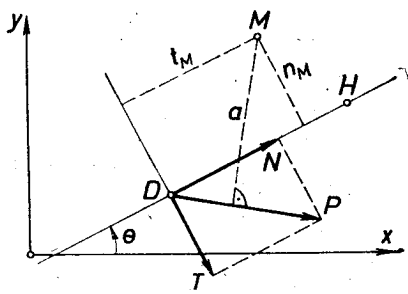


Рис. 9.2.

такого механизма можно выполнить в определенном порядке по структурным группам.

Кинестатический расчет можно провести графически или аналитически. В аналитической кинестатике часто оперируют силами, которые представлены как две взаимно перпендикулярные компоненты. Покажем, как определить проекцию разложенной по компонентам силы на выбранную ось и момент относительно выбранной точки.

Проекция силы $\vec{P} = \vec{X} + \vec{Y}$ (рис. 9.1) на ось $d-e$ и момент относительно точки M , очевидно, следующие:

$$P \cos \alpha = X \cos \theta + Y \sin \theta, \quad (9.1)$$

$$Pa = (x_D - x_M) Y - (y_D - y_M) X. \quad (9.2)$$

Момент силы $\vec{P} = \vec{N} + \vec{T}$ (рис. 9.2) относительно точки M равен

$$Pa = Nn_M + Tt_M. \quad (9.3)$$

Плечи n_M и t_M определяются по формулам

$$\begin{aligned} n_M &= y_M \cos \theta - x_M \sin \theta, \\ t_M &= (x_M - x_D) \cos \theta + (y_M - y_D) \sin \theta, \end{aligned} \quad (9.4)$$

где

$$\sin \theta = \frac{y_H - y_D}{m}, \quad \cos \theta = \frac{x_H - x_D}{m} \quad \text{и} \quad m = \frac{1}{\sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2}}.$$

Силы, действующие на звенья и найденные в результате кинестатического расчета, позволяют в дальнейшем выполнить прочностной расчет звеньев и проверить, правильно ли заданы массы звеньев при проектировании механизма.

Если параметры масс звеньев, определенные на основе найденных в кинестатическом расчете сил, значительно отличаются от первоначально принятых, то кинестатический расчет и расчет на прочность следует повторить.

§ 9.2. Определение сил инерции звеньев

Применяя метод кинестатики, элементарную силу инерции $dJ = adm$ необходимо приложить к каждому элементу массы dm , который движется с ускорением a . Главный вектор этих элементарных сил инерции

$$\mathbf{J} = -m\bar{a}_c, \quad (9.5)$$

где m — масса механической системы и a_c — ускорение центра масс этой системы. Формула (9.5) пригодна для всех механических систем во всех возможных движениях.

Следовательно, *общая сила инерции звена плоского или пространственного механизма равна произведению массы этого звена на ускорение центра масс звена и направлена противоположно ему.*

Звенья плоских механизмов совершают плоскопараллельное движение. Если допустить, что механизм имеет плоскость симметрии, параллельную плоскости движения, то можно полагать, что элементарные силы инерции находятся в одной плоскости. Система элементарных плоских сил инерции может быть заменена их равнодействующей, или парой сил (моментом), если равнодействующая равна нулю. Равнодействующая сил может быть заменена главным вектором (9.5), приложенным в выбранном центре приведения, и главным моментом, зависящим от выбора центра приведения.

Привести систему элементарных сил инерции к паре сил можно только тогда, когда $a_c = 0$ (например ротор, центр масс которого находится на оси вращения), но $\varepsilon \neq 0$.

Рассмотрим полученные в курсе теоретической механики результаты приведения к заданому центру элементарных сил инерции звеньев, находящихся как в поступательном, так и во вращательном и в плоскопараллельном движениях.

Линия действия равнодействующей сил инерции (9.5) поступательно движущегося звена проходит через центр масс звена.

Элементарные силы инерции вращающегося звена приводятся к главному вектору (9.5), который приложен к оси вращения (рис. 9.3, а), и к главному моменту тангенциальных сил инерции, который направлен противоположно угловому ускорению звена:

$$W_0 = -I_0 \varepsilon, \quad (9.6)$$

где I_0 — момент инерции массы звена относительно оси вращения. Эта же система элементарных сил инерции может приводиться к равнодействующей сил инерции (9.5), которая приложена в центре качания S физического маятника (рис. 9.3, б). Расстояние

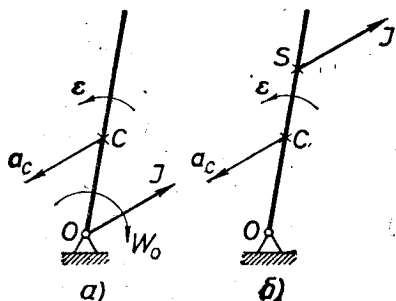


Рис. 9.3.

$$OS = i_0^2 / OC, \quad (9.7)$$

где i_0 — радиус инерции массы звена относительно оси вращения.

Элементарные силы инерции плоскопараллельно движущегося звена AB приводятся к главному вектору (9.5), приложенному в центре масс C звена, и к главному моменту (рис. 9.4, а)

$$W_c = -I_c \varepsilon, \quad (9.8)$$

где I_c — момент инерции массы звена относительно центральной оси, которая перпендикулярна к плоскости плоскопараллельного

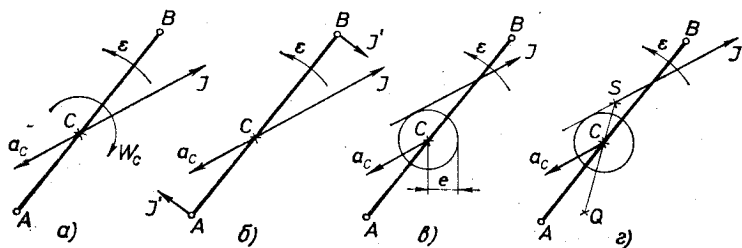


Рис. 9.4.

движения. Этот момент может быть заменен парой сил $J' \cdot AB$ (рис. 9.4, б), где

$$J' = W_c / AB. \quad (9.9)$$

Равнодействующая сил инерции (9.5) касается окружности (рис. 9.4, в) с радиусом

$$e = \frac{I_c \varepsilon}{J} = \frac{i_c^2 \varepsilon}{a_c} \quad (9.10)$$

и центром в центре масс так, что момент равнодействующей относительно точки C направлен противоположно угловому ускорению ϵ звена.

Известно, что в плоском движении картина ускорений относительно центра ускорений Q такая, как будто тело вращается вокруг неподвижной оси, проведенной через точку Q . Поэтому, согласно рис. 9.3, равнодействующая (9.5) проходит через соответствующий мгновенному центру ускорений центр качания (рис. 9.4) и

$$QS = \dot{v}_Q / QC. \quad (9.11)$$

Центры ускорений и качания находятся на одной прямой с центром масс, каждый по свою сторону относительно последнего.

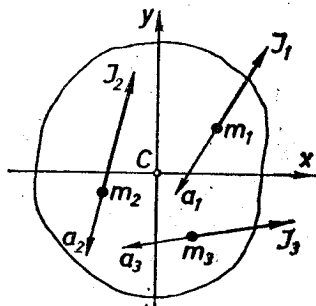


Рис. 9.5.

Аналитически силы инерции в плоском движении определяют по формулам

$$J_x = -m\ddot{x}_C, \quad J_y = -m\ddot{y}_C, \quad W = -I\epsilon. \quad (9.12)$$

Для расчета сил инерции плоскопараллельно движущихся звеньев можно применить метод, который не требует определения ускорения центра масс и углового ускорения. Звено заменяется системой n материальных точек так (рис. 9.5), что силы инерции этих точек эквивалентны (с точки зрения механики твердого тела) сумме элементарных сил инерции звена; массы и координаты точек должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_1^n m_i = m, \quad \sum_1^n m_i x_i = 0, \quad \sum_1^n m_i y_i = 0, \quad (9.13)$$

$$\sum_1^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_C.$$

Если выполняются все четыре условия (9.13), то получаем динамическое приведение массы к точкам. В этом случае масса системы точек равна массе звена, центр масс системы точек совпадает с центром масс звена и момент инерции масс системы этих точек относительно центральной оси равен моменту инерции звена относительно этой оси. Величина равнодействующей сил инерции масс, сосредоточенных в точках, ее линия действия и направление совпадают с упомянутыми величинами равнодействующей сил инерции массы звена.

Если выполняются только три первые условия (9.13), то получаем статическое приведение массы к точкам. В этом случае равнодействующая сил инерции точек, в которых расположены сосредоточенные массы, геометрически равна равнодействующей сил инерции звена, но в общем случае их линии действия не

совпадают. Кинетическая энергия звена, находящегося в плоскопараллельном движении:

$$E = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}.$$

Отсюда видно, что при динамическом приведении масс к точкам сохраняется кинетическая энергия звена, а при статическом приведении — не сохраняется.

Чаще всего при приведении массы точки выбираются на одной общей прямой с центром масс. Тогда каждая точка имеет два параметра: x_i и m_i , для расчета которых имеются 3 уравнения при динамическом приведении и 2 уравнения при статическом приведении. Это означает, что число свободно выбранных параметров равняется $p = 2n - 3$ при динамическом приведении и $p = 2n - 2$ при статическом приведении. Если $n = 2$, то свободно выбрать расположение обеих точек можно только при статическом приведении.

Пример 9.1. Поршневой компрессор (рис. 9.6) приводится в движение кривошипом 1, с частотой вращения $n = 3000 \text{ мин}^{-1}$. Центрами тяжести неуравновешенного кривошипа, шатуна и ползуна (крестовины, штока

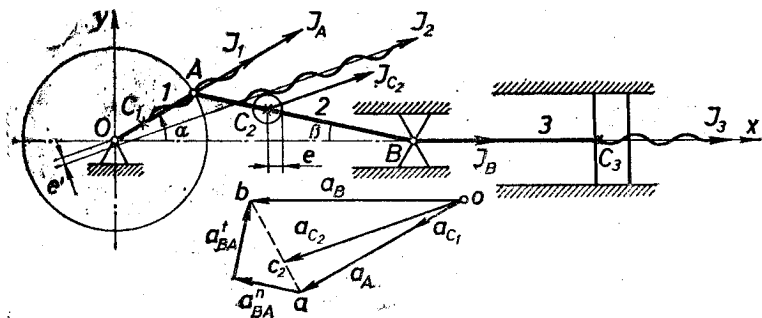


Рис. 9.6.

поршня и самого поршня) являются C_1, C_2, C_3 . Заданы размеры $OA = 200 \text{ мм}$, $OC_1 = 60 \text{ мм}$, $AB = 480 \text{ мм}$, $AC_2 = 160 \text{ мм}$, массы звеньев $m_1 = 40 \text{ кг}$, $m_2 = 20 \text{ кг}$, $m_3 = 30 \text{ кг}$ и радиус инерции шатуна $i_{C_2}^2 = 0,5 AB^2$.

Определить силы инерции звеньев механизма графически и аналитически в положении, когда $\alpha = 30^\circ$.

Графическое решение. Определив скорости и ускорения методом, использованным в примере 5.1, получаем приведенный на рис. 9.6 план ускорений, из которого $a_A = 196 \text{ м/с}^2$, $a_{C_1} = 60 \text{ м/с}^2$, $a_{C_2} = 195 \text{ м/с}^2$, $a_B = 220 \text{ м/с}^2$, $a_{BA}^t = 83 \text{ м/с}^2$.

Сила инерции кривошипа (направлена по оси кривошипа)

$$J_1 = m_1 a_{C_1} = 2400 \text{ Н}.$$

Сила инерции шатуна (направлена противоположно ускорению a_{C_2})

$$J_2 = m_2 a_{C_2} = 3900 \text{ Н}$$

касается окружности, проведенной из центра тяжести C_2 радиусом

$$e = i_{C_2}^2 \varepsilon / a_{C_2} = 0,0306 \text{ м} = 30,6 \text{ мм.}$$

При этом момент силы J_2 относительно точки C_2 направлен противоположно угловому ускорению шатуна

$$e = a_{BA}^t / AB = 173 \text{ с}^{-2}.$$

Сила инерции ползуна

$$J_3 = m_3 a_B = 6600 \text{ Н.}$$

Силы инерции J_1 , J_2 , J_3 изображены на рис. 9.6 волнообразной линией, чтобы отличить их от далее рассчитанных сил инерции шатуна.

Определяем силу инерции шатуна методом динамического приведения массы в точках A , B и C_2 . Обозначаем $AC_2 = a$, $BC_2 = b$ и, согласно формулам (9.13), запишем уравнения:

$$m_A + m_{C_2} + m_B = m_2, \quad m_A a - m_B b = 0, \quad m_A a^2 + m_B b^2 = m_2 i_{C_2}^2.$$

Отсюда определяем динамически приведенные к точкам A , B и C_2 массы:

$$m_A = m_2 \frac{i_{C_2}^2}{a(a+b)} = 9,0 \text{ кг}, \quad m_B = m_A \frac{a}{b} = 4,5 \text{ кг}, \quad m_{C_2} = 6,5 \text{ кг.}$$

Равнодействующая сил инерции этих масс

$$J_A = m_A a_A = 1760 \text{ Н}, \quad J_{C_2} = m_{C_2} a_{C_2} = 1270 \text{ Н}, \quad J_B = m_B a_B = 990 \text{ Н}$$

равна определенной выше силе J_2 и совпадает с ней по направлению.

При статическом приведении массы к точкам A и B

$$m_A + m_B = m_2, \quad m_A a - m_B b = 0, \\ m_A = \frac{m_2 b}{a+b} = 13,3 \text{ кг}, \quad m_B = \frac{m_2 a}{a+b} = 6,7 \text{ кг.}$$

Равнодействующая J_2 сил инерции этих масс

$$J_A = m_A a_A = 2610 \text{ Н}, \quad J_B = m_B a_B = 1470 \text{ Н}$$

проходит через точку O , так как в этой точке пересекаются линии действия сил J_A и J_B . Поэтому увеличивается плечо силы J_2 относительно точки C_2 на расстояние e' , и момент сил инерции шатуна относительно точки C_2 увеличивается на величину

$$\Delta W_{C_2} = e' J_2 = 0,016 \cdot 3900 = 64,4 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

что составляет 52% от действительной величины этого момента:

$$W_{C_2} = e' J_2 = 0,0306 \cdot 3900 = 119,3 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Следовательно, при статическом приведении массы шатуна может иметь место значительная ошибка в расчетном значении момента сил инерции приведенных масс.

Аналитическое решение. Обозначим $OA = b$, $AB = a$, $OB = c$ и определяем

$$\dot{\alpha} = \frac{\pi n}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}, \quad a_{C_1} = OC_1 \cdot \dot{\alpha}^2 = 59 \text{ м/с}^2, \quad a_A = b \dot{\alpha}^2 = 197 \text{ м/с}^2.$$

По формулам изменяемого треугольника (6.9) и (6.10) определяем:

$$\beta = \arcsin \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = 12^\circ, \quad \dot{\beta} = \frac{b \dot{\alpha} \cos \alpha}{a \cos \beta} = 13,4 \text{ с}^{-1},$$

$$\varepsilon = -\ddot{\beta} = -\frac{1}{a \cos \beta} (a \dot{\beta}^2 \sin \beta - b \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = 168 \text{ с}^{-2},$$

$$a_B = \ddot{c} = -b \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - a \dot{\beta}^2 \cos \beta - a \ddot{\beta} \sin \beta = -239 \text{ м/с}^2.$$

По формулам (6.29)

$$\ddot{x}_{C_2} = a_A (\cos \alpha) (u - 1) + u a_B = -193 \text{ м/с}^2,$$

$$\ddot{y}_{C_2} = a_A (\sin \alpha) (u - 1) = -66 \text{ м/с}^2, \quad \text{где } u = \frac{AC_2}{AB} = \frac{1}{3};$$

$$a_{C_2} = \sqrt{193^2 + 66^2} = 204 \text{ м/с}^2.$$

Силы инерции подвижных звеньев

$$J_1 = m_a a_{C_1} = 2400 \text{ Н}, \quad J_{2x} = -m_2 \ddot{x}_{C_2} = 3940 \text{ Н}, \quad J_{2y} = -m_2 \ddot{y}_{C_2} = 1350 \text{ Н};$$

$$J_2 = m_2 a_{C_2} = 4150 \text{ Н}, \quad W_{C_2} = -m_2 i_{C_2}^2 \cdot \varepsilon = 118 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$J_3 = -m_3 a_B = 7300 \text{ Н}.$$

Примечание. Согласно формулам (6.44) максимальная сила инерции ползуна

$$J_{3\max} = m_3 b \dot{\alpha}^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right) = 30 \cdot 0,2 \cdot 986 \left(1 + \frac{200}{480}\right) = 8540 \text{ Н},$$

которая имеет место при наибольшем расстоянии ползуна от коленчатого вала и в 28,5 раз превышает вес ползуна.

Если длина кривошипа автомобильного поршневого двигателя 46 мм и кривошип вращается с частотой 4000 мин⁻¹, то при длине шатуна 161 мм имеем максимальное ускорение поршня

$$a_{B\max} = 0,046 \left(\frac{\pi \cdot 4000}{30}\right)^2 \left(1 + \frac{46}{161}\right) = 10 \text{ 400 м/с}^2.$$

Следовательно, максимальная сила инерции поршня больше чем в 1000 раз превышает вес поршня. Это означает, что при кинетостатическом расчете быстроходных машин весом звеньев можем пренебречь.

Раздел 10

КИНЕТОСТАТИКА МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

§ 10.1. Значение структурных групп в кинетостатике

В плоских механизмах с низшими парами звенья соединены только с помощью плоских шарниров и поступательных пар или кинематически эквивалентными им подвижными соединениями. В этом разделе ознакомимся с расчетом реакций в этих кинематических парах без учета трения.

Сначала убедимся в том, что реакция шарнира или поступательной пары имеет две неизвестные компоненты. Для этого рассмотрим звено i (рис. 10.1), которое при соединении со звеном g образует шарнир A , а при соединении со звеном k — поступательную пару B . К звену i приложена известная сила P_i (равнодействующая силы тяжести, силы инерции и других сил) и известный момент (пара сил) M_i . Со стороны звена g на звено i действует неизвестная реакция R_{gi} , которая имеет две неизвестные величины — модуль и линию действия (или две компоненты по произвольно выбранным направлениям). Со стороны звена k на звено i действует неизвестная реакция R_{ki} , которая также имеет две неизвестные величины — модуль и положение линии действия (плечо h).

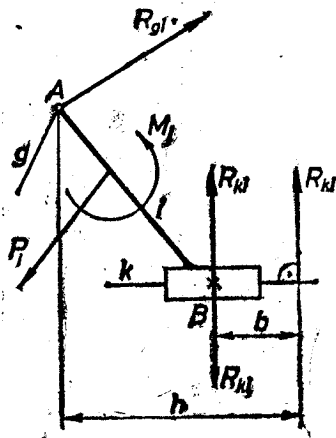


Рис. 10.1.

Положение линии действия реакции поступательной пары имеет большое значение. Если расстояние b реакции от середины опорной поверхности поступательной пары равняется нулю, то давление на поверхностях скольжения распределено равномерно. Если $b \neq 0$, то в точке B поступательной пары можно приложить две одинаковые противоположно направленные силы R_{ki} , приводя этим действие реакции к сумме воздействий центральной силы R_{ki} и пары сил bR_{ki} . Для звена i в плоском движении можно написать 3 уравнения равновесия, из которых нельзя определить упомянутые 4 неизвестные. Следовательно, отдельно взятое звено механизма является статически неопределимым, хотя механизм без избыточных тангенциальных связей (§ 3.2) является статически определимым.

Если структурную группу статически определимого механизма присоединяем к станине, то по формуле (3.4) зависимость между числом звеньев n группы и числом кинематических пар p следующая:

$$3n - 2p = 0. \quad (10.1)$$

Первый член левой части выражает число уравнений равновесия, которые можно написать для группы, а второе — число неизвестных реакций кинематических пар группы. Оба члена равны между собой. Таким образом, структурная группа является наименьшей статически определимой системой, выделяемой из механизма, поэтому она пригодна для кинестатического расчета.

Далее рассмотрим кинестатический расчет наиболее часто встречающихся структурных групп, в первую очередь диад.

§ 10.2. Аналитическая и графическая кинестатика диад

В нижеприведенном алгоритме кинестатического расчета диад звенья диад обозначены i и k , а соседние звенья — g и l . Для упрощения, приложенные к звеньям известные силы P_i и P_k (рис. 10.1) и моменты пар сил M_i , M_k в дальнейшем на рисунках диад не приводятся, а P_i и P_k обозначены только в векторных суммах. В уравнениях равновесия все члены принимаются положительными, независимо от направления моментов и проекций на рисунках, хотя при решении конкретных задач необходимо строго соблюдать правило знаков. Центры шарниров обозначены A , B , C , а кратчайшие расстояния от них до линий действия сил — a , b , c .

В левой части каждого скалярного уравнения равновесия перед знаком идентичности \equiv дан символ M или P , который характеризует содержание уравнения. Так, например, M_C^k — результирующий момент относительно точки C всех сил, приложенных к звену k , P_{AB}^i — сумма проекций на прямую AB всех сил, приложенных к звену i . Если эти символы не имеют верхнего индекса, то уравнение относится ко всей группе. Уравнения для аналитического расчета составлены так, что каждое из них содержит только одно неизвестное, если их решать в заданном

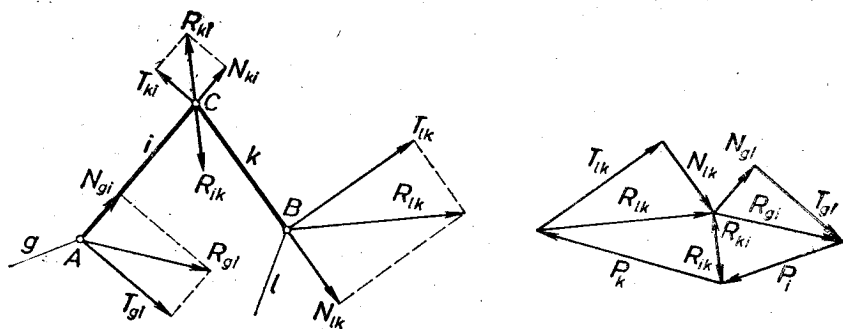


Рис. 10.2.

порядке. Это единственное неизвестное написано первым, справа от знака \equiv .

Диады первой модификации (рис. 10.2). Неизвестные реакции R_{gi} , R_{lk} и $R_{ki} = -R_{ik}$ разложены каждая на две компоненты. Тангенциальная компонента T перпендикулярна к продольной оси звена (поводка), а «нормальная» компонента N совпадает с ней.

Уравнения аналитического расчета следующие:

$$M_C^i \equiv T_{gi} \cdot AC + P_i c_i + M_i = 0,$$

$$M_B \equiv N_{gi} \cdot n_B + T_{gi} t_B + P_i b_i + P_k b_k + M_i + M_k = 0,$$

$$\begin{aligned}
 M_C^h &\equiv T_{lk} \cdot BC + P_h c_h + M_h = 0, \\
 M_A &\equiv N_{lh} n_A + T_{lh} t_A + P_i a_i + P_h a_h + M_i + M_h = 0, \\
 M_A^i &\equiv T_{hi} \cdot AC + P_i a_i + M_i = 0, \\
 P_{AC}^i &\equiv N_{ki} + N_{gi} + P_i \cos \alpha_i = 0.
 \end{aligned} \quad (10.2)$$

Если плечи n и t сил в кинематической схеме механизма определяются нелегко, то для их расчета пригодны формулы (9.4).

Графический расчет начинается с уравнения равновесия внешних сил одной группы:

$$\bar{N}_{gi} + \bar{T}_{gi} + \bar{P}_i + \bar{P}_h + \bar{T}_{ih} + \bar{N}_{ih} = 0. \quad (10.3)$$

Используя первое и третье уравнения (10.2), определяем T_{gi} и T_{ih} . Потом строим план сил (10.3) и находим N_{gi} и N_{ih} . Внутренние реакции $R_{ki} = R_{ik}$ не нужно разлагать на компоненты; их находят, строя план равновесия для звена i или k :

$$\bar{R}_{gi} + \bar{P}_i + \bar{R}_{ki} = 0, \quad \bar{R}_{ih} + \bar{P}_h + \bar{R}_{ih} = 0. \quad (10.4)$$

Эти планы (треугольники) вписываются (рис. 10.2) в план равновесия сил группы (10.3).

Диады второй модификации (рис. 10.3). Реакции разлагаются на компоненты T и N , которые параллельны или перпендикулярны направлению скольжения ed .

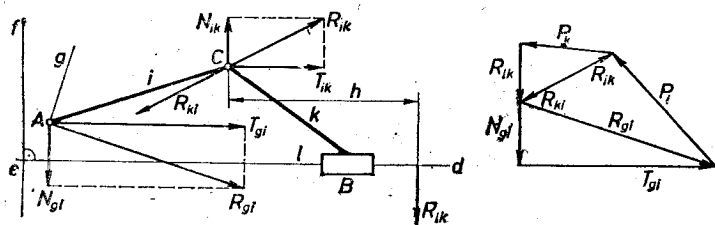


Рис. 10.3.

Уравнения для аналитического расчета:

$$\begin{aligned}
 P_{ed} &\equiv T_{gi} + P_i \cos \alpha_i + P_h \cos \alpha_h = 0, \\
 M_C^i &\equiv N_{gi} n_C + T_{gi} t_C + P_i c_i + M_i = 0, \\
 P_{ef} &\equiv R_{lk} + N_{gi} + P_i \sin \alpha_i + P_h \sin \alpha_h = 0, \\
 M_C^h &\equiv h \cdot R_{lh} + P_h c_h + M_h = 0, \\
 P_{ed}^h &\equiv T_{ih} + P_h \cos \alpha_h = 0, \\
 P_{ef}^h &\equiv N_{ih} + R_{lh} + P_h \sin \alpha_h = 0.
 \end{aligned} \quad (10.5)$$

При графическом расчете строим план внешних сил

$$\bar{N}_{gi} + \bar{T}_{gi} + \bar{P}_i + \bar{P}_h + \bar{R}_{ih} = 0; \quad (10.6)$$

отложив силы P_i и P_h и проведя от их концов прямые, параллельные и перпендикулярные линии скольжения, получаем T_{gi} .

Компоненту N_{gt} определяем из второго уравнения (10.5) и, отложив ее в плане сил, находим R_{lh} . Плечо h этой реакции определяем из четвертого уравнения (10.5). Внутренние реакции $R_{kt} = R_{lk}$ находим на плане сил, согласно уравнениям (10.4).

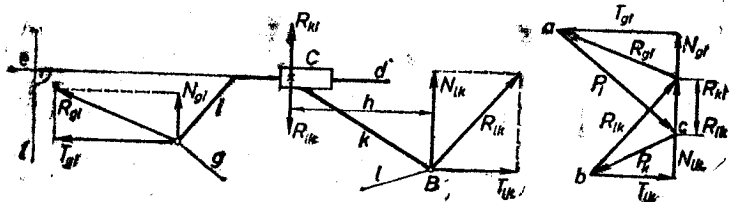


Рис. 10.4.

Диады третьей модификации (рис. 10.4). Уравнения для аналитического расчета:

$$\begin{aligned}
 P_{ed}^i &\equiv T_{gt} + P_i \cos \alpha_i = 0, \\
 M_B &\equiv N_{gi} n_B + T_{gi} t_B + P_i b_i + P_k b_k + M_i + M_k = 0, \\
 P_{ed}^h &\equiv T_{lh} + P_k \cos \alpha_k = 0, \\
 P_{ef} &\equiv N_{lh} + N_{gt} + P_i \sin \alpha_i + P_k \sin \alpha_k = 0, \\
 P_{ef}^h &\equiv R_{lh} + N_{lh} + P_k \sin \alpha_k = 0, \\
 M_B^h &\equiv h R_{lh} + P_k b_k + M_k = 0.
 \end{aligned} \tag{10.7}$$

При графическом расчете строим план сил (10.3), проводя

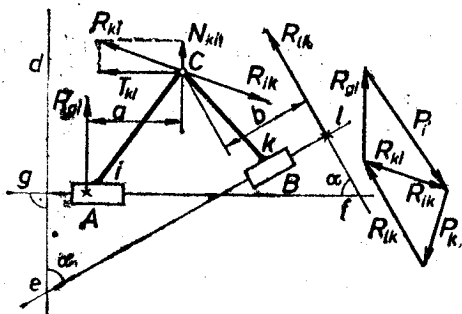


Рис. 10.5.

через концы векторов P_i и P_k прямые, параллельные и перпендикулярные направлению скольжения; таким образом находим T_{gt} и T_{lh} . Определяем N_{gt} из второго уравнения (10.7) и, отложив ее в плане сил, находим N_{lh} . Внутренние реакции находим аналогично предыдущему случаю.

Диады четвертой модификации (рис. 10.5). Ана-

литические уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 P_{ei} &\equiv R_{gt} \cos \alpha + P_i \cos \alpha_i + P_k \cos \alpha_k = 0, \\
 P_{ei} &\equiv R_{lh} \cos \alpha + P_i \cos \alpha'_i + P_k \cos \alpha'_k = 0, \\
 M_C^i &\equiv a R_{gt} + P_i c_i + M_i = 0, \\
 M_C^h &\equiv b \cdot R_{lh} + P_k c_k + M_k = 0, \\
 P_{gf}^i &\equiv T_{ht} + P_i \cos \alpha'_i = 0, \\
 P_{ed}^i &\equiv N_{ht} + R_{gt} + P_i \sin \alpha'_i = 0.
 \end{aligned} \tag{10.8}$$

План внешних сил можно построить без дополнительных расчетов. Проведя через концы векторов данных сил P_i , P_h прямые, перпендикулярные направлению скольжения, получаем R_{g^i} и R_{ih} . Плечи этих внешних реакций определяем из третьего и четвертого уравнений (10.8). Внутренние реакции определяем, как и в предыдущих случаях.

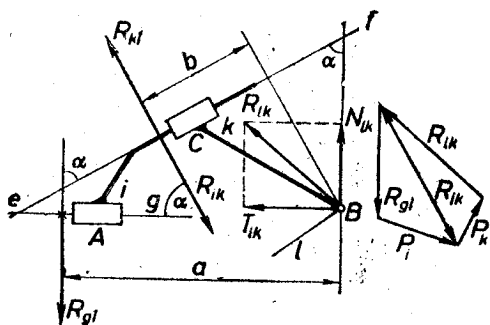


Рис. 10.6.

Диалы пятой модификации (рис. 10.6). Аналитические уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 P_{e^i}^i &\equiv R_{g^i} \cos \alpha + P_i \cos \alpha_i = 0, \\
 M_B &\equiv a R_{g^i} + P_i b_i + P_h b_h + M_i + M_h = 0, \\
 P_{e^g}^i &\equiv R_{ih} \cos \alpha + P_i \cos \alpha'_i = 0, \\
 M_B^h &\equiv b R_{ih} + P_h b_h + M_h = 0, \\
 P_{e^g}^h &\equiv T_{ih} + P_i \cos \alpha'_i + P_h \cos \alpha'_h = 0, \\
 P_{e^j}^h &\equiv N_{ih} \cos \alpha + T_{ih} \sin \alpha + P_h \cos \alpha_h = 0.
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

План сил строим сперва для звена i , а потом для всей группы (рис. 10.6).

§ 10.3. Кинестатический расчет механизмов

Целью кинестатического расчета является определение реакций в подвижных соединениях механизмов. Силы трения обычно не учитываются. Найденные реакции только в редких случаях корректируются, как это было указано в § 9.1, где были рассмотрены общие положения о кинестатическом расчете механизмов. Мы ознакомились с расчетом сил инерции и с алгоритмами кинестатического расчета простейших структурных групп. Теперь рассмотрим аналитическое и графическое выполнение кинестатического расчета целого механизма, решая конкретные примеры.

В предыдущем параграфе было показано, что внешние и внутренние реакции структурной группы можно определить, если

известны все приложенные к группе силы, учитывая также силы инерции. Следовательно, сперва необходимо определить силы инерции и потом начать кинестатический расчет с той группы, которая имеет в качестве неизвестных сил только реакции. Обычно это будет та структурная группа, к которой приложена одна из главных сил, или движущая сила или сила полезного сопротивления (§ 9.1). Потом следует перейти к соседней группе. Реакции со стороны звеньев ранее рассчитанной группы на рассчитываемую группу известны: следует только поменять направления всех ранее определенных реакций.

В конце расчета останется структурная группа, к которой приложена вторая главная сила, эту силу в кинестатике называют *уравновешивающей силой* (уравновешивающим моментом). При расчете этой последней группы находят оставшиеся реакции и уравновешивающую силу. Обычно эта группа содержит станину; тогда реакции и уравновешивающую силу находят, рассматривая равновесие подвижного звена группы, так называемого крайнего звена. Уравновешивающая сила обеспечивает принятое при определении сил инерции движение механизма, если трение в подвижных соединениях не учитывается.

В результате кинестатического расчета становятся известными все силы, действующие на каждое звено. Они пригодны для расчета звеньев на прочность. Последний расчет будет более точным, если учесть, что силы инерции приложены не к отдельным точкам, а распределены по всей массе звена.

Пример 10.1. Поршневой компрессор с качающимся цилиндром (рис. 10.7) приводится в движение кривошипом 1, вращающимся с частотой 300 мин⁻¹. Выполнить кинестатический расчет в положении, когда угол $\varphi = 120^\circ$ и давление сжимаемого газа $P_2 = P_3 = 150$ кгс. Дано: $OB = r = 0,2$ м, $OA = b = 0,5$ м, $BC = s = 0,4$ м, C — центр тяжести поршня,

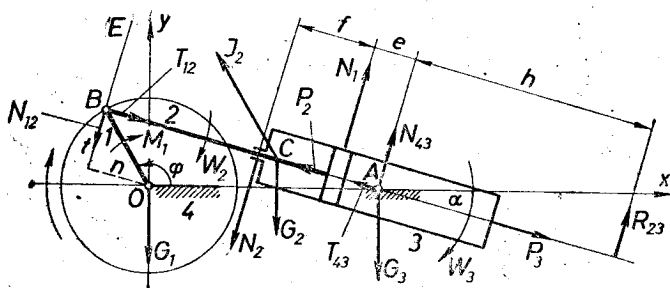


Рис. 10.7.

а центры тяжести звеньев 1 и 3 совпадают с точками O и A . Массы звеньев $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 40$ кг; центральные моменты инерции масс $I_2 = 0,4$ кг·м², $I_3 = 1,2$ кг·м².

Аналитическое решение. Проведя кинематический расчет по методу треугольников, получаем, что $\angle OAB = \alpha = 16,1^\circ$, $AB = c = 0,625$ м, $x_B = -0,1$ м, $y_B = 0,173$ м, $x_C = 0,284$ м, $y_C = 0,062$ м, $\omega_1 = \dot{\varphi} = -31,4$ с⁻¹,

$v_{23} = -\dot{c} = 4,33 \text{ м/с}$, $\omega_2 = \omega_3 = -\dot{\alpha} = -7,2 \text{ с}^{-1}$, $\dot{x}_C = 4,63 \text{ м/с}$, $\dot{y}_C = 0,37 \text{ м/с}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\ddot{\alpha} = 114 \text{ с}^{-2}$, $\ddot{x}_C = 91,8 \text{ м/с}^2$, $\ddot{y}_C = -119 \text{ м/с}^2$.
 Силы инерции определяем по формулам (9.12); $J_{2x} = -m_2 \ddot{x}_C = -94 \text{ кгс}$,
 $J_{2y} = -m_2 \ddot{y}_C = 121 \text{ кгс}$, $W_2 = -I_2 \varepsilon_2 = -4,7 \text{ кгс} \cdot \text{м}$, $W_3 = -I_2 \varepsilon_3 = -14,0 \text{ кгс} \cdot \text{м}$. Кинестатический расчет начинаем с диады 23, к звеньям которой приложена сила полезного сопротивления P_2 и противоположная ей сила P_3 . Уравнения равновесия напишем по алгоритму (10.7), применяя формулы (9.1), (9.2) и учитывая, что прямые BA и BE с осью Ox образуют углы $\theta_1 = -\alpha$ и $\theta_2 = 90^\circ - \alpha$:

$$\begin{aligned}
 P_{BA}^2 &\equiv T_{12} + J_{2x} \cos \theta_1 + J_{2y} \sin \theta_1 + G_2 \sin \alpha - P_2 = 0, \\
 M_A &\equiv N_{12} c + W_2 + W_3 + G_2 \cdot AC \cdot \cos \alpha + (x_C - x_A) J_{2y} - (y_C - y_A) J_{2x} = 0, \\
 P_{BA}^3 &\equiv T_{43} + P_3 + G_3 \sin \alpha = 0, \\
 P_{BE} &\equiv N_{43} - N_{12} - (G_2 + G_3) \cos \alpha + J_{2x} \cos \theta_2 + J_{2y} \sin \theta_2 = 0, \\
 P_{BE}^3 &\equiv R_{23} + N_{43} - G_3 \cos \alpha = 0, \\
 M_A^3 &\equiv h R_{23} + W_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Последовательно решая эти уравнения, получаем, что $T_{12} = 273 \text{ кгс}$, $N_{12} = 50 \text{ кгс}$, $T_{43} = 161 \text{ кгс}$, $N_{43} = 12 \text{ кгс}$, $R_{23} = 27 \text{ кгс}$ и $h = 0,52 \text{ м}$. Направления сил показаны на рис. 10.7.

Реакцию R_{23} внутренней поступательной пары следует заменить ее компонентами N_1 и N_2 , согласно уравнениям статики $N_1 - N_2 = R_{23}$ и $N_2 f = R_{23}(h + e)$. Если $e = 0,1 \text{ м}$ и $f = 0,17 \text{ м}$, то $N_1 = 125 \text{ кгс}$ и $N_2 = 98 \text{ кгс}$. Это означает, что в местах соприкосновения штока поршня и цилиндра не может быть только уплотнение, но необходимо образовать также поверхность для восприятия радиальных нагрузок.

Далее следует провести расчет оставшейся группы 14, содержащей станину. Напишем уравнения равновесия крайнего звена 1, заранее изменяя направления реакций T_{12} и N_{12} :

$$\begin{aligned}
 P_{BA}^1 &\equiv T_{41} + G_1 \sin \alpha - T_{21} = 0, \\
 P_{BE}^1 &\equiv N_{41} - G_1 \cos \alpha + N_{21} = 0, \\
 M_0^1 &\equiv M_1 + T_{21} t - N_{21} n = 0.
 \end{aligned}$$

Первые два уравнения дают: $T_{41} = 259 \text{ кгс}$, $N_{41} = -11 \text{ кгс}$; следовательно, T_{41} направлена по линии BA , а N_{41} — по линии EB . Плечи (n и t) определяются по формулам (9.4):

$$n = r_1 \cos [\pi - (\varphi + \alpha)] = 0,144 \text{ м} \quad \text{и} \quad t = r \sin [\pi - (\varphi + \alpha)] = 0,138 \text{ м}.$$

Определенный из третьего уравнения уравновешивающий момент $M_1 = -29,2 \text{ кгс} \cdot \text{м}$. Такой движущий момент необходимо приложить к кривошипу в данном положении механизма для получения равномерного вращения кривошипа и достижения данной силы сжатия газа, без учета трения.

Графическое решение (рис. 10.8). Графические построения планов скоростей и ускорений (см. на рис. 5.28 звенья 4 и 5) позволили определить ускорение центра тяжести шатуна $a_C = 158 \text{ м/с}^2$ и угловые ускорения $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 110 \text{ с}^{-2}$. По формулам (9.5), (9.6) и (9.10) определяем $J_2 = m_2 a_C = 160 \text{ кгс}$, $W_3 = I_3 \varepsilon_3 = 13,5 \text{ кгс} \cdot \text{м}$, $e = 28 \text{ мм}$.

План внешних сил, приложенных к диаде 23, строим согласно уравнению

$$N_{12} + T_{12} + J_2 + G_2 + P_2 + P_3 + G_3 + T_{43} + N_{43} = 0 \quad (1)$$

(рис. 10.4), при этом откладываем последовательно известные силы I_2 , G_2 , P_2 , P_3 , G_3 ; затем через точки a и b проводим прямые, параллельные линиям

скольжения, а через точку c — прямую, перпендикулярную линии скольжения; получаем $T_{12} = 272$ кгс, $T_{43} = 161$ кгс. Из уравнения

$$M_A = N_{12} \cdot AB - J_2 p + G_2 g - W_3 = 0$$

определяем $N_{12} = 62$ кгс; отложив эту силу на плане сил (1), найдем $N_{43} = 15$ кгс. Построение планов сил по уравнениям равновесия звеньев 2 и 3

$$R_{12} + J_2 + G_2 + P_2 + R_{32} = 0, \quad P_3 + G_3 + R_{43} + R_{23} = 0$$

дает $R_{32} = R_{23} = 25$ кгс. Плечо этой реакции определяем из $M_A^3 = h R_{23} - W_3 = 0$; $h = 0,54$ м. Внутреннюю реакцию R_{23} распределяем на компоненты N_1 и N_2 так же, как при аналитическом расчете.

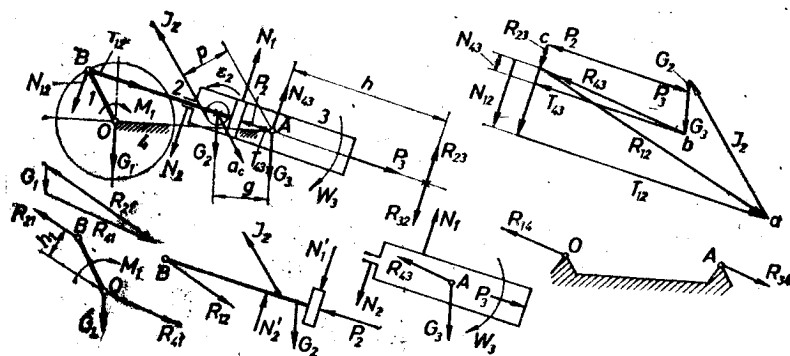


Рис. 10.8.

Кинетостатический расчет механизма заканчиваем рассмотрением группы звеньев 14. Построив план сил и используя уравнения равновесия входного звена 1

$$R_{21} + G_1 + R_{41} = 0, \quad M_0 = -M_1 + R_{21} \cdot h = 0,$$

находим реакцию $R_{41} = 270$ кгс и уравновешивающий момент $M_1 = 28,5$ кгс·м.

Примечание. На рис. 10.8 показано каждое звено отдельно, со всеми приложенными к нему заданными и найденными силами.

§ 10.4. Определение реакций в двухкратном шарнире

Определение реакций в двухкратном шарнире зависит от конструкции двухкратного шарнира и от того, является ли двухкратный шарнир внешним или внутренним шарниром кинетостатически определяемой структурной группы. Конструкция двухкратного шарнира может быть выполнена в двух вариантах: 1) все три звена соприкасаются с промежуточным элементом b , который назовем *штырем*; 2) промежуточного элемента нет и по каждой цилиндрической поверхности соприкасаются только два звена.

Чтобы выяснить методику расчета, рассмотрим представленный на рис. 10.9 механизм, у которого шарнир B является двухкратным шарниром первого типа. Принимаем, что кинетостатический расчет начинается с диады 45. Расчет этой диады прове-

дем в обычном порядке; принимая штырь b за соседнее звено дпады 45, таким образом находим реакцию R_{b4} . Если далее следует рассчитать диаду 12, то аналогично находим также внешнюю реакцию R_{b2} этой диады, и внешняя реакция группы 36 становится известной: $\bar{R}_{b3} = -(R_{b2} + R_{b4})$. Уравновешивающая сила P_3 звена 3 определяется обычным способом.

Если шарнир B имеет конструкцию второго типа, например, звено 4 соприкасается с звеном 3, а звено 3 с звеном 2, то вместо

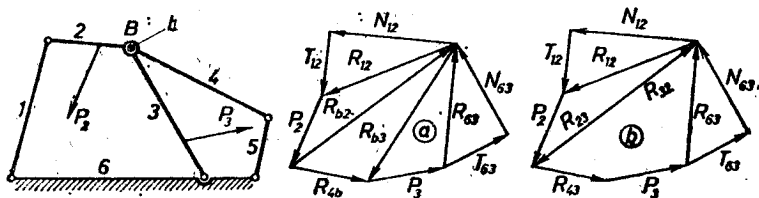


Рис. 10.9.

реакции R_{b4} в обычном порядке определяется R_{34} , вместо реакции R_{b2} находят R_{32} и вместо реакции R_{b3} определяют реакцию $\bar{R}_{2,3} = -(R_{34} + R_{32})$. В рассмотренных случаях шарнир B для всех трех диад является внешним шарниром.

Принимаем, что имеем конструкцию первого типа, после диады 45 следует рассчитать диаду 23. Тогда шарнир B является внутренним шарниром диады 23. Уравнение равновесия для диады 23 следующее:

$$\bar{N}_{12} + \bar{T}_{12} + \bar{P}_2 + \bar{R}_{b2} + \bar{P}_3 + \bar{T}_{63} + \bar{N}_{63} = 0, \quad (a)$$

в котором неизвестны только по модулю составляющие \bar{N}_{12} и \bar{N}_{63} реакций в шарнирах 12 и 63.

§ 10.5. Аналитическая кинестатика структурных групп второго класса

Из структурных групп высших классов в механизмах чаще встречаются обе шарнирные группы второго класса (рис. 3.5), каждая из которых имеет 12 неизвестных компонент реакций; для их расчета необходимо составить 12 уравнений равновесия.

Для кинестатического расчета структурной группы второго класса второго порядка (рис. 10.10) можно составить следующие уравнения:

$$M_B \equiv T_A \cdot AB + \sum_1^4 (P_i b_i + M_i) = 0, \quad (1)$$

$$M_F^1 \equiv T_{41} \cdot EF + P_1 f_1 + M_1 = 0, \quad (2)$$

$$M_D^2 \equiv T_{42} \cdot CD + P_2 d_2 + M_2 = 0, \quad (3)$$

$$M_A \equiv T_B \cdot AB + \sum_1^4 (P_i a_i + M_i) = 0, \quad (4)$$

$$M_E^1 \equiv T_{31} \cdot EF + P_1 e_1 + M_1 = 0, \quad (5)$$

$$M_C^2 \equiv T_{32} \cdot CD + P_2 c_2 + M_2 = 0, \quad (6)$$

$$M_A^3 \equiv N_{23} n_{AD} + N_{13} n_{AF} + T_{23} t_{AD} + T_{13} t_{AF} + P_3 a_3 + M_3 = 0, \quad (7)$$

$$M_D^3 \equiv N_A n_{DA} + N_{13} n_{DF} + T_A t_{DA} + T_{13} t_{DF} + P_3 d_3 + M_3 = 0, \quad (8)$$

$$M_F^3 \equiv N_A n_{FA} + N_{23} n_{FD} + T_A t_{FA} + T_{23} t_{FD} + P_3 f_3 + M_3 = 0, \quad (9)$$

$$P_{EF}^1 \equiv N_{41} + N_{31} + P_1 \cos \alpha_1 = 0, \quad (10)$$

$$P_{CD}^2 \equiv N_{42} + N_{32} + P_2 \cos \alpha_2 = 0, \quad (11)$$

$$M_E^4 \equiv N_B n_{EB} + T_B t_{EB} + N_{24} n_{EC} + T_{24} t_{EC} + P_4 e_4 + M_4 = 0. \quad (12)$$

Для определения реакций структурной группы второго класса третьего порядка (рис. 10.10) составляем следующие уравнения:

$$M_E^1 \equiv T_A \cdot AE + P_1 e_1 + M_1 = 0, \quad (1')$$

$$M_F^2 \equiv T_B \cdot BF + P_2 f_2 + M_2 = 0, \quad (2')$$

$$M_G^3 \equiv T_C \cdot CG + P_3 g_3 + M_3 = 0, \quad (3')$$

$$M_A^4 \equiv T_{41} \cdot AE + P_1 a_1 + M_1 = 0, \quad (4')$$

$$M_B^5 \equiv T_{42} \cdot BF + P_2 b_2 + M_2 = 0, \quad (5')$$

$$M_C^6 \equiv T_{43} \cdot CG + P_3 c_3 + M_3 = 0, \quad (6')$$

$$M_E^4 \equiv N_{24} n_{EF} + N_{34} n_{EG} + T_{24} \cdot t_{EF} + T_{34} \cdot t_{EG} + P_4 e_4 + M_4 = 0, \quad (7')$$

$$M_F^4 \equiv N_{14} n_{FE} + N_{34} n_{FG} + T_{14} \cdot t_{FE} + T_{34} \cdot t_{FG} + P_4 f_4 + M_4 = 0, \quad (8')$$

$$M_G^4 \equiv N_{14} n_{GE} + N_{24} n_{GF} + T_{14} \cdot t_{GE} + T_{24} \cdot t_{GF} + P_4 g_4 + M_4 = 0, \quad (9')$$

$$P_{AE}^1 \equiv N_A + N_{41} + P_1 \cos \alpha_1 = 0, \quad (10')$$

$$P_{BF}^2 \equiv N_B + N_{42} + P_2 \cos \alpha_2 = 0, \quad (11')$$

$$P_{CG}^3 \equiv N_C + N_{43} + P_3 \cos \alpha_3 = 0. \quad (12')$$

В уравнениях кинестатики обеих структурных групп использована символика, примененная в § 10.2, только у плеч n и t при обозначении точки, относительно которой определяется момент, прибавлен второй индекс, указывающий на точки приложения силы.

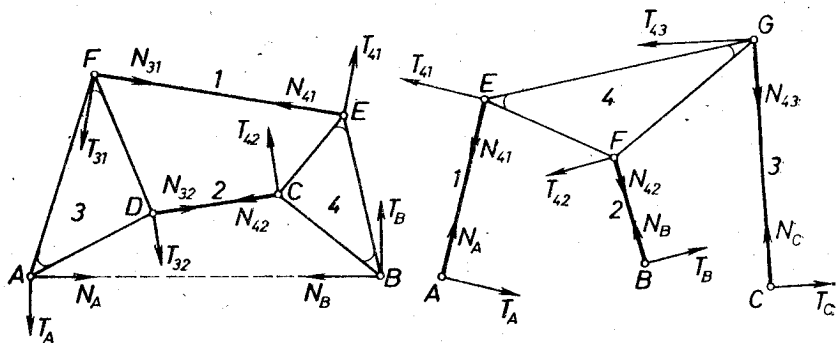


Рис. 10.10.

Уравнения (7), (8), (9) и (7'), (8'), (9') имеют одинаковый вид, который можно выразить так:

$$\begin{aligned} a_2 N_2 + a_3 N_3 &= a, \\ b_1 N_1 + b_3 N_3 &= b, \\ c_1 N_1 + c_2 N_2 &= c. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно формулам Крамера

$$N_i = \frac{a_2 b_3 c + a_3 b c_2 + a b_3 c_2}{a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2}. \quad (14)$$

Таким образом, сперва следует решать первые шесть уравнений, каждое из которых содержит одно неизвестное; затем по формулам (14) и (13) решают систему из трех следующих уравнений, где в каждом уравнении имеются два неизвестных, и наконец, последние три уравнения, в каждом из которых имеется одно неизвестное.

§ 10.6. Принцип Даламбера — Лагранжа и рычаг Жуковского

В ходе кинетостатического расчета механизма, как было видно, получают реакции, действующие в подвижных соединениях звеньев, и по окончании этого расчета — уравнивающую силу или уравнивающий момент. Согласно понятию обобщенной силы (из теоретической механики) обе последние можем называть просто *уравнивающей силой*.

Рассмотрим метод, позволяющий определить уравнивающую силу намного проще, не связывая ее расчет с определением реакций на элементах кинематических пар. Этот метод пригоден для проверки кинетостатического расчета механизма, для определения отдельных реакций (без определения остальных реакций), а также для других целей (определение мощности и типа двигателя и др.), когда необходимо знать только уравнивающую силу. Если принцип возможных перемещений применим для кинетостатического равновесия механической системы, то его можно формулировать как принцип Даламбера — Лагранжа, согласно которому элементарная работа приложенных к механической системе внешних сил и сил инерции всегда равна нулю, т. е.

$$\sum (P_i \delta s_i \cos \alpha_i + M_i \delta \varphi_i) = 0, \quad (10.10)$$

где P_i — приложенная в точке i сила, δs_i — возможное перемещение этой точки, α_i — угол между направлением силы P_i и перемещением δs_i , M_i — момент (пара сил), приложенный к звену i , $\delta \varphi_i$ — возможный угол поворота этого звена.

Заменяя возможные перемещения действительными и разделив обе части уравнения (10.10) на дифференциал времени, получаем другое выражение принципа Даламбера — Лагранжа:

$$\sum (P_i v_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i) = 0. \quad (10.11)$$

Следовательно, в подвижном механизме мгновенная мощность активных сил, сил сопротивления и сил инерции всегда равна нулю.

Для аналитических расчетов плоских механизмов уравнению (10.11) можем придать более удобную форму:

$$\sum [(X_i + J_{ix}) \dot{x}_i + (Y_i + J_{iy}) \dot{y}_i + (M_j + W_j) \omega_j] = 0, \quad (10.12)$$

где силы инерции J и моменты сил инерции W показаны отдельно.

Если движение механизма известно, то из уравнения (10.11) или (10.12) можем определить одну неизвестную силу (если известно ее направление) или момент, который может быть также уравновешивающим моментом. Реакции в этих уравнениях отсутствуют, так как они работу не совершают и их мощность равна нулю.

Ознакомимся с графической интерпретацией принципа Даламбера — Лагранжа, предложенной проф. Н. Е. Жуковским.

Отложим (рис. 10.11) скорость v_i точки действия силы P_i от произвольно выбранной точки o и в конце этого вектора приложим силу P_i . Поворачиваем скорость v_i на угол 90° , сохраняя направление силы неизменным. Видно, что

$$P_i v_i \cos \alpha_i = P_i \dot{v}_i \cos \alpha_i = P_i h_i, \quad (1)$$

т. е., если приложим силу к концу вектора скорости точки действия этой силы, повернутой на 90° , то *мощность силы выражает момент силы относительно полюса плана*.

Полярный план повернутых скоростей, на котором изображены скорости точек действия сил, к концам которых приложены соответствующие силы, называется *рычагом Жуковского*. Такое название возникло потому, что этот план скоростей можно принять за твердое тело с неподвижным шарниром в полюсе плана, т. е. образуется рычаг.

Условимся, что, применяя рычаг Жуковского, все моменты заменяются соответствующими парами сил. Тогда, учитывая выражение (1), уравнение (10.11) напомним так:

$$\sum P_i h_i = 0. \quad (10.13)$$

Таким образом получен графический вариант принципа Даламбера — Лагранжа: *рычаг Жуковского для механизма всегда находится в равновесии*.

Если в принцип Даламбера — Лагранжа не включаются силы инерции, то имеем принцип возможных перемещений, который с помощью рычага Жуковского выражается так: *рычаг Жуковского находится в равновесии только тогда, когда в равновесии находятся приложенные к механизму силы*. Равновесие сил имеет место в неподвижном механизме и в механизме, в котором все звенья сбалансированы и движутся равномерно.

Формула (10.13) действительна независимо от масштаба плана скоростей. Поэтому, строя план скоростей для рычага Жуковского, модуль первой скорости можем выбрать произвольно; для этой цели можем строить план скоростей также непосредственно на схеме механизма. Формулы (10.11) и (10.12), которые заменяют рычаг Жуковского в аналитическом расчете, при неизвестных скоростях также остаются действительными, если их члены разделим на какую-то скорость. Так как отношения скоростей (передаточные отношения) не зависят от движения механизма, то в упомянутых расчетах законы движения ведущих звеньев механизма не нужно знать.

Пример 10.2. Определить уравновешивающий момент M_1 поршневого компрессора с качающимся цилиндром, кинестатический расчет которого проведен в примере 10.1.

Решение. Наиболее просто уравновешивающий момент можно определить аналитически. Для этого составляем соответствующее формулам (10.11) и (10.12) уравнение

$$M_1\omega_1 + (W_2 + W_3)\omega_2 + J_{2x}\dot{x}_c + J_{2y}\dot{y}_c + G_2\dot{y}_c + P_2v_{23} = 0, \quad (2)$$

где единственным неизвестным является уравновешивающий момент M_1 , так как ω_1 , G_2 , P_2 заданы в задаче; ω_2 , \dot{x}_c , \dot{y}_c , v_{23} определены кинематическим расчетом; W_2 , W_3 , J_{2x} , J_{2y} определены при подготовке к кинестатическому расчету; значения всех упомянутых величин можно найти в примере 10.1.

Члены уравнения (2) выражают мощности. Мощность является положительной, если проекции сил и скоростей, а также момент и угловая скорость имеют одинаковые знаки. Учитывая, что ω_1 отрицательна, определенный из уравнения (2) уравновешивающий момент $M_1 = -29,1$ кгс·м.

Определение уравновешивающего момента при помощи рычага Жуковского показано на рис. 10.12. Здесь в выбранном масштабе построена кинематическая схема механизма и приложены силы P_2 , P_3 , J_2 , G_2 . Не показаны

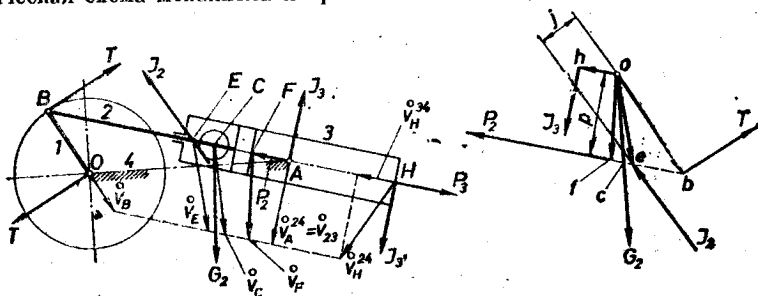


Рис. 10.12.

силы G_1 и G_3 , так как точки приложения их неподвижны, поэтому мощность этих сил равна нулю. Момент W_3 сил инерции заменен парой сил $J_3 \cdot AN$, где плечо AN можем выбрать произвольно (однако на кинематической схеме механизма оно должно быть изображено в масштабе), а $J_3 = W_3/AN$. Одну из сил J_3 приложим к неподвижной точке A , чтобы мощность этой силы была равна нулю. Неизвестный уравновешивающий момент также заменен парой сил $M = T \cdot OB$, одна из сил T которой приложена к неподвижной точке O . Из условий равновесия рычага Жуковского определяется уравновешивающая сила T , приложенная в точке B .

Строим план скоростей, повернутых на 90° . Повернутые векторы скоростей точек приложения сил B , E , C , F , H шатуна 2 пересекаются в мгновенном центре вращения шатуна, который выходит за пределы рисунка,

а концы векторов скоростей находятся на прямой, параллельной оси шатуна — цилиндра. Векторы скоростей упомянутых точек откладываем от произвольно выбранной точки o и получаем полярный план повернутых скоростей, где $ob = v_B$, $oc = v_E$, и т. д. К концам повернутых векторов скоростей приложим соответствующие им силы T , J_2 , G_2 , P_2 , J_3 , получая таким образом рычаг Жуковского. Из уравнения равновесия рычага

$$T \cdot ob - P_2 p - J_2 j - G_2 g + J_3 \cdot oh = 0$$

находим $T = 146$ кгс. Следовательно, искомый уравновешивающий момент

$$M_1 = T \cdot OB = 146 \cdot 0,2 = 29,2 \text{ кгс} \cdot \text{м}$$

совпадает с направлением вращения часовой стрелки (отрицательный), незначительно отличается от момента $28,5 \text{ кгс} \cdot \text{м}$, определенного графическим методом кинетостатического расчета, и полностью совпадает с уравновешивающим моментом, определенным аналитически.

Раздел 11

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ В МЕХАНИЗМАХ С ВЫСШИМИ ПАРАМИ

§ 11.1. Определение реакций в кинематических парах кулачковых механизмов

В плоских кулачковых механизмах (§§ 4.2 и 5.7) обычно имеются звенья, входящие в состав одной высшей кинематической пары первого порядка и одной низшей пары. Нормальные реакции на элементах кинематических пар таких звеньев имеют 3 неизвестных.

Так как плоская система сил, действующих на твердое тело, имеет 3 уравнения равновесия, то такие звенья являются статически определяемыми. Это свидетельствует о том, что кинетостатический расчет механизмов с высшими парами проще, чем механизмов с низшими парами.

В машинах часто встречается центральный кулачковый механизм (рис. 11.1), в котором кулачковая шайба 1 вращается с угловой скоростью ω , а толкатель 2 движется поступательно со скоростью v . Механизм имеет стойку 3 и промежуточный элемент — ролик. В качестве примера кинетостатики кулачкового механизма рассмотрим определение реакций этого механизма.

Одновременно ознакомимся с некоторыми основными понятиями теории кулачковых механизмов.

При качении ролика по профилю кулачковой шайбы центр A ролика по отношению к шайбе описывает *штриховую кривую*

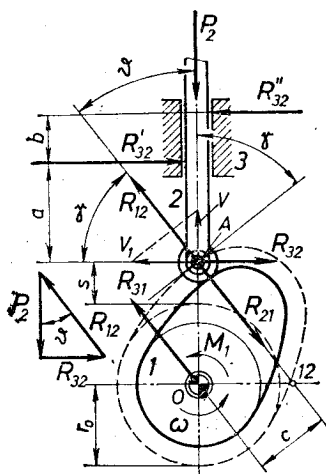


Рис. 11.1.

(рис. 11.1), эквидистантную к профилю и называемую *теоретическим профилем*. Понятие теоретического профиля кулачка выгодно использовать в тех случаях, когда толкатель имеет ролик, а часть его профиля является дугой окружности. В кинематических и кинетостатических расчетах можно считать, что механизм имеет острый толкатель, острие A которого скользит по теоретическому профилю кулачковой шайбы.

Окружность минимального радиуса r_0 определяется наименьшим расстоянием точки A толкателя от оси вращения шайбы. Координата $s = OA - r_0$ определяет *положение* толкателя относительно окружности минимального радиуса. Максимальное ее значение $s_{\max} = H$ называется *ходом* толкателя.

При кинетостатическом расчете кулачковых механизмов трением и весом звеньев обычно пренебрегают.

На толкатель действует сила $\bar{P}_2 = \bar{Q} + \bar{J}_2$, где Q — сила полезного сопротивления (учитывая также силу упругости пружины) и J_2 — сила инерции толкателя. Если сила полезного сопротивления приложена не к толкателю, а к одному или нескольким звеньям, которые приводятся в движение толкателем, то сила Q является приведенным к толкателю полезным сопротивлением (§ 13.3) и J_2 — приведенной к толкателю силой инерции звеньев, приводимых в движение толкателем. Кроме известной силы P_2 , на толкатель в направлении нормали к профилю действует реакция R_{12} кулачковой шайбы и реакция со стороны стойки R_{32} , которая перпендикулярна направлению скольжения. Модули обеих реакций определяют с помощью уравнений равновесия или графически, с помощью показанного на рис. 11.1 силового треугольника, построенного согласно уравнению

$$\bar{R}_{12} + \bar{P}_2 + \bar{R}_{32} = 0. \quad (11.1)$$

Линия действия результирующей реакции R_{32} проходит через точку A , так как три силы, находящиеся в равновесии, пересекаются в одной точке. Составляющие реакции R_{32} определяются с помощью уравнений статики

$$R_{32}'' b = R_{32}' a, \quad R_{32}' = R_{32} + R_{32}'' \quad (11.2)$$

Расстояния a и b можно определить по методу, показанному на рис. 12.6.

На кулачковую шайбу действуют: сила $\bar{R}_{21} = \bar{R}_{12}$, реакция со стороны стойки R_{31} и уравновешивающий момент M_1 . Так как на кулачковую шайбу действуют только две силы, то они равны и противоположно направлены, т. е. $\bar{R}_{31} = -\bar{R}_{21} = \bar{R}_{12}$. Принимая, что $\omega = \text{const}$, из уравнения равновесия

$$M_1 - R_{21} \cdot c = 0; \quad M_1 - \frac{P_2}{\cos \theta} OA \sin \theta = 0 \quad (11.3)$$

определяется уравновешивающий момент M_1 , который может быть вычислен для контроля при помощи рычага Жуковского. Согласно

принципу возможных перемещений

$$M_1\omega - P_2v = 0; \quad M_1 - P_2 \frac{v}{\omega} = 0.$$

Заменяя здесь $P_2 = P_{21} \cos \vartheta$ и $v = v_1 \operatorname{tg} \vartheta = \omega \cdot OA \cdot \operatorname{tg} \vartheta$, получаем тот же результат, что и по уравнению (11.3). Аналогично можно провести кинестатический расчет кулачковых механизмов других типов.

Важным параметром кулачковых механизмов является *угол давления* ϑ , образуемый направлением реакции R_{12} кулачковой шайбы и направлением скорости толкателя v . Чем меньше угол давления, тем лучше функционирует механизм [45], потому что улучшаются условия передачи сил: компонента силы R_{12} , создающая изгибные напряжения в толкателе и увеличивающая реакции со стороны станины, получается меньше.

Хотя угол давления характеризует действие сил, он имеет также тесную связь с движением механизма. Для выяснения этой связи используем принцип Даламбера — Лагранжа (10.11) в отношении толкателя:

$$R_{12}v_1 \cos(90^\circ - \vartheta) - P_2v = 0, \quad (1)$$

где, согласно рис. 11.1,

$$v_1 = \omega(r_0 + s), \quad P_2 = R_{12} \cos \vartheta. \quad (2)$$

Подставляя соотношения (2) в уравнение (1), получаем выражение

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v/\omega}{r_0 + s}. \quad (11.4)$$

Это выражение удобно для определения изменения угла давления в кулачковых механизмах рассматриваемого типа, если использовать для этого диаграмму $v/\omega = f(s)$ (рис. 11.2). Видно, что максимальное значение угла давления появляется вблизи максимального значения аналога скорости толкателя.

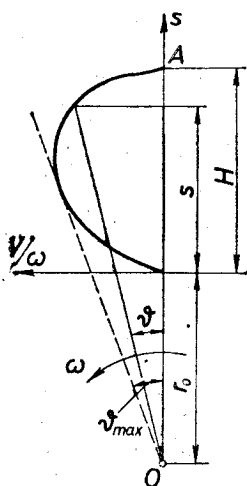


Рис. 11.2.

Исключением является кулачковый механизм b с плоским толкателем (рис. 4.10), у которого угол давления всегда постоянный или равен нулю, если плоскость тарелки нормальна к направлению движения толкателя.

Дополнение угла давления до 90° называется *углом передачи*, т. е. $\gamma = 90^\circ - \vartheta$. Чем ближе этот угол к 90° , тем лучше функционирует механизм.

Определение угла передачи можно дать независимо от угла давления: углом передачи движения называется угол менее 90° , образуемый направлениями абсолютной и относительной скоростей ведомого звена в высшей паре. Углы давления и передачи показаны также на рис. 12.15.

§ 11.2. Определение реакций в кинематических парах зубчатых механизмов

В механизмах с круглыми зубчатыми колесами равномерному вращению ведущего колеса соответствует равномерное вращение всех остальных колес. Центры тяжести колес обычно находятся на их осях вращения. Поэтому в зубчатых передачах с неподвижными осями равнодействующая сил инерции звеньев равна нулю. При равномерном движении этих механизмов имеет место статическое равновесие сил. Однако при расчете планетарных механизмов необходимо учитывать также силы инерции сателлитов (центробежные силы). Трением, как обычно при определении реакций, пренебрегаем.

Каждое плоское зубчатое колесо, так же как звенья в кулачковых механизмах, статически определимо, если в зацеплении находится одна пара профилей, поэтому определение реакций упрощается по сравнению с механизмами, имеющими низшие пары.

Если ведущее колесо обозначим 1, а ведомое колесо n , то, не учитывая трения, в любой зубчатой передаче согласно принципу Даламбера — Лагранжа (10.11)

$$M_1 \omega_1 - M_n \omega_n = 0, \quad (11.5)$$

где M_1 — движущий момент, совпадающий по направлению с угловой скоростью ω_1 ведущего колеса, а M_n — уравнивающий момент, направленный противоположно угловой скорости ω_n ведомого вала.

Уравнение (11.5) выражает равенство мощностей обоих моментов, так как потери энергии при кинестатическом расчете игнорируются. Из этого выражения уравнивающий момент

$$M_n = M_1 u_{1n}, \quad (11.6)$$

т. е. уравнивающий момент зубчатой передачи равен произведению движущего момента и передаточного отношения. При желании можно получить из этой формулы также направление уравнивающего момента. Для этого следует подставить в эту формулу u_{1n} со своим знаком (§ 7.1) и, кроме того, в правой части уравнения (11.6) поставить знак минус.

Рассмотрим определение реакций для круглых цилиндрических колес с прямыми зубьями, профили (линии пересечения рабочих поверхностей зубьев с плоскостью, перпендикулярной оси колеса) которых выполнены в виде эвольвент, преимущественно используемых в машиностроении. Особое свойство этих колес следующее: нормали к профилям зубьев в точке S (рис. 5.14) их соприкосновения (точка зацепления) и относительный полюс P (рис. 5.14) при работе колес не меняют свое положение и направление. Зубья соприкасаются только на этой относительно неподвижной нормали (линии зацепления), которая образует угол α (угол зацепления) с прямой, перпендикулярной линии центров

колес. В тот момент, когда точки S и P совпадают, угол давления равен углу зацепления (§ 11.1).

Изобразим колеса их относительными центроидами (начальными окружностями), которые на рис. 4.11 показаны штриховыми линиями.

На рис. 11.3 показана простая зубчатая передача. Приложенные в точке зацепления S реакции $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$ направлены вдоль

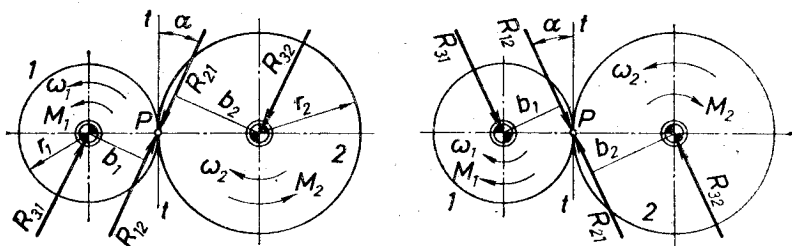


Рис. 11.3.

линии зацепления. В статике сила является скользящим вектором, поэтому обе реакции можно приложить в полюсе зацепления P . Величины этих реакций определяем из уравнения условий равновесия колеса 1:

$$M_1 - R_{21}b_1 = 0, \quad (1)$$

где $b_1 \equiv r_1 \cos \alpha$. Следовательно,

$$R_{21} = R_{12} = \frac{M_1}{r_1 \cos \alpha}. \quad (11.7)$$

Моменты M_1 и M_2 уравниваются парами сил. Поэтому реакции со стороны стойки R_{31} и R_{32} равны по величине и направлению соответственно реакциям R_{12} и R_{21} .

Из уравнений равновесия колеса 2

$$M_2 - R_{12}b_2 = 0, \quad (2)$$

учитывая выражение (11.7), получаем уравнивающий момент

$$M_2 = R_{12}b_2 = \frac{M_1}{r_1 \cos \alpha} r_2 \cos \alpha = M_1 \frac{r_2}{r_1} = M_1 u_{12},$$

что согласуется с формулой (11.6).

Отметим, что реакции в полюсе зацепления (в этом случае также все остальные реакции) отклоняются от общей касательной $t-t$ начальных окружностей на угол зацепления α в одну или в другую сторону в зависимости от направления вращения ведущего колеса. Показанные на рис. 11.3 передачи одинаковы, однако ведущие колеса 1 вращаются в разных направлениях. В связи с этим реакции отклонены в разные стороны от линии $t-t$. Для определения отклонения α можно использовать следующее прави-

ло: каждое колесо воздействует на свое парное колесо с силой, направленной в сторону парного колеса.

На рис. 11.4 показаны реакции в передаче с паразитным колесом 2. Так же, как и в предыдущем случае, из уравнения (1) определяют $R_{21} = R_{12}$.

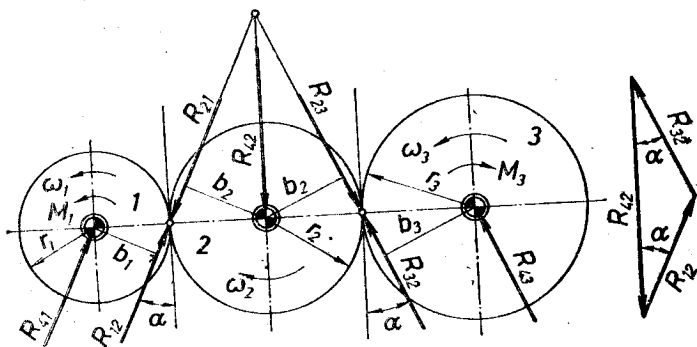


Рис. 11.4.

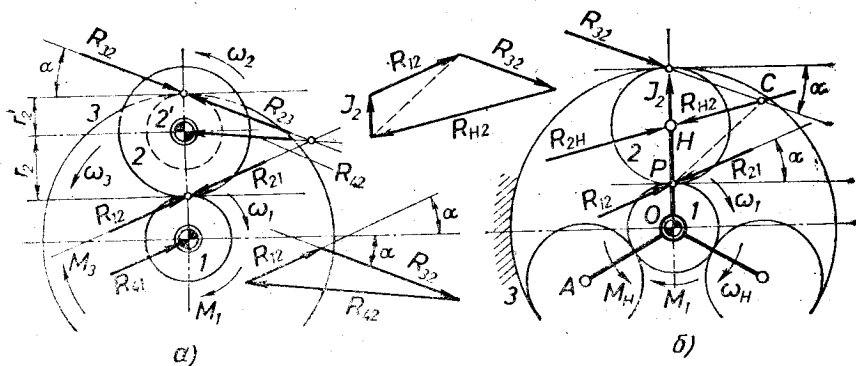


Рис. 11.5.

Уравнение равновесия колеса 2

$$R_{12}b_2 - R_{32}b_2 = 0$$

свидетельствует о том, что $R_{32} = R_{12} = R$. Следовательно, шесть реакций равны между собой, а седьмая реакция

$$R_{42} = 2R \cos \alpha. \quad (11.8)$$

В двухступенчатой передаче (рис. 11.5, а) промежуточные колеса 2 и 2' представляют собой одно звено 2. Так же как в предыдущих случаях, из уравнения (1) определяют $R_{21} = R_{12}$ и потом с помощью уравнения равновесия колеса 2

$$R_{12}b_2 - R_{32}b_2 = 0$$

определяют реакцию

$$R_{32} = R_{23} = R_{12} \frac{b_2}{b'_2} = R_{12} \frac{r_2}{r'_2} = \frac{M_1 r_2}{r_1 r'_2 \cos \alpha}. \quad (11.9)$$

Радиусы начальных окружностей качения r и плечи b реакций на рис. 11.5 не показаны. Реакцию R_{12} находят графически или аналитически, согласно рисунку. Уравновешивающий момент M_3 находят из уравнения равновесия колеса 3:

$$R_{23} b_3 - M_3 = 0; \quad M_3 = R_{23} b_3 = M_1 \frac{r_2 r_3}{r_1 r_2} = M_1 u_{12} u_{23} = M_1 u_{13}.$$

Это согласуется с формулой (11.6).

При расчете планетарной передачи (рис. 11.5, б) принимается, что все три сателлита нагружены одинаково. Из уравнения равновесия (1) колеса 1 с учетом (11.7) при трех сателлитах получаем

$$R_{21} = R_{12} = \frac{M_1}{3r_1 \cos \alpha}. \quad (11.10)$$

Центробежная сила сателлита

$$J_2 = AO \cdot \omega_H^2 m_2.$$

При построении плана сил, согласно уравнению равновесия сателлита, откладывают J_2 , R_{12} и находят их равнодействующую $J_2 + R_{12}$; через полюс зацепления P проводят параллельную ей линию PC до пересечения в точке C с направлением реакции R_{32} . Направление реакций R_{H2} также проходит через точку C . Замыкая план сил найденными направлениями, получают реакции R_{32} и R_{H2} .

Из уравнения равновесия моментов сателлита относительно центра сателлита находят, что $R_{32} = R_{12} = R$, поэтому

$$R_{H2} = \sqrt{J_2^2 + (2R \cos \alpha)^2}.$$

Из уравнения равновесия водила

$$M_H - 3(2R \cos \alpha) \cdot OA = 0,$$

где $OA = r_3 - \frac{r_3 - r_1}{2} = \frac{r_3 + r_1}{2}$, находят уравновешивающий момент

$$M_H = 6R \cos \alpha \cdot OA = 6 \frac{M_1}{3r_1 \cos \alpha} \cos \alpha \frac{r_3 + r_1}{2} = M_1 \left(1 + \frac{r_3}{r_1}\right).$$

ТРЕНИЕ В ПОДВИЖНЫХ СОЕДИНЕНИЯХ

§ 12.1. Виды и свойства трения

В природе и в технике на каждом шагу встречаемся с равновесием тел и их частиц под воздействием тангенциальных сил и также с преобразованием в теплоту и рассеянием (диссипацией) механической энергии. Причиной этих явлений является трение. В газах, в жидкостях и в твердых телах имеет место *внутреннее трение*, а на контактных поверхностях тел — *внешнее трение*. Внешнее трение имеет два ярко отличных вида — *трение скольжения* и *трение качения*.

Трение скольжения обычно называется просто *трением*. Трение является одним из наиболее сложных явлений. Трение исследовалось многими учеными: Леонардо да Винчи (XVI столетие), Амонтоном (XVII столетие) и Кулоном (XVIII столетие), однако и сегодня проблема трения полностью не решена [40].

Трение определяется механическими и молекулярными процессами на поверхностях скольжения. Оно зависит от материалов и чистоты обработки поверхностей, от пленки (оксидов), покрывающей поверхности, от промежуточного слоя (газ, жидкость), продолжительности неподвижного контакта, скорости приложения активных сил, скорости относительного скольжения, температуры, давления на поверхностях контакта и др.

Не каждое тангенциальное сопротивление является трением. Если, например, в поверхностях появляются заметные микроповреждения или поверхности начинают свариваться, то это уже не трение. Трение зависит не от номинальной площади соприкасающихся поверхностей, а от фактической контактной поверхности, которая в свою очередь зависит от материалов, чистоты обработки поверхностей, от нормальной реакции и составляет 0,001% — 10% номинальной площади. Неровности поверхностей в машиностроении имеют высоту от 0,1 до 200 мкм. Трение в подвижных соединениях связано с износом, т. е. с отрывом частиц материала и с выделением тепла. Нагреваются подшипники, муфты трения и тормоза. Поэтому следует обратить внимание на поддержание желаемого температурного режима в подвижных соединениях. У поверхности скольжения тормозов возникает температура до 1000°C, а их материалы нагреваются до 400°C.

Трение в механизмах бывает как полезное, так и вредное. С точки зрения трения подвижные соединения разделяются на антифрикционные и фрикционные соединения.

Нижние кинематические пары, наибольшая часть высших пар и другие подвижные соединения выполняются как *антифрикционные соединения*: выбираются соответствующие материалы контактных поверхностей, смазочные материалы и способы смазки.

Одна скользящая поверхность изготавливается из стали, а другая из бабита (сплав олова, свинца, антимона, меди и других элементов), бронзы (сплав олова и меди с добавкой фосфора или других элементов), латуни (медь с цинком), металлокерамических или графитовых материалов (позволяющих обойтись даже без смазочных материалов), твердой резины (для которой смазочный материал — вода), пластмассы, пластифицированной древесины или другого антифрикционного материала. Применяются гальванические покрытия (олово, кадмий) стальных поверхностей и тонкие вкладыши подшипников. В высших парах обе соприкасающиеся поверхности выполнены из стали с тщательной механической и термохимической обработкой. В некоторых случаях внешнее трение заменяется внутренним трением с применением упругих (стальных, деревянных, резиновых) промежуточных элементов подвижных соединений.

В механизмах без избыточных связей трение мешает самостановке звеньев. Поэтому рекомендуется провести соответствующий расчет подвижных соединений [72].

Фрикционные соединения используются для обеспечения качения в фрикционных механизмах и также для достижения необходимых тангенциальных сил в ремённых передачах, тормозах, сцеплениях и в других механизмах. Здесь также одна поверхность изготовлена из стали, а другая — из фрикционного материала (чугун, кожа, композиты: асбест — каучук, асбест — смола, металлокерамика с пластмассовым наполнением и др.). Разработать теорию фрикционных и антифрикционных явлений до настоящего времени не удалось.

Трение полезно используется также в самотормозящихся механизмах, которые не позволяют полезному сопротивлению привести в движение механизм (крепёжные винтовые соединения, винтовые домкраты, зажимные механизмы).

Часто трение в механизмах (в тормозах, в сцеплениях) создаёт автоколебания с характерным звуком.

Трение разделяется на сухое, полусухое, полужидкостное и жидкостное трение.

Модификациями сухого трения являются чистое трение и граничное трение. Чистое трение на практике не встречается, так как чистые поверхности с трудом можно получить только в лабораторных условиях. Трение между чистыми поверхностями большое; оно увеличивается с увеличением гладкости поверхностей, так как начинают действовать молекулярные силы веществ обоих тел и возможно сваривание. В обычных условиях контактные поверхности покрыты пленкой, и сухое трение проявляется как граничное трение.

Полусухое и полужидкостное трение появляются в том случае, когда между контактными поверхностями находится масло или другой смазочный материал и одновременно соприкасаются покрытые пленкой неровности поверхностей. Эти виды трения наиболее часто встречаются в механизмах.

Для пояснения принципов технических расчетов сухого, полусухого и полужидкостного трения рассмотрим (рис. 12.1) находящееся на горизонтальной плоскости тело, к которому приложена тангенциальная активная сила P , равномерно возрастающая от нуля.

Когда сила P небольшая, она не может сдвинуть тело, так как опора 2 на тело 1 воздействует силой трения покоя F . Силу трения покоя можем определить только из условий равновесия тела, которые для рассматриваемого простейшего случая следующие:

$$\begin{aligned} P - F &= 0, & N - G &= 0, \\ eG - hP &= 0, \end{aligned}$$

где N — нормальная реакция, G — вес тела.

В момент трогания сила трения покоя достигает максимального значения, называемого *предельной силой трения покоя* F_0 . Эта сила зависит от времени существования периода относительного покоя, нелинейно возрастая с течением времени до некоторого предела. При дальнейшем росте силы P равновесие нарушается и начинается ускоренное движение тела 1.

Во время движения на тело 1 действует *сила трения движения* F , которая в технических расчетах обычно принимается как постоянная. Сила трения движения обычно меньше, чем предельная сила трения покоя.

Учитывая, что явление трения недостаточно исследовано и сила трения зависит от многих факторов, силу трения движения определяют по закону Амонтона — Кулона

$$F = fN. \quad (12.1)$$

Аналогично определяют также предельную силу трения покоя

$$F_0 = f_0 N. \quad (12.2)$$

В механизмах почти всегда имеют место сотрясения. Поэтому вместо коэффициента трения покоя f_0 часто используют коэффициент трения движения f .

Закон Амонтона — Кулона очень упрощает расчет обеих сил трения. Однако большие трудности возникают при выборе из справочников [41] соответствующего конкретным условиям коэффициента трения. Для приближенных расчетов можно использовать значения коэффициента трения, данные в табл. 12.1.

Во время движения тело 2 воздействует на тело 1 с суммарной реакцией $\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}$. Суммарная реакция образует

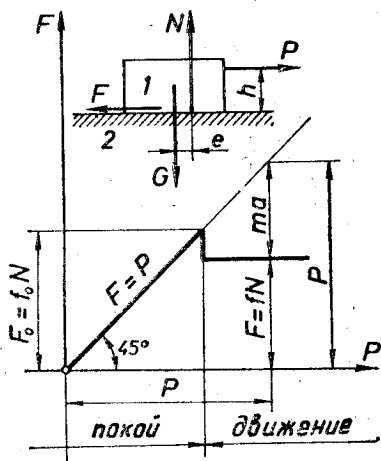


Рис. 12.1.

с нормалью контактных поверхностей угол, тангенс которого равен F/N . Следовательно, *угол между суммарной реакцией и нормалью контактных поверхностей равен углу трения*. Если тело 1 меняет направление скольжения, то суммарная реакция

Т а б л и ц а 12.1

Материалы	f		f_0	
	сухие	смазаны	сухие	смазаны
Сталь — сталь	0,13	0,10	0,15	0,11
Сталь — бронза	0,10	0,09	0,11	0,10
Чугун — дерево	0,82		0,8—0,5	
Чугун — кожа	0,26		0,8—0,5	
Сталь — лед	0,014		0,027	

вокруг нормали контактных поверхностей описывает *конус трения*. Тангенс угла трения равен *коэффициенту трения*:

$$f = \operatorname{tg} \varphi. \quad (12.3)$$

Если контактная поверхность тел 1 и 2 образует угол φ с горизонтальной плоскостью, а сила $P=0$, то тело 1 под действием силы тяжести скользит равномерно.

В положении равновесия, перед троганием, активная равнодействующая $\vec{P} + \vec{G} = -\vec{R} = -(\vec{N} + \vec{F})$ расположена на поверхности конуса трения, а во время ускоренного движения находится вне конуса. Следовательно, действующая активная сила не может сдвинуть тело, если эта сила находится внутри конуса трения. Это является простым случаем самоторможения.

Если контактная поверхность не является плоскостью, то закон (12.1) действителен только в пределах такого ее элемента, который можно рассматривать как плоский. Поступая таким образом, с помощью интегрирования получают формулу Эйлера

$$P = Qe^{f\alpha} \quad (12.4)$$

для определения трения гибкой связи (рис. 12.2), где P является минимальной силой, с которой можно достичь скольжения гибкой связи по неподвижному цилиндру, f — коэффициент трения между гибкой связью и поверхностью цилиндра, α — угол обхвата, Q — сила, приложенная на втором конце связи, e — основание натуральных логарифмов.

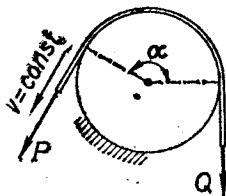


Рис. 12.2.

Жидкостное или гидродинамическое трение является самым желательным видом трения в антифрикционных соединениях, так как между скользящими поверхностями находится слой масла, поэтому коэффициент трения небольшой (рис. 12.3) и износ минимальный. Внешнее трение здесь заменяется внутренним трением масла. Для достижения этого вида трения необходимо, чтобы между скользящими поверхностями

образовалась клиновидная щель определенных размеров и относительная скорость скольжения была достаточно большой. Размеры и другие параметры подшипников, работающих в условиях жидкостного трения, определяемы согласно теории [19], основоположниками которой были Н. Петров (1836—1920) и О. Рейнольдс (1842—1912). Теорию жидкостного трения рассматривают в курсе деталей машин.

Разновидностью гидродинамического трения является аэродинамическое трение, когда контактные поверхности разделяются



Рис. 12.3.

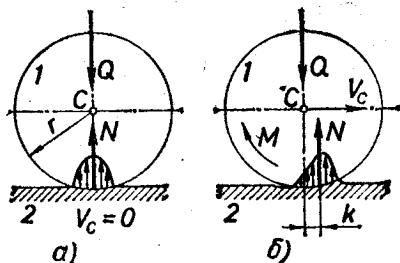


Рис. 12.4.

промежуточным слоем воздуха. Подшипники с аэродинамическим трением пригодны в аппаратах, где необходимо строго соблюдать чистоту, если частота вращения ротора большая ($3000—260\,000\text{ мин}^{-1}$) и особенно если ротор приводится во вращение воздушной турбиной [105]. С промежуточным слоем воздуха можно создать также поступательные пары [15].

Трение качения представляет собой сопротивление качению, причиной которого, по упрощенной схеме, является деформация тел в месте их контакта. Если, например, цилиндр, нагруженный вертикальной центральной силой Q , находится в положении покоя (рис. 12.4, а), то нормальная реакция N также является центральной и эпюра давлений ей симметрична. Если цилиндр находится в движении (рис. 12.4, б), то эпюра давлений становится несимметричной, нормальная реакция N смещается в направлении скорости v_c оси цилиндра на расстояние k , называемое коэффициентом трения качения. Для поддержания качения к цилиндру необходимо приложить активный момент M , который уравновешивает момент сопротивления качению

$$M_k = kN, \quad (12.5)$$

возникающий в результате действия пары сил (Q, N).

Если для поддержания равномерного качения вместо момента M_k к оси цилиндра в направлении скорости v_c приложим силу P , то в точке контакта опорная поверхность 2 будет действовать на цилиндр с противоположно направленной силой трения $F = P$ и опять возникнет активная пара сил $P r = kN$, откуда

$$P = \frac{k}{r} N. \quad (12.6)$$

Если активная сила P больше предельной силы трения $F = fN$, то одновременно с качением возможно также скольжение. В случае чистого качения необходимо, чтобы $fN > P$, или, учитывая формулу (12.6),

$$f > \frac{k}{r}. \quad (12.7)$$

Следовательно, с помощью силы, приложенной к центру цилиндра, можно достичь чистого качения, если выполнено условие (12.7). Некоторые ориентировочные величины коэффициентов

Т а б л и ц а 12.2

Характеристика пары качения	k (см)
Закаленная сталь — закаленная сталь	0,0005—0,0010
Сталь — сталь, чугун — чугун	0,005
Пневматические шины — шоссе	0,24
Пневматические шины — газон	1,0—1,5

трения качения приведены в табл. 12.2. С точки зрения сопротивления качению нет особой разницы между пневматическими шинами и шинами из жесткого материала. Коэффициент трения качения для колес железнодорожных вагонов, с учетом влияния реборды колеса, принимают равным $k = 0,05$ см.

