

621.01/075)

B55

**МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ОСВІТИ УКРАЇНИ  
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ ВИЩОЇ ОСВІТИ  
ВІННИЦЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

**І. І. Вишенський**

**ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН.  
МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ**

**Київ НМК ВО 1992**

2691-160

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ОСВІТИ УКРАЇНИ  
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ ВИЩОЇ ОСВІТИ  
ВІННИЦЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

І. І. Вишенський

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН.  
МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ

Затверджено Радою навчально-методичного  
кабінету вищої освіти Мінвузу України  
як навчальний посібник для студентів  
машинобудівних спеціальностей  
технічних вузів

НТБ ВНТУ



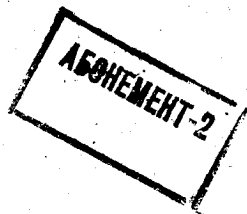
2691-160

62.01(075)

В 55

1992

Вишенський І. І. Теорія механізмів і машин. А.



Київ НМК ВО 1992

УДК 621.01/07/

Теория механизмов и машин. Механические передачи: Учеб. пособие / И.И. Вышенский. — К.: УМК ВО, 1992. — 356 с. — На укр. яз.

Розглянуто питання структури, синтезу, кінематики, кінетостатики, динаміки, регулювання та зрівноважування важільних механізмів, тертя в кінематичних парах, визначення ККД механізмів і машин, а також кілька методів динамічного дослідження регулювання та зрівноважування механізмів і машин.

Для кінематичного дослідження механізмів запропоновано кілька методів: метод графіків, планів швидкостей і прискорень, аналітичний, замкнених векторних контурів, перетворення координат та з допомогою обчислювальних машин.

Значне місце відведено фрикційним і зубчастим механізмам, аналізу та синтезу простих і складних, плоских і просторових зубчастих механізмів. Висвітлено питання структури та кінематики кулачкових механізмів, їх аналізу та синтезу графічним і аналітичними методами.

Для студентів машинобудівних спеціальностей технічних вузів.

Рассмотрены вопросы структуры, синтеза, кинематики, кинетостатики, динамики, регулирования и уравнивания рычажных механизмов, трение в кинематических парах, определение КПД механизмов и машин, а также несколько методов динамического исследования, регулирования и уравнивания механизмов и машин.

Для кинематического исследования механизмов предложено несколько методов исследования: метод графиков, планов скоростей и ускорений, аналитический, замкнутых векторных контуров, преобразования координат и, наконец, с помощью вычислительных машин.

Значительное место отведено фрикционным и зубчатым механизмам, анализу и синтезу простых и сложных, плоских и пространственных зубчатых механизмов. Освещены вопросы структуры и кинематики кулачковых механизмов, их анализа и синтеза графическим и аналитическими методами.

Для студентов машиностроительных специальностей технических вузов.

Л. 181. Табл. 5. Бібліогр.: 21 назва

ISBN 5-7763-0777-5

Навчально-методичний кабінет вищої освіти Мінвузу України, 1992

г. ВИННИЦЯ

## ПЕРЕДМОВА

Машинобудування - основна і провідна галузь промисловості, без належного розвитку якої неможливі успішний розвиток інших галузей, підвищення продуктивності праці, звільнення людини від тяжкої монотонної фізичної праці. Тому вивченню теорії механізмів і машин у вищій школі повинно відводиться чільне місце.

У Вінницькому політехнічному інституті введено спецкурс з теорії механізмів і машин /ТММ/, гідравлічних, пневматичних, вібраційних машин, деяких питань синтезу машин-автоматів, роботів і маніпуляторів тощо обсягом 36 годин.

### З історії науки

Механіка - одна з найдавніших наук. Теорія механізмів і машин є одним з віток цього вічнозеленого дерева, що невпинно розвивається.

Відомості про перші механізми губляться в глибині століть. Перші з них - це майстерно виконані штучні механізми - пастки для відлову звірів, про що свідчать рисунки на скалах і стінах печер.

Особливого розквіту наука про механізми набула у стародавній Греції. Архімед /287 - 212 рр. до н.е./ не тільки заклав основи п'яти простих машин - важеля, клина, вірота, гвинта і блока, а й працював в області практичної механіки. Подальше вчення про механізми розвинув Арістотель - людина енциклопедичних знань.

З III ст. до н.е. головним центром середземноморської культури стала Олександрія - нова столиця Єгипту. Тут створено цілу серію

трактатів про механізми. Ктесибій /перша половина II ст. до н.е./ винайшов поршневий насос, лічильник обертів, вдосконалив зубчасті колеса. Його учень Герон Олександрійський – один із найзнаменитіших інженерів Олександрійської школи – залишив трактати з механіки "Театр автоматів", "Пневматика", "Бариліон" /праця про вантажопідйомні машини/. У "Пневматиці", зокрема, є опис автомата для розливання свяченої води. Герон створив першу в світі парову турбіну /більш як 2000 років тому!./.

У IX – X стст. створено колісні годинники. Карл Великий /856–914/ одержав годинник від Каліфа Гарун Альфашіда. Починаючи з XII ст. виділяється професія спеціаліста в області військової й оборонної техніки.

Епоха Відродження висунула титана Леонардо да Вінчі, який створив гідравлічні машини, тангенціальну турбіну з кривими лопатями, прядильну машину, волоочільні верстати, верстат для насічки напилків, пристосування для нарізки гвинтів, розробив проект першого в світі екскаватора.

Про внесок у науку про механізми західних учених Аммонтона, Кулона, Вілліса, Віттенбауера та інших докладно і конкретно говоримо при вивченні курсу ТММ.

Розвиток цього курсу нерозривно пов'язаний з розвитком машинного способу виробництва.

В окрему науку ТММ виділилася наприкінці XIII ст., коли почався бурхливий розвиток промисловості в Англії, Франції, Німеччині. І відразу перед нею постало чимало практичних завдань. Ось деякі з них: 1/ зменшення втрат на тертя в громіздких передаточних механізмах; 2/ зменшення нерівномірності руху /поява маховика/; 3/ збільшення швидкостей передаточних механізмів /останнє сприяло створенню сучасних зубчастих механізмів/.

Засновником російської школи ТММ є П.Л.Чебишов /1821–1894/ – великий російський математик і механік. Формулу про ступінь рухомості він вивів на 14 років раніше за Грюблера.

М.Н.Петров /1836–1920/ – основоположник гідродинамічної теорії тертя. М.Е.Жуковський /1847–1921/ – батько російської авіації. Згадасмо його "Зведення динамічних задач про кінематичний ланцюг до задач про важіль", неперевершене досі, а також спільну з С.А.Чаплигіним /1869–1942/ працю "Про тертя мастильного шару між шипом і підшипником".

Л.В.Ассур /1876–1920/ – автор раціональної класифікації механізмів. Засновник теорії регулювання І.В.Вишнеградський /1831–1895/.

Його праці "Про регулятори прямої дії" і "Про регулятори непрямої дії" не втратили свого значення і нині. Написані М.І.Мерцаловим "Кінематика механізмів" і "Динаміка механізмів" дали підтовх систематизованому курсу динаміки механізмів. Саме М.І.Мерцалов розробив теорію просторових важільних /сферичних і семигранкових/ і просторових зубчастих механізмів. Слід згадати і внесок попередників цих зведень: М.В.Домоносова, Л.Ейлера і практиків-механіків І.П.Кулібіна, І.І.Ползунова, К.Д.Фролова, Ю.О. та М.О.Черепанових, А.Н.Нартова. Радянська школа ТММ продовжила традиції російської школи /О.П.Малишев, І.І.Артюбовлевський, С.М.Кожевников, І.І.Бруевич, Д.Н.Решетов, М.А.Скурідін та ін./ і посідала ведуче місце у світовій теорії механізмів і машин.

### Предмет і структура курсу ТММ

Теорія механізмів і машин - наука, що вивчає структуру, кінематику та динаміку механізмів і машин. Але повніше визначення предмета ТММ дала Міжнародна організація теорії механізмів і машин, створена 1969 року для організації та проведення міжнародних нарад і конгресів, обміну досвідом і проведення спільних робіт, в основному, в області термінології, стандартизації та вищої освіти: теорія механізмів і машин є галузь науки, що займається теоретичними й експериментальними дослідженнями геометрії руху, динаміки та керування систем машин, окремих машин і механізмів та їх складових частин з урахуванням технологічних питань, передачі енергії і, якщо необхідно, передачі та обробки інформації.

Оскільки рух механізмів і машин залежить від їх будови та сил, що діють на них, курс ТММ зручно поділити на два великих розділи:

"Структура і кінематика механізмів". Вивчаються будова механізмів і рух елементів їх з геометричної точки зору незалежно від сил, що викликають їх рух; методи проектування механізмів виходячи з умов кінематики, тобто враховуючи переміщення ваденої ланки, закон руху її, траєкторії тощо;

"Динаміка механізмів і машин". Вивчаються методи визначення сил, що діють на ланки та їх елементи в процесі руху машини, взаємозв'язок між рухом ланок і силами, що діють на них, та масами ланок.

В обох розділах наголошується на діалектичному взаємозв'язку структури, кінематики та динаміки механізмів, їх взаємозалежності, причинах і наслідках явищ /поява прискорень і як наслідок - сили інерції та додаткові навантаження в кінематичних парах/.

Важливу увагу в курсі приділено вивченню механічного руху - простішої форми існування матерії. В окрему дисципліну, що займається особливим рухом систем, виділилася "Теорія коливань", деякі розділи якої увійшли до курсу ТММ. Перенесення геніальним Максвеллом опису коливань механічних систем на коливання електромагнітних систем - стало потужним інструментом пізнання та керування мікросвітом.

## Проблеми теорії механізмів і машин

Зазначимо дві основні проблеми:

аналіз-дослідження існуючих механізмів і машин;

синтез-проекування нових механізмів і машин, що використовуються в різних робочих машинах, автоматах і автоматичних лініях.

Вивчення курсу ТММ вестиметься так: аудиторні заняття - лекції, практичні та лабораторні роботи.

Позакласна робота - самостійне пророблення матеріалу, поглиблене вивчення певних питань за завданням викладача, написання курсового проекту.

## I. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

### I.1. Основні поняття та означення

Усі механізми та машини складаються з окремих деталей. Деталь - це елементарна частина машини, виготовлена, як правило, з цілого шматка матеріалу або з окремих частин зварюванням, тому не може бути розібрана на простіші без руйнування /вал, шпонка, зубчасте колесо/. Під час роботи машини одні деталі залишаються нерухомими, інші рухаються відносно нерухомих і рухомих, іноді група деталей рухається як одне ціле відносно інших. Тому в ТММ існує поняття - ланка.

Рухома ланкою називають рухому деталь або групу деталей, що рухаються як одне ціле, а деталі в ній не рухаються одна відносно одної. Наприклад, зубчасте колесо, вал і шпонка обертаються навколо спільної осі як одне ціле. Тому в ТММ цю групу деталей, з'єднаних в одну рухому ланку, називатимемо зубчастим колесом. На рис. I.1, а схематично показано цю рухому ланку і деталі, з яких вона складається: вал 1, шпонка 2, колесо 3. Графічно зображена ця ланка на рис. I.1, б. На рис. I.2, а зображено схему рухомої ланки - поршня

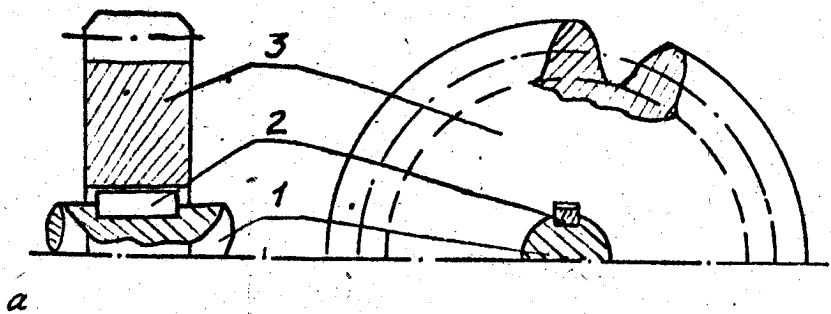


Рис. I.1

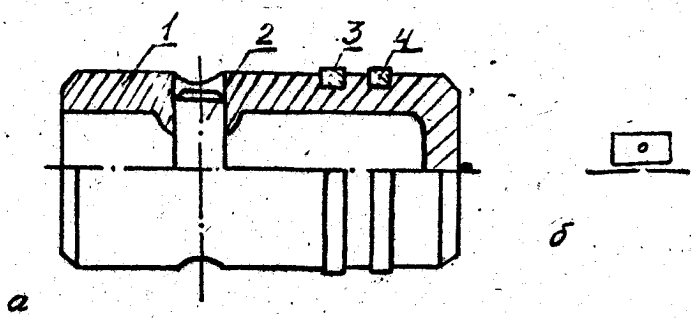


Рис. I.2



/повзун/, що складається з таких деталей: тіло 1 поршня, палець 2, компресійне 3 і мастилоскидальне 4 кільця. Усі деталі рухаються тут поступально як одне ціле. На рис. 1.3, а зображено схему рухомої ланки - шатуна, що має тіло 1, головку 2, вкладки 3 і 4, болт 5, шайбу 6, гайку 7, контргайку 8 та шплінт 9. Під час руху вони мають однакові кутові швидкості і прискорення. Біля кожної схеми рухомої ланки дається її умовне графічне зображення /рис. 1.3, б/, яким треба користуватися при складанні кінематичних схем механізмів і машин. При кінематичному і силовому дослідженні зручно розглядати як одне ціле /як одну рухому ланку/, стрічку конвейєра і вантаж на ній. Усі нерухомі деталі машини зв'язані жорстко між собою в одну систему і називаються нерухою ланкою, або стояком. Наприклад, основа 2 підшипника, кришка 3, вкладки 4, гвинт 5, шайба 6, рама, корпус, блок циліндрів та інші нерухомі деталі 1 /рис. 1.4, а/. Згідно з визначенням у механізмі чи машині всього один стояк і певна кількість рухомих ланок.

У транспортній машині зазначені вище деталі також створюють одну рухому ланку, оскільки ці деталі не рухаються одна відносно іншій.

З'єднуючись між собою та зі стояком, рухомі ланки стикаються в точці, по лінії або поверхні. Наприклад, куля 1 опірна поверхня стикаються в точці, кулачок 1 і ролик 2 - по лінії /рис. 1.5/, вал 1 і підшипник 2 - по поверхні /рис. 1.6, в/. Точка, лінія чи поверхня, якими стикаються між собою чи зі стояком рухомі ланки, називаються елементами кінематичної пари.

Сукупність елементів кінематичних пар, що накладають обмеження на відносний рух ланок, називається кінематичною парою. Те, що елементи кінематичних пар накладають обмеження на відносний рух ланок, що її створили, легко перекопати на такому прикладі. Поки вал не вкрито в підшипник, він, як вільне в просторі тіло, мав шість ступенів вільності - три незалежних обертальних і три незалежних поступальних. Після з'єднання вала з підшипником у кінематичній парі елементи їх обмежили рух вала. Вал у нерухому підшипнику може лише обертатися навколо осі й рухатися вздовж неї. Якщо ж на валу поставити обмежувальні кільця чи пояски, то вал буде лише обертатися навколо осі /рис. 1.6, в/.

Сукупність ланок, з'єднаних між собою кінематичними парами, називається кінематичним ланцюгом. Умовне зображення механізму, що показує, з яких ланок побудовано цей механізм і якими кінематичними

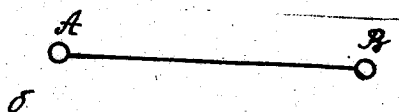
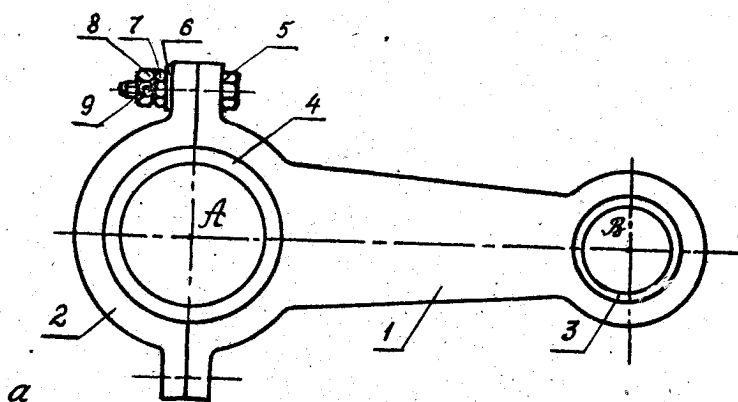


Рис. I.3

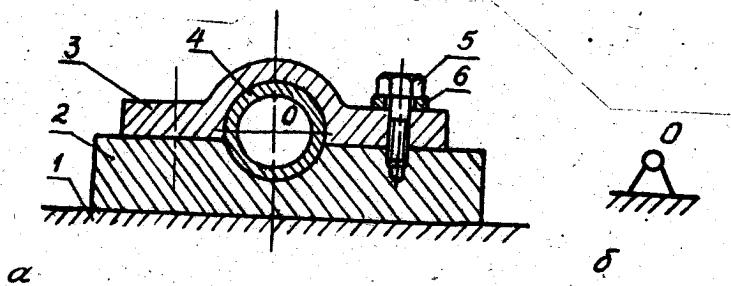


Рис. I.4

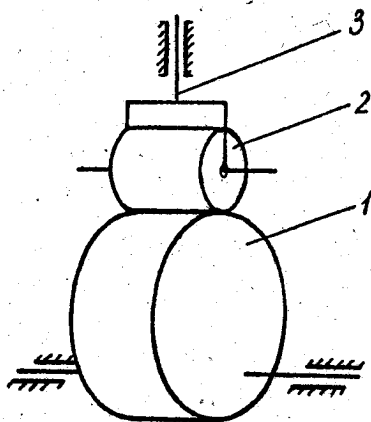


Рис. 1.5

парами з'єднані ланки, називається кінематичною схемою. Користуючись цими поняттями, дамо таке визначення механізму.

Механізм — це штучний кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою, призначений для виконання цілком визначеного доцільного руху.

Машина — це механізм або комплекс механізмів, що виконує корисну роботу на виробництві або при перетворенні енергії. Довніше визначення машини І.І.Артоболевський дав в останніх своїх роботах. Він писав, що машина — це устаткування, створене

не людиною для використання законів природи з метою полегшення фізичної та розумової праці, збільшення її продуктивності і полегшення її частковою чи повною заміною людини в трудових і фізіологічних функціях.

За функціональним призначенням машини можна поділити на кілька груп.

1. Машини-двигуни, що перетворюють енергію на механічну роботу: електричні, теплові, атомні, парові, пневматичні, гідравлічні, двигуни внутрішнього згорання, турбіни.

2. Машини-перетворювачі, що перетворюють механічну енергію на енергію іншого виду. Це генератори електричного струму, механізми насосів, гідроприводів, компресори тощо.

3. Технологічні /робочі/ машини, які приводяться в рух двигунами і здійснюють різні технологічні процеси: металообробні верстати, прокатні стани, тістомісильні машини, верстати ткацькі, текстильні, металургійні, поліграфічні та швейні машини тощо.

4. Транспортні машини: електровози, тепловози, автомобілі, вагонтягачні машини, літаки, ліфти.

5. Інформаційні машини, що служать для перетворення вимірливої інформації та передачі математичної інформації. Це лічильні та лічильно-обчислювальні машини.

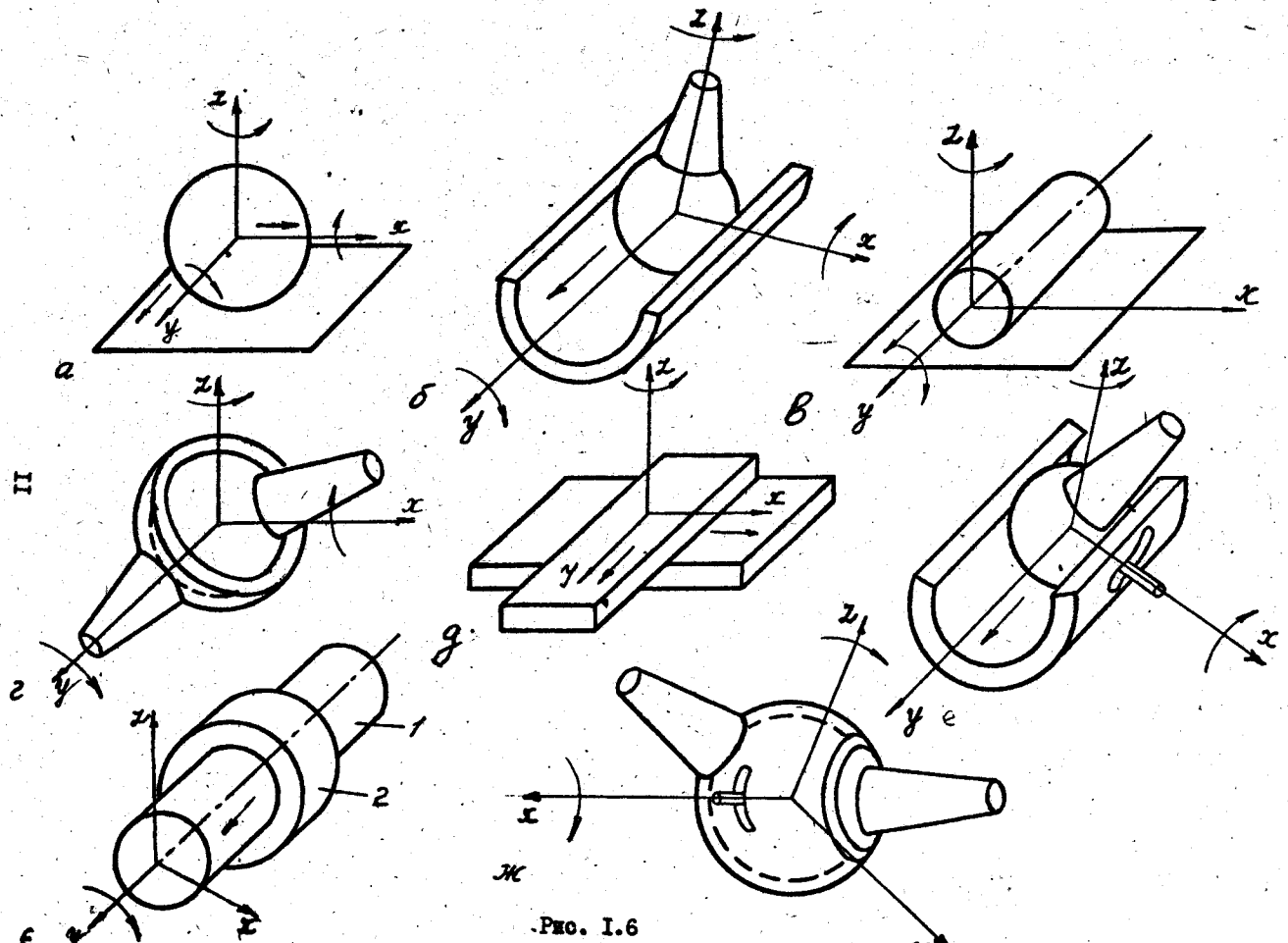


Рис. 1.6

6. Кібернетичні машини - це машини, що відтворюють рухи, властиві людині, з допомогою відповідних систем керування - автооператорів, роботів і маніпуляторів.

Промисловий робот - це перепрограмовувача автоматична машина, що є сукупністю маніпулятора і перепрограмовуваного обладнання керування, і служить для виконання у виробничих процесах рушійних і керуючих функцій, замінюючи аналогічні функції людини при переміщенні предметів виробництва і технологічної оснастки, звільнюючи людину від монотонної стомлюючої праці.

Машинний агрегат - це сукупність машини-двигуна, передавальних механізмів і робочої машини або машини-знаряддя.

## 1.2. Класифікація кінематичних пар

Згідно з визначенням механізм - це кінематичний ланцюг, в якому кожні дві ланки утворюють кінематичну пару. Залежно від того, як з'єднані між собою ланки /якими кінематичними парами/, залежить їх рух. Для зручності аналізу будови /структури/ механізмів кінематичні пари розбиті /на основі теорії російського вченого Х.І.Гофмана і праць радянських учених/ на класи. Кінематичні пари розбиті на класи й види виходячи з таких ознак: 1/ залежно від кількості накладених на відносний рух кожної ланки зв'язків; 2/ залежно від числа ступенів вільності ланок, що залишилося; 3/ залежно від виду відносного руху ланок, що утворили пару; 4/ залежно від характеру стикання елементів кінематичної пари.

1. Розглянемо класифікацію кінематичних пар за О.П.Малишевим /за кількістю накладених на відносний рух ланок зв'язків/. Але спочатку згадаємо деякі положення з механіки. Числом ступенів вільності механічної системи називають число незалежних між собою можливих переміщень системи. Будь-яке абсолютно тверде тіло /тіло, відстані в якому між будь-якими трьома точками залишаються сталими/ має шість ступенів вільності, тобто шість незалежних параметрів координат, що визначають його положення в просторі. Рух такого тіла можна уявити як обертання навколо трьох осей і ковзання вздовж цих трьох довільно взятих осей /незалежно й одночасово/. При визначенні положення механічної системи часто користуються узагальненими координатами, тобто незалежними один від одного параметрами, з допомогою яких можна визначити положення тіла в просторі, визначивши координати всіх точок тіла через ці параметри. Отже, вільне в просторі тіло має шість сту-

пенів вільності /  $H = 6$ , де  $H$  - число ступенів вільності, дорівнює числу незалежних координат/. Це означає, що на вільне в просторі тіло не накладено /рис. 1.7/ ніяких в'язей, тобто ніяких обмежень у русі. В'язями називаються обмеження, накладені на відносний рух ланок.

Входження ланки в кінематичну пару з другою ланкою накладає на їх відносний рух певні в'язі /обмеження/. Для того щоб ланки не втратили рухомості зовсім, число обмежень повинно бути меншим шести і не меншим за одиницю. У протилежному разі при числі в'язей  $S = 6$  ланки зовсім втратять рухомість, а при  $S < 1$  /наприклад,  $S = 0$ /, коли не буде ніяких обмежень, то не буде й кінематичної пари.

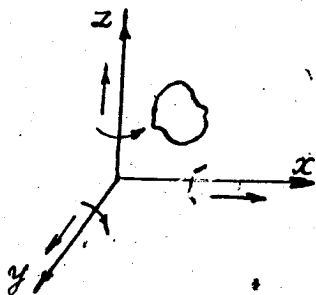


Рис. 1.7

Таким чином, число в'язей, накладених на відносний рух кожної ланки кінематичної пари змінюється від 1 до 5. Тобто, число ступенів вільності ланки, що входить до кінематичної пари,

$$H = 6 - S, \quad /1.1/$$

де  $S$  - число в'язей, накладених кінематичною парою.

Клас кінематичної пари згідно з класифікацією О.П.Малишева можна знайти з рівняння /1.1/:

$$S = 6 - H. \quad /1.2/$$

Розглянемо кінематичну пару, що її утворює куля з площиною, перекочуючись і ковзаючи по ній /рис. 1.6, а/. Рух кулі можна розкласти на три обертових рухи навколо осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  і ковзання вздовж осей  $y$ ,  $x$ . Рух уздовж осі  $z$  неможливий; донизу не дозволяє площина, а при русі догори зруйнується кінематична пара. Отже, куля може здійснювати п'ять простих незалежних рухів. Тоді число в'язей

$$S = 6 - H = 6 - 5 = 1.$$

Отже, ця кінематична пара - I класу, бо на ланку накладена одна в'язь. Циліндр на площині /рис. 1.6, в/ має  $H = 4$ ;

$$S = 6 - 4 = 2.$$

Це кінематична пара II класу. Пару II класу зображено також на рис. 1.6, б.

У шарнірі, що закінчується кулею, жодна з ланок відносно іншої не може рухатися без руйнування пари вздовж осей  $X, Y, Z$ , тобто на рух ланок накладено три обмеження. Отже, це кінематична пара III класу /рис. I.6, г/.

У підшипнику ковзання вал може обертатися навколо осі  $Z$  і рухатися вздовж цієї осі незалежно від обертання. Інші рухи неможливі. Втрачено чотири незалежних рухи:

$$S = 6 - 2 = 4.$$

Це кінематична пара IV класу /рис. I.6, ж/.

Якщо на валу з одного боку залишити буртик, а з другого - поставити кільце, вал не рухатиметься і вздовж осі  $Z$ , а лише обертатиметься навколо неї. Тобто на відносний рух накладено п'ять в'язей:

$$S = 6 - 5 = 1.$$

Кінематична пара V класу.

До V класу треба віднести й кінематичну пару гвинт - гайка, бо гвинт має тільки один незалежний рух - обертання навколо осі, а переміщення вздовж осі - залежне: за один оберт при одноходовій різьбі гвинт переміститься на один крок. Кут підйому різьби  $\gamma$  визначимо з розгортки гвинтОВОЇ лінії різьби /рис. I.8/:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{\pi d_c}, \quad /I.8/$$

де  $h, d_c$  - крок і середній радіус гвинта.

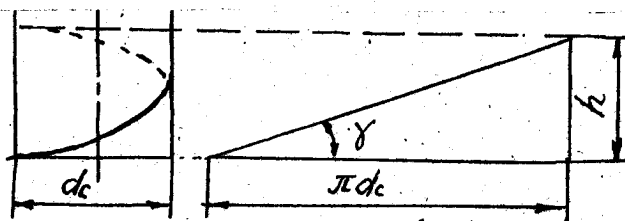


Рис. I.8

Якщо  $\gamma = 0$ , то  $h = 0$ , переміщення гвинта вздовж осі не відбудеться і гвинтова пара перетвориться на обертальну пару У класу. Якщо  $\gamma = \pi/2$ , то гвинтова пара перетвориться на поступальну кінематичну пару У класу /гвинт не повертатиметься/.

2. В.В.Добровольський поділив кінематичні пари на п'ять видів залежно від кількості ступенів вільності, що залишилися в ланках після створення кінематичної пари. Куля на площині віднесена до У виду і т.ін.

3. Залежно від характеру відносного руху ланок, що входять до кінематичної пари, розрізняють обертальні /рис. 1.6, є/ й поступальні /рис. 1.6, д/ кінематичні пари.

4. Залежно від характеру дотику елементів кінематичної пари останні бувають вищими /елементами кінематичної пари є точки чи лінії, рис. 1.6, а, в/ та нижчими /ланки стикаються по поверхнях, рис. 1.6, є/.

У ІММ доведено, що з точки зору структури одна вища кінематична пара ІУ класу еквівалентна двом нижчим кінематичним парам У класу і ланці, що утворила ці пари з іншими ланками. Іноді кінематичну пару створюють кілька рухомих ланок, наприклад, у кульково- та роликопідшипниках. Такий кінематичний ланцюг, що замінює кінематичну пару, називається кінематичною в'яззю.

### 1.3. Класифікація кінематичних ланцюгів

Кінематичний ланцюг - це сукупність ланок, з'єднаних кінематичними парами послідовно чи розгалужено. Кінематичні ланцюги поділяються на прості та складні. Якщо ланка входить не більш як до двох кінематичних пар ланцюга, такий ланцюг називається простим /рис. 1.9/. Якщо хоч одна ланка входить більш як до двох кінематичних пар, такий ланцюг називається складним /рис. 1.10/. Ланки, що мають одну кінематичну пару /1,4/, називають однокленими. Ланки, що містять елементи двох кінематичних пар /2,5/, називають двокленими, або бінарними. Ланки, що мають елементи трьох кінематичних пар /3/, - трикленні, або тринарні, чотири - чотирікленні, або квартернарні, тощо.

Ланцюги, ланки яких рухаються в одній чи паралельних площинах, називають плоскими. Якщо точки ланцюга рухаються в площинах, що перетинаються /не в паралельних/, такі ланцюги називають просторовими.



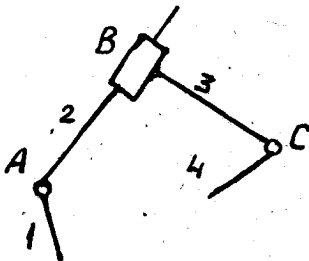


Рис. I.9

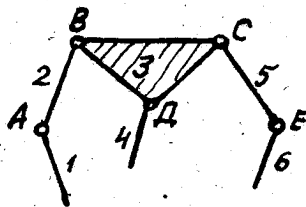


Рис. I.10

Прості та складні ланцюги поділяють на замкнені та незамкнені. Простим незамкненим кінематичним ланцюгом називають такий простий ланцюг, у якому є принаймні одна ланка, що входить до однієї кінематичної пари /див. рис. I.9/.

Якщо в простому ланцюзі немає жодної ланки, що входить до однієї кінематичної пари, такий ланцюг називають простим замкненим /рис. I.11/. Складним незамкненим кінематичним ланцюгом називають такий складний ланцюг, у якому є ланки, що входять до однієї кінематичної пари /див. рис. I.10/.

Складним замкненим кінематичним ланцюгом називають такий складний кінематичний ланцюг, в якому немає жодної ланки, що входить до однієї кінематичної пари /рис. I.12/.

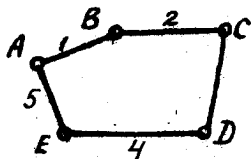


Рис. I.11

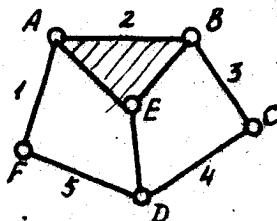


Рис. I.12

#### I.4. Структурна формула загального випадку кінематичного ланцюга

Нехай маємо  $K$  вільних у просторі тіл /ланок/ /рис. I.13/. Загальна кількість їх ступенів вільності дорівнює  $H = 6K$ .

З'єднаємо ці ланки в кінематичний ланцюг з допомогою кінематичних пар різних класів. Кожна з цих пар накладе на ланку, що входить до кінематичної пари, відповідну кількість в'язей /відбере у ланки таку саму кількість ступенів вільності/. Кінематична пара V класу накладе п'ять в'язей /відбере п'ять ступенів вільності/, IV - чотири, III - три, II - дві, I - одну. Якщо число

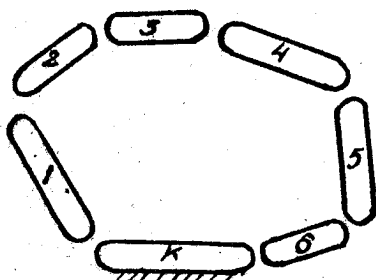


Рис. I.13

кінематичних пар V класу в цьому ланцюзі дорівнює  $P_5$ , IV -  $P_4$ , III -  $P_3$ , II -  $P_2$ , I -  $P_1$ , то загальне число ступенів вільності всіх ланок, що входять до кінематичного ланцюга:

$$H = 6K - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1$$

Закріпимо одну ланку /обернемо її на стояк/, як це завжди буває в механізмі. Тоді загальне число ступенів вільності кінематичного ланцюга відносно нерукогого ланцюга

$$W = H - 6 = 6K - 6 - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1$$

або

$$W = 6(K - 1) - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1$$

Позначимо число рухомих ланок кінематичного ланцюга  $K - 1 = n$ , тоді

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1 \quad /I.4/$$

Це формула Сомова - Малышева\* для визначення ступенів рухомості просторових сферичних кінематичних ланцюгів. Ступінь рухомості  $W$  - це число ступенів вільності кінематичного ланцюга відносно нерукої ланки /стояка/.

\* П.І.Сомов - російський, а А.П.Малышев - радянський вчені, які вивчали кінематичні ланцюги та пари.

### I.5. Структурна формула плоского механізму

У плоскому механізмі, як видно на прикладі кривошипно-повзунного механізму, на всі ланки накладено три загальні в'язі /рис. I.14/, а це означає, що жодна з ланок не може рухатися вздовж осі  $Y$ , обертатися навколо осей  $X$  і  $Z$ , тобто всі ланки втратили по три ступеня вільності. Формула Сомова - Малішева для плоского механізму набуде вигляду

$$W = (6-3)n - (5-3)p_5 - (4-3)p_4; \quad /1.5/$$

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Ця структурна формула П.Л.Чебишева для визначення ступеня рухомості плоского механізму /структурна формула плоского механізму/. Її доведено Чебишевим на 14 років раніше, ніж німецьким вченим Гріблером /деякі західні вчені й донині приписують цю формулу Гріблеру/. Визначимо ступінь рухомості кривошипно-повзунного механізму, користуючись формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4;$$

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

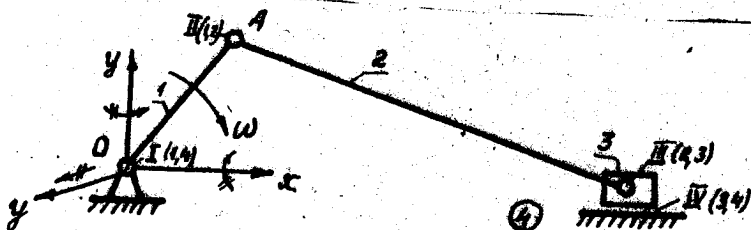


Рис. I.14

Кінематичні пари на схемі позначені римськими цифрами. У дужках записано номери ланок, що утворили ці кінематичні пари. Отже, ступінь рухомості механізму дорівнює одиниці. Це означає, що досить задати закон руху одній з ланок, щоб рух інших був цілком визначеним. Виходячи з цього можна дати таке визначення механізму. Механізмом

називається замкнений кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою, ступінь рухомості якого дорівнює кількості ведучих, або початкових ланок.

Початковою називається ланка, закон руху якої заданий. Іноді її називають кінематичним кривошипом. Це ланки, до яких прикладено рушійні сили, тому їх часто називають вхідними на відміну від ланок, закон руху яких визначають і які називаються веденими, або вихідними.

Робота зовнішніх сил, прикладених до ведучої ланки, позитивна. Веденою називається ланка, для якої робота прикладених до неї зовнішніх сил - негативна або дорівнює нулю.

### 1.6. Пасивні умови в'язі

Раніше дано визначення механізму як замкнутого кінематичного ланцюга, ступінь вільності якого дорівнює числу початкових ланок. Але під час дослідження структури механізмів можна зустріти такі, де це правило не виконується не зважаючи на те, що ланцюг - це механізм, але в одних з них ступенів вільності може бути менше, ніж ведучих ланок, а в інших - більше. Отже, в цих механізмах є в'язі та ступені вільності, що не впливають на рух механізму. Такі в'язі називають пасивними, а ступені вільності - зайвими.

Розглянемо для прикладу важільний механізм паралелограма /рис. 1.15/, що на практиці зустрічається у вагових механізмах, швейних двоголчастих машинах, спарниках тепловозів та електровозів тощо.

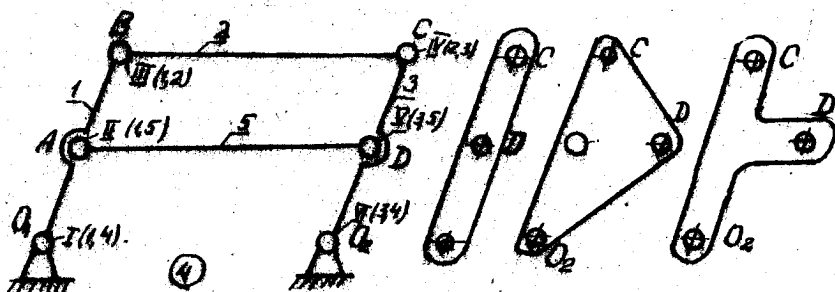


Рис. 1.15

У механізмі паралелограма  $O, B = O_2 C; BC = O, O_2$ .  
Такий механізм має кілька недоліків:

1/ невизначеність руху - ведена ланка може обертатися то в тому напрямі, що й ведуча, то в протилежному, що може бути недопустимим для ряду механізмів;

2/ за значних навантажень на ведену ланку і вона, і ведуча ланка можуть недопустимо деформуватись. Для позбавлення цих недоліків введемо додатковий шатун  $AD = BC$ . З урахуванням цього шатуна ступінь рухомості механізму паралелограма

$$W = 3n - 2P_5 - P_4;$$

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0.$$

Отже, такий механізм не має рухомості, перетворився на ферму. Справді, як це підтверджує модель механізму, у разі приведення в рух ланки I /чи іншої/ всі ланки механізму мають цілком визначений рух, а деформація ланок значно менша, ніж за відсутності шатуна  $AD$ . Отже, кінематичні пари  $A, D$  і зв'язки, накладені ними на ланки механізму, не впливають на рух механізму в цілому. Тому ці додаткові в'язі, що не впливають на рух механізму в цілому, і на закон руху веденої ланки, називають пасивними. Роблячи аналіз, пасивні в'язі треба вилучати. Зробимо це, умовно відокремимо шатун 5 від механізму. Тоді ступінь рухомості механізму

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Тобто при ступені рухомості  $W = 1$  досить мати одну ведучу ланку, задавши рух якій, задамо відповідний рух веденій ланці. Якщо ланка  $AD \neq BC \neq O, O_2$ , кінематичний ланцюг не буде механізмом - він перетвориться на ферму.

### 1.7. Зайві ступені вільності

Розглянемо кулачковий механізм, в якого штовхач 3 з'єднаний з роликком 2, що дотикається до кулачка I /рис. 1.16/. При обертанні ведучої ланки I радіус-вектор від точки  $O_1$  до точки  $K$  збільшується /зменшується/, і ведена ланка 3 - штовхач віддалятиметься /наближатиметься/ від центра  $O$ . Такий самий рух матиме штовхач і за відсутності ролика.

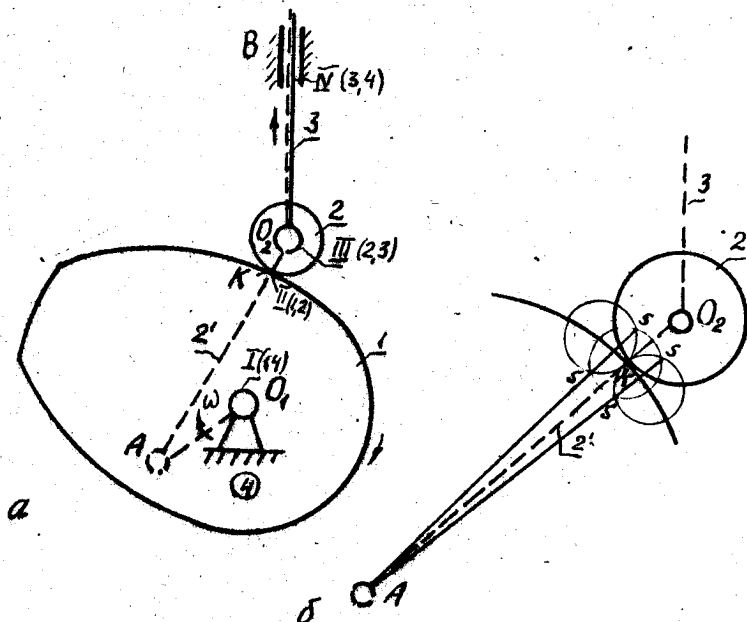


Рис. I.16

Визначимо ступінь рухомості кулачкового механізму з роликом:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4;$$

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Загальну ступінь вільності вносять ролик, який не впливає на закон руху штовкача і ввадений для того, щоб зменшити силу тертя /тертя ковзання замінене тертям кочення/. При структурному та кінематичному аналізах зайві ступені вільності вилучаються. Зробимо це, умовно видаливши ролик 2 і кінематичну пару III/. Тоді ступінь рухомості кулачкового механізму без ролика

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Справді, задавши рух кулачку, визначимо рух штовкача без ролика.

## 1.8. Замінючі механізми

Під час класифікації та вивчення структури й кінематики плоских механізмів зручно замінити вищі кінематичні пари на нижчі. Але при цьому треба задовольнити умови структурної та кінематичної еквівалентності замінючого й реального механізмів: замінючий механізм повинен мати такий самий ступінь вільності і відносний рух ланок не повинен змінитися. У ТММ доведено, що одна вища пара IV класу еквівалентна ланці та двом кінематичним парам. Коли профілями кінематичної пари IV класу є криві, що стикаються, то кінематичні пари U класу розміщують у центрах кривини цих профілів на спільній нормалі і з'єднують ланкою, що входить до цих кінематичних пар.

У кулачковому механізмі центр кривини ролика /рис. 1.16, а/ розміщений в його геометричному центрі /осі обертання  $O_2$ /, а центр кривини профілю кулачка лежить на спільній нормалі ролика і кулачка ( $n-n$ ), що проходить через точку  $O_2$  і точку  $K$  дотику ролика і кулачка. Положення центра кривини профілю кулачка графічно знаходимо так. Накреслимо коло малого радіуса з центром у точці  $K$ . Потім накреслимо два кола такого самого радіуса з центрами на профілі кулачка, стичні між собою в точці  $K$ . Ці кола перетнуться в точках  $S$  з колом, що має за центр точку  $K$ . Проведемо промені через точки  $S$  до перетину між собою в точці  $A$  на нормалі  $n-n$ . Точка  $A$  буде центром кривини профілю кулачка. Тут розмістимо другу кінематичну пару U класу. З'єднавши їх додатковою ланкою  $2'$ , дістанемо замінючий механізм  $O, AO_2B$  /на рис. 1.16, а показано штриховою лінією/. Легко переконатися, що така заміна еквівалентна з точки зору структури і точки зору кінематики.

Справді, ступінь рухомості змінючого механізму

$$W = 3 - 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

і дорівнює ступеню рухомості реального механізму.

Характер миттєвого відносного руху ланок замінючого механізму такий самий, як і вихідного /реального/. У кулачковому механізмі при обертанні кулачка за годинникову стрілку гтовчак  $Z$  в цьому положенні піднімався /на рис. 1.16, а показано стрілкою/. Піднімається в цьому самому напрямі він буде і в замінючому механізмі  $O, AO_2B$ , якщо кривошип  $O, A$  також повертати за годинникову стрілку.

У кулачковому механізмі з тарілчастим /плоским/ штовхачем і коромисловому без ролика центри кривини профілю кулачка знаходимо аналогічно /рис. 1.17/.

Центр кривини тарілки й коромисла розміщений у безконечності, тому другою кінематичною парою, яку розмістимо на спільній нормалі  $n-n$  у точці дотику  $K$ , буде поступальна пара класу - III, створена повзуном, що скріплений з додатково введеною ланкою 2, яка входить до другої - обертальної кінематичної пари у класу - в точці  $A$ . Замінючі механізми відповідно  $O, AKB$  і  $O, AKO_2$  /рис. I.17, I.18/.

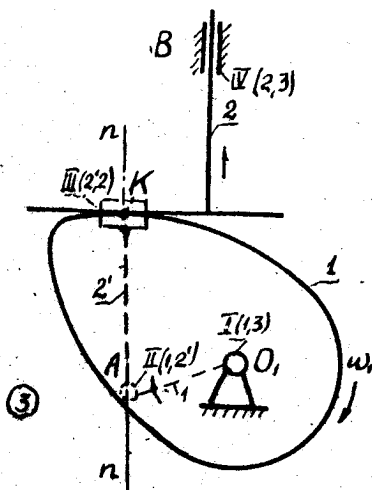


Рис. I.17

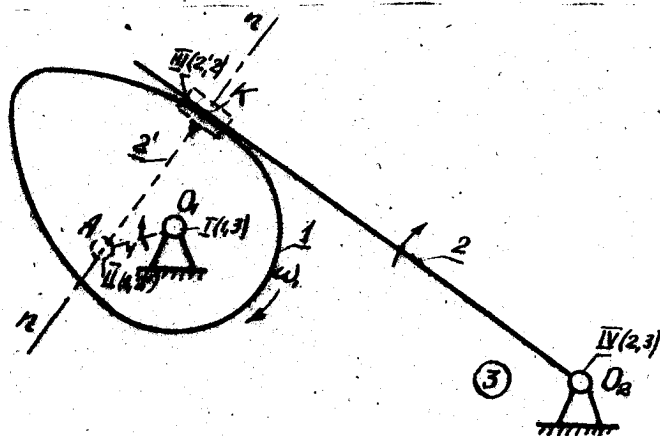


Рис. I.18



### 1.9. Структурна класифікація плоских важільних механізмів Ассура - Артоболевського

Відомо кілька класифікацій механізмів: за функціями, за характером руху веденої ланки тощо. Найраціональнішою класифікацією плоских важільних механізмів з парами У класу є класифікація Ассура - Артоболевського, що пов'язана з єдністю методів кінематичного та динамічного досліджень кінематичних ланцюгів, віднесених до одного класу.

Але спочатку розглянемо принцип створення плоских важільних механізмів з кінематичними парами У класу, запропонований Д.В.Ассуром. Будь-який плоский важільний механізм з парами У класу можна створити, послідовно приєднуючи до ведучої ланки і стояка статично визначених /нормальних за Ассуром/ плоских кінематичних ланцюгів.

Пізніше ці статично визначені /нормальні/ ланцюги були названі групами Ассура, а ведуча ланка і стояк - механізмом I класу /рис. 1.19/. Отже, будь-який плоский механізм можна дістати послідовним приєднанням до механізму I класу груп Ассура /рис. 1.20/.

Структурною групою Ассура називається кінематичний ланцюг з парами У класу, ступінь рухомості якого після умовного приєднання елементами зовнішніх кінематичних пар до стояка /механізму/ дорівнює нулю, і який не можна поділити на простіші ланцюги, що мають нульовий ступінь рухомості.

Отже, першою ознакою групи Ассура є рівність II ступеня вільності нулю:

$$W = 0;$$

$$3n - 2p_5 = 0.$$

/1.6/

У формулі /1.6/ немає пар IV класу -  $p_4 = 0$  - кожна пара IV класу замінена ланкою і двома парами У класу.

Виходячи з формули /1.6/ маємо

$$p_5 = \frac{3}{2}n.$$

/1.7/

Оскільки кількість кінематичних пар У класу завжди ціле число, то кількість рухомих ланок групи Ассура  $n$  - завжди парна /кратна двом/. Отже, другою ознакою групи Ассура є парність II ланок, тобто  $n = 2, 4, 6, 8, 10$  і т.д., а  $p_5 = 3, 6, 9, 12, 15$ . Як видно з формули /1.7/, найпростіша група Ассура складається з двох ланок

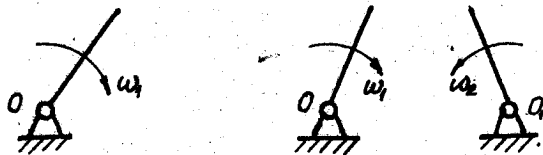


Рис. I.19

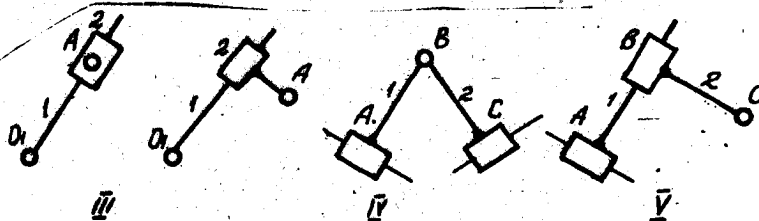
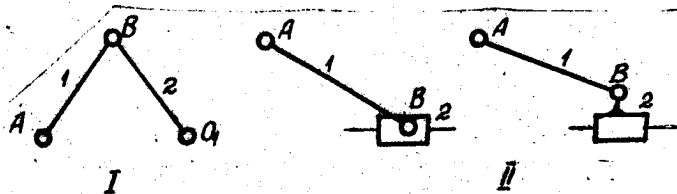


Рис. I.20

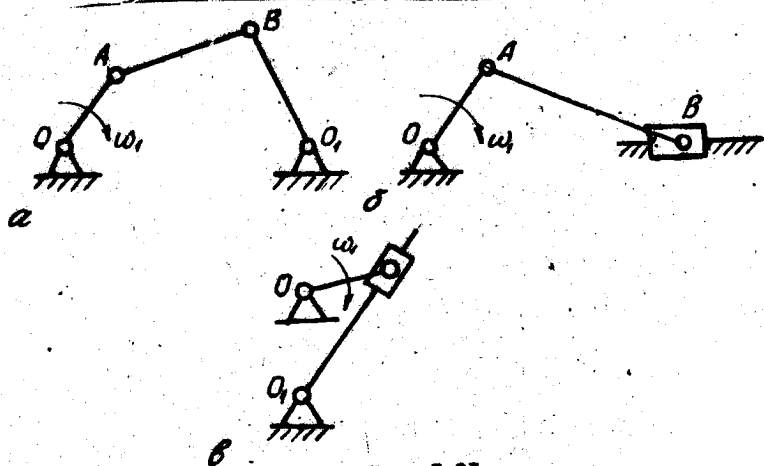


Рис. I.21

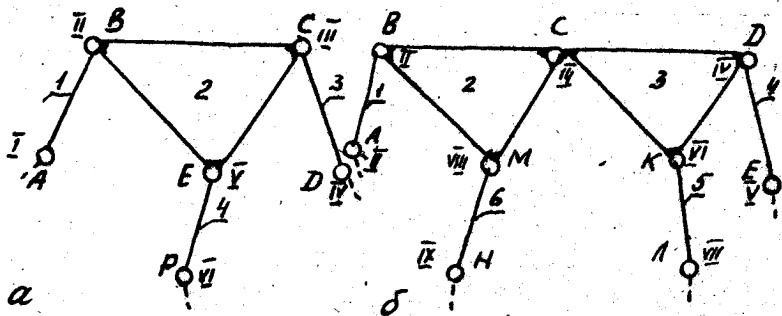


Рис. 1.22

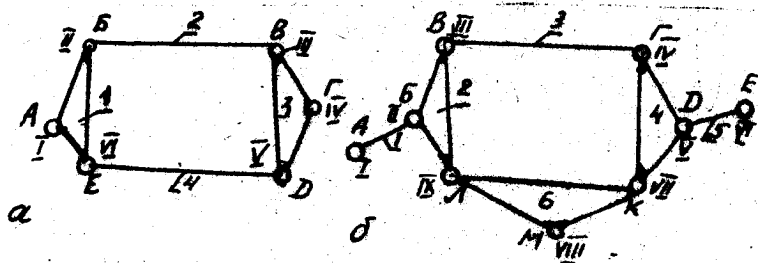


Рис. 1.23

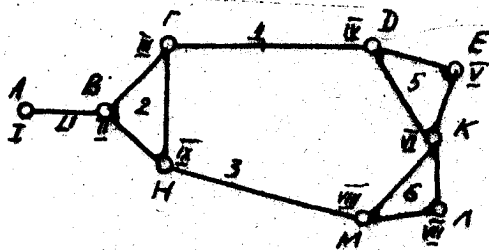


Рис. 1.24

і трьох кінематичних пар У класу. Оскільки пари У класу можуть бути обертальними та поступальними, то можливі такі варіанти їх сполучення. Якщо всі /три/ кінематичні пари У класу обертальні, то маємо дволанкову групу Ассура II класу II порядку і I виду.

На рис. I.21 зображено групи Ассура II класу II порядку I, II, III, IV і У видів.

Порядок групи Ассура визначається кількістю вільних /зовнішніх/ елементів кінематичних пар /повідків/, якими група Ассура приєднується до стояка чи механізму.

Вид /модифікація/ групи Ассура залежить від кількості обертальних і поступальних кінематичних пар та їх розміщення. Модифікації в двох ланок і трьох поступальних пар створити неможливо, бо після приєднання цього ланцюга до стояка ступінь рухомості його не дорівнюватиме нулю, а отже, цей ланцюг не буде групою Ассура.

Якщо внутрішні кінематичні пари групи Ассура створюють рухомий замкнений контур у вигляді трикутника, такі кінематичні ланцюги є групами Ассура III класу III порядку. На рис. I.22, а, зображено групу Ассура III класу III порядку, на рис. I.22, б – група Ассура III класу IV порядку. Якщо рухомий контур створили чотири внутрішні кінематичні пари, то така група Ассура є групою Ассура IV класу. На рис. I.23, а – група Ассура IV класу нульового порядку, на рис. I.23, б – II порядку. Якщо старшим контуром групи Ассура, створеним внутрішніми кінематичними парами, є п'ятикутник, то така група Ассура є групою У класу /рис. I.24/.

Якщо до складу механізму входять групи Ассура різних класів і порядків, то клас і порядок механізму в цілому визначається класом і порядком старшої групи Ассура.

## I.10. Послідовне виконання структурного аналізу

Структурний аналіз виконують у такій послідовності.

1. Визначають ступінь рухомості механізму.
2. Виділяють пасивні умови зв'язку.
3. Виділяють зайві ступені рухомості.
4. Заміняють вищі кінематичні пари IV класу двома нижчими кінематичними парами У класу і ланками.

Після виконання пп. 2-4 ступінь рухомості механізму має дорівнювати числу ведучих ланок.

5. Починаючи з найвіддаленішого від ведучої ланки виділяють ланцюг з перним числом ланок. Оскільки в практиці найбільше груп

Ассура II класу, то спочатку виділяють найпростішу двоповідкову групу. Ступінь рухомості її має дорівнювати нулю.

6. Перевіряють ступінь рухомості механізму, що залишився. Він має бути таким, як і в п. 4.

7. Визначають клас, порядок і вид виділеної групи Ассура.

8. Виділяють наступний кінематичний ланцюг, перевіряють ступінь рухомості механізму, що залишився. Установлюють клас, вид і порядок виділеної групи Ассура. Так поступають доти, доки не дійдуть до ведучої ланки.

9. За класом старшої групи Ассура визначають клас і порядок механізму в цілому, вказавши, при якій ведучій ланці виконано структурний аналіз.

10. Записують структурну формулу механізму. Наприклад:

$$I \rightarrow II_2' \rightarrow III_3 \rightarrow II_2''$$

Це означає, що до ведучої ланки і стояка /механізму I класу/ приєднано групу Ассура II класу II порядку I виду, до неї - групу Ассура III класу III порядку I, нарешті, групу Ассура II класу II порядку I II виду.

### I. II. Переваги класифікації механізмів за Ассуром - Артоболовським

Класифікація механізмів за Ассуром - Артоболовським має такі переваги.

1. Виділення з механізму груп Ассура дає змогу розвинути методи кінематичного та динамічного дослідження не всього механізму, а окремих груп Ассура.

2. Клас, порядок і вид групи Ассура визначає методику її кінематичного та динамічного дослідження незалежно від складності механізму.

3. Загальним для всіх механізмів, незважаючи на їх складність, є таке:

порядок побудови механізму

$$I \rightarrow II_2' \rightarrow III_3 \rightarrow II_2''$$

Порядок кінематичного дослідження - такий самий

$$I \rightarrow II_2' \rightarrow III_3 \rightarrow II_2''$$

Порядок динамічного дослідження - зворотний, тобто починається з найвіддаленішої від механізму I класу групи Ассура

$$I \leftarrow II'_2 \leftarrow III_3 \leftarrow II''_2$$

У протилежному разі невідомих буде більше, ніж рівнянь, які треба написати для визначення невідомих.

Слід зазначити, що є механізми, які не вкладаються в класифікацію Ассура - Астоблевського. Прикладом таких механізмів можуть бути механізми, в яких початкова /ведуча/ ланка не зв'язана зі стояком. Методи їх кінематичного та динамічного дослідження розглянуто в роботах радянських учених, зокрема, С.М.Кожевникова.

## 2. КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

Знаходження положень ланок, траєкторій, що описуються певними точками ланок, переміщень, швидкостей і прискорень, кутових швидкостей і прискорень ланок є задачами кінематичного дослідження механізмів. Визначають кінематичні параметри графічним, графо-аналітичним, аналітичним і експериментальним методами. Знайти кінематичні параметри необхідно для оцінки роботи існуючої машини або ж для синтезу нових. Адже від швидкості різцетримача стругального верстата залежить стійкість різального інструменту, продуктивність верстата. У деяких машинах сили інерції в десятки, навіть сотні разів перевищують силу ваги ланок. Це треба враховувати під час проектування та експлуатації машин. Тому для визначення сил інерції треба знайти прискорення центрів ваги окремих ланок. У деяких машинах це зробити важко, тоді користуються експериментальними методами. Експериментальні методи дослідження також дають змогу перевірити правильність вибору розрахункових схем, методів і величин обчислювальних параметрів.

### 2.1. Побудова планів механізмів

Для визначення положень ланок механізму треба мати кінематичну схему механізму, закон руху ведучої ланки й розміри ланок. Ланки механізму, швидкості та прискорення певних його точок зобразимо у вигляді ліній певної довжини. Для цього скористуємося масштабним коефіцієнтом, який є відношенням зображуваної величини до відповідного відрізка на кресленні. Масштабний коефіцієнт, який скорочено називають масштабом, позначимо літерою  $\mu$  з індексом того параметра,

який зображено графічно. Наприклад, масштабний коефіцієнт довжини ланок

$$\mu_r = \frac{r_{0A}}{OA} \frac{M}{MM'}$$

тобто

$$\mu_r = \frac{\text{Довжина ланки, м}}{\text{Довжина відрізка, що зображає її на кресленні, мм}}$$

Рекомендуються такі значення масштабних коефіцієнтів довжини ланок:

0,001 м/мм / I:1/	0,002 м/мм / I:2/	0,005 м/мм / I:5/
0,01 м/мм / I:10/	0,02 м/мм / I:20/	0,05 м/мм / I:50/
0,1 м/мм / I:100/	0,2 м/мм / I:200/	0,5 м/мм / I:500/
1 м/мм / I:1000/	2 м/мм / I:2000/	5 м/мм / I:5000/

У дужках записано креслярські масштаби. Зв'язок між цими масштабами такий:

$$\mu_r = \frac{0,001}{M}, \text{ наприклад, } \mu_r = \frac{0,001}{M \text{ I:I}} = \frac{0,001}{I/I} = 0,001 \text{ м/мм;}$$

$$\mu_r = \frac{0,001}{I:2} = \frac{0,001}{I/2} = 0,002 \text{ м/мм;}$$

$$\mu_r = \frac{0,001}{I:5} = \frac{0,001}{I/5} = 0,005 \text{ м/мм і т.ін.}$$

Закон руху ведучої ланки задається в вигляді  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\pi = \varphi(t)$ ,  $\omega = \dot{\varphi}(t)$ . У технічних розрахунках при дослідженні механізмів закон руху ведучої ланки беруть лінійним, тобто швидкість руху ведучої ланки стає  $|\omega| = \text{const}$  і дорівнює проєктованій середній кутовій швидкості. Вибравши вигідне положення ведучої ланки, знаходимо положення інших ланок. Положення ведучої ланки можна взяти довільно, але доцільніше за початкове положення вибрати таке, за якого ведена ланка займе крайнє праве чи крайнє ліве положення /верхнє або нижнє/. Оскільки в більшості машин робочий хід здійснюється повільніше, ніж ходостій  $\alpha_p > \alpha_x$ , то за початкове треба взяти таке, щоб ведуча ланка рухалася з одного крайнього положення до іншого через робочий, а не через ходостій хід, тобто положення кривошипа почне позначати на більшому куті  $\alpha_p$  у напрямі кутової швидкості. У кривошипно-повзунному і кривошипно-коромисловому механізмах ведена ланка /повзун чи коромисло/ перебуватиме у край-

нік положеннях, коли кривошип накладеється на шатун або витягуватиметься в одну лінію з ним. Звідки випливає метод знаходження крайніх положень веденої ланки цих механізмів. Для цього з центра обертання кривошипа  $O$  /рис. 2.1, 2.2/ досить зробити засічки радіусами  $R_1 = AB - OA$  і  $R_2 = OA + AB$  на траєкторії руху точки  $B$ , щоб крайні положення повзуна  $B$  і коромисла  $O, B$  були визначені. Узявши за початкове положення точки  $A$  точку  $A_0$ , робимо відлік  $\psi$  нових положень у напрямі кутової швидкості кривошипа  $\omega_1$  на куті повороту кривошипа  $\alpha_p$ , що відповідає робочому ходу кривошипа, більшого за кут повороту кривошипа  $\alpha_x$  при холостому русі машини. Зрозуміло, що точка  $A_x$  не завжди збігається з точками поділу траєкторії точки  $A$  на рівні частини /6, 8, 12, 14, 16/. На рис. 2.1 показано знаходження крайніх положень повзуна  $B_0$  і  $B_x$  у кривошипно-повзунному, а на рис. 2.2 – крайніх положень коромисла в кривошипно-коромисловому механізмі.

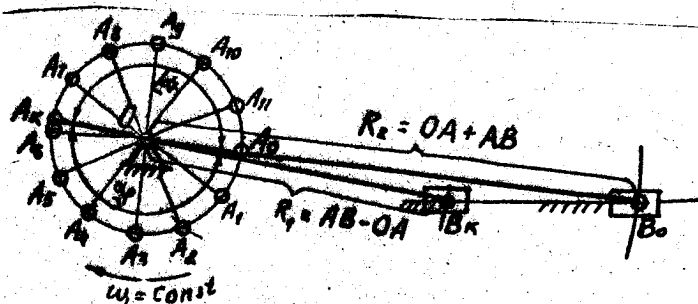


Рис. 2.1

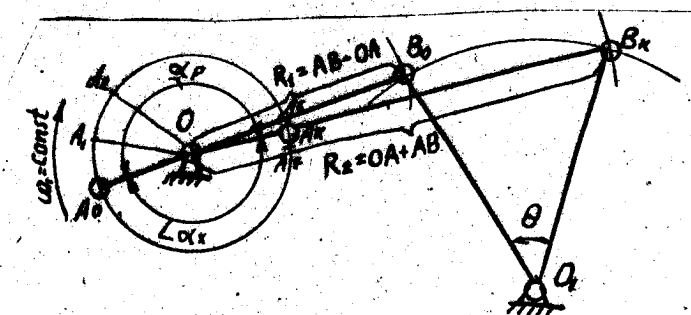


Рис. 2.2



У кулісному механізмі /рис. 2.3/ ведена ланка /куліса  $O_2B$ / перебуватиме у крайніх положеннях, коли кривошип  $O_1A$  і куліса  $O_2B$  утворять прямий кут. За початкове положення візьмемо положення  $A_0$ , щоб відлік ішов у напрямі кутової швидкості при робочому русі куліси від  $O_1A_0$  до  $O_1A_k$  і кути повороту кривошипа  $\alpha_p$ . Тоді різець рухатиметься повільніше при струганні деталі, і швидше повертатиметься у вихідне положення при холостому русі різця верстата- $\alpha_x$ . При цьому не тільки підвищиться швидкість різання, а й рівномірніше використовуватиметься потужність двигуна. Адже потужність, що втрачається при робочому ході,  $N_p = P_p v_p + P_m v_p$ , а при холостому ході  $N_x = P_m v_x$ , де  $P_p$  - сила різання;  $P_m$  - сила тертя;  $v_p, v_x$  - швидкість рівномірного руху різця відповідно при робочому та холостому ходах, причому  $v_x > v_p$ . Прискорений зворотний хід також підвищує продуктивність машини.

Визначивши крайні положення ведучих ланок і початкове положення точки  $A$  пальця кривошипа, побудуємо потрібну кількість планів механізму. Побудову планів механізму розглянемо на прикладі центрального кривошипно-повзунного механізму, узявши за початкове положення кривошипа  $OA_0$ , коли кривошип наклався на шатун /рис. 2.4/.

Поділимо коло, описане точкою  $A$  кривошипа /траєкторію точки  $A$ / на 12 однакових частин. Позначимо положення кривошипа в напрямі обертання його -  $A_1, A_2, A_3$  і т.ін. /тут за годинниковим стрілкою/. Оскільки довжина шатуна  $AB$  при роботі машини /якщо знехтувати малими деформаціями його під дією сил/ залишається незмінною, а повзун рухається по прямій  $\psi-\psi$ , то, зробивши засічки на прямій  $\psi-\psi$  /траєкторії повзуна  $B$ / радіусом, що дорівнює  $AB$ , із точок  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ , знайдемо відповідні положення повзуна  $B$  за кожною 1/12 оберта кривошипа. Сполучивши точку  $A_1$  з точкою  $B_1, B_2, \dots, B_{12}$  дістанемо 12 планів механізму при рівномірному русі кривошипа.

Методом засічок легко побудувати і траєкторію  $S$  центра ваги шатуна, якщо відомо, наприклад, що  $AS = 1/3 AB$ . Для цього радіусом, що дорівнює  $1/3 AB$ , із точок  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$  кожного положення шатуна робимо на ньому засічки, які позначаємо  $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ . З'єднавши точки  $S_1, S_2, \dots, S_{12}$  плавною кривою, дістанемо траєкторію  $S$  центра ваги шатуна.

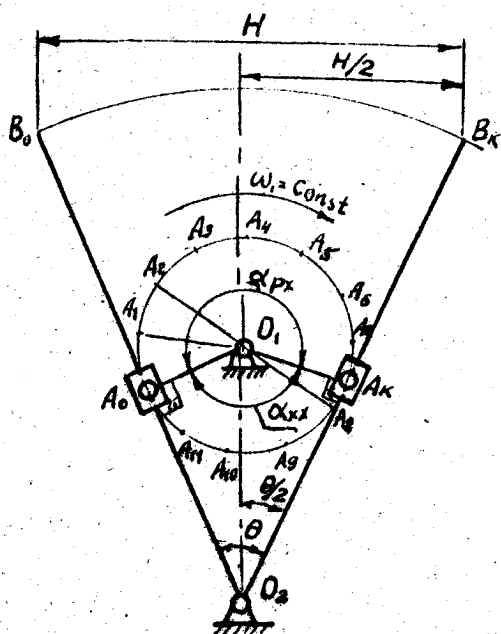


FIG. 2.3

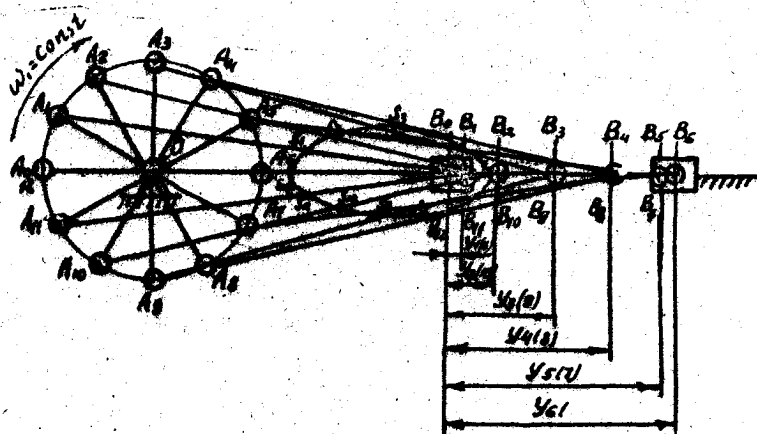


FIG. 2.4

## 2.2. Кінематичне дослідження механізмів з допомогою графіків руху /кінематичних діаграм/

Перевага цього методу - наочність і простота. Розглянемо цей метод на прикладі кривошипно-повзунного механізму, ІЗ планів якого побудовано раніше. Використавши здобуті дані, спочатку побудуємо графік переміщення  $S_B$  повзуна як функцію часу  $t$ , а потім графічним диференціюванням дістанемо графіки швидкості  $v_B$  і прискорення  $a_B$  повзуна /рис. 2.5/.

Для побудови діаграми переміщення - час на осі абсцис відкладемо відрізок  $X$ , мм, що в масштабі  $\mu_t$  буде часом одного повного оберту кривошипа:

$$T = \frac{60}{n} = \mu_t X, \quad (2.1)$$

де  $n$  - частота обертання кривошипа,  $\text{хв}^{-1}$ ;

$$\mu_t = \frac{60}{nX} \quad (2.2)$$

масштаб часу, с/мм.

Поділимо відрізок  $X$  на 12 рівних частин і в точках 1, 2...12 відкладемо вздовж осі ординат відрізки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{12}$ , які в масштабі  $\mu_s$  зображать переміщення повзуна  $B$  від крайнього лівого положення  $B_0$  за 1/12 оберту кривошипа /відповідно  $1B_1 = Y_1, 2B_2 = Y_2, 3B_3 = Y_3$ /.

Сполучивши точки  $O, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{12}$  плавною кривою, дістанемо діаграму пройдених шляхів

$$S_B = S_B(t).$$

Для побудови діаграми швидкості повзуна  $v_B = v_B(t)$  скористаємося залежністю

$$v_B = \frac{dS_B}{dt} = \frac{d[S_B(t)]}{dt}, \quad (2.3)$$

яка дає змогу визначити швидкість  $v_B$  повзуна методом графічного диференціювання функції, заданої графічно, пам'ятаючи, що, з іншого боку,

$$\frac{dS_B}{dt} = \text{tg } \alpha, \quad (2.4)$$

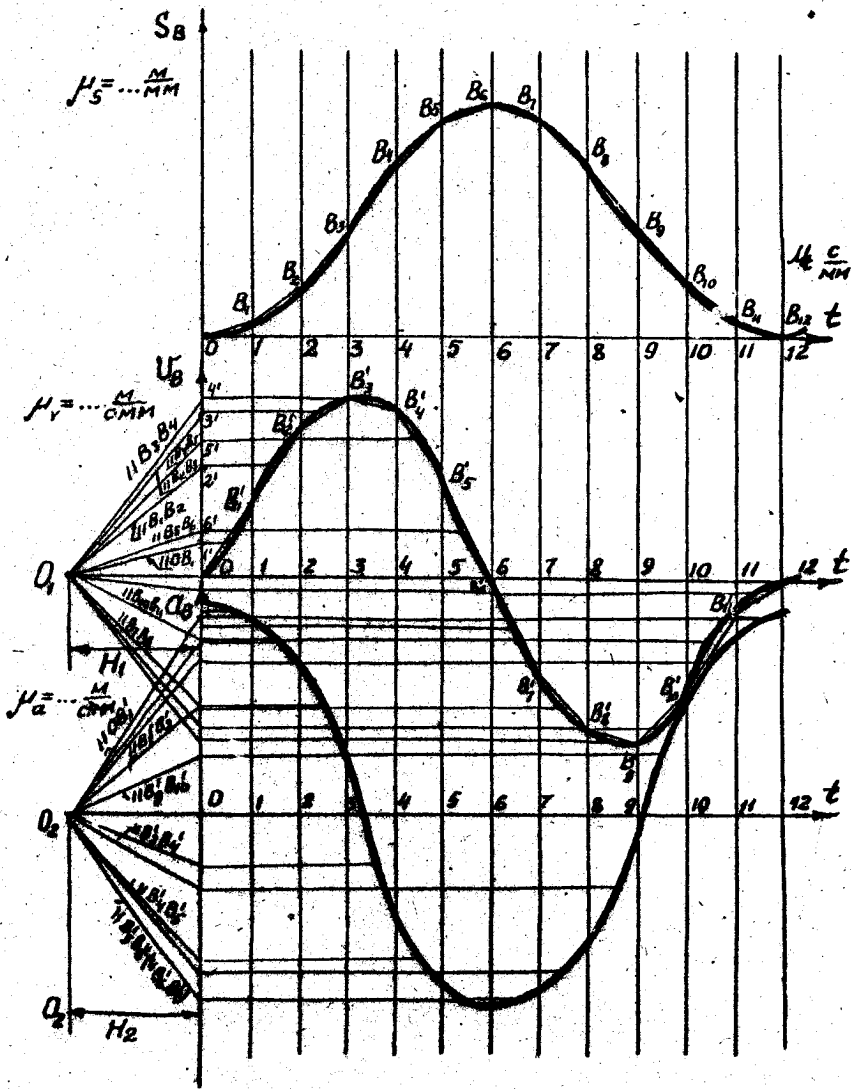


Рис. 2.5

де  $\alpha$  - кут нахилу дотичної до кривої в даній точці функції  $S_B = S_B(t)$  /геометрична інтерпретація першої похідної/. Але на практиці метод дотичних незручний, оскільки провести точно дотичну в даній точці кривої важко і можуть виникнути значні похибки. Тому частіше користуються методом хорд /січних/ - наближеним методом. Він ґрунтується на відомій теоремі про скінченний приріст функції: якщо функція, що задана графічно, та її похідна неперервні в інтервалі  $AB$ , то хорда  $AB$ , стягує цю дугу, паралельна дотичній до кривої принаймні в одній точці, що належить кривій в середині цього інтервалу. Зменшуючи інтервал, можна досягти того, що дотична і хорда зійдуться. Отже, чим менший інтервал, тим точніше буде виконано диференціювання. Виконаємо диференціювання в такому порядку. Вибравши на продовженні осі часу ліворуч від осі ординат довільний відрізок  $H$  /полюсну відстань/, із точки  $O_1$  /полюса/ проведемо промені, паралельні хордам  $OB_1, B_1B_2, \dots, B_n, B_{n+1}$ , до перетину з віссю ординат. Дістанемо точки  $1', 2' \dots$ . Через точки  $1', 2', \dots$  проведемо лінії, паралельні осі абсцис, до середини відповідних інтервалів графіка шляху. Згідно з формулою /2.4/ відрізки  $O1', O2', \dots$  зображають швидкості повзуна  $B$  в середині цих інтервалів у певному масштабі  $M_v$  /січна паралельна дотичній, в середині інтервалу/. З'єднавши плавною кривою ординати цих відрізків у середині інтервалів, дістанемо діаграму швидкості  $v_B$  повзуна  $B$ . Графік прискорень  $a_B$  повзуна будемо аналогічно, пам'ятаючи, що

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{d[v_B(t)]}{dt};$$

$$\frac{dv_B}{dt} = tg \beta. \quad /2.5/$$

Полюсну відстань  $H_2$  можна взяти такою, що дорівнює  $H_1$ , але, якщо ординати прискорень великі, полюсну відстань  $H_2$  треба зменшити, і навпаки.

#### Масштаби при графічному диференціюванні

Масштаб графіка шляху можна взяти таким, що дорівнює масштабові коефіцієнту шляху механізму. Якщо графік займає багато місця за висотою, то ординати його треба зменшити, а масштабний коефіцієнт відповідно збільшити.

Масштабний коефіцієнт часу визначаємо за формулою /2.2/.

Значення шляху і часу в певному положенні кривошипа знаходимо за формулою

$$S_{B_1} = \bar{y}_1 \mu_s, \quad t_1 = \bar{x}_1 \mu_t.$$

Диференціюючи ці рівності, дістаємо

$$dS_B = \mu_s dy, \quad dt = \mu_t dx$$

Оскільки  $v_B = \frac{dS_B}{dt}$ , то  $v_B = \frac{\mu_s dy}{\mu_t dx}$ ,

але  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ . Тому  $v_B = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha$ . Помножимо і поділимо праву частину на  $H_1$ :

$$v_B = \frac{\mu_s}{H_1 \mu_t} H_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Але  $H_1 \operatorname{tg} \alpha$ , дорівнює відрізку, мм, на осі ординат, відтязому променем, що проведений з полюса  $O_1$  під кутом  $\alpha$ , тобто швидкості повзуну  $v_B$  у певному масштабі згідно з формулою /2.4/. Отже,

$\frac{\mu_s}{\mu_t H_1}$  є масштабом цієї швидкості, м/(с·мм):

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{H_1 \mu_t} \quad /2.6/$$

Аналогічно, м/(с<sup>2</sup>·мм):

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{H_2 \mu_t} \quad /2.7/$$

### 2.3. Кінематичне дослідження механізмів з допомогою планів швидкостей і прискорень

Методи графічного диференціювання при їх простоті не дають змоги визначити напрями векторів швидкостей і прискорень, кутів швидкостей і кутів прискорень ланок механізму. Але їх треба знати для визначення напрямів сил і моментів сил інерції.

Цих недоліків позбавлені методи планів швидкостей і прискорень. Особливо ці методи зручні, коли треба визначити швидкість і прискорення точок механізму для конкретного положення ведучої та інших

ланок механізму, а, отже, і для відрізка часу, що відповідає даному положенню ведучої ланки. Зрозуміло, що для оцінки роботи механізму в цілому, необхідно побудувати плани для кількох положень ланок механізму.

Розглядаючи побудову планів швидкостей і прискорень на прикладі плоских шестиланкових важільних механізмів, побудуємо плани у такій самій послідовності, в якій приспівували до ведучої ланки групи Ассура при створенні механізму. А оскільки клас, порядок і вид групи визначає метод її кінематичного дослідження незалежно від складності механізму і може бути виконаний для окремої групи Ассура, вказуватимемо клас, порядок і вид цих груп.

Для побудови планів швидкостей і прискорень мають бути задані план механізму та закон руху ведучої ланки. Якщо розглядаються окремо групи Ассура, мають бути задані швидкості та прискорення шарнірів, якими група приспівується до механізму, а для рухомої напрямної /куліси/ - кутові швидкості та її прискорення.

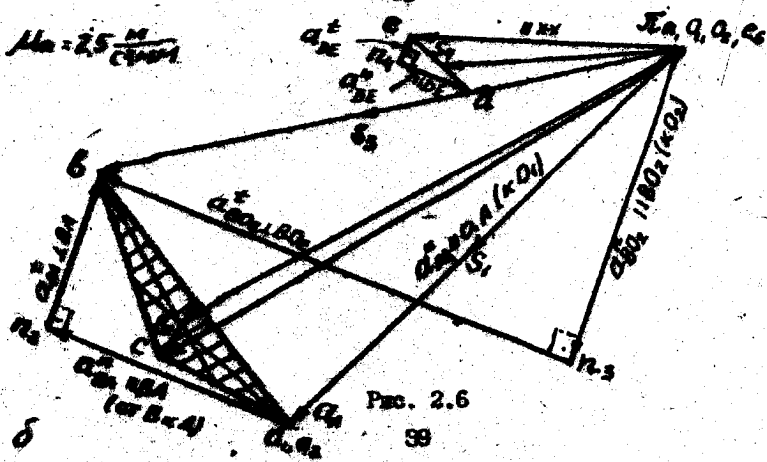
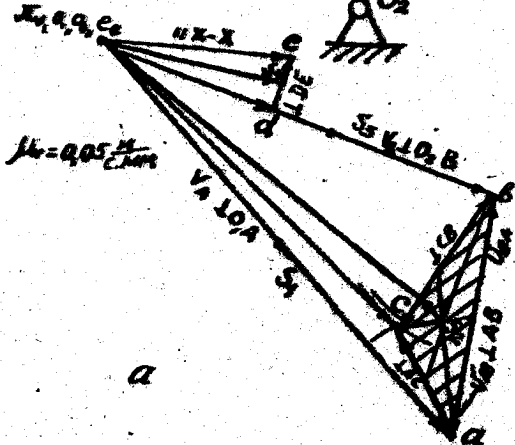
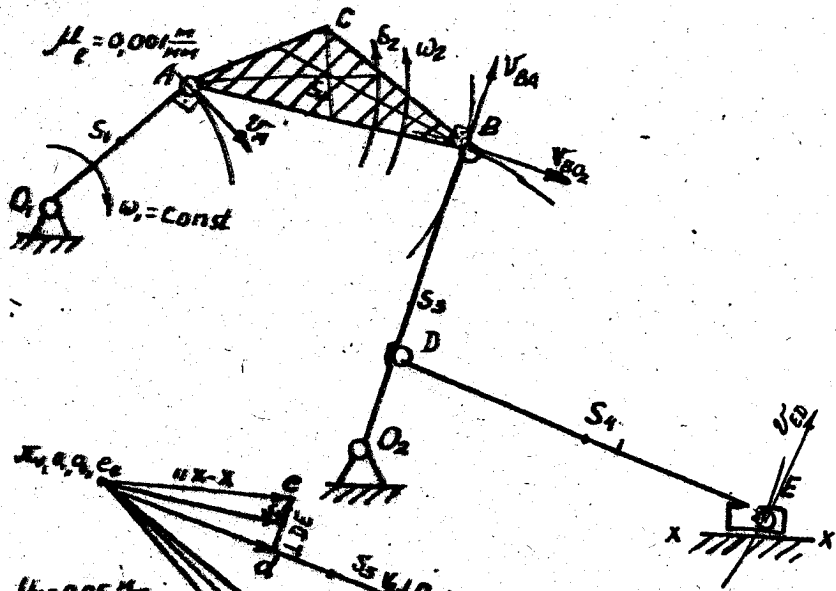
Приклад 2.1. Побудуємо плани швидкостей і прискорень нестационарного кінетичного конвейера. Його структури:  $I \rightarrow II_1 \rightarrow II_2$ . Кінематичне дослідження вестимемо у такій самій послідовності:  $I \rightarrow II_1' \rightarrow II_2'$ . План механізму задано. Кутова швидкість кривошипа стала  $\omega = \text{const}$ , рис. 2.6/1. Будувати план швидкостей розпочинаємо зі швидкості точки  $A$  пальця кривошипа, визначивши модуль швидкості точки  $A$  при обертанні її навколо точки  $O_1$ , м/с:

$$v_A = v_{A_1} = v_{A_2} = \omega_1 \rho_{O_1 A} = \frac{\pi n_1}{30} \rho_{O_1 A} \quad /2.8/$$

З довільно взятої точки  $\Pi_v$  /полоса плану швидкостей/ відкладемо відрізок  $\Pi_v a$  /рис. 2.6, а/, перпендикулярний до  $O_1 A$  на плані механізму, тобто паралельно швидкості  $v_A$ , напрямної по дотичній до траєкторії точки  $A$  в напрямі руху кривошипа  $O_1 A$  /див. схему механізму/. Масштабний коефіцієнт плану швидкостей

$$\mu_v = \frac{v_A, \text{м/с}}{\Pi a, \text{мм}} = \frac{\text{швидкість точки } A, \text{ м/с}}{\text{довжина відрізка на плані швидкостей, мм}}$$

Для визначення швидкості точки  $B_2$  шатуна, що здійснює складний рух, скористаємося теоремою, відомою з теоретичної механіки. Будь-який рух незмінної фігури в її площині може бути складений з переносного поступального руху разом з довільно вибраною точкою шкільної фігури /полосом/ і обертанням навколо полюса. Тоді швидкість точки  $B_2$  шатуна 2 дорівнюватиме геометричній сумі швидкості полюса  $A_2$  / $\vec{v}_{A_2}$ /





і швидкості обертання навколо полюса  $A_2 / \bar{v}_{B_2 A_2}$  /. Індекс біля точки внизу показує, якій ланці належить точка.

$$\bar{v}_{B_2} = \bar{v}_{A_2} + \bar{v}_{B_2 A_2} \quad /2.9/$$

З іншого боку, швидкість коромисла  $O_2 B$   $v_{B_3} = v_{B_2}$ , оскільки ланка 3 з'єднана з ланкою 2 шарніром і дорівнює геометричній сумі швидкостей полюса  $v_{O_2}$  / точки  $O_2$  / і обертання точки  $B_3$  навколо полюса  $O_2 / v_{B_3 O_2}$  /:

$$\bar{v}_{B_3} = \bar{v}_{O_2} + \bar{v}_{B_3 O_2} \quad /2.10/$$

Отже, для групи Ассур  $\Pi_2^1$  при визначенні швидкостей маємо векторну систему рівнянь

$$\begin{cases} \bar{v}_{B_2} = \bar{v}_{A_2} + \bar{v}_{B_2 A_2}; \\ \bar{v}_{B_3} = \bar{v}_{O_2} + \bar{v}_{B_3 O_2}. \end{cases} \quad /2.11/$$

Слід пам'ятати, що при обертанні навколо полюса вектор відносної швидкості напрямлений по дотичній до кола з центром у полюсі, а, отже, перпендикулярний до ланки, швидкість якої визначається, оскільки дотична перпендикулярна до радіуса цього кола в точці дотику з ним.

Отже, згідно з рівнянням /а/, з точки  $A$  плану швидкостей проводимо лінію, перпендикулярну до ланки  $BA$ , а відповідно до рівняння /б/ із полюса плану швидкостей  $\Pi_v$  проводимо лінію, перпендикулярну до коромисла  $BO_2$ . На перетині цих перпендикулярів дістанемо точку  $B$ . З'єднавши точки  $B$  і  $\Pi_v$  на плані швидкостей, знайдемо вектор абсолютної швидкості точки  $B / v_B /$ , зображеної у масштабі  $\mu_v$ .

Оскільки при обертальному русі швидкість  $v = \omega Z$ , тобто пропорційна радіусу обертання точки, то з пропорції

$$\frac{v_D}{v_B} = \frac{O_2 D}{O_2 B} = \frac{\pi d}{\pi b}$$

знаходимо швидкість точки  $D_3$  коромисла. Для визначення швидкості точки  $E_4$  шатуна 4 /групи Ассур  $\Pi_2^2$  / напишемо векторне рівняння

$$\begin{cases} \bar{v}_{E_4} = \bar{v}_{D_4} + \bar{v}_{E_4 D_4}; \\ \bar{v}_{E_5} = \bar{v}_{E_6} + \bar{v}_{E_5 E_6}. \end{cases} \quad /2.12/$$

$(V_{E_3} = V_{E_4}; V_{E_4} = V_{E_5})$ . Тобто швидкість точки  $E_4$  шатуна  $DE$  дістанемо як геометричну суму швидкості полюса  $D - V_{D_4}$  і швидкості відносно полюса  $D - V_{E_4, D_4}$ . Аналогічно швидкість точки  $E_5$  повзуна дорівнює геометричній сумі швидкості полюса  $E_6$  / причому  $V_{E_6} = 0$ , оскільки стяк нерухомих / і відносно швидкості точки відносно полюса  $E_6 (V_{E_5, E_6})$ . Виходячи з цього з точки  $d$  плану швидкості проводимо лінію, перпендикулярну до шатуна  $DE$ , а з полюса  $\mu_v$  паралельну  $x-x$ , оскільки повзун  $E$  може рухатися відносно стяка 6 тільки вздовж напрямної  $x-x$ . На перетині цих ліній дістанемо точку  $e$ . Відрізок  $\mu_v e$  на плані швидкостей у масштабі  $\mu_v$  зображає швидкість повзуна 5 / точки  $E_5$  /. Те, що відносна швидкість у цьому випадку паралельна напрямній  $x-x$ , можна пояснити й по-іншому. Дійсно, якщо за полюс обрано точку на прямій поступальної пари, радіус кривини якої розміщений у нескінченності, то ця крива й дотична до неї зліпляються з напрямною, а це означає, що відносна швидкість буде паралельна цій напрямній. Отже, при визначенні швидкостей для кожної групи Ассура досить написати одну систему з двох векторних рівнянь і згідно з ними побудувати план швидкостей.

#### 2.4. Властивості плану швидкостей

Основні властивості плану швидкостей такі.

1. Усі точки механізму, швидкості яких дорівнюють нулю, на плані швидкостей знаходяться в полюсі плану  $(O_1, O_2, e_6)$ .

2. Усі вектори, що виходять з полюса плану швидкостей, є векторами абсолютних швидкостей /  $\overline{\mu a}$  - вектор абсолютної швидкості точки  $A$ ,  $\overline{\mu b}$  - вектор абсолютної швидкості точки  $B$  і т.ін. Замірявши в міліметрах ці відрізки і помноживши їх на масштаб  $\mu_v$  знаходимо дійсні значення цих швидкостей /за модулем/.

3. Усі вектори плану швидкостей, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей, є векторами відносних швидкостей:

$\overline{ba}$  - відносна швидкість  $V_{BA}$  точки  $B$  відносно полюса  $A$ ,

$\overline{ab}$  - відносна швидкість точки  $A$  відносно полюса  $B (V_{AB})$ .

Зрозуміло, що  $\overline{ba} = -\overline{ab} (V_{BA} = -V_{AB})$ .

4. Теорема подібності фігури векторів відносних швидкостей і фігури на плані механізму.

Фігура відносних швидкостей на плані швидкостей подібна фігурі на плані механізму, але повернута відносно останньої на  $90^\circ$  у напрямі кутової швидкості фігури механізму відносно полюса.

Доведемо це, визначивши швидкість точки  $C$  :

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}; \\ \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}. \end{cases} \quad /2.13/$$

Швидкості полюсів  $B$  і  $A$  визначено раніше. Відносні швидкості  $v_{CA}$  і  $v_{CB}$  як швидкості в обертовому русі відповідно перпендикулярні до  $CA$  і  $CB$ . Проведемо через точку  $A$  на площині швидкостей лінію, перпендикулярну до  $AC$ , а через точку  $B$  - лінію, перпендикулярну до  $BC$ . На їх перетині відстанемо точку  $C$ . Трикутник  $abc$  на площині швидкостей подібний трикутнику  $ABC$  на площині механізму. /Відповідно до побудови площин швидкостей  $ab \perp AB$ ,  $ac \perp AC$ ,  $bc \perp BC$ , отже, кути їх при відповідних вершинах рівні між собою, а  $\triangle abc \sim \triangle ABC$ .)  
Звідси

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC}; \quad bc = \frac{ab}{AB} \cdot BC; \quad ac = \frac{ab}{AB} \cdot AC.$$

Зробивши засічки з точки  $a$  площи швидкостей радіусом  $ac$ , а з точки  $b$  - радіусом  $bc$ , знайдемо точку  $c$ , а отже, і швидкість точки  $C$ . Користуючись подібністю, не треба писати складного векторного рівняння /2.13/ для визначення швидкості третьої точки, якщо відомо швидкості двох інших. Щоб не допустити помилок при визначенні положення точки  $C$  на площині швидкостей /але засічку можна було зробити праворуч від лінії  $ab$ /, треба користуватися правилом оббігу за годинниковою стрілкою чи проти неї. Так, на площині механізму при обході фігури починаючи з точки  $A$  за годинниковою стрілкою буде напрям  $A-C-B$ . Такий самий від нас буде і на фігурі площин швидкостей  $a-c-b$ , а не  $a-b-c$  /при обході за годинниковою стрілкою. Швидкості центрів ваги ланок знаходимо, користуючись подібністю фігур. Центр  $S_2$  на площині механізму і площині швидкостей знайшли на перетині медіан. Треба довести другу частину теореми подібності. Щоб дізнатися, куди повернуться  $\triangle ABC$  відносно полюса  $A$ , визначимо кутову швидкість шукана 2,  $s^{-1}$ :

$$\omega_2 = \omega_{MA} = \frac{v_M}{r_{MA}} = \frac{v_A \mu_1}{BA \mu_1} \quad /2.14/$$

Відповідно

$$\omega_3 = \frac{v_V \mu_2}{O_2 B \mu_2} \quad /2.15/$$

$$\omega_B = \frac{ed\mu_v}{ED\mu_2}$$

/2.16/

Приклавши вектор  $\vec{v}_{BA}$  в точку механізму, знайдемо, що кутова швидкість  $\omega_2$  направлена проти годинникової стрілки. Якщо повернути трикутник  $ABC$  на  $90^\circ$  проти годинникової стрілки, то він збігнеться з  $\Delta abc$ . Отже доведено, що  $\Delta abc$  повернутий на  $90^\circ$  відносно  $\Delta ABC$  проти годинникової стрілки, тобто в напрямі кутової швидкості  $\omega_2$  шатуна.

План прискорень почнемо будувати з визначенням прискорення дальної кривошипа  $a_A$ .

Кутова швидкість кривошипа стала /  $\omega_1 = const$  / , тому  $a_A^n = \omega_1^2 \rho_{OA}$ , м/с<sup>2</sup>. Це нормальне, або доцентрове прискорення точки  $A$ . Зрозуміло, що його модуль, м/с<sup>2</sup>:

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{\rho_{OA}} \quad /2.17/$$

З точки  $A_2$  /полка/ відкладемо паралельно кривошипу  $O_1A$  /у напрямі від  $A$  до  $O_1$ / відрізок довільної довжини  $\mu a$  /рис.2.6.6/.

Тоді масштабний коефіцієнт плану прискорень

$$\mu = \frac{a_A^n}{\mu a} \text{ м/с}^2 \text{ на мм} = \frac{\text{дійсне прискорення точки } A, \text{ м/с}^2}{\text{довжина зображеного відрізка на плані, мм}}$$

Для визначення прискорення точки  $B_2$  шатуна 2, що виконує складний рух, використаємо теорему про складний рух:

$$\begin{cases} \vec{a}_{B_2} = \vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{B_2A_2} = \vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{B_2A_2}^n + \vec{a}_{B_2A_2}^t; \\ \vec{a}_{B_2} = \vec{a}_{O_2} + \vec{a}_{B_2O_2} = \vec{a}_{O_2} + \vec{a}_{B_2O_2}^n + \vec{a}_{B_2O_2}^t; \end{cases} \quad /2.18/$$

Тобто, прискорення точки  $B$  визначили, як геометричну суму прискорення полка і відносного прискорення точки при обертанні її навколо полка, один раз прийнявши за полк точку  $A_2$  шатуна, другий раз - точку  $O_2$  коромисла. Прискорення  $a_{B_2} = a_{B_2}$ , оскільки в точці  $B$  шатуна і коромисла є"одній шарнірно. Відносні прискорення  $a_{B_2A_2}$  і  $a_{B_2O_2}$  - невідомі ні за напрямом, ні за модулем. Тому для розв'язання рівняння 2.18 відносні прискорення розкладаємо на дві складові - нормальна і тангенціальна, перше з яких за модулем можемо визначити так:

$$a_{BA}^n = \frac{v_{BA}^2}{r_{BA}} = \frac{(ab \cdot \mu_v)^2}{AB \cdot \mu_p} = \omega_2^2 \cdot AB \cdot \mu_p; \quad /2.19/$$

$$a_{BO_2}^n = \frac{v_{BO_2}^2}{r_{BO_2}} = \frac{(\pi b \cdot \mu_v)^2}{BO_2 \cdot \mu_p} = \omega_3^2 \cdot BO_2 \cdot \mu_p; \quad /2.20/$$

де відрізки  $AB$  і  $O_2B$  виміряні в міліметрах на плані механізму, а відрізки  $ab$  і  $\pi b$  - на плані швидкостей.

Потім з точки  $a_A$  плану прискорень у масштабі  $\mu_a$  відкладемо прискорення  $a_{BA}^n$  /відрізок  $a_n n_2$ , мм/ паралельно шатуну  $AB$  /зображеному на плані механізму/ в напрямі від точки  $B$  до  $A$ . А з точки  $\pi_a$  паралельно  $BO_2$  в напрямі від точки  $B$  до  $O_2$  - відрізок  $\pi_a n_3$ , що в масштабі  $\mu_a$  зображає нормальне прискорення  $a_{BO_2}^n$ . Провівши з точки  $n_2$  лінію, перпендикулярну до  $n_2 a$ , а з точки  $n_3$  - перпендикуляр на  $\pi_a n_3$ , на їх перетині одержимо точку  $b$ , що однозначно визначить прискорення точки  $B$  і тангенціальні прискорення  $a_{B_2 A_2}^t$  і  $a_{B_3 O_2}^t$ . Їх значення, м/с<sup>2</sup>:

$$a_B = \pi_a b \cdot \mu_a; \quad a_{BA}^t = \bar{n}_2 b \cdot \mu_a;$$

$$a_{BO_2}^t = \bar{n}_3 b \cdot \mu_a$$

Прискорення точки  $D$  на плані прискорень знайдемо виходячи з теорем подібності

$$\pi_a d = \frac{\pi_a b}{O_2 B} O_2 D,$$

замірявши відрізок  $\pi_a b$  на плані прискорень, а відрізки  $O_2 B$  і  $O_2 D$  на плані механізму. Прискорення точки  $E$  повзуна 5 знайдемо за рівності

$$\begin{cases} \bar{a}_{E_4} = \bar{a}_{D_4} + \bar{a}_{E_4 D_4} = \bar{a}_{D_4} + \bar{a}_{E_4 D_4}^n + \bar{a}_{E_4 D_4}^t \\ \bar{a}_{E_5} = \bar{a}_{E_4} + \bar{a}_{E_5 E_4} \end{cases} \quad /2.21/$$

де

$$a_{E_4 D_4}^n = \frac{v_{E_4 D_4}^2}{r_{ED}} = \frac{(ed \cdot \mu_v)^2}{ED \cdot \mu_p} = \omega_4^2 \cdot ED \cdot \mu_p, \quad \text{м/с}^2.$$

Відрізок  $\bar{ed}$ , в мм, виміряно на плані швидкостей,  $ED$ , мм, - на плані механізму. Відклавши від точки  $d$  на плані прискорень відрізок  $d n_4$ , що в масштабі  $\mu_a$  зображає нормальне прискорення  $a_{ED}^n$

/в напрямі від  $E$  до  $D$  /, через точку  $n_4$  проведемо перпендикуляр до  $n_4d$ . З точки  $L_a$  проведемо лінію, паралельну  $x-x$ , на їх перетині позначимо точку  $e$ . Відрізок  $L_a e$  в масштабі  $\mu_a$  зображає прискорення точки  $e$ , а  $n_4 e$  - тангенціальне прискорення в обертальному русі точки  $e$  відносно полюса  $d$ .

## 2.5. Властивості плану прискорень

Основні властивості плану прискорень такі.

1. Усі точки механізму, прискорення яких дорівнюють нулю, на плані прискорень розміщені в полюсі  $L_a (O_1, O_2, E_3)$ .

