

К. И. Заблонский,  
И. М. Белоконов,  
Б. М. Щекин

# ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ и МАШИН

*Допущено Министерством  
высшего и среднего специального  
образования УССР в качестве  
учебника для студентов  
высших технических  
учебных заведений*

Киев  
Головное издательство  
издательского объединения  
«Выща школа»  
1989

ББК 34.41я73  
З-12  
УДК 531.8(075.8)

**Р е ц е н з е н т ы:** д-р техн. наук, проф. *В. Т. Серда* (Харьковский институт инженеров транспорта им. С. М. Кирова), чл.-кор. АН УССР, д-р техн. наук, проф. *Ф. К. Иванченко* (Киевский политехнический институт)

Редакция литературы по машиностроительному комплексу  
Редактор *Е. В. Алексейчук*

**Заблонский К. И. и др.**

**З-12** Теория механизмов и машин: Учебник / К. И. Заблонский, И. М. Белоконев, Б. М. Щекин. — К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989. — 376 с., 349 ил., 18 табл. — Библиогр.: 9 назв. ISBN 5—11—001334—9

Рассмотрены в соответствии с утвержденной учебной программой курса «Теория механизмов и машин» общие для плоских и пространственных механизмов вопросы кинематики и динамики, влияние упругости звеньев механизмов на их кинематические и динамические характеристики, причины возникновения вибраций простейших механизмов и пути борьбы с ними, а также требования по обеспечению качественных характеристик работы механизмов. Использовано понятие операторной функции для формализации алгоритмов расчета механизмов.

Для студентов высших технических учебных заведений.

■ 2702000000—215 203—89  
М211 (04)—89

ББК34.41я73

ISBN 5—11—001334—9

© Издательское объединение  
«Выща школа», 1989

---

## ВВЕДЕНИЕ

В решениях XXVII съезда КПСС подчеркивается ведущая роль машиностроения в осуществлении стратегии ускорения научно-технического прогресса. Уровень машиностроения определяет состояние технологии производства любой отрасли промышленности и сельского хозяйства, качество производимых товаров. Развитие машиностроения связано с совершенствованием теории механизмов и машин, изучающей процессы, происходящие в машинах при преобразовании энергии, обработке материалов и их транспортировании, переработке информации при управлении машинными комплексами и т. п. В теории механизмов и машин обосновывается выбор оптимальных параметров машин, определяются методы их рационального проектирования и расчета. Все это дает возможность создавать более совершенные и производительные машины, а также машины, соответствующие новым принципам работы.

Появление новых машин приводит к разработке новых теоретических положений об их механике. Следовательно, в развитии машиностроения и теории механизмов и машин находят очередное подтверждение диалектические принципы естествознания. Не может быть прогресса в машиностроении без изучения закономерностей его развития методами теории механизмов и машин. Не получит развития теория механизмов и машин, если ее аппарат не будет отвечать реальным нуждам и запросам промышленности. Поэтому теория механизмов и машин — одна из основных общинженерных дисциплин, обеспечивающих теоретическую подготовку инженеров-механиков.

Теория механизмов и машин базируется на основных положениях теоретической механики. При изучении кинематики механизмов кроме основных принципов механики (теоремы о сложении движений, сложном составном движении и др.) учитываются геометрические и кинематические факторы, характеризующие влияние формы и размеров конкретных звеньев на особенности их движения. В связи с этим в курсе рассматриваются особенности кинематики и динамики групп механизмов (зубчатых, кулачковых, фрикционных), что обеспечивает подготовку к изучению вопросов работоспособности деталей машин.

При изложении динамики механизмов вопросы движения звеньев, в отличие от теоретической механики, изучаются с учетом физической причинности действующих на них сил. Вопросы изменения энергии движущихся звеньев рассматриваются с учетом механической работы как сил, вызывающих движение звеньев, так и сил,

препятствующих их движению. В этом случае основной энергетический принцип механики реализуется таким образом, что механическая работа представляется как разница между энергией, полученной расходом определенного количества энергоносителя (сжиганием топлива, расходом потенциальной энергии сжатого газа, кинетической энергии движущейся жидкости и т. п.), и энергией, затраченной на технологическую переработку или перемещение материалов.

Развитие теории механизмов и машин связано с прогрессом техники. По мере повышения уровня машиностроения получали развитие и различные разделы теории механизмов. Развитие машиностроения в начале нашего столетия привело к разработке теории структуры механизмов и машин. Усложнение кинематических схем машинных агрегатов обусловило необходимость в разработке методов кинематического расчета механизмов. Совершенствование двигателестроения вызвало увеличение скоростей работы машин, что потребовало развития методов динамических расчетов. В теории механизмов и машин развились методы расчетов отдельных типов механизмов (рычажных, зубчатых, кулачковых и др.), учитывающих взаимное влияние геометрических, кинематических и динамических факторов на качественные показатели работы механизмов. Это привело к созданию теорий зацепления, колебаний и др.

Современное машиностроение требует создания мощных и производительных машин с пространственной зоной обслуживания. Высокая производительность машин невозможна без создания систем управления работой машин на основе применения вычислительных программируемых устройств и микропроцессорной техники. Это вызвало создание теории роботов и манипуляторов, разработки методов их проектирования и расчета.

Современная техника выдвигает повышенные требования к точности работы механизмов. Это потребовало отказаться от методов расчета механизмов, основанных на предположении об абсолютной жесткости звеньев. Сейчас получили распространение методы кинематического и динамического исследования механизмов с учетом деформируемости звеньев, их колебаний, воздействия вибраций на окружающую среду и человека.

Для современного машиностроения характерна широкая электронификация, влияющая не только на изменение принципов управления машинами, но и на применение методов их исследований. Применение электронно-вычислительных машин для расчетов машиностроительных конструкций стало обыденным. Автоматизация расчетов потребовала разработки новых методов исследования механизмов, их широкой алгоритмизации и формализации.

Теория механизмов и машин — первая дисциплина, вводящая студентов в мир общинженерных сведений, связанных с конкретными деталями машин, а не абстрактных понятий материальной точки и материального тела. Вместе с курсами теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин она входит в комплекс профессиональной подготовки машиностроителей.

# СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### 1.1. Основные принципы классификации

Механизмы — основа любой машины. Существует огромное множество механизмов различных типов, отличающихся назначением, строением, способом передачи движения, принципом действия и многими другими признаками. С целью разработки эффективных методов анализа и рациональных путей создания новых механизмов (синтеза) их группируют по определенным признакам. В качестве одного из признаков принимают *способ преобразования движения в механизме*. Наряду с передачей движения с помощью твердых звеньев в механизмах для этой цели используют жидкости, газы, электрические и магнитные поля. Поэтому одним из признаков классификации является механическое, гидравлическое, пневматическое или электрическое воздействие для приведения механизма в движение.

Весьма распространена классификация механизмов по их *функциональному назначению*. В этом случае различают механизмы двигателей, передаточные и исполнительные механизмы, контроля, управления и регулирования, подачи, транспортировки, питания и сортировки обрабатываемых сред и объектов, автоматического счета, взвешивания и упаковки готовой продукции и т. п.

Несмотря на разницу в функциональном назначении механизмов отдельных видов, в их строении, кинематике и динамике много общего. Если главным признаком классификации считать кинематику механизмов, то их делят *по характеру движения входящих в них деталей* на механизмы с вращательным, поступательным, плоскопараллельным и пространственным движением. Если в классификации учитывают *тип механизма*, то различают механизмы шарнирно-рычажные, кулачковые, зацепления, фрикционные, с гибкими связями и т. д. Более детальное деление в этой классификации строится на *характерных частностях механизмов*: планетарные, зубчатые, червячные, кулисные и т. п.

### 1.2. Структурная классификация

Изучение основ построения механизмов и их элементов базируется на структурной классификации. Ее принцип заключается в том, что *любой механизм представляют как цепь отдельных элементарных сочленений твердых или гибких тел определенной формы, присоединенных к исходному простейшему механизму, выполняющему и*

самостоятельные функции. Исходный механизм не может быть разделен на более простые части без нарушения основной функции — передачи движения.

Эта классификация, предложенная в 1911 г. Л. В. Ассуром (см. прил.), а затем дополненная И. И. Артоболовским (см. прил.), предусматривает объединение в определенной системе и тех комбинаций подвижных частей, присоединение которых способствует образованию сложных механизмов. Соответственно данной классификации механизмы представляют в виде структурных схем с указанием отдельных частей и их подвижных соединений условными изображениями.

### 1.3. Деталь, звено

Каждый механизм состоит из деталей, определенным образом соединенных между собой. **Деталь** — это изделие, которое не разделяется на составные части без нарушения возможности выполнения им предусмотренных функций. На рис. 1.1, а показан зубчатый механизм, состоящий из нескольких деталей: неподвижных — кор-

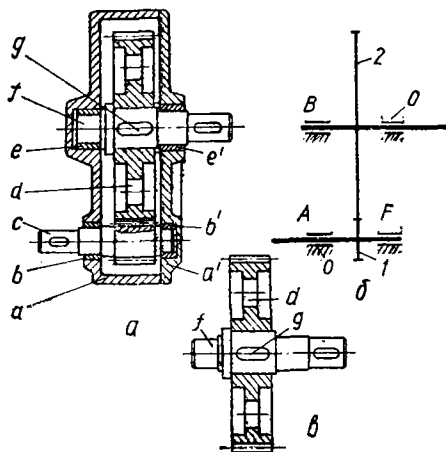


Рис. 1.1. Конструктивная и структурная схема зубчатого механизма

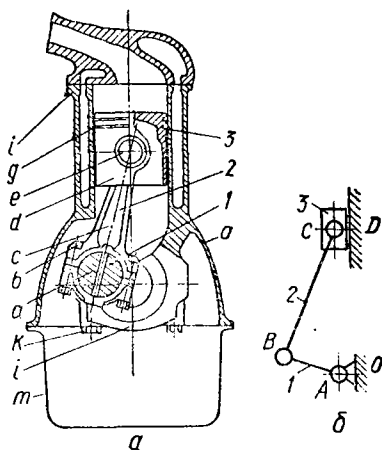


Рис. 1.2. Конструктивная и структурная схема кривошипно-ползунного механизма

пуса из двух частей  $a$  и  $a'$ , подшипников  $b$ ,  $b'$  и  $e$ ,  $e'$  и подвижных — вращающихся вала-шестерни  $c$  и вала  $f$  с закрепленным на нем с помощью шпонки  $g$  зубчатым колесом  $d$ . Он предназначен для передачи вращательного движения от вала-шестерни  $c$  на вал  $f$  через пару зацепляющихся зубчатых колес  $c$  и  $d$ . Кроме указанных в этом механизме имеется много других деталей (болты, гайки, штифты, крышки подшипников и др.), но все они разделяются на неподвижные, связанные с корпусом, и подвижные, связанные с вращающимися деталями.

С позиций структурной классификации важно знать не количество деталей, а количество совокупностей, объединяющих детали, обладающие одинаковым характером движения. На основании этого рассматриваемый механизм схематически представляется всего тремя такими совокупностями деталей. *Деталь или несколько неподвижно соединенных между собой деталей, движущихся как одно целое, называется звеном.*

Схематическое изображение зубчатого механизма (рис. 1.1, б) состоит из звена 0, соединяющего все неподвижные детали (корпус из двух частей  $a$  и  $a'$ , четырех подшипников  $b, b'$  и  $e, e'$  и др.), звена 1, представляющего вал-шестерню  $c$  (одна деталь), и звена 2, объединяющего вал  $f$ , колесо  $d$  и шпонку  $д$ , соединенных между собой (рис. 1.1, в) и вращающихся с одинаковой скоростью.

Шарнирно-рычажный механизм (рис. 1.2, а), используемый для преобразования вращательного движения в поступательное (и наоборот), состоит из неподвижных деталей (картера  $m$ , корпуса  $i$ , крышек подшипников, крепежных деталей подшипников  $k$ ) и движущихся деталей (кривошипного вала  $a$  и всех закрепленных на нем деталей, поршня  $d$ , поршневого пальца  $e$ , поршневых колец  $д$  и шатуна  $c$  с подшипниками, деталей для крепления  $b$  и др.). Условное изображение механизма, отражающее его структуру, показано на рис. 1.2, б: звено 0 представляет группу неподвижных деталей  $m, i, k$  и др., звено 1 — вал и все вращающиеся детали, звено 2 — шатун и связь вала и поршня  $d$ , звено 3 — поршень и все другие поступательно движущиеся детали  $e, д$  и др.

#### 1.4. Кинематические пары

Звенья механизма соединяются между собой так, чтобы они могли совершать относительные движения. *Соединение двух звеньев, обеспечивающее определенное относительное движение, называется кинематической парой.* Так, звено 2 в зубчатом механизме (см. рис. 1.1, б), состоящее из неподвижно соединенных деталей  $f, d$  и  $г$ , вращается относительно звена 0 и составляет с ним вращательную кинематическую пару В В кривошипно-ползунном механизме (см. рис. 1.2, б) звенья 3 и 0 образуют поступательную кинематическую пару — поршень  $d$  и цилиндр  $i$ .

Совокупности поверхностей, линий и точек звеньев, по которым происходит их соединение, образуют элемент кинематической пары. Элементы вращательной кинематической пары В — это цилиндрические поверхности подшипника скольжения  $e$  и  $e'$  и цапф вала  $f$  (см. рис. 1.1, а), зубчатой кинематической пары F — линии контакта зубьев шестерни  $c$  и колеса  $d$ . В поступательной кинематической паре — это поверхности поршня  $d$  и цилиндра  $i$ .

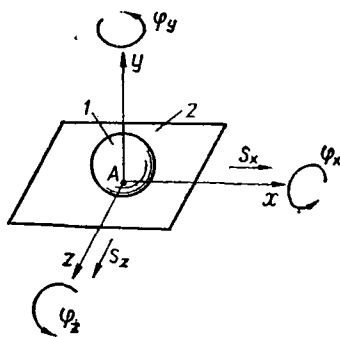



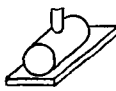



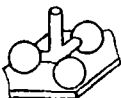
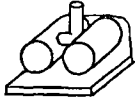
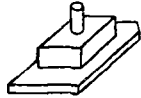





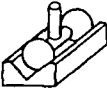

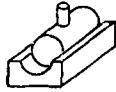

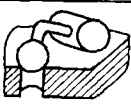




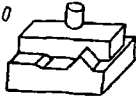
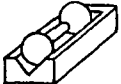
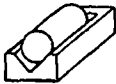
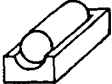
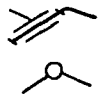


Рис. 1.3. Кинематическая пара

матической паре  $D$  кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 1.2, *a*) элементами являются цилиндрические поверхности поршня  $d$  (вернее, поршневых колец  $g$ ) и цилиндра  $i$ . Геометрическая форма элементов кинематических пар определяет различный характер относительных движений образующих их звеньев.

Для отдельного звена, свободно перемещающегося в пространстве, число независимых свободных перемещений равно шести, т. е.

Таблица 1.1. Классификация кинематических пар

Класс кинематической пары	Возможные перемещения	Элементы кинематических пар			Условные обозначения
		Точки	линии	поверхности	
1	2s 3φ	1 	—	—	
	2	2s 2φ	2 	3 	—
1s 3φ		4 	5 	—	
3	2s 1φ	6 	7 	8 	
	3φ	9 	10 	11 	
	4	1s 1φ	12 	13 	14 
2φ		15 	16 	17 	
5		1s	18 	19 	20 
	1φ	21 	22 	23 	



числу степеней свободы: три независимых перемещения  $s_x$ ,  $s_y$  и  $s_z$  относительно неподвижных координатных осей и три вращения  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  вокруг этих же осей. Для звеньев, образующих кинематическую пару, возможное число движений всегда меньше шести, так как соединение их уменьшает число независимых движений одного звена относительно другого. На рис. 1.3 показана кинематическая пара  $A$ , образованная шаром 1 и плоскостью 2. Если оси координат расположить так, чтобы оси  $Ax$  и  $Az$  совпадали с плоскостью 2, число возможных движений шара относительно координатной системы будет равно только пяти ( $s_x$ ,  $s_z$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$ ), так как перемещение шара  $s_y$  вдоль оси  $y$  ограничивается.

Кинематические пары классифицируют по числу связей, налагаемых их элементами на относительное движение звеньев. Элементы кинематических пар могут налагать от одной до пяти связей (при шести связях исключается возможность относительного движения: два звена соединяются неподвижно, т. е. превращаются в две детали одного звена). Число налагаемых связей является номером класса кинематической пары. Так, рассмотренная кинематическая пара шар — плоскость (рис. 1.3) будет кинематической парой 1-го класса. В табл. 1.1 показаны кинематические пары разных классов, позволяющие реализовать различные относительные движения звеньев. Звенья, образующие кинематические пары 1-го класса, касаются только в одной точке, звенья кинематических пар 2-го класса — в двух точках или по линии. В кинематических парах остальных классов, указанных на схемах механизма условными обозначениями, звенья могут иметь контакт в точках, по линиям или по поверхности.

Кинематические пары, элементами которых могут быть только точки или одна линия, называются *вышшими*, кинематические пары с контактом звеньев по поверхности — *низшими*. При конструировании кинематических пар необходимо обеспечить постоянный контакт их элементов — *замыкание*. Это достигается либо с помощью определенных усилий (силовое замыкание) или приданием элементам определенной формы (геометрическое замыкание).

Таким образом, звенья, образующие кинематическую пару, обладают относительно друг друга определенностью движений, зависящей от геометрической формы элементов кинематической пары. Класс кинематической пары  $H$  удобно определять по числу степеней свободы  $k$  в относительном движении. Так как число степеней свободы в пространстве 6, то  $H = 6 - k$ .

## 1.5. Кинематические цепи

*Звенья, соединенные кинематическими парами, образуют кинематические цепи.* Различают *замкнутые* кинематические цепи, звенья которых входят не менее чем в две кинематические пары, образуя замкнутые контуры (рис. 1.4, а), и *незамкнутые*, имеющие звенья, входящие только в одну кинематическую пару и не образующие замкнутых контуров (рис. 1.4, б), а также *сложные* кинематические

цепи, состоящие из замкнутых и незамкнутых контуров (рис. 1.4, в). Замкнутые контуры неизменяемой конфигурации на схемах заштриховываются. Звенья, входящие только в одну кинематическую пару, называются *поводками* и имеют элементы кинематических пар, называемые *внешними*, которыми они присоединяются к другим кинематическим цепям. Элементы другого звена, присоединяе-

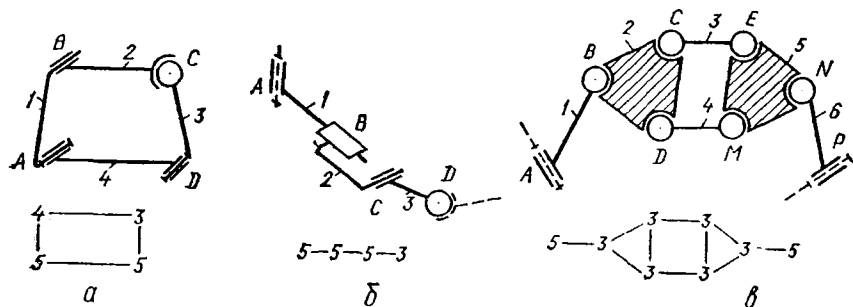


Рис. 1.4. Плоские кинематические цепи

мого к поводку, на структурных схемах механизма обозначаются штриховой линией.

В незамкнутых кинематических цепях всегда есть два поводка и две внешние кинематические пары; в сложных кинематических цепях число поводков не ограничено. При структурном анализе и синтезе применяется условная запись кинематической цепи (рис. 1.4, в), звенья обозначаются чертой, соединяющей цифры, соответствующие классу кинематических пар.

## 1.6. Кинематические соединения

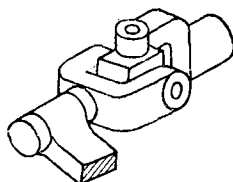
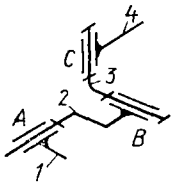
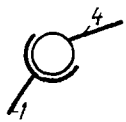
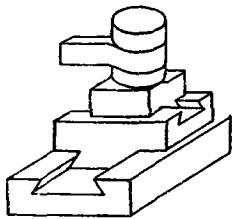
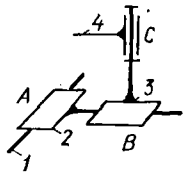
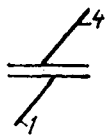
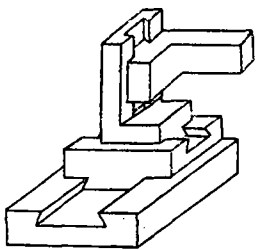
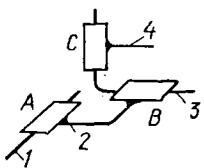
*Незамкнутая кинематическая цепь, которая по характеру относительных движений звеньев заменяет кинематическую пару, представляет собой кинематическое соединение.* Как правило, кинематическое соединение выполняют в виде конструкции, звенья которой входят в низшие кинематические пары. В табл. 1.2 показаны кинематические соединения, состоящие из четырех звеньев, соединенных тремя кинематическими парами 5-го класса, эквивалентные сферической и плоскостной кинематическим парам, а также соединение, позволяющее реализовать комбинацию относительных движений, состоящую из трех перемещений ( $3s$ ), нереализуемую посредством кинематической пары.

## 1.7. Подвижность кинематической цепи

Звенья кинематической цепи, обладая определенностью в относительном движении со звеньями, с которыми они образуют кинематические пары, могут не обладать определенностью движений относительно неподвижной системы координат, в которой рассматривается кинематическая цепь. Между тем определенность движения звеньев—

обязательное свойство кинематической цепи любого устройства, так как в противном случае управление им невозможно. Для оценки определенности движения звеньев цепи их положение относительно неподвижной координатной системы оценивается значениями независимых параметров, называемых *обобщенными координатами*.

Таблица 1.2. Кинематические соединения

Комбинация относительных движений	Кинематическое соединение	Структурная схема соединения	Условное обозначение заменяемой кинематической пары
3φ			
2s 1φ			
3s			<p>Нет аналогов</p>

К обобщенным координатам относят расстояния между точками звеньев, их линейные и угловые координаты относительно неподвижной координатной системы, связанной с неподвижным звеном кинематической цепи — *стойкой*, которое всегда есть в кинематической цепи реального устройства. Для определения положения звеньев кинематической цепи (рис. 1.5) в системе *Oxyz*, связанной со звеном *O*, необходимо при известных линейных и угловых размерах звеньев знать значения четырех обобщенных координат:

угловых  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5$  и линейных —  $l_3$ . Следовательно, если задавать во времени изменение рассматриваемых обобщенных координат, то можно получить вполне определенное движение звеньев кинематической цепи. Подвижность кинематической цепи — это определенность движения звеньев по отношению к одному из них. **Степень подвижности** кинематической цепи  $W$  равна числу обобщенных координат, требуемых для ее описания.

В сложных кинематических цепях определение степени подвижности визуально затруднительно. Ее можно определить вычислениями из следующих соображений. Если кинематическая цепь состоит из  $n$  подвижных звеньев, то для описания их положения в пространственной координатной системе без учета характера соединения звеньев необходимо  $6n$  координат. Так как каждая кинематическая пара

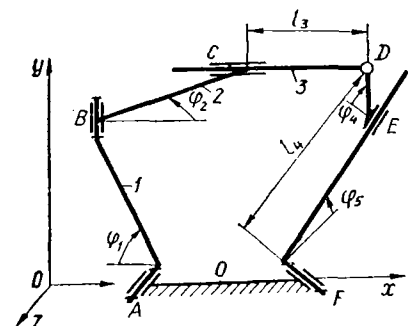


Рис. 1.5. Пространственные кинематические цепи

налагает на относительное движение звеньев число ограничений — 5, 4, 3, 2, 1, определяемое ее классом, то для общего случая получим степень подвижности как разность между числом координат и числом наложенных ограничений:

$$W = 6n - 5\rho_5 - 4\rho_4 - 3\rho_3 - 2\rho_2 - \rho_1, \quad (1.1)$$

где  $\rho_5, \rho_4, \rho_3, \rho_2, \rho_1$  — количество кинематических пар соответствующих классов в кинематической цепи.

Если перемещение звеньев кинематической цепи происходит в одной или нескольких параллельных плоскостях, то такая кинематическая цепь называется *плоской*. Для образования плоских кинематических цепей достаточно использовать кинематические пары только 5-го и 4-го классов, налагающих на движение в плоскости соответственно два или одно ограничение, а для описания движения  $n$  подвижных звеньев такой кинематической цепи необходимо  $3n$  координат.

В связи с этим зависимость для определения степени подвижности плоской кинематической цепи будет

$$W = 3n - 2\rho_5 - \rho_4. \quad (1.2)$$

Рассмотрим соотношение между количеством звеньев, кинематических пар и степеней подвижности на примере пространственной кинематической цепи (рис. 1.5). Количество подвижных звеньев  $n = 5$ , кинематических пар 5-го класса  $A, B, F$  —  $\rho_5 = 3$ , 4-го класса  $C$  и  $E$  —  $\rho_4 = 2$ , 3-го класса  $D$  —  $\rho_3 = 1$  и по формуле (1.1) получим  $W = 6 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4$ . Зафиксируем последовательно звенья 1, 2 и 5, придавая  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5$  постоянные значения. Тогда каждому значению  $l_4$  соответствуют определен-

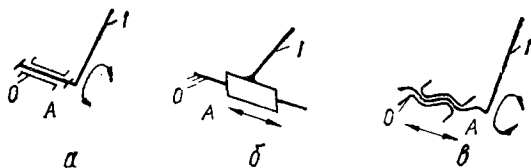
ные значения параметров  $\varphi_4$  и  $l_3$ . При фиксации звеньев 5 и 4 каждому значению  $\varphi_1$  соответствуют определенные значения  $\varphi_2$  и  $l_3$ . Степень подвижности цепи в этих случаях равна единице. Если в первом случае зафиксировать дополнительно звено 3 или 4, а во втором — звено 3, то свободные звенья цепи станут неподвижными, а  $W = 0$ . Из рассмотренного следует, что если в кинематической цепи сообщить движение количеству звеньев, равному ее степени подвижности, то движения остальных звеньев однозначно определятся. Такие кинематические цепи называют механизмами. Звенья цепи, которым придают движение извне, называют *входными*. Следовательно, под механизмом понимают кинематическую цепь, у которой число входных звеньев равно степени подвижности.

## 2. МЕХАНИЗМЫ

### 2.1. Основные признаки механизмов

В энергетических машинах, служащих для преобразования различных видов энергии в механическую работу, получают механическое движение в виде непрерывного вращательного или возвратно-поступательного перемещения выходных звеньев. Если скорость движения по величине или направлению, усилие или момент, развиваемые этими звеньями, не соответствуют заданным для выполнения необходимой работы или по соображениям компоновки агрегата нельзя рабочий орган присоединить непосредственно к дви-

Рис. 2.1. Кинематические пары 5-го класса: входное звено — стойка



гателю, то между ними устанавливают механизмы определенного типа. Они преобразуют движение входного звена в строго определенное требуемое движение другого звена, называемого *выходным*. С помощью различных механизмов достигается переменная или постоянная скорость выходного звена при заданной скорости входного. Необходимый закон движения выходного звена обеспечивается выбором соответствующей структуры механизма и определенных классов кинематических пар.

Механизм может иметь несколько входных и одно выходное звено и наоборот. Конструктивно выходное звено одного механизма одновременно может быть входным звеном другого, присоединенного к нему механизма. Входные и выходные звенья механизма связаны между собой кинематическими цепями, структура и геометрия которых обеспечивают заданное определенное относительное движение входных и выходных звеньев. Движение этих звеньев рассматривается относительно неподвижной координатной системы, связанной со стойкой. Чаще всего входное звено механизма соединяется со стойкой кинематическими парами 5-го класса (рис. 2.1).

По назначению механизмы разделяются на передаточные и направляющие. В передаточном механизме обеспечивается заданное относительное перемещение входного и выходного звеньев, при котором происходит преобразование обычно равномерного вращательного или поступательного движения входного звена в непрерывное или прерывистое поступательное или вращательное движение выходного звена в заданной функциональной зависимости. В направляющих механизмах точки выходного звена движутся по заданным траекториям. Один и тот же механизм может быть использован как направляющий или передаточный.

По характеру движения звеньев механизмы делятся на плоские и пространственные. **Плоскими называются механизмы, у которых траектории точек подвижных звеньев описывают плоские кривые, лежащие в параллельных плоскостях.** Такое движение обеспечивается определенной ориентацией кинематических пар 4-го и 5-го классов. Иногда в плоских механизмах применяются кинематические пары 3-го и 2-го классов, но в определенном сочетании с парами 5-го класса и в таком месте кинематической цепи, чтобы не нарушить принципиального характера движения звеньев. Плоские механизмы получили большое распространение из-за простоты расчета и технологии изготовления.

**Пространственными механизмами называются механизмы, точки звеньев которых описывают неплоские траектории или траектории, лежащие в пересекающихся плоскостях.** В таких механизмах для выполнения определенных функций количество звеньев, а значит и кинематических пар, сведено к минимуму. В пространственных механизмах отсутствуют ограничения на относительное расположение входных и выходных звеньев, а возможность выбора для кинематической цепи необходимого типа кинематических пар из всех пяти классов их создает лучшие условия для образования новых типов механизмов.

## 2.2. Плоские механизмы с низшими кинематическими парами

*Механизмы, звенья которых образуют только низшие (вращательные, поступательные, цилиндрические и сферические) кинематические пары, называются шарнирно-рычажными.* Эти механизмы нашли широкое применение в машиностроении и приборостроении вследствие того, что при взаимодействии звеньев усилия в кинематических парах распределяются по поверхностям. Благодаря этому давления, а следовательно, и износ этих элементов ниже, чем элементов в высших парах. К достоинствам шарнирно-рычажных механизмов следует отнести простую геометрическую форму звеньев, что упрощает технологию их изготовления.

Основой для многих плоских механизмов служит шарнирный четырехзвенник (рис. 2.2, а): звено 1, совершающее полный оборот, называется кривошипом; звено 2, совершающее сложное движение, — шатуном, звено 3 — коромысло — совершает качательное движение. Оси кинематических пар 5-го *A*, *C*, *D* и 4-го *B* классов

в этом механизме выполнены перпендикулярно к плоскостям, в которых находятся траектории точек звеньев. Подобный механизм образуется теми же звеньями при замене пары  $C$  5-го класса парой 3-го класса (рис. 2.2, б).

На базе шарнирного четырехзвенника построен плоский кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.3), служащий для преобразования вращательного или возвратно-качательного движения входного звена  $1$  в возвратно-поступательное движение выходного звена — ползуна  $3$ . Оси вращательных и цилиндрических кинематических

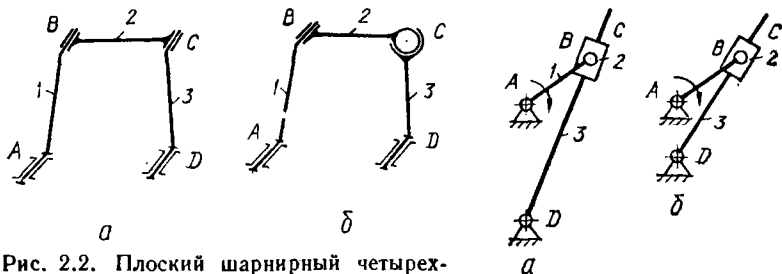


Рис. 2.2. Плоский шарнирный четырехзвенник с парами 5, 4, 3-го классов

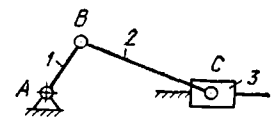


Рис. 2.3. Кривошипно-ползунный механизм

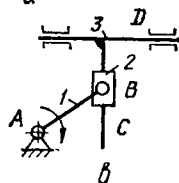


Рис. 2.4. Различные виды кривошипно-кулисных механизмов

пар в этом механизме расположены перпендикулярно к направлению движения ползуна. Этот механизм — основной во всех поршневых машинах (двигатели внутреннего сгорания, компрессоры, насосы, прессы и т. п.), а также сельскохозяйственных, дорожных и других машин.

Плоские кривошипно-кулисные механизмы (рис. 2.4) имеют в своем составе входное звено — кривошип  $1$ , образующий вращательную пару  $B$  с ползунком  $2$ , который, в свою очередь, входит в поступательную пару  $C$  с кулисой  $3$ , являющейся выходным звеном. В этих механизмах при равномерном вращении входного звена можно получить неравномерное качательное (рис. 2.4, а), вращательное (рис. 2.4, б), поступательное (рис. 2.4, в) движения выходного, что позволяет увеличить производительность машин за счет сокращения времени холостого хода.

Механизмы со сложными структурно-кинематическими схемами в большинстве своем в качестве основной преобразующей движение части имеют один из рассмотренных выше типов механизмов.

### 2.3. Пространственные механизмы с низшими кинематическими парами

Пространственные шарнирно-рычажные механизмы применяются в качестве передаточных или направляющих для воспроизведения пространственных кривых, если оси кинематических пар, составленные входными и выходными звеньями со стойкой, пересекаются или скрещиваются в пространстве. Аналогично плоскому широко применяется пространственный шарнирный четырехзвенник, состоящий лишь из пар

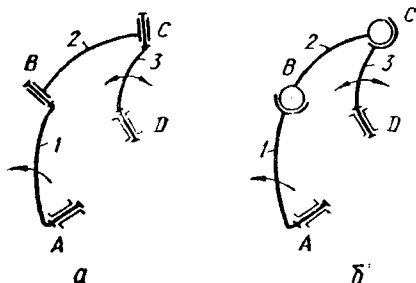


Рис. 2.5. Сферический четырехзвенник

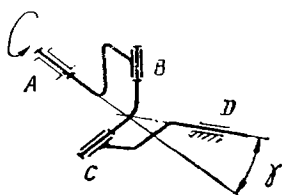


Рис. 2.6. Универсальный шарнир

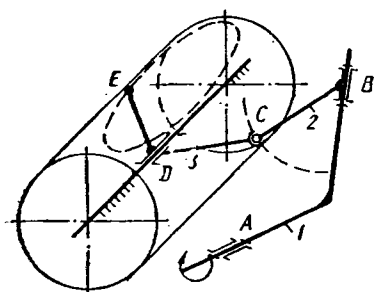


Рис. 2.7. Механизм для воспроизведения заданной траектории точки

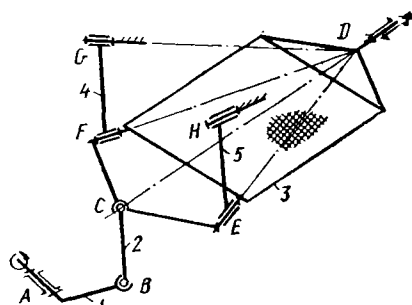


Рис. 2.8. Механизм сита

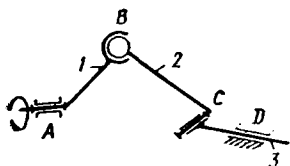


Рис. 2.9. Пространственный кривошипно-ползунный механизм

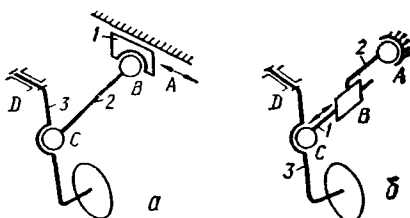


Рис. 2.10. Механизм шасси самолета

5-го класса (рис. 2.5, а) или включающий также и пары  $B, C$  3-го класса (рис. 2.5, б). Его применяют для передачи движения между двумя скрещивающимися осями. Точки на шагуне 2 описывают сложные пространственные кривые.



Структурные преобразования пространственного четырехзвенника позволяют получить разные модификации кинематических соединений механизмов *универсальных шарниров* (рис. 2.6). Их используют в металлорежущих станках, автомобилях и других машинах для передачи движения между валами, расположенными под углом  $\gamma$ , а также в тех случаях, когда положение валов в процессе работы изменяется.

Механизм пространственного шарнирного четырехзвенника — структурная основа многих специальных механизмов — обеспечивает возможность получения необходимых соотношений между перемещениями входных и выходных звеньев при малом числе про-

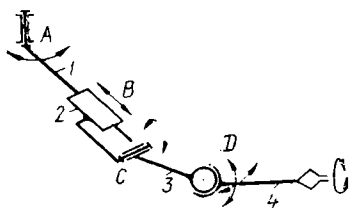


Рис. 2.11. Механизм манипулятора

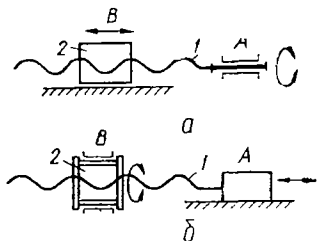


Рис. 2.12. Винтовые механизмы

межуточных. Это помогает избежать применения сложных структурных схем. Например, механизмы петлителей швейных и вязальных машин должны воспроизводить заданную траекторию точки на цилиндрической поверхности. Они имеют простые структурные схемы, если применить механизм пространственного четырехзвенника (рис. 2.7). Требуемая траектория точки  $E$  воспроизводится применением вращательной пары 5-го класса  $B$  для соединения звеньев 1 и 2, в результате чего точка  $C$  движется по поверхности цилиндра, а звено 3, соединенное с неподвижной направляющей цилиндрической кинематической парой 4-го класса, совершает поступательное и вращательное движение относительно направляющей, обеспечивая точке  $E$  требуемый характер движения.

Хорошие эксплуатационные показатели и низкий уровень динамических нагрузок имеют механизмы сит, используемые в строительстве (рис. 2.8) и имеющие в своей основе рассматриваемую схему. От кривошипа 1 пространственное движение сообщается ситу 3, точка  $C$  которого описывает кривую на сфере с центром в  $D$ . Оси шарниров  $E, F, G, H$  должны пересекаться в точке  $D$ .

Пространственный кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.9) применяется в случае, если ось вращения входного звена 1 не перпендикулярна к плоскости, в которой движется ползун 3. Эти механизмы широко применяются для преобразования вращательного движения в поступательное и наоборот. На рис. 2.10,  $a, б$  показаны примеры применения пространственного кривошипно-ползунного механизма в устройствах управления шасси самолета, в которых входные звенья имеют разный характер движения.

К пространственным шарнирно-рычажным механизмам относятся также механизмы манипуляторов (рис. 2.11). Особенность этих механизмов заключается в том, что звенья 1, 2, 3, 4 — входные и замыкание их в кинематическую цепь осуществляется гидравлическим, электрическим или другими способами в зависимости от типа двигателей, приводящих их в движение. Согласованная работа двигателей этих звеньев обеспечивает перемещение определенной точки выходного звена 4 по заданной траектории.

Широко применяются винтовые механизмы (рис. 2.12), в которых с помощью кинематической винтовой пары  $B$  осуществляется преобразование вращательного (рис. 2.12, а) или поступательного (рис. 2.12, б) движения входного звена 1 в поступательное (или вращательное) движение выходного звена 2. Комбинируя расположение и количество кинематических пар 5-го класса разных типов, получают разнообразные винтовые механизмы для решения многих частных задач. Их применяют в металлорежущих станках, прессах, приборах, измерительных устройствах и т. п.

#### 2.4. Плоские механизмы с высшими кинематическими парами

При помощи шарнирно-рычажных механизмов многие законы движения и траектории точек выходных звеньев воспроизводятся только приближенно, а иногда и вовсе неосуществимы (например, движение выходного звена с постоянно увеличенной или уменьшенной скоростью по отношению к скорости входного). Это связано с тем, что низшие кинематические пары предоставляют ограниченные возможности в выборе подвижностей. Значительно большие возможности выполнения заданных законов движения и траекторий точек выходных звеньев представляют собой механизмы, звенья которых образуют и высшие кинематические пары.

Простейший представитель таких механизмов для обеспечения постоянной скорости выходного звена — **фрикционный** (рис. 2.13), в котором передача от входного 1 к выходному звену 2 осуществляется за счет сил трения, возникающих на элементах высшей кинематической пары  $B$ . Элементом является точка или линия (может быть несколько линий). Сила трения создается благодаря силовому замыканию высшей кинематической пары. При больших расстояниях между осями вращения входного и выходного звеньев применяются фрикционные механизмы с **гибкой связью** (рис. 2.14, а, б). В качестве гибких звеньев применяют ремни разного профиля.

В роли передаточного механизма для воспроизведения требуемого закона движения выходного звена при заданном движении входного звена применяются **кулачковые механизмы** (рис. 2.15). Необходимый закон движения достигается приданием входному звену — кулачку 1 — соответствующей геометрической формы. Кулачок совершает вращательное (рис. 2.15, а, б) или поступательное (рис. 2.15, в, г) движение, а выходное звено 2 — поступательное (рис. 2.15, а, в). В этом случае оно называется *толкателем*; при качательном движении (рис. 2.15, б, г) — *коромыслом*. Для снижения потерь на трение в высшей кинематической паре  $B$  кулачок — тол-

катель (или коромысло) применяют дополнительное звено 3 — ролик, образующее со звеном 2 вращательную пару  $D$ . Для обеспечения постоянного замыкания кинематической пары используют пружины или элементам пары придают соответствующую форму. Кулачковые механизмы употребляют в разного рода управляющих устройствах (электрических, гидравлических и пневматических ап-

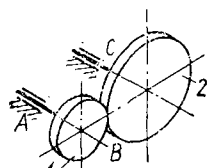


Рис. 2.13. Фрикционный механизм

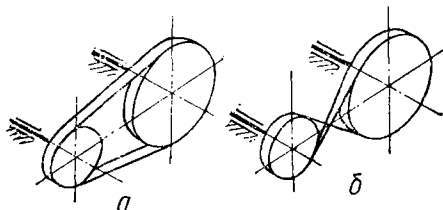


Рис. 2.14. Механизм с гибкой связью трения

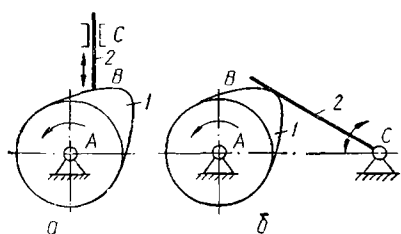


Рис. 2.15. Кулачковые механизмы

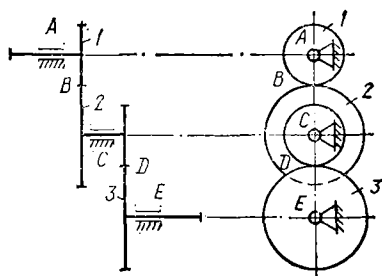
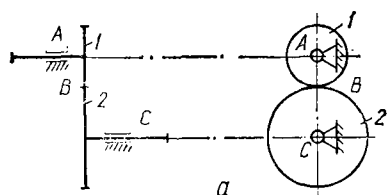
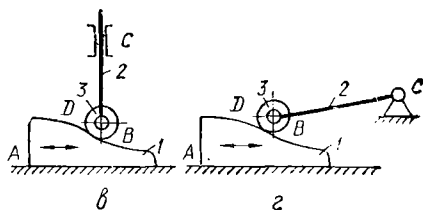


Рис. 2.16. Зубчатые механизмы

паратах, клапанных системах и т. п.). В некоторых механизмах — механических прессах, формовочных машинах, силикатных машинах и др. — их применяют непосредственно для преодоления сил технологического сопротивления.

Если при заданном вращении входного звена 1 (рис. 2.16, а) нужно получить непрерывное движение выходного звена 2 в одном направлении, используются механизмы с последовательно взаимодействующими парами поверхностей, располагающимися на опре-

деленном количестве выступов, называемых *зубьями*. Для обеспечения постоянства скорости выходного звена этим поверхностям придают специальную форму. Полнооборотные звенья с замкнутой системой зубьев, обеспечивающих непрерывное движение других подобных звеньев, называются *зубчатыми колесами*, неполнооборотные — *зубчатыми секторами*. Контактующие зубья зубчатых колес образуют высшую кинематическую пару, называемую *зубчатым зацеплением*.

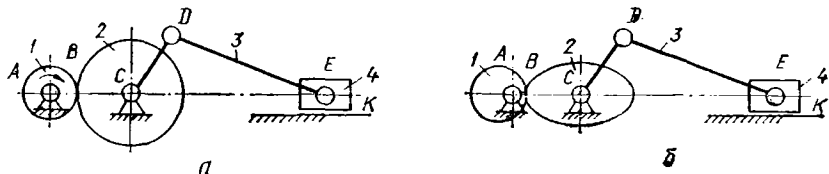


Рис. 2.17. Зубчато-рычажные механизмы

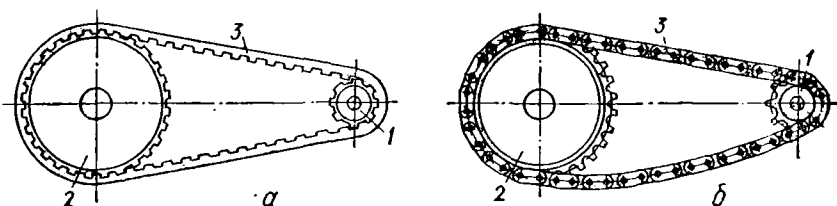


Рис. 2.18. Механизм с гибкой связью зацепления

Механизмы, в состав которых входят зубчатые колеса, называют *зубчатыми*. Плоские зубчатые механизмы, в состав которых входят цилиндрические зубчатые колеса с зубьями, расположенными на цилиндрических поверхностях, служат для передачи движения между параллельными осями. Зубчатые механизмы имеют одну или несколько пар зубчатых колес. Зубчатые механизмы разделяются на *рядовые* (рис. 2.16, б), в которых оси всех колес неподвижны, *сателлитные* (рис. 2.16, в), в которых некоторые колеса совершают два вращательных движения — вокруг собственной оси и вокруг центральной оси другого звена, и *зубчато-рычажные системы с круглыми* (рис. 2.17, а) и *некруглыми* колесами (рис. 2.17, б).

Зубчатые колеса применяют для изменения частоты вращения выходного звена — *ведомого вала* — по сравнению с частотой вращения входного звена — *ведущего вала*, направления вращения ведомого вала, суммирования нескольких движений. Они служат также в качестве механизмов управления, воспроизведения заданных функций и направляющих механизмов.

При необходимости сохранения строгого постоянства соотношения скоростей для передачи вращения при больших расстояниях между входными и выходными звеньями используют зубчатые механизмы с гибкой связью в виде зубчатого ремня или цепи (рис. 2.18, а, б). Зубчатый ремень 3 входит в зацепление со шкивами 1 и 2, снабженными зубьями. Цепь огибает цилиндрические коле-

са, снабженные зубьями, очерченными определенными поверхностями, — звездочки. Вращение выходного звена осуществляется от входного за счет тягового усилия, передаваемого элементами зубчатого ремня или цепи.

## 2.5. Пространственные механизмы с высшими кинематическими парами

Фрикционные механизмы при пересекающихся осях (рис. 2.19) передают движение не только с постоянным отношением скоростей (рис. 2.19, а) входного 1 и выходного 2 звеньев, но и с плавным изменением этого отношения (рис. 2.19, б). Переменная скорость выходного звена достигается относительным перемещением промежуточных звеньев 3.

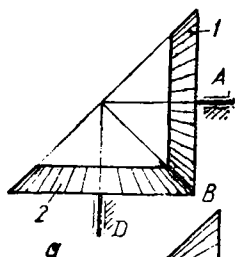


Рис. 2.19. Фрикционные пространственные механизмы

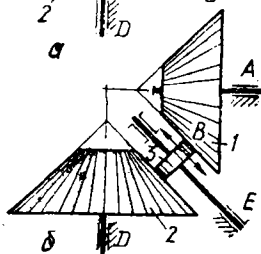


Рис. 2.20. Кулачковые пространственные механизмы

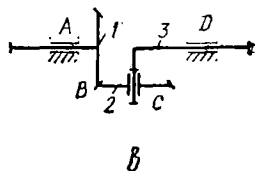
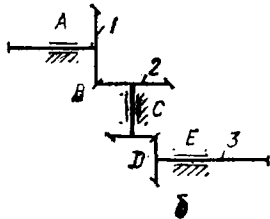
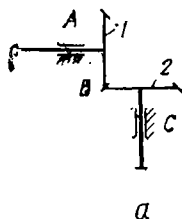
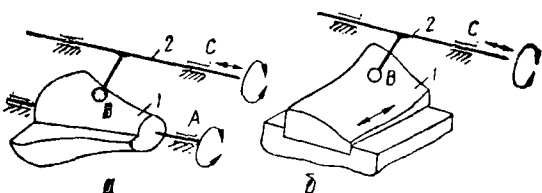


Рис. 2.21. Зубчатые механизмы с пересекающимися осями

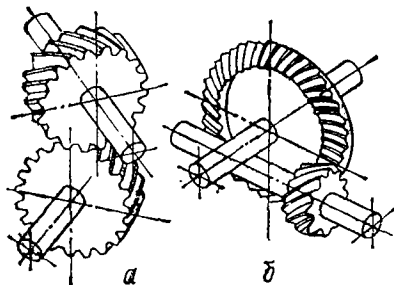


Рис. 2.22. Зубчатые механизмы со скрещивающимися осями

Широко распространены пространственные кулачковые механизмы (рис. 2.20). Чаще всего входное звено 1 осуществляет плоское вращательное (рис. 2.20, а) или поступательное (рис. 2.20, б) движение, а благодаря форме элементов высшей пары В и разной структуре механизма выходное звено 2 совершает сложное движение в пространстве.

Зубчатые пространственные механизмы применяются для передачи движения между пересекающимися или скрещивающимися осями. В механизмах с пересекающимися осями, называемых

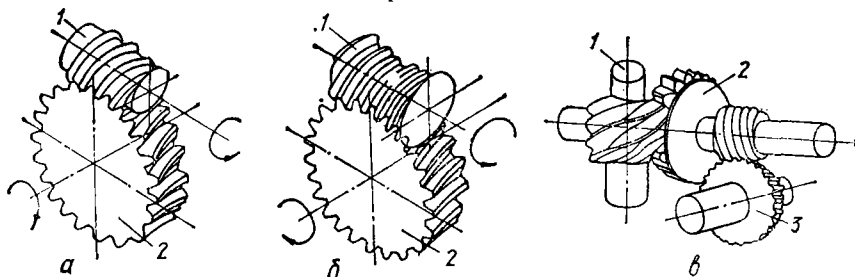


Рис. 2.23. Червячные и глобoidные механизмы

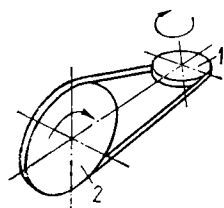


Рис. 2.24. Пространственный механизм с гибкой связью

коническими (рис. 2.21, а), зубья конических зубчатых колес располагаются на поверхностях конусов. Как и механизмы с цилиндрическими колесами, механизмы с коническими колесами бывают рядовыми (рис. 2.21, б) и сателлитными (рис. 2.21, в).

При скрещивающихся осях применяют *винтовые* (рис. 2.22, а) и *гипоидные* (рис. 2.22, б) механизмы, а также *червячные* (рис. 2.23, а) и *глобoidные механизмы* (рис. 2.23, б). В червячном механизме входное звено 1 — червяк — представляет собой цилиндр с винтовой нарезкой; выходное звено 2 — червячное колесо — входит в зацепление с червяком. В глобoidном механизме поверхность червяка образована вращением вокруг оси червяка вогнутого отрезка дуги окружности. Как и зубчатые, червячные механизмы могут образовывать *многоступенчатые*, чаще *двухступенчатые механизмы* (рис. 2.23, в). Между входным 1 и выходным 2 звеньями, расположенными в пространстве на большом расстоянии (рис. 2.24), применяют также механизмы с гибкими связями с помощью ремня или цепи.

## 2.6. Механизмы с немеханическим способом передачи движения

Рассмотренные выше кинематические цепи разных типов механизмов имеют одно общее свойство — передача движения в них от одного звена к другому осуществлялась механическим способом, т. е.

через взаимодействие двух твердых звеньев. Кинематика и динамика таких механизмов определяются по законам механики недеформируемого тела, основные положения которой изучаются в общем курсе теоретической механики. В большом классе механизмов звенья приводятся в движение в результате взаимодействия с электромагнитными полями, потоками движущихся жидкостей или газов. Кинематика и динамика таких звеньев определяются уже не их механическими свойствами, а параметрами, характеризующими

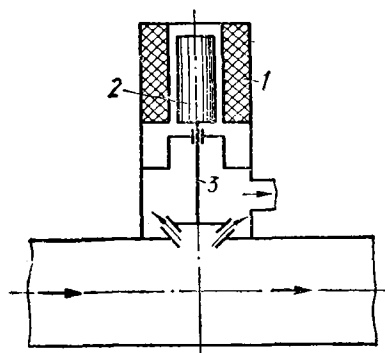


Рис. 2.25. Схема управления электромагнитом механизма клапана

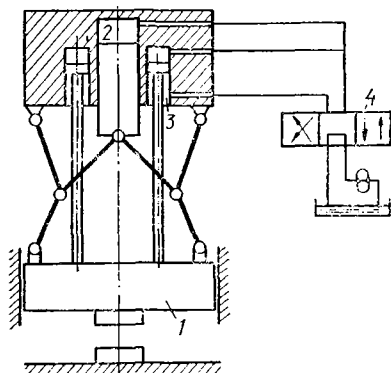


Рис. 2.26. Механизм гидромеханического пресса

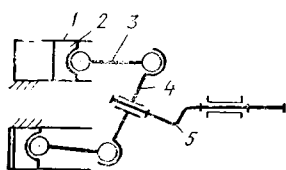


Рис. 2.27. Механизм гидравлического двигателя

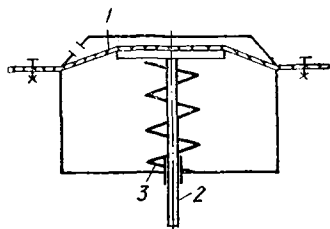


Рис. 2.28. Механизм с пневмоприводом

свойства немеханической среды, которые могут быть найдены на основе законов электродинамики, гидродинамики, аэродинамики и др.

Во многих машинах и механизмах немеханическим способом приводятся в движение только некоторые звенья цепи, чаще всего — входные, а передача движения остальным звеньям осуществляется механическим способом. Наибольшее распространение получили механизмы с электроприводом — электромеханическим устройством, в котором источником механического движения служит электродвигатель. В самом электродвигателе выходное звено — ротор — приводится в движение в результате взаимодействия с движущимся электромагнитным полем. Взаимодействием с электромагнитным полем обмотки 1 якоря 2, совмещенного со штоком 3 клапана (рис. 2.25), осуществляется управление механизмом клапана.

В механизмах с гидравлическим приводом поступательное или вращательное движение звена достигается за счет нагнетания под давлением рабочей жидкости в полость, в которой оно движется. В гидромеханическом прессе (рис. 2.26) необходимое рабочее усилие на плиту 1 достигается подачей под давлением жидкости в полости цилиндров 2. Для подъема плиты жидкость под давлением подается в полости 3. Управление работой осуществляется с помощью золотника 4 переключением его в соответствующую позицию. На рис. 2.27 приведена схема механизма гидравлического двигателя, в котором жидкость, нагнетаемая под давлением в полости цилиндров 1, приводит в поступательное движение поршни 2, которое преобразуется во вращательное движение косоугольного кривошипа 5 с помощью шатунов 3 и диска 4.

Под механизмами с пневматическим приводом обычно понимают поршневые или роторные механизмы, входные звенья которых приводятся в движение энергией сжатого газа (воздуха). Они используются чаще всего в системах управления работой машины, а также в качестве ведущих в машинах, в которых применение других видов привода нецелесообразно. Например, если механизм работает во взрывоопасной среде, то для предупреждения искрообразования вместо электропривода применяют пневмопривод. На рис. 2.28 показана типичная схема пневмопривода механизма систем управления. Здесь под действием сжатого воздуха эластичная диафрагма 1 прогибается и перемещает шток 2. В исходное положение она возвращается пружиной 3 при снятии давления.

В последующем будут рассматриваться только механизмы, у которых передача движения от одного звена к другому осуществляется механическим способом.

### 3. СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

#### 3.1. Задача структурного синтеза

В структурном синтезе механизмов разрабатываются кинематические цепи с минимальным количеством звеньев для преобразования движения заданного количества входных звеньев в требуемые движения выходных. *Результатом структурного синтеза механизма является его структурная схема, указывающая звенья и характер их взаимосвязи (класс кинематических пар)*. Выходное звено может двигаться с постоянной или переменной скоростью. Движение это бывает непрерывное или прерывистое (с остановками), неизменное или циклически изменяющееся. Для направляющих механизмов важно, чтобы траектории точек выходного звена соответствовали заданным. Задачи структурного синтеза многовариантны. Одно и то же преобразование движения получают различными по структуре механизмами. Поэтому при выборе оптимальной структурной схемы учитываются технология изготовления звеньев и кинематических пар, а также условия эксплуатации механизмов.



Различают *плоские* и *пространственные* структурные схемы. При синтезе плоской структурной схемы принимается, что звенья механизма перемещаются только в одной плоскости (рис. 3.1, а) и у них отсутствуют перемещения  $s_z$ ,  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$ . Такое относительное движение звеньев осуществляется при использовании кинематических пар только 5-х классов с перемещениями  $s_x$ ,  $s_y$  и  $\varphi_z$ . При структурном синтезе механизмов выбор типа реальных кинематических пар производят с учетом обеспечения работоспособности механизма, особенностей технологии изготовления, сборки, монтажа и условий эксплуатации. Поэтому после синтеза плоской структурной схемы переходят к пространственной схеме (рис. 3.1, б).

### 3.2. Структурные группы

Проектирование механизмов, звенья которых образуют замкнутые контуры, производится присоединением к входным звеньям и стойке кинематических цепей изменяемой конфигурации, число степеней свободы которых относительно элементов её внешних кинематических пар равно нулю. Такая кинематическая цепь называется *структурной группой*. Количество звеньев, число и класс кинематических пар в плоских структурных группах, называемых группами Ассура, должны соответствовать соотношению (1.2); для плоских структурных схем при  $p_3 = 0$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_1 = 0$  получим  $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 0$  и, следовательно, условие существования плоской структурной группы Ассура имеет вид

$$3n = 2p_5 + p_4. \quad (3.1)$$

Простейшая структурная единица — *монада* — состоит из одного звена с элементами кинематических пар. Существуют три модификации пространственных монад (рис. 3.2): с элементами кинематических пар 1-го и 5-го, 2-го и 4-го или с двумя кинематическими парами 3-го классов. Если в пространственной монаде высшую кинематическую пару заменить эквивалентным ей в структурном отношении *кинематическим соединением*, состоящим из кинематической цепи с кинематическими парами более высоких классов, то полученные кинематические цепи будут обладать свойствами структурных групп. Например, монаде с парами 1-го и 5-го классов (рис. 3.3, а) будет эквивалентна двухзвенная кинематическая цепь с парами 3-го, 4-го и 5-го классов (рис. 3.3, б).

Простейшая монада на плоской структурной схеме (рис. 3.4) с двумя поводками имеет элементы двух внешних кинематических пар: высшей 4-го и низшей 5-го классов. Две модификации плоской монады отличаются видом кинематической пары 5-го класса, которая может быть *вращательной* (рис. 3.4, а) или *поступательной* (рис. 3.5, б). Структурные группы с числом поводков более двух образуются на базе сложных кинематических цепей с *замкнутыми внутренними контурами*. Примером может служить группа из звена 4 и трех поводков 1, 2, 3 с элементами внешних кинематических пар А, В, С 5-го класса — *поступательными* (рис. 3.5, а) или *вращательными* (рис. 3.5, б).

Из плоской монады 4—5 (см. рис. 3.3) получается двухзвенная структурная группа (диада) заменой кинематической пары 4-го класса кинематическим соединением из двух кинематических пар 5-го класса (рис. 3.6, а). Диада с одной внутренней кинематической парой  $C$  и элементами двух внешних  $B$  и  $D$  кинематических пар по

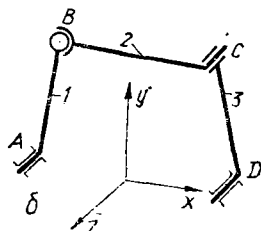
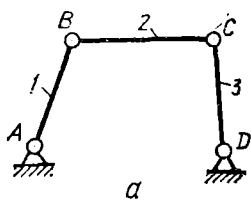


Рис. 3.1. Шарнирный четырехзвенник

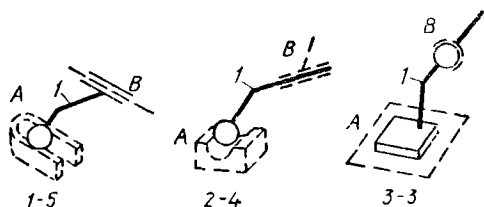


Рис. 3.2. Модификации пространственных монад

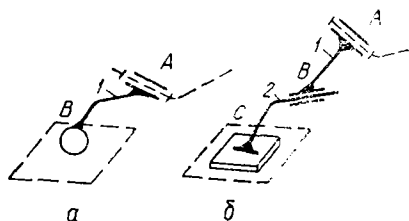


Рис. 3.3. Замена пространственной монады эквивалентной двухзвенной кинематической цепью

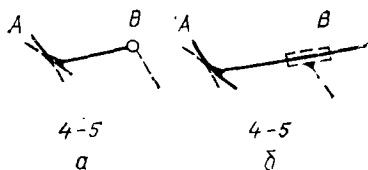


Рис. 3.4. Модификации плоских монад

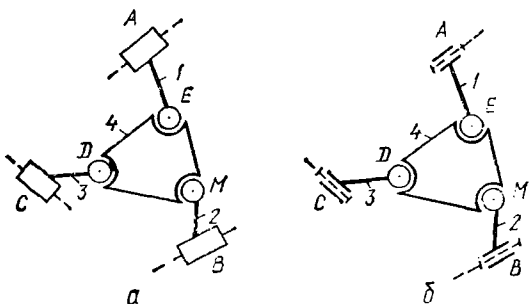


Рис. 3.5. Пространственная структурная группа с замкнутым внутренним контуром

классификации И. И. Артоболевского называется группой Ассура 2-го класса. Комбинируя в этой группе вращательные и поступательные кинематические пары, можно получить пять различных модификаций первого (рис. 3.6, а), второго (рис. 3.6, б), третьего

(рис. 3.6, а), четвертого (рис. 3.6, в) и пятого (рис. 3.6, д) видов. Класс группы по этой классификации определяется наибольшим количеством кинематических пар, образующих замкнутый контур.

Синтез более сложных плоских структурных групп, образующих замкнутые контуры, заключается в развитии и перестановке поводка. На примере двухповодковой группы 2-го класса (рис. 3.7, а) метод развития поводка заключается в том, что к одному из по-

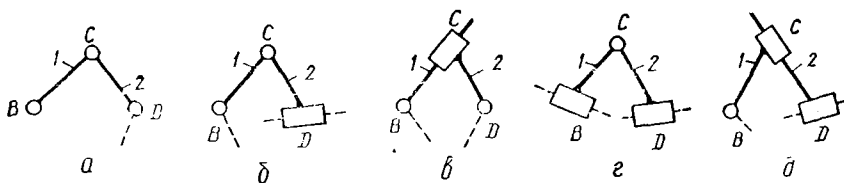


Рис. 3.6. Плоские структурные группы 2-го класса

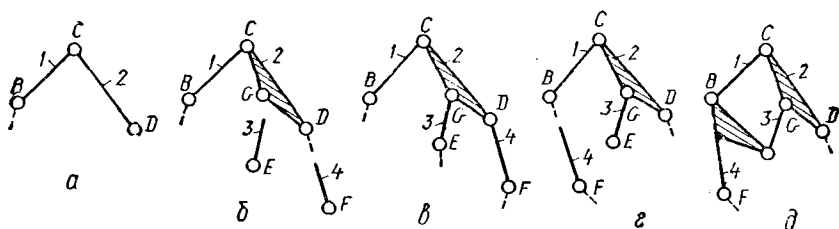
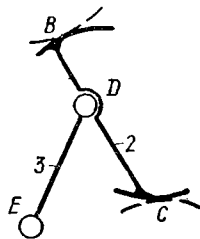


Рис. 3.7. Образование плоских структурных групп методом развития и перестановки поводка

Рис. 3.8. Двухзвенная плоская структурная группа с высшими кинематическими парами



водков, например 2 (рис. 3.7, б), добавляются два поводка с элементами двух внешних кинематических пар 5-го класса  $E$  и  $F$ : поводок 3, образующий со звеном 2 новую кинематическую пару 5-го класса  $G$ , и поводок 4, составляющий со свободным элементом этого звена кинематическую пару  $D$ . В результате получается следующая по сложности трехповодковая группа Ассра 3-го класса (рис. 3.7, в): наивысший замкнутый контур группы образован тремя кинематическими парами  $C$ ,  $G$ , и  $D$ .

Метод перестановки поводка состоит в том, что поводок 4 (рис. 3.7, г) отсоединяется от звена 2; при этом элементы кинематической пары  $D$  вновь становятся внешними, а поводок 4 присоединяется к элементам кинематических пар  $B$  и  $E$  звеньев 1 и 3 (рис. 3.7, д). В результате получается группа Ассра 4-го класса

(наивысший контур образован кинематическими парами  $B$ ,  $C$ ,  $G$  и  $E$ ) с элементами двух внешних кинематических пар  $D$  и  $F$ . Используя методы развития и перестановки поводка, получают сколь угодно сложные структурные группы с кинематическими парами 5-го класса.

Таким же путем получают сколь угодно сложные структурные группы с высшими кинематическими парами. Это достигается заменой в структурных группах поводка и двух кинематических пар 5-го класса кинематической парой 4-го класса на том основании, что две пары 5-го класса обладают степенью свободы, равной двум, которой обладает и высшая пара 4-го класса. Так, преобразуя группу Ассура 3-го класса (рис. 3.7, *в*) заменой поводков  $1$  и  $4$  высшими кинематическими парами 4-го класса, получим двухзвенную структурную группу (рис. 3.8) с двумя элементами высших кинематических пар 4-го класса и одним — 5-го.

### 3.3. Образование механизмов методом наслоения структурных групп

Синтез структурных схем механизмов с заданным числом входных звеньев производится *методом наслоения структурных групп*. Присоединением монады 2 к входному звену 1 и к стойке в зависимости от того, какими кинематическими парами осуществляется это присоединение, можно получить два варианта механизмов (рис. 3.9). Используя таким образом двухповодковую структурную группу, состоящую из двух звеньев 2 и 3 (рис. 3.10), получим кривошипно-коромысловый механизм (рис. 3.10, *а*). Более сложный механизм можно образовать присоединением второй структурной группы, состоящей из звеньев 4 и 5, к звену 3 механизма и к стойке (рис. 3.10, *б*). Последовательным наслоением двухповодковых структурных групп можно образовать сколь угодно сложные механизмы.

Механизмы с числом входных звеньев, равным одному, двум и более, могут создаваться на основе многоповодковых (более двух поводков) структурных групп, образующих внутренние замкнутые контуры. Так, при помощи трехповодковой структурной группы (см. рис. 3.5, *б*) можно создавать механизмы с числом степеней свободы от 1 до 3. Например, присоединением такой группы к трем входным звеньям 5, 6, 7 (рис. 3.11), составляющим поступательные кинематические пары со стойкой, получим механизм, с помощью которого можно обеспечивать необходимое положение звена 4 в пространстве.

При синтезе структурных схем плоских механизмов пользуются плоскими структурными группами. При присоединении монады с поступательной кинематической парой (см. рис. 3.4, *б*) к входному звену и к стойке получается плоский кулачковый механизм с толкателем (рис. 3.12, *а*) или зубчато-реечный механизм (рис. 3.12, *б*). При присоединении монады с вращательной кинематической парой (см. рис. 3.3, *а*) к входному звену и к стойке получается плос-

кий кулачковый механизм с коромыслом (рис. 3.12, в) или зубчатый механизм (рис. 3.12, г).

Плоские зубчатые механизмы на структурной схеме изображают в плоскости расположения осей вращения зубчатых колес (рис. 3.13, а). Условные обозначения кинематических пар 5-го класса в этом случае соответствуют их изображениям на пространственной схеме, а кинематическая пара, образованная зубчатым

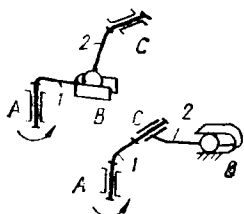


Рис. 3.9. Механизмы с пространственными модами

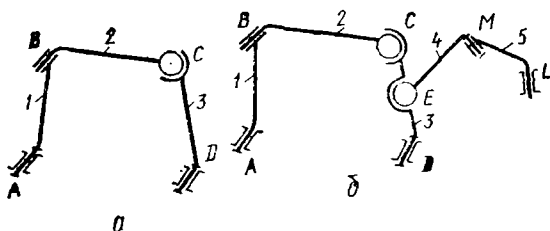


Рис. 3.10. Образование механизмов наложением структурных групп

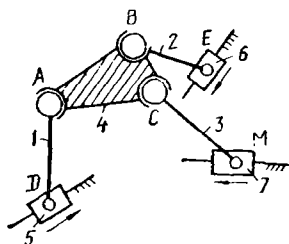


Рис. 3.11. Позиционер с трехповодковой пространственной структурной группой

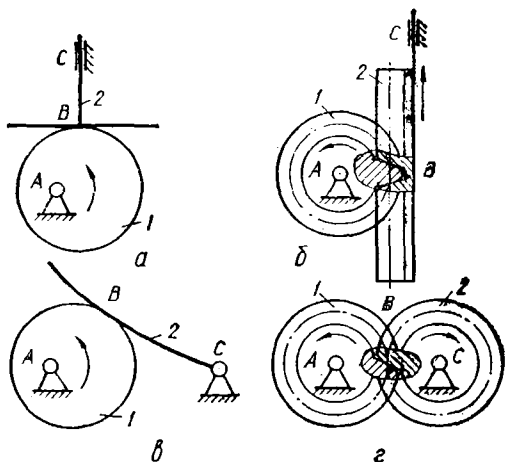


Рис. 3.12. Образование плоских механизмов при помощи плоских моад

зацеплением, изображается чертой, соединяющей звенья 1 и 2 структурной группы, входящие в эту пару. Последовательным присоединением плоских моад получают и более сложные плоские зубчатые механизмы, например, присоединением моады 3 к кинематическим парам D и E (рис. 3.13, б). Иногда зубчатые механизмы изображают и в двух проекциях (рис. 3.13, в).