§ 12.2. Трение в поступательных парах и на наклонной плоскости

В движении каждое из звеньев поступательной пары действует на другое с силой трения, которая зависит не только от коэффициента трения и нормальной реакции, но и от вида скользящей поверхности, от положения линий действия сил и от распределения давления между скользящими поверхностями, т. е. сила трения

$$F = F(f, Q, a, b, \dots), \quad (1)$$

где Q — активная сила (нагрузка), перпендикулярная к скользящей поверхности, численно равная общей нормальной составляющей реакции.

Если скользящая поверхность является плоскостью, то, согласно закону (12.1), функция (1) принимает простейший вид:

$$F = fQ. \quad (12.8)$$

Это простое выражение силы трения можно применять во всех других случаях, записав ее в следующем виде:

$$F = f'Q, \quad (12.9)$$

где вместо коэффициента трения введена величина

$$f' = \frac{F}{Q} = f'(f, a, b, \dots), \quad (12.10)$$

называемая *приведенным коэффициентом трения*. Аналогично определяется приведенный коэффициент трения и в других подвижных соединениях. В конкретном случае приведенный коэффициент трения позволяет удобно сравнивать трение в поступательной паре с трением на плоской скользящей поверхности.

Поступательную пару часто выполняют в форме клиновидного ползуна в направляющей (рис. 12.5, а). При движении ползуна 1

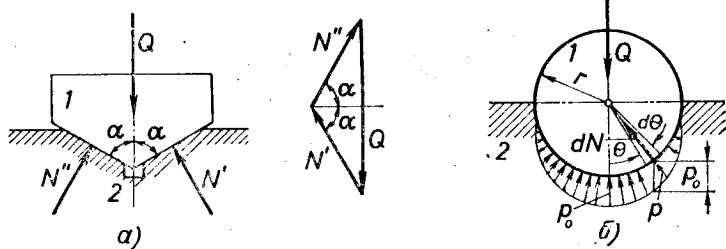


Рис. 12.5.

перпендикулярно к плоскости рисунка на него действует результирующая сила трения

$$F = F' + F'' = f(N' + N''). \quad (2)$$

Из условия равновесия сил вытекает, что

$$N' = N'' = \frac{Q}{2 \sin \alpha}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2), получаем

$$F = \frac{f}{\sin \alpha} Q,$$

т. е. приведенный коэффициент трения в клиновидной поступательной паре есть

$$f' = \frac{f}{\sin \alpha}. \quad (12.11)$$

Клиновидная направляющая увеличивает трение: если $\alpha \rightarrow 0$, то $f' \rightarrow \infty$. Этот эффект используется в клиноременных передачах, в крепежных болтах и др.

В плоских механизмах часто встречаются поступательные пары, которые в действительности являются цилиндрическими парами (например, в поршневых машинах). Выясним, каким получается приведенный коэффициент трения для круглой цилиндрической поступательной пары (рис. 12.5, б), рассматривая три разных случая.

1. Из-за различия радиусов скользящих поверхностей (имеется зазор) звенья 1 и 2 соприкасаются в пределах узкой полоски, поэтому силу трения определяем по формуле (12.8). В этом случае действительный и приведенный коэффициенты трения равны.

2. Вся полуцилиндрическая поверхность ползуна соприкасается с такой же поверхностью направляющей. Такую поступательную пару можем рассматривать как совокупность бесконечно многих клинообразных поступательных пар, так как каждый элемент $lr d\theta$ скользящей поверхности, соответствующий центральному углу $d\theta$, является узкой элементарной поверхностью длиной l . На этой поверхности действует нормальная реакция

$$dN = plr d\theta, \quad (3)$$

для которой действителен закон Амонтона — Кулона

$$dF = f dN = fplr d\theta, \quad (4)$$

если принять, что давление p во всех точках элемента скользящей поверхности одинаково.

Если давление на всей скользящей поверхности одинаково (гипотеза Вейсбаха), то, интегрируя выражение (4) и учитывая симметричность сил относительно плоскости продольного сечения, получаем

$$F = 2f \int_0^{\pi/2} dN = 2flrp \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi flrp. \quad (5)$$

Условие равновесия ползуна 1 следующее:

$$Q = 2 \int_0^{\pi/2} dN \cos \theta = 2lrp \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2lrp, \quad (6)$$

откуда

$$p = \frac{Q}{2rl}. \quad (7)$$

Следовательно, давление, равномерно распределенное по поверхности полуцилиндра, равно давлению на поверхности продольного сечения этого цилиндра, которое перпендикулярно силе Q . Разделив (5) на (6), получаем приведенный коэффициент трения

$$f' = \frac{\pi}{2} f = 1,57f. \quad (12.12)$$

3. Скользящие поверхности соприкасаются, как и в предыдущем случае, но давление в каждой точке пропорционально износу, форма которого соответствует малому перемещению ползуна l в направлении силы Q (гипотеза Рейе). В этом случае (рис. 12.5, б) давление

$$p = p_0 \cos \theta. \quad (8)$$

Подставляя это выражение в формулу (3) и интегрируя, получаем

$$F = 2flrp_0, \quad Q = \frac{\pi}{2} lrp_0,$$

и согласно (12.10) приведенный коэффициент трения

$$f' = \frac{4}{\pi} f = 1,27f. \quad (12.13)$$

Приведенный коэффициент трения круглой цилиндрической поступательной пары можем выразить в форме

$$f' = cf, \quad (12.14)$$

где множитель c в рассмотренных трех случаях принимает значения 1; 1,57; 1,27. Наиболее часто применяется последнее значение.

Рассмотрим поступательную пару с эксцентрической нагрузкой (рис. 12.6), пренебрегая влиянием поперечных размеров ползуна. К ползуну приложена активная суммарная сила $\bar{P} = \bar{V} + \bar{H}$, и ползун движется в направлении составляющей H . Поэтому суммарные реакции R' и R'' образуют с нормальными скользящих поверхностей углы $\varphi = \arctg f$. Если $v = \text{const}$, то векторная сумма результирующих реакций R', R'' или нормальных составляющих реакций N', N'' и сил трения F', F'' замыкаются силой P . Отсюда суммарная сила трения $F = F' + F'' = H = P \sin \alpha$, и приведенный коэффициент трения

$$f' = \frac{F}{V} = \frac{f(N' + N'')}{V} = \frac{P \sin \alpha}{P \cos \alpha} = \text{tg } \alpha. \quad (9)$$

Однако в случае равновесия не только замыкается треугольник сил, но все три силы P, R', R'' должны пересекаться в одной точке A , положение которой зависит от распределения давления на скользящей поверхности. Поэтому данной силе P и углу α соответствует только одно положение уравновешенного движения ползуна, которое определено расстоянием b , и приведенный коэффициент трения является функцией расстояния b и длины l направляющей. Найдем эту функцию.

Если не учитывать поперечных размеров ползуна, то давление на скользящих поверхностях, следовательно, и нормальные

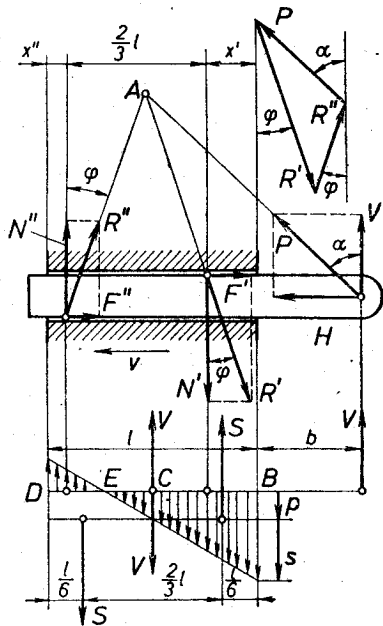


Рис. 12.6.

реакции, определяются только составляющей V . Приложим к точке C ползуна, соответствующей центру направляющей, две противоположно направленные силы V . Теперь на ползун действуют центральная сила V , которая создает на всей длине направляющей одинаковое давление p , и пара сил

$$V \cdot \left(b + \frac{1}{2}\right) = S \frac{2}{3} l. \quad (10)$$

Если принять гипотезу о линейном распределении давления, то силы S проходят через центры тяжести площадей двух одинаковых прямоугольных треугольников — эпюр давлений, вызываемых вышеупомянутой парой сил. На концах направляющей, соответственно высотам треугольников, действует давление $s = cp$, где c — пока неизвестный коэффициент. Суммируя равномерные и распределенные по треугольнику давления p , получаем эпюры суммарных давлений — два неодинаковых прямоугольных треугольника с основаниями BE и DE . Суммарные давления, приложенные к ползуну, дают нормальные реакции N' и N'' , которые проходят через центры тяжести этих треугольников, определяемые координатами x' и x'' . Длины BE и DE определяют из уравнений

$$\frac{BE}{DE} = \frac{s+p}{s-p} = \frac{c+1}{c-1}, \quad BE + DE = l,$$

и тогда

$$x' = \frac{1}{3} BE = \frac{l}{6} \frac{c+1}{c}, \quad x'' = \frac{1}{3} DE = \frac{l}{6} \frac{c-1}{c}, \quad (11)$$

где c определим из уравнения (10):

$$\frac{S}{V} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{l}\right) = \frac{sl}{4pl} = \frac{s}{4p}; \quad c = \frac{s}{p} = 3 \left(1 + \frac{2b}{l}\right). \quad (12)$$

Из условий равновесия

$$N' \frac{2}{3} l = V \left(b + x' + \frac{2}{3} l\right), \quad N'' \frac{2}{3} l = V (b + x')$$

находятся нормальные реакции

$$N' = V \left[1 + \frac{3}{2l} (b + x')\right], \quad N'' = V \frac{3}{2l} (b + x'). \quad (13)$$

Подставляя выражения (13) в формулу (9) и учитывая формулы (11) и (12), получаем выражение приведенного коэффициента трения

$$f' = f \left[1 + \frac{2}{3} \frac{(1+3k)^2}{1+2k}\right], \quad (12.15)$$

где $k = b/l$. Сила P может сдвинуть ползун, если $H > F = V \cdot f'$, т. е. если $V \operatorname{tg} \alpha > V f'$ или

$$\operatorname{tg} \alpha > f'. \quad (12.16)$$

Называя угол $\varphi' = \text{arctg } f'$ приведенным углом трения, получим условие трогания ползуна

$$\alpha > \varphi'. \quad (12.17)$$

Если $\alpha < \varphi'$, в поступательной паре возникает самоторможение, и сила P любой величины не может сдвинуть ползун. То же самое получается с кривошипно-ползунным механизмом (рис. 6.18), если его приводит в движение кривошип, и в каком-то положении механизма угол наклона шатуна $\psi > 90^\circ - \varphi'$; тогда сила, действующая в направлении шатуна, проходит внутри конуса трения π , следовательно, не может сдвинуть ползун.

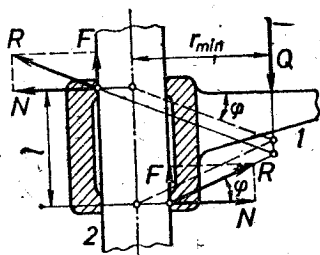


Рис. 12.7.

Самоторможение в поступательных парах используется на практике. Если, например (рис. 12.7), звено 1 под воздействием нагрузки и собственного веса Q не должно скользить по колонне 2, то сила Q не должна приближаться к оси колонны ближе, чем на расстояние r_{\min} , которое определяется из условия, что при равномерном скольжении пару сил $(Q, 2F)$ с плечом r_{\min} уравновешивает пара сил Nl :

$$Qr_{\min} = Nl = \frac{F}{f} l = \frac{Q}{2f} l,$$

откуда

$$r_{\min} = \frac{l}{2f}. \quad (12.18)$$

Тот же самый результат получим, выражая из равнобедренного треугольника с основанием l тангенс половины угла вершины, противолежащей этому основанию

$$\text{tg } \varphi = f = \frac{l}{2r_{\min}}.$$

Следовательно, сила Q должна проходить на таком расстоянии от оси колонны, чтобы суммарные реакции R располагались внутри угла трения φ .

Рассмотрим задачу о движении тела по наклонной плоскости.

Если тело по наклонной плоскости движется вверх с постоянной скоростью (рис. 12.8, а), то сила инерции равна нулю и условия равновесия ползуна можно записать следующим образом:

$$P \cos \beta - F - Q \sin \alpha = 0, \quad N + P \sin \beta - Q \cos \alpha = 0.$$

Определяя N из второго уравнения и заменяя в первом уравнении $F = fN = \text{tg } \varphi N$, получим

$$P(\cos \beta + f \sin \beta) = Q(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

После замены f его значениями получим силу, необходимую для

равномерного движения ползуна вверх:

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}. \quad (12.19)$$

Поступая аналогично (рис. 12.8, в), получим силу

$$P' = Q \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}, \quad (12.20)$$

которая необходима для равномерного движения ползуна вниз по наклонной плоскости. Следовательно, при изменении направления движения меняется только знак угла трения φ . Если $P' < 0$, то наклонная плоскость является самотормозящей и никакая

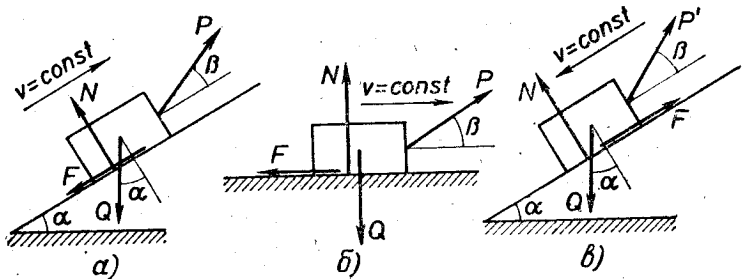


Рис. 12.8.

нагрузка Q не может вызвать движение ползуна вниз. Условие самоторможения наклонной плоскости, как видно, следующее:

$$\alpha < \varphi. \quad (12.21)$$

Для движения вниз в условиях самоторможения к ползуну необходимо приложить противоположно направленную силу

$$P'' = |-P'| = Q \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\beta + \varphi)}. \quad (12.22)$$

Если в формуле (12.19) подставим $\alpha = 0$ и числитель и знаменатель разделим на $\cos \varphi$, то получим силу, необходимую для равномерного перемещения ползуна по горизонтальной плоскости (рис. 12.8, б):

$$P \pm \frac{Qf}{\cos \beta + f \sin \beta}. \quad (12.23)$$

Возникает вопрос: под каким углом должна действовать сила P для наиболее легкого перемещения ползуна по горизонтальной плоскости? Ответ получим из уравнения

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{Q}{P} \right) = \frac{1}{f} (-\sin \beta + f \cos \beta) = 0,$$

и он следующий: $\beta = \varphi$. Следовательно, наиболее легко переместить ползун силой, которая образует с горизонтальной плоскостью угол, равный углу трения, так как эта сила не только перемещает, но также уменьшает нормальную реакцию и зависящую от нее силу трения.

§ 12.3. Трение в винтовых парах

Рассмотрим винт с резьбой прямоугольного профиля (рис. 12.9). Шаг резьбы h , а угол подъема средней винтовой линии

$$\alpha = \arctg \frac{h}{2\pi r_v}, \quad (12.24)$$

где r_v — радиус цилиндра, на поверхности которого размещается средняя винтовая линия. Развертка на плоскость этой линии изображается прямой (так же, как и для других винтовых линий, находящихся на поверхности винта).

Винт нагружен аксиальной силой Q ; коэффициент трения на поверхности винта и гайки f . Для вращения винта к нему необходимо приложить пару сил с моментом M для перемещения точки приложения силы Q и для преодоления трения в винтовой паре. Момент M можно представить как пару сил, составляющие которой приложены к средней винтовой линии винта, т. е.

$$M = 2Pr_v. \quad (14)$$

При определении момента полагаем, что несущая поверхность винтовой линии гайки является наклонной плоскостью с углом наклона α , а винт является ползуном, перемещающимся по этой плоскости. Тогда согласно формуле (12.19) для перемещения винта необходимо приложить силу

$$2P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(-\alpha - \varphi)} = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в формулу (14), получаем, что

$$M = Qr_v \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (12.25)$$

Такой момент необходим для перемещения нагруженного силой Q винта. Если винт используется как болт, то момент M

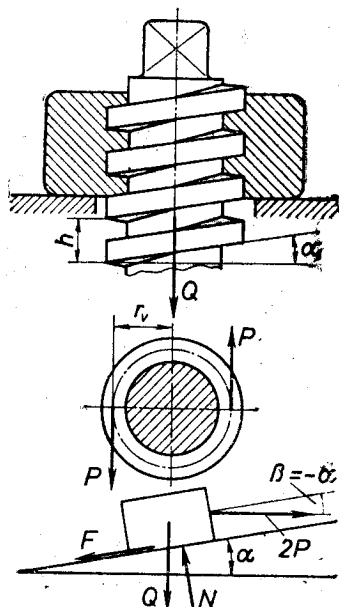


Рис. 12.9.

создает силу растяжения Q в теле болта и преодолевает трение в нарезке.

При перемещении винта под действием силы Q его необходимо придерживать от ускоренного отвинчивания моментом

$$M' = Qr_v \operatorname{tg}(\alpha - \varphi). \quad (12.26)$$

Если винт самотормозящийся, то для его отвинчивания необходимо приложить момент

$$M'' = Qr_v \operatorname{tg}(\varphi - \alpha). \quad (12.27)$$

Оба последних выражения вытекают из формул (12.20) и (12.22). Чтобы не учитывать трение между винтом и еще каким-то телом, принято, что сила Q приложена к винту как вес подвешенного груза, и груз перемещается вместе с винтом. Если это условие не выполнено или вращаем гайку при неподвижном винте, то следует учесть также трение на соответствующих опорных поверхностях (§ 12.4).

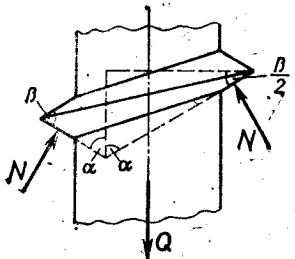


Рис. 12.10.

Винт с резьбой треугольного профиля (рис. 12.10) взаимодействует с гайкой как ползун в клиновидном пазу (рис. 12.5, а). Поэтому предыдущие формулы пригодны также для нарезки треугольного профиля, если в этих формулах вместо угла трения φ подставить приведенный угол трения

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{f}{\cos(\beta/2)}. \quad (12.28)$$

Предыдущие формулы пригодны для определения момента, приложенного к червяку или червячному колесу; в первом случае Q является окружной силой червячного колеса, во втором — червяка.

§ 12.4. Трение в шарнирах

Части шарнирно соединенных звеньев, находящиеся в соприкосновении, называются *шипом* и *подшипником*. Подшипник воспринимает как радиальную, так и аксиальную нагрузку шипа. Моменты трения, вызванные каждой нагрузкой, определяются отдельно.

Момент трения от радиальной нагрузки определяют по формуле

$$M_F = f' Qr, \quad (12.29)$$

где Q — радиальная нагрузка, r — радиус шипа и подшипника, а

$$f' = cf$$

является приведенным коэффициентом трения, который пропорционален действительному коэффициенту трения f . Множитель

с, так же как в круглой цилиндрической поступательной паре (рис. 12.5, б), зависит от принятой гипотезы о распределении давления на скользящей поверхности.

Если между шипом и подшипником имеется зазор (рис. 12.11, а), то момент трения $M_F = Fr = fNr$. Так как

$$R = Q = \sqrt{N^2 + F^2} = N \sqrt{1 + f^2} \approx N,$$

то

$$M_F = fQr$$

В этом случае $c = 1$.

Если поверхности шипа и подшипника соприкасаются без зазора (рис. 12.11, б), то

$$dM_F = r dF = rf dN = rfp l r d\theta,$$

где l — длина поверхности скольжения шипа и подшипника.

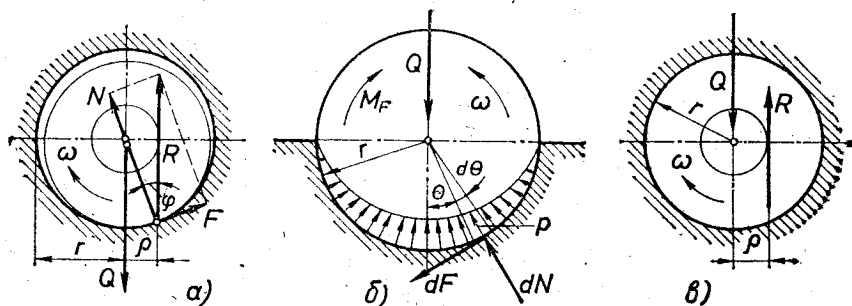


Рис. 12.11.

Распределение давления принимаем симметричным к плоскости продольного сечения, в которой действует нагрузка Q ; тогда

$$M_F = 2flr^2 \int_0^{\pi/2} p d\theta. \quad (16)$$

Из условия равновесия шипа (сумма проекций сил dF на направление Q уравновешена)

$$Q = 2 \int_0^{\pi/2} dN \cos \theta = 2lr \int_0^{\pi/2} p \cos \theta d\theta$$

выражая $2lr$ и подставляя в формулу (16), получаем формулу (12.29), где

$$c = \int_0^{\pi/2} p d\theta / \int_0^{\pi/2} p \cos \theta d\theta. \quad (12.30)$$

Подставляя сюда $p = \text{const}$ или соответствующее гипотезе износа (8) $p = p_0 \cos \theta$, получим те же значения множителя c , которые были найдены для круглой поступательной пары: 1,57 и 1,27.

Момент трения в радиальном подшипнике можно выразить (рис. 12.11, а, в) как пару сил (Q , R), плечо ρ которой называют радиусом круга трения. Так как $M_F = f'Qr = \rho Q$, то радиус круга трения

$$\rho = f'r \quad (12.31)$$

зависит только от приведенного коэффициента трения и радиуса подшипника. В графической кинестатике с помощью кругов трения можно определить реакции, учитывая одновременно также трение в шарнирах. Если общая реакция R пересекает круг трения, то она находится внутри конуса трения (рис. 12.11, а), и шарнир является самотормозящимся. Из-за этой причины, например, действующая на поршень сила не может сдвинуть механизм не только в одной точке (§ 4.2), но также вблизи этой

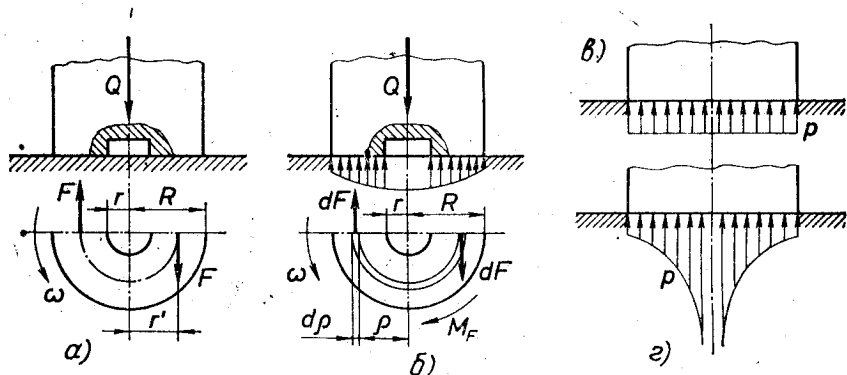


Рис. 12.12.

точки. Шарниры разных прижимных механизмов конструируют самотормозящимися.

Момент трения, вызванный аксиальной нагрузкой (рис. 12.12, а), определяют по формуле

$$M_F = r'fQ, \quad (12.32)$$

где r' — приведенный радиус пяты. Этот радиус равен половине плеча такой пары сил, момент которой равен моменту трения аксиальной скользящей поверхности пяты. Если силы трения этой пары определяют по закону Амонтона — Кулона для каждой половины пяты, то

$$M_F = 2r'F = 2r'f \frac{Q}{2} = r'fQ.$$

Для определения приведенного радиуса принимают, что закон изменения давления в скользящей поверхности симметричен оси шарнира; тогда давление во всех точках бесконечно узкого кольца (рис. 12.12, б) с радиусом ρ и шириной $d\rho$ одинаково. Следовательно, на таком элементарном кольце возникают силы

трения, момент которых относительно оси вала

$$dM_F = 2\rho dF = 2f \frac{dQ}{2} = \rho f p 2\pi r d\rho.$$

Отсюда результирующий момент трения пяты

$$M_F = 2\pi f \int_r^R \rho r^2 d\rho. \quad (17)$$

Из уравнения равновесия $Q = \int_r^R p 2\pi r d\rho = 2\pi \int_r^R p r d\rho$. Заменяя M и Q в (12.32), получаем

$$r' = \frac{\int_r^R \rho r^2 d\rho}{\int_r^R p r d\rho}. \quad (12.33)$$

Видно, что приведенный радиус зависит от принятой гипотезы о распределении давления в пяте, т. е. от функции

$$p = p(\rho).$$

Если предположить давление равномерно распределенным (рис. 12.12, *в*), т. е. $p = \text{const}$, то в результате интегрирования выражение (12.33) получим в следующем виде:

$$r' = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}. \quad (12.34)$$

Для плоской пяты $r = 0$, поэтому $r' = \frac{2}{3}R$.

Для приработавшихся пят более пригодны выражения приведенного радиуса, которые получают из условия равномерного износа пяты в предположении, что износ в каждой ее точке пропорционален давлению и скорости:

$$y = k\rho v = k\rho \omega r = k' p r.$$

Это означает, что давление по опорной поверхности пяты определяется по гиперболе (рис. 12.12, *з*):

$$p = c/\rho, \quad (18)$$

и $c = \text{const}$. Подставляя это выражение в формулу (12.33) и интегрируя, получим для кольцевой пяты

$$r' = \frac{1}{2}(R + r) \quad (12.35)$$

и для сплошной плоской пяты $r' = 0,5R$.

Гипотезу (18) подтверждают наблюдаемые на практике случаи заедания центра пяты, имеющей опорную поверхность в форме круга. Формулы (12.34) и (12.35) пригодны также для определения момента трения в опорных поверхностях болтов и гаек.

§ 12.5. Трение в подшипниках качения

Рассмотрим шариковый (роликовый) радиальный подшипник (рис. 12.13), состоящий из внутреннего кольца 1, шариков 2 и внешнего кольца 3. В точках *A* и *B* соприкосновения колец и шарика согласно формуле (12.5) действуют моменты сопротивления качению $M_A = M_B = kS$, где k — коэффициент трения качения, а S — сила (нагрузка), которая действует на шарик.

Скорость точки соприкосновения *A* следующая: $v_A = \omega_1 R = \omega_2 2r$; поэтому $\omega_2 = \omega_1 R / 2r$. Учитывая, что относительная угловая скорость $\omega_{21} = \omega_1 + \omega_2$, расход мощности при качении одного шарика следующий:

$$\begin{aligned} N_2 &= N_A + N_B = kS(\omega_1 + \omega_2) + kS\omega_2 = \\ &= kS\omega_1 \left(1 + \frac{R}{r}\right). \end{aligned}$$

Общий расход мощности на преодоление сопротивления качению в подшипнике

$$N_F = k\omega_1 \left(1 + \frac{R}{r}\right) \sum S = M_F \dot{\omega}_1. \quad (19)$$

Арифметическую сумму сил S , которые действуют на шарики, определяем, принимая, что число шариков очень большое и каждый из них воспринимает силу $dS = dN$, что соответствует распределению давления (рис. 12.5, б) по гипотезе (8):

$$dS = plr d\theta = p_0 lr \cos \theta d\theta.$$

Из условия равновесия

$$Q = 2 \int_0^{\pi/2} dS \cos \theta = 2p_0 lr \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = p_0 lr \pi / 2$$

находим, что

$$p_0 = \frac{2Q}{\pi rl}, \quad \sum S \approx 2 \int_0^{\pi/2} dS = 2p_0 lr \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2p_0 lr = \frac{4}{\pi} Q. \quad (20)$$

Подставляя этот результат в формулу (19), получим момент сопротивления качению радиального подшипника

$$M_F = f' Q r, \quad (12.29)$$

где приведенный коэффициент трения

$$f' = 1,27 \frac{k}{R} \left(1 + \frac{R}{r}\right). \quad (12.36)$$

Ориентировочные значения приведенного коэффициента трения для шариковых подшипников: 0,001—0,004, а для роликовых подшипников от 0,0025 до 0,01; следовательно, эти значения почти в сто раз меньше, чем для подшипников скольжения при полужидкостном трении. Из-за только что упомянутого преимущества трения качения большие тяжести часто перемещают

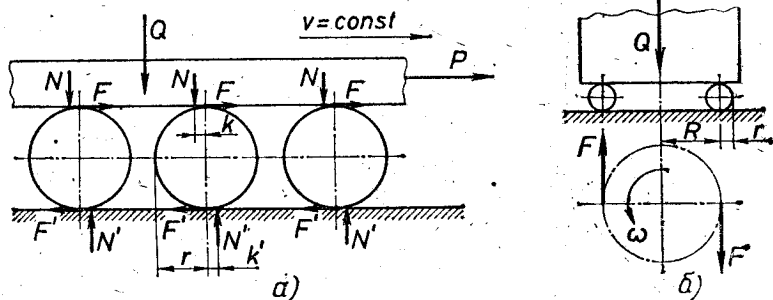


Рис. 12.14.

на катках (рис. 12.14, а). Для равномерного перемещения груза Q с постоянной скоростью необходима сила $P = \sum F = \sum F'$, которую можно определить согласно принципу Даламбера — Лагранжа (10.11):

$$Pv = P2r\omega = \sum Nk\omega + \sum N'k'\omega = (k + k')\omega Q, \quad (12.37)$$

$$P = \frac{k + k'}{2r} Q,$$

где член перед Q является приведенным коэффициентом трения.

Отнесем эту формулу также к упорному шариковому подшипнику (рис. 12.14, б):

$$M_F = 2FR = 2 \frac{2k}{2r} \frac{Q}{2} R = \frac{k}{r} QR.$$

Следовательно, момент трения в упорных подшипниках качения может определяться по формуле для радиальных подшипников (12.29), если подставить в нее приведенный коэффициент трения

$$f' = \frac{k}{r}. \quad (12.38)$$

§ 12.6. Трение скольжения в высших кинематических парах

В высших кинематических парах (рис. 12.15, а), звенья которых скользят и катятся одно по другому, из-за трения скольжения и качения в точке соприкосновения S возникают потери мощности

$$N_F = Fv_S^{21} + Nk\omega_{21}. \quad (12.39)$$

Мощность трения качения, выраженная вторым членом, намного меньше мощности трения скольжения. Поэтому в расчетах обычно учитывают только мощность трения скольжения:

$$N_F = Fv_S^{21} = F\omega_{21} \cdot SP = fN(\omega_1 + \omega_2) \cdot SP. \quad (12.40)$$

Видно, что потери мощности в высшей паре пропорциональны не только коэффициенту трения, нагрузке и относительной

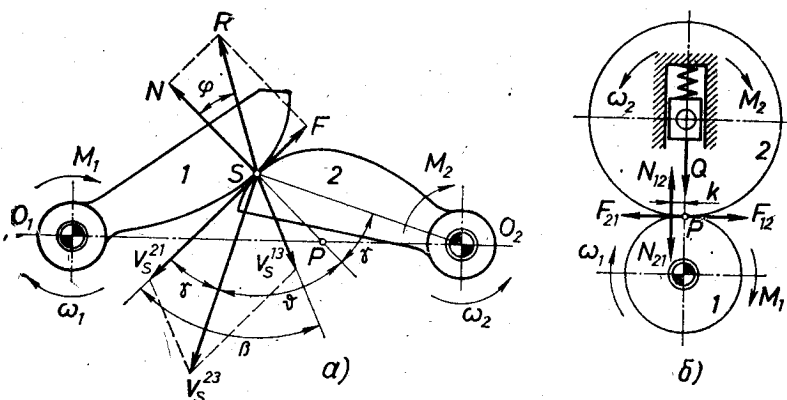


Рис. 12.15.

скорости вращения, но зависят также и от положения точки зацепления S относительно полюса зацепления P . Разделив N_F на ω_1 , получаем момент

$$M_F = fN(1 + u_{21}) \cdot SP, \quad (12.41)$$

на который мы должны увеличить движущий момент M_1 , чтобы преодолеть нагрузку и трение в высшей кинематической паре 12. Кроме упомянутых величин, на рис. 12.15 показаны также угол давления φ и угол передачи движения γ (§ 11.1).

Трение в высших парах связано с износом. Обычно рабочие поверхности высшей пары изнашиваются неодинаково вследствие различия удельных скоростей скольжения.

Удельной скоростью скольжения в точке соприкосновения поверхности высшей пары называют отношение относительной скорости скольжения к проекции абсолютной скорости точки соприкосновения этой поверхности на касательную поверхностей в точке соприкосновения. Согласно рис. 12.15 удельные скорости поверхностей соприкосновения звеньев 1 и 2 следующие:

$$c_1 = \frac{v_S^{21}}{v_S^{13} \cos \beta}, \quad c_2 = \frac{v_S^{21}}{v_S^{23} \cos \gamma}. \quad (12.42)$$

Чем больше в какой-то точке данной поверхности удельная скорость скольжения, тем больше в этой точке изнашивается данная поверхность. Если, например, точильный круг 1 обраба-

тывает неподвижное тело 2, то $v_S^{21} = v_S^{13}$, $\beta = 0$, $v_S^{23} = 0$, поэтому $c_1 = 1$, $c_2 = \infty$. Следовательно, тело 2 «изнашивается» гораздо больше, чем точильный круг. В случаях чистого качения обе удельные скорости равны нулю.

В высших кинематических парах (в центроидных парах), звенья которых катятся без скольжения одно по другому (рис. 12.15, б), точка соприкосновения является относительным полюсом P , в этом случае вследствие имеющего место трения качения возникают потери мощности

$$N_F = kN_{21}\omega_1 + kN_{12}\omega_2 = kQ(\omega_1 + \omega_2). \quad (12.43)$$

Поэтому к движущему моменту M_1 необходимо добавить момент

$$M_F = kQ(1 + u_{21}) \quad (12.44)$$

для преодоления трения в высшей паре 12.

Если условия соприкосновения в высших парах таковы, что угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют одинаковое направление, то относительная угловая скорость является разностью обеих абсолютных угловых скоростей: поэтому в формулах (12.40), (12.41) и (12.43), (12.44) вместо знака плюс следует писать минус.

§ 12.7. Сопротивление при перемещении транспортных средств и при работе каткового транспортера

Рассмотрим прицеп (рис. 12.16), который движется по горизонтальной дороге со скоростью v и ускорением a . Вес груза и кузова обозначен Q ; вес каждого колеса G , радиус R , момент инерции массы относительно оси колеса I , радиус подшипника r и приведенный коэффициент трения подшипника f' . Для определения необходимой силы P для перемещения тележки используем принцип Даламбера — Лагранжа (10.11):

$$Pv = \sum_1^4 N'f'r\omega + \sum_1^4 Nk\omega + (J + 4J')v + 4W\omega.$$

Подставляя сюда

$$v = \omega R, \quad J = \frac{Q}{g} a, \quad J' = \frac{G}{g} a, \quad W = I\epsilon = I \frac{a}{R},$$

получаем, что

$$P = f' \frac{r}{R} \sum_1^4 N' + \frac{k}{R} \sum_1^4 N + \frac{Q + 4G}{g} a + 4I \frac{a}{R^2},$$

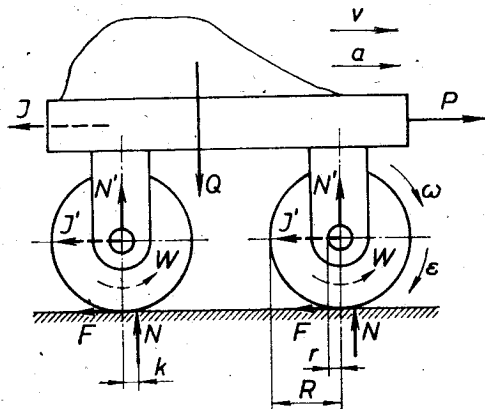


Рис. 12.16.

откуда

$$P = \mu Q + \lambda m a, \quad (12.45)$$

где

$$\mu = \frac{f'r + \xi k}{R}, \quad \xi = 1 + \frac{4G}{Q}, \quad \lambda = 1 + \frac{4I}{mR^2},$$

а m — сумма движущихся масс.

Безразмерную величину μ называют *коэффициентом тяги*. Ориентировочные его значения следующие [91]:

для транспортных средств со стальными или резиновыми шинами

по рельсам	0,007
по асфальту	0,010
по бетону	0,011
по дереву	0,018
по хорошей грунтовой дороге	0,060
по плохой грунтовой дороге	0,160
по рыхлому песку	0,3

Если радиусы колес различные, то μ зависит также от расположения груза. Если езда замедленная, то ускорение, а вместе с ним и второй член в формуле (12.45), меняют знак.

При езде вверх по наклонной дороге с углом α движущая сила P увеличивается на

$$\Delta P_1 = \xi Q \sin \alpha, \quad (12.46)$$

а при езде под уклон — уменьшается на ту же величину (обычно не учитываем ничтожное уменьшение сопротивления при езде вниз по наклонной дороге).

Если прицеп не находится под прикрытием тягача или же транспортное средство является самоходным, то при быстрых движениях значительную часть силы перемещения составляет сопротивление воздуха, увеличивающее тяговое усилие P (12.45) на величину

$$\Delta P_2 = cLq, \quad (12.47)$$

где c — коэффициент формы (для автомашин этот коэффициент находится в пределах от 0,3 до 1,0), L — площадь (m^2) проекции транспортного средства на плоскость, перпендикулярную вектору скорости. Величина

$$q = \rho v^2 / 2$$

есть так называемое аэродинамическое сопротивление: здесь

— плотность воздуха (приблизительно $1,25 \text{ кг/м}^3$), v_r — относительная скорость воздуха. Если v_r совпадает с направлением движения, то давление ветра уменьшает силу, необходимую для перемещения.

Если показанную на рис. 12.16 тележку позорачиваем колесами вверх, то получим катковый транспортер. Поступая аналогично предыдущему, находим, что для перемещения груза Q необходима сила

$$P = \frac{k + \xi f r}{R} Q + \lambda m a. \quad (12.48)$$

Коэффициенты ξ и λ определяются по формуле (12.45), только вместо числа 4 следует ставить число катков.

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ И МАШИИ

Из теоретической механики известно, что динамика имеет две основные задачи: 1) определить силы, соответствующие заданному движению механической системы; 2) определить движение механической системы, соответствующее заданным силам. Решению первой задачи в механизмах посвящена III часть этого курса, а решение второй задачи является главным содержанием IV части.

Когда движение проектируемого механизма выяснено, возникает необходимость повлиять на это движение в желаемом направлении. Таким образом, определение движения механизма тесно связано с расчетом маховика и регулированием хода машинного агрегата, что также — хотя очень коротко — входит в эту часть курса.

К группе упомянутых главных проблем примыкает определение энергетической полезности механизмов, уменьшение воздействия механизма на фундамент путем уравнивания масс и также краткое описание экспериментальных методов исследования механизмов.

Раздел 13

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ

§ 13.1. Характеристика машинного агрегата и общие положения

Объектом исследования проблемы об определении движения является объединение двигателя и рабочей машины, называемое *машинным агрегатом*. Машинный агрегат или просто агрегат — это механизм или совокупность механизмов, у большей части которых, согласно формуле (2.18), имеется одна основная подвижность. В агрегате действует движущая сила или движущий момент, сила или момент полезного сопротивления, силы вредных сопротивлений, силы тяжести звеньев и реакции в кинематических парах (§ 9.1). При движении агрегата эти силы, за исключением нормальных реакций, совершают положительную или отрицательную работу и таким образом влияют на движение агрегата. Это подтверждает теорема об изменении кинетической энергии:

$$E - E_0 = A_p + A_q + A_r + A_c + A_t, \quad (13.1)$$

где E и E_0 — кинетическая энергия агрегата в рассматриваемый момент времени и в выбранный начальный момент; A_p — работа двигателя, которую совершает движущая сила или движущий момент; A_Q — работа полезного сопротивления; A_r — работа вредных сопротивлений, которую совершают силы трения и силы сопротивления среды; A_G — работа, совершаемая силами тяжести; A_T — работа сил и моментов сил упругости (§ 9.1).

Работа упомянутых сил совершается в промежутке между обоими моментами времени. Уравнение (13.1) пригодно не только для агрегата, но также для любой механической системы, включая отдельную машину или механизм. Однако обычно оно используется для агрегата, так как тогда работу двигателя определяют процессы, проходящие в двигателе, а полезную работу — технологический или транспортный процесс рабочей машины. Напротив, если рассматривается отдельный механизм или машина, то хотя бы одну из упомянутых главных сил заранее необходимо определить или найти экспериментально.

Промежуток времени, за который все звенья агрегата или машины возвращаются в исходное положение, а заданные силы (движущие или силы сопротивления) принимают первоначальные значения, называют *циклом*. Так, например, цикл двухтактного двигателя внутреннего сгорания соответствует одному обороту коленчатого вала, а четырехтактного — двум. Время T цикла называют *периодом* движения.

В каждом цикле работа A_p положительна, но A_Q — отрицательна. Однако в произвольно выбранных промежутках движения может быть наоборот. Так, например, в тактах впуска, компрессии и выхлопа двигателя внутреннего сгорания работа двигателя отрицательна, а в начале обратного хода поршня соломенного пресса работа полезного сопротивления положительна из-за упругости сжатой соломы. Работа A_r вредных сопротивлений отрицательна, так как силы сопротивления всегда направлены против скоростей своих точек приложения. В произвольно выбранных промежутках времени работа сил тяжести звеньев A_G и работа сил упругости A_T может быть как положительна, так и отрицательна; однако за время целого периода эти работы всегда равны нулю, так как в целом цикле центры тяжести звеньев и точки приложения сил упругости описывают замкнутые траектории, а работа консервативной силы на замкнутой траектории равна нулю.

Движущая сила и движущий момент обычно меняются в зависимости от положения входного звена, скорости или от обоих факторов сразу. В поршневых двигателях соответствующую каждому положению механизма движущую силу определяет индикаторная диаграмма. При изменении скорости вращения коленчатого вала меняются физико-химические процессы в цилиндрах, и движущая сила становится также функцией скорости. Об изменении движущего момента можно судить также по *механической характеристике* двигателя, где движущий момент

выражен как функция угловой скорости вала двигателя. На рис. 13.1 показаны механические характеристики электромоторов постоянного тока с параллельным (а) и последовательным (б) возбуждением, а также характеристика (в) асинхронного электромотора трехфазного переменного тока. Такие характеристики называются *статическими*, так как они получены экспериментально по точкам, в которых поддерживается постоянная угловая скорость.

Двигатели, движущий момент которых зависит от скорости, в случаях переменных нагрузок работают стабильно, если статическая характеристика является нисходящей. Поэтому в характеристике асинхронного электромотора для работы пригодна

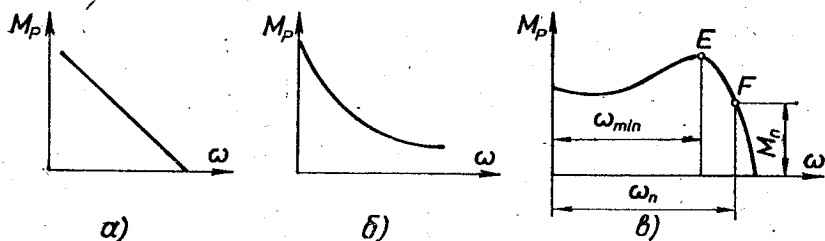


Рис. 13.1.

только часть кривой правее точки E ; а точке F этой части соответствует номинальная угловая скорость ω_n двигателя.

Приложенные к рабочим органам машины сила или момент сил полезного сопротивления могут быть постоянными (подъемные машины, токарные станки), могут меняться в зависимости от положения (поршневые компрессоры, поршневые насосы, шепинги), скорости (вентиляторы, центробежные насосы, плуги) и времени (дисковые пилы) или в зависимости от нескольких аргументов одновременно. Полезное сопротивление, зависимое от скорости, обычно изображается возрастающей функцией.

Для выяснения возможных режимов движения агрегата перепишем уравнение (13.1) в форме

$$E - E_0 = \sum A.$$

Если работа сил, приложенных к агрегату в пределах цикла, $\sum A > 0$, то $E > E_0$, и кинетическая энергия агрегата возрастает; происходит разгон агрегата. Если $\sum A < 0$, то $E < E_0$, т. е. кинетическая энергия уменьшается, и через некоторый промежуток времени агрегат останавливается.

Если $\sum A = 0$, то $E = E_0$, и движение агрегата может продолжаться неопределенно долго при сохранении постоянной средней кинетической энергии. Это является состоянием нормальной работы большинства агрегатов.

Разгон и остановку агрегата называют *нестационарным движением*, а период нормальной работы — *стационарным движением*.

Из-за непостоянства сил и также из-за того, что в механизме обычно имеются звенья, которые движутся с непрерывно изменяющимися ускорениями (шатуны, ползуны, коромысла), при нестационарном движении агрегата кинетическая энергия изменяется, причем во время стационарного движения периодически. В случаях, когда движущая сила и силы сопротивления постоянны и в агрегате нет звеньев с переменной скоростью (например, в зубчатых механизмах), возможно равномерное стационарное движение, для которого в любом промежутке времени

$$\sum A = 0. \quad (13.2)$$

Такое стационарное движение называем *уравновешенным движением*, так как согласно принципу возможных перемещений все приложенные к агрегату силы в таком движении уравновешиваются.

Обычно в стационарном движении равновесие сил не существует, кинетическая энергия меняется, а в конце и в начале каждого цикла она одинакова, т. е. условие (13.2) выполнено в каждом цикле стационарного движения. Следовательно, *работа приложенных к агрегату сил за цикл стационарного движения равняется нулю*.

Работа сил тяжести звеньев и работа сил упругости за цикл равняются нулю, независимо от движения агрегата. Поэтому уравнение (13.2) для цикла стационарного движения можем написать в виде

$$A_p = A_q + A_r. \quad (13.3)$$

Это уравнение баланса работ словами можно выразить следующим образом: *в цикле стационарного движения работа двигателя расходуется только на преодоление полезного и вредного сопротивления*, так как работа двигателя, дополнительно использованная для ускорения масс, во время цикла компенсируется уменьшением работы двигателя при замедлении масс.

Разделив уравнение (13.3) на период T стационарного движения, получаем уравнение баланса средних мощностей:

$$N_p = N_q + N_r. \quad (13.4)$$

Эти средние мощности используются на практике как энергетические характеристики. Их можно определить также, разделив совершенную за несколько циклов работу на соответствующее время. В поршневых двигателях мощность N_p называют *индикаторной мощностью*, так как ее можно определить с помощью специального прибора — индикатора, а полезную мощность N_q , которую можно снимать с вала двигателя, — *эффективной мощностью*. Так, например, эффективную мощность двигателя

внутреннего сгорания определяют так:

$$N_e \equiv N_Q = \frac{A}{75 \cdot 60} = \frac{p_e \frac{\pi d^2}{4} snk}{4500\tau} \text{ (л. с.)}, \quad (1)$$

где A — совершенная двигателем работа в одну минуту (кгс · м/мин); p_e — среднее эффективное давление газа на поршень (кгс/см²), т. е. среднее индикаторное давление, уменьшенное на долю потерь на трение; d — диаметр цилиндра (см); s — ход поршня (м); n — частота вращения коленчатого вала (мин⁻¹); k — число цилиндров; для двухтактных двигателей $\tau = 1$, для четырехтактных — $\tau = 2$. Если в формуле (1) подставляем s в см, то

$$N_e = \frac{p_e V n}{450\,000\tau} \text{ (л. с.)}, \quad (2)$$

где V — объем цилиндров двигателя (см³). Если этот объем выразим в литрах, то

$$N_e = \frac{p_e V n}{450\tau} \text{ (л. с.)}. \quad (3)$$

Для автомобильных бензиновых двигателей $p_e \approx 10 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, и эффективная мощность, отнесенная к одному литру объема цилиндра, приблизительно равна 30 л. с.

Если продифференцируем уравнение (13.1):

$$dA_P + dA_Q + dA_F + dA_G + dA_T - dE = 0$$

и разделим на dt , то получим уравнение баланса мгновенных мощностей

$$N_P + N_Q + N_F + N_G + N_T + N_J = 0, \quad (13.5)$$

согласно которому (§ 10.6) мгновенная мощность приложенных к механизму сил и сил инерции всегда равна нулю. В уравнении (13.5) мощности N_Q и N_F в общем случае являются отрицательными, а N_G , N_T и N_J могут быть как положительными, так и отрицательными. Видно, что в произвольно выбранном промежутке времени работа двигателя (движущая работа) расходуется не только на преодоление полезных и вредных сопротивлений, но также и на преодоление сил тяжести звеньев, деформацию упругих элементов и ускорение масс. Следовательно, уравнение (13.3) баланса работ и уравнение (13.4) баланса средних мощностей пригодны только для таких промежутков времени, в которых работа сил тяжести, сил упругости и сил инерции равна нулю, т. е. в первую очередь — для одного или нескольких циклов.

Уравнение (13.1) свидетельствует о том, что от работы приложенных к агрегату сил зависит движение агрегата. Удобный метод определения этого движения следующий.

Одно из вращающихся или поступательно движущихся звеньев агрегата принимаем в качестве звена приведения. Массы подвижных звеньев приводим к выбранному звену так, чтобы кинетическая энергия приведенных масс была равна кинетической энергии механизма. Входящие в уравнение (13.1) силы приводят к выбранному звену из условия, чтобы элементарная работа приведенных сил была равна элементарной работе приводимых сил. После этого вместо агрегата рассматривают только звено приведения, и методами динамики находят его закон движения. Движение остальных звеньев находят с помощью кинематических методов.

Только что описанный метод определения движения агрегата рассмотрен в следующих параграфах этого раздела. В последнем параграфе рассмотрены механизмы с несколькими основными подвижностями. Механизмы с неголономными связями [51], которые упомянуты в § 2.1, и механизмы с переменной массой [10, 30] в этом курсе не рассматриваем.

§ 13.2. Приведение масс

Выражение кинетической энергии механизма необходимо для определения закона движения механизма, а также для других динамических расчетов. Кинетическую энергию механизма можно определить, вычисляя кинетическую энергию каждого звена и арифметически суммируя полученные результаты. Таким образом найденная кинетическая энергия содержит скорости всех подвижных звеньев, которые можно выразить через скорость главного звена (рассматриваем механизмы с одной основной подвижностью). Тот же самый результат можно получить более удобно, рассчитав для выбранного главного звена такую приведенную массу или приведенный момент инерции, что кинетическая энергия главного звена становится равной кинетической энергии механизма.

Рассмотрим плоский механизм, имеющий α звеньев в поступательном движении, β звеньев во вращательном движении и γ звеньев в плоскопараллельном движении. Кинетическая энергия такого механизма

$$E = \frac{1}{2} \left(\sum_1^{\alpha} m_i v_i^2 + \sum_1^{\beta} I_i \omega_i^2 + \sum_1^{\gamma} m_i v_{C_i}^2 + \sum_1^{\gamma} I_{C_i} \omega_i^2 \right), \quad (13.6)$$

где C обозначает центр тяжести звена. Если в качестве звена приведения выбираем движущееся поступательно звено I , то кинетическая энергия механизма

$$E = \frac{1}{2} m_r v_1^2, \quad (13.7)$$

где m_r — приведенная масса. Ее выражение получаем, приравнявая

правые части уравнений (13.6) и (13.7):

$$m_r = m_1 + \sum_2^{\alpha} m_i \frac{v_i^2}{v_1^2} + \sum_1^{\beta} I_i \frac{\omega_i^2}{v_1^2} + \sum_1^{\gamma} m_i \frac{v_{C_i}^2}{v_1^2} + \sum_1^{\gamma} I_{C_i} \frac{\omega_i^2}{v_1^2}. \quad (13.8)$$

Если в качестве обобщенной скорости принимается угловая скорость звена I , то кинетическая энергия приведенной массы механизма

$$E = 1/2 I_r \omega_1^2, \quad (13.9)$$

где I_r — приведенный к звену I момент инерции массы механизма. Его выражение получаем, приравнявая правые части уравнений (13.9) и (13.6):

$$I_r = I_1 + \sum_2^{\beta} I_i \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2} + \sum_1^{\alpha} m_i \frac{v_i^2}{\omega_1^2} + \sum_1^{\gamma} m_i \frac{v_{C_i}^2}{\omega_1^2} + \sum_1^{\gamma} I_{C_i} \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2}. \quad (13.10)$$

Из выражений (13.8) и (13.10) видно, что приведенная масса и приведенный момент инерции не зависят от закона движения механизма, а зависят только от масс звеньев и отношений скоростей (передаточных отношений), которые в свою очередь зависят от положения механизма, а в механизмах с постоянным передаточным отношением являются постоянными. Поэтому величины m_r и I_r можно вычислить без предварительного определения закона движения механизма. В качестве звена приведения удобно выбрать звено, вращающееся в одном направлении, так как оно во время движения механизма не останавливается и поэтому I_r и m_r не становятся равными бесконечности.

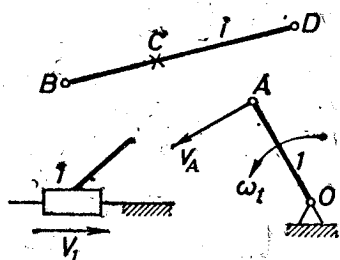


Рис. 13.2.

Для расчета приведенной массы и приведенного момента инерции необходимые соотношения скоростей

можно определить аналитически или найти из построенных планов скоростей, принимая длины векторов скоростей в миллиметрах. Так, например, для приведения массы шатуна i (рис. 13.2) к звену I , которое находится в поступательном движении, или к звену I , которое вращается, из построенных планов скоростей находим

$$\frac{\omega_i}{v_1} = \frac{\tilde{v}_{DB}}{\tilde{v}_1} \frac{1}{BD}; \quad \frac{v_C}{\omega_1} = \frac{\tilde{v}_C}{\tilde{v}_A} \cdot OA; \quad \frac{\omega_i}{\omega_1} = \frac{\tilde{v}_{DB}}{\tilde{v}_A} \frac{OA}{BD};$$

где скорости v_1 и v_A приняты произвольно. Скорости точек шатуна на рисунке не показаны.

Иногда приведенную массу условно принимают сосредоточенной в точке A (рис. 13.2) вращающегося звена приведения.

Тогда в формуле (13.7) следует принять $v_i = v_A$, а формулу (13.8) необходимо записать так:

$$m_r = \sum_1^{\alpha} m_i \frac{v_i^2}{v_A^2} + \sum_1^{\beta} I_i \frac{\omega_i^2}{v_A^2} + \sum_1^{\gamma} m_i \frac{v_{C_i}^2}{v_A^2} + \sum_1^{\delta} I_{C_i} \frac{\omega_i^2}{v_A^2}. \quad (13.11)$$

Величины I_r и m_r являются функциями обобщенной координаты механизма, следовательно, они переменные. Эти используемые в расчетах величины нельзя считать идентичными действительно переменным массам, которые встречаются в некоторых механизмах. Также необходимо учитывать, что m_r и I_r применимы только в таких динамических расчетах, при которых эти величины входят в выражение кинетической энергии. Приведение масс с использованием 2-го закона Ньютона или принципа Даламбера производится по-другому (§ 13.4).

Пример 13.1. Определить момент инерции, приведенный к валу электромотора подъемной машины (рис. 13.3), если заданы центральные моменты инерции масс $I_1 = 0,7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 1,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 107 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_4 = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, масса блока и крюка $m_4 = 89 \text{ кг}$, масса поднимаемого груза $m_Q = 44 \text{ т}$, число витков червяка $z_1 = 1$, число зубьев червячного колеса $z_2 = 37$, число зубьев колес $z_2' = 12$, $z_3 = 76$, радиусы барабана и блока $r = 20 \text{ см}$.

Решение. По формуле (13.10) приведенный момент инерции

$$I_r = I_1 + I_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + m_4 \left(\frac{v}{\omega_1} \right)^2 + I_4 \left(\frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2 + m_Q \left(\frac{v}{\omega_1} \right)^2.$$

Отношения скоростей определяем следующим образом:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u_{21} = \frac{z_1}{z_2} = 0,027, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = u_{31} = u_{32} u_{21} = \frac{z_2'}{z_3} u_{21} = 0,0045;$$

$$v = \frac{\omega_3 r}{2}; \quad \frac{v}{\omega_1} = \frac{\omega_3 r}{\omega_1 2} = 0,00045 \text{ м}, \quad \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{v/r}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{2\omega_1} = 0,00225;$$

$$I_r = 0,7 + 0,0013 + 0,0022 + 0,00002 + 0,00001 + 0,0088 = 0,7123 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Видно, что медленно движущиеся массы мало меняют приведенный момент инерции, который в данном случае постоянный.

Пример 13.2. Определить приведенный к коленчатому валу I момент инерции массы и приведенную к ползуну Z массу кривошипно-ползунного механизма (рис. 5.26).

Решение. Приведенный момент инерции по формуле (13.10) следующий:

$$I_r = I_1 + m_2 \left(\frac{v_C}{\omega_1} \right)^2 + I_C \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{v_B}{\omega_1} \right)^2,$$

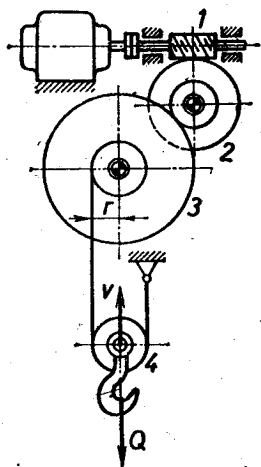


Рис. 13.3.

где

$$\frac{v_C}{\omega_1} = \frac{\tilde{v}_C}{\tilde{v}_A} OA, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\tilde{v}_{BA}}{\tilde{v}_A} \frac{OA}{AB}, \quad \frac{v_B}{\omega_1} = \frac{\tilde{v}_B}{\tilde{v}_A} OA.$$

Приведенная к ползуну масса по формуле (13.8)

$$m_r = m_3 + m_2 \left(\frac{v_C}{v_B} \right)^2 + I_C \left(\frac{\omega_2}{v_B} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\omega_1}{v_B} \right)^2,$$

где

$$\frac{v_C}{v_B} = \frac{\tilde{v}_C}{\tilde{v}_B}, \quad \frac{\omega_2}{v_B} = \frac{\tilde{v}_{BA}}{\tilde{v}_B} \frac{1}{AB}, \quad \frac{\omega_1}{v_B} = \frac{\tilde{v}_A}{\tilde{v}_B} \frac{1}{OA}.$$

В этом случае I_r и m_r являются функциями угла φ , так как только первый член в каждом выражении постоянный.

§ 13.3. Приведение сил

Приведенная к звену 1 сила P_r или приведенный момент M_r являются тангенциальной силой или моментом, элементарная работа которых равна алгебраической сумме элементарных работ приводимых сил и моментов, т. е.

$$P_r \delta s_1 = \sum (P_i \delta s_i \cos \alpha_i + M_j \delta \varphi_j),$$

$$M_r \delta \varphi_1 = \sum (P_i \delta s_i \cos \alpha_i + M_j \delta \varphi_j),$$

где δs_1 — возможное перемещение точки приложения приведенной силы, $\delta \varphi_1$ — возможное угловое перемещение главного звена; обозначения величин правых частей уравнений такие же, как в формуле (10.10).

Поступая, как при выводе формулы (10.11), получаем, что

$$P_r v_1 = \sum (P_i v_i \cos \alpha_i + M_j \omega_j), \quad (13.12)$$

$$M_r \omega_1 = \sum (P_i v_i \cos \alpha_i + M_j \omega_j), \quad (13.13)$$

откуда $P_r = \frac{\sum N}{v_1}$, $M_r = \frac{\sum N}{\omega_1}$. Следовательно, *мгновенная мощность приведенной силы или момента равна алгебраической сумме мгновенных мощностей приведенных сил и моментов.*

Для определения приведенной силы можно использовать также рассмотренный в § 10.6 рычаг Жуковского, так как в нем мощность каждой силы пропорциональна моменту этой силы относительно полюса плана скоростей, повернутого на 90° . Поэтому момент приведенной силы относительно полюса рычага Жуковского равен общему моменту приводимых сил относительно той же точки. Применяя рычаг Жуковского, все моменты желательно заранее заменять силами (пример 10.2).

Пример 13.3. Определить приведенную к центру A шейки кривошипа движущую силу P_r и приведенный к коленчатому валу I движущий момент M_r поршневого двигателя (рис. 13.4).

Решение. Приведенную к центру шейки кривошипа действующую на поршень 3 движущую силу P определяем по формулам (13.13):

$$P_r = P v_B / v_A, \quad M_P = P v_B / \omega_1.$$

Второе равенство определяет приведенный к коленчатому валу момент. Такой же результат дает рычаг Жуковского, так как $P_r \cdot oa = P \cdot ob$; $M_P = OA \cdot P_r$. Приведенный к коленчатому валу 1 движущий момент M_P на рисунке не показан.

Примечание. P_r и M_P выражают статическое воздействие движущей силы P на кривошип в идеальном механизме. Если бы звенья не имели масс и также не существовали бы силы трения, то действующая в цилиндре двигателя сила давления газа действительно вращала бы кривошип с тангенциальной силой P_r или моментом M_P .

Пример 13.4. Определить приведенную к центру A шейки кривошипа силу тяжести звеньев G_r и приведенный к кривошипу 1 момент M_G силы тяжести поршневой машины с качающимся цилиндром (рис. 13.5).

Решение. Искомые величины определяем следующим образом:

$$G_r = \frac{\Sigma N}{v_A}, \quad M_G = \frac{\Sigma N}{\omega_1},$$

где $\Sigma N = G_1 v_{C_1} \cos \alpha_1 + G_2 v_{C_2} \cos \alpha_2$. Проекции скоростей точек C_1 и C_2 на вертикальное направление равны проекциям на горизонтальное направ-

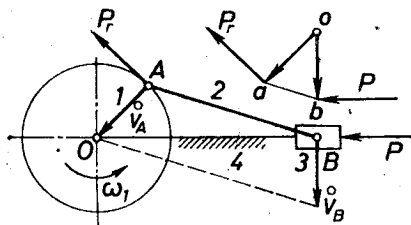


Рис. 13.4.

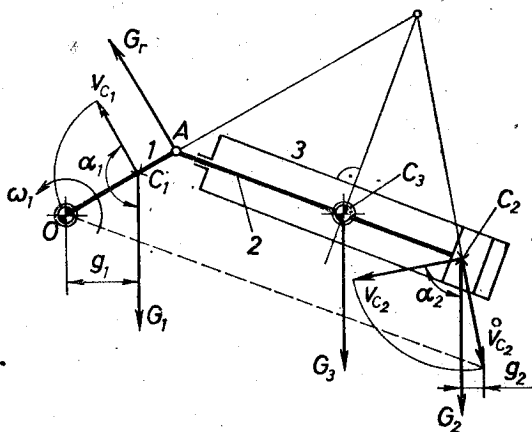


Рис. 13.5.

ление соответствующих векторов повернутого на 90° плана скоростей g_i . Поэтому согласно рис. 13.5

$$\Sigma N = -G_1 g_1 + G_2 g_2,$$

$$G_r = -G_1 \tilde{g}_1 / \tilde{v}_A + G_2 \tilde{g}_2 / \tilde{v}_A, \quad M_G = OA \cdot G_r.$$

Целесообразно отметить, что отрицательные проекции g_i и положительные проекции g_i размещаются по противоположным сторонам от вертикали

силы тяжести G_i . Приведенная сила тяжести G_r и ее момент M_O выражают статическое действие сил тяжести G_i звеньев на колесчатый вал I в идеальном механизме.

Пример 13.5. Определить приведенную к центру A шейки кривошипа силу трения F_r и приведенный к кривошипу I момент сил трения M_F

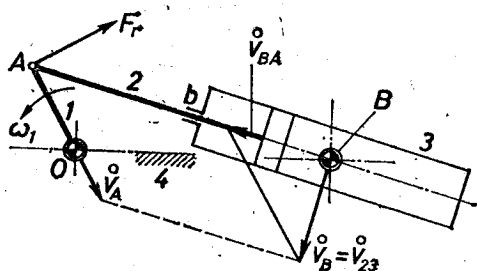


Рис. 13.6.

поршневой машины с качающимся цилиндром (рис. 13.6). Заданы радиусы r шарниров, приведенные коэффициенты трения в скользящих поверхностях, сила трения F_b в уплотнении штока поршня и нормальные реакции R в кинематических парах.

Решение. Аналогично предыдущим примерам

$$F_r = \frac{\sum N}{v_A}; \quad M_F = \frac{\sum N}{\omega_1}.$$

Суммарная мощность трения в механизме

$$\sum \bar{N} = N_0 + N_A + N_B + N_{23} + N_b,$$

где отдельные слагаемые, согласно формулам (12.29) и (12.9), выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_0 &= f'_0 R_{01} r_0 \omega_1, & N_{23} &= f' R_{23} v_{23}, \\ N_A &= f'_A R_{12} r_A \omega_{12}, & N_b &= F_b v_{23}, \\ N_B &= f'_B R_{43} r_B \omega_3, & \omega_3 &= \omega_2 = v_{BA}/AB, \end{aligned}$$

r_A и r_B — радиусы цапф шарниров A и B . В показанном на рис. 13.6 положении $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$, так как оба угловые скорости имеют одинаковые направления. В общем случае

$$\omega_{12} = |\omega_1 \pm \omega_2|.$$

Знак плюс следует взять в случае, когда ω_1 и ω_2 имеют противоположные направления.

Приведенная сила трения F_r или момент трения M_F выражают воздействие на кривошип I всех сил и моментов трения механизма. Для преодоления трения в механизме к кривошипу необходимо приложить тангенциальную силу противоположного направления ($-F_r$) или момент ($-M_F$).

§ 13.4. Дифференциальные уравнения движения машинного агрегата и приведение сил инерции

Рассмотрим машинный агрегат с одной подвижностью. Положение такого механизма определено одной обобщенной координатой q . Удобнее всего за координату q выбрать угол поворота φ какого-то вращающегося звена или расстояние s от выбранной точки какого-то поступательно движущегося звена. В двух предыдущих параграфах мы выяснили, как массы подвижных звеньев агрегата и приложенные к агрегату силы привести к выбранному звену. Теперь рассмотрим составление дифференциальных уравнений движения звена приведения. Дифференциальное уравнение пригодно для определения движения агрегата или

расчета какой-то неизвестной силы или момента, если задан закон движения ведущего звена механизма.

Во многих случаях истинную скорость движения ведущего звена агрегата можем найти с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (13.1). Формулу (13.1) для звена приведения в поступательном движении теперь можем написать так:

$$\frac{m_r v^2}{2} - \frac{m_{r_0} v_0^2}{2} = \int_0^s R_r ds_r \quad (13.14)$$

где m_r — приведенная масса, а

$$R_r = P_r - (Q_r + F_r + G_r + T_r) = P_r - S \quad (13.15)$$

является приведенной результирующей силой. Для вращающегося звена приведения формулу (13.1) запишем в форме

$$\frac{I_r \omega^2}{2} - \frac{I_{r_0} \omega_0^2}{2} = \int_0^\varphi M_r d\varphi, \quad (13.16)$$

где I_r — приведенный момент инерции, а

$$M_r = M_p - (M_q + M_f + M_g + M_t) = M_p - M_s \quad (13.17)$$

является суммарным приведенным моментом. В скобках правой части формул (13.15) и (13.17) находится приведенная результирующая сила и приведенный суммарный момент от полезных и вредных сопротивлений, сил тяжести звеньев и сил упругости — согласно уравнению (13.1).

Эффективным средством определения движения механической системы являются дифференциальные уравнения Лагранжа, число которых равно числу обобщенных координат. Для рассматриваемого агрегата достаточно одного уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E}{\partial q} = Q. \quad (13.18)$$

Обобщенную силу Q , как известно из теоретической механики, определяет коэффициент у обобщенного возможного перемещения в выражении элементарной работы сил, приложенных к механической системе, т. е.

$$\delta A = Q \delta q.$$

Кроме этого, величины R_r и M_r определены так, что

$$\delta A = R_r \delta s = M_r \delta \varphi.$$

Следовательно, обобщенная сила является не чем иным, как приведенной результирующей силой или приведенным суммарным моментом. Учитывая только что сказанное и подставляя в уравнения (13.18) $q = s$, $\dot{q} = v$, $E = m_r v^2 / 2$ или $q = \varphi$, $\dot{q} = \omega$, $E = I_r \omega^2 / 2$, получаем дифференциальные уравнения движения

агрегата:

$$m_r a + \frac{v^2}{2} \frac{dm_r}{ds} = R_r, \quad (13.19)$$

$$I_r \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi} = M_r, \quad (13.20)$$

где a и ε — линейное и угловое ускорения главного звена приведения.

Эти уравнения можно получить также прямо из теоремы об изменении кинетической энергии, если ее напишем в форме $dE = dA$. Можно поступить и наоборот, например, уравнение (13.20) переписать в форме

$$d\left(\frac{I_r \omega^2}{2}\right) = M_r d\varphi$$

и при помощи интегрирования получить уравнение (13.16). Уравнение (13.16) является первым интегралом уравнения (13.20). Приведенная результирующая сила и приведенный суммарный момент могут быть использованы: 1) для определения ускорения звена приведения и масс всего механизма, 2) для определения ускорения неравномерно движущихся звеньев, когда звено приведения движется равномерно. Движение с $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$ Жуковский назвал начальным или дополнительным движением, а движение с $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$ — перманентным или основным движением.

Принцип Даламбера для агрегата можно выразить следующим образом:

$$R_r + J_r = 0, \quad M_r + W_r = 0. \quad (13.21)$$

Это означает, что приведенная к главному звену результирующая сила инерции и суммарный момент сил инерции соответственно равны:

$$J_r = -m_r a - \frac{v^2}{2} \frac{dm_r}{ds}, \quad W_r = -I_r \varepsilon - \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi}. \quad (13.22)$$

Если уравнениям (13.19) и (13.20) придадим форму 2-го закона Ньютона

$$m'_r a = R_r, \quad I'_r \varepsilon = M_r, \quad (13.23)$$

то

$$J'_r = -m'_r a, \quad W_r = -I'_r \varepsilon. \quad (13.24)$$

Эти уравнения содержат особые силовые приведенную массу m'_r и приведенный момент инерции I'_r , которые отличаются от обычно вводимых в динамическую модель аналогичных величин m_r и I_r , определяющих кинетическую энергию механизма. Уравнения (13.19), (13.20) и (13.23) дают следующие зависимости:

$$m'_r = m_r + \frac{v^2}{2a} \frac{dm_r}{ds}, \quad I'_r = I_r + \frac{\omega^2}{2\varepsilon} \frac{dI_r}{d\varphi}. \quad (13.25)$$

Видно, что силовая приведенная масса равна энергетической массе только тогда, когда последняя постоянна; то же самое относится к силовым приведенным моментам инерции.

Величины m'_r и I'_r можно определить, не зная величин m_r и I_r . Мгновенная мощность сил инерции звеньев плоского механизма

$$N = \sum_1^{\alpha} m_i a_{it} v_i + \sum_1^{\beta} I_i \varepsilon_i \omega_i + \sum_1^{\gamma} (m_i a_{C_i t} v_{C_i} + I_{C_i} \varepsilon_i \omega_i), \quad (13.26)$$

где α — число поступательно движущихся звеньев, β — число вращающихся звеньев, γ — число плоскопараллельно движущихся звеньев; индекс t обозначает тангенциальные компоненты ускорений. Эту мощность для поступательно движущегося или вращающегося звеньев приведения можно выразить следующим образом:

$$N = m'_r a_v, \quad N = I'_r \varepsilon \omega. \quad (13.27)$$

Из выражений (13.26) и (13.27) получаем, что

$$m'_r = m_1 + \sum_2^{\alpha} m_i \frac{a_{it} v_i}{av} + \sum_1^{\beta} I_i \frac{\varepsilon_i \omega_i}{av} + \sum_1^{\gamma} \left(m_i \frac{a_{C_i t} v_{C_i}}{av} + I_{C_i} \frac{\varepsilon_i \omega_i}{av} \right); \quad (13.28)$$

$$I'_r = I_1 + \sum_2^{\beta} I_i \frac{\varepsilon_i \omega_i}{\varepsilon \omega} + \sum_1^{\alpha} m \frac{a_{it} v_i}{\varepsilon \omega} + \sum_1^{\gamma} \left(m_i \frac{a_{C_i t} v_{C_i}}{\varepsilon \omega} + I_{C_i} \frac{\varepsilon_i \omega_i}{\varepsilon \omega} \right). \quad (13.29)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (13.8) и (13.10), видим, что величины m_r и I_r зависят только от положения механизма или же являются постоянными, а величины m'_r и I'_r , кроме того, еще зависят также от отношений ускорений. Величины m_r и I_r становятся бесконечностью только тогда, когда скорость главного звена при движении механизма становится равной нулю, а величины m'_r и I'_r , кроме того, еще и тогда, когда главное звено движется равномерно, но ускорения не всех остальных звеньев равны нулю. Это означает, что величины m'_r и I'_r удобны использовать тогда, когда движение механизма известно, главное звено движется неравномерно и необходимо определить какую-то неизвестную силу или момент. Однако для этого не менее полезны также уравнения (13.19) и (13.20), которые не содержат величин m'_r и I'_r .

Пример 13.6. Составить дифференциальное уравнение движения синусоидального механизма (рис. 13.7) и определить движущий момент M_P , который необходимо приложить к кривошину как для разгона механизма с ускорением $\varepsilon = 35,8 \text{ с}^{-2}$, так и для равномерного вращения кривошипа с угловой скоростью $\omega = 15 \text{ с}^{-1}$. Полезное сопротивление $Q = 102 \text{ кгс} = 1000 \text{ Н}$ всегда направлено противоположно скорости ползуна. Трение и силы тяжести звеньев не учитывать. Дано $I_1 = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $m_2 = 0$, $m_3 = 100 \text{ кг}$, $r = OA = 0,2 \text{ м}$. Определить также энергетические и силовые приведенные массы и приведенные моменты инерции масс.

Решение. Согласно формуле (13.20) дифференциальное уравнение движения динамической модели механизма следующее:

$$M_r = M_P - M_Q = I_r \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi}. \quad (1)$$

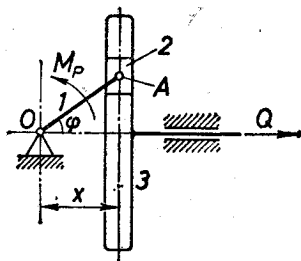


Рис. 13.7.

Учитывая, что

$$v_A = r\omega, \quad x = r \cos \varphi, \quad \dot{x} = v_3 = -r\omega \sin \varphi,$$

по формуле (13.10) определяем приведенный к кривошипу момент инерции массы механизма

$$I_r = I_1 + m_2 \frac{v_A^2}{\omega^2} + m_3 \frac{v_3^2}{\omega^2} = I_1 + m_2 r^2 + m_3 r^2 \sin^2 \varphi, \quad (2)$$

а по второй формуле (13.13) — приведенный к кривошипу момент полезного сопротивления

$$M_Q = \left| \frac{Qv_3}{\omega} \right| = Qr |\sin \varphi| = 200 |\sin \varphi| \text{ Н}\cdot\text{м}. \quad (3)$$

Так как

$$\frac{dI_r}{d\varphi} = m_3 r^2 \sin 2\varphi, \quad (4)$$

то дифференциальное уравнение движения механизма в окончательном виде следующее:

$$(I_1 + m_2 r^2 + m_3 r^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} m_3 r^2 \sin 2\varphi - M_P + Qr |\sin \varphi| = 0. \quad (5)$$

Если закон изменения движущего момента M_P известен, то, интегрируя уравнение (5), можем найти закон движения ведущего звена синусного механизма.

В рассматриваемой задаче движение механизма задано, но необходимо определить движущий момент, который согласно уравнению (5) можем выразить как сумму трех моментов

$$M_P = M_Q + M_\varepsilon + M_\omega, \quad (6)$$

где выражение (3) определяет момент M_Q , а

$$M_\varepsilon = (I_1 + m_2 r^2 + m_3 r^2 \sin^2 \varphi) \varepsilon = 358 + 143,2 \sin^2 \varphi \text{ (Н}\cdot\text{м)}, \quad (7)$$

$$M_\omega = \frac{\omega^2}{2} m_3 r^2 \sin 2\varphi. \quad (8)$$

Следовательно, движущий момент обеспечивает преодоление полезного сопротивления, разгон механизма и движение ползуна как при пуске механизма, так и во время стационарного движения.

Согласно условиям задачи время разгона $t_1 = 15/35,8 = 0,42$ с, за это время кривошип поворачивается на угол $\varphi_1 = \varepsilon t_1^2/2 = \pi$. Во время разгона $\omega^2/2 = \varepsilon^2 t^2/2 = \varepsilon\varphi$, поэтому

$$M_\omega = \varepsilon\varphi m_3 r^2 \sin 2\varphi = 143,2\varphi \sin 2\varphi \text{ (Н}\cdot\text{м)}. \quad (9)$$

Во время стационарного движения по формуле (8)

$$M_\omega = 450 \sin 2\varphi \text{ (Н}\cdot\text{м)}. \quad (10)$$

Закон изменения каждой из составляющих правой части уравнения (6) показан на рис. 13.8. Для поддержания равномерного вращения кривошипа движущий момент должен изменяться в широких пределах. Главной причиной этих колебаний является M_ω , т. е. часть M_P , сообщающая непрерывно изменяющееся ускорение ползуну.

Приведенную к ползуну массу определяем по формуле (13.8)

$$m_r = m_3 + m_2 \frac{v_A^2}{v_3^2} + I_1 \frac{\omega^2}{v_3^2} = m_3 + \left(m_2 + \frac{I_1}{r^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \varphi}, \quad (11)$$

а силовую приведенную массу — по формуле (13.28):

$$m_r' = m_3 + m_2 \frac{a_{A_1} v_A}{a_3 v_3} + I_1 \frac{\varepsilon \omega}{a_3 v_3}. \quad (12)$$

Приведенный к кривошипу момент инерции массы выражается формулой

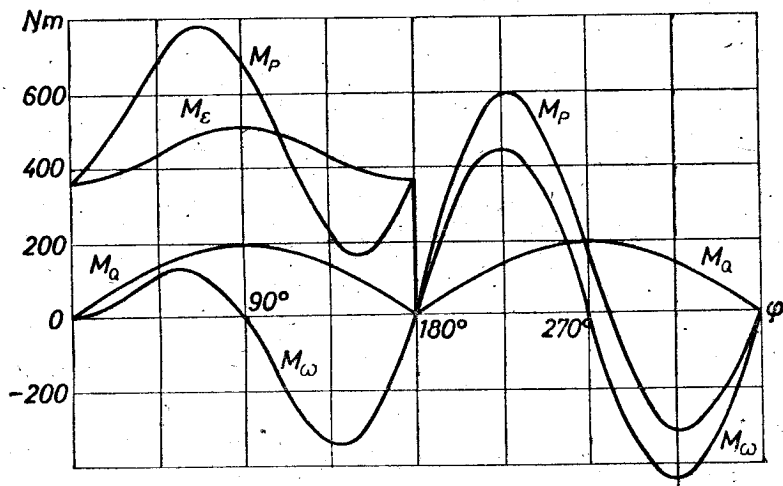


Рис. 13.8.

(2). По формуле (13.29) силовой приведенный момент инерции массы

$$I_r' = I_1 + m_2 \frac{a_{A_1} v_A}{\varepsilon \omega} + m_3 \frac{q_3 v_3}{\varepsilon \omega}.$$

Так как $a_3 = \dot{x} = -r(\omega^2 \cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi)$, то

$$I_r' = I_1 + m_2 r^2 + m_3 r^2 \left(\sin^2 \varphi + \frac{\omega^2}{2\varepsilon} \sin 2\varphi \right). \quad (13)$$

Видно, что приведенные массы m_r и m_r' , так же как и приведенные моменты инерции I_r и I_r' , значительно отличаются друг от друга.

§ 13.5. Интегрирование дифференциальных уравнений движения

Дифференциальные уравнения движения машинного агрегата обычно являются нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка с переменными коэффициентами; их интегрирование возможно только численно или графически. Однако в случае, когда приведенный момент инерции $I_r = \text{const}$ и приведенный момент $M_r = \text{const}$, можно получить общее решение уравнения (13.20) в конечном виде, получая известные формулы равномерно переменного движения:

$$\varepsilon = M_r / I_r = \text{const}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2. \quad (13.30)$$

Если $M_r = 0$, то $\varepsilon = 0$, и эти формулы описывают равномерное вращение. В случае, когда $I_r = \text{const}$ и $M_r = M_r(\varphi)$ или $M_r = M_r(\omega)$, или $M_r = M_r(t)$, а также в случаях, когда $I_r = I_r(\varphi)$ и $M_r = M_r(\varphi)$, дифференциальное уравнение (13.20) интегрируется в квадратурах, т. е. его общее решение можно получить в виде формулы, содержащей определенный интеграл. В общем случае, когда $I_r = I_r(\varphi)$ и $M_r = M_r(\varphi, \omega, t)$, дифференциальное уравнение (13.20)

$$M_r(\varphi, \omega, t) = I_r \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi}$$

можно интегрировать численно по методам Эйлера, Рунге — Кутты или другому методу. Отметим здесь метод Баранова [7], алгоритм которого получают, переписывая уравнение (13.20) в форме

$$\frac{2M_r(\varphi, \omega, t)}{\omega} d\varphi = 2I_r d\omega + \omega dI_r$$

и после этого в форме

$$\frac{2M_r(\varphi_i, \omega_i, t_i)}{\omega_i} \Delta\varphi = 2I_{r_i}(\omega_{i+1} - \omega_i) + \omega_i(I_{r_{(i+1)}} - I_{r_i}), \quad (1)$$

где $\Delta\varphi$ — шаг интегрирования, который выбирается достаточно небольшим, а величины, обозначенные индексами i и $i+1$, соответствуют двум положениям механизма, которые совпадают с началом и концом шага $\Delta\varphi$. Алгоритм численного интегрирования получают, выражая из уравнения (1) угловую скорость главного звена в конце этого и в начале следующего шага:

$$\omega_{i+1} = \frac{M_r(\varphi_i, \omega_i, t_i)}{I_{r_i} \omega_i} \Delta\varphi + \frac{3I_{r_i} - I_{r_{(i+1)}}}{2I_{r_i}} \omega_i. \quad (13.31)$$

Время, соответствующее концу шага $\Delta\varphi$, определяют, заменяя в выражении $dt = d\varphi/\omega$ дифференциалы на конечные приращения, а угловую скорость — на среднюю арифметическую скорость в пределах данного шага:

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2\Delta\varphi}{\omega_i + \omega_{i+1}}. \quad (13.32)$$

Шаг $\Delta\varphi$ выбирают в пределах интервала интегрирования постоянным, а в случае необходимости, если интегральная кривая $\omega = \omega(\varphi)$ получает отклонения, не соответствующие реальным условиям, шаги необходимо уменьшить. Выходя из опасной зоны, шаг можно опять увеличивать.

Устойчивость численного интегрирования зависит не только от величины шага, но также от числа значащих цифр, учитываемых при интегрировании, и крутизны интегральной кривой [65]. В связи с округлением цифр возникают «периодические удары» и колебания тем сильнее, чем больше шаг интегрирования и чем меньше крутизна интегральной кривой в данном месте. Мно-

гозначные цифры используются при численном интегрировании также тогда, когда коэффициенты дифференциального уравнения весьма неточны.

Необходимые для определения величины I_r и M_r отношения скоростей легко определяются методом треугольников [23].

Все сказанное в этом параграфе относится также к главному звену в поступательном движении, только приведенный момент инерции I_r должен заменяться приведенной массой m_r , приведенный момент M_r — приведенной результирующей силой R_r и формула (13.20) — формулой (13.19). Учитывая эту аналогию между прямолинейным поступательным движением и вращением, далее будем рассматривать только агрегаты с вращающимся звеном приведения.

§ 13.6. Определение закона движения ведущего звена при силах, зависящих от положения механизма

Во многих случаях приближенно можно принять, что приведенный момент $M_r = M_p - M_s$ зависит только от положения (позиции) механизма, которое характеризуется углом поворота φ звена приведения. Тогда, согласно формуле (13.16), угловая скорость этого звена

$$\omega = \left(\frac{2}{I_r} \int_0^{\varphi} M_r d\varphi + \frac{I_{r0}}{I_r} \omega_0^2 \right)^{1/2} = \omega(\varphi). \quad (13.33)$$

Обычно $M_r = M_r(\varphi)$ и $I_r = I_r(\varphi)$ заданы в виде графиков или таблиц. Даже тогда, когда эти величины выражены в виде формул, интеграл работы в выражении (13.33) обычно не будет представлен элементарными функциями. Поэтому функция $\omega = \omega(\varphi)$ определяется численными или графическими методами.

Используя формулу $\omega = d\varphi/dt$, определяют время в функции положения звена приведения

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} = t(\varphi). \quad (13.34)$$

Этот интеграл можно численно определить по формуле (13.32). Исключая из функции (13.33) и (13.34) угол φ , получают функцию $\omega = \omega(t)$. Угловое ускорение звена приведения можно определить по формуле

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Таким образом, движение данного агрегата определено.

Теперь рассмотрим графоаналитическое решение этой задачи; главную часть этого решения составляет построение четырех взаимно связанных диаграмм (рис. 13.9). Сначала строим

диаграмму приведенных моментов: выбираем масштабный коэффициент моментов k_M (кгс·м/мм) (или Н·м/мм) и масштабный коэффициент угла φ поворота k_φ (1/мм) (т. е. рад/мм), чертим кривые движущего момента $M_p = M_p(\varphi)$ и момента сил сопротивления $M_s = M_s(\varphi)$.

Работа момента сил

$$A = \int_0^{\varphi} M d\varphi = \int_0^{\varphi} k_M \bar{M} k_\varphi d\tilde{\varphi} = k_M k_\varphi \int_0^{\tilde{\varphi}} \bar{M} d\tilde{\varphi}.$$

Это означает, что площадь L (мм²) под кривой момента M пропорциональна работе этого момента

$$A = k_A L \text{ кгс} \cdot \text{м (либо (Н} \cdot \text{м))}, \quad (13.35)$$

где масштабный коэффициент работы

$$k_A = k_M \cdot k_\varphi \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{мм}^2} \left(\text{либо} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{мм}^2} \right). \quad (13.36)$$

Работа движущего момента M_p положительна, а работа момента сопротивления M_s отрицательна. Поэтому площадь, заключенная между кривыми работ M_p и M_s , выражает в определенном масштабе или избыток работы (+) или ее недостаток (-), которые, согласно формуле (13.16), определяют приращение или уменьшение кинетической энергии. Строим кривую изменения кинетической энергии $E = E(\varphi)$ от начала разгона с произвольно выбранным масштабным коэффициентом $k_E \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{мм}} \left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{мм}} \right)$. Соответствующая выбранному углу поворота φ_i ордината точки i кривой

$$e = \frac{k_A}{k_E} f(\text{мм}),$$

где f — площадь (мм²) между кривыми, лежащая левее ординаты e и показанная на рис. 13.9 двойной штриховкой.

Аналогично находят другие ординаты и по точкам строят кривую $E = E(\varphi)$. Участок A кривой соответствует разгону агрегата, B — стационарному движению, C — выбегу. Абсциссы экстремальных точек кривой $E = E(\varphi)$ равны абсциссам точек пересечения кривых $M_p = M_p(\varphi)$ и $M_s = M_s(\varphi)$. Кривая кинетической энергии не соответствует изменению графика угловой скорости ω звена приведения. Даже абсциссы экстремальных значений этой кривой в общем случае не совпадают с абсциссами экстремальных значений кривой $\omega = \omega(\varphi)$, так как кинетическая энергия пропорциональна не только ω^2 , а и приведенному моменту инерции I_r , который обычно является функцией угла φ .

Строим кривую приведенного момента инерции $I_r = I_r(\varphi)$ с масштабным коэффициентом $k_I \frac{\text{кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{мм}} \left(\text{либо} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{мм}} \right)$ для од-

ного цикла движения агрегата. За время цикла звено приведения поворачивается на угол φ_c .