2. Усі вектори, що виходять з полюса плану прискорень  $L_a$ , є векторами абсолютних прискорень точок механізму /  $L_a a$  - вектор абсолютного прискорення точки  $A$ ;  $L_a b$  - вектор абсолютного прискорення точки  $B$  і т.ін. /.

3. Усі вектори плану, що з'єднують кінці векторів абсолютних прискорень, є векторами відносних прискорень:  $ba$  - відносне прискорення  $a_{BA}$  точки  $B$  відносно полюса  $A$  / відносно точки  $A$  /  $ab$  - відносне прискорення точки  $A$  відносно точки  $B$  і т.ін. Зрозуміло, що  $ba = -ab$  ( $a_{BA} = -a_{AB}$ ).

4. Теорема подібності фігури відносних прискорень і фігури на плані механізму. Фігура відносних прискорень на плані прискорень подібна фігурі на плані механізму, але повернута відносно неї на  $180^\circ - \alpha$  у напрям. кутового прискорення фігури, де кут  $\alpha$  визначається в рівності

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{BA}^t}{a_{BA}^n} = \frac{n_2 b}{n_2 a} \quad /2.22/$$

Справді,

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^t)^2} = \sqrt{(l_{BA} \omega_2^2)^2 + (l_{BA} \epsilon_2)^2} = l_{BA} \sqrt{\omega_2^4 + \epsilon_2^2}; \quad /2.23/$$

$$a_{CA} = l_{CA} \sqrt{\omega_2^4 + \epsilon_2^2}; \quad /2.24/$$

$$a_{CB} = l_{CB} \sqrt{\omega_2^4 + \epsilon_2^2}. \quad /2.25/$$

Поділивши почленно рівняння /2.23/, /2.24/, /2.25/, дістанемо:

$$a_{BA} : a_{CA} : a_{CB} = r_{AB} : r_{CB} : r_{CB}.$$

Оскільки  $a_{BA} = \bar{b}a \cdot \mu_a$ ;  $a_{CA} = \bar{c}a \cdot \mu_a$ ;  $a_{CB} = \bar{c}b \cdot \mu_a$ ;

$$r_{AB} = \bar{A}B \cdot \mu_r; \quad r_{CA} = \bar{C}A \cdot \mu_r; \quad r_{CB} = \bar{C}B \cdot \mu_r.$$

то скоротивши на  $\mu_a$  і на  $\mu_r$ , дістанемо:

$$\bar{b}a : \bar{c}b : \bar{c}a = \bar{B}A : \bar{C}B : \bar{C}A.$$

Отже, трикутник  $abc$  відносних прискорень на плані прискорень подібний фігурі /трикутнику  $ABC$ / на плані механізму. Це дає змогу не писати систему векторних рівнянь для визначення прискорення точки  $C$ , а, визначивши  $cb = \frac{\bar{b}a}{\bar{B}A} \cdot \bar{C}B$ ,  $ca = \frac{\bar{b}a \cdot \bar{C}A}{\bar{B}A}$ , де відрізки  $\bar{b}a$ ,  $\bar{B}A$ ,  $\bar{C}B$ ,  $\bar{C}A$  вимірні в міліметрах на плані прискорень і плані механізму, методом засічок з точок  $a$ ,  $b$  радіусами  $cb$  і  $ca$ , знайти точку  $c$  на плані прискорень. При цьому треба користуватися правилом обходу, щоб не зробити засічку так, що на плані механізму обхід контура  $ABC$  здійснювався б за годинниковою стрілкою, а на плані прискорень обхід фігури  $abc$  був би проти годинникової стрілки.

Користуючись подібністю, визначимо також прискорення центрів ваги  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  ланок. Кутові прискорення ланок знаходимо за формулами:

$$\epsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{r_{BA}} = \frac{\bar{n}_2 \bar{b} \cdot \mu_a}{\bar{B}A \cdot \mu_r};$$

$$\epsilon_3 = \frac{a_{BO_2}^t}{r_{BO_2}} = \frac{\bar{n}_3 \bar{b} \cdot \mu_a}{\bar{B}O_2 \cdot \mu_r};$$

$$\epsilon_4 = \frac{a_{ED}^t}{r_{ED}} = \frac{\bar{n}_4 \bar{e} \cdot \mu_a}{\bar{E}D \cdot \mu_r}.$$

/2.26/

Приклавши вектор  $a_{BA}^t$  в точку  $B$  механізму, визначимо напрям  $\epsilon_2$ . Якщо повернути фігуру  $ABC$  на кут  $190^\circ - \alpha$  в напрямі  $\epsilon_2$ , то фігура  $ABC$  збігеться з трикутником  $abc$ .

Приклад 2.2. Визначити швидкості та прискорення точок механізму стругального верстата, що складається з ведучої ланки I, груп Ассур

$\Pi_2^3$  і  $\Pi_2^5$ . План механізму задано, напрям кутової швидкості ведучої ланки  $|\omega_1 = const|$  - тех /рис. 2.7/.

План швидкостей /рис. 2.7,а/

Швидкість точки  $A$  пальця кривошипа

$$v_{A_1} = \omega_1 \rho_{O_1 A} = \frac{\pi n_1}{30} \rho_{O_1 A}$$

$v_{A_1} = v_{A_2}$ , оскільки кривошип 1 та шатун 2 з'єднані шарнірно. З довільної точки  $\pi_v$  /полоса/ відкладаємо по дотичній до траєкторії точки  $A$  /перпендикулярно до  $O_1 A$ / відрізок  $\pi_v a$  в напрямі кутової швидкості  $\omega_1$ . Масштабний коефіцієнт плану швидкості,  $\frac{m/c}{mm}$ :

$$\mu_v = \frac{v_{A_1}}{\pi a}$$

Швидкість точки  $A_3$  куліси, що збігається з точкою  $A_2$  каменя, визначимо як геометричну суму швидкості полюса і швидкості відносно полюса.

Спочатку за полюс візьмемо точку  $A_2$  каменя куліси, а вдруге - точку  $O_2$ .

$$\vec{v}_{A_3} = \vec{v}_{A_2} + \vec{v}_{A_3 A_2};$$

$$\vec{v}_{A_3} = \vec{v}_{O_2} + \vec{v}_{A_3 O_2};$$

/2.27/

З точки  $a_2$  плану швидкості проведемо лінію, паралельну  $O_2 A$  /напряв відносної швидкості  $v_{A_3 A_2}$  - куліси 3 відносно каменя 2/, а в полюса /точки  $O_2$ / - лінію, перпендикулярну до куліси /напряв відносної швидкості  $v_{A_3 O_2}$  відносно полюса  $O_2$  -  $v_{A_3 O_2}$ /. На перетині цих напрямів дістанемо точку  $a_3$  - вектор абсолютної швидкості  $v_{A_3} / \pi_v a_3 /$ .

Швидкість точки  $B$  знайдемо за пропорціям

$$\pi B_3 = \frac{\pi a_3}{O_2 A} \cdot O_2 B.$$

Швидкість точки  $B_5$  куліси 5, що належить групі Ассура  $\Pi_2^5$ , знайдемо як геометричну суму, розв'язавши другу систему векторних рівнянь

$$\begin{cases} \vec{v}_{B_5} = \vec{v}_{B_4} + \vec{v}_{B_5 B_4}; \\ \vec{v}_{B_5} = \vec{v}_{B_6} + \vec{v}_{B_5 B_6}; \\ v_{B_4} = v_{B_3}; v_{B_6} = 0. \end{cases}$$

/2.28/



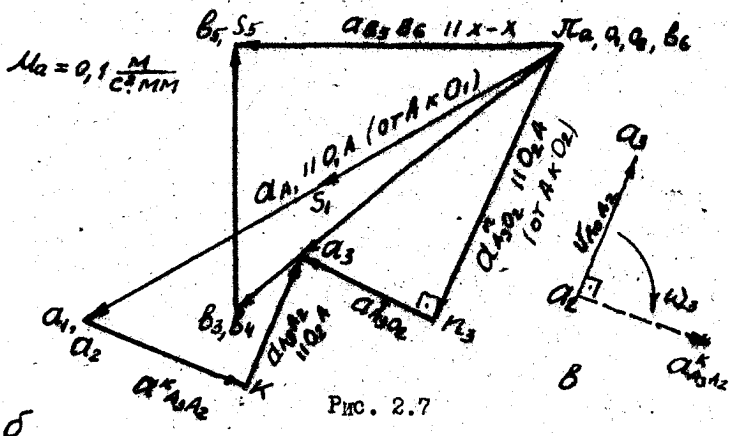
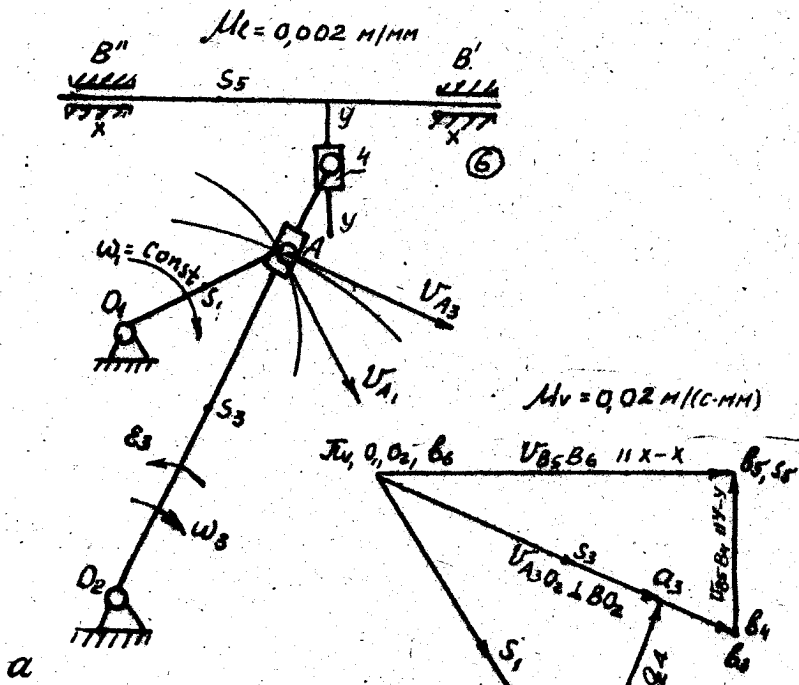


FIG. 2.7

Через точку  $B_4$  проведемо на плані швидкостей лінію, паралельну  $4-4'$  /напрям швидкості каменя 4 відносно куліси 5 -  $V_{B_4} B_4'$  /, а через полюс  $L_4$  /точку  $B_6$  / - лінію, паралельну напрямній  $x-x'$  /напрям швидкості куліси 5 відносно стійка 6/. На перетині цих двох напрямів відстанемо точку  $B_5$ , а значення швидкості куліси 5  $V_{B_5} = \overline{L_4 B_5} \mu_4$ ; м/с.

Швидкість центра ваги  $S_1$  і куліси  $S_3$  визначимо за теоремою подібності. Кутова швидкість куліси 3,  $\omega_3$ :

$$\omega_3 = \frac{V_{A_2}}{r_{O_2 A}} = \frac{\pi \lambda_3 \mu_4}{O_2 A \mu_6}$$

Напрям кутової швидкості  $\omega_3$  /за годинниковою стрілкою/ знайдемо, приклавши в точці  $A$  плану механізму вектор швидкості  $V_{A_2}$ . Нормальне прискорення точки  $A_1$  пальця кривошипа

$$a_{A_1} = a_{A_2} = \omega_3^2 r_{O_1 A} = \frac{V_{A_1}^2}{r_{O_2 A}} \quad /2.29/$$

Масштабний коефіцієнт плану прискорень, м/(с<sup>2</sup>·мм):

$$\mu_a = \frac{a_{A_1}}{\pi \lambda_1}$$

де  $\pi \lambda_1$  - довільний відрізок на плані прискорень, що зображає прискорення точки  $A$  в масштабі  $\mu_a$ . Цей відрізок проведено паралельно кривошипу  $OA$  в напрямі від  $A$  до  $O_1$  /рис. 2.7, 6/.

Прискорення точки  $A_2$  куліси 3 знайдемо як геометричну суму прискорень полюса та відносних прискорень:

$$\begin{cases} \bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{A_2 A_2}^* + \bar{a}_{A_2 A_2}^* \\ \bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{A_2 O_2}'' + \bar{a}_{A_2 O_2}' \end{cases} \quad /2.30/$$

де  $a_{A_2 A_2}^*$  - прискорення Коріоліса, яке виникло внаслідок того, що вектор відносної швидкості  $V_{A_2 A_2}$  змінює свій напрям;  $\bar{a}_{A_2 A_2}^*$  - відносне прискорення куліси 3 і каменя 2;  $\bar{a}_{A_2 O_2}''$  - нормальне прискорення точки  $A_2$  відносно полюса  $O_2$ ;  $\bar{a}_{A_2 O_2}'$  - тангенціальне прискорення точки  $A_2$ .

Прискорення Коріоліса

$$a_{A_2 A_2}^* = 2\omega_3 V_{A_2 A_2} \sin \alpha \quad /2.31/$$

де  $\omega_3$  - кутова швидкість середовища переносу, тобто куліси 3;  $V_{A_2 A_2}$  - відносна швидкість;  $\alpha = 90^\circ$  - кут між напрямом векторів відносної та кутової швидкостей.

Отже,

$$a_{A_3 A_2}^k = 2 \frac{\pi a_3 \cdot \mu_v}{O_2 A \cdot \mu_c} \cdot a_3 a_2 \cdot \mu_v. \quad /2.32/$$

Щоб визначити напрям прискорення Коріоліса в плоскому механізмі, треба в вектор відносної швидкості  $a_3 a_2$  повернути на  $90^\circ$  у напрямі руху куліси 3 /середовища переносу/, тобто в напрямі  $\omega_3$ . У цьому разі вектор  $a_3 a_2$  треба повернути за годинникову стрілку /див. 2.7в//. Оскільки вектор  $a_3 a_2$  паралельний кулісі  $O_2 A$ , то вектор  $a_{A_3 A_2}^k$  перпендикулярний до куліси  $O_2 A$ . Відклавши в масштабі  $\mu_a$  із точки  $a_2$  плану прискорець прискорення Коріоліса  $a_{A_3 A_2}^k$ , дістанемо точку  $K$ , з якої проведемо паралельно кулісі  $O_2 A$  лінію дії відносного прискорення  $a_{A_3 A_2}$ . Щоб розв'язати друге рівняння системи /2.30/, спочатку визначимо нормальне прискорення

$$a_{A_3 O_2}^n = \frac{v_{A_3}^2}{\rho_{O_2 A}} = \frac{(\pi a_3 \cdot \mu_v)^2}{O_2 A \cdot \mu_c} = \omega_3^2 \rho_{O_2 A}.$$

Відклавши його в масштабі  $\mu_a$  з полюса плану прискорень паралельно  $O_2 A$  /від  $A_3$  до  $O_2$  / , дістанемо точку  $n_3$ , через яку під прямим кутом до  $O_2 n_3$  проведемо лінію дії тангенціального прискорення  $a_{A_3 O_2}^t$ , де ця лінія перетне лінію дії відносного прискорення  $a_{A_3 A_2}$ , дістанемо точку  $a_3$ . Помноживши  $\pi a_3$  на  $\mu_v$ , визначимо прискорення точки  $A_3$  куліси, що збігається з точками  $A_1$  і  $A_2$  на плані механізму.

Прискорення  $a_{B_3}$  куліси 3 знаходимо за теоремою подібності

$$\pi a_{B_3} = \frac{\pi a_3}{O_2 A} O_2 B.$$

Відклавши на плані прискорень цей відрізок у міліметрах, побудуємо точку  $B_3$ . Оскільки камінь 4 і куліса 3 в точці  $B$  з'єднані шарніром, саме тут ставимо точку  $B_4$  /прискорення  $a_{B_4}$  /.

Щоб визначити прискорення точки  $B_5$  куліси 5, напишемо векторні рівняння для групи Ассуря  $P_2^3$ :

$$\begin{cases} \bar{a}_{B_5} = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}_{B_5 B_4}; \\ \bar{a}_{B_5} = \bar{a}_{B_6} + \bar{a}_{B_5 B_6}. \end{cases} \quad /2.33/$$

Для геометричної побудови цієї системи рівнянь через точку  $B_4$  плану прискорень проведемо лінію, паралельну  $y-y$  /лінію дії віднос-

ного прискорення каменя 4 і куліси 5, а через точку  $B_6$ , що розміщена в полюсі плану, оскільки  $a_{B_6} = 0$ , - лінію, паралельну  $x-x$ . На їх перетині матимемо точку  $B_5$ .

Звідси прискорення куліси 5,  $m/c^2$ :

$$a_{B_5} = \pi_a v_5 \cdot \mu_a.$$

Кутове прискорення куліси  $O_2B$

$$\epsilon_3 = \frac{a_{A_3}^+}{\rho_{O_2A}} = \frac{\pi_3 a_3 \cdot \mu_a}{O_2A \cdot \mu_c} \quad /2.34/$$

Приклавши в точку  $A$  куліси вектор  $\pi_3 a_3 / a_{A_3}^+$ , знаходимо, що кутове прискорення  $\epsilon_3$  напрямлене проти годинникової стрілки і проти  $\omega_3$ . Отже, куліса 3 рухається відносно полюса  $O_2$  в цьому положенні сповільнено.

## 2.6. Кінематичне дослідження важільних механізмів аналітичними методами

Розглянуті раніше методи діаграм і планів при кінематичному дослідженні важільних механізмів, будучи наочними і простими, дають змогу найекономніше, з найменшою витратою часу, з достатньою для практики точністю визначити кінематичні та динамічні параметри механізмів. Проте в деяких посібниках з курсу ТММ, що з'явилися останніми роками, ці методи не розглядаються. Але в тих випадках, коли за умовою задачі необхідно визначити кінематичні параметри з будь-якою наперед заданою точністю, треба користуватися аналітичними методами дослідження, тим паче що наявність швидкодіючої обчислювальної техніки сприяє їх поширенню і вдосконаленню.

## 2.7. Аналітична кінематика кривошипно-повзунного механізму

У практиці машинобудування користуються центральними /акотальними/ кривошипно-повзунними механізмами, в яких вісь циліндра перетинає вісь обертання кривошипа, і дезакотальними /зміщеними/, в яких вісь циліндра не перетинає вісь колінчастого вала. Зміщення осі /дезакотил/ становить у середньому 20% радіуса кривошипа, тобто  $\bar{\delta} = 0,2 \bar{r}$ . Зміщачки осі, викріплюємо тиски на стінки циліндра при прямому і зво-

ротному ходах поршня, сили тертя з обох боків циліндра, зменшуємо максимальний питомий тиск поршня на циліндр.

Дезаксіальний механізм застосовують, якщо потрібно, щоб зворотний хід поршня проходив швидше, ніж прямий /легкі двигуни внутрішнього згорання, механізми ріжучого апарату комбайнів і каток, верстати для насічки напилків тощо/.

## 2.8. Синтез кривошипно-повзунного механізму

Розглянемо спочатку дезаксіальний механізм /рис. 2.8,а/. На рис. 2.8,б,в визначені крайні положення повзуна  $B$ . Для цього на рис. 2.8,б з точки  $O$  зроблено засічку радіусом  $R_1 = OA + AB$ , а на рис. 2.8,в - радіусом  $R_2 = AB - OA$  на траєкторії руху повзуна -  $x-x$ . Очевидно, що координату  $X_B$ , яка визначає положення поршня, визначають з рівностей

$$\begin{aligned} X_{B \max} &= \sqrt{(z+L)^2 - e^2}; \\ X_{B \min} &= \sqrt{(L-z)^2 - e^2}. \end{aligned} \quad /2.35/$$

Звідси хід поршня

$$H = \sqrt{(z+L)^2 - e^2} - \sqrt{(L-z)^2 - e^2}.$$

У центральному механізмі дезаксіал  $e = 0$ , тому

$$H = \sqrt{(z+L)^2} - \sqrt{(L-z)^2} = 2z. \quad /2.36/$$

Отже, радіус кривошипа в центральному кривошипно-повзунному механізмі

$$z = \frac{H}{2}.$$

Визначимо положення ланок механізму як функцію кута повороту кривошипа  $OA$ , спроеціювавши кривошип і шатун на вісь  $x$ :

$$z \sin \alpha + e = L \sin \beta. \quad /2.37/$$

З рівняння /2.37/

$$\sin \beta = \frac{z}{L} \sin \alpha + \frac{e}{L} \left( \frac{z}{z} \right) = \frac{z}{L} \left( \sin \alpha + \frac{e}{z} \right).$$

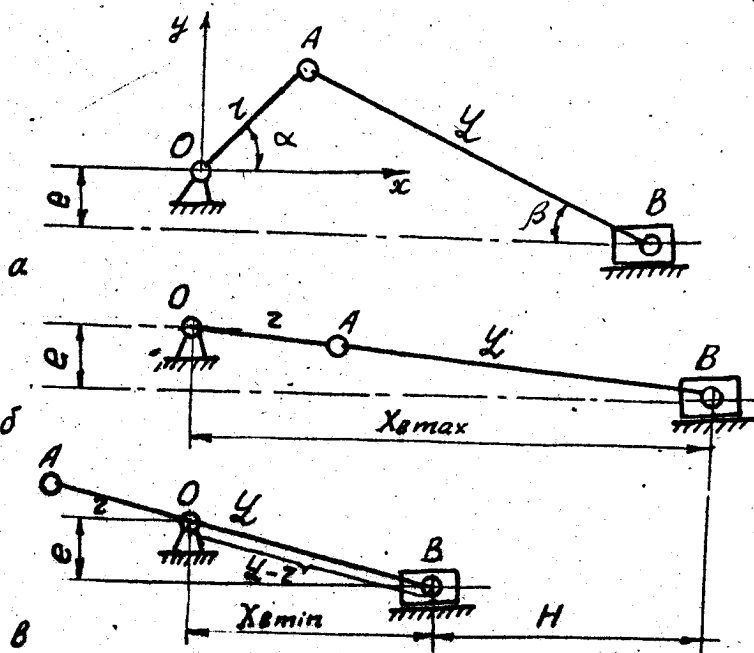


Рис. 2.8

Позначимо

$$\frac{z}{l} = \lambda; \quad /2.38/$$

$$\frac{e}{z} = \kappa. \quad /2.39/$$

Щоб зменшити сили тертя між повзуном і стояком /поршнем і циліндром/, конструктивно беруть  $\lambda = 1/3 - 1/10$  /в середньому  $\lambda \approx 1/5$ /; таке саме значення має і  $\kappa = 1/5$ .

Отже, кут відхилення кривошипа від осі  $x$  знаходять з рівності

$$\sin \beta = \lambda (\sin \alpha + \kappa).$$

або

$$\beta = \arcsin [\lambda (\sin \alpha + \kappa)]. \quad /2.40/$$

У центральному механізмі

$$\sin \beta = \lambda \sin \alpha. \quad /2.41/$$

Визначимо кутову швидкість і кутове прискорення шатуна. Для цього знайдемо першу і другу похідні за часом  $t$  від виразу /2.41/

$$\cos \beta \frac{d\beta}{dt} = \lambda \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt},$$

але

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_2, \quad \text{а} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega_1.$$

Отже,

$$\omega_2 = \lambda \omega_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \quad /2.42/$$

Вважаючи  $\omega_1 = \text{const}$ , знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dt} = \epsilon_2 &= \lambda \omega_1 \frac{-\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \cos \alpha \sin \beta \frac{d\beta}{dt}}{\cos^2 \beta} = \\ &= \lambda \omega_1 \frac{-\omega_1 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha \sin \beta}{\cos^2 \beta}. \end{aligned}$$

Враховавши /2.42/, матимемо:

$$\epsilon_2 = -\lambda \omega_1 \frac{\omega_1 \sin \alpha - \lambda \omega_1 \frac{\cos \alpha \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta}}{\cos^2 \beta}.$$

Зведемо до спільного знаменника чисельник і винесемо спільні члени

$\omega_1$  і  $\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \beta}$ . Тоді

$$\epsilon_2 = -\lambda \omega_1^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \beta} \left( \cos^2 \beta - \lambda \frac{\cos^2 \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} \right).$$

Щоб скористатися цією формулою для центрального механізму, дещо видозмінимо її, враховавши, що  $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ , а  $\sin \beta = \lambda (\sin \alpha + \kappa)$ . Тоді після простих перетворень знайдемо

$$\epsilon_2 = -\lambda \omega_1^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \beta} \left[ 1 - \lambda^2 - \lambda^2 \kappa \left( \kappa + \sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right) \right]. \quad /2.43/$$

Оскільки в центральному механізмі  $K = 0$ , то формула /2.43/ для визначення кутового прискорення шатуна матиме вигляд

$$\varepsilon_2 = -\lambda \omega_1^2 (1 - \lambda^2) \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta} \quad /2.44/$$

2.9. Визначення переміщення, швидкості та прискорення повзуна

Проекції ланок на вісь  $x$ :

$$\begin{aligned} x_B &= z \cos \alpha + L \cos \beta = z \left( \cos \alpha + \frac{L}{z} \cos \beta \right); \\ x_B &= z \left( \cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \cos \beta \right). \end{aligned} \quad /2.45/$$

Візьмемо першу і другу похідні виразу /2.45/ за часом

$$\begin{aligned} \frac{dx_B}{dt} = v_B &= z \left( -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{\lambda} \sin \beta \frac{d\beta}{dt} \right) = \\ &= -z \left( \omega_1 \sin \alpha + \frac{1}{\lambda} \omega_2 \sin \beta \right). \end{aligned}$$

В урахуванням /2.42/ знайдемо

$$v_B = -z \omega_1 \left( \sin \alpha + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right).$$

Привівши до спільного знаменника, дістанемо:

$$v_B = -z \omega_1 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad /2.46/$$

Вважаючи  $\omega_1 = \text{const}$ , з рівняння /2.46/ маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dv_B}{dt} = a_B &= -z \omega_1 \frac{\cos(\alpha + \beta) \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta \frac{d\beta}{dt}}{\cos^2 \beta} = \\ &= -z \omega_1 \frac{\cos(\alpha + \beta) (\omega_1 + \omega_2) \cos \beta + \omega_2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{\cos^2 \beta}. \end{aligned}$$



Після підстановки значення  $\omega_2$  із рівняння /2.42/

$$a_B = -z\omega_1 \frac{\left[ \omega_1 \cos(\alpha+\beta) + \lambda \omega_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right] \cos \beta + \lambda \omega_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin(\alpha+\beta) \sin \beta}{\cos^2 \beta} =$$

$$= -z\omega_1^2 \left[ \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos \alpha \cos(\alpha+\beta) + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin(\alpha+\beta) \sin \beta}{\cos^2 \beta} \right] =$$

$$= -z\omega_1^2 \left[ \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha+\beta) + \cos \alpha \sin(\alpha+\beta) \sin \beta}{\cos^2 \beta} \right].$$

Розкриємо косинус і синус суми кутів в другого члена рівняння

$$a_B = -z\omega_1^2 \left[ \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos \alpha \cos \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}{\cos^3 \beta} + \right.$$

$$\left. + \lambda \frac{\cos \alpha \sin \beta (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}{\cos^3 \beta} \right] =$$

$$= -z\omega_1^2 \left[ \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta + \right.$$

$$\left. + \lambda \frac{\cos \alpha \sin \beta \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{\cos^3 \beta} \right] =$$

$$= -z\omega_1^2 \left[ \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos^2 \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)}{\cos^3 \beta} \right].$$

Оскільки  $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ , то прискорення повзуна  $B$

$$a_B = -z\omega_1^2 \left[ \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \beta} \right]. \quad /2.47/$$

## 2.10. Кривошипно-коромисловий чотириланковий механізм.

Умови існування кривошипа /умови прокручуваності ланок/

Назвемо ланки парнірного чотириланковика /рис. 2.9/:

кривошип 1 - це ланка, що створює кінематичну пару зі стояком і виконує за цикл повний оберт на  $360^\circ$ ;

шатун 2 - ланка, що зв'язана з іншими рухомими ланками кінематичними обертальними парами і виконує складний поступально-обертальний рух;

коромислю 3 - ланка, зв'язана зі стояком обертальною парою, яка виконує лише коливання навколо осі, тобто не обертається на  $360^\circ$ ;  
 стояк 4 - ланка нерухома.

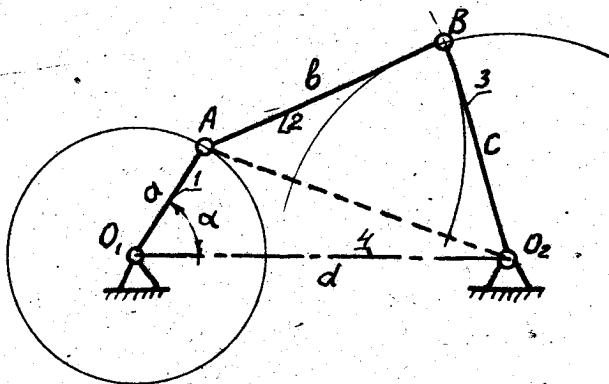


Рис. 2.9

Отже, кривошипом може бути ланка, яка повертається навколо осі обертання на  $360^\circ$ . Але створивши механізм з чотирьох ланок різної довжини, не завжди можна забезпечити такі умови, за яких хоча б одна ланка мала прокручуватися на  $360^\circ$ . Як буде показано, між довжиною ланок чотириланкового для забезпечення прокручуваності ланок мають бути забезпечені певні умови /певні співвідношення довжини ланок/.

Доведемо, що в чотириланковому важільному механізмі кривошипом може бути найменша ланка, якщо сума довжин найменшої та найбільшої ланок менша або дорівнює сумі двох інших ланок. Якщо остання умова виконується, то можливі такі варіанти:

- а/ якщо перевернути на стояк /закріпити/ суміжну з найменшою ланкою, то кривошипом буде найменша ланка, а друга ланка, що утворила зі стояком кінематичну пару, буде коромислом;
- б/ якщо закріпити найменшу ланку, то обидві суміжні з нею будуть кривошипями;
- в/ якщо закріпити ланку, протилежну найменшій, то не буде жодного кривошипа;
- г/ якщо не виконується задана в теоремі нерівність, то не буде жодного кривошипа при закріпленні будь-якої ланки.

Таким чином, треба з'ясувати, які співвідношення будуть між ланками, що виконують різні рухи. Зв'язок між ланками подамо у вигляді деяких нерівностей. З'ясуємо, за яких умов ланка  $O_1A$  буде кривошипом, тобто буде прокручуватися на кут  $360^\circ$ , якщо  $a < b < c < d$ .  
 Із  $\Delta O_1AO_2$  за теоремою косинусів маємо

$$AO_2^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha. \quad /2.48/$$

Оскільки сума двох сторін трикутника більша за третю, то для  $\Delta ABO_2$  можна записати

$$b + c > AO_2.$$

Провівши дуги радіусами  $b$  і  $c$  з точок  $A$  і  $O_2$ , бачимо, що  $b < AO_2$  і  $c < AO_2$ , а, отже,  $AO_2 > c - b$ . Тоді

$$b + c > AO_2 > c - b. \quad /2.49/$$

З рівняння /2.48/ знаходимо

$$\frac{a^2 + d^2 - AO_2^2}{2ad} = \cos \alpha.$$

Підставивши значення  $AO_2$  з нерівності /2.49/, матимемо

$$\frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2ad} \leq \cos \alpha; \quad /2.50/$$

$$\frac{a^2 + d^2 - (c-b)^2}{2ad} \geq \cos \alpha. \quad /2.51/$$

Якщо ланка  $a$  прокручується на  $360^\circ$ , то  $\cos \alpha$  у нерівностях /2.50/ і /2.51/ змінюється від  $+1$  до  $-1$ . Оскільки ліва частина нерівності /2.50/ повинна бути меншою за найменше значення  $\cos \alpha$ , а ліва частина нерівності /2.51/ - більшою за найбільше значення  $\cos \alpha$ , то нерівності /2.50/ і /2.51/ можна переписати так:

$$\frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2ad} \leq -1;$$

$$\frac{a^2 + d^2 - (c-b)^2}{2ad} \geq +1,$$

звідки

$$a^2 + d^2 - b^2 - 2bc - c^2 \leq -2ad;$$

$$a^2 + d^2 - c^2 + 2bc - b^2 \geq +2ad.$$

Пареніси члени цих нерівностей, дістанемо

$$a^2 + 2ad + d^2 \leq b^2 + 2bc + c^2;$$

$$a^2 - 2ad + d^2 \geq b^2 - 2bc + c^2$$

або

$$(a+d)^2 \leq (b+c)^2;$$

$$(d-a)^2 \geq (b-c)^2,$$

тобто

$$a+d \leq b+c; \quad /2.52/$$

$$d-a \geq b-c. \quad /2.53/$$

Перепишемо нерівність /2.53/ так:

$$d+c \geq a+b. \quad /2.54/$$

Згадаймо, що ми взяли  $a < b < c < d$ . Отже, нерівність /2.52/ показує, що ланка  $a$  прокручуватиметься на  $360^\circ$ , тобто є кривошипом, якщо сума довжин найменшої і найбільшої ланок дорівнює сумі довжин двох інших ланок або менша за неї. Це правило називають правилом Грасгофа. Рівняння /2.54/ підтверджує правило Грасгофа і для випадку, коли найбільшою є ланка  $AB$ , тобто ланка довжиною  $b$ . Міркуючи аналогічно, легко довести варіанти б - г теореми.

## 2.II. Кулісний механізм. Синтез кулісного механізму

Кулісою називають рухому напрямку  $O_2B$  для повзуна 2/. Розглянемо випадок, коли куліса та кривошип утворюють прямий кут і визначимо розміри кривошипа й куліси за заданим коефіцієнтом зміни середньої швидкості ходу веденої ланки. Ланку 5 також називають кулісою, бо вона є рухомою напрямною для повзуна 4. Зрозуміло, що при сталій кутовій швидкості кривошипа  $|\omega_1 = const|$ , переміщуючись за годинниковою стрілкою з одного крайнього положення  $A_0$  в друге -  $A_k$ , палець кривошипа  $A$  опише більшу дугу  $\alpha_{P.X}$ , ніж при зворотному обертанні -  $\alpha_{X.X}$  /див. рис. 2.3/.

Отже,  $\alpha_{P.X} > \alpha_{X.X}$ , час руху куліси при прямому і зворотному рухах  $t_{P.X} > t_{X.X}$ , а швидкості руху куліси 3 і 5 навпаки.

$$v_{P.X} = \frac{H}{t_{P.X}}, \quad v_{X.X} = \frac{H}{t_{X.X}} \quad /2.55/$$

відповідно середні швидкості робочого  $v_{P.X}$  і холостого  $v_{X.X}$  ходів.

Відношення

$$K = \frac{v_{x,x}}{v_{p,x}} \quad /2.56/$$

називають коефіцієнтом зміни швидкості ходу. Отже:

$$K = \frac{v_{x,x}}{v_{p,x}} = \frac{\frac{H}{t_{x,x}}}{\frac{H}{t_{p,x}}} = \frac{t_{p,x}}{t_{x,x}} = \frac{\frac{\alpha_{p,x}}{\omega_1}}{\frac{\alpha_{x,x}}{\omega_1}} = \frac{\alpha_{p,x}}{\alpha_{x,x}} \quad /2.57/$$

Розглянемо чотирикутник  $O_2 A_0 B_K O_2$ . Кут коливання  $\theta$  куліс знайдемо з рівності

$$\theta = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha_{x,x} = 180^\circ - \alpha_{x,x} \quad /2.58/$$

Із /2.57/  $\alpha_{p,x} = K \alpha_{x,x}$ , але  $\alpha_{p,x} = 360^\circ - \alpha_{x,x}$ , тоді

$$\begin{aligned} \alpha_{p,x} = K \alpha_{x,x} = 360^\circ - \alpha_{x,x}, \quad \text{звідки} \\ K \alpha_{x,x} + \alpha_{x,x} = 360^\circ; \quad (K+1) \alpha_{x,x} = 360^\circ; \\ \alpha_{x,x} = \frac{360^\circ}{K+1} \end{aligned} \quad /2.59/$$

Підставивши /2.59/ в /2.58/, матимемо:

$$\begin{aligned} \theta &= 180^\circ - \frac{360^\circ}{K+1} = \frac{180^\circ (K+1) - 360^\circ}{K+1} \\ &= \frac{180^\circ [(K+1) - 2]}{K+1} = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} \end{aligned} \quad /2.60/$$

Довжина кривошипа

$$r = 0,02 \sin \frac{\theta}{2}; \quad /2.61/$$

довжина куліс

$$O_2 B = \frac{H}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad /2.62/$$

2.12. Переміщення, швидкість і прискорення різцевої головки кулісного механізму

Координата точки  $D$  на осі  $x$  /рис. 2.10/

$$\begin{aligned} x_D &= L \sin \varphi; \\ v_D &= \frac{dx_D}{dt} = \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} L, \end{aligned} \quad /2.63/$$

але

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_3,$$

тому

$$v_D = L\omega_3 \cos \varphi.$$

/2.64/

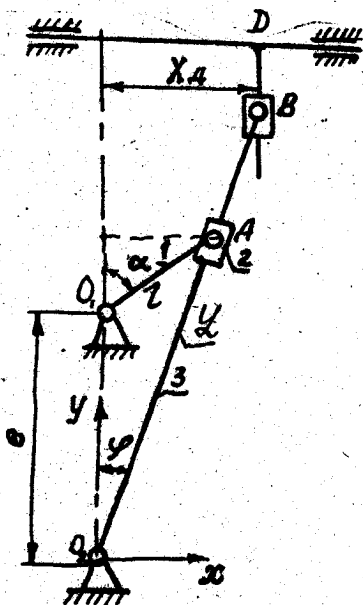


Рис. 2.10

Прискорення точки  $D$

$$a_D = \frac{dv_D}{dt} = -L\omega_3 \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + L \frac{d\omega_3}{dt} \cos \varphi;$$

$$a_D = L\epsilon_3 \cos \varphi - L\omega_3^2 \sin \varphi.$$

/2.65/

Але кут  $\varphi$  відхилення куліси є функцією кута повороту кривошипа.

З рис. 2.10

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z \sin \alpha}{e + z \cos \alpha} = \frac{z \sin \alpha}{z \left( \frac{e}{z} + \cos \alpha \right)}$$

Позначимо  $K = \frac{e}{z}$ . Тоді

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha}{K + \cos \alpha} \quad /2.66/$$

Візьмемо першу похідну від виразу /2.66/ за часом:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} (K + \cos \alpha) + \sin \alpha \cdot \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}}{(K + \cos \alpha)^2}$$

Відомо, що  $\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi$ .

Пі додавши значення  $\operatorname{tg} \varphi$  із /2.66/, матимемо

$$1 + \frac{\sin^2 \varphi}{(K + \cos \alpha)^2} \omega_3 = \frac{\omega_3 \cos \alpha (K + \cos \alpha) + \omega_3 \sin^2 \alpha}{(K + \cos \alpha)^2}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_1 \frac{\cos \alpha (K + \cos \alpha) + \sin^2 \alpha}{\left[ 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{(K + \cos \alpha)^2} \right] (K + \cos \alpha)^2} \\ &= \omega_1 \frac{K \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{(K + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Отже,

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{1 + K \cos \alpha}{K^2 + 2K \cos \alpha + 1} \quad /2.67/$$

Продиференціювавши /29/ за часом, визначимо кутове прискорення куліси:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1 \frac{K(1-K^2) \sin \alpha}{(1+2K \cos \alpha + K^2)} + \varepsilon_1 \frac{1+K \cos \alpha}{(1+2K \cos \alpha + K^2)^2} \quad /2.68/$$

## 2.13. Аналітичне дослідження важільних механізмів методом замкнених векторних контурів

Розглянуті раніше графічні методи побудови планів механізмів, визначення положень ланок, перемішень окремих його точок, траєкторій, визначення кінематичних параметрів методом графіків і планів швидкостей і прискорень, класичні аналітичні методи кінематичного дослідження механізмів усе частіше мають лише допоміжне значення як засіб для визначення початкових положень ланок і для контролю обчислень. Швидкодіючі обчислювальні машини спричинили застосування таких методів, які можна легко запрограмувати і ввести до лічильно-розв'язуючої машини. Такими методами є:

а/ метод замкненого векторного контура, запропонований В.А.Зінов'євим /1899-1975/ спочатку для кінематичного дослідження плоских механізмів, потім узагальнений для всіх просторових механізмів;

б/ метод перетворення координат у форми, запропонований Ю.Ф.Морозкіним /1903/, як загальний метод структурного та кінематичного досліджень. Необхідно зазначити, що обидва методи дають змогу визначати й кінематичні параметри без застосування лічильно-розв'язуючих машин, але для багатоланкових і особливо просторових механізмів буде витрачено значну кількість часу.

Першому методу слід віддати перевагу при дослідженні плоских механізмів, як простішому, другий - зручніший для дослідження просторових механізмів. Застосування методу перетворення координат дає змогу визначити кінематичні параметри звичайними алгебраїчними методами й із застосуванням матриць. Перевага матричної форми запису при розв'язанні системи рівнянь полягає, головним чином, у застосуванні формул перемноження матриць, яке дає змогу послідовно перетворювати координати.

ЕОМ виконують операції з матрицями швидко, тоді як звичайні алгебраїчні методи розв'язання системи рівнянь при перетворенні координат - громіздкі. Але не слід вважати вдалою назву "матричний метод" для методу кінематичного дослідження із застосуванням матриць, оскільки матриці дають лише просту форму запису й обчислень, але не розкривають суті методу перетворення координат.

### Аналітичне дослідження плоских механізмів методом замкнених векторних контурів

Будь-який механізм, що є замкненим кінематичним ланцюгом, можна зобразити абстрактно у вигляді многокутника, складеного з векторів.



Цей ланцюг, абстрактно зображений у вигляді многокутника, відповідає умовам замкненості: сума проєкцій сторін цього многокутника на осі прямокутних координат дорівнює нулю. Зобразимо механізм шарнірного чотириланковика у вигляді векторів  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  і  $\vec{r}_4$  /рис. 2.II/, тобто, крім розмірів, надамо ланкам ще й напрямки, вказані стрілками. Напрям векторів можна взяти довільно, але зручніше за початок векторів узяти нерухоми точки шарнірів, які створили ланки зі стояком, тобто для ланок, які створили шарнір зі стояком, вектори, що їх зображають, виходять з цих шарнірів, а для інших ланок напрям векторів братимемо довільно. Наприклад, вектори  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$  виходять із шарнірів  $O_1$  і  $O_2$ , вектор  $\vec{r}_2$  виходить із шарніра  $A$ , а можна було показати як такий, що виходить із шарніра  $B$ .

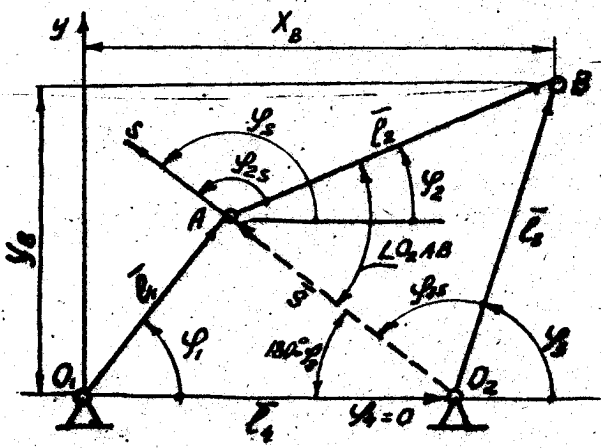


Рис. 2.II

Записуючи умови замкненості, треба враховувати знаки векторів. Для визначення знаків векторів користуватимемося правилом обходу. Почавши з будь-якого вектора, присвоїмо йому знак "+", якщо вектор збігається з напрямом руху за годинниковим стрілкою, для інших векторів присвоїватимемо знак "-", якщо їх напрям збігається з напрямом руху за годинниковим стрілкою, і навпаки. Наприклад, векторам  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$  присвоїмо знак "+", а  $\vec{r}_3$  і  $\vec{r}_4$  - знак "-". Ураховавши це, напишемо умову замкненості механізму чотириланковика:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3 - \vec{r}_4 = 0; \quad /2.69/$$

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{P}_3 + \bar{P}_4. \quad /2.70/$$

Ця умовність /правило обходу/ особливо зручна, якщо векторів більше ніж три, тобто для складних контурів, рівняння /2.69/, /2.70/ є рівняння замкненості у векторній формі.

### Визначення координат ланок механізму

Установивши координати точок ланок, установимо тим самим положення точок і ланок на площині чи в просторі, а взявши похідну за часом, визначимо швидкості та прискорення точок механізму.

Для визначення координат точки  $B$  замінимо рівняння замкненості /2.69/ векторного контура рівняннями проєкції векторів на осі  $x$  і  $y$ :

$$x_B = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = l_4 + l_3 \cos \varphi_3; \quad /2.71/$$

$$y_B = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_3 \sin \varphi_3. \quad /2.72/$$

Кути  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ , що визначають положення ланок на площині /у просторі/, повинні мати позитивні напрями відповідно до прийнятої у векторній алгебрі правої системи координатних осей / $x$  - вправо,  $y$  - догори/. Отже, для визначення величини та напрямку кута повертаємо вісь  $x$  проти годинникової стрілки доти, доки стрілка осі  $x$  не зіллється зі стрілкою вектора. Це й буде позитивним напрямом кута. Тобто кут відліковується від вектора  $x$  до вектора  $P_i$  проти годинникової стрілки, поки ці вектори не збіжаться. Зрозуміло, що з рівнянь /2.71/ і /2.72/ визначити координати  $x_B$  і  $y_B$  не можна, бо значення кутів  $\varphi_2$  і  $\varphi_1$  невідомі, відомий /можна задати/ лише кут  $\varphi_3$ . Отже, визначимо їх.

Для цього розглянемо замкнений контур  $O_1 A B O_2 O_1$ , як два контури,  $O_1 A O_2$  і  $A B O_2$  зі змінним вектором  $S$ .

Рівняння замкненості цих контурів:

$$\bar{P}_1 - \bar{S} - \bar{P}_4 = 0; \quad /2.73/$$

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_3 + \bar{S} = 0. \quad /2.74/$$

Знаки векторів взято відповідно до правила обходу цих контурів за годинниковою стрілкою.

Рівняння проєкції цих векторів на осі  $x, y$ :

$$l_1 \cos \varphi_1 - S \cos(180^\circ - \varphi_3) - l_4 = 0;$$

$$l_1 \sin \varphi_1 - l_4 \sin 0^\circ - S \sin(180^\circ - \varphi_3) = 0,$$

або

$$l_1 \cos \varphi_1 + S \cos \varphi_3 = 0;$$

$$l_1 \sin \varphi_1 - S \sin \varphi_3 = 0.$$

Звідси

$$l_1 \cos \varphi_3 = l_4 - l_1 \cos \varphi_1; \quad /2.75/$$

$$S \sin \varphi_3 = l_1 \sin \varphi_1. \quad /2.76/$$

Поділивши /2.76/ на /2.75/, маємо

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_4 - l_1 \cos \varphi_1}. \quad /2.77/$$

З рівняння /2.76/

$$S = \frac{l_1 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_3}. \quad /2.78/$$

Знайдемо змінний вектор  $S$  за теоремою косинусів:

$$S = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2l_1 l_4 \cos \varphi_1}.$$

Для визначення кута  $\varphi_2$  розглянемо контур  $ABO_2$  всі сторони якого відомо, а кут  $O_2AB$  визначимо так:

$$\angle O_2AB = 180^\circ - \varphi_3 + \varphi_2 = 180^\circ - (\varphi_3 - \varphi_2).$$

Оскільки

$$\cos [180^\circ - (\varphi_3 - \varphi_2)] = -\cos(\varphi_3 - \varphi_2),$$

з  $\Delta O_2AB$

$$l_3^2 = l_2^2 + S^2 + 2Sl_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2),$$

звідки

$$\cos(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{l_3^2 - l_2^2 - S^2}{2l_2 S}. \quad /2.79/$$

Як видно з рис. 2.II:

$$\varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_{2S}.$$

Визначивши  $x_B, y_B$  за формулами /2.71/ і /2.72/, знайдемо кут  $\varphi_3$

$$\cos \varphi_3 = \frac{x_B - l_4}{l_3}, \quad /2.80/$$

або

$$\sin \varphi_3 = \frac{y_B}{l_3}. \quad /2.81/$$

Якщо необхідно визначити координати інших ланок механізму, наприклад центра ваги ланки 2, потрібно в рівняннях /2.71/ і /2.72/ замінити  $l_2$  на  $kl_2$ , де  $k$  - коефіцієнт, що показує, яку частину довжини ланки становить відстань до центра ваги. При відстані до центра ваги  $U_2 - AU_2 = 1/3 AB$  координати центра ваги другої ланки визначаються так:

$$x_{U_2} = l_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{3} l_2 \cos \varphi_2; \quad /2.82/$$

$$y_{U_2} = l_1 \sin \varphi_1 + \frac{1}{3} l_2 \sin \varphi_2. \quad /2.83/$$

Продиференціювавши за часом, визначимо швидкість і прискорення центрів ваги ланки.

Кут  $\varphi_3$  можна визначити за іншими формулами. Очевидно, що

$$\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_{35},$$

де кут  $\varphi_{35}$  знаходиться за теоремою косинусів із трикутника  $ABO_2$ :

$$\cos \varphi_{35} = \frac{l_2^2 - l_3^2 - s^2}{2l_3 s}. \quad /2.84/$$

Визначення кутів  $\varphi_2, \varphi_3$  через допоміжні кути  $\varphi_{25}, \varphi_{35}$  легко запрограмувати і ввести до обчислювальної машини.

Визначення швидкостей і прискорень ланок механізму

Щоб визначити кутові швидкості шатуна  $\omega_2$  і коромисла  $\omega_3$ , продиференціюємо за часом  $t$  рівняння замкненості контурів у проєкціях на осі  $x, y$ :

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = l_3 \cos \varphi_3 + l_4; \quad /2.85/$$

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_3 \sin \varphi_3. \quad /2.86/$$

Дістанемо:

$$-l_1 \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - l_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = -l_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt};$$

$$\left| l_1 \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + l_2 \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = l_3 \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt} \right| \cdot (-1).$$

Оскільки  $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ ,  $\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2$ ,  $\frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3$ , то останні рівняння можна звести до такого вигляду:

$$-l_2 \omega_2 \sin \varphi_2 = l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - l_3 \omega_3 \sin \varphi_3; \quad /2.87/$$

$$-l_2 \omega_2 \cos \varphi_2 = l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 - l_3 \omega_3 \cos \varphi_3. \quad /2.88/$$

Поділивши /2.87/ на /2.88/, матимемо

$$\frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} = \frac{l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - l_3 \omega_3 \sin \varphi_3}{l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 - l_3 \omega_3 \cos \varphi_3},$$

або за правилом пропорцій

$$l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - l_3 \omega_3 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 = l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - l_3 \omega_3 \sin \varphi_3 \cos \varphi_2.$$

Згрупуємо члени рівняння:

$$l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = l_3 \omega_3 \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 - l_3 \omega_3 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2.$$

Тоді

$$l_1 \omega_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = l_3 \omega_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2), \quad /2.89/$$

звідки

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad /2.90/$$

Аналогічно, залишивши у правій частині рівнянь /2.87/ і /2.88/ лише члени з  $l_3$  і поділивши почленно праві й ліві їх частини, знайдемо:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad /2.91/$$

Рівняння /2.90/ і /2.91/ можна переписати так:

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

$$/ \frac{\omega_3}{\omega_1} = u_{31} - \text{передаточне число,}$$

але

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\frac{d\varphi_3}{dt}}{\frac{d\varphi_1}{dt}} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = U_{31} = \frac{l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}, \quad /2.92/$$

де  $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$  - аналог кутової швидкості  $\omega_3$  ланки 3.

З рівняння /2.92/:  $\omega_3 = \omega_1 U_{31}$ .

Аналогічно  $\omega_2 = \omega_1 U_{21}$ , де аналог кутової швидкості  $\omega_2$  ланки 2.

$$U_{21} = \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad /2.93/$$

Для визначення кутових прискорень продиференціюємо за часом  $t$  рівняння /2.87/ і /2.88/. Оскільки  $\omega_1 = \text{const}$ , то  $\frac{d\omega_1}{dt} = \epsilon_1 = 0$ .

Отже,

$$-l_2 \frac{d\omega_2}{dt} \sin \varphi_2 - l_2 \omega_2 \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} -$$

$$-l_3 \frac{d\omega_3}{dt} \sin \varphi_3 - l_3 \omega_3 \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt}; \quad /2.94/$$

$$-l_2 \frac{d\omega_2}{dt} \cos \varphi_2 + l_2 \omega_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} -$$

$$-l_3 \frac{d\omega_3}{dt} \cos \varphi_3 + l_3 \omega_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt}. \quad /2.95/$$

Помножимо /2.94/ на  $\cos \varphi_2$ , а /2.95/ - на  $\sin \varphi_2$  і, враховуючи  $\frac{d\omega_1}{dt} = \epsilon_1$ , матимемо:

$$-l_2 \epsilon_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - l_2 \omega_2^2 \cos^2 \varphi_2 = l_1 \omega_1^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 -$$

$$-l_3 \epsilon_3 \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 - l_3 \omega_3^2 \cos \varphi_3 \cos \varphi_2; \quad /2.96/$$

$$l_2 \epsilon_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + l_2 \omega_2^2 \sin^2 \varphi_2 = -l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 -$$

$$-l_3 \epsilon_3 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 + l_3 \omega_3^2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2. \quad /2.97/$$

Віднявши від /2.96/ /2.97/ почленно, знайдемо:

$$-l_2 \omega_2^2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) = l_1 \omega_1^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) -$$

$$-l_3 \epsilon_3 (\sin \varphi_3 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 \sin \varphi_2) - l_3 \omega_3^2 (\cos \varphi_3 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_3 \sin \varphi_2),$$

або

$$l_2 \epsilon_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = l_2 \omega_2^2 + l_1 \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_3 \omega_3^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Звідси кутове прискорення коромисла

$$\varepsilon_3 = \frac{\ell_1 \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \ell_2 \omega_2^2 + \ell_3 \omega_3^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{\ell_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \quad /2.98/$$

Помноживши /2.94/ на  $\cos \varphi_3$ , а /2.95/ - на  $\sin \varphi_3$  і додавши їх, знайдемо кутове прискорення шатуна 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{\ell_1 \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \ell_2 \omega_2^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \ell_3 \omega_3^2}{\ell_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \quad /2.99/$$

Взявши похідну за часом  $t$  від рівнянь /2.71/ і /2.72/, знайдемо швидкість точки  $B$ .

$$v_{B_x} = -\ell_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - \ell_2 \omega_2 \sin \varphi_2 = -\ell_3 \omega_3 \sin \varphi_3; \quad /2.100/$$

$$v_{B_y} = \ell_1 \omega_1 \cos \varphi_1 + \ell_2 \omega_2 \cos \varphi_2 = \ell_3 \omega_3 \cos \varphi_3. \quad /2.101/$$

Повна абсолютна швидкість точки  $B$

$$v_B = \sqrt{v_{B_x}^2 + v_{B_y}^2} = \sqrt{\ell_3^2 \omega_3^2 (\sin^2 \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3)} = \ell_3 \omega_3. \quad /2.102/$$

Відносна швидкість  $v_{BA} = \omega_2 \ell_{BA}$ .

Швидкість центра ваги ланки 2 знайдемо, взявши похідну за часом від рівнянь /2.82/ і /2.83/.

Прискорення точки  $B$  знайдемо, взявши похідну за часом від рівнянь /2.96/ і /2.97/:

$$\begin{aligned} a_{B_x} &= -\ell_3 \frac{d\omega_3}{dt} \sin \varphi_3 - \ell_3 \omega_3 \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt} = \\ &= -\ell_3 (\varepsilon_3 \sin \varphi_3 + \omega_3^2 \cos \varphi_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{B_y} &= \ell_3 \frac{d\omega_3}{dt} \cos \varphi_3 - \ell_3 \omega_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt} = \\ &= \ell_3 (\varepsilon_3 \cos \varphi_3 - \omega_3^2 \sin \varphi_3); \end{aligned}$$

$$a_B = \sqrt{a_{B_x}^2 + a_{B_y}^2} = \ell_3 \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}.$$

/2.103/

2.14. Аналітичне дослідження механізмів  
методом перетворення координат  
/за Ю.Ф.Морошніним/

Як відомо з аналітичної геометрії, положення певних геометричних об'єктів /ланок механізму/ визначається відносно певної системи координат. При дослідженні механізмів виникає потреба змінювати систему координат, в якій визначені початкові положення ланок механізму, іншою системою, в якій розглядати їх зручніше. У цьому разі виникає потреба визначити координати точок ланок механізму в іншій системі координат, оскільки точка при цьому матиме інші координати. Скористаємося формулами перетворення координат. Згадаємо деякі відомості з аналітичної геометрії.

При перетворенні координат зустрічаються такі випадки:

1/ паралельне переміщення декартових координат /зміна місця початку координат/;

2/ поворот обох осей в один бік, при незмінному початку координат /цим ми користувалися, визначаючи аналоги швидкостей і прискорень методом замкнених контурів/;

3/ паралельний перенос початку координат з подальшим поворотом осей на однаковий кут.

1. При паралельному переносі декартової системи координат /рис. 2.12/ на величину  $a$  в напрямі осі  $Ox$  і на величину  $b$  в напрямі осі  $Oy$  абсиси всіх точок зменшуються на  $a$ , ординати - на  $b$ :

$$x' = x - a;$$

$$y = y' + b;$$

/2.104/

$$y' = y - b;$$

$$x = x' + a.$$

/2.105/

2. При повороті осей декартових координат на кут  $\alpha$  формули перетворення координат, що виражають старі координати  $/x, y/$  довільної точки  $M$  через нові координати  $/x', y'/$  тієї самої точки такі:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha;$$

/2.106/

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

/2.107/



Справді, з рис. 2.13

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta; & y &= \rho \sin \theta; \\x' &= \rho \cos \theta'; & y' &= \rho \sin \theta'\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta = \rho \cos(\theta' + \alpha) = \rho(\cos \theta' \cos \alpha - \sin \theta' \sin \alpha) = \\&= \rho \cos \theta' \cos \alpha - \rho \sin \theta' \sin \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\y &= \rho \sin \theta = \rho \sin(\theta' + \alpha) = \rho(\cos \theta' \sin \alpha + \sin \theta' \cos \alpha) = \\&= \rho \cos \theta' \sin \alpha + \rho \sin \theta' \cos \alpha = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.\end{aligned}$$

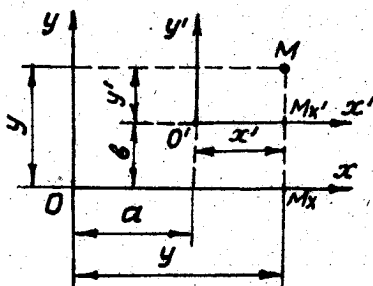


Рис. 2.12

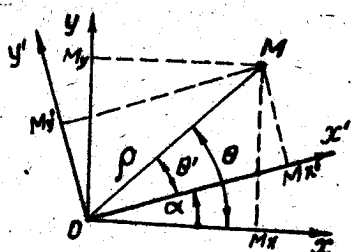


Рис. 2.13

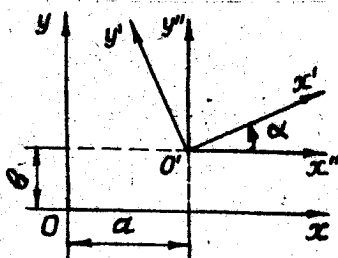


Рис. 2.14

3. Якщо осі декартової прямокутної системи переносяться паралельно на  $a$  в напрямі  $Ox$  і на  $b$  в напрямі  $Oy$ , і, крім того, повертаються на кут  $\alpha$ , то при незмінному масштабі формули перетворення координат для вираження старих  $|x, y|$  точки  $M$  через нові  $|x', y'|$  такі:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a; \quad /2.I08/$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b. \quad /2.I09/$$

Координати точки  $M$  нової системи  $|x', y'|$  визначаються за формулами

$$x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha; \quad /2.I10/$$

$$y' = -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha. \quad /2.I11/$$

Це очевидно з рис. 2.14. Дійсно, згідно з /2.I04/, /2.I05/:

$$\begin{aligned} x &= x'' + a; \\ y &= y'' + b. \end{aligned} \quad /2.I12/$$

А згідно з /2.I10/ і /2.I11/:

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\ y'' &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Підставивши ці значення до формули /2.I12/, дістанемо формули /2.I05/ - /2.I09/. Усі наведені формули перетворення координат визначено для нової системи координат, яку дістали найкоротшим поворотом осей /проти годинникової стрілки/.

Вони справедливі й для лівої системи координат, тобто для випадку, коли переходимо від лівої системи координат /при найкоротшому повороті осей координат за годинниковою стрілкою/ до нової лівої системи координат.

Якщо одна система координат - права, а друга - ліва, то користуємося формулами перетворення координат

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + a; \\ y &= x' \sin \alpha \pm y' \cos \alpha + b, \end{aligned}$$

де верхні знаки належать до переходу від правої системи - до правої, чи від лівої - до лівої, а нижні знаки - до різноіменних систем /одна - права, друга - ліва/. Але треба мати на увазі: якщо стара

система ліва, то кут  $\alpha$  слід вважати позитивним у разі відліковування його за годинниковою стрілкою.

Метод перетворення координат складніший за метод векторних многокутників, але при дослідженні механізмів з кількома ступенями рухомості і, особливо – просторових, він зручніший, бо матрична форма запису формул дає змогу впорядкувати виконання розрахунків, спростити їх контроль і полегшити використання ЕОМ.

" Справді, формули /2.II0/ і /2.III/ дають змогу визначити положення тільки однієї точки на площині. Для визначення положення однієї ланки механізму треба написати чотири рівняння /для двох точок ланки/, для  $n$  ланок –  $4n$  рівнянь. Якщо механізм має кілька ступенів рухомості, то для визначення положення ланок треба задати стільки ж узагальнених координат і кількість рівнянь ще збільшиться.

Щоб не "потонути" в морі цифр, числа зручно записувати у вигляді системи таблиць /матриць/. Тому нагадаємо деякі відомості з лінійної алгебри. Оскільки всі числа не можна помістити в один рядок, пишемо для чисел кілька рядків і дістаємо таблицю. Прямокутна таблиця, складена з літер чи чисел, називається матрицею. Матриця порядку  $m \times n$  є система чисел /елементів/, розміщених у вигляді прямокутної таблиці із  $m$  рядків і  $n$  стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Літери чи числа, що створюють матрицю, називаються її елементами. Перші індекси біля елемента показують номер рядка, другі – номер стовпця. Якщо  $m=n$ , то матриця називається квадратною порядку  $m$ . Якщо  $n=1$ , то матриця називається стовпцевою порядку  $m$ .

Для квадратної матриці введено поняття діагоналі. Головна діагональ іде зліва направо. Побічна діагональ іде зліва направо догори. /Для матриць порядку  $m \times n$  діагоналей немає./

Матрицю не слід змішувати з визначником. Визначником порядку  $m$  є многочлен, одержаний з елементів квадратної матриці порядку  $m$ . Визначником матриці  $A$  називається вираз  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Визначник позначається так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

тобто

Сумою двох матриць  $A, B$  однакового порядку ( $m \times n$ ) називається матриця такого самого порядку, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць  $A, B$ .

Перемножувати можна тільки ті матриці, в яких число стовпців у першій матриці збігається з числом рядків у другій. Кожний коефіцієнт матриці-добутку  $C = BA$  визначається за правилом множення рядка на стовець. Отже, якщо необхідно визначити елемент рядка  $K$  і стовця  $l$  матриці  $C$ , треба знайти суму добутку елементів рядка  $K$  матриці  $B$  на елементи стовця  $l$  матриці  $A$ , тобто для квадратних матриць користуємося формулою

$$C_{kl} = b_{k1} a_{1l} + b_{k2} a_{2l} + b_{k3} a_{3l} + \dots + b_{km} a_{ml}; \quad /2.113/$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m;$$

$$l = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Добуток матриць не підпорядковується закону переміщення ( $BA \neq AB$ ), але закон сполучення залишається:  $CBA = C(BA)$ .

Коефіцієнти  $a_{ij}$ , які входять до матриці, здобутої з формул перетворення прямолінійних прямокутних координат, є напрямленими косинусами кутів, утворених новими осями координат зі старими:

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \hat{x}_i \hat{x}_j & \cos \hat{x}_i \hat{y}_j & \cos \hat{x}_i \hat{z}_j \\ \cos \hat{y}_i \hat{x}_j & \cos \hat{y}_i \hat{y}_j & \cos \hat{y}_i \hat{z}_j \\ \cos \hat{z}_i \hat{x}_j & \cos \hat{z}_i \hat{y}_j & \cos \hat{z}_i \hat{z}_j \end{vmatrix}.$$

Із формул перетворення прямолінійних і прямокутних осей координат, які дають змогу перейти від системи координат  $\hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{z}_j$  до системи координат  $x_j, y_j, z_j$ , написаної в загальному вигляді

$$x_j = a_{11} \hat{x}_j + a_{12} \hat{y}_j + a_{13} \hat{z}_j;$$

$$y_j = a_{21} \hat{x}_j + a_{22} \hat{y}_j + a_{23} \hat{z}_j;$$

$$z_j = a_{31} \hat{x}_j + a_{32} \hat{y}_j + a_{33} \hat{z}_j.$$

де коефіцієнти при координатах  $x, y, z$  ( $\sin \alpha_1, \cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \sin \alpha_2, \dots$ ) дорівнюють відповідно  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  і т.п. / і є напрямленими косинусами.

Для ілюстрації методу перетворення координат розглянемо механізм маніпулятора, що є чотириланковим плоским кінематичним ланцюгом з обертовими парами.

Узагальненими координатами візьмемо  $\varphi_0, \varphi_1$  і  $\varphi_2$ , які задано у функції часу, довжина ланок  $l_1, l_2$  і  $l_3$  також відома. Треба визначити параметр руху точки  $D$  захвату манипулятора. Позначимо літерою  $D$  з індексами 2, 1 і 0 /  $D_2, D_1, D_0$  / положення точки манипулятора, що збігається з точкою  $D$ , але належить системі координат  $x_2 y_2, x_1 y_1$  і  $x_0 y_0$ .

Згідно з формулами /5/ і /6/ і рис. 2.15 рівняння перетворення плоских декартових координат запишемо так:

$$I. \quad x_{D_2} = l_2 + x_3 \cos \varphi_2 - y_3 \sin \varphi_2; \quad /2.II4/$$

$$y_{D_2} = x_3 \sin \varphi_2 + y_3 \cos \varphi_2; \quad /2.II5/$$

$$II. \quad x_{D_1} = l_1 + x_2 \cos \varphi_1 - y_2 \sin \varphi_1; \quad /2.II6/$$

$$y_{D_1} = x_2 \sin \varphi_1 + y_2 \cos \varphi_1; \quad /2.II7/$$

$$III. \quad x_{D_0} = x_1 \cos \varphi_0 - y_1 \sin \varphi_0; \quad /2.II8/$$

$$y_{D_0} = x_1 \sin \varphi_0 + y_1 \cos \varphi_0. \quad /2.II9/$$

Зауважимо, що для зручності за початок осей нових систем координат взято шарніри відповідних ланок, ближчі до точки  $O$ , а поворот нових осей відносно старих здійснили проти годинникової стрілки настільки, щоб осі абсцис нової системи збігалися з відповідними ланками:  $x_1$  - в  $OA$ ;  $x_2$  - в  $AB$ ;  $x_3$  - в  $BD$ .

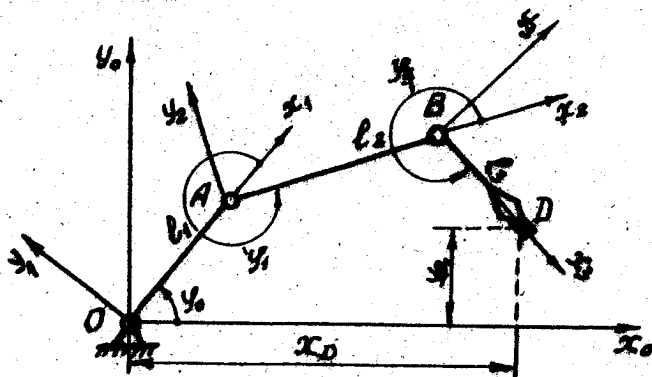


Рис. 2.15.

Таким чином, система координат  $x, y$ , не зміщена відносно системи  $x_0 y_0$ , а лише повернута відносно неї на кут  $\varphi_0$ ; система  $x_2 y_2$  зміщена вздовж осі абсцис  $x_1$  відносно системи  $x_1 y_1$  на  $\rho_1$  і повернута на кут  $\varphi_1$ , а система  $x_3 y_3$  зміщена відносно системи  $x_2 y_2$  вздовж осі  $x_2$  на  $\rho_2$  і повернута на кут  $\varphi_2$ . Ось чому в рівняннях /2.II3/ і /2.II4/ маємо зміщення  $\rho_2$  і  $\rho_1$ , а в рівнянні /2.II7/ зміщення немає, оскільки початок системи координат  $x, y$ , збігався з початком координат системи  $x_0 y_0$ , тобто з точкою  $A$ .

Щоб записати коефіцієнти при  $x_i$  і  $y_i$  у рівняннях I, II, III у вигляді квадратної матриці, додамо в рівняннях /2.II5/, /2.II7/ - /2.II9/ по нулю, від чого ці рівності не порушуються, а до кожного з рівнянь I, II, III перетворення координат додамо третє рівняння у вигляді тотожності  $1 = 1(x \ x)$  або  $I = I + 0 + 0$ . Тоді коефіцієнти правих частин рівнянь I, II, III /напрямні косинуси/ утворять квадратні матриці третього порядку:

$$T_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_2 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{vmatrix};$$

$$T_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{vmatrix};$$

$$T_{10} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ 0 & \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{vmatrix}.$$

Ліві частини рівнянь I, II, III з додаванням тотожності  $1 = 1$  дають такі стовпцеві матриці третього порядку:

$$z_{D_2} = \begin{vmatrix} 1 \\ x_{D_2} \\ y_{D_2} \end{vmatrix}; \quad z_{D_1} = \begin{vmatrix} 1 \\ x_{D_1} \\ y_{D_1} \end{vmatrix}; \quad z_{D_0} = \begin{vmatrix} 1 \\ x_{D_0} \\ y_{D_0} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно з рівняння перетворення координат системи  $x_3 y_3$ :

$$x_{D_3} = \rho_3 + 0 + 0;$$

$$y_{D_3} = 0 + 0 + 0.$$

З доданням тотожності  $I = I / \text{тобто } I = I + 0 + 0 /$ . Дістанемо стовпцеву матрицю третього порядку:

$$z_{D_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{D_3} \\ y_{D_3} \end{pmatrix} \quad / \text{у цьому прикладі} \quad z_{D_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножимо квадратну матрицю третього порядку  $T_{32}$  на стовпцеву матрицю  $z_{D_3}$  згідно з формулою /2.113/. Тобто помножимо перший елемент першого рядка квадратної матриці  $T_{32}$  на перший елемент стовпцевої матриці  $z_{D_3}$ , другий елемент першого рядка матриці  $T_{32}$  на другий елемент стовпцевої матриці  $z_{D_3}$ , третій елемент матриці  $T_{32}$  на третій елемент матриці  $z_{D_3}$ . Так само вчинимо і з другою та третьою стрічками й окладемо добутки в рядках.

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x_{D_3} + 0 \cdot y_{D_3}; \\ & c_2 \cdot 1 + \cos \varphi_2 x_{D_3} - \sin \varphi_2 y_{D_3} = T_{32} \times z_{D_3}; \quad /2.120/ \\ & 0 \cdot 1 + \sin \varphi_2 y_{D_3} + \cos \varphi_2 y_{D_3}. \end{aligned}$$

Якщо врахувати, що  $x_{D_3} = x_3$ , а  $y_{D_3} = y_3$  то стане очевидним, що без тотожності  $I = I$  дістали рівняння перетворених координат  $I$  для системи  $x_2 y_2$  і системи  $x_3 y_3$ . Оскільки лівою частиною рівняння /2.120/ є

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_{D_3} \\ y_{D_3} \end{pmatrix} = z_{D_3}.$$

то

$$z_{D_2} = T_{32} z_{D_3}. \quad /2.121/$$

Аналогічно:

$$z_{D_1} = T_{21} z_{D_2}; \quad /2.122/$$

$$z_{D_0} = T_{10} z_{D_1}. \quad /2.123/$$

Отже, рівняння I, II, III з доданням тотожності  $I = I$  можна записати у вигляді рівнянь, що відповідають перемноженню квадратної матриці третього порядку на стовпцеву матрицю такого самого порядку.

Підставивши значення  $z_{D_2}$  з рівняння /2.121/ в рівняння /2.122/, дістанем

$$z_{D_1} = T_{21} z_{D_2} = T_{21} T_{32} z_{D_3}.$$

Після підстановки цього значення  $z_{D_1}$  в рівняння /2.123/ дістанемо:

$$z_{D_0} = T_{10} z_{D_1} = T_{10} T_{21} T_{32} z_{D_3}.$$

Це дає змогу визначити необхідні координати  $x_0$  і  $y_0$  точки  $D$  захвату в системі  $x_0 y_0$ , а з ними й швидкість і прискорення точки  $D$ . Справді, перемноживши матриці  $T_{10} T_{21}$  за правилом множення рядка на стовпець /2.113/, для другого елемента другого рядка матриці  $T_{10}$  і другого елемента другого стовпця матриці  $T_{21}$ , третього елемента другого рядка матриці  $T_{10}$  і третього елемента другого стовпця матриці  $T_{21}$ , знайдемо:

$$C_{11} = \cos \varphi_0 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_0 \sin \varphi_1 = \cos(\varphi_0 + \varphi_1) = \cos \varphi_{20},$$

де  $\varphi_{20}$  - кут між віссю  $x_2$  та віссю  $x_0$ .

Визначивши аналогічно другі елементи матриці  $T_{10} T_{21}$  і скориставшись відомими тригонометричними формулами для суми кутів, дістанемо:

$$T_{10} T_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_{20} & -\sin \varphi_{20} & l_2 \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_{20} & \cos \varphi_{20} & l_1 \sin \varphi_0 \end{vmatrix}.$$

Помноживши цю матрицю на  $T_{32}$ , матимемо:

$$(T_{10} T_{21}) T_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_{30} & -\sin \varphi_{30} & l_2 \cos \varphi_{20} + l_1 \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_{30} & \cos \varphi_{30} & l_2 \sin \varphi_{20} + l_1 \sin \varphi_0 \end{vmatrix}.$$

де  $\varphi_{30} = \varphi_2 + \varphi_{20}$ .

Перемноживши квадратну  $T_{10} T_{21} T_{32}$  та стовпцеву  $z_{D_3}$  матриці і повернувшись до координатної форми запису з урахуванням  $x_{D_3} = l_3$ ,  $y_{D_3} = 0$ , визначимо координати:

$$x_{D_0} = l_1 \cos \varphi_0 + l_2 \cos \varphi_{20} + l_3 \cos \varphi_{30}; \quad /2.124/$$

$$y_{D_0} = l_1 \sin \varphi_0 + l_2 \sin \varphi_{20} + l_3 \sin \varphi_{30}. \quad /2.125/$$

Швидкість і прискорення точки  $D$  захвату манипулятора визначимо, продиференціювавши за часом II координати з рівнянь /2.124/, /2.125/. Зрозуміло, що рівняння /2.124/, /2.125/ простіше дістати з рівнянь I, II, III, застосувавши звичайні алгебраїчні перетворення, але обчислен-



ня при цьому були б громіздкіші. Перевага матричної форми полягає головним чином у використанні формул множення матриць, що дають змогу однаково виконувати послідовне перетворення координат.

Тому методи кінематичного аналізу механізмів з використанням матриць іноді називають матричними методами, що не можна вважати вдалим, бо матриці дають лише просту форму запису необхідних обчислень, але не визначають сутності методу – методу перетворення координат, яке можна виконати й без матриць.

Зауважимо також, що рівняння /2.124/, /2.125/ можна було дістати простіше з рівнянь проєкцій контура *OABD* на осі координат. Але це спрощення справедливе лише при розгляданні плоских механізмів. Для просторових механізмів метод перетворення координат простіший і економніший, ніж метод замкнених контурів.

## 2.15. Кінематичне дослідження механізмів з допомогою обчислювальних машин

Застосування швидкодіючих ЦЕОМ дає змогу виконати синтез механізму, визначити будь-які кінематичні параметри із наперед заданою точністю. Розглянемо при використанні ЕОМ механізм, дослідження якого виконано раніше з допомогою методів графіків, планів швидкостей і прискорень та аналітичним. Розглядатимемо механізм, що складається з механізму I класу і груп Ассурі II класу. Для прикладу виконаємо синтез і кінематичний аналіз механізму стругального верстата, побудованого за схемою  $1 \rightarrow II_2^3 \rightarrow II_2^5$  /рис. 2.16/. Зобразимо кінематичний ланцюг важільного механізму верстата абстрактно у вигляді векторних трикутників, що відповідають умовам замкненості /сума проєкцій векторів на осі прямокутних координат дорівнює нулю/. Напрямок векторів  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_{O_2A}, \vec{P}_4$  можна взяти довільно, але зручніше розглядати їх як такі, що виходять із шарнірів, які створили ланки зі стояком. При написанні умов замкненості треба враховувати знак вектора. Для цього скористаємося правилом обходу контура векторного многокутника за годинниковою стрілкою. Для контура  $O_2O, AO_2$  умова замкненості у векторній формі

$$\vec{P}_2 + \vec{P}_{O_2A} + \vec{P}_1 = 0. \quad /2.126/$$

Умови замкненості цього контура у вигляді проєкцій векторів на осі координат:

$$\begin{aligned} P_2 \cos \varphi_2 - P_{O_2A} \cos \varphi_4 + P_1 \cos 90^\circ &= 0; \\ P_2 \sin \varphi_2 + P_1 \sin 90^\circ &= P_{O_2A} \sin \varphi_4. \end{aligned}$$

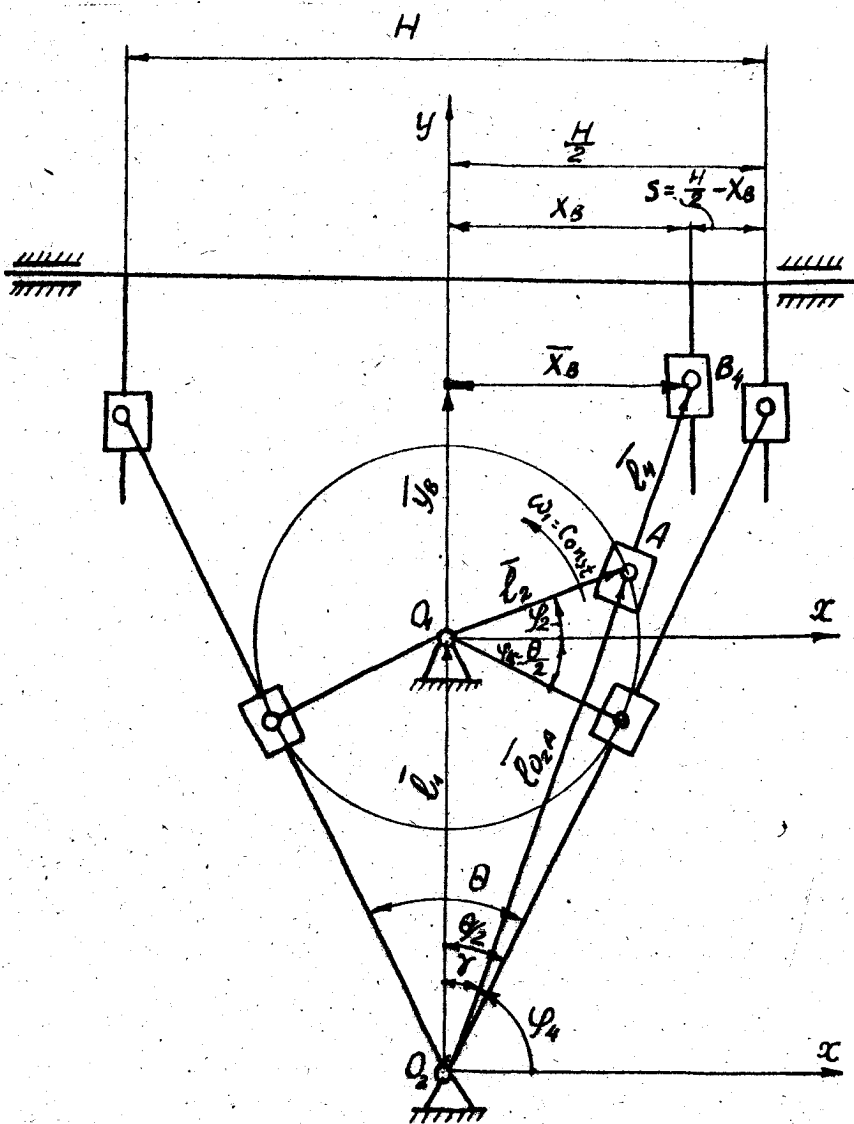


FIG. 2.16

II-2736

$$\rho_2 \cos \varphi_2 = \rho_{O_2A} \cos \varphi_4; \quad /2.127/$$

$$\rho_2 \sin \varphi_2 + \rho_1 = \rho_{O_2A} \sin \varphi_4. \quad /2.128/$$

Але не можна з цих рівнянь визначити кінематичні параметри за узга-  
льненою координатою  $\varphi_2$ , оскільки кут  $\varphi_4$  і вектор змінної вели-  
чини  $\rho_{O_2A}$  - невідомі. Крім того, при конструюванні /і в завданні  
на курсовий проект/ у більшості випадків задаються міжосьова відстань  
 $O_1O_2$ , хід різця  $H$  і коефіцієнт зміни середньої швидкості ходу ку-  
ліси  $\kappa = \frac{v_{x,кв}}{v_{р,кв}}$ , де  $v_{x,кв}$  - середня швидкість холостого хо-  
ду різця,  $v_{р,кв}$  - середня швидкість робочого ходу різця /кутиса  $\theta$ /.  
Тому спочатку треба виконати синтез механізму, а потім визначити  
 $\rho_{O_2A}$  і  $\varphi_4$ .

#### Синтез механізму

Кут хитання куліси, як відомо з попереднього,

$$\theta = \pi \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1};$$

довжина кривошипа  $O_1A$

$$\rho_2 = \rho_1 \sin \frac{\theta}{2};$$

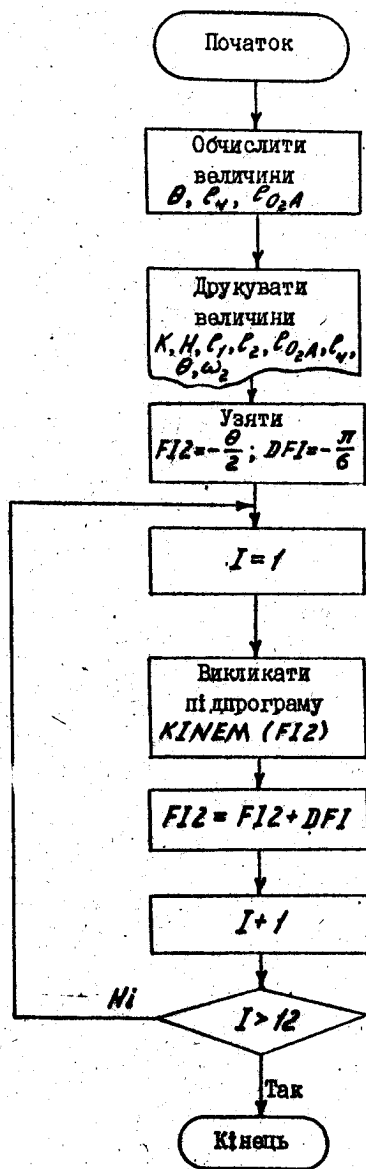
довжина куліси  $O_2B$

$$\rho_4 = \frac{H}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

Виконавши обчислення за цими формулами, згідно зі схемою алгоритму  
і програмою, написаною мовою Фортран, які наведено на рис. 2.17 -  
2.19, для значень  $\kappa = 1 - 2$  з кроком 0,1,  $\rho_1 =$   
 $= /350 \dots 700/$  мм з кроком 50 мм і  $H = /345 \dots 380/$  мм з кроком 5 мм,  
перейдемо до визначення кінематичних параметрів. Схему алгоритму  
підпрограми COMPIТ зображено на рис. 2.17, основної програми - на  
рис. 2.18, підпрограму KINEM(F12) - на рис. 2.19.

#### Кінематичне дослідження

Швидкість точки  $A_2$  /колова/  $v_{A_2} = \omega_2 \rho_2$ . Проекції швидкості точ-  
ки  $A_2$  на осі  $x$  і  $y$ :  $v_{A_2x} = v_{A_2} \sin \varphi_2$ ;  $v_{A_2y} = v_{A_2} \cos \varphi_2$ .



II\*

Рис. 2.17

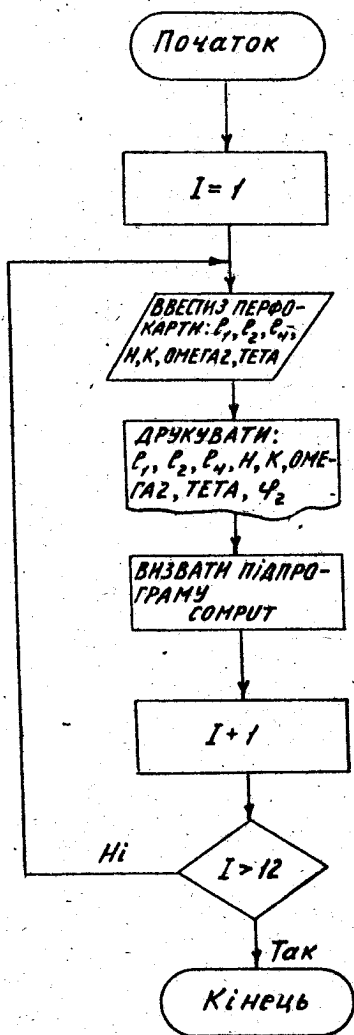


Рис. 2.18

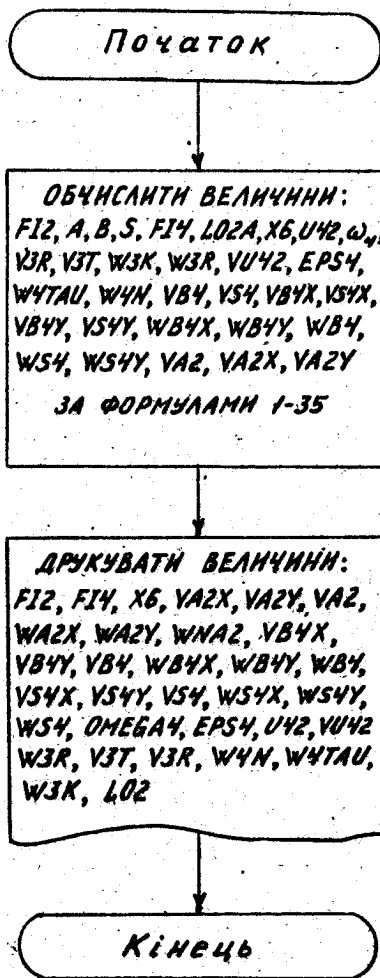


Рис. 2.19

Нормальне прискорення  $a_{A_2}^n = \omega_2^2 \rho_2$ . Його проекції на осі:

$$a_{A_2, x}^n = a_{A_2}^n \cos \varphi_2; \quad a_{A_2, y}^n = a_{A_2}^n \sin \varphi_2.$$

Переміщення повзуна куліси 6 з крайнього правого положення у крайнє ліве /і навпаки/ визначимо з умов замкненості контура  $O_2 B B O_2$  у формі проекцій на осі координат:

$$\rho_{O_2 B_c} \cos 90^\circ + \rho_{B B} \cos 0^\circ = \rho_4 \cos \varphi_4;$$

або

$$\rho_{O_2 B_c} \sin 90^\circ + \rho_{B_c B} \sin 0^\circ = \rho_4 \sin \varphi_4,$$

$$\rho_{B_c B} = \rho_4 \cos \varphi_4 = x_B; \quad /2.129/$$

$$\rho_{O_2 B_c} = \rho_4 \sin \varphi_4 = y_B. \quad /2.130/$$

Переміщення куліси 6

$$S = \frac{H}{2} - x_B. \quad /2.131/$$

Положення куліси 4 визначимо, вирізавши кут  $\varphi_4$  як функцію кута повороту  $\varphi_2$  кривошипа. Відлік положень куліси зручно починати з такого значення  $\varphi_2$ , коли куліса 4 займає крайнє /наприклад, праве/ положення. У цьому разі кривошип 2 і куліса 4 створюють кут  $90^\circ$ . Як видно з рис. 2.16,  $\varphi_k = \frac{\theta}{2}$  як кутів з перпендикулярними сторонами  $/xx \perp O_1 O_2, O_1 A_0 \perp O_2 B/$ .

Отже, початкове значення кута  $\varphi_2$

$$\varphi_{20} = 360^\circ - \varphi_k = 2\pi - \frac{\theta}{2}. \quad /2.132/$$

Якщо розглядати механізм у 12 рівномірно розміщених положеннях кривошипа, тобто через проміжок  $\frac{\pi}{6}$ , то проміжне значення кривошипа визначатиметься кутом

$$\varphi_{2(n)} = 2\pi + n \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{2}, \quad /2.133/$$

де  $n = 0, 1, 2, \dots, 12$ ;  $\frac{\theta}{2}$  - сталі значення, рад. Кут  $\varphi_4$ , що входить до рівняння замкненості, відліковується від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки  $\varphi_4 = 90^\circ - \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma$  /див. рис. 2.16/.

Оскільки

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\rho_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 + \rho_2 \sin \varphi_2},$$

то

$$\varphi_4 = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\rho_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 + \rho_2 \sin \varphi_2}. \quad /2.134/$$

Визначивши  $x_B = \rho_4 \cos \varphi_4$ , за формулою /2.131/ знаходимо переміщення кулі 6 з крайнього правого положення вліво.

Довжину змінного вектора  $\rho_{O_2A}$  визначимо з рівняння /2.127/ чи /2.128/, в якому усі величини, крім  $\rho_{O_2A}$ , відомі:

$$\rho_{O_2A} = \frac{\rho_2 \sin \varphi_2 + \rho_1}{\sin \varphi_4} = \frac{\rho_2 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_4}. \quad /2.135/$$

Або за теоремою косинусів:

$$\rho_{O_2A} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(90^\circ + \varphi_2)} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \sin \varphi_2}. \quad /2.136/$$

Узявши похідну від рівняння /2.127/ за кутом  $\varphi_2$ , визначимо аналогі швидкості ей кулісного механізму:

$$-\rho_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} = -\rho_{O_2A} \sin \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} + \frac{d\rho_{O_2A}}{d\varphi_2} \cos \varphi_4, \quad /2.137/$$

де

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} = \frac{\frac{d\varphi_2}{dt}}{\frac{d\varphi_4}{dt}} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = 1;$$

$$\frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} = \frac{\omega_4}{\omega_2} = U_{42};$$

$U_{42}$  - аналог кутової швидкості кулі 4, що дорівнює передаточному відношенню  $\frac{\omega_4}{\omega_2}$ , а  $\frac{d\rho_{O_2A}}{d\varphi_2} = |v_{A_4A_3}|_{\varphi_2}$  - аналог відносної швидкості ковзання точки  $A_4$  кулі 4 відносно точки  $A_3$  повзуна 3, який показує, що відносна швидкість  $v_{A_4A_3}$  є тєю функцією кута повороту кривошипа 2.

З урахуванням цих зауважень, рівняння /2.137/ перепишемо так:

$$\rho_2 \sin \varphi_2 = \rho_{O_2A} \sin \varphi_4 U_{42} - (v_{A_4A_3})_{\varphi_2} \cos \varphi_4. \quad /2.138/$$

Продиференціювавши рівняння /2.128/ за узагальненою координатою  $\varphi_2$ , матимемо

$$\rho_2 \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} = \rho_{O_2A} \cos \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} + |v_{A_4A_3}|_{\varphi_2} \sin \varphi_4,$$

або

$$\rho_2 \cos \varphi_2 = \rho_{O_2A} \cos \varphi_4 U_{42} + |v_{A_4A_3}|_{\varphi_2} \sin \varphi_4. \quad /2.139/$$

128



Відніmemo від кутів у рівняннях /2.138/ кут  $\varphi_4$ , що відповідає проектуванню векторів на повернену на кут  $\varphi_4$  відносно початкових осей  $x$  і  $y$  нову систему прямокутних осей  $x_4$  і  $y_4$ :

$$\rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) = \rho_{O_2A} \sin(\varphi_4 - \varphi_4) u_{42} - |v_{A_4A_3}|_{\varphi} \cos(\varphi_4 - \varphi_4).$$

Звідси

$$|v_{A_4A_3}|_{\varphi} = -\rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4). \quad /2.140/$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_2 - \varphi_4) &= \sin\varphi_2 \cos\varphi_4 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_4 = \\ &= -(\sin\varphi_4 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_4 \sin\varphi_2) = -\sin(\varphi_4 - \varphi_2), \quad /2.141/ \end{aligned}$$

$$|v_{A_4A_3}|_{\varphi} = \rho_2 \sin(\varphi_4 - \varphi_2); \quad /2.142/ \quad v_{A_4A_3} = |v_{A_4A_3}|_{\varphi} \omega_4. \quad /2.142a/$$

Віднявши від кутів рівняння /2.139/ кут  $\varphi_4$ , дістанемо:

$$\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) = \rho_{O_2A} \cos(\varphi_4 - \varphi_4) u_{42} + |v_{A_4A_3}|_{\varphi} \sin(\varphi_4 - \varphi_4),$$

звідки

$$u_{42} = \frac{\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4)}{\rho_{O_2A}} = \frac{\rho_2 \cos(\varphi_4 - \varphi_2)}{\rho_{O_2A}}. \quad /2.143/$$

Підставивши значення  $\rho_{O_2A}$  з рівняння /2.135/, знайдемо:

$$u_{42} = \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_4) \cos\varphi_4}{\cos\varphi_2}. \quad /2.144/$$

Для визначення прискорень ланок продиференціюємо за узагальненою координатою  $\varphi_2$  спочатку рівняння /2.138/, а потім /2.139/:

$$\begin{aligned} \rho_2 \cos\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_2} &= \rho_{O_2A} u_{42} \cos\varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} + \rho_{O_2A} \sin\varphi_4 u_{42}' + \\ &+ |v_{A_4A_3}|_{\varphi} \sin\varphi_4 u_{42} - (\alpha_{A_4A_3})_{\varphi} \cos\varphi_4 + (v_{A_4A_3})_{\varphi} \sin\varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$2(v_{A_4A_3})_{\varphi} \sin\varphi_4 u_{42} = |\alpha_{A_4A_3}^x|_{\varphi} \sin\varphi_4, \quad /2.145/$$

маємо:

$$\begin{aligned} \rho_2 \cos\varphi_2 &= u_{42}^2 \rho_{O_2A} \cos\varphi_4 + u_{42}' \rho_{O_2A} \sin\varphi_4 + \\ &+ (\alpha_{A_4A_3}^x)_{\varphi} \sin\varphi_4 - (\alpha_{A_4A_3}^z)_{\varphi} \cos\varphi_4. \quad /2.146/ \end{aligned}$$

Продиференціювавши за узагальноною координатою  $\varphi_2$  рівняння /2.139/, дістанемо:

$$-l_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = -l_{02} A u_{42} \sin \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{dt} + l_{02} A \cos \varphi_4 u'_{42} + (a_{A_4 A_3})_{\varphi} \cos \varphi_4 u_{42} + (a_{A_4 A_3}^2)_{\varphi} \sin \varphi_4 + (v_{A_4 A_3})_{\varphi} \cos \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{dt},$$

або

$$\begin{aligned} -l_2 \sin \varphi_2 &= -u_{42}^2 l_{02} A \sin \varphi_4 + (a_{A_4 A_3}^K)_{\varphi} \cos \varphi_4 - \\ &- (a_{A_4 A_3}^2)_{\varphi} \sin \varphi_4 + u'_{42} l_{02} A \cos \varphi_4. \end{aligned} \quad /2.147/$$

Віднявши від кутів у рівнянні /2.147/ кут  $\varphi_4$  і врахувавши, що

$$\sin(\varphi_4 - \varphi_4) = 0, \text{ а } \cos(\varphi_4 - \varphi_4) = 1,$$

дістанемо:

$$l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) = - (a_{A_4 A_3}^K)_{\varphi} + u'_{42} l_{02} A,$$

звідки аналог кутового прискорення

$$\frac{d\omega_2}{dt} = u'_{42} = \frac{- (a_{A_4 A_3}^K)_{\varphi} - l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_{02} A}. \quad /2.148/$$

Оскільки  $\sin(\varphi_2 - \varphi_4) = -\sin(\varphi_4 - \varphi_2)$ , рівняння /2.148/ можна переписати так:

$$u'_{42} = \frac{l_2 \sin(\varphi_4 - \varphi_2) - (a_{A_4 A_3}^K)_{\varphi}}{l_{02} A}. \quad /2.149/$$

Віднявши від кутів рівняння /2.146/ кут  $\varphi_4$ , матимемо:

$$\begin{aligned} l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) &= u_{42} l_{02} A \cos(\varphi_4 - \varphi_4) + u'_{42} l_{02} A \sin(\varphi_4 - \varphi_4) + \\ &+ (a_{A_4 A_3}^K)_{\varphi} \sin(\varphi_4 - \varphi_4) - (a_{A_4 A_3}^2)_{\varphi} \cos(\varphi_4 - \varphi_4). \end{aligned}$$

Звідси аналог відносного /релятивного/ прискорення

$$(a_{A_4 A_3}^2)_{\varphi} = u_{42}^2 l_{02} A - l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4); \quad /2.150/$$

$$a_{A_4 A_3}^2 = (a_{A_4 A_3}^2)_{\varphi} \omega_2^2. \quad /2.151/$$

Аналог прискорення Копіоліса

$$(\alpha_{A_4 A_2}^x)_{\varphi} = 2(\nu_{A_4 A_2})_{\varphi} \omega_2; \quad /2.152/$$

$$\alpha_{A_4 A_2}^x = (\alpha_{A_4 A_2}^x)_{\varphi} \omega_2^2. \quad /2.153/$$

Оскільки

$$\frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} = \frac{\omega_4}{\omega_2} = \omega_{42}, \quad /2.154/$$

$$\omega_4 = \omega_2 \omega_{42}.$$

Із рівняння /2.154/, диференціюючи обидві частини за часом  $t$ , знаходимо:

$$\frac{d\omega_4}{dt} = \epsilon_4 = \frac{d\omega_2}{dt} \omega_{42} + \omega_2 \omega_{42}' \frac{d\varphi_2}{dt},$$

тобто

$$\epsilon_4 = \omega_2^2 \omega_{42}' + \epsilon_2 \omega_{42}. \quad /2.155/$$

Якщо  $\epsilon_2 = 0$  ( $\omega_2 = \text{const}$ ),

то

$$\epsilon_4 = \omega_2^2 \omega_{42}'. \quad /2.156/$$

Колова швидкість точки  $A_4$  куліси

$$\nu_{A_4 O_2} = \omega_4 \rho_{O_2 A}. \quad /2.157/$$

Швидкість точки  $B$  куліси

$$\nu_B = \omega_4 \rho_{O_2 B}. \quad /2.158/$$

Швидкість центра ваги куліси  $\chi$

$$\nu_{\chi O_2} = \nu_{A_4 O_2} \frac{\rho_{O_2 \chi}}{\rho_{O_2 A}}. \quad /2.159/$$

Нормальна складова прискорення точки  $A_4$  відносно  $O_2$

$$\alpha_{A_4 O_2}^n = \omega_4^2 \rho_{O_2 A}. \quad /2.160/$$

Дотична /тангенціальна/ складова прискорення точки  $A_4$  відносно точки  $O_2$

$$\alpha_{A_4 O_2}^t = \epsilon_4 \rho_{O_2 A}. \quad /2.161/$$

Повне прискорення точки  $A_4$

$$a_{A_4 O_2} = \sqrt{(a_{A_4 O_2}^n)^2 + (a_{A_4 O_2}^t)^2}, \quad /2.162/$$

або

$$a_{B_4 O_2} = \frac{a_{A_4 O_2} \rho_{O_2 B_4}}{\rho_{O_2 A_4}}. \quad /2.163/$$

Із контуру  $O_2 B_4 B O_2$

$$\bar{Y}_B + \bar{X}_B - \bar{\rho}_N = 0, \quad /2.164/$$

або в проєкціях на осі координат

$$x_{B_4} = \rho_4 \cos \varphi_4; \quad /2.165/$$

$$y_{B_4} = \rho_4 \sin \varphi_4. \quad /2.166/$$

Узявши похідні за узагальненою координатою  $\varphi_2$ , матимемо:

$$\frac{dx_{B_4}}{d\varphi_2} = (v_{x_B})_{\varphi} = -\rho_4 \sin \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} = -\rho_4 u_{42} \sin \varphi_4, \quad /2.167/$$

а взявши похідну за координатою  $\varphi_2$  від /2.167/, знайдемо:

$$\frac{d^2 x_{B_4}}{d\varphi_2^2} = -\rho_4 (u_{41}' \sin \varphi_4 - u_{42}^2 \cos \varphi_4). \quad /2.168/$$

Проекції відповідно швидкостей і прискорень:

$$\frac{dx_{B_4}}{dt} = v_{x_B} = -\omega_2 \rho_4 \sin \varphi_4; \quad /2.169/$$

$$\frac{d^2 x_{B_4}}{dt^2} = a_{x_B} = -\omega_2^2 \rho_4 (u_{42}' \sin \varphi_4 + u_{42}^2 \cos \varphi_4). \quad /2.170/$$

Диференціюючи за  $\varphi_2$  рівність /2.130/, знаходимо:

$$\frac{dy_{B_4}}{d\varphi_2} = \rho_4 u_{42} \cos \varphi_4; \quad /2.171/$$

$$\frac{d^2 y_{B_4}}{d\varphi_2^2} = \rho_4 (u_{42}' \cos \varphi_4 - u_{42}^2 \sin \varphi_4). \quad /2.172/$$

Проекції швидкості та прискорення точки  $B$  на вісь  $y$  відповідно:

$$\frac{dy_{B6}}{dt} = v_{yB} = \omega_2 \rho_4 u_{42} \cos \varphi_4; \quad /2.173/$$

$$\frac{d^2 y_{B6}}{dt^2} = a_{yB} = \omega_2^2 \rho_4 (u'_{42} \cos \varphi_4 - u_{42}^2 \sin \varphi_4). \quad /2.174/$$

Таблиця узгодження

$K \rightarrow K$	$LO2 \rightarrow \rho_2$
$L1 \rightarrow \rho_1$	$EPS4 \rightarrow E_4$
$L2 \rightarrow \rho_2$	$TETA \rightarrow \theta$
$L4 \rightarrow \rho_4$	$VA2 \rightarrow v_{A2}$
$H \rightarrow H$	$VA2X \rightarrow v_{A2x}$
$\omega_2 \rightarrow \omega_2$	$VA2Y \rightarrow v_{A2y}$
$F14 \rightarrow \varphi_4$	$WA2N \rightarrow a_{A2}^n$
$F12 \rightarrow \varphi_2$	$WA2X \rightarrow a_{A2x}^n$
$WA2N \rightarrow a_{A2}^n$	$WA2Y \rightarrow a_{A2y}^n$
$XB6 \rightarrow x_{B6}$	$VYBFI \rightarrow (v_{yB})_y$
$U42 \rightarrow u_{42}$	$VXB \rightarrow v_{xB}$
$U421 \rightarrow u_{421}$	$VYB \rightarrow v_{yB}$
$V3R \rightarrow v_3^2$	$WXB \rightarrow a_{xB}$
$W3R \rightarrow a_{A3}^2$	$WYB \rightarrow a_{yB}$
$W3N \rightarrow a_{B3}^n$	
$W4TAU \rightarrow a_4^t$	
$W4N \rightarrow a_4^n$	
$W3K \rightarrow a_{A3}^k$	
$YB6 \rightarrow y_{B6}$	
$VXBF1 \rightarrow  v_{xB} _y$	

Кінематичне дослідження механізмів, до складу яких входять групи Ассура II класу I і II видів, з допомогою методів планів швидкостей і прискорень, аналітичного, замкнених векторних багатокутників, розглянуто раніше, тому не розглядатимемо дослідження їх з допомогою ЕОМ, оскільки останнім часом з'явилися роботи, присвячені використанню ЕОМ при дослідженні механізмів і виконанні курсових проектів. З робіт, що вийшли на Україні, можна рекомендувати [14, 15]. Зручно вести дослідження окремих груп Ассура незалежно від складності механізму. Алгоритми розрахунку механізмів з допомогою ЕОМ у цьому разі значно спрощуються. Це особливо зручно при виконанні курсових проектів студентами. Для цього можна скористатися [16]. Ці посібники є на кафедрі ІОАВ ВПІ.