Различные плоские шарнирно-рычажные механизмы образуются присоединением плоских структурных групп Ассур 2-го класса пяти видов. Группа Ассур 2-го класса второго вида (см. рис. 3.6, б), отличающаяся наличием свободного элемента одной внешней отступательной пары, чаще всего применяется в исполнении, когда центр средней вращательной пары C располагается на ползуне 3 (рис. 3.14, а). После присоединения такой группы элементами внеш-

них кинематических пар к входному звену 1 и стойке образуется кривошипно-ползунный механизм (рис. 3.14, б). Группа Ассур 2-го класса третьего вида с внутренней поступательной кинематической парой (рис. 3.15, а) чаще всего применяется в таком же исполнении звена 2 и при присоединении к входному звену 1 (рис. 3.15, б) и к стойке образует кривошипно-кулисный механизм. Группа четвертого вида (рис. 3.6, г) применяется при образовании кулисно-ползунного (рис. 3.16, а), а группа пятого вида (см. рис. 3.6, д) —

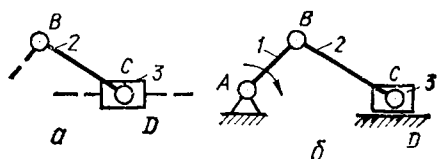
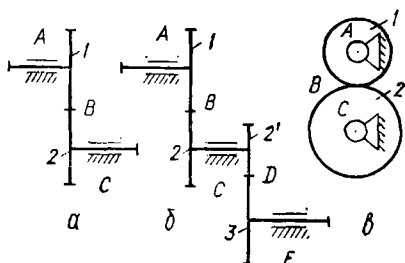


Рис. 3.13. Образование зубчатых механизмов наложением плоских монад

Рис. 3.14. Кривошипно-ползунный механизм

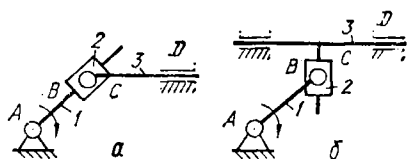
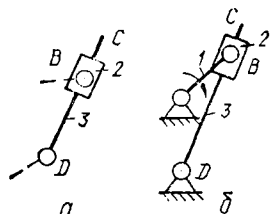


Рис. 3.15. Кривошипно-кулисный механизм

Рис. 3.16. Кулисно-ползунный и кривошипно-кулисный механизмы

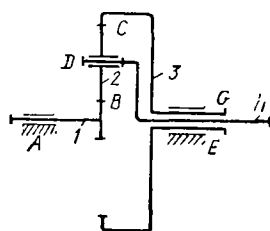
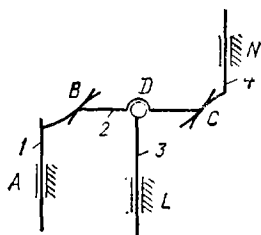


Рис. 3.17. Суммирующий механизм

Рис. 3.18. Дифференциальный зубчатый механизм

кривошипно-кулисного механизма с поступательно движущейся кулисой (рис. 3.16, б).

Присоединением диады (см. рис. 3.8, б) к двум входным звеньям 1 и 4 к стойке получим суммирующий механизм (рис. 3.17), в котором перемещения этих звеньев преобразуются в перемещение выходного звена 3 как сумма величин, равных или пропорциональных перемещениям входных звеньев. Если входное, выходное и звено 2 этой структурной группы — зубчатые колеса, то структурная группа образует плоский дифференциальный зубчатый механизм (рис. 3.18).

### 3.4. Образование механизмов методом инверсии

В зависимости от выбора в кинематической цепи входного звена и стойки получают другие механизмы с измененным характером относительного движения некоторых звеньев. Если в плоской структурной схеме шарнирного четырехзвенника, образованного из плоской замкнутой кинематической цепи, стойкой будет звено 4

Рис. 3.19. Инверсия механизма шарнирного четырехзвенника

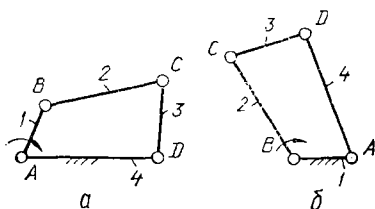


Рис. 3.20. Инверсия кривошипно-ползунного механизма

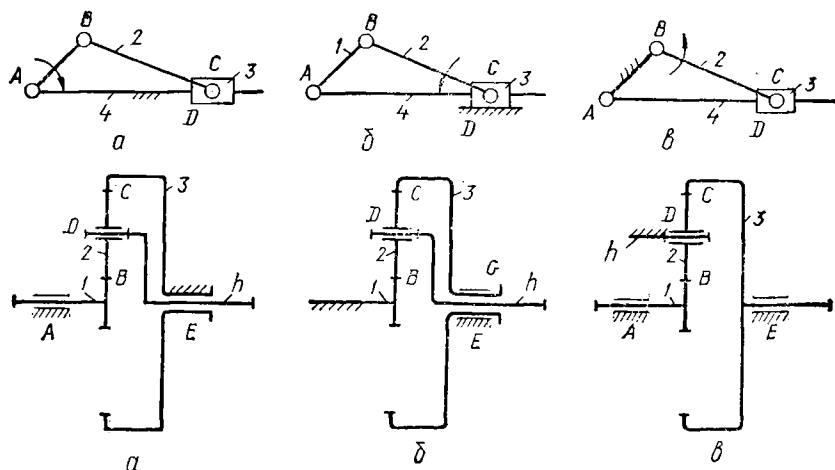


Рис. 3.21. Инверсия зубчатого дифференциала

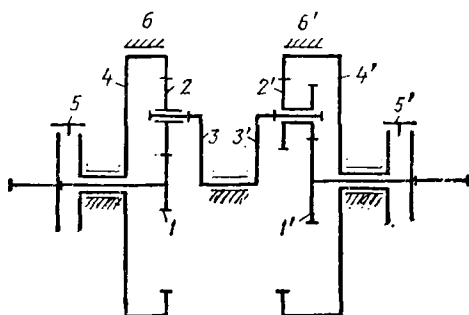


Рис. 3.22. Коробка скоростей

(рис. 3.19, а), то получим *кривошипно-коромысловый* механизм. Если закрепить неподвижно наименьшее звено 1 и сделать входным звено 2, то образуется другой вариант этого механизма — *двухкривошипный* (б). Такой прием получения вариантов механизма и его компоновок путем замены функций одного звена функциями другого

называется инверсией. Использование метода инверсии возможно при соотношениях длин звеньев, определяемых условием существования кривошипа в шарнирном четырехзвеннике (см. гл. 6).

Инверсией кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.20, а) при превращении ползуна 3 в стойку, а звена 2 — во входное получаем механизм с поступательно движущимся звеном 4 (рис. 3.20, б). Этот же механизм превращается в кривошипно-кулисный (рис. 3.20, в), если стойкой сделать звено 1, а входным — звено 2 (звено 4 станет кулисой).

Методом инверсии из дифференциального зубчатого механизма (см. рис. 3.18) получают три различных механизма (рис. 3.21). Так, остановкой звена 3 (рис. 3.21, а) или 1 (рис. 3.21, б) получаем два вида планетарных зубчатых механизма с входным звеном 1 или  $h$  и 3 или  $h$ ; остановкой звена  $h$  — водила — (рис. 3.21, в) получаем рядовой зубчатый механизм. Этот метод используется для синтеза зубчатых механизмов со ступенчато изменяющейся скоростью вращения выходного звена. На рис. 3.22 изображена структурная схема механизма, составленного из одинаковых дифференциальных механизмов, показанных на рис. 3.18. Водила 3 и 3' обоих этих механизмов представляют собой одно звено, входные и выходные звенья — центральные зубчатые колеса 1 и 1'. Механизм снабжен двумя муфтами 5 и 5', которые соединяют попарно звенья 1 и 4, 1' и 4', и двумя тормозами 6 и 6', превращающими звенья 4 и 4' в стойку. Включением муфты 5 и тормоза 6' механизм превращается в планетарный с входным звеном 3', включением муфты 5' и тормоза 6 — в планетарный с выходным звеном 3, включением тормозов 6 и 6' — в двухступенчатый планетарный механизм, а одновременным включением муфт 5 и 5' — в прямую передачу между звеньями 1 и 1'.

### 3.5. Переход от структурной схемы к реальному механизму

Проектирование плоских механизмов начинается с синтеза плоских структурных схем, на которых определяются число звеньев, характер их относительных движений и все кинематические пары 4-го или 5-го класса. Фактически звенья механизма находятся в разных плоскостях, действительные условия работы кинематических пар на плоской структурной схеме не могут быть изучены, и для перехода к реальному механизму необходимо строить пространственную структурную схему. На пространственной схеме можно определить пути обеспечения непересечения звеньев между собой; выявить необходимые изменения элементов кинематических пар с целью обеспечения устойчивой работы механизма и в связи с этим найти соответствующие замены кинематических пар, а также установить меры по сохранению условий существования плоского механизма.

Рассмотрим последовательный переход от плоской к пространственной структурной схеме газораспределительного механизма двигателя внутреннего сгорания (рис. 3.23, а). Входное звено меха-



низма кулачок 1 распределительного вала — взаимодействует с рычагом 2, контактирующим с клапаном 3. При вращении распределительного вала кулачком 1 через рычаг 2 приводится в поступательное движение клапан 3, осуществляющий впуск или выпуск газов. Синтез плоской структурной схемы (рис. 3.23, б) для обеспечения функционального назначения этого механизма может быть

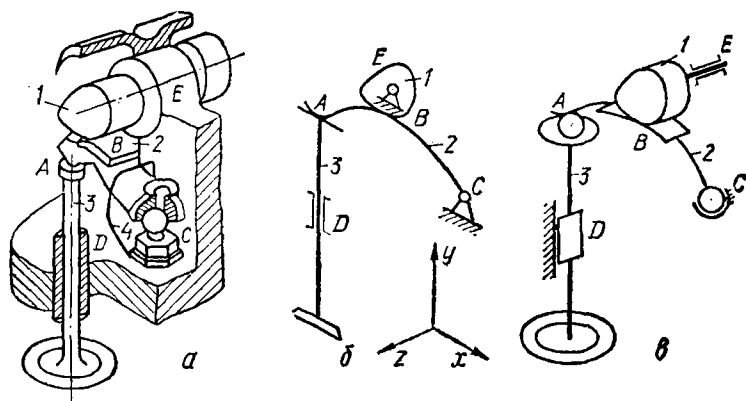


Рис. 3.23. Газораспределительный механизм двигателя внутреннего сгорания

Таблица 3.1. Перемещения, обеспечиваемые кинематическими парами разных классов

Кинематическая пара	Плоская структурная схема		Пространственная структурная схема		Реальный механизм	
	Подвижности	Класс	Подвижности	Класс	Подвижности	Класс
A	$s_x \varphi_z$	4	$s_x s_z \varphi_x \varphi_y \varphi_z$	1	$s_x s_z \varphi_x \varphi_y \varphi_z$	1
B	$s_x \varphi_z$	4	$s_x s_z \varphi_y \varphi_z$	2	$s_x s_z \varphi_y \varphi_z$	2
C	$\varphi_z$	5	$\varphi_x \varphi_z$	4	$\varphi_x \varphi_y \varphi_z$	3
D	$s_y$	5	$s_y$	5	$s_y \varphi_y$	4
E	$\varphi_z$	5	$\varphi_z$	5	$\varphi_z$	5

произведен последовательным присоединением двух плоских монад с вращательной (рис. 3.4, а) и поступательной (см. рис. 3.4, б) кинематическими парами: монады 2 с высшей кинематической парой В 4-го класса и вращательной кинематической парой С 5-го класса и монады 3 с высшей кинематической парой А 4-го класса и поступательной кинематической парой D 5-го класса. Перемещения, обеспечиваемые этими кинематическими парами на плоской структурной схеме, показаны в табл. 3.1. На пространственной схеме механизма (рис. 3.23, в) кинематические пары 4-го класса А и В будут парами 2-го класса, так как в них возможны дополнительные движения: перемещение  $s_z$  вдоль оси z и поворот  $\varphi_y$  относительно оси y.

При условиях, принятых на плоской структурной схеме, необходимо предъявить повышенные требования к точности выполнения осей кинематических пар  $E$  и  $C$  в стойке  $O$  и точного расположения элементов кинематической пары  $B$  относительно этих осей. В противном случае распределение нагрузки вдоль линии контакта в паре  $B$  будет неравномерным, что приведет к быстрому износу элементов этой кинематической пары. Для создания благоприятных условий контакта в кинематической паре  $B$  необходимо придать угловую подвижность  $\varphi_x$  звену 2, заменив вращательную кинематическую пару  $C$  5-го класса кинематической парой  $C$  4-го класса (сферический шарнир с пальцем) (см. табл. 1.2). Этим устраняется связь, налагаемая кинематической парой  $C$  5-го класса. Удаление этой связи позволяет понизить требования к точности изготовления элементов кинематических пар.

Элементы кинематических пар  $E$ ,  $B$  и  $C$  определяют положение звена 2 относительно стойки. Поэтому если кинематическую пару  $A$ , как и кинематическую пару  $B$  2-го класса, выполнить с контактом по линии, то необходимо точно изготовить элементы этой кинематической пары относительно элементов кинематических пар  $D$  и  $B$ . Выполнения этого требования можно избежать, если устранить связь, заменив кинематическую пару  $A$  2-го класса на пару 1-го класса (рис. 3.23, в). В этом случае точечный контакт звеньев 2 и 3 обеспечивает направление усилия взаимодействия этих звеньев вдоль оси кинематической пары  $D$ , что способствует созданию хороших условий работы в этой паре и увеличению долговечности её элементов.

В реальных условиях эксплуатации предусматривают дополнительные относительные перемещения звеньев. Так, для равномерного износа фаски головки клапана по условиям работы (при контакте с седлом) следует допустить его произвольное проворачивание относительно оси. Поэтому в реальном механизме (рис. 2.23, а) кинематическая пара  $D$  выполняется цилиндрической 4-го класса. Возникшая подвижность — поворот клапана 3 относительно своей оси не влияет на определенность относительного поступательного движения звеньев, обеспечивающего функциональное назначение механизма. Для упрощения технологии изготовления и сборки кинематическую пару  $C$  (сферический шарнир с пальцем) целесообразно заменить кинематической парой 3-го класса  $C$  (сферическим шарниром). Однако при этом появляется вращение звена 2 относительно его продольной оси, проходящей через центр пары  $C$ , что нарушает нормальную работу механизма. В данном случае это движение вредно и должно быть устранено (например, введением специальных пружин 4).

### 3.6. Избыточные связи и подвижности

Как было показано выше, структурный синтез реального механизма сопровождается непрерывной оценкой конструктивных схем соединений звеньев. Конструктивная проработка элементов кинематических пар, обеспечивающая необходимую подвижность соедине-

ния, может быть различной, но разные конструкции соединения имеют и различную работоспособность. Это обусловлено тем, что в реальных механизмах из-за неизбежных неточностей изготовления и монтажа, деформаций звеньев при действии эксплуатационных нагрузок и износа поверхностей элементов кинематических пар в процессе эксплуатации появляются *избыточные связи и подвижности*.

Избыточные связи создают дополнительные ограничения на подвижность звеньев механизмов, вследствие чего конструкция становится статически неопределимой. Их удаление не изменяет кинематику звеньев, а приводит лишь к перераспределению усилий в со-

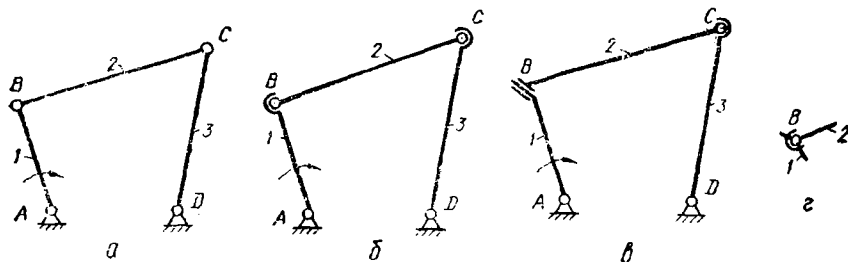


Рис. 3.24. Синтез рационального механизма шарнирного четырехзвенника

единениях, вызывающих дополнительную деформацию звеньев к той которая возникала от действия эксплуатационных усилий. Выявление избыточных связей на стадии структурного синтеза имеет важное практическое значение, так как позволяет правильно выбрать класс кинематических пар, соединяющих звенья механизма, и сделать конструкцию более работоспособной.

На рис. 3.24, а приведена кинематическая схема простейшего плоского четырехзвенного шарнирного механизма с входным звеном 1. Степень подвижности его по формуле (1.2)  $W = 3 \cdot 3 - 2 \times 4 = 1$ . Если из-за неточностей изготовления и монтажа оси шарниров непараллельны, то звенья его двигаются в параллельных плоскостях только при условии их деформации. Если значения деформаций превысят допустимые, то это приведет либо к заклиниванию механизма, либо к преждевременной поломке одного из звеньев. Так как формулы (1.1) и (1.2) не отражают геометрических соотношений между звеньями, то при предотвращении деформаций звеньев формула (1.1) более точно отражает возможность движения звеньев в непараллельных плоскостях. Степень подвижности рассматриваемого механизма по формуле (1.1)  $W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -2$ , что указывает на возможность потери подвижности из-за избыточных связей.

Для выявления избыточных связей формулы (1.1) и (1.2) преобразуют к виду

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 + q; \quad (3.1)$$

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 + q, \quad (3.2)$$

где  $q$  — число избыточных связей и подвижностей.

Для пространственного механизма получим

$$q = W + 5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1 - 6n; \quad (3.3)$$

для плоского —

$$q = W + 2p_5 + p_4 - 3n. \quad (3.4)$$

Если  $q > 0$ , то механизм имеет избыточные связи, если  $q < 0$ , то — избыточные подвижности.

Для механизма на рис. 3.24, а по формуле (3.3) получим  $q = 1 + 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 3$ , что говорит о трех избыточных связях. Исходя из непараллельности осей шарниров как условия пространственного характера кинематики его звеньев, заменим пары 5-го класса В, С на пары 3-го класса (сферические шарниры) (рис. 3.24, б). При этом получим  $q = 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = -1$ . Результат говорит о появлении избыточной подвижности, что проявляется в возможности свободного вращения звена 2 вокруг своей оси. Если по каким-либо причинам проворачиваемость звена 2 нежелательна, то ее можно избежать, применив вместо пары В или С 3-го класса цилиндрическую кинематическую пару 4-го класса (рис. 3.24, в) или сферическую с пальцем (рис. 3.24, г).

Из рассмотренного примера можно сделать следующие выводы. Для удаления избыточной связи понижается класс соответствующей кинематической пары, принятой в плоской схеме. Опираясь на пространственную структурную схему, проектируется реальный механизм, в котором небольшие смещения относительного положения звеньев и элементов кинематических пар, вызванные неточностью изготовления или деформациями звеньев под нагрузкой, не влияют на его нормальную работу. Механизмы, в которых удалено большинство избыточных связей, называются *рациональными*. В некоторых случаях, наоборот, целесообразно вводить избыточные связи, например, для увеличения жесткости или распределения нагрузки на несколько потоков.

Избыточная подвижность появляется при замене соответствующей кинематической пары парой более низкого класса; в зависимости от конкретных условий она может быть вредной или полезной. Избыточные подвижности появляются в реальных механизмах в результате синтеза структурных схем при введении в них дополнительных звеньев, не влияющих на относительное движение выходного звена, но, в частности, снижающих износ высших кинематических пар и улучшающих эксплуатационные характеристики механизма или способствующих лучшему распределению давлений.

## 4. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

### 4.1. Задачи структурного анализа

Анализ структурных схем механизмов позволяет определить количество звеньев, число и класс кинематических пар, соединяющих их в кинематические цепи, функциональное назначение кинематических соединений и дать сравнительную характеристику механизмам,

выполняющим одни и те же функции, еще на этапе выбора их структуры. По структурной схеме механизма определяют наличие избыточных связей или подвижностей. Пользуясь методами структурного анализа, можно преобразовать структурную схему, удалив звенья, изменив класс кинематических пар, вносящих избыточные связи и подвижности, произвести замену высших кинематических пар кинематическими соединениями с низшими кинематическими парами. Эти преобразования представляют анализируемый механизм в виде совокупности статически определимых структурных групп с низшими кинематическими парами, присоединенных к входным звеньям механизма, и свести задачу кинематического и динамического анализа к использованию набора соответствующих операторных функций, разработанных для этих структурных групп.

Этой же цели служит структурная классификация механизмов, предложенная для плоских механизмов с кинематическими парами 5-го класса И. И. Артоболовским. Согласно этой классификации механизмы объединяются в классы от 1-го и выше по наивысшему классу структурной группы, входящей в механизм. Следовательно, **класс механизма определяется в результате его структурного анализа.**

#### 4.2. Определение класса механизма

Структурный анализ выполняется в порядке, обратном синтезу. Так как структурная схема механизма формируется последовательным присоединением структурных групп к входным звеньям, то их выделение из структурной схемы начинается с групп, в которые входят выходные звенья. При этом подсчитывают степень подвижности оставшейся части механизма, которая должна равняться степени подвижности исходного механизма, и проверяют, не распалась ли кинематическая цепь на не связанные между собой части. После выделения всех структурных групп остаются механизмы 1 класса — *стойка и входные звенья.*

Рассмотрим процесс структурного анализа рычажного механизма на примере механизма для формовки керамических изделий (рис. 4.1, а). Выходным звеном механизма является звено 5, связанное с кулисой 3 кинематической парой  $D$ , а со стойкой — кинематической парой  $E$ . Выделить эти звенья в двухзвенную структурную группу нельзя, так как в этом случае разрывается кинематическая цепь: звено 4 не связывается с входным звеном, звенья 4 и 2 получают подвижность. По той же причине не выделяются в двухзвенную группу звенья 4 и 3. Следовательно, выделяют только группу 2—3—4—5 (рис. 4.1, б). Степень подвижности ее при присоединении к стойке  $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$ . Звено 3 образует контур с кинематическими парами  $C$ ,  $F$ ,  $D$ , следовательно, это структурная группа 3-го класса. Весь механизм будет также 3-го класса.

Проведем структурный анализ этого механизма, если входным звеном будет звено 4 (рис. 4.2, а). Звено 1 со звеном 2 образуют двухзвенную группу 2-го класса второго вида (рис. 4.2, б). Степень

подвижности оставшейся кинематической цепи из звеньев 4—3—5  $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$ . Следующая двухзвенная группа (звенья 5 и 3) также является группой 2-го класса. Следовательно, весь механизм в этом случае является механизмом 2-го класса.

Из проведенного анализа следует, что класс структурных групп и механизма зависит от выбора входного звена при неизменной кинематике звеньев. Так как методы кинематического и динамического

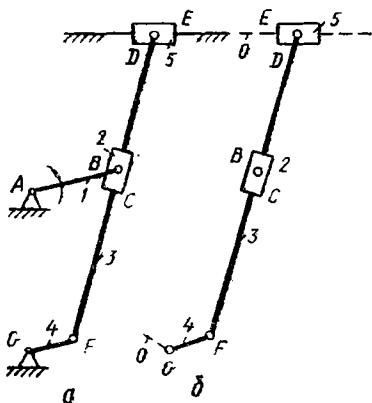


Рис. 4.1. Механизм для формовки керамических изделий

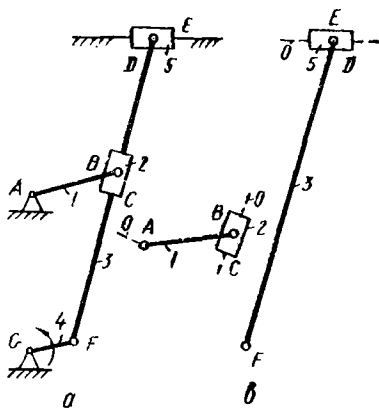


Рис. 4.2. Механизм для формовки керамических изделий с измененным входным звеном

исследований проще для механизмов более низких классов, то иногда при структурном анализе целесообразно принять за входное такое звено, при котором понижается класс механизма. Это позволяет применить для расчета более простые алгоритмы и операторные функции.

Для использования более простых алгоритмов расчета механизмов с высшими кинематическими парами производятся структурные преобразования в группах с высшими парами путем замены их структурно и кинематически эквивалентными кинематическими цепями с низшими кинематическими парами.

### 4.3. Структурные преобразования путем замены высших кинематических пар цепями с низшими парами

Рассмотрим плоскую структурную схему трехзвенного механизма (рис. 4.3, а), состоящего из звеньев 1 и 2, образующих между собой высшую кинематическую пару  $K$  4-го класса и со стойкой  $O$  вращательные кинематические пары  $A$  и  $D$  5-го класса. Кинематическую пару  $K$  можно заменить одним звеном, присоединенным к звеньям 1 и 2 кинематическими парами 5-го класса. Вид и расположение этих кинематических пар зависят от элементов высшей кинематической пары. Для того чтобы замена была структурно и кинематически эквивалентной, проводим общую нормаль  $n - n$  к соприка-

сающимися профилям в точке  $K$ , ставим на ней точки  $B$  и  $C$ , являющиеся центрами кривизны этих профилей в рассматриваемом положении механизма. Заменяющее кинематическую пару  $K$  звено  $3$  располагается по общей нормали  $n-n$ , а центры вращательных кинематических пар, которыми она присоединяется к звеньям  $1$  и  $2$ , должны совпадать с точками  $B$  и  $C$ . Если одно из звеньев будет иметь прямолинейный профиль (рис. 4.3, б), то центр его кривизны расположен в бесконечности, и звено  $3$  будет с поступательной кинематической парой, имея в качестве ее элемента направляющую для прямолинейного движения.

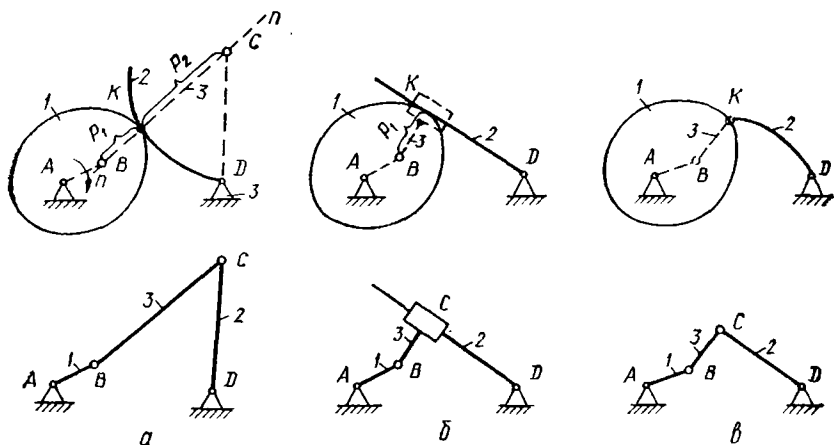


Рис. 4.3. Замена высших кинематических пар цепями с низшими кинематическими парами

матической парой, имея в качестве ее элемента направляющую для прямолинейного движения.

Полученные заменяющие механизмы — шарнирные четырехзвенники (рис. 4.3, а, в) и кривошипно-кулисный (рис. 4.3, б) — кинематически эквивалентны заменяемому механизму только в данном зафиксированном положении входного звена. При изменении его положения меняются размеры звеньев заменяющей кинематической цепи. После замены высших кинематических пар механизмов для данного расположения входного звена при кинематических и динамических расчетах используют алгоритмы для шарнирно-рычажных механизмов.

#### 4.4. Анализ связей, налагаемых кинематическими парами

Анализ плоских структурных схем позволяет определить число звеньев, число кинематических пар, характер относительного движения входных и выходных звеньев и их число, равное числу степеней свободы механизма. На плоской структурной схеме нельзя выявить избыточные связи, налагаемые элементами кинематических пар, так как все кинематические пары на ней эквивалентны только кинематическим парам 4-го и 5-го классов. Однако это свойство плоских структурных схем позволяет выявлять звенья, налагающие избыточные связи, или звенья с избыточными подвижностями.

Звенья, налагающие избыточные связи, — это промежуточные звенья, выполняющие одни и те же функции. При удалении одного из них движение выходных звеньев не изменяется. Примером может служить шарнирный четырехзвенный механизм (рис. 4.4, а). Здесь звено 2 (или звено 4) налагает избыточные связи. Однако для нормального функционирования такого механизма необходимо, чтобы выполнялись равенства, обусловленные наличием избыточных свя-

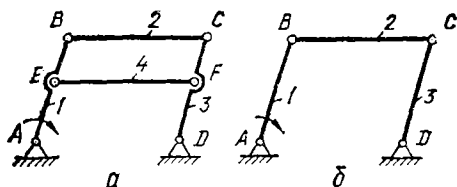


Рис. 4.4. Шарнирный механизм со звеном, налагающим избыточные связи

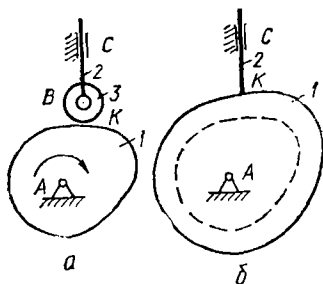


Рис. 4.5. Кулачковый механизм с роликом

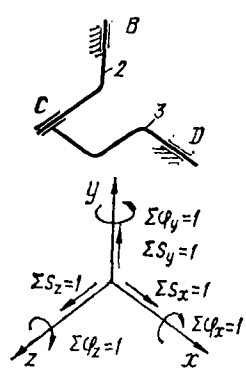


Рис. 4.6. Подвижности в замкнутом контуре, образованном структурной группой

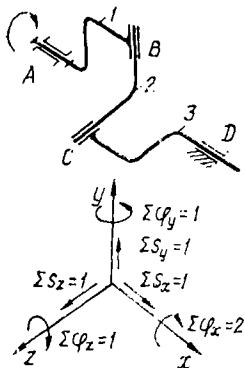


Рис. 4.7. Подвижности в замкнутом контуре четырехзвенного шарнирного механизма

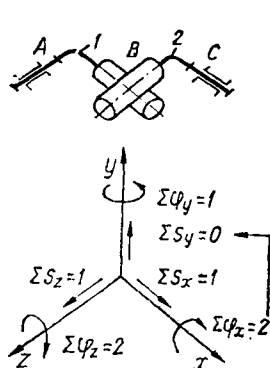


Рис. 4.8. Подвижности в замкнутом контуре поводкового механизма

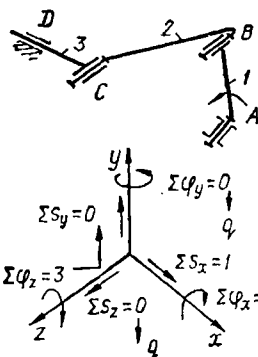


Рис. 4.9. Анализ подвижностей кривошипно-ползунного механизма

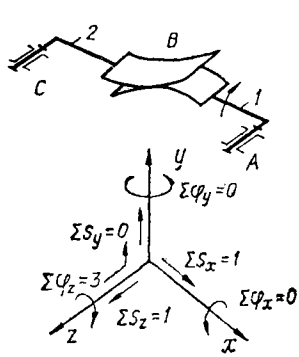


Рис. 4.10. Анализ подвижностей зубчатого механизма



зей  $L_{AD} = L_{EF} = L_{BC}$ . При нарушении этого условия движение механизма невозможно ( $W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$ ).

Задача силового анализа такого механизма статически неопределима, поэтому для возможности использования уравнений статики при решении задач силового анализа звено 2 (или звено 4) удаляют и переходят к кинематически эквивалентной схеме (рис. 4.4, б).

Звенья, движение которых не влияет на движение выходного звена, вносят избыточную подвижность. Примером служит звено 3 — ролик в кулачковом механизме (рис. 4.5, а):  $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$ . Такие ролики применяются в механизмах для замены в кинематических парах трения скольжения на трение качения. Такой механизм для решения задач кинематического анализа заменяют кинематически эквивалентным ему механизмом с острым толкателем, а действительный профиль входного звена заменяют эквидистантным ему (рис. 4.5, б).

Для определения метода, позволяющего выявить избыточные связи, проанализируем подвижности в замкнутом контуре, образованном структурной группой 2 и 3, присоединенной парами  $B$  и  $D$  к стойке (рис. 4.6). Этот замкнутый контур представляет собой кинематическую цепь со степенью подвижности  $W = 6 \cdot 2 - 4 \times 3 = 0$ . Анализ возможных перемещений показывает, что кинематические пары  $C$ ,  $B$  и  $D$  обеспечивают шесть подвижностей относительно неподвижной системы координат. В рассматриваемом замкнутом контуре эти подвижности в кинематических парах компенсируют возможные неточности изготовления и деформации звеньев. При присоединении структурной группы к входному звену 1 и к стойке (рис. 4.7) получаем механизм с числом подвижностей в кинематических парах  $6 + 1$ . Подсчет по формуле (3.3) показывает, что число избыточных связей в этом механизме  $q = 1 + 5 \times 1 + 4 \cdot 3 - 6 \cdot 3 = 0$ .

Следовательно, если в присоединяемой кинематической цепи при образовании механизма возможны шесть перемещений относительно координатных осей, то с учетом степеней свободы кинематических пар, которые составляют входные звенья со стойкой, в механизме отсутствуют избыточные связи. Отсутствие какой-либо из шести подвижностей указывает на наличие избыточной связи, кроме случаев, когда отсутствие подвижности относительно какой-либо из осей компенсируется угловой подвижностью относительно перпендикулярной оси. Примером служит рациональный поводковый механизм на рис. 4.8. Анализ подвижностей в замкнутом контуре этого механизма показывает, что  $\sum s_y = 0$  при  $\sum \varphi_x = 2$ . Отсутствие одной подвижности  $s_y$  компенсируется угловой подвижностью  $\varphi_x$ , так как оси  $x$  и  $y$  перпендикулярны. Действительно, если по какой-либо причине кинематическая пара  $C$  сместится вдоль оси  $y$ , то это смещение может быть компенсировано поворотом звена 2 относительно оси  $x$ . Однако смещение кинематической пары  $C$  вдоль оси  $y$  нельзя компенсировать поворотом звена 2 относительно этой же с.с.и. Поэтому недостаток линейной подвижности относительно

какой-либо оси компенсируется угловой подвижностью относительно любой другой оси.

Применение этих положений рассматривают при структурном анализе кривошипно-ползунного механизма (рис. 4.9). Анализ подвижностей в замкнутом контуре этого механизма показывает отсутствие подвижностей  $s_y, s_z, \varphi_y$ . Отсутствие одной подвижности  $s_y$  компенсируется угловой подвижностью  $\varphi_z$ , а одна подвижность  $\varphi_z$  является подвижностью входного звена относительно стойки. Следовательно, в механизме имеются две избыточные связи ( $q = 2$ ): отсутствие одной подвижности  $s_z$  и одной подвижности  $\varphi_y$ .

Структурный анализ зубчатого механизма на рис. 4.10 показывает наличие двух избыточных связей: отсутствие одной угловой подвижности  $\varphi_x$  и одной угловой подвижности  $\varphi_y$ , так как отсутствие линейной подвижности  $s_y$  компенсируется поворотом звена 2 вокруг оси  $z$ .

Раздел второй.

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

### 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МЕХАНИЗМОВ

#### 5.1. Операторные функции и базовые алгоритмы

Алгоритм решения задач теории механизмов и машин основывается на алгоритмах решений частных задач механики или математики, например, решения векторных и дифференциальных уравнений, вычисления интегралов и т. п. Такие алгоритмы можно считать *базовыми*. Для описания базовых алгоритмов может быть использовано понятие *операторной функции*:

$$\Phi(z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n; y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m). \quad (5.1)$$

где  $\Phi$  — *идентификатор функции*, позволяющий отличить ее от функций других наименований (обычно записывается так, чтобы наименование характеризовало назначение алгоритма);  $z_i$  — *входные параметры* операторной функции, которые задаются при обращении к ней;  $y_j$  — *выходные параметры* операторной функции, значения которых определяются в результате действий над параметрами.

**Операторные функции используют для упрощения и формализации алгоритмов.** При разработке их для решения инженерных задач при переходе к следующей по порядку зависимости используются только результаты предыдущего расчета, а функциональное описание процесса, которое этот расчет реализовал, зачастую не имеет значения. В этих случаях удобно обозначать зависимости, их совокупности или реализующие их алгоритмы идентификаторами с указанием только входных и выходных параметров, т. е. **операторными функциями**.

Операторная функция составляется для любой последовательности логических и математических действий. Разберем ее составление на примере решения квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (5.2)$$

которое имеет корни

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a = (-b \pm \sqrt{D})/2a.$$

Если уравнение (5.2) действительно, то в зависимости от значения  $D = b^2 - 4ac$  его корни либо действительные различные, либо действительные равные, либо комплексные сопряженные. На рис. 5.1 приведена блок-схема решения уравнения (5.2), которая реализуется операторной функцией

$$KVDRTU(a, b, c; x_1, x_2, i), \quad (5.3)$$

где  $x_1, x_2$  — значения корней уравнения;  $i = 0$  — для действительных корней;  $i = \sqrt{-1}$  — для комплексных корней.

Функция (5.3) реализует все действия блок-схемы алгоритма решения квадратного уравнения. При обращении к операторной функции вместо параметров  $a, b, c$  можно применять их цифровые значения. Например, выражение  $KVDRTU(-2, 5, 14; x_1, x_2, i)$  обозначает обращение к алгоритму решения уравнения  $-2x^2 + 5x + 14 = 0$ . Операторная функция включает в себя другие операторные функции в качестве параметров. Обозначения переменных  $z_i, y_j$  могут быть произвольными — в зависимости от требуемых по смыслу решаемых задач.

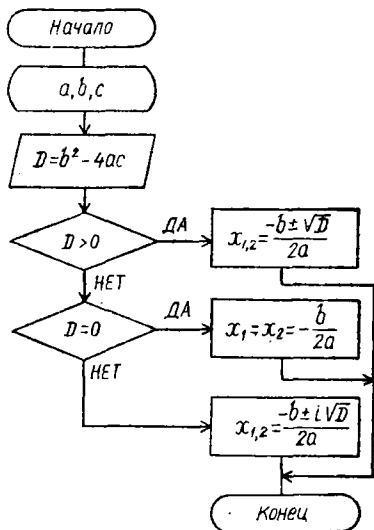


Рис. 5.1. Блок-схема решения уравнения

## 5.2. Операторная функция, реализующая базовые алгоритмы решения систем линейных уравнений

При численном решении векторных уравнений задача сводится к решению системы  $n$  линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &= c_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n &= c_2; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kj}x_j + \dots + a_{kn}x_n &= c_k; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n &= c_n. \end{aligned} \right\}$$

Корни системы определяются из выражения

$$x_j = D_j/D;$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1j}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \dots, & a_{kj}, & \dots, & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nj}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где  $D$  — определитель системы, неравный нулю;  $D_j$  — определитель, получаемый из определителя  $D$  заменой  $j$ -го столбца на столбец свободных членов.

Алгоритм решения системы включает составление определителей  $D$  и  $D_j$  и вычисление корней  $x_j$ . Весь объем действий реализуется операторной функцией

$$\text{СИСТЕМА } N, A(N, N), C(N); x(N), \quad (5.4)$$

где  $N$  — переменная, определяющая порядок системы линейных уравнений;  $A(N, N)$  — двумерный массив коэффициентов при неизвестных, формирующий определитель  $D$ ;  $C(N)$ ,  $x(N)$  — одномерные массивы чисел столбика свободных членов и корней системы, получаемых после ее решения.

### 5.3. Операторные функции, реализующие базовые алгоритмы численного интегрирования и дифференцирования

При решении ряда задач теории механизмов требуется интегрировать функции. Если функция задана в виде графика или таблично, то применяют численные методы интегрирования. Численное интегрирование основано на геометрической интерпретации определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

представляющего собой площадь подынтегральной функции.

При неизвестном характере функции  $f(x)$ , соответствующей большинству случаев применения численного интегрирования, ее заменяют некоторым многочленом, т. е. аппроксимируют функцию выражением, удобным для вычисления определенного интеграла.

Если функция задана в виде графика (рис. 5.2) или таблично, то задача ее численного интегрирования заключается в нахождении площади под ломаной, соединяющей узловые точки. В простейшем случае под кривой на участке  $ab$  площадь будет

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta x y_i, \quad (5.5)$$

а значение интеграла в  $i$ -й точке

$$J_i = J_{i-1} + \Delta x y_i,$$

где  $\Delta x$  — расстояние между точками  $x_i$  в случае деления участка  $ab$  на  $n$  одинаковых отрезков.

Использование выражения (5.5) приводит к погрешности, зависящей от того, площадь какого прямоугольника аппроксимирует площадь под кривой на участке  $\Delta x$ . Для уменьшения погрешности необходимо уменьшать шаг интегрирования, т. е. увеличивать число отрезков  $n$ . Более точны способы, основанные на замене кривой на отдельных участках *хордами* (рис. 5.3) или *аппроксимирующими кривыми*, например участками *парабол* (рис. 5.4):

$$A_{x_{i-1}, x_i} = 0,5\Delta x \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i); \quad J_i = J_{i-1} + 0,5\Delta x (y_{i-1} + y_i); \quad (5.6)$$

$$A_{x_{i-1}, x_{i+1}} = (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) \Delta x / 3;$$

$$J_i = J_{i-1} + (y_{i-2} + 4y_{i-1} + y_i) \Delta x / 3. \quad (5.7)$$

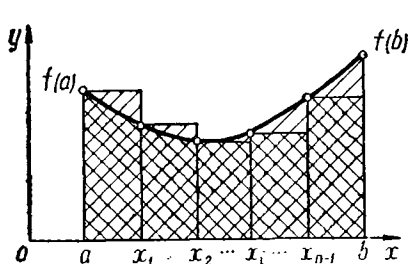


Рис. 5.2. К задаче о численном интегрировании

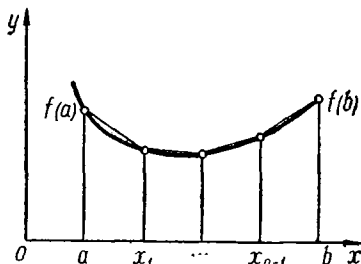


Рис. 5.3. Замена участков исходного графика хордами

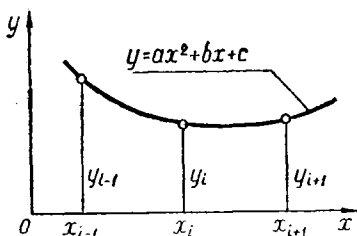


Рис. 5.4. Замена участков графика параболами

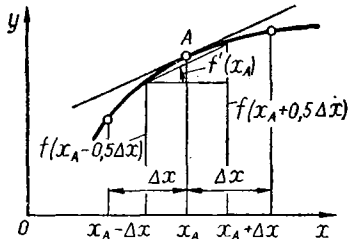


Рис. 5.5. Графическое представление дифференцирования

Формулы (5.7) дают результаты значительно точнее формул (5.6) при интегрировании функций второго и третьего порядков. Для всех трех способов (прямоугольников, хорд и кривых) значения интеграла для первой точки равны нулю, а при использовании зависимостей (5.7) значение интеграла для второй точки вычисляется *способом хорд*. Алгоритм численного интегрирования рассмотренными способами описывается операторной функцией

$$INTGR(n, \Delta x, NOMER, y, J), \quad (5.8)$$

где число участков  $n = 2m$ ,  $2m$  — четное число участков;  $y$  — наименование интегрируемого массива;  $J$  — наименование массива интегральных значений;  $NOMER$  — числовое значение управляю-

щего параметра, в соответствии с которым применяется один из приведенных способов численного интегрирования, например, для текста  $NOMER = 1, 2, 3$  соответственно для зависимостей (5.5), (5.6), (5.7).

Численное дифференцирование функций применяется при табличном либо численном способе задания функции. Производная функция  $f'(x_A)$  для произвольного значения аргумента точки  $A$  определится из зависимости (рис. 5.5)

$$f'(x_A) = (f(x + 0,5\Delta x) - f(x - 0,5\Delta x))/\Delta x, \quad (5.9)$$

где  $\Delta x$  — шаг дифференцирования.

Алгоритм численного дифференцирования описывается операторной функцией

$$DFRNCL(n, \Delta x, y; y'), \quad (5.10)$$

где  $n$  — число узловых точек;  $\Delta x$  — шаг дифференцирования;  $y$  и  $y'$  — наименование массивов числовых значений первообразной и производной функций.

Из формулы (5.9) следует, что значение производной функции вычисляется для середины участка значений аргумента. Значение производной функции для других точек в пределах данного промежутка определяется *интерполяцией*. При численном дифференцировании производная функция определяется с гораздо меньшей точностью, чем заданная первообразная. При этом, в отличие от численного интегрирования, уменьшение шага дифференцирования ведет к увеличению погрешности. Поэтому для сложной функции более целесообразно определять производную, подбирая аппроксимирующий многочлен и применяя аналитические методы.

#### 5.4. Действия с векторными величинами

В плоской и в пространственных системах координат вектор  $\vec{l}$  определяется произведением его алгебраического значения — модуля  $l$  и орта  $\vec{e}$ . Если проекции вектора  $\vec{l}$  на оси системы координат обозначить  $l_x, l_y, l_z$  (рис. 5.6), проекции орта  $\vec{e}$  на те же оси  $e_x, e_y, e_z$ , орты осей координат обозначить  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , то получим

$$\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}; \quad \vec{e} = e_x \vec{i} + e_y \vec{j} + e_z \vec{k}.$$

Так как проекции орта на координатные оси являются его направляющими косинусами, то

$$\vec{e} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma. \quad (5.11)$$

Направляющие косинусы любого вектора выражаются в виде скалярных произведений его орта и ортов соответствующих осей координат:

$$\cos \alpha = \vec{e} \cdot \vec{i}; \quad \cos \beta = \vec{e} \cdot \vec{j}; \quad \cos \gamma = \vec{e} \cdot \vec{k}, \quad (5.12)$$

а косинус угла между векторами  $\vec{l}$  и  $\vec{R}$  — в виде скалярного произведения их ортов  $\vec{e}$  и  $\vec{r}$ :

$$\cos(\vec{l}, \vec{R}) = \vec{e} \cdot \vec{r} = e_x r_x + e_y r_y + e_z r_z.$$

Следует иметь в виду, что скалярные произведения ортов  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ ;  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ , а векторные произведения ортов  $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$ ;  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ;  $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ ;  $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ .

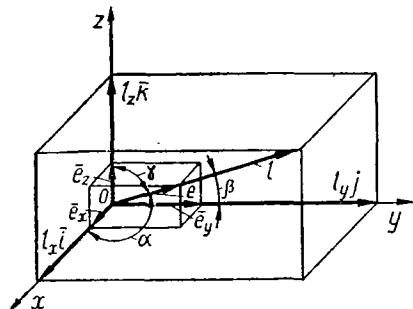


Рис. 5.6. Вектор в координатной системе

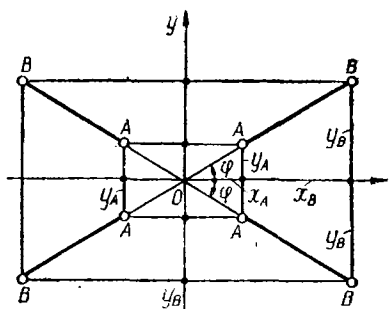


Рис. 5.7. Определение положения линии действия вектора

Направление перпендикуляра к плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{l}$  и  $\vec{R}$ , определится из формулы для векторного произведения

$$\vec{S} = \vec{l} \times \vec{R} = IR \sin(\vec{l}, \vec{R})$$

по направлению орта вектора  $s$ :

$$\vec{s} = (\vec{e} \times \vec{r}) / \sin(\vec{l}, \vec{R}).$$

Если направление одного вектора задано ортами в двух координатных системах  $Oxyz$  и  $O'x'y'z'$ :

$$e = e_x \vec{i} + e_y \vec{j} + e_z \vec{k};$$

$$e' = e'_x \vec{i}' + e'_y \vec{j}' + e'_z \vec{k}',$$

то проекции  $e_x, e_y, e_z$  орта в первой координатной системе связываются с проекциями во второй системе следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= e'_x \vec{i}' \cdot \vec{i} + e'_y \vec{j}' \cdot \vec{i} + e'_z \vec{k}' \cdot \vec{i}; \\ e_y &= e'_x \vec{i}' \cdot \vec{j} + e'_y \vec{j}' \cdot \vec{j} + e'_z \vec{k}' \cdot \vec{j}; \\ e_z &= e'_x \vec{i}' \cdot \vec{k} + e'_y \vec{j}' \cdot \vec{k} + e'_z \vec{k}' \cdot \vec{k}. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Часто приходится определять направляющие углы векторов в виде функций по их проекциям в зависимости от значений каких-либо параметров. В ряде случаев в качестве вектора рассматривается направленный отрезок, например звено механизма, для которого известны координаты двух его точек — начала  $A$  и конца  $B$

(рис. 5.7). Тогда положение линии действия отрезка  $\overline{AB}$  определится углом

$$\varphi = \operatorname{arctg} [(y_B - y_A)/(x_B - x_A)].$$

Эта зависимость не всегда удобна, так как в ней не учитывается, какая точка является началом отрезка, какая концом, и, следовательно, угол получается как положительным, так и отрицательным. Направляющий угол вектора  $\overline{AB}$ , как существенно положительная величина, определяется из зависимости

$$\varphi_{AB} = \begin{cases} \varphi, & (y_B - y_A) \geq 0; \\ \varphi + \pi, & (y_B - y_A) < 0; \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} \varphi \\ \varphi + \pi \end{matrix}} \right\} \varphi \geq 0; \quad (5.14)$$

$$\begin{cases} \varphi + \pi, & (y_B - y_A) > 0; \\ \varphi + 2\pi, & (y_B - y_A) < 0. \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} \varphi + \pi \\ \varphi + 2\pi \end{matrix}} \right\} \varphi < 0.$$

Выражение (5.14) может быть реализовано операторной функцией

$$UGL1(y_A, y_B, \varphi; \varphi_{AB}), \quad (5.15)$$

где  $y_A$  и  $y_B$  — ординаты начала и конца направленного отрезка;  $\varphi$  — угол наклона к оси абсцисс линии направленного отрезка.

Операторная функция для направляющего угла отрезка может быть составлена и по координатам точек его начала и конца:

$$UGL2(x_A, y_A, x_B, y_B; \varphi_{AB}) = \operatorname{sign}(y_B - y_A) \operatorname{arccos}((x_B - x_A)/l_{AB}), \quad (5.16)$$

где  $x_A, y_A$  и  $x_B, y_B$  — координаты точек начала и конца направленного отрезка длиной  $l_{AB}$ ;  $\operatorname{sign}$  — обозначение функции присвоения знака.

Направляющий угол вектора принимает разные значения в зависимости от параметров. Например, линия действия вектора скорости точки при ее движении по окружности перпендикулярна радиусу, но направление вектора по линии его действия зависит от знака угловой скорости звена, на котором расположена точка. Алгоритм определения направляющего угла  $\Psi$  вектора для подобных случаев реализуется операторной функцией

$$UGL3(\varphi, \alpha, v; \Psi) = \varphi + \operatorname{sign}(v) \alpha, \quad (5.17)$$

где  $\varphi$  — угол, относительно которого отсчитывается угол  $\Psi$ ;  $v$  — параметр, определяющий знак угла  $\alpha$ .

В некоторых задачах, например при определении реакций в кинематических парах, предварительно принятое направление вектора на линии его действия в зависимости от результата решения изменяется на противоположное. В этом случае алгоритм определения направляющего угла выражается зависимостью

$$UGL4(\varphi, \alpha, v; \Psi) = \begin{cases} \varphi, & v \geq 0; \\ \varphi + \alpha, & v < 0, \end{cases} \quad (5.18)$$



где  $\Psi$  — угол, определяющий направление вектора;  $v$  — параметр, определяющий необходимость изменения значения направляющего угла на  $\alpha$ .

Иногда удобным является определение направляющего угла вектора по его проекциям на координатные оси. В этих случаях алгоритм реализуется операторной функцией

$$UGL5(l_x, l_y; \Psi) = \begin{cases} \arctg(l_y/l_x), & l_x \geq 0; \\ \pi + \arctg(l_y/l_x), & l_x < 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

При решении задач механики часто приходится суммировать векторы. Алгоритм определения величины и направления вектора  $\bar{l}$  суммы двух других векторов  $\bar{l}_1$  и  $\bar{l}_2$  реализуется операторной функцией

$$SMVKT(l_1, \varphi_1, l_2, \varphi_2; l, \varphi), \quad (5.20)$$

описывающей следующие действия над величинами векторов  $\bar{l}_1$  и  $\bar{l}_2$  и их направляющими углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2; \quad l_x = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2; \quad l_y = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2;$$

$$UGL5(l_x, l_y; \varphi); \quad l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}.$$

При графической интерпретации функции (5.20) выполняются построения, соответствующие «правилу параллелограмма».

### 5.5. Матричная форма записи векторных соотношений

При исследовании многосвязных плоских и пространственных механизмов векторные преобразования становятся сложными, а вычисления громоздкими. Удобно эти вычисления выполнять с помощью матриц, под которыми понимают таблицы чисел, расположенные строками и столбцами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В матрице, содержащей  $m$  строк и  $n$  столбцов, произведение  $m \times n$  обозначает **порядок матрицы**. Если  $m = n$ , то матрица называется *квадратной*. Если  $n$  либо  $m$  равны единице, то получаем соответственно *столбцевую*

$$B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix},$$

или *строчную*

$$C = \| a_1, a_2, \dots, a_n \|$$

матрицы.

Над матрицами можно выполнять действия *транспонирования, сложения, умножения*. Матрица  $A'$ , транспонированная по отношению к матрице  $A$ , образуется из матрицы  $A$  заменой каждой ее строки на столбец того же номера. Например, при транспонировании матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 & 12 \\ 3 & 20 & 17 & 5 \\ 9 & 14 & 20 & 7 \end{vmatrix}$$

получим матрицу

$$A' = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 5 & 20 & 14 \\ 7 & 17 & 20 \\ 12 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Суммой двух матриц  $V$  и  $W$  одинакового порядка называется третья матрица  $U = V + W$  того же порядка, каждый элемент строки  $i$  и столбца  $k$  которой равен сумме соответствующих элементов обеих матриц  $U_{ik} = V_{ik} + W_{ik}$ . При сложении матриц справедливы *переместительные* и *сочетательные законы*.

Матрица умножается на *скалярную величину*. В этом случае на скаляр умножаются все элементы матрицы. Две матрицы перемножаются, если число столбцов одной матрицы равно числу строк второй матрицы. Если матрица  $A$  имеет порядок  $m \times n$ , а матрица  $B$  —  $n \times q$ , то их произведение определяет матрицу  $C = A \cdot B$ , порядок которой равен  $m \times q$ . Элемент матрицы  $C$  определится по правилу

$$C_{ik} = \sum_{l=1}^n A_{il} B_{lk},$$

где  $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, q$ .

Например, при умножении матрицы  $A$  из примера транспонирования на матрицу

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \\ 12 & 7 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}$$

получим матрицу

$$F = \begin{vmatrix} 144 & 208 \\ 420 & 251 \\ 440 & 302 \end{vmatrix}.$$

Для матриц не соблюдается *переместительный закон умножения*, т. е.  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , но соблюдается *сочетательный*:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C; \quad A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Матричная форма записи позволяет значительно упростить запись соотношений между величинами. Например, соотношение (5.13) записывается матричным способом, если ввести в рассмотре-



## 5.6. Преобразования координат

При определении траекторий точек механизмов, их скоростей и ускорений удобно использовать несколько координатных систем, последовательно определяя в них координаты точек механизма. Для вычислений координат точек в одной координатной системе по их координатам в других системах (рис. 5.8) используют известные из векторной алгебры и аналитической геометрии зависимости:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \cos(\widehat{\bar{x}_i, \bar{x}_j}) \cdot x_j + \cos(\widehat{\bar{x}_i, \bar{y}_j}) \cdot y_j + \cos(\widehat{\bar{x}_i, \bar{z}_j}) z_j + a_i; \\ y_i &= \cos(\widehat{\bar{y}_i, \bar{x}_j}) \cdot x_j + \cos(\widehat{\bar{y}_i, \bar{y}_j}) \cdot y_j + \cos(\widehat{\bar{y}_i, \bar{z}_j}) z_j + b_i; \\ z_i &= \cos(\widehat{\bar{z}_i, \bar{x}_j}) \cdot x_j + \cos(\widehat{\bar{z}_i, \bar{y}_j}) \cdot y_j + \cos(\widehat{\bar{z}_i, \bar{z}_j}) z_j + c_i, \end{aligned} \right\} (5.23)$$

или в матричном виде

$$\bar{r}_i = M_{ij} \bar{r}_j, \quad (5.24)$$

где

$$\begin{aligned} r_i &= \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{vmatrix}; & r_j &= \begin{vmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{vmatrix}; \\ M_{ij} &= \begin{vmatrix} \cos(\widehat{\bar{x}_i, \bar{x}_j}) & \cos(\widehat{\bar{x}_i, \bar{y}_j}) & \cos(\widehat{\bar{x}_i, \bar{z}_j}) & a_i \\ \cos(\widehat{\bar{y}_i, \bar{x}_j}) & \cos(\widehat{\bar{y}_i, \bar{y}_j}) & \cos(\widehat{\bar{y}_i, \bar{z}_j}) & b_i \\ \cos(\widehat{\bar{z}_i, \bar{x}_j}) & \cos(\widehat{\bar{z}_i, \bar{y}_j}) & \cos(\widehat{\bar{z}_i, \bar{z}_j}) & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

В матрицах  $r_i$ ,  $r_j$ ,  $M_{ij}$  число строк увеличено по сравнению с зависимостями (5.21) за счет добавления в них тождества  $1 \equiv 1$ . Это не изменяет исходной системы, но делает матрицу  $M_{ij}$  квадратной, что позволяет при дальнейших преобразованиях обойтись только операцией матричного умножения. Матрица (5.25) выражает все возможные соотношения между координатами звеньев, соединенных кинематической парой любого класса. В зависимости от типа кинематической пары матрица (5.25) соответственно преобразуется. Для сферической кинематической пары (рис. 5.9), соединяющей звенья 1 и 2, с которыми связаны соответствующие координатные системы, начала координат систем совпадают. Эти звенья проворачиваются относительно любой оси, и матрица (5.25) принимает вид

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos(\widehat{\bar{x}_1, \bar{x}_2}) & \cos(\widehat{\bar{x}_1, \bar{y}_2}) & \cos(\widehat{\bar{x}_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ \cos(\widehat{\bar{y}_1, \bar{x}_2}) & \cos(\widehat{\bar{y}_1, \bar{y}_2}) & \cos(\widehat{\bar{y}_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ \cos(\widehat{\bar{z}_1, \bar{x}_2}) & \cos(\widehat{\bar{z}_1, \bar{y}_2}) & \cos(\widehat{\bar{z}_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.26)$$

Для сферической кинематической пары 4-го класса (рис. 5.10) возможны два движения; вокруг оси пальца и в плоскости прорези. При составлении матрицы  $M_{12}$  для этой пары выберем направления координатных осей так, чтобы две оси были параллельны или совмещены. Например, оси  $O_1y_1$  и  $O_2y_2$  направим перпендикуляр-

Рис. 5.8. Преобразование координат

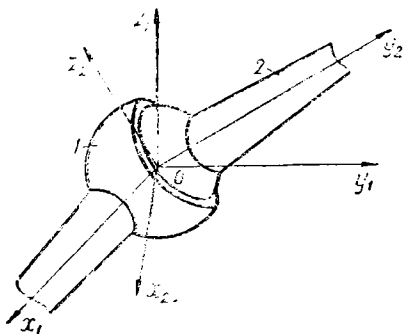


Рис. 5.9. Координатная система для сферической кинематической пары 3-го класса

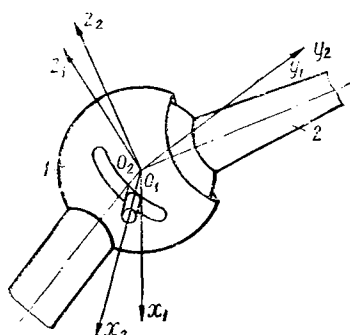
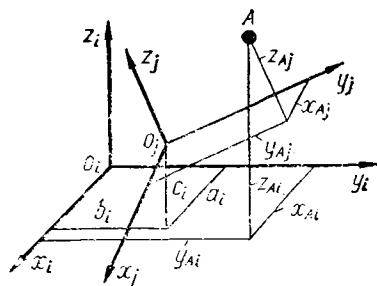


Рис. 5.10. Координатная система для сферической кинематической пары 4-го класса

но плоскости прорези. Принимая направление  $O_2x_2$  вдоль оси пальца, получим

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos(\widehat{x_1, x_2}) & 0 & \cos(\widehat{x_1, z_2}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(\widehat{z_1, x_2}) & 0 & \cos(\widehat{z_1, z_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.27)$$

Для цилиндрической пары 4-го класса при совпадении осей  $O_1y_1$  и  $O_2y_2$  координатных систем (рис. 5.11)

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos(\widehat{x_1, x_2}) & 0 & \cos(\widehat{x_1, z_2}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ \cos(\widehat{z_1, x_2}) & 0 & \cos(\widehat{z_1, z_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.28)$$

Для цилиндрической вращательной кинематической пары 5-го класса при совмещении центров координатных систем и при совпа-

дении осей  $O_1y_1$  и  $O_2y_2$  получим

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos(\widehat{x_1, x_2}) & 0 & \cos(\widehat{x_1, z_2}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(\widehat{z_1, x_2}) & 0 & \cos(\widehat{z_1, z_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.29)$$

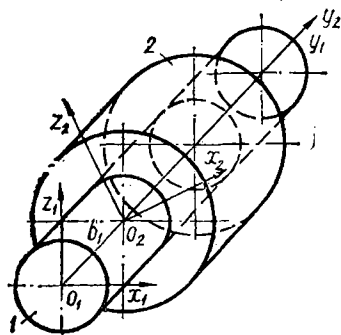


Рис. 5.11. Координатная система для цилиндрической кинематической пары 4-го класса

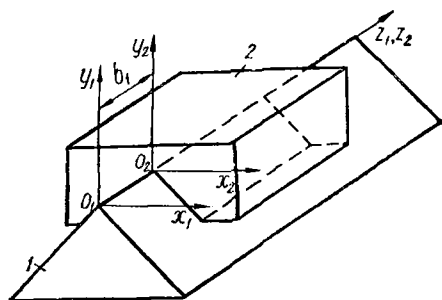


Рис. 5.12. Координатная система для поступательной кинематической пары 5-го класса

Для поступательной кинематической пары 5-го класса при общем случае расположения начала координат (рис. 5.12) получим

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.30)$$

Используя эти матрицы для кинематических пар разных классов (5.26) ... (5.30) и зависимость (5.23) или (5.24), определяют положение любого звена кинематической цепи и координаты любой точки механизма.

## 6. ПУТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

### 6.1. Задачи, решаемые с помощью механизмов с низшими парами

Механизмы с низшими кинематическими парами нашли широкое применение в машиностроении и приборостроении благодаря возможности обеспечения требуемого преобразования движения при простоте геометрической формы звеньев и элементов кинематических пар. Важное функциональное качество их — это возможность воспроизвести точно или с заданной степенью приближения практически любой закон движения или траекторию исполнительного органа при соответствующем выборе структуры механизма и разме-

ров его звеньев. В отличие от структурного в кинематическом синтезе решается вопрос о размерах звеньев для получения движений с конкретными характеристиками перемещений, скорости и ускорений —  $s$ ,  $v$ ,  $a$  или  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\epsilon$ .

Простейшие шарнирно-рычажные механизмы, включающие одну структурную группу (рис. 6.1), применяются для преобразо-

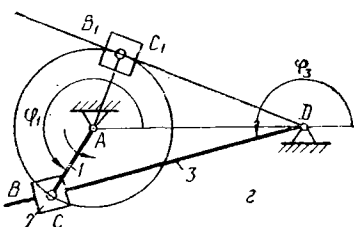
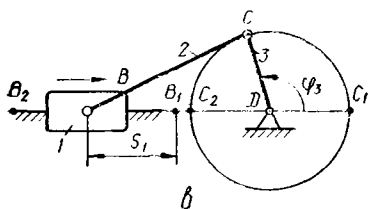
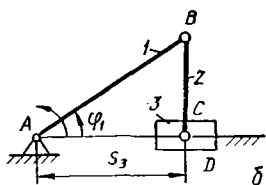
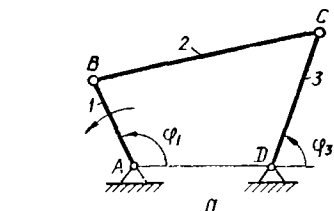
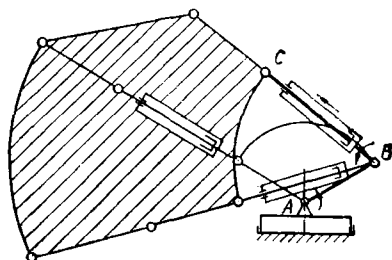
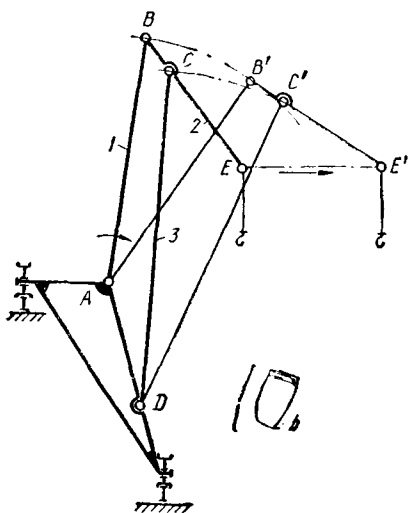


Рис. 6.1. Простейшие шарнирно-рычажные механизмы

Рис. 6.2. Кинематическая схема механизма изменения вылета стрелы крана

Рис. 6.3. Механизм манипулятора



вания равномерного вращательного движения входного звена 1 в неравномерное или равномерное вращательное, колебательное, возвратно-поступательное движение выходного звена 3 или в сложное движение промежуточного звена 2 и возвратно-поступательное входного во вращательное движение выходного. В зависимости от соотношения геометрических размеров звеньев обеспечивается неравномерное вращение выходного звена в одном направлении, например, при  $l_{AB} > l_{AD}$  (рис. 6.1, а, з) или неравномерное знакопе-

ременное его вращение при  $l_{AB} < l_{AD}$  (рис. 6.1, а, з), мгновенная остановка его в положении, когда  $l_{AB} \perp l_{CD}$  (рис. 6.1, з). Движение звена становится невозможным при  $l_{AB} \perp l_{BC}$  (рис. 6.1, б) или когда точка С попадает на линию AD (рис. 6.1, в). Неравномерное движение выходного звена с определенными законами его изменения обуславливается технологическими характеристиками машины с целью получения наивысшей производительности.

Многозвенные шарнирно-рычажные механизмы с числом звеньев более четырех применяются для получения более сложных законов движения выходных звеньев. Такая задача решается применением либо нескольких структурных групп 2-го класса, либо структурных групп высших классов. Геометрические размеры звеньев таких механизмов, как выходные параметры синтеза, подбираются из условий обеспечения требуемых перемещений и скоростей (полиграфические и ткацкие машины), ускорений (машины для транспортировки сыпучих грузов, вибрационных бункеров и т. п.), обеспечения требуемого увеличения силы на рабочем элементе выходного звена (рычажные и винтовые прессы).

Шарнирно-рычажные механизмы используют для обеспечения перемещения звена или только определенной точки его по заданной траектории. Например, при проектировании кинематической схемы портовых кранов для уменьшения расхода энергии и удобства управления необходимо обеспечить нахождение груза на одной высоте при изменении вылета стрелы, что достигается горизонтальным движением головки стрелы  $E$  (рис. 6.2). При проектировании роботов и манипуляторов (см. гл. 18) размеры звеньев механизма подбираются из условия достижения захватом манипулятора любой точки пространства в зоне его обслуживания (рис. 6.3).

Таким образом, задача кинематического и геометрического синтеза механизмов с низшими кинематическими парами заключается в определении размеров звеньев структурной схемы механизма с целью удовлетворения требований к движению выходного или промежуточного звеньев механизма. Случается, что для принятой структурной схемы механизма нельзя подобрать такие размеры звеньев, чтобы получить заданные кинематические характеристики. Тогда приходится выбирать новую структурную схему. Поэтому структурный и кинематический синтез ведутся одновременно.

## **6.2. Требования к геометрическим параметрам звеньев в связи с задачами их кинематики**

Задача выбора параметров синтеза шарнирно-рычажного механизма в общем случае многовариантна. Например, при одной и той же структуре механизма возможен синтез: по нескольким заданным положениям исполнительного органа, когда не существует закон его движения; по заданному закону движения входного и выходного звеньев либо по значенно кинематических параметров, характеризующих этот закон; по заданной траектории движения точки выходного звена.



Постоянными параметрами при кинематическом синтезе обычно являются либо линейные размеры звеньев механизмов, либо положения точек на заданных траекториях, их скорости и ускорения. Эти параметры назначают исходя из типа механизма с учетом конкретных его свойств и назначения. При этом для обеспечения требуемых кинематических свойств механизма необходимо удовлетворить некоторые условия, связанные с определенными ограничениями.

Для механизмов непрерывного действия прежде всего обеспечивают проворачивание входных звеньев на угол  $\varphi > 2\pi$ . Здесь следует учесть не только предупреждение пересечения звеньев, но и размеры звеньев. Из рассмотрения схем механизмов на рис. 6.1 следует, что при некоторых условиях проворачивание входных звеньев невозможно. Например, звено 1 в шарнирном четырехзвеннике (см. рис. 6.1, а) не совершит полного оборота при  $l_{BC} < l_{AD}$ , а в кривошипно-ползунном (см. рис. 6.1, б) при  $l_{BC} < l_{AB}$ . В том же механизме при входном поступательно движущемся звене (см. рис. 6.1, в) периодически звенья 2 и 3 располагаются по одной прямой. Такое положение механизма называется «мертвым». Для выведения механизма из таких положений необходимо обеспечить движение выходного звена 3 в заданном направлении, для чего предусматривают специальные устройства.

Во всех механизмах необходимо обеспечить заданное перемещение выходного звена, т. е. определенные значения параметров  $\varphi_3$  и  $s_3$ . В ряде случаев, кроме заданных диапазонов изменения этих параметров, ставится условие прохождения определенной точкой выходного звена некоторых координат при строго предусмотренных положениях входного звена, т. е. необходимо обеспечить заданный закон движения  $\varphi_3(\varphi_1)$  и  $s_3(\varphi_1)$ . Это требование обязательно при кинематическом синтезе машин-автоматов, большинства технологических механизмов, в ряде приборов и т. п.

В некоторых механизмах периодического действия для повышения производительности необходимо сокращать время холостого хода. С этой целью при кинематическом синтезе выдерживают заданные максимальные скорости или ускорения звена при его движении под нагрузкой (рабочий ход) и без нагрузки (холостой ход). Это условие характеризуется коэффициентом изменения средней скорости ведомого звена — отношением скорости холостого хода к скорости рабочего хода:

$$k_v = v_x/v_p; \quad k_\omega = \omega_x/\omega_p,$$

где  $v_x$ ,  $\omega_x$  и  $v_p$ ,  $\omega_p$  — скорости выходных звеньев при холостом и рабочем ходе.

При определении размеров звеньев следует иметь в виду, что при некоторых их соотношениях возникает *самоторможение* или *заклинивание* (рис. 6.4), т. е. внезапное прекращение движения в некоторых положениях звеньев. Заклинивание возможно в определенных относительных положениях звеньев в случае возникновения чрезмерных сил и моментов из-за трения в кинематических парах, возрастающих пропорционально увеличению движущих сил. Незакли-

нивание для вращательной кинематической пары  $C$  соблюдается при условии

$$\cos v_{\max} \leq \sin \alpha_0,$$

где  $v_{\max}$  — наибольший угол между звеньями данной кинематической пары;  $\alpha_0$  — допустимое значение угла  $\alpha$  между векторами силы и скорости, называемого углом давления, обеспечивающее возможность относительного движения.