В последнюю очередь строим кривую $E = E(I_r)$ кинетической энергии в функции приведенного момента инерции, которая известна как диаграмма Виттенбауера или как диаграмма энерго-масс. Построение точки i диаграммы показано на рис. 13.9. При

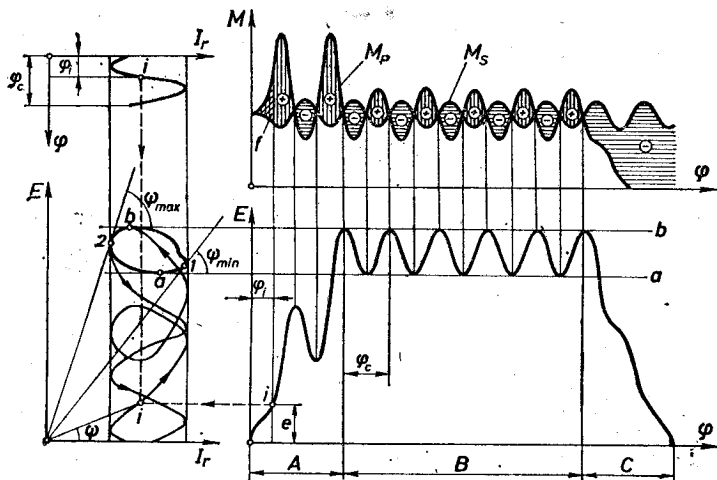


Рис. 13.9.

движении агрегата точка i диаграммы перемещается по кривой. Части кривой, соответствующие разгону и выбегу, эта точка описывает только один раз, а замкнутую часть кривой, соответствующую стационарному движению, много раз.

Если точку кривой Виттенбауера соединяют с началом системы координат, то построенная прямая образует с осью абсцисс угол ψ :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{e}{\tilde{I}_r} = \frac{\tilde{E}}{\tilde{I}_r} = \frac{E/k_E}{I_r/k_I} = \frac{k_I}{k_E} \frac{E}{I_r}$$

Так как $E = I_r \omega^2 / 2$, $\omega^2 = 2E / I_r$, то по диаграмме Виттенбауера можно определить угловую скорость, соответствующую углу φ поворота звена приведения

$$\omega = (2(k_E/k_I) \operatorname{tg} \psi)^{1/2}. \quad (13.37)$$

Проведя касательные к замкнутой части кривой, можно сделать вывод, что во время стационарного движения угловая скорость главного звена изменяется в следующих пределах:

$$\omega_{max} = (2(k_E/k_I) \operatorname{tg} \psi_{max})^{1/2}, \quad \omega_{min} = (2(k_E/k_I) \operatorname{tg} \psi_{min})^{1/2}. \quad (13.38)$$

Таким образом можно определить степень неравномерности

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} \quad (13.39)$$

С помощью диаграммы Виттенбауера и формулы (13.37) можно определить также значения функции $\omega = \omega(\varphi)$ и построить кривую $1/\omega = f(\varphi)$. Площадь под этой кривой выражает время движения агрегата согласно формуле (13.34). Построением кривой $t = t(\varphi)$ заканчивается определение закона движения главного звена агрегата.

Еще несколько слов о последней операции. Трудности возникают здесь в связи с определением площади первой полоски (рис. 13.10), так как ось ординат является асимптотой кривой $1/\omega = f(\varphi)$. Поэтому время, соответствующее первой полоске, выгодно определить аналитически [65]. Для этой цели кривую $\omega = \omega(\varphi)$ в пределах двух первых полосок заменяют параболой

$$\omega = k\varphi^n, \quad (a)$$

которая проходит через начало координат 1 и точки 2 и 3. Подставляя выражение (a) в (13.34) и интегрируя, находят, что от начала движения до положения φ_3 прошло время

$$t_3 = \frac{\varphi_3^{1-n}}{k(1-n)}. \quad (13.40)$$

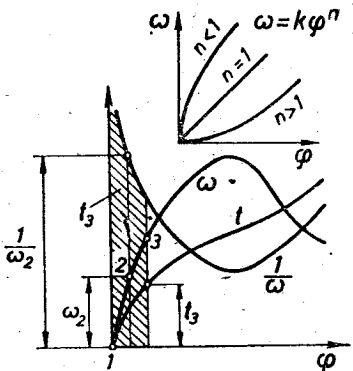


Рис. 13.10.

Видно, что у замещающей параболы $n < 1$, так как только тогда время t_3 , которое на рис. 13.10 изображается как площадь двух первых полосок и как соответствующая ордината интегральной кривой (13.34), будет положительным и конечным. Тангенс угла наклона касательной к параболе (a) в начале координат

$$\operatorname{tg} \kappa = \left(\frac{d\omega}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = (kn\varphi^{n-1})_{\varphi=0} = \infty.$$

Поэтому все параболы с $n < 1$ касаются оси ординат в начале координат; то же самое относится к кривым скорости-пути и к кривой $\omega = \omega(\varphi)$, если движение начинается из положения покоя.

Постоянные n и k в выражении (13.40) определяют по формулам

$$n = \frac{\lg \omega_3 - \lg \omega_2}{\lg \varphi_3 - \lg \varphi_2}, \quad \lg k = \frac{\lg \varphi_3 \lg \omega_2 - \lg \varphi_2 \lg \omega_3}{\lg \varphi_3 - \lg \varphi_2}, \quad (13.41)$$

которые получают решением системы уравнений

$$\omega_2 = k\varphi_2^n, \quad \omega_3 = k\varphi_3^n.$$

§ 13.7. Решение уравнения движения при силах, зависящих от скорости

Движущий момент электромотора является убывающей функцией угловой скорости якоря (рис. 13.1). Момент полезного сопротивления многих станков постоянный или является возрастаю-

щей функцией угловой скорости. Агрегат, включающий упомянутые машины, обладает свойством саморегуляции: агрегат разгоняется до номинальной угловой скорости ω_n и дальше движется с этой скоростью. Номинальная угловая скорость совпадает с абсциссой точки F пересечения кривых движущего момента $M_p = M_p(\omega)$ и момента полезного сопротивления $M_s = M_s(\omega)$, построенной в этом же квадранте.

Выясним главные свойства агрегата данного типа, если приведенный момент инерции его $I_r = \text{const}$, а движущий момент и момент сопротивления являются линейными функциями угловой скорости ω знака приведения (рис. 13.11).

Если в действительности эти функции нелинейны, то для приближенных расчетов их можно линеаризовать, заменяя кривые прямыми. Характеристику асинхронного мотора (рис. 13.1, *в*) обычно заменяют прямой, проходящей через точки E и F .

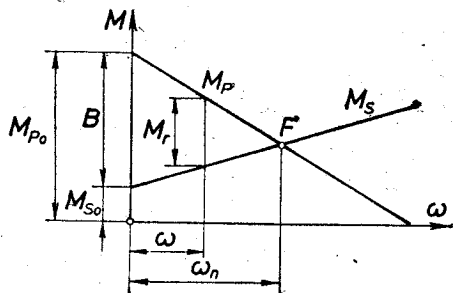


Рис. 13.11.

Используя внешние механические характеристики машин $M = M(\omega)$, получаем приближенное решение дифференциального уравнения, так как эти характеристики, как было упомянуто в § 13.1, являются статическими. Полученные законы движения тем более отличаются от действительных, чем быстрее меняется скорость агрегата.

Дифференциальное уравнение (13.20) рассматриваемого агрегата при $I_r = \text{const}$ упрощается, принимая вид

$$I_r \varepsilon = M_r, \quad (13.42)$$

$$\begin{aligned} \text{где } M_r &= M_p - M_s = (M_{p0} - K\omega) - (M_{s0} + k\omega) = \\ &= (M_{p0} - M_{s0}) - (K + k)\omega; \\ M_r &= B - C\omega, \end{aligned} \quad (13.43)$$

K и k пропорциональны тангенсам углов наклона прямых участков характеристик M_p и M_s к оси абсцисс (ω). Если $M_s = \text{const}$, то $k = 0$. Подставляя $M_r = 0$ в выражение (13.43), можно найти номинальную угловую скорость

$$\omega_n = B/C. \quad (13.44)$$

Дифференциальное уравнение (13.42) движения агрегата принимает следующий вид:

$$I_r d\omega/dt = C(\omega_n - \omega). \quad (13.45)$$

Уравнение (13.45) можно использовать для исследования разгона агрегата двигателем постоянного тока с параллельным возбуждением, а при асинхронном двигателе — при изменении

нагрузки, когда работа происходит на участке EF (рис. 13.1, e). От начала разгона агрегата двигателем постоянного тока до момента, когда достигнута угловая скорость ω , проходит время, которое можно выразить квадратурой

$$t = \frac{I_r}{C} \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\omega_n - \omega}.$$

Интегрируя, получаем

$$t = \frac{I_r}{C} \ln \frac{1}{1 - \omega/\omega_n}. \quad (13.46)$$

Видно, что для достижения номинальной угловой скорости потребуется бесконечно большое время (рис. 13.12). Однако очень быстро можно достичь угловой скорости, которая практически не отличается от номинальной. Так, например, $\omega = 0,99\omega_n$ можно достичь за следующий промежуток времени:

$$\begin{aligned} t &= \frac{I_r}{C} \ln \frac{1}{1 - 0,99} = \\ &= \frac{I_r}{C} \ln 100 = 4,6 \frac{I_r}{C}. \end{aligned}$$

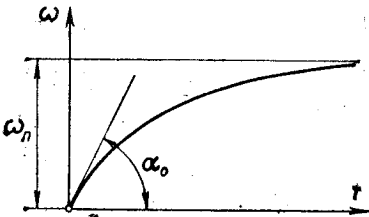


Рис. 13.12.

Наибольшее угловое ускорение, которое определимо из уравнения (13.45), имеет место в начале движения (рис. 13.12)

$$\epsilon_0 = \frac{k_\omega}{k_t} \operatorname{tg} \alpha_0 = \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{\omega=0} = \frac{C}{I_r} \omega_n$$

где k_ω и k_t — масштабные коэффициенты по осям координат. В этом случае удастся интегрировать дифференциальное уравнение (13.20) в конечном виде. Однако, если хотя бы одна из функций $M_P = M_P(\omega)$ или $M_S = M_S(\omega)$ нелинейна или $I_r = I_r(\varphi)$, то интегрирование возможно только численно или графически.

§ 13.8. Определение движения, вызванного силами, зависящими от скорости и положения

Приведенный момент $M_r = M_P - M_S$ в машинных агрегатах часто выражается как функция угла φ и угловой скорости ω звена привода. Действительно, если приложенные к соответствующим звеньям приводимые движущие силы и силы сопротивления являются функциями как φ и ω , так и только φ или только ω , а при приведении они умножаются согласно формулам (13.12) на передаточные отношения v_i/ω или ω_i/ω , которые в общем случае являются функциями угла φ , то зависимые только от скорости приводимые силы или моменты дают приведенный момент или силу, зависимые также от положения механизма. Законы движения агрегатов данного типа также можно определить по об-

этому методу, упомянутому в § 13.1, только дифференциальное уравнение (13.20), как указано в § 13.5, обычно интегрируется численно. С целью уменьшения объема работы рекомендуется малоизменяющиеся и маловлияющие параметры дифференциального уравнения заменять их средними значениями. К агрегатам данного типа относятся широко распространенные гидравлические механизмы. Рассмотрим конкретный пример такого механизма, на котором покажем составление и численное интегрирование дифференциального уравнения движения.

Пример 13.7. На рис. 13.13 показана схема гидроподъемника. Стрелы OE и EC_1 показаны в верхнем положении; угол OEC_1 не изменяется, и гидроцилиндр для изменения этого угла не показан. Масса грейфера условно сосредоточена в точке C_1 стрелы. На схеме: 1 — гидроцилиндр одностороннего действия, 2 — золотник, 3 — перепускной клапан, 4 — шестеренчатый

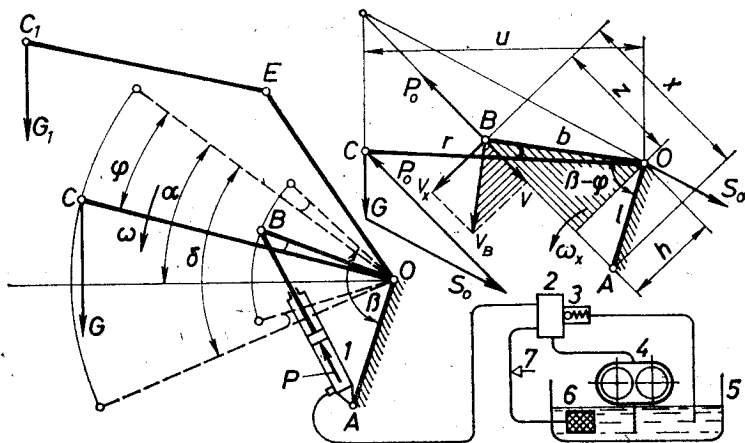


Рис. 13.13.

гидронасос, 5 — масляный бак, 6 — фильтр, 7 — дроссель в сливной магистрали, C — общий центр тяжести масс системы, вращающейся вокруг оси O , и массы, сосредоточенной в точке C_1 .

Если производительность масляного насоса постоянна и утечка через неплотности насоса является заданной функцией давления масла, то движение при подъеме груза можно рассчитать, не решая дифференциального уравнения [65]. Скорость опускания стрелы с грейфером зависит от регулировки дросселя 7, т. е. от гидравлических сопротивлений, зависящих от расхода жидкости. В связи с этим закон движения стрелы при опускании можно установить только в результате интегрирования дифференциального уравнения (13.20).

Постоянными параметрами механизма являются: $G = 187$ кгс, $G_1 = 68$ кгс, $\alpha = 48,5^\circ$, $\delta = 81,5^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $r = 2,78$ м, $b = 1,44$ м, $l = 0,65$ м, а изменяющиеся параметры:

$$u = r \cos(\alpha - \varphi), \quad (1)$$

$$x = \sqrt{b^2 + l^2 - 2bl \cos(\beta - \varphi)}, \quad (2)$$

$$h = \frac{bl}{x} \sin(\beta - \varphi), \quad (3)$$

$$z = (b^2 - h^2)^{1/2} \quad (4)$$

показаны на рис. 13.14. Из заштрихованных треугольников (рис. 13.13) следует, что

$$\frac{v}{v_B} = \frac{h}{b}; \quad \frac{v_x}{v} = \frac{z}{h}.$$

Так как $v_B = \omega b$, то скорость поршня в цилиндре, определяющая расход жидкости,

$$v = \omega h. \quad (5)$$

Приведенный момент инерции массы системы

$$I_r = I + I_x(\omega_x/\omega)^2, \quad (6)$$

где $I = 194 \text{ кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ — момент инерции стрелы с грейфером относительно оси O . Принимая гидроцилиндр с поршнем и штоком за однородный стержень B массу m_x и ее момент инерции относительно оси A

$$I_x = m_x x^2/3.$$

Так как

$$\frac{\omega_x}{\omega} = \frac{v_x}{v\omega} = \frac{z}{x},$$

то

$$I_r = I + \frac{m_x z^2}{3} \approx \approx 195 \text{ кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \approx \text{const},$$

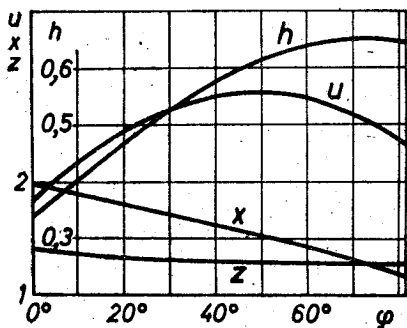


Рис. 13.14.

потому что, как видно из рис. 13.14, в данном случае длина $z \approx \text{const}$.

Поэтому дифференциальное уравнение (13.20) приобретает форму

$$I_r \varepsilon = M_r. \quad (7)$$

Приведенный момент

$$M_r = G \cdot u - M_F - P_1 h, \quad (8)$$

где M_F — приведенный момент трения и $P_1 = P + F$. Здесь $P = pL$ — сила давления масла на поршень, а $F = f\pi Ds$ — сила трения между поршнем и цилиндром ($f = 0,1$ — коэффициент трения между манжетой и стенкой цилиндра, $D = 75 \text{ мм}$ — диаметр цилиндра, $s = 7 \text{ мм}$ — ширина манжеты, на которую действует давление масла p). Следовательно,

$$P_1 = p(L + f\pi Ds) = pL_1, \quad (9)$$

где $L_1 = 45,8 \text{ см}^2$ является приведенной площадью поршня, а действительная площадь $L = 44,2 \text{ см}^2$.

Действующие в других местах силы трения приводим к стреле, получая приведенный момент трения

$$M_F = M_0 + M_{C_1} + M_B \left(1 - \frac{\omega_x}{\omega}\right) + M_A \frac{\omega_x}{\omega} + Th,$$

где M_0 , M_{C_1} , M_B и M_A — моменты трения в соответствующих шарнирах, а $T = 20 \text{ кгс}$ — сила трения в уплотнении штока поршня. Моменты трения пропорциональны реакциям, действующим в соответствующих шарнирах, определенным без учета сил инерции из условий статического равновесия, т. е. из силового треугольника (рис. 13.13)

$$M_0 = f' r_0 S_0, \quad M_B = f' r_B P_0, \quad M_{C_1} = f' r_{C_1} G_1, \quad M_A = f' r_A P_0.$$

Если принять радиусы трущихся поверхностей шарниров $r_0 = r_B = r_{C_1} = r_A = 0,02$ м, то

$$M_F = Th + \xi' r_0 G, \quad (10)$$

где

$$\xi = (G_1 + S_0 + P_0)/G. \quad (11)$$

Если пренебрежем изменением кинетической энергии масла, которое в данном случае незначительно, то давление в цилиндре

$$p = p_l + p_r, \quad (12)$$

где p_l — потеря давления из-за трения масла в сливной магистрали и главным образом в дросселе 7, p_r — потеря давления на местных сопротивлениях, т. е. гидравлические потери [65], которые можно выразить равенством

$$p = K_1 v + K_2 v^2, \quad (13)$$

где $K_1 = 3,48 \cdot 10^5$, $K_2 = 1,1 \cdot 10^6/v^{0,285}$.

В гидравлических расчетах используют менее точный коэффициент $K'_2 = K_2 = 16 \cdot 10^5$. Статическое давление масла в цилиндре можно выразить так:

$$p' = \frac{Gu - M_F}{hL_1}. \quad (14)$$

Можно доказать [65], что за весь период движения $p'_{cp} = p_{cp}$ и с хорошим приближением

$$K_1 v_{cp} + K'_2 v_{cp}^2 + p'_{cp} = 0, \quad (15)$$

откуда

$$v_{cp} = \frac{-K_1 + (K_1^2 + 4K'_2 p'_{cp})^{1/2}}{2K'_2}. \quad (16)$$

Время опускания грейфера приближенно можно определить с ошибкой, меньшей чем 10%:

$$\tau = S/v_{cp}, \quad (17)$$

где $S = 0,78$ м — ход поршня, $p'_{cp} = 18,4$ ат, $v_{cp} = 0,248$ м/с и $\tau = 3,12$ с.

Если требуется более точно определить закон движения стрелы при опускании и получить более точное время опускания, то необходимо интегрировать уравнение (7), которое, с учетом формул (8), (13) и (5), приобретает вид:

$$I_r d\omega/dt = Gu - M_F - B_1 h^2 \omega - B_2 h^3 \omega^2, \quad (18)$$

где $B_1 = K_1 L_1$, $B_2 = K_2 \cdot L_1$. Для упрощения в уравнение (18) подставляем

$$M_F = Th_{cp} + \xi' \xi_{cp} r_0 G, \quad K_2 = 1,1 \cdot 10^6/v_{cp}^{0,285},$$

где v_{cp} определена по формуле (16), а $h_{cp} = 0,538$ м и $\xi_{cp} = 0,9$ являются средними арифметическими для положений $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots$. Тогда $M_F = 14,2$ кгс · м.

С помощью преобразований

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\omega^2)}{d\varphi}, \quad \omega^2 = y$$

дифференциальное уравнение (18) приводим к виду

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{2}{I_r} (Gu - M_F - B_1 h^2 \sqrt{y} - B_2 h^3 y). \quad (19)$$

Выбрав шаг интегрирования $\Delta\varphi = 2^\circ = 0,0349066$ рад, при численном интегрировании по методу Эйлера заполняем столбец 1 табл. 13.1. Используя формулы (1) и (3), заполняем столбцы 4 и 5, а потом столбцы 6 и 8. Этим подготовка к численному интегрированию окончена. В процессе интегрирования постепенно заполняются остальные столбцы.

Таблица 13.1

1	2	3	4	5	6	7
φ°	ω (с ⁻¹)	y (с ⁻²)	Gy (кгс·м)	h (м)	$B_1 h^2$ (кгс·м·с)	$B_1 h^2 \sqrt{y}$ (кгс·м)
0	0	0	344,562	0,338170	182,403	0
2	0,343911	0,118275	357,945	0,351934	197,554	67,941
4	0,450529	0,202976	370,890	0,365529	213,110	96,012
6	0,518386	0,269346	383,384	0,378946	229,042	118,870
80	0,329017	0,108252	443,373	0,641063	655,483	215,665
81,5	0,327607	0,107326	436,108	0,638036	649,309	—
8	9	10	11	12	13	14
$B_2 h^2$ (кгс·м·с ²)	$B_2 h^2 y$ (кгс·м)	$\frac{dy}{d\varphi}$	$\frac{\Delta y}{(c^{-1})}$	$\frac{1}{\omega}$ (с)	Δt (с)	t (с)
294,200	0	3,388332	0,118275	∞	—	—
331,604	39,221	2,426495	0,084701	2,9077	—	—
370,958	75,296	1,901359	0,066370	2,2196	0,0724	0,2544
413,970	111,501	1,423726	0,049697	1,9268	0,0645	0,3268
2004,189	216,957	-0,035381	-0,000926	3,0394	0,1097	3,2727
1975,932	—	—	—	3,0524	—	3,3524

Интегрирование уравнения (19)

$$dy/d\varphi = f(\varphi, y)$$

начинаем с того, что, согласно начальным условиям, в первую строчку столбцов 2, 3, 7 и 9 записываем нули и из уравнения (19) определяем производную

$$(dy/d\varphi)_1 = f(0, 0).$$

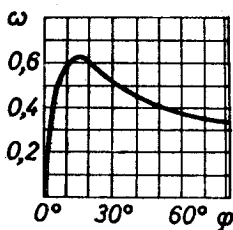


Рис. 13.15.

Согласно методу Эйлера

$$\Delta y_1 = y_2 = (dy/d\varphi)_1 \Delta\varphi, \quad \omega_2 = \sqrt{y_2}.$$

Здесь и дальше индексы означают номер строки. Далее заполняем в первой строке столбцы 10 и 11 и во второй строке — столбцы 2, 3, 7 и 9.

Используя $\varphi_2 = \Delta\varphi$ и y_2 , находим $(dy/d\varphi)_2 = = f(\varphi_2, y_2)$, $\Delta y_2 = (dy/d\varphi)_2 \Delta\varphi$, $y_3 = y_2 + \Delta y_2$, $\omega_3 = = \sqrt{y_3}$. Заполняем во второй строке столбцы 10 и 11, в третьей строке столбцы 2, 3, 7 и 9. Используя

$\varphi_3 = 2\Delta\varphi$ и y_3 , продолжаем процесс интегрирования до тех пор, пока первые 11 столбцов в таблице не будут заполнены. Из столбцов 1 и 2 получаем искомую функцию $\omega = \omega(\varphi)$, графическое изображение которой показано на рис. 13.15. Отметим, что в столбце 10 задано двойное угловое ускорение

стрелы, так как

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{d(\omega^2)}{d\varphi} = 2\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = 2 \frac{d\omega}{dt} \frac{\omega}{d\varphi/dt} = 2\varepsilon.$$

Для определения функции $t = t(\varphi)$ и времени опускания стрелы согласно формуле (13.34) заполняем столбцы 12, 13 и 14. По формулам (13.41) определяем параметры замещающей параболы $n = 0,3897$ и $k = 1,272$ и по формуле (13.40) с помощью угла $\varphi_3 = 2\Delta\varphi$ определяем $t_3 = 0,2544$ с. Далее, согласно рис. 13.10,

$$\Delta t_3 = \left(\frac{1}{\omega_3} + \frac{1}{\omega_4} \right) \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad t_4 = t_3 + \Delta t_3 \quad \text{и т. д.}$$

Последнее число столбца 14 выражает время опускания стрелы $\tau = 3,35$ с.

§ 13.9. Агрегаты с несколькими подвижностями. Упругая муфта

Агрегаты с несколькими подвижностями можно разделить на три группы.

Агрегаты первой группы имеют несколько взаимно независимых двигателей или один двигатель, приводящий в движение несколько звеньев, которые могут двигаться с различными скоростями в зависимости от приложенных к этим звеньям сопротивлений. Одним из механизмов такого типа является дифференциальная передача (§ 7.2). Динамический расчет дифференциальных передач представлен в работах [2, 28, 30].

Ко второй группе принадлежат агрегаты, в которых действуют динамические связи, например, узлы с фрикционными связями, с упругими муфтами, с гидродинамическим, центробежным и магнитным сцеплениями, а также механизмы для балансировки роторов, вибраторы, вибротранспортеры и многие другие механизмы с упругими промежуточными элементами или другими динамическими связями [30, 34, 43, 54, 68, 69].

Примерами агрегатов третьей группы, в которую следует отнести механизмы переменной структуры, служат инерционно-импульсный бесступенчатый вариатор [30], агрегаты с храповыми механизмами и др.

Динамический анализ упомянутых агрегатов может быть произведен с помощью дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, c + d, \quad (13.47)$$

где c — число основных подвижностей агрегата согласно формуле (2.18), d — число динамических связей, а другие обозначения — как в уравнении (13.18).

Механизмы с дополнительными подвижностями (§ 2.7) здесь не рассматриваются, так как соответствующие им движения не влияют на движение выходного звена машины.

В качестве примера анализа рассмотрим агрегат второй группы с двумя подвижностями.

Агрегат состоит из машин a и b , которые связаны между собой с помощью линейной упругой муфты. Машина a является двигателем, b — рабочей машиной, или наоборот. Заданы приведенные к валу сцепления (муфты) моменты

$$M_a = M_0 + M \sin pt, \quad M_b = M_0, \quad (1)$$

где M_0 , M , p — постоянные величины, t — время. Необходимо исследовать стационарное движение этого агрегата при условии, что приведенные моменты инерции масс I_a и I_b и жесткость c муфты — постоянные. Угол скручивания муфты

$$\varphi' = \varphi_0 + \varphi = \varphi_a - \varphi_b, \quad (2)$$

где φ_a и φ_b являются углами поворота валов муфты машин a и b , соединяемых муфтой, а угол скручивания муфты $\varphi_0 = M_0/c$ соответствует постоянной составляющей передаваемой нагрузки. Для приближения задачи к реальным условиям принимаем, что при относительном смещении половин муфты возникает не только момент сил упругости $c\varphi'$, но и момент $f\varphi'$ вязкого сопротивления, определяемый коэффициентом вязкого сопротивления f . Дифференцируем уравнение (2) по времени:

$$\dot{\varphi}' = \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b, \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_a - \ddot{\varphi}_b. \quad (3)$$

Результирующий момент муфты выражается равенством

$$M'_s = c\varphi_0 + (c\varphi + f\dot{\varphi}) = M_0 + M_s. \quad (4)$$

Если в дифференциальные уравнения (13.20) движения машин a и b

$$I_a \ddot{\varphi}_a = M_a - M'_s, \quad I_b \ddot{\varphi}_b = M'_s - M_b$$

подставить выражения (1) и (4), то получим

$$I_a \ddot{\varphi}_a = M \sin pt - c\varphi - f\dot{\varphi}, \quad I_b \ddot{\varphi}_b = c\varphi + f\dot{\varphi}. \quad (5)$$

Определяя из этих уравнений $\ddot{\varphi}_a$ и $\ddot{\varphi}_b$ и подставляя их во второе уравнение (3), получим дифференциальное уравнение относительного движения масс, связанных упругой муфтой

$$\ddot{\varphi} + \mu f \dot{\varphi} + \mu c \varphi = \mu M_1 \sin pt, \quad (6)$$

где $\mu = \frac{1}{I_a} + \frac{1}{I_b}$, $M_1 = \frac{M}{\mu I_a}$.

Уравнение (6) отличается от рассматриваемого в теоретической механике дифференциального уравнения вынужденных колебаний только коэффициентами; его общее решение следующее:

$$\varphi = A \sin (pt + \theta). \quad (7)$$

Постоянные интегрирования — амплитуда A относительных угловых колебаний и фазовый угол θ — выражаются следующими равенствами:

$$A = \frac{\mu M_1}{[(\mu c - p^2)^2 + (pf\mu)^2]^{1/2}}, \quad \theta = -\operatorname{arctg} \frac{pf\mu}{\mu c - p^2}.$$

Относительная угловая скорость

$$\dot{\varphi} = pA \cos (pt + \theta). \quad (8)$$

Соотношению, выражающему амплитуду A , можно придать удобную для анализа форму, введя безразмерные параметры

$$\beta = \frac{p^2 I_b}{c}, \quad \beta_r = 1 + \frac{I_b}{I_a}, \quad \lambda = \frac{1}{1 + (pf/c)^2}, \quad (9)$$

при этом получаем

$$A = \Phi \sqrt{\lambda} M_1 / c, \quad (10)$$

где

$$\Phi = 1 / \left(1 - 2\lambda \frac{\beta}{\beta_r} + \lambda \frac{\beta^2}{\beta_r^2} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

При $\beta = \beta_r$ наступает резонанс, что видно из графика функции Φ на рис. 13.16 при различных λ . Параметр λ характеризует гашение колебаний.

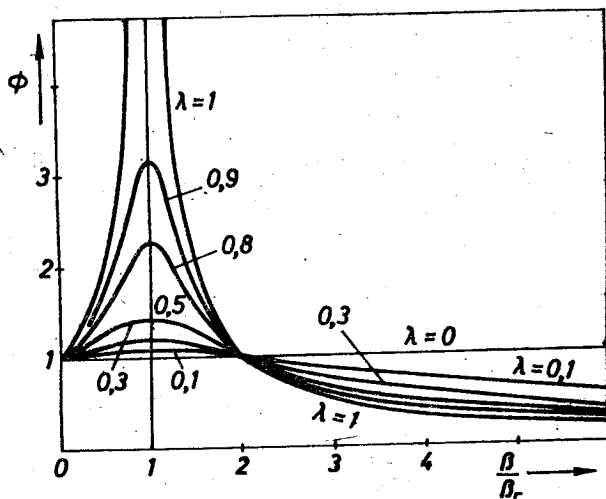


Рис. 13.16.

Подставляя во второе уравнение (5) выражения (7) и (8) и интегрируя, получаем угловую скорость машины b

$$\dot{\varphi}_b = \omega_{cp} + \frac{AB}{I_b} \sin(pt + \chi), \quad (12)$$

где

$$B = \frac{f}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad \chi = \theta - \arctg \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

Подставляя выражения (12) и (8) в первое уравнение (3), получаем угловую скорость машины a

$$\dot{\varphi}_a = \omega_{cp} + \frac{AB}{I_a \psi} \sin(pt + \sigma), \quad (13)$$

где

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\beta + \lambda\beta^2}}, \quad \sigma = \theta + \arctg \frac{\beta - 1}{\sqrt{1/\lambda - 1}}. \quad (14)$$

Если вместо упругой муфты между машинами a и b включена жесткая муфта, то, интегрируя уравнение

$$(I_a + I_b) \ddot{\varphi}_1 = M_a - M_b = M \sin pt,$$

получим общую угловую скорость обеих машин

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{cp} - \frac{M}{(I_a + I_b)p} \cos pt. \quad (15)$$

Введя обозначение $H = M/\mu r I_a I_b$, по формулам (12), (13), (15) находим, что угловые скорости колеблются в пределах

$$\dot{\varphi}_a = \omega_{cp} \pm \Phi H / \psi, \quad \dot{\varphi}_b = \omega_{cp} \pm \Phi H, \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_{cp} \pm H.$$

Этим колебаниям согласно формуле (13.39) соответствуют степени неравномерности

$$\delta_a = \frac{2\Phi H}{\psi \omega_{cp}}, \quad \delta_b = \frac{2\Phi H}{\omega_{cp}}, \quad \delta_1 = \frac{2H}{\omega_{cp}}. \quad (16)$$

Теперь можем определить относительные степени неравномерности

$$\Delta_a = \frac{\delta_a}{\delta_1} = \frac{\Phi}{\psi}, \quad \Delta_b = \frac{\delta_b}{\delta_1} = \Phi, \quad (17)$$

применение которых в функции β показано на рис. 13.17. Формулы (17),

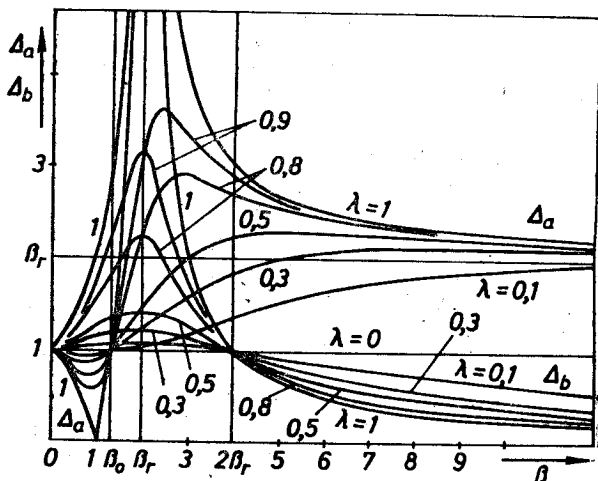


Рис. 13.17.

(9), (11), (14) и приведенные графики позволяют сделать несколько выводов:

1. В интервале

$$0 < \beta < \beta_0 = \frac{2}{1 + 1/\beta_r}$$

машина a вращается более равномерно, а машина b менее равномерно, чем в случае жесткой муфты.

2. В интервале $\beta_0 < \beta < 2\beta_r$, т. е. в области, близкой к резонансу, обе машины вращаются более неравномерно, чем в случае жесткой муфты. Упругая муфта с таким параметром β , или, точнее, жесткостью s , непригодна.

3. В интервале $2\beta_r < \beta < \infty$ машина b вращается равномернее, а машина a неравномернее, чем в случае жесткой муфты. Этот интервал наиболее пригоден для практических конструкций. Здесь гашение колебаний снижает неравномерность машины a , но увеличивает неравномерность машины b . Как определить коэффициент гашения λ для разных невязкостных гашений, показано в труде [54].

4. Если в интервале $\beta > 2\beta_r$ увеличивают I_a , то β_r и Φ снижаются. поэтому установка маховика на машине a в таких условиях снижает неравномерность обеих машин. Если в этом интервале увеличивают I_b , то увеличиваются β и β_r и уменьшаются Φ и ψ , причем ψ уменьшается быстрее. Поэтому установка маховика на машине b снижает ее неравномерность, увеличивая неравномерность машины a .

5. Используя формулы (4), (7), (8), можно определить момент, нагружающий муфту

$$M'_s = M_0 + \left(1 - \frac{1}{\beta_r}\right) \Phi M \sin(pt + \kappa),$$

где $\kappa = \theta + \arctg \sqrt{1/\lambda - 1}$. Следовательно, максимальная нагрузка на упругую муфту

$$M_{s,\max} = M_0 + (1 - 1/\beta_r) \Phi M.$$

Если машины соединены без упругого элемента, то $c = \infty$, $\beta = 0$ и $\Phi = 1$. Из рис. 13.16 видно, что только в интервале $\beta > 2\beta_r$ упругая муфта нагружена меньше, чем жесткая муфта.

Если вместо упругой муфты устанавливается динамометр для измерения мгновенных или экстремальных значений моментов M_a или M_b , то этот динамометр покажет M_a только тогда, когда будет выполнено условие

$$(1 - 1/\beta_r) \Phi = 1,$$

а M_b — тогда, когда

$$(1 - 1/\beta_r) \Phi = 0.$$

Эти условия пригодны для выбора динамометра и для оценки ошибок измерений.

Раздел 14

КРИТЕРИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОЛЕЗНОСТИ МЕХАНИЗМОВ

§ 14.1. Критерии энергетической полезности и зависимости между ними

Вредные сопротивления, действующие в подвижных соединениях и вне их, увеличивают расход энергии для привода механизма, создают нагрев и износ трущихся поверхностей. Поэтому чем меньше работа A_F или мощность N_F вредных сопротивлений, тем лучше. Однако для сравнения механизмов эти величины мало пригодны, так как остается неясным, какая часть расходуемой энергии теряется на преодоление вредных сопротивлений. Указанного недостатка не имеют нижеприведенные безразмерные критерии.

Наиболее распространенным критерием энергетической оценки машины является *механический коэффициент полезного действия*

$$\eta = \frac{A_Q}{A_P} = \frac{N_Q}{N_P}, \quad (14.1)$$

который далее будем называть просто *коэффициентом полезного действия*. Величины A_Q и A_P являются абсолютными значениями работ полезного сопротивления и движущей силы, совершаемых

в одном или в нескольких циклах стационарного движения; N_Q и N_P — соответствующие средние мощности. Используя уравнение (13.3) баланса работ и уравнение (13.4) баланса средних мощностей, выражение (14.1) можно привести к виду

$$\eta = 1 - \frac{A_F}{A_P} = 1 - \frac{N_F}{N_P} \quad (14.2)$$

где A_F и N_F — абсолютные значения работы и мощности вредного сопротивления. Величину

$$\psi = \frac{A_F}{A_P} = \frac{N_F}{N_P} \quad (14.3)$$

называют *коэффициентом потерь*. Очевидно,

$$\eta = 1 - \psi. \quad (14.4)$$

Ни в одном механизме не может быть $A_F = 0$. Поэтому всегда $\eta < 1$ и $\psi > 0$. При холостом ходе $A_P = A_F$, $\eta = 0$, $\psi = 1$. Возможно, что в результате расчета по предельным значениям сил трения получают $A_F > A_P$, $\eta > 0$, $\psi > 1$ *). Следовательно, теоретически можно получить следующие диапазоны обоих коэффициентов:

$$0 \leq \eta < 1, \quad 0 > \psi \geq 1.$$

Механизмы, у которых $\eta < 0$, называют *самотормозящимися* механизмами. В этих механизмах никакая движущая сила, приложенная к входному звену, не может вызвать движение его в направлении этой силы. Для того чтобы механизм имел возможность движения, необходимо либо поменять роли входного и выходного звеньев, либо к обоим приложить силы, совершающие положительную работу. Самотормозящиеся механизмы часто используются в практике, например, в подъемных устройствах, для удержания висящего груза в поднятом положении без тормоза, в зажимных и фиксирующих устройствах и др. В таких случаях необходимо правильно определить возможное уменьшение коэффициента трения с учетом смазки и приработки скользящих поверхностей. Коэффициенты η и ψ в общем случае зависят от направления силового потока в механизме. Если при выбранном ведущем звене оказывается, что $\eta \leq 0$, то механизм — самотор-

*) Коэффициент полезного действия $\eta < 0$ не имеет физического смысла, потому что работа силы трения, вообще говоря, пассивной, даже при $A_Q = 0$ оказывается больше работы активной силы A_P , приложенной к входному звену. Такой, на первый взгляд, парадоксальный результат получается вследствие того, что расчет ведется по предельному значению силы трения или, иначе, приведенного коэффициента трения. Если при расчете по предельным значениям приведенного коэффициента трения получено $\eta < 0$, то это означает, что в действительности $\eta = 0$. Поэтому для характеристики коэффициента полезного действия следует оперировать неравенствами $\eta \geq 0$ и $0 < \psi \leq 1$ (см.: Кожевников С. Н. О парадоксах Пенлеве. — Прикладная механика, 1967, 3, № 1, 119—126). — Прим. ред.

мозающийся и движение механизма возможно только тогда, когда ведомое звено будет ведущим.

Коэффициенты полезного действия и потерь пригодны для сравнения машин и устройств только одинакового назначения. В некоторых машинах полезное сопротивление ничтожно (например, в полиграфических и текстильных машинах), поэтому коэффициент полезного действия небольшой. При перемещении транспортных машин по горизонтальной дороге работа силы тяжести груза Q равна нулю, поэтому $\eta = 0$ и $\psi = 1$. Для сравнения этих машин пригоден входящий в формулу (12.45) коэффициент тяги μ , если он рассчитан для дорог одинакового качества.

Работу сопротивлений и работу движущих сил в формулах (14.1) и (14.2) можно выразить как произведение средних приведенных сил или моментов на пройденном пути или в пределах угла поворота главного звена за время цикла; тогда

$$\eta = \frac{Q_{r_{cp}}}{P_{r_{cp}}} = \frac{M_{Q_{cp}}}{M_{P_{cp}}} = 1 - \frac{F_{r_{cp}}}{P_{r_{cp}}} = 1 - \frac{M_{F_{cp}}}{M_{P_{cp}}}. \quad (14.5)$$

В механизмах с постоянным передаточным отношением средние приведенные силы или моменты равны мгновенным силам, и все предыдущие формулы пригодны для любого промежутка или момента времени стационарного движения. Для этих механизмов

$$\eta = \frac{Qv_Q}{Pv_P} = \frac{M_Q\omega_Q}{M_P\omega_P} = \frac{Q}{uP} = \frac{M_Q}{uM_P}, \quad (14.6)$$

где Q и P — тангенциальное полезное сопротивление и движущая сила, v_Q и v_P — скорости точек приложения этих сил, M_Q и M_P — моменты полезного сопротивления и движущей силы, ω_Q и ω_P — угловые скорости звеньев, к которым приложены упомянутые моменты.

У идеальной машины $\eta = 1$, поэтому $Qv_Q = P_0v_P$ или $Q_0v_Q = Pv_P$, где P_0 и Q_0 являются силами, которые в идеальной машине заменяют силы Q и P при установившемся движении. Подставляя эти выражения в формулу (14.6), получаем еще одно выражение коэффициента полезного действия для механизмов с постоянным передаточным числом

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q}{Q_0}. \quad (14.7)$$

При нестационарном движении коэффициенты η и ψ не имеют смысла, а в стационарном движении механизмов с переменным передаточным отношением не имеют смысла значения коэффициентов, которые определены через мгновенные величины. Согласно формуле (13.5) момент двигателя в упомянутых случаях преодолевает не только вредное и полезное сопротивление, но также сообщает ускорение массам, изменяет положение центров тяжести звеньев и деформирует упругие элементы. Поэтому коэффициент полезного действия может получиться как очень ма-

лым, так и большим единицы. Коэффициенты полезного действия и потерь могут использоваться как критерии энергетической полезности механизмов только тогда, когда они относятся к промежутку времени, в котором пригодно уравнение (13.3) баланса работ. Однако кинематические пары могут быть оценены с помощью мгновенных коэффициентов, так как здесь или отсутствуют упомянутые факторы, не позволяющие этим коэффициентам служить критериями энергетической полезности, или их значением можно пренебречь.

В теории механизмов иногда используют коэффициент *возрастания усилий*

$$\kappa = \frac{P}{Q} = \frac{M_P}{M_Q}, \quad (14.8)$$

где силы P и Q могут быть не тангенциальными. Если они тангенциальны, то, учитывая формулу (14.6), для механизмов с постоянным передаточным отношением

$$\eta_{\kappa i} = 1. \quad (14.9)$$

Эта формула связывает рассмотренные выше критерии.

§ 14.2. Коэффициент полезного действия составной системы

Для уже изготовленной машины коэффициент полезного действия (кпд) можно определить экспериментально — на основе измерения сил и скоростей. Для вновь конструируемой машины, агрегата, поточной линии, кпд определяют через кпд отдельных механизмов. Коэффициент полезного действия механизма можно определить, используя коэффициенты полезного действия подвижных соединений.

Для выполнения упомянутых расчетов необходимо знать, как коэффициент полезного действия системы связан с коэффициентами полезного действия отдельных частей системы (машин,

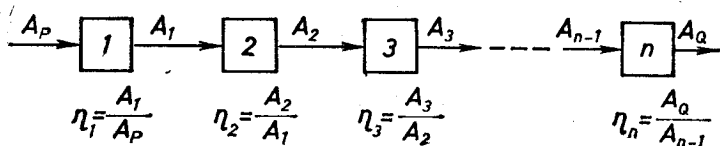


Рис. 14.1.

механизмов, подвижных соединений). Ответ на этот вопрос зависит от вида соединения частей системы. Возможны три вида соединений: последовательное, параллельное и комбинированное. При последовательном соединении (рис. 14.1) силовой поток проходит через все части системы без разделения. Видно, что, умножая коэффициенты полезного действия отдельных частей,

получают коэффициент полезного действия системы, т. е.

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n. \quad (14.10)$$

Из этой формулы следует важный вывод: коэффициент полезного действия системы меньше коэффициента полезного действия самой худшей части системы. Поэтому сперва следует улучшить коэффициент полезного действия самой худшей части. Чем в системе больше частей, тем труднее получить высокий коэффициент полезного действия системы.

Заменяя в формуле (14.10) коэффициенты полезного действия коэффициентами потерь согласно формуле (14.4), произведя умножение и отбрасывая произведения коэффициентов потерь, получают приближенную формулу

$$\psi \approx \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_n. \quad (14.11)$$

Пример 14.1. Определить необходимую мощность мотора для подъема груза $Q = 10$ т (рис. 14.2), если скорость подъема $v = 0,2$ м/с и коэффициенты полезного действия отдельных частей передачи следующие:

$$\eta_{12} = \eta_{23} = 0,95, \quad \eta_{34} = 0,90.$$

Решение: $\eta = N_Q/N_P$, $N_Q = Qv = 2000 \text{ кгс} \times 0,2 \text{ м/с} = 19,6 \text{ кВт}$, $\eta = 0,95^2 \cdot 0,9 = 0,81$, $N_P = N_Q/\eta = 24,2 \text{ кВт}$.

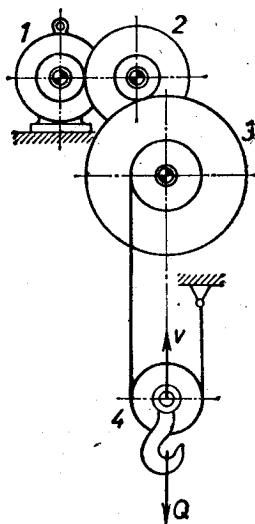


Рис. 14.2.

При параллельном соединении (рис. 14.3) силовой поток, развиваемый двигателем a , разделяется на параллельные потоки: общая работа A_P , производимая двигателем, распределяется по потокам, причем

$$A_P = \sum A_{Pi} = v_1 A_P + v_2 A_P + \dots + v_n A_P, \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1.$$

Аналогично можно представить результирующую работу всех сил сопротивления

$$A_Q = \sum A_{Qi} = \mu_1 A_Q + \mu_2 A_Q + \dots + \mu_n A_Q, \\ \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1.$$

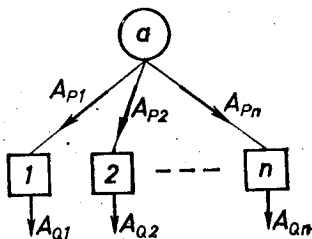


Рис. 14.3.

Здесь v_i и μ_i — коэффициенты распределения. Видно, что коэффициент полезного действия системы в этом случае выражается отношением

$$\eta = \frac{A_{Q1} + A_{Q2} + \dots + A_{Qn}}{A_{Q1}/\eta_1 + A_{Q2}/\eta_2 + \dots + A_{Qn}/\eta_n}. \quad (14.12)$$

Если в формуле (14.1) подставляем

$$A_Q = \sum \eta_i v_i A_P \quad \text{или} \quad A_Q = \sum \mu_i A_{Qi}, \quad A_P = \sum \frac{\mu_i A_Q}{\eta_i},$$

то получаем выражения

$$\eta = \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 + \dots + \eta_n v_n, \quad \eta = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n}{\mu_1/\eta_1 + \mu_2/\eta_2 + \dots + \mu_n/\eta_n}, \quad (14.13)$$

которые не содержат абсолютных значений работ или мощностей.

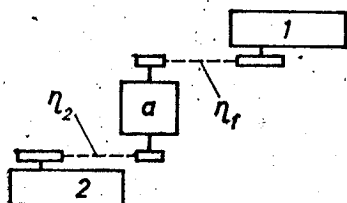


Рис. 14.4.

Пример 14.2. Двигатель *a* (рис. 14.4) приводит в движение насосы 1 и 2, которые расходуют мощности $N_1 = 15$ кВт и $N_2 = 20$ кВт. Определить коэффициент полезного действия системы передач и эффективную мощность двигателя, если $\eta_1 = 0,95$, $\eta_2 = 0,98$.

Решение:
$$\eta = \frac{N_1 + N_2}{N_1/\eta_1 + N_2/\eta_2} = 0,97; \quad N_P = \frac{N_1 + N_2}{\eta} = 36 \text{ кВт.}$$

Комбинированное соединение является комбинацией последовательного и параллельного соединений.

§ 14.3. Критерии полезности низших кинематических пар и червячной передачи

Коэффициенты полезного действия и потерь кинематической пары не всегда возможно выразить как функции параметров механизма. Этого нельзя сделать, например, для шарниров и поступательных пар.

Определение сил трения, моментов и мощностей трения в кинематических парах рассмотрено в разделе 12. Учитывая формулы (12.9) и (12.29), мощность трения в поступательной паре

$$N_F = f' Q v = f' p v L = \psi N_P$$

и в шарнире

$$N_F = f' Q r \omega = f' p v L = \psi N_P,$$

где v и p — относительная скорость скольжения и среднее давление на скользящей поверхности с площадью L . Если к поступательной паре или к шарниру подводим мощность N_P , то

$$p v = \frac{\psi}{f' L} N_P. \quad (14.14)$$

От величины $p v$ зависит износ и долговечность кинематической пары. При конструировании поступательных пар и шарниров необходимо учитывать допустимые значения $p v$. Как видно, коэффициенты η и ψ в поступательных парах и в шарнирах зави-

сят от передаваемой мощности. В винтовых парах упомянутые коэффициенты определяются только параметрами самой кинематической пары. Принимая в формуле (12.25) угол трения $\varphi = 0$, приходим к выводу, что в процессе работы винта полезно используется мощность $N_Q = \omega M_Q = \omega Q r_{cp} \operatorname{tg} \alpha$, а расходуемая мощность двигателя $N_P = \omega M_P$, где M_P определяется формулой (12.25). Подставляя эти величины в формулу (14.1), получают коэффициент полезного действия при преодолении винтом нагрузки Q

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \quad (14.15)$$

Перемещение гайки по винту не будет возможно из-за самоторможения, если $\eta < 0$, т. е. если $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) < 0$ или $\alpha > 90^\circ - \varphi$. Если винтовая нагрузка имеет такую структуру, то поворачивать действием момента гайку относительно винта или винт относительно гайки нельзя.

Коэффициент полезного действия $\eta = 0$, когда $\alpha = 0$ и когда $\alpha = 90^\circ - \varphi$. Это означает, что в упомянутом интервале находится

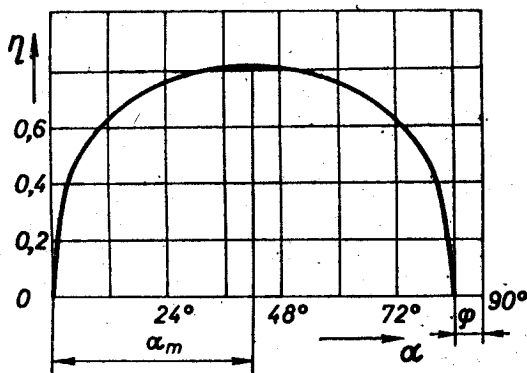


Рис. 14.5.

угол подъема средней винтовой линии α_m , которому соответствует максимальный коэффициент полезного действия. Дифференцируя выражение (14.15) по α и приравнявая нулю, находим

$$\alpha_m = 45^\circ - \varphi/2. \quad (14.16)$$

Подставляя это выражение в формулу (14.15), получаем максимально возможное значение коэффициента полезного действия винтовой пары:

$$\eta_{\max} = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2)} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2). \quad (14.17)$$

Если, например, при прямоугольном профиле резьбы имеем коэффициент трения $f = 0,1$, то угол трения $\varphi = \operatorname{arctg} f = 6^\circ$ и $\alpha_m = 42^\circ$, $\eta_{\max} = 0,81$. Для этого случая на рис. 14.5 показан график изменения КПД в функции α , построенный согласно формуле

(14.15). Если резьба имеет прямоугольный профиль, то вместо φ необходимо подставить определенный по формуле (12.28) приведенный угол трения. Формула (14.15) пригодна для приближенного расчета трения в червячной передаче, если ведущим является червяк.

Если вращение винта или гайки необходимо обеспечить с помощью аксиальной силы Q , то эта сила создает движущий момент $M_p = Qr_{cp} \operatorname{tg} \alpha$, а момент полезного сопротивления определяется формулой (12.26). Умножая эти моменты на угловую скорость ω и подставляя в формулу (14.1), получают коэффициент полезного действия:

$$\eta' = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (14.18)$$

Графическое изображение этой функции подобно изображению функции (14.15) (рис. 14.5), только сдвинуто на величину, пропорциональную углу трения φ в правую сторону.

Если $\alpha < \varphi$, то $\eta' < 0$, и винтовая пара является самотормозящейся, в которой невозможно создать вращение с помощью аксиальной силы. Каким получается коэффициент полезного действия в таком случае? В предельном случае $\alpha = \varphi$ и

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha / (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2}.$$

Следовательно, если винт с помощью аксиальной силы не отвинчивается, то коэффициент полезного действия винтовой пары в случае вращении винта получается меньше 0,5. Формула (14.18) пригодна для червячной передачи, если ведущим является червячное колесо.

§ 14.4. Коэффициенты полезного действия высших кинематических пар

Коэффициенты полезного действия, потерь и приращения сил обычно можно выражать как функции коэффициентов трения и некоторых размеров механизма. Сопротивление качению в высших парах не учитывается, так как оно намного меньше трения скольжения.

Рассмотрим кулачковый механизм (рис. 14.6) с плоским толкателем. Силу Q , действующую на толкатель, принимаем в качестве полезного сопротивления пар 12 и 23 , а нормальную реакцию N_{12} — движущей силой. Составляем уравнения равновесия толкателя:

$$\begin{aligned} N_{12} - f'_{32} N'_{32} - f'_{32} N''_{32} - Q &= 0, \\ f_{12} N_{12} + N'_{32} - N''_{32} &= 0, \\ x N_{12} + (l - y) N'_{32} - (l - y + b) N''_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В последнем уравнении не учтен поперечный размер штока тол-

кателя. Исключая из первых двух и последних двух уравнений нормальную реакцию N'_{32} , принимая произведение $f_{12}f_{32}$ равным нулю и исключая реакцию N''_{32} из полученных двух уравнений, получаем

$$N_{12} - 2f'_{32} \frac{x}{b} N_{12} \approx 0. \quad (2)$$

Силы Q и N_{12} приложены к одному звену, и их точки приложения движутся с одинаковой скоростью. Поэтому отношение мощностей равно отношению сил, а коэффициент полезного действия упомянутых пар

$$\eta \approx 1 - 2f'_{32}x/b. \quad (14.19)$$

Этот коэффициент полезного действия соответствует мгновенному положению механизма, так как величины x и $y = r_0 + s$ меняются. Скорость толкателя $v = v_s \cos \alpha = \omega \times OS \cos \alpha = \omega x$; следовательно,

$$x = \frac{v}{\omega} = \frac{ds}{d\varphi}. \quad (14.20)$$

Коэффициент возрастания усилий

$$\kappa \approx \frac{R_{12}}{Q} = \frac{N_{12}}{Q} \sqrt{1 + f_{12}^2} = \frac{\sqrt{1 + f_{12}^2}}{\eta}. \quad (14.21)$$

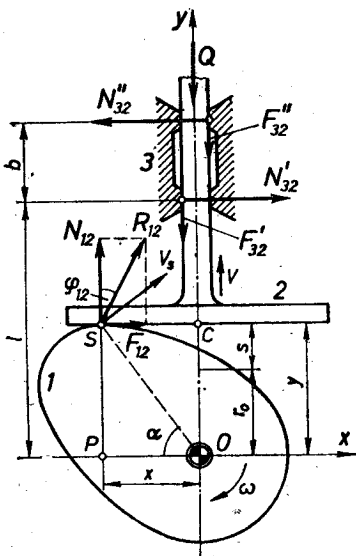


Рис. 14.6.

Длина b является расчетной величиной поступательной пары 23, определение которой для обычной поступательной пары рассмотрено в § 12.2.

Если толкатель имеет ролик (рис. 11.1), то коэффициент полезного действия подвижных соединений 12 и 23, вывод которого приведен в работе [89], выражается так:

$$\eta \approx 1 - f'_{32} \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \operatorname{tg}(\vartheta + \varphi). \quad (14.22)$$

Здесь $\varphi = \operatorname{arctg}(\rho/r)$, где ρ — радиус круга трения ролика и r — радиус ролика. Коэффициент возрастания усилий

$$\kappa = \frac{1}{\eta \cos \vartheta}. \quad (14.23)$$

Коэффициент полезного действия высшей пары, которую образуют вращающиеся вокруг неподвижных осей звенья (рис. 12.15),

$$\eta = 1 - \frac{N_F}{M_1 \omega_1}.$$

Выражая мощность трения N_F из формулы (12.40) и M_1 через силы N и F , получаем, что

$$\eta = 1 - \frac{f_{12} \cdot SP}{n + mf_{12}} (1 + u_{21}), \quad (14.24)$$

где n и m — плечи сил N и F относительно оси вращения звена I . Видно, что коэффициент полезного действия снижается при увеличении передаточного отношения u_{21} и при увеличении расстояния между точкой касания S элементов кинематических пар и относительным полюсом P . Из-за последнего обстоятельства выгодно применять несколько последовательно работающих кулачков, не допуская тем самым слишком большого удаления точки соприкосновения от полюса. Эта идея реализуется в зубчатых передачах.

Коэффициент полезного действия эвольвентного зацепления можно определить [73] по следующей приближенной формуле:

$$\eta = 1 - \frac{\pi f \varepsilon}{2} \left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right), \quad (14.25)$$

где f — коэффициент трения в зацеплении, ε — коэффициент перекрытия (§ 21.3), z_1 и z_2 — числа зубьев колес. Знак плюс относится к внешнему, знак минус — к внутреннему зацеплению. Следовательно, коэффициент полезного действия внутреннего зацепления больше, чем внешнего.

В инженерной практике обычно применяют экспериментально определенные коэффициенты полезного действия зацеплений. Для колес с прямыми зубьями коэффициент полезного действия зацепления $\eta \approx 0,99$, если рабочие поверхности зубьев шлифованы; $\eta \approx 0,98$, если зубья обработаны только фрезой или долбяком. Для колес с косыми зубьями $\eta \approx 0,97$. Учитывая также трение в подшипниках, коэффициент полезного действия простой зубчатой передачи может быть принят в пределах от 0,95 до 0,98.

§ 14.5. Коэффициент полезного действия планетарных зубчатых механизмов

В этих механизмах при малом числе колес можно достичь очень больших или очень малых передаточных отношений (§ 7.2). Чтобы можно было судить о практическом использовании этих возможностей, необходимо определить коэффициент полезного действия выбранной планетарной передачи, так как может случиться, что он слишком мал или даже отрицательный (передача является самотормозящейся).

Рассмотрим планетарную передачу (рис. 14.7), для которой передаточное отношение

$$u_{1H} = 1 - u_{1n}^H. \quad (7.7)$$

Моменты внешних сил, приложенных к колесу I и водилу H , обозначаем M_1 и M_H . Если ведущим является колесо 1, т. е. на-

правление силового потока $1-H$, то при равномерном вращении

$$M_1 \omega_1 \eta + M_H \omega_H = 0,$$

где η — коэффициент полезного действия планетарной передачи.

Если ведущим является водило, то

$$M_1 \omega_1 + M_H \omega_H \eta = 0.$$

Оба последние уравнения объединяем в одно уравнение

$$M_1 u_{1H} \eta^k + M_H = 0, \quad (1)$$

где степень $k=1$ соответствует направлению привода $1-H$, а $k=-1$ — направлению привода $H-1$.

Произведем инверсию, т. е. придавая условное вращение механизму вокруг оси $1-H$ с угловой скоростью $(-\omega_H)$, получаем обращенную передачу с неподвижными осями, где угловые скорости колеса 1 , солнечного колеса n и водила H следующие:

$$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_H, \quad \omega'_n = -\omega_H, \quad \omega'_H = 0.$$

Принимаем, что к колесу 1 обращенной передачи приложен прежний момент M_1 и коэффициент полезного действия передачи равен η_H . Направлениям силового потока $1-n$ и $n-1$ соответствуют уравнения

$$M_1 \omega'_1 \eta_H + M_n \omega'_n = 0, \quad M_1 \omega'_1 + M_n \omega'_n \eta_H = 0,$$

которые объединяем в одно уравнение

$$M_1 u_{1n}^H \eta_H^h + M_n = 0, \quad (2)$$

где $h=1$ соответствует направлению приведения в движение $1-n$, а $h=-1$ — направлению $n-1$.

При равномерном движении приложенные как в действительной, так и в обращенной передачах внешние моменты уравновешиваются:

$$M_1 + M_H + M_n = 0. \quad (3)$$

В действительной планетарной передаче M_n является моментом реакции опоры O , приложенной к колесу n . Подставляя в уравнение (3) выраженные из уравнений (1) и (2) моменты M_H и M_n , получаем формулу для расчета коэффициента полезного действия планетарной передачи

$$u_{1H} \eta^k = 1 - u_{1n}^H \eta_H^h, \quad (4)$$

которая напоминает выражение (7.7) для определения передаточного отношения планетарной передачи. Подставляя $u_{1n}^H = 1 - u_{1H}$ в формулу (4), в конечном виде можно записать так:

$$u_{1H} \eta^k = 1 - (1 - u_{1H}) \eta_H^h. \quad (14.26)$$

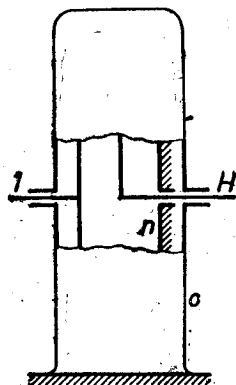


Рис. 14.7.

Для применения этой формулы необходимо научиться определять знаки степени $h = \pm 1$, которые относятся к направлениям силовых потоков $1-n$ и $n-1$ обращенной передачи. Как узнать, когда имеет место одно из этих направлений? Для ответа следует учитывать, что направление приложенного к ведущему колесу момента совпадает с направлением угловой скорости ведущего колеса, а для ведомого колеса — не совпадает.

Если в действительной передаче колесо I является ведущим ($k = 1$) и

$$\frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_1} = 1 - u_{1H} = 1 - \frac{1}{u_{1H}} > 0, \quad (5)$$

то угловая скорость ω_1' совпадает с направлением момента M_1 и $h = 1$. Неравенство (5) удовлетворено тогда, когда передаточное отношение планетарной передачи $u_{1H} < 0$ и когда $u_{1H} > 1$. Если $0 < u_{1H} < 1$, то неравенство (5) не удовлетворено, и $h = -1$.

Если водило H действительной передачи является ведущим ($k = -1$), то M_1 направлен противоположно ω_1 и колесо I будет ведомым ($h = -1$) также в обращенной передаче, если удовлетворено неравенство (5). В противном случае $h = 1$.

Теперь руководство по применению формулы (14.26) можно выразить в виде таблицы:

Направление силового потока	k	h	
		$0 < u_{1H} < 1$	в остальных случаях
$1-H$	1	-1	1
$H-1$	-1	1	-1

Обращенная передача является простой зубчатой передачей с неподвижными осями. Поэтому ее коэффициент полезного действия определяют по формуле (14.10):

$$\eta_H = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$$

где m — число ступеней обращенной передачи. Коэффициент полезного действия одной ступени этой передачи можно принять в пределах, указанных в конце предыдущего параграфа.

На рис. 14.8 приведен график, соответствующий формуле (14.26), для каждого направления силового потока в планетарной передаче. Видно, что самоторможение возможно только тогда, когда ведущим является колесо I : если $k = 1$ и $0 < u_{1H} < 1$, тогда соответственно таблице $h = -1$ и коэффициент полезного действия (14.26) получается отрицательным, если $u_{1H} < 1 - \eta$; в остальных случаях $h = 1$, а $\eta < 0$ тогда, когда $u_{1H} > 1 - 1/\eta$. Следовательно, область самоторможения

$$1 - 1/\eta < u_{1H} < 1 - \eta. \quad (14.27)$$

Коэффициент полезного действия планетарной передачи может быть больше, чем соответствующей ему зубчатой передачи с неподвижными осями.

Дифференциальная передача образуется, если в показанной на рис. 14.7 схеме подвижно также колесо n . Зависимости между

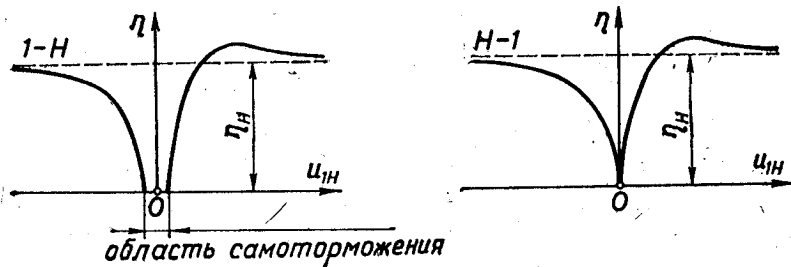


Рис. 14.8.

моментами M_1 , M_H и M_n определяют уравнения (2) и (3), где $h = 1$, если

$$\frac{N_1^H}{N_1} = \frac{M_1(\omega_1 - \omega_H)}{M_1\omega_1} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_1} > 0,$$

а в противном случае $h = -1$.

Если ведущими являются колеса n и водило H , то, согласно формуле (14.1), коэффициент полезного действия дифференциальной передачи

$$\eta = - \frac{M_1\omega_1}{M_n\omega_n + M_H\omega_H}. \quad (6)$$

Знак минус принят потому, что, в отличие от формулы (14.1), здесь мощности являются алгебраическими величинами. Подставляя в формулу (6) выраженные из уравнений (2) и (3) моменты M_n и M_H , получаем

$$\eta = \frac{1}{u_{1n}^H \eta_H^h \omega_n / \omega_1 + (1 - u_{1n}^H \eta_H^h) \omega_H / \omega_1}. \quad (14.28)$$

Если ведущими являются колеса 1 и n , то

$$\eta = -M_H\omega_H / (M_1\omega_1 + M_n\omega_n),$$

и, поступая аналогично предыдущему, получаем

$$\eta = \frac{1 - u_{1n}^H \eta_H^h}{\omega_1 / \omega_H - u_{1n}^H \eta_H^h \omega_n / \omega_H}. \quad (14.29)$$

В дифференциальных передачах, аналогично планетарным передачам, обозначения 1 и n можно поменять местами.

Пример 14.3. Определить коэффициент полезного действия рассмотренной в примере 7.4 планетарной передачи при ведущем водиле и ведущем центральном колесе, если коэффициент полезного действия соответствующей простой зубчатой передачи равен $\eta_H = 0,98$.

Решение. Из формулы (14.27) вытекает, что при ведущем колесе I и при $\eta_H = 0,98$ планетарная передача самотормозящаяся, если ее передаточное отношение находится в пределах $-0,0204 < u_{1H} < 0,02$. Для данной планетарной передачи $u_{1H} = 0,0001$. Следовательно, эта планетарная передача самотормозящаяся при ведущем колесе I . Если ведущим звеном сделано водило H , то в соответствии с таблицей $k = -1$, $h = 1$ и по формуле (14.26) получаем $\eta = 0,005$.

§ 14.6. Определение коэффициента полезного действия стержневого механизма

Общий метод расчета коэффициента полезного действия механизма следующий. Игнорируя трение, проводят кинестатический расчет механизма для достаточно большого числа положений механизма в одном цикле стационарного движения. Используя определенные при кинестатическом расчете нормальные реакции, заданные или принятые коэффициенты трения, определяют приведенный к главному звену момент трения (пример 13.5) для тех же положений механизма. Интегрируя графически или численно, определяют работу трения за цикл:

$$A_F = \int_0^{\varphi_C} M_F d\varphi.$$

Используя заданный закон изменения движущей силы или силы полезного сопротивления, определяют приведенный к главному звену движущий момент M_P или момент полезного сопротивления M_Q для достаточно большого числа положений механизма в одном цикле стационарного движения. Интегрируя, находят, что

$$A_P = \int_0^{\varphi_C} M_P d\varphi \quad \text{или} \quad A_Q = \int_0^{\varphi_C} M_Q d\varphi,$$

и по формулам (14.2) или (14.1) определяют коэффициент полезного действия стержневого механизма.

Работы A_P , A_Q , A_F связывает уравнение (13.3) баланса работ, поэтому какую-либо из работ можно определить из этого уравнения.

Упомянутый расчет коэффициента полезного действия механизма требует сравнительно много труда. Точность полученного результата зависит главным образом от соответствия использованных при расчете коэффициентов трения действительным. Учитывая упомянутые трудности, конструкторы часто используют экспериментально полученные значения коэффициентов полезного действия для механизмов или их узлов разного типа. В таком случае общий коэффициент полезного действия механизма определяется в зависимости от вида соединения узлов (§ 14.2).

РЕГУЛИРОВАНИЕ ХОДА МАШИННОГО АГРЕГАТА

§ 15.1. Определение неравномерности скорости ведущего звена при стационарном движении

В машинных агрегатах при стационарном движении скорость ведущего звена только в редких случаях постоянна (§ 13.1). Обычно в агрегате действуют переменные силы и имеются звенья, которые движутся с ускорениями, даже если предположить, что входное звено движется равномерно. Из-за обеих причин угловая скорость входного звена в стационарном движении периодически изменяется, сохраняя одно и то же значение ω_0 в начале и в конце цикла. Это изменение принято характеризовать степенью неравномерности скорости (коэффициента неравномерности)

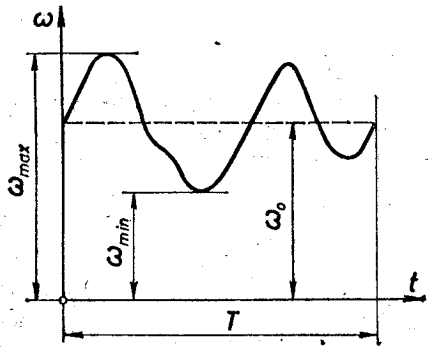


Рис. 15.1.

$$\delta = (\omega_{max} - \omega_{min}) / \omega_{cp},$$

где ω_{max} и ω_{min} — абсолютные экстремумы скорости в пределах цикла (рис. 15.1); ω_{cp} — средняя скорость.

Действительная средняя скорость

$$\omega_{cp} = \varphi_c / T, \quad (15.1)$$

где φ_c — угол поворота главного звена за цикл, T — период или время цикла. Так как

$$\varphi_c = \int_0^T \omega dt,$$

то угол φ_c пропорционален (рис. 15.1) площади под кривой $\omega = \omega(t)$, соответствующей одному периоду. Кривую $\omega = \omega(t)$ называют *тахограммой*; ее можно экспериментально записать с помощью тахографа.

Определяя движение агрегата (раздел 13), обычно получают функцию $\omega = \omega(\varphi)$, используя которую, можно рассчитать период движения

$$T = \int_0^{\varphi_c} \frac{d\varphi}{\omega}$$

и тогда по формуле (15.1) получить среднюю скорость. Однако проще определить среднюю ординату кривой $\omega = \omega(\varphi)$ и принять

ее за приближенное значение средней скорости:

$$\omega_{\text{ср}} \approx \frac{1}{\varphi_{\text{с}}} \int_0^{\varphi_{\text{с}}} \omega \, d\varphi. \quad (15.2)$$

Правую часть выражения называют *планиметрической средней скоростью*.

Весьма близкой к действительной средней скорости является *номинальная скорость* главного вала агрегата

$$\omega_{\text{ср}} \approx \frac{\pi n}{30}. \quad (15.3)$$

При определении степени неравномерности вместо действительной средней скорости обычно применяют *среднюю арифметическую скорость*

$$\omega_{\text{ср}} \approx (\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}})/2. \quad (15.4)$$

Степень неравномерности является параметром стационарного движения. Неравномерность скорости вызывает дополнительные динамические нагрузки в элементах механизма, вызывает их упругие колебания, понижает коэффициент полезного действия и во многих случаях отрицательно влияет на технологический процесс рабочей машины. Из-за упомянутых причин для различных типов машин приняты интервалы допускаемых значений степени неравномерности. Например: для генераторов переменного тока 1/300—1/200, генераторов постоянного тока 1/200—1/100, двигателей внутреннего сгорания 1/80—1/50, металлообрабатывающих станков 1/50—1/20, сельскохозяйственных машин 1/50—1/10, насосов 1/30—1/5. Слишком малая степень неравномерности также невыгодна, так как в этом случае (будет пояснено ниже) увеличивается вес машины. Степень неравномерности характеризует стационарное движение агрегата не полностью. Если бы, например, у тахограммы цикла с абсолютными экстремальными значениями ω_{max} и ω_{min} было общее число экстремальных значений больше, чем четыре (рис. 15.1), то агрегат в таком случае работал бы с большими ускорениями, хотя степень неравномерности одна и та же. Поэтому желательно определить также *коэффициент динамичности*

$$\kappa = \varepsilon_{\text{max}}/\omega_{\text{ср}}^2, \quad (15.5)$$

где ε_{max} — максимальное угловое ускорение главного звена в цикле стационарного движения. Если умножить числитель и знаменатель на средний приведенный момент инерции, то κ приближенно выразит отношение максимального приведенного момента к двойной средней кинетической энергии агрегата.

Соответствующие скоростям ω_{min} и ω_{max} углы φ_1 и φ_2 аналитически определяются, как корни трансцендентных уравнений.

Для устранения этого недостатка иногда вместо степени неравномерности применяют *меру неравномерности*:

$$\Delta = \frac{1}{\varphi_c} \int_0^{\varphi_c} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{cp}}\right)^2 d\varphi_s \quad (15.6)$$

которая является средним квадратическим отклонением от средней скорости.

Рассмотрим определение степени неравномерности агрегата. Эту задачу можно решить, интегрируя дифференциальное уравнение движения агрегата с момента начала движения. Получают тахограмму $\omega = \omega(t)$ как для периода разгона, так и для фазы стандартного движения. С помощью абсолютных экстремальных значений скорости ω_{max} и ω_{min} для стационарного движения по формуле (13.39) определяют степень неравномерности. Решение такого типа показано на рис. 13.9, где вместо тахограммы построена диаграмма Виттенбауера; проведенные из начала координат касательные к замкнутой части этой диаграммы дают возможность определить ω_{max} и ω_{min} по формулам (13.38). Упомянутое решение является трудоемким, и в результате получают картину не только стационарного движения, но и разгона, что не требуется. Более простое решение задачи охватывает только цикл стационарного движения. Рассмотрим два решения такого типа.

Дифференциальное уравнение движения агрегата для стационарного движения интегрируют численно или графически, получая периодическое решение в виде тахограммы $\omega = \omega(t)$. Трудности возникают при определении начальной угловой скорости ω_0 , в связи с необходимостью интегрировать так, чтобы у полученной тахограммы ордината в начале и в конце цикла была бы одна и та же (рис. 15.1). Для определения начальной угловой скорости разработаны разные методы [7, 36, 89].

Более наглядным является второе решение, при котором строят диаграмму Виттенбауера для стационарного движения, используя только часть рис. 13.9. Сперва строят диаграмму приведенных моментов для одного цикла так, чтобы площади под кривыми приведенного движущего момента M_p и приведенного момента сопротивления M_s были бы одинаковыми. Тогда работа приведенного момента $M_r = M_p - M_s$ в течение цикла будет равна нулю, и кинетическая энергия в начале и в конце цикла будет одинакова. На отдельную диаграмму наносится также кривая приведенного момента инерции I_r для цикла.

Методом графического интегрирования избыточного момента между кривыми M_p и M_s строится кривая избыточной работы или, иначе, приращения кинетической энергии ΔE , если принять в начале цикла $\Delta E = 0$. Длина прямоугольника, занятого этой кривой, равна φ_c , а высота определяется прямыми a и b , касающимися кривой в точках ее абсолютных экстремальных значений, в которых кинетическая энергия агрегата составляет E_{min}

и E_{\max} . Используя кривые ΔE и I_r , строят диаграмму Виттенбауера; она для стационарного движения является замкнутой кривой, вписывающейся в прямоугольник с длиной, соответствующей колебаниям приведенного момента инерции, и с высотой, соответствующей колебаниям кинетической энергии между прямыми a и b .

Чтобы кривая ΔE преобразовалась в кривую полной кинетической энергии E , необходимо определить начало координат кривой E , т. е. расположение оси φ . С этой целью расстояние между прямыми a и b делят пополам и от точки деления откладывают вниз расстояние, соответствующее средней кинетической энергии

$$E_{\text{ср}} = I_{r \text{ ср}} \omega_{\text{ср}}^2 / 2, \quad (15.7)$$

получая таким образом расположение оси φ и начало координат O диаграммы Виттенбауера на продолжении оси φ . Величину $I_{r \text{ ср}}$ для этой формулы находят по кривой I_r , а $\omega_{\text{ср}}$ по формуле (15.3). От точки O проводят касательные к кривой Виттенбауера, определяют углы ψ_{\max} и ψ_{\min} и по формулам (13.38), (15.4), (13.39) определяют степень неравномерности агрегата. Этот принципиально точный метод можно рассматривать как общий, так как при стационарном движении приведенные моменты являются периодическими функциями угла φ даже тогда, когда один из них зависит от времени или скорости. Конечно, в последнем случае будут затруднения с хотя бы приближенным построением кривой соответствующего приведенного момента, так как функция $\omega = \omega(\varphi)$ еще неизвестна. В первом приближении соответствующий приведенный момент в цикле можно принять постоянным, определив его значение с помощью $\omega_{\text{ср}}$ по формуле (15.3).

Полученное решение дает не только степень неравномерности, но позволяет выяснить также три важных обстоятельства:

1. Точки a и b построенной кривой Виттенбауера (рис. 13.9) для стационарного движения соответствуют углам поворота φ_a и φ_b звена приведения, в которых кинетическая энергия агрегата равна E_{\min} и E_{\max} . Точки 1 и 2 соответствуют углам φ_1 и φ_2 , в которых угловая скорость звена приведения принимает значения ω_{\min} и ω_{\max} . Упомянутые углы определяют аналогично углу φ_i звена приведения, соответствующему точке i диаграммы Виттенбауера. Их определение показано также на рис. 15.2.

Следовательно, в общем случае $\varphi_1 \neq \varphi_a$ и $\varphi_2 \neq \varphi_b$, т. е. скорость движения звена приведения агрегата не достигает экстремальных значений в тех же положениях механизма, в которых кинетическая энергия агрегата имеет экстремальные значения. Видно, что соответствующие упомянутым экстремальным значениям положения совпадают тогда, когда кривая Виттенбауера для стационарного движения является вертикальным ($I_r = \text{const}$), горизонтальным ($M_r = 0$) или косым отрезком, или таким сегментом кривой, концы которого находятся на прямых a и b и проведенные из точки O прямые касаются этих концов; возможна также замк-

нутая кривая, две вершины которой находятся на прямых a и b . Интересным является случай $M_r = 0$, когда кинетическая энергия агрегата не меняется, а скорость движения меняется.

2. Степень неравномерности равна нулю только тогда, когда кривая Виттенбауера для стационарного движения является точкой ($I_r = \text{const}$, $M_r = 0$) или отрезком прямой, проведенным через

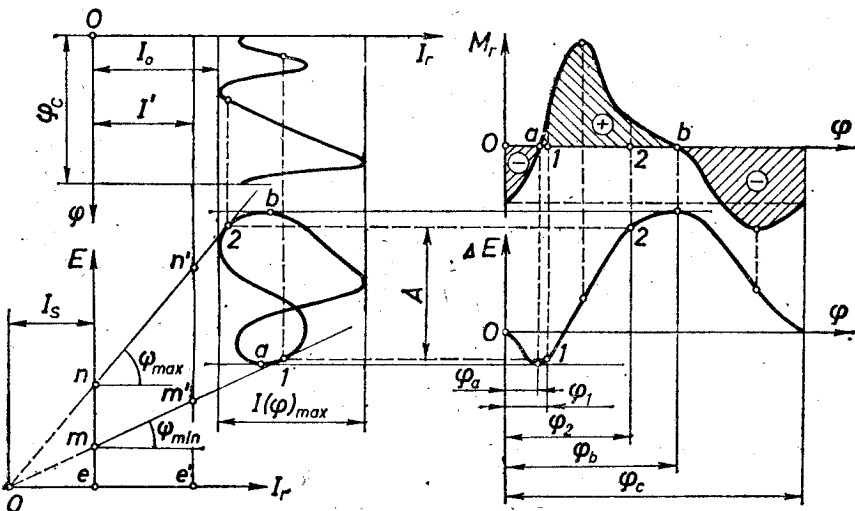


Рис. 15.2.

начало координат O . Следовательно, возможно такое взаимно зависимое изменение I_r и M_r , которое обеспечивает равномерное движение главного звена.

3. Можно также ответить на вопрос, что необходимо сделать для того, чтобы агрегат, сохраняя ту же ω_{cp} , двигался с заданной степенью неравномерности δ . Соответствующие ей абсолютные экстремальные значения скорости можно определить по формулам (13.39) и (15.4):

$$\omega_{max} = (1 + \delta/2)\omega_{cp}, \quad \omega_{min} = (1 - \delta/2)\omega_{cp}. \quad (15.8)$$

Для этих ω_{max} и ω_{min} по формулам (13.38) определимы новые углы ψ_{max} и ψ_{min} касательных к диаграмме Виттенбауера. Новые касательные пересекаются в новой точке O , которая обычно находится левее прежней на расстоянии, пропорциональном I_s , и ниже прежней точки на расстоянии, пропорциональном E_s . Это означает, что приведенный момент инерции необходимо увеличить на $I_s = k_I I_s$, и в связи с этим кинетическая энергия агрегата возрастет на $E_s = k_E E_s$.

Приведенный момент инерции увеличивают путем введения в механизм дополнительных масс, обычно монтируя на главном валу маховик с моментом инерции I_s .

§ 15.2. Определение момента инерции маховика

В конце предыдущего параграфа выяснено, что маховик является средством для уменьшения колебаний скорости агрегата в цикле стационарного движения. Для расчета момента инерции маховика разработано много методов. Здесь рассмотрим только несколько из них. Начнем с метода Виттенбауера, описание которого является продолжением изложенного в предыдущем параграфе.

Метод Виттенбауера [107] иллюстрирован рис. 15.2. Этот рисунок построен аналогично рис. 13.9, только все приведенные моменты заменены суммарным или избыточным приведенным моментом, вместо кинетической энергии агрегата дано приращение кинетической энергии, равное изменению работы избыточного момента, и все построения выполнены только для одного цикла стационарного движения.

В первую очередь строится при выбранных масштабных коэффициентах k_M и k_ω кривая приведенного момента согласно равенству

$$M_r = M_P + M_Q + M_F + M_G + M_T, \quad (15.9)$$

в котором моменты, совпадающие с направлением движения входного звена, положительные, а остальные — отрицательные. Обозначения этих моментов соответствуют уравнению (13.1). Если кривые, соответствующие членам правой части, вычерчены, то сумма площадей под кривыми M_G и M_T должна равняться нулю.

Обычно из кривых приведенных моментов M_P и M_Q задана только одна, а вторую для фазы стационарного движения необходимо построить так, чтобы результирующая работа за цикл была равна нулю. Встречаются два случая:

1. Задана кривая $M_P = M_P(\varphi)$ и известно, что $M_Q = \text{const}$. Чертят кривую $M_r = M_P + M_F + M_G + M_T$ для цикла и при помощи планиметрирования площади под этой кривой определяют работу за цикл $A_P = A_Q$. Определяют M_Q из уравнения $M_Q \varphi_c = A_Q$ и, используя уравнение $M_r = M_P + M_Q$, строят кривую $M_r = M_r(\varphi)$. Если $M_Q \neq \text{const}$, то заранее определенный M_Q является средним значением, которое можно использовать при построении кривой $M_Q = M_Q(\varphi)$ для цикла стационарного движения и потом построить $M_r = M_P + M_Q$.

2. Задана кривая $M_Q = M_Q(\varphi)$ и известно, что $M_P = \text{const}$. Чертят кривую $M_r = M_Q + M_F + M_G + M_T$ и определяют работу за цикл $A_Q = A_P$. Определяют M_P из уравнения $M_P \varphi_c = A_P$, и, согласно уравнению $M_r = M_P + M_Q$, строят кривую $M_r = M_r(\varphi)$. Если $M_P \neq \text{const}$, то поступают аналогично предыдущему случаю.

В обоих упомянутых случаях можно разделить работу цикла A_Q или A_P на период T , получая мощность N_Q или N_P . Искомый приведенный момент можно определить из уравнения $M_Q \omega_{cp} =$

$= N_Q$ или $M_P \omega_{cp} = N_P$. Мощность двигателя N_P и мощность полезных сил сопротивления N_Q являются важными параметрами агрегата.

Графически интегрируя кривую $M_r = M_r(\varphi)$, получают кривую приращения кинетической энергии ΔE с масштабным коэффициентом k_E , определение которого, а также графическое интегрирование будет рассмотрено в конце описания метода Виттенбауера. Приняв масштабный коэффициент k_I , строят кривую приведенного момента инерции $I_r = I_r(\varphi)$ и, наконец, кривую Виттенбауера.

Из формул (13.38) и (15.8) следует, что тангенсы углов наклона касательных к кривой Виттенбауера определяются из выражений

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_{\max} &= \frac{k_I}{2k_E} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 \omega_{cp}^2, \\ \operatorname{tg} \psi_{\min} &= \frac{k_I}{2k_E} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 \omega_{cp}^2. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Проведенные под этими углами касательные пересекаются в точке O и дают искомый момент инерции маховика

$$I_s = k_I \tilde{I}_s = k_I e\tilde{O}. \quad (1)$$

Этим расчет можно было бы закончить, однако точка O часто находится далеко за пределами чертежа. С целью получения более удобной формулы для расчета I_s выразим степень неравномерности следующим образом:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{\omega_{\max} + \omega_{\min}} = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2\omega_{cp}^2}. \quad (15.11)$$

Подставляя выражения (13.38), получаем формулу

$$\delta = \frac{k_E}{k_I} \frac{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}}{\omega_{cp}^2}. \quad (15.12)$$

Из рис. 15.2 видно, что

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\tilde{en}}{\tilde{eO}} - \frac{\tilde{em}}{\tilde{eO}} = \frac{\tilde{mn}}{\tilde{eO}}. \quad (2)$$

Если в формулу (15.12) подставляем выражение (2) и учитываем формулу (1), то

$$\delta = \frac{k_E \cdot \tilde{mn}}{I_s \omega_{cp}^2}, \quad (15.13)$$

и момент инерции маховика

$$I_s = \frac{k_E \cdot \tilde{mn}}{\delta \omega_{cp}^2}. \quad (15.14)$$

где \widetilde{mn} — длина отрезка в миллиметрах, который отсекается касательными к диаграмме Виттенбауера на оси E , соответствующей $I_r = 0$.

Иногда выгодно выбрать такой масштабный коэффициент k_I , чтобы ось E находилась за пределами чертежа. Тогда вместо оси E выбирают другую, параллельную ей прямую, которая соответствует значению I' приведенного момента инерции, и вместо отрезка mn используют отрезок $m'n'$.

Учитывая, что $k_I \cdot e' \widetilde{O} = I_s + I'$, составляя формулу, аналогичную формуле (2), и используя формулу (15.12), получают

$$I_s = \frac{k_E \cdot \widetilde{m'n'}}{\omega_{\text{ср}}^2} - I'. \quad (15.15)$$

Если при расчете получают $I_s = 0$ или $I_s < 0$, то маховик не нужен.

Графическое интегрирование показано на рис. 15.3, где полюс O определен расстоянием B (мм). Площадь под кривой $M(\varphi)$ выражает работу, совершаемую моментом или

Рис. 15.3.

эквивалентным ему приращением кинетической энергии. Формула (13.16) дает масштабный коэффициент этой работы $k_A = = k_M \cdot k_\varphi \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{мм}^2}$. Необходимо определить масштабный коэффициент k_E ординат кривой ΔE , полученной с помощью интегрирования. С этой целью учитываем, что углы θ в нижней и верхней диаграмме одинаковы, поэтому

$$\text{tg } \theta = \frac{\widetilde{M}}{B} = \frac{\widetilde{\Delta E}}{\widetilde{\Delta \varphi}}, \quad \widetilde{\Delta E} = \frac{\widetilde{M} \widetilde{\Delta \varphi}}{B} = \frac{\widetilde{\Delta A}}{B}, \quad \frac{\Delta E}{k_E} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\Delta A}{k_A}.$$

Так как $\Delta E = \Delta A$, то

$$k_E = B k_A = B k_M k_\varphi \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{мм}} \left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{мм}} \right). \quad (15.16)$$

При интегрировании следует учитывать (рис. 15.2), что там, где $M_r = 0$, кривая ΔE имеет экстремальное значение; там же, где кривая M_r имеет экстремальное значение, кривая ΔE имеет точку перегиба.