Просторові важільні механізми зручніше досліджувати методом перетворення координат, запропонованим Ю.Ф.Морошкіним. Його сутність, написання алгоритмів, зручних для ЕОМ, складання блок-схем розглядатимуться при вивченні робіт у спекурсі.

#### Програма

```

SUBROUTINE KINEM (F12)
COMMON \PARAM\ L1, L2, L4, OMEGA2, TETA, H, K
REAL L1, L2, L4, K, LO2A
DATA PI |3,1415926536|
FI = F12 + TETA * 0,5
A = L2 * COS (FI2)
B = L1 + L2 * SIN (FI2)
FI4 = 0,5 * PI - ATAN (A/B)
LO2A = B / SIN (FI4)
X6 = L4 * COS (FI4)
U42 = (L2 * COS (FI4 - FI2)) / LO2A
OMEGA4 = OMEGA2 * U42
V3R = -L2 * OMEGA2 * SIN (FI2 - FI4)
V3T = L2 * OMEGA2 * COS (FI2 - FI4)
W3K = 2 * OMEGA4 * V3R
W3R = (U42 ** 2 * LO2A - L2 * COS (FI2 - FI4)) * OMEGA2 ** 2
VU42 = -(W3K / OMEGA2 ** 2 + L2 * SIN (FI2 - FI4)) / LO2A
EPS4 = OMEGA2 ** 2 * VU42
W3TAU = EPS4 * LO2A

```

```

W3N=OMEGA4**2*LO2A
VB4=L4*OMEGA4
VS4=0,5*VB4
VB4X=-VB4*SIN(FI4)
VS4X=0,5*VB4X
VB4Y=VB4*COS(FI4)
VS4Y=0,5*VB4Y
WB4X=-L4*OMEGA4**2*(VU42*SIN(FI4)+U42**2*COS(FI4))
WB4Y=L4*OMEGA4**2*(VU42*COS(FI4)-U42**2*SIN(FI4))
WB4=SQRT(WB4X**2+WB4Y**2)
WS4=WB4*0,5
WS4X=WB4X*0,5
WS4Y=WB4Y*0,5
VA2=OMEGA2**L2
WNA2=VA2*OMEGA2
VA2X=-VA2*SIN(FI2)
VA2Y=VA2*COS(FI2)
WA2X=-WNA2*COS(FI2)
WA2Y=-WNA2*SIN(FI2)
PRINT 100, FI2, FI
100 FORMAT (5X, 4HF12=, F7.4, 5X, 3HF1=, F7.4
PRINT 101, X6, VAX, VAY, VA2, WA2X, WA2Y, WA2N,
* VB4X, VB4Y, VB4, WB4X, WB4Y, WB4,
* VS4X, VS4Y, VS4, WS4X, WS4Y, WS4
* OMEGA4, EPS4, FI4, U42
* V3R, V3T, W3R, W3TAU, W3N, W3K, LO2A
101 FORMAT (12X,
*           X6      VA2X  VA2Y  VA2    WA2X!,
*           WA2Y    WNA2  VB4X  VB4Y   VB4:!,
* 14X, 10FI 0,5,/,
* 12X,
*           WB4X    WB4Y    WB4    VS4X   VS4Y!,
*           VS4     WS4X    WS4Y    WS4    OMEGA4!,/

```

```

* 14X, 10F10, 5, 1,
* 12X,
* , EPS4 F14 U42 V3R V3T',
* , W3R W3N W3TAU W3K LO2A', 1,
* 14X, 10F10, 5)
RETURN
END

```

Функції та підпрограми

```

SQRT ATAN SIN COS
PROGRAM TMM
COMMON \PARAM\ L1, L2, L4, OMEGA2, TETA, H, K
REAL L1, L2, L4, K
DO I = 1, 4
READ 109, L1, H, K, OMEGA2
FORMAT (4F7,3)
CALL COMPUT
CONTINUE
STOP
END

```

Функції та підпрограми

```

COMPUT
SUBROUTINE COMPUT
COMMON (PARAM) L1, L2, L4, OMEGA, TETA, H, K
REAL L1, L2, L4, K
DATA PI |3.1415926536|
TETA = PI * (K-1.) / (K+1.)

```



```

S=SIN (0,5*TETA)
L2=L1*S
L4=0,5*H/S
PRINT 100, K, L1, H, OMEGA2, L2, L4, TETA
100 FORMAT (11, 20X, 50 (1H-), 1,
* 10X      K      L1      H,      OMEGA      L2
* ,      L4      TETA',
* 12X, 7F10.5, 1, 20X, 50 (1H-))
OF=PI/6
FI2=-TETA*0.5
DO 1 I=1,12
CALL KINEM (FI2)
FI2=FI2+OF
1 CONTINUE
RETURN
END

```

Функції та підпрограми

### KINEM SIN

Приклад 2. Визначити переміщення, швидкість і прискорення ланок плунжерного насоса.

Для визначення шляху, пройденого плунжером  $B$  за час повороту кривошипа на кут  $\varphi$ , спроектуємо ланки на вісь  $y$  /рис. 2.20/:

$$l \cos \beta = z \cos \varphi + (l - z) + y.$$

Звідси переміщення плунжера як функція кута повороту кривошипа

$$y = l \cos \beta - z \cos \varphi - (l - z). \quad /2.175/$$

Для визначення кута  $\beta$  спроектуємо ланки на вісь  $x$  :

$$z \sin \varphi = l \sin \beta;$$

$$\sin \beta = \frac{z}{l} \sin \varphi = \lambda \sin \varphi; \quad /2.176/$$

$$\beta = \arcsin (\lambda \sin \varphi);$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}. \quad /2.177/$$

Розкладемо останній вираз у ряд за біномом Ньютона:

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \lambda^4 \sin^4 \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \lambda^6 \sin^6 \varphi \dots$$

У цьому прикладі  $\rho = 650$  мм,  
 $z_1 = 80$  мм,  $z_2 = 100$  мм,  
 $z_3 = 125$  мм /палець кривошипа

зміщується від осі  $O$  на три фіксовані відстані/. Отже,

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{8}; \lambda_2 \approx \frac{1}{6}; \lambda_3 \approx \frac{1}{5}.$$

Навіть при максимальному значенні  $\lambda = \frac{1}{5}$  коефіцієнт при  $\sin^4 \varphi$  дорівнюватиме 0,0002, до того ж  $\sin^4 \varphi < 1$ . Тому вже третім членом ряду бінома можна знехтувати

$$\text{і } \cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi.$$

Рівняння /I/ перепишемо так:

$$\begin{aligned} y_1 &= z - z \cos \varphi - \rho + \rho \cos \beta = \\ &= z(1 - \cos \varphi) - \rho(1 - \cos \beta) = \\ &= z \left[ (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} (1 - \cos \beta) \right] = \\ &= z \left[ (1 - \cos \varphi) - 0,5 \lambda^2 \sin^2 \varphi \right]. \quad /2.178/ \end{aligned}$$

Продиференціювавши /2.178/ за часом, визначимо швидкість плунжера:

$$v_{B_1} = \frac{dy_1}{dt} = z\omega, (\sin \varphi - 0,5 \lambda^2 \sin 2\varphi). \quad /2.179/$$

Прискорення плунжера

$$a_{B_1} = \frac{dv_{B_1}}{dt} = z\omega^2, (\cos \varphi - \lambda^2 \cos 2\varphi). \quad /2.180/$$

де  $\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}$ ; ( $n_1 = 55 \text{ об}^{-1}$ ).

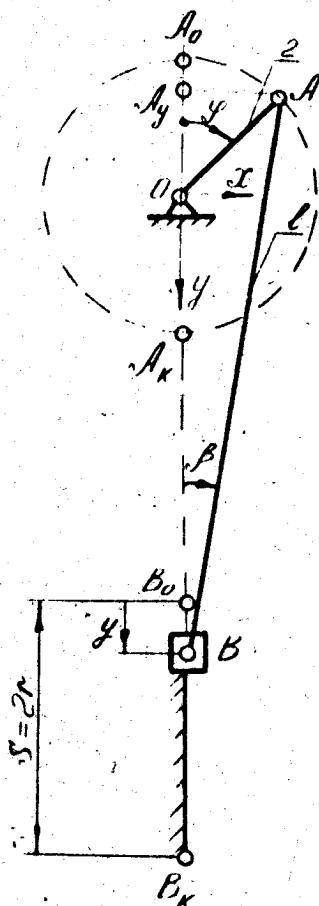


Рис. 2.20

Узявши похідну за часом від обох частин /2.171/, визначимо кутову швидкість шатуна  $\omega_2$ :

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_2 = \lambda \omega_1 \frac{\cos\varphi}{\cos\beta} \quad /2.181/$$

Кутове прискорення шатуна

$$\epsilon_2 = -\lambda \omega_1^2 (1 - \lambda^2) \frac{\sin\varphi}{\cos^3\beta} \quad /2.182/$$

Щоб визначити кінематичні параметри з вищою точністю, скористаємося точними формулами:

$$y = z + \rho - \rho \cos\beta - z \cos\varphi; \quad /2.183/$$

$$v_B = \rho \omega_2 \sin\beta + z \omega_1 \sin\varphi; \quad /2.184/$$

$$a_B = \rho \omega_2^2 \cos\beta + \rho \epsilon_2 \sin\beta + z \omega_1^2 \cos\varphi. \quad /2.185/$$

Формули /2.176/-2.185/ легко запрограмувати і ввести до БОМ, тому не треба для визначення кінематичних параметрів користуватися ні методом замкнених контурів, ні перетворенням координат. Далі наведено таблицю узгоджень і програму, написану мовою Фортран.

Таблиця узгоджень:

PI →  $\pi$  (3,1415926536)

OM1 →  $\omega_1 = \frac{\pi n}{30}$

XL →  $\rho$

R → z

FI →  $\varphi$

DFI →  $\Delta\varphi$

ALAM →  $\lambda = \frac{z}{\rho}$

BETA →  $\beta$

A SIN → arcsin

OMEGA2 →  $\omega_2$

EPS2 →  $\epsilon_2$

S → s

V → v

A → a

```

PROGRAM TMM
DATA PI (3.1415926536)
OM1 (PI*55.)/30
XL=650
DFI=PI/18
DO 1 L=1,3
IF (L.EQ 1)
- R80.
IF (L.EQ 2)
- R=100
IF (L.EQ 3)
- R=125
ALAM=R/XL
FI=0
DO 1 I=1,6
PRINT 20
DO 2 I=1,6
BETA=ASIN (ALAM * SIN (FI))
OMEGA2=ALAM * OM1 * (COS (FI) / COS (BETA))
EPS2=ALAM * OM1 ** 2 (1 - ALAM ** 2) * (SIN (FI) / COS (BETA) ** 3)
S=R + XL - XL * COS (BETA) - R * COS (FI)
V=XL * OM2 * SIN (BETA) + R * OM1 * SIN (FI)
A=XL * OM2 ** 2 * COS (BETA) + XL * EPS2 * SIN (BETA) + R * OM1 ** 2 * COS (FI)
SI=R * (1 - COS (FI) + 0,5 * ALAM * SIN (FI) ** 2)
VI=R * OM1 * (SIN (FI) + 0,5 * ALAM * SIN (2 * FI))
AI=R * OM1 ** 2 * COS (FI) + ALAM * COS (2 * FI)
FIGRAD=FI * (180./PI)
PRINT 30, R, FIGRAD, ALAM, S, V, A, BETA, OM2, EPS2, XL
PRINT 30, R, FIGRAD, ALAM, SI, VI, A'
2 FI=FI+DFI
1 CONTINUE
20 FORMAT (, R FI (GRAD) LAMBDA S
, V A BETA OM2 EPS2 ,,
, XL ,
30 FORMAT (10 E12.4)
STOP
END

```

## 3. ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

### 3.1. Завдання динаміки машин

Проектування нових машин супроводжується розрахунком їх елементів на міцність: розміри ланок установлюються залежно від сил, що діють на них, і від режиму та умов роботи машини. Якщо в розділі кінематики і синтезу враховувалося лише довжина ланок, то при розрахунках міцності треба визначати їх переріз, що не можна зробити без попереднього визначення сил, які діють на ланки машини, і тільки з урахуванням матеріалу ланки та допустимих напружень визначаються розміри ланки у тривимірному просторі.

Отже, перше завдання динаміки машин – це вивчення і визначення сил, що діють на ланки машини.

Спроектвавши машину, треба оцінити її якість щодо використання підведеної до неї енергії. Таку оцінку можна зробити за співвідношенням роботи сил, що діють у машині, визначивши ККД, як відношення роботи сил корисного опору до роботи рушійних сил. Це друге завдання динаміки. Третє, одне з найскладніших завдань динаміки – вивчення справжніх законів руху ланок під дією сил.

Четвертим завданням динаміки машин є визначення та зрівноваження реакцій у кінематичних парах, зменшення їх величин, що дасть змогу понизити матеріалоемкість, втрати на терт, знос ланок, подовжити строк експлуатації машини.

Під час експлуатації машини треба змінювати чи утримувати в певних межах швидкості деяких ланок, величини сил чи моментів сил. Керування рухом машини чи технологічними процесами – п'яте завдання динаміки машин.

### 3.2. Класифікація сил. Робота сил

Під час руху машини та її ланки діють не тільки прикладені до них зовнішні сили, але й сили, що виникають під час руху ланок. Сили можна поділити на групи. Серед зовнішніх сил зазначимо рушійну та силу опору.

І. Рушійні – це сили, що приводять до руху ланки машини; наприклад, сила тиску на поршень газів у двигунах внутрішнього згорання, сила тиску повітря чи рідини у пневматичних і гідравлічних двигунах, момент на валу електродвигуна тощо.

Елементарна робота рушійних сил на шляху  $ds$  /рис. 3.1/

$$dA_p = P_p ds \cos \alpha.$$

Сумарна робота рушійних сил на шляху дії

$$A_p = \int_M^N P_p ds \cos \alpha.$$

Рушійна сила з напрямом швидкості точки, до якої вона прикладена, створює кут  $\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq 0$ . Оскільки інтеграл  $\cos \alpha$  у цих межах завжди має позитивне значення, то робота рушійних сил завжди позитивна;

2. Сили корисного опору - це сили, для подолання яких створено машину. Це опір металу різанню, опір породи ковшу екскаватора, тиск повітря на поршень компресора, рідини на поршень насоса тощо.

Робота сил корисного опору на шляху дії /рис. 3.2/

$$A_{ko} = \int_M^N P_{ko} ds \cos \alpha.$$

Оскільки кут  $\alpha$  в даному випадку змінюється в межах  $\pi \geq \alpha \geq \frac{\pi}{2}$ , інтеграл косинуса цього кута - від'ємний, тому робота сил корисного опору завжди негативна.

3. Сили шкідливого опору - це опір руху ланок при переміщенні їх у певному середовищі /повітрі, воді, рідині/, Особливе місце посідає шкідливий опір у кінематичних парах /тертя/, що виникає при відносному русі ланок під дією їх сил ваги і сил корисного опору та інерції. Схема для визначення роботи їх така, як і для сил корисного опору. Робота цих сил - також негативна.

Рушійні сили і сили опору, що діють на ланки машини, не є сталими, вони змінюються з часом та зміною положень ланок, і визначаються з допомогою відповідних приладів /динамометрів, індикаторів, різних датчиків, підсилювачів і осцилографів/.

Для того щоб визначити роботу, виконану силою, креслять чи записують діаграми  $P = \varphi(s)$  чи  $M = \varphi(s)$  /рис. 3.3/.

Зрозуміло, що елементарна робота, виконана силою на шляху  $ds = dx$ ,

$$dA = \varphi M_p dx M_s,$$

а повна робота на шляху дії

$$A = M_p M_s \int_{x_0}^{x_1} \varphi dx = M_p M_s F_{aa'b'b'}$$

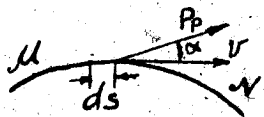


Рис. 3.1

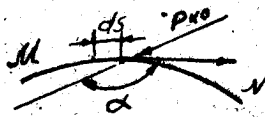


Рис. 3.2

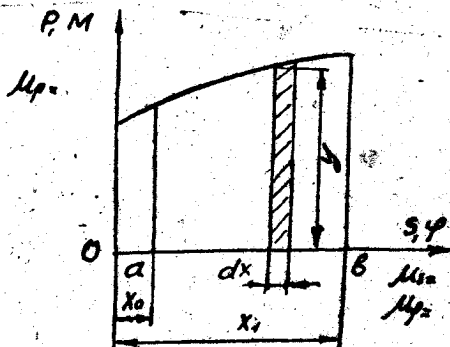


Рис. 3.3

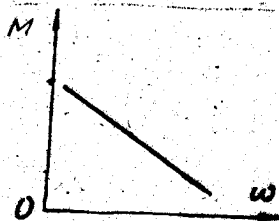


Рис. 3.4

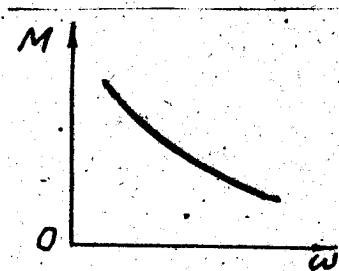


Рис. 3.5

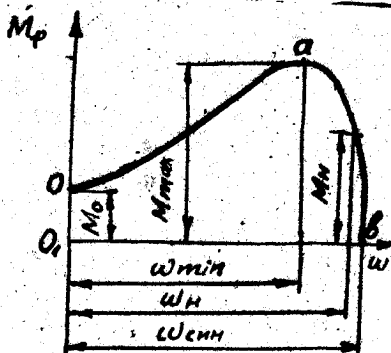


Рис. 3.6

де  $F_{aa'bb'}$  - площа, обмежена кривою зміни сили /момента сил/, прямими  $aa'$ ,  $bb'$  та віссю абсцис.

Часто рушійні сили /їх моменти/ задаються у вигляді механічних характеристик машин. Механічною характеристикою машини називають залежність силового параметра від часу чи кінематичного параметра.

Характеристика електродвигуна постійного струму з паралельним /рис. 3.4/ збудженням зображається прямою лінією, а двигуна з послідовним збудженням - кривою, що спадає до осі  $x$  /рис. 3.5/.

Механічна характеристика асинхронного двигуна складається з двох частин: нестійкої висхідної  $OA$ , розміщеної ліворуч від  $M_{max}$ , і робочої /стійкої  $ab$  / - праворуч від  $M_{max}$  /рис. 3.6/.

При деякому значенні кутової швидкості  $\omega_n$ , що відповідає номінальному моменту  $M_n$ , двигун розвиває максимальну потужність.

Кутову швидкість  $\omega_c$ , за якої  $M_p = 0$ , називають синхронною. З цієї швидкості двигун обертається під час холостого ходу. При мінімальній швидкості  $\omega_{min}$  робочої характеристики момент сягає максимального значення /перекидного момента/  $M_{max}$ . Якщо момент сил опору машини дорівнює перекидному, двигун зупиняється.

Як видно з характеристики асинхронного електродвигуна, чим більший момент  $M_p$ , тим більша його частота обертання, тоді як у двигунах постійного струму - навпаки.

### 3.3. Сили інерції

Сучасні машини - швидкохідні. При їх роботі сила інерції окремих ланок значно перевищує силу ваги. Так, у двигунах внутрішнього згоряння з частотою обертання кривошипа, що перевищує значення  $n = 1500 \text{ хв}^{-1}$ , сила інерції поршня може перевищити силу ваги його у сто разів. Тому зрозуміло, що зміти визначити і врахувати сили інерції треба обов'язково.

І. З курсу теоретичної механіки відомо: якщо ланка здійснює складний плоскопаралельний рух, елементарні сили інерції часток маси зводяться до сили інерції

$$\vec{P}_{in} = -m\vec{a}_s \quad /3.1/$$

прикладеної в центрі мас  $S$  ланки, і до момента сил інерції

$$\vec{M}_{in} = -J_s \ddot{\varphi} \quad /3.2/$$



Як видно із визначення, ці вектори напрямлені проти причин, що їх викликали /прискорення та кутове прискорення/.

Сила інерції  $P_{iH}$  вимірюється в ньютонках /Н/\*;  $m$  - маса, кг /кгс/9,81 м/с<sup>2</sup>/; розмірності дані в системі СІ інтехнічний - прискорення центра мас, м/с<sup>2</sup>,  $M_{iH}$  - момент пари сил інерції, Н·м /кгс·м/;  $J_S$  - момент інерції ланки відносно осі, що проходить через центр ваги  $S$  і дорівнює добутку маси  $m$  ланки на квадрат радіуса інерції  $\rho_S$ , кг·м<sup>2</sup>;

$$J_S = m \rho_S^2 \quad /кгм^2/ \quad /3.3/$$

$\epsilon$  - кутове прискорення - у радіанах на секунду в квадраті /рад/с<sup>2</sup>/.

2. Якщо ланка рухається поступально, то  $\epsilon = 0$ ;  $M_{iH} = 0$ , і всі сили інерції мас зводяться до однієї сили інерції  $P_{iH}$ .

3. При нерівномірному русі /обертанні/ ланки навколо осі, що проходить через його центр ваги,  $a_S = 0$ ,  $P_{iH} = 0$ , а сили інерції елементарних частинок ланки зводяться до момента сил інерції

$$\bar{M}_{iH} = -J_S \epsilon.$$

4. Якщо ланка здійснює складний рух, то елементарні сили інерції частинок маси ланки можна звести до однієї сили інерції  $F_{iH} = ma$ , прикладеної на відстані  $h = \frac{M_{iH}}{P_{iH}}$ , де  $\bar{M}_{iH} = -J_S \epsilon$ . Згідно з п. 1, прикладемо до ланки в центрі ваги  $S$  /рис. 3.7/ силу інерції  $\bar{P}_{iH} = -ma_S$ , протилежно прискоренню центра ваги  $a_S$  і момент сил інерції  $\bar{M}_{iH} = -J_S \epsilon$  протилежно кутовому прискоренню  $\epsilon$ . Замінимо момент сил інерції  $M_{iH}$  парю сил  $P'_{i1} = -P'_{i2} = P_{iH} = ma_S$ . Плече цієї пари сил інерції

$$h = \frac{M_{iH}}{P_{iH}}. \quad /3.4/$$

При цьому сили інерції  $P_{iH}$  і  $P'_{i1}$  зрівноважаться і залишаться лише одна сила інерції, прикладена на відстані  $h$  від центра ваги ланки  $S$ .

5. У разі нерівномірного обертання ланки навколо осі  $O_1$ , що не збігається з центром ваги  $S$ , силу інерції  $P_{iH}$  і момент сили інерції  $M_{iH}$  зводять до однієї сили інерції  $\bar{P}_{iH} = -ma_S$ , прикладеної в центрі хитання.

Розглядаючи рух ланки як складний, замінимо силу інерції  $P_{iH}$  і момент сил інерції  $M_{iH}$ , згідно з п. 3, однією силою інерції  $P_{iH}$ , прикладеною на відстані  $h$  від центра ваги  $S$  /рис. 3.8/.

\* 1 кгс = 9,8 Н.

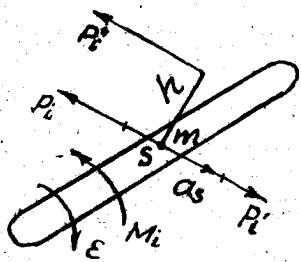


Рис. 3.7

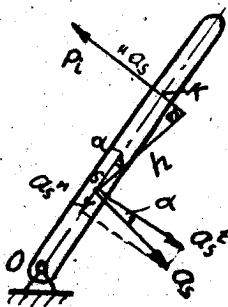


Рис. 3.8

Відстань  $h$  /плече пари сил інерції/ знаходимо за формулою

$$h = \frac{M_{iH}}{P_{iH}} = \frac{J_s E}{m a_s} = \frac{J_s \frac{a_s^2}{\rho_{os}}}{m a_s} = \frac{J_s \frac{a_s \cos \alpha}{\rho_{os}}}{m a_s};$$

$$h = \frac{J_s \cos \alpha}{m \rho_{os}}. \quad /3.5/$$

Позначивши точку перетину вектора сили  $P_{iH}$  з віссю ланки, що проходить через  $O$  і  $S$ , літерою  $K$ , із  $\triangle SDK$  знайдемо відстань

$$\rho_{SK} = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{J_s \cos \alpha}{m \rho_{os} \cos \alpha} = \frac{J_s}{m \rho_{os}}. \quad /3.6/$$

Відстань

$$\rho_{OK} = \rho_{OS} + \rho_{SK},$$

або

$$\rho_{OK} = \rho_{OS} + \frac{J_s}{m \rho_{os}}. \quad /3.7/$$

Аналогічно з фізичним маятником точку  $K$  називають центром хитання.

6. Якщо ланка здійснює складний рух і в план  $\Pi$  прискорень, силу інерції та  $\Pi$  момент сил можна звести од однієї сили інерції  $\vec{P}_{iH} = -m\vec{a}_s$ , точку прикладання якої можемо знайти з допомогою плану прискорень /рис. 3.9/.

Розглядаючи рух ланки  $AB$  як складний, що утворюється з переносно-поступального руху разом з довільно вибраною точкою /полюсом/, наприклад точкою  $A$ , і обертального руху відносно полюса  $A$ ,

матимемо дві складові прискорення центра ваги ланки:  $\vec{a}_S = \vec{a}_A + \vec{a}_{SA}$ .  
 Зазначимо, що при поступальному русі швидкості та прискорення всіх точок ланок однакові, тобто  $\vec{a}_S = \vec{a}_A = \vec{a}_B$ .

Відповідно і головний вектор сил інерції цієї ланки може бути поданий у вигляді геометричної суми:

$$\vec{P}_{iN} = \vec{P}_{iNA} + \vec{P}_{iNSA} = -m\vec{a}_A + m\vec{a}_{SA}. \quad /3.8/$$

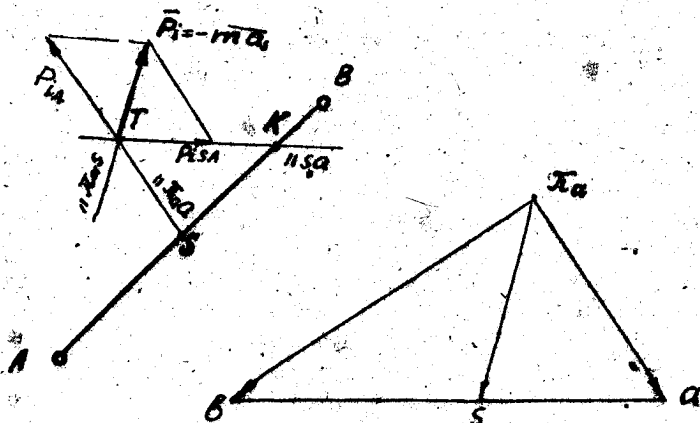


Рис. 3.9

Сила інерції при поступальному русі разом з полюсом  $A$  прикладається в центрі ваги ланки  $S$  протилежно напрямку вектора прискорення  $\vec{a}_A$ , а сила інерції в обертальному русі  $\vec{P}_{iNSA}$  відносно полюса  $A$  прикладається /згідно з п. 5/ в центрі качання  $K$  протилежно вектору прискорення центра ваги в обертальному русі, тобто протилежно  $\vec{a}_{SA}$ .

На перетині ліній дії векторів цих сил дістанемо точку  $T$  прикладання сумарної сили інерції:

$$\vec{P}_{iS} = \vec{P}_{iN} = \vec{P}_{iNA} + \vec{P}_{iNSA} = -(m\vec{a}_A + m\vec{a}_{SA}) = -m(\vec{a}_A + \vec{a}_{SA}) = -m\vec{a}_S.$$

Звідси випливає правило знаходження точки  $T$  прикладання головного вектора сил інерції  $\vec{P}_{iN} = -m\vec{a}_S$ . Через центр ваги  $S$  ланки проводимо лінію, паралельну абсолютному прискоренню точки  $A$  /тобто

паралельну  $\bar{P}_a a /$ , а через центр хитання  $K$  - лінію, паралельну відносному прискоренню /тобто паралельну  $\bar{s} a /$ . На їх перетині дістанемо точку  $T$ , де і прикладемо силу інерції  $\bar{P}_{iN} = -m\bar{a}_s$  проти-лежно абсолютному прискоренню центра ваги  $S$  /тобто паралельно  $\bar{P}_a s /$ .

7. Визначення сил інерції за методом заміщення мас /методом заміщальних точок/.

При розв'язуванні задач часто сили інерції, що зведені до сили і пари сил або однієї зведеної сили; зручно замінити силами інерції двох або кількох мас, зосереджених у певних точках невагомої ланки. Ця система мас еквівалентна за своєю дією на інші ланки реальній ланці з розподіленою масою.

Методом заміщення мас користуються /рис. 3.10/  
 при визначенні сил інерції;  
 при зрівноважуванні механізмів;  
 при визначенні момента інерції механіка;  
 при розв'язуванні інших задач механіки.

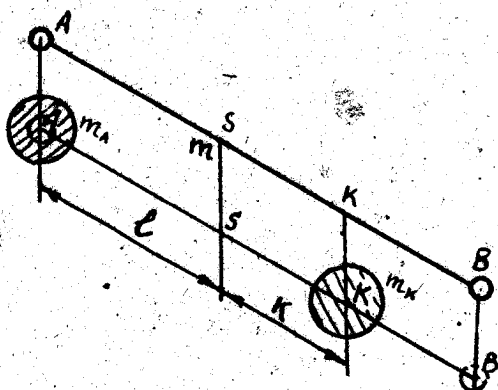


Рис. 3.10

Система зосереджених заміщальних мас еквівалентна реальній ланці з розподіленою масою - за таких умов:

1/ рівнодіюча сил інерції заміщальних мас дорівнює силі інерції маси реальної ланки;

2/ сума моментів їх сил інерції відносно центра ваги дорівнює моменту сил інерції реальної ланки.

Ці умови виконуватимуться, якщо

a/ сума зосереджених /заміщальних/ мас дорівнюватиме масі реальної ланки;

б/ прискорення центра ваги заміщальчих мас дорівнюватиме прискоренню центра ваги реальної ланки /якщо їх центри збігаються/;

в/ момент інерції реальної ланки з розподіленою масою дорівнюватиме моменту інерції і заміщальчих мас.

Отже, розмістимо заміщальчі маси так, щоб їх центр збігся з центром ваги реальної ланки. Збіг центрів мас приводить до того, що сума статичних моментів цих мас відносно центра ваги  $S$ , як і для розподіленої маси, дорівнюватиме нулю.

Ураховуючи ці зауваження, три умови заміщення мас запишуться так:

$$m_A + m_K = m; \quad /3.9/$$

$$m_A b = m_K k; \quad /3.10/$$

$$m_A b^2 + m_K k^2 = J_S. \quad /3.11/$$

Одну з точок, де розміщуються заміщальчі маси на невагомій ланці, виберемо довільно, друга має задовольняти рівнянням /3.9/ - /3.11/. Записавши  $m_A = m - m_K$  і підставивши до /3.10/, знаходимо:

$$m_K = m \frac{b}{b+k}; \quad m_A = m \frac{k}{b+k}.$$

Підставивши ці значення в /3.11/, знаходимо

$$k = \frac{J_S}{m b}.$$

Якщо при розв'язанні задачі динаміки задовольняють усім трьома рівнянням, одержують динамічне заміщення мас, якщо лише перші два - статичне /наближений метод/. Заміщати вихідну масу реальної ланки можна трьома та більше масами, але для розв'язання системи трьох рівнянь треба буде задати не один розмір, а два /кілька/, і не одну масу, а кілька.

Розглянувши ці теоретичні викладки, повернемося до визначення сил інерції методом заміщальчих мас /рис. 3.II/.

Нехай задане положення ланки масою  $m$  і план  $\Pi\Pi$  прискорень. Рознесемо масу  $m$  у дві точки,  $A$  і  $K$ . Знайдемо рівнодіючу силу інерції заміщальчих мас  $m_A$  і  $m_K$ :

$$\bar{P}_{iH} = \bar{P}_{iA} + \bar{P}_{iK}.$$

$$\bar{P}_{iA} = -m_A \bar{a} = m \frac{k}{b+k} \bar{a}_A;$$

$$\bar{P}_{iK} = -m_K \bar{a}_K = -m_K (\bar{a}_A + \bar{a}_{KA}) = -m \frac{b}{b+k} (\bar{a}_A + \bar{a}_{KA}).$$

Але за теоремою подібності

$$\frac{a_{KA}}{a_{SA}} = \frac{b+K}{b}; \quad a_{SA} = a_{KA} \frac{b}{b+K}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_i &= \bar{P}_{iA} + \bar{P}_{iK} = \left[ m \frac{K}{b+K} \bar{a}_A + m \frac{b}{b+K} (\bar{a}_A + \bar{a}_{KA}) \right] = \\ &= -m \left[ \left( \frac{K}{b+K} + \frac{b}{b+K} \right) \bar{a}_A + \frac{b}{b+K} \bar{a}_{KA} \right] = -m(\bar{a}_A + \bar{a}_{SA}) = -m\bar{a}_S. \end{aligned}$$

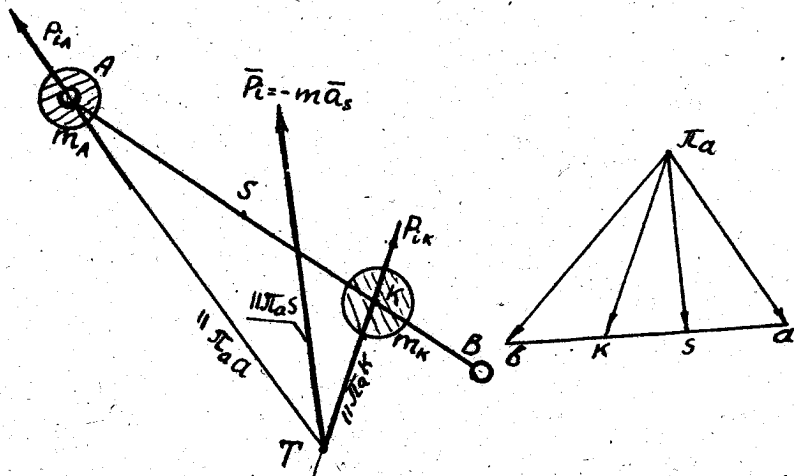


Рис. 3.II

Оскільки рівнодіяча сил інерції  $\bar{P}_{iA}$  і  $\bar{P}_{iK}$  визначається як геометрична сума, точка прикладання  $T$  рівнодіячої  $\bar{P}_i$  розміщена на перетині  $\bar{P}_{iA}$  і  $\bar{P}_{iK}$ , які відповідно паралельні  $L_aA$  і  $L_aK$ . Тому для знаходження точки  $T$  проведемо через точку  $A$  ланку лінію, паралельну  $L_aA$  плану прискорень, а через точку  $K$  - паралельну  $L_aK$ .

У точці  $T$  згідно з доведеним прикладом рівнодіячу  $\bar{P}_{iA} = -m\bar{a}_S$  проти зно прискоренню  $L_aS$ .

#### 4. КІНЕТОСТАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКИХ МЕХАНІЗМІВ

При нерівномірному русі ланок машини в кінематичних парах виникають додаткові, відповідні нерівномірному руху, реакції зв'язків, тобто додаткові сили, що діють на елементи кінематичних пар. Визначити їх важко, тому в теорії механізмів замість цих додаткових реакцій до ланок умовно прикладають зрівноважувачі їх сили у вигляді сил інерції.

Оскільки сила інерції визначається як добуток маси ланки на прискорення центра її ваги, а прискорення ланок визначити важко /іноді просто неможливо/, то при визначенні сил інерції користуються наближеним методом, визначаючи прискорення ланок за умови рівномірного руху ведучої ланки.

Метод розрахунку сил, що діють на ланки механізму, з урахуванням сил інерції, обчислених наближено з умов рівномірного руху ведучої ланки, називається кінетостатичним. Отже, умовно приклавши до ланок, крім зовнішніх сил, сили інерції і вважаючи їх за зовнішні, зведемо задачу динаміки до задачі статички.

Якщо, крім зовнішніх сил, до системи прикладемо сили інерції, то на основі принципу Даламбера ця система знаходитиметься у рівновазі. Виділивши з механізму статично визначені кінематичні ланцюги, приклавши до них зовнішні сили та сили інерції, а також реакції від'єднаних від них ланок і розглядаючи рівновагу цього ланцюга, визначимо невідомі реакції зв'язей.

Отже, задача кінетостатичного розрахунку – визначення реакцій у кінематичних парах і зрівноважувальної сили /момента/, прикладеної до ведучої ланки. Але не всякий кінематичний ланцюг є статично визначеним.

##### 4.1. Умови статичної визначеності кінематичних ланцюгів

У плоских механізмах ланки, з'єднуючись між собою, створюють нижчі кінематичні пари У класу. Якщо є пара ІУ класу, то її можна замінити ланкою і двома нижчими парами У класу і звести механізм до такого, де є лише нижчі кінематичні пари У класу.

Розглянемо обертальну кінематичну пару У класу. Якщо знехтувати силами тертя, то рівнодіяча  $P_2$  елементарних тисків однієї ланки на іншу, що виникає при роботі машини, пройде через центр шарніра  $O$ , але нам невідомі ні величина цієї реакції, ні її напрям. Отже, при визначенні реакцій в обертальній парі буде дві невідомі /рис. 4.1./

Розглянемо поступальну кінематичну пару У класу. Якщо знехтувати силами тертя, то рівнодіюча елементарних тисків  $P_{21}$  ( $P_{21} = -P_{12}$ ) буде нормальною /перпендикулярною/ до напрямної  $x-x$ . Але при визначенні реакцій у поступальній парі У класу невідомі ні величина, ні точка прикладання реакцій. Отже, при визначенні реакцій в поступальній кінематичній парі У класу буде дві невідомі /рис. 4.2/.

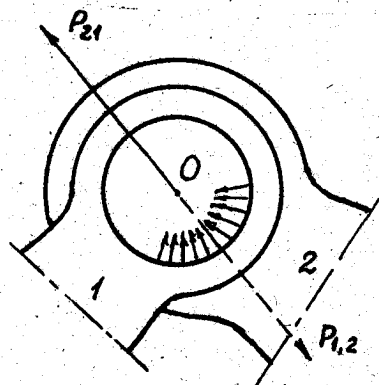


Рис. 4.1

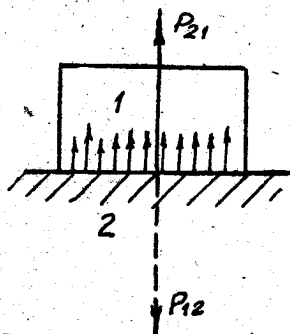


Рис. 4.2

Якщо число рухомих ланок, що створили кінематичний ланцюг, дорівнює  $n$ , а число кінематичних пар, яке вони створили, дорівнює  $P_5$ , число невідомих під час визначення реакцій у кінематичних парах У класу цього ланцюга становитиме  $2P_5$ . Число рівнянь статyki, які можна записати для  $n$  рухомих ланок ланцюга, становитиме  $3n$  ( $\bar{X} = 0, \bar{Y} = 0, M_0 = 0$ ).

Щоб задача була визначеною, число рівнянь повинне дорівнювати числу невідомих, що входять до них, тобто  $3n = 2P_5$ . Звідси

$$P_5 = \frac{3}{2} n. \quad /4.1/$$

Ця формула зв'язує число ланок і кінематичних пар у групі Ассура. Отже, статично визначеним є не будь-який кінематичний ланцюг, а лише той, що є групою Ассура. Тому при визначенні реакцій в кінематичних парах механізму виділятимемо з нього групи Ассура і, прикладаючи до них зовнішні сили, сили ваги та інерції, реакції в зовнішніх кінематичних парах, розглядатимемо їх рівновагу.



Порядок визначення реакцій у кінематичних парах такий самий, як і розчленування на групи Ассура. Починатимемо з найвіддаленішої від ведучої ланки групи Ассура, тобто в порядку, зворотному створенню механізму. Інакше число невідомих буде більшим, ніж можна написати рівнянь статки. Якщо не всі сили діють на ланки механізму в одній площині, при написанні рівнянь рівноваги треба писати додаткові умови у вигляді рівнянь теорії пружності.

Приклад 4.1. Визначити реакції в кінематичних парах механізму конвейера, якщо дано: план механізму, маси його ланок, положення центрів ваги ланок, сила корисного опору  $P_{к.о.}$ , план прискорень. Кут швидкості кривошипа стала  $|\omega_1| = const$ , рис. 4.3/.

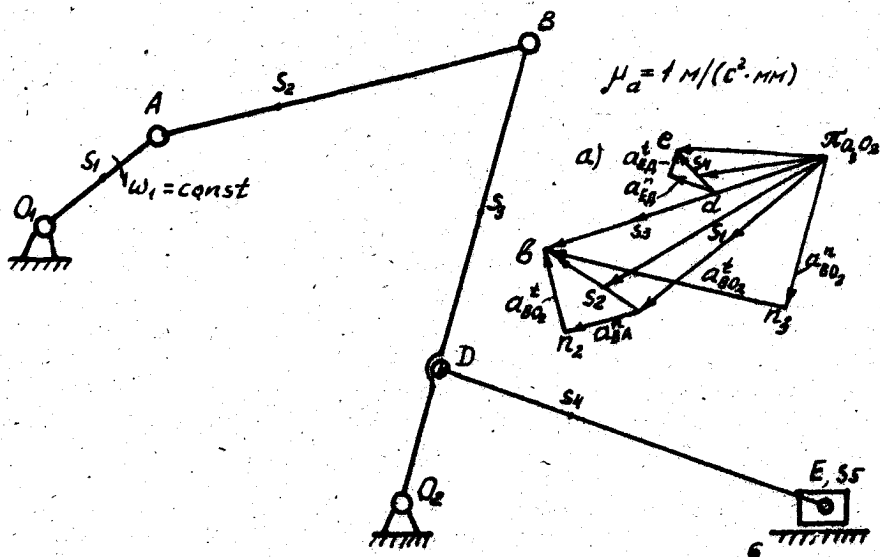


Рис. 4.3

До задачі кінетостатичного розрахунку входить також визначення зрівноважувальної сили, прикладеної в точці  $A$  пальця кривошипа. Нагадаємо, що спочатку розглянемо механізм конвейера, до складу якого, крім механізму I класу, входить дві групи Ассура II класу II порядку I і II видів. У другому прикладі розглянемо механізм стругального верстата, що включає до свого складу групи Ассура II класу II порядку

Ш і У видів і, тим самим, вивчимо, як визначаються сили для всіх дволанкових груп Ассура, які найчастіше зустрічаються в практиці машинобудування.

Оскільки статично визначеним є кінематичний ланцюг, що є групою Ассура, намалюємо в масштабі найвіддаленішу від ведучої ланки групу Ассура, що складається з ланок 4, 5, і нанесемо діючі на неї сили: ваги, корисного опору, сили і моменти сил інерції, а також реакції від'єднаних від групи Ассура ланок на елементи зовнішніх кінематичних пар /рис. 4.4/.

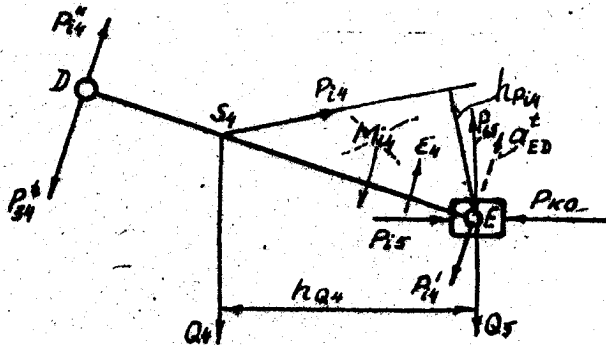


Рис. 4.4

Сили ваги,  $H$ , визначимо за рівністю  $Q_i = 3,81 m_i$  і прикладемо їх у центрах ваги  $S_i$  ланок прямою вниз. Сила інерції чотвертої ланки,  $H$ :

$$\bar{P}_{i4} = -m_4 \bar{a}_{S_4} = -m_4 (\bar{\pi}_4 S_4 \mu_a);$$

де відрізок  $\bar{\pi}_4 S_4$ , мм, взято з плану прискорень;  $\mu_a$  - масштабний коефіцієнт плану прискорень,  $m/(c^2 \cdot \text{мм})$ . Силу інерції прикладемо в центрі ваги протилежно прискоренню центра ваги, сила інерції п'ятої ланки

$$\bar{P}_{i5} = -m_5 \bar{a}_{S_5} = -m_5 (\bar{\pi}_5 S_5 \mu_a).$$

Моменти сил інерції,  $H \cdot \text{м}$ :

$$\bar{M}_{i4} = -J_{S_4} \bar{\epsilon}_4 = -J_{S_4} \frac{\bar{a}_{ED}}{ED} = -J_{S_4} \frac{\pi_4 d \mu_a}{ED \mu_a};$$

$$\bar{M}_{i5} = -J_{S_5} \bar{\epsilon}_5 = 0, (\epsilon_5 = 0).$$

Для зручності розрахунків замінимо момент сил інерції  $M_{i4}$  парю сил, взявши за плече пари сил довжину ланки  $ED$ , Н·м/м:

$$P'_{i4} = -P''_{i4} = \frac{M_{i4}}{P_{i4}}. \quad /4.2/$$

Прикладаючи пару сил інерції, треба взяти напрями  $P'_{i4}$  і  $P''_{i4}$  такими, щоб вони повертали ланку  $ED$  у напрямі момента  $M_{i4}$ .

Сила корисного опору  $P_{k.o}$  прикладається до веденої ланки в напрямі, протилежному її руху /проти швидкості ланки згідно з визначенням: сила корисного опору - це сила, для подолання якої побудовано машину/.

Реакція стояка на повзун нормальна до напрямної  $x-x$ . Реакцію в обертальній парі  $D$  розкладемо на дві складові - тангенціальну і нормальну:

$$\bar{P}_{34} = \bar{P}_{34}^t + \bar{P}_{34}^n. \quad /4.3/$$

Під дією цих сил згідно з принципом Даламбера група Ассуря перебуватиме в стані статичної рівноваги.

Складову  $\bar{P}_{34}^t$  знайдемо з умов рівноваги ланки 4, для якої

$$\Sigma M_E = 0: P''_{i4} DE - P_{34}^t DE - Q_4 h_{Q4} + P_{i4} h_{P_{i4}} = 0. \quad /4.4/$$

Звідси

$$P_{34}^t = \frac{P''_{i4} DE - Q_4 h_{Q4} + P_{i4} h_{P_{i4}}}{DE}$$

Якщо права частина рівняння додатна, це означає, що напрям сили  $P_{34}^t$  взято правильно. При від'ємному значенні правої частини треба замінити напрям сили  $P_{34}$  на групі Ассуря /і на плані сил/ на протилежний.

Плечі сил  $DE$ ,  $h_{Q4}$  тощо вимірюємо на кресленні групи Ассуря у міліметрах і, не множачи на масштаб, підставляємо в рівняння.

Подальші силові розрахунки вестимемо графічним методом, пам'ятаючи, що для системи, яка перебуває в рівновазі, многокутник сил буде замкненим. З умов рівноваги всієї групи Ассуря визначимо з допомогою плану сил сили  $\bar{P}_{34}^n$  і  $\bar{P}_{65}$ :

$$\bar{P}_{34}^t + \bar{P}_{i4} + \bar{Q}_4 + \bar{P}_{i5} + \bar{Q}_5 + \bar{P}_{k.o} + \bar{P}_{65} + \bar{P}_{34}^n = 0. \quad /4.5/$$

Задавши масштабним коефіцієнтом плану сил

$$\mu_P = \frac{\text{дійсне значення сили, Н}}{\text{відміток на плані сил, мм}}$$

відкладемо згідно з рівнянням /4.5/ у цьому масштабі всі сили в їх напрямках, почавши з полюса  $\Pi_P$ . У рівнянні /4.5/ усі сили, крім  $P_{65}$  і  $P_{34}^n$ , відомі за модулем і напрямком. Про дві останні сили відомо лише, як вони напрямлені:  $\vec{P}_{65} \perp x-x$ , а  $\vec{P}_{34}^n \perp P_{34}^e$ . Тому з кінця вектора сили  $P_{K10}$  проводимо на плані сил лінію, перпендикулярну до  $x-x$ , а з полюса  $\Pi_P$  - лінію дії сили  $P_{34}^n$ , що повинна замкнути багатокутник сил:  $\vec{P}_{34}^n \parallel DE$  /рис. 4.5/.

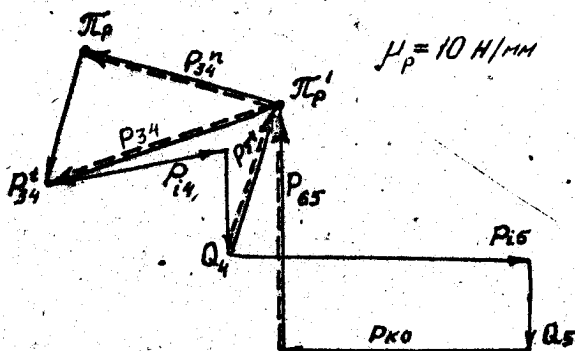


Рис. 4.5

Дійсні значення сил, Н:

$$P_{65} = \overline{ab} \mu_P; \quad P_{34}^n = \overline{\Pi_P b} \mu_P; \quad P_{34} = \overline{bc} \mu_P.$$

Реакцію у внутрішній обертальній кінематичній парі  $E - P_{54}$  знайдемо з умов рівноваги ланки 4 на плані сил /зазначимо: розглядаємо ланку, а не всю групу Ассура/

$$\vec{P}_{34} + \vec{P}_{14} + \vec{Q}_4 + \vec{P}_{54} = 0. \quad /4.6/$$

Узявши за полюс точку  $b$ , відкладемо за порядком сили  $P_{34}, P_{14}$  тощо. Дійсне значення сили тиску поверхні 5 на шатун 4, Н:

$$P_{54} = \overline{ab} \mu_P.$$

Так визначаються сили для групи Ассуря II класу II порядку II виду незалежно від складності механізму і місця приєднання цієї групи до механізму.

Накреслимо в масштабі таку групу Ассуря, що складається з ланок 2, 3, і нанесемо на неї сили ваги, сили інерції і моменти сил інерції, реакцію в шарнірі  $D - \bar{P}_{43} = -\bar{P}_{34}$ , а також реакції в зовнішніх кінематичних парах  $A, O_2$ . Під дією цих сил група Ассуря перебуватиме в рівновазі. Оскільки реакції з боку ланок I, 6 невідомі ні за напрямом, ні за модулем, розкладемо їх на дві складові /рис. 4.6/:

$$\bar{P}_{12} = \bar{P}_{12}^t + \bar{P}_{12}^n; \quad /4.7/$$

$$\bar{P}_{63} = \bar{P}_{63}^t + \bar{P}_{63}^n. \quad /4.8/$$

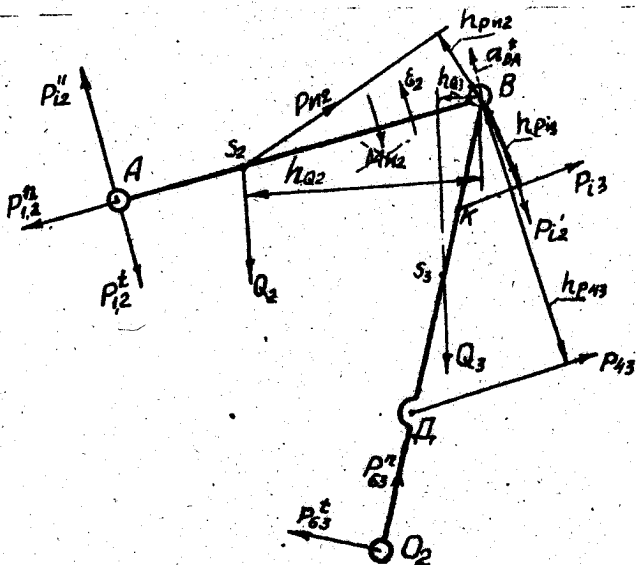


Рис. 4.6

Сила інерції коромисла 3

$$\bar{P}_{i3} = -m_3 \bar{a}_{s_3} = -m_3 (\bar{\pi}_a s_3 \mu_a).$$

Оскільки коромиско 3 обертається навколо осі  $O_2$ , що не збігається з центром ваги  $S_3$  ланки, силу інерції  $\bar{P}_{i3}$  і момент сил інерції  $\bar{M}_{i3} = -J_{S_3} \bar{\epsilon}_3$  замінимо однією силою  $\bar{P}_{i3}$ , прикладеною в центрі хитання  $K$ . Відстань до точки хитання знайдемо за формулою

$$\rho_{O_2 K} = \rho_{O_2 S_3} + \frac{J_{S_3}}{m_3 \rho_{O_2 S_3}}$$

і відкладемо в масштабі  $\mu_p$  в якому накреслено групу Ассура.

Сила інерції шатуна 2

$$\bar{P}_{i2} = -m_2 \bar{a}_{S_2} = -m_2 (\overline{\Pi_a S_2} \mu_a).$$

Момент сил інерції шатуна  $AB$

$$\bar{M}_{i2} = -J_{S_2} \bar{\epsilon}_2 = -J_{S_2} \frac{\bar{a}_{BA}^t}{\rho_{BA}} = -J_{S_2} \frac{\overline{\Pi_2 B} \mu_a}{BA \mu_p}$$

Замінимо момент сили інерції парю сил

$$P'_{i2} = -P''_{i2} = \frac{M_{i2} (H \cdot M)}{r_{AB} (M)}$$

Слід пам'ятати, що ця пара сил має повертати шатун у напрямі, протилежному напрямку кутового прискорення  $\epsilon_2$ .

З умови рівноваги ланки 2 визначимо складову  $P_{i2}^t$ :

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$P_{i2}'' AB - P_{i2}^t AB + P_{i2} h_{P_{i2}} - Q_2 h_{a_2} = 0;$$

$$P_{i2}^t = \frac{P_{i2}'' AB + P_{i2} h_{P_{i2}} - Q_2 h_{a_2}}{AB}$$

З умови рівноваги ланки 3 визначимо складову реакції  $P_{63}^t$ :

$$\Sigma M_B = 0.$$

$$-P_{i3} h_{P_{i3}} - P_{43} h_{P_{43}} - Q_3 h_{a_3} + P_{63}^t O_2 B = 0;$$

$$P_{63}^t = \frac{P_{i3} h_{P_{i3}} + P_{43} h_{P_{43}} + Q_3 h_{a_3}}{O_2 B}$$

Нормальні складові реакцій у кінематичних парах  $A, O_2$  знайдемо з допомогою плану сил, що діють на всю групу Ассура.

Для статично зрівноваженої групи Ассура головний вектор сил інерції дорівнює нулю, а багатокутник сил - замкнений.

Отже,

$$\bar{P}_{i2}^t + \bar{P}_{i2} + \bar{Q}_2 + \bar{P}_{i3} + \bar{Q}_3 + \bar{P}_{43} + \bar{P}_{63}^t + \bar{P}_{63}'' + \bar{P}_{i2}'' = 0.$$

/4.9/

Задавшись масштабним коефіцієнтом плану сил, побудуємо план цих сил. Побудову почнемо з полюса  $\pi_p$ . Відклавши всі відомі за модулем і напрямом сили, в кінці вектора  $\vec{P}_{63}^t$  поставимо перпендикуляр до нього /лінію дії вектора сили  $\vec{P}_{63}^n$ , а з полюса  $\pi_p$  — лінію, перпендикулярну до вектора  $\vec{P}_{12}^t$  — лінію дії вектора сили  $\vec{P}_{12}^n$  /рис. 4.7/.

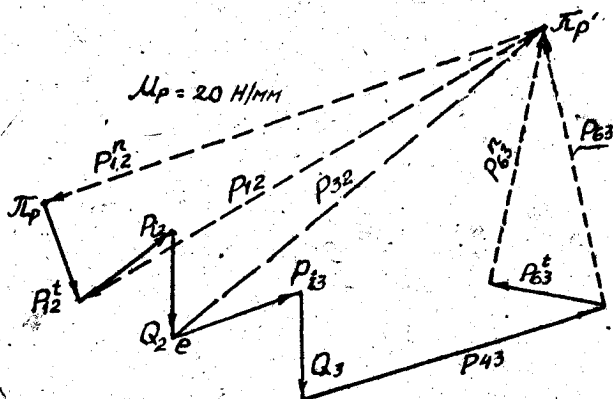


Рис. 4.7

Отже, складові нормальні сил за модулем:

$$\vec{P}_{12}^n = \overline{\pi_p b} \mu_p; \quad P_{63}^n = \overline{a b} \mu_p.$$

Сумарні реакції в опорах  $A_1, O_2$  на плані сил зображено в масштабі  $\mu_p$  векторами  $\vec{P}_{12}(\overline{b d})$ ,  $\vec{P}_{63}(\overline{a b})$ .

Реакцію коромисла 3 на шатун 2 /реакцію  $P_{32}$  у внутрішній кінематичній парі групи Ассюра — В визначимо з умови рівноваги шатуну 2 згідно з векторним рівнянням:

$$\vec{P}_{12} + \vec{P}_{12} + \vec{Q}_2 + \vec{P}_{32} = 0. \quad /4.10/$$

Узявши за полюс точку  $b$  раніше побудованого плану сил для групи Ассюра, маємо на цьому плані сили  $P_{12}, P_{12}$  і  $Q_2$ , що діють на ланку 2. Невідому реакцію  $P_{32}$  знайдемо, замкнувши багатокутник сил, тобто з'єднавши точку  $c$  з точкою  $b$  плану сил. За модулем реакція  $P_{32}$  третьої ланки на другу  $P_{32} = (\overline{bc}) \mu_p$ , а  $P_{23} = -P_{32}$ .

Так визначаються реакції на елементи кінематичних пар групи Ассура II класу I виду II порядку незалежно від складності механізму та місця приєднання її до механізму.

#### 4.2. Кінетостатика ведучої ланки /механізму I класу/

Сила інерції кривошипа  $O_1A$

$$\bar{P}_{i1} = -m_1 \bar{a}_{s1} = -m_1 (\bar{\omega}_1^2 \bar{S}_1; \mu_a).$$

Момент сил інерції  $\bar{M}_{i1} = -J_{s1} \bar{\epsilon}_1 = 0$ , оскільки  $\omega_1 = \text{const}$ ,  $\epsilon_1 = 0$ .

Прикладемо до кривошипа силу ваги  $Q_1$ , силу інерції  $P_{i1}$  і реакцію  $P_{21}$  на нього другої ланки /рис. 4.8/.

Оскільки механізм I класу не є групою Ассура, то як система статично не визначена, не буде статично зрівноваженим дією цих сил. Ця невизначеність підтверджується і математично. Дійсно, для кривошипа можемо написати три рівняння статки  $\sum \bar{X} = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum M_{O_1} = 0$ . Для розв'язування цих трьох рівнянь треба мати три невідомі.

А в даному випадку невідома тільки реакція отояка на кривошип  $P_{21}$  та її напрям /два невідомі параметри/. Тому треба ще один невідомий параметр, щоб число невідомих дорівнювало числу рівнянь статки, і задача була визначеною. Таким третьим додатковим невідомим є зрівноважувальна сила, прикладена в точці  $A$  кривошипа /зрівноважувальний момент сил, прикладений до кривошипа/. Цією зрівноважувальною силою /моментом/ будуть реактивні сили /момент/ від сил опору тієї робочої машини, якій надає руху двигун.

Отже, зрівноважувальною силою чи парою сил, прикладених до ведучої ланки, є сила /момент/, що зрівноважує усі зовнішні сили та сили інерції. При силковому розрахунку ведучої ланки робочої машини зрівноважуючою силою або моментом буде сила або момент, які розвиває двигун і які прикладені до ведучої ланки робочої машини. Отже, приклавши в точці  $A$  пальця кривошипа перпендикулярно до  $OA$  зрівноважувальну силу  $P_{2p}$  / її можна прикласти в будь-якій точці кривошипа під будь-яким кутом, але момент має дорівнювати сумі моментів зовнішніх сил і сил інерції/, напишемо три рівняння статки  $\sum \bar{X} = 0$ ,

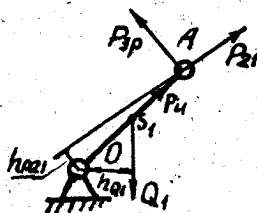


Рис. 4.8



$\Sigma \bar{Y} = 0, \Sigma M_{O_1} = 0$ . Перші два рівняння статички у вигляді суми проєкцій сил на осі  $x, y$  можна замінити одним векторним рівнянням.

З рівняння  $\Sigma M_{O_1} = 0$ :

$$P_{21} h_{P_{21}} - P_{3P} O_1 A + Q_1 h_{Q_1} = 0$$

знаходимо зрівноважувальну силу

$$P_{3P} = \frac{P_{21} h_{P_{21}} + Q_1 h_{Q_1}}{O_1 A} \quad /4.11/$$

Користуючись методом планів сил, знайдемо реакцію стояка на кривошип:

$$\bar{Q}_1 + \bar{P}_{11} + \bar{P}_{21} + \bar{P}_{3P} + \bar{P}_{61} = 0 \quad /4.12/$$

Побудову почали з сили  $Q_1$ , і закінчили вектором  $P_{61}$ , замкнувши ним векторний багатокутник. За модулем реакція стояка на кривошип /рис. 4.9/, Н:

$$P_{61} = (a \bar{L}_P \mu_P).$$

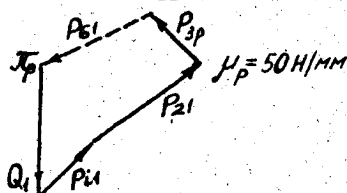


Рис. 4.9

**Приклад 4.2.** Визначити реакції в кінематичних парах і зрівноважувальну силу, прикладену в точці  $A$  пальця кривошипа, механізму попередньо-стругального верстата, що складається з механізму I класу і двох груп Ассурі II класу III і V видів /рис. 4.10/. Задано: план механізму, центри ваги його ланок, маси і моменти інерції ланок, сила корисного опору – сила опору металу різанню –  $P_{к.о.}$ , а також план прискорень механізму /рис. 4.11/.

Порядок побудови механізму  $I \rightarrow \bar{U}_2^3 \rightarrow \bar{U}_2^5$ .

Порядок виконання кінетостатичного розрахунку  $I \rightarrow \bar{U}_2^3 \rightarrow \bar{U}_2^5$ .

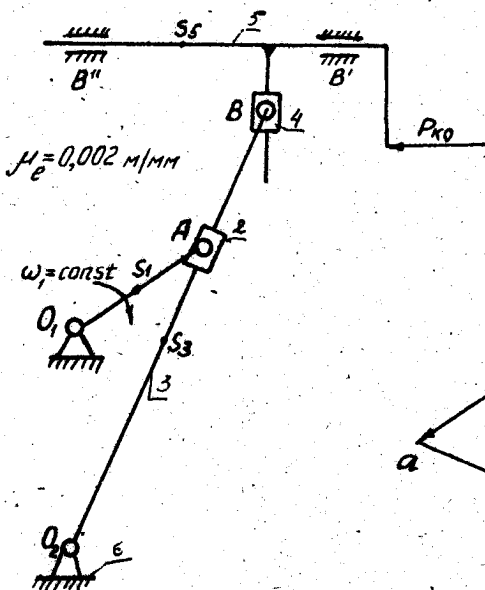


Рис. 4.10

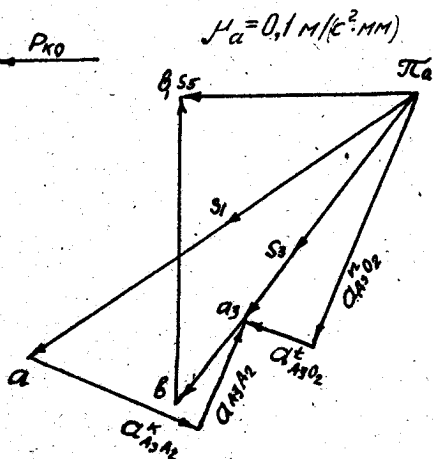


Рис. 4.11

Оскільки статично визначеним ланцюгом є група Ассур, в загальному випадку, кресимо в масштабі найвіддаленішу від ведучої ланки групи Ассур, наносимо дімки на неї всі зовнішні сили і розглядаємо її рівновагу. Але при розрахунках груп Ассур, до яких входить куліса - рухома напрямна для повзуна, задача дещо спрощується, бо в таких групах Ассур відомий напрям реакції у внутрішній кінематичній парі групи Ассур /напрям тиску повзуна на кулісу, чи навпаки, - куліси на повзун/ - перпендикулярно до напрямної. Це дає змогу розглядати рівновагу не всієї групи Ассур, а окремої ланки - куліси. Отже, намалюємо в масштабі кулісу 5 і нанесемо на неї силу ваги, корисного опору, силу інерції та реакції повзуна 4 та стояка 6 на кулісу 5 /рис. 4.12/. Сила інерції

$$\bar{P}_{i5} = -m_s \bar{a}_{s5} = -m_s (\pi_a \bar{S}_s \mu_a); (\bar{M}_{i5} = -J_{s5} \epsilon_s = 0).$$

Сила  $\bar{P}_{i5}$  напрямлена протилежно прискоренню  $\bar{a}_{s5}$ . Під дією цих сил куліса 5 перебуває у статичній рівновазі, а геометрична сума сил дорівнює нулю ( $\sum \bar{P} = 0$ ):

$$\bar{P}_{k,0} + \bar{Q}_5 + \bar{P}_{i5} + \bar{P}_{45} + \sum \bar{P}_{65} = 0, \quad /4.13/$$

де

$$\Sigma \bar{P}_{65} = \bar{P}'_{65} + P''_{65}$$

/4.14/

Вибравши масштабний коефіцієнт, наприклад  $\mu_p = 50 \text{ Н/мм}$  /рис. 4.13/, будемо план сил, починаючи з сили  $P_{к.о.}$ . З кінця вектора  $P_{15}$  проводимо лінію дії реакції повзуна 4 на кулісу 5 -  $P_{45} \perp y-y$ , а з полюса  $L_p$  перпендикулярного до  $B'B''$  - лінію дії реакції стояка 6 на кулісу 5 -  $\Sigma P_{65}$ , на перетині яких відстанемо точку  $B$ , що визначить за напрямом і модулем ці реакції

$$\bar{P}_{45} = (\overline{ab} \cdot \mu_p); \Sigma \bar{P}_{65} = (\overline{BL_p}) \cdot \mu_p$$

Для визначення  $P'_{65}$  візьмемо суму моментів сил, що діють на кулісу 5, відносно точки  $B''$  і прирівняємо її нулю:  $\Sigma M_{B''} = 0$ .

$$-Q_5 B'S_5 - P_{45} h_{P_{45}} - P'_{65} B'B'' + P_{к.о.} h_{P_{к.о.}} = 0$$

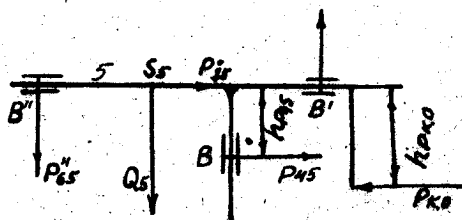


Рис. 4.12

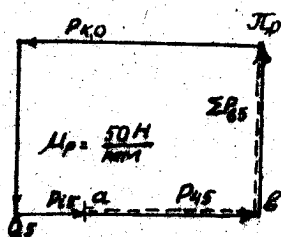


Рис. 4.13

Звідси

$$P'_{65} = \frac{P_{к.о.} h_{P_{к.о.}} - P_{45} h_{P_{45}} - Q_5 h_{Q_5}}{B'B''}$$

Складаю

$$P''_{65} = \Sigma P_{65} - P'_{65}$$

Розглянувши рівновагу повзуна 4, знайдемо реакції куліси 3 на повзун 4 /рис. 4.14/. Отже,  $P_{34} = -P_{54} = P_{45}$  /зауважимо, що вагов  $Q_4$  і силую інерції  $P_{i4}$  повзуна 4 знехтували, як малими порівняно з вагою куліс 3, 5/.

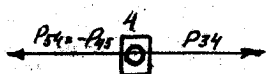


Рис. 4.14

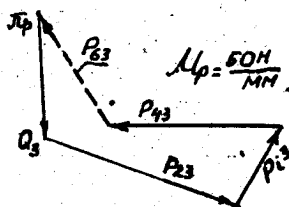


Рис. 4.16

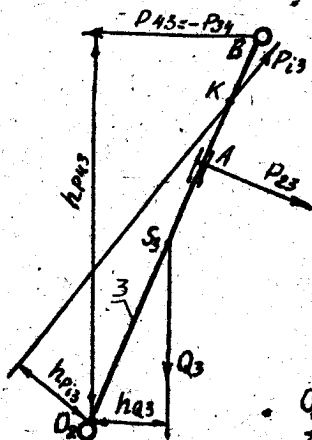


Рис. 4.15

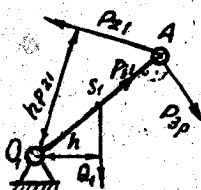


Рис. 4.18



Рис. 4.17



Рис. 4.19

Переходимо до такої групи Ассюра, що складається з ланок 2, 3, але й тут розглянемо рівновагу не групи Ассюра, а окремих ланок, оскільки відомо напрям реакції повзуна на кулісу /реакції у внутрішній кінематичній парі/. Ця реакція нормальна до напрямної  $O_2B$ . Отже, розглянемо рівновагу куліси 3 /рис. 4.15/. Сила інерції

$$\bar{P}_{i3} = -m_3 \bar{a}_{S_3} = -m_3 (\Pi_a S_3 \cdot \mu_a).$$

Оскільки куліса 3 обертається навколо осі  $O_2$ , що не збігається з центром ваги  $S_3$ , замінимо силу інерції  $P_{i3}$  і момент сил інерції  $M_{i3}$  однією силою інерції  $P_{i3}$ , прикладеною в центрі качання куліси  $K$ , відстань до якого

$$\rho_{O_2 K} = \rho_{O_2 S_3} + \frac{J_{S_3}}{m_3 \rho_{O_2 S_3}}$$

Крім сили ваги  $Q_3$  і сили інерції  $P_{13}$ , до куліси 3, накресленої в масштабі, прикладемо реакції в зовнішніх кінематичних парах  $B$ ,  $A$  та  $O_2$ . Згідно з третім законом Ньютонa  $P_{43} = -P_{34}$ . Реакція  $P_{23}$  повзуна 2 на кулісу 3 напрямлена нормально до куліси, реакція  $P_{63}$  стояка 6 на кулісу 3 не відрма ні за модулем, ні за напрямом /її знайдемо далі з плану сил, що діють на кулісу 3/. За модулем реакції  $P_{23}$  знайдемо з рівняння моментів сил, що діють на кулісу 3 відносно точки  $O_2$ :  $\Sigma M_{O_2} = 0$ ;

$$Q_3 h_{O_2 A} + P_{23} O_2 A + P_{13} h_{P_{13}} - P_{43} h_{P_{43}} = 0.$$

Звідси

$$P_{23} = \frac{P_{43} h_{P_{43}} - Q_3 h_{O_2 A} - P_{13} h_{P_{13}}}{O_2 A}.$$

Реакцію  $P_{63}$  знайдемо методом планів сил:  $\Sigma \bar{P} = 0$  /рис. 4.16/.

$$\bar{Q}_3 + \bar{P}_{23} + \bar{P}_{13} + \bar{P}_{43} + \bar{P}_{63} = 0. \quad /4.15/$$

Із довільно вибраної точки /полюса  $\pi_p$ / в масштабі  $\mu_p$  відкладемо сили  $Q_3$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{13}$  і  $P_{43}$ . Остання невідома сила - реакція  $P_{63}$  замкне багатокутник сил. За модулем  $P_{63} = a \pi_a \mu_p$ .

Із рівноваги повзуна 2, знехтувавши вагою  $Q_2$  і силою інерції  $P_{12}$  як малими порівняно з іншими силами, визначимо реакцію  $P_{12}$  кривошипа на повзун 2 /рис. 4.17/:

$$\Sigma \bar{P} = 0; \quad \bar{P}_{32} + \bar{P}_{12} = 0; \quad P_{12} = -P_{32} = P_{23}.$$

### Кінетостатика ведучої ланки

Сила інерції кривошипа I

$$\bar{P}_{11} = -m \bar{a}_s = -m (\pi_a s_1 \mu_a).$$

Момент пари сил інерції  $\bar{M}_{11} = -J_s \bar{\epsilon}_1 = 0$ , оскільки  $\omega_1 = \text{const}$ , а  $\epsilon_1 = 0$ .

Накреслимо в масштабі механізм I класу і нанесемо на нього силу ваги  $Q_1$ , силу інерції  $P_{11}$ , реакцію  $P_{21}$  повзуна 2 на кривошип, зрівноважувальну силу  $P_{31}$  і реакцію  $P_{61}$  стояка на кривошип. Останню на рис. 4.18 не показано, оскільки не відомі ні величина, ні її напрям. Визначимо зрівноважувальну силу, написавши суму моментів сил

відносно точки  $O_1$  і прирівнявши її до нуля /під дією зовнішніх сил, сил інерції і зрівноважувальної сили кривошип перебуває у рівновазі/.

$$\Sigma M_{O_1} = 0;$$

$$P_{3P} \cdot O_1 A - P_{21} h_{P_{21}} + Q_1 h_{Q_1} = 0;$$

$$P_{3P} = \frac{P_{21} h_{P_{21}} - Q_1 h_{Q_1}}{O_1 A}.$$

Реакцію  $P_{61}$  стояка 6 на кривошип I визначимо з допомогою плану сил, пам'ятаючи, що головний вектор сил системи, що перебуває у рівновазі, дорівнює нулю, а план сил замкнений:  $\vec{P}_{21} + \vec{P}_{3P} + \vec{Q}_1 + \vec{P}_{11} + \vec{P}_{61} = 0$  /рис. 4.19/. За модулем реакція

$$P_{61} = (\alpha \overline{P}_P) \cdot \mu_P.$$

### 4.3. Визначення зрівноважувальної сили

При розв'язуванні деяких задач необхідно знати зрівноважувальну силу чи момент, прикладений до ведучої ланки при її рівномірному русі. При цьому нема потреби знати реакції в кінематичних парах, які визначили при кінестатичному розрахунку механізму. Прикладом таких задач є: визначення потужності та типу двигуна, визначення моменту інерції маховика, характеристик регулятора та інших задач динаміки. У цих задачах треба знати лише закон зміни зрівноважувальної сили і нема потреби витрачати час на визначення реакцій у кінематичних парах, як це робилося при визначенні зрівноважувальної сили за методом кінестатичного розрахунку механізму.

Але відомо, що, приклавши до системи, крім зовнішніх, також сили інерції і, розглядаючи їх як зовнішні, згідно з принципом Даламбера можна розглядати цю систему як ту, що знаходиться в стані динамічної рівноваги. Цим можна скористатися при визначенні зрівноважувальної сили /моменту/, адже реакцій у кінематичних парах, як внутрішніх сил, у рівняннях динаміки в цьому випадку не буде.

#### 4.4. Визначення зрівноважувальної сили методом можливих переміщень

Оскільки в'язі в кінематичних парах механізму двосторонні й від часу не залежать, то очевидно, що дійсні переміщення будуть можливими, тому для визначення зрівноважувальної сили можна скористатися принципом можливих переміщень, згідно з яким сума елементарних робіт усіх сил /моментів/, прикладених до системи, що перебуває в рівновазі, на можливих переміщеннях системи дорівнює нулю.

При застосуванні цього принципу до механізмів можливими переміщеннями будуть дійсні переміщення, що є функціями положення ведучої ланки.

Математично принцип можливих переміщень можна записати так:

$$P_1 \Delta S_1 \cos \alpha_1 + P_2 \Delta S_2 \cos \alpha_2 + P_3 \Delta S_3 \cos \alpha_3 + \dots + P_n \Delta S_n \cos \alpha_n + M_1 \Delta \varphi_1 + M_2 \Delta \varphi_2 + M_3 \Delta \varphi_3 + \dots + M_n \Delta \varphi_n = 0, \quad /4.16/$$

де  $P_1, P_2, \dots, P_n$  - зовнішні сили та сили інерції, прикладені у відповідних точках механізму, а також зрівноважувальна сила;  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  - елементарні дійсні переміщення точок механізму, до яких прикладені сили при заданому положенні ведучої ланки;  $M_1, M_2, \dots, M_n$  - моменти і моменти сил інерції;  $\Delta \varphi_1, \Delta \varphi_2, \dots, \Delta \varphi_n$  - елементарний кут повороту тієї ланки, до якої прикладено момент;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - кут, створений напрямом векторів сили та швидкості точки, до якої прикладена ця сила.

У рівнянні /4.16/ лише одна невідома - зрівноважувальна сила, яку і знаходимо з цього рівняння, бо, задавши одне елементарне переміщення, наприклад кут повороту ведучої ланки  $\Delta \varphi_1$ , визначимо дійсні переміщення всіх ланок, а всі сили або відомі, або їх можна знайти. Але розв'язання цього рівняння потребує великої обчислювальної роботи. Поділивши всі члени рівняння /4.16/ на елементарний час  $\Delta t$  і, переходячи до границь при  $\Delta t \rightarrow 0$ , дістанемо

$$P_1 v_1 \cos \alpha_1 + P_2 v_2 \cos \alpha_2 + P_3 v_3 \cos \alpha_3 + \dots + P_n v_n \cos \alpha_n + M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3 + \dots + M_n \omega_n = 0, \quad /4.17/$$

де  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  - швидкості точок ланок, до яких прикладені сили;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$  - кутові швидкості ланок, до яких прикладені моменти.

Таким чином, від принципу можливих переміщень перейшли до принципу можливих швидкостей, який можна висловити так: якщо механізм перебуває в рівновазі, сума миттєвих потужностей всіх зовнішніх сил і моментів, прикладених до його ланок, дорівнює нулю.

Швидкості та кутові швидкості можна визначити аналітично чи з плану швидкостей. Задача спрощується порівняно з /4.170/. Але, якщо є план швидкостей, то задачу визначення зрівноважувальної сили можна ще більше спростити.

#### 4.5. Теорема Куковського про жорсткий важіль

Якщо до плану швидкостей, повернутого на  $90^\circ$ , у відповідних точках прикласти всі зовнішні сили /і моменти/, сили інерції /і моменти сил інерції/, а також зрівноважувальну силу /момент/ і розглянути план швидкостей як жорсткий важіль, закріпленний у полку, то під дією цих сил і моментів він буде перебувати в рівновазі, а сума моментів сил відносно полюса дорівнюватиме нулю.

Щоб довести цю теорему, зробимо такі застереження:

1/ замінимо силу й моменти, що діють на ланку, однією зведеною еквівалентною силою;

2/ розглянемо на плані швидкостей одну точку ланки, до якої прикладемо цю зведену силу;

3/ визначимо миттєву потужність цієї сили;

4/ визначимо аналогічно миттєву потужність сил, що діють на інші ланки, і, оклавши їх згідно з принципом можливих швидкостей, прирівняємо до нуля;

5/ потім повернемо швидкість точки ланки на  $90^\circ$  і визначимо момент сили, що діє на ланку, відносно полюса повернутого плану для однієї, а потім інших ланок, і складемо їх.

Отже, нехай  $v_i$  - швидкість точки реального механізму, де прикладено зведену силу  $P_i$ , а  $\alpha_i$  - кут між ними. Миттєва потужність цієї сили дорівнює добутку  $P_i v_i \cos \alpha_i$ . Цей добуток можна дістати ще інакше. Для цього повернемо вектор швидкості  $v_i$  на  $90^\circ$  проти годинникової стрілки і, опустивши його вниз, визначимо момент сили  $P_i$  відносно полюса  $M_i$  повернутої швидкості  $v_{in}$  /рис. 4.20/:

$$M_i = P_i h_i; \quad /4.18/$$

але  $h_i = v_{in} \cos \alpha_{in}$ ,  $L \alpha_{in} = L \alpha_i$ , як кути зі взаємно перпендикулярними сторонами, а  $v_i = v_{in}$ , тобто  $h_i = v_i \cos \alpha_i$ .



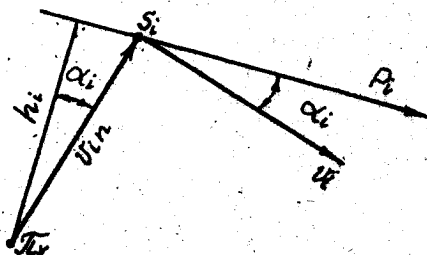


FIG. 4.20

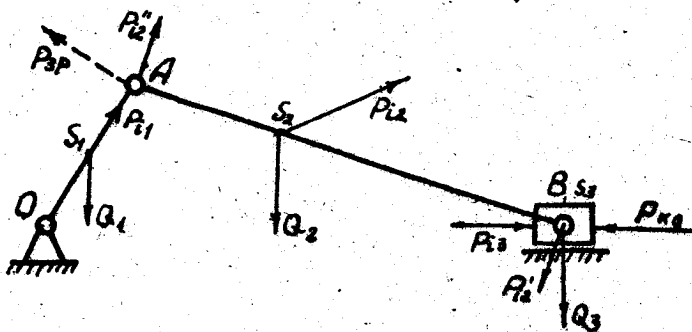


FIG. 4.21

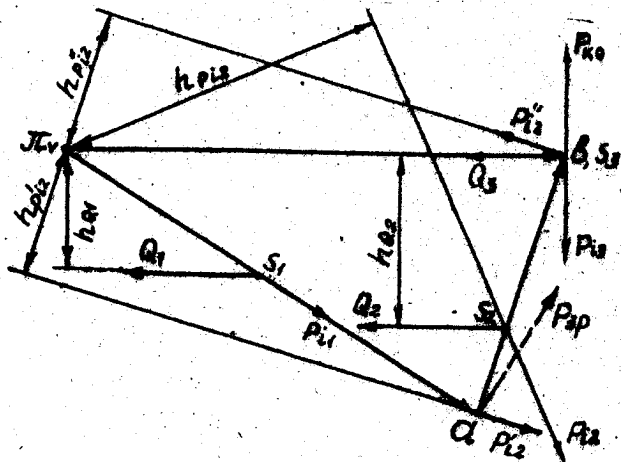


FIG. 4.22

Підставивши  $h_i$  в /4.18/, матимемо

$$M_{\pi_v} = P_i h_i = P_i v_i \cos \alpha_i.$$

Якщо записати суму моментів усіх сил відносно полюса  $\pi_v$  повернутого плану швидкостей, то дістанемо:

$$M_{\pi_v} = P_1 h_1 + P_2 h_2 + \dots + P_n h_n = P_1 v_1 \cos \alpha_1 + P_2 v_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n v_n \cos \alpha_n.$$

Оскільки права частина цього рівняння, згідно з принципом можливих швидкостей, дорівнює нулю, то

$$M_{\pi_v} = P_1 h_1 + P_2 h_2 + P_3 h_3 + \dots + P_n h_n = 0, \quad /4.19/$$

що й треба було довести. З рівняння /4.19/ знаходимо зрівноважувальну силу, прикладену в будь-якій точці плану швидкостей. Повернутий на  $90^\circ$  план швидкостей з прикладеними до нього у відповідних точках силами називається жорстким важелем Жуковського /ця теорема була вперше доведена ним/. Можна не повертати план швидкостей на  $90^\circ$ , а повернути на  $90^\circ$  в одному напрямі /за годинниковою стрілкою чи проти неї/ всі сили, приклавши їх у відповідних точках. З допомогою важеля Жуковського можна знайти не тільки зрівноважувальну силу, але й реакції у фермах, різних пристосуваннях.

Приклад 4.3. Знайти зрівноважувальну силу, прикладену в точці  $A$  пальця кривошипа механізму компресора, з допомогою важеля Жуковського.

Дано: схему механізму з прикладеними до нього силами ваги /рис. 4.21/, інерції, корисного опору. Реакції в кінематичних парах не враховуються, бо вони двосторонні і їх момент відносно полюса плану швидкостей дорівнюватиме нулю, оскільки  $P_{21} = -P_{12}$ ,  $P_{32} = -P_{23}$  тощо. Прикладемо у відповідних точках плану швидкостей усі сили, повернуті на  $90^\circ$  за годинниковою стрілкою /можна проти/. Розглядаючи, згідно з теоремою Жуковського, план швидкостей як жорсткий важіль, закріплений у полюсі  $\pi_v$ , запишемо умови рівноваги його під дією прикладених до нього сил:  $\sum M_{\pi_v} = 0$  /рис. 4.22/:

$$P_{13} \pi_v b - P_{20} \pi_v b - P_{12}'' h_{P_{12}} + Q_2 h_{Q_2} + P_{12} h_{P_{12}} - P_{12}' h_{P_{12}} + Q_1 h_{Q_1} - P_{3P} \pi_v r = 0.$$

Звідси, винісши за дужки  $\mathcal{L}_V B$  і врахувавши, що  $P'_{12} = P''_{12}$ ,

а  $h_{P'_{12}} + h_{P''_{12}} = ab$ , знайдемо

$$P_{3p} = \frac{(P_{13} - P_{K0}) \mathcal{L}_V B - P''_{12} ab + Q_2 h_{a_2} + P_{12} h_{P_{12}} + Q_1 h_{a_1}}{\mathcal{L}_V a}$$

Якщо права частина цього рівняння додатна, то це означає, що напрям сили  $P_{3p}$  вибрано правильно. При від'ємному значенні правої частини напрям сили  $P_{3p}$  треба змінити на протилежний.

Якщо перед цим зрівноважувальну силу знайдено в результаті кінетостатичного розрахунку механізму, то відносна похибка не повинна перевищувати 5%. З допомогою важеля Жуковського можна визначити не лише зрівноважувальну силу, прикладену в будь-якій точці механізму, чи зрівноважувальний момент, що діє на будь-яку його ланку, але й визначити зусилля, що діє вздовж стержня статично визначеної ферми, і провести її розрахунок на міцність.

Зауваження. У розглянутому прикладі момент сил інерції другої ланки  $\bar{M}'_{12} = -J_{S_2} \varepsilon_2$  замінено парю сил інерції  $P'_{12} = -P''_{12} = \frac{M_{12}}{r_{AB}}$ . Взагалі цього можна й не робити, а прикласти на плані швидкостей момент сил інерції  $M'_{12} = M_{12} \frac{ab}{r_{AB}}$ , де  $ab$  - відрізок на плані швидкостей, мм, а  $r_{AB}$  - довжина ланки, м. Справді, момент на плані швидкостей  $M'_{12} = P'_{12} ab$ , але  $P'_{12} = \frac{M_{12}}{r_{AB}}$ . Отже,  $M'_{12} = M_{12} \frac{ab}{r_{AB}}$ . При цьому момент  $M'_{12}$  на плані швидкостей має повертати точку  $B$  відносно  $A$  у напрямі, протилежному тому, в якому момент  $M_{12}$  повертає точку  $B$  відносно  $A$  на плані механізму /в даному випадку  $M_{12}$  - проти годинникової стрілки/.

У наведеному прикладі при визначенні зрівноважувальної сили всі зовнішні сили на план швидкостей наносилися повернутими на  $90^\circ$ . Згідно з теоремою Жуковського, можна повернути на  $90^\circ$  лише план швидкостей. Тоді всі сили, що діють на ланки механізму, прикладатимуться у відповідних точках плану швидкостей у тому напрямі, в якому вони діють на ланки механізму.

## 5. ДИНАМІКА МАШИНИ. РЕЖИМИ РУХУ МАШИНИ

Вивчаючи розділи кінематики і кінетостатики плоских важільних механізмів, ми користувалися методами визначення прискорень, вважаючи, що ведуча ланка рухається з постійною кутовою швидкістю, тобто вважали, що  $\omega_1 = \text{const}$ . Це значно спростило розв'язування цих задач.

Але в реальних механізмах ведуча ланка, як правило, рухається нерівномірно. Це наочно показує тахограма руху головного вала машини /діаграма залежності кутової швидкості  $\omega$ , від часу руху  $t$  /.

На осі абсцис тахограми при роботі машини від моменту початку руху до моменту зупинки можна виділити три характерні проміжки: час розбігу  $t_p$  /пуску в рух/, час усталеного руху  $t_{y.p}$  /робочий режим механізму/ і час вибігу  $t_b$  /зупинки/ механізму /рис. 5.1/.

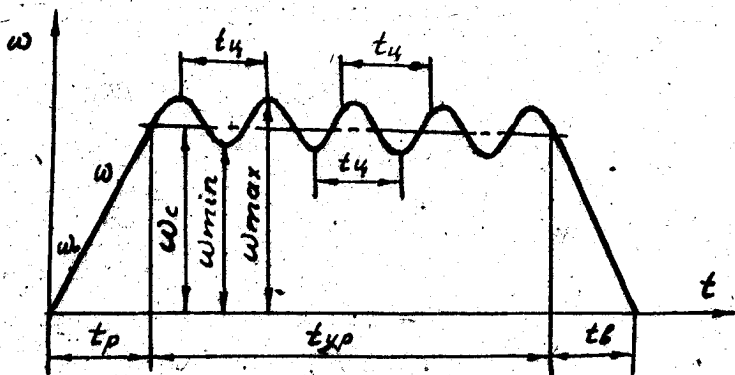


Рис. 5.1

Під час розбігу кутова швидкість головного вала зростає від нуля до  $\omega_c$ , під час усталеного руху коливається від  $\omega_{max}$  до  $\omega_{min}$ , проходить через середнє значення, змінюючись періодично, а під час вибігу зменшується до нуля.

Відповідно розрізняють і три режими роботи машини: розбігу, усталеного руху і вибігу; на відміну від режиму усталеного руху, два інших називаються перехідними.

Повний час руху машини

$$t = t_p + t_{y.p} + t_b. \quad /5.1/$$

З іншого боку, час усталеного руху можна визначити як добуток

$$t_{y.p} = K t_c, \quad /5.2/$$

де  $K$  - кількість циклів;  $t_c$  - час циклу.

Час циклу - це проміжок часу, протягом якого кутова швидкість головного вала досягає свого початкового значення, пройшовши через  $\omega_{max}$  і  $\omega_{min}$ . Час циклу може відповідати одному або двом оборотам кривошипа /залежно від того, дво- чи чотиритактний двигун/.

Режими руху машини залежать від діючих сил і мас машин. Одні машини працюють тільки в двох режимах: розбігу та вибігу, інші мають три - включаючи режим усталеного руху.

### 5.1. Основне рівняння руху машини

Розглянемо, як з точки зору динаміки характеризуються режими руху машини.

Оскільки в механізмах і машинах в'язі двосторонні і від часу не залежать, то для характеристики руху машини можна скористатися законом зміни кінетичної енергії матеріальної системи:

$$A_p - A_o = \Delta T, \quad /5.3/$$

де  $A_p$  - абсолютне значення роботи рушійних сил;  $A_o$  - абсолютне значення робіт сил опору;  $\Delta T$  - приріст кінетичної енергії механізму за деякий проміжок часу  $t$ .

Як відомо, робота сил опору

$$A_o = A_{k.o} + A_{ш.o} \pm A_g, \quad /5.4/$$

де  $A_{k.o}$  - робота сил корисного опору, для подолання яких побудована /призначена/ машина;  $A_{ш.o}$  - робота сил шкідливого опору, які долає машина, хоч призначена вона для виконання іншої /корисної/ роботи;  $A_g$  - робота сил ваги, в одному випадку /при підйомі ланок догори/, вона негативна, як і робота шкідливого опору, а в іншому /при опусканні ланок донизу/ - позитивна. За цикл робота сил ваги дорівнює нулю.

Коротко основне рівняння руху машини можна сформулювати так: зміна кінетичної енергії дорівнює сумі робіт сил рушійних і опору.

Іноді це рівняння називають рівнянням у вигляді кінематичної енергії /стара назва - у вигляді живих сил/.

Як відомо, кінетична енергія рухомої ланки при складному русі

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad /5.5/$$

де  $m$  - її маса;  $v$  - швидкість центра ваги ланки;  $J$  - момент інерції ланки відносно осі, що проходить через центр її ваги;  $\omega$  - кутова швидкість ланки.

При поступальному русі  $\omega = 0$ . Тоді

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad /5.6/$$

а при обертальному русі навколо центра ваги  $v = 0$ ;

$$T = \frac{J\omega^2}{2}. \quad /5.7/$$

Очевидно, що приріст кінетичної енергії

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{J\omega^2}{2} - \frac{J\omega_0^2}{2},$$

де  $\omega$  - кутова швидкість відповідно початкова і кінцева.

Зрозуміло й очевидно з тахограми, що в період розбігу машини

$$A_p - A_0 = J\omega^2/2 - J\omega_0^2/2. \quad /5.8/$$

Оскільки

$$\omega > \omega_0,$$

то

$$A_p > A_0,$$

тобто робота рушійних сил більша за роботу сил опору у період розбігу. За рахунок цього зростає кінетична енергія машини.

Розглянемо режим усталеного руху. За час циклу  $\omega = \omega_0$ , / $\omega$  сягає  $\omega_0$ /, тому

$$A_p - A_0 = J \frac{\omega^2}{2} - J \frac{\omega_0^2}{2} = 0.$$

Звідки  $A_p = A_0$ .

А це означає, що в усталеному русі за час циклу робота рушійних сил дорівнює роботі сил опору, тому приріст кінетичної енергії дорівнює нулю.

У режимі вибігу  $\omega < \omega_0$ ,

$$J\omega < J\omega_0, \quad \text{отже, } A_0 > A_p.$$

Таким чином, робота сил опору більша за роботу рушійних сил. Нагромаджена в період розгону машини кінетична енергія зменшується, витрачаючись на подолання сил опору.

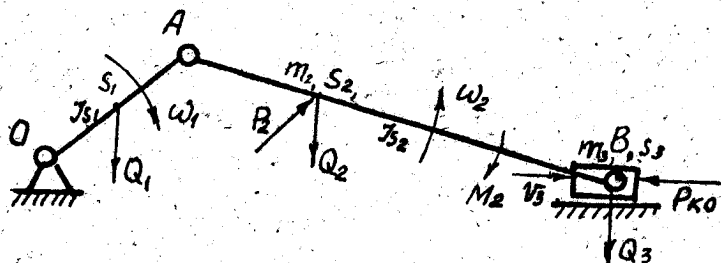


Рис. 5.2

### 5.2. Зведення мас і сил

При аналізі роботи машини, визначенні закону руху ведучої /будь-якої/ ланки, зручніше користуватися не всіма справжніми масами, кожна з яких рухається зі своїми швидкостями, що змінюються за різними законами, а умовними, еквівалентними  $\dot{m}$ , масами.

Цим значно зменшиться кількість розрахунків, бо відпаде потреба знаходити кінетичну енергію кожної ланки у рівнянні руху в кожному з положень ведучої ланки, а отже, і всіх ланок механізму.

Аналогічно вчинимо із силами та їх моментами, замінивши всі сили і моменти сил, звівши їх до однієї ланки, однією еквівалентною в точки зору динаміки силою чи моментом сил. Це дасть змогу, розв'язуючи задачі динаміки, розглядати не весь механізм із різними значеннями мас, на які діють різні сили, а одну еквівалентну масу з прикладеною до неї однією силою чи моментом /рис. 5.3/.

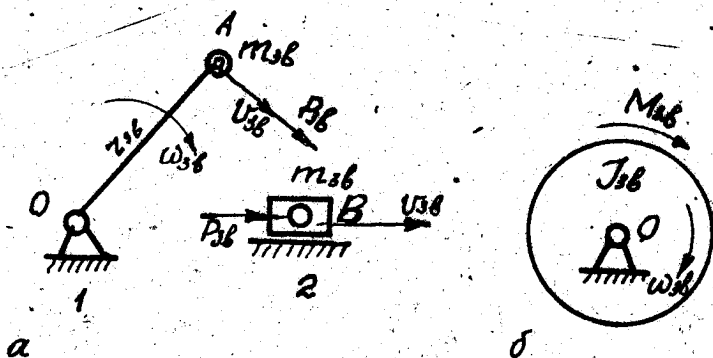


Рис. 5.3

Процес заміни мас і сил машини умовною масою та силою називається зведенням мас і сил. Ланка, до якої зводяться сили й маси, називається ланкою зведення. Частіше це ведуча ланка або головний вал машини. І в цьому разі замість реальної схеми механізму матимемо динамічну модель механізму.