### 6.3. Функции положения звеньев и передаточные функции

При решении задач кинематического синтеза механизмов с низшими парами необходимо движение выходного звена связать с движением входного звена механизма. Математическая зависимость, связывающая положение выходного  $n$  и входного  $1$  звеньев, называется функцией положения механизма. В общем случае для любого шар-

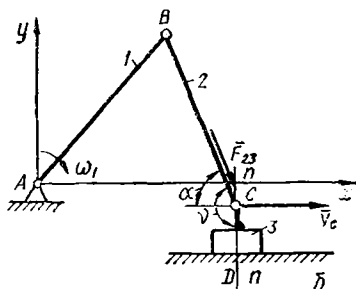
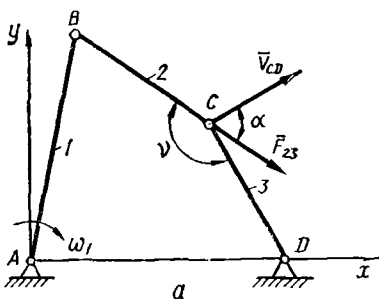


Рис. 6.4. Условие не-  
заклинивания меха-  
низма

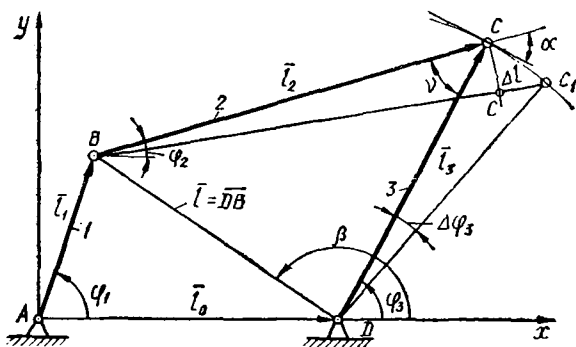


Рис. 6.5. Условие зам-  
кнутости контура шар-  
нирного четырехзвен-  
ника

нирно-рычажного механизма функция положения может быть определена *методом замкнутого векторного контура*. Сущность этого метода заключается в том, что для любой замкнутой кинематической цепи, представляемой в виде многоугольника векторов, можно записать условие замкнутости векторного контура, вследствие чего суммы проекций сторон многоугольника на оси прямоугольной системы координат равны нулю. Направления векторов принимаются исходя из удобства отсчета углов, определяющих положения звеньев.

Для четырехзвенного механизма с вращательными кинематическими парами (рис. 6.5) условие замкнутости при обходе контура по часовой стрелке будет  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0$ . Поместим начало координат в точку  $A$ , а ось абсцисс направим по  $AD$ . Для удобства отсчета угла  $\varphi_3$  придадим векторам направления, как указано на рис. 6.5. Тогда условие замкнутости примет вид

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_0 + \bar{l}_3, \quad (6.1)$$

чему соответствуют два уравнения проекций сумм векторов на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_0 + l_3 \cos \varphi_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= l_3 \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Функциями положения звеньев 2 и 3 являются функции  $\varphi_2$  ( $\varphi_1$ ) и  $\varphi_3$  ( $\varphi_1$ ). Выражая в формуле (6.2)  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  через  $\varphi_1$ , получим искомые функции положения механизма. Функции положения являются математическим описанием механизма. Имея функцию положения, получают необходимое множество положений выходного звена в зависимости от положений входного звена.

Зная закон движения входного звена  $\varphi_1(t)$ , из функций положения получают законы движения звеньев механизма:  $\varphi_2(t) = \varphi_2(\varphi_1(t))$ ;  $\varphi_3(t) = \varphi_3(\varphi_1(t))$ . По закону движения звеньев определяют качественные кинематические характеристики их движения — функции скоростей и ускорений. Например, для звена  $j$  имеем

$$\omega_j(t) = d\varphi_j(t)/dt; \quad \epsilon_j(t) = d^2\varphi_j(t)/dt^2.$$

При кинематическом синтезе принимают благоприятные, с точки зрения эксплуатации механизмов, функции  $\omega_j(t)$  и  $\epsilon_j(t)$ . Например, для большинства механизмов желательно монотонное или плавное изменение скоростей и ускорений звеньев, так как быстрое изменение скорости приводит к появлению ударной нагрузки при работе. Изменения ускорений приводят к изменению сил инерции. Исходя из благоприятных качественных характеристик находят соответствующую функцию положения.

*Кинематические свойства механизма характеризуются передаточным отношением, под которым понимают отношение линейных или угловых скоростей звеньев. Зависимость передаточного отношения  $i$  от положения входного звена  $\varphi_1$  называют передаточной функцией.* В общем случае для поступательно движущихся звеньев механизма при вращении входного звена

$$\begin{aligned} v_j(t) &= (ds_j(t)/dt) \cdot (d\varphi_1/d\varphi_1) = (ds_j(t)/d\varphi_1) \cdot (d\varphi_1/dt) = \\ &= \omega_1(t) ds_j(t)/d\varphi_1; \end{aligned} \quad (6.3)$$

для вращательно движущихся звеньев механизма

$$\begin{aligned} \omega_j(t) &= (d\varphi_j(t)/dt) \cdot (d\varphi_1/d\varphi_1) = (d\varphi_j(t)/d\varphi_1) \cdot (d\varphi_1/dt) = \\ &= \omega_1(t) d\varphi_j(t)/d\varphi_1; \\ d\varphi_j(t)/d\varphi_1 &= i(\varphi_j) = \omega_j(t)/\omega_1(t). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из приведенных формул следует, что функция положения звена однозначно определяет передаточную функцию и закон его движения.

#### 6.4. Выбор методов синтеза

Для многозвенных механизмов задача кинематического синтеза решается редко. Чаще необходимо решать эту задачу для основного механизма, который определяет работоспособность всей машины в целом. Так, например, в подъемно-транспортном оборудовании, манипуляторах и т. п.— для шарнирных четырехзвенных механизмов; в тепловых двигателях, компрессорных машинах и т. п.— для кривошипно-ползунных механизмов.

При синтезе механизмов передаточные функции, как и функции положения, задаются для обеспечения требуемых кинематических характеристик. *Задача синтеза решается точными или приближенными методами.* Точные методы применяются к малозвенным механизмам, имеющим простую структурную схему. Для сложных схем усложняются передаточные функции и функции положения, увеличивается число параметров синтеза. К тому же при синтезе многозвенных механизмов обычно удовлетворяют не только кинематические требования к механизму, но и часто требования к его динамике. В этих условиях более удобными оказываются приближенные методы кинематического синтеза. Кроме того, во многих случаях методы приближенного кинематического синтеза более приемлемы, так как истинные кинематические характеристики все равно отличаются от расчетных, полученных точным методом. Это объясняется тем, что в реальных механизмах из-за погрешностей изготовления и упругости звеньев всегда имеются зазоры между элементами кинематических пар, неточности в линейных размерах звеньев, вследствие чего траектории точек, скорости и ускорения звеньев неизбежно отличаются от расчетных. Если для сложных задач синтеза использовать приближенные методы, то при обеспечении допустимых пределов отклонения от заданных параметров затраты на расчет окажутся значительно меньшими, чем при использовании точных методов.

Из задаваемых условий синтеза, определяющих свойства механизма, обычно выбирают одно *основное условие*: получение заданной траектории, воспроизведение закона движения и т. п. Тогда все остальные условия называются *дополнительными*. Основное условие обычно выражается в виде целевой функции, экстремум которой определяет выходные параметры синтеза. Если целевую функцию нельзя выразить в явном виде через параметры синтеза, то ее задают алгоритмом вычисления, т. е. через операторную функцию. Например, для механизма на рис. 6.5 в качестве целевой функции представляют максимальное отклонение от расчетного значения функции (положения звена 3) в зафиксированной позиции  $k$  ведущего звена

$$\Delta\varphi_{3k} = |\varphi_3(\varphi_1)_k - \varphi_3(\varphi_1)| \quad (6.5)$$

либо передаточной функции

$$\Delta i(\varphi_3)_k = |i(\varphi_3)_k - i(\varphi_3)|. \quad (6.6)$$

Рассмотрим схему решения задачи синтеза на примере механизма шарнирного четырехзвенника. Из выражений (6.2) следует, что параметрами синтеза являются  $l_1, l_2, l_3, l_0, \varphi_1$ . Если задать положения звеньев 1 и 3 углами  $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1n}$  и  $\varphi_{31}, \varphi_{32}, \dots, \varphi_{3n}$ , то по функции положения звена 3 получим систему уравнений  $\varphi_{31} = \varphi_3(\varphi_{11}), \varphi_{32} = \varphi_3(\varphi_{12}), \dots, \varphi_{3n} = \varphi_3(\varphi_{1n})$ . Если число уравнений и число параметров совпадают, то параметры определимы. Полученные подобным образом параметры могут не удовлетворять передаточной функции, тогда число входных параметров надо дополнить необходимыми кинематическими соотношениями, связывающими между собой некоторые другие параметры синтеза.

Достаточная для инженерной практики точность передаточной функции и функции положения достигается при применении приближенных методов кинематического синтеза. Степень приближения оценивается по теории приближения функции Чебышева. *Приближенный синтез по Чебышеву делится на три этапа. Первый этап* — выбор основного условия синтеза и его ограничений — заключается в определении целевой функции и аналитического выражения отклонений от нее. *Второй* — упрощение основного условия синтеза в виде отклонения от заданной функции. Наиболее удобный способ — использование *метода взвешенной разности*:

$$\Delta_q = q\Delta, \quad (6.7)$$

где  $\Delta_q$  — отклонение от заданной функции, выраженное функционально;  $q$  — непрерывная весовая функция аргумента и параметров приближающей функции  $\Delta$ .

Например, для механизма рассматриваемого шарнирного четырехзвенника отклонения от функции положения  $\varphi_3(\varphi_1)$  звена 3 при синтезе определяются по достаточно сложной зависимости. Более простая зависимость будет, если это отклонение оценивать разностью  $\Delta_l = C'C_1$  между длиной звена  $l_2$  и выходным значением его  $l_2$  при синтезе, т. е.  $\Delta_l = l_2 - l_2'$ . Очевидно, чем меньше  $\Delta_l$ , тем меньше отклонение от заданной функции  $\varphi_3(\varphi_1)$ . Если в качестве весовой функции выбрать  $q = l_2 + l_2' \approx 2l_2$ , то согласно формуле (6.7) получим

$$\Delta_q = q\Delta_l = 2l_2(l_2 - l_2') = (l_2 + l_2')(l_2 - l_2') = l_2'^2 - (l_2')^2. \quad (6.8)$$

Так как  $\Delta_l = l_3\Delta\varphi_3 \cos \alpha$ , то с учетом формулы (6.7) получим

$$\Delta\varphi_3 = \Delta_l/l_3 \cos \alpha = \Delta_q/(2l_2l_3 \cos \alpha), \quad (6.9)$$

где  $\alpha = \pi/2 - \delta$  — угол давления звена 2 на звено 3.

*Третий этап синтеза (по Чебышеву)* — вычисление параметров синтеза из условия минимума отклонения от заданной функции. Этот этап тем проще, чем проще целевая функция или функция взвешенной разности. Обычно он сводится к решению системы линейных уравнений (см. гл. 7).

## 6.5. Многопараметрическая и многокритериальная оптимизация

Задача синтеза решается либо просто как поиск параметров, удовлетворяющих целевой функции, либо как выбор таких их значений, при которых целевая функция имеет экстремальное значение. В этом случае говорят об **оптимальном синтезе** механизма по нескольким параметрам. Практически оптимальный синтез всегда возможен только с применением ЭВМ при использовании математических методов оптимизации: случайного поиска, направленного поиска и т. п.

Для *многопараметрического оптимального синтеза* механизма требуется решить задачу поиска глобального минимума целевой

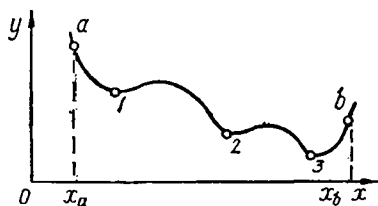


Рис. 6.6. Глобальный и локальный минимумы

функции, так как в общем случае она имеет несколько минимумов. **Глобальным минимумом** функции называют наименьший из минимумов, называемых *локальными* (рис. 6.6): глобальный минимум находится в точке 3, в точках 1 и 2 находятся локальные минимумы. Очевидно, что даже для механизма простой схемы (см. рис. 6.5) поиск глобального минимума функции (6.5) перебором

значений  $l_1, l_2, l_3, l_0, \varphi_1$ , являющихся параметрами синтеза, невозможен без ЭВМ. В сложных механизмах при учете ограничений синтеза эта задача еще более усложняется. Решение ее возможно на основе положений *теории оптимальных систем*, и сама задача является математической, а не механической.

Так как задача определения размеров звеньев механизмов решается с той или иной степенью приближения, то необходимо оценивать отклонения закона движения синтезированного механизма от заданного, исходного закона движения. Для ряда значений угловой координаты входного звена необходимо определить угловые или линейные координаты выходного звена. Тогда, погрешность положения выходного звена для  $i$ -го положения входного звена будет

$$\Delta_{i\varphi} = \varphi_{3i} - \varphi_{3i} \quad \text{или} \quad \Delta_{is} = s_{3i} - s_{3i},$$

где  $\varphi_{3i}, s_{3i}$  — фактические координаты выходного звена;  $\varphi_{3i}, s_{3i}$  — заданные координаты выходного звена

За критерий оценки при рассмотрении  $n$  положений входного звена принимают либо среднее по модулю значение отклонения

$$\Delta_{\text{ср}} = \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i \right) / n, \quad \text{либо среднее квадратическое отклонение} \quad \Delta_{\text{кв}} = \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \right) / n.$$

## 7. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

### 7.1. Модификации шарнирного четырехзвенника

С помощью инверсии (см. гл. 3) из шарнирного четырехзвенника получают механизмы, обеспечивающие различный характер движения выходного звена. В этих условиях в качестве входного звена может быть принято любое из четырех звеньев механизма, но при определенном соотношении их размеров. Пусть  $l_1$  — самое короткое звено механизма (рис. 7.1), а  $l_2$  или  $l_3$  — самое длинное. Для того чтобы при вращении кривошипа  $I$  точка  $B$  попала в положение  $B_1$ , необходимо соблюдать неравенство

$$l_1 + l_0 < l_2 + l_3. \quad (7.1)$$

Из свойства треугольника следует также, что при  $l_2 > l_3$

$$l_1 + l_0 > l_2 - l_3. \quad (7.2)$$

Для прохождения точки  $B$  через положение  $B_3$  необходимо соблюдать неравенство

$$l_0 - l_1 < l_2 + l_3, \quad (7.3)$$

а при  $l_2 > l_3$  следует, что

$$l_0 - l_1 > l_2 - l_3. \quad (7.4)$$

Неравенство (7.1) исключает неравенство (7.3), неравенство (7.4) исключает неравенство (7.2). Тогда для случая  $l_2 > l_3$  получим систему неравенств

$$\left. \begin{aligned} l_1 + l_0 < l_2 + l_3; \\ l_1 + l_2 < l_0 + l_3. \end{aligned} \right\}$$

Так как  $l_1$  — наименьшее звено, то при наибольшем звене  $l_2$  неравенство

$$l_1 + l_2 < l_0 + l_3 \quad (7.5)$$

обеспечивает выполнение остальных условий. При наибольшем звене  $l_3$  условие прохождения точки  $B$  через  $B_1$  и  $B_3$  выражается неравенством

$$l_1 + l_3 < l_2 + l_0. \quad (7.6)$$

Неравенства (7.5) и (7.6) позволяют сформулировать условие проворачиваемости звеньев (правило Грасгофа, см. прил.): *самое короткое звено шарнирного механизма (рис. 7.2) будет кривошипом, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев*. Из этого следует, что: механизм будет двухкоромысловым (рис. 7.2, а), если размеры его звеньев не удовлетворяют указанному правилу; кривошипно-коромысловым (рис. 7.2, б), если размеры его удовлетворяют правилу и кривошип — самое короткое звено; двухкривошипным (рис. 7.2, в), если размеры его звеньев удовлетворяют правилу и за стойку принято самое короткое звено.

Рассмотренные условия проворачиваемости справедливы и для четырехзвенных механизмов, имеющих поступательную кинематическую пару. Это устанавливают при рассмотрении процесса преобразования вращательной пары в поступательную. Так как центр вращательной пары  $C$  движется по окружности радиуса  $D'C$  (рис. 7.3,  $a$ ), то кинематика звеньев 1 и 2 не изменяется, если звено 3 механизма заменить ползуном, движущимся по круговой направ-

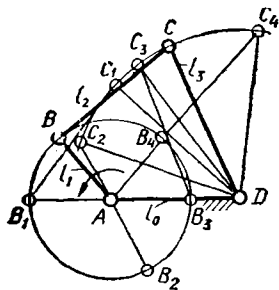


Рис. 7.1. Условие проворачиваемости звеньев

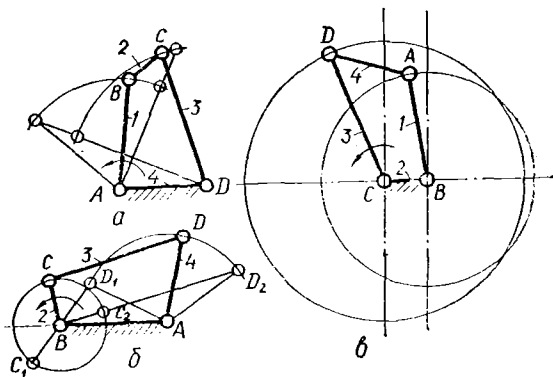


Рис. 7.2. Модификации шарнирного четырехзвенника с вращательными парами

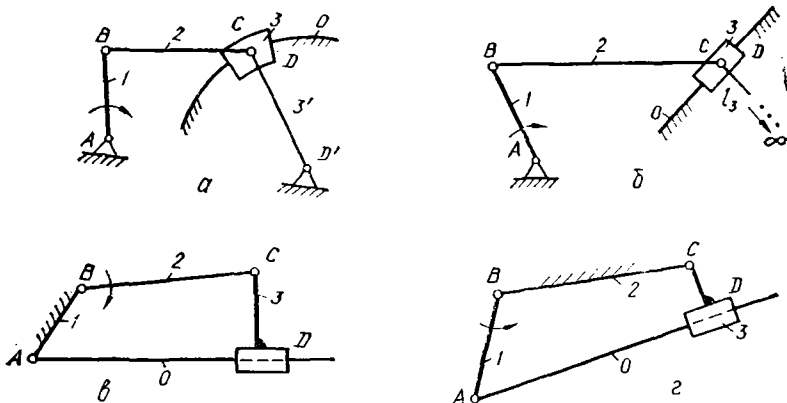


Рис. 7.3. Модификации шарнирного четырехзвенника с поступательными парами

ляющей того же радиуса. При увеличении длины  $l_3$  звена 3 направляющая выпрямится и при  $l_3 \rightarrow \infty$  станет прямолинейной. В этом случае механизм превратится в кривошипно-ползунный (рис. 7.3,  $б$ ). Если при  $l_3 \rightarrow \infty$  за стойку принять звено 1, а звено 0 освободить (рис. 7.3,  $в$ ), то получим кулисный механизм с вращающимися звеньями 2 и 0 со свойствами, аналогичными двухкривошипному механизму, приведенному на рис. 7.2,  $в$ . При закреплении звена 2 получим другую разновидность кулисного механизма (рис. 7.3,  $г$ ).



Увеличивая размеры элементов кинематической пары  $B$  и не изменяя длину звена  $l - l_1$  (рис. 7.4), получают механизмы других типов, но обладающих такой же проворачиваемостью звеньев и кинематикой, как и в шарнирном четырехзвеннике. В этих механизмах звено  $l$  превращается в эксцентрик с эксцентриситетом  $e = l_1$ . Обычно такие решения конструктивно удобно выполнять при  $l_1$ , соизмеримых с диаметрами шарниров кинематических пар.

## 7.2. Точный метод синтеза шарнирного четырехзвенника

В общем случае синтез механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 7.5) сводится к определению параметров  $l_1, l_2, l_3, l_0, \varphi_1$ , где  $\varphi_1 = \text{const}$ , т. е. механизм рассматривается при фиксированном кривошипе. Рассмотрим метод, при котором предварительно задаются длиной ведомого звена  $l_3$  при известной длине стойки  $l_0$  и предполагают заданными угловые координаты  $\varphi_{31}, \varphi_{32}, \varphi_{33}$  выход-

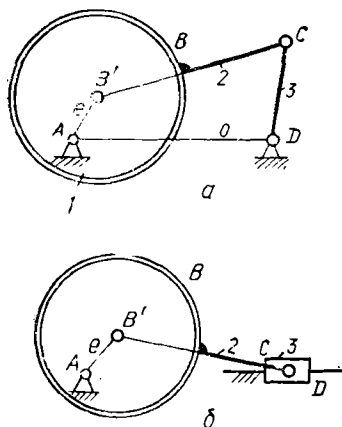


Рис. 7.4. Эксцентрикые механизмы

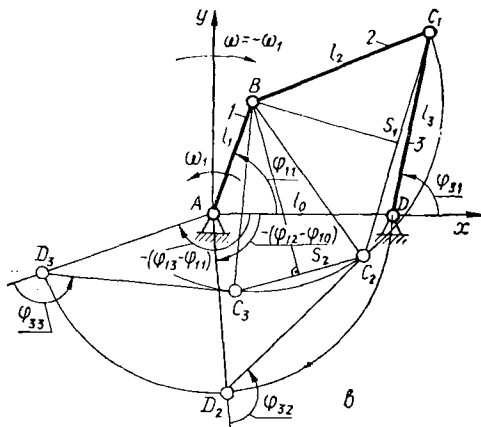


Рис. 7.5. К точному синтезу шарнирного четырехзвенника

ного звена при трех положениях входного с угловыми координатами  $\varphi_{11}$  (начальное положение) и  $(\varphi_{12} - \varphi_{11}), (\varphi_{13} - \varphi_{11})$ . При принятых условиях кинематический синтез сводится к определению размеров  $l_1$  и  $l_2$ . Эти размеры определяются, если в системе координат  $xAy$  (рис. 7.5) известны координаты точки  $B$ .

Сообщим всему механизму угловую скорость  $\omega = -\omega_1$ . Тогда входное звено в системе  $xAy$  станет неподвижным, а в направлении, противоположном скорости  $\omega_1$ , будет вращаться стойка 0. Для второго и третьего положений механизма положение стойки относительно звена  $l$  определяется углами  $(\varphi_{12} - \varphi_{11})$  и  $(\varphi_{13} - \varphi_{11})$ , откладываемыми от оси абсцисс в направлении вращения со скоростью  $-\omega_1$ . Так как точка  $B$  при движении звена 2 не меняет положения, а длина звена 2 неизменна, то точка  $B$  является центром окружности, проведенной через три точки:  $C_1, C_2$  и  $C_3$ . Положение точки  $B$ , как

центра окружности, определится пересечением перпендикуляров, восстановленных к серединам отрезков  $C_1C_2$  и  $C_2C_3$ .

Аналитически координаты точек  $C_i$  при  $i = 1, 2, 3$  определяются с помощью векторного уравнения  $\overline{AC_i} = \overline{AD} + \overline{DC_i}$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} x_{C_i} &= l_0 \cos(\varphi_{11} - \varphi_{1i}) + l_3 \cos(\varphi_{3i} + (\varphi_{11} - \varphi_{1i})); \\ y_{C_i} &= l_0 \sin(\varphi_{11} - \varphi_{1i}) + l_3 \sin(\varphi_{3i} + (\varphi_{11} - \varphi_{1i})). \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Угловые коэффициенты прямых, проходящих через точки  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_2$ ,  $C_3$ :

$$k_{C_1C_2} = (y_{C_2} - y_{C_1}) / (x_{C_2} - x_{C_1}); \quad k_{C_2C_3} = (y_{C_3} - y_{C_2}) / (x_{C_3} - x_{C_2}).$$

Тогда угловые коэффициенты соответствующих перпендикуляров к прямым  $C_1C_2$  и  $C_2C_3$ :

$$k_{12} = -(x_{C_2} - x_{C_1}) / (y_{C_2} - y_{C_1}); \quad k_{23} = -(x_{C_3} - x_{C_2}) / (y_{C_3} - y_{C_2}).$$

Координаты точек  $S_1$  и  $S_2$ , лежащих на серединах отрезков  $C_1C_2$  и  $C_2C_3$ :

$$\left. \begin{aligned} x_{S_1} &= (x_{C_1} + x_{C_2}) / 2; & x_{S_2} &= (x_{C_2} + x_{C_3}) / 2; \\ y_{S_1} &= (y_{C_1} + y_{C_2}) / 2; & y_{S_2} &= (y_{C_2} + y_{C_3}) / 2. \end{aligned} \right\}$$

Уравнения прямых  $BS_1$  и  $BS_2$ :

$$\left. \begin{aligned} -k_{12}x + y &= y_{S_1} - k_{12}x_{S_1}; \\ -k_{23}x + y &= y_{S_2} - k_{23}x_{S_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Из решения системы (7.8) определяются координаты  $x_B$  и  $y_B$  точки  $B$  и размеры звеньев 1 и 2:

$$l_1 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}; \quad (7.9)$$

$$l_2 = \sqrt{(x_B - x_{C_1})^2 + (y_B - y_{C_1})^2}, \quad (7.10)$$

при начальном положении кривошипа, определяемом углом

$$\varphi_{11} = \text{arctg}(y_B/x_B).$$

Приведенный алгоритм синтеза шарнирного четырехзвенного механизма реализуется операторной функцией  $SNTZR$ , охватывающей своим действием зависимости от (7.7) и все промежуточные выражения для  $\varphi_{11}$  до

$$SNTZR(l_0, l_3, \varphi_1(3), \varphi_3(3); l_1, l_2), \quad (7.11)$$

где  $\varphi_1(3)$ ,  $\varphi_3(3)$  — массивы трех числовых значений углов, определяющих взаимные положения звена 1 и звена 3.

### 7.3. Приближенный синтез шарнирного четырехзвенника

Алгоритм синтеза, описываемый операторной функцией (7.11), позволяет определить размеры механизма, при которых выходное звено находится в трех определенных положениях, соответствующих положениям кривошипа. Однако положения звена 3 при других положениях входного звена при полученных размерах звеньев точно не фиксируются.

Если в качестве исходных положений для синтеза механизма принят закон движения выходного звена, необходимо иметь зависимость между угловыми перемещениями выходного и входного звеньев. Эта зависимость может быть задана в виде функций положения  $\varphi_3(\varphi_1)$ ,  $\varphi_2(\varphi_1)$ , либо передаточных функций  $i(\varphi_3)$  или  $i(\varphi_2)$ , а также табличным способом. Функции положения  $\varphi_2(\varphi_1)$  и  $\varphi_3(\varphi_1)$  звеньев 2 и 3 механизма шарнирного четырехзвенника получают

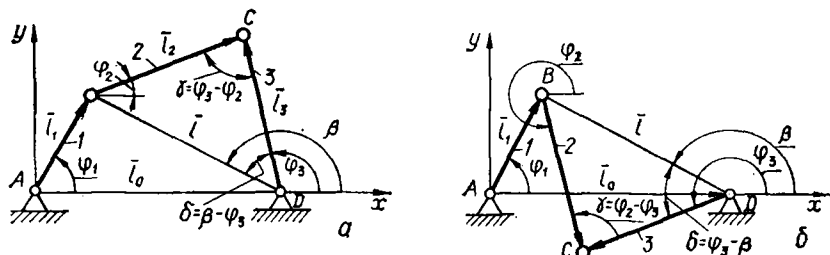


Рис. 7.6. Приближенный синтез шарнирного четырехзвенника

из условий (6.2) замкнутости векторного контура механизма. Вводя вектор  $\vec{l} = \overline{DB}$  с направляющим углом  $\beta$ , получим (рис. 7.6):

$$\left. \begin{aligned} \vec{l}_1 &= \vec{l}_0 + \vec{l}; \\ l_1 \cos \varphi_1 &= l_0 + l \cos \beta; \\ l_1 \sin \varphi_1 &= l \sin \beta, \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

где  $l = \sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1l_0 \cos \varphi_1}$ .

Подставляя выражения (7.12) в условие (6.2), получим:

$$\left. \begin{aligned} l_2 \cos \varphi_2 &= l_3 \cos \varphi_3 - l \cos \beta; \\ l_2 \sin \varphi_2 &= l_3 \sin \varphi_3 - l \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Возведем в квадрат обе зависимости (7.13), сложим их и после преобразований получим  $\delta = |\varphi_3 - \beta| = \arccos((l_3^2 + l^2 - l_2^2)/2l_3l)$ , откуда  $\varphi_3 = \beta \pm \delta$ .

Два возможных значения для  $\varphi_3$  объясняются тем, что при одном и том же положении звена 1 звенья 2 и 3 могут занимать два различных положения. Для определенности решения вводят понятие условия сборки механизма — число  $q = -1$  для схемы (рис. 7.6, а) и  $q = 1$  для схемы (б). Тогда  $\varphi_3 = \beta + q\delta$  и, следовательно,

$$\varphi_3 = \arcsin(l_1 \sin \varphi_1 / l) + q \arccos((l_3^2 + l^2 - l_2^2)/2l_3l). \quad (7.14)$$

Для определения функции положения звена 2  $\varphi_2(\varphi_1)$  найдем  $\gamma = |\varphi_3 - \varphi_2|$  из формулы (6.2):

$$\gamma = \arccos((l_2^2 + l_3^2 - l^2)/2l_2l_3).$$

С учетом условия сборки получим

$$\varphi_2 = \varphi_3 + q \arccos((l_2^2 + l_3^2 - l^2)/2l_2l_3). \quad (7.15)$$

Передаточные функции  $i(\varphi_3)$  и  $i(\varphi_2)$  получают дифференцированием зависимостей (7.14) и (7.15) по переменной  $\varphi_1$ . В общем виде дифференцирование этих функций весьма громоздко. Более удобным является применение численного дифференцирования массивов значений углов  $\varphi_3$  и  $\varphi_2$  для получения ряда числовых значений передаточных функций. Применяя операторную функцию численного дифференцирования *DFRNCL* (см. гл. 5), получим:

$$DFRNCL(N, \Delta\varphi_1, \varphi_3(N); i_{\varphi_3}(N));$$

$$DFRNCL(N, \Delta\varphi_1, \varphi_2(N); i_{\varphi_2}(N)),$$

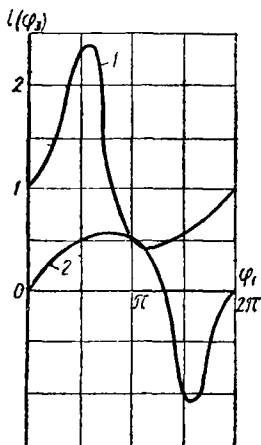


Рис. 7.7. Графики передаточных функций

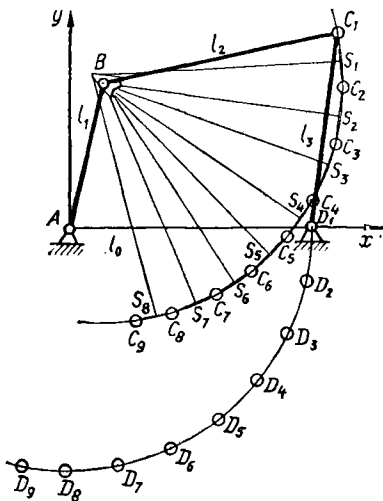


Рис. 7.8. Синтез механизма по массиву числовых значений углов звеньев

где  $N$  — количество числовых значений функций;  $\varphi_2(N)$ ,  $\varphi_3(N)$  — массивы числовых значений функций положения;  $i_{\varphi_2}(N)$ ,  $i_{\varphi_3}(N)$  — массивы числовых значений передаточных функций;  $\Delta\varphi_1$  — шаг интегрирования.

На рис. 7.7 приведены примерные графики передаточных функций для двухкривошипного 1 и кривошипно-коромыслового 2 механизмов.

Функцию положения ведомого звена получают аналитическим либо численным интегрированием передаточной функции, т. е.

$$\varphi_3(\varphi_1) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} i(\varphi_3) d\varphi_1. \text{ Обращаясь к гл. 5, получим}$$

$$INTGR(N, \Delta\varphi_1, NOMER, i_{\varphi_3}(N); \varphi_3(N)).$$

В конечном счете зависимость угловых перемещений сводится к массивам числовых значений углов входного и выходного звеньев. При синтезе по такому условию из массивов значений переменных, кратных трем, выбирают элементы массивов  $i_{\varphi_3}(3)$  и  $\varphi_3(3)$ . После

этого обращением к операторной функции *SNTZR* определяют размеры  $l_1$  и  $l_2$  и координаты точек  $B_i$  (рис. 7.8). Если бы координаты точек  $B_i$  совпадали, то решение было бы точным. В общем случае точки  $C_i$  не располагаются на одной окружности, следовательно, и точки  $B_i$  тоже не совпадут. Тогда при размерности массивов данных  $n$  и  $m = n/3$  получим средние значения параметров синтеза:

$$l_1 = \left( \sum_{i=1}^n l_{1i} \right) / m;$$

$$l_2 = \left( \sum_{i=1}^n l_{2i} \right) / m;$$

$$\varphi_1 = \arctg \left( \frac{\sum_{i=1}^n y_{B_i}}{\sum_{i=1}^n x_{B_i}} \right).$$

Если необходимо обеспечить движение некоторых точек звеньев механизма (чаще всего на шатуне) по определенным заданным траекториям, то выбором размеров шатуна и положения точек на нем можно получить *шатунные кривые*, которые на некотором участке

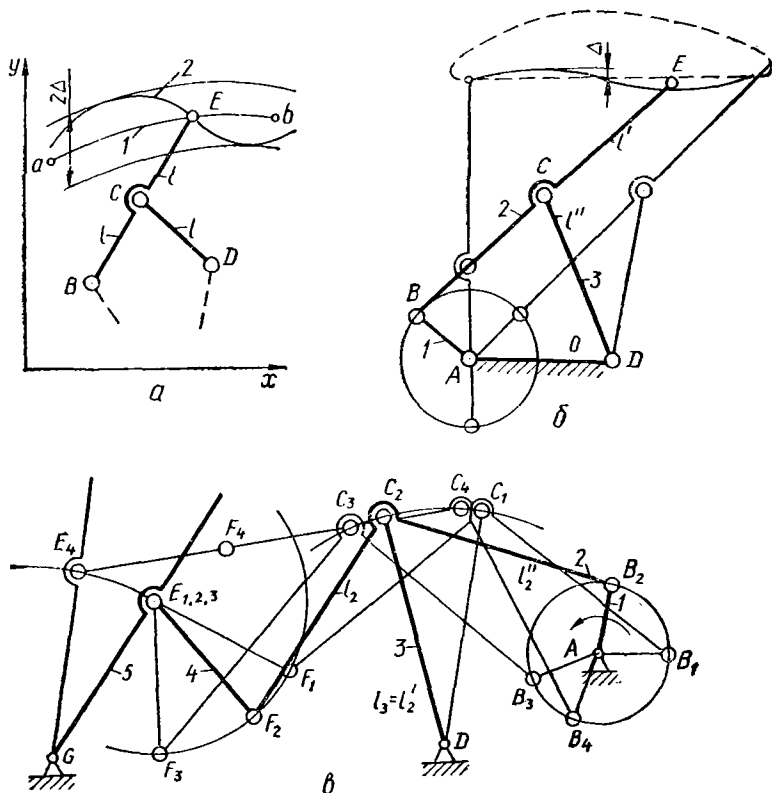


Рис. 7.9. Синтез механизмов, приближенно воспроизводящих заданную траекторию

с высокой точностью приближения являются отрезками прямых, дуг окружностей, эллипсов, гипербол и т. д., заданных в условии синтеза. Часто для этого применяют метод построения многосвязных механизмов, приближенно воспроизводящих заданную траекторию, основанный на теории о функциях, наименее отклоняющихся от нуля, разработанный Чебышевым. Сущность его заключается в следующем. Пусть в системе координат  $xOy$  (рис. 7.9, а) траектория 1 задана функцией  $f(x)$ , к которой максимально приближается траектория 2 точки  $E$  звена механизма, описываемая в общем случае полиномом

$$p(x) = p_1\Phi_1(x_1) + p_2\Phi_2(x_2) + \dots + p_{n+1}\Phi_{n+1}(x_{n+1}),$$

где  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ , ...,  $\Phi_{n+1}(x)$  — функции Чебышева, характер которых определяется типом кривой 1;  $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$  — коэффициенты полинома.

По Чебышеву (приводится без доказательства), для того чтобы полином  $p(x)$  наименее уклонялся от  $f(x)$  в интервале  $ab$ , необходимо и достаточно, чтобы разность  $(f(x) - p(x))$  не менее  $n + 2$  раз достигала своих предельных отклонений  $\pm \Delta$  с последовательно чередующимися знаками, т. е.  $(f(x) - p(x)) = \pm \Delta$ . Исходя из этого функции Чебышева выражаются через размеры звеньев, которые определяются решением системы линейных уравнений. П. Л. Чебышев показал, что свойствами лучшего приближения шатунной кривой к заданной обладают механизмы, имеющие в своей структуре двухпроводковую группу — диаду Чебышева, образующую в кинематической цепи четыре вращательные пары, и у которых  $BC = CE = CD$  (а). В диаде Чебышева погрешность отклонения точки  $E$  от воспроизводимой кривой 1 на порядок меньше погрешности, с которой воспроизводит кривую точка  $B$ . На рис. 7.9, б показано применение диады Чебышева для воспроизведения прямой линии, а на рис. 7.9, в для механизма с остановкой звена 5.

#### 7.4. Кривошипно-коромысловые механизмы с заданными свойствами

Из технологических или конструктивных соображений некоторые шарнирно-рычажные механизмы должны обладать определенными свойствами, обеспечивающими заданное соотношение прямого и обратного хода выходного звена, движение шатуна по определенному закону, очерчивание некоторыми точками предусмотренных траекторий и т. п. Так, например, с целью повышения производительности необходимо, чтобы скорость холостого хода была больше рабочего, что характеризуется определенной величиной *коэффициента изменения средней скорости коромысла*  $k_\omega = \omega_{3x}/\omega_{3p}$  (гл. 2).

Пусть заданы длина  $l_3$  коромысла четырехзвенника (рис. 7.10), угловые координаты  $\Phi_{31}$  и  $\Phi_{32}$  двух крайних положений его и коэффициент  $k_\omega$ ; требуется определить остальные размеры механизма. Точки  $C_1$  и  $C_2$ , соответствующие крайним положениям коромысла, определяют положение точек  $B_1$  и  $B_2$  на линиях  $AC_1$  и  $AC_2$  для соот-

ветствующих положений кривошипа 1. Обозначим через  $\beta$  угол между  $AC_1$  и  $AC_2$ . Тогда  $k_\omega = (\pi + \beta)/(\pi - \beta)$ , откуда

$$\beta = \pi(k_\omega - 1)/(k_\omega + 1). \quad (7.16)$$

Построение механизма с заданным коэффициентом  $k_\omega$  выполняются в следующей последовательности. Проведем из середины отрезка  $C_1C_2$  в точке  $S$  перпендикуляр, который пройдет через искомую точку  $D$ . Относительно линии  $SD$  под углом  $\beta$  проведем через точки  $C_1$  и  $C_2$  прямые, которые пересекутся в точке  $E$ . Центр вращения

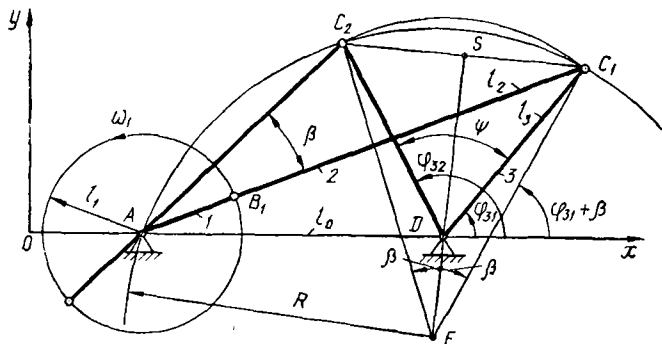


Рис. 7.10. Синтез механизма по коэффициенту изменения средней скорости коромысла

А кривошипа 1 должен находиться на пересечении окружности радиуса  $R = EC_1$  с осью абсцисс, так как для окружности будет справедливо геометрическое соотношение  $\angle C_2AC_1 = \beta = 0,5 \angle C_2EC_1$ . Из этого построения координаты точек  $C_1$  и  $C_2$  будут

$$\left. \begin{aligned} x_{C_1} &= x_D + l_3 \cos \varphi_{31}; & y_{C_1} &= l_3 \sin \varphi_{31}; \\ x_{C_2} &= x_D + l_3 \cos \varphi_{32}; & y_{C_2} &= l_3 \sin \varphi_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Угловым коэффициентом прямой  $SD$  определится по координатам точек  $C_1$  и  $C_2$ :

$$k_{SD} = -(x_{C_2} - x_{C_1})/(y_{C_2} - y_{C_1}),$$

а для прямой  $C_1E$  он будет равен

$$k_{C_1E} = \operatorname{tg}(\varphi_{31} + \beta).$$

Координаты  $x_E, y_E$  точки  $E$  определяются из совместного решения уравнений прямых  $SD$  и  $C_1E$ :

$$\left. \begin{aligned} y - k_{SD}x &= -k_{SD}x_D; \\ y - k_{C_1E}x &= -k_{C_1E}x_{C_1}, \end{aligned} \right\}$$

а радиус окружности  $R = EC_1$  будет равен

$$R = \sqrt{(x_E - x_{C_1})^2 + (y_E - y_{C_1})^2}.$$

Абсцисса точки  $A$  определится из условия

$$x_A = x_E \pm \sqrt{R^2 - y_E^2}.$$

Знаки «+» и «-» определяют два возможных варианта сборки механизма.

Длина кривошипа согласно рис. 7.10 будет равна

$$l_1 = (AC_1 - AC_2)/2, \quad (7.18)$$

где

$$AC_1 = \sqrt{(x_A - x_{C_1})^2 + (y_A - y_{C_1})^2};$$

$$AC_2 = \sqrt{(x_A - x_{C_2})^2 + (y_A - y_{C_2})^2}.$$

Размеры шатуна и стойки определяются из зависимостей

$$l_2 = AC_1 - l_1; \quad (7.19)$$

$$l_0 = |x_D - x_A|. \quad (7.20)$$

Алгоритм синтеза механизма по величине  $k_0$  и двум положениям коромысла  $l_3$  может быть описан операторной функцией

$$SNTZR1(k_0, \varphi_{31}, \varphi_{32}, l_3, x_D; l_1, l_2, l_0), \quad (7.21)$$

последовательно реализующей зависимости от (7.16) до (7.20), включая и промежуточные преобразования.

Если кроме значения кинематического параметра  $k_0^2$  ставится требование обеспечения незаклинивания звеньев, то к условиям синтеза механизма добавляется дополнительный параметр — *угол передачи движения*  $\gamma = 90^\circ - \alpha$  (гл. 6). Этот угол между звеньями 2 и 3 (рис. 7.11) связан с углом  $\varphi_1$  поворота кривошипа зависимостью, получаемой из рассмотрения  $\triangle ABD$  и  $\triangle BCD$ :

$$(BD)^2 = l_1^2 + l_0^2 - 2l_1l_0 \cos \varphi_1 = l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3 \cos \gamma.$$

Из  $\triangle AC_2C_1$  схемы механизма при допускаемых углах передачи движения  $\gamma_{\min}$  и  $\gamma_{\max}$  для крайних положений коромысла получим

$$\rightarrow C_2C_1A = (\pi - \psi)/2 - \gamma_{\min}; \quad \rightarrow AC_2C_1 = \gamma_{\max} + (\pi - \psi)/2;$$

$$\beta = \pi - \rightarrow C_2C_1A - \rightarrow AC_2C_1 = \pi - \pi + \psi + \gamma_{\min} - \gamma_{\max} = \\ = \psi + \gamma_{\min} - \gamma_{\max}; \quad \psi = \beta + \gamma_{\max} - \gamma_{\min}.$$

Положение центра вращательной пары  $A$  кривошипа и стойки находят на пересечении прямых  $C_1A$  и  $C_2A$ , угловые коэффициенты которых  $k_1 = \text{tg}(\varphi_{31} - \gamma_{\min})$  и  $k_2 = \text{tg}(\varphi_{31} + \psi - \gamma_{\max})$ .

Система уравнений прямых  $C_1A$  и  $C_2A$  будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} -k_1x + y &= y_{C_1} - k_1x_{C_1}; \\ -k_2x + y &= y_{C_2} - k_2x_{C_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Координаты точки  $C_1$  и  $C_2$  определяются по формулам (7.17) при подстановке  $\varphi_{32} = \varphi_{31} + \psi$ . Решения системы (7.22) определяют координаты  $x_A, y_A$ ; размеры  $l_1, l_2, l_0$  определяются соответственно из формул (7.18), (7.19) и (7.20).

Алгоритм синтеза механизма по параметрам  $k_0, \gamma_{\min}, \gamma_{\max}$  описывается операторной функцией

$$SNTZR2(k_0, \varphi_{31}, l_3, x_D, \gamma_{\min}, \gamma_{\max}; l_1, l_2, l_0), \quad (7.23)$$

последовательно реализующей соответствующие зависимости.



Если в кривошипно-коромысловом механизме нужно обеспечить определенные положения шатуна, то размеры механизма определяют по задаваемым координатам его точек. Пусть два положения звена 2 (рис. 7.12) заданы координатами точек  $B_1, B_2$  и  $C_1, C_2$  углом поворота кривошипа  $\varphi_1$ , соответствующего перемещению шатуна из одного в другое положение.

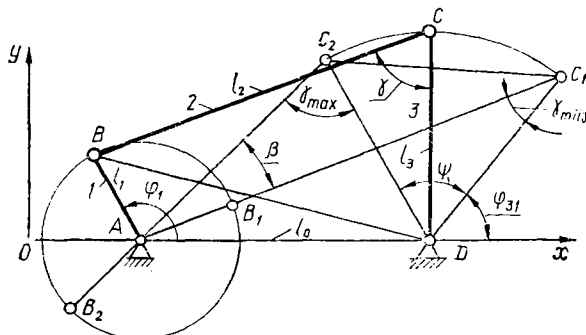


Рис. 7.11. Синтез механизма с учетом угла передачи движения

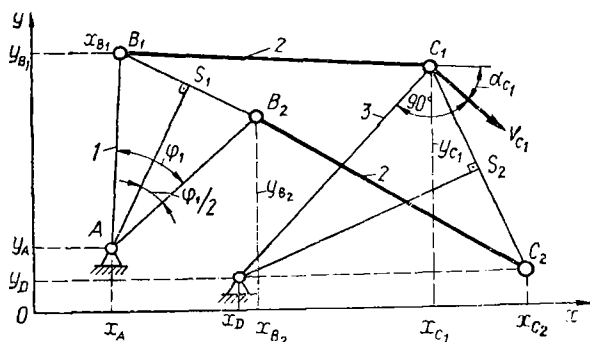


Рис. 7.12. Синтез механизма по заданным положениям шатуна

Соединим точки  $B_1$  и  $B_2$ , а также  $C_1$  и  $C_2$  прямыми и в середине этих прямых в точках  $S_1$  и  $S_2$  проведем перпендикуляры к ним. Если задано направление скорости точки  $C_1$  в данный момент, то положение центра вращательной пары  $D$  определится на пересечении перпендикуляров к линии  $C_1C_2$ , проходящих через точку  $S_2$  и через точку  $C_1$  к вектору  $\vec{v}_{C_1}$ . Положение центра  $A$  вращательной пары кривошип — стойка определяется пересечением прямых  $B_1A$  и  $S_1A$ . Расчетные зависимости получают из следующих соображений. Направляющие углы отрезков  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$ :

$$UGL2(x_{B_1}, y_{B_1}, x_{B_2}, y_{B_2}; \varphi_{B_1B_2}); \quad (7.24)$$

$$UGL2(x_{C_1}, y_{C_1}, x_{C_2}, y_{C_2}; \varphi_{C_1C_2}). \quad (7.25)$$

Угловые коэффициенты прямых  $S_1A$  и  $S_2D$ :

$$k_{S_1A} = -1/\operatorname{tg} \varphi_{B_1B_2}; \quad k_{S_2D} = -1/\operatorname{tg} \varphi_{C_1C_2}.$$

Угловые коэффициенты прямых  $B_1A$  и  $C_1D$

$$k_{B_1A} = \operatorname{tg}(\varphi_{B_1A} - \pi/2 + \varphi_1/2); \quad k_{C_1D} = \operatorname{tg}(\alpha_{C_1} - \pi/2).$$

Координаты точек  $S_1$  и  $S_2$

$$\left. \begin{aligned} x_{S_1} &= (x_{B_1} + x_{B_2})/2; \\ y_{S_1} &= (y_{B_1} + y_{B_2})/2; \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_{S_2} &= (x_{C_1} + x_{C_2})/2; \\ y_{S_2} &= (y_{C_1} + y_{C_2})/2. \end{aligned} \right\}$$

Уравнения для определения координат  $x_A$  и  $y_A$

$$\left. \begin{aligned} -k_{B_1A}x + y &= y_{B_1} - k_{B_1A}x_{B_1}; \\ -k_{S_1A}x + y &= y_{S_1} - k_{S_1A}x_{S_1}, \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

а для определения координат  $x_D$  и  $y_D$

$$\left. \begin{aligned} -k_{C_1D}x + y &= y_{C_1} - k_{C_1D}x_{C_1}; \\ -k_{S_2D}x + y &= y_{S_2} - k_{S_2D}x_{S_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

В результате решения систем (7.26) и (7.27) получим координаты точек  $A$  и  $D$ . Размеры звеньев определяются из зависимостей

$$l_1 = \sqrt{(x_A - x_{B_1})^2 + (y_A - y_{B_1})^2}; \quad (7.28)$$

$$l_3 = \sqrt{(x_{C_1} - x_D)^2 + (y_{C_1} - y_D)^2}. \quad (7.29)$$

Алгоритм, реализующий эти зависимости, описывается операторной функцией

$$SNTZR3(x_{B_1}(2), x_{C_1}(2), \varphi_1, \alpha_{C_1}; l_1, l_3). \quad (7.30)$$

## 7.5. Кривошипно-ползунный механизмы

Синтез кривошипно-ползунного механизма осуществляется точно, если заданными являются координаты ползуна (например, три координаты точки  $C$  (рис. 7.13, а):  $x_{C_1}$ ,  $x_{C_2}$ ,  $x_{C_3}$ , соответствующие положениям ведущего звена  $I$  при повороте его от исходного  $\varphi_{11}$  на углы  $(\varphi_{12} - \varphi_{11})$  и  $(\varphi_{13} - \varphi_{11})$ , величина  $l_3$  и смещение  $e$ ). При этих входных параметрах выходными параметрами синтеза будут размеры  $l_1$  и  $l_2$ , для определения которых применим принцип обращения движения. Плоскость, в которой расположен механизм, поворачивают в сторону, противоположную скорости  $\omega$ , кривошипа (рис. 7.13, б). Тогда звено  $I$  станет неподвижным, а звенья 2 и 0 будут вращаться вокруг точки  $B$  и  $A$ . Траекторией движения точки  $C$  будет окружность с центром  $B$ ; линия, проходящая через центр шарнира  $C$  и параллельная оси абсцисс, касается окружности радиуса  $(e + l_3)$  в центре в точке  $A$ . Из схемы приведенного выше механизма очевидно, что  $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$ , тогда для любого положения кривошипа  $AB$ , определяемого углом  $\varphi_{1i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , получим

$$\left. \begin{aligned} x_{C_i} &= AE_i \cos(\varphi_{11} - \varphi_{1i}) + (e + l_3) \cos(\varphi_3 + (\varphi_{11} - \varphi_{1i})); \\ y_{C_i} &= AE_i \sin(\varphi_{11} - \varphi_{1i}) + (e + l_3) \sin(\varphi_3 + (\varphi_{11} - \varphi_{1i})). \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Координаты точки  $B$ , как и в случае синтеза шарнирного четырехзвенного механизма, отыскиваем как точку пересечения перпендику-

ляров к отрезкам  $C_1C_2$  и  $C_2C_3$ , проведенным через середины их в точках  $S_1$  и  $S_2$ . Сравнение систем уравнений (7.31) и (7.11) с последующими преобразованиями позволяет сделать вывод, что алгоритм синтеза кривошипно-ползунного механизма реализуется операторной функцией (7.11) при несколько измененном обращении к ней. Так как в функции (7.11)  $l_0$  — постоянный параметр, а в рассматриваемом случае — переменный, то обращение к операторной функ-

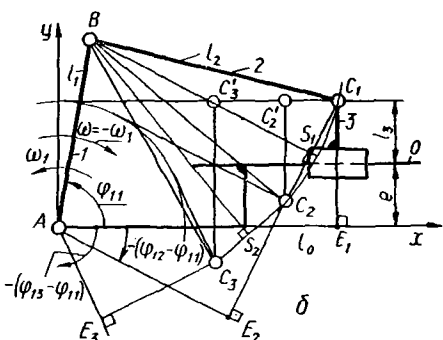
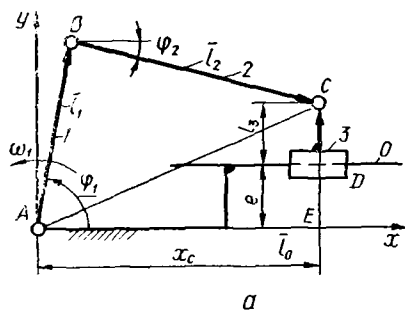


Рис. 7.13. Синтез кривошипно-ползунного механизма

Рис. 7.14. Графики передаточных функций

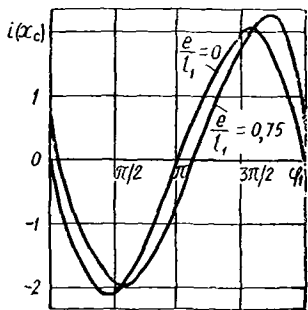
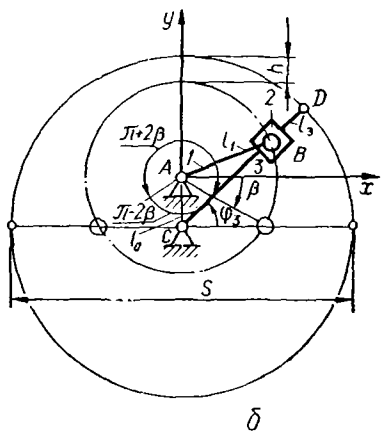
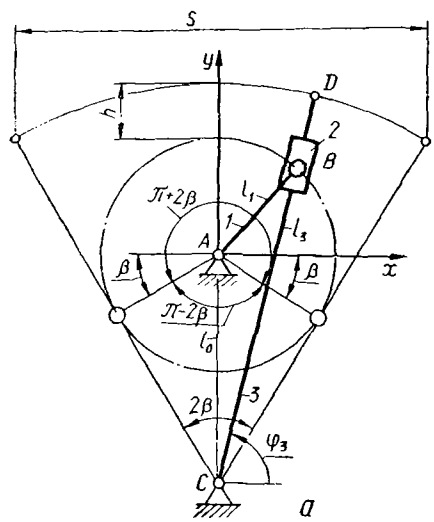


Рис. 7.15. Синтез кривошипно-кулисного механизма



ции в общем виде будет иметь вид

$$SNTZR(l_0(3), l_3, \varphi_1(3), \varphi_3(3); l_1, l_2). \quad (7.32)$$

При обращении к функции (7.32) одинаковыми значениями задаются параметры  $l_0(3)$  при синтезе шарнирного четырехзвенника и параметры  $\varphi_3(3)$  при синтезе кривошипно-ползунного механизма. В последнем случае на место  $l_3$  вносится значение  $e + l_3$ .

Приближенный синтез кривошипно-ползунного механизма по заданному закону движения выходного звена  $x_C(\varphi_1)$  выполняется аналогично синтезу шарнирного четырехзвенника. Функция положения звеньев кривошипно-ползунного механизма (рис. 7.13, а) получается при использовании векторного многоугольника  $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{AE} + \vec{EC}$ . Из проекций на оси координат имеем

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= x_C; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= e + l_3, \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

откуда

$$\varphi_2(\varphi_1) = \arcsin((e + l_3 - l_1 \sin \varphi_1)/l_2). \quad (7.34)$$

После подстановки  $\varphi_2$  в уравнение (7.33) получим

$$x_C(\varphi_1) = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\arcsin((e + l_3 - l_1 \sin \varphi_1)/l_2)). \quad (7.35)$$

Дифференцируя по  $\varphi_1$  выражения (7.34) и (7.35), получим передаточные функции звеньев 2 и 3. На рис. 7.14 приведены примеры графиков функции  $i(x_C)$  (см. гл. 6).

## 7.6. Кривошипно-кулисные механизмы

Входными параметрами при синтезе кулисных механизмов (рис. 7.15) обычно являются коэффициент  $k_\omega = \omega_x/\omega_p$ , кинематический параметр  $S$  выходного звена 3 и запас хода  $h$  ползуна 2. Нужно определить размеры  $l_1$ ,  $l_0$  и  $l_3$ . Рабочий ход кулиса совершает при повороте кривошипа на угол  $\pi + 2\beta$ , холостой — при повороте на угол  $\pi - 2\beta$ . Тогда при  $\omega_1 = \text{const}$  имеем  $k_\omega = (\pi + 2\beta)/(\pi - 2\beta)$ , а угол

$$\beta = ((k_\omega - 1)/(k_\omega + 1)) \pi/2. \quad (7.36)$$

Для механизма с качающейся кулисой (рис. 7.15, а)  $\sin \beta = l_1/l_0 = \lambda$  и  $l_3 = s/2\lambda$ , с вращающейся кулисой (рис. 7.15, б)  $\sin \beta = l_0/l_1 = l/\lambda$ ;  $l_3 = s/2$  и, следовательно, для обоих типов механизмов

$$l_0 = (l_3 - h)/(1 + \lambda). \quad (7.37)$$

Операторная функция алгоритма синтеза кривошипно-кулисного механизма, реализующая эти зависимости, имеет вид

$$SNTZK(s, h, k_\omega; l_1, l_0, l_3). \quad (7.38)$$

Размеры звеньев  $l_0$ ,  $l_1$  определяют функцию положения, которая получается из условия  $\vec{l}_1 = \vec{l}_0 + \vec{l}_{CB}$ :

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 &= l_{CB} \cos \varphi_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 &= l_0 + l_{CB} \sin \varphi_3, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\varphi_3 = \pi/2 - \arcsin (l_1 \sin (\varphi_1 + \pi/2)/l_{CB}) \quad (7.39)$$

и

$$l_{CB} = \sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1l_0 \cos (\varphi_1 + \pi/2)}. \quad (7.40)$$

Подставляя  $l_{CB}$  из формулы (7.40) в формулу (7.39), после преобразований получим

$$\varphi_3 = \arctg ((l_1 \sin \varphi_1 + l_0)/(l_1 \cos \varphi_1)). \quad (7.41)$$

Дифференцируя выражение (7.41) по  $\varphi_1$ , определим передаточную функцию

$$i(\varphi_3) = 1/(1 + (l_1 \sin \varphi_1 + l_0)^2/(l_1^2 \cos^2 \varphi_1)) d \times \\ \times ((l_1 \sin \varphi_1 + l_0)/(l_1 \cos \varphi_1)) d\varphi_1$$

и после преобразований

$$i(\varphi_3) = l_1(l_1 + l_0 \sin \varphi_1)/(l_1^2 + l_0^2 + 2l_1l_0 \sin \varphi_1). \quad (7.42)$$

### 7.7. Механизмы с остановкой ведомого звена

Все четырехзвенные кривошипные механизмы со знакопеременным движением выходного звена обладают свойством его мгновенной остановки при изменении направления скорости. Это происходит при угле передачи движения между кривошипом и шатуном  $\gamma_{12} = \Rightarrow 0$  и  $\gamma_{12} = \pi$  в кривошипно-коромысловом и кривошипно-ползунном механизмах и при взаимно перпендикулярном расположении кривошипа и кулисы в кулисном механизме. *Конструктивным развитием кулисного механизма является мальтийский механизм, позволяющий осуществлять длительную остановку выходного звена при непрерывном равномерном вращении входного звена. Основными характеристиками мальтийского механизма (рис. 7.16) являются*

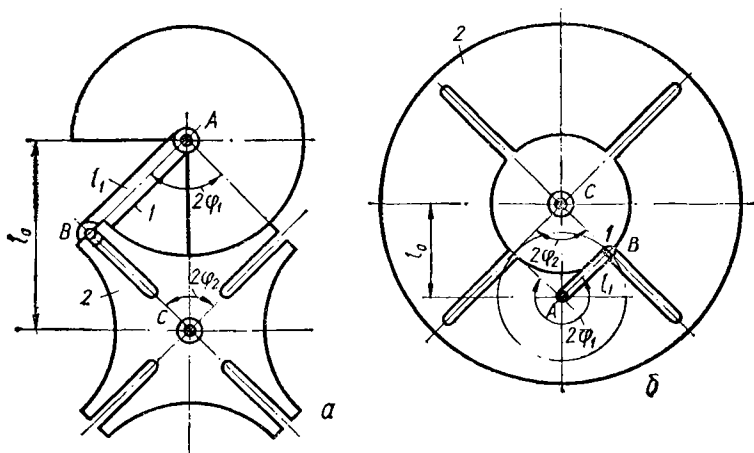


Рис. 7.16. Мальтийский механизм

функция положения, передаточная функция и коэффициент использования времени цикла — отношение времени поворота к времени покоя  $k_t = t_1/t_2$ .

Для произвольного положения кривошипа 1 мальтийского механизма в фазе вращения звена 2 из геометрических соображений получим

$$l_1/l_0 = \lambda = \sin \varphi_2 / \sin (\varphi_1 + \varphi_2),$$

откуда функция положения

$$\varphi_2(\varphi_1) = \arctg(\lambda \sin \varphi_1 / (1 - \lambda \cos \varphi_1)). \quad (7.43)$$

Дифференцируя условие (7.43) по  $\varphi_1$ , получим передаточную функцию

$$i(\varphi_2) = \lambda (\cos \varphi_1 - \lambda) / (1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2). \quad (7.44)$$

При числе пазов  $z$  на звене 2 (кресте) угол поворота его за один оборот кривошипа составит  $2\varphi_2 = 2\pi/z$ . При повороте креста на угол  $2\varphi_2$  кривошип поворачивается на угол  $2\varphi_1 = \pi - 2\varphi_2 = \pi - 2\pi/z = \pi(1 - 2/z)$ , из чего следует, что число пазов  $z \geq 3$ .

При полном времени цикла  $t = t_1 + t_2$  время поворота креста на угол  $2\varphi_2$

$$t_1 = 2\varphi_1/\omega_1 = \pi(1 + 2/z)/\omega_1;$$

время покоя

$$t_2 = (2\pi - 2\varphi_1)/\omega_1 = \pi(1 + 2/z)/\omega_1;$$

коэффициент использования времени цикла для механизма с внешним зацеплением (рис. 7.16, а)

$$k_t = t_1/t_2 = (z - 2)/(z + 2);$$

для механизма с внутренним зацеплением (рис. 7.16, б)

$$k_t = (z + 2)/(z - 2).$$

## 8. СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

### 8.1. Особенности синтеза пространственных механизмов

Для определения положения звеньев пространственных механизмов в пространственной системе координат требуется больше параметров, чем для плоских механизмов с тем же числом звеньев. Функция положения механизма плоского шарнирного четырехзвенника (рис. 7.5) включает пять параметров  $\varphi_3 = \varphi_3(l_1, l_2, l_3, l_0, \varphi_1)$ . Функция положения пространственного четырехзвенного механизма (рис. 8.1) включает уже восемь параметров  $\varphi_3 = \varphi_3(l_1, l_2, l_3, x_D, y_D, z_D, \alpha, \varphi_1)$ . Следовательно, пространственные механизмы позволяют реализовать заданные функции положения и передаточные функции с большей степенью точности, так как увеличивается число возможных вариантов подбора параметров и возможных сочетаний их значений.

Однако по той же причине пространственные механизмы обладают большей, чем плоские механизмы, чувствительностью к отклонениям линейных и угловых размеров звеньев от заданных. Поэтому применение точных методов синтеза пространственных механизмов из-за неточностей изготовления и монтажа звеньев, неизбежных при изготовлении и сборке реальных механизмов, не приводит к точному воспроизведению функции положения или передаточной функции. При проектировании пространственных механизмов более

Рис. 8.1. Определение параметров функции положения механизмов

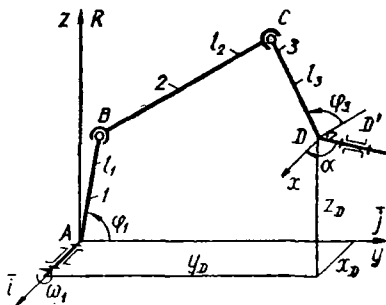
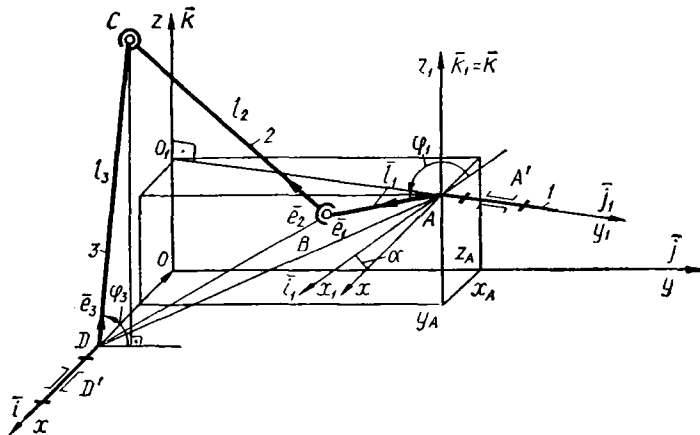


Рис. 8.2. Синтез пространственного шарнирного четырехзвенника



целесообразно применять приближенные методы синтеза с минимальным количеством определяемых параметров. Значениями других параметров задаются исходя из назначения механизма и конкретных условий его работы. Уменьшение количества параметров синтеза позволяет решать задачу оптимального синтеза для нескольких комбинаций значений принимаемых параметров. Получаемые при этом варианты схемы механизма анализируются, из них выбираются те, которые при конструктивной проработке механизмов дают наибольший выигрыш в массе звеньев, стоимости их технологической обработки и т. п.

Для пространственных механизмов пользуются методами синтеза, рассмотренными выше. Наиболее общим является *векторный метод*. При некоторых частных случаях расположения звеньев в

пространстве и ориентации кинематических пар меньше математических преобразований требуют методы приближенного синтеза по Чебышеву.

## 8.2. Пространственные шарнирные четырехзвенники

Рассмотрим синтез механизма шарнирного четырехзвенника для произвольного случая положения его звеньев и осей кинематических пар (рис. 8.2). Зафиксируем на осях вращательных кинематических пар  $A'$  и  $D'$  точки  $A$  и  $D$ , которые используем для построения векторных многоугольников. При использовании пространственных координатных систем целесообразно применять вспомогательные координатные системы, позволяющие получить простые зависимости для координат точек в них, а координаты этих точек в основной системе — через формулы перехода (см. гл. 5). Для упрощения векторных преобразований в разных координатных системах ось  $Ox$  основной координатной системы  $Oxyz$  направим по оси кинематической пары  $D'$ , ось  $Oz$  — по линии кратчайшего расстояния  $OO_1$  между скрещивающимися осями кинематических пар  $D'$  и  $A'$ , а ось  $Oy$  — перпендикулярно плоскости  $xOz$ .

Поместим начало вспомогательной координатной системы в точку  $A$  так, чтобы ось  $Ax_1$  совпала с осью вращательной пары  $A'$ , а ось  $Az_1$  была параллельна оси  $Oz$ . Звено 1 разместим на линии  $AB$ , соединяющей ось пары  $A'$  с центром пары  $B$ . При таком направлении осей координатной системы оси пар  $D'$  и  $A'$  располагаются в параллельных плоскостях  $xOy$  и  $x_1O_1y_1$ , а оси  $Ox$  и  $Ax_1$  образуют угол  $\alpha$ . Орты координатных осей  $Ax_1y_1z_1$  будут (см. гл. 5):

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_1 &= \bar{i} \cos \alpha + \bar{j} \sin \alpha; \\ \bar{j}_1 &= \bar{i} \sin \alpha + \bar{j} \cos \alpha; \\ \bar{k}_1 &= \bar{k}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Звену 1 пусть соответствует орт  $\bar{e}_1$ , звену 3 — орт  $\bar{e}_3$ , значения которых следующие:

$$\bar{e}_1 = \bar{i} \cos \varphi_1 + \bar{k}_1 \sin \varphi_1 = \bar{i} \cos \alpha \cos \varphi_1 + \bar{j} \sin \alpha \cos \varphi_1 + \bar{k} \sin \varphi_1; \quad (8.2)$$

$$\bar{e}_3 = \bar{j} \cos \varphi_3 + \bar{k} \sin \varphi_3. \quad (8.3)$$

Рассмотрим определение размеров  $l_1, l_2, l_3$  звеньев 1, 2 и 3 при заданных координатах точки  $A$ , точки  $D$  и функции положения  $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$ . Условие замкнутости векторного контура  $ABCD$  имеет вид  $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_{DA} = 0$ . Представим вектор  $\bar{l}_{DA}$  как сумму векторных составляющих по определенным ортам направлениям  $\bar{l}_{DA} = \bar{l}_{DO} + \bar{l}_{OO_1} + \bar{l}_{O_1A}$ . Тогда условие замкнутости запишется в виде  $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_{DO} + \bar{l}_{OO_1} + \bar{l}_{O_1A} = 0$  или

$$l_1 \bar{i}_1 + l_2 \bar{e}_2 - l_3 \bar{e}_3 - l_{DO} \bar{i} + l_{OO_1} \bar{k} + l_{O_1A} \bar{j}_1 = 0. \quad (8.4)$$

Заменим орты направляющими косинусами. Для этого в уравнении (8.4) перенесем  $l_2 \bar{e}_2$  в правую часть и возведем его в скалярный



квадрат. После преобразований получим

$$\begin{aligned}
 (l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_{D0}^2 + l_{00}^2 - l_{0,A}^2) - 2l_1l_3\bar{e}_1\bar{e}_3 - 2l_1l_{D0}\bar{e}_1\bar{i} + 2l_1l_{00}\bar{e}_1\bar{k} + \\
 + 2l_1l_{0,A}\bar{e}_1\bar{j}_1 + 2l_3l_{D0}\bar{e}_3\bar{i} - 2l_3l_{00}\bar{e}_3\bar{k} - 2l_3l_{0,A}\bar{e}_3\bar{j}_1 - 2l_{D0}l_{00}\bar{i}\bar{k} - \\
 - 2l_{D0}l_{0,A}\bar{i}\bar{j}_1 + 2l_{00}l_{0,A}\bar{k}\bar{j}_1 = 0. \quad (8.5)
 \end{aligned}$$

Используя свойства ортов при скалярном умножении, получим:  $\bar{e}_1\bar{e}_3 = \sin \alpha \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3$ ;  $\bar{e}_1\bar{i} = \sin \alpha \cos \varphi_1$ ;  $\bar{e}_1\bar{k} = \sin \varphi_1$ ;  $\bar{e}_1\bar{j}_1 = 0$ ;  $\bar{e}_3\bar{i} = 0$ ;  $\bar{e}_3\bar{k} = \sin \varphi_3$ ;  $\bar{e}_3\bar{j}_1 = \cos \alpha \cos \varphi_3$ ;  $\bar{i}\bar{j} = \sin \alpha$ ;  $\bar{k}\bar{j}_1 = 0$ . Подставляя в уравнение (8.5) значения скалярных произведений ортов, найдем

$$\begin{aligned}
 (l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_{D0}^2 + l_{00}^2 + l_{0,A}^2) - 2l_1l_3(\sin \alpha \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \\
 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3) - 2l_1l_{D0} \sin \alpha \cos \varphi_1 + 2l_1l_{00} \sin \varphi_1 - 2l_3l_{00} \sin \varphi_3 - \\
 - 2l_3l_{0,A} \cos \alpha \cos \varphi_3 - 2l_{D0}l_{0,A} \sin \alpha = 0. \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

В этом выражении первое и последнее слагаемые не зависят от исходных параметров. Разделим обе части уравнения (8.6) на  $l_1$  (этим выражаем все линейные размеры в долях  $l_1$ ) и обозначим

$$2x_0 = (1 - l_2^2 + l_3^2 + l_{D0}^2 + l_{00}^2 + l_{0,A}^2 - 2l_{D0}l_{0,A} \sin \alpha).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
 x_0 - (\sin \alpha \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3) l_3 - l_{D0} \sin \alpha \cos \varphi_1 + \\
 + l_{00} \sin \varphi_1 - l_3 l_{00} \sin \varphi_3 - l_3 l_{0,A} \cos \alpha \cos \varphi_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Разделив все члены этого уравнения на  $l_3$ , определяем  $x_1 = x_0/l_3$ ;  $x_2 = l_{D0}/l_3$ ;  $x_3 = l_{00}/l_3$ ;  $x_4 = l_{00}$ ;  $x_5 = l_{0,A}$ . Тогда для произвольного  $i$ -го положения кривошипа, характеризуемого определенным значением угла поворота кривошипа  $\varphi_{1i}$ , соответствующие ему по функции положения значения угла поворота коромысла  $\varphi_{3i}$  получим из условия

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 \sin \alpha \cos \varphi_{1i} + x_3 \sin \varphi_{1i} - x_4 \sin \varphi_{3i} - x_5 \cos \alpha \cos \varphi_{3i} - \\
 - (\sin \alpha \cos \varphi_{1i} \cos \varphi_{3i} + \sin \varphi_{1i} \sin \varphi_{3i}) = 0. \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

В уравнении (8.7) пять неизвестных. Принимая значения  $i = 1, 2, \dots, 5$ , получим пять уравнений. Из решения системы этих пяти уравнений получим неизвестные размеры: непосредственно из решений —  $l_{00}$ , и  $l_{0,A}$ , затем —  $l_3$ ,  $l_{D0}$ , а из выражения для  $x_0$  — величину  $l_2$ . Принимая из конкретных условий работы механизма размер  $l_1$ , вычислим линейные размеры всех звеньев механизма.