Метод Виттенбауера не является приближенным. Точность результатов зависит от точности заданных величин и точности графических построений. Недостаток метода в том, что физический смысл числителя в формулах (15.14) и (15.15) остается неясным. Для выяснения этого значения составим аналитическое выражение для определения момента инерции маховика. С этой

целью используем формулу (13.16):

$$I_r(\varphi_2) \frac{\omega_{\max}^2}{2} - I_r(\varphi_1) \frac{\omega_{\min}^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_r d\varphi.$$

Подставляя значение (рис. 15.2)

$$I_r = I_s + I_0 + I(\varphi), \quad (3)$$

получаем уравнение

$$(I_s + I_0) \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_r d\varphi - \left[I(\varphi_2) \frac{\omega_{\max}^2}{2} - I(\varphi_1) \frac{\omega_{\min}^2}{2} \right], \quad (4)$$

которое, учитывая формулу (15.11), запишем в форме

$$(I_s + I_0) \delta \omega_{cp}^2 = A - E'$$

и получим искомое выражение момента инерции маховика

$$I_s = \frac{A - E'}{\omega_{cp}^2 \delta} - I_0, \quad (15.17)$$

которое без приближений учитывает все факторы. Величина A является работой приведенного момента, которую совершают силы, приложенные к агрегату, если звено приведения переходит из положения φ_1 , при котором $\omega = \omega_{\min}$, в положение φ_2 , где $\omega = \omega_{\max}$. Величину A называют *избыточной работой*; на рисунке 15.2 она изображена площадью под кривой M_r между ординатами 1 и 2, а на диаграмме ΔE — разницей ординат точек 1 и 2. Избыточная работа ускоряет как массы, соответствующие маховику и постоянному приведенному моменту инерции I_0 , так и массы, соответствующие переменному приведенному моменту инерции $I(\varphi)$. Для ускорения последних расходуется работа E' . Если эти массы в интервале $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ замедляются, то $I(\varphi_2) < I(\varphi_1)$ и $E' < 0$. Это означает, что упомянутые массы часть своей кинетической энергии отдают для ускорения остальных масс. Эта энергия суммируется с остальной работой, поэтому для поддержания коэффициента неравномерности в заданных пределах необходим маховик увеличенных размеров. Такой случай показан на рис. 15.2.

Формула (15.15) становится эквивалентной формуле (15.17), если $I' = I_0$. Следовательно, числитель формулы Виттенбауера выражает величину $A - E'$ тогда, когда отрезок $m'n'$ взят на прямой $I_r = I_0$, которая касается кривой Виттенбауера со стороны начала координат.

Формула (15.17) применима, если заранее определены углы φ_1 и φ_2 . Это можно сделать, применяя нижеприведенный метод Гутьяра.

Самый простой метод для определения момента инерции маховика базируется на формуле

$$I_S = \frac{A}{\delta\omega_{\text{CP}}^2}, \quad (15.18)$$

где $A = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} (M_P - M_Q) d\varphi$. При расчете по этой формуле I_0 , M_G , M_F , M_T не учитываются, и принимается, что $I_r = \text{const}$, это во многих случаях допустимо. При этих условиях экстремальные значения скорости и кинетической энергии совпадают, т. е. $\varphi_1 = \varphi_a$, $\varphi_2 = \varphi_b$. Избыточную работу A в таком случае выражают через наибольшую площадь под кривой $M_r(\varphi)$. Так, например, на рис. 15.2 эта площадь размещена между точками a и b . Однако возможны случаи, когда работу A выражают несколько площадей. Поэтому для определения соответствующей работе A площади L_{max} рекомендуется метод, показанный на рис. 15.4.

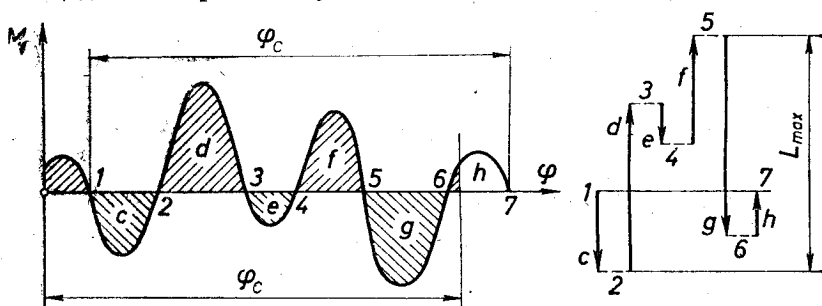


Рис. 15.4.

Сначала преобразуем диаграмму M_r , так, чтобы в цикл входили только целые площади, т. е. площади между узловыми точками, в которых кривая M_r пересекает ось абсцисс. Это позволяет построить соответствующую площадям диаграмму векторов. Расстояние между наиболее удаленными точками этой диаграммы выражает L_{max} , и внешние пределы содержат узлы, между которыми заключена площадь L_{max} . На рис. 15.4 площадь $L_{\text{max}} = d - e + f$ находится между узлами 2 и 5.

Метод Гутьяра [21] основан на преобразовании дифференциального уравнения движения агрегата (13.20). Используя подстановки

$$\frac{\omega^2}{2} = y, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_r d\varphi = A(\varphi)$$

и учитывая формулу (3), уравнение (13.20) приводим к следующей форме:

$$\frac{d}{d\varphi} [A(\varphi) - I(\varphi)y] = (I_S + I_0) \frac{dy}{d\varphi}. \quad (15.19)$$

В положениях механизма, которые определяются углами φ_1 и φ_2 , угловое ускорение равно нулю. Поэтому функции

$$\Phi_1 = A(\varphi) - I(\varphi) \omega_{\max}^2/2, \quad \Phi_2 = A(\varphi) - I(\varphi) \omega_{\min}^2/2 \quad (15.20)$$

в этих положениях имеют экстремальные значения (рис. 15.5).

Алгоритм метода следующий: строят кривые $I_r = I_r(\varphi)$, $M_r = M_r(\varphi)$, $A = \Delta E = A(\varphi)$ аналогично, как и при расчете по методу Виттенбауера. Вблизи абсолютных экстремальных значений кривой $A(\varphi)$ строят части кривых Φ_1 и Φ_2 . Экстремальные значения этих кривых соответствуют углам φ_1 и φ_2 , а разность этих экстремальных значений в масштабе k_E выражает числитель $A - E'$ в формулах (15.17). Действительно, правая часть выражения

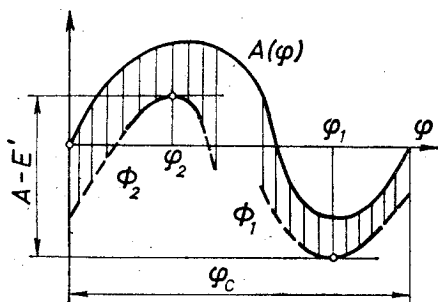


Рис. 15.5.

$\Phi_2(\varphi_2) - \Phi_1(\varphi_1) = [A(\varphi_2) - I(\varphi_2) \omega_{\max}^2/2] - [A(\varphi_1) - I(\varphi_1) \omega_{\min}^2/2]$ равна правой части выражения (4).

Для агрегатов, у которых приведенный момент инерции меняется в широких пределах, значения углов φ_1 и φ_2 значительно отличаются от значений углов, при которых кривая $A(\varphi)$ имеет

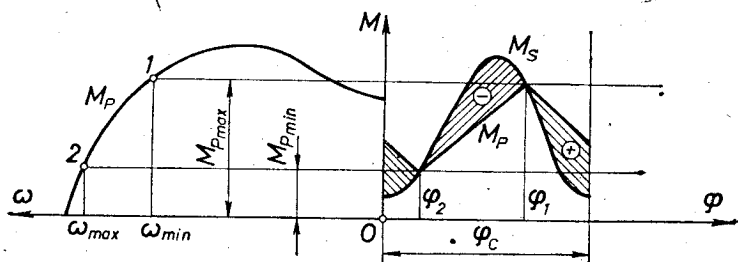


Рис. 15.6.

экстремальные значения; в этих случаях кривые Φ_1 и Φ_2 необходимо строить для всего цикла.

Для агрегатов с электродвигателями или другим двигателем с аналогичной характеристикой в случае $I_r = \text{const}$ пригоден метод, показанный на рис. 15.6 [28]. Для определения момента инерции маховика строят прежде всего статическую характеристику электромотора $M_P = M_P(\omega)$. По формулам (15.8) определяют ω_{\max} и ω_{\min} , позволяющие найти точки 1 и 2, определяющие пределы, в которых будет изменяться момент электродвигателя при стационарном движении. Далее строят кривую $M_S = M_S(\varphi)$

приведенного момента сил сопротивления, а также кривую $M_p = M_p(\varphi)$, предполагая, что эта кривая состоит из отрезков прямой. Определяют для наибольшей заштрихованной площади соответствующую работу A и по формуле (15.17) определяют момент инерции маховика, учитывая, что $E' = 0$. В основу метода положена гипотеза о линейном изменении M_p в функции φ .

Аналогично можно поступить, если M_s является функцией времени. Тогда абсцисса φ заменяется на t . Однако наибольшая площадь, определенная аналогично предыдущему, пропорциональна не работе, а импульсу силы, который равен приращению момента количества движения K (кинетического момента). Действительно, согласно уравнению (13.20),

$$M_r dt = I_r d\omega_r, \quad \int_{t_1}^{t_2} M_r dt = K = (I_s + I_0)(\omega_{\max} - \omega_{\min}).$$

Учитывая формулу (13.39), получим выражение для момента инерции маховика:

$$I_s = \frac{K}{\delta\omega_{\text{ср}}} - I_0. \quad (15.21)$$

Если M_s является таким большим, что M_p выходит за пределы устойчивой части характеристики двигателя, то необходимо применить редуктор.

Маховик трактора обычно определяют из условия, чтобы кинетическая энергия маховика была достаточной для трогания трактора вместе с прицепом из положения покоя ($v_1 = 0$) до скорости v_2 , которой соответствует угловая скорость ω_2 маховика после включения сцепления. Следовательно,

$$1/2 I_s (\omega_1^2 - \omega_2^2) \eta = 1/2 m v_2^2 = 1/2 I_r \omega_2^2, \quad (5)$$

где ω_1 — угловая скорость маховика до включения сцепления, m — масса трактора вместе с прицепом, η — коэффициент полезного действия передачи от двигателя к ходовой части, с учетом сопротивления движению. Из уравнения (5) имеем:

$$I_s = \frac{1}{\eta} \frac{I_r}{\xi^2 - 1}, \quad (15.22)$$

где $\xi = \omega_1/\omega_2$. Маховик автомобилей обычно выбирается экспериментально. Он должен быть достаточно большим, чтобы двигатель работал устойчиво на холостом ходу и удобно запускался, но слишком большой маховик недопустимо увеличивает время разгона автомобиля.

Метод баланса мощностей [80] выгоден для расчета момента инерции маховика тогда, когда цикл можно разделить на рабочий и холостой участок (рис. 15.7) и приведенный момент инерции можно принять постоянным. Примером таких агрегатов может служить дисковая пила с приводом от электромотора или двигателя внутреннего сгорания.

Пусть продолжительность рабочего участка циклограммы t_1 при средней мощности полезного и вредного сопротивлений N_1 . Время холостого хода $t_2 = T - t_1$, а мощность холостого хода — N_2 . Маховик позволяет выбрать номинальную мощность N двигателя соответственно работе полезного и вредного сопротивлений за цикл из условия: $N(t_1 + t_2) = N_1 t_1 + N_2 t_2$. Следовательно, мощность двигателя будет

$$N = \frac{N_1 t_1 + N_2 t_2}{t_1 + t_2} \quad (15.23)$$

Соответствующая заштрихованной площади избыточная работа $A = (N_1 - N)t_1$, которую можно выразить равенством

$$A = \frac{(N_1 - N_2) t_1 t_2}{t_1 + t_2} \quad (15.24)$$

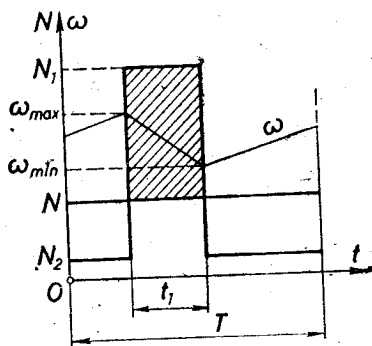


Рис. 15.7.

совершается за счет кинетической энергии масс механизма. Согласно теореме об изменении кинетической энергии и (15.11)

$$A = \frac{1}{2} I_r (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = (I_S + I_0) \delta\omega_{\text{ср}}^2$$

откуда соответствующий выбранной степени неравномерности момент инерции маховика

$$I_S = \frac{A}{\delta\omega_{\text{ср}}^2} - I_0 \quad (15.25)$$

Если приведенный момент инерции $I_r \neq \text{const}$, то в расчете используется его среднее значение, и полученный результат будет приближенным.

§ 15.3. Конструктивное выполнение, размещение и эффективность маховика

Вес маховика G зависит от его конструктивного выполнения. Встречаются два основных варианта — дискообразный и маховик в форме колеса с массивным ободом. В последнем случае при определении момента инерции I_S не учитываются массы ступицы и спиц. Для обоих вариантов момент инерции маховика можно выразить с помощью массы m и внешнего радиуса R_a сплошного и толстостенного цилиндра следующим образом:

$$I_S = \frac{m}{2} R_a^2, \quad I_S = m R_a^2.$$

Следовательно, дискообразный маховик приблизительно в два раза тяжелее маховика в форме колеса. Поэтому обычно применяют

маховик в форме шкива с массивным ободом. В общем случае $I_s = mi^2$, где i — радиус инерции.

Для маховика с массивным ободом $i \approx R = D/2$, где R — радиус окружности, на которой находятся центры тяжести сечения обода маховика. Для этого случая

$$I_s = \frac{GD^2}{4g}. \quad (15.26)$$

Видно, что вес маховика обратно пропорционален квадрату его диаметра, и если увеличим в два раза диаметр маховика, то его вес уменьшится в четыре раза. Величину GD^2 называют *маховым моментом*. Подставляя в формуле (15.26)

$$G = \gamma \pi D b h, \quad b = \beta D, \quad h = \xi D,$$

получают

$$D = (4gI_s / \pi \gamma \beta \xi)^{1/3}, \quad (15.27)$$

где γ — удельный вес материала маховика, b и h — ширина и высота сечения венца.

При вращении маховика в его венце возникают напряжения растяжения $\sigma = \rho v^2$, где ρ — плотность материала, а v — скорость центра тяжести сечения венца. Допускают $v < 40$ м/с для чугунных маховиков, $v < 100$ м/с для стальных и $v < 150$ м/с для маховиков из легированной стали с содержанием хрома и никеля.

В предыдущем параграфе при определении момента инерции I_s маховика предполагалось, что маховик размещен на входном валу, в то время как место установки маховика можно выбрать произвольно. Формула (15.14) свидетельствует о том, что необходимый момент инерции маховика обратно пропорционален квадрату средней угловой скорости входного вала. Следовательно, из-за соображений снижения массы машины выгодно маховик разместить на более быстро вращающемся валу, например l . Момент инерции размещенного на таком валу маховика

$$I_{s_1} = (\omega/\omega_1)^2 I_s. \quad (15.28)$$

При передаточном отношении от главного вала к валу маховика $\omega/\omega_1 = u > 1$ момент инерции маховика уменьшается обратно пропорционально квадрату u . Эта формула вытекает из равенства кинетической энергии обоих маховиков.

Целесообразность выбора места установки маховика необходимо обсудить с точки зрения упругих колебаний. Реальная кинематическая цепь с деформируемыми звеньями между маховиком и источником неравномерности действует как рассмотренная в § 13.9 упругая муфта. Источником неравномерности называем звено, на которое действуют переменные силы или которое движется с непрерывно изменяющимися ускорениями, даже если главное звено вращается равномерно.

В § 13.9 источником неравномерности предполагалась машина a , а момент машины b $M_b = \text{const}$. Если принять $M_b = 0$, то формулы не меняются; следовательно, они пригодны также для

расчета передачи между маховиком и источником неравномерности. Влияние этой передачи зависит от параметра

$$\beta = p^2 I_s / c,$$

где p — цикловая частота переменного момента $M_a = M \sin pt$ и c — постоянная упругой связи передачи (жесткость). В узком интервале $0 < \beta < \beta_0$, источник неравномерности движется равномернее, чем тогда, когда передача неупругая. В интервале $\beta_0 < \beta < < 2\beta_0$, возможен резонанс, и действительная неравномерность может быть значительно больше неравномерности, определенной по формуле (15.13). В интервале $\beta > 2\beta_0$, маховик наиболее эффективно снижает неравномерность агрегата, если маховик размещен по возможности ближе к источнику неравномерности. Формулу (15.13) можно написать так:

$$\delta = k / I_s.$$

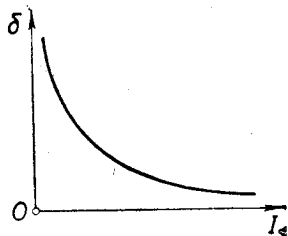


Рис. 15.8.

Гипербола (рис. 15.8), соответствующая этой зависимости, показывает, что маховик эффективно снижает неравномерность только тогда, когда она большая.

В промежутке времени, когда $M_p > M_s$, неизбежно возникает приращение кинетической энергии $\Delta E = A_p - A_s$. Так как $E = = 0,5 I_r \omega^2$, то $\Delta E \approx I_r \omega \Delta \omega$ и

$$\Delta \omega \approx \Delta E / I_r \omega. \quad (15.29)$$

Следовательно, чем больше маховик и чем быстрее движется агрегат, тем меньше проявляется приращение его кинетической энергии.

§ 15.4. Регулирование неперриодических изменений скорости

В предыдущих параграфах этого раздела рассмотрены изменения угловой скорости ω в стационарном движении. Эти периодические колебания повторяются в каждом цикле. Маховик (вместе с другими массами), приведенный момент инерции которого постоянен, обеспечивает изменение ω в интервале, соответствующем допустимой степени неравномерности δ :

$$\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}, \quad (1)$$

если средняя скорость $\omega_{\text{ср}}$ не изменяется. В действительности $\omega_{\text{ср}}$ меняется, и пределы интервала приблизительно сохраняются только по отношению к переменной средней скорости (рис. 15.9).

Изменения средней скорости неперриодичны. Их причина — изменение средних значений движущей силы или полезного сопротивления (нагрузки), нарушающее условие стационарного движения. Если, например, средний приведенный момент полезного сопротивления в цикле стационарного движения уменьшается, то

из-за уменьшения этой нагрузки в каждом цикле $A_p \neq A_s$; избыточная работа определяет изменение кинетической энергии агрегата, стационарное движение прекращается и средняя скорость главного звена агрегата начинает возрастать. Чтобы ликвидировать этот *переходный процесс*, необходимо уменьшить движущую силу или увеличить нагрузку. Первую операцию совершает

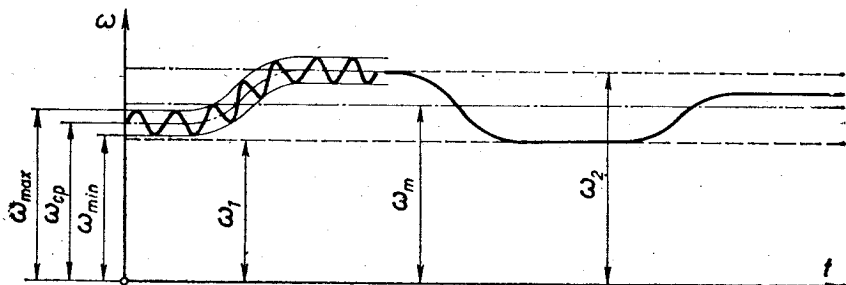


Рис. 15.9.

регулятор, вторую — *модератор*. Часто модератор также называется регулятором.

Регулятор изменяет интенсивность подвода носителя энергии (топлива, пара, сжатого воздуха, воды), которая подводится к двигателю и, таким образом, восстанавливает стационарное движение.

Средняя скорость восстановленного стационарного движения обычно отличается от средней скорости предыдущего стационарного движения, и процесс регулирования имеет вид, показанный на рис. 15.9. Согласно рисунку изменение средней скорости характеризует *степень непостоянства скорости*

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_m}, \quad (15.30)$$

где

$$\omega_m = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}. \quad (15.31)$$

Для агрегатов поршневых двигателей $\varepsilon \approx 0,02, \dots, 0,08$. Электродвигатели, подобно показанному на рис. 13.11, обладают свойством *саморегулирования* и для них регулятор не нужен. Саморегулирование происходит в агрегатах, у которых или движущая сила (у электромоторов), или полезное сопротивление (у автомобилей) является функцией скорости.

Особым видом саморегулирования является *самосинхронизация* [69]. Два закрепленных на общем колеблющемся основании электромотора с эксцентрическими роторами в определенных условиях вращаются одинаково, или отношение их скоростей является целым числом 2, 3, ...

Если задача о маховике ограничивается циклом стационарного движения и формулируется условием (1), то задача о регу-

ляторе относится ко всему времени работы агрегата и определяется условием

$$\omega_1 < \omega_{\text{ср}} < \omega_2. \quad (2)$$

Это условие можно выполнить, используя систему прямого или непрямого автоматического регулирования.

Схема системы прямого регулирования представлена на рис. 15.10. Составные части этой системы, которые называют

звеньями системы регулирования, следующие: 1 — регулируемый объект (двигатель), 2 — источник возмущений (рабочая машина), 3 — чувствительный элемент (регулятор), 4 — регулирующий орган. Реализация этой схемы с помощью центробежного регулятора в роли чувствительного элемента показана на рис. 15.11.

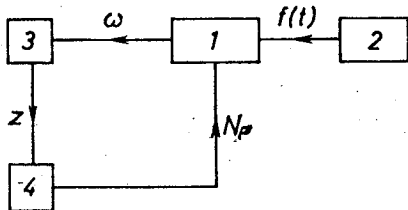


Рис. 15.10.

Входные и выходные величины звеньев: $f(t) = M_0$ — нагрузка, ω — угловая скорость, z — координата муфты, N_p — мощность двигателя. Схема системы регулирования содержит замкнутый контур, что является признаком обратной связи. Обратная связь выражается так: двигатель действует на регулятор, а тот, в зависимости от несогласованности между средней скоростью цикла $\omega = \omega_{\text{ср}}$ и номинальной средней скоростью $\omega = \omega_n$, воздействует на двигатель.

Уже со времен Уатта в системах автоматического регулирования скорости в качестве чувствительного элемента обычно применяют центробежный регулятор, в котором используются центробежные силы вращающихся масс. Имеются конические центробежные регуляторы (рис. 15.11), где упомянутые массы перемещаются

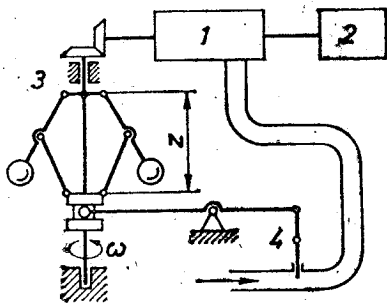


Рис. 15.11.

и плоские центробежные регуляторы, где эти массы перемещаются в плоскости, перпендикулярной оси вращения регулятора. Изменение расстояний между вращающимися массами и осью вращения связано с соответствующими изменениями угловой скорости вала центробежных регуляторов. Иногда в качестве чувствительных элементов применяются инерциальные регуляторы, массы которых реагируют на изменения углового ускорения вала регулятора; здесь используются тангенциальные силы инерции. Встречаются также тахогенераторы, которые превращают изменение ω в изменение электрического напряжения.

Непрямое регулирование обычно применяют в случаях, когда необходимо усилить сигналы чувствительного элемента, так как они недостаточны для привода регулирующего органа. Так, например, для поворота кольца перестановки направляющих лопаток гидротурбины могут понадобиться силы величиной в несколько тонн.

В системах непрямого регулирования между чувствительным элементом и регулирующим органом включают усилитель импульсов, который называют *сервомотором*. Часто используют гидравлический сервомотор, золотник которого перемещается центробежным регулятором. Часть такой системы регулирования показана на рис. 2.24; эта система реализует *жесткую обратную связь*.

Регулятор с гидравлическим сервомотором и *упругой обратной связью* показан на рис. 15.12, где r — регулятор, a — пружина, k — катаракт, s — цилиндр сервомотора, e — золотник сервомотора. Катаракт представляет собой небольшой гидроцилиндр, в поршне которого имеется небольшое отверстие, позволяющее маслу перетекать с сопротивлением из одной полости цилиндра в другую. Такая система непрямого регулирования реализует так называемое *изодромное регулирование*.

Система изодромного регулирования функционирует следующим образом. Если, например, нагрузка уменьшается, угловая скорость вала I регулятора увеличивается и муфта 2 движется вверх, то рычаг 3 перемещает вверх поршень золотника 4 и поршень 5 сервомотора начинает движение вниз, растягивая пружину (масло не успевает перетекать через отверстие катаракта) и уменьшая приток источника энергии к двигателю. В случае жесткой обратной связи переходный процесс этим и кончается, и агрегат движется с большей, чем до уменьшения нагрузки, скоростью*). В изодромной системе переходный процесс происходит следующим образом: при смещении поршня 5 вниз растянутая пружина катаракта сокращается, золотник перемещается вниз, а поршень сервомотора вверх, увеличивая приток носителя энергии к двигателю; вал I начинает вращаться быстрее, муфта

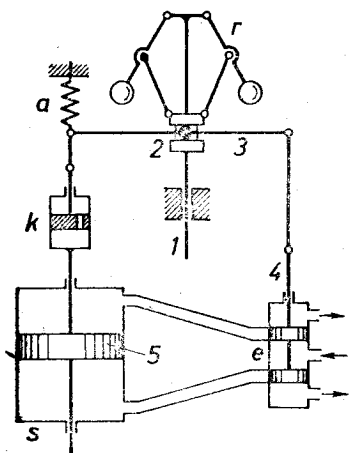


Рис. 15.12.

2 движется вверх, то рычаг 3 перемещает вверх поршень золотника 4 и поршень 5 сервомотора начинает движение вниз, растягивая пружину (масло не успевает перетекать через отверстие катаракта) и уменьшая приток источника энергии к двигателю. В случае жесткой обратной связи переходный процесс этим и кончается, и агрегат движется с большей, чем до уменьшения нагрузки, скоростью*). В изодромной системе переходный процесс происходит следующим образом: при смещении поршня 5 вниз растянутая пружина катаракта сокращается, золотник перемещается вниз, а поршень сервомотора вверх, увеличивая приток носителя энергии к двигателю; вал I начинает вращаться быстрее, муфта

*) Это можно установить с помощью рис. 15.11. Так как при уменьшении M_{Qcp} должен уменьшиться также M_{Pcp} , то задвижка 4 при уменьшении M_{Qcp} должна сместиться вниз, а муфта регулятора вверх, что соответствует большей скорости вала регулятора и, следовательно, скорости машины. Вследствие инерции системы переход к новому стационарному движению происходит с колебаниями.— Прим. ред.

поднимается и прекращает приток масла к сервомотору. Подбирая соответствующим образом параметры регулятора, колебательный процесс регулирования можно сделать быстро затухающим. Изодромную систему регулирования можно установить так, что средняя угловая скорость агрегата остается приблизительно постоянной (рис. 15.13), с отклонениями во время переходных процессов.

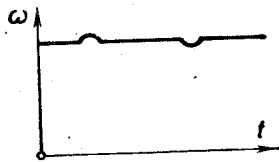


Рис. 15.13.

Если для перестановки впускных органов двигателя необходимы очень большие силы, можно создать *двухступенчатое непрямоe регулирование*, где золотник главного сервомотора переставляется дополнительным сервомотором, а золотник дополнительного сервомотора переставляется регулятором.

Важными условиями удачного процесса регулирования являются *статическая устойчивость* регулятора и *динамическая устойчивость* всей системы автоматического регулирования. Статическая устойчивость регулятора будет рассмотрена в следующем параграфе, а определение динамической устойчивости является задачей особой технической дисциплины — теории автоматического регулирования. Эта наука занимается проблемами регулирования не только скорости, но также регулированием давления, температуры и других физических величин [24, 42].

Статически устойчивая система возвращается в положение равновесия, если ее немного отклоняют от этого положения. Динамическая устойчивость является устойчивостью движения. Переходные процессы в динамически устойчивой системе, т. е. ее отклонения от номинального движения, вызванные разными причинами, являются затухающими и поэтому прекращаются. Для выяснения динамической устойчивости составляют линеаризованные дифференциальные уравнения движения звеньев системы и объединяют их в одном линейном, дифференциальном уравнении n -го порядка [2, 28] системы регулирования, корни характеристического уравнения которого должны находиться в отрицательной полуплоскости комплексных чисел. Для выяснения этого обстоятельства разработаны критерии динамической устойчивости Вышнеградского, Рауса, Гурвица, Михайлова и др.

§ 15.5. Кинестатика центробежного регулятора

Для выяснения статической устойчивости и других свойств центробежного регулятора (рис. 15.14) обычно рассматривают динамическое равновесие одного из спаренных механизмов перемещения масс регулятора, который в коническом регуляторе представляет собой кривошипно-ползунный механизм. Произведя статическое приведение к точкам (§ 9.2) распределенных масс звеньев, движущихся относительно вала регулятора, получаем

$$m_D = \frac{m_3}{2} + \frac{m_2}{2}, \quad m_C = m + \frac{m_1}{2} + \frac{m_2 OA}{2 OC},$$

где m — масса шара. Приведенный вес шара $G = mcg$; приведенный вес муфты $G_u = m_b g$.

Приведенная к муфте сила генерации $J = m_c \omega^2 r$ переносного движения шаров регулятора, определенная с помощью рычага Жуковского, направлена вверх и равна

$$P = 2J \frac{oc}{od} \cos \alpha = \omega^2 2m_c r \frac{oc}{od} \cos \alpha = \omega^2 B_s \quad (1)$$

где $B = B(z)$. Аналогично вычисляется приведенная к муфте направленная вниз сила Q , определяемая силами тяжести G , G_u и силой пружины T :

$$Q = T + G_u + 2G \frac{oc}{od} \sin \alpha = Q(z). \quad (2)$$

Изображая приведенные силы P и Q графически (рис. 15.15), получают статические характеристики регулятора. Кривая $Q = Q(z)$ только одна из них, в то время как характеристики инерционной силы представляется семейством кривых $P = P(\omega, z)$. В качестве параметра принимается

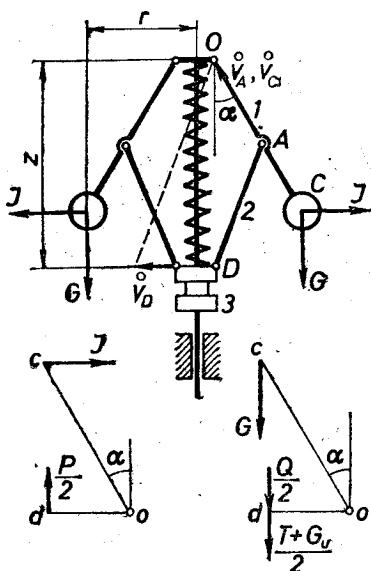


Рис. 15.14.

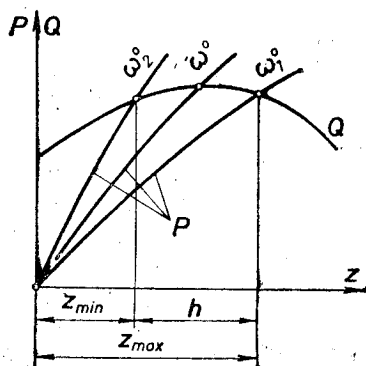


Рис. 15.15.

угловая скорость ω^0 вала регулятора; верхний индекс, у угловой скорости означает, что при расчете не учтено трение. Величину

$$\beta = \omega^2 \frac{dB}{dz} - \frac{dQ}{dz} \quad (15.32)$$

называют *фактором устойчивости регулятора*. Геометрически β выражает разницу тангенсов углов наклона касательных к оси z , проведенных в точке пересечения заданных кривых P и Q . Если $\beta > 0$, то кривые пересекаются так, как показано на рис. 15.15, и регулятор является устойчивым. Действительно, если, например, случайная сила перемещает муфту вниз (z увеличивается

от положения равновесия, где $P=Q$), то возникает неравенство $P>Q$, которое возвращает муфту в положение равновесия. Регулятор должен быть устойчивым на всей продолжительности рабочего хода h муфты. Если в каком-то положении муфты $\beta \leq 0$, то регулятор неустойчив и непригоден для регулирования.

Регулятор, у которого $\beta = 0$, называют *астатическим*. Здесь равновесие существует в разных положениях муфты, но только для одной скорости вращения. Для обычного регулирования скорости астатический регулятор непригоден.

Семейство кривых (рис. 15.15) дает функцию $\omega^0 = f(z)$, которая на рис. 15.16 показана средней кривой. Эта кривая определяет для каждого положения муфты соответствующую «идеальную» угловую скорость ω^0 . Коэффициентом регулирования называется отношение

$$\epsilon_0 = \frac{\omega_2^0 - \omega_1^0}{\omega_m^0} \quad (15.33)$$

где

$$\omega_m^0 = \frac{\omega_2^0 + \omega_1^0}{2} \approx \omega_m = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}. \quad (3)$$

Чем больше крутизна кривой $\omega^0 = f(z)$, тем больше коэффициент регулирования. Для астатического регулятора $\epsilon_0 = 0$, т. е. кривая $\omega^0 = f(z)$ является прямой, параллельной оси z .

Только что описанный «идеальный» регулятор реагирует даже на малейшие изменения скорости; каждому положению муфты соответствует определенная угловая скорость вала регулятора ω^0 и равновесие сил $P=Q$.

В действительности регулятору необходимо преодолеть силы трения и силы перестановки регулирующего органа. Поэтому при уменьшении нагрузки муфта начнет движение вверх только тогда, когда будет достигнуто равенство $P=Q+S$, т. е.

$$(\omega'')^2 B = Q + S, \quad (4)$$

где S — приведенная к муфте суммарная сила трения и сила перестановки регулирующего органа. При увеличении нагрузки муфта начинает опускаться, если $Q = P + S$, т. е.

$$(\omega')^2 B = Q - S. \quad (5)$$

Следовательно, муфта не будет трогаться, пока $\omega' < \omega < \omega''$. Угловые скорости ω' и ω'' для каждого положения муфты можно определить из уравнений (4) и (5) и построить показанную на

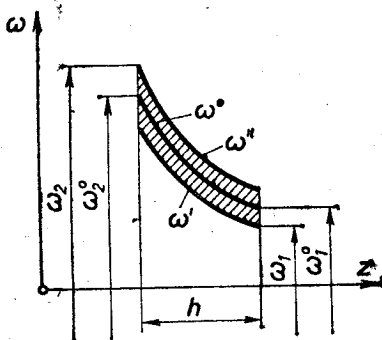


Рис. 15.16.

рис. 15.16 заштрихованную площадь нечувствительности. Это показывает, что без достаточно большой степени непостоянства скорости прямое регулирование невозможно. Необходимо достаточно большое несоответствие между мгновенным и номинальным значением регулируемой величины, чтобы чувствительный элемент дал сигнал. Отношение

$$\nu = \frac{\omega'' - \omega'}{\omega^0} \quad (15.34)$$

называют коэффициентом нечувствительности регулятора. Здесь

$$\omega^0 \approx \frac{\omega'' + \omega'}{2}. \quad (6)$$

Из формул (15.34) и (6) вытекает, что

$$\omega'' = \omega^0(1 + \nu/2), \quad \omega' = \omega^0(1 - \nu/2). \quad (7)$$

Используем эти формулы для предельных положений муфты:

$$\omega''_{\max} = \omega_2 = \omega_2^0(1 + \nu/2), \quad \omega'_{\min} = \omega_1 = \omega_1^0(1 - \nu/2). \quad (8)$$

Подставляя эти выражения в формулу (15.30) и учитывая формулу (3), получаем, что

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \nu. \quad (15.35)$$

Следовательно, степень непостоянства скорости равна сумме коэффициентов регулирования и нечувствительности.

Нечувствительность играет положительную роль в процессе регулирования. Из-за нечувствительности колебания отклонений перерегулировки быстро или даже аperiodически затухают.

Раздел 16

УРАВНОВЕШИВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 16.1. Воздействие механизма на фундамент и задача уравновешивания

Рассмотрим (рис. 16.1) плоский механизм 1, который закреплен на фундаменте 2. Звенья механизма, а также его центр масс C_1 движутся параллельно плоскости Oxy . Выясним, какими силами и моментами механизм действует на фундамент. Соответственно закону Ньютона фундамент действует на механизм с равными по величине, но противоположно направленными приложенными к нему силами и моментами.

На механизм действуют сила тяжести G_1 звеньев, равнодействующая которых приложена в C_1 , и реакция фундамента $\vec{S} = \vec{S}_{\text{стат}} + \vec{S}_{\text{дин}}$. Статическая составляющая реакции действует всегда, а динамическая — только во время движения механизма. Если механизм не является агрегатом, то на него действует также внешняя движущая сила или внешнее полезное сопротивление

(или момент этих сил). Эти величины обычно не являются быстро изменяющимися и их не будем учитывать. В случае необходимости их влияние можно выяснить отдельно.

Главный вектор приложенных к механизму сил

$$\bar{R} = \bar{G}_1 + \bar{S} = \bar{G}_1 + \bar{S}_{\text{стат}} + \bar{S}_{\text{дин}} = \bar{S}_{\text{дин}},$$

так как сила тяжести уравновешивается статической реакцией фундамента. Согласно закону Ньютона и теореме о движении центра масс

$$\bar{R} = m_1 \bar{a}_{C_1} \quad (1)$$

механизм действует на фундамент силой

$$\bar{B} = -\bar{S} = -\bar{S}_{\text{стат}} - \bar{S}_{\text{дин}} = \bar{G}_1 - m_1 \bar{a}_{C_1}.$$

Радиус-вектор r_c , центра масс механизма $m_1 = m_0 + m$ определяется из уравнения

$$m_1 \bar{r}_{C_1} = m_0 \bar{r}_{C_0} + m \bar{r}_c.$$

Здесь m_0 — масса станины и m — масса подвижных звеньев. Дифференцируя это выражение два раза по времени, получаем, что

$$m_1 \bar{a}_{C_1} = m \bar{a}_c,$$

где a_c — ускорение центра масс подвижных звеньев. Следовательно, механизм действует на фундамент силой

$$\bar{B} = \bar{G}_1 + \bar{J}, \quad (16.1)$$

где

$$\bar{J} = -m \bar{a}_c \quad (16.2)$$

является главным вектором сил инерции подвижных звеньев, который возбуждает колебания фундамента и окружающих строительных конструкций. В случае резонанса эти колебания могут вызвать потерю устойчивости строительных конструкций.

Динамическое воздействие механизма на фундамент можно уменьшить или даже устранить путем уравнивания сил инерции звеньев механизма.

Получили применение два метода расчета уравнивания механизмов — *кинематический метод* и *силовой метод*. Основные условия обоих методов следуют из уравнения (16.2). Кинематический метод требует, чтобы $a_c = 0$, а силовой метод, чтобы

$$J = 0. \quad (16.3)$$

В случае выполнения условия $a_c = 0$ центр масс подвижных звеньев должен двигаться по прямой или находиться в покое.

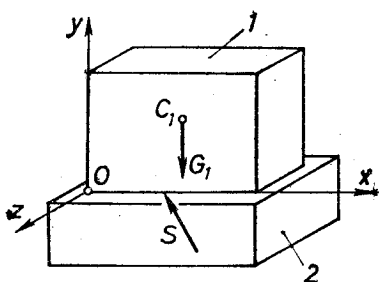


Рис. 16.1.

В стационарных машинах циклического действия применимо только последнее условие

$$v_G = 0, \quad (16.4)$$

на котором базируется кинематический метод.

Условия (16.3) и (16.4) эквивалентны. Их выполнение исключает воздействие быстро меняющихся сил на фундамент. Такое уравнивание называется *статическим уравниванием*. Силы тяжести звеньев статически уравновешенного механизма не могут привести в движение механизм; он находится в равновесии под воздействием сил тяжести в любом положении. Однако механизм на фундамент и фундамент на механизм могут воздействовать не только силами, но также парами сил (моментами), которые вызывают вращательные колебания фундамента. Устранение упомянутых пар сил называется *динамическим уравниванием* механизма. Динамическая уравновешенность или неуравновешенность проявляется только при движении механизма. Обычно механизм считают динамически уравновешенным, если моменты пар сил относительно осей Ox и Oy равны нулю.

Согласно теореме об изменении кинетического момента (момента количества движений) внешние тела воздействуют на механизм главным моментом

$$M = \frac{dL}{dt}, \quad (2)$$

проекции которого на оси координат (моменты относительно осей координат) являются следующими:

$$M_x = \frac{dL_x}{dt}, \quad M_y = \frac{dL_y}{dt}, \quad M_z = \frac{dL_z}{dt}. \quad (3)$$

Если $J = 0$ и G_i не учитываем, то M_x , M_y , M_z являются такими моментами пар сил относительно осей координат, которыми фундамент действует на механизм. Рассматривая механизм как систему из n материальных точек, кинетический момент L механизма относительно неподвижной точки O можно представить суммой

$$\bar{L} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая, что в плоском движении $v_{iz} = \dot{z}_i = 0$, кинетические моменты относительно координатных осей выражаются так:

$$L_x = - \sum m_i z_i \dot{y}_i, \quad L_y = \sum m_i z_i \dot{x}_i, \quad L_z = \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i). \quad (4)$$

Формулы (3), (4) и 3-й закон Ньютона дают моменты пар сил, с которыми механизм действует на фундамент:

$$W_x = \frac{d^2}{dt^2} I_{yz}, \quad W_y = - \frac{d^2}{dt^2} I_{xz}, \quad W_z = \sum m_i (y_i \ddot{x}_i - x_i \ddot{y}_i), \quad (16.5)$$

где I_{yz} и I_{xz} — центробежные моменты инерции масс механизма. Моменты W_x, W_y, W_z являются моментами пар сил инерции. Моменты W_x и W_y равняются нулю, если центробежные моменты инерции пропорциональны времени, или

$$I_{xz} = \text{const}, \quad I_{yz} = \text{const}. \quad (16.6)$$

Следовательно, плоский механизм можно считать статически и динамически уравновешенным, если центр масс подвижных звеньев механизма не движется и центробежные моменты инерции, содержащие координату, перпендикулярную к плоскости плоского движения, являются постоянными.

Согласно теореме Гюйгенса — Штейнера

$$I_{xz} = I_{xz}^C + m x_C z_C, \quad I_{yz} = I_{yz}^C + m y_C z_C.$$

Верхним индексом C обозначены центробежные моменты инерции относительно центральных осей, которые параллельны осям Oxy . Практически очень важным случаем выполнения условий (16.6) является тот, когда плоскость Sxy представляет собой плоскость симметрии механизма (тогда $I_{xz}^C = 0, I_{yz}^C = 0$) и центр масс не движется (x_C, y_C, z_C постоянны, т. е. условие (16.6) включает в себя также условие (16.4)).

Динамическое воздействие механизма на фундамент можно уменьшить не только уравновешиванием механизма, но также с помощью упругих опор. В качестве примера рассмотрим машину (рис. 16.2), которая имеет неуравновешенный ротор с массой

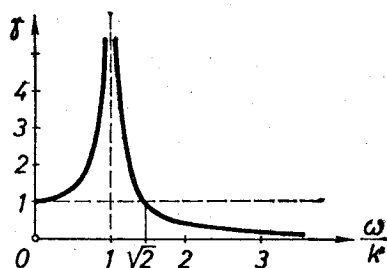
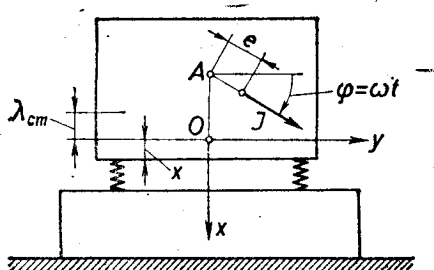


Рис. 16.2.

m и эксцентricностью e . Масса статора m_0 . Выясним с помощью теоремы об относительных силах инерции, каково же вертикальное поступательное движение статора. Если механическая система состоит из основного тела, которое имеет переносное поступательное движение, и из второго тела, движущегося относительно основного тела, то при составлении дифференциального уравнения относительного движения для второго тела в правую часть уравнения следует включить силу инерции переносного движения основного тела.

В соответствии с упомянутой теоремой дифференциальное уравнение статора следующее:

$$m_1 \ddot{x} = G_1 - c(\lambda_{ст} + x) + J \sin \omega t, \quad (5)$$

где $m_1 = m_0 + m$, $G_1 = gm_1$, c — постоянная упругости опор машины, $\lambda_{ст}$ — статическая деформация опор и $J = me\omega^2$ является относительной силой инерции ротора. Учитывая, что $c\lambda_{ст} = G_1$ и обозначая $c = m_1 k^2$, получим следующий вид уравнения (5):

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{J}{m_1} \sin \omega t. \quad (6)$$

Это уравнение является общеизвестным дифференциальным уравнением вынужденных колебаний без сопротивления, решение которого следующее:

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{J \sin \omega t}{m_1(k^2 - \omega^2)}. \quad (7)$$

Первый член в правой части выражает собственные колебания, которые, как известно, благодаря сопротивлению затухают. Поэтому колебания статора выражает второй член. Амплитуда вынужденных колебаний

$$x_{\max} = \pm \frac{J}{m_1 k^2} \frac{1}{|1 - (\omega/k)^2|} = \pm \frac{J}{c} \gamma, \quad (8)$$

где γ — коэффициент динамичности (рис. 16.2). Теперь видно, что на фундамент через пружины передается максимальная сила

$$B_{\max} = c(\lambda_{ст} + x_{\max}) = G_1 + J\gamma. \quad (16.7)$$

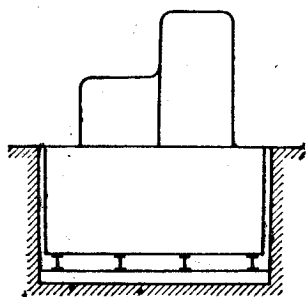


Рис. 16.3.

Если пружин нет, то $c = \infty$, $k = \infty$, $\gamma = 1$, и на фундамент переносится вся сила инерции J , как это должно быть согласно формуле (16.1). Если пружины достаточно мягкие, т. е. $c \rightarrow 0$, то также $\gamma \rightarrow 0$, и сила инерции подвижных звеньев механизма почти не передается на фундамент. Однако необходимо учитывать, что в сравнительно широком интервале $0 < \omega/k < \sqrt{2}$ коэф-

фициент динамичности $\gamma > 1$, и тогда на фундамент действует большая по величине сила, чем тогда, когда пружины нет. Особенно опасна зона резонанса.

Мягкие пружины конструктивно трудно выполнить. Однако из условия

$$\omega \gg k = \sqrt{c/m_1}$$

видно, что эффект упомянутых пружин можно достигнуть также, увеличивая массу m_1 машины. Пример такой конструкции показан на рис. 16.3.

§ 16.2. Определение положения и движения центра масс

В предыдущем параграфе выяснено, что, уравновешивая механизм, необходимо достигнуть неподвижности центра масс подвижных звеньев и что на фундамент передается суммарная сила инерции подвижных звеньев. Поэтому рассмотрим определение положения и ускорения центра масс подвижных звеньев.

Из формулы для радиуса-вектора центра масс

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

следует, что этот вектор является замыкающей стороной многоугольника векторов

$$\bar{r}_C = \frac{m_1}{m} \bar{r}_1 + \frac{m_2}{m} \bar{r}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \bar{r}_n = \bar{r}'_1 + \bar{r}'_2 + \dots + \bar{r}'_n. \quad (2)$$

Здесь n — число подвижных звеньев, m_i и r_i являются массой i -го звена и радиусом-вектором центра этой массы, $m = \sum m_i$ — масса подвижных звеньев.

Строя векторный многоугольник (2), получаем (рис. 16.4) положение центра масс, определенное радиусом r_C ; проектируя

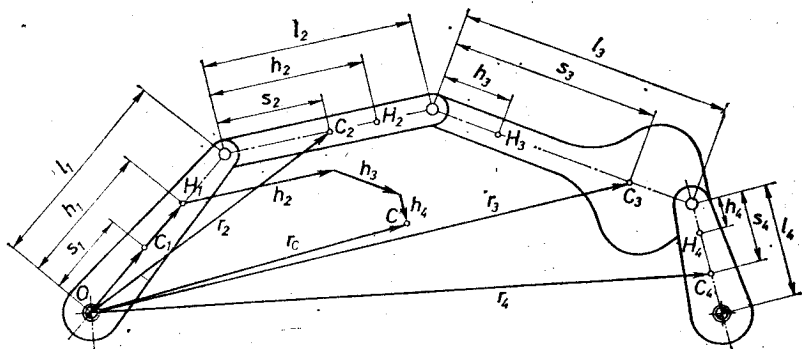


Рис. 16.4.

этот многоугольник на оси координат, получаем координаты x_C и y_C центра масс. Однако этот способ неудобен, так как переменные направления сторон r_i векторного многоугольника не связаны наглядно с кинематической схемой механизма.

Упомянутого недостатка не имеет рассматриваемый ниже метод главных векторов Фишера [96]. Предполагаем, что центры C_i масс звеньев находятся на прямых (осях звеньев), соединяющих центры шарниров каждого звена (рис. 16.4). Тогда радиусы-векторы центров масс звеньев, входящие в выражение (2), можно выразить так:

$$\bar{r}_1 = \bar{s}_1, \quad \bar{r}_2 = \bar{l}_1 + \bar{s}_2, \quad \bar{r}_3 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{s}_3, \quad \bar{r}_4 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{s}_4. \quad (3)$$

Подставляя эти зависимости в выражение (2) и объединяя члены с одинаковым направлением, получаем формулу

$$\bar{r}_C = \frac{m_1 \bar{s}_1 + (m_2 + m_3 + m_4) \bar{l}_4}{m} + \frac{m_2 \bar{s}_2 + (m_3 + m_4) \bar{l}_2}{m} + \frac{m_3 \bar{s}_3 + m_4 \bar{l}_3}{m} + \frac{m_4 \bar{s}_4}{m},$$

которую короче запишем так:

$$\bar{r}_C = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3 + \bar{h}_4. \quad (16.8)$$

Векторы h_i называются *главными векторами* и соответствующим им точки H_i — *главными точками*. Особенное свойство главных векторов то, что они совпадают по направлению с осями звеньев и при движении механизма не изменяют своей длины. Не изменяются также положения главных точек на звеньях. *Радиус-вектор \bar{r}_C центра масс подвижных звеньев механизма является геометрической суммой главных векторов.*

Если первый главный вектор отложим от неподвижного шарнира O первого звена, то при движении механизма векторный многоугольник (16.8) движется вместе с механизмом, при этом главные векторы остаются параллельными осям соответствующих звеньев и конец главного вектора движется вместе с центром масс C .

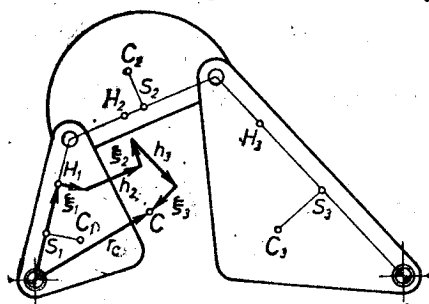


Рис. 16.5.

Легко убедиться, что главные точки имеют следующий физический смысл: если в левом шарнире звена считать сконцентрированными все массы расположенных слева подвижных звеньев, в правом шарнире — массы расположенных справа подвижных звеньев, а в центре масс звена — массу самого звена, то главная точка является центром всех этих трех масс.

Выясним, как можно определить \bar{r}_C , если центры масс звеньев не находятся на осях звеньев (рис. 16.5). Обозначая векторы отклонений $S_i C_i = k_i$, преобразуем выражения (3), приведя их к виду:

$$\bar{r}_1 = \bar{s}_1 + \bar{k}_1, \quad \bar{r}_2 = \bar{l}_1 + \bar{s}_2 + \bar{k}_2, \quad \bar{r}_3 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{s}_3 + \bar{k}_3.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2), получаем

$$\bar{r}_C = \frac{m_1 \bar{s}_1 + (m_2 + m_3) \bar{l}_1}{m} + \frac{m_1 \bar{k}_1}{m} + \frac{m_2 \bar{s}_2 + m_3 \bar{l}_2}{m} + \frac{m_2 \bar{k}_2}{m} + \frac{m_3 \bar{s}_3}{m} + \frac{m_3 \bar{k}_3}{m},$$

что в общем виде запишется так:

$$\bar{r}_C = \sum \bar{h}_i + \sum \bar{\xi}_i. \quad (16.9)$$

Векторный многоугольник (16.9) показан на рис. 16.5. В этом случае главные точки теряют вышеупомянутый физический смысл.

Метод главных векторов позволяет определить скорость и ускорение центра C масс подвижных звеньев с помощью обычных, рассмотренных в разделах 5, 6, методов. К механизму условно подсоединяют дополнительные диады, совмещая при этом точку C с точкой звена дополнительного механизма. К кривошипно-ползунному механизму (рис. 16.6) достаточно подсоединить диаду $H_1C'H_2$, чтобы центр C' воображаемого шарнира двигался так же, как центр тяжести C , так как приложен-

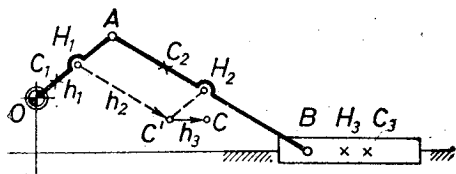


Рис. 16.6.

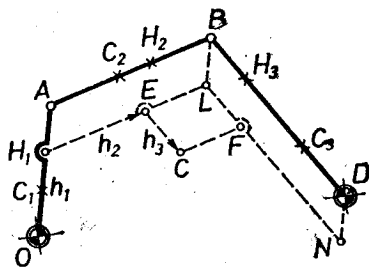


Рис. 16.7.

ный в точке C' вектор $h_3 = BH_2$ находится в поступательном движении. К шарнирному четырехзвеннику (рис. 16.7) необходимо присоединить диады H_1LB , LND и ECF .

Ускорение центра масс C можно определить также методом кинематических диаграмм (§ 5.6). Используя метод главных векторов, строят кривые $x_c = x_c(t)$ и $y_c = y_c(t)$; дифференцируя их дважды графически, находят проекции \ddot{x}_c и \ddot{y}_c ускорения центра масс. На станину и фундамент машины, согласно формуле (16.1), действуют силы

$$J_x = -m\ddot{x}_c, \quad J_y = -m\ddot{y}_c,$$

которые можно уменьшить или свести до нуля, произведя уравновешивание механизма.

§ 16.3. Уравновешивание механизмов добавочными грузами

Силы инерции и моменты сил инерции неуравновешенных механизмов действуют на среду, окружающую механизмы, создавая вибрации, шум, усталость материалов. Поэтому необходимо частичное или полное уравновешивание механизмов [78], которое устраняет воздействие механизма на окружающую среду.

Механизм уравновешивают, изменяя массу механизма и распределение этой массы. Применяемые для уравновешивания дополнительные массы называют *противовесами*. Обычно противовесы подсоединяют к уже существующим звеньям механизма, а иногда дополнительно устанавливают специальные *роторы противовесов*. Чаще всего используется первый метод, так как он не усложняет кинематическую схему механизма. Однако подсоединение противовесов часто увеличивает переменные силы внутри механизма, т. е. в подвижных соединениях, в состав которых не

входит станина; увеличивается вес механизма и статические давления. Полностью уравновешенный механизм без противовесов можно выполнить, если объединить в одну систему заданный механизм и симметричный ему *дублирующий механизм*. Частичное или даже очень хорошее уравновешивание механизмов без противовесов можно достигнуть в многоцилиндровых поршневых машинах, выбирая соответствующее число и размещение цилиндров и конструктивное выполнение коленчатого вала.

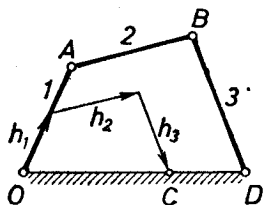


Рис. 16.8.

Расчеты уравновешивания механизмов выполняют по кинематическому или силовому методу, применяя реальные или комплексные числа [84, 94]. Здесь рассмотрим расчет противовесов механизма по методу главных векторов (§ 16.2).

Уравновешивание шарнирного четырехзвенника по методу главных векторов очень наглядно: центр масс механизма будет неподвижным, если векторный многоугольник главных векторов будет подобен многоугольнику линий центров шарниров подвижных звеньев (рис. 16.8), т. е. когда

$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2} = \frac{h_3}{l_3}, \quad (1)$$

где

$$h_1 = \frac{m_1 s_1 + (m_2 + m_3) l_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad h_2 = \frac{m_2 s_2 + m_3 l_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad h_3 = \frac{m_3 s_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (2)$$

Если выражения (2) подставить в формулу (1), то получим два уравнения

$$m_1 s_1 = m_2 l_1 \left(\frac{s_2}{l_2} - 1 \right), \quad m_2 s_2 = m_3 l_2 \left(\frac{s_3}{l_3} - 1 \right), \quad (16.10)$$

в которых имеются шесть неизвестных: массы подвижных звеньев m_1, m_2, m_3 и координаты центров этих масс s_1, s_2, s_3 ; следовательно, четыре из них можно выбрать произвольно. Таким образом,

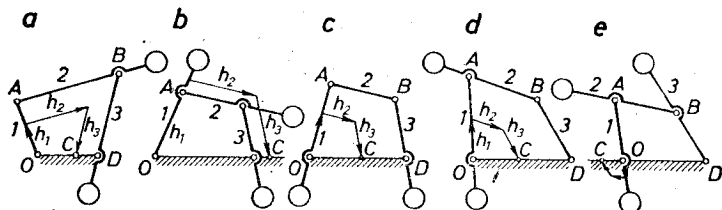


Рис. 16.9.

задача уравновешивания шарнирного четырехзвенника имеет бесконечно много решений. Пять вариантов установки грузов показаны на рис. 16.9 и сведены в табл. 16.1. Величины $m_1, m_2,$

m_3 и l_1, l_2, l_3 являются положительными. Поэтому, если одна из координат s является положительной и меньше длины соответствующего звена (эти варианты в таблице подчеркнуты), то обе остальные координаты s являются отрицательными и больше длины соответствующего звена.

Для статического уравновешивания шарнирного четырехзвенника минимальное число противовесов равняется двум. Обычно

Таблица 16.1

Вариант	s_1		s_2		s_3	
<i>a</i>	+	$< l_1$	+	$> l_2$	+	$> l_3$
<i>b</i>	+	$> l_1$	+	$> l_2$	+	$> l_3$
<i>c</i>	-		+	$< l_2$	+	$> l_3$
<i>d</i>	-		-		+	$< l_3$
<i>e</i>	-		-		-	

оптимальным является вариант *c*, так как он не связан с большим увеличением нагрузок во внутренних шарнирах *A* и *B* и противовесы не получаются слишком большими.

Возможно также решение

$$\bar{r}_C = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3 = 0.$$

Тогда центр масс механизма размещается в шарнире *O* и, подставляя $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ в выражения (2), получают $s_1 < 0, s_2 < 0, s_3 = 0$. Этого можно достигнуть тремя противовесами, которые размещаются соответственно варианту *e*.

Уравновешивание кривошипно-ползунного механизма возможно, если выполнить условие (рис. 16.6)

$$h_1 = \frac{m_1 s_1 + (m_2 + m_3) l_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 0, \quad h_2 = \frac{m_2 s_2 + m_3 l_2}{m_1 + m_2 + m_3} = 0. \quad (3)$$

Тогда точка *C'* попадает в неподвижный центр шарнира *O*, и центр масс *C* механизма находится на расстоянии

$$h_3 = \frac{m_3 s_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

правее точки *O*. Из уравнений (3) определяются s_1 и s_2 :

$$s_1 = - \frac{m_2 + m_3}{m_1} l_1, \quad s_2 = - \frac{m_3}{m_2} l_2. \quad (16.11)$$

Соответствующее этим уравнениям решение показано на рис. 16.10. Видно, что для статического уравновешивания кривошипно-пол-

вунного механизма необходимы два противовеса. Противовес на шатуне, который обычно получается большим, значительно увеличивает нагрузку шарнира А. Поэтому часто удовлетворяются частичным уравниванием кривошипно-ползунного механизма, требуя только, чтобы

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{m_1 s_1 + (m_2 + m_3) l_1}{m_2 s_2 + m_3 l_2} = \frac{l_1}{l_2}. \quad (4)$$

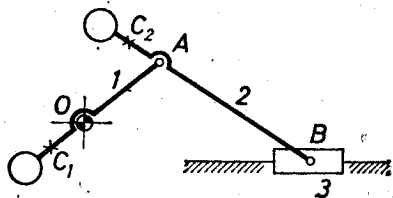


Рис. 16.10.

Тогда $\triangle OH_1C' \sim \triangle OAB$, точки C' и C движутся параллельно направлению скольжения ползуна, и неуравновешенными остаются только силы инерции в направлении скольжения. Из уравнения (4) получаем соотношение

$$m_1 s_1 = m_2 l_1 (s_2 / l_2 - 1). \quad (16.12)$$

Если хотим обойтись без противовеса на шатуне ($0 < s_2 < l_2$), то $s_1 < 0$. Следовательно, частично статически уравнивать кривошипно-ползунный механизм можно только одним, размещенным на кривошипе противовесом, который называется *главным противовесом*. Сказанное здесь относится как в дезаксиальном, так и к центральному кривошипно-ползунному механизму.

§ 16.4. Уравнивание механизмов вращающимися противовесами. Силовой метод. Дублирование механизмов

Согласно уравнению (16.3) механизм является статически уравниваемым, если суммарная сила инерции подвижных звеньев равна нулю. Этот вывод является основанием

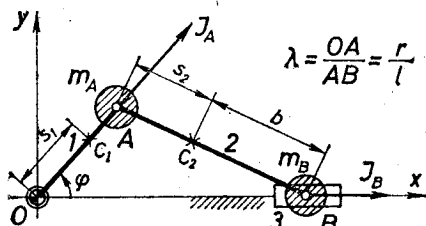


Рис. 16.11.

силового метода уравнивания механизмов. Этот метод покажем на примере уравнивания центрального кривошипно-ползунного механизма (рис. 16.11).

Для расчета сил инерции массы подвижных звеньев механизма заменим массами, приведенными к центрам А и В подвижных шарниров

$$m_A = m_1 s_1 / r + m_2 b / l, \quad m_B = m_3 + m_2 s_2 / l. \quad (16.13)$$

Массу m_A называют *вращающейся массой*, а массу m_B — *поступательно движущейся массой*.

Проекция суммарной силы инерции механизма

$$\bar{J} = \bar{J}_A + \bar{J}_B = -m_A \bar{a}_A - m_B \bar{a}_B$$

на координатные оси определяются равенствами

$$J_x = -m_A a_{A_x} - m_B a_{B_x}, \quad J_y = -m_A a_{A_y}. \quad (1)$$

Силы инерции можно определить для любого произвольного закона движения механизма, так как выполнение условия (16.3) всегда означает, что центр масс подвижных звеньев стал неподвижным, а это свойство не зависит от закона движения механизма. Удобнее всего принять, что кривошип вращается равномерно, т. е. $\varphi = \omega t$. Тогда

$$a_{A_x} = -r\omega^2 \cos \varphi, \quad a_{A_y} = -r\omega^2 \sin \varphi. \quad (2)$$

а ускорение центра шарнира B можно выразить уже вышеприведенной формулой (6.47)

$$a_B = -r\omega^2 \left[\cos \varphi + \frac{1}{\lambda} (4A_2 \cos 2\varphi + 16A_4 \cos 4\varphi + \dots) \right].$$

Подставляя выражения (2) и (6.47) в выражения (1), определяем переменные силы, с которыми механизм действует на фундамент:

$$J_x = m_A r \omega^2 \cos \varphi + m_B r \omega^2 \left[\cos \varphi + \frac{4}{\lambda} (A_2 \cos 2\varphi + 4A_4 \cos 4\varphi + \dots) \right],$$

$$J_y = m_A r \omega^2 \sin \varphi. \quad (3)$$

Отдельные члены выражения (3) называются силами инерции разных порядков. Члены, содержащие $\sin \varphi$ или $\cos \varphi$, называются *силами инерции первого порядка*. Так как $\varphi = \omega t$, то их частота совпадает с частотой вращения коленвала. Численные значения сил инерции первого порядка являются наибольшими. Члены, содержащие $\cos 2\varphi$, называются *силами инерции второго порядка*. Их амплитуда меньше, а частота вдвое больше, чем у сил инерции первого порядка. Члены, содержащие $\cos 4\varphi$, называются *силами инерции четвертого порядка* и т. д. Из табл. 6.3 следует вывод, что амплитуды сил инерции шестого и более высокого порядков быстро убывают. В направлении движения ползуна (в направлении оси машины) действуют силы инерции первого и высших порядков, а перпендикулярно к оси механизма — только силы инерции первого порядка.

Вращающаяся масса возбуждает только силу первого порядка с амплитудой

$$D_1^A = m_A r \omega^2.$$

Поступательно движущаяся масса возбуждает силы инерции с амплитудами

$$D_1^B = m_B r \omega^2, \quad D_2 = m_B \frac{4}{\lambda} A_2 r \omega^2 = \frac{4}{\lambda} A_2 D_1^B,$$

$$D_4 = m_B \frac{16}{\lambda} A_4 r \omega^2 = \frac{16}{\lambda} A_4 D_1^B.$$

Выражения (3) теперь приобретают следующий вид:

$$J_x = D_1^A \cos \varphi + D_1^B \cos \varphi + D_2 \cos 2\varphi + D_4 \cos 4\varphi + \dots \quad (16.14)$$

$$J_y = D_1^A \sin \varphi.$$

Эти уравнения выражают динамическое воздействие неуравновешенного кривошипно-ползунного механизма на фундамент. Максимальные значения этого воздействия в направлении оси механизма соответствуют углам поворота кривошипа $\varphi = 0^\circ, 180^\circ, \dots$, а в направлении, перпендикулярном к этой оси, — $\varphi = 90^\circ, 270^\circ, \dots$

Пример 16.1. Определить максимальные значения неуравновешенной силы инерции, действующей на фундамент горизонтального дизельного двигателя, если масса коленвала $m_1 = 20$ кг, масса шатуна $m_2 = 30$ кг, масса поршня, штока поршня и крейцкопфа $m_3 = 40$ кг, ход поршня $S = 200$ мм, $\lambda = 0,22$, $s_1 = 40$ мм, $\frac{s_2}{l} = 0,35$, $n = 500$ мин⁻¹.

Решение. По формулам (16.13) определяем величину вращающейся массы $m_A = 27,5$ кг и поступательно движущейся массы $m_B = 50,5$ кг, а по выражениям коэффициентов формулы (6.47) находим $A_2 = 0,01225$ и $A_4 = -0,00004$.

Ускорение оси шейки кривошипа $r\omega^2 = 274$ м/с². Амплитуды сил инерции следующие: $D_1^A = 770$ кгс, $D_1^B = 1410$ кгс, $D_2 = 314$ кгс, $D_4 = -4$ кгс. По формулам (16.14) максимальная горизонтальная и максимальная вертикальная составляющие силы суть следующие:

$$J_{x_{\max}} = 2490 \text{ кгс}, \quad J_{y_{\max}} = 770 \text{ кгс}.$$

Этот пример показывает, что при увеличении порядка силы инерции ее амплитуда резко уменьшается. Во многих случаях можно игнорировать уже силы инерции четвертого порядка.

Силу инерции D_1^A вращающейся массы можно уравновесить при помощи главного противовеса, если его разместить на плечах кривошипа (рис. 16.12). Центробежная сила $J_0 = m_0 r_0 \omega^2$ главного противовеса должна быть равна D_1^A . Поэтому масса главного противовеса

$$m_0 = m_A r / r_0. \quad (16.15)$$

Динамическое воздействие на фундамент кривошипно-ползунного механизма, частично уравновешенного с помощью главного противовеса, определяется так:

$$J_x = D_1^B \cos \varphi + D_2 \cos 2\varphi + \dots, \quad J_y = 0. \quad (16.16)$$

Следовательно, на фундамент действуют только аксиальные силы инерции, которые все возникают от поступательно движущейся массы.

Из рис. 16.11 видно, что аксиальную силу J_B можно уменьшить, увеличивая главный противовес. Однако тогда возникает новая неуравновешенная сила инерции J' от вращающейся массы, которая направлена противоположно силе J_A . Если присоединим такой дополнительный противовес, что сила инерции первого порядка от поступательно движущейся массы в направлении оси механизма больше не действует, а переходит на направление, перпендикулярное к оси механизма, то сила инерции $J' = m' r_0 \omega^2$ дополнительного противовеса должна быть равна D_1^B . Поэтому масса дополнительного противовеса

$$m' = m_{Br}/r_0. \quad (16.17)$$

Динамическое воздействие на фундамент кривошипно-ползунного механизма, частично уравновешенного с помощью главного и дополнительного противовесов, можно выразить так:

$$J_x = D_2 \cos 2\varphi + \dots, \quad J_y = -D_1^B \sin \varphi. \quad (16.18)$$

Следовательно, с помощью главного противовеса на щеках кривошипа можно уравновесить силу, перпендикулярную к оси кривошипно-ползунного механизма, и также аксиальную силу, возникающую от вращающейся массы. Добавляя дополнительный противовес, можно уравновесить обе аксиальные силы первого порядка, тогда сила первого порядка, возникающая от поступательно движущейся массы, переносится на направление, перпендикулярное к оси механизма. Силы второго и высших порядков одним противовесом уравновесить невозможно. Статически полностью уравновесить кривошипно-ползунный механизм можно с помощью двух противовесов (рис. 16.10), из которых один присоединен к кривошипу, а второй — к шатуну. Дополнительные противовесы применяются в паровозах, так как пара сил J_{xd} возбуждает колебание паровоза направо и налево (рис. 16.13). Перенос D_1^B на вертикальное направление, увеличиваем давление на рельсы, что значительно менее опасно. Однако дополнительные противовесы ограничивают максимальную скорость паровоза, так как контакт колес с рельсами не должен нарушаться.

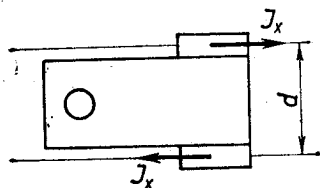


Рис. 16.13.

Пример 16.2. Выполнить уравновешивание данного в примере 16.1 дизельного двигателя: 1) с помощью главного противовеса; 2) с помощью главного и дополнительного противовеса, принимая $r_0 = r$. Сравнить воздействие на фундамент уравновешенного и неуравновешенного двигателей.

Решение. По формулам (16.15) и (16.17) массы главного и дополнительного противовесов соответственно равны $m_0 = 27,5$ кг, $m' = 50,0$ кг. По формулам (16.14), (16.16) и (16.18) определяем воздействующие на фундамент экстремальные значения силы инерции, приведенные (в килограммах) в табл. 16.2.

Только что рассмотренный пример показывает, что с помощью одного противовеса частично уравновешенный механизм действует на окружающие тела с весьма значительными силами. Полное уравновешивание с помощью двух противовесов (§ 16.3) невыгодно. Поэтому для уравновешивания сил инерции разных порядков в механизмах применяют роторы с противовесами. Для

Таблица 16.2

φ	Противовес					
	не имеется		m_0		$m_0 + m'$	
	J_x	J_y	J_x	J_y	J_x	J_y
0°	2494	0	1744	0	314	0
90°	-314	770	-314	0	-314	-1410
180°	-1866	0	-1096	0	314	0
270°	-314	-770	-314	0	-314	1410

уравновешивания каждой силы инерции k -го порядка необходимо два ротора противовесов, вращающихся противоположно друг другу с угловой скоростью ω_k . В направлении линии центров роторов силы инерции противовесов взаимно уравновешиваются, а в направлении, перпендикулярном к этой оси, — геометрически суммируются, создавая таким образом уравновешивающую силу. Уравновешивание всех сил инерции первого и второго порядка кривошипно-ползунного механизма с помощью главного противовеса и двух пар роторов с противовесами показано на рис. 16.14.

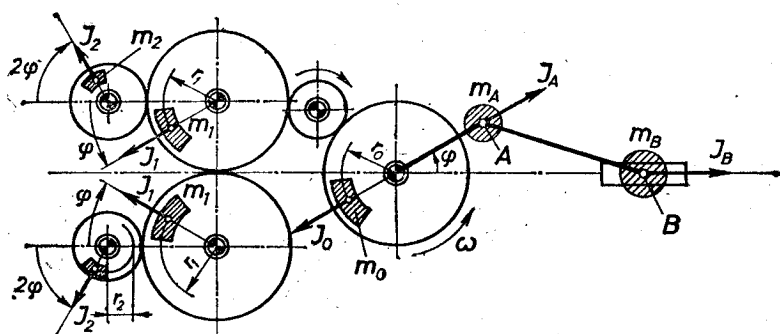


Рис. 16.14.

Такой механизм обычно можно рассматривать как практически уравновешенный.

Противовесы для показанной на рис. 16.14 схемы определяют согласно условиям: $2J_1 = D_1^B$ и $2J_2 = D_2$, т. е.

$$2m_1 r_1 \omega^2 = m_B r \omega^2, \quad 2m_2 r_2 4\omega^2 = \frac{4}{\lambda} A_2 m_B r \omega^2,$$

откуда

$$m_1 = \frac{m_B r}{2 r_1}, \quad m_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{m_B r}{2 r_2}. \quad (16.19)$$

Механизм можно полностью уравновесить, если к нему присоединить симметричный дублирующий механизм. Эта идея показана на рис. 16.15.

Частичного или даже практически полного уравновешивания многоцилиндровых поршневых машин можно достичь без применения противовесов. Чтобы выяснить упомянутые возможности, рассмотрим показанные на рис. 16.16 двухцилиндровые, четырехцилиндровые и шестицилиндровые поршневые машины, в которых цилиндры размещены в одном ряду, т. е. оси цилиндров находятся в одной плоскости, поэтому достаточно рассмотреть силы инерции поступательно движущихся масс первого, второго, четвертого, шестого и высших порядков, действующие в направлении осей цилиндров

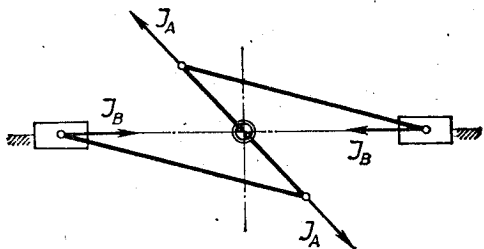


Рис. 16.15.

$$J_1 = D_1^B \cos \varphi, \quad J_2 = D_2 \cos 2\varphi, \quad J_4 = D_4 \cos 4\varphi, \quad J_6 = D_6 \cos 6\varphi, \dots$$

В двухцилиндровых машинах силы инерции первого порядка уравновешиваются, так как

$$J_1 \equiv D_1^B [\cos \varphi + \cos (\varphi + 180^\circ)] = 0,$$

а суммарная сила инерции второго порядка и более высоких порядков

$$J_2 \equiv D_2 [\cos 2\varphi + \cos (2\varphi + 360^\circ)] \neq 0.$$

Не уравновешивается пара сил инерции первого порядка $J_1' d$.

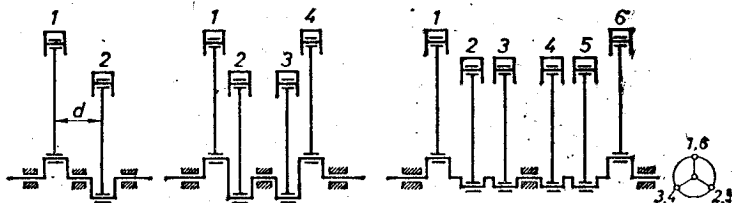


Рис. 16.16.

Четырехцилиндровая машина состоит из двух симметрично расположенных рядом двухцилиндровых машин. Поэтому уравновешиваются силы инерции только первого порядка и из-за симметрии уравновешиваются также пары этих сил.

Очень хорошо уравновешена шестицилиндровая машина, так как

$$J_1 \equiv 2D_1^B [\cos \varphi + \cos (\varphi + 120^\circ) + \cos (\varphi + 240^\circ)] = 0,$$

$$J_2 \equiv 2D_2 [\cos 2\varphi + \cos (2\varphi + 240^\circ) + \cos (2\varphi + 480^\circ)] = 0,$$

$$J_4 \equiv 2D_4 [\cos 4\varphi + \cos (4\varphi + 480^\circ) + \cos (4\varphi + 960^\circ)] = 0.$$

Однако суммарная сила инерции шестого порядка

$$J_6 \equiv 2D_6 [\cos 6\varphi + \cos (6\varphi + 720^\circ) + \cos (6\varphi + 1440^\circ)] \neq 0.$$

Таким же образом можно доказать, что в шестицилиндровой поршневой машине не уравновешиваются только силы инерции 6, 12, 18 и т. д. порядков, а все остальные уравновешиваются.

§ 16.5. Уравновешивание роторов

Звенья механизма, которые вращаются вокруг неподвижных осей, имеют особое свойство — их можно уравновешивать независимо от других звеньев механизма с помощью противовеса, обращая ось вращения в главную центральную ось инерции и таким образом выполняя общие условия уравновешивания механизма (16.4) и (16.6).

Уравновешивание роторов имеет большое практическое значение. Роторы принадлежат к самым распространенным и самым быстрым звеньям механизмов. Коленчатые валы многоцилиндровых поршневых двигателей вращаются с частотой 2000—5000 мин⁻¹. Особенно быстрое вращение имеет место в механизмах, состоящих только из ротора и статора: роторы электромоторов и турбин достигают частоты 30 000 мин⁻¹, а ультрацентрифуг — даже 60 000 и выше мин⁻¹. Из-за больших скоростей даже ничтожно неуравновешенный ротор может воздействовать на окружающие тела с большими динамическими силами и моментами.

Различают три вида неуравновешенности роторов: 1) *статическая неуравновешенность* — ось вращения является главной осью инерции, но не является центральной осью, т. е. центр масс не находится на оси вращения; на окружающие тела действует вращающаяся вместе с ротором суммарная сила инерции; 2) *динамическая неуравновешенность* — ось вращения является центральной осью, но не является главной осью инерции; на окружающие тела ротор действует парой сил инерции, вектор которого вращается вместе с ротором; 3) *комплексная неуравновешенность* — ось вращения не является главной центральной осью инерции; на окружающие тела ротор воздействует вращающейся динамой сил инерции или вращающейся суммарной силой инерции, не проходящей через центр масс ротора. Уравновешенный ротор воздействует на подшипники только силой тяжести.

В расчетах уравновешивания роторов применим силовой метод. Согласно принципу, приведенному в § 16.4, результат рас-

чета уравновешивания не зависит от принятого в расчете движения механизма. Поэтому уравновесим равномерно вращающийся ротор, массы которого имеют только центробежные силы.

Для расчета уравновешивания необходимо разделить ротор на части, массы и центры масс которых известны. Для того чтобы центробежные силы частей роторов проходили через центры масс, необходимо иметь для каждой части ротора параллельную оси вращения главную центральную ось инерции.

Рассмотрим ротор, показанный схематично на рис. 16.17. Здесь m_i — массы неуравновешенных частей ротора, r_i — радиусы-векторы их центров, перпендикулярные оси вращения, O — точка приведения на оси вращения, векторы a_i координируют начала векторов r_i относительно O . Такой ротор может быть комплексно неуравновешенным.

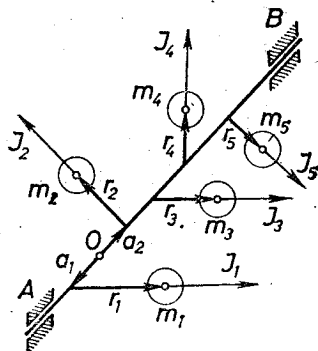


Рис. 16.17.

Каждую центробежную силу $\vec{J}_i = m_i \vec{r}_i \omega^2$ по рассмотренному в статике методу переносим в точку приведения. Для этой цели в точке приведения прикладываем две противоположно направленные силы \vec{J}_i и $-\vec{J}_i$. Сила $-\vec{J}_i$ вместе с приложенной в центре масс m_i силой \vec{J}_i образует пару сил. Таким образом, после переноса силы \vec{J}_i в точку приведения, в этой точке нужно

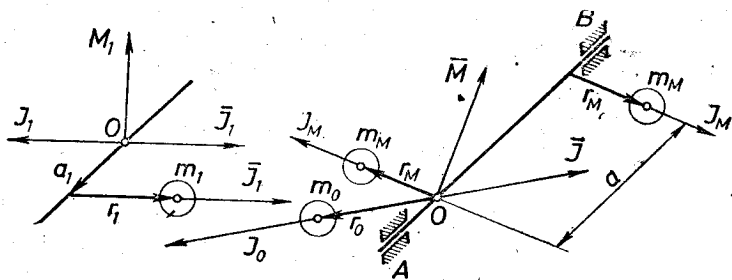


Рис. 16.18.

приложить не только силу \vec{J}_i , но также вектор $\vec{M}_i = \vec{a}_i \times \vec{J}_i$ момента пары сил, который как свободный вектор можно приложить в любой точке. Перенос соответствующей рис. 16.17 центробежной силы J_1 в точку O показан на рис. 16.18.

После приведения всех центробежных сил ротора к произвольной точке O и геометрического суммирования их получают главный вектор \vec{J} и главный момент \vec{M} центробежных сил ротора, которые показаны на рис. 16.18. Задачей уравновешивания является уменьшение обоих этих векторов до нуля.

Главный вектор \bar{J} можем уравновесить противовесом m_0 , который определяет центробежную силу $\bar{J}_0 = m_0 \bar{r}_0 \omega^2 = -\bar{J}$. Пару сил можем уравновесить только парой сил. Поэтому главный момент \bar{M} уравновешиваем двумя размещенными в перпендикулярной к вектору \bar{M} плоскости противовесами m_M , центробежные силы $J_M = m_M r_M \omega^2$ которых образуют пару сил $a J_M = \bar{M}$, момент которой направлен противоположно главному моменту \bar{M} . Один из противовесов m_M прикреплен к ротору в точке приведения, а второй на расстоянии a от нее. Прикрепленные в точке приведения противовесы m_0 и m_M объединяем в один противовес; его массу m_I определяют из уравнения

$$m_I \bar{r}_I \omega^2 = m_0 \bar{r}_0 \omega^2 + m_M \bar{r}_M \omega^2, \quad (1)$$

где \bar{r}_M является радиусом вектором центра масс противовеса m_M .

Обозначим I и II перпендикулярные к оси ротора плоскости, в которых устанавливаем противовесы. Точка приведения находится в плоскости I , в которой устанавливается противовес с массой m_I . Массу m_M противовеса, установленного в плоскости II , в дальнейшем обозначим m_{II} , а ее силу инерции $-J_{II} = -m_{II} r_{II} \omega^2 = J_M$. Теперь видно, что комплексно или динамически неуравновешенный ротор можно уравновесить только с помощью двух противовесов, которые должны быть установлены в двух произвольно выбранных, перпендикулярных к оси ротора плоскостях *): Статически неуравновешенный ротор можно уравновесить одним противовесом в плоскости, проходящей через центр масс перпендикулярно оси, или двумя противовесами, равнодействующая сил инерции которых приложена в центре масс, равна и противоположна неуравновешенной силе инерции ротора.

Выясним, как определить массы и радиусы-векторы противовесов, прикрепленных в плоскостях I и II . После их установки главный вектор \bar{J} и главный момент \bar{M} сил инерции ротора должны быть равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{J} &\equiv \bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \dots + \bar{J}_n + \bar{J}_I + \bar{J}_{II} = 0, \\ \bar{M} &\equiv \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n + \bar{M}_{II} = 0. \end{aligned}$$

Сокращая на ω^2 , эти уравнения перепишем так:

$$m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \dots + m_n \bar{r}_n + m_I \bar{r}_I + m_{II} \bar{r}_{II} = 0, \quad (16.20)$$

$$m_1 \bar{a}_1 \times \bar{r}_1 + m_2 \bar{a}_2 \times \bar{r}_2 + \dots + m_n \bar{a}_n \times \bar{r}_n + m_{II} \bar{a} \times \bar{r}_{II} = 0. \quad (16.21)$$

Проектируя это уравнение на оси координат, можно получить для расчета уравновешивания ротора аналитические уравнения. Решая графически, необходимо строить соответствующие этим уравнениям планы сил и моментов сил (рис. 16.19). Составляющие первого плана параллельны направлениям центробежных сил,

*) Направления векторов центробежных сил инерции уравновешивающих грузов при комплексной неуравновешенности не параллельны, если ось вращения и главная центральная ось скрещиваются.— *Прим. ред.*

а второго — перпендикулярны этим направлениям. Если повернуть второй план на 90° против вращения часовой стрелки (если смотреть со стороны подшипника А), то направления векторов

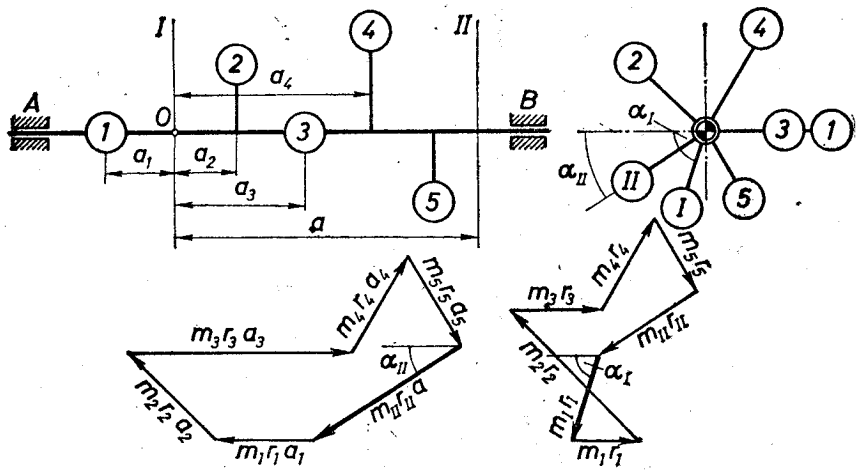


Рис. 16.19.

моментов центробежных сил масс, расположенных вправо от плоскости I, совпадают с направлениями центробежных сил инерции, а для масс, расположенных влево от плоскости I, — противоположны этим направлениям. Учитывая это правило, уравнение (16.21) запишем так:

$$\overline{m_1 a_1 r_1} + \overline{m_2 a_2 r_2} + \dots + \overline{m_n a_n r_n} + \overline{m_{II} a r_{II}} = 0. \quad (16.22)$$

Сперва строим план моментов по уравнению (16.22), так как этот план имеет только одну неизвестную составляющую $\overline{m_{II} a r_{II}}$, которая направлена по радиусу-вектору r_{II} противовеса II. Определив искомую величину и разделив ее значение на a , получают статический момент $m_{II} r_{II}$ массы противовеса; это дает возможность определить массу противовеса или длину радиуса-вектора, задавшись одной из этих величин. Используя найденный вектор $m_{II} r_{II}$, строим план сил (16.20); это дает возможность определить статический момент $m_1 r_1$ массы первого противовеса. Тем самым проблема устранения комплексной неуравновешенности роторов решена.

При динамическом уравнивании строим план моментов (16.22), находим $m_{II} r_{II}$ и учитываем, что $m_I \vec{r}_I = -m_{II} \vec{r}_{II}$. При статическом уравнивании массу одного противовеса приравняем нулю, а массу второго противовеса, который может быть единственным противовесом в плоскости вращения центра масс определим, построив план сил (16.20). Следовательно, определяя массы противовесов при уравнивании ротора статически или динамически, строится только один план векторов.

Возвратимся еще раз к комплексно неуравновешенному ротору (рис. 16.19), неуравновешенность которого вызывают массы m_1, m_2, \dots, m_n . Число этих масс может быть неограниченным. Поэтому любой комплексно неуравновешенный ротор можем уравновесить двумя противовесами, расположенными в произвольно выбранных плоскостях I и II . Абсолютные значения статических моментов масс противовесов следующие: $m_I r_I$ и $m_{II} r_{II}$, а направления определяют углы α_I и α_{II} .

Рассмотренный ротор останется уравновешенным также тогда, когда эксцентрические массы m_1, m_2, \dots, m_n удалим, а вместо них в плоскостях I и II прикроем к ротору массы m_a и m_b , так, чтобы абсолютные значения их статических моментов $m_a r_a = m_I r_I$ и $m_b r_b = m_{II} r_{II}$, а углы направления $\alpha_a = \alpha_I + 180^\circ$ и $\alpha_b = \alpha_{II} + 180^\circ$. Это означает, что любой комплексно неуравновешенный ротор можно заменить ротором, к которому прикреплены в двух произвольно выбранных плоскостях только две эксцентрические массы m_a и m_b , а остальные массы уравновешены.