Розрізняють дві динамічні моделі механізму: а - із зосередженою масою, б - із розподільною масою /див. рис. 5.3/.

Умовою еквівалентності мас реального механізму і зведеної маси на динамічній моделі є рівність їх кінетичних енергій.

А оскільки зміна кінетичних енергій дорівнює роботі зовнішніх сил /рушійної й опору/, то робота зведеної сили чи моменту має дорівнювати сумі робіт сил і моментів, прикладених до ланок механізму. Останнє буде додержано, якщо будуть однаковими миттєві потужності - зведена потужність і потужності всіх сил і моментів реального механізму, тобто зведеної сили і сил, що зводяться до будь-якої ланки.

Зведеною до головного вала механізму /чи іншої ланки зведення/ силою  $P_{зв}$  /чи моментом зведення/ якої-небудь сили /моменту/, що діє на одну з ланок механізму, називається така умовна сила /момент/, прикладена до ланки зведення, миттєва потужність якої /якого/ дорівнює миттєвій потужності сили  $P_i$  /моменту  $M_i$ /.

Робота зведеної сили /моменту/ на будь-якому переміщенні ланки зведення дорівнює роботі сили чи моменту, що "зводиться", на відповідному переміщенні ланки механізму, до якої прикладено цю силу чи момент.

Зведеною до головного вала механізму /іншої ланки зведення/ масою  $m_{зв}$  /чи момент інерції  $J_{зв}$  / будь-якої ланки називається така умовна маса  $m_{зв}$  /момент інерції  $J_{зв}$  /, кінетична енергія якої  $T_{зв}$  дорівнює кінетичній енергії даної ланки  $T_i$ .

Якщо до ланки зведення зводяться маси всіх ланок механізму, то повинна зберігатись рівність кінетичних енергій  $T_i$  усіх ланок механізму  $T_{зв} = \sum T_i = T_{мех}$ .

Користуючись динамічною моделлю а, маємо:

$$m_{зв} \frac{v_{зв}^2}{2} = \sum_i^n m_i \frac{v_{s_i}^2}{2} + \sum_i^n J_{s_i} \frac{\omega_i^2}{2},$$

де  $v_{s_i}$  - швидкості центрів ваги ланок;  $\omega_i$  - їх кутові швидкості.

Розв'язавши цю рівність відносно  $m_{зв}$ , дістаємо:

$$m_{зв} = \sum_i^n m_i \left( \frac{v_{s_i}}{v_{зв}} \right)^2 + \sum_i^n J_{s_i} \left( \frac{\omega_i}{v_{зв}} \right)^2. \quad /5.9/$$



Користуючись динамічною моделлю 5.3б, з рівності кінематичних енергій маємо

$$J_{38} \frac{\omega_{38}^2}{2} = \sum_1^n m_i \frac{v_{s_i}^2}{2} + \sum_1^n J_{s_i} \frac{\omega_i^2}{2}.$$

Звідси

$$J_{38} = \sum_1^n m_i \left( \frac{v_{s_i}}{\omega_{38}} \right)^2 + \sum_1^n J_{s_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_{38}} \right)^2. \quad /5.10/$$

Тобто в обох випадках потрібно знайти кінетичну енергію кожної ланки /залежно від того, який рух вона виконує: якщо складний, то за /5.5/, якщо поступальний - за /5.6/, обертальний навколо відносної осі - за /5.7//, поділити на швидкість у квадраті /кутову швидкість у квадраті/ і здобути частки скласти. Якщо ланкою зведення є початкова ланка, що обертається навколо нерухомої осі I /рис. 5.3,а/, то колова швидкість маси зведення

$$v_{38} = \omega_{38} z_{38}.$$

Підставивши це значення  $v_{38}$  в /1/, дістанемо

$$\begin{aligned} m_{38} &= \sum_1^n m_i \left( \frac{v_{s_i}}{\omega_{38} z_{38}} \right)^2 + \sum_1^n J_{s_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_{38} z_{38}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{z_{38}^2} \left[ \sum_1^n m_i \left( \frac{v_{s_i}}{\omega_{38}} \right)^2 + \sum_1^n J_{s_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_{38}} \right)^2 \right] = \frac{1}{z_{38}^2} J_{38}, \end{aligned}$$

бо вираз у квадратних дужках дорівнює  $J_{38}$ , або  $m_{38} z_{38}^2 = J_{38}$ .

Знаючи одне, легко можна знайти друге. Тобто зведений момент інерції  $J_{38}$  дорівнює масі зведення  $m_{38}$ , помноженій на радіус ланки зведення в квадраті -  $z_{38}^2$ .

### 5.3. Властивості зведених мас

Як видно з визначення швидкостей руху точок механізму методом планів швидкостей, швидкість усякої точки механізму збільшується зі збільшенням кутової швидкості ведучої ланки, і кутова швидкість інших ланок залежить від положення ведучої ланки. Зі зміною її положення змінюється і положення всіх ланок механізму, що також впливає на величину швидкостей, бо відносні швидкості визначали, проводячи лінії, перпендикулярні до ланки в даному положенні. Це дає змогу стверджувати, що швидкість усякої точки механізму пропорційна куту-

вій швидкості ведучої ланки, але ця пропорційність зберігається для кожного положення ланок механізму. Величина швидкостей змінюється зі зміною положення ведучої ланки, а з нею — і положення всіх ланок, тобто швидкість ланки є функцією положення ведучої ланки.

Звідси випливає:

1/ зведена маса є функцією положення ведучої ланки, тобто не залежить від часу і кутової швидкості, бо швидкості точок механізму періодично повторюються залежно від положення ведучої ланки, а не від часу;

2/ зведена маса  $m_{38}$  і  $J_{38}$  і функція періодична;

3/ зведена маса  $m_{38}$  і  $J_{38}$  завжди більша за нуль, бо не може під час руху ланок дорівнювати нулю одноразово швидкість усіх ланок і ніколи не дорівнювати нулю їх маси. При визначенні зведеної сили чи моменту знаходимо потужність усіх сил і моментів сил реального механізму, що діють на всі ланки, і прирівнюємо її потужності сили  $P_{38} / M_{38}$ , прикладеної до ланки зведення

$$N_{38} = N_{\text{мех.}}$$

За першою розрахунковою схемою

$$P_{38} v_{38} = \sum_i^n P_i v_{s_i} \cos \alpha_i + \sum_i^n M_i \omega_i.$$

Звідси

$$P_{38} = \sum_i^n P_i \left( \frac{v_{s_i} \cos \alpha_i}{v_{38}} \right) + \sum_i^n M_i \left( \frac{\omega_i}{v_{38}} \right). \quad /5.II/$$

За другою динамічною моделлю

$$M_{38} \omega_{38} = \sum_i^n P_i v_{s_i} \cos \alpha_i + \sum_i^n M_i \omega_i.$$

Звідси

$$M_{38} = \sum_i^n P_i \frac{v_{s_i} \cos \alpha_i}{\omega_{38}} + \sum_i^n M_i \frac{\omega_i}{\omega_{38}} \quad /5.I2/$$

Якщо підставити значення  $v_{38} = z_{38} \omega_{38}$  у /5.II/, а потім винести за дужки  $\frac{1}{z_{38}}$ , то доведемо, що

$$M_{38} = P_{38} z_{38}.$$

Зведена сила  $P_{38}$  і момент сил  $M_{38}$  має такі самі властивості, що й зведена маса: є функцією положення ведучої ланки, є періодичною функцією і завжди більша від нуля.

## 6. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ РЕГУЛЮВАННЯ РУХУ МАШИНИ

Як установлено раніше, навіть у періоді усталеного руху машини кутова швидкість ведучої ланки не є сталою. Вона коливається біля середнього робочого значення, досягаючи за час циклу мінімуму і максимуму. Пояснюється це тим, що за час циклу змінюються зведені до ведучої ланки рушійні сили, сили корисного та шкідливого опору, змінюється також зведена до ведучої ланки маса, бо всі ці параметри є функціями положення ланок механізму.

Зміна /коливання/ кутової швидкості зумовлює виникнення додаткових /динамічних/ реакцій у кінематичних парах, бо при нерівномірному русі є прискорення, а, отже, з'являються й сили інерції. Виникають коливання окремих ланок машини і всієї машини на фундаменті. Ці коливання кутової швидкості, прискорень і ланок перешкоджають нормальному виконанню технологічних процесів. У ткацьких і прядильних машинах це призводить до обривання нитки, у верстатах може виникнути якість або викривлення ріжучої кромки різця, а з цим і погіршення якості оброблюваної поверхні деталі; при нерівномірному русі двигуна або генератора струму виникають коливання напруги і сили струму, мають місце збої в роботі автоматичних пристроїв, а отже, і технологічних процесів, виникає мерехтіння світла тощо. Усі ці явища не бажані як з точки зору виконання технологічних процесів, так і з точки зору динаміки, роботи машини.

Як уже говорилось, усталений режим роботи машини характеризується тим, що всі механічні параметри /швидкість, прискорення, сили, моменти сил/, виражені в функції часу, змінюються періодично, досягаючи за час циклу /іноді так званого періоду усталеного руху/ початкового значення. Але, якщо зв'язувати час циклу з кількістю обертів головного вала машин, то не в усіх машин один оберт кривошипа відповідає одному циклу.

Якщо для кулісного механізму поперечно-стругального верстата період усталеного руху /час циклу/, дорівнює часу одного оберту кривошипа, то в одноциліндровому чотиритактному двигуні внутрішнього згоряння час одного циклу дорівнює часу двох обертів кривошипа, бо тільки за два оберти кривошипа рушійна сила /сила тиску газів у циліндрі/ досягне свого початкового значення, пройшовши через максимум і мінімум.

Розглянемо докладніше роботу одноциліндрового чотиритактного двигуна, в якому робоча суміш стискується і згоряє лише з одного боку поршня /рис. 6.1/.

У двотактному одноциліндровому двигуні внутрішнього згорання /коли згорання робочої суміші відбувається з обох боків поршня/ з одного боку поршня спостерігається розширення /згорання суміші/, з другого - стиск. Період циклу дорівнює часу одного оберту кривошипа. Коливання швидкості /прискорення/ і сили тиску на поршень проходить за один оберт кривошипа. У багатциліндрових двигунах період циклу може дорівнювати якійсь частці часу одного оберту кривошипа.

Коливання швидкостей машини, за яких швидкості всіх ланок машини в усіх положеннях мають цілком визначені цикли, після закінчення яких ці швидкості досягають свого початкового значення, називаються періодичними коливаннями швидкостей /рис. 6.2/.

Крім періодичних коливань швидкостей, при роботі машини виникають неперіодичні /аперіодичні/ коливання /рис. 6.3/ швидкостей, що викликаються раптовим скиданням навантаження чи вимкненням нового. Ці коливання особливо відчутні, коли від одного двигуна приводиться в рух кілька технологічних машин, які то вмикаються, то вимикаються і при цьому то зростають, то зменшуються сили технологічного опору, збільшуються або зменшуються рухмі /а отже, і зведені/ маси. Такі коливання виникають через нерівномірність технологічних процесів /неоднорідність гірничих порід чи інших матеріалів, що транспортуються, коли матеріал поступає або скидається нерівномірно/. Коливання швидкостей обох типів небажані з причин, на які вказувалося на початку лекції, тому мають регулюватись у межах допустимих значень, щоб забезпечити надійну роботу машини, з точки зору її динаміки і виконання технологічних процесів.

Регулювання періодичних змін швидкостей здійснюється з допомогою додаткової маси, насадженої на ланку, що обертається навколо власної осі, і названої маховою масою, або маховиком.

Схематично зменшення амплітуди коливань кутової швидкості ведучої ланки можна пояснити так. Якщо амплітуда коливань кутової швидкості машини без маховика дорівнювала  $A$ , то після встановлення маховика на вал машини, вона зменшилася до значення  $A_m$ . Це сталося тому, що при зростанні кутової швидкості машини зростає кінетична енергія машини витрачається на розгін маховика. Маховик акумулює цю енергію, кутова швидкість головного вала машини зменшується. Коли ж кутова швидкість починає падати нижче середньої

I такт - впуск  
 (всмоктування робочої суміші);  
 II такт - стиск (робочої суміші);  
 III такт - розширення (згоряння  
 робочої суміші - робочий хід);  
 IV такт - випуск (вихлоп суміші)

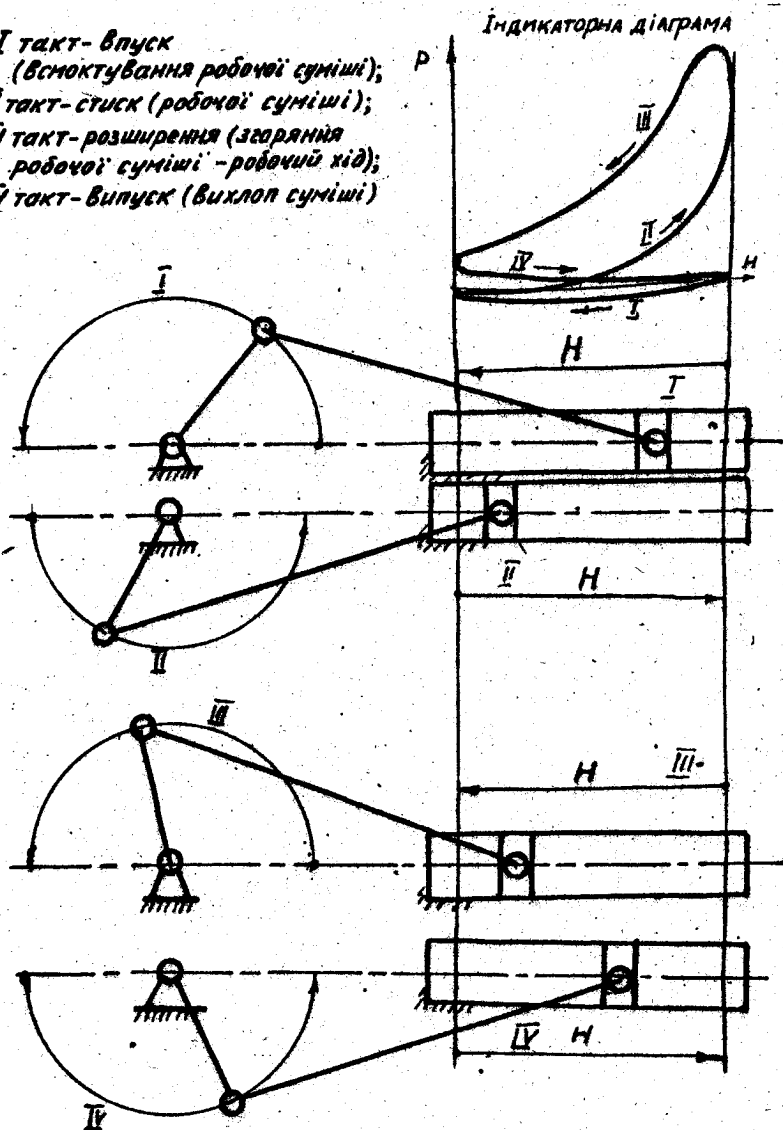


Рис. 6.1

лінії, нагромаджена маховиком кінетична енергія повертається до системи, падіння кутової швидкості зменшується, кутова швидкість не падає до  $A_N$  /див. рис. 6.2/: Внаслідок цього амплітуда  $A_M$  буде значно меншою за  $A$ . Тому маховик доцільніше називати не акумулятором, а регулятором швидкості.

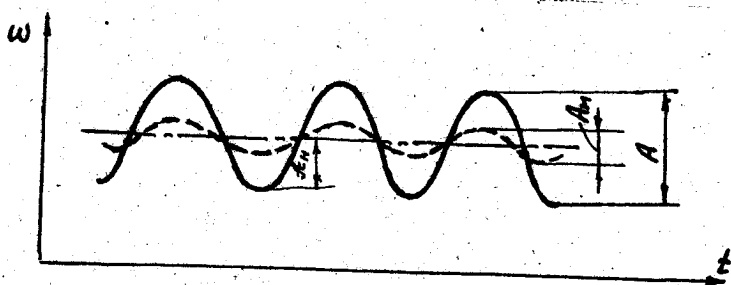


Рис. 6.2

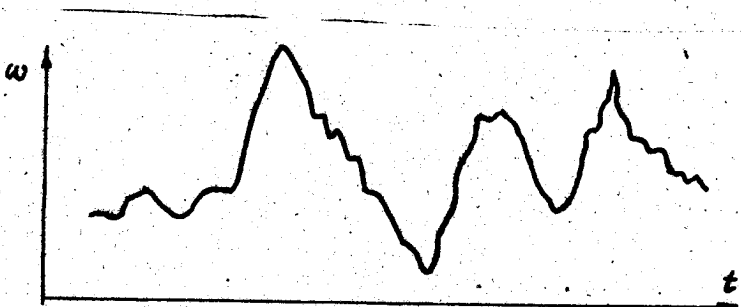


Рис. 6.3

Точне математичне пояснення впливу додаткової маси на нерівномірність руху машин з урахуванням змін кінетичної енергії і мас машини дано при визначенні моменту інерції маховика. Згладити коливання кутової швидкості при аперіодичному русі з допомогою маховика не можна, бо для зменшення великих амплітуд коливань потрібна велика махова маса, на розкручування якої витрачається багато енергії /рис. 6.3/.

Тому регулювання аперіодичних коливань здійснюють з допомогою особливих пристроїв-регуляторів. Зараз відокремилася ціла галузь

науки з регулювання машин і процесів. Основи теорії регулювання руху механізмів закладені в працях російського вченого І.В.Вишнеградського. У курсі теорії механізмів і машин розглянемо відцентровий регулятор, яким Уатт уперше здійснив практичне регулювання роботи парової машини.

### 6.1. Нерівномірність руху машини

Рівномірність руху ланок машини є однією з важливих умов найвигіднішого використання механізмів. Але в машинах дійсні швидкості далекі від постійних. Як уже згадувалося, кутова швидкість ведучої ланки, що найчастіше вибирається за ланку зведення, навіть у межах часу циклу не постійна, а коливається близько середнього значення. При розгляді коливань зручно мати лінію відліку. Вивчаючи нерівномірність руху, користуються середньою кутовою швидкістю, тим паче що її значення задають при проектуванні нових машин. Розрізняють кілька визначень середньої кутової швидкості.

Справжньою середньою кутовою швидкістю при обертовому русі називають таку кутову швидкість рівномірного руху, за якої ведуча ланка опише кут, що дорівнюватиме куту її повороту за той самий проміжок часу при нерівномірному русі. Кут у радіанах  $\Phi$ , на який повернеться ведуча ланка за період  $T$ , називається кутовим періодом.

Справжня середня кутова швидкість

$$\omega_{с.с} = \frac{\Phi}{T}; \quad \Phi = \int_0^T \omega dt. \quad /6.1/$$

Кутовий період  $\Phi$  пропорційний площі  $F$ , обмеженій /рис. 6.4/ кривою кутової швидкості  $\omega$ , записаною за період  $T$  у функції часу  $t$ . Тахограму можна записати тахометром або осцилографом, а площину  $F$  можна виміряти в допоміжній планіметрі.

Оскільки

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega}, \quad T = \int_0^T dt = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\omega}.$$

Тоді

$$\omega_{с.с} = \frac{\Phi}{\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\omega}}. \quad /6.2/$$

Графічне визначення описано в [7].

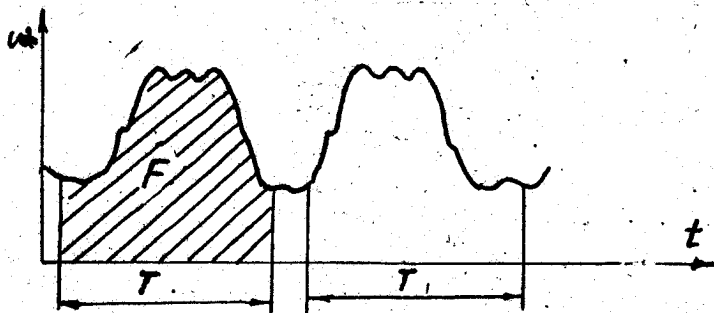


Рис. 6.4

Іноді справжня кутова швидкість визначається числом обертів за хвилину

$$\omega_{с.с} = \frac{\pi n}{30}, \quad /6.3/$$

які вважаються сталими.

Якщо немає даних для визначення справжньої кутової швидкості, користуються середньоарифметичною кутовою швидкістю

$$\omega_c = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}. \quad /6.4/$$

Середню кутову швидкість беруть такою, що дорівнює номінальній, тобто швидкості, яка пропонується у паспорті двигуна чи робочої машини.

Користуючись машиною та регулюючи її, треба знати, в яких межах допускається робочим процесом машини зміна кутової швидкості  $\omega$ .

Різниця найбільшої і найменшої за цикл кутових швидкостей

$$\Delta = \omega_{max} - \omega_{min}. \quad /6.5/$$

називається абсолютною нерівномірністю руху машини. Але вона не дає уявлення, чи допустима ця нерівномірність руху для даної машини залежно від кутової робочої швидкості.

Нерівномірність руху машини характеризується коефіцієнтом  $\delta$  - відношенням абсолютної нерівномірності до середньої кутової швидкості:

$$\delta = \frac{\Delta}{\omega_c} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c}. \quad /6.6/$$



Практично встановлено допустимі для машин даного типу значення коефіцієнта нерівномірності руху машини, що подаються в технічних довідниках. Далі наведено їх значення для деяких типів машин.

Устаткування	$\delta$
Насоси	1/5 - 1/30
Металорізальні верстати	1/5 - 1/50
Сільськогосподарські машини	1/5 - 1/50
Ткацькі, поліграфічні машини	1/10 - 1/50
Паперообробні машини	1/60 - 1/100
Двигуни внутрішнього згорання	1/80 - 1/100
Компресори	1/50 - 1/100
Електричні генератори постійного струму	1/100 - 1/200
" " змінного струму	1/200 - 1/300
Турбогенератори та авіаційні двигуни	1/200 і менше

Розв'язавши спільно рівняння /6.4/ і /6.6/, визначимо найбільше і найменше значення кутової швидкості машини:

$$\omega_{max} = \omega_c \left(1 + \frac{\delta}{2}\right); \quad /6.7/$$

$$\omega_{min} = \omega_c \left(1 - \frac{\delta}{2}\right). \quad /6.8/$$

Коефіцієнтом нерівномірності руху машини зручніше користуватися при графічних розрахунках, при аналітичних - краще користуватися так званою мірою нерівномірності, щоб уникнути трансцендентних рівнянь.

Мірою нерівномірності є величина, що визначається за формулою

$$\Delta' = \frac{1}{\phi} \int_0^{\phi} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 d\varphi. \quad /6.9/$$

тобто міра нерівномірності - це середній квадрат відхилення кутової швидкості від її середнього значення.

Між коефіцієнтом нерівномірності руху машини та її мірою нерівномірності немає певної залежності у зв'язку з відмінню їх визначення.

Коефіцієнт нерівномірності руху машини характеризує тільки перелад кутової швидкості ланки зведення в межах максимального та мінімального значень, а не динаміку руху ланки зведення в середині одного повного циклу режиму усталеного руху. Це можна наочно показати

на двох графіках залежності кутової швидкості  $\omega$  від кута повороту зведеної ланки /рис. 6.5/.

На рис. 6.5,а показано графік  $\omega = \omega(\varphi)$ , на рис. 6.5,б - зміну кутової швидкості другої ведучої ланки від кута повороту, на тому самому куті повороту. В обох випадках середні, максимальні та мінімальні значення однакові, а отже, і коефіцієнти їх нерівномірності однакові. Але в другому випадку кутова швидкість зростає швидше - частота в два рази більша, і кутове прискорення  $\epsilon$  значно більше. Це показано на нижніх графіках. А оскільки більші прискорення, то більші й динамічні напруження в кінематичних парах.

Таким чином, за однакових коефіцієнтів нерівномірності динамічні характеристики різні.

Порівняльну оцінку динамічних особливостей механізму чи машини в період усталеного руху можна охарактеризувати коефіцієнтом динамічності  $x$ , що визначається як відношення екстремального /найбільшого/ значення кутового прискорення  $\epsilon_{ext}$  до квадрата середньої кутової швидкості  $\omega_c^2$ :

$$x = \frac{\epsilon_{ext}}{\omega_c^2} \quad /6.10/$$

Помножимо чисельник і знаменник /6.10/ на середнє значення зведеного моменту інерції  $J_{3c}$ . Дістанемо

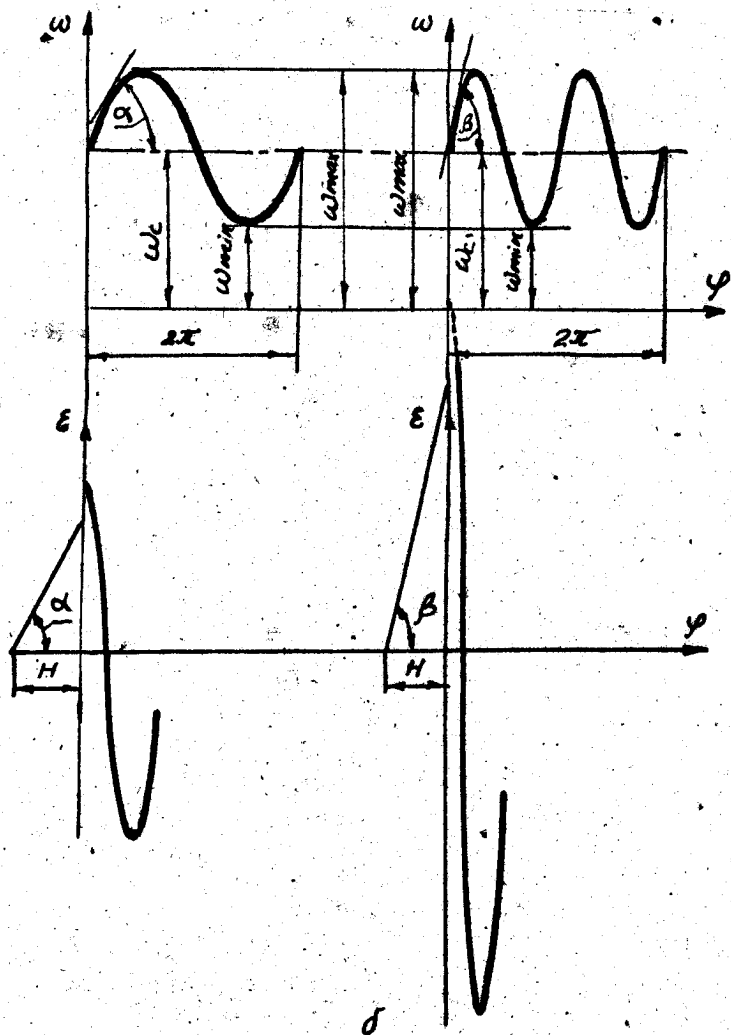
$$x = \frac{J_{3c} \epsilon_{ext}}{J_{3c} \omega_c^2} = \frac{M_{ext}}{2T} \quad /6.11/$$

Таким чином, коефіцієнт динамічності дорівнює відношенню екстремального моменту  $M_{ext}$ , зведеного до повної ланки, до подвоєної величини кінетичної енергії механізму. Коефіцієнт динамічності  $x$  в усталеному русі механізму /див. рис. 6.5,б/ більший за коефіцієнт динамічності механізму, режим руху якого зображено на рис.6.5а за однакової величини зведеного моменту інерції  $J_{3c}$ .

## 6.2. Вплив додаткової маси /маховика/ на нерівномірність руху машини в усталеному русі

Розглянемо, як впливає маховик при періодичному регулюванні руху машини. Маховик, як правило, встановлюють на ланці зведення /у більшості випадків - ведучій/ чи головному валу машини.

Привначення маховика - зменшення коефіцієнта нерівномірності руху до наперед заданої, допустимої для даної машини, величини.



PRO. 6.5

Для вивчення можливих засобів зменшення коефіцієнта нерівномірності руху машини при заданому законі зміни зовнішніх сил скористаємось основним рівнянням руху машини /у вигляді зміни кінетичної енергії/:

$$J \frac{\omega^2}{2} - J_0 \frac{\omega_0^2}{2} = A_p - A_0 = \int_0^{\varphi} M_p d\varphi - \int_0^{\varphi} M_0 d\varphi = \int_0^{\varphi} (M_p - M_0) d\varphi = A_n(\varphi), \quad /6.12/$$

де  $A_n(\varphi)$  - надлишкова робота.

Якщо знехтувати зміною зведеного моменту інерції, тобто покласти  $J_0 = J = const$ , можна вважати, що найбільші та найменші кінетичні енергії відповідають максимальному  $\omega_{max}$  і мінімальному  $\omega_{min}$  значенням кутових швидкостей ланки зведення. Тоді основне рівняння руху машини матиме вигляд

$$\begin{aligned} J \frac{\omega_{max}^2}{2} - J \frac{\omega_{min}^2}{2} &= J \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2} = \\ &= J \left( \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \right) (\omega_{max} - \omega_{min}) = \\ &= J \left( \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \right) \left( \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \right) (\omega_{max} - \omega_{min}) = \\ &= J \left( \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \right)^2 \left( \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c} \right) = \\ &= J \omega_c^2 \delta = \int_0^{\varphi} (M_p - M_0) d\varphi = A_{max}(\varphi), \quad /6.13/ \end{aligned}$$

де  $A_{max}(\varphi)$  - найбільше значення надлишкової роботи, що перетворюється на кінетичну енергію механізму і залежить від законів зміни роботи рушійних сил та сил його опору, тому для даного режиму роботи машини вважається незмінним;  $J \omega_c^2 \delta$  - найбільша зміна кінетичної енергії, вираженої через  $J, \omega_c, \delta$ , дорівнює найбільшому значенню надлишкової роботи.

Оскільки середня кутова швидкість  $\omega_c$  і надлишкова робота  $A_{max}(\varphi)$  задані для даної машини та даного режиму її роботи, єдиним вільним параметром, який можна міняти для забезпечення встановленого практиком коефіцієнта нерівномірності руху машини, є зведений момент інерції:

$$\delta = \frac{A_{max}(\varphi)}{J \omega_c^2}. \quad /8.14/$$

Якщо коефіцієнт нерівномірності руху машини  $\delta$  виявиться більшим за допустимий для машини даного типу, треба збільшити момент інерції машини, встановивши на ведучій ланці додаткову масу у вигляді маховика. Коли кутова швидкість головного вала машини значно зростатиме, кінетична енергія маховика також зростатиме /маховик нагромаджуватиме й акумулюватиме кінетичну енергію, кутова швидкість не досягне рівня, що був без маховика/. Коли ж кутова швидкість почне падати, нагромаджена енергія повертатиметься до системи, і кутова швидкість не впаде до такого низького рівня, як було без маховика.

Коефіцієнт нерівномірності руху машини та амплітуда коливань кутової швидкості зменшуються. Проте досягти рівномірного руху машини з допомогою маховика не вдається, та й прагнути до цього не треба. Дійсно, робота рушійних сил і сил опору

$$\int_0^{\varphi} (M_p - M_o) d\varphi = J\varepsilon, \quad /6.15/$$

де  $\varepsilon$  - кутове прискорення.

Кутове прискорення при рівномірному русі дорівнює нулю:

$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\varphi} (M_p - M_o) d\varphi}{J} = 0.$$

Зрозуміло, що  $\varepsilon$  прямуватиме до нуля, коли  $J$  прямуватиме до нескінченності / $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $J \rightarrow \infty$ /, що практично здійснити неможливо. Тому момент інерції маховика треба вибрати такого мінімального значення, за якого коефіцієнт нерівномірності руху стає допустимим для цих машин.

### 6.3. Визначення моменту інерції маховика за діаграмою $T - J$ . Метод Віттенбауера

Цей принципово точний метод визначення махового моменту з допомогою зведених до головного вала робіт і мас, запропонований Віттенбауером 1923 року в класичній роботі "Графічна динаміка" /W. Wittenbauer. *Graphische Dynamik*. Berlin, 1923. - P. 797/ замість наближеного методу Родінгера. Новий метод графічного визначення моменту інерції маховика не містить ніяких припущень і розв'язує задачу для найзагальнішого випадку руху. У цьому його перевага.

Для виконання роботи мають бути задані:

- 1/ конструкція машини без маховика;
- 2/ сили рушійні та опору;

3/ середня кутова швидкість головного вала;

4/ коефіцієнт нерівномірності руху машини.

Повернемося до теоретичних відомостей. Запишемо основне рівняння динаміки у вигляді кінетичної енергії:

$$J \frac{\omega^2}{2} - J_0 \frac{\omega_0^2}{2} = A_p - A_0 = \int_0^{\varphi} (M_p - M_0) d\varphi = A_{\text{надл}}(\varphi),$$

$J \frac{\omega^2}{2} = T$  - кінетична енергія машини на кінцевому відрізку часу;

$J_0 \frac{\omega_0^2}{2} = T_0$  - кінетична енергія на початковому відрізку часу;

$T - T_0 = A_{\text{надл}}(\varphi)$  - надлишкова робота, що перетворюється на кінетичну енергію.

Звідси кінетичну енергію в будь-який час можна визначити, з одного боку, як суму кінетичної енергії в початковий момент і надлишкової роботи зовнішніх сил  $A(\varphi)$ , виконаної рушійними силами та силами опору за час повороту рухомої ланки на кут  $\varphi$ ,

$$T = T_0 + A(\varphi). \quad /6.16/$$

З іншого боку,

$$T = J \frac{\omega^2}{2}. \quad /6.17/$$

Як відомо, кінетична енергія і зведений момент інерції є функціями положення ведучої ланки /кута її повороту і від її кутової швидкості не залежать. Це дає змогу виключити кут і знайти функціональну залежність між кінетичною енергією та зведеним моментом інерції машини. Якщо кінетична енергія і момент інерції, як функції кута повороту ведучої ланки чи головного вала, зображено графічно, то й виключення параметра  $\varphi$  виконується графічно. Для цього треба виконати розрахунки та побудувати графіки. Спочатку з допомогою формул, виведених у розд. "Зведення мас, сил і моментів" /формула /5.12/ для дванадцяти положень кривошипа визначимо зведений момент  $M_{36}$  сил корисного опору, ваги та тертя /іноді останніми нехтують/ і будемо графік  $M_{к.о}$  /рис. 6.6/. Якщо в 12 планів швидкостей, то з допомогою вахала Лувовського визначимо зрівноважувальну силу в точці  $A$  пальця кривошипа від сил корисного опору та сил ваги кожної ланки для 12 положень. Множимо зрівноважувальну силу /взяту зі знаком "-" на радіус кривошипа,  $m$ , і дістаємо зведений до кривошипа момент сил опору та ваги. Слід пам'ятати, що при визначенні зрівноважувальної сили чи зведеного момента не враховуються сили й моменти сил інерції,

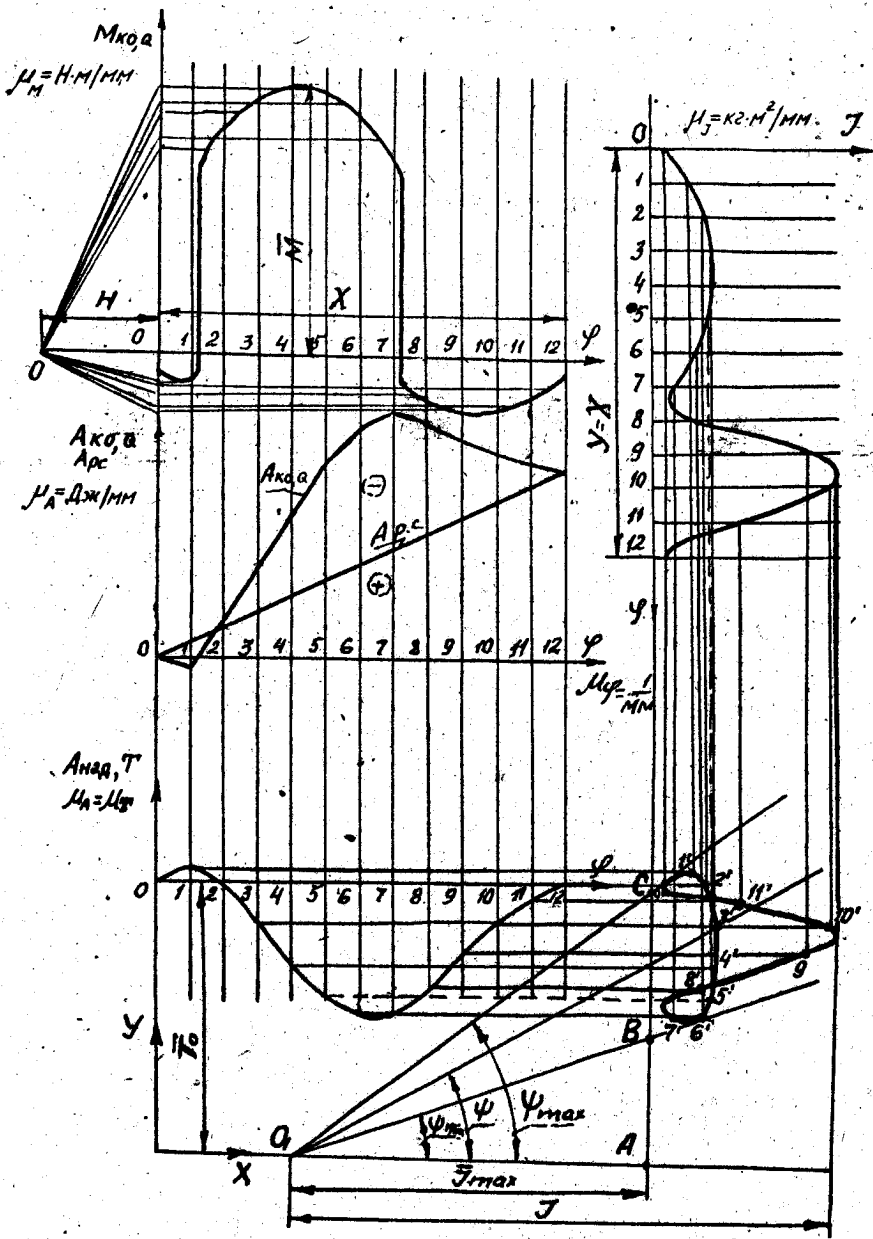


Рис. 6.6

а також реакції в кінематичних парах, оскільки вони не входять до рівняння руху машини у вигляді кінетичної енергії, яке покладене в основу визначення махової маси маховика. Аналогічно знаходимо зведений момент рушійних сил і будемо графік їх моментів. Якщо момент рушійних сил визначити неможливо, задачу розв'язують наближено, вважаючи, що і момент, і робота рушійних сил змінюються за лінійним законом. Про це йтиметься пізніше. Графічно інтегруючи за  $\varphi$  момент зведених сил, будемо графік робіт сил опору та ваги. Графічно інтегруючи за  $\varphi$  зведений момент рушійних сил, будемо графік їх роботи під графіком сил опору й ваги у такому самому масштабі.

Якщо ж рушійні сили не задані чи невідомі, і немає значень їх моментів, наближено вважають, що момент і робота рушійних сил змінюються за лінійним законом.

З'єднуємо на графіку робіт сил опору і ваги початкову та кінцеву точки прямою лінією /0 і 12' положення/, оскільки за час циклу робота рушійних сил дорівнює роботі сил опору. Віднявши від ординат графіка роботи рушійних сил ординати робіт сил опору та ваги, будемо графік надлишкової роботи, пам'ятаючи, що робота рушійних сил позитивна, опору - негативна.

Масштабний коефіцієнт кута повороту кривошипа

$$\mu_{\varphi} = \frac{2\pi}{x(\text{мм})}$$

Для одноциліндрового чотиритактного двигуна

$$\mu_{\varphi} = \frac{4\pi}{x(\text{мм})}$$

Масштабний коефіцієнт графіка моментів в сил, Н·м/мм:

$$\mu_M = \frac{M_{\text{max}}}{M_{\text{max}}}$$

де  $M_{\text{max}}$  - максимальне значення зведеного момента сил, Н·м;  
 $M_{\text{max}}$  - відповідна максимальна ордината на графіку моментів в, мм.

Масштабний коефіцієнт графіка робіт, Дж/мм:

$$\mu_A = \mu_M \mu_{\varphi}; \quad (\mu_M = \frac{M_A}{M_{\text{max}} \mu_{\varphi}})$$

де  $H$  - половина відстань.



Оскільки залишкова робота перетворюється на кінетичну енергію,  
то

$$\mu_A = \mu_T.$$

Визначаємо зведений до кривошипа момент інерції машини без маховика для 12 положень кривошипа:

$$J = \sum_1^K m_i \left( \frac{v_i}{\omega_i} \right)^2 + \sum_1^K J_{s_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2.$$

Графік моменту інерції машини будемо як функцію кута повороту кривошипа, розмістивши вісь  $\psi$  перпендикулярно до осі  $x$  на попередніх графіках, зберігши масштабний коефіцієнт  $\mu_\psi$  таким самим, що й на графіку  $A$ :  $x = \psi$ ;  $\mu_\psi = \frac{J(\text{кг}\cdot\text{м}^2)}{J(\text{мм})}$ .

Установлення залежності  $T-J$  /побудову діаграми Віттенбауера/ виключенням параметра  $\psi$  графічним способом виконуємо так. Для кожного із значень  $T / A_{\text{над}} \psi /$  у положеннях 0, 1, 2, ..., 12 проводимо горизонтальні лінії до перетину з вертикальними відповідних значень  $J$ . Дістанемо точки 1', 2', ..., 12', які з'єднуємо плавною кривою. Це й є діаграма Віттенбауера  $J-T$ . Зрозуміло, що ця діаграму накреслено для машини без маховика. Такою самою вона залишиться і для машини з маховиком, але початок осей координат для графіка зведеного моменту інерції машини з маховиком  $J$  зсунеться вліво, бо він буде більшим на величину  $\bar{J}_{\text{max}}$  /момент інерції маховика/, а за такої самої кутової швидкості має зрости й кінетична енергія машини завдяки зростанню надлишкової роботи, що перетворюється на кінетичну енергію, тобто її вісь координат опуститься на величину  $T_0$ , тобто початок осей координат діаграми  $T-J$  буде не в точці  $O$ , а в точці  $O_1$ .

Для визначення її положення, а отже, й величини моменту інерції маховика  $\bar{J}_M$  у масштабі  $\mu_J$ , проведемо довільно під кутом  $\psi$  вісь діаграми  $T-J$ . Тоді

$$\text{tg } \psi = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}.$$

Нагадаємо, що на осі  $x$  у масштабі  $\mu_J$  відкладаємо значення моменту інерції машини, зведеного до осі кривошипа, а на осі  $y$  - значення кінетичної енергії /надлишкової роботи/ у масштабі  $\mu_T$ , тому  $\bar{y} \mu_T = T$ , а  $\bar{x} \mu_J = J$ . Звідси, визначивши  $\bar{y}$  і  $\bar{x}$ , дістанемо:

$$\text{tg } \psi = \frac{T}{J} = \frac{T \mu_J}{J \mu_T},$$

/6.18/

звідки

$$\frac{T}{J} = \operatorname{tg} \psi \frac{\mu_T}{\mu_J}. \quad /6.19/$$

Оскільки кінетична енергія визначається як  $T = J \frac{\omega^2}{2}$ , то

$$\frac{T}{J} = \frac{\omega^2}{2}. \quad /6.20/$$

Прирівнюючи значення  $\frac{T}{J}$  із /6.19/ і /6.20/, дістаємо:

$$\operatorname{tg} \psi \frac{\mu_T}{\mu_J} = \frac{\omega^2}{2}.$$

З цього рівняння визначимо значення кута  $\psi$  та кутової швидкості  $\omega$ :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega^2}{2} \frac{\mu_J}{\mu_T}; \quad \omega = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi}.$$

Екстремальні значення кута  $\psi$  та кутової швидкості  $\omega$ :

$$\omega_{\min} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\min}}; \quad /6.21/$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\max}}; \quad /6.22/$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\omega_{\min}^2}{2} \frac{\mu_J}{\mu_T}; \quad /6.23/$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\omega_{\max}^2}{2} \frac{\mu_J}{\mu_T}. \quad /6.24/$$

Провівши під цими кутами дотичні до діаграми Вітгенбауера, на їх перетині знайдемо положення точки  $O_1$ , а з нею і значення моменту інерції маховика  $J_g = \bar{J}_m \mu_J$ , що забезпечить допустимі для даної машини значення коефіцієнта нерівномірності руху машини й колівання кутової швидкості ланки зведення відносно середнього значення  $\omega_c$ . А саме

$$\omega_{\max} = \omega_c \left(1 + \frac{\delta}{2}\right),$$

$$\omega_{\min} = \omega_c \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Тому при визначенні кутів  $\psi$  /а отже, й  $\bar{J}$ / коефіцієнт нерівномірності руху машини  $\delta$  ввійшов до попередньої формули. Числове значення

коефіцієнта нерівномірності руху машини для деяких машин дуже мале /1/50...1/100 і менше/, і в цих випадках точка  $O_1$  перетину дотичних може вийти далеко за межі паперу й навіть дошки, на якій виконуються креслення, і виміряти  $\bar{J}_M$  стане неможливим. Тому дійсне значення моменту інерції маховика можна визначити не через відрізок  $\bar{J}_M$ , а іншим методом. Для цього розглянемо рис. 6.б, з якого видно, що

$$\overline{AC} = \overline{OA} \operatorname{tg} \psi_{\max};$$

$$\overline{AB} = \overline{OA} \operatorname{tg} \psi_{\min};$$

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OA} \operatorname{tg} \psi_{\max} - \overline{OA} \operatorname{tg} \psi_{\min} = \overline{OA} (\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}).$$

Звідом

$$\overline{OA} = \bar{J}_M = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}}. \quad /6.25/$$

Справжнє значення моменту інерції маховика

$$J_g = \bar{J}_M \mu_3 = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}} \mu_3. \quad /6.26/$$

Для одержання точніших результатів краще не обчислювати функції  $\operatorname{tg} \psi_{\max}$  і  $\operatorname{tg} \psi_{\min}$ , а підставити їх аналітичні вирази, використавши формули /3/ і /4/ поля деяких перетворень. Справді,

$$\begin{aligned} J_g &= \bar{J}_M \mu_3 = \frac{\overline{BC} \mu_3}{\frac{\omega_{\max}^2}{2} \frac{\mu_3}{\mu_r} - \frac{\omega_{\min}^2}{2} \frac{\mu_3}{\mu_r}} = \\ &= \frac{\overline{BC} \mu_3}{\frac{1}{2} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) \frac{\mu_3}{\mu_r}} = \frac{\overline{BC} \mu_3}{\frac{1}{2} [(\omega_c^2 (1 + \frac{\delta}{2}))^2 - \omega_c^2 (1 - \frac{\delta}{2})^2]} \frac{\mu_3}{\mu_r} = \\ &= \frac{\overline{BC} \mu_r}{\frac{1}{2} \omega_c^2 [(1 + \frac{\delta}{2})^2 - (1 - \frac{\delta}{2})^2]} = \frac{\overline{BC} \mu_r}{\frac{1}{2} \omega_c^2 (1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} - 1 + \delta - \frac{\delta^2}{4})} = \frac{\overline{BC} \mu_r}{\frac{1}{2} \omega_c^2 2\delta} = \frac{\overline{BC} \mu_r}{\omega_c^2 \delta}, \end{aligned}$$

тобто

$$J_g = \frac{\overline{BC} \mu_r}{\omega_c^2 \delta}.$$

Визначений момент інерції маховика, зведений до вала кривошипа, може бути досить великим. Для зменшення його маси /і розмірів/ до-

цільніше й економічніше встановити маховик не на валу кривошипа, а на валу двигуна, кутова швидкість якого значно більша за швидкість кривошипа. Виходячи з рівності кінетичних енергій маховика на головному валу /валу двигуна/ і на валу кривошипа запишемо

$$J_{н.к} \frac{\omega^2}{2} = J_{н.д} \frac{\omega_д^2}{2},$$

де  $\omega, \omega_д$  - кутова швидкість відповідно кривошипа та двигуна.

Звідси момент інерції маховика, закріпленого на валу двигуна:

$$J_{н.д} = J_{н.к} \left( \frac{\omega}{\omega_д} \right)^2 = J_{н.к} \left( \frac{1}{u_{д.к}} \right)^2 = \frac{J_{н.к}}{u_{д.к}^2}, \quad /6.27/$$

де  $u_{д.к}$  - передаточне відношення від вала двигуна до вала кривошипа.

Передаточне відношення редуктора, що передає рух від двигуна до кривошипа, часто перевищує десять, тому момент інерції маховика на валу двигуна буде в сто разів меншим за момент інерції маховика на валу кривошипа.

#### Розміри маховика

Вважаючи, що маса маховика рівномірно розподілена по колу діаметра  $D$ , і нехтуючи моментом інерції маточини та спиць, як малими порівняно з моментом інерції обода, момент інерції можна визначити за формулою

$$J_{н.к} = mR^2 = \frac{QD^2}{4g},$$

де  $Q$  - вага обода маховика;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

При врахуванні моменту інерції маточини і спиць момент інерції

$$J'_{н.к} = 1,1 J_{н.к}. \quad /6.28/$$

Прирівнявши останню рівність до рівності  $J_{н.к} = \frac{BC \mu_T}{\omega^2 \delta}$ , одержимо

$$QD^2 = \frac{3600g BC \mu_T}{\pi^2 n^2 \delta}, \quad /6.29/$$

де  $n$  - частота обертання ланки зведення,  $\text{хв}^{-1}$ .

Оскільки  $\frac{g}{\pi^2} \approx 1$ , то

$$QD^2 = \frac{3600 \overline{BC} \mu_r}{\pi^2 \delta} \quad /6.30/$$

Діаметр маховика  $D$  здебільшого визначається в конструктивних міркувань, щоб запобігти розриву маховика. Його вибирають таким, щоб колова швидкість на ободі не перевищувала допустимої для матеріалу маховика величини.

#### 6.4. Визначення закону руху ведучої ланки механізму

Маючи діаграми  $T-J$  і  $A_{\text{надл}}-J$  як функції кута повороту ведучої ланки і значення початкової кінетичної енергії  $T_0$ , можна визначити для будь-якого значення кута повороту кривошипа чи ведучої ланки швидкість її кутову швидкість.

А. Користуючись рівністю

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega^2}{2} \frac{J_2}{J_r} \quad /6.31/$$

знаходимо

$$\omega = \sqrt{2 \frac{J_r}{J_2} \operatorname{tg} \psi} \quad /6.32/$$

Кут знаходимо, провівши через точку  $O_1$  і точки діаграми Віттенбауера  $1', 2', 3$  тощо для  $\Gamma_2$  положень кривошипа чи будь-яких інших. Обчисливши  $\omega_1$ , будемо графік їх справжніх значень, тобто встановлюємо закон руху ведучої ланки. Якщо ж є потреба визначити тільки екстремальні значення кутової швидкості ведучої ланки /ланки зведення/, треба скористатися формулами /6.21/ і /6.22/.

Б. Другий спосіб визначення закону руху ведучої ланки випливає з діаграми  $A_{\text{надл}}-J$ .

Дійсно, раніше доведено, що

$$T = T_0 + T_{\text{надл}}(\varphi).$$

З другого боку,

$$T = J \frac{\omega^2}{2}.$$

Звідси

$$\omega = \sqrt{\frac{2[A_{\text{надл}}(\varphi) + T_0]}{J}} \quad /6.33/$$

Визначивши  $A_{\text{мавл}}(\varphi)$ ,  $T_0$  і  $J$  з допомогою діаграми  $A_{\text{мавл}}(\varphi) - J$  для всіх положень кривошипа, знайдемо значення справжньої кутової швидкості ведучої ланки. Ці дані дають змогу наочно показати зміну кутової швидкості  $\omega = \omega(\varphi)$ , тобто як функції кута повороту ведучої ланки.

Закон руху механізму графічним або аналітичним методом має визначатися з урахуванням механічних характеристик машин, які досить різноманітні і є функціями одного чи кількох кінематичних параметрів. У таких машинах, як двигуни внутрішнього згоряння, парові машини, крани, верстати, поршневі насоси та компресори, кривошипні преси, кувальні машини тощо, прикладені до них сили залежать від положення ведучих ланок їх механізмів. В інших машинах рушійні сили або сили виробничого опору залежать від кутової швидкості ведучої ланки.

#### Визначення моменту інерції маховика машини з електричним приводом

У розглянутій задачі динамічного синтезу при визначенні моменту інерції маховика методом Віттенбауера зведені маси та сили є функціями положення ведучої ланки, а отже, й інших ланок механізму. Але в багатьох промислових агрегатах приводом є електродвигуни, момент на роторі яких є функцією кутової швидкості. Не рахуватися з цим, як і з пружністю ланки в приводі, не можна, оскільки вони впливають на ступінь нерівномірності руху машини та величину моменту інерції маховика.

Більшість сучасних стаціонарних машин устатковані такими типами електричних двигунів:

а/ двигунами постійного струму /паралельного, послідовного та змішаного збудження/;

б/ асинхронними двигунами;

в/ синхронними двигунами.

Вибираючи електродвигун, треба керуватися певними рекомендаціями, які залежать від багатьох факторів роботи машини. Двигуни постійного струму з паралельним збудженням, що живляться від джерела незмінної напруги, використовуються для тривалого режиму роботи, коли потрібне широке регулювання швидкостей, наприклад у металорізальних верстатах, листоправильних і прокатних станах, у головних приводах трубопрокатних станів тощо.

Двигуни послідовного збудження широко застосовують в електро-  
 тязі, трамваях і внутрішньозаводському транспорті, самохідних ваго-  
 нах, вагонах-вагах тощо. Двигуни з послідовним збудженням надійніші  
 в експлуатації і мають підвищену переважувальну здатність, тому  
 їх застосовують у приводах важко навантажених кранів. Двигуни змі-  
 шаного збудження застосовуються рідко і витісняються асинхронними.  
 Асинхронні двигуни найчастіше застосовують у промисловості; вони все  
 більше витісняють двигуни постійного струму.

Механічні характеристики двигунів наведено на рис. 3.4-3.6.  
 Докладніше про вибір електродвигунів можна почитати в опецкурсах  
 з електроприводу або в [21].

Момент інерції маховика машини з електричним двигуном починає-  
 мо визначати з побудови графіка моменту сил опору, зведених до вала  
 кривошипів, як у попередній задачі. Потім визначаємо середнє значен-  
 ня моменту опору  $M_c$  за цикл. Для цього обчислюємо площу  $F$ , мм<sup>2</sup>,  
 обмежену кривою  $M_0(\varphi)$  та віссю абсцис, і визначаємо середню ви-  
 соту ординати  $h_c$  графіка моменту сил опору:

$$h_c = \frac{F}{l}, \quad /6.34/$$

де  $l$  - довжина осі абсцис графіка.

Момент опору

$$M_c = h_c \mu M_0, \quad /6.35/$$

де  $\mu M_0$  - масштабний коефіцієнт графіка  $M_0$ .

Потім визначаємо номінальний розрахунковий момент двигуна

$$M_{н.р} = (1,0 \dots 1,3) M_c. \quad /6.36/$$

Коефіцієнт при  $M_c$  беремо більшим для крутіших кривих  $M_c(\varphi)$ ,  
 але таким, щоб  $M_{н.р}$  не перевищував перехідного моменту  $M_{max}$   
 або критичного значення  $M_N$  характеристики двигуна /див. рис. 3.6/.

Особливість розрахунку маховика для машини з електродвигуном  
 полягає в тому, що основою для розрахунків є не ступінь нерівномір-  
 ності  $\delta$ , а мінімальне значення  $\omega_{min}$  кутової швидкості, яка не  
 повинна сягати  $\omega_{min}$  на характеристиці двигуна /відповідає пере-  
 хідному моменту/.

І. Для простоти розрахунку вважатимемо, що змінна частина зве-  
 деного моменту інерції  $\frac{dJ}{dt}$  маси - мала і нею можна знехтувати

Йдеться про  $\frac{dJ}{dt}$  в правій частині диференціального рівняння руху машини/.

$$M_p - M_0 = J \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{2} \frac{dJ}{dt}. \quad /6.37/$$

Вважатимемо, якщо величина змінної частини моменту інерції дорівнює 2-3% сталої, то вважається, що  $J = \text{const.}$

2. Вважатимемо, що права робоча частина характеристики двигуна /на відрізку  $\alpha-\beta$ / змінюється за лінійним законом /див. рис. 3.6/. Але щоб мати характеристику двигуна, показану на рис. 3.6 і 6.7, треба спочатку визначити номінальну розрахункову потужність двигуна, кВт:

$$N_{н.р} = \frac{M_{н.р} n}{975}, \quad /6.38/$$

де  $n$  - частота обертання ланки зведення /в завданні на курсовий проект чи в технічному завданні/, а  $M_{н.р}$  визначаємо за формулою /6.36/. З каталога електродвигунів чи іншого довідника виберемо електродвигун /наприклад, асинхронний/, але такий, щоб номінальна потужність

$$N_n = \frac{N_{н.р}}{\eta},$$

де  $\eta$  - ККД редуктора, який виберемо, або того, що заданий в курсовому проекті. З цього самого каталога виписуємо не тільки номінальну потужність  $N_n$ , але й номінальну частоту обертання  $n_n$ , синхронну  $\omega_c$ , і перевантажувальний коефіцієнт  $\lambda = \frac{M_{max}}{M_n}$ . Потім креслимо праву робочу частину характеристики двигуна, замінивши справжню криву II /яка мало відрізняється від прямої/ прямою лінією, рівняння якої, як відомо, має вигляд

$$M_p = M_0 = M' - \beta \omega, \quad /6.39/$$

$(y = \alpha - \beta x).$

З подібності трикутників  $DOC$  і  $DEK$  знаходимо фіктивний момент  $M'$  /рис. 6.7/:

$$\frac{M'}{M_n} = \frac{\omega_c}{\omega_c - \omega_n}, \quad /6.40/$$

де  $\omega_c$  - синхронна кутова швидкість, за якої момент, що розвиває двигун,  $M = 0$ .



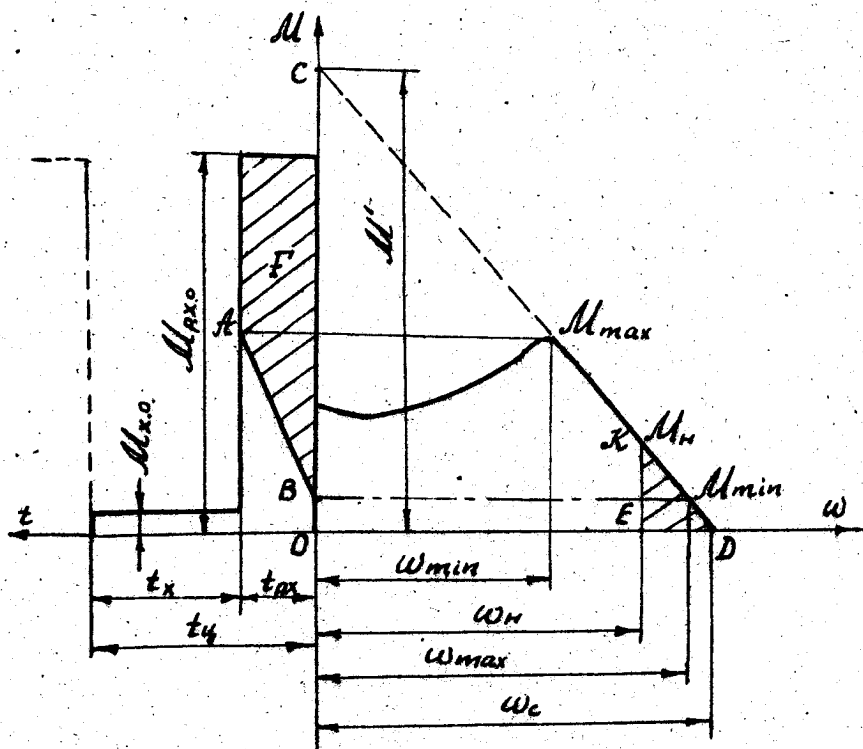


Рис. 6.7

Куттовий коефіцієнт нахилу механічної характеристики двигуна

$$\beta = \frac{M'}{\omega_c} = \operatorname{tg} \beta = M_n \frac{1}{\omega_c - \omega_n} \quad /6.41/$$

Тепер скористаємося рівнянням /6.37/ руху електромашинного агрегату при  $J = \text{const}$ :

$$M_p - M_o = J \frac{d\omega}{dt}$$

або

$$M' - \beta\omega - M_o = J \frac{d\omega}{dt} = M' - M_o - \beta\omega. \quad /6.42/$$

Позначивши  $M' - M_0 = M^0$ , дістанемо

$$M^0 - b\omega = J \frac{d\omega}{dt} \quad /6.43/$$

Інтегруючи це рівняння, слід пам'ятати, що робота електромашинного агрегату в режимі холостого ходу /х/ буде іншою, ніж у режимі робочого ходу /р.х./, оскільки значення сил опору при робочому ході більша, ніж при холостому за однаковим значенням роботи рушійних сил. Тому кутова швидкість ланки зведення зростатиме, бо надлишкова робота при холостому ході  $A_M = A_P - A_0$  буде більшою, і, перетворюючись на кінетичну енергію, збільшуватиме кутову швидкість ланки зведення. Щоб вирівняти швидкість при холостому та робочому ходах, тобто щоб утримати зміни моменту й кутової швидкості в допустимих межах, треба відповідно підібрати момент інерції  $J$  системи. З одного боку, момент інерції  $J$  має бути не меншим за  $J_{р.х.}$  при якому знизилась би кутова швидкість двигуна за час  $t_{р.х.}$  робочого ходу від  $\omega_{max}$  до  $\omega_{min}$ . З другого боку, момент інерції  $J$  не повинен перевищувати  $J_x$ , при якому забезпечується повернення кутової швидкості за час  $t_x$  холостого ходу від  $\omega_{min}$  до  $\omega_{max}$ .

Значення  $J_{р.х.}$  та  $J_x$  визначимо, розв'язуючи рівняння руху для фаз робочого та холостого ходів окремо.

З рівняння /6.43/

$$dt = J \frac{d\omega}{M^0 - b\omega}$$

Інтегруючи з урахуванням першого та другого зауважень, знаходимо:

$$t_{р.х.} = J_{р.х.} \int_{\omega_{max}}^{\omega_{min}} \frac{d\omega}{M_{р.х.}^0 - b\omega}$$

$$t_x = J_x \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \frac{d\omega}{M_x^0 - b\omega}$$

$$J_{р.х.} = \frac{b t_{р.х.}}{b \frac{M_{р.х.}^0 - b\omega_{max}}{M_{р.х.}^0 - b\omega_{min}}}; \quad /6.44/$$

$$J_x = \frac{v t_x}{\rho n \frac{M_x^0 - v \omega_{\min}}{M_x^0 - v \omega_{\max}}} \quad /6.45/$$

Щоб було зручніше користуватися цими формулами, виконаємо деякі перетворення в знаменнику під знаком логарифма, врахувавши рівняння /6.39/, згідно з яким

$$v \omega_{\max} = M' - M_{\min}$$

$$v \omega_{\min} = M' - M_{\max}$$

Але  $M^0 = M' - M_0$ , де  $M_0 = M_{p,x}$  або  $M_0 = M_x$ , тоді

$$M_{p,x}^0 - v \omega_{\max} = M' - M_{p,x} - M' + M_{\min} = M_{\min} - M_{p,x};$$

$$M_{p,x}^0 - v \omega_{\min} = M' - M_{p,x} - M' + M_{\max} = M_{\max} - M_{p,x};$$

$$M_x^0 - v \omega_{\min} = M' - M_x - M' + M_{\max} = M_{\max} - M_x;$$

$$M_x - v \omega_{\max} = M' - M_x - M' + M_{\min} = M_{\min} - M_x.$$

Підставимо ці значення в /6.44/ і /6.45/. Тоді

$$J_{p,x} = \frac{v t_{p,x}}{\rho n \frac{M_{\min} - M_{p,x}}{M_{\max} - M_{p,x}}}; \quad /6.46/$$

$$J_x = \frac{v t_x}{\rho n \frac{M_{\max} - M_x}{M_{\min} - M_x}} \quad /6.47/$$

Для нормальної роботи двигуна допускається

$$M_{\max} = (0,85 \dots 0,9) M_n \lambda$$

$$\left( \lambda = \frac{M_{\max}}{M_n} \right), \quad /6.48/$$

$$M_{\min} = 1,15 M_x. \quad /6.49/$$

Якщо виявиться, що  $J_{p,x} < J_x$ , то момент інерції маховика  $J_M = J_{p,x} - J_{rot} - J_c$ . Якщо  $J_{p,x} > J_x$ , кутова швидкість за час  $t_x$  холостого ходу не відновиться, і необхідно потужність двигуна збільшити, а розрахунки повторити. Це можна пояснити так. Одержані розрахунком  $J_{p,x}$  та  $J_x$  забезпечують зниження та відновлення кутової швидкості за час  $t_x$  холостого ходу. Якщо  $J_{p,x} < J_x$ , для

визначення  $J_M$  у розрахунок беруть  $J_{P,x}$ , тому що за цієї умови кутова швидкість відновиться швидше при  $J_{P,x}$ , що менший за  $J_x$ , тобто кутова швидкість відновиться раніше, ніж закінчиться холостий хід. Якщо ж  $J_{P,x} > J_x$ , для визначення  $J$  не можна брати в розрахунок ні  $J_{P,x}/\omega$  не відновиться за час  $t_x$ , ні  $J_x$  / за час  $t_{P,x}$  кутова швидкість знизиться нижче від допустимої/.

Момент інерції маховика можна визначити графічним методом.

Справді, якщо момент двигуна є функцією кутової швидкості, а момент сил опору - функцією часу, тобто  $M_p = M(\omega)$ , а  $M_0 = M(t)$ , з рівняння руху машини

$$(M_p - M_0) dt = J d\omega.$$

Проінтегрувавши праві й ліву частини, дістанемо:

$$\int_{t_i}^{t_x} (M_p - M_0) dt = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} J d\omega = F J_M \mu_t.$$

звідки визначимо момент інерції маховика через площу  $F$  імпульсу моменту/:

$$J = \frac{F J_M \mu_t}{\omega_{max} - \omega_{min}} \quad /6.50/$$

Визначивши  $M_{max}$  та  $M_{min}$  двигуна за формулами /6.48/ і /6.49/, перенесемо точки, що відповідають  $M_{max}$  і  $M_{min}$  характеристики двигуна на навантажувальний графік /рис. 6.7/, де поставимо точки  $A, B$ . З'єднавши ці точки прямою, дістанемо необхідну площину  $F$ , що зображає імпульс моменту, а підставивши значення  $F$ , мм, у формулу /6.50/, визначимо момент інерції маховика.

Якщо  $M_p = M(\omega)$ ,  $M_0 = M(\varphi)$ , в рівняння руху машини в диференціальній формі можна написати

$$M_p - M_0 = J \frac{d\omega}{dt} \frac{d\varphi}{d\omega} = J \omega \frac{d\omega}{d\varphi},$$

$$(M_p - M_0) d\varphi = J \omega d\omega.$$

Проінтегрувавши праву й ліву частини цього рівняння, дістанемо:

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_x} (M_p - M_0) d\varphi = J \int_{\omega_{max}}^{\omega_{min}} \omega d\omega = J \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2} = F J_M \mu_t;$$

$$J = \frac{2F\mu_m \mu_f}{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2} \quad /6.5I/$$

Площу  $F$  визначимо так само, як і в попередньому випадку, коли  $M_p = M(\omega)$  і  $M_0 = M(t)$ .

Як видно з формул /6.50/, /6.5I/ і побудови графіків, в основі визначення моменту інерції маховика для машини з електродвигуном лежить не приблизний коефіцієнт нерівності  $\delta$ , а границі зміни кутової швидкості двигуна, що регламентуються його характеристикою.

Для машин, в яких навантаження змінюються безперервно, або коли змінна складова зведеного моменту інерції значно відхиляється від середнього значення і нею знехтувати не можна, визначити момент інерції  $J_M$  описаним методом неможливо. Задача ускладнюється і виходить за межі цього курсу.

### 6.5. Дослідження руху машини з допомогою диференціальних рівнянь та рівнянь Лагранжа другого роду

Донині для опису руху машини користувались основним рівнянням динаміки - законом зміни кінетичної енергії машинного агрегату, а справжній рух ведучої ланки визначали, користуючись графіком залежності  $T-J$  або  $A_{надл}-J$ . Наявність швидкодіючих обчислювальних машин дає змогу визначити кінематичні параметри ведучої чи веденої ланки /переміщення, швидкість, прискорення/ з будь-якою наперед заданою точністю, написавши рівняння руху машинного агрегату у формі диференціального рівняння чи рівняння Лагранжа другого роду. Позначимо різницю зведеної рушійної сили  $P_p$  і зведеної сили опору  $P_0$  через  $P$ , тобто  $P = P_p - P_0$ . Тоді їх елементарна робота

$$dA = P ds = dT = \frac{mv^2}{2}, \quad /6.52/$$

оскільки надлишкова перетворюється на кінетичну енергію.

У /6.52/  $ds$  - елементарне переміщення точки зведення;  $m$  - зведена маса, що є змінною величиною, оскільки зведена маса - це функція положення ведучої ланки /шляху  $ds$ /;  $v$  - швидкість точки зведення, що є функцією положення ведучої ланки, а отже, і  $ds$ .

Візьмемо похідну за  $S$  від правої та лівої частин рівняння, пам'ятаючи, що права частина є добуток двох змінних величин:

$$P \frac{ds}{ds} = \frac{dT}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = m \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} + \frac{v^2}{2} \frac{dm}{ds}$$

Але як похідна складної функції,

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dv} \frac{dv}{ds} = \frac{2v}{2} \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{ds} \frac{dt}{dt} = \frac{v}{v} \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} = a,$$

де  $a$  - прискорення ланки зведення.

Таким чином,

$$P = m \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} \frac{dm}{ds} \quad /6.53/$$

Іншого вигляду рівнянню руху машинного агрегату можна надати, якщо скористатися іншою динамічною моделлю, тобто моделлю не із зосередженою, а із розподіленою масою  $J$ . У цьому разі елементарна робота зведених моментів сил

$$dA = (M_p - M_o) d\varphi = T = J \frac{\omega^2}{2} = M d\varphi = T = J \frac{\omega^2}{2}.$$

Знайдемо похідну за  $\varphi$  від обох частин рівняння:

$$M \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{dT}{d\varphi} = M = \frac{d}{d\varphi} \left( J \frac{\omega^2}{2} \right) = J \frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ}{d\varphi}$$

Але

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\omega^2}{2} \right) = \frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\omega} \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{2\omega}{2} \frac{d\omega}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{dt}{dt} = \frac{\omega}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

де  $\varepsilon$  - кутове прискорення ланки зведення.

Отже,

$$M = J \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ}{d\varphi} \quad /6.54/$$

Щоб визначити справжній /істинний/ рух усіх механізмів машинного агрегату, очевидно, досить знайти закон руху ланки, вибраної за ланку зведення, тобто із рівнянь /а/ і /в/ визначити узагальнені /незалежні/ координати ланки зведення як функції часу.

## 6.6. Перманентний і початковий рух машини

Під час руху маси, момент інерції якої дорівнює  $J$ , під дією моменту  $M$  для забезпечення її динамічної рівновати до неї треба прикласти на основі принципу Даламбера момент сил інерції  $M_i = -M$ . Підставивши значення  $M$  із рівняння /6.54/, дістанемо значення моменту сил інерції:

$$M_i = - \left( J \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ}{d\varphi} \right). \quad /6.55/$$

Якщо початкова ланка обертається зі сталою кутовою швидкістю ( $\omega = \text{const}$ ), то  $\frac{d\omega}{dt} = 0$  і момент сил інерції змінюватиметься тільки за рахунок зміни зведеного моменту інерції  $J$ :

$$M_{i.o} = - \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ}{d\varphi}. \quad /6.56/$$

Якщо зведена маса постійна або на початку руху механізму, коли  $\omega = 0$ , то момент сил інерції

$$M_{i.g} = -J \frac{d\omega}{dt} = -J\omega = -J\epsilon. \quad /6.57/$$

Права частина /6.55/ називається зведеним моментом інерції механізму. З урахуванням /6.56/ і /6.57/ зведений момент сил інерції

$$M_i = M_{i.o} + M_{i.g}. \quad /6.58/$$

У зв'язку з цим рух початкової ланки механізму можна розглядати як суму двох рухів, у результаті яких з'являються моменти інерції  $M_{i.o}$  та  $M_{i.g}$ .

Рух з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , в результаті якого з'являються зведені сили інерції, зумовлені зміною зведеного моменту інерції  $J$ , називається основним, або перманентним /від лат. - постійний, незмінний/. А рух початкової ланки, що викликає появу моменту сил інерції  $M_{i.g}$ , називається додатковим, або початковим. Початковий рух відбувається в припущенні, що  $\omega = 0$ .

Розглянемо перманентний і початковий /додатковий/ рух з точки зору кінематики та динаміки. За перманентного руху / $\omega = \text{const}$ / колова швидкість  $v_x = \omega r = \text{const}$ , а колове /лінійне/ прискорення  $a_x = 0$ , оскільки швидкість незмінна. Але прискорення в загальному вигляді складається з чотирьох прискорень: нормального, напрямленого

вдвох радіуса-вектора до його початку /центра обертання маси/, тангенціального, напрямленого перпендикулярно до радіуса-вектора, відносного-релятивного, напрямленого вздовж радіуса-вектора і Коріоліса, напрямленого перпендикулярно до радіуса-вектора  $z_m$ .

За модулем ці прискорення

$$a_m^n = \omega^2 z_m; \quad a_m^t = \varepsilon z_m; \quad a_m^k = 2\omega v^2 \sin \alpha.$$

За перманентного руху  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$ , тому  $a^t = 0$ .

За початкового початкова ланка має  $\omega = 0$ , тому  $a^n = 0$ ;  $a^k = 0$ ; відносне прискорення також дорівнює нулю. Таким чином, за початкового руху ланки і точки механізму мають тільки кутові й тангенціальні прискорення, лінія дії яких збігається з лінією дії відповідних швидкостей.

Розгляд руху механізму, як складеного з перманентного та початкового, запропоновано М.С.Курковським. Можливість розглядати початковий і перманентний рух окремо має велике значення при дослідженні кінематики та динаміки механізмів. Вона дає змогу при кінематичному дослідженні визначити положення, швидкості та прискорення ланок у функції узагальненої координати, а не у функції часу. Справжній /дійсний/ закон зміни узагальненої координати від часу залежить від сил, що діють і виникають у механізмах, і може бути встановлений тільки після динамічного дослідження механізму.

Справді, розв'язуючи разом рівняння /6.57/ і /6.58/, знайдемо кутове прискорення початкової ланки:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M + M_1 \cdot o}{J}$$

Проінтегрувавши його, дістанемо кутову швидкість ведучої ланки, а потім і кут її повороту, оскільки  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ . Звідси інтегруванням знаходимо кут  $\varphi$ .

Знайшовши узагальнену /визалежну/ координату ведучої ланки, зможемо знайти кутові швидкості та прискорення зведеної /будь-якої/ ланки. Якщо кут повороту  $\varphi_K$  будь-якої ланки  $K$  задано у вигляді функції  $\varphi_K = \varphi_K(\varphi)$ , кутова швидкість цієї ланки

$$\omega_K = \frac{d\varphi_K}{dt} = \frac{d\varphi_K}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\varphi_K}{d\varphi} = \omega \omega_{\varphi} = \omega \varphi'_K, \quad /6.59/$$

де  $\omega$  - кутова швидкість початкової ланки, рад/с;  $\omega_{\varphi} = \varphi'_K = \frac{d\varphi_K}{d\varphi}$  - аналог кутової швидкості ланки  $K$ , або її безрозмірна кутова швид-



кість на відміну від розмірної  $\frac{d\varphi}{dt}$  /. Таким чином, справжня кутова швидкість  $\omega_K$  дорівнює добутку кутової швидкості ведучої чи початкової ланки на аналог кутової швидкості  $\omega_\varphi$  ланки  $K$ . Аналоги кутових швидкостей ланок знаходимо через розміри ланок і кути, що отворюють ланки між собою /див. метод замкнених векторних контурів/.

Узявши похідну за часом  $t$  від виразу /6.59/, знайдемо кутове прискорення  $\epsilon_K$  ланки  $K$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_K &= \frac{d\omega_K}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega\omega_\varphi) = \omega \frac{d\omega_\varphi}{dt} + \omega_\varphi \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \frac{d\omega_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \omega_\varphi \frac{d\omega}{dt} = \omega^2 \frac{d\omega_\varphi}{d\varphi} + \epsilon\omega_\varphi = \omega^2 \epsilon\varphi + \epsilon\omega_\varphi = \\ &= \omega^2 \varphi_K'' + \epsilon\varphi_K' = \epsilon_K, \end{aligned} \quad /6.60/$$

де  $\omega$  - задане;  $\epsilon$  знайдемо з формули 6.60.

Аналоги кутових швидкостей ( $\varphi_\varphi = \frac{d\varphi_K}{d\varphi} = \varphi_K' = \omega_K \tau = \frac{\omega_K}{\omega_1} = \frac{\omega_K}{\omega}$ ) та аналоги кутових прискорень ( $\omega_\varphi = \frac{d\omega_K}{d\varphi} = \varphi_K'' = \epsilon_\varphi$ ) не залежать від часу, а залежать тільки від узагальненої координати. Тому їх знаходять геометричними методами через розміри ланок і кути між ними.

### 6.7. Дослідження руху машини з допомогою рівнянь Лагранжа другого роду

Найпростішим і найзручнішим методом складання рівнянь руху механізмів є метод лагранжевих рівнянь. При складанні рівнянь Лагранжа другого роду вважаємо, що рух механізму досліджується в системі узагальнених координат, якими є незалежні параметри, що визначають положення його ланок, наприклад кути повороту початкових ланок відносно нерухомих осей або переміщення деяких точок початкових ланок. Оскільки кількість початкових ланок дорівнює кількості ступенів вільності механізму, то кількість рівнянь Лагранжа дорівнює числу ступенів вільності механізму.

Рівняння Лагранжа другого роду має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial s} = Q \quad /6.61/$$

для першої динамічної моделі, тобто для зведеної зосередженої маси, що рухається поступально чи обертається навколо нерухомої осі на певній відстані від неї.

У /6.61/  $T$  - кінетична енергія механізму, що залежить від маси ланок і швидкостей початкових ланок та їх положення, від яких залежить положення, а отже, і швидкості інших ланок;  $V$  - потенціальна енергія, яка залежить від сил ваги ланок, їх пружності та інших факторів;  $S$  - узагальнена швидкість;  $S$  - узагальнена координата;  $Q$  - узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті  $S$ .

Якщо механізм має один ступінь вільності, то кінетичну енергію цього механізму можна замінити кінетичною енергією маси  $m_A$ , зведеної до початкової ланки. У цьому разі за узагальнену координату беруть переміщення зосередженої маси - точки  $A$  зведення -  $S_A$ , а за узагальнену швидкість - швидкість зведеної маси -  $S_A$ , тобто  $u_A$ . Узагальнена для цієї моделі сила - зведена до точки  $A$  сила  $P$ .

Якщо сили ваги ланок і пружності незначні порівняно з іншими силами, ними нехтують, і рівняння Лагранжа набуває вигляду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q. \quad /6.62/$$

Розв'язуючи рівняння Лагранжа, спочатку беруть частинні похідні від виразу кінетичної енергії за узагальненою швидкістю  $S$ , а потім від здобутого результату беруть похідну за часом  $t$ .

Якщо маса, рух якої досліджується, розподілена й обертається навколо своєї осі, тобто якщо розглядається динамічна модель машини у вигляді розподіленої маси, зведеної до ланки, яка обертається навколо своєї осі, то рівняння Лагранжа записується так:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M. \quad /6.63/$$

У цьому разі за узагальнену координату беремо кут повороту ведучої ланки /ланки зведення/  $\varphi$ . Узагальнена сила в цьому рівнянні дорівнює зведеному до початкової ланки моменту  $M$  усіх сил, що діють на ланки механізму. Узагальнена швидкість  $\dot{\varphi}$  дорівнює кутовій швидкості  $\omega$  ланки зведення. Якщо механізм має два ступеня рухомості /дві ведучі ланки/ або розглядається система двох зведених мас, пишеться два рівняння Лагранжа другого роду.

Для визначення закону руху просторового механізму /наприклад, маніпулятора ПР/ з кількома ступенями вільності пишеться система з  $W$  рівнянь Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial S_i} = Q_i, \quad i=1, 2, \dots, W, \quad /6.64/$$

де  $T$  - кінетична енергія всього механізму;  $S_i$  - узагальнені координати;  $Q_i$  - узагальнені сили;  $W$  - число ступенів вільності, що дорівнює числу рівнянь Лагранжа другого роду.

Розв'язання цю систему рівнянь, визначимо переміщення, швидкість і прискорення ланок механізму, що рухається під дією прикладених до них сил /рушійних і опору/, як функції часу. Визначачи їх, треба пам'ятати, що кінетична енергія механізму  $T$ , яка входить до рівняння Лагранжа, дорівнює сумі кінетичних енергій усіх ланок механізму. І щоб у рівнянні Лагранжа залишити невідомими лише узагальнену швидкість  $\dot{S} / \dot{\varphi} /$  і узагальнену координату  $S / \varphi /$ , при визначенні кінетичної енергії кожної ланки й роботи сил, що діють на неї, треба виразити кутову швидкість  $\omega_k$  кожної ланки через кутову швидкість ланки зведення  $\omega / \dot{\varphi} /$ , а  $S$  - через  $\varphi / \dot{S} /$ . Інакше в рівнянні Лагранжа буде багато невідомих кутових і лінійних швидкостей ланок, їх переміщень і кутів повороту. Тому кутову швидкість кожної ланки виразуємо як добуток  $\omega_k = \omega \frac{d\varphi_k}{d\varphi}$ , де  $\frac{d\varphi_k}{d\varphi}$  - аналог кутової швидкості ланки  $K$ , який виходимо геометричним методом через лінійні розміри ланок, як це ми робили, вивчаючи метод замкнених векторних контурів.

## 7. ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ТА НЕБЕЗОПЕЧІВ МЕХАНІЗМІВ

Під час руху машини у кінематичних парах, крім статичних реакцій, виникають додаткові - динамічні, тиск однієї ланки на іншу передається на станню і фундамент машини. Змінюючись за величинами та напрямом, вони викликають коливання та вібрації машини і фундаменту. Коли частота коливань сили збігається з частотою власних коливань ланки чи фундаменту, настає резонанс, амплітуда коливань останніх безмежно зростає, що призводить до руйнування окремих ланок, механізмів, до аварій. Навіть якщо таких небезпечних явищ немає, додаткові тиски збільшують сили тертя в кінематичних парах, швидко спрацьовуються деталі машин, втрачається точність, продуктивність машини, більше витрачається енергії. Динамічні навантаження в сучасних машинах великі, оскільки багато механізмів працюють на великих швидкостях. Тому перед конструкторами стоїть завдання повного чи часткового зменшення динамічних навантажень зрівноваження окремих ланок або механізмів у цілому. Завдання ускладнюється тим, що механізм є системою рухомих тіл і зменшення додаткових навантажень в одній кінематичній парі рухомих ланок приводить до збільшення їх у другій.

Але реакції в рухомих кінематичних парах, як внутрішні сили не викликають коливань станини та фундаменту.

Вивчаючи розділ зрівноваження механізмів, розглянемо два завдання: 1/ зрівноваження окремих обертових ланок; 2/ зрівноваження механізму в цілому. Якщо перше можна розв'язати майже повністю, то друге частіше розв'язується наближено і зводиться до того, щоб опорні реакції фундаменту не перевищували допустимих значень.

### 7.1. Зрівноважування обертових мас

У сучасних машинах і приладах застосовується велика кількість ланок, що обертаються навколо власної осі. Це, наприклад, вали машин і приладів, шпинделі верстатів, ротори електродвигунів, турбін, центрифуг, колінчасті вали, кулачки, ексцентрики та інші ланки.

Навіть тоді, коли ланка є геометрично правильним тілом обертання /вал, шпиндель, ротор, барабан/, при роботі машини на великих швидкостях виникають значні динамічні навантаження на елементи кінематичних пар, зумовлені неоднорідністю та пористістю матеріалу ланки, неточністю виготовлення і складання вузлів, спрацювання елементів кінематичних пар. Ще більших значень досягають незрівноважені маси і сили в кінематичних парах при обертанні колінчастих валів, кулачків, ексцентриків, дисків з несиметрично розміщеними виступами чи отворами для кріплення інших деталей.

Незрівноважені маси з'являються і при виконанні технологічних процесів або при пошкодженні їх. Так, у деяких технологічних, металургійних, будівельних, текстильних, харчових та інших машинах доводиться зрівноважувати ланки зі змінною масою. Це може бути барабан, з якого змотується або на який намотується дріт, трос, сталеве, текстильне, паперове, ізоляційне стрічка. В інших машинах частота обертання перевищує першу, другу та третю критичні /швидкість, тому ротори турбогенераторів електричних, авіаційних та інших машин стають гнучкими і їх треба зрівноважувати в трьох і більше площинах корекції.

Зрівноважування обертових мас і балансувальній техніці останнім часом надається велике значення у зв'язку зі зростанням швидкостей руху ланок машин. Це одна з особливостей технічного прогресу.

Так, частота обертання багатьох роторів досягає 75 тис., електродвигунів - 100 тис., центрифуг для одержання біологічних емульсій - 500 тис. обертів за хвилину, а окремих деталей текстильних машин -

І млн. хв<sup>-1</sup>. Незрівноважена сила інерції обертової маси, Н,

$$\bar{P}_i = -m\bar{\omega}^2 z = -m \left( \frac{\pi n}{30} \right)^2 z$$

/  $m$  - незрівноважена маса, кг;  $\omega$  - кутова швидкість, с<sup>-1</sup>;  $z$  - радіус обертання, м;  $n$  - частота обертання, хв<sup>-1</sup> / за такої частоти обертання досягає дуже великих значень навіть при незрівноваженій масі, що становить тисячну й меншу частку кілограма, і радіусі обертання в соту частку метра, набагато переважаючи не тільки вагу незрівноваженої маси, а й усієї ланки. Ці додаткові динамічні тиски в кінематичних парах зменшують ресурс підшипників і машин у цілому.

Розглянемо такий приклад:  $m = 0,01$  кг;  $z = 1$  м;

$$1/ n = 30 \text{ об/хв} : \bar{P}_i = -m \left( \frac{\pi n}{30} \right)^2 = -0,01 \left( \frac{3,14 \cdot 30}{30} \right)^2 = -0,1 \text{ Н};$$

$$2/ m = 0,01 \text{ кг}; z = 1 \text{ м}, n = 30000 \text{ хв}^{-1}, \bar{P}_i = -0,01 \cdot \left( 3,14 \frac{30000}{30} \right)^2 = -100000 \text{ Н}.$$

Доведено, що покращання зрівноваження деталей автомобіля на 10% підвищує строк його експлуатації, на 10% - вихідну потужність завдяки зменшенню розсіювання енергії при коливаннях, а раціональне зрівноваження ланок металорізальних верстатів може підвищити їх стійкість і стійкість різального інструмента в 5 разів. Незрівноважені сили викликають вібрацію ланок і машин, шум, погіршують якість технологічних процесів, шкідливо впливають на обслуговуючий персонал.

Проте в деяких технологічних машинах /транспортування шихти в доменних печах, перемішування і трамбування розчинів у будівництві та інших машинах/ вібрації є корисними, але шум цих машин, вплив їх на людей мають бути в допустимих межах.

Тому ОІ.ОІ.75 Комітет Стандартів Ради Міністрів СРСР звів у дію ГОСТ 19534-74 "Балансування вращающихся тел. Термины".

Мірою статичної незрівноваженості, або статичним дисбалансом, що характеризує незрівноваженість, є статичний момент

$$\Delta_c = m z,$$

м.І/

де  $m$  - незрівноважена маса;  $z$  - відстань від осі обертання  $\varphi$ - $\varphi$  до маси.

Для важких валів статична незрівноваженість вимірюється дисбалансом  $D = mz$ , кг·м, для валів, маса яких перебуває в межах від 0,01 до 1000 кг, дисбаланс вимірюється в грамах-міліметрах.

Для порівняння валів з різними масами введено поняття питома незрівноваженість  $e$ . Це незрівноваженість  $\Delta_c$ , мкм, що припадає на 1 кг маси вала:

$$e = \frac{\Delta_c}{m} \quad /7.2/$$

Вона чисельно дорівнює зміщенню, мкм, маси з осі обертання. Динамічна незрівноваженість маси, або динамічний дисбаланс  $\Delta_d$  обертової маси, вимірюється величиною

$$\Delta_d = \sum m_i z_i \rho_i \quad /7.3/$$

де  $\rho_i$  - відстань маси  $m_i$  до площини, що проходить через центр ваги тіла.

### 7.2. Умови зрівноваженості маси, що обертається навколо нерухомої осі

Розглянемо ланку з розподіленою масою, що обертається навколо осі  $y$  з кутовою швидкістю  $\omega$  і кутовим прискоренням  $\epsilon$  /рис. 7.1/. Виділимо на ній елементарну масу  $dm$ , що обертається в площині  $Z'OX'$ . Елементарна маса розміщена в площині  $Z'OX'$ , паралельній площині  $ZOY$ , і обертається, як і вся ланка, з кутовою швидкістю  $\omega$  і кутовим прискоренням  $\epsilon$ . Нормальна складова сили інерції цієї маси  $d\bar{P}_i^n = \omega^2 \rho dm$ , дотична  $d\bar{P}_i^t = \epsilon \rho dm$ . Ці сили відповідно напрямлені вздовж радіуса  $\rho$  і перпендикулярно до нього. Знаходимо проєкції цих сил на осі координат і моменти їх відносно осей координат:

$$1/ \quad d\bar{P}_{ix} = d\bar{P}_{ix}^n + d\bar{P}_{ix}^t = \omega^2 \rho \cos \alpha dm - \epsilon \rho \sin \alpha dm; \quad /7.4/$$

$$2/ \quad d\bar{P}_{iy} = d\bar{P}_{iy}^n + d\bar{P}_{iy}^t = 0. \quad /7.5/$$

Оскільки сили  $d\bar{P}_{iy}^n$  і  $d\bar{P}_{iy}^t$  розміщені в площині, перпендикулярній до осі  $y$ , то  $d\bar{P}_{iy}^n = 0$ ;  $d\bar{P}_{iy}^t = 0$ ;

$$3/ \quad d\bar{P}_{iz}^n + d\bar{P}_{iz}^t = d\bar{P}_{iz} = \omega^2 \rho \sin \alpha dm + \epsilon \rho \cos \alpha dm; \quad /7.6/$$

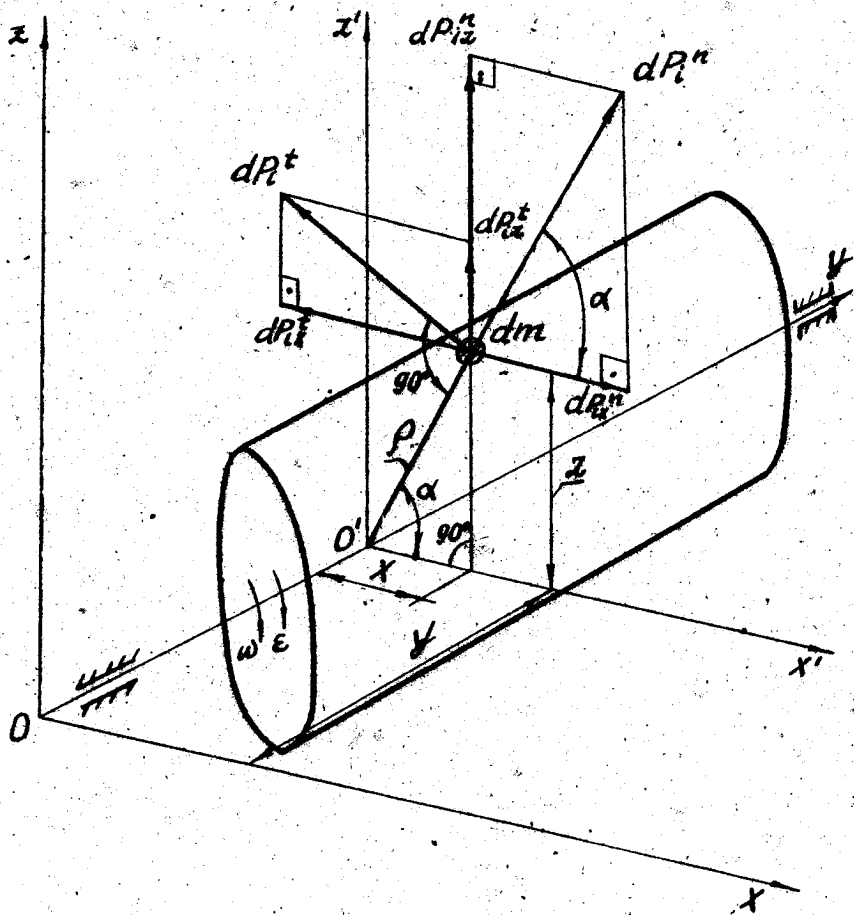


FIG. 7.I

$$a/ dM_{ix} = dP_{iz} y; \quad /7.7/$$

$$б/ dM_{iy} = dP_{ix} z - dP_{iz} x; \quad /7.8/$$

$$в/ dM_{iz} = -dP_{ix} y. \quad /7.9/$$

Вибіраємо знак "+" для моменту, якщо, дивлячись з кінця вектора осі, бачимо, що сила повертає ланку проти годинникової стрілки.

Інтегруючи за всім об'ємом, знаходимо проекції сил інерції на осі координат:

$$P_{ix} = \int dP_{ix} = \omega^2 \int x dm - \varepsilon \int z dm = \omega^2 x_s m - \varepsilon z_s m, \quad /7.10/$$

де  $x = r \cos \alpha$ ,  $z = r \sin \alpha$ ;

$$P_{iy} = 0; \quad /7.11/$$

$$P_{iz} = \int dP_{iz} = \omega^2 \int z dm + \varepsilon \int x dm = \omega^2 z_s m + \varepsilon x_s m, \quad /7.12/$$

де  $x_s, z_s$  - координати центра ваги відносно осі  $y$ .

Підставивши значення  $\omega$  в рівняння /7.7/ - /7.9/, знаходимо моменти сил інерції:

$$M_{ix} = \int dM_{ix} = \omega^2 \int y z dm + \varepsilon \int y x dm; \quad /7.13/$$

$$\begin{aligned} M_{iy} &= \int dM_{iy} = \omega^2 \int x_s z_s dm - \varepsilon \int z^2 dm - \omega^2 \int x_s z_s dm = \\ &= -\varepsilon \int z^2 dm = -\varepsilon \int p^2 dm = -J_y \varepsilon; \end{aligned} \quad /7.14/$$

$$M_{iz} = \int dM_{iz} = -\omega^2 \int y x dm + \varepsilon \int y z dm, \quad /7.15/$$

де  $\int y x dm, \int y z dm$  - відцентрові моменти інерції маси, що обертається навколо осі  $y$ , а  $J_y$  - момент інерції маси відносно осі  $y$ .

Здобуті рівняння дають змогу встановити ті умови, які мають задовольняти рівноважені маси, що обертаються навколо осі  $yy$ :

Результуюча сила інерції

$$\begin{aligned} P_i &= \sqrt{P_{ix}^2 + P_{iz}^2} = \sqrt{\omega^4 x_s^2 m^2 + \varepsilon^2 z_s^2 m^2 + \omega^4 z_s^2 m^2 + \varepsilon^2 x_s^2 m^2} = \\ &= m \sqrt{x_s^2 + z_s^2} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = m p_s \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad /7.16/$$



Оскільки  $m \neq 0$  і  $\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} \neq 0$ , результуюча сила  $P_i$  дорівнюватиме нулю тільки тоді, коли центр ваги ланки лежатиме на осі обертання. Ланка, що задовольняє цим умовам, називається статично зрівноваженою, тобто розміщена в рівновазі під дією сил ваги, навіть за відсутності сил гертя.

Динамічно зрівноваженою називається ланка, в якій, крім сили інерції, дорівнюють нулю й моменти сил інерції:

$$P_i = 0; \quad M_{ix} = 0; \quad M_{iz} = 0.$$

Момент інерції  $\bar{M}_{iy} = -\bar{J}_y \varepsilon$  зрівноважується зовнішніми рушійними силами, а моменти  $M_{ix}, M_{iz}$  можуть бути зрівноважені тільки реакціями, що створюють пару сил. Це буде тоді, коли відцентрові моменти інерції  $\int yx dm = 0; \int yz dm = 0$ , тобто, коли вісь  $y$ - $y$  буде головною віссю інерції. Оскільки до виразів для  $M_{ix}$  і  $M_{iz}$  входять кінематичні параметри  $\omega$  та  $\varepsilon$ , динамічну зрівноваженість ланки можна перевірити тільки при русі ланки, тобто динамічним методом. Статичне зрівноваження ланки виконують на паралельних ножах чи роликах, динамічне - на спеціальних балансувальних машинах чи установках.

### 7.3. Зрівноваження обертових мас, що розміщені в одній площині

У практиці машинобудування часто доводиться зрівноважувати розрахунком обертові маси, що обертаються на одному валі і розміщені в одній площині. Сюди також належать зубчасті колеса, кулачки, шківви, маховики, диски та інші деталі, довжина яких  $l$  значно менша за їх діаметр. У цьому разі досить зрівноважити тільки сили інерції, оскільки моменти сил інерції  $M_{ix} = 0$  і  $M_{iz} = 0$  /маси розміщені в одній площині, тому ордината  $y = 0$ /, а  $M_{iy} = 0$  в усталеному русі, оскільки  $\varepsilon = 0$ ; а в перехідні періоди момент сил інерції зрівноважується зовнішніми силами /моментами/. Таким чином, ці маси зрівноважуються тільки статично.

Незрівноважене тіло на практиці зрівноважують здебільшого з допомогою додаткових мас, що називаються протйвагами /рис. 7.2/.

З урахуванням сили інерції цієї додаткової маси система перебуватиме в статичній рівновазі і результуюча сила інерції дорівнюватиме нулю,

$$\Sigma \bar{P}_i = 0; \quad \bar{P}_{i1} + \bar{P}_{i2} + \bar{P}_{i3} + \bar{P}_{i4} + \bar{P}_{inp} = 0,$$

/7.17/

а багатокутник сил - замкнений. Побудуємо багатокутник сил інерції, значення яких за модулем  $P_i = \omega^2 z_i m_i$ . Скоротивши на  $\omega^2$ , або взявши масштабний коефіцієнт  $\mu_p = \omega^2 \frac{H}{MM}$ , будемо багатокутник сил.

Задавшись допустимим значенням  $z_{доп}$  /таким, щоб він не виходив за габарити деталі/, знаходимо  $m_{доп} = \frac{z_{пр} m_{пр}}{z_{доп}}$ , де значення  $z_{пр} m_{пр}$  взято з плану сил. Зрівноважуючі маси можна не встановлювати, а навпаки, виділяти частину маси деталі. Знімаючи частину маси деталі /наприклад, висвердлюючи її/, перевіряємо зрівноваження з допомогою балансування на ножах. Перекачуючи деталь на ножах і знімаючи частини маси, треба добитися такого зменшення маси в певній точці, поки деталь не зупинятиметься в різних положеннях. Якщо маси не зрівноважені, деталь зупинятиметься незрівноваженою масою внизу, але завдяки тертю то в положенні  $\alpha$ , то в положенні  $\beta$  /рис. 7.3/. Ці положення показують, де треба видаляти масу. Після зрівноваження мас унизу буде мітка то  $\alpha$ , то  $\beta$ , то  $\gamma$ .