Синтез механизма пространственного четырехзвенника осуществляют и методом Чебышева. Ввиду громоздкости алгебраических преобразований для общего случая рассмотрим этот метод для частного случая, когда оси кинематических пар  $A'$  и  $D'$  скрещиваются под углом  $90^\circ$  (рис. 8.3). Заданной является функция положения  $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$ ; в результате синтеза необходимо определить размеры звеньев 1, 2 и 3. Направим ось  $Oy$  по оси вращения кинематической

пары  $A'$  с ординатой  $a$  точки  $A$  на этой оси. Ось вращательной кинематической пары  $D'$  поместим в плоскость  $xOz$  с координатами  $b$  и  $c$  фиксированной на ней точки  $D$ .

Степень приближения заданной функции  $\varphi_3$  ( $\varphi_1$ ) к функции положения  $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$  синтезируемого механизма оценивается взвешенной разностью  $\Delta_q$ , которую примем, как и для плоского механизма (см. гл. 6), в известном уже виде

$$\Delta_q = l_2^2 - l_{2c}^2. \quad (8.8)$$

Значение  $l_{2c}^2$  для пространственного механизма будет

$$l_{2c}^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2. \quad (8.9)$$

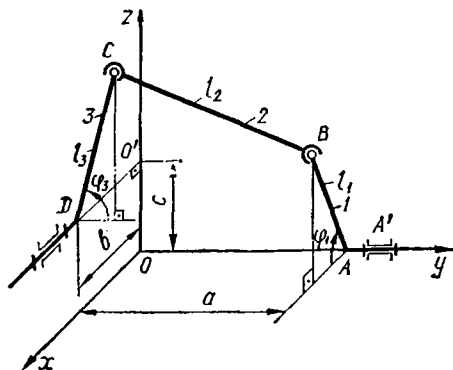


Рис. 8.3. Синтез механизма по методу Чебышева

Координаты центров сферических кинематических пар  $B$  и  $C$  определим по зависимостям  $x_B = l_1 \cos \varphi_1$ ;  $y_B = a$ ;  $z_B = l_1 \sin \varphi_1$ ;  $x_C = b$ ;  $y_C = l_3 \cos \varphi_3$ ;  $z_C = l_3 \sin \varphi_3 + c$ . Подставляя их в уравнение (8.9), после преобразований получим

$$l_{2c}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + l_1^2 + l_3^2 - 2l_1 l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - 2cl_1 \sin \varphi_1 - 2bl_1 \cos \varphi_1 - 2al_3 \cos \varphi_3 - 2cl_3 \sin \varphi_3.$$

Принимая для дальнейших расчетов  $l_1 = 1$ , получим выражение для  $l_{2c}^2$ , в котором все линейные размеры выражены в долях  $l_1$ :

$$l_{2c}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 1 + l_3^2 - 2l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - 2c \sin \varphi_1 - 2bc \cdot \cos \varphi_1 - 2al_3 \cos \varphi_3 - 2cl_3 \sin \varphi_3.$$

Тогда взвешенная разность (8.8) для рассматриваемого механизма определится в виде

$$\Delta_q = l_2^2 - l_{2c}^2 = 2l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + 2c \sin \varphi_1 + 2b \cos \varphi_1 + 2al_3 \cos \varphi_3 + 2cl_3 \sin \varphi_3 - a^2 - b^2 - c^2 - l_3^2 - 1 + l_2^2.$$

Введем обозначения:  $a_1 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_3$ ;  $x_1 = 2l_3$ ;  $a_2 = \sin \varphi_1$ ;  $x_2 = 2c$ ;  $a_3 = \cos \varphi_1$ ;  $x_3 = 2b$ ;  $a_4 = \cos \varphi_3$ ;  $x_4 = 2al_3$ ;  $a_5 = \sin \varphi_3$ ;  $x_5 = 2cl_3$ ;  $a_6 = -1$ ;  $x_6 = a^2 + b^2 + c^2 + l_3^2 + 1 - l_2^2$ . Тогда получим

$$\Delta_q = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 + \Phi(\varphi_1), \quad (8.10)$$

где  $\Phi(\varphi_1)$  — задаваемая функция, не содержащая параметров синтеза.

Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_6$  определяют функцию положения и находят для любого значения  $\varphi_1$ . Определяя их для любого угла поворота кривошипа  $\varphi_i$  и соответствующего ему угла  $\varphi_{3i}$ , для значений  $i = 1, 2, \dots, 6$  получим систему из шести уравнений, из решения которой определим  $x_1, x_2, \dots, x_6$ , а по ним — линейные размеры звеньев механизма в долях  $l_1$ . Принимая  $l_1$  для обеспечения конкретных условий работы механизма, вычисляют размеры всех звеньев.

### 8.3. Кривошипно-ползунные механизмы

В задаче синтеза пространственного кривошипно-ползунного механизма обычно заданными являются угол между направляющей поступательной пары  $D'$  ползуна 3 (рис. 8.4) и осью вращательной кинематической пары  $A'$  кривошипа 1, а также координаты фиксированной точки  $A$  на ней. Расположим основную координатную систему  $Oxyz$  так, чтобы ось  $Ox$  была направлена по направляющей

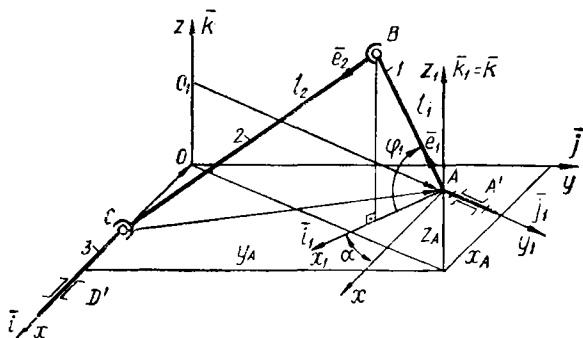


Рис. 8.4. Синтез пространственного кривошипно-ползунного механизма

поступательной пары  $D'$ , ось  $Oz$  — по линии  $OO_1$  кратчайшего расстояния между скрещивающимися осями пар  $A'$  и  $D'$ , ось  $Oy$  — перпендикулярна плоскости  $xOz$ . В точке  $A$  поместим начало вспомогательной координатной системы  $Ax_1y_1z_1$ , ось  $Ay_1$  которой пройдет по оси кинематической пары  $A'$  через точку  $O_1$  на оси  $Oz$ , а ось  $Az_1$  будет параллельна оси  $Oz$ . Так как ось  $Oz$  совпадает с линией  $OO_1$ , то оси  $Ox$  и  $Ax_1$  лежат в параллельных плоскостях, а угол между ними составит  $\alpha$ .

Орты осей системы  $Ax_1y_1z_1$  определяются по зависимостям (8.1), орт  $\bar{e}_1$  — по зависимости (8.2). Условие замкнутости векторного контура  $ABC$  будет  $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_{CA} = 0$ . Вектор  $\bar{l}_{CA}$  можно разложить по известным направлениям:  $\bar{l}_{CA} = \bar{l}_{CO} + \bar{l}_{OO_1} + \bar{l}_{O_1A}$ . Тогда условие замкнутости контура  $ABCOO_1A$  окончательно запишем в виде  $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_{CO} + \bar{l}_{OO_1} + \bar{l}_{O_1A} = 0$  или

$$l_1 \bar{e}_1 + l_2 \bar{e}_2 - l_{CO} \bar{i} + l_{OO_1} \bar{k} + l_{O_1A} \bar{j}_1 = 0. \quad (8.11)$$

Исключим из выражения (8.11) орт  $\bar{e}_2$ , для чего перенесём  $l_2 \bar{e}_2$  в правую часть и возведём в скалярный квадрат. Тогда после преобразований с учетом скалярных произведений ортов, полученных выше, найдем

$$(l_1^2 - l_2^2 + l_{00}^2 + l_{0,A}^2) - 2l_1 l_{CO} \sin \alpha \cos \varphi_1 + 2l_1 l_{00} \sin \varphi_1 - 2l_{CO} l_{0,A} \sin \alpha = -l_{CO}^2. \quad (8.12)$$

Разделив это выражение на  $l_1$ , выразим все линейные размеры в долях  $l_1$  и в дальнейшем примем  $l_1 = 1$ . В условии (8.12) первое слагаемое не зависит от входных параметров. Обозначив  $2x_1 = 1 + l_{00}^2 + l_{0,A}^2 - l_2^2$ , получим

$$x_1 - (l_{CO})_i \cos \varphi_{1i} \sin \alpha + \sin \varphi_{1i} l_{00} - (l_{CO})_i l_{0,A} \sin \alpha = -(l_{CO})_i^2.$$

Если принять, что  $x_2 = \sin \alpha$ ;  $x_3 = l_{00}$ ;  $x_4 = l_{0,A} \cdot \sin \alpha$ , то

$$x_1 - (l_{CO})_i \cos \varphi_{1i} x_2 + \sin \varphi_{1i} x_3 - (l_{CO})_i x_4 = -(l_{CO})_i^2.$$

Вычисляя по заданной функции положения  $x_C = x_C(\varphi_i)$  значения коэффициентов при неизвестных для  $\varphi_{1i}$  при  $i = 1, 2, 3, 4$ , сведем задачу к решению системы уравнений, из которой последовательно определим  $\sin \alpha$ ,  $l_{00}$ ,  $l_{0,A}$ ,  $l_2$ . Принимая  $l_1$  из конкретных условий, вычислим все размеры звеньев механизма.

## 9. ПУТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

### 9.1. Задачи, решаемые с помощью механизмов с высшими парами

Механизмы с высшими кинематическими парами получили большое распространение в связи с возможностью реализации практически любого закона движения выходного звена при минимальном числе промежуточных звеньев.

*Передаточными механизмами с высшими кинематическими парами решают задачи преобразования непрерывного, обычно равномерного движения входного звена в непрерывное движение выходного звена с постоянной или переменной скоростью.* Входные и выходные звенья совершают как вращательные, так и поступательные движения с постоянным или изменяющимся направлениями угловых и линейных скоростей. Следовательно, механизмы с высшими кинематическими парами имеют постоянное или переменное передаточное отношение.

### 9.2. Требования к геометрии звеньев в связи с задачами кинематики

При решении задачи синтеза механизмов с высшими кинематическими парами необходимо установить геометрические формы их элементов, обеспечивающие требуемый характер относительного дви-

жения звеньев, и их геометрические размеры, соответствующие значениям входных параметров синтеза.

**Поверхности, образующие элементы высших кинематических пар и обеспечивающие заданное относительное движение звеньев, называются сопряженными.** Могут иметь место два случая касания сопряженных поверхностей — *точечное*, при котором поверхности касаются друг друга в точке, и *линейчатое*, при котором поверхности касаются друг друга по линии.

На рис. 9.1 показаны звенья  $1$  и  $2$ , взаимодействующие друг с другом в точке контакта  $K$ . Если связать с звеньями  $1$  и  $2$  системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$ , а со стойкой — неподвижную систему  $Oxyz$ , то при движении звеньев траектории точки контакта в координатных системах определяют *сопряженные линии*  $K_1K'_1$  и  $K_2K'_2$ , принадлежащие взаимодействующим звеньям. Траектория точки контакта  $K$  в неподвижной системе  $Oxyz$  определит линию  $K_0K'_0$ , которая называется *линией зацепления*. Положение и форма сопряженных линий и линии зацепления определяются характером относительного движения взаимодействующих звеньев в данном направлении и формой поверхностей.

При изменении направления относительного движения форма и положение сопряженных линий и линии зацепления при точечном контакте звеньев меняются. Совокупность сопряженных линий звеньев образуют поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , которые будут сопряженными, если вектор относительной скорости движения поверхностей  $\bar{v}_{12}$  в точке контакта лежит в общей, касательной к поверхностям плоскости при любом направлении относительного движения. В этом случае составляющая относительной скорости вдоль общей нормали  $n - n$  в точке контакта  $K$  сопряженных поверхностей равна нулю и выбранные поверхности не расходятся и не пересекаются.

Совокупность линий зацепления  $K_0K'_0$ , найденных для различных направлений вектора  $\bar{v}_{12}$ , определит *поверхность зацепления*  $Q$  звеньев  $1$  и  $2$ . Возможные линии пересечения сопряженных поверхностей находятся за пределами взаимодействующих звеньев.

При точечном касании звеньев форма сопряженных поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  должна быть строго очерчена только в рабочей зоне поверхности зацепления, в которой определены сопряженные линии, а на других участках она диктуется наиболее простой технологией изготовления и учетом возможного смещения сопряженных линий из-за неточностей изготовления и деформации звеньев.

Если взаимодействующие звенья  $1$  и  $2$  касаются в точках пространственной сопряженной линии или по плоской контактной линии, то требование для вектора относительной скорости  $\bar{v}_{12}$  соблюдается во всех точках контакта. Совокупность контактных линий в системах  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$  полностью определяет форму сопряженных поверхностей, а в системе  $Oxyz$  — поверхность зацепления  $Q$ . В этом случае сопряженные поверхности  $S_1$  и  $S_2$  полностью определены на всех участках рабочей зоны звеньев.

### 9.3. Синтез сопряженных поверхностей пространственной высшей кинематической пары

Задача синтеза сопряженных поверхностей высшей кинематической пары в простейшей постановке заключается в определении поверхности  $S_2$ , сопряженной с заданной поверхностью  $S_1$ , при известных передаточной функции звеньев  $1$  и  $2$   $i_{12} = \omega_1/\omega_2$  и функции изменения направляющего угла вектора  $\bar{v}_{12}$  от координат звена  $1$ . При взаимодействии твердых звеньев не может быть внедрения одной по-

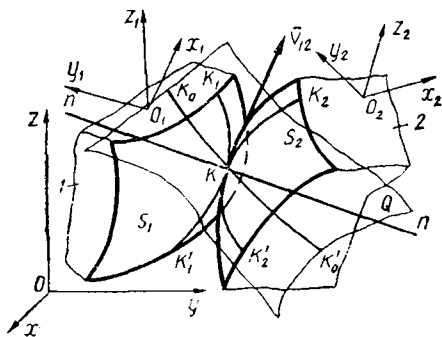


Рис. 9.1. Контакт звеньев в точке

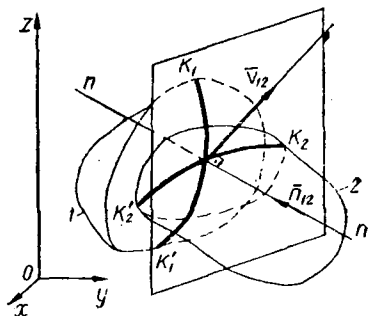


Рис. 9.2. Условие сопряженности поверхностей

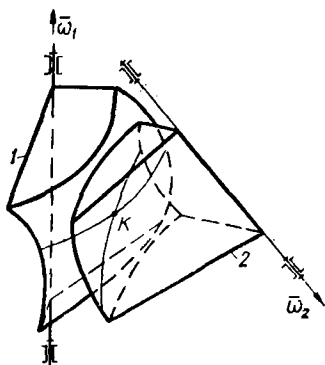


Рис. 9.3. Общий случай кинематической пары

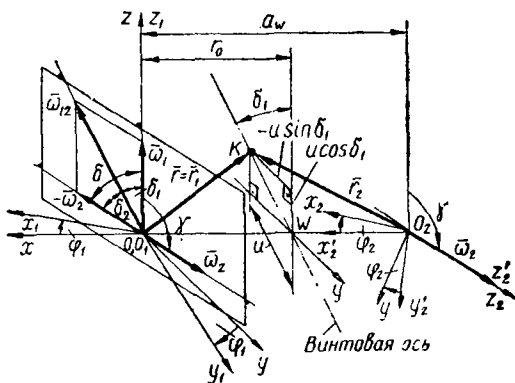


Рис. 9.4. Синтез поверхностей высшей кинематической пары

верхности в другую либо размыкания кинематической пары. Чтобы удовлетворить это требование, вектор  $\bar{v}_{12}$  относительного движения в любой точке контакта поверхности зацепления должен находиться в плоскости, касательной к обоим сопряженным поверхностям в этой точке. Это требование записывают в виде условия перпендикулярности вектора относительной скорости  $\bar{v}_{12}$  к общей нормали в точке контакта  $K$  или единичному вектору (орту)  $\bar{n}_{12}$  об-

щей нормали (рис. 9.2):

$$v_{12} \cdot \bar{n}_{12} = 0. \quad (9.1)$$

Выражение (9.1) является математической записью **основной теоремы зацепления**: *поверхности элементов высшей кинематической пары будут сопряженными, если в любой точке контакта общая нормаль к ним будет перпендикулярна вектору скорости их относительного движения.* Вектор относительной скорости  $\bar{v}_{12}$  определяется из общих положений кинематики относительного движения твердого тела.

Пусть звенья 1 и 2 (рис. 9.3), элементы которых, касаясь в точке  $K$ , образуют высшую кинематическую пару, вращаются. Тогда в общем случае векторы угловых скоростей  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  (рис. 9.4) скрещиваются. Свяжем со звеном 1 неподвижную систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  так, что ось  $O_1z_1$  совпадает с линией действия вектора  $\bar{\omega}_1$ . Начало  $O$  неподвижной координатной системы  $Oxyz$  совместим с точкой  $O_1$ , ось  $Oz$  — с линией действия вектора  $\bar{\omega}_1$  (т. е.  $Oz$  и  $O_1z_1$  совпадают), а ось  $Ox$  — с линией  $O_1O_2 = a_w$  кратчайшего расстояния между скрещивающимися под углом  $\gamma$  линиями действия векторов  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$ . Тогда положение звена 1 в системе  $Oxyz$  определится углом поворота координатных осей  $\varphi_1$ . Со звеном 2 свяжем координатную систему  $O_2x_2y_2z_2$ , ось  $O_2z_2$  которой совпадает с линией действия вектора  $\bar{\omega}_2$ . Векторы скоростей точек контакта звеньев 1 и 2 будут

$$\bar{v}_{K,O} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1; \quad \bar{v}_{K,O} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2,$$

где  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  — радиусы-векторы точек контакта звеньев.

Скорость точки  $K_2$  в системе  $Oxyz$  определим на основании основной теоремы кинематики твердого тела:

$$\bar{v}_{K_2} = \bar{v}_{K_2,O} = \bar{v}_{O_2,O} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_1 = \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_1, \quad (9.2)$$

где  $\bar{v}_{O_2,O} = \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w$  — вектор скорости поступательного движения точки  $O_2$  при пространственном винтовом перемещении.

По теореме о сложном движении для точки  $K$  получим

$$\bar{v}_{K_2} = \bar{v}_{K_1} + \bar{v}_{K_2,K_1}; \quad \bar{v}_{K_2,K_1} = \bar{v}_{K_2} - \bar{v}_{K_1}; \quad \bar{v}_{12} = \bar{v}_{K_1,K_2} = \bar{v}_{K_1} - \bar{v}_{K_2}$$

или

$$\bar{v}_{12} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1 - \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_1 - \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w = (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \times \bar{r}_1 - \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w = \bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_1 - \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w. \quad (9.3)$$

Вектор  $\bar{\omega}_{12}$  определится геометрическим суммированием векторов  $\bar{\omega}_1$  и  $-\bar{\omega}_2$  после переноса  $\bar{\omega}_2$  в плоскость  $zOy$ .

Для принятого расположения систем координат  $Oxyz$  следует, что

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \omega_1 \bar{k}; & \bar{\omega}_2 &= \bar{j} \omega_2 \sin \gamma + \bar{k} \omega_2 \cos \gamma; \\ \bar{\omega}_{12} &= -\bar{j} \omega_2 \sin \gamma + \bar{k} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Учитывая свойства скалярных и векторных произведений ортов координатных осей (см. гл. 5), получим из формулы (9.3) проекции  $\bar{v}_{12}$  на координатные оси при заданном  $\bar{\omega}_1$ :

$$\left. \begin{aligned} v_{12x} &= -\omega_1 ((1 - i_{21} \cos \gamma) y + z i_{21} \sin \gamma); \\ v_{12y} &= \omega_1 ((1 - i_{21} \cos \gamma) x - a_w i_{21} \cos \gamma); \\ v_{12z} &= \omega_1 (a_w + x) i_{21} \sin \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

где  $i_{21} = \omega_2/\omega_1$  — значения воспроизводимой заданной передаточной функции.

Орт нормали  $\bar{n}_{12}$  в уравнении (9.1) определяется по заданному уравнению поверхности элемента кинематической пары звена 1  $S_1(x, y, z) = 0$ . В этом условии  $x = x(v, \theta)$ ,  $y = y(v, \theta)$ ,  $z = z(v, \theta)$ , где  $v$  и  $\theta$  — независимые параметры, являющиеся аргументами для непрерывных функций координат (криволинейные координаты на поверхности). В векторном виде уравнение поверхности имеет вид  $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(v, \theta)$ . Тогда орт нормали

$$\bar{n}_{12} = (\partial \bar{r}_1 / \partial v \times \partial \bar{r}_1 / \partial \theta) / \{ \partial \bar{r}_1 / \partial v + \partial \bar{r}_1 / \partial \theta \}. \quad (9.6)$$

Выразим вектор  $\bar{v}_{12}$  через координаты поверхности  $S$  и заданные параметры синтеза с помощью выражений (9.5). Определяя  $\bar{n}_{12}$  из выражения (9.6), решим уравнение (9.1), после чего определим координаты точек поверхности  $S_2$ , элемента звена 2 кинематической пары, сопряженной с поверхностью звена 1.

Если контакт звеньев происходит по линии, то для каждой точки контактной линии должно соблюдаться условие (9.1). Прямая линия, через которую проходят нормали к сопряженным поверхностям всех точек контакта сопряженных поверхностей, называется *осью зацепления*. Из теоретической механики известно, что при вращательном движении звеньев со скрещивающимися осями их относительное движение является *винтовым*, совокупным вращательным движением со скоростью  $\bar{\omega}_{12}$  относительно мгновенной винтовой оси вращения и поступательным движением со скоростью  $\bar{v}_{12}$  вдоль нее. Эта ось является линией касания *аксоидных поверхностей*, связанных со звеньями. Так как и через ось зацепления, и через винтовую ось проходят нормали, то эти оси совпадают. Уравнение винтовой оси

$$\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_{12} = 0,$$

откуда следует, что линии действия векторов  $\bar{\omega}_{12}$  и  $\bar{v}_{12}$  параллельны. Учитывая выражения (9.4) и (9.5), свойства проекций векторного произведения и принимая  $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{12y} v_{12z} - \omega_{12z} v_{12y} &= - (i_{21} \sin \gamma)^2 (x + a_w) - (1 - i_{21} \cos \gamma) \times \\ &\times ((1 - i_{21} \cos \gamma) x - a_w i_{21} \cos \gamma) = 0; \\ \omega_{12z} v_{12x} - \omega_{12x} v_{12z} &= \\ &= - (1 - i_{21} \cos \gamma) (z i_{21} \sin \gamma + (1 - i_{21} \cos \gamma) y) = 0; \\ \omega_{12x} v_{12y} - \omega_{12y} v_{12x} &= - i_{21} \sin \gamma (z i_{21} \sin \gamma + (1 - i_{21} \cos \gamma) y) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$



Из уравнений (9.7) получим после преобразований для винтовой оси:

$$\begin{aligned} x &= -r_0 = -a_w i_{21} (i_{21} - \cos \gamma) / (1 - 2i_{21} \cos \gamma + i_{21}^2); \\ y &= -z i_{21} \sin \gamma / (1 - i_{21} \cos \gamma). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Из уравнений (9.8) видно, что винтовая ось пересекает линию кратчайшего расстояния  $OO_2$  в точке  $x = -r_0$ , а с осью  $z$  она образует угол  $\delta_1 = \arctg [i_{21} \sin \gamma / (1 - i_{21} \cos \gamma)]$  при  $y_K/z_K = -\operatorname{tg} \delta_1$ . Тогда, определяя положение точки  $K$  на винтовой оси (рис. 9.4) через заданные параметры, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= -r_0 = -a_w i_{21} (i_{21} - \cos \gamma) / (1 - 2i_{21} \cos \gamma + i_{21}^2); \\ y &= -u \sin \delta_1; \\ z &= u \cos \delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Уравнения (9.9) определяют положение винтовой оси в неподвижной координатной системе  $Oxyz$ , ось  $Oz$  которой совпадает с осью  $O_1z_1$  системы  $O_1x_1y_1z_1$ , связанной с вращающимся звеном  $I$ . Тогда уравнение винтовой оси в системе  $O_1x_1y_1z_1$  (рис. 9.4) получим, используя матрицы перехода от системы  $Oxyz$  к системе  $O_1x_1y_1z_1$  (см. гл. 5):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ -u \sin \delta_1 \\ u \cos \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.10)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -r_0 \cos \varphi_1 - u \sin \delta_1 \sin \varphi_1; \\ y_1 &= r_0 \sin \varphi_1 - u \cos \varphi_1 \sin \delta_1; \\ z_1 &= u \cos \delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Уравнение винтовой оси в системе  $O_2x_2y_2z_2$ , связанной со вторым звеном кинематической пары, получим, используя матрицы перехода от системы  $Oxyz$  к системе  $O_2x_2y_2z_2$ , через вспомогательную систему  $O_2x_2y_2z_2$ , ось  $O_2x_2$  которой совпадает с осью  $Ox$ , а ось  $O_2z_2$  — с осью  $O_2z_2$ . Матрицы перехода от системы  $Oxyz$  к системе  $O_2x_2y_2z_2$  равны (см. гл. 5):

$$\begin{aligned} M_{2'O} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_w \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & M_{2''} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ M_{2O} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \cos \gamma \sin \varphi_2 & -\sin \gamma \sin \varphi_2 & a_w \cos \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \gamma \cos \varphi_2 & -\sin \gamma \cos \varphi_2 & -a_w \sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.12)$$

Тогда уравнение винтовой оси в системе  $O_2x_2y_2z_2$  будет

$$\bar{r}_2 = M_{20}\bar{r}_0$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (a_w - r_0) \cos \varphi_2 - u \sin(\delta_1 + \gamma) \sin \varphi_2; \\ y_2 &= -(a_w - r_0) \sin \varphi_2 - u \sin(\delta_1 + \gamma) \cos \varphi_2; \\ z_2 &= u \cos(\delta_1 + \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Уравнения (9.11) и (9.13) описывают аксоидные поверхности звеньев 1 и 2, являющиеся однополостными гиперboloидными поверхностями вращения. В этом легко убедиться. Приняв в этих уравнениях  $y_1 = 0$  и  $y_2 = 0$ , получим уравнения гипербол в сечениях, проходящих через оси  $O_1z_1$  и  $O_2z_2$  (рис. 9.5, а), а приняв  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 0$  — уравнения окружностей в горловинах гиперboloидов.

Если оси звеньев 1 и 2 пересекаются, то  $a_w = 0$ ,  $\gamma = \delta$ , тогда  $x = 0$ ,  $y = -u \sin \delta$ ,  $z = u \cos \delta$  и винтовая ось образует в отно-

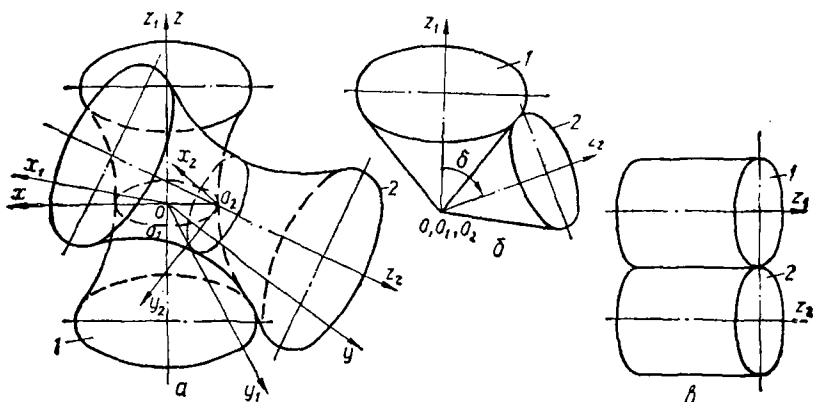


Рис. 9.5. Аксоидные поверхности

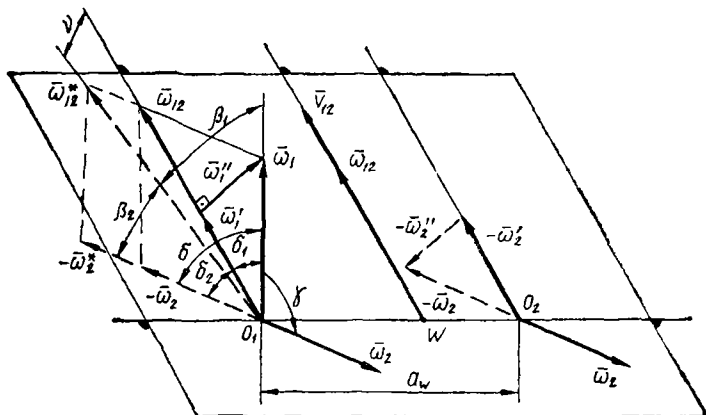


Рис. 9.6. Определение относительной скорости звеньев

сительном движении конические аксоидные поверхности (рис. 9.5, б). Если оси звеньев, образующих высшую кинематическую пару, параллельны, то  $\gamma = 0$ , тогда  $x = -a_w i_{21}/(1 - i_{21})$ ;  $y = 0$ ;  $z = u$  и, следовательно, винтовая ось образует в относительном движении цилиндрические аксоидные поверхности (рис. 9.5, в).

При синтезе поверхностей элементов конической пары вектор относительной скорости  $\bar{v}_{12}$  зависит от мгновенного значения передаточного отношения  $i_{21}$  передаточной функции  $i_{21}(\varphi_1)$ . Это объясняется тем, что передаточная функция зависит от геометрической формы звеньев и является входным параметром синтеза. Действительно, если через отрезок  $O_1O_2 = a_w$  (рис. 9.6) и линию вектора  $\bar{\omega}_{12}$  провести плоскость и спроецировать на нее векторы  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$ , то получим

$$\begin{aligned}\omega_{12} &= \omega_1 + \omega_2 = \omega_1 \cos \delta_1 + \omega_2 \cos \delta_2 = \\ &= \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \delta}.\end{aligned}$$

Точка  $W$  делит межосевое расстояние  $O_1O_2$  на части, обратно пропорциональные  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Следовательно,  $O_1W/O_2W = \omega_2/\omega_1 = \omega_2 \cos \delta_2/\omega_1 \cos \delta_1$ , а

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = (O_2W/O_1W)(\cos \delta_2/\cos \delta_1). \quad (9.14)$$

Если поверхности  $S_1$  и  $S_2$  элементов кинематической пары выполнить в виде аксоидных гиперboloидов, то контакт звеньев по винтовой оси будет линейчатым. Так как нормаль к поверхности гиперboloидов пройдет через оси их вращения, то силовое взаимодействие звеньев не вызовет передачи движения. Передать движение с помощью такой кинематической пары можно только силами трения между звеньями 1 и 2, возникающими за счет прижимающих их сил. Для обеспечения передачи движения непосредственным соприкосновением звеньев необходимо придать им форму, при которой нормаль к поверхностям звеньев не проходила бы через их оси вращения. Тогда касательная плоскость к звеньям пройдет согласно условию (9.1) перпендикулярно  $n - n$  через векторы  $\bar{\omega}_{12}$  и  $\bar{v}_{12}$ .

Увеличим угловую скорость звена 2 до значения  $\omega_2$ . Тогда новый вектор угловой скорости относительного движения  $\bar{\omega}_{12}$  отклонится по плоскости ( $\bar{\omega}_{12} - \bar{a}_w$ ) на угол  $\nu$  (рис. 9.6). Между векторами  $\bar{\omega}_1$ ,  $\bar{\omega}_2$  и  $\bar{\omega}_{12}$  образуются новые углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , причем  $\beta = \beta_1 + \beta_2 = \delta_1 + \delta_2 = \delta$ . Для обеспечения передаточного отношения  $i_{12} = \omega_1/\omega_2$  поверхности элементов звеньев 1 и 2 должны быть такими, чтобы направление касательной к звеньям совпало с направлением вектора  $\bar{\omega}_{12}$ , т. е. с винтовой осью новых гиперboloидов. Эти новые гиперboloиды касаются аксоидных гиперboloидов в одной точке — точке контакта звеньев 1 и 2, так как их винтовые оси пересекаются под углом  $\nu$ . Следовательно, и контакт звеньев будет точечным. Для этого случая

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = (O_2W/O_1W)/(\cos \beta_2/\cos \beta_1) = (r_2/r_1)(\cos \beta_2/\cos \beta_1). \quad (9.15)$$

Такие гиперboloиды называются *начальными*. Соответствующие им поверхности, имеющие радиусы  $r_1$  и  $r_2$  в точке касания, также называются *начальными*. У начальных поверхностей сопряженные линии касаются, а проекция вектора  $\vec{v}_{12}$  на плоскость, нормальную в точке касания звеньев, равна нулю. В таком случае для обеспечения точечного касания звеньев нет необходимости в качестве начальных поверхностей принимать именно гиперboloиды. Целесообразно за начальные принимать простые по форме поверхности — круглые цилиндры радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , построенные у горловин гиперboloидов и касающиеся друг друга в точке на линии  $O_1O_2$ , или конусы с несовпадающими вершинами и точечным контактом и т. п. Из кинематики звеньев следует, что если оси звеньев 1 и 2 лежат в одной плоскости (рис. 9.5, б, в), то начальные и аксондные поверхности совпадают.

#### 9.4. Синтез элементов плоской высшей кинематической пары

Если поверхности  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 9.1) рассеять плоскостью, проходящей через вектор  $\vec{v}_{12}$  и общую нормаль  $\vec{n}_{12}$ , то в сечении получим контакт кривых, принадлежащих этим поверхностям и лежащих в одной плоскости. Эти кривые в дальнейшем будем называть *профильными*, или *профилями*. Такие профили  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  образуют кинематическую пару 4-го класса (рис. 9.7), звенья которой 1 и 2, в за-

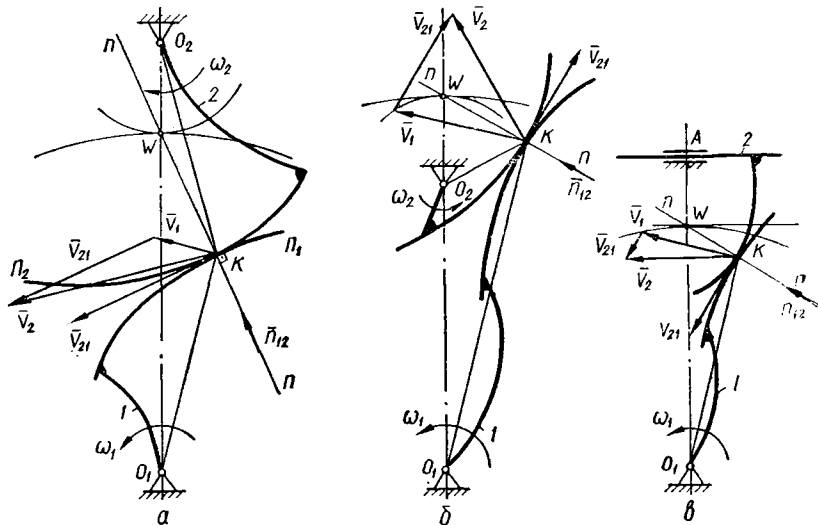


Рис. 9.7. Синтез элементов плоской высшей кинематической пары

висимости от характера движения поверхностей  $S_1$  и  $S_2$ , совершают вращательное (рис. 9.7, а, б) или поступательное (рис. 9.7, в) движения.

Задача синтеза в этом случае сводится к определению формы профиля 2 по профилю 1 и функции положения или передаточной функции.

Все ранее рассмотренные зависимости справедливы и для плоской кинематической пары, так как плоско-параллельное движение является частным случаем пространственного движения. Вектор  $\bar{v}_{12} = -\bar{v}_{21}$  будет направлен по касательной к профилям 1 и 2 и перпендикулярен к общей нормали  $n - n$ . Из теоретической механики известно, что мгновенный центр вращения при относительном движении двух звеньев лежит на линии их центров. Следовательно, точка пересечения  $W$  нормали  $n - n$  и линии центров  $O_1O_2$  является мгновенным центром вращения звеньев 1 и 2 и называется **полюсом**. Геометрические места мгновенных центров вращения  $W$ , связанные с плоскостями профилей 1 и 2, образуют **центроиды**. Очевидно, центроиды будут соответствовать сечению плоскостью  $(\bar{v}_{21} - \bar{n}_{12})$  аксоид поверхностей  $S_1$  и  $S_2$ , которым принадлежат профили. Для плоской кинематической пары математическое выражение основной теоремы зацепления также имеет вид  $\bar{v}_{12} \cdot \bar{n}_{12} = 0$ .

Если передаточная функция постоянна, то точка  $W$  не меняет своего положения на линии центров и центроиды звеньев будут окружностями радиусов  $O_1W$  и  $O_2W$ . Тогда  $\delta_2 = \delta_1 = 0$  и по формуле (9.14) передаточное отношение

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = O_2W/O_1W = \text{const.} \quad (9.16)$$

Для плоской кинематической пары передаточное отношение имеет знак (см. рис. 9.7). Если направления угловых скоростей разные, то полюс  $W$  лежит между точками  $O_1$  и  $O_2$  (см. рис. 9.7, а), если одинаковые — на продолжении линии  $O_1O_2$  (см. рис. 9.7, б). При поступательном движении звена 2 (см. рис. 9.7, в) полюс будет находиться на перпендикуляре, проведенном из центра вращения звена 1 на линию действия вектора  $\bar{v}_2$ , а знак передаточного отношения определится направлением угловой скорости  $\omega_1$ .

## 9.5. Формообразование элементов высшей кинематической пары реальных звеньев

*Сопряженные поверхности звеньев образуются при их изготовлении как огибающие производящих поверхностей в относительном движении. Производящая поверхность касается сопряженных поверхностей, которые формируют режущие грани инструмента. Чаще применяют производящие плоскости. Режущие кромки инструмента, определяющие производящие поверхности, очерчивают обычно прямыми линиями, эвольвентами или окружностями, так как это облегчает контроль их взаимного положения при производстве и заточке. Относительные движения производящих поверхностей и заготовки обеспечиваются кинематикой станков. Конструкции станков предусматривают образование сопряженных поверхностей как огибающих в относительном движении инструмента и заготовки.*

Производящая поверхность может совпадать с одной из сопряженных поверхностей и может отличаться от обеих сопряженных поверхностей. Если производящая поверхность совпадает с заданной

поверхностью  $S_1$ , то при образовании поверхности  $S_2$  производящая и образуемая поверхности имеют такое же относительное движение, как и поверхности  $S_1$  и  $S_2$  звеньев 1 и 2 пары при их взаимодействии. Если поверхности  $S_1$  и  $S_2$  образуются производящей поверхностью  $S_n$ , отличной от  $S_1$  и  $S_2$ , то этой поверхности задается определенное движение по отношению к стойке, а звеньям 1 и 2 задается движение с соответствующим отношением скоростей.

При изготовлении сопряженных поверхностей в целях их взаимозаменяемости и снижения номенклатуры инструмента применяют стандартные исходные контуры — сечения исходных сопряженных поверхностей плоскостями, цилиндрическими или коническими поверхностями (см. гл. 10). Стандартный исходный контур должен быть сопряжен с обеими изготавливаемыми сопряженными поверхностями. Исходный контур должен быть технологичен в изготовлении и легко подвергаться контролю, что обеспечивает его точность. Форма контура кроме геометрических соображений выбирается с учетом изгибной и контактной прочности сопряженных поверхностей.

## 10. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

### 10.1. Эвольвентная функция

Для передачи движения с постоянным передаточным отношением широкое распространение получили предложенные еще Л. Эйлером (см. прил.) профили, являющиеся дугами эвольвент окружностей. *Геометрическое место центров кривизны любой кривой (эвольвенты) называется эволютой.* Эвольвенту и эволюту характеризуют следующие геометрические свойства: эвольвента является разверткой эволюты, т. е. она описывается точкой прямой, которая перекатывается по эволюте без скольжения, поэтому радиус кривизны эвольвенты равен длине соответствующей дуги эволюты; касательная к эволюте является нормалью к эвольвенте; точка касания с эволютой нормали к эвольвенте является центром ее кривизны.

В теории зацепления эволюта — окружность радиуса  $r_b$ , называемая *основной* (рис. 10.1). Точка  $B$  касания производящей прямой  $Q$  с основной окружностью является мгновенным центром вращения в относительном движении, отрезок  $BM$  — радиусом кривизны эвольвенты в точке  $M$ . Точка  $C$  на основной окружности (начало эвольвенты) называется *предельной точкой*. Угол  $\nu_M$  между радиусами, проведенными в предельную точку  $C$  и точку  $B$  касания производящей прямой с основной окружностью, называется *углом развернутости* эвольвенты в точке  $M$ .

Радиус кривизны эвольвенты при  $\nu_M = 0$  равен нулю; с увеличением угла развернутости он увеличивается, при этом  $\overline{CB} = \overline{MB}$ . Угол  $\alpha_M$  между радиусами  $OM$  и  $OB$  называется *углом профиля*

в точке  $M$  и определяется по формуле

$$\alpha_M = \arccos(r_b/r_M), \quad (10.1)$$

где  $r_M$  — радиус эвольвенты в данной точке.

Угол  $\theta_M = \nu_M - \alpha_M$  называется **эвольвентным углом**. Из треугольника  $OMB$  при  $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{MB}$  имеем  $\operatorname{tg} \alpha_M = MB/OB = \overset{\frown}{CB}/OB = r_b \nu_M / r_b = \nu_M$ . Отсюда

$$\theta_M = \operatorname{tg} \alpha_M - \alpha_M = \operatorname{inv} \alpha_M. \quad (10.2)$$

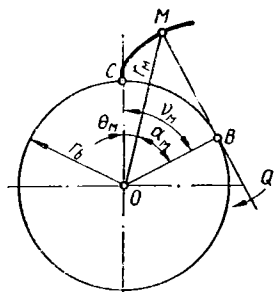


Рис. 10.1. Эвольвента окружности

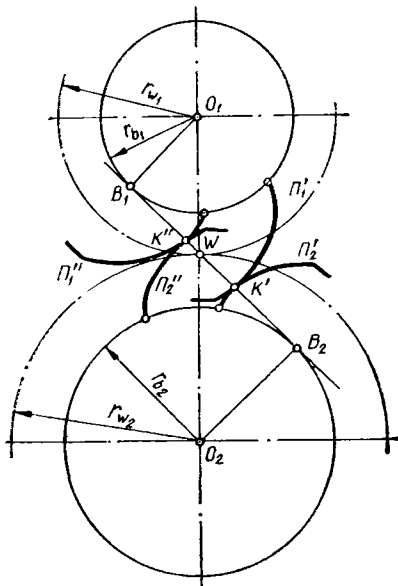


Рис. 10.2. Эвольвентные профили

Зависимость  $\theta_M = \operatorname{inv} \alpha_M$  называется **эвольвентной функцией**, она является характеристикой эвольвенты окружности, табулирована и используется при определении геометрических размеров эвольвентных зубьев. Если из формул (10.1) и (10.2) исключить  $\alpha_M$ , то получим зависимость между  $r_M$  и  $\theta_M$ , выраженную через  $r_b$ . Следовательно, эвольвента полностью определяется основной окружностью и для отыскания координат эвольвентного профиля достаточно задать её радиус  $r_b$ .

## 10.2. Эвольвентные профили

Схема взаимодействия двух эвольвентных профилей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  с основными окружностями  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$ , вращающимися вокруг центров  $O_1$  и  $O_2$ , показана на рис. 10.2. По свойству эвольвент общая нормаль к этим профилям в положении  $\Pi_1'$  и  $\Pi_2'$  в точке их контакта  $K'$  касательна к обоим основным окружностям в точках  $B_1$  и  $B_2$ . При повороте звеньев профили займут положение  $\Pi_1''$  и  $\Pi_2''$ , а точка контакта эвольвент переместится в точку  $K''$ , но так как положение основных окружностей не изменяется, то и положение общей

нормали  $B_1B_2$ , касательной к этим окружностям, будет постоянным, и она будет пересекать линию  $O_1O_2$  в одной и той же точке  $W$ . Как показано ранее (см. гл. 9), окружности, касающиеся друг друга в точке  $W$ , являются центроидами в относительном движении. В теории зацеплений эти окружности радиусов  $r_{W1}$  и  $r_{W2}$ , перекатывающиеся без скольжения, называются *начальными*. При неподвижных центрах  $O_1$  и  $O_2$  передаточное отношение  $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = r_{W2}/r_{W1}$  и на основании подобия  $\Delta O_1B_1W$  и  $\Delta O_2B_2W$  получим

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = r_{W2}/r_{W1} = r_{b2}/r_{b1}. \quad (10.3)$$

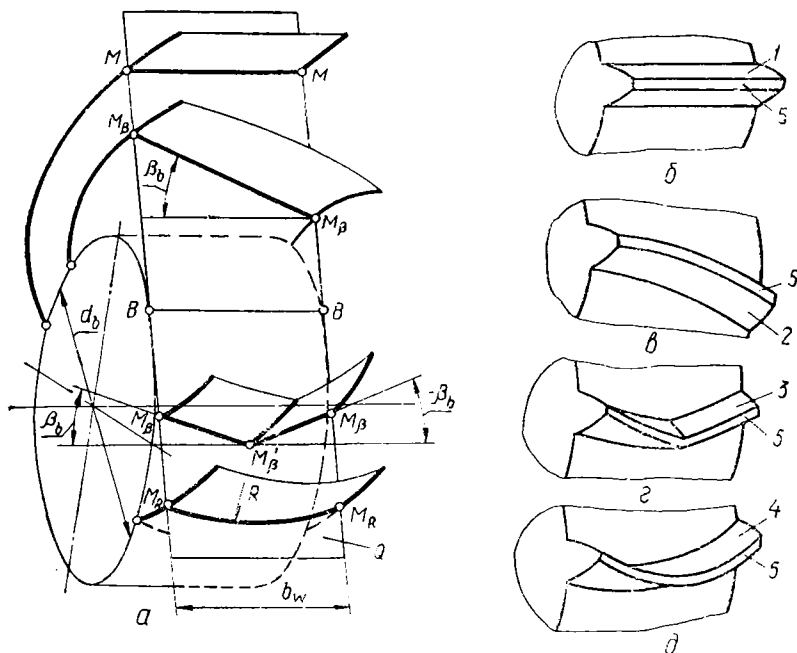


Рис. 10.3. Образование зубьев разных видов

Следовательно, при взаимодействии эвольвентных профилей передаточное отношение не изменяется, так как не изменяются радиусы основных окружностей.

При зацеплении реальных звеньев эвольвентные профили ограничиваются наружным размером звена. Для сохранения непрерывности передаточного отношения между звеньями при их движении необходимо до того, как профили  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  выйдут из зацепления, ввести в зацепление следующие профили и т. д. На практике это достигается приданием звеньям круглой формы с равномерным расположением профилей по основной окружности. Расстояние между соседними профилями по дуге радиуса  $r_b$  называется *шагом по основной окружности*. Обычно профили выполняют двусторонними. Такие звенья называют *зубчатыми колесами*.



### 10.3. Образование прямых зубьев

Зубчатые колеса имеют третье измерение вдоль осей вращения — ширину зубчатого венца  $b_w$  (рис. 10.3, а); основная окружность в этом случае является торцовым сечением основного цилиндра. Эвольвентные поверхности зубьев образуются линиями, расположенными на производящей плоскости  $Q$ , перекатывающейся без скольжения по основному цилиндру.

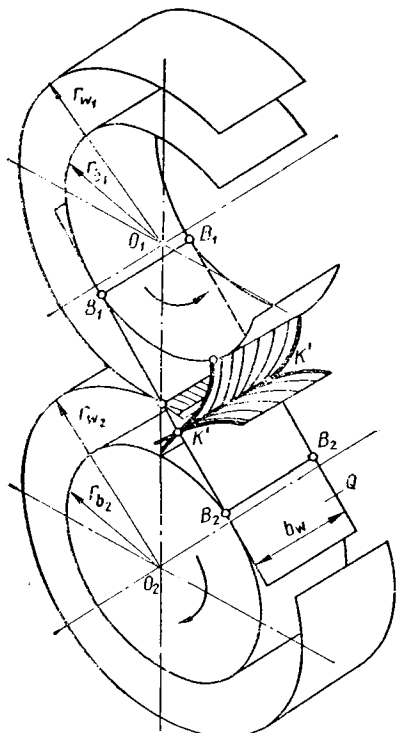


Рис. 10.4. Образование прямых зубьев

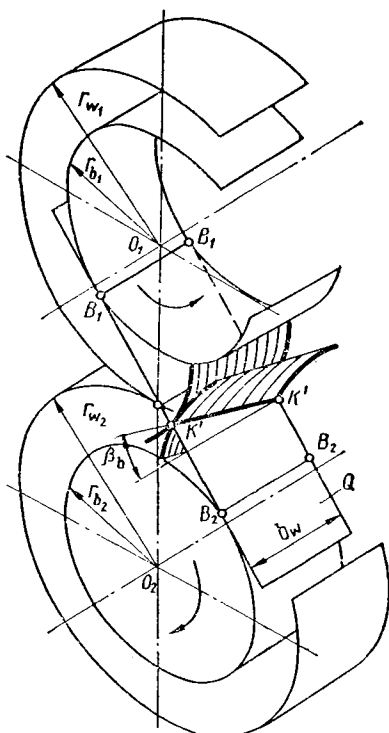


Рис. 10.5. Образование косых зубьев

Линия  $MM$ , параллельная линии  $BB$  касания плоскости с основным цилиндром, описывает цилиндрическую эвольвентную поверхность  $I$ , которая является рабочей поверхностью прямого зуба (рис. 10.3, б), ограниченной цилиндрической поверхностью  $5$  вершин зубьев. Так как любая точка на прямой  $MM$  при обкатывании плоскости  $Q$  по основному цилиндру описывает эвольвенту, то, как и эвольвентные профили, эвольвентные боковые поверхности двух взаимодействующих зубьев являются сопряженными, т. е. они обеспечивают постоянство заданного передаточного отношения.

Точка контакта  $K'$  двух плоских эвольвентных профилей (рис. 10.2) соответствует в пространстве контактная линия  $K'K'$  (рис. 10.4) на поверхностях зубьев, которая в прямозубой цилинд-

рической эвольвентной передаче является прямой, параллельной осям колес. В процессе зацепления контактная линия перемещается по боковой поверхности ведущего зуба в направлении к его вершине, а по поверхности ведомого — приближаясь к основанию зуба. Плоскость  $B_1B_2B_2B_1$  в неподвижной системе координат, в которой лежит контактная линия, называют **плоскостью зацепления**. Она касается основных цилиндров обоих взаимодействующих колес и нормальна боковым поверхностям зубьев.

#### 10.4. Образование косых зубьев

Если линию  $M_1M_2$  (см. рис. 10.3, а), образующую эвольвентную поверхность, расположить под углом  $\beta_b$  по отношению к линии  $BB$  касания производящей плоскости  $Q$  с основным цилиндром, то при ее обкатывании получим **винтовую эвольвентную поверхность**. Часть ее 2 (см. рис. 10.3, в), ограниченную цилиндрической поверхностью вершин  $b$ , используют в качестве рабочей поверхности зуба косозубого колеса. Постоянство передаточного отношения пары косозубых колес обеспечивается благодаря их сопряженности в любом торцовом сечении. Так как боковые поверхности сопрягаемых эвольвентных зубьев (рис. 10.5) образуются одной и той же прямой при обкатывании ее по двум основным цилиндрам радиусов  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$ , то их линия контакта  $K'K'$  тоже является прямой линией. На плоскости зацепления  $B_1B_2B_2B_1$ , как и на основном цилиндре, контактная линия расположена под углом  $\beta_b$ . На поверхностях цилиндров, соосных с основным цилиндром, углы наклона линии зуба отличаются от  $\beta_b$ : они тем меньше, чем больше диаметр цилиндра.

Так как каждое из пары косозубых колес представляет собой цилиндрическое колесо с зубьями, расположенными по винтовой линии, то зубья входят в зацепление плавно: контакт пары зубьев начинается в точке на торце, по мере поворота колес контакт распространяется на линию, длина которой постепенно увеличивается, а затем также плавно уменьшается до точки на противоположном торце колес.

Чем больше угол наклона зубьев, тем больше количество пар зубьев, одновременно передающих нагрузку. Однако с увеличением угла наклона зубьев растет осевая составляющая нормальной силы в зацеплении. Для уравнивания этой осевой силы применяют **шевронные зубья** (см. рис. 10.3, г), боковые поверхности  $Z$  которых образуются двумя линиями  $M_B M'_B$  и  $M'_B M_B$  (см. рис. 10.3, а), расположенными под углами  $\beta_b$ , имеющими противоположное направление по отношению к линии  $BB$  касания производящей плоскости  $Q$  с основным цилиндром. **Шевронное зубчатое колесо** можно представить себе состоящим из двух косозубых колес, называемых полушевронами. На каждом полушевроне процесс взаимодействия зубьев аналогичен процессу взаимодействия в косозубых колесах.

## 10.5. Образование криволинейных зубьев

В случае, если в качестве образующей линии принять кривую  $M_R M_R$ , например дугу окружности радиуса  $R$  (см. рис. 10.3, а), то при перекачивании поверхности  $Q$  по основному цилиндру получим криволинейную эвольвентную поверхность. Часть ее 4 (см. рис. 10.3, д) описывает боковую поверхность зуба. Так как в любом сечении, перпендикулярном оси колес, профиль зубьев очерчен эвольвентой,

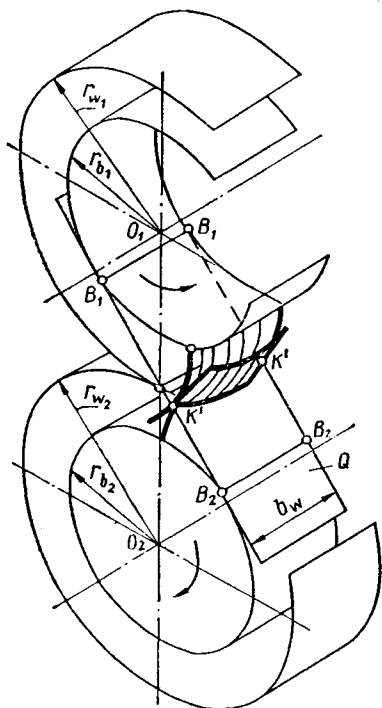


Рис. 10.6. Образование криволинейных зубьев

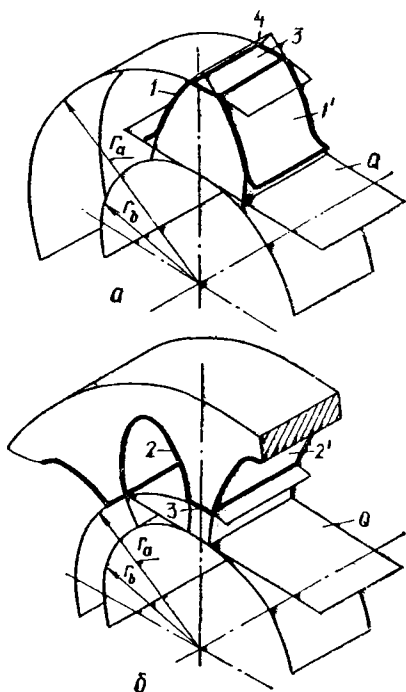


Рис. 10.7. Образование внутренних зубьев

то зацепление с криволинейными зубьями обеспечивает постоянство передаточного отношения. В контакте находятся вогнутая поверхность одного зуба с выпуклой поверхностью другого, линия контакта этих зубьев — кривая  $K'K'$  (рис. 10.6). Контакт зубьев начинается по торцам, а затем перемещается к средней части колес, если зубья на ведущем колесе входят в зацепление вогнутой стороной; при вхождении в зацепление выпуклой стороной контакт начинается в средней части колеса, а затем распространяется к торцам.

## 10.6. Образование внутренних зубьев

Прямые, косые и криволинейные зубья могут быть внешними и внутренними. Боковые поверхности 1 и 1' внешних зубьев (рис. 10.7, а) образованы выпуклыми эвольвентными поверхностями, сходящи-

мися по мере удаления от основной окружности и пересекающимися по линии 4. Поверхности 3 вершин зубьев имеют наибольший диаметр. Боковые поверхности 2 и 2' внутренних зубьев (рис. 10.7, б) образуются вогнутыми эвольвентными поверхностями, расходящимися по мере удаления от основного цилиндра. Выпуклая и вогнутая эвольвентные поверхности внешнего и внутреннего зуба в прямозубом зацеплении касаются по прямой линии  $K'K'$  (рис. 10.8). Плоскость зацепления располагается только выше линии  $B_1B_1$ , так как на части плоскости  $B_1B_2B_2B_1$  эвольвентные поверхности пересекаются вследствие несовпадения нормалей к эвольвентным поверхностям в точках контакта.

### 10.7. Зубчатая рейка

Если радиус  $r_1$  основной окружности одного из звеньев увеличивать до бесконечности (рис. 10.9), то начальная окружность (цилиндр) вырождается в прямую линию (плоскость 2), соответствующая эгольвента — в прямую линию, а вращательное движение — в поступательное.

Взаимодействие прямолинейного профиля с эвольвентным, подобно взаимодействию двух эвольвент, происходит с постоянным

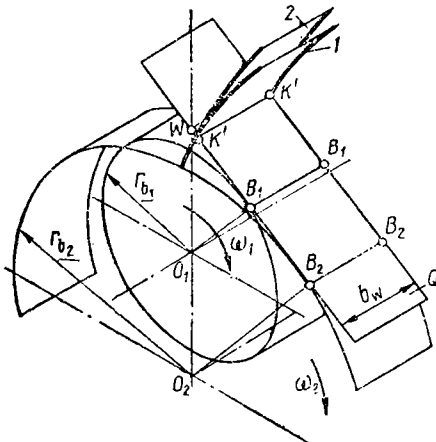


Рис. 10.8. Элементы внутреннего зацепления

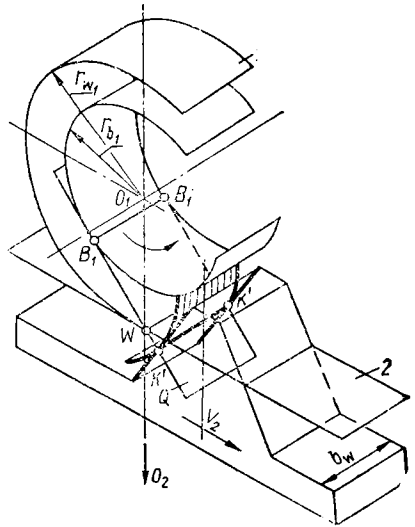


Рис. 10.9. Реечное зацепление

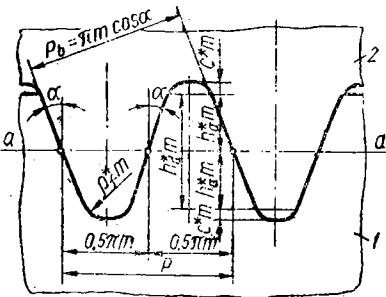


Рис. 10.10. Исходный контур

передаточным отношением. Следовательно, если в качестве профиля зуба звена 2, поступательно движущегося в направлении, перпендикулярном линии  $O_1O_2$ , принять прямую линию, то получим зубчатую рейку. Сопряженным с эвольвентным профилем зуба колеса будет прямолинейный профиль зуба рейки с определенным углом наклона его относительно линии  $O_1O_2$ , перпендикулярной к вектору скорости поступательного движения рейки. В зависимости от типа зубьев — прямых, косых, шевронных или криволинейных — контактные линии  $K'K'$  будут иметь соответствующий вид: прямые, параллельные образующим  $B_1V_1$  основного цилиндра, наклонные прямые к этим образующим и кривые.

## 10.8. Исходный контур

Для обеспечения сопряжения эвольвентных зубчатых колес, изготовленных в различных условиях, необходимо, чтобы любое колесо соответствовало требованиям стандарта, устанавливающего основные параметры зацепления. Стандарт на параметры зубчатой рейки установлен на основании свойства сопряженности прямолинейного профиля рейки с эвольвентой окружности. Реечный контур  $I$  (рис. 10.10), положенный в основу стандарта, т. е. принятый в качестве базового для определения теоретических форм и размеров зубчатых колес, называется **теоретическим исходным контуром**, или исходным контуром. Прямая  $a-a$ , перпендикулярная осям симметрии зубьев рейки, по которой их толщина равна ширине впадин, называется *делительной*. Расстояние между одноименными профилями, измеренное по делительной или любой другой параллельной ей прямой, называется *шагом исходного контура*  $P$ , а расстояние между этими же профилями, измеренное по нормали, — *основным шагом*  $P_b$  исходного контура. Они связаны соотношением

$$P_b = P \cos \alpha, \quad (10.4)$$

где  $\alpha$  — *угол профиля исходного контура* (угол между прямолинейным профилем зубчатой рейки и перпендикуляром к средней линии).

Для того чтобы диаметры колес выражались рациональными числами, основу стандарта составляет **модуль исходного контура**, или просто модуль:

$$m = P/\pi. \quad (10.5)$$

Модуль измеряется в миллиметрах и его значения регламентированы ГОСТ 9563—60. Все размеры исходного контура определяются в долях модуля при использовании коэффициентов: высоты головки зуба  $h_a^* = 1$ ; глубины захода зубьев  $h_f^* = 2$ ; радиального зазора  $c^* = 0,25$ ; радиуса закругления впадин  $\rho_f = 0,38$ . Эти коэффициенты называются **параметрами исходного контура**. Для зубчатых колес общемашиностроительного применения угол профиля стандартом установлен  $\alpha = 20^\circ$ .

Прямозубому колесу соответствует прямозубая рейка (рис. 10.11, а). Линии зубьев этой рейки перпендикулярны её торцовому сечению  $T$  и их профиль во всех сечениях плоскостью, парал-

лельной торцам, одинаков. У косозубой рейки (рис. 10.11, б), соответствующей косозубому колесу, образующие линии зубьев составляют угол  $\beta$  с перпендикуляром к её торцу; в нормальном сечении плоскостью  $N$ , перпендикулярной образующим, и торцовом сечении  $T$  профили зубьев различны. Поэтому параметрам профиля в нормальном сечении присваивают индекс  $n$ , а в торцовом сечении — индекс  $t$ . Стандартными являются параметры исходного

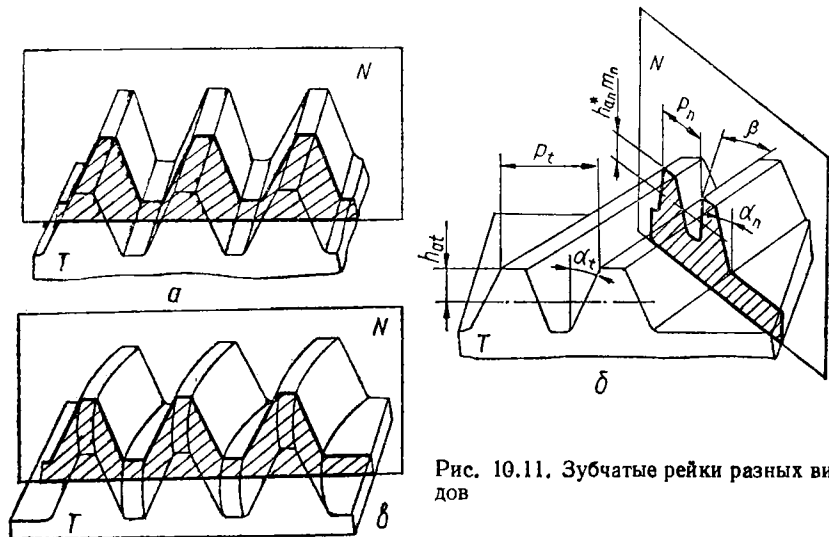


Рис. 10.11. Зубчатые рейки разных видов

контура в нормальном сечении. Параметры торцового сечения исходного контура выражаются через параметры нормального сечения посредством тригонометрических функций угла  $\beta$ :

$$\begin{aligned} P_t &= P_n / \cos \beta; & m_t &= m_n / \cos \beta; & h_{at}^* &= h_{an}^* \cos \beta; \\ c_t &= c_n^* \cos \beta; & \alpha_t &= \arctg (\tg \alpha_n / \cos \beta). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Колесу с криволинейными зубьями соответствует рейка с криволинейными зубьями (рис. 10.11, в). Чаще всего линии зубьев этих реек в зависимости от технологии изготовления выполнены по дугам окружностей или по участкам эпициклоид. Для реек, у которых линии зубьев представляют собой окружности, стандартным является профиль зубьев в сечении плоскостью  $N$ , проходящей через центры окружностей параллельно торцовой плоскости  $T$ .

## 10.9. Нарезание зубьев на заготовках колес

Заготовка цилиндрического колеса с внешними зубьями представляет собой цилиндр диаметром  $d_a$ . Зубчатый венец образуется за счет удаления материала из впадин при нарезании зубьев *способом копирования* или *способом обкатки*. При способе копирования профиль инструмента должен совпадать с профилем впадины между зубьями нарезаемого колеса. Инструментом могут быть модульная

(дисковая или пальцевая) фреза (рис. 10.12, *a*), строгальный или долбежный резец, протяжка, шлифовальный круг и др. После обработки каждой впадины (рис. 10.12, *б*) колесо, установленное в делительном приспособлении, поворачивается на угол  $360^\circ/z$  для обработки следующей впадины. Недостатки способа копирования заключаются в том, что для каждого числа зубьев нужен новый инструмент, так как с изменением числа зубьев меняется профиль впадины. С целью экономии изготавливают наборы инструментов, каждый из которых используют для нарезания колес с определен-

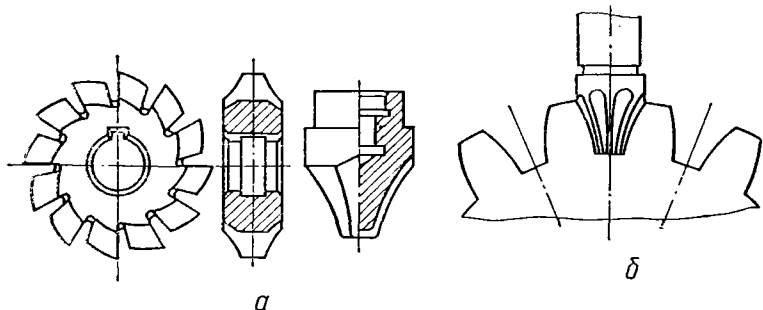


Рис. 10.12. Нарезание зубьев методом копирования

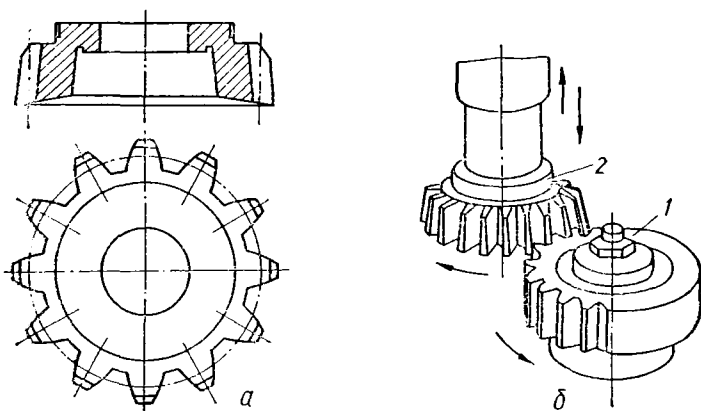


Рис. 10.13. Нарезание зубьев долбяком

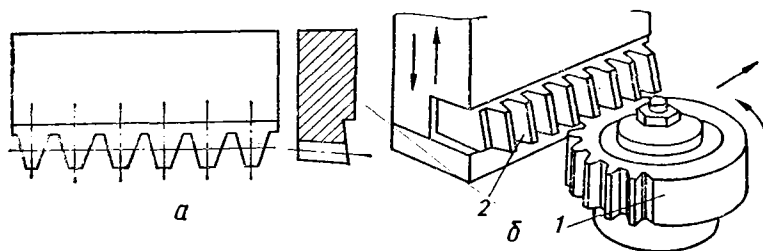


Рис. 10.14. Нарезание зубьев производящей рейкой

ными числами зубьев. Вследствие этого точность зацепления снижается. Кроме этого, режущий инструмент имеет криволинейные режущие кромки и при его изготовлении неизбежны погрешности, которые переносятся на нарезаемое колесо, а для реализации любого изменения в геометрии зубьев необходимо изготовить специальный инструмент, что трудоемко и неэкономично.