Согласно с выражением (1) массу m_I используем как для статического, так и для динамического уравновешивания. Поэтому статический момент массы m_a можем выразить так:

$$m_a \bar{r}_a = m_a' \bar{r}_a' + m_a'' \bar{r}_a''$$

где

$$m_a' \bar{r}_a' = -m_0 \bar{r}_0, \quad m_a'' \bar{r}_a'' = -m_{M \Gamma, M} \bar{r}_M = -m_b \bar{r}_b.$$

За меру статической неуравновешенности принимают *статический дисбаланс (дебаланс)*

$$\Delta_{ст} = m_a' r_a' = m_0 r_0, \quad (16.23)$$

а в качестве мерила динамической неуравновешенности принимают *динамический дисбаланс*

$$\Delta_{дин} = m_a'' r_a'' a = m_b r_b a, \quad (16.24)$$

где a — расстояние между плоскостями I и II . Единицей измерения статического дисбаланса обычно является $г \cdot см$, а динамического дисбаланса — $г \cdot см^2$. Статический дисбаланс является статическим моментом неуравновешенной массы относительно оси вращения.

§ 16.6. Экспериментальное уравновешивание роторов (балансировка)

Правильно рассчитанный ротор (§ 16.5) после изготовления остается более или менее комплексно неуравновешенным из-за неоднородности материала и ошибок обработки. Поэтому быстроходные роторы уравновешивают экспериментально. Такое уравновешивание называют *балансировкой*. Балансировку выполняют, прибавляя или удаляя (высверливанием) соответствующую часть массы ротора на заданном расстоянии от оси вращения.

Для относительно коротких и не слишком быстроходных роторов иногда выполняют только статическую балансировку, в результате которой расстояние r_c центра массы ротора от оси вращения становится достаточно небольшим. Для статического уравновешивания используют различные устройства (рис. 16.20).

Одним из наиболее чувствительных устройств для статической балансировки являются параллельные призмы, которые используются для индивидуальной балансировки отдельных роторов, если у ротора диаметры вала на концах одинаковы. Призмы

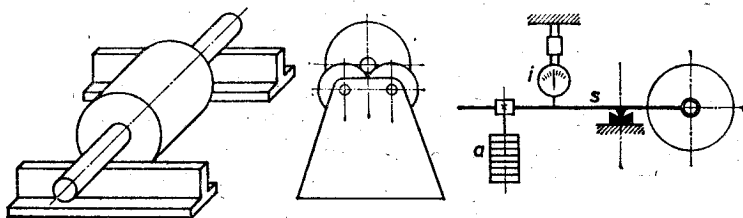


Рис. 16.20.

должны быть горизонтальными и достаточно жесткими. Призмы и вал должны иметь геометрически правильную форму и должны быть неповрежденными и чистыми.

Поставленный на призмы ротор после непродолжительных колебаний устанавливается так, что его центр масс находится под осью ротора в вертикальной плоскости, проведенной через ось ротора. В этой плоскости над осью ротора прикрепляют противовес или с противоположной стороны в роторе высверливают отверстие, достигая таким образом экспериментальным путем безразличного положения равновесия ротора. Теперь активный момент Qr_c равен моменту Q_k сопротивления качения, где Q — вес ротора, а k — коэффициент сопротивления качению. Следовательно, статический дисбаланс ротора возможно уменьшить до значения $\Delta_{ст} = Q_k$ и в оптимальном случае приблизить центр масс ротора к оси ротора до значения $r_c = k \approx 0,01$ мм, оставляя так называемую *скрытую статическую неуравновешенность*.

Скрытую статическую неуравновешенность можно уменьшить, применяя метод опытных противовесов. Окружность ротора обычно делят на 8 равных частей, и точки деления последовательно нумеруют. Точку 1 совмещают с плоскостью, проведенной через ось ротора, и в этой точке прикрепляют опытный противовес p_1 , который поворачивает ротор на небольшой угол ($10^\circ - 15^\circ$). После этого снимают противовес p_1 и упомянутую операцию повторяют относительно других точек. Чертят кривую, показанную на рис. 16.21. Центр масс ротора находится в плоскости противовесов p_{max} и p_{min} . Прикрепляя вместо опытного противовеса стационарный противовес

$$p = (p_{max} - p_{min})/2,$$

можно уменьшить r_c до нескольких тысячных миллиметра.

Более высокую производительность дает устройство для статической балансировки (рис. 16.20), в которой ротор на каждом конце опирается на два диска*). В этом устройстве диаметры вала ротора могут быть разными. Устройство сравнительно нечувствительно, так как к сопротивлению качения прибавляется

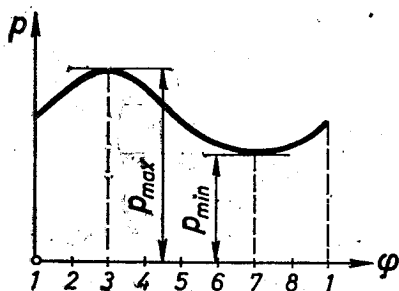


Рис. 16.21.

трение в подшипниках дисков, и поэтому арифметическая сумма реакций опор больше, чем у параллельных призм. Сумму реакций можно уменьшить, если один из дисков на каждом конце ротора сделать больше другого. Для массовой статической балансировки применяют балансировочные станки различных конструкций. Один из них схематично показан на рис. 16.20. Здесь ротор помещен в подшипниках рычага z и уравнивается противовесом a . Ротор фиксируют в различных угловых положениях, и с помощью динамометра i определяют величину статического дисбаланса в каждом положении.

Гораздо эффективнее статической балансировки является динамическая балансировка роторов, которую совершают в движении на специальных машинах для динамической балансировки. Динамически балансируют как динамически неуравновешенные (после статической балансировки), так и комплексно неуравновешенные роторы. Комплексная неуравновешенность, которая включает в себя как статическую, так и динамическую неуравновешенность, является общим случаем неуравновешенности и наиболее часто встречается на практике. Поэтому рассмотрим динамическое уравнивание комплексно неуравновешенных роторов.

В параграфе 16.5 было выяснено, что причиной комплексной неуравновешенности можно считать (рис. 16.22) две неуравновешенные массы m_a и m_b , которые находятся в двух произвольно выбранных плоскостях I и II . Эти массы вызывают появление центробежных сил $\vec{J}_a = m_a \vec{r}_a \omega^2$ и $\vec{J}_b = m_b \vec{r}_b \omega^2$, модули которых пропорциональны статическим моментам масс $m_a r_a$ и $m_b r_b$. Если обе массы находятся в одной проведенной через оси ротора плоскости и $m_a \vec{r}_a = -m_b \vec{r}_b$, то ротор является динамически неуравновешенным. Причиной статической неуравновешенности является одна размещенная в любой плоскости неуравновешенная масса.

Данную комплексную неуравновешенность можем выразить также с помощью двух эксцентричных масс m_1 и m_2 , размещенных в двух других плоскостях I и 2 . Центробежные силы $\vec{J}_1 = m_1 \vec{r}_1 \omega^2$ и $\vec{J}_2 = m_2 \vec{r}_2 \omega^2$ этих масс эквивалентны системе сил

*) Катки Леонардо да Винчи.— Прим. ред.

J_a и J_b (рис. 16.22). Для определения статических моментов $m_1 r_1$ и $m_2 r_2$ обозначим через X и Y проекции сил на оси x и y и запишем уравнения эквивалентности:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= X_a + X_b, & X_1 a_1 &= X_a(a-b) - X_b b, \\ Y_1 + Y_2 &= Y_a + Y_b, & Y_1 a_1 &= Y_a(a-b) - Y_b b, \end{aligned} \quad (16.25)$$

в которых проекции сил X_a, Y_a, X_b, Y_b заменяем соответствующими статическими моментами $m_a x_a, m_a y_a, m_b x_b, m_b y_b$. Решая уравнения (16.25), получаем значения проекций x_1, x_2 статических

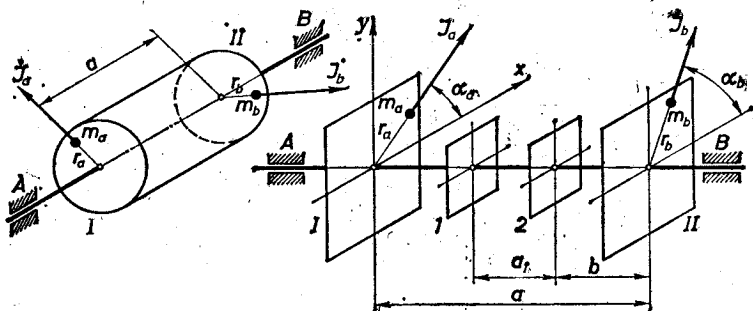


Рис. 16.22.

моментов масс m_1 и m_2 , которые можно выразить также равенствами

$$X_1 = m_1 x_1, \quad Y_1 = m_1 y_1, \quad X_2 = m_2 x_2, \quad Y_2 = m_2 y_2.$$

Модули (дисбалансы) и направления радиусов векторов искомых статических моментов следующие:

$$m_1 r_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}, \quad \cos \alpha_1 = X_1 / m_1 r_1,$$

$$m_2 r_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}, \quad \cos \alpha_2 = X_2 / m_2 r_2.$$

В машинах для динамической балансировки ротор устанавливают в подшипниках, которые каждый в отдельности имеет упругое соединение со станиной или оба жестко закреплены на упруго колеблющейся раме. Сила инерции неуравновешенной массы действует на подшипники или на раму и вызывает их деформации, для усиления которых в машинах обоих типов часто используют резонанс.

Машины первого типа чувствительнее и пригодны также для балансировки больших роторов. Плоскости для определения дисбаланса проходят через подшипники, которые можно передвинуть относительно станины, приспособляясь таким образом к длине ротора. Определяют дисбаланс в плоскости одного подшипника, второй подшипник в это время зафиксирован, и вал ротора может колебаться вокруг неподвижного центра этого подшипника. Аналогично находят дисбаланс в плоскости второго подшипника,

зафиксировав первый подшипник. Определенные в плоскостях подшипников дисбалансы необходимо по формулам (16.25) пересчитать на плоскости, в которых можно прикрепить противовесы или высверлить отверстия в роторе.

Пример машин второго типа показан на рис. 16.23, где 1 — ротор, 2 — рама, 3 — пружина, 4 — карандаш для записи размаха

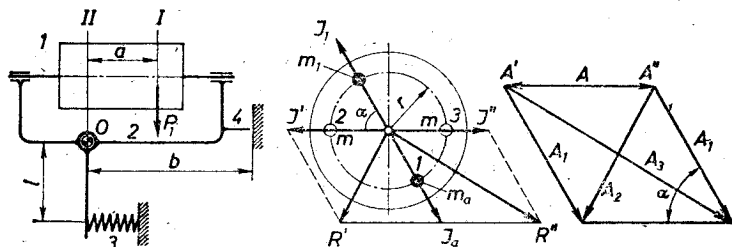


Рис. 16.23.

(двойной амплитуды) рамы, I и II — плоскости, в которых необходимо определить дисбалансы. Это делают сначала для плоскости I, после чего ротор переворачивают и определяют дисбаланс в плоскости II. Обычно эти плоскости удается выбрать так, что в них можно прикрепить противовесы для устранения найденных дисбалансов.

Простейшим методом определения дисбалансов является метод максимальных отметок. Максимальную отметку 1 получают, отмечая мелом, карандашом или иглой в виде короткой дуги точку

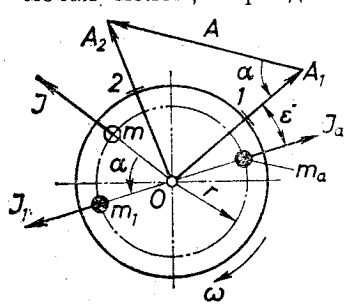


Рис. 16.24.

какой-то окружности ротора. Эта дуга пересекает плоскость колебаний ротора в момент максимального отклонения. Одновременно измеряют амплитуду A_1 и строят (рис. 16.24) вектор A_1 , который возникает от неуравновешенной массы m_a . Амплитуда A_1 вынужденных колебаний пропорциональна максимальному значению возбуждающей силы $J_a = m_a r \omega^2$, следовательно, пропорциональна также дисбалансу $m_a r$. Вектор A_1 отстает от вектора J_a на угол фазового сдвига ϵ . Двигаясь от

A_1 против направления вращения ротора, прикрепляют опытный противовес с массой m , и при той же угловой скорости ω повторяют эксперимент, получая максимальную отметку 2 и вектор амплитуды $A_2 = A_1 + A$, который является суммарным результатом воздействия сил J_a и $J = m r \omega^2$. Следовательно, от опытного противовеса возникает вектор A . Равновесие будет тогда, когда $A_2 = 0$. Для достижения этого вектор A необходимо повернуть на угол α и добиться, чтобы новый вектор $A' = -A_1$. Поэтому опытный противовес снимают и присоединяют уравнивающий

противовес с массой m_1 на радиусе, который смещен относительно радиуса Om на угол α . Массу уравновешивающего противовеса определяют из отношения

$$\frac{m_1 r}{mr} = \frac{A_1}{A}. \quad (16.26)$$

Метод максимальных отметок применяют в машинах динамической балансировки обоих типов. Недостаток метода — соответствие максимальных отметок зависит от опыта оператора.

Вторым простым методом определения дисбалансов является метод трех разгонов, который опирается только на измерение амплитуд. Рассмотрим применение этого метода в машине динамического балансирования рамного типа (рис. 16.23). Если колебания рамы небольшие, то можем принять, что на ротор и раму при вращении ротора с угловой скоростью ω действует периодический возбуждающий момент

$$M_1 = P_1 a = J_a a \sin \omega t = m_a r_a a \omega^2 \sin \omega t.$$

Кроме того, на раму и ротор действует момент силы упругости пружины

$$M_2 = -c \Delta_s l = -c \theta l^2,$$

и принимая, что сопротивление пропорционально скорости, момент сил сопротивления следующий:

$$M_3 = -f \dot{\theta},$$

где c — жесткость пружины, θ — угол наклона рамы от положения равновесия, f — коэффициент вязкого сопротивления. Если момент инерции рамы и ротора относительно оси O колебаний рамы обозначим I , то дифференциальное уравнение движения рамы

$$I \ddot{\theta} = M_1 + M_2 + M_3,$$

приобретает вид известного дифференциального уравнения вынужденных колебаний

$$\ddot{\theta} + 2n \dot{\theta} + k^2 \theta = h \sin \omega t, \quad (16.27)$$

где $n = \frac{f}{2I}$, $k^2 = \frac{cl^2}{I}$, $h = \frac{a\omega^2}{I} m_a r_a$. Решение этого уравнения, как известно из теоретической механики, дает амплитуду вынужденных колебаний и угол фазового сдвига:

$$\theta_u = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2}}, \quad \delta = \arctg \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}.$$

В условиях резонанса эти величины следующие:

$$\theta_{\max} = \frac{h}{2n \sqrt{k^2 - n^2}} \approx \frac{h}{2nk}, \quad \delta = \arctg \frac{1}{n} \sqrt{k^2 - 2n^2} \approx 90^\circ.$$

Максимальный размах (двойная амплитуда) карандаша

$$A = 2b\theta_{\max} = \frac{2abl}{f} \sqrt{\frac{c}{I}} m_a r_a = \beta m_a r_a. \quad (16.28)$$

Действительно, размах прямо пропорционален искомому дисбалансу в плоскости I . Коэффициент пропорциональности β зависит от параметров рамы и ротора. Поменяв плоскости I и II местами (переворачивая ротор), получим другое значение β , так как изменится момент инерции I .

Дисбаланс по методу трех разгонов находят так (рис. 16.23). Ротору придают сверхкритическую угловую скорость $\omega > k$ и отсоединяют от двигателя. Из-за дисбаланса $m_a r$ возникает вращающаяся сила инерции J_a , которая создает возбуждающий момент M_1 , и рама начинает колебаться. Из-за трения ω уменьшается. Пройдя через зону резонанса, карандаш установки записывает максимальный размах $A_1 = \beta m_a r$. В точке 2 прикрепляют опытный противовес m , от которого возникает сила инерции J' с соответствующим максимальным размахом $A = \beta m r$. При втором разгоне карандаш отмечает максимальный размах A_2 , соответствующий силе $\bar{R}' = J_a + J'$. Опытный противовес из точки 2 перемещают в точку 3. Теперь от него возникает сила инерции $J'' = -J'$ с соответствующим максимальным размахом $A = \beta m r$. При третьем разгоне карандаш записывает максимальный размах A_3 , соответствующий силе $\bar{R}'' = J_a + J''$.

Благодаря пропорциональности обоим конгруэнтным параллелограммам сил соответствует подобный параллелограмм максимальных размахов, который в действительности повернут относительно силового параллелограмма на соответствующий резонансу угол сдвига фаз $\varepsilon \approx 90^\circ$. Однако на рис. 16.23 векторы размахов показаны в направлении сил. Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов диагоналей: $2A_1^2 + 2A^2 = A_2^2 + A_3^2$, поэтому

$$A = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2}{2} - A_1^2}. \quad (16.29)$$

Теперь можно определить коэффициент пропорциональности

$$\beta = \frac{A}{m r} \quad (16.30)$$

и искомый дисбаланс, который равен статическому моменту противовеса

$$m_a r = m_1 r = \frac{A_1}{\beta}. \quad (16.31)$$

Угол α , координирующий радиус-вектор r , есть

$$\alpha = \arccos \frac{A_1^2 + A^2 - A_2^2}{2A_1 A}. \quad (16.32)$$

Последняя формула дает два ответа. Экспериментально находится, в какую сторону от вектора J' необходимо отложить определенный угол α , для чего проводится еще четвертый разгон. Если противовес выбран правильно, то рама заметно не колеблется. После того ротор поворачивают; аналогично выполняется уравновешивание в плоскости II .

Разработаны методы и приспособления для динамической балансировки роторов, без снятия их с машины [84].

Для снижения трудоемкости динамической балансировки сконструированы очень совершенные машины для экспериментального уравновешивания. Некоторые из них работают далеко от резонанса или в режиме стационарного резонанса. Существуют машины, автоматически показывающие величину и направление дисбаланса в обеих плоскостях уравновешивания, а прикрепление противовесов или снятие массы необходимо выполнить отдельно. В наиболее совершенных машинах для динамической балансировки роторов, которые имеют вычислительные устройства и обратную связь, операции изменения массы (в виде электронаплавки, электроэрозии или высверления) совершаются автоматически.

Раздел 17

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ

§ 17.1. Цель и метод эксперимента

Наука развивается по пути взаимодействия эксперимента и теории. Когда неизвестное явление наблюдается в процессе, проходящем без разумного воздействия человека, тогда с помощью мышления или интуиции ищем его разъяснение, опираясь на известные законы природы и общие принципы мышления. Обычно так возникают гипотезы о зависимостях между физическими величинами (параметрами) изучаемого процесса. Для утверждения или отрицания гипотез необходимы дополнительные наблюдения, при которых определенным образом воздействуют на процесс, т. е. необходимо провести эксперименты. В зависимости от результатов экспериментов создают теорию. Результаты экспериментов подчас вызывают усовершенствование теории — замену или отбрасывание некоторых предыдущих концепций и формулировку новых концепций. Новые концепции опять требуют экспериментального обоснования, и так бесконечно продолжается развитие науки, создается наиболее полная теория. В некоторых отраслях науки (теоретическая механика, термодинамика) в течение столетий удалось открыть общие законы, на которые опирается вся система законов данной науки.

Методической основой решения проблем теории механизмов и машин является применение законов и методов теоретической

механики в рассматриваемых несвободных механических системах — в механизмах и машинах. Это способствует развитию методов теоретической механики в специфическом направлении. Однако в машинах происходит не только перемещение твердых тел, но также деформации, гидравлические, аэродинамические, термические, химические, электрические и др. процессы. Это обстоятельство существенно усложняет исследование движения машины, так как необходимо освоить не только теоретическую механику, но и теорию соответствующей отрасли науки. Вопросы усложняют также зазоры в подвижных соединениях, силы трения и ошибки размеров звеньев.

Из-за упомянутых причин часто необходимо отказаться от чисто аналитических решений проблем механизмов и машин и провести эксперименты с машинами и механизмами или с их физическими моделями. Для исследования свойств машин и механизмов применяют также математическое моделирование, что в обычном смысле нельзя считать экспериментом.

Целью эксперимента не всегда является только усовершенствование теории. Заново спроектированные образцы машины проверяются, чтобы решить вопрос о серийном выпуске этих машин. В сравнительных испытаниях определяют эффективность усовершенствований конструкции. На приемочной проверке выясняются соответствия изготовленной машины условиям гарантии. На профилактической и доремонтной проверке определяют изменения параметров, возникающих в ходе эксплуатации (диагностика машины). Иногда наблюдают поведение машины в условиях перегрузки или даже в аварийных ситуациях. Испытания проводят также для градуирования и регулирования аппаратуры, используемой при экспериментах, а также в учебных целях.

Зачастую теоретической основой эксперимента является математическая статистика, которая в свою очередь базируется на теории вероятностей. Если раньше математическая статистика использовалась только для выражения в концентрированном и легко понятном виде результатов эксперимента, то теперь математическая статистика дает также общую теорию планирования экспериментов [50, 81]. Стратегия рационально спланированного эксперимента, когда в одной серии экспериментов меняют несколько или даже все главные параметры, позволяет получить результат желаемой точности с небольшим количеством измерений. В так организованных экспериментах можно раскрыть комплексы параметров, от которых зависит искомое явление. Классическим методом изменения одного параметра этого сделать почти невозможно. С комплексными параметрами мы ознакомились в § 13.9 при исследовании упругой муфты.

В экспериментах в качестве случайных выгодно считать величины, функциональная зависимость которых от аргументов очень сложна, так как тогда для их исследования можно применять закономерности, которым подчиняются случайные величины. Часто в экспериментах выгодно применять стратегию шагов, по

которой после каждого шага следует анализ результатов, и в зависимости от этого анализа определяются следующие действия.

Все чаще в экспериментах для измерения физических величин применяют самозаписывающие аппараты. Эти аппараты фиксируют на бумаге, светочувствительной или магнитной пленке изучаемые процессы, которые обычно являются случайными функциями детерминированного аргумента (времени). Теория случайных функций (процессов) является новейшей отраслью математической статистики [9, 74]. Развитие этой отрасли способствовало стремительное распространение автоматических управляемых систем. Теория случайных функций быстро становится сильным методическим оружием в экспериментальных научных исследованиях.

§ 17.2. Измерение механических величин

В процессе экспериментальных исследований механизмов и машин чаще всего необходимо определить следующие величины: массу, координаты центра масс, моменты инерции масс, время, линейные и угловые перемещения, скорости и ускорения, силы и моменты, давление, мощность.

Первые три величины звеньев механизма обычно являются постоянными. Массу определяют с помощью взвешивания. Центр масс звена или машины можно определить, если объект установить на две опоры и реакцию одной из опор измерить с помощью весов. Можно использовать тот факт, что центр массы тела, подвешенного на трех гибких и легких связях, находится в точке пересечения направлений этих связей. Методы определения моментов инерции рассматриваются в курсах физики и теоретической механики*). Массу жидкости или газа, протекающего через трубопроводы, определяют с помощью объемных счетчиков (счетчики с мерными камерами, мембранные, шестеренчатые, лопаточные и крыльчатые счетчики) или динамических методов (трубки Праנדтля и Пито, дросселирующие диафрагмы и форсунки и т. д.).

Промежутки времени, не короче сотой доли секунды, можно определить при помощи механических часов, хронометров и секундомеров. В остальных случаях необходимо применять электромеханические или электрические приборы для измерения времени. Для регистрации меняющихся механических величин часто применяют шлейфовые осциллографы. Регистрируемые механические величины с помощью датчиков заранее превращаются в электрические величины [70]. В качестве датчиков можно использовать небольшие генераторы постоянного или переменного тока, значение ЭДС или частота которых пропорциональны угловой скорости якоря. При движении катушки магнит-

*) См.: Гернет М. М., Ратобыльский В. Ф. Определение моментов инерции.— М.: Машиностроение, 1969.— *Прим. ред.*

но-электрического датчика в однородном магнитном поле постоянного магнита в катушке индуцируется напряжение, пропорциональное скорости движения. На поверхности кварца пьезоэлектрического датчика или кристалла сегнетовой соли возникает электрический заряд, который пропорционален действующей на кристалл силе. Еще шире применяют индуктивные, емкостные и особенно омические датчики. Импульсы датчиков обычно необходимо усилить до поступления в осциллограф.

Перемещения транспортных машин измеряются механическими счетчиками. Для регистрации относительно больших линейных и угловых перемещений можно использовать контакты, которые кратковременно замыкаются движущимся звеном. Возникающие импульсы тока с помощью электромагнита приводят в движение карандаш, который на равномерно вращающемся цилиндре кимографа чертит линию с «выступами». На этом же цилиндре электрический камертон чертит волнообразную линию, период которой является известным промежутком времени. Из обеих записей можно получить перемещение как функцию времени. Для осциллографической регистрации перемещений в качестве датчика можно использовать реохорд или индуктивный датчик, сердечник которого перемещается относительно витков неподвижной катушки. Для регистрации небольших перемещений (люфты в шарнирах, перемещения в мертвых точках) применяют более чувствительные датчики, например консоль, по обеим сторонам которой наклеены омические датчики. Для измерения микроперемещений вместо консоли используют стержень, работающий на продольный изгиб.

Для исследования движения можно применять фото- и киносъемку. Если кадры кино сняты с частотой, которая больше нормальной (16 или 24 кадров в секунду), то процесс, наблюдаемый на экране со скоростью 16 кадров в секунду, происходит замедленно. Съемки с частотой до 300 кадров в секунду можно достичь с помощью специальных кинокамер. Таким образом можно исследовать движения человека, животных и тихоходных механизмов. Устройства, в которых лента во время съемки движется равномерно или находится в покое, называют «лупами времени». В устройствах первого типа можно достичь скорости 16 000 кадров в секунду, а с помощью отдельного оптического прибора, разделяя кадры на части, — даже до 40 000 кадров в секунду. Такая частота обычно достаточна для исследования движения механизмов, падения тел, ударов, движения в жидкости, горения и других процессов. Скорости в миллион кадров в секунду можно достичь в устройствах с неподвижной лентой, на которой вращающаяся оптическая система с зеркалом перемещает изображение.

Линейную и угловую скорость можно определить, графически дифференцируя (§ 5.6) экспериментально полученные кривые перемещения в функции времени. Однако более точное значение скорости получают непосредственным измерением.

Среднюю скорость получают, измеряя перемещение в соответствующий ему промежуток времени. Таким образом, например, с помощью счетчика оборотов и хронометра или часов определяют среднее число оборотов вала в минуту. Мгновенную угловую скорость измеряют *тахометром* и записывают *тахографом*. Конструкция и чувствительность этих инструментов различная. Встречаются тахометры центробежные, основанные на действии токов Фуко, трения, воздушные, гидравлические и др. [88]. Для измерения угловой скорости электрическим способом в качестве датчика можно использовать небольшой электрогенератор. Для определения неравномерности вращения используют магнитоэлектрический датчик, в котором при прохождении зубьев ротора мимо полюсов постоянного магнита, в витках катушки магнита индуцируются импульсы напряжения, фиксируемые на пленке осциллографа. Для указанной цели можно использовать также фотоэлектрические датчики, в которых луч света, проходящий через отверстия во вращающемся диске, попадает на фотоэлемент и вызывает импульсы тока. Эти импульсы до осциллографа необходимо усилить. Для измерения угловой скорости иногда используют *стробоскопический эффект*: если глаз видит ротор, кратковременно освещенный через один или несколько оборотов, то создается иллюзия неподвижности ротора.

Линейную скорость также можно измерить с помощью тахометра, если ее заранее преобразовать в угловую скорость (спидометр автомобиля). Скорость перемещения в воздухе или в воде измеряют с помощью анемометра или трубки Пито. Линейную скорость на небольших перемещениях измеряют, используя индуктивный датчик, витки которого движутся относительно неподвижного постоянного магнита или наоборот.

Скорость как функцию перемещения можно получить методом Рагульска [69]. Если к поступательно движущемуся звену прикрепляют равнобедренный треугольник с углом вершины 2α , мгновенно засвечивая и фотографируя его с интервалом экспозиции Δt , то получают изображение, подобное показанному на рис. 17.1. Соединяя у двух рядом находящихся треугольников точки пересечения противоположных сторон, получают кривую средних скоростей, соответствующих перемещениям Δs . Действительно, $\Delta s = 2h \operatorname{tg} \alpha$, поэтому средняя скорость

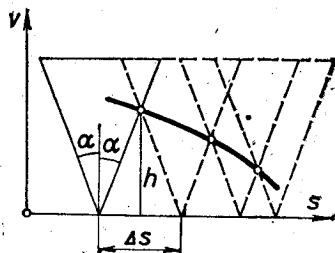


Рис. 17.1.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\Delta t} h \quad (17.1)$$

пропорциональна ординатам h . Чем меньше Δt , тем ближе v к действительной скорости. Аналогично можно получить поляр-

ную диаграмму угловой скорости, если вместо треугольника использовать две симметричные спирали Архимеда, выходящие из центра вращения.

Для измерения линейных и угловых ускорений применяют *акселерометры* и *акселерографы*. Простейшим акселерометром является математический маятник (рис. 17.2, а), который пригоден только для измерения постоянного или мало меняющегося

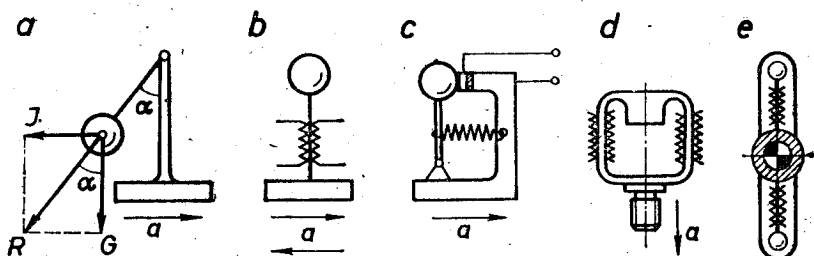


Рис. 17.2.

ускорения прямолинейного движения. Из условий динамического равновесия маятника при движении объекта исследования по горизонтали можно получить

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J}{G} = \frac{ma^*}{mg}; \quad a = g \operatorname{tg} \alpha. \quad (17.2)$$

Здесь α — угол отклонения маятника от положения равновесия. Более универсальным является акселерометр (рис. 17.2, б), состоящий из массы, укрепленной на упругой консоли равного сопротивления (изогнутая ось консоли является дугой окружности). По обеим сторонам консоли наклеены омические датчики. Для гашения колебаний консоль с прикрепленной массой погружена в закрытый сосуд, наполненный вязкой жидкостью. Для того чтобы резонанс не искажал измерения, частота измеряемого ускорения должна быть по крайней мере в 3 раза меньше частоты собственных автоколебаний акселерометра. Показания акселерометра сдвинуты по фазе, относительно измеряемого ускорения, т. е. его показания запаздывают.

Для уменьшения упомянутых искажений при быстро меняющихся движениях иногда применяют *предельные акселерометры*, пример которых дан на рис. 17.2, с. Когда ускорение достигает определенного предельного значения, прикрепленная к рычагу масса отрывается от упора и цепь электрического тока

*) При движении объекта исследования по наклонной плоскости с углом наклона β

$$a = g \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}.$$

Знак плюс при движении вверх, знак минус при движении вниз по плоскости.— *Прим. ред.*

прерывается. Объединив в одном комплексе несколько предельных акселерометров, получают возможность регистрации ускорения по точкам. В движущихся механизмах ускорение достигает значения $a = 100g$ и больше, а при ударах — $a = 1000g$ и больше. Пример акселерометра для исследования удара показан на рис. 17.2, d. При исследованиях используются также акселерометры с пьезокерамическими датчиками для измерения ускорения при ударе.

Приближенно можно определить тангенциальное ускорение, дифференцируя экспериментально найденную кривую $v = v(t)$ или дважды дифференцируя кривую $s = s(t)$. Если перемещения регистрируются вышеупомянутым электроконтактным прибором, то среднее тангенциальное ускорение между средними точками соседних интервалов i и k , очевидно, можно определить так:

$$a_{th} = 2 \frac{v_k - v_i}{t_i + t_k}; \quad v_i = \frac{s_i}{t_i}; \quad v_k = \frac{s_k}{t_k}. \quad (17.3)$$

Нормальные ускорения обычно не нужно измерять, так как их легко определить, зная скорости и радиусы кривизны траекторий.

Акселерометр угловых ускорений показан на рис. 17.2, e. Прибор, как видно из рисунка, является совокупностью двух акселерометров прямолинейного поступательного движения (рис. 17.2, b).

Умножая найденное ускорение на массу звена или угловое ускорение на момент инерции массы, получают приложенную к звену суммарную силу или суммарный момент. Такой способ называется *динамическим* или *непрямым измерением силы и момента*.

Силы и моменты непосредственно измеряются *динамометрами* и регистрируются *динамографами* или каким-либо другим способом. Простейшими инструментами для измерения сил являются пружинные динамометры. Такими являются показанные на

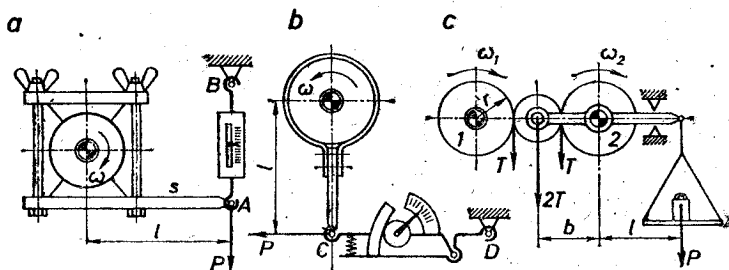


Рис. 17.3.

рисунке 17.3 динамометры, присоединенные к точкам A, B и C, D, измеряющие силу P . С их помощью можно определить также момент двигателя $M = Pl$. Для электрического измерения сил или моментов к звену, деформируемому при изгибе или

кручении, приклеивают омические датчики. Встречаются также механические динамометры моментов, работающие на кручение.

Для измерения сил применяют также гидравлические динамометры и гидравлические мерные коробки (месдозы), в которых давление сжатого масла измеряется манометром, градуируемым в единицах силы, так как сила пропорциональна давлению.

Мощности двигателей и крутящие моменты измеряют *тормозными динамометрами*. Наиболее старым, однако еще сегодня применяемым тормозным динамометром является тормоз Прони (рис. 17.3, а), который впервые испытан в Париже в 1794 году. Если с помощью гаек затягивают болты и таким образом прижимают тормозные колодки к вращающемуся шкиву, то момент сил тормоза P_l стремится вращать рычаг s , но этому препятствует динамометр AB . Мощность двигателя, переданная шкиву тормоза, следующая:

$$N = Pl\omega. \quad (17.4)$$

Соответствующая этой мощности механическая энергия в процессе измерения превращается в теплоту, поэтому тормоз необходимо охлаждать. Эмпирически найдено [103], что с учетом отвода тепла допускаемый момент тормоза следующий:

$$M = abd \text{ кгс} \cdot \text{м},$$

где d — диаметр шкива (м), b — ширина шкива (мм), a — коэффициент; для воздушного охлаждения $a = 0,5, \dots, 0,1$, для водяного охлаждения $a = 2, \dots, 1$, если $n = 200, \dots, 1000 \text{ мин}^{-1}$.

Для больших угловых скоростей более пригодны гидравлические, аэродинамические тормозы или тормозы, основанные на действии токов Фуко, а для больших мощностей пригодно электрическое измерение мощности. В последнем случае двигатель вращает электрический генератор, мощность которого измеряют и делят на коэффициент полезного действия генератора. Энергию, выработанную генератором, передают в сеть или превращают в теплоту с помощью реостата.

На рис. 17.3, б показано измерение мощности двигателя, приводящего в движение рабочую машину. Статор двигателя установлен на опорах так, что он может певорачиваться вокруг оси главного вала двигателя. Измеряют реактивный момент $M = Pl$, угловую скорость ω и определяют мощность по формуле (17.4). Энергию двигателя не превращают в теплоту, а используют рационально. Такое же свойство имеет трансмиссионный динамометр мощности (рис. 17.3, в), где между зубчатым колесом 1 двигателя и колесом 2 рабочей машины вращается вокруг оси на качающемся рычаге паразитное зубчатое колесо. На колесо действуют тангенциальные силы T колес 1 и 2. Рычаг уравнивают противовесами или другим образом, поэтому

$2Tb = Pl$. Мощность двигателя

$$N = T\omega_1 = \frac{Plr}{2b} \omega_1. \quad (17.5)$$

Момент, передаваемый от двигателя к рабочей машине, можно измерить также, наклеивая на вал омические датчики и определяя мощность по формуле $N = M\omega$.

§ 17.3. Физическое моделирование

Исследования движения механизмов и машин могут быть очень сложными, особенно тогда, когда механическое движение звеньев связано с гидравлическими, термическими и химическими процессами. Во многих случаях не удастся интегрирование или даже составление дифференциальных уравнений движения. Тогда закономерности и параметры движения необходимо искать экспериментально. Однако экспериментировать с данным оригинальным объектом не всегда выгодно, а иногда и невозможно. Тогда необходимо изготовить модель — лабораторную или полупроизводственную установку и экспериментировать с этой установкой. Экспериментирование с такой физической моделью называется *физическим моделированием*.

Основной вопрос физического моделирования следующий: какие условия должны быть выполнены, чтобы найденные моделированием зависимости и параметры можно было пересчитать для оригинала и ему подобных объектов и как это сделать? Ответ на этот вопрос дает теория подобия, начало которой можно найти уже в работах Галилея. Основы теории подобия разработали Фруд, Рейнольдс, Нуссельт, дальнейшее развитие получено в работах академика М. В. Кирпичева и других советских ученых [33, 75]. Физическое моделирование можно считать интегрированием известных или неизвестных дифференциальных уравнений для данной проблемы и экспериментально полученные зависимости — частными решениями этих уравнений. Дифференциальные уравнения описывают целый класс физических явлений. Так, например, соответствующая 2-му закону Ньютона система дифференциальных уравнений может описывать любое механическое движение. Из класса явлений выделяют более узкую совокупность явлений, придав решениям дифференциальных уравнений при помощи *предельных условий* времени и пространства такую форму, чтобы они были пригодны в начальный момент и на поверхности, которая ограничивает пространство рассматриваемого процесса.

Предельные условия, дополненные физическими постоянными и описанием ограничений пространства, называют *условиями однозначности*.

Всю совокупность явлений одного класса, в пределах которой можно обобщать результаты эксперимента, называют *груп-*

пой. Чтобы выяснить, какими свойствами обладает группа, начнем с геометрической аналогии.

Принимаем, что экспериментально определена формула для расчета площади треугольника $L = 0,5b^2$, где b — длина одной стороны треугольника. Найденная формула, как видно, пригодна не для всех треугольников, а только для всех подобных прямоугольных треугольников с одинаковыми катетами.

Геометрическое подобие двух объектов характеризует постоянная подобия (рис. 17.4)

$$c_s = \frac{s_1''}{s_1'} = \frac{s_2''}{s_2'} = \dots$$

которая является масштабным числом. Значения постоянных подобия для каждой пары геометрически подобных объектов вообще различные. Однако существуют также такие безразмерные величины, которые для всех геометрически подобных объектов одни и те же. Их называют критериями подобия. Примером критерия геометрического подобия является соотношение двух определенных длин одного и того же объекта:

$$\Pi_{12} = \frac{s_1'}{s_2'} = \frac{s_1''}{s_2''} = \text{idem},$$

где idem обозначает постоянство в пространстве.

Видно, что геометрически подобные объекты образуют группу явлений.

Объекты групп можно объединить с помощью постоянных подобия или критериев подобия.

Понятие подобия можно расширить, распространяя его на любое физическое явление. Вместо геометрического подобия тогда рассматривается более широкое понятие — физическое подобие, которое будем называть просто подобием. Каждая физическая величина имеет свою постоянную подобия. Поля векторных величин геометрически подобны, а подобие полей скалярных величин приобретает геометрическое представление с помощью полей градиентов. Подобные явления здесь также образуют группу, для которой можно обобщить результаты моделирования.

Поэтому очень важно найти критерий подобия.

Принимаем, что для какого-то класса явлений физика дает уравнение (обычно это является дифференциальным уравнением)

$$P_1 + P_2 + \dots + P_N = 0, \quad (1)$$

члены которого являются функциями величин u_1, u_2, \dots, u_n . Разделив уравнение на P_N , получаем его безразмерную форму:

$$\Pi_1 + \Pi_2 + \dots + 1 = 0. \quad (2)$$

Таким образом, законы физики можем выражать математическими зависимостями, которые не зависят от используемых единиц измерения величин u_1, u_2, \dots, u_n .

Для того чтобы уравнение (2) было бы пригодно для группы, необходимо иметь

$$P'_1 + P'_2 + \dots + 1 = 0, \quad (3)$$

$$P''_1 + P''_2 + \dots + 1 = 0, \quad (4)$$

где P'_i является мономом, содержащим множители u'_1, u'_2, \dots, u'_n , а P''_i является мономом, содержащим множители $u''_1 = c_1 u_1, u''_2 = c_2 u_2, \dots, u''_n = c_n u_n$. Записав постоянные подобия перед членами уравнения (4), получаем уравнение

$$C_1 P'_1 + C_2 P'_2 + \dots + 1 = 0. \quad (5)$$

Сравнивая уравнения (3) и (5), видим, что в пределах группы одного явления, все произведения C_i степеней постоянных подобий должны равняться 1, поэтому

$$P'_1 = P''_1 = P_1 = \text{idem}, \quad P'_2 = P''_2 = P_2 = \text{idem}, \dots$$

Следовательно, члены безразмерного уравнения (2) являются критериями подобия. Факт, что критерии подобных явлений равны, известен как *теорема Ньютона*. Важнейшие критерии подобия названы именами знаменитых ученых и их обычно обозначают двумя буквами. Так, например, переписывая закон Ньютона $P - ma = 0$ в безразмерной форме

$$\frac{P}{ma} - 1 = 0$$

и подставляя $a = v/t, t = s/v$, получаем критерий Ньютона

$$N_e = \frac{Ps}{mv^2}, \quad (17.6)$$

числовое значение которого в подобных механических явлениях должно быть одно и то же.

Если явление настолько сложно, что неизвестны математические зависимости, которые в виде законов физики описывают класс явлений, то критерии подобия находят методом размерностей, образуя из физических величин явления u_1, u_2, \dots, u_n безразмерных комплексов. Теорема подобия утверждает [75], что число m безразмерных комплексов (критериев подобия) является $n - k$, где k — число таких величин, которые имеют независимые размерности, т. е. размерности, которые не являются произведениями размерностей других величин. Так, например, размерности длины и скорости являются независимыми, а размерность ускорения зависит от них.

Видно, что найденные моделированием величины для оригинала должны пересчитываться с помощью постоянных подобия,

а зависимости, пригодные для группы, можно выражать как функции критериев подобия.

Достичь в экспериментах равенства всех критериев очень трудно и во многих случаях это совсем не нужно. Имеются так называемые *решающие критерии*, которые имеют особенно большое значение в рассматриваемом явлении. Наоборот, какой-либо критерий может быть малозначимым. Иногда все критерии являются малозначительными, тогда данное явление имеет свойство *автомоделизма*: явление в модели и в оригинале всегда происходит одинаково.

Согласно теореме Кирпичева явления подобны, если решающие критерии равны и условия однозначности подобны.

§ 17.4. Математическое моделирование

В предыдущем параграфе мы рассматривали физическое моделирование, где в модели происходят процессы (механические, гидравлические, термические, химические) такой же природы, как в оригинале.

Математическое моделирование базируется на том факте, что очень разные процессы можно описать одними и теми же математическими зависимостями. Так, например, дифференциальные уравнения

$$P = m \frac{dv}{dt}, \quad U = L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

являются одной и той же математической зависимостью, которая записана в разных обозначениях и выражает два разных явления — механическое и электрическое. Первое уравнение является 2-м законом Ньютона, а второе — зависимостью между напряжением U и силой i электрического тока в катушке с самоиндукцией L . Таким образом, уравнения (1) открывают аналогию двух физических явлений.

Удобно реализуемыми и хорошо исследованными являются электрические процессы. Поэтому для математического моделирования часто применяются *электрические модели-аналоги*. Такое математическое моделирование базируется на использовании *прямой аналогии* между исследуемым процессом и процессом, протекающим в модели. Однако еще более распространенным является математическое моделирование, базирующееся на *непрямой аналогии*, где исследуемый процесс отображается проведением математических действий — обычно с помощью электронных вычислительных машин. Моделирование прямой и непрямой аналогии используется для решения вопросов колебания механизмов, ударов и других задач динамики (иногда и кинематики), а также задач оптимизации. Модели прямой аналогии применяют для моделирования потенциальных полей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. При этом используется аналогия между линиями тока в моде-

ли полупроводниковой среды (в изоляторной ванне залит электродит, полупроводниковая бумага) и силовыми линиями или линиями потока жидкости в оригинале.

В исследованиях динамики электрические модели прямой аналогии составляют из двухполюсных элементов — катушек, конденсаторов, омических сопротивлений, источника напряжения, базирясь на одной из двух систем аналогии механических и электрических величин. В первой системе силе или моменту соответствует напряжение, массе — самоиндукция, скорости — сила тока, и т. д., а во второй системе упомянутым механическим величинам соответствует сила тока, емкость, напряжение и т. д.

Для образования модели прямой аналогии данную механическую систему заменяют упрощенной, приближенно динамически эквивалентной системой и составляют для нее дифференциальные уравнения [35, 79].

Составляют соответствующую дифференциальным уравнениям электрическую цепь так, чтобы критерии подобия этой цепи и оригинала были бы одинаковыми. Моделирование применяют для получения качественных и количественных наблюдений. Сказанное иллюстрируем простым примером.

Пусть необходимо исследовать колебания в агрегате (рис. 17.5, а), состоящем из электромотора 1, упругой муфты 2

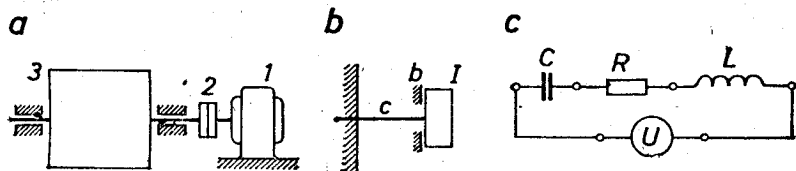


Рис. 17.5.

и ротора 3. Момент инерции ротора 3 очень большой по сравнению с моментом инерции I якоря мотора, а момент инерции муфты малый, поэтому динамически эквивалентную систему (рис. 17.5, б) можно представить как ротор 1 с моментом инерции I_r , закрепленный на упругом валу с жесткостью c , и одним заземленным концом. Кроме того, принимаем, что в механизме действует вязкое трение, коэффициент которого b .

Подставляя в формулу (13.20) $I_r = I$ и $M_r = M - c\varphi - b\dot{\varphi}$, где M — активный возбуждающий момент и φ — угол отклонения якоря от положения равновесия, получаем дифференциальное уравнение движения данной механической системы:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi = M.$$

Это уравнение напомним так:

$$I \frac{d\omega}{dt} + b\omega + \frac{1}{p} \int_0^t \omega dt = M, \quad (2)$$

где $p = 1/c$ является податливостью вала в рад/(Н·м) или рад/(кгс·м). Если применить первую систему аналогии механических и электрических величин, то уравнению (2) соответствует уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = U, \quad (3)$$

где R — омическое сопротивление и C — емкость. Составляем электрическую модель (рис. 17.5, с) так, чтобы по представленному в предыдущем параграфе методу определенные критерии подобия были бы равны:

$$\frac{Mt}{I\omega} = \frac{Ut}{Li}, \quad \frac{M}{b\omega} = \frac{U}{Ri}, \quad \frac{Mp}{\omega t} = \frac{UC}{it}.$$

Образуя в модели импульс напряжения, который соответствует импульсу удара в оригинале, можно наблюдать собственные колебания, а образуя переменное напряжение, соответствующее возбуждающему моменту, — вынужденные колебания.

Математическое моделирование непрямой аналогии обычно выполняют как на аналоговых вычислительных машинах или так называемых машинах непрерывного действия, так и на цифровых электронных вычислительных машинах, т. е. машинах дискретного действия. При этом решаются дифференциальные уравнения, алгебраические уравнения и системы уравнений. В более сложных случаях вместо исчерпывающих и строго точных математических зависимостей применяют приближенные и гипотетические зависимости. Эти зависимости определяют упрощенную и абстрактную модель исследуемого явления.

При математическом моделировании исключительно важное значение имеет составление математических зависимостей. Поэтому понятие модели часто переносят на математическое описание исследуемого явления. Математические модели все шире применяют не только в технике, но также в экономике, в психологии, в педагогике, в других отраслях науки.

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

В течение последних столетий создано громадное количество механизмов. Однако технический прогресс, механизация и автоматизация производственных процессов требуют конструирования новых механизмов с определенными свойствами. Поэтому непрерывно развивается теория проектирования механизмов — синтез механизмов.

Синтез механизмов является сложнейшей частью теории механизмов и машин, так как заданные требования к проектируемому механизму могут быть очень различными и пути к их осуществлению неограниченно многообразными. Формулировки и решения задач синтеза касаются различных отраслей науки и использования разных математических методов. В этой книге рассмотрим только небольшой круг вопросов синтеза.

Раздел 18

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

§ 18.1. Структурный и метрический синтез

Проектирование механизмов является комплексной проблемой, которая решается на базе нескольких научных дисциплин. Однако теория механизмов и машин при проектировании механизмов имеет фундаментальное значение, особенно в начальной стадии проектирования, когда проводятся структурный и метрический синтез механизма.

Задача проектирования механизма определяет преобразование совершаемых движений и дает данные о значениях передаваемых сил. В проектируемых направляющих механизмах (§ 4.2) часто какая-то точка должна описывать заданную траекторию или какое-то звено должно последовательно занимать определенные положения. Задачи проектирования передаточных механизмов часто требуют преобразования равномерного или неравномерного вращения ведущего звена в равномерное или неравномерное вращение ведомого звена, т. е. осуществления преобразования движения: вращение — вращение; часто требуются также преобразования вращательного движения в

поступательное движение, поступательного движения во вращательное, поступательного движения в поступательное движение с другими параметрами.

Для решения упомянутых и других задач сначала необходимо выполнить структурный синтез, т. е. выбрать тип механизма, составить эскиз кинематической схемы проектируемого механизма и составить структурную схему.

Для этой цели, учитывая особенности механизмируемого процесса и требования автоматизации, необходимо сделать выбор между плоскими и пространственными механизмами, а также между механизмами с низшими парами и механизмами, имеющими высшие пары. Последние назовем просто механизмами с высшими парами.

Направляющие механизмы обычно являются механизмами с низшими парами, а в передаточных механизмах часто используются высшие пары. Однако встречаются также направляющие механизмы с высшими парами (рис. 18.1). Синтез направляющих механизмов можно свести к синтезу передаточных механизмов [61].

Наиболее подробно исследованы и легче проектируемы плоские механизмы. Пространственные механизмы скрывают в себе большие, пока весьма неполно использованные возможности. Для реализации определенных преобразований движения наиболее легко синтезируются механизмы с высшими парами. Однако лучшие свойства с точки зрения изготовления, износа и эксплуатации имеют механизмы с низшими парами. Поэтому часто выгодно преодолеть дополнительные трудности, связанные с проектированием последних. Во многих случаях выгодны механизмы с деформируемыми элементами (§ 1.2).

При проектировании необходимо сделать выбор между централизованным, индивидуальным или комбинированным приводом. В связи с развитием гидравлического и электрического привода все шире встречаются механизмы, у которых станина не является звеном ведущей цепи, также механизмы высших рядов (§ 3.1). Смонтированные в кинематических цепях этих механизмов двигатели перемещаются вместе с другими подвижными звеньями. Используя такие механизмы, можно получить большое разнообразие выполняемых движений с помощью простых кинематических цепей. Можно создать также следящее управление, позволяющее рабочему органу следить за движением руки человека, перемещающего модель. Следящее управление повышает производительность механизмируемого рабочего процесса, качество работы и освобождает оператора от слишком большого нервного утомления.

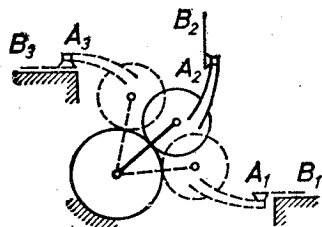


Рис. 18.1.

Необходимо стремиться к тому, чтобы проектируемый механизм был максимально простым, надежным в эксплуатации, удовлетворял энергетическим и экономическим требованиям.

В ходе структурного синтеза необходимо провести тщательный анализ связей механизма (раздел 2), так как связи определяют многие свойства механизма. Особое внимание необходимо обратить на наличие повторяющихся связей механизма [62, 72, 85].

Если механизм изображен точкой в многомерном пространстве [86], параметрами которого являются размеры механизма (метрические параметры) и обобщенные координаты (параметры положения), то возможные варианты и положения механизма заданной структуры занимают часть так называемого фазового пространства, ограниченного определенной гиперповерхностью. При движении механизма точка отображения описывает траекторию, которая находится внутри части упомянутого фазового пространства, пересекает предельную поверхность, или находится на ней. В первом случае механизм статически определим (без избыточных связей), во втором — в отдельных положениях механизм становится статически неопределимым, а в третьем — механизм является статически неопределимым. Таким образом, на предельной поверхности в структуре механизма происходят существенные изменения. Для обеспечения движения в предельной поверхности необходимо соблюдать точные зависимости между метрическими параметрами механизма и обобщенными координатами. Реализацию этих зависимостей затрудняют ошибки изготовления механизма, а облегчают зазоры в подвижных соединениях. Способность деформирования элементов механизма может воздействовать в обоих направлениях. Из-за упомянутых обстоятельств статически неопределимый механизм может отображаться не только непосредственно на предельной поверхности, но и на небольшом расстоянии от нее, образуя слой существования. Следует ожидать, что в будущем удастся создать математическую теорию конструирования механизмов, которая позволит определить размеры механизма так, что движение статически неопределимого механизма впишется в слой существования оптимальной толщины. Так как эта теория пока развита неполно, во многих случаях предпочтение следует отдать статически определимым механизмам, размеры которых, решая задачи синтеза, можно свободно выбрать в широком диапазоне.

Метрический синтез представляет собой определение главных размеров механизма с целью получения механизма, который точно или приближенно удовлетворял бы поставленным кинематическим, динамическим или другим требованиям. Метрический синтез реализуют, используя графические, аналитические или комбинированные методы. Упомянутые методы наиболее полно разработаны для кинематического синтеза механизмов. Поэтому варианты результатов кинематического син-

теза используются для оптимизации конструкций механизма по динамическим и другим требованиям.

В ходе кинематического синтеза необходимо координировать процессы, проходящие в машине. Особенно это относится к полуавтоматам, автоматам и автоматическим поточным линиям, работа которых, так же как работа многих других машин, является циклической. Вышеприведенное определение цикла (§ 13.1) относится к *кинематическому циклу*, который в стационарном движении совпадает с *энергетическим циклом*. Рабочим или техническим *циклом* называют фазу движения, в пределах которой обрабатываемое изделие находится в машине.

Для координирования процессов и операций в начале проектирования необходимо разработать циклограмму машины. Циклограмма является рабочей программой машины, и она тесно связана с кинематической схемой. Циклограмму составляют в виде прямоугольной или круговой таблицы.

На рис. 18.2 показана циклограмма полуавтомата для производства заклепок. Рабочий цикл соответствует одному обороту главного вала. Длительность операций, выполняемых в полуавтомате, выражена в долях угла поворота главного вала

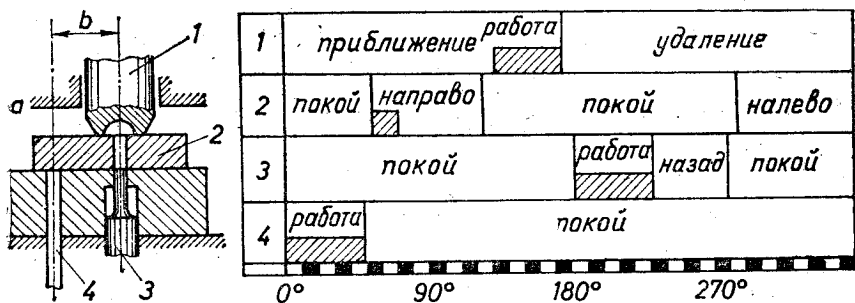


Рис. 18.2.

машины. В начале цикла пуансон 1 начинает приближаться к находящемуся в покое в левой позиции ползуну 2, в отверстие которого до упора *a* подается стержень 4 из мягкого материала. После подачи стержня ползун 2 начинает движение направо, отрезает часть материала и, после перемещения на расстояние *b*, устанавливает заготовку в позицию обработки. Пуансон образует головку заклепки и удаляется. Выбрасыватель 3 выталкивает готовую заклепку и возвращается в исходную позицию. После этого ползун возвращается также в исходную позицию, и рабочий цикл начинается заново. Конструктору необходимо создать механизм полуавтомата согласно этой циклограмме.

Качество передачи сил в механизмах принято характеризовать [92] углом передачи γ или углом давления θ . Эти углы для высшей кинематической пары описаны в § 11.1 и изображены на рис. 11.1 и 12.15. В механизмах с низшими парами

(рис. 18.3) угол передачи движения удобнее всего выразить через угол давления, так как всегда

$$\gamma + \vartheta = 90^\circ.$$

Углом давления называется угол между направлениями приложенной к ведомому звену активной силы и скорости ее

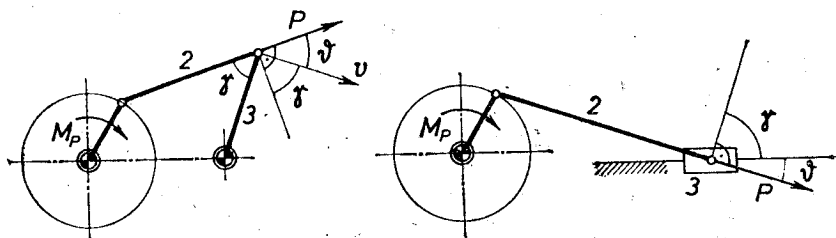


Рис. 18.3.

точки приложения, если предположить, что звенья механизма не имеют массы и в механизме нет трения. Наилучшие условия передачи силы тогда, когда $\gamma = 90^\circ$ и $\vartheta = 0^\circ$. Если угол передачи мал, а угол давления большой, то для преодоления на ведомом звене даже небольшого момента или тангенциальной силы необходимо приложить большой движущий момент M_p к ведущему звену механизма. В таких случаях перенесенная на ведомое звено сила P является большой, а совершенная ею работа малой:

$$A = \int_0^s P \cos \vartheta ds.$$

Следовательно, используя углы γ или ϑ , уже в ходе кинематического синтеза можно приближенно судить о том, какой в каждом положении механизма необходим движущий момент или движущая сила. Более точные значения этих величин можно получить, выполняя кинетостатический расчет с учетом трения в подвижных соединениях.

Совершая кинетостатический расчет можно также выяснить, обеспечивается ли силовое замыкание в подвижных соединениях механизма в пределах цикла стационарного движения, т. е. сохраняется ли контакт соприкасающихся поверхностей во всех положениях механизма или нет. Непрерывное силовое замыкание обеспечивается в том случае, если реакция ни в одном подвижном соединении во время цикла не обращается в нуль. В противном случае может произойти размыкание элементов кинематической пары вследствие наличия зазоров, а при последующем замыкании возникает удар.

Об обеспечении бесшумной работы машины необходимо думать уже в начале проектирования. Шум снижает производи-

тельность и отрицательно влияет на здоровье (головные боли, усталость, бессонница, повреждения слуховых органов). Лучше не допускать возникновения шума, чем заботиться об ограничении шума. Поэтому уже в проектном задании необходимо отдать предпочтение более тихим рабочим процессам. Вместо обработки с ударом можно применить обработку давлением, вместо клепки — сварку или склеивание.

Шум возникает вследствие вибраций твердых тел, возбужденных ударом, трением и силами механического или электромагнитного происхождения. Кроме этого, шум возникает при турбулентном потоке газа, пара или жидкости, при кавитации и резких изменениях давления. Проблемы возникновения, распространения, излучения, гашения, абсорбции и изоляции шума исследует отрасль науки, называемая *технической акустикой*.

Для уменьшения шума конструктор может выбрать подходящие подвижные соединения (вместо подшипников качения — подшипники скольжения, шарниры с резиновыми или с какими-либо неметаллическими вкладышами, колеса с косыми зубьями; неметаллические шестерни); не допускать слишком больших скоростей твердых, жидких или газообразных тел; предусмотреть снижение трения, силовое замыкание, уравнивание масс; избегать резонанса, создавая достаточно жесткие или достаточно податливые конструкции; применять шумопоглощающие покрытия.

Наиболее трудно бороться с шумом, если в рабочем процессе используют удары и вибрации (механические молотки, вибротранспортеры, виброселекторы, виброножницы, виброуплотнители). Тогда необходимо изолировать оператора (изолированная от корпуса трактора кабина), автоматизировать рабочий процесс и создать телеуправление.

Механизм необходимо проектировать так, чтобы он был удобен в эксплуатации, легко регулируем и полностью соответствовал бы условиям безопасности труда. Желательно механизм создать таким, чтобы неквалифицированный рабочий с неумелым обслуживанием не мог бы его вывести из строя. В случае необходимости следует предусмотреть устройства, предохраняющие от поломок, создавая возможность автоматического отключения при перегрузках. Можно предусмотреть механические предохранители, которые при перегрузках разрушаются*) и, таким образом, предохраняют механизм. Механизм должен быть легко монтируем и демонтируем, и также должен легко ремонтироваться. Следует стремиться к тому, чтобы необходимое техническое обслуживание было редким и несложным.

*) Более предпочтительна механическая защита от перегрузки переменной структуры, позволяющая быстро восстановить рабочее состояние машины после устранения причин перегрузки.— *Прим. ред*

Проектируя механизм, всегда необходимо учитывать технологичность конструкции механизма. Звенья и остальные элементы механизма должны проектироваться так, чтобы их легко можно было изготовить доступным технологичным оборудованием; в конструкции должны использоваться стандартизованные элементы механизмов.

В ходе метрического синтеза конструктор определяет только главные размеры звеньев механизма. Остальные размеры определяются расчетами на прочность, износостойкость, нагревание и др. Эти расчеты рассматриваются в курсах сопротивления материалов, деталей машин и специальных курсах.

Однако только часть геометрических параметров механизма зависит от выполняемой функции механизма и также от кинематических, динамических и прочностных соображений. Остальные необходимо выбрать согласно требованиям технической эстетики, реализуя принцип единства красоты и полезности, формы и функции, который является основой теории дизайна. Выполнение требований технической эстетики способствует повышению производительности труда.

§ 18.2. Оптимальный синтез

Из предыдущего параграфа следует, что проектирование механизма является задачей со многими неизвестными. В ходе проектирования можно получить различные варианты механизма. Интуитивно трудно сказать, какой из них лучше и не имеется ли другой более выгодный вариант. Конечно, вопрос необходимо уточнить: с какой точки зрения лучше? Нельзя представить себе механизм, который был бы лучше со всех точек зрения. Поэтому сначала необходимо определить параметр, наибольшее или наименьшее значение которого, условно называемое *экстремальным значением*, мы желаем получить в своей конструкции. Этот параметр называют *критерием оптимизации*, а определение его экстремального значения — *оптимизацией*. В процессе оптимизации необходимо получить не только экстремальное значение критерия оптимизации, но одновременно необходимо удовлетворить также ограничения, диктуемые теорией и практикой. Критериями оптимизации могут быть производительность труда, время операции, стоимость механизма, расход энергии, вес, угол передачи движения, коэффициент динамичности (§ 16.1), время переходного процесса и др.

Если число вариантов небольшое, их все можно проверить и выбрать наилучший. Обычно количество возможных вариантов — неограниченное множество. Тогда задачу оптимизации необходимо формулировать и решать математически.

Самым старым методом математической оптимизации является вариационный метод [87]. С развитием теории автоматического управления, теории планирования и кибернетики

разработаны новые эффективные методы оптимизации: линейное программирование [90], динамическое программирование и теория оптимального управления [12], теория исследования операций [16]. Для оптимизации можно использовать также метод случайного поиска [71].

В оптимизации обычно используют понятия кибернетики. Проектируемый механизм рассматривают как систему, входом которой являются ведущие параметры, а выходом — ведомые параметры. Механизм изображается точкой в фазовом пространстве, переменными которого являются ведомые параметры — фазовые координаты. При изменении ведущих параметров точка отображения описывает траекторию в фазовом пространстве. Одной из траекторий соответствует экстремальное значение параметра оптимизации. Таким образом, задача оптимизации становится подобной задаче о брахистохроне, сформулированной в 1696 году Иоханом Бернулли. Брахистохронею является построенная в вертикальной плоскости кривая, по которой материальная точка, двигаясь без сопротивления, под воздействием только силы тяжести и нормальной реакции, в кратчайшее время попадает из заданного начального положения в конечное положение. Оказывается, что брахистохронею является циклоидой, а не прямой, как можно было полагать, рассуждая поверхностно.

Эта задача побудила Эйлера и Лагранжа разработать основы вариационного исчисления. В случае брахистохроны ведущими параметрами являются координаты точек брахистохроны, ведомый параметр — скорость, параметр оптимизации — время движения.

Решение только что рассмотренной задачи оптимизации базируется на интуитивно или на основе опыта выбранной структурной схеме механизма. Однако можно также сначала выбрать критерий оптимизации и потом определить тип механизма, оптимальный закон движения рабочего органа и, наконец, параметры проектируемого оптимального механизма так, чтобы закон движения рабочего органа по возможности меньше отличался от найденного оптимального закона движения [43]. Эта двухступенчатая оптимизация является более эффективной, чем раньше упомянутая одноступенчатая оптимизация.

Большое значение имеет «историческая оптимизация», которую, усовершенствовав данный механизм и машину, совершили предыдущие поколения. Упомянутый процесс подобен закону естественного отбора, который действует в живой природе. Использование в технике результатов миллионлетней оптимизации живой природы исследует бионика [25]. Началом этой науки принято считать 1960 год. Намного раньше Леонардо да Винчи и Жуковский уже исследовали вопросы, связанные с бионикой. Однако даже сегодня человек по земле, воде и в воздухе перемещается иначе, чем животные, так как применяемые материалы и механизмы не позволяют копировать движе-

ние животных. Интересными и многообещающими являются исследования о преобразовании энергии и информации, локации, навигации, миниатюризации и надежности биологических систем, и также о функционировании мозга.

§ 18.3. Ошибки, надежность и масса механизмов

Механизм стараются проектировать с минимальным числом звеньев. Поэтому при синтезе механизмов не всегда удается точно воспроизвести выбранные траектории, положения и закон движения точек звеньев. Однако даже это движение механизма невозможно точно реализовать из-за ошибок изготовления, из-за деформаций, вызванных воздействием сил и температуры и также благодаря износам.

Недеформируемый и точно изготовленный механизм называется идеализированным механизмом, а параметры последнего — *номинальными параметрами*. Отклонения параметров реального механизма от номинальных называют *ошибками механизма*. Ошибку Δp положения ведомого звена механизма вызывают *первичные ошибки* $\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_m$ размеров элементов механизма. Координата положения ведомого звена (положение ведущих звеньев зафиксировано) является функцией размеров элементов механизма, т. е.

$$p = f(q_1, q_2, \dots, q_m).$$

Значения ошибок небольшие по сравнению с значениями параметров. Поэтому для определения ошибки положения ведомого звена можно использовать выражение малого приращения функции

$$\Delta p = \frac{\partial f}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_m} \Delta q_m, \quad (18.1)$$

где каждый член правой стороны выражает частную ошибку положения ведомого звена, вызванную соответствующей первичной ошибкой, т. е.

$$\Delta p = (\Delta p)_{q_1} + (\Delta p)_{q_2} + \dots + (\Delta p)_{q_m}.$$

Малые перемещения совпадают с направлениями скоростей. Поэтому частные ошибки можно построить графически, аналогично скоростям, применяя для каждой частной ошибки свой преобразованный механизм [14].

Пример 18.1. Определить аналитически и графически ошибку положения ползуна центрального кривошипно-ползунного механизма (рис. 18.4), которая возникает из-за ошибок длин кривошипа и шатуна.

Аналитическое решение. Согласно формуле (18.1) ошибка положения ползуна

$$\Delta x = \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b.$$

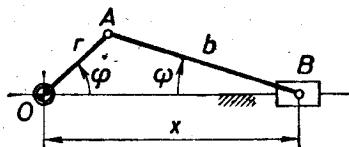


Рис. 18.4.

Функцию f образуют так:

$$x = r \cos \varphi + b \cos \psi, \quad \sin \psi = \frac{r \sin \varphi}{b}, \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi},$$

$$x = f(r, b) = r \cos \varphi + \sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Следовательно,

$$\Delta x = \left(\cos \varphi - \frac{r \sin^2 \varphi}{\sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \Delta r + \frac{b}{\sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \Delta b. \quad (1)$$

Подставляя в формулу (1) номинальные значения размеров r , b и заданные ошибки этих размеров

$$\Delta r = r' - r, \quad \Delta b = b' - b,$$

где r' , b' — размеры реального механизма, определяем ошибку положения ползуна

$$\Delta x = (\Delta x)_r + (\Delta x)_b$$

как сумму частных ошибок для каждого значения угла φ ведущего звена.

Графическое решение. Частные ошибки $(\Delta x)_r$ и $(\Delta x)_b$ можно построить по методу повернутых планов скоростей (§ 5.2), построив показанные на рис. 18.5 преобразованные механизмы.

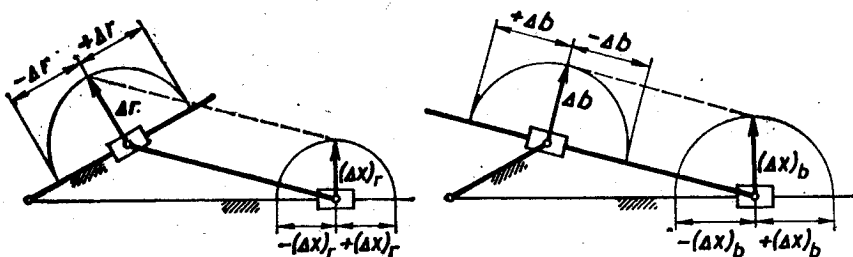


Рис. 18.5.

Если в механизме имеются высшие пары, то их можно заменить низшими парами (§ 3.3) и ошибки механизма определить аналогично.

Аналогично определяются также частные ошибки, вызванные зазорами в подвижных соединениях, при этом предполагается, что перемещения, возникающие в связи с наличием зазоров, возможны в направлениях реакций. Следовательно, сначала необходимо провести кинестатический расчет механизма.

Для обеспечения желаемой определенности и взаимозаменяемости деталей элементы механизмов изготавливаются с допусками, соответствующими выбранному классу точности; эти допуски определяют допускаемые верхнее и нижнее отклонения данного размера от его номинального значения. Таким образом, фактические ошибки размеров и знаки этих ошибок неизвестны. Известны только возможные максимальные абсолютные значения этих ошибок, которые являются весьма маловероятными. Поэтому расчеты ошибок, проведенные методами статистики,

дают более полное представление о действительном движении механизма.

Если в механизме имеются избыточные связи, то отклонения размеров создают не только кинематические ошибки механизма, но значительно увеличивают действующие в механизме силы в связи с дополнительными деформациями звена. Поэтому в статически неопределимых механизмах допуски должны быть относительно небольшими.

Вероятность P , что механизм определенное число часов L отработает в режиме, соответствующем техническим условиям, называют *надежностью механизма*. Надежность механизма зависит от надежности деталей механизма. Последняя колеблется в широких пределах. Срок службы различных образцов одной и той же детали может отличаться в десятки раз. Поэтому арифметический средний срок службы недостаточно характеризует надежность детали. На практике применяют статистически обоснованные формулы, выражающие зависимость между надежностью и сроком службы, например,

$$P = \exp[-a(L - L_{\min})^k], \quad (18.2)$$

где a, k — характерные для данных деталей коэффициенты, определяемые экспериментально; L_{\min} — минимальное время службы, т. е. время, которое прослужат все данные детали. Если упомянутые коэффициенты известны, то, подставляя, например, 0,9 вместо P , из формулы (18.2) находят время

$$L = L_{\min} + \left(-\frac{\ln P}{a}\right)^{1/k}$$

в течение которого прослужат около 90% данных деталей.

Надежность механизма является произведением надежностей всех его главных деталей [13]. Главными называются детали, при выходе из строя которых, механизм не может нормально функционировать. Следовательно, надежность механизма ниже надежности любой главной детали. Исключением являются параллельно соединенные детали [82]. Эти обстоятельства необходимо учесть при проектировании механизмов.

Во многих случаях очень значимым параметром является вес механизма. Это относится особенно к транспортным, сельскохозяйственным и подъемным машинам [26].

Рассмотрим внешне подобные машины, где какой-то из главных линейных размеров обозначаем буквой b . Машины состоят из массивных деталей, вес которых пропорционален b^3 , и из коробчатых и тонких деталей, вес которых пропорционален b^2 . Станина машины является наиболее тяжелой деталью. Поэтому можно принять, что вес подобных машин приблизительно пропорционален b^2 .

Прочность машины и значения допускаемых сил определяют сечения деталей, площади которых пропорциональны b^2 . Если

скорости в сравниваемых машинах одинаковы, то мощность также пропорциональна b^2 . Это означает, что вес подобных машин приблизительно пропорционален мощности, т. е.

$$G = kN, \quad (18.3)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Выраженный в кгс/лс, этот коэффициент для некоторых машин следующий: для металлообрабатывающих токарных станков 200; для фрезерных станков 180; для круглошлифовальных станков 250; для двигателей грузовых машин 10, для двигателей легковых автомашин 3, для самолетных двигателей 0,8.

Для редукторов можно применять формулу

$$G = cN^\alpha \left(\frac{u^2}{n} \right)^\beta, \quad (18.4)$$

где N — мощность в киловаттах, $u \geq 1$ — передаточное отношение, n — частота вращения в оборотах в минуту наиболее быстро вращающегося вала. Коэффициенты c , α , β для редукторов с цилиндрическими колесами с неподвижными осями соответственно равны 70; 0,9; 0,4; для планетарных передач с цилиндрическими колесами — 45; 0,75; 0,35; для одноступенчатых редукторов с коническими колесами — 45; 0,85; 0,35; для червячной передачи — 45; 0,95; 0,35. Эти значения соответствуют сроку службы 10^4 часов. Если увеличивают срок службы в 3 раза, то в формуле (18.4) вместо мощности N следует принять $1,12N$; если снижают в 3 раза, то вместо N следует принять $0,82N$.

При проектировании желательно использовать коробчатые и безразмерные конструкции, применять легкие материалы и индивидуальный привод.

Раздел 19

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ ПАРАМИ

В этом разделе рассмотрим общие вопросы синтеза плоских механизмов с высшими парами и ознакомимся с типами этих и родственных им механизмов. Наиболее распространенным механизмам с высшими парами — кулачковым и зубчатым механизмам — посвятим следующие два раздела.

В плоских механизмах с высшими парами без шарниров и поступательных пар имеются одноконтатные высшие кинематические пары первого или второго порядка, которые, как известно, накладывают на свои звенья одну или две тангенциальные связи. В сечении механизма плоскостью плоскопараллельного движения элементы кинематических пар изображаются соприкасающимися кривыми.

В высшей паре первого порядка упомянутые кривые катятся и скользят одна по другой. В относительном движении кривых

любая из них охватывает разные положения второй кривой. Поэтому механизмы с высшими парами первого порядка называются механизмами с взаимно огибающими кривыми.

В высшей паре второго порядка упомянутые кривые катятся без скольжения одна по другой. Следовательно, эти кривые являются относительными полюдами или центроидами. Механизмы с высшими парами второго порядка называются *центроидными механизмами*.

§ 19.1. Центроидные механизмы

Главной задачей проектирования центроидных механизмов является определение относительных центроид соответствующих заданному преобразованию движений. Решим эту задачу сначала для преобразования движений — вращение — вращение.

Предполагаем, что необходимо передать вращение (рис. 19.1) между двумя параллельными, находящимися на расстоянии a валами O_1 и O_2 . Законы изменения угловых скоростей $\omega_1 = \omega_1(t)$ и $\omega_2 = \omega_2(t)$ этих валов заданы. Известно, что относительный полюс P находится на полюсной прямой O_1O_2 и делит расстояние a обратно пропорционально угловым скоростям (§ 5.2). Из уравнений

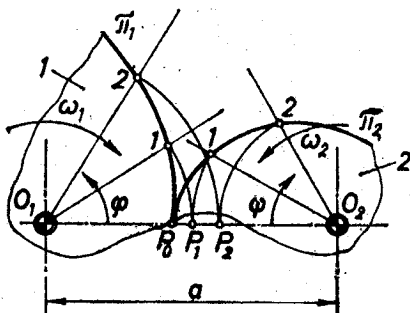


Рис. 19.1.

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad O_1P + O_2P = a \quad (19.1)$$

получим формулу

$$O_1P = \frac{a}{1 + \omega_1/\omega_2} \quad (19.2)$$

с помощью которой определяем положение полюса на полюсной прямой в промежутки времени $0, t_1, t_2, \dots$ и получаем положения относительных полюсов P_0, P_1, P_2, \dots

Отрезок полюсной прямой, по которому перемещается относительный полюс, называют *бицентроидой*. Бицентроида является линией соприкосновения относительных центроид, так как по бицентроиде движется точка P соприкосновения звеньев 1 и 2 в неподвижной плоскости.

Для определения относительных центроид, определим углы поворота звеньев 1 и 2

$$\varphi = \int_0^t \omega_1 dt, \quad \psi = \int_0^t \omega_2 dt \quad (19.3)$$

и отложим их от прямой O_1O_2 противоположно направлению вращения валов. На полученных лучах откладываем соответствующие радиусы O_1P_i и O_2P_i , построив таким образом точки центроид π_1 и π_2 . Определенные величины O_1P , φ и O_2P , ψ являются полярными координатами относительных центроид.

Изготавливая кривые π_1 и π_2 материально и предотвращая их скольжение, получают центроидный механизм для преобразования вращения в другое вращение (рис. 19.1).

Если валы 1 и 2 должны вращаться в одну сторону и $\omega_1 < \omega_2$, то в формулах (19.1) и (19.2) вместо знака плюс следует ставить знак минус и центроиды будут иметь *внутреннее соприкосновение*, т. е. выпуклая центроида соприкасается с вогнутой.

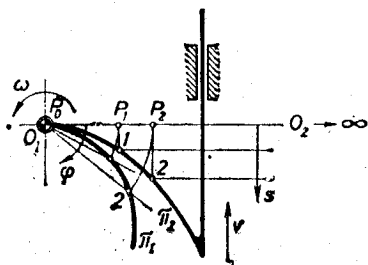


Рис. 19.2.

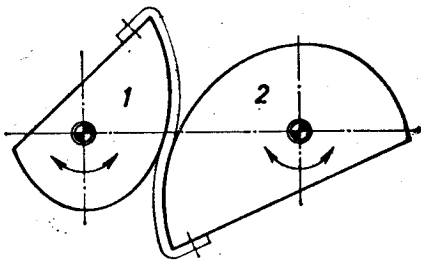


Рис. 19.3.

Аналогично строят центроиды для преобразования вращения в поступательное движение и поступательного движения во вращательное (рис. 19.2). Бицентроида перпендикулярна направлению скольжения ползуна; относительный полюс на ней представляет собой точку, у которой скорости в звеньях 1 и 2 геометрически равны, т. е. $\omega \cdot O_1P = v$. Выражение

$$O_1P = v/\omega \quad (19.4)$$

определяет положение полюса в любой момент времени, так как функции $v = v(t)$ и $\omega = \omega(t)$ заданы в проектном задании. Угол поворота и перемещение поступательного движения определяются из выражений

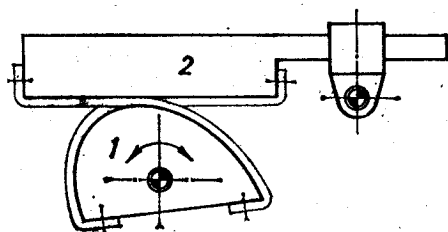


Рис. 19.4.

$$\varphi = \int_0^t \omega dt, \quad s = \int_0^t v dt. \quad (19.5)$$

Отложим их от прямой O_1O_2 противоположно направлению движения звеньев 1 и 2 и, отложив на полученных прямых полюсные расстояния, получим центроиды π_1 и π_2 как геометрические места полюса P на звеньях 1 и 2.

Преобразование поступательного движения в поступательное движение с помощью центроидных механизмов невозможно, так

как относительный полюс находится в бесконечности. С помощью центроидных механизмов можно получить требуемое плоскопараллельное движение (рис. 19.4).

Скольжение центроид необходимо устранить, покрывая рабочие поверхности (аксоиды) центроид фрикционными материалами (кожа, ферродо) и сжимая их с достаточно большой силой. В периодическом возвратно-поступательном движении скольжение центроид можно устранить, применяя промежуточный элемент — гибкую связь (трос, ленту). Таким образом, получают одностороннее (рис. 19.3) или двухстороннее (рис. 19.4) замыкания центроидной пары.

§ 19.2. Механизмы взаимно огибающих кривых

Применение центроидных механизмов ограничено, так как имеет место неточность передачи движения в связи с проскальзыванием центроид. Кроме того, формы центроид строго зависят от реализуемых законов движения, и эти формы часто невыгодны. Центроидные механизмы непригодны для передачи значительных сил.

Упомянутых недостатков не имеют механизмы с элементами кинематической пары в форме взаимно огибающих кривых. Находящиеся в соприкосновении кривые e_1 и e_2 называют профилями.

На рис. 19.5 показан механизм этого типа, предназначенный для преобразования движения: вращение — вращение. Проведенная в точке соприкосновения кривых S нормаль np пересекает прямую полюсов O_1O_2 в относительном полюсе P , положение которого определяется по формуле (19.1). Следовательно, нормаль в точке соприкосновения двух взаимно огибаемых кривых делит расстояние между абсолютными полюсами на части, обратно пропорциональные угловым скоростям, и точка деления является относительным полюсом. Этим самым выражена теорема Виллиса. При вращении звеньев 1 и 2 профили скользят и катятся один по другому, и точка касания S перемещается по какой-то кривой ss , которую называют линией зацепления.

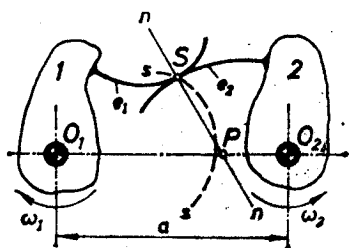


Рис. 19.5.

Рассмотрим несколько методов построения профилей. Конструкторы здесь имеют больше возможностей, чем в центроидных механизмах, так как: 1) можно выбрать один профиль и построить другой; 2) можно выбрать линию зацепления и построить оба профиля.

Допустим, что заданы a , $\omega_1 = \omega_1(t)$, $\omega_2 = \omega_2(t)$ и профиль e_2 ; необходимо построить профиль e_1 . Наиболее просто задачу можно

решить, используя принцип обращения движения (рис. 19.6) (метод инверсии). Для этого необходимо всему механизму сообщить вращение вокруг оси O_1 с угловой скоростью $(-\omega_1)$. Тогда звено, профиль e_1 которого должен быть определен, становится неподвижным, а звено с заданным профилем e_2 будет совершать два движения, а именно: вращаться с угловой скоростью $(-\omega_1)$

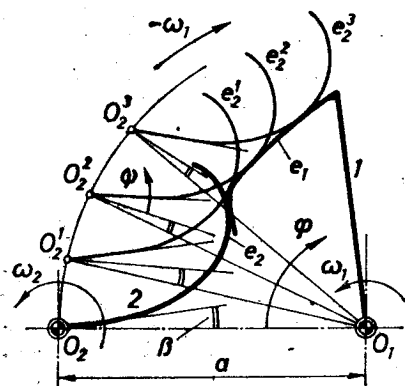


Рис. 19.6.

является траекторией точки A_2 относительно звена I . Построение относительной траектории, аналогичное предыдущему, показано на рис. 19.7.

Если заданы $a = O_1O_2$, $\omega_1 = \text{const}$, $\omega_2 = \text{const}$ и линия зацепления ss и необходимо построить профили e_1 и e_2 , то согласно формуле (19.2) относительный полюс P в этом случае не движется, следовательно, относительные центры p_1 и p_2 являются окружностями (рис. 19.8). Выбираем на центроиде p_1 точки a_1, b_1, c_1, \dots и строим на центроиде p_2 соответствующие им точки a_2, b_2, c_2, \dots , отложив дуги $Pa_2 = Pa_1, a_2b_2 = a_1b_1, \dots$. Выбираем на линии зацепления точки A_0, B_0, C_0, \dots , с которыми будут совпадать точки A_1, B_1, C_1, \dots и A_2, B_2, C_2, \dots искомыми профилями e_1 и e_2 тогда, когда точки центроид $a_1, a_2; b_1, b_2; \dots$ совпадут с полюсом P .

Так как сопряженные точки профилей e_1 и e_2 находятся на окружностях $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots$, на одном и том же расстоянии от полюса P , т. е. когда $a_1A_1 = a_2A_2 = PA_0, b_1B_1 = b_2B_2 = PB_0, c_1C_1 = c_2C_2 = PC_0, \dots$, то, очевидно, точки профилей будут совпадать с точками пересечения окружностей $\alpha; \beta$, и т. д. с дугами окружностей PA_0, PB_0 и т. д., с центрами в a_1, b_1 и т. д. Соответствующие последнему равенству отрезки показаны на рис. 19.8 штриховой линией. Соединяя найденные точки A_1, B_1, C_1, \dots и A_2, B_2, C_2, \dots , получаем профили e_1 и e_2 .

Аналогично рассмотренному методу построения профилей звеньев механизма, преобразующему вращение во вращение, по другому закону строятся профили звеньев механизма для преоб-

вращение вокруг оси O_1 , при этом центр O_2 будет перемещаться по окружности радиуса $O_1O_2 = a$ и вращаться относительно линии центров O_1O_2 с угловой скоростью ω_2 . По заданным промежуткам времени определяются углы ϕ и ψ и откладываются так, как это показано на рис. 19.6. Таким образом можно построить ряд положений профиля e_2 , огибающая которых является искомым профилем e_1 .

Если заданный профиль e_2 вырождается в точку A_2 , то соответствующий ему профиль e_1

разования вращения в поступательное движение и наоборот. Для преобразования поступательного движения в поступательное построить профили с помощью центроид невозможно, так как они находятся в бесконечности, а неизвестный профиль необходимо построить как огибающую данного профиля.

Наиболее распространенными примерами механизмов с высшими парами, элементы которых являются взаимно огибающими

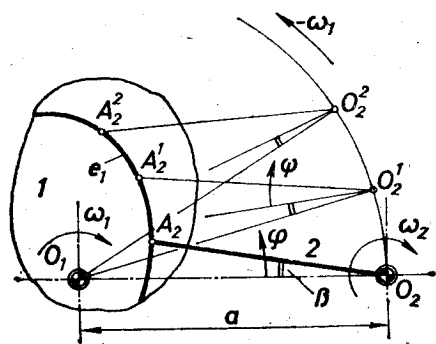


Рис. 19.7.

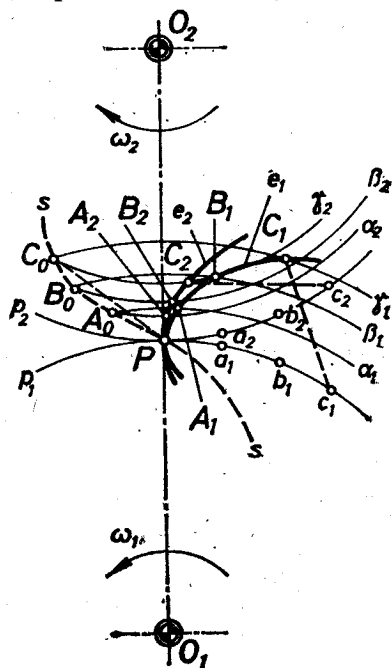


Рис. 19.8.

кривыми, являются кулачковые и зубчатые механизмы, которые рассмотрим в последующих разделах.

§ 19.3. Фрикционные механизмы

Фрикционные механизмы применяются для преобразования движения: вращение — вращение (передачи с помощью колес трения), для бесступенчатого изменения передаточного отношения (фрикционные вариаторы), для обеспечения движения только в одном направлении (фрикционные храповые механизмы (рис. 4.15)). Фрикционные механизмы просты и предохраняют механизм от перегрузки. Их недостатком является неизбежное, хотя и небольшое, зависящее от нагрузки проскальзывание, из-за которого нельзя получить точное передаточное отношение (§ 2.1).

Рабочие поверхности высших пар фрикционных механизмов обычно имеют форму поверхностей вращения (цилиндр, конус, тор), но не всегда эти поверхности из-за проскальзывания являются аксоидами. Они являются аксоидами, если относительные скорости точек контактной линии равны нулю. Сечения

цилиндрических аксоид с плоскостью, перпендикулярной образующим, являются центроидами. Поэтому многие фрикционные механизмы являются центроидными механизмами.