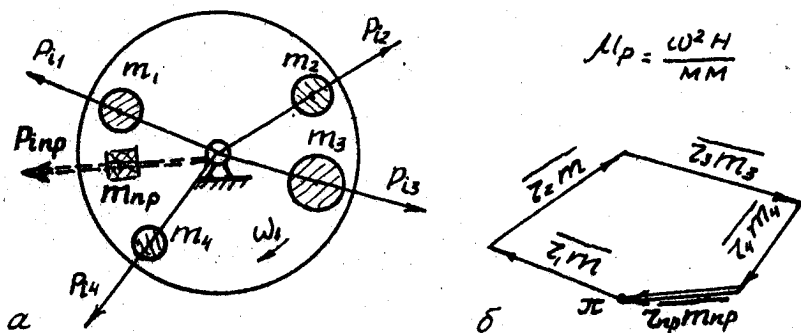


Рис. 7.2

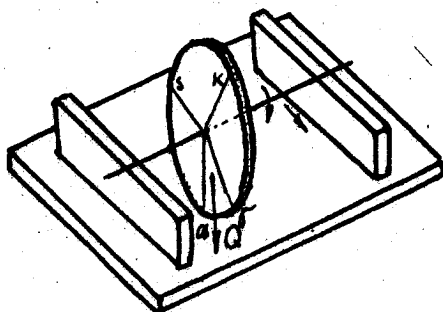


Рис. 7.3

7.4. Зрівноважування обертових мас, що розміщені в різних площинах на одному валу

У цьому разі треба виконувати динамічне зрівноваження мас, щоб результуюча сила і момент дорівнювали нулю:

$$\sum \bar{P}_i = 0; \quad \sum \bar{M}_i = 0.$$

Для цього треба встановити щонайменше дві противаги, щоб їх сили інерції мали момент, зрівноважуючий момент сил інерції незрівноважених мас. Площини  $I-I$  і  $II-II$ , які розміщено перпендикулярно до осі вала, називаються площинами виправлення /рис. 7.4,а/. В них і будуть розміщені противаги  $m_I$  і  $m_{II}$ .

З урахуванням мас противаг  $m_I$  і  $m_{II}$  векторна сума сил інерції  $\sum \bar{P}_i = 0$  матиме вигляд

$$z_1 \omega^2 \bar{m}_1 + z_2 \bar{\omega}^2 m_2 + z_3 \bar{\omega}^2 m_3 + z_4 \bar{\omega}^2 m_4 + z_I \bar{\omega}^2 m_I + z_{II} \bar{\omega}^2 m_{II} = 0. \quad /7.18/$$

Сума моментів відцентрових сил інерції відносно точки  $A$  /для системи, що перебуває в рівновазі, сума моментів сил відносно будь-якої точки дорівнює нулю:

$$z_1 m_1 \bar{a}_1 \omega^2 + z_2 \omega^2 m_2 \bar{a}_2 + z_3 \bar{\omega}^2 m_3 a_3 + z_4 \bar{\omega}^2 m_4 a_4 + z_{II} \bar{\omega}^2 m_{II} a_{II} = 0, \quad /7.19/$$

де  $a_i$  - відстань від площини  $I-I$  /точки  $A$ / до площин, перпендикулярних до осі обертання, в яких розміщені інші маси.

Оскільки в /7.18/ два /останніх/ вектори невідомі, а в другому - один -  $z_{II} \bar{\omega}^2 m_{II} a_{II}$ , то спочатку побудуємо векторний багатокутник за /7.19/. Але поки що невідомо, як спрямовувати вектори моментів сил інерції. Для цього згадаємо з теоретичної механіки, що кожний з векторів моментів відцентрових сил інерції напрямлений перпендикулярно до площини, яка проходить через вісь обертання  $\psi-\psi$  мас і центр ваги маси, що йому відповідає. Згадаємо також: вектор сили інерції  $P_i$  лежить у площині, що проходить через вісь  $\psi-\psi$  і центр ваги  $S_i$  і напрямлений уздовж радіуса  $z_i$ . Тому вектор відцентрового моменту сил інерції  $z_i \omega^2 m_i \bar{a}_i$  напрямлений перпендикулярно до  $z_i$  /і  $P_i$ /. Тому, якщо повернути вектор відцентрового моменту на  $90^\circ$ , він збіжиться з напрямом вектора відповідної сили інерції, тобто буде паралельний відповідному радіусу /рис. 7.5/.

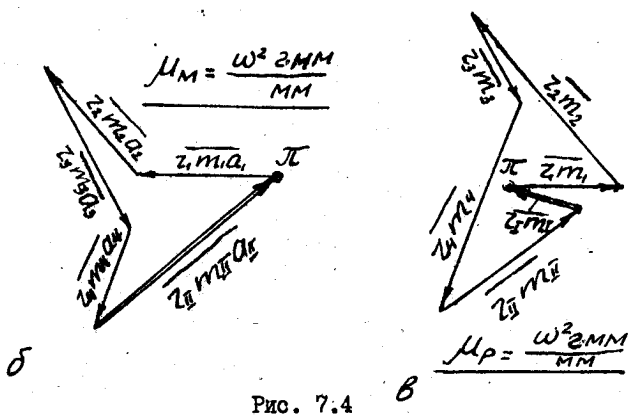
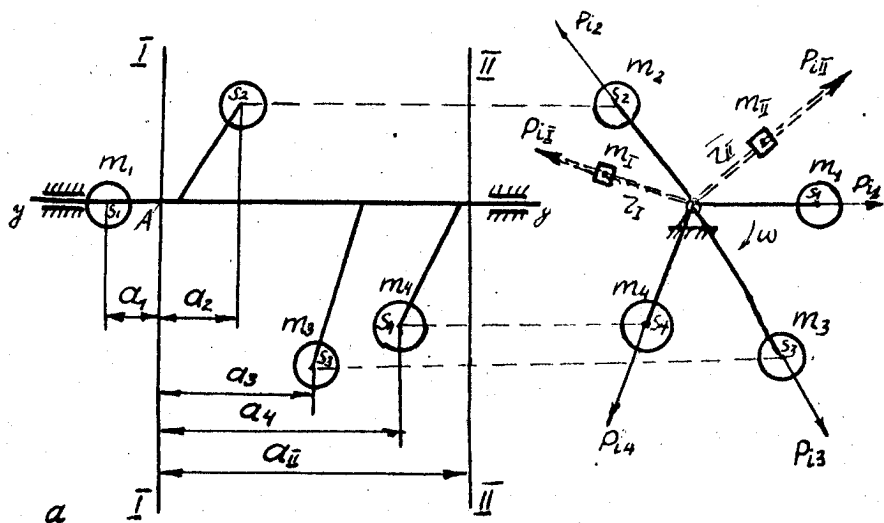


Рис. 7.4

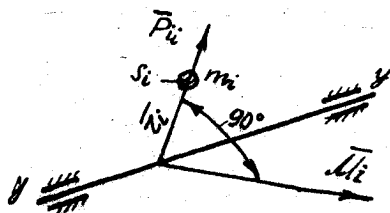


Рис. 7.5

Отже, вектори моментів сил інерції матимуть ті самі напрями, що й відцентрові сили, за винятком вектора  $\overline{z_1 \omega^2 m_1 a_1}$ , який буде напрямлений протилежно силі  $P_{1r}$ , бо сила  $P_{1r}$  повертає систему відносно точки  $A$  проти годинникової стрілки, а всі інші - за годинниковою /див. рис. 7.4, а/.

Узявши масштабний коефіцієнт моменту сил  $\mu_M = \omega^2 \frac{H \cdot M}{MM}$ , побудуємо векторний багатокутник моментів сил. Останній /невідомий/ вектор  $\overline{z_2 m_2 a_2}$  замкне векторний багатокутник. Задавшись допустимим значенням  $z_2$ , знайдемо

$$m_2 = \frac{\overline{z_2 a_2}}{z_2},$$

де  $\overline{z_2 m_2}$  беремо з плану моментів сил /рис. 7.4, б/.

Згідно з /7.18/, задавшись масштабним коефіцієнтом плану сил  $\mu_P = \frac{\omega^2 H}{MM}$ , будуємо багатокутник сил /рис. 7.4, б/, який для системи що перебуває в рівновазі, замикається вектором  $\overline{z_1 m_1}$ . Задавшись допустимим значенням  $z_1$ , знаходимо:

$$m_1 = \frac{\overline{z_1 m_1}}{z_1},$$

де  $\overline{z_1 m_1}$  взято з плану сил.

Провівши через центр  $O$  на схемі механізму лінії, паралельні векторам  $\overline{z_2 m_2}$  і  $\overline{z_1 m_1}$ , і відклавши на них  $z_1$  і  $z_2$ , знаходимо місце розміщення противаг  $m_1$  і  $m_2$ .

## 7.5. Зрівноважування механізмів

Якщо відомо положення центра мас механізму, то, вважаючи масу механізму зосередженою в цьому центрі, можна знайти рівноліячу сил інерції ланок механізму як добуток його маси на прискорення центра ваги. Визначивши центр ваги для кожного з положень ланок механізму, можна зрівноважити його сили інерції. Для плоских механізмів, моменти інерції і моменти рушійних сил та опору яких перебувають в одній площині, таке /статичне/ зрівноваження цілком допустиме, оскільки моменти сил інерції зрівноважуються зовнішніми моментами сил рушійних і опору.

7.6. Визначення спільного центра мас графічним методом

Нехай маса всієї системи

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_i = \sum_1^k m_i,$$

зосереджена в центрі  $S$  її ваги. Векторні рівняння координат системи мас /рис. 7.6/:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 + \bar{y}_1 &= \bar{z}_1; & \bar{x}_3 + \bar{y}_3 &= \bar{z}_3; \\ \bar{x}_2 + \bar{y}_2 &= \bar{z}_2; & \bar{x}_i + \bar{y}_i &= \bar{z}_i; \end{aligned} \quad /7.20/$$

Помножимо обидві частини рівнянь на відповідні маси:

$$\begin{aligned} m_1 \bar{x}_1 + m_1 \bar{y}_1 &= \bar{z}_1 m_1; \\ m_2 \bar{x}_2 + m_2 \bar{y}_2 &= \bar{z}_2 m_2; \\ m_3 \bar{x}_3 + m_3 \bar{y}_3 &= \bar{z}_3 m_3; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ m_i \bar{x}_i + m_i \bar{y}_i &= \bar{z}_i m_i; \end{aligned}$$

$$\sum m_i \bar{x}_i + \sum m_i \bar{y}_i = \bar{m}_1 \bar{z}_1 + \bar{m}_2 \bar{z}_2 + \bar{m}_3 \bar{z}_3 + \dots + \bar{m}_n \bar{z}_n. \quad /7.21/$$

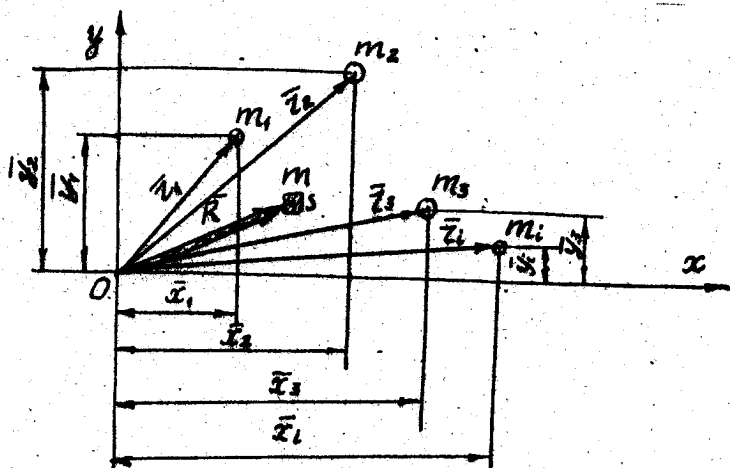


Рис. 7.6

Звідси координати центра ваги  $S$  :

$$x_s = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_s = \frac{\sum m_i y_i}{m}. \quad (7.22)$$

Поділивши і помноживши обидві частини рівняння на  $m$ , дістаємо:

$$m(\bar{x}_s + \bar{y}_s) = \bar{m}_1 z_1 + \bar{m}_2 z_2 + \bar{m}_3 z_3 + \dots + \bar{m}_i z_i,$$

але  $\bar{x}_s + \bar{y}_s = \bar{R}$ . Тому

$$m\bar{R} = \bar{m}_1 z_1 + \bar{m}_2 z_2 + \bar{m}_3 z_3 + \dots + \bar{m}_i z_i. \quad (7.23)$$

Знайдемо графічно суму цих статичних моментів мас - рівнодіячу  $m\bar{R}$ .  
/рис. 7.7/

Зменшимо вектор  $m\bar{R}$  в  $m$  разів і визначимо положення центра ваги системи мас  $S$ , відклавши від точки  $O$  початку координат радіус-вектор  $R$  у напрямі вектора  $m\bar{R}$ .

Але при значній кількості мас і зміні їх положень треба виконати багато розрахунків і графічних робіт для визначення положень центра мас  $S$ . Тому, спираючись на цей метод, розглянемо інший, простіший, з меншим числом розрахунків.

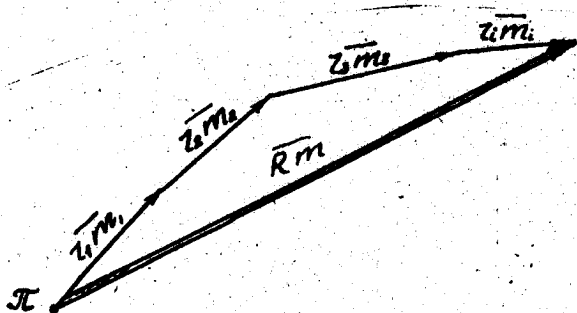


Рис. 7.7

7.7. Визначення положення центра мас  
методом головних векторів /головних точок/

Зобразимо кожний радіус-вектор  $\bar{z}_i$ , що визначає положення центра ваги  $S_i$ , будь-якої ланки механізму, такою сумою векторів:

$$\begin{aligned} z_1 &= \bar{s}_1; \quad \bar{z}_2 = \bar{l}_1 + \bar{s}_2; \quad \bar{z}_3 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{s}_3; \quad \bar{z}_4 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \\ &+ \bar{l}_3 + \bar{s}_4; \quad \bar{z}_n = \bar{z}_{n-1} + \bar{s}_n, \end{aligned} \quad /7.24/$$

де  $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n$  - довжина ланки, подана як вектор;  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n$  - відстань від центра шарніра до центра ваги, подана як вектор /рис. 7.8/;  $n$  - порядковий номер ланки.

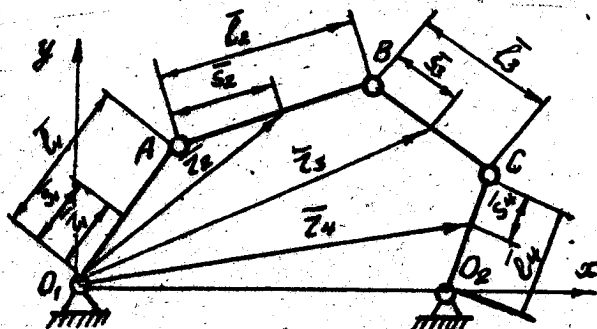


Рис. 7.8

Підставивши значення радіус-векторів  $\bar{z}_i$ , в рівняння /7.23/, дістанемо:

$$\begin{aligned} \overline{mR} &= m_1 \bar{s}_1 + m_2 (\bar{l}_1 + \bar{s}_2) + m_3 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{s}_3) + \\ &+ m_4 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{s}_4) + \dots + m_n (\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \dots + \bar{l}_{n-1} + \bar{s}_n). \end{aligned}$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб спочатку були члени, в яких є  $S_1$ , і довжина першої ланки, потім - члени, в яких є  $S_2$  і довжина другої ланки  $\bar{l}_2$  і т.ін.

$$\begin{aligned} \overline{mR} &= m_1 \bar{s}_1 + m_2 \bar{l}_1 + m_3 \bar{l}_1 + m_4 \bar{l}_1 + \dots + m_n \bar{l}_1 + m_2 \bar{s}_2 + \\ &+ m_3 \bar{l}_2 + m_4 \bar{l}_2 + \dots + m_n \bar{l}_2 + m_3 \bar{s}_3 + m_4 \bar{l}_3 + \dots + m_n \bar{l}_3 + \\ &+ m_4 \bar{s}_4 + \dots + m_n \bar{l}_{n-1} + m_n \bar{s}_n. \end{aligned}$$



Винесемо за дужки  $l_1, l_2, \dots, l_n$ :

$$\overline{mR} = \overline{m_1} s_1 + (\overline{m_2} + \overline{m_3} + \overline{m_n}) \overline{l_1} + \overline{m_2} \overline{s_2} + (\overline{m_3} + \overline{m_4} + \overline{m_n}) \overline{l_2} + \\ + \overline{m_3} \overline{s_3} + (\overline{m_4} + \overline{m_n}) \overline{l_3} + \overline{m_4} \overline{s_4} + \overline{m_n} \overline{l_4} + \overline{m_n} \overline{s_n}.$$

Поділимо обидві частини на  $m$ :

$$R = \frac{\overline{m_1} s_1 + (\overline{m_2} + \overline{m_3} + \overline{m_4} + \overline{m_n}) \overline{l_1}}{m} + \frac{\overline{m_2} \overline{s_2} + (\overline{m_3} + \overline{m_4} + \overline{m_n}) \overline{l_2}}{m} + \\ + \frac{\overline{m_3} \overline{s_3} + (\overline{m_4} + \overline{m_n}) \overline{l_3}}{m} + \frac{\overline{m_4} \overline{s_4} + \overline{m_n} \overline{l_4}}{m}, \quad (7.25)$$

або

$$\overline{R} = \overline{h_1} + \overline{h_2} + \overline{h_3} + \overline{h_4} + \overline{h_n}, \quad (7.26)$$

де

$$\overline{h_1} = \frac{\overline{m_1} s_1 + (\overline{m_2} + \overline{m_3} + \overline{m_4} + \overline{m_n}) \overline{l_1}}{m};$$

$$\overline{h_2} = \frac{\overline{m_2} \overline{s_2} + (\overline{m_3} + \overline{m_4} + \overline{m_n}) \overline{l_2}}{m};$$

$$\overline{h_3} = \frac{\overline{m_3} \overline{s_3} + (\overline{m_4} + \overline{m_n}) \overline{l_3}}{m};$$

$$\overline{h_4} = \frac{\overline{m_4} \overline{s_4} + \overline{m_n} \overline{l_4}}{m};$$

(7.27)

$$\overline{h_n} = \frac{\overline{m_n} \overline{s_n}}{m}.$$

Вектори  $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}, \dots, \overline{h_n}$  називаються головними.

Як видно з визначення, вони мають такі властивості:

а/ головні вектори паралельні відповідним ланкам  $\overline{h_1} \parallel \overline{l_1}, \overline{h_2} \parallel \overline{l_2}$  і т.ін./;

б/ головні вектори за модулем не залежать від положення ланок.

Тому не потрібно при новому положенні ланок їх обчислювати, як у першому графічному методі /достить визначити їх один раз/, а перша властивість дає змогу легко побудувати векторний багатокутник, знайти рівнодіючий вектор  $m\overline{R}$  за модулем і напрямом, а отже, і положення центра мас  $S$ . Це зручно виконати на плані механізму /рис. 7.9/. Спочатку на ланці I із точки  $O_1$  відкладемо головний вектор  $\overline{h_1}$ , потім з його кінця відкладемо вектор  $\overline{h_2}$ , паралельно  $\overline{l_2}$ , потім  $\overline{h_3} \parallel \overline{l_3}, \overline{h_4} \parallel \overline{l_4}$ . З'єднавши точку  $O_1$  з кінцем вектора  $\overline{h_4}$ , дістанемо результуючий вектор  $\overline{R}$ , що визначить не тільки центр мас механізму, але й напрям і величину рівнодіючої сил інерції  $P_i = -m\overline{a}_S$ , де  $\overline{a}_S$  треба обчислити.

Розглянемо для прикладу чотириланковий кривошипно-коромисловий механізм. Визначивши, користуючись формулами /4/, головні вектори  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  і  $\bar{h}_3$ , відкладемо їх, починаючи з точки  $O_1$ . Замикаючий вектор  $\bar{R}$  є радіусом-вектором, що координує центр мас  $S$  /див. рис. 7.9/. Знайшовши прискорення точки  $S$ , визначимо результуючу сил інерції механізму  $\bar{P}_i = -m\bar{a}_s$ , спрямувавши її протилежно напрямку прискорення центра ваги  $\bar{a}_s$ , тобто в напрямі  $\bar{R}$ . Знайти прискорення центра мас важко. Щоб знайти прискорення  $\bar{a}_s$ , треба побудувати механізм, подібний головним векторам. Тоді можна легко визначити  $\bar{a}_s$ .

Формули для визначення головних векторів на перший погляд складні для запам'ятовування. Їх легше запам'ятати, якщо визначити через статичний момент маси  $i$ -ї ланки відносно того шарніра, який ближче до кривошипа, зосередивши в ньому маси ланок, що передували їй, а в центрі ваги ланки  $S_i$  розмістити масу  $i$ -ї ланки  $m_i$ , а в другому шарнірі - маси /суму мас/ всіх наступних ланок. Статичний момент мас  $i$ -ї ланки відносно точки  $C$ , ближчої до кривошипа /рис. 7.10/,

$$m_i s_i + \rho_i \sum_{i+1}^k m,$$

а головний вектор

$$\bar{h}_i = \frac{m_i s_i + \rho_i \sum_{i+1}^k m}{m}.$$

/7.28/

Наприклад, 
$$\bar{h}_2 = \frac{m_2 \bar{s}_2 + \bar{\rho}_2 (m_3 + m_4 + m_n)}{m},$$

де  $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_n$ .

## 7.8. Статичне зрівноваження механізмів

Механізм статично зрівноважений, якщо рівнодіюча сил інерції  $\bar{P}_i = -m\bar{a}_s = 0$  для будь-якого положення механізму. Оскільки  $m \neq 0$ , то для статично зрівноваженого механізму має дорівнювати нулю прискорення центра ваги механізму, тобто  $\bar{a}_s = 0$ . Це можливо в двох випадках:

а/ центр ваги механізму рухається рівномірно /прискорення немає/;

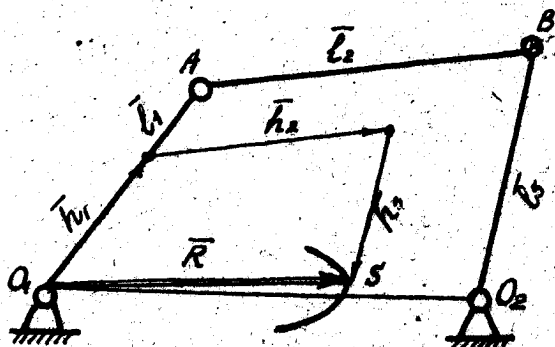


Рис. 7.9

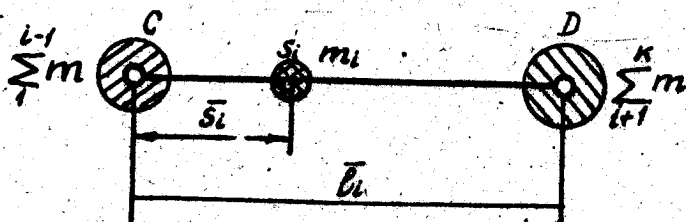


Рис. 7.10

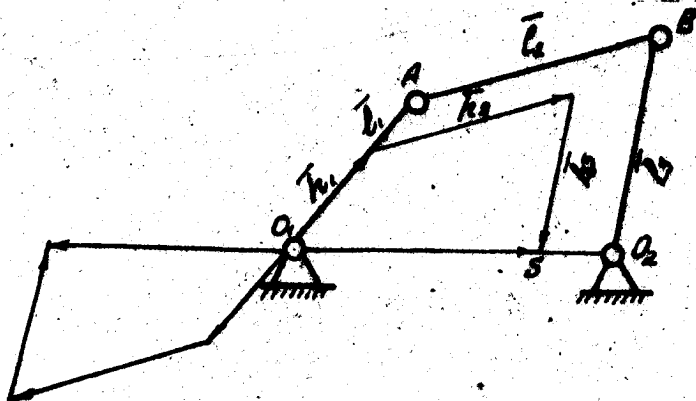


Рис. 7.11

б/ центр ваги нерухомий /  $a_s = 0$ /. Першу умову виконати неможливо, бо ланки механізму рухаються циклічно зі змінними швидкостями, і центр ваги механізму рухається по кривій зі змінною швидкістю /прискорення його не дорівнює нулю/. Отже, можливо тільки друге: центр ваги в статично зрівноваженому механізмі має бути нерухомим. Це можливо тільки тоді, коли він перебуватиме на нерухомій лінії центрів  $O, O_2$ .

Розглянемо, як це можна здійснити. Зрозуміло, що центр ваги буде нерухомим /перебуватиме на лінії центрів  $O, O_2$  /; коли головні вектори створюють фігуру, подібну фігурі механізму. З подібності многокутників визначаються умови, які мають задовольняти головним векторам, щоб механізм був статично зрівноваженим:

$$\frac{h_1}{l} = \frac{h_2}{l_2} = \frac{h_3}{l_3}. \quad /7.29/$$

Можна зробити й інакше. Розглядаючи многокутник векторів як механізм, побудований в іншому масштабі, добудуємо симетричну осі  $O$  дзеркальне зображення додаткового механізму, який зрівноважуватиме основний механізм /рис. 7.11/.

### 7.9. Зрівноважування механізмів з допомогою заміщення мас

Як розглядалося раніше, масу вагової ланки, яку вважаємо зосередженою в центрі ваги, можна замінити двома або кількома масами, розміщеними в двох або кількох точках невагової ланки. Згадаємо, що динамічне заміщення буде забезпечене, якщо задовольняються три умови:

$$m_A + m_K = m; \quad m_A a = m_K k; \quad m_A a^2 + m_K k^2 = J.$$

Звідси

$$m_A = m \frac{k}{a+k}; \quad m_K = m \frac{a}{a+k}. \quad /7.30/$$

Якщо використовуються тільки два перших рівняння, то маємо статичне заміщення мас.

Використаємо статичне заміщення мас для статичного зрівноваження чотириланкового кривошипно-коромислового механізму. Для цього замінімо маси реального механізму заміщувачами, розмістивши ці маси в шарнірах кожної ланки. Заміщувачі маси першої ланки /рис. 7.12/

$$m_{A_1} = m_1 \frac{l_1 s_1}{l_1}; \quad m_{O_1} = m_1 \frac{s_1}{l_1}$$

розмістимо в шарнірах  $O_1$  і  $A$ . Заміщуючі маси другої ланки

$$m_{A_2} = m_2 \frac{l_2 - s_2}{l_2}; \quad m_{B_2} = m_2 \frac{s_2}{l_2},$$

розмістимо в шарнірах  $A$ ,  $B$ . Заміщуючі маси третьої ланки

$$m_{B_3} = m_3 \frac{l_3 - s_3}{l_3}; \quad m_{O_2} = m_3 \frac{s_3}{l_3}$$

розмістимо в центрах  $B$  і  $O_2$ :

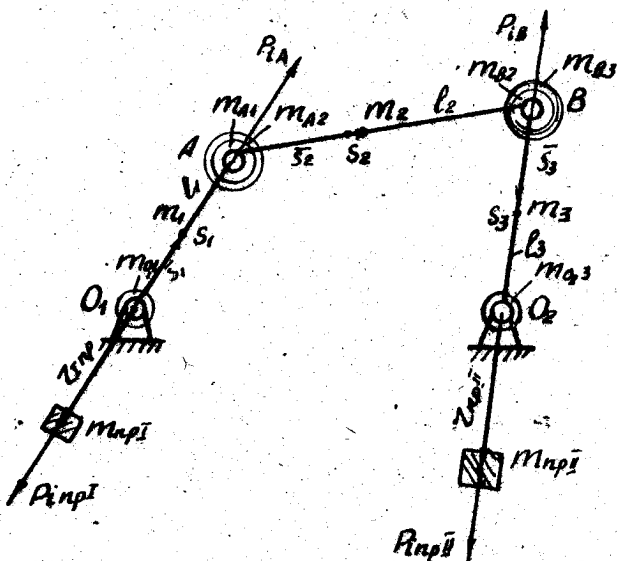


Рис. 7.12

Зрозуміло, що сумарні маси

$$\bar{m}_A = m_{A_1} + m_{A_2}; \quad \bar{m}_B = m_{B_2} + m_{B_3}.$$

Маси  $m_{O_1}$  і  $m_{O_2}$  зрівноважені, оскільки перебувають у центрах шарнірів  $O_1$  і  $O_2$ . Сили інерції незрівноважених мас  $m_A$  і  $m_B$  для статичної рівноваги мають дорівнювати силам інерції протилеж  $m_{p1}$  і  $m_{p2}$ :

$$P_{1A} = m_A l_1 \omega_1^2 = P_{1p1} = m_{p1} z_1 \omega_1^2;$$

$$P_{1B} = m_B l_2 \omega_2^2 = P_{1p2} = m_{p2} z_2 \omega_2^2.$$

Звідси

$$m_{пр I} = \frac{m_A \rho_1}{z_I}; \quad m_{пр II} = \frac{m_B \rho_3}{z_{II}}$$

де  $z_I, z_{II}$  - беруть довільно, але так, щоб вони не були більші за  $\rho_1$  і  $\rho_3$ .

## 8. ТЕРТЯ В КІНЕМАТИЧНИХ ПАРАХ

### 8.1. Актуальність проблеми

Як установлено статистикою, на відновлення машинного парку в Союзі щорічно витрачалось більше 20 млрд. крб. Щоб ясніше було уявити, на що йшли ці колосальні суми, розглянемо, з чого складаються витрати на автомобіль протягом його життєвого циклу. На виготовлення припадає всього 1,5 відсотка, на поточний ремонт - 46%, на капітальний - 7% і на технічне обслуговування - 45,5%. Складається враження, що автомобіль створюється для того, щоб його ремонтувати, обслуговувати і списувати. До речі, така сама картина, з невеликими відхиленнями, і з металорізальними верстатами, сільськогосподарськими й іншими машинами. В деяких країнах через стирання деталей металу більше втрачається, ніж видобувається. Тому вчені й інженери з часу появи машин шукають методи зменшення тертя в механізмах і зносу їх ланок.

Ще на зорі зародження теорії механізмів і машин одним з перших питань було зменшення втрат на тертя в громіздких важільних ткацьких верстатах. Ще раніше питаннями тертя займався Леонардо да Вінчі. Пізніше деякі питання тертя розв'язав Ейлер, а в кінці XVIII ст. французький вчений Кулон опублікував твір, в якому на підставі власних спостережень і досліджень інших учених /головним чином Амонтона/ сформулював основні закони сухого тертя.

Тривалий час вивченням тертя в кінематичних парах займалася лише теорія механізмів і машин.

Явище, відоме під назвою тертя, досить складне. Це сполучення фізичних, механічних, хімічних та інших процесів, які донині вивчаються, але достатньо не вивчені.

У середині 50-х років, вивчаючи технічний стан вузлів тертя літака ИЛ на різних етапах експлуатації, відкрили явище довільного утворення тонкої плівки міді на поверхнях деталей важконавантажених

вузлів для пари тертя сталь – бронза при змащуванні її спиртоглицериною сумішшю. Плівка міді товщиною 1 – 2 мкм в процесі тертя покривала як бронзу, так і сталь. Вона різко знижувала знос /стирання/ пар тертя і зменшувала силу тертя майже в 10 разів. Майже одразу було виявлено таке явище в парі сталь – сталь вузла тертя компресора домашнього холодильника з масло–фреоновим мастилом. У Держкомітеті СРСР з винаходів і відкриттів 1966 року було зареєстровано відкриття № 41 "Вибірний перенос /ефект беззносності/" з пріоритетом від 12.II.56. Автори відкриття – Д.Н.Гаркунов та І.В.Крагельський. З 1968 року ведуться дослідження механізму вибірного переносу, розробляються нові методи боротьби зі зносом деталей на основі цього явища, зареєстровано більш як 100 винаходів, опубліковано більш як 400 робіт, захищено 35 дисертацій, зкономлено мільйони карбованців.

Ефект беззносності в холодильнику дістають за рахунок створення плівки з іонів чистої міді, що виникають при незначній корозії мідних трубок, по яких циркулює масло–фреонова суміш і доносить їх до місця контакту пари тертя. Мідь, що виникла в процесі тертя, має дивні якості: 1/ напіврідина при кімнатній температурі; 2/ її частинки мають електричний заряд, що утримує їх у зоні контакту при терті. І якщо під навантаженням ці частинки відриваються від плівки, то вони повертаються до неї. Металеву захисну плівку назвали "серво-вітною" /рятуючою життя/. Це невідомий раніше стан речовини /у цьому разі металу/, народжений потоком енергії та існуючий у процесі тертя.

Заслугує на увагу також те, що створення такої плівки належить до самоорганізуючих явищ неживої природи, вивчення яких у техніці тільки почалося. Тертя не знищує плівку, а створює її. Плівка не руйнується від утомленості, як основні матеріали без плівки, покриває нерівності ланок, і ці ланки практично не беруть участі в процесі тертя. Це нагадує принцип роботи створеного природою вузла тертя – суглоба живого організму, де м'який матеріал працює по м'якому, і напруження рівномірно розподіляються по всій поверхні суглоба, питоме напруження стає незначним.

Зараз наша промисловість розробила пасти /90% органічного мастила і 10% металічного порошку міді, латуні, цинку або бронзи/, які фрикційним методом вносяться до зони тертя. Але відкриття впроваджується повільно.

В Держкомітеті СРСР з винаходів та відкриттів 1972 року видав новий диплом на відкриття, що також зроблено на стику кількох наук.

Авторами відкриття "Ефект аномально низького тертя" є співробітники Всесоюзного НДІ вимірів Держстандарту СРСР Е.А.Духовської, В.С. Онщенко, А.А.Силін та Інститут хімічної фізики АН СРСР - чл.-кор. АН СРСР В.Л.Тальрозе і д-р техн. наук А.Н.Пономарьов.

Суть відкриття полягає в тому, що при інтенсивному опроміненні у вакуумі однієї з поверхонь тертя сила тертя зменшується в десятки і сотні разів. Опромінення у вакуумі ніби звільнює тонкий поверхневий шар від домішок, головним чином, води і газів, а тертя, що діє в одному й тому самому напрямі, орієнтує молекули та структури в одному напрямі, ніби "причісує" їх. Стійкість зразків відносно спрацювання збільшується в десятки й сотні разів. Особливо важливі результати дістали при опроміненні гумових і пластмасових технічних виробів. Нові матеріали назвали "африкційні еластомери", або "слизькі гуми". Ця властивість зберігається навіть у воді, а стійкість до зносу збільшується в 200 разів.

Застосування модифікованих прокладок тільки на газопроводі "Дружба" дало річний економічний ефект близько 2 млн карбованців. Але й аномально низьке тертя не знайшло широкого використання.

Останніми десятиліттями виділилась окрема галузь науки про тертя - триботехніка. Триботехніка - це наука про контактну взаємодію твердих тіл при їх відносному русі, яка охоплює весь комплекс питань про тертя, спрацювання і змащування машин. У триботехніці швидко розвиваються такі її розділи, як трибохімія, трибофізика і трибомеханіка. Дивний феномен природи - тертя! Воно подарувало людству вогонь і тепло, можливість раптово зупинити потяг чи автомобіль, прискорити в десятки тисяч разів хімічну реакцію, записати голос людини на платівку, почути голос скрипки й багато іншого.

Ми вивчатимемо лише тертя в кінематичних парах механізмів як опір, що виникає в них при русі навантажених ланок однієї відносно іншої. Дуже складне явище - тертя - вивчається спрощено. Для пояснення його користуються двома гіпотезами - механічною та молекулярною. Згідно з першою гіпотезою тертя виникає в результаті деформації невеликих виступів і западин, що є на елементах кінематичних пар, як би добре не були вони оброблені.

Ці деформації можуть бути пружними й непружними, залежно від величин заданого навантаження, прикладеного до ланок, а отже, і до поверхонь тертя, швидкості відносно руху, фізичних властивостей матеріалу ланок, його пружності, характеру і якості контактних поверхонь тощо.



Згідно з другою гіпотезою виникнення сил тертя пояснюється від-  
ривом молекул, що перебувають у контакті, і виникненням нових моле-  
кулярних контактів ланок при відносному їх русі.

## 8.2. Види тертя

Залежно від характеру відносного руху ланок, що створюють кі-  
нематичну пару, розрізняють тертя трьох видів:

1/ Ковзання, що виникає в нижчих обертових і поступальних кі-  
нематичних парах У класу /підшипники ковзання, напрямні верстатів,  
приладів та інших машин/;

2/ кочення, що виникає у вищих кінематичних парах /шарикові та  
роликів підшипники, шарові та роликів опори, колеса тощо/.

3/ вертіння, що виникає в тому разі, коли можливий відносний  
рух тіл у формі обертання навколо спільної нормалі в точці дотику.

Залежно від наявності мастила між поверхнями тертя розрізняють  
тертя ковзання п'яти видів:

1/ чисте /сухе/ тертя, що виникає на поверхнях, вільних від  
мастила, чи будь-яких сторонніх речовин;

2/ граничне, коли поверхні тертя розділяє шар мастила завтовш-  
ки не більше 0,1 мкм;

3/ рідинне, за якого поверхні повністю розділені шаром змащу-  
вальної речовини;

4/ напівсухе /змішаного типу/ одночасно сухе і граничне /деякі  
виступи шорсткої поверхні сухі, не змащені, а інші - в мастилі ша-  
ром не більше 0,1 мкм/.

5/ напіврідинне - одночасно рідинне і граничне.

## 8.3. Тертя ковзання сухих тіл

Елементарне уявлення про розподіл сил при сухому терті ковзан-  
ня можна дістати з такої картини.

Розглянемо ланку 1, яка навантажена силою  $Q$  і перебуває під  
дією горизонтальної сили  $P$ , що зсуває цю ланку вздовж ланки 2  
/рис. 8.1/. Під дією сили  $Q$  виникають пружні та непружні деформації,  
результуюча яких  $R$  /сумарна реакція другої ланки на першу/. Оскільки  
опорні поверхні нерівні та ще й діє сила  $P$ , то реакція  $R$  на-  
прявлена не вертикально, а під деяким кутом. Розкладемо реакцію  
на дві складові - нормальні  $N$  і дотичну  $F$ . Нормальна складова

зрівноважується заданою нормальною /навантажуючою силою  $Q$ /. Дотична складова  $F$  - сила опору, що перешкоджає руху ланки 1 відносно ланки 2, - називається силою тертя. Гранічне значення опору зміщенню ланок називається силою тертя спокою.

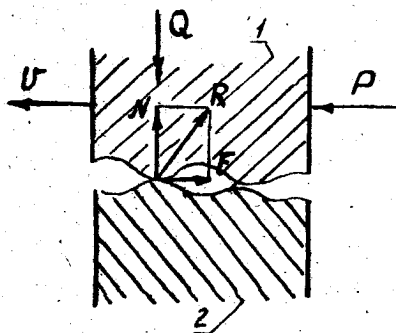


Рис. 8.1

Сила опору, що виникає при русі ланок, називається силою тертя руху. Вона завжди має напрям, протилежний відношній швидкості  $U$ , менша за силу тертя спокою. Відношення сили тертя  $F$  до нормальної сили  $N$  називається коефіцієнтом тертя

$$\frac{F}{N} = f. \quad /8.1/$$

Звідом

$$F = Nf.$$

#### 8.4. Закони Кулона - Амонтона /сухого тертя ковзання/

Спирякючись на власні спостереження і досліді Амонтона та інших учених, Кулон сформулював такі основні положення.

1. Сила тертя ковзання пропорційна нормальному тиску.
2. Тертя залежить від матеріалу і стану тертьових поверхонь.
3. Тертя не залежить від площі опорних поверхонь.
4. Тертя спокою більше за тертя руху.
5. Тертя зростає зі збільшенням часу попереднього контакту ланок.
6. Тертя майже не залежить від відносної швидкості ланок /за малих значень швидкості/.
7. Тертя збільшується зі збільшенням швидкості прикладання рушійної сили.

На підставі експериментів встановлено таку залежність сили тертя від нормального тиску /рис. 8.2/

$$F = A + f_p N; \quad /8.2/$$

де  $F$  — сила тертя;  $A$  — стала тертя, що не залежить від тиску, а залежить від здатності стичних поверхонь до попереднього зчеплення;  $f_p$  — коефіцієнт тертя руху;  $N$  — нормальний тиск.

Таким чином, залежність сили тертя від нормального тиску зобрається прямою, що не проходить через початок координат. Стала тертя  $A$  вказує на необхідність прикладання деякої додаткової сили для подолання поперельної зчепленості стичних поверхонь.

Поділимо обидві частини рівняння /8.2/ на величину  $N$ :

$$\frac{F}{N} = \frac{A}{N} + f_p. \quad /8.3/$$

Згідно з положенням Амонтон — Кулона

$$\frac{F}{N} = f.$$

Тоді замість рівняння /8.3/ матимемо:

$$f = \frac{A}{N} + f_p. \quad /8.4/$$

Графік є гіперболою /рис. 8.3/.

Таким чином, сила тертя залежить від нормального тиску.

У більшості технічних розрахунків чіпкістю поверхні нехтують і користуються рівнянням Амонтон — Кулона у найпростішій формі:

$$F = f N, \quad /8.5/$$

де  $f$  — деяке середнє значення коефіцієнта тертя, що визначається з досліду і вважається сталим /рис. 8.4/.

Досліди показали, що коефіцієнт тертя залежить від відносної швидкості, набуваючи при значних швидкостях деякого сталого значення /рис. 8.5/. На практиці найчастіше користуються сталими значеннями коефіцієнта тертя, наведеними в інженерних довідниках. Слід пам'ятати, що сила тертя за визначенням завжди має напрям, протилежний відносній швидкості.

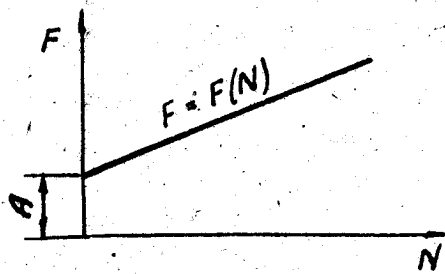


Рис. 8.2

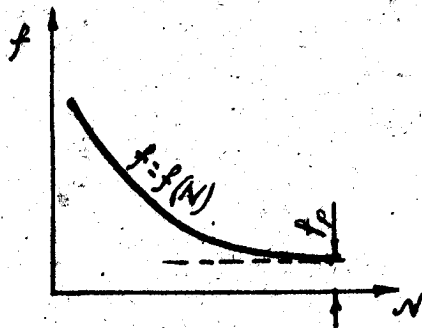


Рис. 8.3

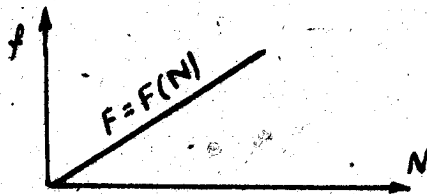


Рис. 8.4

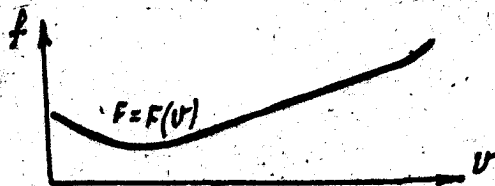


Рис. 8.5

### 8.5. Тертя в поступальній кінематичній парі.

#### Кут і конус тертя

Нехай на повзун  $A$  діє сила  $Q$  /рис. 8.6/ під кутом  $\alpha$  до нормалі  $n-n$ . Розглянемо, за яких умов повзун зможе рухатися по нерухомій напрямній  $B$  під дією цієї сили. Для цього перенесемо силу  $Q$  вздовж лінії  $YY$  дії, тобто прикладемо до повзуна в точці  $O$ , дотику його з напрямною  $B$ .

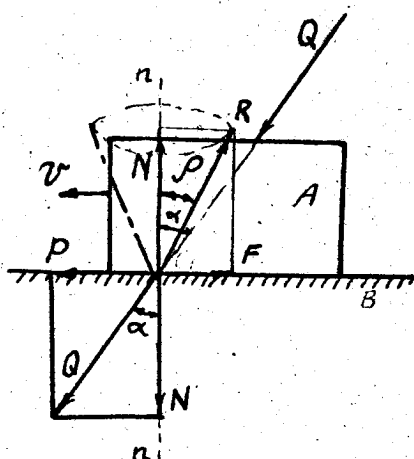


Рис. 8.6

Розкладемо цю силу на складові  $P$  і  $N$ . Нормальна складова  $N$  притискує повзун  $A$  до напрямної  $B$  і при переміщенні його дотичною /рушійною/ силою  $P$ , реакція напрямної  $B$  на повзун  $R$ , що виникла під дією сили  $N$ , не збіжиться з нормаллю  $n-n$ , а відхилиться на кут  $\rho$ . Розкладемо реакцію  $R$ , що діє на повзун, на дві складові: нормальну  $R_N$  і дотичну  $F$  /силу тертя/, що перешкоджає руху повзуна  $A$

під дією рушійної сили  $P$ . Сила тертя напрямлена проти швидкості  $N$  і сили  $P$ . Якщо сила тертя  $F$  більша за силу  $P$ , то повзун перебуває у спокої і, навпаки, якщо  $P > F$ , то повзун рухається. Оскільки повзун не рухається по вертикалі, то

$$N = R_N.$$

Як видно,

$$P = N \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{а} \quad F = N_R \operatorname{tg} \rho = N \operatorname{tg} \rho.$$

Рух неможливий при  $F > P$ , тобто при  $N \operatorname{tg} \rho > N \operatorname{tg} \alpha$ . Отже, якщо  $\alpha < \rho$ , то нерухомий повзун залишиться у спокої незалежно від величини сили  $Q$ .

Кут  $\rho$ , на який відхиляється реакція  $R$  від нормалі, називається кутом тертя. Якщо рухати повзун у різних напрямках, то реакція  $R$  опише лінійчасту конічну поверхню, що називається конусом тертя.

Кут  $\rho$  граничного відхилення реакції площини на повзун від нормалі  $n-n$  називається кутом тертя спокою.

Як доведено, сила  $Q$ , що діє на повзун, не виведе його з рівноваги, якщо вона перебуватиме в середині конуса тертя.

Між кутом тертя і коефіцієнтом тертя існує залежність

$$\operatorname{tg} \rho = f. \quad /8.6/$$

Справді,  $F = Nf$ . З іншого боку,  $F = N \operatorname{tg} \rho$ . Прирівнявши ці рівності, знайдемо, що  $f = \operatorname{tg} \rho$ . Тому в довідниках наводять значення або коефіцієнта тертя, або кута тертя, враховуючи геометричну інтерпретацію коефіцієнта тертя /8.6/.

### 8.6. Тертя клинчастого повзуна.

Зведений коефіцієнт тертя

У деяких випадках поверхня стикання повзуна і наярмної в поперечному перерізі має вигляд двогранного кута або жолоба. Такий повзун називається клинчастим /рис. 8.7/.

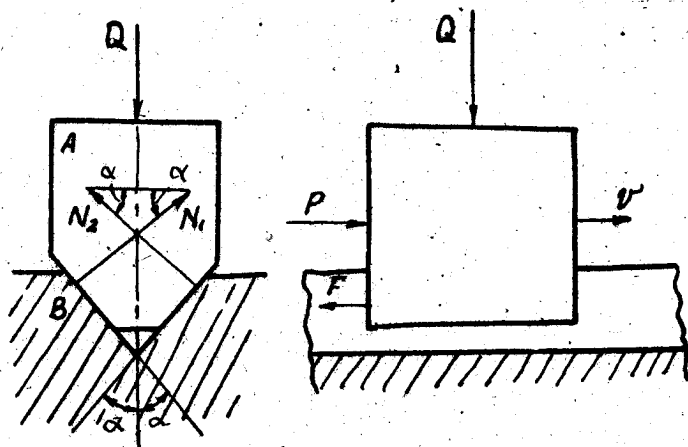


Рис. 8.7

Якщо на повзун діє горизонтальна сила  $P$  і вертикальне навантаження  $Q$ , то для рівномірного руху повзуна в напрямній має додержуватись умова

$$P = 2F,$$

але  $F = Nf$ . При симетричному жолобі:

$$N_1 = N_2 = N, \text{ тому } P = 2Nf.$$

Спроекціювавши сили на вертикальну вісь, знайдемо:

$$Q = 2N \sin \alpha.$$

Звідси

$$N = \frac{Q}{2 \sin \alpha}. \quad /8.7/$$

Тоді

$$P = 2Nf = Q \frac{f}{\sin \alpha} = Qf',$$

де

$$f' = \frac{f}{\sin \alpha}. \quad /8.8/$$

Коефіцієнт  $f' = \frac{f}{\sin \alpha}$  називається зведеним коефіцієнтом тертя, або коефіцієнтом тертя клинчастого повзуна. Якщо  $\alpha = 30^\circ$ , то  $f' = 2f$ , тобто коефіцієнт тертя клинчастого повзуна може бути в два рази більший за коефіцієнт тертя в плоскій поступальній парі.

### 8.7. Тертя на похилій площині

Нехай на повзун  $A$  вагою  $Q$  /рис. 8.8/ діє рушійна сила  $P$  під кутом  $\beta$  до вертикалі,  $\alpha$  - кут нахилу похилої площини;  $\rho$  - кут тертя, на який відхиляється реакція  $R$  похилої площини на повзун від нормалі  $n-n$ . Таким чином, на повзун діє три сили:  $Q$ ,  $P$ ,  $R$ . При рівномірному русі повзуна /спокою/ їх рівнодіюча дорівнює нулю:

$$\vec{Q} + \vec{P} + \vec{R} = 0.$$

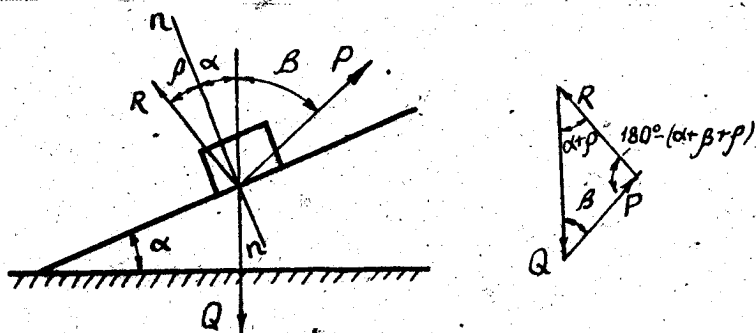


Рис. 8.8

Побудуємо замкнений многокутник сил. Згідно з теоремою синусів

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta + \rho)]}{\sin (\alpha + \rho)}$$

Звідси

$$P = Q \frac{\sin (\alpha + \rho)}{\sin (\alpha + \beta + \rho)} \quad /8.9/$$

З рівняння /8.9/ випливає, що рушійна сила  $P$  буде найменшою, коли знаменник буде найбільшим, але синус будь-якого кута не може бути більшим за одиницю;  $\sin (\alpha + \beta + \rho) = 1$ , коли  $(\alpha + \beta + \rho) = 90^\circ$ . Звідси  $\beta = 90 - (\alpha + \rho)$ , тобто, сила  $P$  найменша, коли вона утворює з похилою площиною кут тертя  $\rho$ . Формула /8.9/ універсальна. Вона дає змогу визначити рушійну силу  $P$  для окремих випадків. Нехай рушійна сила  $P$  діє на тіло вздовж горизонталі, тобто  $\beta = 90^\circ$ . Тоді

$$P = Q \frac{\sin (\alpha + \rho)}{\sin (\alpha + 90 + \rho)} = Q \frac{\sin (\alpha + \rho)}{\cos (\alpha + \rho)} = Q \operatorname{tg} (\alpha + \rho) \quad /8.10/$$

Якщо сила  $P$  паралельна похилій площині, то  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Підставивши це значення у формулу /8.9/, знайдемо

$$\begin{aligned} P &= Q \frac{\sin (\alpha + \rho)}{\sin (90 + \rho)} = Q \frac{\sin (\alpha + \rho)}{\cos \rho} \quad /8.11/ \\ &= Q \frac{\sin \alpha \cos \rho + \cos \alpha \sin \rho}{\cos \rho} = Q (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \rho) = Q (\sin \alpha + f \cos \alpha). \end{aligned}$$



Якщо тіло переміщається силою  $P$  по горизонтальній площині ( $\alpha = 0$ ), то

$$P = Q \frac{\sin \rho}{\sin(\beta + \rho)} \quad /8.12/$$

Якщо кут  $\beta = 90^\circ$ , то  $P = Qf$ .

Якщо тіло, на яке діє сила  $P$ , рівномірно опускається по похилій площині, то реакція відхилиться в інший бік від нормалі  $n-n$ , сила тертя змінить свій напрям, і формула /8.9/ набуде вигляду:

$$P = Q \frac{\sin(\alpha - \rho)}{\sin(\alpha + \beta - \rho)} \quad /8.13/$$

### 8.8. Тертя у гвинтовій кінематичній парі

Розглядаючи тертя у гвинтовій кінематичній парі, зробимо такі припущення.

1. Оскільки закон розподілу тисків у різьбі невідомий, то вважатимемо, що тиск гайки на гвинт /і гвинта на гайку/ прикладений на середній лінії різьби. 2. Дію сил у гвинтовій парі зведемо до дії сил на повзун, що розміщений на похилій площині, в якій кут нахилу дорівнює куту підйому гвинтової лінії. Цим самим зведемо просторову задачу до плоскої /рис. 8.9/:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \gamma = \frac{H}{\pi d_{cp}} = \frac{zP}{\pi d_{cp}} \quad /8.14/$$

де  $H, \rho$  - відповідно хід і крок гвинта;  $Z$  - число ходів /витків/;  $d_{cp}$  - діаметр кола середньої лінії різьби;  $Q$  - осьова сила, що діє на гайку /на повзун, що переміщується силою  $P$  по похилій площині/.

Для того щоб гайка рівномірно рухалася вздовж осі гвинта  $Z-Z$  угору, момент, що його створює робітник при повороті гвинта відносно осі  $Z-Z$ ,  $M = P_p R_p$  має дорівнювати моменту сили  $P$  відносно тієї самої осі  $Z-Z$ :

$$M = P z_{cp}$$

Прирівнявши моменти, дістанемо:

$$P_p R_p = P z_{cp}$$

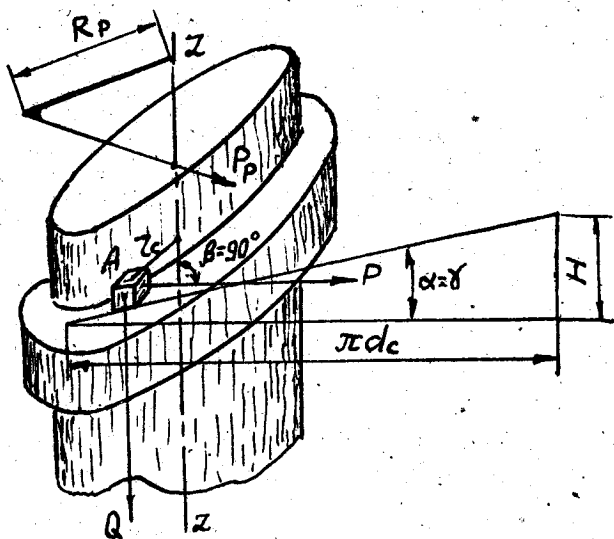


Рис. 8.9

Звідси зусилля робітника, прикладене до рукоятки домкрата на відстані  $R_p$  від осі гвинта  $Z-Z$ :

$$P_p = P \frac{z_{cp}}{R_p}.$$

Виразимо силу  $P$  через осьову  $Q$ , скориставшись формулою /8.9/:

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + p)}{\sin(\alpha + \beta + p)}.$$

Оскільки в цьому разі  $\beta = 90^\circ$ , то

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + p)}{\sin(\alpha + 90^\circ + p)} = Q \frac{\sin(\alpha + p)}{\cos(\alpha + p)} = Q \operatorname{tg}(\alpha + p).$$

Отже,

$$P_p = Q \frac{z_{cp}}{R_p} \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

/8.15/

## 8.9. Тертя в обертальній кінематичній парі.

### Круг тертя

Експериментальних даних про розподіл тисків в обертальних парах немає. Тому, вивчаючи тертя в обертальних кінематичних парах, учені /наприклад, Рейс, Вейсбах та ін./ запропонували гіпотези, які ще не підтверджені практикою. З цієї причини обмежимося найпростішими розв'язуваннями, здобутими на основі найелементарніших припущень, що схематизують явище. Але спочатку дамо деякі визначення. Частина вала, що розміщена в підшипнику, називається цапфом. Якщо цапф розміщена посередині між двома кінцями вала, то її називають шийкою, якщо вона розміщена на кінці вала, то її називають шишком. Звідси назва опори вала - підшипник.

При обертанні цапфа в напрямі, показаному стрілкою, вал "вигібається" на підшипник. Це можна пояснити тим, що момент сил інерції  $M_i = -J_s \epsilon$ , прикладений до вала, змістив його проти кутового прискорення  $\epsilon$  /рис. 8.10/.

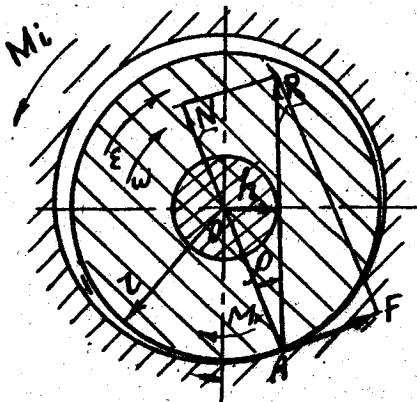


Рис. 8.10

Внаслідок цього вал з підшипником стикатиметься не на осі вала, а зміститься в точку  $A$ . Повна реакція  $R$  не пройде через центр  $O$  вала, а відхилиться на кут тертя  $\rho$ . Розкладемо реакцію  $R$  на дві складові - нормальну  $N$  і дотичну  $F$ . Нормальна складова зрівноважиться вагою вала і вертикальними силами, якими навантажений вал. Дотична складова, напрямлена проти руші йного момента  $M$  і кутової швидкості  $\omega$ , перешкоджатиме обертанню вала, тобто є силою тертя.

Зв'язок між цими силами такий:

$$R = \sqrt{N^2 + F^2}$$

Оскільки сила тертя  $F = Nf'$ , де  $f'$  - коефіцієнт тертя в обертальній парі, то

$$R = N(\sqrt{1 + f'^2}) = N\sqrt{1 + \tan^2 \rho} = \frac{N}{\cos \rho},$$

що видно з рисунка.

Момент сили тертя в обертальній парі

$$M_m = Fz = Nf'z = Qf'z = Rh,$$

де  $h = z \sin \rho$ .

За малих значень кута тертя  $\rho$

$$\sin \rho = \tan \rho = f.$$

Тоді

$$h = zf'; \quad /8.16/$$

$$M_m = Qzf'. \quad /8.17/$$

Якщо з центра вала опшвати коло радіусом  $h$ , дістанемо круг тертя радіуса

$$h = zf'.$$

Коефіцієнт тертя  $f'$  в обертальній парі визначається експериментально. Його числове значення залежить від матеріалів пари, стану її поверхонь та умов роботи.

Для неpritертих цапф при сухому терті  $f' = \frac{\pi}{2} f$ , для притертих  $f' = \frac{4}{\pi} f$ , де  $f$  - коефіцієнт тертя плоских поверхонь, виготовлених з таких самих матеріалів, що й підшипник.

### 8.10. Момент тертя п'яти

Якщо вздовж осі вала діє сила  $Q$ , то торцева поверхня, якою він спирається на підшипник, називається п'ятою, а підшипник - підп'ятником /рис. 8.II/.

П'яти бувають плоскі /суцільні й кільцеві/, гребінчасті, конічні.

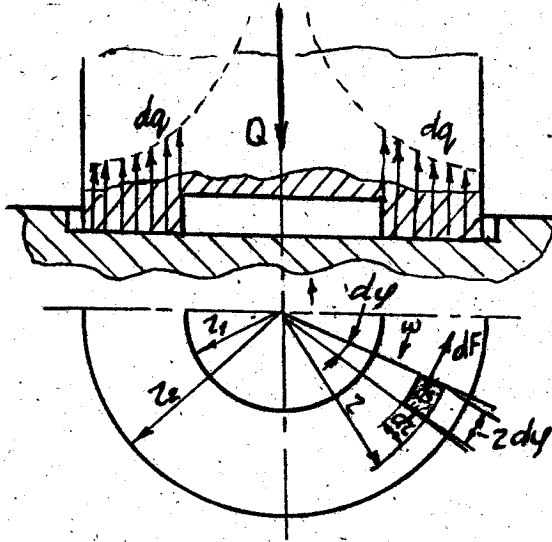


Рис. 8.II

Величина моменту сил тертя, що виникають під дією осевої сили при ковзанні п'яти по під'ятнику, залежить від того, який закон розподілу питомого тиску по опорній поверхні візьмемо. Для нових п'ят питомий тиск можна вважати рівномірно розподіленим по п'яті, для притертих - його можна визначити з умов однакового зносу по нормалі в усіх точках опорної поверхні. Виділимо елементарну площадку  $dS$  і прикладемо до неї елементарну силу  $dN = q dS$  /де  $q$  - елементарний питомий тиск/ і силу тертя  $dF = dN f$ . Виходячи з умов рівноваги матимемо:

$$Q = \int dN \cos(\hat{N}, \hat{Q}),$$

$$(\hat{N}, \hat{Q}) = 0,$$

/8.IB/

а момент сил тертя

$$dM_f = \int z dF.$$

Для нової п'яти  $q = \text{const}$ , а  $\cos(\hat{N}, \hat{Q}) = 1$ .

З цих умов і визначимо момент сил тертя в кільцевій п'яті:

$$Q = \int dN = \int q dS = \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} qz dz d\varphi = \\ = q \frac{z^2}{2} \Big|_{z_1}^{z_2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{q}{2} (z_2^2 - z_1^2) 2\pi = q\pi(z_2^2 - z_1^2).$$

Звідси

$$q = \frac{Q}{\pi(z_2^2 - z_1^2)}. \quad /8.19/$$

Тоді нормальна сила  $dN = q dS = \frac{Q}{\pi(z_2^2 - z_1^2)} ds$ .

Елементарна сила тертя

$$dF = dNf = \frac{Qf}{\pi(z_2^2 - z_1^2)} ds.$$

Елементарний момент сил тертя

$$dM_T = dFz = \frac{Qf}{\pi(z_2^2 - z_1^2)} z ds.$$

Сумарний момент сил тертя в кільцевій п'яті

$$M_T = \int dM_T = \frac{Qf}{\pi(z_2^2 - z_1^2)} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} z ds = \\ = \frac{Qf}{\pi(z_2^2 - z_1^2)} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} z^2 dz d\varphi = \frac{Qf}{\pi(z_2^2 - z_1^2)} \frac{z^3}{3} \Big|_{z_1}^{z_2} \Big|_0^{2\pi};$$

$$M_T = \frac{2}{3} Qf \frac{z_2^3 - z_1^3}{z_2^2 - z_1^2}. \quad /8.20/$$

У суцільній плоскій п'яті  $z_1 = 0$ , тому в ній момент тертя

$$M_T = \frac{2}{3} Qf \frac{z_2^3}{z_1^2} = \frac{2}{3} Qf z. \quad /8.21/$$

Якщо при визначенні моменту тертя взяти гіпотезу однакового зносу вздовж нормалі в усіх точках п'яті, то питомий тиск змінюватиметься по гіперболах, що асимптотично наближаються до осі вала. Теоретично питомий тиск у центрі суцільної п'яті прямуватиме до нескінченності, а практично досягатиме великих значень, тому застосовувати їх на практиці менш вигідно, ніж кільцеві.

## 8.II. Тертя у вищих кінематичних парах

Коли елементи кінематичних пар створюють вищу кінематичну пару, то при їх відносному русі існує не тільки ковзання, але й кочення елементів одного по іншому. Коли елементами кінематичних пар є центроїди, існує чисте кочення елементів без ковзання. Коли елементами кінематичних пар є взаємно обгинаючі криві, то існує кочення елементів із ковзанням /зуби коліс, кулачок і ролик/.

Опір руху тіла при чистому коченні, коли ковзання елементів кінематичних пар відсутнє, називається тертям кочення, або тертям другого роду. Проте треба зазначити, що чистого кочення в техніці немає, оскільки кочення завжди супроводжує проковзування елементів.

Природа тертя кочення інша, ніж тертя ковзання. Сила тертя, як показали досліди, залежить від пружних властивостей матеріалів стичних тіл, кривини елементів кінематичних пар і притискової сили.

Доведемо це, спираючись на одну з гіпотез, що пояснюють природу тертя другого роду. Одна з гіпотез ґрунтується на теорії пружності, друга - на хвильовій теорії.

Розглянемо циліндр, що лежить нерухомо на площині. У зоні стискання циліндра і площини виникає місцева деформація зминання, що характеризується деякою площадкою зминання шириною  $\delta$ . Згідно з положенням теорії пружності напруження розподіляються за еліптичним законом. Оскільки крива розподілу напруження симетрична, то рівнодіючих напруг за напрямом збігається з силою  $Q$  /рис. 8.12/.

При перекочуванні циліндра ділянка  $ac$  площадки зминання /рис. 8.13/ розміщена в зоні зростаючих деформацій, а ділянка  $ae$  - у зоні зникаючих деформацій. Це можна пояснити внутрішнім тертям і гістерезисом матеріалів. При перекочуванні в зоні  $ac$  ще не зникли старі деформації, а виникають нові, тому напруження в зоні  $ac$  будуть вищі, і рівнодіюча  $N$  напружень не пройде через центр циліндра, а зсунеться вправо в бік руху. Величина  $K$ , на яку зсунулася рівнодіюча  $N$  напружень від центра циліндра, називається плечем сили тертя кочення, або коефіцієнтом тертя другого роду.

Виходячи з умов рівномірного руху циліндра знаходимо

$$P_T = M_T = NK = Qk. \quad /8.22/$$

З формули /8.22/ випливає, що коефіцієнт тертя кочення  $K$  має одиницю довжини /сантиметр, міліметр/.

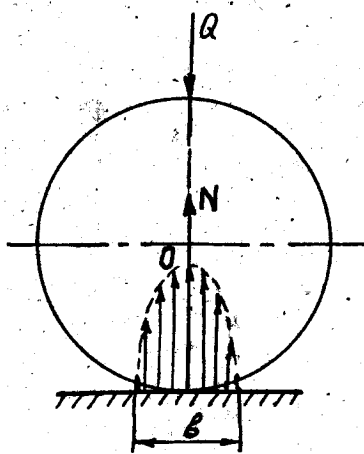


Рис. 8.12

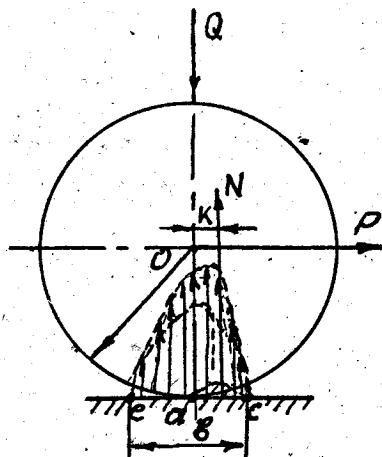


Рис. 8.13

Із формули /8.22/ знаходимо, що сила, необхідна для перекочування циліндра:

$$P = Q \frac{K}{2} \quad /8.22/$$

Робота цієї сили витрачається на подолання опору перекочуванню /момента сил тертя кочення/, а отже, сила тертя кочення залежить від притисної сили, пружних властивостей матеріалів і радіуса кривини елементів кінематичної пари. Зверніть увагу, що сила тертя обернено пропорційна радіусу  $r$ , що людина давно використовувала у практиці.

Рівномірне перекочування циліндра здійснюється паров сил  $P$  і  $F$ , де  $F = Qf$  - сила тертя спокою,  $f$  - коефіцієнт тертя спокою, або, як його називають у цих випадках, коефіцієнт зчеплення циліндра з площиною.

На практиці тертя кочення завжди супроводжується тертям ковзання.

Для рівномірного кочення необхідно, щоб сила  $P = F = Qf = Q \frac{K}{2}$ , тобто  $f = \frac{K}{2}$ . Якщо  $P < F$ , то зчеплення циліндра з площиною не буде порушене, і матиме місце кочення, тобто кочення буде за умови, що коефіцієнт ковзання

$$f > \frac{K}{2}$$



При  $f < \frac{K}{2}$  буде чисте ковзання. При  $f = \frac{K}{2}$  циліндр одночасно пере-  
кочуватиметься і ковзатиме.

Наведемо для довідки значення коефіцієнтів тертя кочення для деяких матеріалів:

$K = /0,05...0,06/$  см - для кочення дерева по дереву;

$K = /0,03...0,04/$  см - для дерева по сталі;

$K = 0,005$  см - для сталі по сталі, чавуну по чавуну;

$K = /0,005...0,001/$  см - загартовані сталеві роликки і кульки по сталі.

### 9. ККД МАШИНИ

Для оцінки досконалості машини з точки зору підведеної до неї і корисно використаної енергії введено поняття коефіцієнта корисної дії машини.

Механічним ККД називається відношення абсолютної величини роботи сили корисного опору до роботи всіх рушійних сил за час усталеного руху:

$$\eta = \frac{A_{к.о.}}{A_p} \quad /9.1/$$

За повний цикл усталеного руху робота рушійних сил дорівнює роботі сил опору:

$$A_p = A_o = A_{к.о.} + A_T,$$

де  $A_{к.о.}$  - робота сили корисного опору /робота сили виробничих опорів/;  $A_T$  - робота сили тертя.

Оскільки

$$A_{к.о.} = A_p - A_T,$$

то

$$\eta = \frac{A_p - A_T}{A_p} = 1 - \frac{A_T}{A_p} = 1 - \psi, \quad /9.2/$$

де  $\psi = \frac{A_T}{A_p}$  - коефіцієнт втрат у машині.

Чим менша в машині робота сили тертя, тим менший коефіцієнт втрат і тим досконаліша машина в енергетичному відношенні. Оскільки в ходній машині або механізмі робота сили тертя практично не може дорівнювати нулю і коефіцієнт  $\psi \neq 0$ , то ККД машини завжди менший за одиницю, тобто  $\eta < 1$ .

З рівняння /9.2/ випливає, що ККД може дорівнювати нулю, якщо  $A_p = A_T$ . У цьому разі рух машини можливий, але машина не виконуватиме ніякої корисної роботи. Такий рух машини називається рухом вхолосту.

ККД не може бути меншим за нуль, бо для цього треба, щоб  $\frac{A_T}{A_p}$  було більшим за одиницю, тобто  $\frac{A_T}{A_p} > 1$ , або  $A_T > A_p$ .

Якщо ця умова виконується або якщо ККД в результаті розрахунку стає від'ємним, це означає, що рух машини в такому напрямі стає неможливим /наприклад, рух від колеса до одноходового черв'яка в черв'ячному зубчастому механізмі, поступальний рух гвинта вздовж осі в гайці за будь-якої великої осьової сили, що діє на гвинт, при куті підйому гвинтової лінії, меншому за кут тертя  $\rho$  тощо/. Це явище має назву заклинювання, або самогальмування машини. З ним також зустрічаємося в кулачковому механізмі при куті тиску, що дорівнює або більший за критичний.

### 9.1. ККД механізмів і машин, з'єднаних послідовно

Прикладом послідовного з'єднання механізмів у машині може слугувати металорізальний токарний верстат: електродвигун - пасова передача - гітара - коробка швидкостей - шпиндель. Другий приклад: топка - котел - трубопроводи - парова машина - технологічна машина /рис. 9.1/.



Рис. 9.1

Зрозуміло, що при послідовному з'єднанні механізмів корисна робота на виході попереднього механізму чи машини буде роботою рушійних сил для наступного.

Визначимо ККД кожного механізму:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_p}; \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}; \quad \eta_3 = \frac{A_3}{A_2}; \quad \dots \quad \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

Перемножимо ліві та праві частини цих рівностей:

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n = \frac{A_1}{A_p} \frac{A_2}{A_1} \frac{A_3}{A_2} \dots \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_p} = \eta_{ин}$$

Отже, загальний ККД послідовно з'єднаних механізмів і машин дорівнює добутку ККД окремих машин і механізмів, що входять до машинного агрегату:

$$\eta_{1,n} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n \quad /9.3/$$

### 9.2. ККД механізмів або машин, з'єднаних паралельно

Можливі два варіанти при паралельному з'єднанні механізмів або машин: 1/ від одного двигуна енергія розподіляється на кілька машин або механізмів; 2/ кілька двигунів передають енергію одній машині. Наприклад, електродвигун верстата приводить у рух шпиндель і супорт. Простіший приклад – від одного вала приводиться в рух кілька машин /рис. 9.2/. Другий варіант – в агрегатному верстаті кілька двигунів приводять у рух різні механізми /рис. 9.3/.

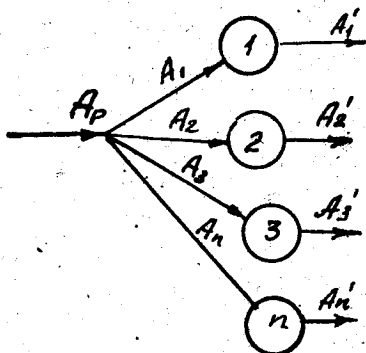


Рис. 9.2

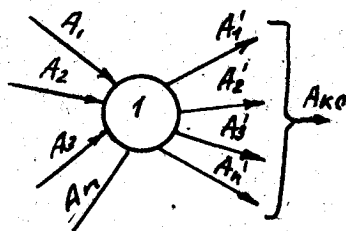


Рис. 9.3

Розглянемо перший варіант. Зрозуміло, що робота рушійної сили

$$A_P = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n,$$

а робота сил корисного опору

$$A_{к.о} = A_1' + A_2' + A_3' + \dots + A_n'.$$

ККД відповідної машини

$$\eta_1 = \frac{A_1'}{A_1}; \quad \eta_2 = \frac{A_2'}{A_2}; \quad \eta_3 = \frac{A_3'}{A_3}; \quad \dots; \quad \eta_n = \frac{A_n'}{A_n}.$$

Звідом

$$A_1 = \frac{A'_1}{\eta_1}; A_2 = \frac{A'_2}{\eta_2}; A_3 = \frac{A'_3}{\eta_3}; \dots; A_n = \frac{A'_n}{\eta_n}.$$

Тоді

$$A_p = \frac{A'_1}{\eta_1} + \frac{A'_2}{\eta_2} + \frac{A'_3}{\eta_3} + \dots + \frac{A'_n}{\eta_n}.$$

Виходячи з визначення ККД

$$\eta = \frac{A_{к.о}}{A_p} = \frac{A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_n}{\frac{A'_1}{\eta_1} + \frac{A'_2}{\eta_2} + \frac{A'_3}{\eta_3} + \dots + \frac{A'_n}{\eta_n}}. \quad /9.4/$$

Формула /9.4/ показує, що чим вищий ККД кожної машини, тим менший знаменник і тим вищий загальний ККД.

При другому варіанті передачі енергії кілька двигунів живлять одну машину.

Тут  $A'_1$  - корисна робота від першого двигуна, робота рушійних сил якого -  $A_1$  і т.ін.

ККД кожного механізму машини:

$$\eta_1 = \frac{A'_1}{A_1}; \eta_2 = \frac{A'_2}{A_2}; \eta_3 = \frac{A'_3}{A_3}; \dots; \eta_n = \frac{A'_n}{A_n}.$$

Звідом

$$A'_1 = A_1 \eta_1; A'_2 = A_2 \eta_2; A'_3 = A_3 \eta_3; \dots; A'_n = A_n \eta_n.$$

Сумарна корисна робота

$$A_{к.о} = A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_n.$$

Сумарна робота рушійних сил

$$A_p = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n.$$

Загальний ККД машини

$$\eta = \frac{A_{к.о}}{A_p} = \frac{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + \dots + A_n \eta_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}. \quad /9.5/$$

Зрозуміло, що чим вищий ККД кожного механізму машини, тим більший чисельник і тим вищий загальний ККД машини.

### 9.3. Змішане з'єднання механізмів або машин

При визначенні загального ККД змішаного з'єднання механізмів /рис. 9.4/ при наявності одного колектора потужності /ланки, від якої відгалужуються силові потоки/ спочатку визначають ККД послідовних, а потім паралельних з'єднань.

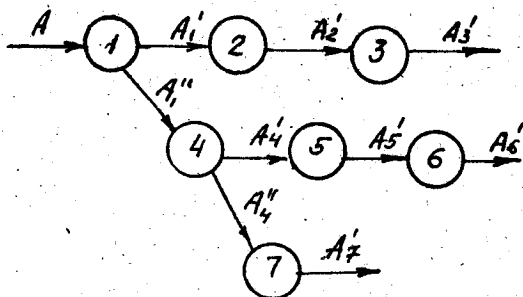


Рис. 9.4

### 9.4. ККД похилої площини і гвинтової пари

ККД похилої площини визначимо як відношення корисної роботи при підніманні вантажу  $Q$  на висоту  $h$  до затраченої роботи при переміщенні його по похилій площині силою  $P$  на відстань  $s$  /рис. 9.5/:

$$\eta = \frac{A_k}{A_s} = \frac{Qh}{Ps \cos \gamma} = \frac{Qs \sin \alpha}{Ps \cos(90^\circ - \beta - \alpha)} = \frac{Q \sin \alpha}{P \sin(\beta + \alpha)}$$

Із трикутника сил за теоремою синусів

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \rho)}$$

Коли кут  $\beta = 90^\circ$

$$P = \frac{\sin(\alpha + \rho)}{\cos(\alpha + \rho)} = Q \operatorname{tg}(\alpha + \rho)$$

Після підстановки  $P$  дістанемо:

$$\eta = \frac{Q \sin \alpha}{Q \operatorname{tg}(\alpha + \rho) \sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{Q \sin \alpha}{Q \operatorname{tg}(\alpha + \rho) \cos \alpha};$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \rho)}$$

/9.6/

При рівномірному опусканні вантажу  $Q$  сили опору і рушійні сили поміняються місцями:  $Q$  буде рушійною, а  $P$  - силою опору. Тоді

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \rho)}{\operatorname{tg} \alpha} \quad /9.7/$$

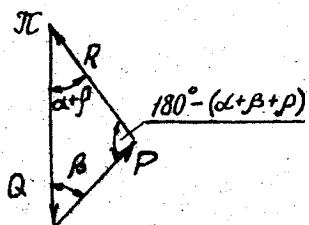
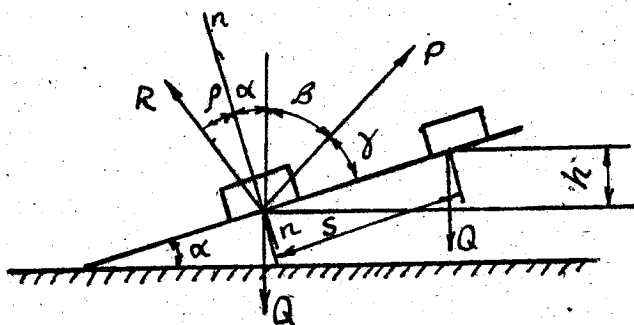


Рис. 9.5

Якщо розглядати розгортку гвинтової лінії чи витка черв'яка як похилу площину, в якій кут підйому гвинтової лінії дорівнює куту нахилу  $\alpha$  похилої площини, то формулами /9.6/ і /9.7/ можна скористатися для визначення ККД гвинтової пари і ККД черв'ячної зубчастої передачі:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{H}{\pi d_c} = \frac{z p}{\pi d_c}$$

де  $H$  - хід гвинта /черв'яка/;  $p$  - крок;  $z$  - число витків;  $d_c$  - середній діаметр гвинта /черв'яка/.

Для визначення максимального значення ККД візьмемо першу похідну за  $\alpha$  від виразу /9.6/ і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = 0 = \frac{(tg \alpha)' tg(\alpha+p) - [tg(\alpha+p)]' tg \alpha}{[tg(\alpha+p)]^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} tg(\alpha+p) - \frac{1}{\cos^2(\alpha+p)} tg \alpha}{tg^2(\alpha+p)} = 0.$$

Дріб дорівнюватиме нулю, якщо його чисельник дорівнює нулю:

$$\frac{tg(\alpha+p)}{\cos^2 \alpha} - \frac{tg \alpha}{\cos^2(\alpha+p)} = \frac{\sin(\alpha+p)}{\cos(\alpha+p)\cos \alpha \cos \alpha} -$$

$$- \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cos(\alpha+p)\cos(\alpha+p)} = 0.$$

Скоротивши на  $\cos(\alpha+p)$ , дістанемо

$$\frac{\sin(\alpha+p)}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha+p)} = 0,$$

або

$$\frac{\sin(\alpha+p)}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha+p)}.$$

Добуток крайніх членів пропорції, як відомо, дорівнює добутку середніх, тому

$$\sin(\alpha+p) \cos(\alpha+p) = \sin \alpha \cos \alpha.$$

Помножимо і поділимо праву і ліву частини на 2:

$$\frac{2}{2} \sin(\alpha+p) \cos(\alpha+p) = \frac{2}{2} \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2(\alpha+p) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Оскільки  $\alpha+p \neq 2\alpha$ , бо  $p \neq 0$ , а  $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha)$ , то  $2(\alpha+p) = \pi - 2\alpha$ . Звідки  $4\alpha = \pi - 2p$ , а отже, кут похилої площини, коли ККД її дорівнює максимуму:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}.$$

/9.8/

### 9.5. ККД зубчастих механізмів з рухомими осями

Розглянемо пару зубчастих коліс з рухомими в просторі осями [18]. Робота сил тертя за цикл зачеплення

$$A = M_{T,3} \alpha_8, \quad /9.9/$$

де  $M_{T,3}$  - середній момент тертя;  $\alpha_8$  - відносний кут повороту.

Кут  $\alpha_g$  можна визначити залежно від кутів повороту коліс I і 2 відносно їх лінії центрів:

$$\alpha_g = \alpha_1 \pm \alpha_2 \quad /9.10/$$

/знак "+" для зовнішнього, "-" - для внутрішнього зачеплення/.

Якщо осі зубчастих коліс нерухомі, то

$$A = \psi^n A_p, \quad /9.11/$$

де  $\psi^n$  - коефіцієнт втрат при нерухомих осях коліс;  $A_p$  - робота рушійних сил за цикл зачеплення, при ведучому колесі  $Z_1$ :

$$A_p = \frac{1}{2} m z_1 P_1 \alpha_1, \quad /9.12/$$

де  $m$  - модуль зачеплення /торцевий для косозубих коліс/;  $Z_1$  - число зубів колеса I;  $P_1$  - колове зусилля на ділянці коліс.

З формул /9.9/ - /9.12/

$$M_{T.3}(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \frac{1}{2} \psi^n m z_1 P_1 \alpha_1.$$

Урахувавши, що  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{z_2}{z_1}$ , знайдемо:

$$M_{T.3} = \frac{\psi^n}{2 \left( \frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right)} m P_1. \quad /9.13/$$

Величина  $M_{T.3}$  не залежить від того, рухомі чи нерухомі осі зубчастих коліс, оскільки для них при заданій нормальній силі  $P_1$  між зубами робота тертя залежить тільки від відносного кута повороту коліс  $\alpha_g$  /шляху дії сили  $P_1$ /, а кут  $\alpha_g$  залежить від геометричних параметрів коліс. Поділивши рівняння /9.9/ на час зачеплення, визначимо потужність сил тертя за цикл зачеплення:

$$N_{T.3} = M_{T.3} n_g, \quad /9.14/$$

де  $n_g$  - відносна кутова швидкість коліс.

Коефіцієнт втрат  $\psi^n$  визначається експериментально або теоретично для тих чи інших зубчастих коліс. Для евольвентних коліс можна скористатися формулами, запропонованими В.Н.Кудряцевим [19] для прямозубих і косозубих стандартних і виправлених коліс.



Миттєву потужність тертя в обертальній парі можна знайти за формулою

$$N_{т.п} = f_n R z_n n_{в.п.}, \quad /9.15/$$

де  $f_n$  - коефіцієнт тертя в підшипнику;  $R$  - повна реакція;  $z_n$  - радіус підшипника;  $n_{в.п.}$  - відносна кутова швидкість ланок пари.

У зубчастих механізмах  $n_{в.п.}$  - величина стала;  $R$ , як правило, - також стала, рідше - змінна. Сталій  $R$  відповідає стала  $N_{т.п}$ . Якщо  $R$  - змінна, то її можна знайти для конкретного випадку.

Для визначення ККД планетарного чи диференціального зубчастого механізму встановимо зв'язок між кутовими швидкостями сонячних коліс і водила, а потім знайдемо відносні кутові швидкості в обертальних і зубчастих парах. Все це можна зробити на основі відомих співвідношень кутових швидкостей цих ланок і передаточних відношень в їх русі відносно водила. Визначивши кутові швидкості, запишемо рівняння зовнішніх моментів і потужностей. Потім за формулою

$$\eta = \frac{N_{к.о}}{N_p}$$

знаходимо ККД епіциклічної передачі.

Зауважимо, що коефіцієнт втрат  $\mu^N$  наближено можна визначити так:

$$\eta = 1 - \mu^N,$$

де ККД  $\eta$  зубчастих передач можна знайти в довідниках. Для точнішого визначення коефіцієнта втрат можна скористатися рекомендаціями В.Н.Кудрявцева [19]:

$$\mu_3^N = 2,3f \left( \frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right), \quad /9.16/$$

де знак "+" стосується зовнішнього, "-" - внутрішнього зачеплення;  $f = /0,05 - 0,1/$  - коефіцієнт тертя в зачепленні; для важко навантажених передач з двома внутрішніми зачепленнями  $f = 0,1 - 0,12$ .

Розглянемо кілька передач з рухомими осями і визначимо їх ККД для конкретних умов. Отже, визначимо ККД передачі, зображеної на рис. 9.6, для таких умов:  $z_1 = z'_2 = 84$ ;  $z_2 = 88$ ;  $z_3 = 85$ ;  $/u_{11} = 7056/$ ,  $\mu_{12}^N = \mu_{23}^N = 0,0044$ . Рух передається від водила  $H$  на колесо 1, колесо 3 - нерухоме /планетарний механізм/. Кутові швидкості, як відомо,

$$\frac{n_2 - n_H}{n_3 - n_H} = u_{23}^H; \quad n_{2'3} = n_2 = n_H (1 - u_{23}^H); \quad n_1 = n_H u_{1H};$$

$$n_{12} = n_1 - n_2 = (u_{1H} + u_{23}^H - 1) n_H.$$

Рівняння моментів в сил сателіта:

$$M_H - M_1 + M_3 = 0.$$

Рівняння потужностей з урахуванням /9.13/

$$M_H |n_H| - M_1 |n_1| - K_{12} m P_1 |n_{12}| -$$

$$- K_{23} m P_3 |n_{23}| = 0,$$

де

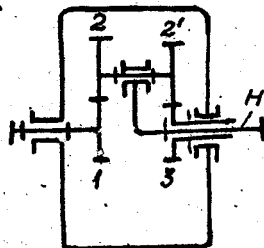


Рис. 9.6

$$K_{12} = \frac{z_{12}^H}{2 \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right)}; \quad K_{2'3} = \frac{z_{2'3}^H}{2 \left( \frac{1}{z_2'} + \frac{1}{z_3} \right)},$$

/9.17/

а колові зусилля

$$P_1 = \frac{2M_1}{mz_1}; \quad P_3 = \frac{2M_3}{mz_3} = \frac{2(M_1 - M_H)}{mz_3}.$$

Підставляємо значення  $P_1$  і  $P_3$  до рівняння потужностей:

$$M_H |n_H| - M_1 |n_1| - K_{12} m \frac{2M_1}{mz_1} |n_{12}| - K_{2'3} m \frac{2(M_1 - M_H)}{mz_3} |n_{2'3}| = 0.$$

Звідси

$$M_1 = \frac{M_H \left( |n_H| + 2K_{23} \frac{|n_{2'3}|}{z_3} \right)}{|n_1| + 2K_{12} \frac{|n_{12}|}{z_1} + 2K_{2'3} \frac{|n_{2'3}|}{z_3}}.$$

Оскільки  $|n_1| = |n_H| |u_{1H}|$ , то

$$M_1 = \frac{M_H \left( |n_H| + \frac{2K_{2'3}}{z_3} |n_{2'3}| \right)}{|n_H| |u_{1H}| + \frac{2K_{12}}{z_1} |n_{12}| + \frac{2K_{2'3}}{z_3} |n_{2'3}|},$$

а відношення моментів в сил

$$\frac{M_1}{M_N} = \frac{|\pi_N| + \frac{2K_{2'3}}{Z_3} |\pi_{2'3}|}{|\pi_N| |U_{IN}| + \frac{2K_{12}}{Z_1} |\pi_{12}| + \frac{2K_{2'3}}{Z_3} |\pi_{2'3}|} \quad /9.18/$$

ККД редуктора при передачі руху від волила до колеса I:

$$\eta_{NI} = \frac{M_1 \omega_1}{M_N |\omega_N|} = \frac{M_1}{M_N} |U_{IN}|$$

Підставивши  $\frac{M_1}{M_N}$  із /9.18/ і абсолютні значення відносних кутових швидкостей, матимемо

$$\eta_{NI} = \frac{\left[ |\pi_N| + \frac{2K_{2'3}}{Z_3} |\pi_N| (1 - U_{2'3}^N) \right] |U_{IN}|}{|\pi_N| |U_{IN}| + \frac{2K_{12}}{Z_1} |\pi_N| (U_{IN} + U_{2'3}^N - 1) + \frac{2K_{2'3}}{Z_3} |\pi_N| (1 - U_{2'3}^N)}$$

Скоротивши на  $|\pi_N|$ , дістанемо

$$\eta_{NI} = \frac{\left[ 1 + \frac{2K_{2'3}}{Z_3} \left( 1 + \frac{Z_3}{Z_2'} \right) \right] |U_{IN}|}{|U_{IN}| + \frac{2K_{12}}{Z_1} |U_{IN}| - \frac{2K_{12}}{Z_1} \frac{Z_3}{Z_2'} - \frac{2K_{12}}{Z_1} + \frac{2K_{2'3}}{Z_3} + \frac{2K_{2'3}}{Z_3} \frac{Z_3}{Z_2'}}$$

Підставимо  $K_{12}$  і  $K_{2'3}$ :

$$\eta_{NI} = \frac{\left[ 1 + \frac{2\psi_{2'3}^N (Z_2' + Z_3)}{2Z_3 \left( \frac{1}{Z_2'} + \frac{1}{Z_3} \right) Z_2'} \right] |U_{IN}|}{|U_{IN}| + \frac{2\psi_{12}^N}{Z_1 Z \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)} |U_{IN}| - \frac{2\psi_{12}^N}{Z_1 Z \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)} \frac{Z_3}{Z_2'} - \frac{2\psi_{12}^N}{Z_1 Z \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)} + \frac{2\psi_{2'3}^N}{Z_3 Z \left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)} + \frac{2\psi_{2'3}^N}{Z_3 Z \left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)} \frac{Z_3}{Z_2'}}$$

$$= \frac{\left[ 1 + \frac{\psi_{2'3}^N}{Z_3 \left( \frac{Z_3 + Z_2'}{Z_2' Z_3} \right)} \frac{(Z_2' + Z_3)}{Z_2'} \right] |U_{IN}|}{|U_{IN}| + \frac{\psi_{12}^N}{Z_1 (Z_2 + Z_1)} |U_{IN}| - \frac{\psi_{12}^N}{Z_1 (Z_2 + Z_1)} \frac{Z_3}{Z_2'} - \frac{\psi_{12}^N}{Z_1 (Z_2 + Z_1)} + \frac{\psi_{2'3}^N}{Z_3 (Z_3 + Z_2')} + \frac{\psi_{2'3}^N}{Z_3 (Z_3 + Z_2')} \frac{Z_3}{Z_2'}}$$

$$(1 + \psi_{2'3}^N) |U_{IN}|$$

$$= \frac{|U_{IN}| + \frac{\psi_{12}^N Z_3}{(Z_2 + Z_1)} |U_{IN}| + \frac{|U_{IN}|}{|U_{IN}|} \left[ \frac{\psi_{12}^N Z_3 Z_2}{(Z_2 + Z_1) Z_2'} - \frac{\psi_{12}^N}{(Z_2 + Z_1)} + \frac{\psi_{2'3}^N Z_3}{(Z_3 + Z_2')} + \frac{\psi_{2'3}^N Z_3}{(Z_3 + Z_2')} \right]}$$

$$= \frac{1 + \psi_{2'3}^N}{1 + \frac{\psi_{12}^N z_2}{(z_2 + z_1)} + |\mu_{H1}| \left[ \frac{\psi_{12}^N z_3 z_2}{(z_2 + z_1) z_2} - \frac{\psi_{12}^N z_2}{(z_2 + z_1)} + \frac{\psi_{2'3}^N z_1'}{(z_3 + z_2')} + \frac{\psi_{2'3}^N z_3}{(z_3 + z_2')} \right]}$$

$$= \frac{1 + \psi_{2'3}^N}{1 + |\mu_{H1}| \left[ \frac{\psi_{12}^N}{(z_2 + z_1)} \left( \frac{z_2}{|\mu_{H1}|} - \frac{z_3 z_2}{z_1'} - z_2 \right) + \psi_{2'3}^N \right]}$$

Оскільки

$$\mu_{H1} = \frac{1}{\mu_{H1}} = \frac{1}{1 - \frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_1'}} = \frac{z_1 z_1'}{z_1 z_1' - z_2 z_3}$$

$$\eta_{H1} = \frac{1 + \psi_{2'3}^N}{1 + |\mu_{H1}| \left\{ \frac{\psi_{12}^N}{(z_2 + z_1)} \left[ \frac{z_2 (z_1 z_1' - z_2 z_3)}{z_1 z_1'} - \frac{z_3 z_2}{z_1'} - z_2 \right] + \psi_{2'3}^N \right\}}$$

$$= \frac{1 + \psi_{2'3}^N}{1 + |\mu_{H1}| \left\{ \frac{\psi_{12}^N}{(z_2 + z_1)} \left( \frac{z_2 z_1 z_1' - z_2 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1' - z_2 z_1 z_2'}{z_1 z_1'} \right) + \psi_{2'3}^N \right\}}$$

$$= \frac{1 + \psi_{2'3}^N}{1 + |\bar{\mu}_{H1}| \left( \frac{\psi_{12}^N z_2 z_3 (z_2 + z_1)}{(z_2 + z_1) z_1 z_1'} + \psi_{2'3}^N \right) + |\bar{\mu}_{H1}| \left( \psi_{12}^N |\bar{\mu}_{13}^N| + \psi_{2'3}^N \right)}$$

Отже, ККД планетарного механізму Давида при передачі руху від водила на колесо I:

$$\eta_{H1} = \frac{1 + \psi_{2'3}^N}{1 + |\bar{\mu}_{H1}| \left( \psi_{12}^N |\bar{\mu}_{13}^N| + \psi_{2'3}^N \right)} \quad /9 \text{ I9/}$$

Підставивши числові дані з умови задачі, визначимо ККД механізму:

$$\eta_{H1} = \frac{1 + 0,0044}{1 + 7056 \left( 0,0044 \frac{83}{84} \frac{85}{84} + 0,0044 \right)} = 0,0159.$$

Визначимо ККД диференціального зубчастого механізму, зображеного на рис. 9.7, якщо  $Z_1 = 31$ ;  $Z_2 = 28$ ;  $Z_2' = 35$ ;  $Z_3 = 38$ ;  $\psi_{H1}^N = 51,66$ ;  $\psi_{12}^N = \psi_{2'3}^N = 0,0025$ ;  $n_H = 150$  об/хв;  $n_3 = 150$  об/хв;  $M_H = 50$  кгс·см. Напрями  $M_H$  і  $n_H$  збігаються /  $H$  - одна з ведучих ланок/.

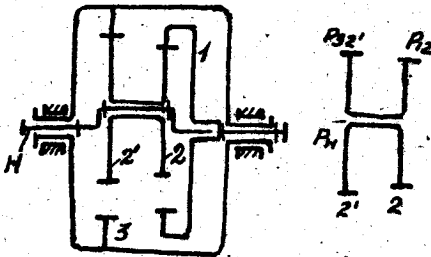


Рис. 9.7

Число обертів за хвилину

$$n_H = 150; n_3 = -150;$$

$$\frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H} = \psi_{13}^N; n_1 = \psi_{13}^N (n_3 - n_H) + n_H;$$

$$\frac{n_2 - n_H}{n_1 - n_H} = \psi_{21}^N; n_2 = \psi_{21}^N (n_1 - n_H) + n_H;$$

$$n_1 = -144,19; n_2 = -175,71; n_{12} = 31,52; n_{32} = 25,71.$$

Рівняння моментів сил, що діють на ланку 2. На ланку 2 діють сили  $P_{12}$ ,  $P_{H2}$  і  $P_{32}$  тиску водила  $H$  і сонячних коліс 1 і 3:

$$-M_1 + M_3 + M_H = 0.$$

Значимо, що напрям момента  $M_1$  збігається з  $n_1$ , а момент  $M_3$  направлений протилежно  $n_3$ . Отже, ланка 1, як і водило  $H$ , - ведуча, а ланка 3 - ведена.

Рівняння потужностей:

$$M_1 n_1 - M_3 n_3 + M_H n_H - K_{12} m P_{12} n_{12} - K_{23} m P_{32} n_{23} = 0,$$

де

$$K_{12} = \frac{\psi_{12}^N}{2\left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1}\right)}; K_{23} = \frac{\psi_{23}^N}{2\left(\frac{1}{Z_2'} - \frac{1}{Z_3}\right)}; M_3 = M_1 - M_H;$$

$$P_{12} = \frac{2M_1}{mZ_1}; P_{32} = \frac{2M_3}{mZ_3} = \frac{2(M_1 - M_H)}{mZ_3}.$$

Підставивши до рівняння потужностей значення  $M_3 = M_1 - M_H$  і  $P_{12}$  та  $P_{32}$ , після перетворень, аналогічних виконаним у попередній задачі, знайдемо:

$$M_1 = - \frac{n_2 + n_H + \frac{2K_{23}}{Z_3} n_{23}}{n_1 - n_3 - \frac{2K_{12}}{Z_1} n_{12} - \frac{2K_{23}}{Z_3}} M_H;$$

/9.20/

$$M_3 = M_1 - M_H.$$

ККД диференціального механізму

$$\eta = \frac{N_{к.о}}{N_p}$$

тобто

$$\eta_{1, H \rightarrow 3} = \frac{M_3 r_3}{M_1 r_1 + M_H r_H} \quad /9.21/$$

Для числових даних задачі

$$M_1 = 2061 \text{ кгс-см}; \quad M_3 = 2011 \text{ кгс-см}; \quad \eta_{1, H \rightarrow 3} = 0,99.$$

Розглянемо передачу *C* - I /диференціальний механізм із замкаючим ланцюгом /рис. 9.8/. Рух передається від *C* на колесо I. Зв'язки між частотами обертання ланок:

$$n_1 = n_5 u_{1c}; \quad n_2 = n_5 u_{1c} u_{21};$$

$$n_3 = n_5 u_{1c} u_{31}; \quad \frac{n_4 - n_1}{n_5 - n_1} = u_{45}^H;$$

$$n_4 = n_5 [u_{1c} + (1 - u_{1c}) u_{45}^H];$$

$$n_{12} = n_5 u_{1c} (1 - u_{21});$$

$$n_{23} = n_5 u_{1c} (u_{21} - u_{31});$$

$$n_{34} = n_5 [u_{1c} (u_{31} - 1) - (1 - u_{1c}) u_{45}^H];$$

$$n_{45} = n_5 (u_{1c} - 1) (1 - u_{45}^H).$$

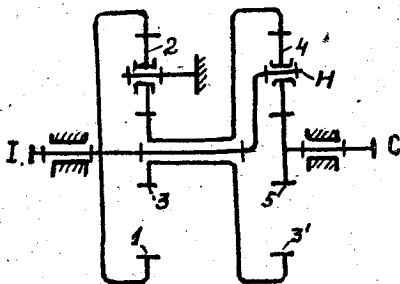


Рис.9.8

Рівняння моментів сил для диференціальної частини механізму:

$$M_5 - M_H + M_3 = 0. \quad /9.22/$$

Ланки *H*-*1*-*1*:

$$M_H - M_1 + M_1 = 0. \quad /9.23/$$

Напрямок моментів знаходимо з умов рівноваги відповідно сателіта 4 і колеса 2.