При способе обкатки боковые поверхности зубьев на заготовке образуются как огибающие семейства производящих поверхностей, содержащих режущие кромки инструмента. В качестве инструмен-

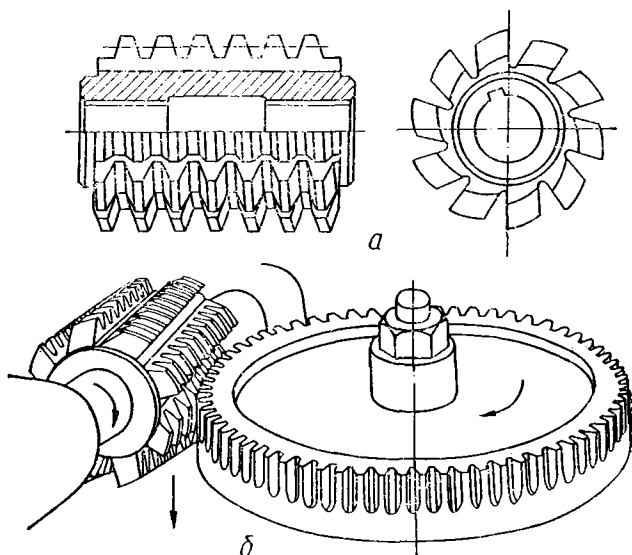


Рис. 10.15. Нарезание зубьев червячной фрезой

та применяется производящее колесо — долбяк (рис. 10.13, а), входящее в станочное зацепление с заготовкой. При работе станка воспроизводится перекатывание без скольжения центроиды нарезаемого колеса 1 (10.13, б) по центроиде производящего колеса 2. В другом случае применяется производящая рейка (рис. 10.14, а) с прямолинейным профилем зубьев и при станочном зацеплении этой рейки с заготовкой (рис. 10.14, б) производится перекатывание без скольжения центроиды нарезаемого колеса 1 по центроиде рейки 2. Сопряженность эвольвентного профиля вращающегося звена с прямолинейным профилем звена, движущегося поступательно, позволяет значительно упростить инструмент для обработки эвольвентных профилей, а значит, увеличить точность их изготовления. Инструмент реечного типа, соответствующий прямоочной производящей рейке, выполняют в виде зуборезной гребенки или червячной фрезы (рис. 10.15, а). В последнем случае нарезание происходит непрерывно, фреза осуществляет два движения — вращательное и поступательное вдоль образующей нарезаемого колеса (рис. 10.15, б).



Размеры инструментов реечного типа определяют по параметрам исходного производящего реечного контура 2 (см. рис. 10.10), имеющего очертания впадин теоретического исходного контура. При этом между линией впадин исходного производящего контура и линией вершин исходного контура сохраняется радиальный зазор  $c^*m$  для того, чтобы поверхность впадин инструмента не участвовала в процессе резания.

### 10.10. Определение координат точек профиля зуба

При нарезании зубьев эвольвентная часть профиля  $QG$  формируется прямолинейным участком  $K_2K_3$  (рис. 10.16) профиля зубчатой рейки, а переходная кривая  $GF$  — участком  $K_1K_2$ , являющимся окружностью радиусом  $\rho_f^*m$ . Общая точка  $G$  эвольвентного профиля и переходной кривой называется **граничной точкой**. Определение координат точек профилей зубьев необходимо при контроле их геометрии и разработке методик расчета зубчатых передач на прочность.

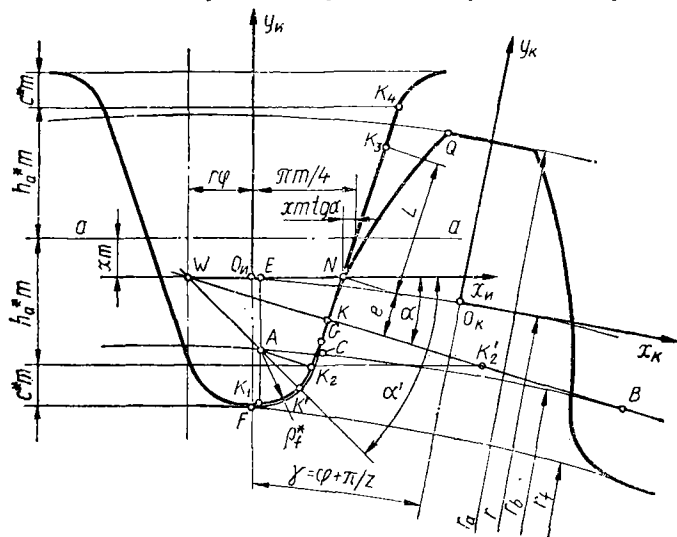


Рис. 10.16. Определение координат точек профиля зубьев

Рассмотрим формирование зубьев колеса при относительном расположении рейки, характеризуемом смещением  $xm$ . С зубом производящей рейки (инструмента) свяжем систему координат  $T_n$  таким образом, чтобы ось  $x_n$  совпала с ее центроидой в относительном движении, а ось  $y_n$  — с осью симметрии ее зуба. Тогда в этой системе координат уравнение линии  $K_1K_2$  режущих кромок, очерченной по дуге окружности радиуса  $\rho_f^*m$ , в параметрической форме будет

$$\begin{aligned} x_n &= x_A + \rho_f^*m \cos \alpha'; \\ y_n &= y_A - \rho_f^*m \sin \alpha', \end{aligned} \quad (10.7)$$

для прямолинейного участка  $K_2K_3$

$$x_n = \pi m/4 - xm \operatorname{tg} \alpha + e \sin \alpha; \quad (10.8)$$

$$y_n = e \cos \alpha,$$

где  $x_A, y_A$  — координаты центра кривизны  $A$  участка  $K_1K_2$ ;  $\alpha'$  — угол между осью  $x_n$  и линией  $AK'$ , проходящей через полюс  $W$ .

Координаты центра кривизны закругленного участка зуба рейки

$$x_A = m(\pi/4 - h_a^* \operatorname{tg} \alpha - \rho_j^* \cos \alpha); \quad (10.9)$$

$$y_A = -m(h_a^* - x) + \rho_j^* m \sin \alpha.$$

Изменяя параметр  $\alpha'$  от  $\alpha$  до  $\pi/2$ , получим координаты любой точки участка  $K_1K_2$ , а изменяя параметр  $e$  от  $L$  до  $-m(h_a^* - x)/\cos \alpha$  — координаты любой точки участка  $K_2K_3$ , ограниченного точками  $K_2$  и  $K_3$ , контактирующей в процессе обкатки с точкой  $Q$  профиля зуба колеса.

Координаты точек нарезаемого профиля зуба колеса определим в системе координат  $T_K$ . В этой системе ось  $x_K$  совпадает с касательной к делительной окружности, а ось  $y_K$  — с осью симметрии зуба. Согласно условиям станочного зацепления углу  $\varphi$  поворота этой системы соответствует перемещение рейки на величину  $r\varphi$ . При  $\varphi = 0$  оси  $y_n$  и  $y_K$  пересекаются с осью вращения колеса и ось  $y_n$  совпадает с осью симметрии впадины между зубьями, поэтому угол между осями  $y_n$  и  $y_K$  равен  $\gamma = \varphi + \pi/2$ . Для этого необходимо определить координаты точек контакта зуба с образующей рейкой и, воспользовавшись формулами преобразования координат, записать их в системе координат колеса. Так как общие нормали к профилям, проведенные через точки контакта, должны проходить через полюс зацепления  $W$ , то параметр  $\alpha'$ , соответствующий точке  $K'$  контакта на участке  $K_1K_2$  профиля образующей рейки, определим из треугольника  $WAE$

$$\alpha' = \arctg(-y_A/(x_A + r\varphi)). \quad (10.10)$$

Параметр  $e$ , соответствующий контактной точке  $K$  на участке  $K_2K_3$ , определим из треугольника  $WNK$ :

$$e = WN \sin \alpha = (WO_n + O_n N) \sin \alpha = (r\varphi + \pi m/4 - xm \operatorname{tg} \alpha) \sin \alpha. \quad (10.11)$$

Координаты точек профиля зуба в системе координат колеса определяются матричным уравнением

$$r_K = Mr_n, \quad (10.12)$$

где  $r_K$  — столбцевая матрица координат точек профиля зуба в системе координат колеса;  $r_n$  — столбцевая матрица координат контактных точек профиля образующей рейки;  $M$  — матрица преобразования координат.

Матрица преобразования координат будет

$$M = \begin{vmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & -r(\sin \gamma - \varphi \cos \gamma) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & r(\cos \gamma - 1 + \varphi \sin \gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.13)$$

При  $\varphi_F = -x_A/r$  из уравнения (10.12) можно найти координаты точки  $F$  профиля зуба, при  $\varphi_G = -(y_A/\operatorname{tg} \alpha + x_A)/r$  — координаты граничной точки  $G$ , а при

$$\varphi_Q = (2x/z - \sqrt{1 + (4(h_a^* + x)(z + h_a^* + x))/z^2 \sin^2 \alpha + 1}) \operatorname{tg} \alpha - \pi/2z -$$

координаты точки  $Q$ .

Подставляя в уравнение (10.12) значения  $x_n$  и  $y_n$  из выражения (10.7) при  $\varphi \in [\varphi_F; \varphi_G]$ , получим координаты точек на переходной кривой  $FG$ . Подставляя значения  $x_n$  и  $y_n$  из выражения (10.8) при  $\varphi \in [\varphi_G; \varphi_Q]$ , получим координаты эвольвентной части профиля  $GQ$ .

Тангенс угла профиля в точке  $G$

$$\operatorname{tg} \alpha_G = K_2' B / OB = (WB - WK_2') / OB = \operatorname{tg} \alpha - WK_2' / OB. \quad (10.14)$$

Так как  $OB = r_b = (zm/2) \cos \alpha$  и

$$WK_2' = (h_a^* - x) m / \sin \alpha, \quad (10.15)$$

$$\text{то} \quad \operatorname{tg} \alpha_G = \operatorname{tg} \alpha - 4(h_a^* - x) / z \sin 2\alpha. \quad (10.16)$$

Определение координат точек профиля осуществляется операторной функцией

$$PROFZ(z, N, m, \alpha, h_a^*, \rho_f^*, x; x_K, y_K), \quad (10.17)$$

где  $N$  — число точек профиля, которое требуется вычислить.

### 10.11. Определение геометрических размеров колес

В станочном зацеплении центроиды зубчатой рейки и нарезаемого колеса с  $z$  зубьями перекатываются друг по другу без скольжения, поэтому шаг  $P$  исходного производящего реечного контура должен разместиться по длине центроиды колеса  $z$  раз. Эту центриду, называемую делительной окружностью, принимают в качестве базовой для определения размеров зубчатых колес. Очевидно, что  $pd = zP = \pi mz$ , откуда диаметр делительной окружности

$$d = mz. \quad (10.18)$$

Диаметр основной окружности определяется углом профиля исходного производящего реечного контура  $\alpha = 20^\circ$  в соответствии с формулой (10.4):

$$d_b = d \cos \alpha = mz \cos \alpha. \quad (10.19)$$

Так как у исходной производящей рейки шаг по любой прямой, параллельной делительной, одинаков, то в качестве центроиды в относительном движении принимают любую прямую, параллельную делительной. Относительное положение производящего контура рейки и колеса в станочном зацеплении определяется расстоянием делительной прямой рейки до делительной окружности. Это расстояние называется **смещением производящего контура рейки**. Если делительная прямая производящего контура не пересекает и не

касается делительной окружности (положение 1 на рис. 10.17), то смещение считается *положительным*, если касается (положение 2), то смещение считается равным нулю и называется *номинальным*. Если делительная прямая пересекает делительную окружность (положение 3), то смещение считается *отрицательным*. Смещение рейки определяется в долях модуля коэффициентом смещения  $x$ , который может быть соответственно положительным, равным нулю, и отрицательным.

В момент окончания нарезания зубьев (рис. 10.18) окружность впадин колеса в станочном зацеплении касается вершин инструмен-

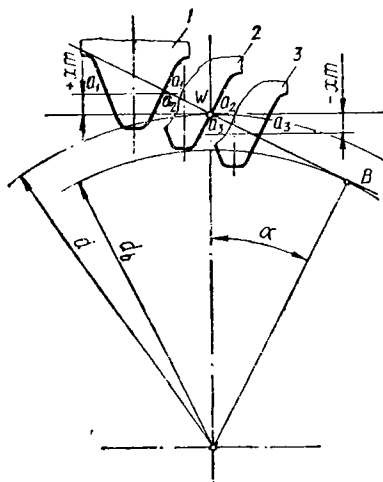


Рис. 10.17. Схема смещения исходного контура при нарезании зубьев

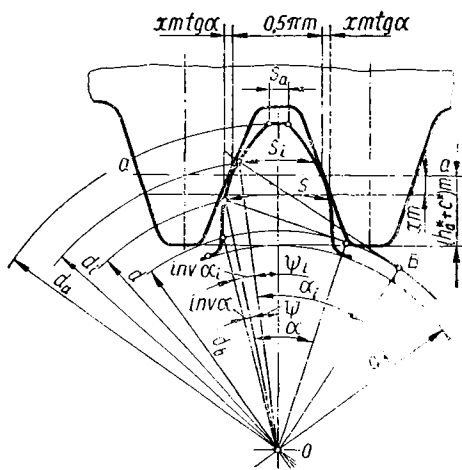


Рис. 10.18. Определение геометрических размеров зубчатого колеса

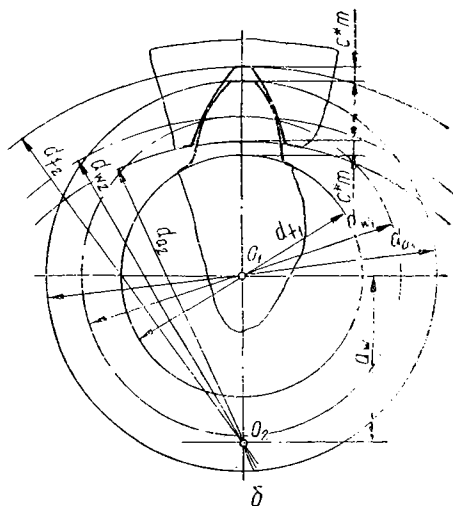
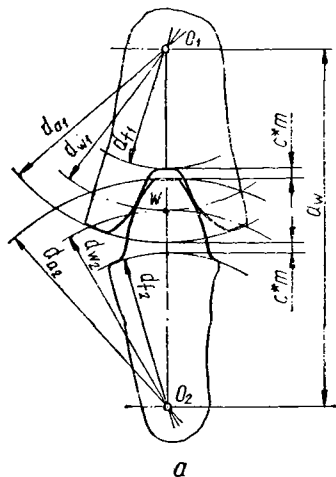


Рис. 10.19. Определение наружного диаметра зубчатых колес

та, поэтому

$$d_f = mz - 2m(h_a^* + c^* - x). \quad (10.20)$$

Толщина зуба  $s$  по дуге делительной окружности равна ширине впадины между зубьями производящей рейки по центроиде:

$$s = \pi m/2 + 2xm \operatorname{tg} \alpha. \quad (10.21)$$

Толщина зуба по дуге окружности заданного диаметра  $d_i$  будет

$$s_i = d_i \psi_i, \quad (10.22)$$

где  $\psi_i$  — центральный угол в радианах, соответствующий половине искомой толщины.

Из рис. 10.18 следует, что

$$\psi_i = \psi + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_i. \quad (10.23)$$

Центральный угол, соответствующий половине толщины зуба по дуге делительной окружности,

$$\psi = s/d = (0,5\pi n + 2xm \operatorname{tg} \alpha)/mz = \pi/2z + (2x \operatorname{tg} \alpha)/z. \quad (10.24)$$

После соответствующих подстановок в формулу (10.22) получим

$$s_i = d_i (\pi/2z + 2x \operatorname{tg} \alpha/z + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_i). \quad (10.25)$$

Угол профиля  $\alpha_i$  для точки эвольвенты на окружности диаметра  $d_i$  будет

$$\alpha_i = \arccos(d_i/d_f). \quad (10.26)$$

Толщина  $s_a$  зуба у его вершины определится из формулы (10.25) при подстановке в нее  $d_a$  вместо  $d_i$  и  $\operatorname{inv} \alpha_a$  вместо  $\operatorname{inv} \alpha_i$ ; угол  $\alpha_a$  определится из формулы (10.26) при подстановке  $d_a$  вместо  $d_i$ .

Диаметр окружности вершин, выполняемый на заготовке, определяется из условия сохранения радиального зазора в зацеплении зубчатых колес (рис. 10.19) при любых коэффициентах смещения. При установленном межосевом расстоянии  $a_w$  для внешнего зацепления (рис. 10.19, а)

$$\begin{aligned} d_{a1} &= 2a_w - d_{f2} - 2c^*m; \\ d_{a2} &= 2a_w - d_{f1} - 2c^*m; \end{aligned} \quad (10.27)$$

для внутреннего зацепления (рис. 10.19, б)

$$\begin{aligned} d_{a1} &= d_{f2} - 2a_w - 2c^*m; \\ d_{a2} &= 2a_w + d_{f1} + 2c^*m. \end{aligned} \quad (10.28)$$

## 10.12. Свойства эвольвентного зацепления

Схема зацепления пары сопряженных колес представлена на рис. 10.20. Угол  $\alpha_w$  между линией зацепления и перпендикуляром к линии, соединяющей центры колес, называется **углом зацепления**. В любом сечении колес, перпендикулярном осям, закономерности зацепления эвольвентных профилей одинаковы и, следовательно, обеспечивается условие постоянства передаточного отношения в каждом сечении. В косозубом, шевронном и криволинейном зацеплении

ввиду наклонной или кривой линии зуба контактирующие профили в соседних сечениях смещены друг относительно друга.

Так как передаточное отношение в эвольвентном зацеплении определяется отношением радиусов  $r_b$  основных окружностей взаимодействующих эвольвентных профилей, то оно не зависит от расстояния между осями вращения звеньев  $a_w$  — межосевого расстоя-

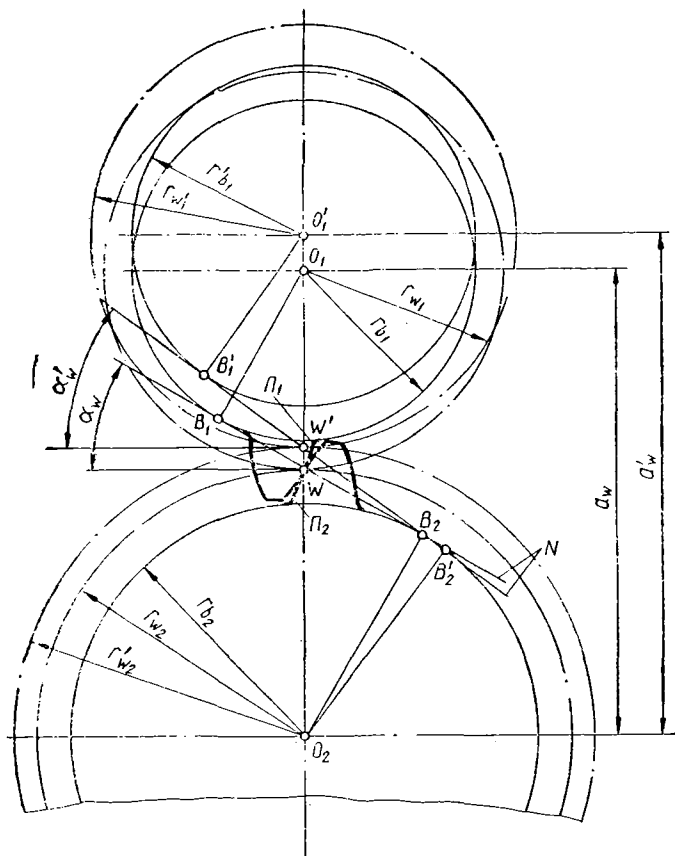


Рис. 10.20. Зацепление пары зубчатых колес

ния. Если изменить межосевое расстояние данной пары колес, дав ему новое значение  $a_w$ , то для существования кинематической пары необходимо повернуть профили  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  до контакта, в зацепление войдут другие участки эвольвент, но нормаль  $N$  все равно будет касаться окружностей радиусов  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$ , и как для прежнего положения центров  $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = O_2W/O_1W = O_2B_2/O_1B_1 = r_{b2}/r_{b1}$ , так и для нового их положения получим также  $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = O_2W'/O_1W' = O_2B_2/O_1B_1 = r_{b2}/r_{b1}$ .

Следовательно, передаточное отношение звеньев, имеющих эвольвентный профиль, зависит только от отношения радиусов

основных окружностей. При изменении межосевого расстояния изменяются  $\angle WO_1B_1$  и  $\angle WO_2B_2$ . Следовательно, при  $a_w \neq a_w$  получим  $\alpha_w = \alpha_w$ , так как  $\angle W'O_1B'_1 = \angle W'O_2B'_2 = \alpha_w$ . При этом изменяются радиусы начальных окружностей  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$ , но передаточное отношение  $i_{12}$  остается неизменным.

В реечном зацеплении изменение относительного положения колеса и рейки также не сказывается на передаточном отношении. Это свойство эвольвентного зацепления позволяет в определенных пределах снизить требования к точности изготовления элементов стойки в зубчатых механизмах.

Качественные показатели взаимодействия двух сопряженных колес определяются характеристиками зацепления — коэффициентом перекрытия, удельным скольжением, правильностью зацепления — отсутствием интерференции.

### 10.13. Коэффициент перекрытия

Для обеспечения непрерывности взаимодействия зубьев в зубчатом зацеплении необходимо, чтобы в момент окончания зацепления одной пары зубьев в контакте находилась хотя бы еще одна пара зубьев. На линии зацепления  $B_1B_2$  (рис. 10.21) точка входа в зацепление пары зубьев 1 и 2 определится пересечением окружности вершин колеса 2 с линией зацепления в точке  $b_2$ , а выхода из зацепления — пересечением окружности вершин колеса 1 с линией зацепления в точке  $b_1$ . Углы  $\varphi_{\alpha 1}$  и  $\varphi_{\alpha 2}$ , на которые повернутся колеса с момента входа пары зубьев в зацепление до момента выхода их из зацепления, называют углами торцового перекрытия. За это время точка контакта пройдет до линии зацепления участок  $b_2b_1$ , называемый активной линией зацепления. Еще до выхода из зацепления рассматриваемой пары профилей в действие должны вступить профили соседних зубьев. Это возможно, если угол торцового перекрытия будет больше углового шага  $\tau = 2\pi/z$ . Коэффициент торцового перекрытия, характеризующий это условие, определяется как отношение угла торцового перекрытия зубчатого колеса к его угловому шагу:

$$\varepsilon_\alpha = \varphi_{\alpha 1}/\tau_1 = \varphi_{\alpha 2}/\tau_2. \quad (10.29)$$

Коэффициент торцового перекрытия определяется и как отношение длины активной линии зацепления к основному шагу:

$$\varepsilon_\alpha = b_1h_2/P_b = (b_1W + Wb_2)/\pi m \cos \alpha. \quad (10.30)$$

Из треугольников  $O_1B_1b_1$  и  $O_1B_1W$ , а также  $\Delta O_2B_2b_2$  и  $\Delta O_2B_2W$  следует, что

$$\begin{aligned} b_1W &= b_1B_1 - B_1W = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{a1} - r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_w = \\ &= r_{b1} (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w); \\ Wb_2 &= B_2b_2 - WB_2 = r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_{a2} - r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_w = \\ &= r_{b2} (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w), \end{aligned} \quad (10.31)$$

где  $\alpha_{a1}$  и  $\alpha_{a2}$  — углы профиля на окружности вершин —  $\alpha_{a1,2} = \arccos(d_{b1,2}/d_{a1,2})$ .

После подстановки в формулу (10.30) соответствующих значений из формул (10.31) и учета, что  $r_b = 0,5mz \cos \alpha$ , получим

$$\epsilon_\alpha = (z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)) / 2\pi. \quad (10.32)$$

В косозубой передаче (рис. 10.22) косые зубья входят в зацепление постепенно и также постепенно выходят из зацепления. В про-

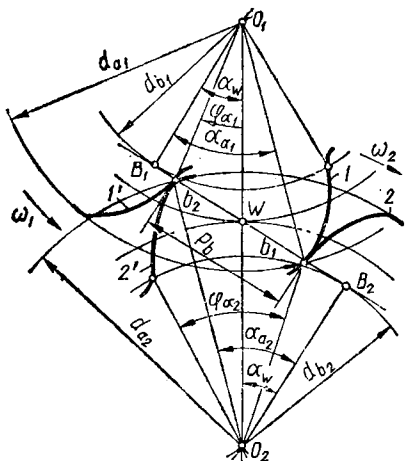


Рис. 10.21. Определение коэффициента перекрытия прямозубого зацепления

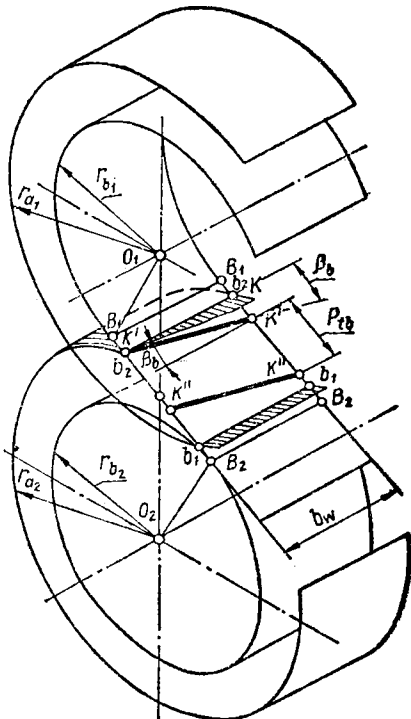


Рис. 10.22. Определение коэффициента перекрытия косозубого зацепления

цессе зацепления контактные линии  $K'K'$  и  $K''K''$  перемещаются по полю зацепления  $b_2b_1b_1b_2$ , ограниченному линиями пересечения плоскости зацепления с поверхностями вершин зубьев взаимодействующих колес. Контакт очередной пары зубьев начинается в точке  $K$ , совпадающей с точкой  $b_2$  на одном торце, и прежде, чем возникнет контакт профилей этих зубьев в точке, совпадающей с точкой  $b_2$  на противоположном торце, контактная точка  $K$  пройдет на поле зацепления путь  $b_2K' = b_w \operatorname{tg} \beta_b$ . Вследствие этого продолжительность зацепления данной пары зубьев характеризуется отрезком, большим расстояния  $b_2b_1$  на величину  $b_2K'$ , и коэффициент перекрытия будет

$$\epsilon_\gamma = (b_2b_1 + b_2K') / P_{tb}.$$

С учетом формулы (10.29) получим

$$\epsilon_\gamma = b_2b_1 / P_{tb} + b_2K' / P_{tr} = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta, \quad (10.33)$$

где  $\epsilon_\beta$  — коэффициент осевого перекрытия.



Так как  $P_{tb} = P_b/\cos \beta = \pi m \cos \alpha_r/\cos \beta$ , а  $\operatorname{tg} \beta_b = \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_r$ , то

$$\varepsilon_\beta = b_w \operatorname{tg} \beta_b/P_{tb} = b_w \sin \beta/\pi m. \quad (10.34)$$

Из формулы (10.34) следует, что чем больше угол наклона зубьев, тем больше коэффициент перекрытия, и следовательно, количество пар зубьев, одновременно участвующих в зацеплении (до 10 и больше); с увеличением коэффициента перекрытия растет плавность работы зацепления.

### 10.14. Удельное скольжение

Зубья зацепляющихся колес перекатываются и скользят друг по другу. Характеристикой степени скольжения является **удельное скольжение**  $\lambda$  — отношение скорости скольжения  $\bar{v}_{12}$  в точке контакта  $K$  к тангенциальной составляющей этой скорости  $v_t$  (рис. 10.23, а). Скорость скольжения  $\bar{v}_{12}$  профилей в точке контакта определяется как разность тангенциальных составляющих абсолютных скоростей  $\bar{v}_{1K}$  и  $\bar{v}_{2K}$ , а удельное скольжение для первого и второго колеса будет соответственно

$$\lambda_1 = (v_{tK_1} - v_{tK_2})/v_{tK_1}, \quad \text{и} \quad \lambda_2 = (v_{tK_2} - v_{tK_1})/v_{tK_2}. \quad (10.35)$$

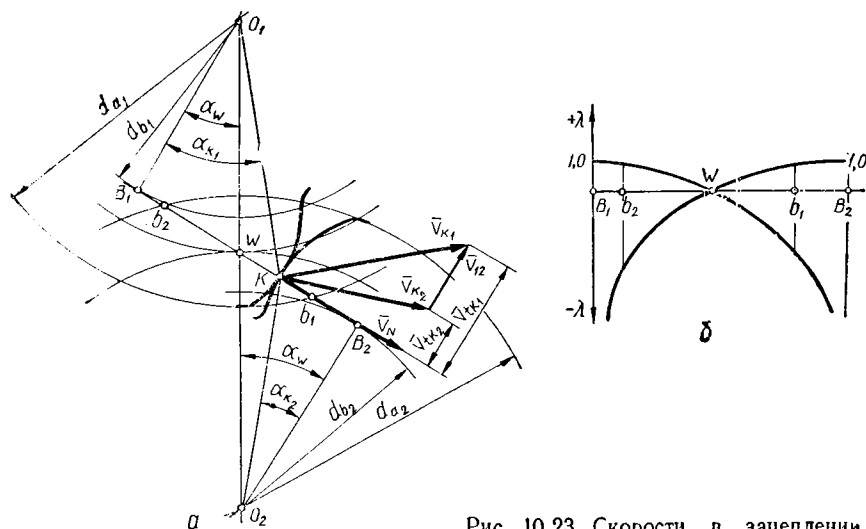


Рис. 10.23. Скорости в зацеплении

Так как в точке  $B_1 - v_{tK_1} = 0$ , то  $\lambda_1 = -\infty$  и  $\lambda_2 = 1$ ; в точке  $B_2 - v_{tK_2} = 0$  и  $\lambda_2 = -\infty$ , а  $\lambda_1 = 1$ . В полюсе  $W$  имеем  $v_{1K_1} = v_{2K_2}$  и, следовательно,  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 0$ . Воспользовавшись этими и промежуточными значениями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  для различных точек контакта зубьев на линии зацепления  $B_1B_2$ , можно построить графики изменения этих величин (рис. 10.23, б). Чем больше удельное скольжение, тем сильнее возможное изнашивание профилей. Фактические

удельные скольжения ограничены значениями, соответствующими границам активной линии зацепления  $b_1, b_2$ . Из опыта эксплуатации следует, что удельное скольжение не должно быть больше  $\lambda = [3]$ .

### 10.15. Интерференция зубьев

Правильное зацепление зубчатых колес происходит лишь в том случае, если точка касания эвольвентных участков профиля взаимодействующих зубьев находится на линии зацепления. Поэтому должна быть устранена возможность касания этих профилей вне линии зацепления, что имеет место при *кромочном касании*, когда в работу вступают кромки зубьев (точки пересечения профилей с поверхностями вершин зубьев). Причинами кромочного касания являются недостаточный коэффициент перекрытия  $\varepsilon_\alpha < 1$ , погрешность основного шага, чрезмерное сближение осей при монтаже передачи и интерференция.

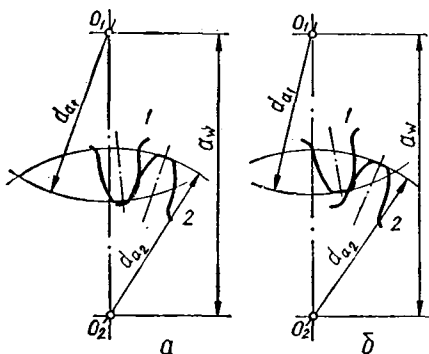


Рис. 10.24. Интерференция зубьев

Это имеет место при работе пары зубчатых колес и обычно называется *внедрением* профилей, как и при нарезании методом обкатки, когда происходит *подрезание зубьев* обрабатываемого колеса.

При *профильной* интерференции (рис. 10.24, б) кромка зуба одного колеса внедряется в эвольвентную часть профиля зуба сопряженного колеса. При интерференции с *переходной кривой* (10.24, а) кромка зуба одного из зубчатых колес пересекает переходную поверхность другого зубчатого колеса. В случае нарезания зубьев методом обкатки интерференция кромки инструмента приводит к подрезанию зубьев колеса 2, а интерференция кромки зуба нарезаемого колеса с профилем инструмента приводит к срезу части профиля у головок зубьев колеса 1.

Профильная интерференция при взаимодействии зубчатых колес отсутствует, если выдержано условие (индекс 2 относится к большему колесу из пары)

$$d_{a2} \leq 2\sqrt{a_w^2 \sin^2 \alpha_w + r_{f2}^2} \quad (10.36)$$

Интерференция с переходной кривой при взаимодействии пары зубчатых колес отсутствует, если (индекс 1 относится к меньшему

колесу из пары)

$$a_w \sin \alpha_w - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \geq r_{w1} \sin \alpha - (h_a^* + x_2) m / \sin \alpha. \quad (10.37)$$

В зацеплении с внутренними зубьями интерференция кромки зуба шестерни 1 с эвольвентной поверхностью внутренних зубьев колеса 2 возникает тогда, когда зуб шестерни вступает в кромочный контакт с этой поверхностью. При нарезании зубьев в этом случае происходит срезание их вершин зуборезным инструментом. Чтобы предупредить возникновение такой интерференции, необходимо соблюсти условие

$$d_{a2} \leq 2 \sqrt{(a_w \sin \alpha_{tw} + \rho_{G1})^2 + r_{b2}^2}, \quad (10.38)$$

где  $\rho_{G1}$  — радиус кривизны профиля зуба шестерни по окружности граничных точек (см. рис. 10.16).

Иногда с этой же целью допускается изменение диаметра  $d_2$  вершин зубьев колеса 2.

### 10.16. Влияние смещения на характеристики зацепления

На геометрию и качественные показатели зубчатого зацепления влияет положение режущего инструмента относительно заготовки при окончании процесса нарезания зубьев. От **коэффициентов смещения**, определяющих это положение, зависят коэффициент перекрытия, толщина зубьев у основания и вершины, радиусы кривизны рабочих участков профиля, наличие или отсутствие подрезания, т. е. факторы, влияющие на прочность зубьев. Выбором сочетаний коэффициентов смещения можно влиять на скорости скольжения и на удельные скольжения, т. е. на факторы, определяющие износостойкость.

При нарезании колес с малым числом зубьев для исключения возможного утонения зуба у основания применяют *положительное смещение* инструмента ( $x > 0$ ). Увеличение коэффициентов смещения повышает прочность зубьев, но в то же время ведет к снижению коэффициента перекрытия и уменьшению толщины зубьев у вершины. Уменьшение толщины зуба до нуля называется *заострением зуба*. Предельный максимальный коэффициент смещения  $x$ , ограниченный условием  $s_{a \min} = 0,2m$ , определится из выражения (10.25)

$$d_a (\pi/2z + 2x \operatorname{tg} \alpha/z + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_a) \geq 0. \quad (10.39)$$

Предельный минимальный коэффициент смещения определится условием предотвращения *подреза зуба*. С уменьшением коэффициента  $x$  и числа зубьев  $z$  граничная точка  $G$  (рис. 10.16) стремится к предельной точке  $C$  эвольвенты. Для каждого числа зубьев  $z$  существует такой минимальный коэффициент смещения  $x_{\min}$ , при котором точка  $G$  совпадает с точкой  $C$ . В этом случае угол  $\alpha_G$  в формуле (10.16) должен быть равен нулю. Подставляя в эту формулу  $\alpha_G = 0$ , получим

$$z \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha = 4 (h_a^* - x) = 2z \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$x_{\min} = h_a^* - (z \sin^2 \alpha)/2. \quad (10.40)$$

На рис. 10.25 показаны профили зубьев колеса с одним и тем же числом их, нарезанные с разными коэффициентами смещения. Эвольвентные участки профилей при различных смещениях являются эвольвентой одной и той же окружности. При коэффициенте смещения  $x > x_{\min}$  граничная точка  $G$  выше предельной точки  $C$ , и переходная кривая и эвольвентный профиль зуба сопрягаются плавно без пересечения. Предельным случаем будет смещение, при кото-

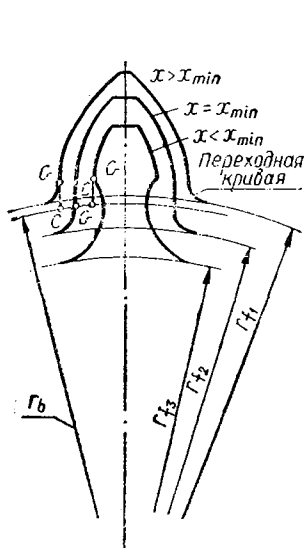


Рис. 10.25. Влияние смещения на профиль зубьев

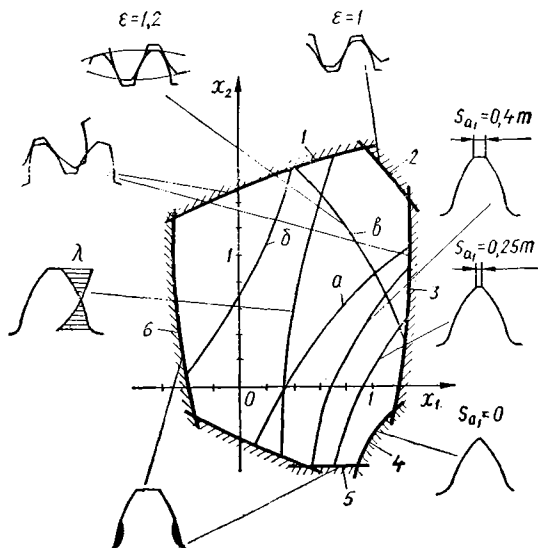


Рис. 10.26. Блокирующий контур

ром точка  $G$  совпадает с предельной точкой  $C$  эвольвенты ( $x = x_{\min}$ ). При дальнейшем уменьшении смещения ( $x < x_{\min}$ ) переходная кривая и эвольвентный профиль зуба сопрягаются не плавно, а с пересечением, так как внутри основной окружности эвольвента не существует. Такое явление называется подрезом зуба, который нежелателен, так как значительно снижает его прочность. Если решить уравнение (10.40) относительно  $z$ , то получим наименьшее число зубьев, которое при данном коэффициенте смещения получают без подрезания

$$z_{\min} = 2(h_a^* - x)/\sin^2 \alpha. \quad (10.41)$$

Для стандартного инструмента, положив в этой формуле  $h_a^* = 1$  и  $\alpha = 20^\circ$ , минимальное число зубьев, которое можно нарезать без подрезания зуба, при  $x = 0$  будет  $z = 17$ .

Как указывалось выше, ограничениями для значений коэффициентов  $x$  является не только подрезание зубьев. Поэтому задача выбора коэффициентов смещения для зубчатого зацепления реша-

ется как задача оптимизации двух параметров  $x_1$  и  $x_2$  при нескольких критериях в зависимости от конкретных требований к проектируемому зубчатому зацеплению. В этом случае область допускаемых решений представляет собой плоскость, на которой в системе координат  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 10.26) нанесены ограничения при выборе коэффициентов смещений: отсутствие подрезания и заострения зубьев, минимальные допустимые коэффициенты перекрытия и т. д. Эта область для определенного сочетания зубьев  $z_1$  и  $z_2$  называется *блокирующим контуром*. Граничные линии блокирующего контура относятся к предельным значениям параметров зацепления: 1 — граница интерференции на ножке зуба второго колеса; 2 — линия минимально допустимого коэффициента перекрытия; 3 — граница интерференции на ножке зуба первого колеса; 4 — граница заострения зуба на первом колесе; 5 и 6 — линии, определяющие подрезание эвольвентного профиля зацепляющихся зубьев. Для оптимального подбора коэффициентов смещений внутри блокирующего контура изображены линии, соответствующие наилучшим значениям качественных показателей зацепления:  $a$  — определяющие равную прочность зубьев обоих колес на изгиб при ведущем колесе 1;  $b$  — то же, при ведущем колесе 2;  $v$  — рекомендуемое значение коэффициента перекрытия  $\epsilon = 1,2$ .

### 10.17. Определение межосевого расстояния пары сопряженных колес

Межосевое расстояние в зубчатом механизме, составленном из двух зацепляющихся колес, определяется при *безазорном зацеплении*, когда колеса так собраны, что зуб одного колеса вводится во впадину другого до полного контакта с обеих сторон. Так как центроидами в относительном движении двух зубчатых колес являются начальные окружности, то при безазорном зацеплении толщина зуба  $s_{w1}$  одного колеса, измеренная по дуге начальной окружности диаметром  $d_{w1}$ , будет равна ширине впадины  $e_{w2}$  по дуге окружности диаметром  $d_{w2}$  (рис. 10.27, *a*), а также  $s_{w2} = e_{w1}$ . Толщина зубьев по начальным окружностям из формулы (10.25) с учетом, что  $d_w = P_{wz}/\pi$ ,

$$\begin{aligned} s_{w1} &= P_{w1} (\pi/2 + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha + z_1 (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_w)); \\ s_{w2} &= P_{w2} (\pi/2 + 2x_2 \operatorname{tg} \alpha + z_2 (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_w)). \end{aligned} \quad (10.42)$$

Так как шаг зубьев обоих зубчатых колес по дугам начальных окружностей одинаков:  $P_{w1} = P_{w2} = s_{w1} + e_{w2} = s_{w2} + e_{w1} = s_{w1} + s_{w2}$ , то, из формул (10.42) для угла зацепления получим

$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2(x_1 + x_2) \operatorname{tg} \alpha / (z_1 + z_2) + \operatorname{inv} \alpha. \quad (10.43)$$

Значение угла  $\alpha_w$  получается при использовании операторной функции  $INVAL(z_1, z_2, x_1, x_2, \alpha; \alpha_w)$ , реализующей итерационный процесс решения уравнения  $\operatorname{tg} \alpha_w - \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha_w$ .

Из  $\Delta O_1 B_1 W$  и  $\Delta O_2 B_2 W$  получим межосевое расстояние

$$a_w = O_1 W + W O_2 = O_1 B_1 / \cos \alpha_w + O_2 B_2 / \cos \alpha_w =$$

$$= mz_1 \cos \alpha / (2 \cos \alpha_w) + mz_2 \cos \alpha / (2 \cos \alpha_w) =$$

$$= (m(z_1 + z_2) \cos \alpha) / (2 \cos \alpha_w). \quad (10.44)$$

Для передачи с внутренним зацеплением (рис. 10.27, б) аналогично формулам (10.43) и (10.44) получим

$$\text{inv } \alpha_w = (2(x_2 - x_1) \text{tg } \alpha) / (z_2 - z_1) + \text{inv } \alpha;$$

$$a_w = (m(z_2 - z_1) \cos \alpha) / (2 \cos \alpha_w).$$

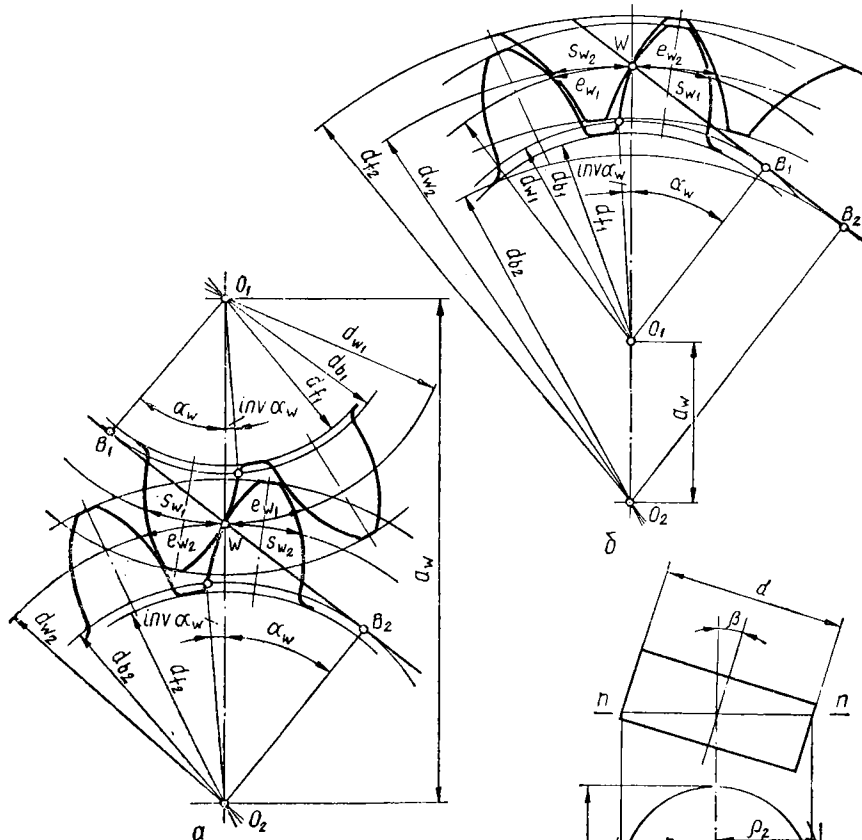
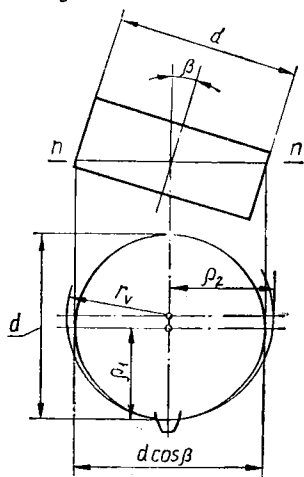


Рис. 10.27. Определение межосевого расстояния зубчатой передачи

Рис. 10.28. Эквивалентные колеса



При расчетах геометрии косозубых колес можно без изменений использовать формулы для прямозубых колес, подставляя в них параметры исходного контура в торцовом сечении. Геометрические параметры в нормальном сечении косозубого колеса характеризу-

ются параметрами зубьев эквивалентных прямозубых колес. В этом сечении  $\Gamma$  получаем эллипс (рис. 10.28), у которого полуоси  $\rho_1 = 0,5d$  и  $\rho_2 = 0,5d/\cos \beta$ . Как известно, радиус кривизны эллипса в точке, лежащей на делительной окружности, будет  $r_v = \rho_2^2/\rho_1 = d/(2\cos^2 \beta)$ . Если выполнить колесо диаметром  $d_v = 2r_v = 2d/\cos^2 \beta$ , то на нем разместится  $z_v$  прямых зубьев, имеющих модуль  $m = m_n = m_t \cos \beta$ . Из условий  $d_v = z_v m$  и  $d = z m_t$  с учетом сказанного получим

$$z_v = d_v/m = d/m \cos^2 \beta = z m_t/m, \cos^3 \beta = z/\cos^3 \beta. \quad (10.45)$$

Так как торцовый коэффициент смещения косозубого колеса будет

$$x_t = x \cos \beta, \quad (10.46)$$

то торцовый угол зацепления согласно формуле (10.43) с учетом, что  $(x_{t1} + x_{t2}) \operatorname{tg} \alpha_t = (x_1 + x_2) \operatorname{tg} \alpha$ , будет

$$\operatorname{inv} \alpha_{w_t} = (2(x_1 + x_2) \operatorname{tg} \alpha)/(z_1 + z_2) + \operatorname{inv} \alpha_t, \quad (10.47)$$

Геометрические расчеты прямозубых и косозубых цилиндрических колес производятся операторной функцией

$$GCIL(z_1, z_2, m, \beta, h_a^*, c^*, \alpha, \rho_f^*, x_1, x_2, k; d_1, d_2, d_{b1}, d_{b2}, d_{f1}, d_{f2}, a_w, d_{a1}, d_{a2}),$$

где  $k = 1, 2$  — индексы, соответствующие внутреннему или внешнему зацеплению.

## 11. СИНТЕЗ ТОЧЕЧНЫХ КРУГОВИНТОВЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

### 11.1. Профилирование зубьев с точечным контактом

В эвольвентном зацеплении взаимодействие рабочих поверхностей зубьев происходит по прямой линии. Поэтому при неточности взаимного расположения колес или их деформации под нагрузкой плотность контакта зубьев становится неравномерной, что приводит к концентрации давлений на определенных участках контактных линий. Кроме того, радиусы кривизны рабочих поверхностей зубьев, которые определяют нагрузочную способность зубчатого механизма, зависят от диаметра основного цилиндра колеса: чтобы увеличить радиусы кривизны, нужно увеличивать диаметры колес. Для того, чтобы избежать указанных недостатков, применяют зацепление с теоретически точечным контактом взаимодействующих зубьев, который за счет придания зубьям соответствующей формы под нагрузкой превращается в контакт по площадке.

Для точечных систем зацепления используется множество различных пар сопряженных поверхностей, профили зубьев образуются различными плавными кривыми (циклоидальными, эвольвентными, эллиптическими и др.). В частности, очертание профилей зубьев выполняется по дуге окружности в торцовом или нормальном сечении зубьев. В таких зацеплениях заданная передаточная

функция обеспечивается соблюдением основного закона зацепления лишь в определенном сечении, поэтому в нем возможен только мгновенный контакт зубьев. При повороте колес условие постоянства передаточного числа обеспечивается в каждое мгновение контактом зубьев в новом поперечном сечении. Таким образом, теоретическая точка контакта за время зацепления данной пары зубьев перемещается от одного торца к противоположному.

## 11.2. Принцип образования зацепления с точечным контактом

Представление об образовании точечного зацепления может дать преобразованное косозубое эвольвентное зацепление. Предположим, что в торцовом сечении пары косозубых эвольвентных колес (рис. 11.1) профили зацепляющихся зубьев выше и ниже точки  $K$  контакта смещены в тело зубьев. Вследствие этого толщина зуба искаженной формы на всех радиусах, за исключением того, где рас-

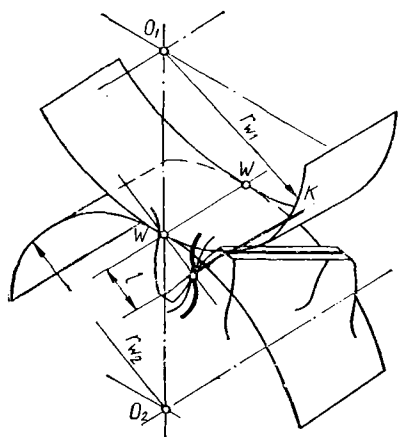


Рис. 11.1. Образование точечного зацепления

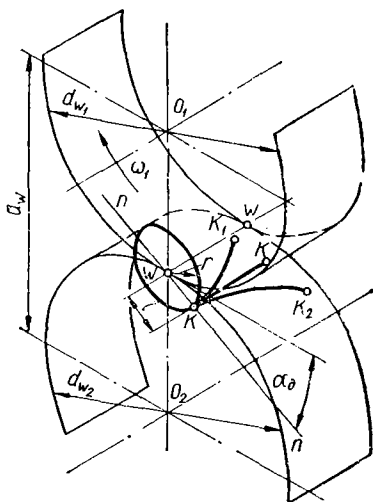


Рис. 11.2. Образование круговинтовых зубьев

положена точка контакта, станет меньше толщины эвольвентного зуба правильной формы. Если такое искажение профиля выполнить по всей длине зуба, то при повороте ведущего зубчатого колеса на некоторый угол контакт между зубьями возникает в новом сечении. Во всех других сечениях вдоль образующих колес из-за преднамеренного искажения профилей контакта зубьев не будет. При дальнейшем вращении ведущего колеса точка контакта зацепляющихся зубьев перемещается вдоль осей от одного торцового сечения пары сопряженных колес к противоположному.

В этом искаженном эвольвентном косозубом зацеплении имеет место *точечный контакт*, линия зацепления  $KK$  будет параллельна осям колес передачи и расположена на расстоянии  $l$  от полюсной



линии  $W\mathcal{W}$ . Постоянство передаточного отношения в таком зацеплении будет обеспечено, потому что основная теорема зацепления в каждое мгновение будет соблюдаться в новой плоскости контакта зубьев. Если подобное изменение профилей произвести на прямозубом колесе, то постоянство передаточного отношения нарушится, так как при малейшем повороте ведущего колеса в контакт вступят участки искаженной части профиля, что приведет к нарушению основного закона зацепления. Следовательно, точечное зацепление подобного вида возможно лишь с косозубыми колесами.

Для обеспечения возможности передачи значительных нагрузок необходимо при исходном точечном контакте зубьев создать условие распространения точечного контакта под нагрузкой на значительную площадку. Это достижимо, если контактировать будут не выпуклые профили зубьев (разные знаки радиусов кривизны), а выпуклые с вогнутыми (радиусы кривизны будут одинаковых знаков) с близкими радиусами кривизны.

### 11.3. Образование зубьев круговинтового зацепления

В качестве сопряженных поверхностей зубьев, удовлетворяющих указанным условиям, целесообразно использовать поверхности, для которых технология их получения известными способами на существующем станочном оборудовании наиболее проста. К числу удовлетворяющих этим требованиям относятся прежде всего винтовые поверхности зубьев с постоянным или переменным углом закручивания винтовой линии. Линии поперечного сечения таких поверхностей с нормалью (к направлению зуба) или торцевой плоскостью являются дугами окружностей. Такие поверхности, называемые *круговыми винтовыми поверхностями*, и получили широкое распространение в качестве рабочих поверхностей зубьев.

Представим, что два начальных цилиндра диаметрами  $d_{W1}$  и  $d_{W2}$  (рис. 11.2) перекатываются с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  без скольжения, обеспечивая постоянное передаточное отношение  $i_{12}$  при заданном межосевом расстоянии  $a_W$ . Выберем на линии  $nl$ , расположенной под углом  $90^\circ - \alpha_d$  к линии центров  $O_1O_2$  на расстоянии  $l$  от полюса  $W$ , точку  $K$  и проведем через нее параллельно осям колес линию зацепления  $KK$ . Примем скорость перемещения точки контакта зубьев вдоль линии зацепления постоянной. Тогда при постоянной скорости вращения начальных цилиндров точка контакта  $K$  опишет на вращающихся системах, связанных с начальными цилиндрами, винтовые линии  $KK_1$  и  $KK_2$ .

Возьмем в качестве образующей фигуры окружность радиуса  $r = l$ , расположенную на плоскости, перпендикулярной осям колес. Переместим эту окружность вдоль осей дважды так, чтобы постоянная точка образующей окружности, совпадающая с точкой контакта зубьев  $K$ , один раз перемещалась вдоль винтовой линии  $KK_1$ , второй раз — вдоль линии  $K_1K_2$ . Следы этой окружности образуют винтовые цилиндры. Часть одного винтового цилиндра, выступающая за пределы начального цилиндра шестерни, используется

как винтовой зуб шестерни, а часть второго винтового цилиндра, расположенная внутри начального цилиндра колеса, представляет собой впадину между зубьями колеса. Если такие выступы и впадины расположить по начальным цилиндрам на расстоянии шага, то вращение колесу от шестерни будет передаваться давлением выпуклого зуба на поверхность вогнутого зуба колеса, а контакт зубьев будет перемещаться вдоль колес.

В торцовом сечении описанного зацепления зубья имеют круговую форму, и контакт их будет происходить по дуге окружности. Это является существенным недостатком, так как на правильность контакта зубьев большое влияние будут оказывать погрешности механизма. При относительном смещении осей контакт зубьев будет локализоваться у вершины и ножки зубьев, т. е. он становится кромочным.

#### 11.4. Образование зубчатого механизма с одной линией зацепления

Для устранения указанного недостатка поверхности зубьев образуются двумя окружностями различных радиусов, соприкасающимися в одной точке  $K$  на линии  $nn$ . Для очерчивания зубьев шестерни используют окружность радиуса  $\rho_1 = l$  с центром в полюсе за-

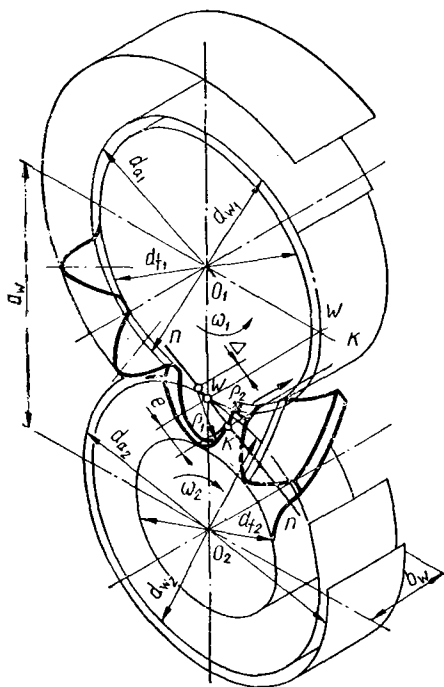


Рис. 11.3. Зубчатый механизм с одной линией зацепления

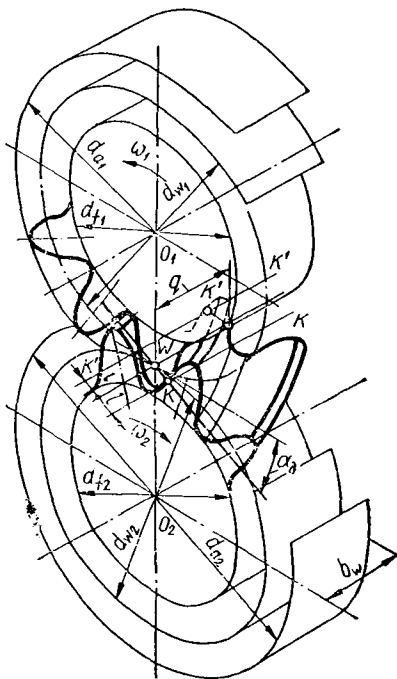


Рис. 11.4. Зубчатый механизм с двумя линиями зацепления

цепления  $W$  (рис. 11.3), для колеса — окружность радиуса  $\rho_2 = l + \Delta$  с центром, расположенным за полюсом  $W$  на линии  $nn$ . В этом случае начальный контакт зубьев всегда будет точечным; из-за возможных погрешностей зацепления контакт будет находиться все же вблизи теоретической точки контакта  $K$ . Для выхода смазочного материала, устранения затруднений при сборке, обеспечения необходимой прочности зубья на неконтактирующих участках очерчиваются линиями, не совпадающими с контуром образующей окружности.

Рабочие поверхности зубьев начинают взаимодействовать в точке  $K$ , расположенной на одном торце зубчатых колес. При вращении зубчатых колес точка контакта  $K$  перемещается по линии зацепления  $KK$ , параллельной полюсной линии  $WW$ , являющейся линией касания начальных цилиндрических поверхностей радиусов  $0,5d_w$  и  $0,5d_{w_2}$ , в направлении стрелки и зубья выходят из зацепления на противоположном торце. Поэтому рабочая часть линии зацепления равна ширине зацепления  $b_w$ .

Такие колеса образуют зацепление Новикова (см. прил.) с одной линией зацепления. Если зубья с выпуклым профилем располагаются на входном звене, а зубья с вогнутым — на выходном, то зацепление называется *заполосным*, так как в нем линия зацепления находится за полюсом в направлении вращения входного звена. В другом варианте зацепления — *дополюсном* — профиль зубьев на входном звене может быть вогнутым, а на выходном — выпуклым; тогда линия зацепления будет находиться перед полюсом.

### 11.5. Образование зубчатого механизма с двумя линиями зацепления

С целью увеличения нагрузочной способности зацепления круговинтовые зубья на каждом колесе выполняют с головкой и ножкой. Винтовые поверхности таких зубьев образуются аналогично указанному выше с помощью окружностей, перемещающихся по винтовым линиям на начальных окружностях колес. Головки зубьев выполняют с выпуклым профилем, ножки — с вогнутым, которые связаны между собой небольшим участком, очерченным переходной кривой (рис. 11.4). В таком зацеплении контактирование зубьев происходит одновременно на головке и ножке зубьев каждого колеса пары. Благодаря этому увеличивается количество одновременно контактирующих зубьев. Точки контакта  $K$  и  $K'$  на головках и ножках зубьев сдвинуты друг относительно друга на некоторое расстояние  $q$ , зависящее от угла наклона зубьев  $\beta$  и угла давления  $\alpha_d$ . В этом механизме образуются две линии зацепления. Одна линия  $K'K'$  находится перед полюсом, другая  $KK$  — за полюсом. Каждая линия образуется перемещением общей точки контакта начальной ножки зуба одного зубчатого колеса с начальной головкой зуба парного зубчатого колеса. Этот вариант зацепления Новикова с двумя линиями зацепления называется *дозаполосным*.

## 11.6. Исходные контуры и нарезание зубьев на заготовке колеса

Геометрия зубьев зацепления Новикова определяется исходным контуром зацепления. Параметры элементов исходных контуров, радиусы кривизны и другие размеры зубьев выбираются в таких соотношениях, чтобы обеспечить наиболее выгодные условия работы зацепления и надлежащую прочность зубьев. Для цилиндрических

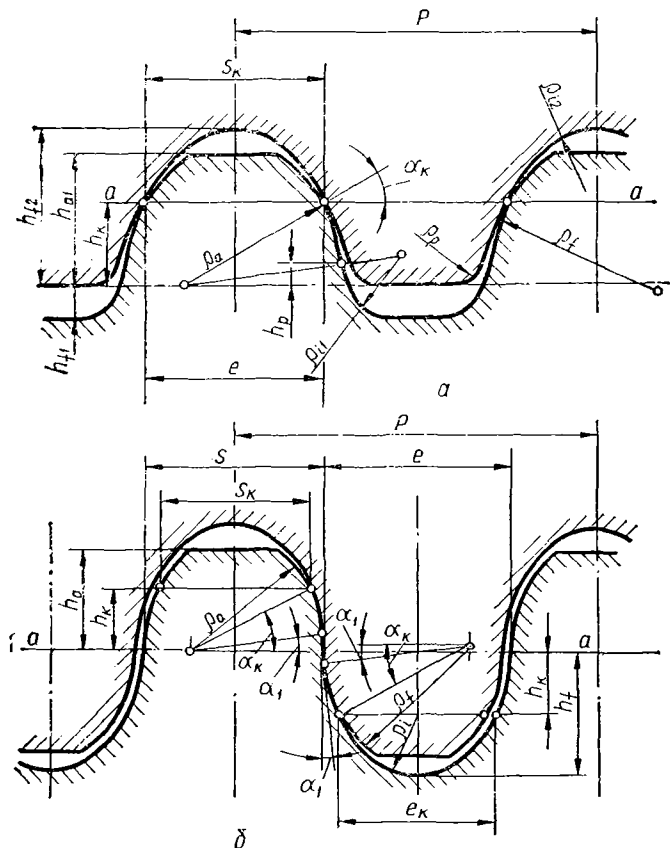


Рис. 11.5. Исходный контур зацепления Новикова

зубчатых колес Новикова исходным контуром является контур зубьев номинальной зубчатой рейки в нормальном сечении.

Для зацепления Новикова с одной линией зацепления (рис. 11.5, а) необходимы два исходных контура: один — для *выпуклых*, другой — для *вогнутых зубьев*. Боковые стороны контура очерчены дугами окружности. Исходные контуры выпуклого и вогнутого профилей (контур зубьев рейки) по делительной прямой  $a - a$  образуют плотное сопряжение. Необходимый боковой зазор в зацеплении достигается за счет утонения выпуклого зуба.

Параметры исходного контура зацеплений Новикова с двумя линиями зацепления (рис. 11.5, б) регламентированы ГОСТ 15023—76. По этому стандарту дуги, образующие выпуклую и вогнутую части зуба, сопрягаются между собой небольшим прямолинейным участком. Как и в исходном контуре с одной линией зацепления, профили зубьев в нормальном сечении очерчены дугами окружности.

Геометрические параметры определяются через нормальный модуль  $m_n$ . Модули выбирают в соответствии со значениями, установленными в ГОСТ 14186—69 (от 1,6 до 50 мм в первом ряду, что предпочтительнее, и от 1,8 до 56 мм — во втором). Так как в торцовом сечении профиль зуба исходного контура очерчен дугой эллипса, то зубья на колесах имеют профиль, описанный кривой, являющейся огибающей к различным положениям дуги эллипса при движении ее относительно заготовки. Исследования показали, что профили таких зубьев в торцовом сечении незначительно отличаются от окружности, они хорошо прирабатываются, вследствие чего за короткий промежуток времени в течение начального периода работы профили зубьев приобретают оптимальную форму.

Цилиндрические зубчатые колеса с зацеплением Новикова изготавливаются на станках, предназначенных для нарезания зубчатых колес с эвольвентным зацеплением. Как и эвольвентное зацепление, выпукло-вогнутое круговинтовое зацепление можно получить методом обкатки. Но так как зубья в заплоском зацеплении на одном колесе должны быть выпуклыми, а на другом — вогнутыми, то производящих реек должно быть две: одна — с вогнутыми, другая — с выпуклыми зубьями. Нарезание зубьев на шестерне и колесе с дозаполосным зацеплением осуществляется одним инструментом, соответствующим исходному контуру по ГОСТ 15023—76, что является одним из его преимуществ.

### 11.7. Свойства зацепления Новикова

В зубчатом механизме с зацеплением Новикова **основной закон зацепления**, в отличие от эвольвентного, как уже указывалось ранее, соблюдается лишь в одном определенном сечении. Процесс зацепления начинается на одном торце и заканчивается на противоположном. Поэтому для непрерывности вращения ведомого колеса прежде, чем точка контакта данной пары зубьев дойдет до противоположного торца, в контакт должна вступить последующая пара зубьев.

Процесс зацепления в дозаполосной передаче (рис. 11.6) начинается на торце  $I$  одной ножки зуба  $2_1$  с головкой парного зуба  $2_2$ , образуя точку контакта  $K_2''$ . В этот момент предшествующая пара зубьев  $1_1$  и  $1_2$  имеет контакт в двух точках:  $K_1'$  головки зуба  $1_1$  с ножкой зуба  $1_2$  и ножки с головкой этих зубьев в точке  $K_1''$ . Расстояние вдоль оси колеса между точками контактов на ножках зубьев  $2 — 2$  и  $1 — 1$  равно осевому шагу  $P_x = \pi m_x$  (на таком же расстоянии находятся точки контакта на головках этих зубьев). Расстояние  $q$  между точками контакта на ножке  $K_1''$  и головке  $K_1'$  данного

зуба меньше осевого шага и зависит от радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_a$  окружностей, очерчивающих профили ножки и головки зубьев, угла давления  $\alpha_d$  и угла  $\beta$  наклона зубьев. В этот период контакт происходит в трех точках. При дальнейшем вращении колес точка контакта  $K_1''$  зубьев  $1_1$  и  $2_2$ , перемещаясь вдоль линии зацепления, дойдет до противоположного торца 2 и контакт головки зуба  $1_1$  с ножкой зуба  $2_2$  прекратится, но будет существовать еще в точке  $K_1'$  (ножке зуба  $2_2$  с головкой зуба  $1_1$ ). Затем некоторое время в контакте будут находиться зубья  $1_1-2_2$  и  $2_1-2_2$ , т. е. будут две контактные точки до того момента, пока на очередной паре зубьев  $3_1-3_2$  не возникает контакт, подобный контакту в точке  $K_1$ , как указано ранее. Таким образом, в указанном случае в передаче существуют попеременно две и три контактные точки.

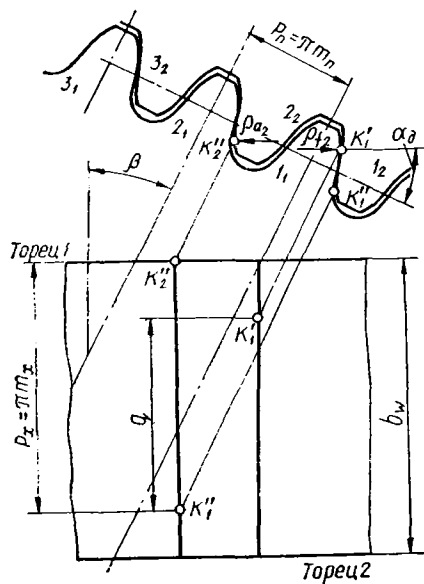


Рис. 11.6. Дозаполненное зацепление

Далее под небольшой нагрузкой точечный контакт распространяется по высоте зуба и располагается по полоске, почти перпендикулярной к направлению зуба. Благодаря большим радиусам кривизны поверхностей зубьев в плоскости, перпендикулярной к этой полоске, при действии значительных нагрузок пятно контакта распространяется вдоль зубьев, а длина его зависит от радиуса кривизны рабочих поверхностей в указанном сечении. Чем меньше угол наклона зубьев, тем больше эти радиусы.

### 11.8. Коэффициент перекрытия, скорости в зацеплении

Непрерывность вращения ведомого колеса обеспечивается за счет осевого перекрытия, что характеризуется коэффициентом перекрытия. В отличие от эвольвентного, в круговинтовом зацеплении имеется лишь осевой коэффициент перекрытия, являющийся отношением ширины зацепления  $b_w$  к осевому шагу  $P_x$  (рис. 11.6):

$$e_\beta = b_w/P_x = b_w \sin \beta / \pi m_x. \quad (11.1)$$

В механизме с одной линией зацепления в контакте будут находиться то одна, то две пары зубьев. Двухпарное зацепление будет иметь место на участках зубьев, имеющих длину  $b_w - \pi m_n$ , расположенных вблизи торцов. Как видно из формулы (11.1), коэффициент осевого перекрытия зависит от ширины зубчатого зацепления и угла наклона зубьев. При малых углах  $\beta$  наклона зубьев для

обеспечения необходимого значения коэффициента перекрытия (рекомендуется  $\epsilon_\beta = 1,15 \dots 1,35$ ) необходимо увеличивать ширину колес, что экономически невыгодно. Поэтому чаще всего принимают  $\beta = 10 \dots 20^\circ$ .

В дозаполюзном зацеплении при коэффициенте осевого перекрытия  $\epsilon_\beta = 1,15 \dots 1,20$  обеспечиваются как минимум две и более зоны контакта. Это позволяет ширину зубчатых колес делать в среднем на 30...40 % меньше, чем в зацеплении с одной линией зацепления.

Особенностью зацепления Новикова является теоретически полное отсутствие взаимного проскальзывания профилей. Однако вследствие распространения под нагрузкой контакта на большую поверхность в зоне контакта возникают упругие деформации, что приводит к относительному скольжению зубьев.