К этим механизмам в первую очередь следует отнести передачи с цилиндрическими колесами трения. Для обеспечения хорошего контакта между поверхностями трения, необходимо устранить в механизме избыточные связи. Самыми неблагоприятными являются тангенциальные избыточные связи, поэтому вместо схемы на рис. 5.12 необходимо использовать схемы, показанные на рис. 2.2 или на рис. 12.15.

В передаче *b* с цилиндрическими колесами трения (рис. 12.15) сила трения скольжения $F_{12} = F_{21} = F$ является полезной силой, верхний предел которой $F_{\max} = fQ$. Отношение $c = F_{\max} : F$ называют коэффициентом запаса сцепления. Для передачи необходимой мощности $N = Fv_p$ и для обеспечения достаточного коэффициента запаса сцепления колеса необходимо прижимать друг к другу с силой $Q = F_{\max} : f$, что, к сожалению, вызывает потери на трение в подшипниках и в зоне контакта колес (§ 12.6). Необходимую силу нажатия Q можно уменьшить, применяя колеса трения с клинообразными поверхностями (рис. 19.9); тогда $F_{\max} = -f'Q$, где приведенный коэффициент трения f' определяется по

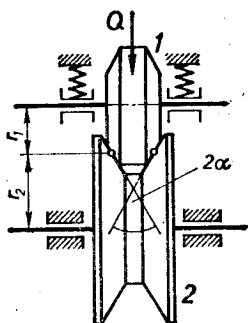


Рис. 19.9.

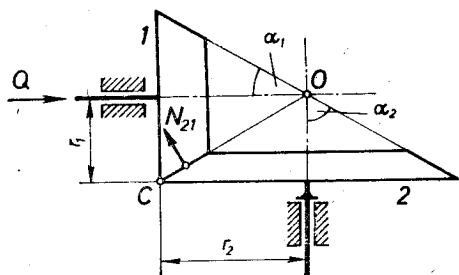


Рис. 19.10.

формуле (12.11). Однако на рабочих поверхностях таких фрикционных колес чистое качение невозможно, так как эти поверхности не являются аксоидами, и механизм не является центроидным механизмом.

В связи с неизбежным проскальзыванием*) (пробуксовыванием) рабочие поверхности быстро изнашиваются. Если ширина

*) Проскальзывание отсутствует только в одной точке контактной линии фрикционных колес с коническим желобом. Во всех остальных точках линии соприкосновения поверхностей трение проскальзывания пропорционально расстоянию от указанной точки, причем разного знака. При увеличении нагрузки на ведомом звене «нескользящая точка» перемещается в сторону оси ведущего колеса. Буксование наступает в случае, если несколько точек выходит за пределы линии контакта трущихся поверхностей. →
Прим. ред.

контактной зоны небольшая, то можно считать, что проскальзывания в контактной зоне на средних окружностях с радиусами r_1 и r_2 нет, и эти радиусы можно использовать для определения передаточного отношения.

Упомянутого недостатка нет у конических колес трения (рис. 19.10), так как здесь рабочие поверхности — два конуса, которые катятся один по другому без проскальзывания, — являются аксиодами. Поэтому $v_0 = r_1\omega_1 = r_2\omega_2$, и передаточное отношение

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \quad (19.6)$$

так как $r_2 = OC \cdot \sin \alpha_2$, $r_1 = OC \sin \alpha_1$. Осевая сила Q , прижимающая колеса друг к другу, связана с нормальной силой N_{21} равенством $Q = N_{21} \sin \alpha_1$, а сила трения, используемая для преодоления нагрузки

$$F_{\max} = fN_{21} = \frac{f}{\sin \alpha_1} Q = f'Q. \quad (19.7)$$

Отсюда видно, что в конических фрикционных колесах при сохранении чистого качения достигнут эффект клинообразного паза.

Фрикционный бесступенчатый вариатор (или лобовая фрикционная передача) показан на рис. 7.4. Для устранения проскальзывания в рабочей зоне, вызванного разницей между скоростями, рабочая поверхность передвигного колеса изготовлена в виде тора. Этот вариатор не является центроидным механизмом. Принцип бесступенчатого вариатора с клиновыми ремнями пояснен на рис. 7.14 и в примере 7.8, а на рис. 19.11 приведена схема торoidalного бесступенчатого вариатора. Оба они не являются центроидными механизмами. Встречаются также другие конструкции фрикционных бесступенчатых вариаторов.

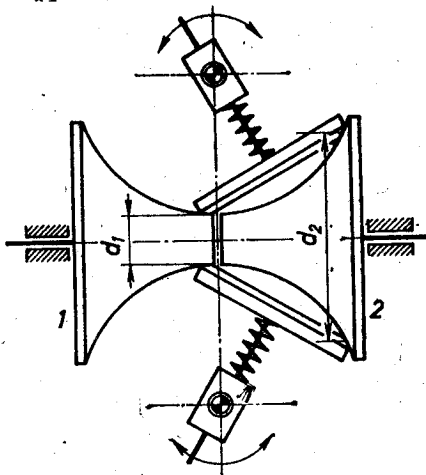


Рис. 19.11.

§ 19.4. Мальтийские механизмы

При механизации и автоматизации рабочих процессов часто необходимо получить движение ведомого звена с остановками. Непрерывное вращение можно преобразовать в прерывистое вращение с помощью мальтийского механизма. Название этого

механизма возникло из-за сходства прерывисто вращающегося звена с крестообразным знаком средневекового рыцарского ордена, основанного на острове Мальта. Мальтийские механизмы используются в автоматических токарных станках, в дозировочных и упаковочных автоматах, в некоторых киноаппаратах — для перемещения фильма с перерывами, а также в других машинах и аппаратах [77].

Кинематически движение мальтийского механизма соответствует движению ведомого звена механизма вращающейся кулисы (рис. 5.19). Так как ползун кулисы отсутствует, то мальтийский механизм является трехзвенным механизмом переменной структуры.

Наиболее часто встречаются *однородные* мальтийские механизмы с *внешним зацеплением* (рис. 19.12). *Однородными* называют мальтийские механизмы, у которых углы β между пазами

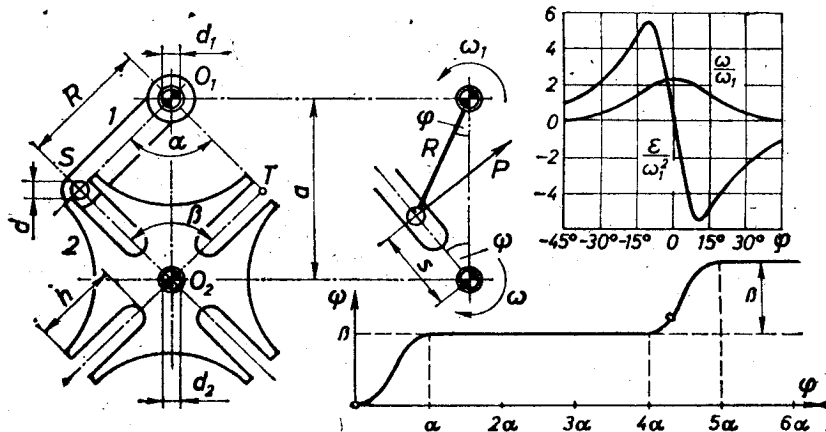


Рис. 19.12.

(направляющими) крестов одинаковы. При вращении кривошипа 1 его палец входит в паз креста 2, и крест начинает вращаться. При повороте кривошипа на угол α крест поворачивается на угол β и после этого останавливается до начала следующего цикла. Во время остановки креста кривошип поворачивается на угол $\alpha_0 = 2\pi - \alpha$, и положение креста фиксируется дугообразным сектором, прикрепленным к кривошипу (рис. 4.13). Число пазов креста z обычно находится в пределах от 3 до 15. Как видно,

$$\alpha + \alpha_0 = 2\pi, \quad \beta = 2\pi/z. \quad (19.8)$$

С целью избежания больших ударов в начале и в конце соприкосновения, касательная к траектории центра пальца S должна совпадать с осью паза, т. е. углы O_1SO_2 и O_1TO_2 должны быть прямыми. Поэтому $\alpha + \beta = \pi$ и

$$\alpha = \pi - \beta = \pi - 2\pi/z, \quad \alpha_0 = 2\pi - \alpha = \pi + 2\pi/z. \quad (19.9)$$

Коэффициент рабочего времени

$$k = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{z-2}{z+2} \quad (19.10)$$

в случае равномерного вращения кривошипа выражает отношение времени движения к времени покоя креста.

Главные размеры механизма определяют согласно рис. 19.12:

$$R = a \sin \frac{\pi}{z}, \quad r = a \cos \frac{\pi}{z} = O_2 S_1, \quad h > R + r - a. \quad (19.11)$$

Безразмерным параметром мальтийского механизма является отношение

$$\lambda = \frac{R}{a} = \sin \frac{\pi}{z}.$$

Положения кривошипа и креста связывает уравнение

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R \sin \varphi}{a - R \cos \varphi} = \frac{\lambda \sin \varphi}{1 - \lambda \cos \varphi},$$

откуда получаем функцию положения

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda \sin \varphi}{1 - \lambda \cos \varphi}. \quad (19.12)$$

Дифференцируя это выражение по времени, определяем угловую скорость

$$\omega = \omega_1 \frac{\lambda (\cos \varphi - \lambda)}{1 - 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2} \quad (19.13)$$

и угловое ускорение креста

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\lambda (\cos \varphi - \lambda)}{1 - 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2} - \omega_1^2 \frac{\lambda (1 - \lambda^2) \sin \varphi}{(1 - 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2)^2}. \quad (19.14)$$

Обычно кривошип вращается равномерно; тогда $\varepsilon_1 = 0$. Далее будем рассматривать только этот случай.

Очевидно, угловая скорость креста является наибольшей тогда, когда оси кривошипа и паза совпадают. Подставляя $\varphi = 0$ в выражении (19.13), получим, что

$$\omega_{\max} = \omega_1 \frac{\lambda}{1 - \lambda}. \quad (19.15)$$

Коэффициент при ω_1 выражает максимальное передаточное отношение мальтийского механизма.

Угловое ускорение креста в начале и в конце движения не равно нулю, так как, подставляя $\varphi = \pm \alpha/2$ в выражение (19.14), получаем

$$\varepsilon_0 = \omega_1^2 \operatorname{tg}(\pi/z). \quad (19.16)$$

Следовательно, хотя палец тангенциально входит и выходит из паза, в эти мгновения ускорение и вместе с тем силы инерции получают конечное изменение. Такое явление называют *мягким ударом*.

Дифференцируя выражение (19.14) по времени при $\varepsilon_1 = 0$ и приравнявая результат нулю, получим уравнение, из которого определяются углы $\varphi = \varphi'$, которым соответствуют экстремальные значения углового ускорения креста. Подставляя найденные φ' в выражение (19.14), находим экстремальные значения ε_{\max} углового ускорения креста.

Выражения (19.12), (19.13) и (19.14) изображены графически на рис. 19.12 для однодородного мальтийского механизма с числом пазов $z = 4$. Геометрические и кинематические параметры разных однородных мальтийских механизмов обобщены в табл. 19.1.

Таблица 19.1

z	α	β	λ	$\frac{\omega_{\max}}{\omega_1}$	$\frac{\varepsilon_0}{\omega_1^2}$	$\frac{\varepsilon_{\max}}{\omega_1^2}$	φ'	ψ'
8	60°	120°	0,20	6,46	1,73	31,40	4°15'	27°41'
4	90°	90°	0,33	2,41	1,00	5,41	11°28'	24°36'
5	108°	72°	0,43	1,43	0,73	2,30	17°34'	21°59'
6	120°	60°	0,50	1,00	0,58	1,35	23°54'	19°50'
12	150°	30°	0,71	0,35	0,27	0,35	44°00'	12°28'

Палец кривошипа воздействует на паз креста силой P , момент которой относительно оси креста $M = Ps$. Принимая приведенный к кресту момент инерции масс $I_r = \text{const}$ и пренебрегая трением, уравнение движения получаем в форме

$$I_r \varepsilon = M - M_Q, \quad M = M_Q + I_r \varepsilon, \quad P = M/s,$$

где M_Q — приведенный к кресту момент полезного сопротивления. Плечо силы P

$$s = a\sqrt{1 - 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2}. \quad (19.17)$$

Необходимую для прочностного расчета силу P_{\max} находят, определяя силу P в разных положениях механизма.

Мощность, необходимая для привода кривошипа мальтийского механизма

$$N = M_{\text{ср}} \cdot \omega_1. \quad (19.18)$$

Средний момент вращения кривошипа приблизительно равен среднему арифметическому от приведенных к ведущему валу моментов реакции P , действующей на пазу креста. Учитывая потери трения, с помощью коэффициента полезного действия, получаем

$$M_{\text{ср}} \approx \frac{1}{n\eta} \sum M_i \frac{\omega}{\omega_i}, \quad i = 1, \dots, n_i \quad (19.19)$$

где n — число положений механизма в цикле.

Для выбора типа электромотора нужно знать не только мощность, но и коэффициент перегрузки

$$u = M_{1 \max} / M_{\text{ср}}, \quad (19.20)$$

который не превышает 2 для обычных электромоторов с номинальной мощностью N согласно формуле (19.18). Поэтому для небольшого числа пазов номинальную мощность необходимо иногда увеличивать.

Пример *неоднородного* мальтийского механизма *a* дан на рис. 19.13. Здесь показан также однородный мальтийский механизм *b* с *внутренним зацеплением*. У такого креста экстремумы углового ускорения отсутствуют, а наибольшие по модулю ускорения при входе и выходе цевки из паза меньше экстремальных значений для креста с внешним зацеплением.

Если ведомый вал в течение фазы движения должен повернуться на угол, больший или меньший угла поворота креста, то между указанными валами размещают зубчатую передачу.

Для достижения выгодного закона движения иногда используют крест с криволинейной осью пазов или приводят кривошип в неравномерное вращение при помощи передачи с некруглыми колесами. Однако часто для достижения этой цели перемещают центр S пальца кривошипа не по окружности, а по

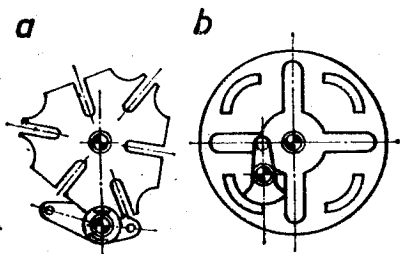


Рис. 19.13.

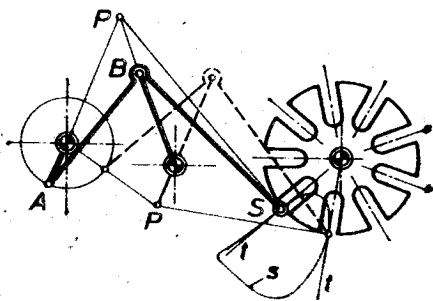


Рис. 19.14.

другой кривой. Это достигается с помощью планетарной передачи (палец принадлежит сателлиту), кулачкового механизма или стержневого механизма. Последний вариант показан на рис. 19.14. Касательная t траектории точки S шатуна AB в начале и в конце движения креста должна совпадать с осью паза.

Раздел 20

СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 20.1. Задача синтеза кулачковых механизмов

Кулачковые механизмы широко используются в машинах-автоматах, так как при реализации желаемых движений они открывают широкие возможности и не требуют большой работы конструктора. Кулачковые механизмы реализуют требуемые законы движения выходных звеньев, программируют технологи-

ческий процесс, выполняют функции управления, включают и выключают различные передачи.

Главными этапами проектирования кулачковых механизмов являются:

- 1) выбор типа механизма;
- 2) выбор и обоснование закона движения ведомого звена;
- 3) определение главных размеров звеньев;
- 4) графическое построение или аналитический расчет координат профиля;
- 5) определение размеров элементов механизма путем расчетов на прочность и точность.

Тип кулачкового механизма выбирают в зависимости от задачи синтеза, которая обычно содержит данные о желаемом виде движения толкателя (поступательное движение, вращение и т. д.), о законе движения, о движении ведущего звена и также некоторые размеры.

В дальнейшем рассмотрим плоские кулачковые механизмы основных разновидностей, которые показаны на рис. 4.10; среди них показан также пример пространственного кулачкового механизма (рис. 4.10, *g*). Замыкание высшей пары здесь предусмотрено с помощью силы упругости пружины (пружины не показаны), кроме механизмов *f* и *g*, в которых имеет место геометрическое замыкание. Последний тип замыкания обычно применяется тогда, когда толкатель, двигаясь возвратно-поступательно, совершает работу, преодолевая полезное сопротивление в обоих направлениях движения.

Геометрическое замыкание можно реализовать также с помощью паза, по которому перемещается один или несколько роликов. Чтобы в моменты изменения направления движения толкателя из-за зазоров не возникли значительные удары, желательно применять не один, а два размещенных на одной оси

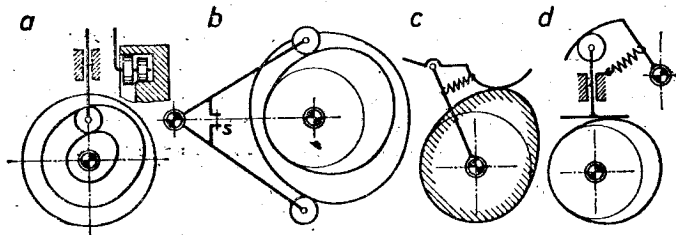


Рис. 20.1.

ролика (рис. 20.1, *a*). Профили сторон паза эквидистантны, и рабочие части их зависят от направления реакции со стороны толкателя, определяемой полезной нагрузкой и силой инерции.

Другой распространенный вид геометрического замыкания показан на рис. 20.1, *b*. Здесь выходное звено имеет два размещенных на разных осях ролика, которые контактируют каждый со своим профилем. Эти профили не являются эквидистантными.

Стягивая обе половины толкателя болтом s , устраняют зазоры и удары в разветвленной высшей паре. Замыкание рассмотренного вида можно образовать не только для выходного звена в виде коромысла, но также для толкателя в виде ползуна.

Иногда применяют механизмы с неподвижным кулачком (рис. 20.1, c) и двухкратные (рис. 20.1, d) кулачковые механизмы.

Как известно (§ 19.2), одну из взаимно огибаемых кривых (в этом случае профиль толкателя) можно выбрать произвольно. Часто профилем толкателя выбирают окружность, так как в этом случае можно использовать ролик, который снижает потери на трение. Образуется точечный кулачковый механизм, центр ролика которого описывает эквидистантную профилю кулачка кривую — *центровую профилю*. При решении задач анализа и синтеза выгодно вместо действительного механизма пользоваться воображаемым механизмом, острие A толкателя которого скользит по центральному профилю. Таким образом, например, вместо изображенного на рис. 11.1 механизма получают показанный на рис. 20.2 механизм.

Различают четыре фазы движения толкателя: удаление, выстой при максимальном удалении, приближение, выстой при максимальном приближении к оси вращения кулачка. Упомянутым фазам соответствуют углы профиля кулачка

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi,$$

которые в центральном точечном механизме (рис. 20.2) совпадают с соответствующими углами поворота ведущего звена:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\pi.$$

В отдельных случаях α_2 и φ_2 , и также α_4 и φ_4 могут быть равны нулю.

В задаче синтеза закон движения ведущего звена $\varphi = \varphi(t)$ обычно задается в форме $\varphi = \omega t$, где $\omega = \text{const}$, а определение закона движения толкателя $s = s(t)$ предоставляют конструктору, ограничивая его заданным ходом H толкателя и промежутками времени

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = T,$$

которые пропорциональны соответствующим углам поворота. Очевидно,

$$\omega = 2\pi/T. \quad (20.1)$$

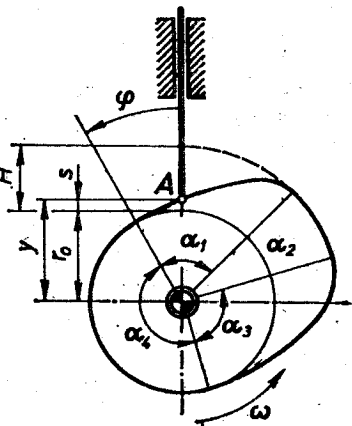


Рис. 20.2.

В механизмах для привода клапанов устанавливают требование, чтобы так называемое время-сечение

$$L = \int_0^{t_1} s \, dt \quad (20.2)$$

было по возможности больше. Чем больше L , тем меньше сопротивление потоку газа или жидкости через клапан (меньше дросселирование).

§ 20.2. Законы движения толкателя

Кулачковые механизмы позволяют реализовать неограниченное разнообразие законов движения толкателя. Конструктор из этого множества должен выбрать такой закон движения, который наилучшим образом соответствует максимально производительному рабочему процессу, совершаемому с помощью данного механизма; вместе с тем необходимо обеспечить прочность и долговечность элементов механизма, а также — простоту изготовления кулачка.

Кинематические диаграммы толкателя ползуного типа, приводимого в движение равномерно вращающимся кулачком, для полного оборота кулачка показаны на рис. 20.3. Учитывая зависимость между кинематическими параметрами, находим, что обе

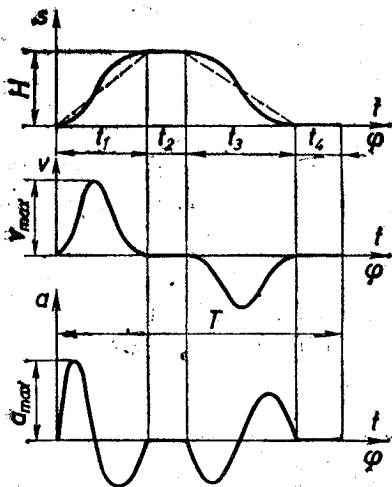


Рис. 20.3.

площади диаграммы, ограниченной кривой скорости, пропорциональные ходу толкателя, равны. На диаграмме ускорения обе площади фазы удаления равны, так же как и обе площади фазы сближения; отношение площади каждой фазы удаления к площади фазы сближения равно отношению соответствующих максимальных скоростей. Часто одна из фаз является рабочей, вторая — холостой, или же обе являются фазами рабочего движения. В связи с повышением

производительности рабочего процесса фазу холостого движения стараются сократить настолько, насколько это позволяет возникающее из-за этого сокращения приращение ускорения (силы инерции). Очень часто для каждой фазы движения толкателя выбирают симметричный закон движения; тогда диаграмма скорости является симметричной относительно оси, проведенной через среднюю точку фазы параллельно оси ординат, а диаграммы перемещения и ускоре-

ния являются центрально симметричными с центром симметрии в средней точке фазы. Так как законом движения кулачка является $\varphi = \omega t$, то абсциссы пропорциональны как времени, так и углу поворота кулачка.

Чтобы можно было судить о пригодности разных законов движения толкателя для выполнения вышеупомянутых требований, рассмотрим четыре простейших симметричных закона движения для фазы удаления. Одновременно покажем аналитический и графический синтез закона движения.

Простейшим является линейный закон движения a (рис. 20.4)

$$s = vt, \quad (20.3)$$

где скорость толкателя

$$v = H/t_1 = \text{const}, \quad (20.4)$$

а в начале и в конце движения эта скорость изменяется скачкообразно. Поэтому ускорение в эти моменты времени становится бесконечно большим, хотя в процессе движения оно равно нулю.

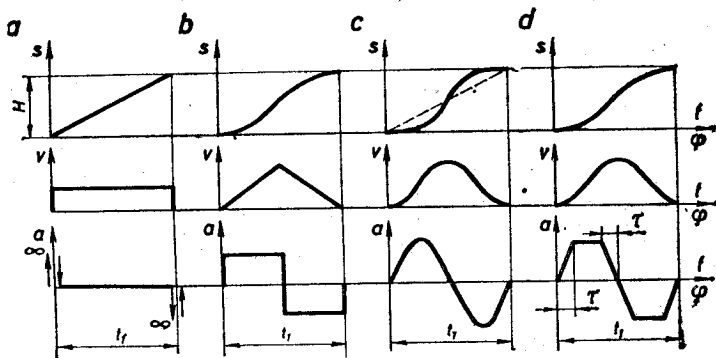


Рис. 20.4.

Благодаря деформациям ни ускорение, ни ему пропорциональная приведенная к толкателю сила инерции в действительности не являются бесконечными, однако возникает так называемый жесткий удар. Следовательно, скачок (разрыв) функции $v = v(t)$ является признаком жесткого удара.

В центральном кулачковом механизме (рис. 20.2) соответствующий равномерному движению толкателя профиль кулачка очерчивается спиралью Архимеда, а в эксцентричном механизме a (рис. 4.10) и в механизме b с плоским толкателем (рис. 4.10) — эвольвентой. Такие кулачки с жесткими ударами допустимы только для небольших скоростей толкателя ($v < 0,2$ м/с).

Симметричный параболический закон движения b (рис. 20.4) в пределах первой половины фазы удаления характеризуется уравнениями

$$s = \frac{at^2}{2}, \quad v = at, \quad (20.5)$$

а в пределах второй половины — уравнениями

$$s = \frac{H}{2} - \frac{at^2}{2}, \quad v = v_{\max} - at, \quad (20.6)$$

где

$$a = 4 \frac{H}{t_1^2} = \text{const}, \quad v_{\max} = 2 \frac{H}{t_1}. \quad (20.7)$$

Видно, что движение толкателя является равнопеременным, кривая $s = s(t)$ состоит из двух дуг параболы и максимальная скорость толкателя в два раза выше, чем скорость при равномерном движении (20.4). На диаграмме скорости скачков не имеется: следовательно, жесткие удары отсутствуют. Однако в начале, в середине и в конце движения имеются *мягкие удары*, которые соответствуют скачкам в диаграмме ускорения. Согласно формуле (5.35) в эти моменты рывок $j = \dot{a}$ является бесконечно большим, а скачок силы инерции является конечным. Следовательно, разрыв функции $a = a(t)$ является признаком мягкого удара.

Мягкие удары также нежелательны, так как, периодически повторяясь, они создают вибрации, шум и дополнительный износ. Для получения безударного закона движения толкателя выгодно сначала построить непрерывную функцию ускорения $a = a(t)$. Аналитический синтез безударного закона движения покажем на двух примерах.

Первым примером является синусоидальный закон движения s (рис. 20.4). Для его получения выбрана следующая функция ускорения:

$$a = a_{\max} \sin 2\pi \frac{t}{t_1}. \quad (20.8)$$

Соответственно скорость толкателя

$$v = \int_0^t a dt = \frac{a_{\max} t_1}{2\pi} \left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{t_1} \right) \quad (20.9)$$

и перемещение

$$s = \int_0^t v dt = \frac{a_{\max} t_1}{2\pi} \left(t - \frac{t_1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{t}{t_1} \right). \quad (20.10)$$

Подставляя в выражение (20.10) $s = H$ и $t = t_1$ и в выражение (20.9) $t = t_1/2$, получаем

$$a_{\max} = 2\pi \frac{H}{t_1^2}, \quad v_{\max} = 2 \frac{H}{t_1}.$$

Сравнивая эти результаты с выражениями (20.7) видим, что при одинаковом ходе H и времени удаления t_1 , максимальное ускорение синусоидального закона движения в 1,57 раза выше, чем

постоянное ускорение параболического закона, а максимальные значения скоростей равны.

Функцию перемещения толкателя (20.10) изображает синусоида, которая «наложена» на наклонную штриховую прямую. При синусоидальном законе нет ни жестких, ни мягких ударов, так как скорость и ускорение изменяются непрерывно и в начале и в конце движения их значения равны нулю. Однако медленное изменение перемещения в начале движения при подъеме толкателя невыгодно в механизмах привода клапанов в связи с большим дросселированием газовой смеси.

Для получения более интенсивного подъема в начале движения пригоден трапецеидальный закон движения d (рис. 20.4), для получения которого диаграмму ускорения образуют из двух равнобоких трапеций, принимая в конкретном случае $\tau = t_1/8$. Функции $v = v(t)$ и $s = s(t)$ определяются интегрированием выбранной функции ускорения $a = a(t)$ по интервалам. В интервале $0 \leq t \leq \tau$ имеем

$$a = kt, \quad v = \frac{kt^2}{2}, \quad s = \frac{kt^3}{6}, \quad k = \frac{a_{\max}}{\tau}$$

где a_{\max} пока неизвестно. Подставляя здесь вместо t величину τ , находим скорость v_1 и перемещение s_1 в конце интервала. В пределах второго интервала $\tau \leq t \leq 3\tau$, поэтому

$$a = a_{\max} = k\tau = \text{const}, \quad v = v_1 + k\tau(t - \tau), \\ s = s_1 + v_1(t - \tau) + \frac{k\tau}{2}(t - \tau)^2$$

а в конце интервала

$$v_2 = \frac{5}{2}k\tau^2, \quad s_2 = \frac{19}{6}k\tau^3$$

В третьем интервале, при $3\tau \leq t \leq 5\tau$ имеем

$$a = a_{\max} - k(t - 3\tau), \\ v = v_2 + k\tau(t - 3\tau) - \frac{k}{2}(t - 3\tau)^2, \\ s = s_2 + v_2(t - 3\tau) + \frac{k\tau}{2}(t - 3\tau)^2 - \frac{k}{6}(t - 3\tau)^3.$$

В середине третьего интервала, где $t = 4\tau$, имеем

$$v = v_{\max} = 3k\tau^2, \quad s = H/2 = 6k\tau^3$$

Отсюда

$$k = \frac{128}{3} \frac{H}{t_1^3}, \quad a_{\max} = \frac{16}{3} \frac{H}{t_1^2}, \quad v_{\max} = 2 \frac{H}{t_1}$$

Видно, что максимальное значение скорости толкателя такое же, как при параболическом и синусоидальном законе движения; максимальное ускорение в 1,33 раза больше, чем постоянное ускорение при параболическом законе движения и составляет 85% от максимального ускорения синусоидального движения.

Рывок данного симметричного трапецеидального движения $j = k = \text{const}$, что немного выше максимального рывка синусоидального движения

$$j_{\max} = 4\pi^2 \frac{H}{t_1^3},$$

которое имеет место в начале движения. Поэтому движение толкателя в начале первого интервала при трапецеидальном законе движения только немного интенсивнее, чем при синусоидальном законе. Более интенсивным движение в начале можно сделать, сокращая первый интервал.

Согласно формуле (20.2) общее время-сечение

$$L = 1/2 H t_1$$

во всех рассмотренных движениях одинаково. Увеличить его можно, только используя несимметричный закон движения в пределах фазы удаления (рис. 20.3), начальный рывок которой является достаточно большим. Однако в начале рассмотренных четырех законов движений время-сечение различно; например, в интервале $0 \leq t \leq 0,125t_1$, эти параметры для изображенных на рис. 20.4 законов движения a, b, c, d относятся как $6 : 1 : 0,3 : 0,35$. Кроме рассмотренных здесь четырех законов движения в литературе описаны многие другие законы [45, 102].

Функции $v = v(t)$ и $s = s(t)$ можно получить также, графически интегрируя диаграмму ускорения выбранной формы (расстояние полюса интегрирования B_2). После первого интегрирования получаем диаграмму скорости, а после второго — диаграмму перемещений. Из полученной диаграммы $s = s(t)$ масштабный коэффициент перемещения

$$k_s = \frac{H}{\tilde{H}} \frac{\text{м}}{\text{мм}}. \quad (20.11)$$

Формула (15.16) свидетельствует о том, что $k_s = B_1 k_v k_t$ и $k_v = B_2 k_a k_t$. Поэтому масштабы скорости и ускорения можно выразить следующим образом:

$$k_v = \frac{k_s}{B_1 k_t} \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}, \quad k_a = \frac{k_v}{B_2 k_t} \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}. \quad (20.12)$$

Вышеприведенный обзор законов движения относится и к механизмам с ведомым коромыслом, для которых s, v, a необходимо заменить соответственно на $\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}$ согласно рис. 20.7. Аналогично можно рассмотреть вопрос о законах движения в случае, если кулачок движется поступательно.

§ 20.3. Основные размеры кулачковых механизмов

Условия передачи сил в механизмах характеризует угол давления Φ , который образуется между вектором скорости точки A толкателя и направлением реакции N_{12} (рис. 20.5), приложенной в этой точке. В § 11.1 было выяснено, что угол давления

в общем случае является переменным и зависит от минимального радиуса r_0 профиля кулачка и от закона движения толкателя. Эту зависимость выражает формула (11.5). Чем больше максимальный допустимый угол давления ϑ_{\max} , тем меньше может быть r_0 и вместе с тем меньше габаритные размеры проектируемого кулачкового механизма. Поэтому необходимо предварительно выбрать ϑ_{\max} и определить соответствующий ему r_0 .

Для механизма с толкателем-ползуном обычно принимают $\vartheta_{\max} = 30^\circ$, а для механизма с толкателем-коромыслом $\vartheta_{\max} = 45^\circ$. Более точные значения максимально допустимого угла давления определяют, учитывая коэффициенты трения и обработку профилей [45].

Для центрального кулачкового механизма с точечным толкателем-ползуном (рис. 20.2) минимальный радиус-вектор профиля определим приближенно из формулы (11.5):

$$r_0 \approx \frac{v_{\max}}{\omega \operatorname{tg} \vartheta_{\max}} - s_m \quad (20.13)$$

где s_m — соответствующее максимальной скорости перемещение ползуна. Графическое определение r_0 для механизмов этого типа показано на рис. 11.2. Покажем, что аналогично можно определить минимальный радиус r_0 и для дезаксиального механизма со смещенным толкателем.

Замещающим механизмом кулачкового механизма с точечным толкателем (рис. 20.5) является кривошипно-ползунный механизм со стойкой 3, ползуном 2, шатуном AC и кривошипом OC. Точка C является центром кривизны эквидистанты профиля (а также и действительного профиля) кулачка при точечном толкателе. Повернутый вектор скорости $v_c = \omega \cdot OC$ точки C можно изобразить отрезком CO; тогда v является повернутым вектором скорости точки A толкателя. Если через его конец a провести прямую, которая с направлением движения толкателя образует угол давления ϑ , то эта прямая будет проходить через центр вращения O кулачка. Так как $x : OC = v : v_c$, то

$$x = \frac{v}{\omega} = \frac{ds}{d\varphi} \quad (20.14)$$

Если желаем, чтобы ни в одном положении механизма угол давления не получился больше ϑ_{\max} , то при выбранном масштабном коэффициенте длин необходимо построить (рис. 20.6) диаграмму $x = x(s)$ и в направлении, которое определяется углом ϑ_{\max} , провести к этой диаграмме касательную. Выбранному центру O вращения кулачка на этой касательной соответствуют минимальный допустимый радиус $r_0 = OA_0$ и дезаксиал. Кривая $x = x(s)$, очерченная сплошной линией, соответствует удалению

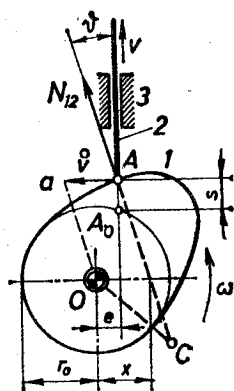


Рис. 20.5.

ется ценным свойством этого механизма. Минимальный радиус $r_0 = OA_0$, здесь определяется из условия, чтобы профиль кулачка на всех участках был выпуклым. При определении r_0 применяется метод Геронимуса [18].

Замещающий механизм является синусным механизмом с кривошипом OC , где C является центром кривизны профиля кулачка в точке соприкосновения звеньев 1 и 2. Звено o является

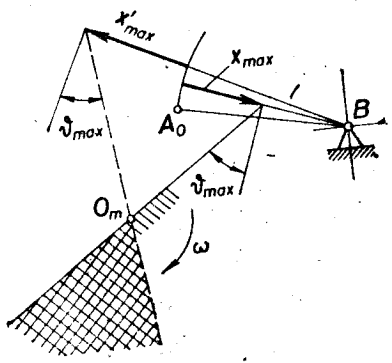


Рис. 20.8.

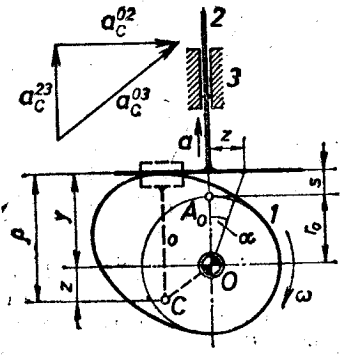


Рис. 20.9.

фигурным. Векторное уравнение для определения ускорения точки C

$$\bar{a}_C^{03} = \bar{a}_C^{03} + \bar{a}_C^{23}$$

изображается треугольником, так как ускорение Кориолиса при поступательном движении толкателя равно нулю. В этом выражении $a_C^{03} = \omega^2 \cdot OC$, а $a_C^{23} = a$ является ускорением ползуна. Так как $z : CO = a_C^{23} : a_C^{03}$, то

$$z = \frac{a}{\omega^2} = \frac{d^2 s}{d\varphi^2} \quad (20.16)$$

Профиль является выпуклым, если

$$\rho = z + y > 0.$$

Это условие может не выполняться, если $z < 0$, так как всегда $y > 0$. При таких обстоятельствах должно быть выполнено

$$|z| < y, \quad \frac{|z|}{y} < 1, \quad \alpha = \arctg \frac{|z|}{y} < 45^\circ. \quad (20.17)$$

Следовательно, если построим (рис. 20.10) кривую функции $z = z(s)$ и к ее отрицательной части проведем касательную, которая образует угол 45° с направлением движения ползуна, то минимальный радиус равен $r_0 = O'A_0$.

Если центр вращения кулачка помещен в точке O' , то в одном месте профиля кулачка радиус кривизны профиля будет

равен нулю. Поэтому если выберем минимальный радиус кривизны профиля ρ_{min} , отложим его вниз от точки O' , то получим действительный центр вращения O , при котором $\rho > 0$ и вместе с этим также минимальный допустимый радиус $r_0 = OA_0$.

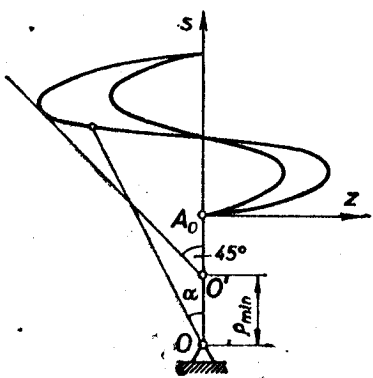


Рис. 20.10.

Действительным профилем p кулачка с роликовым толкателем является огибающая семейства окружностей, описанных из точек центрального профиля с радиусом ролика r , (рис. 20.11, а). Если радиус ролика равен минимальному радиусу кривизны центрального профиля, то действительный профиль имеет острие (рис. 20.11, б), что недопустимо с точки зрения контактных напряжений. Если $r_r > \rho_{min}$, то участки профиля интерферируют,

т. е. имеет место самопересечение действительного профиля (рис. 20.11, с), и выбранный закон движения не реализуем. Поэтому выбор радиуса ролика ограничивается условием

$$r_r < \rho_{min}. \tag{20.18}$$

Наименьшие контактные напряжения будут тогда, когда минимальный радиус действительного профиля $\rho_{p\ min} = r_r$. Так как $\rho_{p\ min} = \rho_{min} - r_r$, то желательно выполнять условие

$$r_r = 0,5\rho_{min}. \tag{20.19}$$

Кроме того, радиус ролика необходимо выбрать таким, чтобы было обеспечено качение ролика. Это будет происходить

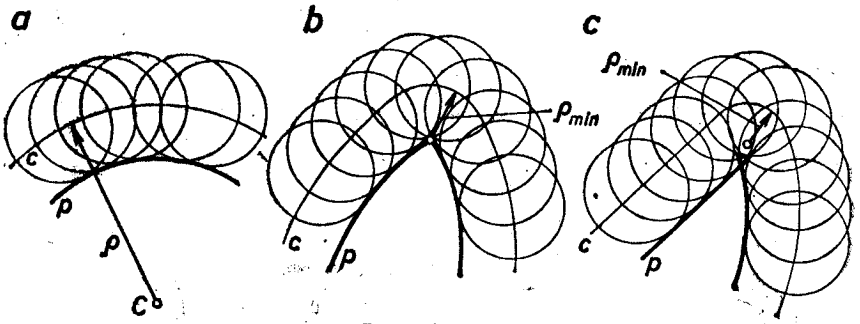


Рис. 20.11.

тогда, когда кулачок на ролик будет воздействовать силой трения F , меньшей, чем максимально возможная величина силы трения, т. е.

$$F < fN, \tag{20.20}$$

где f — коэффициент трения между роликом и кулачком, N — нормальная реакция, с какой кулачок будет воздействовать на ролик.

Необходимую для обеспечения качения силу трения F определяют из уравнения кинестатики ролика, которое согласно рис. 20.12 следующее:

$$Fr_r - kN - Qf_1r_1 - I\varepsilon = 0, \quad (20.21)$$

где I — момент инерции массы ролика, ε — угловое ускорение, f_1 — приведенный коэффициент трения в подшипнике ролика. Принимая, что толкатель на ролик воздействует силой $Q \approx N$, и подставляя определенную из уравнения (20.21) силу F в уравнение (20.20), получаем условие качения ролика:

$$\frac{k + f_1r_1}{r_r} + \frac{I\varepsilon}{r_r N} < f. \quad (20.22)$$

Чтобы было возможным образовать в ролике отверстие диаметром $2r_1$, необходимо обеспечить

$$r_1 > (1,6 \div 2)r_1, \quad (20.23)$$

где значение r_1 определяет прочностной расчет оси ролика.

Таким образом, при конструировании ролика необходимо выполнить условия (20.18), (20.22), (20.23), учитывая также условие (20.19), и проверить, не превышают ли контактные напряжения допустимых значений.

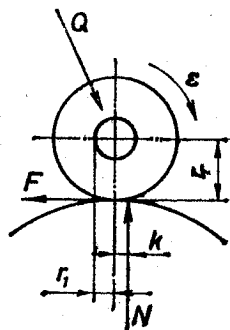


Рис. 20.12

§ 20.4. Построение профиля кулачка

К построению профиля кулачка можно приступить тогда, когда выбран или определен закон движения кулачка в какой-то из форм: $s = s(\varphi)$, $\psi = \psi(\varphi)$, $\psi = \psi(x)$ или $s = s(x)$, которые соответствуют данным на рис. 4.10 механизмам a и b , c , d , e . Кроме того, должен быть определен минимальный радиус r_0 кулачка, радиус ролика r_r , эксцентриситет e или расстояние a между центрами вращения, и длина коромысла l .

Графически эту задачу лучше всего решать с использованием метода обращения движения, который показан на рис. 5.31, 19.6, 19.7. Если в последнем рисунке точка A_2 является центром ролика, то ее относительная траектория e_1 является центральным профилем. Метод обращения движения является простым и не требует дополнительных разъяснений. Для кулачкового механизма, преобразующего поступательное движение в поступательное движение по заданному закону, графическое изображение закона

движения $s = s(x)$ одновременно является также профилем искомого кулачка.*)

Необходимо отметить, что точность профиля графически полученного кулачка обычно будет достаточна только для ориентировочных построений, а не для изготовления рабочего чертежа кулачка. Действительный закон движения графически построенного кулачка будет значительно отличаться от выбранного в связи с неизбежными ошибками. Поэтому графически построенные профили кулачков могут быть используемы только для небольших скоростей и небольших подвижных масс.

Аналитический метод расчета координат профиля кулачка также основан на принципе обращения движения. Рассмотрим расчет координат точек кулачка для наиболее часто встречающихся кулачковых механизмов. Центральной профилем и действительным профилем кулачков в полярных координатах можно выразить уравнениями

$$r = r(\alpha), \quad r_p = r_p(\alpha), \quad (1)$$

где α — угол профиля, соответствующий радиусу-вектору центрального профиля r или действительного профиля r_p .

Покажем, как определить координаты точек профиля, соответствующих уравнениям (1), для кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем, если задан закон движения $s = s(\varphi)$ и известны величины e , r_0 , r . Если сообщить всему механизму (рис. 20.13) вращение с угловой скоростью $-\omega$ вокруг центра O , то центр A ролика очертит неподвижный центральный профиль c . Угол ABA_0 равен углу вращения φ и является внешним углом треугольника ABO . Поэтому $\varphi = \alpha + (\beta_0 - \beta)$, и получим выражение

$$\alpha = \varphi + \beta - \beta_0, \quad (20.24)$$

$$\text{где } \beta = \arctg \frac{e}{s + \sqrt{r_0^2 - e^2}}, \quad \beta_0 = \arcsin \frac{e}{r_0}.$$

Из рисунка (20.13) видно также, что

$$r = \sqrt{e^2 (s + \sqrt{r_0^2 - e^2})^2} = \frac{e}{\sin \beta}. \quad (20.25)$$

По формулам (20.24) и (20.15) определяем координаты центрального профиля как для дезаксиального ($e \neq 0$), так и для цент-

*) Это справедливо только при взаимно перпендикулярных направлениях движения кулачка и толкателя и равных масштабных коэффициентах по осям.—Прим. ред.

рального ($e = 0$) кулачковых механизмов. Декартовы координаты для центрального профиля следующие:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha. \quad (20.26)$$

Действительный профиль является огибающей семейства окружностей. Поэтому для расчета его координат x_p, y_p необходимо продифференцировать уравнение семейства окружностей

$$(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 - r_r^2 = 0 \quad (2)$$

по переменному параметру семейства (в качестве этого параметра можно принять угол φ) и приравнять нулю. Решая полученное уравнение

$$(x_p - x)x' + (y_p - y)y' = 0$$

совместно с уравнением (2), получим координаты действительного профиля

$$x_p = x \pm \frac{y' r_r}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad y_p = y \mp \frac{x' r_r}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}. \quad (20.27)$$

Верхние знаки относятся к одной, а нижние — к другой огибающей. Согласно формулам (20.26) и (20.24)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \cos \alpha - r \left(1 + \frac{d\beta}{d\varphi}\right) \sin \alpha, \\ y' &= \frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \sin \alpha + r \left(1 + \frac{d\beta}{d\varphi}\right) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (20.28)$$

Подставляя эти выражения в формулы (20.27), определяем декартовы координаты точек действительного профиля и после этого, если это необходимо, также полярные координаты

$$r_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y_p}{x_p}. \quad (20.29)$$

Радиус профиля кулачка механизма с качающимся коромыслом (рис. 20.14) при заданных законе движения коромысла $\psi = \psi(\varphi)$ и величинах r_0, a, l, r , определяется следующим образом.

Из треугольника OAB_1

$$r = \sqrt{a^2 + l^2 - 2al \cos(\psi + \psi_0)}. \quad (20.30)$$

Соответствующий этому радиусу-вектору угол центрального профиля получим, применяя теорему синусов для треугольника OAB_1 :

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{l}{r} \sin(\psi + \psi_0) \right] + \varphi - \alpha_0. \quad (20.31)$$

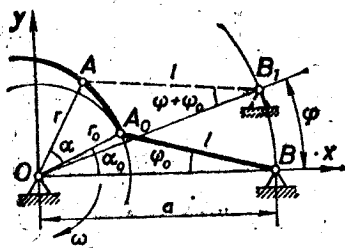


Рис. 20.14.

где $\alpha_0 = \arccos \frac{r_0^2 + a^2 - l^2}{2r_0 a}$. Декартовы координаты центрового профиля следующие:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi - l \cos (\psi + \psi_0 - \varphi), \\ y &= a \sin \varphi + l \sin (\psi + \psi_0 - \varphi), \end{aligned} \quad (20.32)$$

и их производные

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{d\varphi} = -a \sin \varphi + l \left(\frac{d\psi}{d\varphi} - 1 \right) \sin (\psi + \psi_0 - \varphi), \\ x'' &= \frac{d^2x}{d\varphi^2} = a \cos \varphi + l \left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} - 1 \right) \cos (\psi + \psi_0 - \varphi). \end{aligned} \quad (20.33)$$

Подставляя значения, соответствующие выражениям (20.32) и (20.33) в формулы (20.27), получаем декартовы координаты действительного профиля и после этого также полярные координаты

$$r_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{y_p}{x_p} - \alpha_0. \quad (20.34)$$

Для кулачкового механизма с плоским толкателем полярные координаты действительного профиля определяем согласно рис. 20.15:

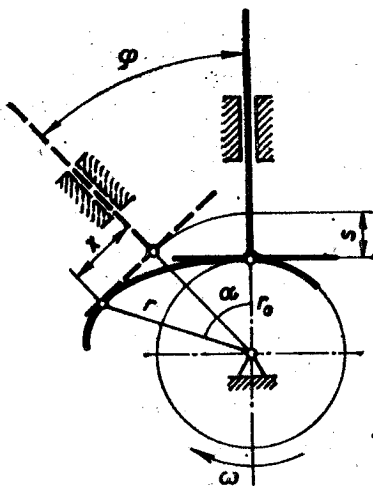


Рис. 20.15.

$$\alpha = \varphi + \arctg \frac{x}{r_0 + s}, \quad (20.35)$$

$$r = \sqrt{(r_0 + s)^2 + x^2}, \quad (20.36)$$

где по формуле (14.20) или (20.14)

$$x = \frac{v}{\omega} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Аналогично проводится синтез профилей кулачков других типов, позволяющих преобразовать поступательное движение кулачка во вращение коромысла и поступательное движение кулачка в поступательное движение толкателя.

Предыдущие формулы можно использовать также для аналитического решения задачи анализа; тогда неизвестными являются s и φ .

§ 20.5. Расчет пружины

Если кулачковый механизм замыкается пружиной, то ее жесткость необходимо выбрать такой, чтобы ролик ни на одном из участков движения не отрывался от профиля кулачка. Отрыва не будет, если сила пружины T , вместе с приложенной к

толкателю силой Q и нормальной реакцией R_{12} кулачка, сообщают массе m толкателя ускорение a , заданное законом движения. Согласно 2-му закону Ньютона

$$T + Q - R_{12} \cos \theta = ma. \quad (20.37)$$

В момент начала отрыва $R_{12} = 0$. При расчете пружины обычно принимают $Q = 0$, выдвигая требование, чтобы сила пружины превышала максимальное значение силы инерции.

Расчет удобнее всего производится графически (рис. 20.16). Начертив кривую силы инерции $J = -ma = J(s)$ для участков удаления и приближения, проводят касательную к этой кривой, соответствующую силе упругости пружины

$$T = c(b + s). \quad (20.38)$$

Жесткость пружины пропорциональна $c = \operatorname{tg} \theta$. Кривая силы инерции на рис. 20.16 соответствует заданному на рис. 20.3 закону движения толкателя.

Если сила Q направлена противоположно скорости толкателя и кривая $J = J(s)$ на участке, где она касается прямой (20.38), при приближении толкателя не проходит ниже кривой удаления, как это показано на рис. 20.16, то полученная пружина для участка удаления получится слишком жесткой, а на участке приближения будет происходить отрыв толкателя, за которым последует удар. Во избежание этого, пружину необходимо выбрать такой, чтобы в опасном месте $T \geq ma + Q$.

Пружина характеризуется двумя параметрами — предварительной деформацией b и жесткостью c , из которых одна может быть выбрана произвольно. Увеличивая b , получаем более мягкую пружину, но увеличивается работа, расходуемая на сжатие пружины. Эта работа пропорциональна трапецевидной площади под прямой (20.38). Однако эта работа не теряется, так как на участке приближения сила пружины действует как движущая сила. Аналогично определяют пружину для толкателя коромыслового типа.

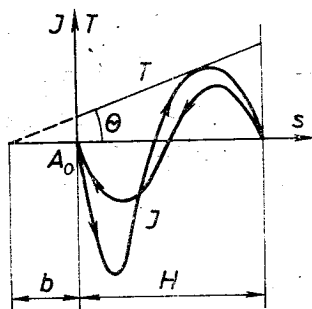


Рис. 20.16.

§ 20.6. Влияние упругости толкателя на закон движения толкателя

В связи с упругостью толкателя могут возникнуть значительные отклонения от выбранного закона движения толкателя. В наибольшей степени это относится к случаям, когда в кулачковом механизме имеют место мягкие или твердые удары, т. е. когда имеются разрывы в диаграммах ускорения или скорости. Для упрощения изготовления кулачка иногда синтезированный безударный профиль заменяют профилем, состоящим из

сопряженных дуг окружностей. Хотя дуги стыкуются тангенциально, однако в этих точках стыковки возникают мягкие удары. Периодически повторяясь, удары вынуждают колебаться массы механизма и искажают заданное движение толкателя. Подобное явление происходит также при пульсации ускорения без скачков.

Динамически эквивалентная схема кулачкового механизма показана на рис. 20.17. Дифференциальное уравнение движения верхнего конца толкателя дает 2-й закон Ньютона:

$$m\ddot{y} = c_2(s - y) - P, \quad (20.39)$$

где m — приведенная к толкателю масса, c_2 — жесткость толкателя. Приложенная к массе m сила $P = Q + F + T$, где Q — приведенное к толкателю полезное сопротивление, F — приведенная сила трения, $T = c(b + y)$ — сила упругости пружины. Звенья механизма, за исключением толкателя, приняты недеформируемыми. Уравнение (20.39) можно переписать так:

$$\ddot{y} + \frac{c + c_2}{m} y = - \frac{Q + F + cb - c_2 s}{m}. \quad (20.40)$$

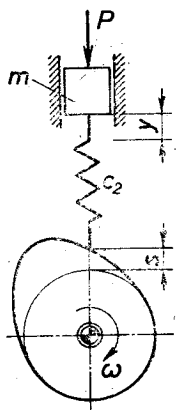


Рис. 20.17.

Интегрируя это уравнение, получают закон движения $y = y(t)$ верхнего конца толкателя, который в общем случае отличается от закона движения $s = s(t)$ нижнего конца. Решение $y = y(t)$ зависит не только от $m, c, c_2, s = s(t)$, но также от законов изменения сил Q и F .

С помощью уравнения (20.40) без интегрирования можно описать максимальное ускорение \ddot{y}_{\max} массы m и потом определить коэффициент динамичности механизма

$$\gamma = \frac{\ddot{y}_{\max}}{a_{\max}}, \quad (20.41)$$

который показывает, во сколько раз увеличится динамическая нагрузка механизма (силы инерции), если учитывать упругость толкателя. Коэффициент динамичности, как уже было видно в § 16.1, зависит от того, как близко к резонансу работает механизм, т. е. от отношения цикловой частоты p ударов и цикловой частоты собственных колебаний механизма

$$k = \sqrt{(c + c_2)/m}. \quad (20.42)$$

Чем больше коэффициент динамичности, тем больше движение $y = y(t)$ верхнего конца толкателя отличается от движения $s = s(t)$ нижнего конца. Согласно результатам исследования [45] при $p \ll k$ имеем, что $\gamma \approx 1$ для безударных профилей и $\gamma \approx 2$ или $\gamma \approx 3$ для профилей с мягкими ударами, у которых мгновенно меняются или только значение ускорения, или же одновременно значение и направление. Однако в районе резонанса коэффициент динамичности во всех случаях значительно возрастает.

§ 20.7. Изготовление кулачков

Методы изготовления кулачков можно разделить на четыре группы: 1) метод разметки; 2) метод малых делений; 3) метод копирования; 4) кинематический метод. Метод разметки малопродуктивен и сравнительно неточен. Профиль кулачка изготавливают по чертежу, обрабатывая заготовку вручную или с помощью машин. Для увеличения точности иногда применяют лупу. Профиль кулачка для этого вида изготовления можно построить графически.

Применяя метод малых делений, заготовке кулачка согласно рабочему чертежу постепенно сообщают малые линейные или угловые перемещения относительно режущего инструмента. Если диаметр фрезы или шлифовального круга равен диаметру ролика, то центр упомянутых режущих инструментов помещают в соответствующих чертежу точках центрального профиля. Иногда режущий инструмент перемещают по касательной к профилю. Полученный в результате такой обработки профиль состоит из дуг окружностей или отрезков прямых, которые касаются действительного профиля кулачка. Обычно после этого еще необходима дополнительная обработка. Этот метод трудоемкий и процесс изготовления кулачка утомительный. Обоих недостатков можно частично избежать, применяя металлообрабатывающие станки с программным управлением. Укомплектованные шаговыми электродвигателями, эти машины работают по методу малых делений.

Производительным и точным является метод копирования, если применяют уже изготовленный эталонный кулачок, по которому в процессе обработки движется щуп. Движение щупа копируют фреза или шлифовальный круг. Таким образом можно изготовить одновременно несколько кулачков. Иногда копирование реализуют, ведя центр щупа по чертежу.

Кинематический метод характеризуется тем, что заготовка и инструмент связаны кинематической цепью; таким образом, достигается такое относительное движение, какое имеет кулачок относительно толкателя в кулачковом механизме. Для осуществления упомянутой кинематической цепи применяются разные приспособления. Без приспособлений на универсальных фрезерных станках можно изготовить профили, которые состоят из дуг окружностей, спиралей Архимеда или эвольвент. В других случаях необходимы приспособления [45]. Для достижения необходимой точности число звеньев механизмов этих приспособлений не должно быть большим, и звенья должны быть достаточно жесткими.

§ 20.8. Кулачково-фрикционные механизмы

Кулачково-фрикционные механизмы являются центроидными механизмами. Их можно назвать также фрикционными механизмами с переменным передаточным отношением. Эти механизмы

встречаются в полиграфических и в других машинах, приспособлениях и аппаратах [66, 95].

Пример кулачково-фрикционного механизма показан на рис. 20.18. Элементы высшей пары 12 имеют рихтовку для снижения проскальзывания или же ведущий ролик, покрытый резиной или другим фрикционным материалом. Таким образом образуется псевдокинематическая связь. Рассмотрим метод построения профиля кулачка, предполагая, что эта связь кинематическая, т. е. проскальзывания в точке S не имеется.

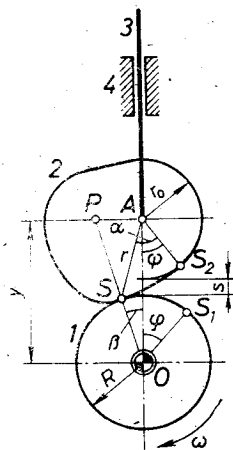


Рис. 20.18.

В начале наблюдения движения точки S_1 и S_2 совпадают, т. е. $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. В произвольный момент времени касание ролика и кулачка происходит в точке S , которая является полюсом относительного движения 12. Абсолютный полюс 14 находится в точке O . Второй абсолютный полюс 24 находится в точке P пересечения прямой полюсов OS и прямой, перпендикулярной вектору $v = \psi \cdot AP$ скорости точки A . Поэтому $\omega R = \psi \cdot SP$ и

$$v = \frac{AP}{SP} R\omega = cR\omega. \quad (20.43)$$

Полученное уравнение можно написать следующим образом:

$$\frac{ds}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = cR\omega. \quad (20.44)$$

В задаче синтеза задан закон движения $s = s(\varphi)$ ведомого звена 3, а также R и r_0 . Это дает возможность для каждого угла φ определить зависимость коэффициента c от φ

$$c = \frac{1}{R} \frac{ds}{d\varphi}. \quad (20.45)$$

Величина SP определяется из прямоугольного треугольника OAP .

$$SP = \frac{1}{1-c^2} \{-R \pm [R^2 - (1-c^2)(R^2 - y^2)]^{1/2}\}, \quad (20.46)$$

где $y = R + r_0 + s$ является известной величиной. Так как

$$AP = c \cdot SP, \quad \beta = \arctg \frac{AP}{y}, \quad (20.47)$$

то полярные координаты синтезируемого профиля следующие:

$$r = (R^2 + y^2 - 2Ry \cos \beta)^{1/2}, \quad \alpha = \psi + \arcsin \left(\frac{R}{r} \sin \beta \right), \quad (20.48)$$

где угол ψ определяется по формуле

$$\psi = \frac{1}{\omega} \int_0^{\varphi} \frac{v}{AP} d\varphi, \quad (20.49)$$

которая вытекает из выражения $v = \dot{\psi} \cdot AP$.

Практически важным преимуществом кулачково-фрикционных механизмов является то, что от одного вращающегося цилиндра можно приводить в движение несколько таких механизмов.

§ 20.9. Кулачково-зубчатые механизмы

Кулачково-зубчатые механизмы обычно являются объединением дифференциальной передачи и кулачкового механизма. Таким образом, можно получить неравномерное вращение ведомого звена, а также его остановку и кратковременный реверс, т. е. вращение противоположного направления. Кулачково-зубчатые механизмы встречаются в автоматах, машинах и аппаратах, их применяют также в цепных передачах. Если цепь имеет большой шаг (длинные звенья), то при равномерном вращении ведущей звездочки цепь и ведомая звездочка движутся неравномерно. Этот недостаток можно устранить, сообщая ведущей звездочке неравномерное вращение. Из нескольких типов [36] кулачково-зубчатых механизмов рассмотрим только один.

Кулачково-зубчатый механизм с неподвижным кулачком 4 показан на рис. 20.19. Механизм приводится в движение водилом 1, с которым шарнирно связан секторобразный сателлит 2, являющийся одновременно также коромыслом кулачкового механизма. Движение сателлита относительно водила определяет профиль кулачка. Если этот профиль является окружностью, то $\omega_3 = \omega_1$, т. е. ведомый вал 3 вращается совместно с ведущим валом 1 как одно твердое тело.

Предположим, что движение коромысла имеет место, начиная с положения OB_0A_0 . Когда звено 1 поворачивается на угол φ , механизм занимает положение OBA , звено 3 поворачивается на угол ψ , при этом точка E начальной окружности колеса 3 описывает дугу $E_0E = r_3\psi = r_3\varphi + r_2\theta$. Следовательно,

$$\psi = \varphi + \frac{r_2}{r_3} \theta = \varphi + \frac{z_2}{z_3} \theta, \quad (20.50)$$

где z_2 и z_3 — соответствующие числа зубьев колес. Это выражение можно получить также с помощью формулы Виллиса (7.6).

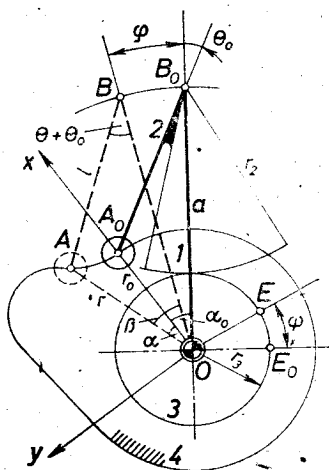


Рис. 20.19.

Профиль конструируемого кулачка должен удовлетворять закону вращения ведомого вала $\psi = \psi(\varphi)$, сформулированному в задаче синтеза. Если размеры a, l, r_0, r_2, r_3 заданы или выбраны, то, подставляя $\psi = \psi(\varphi)$ в выражение (20.50), найдем закон относительного движения $\theta = \theta(\varphi)$. Необходимые для реализации этого движения полярные координаты центрального профиля в функции угла θ определяют так:

$$r = [a^2 + l^2 - 2al \cos(\theta + \theta_0)]^{1/2}. \quad (20.51)$$

Здесь $\theta_0 = \arcsin\left(\frac{r_0}{l} \sin \alpha_0\right)$, $\alpha_0 = \arccos \frac{a^2 + r_0^2 - l^2}{2ar_0}$; $\alpha = \varphi + \beta - \alpha_0$,

где

$$\beta = \arcsin \left[\frac{l}{r} \sin(\theta + \theta_0) \right]. \quad (20.52)$$

Через найденные полярные координаты r, α центрального профиля можно выразить декартовы координаты с помощью формул (20.26) и по описанному в § 20.4 методу получить координаты действительного профиля. Для достижения желаемого движения ведомого вала кулачка можно придать также вращение.

Раздел 21

СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

§ 21.1. Зубчатые передачи и предъявляемые к ним требования

Простая зубчатая передача (рис. 21.1) представляет собой трехзвенный механизм с одной высшей парой. Упомянутый механизм можно рассматривать как многокулачковый механизм, в котором кулачки заходят в зацепление постепенно один за другим. Эти кулачки называются *зубьями*, соприкосновение зубьев — *зацеплением*, линия соприкосновения — *линией зацепления*. Таким образом, плоские зубчатые передачи являются механизмами с взаимно огибающими кривыми (§ 19.2), и основные принципы конструирования их профилей уже известны.

С зубчатыми передачами мы познакомились уже в §§ 4.2, 7.1 и 11.2 при рассмотрении классификаций механизмов, кинематического анализа и кинетостатики. В этом разделе коротко рассмотрим кинематический синтез наиболее распространенных зубчатых передач. Динамический синтез, невольвентное зацепление, некруглые колеса, волновые передачи и другие специальные вопросы здесь не рассматриваем, так как теория зубчатых передач является важной составной частью курса деталей машин и упомянутые вопросы широко изложены в литературе [27, 31, 36, 47, 67]. В первых восьми параграфах этого раздела рассмотрим цилиндрические эвольвентные зубчатые колеса, а в последних трех — пространственные зубчатые передачи.

Построение профилей зубьев является главной задачей кинематического синтеза зубчатых колес. Эта задача, как было выяснено в § 19.2, имеет бесконечно много решений, так как свободно можно выбрать профиль одного зуба или линию зацепления. Однако свободу выбора ограничивает множество диктуемых практикой требований, которым должны удовлетворять зубчатые передачи как широко используемые механизмы в машинах и аппаратах.

Во избежание появления дополнительных динамических усилий, вибраций и шума, к простым зубчатым передачам предъявляют требования, чтобы их передаточное отношение

$$u = \omega_1 / \omega_2 = \text{const.} \quad (21.1)$$

Это означает, что, согласно формулам (19.4), относительный полюс зубчатых колес (рис. 5.14 и 19.5) не должен перемещаться и относительные центроиды должны быть окружностями. Эти окружности в теории зубчатых передач часто называют начальными окружностями качения, а относительный полюс — полюсом зацепления. Из только что сказанного следует так называемый главный закон кинематики зацепления: нормаль профилей зубьев, проведенная в точке зацепления, всегда должна проходить через полюс зацепления, который делит расстояние между центрами зубчатых колес на части, обратно пропорциональные угловым скоростям зубчатых колес.

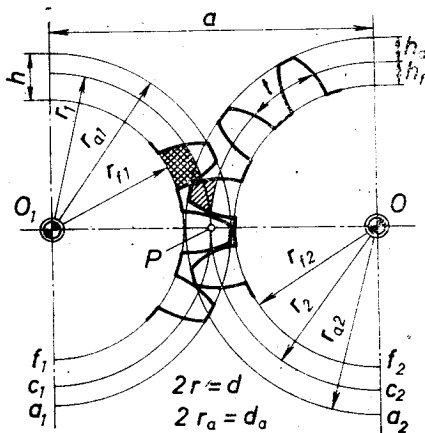


Рис. 21.1.

Основному закону кинематики зацепления может удовлетворить неограниченное множество профилей разнообразных форм, однако профили должны быть взаимно соответствующими. В результате износа и ошибок изготовления требование (21.1) можно выполнить только приближенно. Одним из требований, предъявляемых к профилям зубчатых колес, является легкость и точность их изготовления.

Не менее важными являются требования эксплуатации. В связи с неизбежными деформациями станины и других звеньев и также в связи с ошибками размеров необходимо, чтобы зубчатые колеса были нечувствительны относительно небольших изменений расстояния между осями вращения. Необходимо, чтобы вместо износившегося или разрушенного зубчатого колеса можно было легко изготовить другое. Часто необходимо, чтобы данное зубчатое колесо могло бы работать поочередно в зацеплении с другими зубчатыми колесами различного диаметра, в том числе

и с копией данного зубчатого колеса, т. е. чтобы образовался комплект зубчатых колес.

В качестве кривой, очерчивающей профили зубьев, упомянутым требованиям удовлетворяет предложенная Эйлером эвольвента окружности. В настоящее время применяется главным образом эвольвентный профиль зубьев зубчатых колес.

§ 21.2. Основные размеры зубчатых колес

В нормальных зубчатых колесах, которые называют также *нулевыми зубчатыми колесами*, начальные окружности, катящиеся друг по другу без скольжения и являющиеся центроидами в относительном движении, являются также делительными окружностями зубчатых колес. Шагом зацепления t называется измеряемое по дуге делительной окружности расстояние между аналогичными точками двух соседних зубьев. Шаги совместно работающих зубчатых колес должны быть одинаковыми. Диаметр делительной окружности d , число зубьев z и шаг связывает уравнение

$$zt = \pi d. \quad (21.2)$$

В этом случае расстояние между осями зубчатых колес при внешнем зацеплении

$$a = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)t/\pi.$$

Если выбрать шаг зубчатых колес рациональным числом, то a и d получатся числами трансцендентными. Для устранения этого неудобства отношению

$$m = t/\pi \quad (21.3)$$

придаются рациональные, стандартизованные, выраженные в миллиметрах значения, и принято называть это отношение модулем зубчатых колес. Теперь диаметр делительной окружности

$$d = mz \quad (21.4)$$

и модуль

$$m = d/z. \quad (21.5)$$

Следовательно, модуль является длиной, выраженной в миллиметрах, которая в π раз меньше шага; модуль показывает, сколько миллиметров диаметра делительной окружности приходится на один зуб. Шаг $t = \pi m$ является трансцендентным числом.

В некоторых странах (США, Англия) вместо модуля применяют так называемый диаметральный шаг или питч (pitch). Питчем называют число зубьев, приходящееся на один дюйм диаметра делительной окружности, т. е.

$$p = \frac{z}{d_{\text{в дюймах}}} = \frac{d_{\text{мм}}}{d_{\text{в дюймах}}} \frac{1}{m} = \frac{25,4}{m}.$$

Такой является зависимость между питчем и модулем.

Часть зуба с однократной штриховкой (рис. 21.1) называют *головкой зуба*, а часть с двойной штриховкой — *ножкой зуба*. Высоты головки, ножки и зуба стандартизованы как линейные функции модуля:

$$h_a = m, \quad h_f = 1,25m, \quad h = 2,25m. \quad (21.6)$$

Диаметры окружностей вершин и впадин следующие:

$$d_a = d + 2h_a, \quad d_f = d - 2h_f. \quad (21.7)$$

Измеряемые по делительной окружности толщина зуба и ширина впадины приблизительно равны $0,5t$. Между переработанными профилями предусматривается зазор, который стандартизован в зависимости от модуля и точности обработки зубьев.

Пример 21.1. Какого диаметра стальной диск необходимо выточить для изготовления нормального зубчатого колеса, у которого $z = 30$ и $m = 5$ мм?

Решение. Согласно предыдущим формулам

$$d_a = d + 2h_a = mz + 2m = m(z + 2) = 160 \text{ мм.}$$

Примечание. Следовательно, модуль нормальных зубчатых колес можно определить также по следующей формуле:

$$m = d_a / (z + 2).$$

Толщину зубчатого колеса определяют из прочностного расчета зубьев.

§ 21.3. Эвольвентное зацепление

Из дифференциальной геометрии известно: если какая-то кривая является геометрическим местом центров кривизны другой кривой, то первую кривую называют *эволютой* второй кривой, а вторую — *эвольвентой* первой кривой. В теории зубчатых колес особое значение имеет эвольвента окружности, которую обычно называют просто эвольвентой. Ее образование можно представить следующим образом: если натянутую нить сматывать с неподвижной окружности, то каждая точка нити опишет эвольвенту. Если прямую без скольжения обкатывать по окружности, то каждая точка прямой описывает эвольвенту. Все b эвольвент одной и той же окружности являются эквивалентными.

Радиус ρ кривизны эвольвенты (рис. 21.2) равен дуге A_0C окружности. Поэтому

$$\rho = r\theta, \quad p = (r^2 + \rho^2)^{1/2}, \quad \theta = \rho/r = \operatorname{tg} \alpha.$$

Угол $\beta = \theta - \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$. Такую функцию называют *инволютой* или функцией эвольвенты и записывают так:

$$\beta = \operatorname{inv} \alpha. \quad (1)$$

Образование внешнего эвольвентного зацепления показано на

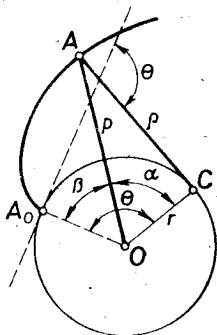


Рис. 21.2.

рис. 21.3. К начальным окружностям качения в полюс P проводят общую касательную. Принимая, что колесо с центром O_1 является ведущим, проводят через полюс прямую s , образующую угол α с общей касательной. Прямую s выбирают в качестве линии зацепления и строят соответствующие профили. Такая задача построения профилей уже была решена на рис. 19.8. Угол α называется *углом зацепления**). Его стандартизированное значение $\alpha = 20^\circ$; раньше было принято $\alpha = 15^\circ$.

Соответствующие выбранной линии зацепления (линии соприкосновения) профили строят следующим образом. Из центров зубчатых колес проводят окружности b_1 и b_2 , соприкасающиеся с линией зацепления в точках N_1 и N_2 . Эти окружности называются *основными окружностями*, их радиусы

$$\begin{aligned} r_{b_1} &= r_1 \cos \alpha, \\ r_{b_2} &= r_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (21.8)$$

Профили зубьев получают, обкатывая линию зацепления как по одной, так и по другой основным окружностям. При обкатывании точка P линии зацепления описывает эвольвенты E_1E_1 и E_2E_2 , которые являются искомыми профилями. Докажем, что эти профили удовлетворяют основному закону кинематики зацепления.

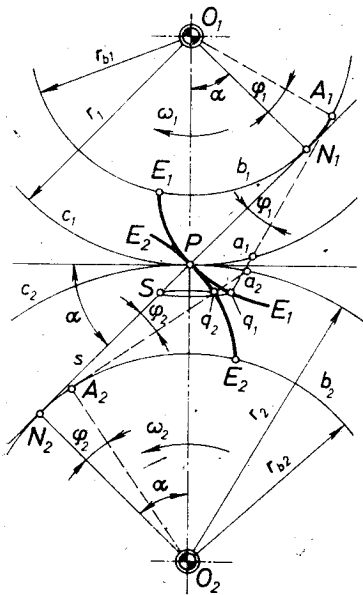


Рис. 21.3.

В изображенном на рис. 21.3 положении зубчатых колес упомянутый закон удовлетворен, так как зацепление происходит в полюсе. Для проверки другого положения поворачиваем ведущее колесо в направлении вращения на угол φ_1 . Тогда точка A_1 совпадает с точкой N_1 , точка a_1 — с точкой P , точка q_1 — с точкой S , и профильная нормаль A_1q_1 ведущего колеса совпадает с линией зацепления s . Если на центроиде ведомого колеса отложим дугу Pa_2 , равную дуге Pa_1 , и проведем от a_2 касательную к основной окружности b_2 , то получим угол φ_2 поворота ведомого

колеса. При повороте на этот угол точка a_2 попадает в полюс P , и профильная нормаль профиля ведомого колеса также совпадает

* По ГОСТ 16530-70 угол зацепления обозначается α_w . — Прим. ред.

ет с линией зацепления s . Еще только следует убедиться в том, что оба профиля действительно соприкасаются в точке S . Это, очевидно, будет тогда, когда $a_1q_1 = a_2q_2 = PS$. Так как профили являются эвольвентами, то

$$a_1q_1 = \widehat{A_1N_1} = \varphi_1 r_{b_1}, \quad a_2q_2 = \widehat{A_2N_2} = \varphi_2 r_{b_2}.$$

Необходимо доказать, что

$$\varphi_1 r_{b_1} = \varphi_2 r_{b_2}, \quad (21.9)$$

т. е. что при вращении колес принадлежащая линии зацепления точка зацепления S перемещается по линии зацепления так, как будто линия зацепления подобно нити перематывается с основной окружности ведущего колеса на основную окружность ведомого колеса.

Подставляя в формулу (21.9) выражения (21.8), видим, что $\varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2$, т. е. дуга Pa_1 равна дуге Pa_2 . Следовательно, профили эвольвент удовлетворяют основному закону зацепления.

Для построения зубьев проводим окружности вершин и впадин (рис. 21.4). Окружности вершин пересекают эвольвенты в точках e_1 и e_2 , которые образуют крайние точки зубьев. Окружности впадин обычно меньше основных окружностей, но если $z > 40$, то — больше ($\alpha = 20^\circ$). Начальные точки E_1 и E_2 эвольвент на основных окружностях определяют углы

$$\beta_1 = \beta_2 = \text{inv } \alpha.$$

Нерабочую часть профиля ножки зуба от точек k еще продолжают как эвольвенту до точек E , а потом — как радиальную прямую, закругляя радиусом угол u окружностей впадин $r_0 = (0,15, \dots, 0,3)m$. Если зубчатые колеса изготавливаются методом обкатывания (§ 21.6), то режущий инструмент сам образует необходимую форму зуба.

Если зубчатое колесо с осью O_1 является ведущим колесом, то зацепление начинается в точке A , в которой окружность вершин ведомого колеса пересекает линию зацепления N_1N_2 . В точке A точка e_2 на окружности вершин зуба ведомого колеса совпадает с точкой k_1 профиля ножки ведущего зубчатого колеса. Зацепление заканчивается в точке B , когда точка e_1 головки

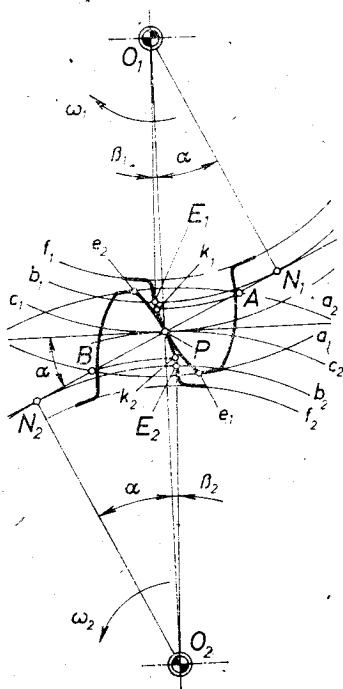


Рис. 21.4.

зуба ведущего зубчатого колеса совпадает с точкой k_2 профиля ножки ведомого зубчатого колеса. Отрезок AB линии зацепления называется *рабочей частью линии зацепления* или *активной линией зацепления*.

Во время зацепления одной пары зубьев точка зацепления совершает путь AB ; при этом часть профиля k_1P работает совместно с частью e_2P , а Pe_1 — с частью Pk_2 . Таким образом, остаются неиспользованными части эвольвент E_1k_1 и E_2k_2 на ножках обоих зубьев. Использовать всю эвольвенту профиля ножки зуба и вместе с тем всю эвольвенту зуба можно тогда, когда окружность вершин противоположащего колеса проходит через точку M . Колесо, у которого использована эвольвента всего зуба до основной окружности, называют *предельным* колесом.

Если головки зубьев парного колеса сделаны выше (точка M остается внутри окружности вершин), то кромка увеличенной головки вырезает впадину в ножке зуба в районе точки E , снижая прочность зуба и уменьшая длину рабочего участка профиля ножки. Это явление называется *подрезанием*. Следовательно

отрезок N_1N_2 линии зацепления является максимально возможным, который используется только тогда, когда оба зубчатые колеса являются предельными колесами.

Если изменяются направления вращения зубчатых колес, но колесо с центром O_1 остается ведущим колесом, то нагрузку воспринимают симметричные профили зубьев, линия зацепления изменяет свое направление и становится зеркальным отображением предыдущей линии. Это же получится и в том случае, если ведомое колесо сделать ведущим, а направление вращения оставить прежним.

Рассматривая рисунок 21.5, видно, что зуб начинает зацепление в положении E_aA , а выходит из зацепления в положении E_bB . Во время зацепления

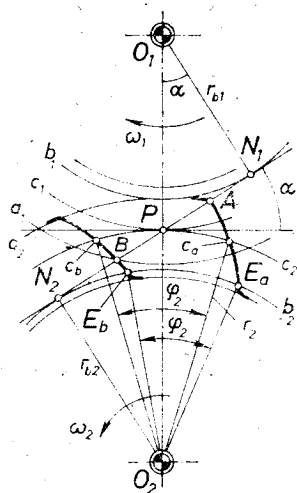


Рис. 21.5.

одной пары зубьев каждая точка начальной окружности описывает дугу зацепления, равную

$$c = \widehat{c_a c_b} = r_2 \varphi_2 = r_2 \widehat{E_a E_b} / r_{b_2}.$$

В связи с вышеупомянутым «эффектом перематывания» длины зацепления дуга $E_a E_b$ основной окружности равна длине рабочей части AB линии зацепления. Поэтому, учитывая формулы (21.8), дуга зацепления —

$$c = AB / \cos \alpha. \quad (21.10)$$

Отношение дуги зацепления к шагу

$$\varepsilon = \frac{c}{t} = \frac{AB}{t \cos \alpha} \quad (21.11)$$

называется коэффициентом перекрытия. Для нормальной работы зубчатых колес необходимо обеспечить, чтобы по крайней мере $\varepsilon = 1$, тогда в зацеплении находится только одна пара зубьев; следующая пара попадает в зацепление тогда, когда предыдущая пара выходит из зацепления. Учитывая износ, ошибки изготовления и монтажа, необходимо, чтобы $\varepsilon > 1$. У цилиндрических зубчатых колес с прямыми зубьями $\varepsilon = 1,4; \dots; 2$. Если $\varepsilon = 2$, то в зацеплении одновременно находятся две пары зубьев.

Если в выражении (21.11) заменим длину рабочей части линии зацепления, определенной из уравнения

$$N_1 B + N_2 A - AB = N_1 N_2$$

после подстановки

$$N_1 B = \sqrt{(O_1 B)^2 - r_{b_1}^2}, \quad N_2 B = \sqrt{(O_2 A)^2 - r_{b_2}^2},$$

$$N_1 N_2 = r_1 \sin \alpha + r_2 \sin \alpha = a \sin \alpha,$$

то получим выражение коэффициента перекрытия

$$\varepsilon = \frac{(r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2)^{1/2} + (r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2)^{1/2} - a \sin \alpha}{t \cos \alpha}, \quad (21.12)$$

которое освобождает от необходимости графического определения дуги зацепления для определения ε по формуле (21.11)*.

Заканчивая рассмотрение эвольвентного внешнего зацепления, сделаем несколько выводов.

Чем больше угол зацепления α тем: 1) зубья можно получить более высокими, а их количество может быть меньше, так как основные окружности уменьшаются и меньшими можно взять окружности впадин; 2) длиннее становится рабочая часть Pk профиля ножки и тем самым уменьшается износ ножки; 3) уменьшается длина линии зацепления AB , точка зацепления S не слишком удаляется от полюса зацепления P и согласно формуле (12.40) уменьшается мощность трения и выделение тепла во время работы зацепления.

Упомянутые три обстоятельства являются преимуществами угла зацепления $\alpha = 20^\circ$ по сравнению с ранее применяемым $\alpha = 15^\circ$. Однако уменьшение AB связано с уменьшением степени перекрытия, так как в формуле (21.11) расстояние AB уменьшается быстрее, чем $\cos \alpha$. С увеличением числа зубьев перекрытие увеличивается.

*) Следует заметить, что коэффициент перекрытия не зависит от размеров зубчатых колес, т. е. от модуля. В этом нетрудно убедиться, потому что выражения в числителе и знаменателе в (21.12) пропорциональны модулю.— *Прим. ред.*

и N_2 . Поэтому подрезания в ножках зубьев большого зубчатого колеса исключены. Чтобы траектория относительного движения точки e_2 головки зуба большого зубчатого колеса не пересекалась с профилем ножки зуба малого зубчатого колеса, окружность a_2 вершин большого зубчатого колеса может приближаться к центру O_2 только до точки N_1 . Если a_2 проходит через точку N_1 , то N_1 совпадает с начальной точкой A дуги зацепления, и малое колесо является предельным. Таким образом, часть эвольвенты профиля головок зубьев большого зубчатого колеса невозможно использовать.

Внутреннее зацепление дает компактную конструкцию зубчатой передачи. Выгодны условия соприкосновения профилей, так как выпуклая поверхность соприкасается с вогнутой, поэтому контактные напряжения меньше, чем у внешнего зацепления. Перекрытие для внутреннего зацепления больше, чем для внешнего зацепления. Однако зубья внутреннего зацепления труднее изготавливать, и валы обоих колес невозможно при данной конструкции установить в подшипниках с обеих сторон.

§ 21.4. Износ профилей и трение во внешнем зацеплении

Профили малого 1 и большого 2 зубчатых колес, соприкасающихся в точке S (рис. 21.8), скользят один по другому с относительной скоростью (§ 12.6)

$$v_s = (\omega_1 \pm \omega_2)b. \quad (1)$$

Знак плюс относится к внешнему, а знак минус — к внутреннему зацеплению; b — расстояние точки зацепления S от полюса зацепления P .

Интенсивность износа в точке S профиля большого зубчатого колеса 2 пропорциональна удельной скорости скольжения этой точки

$$c_2 = v_s/v_2 \cos \gamma. \quad (2)$$

Учитывая формулу (12.42) и рис. 21.8, имеем

$$v_2 \cos \gamma = \omega_2 \cdot O_2S \cos(90^\circ - \alpha - \beta) = \omega_2 \cdot O_2S \cdot \sin(\alpha + \beta) = \omega_2 \rho_2, \quad (3)$$

где ρ_2 — радиус кривизны эвольвенты в точке S . Подставляя выражения (1) и (3) в формулу (2), получаем, что

$$c_2 = \frac{b}{\rho_2} (u_{12} \pm 1), \quad c_1 = \frac{b}{\rho_1} (1 \pm u_{21}). \quad (21.13)$$

Последняя формула выражает удельную скорость скольжения точки S профиля зубчатого колеса 1.

Интенсивность износа пропорциональна также угловой скорости данного зубчатого колеса. Поэтому фактор износа для точек профилей зубчатых колес 1 и 2 (на рис. 21.8 показан

штриховкой) выражается так:

$$\Delta_1 = c_1 \omega_1, \quad \Delta_2 = c_2 \omega_2. \quad (21.14)$$

В § 11.2 рассмотрено определение сил в эвольвентном зацеплении без учета трения между профилями зубьев. Теперь выясним, с какой силой Q зубчатое колесо 2 воздействует на зубчатое колесо 1 в точке зацепления S профилей, если учитывается трение (рис. 21.9).

Строим параллелограмм повернутых скоростей для точек S по обе стороны полюса зацепления P зубчатых колес согласно

уравнению $\vec{v}_1 = \vec{v}_s + \vec{v}_2$, или иначе $\vec{v}_s^{13} = \vec{v}_s^{12} + \vec{v}_s^{23}$. Учитываем, что при переходе точки зацепления через полюс направление относительного скольжения изменяется на противоположное. Поэтому при прохождении точки S через полюс сила Q

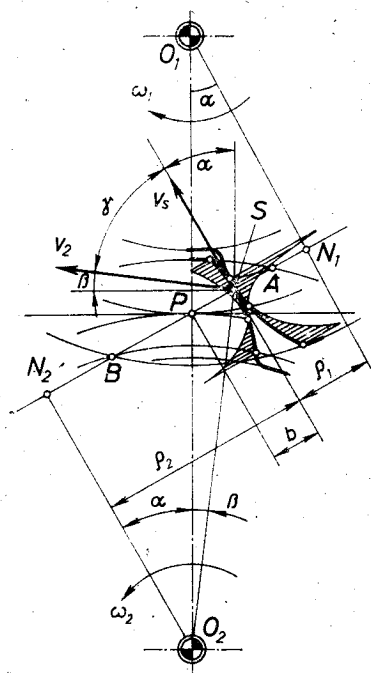


Рис. 21.8.

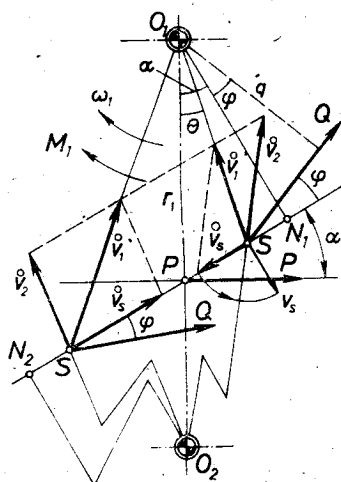


Рис. 21.9.

меняет направление на двукратный угол трения, т. е. на угол 2φ . Внезапное изменение направления силы равнозначно мягкому удару. Частота ударов определяется произведением nz (n — частота вращения колеса), так как удар появляется при прохождении каждой пары зубьев через полюс зацепления. Следовательно благодаря трению, зацепление является источником возбуждения колебаний.

В технических расчетах используют окружное усилие

$$P = M_1 / r_1, \quad (21.15)$$

с которым зубчатое колесо 2 действует в полюсе зацепления на зубчатое колесо 1, а последнее с такой же противоположно на

правленной силой — на зубчатое колесо 2. Выясним, как реакция в точке зацепления Q связана с окружной силой P .

В связи с энергетической эквивалентностью обоих упомянутых сил их моменты относительно точки O_1 должны быть одинаковыми. Поэтому $Qq = Pr_1$ и

$$Q = Pr_1/q, \quad (4)$$

где плечо $q = O_1S \cdot \cos(\alpha + \varphi - \theta)$. Применяя теорему синусов для треугольника O_1PS находим, что $O_1S : \cos \alpha = r_1 : \cos(\alpha - \theta)$. Учитывая обе последние зависимости, получим искомое выражение:

$$Q = P \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \varphi - \theta)}. \quad (21.16)$$

При переходе точки зацепления через полюс углы θ и φ меняют знаки. Когда точка S попадает в полюс, реакция в точке зацепления приобретает максимальное значение:

$$Q = \frac{P}{\cos(\alpha + \varphi)}. \quad (21.17)$$

Если эту силу разложим на две взаимно перпендикулярные компоненты, то получим определенную формулой (21.15) тангенциальную силу P и силу $P_0 = Q \sin(\alpha + \varphi)$, направленную в сторону центра O_1 , или по-другому можно записать:

$$P_0 = P \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (21.18)$$

В передаче мощности участвует только сила P . Однако валы и подшипники зубчатых колес нагружаются как силой P , так и силой P_0 .