Рівняння потужностей для диференціальної частини механізму

$$M_5 n_5 - M_H n_H - M_3 n_3 - K_{45} m P_5 n_{45} - K_{34} m P_3 n_{34} = 0. \quad /9.24/$$

Рівняння потужностей замикаючого ланцюга

$$M_4 n_4 - M_1 n_1 + M_3 n_3 - K_{23} m P_3 n_{23} - K_{12} m P_1 n_{12} = 0. \quad /9.25/$$

Із рівнянь /9.22/ і /9.24/ знаходимо

$$M_4 = K M_5,$$

де

$$K = |u_{c1}| \frac{1 + |u_{1c} u_{31}| - \frac{2K_{15}}{Z_5} [(u_{1c} - 1)(1 - u_{45}^N)] + \frac{2K_{24}}{Z_3} [u_{1c}(u_{31} - 1) - (1 - u_{1c}) u_{45}^N]}{1 + |u_{31}| + \frac{2K_{31}}{Z_3} [u_{1c}(u_{31} - 1) - (1 - u_{1c}) u_{45}^N]}$$

Із рівнянь /9.23/ і /9.24/ з урахуванням знаходимо відношення

$$\frac{M_1}{M_5} = K + (K + 1) \frac{u_{31} - \frac{2K_{23}}{Z_3} |u_{21} - u_{31}|}{1 + \frac{2K_{12}}{Z_1} |1 - u_{21}|},$$

а ККД

$$\eta_{c1} = \frac{M_1 n_1}{M_5 n_5} = \frac{M_1}{M_5} u_{1c}. \quad /9.26/$$

## 10. МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ.

### ФРИКЦІЙНІ ПЕРЕДАЧІ

#### Загальні відомості

Сучасний машинний агрегат складається з машини-двигуна, передаючих механізмів і машини-зав'язки, або робочої машини. Отже, між двигуном і робочою машиною майже завжди встановлюється передаючий механізм, або просто — передача.

Механічними передачами називаються механізми, що служать для передачі енергії та руху від двигуна до робочих органів машини, як правило, зі зміною швидкостей, сил, моментів, а також характеру і закону руху, а іноді тільки напрямку руху. Більшість із цих передач є передачі обертального руху. Тому в курсі теорії механізмів і машин їм відведено чільне місце.

Необхідність введення між двигуном і робочою машиною передачі зумовлено такими причинами:

І/ швидкість робочої машини має бути меншою за швидкість двигуна /зумовлена технологічним процесом/;

- 2/ можливістю регулювати швидкість робочого органу машини;
- 3/ можливістю мати на валу робочої машини крутячий момент, більший за момент на валу двигуна;
- 4/ можливістю приводити в рух від одного двигуна кілька механізмів;
- 5/ необхідністю замінити обертальний рух поступальним чи коливальним;

6/ неможливістю з'єднати безпосередньо двигун з робочою машиною, зумовленою технікою безпеки, зручністю обслуговування та ін.

Безумовно, найзручнішим і найекономічнішим є пряме з'єднання двигуна з робочою машиною. Багато машин має таку конструкцію, але перелічені причини зумовлюють необхідність вставляти між двигуном і робочою машиною додаткові механічні передачі.

За способами передачі руху чи момента від ведучої ланки до веденої механічні передачі поділяють на такі:

1. передачі тертям: а/ з безпосереднім контактом ланок /циліндричні, конічні, лобові, фрикційні/; б/ з допомогою гнучкого з'єднання /пасові, тросові, стрічкові/.

2. передачі зачепленням ланок: а/ з безпосереднім контактом /зубчасті циліндричні, конічні, черв'ячні та ін./; б/ з допомогою гнучкого з'єднання /ланцюгові/.

Цікавим різновидом данцюгових передач є зубчато-пасові, в яких пас із пластмаси на внутрішній поверхні має зуби, що вступають у зачеплення з зубами на шківках.

За можливістю змінювати передаточне число передач тертям і зачепленням поділяють на такі:

- а/ зі сталим передаточним числом;
- б/ зі ступінчастою зміною швидкостей;
- в/ з плавним регулюванням швидкостей.

За відносним розміщенням валів передач у просторі:

- а/ плоскі, осі валів яких розміщені в одній чи паралельних площинах;
- б/ просторові, осі яких перетинаються /конічні/ або перехрещуються в просторі /зубчасті гвинтові та черв'ячні/.

Вибравши тип передачі, треба враховувати також втрати потужності на тертя і ковзання ланок. Так, у добре виготовленій зубчастій передачі ці втрати можуть не перевищувати 1% /ККД = 99%, у ланцюговій - 2-2,5%, у пасових - 2-5%, у черв'ячній - до 25%.



Тому в суднових турбінах зустрічаються редуктори, що передають потужність 50000 кВт і більше, а потужності, що їх передають через такі редуктори, не перевищують 750 кВт, пасові передачі - 2500 кВт, ланцюгові - 5000 кВт, фрикційні - 200...300 кВт.

### 10.1. Циліндрична фрикційна передача

Найпростіша за конструкцією і виготовленням - циліндрична фрикційна передача, що дає змогу передавати рух між валами, осі яких обертаться в одній чи паралельних площинах. Передача складається зі стояка та двох гладких циліндричних коліс, які робочими циліндричними поверхнями притиснуті настільки, що сила тертя, яка виникає між ними, дає змогу передати необхідний момент. Колесо 1 /рис. 10.1/

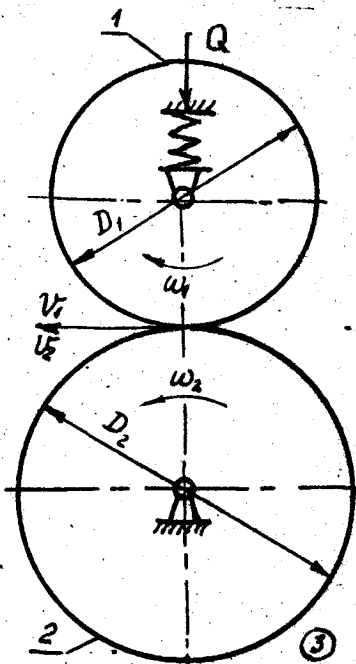


Рис. 10.1

що передає рух, називається ведучим. Його опора виконана рухомою по вертикалі для забезпечення необхідного притиску до веденого колеса 2, якому передається рух. Вважаючи, що колеса перекочуються одне по одному без ковзання, це забезпечується при достатньому притиску їх, можна стверджувати, що  $v_1 = v_2$ , тобто їх колісні швидкості рівні між собою. Запишемо цю рівність, м/с,

$$\frac{\pi D_1 n_1}{1000 \cdot 60} = \frac{\pi D_2 n_2}{1000 \cdot 60},$$

і визначимо передаточне відношення від першого колеса до другого

$$u_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad /10.1/$$

Міжосьова відстань

$$a = \frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2} = \frac{D_1 D_1}{2 D_1} + \frac{D_2 D_1}{2 D_1} = \frac{D_1}{2} (1 + u_{1,2}),$$

$$a = r_1 + r_2 = r_1 (1 + u_{1,2}).$$

або

$$z_1 = \frac{a}{|u_{1,2}| + 1}; \quad /10.2/$$

$$z_2 = \frac{a |u_{1,2}|}{u_{1,2} + 1}. \quad /10.3/$$

Якщо у фрикційній передачі є ковзання, то  $v_2 = v_1(1 - \nu)$ , де  $\nu$  - коефіцієнт ковзання, при нормальному робочому навантаженні  $\nu = 0,01 \dots 0,02$ , при холостому ході  $\nu = 0$ . Колове зусилля  $P$ , яке необхідно передати з допомогою циліндричної гладкої фрикційної передачі, гранично дорівнює силі тертя, тобто  $P = F = Qf$ , де  $Q$  - сила притиску,  $f$  - коефіцієнт тертя. Для нормальної роботи фрикційної передачі силу притиску збільшують в 1-2 рази.

Розв'язуючи обернену задачу, знаходимо:  $Q = \frac{F}{f} = \frac{P}{f}$ . Якщо коефіцієнт тертя  $f = 0,1$ , то  $Q = 10P$ . Це один із недоліків фрикційних передач: зі зростанням коллового зусилля  $P$  значно зростають габаритні розміри підшипників і передачі в цілому. Другим недоліком є ковзання коліс /нестабільне передаточне відношення/, третім - велике напруження у залах, четвертим - не дуже велика потужність, яку можна передавати фрикційними колесами. Переваги передачі: проста конструкція та виготовлення, робота без поштовхів і перевантажень /при перевантаженні ведена ланка просковзне/, допустимі значні швидкості, невисока собівартість передачі.

Підвищити коефіцієнт тертя, збільшити колове зусилля й уникнути зазначених недоліків можна правильним вибором матеріалів коліс: дерево - чавун, текстоліт - сталь, сталь - шкіра, сталь - гума тощо. /Звичайно, гумою чи шкірою лише покривають опорні фрикційні поверхні металевих коліс./

## 10.2. Фрикційні передачі з клинчастими колесами

Уникнути згаданих недоліків, підвищити колове зусилля можна також конструкторськими методами, застосувавши, наприклад, не гладкі циліндричні, а клинчасті колеса. Схематичне зображення такої передачі показано на рис. 10.2:  $Q$  - сила натиску на колесо,  $N_1, N_2$  - нормальні реакції /сили натиску/ коліс.

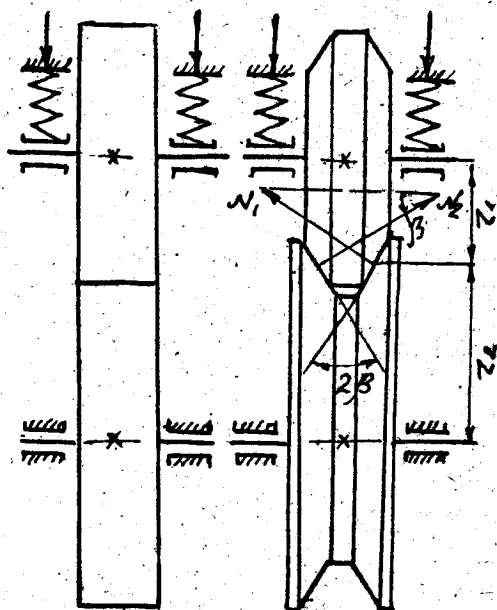


Рис. 10.2

Спростивавши сили на вертикальну вісь, якщо  $N_1 = N_2 = N$ , дістанемо

$$2N \sin \beta = Q,$$

звідки

$$N = \frac{Q}{2 \sin \beta}.$$

Сила тертя, що виникла під дією нормальних сил:

$$F = 2Nf = \frac{2Qf}{2 \sin \beta} = Q \frac{f}{\sin \beta} = Qf', \quad /10.4/$$

де  $f' = \frac{f}{\sin \beta}$  — зведений коефіцієнт тертя або коефіцієнт тертя клинчастого повзуну.

Якщо  $\beta = 30^\circ$ , то

$$F = \frac{Qf}{\sin 30^\circ} = 2Qf.$$

Колове зусилля

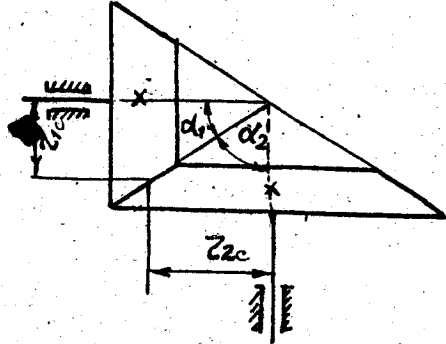
$$P \leq F \quad \text{або} \quad P \leq Q \frac{f}{\sin \beta}.$$

Отже, якщо кут жолоба /клина/  $\beta = 30^\circ$  при такій самій силі натиску  $Q$ , що і в передачі з гладкими колесами, циліндричними, клинчастими колесами можна передавати вдвічі більше колоне зусилля /момент/. Але за значних зусиль виникає пробуксовування профілів коліт. Передаточне відношення клинчастих коліт

$$u_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_{2c}}{z_{1c}}. \quad /10.5/$$

### Ю.3. Конічна фрикційна передача

Щоб передати рух між валами, осі яких перетинаються, застосовують конічні фрикційні передачі /рис. Ю.3/. Конічні фрикційні колеса перекочуватимуться без ковзання, коли вершини конусів зіллються з точкою перетину осей коліс. Виходячи з рівності кулових швидкостей, визначимо передаточне відношення конічних коліс



$$u_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_{2c}}{z_{1c}}$$

$$= \frac{OP \sin \alpha_2}{OP \sin \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \quad /Ю.6/$$

Якщо  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ , то

Рис. Ю.3

$$u_{1,2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin (90^\circ - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} \alpha_1$$

### Ю.4. Фрикційні передачі з безступінчастою зміною частоти обертання

Лобова фрикційна передача /рис. Ю.4/

Передаточне відношення

$$u_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}; \quad u_{1,2 \max} = \frac{z_{2 \max}}{z_1}; \quad u_{1,2 \min} = \frac{z_{2 \min}}{z_1}$$

Перемістивши ведучий ролик I на правий бік колеса 2, змінимо також напрям його руху, а плавно зміщуючи колесо I, плавно змінюватимемо і частоту обертання колеса 2. Безступінчасте регулювання частоти обертання можна також здійснювати з допомогою коліс зі зворотними конусами /рис. Ю.5/.

$$u_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}; \quad u_{1,2 \max} = \frac{z_{2 \max}}{z_{1 \min}}; \quad u_{1,2 \min} = \frac{z_{2 \min}}{z_{1 \max}}$$

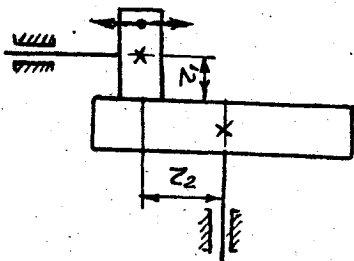


Рис. 10.4

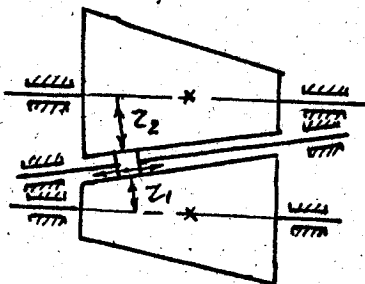


Рис. 10.5

Зсуваючи ролик 3, змінюємо плавно радіуси конусів  $z_1$  і  $z_2$ , а з ними і число обертів веденого колеса 2. За значної довжини конусів зі зміною навантаження змінюється також передаточне число [7].

### 10.5. Передачі гнучкою ланкою

До передач тертям належать передачі з гнучким з'єднанням. Гнучкі гумові стрічки, паси плоскі та клиновидні, канати і металеві стрічки широко застосовують для передачі руху між валами, у транспортних машинах і кранах. При передачі руху від одного вала до іншого з'єднання гнучкої ланки зі шківів здійснюється завдяки силам тертя, що виникають між шківом і гнучкою ланкою в результаті її попереднього натягу. На рис. 10.6 показано передачу з гнучким з'єднанням: 1 - ведучий шків, 2 - ведений, 3 - гнучка ланка, 4 - стояк.

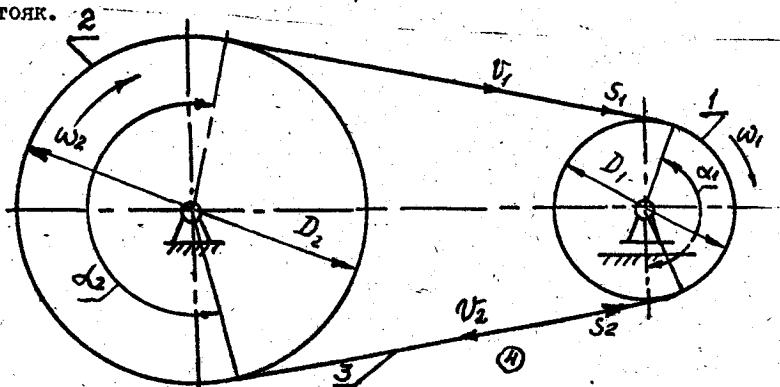


Рис. 10.6

## Кінематика передачі

Колова швидкість, м/с:  
на ведучому шківі

$$v_1 = \frac{\pi D_1 n_1}{1000 \cdot 60};$$

на веденому шківі

$$v_2 = \frac{\pi D_2 n_2}{1000 \cdot 60}. \quad /10.7/$$

У зв'язку з немінучістю проковзування гнучкої ланки ці швидкості не однакові, на веденому шківі швидкість зменшується /  $v_2 < v_1$  /:

$$v_2 = v_1 (1 - \xi), \quad /10.8/$$

де  $\xi$  - коефіцієнт ковзання гнучкої ланки,

$$\xi = \epsilon_1 - \epsilon_2; \quad /10.9/$$

$\epsilon_1, \epsilon_2$  - відносне видовження ведучого та веденого кінців гнучкої ланки.

Коефіцієнти ковзання відповідно: 0,01 для текстильних і прогумованих, 0,015 - для шкіряних, 0,02 - для клинових кордтканних пасів. Для інших пасів коефіцієнти наведено в спеціальних довідниках.

Передаточне відношення

$$u_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2 (1 - \xi)}{D_1}. \quad /10.10/$$

Переваги передач з гнучким зв'язком:

1/ плавність роботи, неможливість значних перевантажень завдяки проковзуванню гнучкої ланки;

2/ можливість роботи при високій частоті обертання валів;

3/ невисока ціна передач;

4/ можливість передати рух на середні відстані.

Недоліки:

1/ нестале передаточне відношення через проковзування гнучкої ланки;

2/ підвищений тиск на опори;

3/ значні габаритні розміри /в 4-5 разів більші, ніж зубчастих механізмів з таким самим передаточним числом/;

4/ необхідно мати натяжні пристрої при малих габаритних розмірах передачі;

5/ необхідно мати захисні кожухи від попадання масти на гнучку ланку.

#### 10.6. Тертя в передачах гнучкою ланкою.

Формула Ейлера

Передача руху від ведучого шківa до веденого здійснюється завдяки силам тертя, що виникають між шківaми та гнучкою ланкою в межах дуг обхвату  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  в результаті її попереднього натягу. Поки до веденого вала не прикладено момент опору, сила натягу набігаючого кінця гнучкої ланки  $S_1$  і збігаючого  $S_2$  однакові й дорівнюють попередньому натягу  $S_0$ :

$$S_1 = S_2 = S_0. \quad /10.11/$$

Після прикладення до веденої ланки моменту опору  $M_2$  відбувається перерозподіл натягів гнучкої ланки, на ведучому кінці сила натягу  $S_1$  стає більшою, ніж  $S_2$  на веденому:

$$S_1 = S_2 + F. \quad /10.12/$$

Отже, щоб нацяти гнучкій ланці рівномірного руху, необхідно подолати деякі сили тертя  $F$ :

$$F = S_1 - S_2. \quad /10.13 /$$

При усталеному русі зі сталою швидкістю гнучкої ланки різниця натягів збігаючого та набігаючого кінців гнучкої ланки дорівнює силі тертя між нею і шківом. У разі рівномірного руху момент сил тертя дорівнює моменту сил опору:

$$FR_2 = (S_1 - S_2)R_2 = M_2. \quad /10.14/$$

Для встановлення зв'язку між  $S_1$  і  $S_2$  виділимо нескінченно малий елемент гнучкої ланки на дузі обхвату /рис. 10.7/ і, приклавши до нього сили, розглянемо його рівновагу. На виділений елемент діють сили натягу  $S$  з боку збігаючого з веденого шківa кінця гнучкої ланки,  $S + \Delta S$  - сили натягу набігаючого на ведучий шків кінця гнучкої ланки, нормальний тиск  $dN$  шківa 2, що виникли при попередньому натязі гнучкої ланки і перерозподілі після прикладення моменту

опору  $M_2$  до шків 2, і сила  $dF$  тертя, що виникла між гнучкою ланкою та шківом під дією нормальної сили  $dN$ .

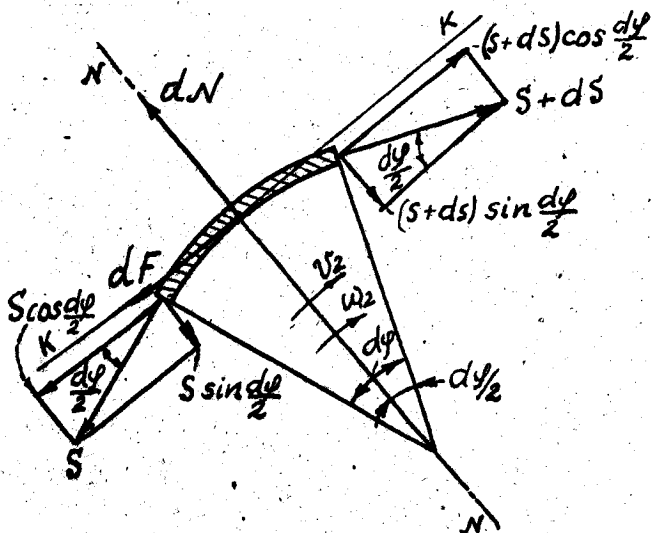


Рис. 10.7

Знехтувавши вагою, відцентровою силою і жорсткістю гнучкої ланки, спростимо сили на радіус, що проходить через середину виділеного елемента /на нормаль  $N-N$  і на дотичну  $K-K$  ( $\Sigma \vec{R} = 0$ ,  $\Sigma \vec{K} = 0$ ):

$$\begin{aligned} dN - S \sin \frac{d\varphi}{2} - (S+dS) \sin \frac{d\varphi}{2} &= 0, \\ -S \cos \frac{d\varphi}{2} - dF + (S+dS) \cos \frac{d\varphi}{2} &= 0. \end{aligned} \quad /10.15/$$

Ураховуючи, що сила тертя  $dF = dNf$ , де  $f$  - коефіцієнт тертя матеріалів гнучкої ланки і шківів, матимемо:

$$S \cos \frac{d\varphi}{2} - dNf + (S+dS) \cos \frac{d\varphi}{2} = 0. \quad /10.16/$$



За малих кутів  $\cos \frac{d\varphi}{2} = 1$ ,  $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$ , тому рівняння /10.16/ після скорочень зведемо до вигляду

$$dNf = ds. \quad /10.17/$$

Знехтувавши  $\frac{ds}{s_2} \frac{d\varphi}{2}$  як малими другого порядку, зведемо рівняння /10.15/ до вигляду

$$dN = Sd\varphi. \quad /10.18/$$

Поділимо /10.17/ на /10.18/ почленно:

$$\frac{dNf}{dN} = \frac{ds}{Sd\varphi}, \quad \text{або} \quad \frac{ds}{S} = f d\varphi.$$

Проінтегруємо ці рівняння в границях  $S_1 - S_2$  і  $0 - \alpha$ , де  $\alpha$  - кут ковзання гнучкої ланки, який дещо менший за кут обхвату  $\alpha_1$ , на ведучому шківі:

$$\int_{S_2}^{S_1} \frac{ds}{S} = \int_0^{\alpha} f d\varphi;$$

$$\ln S \Big|_{S_2}^{S_1} = f\varphi \Big|_0^{\alpha};$$

або

$$\ln S_1 - \ln S_2 = f\alpha$$

$$\ln \frac{S_1}{S_2} = f\alpha.$$

Виходячи з визначення натурального логарифма маємо

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{f\alpha}$$

або

$$S_1 = S_2 e^{f\alpha}. \quad /10.19/$$

Цю формулу вивів 1765 року Ейлер і її названо його ім'ям. Сила тертя

$$F = S_1 - S_2 = S_2(e^{f\alpha} - 1), \quad /10.20/$$

а момент тертя

$$M_T = M_2 = R_2(S_1 - S_2). \quad /10.21/$$

Звідси  $S_1 - S_2 = \frac{M_2}{R_2}$ ; (а). Ураховуючи, що  $S_1 + S_2 = 2S_0$ , маємо  $S_2 = 2S_0 - S_1$ , де  $S_0$  - відомий попередній натяг.

Підставивши це значення в /а/, матимемо:

$$S_1 - 2S_0 + S_1 = \frac{M_2}{R}$$

Звідси

$$S_1 = S_0 + \frac{M_2}{2R_2}$$

/Ю.22/

де  $S_0$  і крутний момент  $M_2$  відомі, а  $S_2 = \frac{S_1}{e^{f\alpha}}$ .

## II. ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

Зубчасті механізми широко застосовують у машинобудуванні: в металорізальних верстатах, автомобілях, тракторах, прокатних станах, транспортних, гірничих та інших машинах. Зубчасті механізми застосовують як у головних, так і в допоміжних механізмах. Цьому сприяє високий ККД, компактність, надійність у роботі, простота експлуатації. Тому, не зважаючи на складність виготовлення /треба мати спеціальні верстати та інструмент/, зубчасті механізми застосовують у нових механізмах і машинах. Щоб уникнути таких недоліків, як шум і вібрації, треба точніше виготовляти колеса і використовувати різні матеріали для пари зубчастих коліс, наприклад текстоліт - сталь, капрон - сталь, які добре і швидко припрацьовуються і в подальшому працюють без шуму та вібрацій.

За характером зачеплення зубчасті механізми поділяють на передачі: із зовнішнім, внутрішнім та рейковим зачепленням.

Передаточне відношення коліс із зовнішнім зачепленням /рис. II.1/

$$u_{1,2} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{z_2}{z_1} \quad /II.1/$$

Передаточним називається відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого. Якщо передаточне відношення зовнішнього зачеплення негативне, то передаточне відношення внутрішнього зачеплення - позитивне, оскільки обидва колеса обертаються в одному напрямі /тут - за годинникову стрілкою/ /рис. II.2/:

$$u_{1,2} = +\frac{\omega_1}{\omega_2} = +\frac{z_2}{z_1} = +\frac{z_2}{z_1} \quad /II.2/$$

У рейковому зачепленні не може бути передаточного відношення, оскільки рейка не виконує обертального руху, а переміщується поступально /рис. II.3/:

$$i_{p,k} = \frac{\omega_p}{\omega_1} = \frac{0}{\omega_1} = 0. \quad /II.3/$$

За формою зуба /кривих, якими окреслені бокові профілі зубів/ розрізняють евольвентні, циклоїдальні та інші неевольвентні зубчасті колеса.

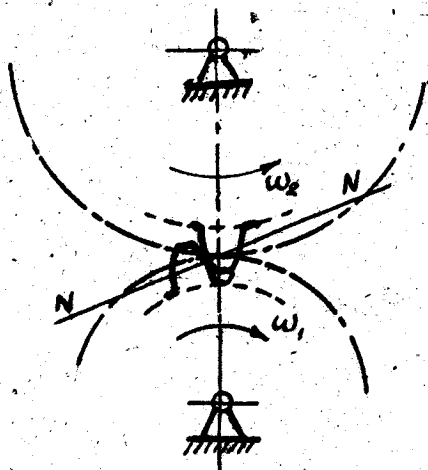


Рис. II.1

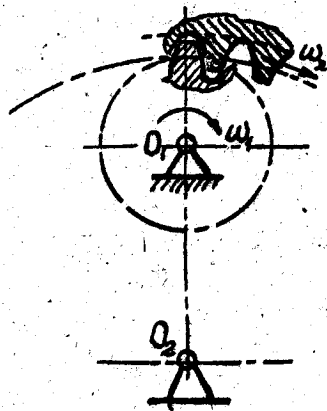


Рис. II.2

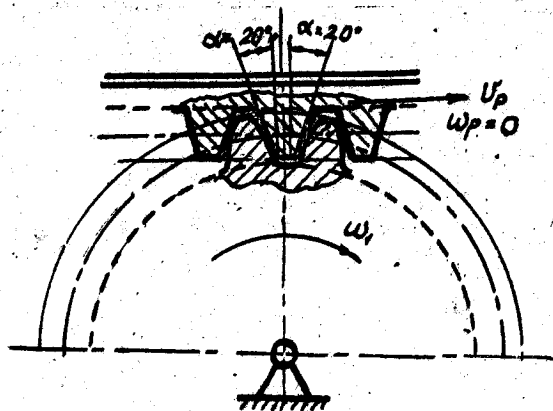


Рис. II.3

За розміщенням зубів відносно осі колеса розрізняють прямозубі й косозубі. Якщо вісь зуба паралельна осі обертання колеса, то колоесо прямозубе. Якщо зуб створює з віссю колеса певний кут, то передача косозуба.

Зазначимо, що менше з коліс зачеплення називають шестірнею, більше - колесом.

## II.I. Відносний рух зубчастих коліс.

### Основна теорема зачеплення

Обертальний рух від ведучого зубчастого колеса до веденого передається безпосереднім тиском бічної поверхні зуба ведучого колеса на спряжену з нею бічну поверхню зуба веденого колеса.

Якщо зуб перетнути площиною, перпендикулярною до осі колеса, то дістанемо лінію перетину, яка називається профілем зуба.

Профілі зубів коліс, що перебувають у зачепленні і відтворюють певне передаточне відношення, мають бути спряженими, тобто заданому профілю зуба одного з коліс має відповідати цілком визначений профіль зуба другого колеса. Отже, спряжені профілі мають задовольняти певним вимогам.

Для встановлення вимог, яким мають відповідати спряжені профілі зубів, розглянемо відносний рух зубчастих коліс. Нехай /рис. II.4/  $I$  і  $2$  - зубчасті колеса зовнішнього зачеплення,  $O_1$  -  $O_2$  - осі їх обертання,  $a_w$  - відстань між центрами обертання коліс, стала для даного зачеплення. Оскільки колова швидкість пропорційна радіусу, то для коліс  $I$  і  $2$  можна знайти таку спільну точку  $P$ , де їх абсолютні швидкості рівні між собою, а відносна швидкість дорівнює нулю:

$$v_1 - v_2 = 0.$$

Очевидно, ця точка буде полюсом відносного руху /миттєвим центром обертання/. Щоб знайти положення полюса  $P$  на лінії центрів /щоб швидкості збігалися не тільки за модулем, але й за напрямком/, застосуємо метод зворотного руху /зупинки, або інверсії/. Для цього надамо всій системі /колесам  $I$ ,  $2$  і стояку/ додаткового руху зі швидкістю  $-\omega_1$ . Тоді в перетвореному механізмі колесо  $I$  зупиниться, колесо  $2$ , перекочуючись по колесу  $I$ , обертається навколо точки  $P$  з кутовою швидкістю  $-(\omega_1 + \omega_2)$ , а лінія центрів з такою самою кутовою швидкістю обертається навколо осі  $O_1$ . Визначимо швид-

кість точки  $O_2$ , що в перетвореному механізмі належить колесу 2, а потім - лінії центрів  $O_1, O_2$ :

$$\bar{v}_{O_2} = -(\omega_1 + \omega_2) \overline{PO_2} = -\omega_1 \overline{O_1O_2}.$$

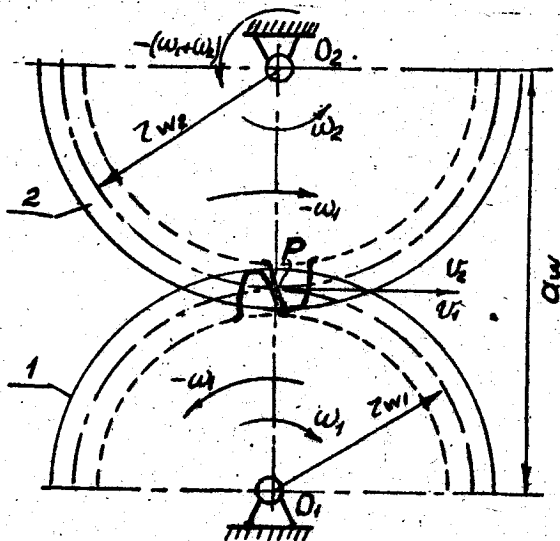


Рис. II.4

Поділимо праву й ліву частини на  $\omega_1$ :

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + 1\right) \overline{PO_2} = (u_{2,1} + 1) \overline{PO_2} = \overline{O_1O_2}. \quad /II.4/$$

але

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1P} + \overline{PO_2} = \overline{PO_2} \left(\frac{\overline{O_1P}}{\overline{PO_2}} + 1\right). \quad /II.5/$$

Підставивши /II.5/ в /II.4/, дістанемо:

$$(u_{2,1} + 1) \overline{PO_2} = \overline{PO_2} \left(\frac{\overline{O_1P}}{\overline{PO_2}} + 1\right).$$

Звідом після скорочення знайдемо:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u_{2,1} = \frac{\overline{O_1P}}{\overline{PO_2}}.$$

або

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = u_{1,2} = -\frac{\overline{O_2 P}}{\overline{O_1 P}} = -\frac{z_{w_2}}{z_{w_1}} \quad /II.6/$$

Знак перед дробом змінився на "-" оскільки поміняли напрям радіуса-вектора  $\overline{PO_2}$  на  $\overline{O_2 P}$ .

Отже, довели основну теорему зачеплення, яку можна сформулювати так: полкес у відносному русі поділяє відстань між центрами обертання зубчастих коліс на частини, обернено пропорційні їх кутовим швидкостям. Зрозумію, що для внутрішнього зачеплення

$$u_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = +\frac{z_{w_2}}{z_{w_1}}$$

Якщо  $u_{1,2} = const$ , то радіуси  $z_1$  і  $z_2$  будуть також сталими величинами. Отже, геометричним місцем положення полкеса  $P$  в перетвореному механізмі буде коло радіусом  $z_{w_1}$  з центром у точці  $O_1$ . Це коло буде нерухомою центроїдою у відносному русі. Рухомою центроїдою буде коло радіусом  $z_{w_2}$ . Отже, відносний рух зубчастих коліс визначається перекочуванням однієї по другій без ковзання центроїд, які при сталому передаточному відношенні є колами з нерухомими центрами  $O_1$  і  $O_2$ , радіуси яких обернено пропорційні кутовим швидкостям коліс.

Центроїди у відносному русі в теорії зубчастих зачеплень названо початковими колами. Розглянемо вимоги, які мають задовольняти криві, що використовуються для профілів зубів коліс, скориставшись основною теоремою зачеплення.

Припустимо, що профілі зубів стикаються в точці  $K$ , що називається точкою зачеплення. Швидкість точки  $K$  колеса I в обертальному русі навколо центра  $O_1$  /рис. II.5/:

$$v_{K_1} = \omega_1 \rho_1,$$

а точки  $K$  другого колеса

$$v_{K_2} = \omega_2 \rho_2.$$

Ці швидкості напрямлені перпендикулярно до радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$ . Постійний дотик зубів буде тільки тоді, коли проєкції швидкостей  $v_1$  і  $v_2$  на спільну нормаль  $N-N$  до профілів зубів у точці зачеплення  $K$  будуть рівні між собою.

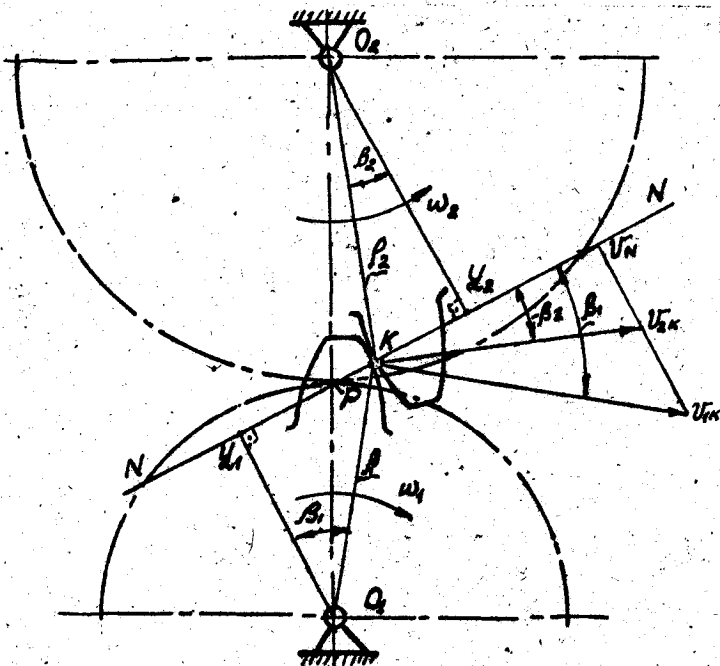


Рис. II.5

Отже,

$$v_{N_1} = R_1 \omega_1 \cos \beta_1 = v_{N_2} = R_2 \omega_2 \cos \beta_2.$$

Опустивши з центрів  $O_1$  і  $O_2$  перпендикуляри на нормаль  $N-N$ , дістанемо кути  $\angle Z_1 O_1 K$  і  $\angle Z_2 O_2 K$ , які дорівнюють відповідно кутам  $\beta_1$  і  $\beta_2$ , оскільки їх сторони взаємно перпендикулярні. Із трикутників  $O_1 Z_1 K$  і  $O_2 Z_2 K$  знаходимо:

$$R_1 \cos \beta_1 = O_1 Z_1; \quad R_2 \cos \beta_2 = O_2 Z_2.$$

Тоді  $O_1 Z_1 \omega_1 = \omega_2 O_2 Z_2$ , звідки

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 Z_2}{O_1 Z_1}.$$

/II.7/

Із подібності трикутників  $O_1 Z_1 P$  і  $O_2 Z_2 P$  знаходимо:

$$\frac{O_2 Z_2}{O_1 Z_1} = \frac{O_2 P}{O_1 P}$$

Після підстановки в /II.7/ дістанемо:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P}$$

Знову доведено основну теорему зачеплення. Отже, першою вимогою до кривих, якими оскреслені профілі зубів, є відповідність профілів основній теоремі зачеплення, яку можна сформулювати так: спільна нормаль до профілів зубів у точці зачеплення поділяє відстань між центрами обертання коліс на частини, обернені пропорційні кутовим швидкостям коліс. Так було сформульовано основну теорему зачеплення Віліссом.

Розглядаючи відносний рух зубчастих коліс, помічаємо, що профіль зуба рухомого колеса займатиме ряд послідовних положень, у кожному з них дотикаючись до профілю зуба нерухомого колеса. При цьому останній буде обвідною всіх можливих положень профілю зуба другого колеса. Отже, другою умовою, яку мають задовольняти криві, що окреслюють профілі зубів спряжених коліс, є взаємобвідність кривих.

Проектуючи зубчасту передачу, один з профілів зубів можна брати довільно, а потім, маючи значення передаточного відношення  $u_{1,2}$  і відстань між центрами коліс  $a_w$ , побудувати другий профіль, який відповідав би двом згаданим вимогам.

Найбільш поширені в машинобудуванні зубчасті колеса з евольвентними профілями зубів. Спосіб побудови – за Ейлером, згідно з яким профілі зубів окреслюються розгортками кола.

## II.2. Рівняння евольвенти в полярних координатах. Властивості евольвенти

Евольвентною називається крива, яку описує будь-яка точка /рис. II.6/ прямої, що перекочується по колу без ковзання. Дуга  $A_0 A_1 = \cup A_1 A_2 = \cup A_1 A_2$ , або, виразивши через радіус і кут у радіанах,  $\theta z_2 = z_0 \tan \alpha - z_2 \alpha$ , оскільки, дуга  $A_0 A_2 = A_2 E$ , бо пряму  $AE$  перекочували по дузі  $A_0 A_2$  без ковзання. У свою



чергу,  $A_2E = z_g \operatorname{tg} \alpha$ , а  $\rho = \frac{z_g}{\cos \alpha}$ . Отже, скоротивши на  $z_g$ , знайдемо

$$\begin{cases} \theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha; \\ \rho = \frac{z_g}{\cos \alpha}. \end{cases} \quad /II.8/$$

Це рівняння евольвенти в полярних координатах, де  $\theta = \operatorname{inv} \alpha$  - евольвентна функція;  $z_g$  - радіус основного кола;  $\alpha$  - кут тиску /між напрямом векторів швидкості  $v$  і нормаллю  $N-N$ / силос тиску  $P$  //. Для зубчастих коліс кут  $\alpha$  є кутом зачеплення  $z_g \perp A_2E$ , а  $v \perp P$ , але сила  $P$  діє по нормалі. Отже,  $z_g \perp P$ , тому кут  $\angle KOA_2$  дорівнює куту тиску, або куту зачеплення  $\angle PEV$ . Коло радіусом  $z_g$  є основним, оскільки служить основою для побудови евольвенти. Твірна пряма в кожному положенні буде нормаллю  $N-N$  і радіусом кривини евольвенти в цій точці. Основне коло, по якому котиться твірна пряма без ковзання, є еволутом, тобто геометричним місцем центрів кривини евольвент, створюваних твірною прямою. Оскільки твірна перекочується по колу без ковзання, то відстань між двома сусідніми евольвентами, виміряна вздовж нормалі, завжди стала /рис. II.7/ і дорівнює кроку  $P_g$  на основному колі. Сталість кроку як відстані між двома сусідніми зубами, забезпечує безударне входження зубів при зачепленні нової пари зубів під час обертання коліс. Другою доброю властивістю евольвентних зубчастих коліс є те, що при зміні відстані між центрами коліс через неточності їх виготовлення передаточне відношення коліс не змінюється. Перевагою евольвентних зубчастих коліс є також те, що евольвентні зуби можна нарізати інструментом з прямолінійним профілем /різці, гребінки, "черв"ячні фрези/.

Методи обробки /нарізання/ зубчастих коліс рекомендується вивчити самостійно [1; 5; 7; 8; 10].

### II.3. Вихідний контур

Раніше показано, що профілі зубів коліс, що пересувають у зачепленні і здійснюють необхідне передаточне відношення, мають бути спряженими. Зрозуміло, що для створення передачі зубчасті колеса мають бути спряженими з однією і тією самою рейкою. Контур такої рейки-оператора, з якою можуть входити в зачеплення будь-які колеса одного і того самого модуля, називається вихідним контуром. Форма та параметри його наведено далі /рис. II.8/:

$дп$  - ділильна /модульна/ пряма, на якій товщина зуба  $s$  дорівнює ширині западини  $e$  і половині кроку;

крок зачеплення  $p = \pi m$ ;

висота головки зуба  $h = h_a^x m$ , де  $h_a^x = \frac{h_a}{m}$  - коефіцієнт

висоти головки зуба,  $h_a^x = 1 / 0,8$ ;

висота ніжки зуба  $h_f = (h_f^x + c_o^x) m$ , де  $c_o^x = \frac{c}{m}$  коефіцієнт радіального зазора  $c_o^x = 0,25 / 0,3$ ,  $c$  - радіальний зазор;

загальна висота зуба  $h = h_a + h_f = (2h_a^x + c_o^x) m$ ;

гранична висота зуба /відстань від вершини зуба до граничної точки прямолінійного профілю зуба/  $h_i = h_i^x m$ , де коефіцієнт граничної висоти зуба,  $h_i^x = 2,0$ ;

радіус скруглення зуба  $R_f = 0,38 m / 0,25 m$ ;

$\alpha$  - кут профілю зуба, профільний кут стандартних коліс;

$\alpha = 20^\circ$ , у літаках  $\alpha = 25^\circ$ , в автомобілях  $\alpha = 22,5^\circ$ , іноді

$\alpha = 17,5^\circ$ .

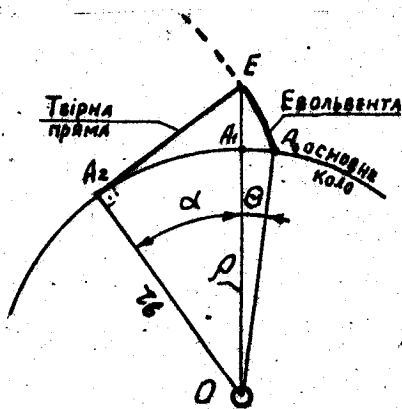


Рис. II.6

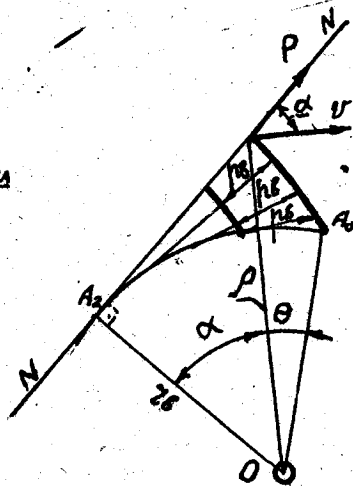
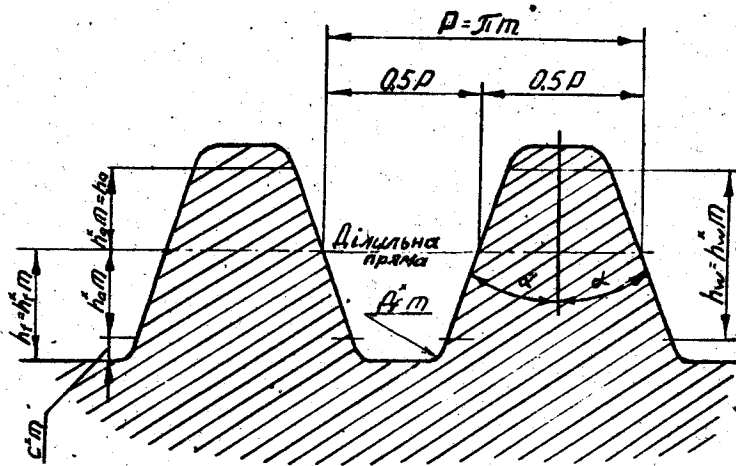


Рис. II.7

Для того щоб зуби коліс краще входили в зачеплення /менше викривувались на вершинах/, зуб на вершині по профілю дещо потоншується - зрізується по прямій лінії. Зрізана частина профілю називається



$$\begin{aligned} \alpha &= 20^\circ \\ h_a^* &= 1(1,1) \\ c^* &= 0,25(0,4) \\ r_f^* &= 0,48 \\ h_r^* &= h_a^* \cdot c^* \\ h_w^* &= 2h_a^* \end{aligned}$$

Рис. II.8

фланком, а процес зрізування - фланкуванням. Щоб зробити фланки, на зубах інструменту роблять деякі потовщення на ніжці його біля округлення. Розміри фланка

$$f = 0,005 \dots 0,02 / m, \quad g = 0,45 m \text{ /рис. II.9/}$$

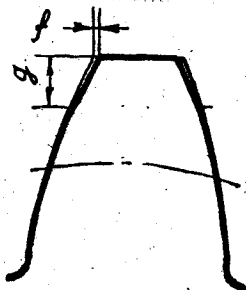


Рис. II.9

#### II.4. Геометричні елементи стандартних прямозубих евольвентних зубчастих коліс зовнішнього зачеплення

Розглянемо основні терміни, означення і позначення та визначимо основні параметри зубчастих коліс.

Зубчасті колеса, в яких товщина зуба на ділільному колі дорівнює ширині западини  $/s = e /$ , висота головки зуба дорівнює модулю, а кут зачеплення  $\alpha_w = 20^\circ$ , називаються стандартними /нормальними/.

На рис. II.10:

$a_w$  - міжосьова відстань /для нормальних коліс дорівнює ділільній міжосьовій відстані/;

$r_w$  - радіус початкового кола /для нормальних коліс дорівнює радіусу ділільного кола/. Початкові кола - це центроїди у відносному русі зубчастих коліс, тобто кола, по яких зубчасті колеса перекочуються у відносному русі одне по одному без ковзання. Ділільне коло - це виробниче початкове коло при виготовленні зубчастих коліс, тобто центроїда у відносному русі при виготовленні зубчастих коліс. Назва ділільне пішла від того, що це коло націлю поділяється на теоретичний крок зачеплення  $p = \pi m$ ;

$r_a$  - радіус кола вершин зубів, выступів, зовнішнього кола;

$r_f$  - радіус кола западин, ніжок, внутрішнього кола;

$r_g$  - радіус основного кола;

$h_a$  - висота головки зуба;

$h_f$  - висота ніжки зуба;

$k_a$  - коефіцієнт висоти головки зуба;

$c_g$  - коефіцієнт радіального зазора;

$s$  - товщина зуба;

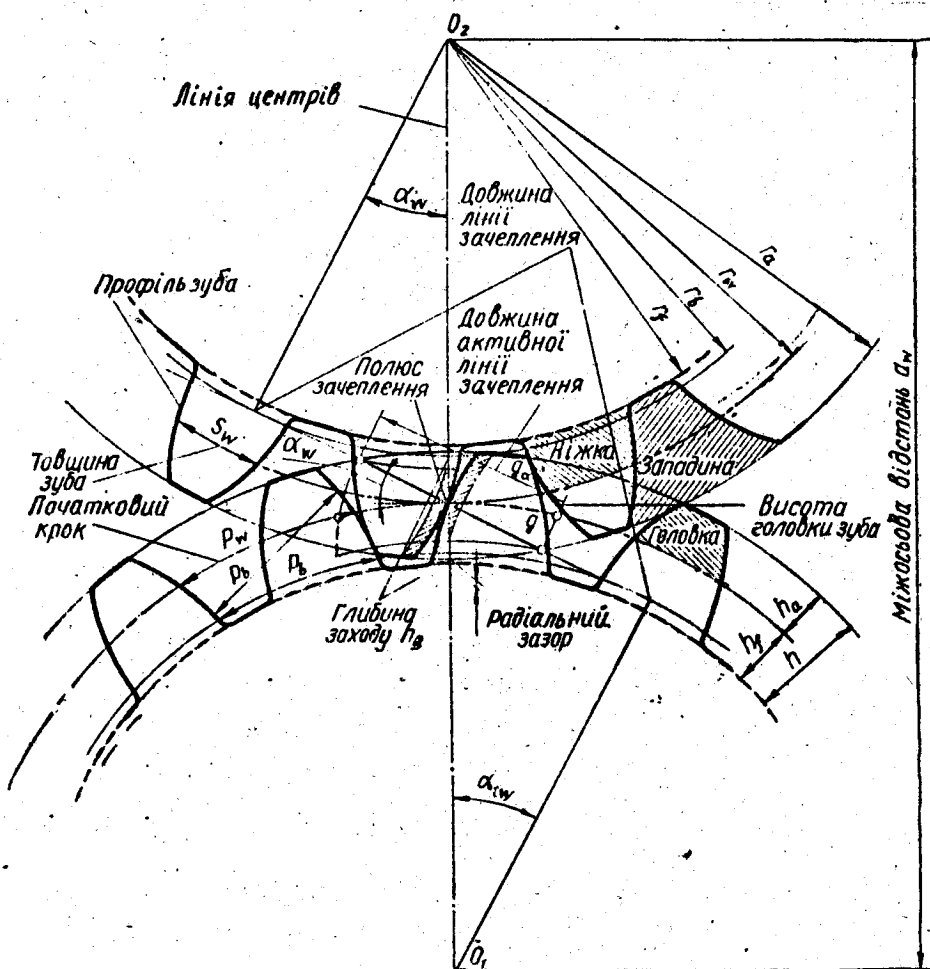


Рис. II.10

$s = e = \frac{\pi m}{2}$ ;  
 - ширина западини,  $s = e = \frac{\pi m}{2}$ ;  
 - крок зачеплення /відстань між суміжними одноіменними профілями на початковому /ділильному/ колі/;  
 $\alpha_w$  - кут зачеплення /кут між спільною дотичною до основних кіл  $N-N$  і дотичною до початкових кіл  $Q-Q$ .

Позначимо числа зубів через  $Z_1$  і  $Z_2$ . Тоді довжина ділильного кола

$$C_1 = P_t Z_1 = \pi d_1;$$

$$C_2 = P_t Z_2 = \pi d_2,$$

де  $P_t$  - крок зачеплення на ділильному колі. Звідси

$$d = \frac{P_t}{\pi} Z.$$

Позначимо, мм,

$$\frac{P_t}{\pi} = m.$$

Тоді

$$d = m Z, \quad /II.9/$$

модуль зачеплення, мм

$$m = \frac{d}{Z}. \quad /II.10/$$

Отже, модуль - це число міліметрів діаметра ділильного кола, що припадає на один зуб колеса, або модуль - це крок на ділильному колі, поділений на  $\pi$ . Значення модуля нормалізовані та обов'язкові для всіх машинобудівних підприємств і конструкторських бюро. У країнах з дюймовою мірою /Англія, США та ін./ замість модуля беруть величину за пітчевою системою /pitch - крок/.

Діаметральний пітч

$$P_d = \frac{Z}{d(\text{дюйм})}, \quad /II.11/$$

тобто, діаметральний пітч - це кількість зубів, що припадає на один дюйм діаметра початкового кола.

Пітч і модуль пов'язані залежністю

$$m = 25,4 \frac{1}{P_d} / \text{мм} / \text{ або } P_d = \frac{25,4}{m}.$$

$P_d = 1; 1 \frac{1}{4}; 1,5; 1 \frac{3}{4}; 2; 2 \frac{3}{4}; 3; 3,5; 4; 5; 6; 7; 8; 9;$   
 $10; 11; 12; 14; 16; 18; 20;$

Як видно з рис. II.10, радіус кола вершин  $r_a = r + h_a$ .  
 Згідно з ГОСТ ІЗ755-81 головка зуба нормальної висоти  $h_a = m$ ,  
 а висота ніжки зуба  $h_f = 1,25m$ .

Отже,

$$d_a = m(z + 2h_a^x); \quad d_a = m(z + 2). \quad /II.12/$$

Радіус кола западин  $r_f = r - h_f$ . Отже, діаметр кола западин

$$d_f = m(z - 2h_a^x - 2c_0^x); \quad d_f = m(z - 2,5), \quad /II.13/$$

Як згадувалося, діаметр ділильного кола і діаметр початкового кола рівні між собою для нормальних зубчастих коліс. Проте треба пам'ятати, що ділильний діаметр  $d = mz$ , а величина діаметра початкового кола змінюється зі зміною міжосьової відстані  $a_w$  /при неточності виготовлення розточки корпусу/ на кресленнях, тому правильніше вказувати ділильний діаметр колеса,

Міжосьова відстань

$$a_w = r_{w_1} + r_{w_2}; \quad /II.14/$$

$$a_w = m \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right). \quad /II.15/$$

Поділивши і помноживши праву частину рівняння /4/ на  $z_1$ , дістанемо

$$a_w = \frac{m}{2} \left( \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_1} \right) z_1 = m(u_{1,2} + 1) \frac{z_1}{2}. \quad /II.16/$$

або

$$a_w = (u_{1,2} + 1) \frac{d_1}{2}. \quad /II.17/$$

Радіус основного кола

$$r_0 = r \cos \alpha = \frac{mz}{2} \cos \alpha, \quad /II.18/$$

де  $\alpha = 20^\circ$ .

## II.5. Дуга зачеплення. Лінія зачеплення.

Коефіцієнт перекриття

Для передачі руху зубчастими колесами плавно /без ударів/ необхідно, щоб перш-ніж одна пара зубів вийде із зачеплення, друга

пара звійшда в зачеплення. Це буде забезпечено, якщо дуга початкового кола, по якій переміститься точка профілю зуба за час зачеплення однієї пари зубів, буде більшою за крок зачеплення. У цьому разі робота однієї пари зубів перекриватиметься роботою другої пари зубів. Дуга, по якій перекояться початкові кола за час зачеплення однієї пари зубів, називається дугою зачеплення. Відношення дуги зачеплення до кроку, позначене літерою  $\epsilon$ , називається коефіцієнтом перекриття.

Отже,

$$\epsilon = \frac{\overset{\frown}{ab}}{t} = \frac{\overset{\frown}{ab}}{\pi m}, \quad /II.19/$$

де  $\overset{\frown}{ab}$  - дуга зачеплення /рис. II.10, II.11, а/.

Коефіцієнт перекриття іноді називають коефіцієнтом плавності, або тривалістю зачеплення. Коефіцієнт перекриття нормальних прямозубчастих коліс зовнішнього зачеплення перебуває в межах 1,05...2. Для нормальної роботи зубчастої пари коефіцієнт перекриття становить 1,4. Це означає, що в середньому в зачепленні перебуває 1,4 пар зубів, а точніше - 60% часу в зачепленні перебуває одна пара зубів, а 40% часу зачеплення однієї пари зубів у зачепленні перебуває дві пари зубів.

Оскільки дугу зачеплення виміряти важко, на практиці частіше визначають коефіцієнт перекриття через лінію зачеплення, яку визначити і виміряти простіше.

Лінією зачеплення називають геометричне місце точок зачеплення зубів на нерухомій площині. Практично це лінія, по якій переміщується точка профілю /точка зачеплення  $K$ / за час зачеплення однієї пари зубів. Точніше лінію зачеплення легко визначити виходячи з вимог до кривих, що окреслюють спряжені профілі зубів. Точка зачеплення  $K$  має завжди перебувати на спільній нормалі  $N-N$ , що проходить через полюс зачеплення  $P$ . А оскільки спільна нормаль до евольвентних профілів зубів у точці зачеплення  $K$  дотична до основних кіл згідно з властивостями евольвенти, то легко перейти від дуги зачеплення на основному колі  $\overset{\frown}{a_0b_0}$  до лінії зачеплення, яка дотична до нього і зливається з нормаллю  $N-N$ . Спочатку встановимо зв'язок між дугами зачеплення на початковому і основному колах /рис. II.11, б/.

Нехай  $\overset{\frown}{a_0b_0}$  - дуга зачеплення на основному колі;  $\overset{\frown}{ab}$  - дуга зачеплення на початковому колі,  $a_0c = P_0$  - крок зачеплення на основному колі, що дорівнює відстані  $a_0K$  по нормалі між двома



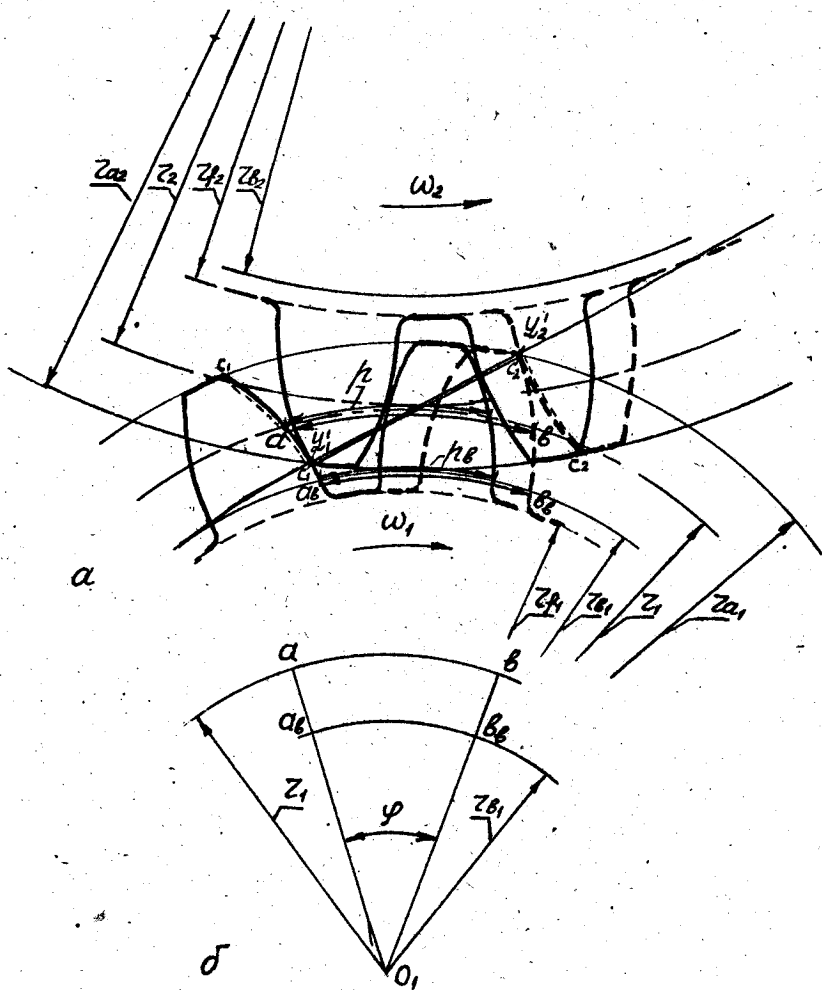


Рис. II.II

зубами, оскільки при побудові евольвенти пряму  $NN$  перекочували без ковзання по основному колу радіусом  $r_g$ ;  $\varphi$  - центральний кут, на який повернеться зубчасте колесо за час зачеплення однієї пари зубів.

Зрозуміло, що  $\cup ab = r_g \varphi$ , де кут  $\varphi$  - в радіанах;  $\cup a_g b_g = r_g \varphi$ . Але  $r = \frac{r_g}{\cos \alpha}$  /із рівняння евольвенти/.

Отже,

$$\cup ab = \frac{r_g}{\cos \alpha} \varphi = \frac{\cup a_g b_g}{\cos \alpha}$$

Згідно з визначенням, коефіцієнт перекриття

$$\epsilon = \frac{\cup ab}{p} = \frac{\cup ab}{\pi m} = \frac{\cup a_g b_g}{\pi m \cos \alpha},$$

де  $\pi m \cos \alpha = p_g$  - крок зачеплення на основному колі.

Але дуга зачеплення на основному колі  $\cup a_g b_g$  дорівнює активній частині лінії зачеплення, оскільки перекочування твірної прямої евольвенти було без ковзання, а відстань між евольвентами на нормалі до евольвент у всіх їх положеннях - стала.

Отже,

$$\epsilon = \frac{p}{\pi m \cos \alpha}, \quad /II.20/$$

де  $p$  - активна частина лінії зачеплення.

Треба зазначити, що розрізняють теоретичну лінію зачеплення /рис.II.12/, що відтворюється на спільній нормалі  $N-N$  точками  $Z_1$  і  $Z_2$  її дотику до основних кіл. Активною частиною лінії зачеплення називають частину теоретичної лінії зачеплення  $Z_1' Z_2'$ , відітнутої колами вершин зубів /за цими колами лінія зачеплення не використовується/. Відповідно і частини профілів зубів, якими дотикаються зуби в процесі роботи зубчастої передачі, називаються активними профілями. Для знаходження активної частини профілів зубів треба зробити засічки на профілях зубів радіусами  $O_1 Z_1'$  і  $O_2 Z_2'$ . Із центра обертання колеса  $O_1$ , радіусом  $O_1 Z_1'$  і із центра  $O_2$  -  $O_2 Z_2'$ .

Так визначаються активні профілі зубів, активна частина лінії зачеплення і коефіцієнт перекриття графічним методом. Але, знаючи розміри радіусів кіл виступів, основних кіл, міжцентрову відстань коліс і крок зачеплення, які визначаються при синтезі передачі, можна знайти коефіцієнт перекриття аналітично. Для цього активну частину лінії зачеплення  $Z_1' Z_2'$ , виразимо як суму відрізків  $Z_2' P$

і  $PZ'_1$  /рис. II.12/, тобто  $\rho = Z'_2 Z'_1 = Z'_2 P + P Z'_1$ . Але  $P_1 Z'_1 = Z'_2 Z'_1 - Z'_2 P$ , із  $\Delta O_2 Z_2 Z'_1$  маємо  $Z'_2 Z'_1 = \sqrt{z_{a_2}^2 - z_{b_2}^2}$ . із  $\Delta O_2 Z_2 P$  знаходимо  $Z_2 P = z_{w_2} \sin \alpha_w$ .

Отже,

$$PZ'_1 = \sqrt{z_{a_2}^2 - z_{b_2}^2} - z_{w_2} \sin \alpha_w.$$

Аналогічно  $Z'_2 P = Z'_2 Z'_1 - Z_1 P$ , а  $Z'_2 Z'_1 = \sqrt{z_{a_1}^2 - z_{b_1}^2}$ .

і  $Z_1 P = z_{w_1} \sin \alpha_w$ . Отже,  $Z'_2 P = \sqrt{z_{a_1}^2 - z_{b_1}^2} - z_{w_1} \sin \alpha_w$ .

Тоді

$$\begin{aligned} Z'_2 Z'_1 &= \rho = Z'_1 P + Z'_2 P = \sqrt{z_{a_2}^2 - z_{b_2}^2} + \sqrt{z_{a_1}^2 - z_{b_1}^2} - (z_{w_1} + z_{w_2}) \sin \alpha_w = \\ &= \sqrt{z_{a_2}^2 - z_{b_2}^2} + \sqrt{z_{a_1}^2 - z_{b_1}^2} - a_w \sin \alpha_w. \end{aligned}$$

Коефіцієнт перекриття

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\pi m \cos \alpha_w} = \frac{\sqrt{z_{a_2}^2 - z_{b_2}^2} + \sqrt{z_{a_1}^2 - z_{b_1}^2} - a_w \sin \alpha_w}{\pi m \cos \alpha_w}. \quad /II.21/$$

Якщо підставити значення всіх параметрів, що входять у формулу /II.21/, вираженими через модуль зачеплення, то стане ясно, що коефіцієнт перекриття залежить не від модуля зачеплення, а від кількості зубів, і збільшується зі збільшенням їх числа.

## II.6. Виправлення /коригування/ зубчастих коліс евольвентного зачеплення

У розглянутих раніше зубчастих коліс товщина зуба по ділільному колу дорівнює ширині западини, тобто  $s = e = \frac{\pi m}{2}$ , а висота головки дорівнює модулю. Такі колеса названо стандартними, нормальними, невикорисованими. При виготовленні цих коліс стандартним інструментом типу рейки ІІ середня лінія, на якій товщина зуба рейки дорівнює ширині западини, дотикається до початкового кола і в такий початковий проміжок /рис. II.13,а/, що при нарізуванні зубів перекошується по початковому колу без ковзання. Коло колеса, що є початковим /центроїдом у відносному русі/ при нарізуванні зубів називається ділільним колом. Оскільки відносний рух рейки /гребінки, черв'ячної фрези/ відносно заготовки колеса проходить без ковзання, то профілі ІІ зубів поділяють ділільне коло на ціле число кроків  $\left(\frac{r_d}{p} = z\right)$ . Звідси і назва виробничого початкового кола - ділільне. У зв'язку

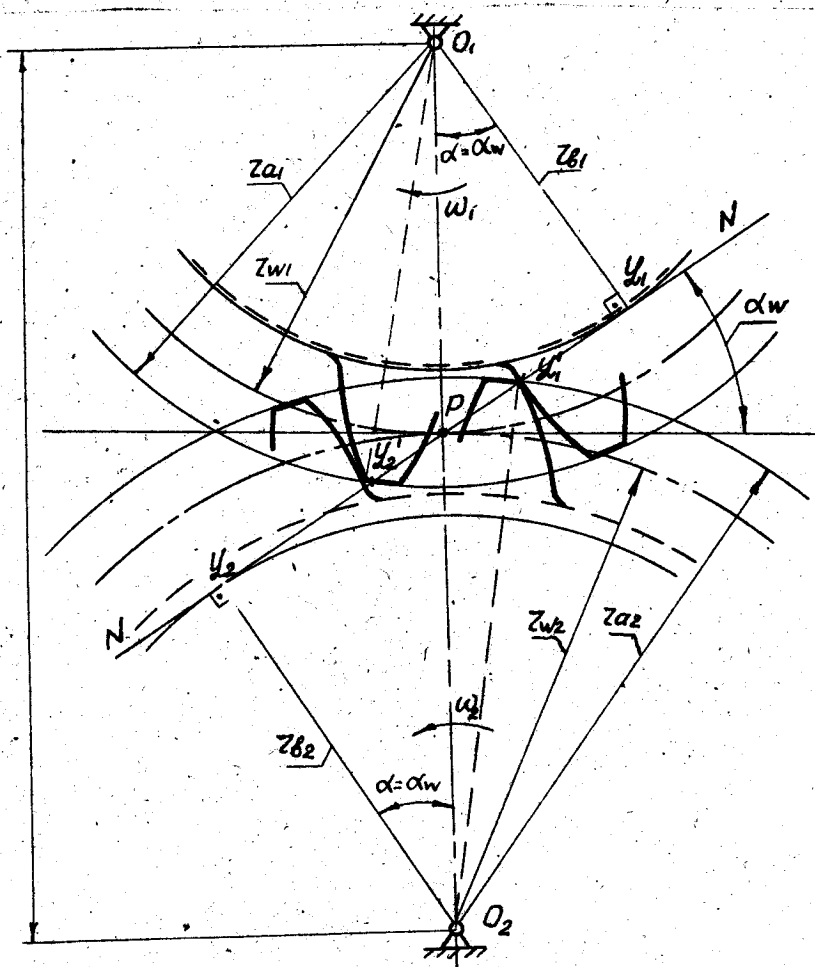


Рис. II.12

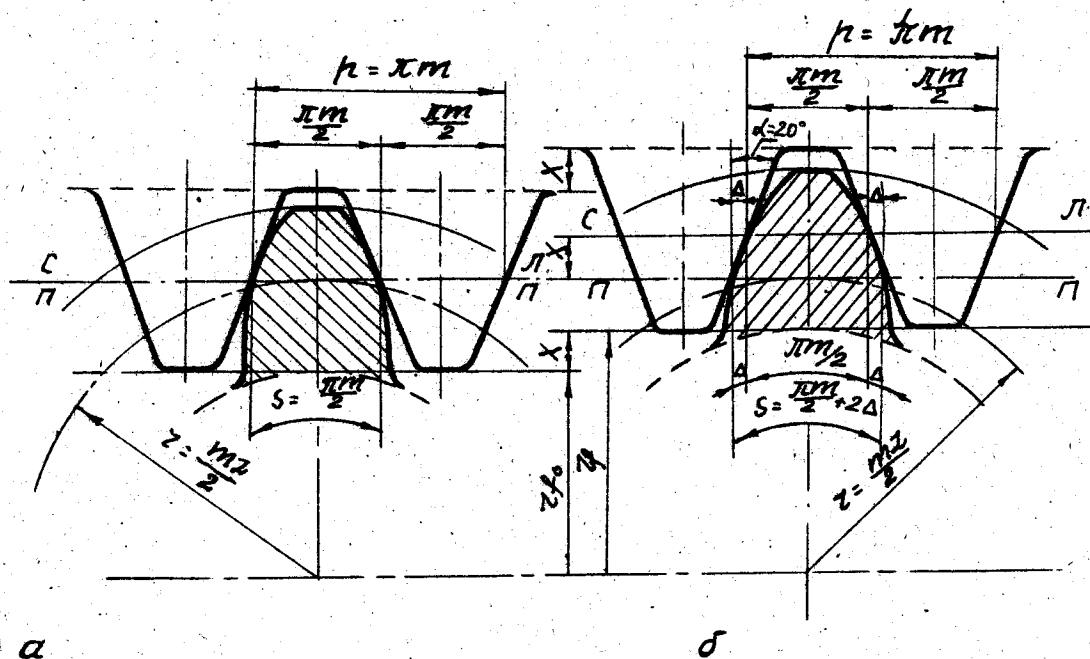


Рис. II.13

з тим, що профілі зубів рейки паралельні /нахил їх  $20^\circ$ /, будь-яка друга лінія, паралельна середній прямій, може дотикатися до початкового кола і профілі загального інструменту поділяють його на ціле число кроків, але в цьому разі товщина зуба на колесі не дорівнюватиме ширині западини. Зрозуміло, що різальний інструмент можна зміщувати від центра до центра заготовки колеса. Як видно з рис. II.13, б у результаті зміщення різального інструменту від центра заготовки збільшиться товщина зуба колеса на  $2\Delta$  /і навпаки/, зміняться висота головки зуба - відстань від ділильного кола до кола вершин /висота ніжки зменшиться, збільшиться залежно від положення рейки відносно центра заготовки/, і форма зуба.

Колеса, нарізані зміщеною інструментальною рейкою, коли ділильне коло колеса не дотикається до середньої лінії рейки, товщина зуба не дорівнює ширині западини, не дорівнює половині кроку, висота головки зуба не дорівнює модулю, а в інших і кут зацеплення не дорівнює куту профілю рейки  $20^\circ$ , називаються виправленими відносно стандартних /коригованими, нестандартними/.

Величина  $X$ , мм, на яку змістили гребінку чи черв'ячну фрезу відносно центра заготовки, без зміни її положення, називається абсолютним зміщенням, а відношення абсолютного зміщення до модуля

$$x = \frac{X}{m} \quad \text{/II.22/}$$

коефіцієнтом зміщення.

Зрозуміло, що

$$X = xm. \quad \text{/II.23/}$$

Для чого ж зміщують інструмент-і виправляють зубчасті колеса?

Зміщення гребінки чи черв'ячної фрези виконується з метою:

1/ забезпечити відсутність подрізання ніжки зуба різальним інструментом при малому числі зубів колеса /для інструменту типу рейки при  $Z < 17$ /;

2/ підвищити міцність зуба на згин у 1,5 - 2 рази;

3/ підвищити контактну міцність зуба на 15 - 25%;

4/ змінити характеристики зубчастої пари /коефіцієнти в перекритті, відносного ковзання, питомого тиску тощо/. Отже, правильно було б називати нормальними виправлені колеса. Залежно від коефіцієнтів зміщення, суми коефіцієнтів зміщення  $x_{\Sigma} = x_1 + x_2$  розрізняють зубчасті колеса трьох видів:

а/ стандартні /нормальні/, коли  $x_1 = x_2 = 0$  і  $x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 0$ ;

б/ виправлені компенсовані, коли  $x_1 = -x_2$ , а  $x_z = x_1 + x_2 = 0$  /так звана висотна корекція/;

в/ виправлені некомпенсовані, коли  $x_1 \neq x_2 \neq 0$  або  $x_1 = x_2 \neq 0$ , а  $x_z = x_1 + x_2 \neq 0$  /кутова корекція/. Стандартні колеса розглянуто раніше.

## II.7. Виправлені компенсовані зубчасті колеса.

### Висотна корекція

У цьому разі  $x_1 = -x_2 \neq 0$ ;  $x_z = x_1 + x_2 = 0$ . Змістимо різальний інструмент відносно центра заготовки на  $X$  мм /рис.

II.13,б/, тобто надамо гребінці чи фрезі додатного зміщення /якщо інструмент зміщується до центра заготовки, то зміщення називають від'ємним/. Товщина зуба меншого колеса по ділільному колу зміниться і при позитивному зміщенні гребінки

$$s_1 = \frac{\pi m}{2} + 2\Delta = \frac{\pi m}{2} + 2X_1 \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi m}{2} + 2x_1 m \operatorname{tg} \alpha. \quad \text{/II.24/}$$

Товщина зуба більшого колеса

$$s_2 = \frac{\pi m}{2} - 2\Delta = \frac{\pi m}{2} - 2X_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi m}{2} - 2x_2 m \operatorname{tg} \alpha. \quad \text{/II.25/}$$

Сума товщин зубів на ділільному колу

$$s_1 + s_2 = \frac{\pi m}{2} + 2x_1 m \operatorname{tg} \alpha + \frac{\pi m}{2} - 2x_2 m \operatorname{tg} \alpha = \pi m = p.$$

Отже, при складанні зубчастих коліс ділільні кола дотикатимуться одне до одного і зійдуться з початковими. Як видно з рисунка, радіус кола западин меншого колеса /шестірні/ при зміщенні гребінки від центра на  $X$  мм збільшиться на  $X$  мм, а більшого колеса при зміщенні гребінки до центра колеса зменшиться на  $X$ . Ділільні діаметри коліс  $d_1 = mz_1$ ;  $d_2 = mz_2$ ;  $d = d_w = 2a$ . Діаметр кола западин шестірні з урахуванням попередніх зауважень

$$d_{f_1} = d_{f_0_1} + 2x_1 = m(z_1 - 2h_a^* - 2c_o^*) + 2x_1 m. \quad \text{/II.26/}$$

Діаметр кола западин колеса

$$d_{f_2} = d_{f_0_2} - 2x_2 = m(z_2 - 2h_a^* - 2c_o^*) - 2x_2 m. \quad \text{/II.27/}$$

Відповідно діаметр кола вершин зубів шестірні

$$d_{a_1} = d_{a_{o1}} + 2X_1 = m(z_1 + 2h_a^x + 2x_1). \quad /II.28/$$

Діаметр кола вершин зубів зубчастого колеса

$$d_{a_2} = d_{a_{o2}} - 2X_2 = m(z_2 + 2h_a^x - 2x_2). \quad /II.29/$$

Висота головки зуба

$$h_a = \frac{d_{a_1} - d_1}{2} = \frac{m(z_1 + 2h_a^x + 2x_1) - mz_1}{2} = (h_a^x + x_1)m.$$

Отже, діаметр заготовки шестірні та висота головки зуба більші, ніж у стандартних коліс: діаметр - на два зміщення  $2X_1 = 2x_1m$ , а головка зуба - на одне, тобто на  $X_1 = x_1m$ , висота ніжки зуба зменшиться на зміщення  $X_1 = x_1m$ . Діаметр заготовки колеса відповідно зменшиться на  $2X_2 = 2x_2m$ , висота головки зуба - на  $x_2m$ , а висота ніжки збільшиться на  $x_2m$ . Звідси і назва - висотна корекція.

Міжосьова відстань зубчастих коліс така сама, як і в нормальних коліс:

$$a_{w_1} = z_{w_1} + z_{w_2} = z_1 + z_2 = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}, \quad /II.30/$$

оскільки початкові й діляльні кола зливаються.

## II.8. Виправлені некомпенсовані зубчасті колеса.

Кутова корекція

У цьому разі  $x_2 \neq x_1 = x_2$ ;  $x_2 = x_1 + x_2 \neq 0$ . При  $x_2 > 0$  товщина зубів шестірні й колеса на діляльних колах:

$$s_1 = \frac{\pi m}{2} + 2x_1 m \operatorname{tg} \alpha;$$

$$s_2 = \frac{\pi m}{2} + 2x_2 m \operatorname{tg} \alpha;$$

$$s_1 + s_2 = \pi m + 2x_1 m \operatorname{tg} \alpha + 2x_2 m \operatorname{tg} \alpha > \rho.$$

Сума товщин зубів на діляльних колах перевищує крок зачеплення на цих колах при складанні передачі, міжцентрова відстань збільшиться:  $a_w > a_{w_0}$ . Збільшиться і кут зачеплення. Звідси назва - кутова корекція. Таким чином, при  $x_2 \neq 0$  кут зачеплення  $\alpha_w$  не дорівнює куту профілю гребінки  $\alpha = 20^\circ$ . Діляльні кола не дотикати-



муться між собою і не будуть початковими. Ними будуть інші концентричні кола радіуса  $z_{w1} > z_1$ ;  $z_{w2} > z_2$  /рис. II.14/. Нехай модуль зубчастих коліс  $m$ , мм, а  $z_1$  і  $z_2$  - число зубів коліс. Визначимо радіуси їх кіл. Радіуси діляльних кіл

$$z_1 = \frac{mz_1}{2}; \quad z_2 = \frac{mz_2}{2}.$$

Радіуси основних кіл

$$z_{\theta_1} = \frac{mz_1}{2} \cos \alpha; \quad z_{\theta_2} = \frac{mz_2}{2} \cos \alpha,$$

де  $\alpha$  - кут профілю гребінки.

Радіуси початкових кіл /із рівняння евольвенти/

$$z_{w1} = \frac{z_{\theta_1}}{\cos \alpha_w} = \frac{mz_1 \cos \alpha}{2 \cos \alpha_w};$$

$$z_{w2} = \frac{z_{\theta_2}}{\cos \alpha_w} = \frac{mz_2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha_w}.$$

/II.31/

Міжосьова відстань

$$a_w = z_{w1} + z_{w2} = \frac{mz_1 \cos \alpha}{2 \cos \alpha_w} + \frac{mz_2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha_w} = \frac{m \cos \alpha}{2 \cos \alpha_w} (z_1 + z_2);$$

$$a_{w_0} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2},$$

де  $\alpha_w$  - кут зачеплення.

Для визначення кута зачеплення міркуватимемо так. Якщо з двох зубчастих стандартних коліс скласти передачу, в якій міжосьова відстань дорівнює  $a_w$  /міжосьовій відстані виправлених коліс/ і яка більша за  $a_{w_0}$  /міжосьову відстань стандартних коліс/ при  $\alpha_E > 0$ , то між зубами цієї передачі, які раніше стикалися, з'явиться щілина. Нехай ширина цієї щілини вздовж нормалі  $NN$  дорівнює  $\delta s$  при збільшенні міжосьової відстані на  $da_w = a_w - a_{w_0}$ . З іншого боку зуба шестірні з'явиться така сама щілина  $\delta s$ . Отже, сумарна щілина вздовж нормалі через те, що колесо опустилося вниз на відстань  $da_w$ , становитиме  $2\delta s$  /як катет прямокутного трикутника з гіпотенузом  $da_w$ /

$$2\delta s = 2 da_w \sin \alpha_w.$$

/II/

При виправлянні зубчастого колеса /при незмінній шестірні/ цю щілину буде ліквідовано за рахунок збільшення товщини зуба колеса, яка

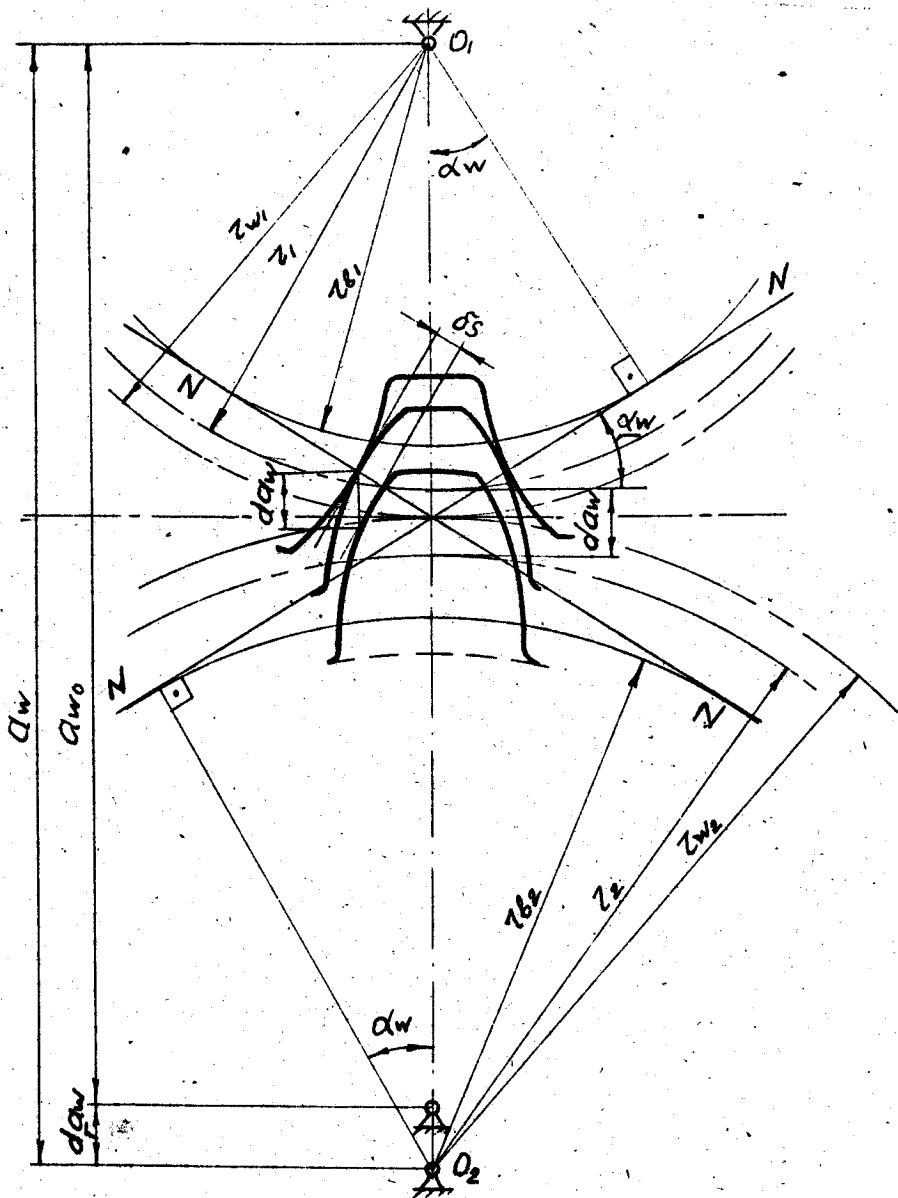


Рис. II.14

38-2736

збільшиться вздовж нормалі на

$$\delta s = X \sin \alpha = x_2 m \sin \alpha. \quad /жж/$$

з обох боків зуба. На таку саму величину збільшиться товщина зуба колеса на основному колі, оскільки евольвента створена перекошуванням по ньому без ковзання прямої  $NN$ . На дільному колі товщина зуба збільшилася на  $\delta s_g = x_2 m \operatorname{tg} \alpha$ . Весь зуб колеса на основному колі стане товщим на  $2x_2 m \operatorname{tg} \alpha$ . Оскільки міжосьова відстань вправлених зубчастих коліс  $d_w = \frac{m \cos \alpha}{2 \cos \alpha_w} (z_1 + z_2)$ , то, взявши від обох частин похідну за кутом  $\alpha_w$  і пам'ятаючи, що  $m, z_1, z_2$  і  $\alpha$  — сталі величини, визначимо елементарний приріст міжосьової відстані при вправлянні зубів шестірні та колеса:

$$\frac{d d_w}{d \alpha_w} = \frac{m \cos \alpha (z_1 + z_2)}{2} \frac{\sin \alpha_w}{\cos^2 \alpha_w} \frac{d \alpha_w}{d \alpha_w}.$$

Звідси

$$d d_w = \frac{m \cos \alpha (z_1 + z_2) \sin \alpha_w}{2 \cos^2 \alpha_w} d \alpha_w. \quad /II.32/$$

Підставивши значення /II.32/ в рівняння /ж/ і /жж/, дістанемо:

$$\begin{aligned} 2\delta s &= 2 d d_w \sin \alpha_w = 2 x_2 m \sin \alpha = \\ &= \frac{2 m \cos \alpha (z_1 + z_2) \sin \alpha_w d \alpha_w}{2 \cos^2 \alpha_w}. \end{aligned}$$

Але елементарне збільшення товщини зуба при коригуванні зубів шестірні й колеса відбувається за рахунок елементарних приростів зміщень ріжучого інструменту при виготовленні обох коліс, отже, замість  $d x_2$  треба підставляти  $d(x_1 + x_2) = d x_x$ . Тому

$$m \cos \alpha (z_1 + z_2) \operatorname{tg}^2 \alpha_w d \alpha_w = 2 m d x_x \sin \alpha.$$

Звідси

$$d x_x = \frac{m \cos \alpha (z_1 + z_2) \operatorname{tg}^2 \alpha_w d \alpha_w}{2 m \sin \alpha} = \frac{z_1 + z_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \operatorname{tg}^2 \alpha_w d \alpha_w,$$

тоді

$$\begin{aligned} x_x &= \int_{\alpha}^{\alpha_w} \frac{z_1 + z_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \operatorname{tg}^2 \alpha_w d \alpha_w = \frac{z_1 + z_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \int_{\alpha}^{\alpha_w} \operatorname{tg}^2 \alpha_w d \alpha_w \\ &= \frac{z_1 + z_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \int_{\alpha}^{\alpha_w} \frac{\sin^2 \alpha_w}{\cos^2 \alpha_w} d \alpha_w = \frac{z_1 + z_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \int_{\alpha}^{\alpha_w} \frac{1 - \cos^2 \alpha_w}{\cos^2 \alpha_w} d \alpha_w = \end{aligned}$$

$$= \frac{Z_1 + Z_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \operatorname{tg} d_w \Big|_{\alpha}^{\alpha_w} - d_w \Big|_{\alpha}^{\alpha_w} \right) = \frac{Z_1 + Z_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} (\operatorname{tg} \alpha_w - \operatorname{tg} \alpha - d_w - \alpha) =$$

$$= \frac{Z_1 + Z_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} (\operatorname{inv} d_w - \operatorname{inv} \alpha).$$

Інволюта кута зачеплення

$$\operatorname{inv} d_w = \frac{2x_2 \operatorname{tg} \alpha}{Z_1 + Z_2} + \operatorname{inv} \alpha. \quad /II.33/$$

Отже, кут зачеплення залежить від коефіцієнтів зміщення коліс  $x_1, x_2$  і числа зубів  $Z_1$  і  $Z_2$ , причому при збільшенні числа зубів кут зачеплення зменшується. Значення  $\operatorname{inv} \alpha$  беремо з таблиць довідника [II].

Визначимо геометричні елементи коліс при кутовій корекції:

Діаметр кола западин знаходимо так само, як і при висотній корекції:

$$d_{f_1} = d_{f_{01}} + 2x_1 = d_{f_{01}} + 2x_1, m = m(Z_1 - 2h_a^* - 2c_o^* + 2x_1);$$

$$d_{f_2} = m(Z_2 - 2h_a^* - 2c_o^* + 2x_2). \quad /II.34/$$

Діаметр кола вершин визначимо, додавши до діаметра кола западин дві висоти зуба:

$$d_{a_1} = d_{f_1} + 2h;$$

$$d_{a_2} = d_{f_2} + 2h. \quad /II.35/$$

де  $h$  - повна висота зуба, яка не дорівнює висоті зуба стандартного колеса,  $h = (2h_a^* + c_o^*)m$ , оскільки для забезпечення сталого радіального зазора  $c = c_o^*m$ , глибину заходу  $2h_a^*m$  зубів в треса скоригувати, бо приріст міжцентрової відстані  $da_w$  не дорівнює сумі зміщень різального інструменту  $X_1$  і  $X_2$ :

$$da_w = a_w - a_{w_0} \neq (X_1 + X_2).$$

Це видно з формул /ж/ і /зж/.

$$28s = 2da_w \operatorname{sin} d_w = 28s = 2(x_1 + x_2) m \operatorname{sin} \alpha = 2(X_1 + X_2) \operatorname{sin} \alpha.$$

Звідки

$$da_w = \frac{(X_1 + X_2) \operatorname{sin} \alpha}{\operatorname{sin} d_w},$$

тобто  $da_w \neq X_1 + X_2$ . Оскільки  $\alpha < d_w$ , то  $da_w < X_1 + X_2$ , і навпаки.

Приріст міжосьової відстані  $da_w$ , тобто різниця  $a_w - a_{w_0}$  міжосьової відстані передачі зі зміщенням і ділильної міжосьової відстані називається сприйманим зміщенням. Відношення сприйманого зміщення до модуля

$$\gamma = \frac{da_w}{m} = \frac{a_w - a_{w_0}}{m} \quad /II.36/$$

називається коефіцієнтом сприйманого зміщення. Сприймане зміщення - це практично відстань між ділильними колами виправлених коліс

$$da_w = \gamma m. \quad /II.37/$$

Отже,

$$a_w = a_{w_0} + da_w = m \left( \frac{z_1 + z_2}{2} + \gamma \right). \quad /II.38/$$

Оскільки сприймане зміщення не дорівнює сумі абсолютних зміщень  $da_w < X_1 + X_2$  або  $\gamma m < (x_1 + x_2) m$ , то  $\gamma m < x_2 m$ .

Різниця коефіцієнтів суми зміщень  $x_2$  і сприйманого зміщення  $\gamma$  називається коефіцієнтом зрівняльного зміщення

$$\Delta \gamma = x_2 - \gamma. \quad /II.39/$$

Добуток коефіцієнта зрівняльного зміщення і модуля  $\Delta \gamma m$  називається зрівняльним зміщенням. Саме на ту величину треба зменшити суму абсолютних зміщень, щоб дістати приріст міжцентрової відстані виправлених зубчастих коліс. На величину зрівняльного зміщення треба зменшити глибину заходу зубів /а отже, і висоту зуба/, щоб забезпечити при безззорному зачепленні зубів необхідний радіальний зазор зубчастих коліс  $c = c_0^x m$ . Якщо відняти від сум абсолютних зміщень зрівняльне зміщення і додати цю різницю до міжосьової ділильної відстані, дістанемо міжосьову відстань зміщених /виправлених/ зубчастих коліс:

$$a_w = a_{w_0} + (x_1 + x_2) m - \Delta \gamma m = m \left( \frac{z_1 + z_2}{2} + x_2 - \Delta \gamma \right). \quad /II.40/$$

Виходячи зі сказаного визначимо глибину заходу зубів

$$h_3 = (2h_a^x - \Delta \gamma) m. \quad /II.41/$$

Висота зуба

$$h = h_3 + c_0, \quad /II.42/$$

де  $c_0 = c_0^x m.$

Діаметр кола вершин шестірни

$$d_{a_1} = d_{f_1} + 2h. \quad /II.43/$$

Діаметр кола вершин зубчастого колеса

$$d_{a_2} = d_{f_2} + 2h. \quad /II.44/$$

Враховувачи рівняння /8/, з одного боку,

$$a_w = a_{w_0} + da_w = m \left( \frac{z_1 + z_2}{2} + y \right), \quad /II.45/$$

а з другого -  $a_w = z_{w_1} + z_{w_2} = z_{w_1} + \frac{z_2}{z_1} z_{w_1} = z_{w_1} \left( 1 + \frac{z_2}{z_1} \right) = z_{w_1} \left( \frac{z_1 + z_2}{z_1} \right)$ .

Прирівнявши праві частини цих рівнянь, знайдемо

$$z_{w_1} = \frac{\frac{m(z_1 + z_2)}{2} + my}{\frac{z_1 + z_2}{z_1}} = \frac{m(z_1 + z_2)z_1}{2(z_1 + z_2)} + \frac{myz_1}{z_1 + z_2} \quad /II.46/$$

$$= \frac{mz_1}{2} \left( 1 + \frac{2y}{z_1 + z_2} \right) = z_1 \left( 1 + \frac{2y}{z_1 + z_2} \right).$$

Відповідно

$$z_{w_2} = \frac{mz_2}{2} \left( 1 + \frac{2y}{z_1 + z_2} \right) = z_2 \left( 1 + \frac{2y}{z_1 + z_2} \right). \quad /II.47/$$

## II.9. Вибір виду корекції і коефіцієнтів зміщення

При виправлянні зубчастих коліс /нарізанні зубів зміщенням інструментом/ змінюються майже всі параметри зубчастих коліс, а з ними і характеристики зубчастого зачеплення. Справді, зі зміною радіусів кіл вершин змінюється коефіцієнт перекриття, що впливає на плавність роботи передачі; зі зміною коефіцієнта відносного ковзання змінюється знос зубів по профілю; зміна коефіцієнта питомого тиску і товщини зуба впливає на міцність зубів тощо. При однаковому числі зубів коліс якісні характеристики передачі залежать від коефіцієнтів зміщення  $x_1$  і  $x_2$  різального інструменту. Дослідами встановлено, що зміна цих коефіцієнтів сприяє покращанню одних характеристик зачеплення і погіршенню інших, від чого залежить стійкість і довговічність зубчастої передачі. Отже, постає задача вибору таких коефіцієнтів зміщення  $x_1$  і  $x_2$ , які б забезпечили стійкість і міц-

ність зубів за даних умов експлуатації передачі, при одночасному збереженні в допустимих межах тих й інших характеристик зубчастої передачі. Але серед характеристик і вимог є такі, які є обов'язковими незалежно від умов експлуатації передачі. Назвемо деякі з них.

1. При нарізанні зубів інструментом типу рейки /чи іншим/ не повинно бути підрізування зубів колеса різальним інструментом. Суть явища підрізування полягає в тому, що зуб гребінки, перекручуючись у западині колеса, що виготовляється, зрізує частину тіла на ніжці зуба. Від цього зменшується міцність зуба і порушується правильність зачеплення зубів. Підрізування ніжки зуба буде, якщо наблизити гребінку до центра колеса так, щоб лінія головок зубів гребінки опустилася нижче за точку  $\mathcal{L}$  /точку дотику лінії зачеплення - нормалі  $NN$  - до основного кола/, тобто початку евольвенти на основному колі. На рис. II.15 показано тонкими лініями таке колесо з підрізаними зубами. Змістимо гребінку від центра колеса на таку величину  $X_{min}$ , щоб головка різального інструменту проходила через точку  $\mathcal{L}$  початку евольвенти на основному колі. Як відомо, абсолютне зміщення  $X_{min} = x_{min} m$ , де  $x_{min}$  - мінімальний коефіцієнт зміщення, коли підрізування зубів не буде. З другого боку, абсолютне зміщення  $X_{min}$  - це відстань між середньою лінією /діальною прямою рейки/ і початковою прямою при виготовленні виправлених коліс. Як видно з рис. II.15,

$$\begin{aligned} X_{min} &= x_{min} m = h_a - b = h_a^x m - 2r \sin^2 \alpha = \\ &= h_a^x m - 2 \sin \alpha \sin \alpha = h_a^x m - \frac{mz}{2} \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Після скорочення і підстановки  $h_a^x = 1$  знаходимо

$$x_{min} = 1 - z \frac{\sin^2 \alpha}{2}. \quad /II.48/$$

Кут профілю  $\alpha = 20^\circ$ . Тоді  $\frac{z}{\sin^2 20^\circ} \approx 17$ , а

$$x_{min} = \frac{17-z}{17}. \quad /II.49/$$

За такого значення коефіцієнта зміщення не буде підрізування ніжки зуба інструментом типу рейки, а мінімальне число зубів колеса, коли підрізування зубів його не буде,  $Z_{min} = 17$ .

2. При виготовленні зубчастих передач необхідно уникати загострення зубів коліс. Необхідно, щоб товщина зубів на колі вершин  $S_a \geq 0,3m$ . Тому, проектуючи передачу, треба перевірити цю умову.

Для визначення товщини зуба на вершині розглянемо схему, зображену на рис. II.16. Зі схеми видно:  $S_a = 2a\beta_a$ , де кут  $\beta_a$  - в радіанах, Але

$$\beta_a = \alpha_g + 2 \operatorname{inv} \alpha_0 - 2 \operatorname{inv} \alpha_a, \quad /II.50/$$

де

$$\alpha_g = \frac{s}{2} = \frac{\frac{\pi m}{2} + 2xm \operatorname{tg} \alpha}{\frac{mz}{2}} = \frac{\pi}{z} + 4x \operatorname{tg} \alpha; \quad /II.51/$$

$\alpha$  - кут профілю інструментальної рейки /гребінки/.

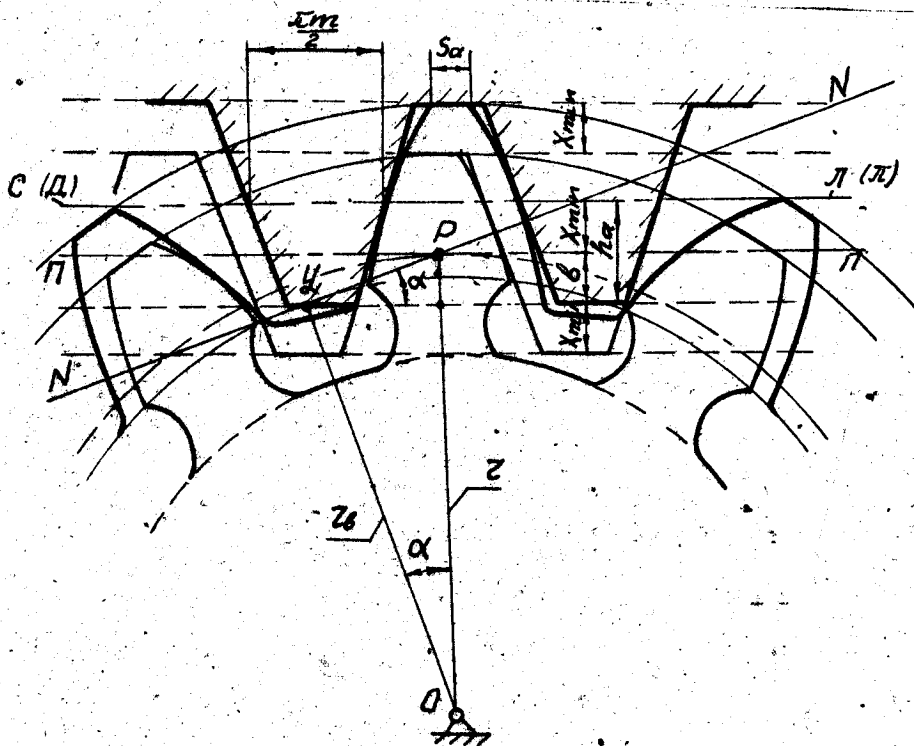


Рис. II.16



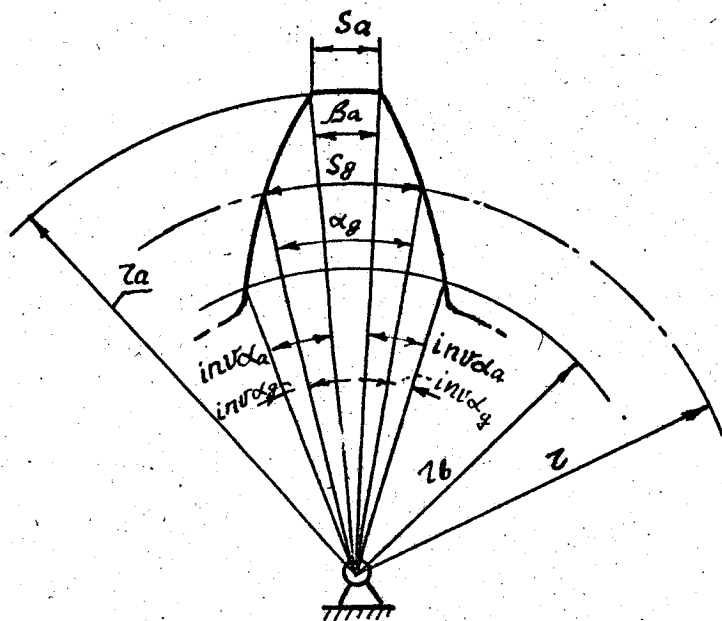


Рис. II.16

Отже,

$$s_a = \frac{\pi}{z} + \frac{4x \operatorname{tg} \alpha}{z} + 2 \operatorname{inv} \alpha - 2 \operatorname{inv} \alpha_a \quad /II.52/$$

Тому

$$s_a = r_a \left( \frac{\pi}{z} + \frac{4x \operatorname{tg} \alpha}{z} + 2 \operatorname{inv} \alpha - 2 \operatorname{inv} \alpha_a \right), \quad /II.53/$$

де кут  $\alpha_a$  визначаємо за формулою  $\cos \alpha_a = \frac{r_b}{r_a}$ .