Скорость  $v_\beta$  перемещения контакта вдоль зубьев (рис. 11.7) больше окружной скорости  $v_t$ , благодаря чему обеспечивается устойчивая масляная пленка:

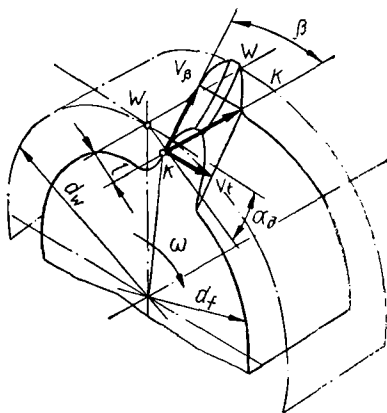


Рис. 11.7. Скорости в зацеплении

$$v_\beta = v_t \sin \beta. \quad (11.2)$$

Чем меньше угол  $\beta$ , тем больше скорость перемещения контакта. Так, например, при значении угла  $\beta = 14^\circ$  скорость перемещения в точке контакта в 4 раза больше окружной скорости  $v_t$ . Скорость скольжения по высоте зубьев зависит от расстояния  $l$  между линией зацепления  $KK$  и мгновенной осью  $WW$  относительного вращения колес:

$$v_\alpha = l(\omega_1 + \omega_2). \quad (11.3)$$

### 11.9. Определение размеров зубчатых механизмов с зацеплением Новикова

При проектировании зубчатого механизма с параллельными осями задаются межосевое расстояние  $a_w$ , передаточная функция  $i_{12}$  и вариант зацепления. Для механизма, состоящего из пары колес с зацеплением Новикова с одной (рис. 11.3) и двумя линиями зацепления (рис. 11.4), диаметр делительного цилиндра, совпадающего с начальным,

$$d = m_n z / \cos \beta; \quad (11.4)$$

диаметр окружности вершин

$$d_{a_1} = d_1 + 2h_{a_1}^* m_n \quad \text{и} \quad d_{a_2} = d_2 + 2h_{a_2}^* m_n; \quad (11.5)$$

диаметр окружности впадин

$$d_{f_1} = d_1 - 2h_{f_1}^* m_n \quad \text{и} \quad d_{f_2} = d_2 - 2h_{f_2}^* m_n; \quad (11.6)$$

межосевое расстояние передачи

$$a_w = 0,5m_n(z_1 + z_2)/\cos\beta; \quad (11.7)$$

ширина зубчатого венца шестерни

$$b = b_w = P_x \varepsilon_\beta. \quad (11.8)$$

## 12. СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ПРИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЯХ ВРАЩЕНИЯ

### 12.1. Пространственная эвольвентная функция

Сферической эвольвентой называется пространственная кривая  $CM$  (рис. 12.1), принадлежащая сферической поверхности радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ , образуемая точкой  $M$  плоскости  $Q$ , пересека-

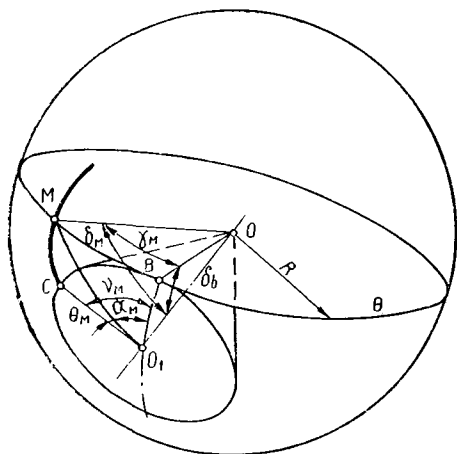


Рис. 12.1. Сферическая эвольвента

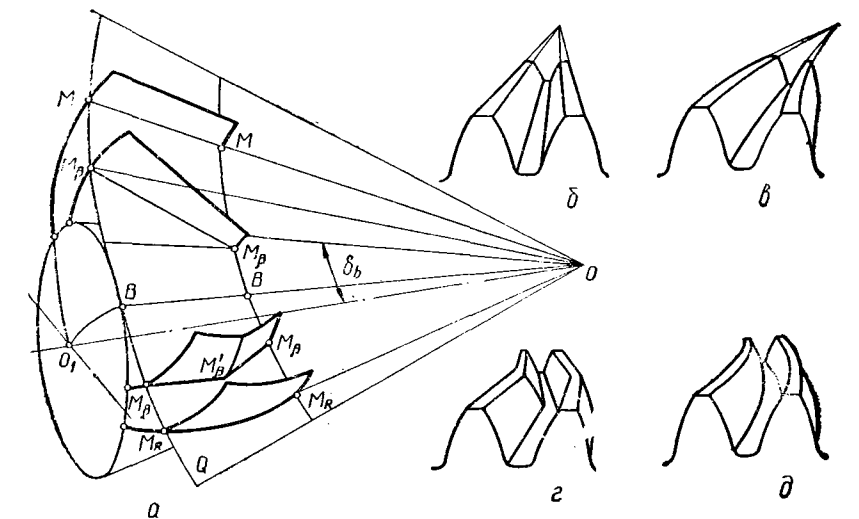


Рис. 12.2. Образование зубьев разных видов



тывающейся без скольжения по поверхности основного конуса с углом  $\delta_b$  при вершине, расположенного в центре сферы. Основной конус и образующая плоскость касаются по радиусу сферы  $OB$ . Точка  $C$  начала сферической эвольвенты на поверхности образующего конуса называется *предельной*. Так как плоскость  $Q$  перекачивается по поверхности основного конуса без скольжения, то дуги  $\overset{\frown}{CB}$  и  $\overset{\frown}{MB}$  равны. Рассматривая сферические треугольники  $CBO_1$  и  $BMO_1$  ( $O_1$  — точка пересечения оси основного конуса со сферой), можно записать

$$\gamma_M = \nu_M \sin \delta_b, \quad (12.1)$$

где  $\nu_M$  — угол развернутости сферической эвольвенты.

Определим параметры сферической эвольвенты в точке  $M$ . Из сферического треугольника  $BMO_1$  имеем

$$\cos \delta_M = \cos \delta_b \cdot \cos \gamma_M, \quad \sin \delta_M = \sin \delta_b / \cos \alpha_M, \quad \operatorname{tg} \alpha_M = \operatorname{tg} \gamma_M / \sin \delta_b.$$

Рис. 12.3. Сферическая эвольвентная поверхность

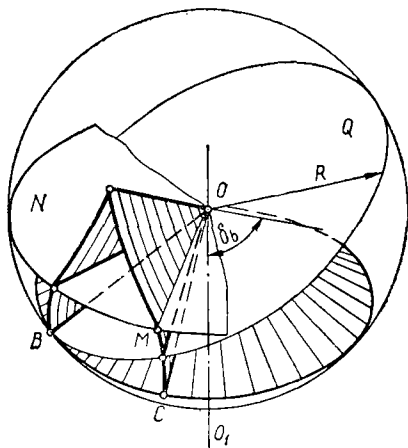
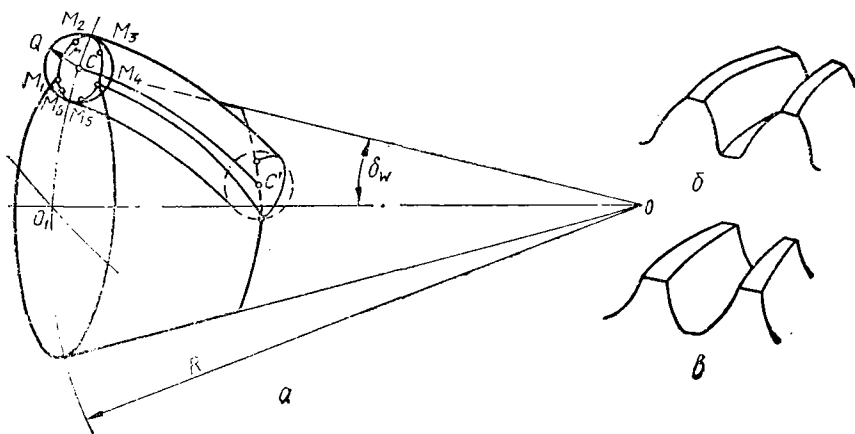


Рис. 12.4. Круговые профили конических зубьев



Так как  $\theta_M = \nu_M - \alpha_M$ , то

$$\theta_M = \gamma_M / \sin \delta_b - \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \gamma_M / \sin \delta_b). \quad (12.2)$$

Выражения (12.1) и (12.2) представляют собой параметрические уравнения сферической эвольвенты с независимым параметром  $\nu_M$ .

## 12.2. Эвольвентные профили конических зубьев

При пересекающихся осях вращения звеньев, вращающихся с постоянным передаточным отношением, в качестве сопряженных поверхностей выбирают **конические эвольвентные поверхности**. Они образуются линиями, расположенными на производящей плоскости  $Q$  (рис. 12.2, а), перекатывающейся без скольжения по основному конусу. Прямая  $M - M$ , проходящая через вершину основного конуса, описывает теоретическую поверхность прямого конического зуба (рис. 12.2, б), прямая  $M_\beta - M_\beta$ , не проходящая через вершину конуса, описывает теоретическую поверхность косоуго (рис. 12.2, в), ломаная линия  $M_\beta M'_\beta M_\beta$  — шевронного (рис. 12.2, г), кривая  $M_R - M_R$  — теоретическую поверхность криволинейных конических зубьев (рис. 12.2, д). Линия  $B - B$  касания производящей плоскости с основным конусом является мгновенной осью вращения этой плоскости относительно основного конуса и осью кривизны производимой поверхности. Плоскость  $Q$  нормальна к этой поверхности. Точки линий  $M - M$ ,  $M_\beta - M_\beta$  и  $M_R - M_R$  описывают сферические эвольвенты. Если обкатать производящую плоскость вокруг всей поверхности основного конуса, то сферическая эвольвентная поверхность будет состоять из «зубцов», симметричных плоскости  $N$ , перпендикулярной его оси (рис. 12.3). Кривизна эвольвентной конической поверхности при пересечении с этой плоскостью меняет знак, т. е. поверхность имеет перегиб.

## 12.3. Круговые профили конических зубьев

В качестве незвольвентных рабочих поверхностей зубьев конических передач с точечным зацеплением распространение получили круговые винтовые поверхности Новикова, образованные отрезками дуг окружностей. На боковой поверхности начального конуса с углом при вершине  $\delta_W$  (рис. 12.4) проведем винтовую линию  $CC'$ , установим в точке  $C$  образующую сферу  $Q$  с радиусом  $r$  и будем перемещать ее вдоль винтовой линии таким образом, чтобы центр  $C$  сферы все время находился на этой винтовой линии. Круговые винтовые поверхности будут огибающими семейства поверхностей сферы  $Q$ . Сечения поверхности начального конуса и винтовой круговой поверхности сферой радиусом  $R$  и центром в точке  $O$  представляют собой окружности, пересекающиеся в точках  $M_1$  и  $M_4$ . Для профилирования рабочих поверхностей зубьев можно взять участок  $M_1 M_2$  и  $M_3 M_4$  диаметральной окружности сферы  $Q$  (тогда получим коническое колесо с выпуклыми зубьями (рис. 12.4, б)) или участки  $M_1 M_6$  и  $M_4 M_5$  (тогда получим коническое колесо с вогнутыми зубьями (рис. 12.4, в)).

## 12.4. Образование конических зубьев различной формы

Для образования конических зубьев используются конические соосные поверхности, сферические эвольвентные и круговые винтовые поверхности. Поверхности вершин 1 (рис. 12.5), впадин 2 и поверхность 3 делительного конуса конического зубчатого колеса являются **соосными коническими поверхностями**, оси которых совпадают с осью зубчатого колеса  $OO_1$ . В связи с этим различают углы делительного конуса  $\delta$ , конуса вершин  $\delta_a$ , конуса впадин  $\delta_f$ , ножки зубьев  $\theta_f$ , головки зубьев  $\theta_a$ .

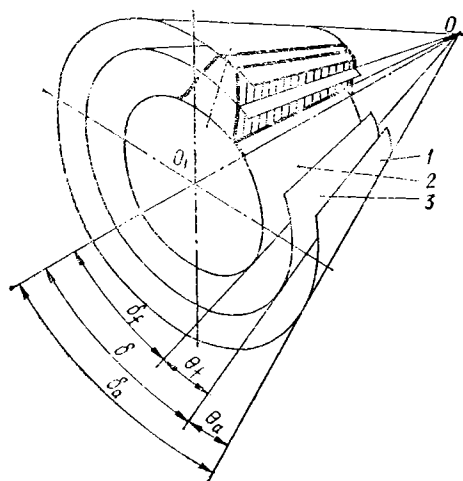


Рис. 12.5. Конические соосные поверхности

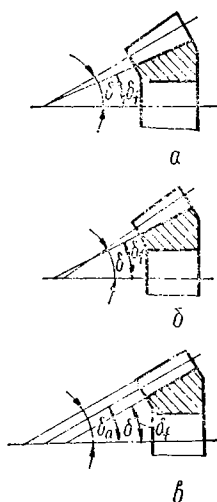


Рис. 12.6. Формы конических зубьев

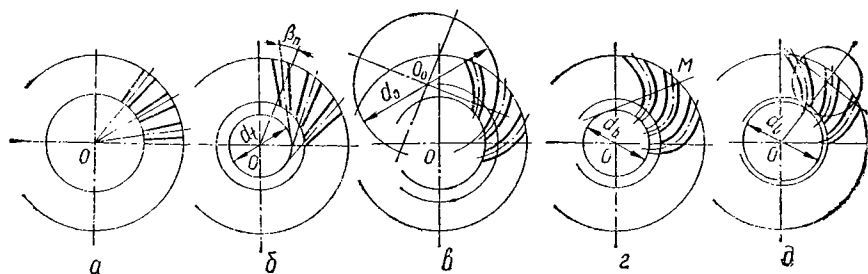


Рис. 12.7. Различные линии зубьев конических колес

В зависимости от взаимного расположения образующих и вершин конусов делительного, вершин и впадин (рис. 12.6) различают *три формы зубьев* в осевом сечении колес (ГОСТ 19325—73): форма I (рис. 12.6, а) — зубья *прямые* и *круговые* ( $\beta_n = 0 \dots 45^\circ$ ), *понижающиеся* пропорционально конусному расстоянию при совпадении вершин конусов делительного и впадин; II (рис. 12.6, б) — зубья *тангенциальные* и *круговые* ( $\beta_n$  до  $15^\circ$ ), *понижающиеся* при несовпадении

нии вершин конусов делительного и впадин; III (рис. 12.6, в) — зубья *круговые* ( $\beta_n = 25 \dots 45^\circ$ ), *равновысокие*, когда образующие конусов делительного, впадин и вершин параллельны. Боковые поверхности конического зуба образуются сферическими эвольвентными или круговыми винтовыми поверхностями.

В зависимости от формы теоретической линии зубьев на развертке делительного конуса различают конические колеса с *прямыми* (рис. 12.7, а), *тангенциальными* (б), *круговыми* (в) *зубьями*, с *эвольвентной* (г) и *циклоидальной* (д) линией зуба. Наибольшее применение находят колеса с прямыми и круговыми зубьями. Последние удается выполнить с наибольшей точностью, их применяют при окружных скоростях, доходящих до 30 м/с.

## 12.5. Теоретические исходные и производящие зубчатые колеса

В конических зацеплениях в качестве исходного принимают коническое колесо с углом делительного конуса, равным  $90^\circ$ . Это *колесо, определяющее теоретические форму и размеры зубьев семейства конических зубчатых колес, представителем которых оно является, называют теоретическим (номинальным) исходным плоским колесом*. Число зубьев теоретического исходного плоского колеса для ортогонального зацепления ( $\Sigma = 90^\circ$ )

$$z_c = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}. \quad (12.3)$$

*Контур зубьев условной рейки, идентичный развертке на плоскость торцового сечения исходного плоского колеса, называется торцовым теоретическим исходным контуром*. Различают внешний, средний и внутренний теоретические исходные контуры. В качестве стандартного для прямозубых конических колес применяют *внешний торцовый исходный контур*, параметры которого установлены ГОСТ 13754—81: угол профиля  $\alpha = 20^\circ$ ; коэффициенты — высоты головки зуба  $h_a^* = 1$ , радиального зазора  $c^* = 0,2$ , радиуса кривизны переходной кривой  $\rho^* = 0,2 \dots 0,3$ . Для колес с круговыми зубьями стандартным является *средний нормальный теоретический исходный контур* (по ГОСТ 13754—81). **Нормальным контуром называют контур зубьев условной рейки, у которой профиль и высотные размеры зубьев идентичны одноименным элементам зубьев исходного плоского колеса в нормальном сечении.**

Для профилирования зубьев конических колес используют **теоретическое производящее плоское колесо**, которое заполняет впадины теоретического исходного колеса. При этом между поверхностью вершин теоретического исходного колеса и поверхностью впадин производящего колеса предусматривается радиальный зазор. Для получения сопряженных поверхностей зубьев колес, составляющих зубчатую пару, производящие колеса, используемые для нарезания каждого из этих зубчатых колес, должны быть совпадающими, т. е. станочные аксониды обоих производящих колес должны совпа-

дать и при этом зубья одного из них должны входить во впадины второго, так же как контршаблон входит в шаблон.

Наряду с плоскими производящими колесами (рис. 12.8, а) применяют и другие: конусные (б), плосковершинные (г) и плоские плосковершинные (в).

Для образования сферических эвольвентных колес торцовое сечение зубьев производящего плоского колеса имеет криволиней-

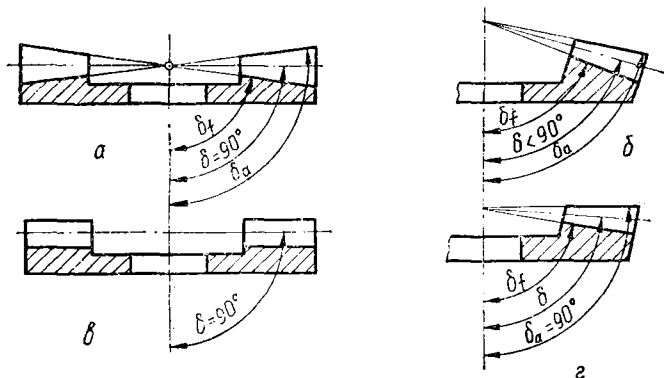


Рис. 12.8. Производящие зубчатые колеса

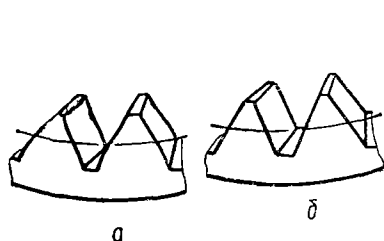


Рис. 12.9. Торцовое сечение зубьев производящего колеса

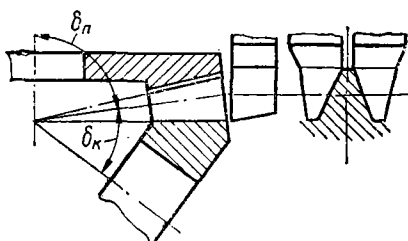


Рис. 12.10. Образование профиля зубьев исходного контура

ную форму (рис. 12.9, а) в соответствии с рис. 12.3, что представляет сложности при изготовлении. Обычно используют производящие колеса с плоской боковой поверхностью зубьев (рис. 12.9, б), которые образуются движением прямолинейных кромок двух зубострогальных резцов, работающих в соседних впадинах нарезаемого колеса. Кромки резцов (рис. 12.10) расположены так, что профиль зубьев производящего колеса совпадает с профилем исходного контура.

## 12.6. Нарезание зубьев на заготовках колес

Заготовка конического колеса представляет собой усеченный конус с углом при вершине  $2\delta_a$ . Зубья образуются за счет удаления материала заготовки из впадин. Как и при нарезании цилиндрических колес при нарезании конических колес используют два способа: *копирования* и *обкатки*. При способе копирования применяют фасон-

## 12.7. Свойства конического эвольвентного зацепления

Коническое зацепление пары зубчатых колес определяется их относительным положением, зависящим от угла  $\Sigma$  между осями вращения 1 и 2 (рис. 12.14). Взаимодействие конических колес характеризуется зацеплением профилей зубьев, ограниченных концентрическими окружностями, являющимися линией пересечения со сферой соосных конусов — вершин и впадин. **Пересечение** со сферой других конусов (делительного и начального) образует **окружности** — *делительную* и *начальную*. Диаметры этих окружностей определяют диаметры конического колеса. Они различаются также в зависимости от положения сферы, на которой располагаются соответствующие окружности, что обозначается соответствующим индексом:  $d$  — *средний делительный диаметр*;  $d_e$  — *внешний делительный диаметр*;  $d_{ae}$  — *внешний диаметр вершин зубьев*;  $d_w$  — *средний начальный диаметр* и т. п.

Модуль, высота и толщина зубьев (за исключением равновысоких круговых) монотонно уменьшаются к вершине конуса. Аналогично диаметрам колес различают модули  $m$ , высоты зубьев  $h$  (и их частей — головок  $h_a$  и ножек  $h_f$ ) и толщины  $s$  зубьев — *внешние* —  $m_e, h_e, h_{ae}, h_{fe}, s_e$ , *средние* —  $m, h, h_a, h_f, s$ , *внутренние* —  $m_i, h_i, h_{ai}, h_{fi}, s_i$ .

Процесс зацепления колес происходит в плоскости зацепления  $B_1B_1B_2B_2$ , наклоненной под углом зацепления  $\alpha_w$ , на которой располагаются контактные линии  $KK$ . На основании свойств зубчатых зацеплений (см. гл. 10) передаточное отношение пары конических колес будет

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = O_2W/O_1W = r_{w2}/r_{w1} = z_2/z_1 = \sin \delta_{w2}/\sin \delta_{w1}. \quad (12.4)$$

При заданном передаточном отношении и произвольно выбранном угле основного конуса одного звена угол основного конуса второго звена определяется однозначно из соотношения (12.4) и из подобия сферических треугольников  $WB_1O_1$  и  $WB_2O_2$ :

$$i_{12} = \sin \delta_{w2}/\sin \delta_{w1} = O_2B_2/O_1B_1 = \sin \delta_{b1}/\sin \delta_{b2},$$

откуда

$$\sin \delta_{b2} = \sin \delta_{b1} \cdot \sin \delta_{w2}/\sin \delta_{w1}. \quad (12.5)$$

Так как передаточное отношение в эвольвентном сферическом зацеплении определяется отношением синусов углов при вершинах основных конусов, то оно не зависит от межосевого угла. Если изменить межосевой угол, дав ему новое значение, то изменятся углы при вершинах начальных конусов и угол зацепления  $\alpha_w$ . Передаточное отношение при этом остается неизменным. Это свойство эвольвентного конического зацепления позволяет снизить требование к точности изготовления стойки в зубчатых механизмах с коническими колесами. Достоинством сферического эвольвентного зацепления, кроме указанного, является постоянное положение в пространстве плоскости зацепления.

Если угол  $\varepsilon_w$  одного из звеньев равен  $90^\circ$ , то начальный конус превращается в плоскость, и такое звено называется **плоским ко-**

лесом или конической рейкой. Зубья такой рейки, в отличие от зубьев рейки, сопряженной с эвольвентными цилиндрическими поверхностями, имеют криволинейный профиль: боковая поверхность зуба выше начального конуса вогнута, а ниже выпукла (см. рис. 12.3). Если боковую поверхность зубчатой рейки сделать плоской, то она образует с коническим эвольвентным колесом неспряженную зубчаторечную пару.

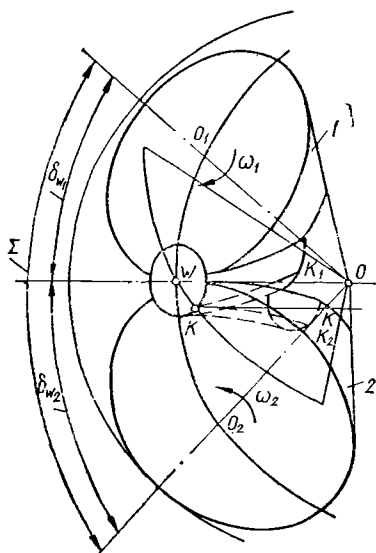


Рис. 12.15. Схема конического зацепления Новикова

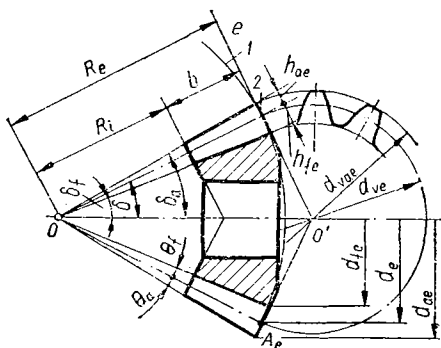


Рис. 12.16. Цилиндрические колеса, эквивалентные прямым коническим

Поверхность зуба конического колеса, взаимодействующего с плоской поверхностью зуба конической рейки, называют *квазиэвольвентной*. В квазиэвольвентном зацеплении линия зацепления не совпадает с дугой большого круга сферы, а лишь касается его в полюсе. По форме линия зацепления напоминает расположенную на сфере восьмерку. При любом угле  $\alpha \neq 0$  квазиэвольвента отклоняется от сферической эвольвенты. Однако так как эти отклонения соизмеримы с допусками на изготовление зубьев, то в большинстве случаев ими можно пренебречь. Конические эвольвентные зацепления очень чувствительны к несовпадению осей вращения звеньев. Они должны пересекаться в точке, совпадающей с вершинами начальных конусов.

Схема конического зацепления Новикова показана на рис. 12.15. Колесо 1 выполнено с выпуклыми, а колесо 2 — с вогнутыми зубьями; их контакт происходит в точке  $K$ . Нормаль к профилям зубьев в этой точке пересекает линию  $WO$  касания начальных конусов с углами при вершинах  $\delta_w$  и  $\delta_{w2}$  в точке  $W$ . При вращении конусов точка контакта  $K$  перемещается вдоль линии  $KK$  — линии зацепления, параллельной линии  $WO$ , и нормаль к профилям в этой точке постоянно пересекает линию  $WO$ . На боковых поверхностях зубьев траектория точки контакта соответствует винтовым линиям  $KK_1$  и  $KK_2$ .

ный инструмент, профиль которого совпадает с профилем впадины нарезаемого колеса и копируется на колесе. Нарезание производится с помощью *дисковых* (рис. 12.11, а) и *пальцевых модульных фрез* (б) или протягиванием специальными круговыми протяжками (в). Этот способ нарезания зубьев не обеспечивает высокой точности зацепления.

Рис. 12.11. Нарезание зубьев методом копирования

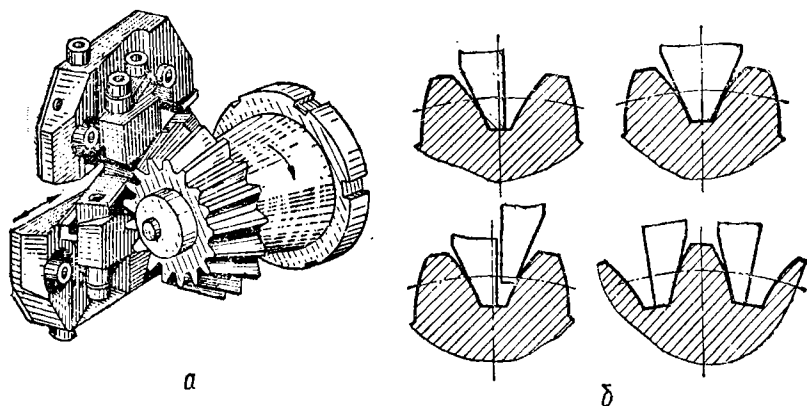
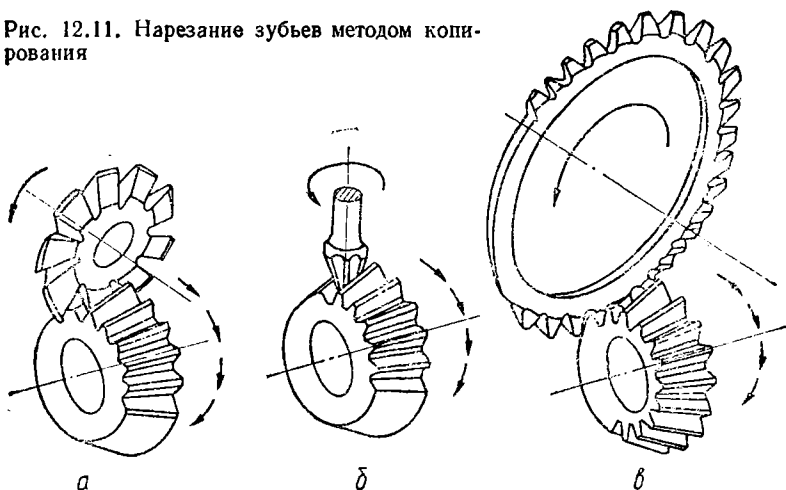


Рис. 12.12. Нарезание зубьев методом обкатки

При способе обкатки заготовка вводится в зацепление с производящим колесом, и им сообщают такое же относительное движение, какое эти колеса имели бы в зацеплении друг с другом. В процессе нарезания воспроизводится перекатывание без скольжения аксоида нарезаемого колеса по аксоиду инструмента. *Зацепление нарезаемого колеса с производящим называют станочным.*

Конструктивно производящее колесо оформлено в виде планшайбы (люльки) зубострогального станка, по которой движется *резцо-*



вые салазки (рис. 12.12, а). Обработку ведут одним или двумя резами, кромки которых при движении воспроизводят боковые стороны зуба или впадины производящего колеса (рис. 12.12, б). Для нарезания круговых зубьев используют *зуборезные головки*. Выбор диаметра  $d_0$  ее (см. рис. 12.7, в) осуществляется по таблицам в зависимости от заданных параметров зацепления.

Коническое колесо, нарезанное со смещением инструмента, характеризуется тем, что в плотном зацеплении с исходным плоским

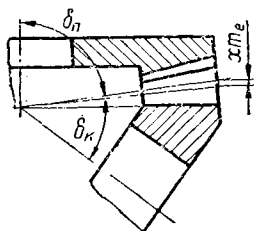


Рис. 12.13. Смещение производящей поверхности

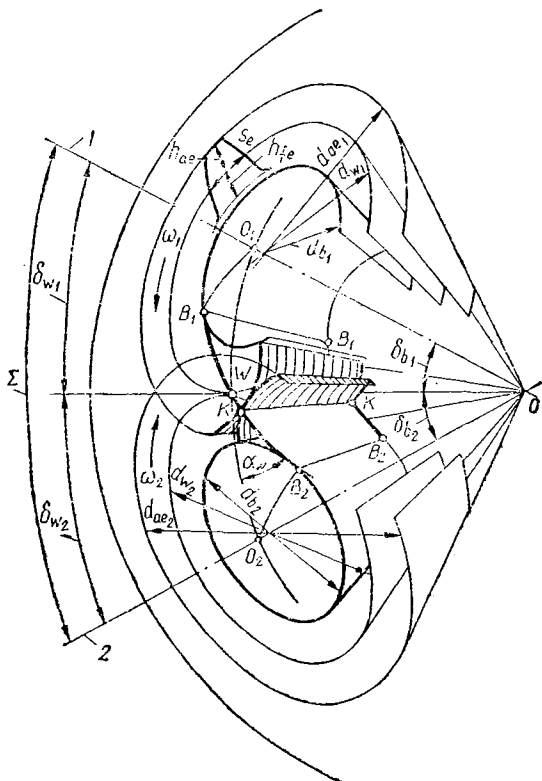


Рис. 12.14. Основные параметры механизма с коническими зубчатыми колесами

колесом его делительный конус не касается делительной плоскости или делительного конуса исходного производящего колеса (рис. 12.13). Смещением производящей поверхности называют расстояние  $xm_e$  между делительным конусом конического зубчатого колеса и делительным конусом (делительной плоскостью) производящего колеса, измеренное в плоскости, содержащей их оси. Смещение считается положительным, если делительные конусы производящего и нарезаемого колеса не пересекаются, и наоборот. Отношение смещения производящей поверхности к модулю называют *коэффициентом смещения*  $x$ . Коэффициент смещения конического колеса идентичен коэффициенту смещения эквивалентного цилиндрического колеса.

## 12.8. Эквивалентные цилиндрические и конические зацепления

Строгий геометрический расчет зубьев конических колес достаточно сложен вследствие того, что профили зубьев располагаются на поверхности сферы. Исходя из того, что высотные размеры  $h_e$  зубьев невелики по сравнению с радиусом  $R_e$  сферы (рис. 12.16), в геометрических расчетах заменяют участок поверхности сферы  $I$ , содержащий профили зубьев, поверхность дополнительного конуса 2 с вершиной в точке  $O$  и пренебрегают отличием профиля квазиэвольвентного зуба от плоской эвольвенты. При этом расчет пространственного конического зацепления заменяют расчетом обычного плоского зацепления цилиндрических эвольвентных колес (гл. 10). **Дополнительным конусом** называют соосный конус, образующая которого перпендикулярна образующей делительного конуса. В зависимости от положения относительно вершин *делительные* дополнительные конусы разделяют на *внешние* (наиболее удаленные от вершины), *внутренние* (наименее удаленные от вершины), *средние* (находящиеся на равном расстоянии от внешнего и внутреннего дополнительных конусов). Параметрам внешних дополнительных конусов присваивают индекс  $e$ , внутренних —  $i$ , средних —  $m$ . *Сечение конического колеса одним из дополнительных конусов называют торцовым.*

*Эвольвентное цилиндрическое зацепление, размеры и форма зубьев которого идентичны размерам и форме зубьев конического зацепления на поверхностях ее дополнительных конусов, называют эквивалентным цилиндрическим зацеплением.* На развертке дополнительного конуса конического колеса видно, что длина образующей дополнительного конуса  $O'A_e$  является радиусом  $0,5d_{v2}$  делительной окружности эквивалентного цилиндрического колеса. Диаметры начальных окружностей цилиндрических эквивалентных колес для расчетного конусного расстояния

$$d_{wt} = d_w / \cos \delta_w; \quad (12.6)$$

делительных окружностей —

$$d_{vt} = d / \cos \delta. \quad (12.7)$$

Длина полной делительной окружности эквивалентного колеса будет равна  $\pi d_v = \pi d / \cos \delta$  или  $z_v \cdot P_v = z \cdot P / \cos \delta$ . Так как шаги конических и эквивалентных цилиндрических колес  $P = P_v$ , то *эквивалентное число зубьев*

$$z_v = z / \cos \delta, \quad (12.8)$$

где  $z$  — число зубьев конического колеса.

В общем случае эквивалентное число зубьев является дробным и в процессе расчета округлению не подлежит. Для зацепления пары колес с непрямыми зубьями аналогом являются **биэквивалентные цилиндрические колеса** с диаметрами делительных окружностей  $d_{vн}$ , которые имеют размеры и форму зубьев, идентичные **одноименным** элементам в нормальном сечении эквивалентных цилиндри-

ческих колес с непрямыми зубьями (рис. 12.17). С учетом формул (10.45) и (12.8) получим

$$z_{v'n} = z_{v'}/\cos^3 \beta_n = z/(\cos \delta \cdot \cos^3 \beta_n). \quad (12.9)$$

Передаточное отношение эквивалентной цилиндрической передачи для ортогональной конической передачи ( $\Sigma = 90^\circ$ ) будет с учетом формул (12.4) и (12.8)

$$i_v = z_{v'}/z_{v_1} = (z_2/z_1) (\cos \delta_1/\cos \delta_2) = i^2. \quad (12.10)$$

Одна и та же цилиндрическая пара зацепляющихся колес эквивалентна для разных конических зацеплений с углом между осями  $\Sigma \neq 90^\circ$ . Это дает возможность коническую пару с углом  $\Sigma \neq 90^\circ$  привести к эквивалентной ортогональной ( $\Sigma = 90^\circ$ ) конической паре сопряженных колес. Из формулы (12.10) следует,

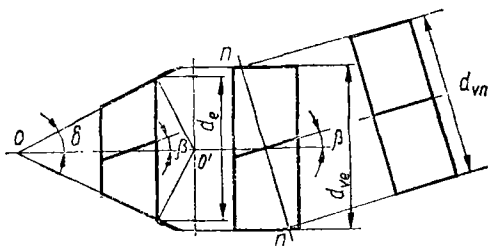


Рис. 12.17. Цилиндрические колеса, эквивалентные коническим с непрямыми зубьями

что  $i = \sqrt{i_v}$ . На основании этого при условии, что  $\delta_1 + \delta_2 \neq 90^\circ$ , получим передаточное отношение эквивалентной ортогональной пары конических колес, выраженное через передаточное отношение конической пары при  $i_{\Sigma \neq 90^\circ} = i = z_2/z_1$ :

$$i_{\Sigma \neq 90^\circ} = \sqrt{i (\cos \delta_1/\cos \delta_2)}. \quad (12.11)$$

Понятиями об эквивалентных числах зубьев и передаточном числе эквивалентной цилиндрической передачи пользуются при исследовании геометрии зубчатых зацеплений конических колес с применением зависимостей для цилиндрических эвольвентных колес (см. гл. 10).

## 12.9. Коэффициент перекрытия

Как и в цилиндрическом зацеплении, для непрерывности взаимодействия зубьев в коническом так же необходимо, чтобы каждая очередная пара зубьев вступала в зацепление раньше, чем из зацепления выйдет предыдущая. Это условие в конических зацеплениях характеризуется **суммарным коэффициентом перекрытия**  $\epsilon_\gamma$ :

$$\epsilon_\gamma = \sqrt{\epsilon_\alpha^2 + \epsilon_\beta^2}, \quad (12.12)$$

где  $\epsilon_\alpha$  — коэффициент торцового перекрытия (отношение длины линии зацепления к шагу на развертке дополнительного конуса).

Коэффициент  $\epsilon_\beta$  равен коэффициенту перекрытия эквивалентных цилиндрических колес во внешнем торцовом сечении. Используя выражение для коэффициента торцового перекрытия цилиндрического эвольвентного зацепления (см. гл. 10) и подставляя значение

эквивалентного числа зубьев  $z_e$  из формулы (12.8), получим

$$\epsilon_\alpha = ((z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{ae1} - \operatorname{tg} \alpha_w) / \cos \delta_{w1}) + (z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{ae2} - \operatorname{tg} \alpha_w) / \cos \delta_{w2})) / 2\pi. \quad (12.13)$$

В коническом зацеплении, в отличие от цилиндрического, торцовый коэффициент перекрытия для передач с постоянным радиальным зазором по всей длине зуба в разных торцовых сечениях будет различным: по мере приближения к внутреннему торцовому сечению  $\epsilon_\alpha$  уменьшается. Для прямозубых конических передач наименьшее значение  $\epsilon_\alpha$  должно быть больше единицы. Коэффициент осевого перекрытия конических колес с тангенциальными и круговыми зубьями приближенно будет

$$\epsilon_\beta = b \cdot \sin \beta_n / (\pi m_n), \quad (12.14)$$

где  $\beta_n$  — угол наклона средней линии зубьев.

Минимальный коэффициент осевого перекрытия рекомендуется иметь в пределах  $\epsilon_\beta = 1,5 \dots 1,8$ . Увеличения коэффициента осевого перекрытия достигают увеличением угла наклона линии зуба и ширины зубчатого венца, а также уменьшением модуля при соответствующем увеличении числа зубьев.

## 12.10. Влияние смещения на характеристики зацепления

Нарезание конических колес со смещением существенно влияет на геометрию и качественные показатели зубчатого зацепления. С увеличением коэффициентов смещения растут радиусы кривизны боковых поверхностей зубьев, что благоприятно для прочностных характеристик, но в то же время снижается коэффициент перекрытия,

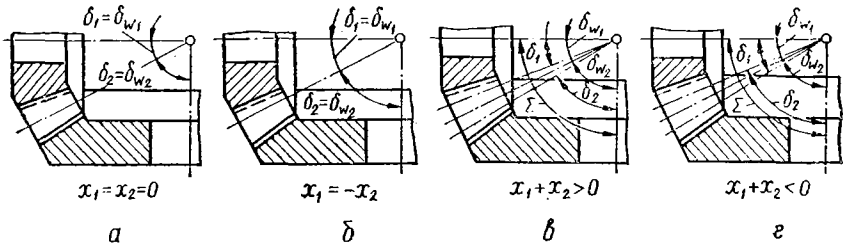


Рис. 12.18. Конические зацепления со смещением

растет опасность заострения и интерференции зубьев. Для колес, нарезаемых резцами с прямолинейной режущей кромкой на базе плосковершинного производящего колеса, при больших коэффициентах смещения увеличивается несопряженность поверхностей зубьев.

По аналогии с цилиндрическими различают **конические зацепления без смещений** (нулевые), при  $x_1 = x_2 = 0$  и угле между осями  $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$  (рис. 12.18, а), **равносмещенные** (наиболее распространенные) — оба колеса передачи имеют равные по величине, но обратные по знаку смещения,  $x_1 = -x_2$ , угол  $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$  (рис. 12.18, б);

*положительные* — сумма коэффициентов обонх колес положительна, т. е.  $x_1 + x_2 > 0$  и  $\Sigma = \delta_{w_1} + \delta_{w_2} > \delta_1 + \delta_2$  (рис. 12.18, а), и *отрицательные* — при  $x_1 + x_2 < 0$  и  $\Sigma < \delta_1 + \delta_2$  (з).

Для каждой пары зацепляющихся колес коэффициенты смещения назначают индивидуально с учетом условий ее работы и предъявляемых к ней требованиям. Это позволяет улучшить те характеристики, которые являются для данных условий наиболее важными и незначительно повлияют на остальные.

Для конических зацеплений, которые составлены из колес, нарезанных зубострогальными резцами с прямолинейной режущей кромкой, воспроизводящими при движении впадину исходного реечного контура, коэффициенты смещения выбирают по блокирующим контурам, построенным для цилиндрических передач внешнего зацепления (см. гл. 10), по эквивалентным числам зубьев.

### 12.11. Определение геометрических размеров зацепления конических колес

Базой для определения элементов зубьев и их размеров является **делительный конус** — соосная коническая поверхность с углом у вершины  $\delta$ . Угол делительного конуса шестерни и колеса

$$\delta_1 = \arctg(1/i_{12}) \text{ и } \delta_2 = \Sigma - \delta_1. \quad (12.15)$$

Угол конуса вершин шестерни и колеса

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1} \text{ и } \delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2}. \quad (12.16)$$

Угол  $\theta_a$  головки зуба зависит от принятой системы назначения радиальных зазоров. Наибольшее распространение получила система, при которой радиальный зазор постоянен по всей ширине зубчатого венца и угол  $\theta_a$  головки зуба данного колеса равен углу  $\theta_f$  ножки зуба сопряженного колеса:

$$\theta_{a1} = \theta_{f2} \text{ и } \theta_{a2} = \theta_{f1}; \quad (12.17)$$

угол ножки зуба (см. рис. 12.16)

$$\theta_f = \arctg(h_{fe}/R_e). \quad (12.18)$$

Внешняя высота ножки зуба

$$h_{fe} = m_e(h_a^* + c^* - x); \quad (12.19)$$

внешняя высота головки зуба

$$h_{ae} = m_e(h_a^* + x); \quad (12.20)$$

внешняя высота зуба

$$h_e = h_{ae} + h_{fe} = m_e(2h_a^* + c^*). \quad (12.21)$$

Внешнее конусное расстояние (для ортогональных зацеплений)

$$R_e = 0,5m_e \cdot z_c; \quad (12.22)$$

среднее делительное конусное расстояние

$$R = R_e - 0,5b; \quad (12.23)$$

внутреннее конусное расстояние

$$R_i = R_e - b = R - 0,5b. \quad (12.24)$$

Расстояние между внешним и внутренним торцовыми сечениями является шириной зубчатого венца  $b$  (см. рис. 12.16). Выбор ширины зубчатого венца, в отличие от цилиндрических зацеплений, связан с ограничениями, налагаемыми технологией нарезания и инструментом, и определяется коэффициентом ширины зубчатого венца  $k_{be} = b/R_e$  и расчетным модулем. Для колес с прямыми зубьями принимают  $k_{be} \leq 0,3$  ( $b \leq 10m_e$ ); с тангенциальными —  $k_{be} \leq 0,25$  ( $b \leq 8m_{te}$ ); с круговыми —  $k_{be} \leq 0,3$  ( $b \leq 14m_n$ ).

В качестве расчетного модуля (из стандартного ряда) для прямых зубьев принимают внешний окружной модуль  $m_e$  по внешнему делительному диаметру, для тангенциальных зубьев —  $m_{ne}$  — внешний нормальный модуль по этому диаметру.

Внешний окружной модуль для колес с тангенциальными зубьями

$$m_{te} = m_{ne}/\cos \beta_{ne}; \quad (12.25)$$

средний окружной модуль

$$m_m = m_e \cdot R/R_e; \quad (12.26)$$

средний нормальный модуль

$$m_n = m_{nc} \cdot R \cdot \cos \beta_n / (R_e \cdot \cos \beta_{ne}). \quad (12.27)$$

Средний делительный диаметр

$$d = m_n z / \cos \beta_n; \quad (12.28)$$

внешний делительный диаметр

$$d_e = m_e \cdot z; \quad (12.29)$$

внешний диаметр вершин зубьев

$$d_{ae} = d_e + 2h_{ae} \cos \delta. \quad (12.30)$$

Алгоритм расчета геометрических размеров прямозубых конических передач реализуется операторной функцией

$$GCON(z_1, z_2, m_e, R_e, b, \Sigma, h_a^*, c^*, \alpha; \delta_1, \delta_{a1}, \delta_{je1}, \delta_{je2}, d_{ae1}, d_{ae2}).$$

Геометрический расчет конических колес с круговыми равновысокими и равноширокими зубьями производится так же, как и геометрический расчет колес с прямыми зубьями. В качестве расчетного принимается внешний окружной модуль  $m_e$  для зубьев с осевой формой I и III и средний нормальный модуль  $m_n$  для зубьев по форме II. Особенность расчета заключается в выборе диаметра  $d_o$  зуборезной головки, расчете среднего угла наклона линии зуба  $\beta_n$  и подборе коэффициента  $x$  смещения исходного контура. Определение отдельных параметров — угла ножки и головки зубьев — зависит от их осевой формы — I, II или III. Диаметр зуборезной головки выбирается по специальным таблицам в зависимости от параметров  $R_e$  и  $m_{te}$ . Средний угол наклона линии зуба определяется по выбранному номинальному диаметру зуборезной головки и коэффициенту ширины зубчатого венца.

## 13. СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ПРИ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ОСЯХ ВРАЩЕНИЯ

### 13.1. Гиперболоидное зацепление и его модификации

Аксоидами в относительном движении звеньев со скрещивающимися под любым углом осями (рис. 13.1, а) являются **гиперболоиды** (см. гл. 9), контактирующие по образующей — *мгновенной оси вращения и скольжения*  $KK$ , наклоненной к осям гиперболоидов под углами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Если в качестве начальных поверхностей принять эти гиперболоиды и на звеньях нарезать зубья, то получим **гиперболоидный механизм с зубьями**, контактирующими по линии.

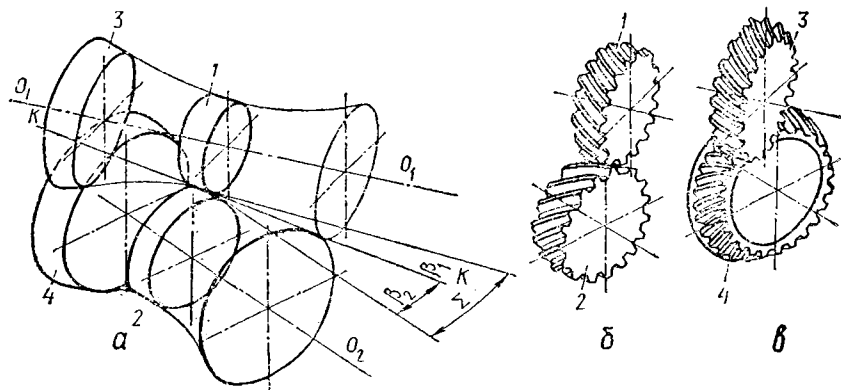


Рис. 13.1. Аксоиды зубчатых механизмов со скрещивающимися осями

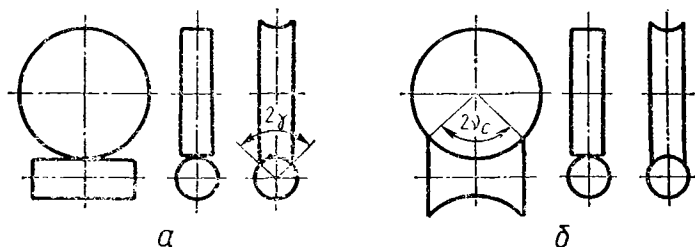


Рис. 13.2. Начальные поверхности

В процессе зацепления эти зубья перекатываются и скользят вдоль профиля по высоте зубьев и в направлении линий зубьев.

Такие зацепления не нашли применения ввиду сложности изготовления их элементов. При постоянном числе зубьев и переменном по длине звеньев диаметре начальных окружностей шаг, а значит, и модуль зацепления должны увеличиваться от горловины гиперболоида в обе стороны по оси. Вместо них применяют зацепления, у которых начальные поверхности представляют собой цилиндры 1, 2, вписанные в горловины гиперболоидов, или конусы 3, 4, расположенные на удаленных от горловины участках гиперболоидов.

Касание таких начальных поверхностей, не совпадающих с аксоидными, — *точечное*, поэтому и контакт зубьев в зацеплениях тоже переходит в *точечный*. Такие механизмы с цилиндрическими начальными поверхностями (рис. 13.1, б) называются *винтовыми, зубчатыми*, а с коническими поверхностями (рис. 13.1, в) — *гипоидными*.

Для обеспечения в зацеплении линейного контакта применяют специальные способы нарезания зубьев. Для увеличения суммарной длины контактных линий и улучшения условий работы зацепления начальным поверхностям придают форму, способствующую увеличению взаимного охвата их (рис. 13.2). В червячной паре (рис. 13.2, а) цилиндрический червяк охватывается червячным колесом в пределах дуги  $2\gamma$ , в *глобоидной* (рис. 13.2, б) — кроме того, колесо охватывается *глобоидным червяком* в пределах дуги  $2\gamma_c$ . Однако особенностью всех этих зацеплений независимо от вида контакта элементов зацепления — точечного или линейчатого — остается скольжение их в направлении мгновенной оси вращения.

### 13.2. Винтовое зацепление

В качестве сопряженных в точечном зацеплении применяются любые профили. Для образования **винтового зубчатого зацепления** (рис. 13.3) используют эвольвентные цилиндрические косозубые колеса. Начальные цилиндры этих колес радиусами  $r_{W1}$  и  $r_{W2}$  кон-

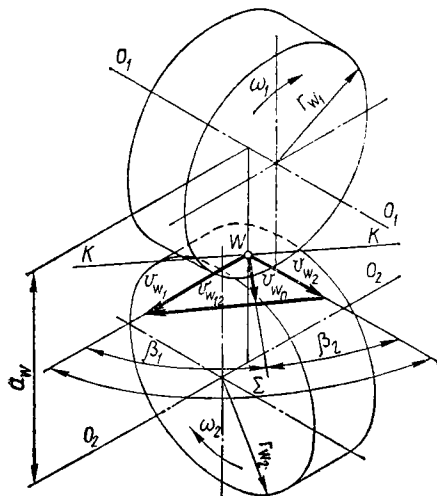


Рис. 13.3. Винтовое зацепление

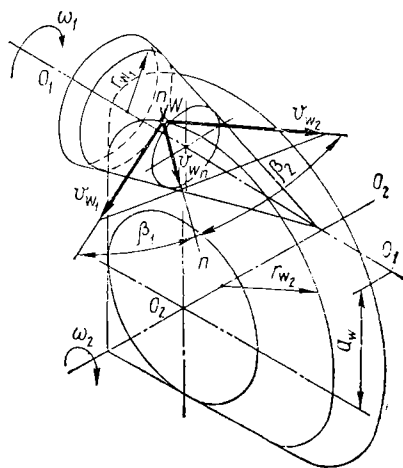


Рис. 13.4. Гипоидное зацепление

тактируют в полюсе зацепления  $W$ . Кратчайшее расстояние между скрещивающимися осями — межосевое расстояние  $a_W = r_{W1} + r_{W2}$ . Чаще всего применяют передачи с углом между скрещивающимися осями  $\Sigma = 90^\circ$ . Из условия, что в полюсе  $W$  скорости точек контакта в направлении нормали к линиям зубьев должны быть одинаковыми:  $v_{Wn1} = v_{Wn2} = v_{Wn}$ , получим  $v_{Wn} \cos \beta_1 =$



$$= v_{W2} \cos \beta_2, \text{ откуда } \omega_1 r_{W1} \cos \beta_1 = \omega_2 r_{W2} \cos \beta_2, \text{ следовательно,} \\ i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = r_{W2} \cos \beta_2 / r_{W1} \cos \beta_1, \quad (13.1)$$

где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  — угловые скорости и углы наклона линий зубьев колес 1 и 2.

Косозубые колеса, находящиеся в зацеплении, имеют одинаковый нормальный шаг  $P_{n1} = P_{n2} = P_n$ . Следовательно, при торцовых шагах  $P_{t1}$  и  $P_{t2}$  соблюдается условие  $P_1 \cos \beta_1 = P_{t2} \cos \beta_2$ , а радиусы начальных окружностей, выраженные через зубья колес  $z_1$  и  $z_2$ , будут

$$r_{W1} = z_1 \cdot P_{t1} / 2\pi = z_1 P_n / 2\pi \cos \beta_1; \\ r_{W2} = z_2 P_{t2} / 2\pi = z_2 P_n / 2\pi \cos \beta_2.$$

После подстановки значения радиусов  $r_{W1}$  и  $r_{W2}$  в формулу (13.1) получим

$$i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1, \quad (13.2)$$

т. е. передаточное отношение сопряженной пары винтовых колес выражается через числа зубьев точно так же, как и в цилиндрическом зацеплении с косозубыми колесами.

Из зависимости (13.1) следует, что передаточное отношение пары винтовых колес зависит не только от отношения радиусов  $r_{W1}$  и  $r_{W2}$ , как это имело место в механизме с параллельными осями, но и от углов наклона зубьев на начальных цилиндрах: заданное передаточное отношение  $i_{12}$  осуществляют, варьируя одним из углов  $\beta$  и соответствующим отношением радиусов  $r_{W2} / r_{W1}$ . Из возможных решений следует выбирать те, которые наилучшим образом удовлетворяют качественным показателем зацепления.

### 13.3. Гипоидное зацепление

Если за начальные поверхности колес принять конусы (рис. 13.4), оси которых скрещиваются под углом  $\Sigma$  с кратчайшим расстоянием между ними  $a_W$ , а образующие касаются в точке  $W$ , то получим **гипоидное зацепление**. Абсолютные скорости  $v_{W1} = \omega_1 r_{W1}$  и  $v_{W2} = \omega_2 r_{W2}$  точек  $W_1$  и  $W_2$ , принадлежащих гипоидным зубчатым колесам, будут лежать в плоскости, касательной к обоим начальным конусам. Проекция этих скоростей на направление нормали  $n - n$  к линии зубьев в этой касательной плоскости должны быть равны  $v_{Wn} = v_{Wn_1} = v_{Wn_2} = v_{W1} \cos \beta_1 = v_{W2} \cos \beta_2$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — углы спирали зубьев гипоидных колес.

Для контакта гипоидных колес справедливо соотношение (13.2), т. е. передаточное отношение гипоидных колес выражается через числа зубьев так же, как и винтовых зубчатых колес. В качестве сопряженных профилей в гипоидном зацеплении применяются любые, в том числе и эвольвентные, криволинейные поверхности конических зубчатых колес. Касание гипоидных колес в точке и большое скольжение в процессе зацепления вызывают необходимость применения в силовых механизмах специальных смазочных материалов для улучшения условий контактирования зубьев.

### 13.4. Образование линейчатых зацеплений

Для улучшения характеристик зацеплений между перекрещивающимися осями применяют различные способы замены точечного контакта линейчатым. Так, используя специальные методы нарезания зубьев и инструменты, получают **гипоидные зацепления с линейчатым локализованным контактом**.

Применением ведущей шестерни с малым числом зубьев, вплоть до  $z_1 = 1$ , и нарезанием зубьев парного колеса с помощью инструмента, точно соответствующего параметрам этой шестерни, получают *зацепление с криволинейчатым контактом*. Ведущая шестерня с малым числом зубьев приобретает вид *винта*, зубья — *витков* и называется *червяком*, а механизм — *червячным*. Для увеличения длины контактных линий поверхностям вершин зубьев придают вогнутую форму, благодаря чему колесо охватывает червяк.

Последующие изменения параметров зацепления червячного механизма заключаются в создании лучших условий контакта его элементов. Они направлены на уменьшение зазоров между зубьями и витками и на более благоприятное взаимное положение контактных линий и векторов относительных скоростей. Это достигается отказом от эвольвентных профилей и использованием *вогнутых профилей витков* червяков, благодаря чему контактируют элементы с одинаковым знаком кривизны. Число зубьев (заходов) обычно принимается в диапазоне  $z_1 = 1 \dots 4$ . Шаг винтовой линии по делительному цилиндру называют *ходом зуба* и обозначают через  $P_z$ . Расстояние между одноименными линиями соседних винтовых зубьев по линии пересечения осевой плоскости с делительным цилиндром называется *осевым шагом*  $P_x$ . Ход и осевой шаг зуба связаны с зависимостью  $P_z = P_x z_1$ .

Другое изменение зубчатого механизма между скрещивающимися осями направлено на увеличение числа зубьев колеса, одновременно зацепляющихся с червяком, и обеспечение почти взаимно перпендикулярного расположения контактных линий и векторов его окружной скорости. Увеличение числа зубьев в зоне контакта достигается приданием червяку формы *глобоида*, поэтому механизм называется *глобоидным*.

### 13.5. Образование червяков различных типов

Известны **линейчатые (геликоидные) и нелинейчатые цилиндрические червяки**. *Винтовая поверхность червяков первого типа образуется вращением вокруг и одновременным движением вдоль оси червяка прямой линии*. Благодаря этому боковые поверхности витков червяка содержат прямолинейные образующие. *Во втором типе червяков боковые поверхности витков представляют собой огибающие производящего конуса или тора*.

Червяки в общем случае являются *конволютными* — боковые поверхности их витков образуются движением прямой  $l$  (рис. 13.5, а),

касающейся основного цилиндра в точках винтовой линии 2, составляющей постоянный угол  $\alpha_b$  с касательной к ней, и расположенный под углом  $\gamma_b \neq \alpha_b$ . Сечение зуба такого червяка плоскостью, касательной к основному цилиндру, дает прямолинейный профиль, а плоскостью перпендикулярной оси червяка — *удлиненную эвольвенту*. Если образующая прямая касается винтовой линии на основном цилиндре червяка при условии, что  $\alpha_b = \gamma_b$  (рис. 13.5, б), то такой червяк называется *эвольвентным*; в торцовом

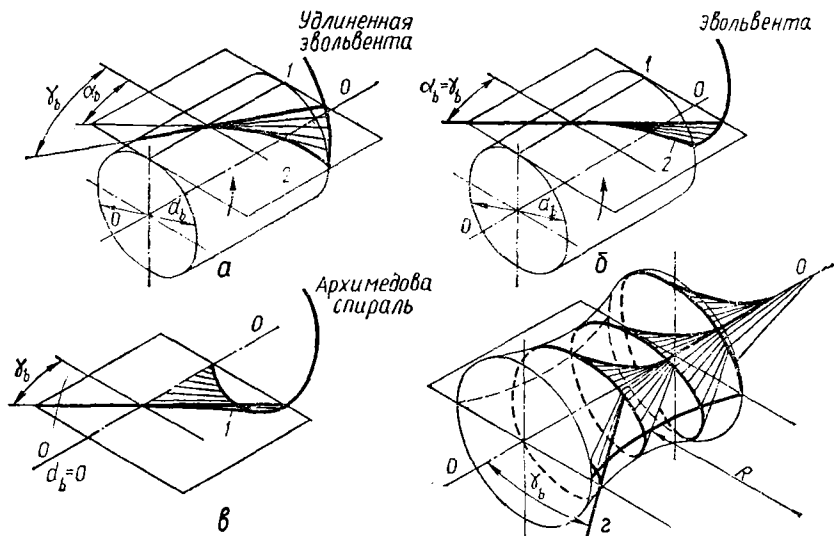


Рис. 13.5. Образование винтовых поверхностей разных видов

сечении профиль его витка очерчен эвольвентой основной окружности радиуса  $0,5d_b$ . Если радиус основного цилиндра равен нулю, то образующая линия пересекает ось червяка, и такой червяк называется *архимедовым* (рис. 13.5, в). Боковая поверхность витка линейчатая винтовая, в сечении торцовой плоскостью профиль витка является *архимедовой спиралью*, в осевом сечении он очерчен прямыми линиями.

Разновидности нелинейчатых червяков отличаются профилем витков, которые зависят от формы и размеров инструмента и технологии нарезания. Червяки обозначают двумя буквами: *Z* и буквой, характеризующей особенности образования профиля витков, например, *ZI* — эвольвентный, *ZA* — архимедов, *ZK* — конволютный и т. д.

Глобоидная форма червяка (рис. 13.5, г) образуется вращением дуги окружности  $R$ , лежащей в плоскости, проходящей через ось червяка, вокруг этой оси. Преимущественно применяют *глобоидные червяки с прямолинейным профилем витка* в осевом сечении. Боковая поверхность такого витка образуется так же, как и у архимедовых червяков, но образующая прямая составляет переменный

угол  $\gamma_b$  с перпендикуляром к оси червяка и вращается в осевой плоскости вращающегося червяка относительно оси колеса, скрепляющейся с осью червяка под прямым углом.

### 13.6. Исходные и производящие червяки

Стандартные размеры и форма главных поверхностей витков червяка определяются исходным червяком. Контур витков его для червяков ZA, ZI и других регламентирован ГОСТ 19036—81 (рис. 13.6, а). Воображаемый червяк, который определяет параметры инструмента, формирующего в станочном зацеплении зубья на заготовке червячного колеса, называется исходным производящим червяком (совпадающие контуры исходного и исходного производящего червяков очерчены сплошной линией). Размеры витков исход-

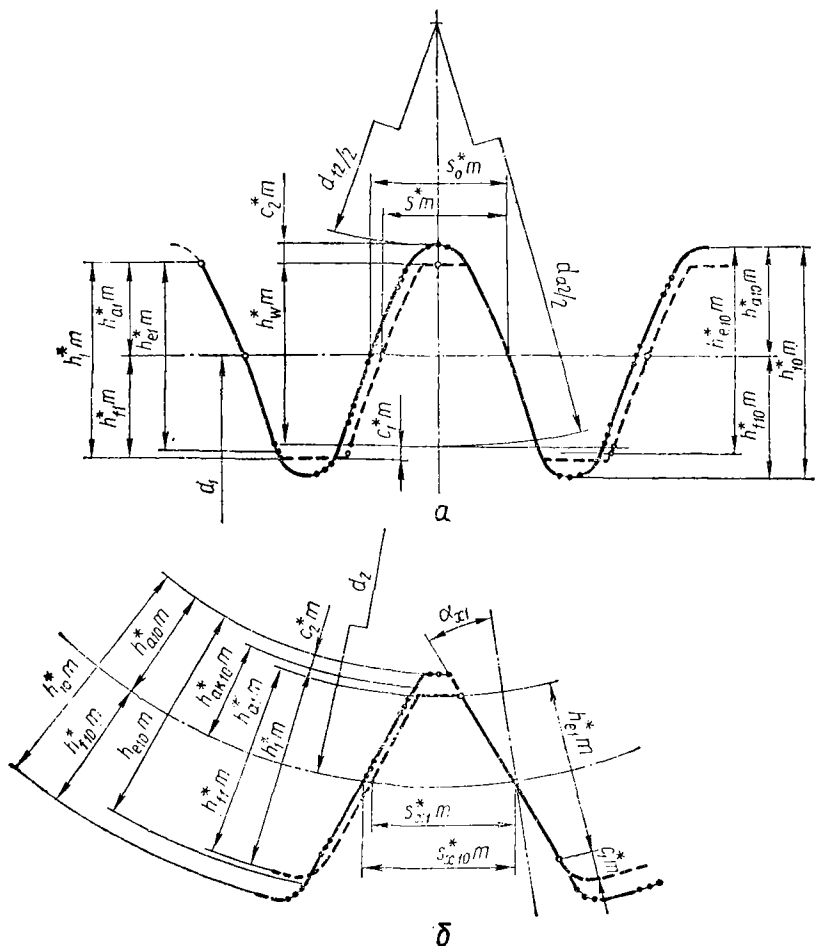


Рис. 13.6. Исходный и производящий червяки

ного и исходного производящего контуров задаются в долях модуля через соответствующие коэффициенты: высоты головки и ножки витка —  $h_{a1}^* = 1,0$  и  $h_{f1}^* = 1,2$ ; глубины захода —  $h_w^* = 2,0$ ; радиального зазора у поверхности впадин колеса  $c_2^* = 0,2$ ; радиуса кривизны переходной кривой витка —  $\rho_{f1}^* = 0,3$  и др.

Червяк, который определяет стандартные размеры витков и форму главных поверхностей витков глобоидного червяка, называется *исходным*. Контур витков его (рис. 13.6, б) регламентированы ГОСТ 24438—80. Размеры витков исходного контура задаются в долях модуля через коэффициенты: высоты делительной головки и ножки витка —  $h_{a1}^* = 0,9$  и  $h_{f1}^* = 1,0$ ; радиального зазора у поверхности впадин колеса —  $c_2^* = 0,2$ ; глубины захода —  $h_e^* = 1,8$  и др. Воображаемый червяк, который в станочном зацеплении формирует зубья червячного колеса, называется *исходным производящим червяком* (контур его витков показан линией с точками, совпадающие контуры исходного и производящего червяков очерчены сплошной линией).

### 13.7. Нарезание элементов зацепления на заготовке червяков и колес

Линейчатые цилиндрические червяки изготавливаются на токарных станках резцами трапециевидного профиля. При нарезании архимедовых червяков режущие кромки  $I$  резца (рис. 13.7, а) располагаются в осевой плоскости червяка. При нарезании конвольютных червяков (рис. 13.7, б) плоскость режущих кромок угоняивается

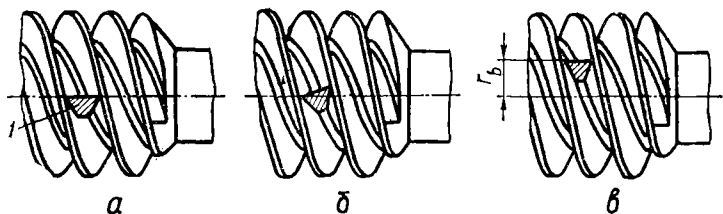


Рис. 13.7. Нарезание витков на цилиндрическом червяке

перпендикулярно направлению средней винтовой линии на делительном диаметре червяка. Эвольвентные червяки изготавливают на токарном станке или методом обкатки на зубофрезерном станке. В первом случае режущие грани резца устанавливают в плоскости, касательной к основному цилиндру (рис. 13.7, а).

Червячные колеса с линейчатым контактом нарезаются червячными фрезами (инструментом) с размерами и профилем, соответствующими червяку, в зацеплении с которым работает нарезаемое колесо (рис. 13.8). При нарезании зубьев колеса на зубофрезерном станке воспроизводится процесс червячного зацепления, поэтому отношение угловых скоростей червячной фрезы и заготовки колеса равняется передаточному отношению изготавливаемого червячного механизма.

Нарезание зубьев колес производится методом радиальной, тангенциальной или комбинированной подачи. В первом случае (рис. 13.8, а) фрезе сообщается движение обката и радиальная подача. Во втором случае (рис. 13.8, б) применяются червячные фрезы в сборной части, расстояние между осью фрезы и заготовкой остается неизменным, но помимо вращения фрезе сообщается переме-

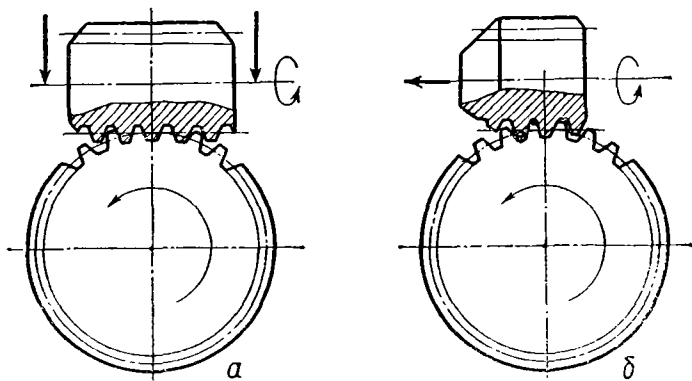


Рис. 13.8. Нарезание зубьев на червячном колесе

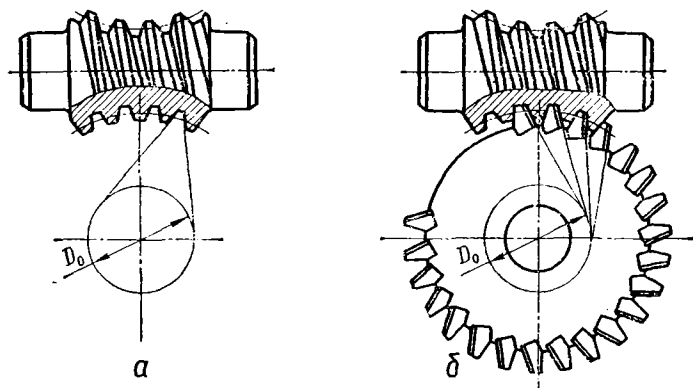


Рис. 13.9. Нарезание витков на глободном червяке

щение в направлении ее оси. При комбинированной подаче фреза сначала осуществляет радиальное движение, а затем — тангенциальное.

Колесо нарезается со смещением и без смещения. Смещением  $x$  производящего колеса, определяемым коэффициентом смещения  $x$  и модулем  $m$ , называется расстояние по межосевой линии между делительными поверхностями производящего червяка и обрабатываемого червячного колеса при окончании нарезания. Если указанные делительные поверхности соприкасаются, то червячное колесо получается без смещения. Колесо выполняется глободной формы, с вогнутой поверхностью вершин зубьев, образ ванной вращением вокруг его оси дуги окружности, лежащей в средней плоскости парного червяка.

Нарезание витков на заготовках глобоидных червяков осуществляют на универсальных зубофрезерных станках: заготовка устанавливается в инструментальном шпинделе, а инструмент — на столе станка (рис. 13.9, а). Инструментом могут служить двух- и многолезцовые головки или специальные протяжки (б). Нарезание

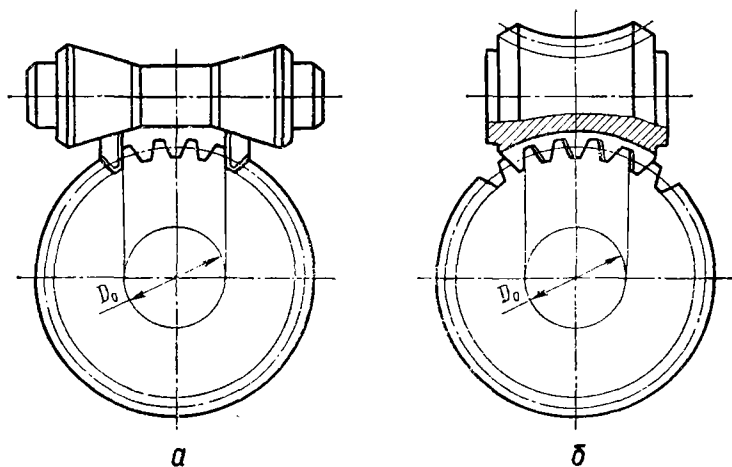


Рис. 13.10. Нарезание зубьев на глобоидном колесе

зубьев на заготовках глобоидных колес (рис. 13.10) производится летучими резцами (рис. 13.10, а) или червячной глобоидной фрезой (рис. 13.10, б), геометрические параметры которой должны соответствовать параметрам исходного производящего глобоидного червяка.

### 13.8. Определение геометрических размеров червячного механизма

Геометрические размеры червячного механизма определяются межосевым расстоянием  $a_w$ , которое зависит от диаметров червяка и колеса (рис. 13.11). Главными параметрами червяка являются модуль  $m$  и число  $q$ . **Модулем червяка** называется линейная величина, в  $\lambda$  раз меньшая расчетного шага червяка. **Расчетным шагом червяка  $P$**  является делительный осевой шаг витков. У одновиткового червяка расчетным шагом является делительный ход витка, равный расстоянию между одноименными профилями данного витка по образующей делительного цилиндра. Число  $q$  называется *коэффициентом диаметра червяка* и равняется отношению делительного диаметра червяка  $d_1$  к его модулю. Модули и коэффициенты диаметра червяка регламентируются стандартом по ГОСТ 19672—74 (СТ СЭВ 267—76).

**Окружности**, определяющие размеры червяка в средней торцевой плоскости, называются *средними концентрическими*. Различают окружности: *делительную*, диаметром  $d_1$ , *начальную* —  $d_{w1}$ , *вершин*

витков —  $d_{a1}$ , впадин —  $d_{f1}$ , принадлежащие соответственно поверхностям делительной, начальной, вершин витков и впадин.