§ 21.5. Минимальное число зубьев

Если окружности головок a_1 и a_2 зубчатых колес проходят через точки N_1 и N_2 , то длина рабочей части линии зацепления равна отрезку N_1N_2 . Эвольвентные профили обоих зубчатых колес участвуют в зацеплении по всей длине от начала эвольвенты до точки на окружности головок, и оба зубчатые колеса являются предельными колесами (рис. 21.10).

Высоту головки зуба обычно выражают как линейную функцию модуля:

$$h_a = \kappa m, \quad (21.19)$$

где κ — коэффициент высоты головки зуба, достигающий для предельных колес максимального значения:

$$h_{a_1 \max} = \kappa_{1 \max} m, \quad h_{a_2 \max} = \kappa_{2 \max} m.$$

Часто высоты головок зубьев обоих зубчатых колес одинаковы, т. е. $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$. Для нормальных зубчатых колес $\kappa = 1$. В автомобилях, тракторах и в других машинах применяют

зубчатые колеса с укороченными головками зубьев; для этих зубчатых колес $\kappa = 0,8$.

Если высоты головок зубьев обоих зубчатых колес одинаковы, то только малое колесо можно выполнить как предельное колесо. Окружность головок большого зубчатого колеса тогда

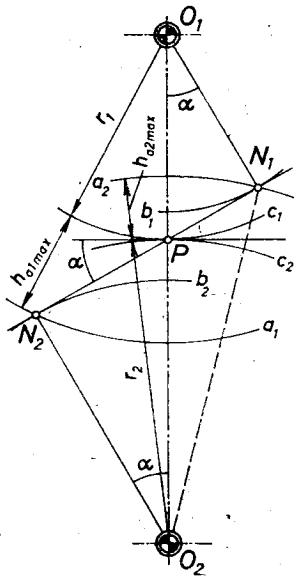


Рис. 21.10.

проходит через точку N_1 и у малого колеса работает вся эвольвента профиля. Для одинаковых высот головок подрезание сперва образуется у малого колеса и тем быстрее, чем это колесо меньше, чем больше сопряженное с ним зубчатое колесо; чем меньше угол зацепления α и чем больше коэффициент высоты головок κ . Подрезание снижает степень перекрытия и

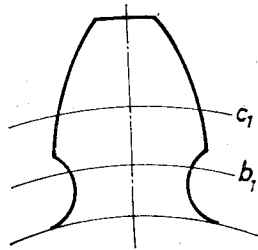


Рис. 21.11.

прочность зуба. Если подрезание не сформировано режущим инструментом в процессе изготовления зубчатого колеса, то эти колеса не могут работать совместно из-за самозаклинивания зубьев. Зуб с подрезанием показан на рис. 21.11. При проектировании зубчатого зацепления передаточное отношение передачи задано или выбрано, а модуль определяется прочностным расчетом. Для достижения наименьшего межосевого расстояния при внешнем зацеплении

$$a = \frac{m}{2} (z_1 + z_2),$$

малое колесо стараются проектировать с минимальным числом зубьев $z_1 = z_{\min}$, т. е. стараются создать малое колесо как предельное.

Выясним, каким является наименьшее возможное число зубьев колеса z_{\min} , чтобы в нем еще не образовалось подрезание ножки.

Из треугольника $O_1O_2N_1$, показанного на рис. 21.10, следует, что

$$O_2N_1 = [(O_1O_2)^2 + (O_1N_1)^2 - 2(O_1O_2)(O_1N_1)\cos\alpha]^{1/2}.$$

Подставляя

$$O_2N_1 = r_2 + \kappa m, \quad O_1O_2 = r_1 + r_2, \quad O_1N_1 = r_1 \cos \alpha,$$

$$r_2 = u_{12}r_1 = u_{12} \frac{d_1}{2} = \frac{m}{2} u_{12} z_{\min},$$

получаем выражение для минимального числа зубьев:

$$z_{\min} = \frac{2\kappa}{[u_{12}^2 + (2u_{12} + 1) \sin^2 \alpha]^{1/2} - u_{12}}. \quad (21.20)$$

Если $R_2 \rightarrow \infty$, то $u_{12} \rightarrow \infty$ и $z_{\min} \rightarrow z_{\min}^{\infty}$, где

$$z_{\min}^{\infty} = 2\kappa / \sin^2 \alpha \quad (21.21)$$

является минимальным числом зубьев такого колеса, которое может работать совместно с зубчатой рейкой, следовательно, совместно со всеми зубчатыми колесами данного модуля, число зубьев которых $z_2 > z_{\min}^{\infty}$).

Подставляя в формуле (21.12)

$$r_{a_1} = r_1 + \kappa m, \quad r_{a_2} = r_2 + \kappa m, \quad r_{b_1} = r_1 \cos \alpha, \quad r_{b_2} = r_2 \cos \alpha,$$

$$a = r_1 + r_2, \quad r_1 = \frac{mz_1}{2}, \quad r_2 = \frac{mz_2}{2}, \quad \frac{z_2}{z_1} = u_{12}, \quad t = \pi m,$$

получаем выражение коэффициента перекрытия

$$\varepsilon = \frac{z_1}{2\pi} \left[\left(\frac{(1 + 2\kappa/z_1)^2}{\cos^2 \alpha} - 1 \right)^{1/2} \pm \left(\frac{(u_{12} + 2\kappa/z_1)^2}{\cos^2 \alpha} - u_{12}^2 \right)^{1/2} - (1 \pm u_{12}) \operatorname{tg} \alpha \right]. \quad (21.22)$$

Нижние знаки минус относятся к внутреннему эвольвентному зацеплению, которое здесь не рассматриваем. Если в эту формулу подставляем $z_1 = z_{\min}$, то можем определить соответствующий минимальному числу зубьев коэффициент перекрытия.

*) Более универсальную формулу для определения z_{\min} , годную как для внешнего, так и для внутреннего зацепления, можно получить простыми преобразованиями из выражения для O_2N_1 после подстановки значений $r_1' = mz_1/2$ и $r_2 = mz_2/2$:

$$O_2N_1 = 1/2m (z_2 + 2\kappa_2) = 1/2m (z_2^2 + z_1^2 \sin^2 \alpha + 2z_1z_2 \sin^2 \alpha)^{1/2}$$

или

$$z_2 + 2\kappa_2 = z_2 [1 + u_{21} (u_{21} - 2) \sin^2 \alpha]^{1/2},$$

где

$$u_{21} = -z_1/z_2 = \omega_2/\omega_1.$$

После разложения радикала в ряд по биному Ньютона и сокращения, получим

$$z_1 \geq z_{\min} = 4\kappa_2 / [(2 - u_{21}) \sin^2 \alpha].$$

Для внешнего зацепления $u_{21} < 0$, для внутреннего зацепления $u_{21} > 0$, для зацепления колеса с рейкой $u_{21} = 0$. Если относительная высота головки большого колеса $\kappa_2 = 1$ и угол зацепления 20° , то

$$z_{\min} = 34,2 / (2 - u_{21}).$$

— Прим. ред.

Рассчитанные значения этих величин для нормальных зубчатых колес внешнего зацепления ($\alpha = 20^\circ$, $\kappa = 1$) помещены в табл. 21.1. Видно, что минимальное число зубьев нормального зубчатого колеса внешнего зацепления $z_{\min} = 12$. Однако если

Таблица 21.1

u_{12}	z_{\min}	z_2	ε	u_{12}	z_{\min}	z_2	ε
1	12	12	1,42	3	15	45	1,61
1,23	13	16	1,47	6,32	16	101	1,68
1,85	14	26	1,54	∞	17,1	∞	1,75

хотим, чтобы колесо с малым числом зубьев могло работать совместно со всеми эвольвентными зубчатыми колесами данного модуля, то минимальное число зубьев этого колеса не должно быть меньше $z_{\min}^{\infty} = 17$. Еще меньшее число зубьев можно получить, применяя корригированные зубчатые колеса.

§ 21.6. Изготовление зубчатых колес

Методы изготовления зубчатых колес можно разделить на две группы — методы копирования и методы обкатывания.

Самым распространенным примером метода копирования является фрезерование зубчатых колес дисковыми фрезами. Сначала тщательно вычерчивают чертеж впадины и после этого изготавливают два взаимно примыкающих шаблона впадины. По внутреннему шаблону изготавливают фасонный резец для обработки диска фрезы, а наружный шаблон используют для контроля профиля изготавливаемой дисковой фрезы. Вытачивают диск фрезы, соответствующий профилю наружного шаблона и обрабатывают в нем секторообразные вырезы. Этот диск обрабатывают фасонным резцом на специальных затывочных токарных станках, в которых при вращении диска резец приближается к оси диска и в секторообразном вырезе отводится назад. Поверхность изготовленной таким способом дисковой фрезы содержит спирали Архимеда. Профиль поверхности не изменяется, если фрезу затачивают, снимая металл с плоскостей выреза, которые проходят через ось вращения фрезы.

Каждую фрезу применяют для нескольких чисел зубьев данного модуля, таким образом допуская ошибки в очертании профилей зубьев, так как нецелесообразно для каждого числа зубьев изготавливать отдельную фрезу. Для изготовления зубчатых колес данного модуля необходим целый комплект фрез. Имеются комплекты, состоящие из 8, 15 и даже 26 фрез. Чем больше фрез в комплекте, тем точнее нарезаемый профиль зубчатых колес. Из-за неизбежных ошибок профилей, зубчатые колеса, изготовленные по данному методу, непригодны для передачи больших мощностей.

Сравнительно редко применяют другой метод копирования — фрезерование зубьев с помощью пальцевых фрез. Необходимые для отливки зубчатых колес модели также изготавливают по чертежу профиля, следовательно, методом копирования.

Методы обкатывания для изготовления зубчатых колес намного удобнее и точнее. Режущий инструмент имеет вид зубчатого колеса или зубчатой рейки. Во время обработки между двумя движениями снятия стружки реализуется относительное шаговое движение режущего инструмента и заготовки, которое соответствует движению в эксплуатационных условиях. Таким образом, профили зубьев изготавливаемого колеса получают как огибающие кривые профиля режущего инструмента при обкатывании центроид режущего инструмента и обрабатываемого зубчатого колеса одной по другому без скольжения. Режущий инструмент в виде зубчатого колеса начали применять в 1899 году (метод Феллоу). Для изготовления большего колеса внутреннего зацепления пока не известен другой, более удобный метод.

Позднее для изготовления эвольвентных зубчатых колес начали применять режущий инструмент в виде зубчатой рейки (метод Маага). Этот метод является особенно точным, так как профили эвольвентной зубчатой рейки являются прямыми, поэтому режущий инструмент легко изготавливается и контролируется.

Вместо зубчатой рейки можно применять червячную фрезу с витками трапецидальной формы и средним углом подъема $\delta \leq 5^\circ$. Фреза устанавливается под углом δ относительно плоскости, перпендикулярной к оси обрабатываемого зубчатого колеса. Такое фрезерование зубьев по методу обкатывания весьма производительно.

Шлифование закаленных зубчатых колес также происходит по методу обкатывания.

Методами обкатывания получают самые точные зубчатые колеса. Для изготовления зубчатых колес одного модуля необходим только один режущий инструмент. В случае зубчатой рейки этот режущий инструмент очень прост. Головки зубьев режущего инструмента удлинены для образования необходимого радиального зазора зубчатых колес. Эти удлиненные головки образуют также переработавшую часть ножек зубьев.

Особым преимуществом метода обкатывания является то, что можно изготовить стандартным инструментом так называемые корригированные зубчатые колеса, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

§ 21.7. Корригированные зубчатые колеса

При конструировании компактных зубчатых передач с минимальными габаритами сталкиваются с необходимостью снижения числа зубьев малого колеса, следовательно, при заданном передаточном отношении и размера большого зубчатого колеса.

Однако, как было показано, число зубьев нормального зубчатого колеса не может быть меньше, чем $z_{\min}^{\alpha} = 17$, так как зубчатая рейка является стандартным режущим инструментом для изготовления зубчатых колес.

На практике допускаются небольшие подрезания.

Если вместо минимального числа зубьев используют предельное число зубьев

$$z_{\text{пр}} = \frac{5}{6} z_{\min}^{\alpha}, \quad (21.23)$$

которое для нормальных колес равно 14, то появляется подрезание ножки, существенно не влияющее на степень перекрытия. При работе нарезанного рейкой при этих условиях колеса, зацепляющегося с другим, нарезанным иным способом, заклинивание не происходит.

Если желаем получить зубчатые колеса с еще меньшим числом зубьев, то необходимо отказаться от нормальных зубчатых колес и применять корригированные колеса. Коррекция, как увидим дальше, применяется также из других соображений.

Простейшим видом коррекции является коррекция по высоте головок зубьев. Для стандартизованных зубчатых колес с укороченными головками зубьев при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0,8$ по формулам (21.21) и (21.23) получаем $z_{\min}^{\alpha} = 14$ и $z_{\text{пр}} = 12$. Этот способ снижает не только минимальное число зубьев, но одновременно также коэффициент перекрытия. Для устранения этого недостатка одновременно с укорачиванием головок зуба у большого колеса, удлиняют головку зуба малого колеса. Так, например, применяют $\kappa_1 = 1,5$; $\kappa_2 = 0,7$.

Максимальное перекрытие с высотами головок, не соответствующими нормальным зубчатым колесам, можно получить, выполняя оба колеса как предельные колеса. Тогда согласно формуле (21.11)

$$\varepsilon = \frac{N_1 N_2}{t \cos \alpha} = \frac{(r_1 + r_2) \sin \alpha}{t \cos \alpha} = (z_1 + z_2) \frac{\text{tg } \alpha}{2\pi}. \quad (21.24)$$

Полученная формула пригодна для расчета суммы минимального числа зубьев, если установить, чтобы перекрытие передачи с предельными колесами $\varepsilon > 1$. Этому требованию соответствует

$$(z_1 + z_2)_{\min} > \frac{2\pi}{\text{tg } \alpha}. \quad (21.25)$$

Подставляя здесь $\alpha = 20^\circ$, находим, что минимальная сумма чисел зубьев равна 18; этой сумме по формуле (21.24) соответствует коэффициент перекрытия $\varepsilon = 1,04$. Тем самым возможности коррекции по высоте головок зубьев исчерпаны.

Формула (21.25) показывает, что увеличение угла зацепления уменьшает минимальную сумму чисел зубьев. Этого можно достичь в передачах, составленных из так называемых K -колес. Буква K здесь обозначает коррекцию, т. е. сдвиг зубчатой рейки.

Вместо α меняют также букву V , которая соответствует немецкому слову *Verschiebung*.

Самым распространенным способом коррекции зубчатых колес является изготовление K -колес методом обкатывания с помощью зубчатой рейки, которая отодвинута или приближена к центру зубчатого колеса. Сдвиг зубчатой рейки в направлении от центра обрабатываемого зубчатого колеса принимают как положительный, а в направлении к центру — как отрицательный. Полученные колеса соответственно называются K_+ -колесами или K_- -колесами.

Зубчатые колеса, изготовленные без сдвига зубчатой рейки, называются *нулевыми колесами*. Нулевые колеса представляют собой уже рассмотренные нормальные зубчатые колеса; число зубьев меньшего из колес пары не может быть меньше z_{\min}^{α} или $z_{\text{пр}}$. Передатки, составленные из нулевых колес, называются *нулевыми передатками*, а составленных из K -колес — K -передатками. Возможны также KO передатки, в которых сдвиги компенсируются. От чистых нулевых передач они отличаются специальными формами зубьев. Для K_+ -колес зубья шире впадин, а для K_- -колес — наоборот.

Производя сдвиг, относительное движение между рейкой и заготовкой оставляют неизменным. Это означает, что делительная окружность зубчатого колеса остается на прежнем месте, так как относительные центры не меняются, хотя и средняя линия режущей зубчатой рейки больше не прикасается к делительной окружности. Следовательно, делительная окружность с диаметром $d = mz$ является окружностью качения в процессе изготовления зубчатого колеса. Однако при введении в беззазорное зацепление колес радиусы начальных окружностей и угол зацепления зависят от межосевого расстояния зубчатых колес. K -передатку можно составить из разных K -колес, которые изготовлены с помощью одной и той же зубчатой рейки.

Используя положительный сдвиг рейки (рис. 21.12), можно устранить подрезание ножки колеса с $z < z_{\min}$. Для этого необходимо отодвинуть линию a_2 головок зубчатой рейки до точки N_1 , переместив таким образом рабочую часть линии зацепления AB в пределах отрезка N_1N_2 и преобразовав этим изготавливаемое зубчатое колесо в предельное колесо при меньшей высоте головки рейки. Положительный сдвиг можно еще увеличить, пока зубья не станут острыми, а перекрытие еще вполне достаточное.

Отрицательный сдвиг можно применять только тогда, когда число зубьев обрабатываемого зубчатого колеса больше $z_{\text{пр}}$. При

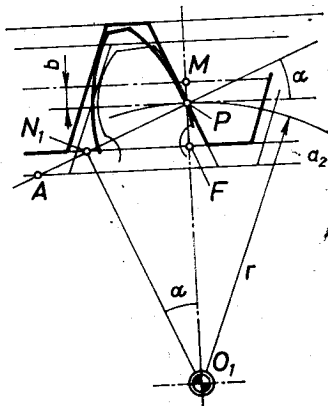


Рис. 21.12.

отрицательном сдвиге линия головок зубчатой рейки должна перейти точку N_1 ; в противном случае появится подрезание ножки зуба.

Сдвиг обычно выражают как линейную функцию модуля

$$b = xm, \quad (21.26)$$

где x — коэффициент сдвига.

Обозначая z_k число зубьев зубчатого колеса, полученного при смещении линии головок рейки до точки N_1 , определим зависимость между x и z_k . Согласно рис. 21.12 $b = PM = FM - FP = xm - N_1P \sin \alpha = xm - r \sin^2 \alpha$. Учитывая формулы (21.26) и (21.4),

$$x = \kappa - z_k \frac{\sin^2 \alpha}{2}.$$

Этому выражению при помощи формулы (21.21) придаем вид

$$x = \kappa (z_{\min}^{\infty} - z_k) / z_{\min}^{\infty}. \quad (21.27)$$

Для стандартизированной зубчатой рейки с $\alpha = 20^\circ$ и $\kappa = 1$ получим

$$x = (17 - z_k) / 17, \quad (21.28)$$

но, если допускаем небольшое подрезание, то

$$x = (14 - z_k) / 14. \quad (21.29)$$

Максимальное значение сдвига определяет пересечение профилей. Зубья становятся острыми, когда соответственно формуле (21.29) коэффициент сдвига $x = 0,529$ и число зубьев K -колеса $z_k = 8$. В исключительных случаях допускают значительные подрезания, при этом

$$z_k = z_{\min \min} = 5.$$

Из-за пересечения профилей высота таких зубьев уменьшена и перекрытие уменьшено до предела $\varepsilon = 1$.

Целью изготовления K -колес не всегда является снижение числа зубьев. С помощью K -колес можно достичь несколько желаемых свойств зубчатой передачи. При этом удобен метод блокирующих контуров [39].

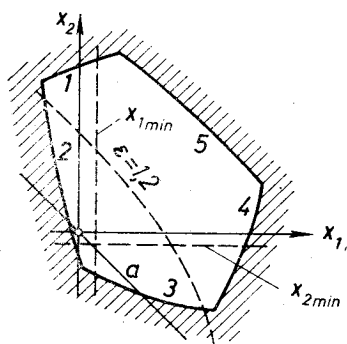


Рис. 21.13.

Диаграмму блокирующих контуров (рис. 21.13) строят в осях координат, на которых отложены коэффициенты x_1 и x_2 сдвига обоих совместно работающих K -колес. Каждая точка диаграммы изображает какую-то K -колесную передачу. Так, например, начало координат изображает нулевую передачу. Точки прямой a , проведенной через начало координат, содержат KO -передачи. Эта прямая с осью x_1 образует угол -45° . Линии 1 и 2 ограничи-

вают передачи, у которых зубчатое колесо 1 создает подрезания в ножках зубьев зубчатого колеса 2. Линии 3 и 4 имеют аналогичное значение по отношению подрезания в зубчатом колесе 1. Линия 5 содержит передачи, у которых коэффициент перекрытия $\varepsilon = 1$. Точки заштрихованной площади изображают передачи, непригодные для практического использования.

В диаграмме блокирующих контуров проведены линии $x_{1 \min}$ и $x_{2 \min}$, которые показывают начала подрезаний, совершенных режущей зубчатой рейкой. Можно провести также линии постоянного перекрытия, постоянной ширины зубьев, минимальной относительной скорости скольжения и другие линии. Используя эти линии, можно конструировать K -передачи с необходимой прочностью зубьев на изгиб и с необходимой износостойкостью, работающих в условиях допустимого перекрытия. Для получения K -передачи с желаемым межосевым расстоянием a , в диаграмме необходимо провести параллельную прямой a прямую через какую-то точку, соответствующие сдвиги которой дают желаемое a . На этой прямой выбирают оптимальные x_1 и x_2 , которые одновременно удовлетворяют также другим условиям.

Расчет корригированных зубчатых колес внешнего зацепления установлен государственным стандартом ГОСТ 16 532 — 70. Там приведены также соответствующие блокирующие контуры.

§ 21.8. Зубчатые колеса с косыми зубьями

Рассмотренные до этого зубчатые колеса с прямыми зубьями соприкасаются по прямой, параллельной осям зубчатых колес. Каждый зуб входит в зацепление внезапно по всей длине и внезапно также выходит из зацепления. Из-за небольшого перекрытия одновременно в зацеплении находятся только одна или две пары зубьев. Поэтому ошибки профилей оказывают заметное влияние на качество работы, возбуждая вибрации и шум в процессе работы.

Для устранения этого недостатка раньше применялись ступенчатые зубчатые колеса. Их получают, закрепляя в одном блоке несколько сравнительно тонких, взаимно смещенных зубчатых колес с прямыми зубьями. Теперь вместо ступенчатых применяют зубчатые колеса с косыми зубьями, которые можно рассматривать как ступенчатые зубчатые колеса, составленные из бесконечно большого числа бесконечно тонких зубчатых колес с прямыми зубьями, смещенных друг относительно друга на бесконечно малый угол.

Образование профилей зубьев зубчатых колес с косыми зубьями показано на рис. 21.14, а. Если на ленту, которая перематывается с одного основного цилиндра на другую нанесем прямую e_0f , параллельную осям зубчатых колес, то эта прямая образует профили прямого зуба. Если на ту же самую ленту нанесем прямую ef , то она образует в качестве профиля косоугольного зуба линейчатую поверхность. Эти сопряженные поверхности в

сечении s плоскостью, перпендикулярной оси зубчатого колеса дают эвольвенты, т. е. в каждом сечении происходит эвольвентное зацепление, рассмотренное в предыдущих параграфах. Профили зубьев содержат эвольвенты и прямые, непараллельные оси зубчатого колеса, по которым соприкасается одно зубчатое

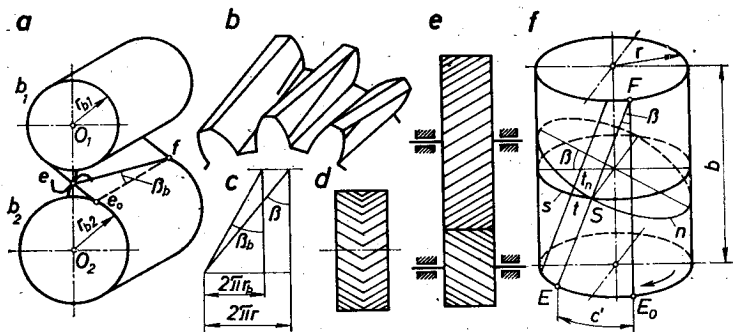


Рис. 21.14.

колесо с другим. Эти мгновенные контактные прямые показаны на рис. 21.14, b .

Линиями пересечения поверхности зубьев соосными (коаксиальными) цилиндрами являются винтовые линии. Поэтому иногда зубчатые колеса с косыми зубьями называют винтовыми колесами с параллельными осями. Однако от настоящих винтовых колес (§ 21.11) они значительно отличаются.

Угол скручивания винтовой линии зависит от радиуса пересекающего цилиндра. На поверхности b основного цилиндра этот угол β_b , а на поверхности делительного цилиндра (рис. 21.14, c) угол скручивания β . Оба угла скручивания связывает угол зацепления α . Действительно (рис. 21.4, c), существует пропорция $\operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \beta_b = 2\pi r / 2\pi r_b = r / r \cos \alpha$, поэтому

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta_b}{\cos \alpha}. \quad (21.30)$$

Определим коэффициент перекрытия зубчатых колес с косыми зубьями. Полагаем, что точка E в торцевом сечении делительного цилиндра уже прошла дугу зацепления s и профили рассматриваемой пары зубьев в торцевом поперечном сечении выходят из зацепления в точке E_0 . Однако зацепление этой пары зубьев еще продолжается в других поперечных сечениях и кончается только в точке F , когда точка E прошла по своей делительной окружности дополнительную дугу зацепления $c' = b \cdot \operatorname{tg} \beta$. Следовательно, общий коэффициент перекрытия зубчатого колеса с косыми зубьями

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \frac{c}{t} + \frac{b \operatorname{tg} \beta}{t} \quad (21.31)$$

является суммой коэффициента перекрытия в поперечном сечении и коэффициента перекрытия от наклона зубьев. У зубчатых колес с прямыми зубьями коэффициент перекрытия наклона зубьев $\varepsilon_\beta = 0$. Чем больше угол скручивания и длина зубчатого колеса, тем больше ε_β . В зубчатых колесах с косыми зубьями одновременно в зацеплении могут находиться даже 10 и больше пар зубьев. Поэтому работа этих колес мягкая и тихая, они пригодны для передачи больших мощностей.

В отличие от зубчатых колес с прямыми зубьями, на зубчатое колесо с косыми зубьями со стороны второго колеса действует кроме окружной силы еще и аксиальная составляющая. Аксиальную составляющую необходимо уравнивать упорным подшипником или применять зубчатые колеса с зубьями в форме елочки (рис. 21.14, *d*). Последние особенно пригодны при больших и ударных нагрузках. Для обеспечения самоустанавливания этих зубчатых колес, валу одного колеса необходимо дать возможность небольшого аксиального перемещения. Для более удобного изготовления иногда в средней части колеса зубья прерваны.

Зубчатые колеса с косыми зубьями и одним и тем же модулем не могут образовать комплекта, так как зубчатое колесо не может работать в паре со своей копией. Это потому, что находящиеся в зацеплении колеса имеют противоположно направленные витки (рис. 21.14, *e*). Зубчатые колеса с косыми зубьями изготавливают методами обкатки и копирования. В обоих случаях зубчатому колесу относительно режущего инструмента необходимо придать дополнительное относительное движение, которое не имеется при обработке зубчатых колес с прямыми зубьями.

Если косые зубья фрезеруют с помощью дисковых фрез, то модуль фрезы и число зубьев необходимо взять по данным нормального сечения n (рис. 21.14, *f*). Шаг и модуль в нормальном сечении связаны с соответствующими параметрами поперечного сечения следующим образом:

$$t_n = t \cos \beta, \quad m_n = m \cos \beta. \quad (21.32)$$

Расчетное число зубьев нормального сечения равно числу зубьев такого воображаемого зубчатого колеса, радиус начальной окружности которого равен радиусу кривизны R_n эллипса нормального сечения в точке зацепления S . Из дифференциальной геометрии известно, что $R_n = a^2/b$, где a и b являются полуосями эллипса. В нашем случае $a = r/\cos \beta$, $b = r$ и $R_n = r/\cos^2 \beta$. Следовательно, для выбора фрезы необходимое условное или эквивалентное число зубьев нормального сечения следующее:

$$z_v = \frac{2\pi R_n}{t_n} = \frac{2\pi r}{t \cos^3 \beta} = \frac{z}{\cos^3 \beta}. \quad (21.33)$$

В нормальных зубчатых колесах с прямыми зубьями нельзя достичь любого желаемого межосевого расстояния a в связи со стандартизацией модулей. В некорректированных зубчатых ко-

лесах с косыми зубьями это возможно, так как стандартизации подлежат только модули в нормальном сечении, но a зависит от модуля в поперечном сечении, которое можно изменить, изменяя угол скручивания. От угла скручивания зависит также минимальное число зубьев, которое меньше, чем в зубчатых колесах с прямыми зубьями.

§ 21.9. Зацепление Новикова

Коэффициент перекрытия в зубчатых колесах с косыми зубьями согласно формуле (21.31) является суммой от коэффициента перекрытия в поперечном сечении и коэффициента перекрытия от наклона зубьев. Выбрав достаточную длину зубчатого колеса и угол скручивания зубьев, перекрытие от наклона можно создать в несколько раз больше перекрытия в поперечном сечении. Это наталкивает на мысль отказаться от перекрытия в поперечном сечении и конструировать зубчатые колеса, имеющие только перекрытие от наклона. Тогда форму профилей зубьев больше не связывает главный закон кинематики зацепления, и профили можно выбрать более произвольно, руководствуясь только соображениями прочности и долговечности. Такое зацепление нового типа в 1955 г. предложил советский ученый М. Новиков и показал возможность применения этого зацепления как для зубчатых колес с параллельными осями, так и для зубчатых колес, оси которых пересекаются или перекрещиваются. Реализацию идеи Новикова несколько лет позже в Западной Германии начал разрабатывать Вильдхабер.

Теория зубчатых колес Новикова существенно отличается от теории эвольвентных, циклоидальных и других зубчатых колес. Зубчатая передача Новикова не является ни механизмом с взаимно огибающими кривыми, ни механизмом центроид. Длина

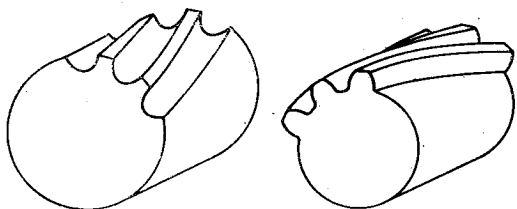


Рис. 21.15.

линии зацепления в поперечном сечении близка к нулю. Перекрытие обеспечивается благодаря наклону зубьев при перемещении точки зацепления профилей в аксиальном направлении зубчатых колес. Зубчатые колеса Новикова с прямыми зубьями невозможны.

В теории зубчатых колес Новикова сохраняются понятия цилиндров качения и модуля. Рабочие части профилей зубьев обычно строят с помощью дуг окружностей (рис. 21.15). При со-

прикосновении выпуклой поверхности с вогнутой значительно компенсируется недостаток теоретического зацепления Новикова — точечное касание. Вместо точки появляется площадка касания и контактные напряжения уменьшаются. Эвольвентные зубчатые колеса имеют соприкосновение по линии, но в связи с ошибками в направлении осей зубчатых колес это не всегда полностью реализуется.

Зубчатые колеса Новикова обрабатывают методами копирования или обкатки, но для изготовления каждого совместно работающего зубчатого колеса необходим свой режущий инструмент.

§ 21.10. Конические зубчатые колеса

Техническую задачу — передавать вращение между валами 1 и 2 с пересекающимися в точке O под углом δ осями при условии

$$\dot{i} = \omega_1/\omega_2 = \text{const}$$

— можно реализовать с помощью передачи с коническими зубчатыми колесами. Для анализа применим метод обращения движения.

Если всей передаче сообщим угловую скорость $(-\omega_2)$ вокруг оси вала 2, то вал 2 станет неподвижным (рис. 21.16), а вал 1 будет совершать одновременно два вращения: вокруг своей оси с угловой скоростью ω_1 и вокруг оси вала 2 с угловой скоростью $(-\omega_2)$. Абсолютным движением вала 1 в таких условиях, как известно из кинематики, является вращение вокруг мгновенной оси OP с угловой скоростью

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_1 + (-\bar{\omega}_2).$$

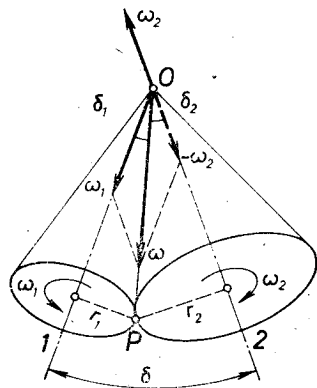


Рис. 21.16.

В реальном механизме это движение является относительным движением вала 1 относительно вала 2, которое не меняется от сообщения всей передаче угловой скорости $(-\omega_2)$. Следовательно, относительное движение валов 1 и 2 является движением вокруг неподвижной точки O или сферическим движением. Аксиоды сферического движения в общем случае являются коническими поверхностями. В конкретном случае они являются круглыми конусами с углами при вершинах $2\delta_1$ и $2\delta_2$, так как в действительном движении передачи скорость произвольной точки P на оси OP

$$\dot{v}_P = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

и

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{OP \sin \delta_2}{OP \sin \delta_1} = \text{const.}$$

Аксиоды называются начальными конусами. Они аналогичны вышерассмотренным начальным цилиндрам качения в зубчатых передачах с параллельными осями. Число зубьев пропорционально радиусам конусов качения в произвольно выбранной точке P образующей конуса, поэтому передаточное отношение конической передачи

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (21.34)$$

Присоединяя к этому выражению равенство

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta,$$

можно определить углы δ_1 и δ_2 по заданным u и δ .

Кинематическое образование профилей зубьев конических зубчатых колес показано на рис. 21.17, *a*. Рабочие поверхности зубьев очерчиваются прямой PO при обкатывании по основным

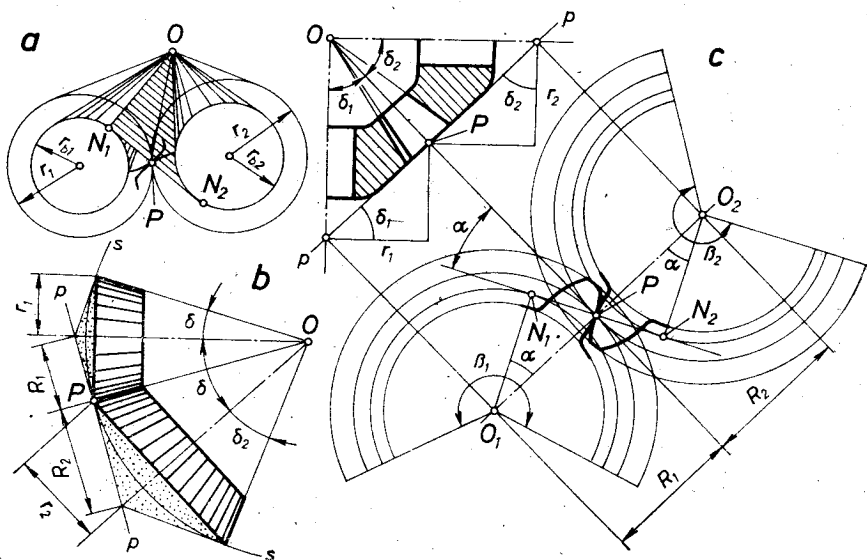


Рис. 21.17.

конусам плоскости, с которой связана прямая PO . Каждая точка этой прямой описывает сферическую эвольвенту.

Сфера не разворачивается на плоскость. Поэтому точное проектирование конических зубчатых колес затруднительно. Обычно применяют приближенный метод Тредгольда: сферическую поверхность $s-s$ замещаем соприкасающейся плоскостью сферы $p-p$ и сферические эвольвенты — плоскими. К начальным конусам присоединяют дополнительные конусы с образующими P (рис. 21.17, *b*). Зубья пересекают сферы и поверхности дополнительных конусов. Конические и сферические кривые сечения

боковой поверхности зуба мало отличаются друг от друга. Поэтому зубья проектируют следующим образом. Развертки дополнительных конусов совмещают с соприкасающейся плоскостью $p-p$, получая при этом секторообразные зубчатые колеса (рис. 21.17, с) с радиусами начальных окружностей

$$R_1 = r_1 / \cos \delta_1, \quad R_2 = r_2 / \cos \delta_2. \quad (21.35)$$

Числа зубьев круглых колес, полученных из разверток дополнительных конусов (при условии, что секторы дополнены до кругов)

$$z_{v1} = z_1 / \cos \delta_1, \quad z_{v2} = z_2 / \cos \delta_2. \quad (21.36)$$

Из соображений прочности определяют модуль m и тогда в касательной плоскости $p-p$ строят обычное эвольвентное зацепление.

Полученные профили зубьев можно перенести на дополнительные конусы, которые выполняют также на заготовках колес, и обрабатывать зубья по разметке. Резец должен двигаться по прямым, которые проходят через точку O , так как поверхность каждого зуба представляет собой некруглый конус с вершиной в точке O . Конечно, изготовление зубчатых колес по такому методу копирования весьма неточно. Обычно зубья строгают на специальных станках по методу обкатывания с резцом прямого профиля, не выполняя разметки.

Если δ_1 или δ_2 равен 90° , то соответствующее коническое зубчатое колесо преобразуется в т. н. октоидальное колесо, которое соответствует зубчатой рейке в теории цилиндрических зубчатых колес.

Условия зацепления определяются величинами, измеряемыми в соприкасающейся плоскости. Подрезание также зависит от них. Так как

$$z_{1 \min} = z_{v1 \min} \cos \delta_1, \quad z_{2 \min} = z_{v2 \min} \cos \delta_2,$$

то получается, что действительное минимальное число зубьев у конических зубчатых колес меньше, а перекрытие больше, чем у цилиндрических зубчатых колес с прямыми зубьями.

Правильная работа передачи с коническими зубчатыми колесами возможна только тогда, когда оси зубчатых колес действительно пересекаются в точке O , в которой пересекаются прямые, находящиеся на поверхности зубьев. Это необходимо учитывать при монтаже и регулировке конической зубчатой передачи. Аксиальную силу зацепления необходимо уравнивать упорными подшипниками.

Наконец, необходимо отметить, что конические зубчатые колеса с прямыми зубьями не являются единственным видом возможных конических зубчатых колес. На плоскости, обкатываемой по основным конусам (рис. 21.17, а), можно нарисовать не только прямую OP , но и любую кривую и получить при этом ломанные или спиральные зубья. Такие зубья, как и прямые

зубья, в последнее время обрабатывают на специальных зубонарезных и шлифовальных станках с помощью конического режущего инструмента [67], вместо контакта по линии получая локализованный контакт по площади. Изготовленные таким образом зубчатые колеса меньше чувствительны к деформациям станины и ошибкам монтажа.

§ 21.11. Гиперболоидные, винтовые и гипонидные колеса

Передавать вращение между скрещивающимися осями 1 и 2 (рис. 21.18) можно при помощи так называемых винтовых передач. Эти передачи отличаются от вышерассмотренных передач тем, что при отсутствии скольжения в радиальном направлении зубчатого колеса имеется скольжение в продольном направлении зуба.

Задача синтеза формулируется так: необходимо построить зубчатую передачу между валами 1 и 2 с углом скрещивания осей δ , если валы вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 и выполнено условие

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = \text{const.} \quad (1)$$

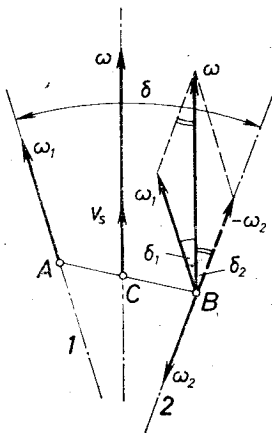


Рис. 21.18.

Для решения задачи отложим оба вектора угловых скоростей в точках A и B, причем отрезок $AB = a$ является кратчайшим расстоянием между осями валов и поэтому перпендикулярен обоим осям.

Для выяснения относительного движения валов используют метод обращения движения. Всей передаче придают угловую скорость $(-\omega_2)$ вокруг оси вала 2. Тогда вал 2 становится неподвижным, а ось вала 1 участвует одновременно в двух вращениях: вокруг собственной оси с угловой скоростью ω_1 и вокруг оси вала 2 с угловой скоростью $(-\omega_2)$. Движе-

ние вала 1 в таких условиях, как известно из кинематики, является мгновенным винтовым движением вокруг оси, проходящей через точку C. Вокруг этой мгновенной винтовой оси вал 1 вращается с угловой скоростью

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_1 + (-\bar{\omega}_2) \quad (2)$$

и скользит вдоль этой оси со скоростью скольжения

$$v_s = \omega_1 AB \sin \delta_1 = \omega_2 AB \sin \delta_2. \quad (21.37)$$

Углы δ_1 и δ_2 определяются из соотношения

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}, \quad (21.38)$$

причем

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta. \quad (21.39)$$

Точку C находят из уравнений *)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_2}, \quad AC + BC = a. \quad (21.40)$$

Мгновенная винтовая ось описывает вокруг осей валов 1 и 2 , два однополостных гиперboloида вращения, которые соприкасаются по мгновенной винтовой оси. Эти гиперboloиды являются аксиоидами движения.

Описанное движение в действительности является относительным движением осей валов 1 и 2 , в ходе которого оба гиперboloида соприкасаются по общей образующей, катятся один по другому и скользят вдоль общей образующей со скоростью v_s . Если на этих гиперboloидах построить зубья, парезанные вдоль образующих, то получают гиперboloидные колеса (рис. 21.19).

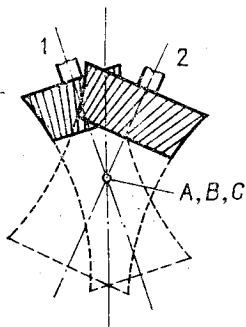


Рис. 21.19.

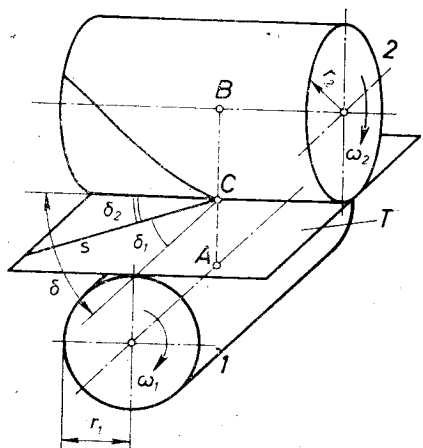


Рис. 21.20.

Гиперboloидные колеса вырезают из гиперboloидов по возможности дальше от кратчайшего расстояния AB , так как там скорость v_s продольного скольжения зубьев относительно меньше, силы в зацеплении также меньше и меньше износ. Зубья гиперboloидных колес имеют соприкосновение по линии.

Проектирование и изготовление гиперboloидных колес очень сложное. Поэтому вместо гиперboloидных колес часто используют винтовые колеса, которые можно рассматривать как приближенные гиперboloидные колеса. Винтовые колеса можно рассматривать как части гиперboloидных колес, вырезанных у горловины, у которых гиперboloидные поверхности заменены

*) Предполагая положение мгновенной оси относительного вращения известным из условия равенства проекций скоростей точек профилей, совпадающих с C $AC\omega_1 \cos \delta_1 = BC\omega_2 \cos \delta_2$, с учетом (21.38) получаем первое из уравнений (21.40).— *Прим. ред.*

цилиндрическими. Таким образом получают делительные цилиндры (рис. 21.20) винтовых колес.

При профилировании боковых поверхностей зубьев винтовых колес предполагают, что к обоим цилиндрам со скрещающимися осями проведена общая касательная плоскость T , на которой взята прямая s , составляющая углы δ_1 и δ_2 с образующими цилиндров. Последние определяются уравнениями (21.38) и (21.39). Радиусы цилиндров определяют из формул

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_2}, \quad r_1 + r_2 = a. \quad (21.41)$$

Если плоскость T наверху поочередно на оба делительных цилиндра, то прямая s образует винтовые линии с углами скручивания δ_1 и δ_2 . Эти винтовые линии в отличие от зубчатых колес с косыми зубьями имеют одно и то же направление, т. е. оба колеса имеют правое (рис. 21.20) или левое направление*). Проектирование зубьев винтовых колес рассмотрено в работе [47].

Для сечений винтовых колес плоскостями, перпендикулярными к осям зубчатых колес,

$$2\pi r_1 = z_1 t_1, \quad 2\pi r_2 = z_2 t_2, \quad (3)$$

где t_1 и t_2 — соответствующие шаги. Чтобы зацепление было возможным, шаг t_n в нормальном сечении зубьев обоих зубчатых колес должен быть один и тот же. Согласно рис. 21.14 и формулам (21.32) шаги в нормальном и поперечном сечениях связывают соотношения

$$t_n = t_1 \cos \delta_1 = t_2 \cos \delta_2, \quad (21.42)$$

поэтому

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1}. \quad (21.43)$$

Из уравнений (3) и (21.43) получается, что

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2 \cos \delta_2}{r_1 \cos \delta_1},$$

а из первого уравнения (21.41)

$$\frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{r_2 \cos \delta_2}{r_1 \cos \delta_1}.$$

Сравнивая выражения (1), (21.38) и также оба последние, получают разные варианты выражения передаточного отношения:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{r_2 \cos \delta_2}{r_1 \cos \delta_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (21.44)$$

*) Боковая поверхность или профиль винтовых колес получается при обкатывании плоскости T по делительным цилиндрам, в процессе которого прямая s описывает линейчатую поверхность, известную под названием развертывающегося геликоида. — Прим. ред.

Отсюда видно, что передаточное отношение винтовых колес не равно отношению радиусов делительных цилиндров. Это свойство имеют все винтовые передачи, в том числе и ниже рассматриваемая червячная передача. Однако отношение чисел зубьев равно передаточному отношению всех без исключения передач.

Винтовые колеса изготавливаются так же, как и зубчатые колеса с косыми зубьями. Поэтому винтовые колеса и зубчатые колеса с косыми зубьями одного модуля в нормальном сечении, если это допускают направления витков, пригодны для передачи вращения как между параллельными осями, так и между перекрещивающимися осями. Однако в первом случае имеем контакт по линии, а во втором — точечный контакт. Из-за этой причины винтовые колеса применяются для непродолжительной работы и передачи небольших мощностей. Аксиальную силу необходимо уравнивать при помощи упорных подшипников.

В последнее время вместо винтовых колес и конических зубчатых колес все чаще применяются гипоидные колеса [67].

На специальных машинах нарезают зубья на конусах, которыми заменяют части, вырезанные из гиперболоидов на некотором расстоянии от их центров, т. е. от кратчайшего расстояния AB . По внешнему виду гипоидные колеса напоминают конические зубчатые колеса со спиральными зубьями. Однако зубья несимметричны, и оси зубчатых колес не пересекаются. Гипоидные колеса имеют точечное соприкосновение, но в связи с выгодными условиями соприкосновения профилей возникает локальный контакт по площади. Гипоидные колеса имеют бесшумный ход, компактную конструкцию, минимальное число зубьев, меньшее, чем у конических зубчатых колес. В случае необходимости можно оба зубчатых колеса с двух сторон установить на подшипники. Хотя имеется продольное скольжение зубьев, коэффициент полезного действия гипоидных колес только несколько меньше, чем у хороших конических зубчатых колес.

§ 21.12. Червячная передача

Червячную передачу, так же как в предыдущем параграфе рассмотренные зубчатые колеса, применяют для передачи вращения между двумя перекрещивающимися валами. По своей геометрии червячная передача ближе винтовым колесам, так как образование винтовых линий зубьев на делительных цилиндрах в обоих передачах происходит одинаково, т. е. соответственно рис. 21.20. В червячной передаче радиус r_1 делительного цилиндра значительно меньше r_2 , а угол подъема δ_1 значительно больше δ_2 . Колесо 1, которое напоминает винт, называют червяком, а колесо 2 — червячным колесом. Таким образом, червяк можно рассматривать как зубчатое колесо, число зубьев которого z_1 равно числу витков, т. е. числу концов витка, которые можно увидеть, посмотрев на червяк торца.

Однако червячная передача отличается от винтовой передачи, во-первых, тем, что вместо точечного соприкосновения в червячной передаче имеем соприкосновение по линии. Последнее достигается при фрезеровании червячного колеса фрезой, которая отличается от червяка только дополнениями, которые необходимы для снятия стружки и образования зазора в головках зубьев. Во-вторых, при конструировании червячной передачи обычно не считаются с аксидами относительного движения червяка и червячного колеса, поэтому формулы (21.38), (21.40) и (21.41) здесь вообще непригодны и из выражения (21.44) передаточного отношения необходимо исключить отношение синусов углов скручивания.

Обычно в червячных передачах угол между осями колес $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$. Если ограничиваемся этим случаем, то формулу (21.44) для червячной передачи можно написать так:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{z_2}{z_1}. \quad (21.45)$$

Червяк часто выполняют как винт с трапецидальными витками, профили которых в аксиальном сечении являются прямыми, а в сечении, перпендикулярном к оси червяка, — спиралями Архимеда. В таком главном сечении червячной передачи (рис. 21.21)

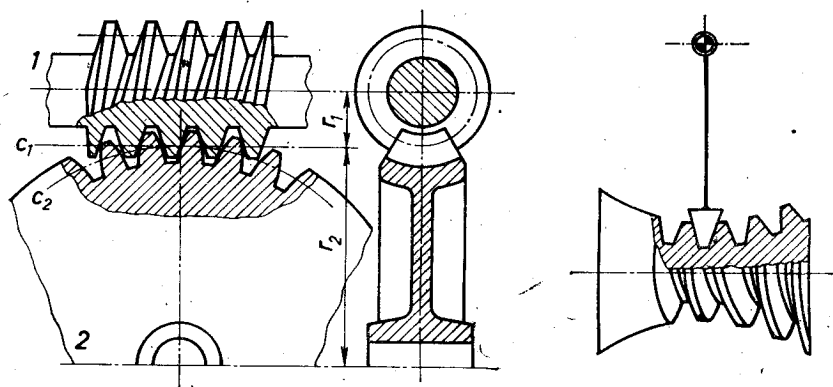


Рис. 21.21.

образуется зацепление эвольвентной зубчатой рейки и зубчатого колеса, а в других параллельных сечениях эвольвентное зацепление не существует. Поэтому червячная передача не имеет преимуществ эвольвентных цилиндрических зубчатых колес, которое позволяет несколько изменять расстояние между осями зубчатых колес.

Если червяк выполняют как винт, профили резьбы которого являются прямыми в плоскости, которая касается описанного вокруг оси червяка цилиндра, то в аксиальном сечении профили резьбы изогнуты так же, как профили косых зубьев цилиндриче-

ских зубчатых колес, а в перпендикулярном к оси червяка сечении они являются эвольвентами.

Если червяк вытачивают резцом с прямоугольными гранями, плоскость которого перпендикулярна к линии резьбы на делительном цилиндре, то получают *червяк конволютный*. В последнее время внедряются также так называемые глобоидальные червяки [7], имеющие более полное соприкосновение с червячным колесом и лучшие условия смазки. Они пригодны для передачи особенно больших сил. Схема вытачивания винтообразных зубьев глобоидального червяка показана на рис. 21.21.

Ценным свойством червячной передачи является компактность конструкции, позволяющая при небольшом объеме передачи реализовать большое передаточное отношение. У червячных передач $i = 10 \dots 100$ и больше, а в одноступенчатой зубчатой передаче $i = 1 \dots 10$. Иногда выгодно использовать свойство самоторможения червячной передачи, представляющей возможность обойтись без тормоза или храпового механизма, которое исключает вращение червячной передачи в обратном направлении в случаях, когда это недопустимо.

Число витков червяка обычно $z_1 = 1 \dots 6$, а число зубьев червячного колеса — больше 17. Аксиальную силу червяка и червячного колеса необходимо уравнивать аксиальными подшипниками.

Обычно червяк является ведущим звеном. В случае самоторможения $z_1 = 1 \dots 2$. Если z_1 значительно больше, то самоторможение может отсутствовать и червячная передача может приводиться в движение червячным колесом (в молочных сепараторах).

Из-за большого продольного скольжения коэффициент полезного действия червячной передачи невысокий (§ 14.3). У самотормозящей червячной передачи $\eta < 0,5$. Для уменьшения трения зубчатый венец червячного колеса изготавливают из бронзы или другого антифрикционного материала.

§ 21.13. Условия соосности, монтажа и соседства в зубчатых передачах с неподвижными и подвижными осями

Рассмотрим определение числа зубьев зубчатых колес плоских зубчатых передач, составленных из нулевых колес с прямыми зубьями. Если применяются корригированные зубчатые колеса или зубчатые колеса с косыми зубьями, то упомянутая задача решается легче.

Определение числа зубьев зубчатых колес проектируемой зубчатой передачи простое только в обычных последовательных передачах (рис. 7.2). В этом случае достаточно иметь в виду, что число зубьев ни одного зубчатого колеса не должно быть меньше $z_{\text{нр}}$ (§ 21.7) и при реализации заданного передаточного отноше-

ния механизм не должен выходить за допустимые габаритные размеры. Чтобы износ был равномернее, стараются отношение числа зубьев двух совместно работающих зубчатых колес выбрать как целое число, тогда одна и та же пара зубьев будет соприкасаться только через продолжительное время.

В возвратных передачах с неподвижными (рис. 7.5) или подвижными (рис. 7.8, 7.9, 7.12 и др.) осями, кроме того, еще необходимо учитывать условия соосности (коаксиальности), которые выражаются в определенных простых зависимостях между радиусами делительных окружностей и требуют, чтобы оси некоторых зубчатых колес находились бы на одной прямой. Если модули зубчатых колес одинаковы, то согласно формуле (21.4) такие же зависимости существуют также между числами зубьев. Так, например, условия соосности для передачи, показанной на рис. 7.5, следующие:

$$r_1 + 2r_2 = r_3, \quad r'_3 + r_4 = r'_4 + r_5.$$

Эти условия можно заменять тождественными зависимостями

$$z_1 + 2z_2 = z_3, \quad m_1(z'_3 + z_4) = m_2(z'_4 + z_5),$$

где m_1 и m_2 — модули соответствующих пар зубчатых колес.

В планетарных передачах с несколькими сателлитами кроме условий соосности необходимо учитывать также условие монтажа.

Выполнение этого условия гарантирует зацепление нескольких, размещенных на одинаковых расстояниях сателлитов с центральными зубчатыми колесами, из которых одно может быть солнечным зубчатым колесом.

Выясним это условие монтажа, рассматривая рис. 21.22 и принимая, что число сателлитов равняется k . Тогда угол

$$\theta = 2\pi/k,$$

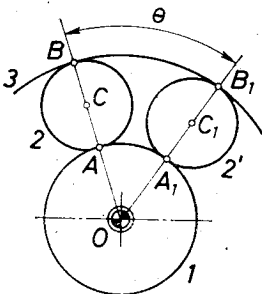


Рис. 21.22.

а сумма длин дуг делительных окружностей центральных зубчатых колес между двумя соседними сателлитами

$$\widehat{AA_1} + \widehat{BB_1} = \theta(r_1 + r_3) = \frac{2\pi}{k}(z_1 + z_3) \frac{m}{2} = \frac{t}{k}(z_1 + z_3),$$

где t — шаг зубчатых колес. Эту сумму можно выразить и следующим образом:

$$\widehat{AA_1} + \widehat{BB_1} = (at + c_1) + (bt + c_2),$$

где a и b — целые числа, а $c_1 + c_2 < 2t$. Приравнявая оба последних

выражения, получим, что

$$z_1 + z_3 = \left(a + b + \frac{c_1 + c_2}{t} \right) k.$$

Это означает, что заключенное в скобках выражение является целым числом $n = a + b + 1$ и условие монтажа выражается так:

$$(z_1 + z_2)/k = n. \quad (21.46)$$

Следовательно, сборка соосной зубчатой передачи с равномерно распределенными паразитными колесами возможно, если сумма чисел зубьев колес с внутренним и внешним венцами кратна числу промежуточных колес или для планетарной передачи кратна числу сателлитов.

Чтобы сателлиты не налагались друг на друга (рис. 21.22), необходимо выполнить условие соседства: расстояние между осями сателлитов должно быть больше диаметра окружности вершин сателлитов, т. е.

$$CC_1 > d_a = m(z_2 + 2). \quad (1)$$

В равнобоком треугольнике OCC_1

$$CC_1 = 2(r_1 + r_2) \sin(\theta/2) = (z_1 + z_2)m \sin(\pi/k). \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в неравенство (1) получают условие соседства

$$\sin(\pi/k) > (z_2 + 2)/(z_1 + z_2), \quad k = 2, 3, \dots \quad (21.47)$$

Несколько симметрично расположенных сателлитов применяют для снижения реакций на профилях зубьев и для уравнивания их сил инерции. Однако при числе сателлитов более одного появляются тангенциальные избыточные связи, число которых в механизме с двумя подвижными центральными зубчатыми колесами и k сателлитами, согласно формуле (2.8), учитывая, что подвижность $w = 2$, равно

$$\sigma_t = 2 - 3(k + 3) + 2(k + 3) + 2k = k - 4.$$

Следовательно, если число сателлитов больше 1, каждый «лишний» сателлит создает одну тангенциальную избыточную связь. Каждая избыточная связь требует значительного повышения точности изготовления механизма. Необходимую для полезного использования повторяющихся связей точность трудно достичь. Поэтому для равномерной загрузки сателлитов применяют «плавающее» центральное зубчатое колесо или механизм преобразуют, создавая дополнительные звенья, и, таким образом, получают новый механизм, обеспечивающий самоустановку сателлитов. В обоих случаях повторяющиеся связи исчезают.

СИНТЕЗ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 22.1. Задачи и методы синтеза стержневых механизмов

В этом разделе ознакомимся с одной из сложнейших проблем теории механизмов — метрическим синтезом плоских механизмов (стержневых механизмов) с пизшими парами. В ходе метрического синтеза конструктор определяет размеры выбранной кинематической схемы так, чтобы конструируемый механизм мог выполнить требования, выдвинутые в задаче синтеза. Стержневые механизмы в машиностроении имеют особое значение, так как кинематические пары этих механизмов — шарниры и поступательные пары — легче изготовлять и они способны передавать относительно большие силы, при минимальных зазорах работают без шума. По функциональному назначению стержневые механизмы разделяются на *передаточные* и *направляющие механизмы* (§ 4.2). Передаточные механизмы воспроизводят заданные законы движения, а направляющие механизмы — траектории и положения ведомого звена. Определение параметров механизмов, воспроизводящих заданные траектории, положение и закон движения ведомого звена, является главным содержанием задач метрического синтеза стержневых механизмов.

Метрическому синтезу стержневых механизмов, который в дальнейшем назовем просто синтезом, свои исследования посвящали многие исследователи; результаты их работ опубликованы в следующих источниках: [4, 8, 48, 83, 98, 100]. Для решения задач синтеза разработаны *геометрические методы*, применяя которые операции синтеза выполняют графически, базируясь на кинематической геометрии [17], проективной геометрии, на принципе обращения движения и других способах. При разработке геометрических методов много сделано Бурместером, Альтом и другими немецкими учеными. Основоположителем *аналитических методов* является русский ученый П. Л. Чебышев. На практике применяют также *геометрически-аналитические* [83] и *эмпирические методы*. Применяя последние, размеры механизмов подбирают экспериментально, используя разные приспособления, таблицы и номограммы [106].

Геометрические и аналитические методы можно разделить на точные и приближенные.

В связи с повышением требований машиностроения и приборостроения относительно точности синтеза, с одной стороны, и с увеличением возможностей вычислительной техники, с другой стороны, все большее значение приобретают аналитические методы. С помощью приближенных аналитических методов можно получить результаты необходимой точности. Аналитические методы применяют не только самостоятельно, но также для уточне-

ния результатов эмпирического или геометрического синтеза. Аналитическая формулировка задач синтеза разрешает судить о возможностях их решения.

После краткой характеристики задач и методов синтеза рассмотрим эти вопросы более подробно.

Стержневые механизмы не способны реализовать точное решение любой задачи синтеза. Однако во многих случаях можно получить приближенные решения, соответствующие требованиям практики.

Общая схема решения многих задач синтеза следующая. Прежде всего выясняют количество постоянных параметров механизма — длины и углы — влияющие на результат решения данной задачи синтеза. Составляют уравнение, в которое входят все постоянные параметры и также переменные, зависящие от положения механизма. Придавая последним численные значения, соответствующие задаче, составляют столько уравнений, сколько задано постоянных параметров. Решая эту систему уравнений, определяют постоянные параметры и, таким образом, задача синтеза решена.

Примером сказанного может служить задача воспроизведения заданной траектории, встречающаяся в синтезе направляющих механизмов. Принимаем, что необходимо построить шарнирный четырехзвеной, точка M шатуна которого описывает данную траекторию m . В этом случае (рис. 22.1) существенное значение имеют 9 параметров: $x_0, y_0, x_c, y_c, a, b, r, c, e$. Необходимо составить уравнение, в которое кроме этих параметров входят только координаты x и y точки M . Придавая им 9 пар значений, соответствующих данной траектории m , получаем систему из девяти уравнений. Решая эту систему, можно определить все 9 параметров. Точка M шатуна полученного механизма будет описывать траекторию, проходящую через девять заранее выбранных точек кривой m . Эти точки определены параметрами координат x и y . В остальных положениях механизма точка M шатуна в общем случае не совпадает с кривой m . Можно, конечно, некоторые постоянные параметры выбрать произвольно и, таким образом, уменьшить число уравнений решаемой системы. Однако на такое же число уменьшается число точек пересечения кривой точки M шатуна и данной кривой m .

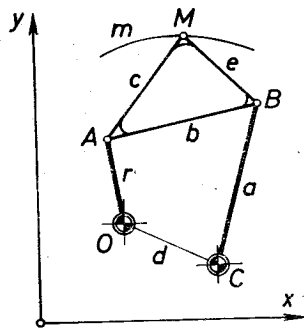


Рис. 22.1.

Рассмотренное решение не является простым, а полученный механизм может быть практически непригодным в связи с тем, что найденные размеры неприемлемы, углы давления получаются слишком большие и ведущее звено не является обратимым (§ 22.2). Поэтому обычно желаемую траекторию стараются по-

лучить проще, применяя даже экспериментальные методы. Можно, например, изготовить экспериментальный шарнирный четырехзвенник с изменяемыми параметрами и, меняя последние, отыскать точку, траектория которой удовлетворяет требованиям задачи. О больших возможностях решения этой задачи свидетельствует разнообразие форм кривых шатуна. Удивительно то, что каждую из этих кривых можно получить с помощью трех разных шарнирных четырехзвенников (§ 22.3).

Еще более сложные траектории можно получить с помощью двухкривошипного шарнирного пятизвенника, кривошипны которых соединены зубчатой передачей, не показанной на рис. 22.2.

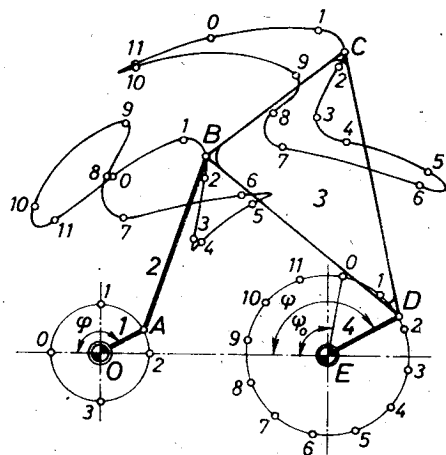


Рис. 22.2.

Траектории зависят не только от длин стержней механизма, но также от передаточного отношения u_{14} обоих кривошипов и также от начальной фазы ψ_0 . В данном случае $u_{14} = 3$ и $\psi_0 = 100^\circ$. Таким образом, объединив стержневые механизмы с зубчатыми механизмами, разнообразие получаемых траекторий можно значительно увеличить [32].

В 1878 г. английский ученый Кемпе доказал, что с помощью стержневых механизмов принципиально возможно воспроизвести любую алгебраическую кривую. Однако эта теорема ничего не говорит относительно количества звеньев и метода синтеза. Многозвеньевые механизмы на практике невыгодны как из-за сложности, так и из-за суммирования ошибок (§ 18.3).

В 1888 г. немецкий ученый Бурместер выдвинул и геометрически разрешил задачу о синтезе шарнирного четырехзвенника для воспроизведения заданных положений шатуна. Многие труды посвящены выражению в аналитической форме теории Бурместера [83, 101].

Синтез направляющих механизмов вообще сложнее, чем синтез передаточных механизмов, особенно если в качестве передаточных механизмов используются зубчатые, кулачковые и другие механизмы. Поэтому возникает интерес к возможности приведения синтеза направляющих механизмов к синтезу передаточных механизмов [61].

При проектировании передаточных механизмов возникает задача воспроизведения заданной функции, например, функции $\psi = F(\varphi)$ угла поворота коромысла шарнирного четырехзвенника (рис. 22.3).

Во многих случаях достаточна реализация заданной функции только в некоторых положениях механизма, т. е. если углам $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ соответствуют углы $\psi_1 = F(\varphi_1), \psi_2 = F(\varphi_2), \dots$. Таким образом, кривые заданной функции $\psi = F(\varphi)$ и функции положения

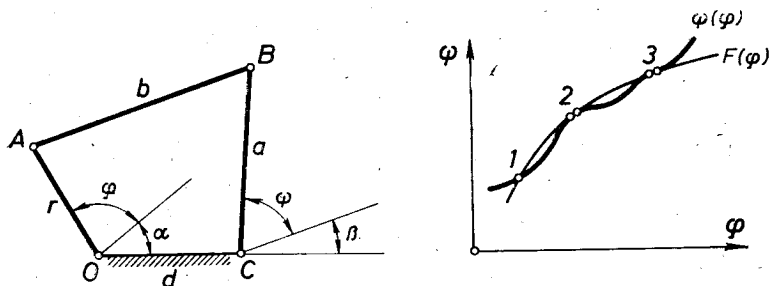


Рис. 22.3.

механизма $\psi = \psi(\varphi)$ пересекаются в нескольких точках. Максимальное количество точек пересечения зависит от числа неизменяемых параметров механизма.

В этой задаче координаты неподвижных шарниров не имеют значения и функция положения $\psi = \psi(\varphi)$ идентична у всех геометрически подобных шарнирных четырехзвенников. Так как абсолютные длины звеньев не имеют значения, то принимают $d = 1$ и для решения задачи остаются 5 неизменных параметров: a, b, r, α, β . Это означает, что можно составить систему из пяти уравнений:

$$\psi_i = \psi(\varphi_i, a, b, r, \alpha, \beta), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (1)$$

$\psi_i = F(\varphi_i)$, а φ_i выбраны произвольно. Для случая, когда $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, открытую функцию положения шарнирного четырехзвенника выражает формула (6.30), а неявную — формула (6.31). Решая систему (1), находят неизвестные a, b, r, α, β . Решение рассмотренной задачи синтеза называют интерполяцией с простыми узлами.

Вместо простых узлов можно применять двухкратные и многократные узлы. На рис. 22.3 узлы 2 и 3 являются двухкратными. В этих узлах равны не только значения функций $\psi = \psi(\varphi)$ и $\psi = F(\varphi)$, но равны также значения производных этих функций $\psi' = \psi'(\varphi)$ и $\psi' = F'(\varphi)$.

Произведение $\psi' = d\psi/d\varphi = \dot{\psi}/\dot{\varphi} = u_{ar}$ выражает мгновенное передаточное отношение между звеньями CB и OA . Для синтеза шарнирного четырехзвенника вместо системы (1) составляем теперь систему

$$\begin{aligned} \psi_i &= \psi(\varphi_i, a, b, r, \alpha, \beta), & i &= 1, 2, 3; \\ \psi'_i &= \psi'(\varphi_i, a, b, r, \alpha, \beta), & i &= 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

откуда определяются пять неизвестных параметров механизма.

При использовании метода интерполяции отклонение функции положения $\psi = \psi(\varphi)$ от заданной функции $\psi = F(\varphi)$ между узловыми точками не ограничивается. Поэтому во многих случаях постоянные параметры механизма определяют из условия, что в заданном интервале $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_m$ среднее квадратичное отклонение функции положения от заданной функции или абсолютное значение этого отклонения является минимальным. Первый метод синтеза называют квадратичным приближением функций, второй — наилучшим приближением функций (метод Чебышева). Интерполяция и оба метода приближения описаны в работе [4], а интерполяция простыми узлами также в § 22.5 и § 22.6.

Если ведомое звено, двигаясь в одном направлении, совершает работу, а в противоположном направлении движется холостую, то соотношение рабочего времени и времени холостого хода

$$k = t_d/t_l \quad (22.1)$$

называют коэффициентом увеличения средней скорости обратного хода механизма. Действительно, указанный коэффициент равен отношению средних скоростей холостого и рабочего хода, так как эти средние скорости $v_d = s/t_d$ и $v_l = s/t_l$, где s является длиной хода ведомого звена.

Так, например, для шарнирного четырехзвенника (рис. 22.4)

$$k = \frac{t_d}{t_l} = \frac{v_l}{v_d} = \frac{\varphi_d}{\varphi_l} = \frac{180^\circ + \alpha}{180^\circ - \alpha}, \quad (22.2)$$

откуда

$$\alpha = 180^\circ \frac{k-1}{k+1}. \quad (22.3)$$

Расчет механизмов по заданному коэффициенту k рассмотрен в § 22.4.

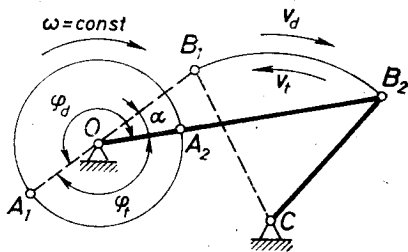


Рис. 22.4.

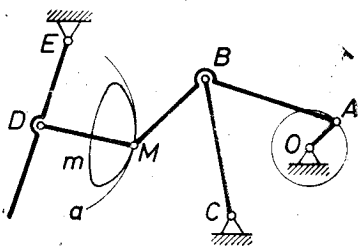


Рис. 22.5.

Можно построить стержневые механизмы, ведомое звено которых движется эпизодически, т. е. в движении ведомого звена имеются периодические не мгновенные остановки [20]. Эту задачу синтеза передаточных механизмов можно решать также методами синтеза направляющих механизмов. Так, например, на шатуне шарнирного четырехзвенника находят такую точку M , траекторию

которой на достаточно большом участке достаточно точно можно заменить дугой окружности (рис. 22.5). Пока точка M движется по этой дуге, ведомое звено DE не движется. Очевидно, что с помощью стержневых механизмов можно получить только приближенную остановку.

В некоторых случаях целью синтеза передаточных механизмов является достижение постоянного передаточного отношения на каком-то участке цикла. Так, например, необходимо, чтобы при рабочем ходе механизма шепинга (рис. 3.9) ползун 5 вместе с рецом двигался почти равномерно.

Кроме упомянутых задач синтеза встречаются еще и другие, решая которые необходимо реализовать заданные зависимости между ускорениями, силами и моментами.

§ 22.2. Теорема Грасгофа

Выясним, какими должны быть длины звеньев шарнирного четырехзвенника, чтобы этот четырехзвенник имел кривошип, т. е. звено, которое относительно соседнего звена, с которым оно образует шарнир, могло бы совершать полный оборот (§ 4.2).

На рис. 22.6 изображены три шарнирные четырехзвенника, составленные из одних и тех же звеньев в разных комбинациях.

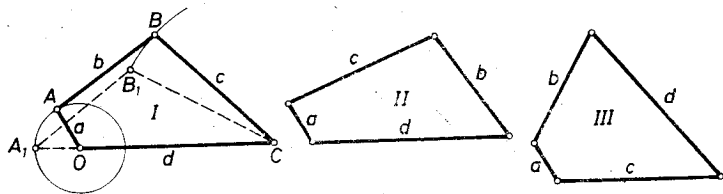


Рис. 22.6.

В каждом из них звено a имеет другое противолежащее звено. Больше вариантов, чем эти три четырехзвенника, из данных звеньев составить нельзя. Длины звеньев выбраны так, что

$$a < b < c < d. \quad (1)$$

Шарнирный четырехзвенник I имеет кривошип a относительно звена d только тогда, когда

$$a + d \leq b + c. \quad (22.4)$$

Тогда a является кривошипом также относительно звена b , а звенья b и d являются кривошипами относительно звена a .

Если условие (22.4) выполнено, тогда, как легко убедиться, теми же самыми свойствами относительно звена a и его соседних звеньев обладают также шарнирные четырехзвенники II и III .

Только что полученные выводы можно обобщить в виде теоремы Грасгофа.

Все шарнирные четырехзвенники можно подразделить на две группы. К первой группе принадлежат те шарнирные четырехзвенники, у которых сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев меньше, чем сумма длин остальных двух звеньев, или обе суммы одинаковы. У шарнирных четырехзвенников второй группы первая сумма больше второй.

Если наименьшее звено шарнирного четырехзвенника первой группы является станиной, то образуется двухкривошипный механизм; если соседнее звено наименьшего звена является станиной, то наименьшее звено является кривошипом, а ему противоположное — коромыслом и, наконец, если звено, противоположное наименьшему звену, является станиной, то получается двухкоромысловый механизм.

Все шарнирные четырехзвенники второй группы являются двухкоромысловыми механизмами, не имеющими кривошипов.

§ 22.3. Теорема Робертса — Чебышева

Прежде чем рассмотреть теорему Робертса — Чебышева, ознакомимся с пантографом Сильвестра (рис. 22.7). Пантограф

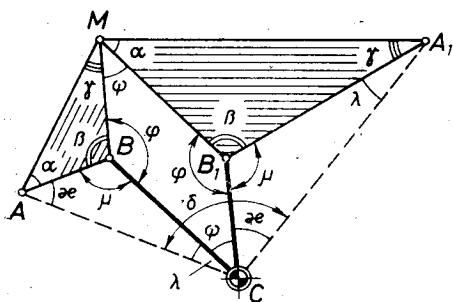


Рис. 22.7.

имеет четыре подвижных звена, образующих шарнирный параллелограмм $CBMB_1$; два из них изготовлены как подобные треугольники, т. е. $\triangle ABM \sim \triangle MB_1A_1$. Поэтому $BA : BM = B_1M : B_1A_1$. Так как $BM = B_1C$ и $B_1M = BC$, то $BA : B_1C = BC : B_1A_1$ и $BA : BC = B_1C : B_1A_1$. Последняя пропорция свидетельствует о том, что $\triangle CBA \sim \triangle A_1B_1C$, если учитывать,

что углы μ в обоих треугольниках одинаковы. Коэффициент трансформации пантографа Сильвестра

$$k = \frac{BA}{CA} = \frac{CB_1}{A_1B_1} = \frac{CA}{CA_1}$$

и угол

$$\delta = \kappa + \psi + \lambda = \beta = \text{const},$$

так как

$$\kappa = \pi - \mu - \lambda \quad \text{и} \quad \psi = \pi - \varphi = \pi - 2\pi + \beta + \mu = \beta - \pi + \mu.$$

Теорема Робертса — Чебышева утверждает, что одну и ту же шатунную кривую в общем случае можно получить тремя разными шарнирными четырехзвенниками.

Для доказательства теоремы рассмотрим (рис. 22.8) шарнирный четырехзвенник $OABC$, точка M шатуна AB которого описывает шатунную кривую m . Образует шарнирный параллелограмм $CBMB_1$ и треугольник MB_1A_1 , подобный треугольнику ABM .

Видно, что кинематическая цепь $CBAMB_1A_1C$ является пантографом Сильвестра. Поэтому траектории точек A и A_1 подобны. Точка A движется по окружности и, следовательно, точка A_1 также описывает окружность. Центр D последней окружности получим, отложив угол β от прямой CO и учитывая, что $CD : CO = CA_1 : CA$. Следовательно, существует второй шарнирный четырехзвенник CB_1A_1D , точка M шатуна B_1A_1 , которого описывает ту же самую кривую m , что и точка M шатуна AB шарнирного четырехугольника $OABC$. Если еще присоединяем диады OA_2M и DB_2M , образуя параллелограммы OA_2MA и DB_2MA_1 , то угол A_2MB_2 , в связи с подобием треугольников CAO и CA_1D ,

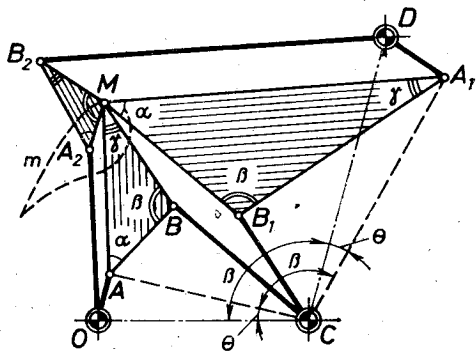


Рис. 22.8.

не изменяется и равен β . Поэтому звенья A_2M и B_2M можно соединить. Видно, что точка M шатуна A_2B_2 третьего шарнирного четырехзвенника OA_2B_2D также описывает ту же самую кривую m .

Если точка M находится на прямой AB , то оба шарнирные четырехзвенника, полученные при помощи преобразования Робертса — Чебышева, совпадают. В таком случае одну и ту же кривую шатуна можно получить с помощью только двух механизмов. Если в четырехзвенном механизме имеется поступательная пара, то и в таком случае одну и ту же кривую описывают точки шатуна только двух механизмов (данный и преобразованный).

Теорема Робертса — Чебышева дает возможность выбрать оптимальный механизм для описания данной траектории. Однако не доказано, что полученный преобразованием Робертса — Чебышева механизм удовлетворяет теореме Грасхофа, если заданный механизм ей удовлетворяет.

§ 22.4. Синтез четырехзвенных механизмов по заданному коэффициенту увеличения средней скорости обратного хода

Коэффициентом увеличения средней скорости обратного хода называют выраженное формулой (22.1) соотношение рабочего и холостого времени в механизмах, в которых ведомое звено совершает неравномерное возвратно-поступательное или качательное движения, а ведущее звено вращается равномерно. Принято, что рабочий ход ведомого звена продолжительнее холостого хода. Если задан коэффициент k , то по формуле (22.3) можно опреде-

лить угол α , который в свою очередь зависит от размеров механизма (рис. 22.4).

В механизме качающейся кулисы (рис. 22.9) угол α равен угловому ходу кулисы. Если задана длина кривошипа r и коэффициент k , то по формуле (22.3) определяется α , а после этого — расстояние между неподвижными шарнирами

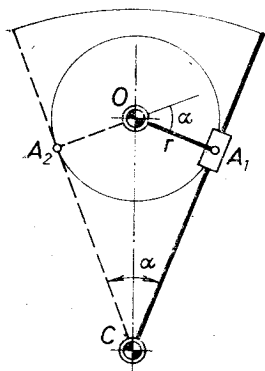


Рис. 22.9.

$$OC = \frac{r}{\sin(\alpha/2)}. \quad (22.5)$$

Этим синтез механизма качающейся кулисы по заданному коэффициенту увеличения средней скорости обратного хода заканчивается. На рис. 22.9 показан механизм у которого $k = 1,61$ и $\alpha = 42^\circ$.

Синтез шарнирного четырехзвенника и кривошипно-ползунного механизма по заданному коэффициенту увеличения средней скорости обратного хода можно с достаточной для практики точностью выполнить, используя графический метод. При построении используется теорема из геометрии, что заданный отрезок B_1B_2 под одним и тем же углом α можно увидеть из тех точек окружности, проведенной через концы B_1 и B_2 отрезка, которые находятся по одну сторону отрезка B_1B_2 *).

Пример 22.1. Определить размеры шарнирного четырехзвенника, если задано расстояние между неподвижными шарнирами $OC = d$, длина

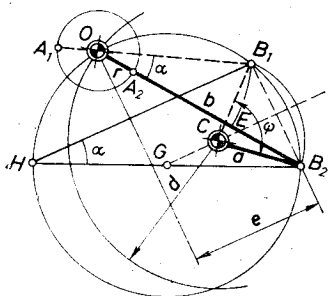


Рис. 22.10.

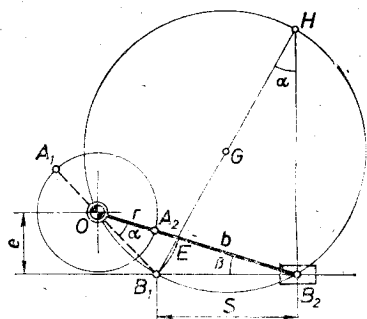


Рис. 22.11.

коромысла a , размах коромысла ψ и также коэффициент k увеличения средней скорости обратного хода.

Решение (рис. 22.10). Построим точки C, B_1, B_2 . По формуле (22.3) определяем α . В точке B_1 проводим перпендикуляр к отрезку B_1B_2 , а в точке B_2 строим угол $90^\circ - \alpha$. Вокруг средней точки G полученного диаметра B_1B_2 проводим окружность и из точки C делаем засечку на этой окружности ра

*) В основу этого построения положена теорема из геометрии. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности. — Прим. ред.

диусом d , получая, таким образом, положение второго неподвижного шарнира O . Так как $OB_2 = b + r$ и $OB_1 = b - r$, то $OB_2 - OB_1 = EB_2 = 2r$. Следовательно, $r = EB_2/2$, $b = A_2B_2$.

Пример 22.2. Построить кривошипно-ползунный механизм, если задан ход ползуна S , эксцентриситет e и коэффициент увеличения средней скорости обратного хода k .

Решение, которое почти аналогично решению предыдущего примера, показано на рис. 22.11.

Пример 22.3. Определить размеры кривошипно-ползунного механизма, если задан ход ползуна S , параметр $\lambda = r/b$ и коэффициент k .

Решение в этом случае наиболее удобно провести аналитически. По формуле (22.3) определяем угол отклонения α . Из уравнений $S^2 = (b+r)^2 + (b-r)^2 - 2(b+r)(b-r)\cos\alpha$, $b = r/\lambda$ определяем r и b , а из уравнений $\frac{S}{\sin\alpha} = \frac{b-r}{\sin\beta}$, $e = (b+r)\sin\beta$ определяем эксцентриситет e .

§ 22.5. Синтез кривошипно-ползунных передаточных механизмов

Рассмотрим синтез кривошипно-ползунного механизма по двум заданным положениям кривошипа и ползуна. Такую задачу синтеза, как известно (§ 22.1), называют воспроизведением заданной функции путем интерполирования простыми узлами. Полученный таким образом механизм называют *передаточным механизмом* в отличие от *направляющего механизма*, который воспроизводит данную траекторию или ряд заданных положений шатуна. Если число заданных пар положений кривошипа и ползуна не больше трех, то рассматриваемую задачу синтеза просто и наглядно можно решать графически, применяя метод обращения движения.

Пример 22.4. Задан неподвижный шарнир O кривошипа, эксцентриситет e , положения кривошипа a_1 и a_2 и соответствующие им положения B_1 и B_2 центра шарнира на ползуне. Определить графически размеры механизма реализующего два заданных положения (рис. 22.12).

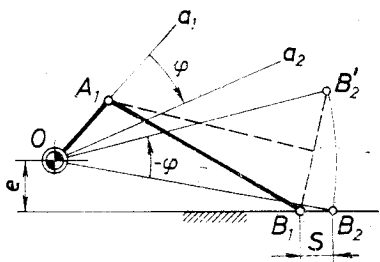


Рис. 22.12.

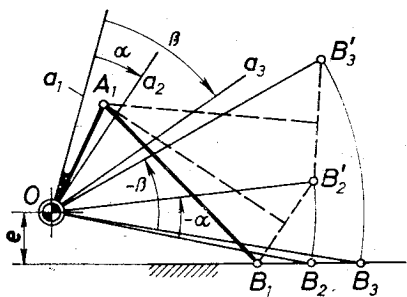


Рис. 22.13.

Решение. При повороте кривошипа на угол φ ползун должен совершить перемещение s . Если сообщим всему механизму поворот противоположного направления вокруг центра O на угол $-\varphi$, то кривошип останется неподвижным, сохраняя направление a_1 , а центр шарнира ползуна B , совершив перемещение S в инвертированной системе, попадет в точку B_2' .

Центр шарнира кривошипа A_1 находится на одном и том же расстоянии от точек B_1 и B'_2 , следовательно, в точке пересечения среднего перпендикуляра отрезка $B_1B'_2$ и луча a_1 .

Пример 22.5. Задача аналогична предыдущей, только вместо двух положений синтезируемого механизма даны три (рис. 22.13).

Решение. Дважды повторяя примененный в предыдущем примере прием, центр шарнира A получаем в точке A_1 , которая в общем случае не находится на луче a_1 .

Решение задач синтеза возможно при использовании аналитических методов, например, для кривошипно-ползунного механизма (рис. 22.14) можно, выразив длину шатуна через параметры механизма, получить уравнение

$$(x - r \cos \varphi)^2 - (e + r \sin \varphi)^2 = b^2. \quad (1)$$

Развернутое уравнение

$$x^2 - 2r(x \cos \varphi - e \sin \varphi) = b^2 - r^2 - e^2 \quad (2)$$

содержит все параметры механизма и поэтому пригодно для аналитического решения рассматриваемой задачи синтеза.

Воспроизводимая функция $x = F(\alpha)$ в этом случае задана отдельными точками φ_i, x_i , где $i = 1, 2, \dots$. Постоянные параметры механизма r, e, b необходимо определить так, чтобы график функции положения $x = x(\varphi)$ синтезируемого механизма, который в неявном виде выражает уравнение (2), проходил бы через упомянутые точки.

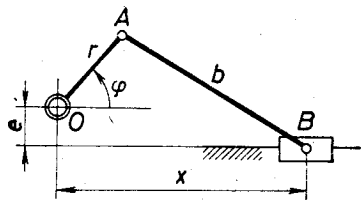


Рис. 22.14.

Каждая точка соответствует одному положению проектируемого механизма. Решаем задачу аналитически для разного числа требуемых положений [53].

Два положения. Задано $\varphi_1, x_1; \varphi_2, x_2$. Определить параметры механизма, который может воспроизвести два заданных положения.

Напишем систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2r(x_1 \cos \varphi_1 - e \sin \varphi_1) &= b^2 - r^2 - e^2, \\ x_2^2 - 2r(x_2 \cos \varphi_2 - e \sin \varphi_2) &= b^2 - r^2 - e^2, \end{aligned} \quad (3)$$

которая содержит три неизвестных r, e и b . Поэтому одно из них необходимо выбрать. Исключая b из уравнений (3), получают эксцентриситет

$$e = \frac{2r(x_2 \cos \varphi_2 - x_1 \cos \varphi_1) - (x_2^2 - x_1^2)}{2r(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} \quad (22.6)$$

и длину кривошипа

$$r = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2[x_2 \cos \varphi_2 - x_1 \cos \varphi_1 - e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)]}. \quad (22.7)$$

Из уравнения (1)

$$b = \sqrt{(x_1 - r \cos \varphi_1)^2 + (e + r \sin \varphi_1)^2}. \quad (22.8)$$

Последние три формулы дают аналитическое решение задачи синтеза, позволяя выбрать r или e .

Три положения. Задано φ_i, x_i , где $i = 1, 2, 3$. Определить e, r, b .

Напишем систему уравнений:

$$x_i^2 - 2r(x_i \cos \varphi_i - e \sin \varphi_i) = b^2 - r^2 - e^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Исключая из первого и второго и из первого и третьего уравнений b , а из двух полученных уравнений r , получают эксцентриситет

$$e = \frac{(x_3^2 - x_1^2)(x_2 \cos \varphi_2 - x_1 \cos \varphi_1) - (x_2^2 - x_1^2)(x_3 \cos \varphi_3 - x_1 \cos \varphi_1)}{(x_3^2 - x_1^2)(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) - (x_2^2 - x_1^2)(\sin \varphi_3 - \sin \varphi_1)}. \quad (22.9)$$

После определения эксцентриситета задача приводится к случаю двух положений и решение дает формулы (22.7) и (22.8).

Четыре положения. Уравнение (2) содержит только три постоянных параметра механизма и поэтому дает возможность синтезируемому механизму задавать не больше, чем три положения. Однако, поступая так же, как на рис. 22.3, в качестве неизвестного можно выбрать начало отсчета $\alpha = \varphi_1$ углов φ и формулировать задачу синтеза следующим образом: заданы три угла, координирующие положение кривошипа k_1, k_2, k_3 и четыре положения ползуна x_1, x_2, x_3, x_4 , которые соответствуют углам

$$\varphi_1, \varphi_2 = \varphi_1 + k_1, \quad \varphi_3 = \varphi_1 + k_2, \quad \varphi_4 = \varphi_1 + k_3. \quad (5)$$

Определить r, b, e и начальный угол φ_1 .