Товщина зуба на дузі будь-якого радіуса  $R_i$ :

$$s = R_i \left( \frac{\pi}{z} + \frac{4x \operatorname{tg} \alpha}{z} + 2 \operatorname{inv} \alpha - 2 \operatorname{inv} \alpha_i \right), \quad /II.54/$$

де  $\cos \alpha_i = \frac{r_b}{R_i}$ .

Разом умови I і 2 можна записати так:

$$x_{0,3} \leq x \leq x_{\min}.$$

3. Коефіцієнт зміщення виправлених зубчастих коліс має бути таким, щоб коефіцієнт перекриття  $\epsilon \geq 1,1$ .

4. Коефіцієнти зміщення треба брати такими, щоб не було заклинювання зубчастих коліс, тобто, щоб головки зубів одного з коліс не впиралися в галтелі зуба другого колеса. Усі ці умови можна задовольнити, користуючись блокуючими контурами, що є сукупністю кривих, побудованих у координатах  $x_1$  і  $x_2$  /кривих, де вздовж осі абсцис відкладено коефіцієнти зміщення  $x_1$ , вздовж осі  $y$  - коефіцієнти зміщення  $x_2$ , а на площині різні їх значення, що визначають область допустимих значень коефіцієнтів зміщення. Одна з цих кривих визначає область, в якій розміщені коефіцієнти зміщення, за яких не буде підризування зубів; друга - область, де коефіцієнти зміщення будуть такі, що коефіцієнт перекриття передачі буде більшим за I, I, третя, - що не буде заклинювання передачі, четверта - область, де будуть однакові коефіцієнти відносного ковзання зубів, тощо. Дістанемо підтриховану область - блокуючий контур /рис. II.17/. Вибравши в цьому контурі коефіцієнти зміщення, забезпечимо всі згадані умови, або такі коефіцієнти зміщення, за яких будуть забезпечені найкращі умови експлуатації зубчастої передачі в певних умовах її роботи. Блокуючі контури, побудовані для різних значень чисел зубів  $Z_1$  і  $Z_2$ , наведені в довідковій літературі.

В.Н.Кудрявцев склав спеціальні таблиці для вибору коефіцієнтів зміщення  $x_1$  і  $x_2$  залежно від чисел зубів і передаточних відношень, за яких забезпечується максимальна контактна міцність зубів коліс закритих зубчастих передач. Ці таблиці наведено, наприклад [12].

## II.10. Косозубі та шевронні циліндричні колеса

Раніше доведено, що плавність роботи зубчастої передачі визначається коефіцієнтом перекриття, тобто відношенням дуги зачеплення до кроку. Для циліндричних прямозубих зубчастих коліс зовнішнього зачеплення коефіцієнт перекриття  $\epsilon = 1,1 \dots 2$ , тобто в зачепленні може перебувати не більше як дві пари зубів. Та й це можливе тільки за високого ступеня точності їх виготовлення, коли основні кроки ведучого та веденого коліс рівні між собою. Але деякі похибки при виготовленні неминучі, тому в реальній передачі одночасна робота двох

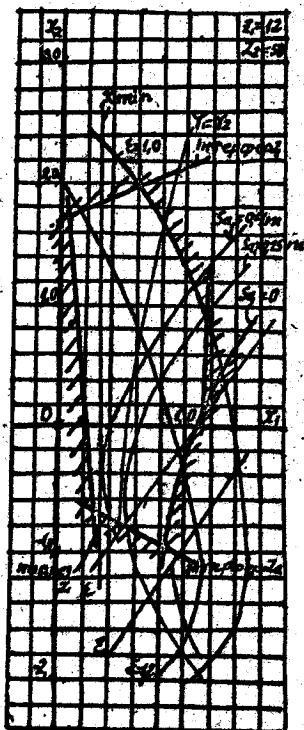


Рис. II.17

пар зубів можлива тоді, коли сумарна деформація пари зубів при їх навантаженні більша за різницю основних кроків. Та й за цих умов, через те що зуби стикаються одночасно по всій довжині, при переході зачеплення з одного зуба на інший виникає співударення зубів, виникає шум. Щоб збільшити коефіцієнт перекриття і зменшити чутливість зубчастої передачі до похибок виготовлення і монтажу, прямозубі колеса замінюють колесами з косими та кутовими /шевронними/ зубами. У косозубій передачі зуби розміщені під деяким кутом до твірної циліндра колеса і з торцем колеса створюють непряий кут, тоді як у циліндричних прямозубих колесах лінія дотику зубів створює з торцем прямий кут. Тому в косозубій /рис. II.18/ і шевронній /рис. II.19/ передачах розрізняють три кроки і три модулі зачеплення:  $P_s$ ,  $P_n$ ,  $P_a$  - торцевий, нормальний та осьовий крок. Між ними очевидний зв'язок

$$P_s = \frac{P_n}{\cos \beta}; \quad /II.55/$$

$$P_a = \frac{P_n}{\sin \beta}, \quad /II.56/$$

де  $\beta$  - кут нахилу зуба на початковому циліндрі.

Через похибки виготовлення зубів у реальній передачі дотик зубів поширюється лише на 80% лінії зачеплення. Тому ширина колеса

$$b \geq \frac{P_a}{0,8}, \quad /II.57/$$

інакше косозуба передача буде працювати як прямозуба. Поділивши обидві частини рівнянь /II.55/ і /II.56/ на , визначимо залежність між модулями

$$m_s = \frac{m_n}{\cos \beta}; \quad /II.58/$$

$$m_a = \frac{m_n}{\sin \beta}$$

/II.59/

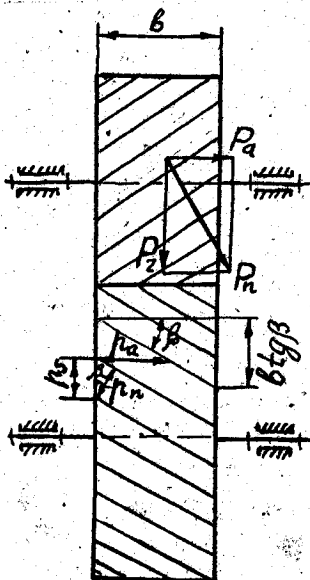


Рис. II.18

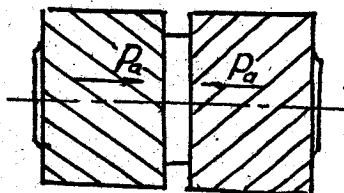


Рис. II.19

Із розрахунку зуба на міцність визначають нормальний модуль  $m_n$  і беруть його стандартним, а розміри коліс визначають за торцевим модулем. Якщо позначити дугу зачеплення прямозубого колеса через  $\alpha_0$ , то дуга зачеплення такого самого косозубого колеса у зв'язку з неодноточасним входженням зуба в зачеплення буде більшою на  $\beta \operatorname{tg} \beta$ .

Отже, коефіцієнт перекриття косозубої передачі і

$$\epsilon_s = \epsilon_{np} + \frac{\beta \operatorname{tg} \beta}{P_s}$$

/II.60/

Таким чином, коефіцієнт перекриття можна значно збільшити, збільшивши ширину колеса  $b$  і кут  $\beta$  нахилу зуба.

Розглянемо такий приклад:

$$z = 24; \quad b = d = m_s z; \quad \beta = 45^\circ.$$

Отже,

$$\frac{b \operatorname{tg} \beta}{P_s} = \frac{m_s z \operatorname{tg} \beta}{\pi m_s} = \frac{24 \cdot 1}{3,14} \approx 8.$$

Тому, якщо коефіцієнт перекриття прямозубої передачі  $E = 2$ , то коефіцієнт перекриття косозубої /шевронної/ передачі  $E = 10$ , тобто в зачепленні може знаходитись одночасно десять пар зубів. Але ширину колеса можна збільшити ще в 2 рази, тому і коефіцієнт перекриття збільшиться в 2 рази. Це велика перевага косозубих і шевронних передач. Тому їх застосовують для передачі великих потужностей з високими швидкостями між валами з паралельними осями. При цьому передача працює плавно і безшумно. Крім того, косозубі та шевронні передачі мають ще одну перевагу: малі габаритні розміри. Справді, мінімальне число зубів шестерні з умов не підрізування їх інструментом типу рейки:

$$Z_{\min} = \frac{2h_a^x}{\sin^2 \alpha_s} \quad /II.61/$$

Але кут зачеплення  $\alpha_s$  косозубих коліс більший за кут профілю різального інструменту  $\alpha = 20^\circ$  [20]:

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta} \quad /II.62/$$

Якщо кут нахилу зуба  $\beta = 10^\circ$ ,  $\alpha_s = 22^\circ 47'$ , то мінімальне число зубів косозубого колеса  $Z_{\min} = 14$ , а коли кут нахилу зуба  $\beta = 45^\circ$ , кут зачеплення в торцевому перерізі  $\alpha_s = 27^\circ 14'$ , а  $Z_{\min} = 10$ . Тобто, для шестерні косозубої передачі мінімальне число зубів майже в 2 рази менше, ніж прямозубої. Це значно зменшує витрату металу. За цих переваг косозубі колеса мають один недолік. При збільшенні кута нахилу зуба  $\beta$  збільшується осьова складова зусилля в зачепленні, тому в більшості передач кут  $\beta$  не перевищує  $30^\circ$ . Цього недоліку позбавлені шевронні передачі, де осьові складові зусилля в зачепленні взаємно компенсуються. Адже шевронне зубчасте колесо - це, практично, васажені на один вал два однакових косозубих колеса, але на одному з коліс кут нахилу зуба - правий, на другому - лівий. У шевронній передачі відпадає потреба встановлювати упорні підшипники для сприймання осьових зусиль.

## II.11. Геометричні елементи косозубих і шевронних коліс у торцевому перерізі

Діаметр діляльного кола

$$d = m_s Z = \frac{m_n}{\cos \beta} Z. \quad /II.63/$$

Діаметр кола вершин

$$d_a = d + 2h_a^x m_n = m_n \left( \frac{Z}{\cos \beta} + 2h_a^x \right). \quad /II.64/$$

Діаметр кола западин

$$d_f = d - 2h_f^x = m_n \left( \frac{Z}{\cos \beta} - 2h_a^x - 2c_0^x \right). \quad /II.65/$$

Міжосьова відстань

$$a_w = z_{w_1} + z_{w_2} = \frac{m_n}{\cos \beta} \frac{(Z_1 + Z_2)}{2}. \quad /II.66/$$

Отже, змінюючи кут нахилу зуба  $\beta$ , можна дістати необхідну міжосьову відстань, чим і користуються при проектуванні співвісних редукторів/збігання осей однієї пари зубчастих коліс з осями другої спрощує виготовлення корпусу редуктора і монтаж передачі/. Силовий розрахунок косозубих і шевронних передач ведуть аналогічно прямозубим, звідси поняття еквівалентного числа зубів

$$Z_{1ек} = \frac{Z_1}{\cos^3 \beta}; \quad Z_{2ек} = \frac{Z_2}{\cos^3 \beta}, \quad /II.67/$$

виведене з розгляду розмірів еквівалентних коліс у площині, де зуб косозубого колеса нормальний до цієї площини.

## II.12. Зубчасті передачі Новикова

М.Л.Новиков 1955 року запропонував нову систему зачеплення зубчастих коліс з паралельними осями й осями, що перетинаються і перехрещуються в просторі, тобто циліндричних, конічних та інших прост. рових механізмів.

Теоретичні дослідження, випробування і досвід експлуатації коліс із зачепленням Новикова показали, що при таких же матеріалах і габаритах, як в евольвентних, вони можуть передавати в 2-5.разів більші

колові зубилля, менш чутливі до перекоосу осей валів, працюють з меншою витратою потужності.

Профілі зубів коліс Новикова в торцевому перетині окреслені дугами сталого радіуса, а дотик зубів теоретично проходить не по лінії, а в точці. Лінія зацеплення зубів у цій передачі паралельна осям початкових циліндрів. Тому в будь-якому перетині коліс площинно, перпендикулярно до їх осей, матимемо точку зацеплення /звідки й назва - точкове зацеплення/. Отже, передача Новикова - це крутогвинтова, тобто косозуба передача з гвинтовими зубами, профілі яких окреслені дугами постійної кривини по всій висоті зуба, причому один з профілів опуклий, другий - угнутий. Тому практично площа дотику зубів передачі Новикова значно більша, ніж евольвентної, а контактні напруження в зоні дотику зубів значно менші. Крім того, прошарок мастила в точковій передачі значно більший /рис. II.20, а/. За рахунок цього площа контакту зубів ще збільшується, а це зумовлює збільшення контактної витривалості зубів і зменшення втраг на тертя. Ще одна перевага передачі - радіуси кривини профілів зубів близькі за розмірами, що робить передачу менш чутливою до змін міжосьової відстані. На початку експлуатації передачі інтенсивно спрацьовуються профілі зубів, але після того як вони приробляться по оптимальних радіусах, спрацювання майже припиняється. Цими перевагами і пояснюється підвищення стійкості проти спрацювання, навантажувальної здатності передачі в кілька разів порівняно з евольвентною, що дає змогу використовувати передачу Новикова для великих потужностей. Це також дає змогу зменшити габаритні розміри передачі майже в 2 рази, а з цим і зекономити за рік близько 5 млн. тонн високоякісної сталі. Передачу рекомендується використовувати при відсутності поштовхів і ударів.

Для виготовлення зубчастих передач Новикова потрібний спеціальний різальний інструмент. Металорізальні верстати - такі самі, як і для евольвентних коліс.

#### Геометричні елементи передачі Новикова в торцевому перетині /рис. II.20/

Якщо задано числа зубів передачі  $Z_1$  і  $Z_2$ , визначено нормальний модуль зацеплення  $m_n$ , кут тиску  $\gamma$  /кут між спільною дотичною до початкових кіл і спільною нормаллю до профілів зубів у торцевій площині в точці їх дотику/ і кут нахилу зубів  $\beta$ , то можна рекомендувати такий порядок розрахунку геометричних елементів зубчастої передачі.





точки  $P$  вздовж нормалі  $N-N$ . Зміщення  $e$  точки зачеплення від полюса рекомендується брати  $e = 0,05 \dots 0,2 / z_w$ , залежно від розмірів передачі. Як уже говорилося, лінія зачеплення проходить через точку  $K$  паралельно осі обертання коліс, отже висота зуба і радіус кола вершин не впливають на довжину лінії і коефіцієнт зачеплення. Тому висота зуба коліс Новикова  $h = (h_a^x + c_0^x) m_n$ , а не  $(2h_a^x + c_0^x) m_n$ , причому висота головки зуба шестірні  $h_a = h_a^x m$  а висота ніжки зуба шестірні  $h_f = c_0^x m$ .  
Тому діаметр кола западин шестірні

$$d_{f_1} = d - 2h_f = m_s z_1 - 2c_0^x m_n = m_n \left( \frac{z_1}{\cos \beta} - 2c_0^x \right). \quad /II.68/$$

Оскільки  $c_0^x = 0,25$ , то

$$d_{f_1} = m_n \left( \frac{z_1}{\cos \beta} - 0,5 \right). \quad /II.69/$$

Діаметр кола западин колеса

$$d_{f_2} = d_2 - 2h = m_n \left( \frac{z_2}{\cos \beta} - 2h_a^x - 2c_0^x \right); \quad /II.70/$$

$$d_{f_2} = m_n \left( \frac{z_2}{\cos \beta} - 2,5 \right).$$

Діаметр кола вершин шестірні

$$d_{a_1} = d_1 + 2h_a = m_n \left( \frac{z_1}{\cos \beta} + 2h_a^x \right); \quad /II.71/$$

$$d_{a_1} = m_n \left( \frac{z_1}{\cos \beta} + 2 \right). \quad /II.72/$$

Діаметр кола вершин колеса  $d_{a_2} = d_2$ . Отже, висота головки зуба колеса  $h_a = 0$ , ніжки  $-h_f = 1,25 m$ .

Для побудови зубів із точки  $P$  відкладемо вздовж нормалі вправо відрізок  $e = 0,05 \dots 0,2 / z_1$ . Із точки  $P$  як з центра проведимо радіусом  $\rho_1 = e$  дугу профілю зуба шестірні до перетину з колами вершин і западин. Відступивши вздовж нормалі від точки  $K$  на

$\rho_2 = 1,05 \dots 1,07 / \rho_1$ , проведимо дугу профілю зуба колеса. Товщина зуба шестірні  $S_1 = 1,5 S_2$ , а колеса  $S_2 = \rho_3 - S_1 = \pi m_s - S_1$ . Поділивши  $S_1$  і  $S_2$  навпіл, будемо симетрично ліві профілі зубів, провівши радіуси галтелей ніжки зуба радіусом  $z = 0,5 m_n$  в обох боків зубів.

## II.13. Складні зубчасті механізми

Раніше розглядали прості зубчасті механізми, що складалися з двох зубчастих коліс і стійка. Передаточне відношення пари зубчастих коліс

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}$$

У практиці машинобудування зустрічаються прості зубчасті механізми з числом зубів шестірні  $z_1 = 6$  і колеса  $z_2 = 300$ , тобто з передаточним відношенням  $u_{12} = 50$ . У черв'ячних передачах передаточне відношення не перевищує 300. Але в ситових швидкохідних закритих передачах передаточне відношення двох зубчастих коліс не перевищує 6, а в черв'ячній - 100 не тільки тому, що зуб шестірні навантажується в  $u$  разів більше, ніж колеса, але й тому, що передача має дуже великі габаритні розміри і металоемкість. Все ж у практиці машинобудування необхідні і зустрічаються передачі з досить високим передаточним відношенням. Наприклад, у літаках електромеханічна передача змінного кроку має передаточне відношення  $u = 15000$ , а одинарний планетарний редуктор фірми *Siez Bath* здійснює передаточне відношення  $u = 14400$ , а стросний - 1728000, маючи ККД 0,8 /за твердженням фірми/. Щоб дістати передаточне відношення більше як 6, передача дую від ведучої ланки до веденої здійснюється з допомогою проміжних валів, на яких закріплюються два колеса.

## II.14. Рядове послідовне зачеплення зубчастих коліс

Серії коліс, в яких осі обертання нерухомі, називають рядовим з'єднанням. На проміжних валах закріплено по два колеса, одне з яких входить у зачеплення з колесом на попередньому валу, друге - на наступному /рис. II.21/. Передаточне відношення кожної пари зубчастих коліс /без урахування знака/:

$$u_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}; \quad u_{2,3} = \frac{n_2}{n_3} = \frac{z_3}{z_2}; \quad u_{3,4} = \frac{n_3}{n_4} = \frac{z_4}{z_3}$$

Якщо вал I - ведучий, то колеса  $z_1, z'_2, z'_3$  - ведучі, а  $z_2, z_3, z_4$  - ведені. Перемножимо праві й ліві частини виразів простих зубчастих передач:

$$u_{1,2} u_{2,3} u_{3,4} = \frac{n_1 n_2 n_3}{n_2 n_3 n_4} = \frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z'_2 z'_3} = \frac{n_1}{n_4} = u_{1,4} \quad /II.73/$$

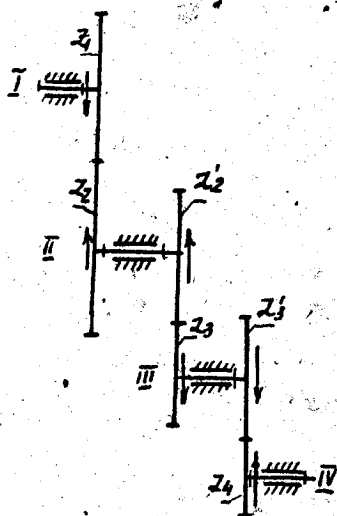


Рис. II.21

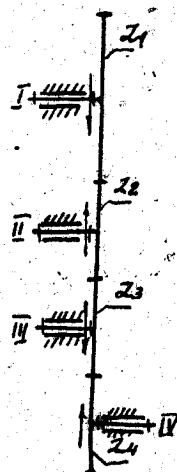


Рис. II.22

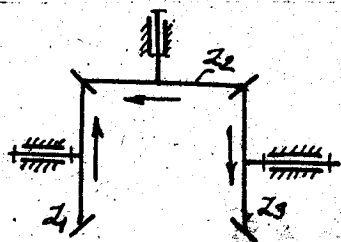


Рис. II.23

Отже, передаточне відношення складного зубчастого механізму дорівнює добутку передаточних відношень простих зубчастих механізмів, що входять до його складу, взятих зі своїми знаками. Для визначення знака передаточного відношення складного зубчастого механізму можна скористатися правилом стрілок /рис. II.21-II.23/, або за алгоритмом

$$u_{1,4} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2'} \frac{z_4}{z_3'} (-1)^m, \quad /II.74/$$

де  $m$  - число зовнішніх зачеплень передачі. На рис. II.21  $m = 3$  /усі три пари зубчастих коліс мають зовнішнє зачеплення/. Отже,

$$u_{1,4} = -\frac{n_1}{n_4}.$$

### II.15. Рядове зачеплення з паразитними колесами

Для здійснення передачі руху між валами, що розміщені на великій відстані, або якщо потрібно, щоб ведений вал обертався в такому самому напрямі, що й ведучий, на проміжних валах закріплюють по одному колесу, які не впливають на передаточне відношення. Ці колеса названо паразитними, а весь ряд - паразитним. Справді, передаточне відношення кожної пари зубчастих коліс /на рис. II.21/:

$$u_{1,2} = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad u_{2,3} = -\frac{n_2}{n_3} = -\frac{z_3}{z_2}; \quad u_{3,4} = -\frac{n_3}{n_4} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Перемножимо почленно праві й ліві частини:

$$u_{1,2} u_{2,3} u_{3,4} = \left(-\frac{n_1}{n_2}\right) \left(-\frac{n_2}{n_3}\right) \left(-\frac{n_3}{n_4}\right) = -\frac{n_1}{n_4} = -\frac{z_4}{z_1} = u_{1,4} = (-1)^m \frac{z_4}{z_1}.$$

Отже, паразитні колеса не впливають на величину передаточного відношення, а лише на знак. Зубчасті механізми, в яких відбувається зменшення кутових швидкостей при передачі руху від ведучої до веденої ланки, називають редукторами. Зубчасті механізми, які збільшують кутову швидкість веденої ланки, називають мультиплікаторами. Оскільки двигун працює економічніше за високих частот обертання, а більшість технологічних процесів потребують менших частот обертання і більших крутних моментів на валу робочої машини, то між двигуном і робочим валом машини встановлюється редуктор. Якщо ж необхідно підвищити частоту обертання веденого вала порівняно з частотою обертання двигуна, то встановлюють мультиплікатор.

## II.16. Зубчасті передачі з рухомими осями коліс. Епіциклічні передачі

Епіциклічною передачею називається механізм, складений із зубчастих /фрикційних/ коліс, одне або кілька з яких виконують складний обертальний рух, що складається з обертального руху навколо власної осі і разом з віссю – навколо зчепленого з ним зубчастого колеса. /Від слів "епіцикл" – коло, центр якого рівномірно рухається по іншому колу, рис. II.24/. Колеса 1 і 3 називають сонячними /іх осі нерухомі/. Колесо 2, що обертається навколо власної осі і разом з віссю навколо колеса 1, називають планетарним, або сателітом, 4 – водило.

Ступінь рухомості механізму визначають за формулою Чебишова

$$W = 3n - 2\rho_5 - \rho_4,$$

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

Отже, цей механізм має два ступені вільності, тобто для визначеності руху всіх його ланок треба задати закон руху двом ланкам /тобто, в механізмі повинно бути дві ведучі ланки/. Наприклад, задавши  $\omega_1$  і  $\omega_3$ , матимемо визначений рух водила –  $\omega_H$ , або задавши  $\omega_3$  і  $\omega_H$ , чи  $\omega_1$  і  $\omega_H$ , визначимо відповідно  $\omega_1$  чи  $\omega_3$ .

Епіциклічна передача, в якій обидва сонячних колеса рухомі і ступінь рухомості якої дорівнює двом, називається диференціальною. Проведемо кінематичне дослідження диференціального зубчастого механізму, вивіснивши формули, що встановлюють зв'язки між кутовими швидкостями ланок. Нехай кутові швидкості ланок  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  і  $\omega_H$ . Надамо всім ланкам додаткового руху з кутовою швидкістю  $-\omega_H$ . Від цього відносний рух ланок не зміниться /метод інверсії або зупинки/, але в перетвореному механізмі водило зупиниться, і механізм з епіциклічної передачі з рухомими осями коліс перетвориться на рядову передачу з нерухомими осями, кутові швидкості якої матимуть значення, наведені в табл. II.1.

Таблиця II.1

Номер ланки	Початкова кутова швидкість ланки	Кутова швидкість ланки у перетвореному механізмі
1	$\omega_1$	$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_H$
2	$\omega_2$	$\omega'_2 = \omega_2 - \omega_H$
3	$\omega_3$	$\omega'_3 = \omega_3 - \omega_H$
4	$\omega_H$	$\omega'_H = \omega_H - \omega_H = 0$

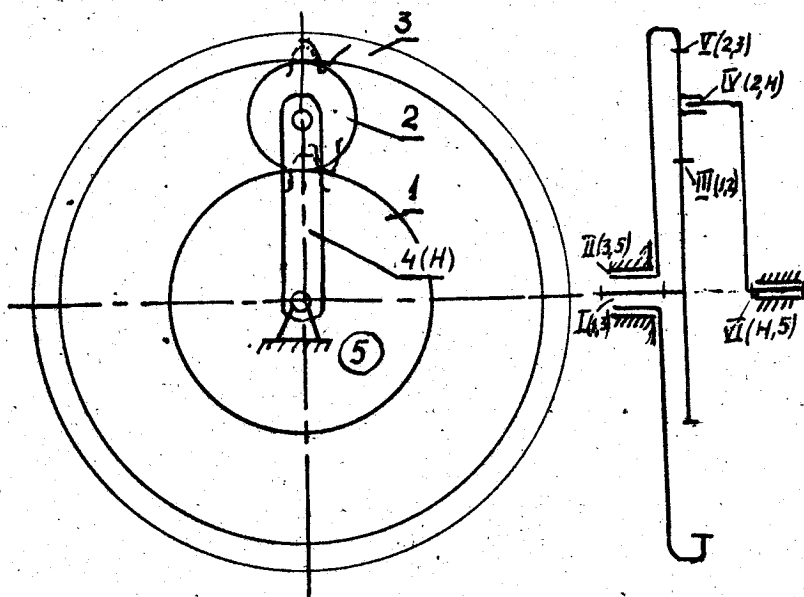


Рис. II.24

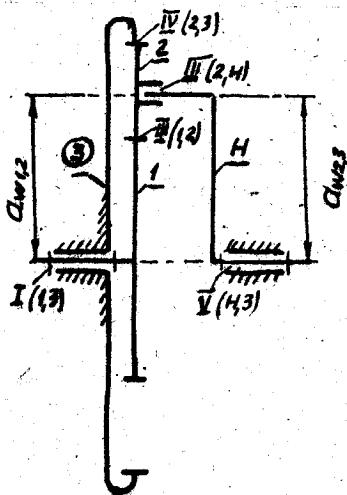


Рис. II.25

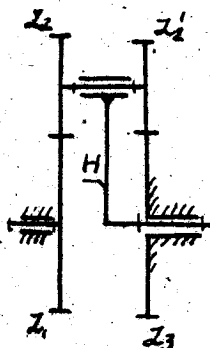


Рис. II.26

Передаточне відношення рядової зубчастої передачі /колесо 2 паразитне/:

$$U_{1,3}^{(M)} = \frac{\omega_1'}{\omega_3'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{Z_3}{Z_1} \quad /II.75/$$

Це формула Віліса.

У ній треба задати дві кутові швидкості, щоб визначити кутову швидкість третьої ланки, бо в ній відоме тільки передаточне відношення  $U_{1,3} = -\frac{Z_3}{Z_1}$ , усі три кутові швидкості невідомі, а рівняння лише одне.

Знак /Н/ біля  $U_{1,3}$  зверху ( $U_{1,3}^{(H)}$ ) означає, що водило Н - нерухоме /умовно зупинене/, тобто передаточне відношення визначене за умов нерухомого водила. Закріпимо одне сонячне колесо, наприклад  $Z_3$  /рис. II.25/. Ступінь рухомості епіциклічної передачі

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Епіциклічна передача, ступінь рухомості якої дорівнює  $W = 1$  і одне із сонячних коліс якої закріплене, називається планетарним механізмом.

Користуючись формулою Віліса, визначимо зв'язок між кутовими швидкостями ланок планетарної передачі, тобто передаточне відношення

$$U_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1'}{\omega_3'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = -\frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} =$$

$$= -\frac{\omega_1}{\omega_H} + 1 = -U_{1,H}^{(3)} + 1,$$

де  $U_{1,3}^{(H)} = -\frac{Z_3}{Z_1}$ .

Частіше рух передається від першого колеса  $Z_1$  до водила Н.

Тому

$$U_{1,H}^{(3)} = 1 - U_{1,3}^{(H)} \quad /II.76/$$

де  $U_{1,3}^{(H)} = -\frac{Z_3}{Z_1}$  /для механізму Джеймса, зображеного на рис. /II.25/. Отже, передаточне відношення планетарної передачі на одиницю більше за передаточне відношення рядової передачі, складеної з таких зубчастих коліс. Як це може збільшити передаточне відношення планетарної передачі, розглянемо на прикладі планетарного редуктора Давида, що має такі числа зубів:  $Z_1 = 100$ ;  $Z_2 = 99$ ;  $Z_2' = 100$ ;  $Z_3 = 101$  /рис. II.26/.

$$u_{1,3}^{(3)} = 1 - u_{1,3}^{(1)} = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2}\right),$$

$$u_{1,3} = 1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100} = 1 - \frac{9999}{10000} = \frac{10000 - 9999}{10000} = \frac{1}{10000}.$$

Отже, кутова швидкість водила в 10000 разів більша за кутову швидкість зубчастого колеса  $Z_1$ . Якщо ведучою ланкою є водило, то колесо I обертається в 10000 разів повільніше за водило. Велике передаточне відношення епіциклічних передач за малих їх габаритних розмірів порівняно з рядовим зачепленням, яке забезпечило б таке передаточне відношення, є суттєвою перевагою, що сприяла широкому запровадженню епіциклічних передач. Ці передачі широко застосовуються в металорізальних верстатах, літаках, танках, транспортних, підйомних, гірничих, сільськогосподарських машинах, механізмах дистанційних керувань, наземних і космічних радіолокаторах та інших машинах і приладах.

## II.17. Синтез планетарних зубчастих механізмів

Якщо підібрати числа зубів планетарної передачі так, що вони забезпечуватимуть необхідне передаточне відношення, то при її складанні осі колеса I і водила  $H$  /див. рис. II.24/ можуть не збігтися, зуби сателітів дотикатимуться і навіть накладатимуться /при числі сателітів  $k > 2$ /, або зуби сателітів не вхідитимуть у западини сонячних коліс. Щоб цього не сталося, при проектуванні передачі треба виконати три додаткові умови.

1. Умова співвісності. Щоб осі сонячного колеса I і водила /див. рис. II.25/ збігалися, відстань між осями коліс I і 2 і відстань між осями коліс 3 і 2 мають бути рівними, тобто  $a_{k,2} = a_{2,3}$  або

$$\frac{m(z_1 + z_2)}{2} = \frac{m(z_3 - z_2)}{2},$$

звідки

$$z_3 = z_1 + 2z_2. \quad /II.77/$$

2. Умова сусідства. Головки зубів сателітів не накладаються, якщо відстань між осями сателітів більша за діаметр кола вершин сателіта, тобто  $2a_1 + 2a_2 \leq a_{w,2,2}$  /рис. II.27/. При дотику сателітів  $a_{w,2,2} = 20,0_2 \sin \frac{\pi}{k}$ , де  $k$  - число сателітів. Виразимо  $a_1, a_2$



як суму радіусів  $a_{w_{1,2}} = z_1 + z_2$ . Тоді

$$a_{w_{2,2}} = \frac{2m(z_1 + z_2)}{2} \sin \frac{\pi}{K} \geq m(z_2 + 2).$$

Скоротивши на  $m/m$  - модуль зачеплення/, дістанемо:

$$(z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{K} \geq z_2 + 2. \quad /II.78/$$

3. Умова складання. При складанні епіциклічної передачі після введення в зачеплення зубів першого сателіта з зубами сонячних коліс I і 3 зуби інших сателітів можуть не входити в зацеплення сонячних коліс, і отже, передача скласти неможливо. Цього не станеться при такому значенні чисел зубів  $Z_1$  і  $Z_3$ , коли на дугах їх початкових кіл, на які їх поділяють сателіти, вкладатиметься ціле число кроків зачеплення  $p$  /рис. II.28/.

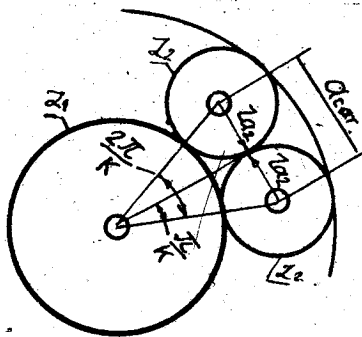


Рис. II.27

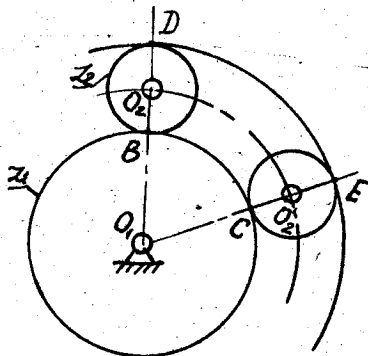


Рис. II.28

Нехай перший сателіт дотикається до сонячних коліс I і 3 в точках  $B, D$  другий - у точках  $C, E$ . Дуги  $BC$  і  $DE$  є дугами початкових кіл сонячних коліс I і 3, на які їх поділили сателіти. Розглянемо рівномірне розміщення сателітів, бо такі передачі легше виготовити і легше зрівноважувати сили інерції в них. Припустимо, що на дузі  $BC$  крок  $p$  вкладеться ціле число разів  $a_1$ , і залишиться дуга  $S_1 < p$ , тобто  $\cup BC = a_1 p + S_1$ . Аналогічно нехай на дузі  $DE$  вкладеться  $a_2$  кроків  $p$  і залишиться дуга  $S_2 < p$ , тобто  $\cup DE = a_2 p + S_2$ .

З другого боку,  $\cup BC = \frac{PZ_1}{K}$ ;  $\cup DE = \frac{PZ_3}{K}$ ,  
де  $K$  - число сателітів, рівномірно розміщених.

Сума дуг

$$\cup BC + \cup DE = \frac{PZ_1}{K} + \frac{PZ_3}{K} = a_1\rho + s_1 + a_2\rho + s_2.$$

Поділивши на  $\frac{P}{K}$ , знайдемо:

$$Z_1 + Z_3 = K(a_1 + a_2) + \frac{K(s_1 + s_2)}{\rho}.$$

Оскільки  $Z_1 + Z_3$  - ціле число, то і права частина має бути цілим числом, в якій  $K$ ,  $a_1$  і  $a_2$  - також цілі числа. Щоб уся права частина була цілим числом, достатньо, щоб  $s_1 + s_2 = \rho$ , оскільки  $s_1 < \rho$  і  $s_2 < \rho$ . Тоді

$$Z_1 + Z_3 = K(a_1 + a_2) + K = K(a_1 + a_2 + 1),$$

де  $A$  - ціле число. Отже, умова складання:

$$Z_1 + Z_3 = KA.$$

/II.79/

## II.18. Конічний диференціал автомобіля

Якщо автомобіль переміщується вздовж кривої, то при повороті ведучих його коліс, колесо 1, що котиться по зовнішній кривій /з.к./; має пройти більший шлях, ніж колесо 2, що котиться по внутрішній кривій /вн.к./ /рис. II.29/. Отже, частота обертання колеса 1 має бути більшою за частоту обертання колеса 2. Для відтворення такого руху коліс з різними кутовими швидкостями застосовують зубчастий диференціальний механізм /рис. II.30/. Конічне зубчасте колесо 1 приводиться в рух від двигуна з допомогою хвостовика і приводить в рух колесо 2, що вільно обертається на лівій півосі  $\mathcal{L}_n$ . Колесо 2 жорстко з'єднане з коробкою  $K$ , що є водилом диференціального механізму. У коробці  $K$  на своїх осях вільно обертаються два однакових сателіти 3, що перебувають у зачепленні з двома однаковими сонячними колесами  $Z_4$  і  $Z_5$ , які жорстко з'єднані одне з лівою,  $\mathcal{L}$ , друге - з правою,  $\mathcal{P}$ , півосями. При русі автомобіля вздовж прямої моменти сил опору на лівій і правій півосях можна вважати рівними, тому сателіти 3 перебувають у рівновазі відносно власних осей обертання, тобто обертаються навколо власних осей. Коробка  $K$  разом із

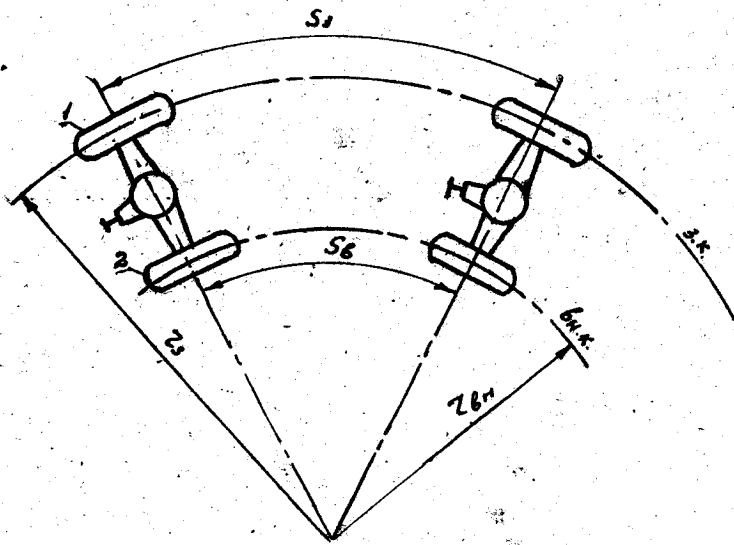


Рис. II.29

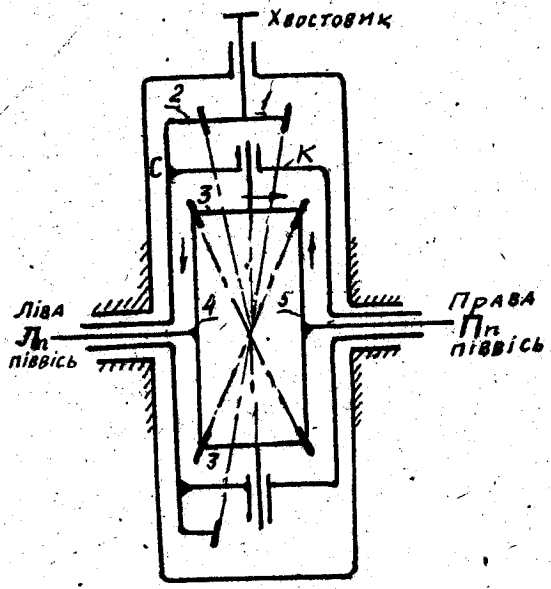


Рис. II.30

сателітами 3 і півосі  $\mathcal{L}$  і  $\mathcal{N}$  обертаються як одне ціле в однаковому напрямі з однакою кутовою швидкістю. Як тільки колеса автомобіля почнуть рухатися вздовж кривих різного радіуса, а отже, і з різними швидкостями, сателіти 3 почнуть обертатися навколо своїх осей, а весь механізм працюватиме як диференціальний. Якщо раніше сателіти 3 разом з коробкою  $K$  оберталися лише навколо горизонтальної осі, то тепер вони обертаються і навколо вертикальних осей.

### Кінематика диференціала автомобіля

Згідно з теоремою Віліса

$$\omega_{4,5}^{(K)} = \frac{n_4 - n_K}{n_5 - n_K}, \quad /II.80/$$

де  $n_4$  і  $n_5$  - частота обертання сонячного колеса відповідно 4 і 5 при русі автомобіля на повороті;  $n_K$  - частота обертання водила /коробки  $K$  /.

Абсолютна величина передаточного відношення

$$|\omega_{4,5}^{(K)}| = \frac{z_3}{z_4} \frac{z_5}{z_2} = 1, \quad \text{бо } z_3 = z_2, \text{ а } z_4 = z_5.$$

З урахуванням знака  $\omega_{4,5}^{(K)} = -1$  /див. рис. II.30/.

Отже,

$$\omega_{4,5}^{(K)} = \frac{n_4 - n_K}{n_5 - n_K} = -1,$$

звідки

$$n_K = \frac{n_4 + n_5}{2}. \quad /II.81/$$

Таким чином, частота обертання водила /коробки  $K$  / дорівнює півсумі частот обертання півосей  $\mathcal{L}$  і  $\mathcal{N}$ . Якщо колесо 4 зупиниться / $n_4 = 0$ /, то  $n_K = \frac{n_5}{2}$ , тобто колесо на осі 5 обертається в 2 рази швидше, ніж коробка  $K$ . Коли нерухомою буде коробка  $K$ , то  $n_4 = -n_5$ , тобто колесо 4 обертається з такою самою кутовою швидкістю, що й колесо 5, але в протилежному напрямі.

### II.19. Хвильова передача

Одним із важливих завдань машинобудування є зменшення габаритних розмірів, маси і вартості механічних передач. Це має особливе значення

для малогабаритних механізмів в літальних апаратах, ракет і супутників. При розв'язуванні цієї задачі велике значення мають хвильові, або гармонічні передачі. У цих передачах перетворення руху відбувається за рахунок переміщення хвилі деформації однієї з ланок, виконаної гнучкою, і відповідного синхронного переміщення зони зачеплення, або фрикційного контакту ланок.

Хвильові передачі можуть бути зубчастими, гвинтовими та фрикційними. Не зважаючи на те що патент на хвильову передачу Массер /США/ одержав 1959 року, хвильові передачі широко застосовують завдяки багатьом перевагам перед іншими. Це - малі габаритні розміри і маса, низька вартість, високе передаточне відношення /в одноступінчастій передачі  $i = 60 - 250$ , у двоступінчастій - до 200000, а іноді -  $2 \cdot 10^6$ /, багатопарність зачеплення /у зачепленні може перебувати до 30% загального числа зубів/. Це дає змогу виготовити передачу з малим модулем  $m = 1$  мм і менше/ та інші переваги.

Нині хвильові передачі виготовляються не лише як кінематичні, але й як силові, що передають потужність від 10 Вт до 100 кВт. До недоліків передачі можна віднести значний момент при запуску передачі, несталість передаточного відношення, нагрівання і порівняно низький ККД.

## II.20. Структура хвильової передачі

Хвильова передача /рис. II.31/ складається з генератора хвиль I /ведучої ланки/, гнучкого зубчастого колеса 2 зовнішнього зачеплення, виконаного у вигляді тонкостінного стакану /веденої ланки/, що передає крутячий момент, жорсткого колеса 3 з внутрішнім зачепленням /колесо 3 може бути рухомих і нерухомих/, стояка 4 і ролика 5. Нерухомих може бути і колесо 2. Тоді колесо 3 обов'язково має бути рухомих. При обертанні генератора I хвиль ролик 5, установлений на ньому для зменшення втрат від тертя, деформує в радіальному напрямі зубчастий вінець 2 і вводить його в зачеплення з зубами колеса 3. При збільшенні крутячого моменту на валу гнучкого колеса в зачеплення вступає більше пар зубів. При переміщенні по колу хвилі деформації вінець 2 перекочується по колесу 3, передає рух і момент веденому валу. У передачі, що показана на рис. II.31, два ролики розміщені на протилежних кінцях генератора, тому в ній створюється дві хвилі вільної деформації гнучкого колеса. Такий генератор називається двоххвильовим генератором вільної деформації. З метою підвищення

надійності і довговічності передачі застосовують генератори вимушеної деформації хвилі у вигляді кулачків еліптичної чи іншої форми, які створюють дві або три хвилі вимушеної деформації гнучкого колеса 2.

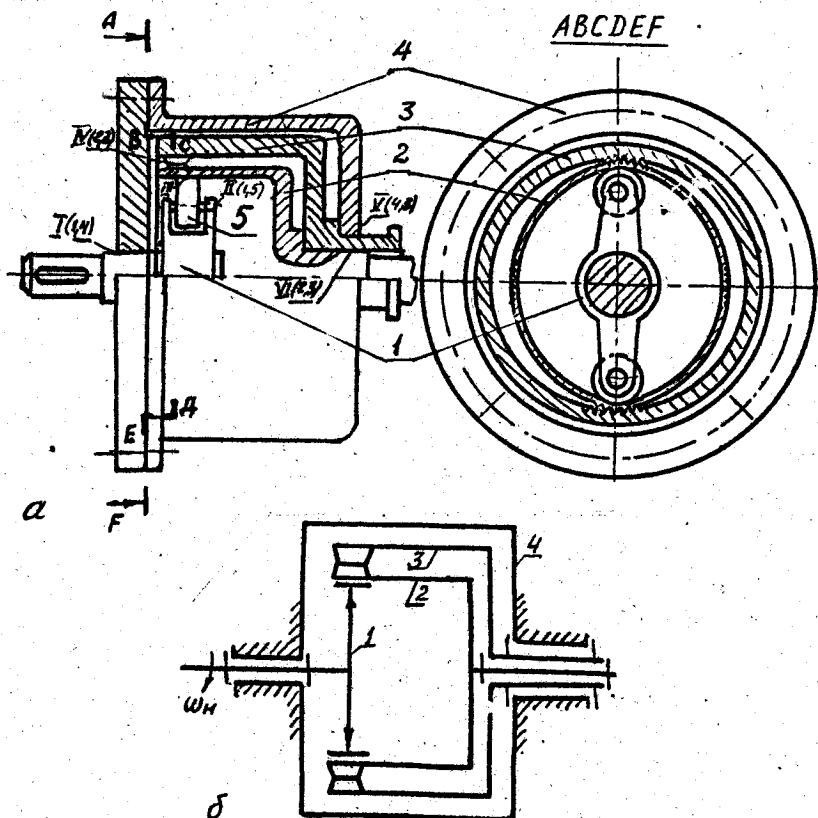


Рис. II.31

Визначимо ступінь вільності передачі за формулою Чебишова

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

У механізмі є чотири рухомі ланки, п'ять обертальних кінематичних пар I класу /1 - 4, 1 - 5, 5 - 2, 2 - 3, 3 - 4/ і одна кінематична

пара ІV класу 2 - 3 /зубчасте зачеплення/. Необхідно пояснити докладніше, чому кінематична пара 5 - 2 віднесена до У класу. Перша ознака нижчої пари та, що ролик 5 дотикається до гнучкого зубчастого колеса 2 не лінійно, а поверхнею, бо при окладанні передачі генератор хвилі вставляється з натягом і стакан охоплює ролик певною поверхнею. Другою ознакою кінематичної пари У класу є те, що колоесо 2 має лише один незалежний обертальний рух навколо осі, всі інші втрачені, тобто на колоесо 2 накладено п'ять обмежень /п'ять умов в'язі/. Справді, абсолютна швидкість  $V$  кожної точки ланки 2 відносно стояка складається зі швидкості  $V_2$  у відносному русі /відносно поверхні деформації/ і швидкості  $V_e$  в переносному русі /разом з поверхнею деформації/ /рис. II.32/. Отже,  $V = \vec{V}_e + \vec{V}_2$ , де  $V_e = \omega_H \rho = \omega_H OA$  /генератор І є водилом Н/, а  $V_2 = r_p \omega_p$ , де  $\omega_p$  - кутова швидкість ролика/. Отже, швидкість  $V$  залежить від кутової швидкості  $\omega_H$  генератора і кутової швидкості ролика  $\omega_p$ . Аналогічно гвинтовій парі, де осьове переміщення гвинта залежить від кута повороту або числа обертів гвинта, а незалежним рухом гвинта /узагальненою його координатою/ є лише обертання, яке визначає положення його в просторі. Переміщення гвинта залежить від кута повороту гвинта. Ступінь вільності гвинта дорівнює одиниці, а не двом, тому гвинтова пара є кінематичною парою У класу, хоч здається, що гвинт виконує два рухи. Те саме маємо і в парі ролик - гнучке колоесо 2, де ланка 2 виконує лише один незалежний рух: відносний рух  $V_2$  залежить від руху ролика. Якщо ролик 2 почне пробуксовувати /при малому натягу ланки 2 вібратором/ або повертатися в іншому напрямі, то іншим буде й напрям швидкості  $V_2$ , а отже, іншим буде й рух ланки 2. Отже, ступінь рухомості хвильової передачі

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1.$$

Але в цьому механізмі ролик вносить один зайвий ступінь рухомості, обертуючись навколо власної осі  $O_1$ . Механізм працюватиме і без ролика /його ввели не для додаткового руху колеса 2, а для зменшення втрат від тертя/. Тому виключимо зайвий ступінь рухомості, умовно закріпивши чи видаливши ролик. У цьому разі ступінь рухомості хвильової передачі

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 1 = 0.$$

Це вказує на те, що в механізмі є пасивна в'язь, що не впливає на кінематику механізму, але вносить статичну невизначеність. Також

в'язу є в'яз у кінематичній парі 2 - 3. Без підшипника 2 - 3 колесо 2 перекочуватиметься по колесу 3. Цей підшипник введено для підвищення жорсткості ланки 2. Виключимо пасивну в'яз між ланками 2 і 3 в підшипнику ковзання, створену ними. Тоді

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

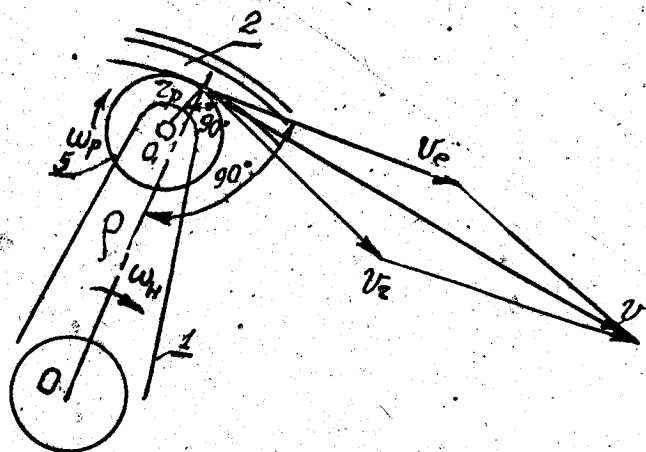


Рис. II.32

Отже, ступінь рухомості цієї хвильової передачі, як і в диференціальному зубчастому механізмі, дорівнює двом. Це означає, що для визначення рухомості її ланок треба мати в механізмі дві ведучі ланки. Для того щоб рух ланки 2 був визначеним, треба задати закони руху /число обертів/ ланок 1 і 3, або для визначеності руху ланки 3 треба задати закони руху ланок 1 і 2. Не знаючи числа обертів їх, не визначимо число обертів колеса 3.

Якщо закріпити колесо 3, дістанемо планетарну хвильову передачу. Справді,

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1$$

/кінематичну пару 2 - 3 і ролик, як пасивну в'яз і зайвий ступінь рухомості, не враховуємо/. Отже, зробивши в диференціальній хвильовій передачі нерухомим колесо 3, перетворили її на планетарну. За-



давши закон руху генератору, дістанемо визначений рух гнучкого колеса 2. На практиці так і роблять, оскільки зі збільшенням навантаження на валу колесо 2 більше деформуватиметься і в зачеплення вступить більше зубів, навантаження на один зуб зменшиться. Умовне зображення планетарної хвильової передачі показано на рис. II.31,б.

## II.21. Кінематика хвильової передачі

Нехай  $\omega_1$  - кутова швидкість генератора хвиль I,  $\omega_2$  - кутова швидкість гнучкого колеса 2;  $\omega_3$  - кутова швидкість жорсткого колеса 3;  $Z_2$  і  $Z_3$  - відповідно число зубів коліс. Для встановлення зв'язей між кутовими швидкостями ланок хвильової передачі скористаємось зворотним рухом /методом зупинки чи інверсії/, задавши додатковий рух усім ланкам передачі з кутовою швидкістю  $-\omega_1$ . Тоді в перетвореному механізмі генератор зупиниться, а кутові швидкості матимуть значення, наведені в табл. II.2.

Таблиця II.2

Номер ланки	Кутова швидкість ланки	Кутова швидкість ланки в перетвореному механізмі
1	$\omega_1$	$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_1 = 0$
2	$\omega_2$	$\omega'_2 = \omega_2 - \omega_1$
3	$\omega_3$	$\omega'_3 = \omega_3 - \omega_1$

Після зупинки генератора I хвильова передача перетворилася на звичайну зубчасту передачу з внутрішнім зачепленням зубів. Її передаточне відношення

$$u_{2,3}^{(1)} = \frac{\omega'_2}{\omega'_3} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{Z_3}{Z_2}.$$

Це формула Віліса, якою користувалися при вивченні диференціальних зубчастих механізмів.

У планетарній хвильовій передачі жорстке колесо 3 нерухоме. Отже,  $\omega_3 = 0$ . У цьому разі формула Віліса матиме вигляд

$$u_{2,3}^{(1)} = \frac{\omega'_2}{\omega'_3} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{0 - \omega_1} = -u_{2,1}^{(3)} + 1 = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Звідси

$$u_{2,1}^{(3)} = 1 - u_{2,3}^{(1)} = 1 - \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2}.$$

Частіше передають рух від генератора /води́ла/ I на колесо 2.  
У цьому разі

$$u_{1,2}^{(3)} = \frac{1}{u_{2,1}^{(3)}} = \frac{1}{\frac{Z_2 - Z_3}{Z_2}} = \frac{Z_2}{Z_2 - Z_3}. \quad /II.82/$$

Перемноживши чисельник і знаменник на -1, дістанемо:

$$u_{1,2}^{(3)} = -\frac{Z_2}{Z_3 - Z_2}.$$

Знак "-" указує на те, що генератор хвиль I і зубчасте колесо 2 обертаються в різних напрямках. При нерухомих колесі 2

$$u_{3,2}^{(1)} = \frac{\omega_3'}{\omega_2'} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{0 - \omega_1} = -u_{3,1}^{(2)} + 1 = \frac{Z_2}{Z_3}.$$

Звідси

$$u_{3,1}^{(2)} = -\frac{Z_2}{Z_3} + 1 = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3}. \quad /II.83/$$

За задумкою автора хвильової передачі  $Z_3 - Z_2 = q$ , де  $q$  - число хвиль деформації,  $q = 2$  /беруть  $q = 2 - 4$ /. Отже, у хвильовій передачі з нерухомих жорстким колесом 3

$$u_{1,2}^{(3)} = \frac{Z_2}{q}, \quad /II.84/$$

а в передачі з нерухомих колесом 2

$$u_{1,3}^{(2)} = \frac{Z_3}{q}. \quad /II.85/$$

Оскільки хвильова передача дрібно модульна / $m < 1$  мм/, то число зубів часто значно перевищує 100, тому передаточне відношення хвильових передач перевищує  $u = 50 - 250$  при ККД  $\eta = 0,9 \dots 0,7$ . Якщо створити хвильову передачу з одним нерухомих жорстким колесом 3 з передачею руху від генератора на два рухомих гнучких колеса, друге з яких передає рух на ведене жорстке колесо, то передаточне відношення від генератора до рухомого жорсткого колеса  $u = 2500 \dots 100000$ . Правда, ККД такої передачі низький / $\eta = 0,08 \dots 0,01$ /. Але в кінематичних передачах малої потужності на це не звертають уваги.

## II.22. Просторові зубчасті механізми

Просторовими називають зубчасті механізми, що здійснюють передачу обертального руху між валами, осі яких не паралельні, а пере-

тинаються або перехрещуються у просторі під прямим, тупим чи гострим кутом.

Як відомо, відносний рух зубчастих коліс плоских механізмів, осі валів яких розміщені в паралельних площинах, можна уявити як перекочування без ковзання коліс одного по іншому по колах, а точніше, по циліндрах, які називаються початковими.

Зрозуміло, що поверхні прямих циліндрів не можуть бути центроїдами коліс, вали яких розміщені в площинах, що перетинаються. Центроїдами у відносному русі /початковими поверхнями коліс просторових механізмів/ - можуть бути тільки поверхні другого порядку, наприклад гіперболоїди обертання. З рис. II.33 видно, що для початкових поверхонь можна використати або довільно вирізані спряжені частини гіперболоїдів 1 або частини гіперболоїдів 2, вирізані з їх горловини. Але виготовляти гіперболоїдні колеса складно, тому гіперболоїдні частини вирізів 1 і 2 замінюють прямолінійними. Так дістають гвинтовий зубчастий 1 або конічний 2 механізми.

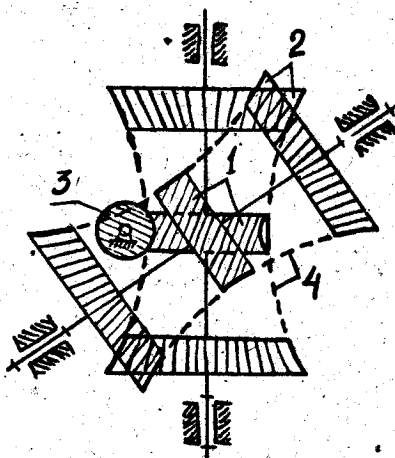


Рис. II.33

Якщо ж на одному з вирізаних циліндрів 1 гіперболоїдну поверхню замінити поверхнею постійного радіуса і з нею спрягти гвинтовий циліндр 3 такого самого радіуса, розміщений перпендикулярно до пло-

щини рисунка, то дістанемо черв'ячну передачу. Така заміна гіперболоїдних поверхонь циліндричними, конічними та угнутими циліндричними на черв'ячному колесі значно спростить виготовлення коліс просторових механізмів.

## II.23. Гвинтові зубчасті колеса

Щоб передавати обертальний рух між валами, які перехрещуються у просторі, широко застосовують гвинтові або гелікоїдні зубчасті /наближені гіперболоїдні/ колеса.

Від лінійчастих гвинтових поверхонь розгорнутих гелікоїдів, якими окреслені бокові сторони зубів, пішла назва передчі.

Гелікоїд — це поверхня, описана прямою, що обертається навколо нерухомої осі з незмінною кутовою швидкістю й одночасно переміщується вздовж осі обертання з постійною швидкістю. У точці дотику  $P_0$  початкових циліндрів колів швидкості коліс відповідно /рис. II.34/:

$$v_1 = \omega_1 r_1;$$

$$v_2 = \omega_2 r_2.$$

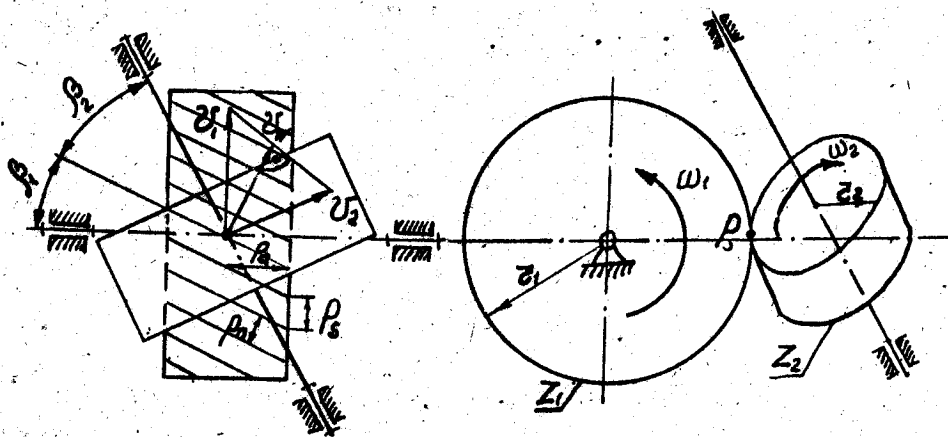


Рис. II.34

Ці швидкості нерівні за модулем, бо під час руху профілі зубів ковзають вздовж зуба. Рівні між собою лише нормальні складові цих швидкостей, що й забезпечує постійний контакт зубів і роботу передачі без ударів, тобто

$$U_{N_1} = U_{N_2} = \omega_1 z_1 \cos \beta_1 = \omega_2 z_2 \cos \beta_2.$$

Звідси

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2 \cos \beta_2}{z_1 \cos \beta_1} = U_{12} = \frac{z_2}{z_1}. \quad /II.86/$$

Останню рівність легко довести.

Справді, довжини початкових кіл

$$C_1 = 2\pi r_1 = P_s z_1; \quad /II.87/$$

$$C_2 = 2\pi r_2 = P_s z_2. \quad /II.88/$$

Поділивши /II.88/ на /II.87/, дістанемо:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{P_s z_2}{P_s z_1} = \frac{\frac{r_n}{\cos \beta_2} z_2}{\frac{r_n}{\cos \beta_1} z_1} = \frac{z_2 \cos \beta_1}{z_1 \cos \beta_2}. \quad /II.89/$$

Підставивши значення  $z_2$  і  $z_1$  у рівність /II.86/ знайдемо:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2 \cos \beta_2}{z_1 \cos \beta_1} = \frac{z_2 \cos \beta_1}{z_1 \cos \beta_2} \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad /II.90/$$

Переваги гвинтових механізмів перед іншими:

- I/ передаточне відношення дорівнює  $\frac{z_2 \cos \beta_2}{z_1 \cos \beta_1}$ , а не  $\frac{z_2}{z_1}$ , тому, змінюючи кути скручування зубів  $\beta_2$  і  $\beta_1$  за таких самих габаритних розмірів  $z_1$  і  $z_2$ , можна дістати інші передаточні відношення;
- 2/ одноразове зачеплення кількох зубів, що забезпечує плавну безударну роботу передачі.

Якщо сума кутів скручування /нахилу зубів/  $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$ , то підставивши до рівності /II.86/ замість  $\beta_2$  значення  $90^\circ - \beta_1$ , дістанемо:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{z_2 \cos \beta_2}{z_1 \cos \beta_1} = \frac{z_2 \cos(90^\circ - \beta_1)}{z_1 \cos \beta_1} = \frac{z_2 \sin \beta_1}{z_1 \cos \beta_1} = \frac{z_2}{z_1} \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{z_2}{z_1} \operatorname{ctg} \beta_2 = \frac{z_2}{z_1}.$$

У гвинтовій зубчастій передачі, як і в косозубій, можна виділити три кроки /і три модулі/:  $P_n$  - нормальний,  $P_s$  - торцевий,  $P_a$  - осьовий. Очевидно, що

$$P_s = \frac{P_n}{\cos \beta};$$

$$P_a = \frac{P_n}{\sin \beta}.$$

Поділивши праві й ліві частини на  $\pi$ , дістанемо три модулі: нормальний  $m_n$ , торцевий  $m_s = \frac{m_n}{\cos \beta}$  та осьовий  $m_a = \frac{m_n}{\sin \beta}$ .

Недоліки передачі: контакт зубів не по поверхні, а в точці, ковзання профілів вздовж осі зуба. Це спричинює швидкий знос зубів, тому гвинтовою передачею користуються, в основному, як кінематичною, а не силовою.

## II.24. Черв'ячна передача

Черв'ячні передачі застосовують для передачі обертового руху між валами, осі яких перехрещуються в просторі. Найчастіше застосовують передачі, в яких осі колеса та черв'яка перехрещуються під прямим кутом, бо їх легше виготовити. Черв'ячна передача складається з безконечного гвинта 1, черв'ячного колеса 2 і стояка 3 /рис. II.35/.

Конструкцію черв'яка можна здійснити

1/ у вигляді гвинта з трапецієдною різьбою, що в осьовому перетині має прямолінійний профіль, а в площині, перпендикулярній до осі черв'яка - спіраль /черв'як/ Архімеда;

2/ у вигляді гвинтового колеса, що має прямолінійний профіль на площині, дотичній до основного циліндра, і евольвентний профіль /евольвентний черв'як/ - у площині, перпендикулярній до осі черв'яка. Якщо частота обертання черв'яка  $n_1$ , то швидкість переміщення гайки /колеса/ вздовж осі черв'яка, м/с:

$$v_1 = \frac{S n_1}{1000 \cdot 60}, \quad \text{/II.91/}$$

де  $S$  - хід гвинта /черв'яка/, оскільки за один оберт черв'яка гайка переміститься на один хід.

Колова швидкість колеса на початковому циліндрі /колі/, м/с:

$$v_2 = \frac{\pi d_k n_k}{1000 \cdot 60}. \quad \text{/II.92/}$$



Передаточне відношення черв'ячного механізму дорівнює відношенню числа зубів колеса до числа витків черв'яка.

Кут нахилу /скручування/ гвинтової лінії черв'яка /рис. II.36, а/ знаходимо із рівності:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{s}{\pi d_v} = \frac{\pi m z_v}{\pi d_v} = \frac{m z_v}{d_v}. \quad /II.95/$$

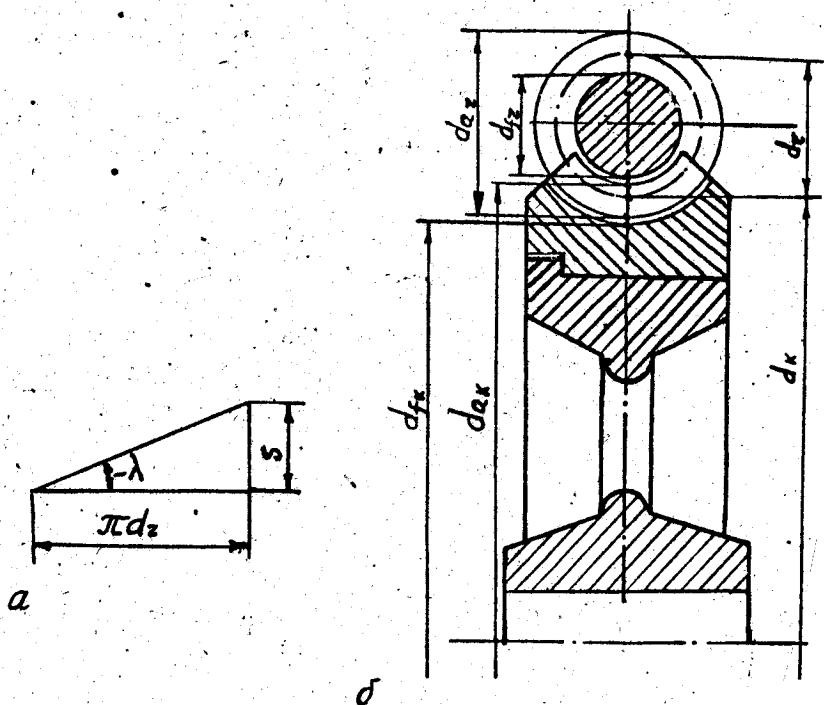


Рис. II.36

### II.25. Геометричні елементи черв'яка і колеса

Із

$$d_v = \frac{m z_v}{\operatorname{tg} \lambda} = m q_v, \quad /II.96/$$



де  $q_v = \frac{z_v}{t g \lambda}$  - характеристика черв'яка, яка показує, скільки модулів укладеться в діаметрі ділильного кола черв'яка /величина стандартна;  $q_v = 8-13$  - ціле число/.

Отже, діаметр ділильного кола черв'яка

$$d_v = m q_v. \quad /II.97/$$

Модуль зачеплення  $m$  дістають із розрахунків зуба на міцність, а число витків черв'яка і число зубів колеса визначають із передаточного числа.

Діаметр кола виступів /головок/ черв'яка /рис. II.36, б/

$$d_{a_v} = d_v + 2h_a = d_v + 2h_a^* m.$$

Якщо  $h_a^* = 1$ , то

$$d_{a_v} = m(q_v + 2). \quad /II.98/$$

Діаметр кола западин /ніжок/

$$d_{f_v} = d_v - 2h_f = d_v - (2h_a^* - 2c_o^*) m.$$

Оскільки  $h_a^* = 1$ ;  $c_o^* = 0,25$ , то

$$d_{f_v} = m(q_v - 2,5). \quad /II.99/$$

### Розміри колеса

Ділильний діаметр колеса

$$d_k = m z_k.$$

Діаметр кола виступів

$$d_{a_k} = m(z_k + 2).$$

Діаметр кола западин

$$d_{f_k} = m(z_k - 2,5).$$

Слід зазначити, що у наведених формулах йдеться про осевий модуль черв'яка, або рівний йому торцевий модуль колеса.

ККД черв'ячної передачі

$$\eta = \frac{t g \lambda}{t g(\lambda + \rho)}, \quad /II.100/$$

це  $\lambda$  - кут нахилу витка;  $\rho$  - кут тертя.

Оскільки  $\lambda$  залежить від числа витків, то ККД тем вищий, чим більше витків.

### Площина зачеплення черв'ячної передачі

Трапецоїдний черв'як в осьовому перетині має прямолінійний профіль, тому спряжений з ним профіль зубчастого колеса в цьому перетині, як і в рейковому зачепленні, має евольвентний профіль.

В інших перетинах профілі черв'яка і зуба колеса інші. Якщо в гвинтових механізмах профілі зубів стикаються по точках, то в усіх перетинах черв'ячної пари зуби колеса до витків черв'яка дотикаються по лінії. Тому в черв'ячній передачі треба говорити про площину зачеплення, яку можна зобразити графічно.

### II.26. Конічне прямозубе зачеплення

Щоб передати обертальний рух між валами, осі яких перетинаються, застосовують конічні зубчасті механізми. Зуби конічних коліс можуть бути прямими, косими, круговими, кривина зуба буває окреслена евольвентою або іншою кривою.

Розглянемо прямозубі конічні колеса. Аксоїдами у відносному русі двох конічних зубчастих коліс є два конуси, які перекачуються один по одному без ковзання /Іх називають також початковими конусами/. Лінія  $OP$  - вісь миттєвого обертання одного колеса відносно другого. Тому в точці  $P$  на загальній твірній початкових конусів швидкості  $v_1 = v_2$  /рис. II.37, а/:

$$v_1 = \omega_1 r_1 = v_2 = \omega_2 r_2.$$

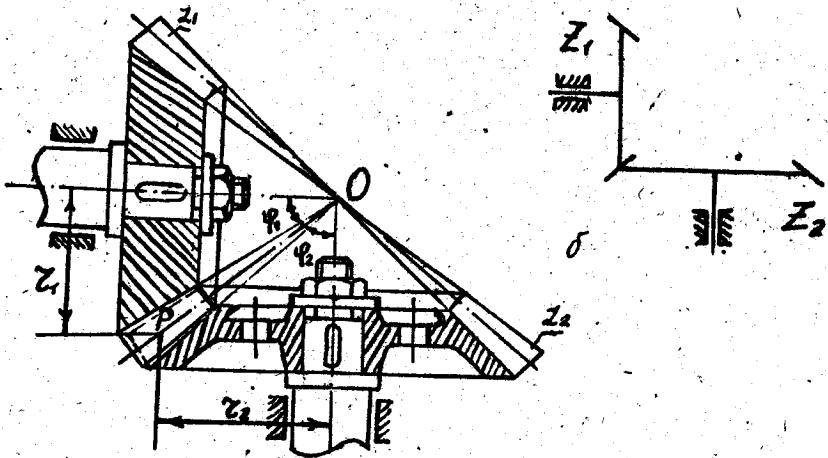
Звідси передавальне відношення

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{OP \sin \varphi_2}{OP \sin \varphi_1} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}. \quad /II.101/$$

Завдяки простоті виготовлення частіше застосовують конічні передачі, осі яких перетинаються під прямим кутом.

Якщо  $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$ , то

$$u_{12} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin(90^\circ - \varphi_1)}{\sin \varphi_1} = \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} = \operatorname{ctg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2.$$



a

Рис. II.37

Довжина кіл, радіуси яких  $z_1$  і  $z_2$  :

$$C_1 = 2\pi z_1 = z_1 \rho;$$

$$C_2 = 2\pi z_2 = z_2 \rho.$$

Звідси

$$z_1 = \frac{z_1 \rho}{2\pi}; \quad z_2 = \frac{z_2 \rho}{2\pi}.$$

Тоді

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\frac{z_2 \rho}{2\pi}}{\frac{z_1 \rho}{2\pi}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Але  $\frac{\rho}{\pi} = m.$

Отже,  $z_1 = \frac{m z_1}{2}; \quad z_2 = \frac{m z_2}{2}.$

Середній модуль зачеплення знаходять розрахунком зуба на міцність, а стандартизується найбільший зовнішній, бо контролювати /вимірювати/ зуб та інші параметри зручніше на зовнішньому боці колеса.

Схематичне зображення конічної зубчастої передачі показано на рис. II.37,а.

## II.27. Профілювання зубів конічних коліс

У машинобудуванні широко застосовують конічні зубчасті колеса, профілі зубів яких окреслені евольвентою або циклоїдою. Профіль зуба конічного колеса можна створити перекочуванням без ковзання по конусу площини, ширина якої дорівнює довжині  $\delta$  зуба. Конус, по якому перекочується твірна площина, називається основним. Кожна точка будь-якої з евольвент рівновіддалена від вершини  $O$  конуса, тому всі точки евольвенти розміщені на сфері /їх матимемо множинку, яка і створить вічний профіль зубця / /рис. II.38/.

Як відомо з нарисної геометрії, неможливо точно розгорнути сферичну поверхню на плоский аркуш паперу. Крім того, виготовити сферичні профілі важко, тому в практиці проектування користуються методом наближеного профілювання на додаткових конусах.

При цьому профілі зубів креслять не на сфері  $APB$  /рис. II.39/ з центром в точці  $O$ , а на конічних поверхнях, дотичних до сфери, які легко розгортаються на плоский рисунок.

Рос.ту виконують у такій послідовності. За заданим передаточним числом знаходимо кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  при вершинах початкових /діляль-них/ конусів конічних коліс  $\tan \varphi_2 = \frac{z_1}{z_2} \tan \varphi_1$ , які відкладаємо проти катетів  $z_1$  і  $z_2$ :

$$z_1 = \frac{m z_2}{2}; \quad z_2 = \frac{m z_1}{2}.$$

При цьому знаходимо точку  $O$  - центр сфери  $OAB$  радіусом  $OA$ . Через точку  $P$  перетину /виходу/ радіусів  $z_1$  і  $z_2$  проводимо лінію, перпендикулярну до  $OP$ . У точках перетину цим перпендикуляром осей обертання конічних коліс  $x-x$  і  $y-y$  розміщені вершини  $O_1$  і  $O_2$  додаткових конусів, дотичних до сфери  $OAB$ . Додаткові конуси дістаємо поворотом відрізків  $O_1P$  і  $O_2P$  навколо осей  $x-x$  і  $y-y$ . На відрізках твірних додаткових конусів, що дорівнюють висоті  $h$  зуба колеса /малих порівняно з радіусом сфери/, додаткові конуси зливаються зі сферою. Точніше було б сказати, що зі сферою зливаються

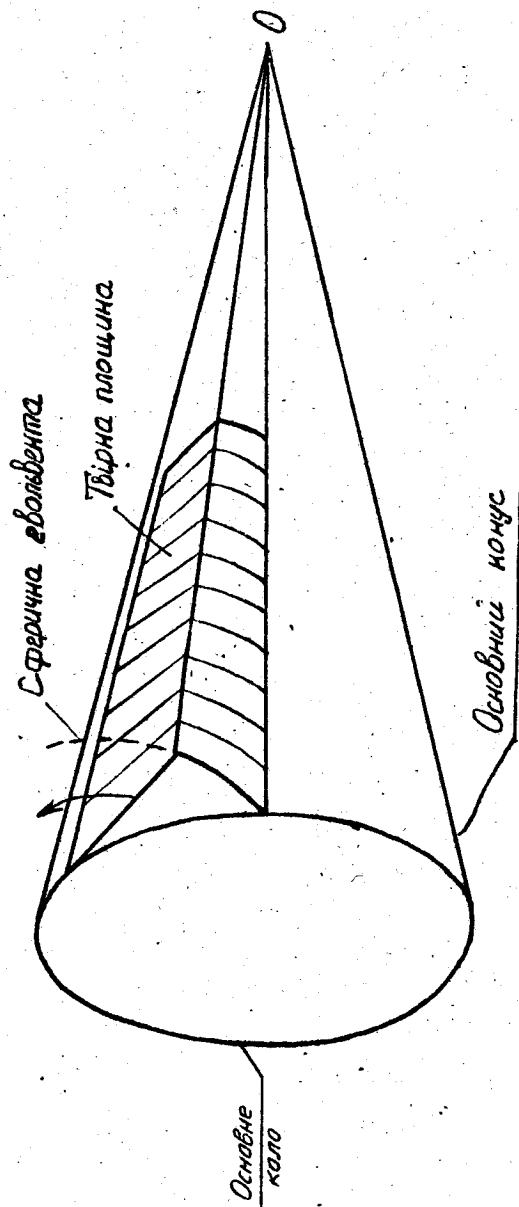


Рис. II.38

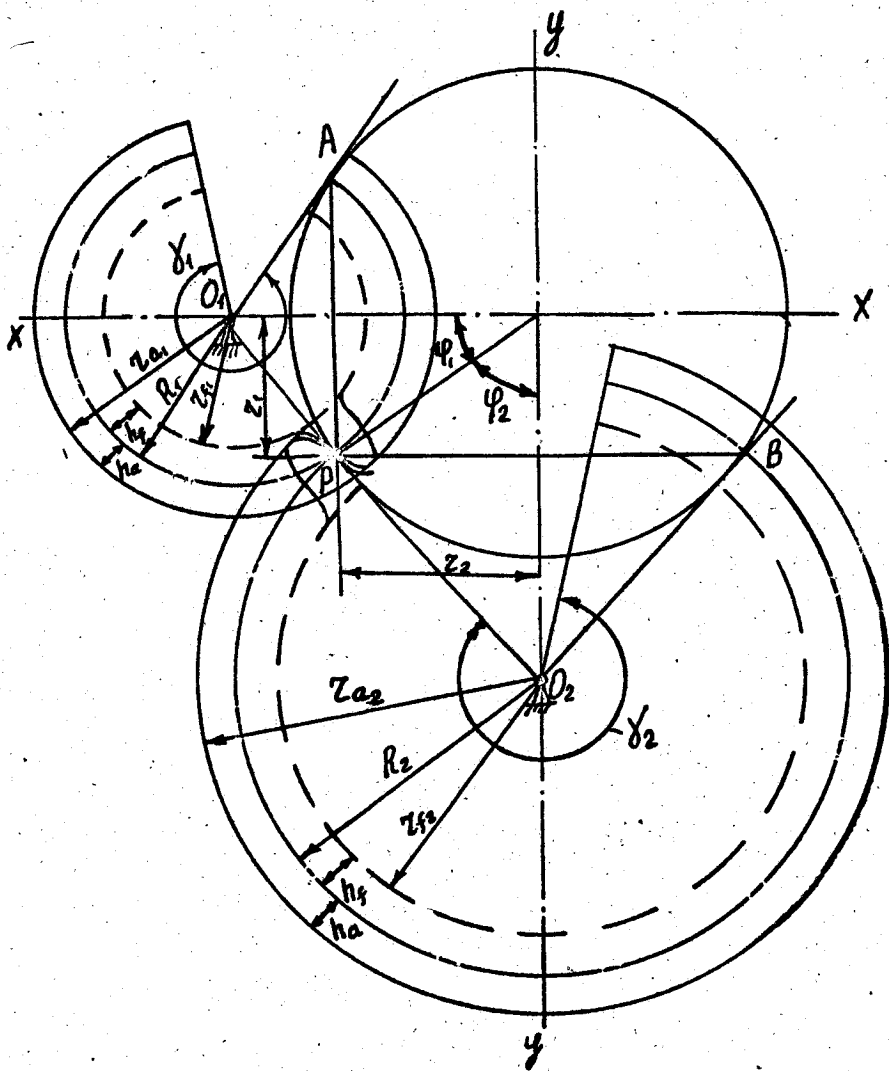


Рис. II.39

додатковий зрізаний конус з твірною, що дорівнює висоті  $h$  зуба. Розгорнувши ці конуси на площину, дістанемо циліндричні колеса, де й накреслимо профілі зубів, вважаючи радіуси  $R_1$  і  $R_2$  радіусами початкових кіл циліндричних коліс:

$$R_1 = \frac{z_1}{\cos \beta_1}; \quad R_2 = \frac{z_2}{\cos \beta_2}. \quad /II.102/$$

Додавши до  $R_1$  і  $R_2$  висоту  $h$  головки зуба, проведемо кола вершин коліс, а віднявши від  $R_1$  і  $R_2$  відсірок, що дорівнює  $h_f$ , проведимо кола западин коліс. Радіуси основних кіл  $R_{01} = R_1 \cos \alpha$  і  $R_{02} = R_2 \cos \alpha$ , де  $\alpha = 20^\circ$ . Профілі зубів коліс креслимо так само, як і для циліндричних коліс. Якщо цю розгортку /з накресленими на ній зубами/ згорнути знов у конус, то зубці перенесуться на сферу і кінчні колеса.

Зрозуміло, що довжина кола основи розгорнутого конуса дорівнює довжині розгортки:

$$2\pi z_1 = \gamma_1 R_1; \quad 2\pi z_1 = \gamma_1 \frac{z_1}{\cos \varphi_1};$$

$$2\pi z_2 = \gamma_2 R_2; \quad 2\pi z_2 = \gamma_2 \frac{z_2}{\cos \varphi_2}.$$

Звідси

$$\gamma_1 = 2\pi \cos \varphi_1; \quad \gamma_2 = 2\pi \cos \varphi_2. \quad /II.103/$$

Для визначення коефіцієнта перекриття, розрахунку зубів коліс на міцність, визначення можливості підрізування зубів кінчних коліс можна скористатися формулами для круглих циліндричних коліс. Але для цього треба перейти від розгортки конуса, що в сектором круга, до повного круга радіусом  $R_1$  і  $R_2$ . Зрозуміло, що число зубів на повному колі більше, ніж на розгортці. Звідси з'являється поняття фіктивного, або ефективного колеса. Знаходимо число зубів доповненої розгортки:

$$Z_{\varphi_1} = Z_1 + \Delta Z_1; \quad Z_{\varphi_2} = Z_2 + \Delta Z_2.$$

Визначимо число зубів фіктивних коліс із рівності кроків зачеплення зубчастого сектора і повного колеса, користуючись рівностями для визначення довжин кола і розгортки

$$Z_{\varphi_1} p = 2\pi R_1; \quad Z_{\varphi_2} p = 2\pi R_2; \quad /II.104/$$

$$Z_1 P = \gamma_1 R_1; \quad Z_2 P = \gamma_2 R_2. \quad /II.105/$$

Поділивши /II.104/ на /II.105/, дістанемо:

$$\frac{Z_{\varphi_1} P}{Z_1 P} = \frac{2\pi R_1}{\gamma_1 R_1}; \quad \frac{Z_{\varphi_1}}{Z_1} = \frac{2\pi}{\gamma_1} = \frac{2\pi}{2\pi \cos \varphi_1} = \frac{1}{\cos \varphi_1},$$

звідки

$$Z_{\varphi_1} = \frac{Z_1}{\cos \varphi_1}. \quad /II.106/$$

Аналогічно

$$Z_{\varphi_2} = \frac{Z_2}{\cos \varphi_2}. \quad /II.107/$$

Передаточне число доповнених розгорток

$$u_{1,2\varphi} = \frac{Z_{2\varphi}}{Z_{1\varphi}} = \frac{Z_2}{\frac{Z_1 \cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}} = \frac{Z_2 \cos \varphi_1}{Z_1 \cos \varphi_2} = \frac{Z_2 \cos \varphi_1}{Z_1 \cos(90^\circ - \varphi_1)} =$$

$$\frac{Z_2 \cos \varphi_1}{Z_1 \sin \varphi_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \operatorname{ctg} \varphi_1 = u_{1,2} u_{1,2} = u_{1,2}^2 = u_{12\varphi}. \quad /II.108/$$

## II.28. Гіпоїдна передача

Гіпоїдна передача - це скорочена назва гіперboloїдної передачі, однієї з різновидностей конічних зубчастих передач, осі валів якої не перетинаються, а перекрещуються в просторі, причому вісь малого колеса зміщена відносно осі більшого колеса на величину  $e$  /рис. II.40/.

Колеса гіпоїдної передачі мають косі або гвинтові спіральні зуби. Гіпоїдні колеса виготовляють двома різцями, але продуктивніше - різцевими головками /боронами/ або конічними черв'ячними фрезами.

Передаточне число більшості гіпоїдних зубчастих коліс не перевищує  $u_{1,2} = 10$ , але іноді сягає  $u_{1,2} = 30$  і більше.

Гіпоїдні передачі застосовують у приводах ведучих коліс автомобілів, тракторів, тепловозів, текстильних машин і високоточних верстатів.

Ця передача характеризується плавністю і безшумністю роботи. Її застосовують замість конічної для передачі більших потужностей



і тоді, коли треба уникнути консольного розміщення коліс. Як видно з рисунка, шестірня має дві опори - ліву  $\mathcal{A}$  та праву  $\mathcal{B}$ .

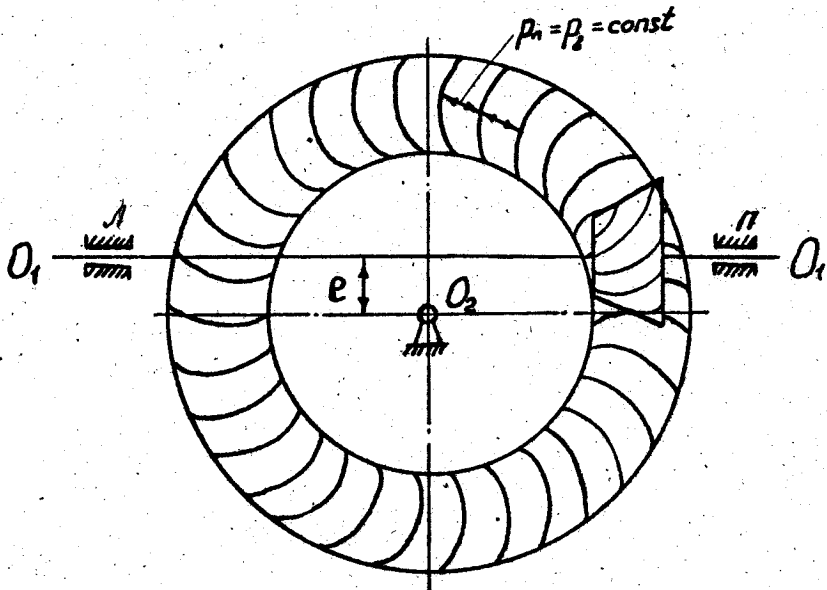


Рис. II.40

Як говорилось, зубці коліс гіпоїдної передачі можуть бути косими і спіральними, зокрема - евольвентними. Завдяки властивості евольвенти - сталість розміру по нормалі до профілю, що дорівнює основному кроку  $/\rho_b = const/$ , збережеться не тільки сталий крок по нормалі, а й товщина зубця на зовнішньому і внутрішньому колах по всій довжині зуба. Ця передача має один модуль  $m_n = m_{min} = m_{max}$ .

## 12. КУЛАЧКОВІ МЕХАНІЗМИ

Кулачкові механізми застосовують, коли треба, щоб рух веденої ланки, її швидкість і прискорення змінювалися за певним, наперед заданим законом, і ведена ланка зупинялася. У триланковому кулачковому механізмі рухомі ланки між собою утворюють низку кінематичну пару, а зі стояком - нежчі.

У практиці машинобудування застосовують плоскі /рис. 12.1,а/ і просторові /рис. 12.1,б/ кулачкові механізми.

У цих механізмах кулачок обертається рівномірно навколо осі в одному і тому самому напрямі, а штовхач рухається зворотно-поступально вгору і вниз або вправо і вліво.

Між кулачком і штовхачем розміщений ролик для зменшення тертя і зносу /тертя ковзання замінено тертям кочення/. Ролик і кулачок створюють виду кінематичну пару. На рисунках показано: кулачок 1, ролик 2, штовхач 3, пружину 4, стоек 5.

## 12.1. Замикання вищих кінематичних пар

Для постійного дотику кулачка до штовхача /ролика/ застосовують замикання кінематичної пари двох видів:

а/ конструкційне /ролик у пазу/;

б/ силове /з допомогою пружин, гідравлічних або пневматичних пристроїв/.

Тільки в цих випадках штовхач описуватиме той закон руху, за яким окреслено профіль кулачка, бо при високих швидкостях кулачка прискорення штовхача великої сили інерції можуть відкинути його від кулачка. Тому кулачок може зробити кілька обертів, доки силами ваги штовхач знову принисеться до кулачка. Замикання виключає відрив штовхача від кулачка і забезпечує постійний їх дотик.

## 12.2. Фазові кути кулачкового механізму /фази руху штовхача, профільні кути кулачка/

$\varphi_0$  - фазовий кут віддалення штовхача - кут повороту кулачка, коли штовхач віддаляється від кулачка /рис. 12.1,1/;

$\varphi_{0.в}$  - фазовий кут далекого вистоя /зупинки/ штовхача - кут обертання кулачка, коли штовхач стоїть у верхньому далекому від кулачка положенні;

$\varphi_{пов}$  - фазовий кут повернення штовхача - кут повороту кулачка, під час якого штовхач повертається в крайнє нижнє положення до кулачка;

$\varphi_{0.в}$  - фазовий кут ближнього вистоя /нижньої зупинки/ штовхача - кулачок обертається, а штовхач стоїть нерухомо внизу.

У центральних кулачкових механізмах кути профілю кулачка і фазові кути його повороту збігаються, у зміщених - ні.

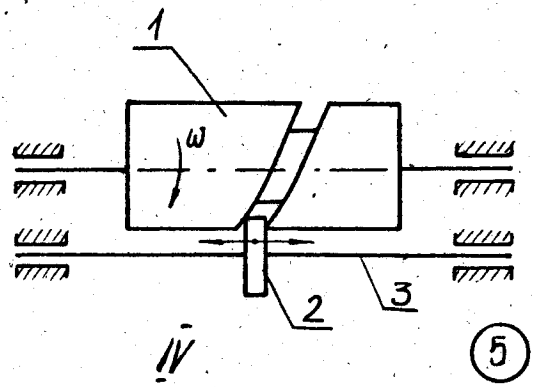
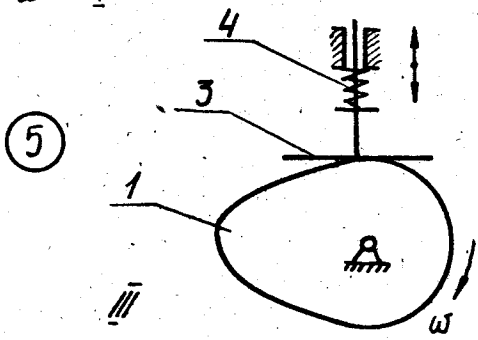
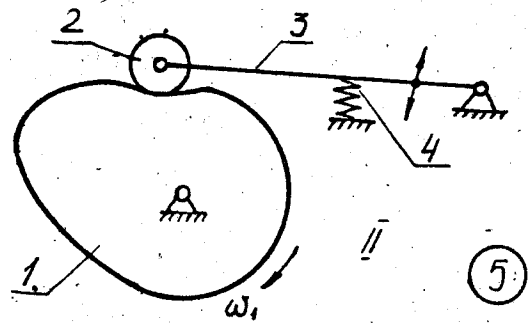
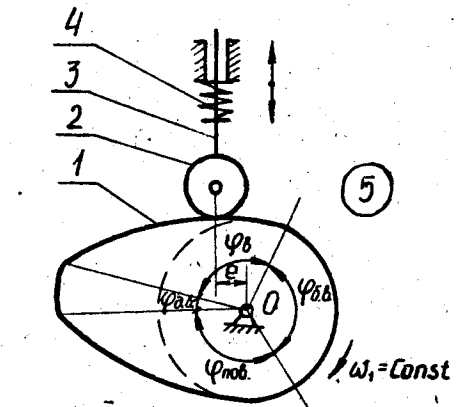


Рис. 12.1

Вивчаючи кулачкові механізми, розглянемо дві задачі: задачу кінематичного аналізу /дослідження/ і задачу синтезу /проекування/ кулачкового механізму.

При кінематичному аналізі задаються всі розміри механізму і рух кулачка / $n$ , об/хв/. Закон руху штовхача шукаємо у вигляді діаграм руху штовхача:  $s-t$ ,  $v-t$ ,  $a^2-t$  для точки штовхача. Спочатку будемо діаграму переміщення штовхача /рис. 12.2/. Для цього через центр  $O$  обертання кулачка проводимо промені  $01, 02, 03...$  під однаковими кутами  $\varphi$ . А потім із центра  $O$  зробимо засічки радіусами  $01, 02, 03...$  на осі руху штовхача. Це й буде переміщення штовхача за один оберт. Відклавши на осі  $x(t)$  рівні відрізки  $(1, 2, 3, 4, ...)$ , що відповідають  $1/12$  оберта кулачка /кулачок обертається з постійною кутовою швидкістю/, спроектуємо на вертикалі відповідні переміщення штовхача  $1', 2', 3'$ . З'єднавши плавною кривою ці точки, дістанемо графік /діаграму/ переміщення штовхача.

Щоб побудувати графіки швидкості та прискорення  $v-t$  і  $a-t$ , виконаємо графічне диференціювання методом дотичних /краще - січ-них/. Це відомо з розділу кінематики важільних механізмів. Масштабні коефіцієнти:  $\mu_s = \frac{S_M}{S_{MM}}$ ,  $\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t H_1}$ ,  $\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t H_2}$ ,  
 $\mu_t = \frac{60}{\pi X}$ ;  $n$ , об/хв',  $X$ , мм.

Розв'язуючи задачу синтезу /проекування/ кулачкового механізму, її розбивають на два етапи. На першому етапі за заданими законами руху кулачка і штовхача, а також за заданими деякими розмірами кулачкового механізму та іншими параметрами визначають мінімальний радіус кулачка, щоб була забезпечена надійна робота механізму. Цей етап називають динамічним синтезом. На другому етапі здійснюють кінематичний синтез, задачею якого є побудова такого профілю кулачка, який примусив би штовхач рухатись відповідно до заданого закону його руху.

Щоб розв'язати ці задачі, розглянемо додаткові визначення і положення, зазначивши, що задачу синтезу можна розв'язувати графоаналітичним або аналітичним методом залежно від того, яка точність побудови профілю кулачка потрібна.

### 12.3. Кут тиску. Критичний кут тиску

Розглянемо кулачковий механізм з поступально-рухомим штовхачем /рис. 12.3/. Якщо знехтувати силами тертя в точці контакту про-

філю кулачка і штовхача /що особливо допустимо для роликівих штовхачів/, то можна вважати, що сила тиску  $P$  кулачка на штовхач направлена по нормалі до профілю кулачка. Кут  $\gamma$ , утворений напрямом сили  $P$  і швидкості штовхача, називається кутом тиску. Фактично це кут між напрямом швидкості штовхача і нормаллю  $N-N$  до профілю кулачка в точці контакту його зі штовхачем.

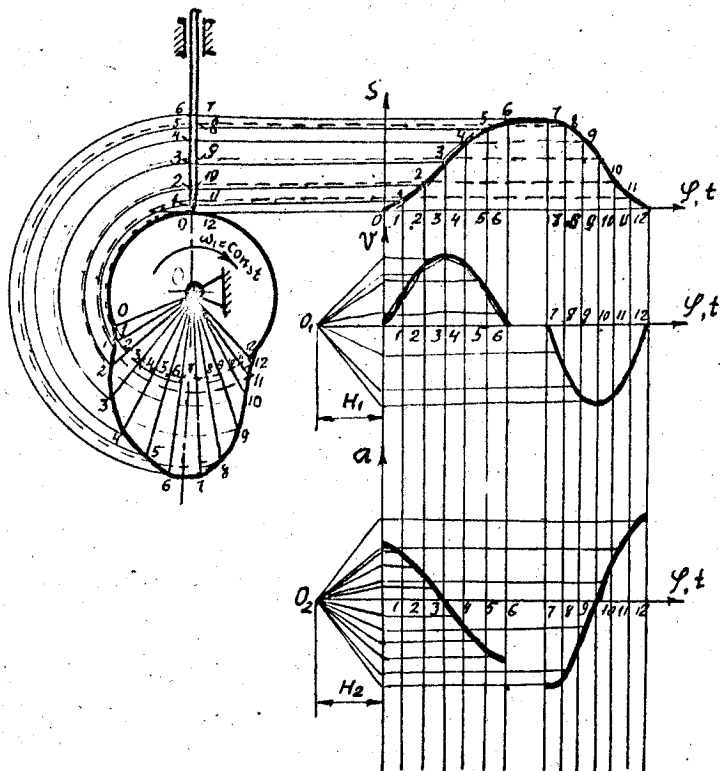


Рис. 12.2

Кут, додатковий до  $90^\circ / 90^\circ - \gamma = \gamma_n$ , називається кутом передачі /руху/.

Нанесемо на штовхач усі діючі на нього сили, включаючи й сили інерції /рис. 12.4/, і виконаємо кінестатичний розрахунок.

На рисунку показано:  $Q$  - сила корисного опору і ваги;  $P_i$  - сила інерції;  $P$  - сила тиску кулачка на штовхач;  $N_1, N_2$  - реакція стояка на штовхач;  $F_{1,2}$  - сили тертя. На основі принципу Даламбера під дією цих сил штовхач перебуває у рівновазі.

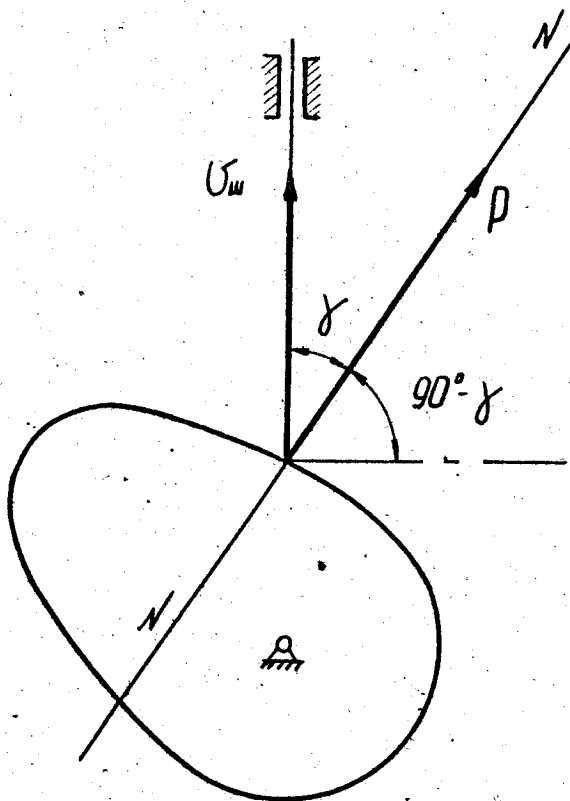


Рис. 12.3

Напишемо три рівні статички для штовхача:

$$1/ \sum X_i = 0; \quad N_1 - N_2 + P \sin \gamma = 0; \quad /12.1/$$

$$2/ \sum Y_i = 0; \quad P \cos \gamma - Q - P_i + f(N_1 + N_2) = 0; \quad /12.2/$$

$$3/ M_K = 0; \quad P \delta \sin \gamma - N_1 \rho = 0. \quad /12.3/$$

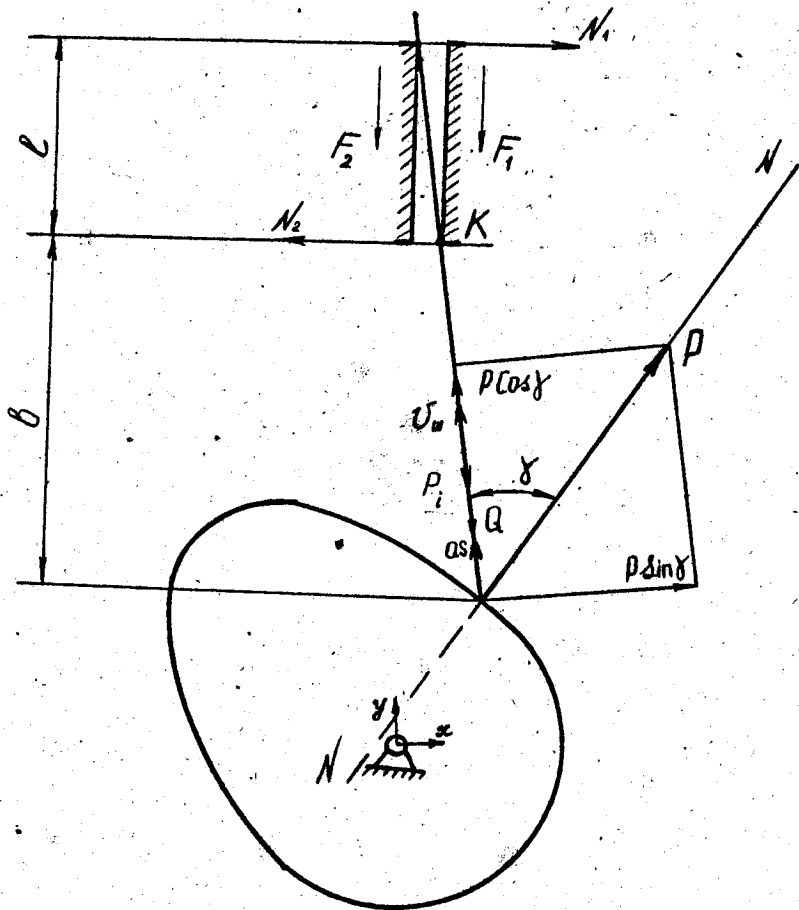


Рис. 12.4

$$\text{Із /І2.3/} \quad N_1 = \frac{PB \sin \gamma}{\rho}$$

$$\text{Із /І2.1/} \quad N_2 = P \sin \gamma + N_1 = P \sin \gamma + \frac{PB \sin \gamma}{\rho}$$

Підставляючи значення  $N_1$  і  $N_2$  в рівняння /І2.2/, знаходимо

$$P \cos \gamma - Q - P_i - f \left( \frac{PB \sin \gamma}{\rho} + P \sin \gamma + \frac{PB \sin \gamma}{\rho} \right)$$

$$\text{Звідси} \quad P \left( \cos \gamma - f \left( \frac{B}{\rho} + 1 + \frac{B}{\rho} \right) \sin \gamma \right) - Q - P_i = 0$$

$$\text{Отже,} \quad P = \frac{Q + P_i}{\cos \gamma - f \left( 1 + 2 \frac{B}{\rho} \right) \sin \gamma} \quad /І2.4/$$

За певних значень величин знаменник наближається до нуля.