Углом подъема линии витка называется острый угол между касательной в данной точке к линии витка и плоскостью торцового сечения червяка. Различают *делительный*  $\gamma$  и *начальный*  $\gamma_w$  углы подъема, соответствующие делительной и начальной линиям витка, углы подъема вершин витка  $\gamma_a$  и впадин  $\gamma_f$ , соответствующие линиям вершин и линиям впадин. Угол подъема на начальном цилиндре и ход  $P_z$  связаны зависимостью

$$\gamma_w = \arctg(P_z/\pi d_w) \approx \arctg(z_1/q). \quad (13.3)$$

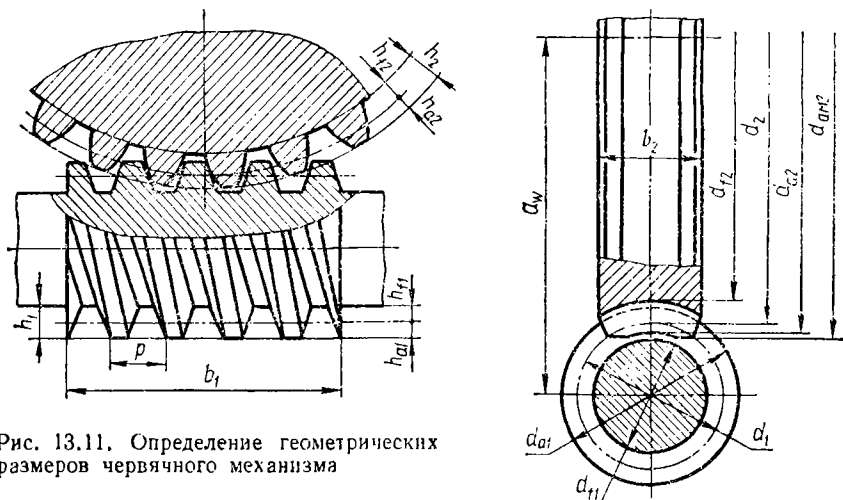


Рис. 13.11. Определение геометрических размеров червячного механизма

Высотой витка  $h_1$  называется расстояние между окружностями вершин витков и впадин червяка. Делительная осевая номинальная толщина витка  $s$  равна половине расчетного шага червяка и измеряется на делительной высоте  $h_{a2}$ . Длина  $b_1$  нарезанной части червяка соответствует наибольшему расстоянию между торцами витков по линии, параллельной его оси.

Размеры червячного колеса определяются в *средней торцовой плоскости*, перпендикулярной оси колеса, в которой находится межосевая линия. Окружности, определяющие размеры червячного колеса в этой плоскости, называются *средними концентрическими*. Различают окружности: *делительную* — диаметром  $d_2$ , *начальную* —  $d_{w2}$ , *вершин зубьев* —  $d_{a2}$ , *впадин* —  $d_{f2}$ , принадлежащие соответствующим поверхностям — делительной, начальной, вершин и впадин. Наибольший диаметр  $d_{am2}$  червячного колеса определяет поверхность вершин зубьев в сечениях, параллельных средней торцовой плоскости. Высота зуба червячного колеса определяется расстоянием между окружностями вершин и впадин его зубьев в средней торцовой плоскости.

Если червячное зацепление выполнено без смещения, то делительные диаметры червяка и червячного колеса равны начальным



метрам и межосевое расстояние будет

$$a_w = 0,5(d_{w1} + d_{w2}) = a = 0,5(d_1 + d_2) = 0,5m(q + z_2). \quad (13.4)$$

В передачах, нарезанных со смещением  $x$ , делительные цилиндры червяка и червячного колеса не касаются друг друга и межосевое расстояние будет отличаться на величину смещения  $xm$ :

$$a_w = 0,5(q + z_2 + 2x)m, \quad (13.5)$$

где  $x$  — коэффициент смещения червяка, который может принимать положительные или отрицательные значения.

Алгоритм расчета геометрических параметров червячного механизма с цилиндрическим червяком реализуется операторной функцией

$$GCHER(m, q, z_1, z_2, \alpha_x, h^*, h_a^*, s^*, h_f^*, x; a_w, d_1, d_2, \gamma, \gamma_M, \gamma_b, d_b, h_1, h_{a1}, d_{a1}, d_{a2}, d_{aM2}). \quad (13.6)$$

### 13.9. Свойства червячного зацепления

В червячном зацеплении с архимедовым червяком в осевом сечении червяка плоскостью  $Q$ , перпендикулярной оси колеса, получается зубчатая рейка с прямолинейным профилем зубьев (рис. 13.12, а). Так как при вращении червяка этот профиль не изменяется, то свойства червячного зацепления изучают на основе эквивалентного реечного зацепления, считая, что постоянный профиль червяка перемещается вдоль его оси. В этом случае сопряженным с профилем поступательно движущейся прямоочной рейки будет эвольвентный профиль зубьев червячного колеса, а линией зацепления будет прямая  $n-n$ . В сечениях, параллельных плоскости  $Q$ , профиль

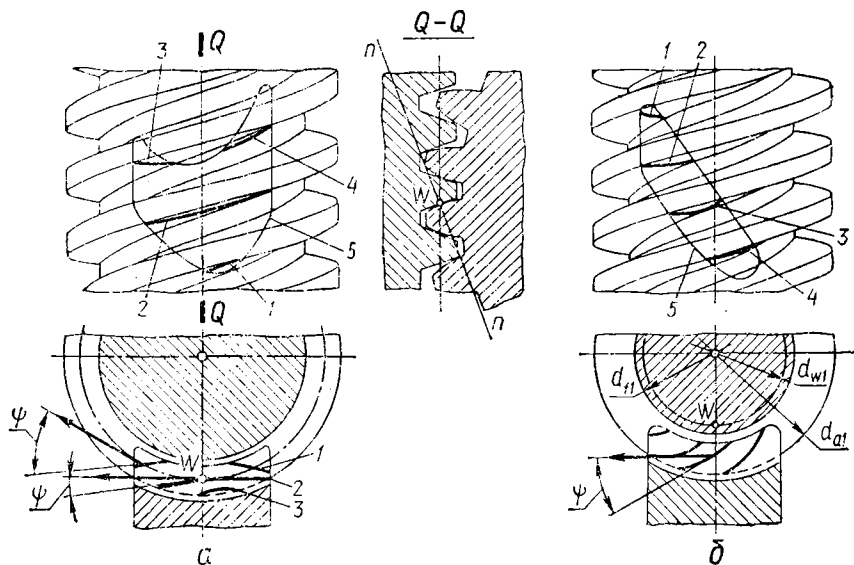


Рис. 13.12. Червячное зацепление

зубьев колеса отличается от эвольвентного, а витков червяка — от прямолинейного, поэтому линии зацепления будут кривыми. Совокупность точек пересечения линий зацепления в параллельных плоскостях с рабочей поверхностью зубьев червячного колеса образуют **контактные линии** 1, 2, 3, 4. Геометрическое место контактных линий в неподвижной системе координат образует **поверхность зацепления** 5. Коэффициент перекрытия в червячной паре определяется так же, как и для косозубых колес. Однако так как ширина

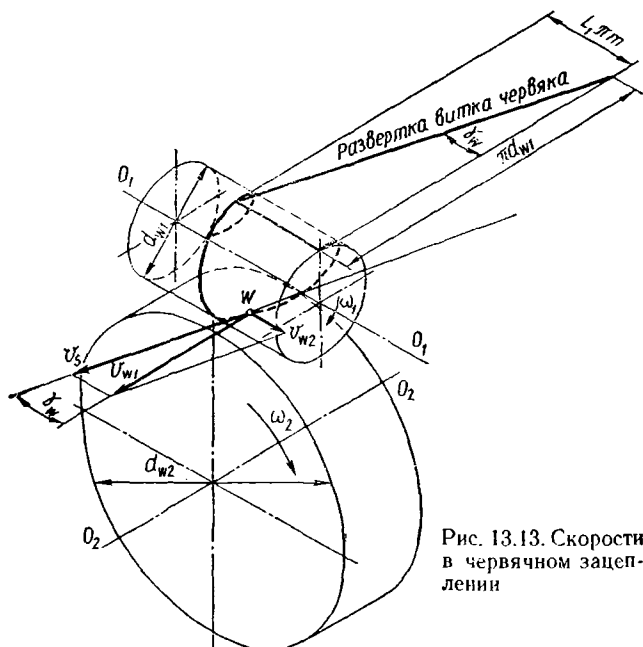


Рис. 13.13. Скорости в червячном зацеплении

колес невелика, то **полный коэффициент перекрытия**  $\epsilon_\gamma$  приближенно равняется коэффициенту  $\epsilon_\alpha$  для реечного зацепления (см. гл. 10).

Свойства червячных зацеплений в значительной мере определяются условиями образования масляного слоя, отделяющего поверхности витков червяка от зубьев червячного колеса. Эти условия зависят от угла  $\psi$  между направлением контактных линий и скоростью относительного движения контактирующих элементов. Чем ближе этот угол к  $\pi/2$ , тем лучше условия для возникновения масляного клина. Для разных точек на поверхности зубьев углы  $\psi$  отличаются весьма значительно. Так, вблизи средней торцевой плоскости червячного колеса угол  $\psi$  близок к нулю и, следовательно, условия для образования масляного клина в этой зоне неблагоприятны. Это является недостатком передач с цилиндрическим червяком.

Для определения скорости скольжения вдоль зубьев разложим окружную скорость  $v_{w1}$  вдоль линии витка на начальном цилиндре и вдоль оси червяка (рис. 13.13). Тогда

$$v_s = v_{w1} / \cos \gamma_w. \quad (13.7)$$

Так как  $v_{w1} = 0,5 \cdot 10^{-3} d_w \omega_1 \approx 0,5 q m \omega_1 \cdot 10^{-3}$ ;  $\cos \gamma_w \approx \approx \pi m q / \sqrt{(\pi m q)^2 + (\pi m z_1)^2}$ , то после подстановки этих значений в формулу (13.7) получим

$$v_s = 0,5 \cdot 10^{-3} \omega_1 m \sqrt{q^2 + z_1^2}. \quad (13.8)$$

Удельное скольжение в торцовой средней плоскости червячного колеса приближенно можно определять так же, как и для зубчатого зацепления колеса и рейки.

### 13.10. Влияние смещения на характеристики червячного зацепления

Возможность нарезания червячных колес со смещением позволяет образовывать червячные механизмы с различными свойствами. При необходимости вписывания червячной пары в заданное межосевое расстояние  $a_w$  необходимый коэффициент смещения определяется из условия

$$x = (a_w - a) / m. \quad (13.9)$$

При одном и том же инструменте и заданном межосевом расстоянии получают различные значения передаточных отношений. Число зубьев червячного колеса при неизменном межосевом расстоянии  $a_w$  из формулы (13.9) будет

$$z_2 = 2a_w / m - q - 2x. \quad (13.10)$$

Обычно коэффициент  $x$  выбирают в пределах  $-1 \leq x \leq +1$ , ограничивая его условиями подрезания и заострения зубьев. При этом преследуется цель вписывания в стандартное межосевое расстояние таких комбинаций чисел зубьев колес, чтобы при одном и том же червяке получить разные передаточные отношения (например, при  $z_1 = 1$  и  $z_2 = 42; 41; 40; 39; 38$  и, следовательно,  $x = -1; -0,5; 0; +0,5; +1$  получим  $i_{12} = 42; 41; 40; 39; 38$ ).

Смещением в червячной паре добиваются исключения из зацепления участков контактных линий с неудовлетворительными условиями возникновения масляного клина. Наиболее неблагоприятна в этом отношении точка  $W$  касания начальных цилиндров червяка и червячного колеса. Если при смещении обеспечить  $d_{a1} \leq d_w$  или  $d_{f1} > d_w$  (см. рис. 13.12, б), то зона вокруг этой точки будет из зацепления исключена, что приведет к улучшению формы и положения контактных линий. При этом изменяется поле зацепления 5. У червячной пары со смещением создаются лучшие условия образования масляного клина, благодаря лучшей форме линий контакта поверхностей витков червяка и зубьев колеса, располагающихся под большими углами к векторам относительной скорости.

### 13.11. Определение геометрических размеров глобoidного механизма

Геометрические размеры глобoidной пары (рис. 13.14) определяются в средней торцевой плоскости глобoidного колеса. Как и в механизме с цилиндрическим червяком, главными параметрами червяка, характеризующими его диаметр в средней торцевой плоскости, являются модуль  $m$  и коэффициент  $q$ . Диаметры  $d_1$ ,  $d_{w1}$ ,  $d_{a1}$  и  $d_{f1}$  червяка определяются в *средней торцевой плоскости* червяка — плоскости, перпендикулярной его оси. Расчетный шаг глобoidного червяка  $P$  измеряется по дуге — образующей делительного глобоида — и равен осевому шагу витков червяка.

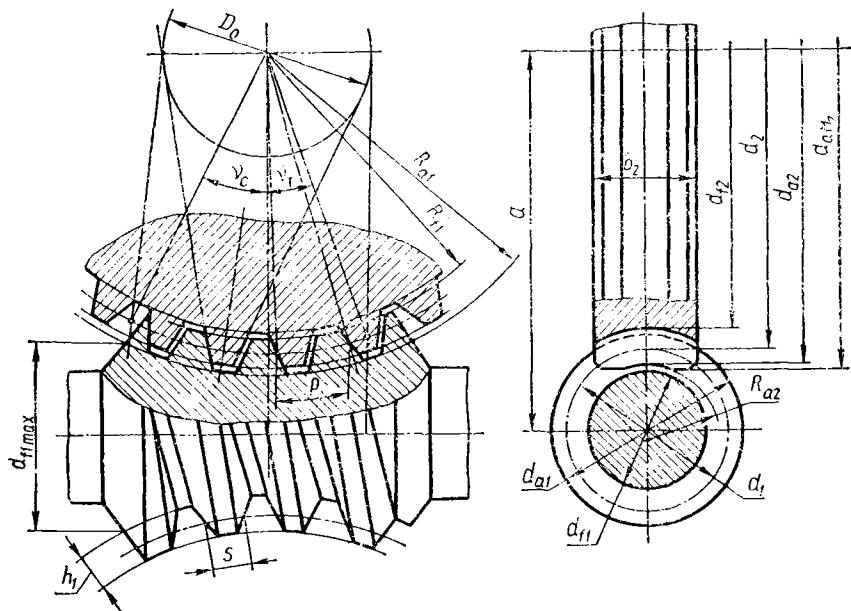


Рис. 13.14. Определение геометрических размеров глобoidного зацепления

Высотой  $h_f$  витка червяка называется расстояние между поверхностями вершин витков и впадин червяка. Делительная осевая номинальная толщина витка  $s$  равна половине расчетного шага червяка и измеряется на делительной высоте до хорды витка.

Длина дуги, образующей окружность делительного глобоида, определяется центральным углом — *углом теоретического обхвата*  $2\nu_r$ , заключенным между лучами из центра профильной окружности в точке пересечения касательных к этой окружности с делительной окружностью червяка. Длина нарезанной части червяка ограничивается торцовыми коническими поверхностями и определяется углом расчетного обхвата  $2\nu_c$ , который зависит от расчетного обхвата червяка  $k_c = z_2/10$  с округлением до значений  $k'_c = 3,5; 4,5; 5,5$  и

числа зубьев колеса  $z_2$ :

$$v_c = 180^\circ k_c / z_a. \quad (13.11)$$

В отличие от цилиндрического червяка, в котором угол подъема витка изменяется только по высоте профиля, в глобoidном угол подъема изменяется также по его длине и имеет максимальное значение в горловине, где диаметр червяка минимальный. Различают *делительный максимальный угол подъема витка* —  $\gamma$ , *начальный* —  $\gamma_{w1}$ , *вершин* —  $\gamma_{a1}$  и *впадин* —  $\gamma_{f1}$  в точках пересечения соответствующих линий витка со средней плоскостью червяка. Делительный угол определяется зависимостью

$$\gamma = \arctg(z_1/q). \quad (13.12)$$

Колесо глобoidной пары по поверхности вершин зубьев выполняется глобoidной формы, т. е. вогнутой, образованной вращением вокруг его оси дуги окружности с радиусом  $R_{a2} \geq 0,53d_{f,\max}$ . Высота зуба глобoidного колеса — расстояние между окружностями вершин и впадин его зубьев — измеряется в средней торцовой плоскости колеса. Диаметры колеса: *делительный* —  $d_2$ , *начальный* —  $d_{w2}$ , *вершин* —  $d_{a2}$  и *впадин* —  $d_{f2}$ , определяют в той же плоскости.

Межосевое расстояние глобoidной пары будет

$$a = 0,5(d_1 + d_2). \quad (13.13)$$

Алгоритм расчета геометрических параметров глобoidной передачи реализуется операторной функцией

$$\begin{aligned} &GGLOB(q, z_1, z_2, c, a, i_{12}, \Delta; d_1, d_2, m, k_c, k_T, v_T, \\ &v_c, D_o, h_{a1}, h_{a2}, R_{f1}, d_{a1}, d_{a2}, R_{a1}, d_{f1}, d_{f2}, e, R_{a2}). \end{aligned} \quad (13.14)$$

### 13.12. Свойства глобoidного зацепления

На поверхности зуба (рис. 13.15, а) глобoidного колеса можно выделить три характерные части. На участке II поверхность зуба является *огibaющей поверхностью витка червяка*, на ней располагаются контактные линии. На участках I и III поверхность зуба является линейчатой и воспроизводится режущей кромкой инструмента; контактные линии на этих участках отсутствуют. Линия АВ, общая для участков II и III, смыкание которых происходит с переломом, находится в средней торцовой плоскости Q. В этой плоскости все зубья червячного колеса, охватываемые червяком, контактируют с червяком по этой линии на всей рабочей высоте витков. Часть зубьев червячного колеса, охватываемых червяком, помимо касания в главной плоскости имеет еще одну контактную линию, перемещающуюся по участку II поверхности зуба (некоторые положения этой линии 1, 2, 3 показаны на рис. 13.15, а). Все контактные линии располагаются в направлении к центру колеса, вследствие чего векторы скорости скольжения образуют с ними углы  $\psi$ , близкие к  $90^\circ$ , что способствует образованию *устойчивого масляного клина* и определяют по сравнению с цилиндрическими червячными механизмами более высокую работоспособность. Геометрическое

место контактных линий глобоидной пары в неподвижной системе координат будет представлять сложную пространственную поверхность, состоящую из *основного 1'* и *дополнительного 2'* полей зацепления.

Для улучшения условий работы глобоидной пары предусматривается **модификация червяка**; с этой целью на на альных участ-

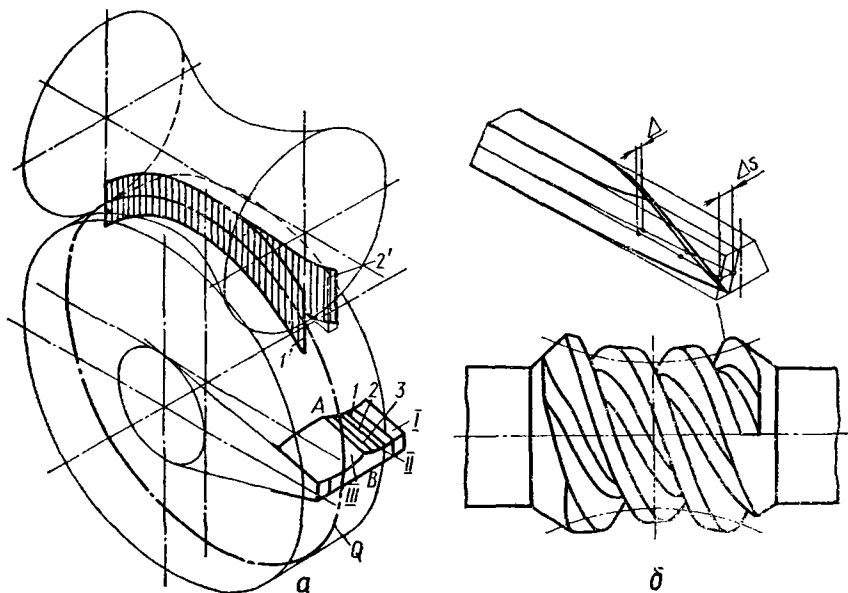


Рис. 13.15. Глобоидное зацепление

ках витков образуют скосы (рис. 13.15, б). Отличие номинальной поверхности модифицированного червяка заключается в отклонении линии его витка на делительном глобоиде от теоретической. Отклонение характеризуется *глубиной модификации*  $\Delta$ , которая в пределах угла  $2\nu_c$  выполняется в форме квадратной параболы:

$$\Delta = \Delta_s (0,3 + 0,7\nu/\nu_c)^2, \quad (13.15)$$

где  $\Delta_s$  — наибольшая расчетная глубина модификации на расчетной крайней прямой, образующей поверхности витка;  $\nu$  — текущее значение угла  $\nu_c < \nu < -\nu_c$ .

## 14. СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 14.1. Задачи синтеза зубчатых механизмов

При синтезе передаточных зубчатых механизмов необходимо удовлетворить ряд частных критериев, определяющих: точность воспроизведения заданной передаточной функции, особенности геометрии зубчатых зацеплений, технологичность изготовления и сборки механизма и т. п. При структурном синтезе определяется тип

механизма и его схема. Тип механизма выбирается исходя из требований к коэффициенту полезного действия и относительному положению входных и выходных звеньев. При этом целесообразно использовать в механизме минимум звеньев и кинематических пар, обеспечив отсутствие избыточных связей. Следующим этапом является определение геометрических и кинематических параметров механизмов: чисел зубьев колес, их модулей, смещения исходного контура и др.

В большинстве случаев выбор параметров синтеза производится по доминирующему показателю, каким прежде всего является точность воспроизведения заданного передаточного отношения  $i = \omega_{\text{вх}}/\omega_{\text{вых}}$ , формализуемому целевой функцией

$$\Phi = |i - f(z_i)|, \quad (14.1)$$

где  $f(z_i)$  — передаточная функция, зависящая от схемы механизма и чисел зубьев колес, входящих в состав его, и определяющая действительное передаточное отношение.

Для простейшего трехзвенного зубчатого механизма передаточная функция имеет следующий вид (см. гл. 19):

$$f(z_i) = i_{12} = \mp (z_2/z_1). \quad (14.2)$$

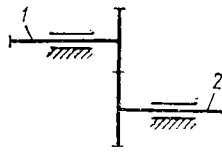
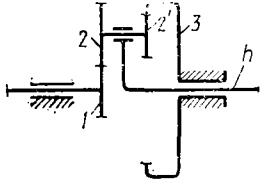
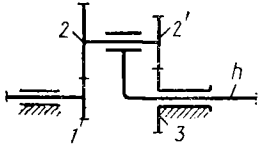
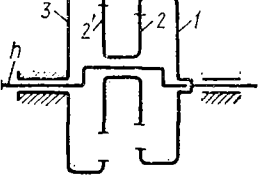
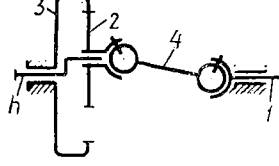
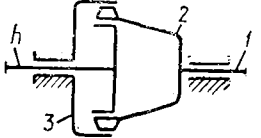
При подборе чисел зубьев  $z_1$  и  $z_2$  колес требуется определить такие их сочетания, при которых целевая функция имеет минимум. Область допустимых решений при поиске этого минимума ограничивается необходимостью вписаться в заданное межосевое расстояние, типом применяемого инструмента, значениями модулей и параметрами принятого производящего контура. В более сложных механизмах, состоящих из большого количества зубчатых колес, передаточная функция зависит от большого числа параметров, и задача синтеза зубчатого механизма из двухпараметрической превращается в многопараметрическую. К перечисленным ограничениям при синтезе некоторых механизмов добавляются условия *соседства* зубчатых колес и *сборки* зубчатого механизма.

При синтезе механизмов со ступенчато-изменяющимся передаточным отношением необходимо обеспечить несколько их значений посредством включения управляющих устройств. Поэтому при синтезе таких механизмов необходимо удовлетворить несколько частных показателей, формализуемых целевыми функциями вида (14.1), и выбор параметров синтеза производится по комплексному показателю, формализуемому *комплексной целевой функцией*

$$\Phi = \sum_{k=1}^n q_k \Phi_k = \sum_{k=1}^n (q_k |i_k - f(z_i)|), \quad (14.3)$$

где  $\Phi_k$  — целевая функция, формализующая требование осуществления  $k$ -го передаточного отношения —  $i_k$ ;  $n$  — число заданных ступенчато-изменяющихся передаточных отношений;  $f(z_i)$  — передаточная функция механизма от комбинации  $i$ -х зубчатых колес; определяемой управляющими устройствами при реализации  $k$ -го передаточного отношения;  $q_k$  — весовой коэффициент, определяю-

Таблица 14.1. Одноступенчатые зубчатые механизмы

№ п/п	Схема механизма	Передаточная функция	Передач-ное отно-шение $i$	Ориенти-ровоч-ный КПД
1		$i_{12} = -z_2/z_1$	0,2	0,99
2		$i_{1h}^3 = 1 + z_2 z_3 / z_1 z_2'$	7	0,98
3		$i_{h1}^3 = 1 - z_1 z_2' / z_2 z_3$	25... 300	0,9... 0,4
4		$i_{h1} = 1 / (1 - z_2 z_3 / z_1 z_2')$	30... 300	0,9... 0,4
5		$i_{h1} = z_2 / (z_3 - z_2)$	7... 70	0,94... 0,8
6		$i_{h1} = z_2 / (z_3 - z_2)$	50... 400	0,9... 0,7



щий требования к точности заданного  $k$ -го передаточного отношения механизма.

Коэффициент  $q_k$  назначается в соответствии с требованиями к точности воспроизведения  $k$ -го передаточного отношения, определяемой условиями функционирования машины. Чем точнее должна быть осуществлена реализация его значения, тем выше соответствующий ему коэффициент  $q_k$ . Численные значения коэффициентов  $q_k$  выбираются таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{k=1}^n q_k = 1. \quad (14.4)$$

Так как количества зубьев зубчатых колес должны быть целыми числами, подбор их значений при использовании целевых функций (14.1) и (14.2) производится методами целочисленного программирования, которые отличаются от обычных методов многопараметрической оптимизации тем, что на соответствующие решения накладываются условия целочисленности.

Постановку задачи целочисленного программирования рассмотрим на примере простейшего трехзвенного механизма (табл. 14.1, п. 1), целевая функция для которого представлена в виде условия (14.1). Сначала находят предварительное решение, соответствующее минимуму этой целевой функции, при которой в общем случае числа зубьев  $z_1^*$  и  $z_2^*$  не будут целые числа. Затем налагаются дополнительные условия целочисленности, заключающиеся в установлении границ выбора фактических значений ближайших чисел зубьев

$$\begin{aligned} z_1 = z_{1б} \text{ и } z_2 = z_{2б}; \quad z_1 = z_{1м} \text{ и } z_2 = z_{2м}; \\ z_1 = z_{1б} \text{ и } z_2 = z_{2м}; \quad z_1 = z_{1м} \text{ и } z_2 = z_{2б}, \end{aligned} \quad (14.5)$$

где  $z_{1б}$ ,  $z_{2б}$  и  $z_{1м}$ ,  $z_{2м}$  — ближайшие большие и меньшие целые числа относительно полученных значений  $z_1^*$  и  $z_2^*$ .

Из условия (14.5) выбирается вариант, удовлетворяющий заданным ограничениям по межосевому расстоянию, диапазону выбора коэффициентов смещения  $x_1$  и  $x_2$  из условий прочности, износостойкости, предотвращения интерференции при нарезании зубьев и их взаимодействии, которому соответствует минимальное значение целевой функции. Для более сложных механизмов число вариантов увеличивается, и подбор чисел зубьев по заданному передаточному отношению является сложной задачей, требующей применения ЭВМ.

## 14.2. Рядовые зубчатые механизмы

**Рядовые одноступенчатые механизмы, состоящие из пары зубчатых колес одного из рассмотренных зацеплений, являются простейшими представителями многочисленного семейства зубчатых механизмов.** Они применяются чаще всего при передаточных отношениях  $i \leq 8$ , так как при больших передаточных отношениях их габаритные размеры, масса, а, следовательно, и стоимость больше, чем у более сложных зубчатых механизмов.

Для получения больших передаточных отношений при минимальных диаметральных габаритных размерах используются механизмы, составленные из нескольких последовательно соединенных одноступенчатых рядовых механизмов. В табл. 14.2, п. 1 показан составной механизм с двумя зубчатыми зацеплениями. В этом механизме передаточное отношение от звена 1 к звену 2

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2; \quad (14.6)$$

от звена 2 к звену 3

$$i_{23} = \omega_2/\omega_3. \quad (14.7)$$

Перемножая правые и левые части этих уравнений, получим

$$i_{12} \cdot i_{23} = \omega_1/\omega_3.$$

Так как  $\omega_1/\omega_3 = i_{13}$ , то общее передаточное отношение зубчатого механизма равно произведению передаточных отношений пар зубчатых колес, входящих в его состав:

$$i_{13} = i_{12}i_{23}. \quad (14.8)$$

Зацепление одной пары зубчатых колес в таком механизме называется *ступенью*. При  $n$  ступенях общее передаточное отношение будет

$$i_{1n} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{24} \cdot \dots \cdot i_{n-1,n} = \prod_{k=1}^n i_k. \quad (14.9)$$

При синтезе зубчатых механизмов, состоящих из нескольких ступеней, критериями при выборе передаточных отношений отдельных ступеней являются минимальные габаритные размеры, масса, унификация зубчатых колес. Если передаточные отношения в многоступенчатом несоосном механизме (табл. 14.2, п. 1) выбраны, то подбор чисел зубьев отдельных ступеней производится так же, как и для одноступенчатых механизмов. В соосных рядовых многоступенчатых зубчатых механизмах (табл. 14.2, п. 2) необходимо обеспечить **условие соосности**

$$a_{W_{12}} = a_{W_{23}} = \dots = a_{W_{(n-1),n}}, \quad (14.10)$$

которое для прямозубых колес определяется следующим выражением (знак «+» относится к внешнему, а знак «-» — к внутреннему зацеплению):

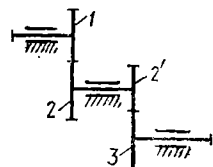
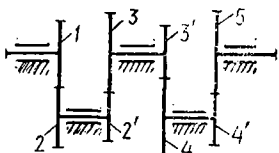
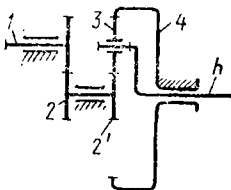
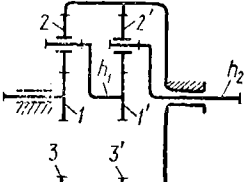
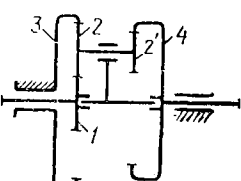
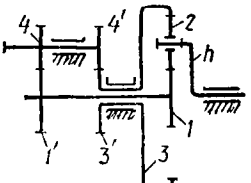
$$\begin{aligned} (z_1 \pm z_2) m_{12}/\cos \alpha_{W_{12}} &= (z_2 \pm z_3) m_{23}/\cos \alpha_{W_{23}} = \\ &= (z_{(n-1)} \pm z_n) m_{(n-1)n}/\cos \alpha_{W_{(n-1)n}}, \end{aligned} \quad (14.11)$$

где  $m_{12}$ ,  $m_{23}$ , ...,  $m_{(n-1)n}$  — модули пар зубчатых колес 1, 2,  $n$ -й ступеней;  $\alpha_{W_{12}}$ ,  $\alpha_{W_{23}}$ , ...,  $\alpha_{W_{(n-1)n}}$  — углы зацепления зубчатых колес соответствующих ступеней.

При косозубых колесах условие соосности будет следующим:

$$\begin{aligned} (z_1 \pm z_2) m_{12}/\cos \alpha_{W_{12}} &= (z_2 \pm z_3) m_{23}/\cos \alpha_{W_{23}} = \\ &= (z_{(n-1)} \pm z_n) m_{(n-1)n}/\cos \alpha_{W_{(n-1)n}}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Таблица 14.2. Составные зубчатые механизмы

№ п/п	Схема механизма	Передачочная функция	Передачочное отношение $i$	Ориентирочный КПД
1		$i_{13} = z_3 z_3 / z_1 z_2$	5...64	0,98
2		$i_{15} = z_2 z_3 z_4 z_5 / z_1 z_2 z_3 z_4$	15...625	0,96 0,92
3		$i_{1h} = - (z_2 / z_1) (1 + z_3 / z_2)$	6...128	0,98 0,96
4		$i_{1h_2} = (1 + z_3 / z_1) (1 + z_3 / z_2)$	6...100	0,8 0,94
		$i_{14} = (1 + z_3 / z_1) / (1 - z_2 \cdot z_3 / z_4 z_1)$	20...500	0,9... 0,7
5		$i_{h'} = (1 / (1 + z_1 / z_3)) (-z_4 / z_3) + (1 / (1 + z_3 / z_1)) (-z_4 / z_1)$		



где  $a_w$  — межосевое расстояние в зацеплении центрального колеса с сателлитами;  $k_c$  — число сателлитов;  $d_{a2}$  — диаметр окружности выступов сателлитов.

Условие сборки обеспечивает одновременность зацепления всех сателлитов с центральными колесами. Несобираемость передачи объясняется следующим образом. Первый смонтированный сателлит полностью определяет взаимное положение центральных колес и водила. Монтаж уже второго сателлита определяется положением одного из центральных колес и водила, и при равномерном расположении сателлитов по окружности может быть невыполним, так как зуб сателлита оказывается не против впадины между зубьями центрального колеса, а против зуба одного из этих колес.

Условие сборки для случая, когда оси сателлитов равномерно расположены по окружности, т. е. углы  $\gamma$  между радиусами-векторами центров сателлитов одинаковы и равны  $2\pi/k_c$  (рис. 14.1), обеспечивается при совпадении осей симметрии зубьев центрального колеса и осей симметрии впадин между зубьями сателлитов. Это достигается в том случае, когда участок  $ab$  делительной окружности колеса  $1$  должен быть кратным окружному шагу  $P$ , т. е.  $l_{ab}/P = C$  ( $C$  — любое целое число). Так как  $l_{ab} = \pi d_3/k_c$ , а  $\pi d_1 = z_1 P$ , то  $\pi d_1/k_c P = C$  и

$$z_1 = Ck_c. \quad (14.15)$$

Такое же условие можно записать для зацепления сателлитов с центральным колесом  $3$ , рассматривая участок  $km$ , делительной окружности колеса  $3$

$$z_3 = Ck_c. \quad (14.16)$$

Так как сателлиты  $2$  входят одновременно в два зацепления, то, рассматривая совместно условия (14.15) и (14.16), получим

$$z_1 = z_3 = Ck_c. \quad (14.17)$$

Для передач с сателлитами, состоящими из двух зубчатых венцов с нерегулируемым угловым положением, простейший расчет и сборка обеспечиваются в случае, если каждое из значений  $z_1$  и  $z_3$  кратно  $k_c$ .

При малой разности  $\Delta z$  чисел зубьев центрального колеса с внутренними зубьями и сателлита можно получить большое передаточное отношение. Обычно в таком механизме (табл. 14.1, п. 5) входным звеном при неподвижном звене  $3$  является водило  $h$ , а выходным — звено  $1$ , связанное с осью сателлита  $2$  двойной муфтой. Однако конструировать и изготовлять такую передачу при малой разности зубьев колес сложно из-за несоосности колес  $3$  и  $2$ . Эти трудности устраняются при использовании *волнового зацепления* (см. гл. 2). В таком механизме, называемом *волновым* (табл. 14.1, п. 6), сателлит  $2$  выполняют в виде тонкого деформируемого стакана, связанного со звеном  $1$ . Под воздействием *генератора волн*, установленного на водиле  $h$ , зубья на стакане входят в зацепление с зубьями центрального колеса  $3$ . КПД волновой передачи, в отличие от передач с жесткими звеньями, может быть одинаково высок

при передаточных отношениях  $i = 70 \dots 400$ , в связи с чем эффективность применения их тем выше, чем больше передаточное отношение.

Задача синтеза планетарных направляющих механизмов (рис. 14.2) формулируется в следующем виде. Задана некоторая кривая  $x = x(y)$ , которую должна воспроизводить точка  $k$  спутника 2, взаимодействующего с центральным колесом 3 внутреннего зацепления. Параметрами синтеза являются радиус водила  $r_h$ , радиус

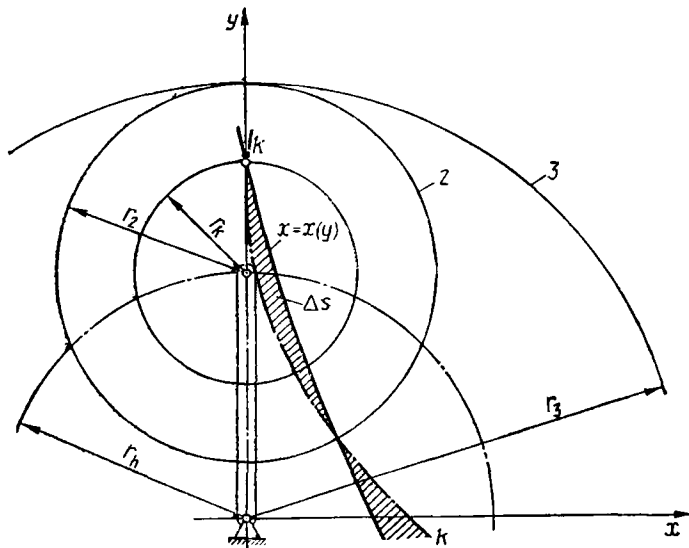


Рис. 14.2. Синтез планетарных направляющих механизмов

$r_k$  точки  $k$  спутника и передаточное отношение  $i_{23}^h = z_3/z_2$ . Целевая функция определяется выражением

$$\Phi = |S_1 - S_2|, \quad (14.18)$$

где  $S_1$  — площадь, ограниченная заданной кривой  $x = x(y)$  и осями  $x, y$ ;  $S_2$  — площадь, ограниченная кривой  $KK$ , являющейся траекторией точки  $K$  и этими же осями

Функция (14.18) выражает условие минимума площади  $\Delta S$ , заключенной между заданной и воспроизводимой кривой. Траектория точки  $K$  в параметрической форме при начальном условии, соответствующем углу поворота водила  $\varphi = 0$  и положению точки  $K$  на оси  $y$ , описывается уравнениями

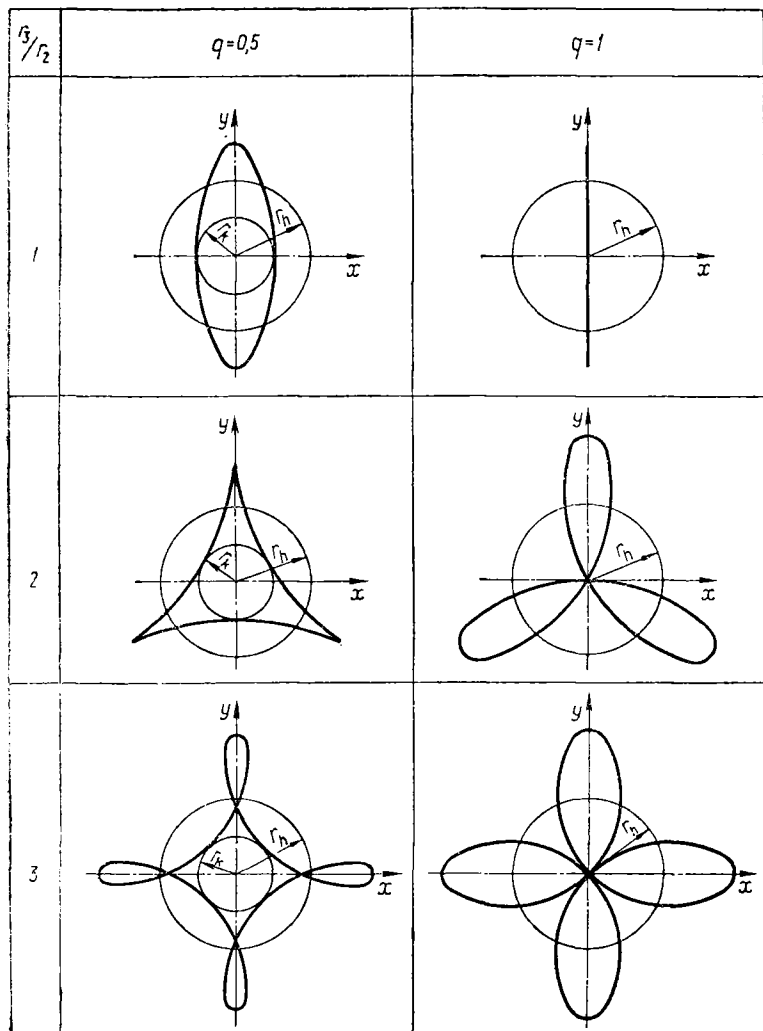
$$x = x(r_h, r_k, r_2, r_3, \varphi); \quad y = y(r_h, r_k, r_2, r_3, \varphi). \quad (14.19)$$

В зависимости от формы заданной кривой на описываемые параметры механизма вводятся определенные ограничения. Отношение  $r_3/r_2$  определяет семейство кривых, описываемых точкой  $K$ . При  $r_3/r_2 = 1$  кривая представляет собой эллипс (табл. 14.3). При  $r_3/r_2 = 2$  получим фигуру с тремя осями симметрии; при  $r_3/r_2 = 3$  —

с четырьмя осями и т. д. Число осей у описываемых фигур на единицу больше отношения  $r_3/r_2$

Отношение  $q = r_k/r_2$  определяет форму воспроизводимой кривой: при  $q = 1$  (когда  $r_k = r_2$ ) воспроизводимые точкой  $K$  кривые представляют собой гипоциклоиды и при  $r_3/r_2 = 1$  механизм будет точно *прямолинейно направляющим*. С уменьшением  $q$  гипоциклоиды становятся укороченными и в пределе при  $q$ , стремящемся к нулю, приближаются к окружности радиуса  $r_3$ . Наоборот, с увеличением  $q$  получаются удлиненные гипоциклоиды, образующие петли тем

Таблица 14.3. Кривые воспроизводимые точкой  $K$  спутника направляющего планетарного механизма



больших размеров, чем больше значение  $q$ . После определения параметров  $r_h, r_k, r_2, r_3$  подбор чисел зубьев производится так же, как и в передаточных планетарных механизмах.

#### 14.4. Составные зубчатые механизмы

В зависимости от требований к механизму выбирается схема одноступенчатого рядового, планетарного, волнового зубчатого механизма либо их комбинаций. При последовательном соединении нескольких механизмов общее передаточное отношение равно произведению передаточных отношений отдельных механизмов, поэтому составные зубчатые механизмы отличаются не только сравнительно большими передаточными отношениями, но и возможностью более точного воспроизведения заданного передаточного отношения, так как передаточная функция определяется числами зубьев сравнительно большого числа зубчатых колес. Например, зубчатый механизм, составленный из рядовой и планетарной зубчатых передач (табл. 14.2, п. 3), будет иметь передаточное отношение

$$i_{1h} = i_{12} \cdot i_{2h} \quad (14.20)$$

и при предельных значениях передаточных отношений этих механизмов  $i_{12} = 8$  и  $i_{2h} = 16$  получим  $i_{1h} = 128$ . Большое распространение получили двухступенчатые планетарные механизмы (табл. 14.2, п. 4), передаточная функция которых определяется выражением

$$i_{1h_2} = i_{1h_1} \cdot i_{1'h_2} \quad (14.21)$$

Сравнительно большие передаточные отношения можно получить в замкнутых дифференциальных механизмах путем введения кинематических связей в виде рядовых или планетарных передач, устанавливающих соотношение между угловыми скоростями центральных зубчатых колес или угловыми скоростями одного из центральных колес и водила. Замкнутый дифференциальный механизм, полученный введением дополнительной кинематической связи в виде двухступенчатого рядового механизма, состоящего из зубчатых колес  $1', 4, 4', 3'$  (табл. 14.2, п. 6), обеспечивает  $i = 20$ . Ограничениями на подбор чисел зубьев в этой передаче являются условия соосности, сборки и соседства для зубчатых колес дифференциала и условия соосности для зубчатых колес замыкающего двухступенчатого зубчатого механизма.

#### 14.5. Зубчатые механизмы со ступенчато изменяющимся передаточным отношением

Механизмы со ступенчато изменяющимся передаточным отношением могут быть созданы на базе рядовых и дифференциальных зубчатых передач. Примером таких механизмов могут служить коробки передач (рис. 14.3). В данном случае соосный трехзвенный зубчатый механизм состоит из входного звена 1 с расположенным на нем зубчатым колесом 1, входящим в зацепление с зубчатым колесом 2,



промежуточного звена II, с жестко закрепленными зубчатыми колесами 2', 2'', 2''', количество которых определяется числом заданных передаточных отношений. Зубчатые колеса 2', 2'' и 2''' постоянно зацепляются с зубчатыми колесами 3', 3'', 3''', свободно вращающимися на выходном звене III. Коробка передач снабжена управляемыми муфтами a и b, которые могут осуществлять соединение соответствующих зубчатых колес с звеном III или соединять звенья I и III непосредственно, образуя прямую передачу. Целевая функция

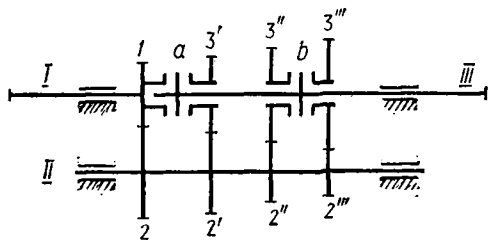


Рис. 14.3. Схема коробки передач

Рис. 14.5. Схема механизма с двумя зубчатыми дифференциалами

для подбора чисел зубьев зубчатых колес этого механизма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi = & q(i_1 - z_2 z_{3''} / z_1 z_{2'}) + \\ & + q_2(i_2 - z_2 z_{3''} / z_1 z_{2''}) + \\ & + q_3(i_3 - z_2 z_{3''} / z_1 z_{2''}). \end{aligned} \quad (14.22)$$

где  $i_1$ ,  $i_2$  и  $i_3$  — заданные передаточные отношения.

Область допустимых решений при подборе чисел зубьев зубчатых колес ограничивается условием соосности

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) m_{1,2} / \cos \alpha_{1,2} &= (z_2' + z_3') m_{1,2',3'} / \cos \alpha_{1,2',3'} = \\ = (z_2'' + z_3'') m_{1,2'',3''} / \cos \alpha_{1,2'',3''} &= (z_2''' + z_3''') m_{1,2''',3'''} / \cos \alpha_{1,2''',3'''} \end{aligned} \quad (14.23)$$

Зубчатый механизм с тремя разными передаточными отношениями получают при помощи *зубчатого дифференциала* (рис. 14.4), путем остановки одного из его звеньев — 1, 3 или h. Однако в таком механизме необходимо каждый раз изменять входные и выходные звенья. Четыре передаточных отношения, одно из которых  $i = 1$ , при неизменных выходных и входных звеньях можно получить при последовательном соединении двух дифференциальных механизмов (рис. 14.5). Первое передаточное отношение получим при остановке звена 5 и соединении звеньев 1 и 3, второе — при остановке звена 3 и соединении звеньев 6 и 5, третье — при остановке колес 3 и 5 и четвертое — при прямой передаче от звена 1 к 6-му звену.

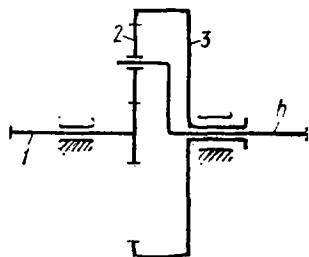
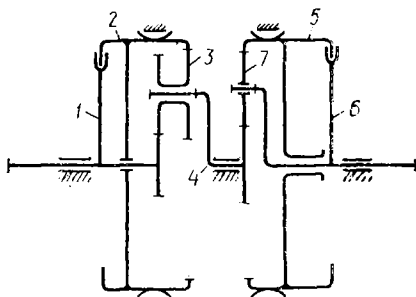


Рис. 14.4. Схема зубчатого дифференциала



Целевая функция для определения чисел зубьев для этого механизма имеет следующий вид

$$\Phi = q_1 (i_1 - i_{46}^{(5)}) + q_2 (i_2 - i_{14}^{(3)}) + q_3 (i_3 - i_{14}^{(3)} \cdot i_{46}^{(5)}), \quad (14.24)$$

где  $i_{46}^{(5)}$ ,  $i_{14}^{(3)}$  — передаточные функции планетарных передач (см. гл. 19).

Область допустимых решений при подборе чисел зубьев зубчатых колес ограничивается условием соосности и сборки.

## 15. СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 15.1. Основные характеристики и параметры

Основными характеристиками кулачкового механизма являются закон движения ведомого звена, величина и закон изменения усилия, которое может воспринимать это звено. В зависимости от назначения механизма может быть задан только ход выходного звена — максимальное перемещение толкателя или угол качания коромысла. При этом не учитывается закон изменения скорости и ускорения в пределах заданных перемещений. В других случаях кроме хода выходного звена предъявляется определенное требование к закону изменения его скорости или ускорения.

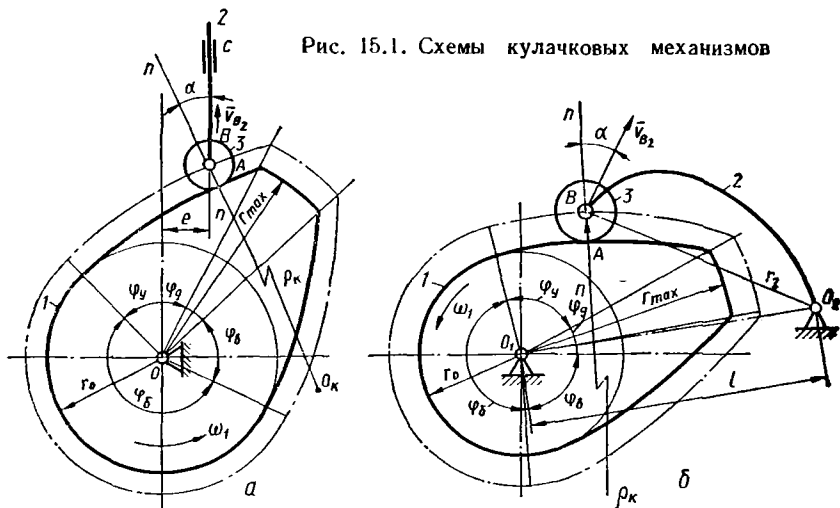


Рис. 15.1. Схемы кулачковых механизмов

Закон движения выходного звена должен быть таким, чтобы динамические усилия, возникающие при движении ведомого звена 2 (рис. 15.1), не сказались на точности воспроизведения передаточной функции и на долговечности механизма. Это требование относится к фазам удаления и возвращения выходного звена при повороте кулачка 1 соответственно на углы  $\varphi_u$  и  $\varphi_v$ . Если при его движении возникают резкие изменения скорости, соответствующие разрыву непрерывности ее функции, то ударные нагрузки в паре А кулачок — выходное звено теоретически возрастают до бесконечности, что неблагоприятно скажется на точности воспроизведения пере-

даточной функции. Плохо сказываются на характере движения и скачки функции ускорений выходного звена, приводящие к резким изменениям сил инерции, что приводит к возникновению динамических нагрузок, особенно характерных на участках перехода профиля от фазы выстоя  $\varphi_6, \varphi_d$  к фазам движения  $\varphi_y, \varphi_a$ .

При проектировании кулачковых механизмов соблюдаются следующие условия: для поступательно движущегося толкателя (рис. 15.1, а) при положении кулачка, характеризуемого углом поворота его  $\varphi_1 = 0$ , перемещение толкателя  $s_2 = s_{2min}$  и скорость его

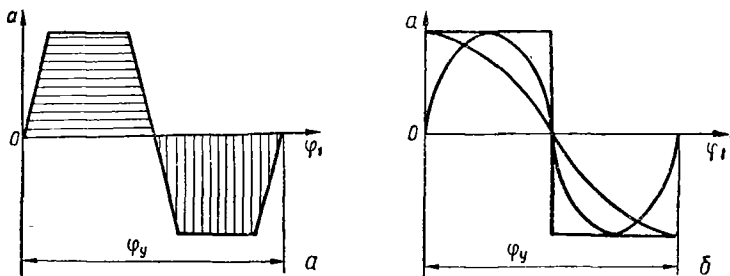


Рис. 15.2. Графики ускорений выходных звеньев в кулачковых механизмах

$v_2 = 0$ ; при повороте на фазовый угол  $\varphi_1 = \varphi_y, s_2 = s_{2max}, v_2 = 0$ ; для качательного движения коромысла (б) при  $\varphi_1 = 0$  угловое перемещение коромысла  $\varphi_2 = \varphi_{2min}, \omega_2 = 0$  и при  $\varphi_1 = \varphi_y, \varphi_2 = \varphi_{2max}, \omega_2 = 0$ . Условия для скорости перемещения ведомого звена в начальный и конечный моменты его движения налагают определенные ограничения на функцию ускорения. Например, для поступательно движущегося толкателя  $dv_2 = a(\varphi_1) dt = (1/\omega_1) \times a(\varphi_1) d\varphi_1$  и, следовательно,

$$v_2 = (1/\omega_1) \int_0^{\varphi_1} a(\varphi_1) d\varphi_1 = 0, \quad (15.1)$$

где  $\omega_1$  — угловая скорость кулачка.

Из формулы (15.1) следует, что при  $0 < \varphi_1 < \varphi_y$  среднее интегральное значение функции  $v_2(\varphi_1)$  равняется нулю, а график функции  $a_2(\varphi_1)$  отсекает относительно оси абсцисс равные площади в системе координат  $\varphi_1 O a$  (рис. 15.2, а). Таким образом, для уменьшения динамических нагрузок в качестве исходного целесообразно принимать закон изменения ускорений выходного звена, удовлетворяющий зависимости (15.1). На рис. 15.2, б приведены графики некоторых функций ускорений движения толкателя, обеспечивающие безударную его работу.

Функция перемещения толкателя получается интегрированием закона изменения ускорений. Например, если закон изменения ускорений толкателя на фазе его удаления при  $\varphi_y/\pi = k$  описывается

функцией  $a(\varphi_1) = a \cdot \cos(\varphi_1/k)$ , то  $v_2 = (a/\omega_1) \int_0^{\varphi_1} \cos(\varphi_1/k) d\varphi_1 =$

$$= (ak/\omega_1) \sin(\varphi_1/k): \quad s_2 - s_{20} = \int_0^t v_2 dt = \int_0^{\varphi_1} (v_2/\omega_1) d\varphi_1 = \int_0^{\varphi_1} (ak/\omega_1^2) \times \\ \times \sin(\varphi_1/k) d\varphi_1 = (ak^2/\omega_1^2) (1 - \cos(\varphi_1/k)).$$

В ряде случаев закон движения толкателя задается сложной функцией, аналитическое интегрирование которой затруднительно. В этом случае закон перемещения толкателя получается применением операторной функции *INTGR* (см. гл. 5).

Еще одним условием, обеспечивающим нормальные условия работы механизма, является соблюдение допустимого угла давления  $\alpha_d$  для данного типа механизма за весь цикл работы. Под углом давления понимают угол между нормалью ( $n - n$ ) к профилю кулачка и вектором  $v_{B2}$  скорости движения ведомого звена в точке их контакта (рис. 15.1, а, б). При увеличении угла давления  $\alpha$  возможно заклинивание. Для каждого типа механизмов с учетом материалов контактирующих элементов высшей пары существуют диапазоны допустимых значений  $\alpha$ , исходя из которых определяют размеры звеньев механизма  $r_0, r_{\max}, e, l, r_2$  во избежание заклинивания.

Для обеспечения точного воспроизведения заданных характеристик кулачкового механизма необходимо соблюсти также условие постоянного и однозначного контакта кулачка и ведомого звена. Указанные исходные условия создают определенные ограничения при выборе параметров механизма и профиля контактирующих элементов высшей кинематической пары. Из всех возможных вариантов сочетания параметров необходимо выбрать такие, чтобы были обеспечены наименьшие габаритные размеры механизма.

## 15.2. Определение размеров кулачкового механизма с заостренным толкателем

При проектировании кулачковых механизмов необходимо удовлетворить различные требования минимума габаритных размеров контактных напряжений и потерь на трение, исключения возможности заклинивания при работе и др. Для снижения материалоемкости обычно стремятся к уменьшению габаритных размеров. Так как угол давления определяется направлением вектора скорости выходного звена и нормали к профилю кулачка, то, следовательно, выбор геометрических размеров механизма определяет и его эксплуатационные свойства. Для всего диапазона изменения передаточной функции необходимо обеспечить значение угла давления, меньшее минимально допустимого  $\alpha_d$ . Размеры, полученные из условия обеспечения требуемых качественных характеристик и определяющие габаритные размеры механизма, называют *основными*.

Установим связь между углом давления и геометрическими размерами механизма с толкателем. Аналитическое выражение передаточной функции определится из подобия треугольников, образованных векторами скорости  $\bar{v}_{A_1}, \bar{v}_{A_2}, \bar{v}_{A_2A_1}$  на плане скоростей (рис. 15.3) и  $\Delta O_1AB$  на схеме механизма:

$$v_{A_2}/v_{A_1} = O_1B/O_1A = (ds_2(t)/dt)/(\omega_1 OA),$$

откуда передаточная функция

$$(ds_2(t)/dt)/\omega_1 = ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 = O_1B. \quad (15.2)$$

Угол между линией, параллельной оси ординат, проходящей через точку  $A$ , и линией  $AB$  будет равен углу давления для данного положения кулачка. Выражая угол давления  $\alpha$  через геометрические размеры механизма, с учетом зависимости (15.2) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \Delta / (r_0 + s_2(\varphi_1)) = (O_1B - e) / (r_0 + s_2(\varphi_1)) = \\ &= (ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 - e) / (r_0 + s_2(\varphi_1)). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Рис. 15.3. Скорости в кулачковом механизме с поступательно движущимся толкателем

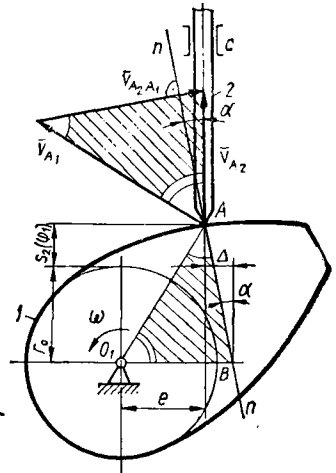
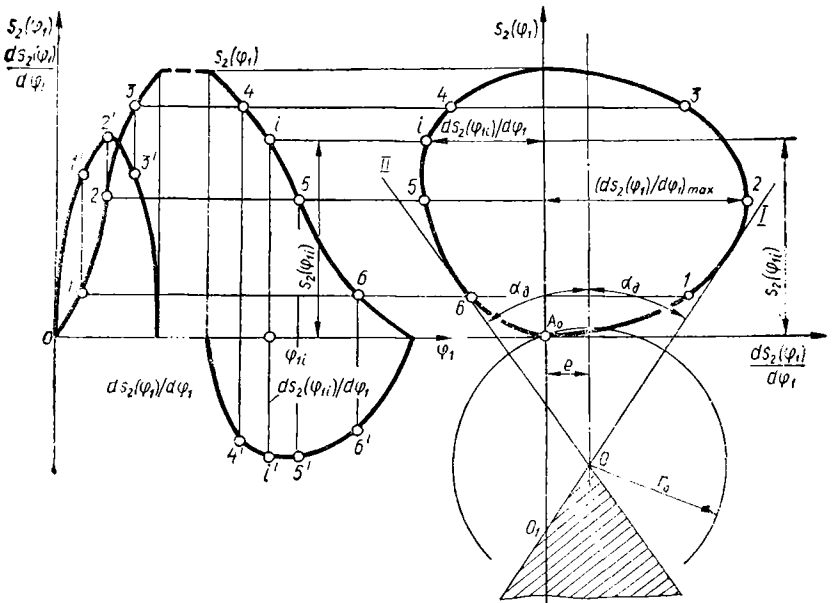


Рис. 15.4. Передаточная диаграмма и определение центра вращения кулачка



Зависимость перемещения толкателя  $s_2(\varphi_1)$  (рис. 15.4, а) от передаточного отношения механизма характеризуется передаточной диаграммой  $s_2(\varphi_1) = \Phi(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)$  — замкнутой кривой в общем произвольной формы (рис. 15.4, б) в системе координат  $(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1, s_2(\varphi_1))$ . Фазе удаления толкателя соответствуют участки диаграммы справа от оси ординат, а фазе возвращения — слева, так как в этих случаях передаточная функция  $ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1$  имеет разные знаки. Каждая точка этой диаграммы соответствует определенному углу поворота  $\varphi_1$  кулачка. Если принять допустимое для данного типа механизмов значение угла давления  $\alpha_d$ , то для каждой точки диаграммы по зависимости (15.3) можно определить величины эксцентриситета  $e$  и минимального радиуса  $r_0$ , соответствующие этому значению. Очевидно, что значение  $e$  и  $r_0$ , обеспечивающие условие  $\alpha \leq \alpha_d$  для всех точек передаточной диаграммы, будут находиться в области между касательными I и II, проведенными под углом  $\alpha_d$  к участкам графика, характеризующим подъем —  $ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 > 0$  и опускание —  $ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 < 0$  толкателя. Центр вращения кулачка может находиться в любой точке заштрихованной зоны между касательными, а точка  $O$  определяет минимально возможные значения  $e$  и  $r_0$ .

При аналитическом и численном решении задачи необходимо определять точки соприкосновения касательных в передаточной диаграмме. Это вызывает затруднения, если функция  $s_2(\varphi_1) = \Phi(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)$  не задана аналитически. В этих случаях целесообразно воспользоваться предположением о малом влиянии на основные размеры кулачкового механизма отклонений угла давления от оптимального значения. Это дает возможность проводить под углом  $\alpha_d$  прямую, проходящую через точки диаграммы, соответствующие  $(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)_{\max}$ , а не касательную к передаточной диаграмме (рис. 15.5). Центр кулачка должен находиться на этой прямой. Если требуется получить механизм с  $e = 0$ , то центром вращения будет точка  $O_1$ . С целью уменьшения размеров кулачка обычно принимают  $e \neq 0$ .

Минимальный радиус кулачка получим, если примем эксцентриситет  $e = O'M$ , т. е. если центр кулачка будет находиться в точке пересечения прямой  $AO_1$  и перпендикуляра, опущенного на эту прямую из точки  $A_0$  — начальной точки передаточной диаграммы, соответствующей углу поворота кулачка  $\varphi_1 = 0$ . Однако тогда сильно возрастает угол давления на фазе возвращения толкателя либо при перемене направления вращения кулачка. Поэтому обычно для материалов общемашиностроительного применения центр вращения кулачка выбирают на пересечении прямой  $AO_1$  и прямой, проведенной из точки  $A_0$  под углом  $\beta = 0,6...0,75\alpha_d$ . Тогда

$$r_0 = ((ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)_{\max}/\text{tg } \alpha_d - s_2(\varphi_1)_{(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)_{\max}} \sin \alpha_d / \sin(\alpha_d + \beta)) \quad (15.4)$$

и

$$e = r_0 \sin \beta. \quad (15.5)$$

Выражения (15.4) и (15.5) могут быть реализованы операторной функцией

$$KLCHK(N, s_2(N), i_2(N), \alpha_d, \beta; r_0, e), \quad (15.6)$$

где  $N$  — размерность массивов перемещений  $s_2(\varphi_1)$  и передаточных отношений  $i_2(\varphi_1) = ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1$ .

### 15.3. Определение размеров кулачкового механизма с плоским толкателем

Для кулачкового механизма с плоским толкателем (рис. 15.6) угол давления постоянен и равен нулю, если рабочая плоскость толкателя перпендикулярна к направлению его движения, или  $\alpha = \pi/2 - \beta$ , если эта плоскость составляет с направлением движения угол  $\beta$ . Случай  $\alpha \neq 0$  встречается редко. Применение эксцентриситета при использовании плоского толкателя нецелесообразно, так как приводит к росту габаритов механизма.

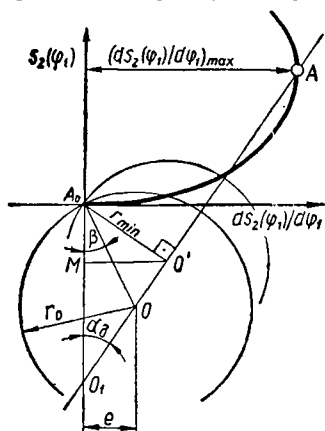


Рис. 15.5. Определение минимального радиуса кулачка

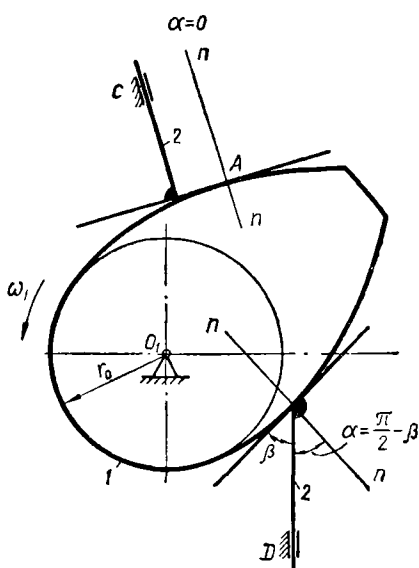


Рис. 15.6. Кулачковый механизм с плоским толкателем

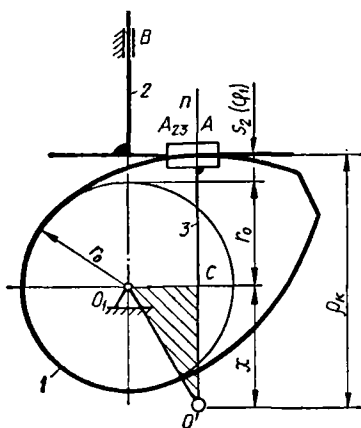


Рис. 15.7. Определение диаметра кулачковой шайбы механизма с плоским толкателем

В основе определения размера радиуса кулачковой шайбы лежит условие выпуклости профиля кулачка, так как для плоского толкателя нельзя использовать профиль кулачка двойкой кривизны. Для произвольной точки  $A_1$  профиля кулачка (рис. 15.7) условие выпуклости можно записать в виде

$$\rho_k = s_2(\varphi_1) + r_0 + x \geq 0,$$

где  $\rho_k$  — радиус кривизны профиля кулачка в этой точке;  $s_2(\varphi_1)$  — перемещение толкателя для текущего значения угла поворота кулачка  $\varphi_1$ ;  $x$  — неизвестная составляющая  $\rho_k$ .

Для определения отрезка  $x$  построим заменяющий механизм. Для этого вместо вышней пары введем дополнительное звено 3 в вращательной парой в центре  $O'$  кривизны профиля кулачка в точке  $A_1$  и поступательной парой  $A$ , образованной со звеном 2 (толкателем).

План ускорений заменяющего механизма  $O_1O'AB$ , соответствующий векторному уравнению  $\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_O + \bar{a}_{A_1O'}^n + \bar{a}_{A_1O'}^t$ , можно представить в виде  $\Delta O'O_1C$ , в котором  $a_{O'} = O'O_1 \cdot \mu_a$ . Тогда масштаб плана ускорений будет  $\mu_a = a_{O'}/O'O_1$ . Так как при этом  $O_1C \cdot \mu_a = a_{A_1O'}^t$ , то  $a_{A_1O'}^n = 0$ ;  $O'C = x = a_{A_2}/\mu_a = (d^2s_2(t)/dt^2)/\omega_1^2 = d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2$ . Следовательно, отрезок  $O'C$  численно равен значению второй производной от функции закона движения толкателя в данный момент времени. На основании этого получим

$$\rho_k = s_2(\varphi_1) + r_0 + d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2 \geq 0, \quad (15.7)$$

откуда  $r_0 + s_2(\varphi_1) \geq -d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2$  или  $-(d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2)/(r_0 + s_2(\varphi_1)) \leq 1$ .

Так как  $1 = \text{tg } 45^\circ$ , то

$$-(d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2)/(r_0 + s_2(\varphi_1)) \leq \text{tg } 45^\circ. \quad (15.8)$$

Определение минимального радиуса кулачка с использованием этого неравенства производится следующим образом. Строится диаграмма (рис. 15.8), по оси абсцисс которой откладываются значения второй производной функции положения  $d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2$  толкателя, а на оси ординат — значения функции  $s_2(\varphi_1)$ . В соответствии с неравенством (15.8) к отрицательной ветви диаграммы проводится касательная под углом  $45^\circ$ . В области, лежащей ниже этой прямой, можно выбрать положение центра вращения кулачка, например, в точке  $O_1$ , так как в этом случае угол касательной  $\gamma$  всегда меньше  $45^\circ$ .

Операторная функция, реализующая указанный алгоритм, имеет вид

$$KLCHPL(s_{2 \min}, (d^2s_2/d\varphi_1^2)_{\min}, \gamma; r_0) = (d^2s_2/d\varphi_1^2)_{\min}/\text{tg } \gamma - s_{2 \min}. \quad (15.9)$$

$s_{2 \min}$  и  $(d^2s_2/d\varphi_1^2)_{\min}$  задаются для  $\varphi_1$ , соответствующего минимальному значению функции ускорений толкателя.



## 15.4. Определение размеров кулачкового механизма с коромыслом

Для механизма с качающимся выходным звеном 2 (рис. 15.9) скорость  $\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_A + \bar{v}_{A_2A}$ , точки  $A_2$  на коромысле (вектор  $\bar{v}_A$ , направлен перпендикулярно  $O_1A$ , вектор  $\bar{v}_A$  перпендикулярен  $O_2A$ , вектор  $\bar{v}_{A_2A}$ , скорости относительного движения направлен по касательной к профилю кулачка в точке  $A$ ). Передаточное отношение определится из подобия треугольника скоростей и  $\Delta O_1AB$ , сторонами которого являются  $O_1A$ , участок  $AB$  нормали  $n-n$  к профилю кулачка в точке  $A$ , участок  $O_1B$  перпендикуляра из  $O_1$  на линию

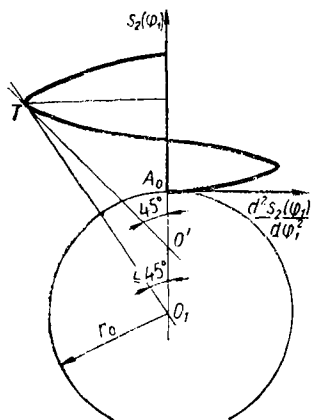


Рис. 15.8. Определение минимального радиуса кулачка

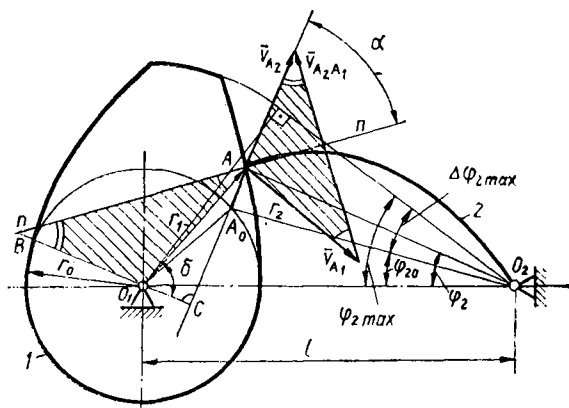


Рис. 15.9. Скорости в кулачковом механизме с качающимся выходным звеном

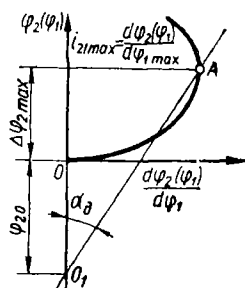
Рис. 15.10. Передаточная диаграмма

действия вектора  $\bar{v}_{A_2}$ . Обозначив  $r_1/r_2 = \lambda$  и учтя, что  $\omega_2/\omega_1 = d\varphi_2(\varphi_1)/d\varphi_1 = i_{21}(\varphi_1)$ , получим  $v_{A_2}/v_A = O_1B/O_1A = \omega_2 r_2/\omega_1 r_1 = (\omega_2/\omega_1)/\lambda = (d\varphi_2(\varphi_1)/d\varphi_1)/\lambda = i_{21}(\varphi_1)/\lambda$ .