Для решения задачи составляем систему уравнений

$$x_i - 2r(x_i \cos \varphi_i - e \sin \varphi_i) = b^2 - r^2 - e^2, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

Исключаем b из первого и второго, из первого и третьего и из первого и четвертого уравнений. Из полученных уравнений типа (22.7) исключаем r и получаем два уравнения типа (22.9). Из них исключаем e и получаем уравнение относительно неизвестного φ_1 :

$$\begin{aligned} & (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)[a_4(x_3 \cos \varphi_3 - x_1 \cos \varphi_1) - a_3(x_4 \cos \varphi_4 - x_1 \cos \varphi_1)] + \\ & + (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_1)[a_2(x_4 \cos \varphi_4 - x_1 \cos \varphi_1) - a_4(x_2 \cos \varphi_2 - x_1 \cos \varphi_1)] + \\ & + (\sin \varphi_4 - \sin \varphi_1)[a_3(x_2 \cos \varphi_2 - x_1 \cos \varphi_1) - \\ & - a_2(x_3 \cos \varphi_3 - x_1 \cos \varphi_1)] = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

где $a_2 = x_2^2 - x_1^2, a_3 = x_3^2 - x_1^2, a_4 = x_4^2 - x_1^2$. Подставляя выражения (5) в последнее уравнение, получаем уравнение

$$A \operatorname{tg}^2 \varphi_1 + B \operatorname{tg} \varphi_1 + C = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= (1 - \cos k_1)m_1 + (1 - \cos k_2)m_2 + (1 - \cos k_3)m_3, \\
 B &= (1 - \cos k_1)n_1 + (1 - \cos k_2)n_2 + (1 - \cos k_3)n_3 - m_1 \sin k_1 - \\
 &\quad - m_2 \sin k_2 - m_3 \sin k_3; \\
 C &= -n_1 \sin k_1 - n_2 \sin k_2 - n_3 \sin k_3; \\
 m_1 &= -a_4 x_3 \sin k_2 + a_3 x_4 \sin k_3, \\
 m_2 &= -a_2 x_4 \sin k_3 + a_4 x_2 \sin k_1, \\
 m_3 &= -a_3 x_2 \sin k_1 + a_2 x_3 \sin k_2; \\
 n_1 &= a_4 x_3 \cos k_2 - a_3 x_4 \cos k_3 + (a_3 - a_4)x_1, \\
 n_2 &= a_2 x_4 \cos k_3 - a_4 x_2 \cos k_1 + (a_4 - a_2)x_1, \\
 n_3 &= a_3 x_2 \cos k_1 - a_2 x_3 \cos k_2 + (a_2 - a_3)x_1.
 \end{aligned}$$

Решая задачу синтеза, сперва определяют

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (22.10)$$

Найденные значения φ_1 подставляют в выражения (5) и потом углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — в первые три уравнения системы (6). Таким образом, получают систему (4) и задача приводится к случаю трех положений.

Пять положений. Уравнение (2) содержит пять параметров. Поэтому наибольшее число определяемых при синтезе кривошипно-ползунного передаточного механизма параметров — пять. Задачу синтеза формулируем следующим образом: заданы четыре угла, координирующие положения кривошипа k_1, k_2, k_3, k_4 и соответствующие перемещения ползуна s_1, s_2, s_3, s_4 . Можно положить, что пяти положениям кривошипа

$$\varphi_1, \varphi_2 = \varphi_1 + k_1, \quad \varphi_3 = \varphi_1 + k_2, \quad \varphi_4 = \varphi_1 + k_3, \quad \varphi_5 = \varphi_1 + k_4 \quad (9)$$

соответствуют пять положений ползуна:

$$x_1, x_2 = x_1 + s_1, \quad x_3 = x_1 + s_2, \quad x_4 = x_1 + s_3, \quad x_5 = x_1 + s_4. \quad (10)$$

Необходимо определить r, b, e, φ_1, x_1 .

Для решения задачи составляем систему уравнений:

$$x_i^2 - 2r(x_i \cos \varphi_i - e \sin \varphi_i) = b^2 - r^2 - e^2, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (11)$$

Так же, как и в предыдущем случае, исключаем b и получаем четыре уравнения типа (22.7). Из них исключаем r и получаем три уравнения типа (22.9). Из последних исключаем e и получаем два уравнения типа (7), первое из них идентично (7), а второе отличается тем, что вместо φ_4, x_4, a_4 искомыми являются величины $\varphi_5, x_5, a_5 = x_5^2 - x_1^2$. Подставляя в эти двух уравнениях выражения (9), получаем уравнение (22.10) и уравнение

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-B_0 \pm \sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}}{2A_0}, \quad (12)$$

где A_0, B_0, C_0 отличаются от A, B, C только тем, что $x_4, \sin k_3, \cos k_3$ следует заменить величинами $x_5, \sin k_4, \cos k_4$.

Исключая φ_1 из уравнений (22.10) и (12), получаем уравнение

$$y^4 - 2y^2(A^2z + A_0^2u) + (A^2z - A_0^2u)^2 = 0, \quad (22.11)$$

где $y = A_0B - AB_0, z = B_0^2 - 4A_0C_0, u = B^2 - 4AC$.

Подставляя в уравнение (22.11) выражения (10), получаем алгебраическое уравнение шестнадцатого порядка, которое содержит только неизвестное x_1 . Определяют это неизвестное, и по выражениям (10) находят x_2, x_3, x_4, x_5 . Первые четыре величины подставляют в первые четыре уравнения системы (11). Таким образом, получаем систему (6), и задача приводится к случаю четырех положений.

§ 22.6. Синтез шарнирных четырехзвенных передаточных механизмов

Рассмотрим синтез шарнирного четырехзвенника по заданным парам положений вращающихся звеньев. Ведущее звено OA условно назовем кривошипом независимо от того, может ли он в синтезируемом механизме совершить полный оборот или нет. Если число заданных пар положений кривошипа и коромысла не больше трех, то задачу синтеза просто и наглядно можно решать графически, применяя метод обращения движения.

Пример 22.6 (рис. 22.15). Заданы неподвижные шарниры O и C , положения кривошипа a_1 и a_2 и соответствующие им положения коромысла b_1 и b_2 и также длина кривошипа OA . Определить графически длины звеньев шарнирного четырехзвенника, реализующего заданные условия синтеза.

Решение. При повороте кривошипа на угол φ коромысло должно поворачиваться на угол ψ . Если всему механизму сообщают вращение в

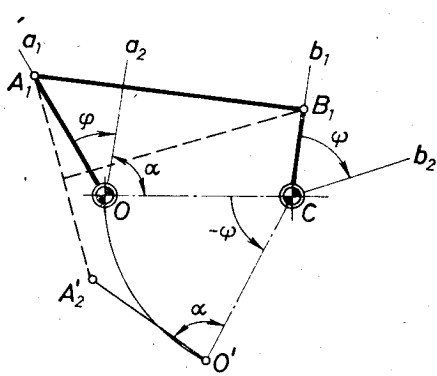


Рис. 22.15.

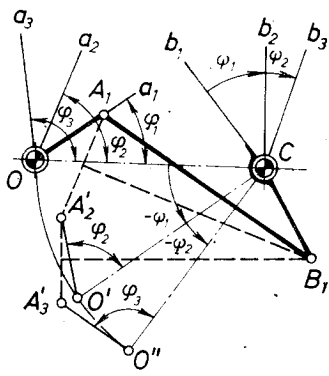


Рис. 22.16.

направлении, противоположном вращению коромысла, то при повороте механизма на угол $-\psi$ вокруг центра C коромысло остается неподвижным в положении b_1 , станина поворачивается на угол $-\psi$, а кривошип поворачивается вместе со станиной и относительно станины на угол φ , так что шарнир A перемещается в точку A'_2 . Шарнир B должен находиться на одинаковых расстояниях от точек A_1 и A'_2 , так как точки A и B принадлежат шатуну. Это означает, что центр шарнира B может быть выбран на перпендикуляре, восстановленном в средней точке отрезка $A_1A'_2$, например, в точке B_1 .

Пример 22.7 (рис. 22.16). Задача подобна предыдущей, только вместо двух положений синтезируемого механизма заданы три.

Решение. Дважды повторяя примененный в предыдущем примере прием, шарнир коромысла получаем в точке B_1 , которая в общем случае не находится на луче b_1 .

Для аналитического решения рассматриваемую задачу синтеза формулируем так: определить размеры шарнирного четырех-

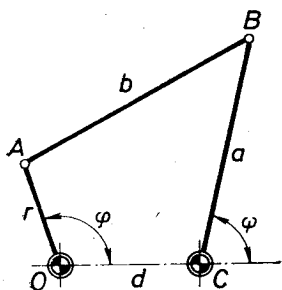


Рис. 22.17.

звенника (рис. 22.17) по углам φ_i, ψ_i , реализующего заданные положения $i = 1, 2, \dots$ механизма. Методика решения этой задачи синтеза рассмотрена в § 22.1, в котором, согласно рис. 22.3, было выяснено, что абсолютные длины звеньев механизма в этой задаче не имеют значения. Поэтому выгодно принять $d = 1$, это означает, что в ходе синтеза необходимо найти параметры r, a, b , используя в качестве единицы длины d .

Подставляя в формуле (6.31) расстояние между неподвижными центрами шарниров $d = 1$, получают пригодное для синтеза выражение функции положения:

$$r \cos \varphi + ar \cos (\varphi - \psi) - a \cos \psi = 1/2(1 + r^2 + a^2 - b^2). \quad (22.12)$$

Решаем задачу для разного числа требуемых положений.

Два положения. Задано $\varphi_1, \psi_1; \varphi_2, \psi_2$. Определить параметры механизма, способного воспроизвести эти положения.

Напишем систему из двух уравнений:

$$r \cos \varphi_1 + ar \cos (\varphi_1 - \psi_1) - a \cos \psi_1 = 1/2(1 + r^2 + a^2 - b^2), \quad (1)$$

$$r \cos \varphi_2 + ar \cos (\varphi_2 - \psi_2) - a \cos \psi_2 = 1/2(1 + r^2 + a^2 - b^2),$$

содержащую три неизвестных r, a, b . Поэтому одно из них можно выбрать произвольно. Исключая b из уравнений (1), получаем уравнение

$$rf_{12} + arc_{12} - ap_{12} = 0, \quad (2)$$

где

$$f_{12} = \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2, \quad c_{12} = \cos (\varphi_1 - \psi_1) - \cos (\varphi_2 - \psi_2),$$

$$p_{12} = \cos \psi_1 - \cos \psi_2$$

Из уравнения (2) находим

$$r = \frac{ap_{12}}{f_{12} + ac_{12}} \quad \text{или} \quad a = \frac{rf_{12}}{p_{12} - rc_{12}}. \quad (22.13)$$

Когда a при заданном r определено или наоборот, тогда, например, из первого уравнения (1), находим

$$b = \sqrt{1 + r^2 + a^2 - m}, \quad (22.14)$$

где $m = 2[r \cos \varphi_1 + ar \cos (\varphi_1 - \psi_1) - a \cos \psi_1]$.

Три положения. Заданы φ_i, ψ_i , где $i = 1, 2, 3$. Определить r, a и b .

Составляем систему уравнений:

$$r \cos \varphi_i + ar \cos (\varphi_i - \psi_i) - a \cos \psi_i = 1/2(1 + r^2 + a^2 - b^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Исключая из первого и второго и из первого и третьего уравнений b , получаем уравнения

$$\frac{1}{r} p_{12} - \frac{1}{a} f_{12} = c_{12}, \quad \frac{1}{r} p_{13} - \frac{1}{a} f_{13} = c_{13}, \quad (4)$$

из которых находим

$$r = \frac{\begin{vmatrix} p_{12} & f_{12} \\ p_{13} & f_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{12} & f_{12} \\ c_{13} & f_{13} \end{vmatrix}}, \quad a = \frac{\begin{vmatrix} p_{12} & f_{12} \\ p_{13} & f_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{12} & p_{12} \\ c_{13} & p_{13} \end{vmatrix}}. \quad (22.15)$$

Здесь f_{13} , c_{13} , p_{13} составлены по образцу символов уравнения (2). Длину шатуна b дает выражение (22.14).

Четыре положения. В уравнении (22.12) вводим четвертый постоянный параметр — начальный угол кривошипа φ_1 . Задачу синтеза формулируем так: заданы три угла, координирующие положения кривошипа k_1 , k_2 , k_3 и четыре угла, координирующие положения коромысла ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ψ_4 , которые соответствуют углам кривошипа

$$\varphi_1, \varphi_2 = \varphi_1 + k_1, \quad \varphi_3 = \varphi_1 + k_2, \quad \varphi_4 = \varphi_1 + k_3. \quad (5)$$

Определить r , a , b , φ_1 .

Составляем систему уравнений:

$$r \cos \varphi_i + ar \cos (\varphi_i - \psi_i) - a \cos \psi_i = 1/2(1 + r^2 + a^2 - b^2), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

Исключая b , получаем три уравнения типа (4). Исключаем из них a и получаем два уравнения, которые содержат r . Исключая r , получаем уравнение

$$f_{12} \begin{vmatrix} p_{13} & c_{13} \\ p_{14} & c_{14} \end{vmatrix} + p_{12} \begin{vmatrix} f_{13} & c_{13} \\ f_{14} & c_{14} \end{vmatrix} + c_{12} \begin{vmatrix} p_{13} & f_{13} \\ p_{14} & f_{14} \end{vmatrix} = 0. \quad (22.16)$$

Если в этом уравнении подставляем выражения (5), то это уравнение будет содержать только одно неизвестное φ_1 и уравнению можно придать следующий вид:

$$E \operatorname{tg}^2 \varphi_1 + F \operatorname{tg} \varphi_1 + G = 0, \quad (22.17)$$

где

$$\begin{aligned} E &= d_1 \sin k_1 + d_2 \sin k_2 + d_3 \sin k_3, \\ F &= d_1(1 - \cos k_1) + d_2(1 - \cos k_2) + d_3(1 - \cos k_3) + \\ &\quad + D_1 \sin k_1 + D_2 \sin k_2 + D_3 \sin k_3, \\ G &= D_1(1 - \cos k_1) + D_2(1 - \cos k_2) + D_3(1 - \cos k_3); \end{aligned}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} p_{13} & s_{13} \\ p_{14} & s_{14} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} p_{12} & s_{12} \\ p_{14} & s_{14} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} s_{12} & p_{12} \\ s_{13} & p_{13} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{13} & k_{13} \\ p_{14} & k_{14} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} p_{12} & k_{12} \\ p_{14} & k_{14} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} k_{12} & p_{12} \\ k_{13} & p_{13} \end{vmatrix};$$

$$s_{12} = \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2, \quad s_{13} = \sin \alpha_1 - \sin \alpha_3, \quad s_{14} = \sin \alpha_1 - \sin \alpha_4;$$

$$k_{12} = \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2, \quad k_{13} = \cos \alpha_1 - \cos \alpha_3, \quad k_{14} = \cos \alpha_1 - \cos \alpha_4;$$

$$\alpha_1 = \psi_1, \quad \alpha_2 = \psi_2 - k_1, \quad \alpha_3 = \psi_3 - k_2, \quad \alpha_4 = \psi_4 - k_3.$$

Определяем φ_1 по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4EG}}{2E} \quad (22.18)$$

и, используя выражения (5) находим $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. С этими значениями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и ψ_1, ψ_2, ψ_3 задача приводится к случаю трех положений. Поэтому r и a определяют по формулам (22.15), а b — по формуле (22.14).

При пяти заданных положениях кривошипа и коромысла определение размеров механизма производится так же, как и в § 22.5.

§ 22.7. Синтез шарнирных четырехзвенных направляющих механизмов

Важной проблемой синтеза направляющих механизмов является воспроизведение заданных положений «плоскости шатуна»^{*}). К этой проблеме принадлежит классическая задача: определить параметры шарнирного четырехзвенника, плоскость шатуна которого при движении механизма занимает последовательно n заданных положений, находящихся на конечном расстоянии друг от друга. Рассмотрим решение этой задачи [53, 64].

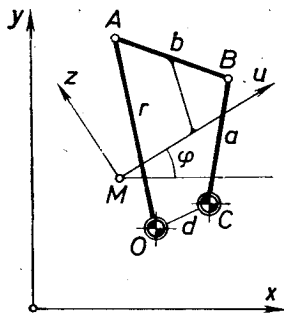


Рис. 22.18.

Каждое i положение плоскости шатуна задаем координатами начальной точки M подвижной системы координат uz и углом φ между неподвижной x и подвижной u осями (рис. 22.18). Следовательно задано $x_{M_i}, y_{M_i}, \varphi_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$; необходимо определить параметры шарнирного четырехзвенника.

Задача будет решена, если в плоскости шатуна будут найдены точки A и B все n положений которых находятся на окружностях с центрами O и C . Координаты точек A и B в подвижной и неподвижной системах координат связывают известные формулы

^{*}) «Плоскость шатуна» — связанная с шатуном плоская фигура, совершающая движение в своей плоскости. — Прим. ред.

аналитической геометрии:

$$\begin{aligned} x_A &= x_M + u_A \cos \varphi - z_A \sin \varphi, & y_A &= y_M + u_A \sin \varphi + z_A \cos \varphi, \\ x_B &= x_M + u_B \cos \varphi - z_B \sin \varphi, & y_B &= y_M + u_B \sin \varphi + z_B \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Подставляя эти выражения в уравнения окружностей, описываемых точками A и B

$$(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 = r^2, \quad (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = a^2, \quad (2)$$

получаем два уравнения (2), которые содержат 10 постоянных параметров

$$u_A, z_A, u_B, z_B, x_0, y_0, x_C, y_C, r, a. \quad (3)$$

Каждое заданное положение плоскости шатуна позволяет составить два уравнения типа (2). Поэтому для определения всех 10 неизвестных необходимо задать пять положений плоскости шатуна. Если число заданных положений $n < 5$, то имеется

$$f = 2(5 - n) \quad (4)$$

свободных параметров, которые необходимо выбрать по конструктивным соображениям.

Величины b и d не являются независимыми неизвестными; если определены величины (3), то b и d можно определить по формуле дистанции:

$$b^2 = (u_A - u_B)^2 + (z_A - z_B)^2, \quad d^2 = (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2. \quad (5)$$

Определим параметры шарнирного четырехзвенника для разного числа заданных положений плоскости шатуна.

Два положения. В этом случае число свободных параметров $f = 6$, в качестве которых выберем координаты подвижных

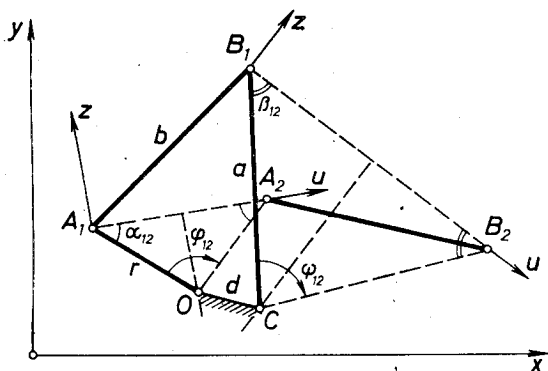


Рис. 22.19.

шарниров A и B (так как через два положения любой точки плоскости шатуна можно провести окружность) и углы поворота φ_{12} и ψ_{12} вращающихся звеньев. Тогда, согласно рис. 22.19,

$$\alpha_{12} = 1/2(180^\circ - \varphi_{12}), \quad \beta_{12} = 1/2(180^\circ - \psi_{12}). \quad (22.19)$$

Эти углы можно использовать для решения задачи графическим методом.

Четыре неизвестных — координаты неподвижных шарниров O и C — определяют с помощью формул, определяющих положение третьей точки (6.29), подставляя в них $u_0 = 1/2$, $z_0 = -1/2 \operatorname{ctg}(\varphi_{12}/2)$, $u_C = 1/2$, $z_C = -1/2 \operatorname{ctg}(\psi_{12}/2)$.

Поступая таким образом, получаем, что

$$x_0 = 1/2 [x_{A_2} + x_{A_1} + (y_{A_2} - y_{A_1}) \operatorname{ctg}(\varphi_{12}/2)], \quad (22.20)$$

$$y_0 = 1/2 [y_{A_2} + y_{A_1} - (x_{A_2} - x_{A_1}) \operatorname{ctg}(\varphi_{12}/2)],$$

$$x_C = 1/2 [x_{B_2} + x_{B_1} + (y_{B_2} - y_{B_1}) \operatorname{ctg}(\psi_{12}/2)], \quad (22.21)$$

$$y_C = 1/2 [y_{B_2} + y_{B_1} - (x_{B_2} - x_{B_1}) \operatorname{ctg}(\psi_{12}/2)].$$

Длины звеньев определяют по формулам (2) и (5).

Три положения. В этом случае также выбираем координаты подвижных шарниров A и B , так как через каждые три положения точек A и B можно провести окружность. Таким образом, использовано число всех свободных параметров $f=4$. Остальные 6 параметров — координаты неподвижных шарниров и углы поворота вращающихся звеньев — необходимо определить. Для этой цели к уравнениям (22.20), (22.21) добавляют уравнения:

$$x_0 = 1/2 [x_{A_3} + x_{A_2} + (y_{A_3} - y_{A_2}) \operatorname{ctg}(\varphi_{13}/2)], \quad (22.22)$$

$$y_0 = 1/2 [y_{A_3} + y_{A_2} - (x_{A_3} - x_{A_2}) \operatorname{ctg}(\varphi_{13}/2)];$$

$$x_C = 1/2 [x_{B_3} + x_{B_2} + (y_{B_3} - y_{B_2}) \operatorname{ctg}(\psi_{13}/2)], \quad (22.23)$$

$$y_C = 1/2 [y_{B_3} + y_{B_2} - (x_{B_3} - x_{B_2}) \operatorname{ctg}(\psi_{13}/2)].$$

Из выражений (22.20) и (22.22), (22.21) и (22.23) получаем выражения, пригодные для определения неизвестных углов поворота:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi_{12}}{2} = \frac{(x_{A_3} - x_{A_1})(x_{A_3} - x_{A_2}) + (y_{A_3} - y_{A_1})(y_{A_3} - y_{A_2})}{(x_{A_3} - x_{A_2})(y_{A_2} - y_{A_1}) - (x_{A_2} - x_{A_1})(y_{A_3} - y_{A_2})}, \quad (22.24)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\psi_{12}}{2} = \frac{(x_{B_3} - x_{B_1})(x_{B_3} - x_{B_2}) + (y_{B_3} - y_{B_1})(y_{B_3} - y_{B_2})}{(x_{B_3} - x_{B_1})(y_{B_2} - y_{B_1}) - (x_{B_2} - x_{B_1})(y_{B_3} - y_{B_2})}. \quad (22.25)$$

Найденные котангенсы подставляем в формулы (22.20), (22.21) и определяем координаты неподвижных шарниров. После этого определяем углы поворота φ_{13} , ψ_{13} , используя по одной из формул (22.22) и (22.23). Длины звеньев определяем по формулам (2) и (5).

Графическое решение задачи видно на рис. 22.20.

Четыре положения. В отличие от предыдущих случаев, подвижные шарниры теперь в плоскости шатуна нельзя выбрать произвольно, так как четыре положения любой точки плоскости шатуна могут не находиться на одной окружности. Для решения задачи необходимо определить такие точки плоскости шатуна,

четыре положения которых находятся на одной окружности или прямой. Эти точки называются *круговыми точками* и только они пригодны для использования в качестве центров подвижных шарниров.

Немецкий ученый Бурместер в 1888 г. в выпущенной в Лейпциге книге «Lehrbuch der Kinematik», показал, что на плоскости шатуна имеется бесконечно много точек, которые при четырех заданных положениях шатуна размещаются на окружности в

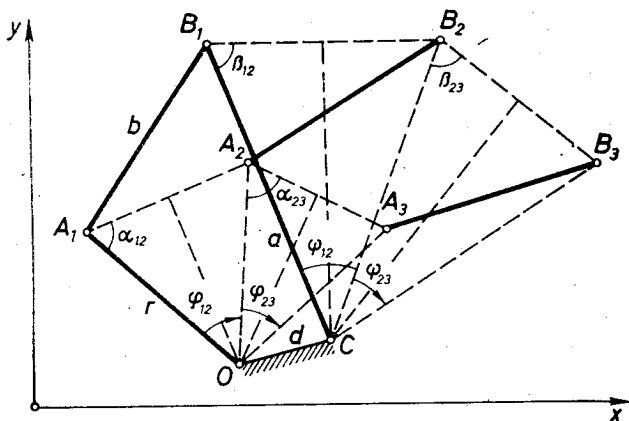


Рис. 22.20.

неподвижной плоскости и все они находятся на так называемой *кривой круговых точек*. Каждой точке этой кривой соответствует центр соответствующей окружности. Все центры в неподвижной плоскости размещаются на кривой центров, которая является геометрическим местом неподвижных шарниров. Среди бесконечно большого числа круговых точек имеется так называемая *точка Болла*, все четыре положения которой находятся на одной прямой. Если один подвижный шарнир выберем в точке Болла, то вместо шарнирного четырехзвенника в результате синтеза получим четырехзвенный механизм с одной поступательной парой, т. е. кривошипно-ползунный или коромыслово-ползунный механизм.

Задачу синтеза согласно рис. 22.18 формулируем так. Задано x_{M_i} , y_{M_i} , φ_i , где $i = 1, 2, 3, 4$. Определить кривые круговых точек и кривой центров, а также точку Болла. Когда упомянутые кривые будут определены, то из бесконечно большого числа возможных вариантов синтезируемого механизма можно выбрать наиболее пригодный для практического использования. Координаты искомым точек окружности на неподвижной плоскости в дальнейшем обозначим x и y , а на подвижной плоскости u и z . Соответственно формулам (1) имеем

$$x = x_M + u \cos \varphi - z \sin \varphi, \quad y = y_M + u \sin \varphi + z \cos \varphi. \quad (6)$$

Здесь u и z измеряются в единицах длины координат в неподвижной плоскости.

Выясним, как должны быть связаны между собой координаты четырех положений точек окружности $A(x, y)$, чтобы эта точка действительно была круговой точкой.

Координаты четырех положений точки на окружности должны удовлетворять системе уравнений

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 = a^2, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (7)$$

где C — центр окружности, и a — радиус этой окружности. Исключая a, x_c, y_c из уравнений (7), получаем уравнение [64]:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (22.26)$$

Это уравнение позволяет проверить, находятся ли все четыре точки на одной окружности или прямой. Определитель четвертого порядка (22.26) можем преобразовать в определитель третьего порядка и получить уравнение

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & r_1 - r_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & r_2 - r_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & r_3 - r_4 \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где $r_i = x_i^2 + y_i^2$. Уравнение (8) можем написать короче так:

$$|x_{i4}y_{i4}r_{i4}| = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Ищем уравнение окружности в системе подвижных координат. Соответственно формулам (6) координаты точек окружности (6) на неподвижной и подвижной плоскостях связываются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i + \kappa_i u - \sigma_i z, \\ y_i &= \eta_i + \sigma_i u + \kappa_i z, \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (22.27)$$

где $\xi_i = x_{M_i}$, $\eta_i = y_{M_i}$, $\kappa_i = \cos \varphi_i$, $\sigma_i = \sin \varphi_i$. Подставляя выражения (22.27) в уравнение (8), находим уравнение окружности

$$a_0 + a_1 u + a_2 z + a_{11} u^2 + a_{12} u z + a_{22} z^2 + a_{13} u(u^2 + z^2) + a_{23} z(u^2 + z^2) = 0. \quad (22.28)$$

Коэффициенты этого уравнения являются функциями заданных величин $\xi_i, \eta_i, \kappa_i, \sigma_i$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Если используем обозначения

$$\begin{aligned} \xi_{i4} &= \xi_i - \xi_4, & \eta_{i4} &= \eta_i - \eta_4, & \kappa_{i4} &= \kappa_i - \kappa_4, & \sigma_{i4} &= \sigma_i - \sigma_4, \\ \rho_{i4} &= \rho_i - \rho_4 = (\xi_i^2 + \eta_i^2) - (\xi_4^2 + \eta_4^2), \\ \mu_{i4} &= \mu_i - \mu_4 = (\xi_i \sigma_i - \eta_i \kappa_i) - (\xi_4 \sigma_4 - \eta_4 \kappa_4), \\ \nu_{i4} &= \nu_i - \nu_4 = (\xi_i \kappa_i + \eta_i \sigma_i) - (\xi_4 \kappa_4 + \eta_4 \sigma_4), \end{aligned}$$

то коэффициенты уравнения окружности выражаются как линейные функции определителей третьего порядка:

$$\begin{aligned} a_0 &= |\xi_{i4}\eta_{i4}\rho_{i4}|, \\ a_1 &= 2|\xi_{i4}\eta_{i4}\nu_{i4}| - |\eta_{i4}\kappa_{i4}\rho_{i4}| + |\xi_{i4}\sigma_{i4}\rho_{i4}|, \\ a_2 &= -2|\xi_{i4}\eta_{i4}\mu_{i4}| + |\eta_{i4}\sigma_{i4}\rho_{i4}| + |\xi_{i4}\kappa_{i4}\rho_{i4}|, \\ a_{11} &= 2(|\xi_{i4}\sigma_{i4}\nu_{i4}| - |\eta_{i4}\kappa_{i4}\nu_{i4}|) + |\kappa_{i4}\sigma_{i4}\rho_{i4}|, \\ a_{12} &= 2(|\xi_{i4}\kappa_{i4}\nu_{i4}| + |\eta_{i4}\sigma_{i4}\nu_{i4}| - |\xi_{i4}\sigma_{i4}\mu_{i4}| + |\eta_{i4}\kappa_{i4}\mu_{i4}|), \\ a_{22} &= -2(|\xi_{i4}\kappa_{i4}\mu_{i4}| + |\eta_{i4}\sigma_{i4}\mu_{i4}|) + |\kappa_{i4}\sigma_{i4}\rho_{i4}|, \\ a_{13} &= 2|\kappa_{i4}\sigma_{i4}\nu_{i4}|, \quad a_{23} = -2|\kappa_{i4}\sigma_{i4}\mu_{i4}|, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Для определения координат кривой круговых точек можем выбрать координаты u , а соответствующие им координаты z можно определить из уравнения

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad (22.29)$$

где

$$\begin{aligned} a &= a_{23}, \quad b = a_{22} + a_{13}u, \quad c = a_2 + a_{12}u + a_{23}u^2, \\ d &= a_0 + a_1u + a_{11}u^2 + a_{13}u^3. \end{aligned}$$

Таким образом, можно определить желаемое количество круговых точек и построить кривую (22.28) в плоскости шатуна.

Следующий вопрос — определение центров $C(x_c, y_c)$, соответствующих круговым точкам $A(u, z)$. Эти центры находятся на кривой центров в неподвижной плоскости. Находим функции $x_c = x_c(u, z)$, $y_c = y_c(u, z)$.

Расстояние трех положений точки окружности $A(x, y)$ от центра $C(x_c, y_c)$ в неподвижной плоскости одинаково, т. е.

$$\begin{aligned} (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 &= (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2, \\ (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 &= (x_3 - x_c)^2 + (y_3 - y_c)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Из этих уравнений находим

$$x_c = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}, \quad y_c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}. \quad (22.30)$$

Эти выражения пригодны для прямого определения координат неподвижных шарниров в вышерассмотренной задаче о трех положениях. Снижая порядок определителей аналогично, как в уравнении (22.26), получим

$$x_c = -\frac{\begin{vmatrix} y_{13} & r_{13} \\ y_{23} & r_{23} \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{vmatrix}} = -\frac{D_x}{2D}, \quad y_c = \frac{\begin{vmatrix} x_{13} & r_{13} \\ x_{23} & r_{23} \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{2D}. \quad (22.31)$$

Подставляя здесь выражения (22.27), получим искомые функции $x_c = x_c(u, z)$, $y_c = y_c(u, z)$. Результат этой подстановки следующий:

$$D_x = b_0 + b_1 u + b_2 z + b_{11} u^2 + b_{12} uz + b_{22} z^2;$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} \eta_{13} & \rho_{13} \\ \eta_{23} & \rho_{23} \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} \sigma_{13} & \rho_{13} \\ \sigma_{23} & \rho_{23} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \eta_{13} & \nu_{13} \\ \eta_{23} & \nu_{23} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} \kappa_{13} & \rho_{13} \\ \kappa_{23} & \rho_{23} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \eta_{13} & \mu_{13} \\ \eta_{23} & \mu_{23} \end{vmatrix}, \quad b_{11} = 2 \begin{vmatrix} \sigma_{13} & \nu_{13} \\ \sigma_{23} & \nu_{23} \end{vmatrix},$$

$$b_{12} = 2 \left(\begin{vmatrix} \kappa_{13} & \nu_{13} \\ \kappa_{23} & \nu_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{13} & \mu_{13} \\ \sigma_{23} & \mu_{23} \end{vmatrix} \right), \quad b_{22} = -2 \begin{vmatrix} \kappa_{13} & \mu_{13} \\ \kappa_{23} & \mu_{23} \end{vmatrix};$$

$$D_y = c_0 + c_1 u + c_2 z + c_{11} u^2 + c_{12} uz + c_{22} z^2;$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} \xi_{13} & \rho_{13} \\ \xi_{23} & \rho_{23} \end{vmatrix}, \quad c_1 = \begin{vmatrix} \kappa_{13} & \rho_{13} \\ \kappa_{23} & \rho_{23} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \xi_{13} & \nu_{13} \\ \xi_{23} & \nu_{23} \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$$c_2 = - \begin{vmatrix} \sigma_{13} & \rho_{13} \\ \sigma_{23} & \rho_{23} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \xi_{13} & \mu_{13} \\ \xi_{23} & \mu_{23} \end{vmatrix}, \quad c_{11} = 2 \begin{vmatrix} \kappa_{13} & \nu_{13} \\ \kappa_{23} & \nu_{23} \end{vmatrix},$$

$$c_{12} = -2 \left(\begin{vmatrix} \sigma_{13} & \nu_{13} \\ \sigma_{23} & \nu_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \kappa_{13} & \mu_{13} \\ \kappa_{23} & \mu_{23} \end{vmatrix} \right), \quad c_{22} = 2 \begin{vmatrix} \sigma_{13} & \mu_{13} \\ \sigma_{23} & \mu_{23} \end{vmatrix};$$

$$D = d_0 + d_1 u + d_2 z + d_3 (u^2 + z^2);$$

$$d_0 = \begin{vmatrix} \xi_{13} & \eta_{13} \\ \xi_{23} & \eta_{23} \end{vmatrix}, \quad d_1 = \begin{vmatrix} \xi_{13} & \sigma_{13} \\ \xi_{23} & \sigma_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_{13} & \kappa_{13} \\ \eta_{23} & \kappa_{23} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} \xi_{13} & \kappa_{13} \\ \xi_{23} & \kappa_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_{13} & \sigma_{13} \\ \eta_{23} & \sigma_{23} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} \kappa_{13} & \sigma_{13} \\ \kappa_{23} & \sigma_{23} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, можем определить центр $C(x_c, y_c)$, соответствующий каждой точке окружности $A(u, z)$, и построить кривую центров в неподвижной плоскости.

Если в предыдущих формулах вместо индекса 3 принять индекс 4, то каждая точка окружности должна получить тот же самый центр. Это обстоятельство можем использовать для проверки точности расчета. Кроме того, индекс 4 удобно использовать уже вначале, так как тогда для определения коэффициентов формул (11), (12), (13) пригодны заранее применяемые численные значения для коэффициентов уравнения точек окружности.

Соответствующий точке Болла $A(u_B, z_B) \equiv B$ центр находится в бесконечности. Поэтому координаты точки Болла удовлетворяют не только уравнению (22.28), но также уравнению

$$d_0 + d_1 u + d_2 z + d_3 (u^2 + z^2) = 0. \quad (22.32)$$

Это уравнение выражает окружность с радиусом

$$R = \frac{1}{2d_3} (d_1^2 + d_2^2 - 4d_0 d_3)^{1/2} \quad (22.33)$$

и центром в точке $O(u_0, z_0)$, где

$$u_0 = -\frac{d_1}{2d_3}, \quad z_0 = -\frac{d_2}{2d_3}. \quad (22.34)$$

Определитель D знаменателей выражений (22.30) выражает двойную площадь треугольника, соответствующего трем положениям круговой точки. Так как три положения точки Болла находятся на одной прямой, то

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Однако на одной прямой находятся не только три положения точки Болла, но также положения всех точек окружности (22.32). Это означает, что в задаче о трех положениях имеются бесконечно много точек Болла и они все находятся на одной прямой.

Окружность (22.32) пересекается с кривой круговых точек (22.28) в нескольких точках. Поэтому целесообразно через точку Болла провести еще одну окружность:

$$d_0'' + d_1''u + d_2''z + d_3''(u^2 + z^2) = 0 \quad (22.35)$$

из четырех возможных. Коэффициент уравнения этой окружности получают, заменяя индексы 3 индексами 4 в выражениях коэффициентов уравнения (13). Окружности (22.32) и (22.35) пересекаются в двух точках, из которых одна является точкой Болла.

Исключая $u^2 + z^2$ из уравнений (22.32) и (22.35), получим выражение

$$z = m + pu, \quad (22.36)$$

где

$$m = -\frac{\begin{vmatrix} d_0 & d_3 \\ d_0'' & d_3'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_2 & d_3 \\ d_2'' & d_3'' \end{vmatrix}}, \quad p = -\frac{\begin{vmatrix} d_1 & d_3 \\ d_1'' & d_3'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_2 & d_3 \\ d_2'' & d_3'' \end{vmatrix}}.$$

Подставляя выражение (22.36) в уравнение (22.32), получим квадратное уравнение, корни которого

$$u_{1,2} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4B_0B_2}}{2B_2}, \quad (22.37)$$

где

$$B_1 = d_1 + pd_2 + 2mpd_3, \quad B_2 = (1 + p^2)d_3, \quad B_0 = d_0 + md_2 + m^2d_3.$$

При помощи формул (22.36) и (22.37) определяем точки пересечения u_1, z_1 и u_2, z_2 обеих окружностей и проверяем, какая из них является точкой Болла.

Так как четыре положения точки Болла находятся на одной прямой, то

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_3}{y_1 - y_3} = \frac{x_1 - x_4}{y_1 - y_4}. \quad (15)$$

Подставляя в (15) выражения (22.27), получаем зависимость

$$\frac{\xi_{12} + u\kappa_{12} - z\sigma_{12}}{\eta_{12} + u\sigma_{12} + z\kappa_{12}} = \frac{\xi_{13} + u\kappa_{13} - z\sigma_{13}}{\eta_{13} + u\sigma_{13} + z\kappa_{13}} = \frac{\xi_{14} + u\kappa_{14} - z\sigma_{14}}{\eta_{14} + u\sigma_{14} + z\kappa_{14}}, \quad (22.38)$$

которую удовлетворяют только координаты точки Болла.

Видно, что четыре положения точки Болла находятся на прямой

$$\frac{x - (\xi_1 - u_B \kappa_1 - z_B \sigma_1)}{\xi_{12} + u_B \kappa_{12} - z_B \sigma_{12}} = \frac{y - (\eta_1 + u_B \sigma_1 + z_B \kappa_1)}{\eta_{12} + u_B \sigma_{12} + z_B \kappa_{12}}, \quad (22.39)$$

угловой коэффициент которой определяется из

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\eta_{ik} + u_B \sigma_{ik} + z_B \kappa_{ik}}{\xi_{ik} + u_B \kappa_{ik} - z_B \sigma_{ik}}, \quad (22.40)$$

здесь i и k представляют любые два из индексов 1, 2, 3, 4.

Комбинируя эти индексы по три при расчете коэффициентов уравнения (13), получаем четыре окружности (22.32), которые пересекаются в семи точках: в точке Болла и в шести известных из кинематики центрах поворота, которые принято называть полюсами. Так как три положения каждой точки этих четырех окружностей в общем случае находятся на одной прямой, то по аналогии с кинематикой о трех бесконечно близких положениях, назовем эти окружности *окружностями перегиба*.

Сказанное проиллюстрировано на рис. 22.21. Подвижная система координат M_{uz} кривой круговых точек, окружности перегиба и точки Болла B показаны в положении 3. Каждая точка

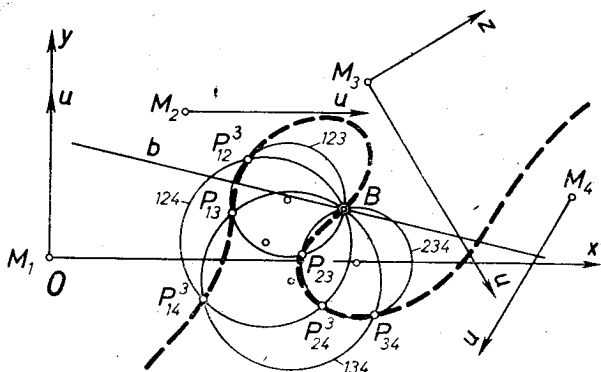


Рис. 22.21.

пересечения только двух кругов перегиба является полюсом, имеющим одинаковые индексы обеих окружностей. Если эти два индекса не содержат индекс положения системы M_{uz} , то последний индекс присоединяют к обозначению полюса P в качестве верхнего индекса, таким образом, указывая на то, что этот полюс показан в данном положении системы M_{uz} , а в неподвижной

системе координат Oxy находится в другом месте. Полюсы, имеющие только верхние индексы, в обеих системах координат совпадают. Полюсы являются точками кривой круговых точек. Коэффициенты уравнения (22.28) кривой круговых точек не зависят от выбора неподвижной системы координат Oxy . В этой системе показана прямая Болла b .

Если шатун шарнирного четырехзвенника сделать стойкой, а станину — шатуном, то подвижные шарниры станут неподвижными, а неподвижные — подвижными. Таким образом, можно сделать вывод, что кривая круговых точек обращенного движения является кривой центров прямого движения.

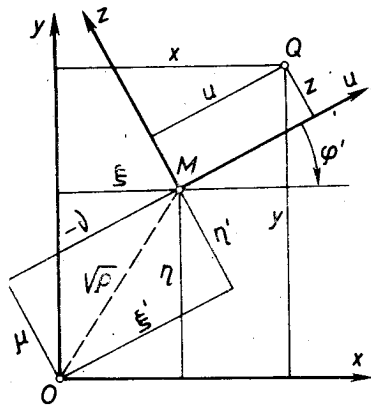


Рис. 22.22.

Для получения уравнения кривой центров рассмотрим рис. 22.22. Система координат Muz теперь стала неподвижной, а система Oxy движется, совершая поворот $\varphi' = -\varphi$, где φ является углом поворота прямого движения. Поэтому $\kappa' = \kappa$, а $\sigma' = -\sigma$. Координатами какой-то точки Q в подвижной системе являются не u, z , а x, y . Так как $-v$ и μ являются координатами точки O в системе Muz , то $\xi' = -v$ и $\eta' = \mu$. Квадрат расстояния между обоими началами координат $\rho = \xi^2 + \eta^2 = v^2 + \mu^2$ сохраняется, поэтому $\rho' = \rho$. Сказанное означает, что, произведя подстановки:

Прямое движение	u	z	ξ	η	ρ	κ	σ	v	μ
Обращенное движение	x	y	$-v$	μ	ρ	κ	$-\sigma$	$-\xi$	η

(16)

в уравнение (22.28), получим уравнение кривой центров:

$$a'_0 + a'_1x + a'_2y + a'_{11}x^2 + a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + a'_{13}x(x^2 + y^2) + a'_{23}y(x^2 + y^2) = 0. \quad (22.41)$$

Если подстановки (16) производим в уравнениях (11), (12), (13), то вместо формул (22.31) получим формулы

$$u = -D_u/2D', \quad z = D_z/2D' \quad (22.42)$$

для расчета круговой точки $A(u, z)$, которая соответствует центру $C(x, y)$, а вместо уравнения (22.32) четырех кругов перегиба получим уравнение четырех окружностей возврата

$$d'_0 + d'_1x + d'_2y + d'_3(x^2 + y^2) = 0. \quad (22.43)$$

Эти окружности, из которых каждая равна соответствующему поворотному кругу, названы окружностями возврата (продолжая аналогию с кинематикой о трех бесконечно близко стоящих положениях (§ 5.1)). Через каждую точку каждой окружности возврата в соответствующих этой окружности трех положениях проходит определенная прямая подвижной плоскости. Окружности возврата в общем случае пересекаются в семи точках: в *точке возврата* G и в шести полюсах, которые все являются точками кривой центров (рис. 22.23). Центры четырех поворотных кругов

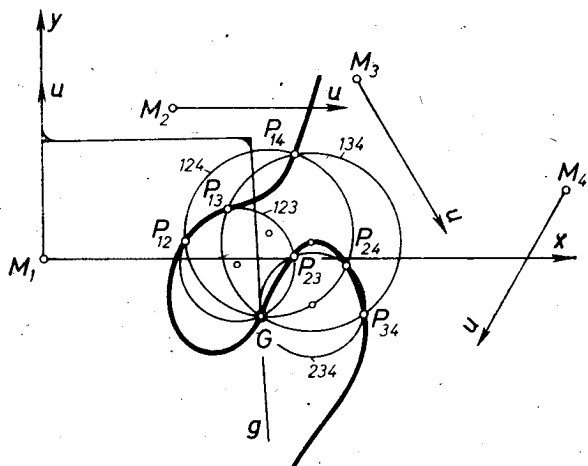


Рис. 22.23.

как центры четырех кругов перегиба находятся на одной окружности. Через точку возврата $G(x_G, y_G)$ во всех четырех положениях проходит принадлежащая подвижной плоскости *прямая возврата* g , угловой коэффициент которой в системе координат Muz

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu_{ik} - x_G \sigma_{ik} + y_G \kappa_{ik}}{-v_{ik} + x_G \kappa_{ik} + y_G \sigma_{ik}} \quad (22.44)$$

можно получить, произведя в формуле (22.40) substitution (16).

Теперь видно, что заданные четыре положения подвижной плоскости можно воспроизвести не только с помощью шарнирного четырехзвенника и кривошипно-ползунного или коромысло-ползунного механизма, но также с помощью механизмов, имеющих кривошип, коромысло или ползун и качающуюся кулису. Механизмы упомянутых четырех типов показаны на рис. 22.24. В отдельных случаях возможны также механизмы с двумя ползунами и двумя качающимися кулисами.

Если последние два коэффициента уравнений (22.28) и (22.41) равны нулю, то кривые точек окружностей и центров являются коническими сечениями. Эти кривые могут распадаться на кони-

ческие сечения и отдельные прямые также тогда, когда упомянутое условие не выполнено.

Полюса являются точками кривых центров и кривых круговых точек. Эти точки определимы независимо от уравнений этих

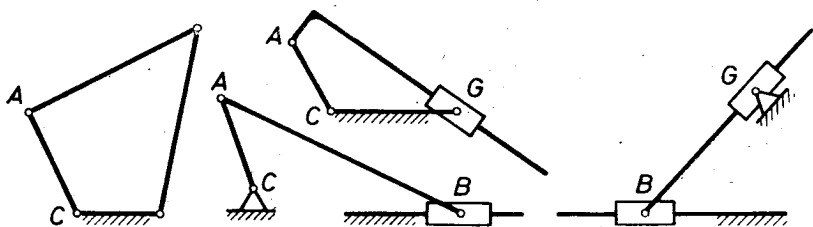


Рис. 22.24.

кривых. Координаты полюса P_{ih} в неподвижной плоскости (рис. 22.25) определены по образцу формулы (22.20)

$$x_{ih} = \frac{1}{2} [\xi_i + \xi_h + (\eta_i - \eta_h) a_{ih}], \quad y_{ih} = \frac{1}{2} [\eta_i + \eta_h - (\xi_i - \xi_h) a_{ih}], \quad (22.45)$$

где $a_{ih} = \operatorname{tg} \delta = \operatorname{ctg} (\varphi_{ih}/2) = \operatorname{ctg} ((\varphi_h - \varphi_i)/2)$.

Выражения координат полюса в подвижной плоскости вытекают из формулы (22.45) и (22.27):

$$\begin{aligned} u_{ih} &= \frac{1}{2} [(\xi_h - \xi_i)(\kappa_i + \sigma_i a_{ih}) + (\eta_h + \eta_i)(\sigma_i - \kappa_i a_{ih})], \\ z_{ih} &= \frac{1}{2} [(\eta_h - \eta_i)(\kappa_i + \sigma_i a_{ih}) - (\xi_h - \xi_i)(\sigma_i - \kappa_i a_{ih})]. \end{aligned} \quad (22.46)$$

Полюсы можно определить так же, как точки пересечения соответствующих окружностей по образцу уравнений (22.36) и (22.37).

Рассматриваемый метод расчета круговых точек и кривых центров успешно можно применить также для проектирования разных передаточных механизмов, где четырем положениям ведущего звена соответствуют заданные четыре положения ведомого звена. В этих случаях сперва с помощью метода обращения движения, который показан на рис. 22.12, 22.13, 22.15 и 22.16, выясняем четыре относительные положения

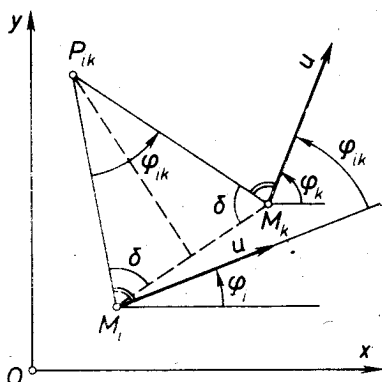


Рис. 22.25.

ведущего звена по отношению к условно неподвижному ведомому звену или наоборот и, таким образом, приводим задачу синтеза передаточного механизма к задаче синтеза направляющего механизма. Полученные этим методом решения отличаются от

непосредственно полученных решений, примеры которых рассмотрены в двух предыдущих параграфах, большими возможностями оптимизации, так как в случае четырех пар положений получаем неограниченно много решений.

Применим рассмотренную теорию для решения конкретного примера.

Пример 22.8. Согласно рис. 22.26 заданы четыре положения плоскости:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \xi_2 &= 5,6, & \xi_3 &= 13,45, & \xi_4 &= 22,25, \\ \eta_1 &= 0, & \eta_2 &= 6,4, & \eta_3 &= 7,6, & \eta_4 &= 2,95, \\ \kappa_1 &= 0, & \kappa_2 &= 1, & \kappa_3 &= 0,5, & \kappa_4 &= -0,5, \\ \sigma_1 &= 1, & \sigma_2 &= 0, & \sigma_3 &= -0,866, & \sigma_4 &= -0,866. \end{aligned}$$

Координаты точки $M(\xi, \eta)$ заданы в дециметрах. Определить параметры четырехзвенного механизма для реализации заданных положений шатуна.

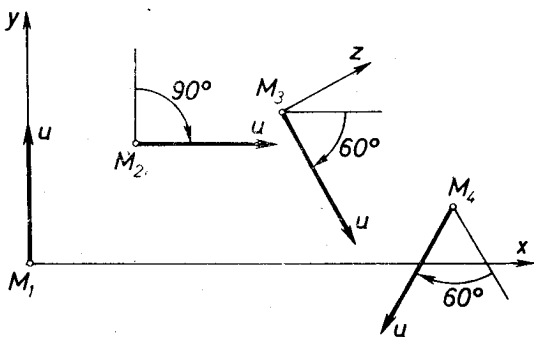


Рис. 22.26.

Решение. Определяем составные части коэффициентов уравнения (22.28) круговых точек:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0, & \rho_2 &= 72,320, & \rho_3 &= 238,663, & \rho_4 &= 503,765, \\ \mu_1 &= 0, & \mu_2 &= -6,4, & \mu_3 &= -15,447, & \mu_4 &= -17,794, \\ \nu_1 &= 0, & \nu_2 &= 5,6, & \nu_3 &= 0,1434, & \nu_4 &= -13,680, \end{aligned}$$

которые используем для расчета собранных в табл. 22.1 разностей.

С помощью данных табл. 22.1 определяем коэффициенты уравнения кривой круговых точек:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1240,853, & a_{12} &= -109,315, \\ a_1 &= -790,203, & a_{22} &= 79,746, \\ a_2 &= 662,845, & a_{13} &= -17,152, \\ a_{11} &= 223,039, & a_{23} &= -0,602. \end{aligned}$$

Выбираем ряд значений u и с помощью кубического уравнения (22.29) находим соответствующие значения z . Таким образом, полученные координаты круговых точек собраны в табл. 22.2, а точки изображены на рис. 22.27; там же штриховой линией показана кривая круговых точек для третьего положения плоскости шатуна.

Координаты центров, соответствующих найденным круговым точкам, определяем по формулам (22.31), заменяя в них индекс 3 индексом 4, так как тогда можем использовать числа первых двух рядов табл. 22.1 для

Таблица 22.1

i	ξ_{i4}	η_{i4}	α_{i4}	σ_{i4}	ρ_{i4}	μ_{i4}	ν_{i4}
1	-22,25	-2,95	0,5	1,866	-503,765	17,794	13,680
2	-16,65	3,45	1,5	0,866	-431,445	11,394	19,280
3	-8,80	4,65	1	0	-265,113	2,347	13,823

расчета коэффициентов уравнений (11), (12) и (13). Таким способом получены следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} b_0 &= 3010,752, & c_0 &= 1211,964, & d_0'' &= -125,880, \\ b_1 &= -576,956, & c_1 &= 137,512, & d_1'' &= 17,950, \\ b_2 &= 729,922, & c_2 &= 283,528, & d_2'' &= -34,042, \\ b_{11} &= 48,259, & c_{11} &= -21,759, & d_3'' &= -2,366. \\ b_{12} &= -33,462, & c_{12} &= -6,272, \\ b_{13} &= 41,987, & c_{22} &= 11,702, \end{aligned}$$

Расчитанные координаты центров x_c, y_c отмечены в табл. 22.2, а центры $1', 2', \dots$ изображены на рис. 22.27, где непрерывной линией показана кривая центров.

Форма кривой центров показывает, что точка перегиба кривой находится между точками $6'$ и $8'$. Следовательно, точка Болла должна находиться на кривой круговых точек между точками 6 и 8 . Более узкие пределы

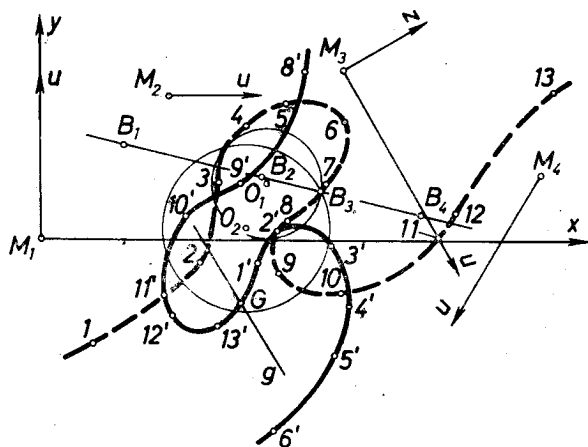


Рис. 22.27.

расположения точки Болла дает табл. 22.2: она должна находиться между точками $A(4; -3,154)$ и $A(4,2; -3,770)$.

Для точного определения точки Болла рассчитаны коэффициенты уравнения (22.32)

$$d_0 = -43,520, \quad d_1 = 7,400, \quad d_2 = -14,992, \quad d_3 = -1,366,$$

№ п/п	u, дм	z, дм	x _c , дм	y _c , дм	номер точки
1	0	-5,020	13,846	-2,896	4
		-2,924	13,265	-5,193	5
		140,523	9,052	-2,635	—
2	1,500	-7,348	13,073	-0,315	3
		-1,150	11,191	-7,835	—
		98,303	9,022	-2,686	—
3	2,000	-7,745	12,711	0,110	—
		-1,057	10,559	-8,523	6
		84,350	9,006	-2,714	—
4	4,000	-9,359	10,961	0,572	—
		-3,154	0,789	-44,160	7
		31,031	8,814	-3,020	—
5	4,200	-9,791	10,748	0,405	2
		-3,770	37,463	121,234	—
		26,376	8,762	-3,096	—
6	4,500	-10,959	10,407	-0,018	—
		-4,831	13,165	13,282	—
		20,050	8,654	-3,246	—
7	4,700	-12,360	10,177	-0,407	—
		-5,511	11,734	7,605	8
		16,428	8,557	-3,370	—
8	5,000	-15,824	9,875	-1,003	1
		-6,270	10,824	4,690	—
		12,096	8,369	-3,584	—
9	5,500	-25,038	9,561	-1,656	—
		-6,853	10,058	3,295	—
		7,635	7,968	-3,919	13
10	6,500	-49,774	9,332	-2,117	—
		-6,934	8,947	2,564	9
		3,938	7,089	-4,150	—
11	8,000	-90,881	9,235	-2,303	—
		-5,932	7,300	1,723	—
		1,270	5,915	-3,415	12
12	8,641	-108,829	9,216	-2,339	—
		-4,992	6,510	1,052	10
		0,000	5,523	-2,630	11

с использованием величин ξ_{13} , η_{13} , λ_{13} , σ_{13} . По формулам (22.37) и (22.36) определены координаты точек пересечения окружностей (22.32) и (22.35), из которых $u = 4,152$ и $z = -3,632$ удовлетворяют зависимости (22.38). Следовательно, точка $B(4,152; -3,632)$ является искомой точкой Болла.

Окружности (22.32) и (22.35) с центрами $O_1(2,709; -5,488)$ и $O_2(3,793; -7,194)$ и радиусами $R_1 = 2,365$ и $R_2 = 3,598$ показаны на рис. 22.27. Эти окружности являются кругами перегиба положений 124 и 123. Заменяя индексы 13,23 в выражениях коэффициентов формулы (13) индексами 14,34 и 24,34 и подставляя найденные коэффициенты в уравнении (22.32), можно получить уравнения кругов перегиба, соответствующих остальным двум положениям 134 и 234.

Используя, например, числа первого ряда табл. 22.1, по формуле (22.40) находим угловой коэффициент прямой Болла $\operatorname{tg} \beta = -0,2228$. Произведя подстановки (16) в выражениях коэффициентов формулы (13) и используя числа первых двух рядов, последних двух рядов и также числа первого и последнего ряда табл. 22.1, находим коэффициенты положений 124, 234 и 134 уравнения (22.43). По образцу формул (22.36) и (22.37) определяют, например, четыре точки пересечения первой и второй и также первой и третьей окружности. Две из этих точек совпадают. Эта двойная точка пересечения является точкой возврата $G(x_G, y_G)$. В нашем случае $x_G = 9,122$ дм и $y_G = 2,511$ дм. По этому методу можно определить также координаты точки Болла, используя три круга перегиба.

Если желаем определить также четвертую окружность возврата, соответствующую положениям 123, то, используя исходные данные задачи,

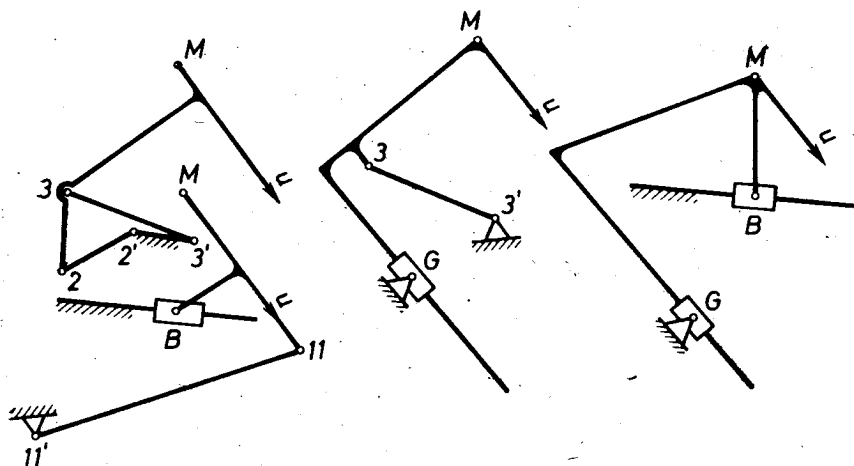


Рис. 22.28.

необходимо определить μ_{13} , ν_{13} , λ_{13} и σ_{13} для вычисления коэффициентов уравнения (22.43).

Наконец, используя табл. 22.1, например, числа первого ряда, по формуле (22.44) определяем угловой коэффициент прямой перегиба g в подвижной плоскости $\operatorname{tg} \alpha = 0,0351$.

Соответствующие этой задаче величины показаны на рис. 22.21 и 22.23.

Когда построены кривые круговых точек и центров (кривые Бурместера), точки и прямые Болла и перегиба, тогда конструктор может выбрать неограниченное количество механизмов для реализации заданных положений шатуна. Часть этих вариантов изображена на рис. 22.28.

Пять положений. Как было выяснено в начале этого параграфа, пять является максимальным числом положений шатуна,

которое можно реализовать шарнирным четырехзвенником. В случае четырех положений число свободных параметров $f = 2$, поэтому можно свободно выбрать расположение каждого подвижного шарнира на кривой круговых точек или расположение неподвижного шарнира на кривой центров. В случае пяти положений возможность свободного выбора не имеется.

Если задано пять положений плоскости шатуна, то возможно построить пять кривых круговых точек для положений 1234, 1235, 1245, 1345 и 2345. Каждые две из этих кривых пересекаются в точках, пять положений которых находятся на одной окружности.

Однако среди этих точек пересечения в общем случае имеются три таких, два положения которых не совпадают. Эти точки являются полюсами. Если, например, рассматриваем кривые круговых точек 1234 и 1235, то они пересекаются в принадлежащих подвижной плоскости полюсах P_{12} , P_{13} и P_{23} , которые являются общими для обеих групп четырех положений. Таким образом, каждая точка пересечения упомянутого типа двух кривых круговых точек в пяти положениях подвижной плоскости занимает только четыре положения на одной окружности.

Каждые две кривые круговых точек пересекаются не только в полюсах, но в общем случае также в так называемых точках Бурместера, число которых может быть четыре, две или нуль. Через каждую точку Бурместера проходят все пять кривых точек окружности и пять положений каждой из этих точек находятся на одной окружности.

В точках Бурместера можно поместить центры подвижных шарниров, а координаты центров соответствующих им неподвижных шарниров определить по формулам (22.31).

Синтезируемые шарнирные четырехзвенники для реализации двух и трех положений плоскости шатуна иногда выгодно определить следующим образом.

Два положения. Выбираем координаты x_c и y_c каждого неподвижного шарнира и координату u или z соответствующего им подвижного шарнира определяем по формуле

$$z = \frac{2(v_{12} - v_{12})u + (\rho_{12} - 2p_{12})}{2(\mu_{12} - m_{12})} \quad (22.47)$$

или по формуле

$$u = \frac{2(\mu_{12} - m_{12})z - (\rho_{12} - 2p_{12})}{2(v_{12} - v_{12})} \quad (22.48)$$

где

$$p_{12} = x_c \xi_{12} + y_c \eta_{12}, \quad m_{12} = x_c \sigma_{12} - y_c \kappa_{12}, \quad v_{12} = x_c \kappa_{12} + y_c \sigma_{12}. \quad (17)$$

Три положения. Выбирают координаты x_c и y_c каждого неподвижного шарнира и координаты соответствующего им подвижного шарнира определяем по формулам:

$$u = \frac{\begin{vmatrix} \mu_{12} - m_{12} & \rho_{12} - 2p_{12} \\ \mu_{13} - m_{13} & \rho_{13} - 2p_{13} \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} v_{12} - v_{12} & \mu_{12} - m_{12} \\ v_{13} - v_{13} & \mu_{13} - m_{13} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} v_{12} - v_{12} & \rho_{12} - 2p_{12} \\ v_{13} - v_{13} & \rho_{13} - 2p_{13} \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} v_{12} - v_{12} & \mu_{12} - m_{12} \\ v_{13} - v_{13} & \mu_{13} - m_{13} \end{vmatrix}} \quad (22.49)$$

Расчетные формулы мы получили, исходя из аналогичных системе уравнений (7) и постулая аналогично преобразованиям для случая четырех положений. Выражения величин p_{13} , m_{13} и v_{13} можно получить, заменяя в выражениях (17) индекс 2 индексом 3.

Рассмотренный в конце книги аналитический метод синтеза четырех положений плоских стержневых механизмов является простым, общим, с широкими возможностями оптимизации. Он не требует дополнительных знаний, необходимых для использования теории Бурместера [17]. Метод пригоден для синтеза четырех и многозвенных направляющих и передаточных механизмов, если заданы или определены четыре относительные положения, воспроизводимые любыми двумя звеньями. В ходе расчета полученные кривые Бурместера, точки и прямые Болда и возврата позволяют для решения задачи выбрать механизм с оптимальными размерами и оптимальной структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Артоболевский И. И. Механизмы в современной технике. Пособие для инженеров, конструкторов и изобретателей. В 7-и т.— М.: Наука, 1979—1981 (т. 1—7).
2. Артоболевский И. И. Теория механизмов.— М.: Наука, 1965, изд. 2-е.
3. Артоболевский И. И., Боголюбов А. Н. Леонид Владимирович Ассур.— М.: Наука, 1971.
4. Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов.— М.: Физматгиз, 1959.
5. Ассур Л. В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации.— М.: АН СССР, 1952.
6. Баранов Г. Г. Классификация, строение, кинематика и кинестатика механизмов с парами первого рода.— Труды семинара ТММ, 1952, вып. 46.
7. Баранов Г. Г. Курс теории механизмов и машин.— М.: Машгиз, 1959.
8. Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. Основы теории метрического синтеза плоских механизмов/Пер. с нем. Я. Л. Геронимуса.— Киев — М.: Машгиз, 1959.
9. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов/Пер. с англ.— М.: Мир, 1971.
10. Бессонов А. П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев.— М.: Наука, 1967.
11. Боголюбов А. Н. История механики машин.— Киев: Наукова думка, 1964. (АН УССР. Сектор истории естествознания и техники ин-та истории.)
12. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления.— М.: Наука, 1969. (Физико-математическая библиотека инженера.)
13. Бруевич Н. Г. О надежности и точности автоматического производства.— В кн.: Вопросы точности и надежности в машиностроении.— М.: АН СССР, 1962. (АН СССР. Гос. ком. СМ СССР по автоматизации и машиностроению. Ин-т машиноведения.)
14. Бруевич Н. Г. Точность механизмов.— М.— Л.: ОГИЗ, 1946.
15. Бушта Л. А. Поведение системы на открытой аэростатической опоре.— Вильнюс.— Вибротехника, 1971, 3(12), 73—79.
16. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций.— М.: Наука, 1971. (Серия: «Оптимизация и исследование операций».)
17. Геронимус Я. Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов.— М.: Физматгиз, 1962.
18. Геронимус Я. Л. Нахождение профиля кулачка по заданному движению толкателя.— Техника воздушного флота, 1933, № 3.
19. Гидродинамическая теория смазки/Под ред. Л. С. Лейбензона.— М.— Л.: ГТИИ, 1934. (Авт.: Н. П. Петров, О. Рейнольдс, А. Зоммерфельд, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин, Л. С. Лейбензон.)
20. Гродзенская Л. С. Применение методов проектирования шарнирных механизмов с установкой.— Труды ин-та машиноведения. Семинар по ТММ, 1959, вып. 76.
21. Гутьяр Е. М. Уточнение расчета маховика по методу проф. Н. И. Мерцалова.— Вестник металлопромышленности, 1939, № 3.

22. Дзинтарс У. Я. Аналитический метод кинематического и кинетостатического расчета сложных механизмов с подвижными гидроцилиндрами.— Труды Латв. СХА, 1967, вып. 19.
23. Дзинтарс У. Я. О динамическом расчете механизмов с подвижными гидроцилиндрами.— Труды Латв. СХА, 1967, вып. 19.
24. Егоров К. В. Основы теории автоматического регулирования.— М.: Энергия, 1967, изд. 2-е.
25. Жерарден Л. Бионика/Пер. с франц.— М.: Мир, 1971.
26. Журавлев В. Н. Снижение веса машиностроительных конструкций.— М.— Свердловск: Машгиз, 1961, изд. 2-е.
27. Зак П. С. Глобидная передача.— М.: Машгиз, 1962.
28. Зиновьев Вяч. А. Курс теории механизмов и машин.— М.: Наука, 1972, изд. 2-е.
29. Зиновьев Вяч. А. Пространственные механизмы с низшими параметрами. Кинематический анализ и синтез.— М.— Л.: Гостехиздат, 1952.
30. Зиновьев Вяч. А., Бессонов А. П. Основы динамики машинных агрегатов.— М.: Машиностроение, 1964.
31. Зубчатые и червячные передачи. Некоторые вопросы теории, расчета и производства/Под ред. Н. И. Колчина.— М.— Л.: Машгиз, 1959. (Авт.: В. Д. Андожский, А. И. Белянин, В. Л. Вейц и др.)
32. Карелин В. С. Синтез плоских механизмов, шатунные кривые которых мало отличаются от правильных многоугольников.— Механика машин, 1967, вып. 11—12.
33. Кирпичев М. В. Теория подобия.— М.: АН СССР, 1953.
34. Кобринский А. Е. Механизмы с упругими связями. Динамика и устойчивость.— М.: Наука, 1964.
35. Кожевников С. Н. Аппаратура и механизмы гидро-, пневмо- и электроавтоматики металлургических машин.— М.— Киев: Машгиз, 1961.
36. Кожевников С. Н. Теория механизмов и машин.— М.: Машиностроение, 1973, изд. 4-е.
37. Кожевников С. Н., Есипенко Я. И., Раскин Я. М. Механизмы.— М.: Машиностроение, 1965, изд. 3-е.
38. Кожевников С. Н., Цехнович Л. И. Механизмы с заданным относительным движением подвижных звеньев.— Труды ин-та машиноведения. Семинар по ТММ, 1955, вып. 56.
39. Колчин Н. И., Мовнин М. С. Теория механизмов и машин.— Л.: Судпромгиз, 1962.
40. Крагельский И. В. Трение и износ.— М.: Машгиз, 1962.
41. Крагельский И. В., Виноградова И. Э. Коэффициенты трения. Справочное пособие.— М.: Машгиз, 1962.
42. Кринецкий И. И. Регулирование двигателей внутреннего сгорания.— М.— Киев: Машгиз, 1960.
43. Лавендел Э. Э. Синтез оптимальных вибротехник.— Рига: Зинатне, 1970.
44. Лебедев П. А. Кинематика пространственных механизмов.— М.— Л.: Машиностроение, 1966.
45. Левитский Н. И. Кулачковые механизмы.— М.: Машиностроение, 1964.
46. Летошнев М. Н. Аналитический метод исследования механизма качающейся шайбы.— В кн.: Сб. трудов по сельскохозяйственной механике, 1954, т. 2.
47. Левитский Н. И. Теория механизмов и машин.— М.: Наука, 1979.
48. Лихтенфельд В. Синтез механизмов/Пер. с нем. Я. Л. Геронимуса.— М.: Наука, 1964.
49. Малышев А. П. Прикладная механика. Структура и синтез механизмов.— Новоиколаевск: Сибирское областное гос. изд-во, 1923.
50. Налимов В. В. Теория эксперимента.— М.: Наука, 1971. (Физико-математическая библиотека инженера.)
51. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем.— М.: Наука, 1967.

52. Озол О. Г. Аналитический метод треугольников в кинематике плоских механизмов.— В кн.: Анализ и синтез механизмов.— М., 1966.
53. Озол О. Г. Аналитический метод треугольников в метрическом синтезе плоских шарнирных механизмов.— Труды Латв. СХА, 1968, вып. 21.
54. Озол О. Г. Влияние упругой линейной муфты на неравномерность хода машинного агрегата.— Труды Латв. СХА, 1961, вып. 10.
55. Озол О. Г. Движение ножа некоторых режущих аппаратов.— Труды Латв. СХА, 1959, вып. 8.
56. Озол О. Г. Исследование топологических свойств кинематических цепей.— Труды Латв. СХА, 1965, вып. 17.
57. Озол О. Г. Кинематический и кинетостатический расчет плоских механизмов по методу треугольников.— Труды Латв. СХА, 1967, вып. 19.
58. Озол О. Г. Некоторые новые теоремы о свойствах векторов скоростей и ускорений точек твердого тела.— Труды Латв. СХА, 1960, вып. 9.
59. Озол О. Г. Новая структурная формула механизмов и ее теоретическое и практическое значение.— Труды Латв. СХА, 1962, вып. 11.
60. Озол О. Г. Об образовании механизмов. Вопросы механизации животноводческих ферм.— Труды Латв. СХА, 1971, вып. 38.
61. Озол О. Г. О перспективном направлении синтеза механизмов. Проблемы механизации сельскохозяйственного производства.— Труды Латв. СХА, 1974, вып. 32.
62. Озол О. Г. Повторяющиеся связи в механизмах.— Труды Латв. СХА, 1970, вып. 27.
63. Озол О. Г. Расширение структурной теории и классификации плоских механизмов с низшими парами.— Труды Латв. СХА, 1963, вып. 13.
64. Озол О. Г., Галвановский В. Я. Аналитический метод определения кривых Бурместера и точки Болла. Проблемы механизации сельского хозяйства.— Труды Латв. СХА, 1972, вып. 48.
65. Озол О. Г., Радзинь З. Э. Исследование движения стрелы гидравлического погрузчика.— Труды Латв. СХА, 1963, вып. 13.
66. Петрокас Л. В. К расчету кулачко-фрикционных механизмов.— В кн.: Современные проблемы теории машин и механизмов.— М., 1965.
67. Проектирование зубчатых конических и гипоидных передач/Пер. с англ.— М.: Машгиз, 1963.
68. Прокофьев В. Н. Основы теории гидромеханических передач.— М.: Машгиз, 1957.
69. Рагульскис К. М. Механизмы на вибрирующем основании.— Каунас, 1963. (АН Лит. ССР. Ин-т энергетики и электротехники.)
70. Раевский Н. П. Методы экспериментального исследования механических параметров машин.— М.: АН СССР, 1952.
71. Растрингин Л. А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем.— Рига: Зинатне, 1965. (АН Латв. ССР. Ин-т электроники и вычислительной техники.)
72. Решетов Л. Н. Конструирование рациональных механизмов.— М.: Машиностроение, 1972, изд. 2-е. (Библиотека конструктора.)
73. Решетов Л. Н. Трение в зубцах с эвольвентным зацеплением.— Труды семинара по ТММ, 1947, т. 1, вып. 2.
74. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.— М.: Наука, 1968, изд. 2-е. (Физико-математическая библиотека инженера).
75. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.—Л.: Гостехиздат, 1951, изд. 2-е.
76. Сомов П. О. О степенях свободы кинематической цепи.— Журнал русск. физ.-хим. о-ва, 1887, т. 19, вып. 9.
77. Сперанский Н. В. Проектирование мальтийских механизмов.— М.: АН СССР, 1960.
78. Теория и практика уравнивания машин и приборов/Под ред. В. А. Щенетильникова.— М.: Машиностроение, 1970.
79. Теория плоских механизмов и динамики машин/Под ред. А. В. Желиговского.— М.: Высшая школа, 1961. (Авт.: Г. А. Барсов, Л. В. Безменова, Л. С. Гродзенская и др.)

80. Турбин Б. И., Карлин В. Д. Теория механизмов и машин.— М.: Высшая школа, 1968.
81. Финни Д. Введение в теорию планирования экспериментов/Пер. с англ.— М.: Наука, 1970.
82. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах/Пер. с англ.— М.: Мир, 1969.
83. Черкудинов С. А. Синтез плоских шарнирно-рычажных механизмов.— М.: АН СССР, 1959.
84. Штейнвольф Л. И. Динамические расчеты машин и механизмов.— М.: Киев: Машгиз, 1961.
85. Шукелис Н. О. Метод точечных отображений звеньев в кинематике пространственных механизмов. Проблемы сельскохозяйственного производства.— Труды Латв. СХА, 1971, вып. 32.
86. Шукелис Н. О. Устойчивость структуры механизмов и проектирование оптимального клинового механизма. Проблемы механизации сельского хозяйства.— Труды Латв. СХА, 1972, вып. 48.
87. Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление.— М.: Гостехиздат, 1958, изд. 2-е. (Физико-математическая библиотека инженера.)
88. Юдин В. А. Механизмы приборов. Справочник.— М.: Машгиз, 1952.
89. Юдин В. А., Петрокас Л. В. Теория механизмов и машин.— М.: Высшая школа, 1967.
90. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения.— М.: Наука, 1969.
91. Янте А. Механика движения автомобиля. Ч. I/Пер. с нем.— М.: Машгиз, 1958.
92. Alt H. Der Übertragungswinkel und seine Bedeutung für das Konstruieren periodischer Getriebe.— Werkstattstechnik und Maschinenbau, 1932, 26.
93. Bennet G. T. A New Mechanism.— Engineering, 1903, vol. 76.
94. Berkof R. S., Lowen G. G. A New Method for Completely Force Balancing Simple Linkages.— Journal of Engineering for Industry. Transactions of the ASME, 1969, Series B, No. 1.
95. Bögelsack G. Zur Konstruktion von Reibkurvengetrieben.— Maschinenbautechnik, 1964, H. 7.
96. Fischer O. Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanisms.— Zeitschr. für Math. und Phys., 1902, Bd. 47.
97. Franke R. Vom Aufbau der Getriebe. Bd. 1.— Berlin: VDI-Verlag, 1943.
98. Hain K. Angewandte Getriebelehre. 2. neubearbeitete und ergänzte Auflage.— Düsseldorf: VDI-Verlag, 1961.
99. Koenig L. R. A Uniform Method for Determining Angular Accelerations in Mechanisms.— Journal of Applied Mechanics, 1946, vol. 68.
100. Kraus R. Getriebelehre. Bd. 3. Massbestimmung.— Berlin. VEB-Verlag Technik, 1956.
101. Luck K. Zur rechnerischen Ermittlung der Abmessungen von ebenen Gelenkgetrieben.— Wissenschaftliche Zeitschr. Techn. Hochschule Dresden, 1961, 10, H. 1.
102. Nerge G. Tafel der Kennwerte Symmetrischer Bewegungsgesetze für Kurvenmechanismen.— Maschinenbautechnik, 1962, H. 8.
103. Oehmichen M. Maschinenuntersuchungen. T. 1. Messverfahren.— Leipzig: Teubner-Verlag, 1959.
104. Reuleaux F. Lehrbuch der Kinematik. Bd. 1—2. Braunschweig.— Verlag von F. Vieweg und Sohn, 1875—1900.
105. Rogal R. Anwendung hochtouriger Luftlager.— Maschinenbautechnik, 1971, H. 7.
106. Volmer J. Bedeutung rechnererzeugter Bilddarstellungen in der Getriebechnik.— Maschinenbautechnik, 1972, H. 8.
107. Wittenbauer F. Graphische Dynamik. Ein Lehrbuch für studierende und Ingenieure.— Berlin: J. Springer, 1923.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автомат, определение 10
Автомоделизм 312
Акселерограф 306
Акселерометр 306, 307
Аналог скоростей 105
— ускорений 105
Аналогия непрямая 312
— прямая 312
Ассура принцип образования механизма 56, 57
- Балансировка роторов 294, 298
Бицентроида 327
Болла точка 411
Брахистохрона 322
- Вариатор 77, 130
— фрикционный бесступенчатый 73, 74
Вейсбаха гипотеза 192
Вектор главный 280
Виллиса теорема 329
— формула 131, 132
Винт дифференциальный 154
Виттенбауэра диаграмма 227
Водило 131
Воспроизведение заданной траектории 393
Вульфа кулиса 70, 77
- Геликоид развертывающийся 386
Главная геометрическая зависимость 26
Главные точки 280
Головка зуба 360, 361, 369
Градиент ускорения 101
Грасгофа теорема 397, 398
Гука шарнир универсальный 140
- Двигатель, характеристика механическая 209
— — статическая 210
Делительные цилиндры 385, 386
Диаграмма энергомакс 227
Диады 60
Динамометр тормозной 308
- Жуковского рычаг 176
- Закон Амонтона — Кулона 187
Замыкание кинематических пар геометрическое 19
— — — силовое 19
Зацепление внутреннее 367
— Новикова 380, 381
— эвольвентное 361
Звенья механизма 16
— — базисные 25
— — кинематические пассивные 44
Зинььева метод кинематического анализа 148, 149
Зубчатые колеса конические 361
- Зубчатые колеса, модуль 360
— — нормальные (нулевые) 360, 375
— — — корригированные 373, 374
— — с косыми зубьями 377
— — солнечные 74
— —, шаг 360
- Инверсия кривой 76
Инверсоры 76
Инволюта 361
- Кинематическая схема 28
— цепь 25—28
Кинематические пары 17, 33
— — винтовые 197
— — высшие 18
— — несамостоятельно замкнутые 19
— — низшие 18
— — обратимые 19
— — самостоятельно замкнутые 19
— — слишком жесткие 44
Кинестатика 157
Колеса винтовые 72, 385, 386
— гиперболоидные 385
— гипоидные 387
— паразитные 129, 130
— предельные 364
Конус начальный 382
— трения 188
Координата обобщенная 104
Коромысло 67
Коэффициент возрастания усилий 242, 247
— динамичности 254, 278
— запаса сцепления 332
— нечувствительности регулятора 274
— перекрытия 365, 371, 378, 380
— полезного действия 239
— — винтовой пары 245
— — — высших кинематических пар 246—248
— — — планетарных зубчатых механизмов 248
— — — системы 243
— — — стержневого механизма 252
— потеря 240
— трения приведенный 191
— формы 206
Кривошип 67, 405
Критерий оптимизации 321
— пересечения 37
Крутовые точки 411
Кулачок 71
Кулиса 67
- Линия зацепления 181, 329, 358, 367
— — активная 364
- Маага метод изготовления зубчатых колес 373
Малышева структурная формула 40
Масса вращающаяся 284

- Масса поступательно движущаяся 284
 — приведенная 213, 214
 Машина 9
 Машинный агрегат 10, 208
 Метод блокирующих контуров 377
 — засечек 80
 — кинематических диаграмм 99—101
 — кинематического анализа 79, 103, 144—148
 — кинестатики 156—158
 — обкатывания 372, 373
 — повернутых скоростей 84
 — треугольников 105—111
 Механизм, анализ 11
 — винтовой 153—155
 — винтонарезной 133
 — вращающейся кулисы 89, 90, 97, 112
 — второго класса 61
 — гидравлический 77
 — Давида 133
 — захвата 78
 — звездчатый 73
 — зубчато-рычажный 74, 138—140
 — зубчатый 67, 71, 73, 75
 — — храповой 73
 — идеализованный 34
 — качающейся вилки 151
 — — кулисы 400
 — — шайбы 151
 — «клянящегося» вентилятора 98
 —, класс 61
 —, классификация 65, 67, 74, 76, 77
 —, коромысло-ползунный 122, 123
 —, коэффициент динамичности 354
 —, кривошипно-ползунный 29, 69, 77, 111, 113, 401
 —, кулачково-зубчатый 357, 358
 —, кулачково-фрикционный 355, 356
 —, мальтийский 333—337
 —, надежность 325
 —, направляющий 74, 75, 392, 401
 —, объемный 42
 —, определение 9, 28
 —, ошибки 323
 —, передаточный 74, 75, 392, 401
 —, переменной структуры 33
 —, верхностный 42
 — — плоский 42, 63, 66
 — — сферический 42
 — — цилиндрический 42
 —, подъема плуга 114, 115
 —, принужденного движения 39
 —, пространственный 66
 —, разряд 29
 —, реверсивный 77
 —, с гибкой связью 67, 74, 75
 —, с динамическими связями 50
 —, с зубчатой рейкой 77
 —, с периодической остановкой звеньев 77
 —, самотормозящийся 186
 —, синтез 11, 315
 —, синусный (кулиса Вульфа) 70, 77
 —, статически уравновешенный 284
 —, стержне-винтовой 74
 —, структурная схема 29
 —, сцепления 77
 —, тангенсный 70
 —, тормозной 78
 —, фрикционный 67, 73, 75, 331
 — — храповой 74
 —, шепинга 62, 397
 —, шарнирный четырехзвенный направляющий 408
 — — — передаточный 405
 —, центроидный 327
 —, экскаватора 115
 —, эксцентрикковый 68
 —, электротали 136
 Механизмы винтовые 67, 74, 75
 —, высших классов 123—127
 Механизмы диадные 60, 94, 95, 112
 —, клиновые 67, 74, 75
 —, кулачковые 67, 75, 77, 102
 — — дезаксиальные 71
 — — планетарные 71
 — —, синтез 337—357
 — — центральные 71, 178
 —, стержневые 67
 Моделирование математическое 312
 —, физическое 309
 Модератор 78, 268
 Модуль зубчатых колес 360
 Момент инерции маховика 259
 — — приведенный 214, 215
 —, маховой 266
 Мощность 211
 Мультипликатор 130, 137
 Муфта кулачковая 77
 —, упругая 235—239
 —, фрикционная 77
 Направляющая 67
 Начальная окружность зубчатой передачи 182
 — — качения 359
 Неуравновешенность роторов 290—296
 Ножка зуба 360
 — —, подрезание 364, 370
 Ньютона критерий подобия 311
 —, теорема подобия 311
 Озола формула структурная 40
 Окружность возврата 83, 417
 —, делительная 360
 —, начальная 182
 —, основная 362
 —, перегиба 416
 Ольдгейма муфта 77
 Опора упругая 271
 Определение скоростей, основная теорема 85
 Пантограф 76
 Параболограф 78
 Параллелограмм шарнирный 46
 Параметры номинальные 323
 Передаточное отношение 128, 129, 130
 Передача бипланетарная 134
 —, винтовая 384
 —, дифференциальная 72, 131, 135, 136
 —, зубчатая 71, 358—391
 —, карданная 140—143
 —, планетарная 131, 132
 —, простая 128
 —, ременная 74
 —, соосная 130
 —, цепная 73
 —, червячная 72, 387—389
 Пигч (диаметральный шаг) 360
 План механизма 80, 84
 —, ускорений 90
 Плунжер 68
 Поводок 25
 Подвижное соединение 22, 23, 24
 Подвижности 20
 —, элементарные 45
 Подвижность инверсора 76
 —, механизма 38, 53, 74
 —, рабочая 53
 —, транслятора 76
 Подобие геометрическое 310
 —, физическое 310
 Подшипник 198
 Ползун 67
 Полуавтомат 10
 Полуповодок 25
 Полос зацепления 359
 Постоянная подобия 310

Принцип Даламбера — Лагранжа 175, 176
— обращения движения 101
Проскальзывание 332
Противовес 281
Прямая возврата 418
— полюсов 86
Прямилло 75, 78

Работа избыточная 261
Радиус кривизны траектории 82
— приведенный 200
Регулирование изотропное 270
Регулятор 78, 268
— астатический 273
— инерциальный 269
— центробежный 269, 271
Редуктор 130
Рейса гипотеза 192
Робертса — Чебышева теорема 398, 399
Рывок 101

Саморегулирование 268
Самосинхронизация 268
Сателлиты 71, 74, 131
Связи внешние 52
— внутренние 52
— геометрические 31
— динамические 49—51
— дифференциальные 52
— избыточные 34, 35, 37
— кинематические 33, 36
— неголономные 32
— нормальные 42, 46
— переменные 33
— псевдокинематические 33, 51
— тангенциальные 42, 46
Связь обратная 269
— — жесткая 270
— — упругая 270
Сервомотор 270
Сила, измерение динамическое 307
— приведенная 216—218
— рабочая 52
— уравновешивающая 170, 175
Силы инерции звеньев 159
— — первого порядка 285
Сильвестра пантограф 398
Система регулирования 269
Скорость номинальная 254
— средняя арифметическая 254
— — действительная 253
— — планиметрическая 254

Соединения антифрикционные 185, 186
— динамические 25
— кинематические 31, 59
— разгрузочные 36
Сомова формула структурная 39
Степень неопределенности скорости 268, 274
— неравномерности скорости 253, 257
Стойка (станина) 17
Стробоскопический эффект 305
Структурная группа 57, 165
Степень передачи 130

Тахогенератор 269
Тахограф 305
Тахометр 305
Тела рабочие 52
Техническая акустика 320
Толкатель 71, 179, 340
Точка возврата 83, 418
Транслятор 76
Трансформаторы кривых 76

Тредгольда метод 382
Трение внешнее 185
— движения 187
— жидкостное 189
— качения 185
— покоя 187
— полужидкостное 189
— полусухое 189
— скольжения 185

Угол давления 180, 319
— зацепления 181, 362
— передачи 180
— скручивания 378
— трения 188
— — приведенный 195, 198
Удар жесткий 341
— мягкий 335, 342
Уравнение базисных звеньев 26, 27
— баланса подвижностей 53
— — работ 211
— диагонали 124
— положения 124
Уравновешивание роторов 290—294
Ускорение 91
— нормальное 91
— тангенциальное 91
Устойчивость регулятора динамическая 271
— — статическая 272

Фактор устойчивости регулятора 272
Феллоу метод изготовления зубчатых колес 373
Фишера метод главных векторов 279
Формула структурная 39, 40, 53
Функция передаточная 104, 117
— положения 104, 116

Центр возврата 83
— кривизны траектории 82, 83
Цепь ведущая 29, 30, 57
— движущая 30
— условная 58, 61
Цикл 209
— кинематический 80, 318
— — рабочий 318
— — энергетический 318
Циклограмма 318

Червяк 72, 387
— глобоидальный 389
— конвольютный 389
Четырехзвенник шарнирный 116, 148, 405
— — Бенета — Верховского 148
— — плоский 148
— — сферический 148
Число зубьев минимальное 371

Шаг зубчатых колес 360
Шатун 67
Шатунные кривые 80
Шип 198

Эвольвента 361
Эволюта 361
Эйлера — Савари уравнение 82, 83
— формула 188
Эллипсограф 78