Тоді  $P$  прямує до нескінченності ( $P \rightarrow \infty$ ), тобто, якщо

$$\cos \gamma_{кр} - f \left( 1 + 2 \frac{B}{\rho} \right) \sin \gamma_{кр} = 0, \quad /І2.5/$$

то  $P \rightarrow \infty$ .

Це означає, що ніяка велика сила  $P$  скінченної величини не виведе штовхач зі стану рівноваги. У цьому разі виникає явище самогальмування або заклинювання, а це означає, що передача руху в такому напрямі /тут від кулачка штовхачу/ стає неможливою.

Розв'язуючи рівняння /І2.5/ відносно кута тиску  $\gamma_{кр}$ , знаходимо:

$$\cos \gamma_{кр} = f \left( 1 + 2 \frac{B}{\rho} \right) \sin \gamma_{кр}$$

Поділивши обидві частини рівняння на  $\sin \gamma_{кр}$  визначимо

$$\operatorname{ctg} \gamma_{кр} = f \left( 1 + 2 \frac{B}{\rho} \right). \quad /І2.6/$$

Такий кут тиску  $\gamma_{кр}$ , за якого настає явище самогальмування механізму, називається критичним кутом тиску. Зрозуміло, що для надійної роботи кулачкового механізму кут тиску  $\gamma$  має бути значно меншим за  $\gamma_{кр}$ .

Найважливішим питанням при проектуванні кулачкових механізмів є правильний вибір кута тиску,  $\gamma$ ; від величини якого залежить розподіл сил у кулачковому механізмі, габаритні розміри його, продуктивність і ККД. Практикою встановлено /рекомендовано/ такі значення кута тиску при проектуванні кулачкових механізмів:  $\gamma = 30 \dots 40^\circ$  для штовхачів, що рухаються поступально;  $\gamma = 45 \dots 50^\circ$  - для коромислових кулачкових механізмів.



#### 12.4. Визначення центра кулачка і його мінімального радіуса з урахуванням кута тиску

Теорема пряма. Якщо в контактній точці штовхача з кулачком перпендикулярно до осі штовхача в напрямі кутової швидкості кулачка /при віддаленні штовхача/ відкласти відрізок  $\bar{x} = \frac{ds}{d\varphi}$  /і навпаки/, і кінець цього відрізка з'єднати прямою з центром обертання кулачка, то ця пряма утворить з відрізком  $X$  кут передачі, тобто кут  $90^\circ - \gamma$  /рис. 12.5, а/. Рух точки  $M$  штовхача можна уявити як переносний разом з точкою  $M$  кулачка і відносний відносно кулачка. Тоді швидкість  $\bar{v}_M$  точки  $M$  штовхача дорівнюватиме геометричній сумі переносної  $\bar{v}_n$  і відносної  $\bar{v}_\delta$ :

$$\bar{v}_M = \bar{v}_n + \bar{v}_\delta, \quad (12.7)$$

де  $\bar{v}_n = \omega \cdot OM$  як колова швидкість точки  $M$  кулачка при обертанні її навколо точки  $O$  / $\bar{v}_n \perp OM$ /, відносна швидкість напрямлена по дотичній до профілю кулачка в точці  $M$ . Виходячи з цього і будемо план швидкостей /рис. 12.5, б/.

Щоб довести теорему, ставимо в точці  $M$  перпендикуляр до штовхача і в бік обертання кулачка відкладаємо на ньому відрізок  $X = \frac{ds}{d\varphi}$ , якщо штовхач піднімається /і навпаки/. Потім з точки  $O$  проводимо лінію, паралельну  $NN'$  /див. рис. 12.5, а/. Трикутник  $OMK$  подібний до трикутника  $Лав$  внаслідок перпендикулярності сторін. / $MK \perp \bar{v}_M \rightarrow MK \perp ЛВ$ ;  $OK \perp ав$ ;  $OK \perp \bar{v}_n$ , бо  $OK \parallel NN'$ , а  $\bar{v}_n \perp NN'$ /. Виходячи з подібності трикутників маємо:

$$\frac{\bar{v}_M}{MK} = \frac{\bar{v}_n}{OM} \left( \frac{ЛВ}{MK} = \frac{Лa}{OK} \right).$$

Але  $\frac{\bar{v}_n}{OM} = \omega$  ( $\bar{v}_n = \omega \cdot OM$ );  $\bar{v}_M = \frac{ds}{dt}$ .

Після підстановки знаходимо  $\frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{MK} = \omega = \frac{d\varphi}{dt}$ .

Звідси  $\frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{MK} = \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $MK \cdot d\varphi = ds$ ,

Тобто,  $MK = \frac{ds}{d\varphi}$ .

Виходячи з подібності трикутників бачимо, що лінія  $MK$  утворює з променем  $OK$  кут  $90^\circ - \gamma$ , тобто кут передачі, що й потрібно було довести.



Якщо користуватися графіками переміщень точки  $M$  штовхача  $S$  і швидкості  $\frac{ds}{d\varphi}$ , то при визначенні відрізка  $X$  треба врахувати масштабні коефіцієнти графіків  $\bar{s}-\varphi$  і  $\frac{ds}{d\varphi} \rightarrow \varphi$ .

Тоді

$$\bar{X} = \frac{\bar{ds}}{d\varphi} \mu \frac{ds}{d\varphi} \frac{1}{\mu_s} \quad /12.8/$$

Відрізок  $\frac{\bar{ds}}{d\varphi}$  і масштаб  $\mu \frac{ds}{d\varphi}$  беруть із графіка в кожному положенні.

Якщо користуємося графіками  $s-t$  і  $\frac{ds}{dt} \rightarrow t$ , то треба врахувати, що  $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dt} / \omega$ ;  $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dt} / \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt} / \omega$ ,

Тобто

$$\bar{X} = \frac{\bar{ds}}{dt} \mu \frac{ds}{dt} \frac{1}{\omega \mu_s} \quad /12.9/$$

Відрізок  $\frac{\bar{ds}}{dt}$  беремо з діаграми швидкості.

Для коромислового кулачкового механізму

$$\bar{X} = \frac{\bar{d\beta}}{d\varphi} \mu \frac{d\beta}{d\varphi} \frac{l}{\mu'_e} \quad /12.10/$$

де  $\beta$  - кут качання коромисла;  $d\beta/d\varphi$  - аналог кутової швидкості;  $l$  - довжина коромисла;  $\mu'_e$  - масштаб.

У формулі /12.10/ відрізок  $\frac{d\beta}{d\varphi}$  і масштаб  $\mu \frac{d\beta}{d\varphi}$  беруть із графіка  $\frac{d\beta}{d\varphi}$  - аналога кутової швидкості.

Обернена теорема. Якщо відома величина  $\bar{X} = \frac{\bar{ds}}{d\varphi}$  чи  $X = \frac{\bar{v}}{\omega}$ , то, відклавши її перпендикулярно до штовхача /а отже і перпендикулярно до його швидкості/ вправо при обертанні кулачка за годинниковою стрілкою і підйомі штовхача /і навпаки/, а потім в кінці його побудувати кут передачі  $90^\circ - \gamma$ , то його сторона  $KO$  пройде через центр кулачка. Довести це легко, виконавши роботу, як у прямій теоремі. Ця теорема дає змогу визначити мінімальний радіус кулачка  $r_{min}$ , тобто спроєктувати кулачок за граничним кутом тиску  $\gamma$ , якщо відому величину  $\bar{X} = \frac{\bar{ds}}{d\varphi}$ , або  $\bar{X} = \frac{\bar{ds}}{dt \omega}$  /рис. 12.6/.

Відклавши відрізки  $\bar{X} = \frac{\bar{ds}}{d\varphi} \mu \frac{ds}{d\varphi}$  для кількох положень штовхача в указаному в теоремі напрямі /відрізки  $\frac{\bar{ds}}{d\varphi}$  взято із діаграм/, дістанемо кілька точок  $O$ . Зрозуміло, що за центр кулачка треба взяти точку  $O_3$ , бо якщо, наприклад, узяти точку  $O_1$ , то для положення I штовхача кут тиску дорівнював би  $\gamma_{в\text{ел}}$  /у 2 рази більший.



## 12.5. Проектування кулачка за заданим законом руху веденої ланки /штовхача/ і кута тиску

Для профілювання кулачка мають бути задані:

- 1/ закон руху веденої ланки - штовхача /визначається призначенням виконавчого механізму машини і задається конструктором у вигляді графіка - аналога прискорень чи прискорень, або аналітично/, бо робота механізму залежить від характеру зміни прискорень штовхача;
- 2/ фазові кути /визначаються циклограмою машини/;
- 3/ хід штовхача /задається інструктором або технологом/;
- 4/ зміщення штовхача /визначається призначенням машини або її конструктивними особливостями/;
- 5/ кут тиску  $\gamma$ .

## 12.6. Вибір закону руху веденої ланки кулачкового механізму

Під законом руху розуміємо залежність переміщення веденої ланки та часу. При рівномірному обертанні кулачка переміщення веденої ланки /штовхача/ можна виразити як функцію кута повороту кулачка.

При синтезі кулачкового механізму треба спочатку вибрати закон руху веденої ланки залежно від тих операцій, які виконує кулачковий механізм у машині; розміри його ланок мають бути визначені такими, щоб умови роботи механізму були найвигіднішими.

В одних випадках рух веденої ланки визначається технологічним процесом, що реалізується в машині, в інших - необхідно за певний проміжок часу лише перемістити ведену ланку з одного положення в інше. У першому випадку закон руху веденої ланки вважається заданим, у другому - обраним.

У токарному автоматі, наприклад, поздовжня подача різця має виконуватися з постійною швидкістю, що забезпечує певну подачу за один оберт деталі.

Отже, переміщення різця буде лінійною функцією кута повороту кулачка, різець має рухатися з постійною швидкістю, тобто закон руху веденої ланки вже визначений. Закон руху при підведенні різця до заготовки і його холостому ході /відведенні/ можна вибирати довільно.

При проектуванні приладів керування зенітним артилерійським вогнем, механізмами текстильних машин закони руху ведених ланок складніші. При проектуванні механізмів, в яких задаються лише почат-

кова й кінечна позиції веденої ланки, закон руху слід вибрати найсприятливішим з точки зору динаміки та довговічності механізму.

У механізмах розподілу теплових машин кулачки мають забезпечувати найбільшу подачу суміші, що буде при найбільшій площі, обмеженій графіком  $S-\varphi$  на діаграмі переміщення.

Найпоширеніші закони руху веденої ланки, що задаються графіками  $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$  або  $\frac{d^2s}{dt^2}$  чи аналітично, наведено далі.

### 12.7. Параболічний закон руху

При віддаленні веденої ланки кулачкового механізму на відстань  $h$  /рис. 12.7/  $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$  залишається незмінним при повороті кулачка на кут  $\varphi_1'$  і  $\varphi_1''$ , що відповідають відріzkам  $x_1'$  і  $x_1''$  на діаграмі:

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = \frac{a}{\omega_1^2} = \frac{d^2s}{dt^2} = b = \text{const.} \quad /12.11/$$

Куты  $\varphi_1'$  і  $\varphi_1''$ , у межах яких позитивне й негативне прискорення постійні, можуть бути і рівними між собою, і різними. Позначимо їх відношення

$$\frac{\varphi_1'}{\varphi_1''} = C_1.$$

Оскільки  $\varphi_1' + \varphi_1'' = \varphi_1$ , /  $\varphi_1$  - кут віддалення /, то

$$\varphi_1' = \varphi_1 \frac{C_1}{1+C_1}; \quad /12.12/$$

$$\varphi_1'' = \varphi_1 \frac{1}{1+C_1}. \quad /12.13/$$

Послідовно інтегруючи двічі вираз /12.11/ при зміні кута в межах  $0 < \varphi < \varphi_1'$ , дістанемо:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{v_1}{\omega_1} = b_1 \varphi + C_1; \quad /12.14/$$

$$s = \frac{b_1 \varphi^2}{2} + C_1 \varphi + C_2. \quad /12.15/$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначимо з початкових умов: при  $\varphi = 0$   $v = 0$ ;  $(\frac{ds}{d\varphi}) = 0$ ;  $s = 0$ . За цих початкових умов

$$C_1 = C_2 = 0;$$

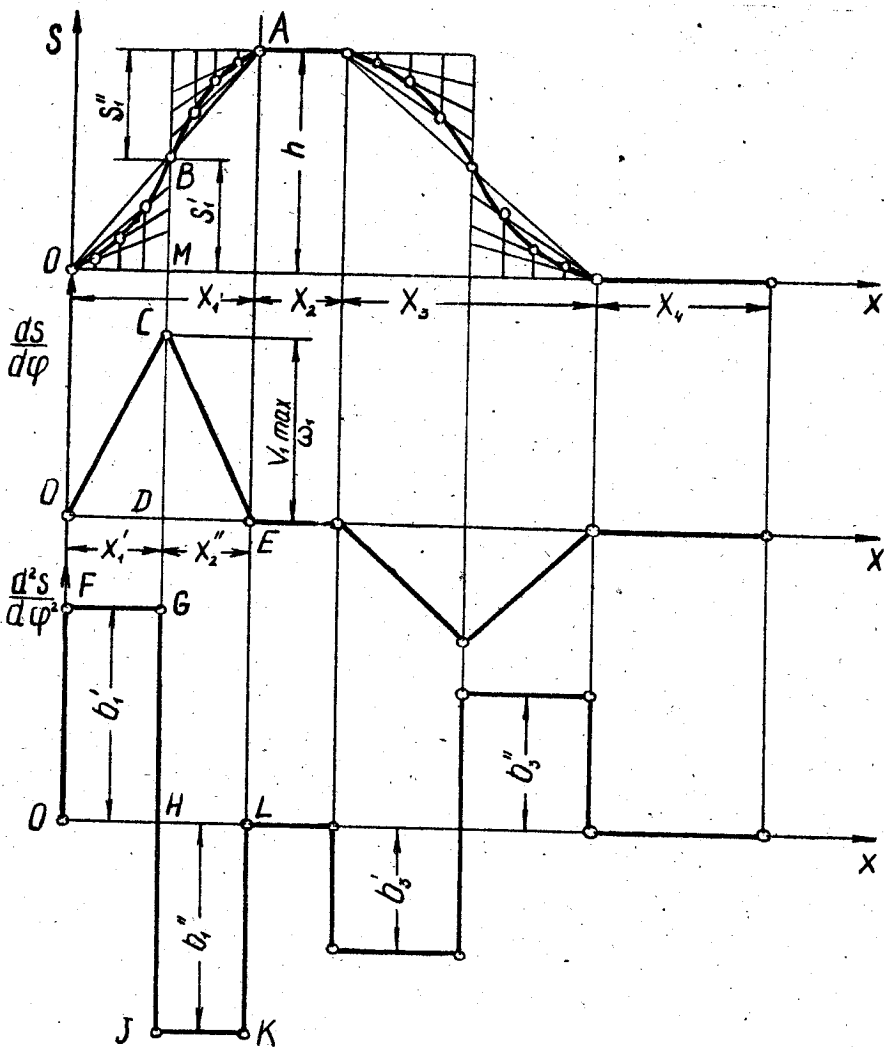


Рис. 12.7

$$\frac{ds}{d\varphi} = b_1 \varphi; \quad /12.16/$$

$$s = \frac{b_1 \varphi^2}{2}. \quad /12.17/$$

Тут  $\frac{ds}{d\varphi}$  - функція лінійна, що сягає максимального значення при зміні знака  $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$ . При позитивному значенні прискорення, що дорівнює нескінченності  $|b_1| \rightarrow \infty$ , існує жорсткий удар. У ланках механізму напруження стають теоретично нескінченно великими, а практично, завдяки амортизуючим діям пружних ланок, вони є скінченними величинами. При негативних прискореннях  $b_1''$ , нескінченної величини контакт між кулачком і роликом порушиться, і величина прискорення штовкача, обмежена силою пружності пружин, буде скінченною величиною. Для теплових двигунів, щоб удар був м'яким, а не жорстким, рекомендується коефіцієнт  $C_1$  брати в межах  $0 < C_1 < 1$ .

При графічному дослідженні кулачкових механізмів графік переміщення штовкача будуть так, як показано на рис. 12.7, користувачись прямою  $OA$ , що проходить через точку перегибу  $B$ .

### 12.8. Синусоїдний закон руху

Прискорення веденої ланки задається у вигляді синусоїди з періодом  $T$ , що дорівнює часу віддалення  $t_i$ , чи повернення штовкача /р/ю. 12.8/.

$$a = a_{max} \sin \frac{2\pi}{T} t; \quad /12.18/$$

$$a = a_{max} \sin \frac{2\pi}{t_i} t \quad /12.19/$$

або

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = \frac{a}{\omega_1^2} = b_1 \sin \frac{2\pi}{\varphi_1} \varphi. \quad /12.20/$$

Послідовно інтегруючи, для першої фази  $\varphi_1$ , дістанемо:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{v}{\omega_1} = \frac{ds}{dt\omega_1} = C_1 - b_1 \frac{\varphi_1}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{\varphi_1} \varphi; \quad /12.21/$$

$$s = C_1 \varphi - b_1 \frac{\varphi_1^2}{4\pi^2} \sin \frac{2\pi}{\varphi_1} \varphi + C_2. \quad /12.22/$$



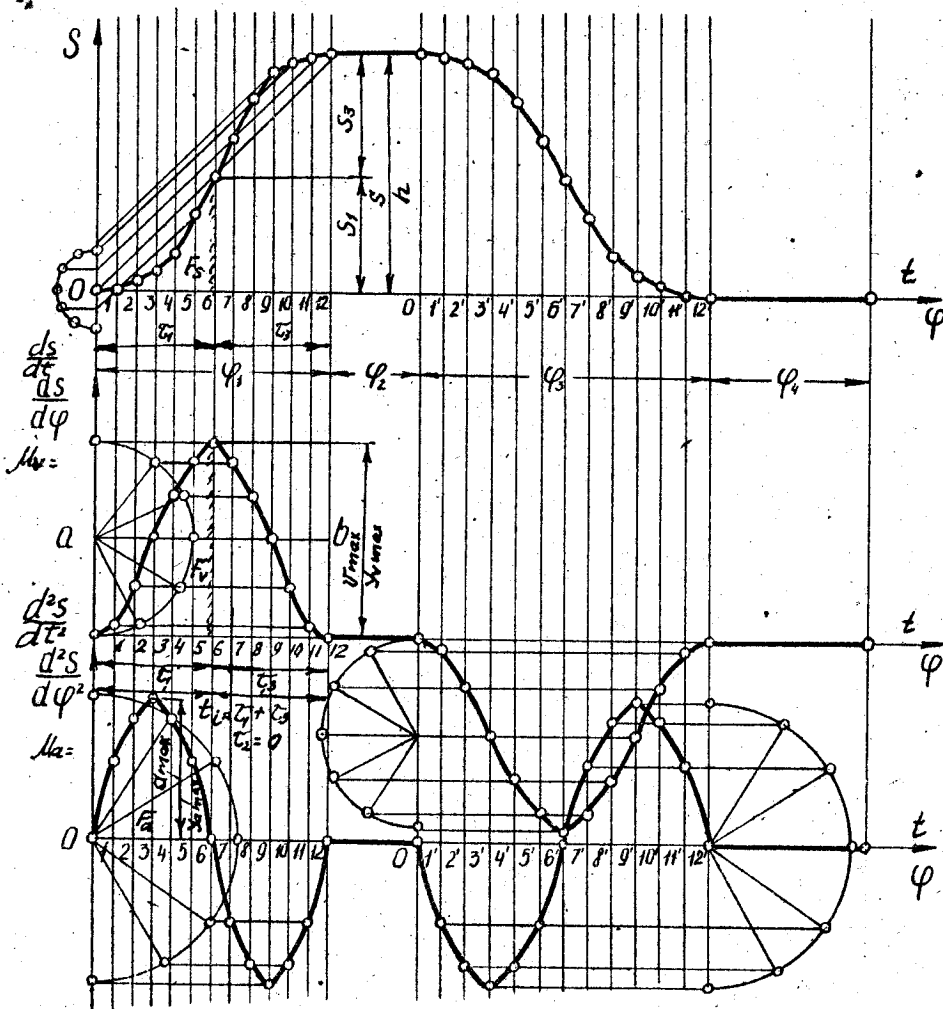


Рис. 12.8

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  знаходимо з початкових умов:

$$\varphi = 0; \quad \frac{ds}{d\varphi} = 0; \quad s = 0.$$

З цих умов  $C_2 = 0$ ;  $C_1 = \nu_1 \frac{\varphi}{2\pi}$ .

Підставивши значення  $C_1$  і  $C_2$  у формули /12.21/ і /12.22/, відстанемо:

$$s = \frac{\nu_1 \varphi^2}{2\pi} \left( \frac{\varphi}{\varphi_1} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_1} \varphi \right); \quad /12.23/$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\nu_1 \varphi}{2\pi} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi_1} \varphi \right). \quad /12.24/$$

Оскільки прискорення, швидкість і переміщення - функції неперервні, то невідому амплітуду визначимо з таких остаточних умов: при  $\varphi = \varphi_1$ ,  $s = h$ . Тоді із /12.23/  $h = \frac{\nu_1 \varphi_1^2}{2\pi}$ , звідки  $\nu_1 = \frac{2\pi h}{\varphi_1^2}$ , а формули /12.23/, /12.24/ і /12.20/ матимуть вигляд:

$$s = h \left( \frac{\varphi}{\varphi_1} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_1} \varphi \right); \quad /12.25/$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{h}{\varphi_1} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi_1} \varphi \right); \quad /12.26/$$

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = \frac{2\pi h}{\varphi_1^2} \sin \frac{2\pi}{\varphi_1} \varphi. \quad /12.27/$$

Для фази  $\varphi_3$  повернення можна використати ці самі формули, відлічуючи кут  $\varphi_3$  від кінця фази у зворотному напрямі осі абсцис. Цей закон руху має ту перевагу, що в кулачковому механізмі немає ударів ні м'яких, ні жорстких. Але максимальне прискорення для цього закону за такої самої фази  $\varphi_1$  і ході  $h$  у  $\frac{2\pi}{\varphi_1} = 1,57$  разів більше за прискорення, ніж при параболічному законі. Все ж для теплових машин користуватися цим законом не слід, бо клапан відкривається повільно.

### 12.9. Косинусоїдний закон руху /рис. 12.9/

$$a = a_{\max} \cos \frac{\pi}{T} t$$

або

$$\frac{a}{\omega^2} = \frac{d^2s}{d\varphi^2} = \nu_1 \cos \frac{\pi}{\varphi_1} \varphi.$$

42736

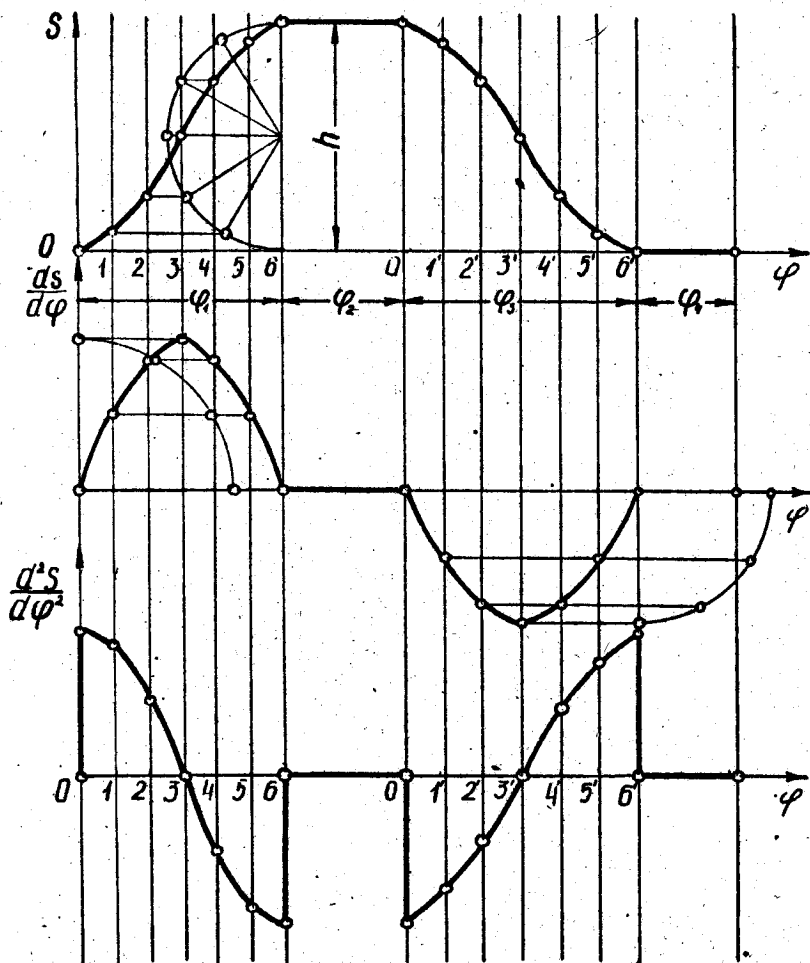


Рис. 12.9

Інтегруючи двічі і визначивши сталі  $C_1, C_2, B_1$  за таких самих умов, що й при синусоїдному законі руху, дістанемо:

$$s = \frac{h}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{\varphi_1} \varphi \right); \quad /12.28/$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{h\pi}{2\varphi_1} \sin \frac{\pi}{\varphi_1} \varphi; \quad /12.29/$$

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = \frac{h\pi^2}{2\varphi_1^2} \cos \frac{\pi}{\varphi_1} \varphi. \quad /12.30/$$

Очевидно, при цьому законі руху є нежорсткі удари на початку і в кінці віддалення.

Відношення максимальних прискорень параболічного, косинусоїдного і синусоїдного законів як 1:1,23:1,57.

### 12.10. Лінійний закон руху /рис. 12.10/

Швидкість веденої ланки залишається сталою на кожній з фаз, миттєво зростаючи від нуля до  $v_1 = const$  на початку фази  $\varphi_1$ , у кінці якої спадає раптово до  $v_2 = const$ , а у кінці фази  $\varphi_2$  - до нуля. У механізмі при цьому законі руху виникають жорсткі удари.

### 12.11. Циклові діаграми

Головна перевага кулачкових механізмів - здатність здійснювати рух веденої ланки із зупинками будь-якої тривалості. Друга перевага - рух веденої ланки відповідно до закону, за яким окреслено профіль кулачка. Для цього ведена ланка має весь час дотикатися до профілю кулачка.

Недолік - треба забезпечити постійне силове чи геометричне замикання видної пари в точці дотику ланок, внаслідок чого ускладнюється його конструкція, зростають навантаження на ланки механізму, які призводять до швидкого зносу ланок. Але без замикання не тільки не буде витриманий закон руху веденої ланки, але й цикл її руху.

Рух веденої ланки /штовхача/ здійснюється циклічно, тобто повторюється через певні проміжки часу, які називаються циклом. Графік переміщення зображено на рис. 12.11,а, циклову діаграму кулачкового механізму - на рис. 12.11,б. Вони є базою для побудови профілю

кулачка і задаються графічно або аналітично. Цикл руху веденої ланки складатиметься з двох основних інтервалів – переміщення та зупинки /вистов/.

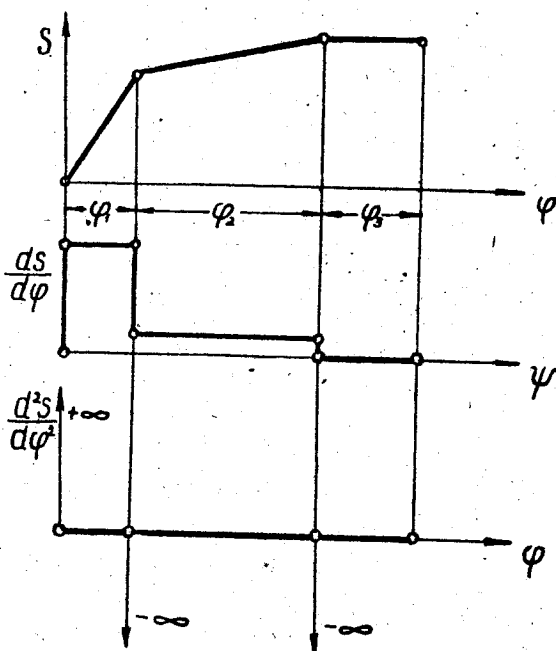


Рис. 12.10

На відміну від часу вистову  $t_{s_1}$  /далекого/ і  $t_{s_2}$  /ближнього/, де швидкість веденої ланки  $v = 0$ , час робочого  $t_{p.x}$  і холостого ходу  $t_x$ , де швидкість веденої ланки змінна, зручно розбити на кілька характерних відрізків залежно від того, з якою швидкістю рухається ведена ланка. Це зручно зробити на тахограмі  $v = v(t)$  /рис. 12.12,а/. На тахограмі цих відрізків три:

1/ прискорений рух, коли швидкість веденої ланки зростає від нульової до максимальної  $v_{max}$ . Час зростання швидкості позначений  $\tau_1$ , за цей час ведена ланка переміститься на відстань  $S_1$ ;

2/ рівномірний рух, коли ведена ланка рухається з постійною швидкістю  $v = v_{max} = const$ ; йому відповідає час  $\tau_2$ , а переміщення веденої ланки дорівнює  $S_2$ ;

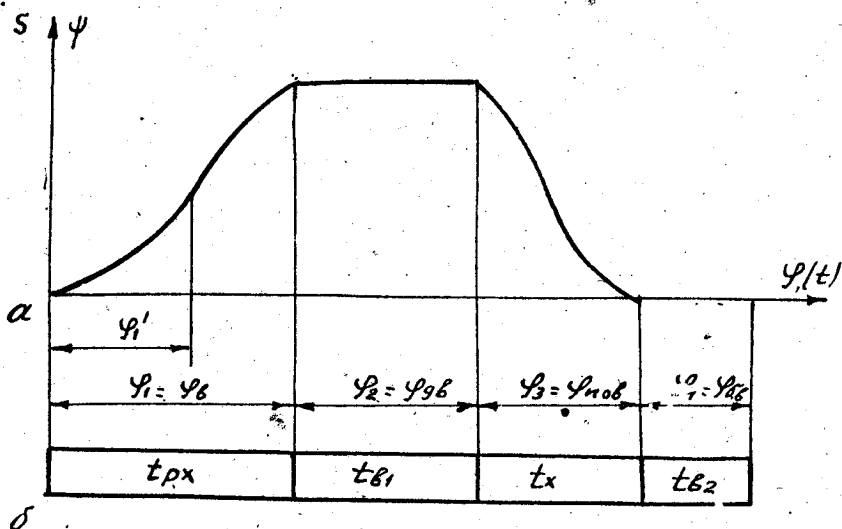


Рис. 12.11

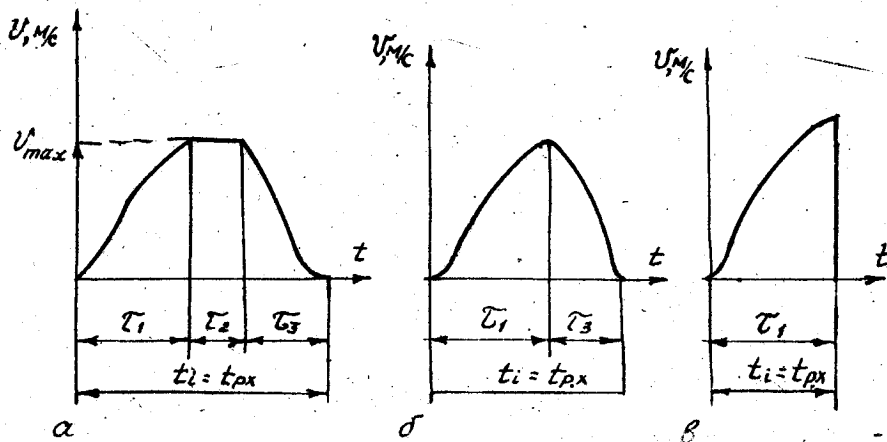


Рис. 12.12

42°

3/ сповільнений рух, коли швидкість веденої ланки зменшується до нуля в кінці інтервалу; відповідний йому час  $\tau_3$ , а переміщення  $S_3$ . Це діаграма триділяноква.

В інших випадках /рис. 12.12, б/  $\tau_2 = 0$  /дводілянка діаграма/, на рис. 12.12, в  $\tau_2 = 0, \tau_3 = 0$  - одnodілянка.

Умови роботи кулачкового механізму будуть оптимальними, якщо всередині ділянок прискореного та сповільненого руху швидкість веденої ланки зростатиме і зменшуватиметься плавно. Для цього швидкість на цих ділянках має бути монотонно змінною функцією часу, а прискорення - перервною чи неперервною функцією часу, але не повинне мати на цій ділянці більше як один максимум /мінімум/.

### 12.12. Характеристичні коефіцієнти

Якщо монотонна функція відповідає наведеним вище умовам, то для ділянки прискореного руху

$$v_{max} = \int_0^{\tau_1} a dt = \mu_a \mu_r F_a, \quad /12.31/$$

де  $F_a$  - площа графіка прискорень,  $\mu_a$  і  $\mu_r$  - масштабні коефіцієнти цього графіка /див. рис. 12.8/.

Згідно з рис. 12.8

$$\mu_a = \frac{a_{max1}}{y_{max1}}; \mu_r = \frac{\tau_1}{x_1}; F_a = y_{c1} x_1.$$

Підставивши значення  $\mu_a, \mu_r$  і  $F_a$  в рівняння /12.31/, дістанемо:

$$v_{max} = \frac{a_{max1}}{y_{max1}} \frac{\tau_1}{x_1} y_{c1} x_1 = \frac{y_{c1}}{y_{max1}} \tau_1 a_{max1},$$

звідки

$$\tau_1 = \alpha_1 \frac{v_{max}}{a_{max}}, \quad /12.32/$$

де  $\alpha_1 = \frac{y_{max1}}{y_{c1}}$  - безрозмірний числовий коефіцієнт;  $y_{max1}$  - максимальна;  $y_{c1}$  - середня ордината кривої прискорення.

Переміщення веденої ланки

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^{\tau_1} v dt = \mu_v \mu_r F_v = \frac{v_{max}}{y'_{max1}} \frac{\tau_1}{x_1} y'_{c1} x_1 = \\ &= \frac{y'_{c1}}{y'_{max1}} v_{max} \tau_1 = \frac{1}{\delta_1} v_{max} \tau_1, \end{aligned} \quad /12.33/$$

де  $\delta_1 = \frac{v_{max}'}{v_{sc}'}$  - безрозмірний числовий коефіцієнт;  $v_{max}'$  - максимальна;  $v_{sc}'$  - середня ордината кривої швидкості.

Підставивши значення  $\tau_1$ , дістанемо:

$$s_1 = \frac{\alpha_1}{\delta_1} \frac{v_{max}^2}{a_{max_1}} = \beta_1 \frac{v_{max}^2}{a_{max_1}}, \quad /12.34/$$

де  $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\delta_1}$  - безрозмірний числовий коефіцієнт.

Аналогічно для ділянки сповільненого руху

$$\tau_3 = \frac{v_{max}}{a_{max_3}}; \quad /12.35/$$

$$s_3 = \beta_3 \frac{v_{max}^2}{a_{max_3}}. \quad /12.36/$$

Час триділянкового інтервалу

$$t_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3. \quad /12.37/$$

Повне переміщення веденої ланки

$$s = s_1 + s_2 + s_3. \quad /12.38/$$

Переміщення веденої ланки на ділянці рівномірного руху

$$s_2 = v_{max} \tau_2 = v_{max} [t_i - (\tau_1 + \tau_3)]. \quad /12.39/$$

Підставивши значення  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  в рівняння /12.38/ і замінивши  $\tau_1$  і  $\tau_3$  їх значеннями, дістанемо:

$$v_{max}^2 \left[ \frac{\alpha_1 - \beta_1}{a_{max_1}} + \frac{\alpha_3 - \beta_3}{a_{max_3}} \right] - v_{max} t_i + s = 0. \quad /12.40/$$

З цього рівняння

$$t_i = \frac{s}{v_{max}} + (\alpha_1 - \beta_1) \frac{v_{max}}{a_{max_1}} + (\alpha_3 - \beta_3) \frac{v_{max}}{a_{max_3}}. \quad /12.41/$$

Із рівняння /12.32/

$$a_{max_1} = \alpha_1 \frac{v_{max}}{\tau_1}.$$

Позначимо відношення  $u_1 = \frac{\tau_1}{t_i}$  звідки  $\tau_1 = t_i u_1$ .

Тоді

$$a_{max_1} = \alpha_1 \frac{v_{max}}{u_1 t_i}. \quad /12.42/$$



Аналогічно

$$a_{max_3} = \alpha_3 \frac{v_{max}}{U_3 t_i}, \quad /12.43/$$

де  $U_3 = \frac{z_3}{t_i}$ .

Підставивши значення  $a_{max}$  в рівняння /12.41/, дістанемо:

$$t_i = \frac{s}{v_{max}} \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) U_1 - \left(1 - \frac{1}{\delta_3}\right) U_3\right]} = A \frac{s}{v_{max}}, \quad /12.44/$$

$$v_{max} = A \frac{s}{t_i}. \quad /12.45/$$

Підставивши значення  $v_{max}$  в рівняння /12.42/ і /12.43/, матимемо:

$$a_{max_1} = \alpha_1 \frac{v_{max}}{U_1 t_i} = \frac{\alpha_1 A}{U_1} \frac{s}{t_i^2}; \quad /12.46/$$

$$a_{max_3} = \frac{\alpha_3 A}{U_3} \frac{s}{t_i^2}. \quad /12.47/$$

Із рівнянь /12.34/ і /12.36/

$$s_1 = \frac{A}{\delta_1} U_1 s; \quad /12.48/$$

$$s_3 = \frac{A}{\delta_3} U_3 s. \quad /12.49/$$

До виведених формул входять коефіцієнти  $U$ , які характеризують структуру інтервалу /показують, яку частину інтервалу  $t_i$  займають прискорений, рівномірний та сповільнений рухи/ і коефіцієнти  $\alpha, \beta, \delta$ , що залежать від закону руху веденої ланки всередині інтервалу.

Закони руху веденої ланки відрізняються характером зміни функцій  $a = f(t)$  і  $v = f_1(t)$ . Безрозмірні коефіцієнти  $\alpha, \beta, \delta$  залежать тільки від виду графіків /кривих/ функцій прискорень та швидкостей і не залежать від максимальних значень цих функцій, хоч і є відношенням максимальних і середніх ординат графіків прискорень та швидкостей, бо максимальні /а отже, і середні/ значення залежать від графіків /законів зміни/ прискорень і швидкостей:

$$(v_{max} = \int_{t_0}^{t_1} a dt = \mu_a \mu_t F_a; s = \int_0^{t_1} v dt = \mu_v \mu_t F_v).$$

Ці коефіцієнти називають характеристичними. Як видно з рівняння /12.44/, безрозмірний числовий коефіцієнт також залежить від закону руху /коефіцієнта  $\delta$  / і структури інтервалу /коефіцієнта  $\mu$  /.

За структурою розрізняють несиметричні, напівсиметричні й симетричні три- та дводілянкові інтервали. Далі наведено формули для визначення коефіцієнтів  $A$  для різних типів інтервалів /табл. 12.1/.

У кулачкових механізмах використовують переважно триділянкові симетричні та дводілянкові всіх типів інтервали. Формули /12.45/ - /12.47/ дають змогу визначити основні кінематичні характеристики  $v_{max}$  і  $a_{max}$  за заданим повним переміщенням  $S$  і часом інтервалу  $t_i$ , формули /12.48/ і /12.49/ - переміщення  $S$  у середині окремих ділянок, а формули /12.41/ і /12.44/ - час інтервалу  $t_i$  за заданими значеннями  $S$  і кінематичними параметрами, чи характеристиками структур інтервалів.

Таблиця 12.1

Інтервали	Триділянкові	Несиметричні	$\delta_1 \neq \delta_3$ $\mu_1 \neq \mu_3$	$A = \frac{1}{[1 - (1 - \frac{1}{\delta_1})\mu_1 - (1 - \frac{1}{\delta_3})\mu_3]}$
		Напівсиметричні	$\delta_1 = \delta_3 = \delta$ $\mu_1 \neq \mu_3$	$A = \frac{1}{[1 - (1 - \frac{1}{\delta})(\mu_1 + \mu_3)]}$
		Симетричні	$\delta_1 = \delta_3 = \delta$ $\mu_1 = \mu_3 = \mu$	$A = \frac{1}{[1 - (1 - \frac{1}{\delta})2\mu]}$
	Дводілянкові ( $\tau_2 = 0$ )	Несиметричні	$\delta_1 \neq \delta_3$ $\mu_1 \neq \mu_3$	$A = \frac{1}{\frac{1}{\delta_1}\mu_1 + \frac{1}{\delta_3}\mu_3}$
		Напівсиметричні	$\delta_1 = \delta_3 = \delta$ $\mu_1 \neq \mu_3$	$A = \frac{\delta}{\mu_1 + \mu_3}$
		Симетричні	$\delta_1 = \delta_3 = \delta$ $\mu_1 = \mu_3 = 0,5$	$A = \delta$
	Одюдоділянкові лінійні		$\tau_2 = 0$ $\tau_3 = 0$	$A = \delta$

Цими формулами можна користуватися й для коромислових кулачкових механізмів, якщо замінити  $S$  на  $\varphi$ ,  $v_{max}$  на  $\omega_{max}$ ,  $a_{max}$  на  $\epsilon_{max}$ . Час повного циклу руху кулачка і веденої ланки

$$T = \frac{2\pi}{\omega_k}, \quad /12.50/$$

де  $\omega_k$  - кутова швидкість кулачка, яка дається в технічному завданні чи завданні на курсовий проект.

Знаючи час інтервалів  $t_i$ , визначасмо час інтервалів холостого ходу /верхнього та нижнього вистов/ і будемо циклову діаграму. У разі рівномірного руху кулачка / $\omega_k = const$ / кут його повороту за час  $t_i$  кожного інтервалу

$$\varphi_i = 2\pi \frac{t_i}{T}. \quad /12.51/$$

### 12.13. Характеристичні функції

Ведена ланка має рухатися всередині інтервалу згідно із законом, вибраним конструктором. Для цього профіль кулачка має забезпечити виконання веденою ланкою заданої залежності  $S = f(t)$  або  $S = f(\varphi)$ , якщо кулачок рухається рівномірно. Якщо закон руху веденої ланки задається у вигляді графіка  $\frac{d^2S}{dt^2}$  чи  $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$ , то залежність  $S = f(t)$  чи  $S = f(\varphi)$  дістанемо подвійним графічним інтегруванням, як це виконано на рис. 12.7 та ін. Докладніше це розглянемо при визначенні мінімального радіуса кулачка графічним методом.

Якщо швидкість веденої ланки є функцією часу й монотонно змінюється, то рівняння для визначення прискорення можна записати у вигляді  $a = a_{max} f(t)$ . Деякі з цих рівнянь розглянуті нами раніше. Виразимо час так:

$$t = t \frac{\tau}{\tau} = k\tau = k\omega t_i; \quad /12.52/$$

$$(u = \frac{\tau}{t_i}),$$

де  $k = \frac{t}{\tau}$  - безрозмірний коефіцієнт.

Усередині інтервалу час  $t$  змінюється від 0 до  $\tau$ . Отже,  $k$  змінюється від нуля до одиниці. Тоді  $a_g = a_{max} f(t) = a_{max} f(k)$ , де  $k$  в інтервалі  $\tau$  змінюється від нуля до одиниці.

Підставимо значення  $a_{max}$  із рівняння /34/ чи /35/:

$$a = a_{max} f(k) = \frac{\Delta A}{\Delta t} \frac{s}{t_i^2} f(k) = \frac{\Delta A}{\Delta t} \frac{s}{t_i^2} F_a, \quad /12.53/$$

де  $F_a$  - площа, обмежена кривою функції  $k$  і віссю абсцис.

Інтегруючи, дістаємо:

$$v = \int a dt = \int a_{max} f(k) \tau dk = a_{max} \tau \int f(k) dk, \quad /12.54/$$

оскільки із /12.50/  $dt = \tau dk$ .

Згідно з рівнянням /12.32/  $a_{max} \tau = \Delta v_{max}$ .

Отже,

$$v = v_{max} \Delta \int f(k) dk = v_{max} F_v = A \frac{s}{t_i} F_v. \quad /12.55/$$

Інтегруючи вдруге, маємо

$$s = \int v dt = \int v_{max} \Delta \int f(k) \tau dk = v_{max} \Delta \tau \iint f(k) dk \cdot dk. \quad /12.56/$$

Підставивши значення  $v_{max}$  із рівняння /12.44/ і замінивши  $\tau$  на  $\tau = \Delta t_i$ , дістанемо:

$$s = A \Delta s \Delta \iint f(k) dk \cdot dk = A \Delta s F_s. \quad /12.57/$$

Безрозмірні функції

$$F_a = f(k);$$

$$F_v = \Delta \int f(k) dk;$$

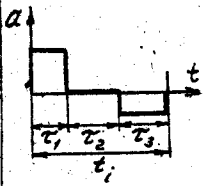
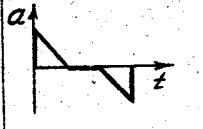
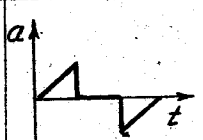
$$F_s = \Delta \delta \iint f(k) dk \cdot dk$$

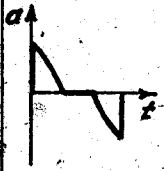
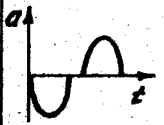
називають характеристичними. Вони залежать тільки від закону руху, а числові значення  $k$  змінюються від нуля до одиниці.

Характеристичні функції для типових законів руху наведено в табл. 12.2. Якщо відрізок  $\tau_i$  поділити на десять різних частин, то, підставляючи у вираз характеристичних функцій значення  $k = 0, 1, 0,2; 0,3; \dots; 1$ , можна обчислити послідовні значення  $a$ ,  $v$ ,  $s$  і побудувати кінематичні діаграми руху веденої ланки.

Із рівнянь /12.53/ - /12.56/ витікає, що криві кінематичних і характеристичних рівнянь збігаються. Тому, побудувавши графіки характеристичних функцій, для побудови кінематичних діаграм треба лише визначити масштаби по осях координат:

Таблиця І2.2

Рівняння руху	Графіки $a = a(t)$	Характеристичні коефіцієнти				Характеристичні функції					
		$\alpha$	$\beta$	$\gamma = \alpha - \beta = \frac{\delta}{\beta}$	$\delta = \frac{\alpha}{\beta}$	$\tau_1$			$\tau_3$		
						$F_a$	$F_v$	$F_s$	$F_a$	$F_v$	$F_s$
$v = v_{max} = const$		-	-	-	-	0	I	K	0	-I	K
$a_1 = a_{max} = const$ $a_3 = -a_{max} = const$		I	0,5	0,5	2	I	K	$K^2$	-I	I-K	$2K-K^2$
$a_1 = a_{max} \frac{a_{max1} t}{\tau_1}$ $a_3 = \frac{a_{max3} t}{\tau_3}$		2	1,33	0,66	1,5	I-K	$2K-K^2$	$\frac{3}{2}K^2 - K$	-K	$I-K^2$	$\frac{3}{2}K^2 - K$
$a_1 = \frac{a_{max1} t}{\tau_1}$ $a_3 = -a_{max3} + \frac{a_{max3} t}{\tau_3}$		2	0,66	1,33	3	K	$K^2$	$K^3$	K-I	$\frac{K^2}{2} - 2K + I$	$\frac{K^3}{2} - 3K^2 + 3K$

Рівняння руху	Графіки $a = a(t)$	Характеристичні коефіцієнти				Характеристичні функції					
		$\alpha$	$\beta$	$\delta = \alpha - \beta$	$\delta = \frac{\alpha}{\beta}$	$\mathcal{Z}_1$			$\mathcal{Z}_3$		
						$F_a$	$F_v$	$F_s$	$F_a$	$F_v$	$F_s$
$a_1 = a_{max_1} \cos \frac{\pi}{2\tau_1} t$ $a_3 = a_{max_3} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\tau_1}{\tau_3} t \right)$		$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\frac{\pi}{2}$	$\cos \frac{\pi k}{2}$	$\sin \frac{\pi k}{2}$	$1 - \cos \frac{\pi k}{2}$	$\cos \left( \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$	$\sin \left( \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$	$\cos \left( \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$
$a_1 = -a_{max_1} \sin \frac{\pi}{\tau_1} t$ $a_3 = a_{max_3} \sin \frac{\pi}{\tau_3} t$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	2	$\sin \pi k$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \pi k$	$k - \frac{1}{\pi} \sin \pi k$	$-\sin \pi k$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi k$	$k + \frac{1}{\pi} \sin \pi k$

$$\mu_a = \frac{\Delta A}{u_{\text{max}a}} \frac{s}{t_i^2} = \frac{\Delta A}{u_{\text{max}a}} \omega_k^2 \frac{s}{\varphi_i^2} \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{мм}} \right]; \quad /12.58/$$

$$\mu_v = \frac{A}{y_{\text{max}v}} \frac{s}{t_i} = \frac{A}{y_{\text{max}v}} \omega_k \frac{s}{\varphi_i} \left[ \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}} \right]; \quad /12.59/$$

$$\mu_s = \frac{Au}{y_{\text{max}s}} s \left[ \frac{\text{м}}{\text{мм}} \right], \quad /12.60/$$

де  $y_{\text{max}}$  - максимальна ордината відповідних діаграм;  $\omega_k$  - кутова швидкість кулачка.

У технічній літературі і навчальних посібниках [6] наведено числові значення характеристичних функцій для типових законів руху веденої ланки, що значно спрощує побудову кінематичних діаграм руху і визначення параметрів кулачкового механізму.

Принатіжно зауважимо, що характеристичні функції, особливо для симетричних дводілянкових інтервалів, легко дістати з рівнянь, що виражають значення переміщення, швидкості та прискорення аналітично. Справді, поклавши  $\varphi = k\varphi_i$ , де  $k = \frac{\varphi_i}{\varphi}$  ( $k = \frac{t_i}{t}$ ), що змінюється від нуля до одиниці всередині інтервалу, із рівнянь /12.10/, /12.16/, /12.17/ дістанемо для параболічного закону

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = b [1]; \quad /12.61/$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = b' \varphi = b' k \varphi_i = b' \varphi_i [k]; \quad /12.62/$$

$$s = \frac{b' \varphi_i^2}{2} = \frac{b' \varphi_i^2 k^2}{2} = b' \varphi_i^2 \left[ \frac{1}{2} k^2 \right]; \quad /12.63/$$

з рівнянь /12.25/, /12.26/ і /12.27/ синусоїдного закону

$$s = h \left[ \frac{1}{2\pi} (2\pi k - \sin 2\pi k) \right]; \quad /12.64/$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{h}{\varphi_i} [1 - \cos 2\pi k]; \quad /12.65/$$

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = \frac{h}{\varphi_i^2} [2\pi \sin 2\pi k]. \quad /12.66/$$

Для симетрично косинусоїдного закону з рівнянь /12.28/ - /12.30/ після підстановки  $\varphi = k\varphi_1$ , дістанемо:

$$s = h_1 \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos \pi k) \right]; \quad /12.67/$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{h_1}{\varphi_1} \left[ \frac{\pi}{2} \sin \pi k \right]; \quad /12.68/$$

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = \frac{h_1}{\varphi_1^2} \left[ \frac{\pi^2}{2} \cos \pi k \right]. \quad /12.69/$$

Безрозмірні вирази в квадратних дужках є характеристичними функціями, які залежать тільки від закону руху веденої ланки і змінюються від нуля до одиниці. Обчисливши їх значення для  $k = 0, 1; 0, 2; 0, 3; \dots; 1$ , визначимо послідовні значення  $a, v, s$  після множення їх на відповідні масштабні коефіцієнти. Але для більшості законів руху значення характеристичних функцій уже відомі [6], тому їх треба лише помножити на масштабні коефіцієнти  $H_s, H_v, H_a$ , відповідно підібравши графіки руху веденої ланки, і визначити параметри кулачка, зокрема мінімальний його радіус.

#### 12.14. Аналітичне визначення координат профілю кулачка

Теоретичні та експериментальні дослідження показали, що точність виготовлення профілю кулачка суттєво впливає на роботу машини. Особливу увагу до точності виготовлення кулачкових механізмів приділяють при проектуванні швидкохідних машин-автоматів.

Дослідження Ротбарта [20] показали, що тільки забезпечення точності виготовлення профілю кулачка з помилкою, меншою за 7,5 мкм, дає змогу визначити справжні прискорення штовхача, які не перевищують 150% номінальних розрахункових прискорень. Тому для виготовлення кулачків /копірів чи еталонних кулачків/ треба мати точні значення їх радіусів-векторів /еквідистанти/ залежно від кута  $\varphi_1$ , що координує його відносно  $z_0$  /рис. 12.13, а/. Розглянемо процес виготовлення кулачка.

Якщо фреза має діаметр, що дорівнює діаметру ролика кулачкового механізму, то встановимо центр фрези відносно центра кулачка на відстані  $z_1 = z_2$  /тобто  $z_{max}$ /. При обертанні, опускаючись донизу, фреза зріже на заготовці шар матеріалу. Піднявши фрезу догори,



встановлюємо наступний  $z_i$ , повертаємо кулачок на кут  $/0,5...1^\circ/$  дільним механізмом, включаємо шпиндель I, переміщуючи фрезу донизу, зрізаємо новий пар, і так вздовж профілю, поки не досягнемо радіуса, що дорівнює  $z_0 = 2 \text{ min} / \text{мінімальному радіусу шайби кулачка}/$ . З другого боку повторюємо доти, доки не обробимо весь профіль кулачка. При великосерійному і масовому виробництві кулачків користуються копірами або методом обкатки на спеціальних верстатах. Але для цього треба визначити аналогічно значення основних радіусів-векторів і кутів  $\alpha$  профілю кулачка.

Із рис. 12.13,а видно, що початковий радіус-вектор

$$z_0 = \sqrt{b_0^2 + e^2}. \quad /12.70/$$

Радіус  $z_0$  вважаємо заданим, або визначаємо графічно, як показано раніше.

Поточний радіус-вектор, що координується кутом  $\alpha_i$ :

$$z_i = \sqrt{(b_0 + s_i)^2 + e^2}, \quad /12.71/$$

де  $b_0$  - мінімальна відстань штовхача до осі кулачка в нижньому положенні штовхача;  $s_i$  - переміщення штовхача;  $e$  - ексцентриситет.

Коли точка  $M_i$  кулачка підійде до штовхача, кулачок повернеться на кут  $\varphi$ , який не дорівнює куту  $\alpha_i$  на профілі. Із рисунка видно, що

$$\alpha_i = \varphi_i + \beta_i = \varphi_i + \left[ \arctg \frac{b_0 + s_i}{e} - \arctg \frac{b_0}{e} \right]. \quad /12.72/$$

Рівняння /12.72/ справедливе для ексцентриситета відносно осі обертання кулачка і напрямку обертання кулачка, показаних на рис. 12.13. При зміні ексцентриситета вліво від осі штовхача чи напрямку кутової швидкості кулачка знак "+" перед  $\beta_i$  треба замінити на знак "-".

Основні радіуси профілю

$$z_1 = z_2 = \sqrt{(s + b_0)^2 + e^2}, \quad /12.73/$$

де  $S$  - повне переміщення штовхача в одному напрямі.

Основні кути профілю для інтервалів переміщення:

$$\alpha_1 = \varphi_1 + \left[ \arctg \frac{s + b_0}{e} - \arctg \frac{b_0}{e} \right]; \quad /12.74/$$

$$\alpha_3 = \varphi_3 - \left[ \arctg \frac{s + b_0}{e} - \arctg \frac{b_0}{e} \right].$$

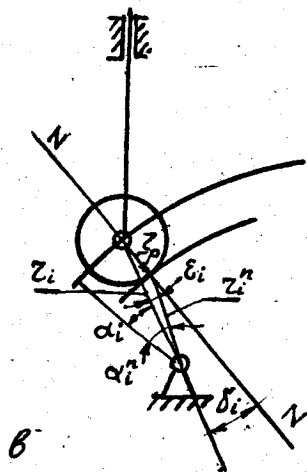
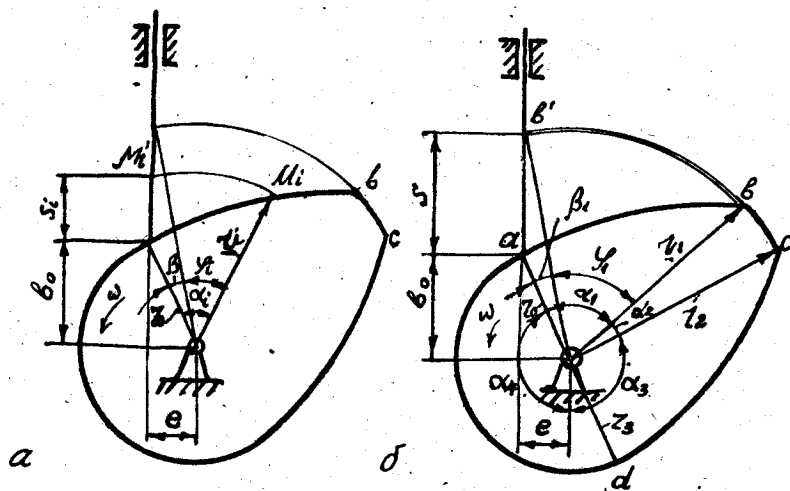


Рис. 12.13

Для центрального кулачкового механізму  $e=0$ , тому  $z_0 = \rho_0$ ;  
 $z_i = \rho_0 + s_i$ ;  $\alpha = \varphi$ . Радіус-вектор  $z_i^n$  практичного про-  
 філю кулачка /коли штовхач має ролик/ згідно з рис. 12.13,в

$$z_i^n = \sqrt{z_i^2 + z_p^2 - 2z_i z_p \cos \delta_i}, \quad /12.75/$$

де  $\delta_i$  - кут між радіусом-вектором  $z_i$  теоретичного профілю /ек-  
 відистанти/ і нормаллю  $NN$  до цього профілю.

З курсу диференціальної геометрії відомо, що

$$\operatorname{tg} \delta_i = \frac{dz_i}{d\alpha_i} \frac{1}{z_i}, \quad /12.76/$$

або

$$\delta_i = \theta + \gamma, \quad /12.77/$$

де  $\theta$  - кут між радіусом-вектором теоретичного профілю та напря-  
 мом переміщення штовхача,

$$\theta = \arcsin \frac{e}{z_i}; \quad /12.78/$$

$\gamma$  - кут тиску, що визначається з рівності

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{ds}{d\varphi} - e}{\rho_0 + s_i}; \quad /12.79/$$

$\frac{ds}{d\varphi}$  визначаємо за формулами /12.24/, /12.26/, /12.29/.

Кут  $\alpha_i^n$ , що визначає положення радіуса-вектора  $z_i^n$ :

$$\alpha_i^n = \alpha_i + \varepsilon_i. \quad /12.80/$$

За теоремою синусів з рис. 12.13,в знаходимо

$$\sin \varepsilon_i = \frac{z_p}{z_i^n} \sin \delta_i. \quad /12.81/$$

Якщо діаметр фрези не дорівнює діаметру ролика, то треба  
 визначити координати нової еквідистанти умовного роли-  
 ка, радіус якого дорівнює різниці радіусів ролика кулачкового меха-  
 нізму і фрези. Це стосується і контролю кулачків, якщо шпindel  
 вимірного інструменту має заокруглення на кінці.

$\mathcal{U}$  коромисловому кулачковому механізмі /рис. 12.14/ початковий  
 радіус-вектор теоретичного профілю

$$z_0 = \sqrt{A^2 + \rho^2 - 2A\rho \cos \psi_0}. \quad /12.82/$$

де  $A = O_1O_2$  - міжцентрова відстань;  $l$  - довжина коромисла;  
 $\psi_0$  - початковий кут відхилення коромисла.

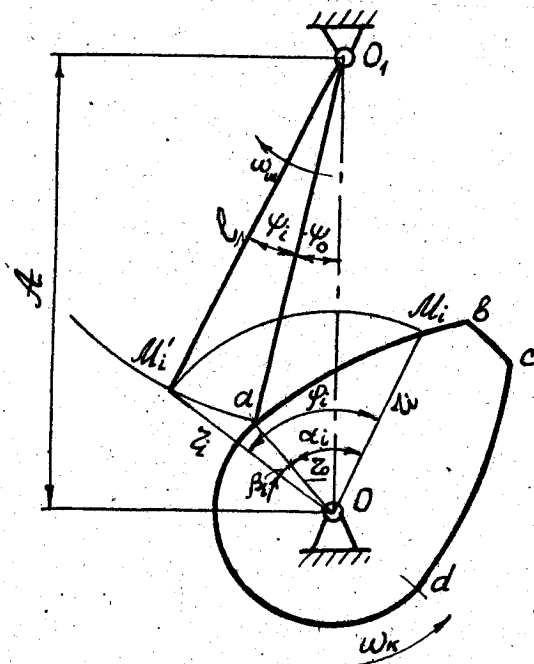


Рис. 12.14

Поточний радіус-вектор

$$z'_i = \sqrt{A^2 + l^2 - 2Al \cos(\psi_0 + \psi_i)}. \quad /12.83/$$

Кут між радіусами  $z_i$  і  $z_0$  на профілі кулачка

$$\begin{aligned} \alpha_i = \psi_i - \beta_i = \psi_i - |\angle O_1OM' - \angle O_1Oa| = \\ = \psi_i - \left\{ \arcsin \left[ \frac{l}{z_i} \sin(\psi_0 + \psi_i) \right] - \arcsin \left[ \frac{l}{z_0} \sin \psi_0 \right] \right\}. \end{aligned} \quad /12.84/$$

Кут  $\psi_i$  задаємо з певними постійними інтервалами; якщо ж задаємо  $S_i$ , то треба визначити  $\psi_i$ .

Знак при  $\beta_i$  в рівнянні /12.83/ відповідає схемі, зображеній на рис. 12.14. У разі зміни напрямку обертання кулачка чи коромисла при  $\beta_i$  треба поставити знак "+". Основні радіуси-вектори профілю

$$z_1 = z_2 = -\sqrt{A^2 + \rho^2 - 2A\rho \cos(\psi_0 + \psi)}. \quad /12.85/$$

Основні кути профілю

$$\alpha_1 = \varphi_1 - \left\{ \arcsin \left[ \frac{\rho}{z_1} \sin(\psi_0 + \psi) \right] - \arcsin \left[ \frac{\rho}{z_0} \sin \psi_0 \right] \right\};$$

$$\alpha_3 = \varphi_3 + \left\{ \arcsin \left[ \frac{\rho}{z_3} \sin(\psi_0 + \psi) \right] - \arcsin \left[ \frac{\rho}{z_0} \sin \psi_0 \right] \right\}, \quad /12.86/$$

де  $\psi$  - повний кут качання коромисла.

Для визначення радіуса-вектора практичного профілю кулачка треба скористатися формулою /12.75/. Якщо кулачок не обертається, а рухається поступально, можна скористатися рекомендаціями [7].

Для зручності виконання розрахунків, складання блок-схеми і виконання розрахунків на ЕОМ /введенні програми до верстатів в ЧПУ/ зручно звести виведені формули у табл. 12.3.

Таблиця 12.3

Номер точки профілю	$\varphi_i$	$s_i$	$b_0 + s_i$	$(b_0 + s_i)^2$	$(b_0 + s_i)^2 + e^2$	$z_i = \sqrt{(b_0 + s_i)^2 + e^2}$	$\frac{b_0 + s_i}{e}$
I	2	3	4	5	6	7	8

Закінчення табл. 12.3

Номер точки профілю	$\arctg \frac{b_0 + s_i}{e}$	$\beta_i = \arctg \frac{b_0 + s_i}{e} - \arctg \frac{b_0}{e}$	$\alpha_i = \varphi_i + \beta_i$
	9	10	II

і т.д.

12.15. Визначення мінімального радіуса кулачка і побудова його профілю графічним методом

Плоский кулачковий механізм з роликівим штовхачем, що рухається поступально.

Задачу синтезу кулачкового механізму розібно на два етапи: динамічний і кінематичний синтез. Перший етап почнемо з побудови кінематичних діаграм руху штовхача згідно з вибраним законом руху веденої ланки /завданням на курсовий проект/ у вигляді діаграми

$\frac{d^2s}{d\varphi^2} - \varphi$  чи  $\frac{d^2s}{dt^2} - t$ . Перш за все креслимо графік аналога прискорень для фаз віддалення і повернення. Для цього вздовж осі абсцис у довільному масштабі відкладаємо фазові кути:  $\varphi_B$  віддалення,  $\varphi_{об}$  далекого вистоя і  $\varphi_{пов}$  повернення /рис. 12.15/.

Фазові кути задаються в завданні на курсовий проект або їх вибирають згідно з циклограмою руху штовхача.

Максимальну ординату  $h_{в\max}$  на графіку віддалення вибираємо довільною, а максимальну ординату  $h_{пов\max}$  на графіку аналога прискорення на фазі повернення знаходимо з рівності

$$\frac{h_{в\max}}{h_{пов\max}} = \frac{\varphi_{пов}^2}{\varphi_B^2} = \frac{h_{пов}^2}{t_B^2};$$

$$t_B = \frac{60}{n} \frac{\varphi_B}{360^\circ}; \quad t_{пов} = \frac{60}{n} \frac{\varphi_{пов}}{360^\circ};$$

$n$  - число обертів кулачка за I хв.

Графічним інтегруванням будемо графіки  $\frac{ds}{d\varphi} - \varphi$  аналога швидкості і  $s - \varphi$  переміщення штовхача.

Масштабні коефіцієнти:

$$\mu_\varphi = \frac{(\varphi_B + \varphi_{об} + \varphi_{пов}) [рад]}{X [мм]};$$

$$\mu_s = \frac{S [м]}{H [мм]}; \quad \mu_{\frac{ds}{d\varphi}} = \frac{\mu_s}{H_1 \mu_\varphi}; \quad \mu_{\frac{d^2s}{d\varphi^2}} = \frac{\mu_{\frac{ds}{d\varphi}}}{H_2 \mu_\varphi}.$$

Визначення мінімального радіуса і побудову профілю кулачка виконуємо в такій послідовності. Спроеціювавши переміщення штовхача на вертикаль або відклавши їх із графіка  $s - \varphi$ , дістанемо точки I, II, ..., XVI. Обчисливши відрізки  $X_i = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_i \mu_{\frac{ds}{d\varphi}} \frac{1}{\mu_s}$ , відкладемо їх вправо при віддаленні штовхача /кулачок обертається за годинниковою стрілкою/ і вліво - для повернення штовхача в усіх шість-



надіяти точках. Опустивши на кінці максимальних значень  $\bar{X}_n$  і  $\bar{X}_{13}$  перпендикуляри  $13M$  і  $4N$ , відкладемо від них кути тиску  $\gamma = 30^\circ$ . На перетині їх променів  $AB$  і  $CD$  дістанемо точку  $O_1$  центрального кулачкового механізму. У позацентровому кулачковому механізмі від точки  $O_1$  треба відкласти зміщення штовхача  $e$  в такому самому масштабі, що й переміщення штовхача. На перетині вертикалі, проведеної з кінця відрізка  $e$ , з прямою  $AB$  знайдемо центр обертання кулачка  $O_2$  і мінімальний радіус  $r_{min}$  позацентрового кулачка. Взагалі центр кулачка можна розмістити в будь-якій точці заштрихованої області  $T_n$ . На цьому закінчиться динамічний синтез кулачка. Потім виконаємо кінематичний синтез. З'єднаємо точку  $O_2$  з точкою  $B$  на штовхачі і від прямої  $O_2B$  відкладемо проти руху кулачка фазові кути  $\varphi_0, \varphi_{00}, \varphi_{пов}$ . Поділимо фазові кути  $\varphi_0$  і  $\varphi_{пов}$  на вісім однакових частин. Дістанемо точки  $1, 2, \dots$ . Провівши через ці точки дотичні до кола радіусом  $e$ , знайдемо положення штовхача у зворотному русі. Задавши додатковий рух цієї системи з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , зупинили кулачок - метод зупинки. При цьому штовхач почав обкочувати кулачок проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\omega_1$ . Тому з точки  $O_2$  радіусами  $O_1I, O_2I, \dots$  зробимо проти годинникової стрілки засічки на відповідних положеннях штовхача. Дістанемо точки  $1'', 2'', \dots$ . З'єднавши їх півною кривою, дістанемо еквідистантну криву профілю кулачка - криву переміщення центра ролика у зворотному русі. Визначимо радіус ролика:

$$r_p = (0,2 \dots 0,3) r_{min},$$

або

$$r_p = (0,7 \dots 0,8) r_{min},$$

де  $r_{min}$  - мінімальний радіус кривини профілю.

Потім у межах кутів віддалення і повернення радіусом  $r_p$  проводимо множини кіл з центрами, розміщеними на еквідистанті /теоретичному профілі кулачка/. Внутрішня обвідна цих кіл і дасть справжній /практичний/ профіль кулачка.

## 12.16. Особливості проектування коромислового кулачкового механізму

Кінематичні діаграми руху  $\beta - \varphi, \frac{d\beta}{d\varphi} - \varphi, \frac{d^2\beta}{d\varphi^2} - \varphi$  /рис. 12.16/ будують, як і в попередньому випадку. Масштабні коефіцієнти:



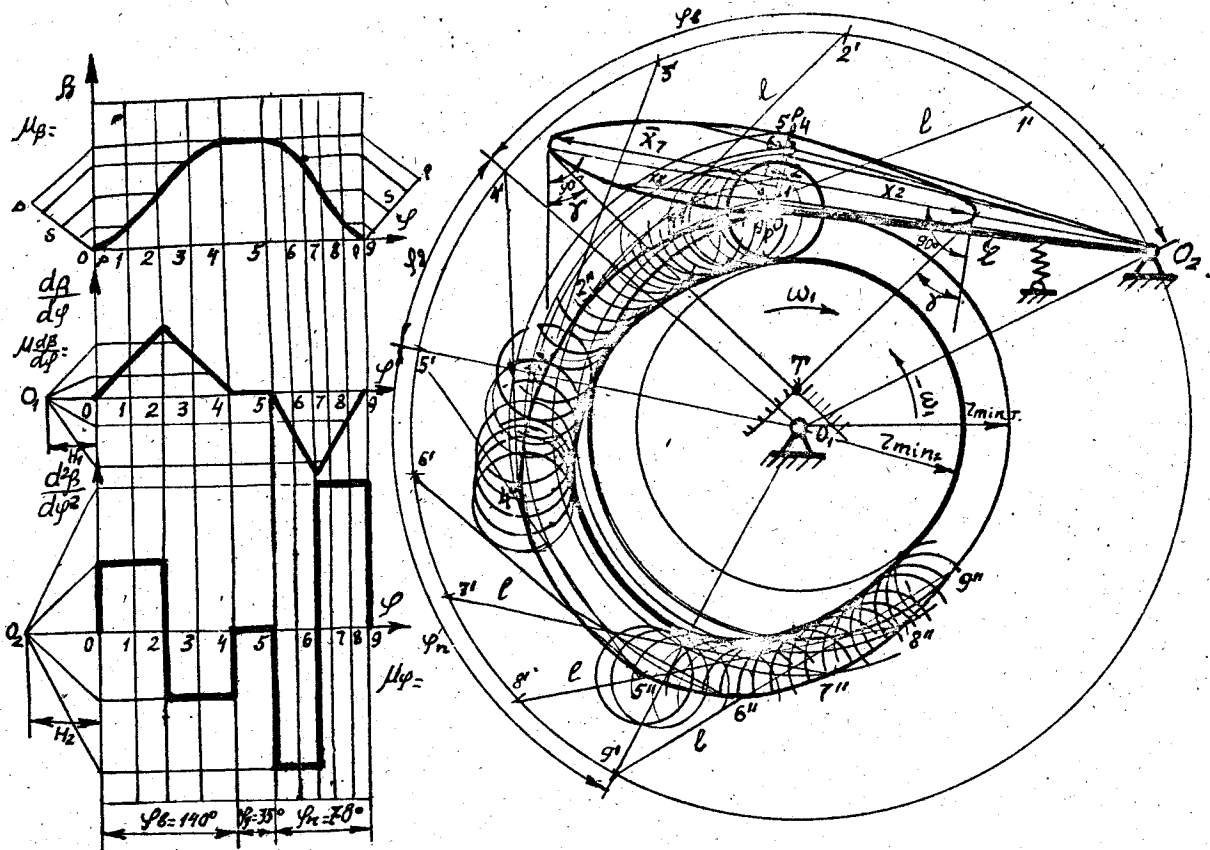


Рис. 12.16.

$\mu_\beta = \frac{\beta_{\text{рад}}}{H_{\text{мм}}}$ , де  $\beta$  - розмах коромисла /повний кут качання його/;

$$\mu_\beta = \frac{r_m}{r_{\text{мм}}}; \mu_\varphi = \frac{(\varphi_\beta + \varphi_{2\beta} + \varphi_{\text{пов}}) \text{рад}}{\bar{X}_{\text{мм}}}; \mu \frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{\mu_\beta}{H_1 \mu_\varphi}; \mu \frac{d^2\beta}{d\varphi^2} = \frac{\mu \frac{d\beta}{d\varphi}}{H_2 \mu_\varphi}$$

Креслимо в масштабі  $\mu_\beta$  коромисло  $\beta$ . Відкладаємо кут  $\beta$  і графічним методом переносимо з діаграми  $\beta-\varphi$  положення центра ролика на дугу  $p-p$  коромисла. Для цього проводимо січку  $p-p$ , відкладаємо її довжину з точки  $\theta$  діаграми  $\beta-\varphi$  під будь-яким кутом, пропорційним поділом знаходимо 8 чи 16 положень коромисла і переносимо їх на дугу коромисла.

Обчислюємо:

$$\bar{X}_i = \left( \frac{d\beta}{d\varphi} \right)_i \mu \frac{d\beta}{d\varphi} \frac{r}{\mu_\beta}$$

для всіх положень штовхача і відкладаємо їх на відповідних положеннях коромисла згідно з оберненою теоремою. Ставимо перпендикуляри до максимальних значень  $\bar{X}_i$  і, відклавши кут  $\gamma = 40 \dots 50^\circ$ , знаходимо центр кулачка  $O_1$  і  $z_{\text{min}}$  кулачка /еквідистанти/.

Закінчивши динамічний синтез, виконуємо кінематичний - побудову профілю кулачка відповідно до закону руху штовхача. Для цього скористаємося методом зупинки /інверсії/, задавши всій системі додатковий рух з кутовою швидкістю  $-\omega_1$ . Для цього з'єднуємо точку  $O_1$  обертання кулачка з центром  $O_2$  качання коромисла і проводимо коло радіусом  $O_1O_2$ . Від осі  $O_1O_2$  відкладаємо проти напрямку обертання кулачка фазові кути  $\varphi_\beta, \varphi_{2\beta}, \varphi_{\text{пов}}$ . Поділяємо ці кути на вісім однакових частин. Маємо точки  $1, 2, \dots$ . Із центра  $O_1$  обертання кулачка проводимо дуги радіусами  $O_11, O_12, \dots$ . Із точок  $1, 2, \dots$  радіусом, що дорівнює  $r$ , робимо засічки на відповідних дугах. Дістаємо точки  $1'', 2'', \dots$ . З'єднавши їх плавною кривою, креслимо еквідистантну криву кулачкового профілю. Креслимо множини кіл, радіус яких дорівнює радіусу ролика  $r_p = 0,2 \dots 0,3 / z_{\text{min}}$ , з центрами на еквідистанті. Їх внутрішня обвідна і дасть справжній профіль кулачка.

### 2.17. Проектування кулачкового механізму з плоским штовхачем. Задача Геронімуса

Кут тиску на плоский штовхач  $\gamma^* = 0$ , оскільки спільна нормаль до профілю кулачка і тарілки перпендикулярна до тарілки й паралельна

напряму руху штовхача /рис. 12.17/. Тому при проектуванні цих механізмів в кут тиску не враховується. Але, проектуючи кулачок для плоского штовхача, ставлять додаткову вимогу: профіль кулачка завжди має бути опуклим, бо в межах угнутості /штрихова лінія/ тарілка не стикатиметься з кулачком, внаслідок чого закон, згідно з яким окреслено профіль кулачка, неповністю виконуватиметься при русі штовхача.

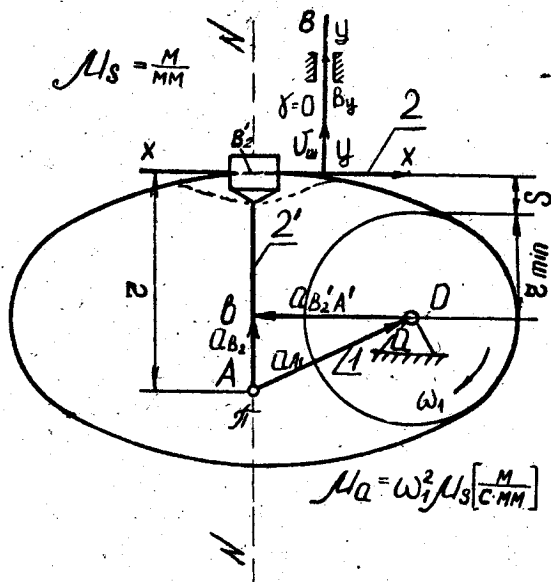


Рис. 12.17

Для забезпечення опуклості профілю кулачка крива профілю не повинна мати точок перегину. Це буде забезпечено, якщо друга похідна  $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$  не змінюватиме свого знака в будь-якій точці кривої при однозначній функції  $s = s(\varphi)$ . Радіус кривини профілю, який визначається з виразу

$$z = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}{d^2s/d\varphi^2},$$

також зберігатиме знак у всіх точках профілю при послідовному стиканні з тарілкою.

Доведемо, яким має бути мінімальний радіус кулачка /шайби/, щоб профіль його завжди був опуклим.

Хай центром кривини профілю кулачка в точці дотику з тарілкою  $B$  є точка  $A$ . Замінімо випу кінематичну пару в точці  $B$  додатковою ланкою  $Z'$  і двома нижчими парами  $У$  класу /поступальною в точці  $B$  і обертальною в центрі кривини профілю  $A$ /. Дістанемо замінючий механізм  $OAB_2B$ , еквівалентний вихідному /кулачковому/. Замінючий механізм має кінематичні пари тільки  $У$  класу і є кулісним механізмом з поступально рухомою кулісою.

Побудуємо план прискорень замінного механізму, вирагши за полюс плану прискорень точку  $A$ . За модулем прискорення точки  $A_1$ ,

$$a_{A_1} = \omega_1^2 OA \mu_s = a'_{A_2},$$

де  $\omega_1$  - кутова швидкість кулачка;  $OA$  - довжина ланки I, мм;  $\mu_s$  - масштабний коефіцієнт, механізму, м/мм.

Це доцентрове або нормальне прискорення, тому спрямоване від точки  $A$  до точки  $O$ . Масштаб механізму виберемо таким, щоб на плані прискорень прискорення  $\bar{a}_{A_1}$  було зображене відрізком  $OA$  /зображення в масштабі кривошипа/.

Масштабний коефіцієнт плану прискорень, м/с<sup>2</sup>·мм,

$$\mu_a = \frac{a_{A_1}}{OA} = \frac{\omega_1^2 OA \mu_s}{OA} = \omega_1^2 \mu_s.$$

Векторні рівняння для визначення прискорення штовхача

$$\begin{cases} \bar{a}_{B_2} = \bar{a}'_{A_2} + \bar{a}_{B_2A_2} + \bar{a}_{B_2A_2}^k \approx 0 + \bar{a}_{B_2A_2}^n \approx 0 \\ \bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_3} + \bar{a}_{B_2B_3} \end{cases}$$

Виконаємо побудову. Із точки  $A/\Pi$  відкладемо прискорення  $a_{A_1}$ , ( $\bar{a}_{A_1}$ ), що дорівнює відріzkу  $OA$  механізму. Через точку  $a$  проведемо лінію дії відносного прискорення  $a_{A_2B_2}$  |  $a_{B_2A_2}$  | паралельно  $x-x$  /при поступальному русі  $B_2'$  по кулісі/, а з полюса  $\Pi$  - лінію, паралельно  $y-y$  /прискорення штовхача відносно стояка/. На перетині цих двох напрямів як геометричну суму дістанемо абсолютне прискорення  $\bar{a}_{B_2}$  |  $\bar{a}_{B_2}$  | штовхача.

Згідно з рис. 12.18

$$z = \Pi B + z_{min} + s.$$

45\*

Оскільки  $\overline{ПВ} \mu_a = a_B$ , то

$$\overline{ПВ} = \frac{a_B}{\mu_a} = \frac{a_B}{\omega_1^2 \mu_s}$$

Тоді

$$z = \frac{a_B}{\omega_1^2 \mu_s} + z_{\min} + S,$$

оскільки  $z > 0$ , то

$$\frac{a_B}{\omega_1^2 \mu_s} + z_{\min} + S \geq 0$$

або

$$z_{\min} \geq -\left(\frac{a_B}{\omega_1^2 \mu_s} + S\right).$$

Якщо масштаби прискорень і механізму різні, що часто буває при користуванні кінематичними діаграмами, то, визначаючи справжнє прискорення  $a_B$ , м/с<sup>2</sup>, треба враховувати масштаб графіка прискорення.

Тоді

$$z_{\min} \geq -\left(\frac{d^2s}{dt^2} \mu \frac{1}{\omega_1^2 \mu_s} + S + \frac{10}{\mu_s}\right),$$

або

$$z_{\min} \geq -\left(\frac{d^2s}{d\varphi^2} \mu \frac{1}{\mu_s} + S + \frac{10}{\mu_s}\right),$$

тобто, коли маємо графік аналога прискорень /не прискорень/, то не ділимо на  $\omega_1^2$ , оскільки

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}\right) = \omega_1^2 \frac{d^2s}{d\varphi^2}.$$

Мінімальний радіус кулачка і його профіль графічним методом будемо так.

1. Діаграми руху будемо так само, як і для штовхача з роликом, що рухається поступально /див. рис. 12.15, а/ і визначимо їх масштаби /рис. 12.18/.

2. Зводимо графік аналога прискорень  $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$  до масштабу графіка переміщень штовхача, помноживши ординати графіка  $\frac{d^2s}{d\varphi^2} - \varphi$  на масштаб  $\mu \frac{d^2s}{d\varphi^2}$  і поділивши на  $\mu_s$ .

3. Накладаємо знайдені ординати графіка  $\frac{d^2s}{d\varphi^2} - \varphi$  на графік  $s - \varphi$ , віднявши від них відповідні значення переміщень  $S$  штовхача /рис. 12.18, б/.

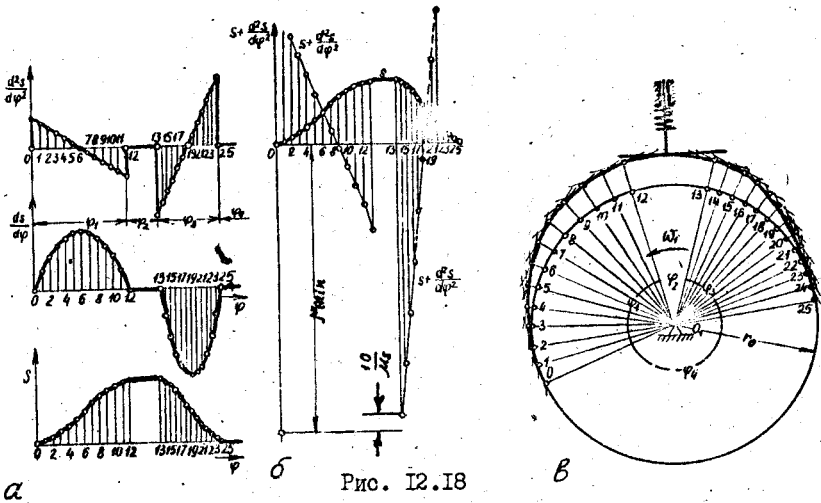


Рис. 12.18

4. Оскільки мінімальний радіус кулачка має бути більшим за цю різницю, то до максимальної різниці ординат додаємо 10 мм у масштабі  $H_5$ , тобто  $\frac{10}{H_5}$ . Це і є мінімальний радіус кулачка  $r_{min}$  у масштабі  $H_5$ .

Профіль кулачка креслимо так. Із точки  $O_1$  проводимо коло, радіус якого дорівнює  $r_{min}$ . Внизу симетрично вертикальній осі, що проходить через точку  $O_1$ , відкладаємо кут  $\varphi_1$  близького виступу, а від нього проти напрямку обертання кулачка згідно з методом зворотного дугу – кути віддалення  $\varphi_1$ , дальнього виступу  $\varphi_2$  і повернення  $\varphi_3$ . Поділивши кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_3$  на 12 однакових частин, зобразимо положення штовхача у зворотному русі радіальними прямими  $O_1I_1; O_1I_2; \dots$  і на них від кола відкладаємо відповідні переміщення з графіка  $s-\varphi$ . У знайдених точках ставимо перпендикуляри до радіальних прямих  $O_1I_1; O_1I_2; \dots$ , тобто показуємо відповідні положення тарілок штовхача. На внутрішньому боці множини тарілок проводимо їх обвідну, дотичну до тарілок. Це і є профіль кулачка.

Для замикання вищої кінематичної пари штовхач – кулачок встановлюємо пружину, яка одним торцем упирається в стояк, другим – у виступ на штовхачі. З урахуванням діючих на штовхач сил, показаних на рис.12.4 і місця установки, пружину треба підібрати таку, щоб забезпечувався постійний надійний контакт штовхача і кулачка. Тільки за цих умов штовхач буде рухатися при обертанні кулачка згідно із законом, за яким окреслено профіль кулачка. Якщо кулачок позацентричний, то від осі обертання кулачка відкладаємо зміщення  $e$  штовхача і креслимо його положення в позацентричному кулачковому механізмі.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Артоболевський І.І. Теорія механізмів і машин. - К.: Держтехвидав України, 1957.
2. Кореняко О.С. Теорія механізмів і машин. - К.: Вища шк., 1987.
3. Небеснов В.Г., Зуєв Г.І. Лабораторні роботи з курсу теорії механізмів і машин. - К.: Держтехвидав, 1960.
4. Теорія механізмів і машин. Програма, робочі плани, методичні вказівки і завдання для контрольних і курсових робіт / За ред. С.Д.Петровського. - Львів: вид-во Львівського ун-ту, 1972.
5. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. - М.: Наука, 1978.
6. Артоболевский С.И. Теория механизмов и машин. - М.: Высш. шк., 1968.
7. Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин. - М.: Машиностроение, 1969.
8. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. - М.: Наука, 1979.
9. Фролов К.Ф. и др. Теория механизмов и машин. - М.: Высш. шк., 1987.
10. Зиноньев В.А. Теория механизмов и машин. - М.: Наука, 1972.
11. Артоболевский И.И., Едельштейн Б.В. Сборник задач по теории машин и механизмов. - М.: Наука, 1973.
12. Кореняко А.С. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. - К.: Выща шк., 1978.
13. Гаркунов Д.Н., Триботехника. - М.: Машиностроение, 1985.
14. Заблонский К.И., Белоконов И.М., Щекин Б.М. Теория механизмов и машин. - К.: Выща шк., 1989.
15. Белоконов И.И. Теория механизмов и машин. Методы автоматизированного проектирования. - К.: Выща шк., 1990.
16. Киницкий Я.Т. Унифицированные алгоритмы расчета механизмов на ЭВМ. - К.: УМК ВО, 1988.
17. Кожевников С.Н., Раокин Я.М. Теория механизмов и машин. - Днепропетровск: ДМЕТИ, 1972.
18. Лапин А.П. К определению потерь на трение в зубчатых механизмах. Сб. Механика машин, вып. 35-36. - М.: Наука, 1972.
19. Кудрявцев В.Н. Зубчатые передачи. - М.-Л.: Гостехиздат, 1957.
20. Ротбарт Г.А. Кулачковые механизмы. - Л.: Судпромгиз, 1960.
21. Столярчук В.Ф., Гладько Б.М., Рагінець М.Ф. Дослідження руху і динаміки машин, устаткованих електроприводом. - Львів, 1972.

## З М І С Т

Передмова.....	3
1. Структурний аналіз механізмів.....	6
1.1. Основні поняття та означення.....	6
1.2. Класифікація кінематичних пар.....	12
1.3. Класифікація кінематичних ланцюгів.....	15
1.4. Структурна формула загального випадку кінематичного ланцюга.....	16
1.5. Структурна формула плоского механізму.....	18
1.6. Пасивні умови в'язі.....	19
1.7. Зайві ступені вільності.....	20
1.8. Замінюючі механізми.....	22
1.9. Структурна класифікація плоских важільних механізмів Ассура - Артоб'єлевського.....	24
1.10. Послідовність виконання структурного аналізу...	27
1.11. Переваги класифікації механізмів за Ассуром - Артоб'єлевським.....	28
2. Кінематичне дослідження механізмів.....	29
2.1. Побудова планів механізмів.....	29
2.2. Кінематичне дослідження механізмів з допомогою графіків руху /кінематичних діаграм/.....	35
2.3. Кінематичне дослідження механізмів з допомогою планів швидкостей і прискорень.....	37
2.4. Властивості плану швидкостей.....	41
2.5. Властивості плану прискорень.....	45
2.6. Кінематичне дослідження важільних механізмів аналітичними методами.....	51
2.7. Аналітична кінематика кривошипно-повзунного механізму.....	51
2.8. Синтез кривошипно-повзунного механізму.....	52
2.9. Визначення переміщення, швидкості та прискорення повзуна.....	55
2.10. Кривошипно-коромисловий чотириланковий механізм. Умови існування кривошипа /умови прокручуваності ланок/.....	56
2.11. Кулісний механізм. Синтез кулісного механізму.....	59



2.12. Переміщення, швидкість і прискорення різцевої головки кулісного механізму.....	60
2.13. Аналітичне дослідження важільних механізмів методом замкнених векторних контурів .....	63
2.14. Аналітичне дослідження механізмів методом перетворення координат за Ю.Ф.Морошніним.....	71
2.15. Сінематичне дослідження механізмів з допомогою обчислювальних машин.....	80
3. Динаміка механізмів і машин.....	100
3.1. Завдання динаміки машин.....	100
3.2. Класифікація сил. Робота сил.....	100
3.3. Сили інерції.....	103
4. Кінетостатичне дослідження плоских механізмів.....	110
4.1. Умови статичної визначеності кінематичних ланцюгів.....	110
4.2. Кінетостатика ведучої ланки /механізму І класу/.....	119
4.3. Визначення зрівноважувальної сили.....	125
4.4. Визначення зрівноважувальної сили методом можливих переміщень.....	126
4.5. Теорема Жуковського про жорсткий важіль.....	127
5. Динаміка машин. Режими руху машини.....	130
5.1. Основне рівняння руху машини.....	132
5.2. Зведення мас і сил.....	134
5.3. Властивості зведених мас.....	136
6. Основні відомості з теорії регулювання руху машини.....	138
6.1. Нерівномірність руху машини.....	142
6.2. Вплив додаткової маси маховика на нерівномірність руху машини в усталеному русі.....	145
6.3. Визначення моменту інерції маховика за діаграмою $T-J$ Метод Віттенбауера.....	148
6.4. Визначення закону руху ведучої ланки механізму... ..	156
6.5. Дослідження руху машини з допомогою диференціальних рівнянь та рівнянь Лагранжа другого роду.....	164

6.6. Перманентний і початковий рух машини.....	166
6.7. Дослідження руху машини з допомогою рівнянь Лагранжа другого роду.....	168
7. Зрівноважування та віброзахист механізмів.....	170
7.1. Зрівноважування обертових мас.....	171
7.2. Умови зрівноваженості маси, що обертається навколо нерухомої осі.....	173
7.3. Зрівноважування обертових мас, що розміщені в одній площині.....	176
7.4. Зрівноважування обертових мас, що розміщені в різних площинах на одному валу.....	178
7.5. Зрівноважування механізмів.....	180
7.6. Визначення спільного центра мас графічним методом.....	181
7.7. Визначення положення центра мас методом головних векторів /головних точок/.....	183
7.8. Статичне зрівноваження механізмів.....	185
7.9. Зрівноважування механізмів з допомогою заміщення мас.....	187
8. Тертя в кінематичних парах.....	189
8.1. Актуальність проблеми.....	189
8.2. Види тертя.....	192
8.3. Тертя ковзання сухих тіл.....	192
8.4. Законя Кулона - Амонтоня /сухого тертя ковзання/.....	193
8.5. Тертя в поступальній кінематичній парі. Кут і кокус тертя.....	196
8.6. Тертя клинчастого повзуна. Зведений коефі- цієнт тертя.....	197
8.7. Тертя на похилій площині.....	198
8.8. Тертя у гвинтовій кінематичній парі.....	200
8.9. Тертя в обертальній кінематичній парі. Круг тертя	202
8.10. Момент тертя п"яти.....	203
8.11. Тертя у вищих кінематичних парах.....	206
9. ККД машини.....	208
9.1. ККД механізмів і машин, з"єднаних послідовно....	209
9.2. ККД механізмів і машин, з"єднаних паралельно....	210

9.3. Змішане з'єднання механізмів або машин.....	212
9.4. ККД похилої площини і гвинтової пари.....	212
9.5. ККД зубчастих механізмів з рухомими осями.....	214
10. Механічні передачі обертального руху.	
Фрикційні передачі.....	222
10.1. Циліндрична фрикційна передача.....	224
10.2. Фрикційні передачі з клинчастими колесами.....	225
10.3. Конічна фрикційна передача.....	227
10.4. Фрикційні передачі з безступінчастою зміною частоти обертання.....	227
10.5. Передачі гнучкою ланкою.....	228
10.6. Тертя в передачах гнучкою ланкою.	
Формула Ейлера.....	230
II. Зубчасті передачі.....	233
II.1. Відносний рух зубчастих коліс. Основна теорема зачеплення.....	235
II.2. Рівняння евольвенти в полярних координатах. Властивості евольвенти.....	239
II.3. Вихідний контур.....	240
II.4. Геометричні елементи стандартних прямозубих евольвентних зубчастих коліс зовнішнього зачеплення.....	243
II.5. Дуга зачеплення. Лінія зачеплення. Коефіцієнт перекриття.....	246
II.6. Виправлення /коригування/ зубчастих коліс евольвентного зачеплення.....	250
II.7. Виправлені компенсовані зубчасті колеса. Висотна корекція.....	254
II.8. Виправлені некомпенсовані зубчасті колеса. Кутова корекція.....	255
II.9. Вибір виду корекції і коефіцієнтів зміщення.....	261
II.10. Косозубі та шевронні циліндричні колеса.....	265
II.11. Геометричні елементи косозубих і шевронних коліс у торцевому перерізі.....	269
II.12. Зубчасті передачі Новикова.....	269
II.13. Складні зубчасті механізми.....	273
II.14. Рядове послідовне зачеплення зубчастих коліс...	273
II.15. Рядове зачеплення з паразитними колесами.....	275

II.16. Зубчасті передачі з рухомими осями коліс. Епіциклічні передачі.....	276
II.17. Синтез планетарних зубчастих механізмів.....	279
II.18. Конічний диференціал автомобіля.....	281
II.19. Хвильова передача.....	283
II.20. Структура хвильової передачі.....	284
II.21. Кінематика хвильової передачі.....	288
II.22. Просторові зубчасті механізми.....	289
II.23. Гвинтові зубчасті колеса.....	291
II.24. Черв'ячна передача.....	293
II.25. Геометричні елементи черв'яка і колеса.....	295
II.26. Конічне прямозубе зачеплення.....	297
II.27. Профільовання зубів конічних коліс.....	299
II.28. Гіпоїдна передача.....	303
I2. Кулачкові механізми.....	304
I2.1. Замикання вищих кінематичних пар.....	305
I2.2. Фазові кути кулачкового механізму /фази руху штовхача, профільні кути кулачка/.....	305
I2.3. Кут тиску. Критичний кут тиску.....	307
I2.4. Визначення центра кулачка і його мінімального радіуса з урахуванням кута тиску.....	312
I2.5. Проектування кулачка за заданим законом руху веденої ланки /штовхача/ і кута тиску.....	316
I2.6. Вибір закону руху веденої ланки кулачкового механізму.....	316
I2.7. Параболічний закон руху.....	317
I2.8. Синусоїдний закон руху.....	319
I2.9. Косинусоїдний закон руху.....	321
I2.10. Лінійний закон руху.....	323
I2.11. Циклові діаграми.....	323
I2.12. Характеристичні коефіцієнти.....	326
I2.13. Характеристичні функції.....	330
I2.14. Аналітичне визначення координат профілю кулачка.....	335
I2.15. Визначення мінімального радіуса кулачка і побудова його профілю графічним методом.....	341
I2.16. Особливості проектування коромислового кулачкового механізму.....	343
I2.17. Проектування кулачкового механізму з плоским штовхачем. Задача Геронімуса.....	345
Список літератури.....	350

Министерство высшего образования Украины  
Учебно-методический кабинет высшего образования  
Винницкий политехнический институт

Учебное издание

Вышенский Иван Иванович

Теория механизмов и машин.  
Механические передачи

Учебное пособие

Киев УМК ВО 1992

На украинском языке

Навчальне видання

Вишенський Іван Іванович

Теорія механізмів і машин.  
Механічні передачі

Навчальний посібник

Темплан 1992, поз. 70

Редактор Р.С.Ділова

Коректори: Т.О.Суворова

Т.Н.Сенюк-Шевчук

В.Г.Сідяренко

Н.Ф.Слоніна

Підп. до друку 7.8.92. Формат 60×84<sup>1/8</sup>. Папір  
друк. № 3. Друк офсетний. Ум. др. арк. 20.89 Ум. фарбо-відб. 20.8  
Облік.-вид. арк. 21.4. Тираж 1500.  
Зам. № 2736. Ціна 2,005 грн.

НМК ВО Мінвузу України

252135, м. Київ, проспект Перемоги, 10

РОВО «Укрвуполіграф».

252151, Київ, вул. Волинська, 60.