Угол давления  $\alpha$  определится из выражения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \angle ABC = BC/AC = (BO_1 + O_1C)/AC = \\ &= (i_{21}(\varphi)/\lambda + \cos \delta)/\sin \delta. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Выражения (15.10) и (15.3) аналогичны по смыслу. Построив передаточную диаграмму (рис. 15.10)  $\varphi_2(\varphi_1) = \Phi(i_{21}(\varphi_1))$  и определив точку, для которой  $i_{21}(\varphi_1) = (i_{21}(\varphi_1))_{\max} = i_{21 \max}$ , проведем



через эту точку под углом  $\alpha_d$  к оси ординат прямую. Тогда при начальном угле положения коромысла  $\varphi_{20}$  и максимальном передаточном отношении полный угол его поворота (рис. 15.9)

$$\varphi_{2 \max} = \varphi_{20} + \Delta\varphi_{2 \max} = i_{21 \max} / \operatorname{tg} \alpha_d,$$

откуда

$$\varphi_{20} = i_{21 \max} / \operatorname{tg} \alpha_d - \Delta\varphi_{2 \max}. \quad (15.11)$$

Из  $\Delta O_1 A_0 O_2$  (рис. 15.9) по теореме косинусов получим

$$O_1 A_0 = r_0 = l \sqrt{1 + (r_2/l)^2 - 2(r_2/l) \cos \varphi_0}.$$

Так как  $r_2/l = \cos \varphi_{2 \max}$ , то

$$r_0 = l \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_{2 \max} (\cos \varphi_{2 \max} - 2 \cos \varphi_{20})}. \quad (15.12)$$

Зависимости (15.10), (15.11), (15.12) реализуются операторной функцией

$$KLCHK(N, \varphi_2(N), i_{21}(N), \alpha_d, l; \varphi_{20}, r_0). \quad (15.13)$$

Функции  $\varphi_2(N)$  и  $i_{21}(N)$  задаются массивами чисел для  $N$  значений  $\varphi_1$ .

### 15.5. Построение профиля кулачка плоского механизма с толкателем

Определение формы и размеров кулачка выполняется *аналитическим, численным или графическим способами*. Чаще используют аналитический и численный способы, которые могут быть проиллюстрированы графически. Применим к кулачковому механизму (рис. 15.11) *метод обращения движения*. Тогда для системы координат  $xO_1y$ , в которой звенья механизма совершают движения, поворот кулачка на определенный угол равносителен повороту оси толкателя на такой же угол в противоположном вращению кулачка направлении. При повороте кулачка на угол  $\varphi_1$  толкатель переместится на величину  $s_2(\varphi_1)$ . Из условия  $\overline{O_1 A} = \overline{O_1 C} + \overline{CA}$  найдем радиус-вектор текущей точки  $A$

$$\bar{r}_1 = \bar{e} + (\sqrt{r_0^2 - e^2 + s_2(\varphi_1)}),$$

а координаты точки  $A$ , как проекции радиуса-вектора  $\bar{r}_1$  на координатные оси, будут

$$\begin{aligned} x_A &= e \sin((\varphi_1 + \gamma) - \pi/2) + (\sqrt{r_0^2 - e^2 + s_2(\varphi_1)}) \sin((\varphi_1 + \gamma) - \pi/2); \\ y_A &= e \cos((\varphi_1 + \gamma) - \pi/2) + (\sqrt{r_0^2 - e^2 + s_2(\varphi_1)}) \cos((\varphi_1 + \gamma) - \pi/2). \end{aligned} \quad (15.14)$$

Если механизм имеет *плоский толкатель* (рис. 15.12), то радиус-вектор точки  $A$  касания толкателя и кулачка будет

$$\bar{r}_1 = \overline{O_1 A} = \overline{O_1 E} + \overline{EA}. \quad (15.15)$$

Вектор  $O_1 E$  равен по величине  $(r_0 + s_2(\varphi_1))$ ; вектор  $\overline{EA}$  определится из рассмотрения треугольника скоростей  $\bar{v}_A = \bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{A_1 A_2}$ .

Из подобия  $\Delta O_1EA$  и векторного треугольника скоростей получим

$$v_A/v_{A_2} = O_1A/EA,$$

откуда

$$EA = O_1A \cdot v_A/v_{A_2} = r_1 (ds_2(\varphi_1)/dt)/(\omega_1 r_1) = ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1.$$

Проецируя векторы уравнения (15.15) на оси координат, получим

$$\left. \begin{aligned} x_A &= (r_0 + s_2(\varphi_1)) \sin \varphi_1 + (ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1) \cos \varphi_1; \\ y_A &= (r_0 + s_2(\varphi_1)) \cos \varphi_1 - (ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1) \sin \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

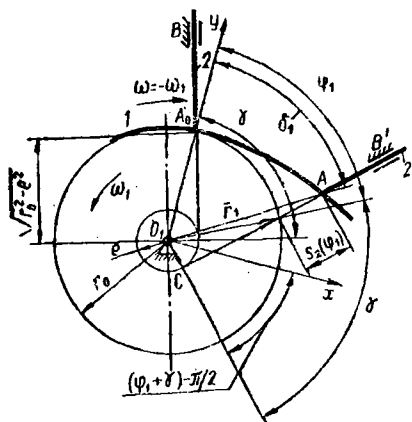


Рис. 15.11. Синтез профиля кулачка механизма с остроконечным толкателем

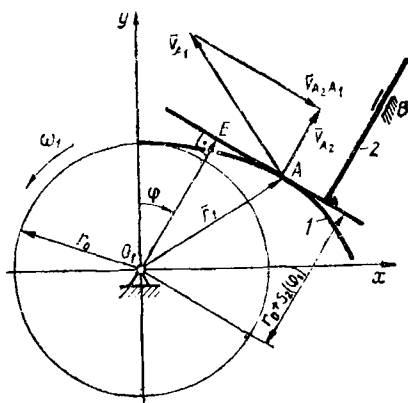


Рис. 15.12. Синтез профиля кулачка механизма с плоским толкателем

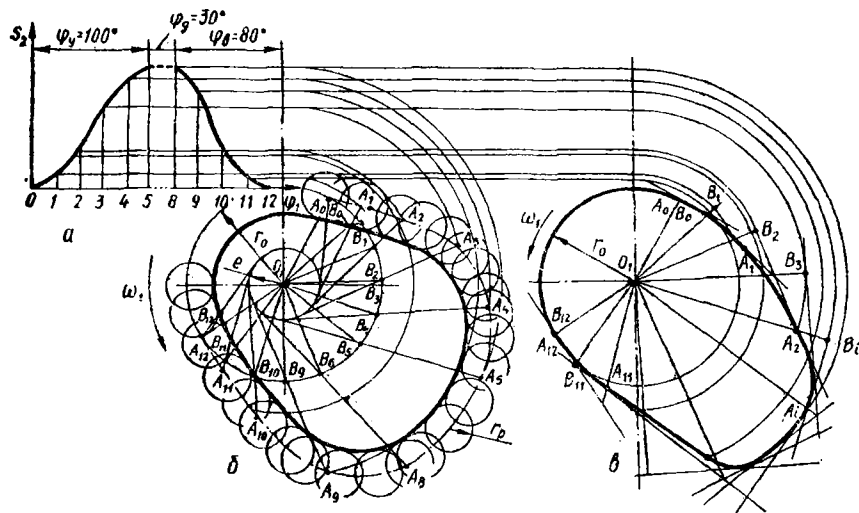


Рис. 15.13. Построение профиля кулачка для поступательно движущегося толкателя

Если закон движения толкателя задан графически (рис. 15.13, а) и даны основные размеры механизма —  $r_0$  и  $e$ , то профиль кулачка может быть построен графическим способом. Из центра  $O_1$  (рис. 15.13, б) вращения кулачка проводим окружности радиусами  $r_0$  и  $e$  и произвольно выбираем на окружности радиуса  $r_0$  точку  $A_0$  начала движения толкателя. Начальное положение оси толкателя определяется касательной, проведенной из точки  $A_0$  к окружности радиуса  $e$ , начальное положение теоретического профиля зафиксируем радиусом  $O_1A_0$ . Для построения точки  $A_i$  профиля от радиуса  $O_1A_0$  отложим угол поворота кулачка  $\varphi_{1i}$  в направлении, противоположном его вращению, и получим точку  $B_i$ . На продолжении радиуса  $O_1B_i$  отложим перемещение  $s_{2i}$ , соответствующее  $\varphi_{1i}$ , и получим точку  $A_i$  контакта острия толкателя с профилем кулачка. Последовательно соединяя точки  $A_i$ , полученные при изменении  $\varphi_{1i}$  до  $\varphi_1 = 2\pi$ , получим теоретический профиль кулачка. Действительный профиль кулачка для механизма толкателя с роликом получим как огибающую окружностей радиусом  $r_p$  с центрами, расположенными на теоретическом профиле.

Если механизм имеет плоский толкатель (рис. 15.13, в), то профиль кулачка получается как огибающая семейства прямых, перпендикулярных радиусу  $O_1B_i$  и касающихся профиля в точках  $A_i$ .

## 15.6. Построение профиля кулачка плоского механизма с коромыслом

В механизме с коромыслом (рис. 15.14) поворот кулачка на угол  $\varphi_1$ , в соответствии с принципом обращения движения, равносильен перемещению центра  $O_2$  вращения коромысла в положение  $O_2'$ . При этом коромысло из начального положения  $O_2A_0$  переместится в положение  $O_2'A$ . Тогда  $\overline{O_1A} = \overline{O_1O_2'} + \overline{O_2'A}$ . В координатной системе  $xO_1y$ , жестко связанной с кулачком, координаты точки  $A$  будут

$$\left. \begin{aligned} x_A &= l \cos \varphi_1 - r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \\ y_A &= -l \sin \varphi_1 - r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned} \right\} \quad (15.17)$$

Рассмотрим *графический способ* проектирования профиля кулачка (рис. 15.15). В зафиксированном начальном положении линии  $O_1O_2$  проведем окружность радиусом  $r_0$  с центром в  $O_1$ . Радиусом  $r_2$  проведем из  $O_2$  дугу окружности, на пересечении которой с окружностью радиуса  $r_0$  получим точку  $A_0$ . Прямая  $A_0O_2$  соответствует положению коромысла в начальный момент движения. По заданному закону движения коромысла (рис. 15.15, а) под углами  $\varphi_{2i}$ , соответствующими углам поворота кулачка  $\varphi_{1i}$ , от линии  $O_2A_0$  проводим линии до пересечения с дугой окружности радиуса  $r_2$ . Через полученные точки пересечения  $A_i$  из центра  $O_1$  проводим дуги окружностей.

При обращении движения кулачкового механизма точка  $O_2$  (рис. 15.15, б) перемещается по окружности радиусом  $l$  в направлении, противоположном вращению кулачка. От линии  $O_1O_2$  в направлении, противоположном вращению кулачка, отложим углы

Рис. 15.14. Синтез профиля кулачка механизма с качающимся ведомым звеном

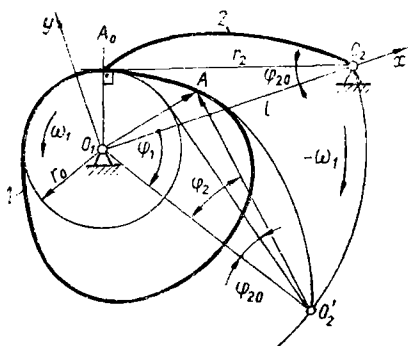
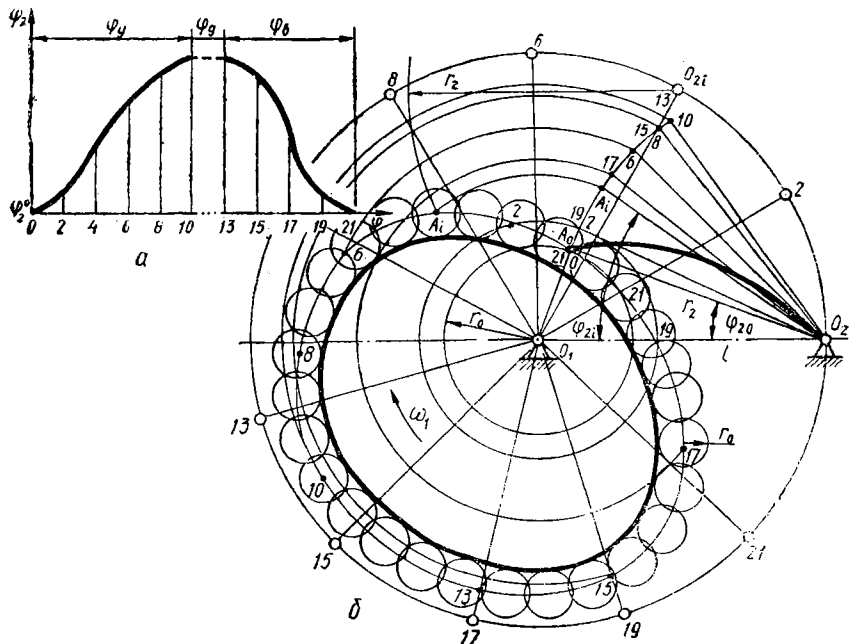


Рис. 15.15. Построение профиля кулачка для качающегося ведомого звена



$\varphi_{1i}$  и на окружности радиуса  $l = O_1O_2$  зафиксируем точки  $O_{2i}$ . Точки теоретического профиля кулачка получим на пересечении дуг окружностей, проведенных из центров  $O_{2i}$  радиусом  $r_2$ , и окружностей радиусов  $O_1A_i$ , проведенных из центра  $O_1$ . Действительный профиль кулачка при наличии ролика получим как огибающую окружностей радиусом  $r_f$  с центрами на теоретическом профиле кулачка.

### 15.7. Построение профиля кулачка пространственных механизмов

На рис. 15.16, *a* изображен профиль пространственного кулачка *1* с толкателем *2* в начальном положении  $A_0$ . Направим координатную ось  $Oz$  вдоль оси вращения кулачка вертикально вверх, а ось  $y$  —

перпендикулярно проекции линии действия толкателя на плоскость  $xOy$ , в которой лежит точка  $F_0$  ее пересечения с линией действия толкателя. Точку пересечения проекции линии действия толкателя с осью  $Oy$  обозначим  $N_0$ . Угол между радиусом-вектором  $\rho_0$  проекции точки  $A_0$  на плоскость  $xOy$  и осью  $Oy$ , являющийся профильным углом кулачка, обозначим  $\psi_0$ .

Для вращательных кулачков удобно пользоваться цилиндрической полярной системой координат  $\rho, \nu, z$ . Подвижную ось  $\rho$  кулачка совместим с осью  $y$ . Точку пересечения этой оси с проекцией

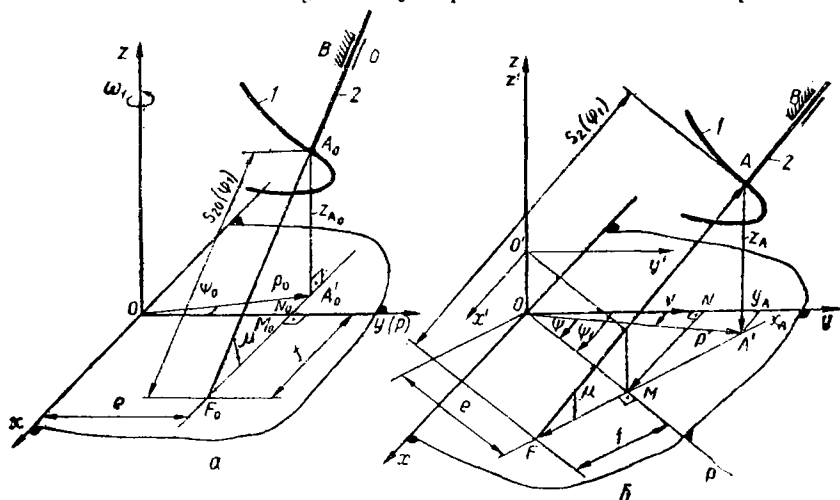


Рис. 15.16. Определение координат профильной поверхности пространственного кулачка при поступательно движущемся толкателе

линии действия толкателя обозначим через  $M_0$  (в этом положении точки  $M_0$  и  $N_0$  совпадают). Применяя принцип обращения движения к механизму, сообщим ему скорость  $\omega_1$ . Тогда стойка  $O$  с толкателем начнет вращаться относительно неподвижного кулачка. Поворот ее на произвольный угол  $\varphi_1$  (рис. 15.16, б) будет соответствовать повороту  $\rho$  в плоскости  $xOy$  на тот же угол. Радиус-вектор  $\rho$  проекции точки  $A$  при повороте на угол  $\varphi_1$  оси  $\rho$  будет равен

$$\rho = \overline{ON} + \overline{NM} + \overline{MF} + \overline{FA} + \overline{AA'}, \quad (15.18)$$

где  $M$  и  $N$  — соответственно точки пересечения проекции линии действия толкателя с полярной осью и проекция этой точки на ось при повороте кулачка на угол  $\varphi_1$ .

Аппликата  $z_A$  при повороте кулачка на угол  $\varphi_1$  будет

$$z_A = s_2(\varphi_1) \sin \mu, \quad (15.19)$$

а абсциссу и ординату получим, составив уравнения проекций векторов (15.18) на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$x_A = \rho \sin \nu = e \sin \varphi_1 - (f - s_2(\varphi_1) \cos \mu) \cos \varphi_1; \quad (15.20)$$

$$y_A = \rho \cos \nu = e \cos \varphi_1 + (f - s_2(\varphi_1) \cos \mu) \sin \varphi_1. \quad (15.21)$$



Аналогично решается задача определения координат теоретической профильной поверхности пространственного кулачка для механизма с коромыслом (рис. 15.17). Коромысло 2, начальное положение которого определяется касанием с кулачком в точке  $A_0$  (рис. 15.17, а), перемещается в плоскости, пересекающей плоскость  $xOy$  под углом  $\mu$ , по линии, параллельной оси  $Oy$  и отстоящей от нее на расстоянии  $f$ . Координаты центра вращения коромысла в плоскости параллельной  $xOy$ , равны  $a$  и  $f$ . Радиус-вектор  $\rho_0$  точки  $A_0$  проекции точки  $A_0$  на плоскость  $xOy$  образует с осью  $Oy$  профильный угол  $\psi_0$ , которому соответствует угол наклона коромысла  $\varphi_{20}$ . Применяя принцип обращения движения, получим, как и в случае поступательного движения толкателя при повороте оси  $p$  на угол  $\varphi_1$  (рис. 15.17, б), радиус-вектор точки  $A'$

$$\rho = \overline{ON} + \overline{NM} + \overline{MF} + \overline{FA} + \overline{AO_2} + \overline{O_2A'}. \quad (15.24)$$

Проецируя радиус-вектор на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получим координаты точки касания  $A$  коромысла 2 с кулачком 1 в неподвижной системе:

$$\begin{aligned} x_A &= \rho \sin \nu = (a - l \cos \varphi_2(\varphi_1)) \sin \varphi_1 - \\ &\quad - (f + l \sin \varphi_2(\varphi_1) \cos \mu) \cos \varphi_1; \\ y_A &= \rho \cos \nu = (a - l \cos \varphi_2(\varphi_1)) \cos \varphi_1 + \\ &\quad + (f + l \sin \varphi_2(\varphi_1) \cos \mu) \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (15.25)$$

В полярной цилиндрической системе координат  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $z$  с учетом того, что  $\rho \cos \psi = a - l \cos \varphi_2(\varphi_1)$ ;  $\rho \sin \psi = f + l \sin \varphi_2(\varphi_1) \times \cos \mu$ ;  $\operatorname{tg} \psi = (f + l \sin \varphi_2(\varphi_1) \cos \mu) / (a - l \cos \varphi_2(\varphi_1))$ , получим  $\nu = \varphi_1 - \psi$ ;  $\rho = (a - l \cos \varphi_2(\varphi_1)) \cos \psi$ ;  $z = l \sin \varphi_2(\varphi_1) \sin \mu$ .

Исключая  $\varphi_2(\varphi_1)$  и  $\varphi_1$  из условий (15.25), получим уравнение теоретической поверхности кулачка:

$$x^2 + y^2 = (a - l \sqrt{1 - z^2/l^2 \sin^2 \mu})^2 + (f + z \operatorname{ctg} \mu)^2. \quad (15.26)$$

Условие (15.26) описывает поверхность глобoidного кулачка, образованную дугой окружности, уравнения которой имеют вид

$$x = -(f + z \operatorname{ctg} \mu), \quad (a - y)^2 + (z \sin \mu - (x + f) \cos \mu)^2 = l^2.$$

### 15.8. Определение параметров элементов высшей кинематической пары кулачковых механизмов

Для обеспечения высокой работоспособности кулачкового механизма при его проектировании необходимо подобрать соответствующие сочетания параметров поверхностей кулачка и ведомого звена, в частности кривизны профиля кулачка и ролика толкателя. Если радиус кривизны профиля кулачка мал, то при эксплуатации он быстро выходит из строя из-за потери контактной прочности или из-за интенсивного износа, так как и контактные напряжения и темп изнашивания обратно пропорциональны приведенному радиусу кривизны. Если неправильно выбрать радиус ролика толкателя, то может случиться, что он не будет вращаться и введение его в кинематическую цепь не приведет к снижению потерь на трение.



Радиус кривизны кулачка в произвольной точке  $K$  его профиля будет

$$\rho_K = (r_K^2 + \dot{r}_K^2)^{3/2} / (r_K^2 + 2r_K\ddot{r}_K - r_K\ddot{r}_K), \quad (15.27)$$

где  $r_K$ ,  $\dot{r}_K$ ,  $\ddot{r}_K$  — радиус-вектор профиля кулачка и его производные.

Для механизма, изображенного на рис. 15.3,

$$r_A = \sqrt{(r_0 + s_2(\varphi_1))^2 + e^2};$$

$$r_A = ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 = O_1B = e + (r_0 + s_2(\varphi_1)) \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\dot{r} = dr_A/d\varphi_1 = s_2'(\varphi_1).$$

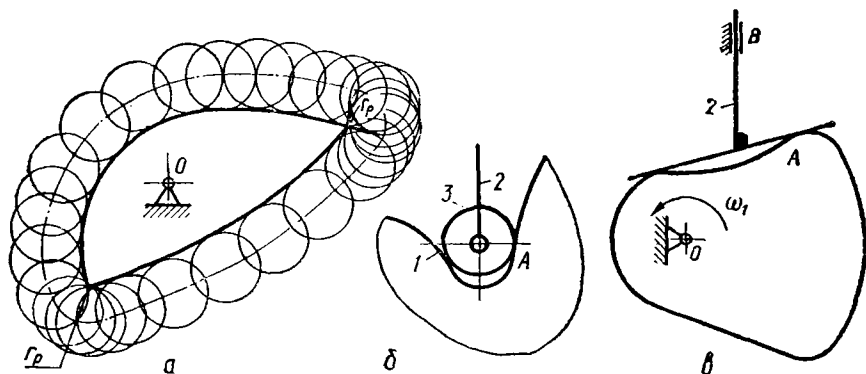


Рис. 15.18. Особенности контуров кулачков

Подставляя  $r_A$ ,  $\dot{r}_A$ ,  $\ddot{r}_A$  в формулу (15.27), после преобразований получим формулу для определения радиуса кривизны кулачка. Для механизма с поступательно движущимся толкателем при  $s = r_0 + s_2(\varphi_1)$  будем иметь:

$$\rho_K = s^2 / (s \cos \alpha + s \sin \alpha \cos^2 \alpha - \ddot{s} \cos^3 \alpha); \quad (15.28)$$

для механизма с коромыслом

$$\rho_K = (l_0^2 + r_2^2(1 + \ddot{\varphi}_2)^2 - 2l_0r_0(1 + \varphi_2) \cos \varphi_2)^{3/2} / (l_0^2 + r_2^2(1 + \dot{\varphi}_2)^2 - l_0r_2(\cos \ddot{\varphi}_2(1 + \varphi_2)(2 + \varphi_2) \sin \varphi_2)). \quad (15.29)$$

Полученные формулы позволяют определить радиус кривизны теоретических профилей кулачков. Радиус кривизны практического профиля может быть найден как радиус кривизны эквидистантной кривой. Если механизм имеет плоский толкатель, то радиус кривизны профиля определяется по формуле (15.7).

При назначении радиуса ролика  $r_p$  следует иметь в виду, что на участке наибольшей кривизны недопустимо соотношение  $r_p \geq \geq \rho_{K \min}$ , так как в этих случаях получается или двойной профиль, выполнение которого невозможно на станке из-за удаления материала при изготовлении кулачка, или заостренный профиль (рис. 15.18, а). Обычно выбирают  $r_p \leq 0,7\rho_{K \min}$ . Это же условие нужно

соблюдать в кулачках с профилем разных знаков кривизны (б). В механизмах с такими кулачками нельзя применять выходные звенья с плоским толкателем (в).

### 15.9. Алгоритмы расчета плоских кулачковых механизмов на электронных вычислительных машинах

Для механизма с поступательно движущимся остроконечным толкателем алгоритм расчета профиля кулачка по зависимости (15.3), (15.14) и (15.28) может быть реализован функцией

$$PRFLP(N, r_0, e, \omega_1, s_2(N), v_2(N); x_A(N), y_A(N), \alpha(N), \rho_K(N)). \quad (15.30)$$

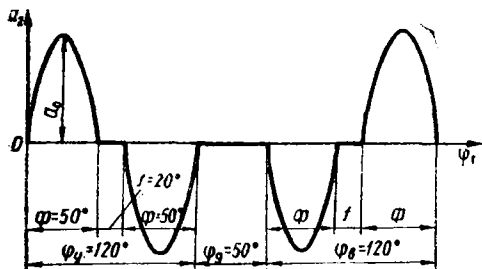


Рис. 15.19. Закон изменения ускорений толкателя

При обращении к операторной функции  $PRFLP$  должны быть определены: размерность  $N$  массивов величин исходных данных; массивы чисел, соответствующие скоростям  $v_2(N)$  и перемещениям  $s_2(N)$  толкателя для углов поворота кулачка  $\psi_1(N)$ ; основные размеры кулачкового механизма, определяемые операторной функцией  $KLCHK$  по формуле (15.6), и угловая скорость кулачка  $\omega_1$ .

Для механизма с плоским толкателем алгоритм расчета профиля кулачка по зависимостям (15.7) и (15.16) может быть реализован функцией

$$PRFLPL(N, r_0, \omega_1, v_2(N), s_2(N); x_A(N), y_A(N), \rho_K(N)). \quad (15.31)$$

Для определения радиуса основной шайбы  $r_0$  используется операторная функция  $KLCHPL$  (15.9).

Для механизма с коромыслом операторная функция, реализующая зависимости (15.13), (15.17) и (15.29), будет иметь вид

$$PRFLKT(N, r_2, l_0, \omega_1, \varphi_2(N), \ddot{\varphi}(N); \varphi_2(N); x_A(N), y_A(N), \alpha(N), \rho_K(N)). \quad (15.32)$$

Принятое описание операторными функциями алгоритмов решения частных задач синтеза кулачковых механизмов упрощает структуру алгоритма решения задачи расчета кулачкового механизма, сводя ее к последовательному обращению к операторным функциям. Пусть, например, требуется рассчитать параметры механизма с поступательно движущимся толкателем. Фазовые углы соответственно равны  $\varphi_y = \varphi_b = 120^\circ$ ,  $\varphi_d = 50^\circ$ ,  $\varphi_c = 70^\circ$ . Закон изменения ускорений толкателя графически представлен на

рис. 15.19, а аналитически выражается функцией

$$a_2 = \begin{cases} a_0 \sin(\varphi_1(2\pi/2\phi + f)), & \phi + f \leq \varphi_1 \leq \phi; \\ 0 & \phi < \varphi_1 < \phi + f; \\ 0 & \varphi_y < \varphi_1 < \varphi_y + \varphi_d; \\ -a_0 \sin[(\varphi_1 - \varphi_y - \varphi_d)(2\pi/2\phi + f)], & \varphi_y + \varphi_d + \phi + f \leq \\ & \leq \varphi_1 \leq \varphi_y + \varphi_d + \phi; \\ 0 & \varphi_y + \varphi_d + \phi < \varphi_1 < \\ & < \varphi_y + \varphi_d + \phi + f. \end{cases} \quad (15.33)$$

Если требуется определить параметры профиля через шаг  $\Delta\varphi_1$ , то число расчетных шагов  $N = (\varphi_y + \varphi_d + \varphi_n)/\Delta\varphi_1$ . Подставляя в формулу (15.33)  $\varphi_1$  с шагом  $\Delta\varphi_1$ , найдем массив значений  $a_2(N)$ . Значения массивов скоростей и перемещений толкателя для расчетных точек определяются по формуле (5.8):

$$INTGR(N, \Delta\varphi_1, 2, a_2(N); v_2(N)). \quad (15.34)$$

Число 2 в функции (15.34) свидетельствует, что при численном интегрировании применяется метод трапеций (см. гл. 5). Аналогично для перемещений

$$INTGR(N, \Delta\varphi_1, 2, v_2(N); s_2(N)). \quad (15.35)$$

Примем допустимое значение угла давления  $\alpha_d$  в зависимости от материалов пары кулачок — толкатель и назначим угол  $\beta$ . Тогда основные размеры механизма определяются операторной функцией (15.6), которая для этого случая имеет вид

$$KLCHK(N, s_2(N), v_2(N), \alpha, \beta; r_0, e), \quad (15.36)$$

а параметры профиля кулачка, радиусы кривизны, углы давления для значений  $\varphi_1$  операторной функцией

$$PRFLP(N, r_0, e, \omega_1, s_2(N), v_2(N); x_A(N), y_A(N), \alpha(N), \rho_K(N)). \quad (15.37)$$

Последовательность зависимостей (15.33) ... (15.37) представляют алгоритм расчета кулачкового механизма.

## Раздел третий --- КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

### 16. ПЛОСКИЕ МЕХАНИЗМЫ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

#### 16.1. Основные задачи анализа

Задачи анализа заключаются в определении кинематических характеристик движения механизма, геометрические размеры которого известны. В зависимости от цели исследования определяются положения звеньев, их перемещения, траектории, скорости и ускорения. Задача кинематического исследования решается с целью получения

значений характеристик при конкретных положениях звеньев механизма, а также для определения законов изменения кинематических параметров в функции времени или обобщенной координаты.

Кинематические характеристики механизма необходимы не только для оценки качества синтеза схемы механизма, но и для решения задач, связанных с прочностным расчетом и конструированием его звеньев, оценки динамических свойств механизма. Например, для проведения силового расчета механизма необходимо определить силы инерции и сопротивления движению звеньев, для чего должны быть известны скорости и ускорения их. Для вписывания механизма в конструкцию машинного агрегата необходимо знать траекторные движения его звеньев и их положения, определяющие габаритные размеры механизма. Для многих механизмов траектории движения звеньев определяют форму корпусных деталей, являющихся наиболее материалоемкими в машинах (картеры двигателей внутреннего сгорания, корпуса насосов и турбин, головки элеваторов и т. п.).

## 16.2. Методы анализа

**Кинематический анализ плоских механизмов основывается на положениях кинематики точки и твердого тела.** Координаты точек звеньев механизмов получают с помощью векторных уравнений, описывающих геометрические соотношения схемы механизма и связь их с координатной системой. Радиус-вектор точки звена механизма полностью определяет ее положение в координатной системе, а условие замкнутости векторного контура схемы механизма (см. гл. 6) определяет кинематику его звеньев в любой момент времени, функции положения звеньев и передаточные.

**Уравнения линейных и угловых координат** обычно получают для обобщенных координат, под которыми понимают линейную или угловую координату входного звена механизма, определяющую его положение на своей траектории. Это дает возможность получить кинематические характеристики независимо от закона движения ведущего звена. Функции положения и передаточные функции также получают для обобщенных координат.

При исследовании движения звеньев механизма на основании теорем о сложном составном движении и о сложении движений получают **векторные уравнения**, описывающие скорости и ускорения точек звеньев. Численное решение векторных уравнений сводится к решению системы алгебраических линейных уравнений, параметры которой описываются операторными функциями (см. гл. 5).

Решение любой задачи анализа в общем виде сводится к получению **алгоритма**, позволяющего проводить расчет по единой схеме при любых численных значениях геометрических параметров механизмов. Алгоритм кинематического расчета механизма целесообразно представить как совокупность алгоритмов кинематического расчета — ведущих звеньев и структурных групп. Это позволяет

проводить расчеты любых плоских механизмов в той же последовательности, в которой осуществляется структурный синтез механизма.

### 16.3. Определение кинематических характеристик движения звена на плоскости

**Движение звена на плоскости** характеризуется угловыми скоростями и ускорениями звена и координатами мгновенных центров скоростей и ускорений; угловыми скоростями и ускорениями звена и векторами скорости и ускорения одной точки его звена; векторами скоростей и ускорения двух точек звена.

Когда мгновенные центры скоростей и ускорений звена совпадают и при работе механизма не меняют своего положения, это соответствует частному случаю плоского движения — вращательному (рис. 16.1). Вектор скорости произвольной точки  $A$  звена определится по величине и направлению из условий:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= l_{OA} \cdot |\omega|; \\ UGL3(\varphi_{OA}, \pi/2, \omega; \alpha_A). \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

Вектор ускорения  $\bar{a}_B$  произвольной точки  $B$  определится как сумма векторов нормального  $\bar{a}_B^n$  и тангенциального  $\bar{a}_B^t$  ускорений —  $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^t$ . Величина и направляющий угол вектора полного ускорения будут

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_B &= l_{OB} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}; \\ UGL3(\varphi_{OB}, \pi - \delta, \varepsilon; \beta_B). \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

В уравнениях (16.1) и (16.2) и в дальнейшем знаки угловой скорости и углового ускорения принимаются по правилам для правой системы координат положительными, а в случае вращения звена против часовой стрелки — отрицательными.

Для звена, совершающего *поступательное движение*, скорости и ускорения всех его точек равны и направлены в одну сторону.

Если движение звена задается векторами скорости и ускорения какой-либо точки  $A$ , а также угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\varepsilon$  звена, величины и направления скорости и ускорения любой другой точки звена, например,  $B$ , определяются с помощью **теоремы о сложении движений**. Движение точки  $B$  звена (рис. 16.2) представляют как поступательное с координатной системой  $x'Ay'$  и вращательное вокруг точки  $A$  в этой же системе. В соответствии с этим скорость точки  $B$  будет равна  $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ , а вектор скорости  $\bar{v}_{BA}$  определится по зависимостям, аналогичным уравнениям (16.1):

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{BA} &= l_{AB} \cdot |\omega|; \\ UGL3(\varphi_{AB}, \pi/2, \omega, \cdot \alpha_{BA}). \end{aligned} \right\}$$

Алгоритм вычисления реализуется операторной функцией

$$SMVKT(v_A, \alpha_A, v_{BA}, \alpha_{BA}; v_B, \alpha_B). \quad (16.3)$$

Ускорение точки  $B$  (рис. 16.3) по условию сложения ускорений  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t$ . Составляющие ускорений будут:  $a_{BA}^n = l_{AB}\omega^2$ ;  $\beta_{BA}^n = \varphi_{AB} - \pi$ ;  $a_{BA}^t = l_{AB}|\varepsilon|$ ;  $UGL3$  ( $\varphi_{AB}$ ,  $\pi/2$ ,  $\varepsilon$ ;  $\beta_{BA}^t$ ).

Определение величины и направляющего угла вектора полного ускорения реализуется операторными функциями

$$SMVKT(a_A, \beta_A, a_{BA}^n, \beta_{BA}^n; a, \beta);$$

$$SMVKT(a, \beta, a_{BA}^t, \beta_{BA}^t; a_B \beta_B),$$

где  $a$  и  $\beta$  — промежуточные результаты.

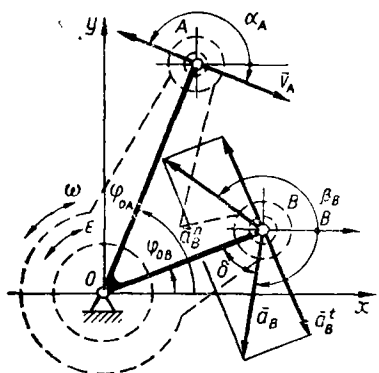


Рис. 16.1. Кинематические характеристики вращающегося звена

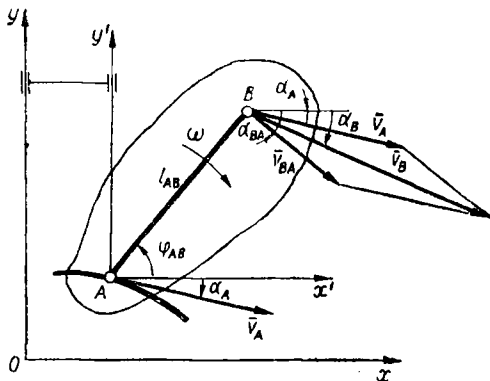


Рис. 16.2. Скорость точки звена, движущегося по плоскости

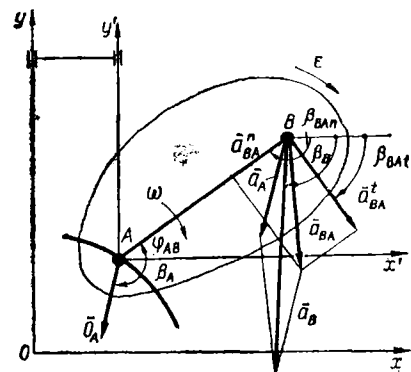


Рис. 16.3. Ускорение точки звена, движущегося по плоскости

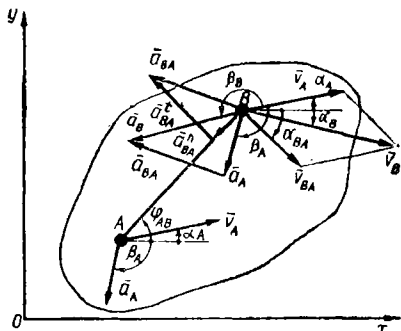


Рис. 16.4. Относительные скорости и ускорения звена

Если закон движения звена задается векторами скоростей  $\bar{v}_A$  от  $\bar{v}_B$ , а ускорений —  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$  двух произвольных его точек  $A$  и  $B$ , то угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение звена  $\varepsilon$  определяются по векторам относительных скоростей и ускорений. Из уравнения  $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$  получим вектор относительной скорости  $\bar{v}_{BA} = \bar{v}_B -$

—  $v_A$  (рис. 16.4), откуда (см. гл. 5)

$$\left. \begin{aligned} v_{BAx} &= v_B \cos \alpha_B - v_A \cos \alpha_A; \\ v_{BAy} &= v_B \sin \alpha_B - v_A \sin \alpha_A; \\ v_{BA} &= \sqrt{v_{BAx}^2 + v_{BAy}^2}; \\ UGL5(v_{BAx}, v_{BAy}; \alpha_{BA}); \\ \omega &= \text{sign}(\alpha_{BA} - \varphi_{AB}) v_{BA}/l_{AB}. \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

Из уравнения для  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$  получим вектор относительно го ускорения  $\bar{a}_{BA} = \bar{a}_B - \bar{a}_A$ , откуда

$$\left. \begin{aligned} a_{BAx} &= a_B \cos \alpha_B - a_A \cos \alpha_A; \\ a_{BAy} &= a_B \sin \alpha_B - a_A \sin \alpha_A; \\ a_{BA} &= \sqrt{a_{BAx}^2 + a_{BAy}^2}; \\ UGL5(a_{BAx}, a_{BAy}; \beta_{BA}); \\ \varepsilon &= \text{sign}(\beta_{BA} - \varphi_{AB}) \sqrt{a_{BA}^2 - \omega^4 l_{AB}^2}/l_{AB}. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

Выражения типа (16.4) и (16.5) в дальнейшем при анализе механизмов будем реализовать операторной функцией (см. гл. 5)

$$OMEGA(l, \varphi, v, \alpha; \Omega) = \text{sign}(\alpha - \varphi) |v|/l, \quad (16.6)$$

где  $l, \varphi$  — радиус-вектор точки и его направляющий угол.

В функции (16.6) заданы модуль вектора и его направляющий угол для кинематического параметра: скорости —  $v, \alpha$ ; ускорения —  $a, \beta$ ;  $\Omega$  — выходная переменная операторной функции, соответствующая значению угловой скорости или углового ускорения.

#### 16.4. Кинематика звеньев, образующих вращательную кинематическую пару

Во вращательной кинематической паре  $C$  (рис. 16.5) движение звена 2 можно представить как сумму двух движений — *переносного* вместе с точкой  $C$  звена 1 и *вращательного* — относительно точки  $C$ . Абсолютная скорость произвольной точки  $B$  на звене 2 будет

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC} \quad \text{при} \quad \bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}. \quad (16.7)$$

При этом

$$\begin{aligned} v_{CA} &= |\omega_1| \cdot l_{AC}; & UGL3(\varphi_1, \pi/2, \omega_1; \alpha_{CA}); \\ v_{BC} &= |\omega_2| \cdot l_{BC}; & UGL3(\varphi_2 + \pi, \pi/2, \omega_2; \alpha_{BC}). \end{aligned}$$

Как видно, для решения векторных уравнений (16.7) необходимо определить угловые скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  движения звеньев 1 и 2. Для этого рассмотрим движение точки  $C$  со звеньями 1 и 2. Из условий (16.7) получим  $\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}$ ;  $\bar{v}_C = \bar{v}_B - \bar{v}_{BC} = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}$  и,

следовательно,

$$\bar{v}_A + v_{CA} = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}. \quad (16.8)$$

Линии действия векторов относительных скоростей  $\bar{v}_{CA}$  и  $\bar{v}_{CB}$  известны. Они перпендикулярны соответственно отрезкам  $CA$  и  $CB$ , но направления векторов на линиях действия неизвестны. Примем предварительные значения направляющих углов векторов  $v_{CA}$  и

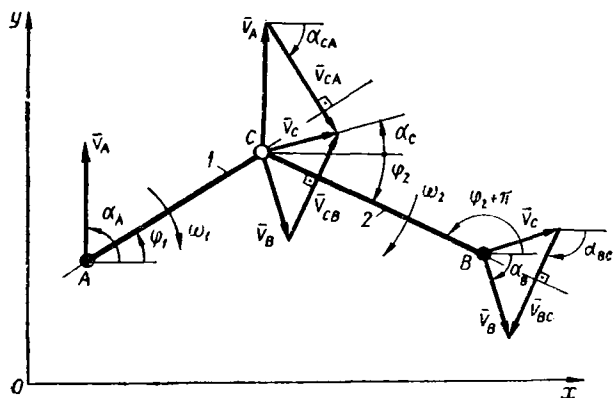


Рис. 16.5. Скорости звеньев, образующих вращательную кинематическую пару

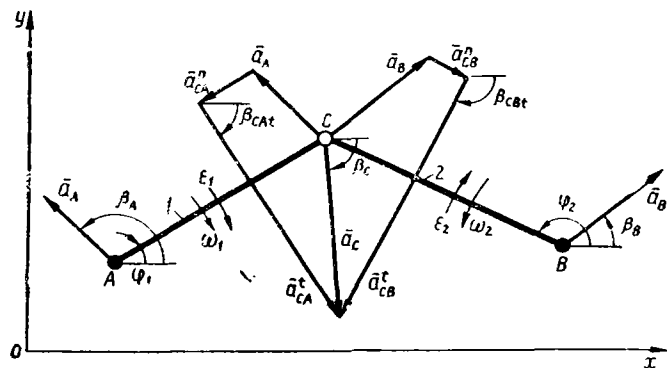


Рис. 16.6. Ускорения звеньев, образующих вращательную кинематическую пару

$\bar{v}_{CB}$ :  $\alpha_{CA} = \varphi_1 + \pi/2$ ,  $\alpha_{CB} = \varphi_2 + \pi/2$ , и сведем условие (16.8) к системе линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} v_A \cos \alpha_A + v_{CA} \cos \alpha_{CA} &= v_B \cos \alpha_B + v_{CB} \cos \alpha_{CB}; \\ v_A \sin \alpha_A + v_{CA} \sin \alpha_{CA} &= v_B \sin \alpha_B + v_{CB} \sin \alpha_{CB}. \end{aligned} \right\}$$

Приведем систему к каноническому виду

$$\left. \begin{aligned} v_{CA} \cos \alpha_{CA} - v_{CB} \cos \alpha_{CB} &= v_B \cos \alpha_B - v_A \cos \alpha_A; \\ v_{CA} \sin \alpha_{CA} - v_{CB} \sin \alpha_{CB} &= v_B \sin \alpha_B - v_A \sin \alpha_A. \end{aligned} \right\} \quad (16.9)$$

Запишем алгоритм вычисления векторов  $\bar{v}_{CA}$  и  $\bar{v}_{BA}$ :

$$A(2,2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{CA} & \cos \alpha_{CB} \\ \sin \alpha_{CA} & \sin \alpha_{CB} \end{vmatrix}; \quad C(2) = \begin{vmatrix} v_B \cos \alpha_B - v_A \cos \alpha_A \\ v_B \sin \alpha_B - v_A \sin \alpha_A \end{vmatrix}.$$



Тогда получим модули векторов  $\bar{v}_{CA}$ ,  $\bar{v}_{CB}$  через операторную функцию

$$SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); v_{CA}, \alpha_{CA}),$$

а истинные значения направляющих углов уточним, используя операторную функцию (см. гл. 5):

$$UGL4(\alpha_{CA}, \pi, v_{CA}; \alpha_{CA});$$

$$UGL4(\alpha_{CB}, \pi, v_{CB}; \alpha_{CB}).$$

Угловые скорости звеньев определим с помощью операторной функции (16.6):

$$OMEGA(l_{AC}, \varphi_1, |v_{CA}|, \alpha_{CA}; \omega_1);$$

$$OMEGA(l_{BC}, \varphi_2 + \pi, |v_{CB}|, \alpha_{CB}; \omega_2).$$

Аналогичным образом решается задача определения составляющих относительных ускорений точек  $C$  и угловых ускорений звеньев 1 и 2. Для звеньев 1 и 2 (рис. 16.6) получим

$$\bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^t = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t. \quad (16.10)$$

В уравнении (16.10) ускорения  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$  известны по величине и направлению, нормальные составляющие относительных ускорений будут:

$$a_{CA}^n = \omega_1^2 l_{AC}; \quad \beta_{CA}^n = \varphi_1 - \pi; \quad a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{CB}; \quad \beta_{CB}^n = \varphi_2 - \pi.$$

Приняв предварительно направляющие углы  $\beta_{CA}^t$  и  $\beta_{CB}^t$  векторов тангенциальных ускорений равными направляющим углам векторов соответствующих относительных скоростей ( $\beta_{CA}^t = \alpha_{CA}$  и  $\beta_{CB}^t = \alpha_{CB}$ ), сведем после преобразований условие (16.10) к канонической системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{CA}^t \cos \beta_{CA}^t - a_{CB}^t \cos \beta_{CB}^t &= a_B \cos \beta_B + \\ + a_{CB}^n \cos \beta_{CB}^n - a_{CA}^n \cos \beta_{CA}^n &- a_A \cos \beta_A; \\ a_{CA}^t \sin \beta_{CA}^t - a_{CB}^t \sin \beta_{CB}^t &= a_B \sin \beta_B + \\ + a_{CB}^n \sin \beta_{CB}^n - a_{CA}^n \sin \beta_{CA}^n &- a_A \sin \beta_A. \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Формируя массивы  $A(2, 2), C(2)$  операторной функции  $SISTEMA$  (см. гл. 5) из уравнений (16.11), получим модули векторов тангенциальных ускорений

$$SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); a_{CA}^t, a_{CB}^t),$$

а значения направляющих углов уточним с помощью операторных функций  $UGL4(\alpha_{CA}, \pi, a_{CA}^t; \beta_{CA}^t)$  и  $UGL4(\alpha_{CB}, \pi, a_{CB}^t; \beta_{CB}^t)$ .

Угловые ускорения звеньев определим, используя операторную функцию (16.6):

$$OMEGA(l_{AC}, \varphi_1, |a_{CA}^t|, \beta_{CA}^t; \varepsilon_1);$$

$$OMEGA(l_{CB}, \varphi_2, |a_{CB}^t|, \beta_{CB}^t; \varepsilon_2).$$

## 16.5. Кинематика звеньев, образующих поступательную кинематическую пару

Если звенья 1 и 2 образуют поступательную кинематическую пару (рис. 16.17), то скорости и ускорения произвольной точки  $B_2$  звена 2 можно найти, используя теорему о сложном составном движении. Скорость точки  $B_2$ , принадлежащей звену 2 и совпадающей в данный момент с точкой  $B_1$  на звене 1, будет

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{B_1} + \bar{v}_{B_2, B_1}.$$

Направление вектора  $\bar{v}_{B_2, B_1}$  совпадает с линией движения звена 1 относительно звена 2, вектор  $\bar{v}_{B_2}$  перпендикулярен линии  $P_v B$ , соединяющей точку  $B_2$  с мгновенным центром скоростей звена  $P_v$ , его направляющий угол будет  $\alpha_{B_2} = \varphi_{PB} + \pi/2$ . Тогда, сводя векторное уравнение к системе линейных уравнений, получим

$$\left. \begin{aligned} v_{B_2} \cos \alpha_{B_2} - v_{B_2, B_1} \cos \varphi_1 &= v_{B_1} \cos \alpha_{B_1}; \\ v_{B_2} \sin \alpha_{B_2} - v_{B_2, B_1} \sin \varphi_1 &= v_{B_1} \sin \alpha_{B_1}. \end{aligned} \right\}$$

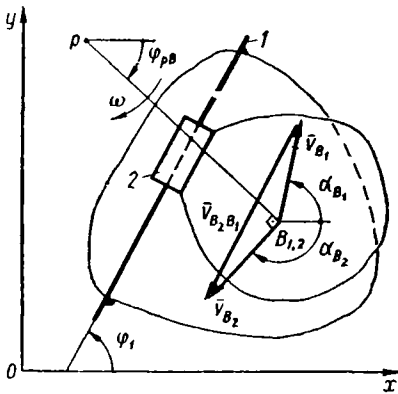


Рис. 16.7. Скорости звеньев, образующих поступательную кинематическую пару

Модули векторов  $\bar{v}_{B_2}$  и  $\bar{v}_{B_2, B_1}$ , получим, обратившись к операторной функции

$$SISTEMA(2, A(2, 2), C(2);$$

$$v_{B_2}, v_{B_2, B_1}).$$

Направляющие углы этих векторов уточним через операторные функции

$$UGL4(\varphi_{P_v B} + \pi/2, \pi, v_{B_2}; \alpha_{B_2});$$

$$UGL4(\varphi_1, \pi, v_{B_2, B_1}; \alpha_{B_2, B_1}).$$

Угловая скорость звена 2 определится через операторную функцию

$$OMEGA(P_v B, \varphi_{PB}, v_{B_2}, \alpha_{B_2}; \omega_2).$$

Ускорение точки  $B_2$  относительно точки  $B_1$  (рис. 16.8, а) определится по теореме о сложном составном движении  $\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_1} + \bar{a}_{B_2, B_1}^k + \bar{a}_{B_2, B_1}^t$ , а относительно мгновенного центра ускорений  $P_a$  по теореме о сложном движении;  $\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_2, P}^n + \bar{a}_{B_2, P}^t$ . Тогда (б)

$$\bar{a}_{B_2, P}^n + \bar{a}_{B_2, P}^t = \bar{a}_{B_1} + \bar{a}_{B_2, B_1}^k + \bar{a}_{B_2, B_1}^t. \quad (16.12)$$

В выражении (16.12) вектор  $\bar{a}_{B_1}$  задан,  $\bar{a}_{B_2, P}^n = \omega^2 l_{P_a B_2}$  и  $\beta_{B_2, P_a}^n = \varphi_{P_a B} + \pi$ .

Вектор кориолисова ускорения  $\bar{a}_{B_2, B_1}^k$ , по величине и направлению определится из условий

$$\begin{aligned} a_{B_2, B_1}^k &= 2|\omega|v_{B_2, B_1}; \\ UGL3(\alpha_{B_2, B_1}, \pi/2, \omega; \beta_{B_2, B_1}). \end{aligned}$$

Принимая предварительные направления  $\bar{a}_{B_2, B_1}^r$  и  $\bar{a}_{B_2, P_a}^t$  на линиях действия такими же, как и у векторов скоростей  $\bar{v}_{B_2, B_1}$  и  $\bar{v}_{B_2}$ , получим для условия (16.12):

$$\begin{aligned} a_{B_2, P}^t \cos \alpha_{B_2} - a_{B_2, B_1}^r \cos \alpha_{B_2, B_1} &= a_{B_1} \cos \alpha_{B_1} + \\ &+ a_{B_2, B_1}^k \cos \beta_{B_1, B_2, k} - a_{B_2, P}^n \cos \beta_{B_2, P, n}, \\ a_{B_2, P}^t \sin \alpha_{B_2} - a_{B_2, B_1}^r \sin \alpha_{B_2, B_1} &= a_{B_1} \sin \alpha_{B_1} + \\ &+ a_{B_2, B_1}^k \sin \beta_{B_2, B_1, k} - a_{B_2, P}^n \sin \beta_{B_2, P, n}. \end{aligned}$$

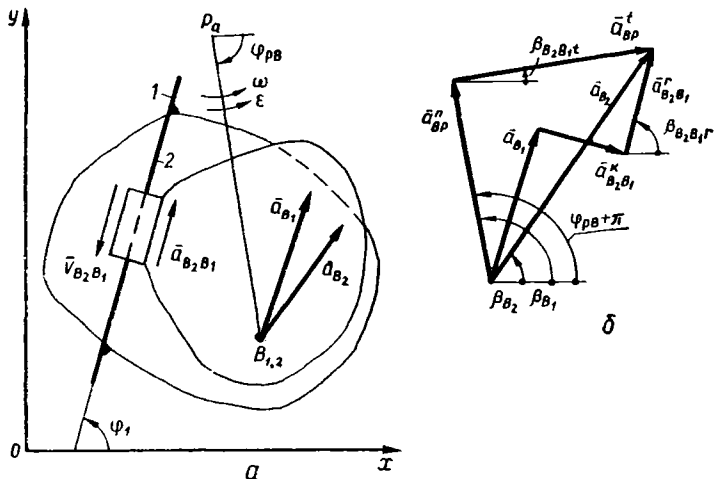


Рис. 16.8. Ускорения звеньев, образующих поступательную кинематическую пару

Модули векторов  $\bar{a}_{B_2, P}^t$  и  $\bar{a}_{B_2, B_1}^r$  получим, обратившись к операторной функции

$$\text{СИСТЕМА}(2, A(2, 2), C(2); a_{B_2, P}^t, a_{B_2, B_1}^r).$$

Направляющие углы этих векторов уточним через операторные функции

$$\text{UGL4}(\alpha_{B_2}, \pi, a_{B_2, P}^t; \beta_{B_2, P, t});$$

$$\text{UGL4}(\alpha_{B_2, B_1}, \pi, a_{B_2, B_1}^r; \beta_{B_2, B_1, r}).$$

Угловое ускорение звена 2 определится операторной функцией

$$\text{ОМЕГА}(PB_2, \varphi_{PB_2}, |a_{B_2, P}^t|, \beta_{B_2, P, t}; \varepsilon_2).$$

## 16.6. Алгоритмы кинематического расчета структурных групп с внутренней вращательной парой

Если звенья структурной группы соединяются вращательной парой, то для кинематических расчетов необходимо знать координаты центра этой пары или угловые координаты звеньев. Структурная

группа первого вида (рис. 16.9, а) присоединяется к кинематической цепи механизма вращательными парами, для которых известны координаты присоединительных точек  $A(x_A, y_A)$  и  $C(x_C, y_C)$ , векторы скоростей  $\vec{v}_A, \vec{v}_C$  и ускорений  $\vec{a}_A, \vec{a}_C$ . Из двух возможных положений (второе показано тонкими линиями) вариант определяется соответствующим условием сборки  $q$  (см. гл. 7).

Координаты точки  $B$  — центра внутренней вращательной пары — определяются из следующих геометрических соотношений. Расстояние между точками  $A$  и  $C$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}; \quad (16.13)$$

угол наклона отрезка  $AC$  к оси абсцисс

$$\varphi_{AC} = \arctg((y_C - y_A)/(x_C - x_A)).$$

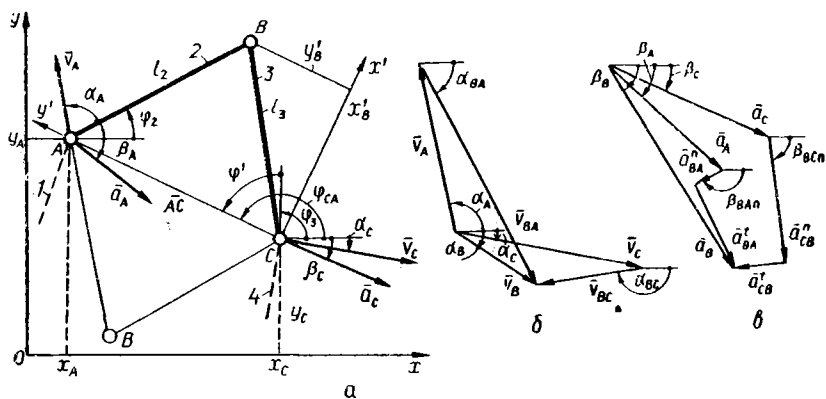


Рис. 16.9. Кинематика звеньев структурной группы первого вида

Поместим в точку  $C$  начало правой координатной системы  $x'Cy'$ , ось ординат которой направим по линии  $CA$ . Угол поворота координатной системы  $x'Cy'$  относительно системы  $xOy$  будет:  $\varphi' = \varphi_{CA} - \pi/2$ . Угол  $\varphi_{CA}$ , определяющий положение оси  $y'$  относительно оси  $Ox$ , найдем с помощью операторной функции (см. гл. 5)  $UGL1(y_C, y_A, \varphi_{AC}; \varphi_{CA})$ .

Из  $\triangle ABC$  следует, что  $\sphericalangle BAC = \arccos((l_2^2 + AC^2 - l_3^2)/2l_2 \times AC)$ . Тогда координаты точки  $B$  в системе  $x'Cy'$  будут

$$\left. \begin{aligned} x_B &= \text{sign}(q) l_2 \sin \sphericalangle BAC; \\ y_B &= AC - l_2 \cos \sphericalangle BAC. \end{aligned} \right\}$$

Используя формулы перехода от одной координатной системы к другой (см. гл. 5), получим координаты точки  $B$  в исходной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} x_B &= x_B \cos \varphi' - y_B \sin \varphi' + x_G; \\ y_B &= x_B \sin \varphi' + y_B \cos \varphi' + y_G, \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

что дает возможность определить направляющие углы звеньев 2 и 3 с помощью операторных функций:

$$UGL2(x_A, y_A, x_B, y_B; \varphi_2); \quad (16.15)$$

$$UGL2(x_C, y_C, x_B, y_B; \varphi_3). \quad (16.16)$$

Параметры линейных и угловых скоростей звеньев определяются из плана скоростей (рис. 16.9, б) решением уравнения

$$\bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC},$$

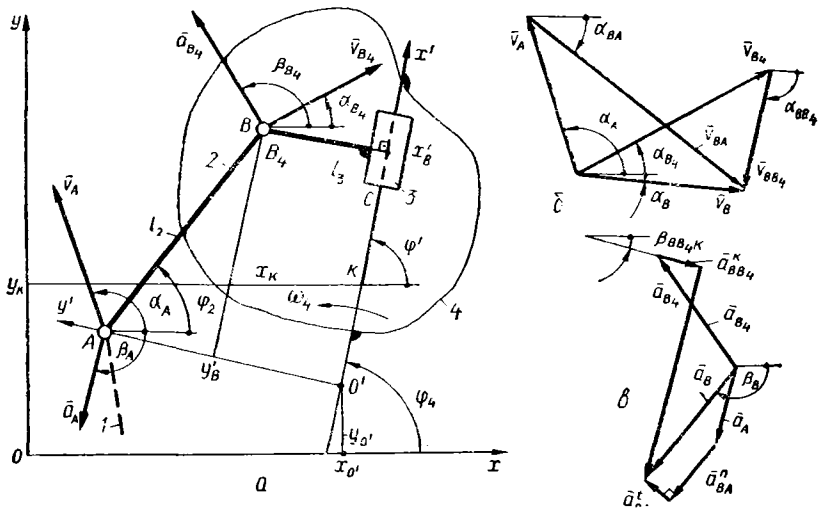


Рис. 16.10. Кинематика звеньев структурной группы второго вида

а параметры линейных и угловых ускорений звеньев из плана ускорения (б) — решением уравнения

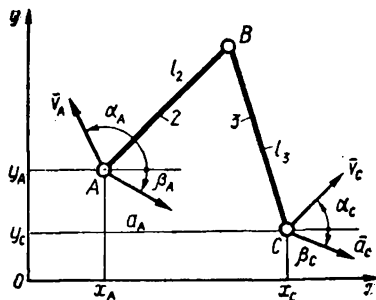
$$\bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^t.$$

Независимо от формы и размеров звеньев 2 и 3 алгоритм кинематического расчета структурной группы не изменяется. Он описывается операторной функцией, обозначенной *KNMA1* (табл. 16.1). Входными параметрами *KNMA1*, по которым определяются выходные параметры функции, будут  $x_A, y_A, x_C, y_C, l_2, l_3, v_A, \alpha_A, v_C, \alpha_C, a_A, \beta_A, a_C, \beta_C, q$  в приведенной последовательности. Нумерация выходных параметров, приведенная в таблице, должна сохраняться в обращении к функции.

Структурная группа второго вида (рис. 16.10, а) присоединяется к кинематической цепи механизма вращательной парой *A*, для которой известны координаты ее центра ( $x_A, y_A$ ), и поступательной парой *C*, для которой известны угол  $\varphi_4$  наклона направляющей 4 и координаты одной из её точек *K* ( $x_K, y_K$ ). Условие сборки *q* определяет вариант присоединения группы к механизму.

Для определения координат центра вращательной пары *B* воспользуемся вспомогательной системой координат  $x'O'y'$ , ось

Таблица 16.1. Алгоритм кинематического расчета звеньев структурной группы 2-го класса первого вида



$$1. AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2},$$

$$2. \varphi_{AC} = \text{arctg}((y_C - y_A)/(x_C - x_A)).$$

$$3. \varphi = UGL1(y_C, y_A, \varphi_{AC}; \varphi_{CA}) - \pi/2.$$

$$4. \rightarrow BAC = \arccos((l_2^2 + AC^2 - l_3^2)/2l_2AC).$$

$$5. \left. \begin{aligned} x_B &= \text{sign}(q) l_2 \sin \rightarrow BAC; \\ y_B &= AC - l_2 \cos \rightarrow BAC. \end{aligned} \right\}$$

$$12. UGL3(\varphi_2, \pi/2, v_{BA}; \alpha_{BA}).$$

$$13. UGL3(\varphi_3, \pi/2, v_{BC}; \alpha_{BC}).$$

$$14. OMEGA(l_2, \varphi_2, v_{BA}, \alpha_{BA}; \omega_2).$$

$$15. OMEGA(l_3, \varphi_3, v_{BC}, \alpha_{BC}; \omega_3).$$

$$16. SMVKT(v_A, \alpha_A, v_{BA}, \alpha_{BA}; v_A, \alpha_B).$$

$$17. a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2; \quad a_{BC}^n = \omega_3^2 l_3.$$

$$18. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{BA} & -\cos \alpha_{BC} \\ \sin \alpha_{BA} & -\sin \alpha_{BC} \end{vmatrix}.$$

$$19. C(2) = \begin{vmatrix} a_C \cos \beta_C + a_{BC}^n \cos(\varphi_3 + \pi) - \\ -a_A \cos \beta_A - a_{BA}^n \cos(\varphi_2 + \pi); \\ a_C \sin \beta_C + a_{BC}^n \sin(\varphi_3 + \pi) - \\ -a_A \sin \beta_A - a_{BA}^n \sin(\varphi_2 + \pi). \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{cases} x_B = x'_B \cos \varphi' - y'_B \sin \varphi' + x_C; \\ y_B = x'_B \sin \varphi' + y'_B \cos \varphi' + y_C. \end{cases}$$

7. UGL2 ( $x_A, y_A, x_B, y_B; \varphi_2$ ).

8. UGL2 ( $x_C, y_C, x_B, y_B; \varphi_3$ ).

$$9. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_2 + \pi/2) & -\cos(\varphi_3 + \pi/2) \\ \sin(\varphi_2 + \pi/2) & -\sin(\varphi_3 + \pi/2) \end{vmatrix}.$$

$$10. C(2) = \begin{vmatrix} v_G \cos \alpha_C - v_A \cos \alpha_A \\ v_C \sin \alpha_C - v_A \sin \alpha_A \end{vmatrix}.$$

11. SISTEMA (2, A(2, 2), C(2);  $v_{BA}, v_{BC}$ ).

20. SISTEMA (2, A(2, 2), C(2);  $a'_{BA}, a'_{BC}$ ).

21. UGL4 ( $\alpha_{BA}, \pi, a'_{BA}, \beta_{BAI}$ ).

22. UGL4 ( $\alpha_{BC}, \pi, a'_{BC}, \beta_{BCI}$ ).

23. OMEGA ( $l_2, \varphi_2, a'_{BA}, \beta_{BAI}; \varepsilon_2$ ).

24. OMEGA ( $l_3; \varphi_3, a'_{BC}, \beta_{BCI}; \varepsilon_3$ ).

25. SMVKT ( $\alpha_A, \beta_A, a^n_{BA}, \varphi_2 + \pi; a, \beta$ ).

26. SMVKT ( $a, \beta, a'_{BA}, \beta_{BAI}; a_B, \beta_B$ ).

KNMA1 ( $x_A, y_A, x_C, y_C, l_2, l_3, v_A, \alpha_A, v_C, \alpha_C, a_A, \beta_A, a_C, \beta_C, q; x_B, y_B, \varphi_2, \varphi_3, v_{BA}, \alpha_{BA}, v_{BC}, \alpha_{BC}, \beta, \alpha_B, \omega_2$ ,

$\omega_3, a^n_{BA}, a^n_{BC}, a'_{BA}, \beta_{BAI}, a'_{BC}, \beta_{BCI}, a_B, \beta_B, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ).

абсцисс которой направим вдоль оси направляющей 4, а ось ординат — таким образом, чтобы она проходила через точку  $A$ . Координаты точки  $O'$  — начала вспомогательной координатной системы — определим как точку пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых, угловые коэффициенты которых  $k_1$  и  $k_2$ , как известно, связаны зависимостью  $k_1 k_2 = -1$ . Для оси направляющей из исходных данных имеем  $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_4$ , тогда  $k_2 = -1/\operatorname{tg} \varphi_4$ . Решив совместно уравнения прямых с указанными угловыми коэффициентами, получим координаты точки  $O'$

$$\begin{aligned}x_{O'} &= ((x_A + k_1^2 x_k - k_1(y_k - y_A))/(k_1^2 + 1)); \\y_{O'} &= ((y_k + k_1^2 y_A) - k_1(x_k - x_A))/(k_1^2 + 1).\end{aligned}$$

Угол поворота осей координатной системы  $x'O'y'$  относительно осей исходной системы  $xOy$  определим из предположения, что точка  $A$  всегда находится на положительном направлении оси ординат  $O'y'$ :

$$\varphi' = \varphi_{O'y'} - \pi/2.$$

Угол  $\varphi_{O'y'}$  найдем с помощью операторной функции

$$UGL1(y_{O'}, y_A, (\varphi_4 - \pi/2), \varphi_{O'y'}).$$

Расстояние между точками  $A$  и  $O'$  будет

$$AO' = \sqrt{(x_A - x_{O'})^2 + (y_A - y_{O'})^2}.$$

Координаты точки  $B$  в системе координат  $x'O'y'$ :

$$y_B = l_3 \sin(\theta + (\varphi' - \varphi_4));$$

$$x_B = ql_2 \sin \rightarrow BAO' = ql_2 \sin(\arccos((AO' - y_B)/l_2 + (\varphi' - \varphi_4))),$$

где  $q$  — условие сборки звеньев группы.

Координаты точки  $B$  в исходной координатной системе будут

$$\left. \begin{aligned}x_B &= x_B \cos \varphi' - y_B \sin \varphi' + x_{O'}; \\y_B &= x_B \sin \varphi' + y_B \cos \varphi' + y_{O'},\end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

откуда направляющий угол звена 2 определим с помощью операторной функции

$$UGL2(x_A, y_A, x_B, y_B; \varphi_2). \quad (16.18)$$

Если на звене 4 с направляющей выбрать точку  $B_4$  ( $\theta$ ), совпадающую с центром средней вращательной пары, то параметры линейных и угловых скоростей определяются решением уравнения

$$\bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_{B_4} + \bar{v}_{BB_4},$$

а параметры линейных и угловых ускорений из плана ускорений ( $\theta$ ) — уравнения

$$\bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}_{BB_4}^k + \bar{a}_{BB_4}^t.$$

Алгоритм кинематического расчета группы второго вида описывается операторной функцией  $KNMA2$  (табл.16.2), входными



параметрами которой являются  $x_A, y_A, x_C, y_C, \varphi_4, l_2, l_3, v_A, \alpha_A, v_B, \alpha_B, \omega_4, \beta_A, \beta_B, \beta_C, e_4, q$ .

В структурной группе четвертого вида (рис. 16.11, а) координаты точки  $B$  можно определить как для точки пересечения вспомогательных прямых, параллельных осям направляющих движения звеньев 2 и 3. Если положения направляющих на плоскости задать координатами точек  $A$  и  $C$  ( $x_A, y_A, x_C, y_C$ ), через которые проходят оси направляющих, и углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_4$ , которые они образуют с осью

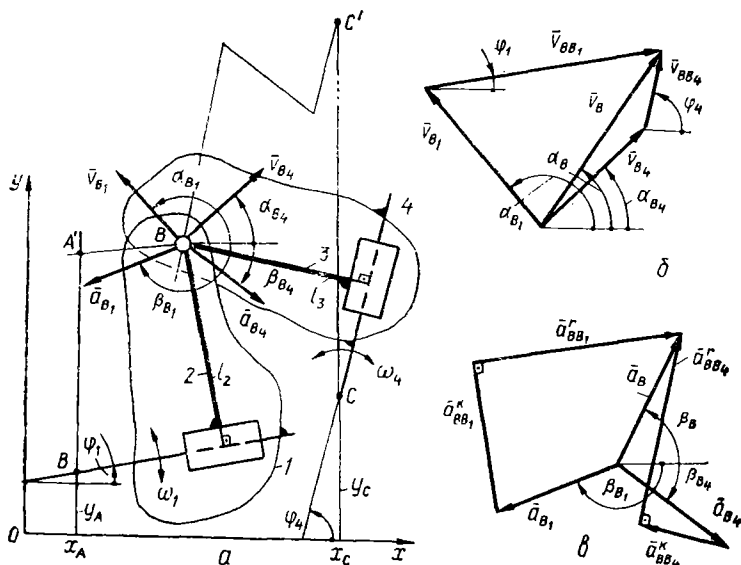


Рис. 16.11. Кинематика звеньев структурной группы четвертого вида

абсцисс координатной системы, то при угловых коэффициентах этих прямых, проходящих через точки  $A'$  и  $C'$ ,

$$\left. \begin{aligned} y - y_A &= k_1(x - x_{A'}); \\ y - y_C &= k_2(x - x_{C'}). \end{aligned} \right\} \quad (16.19)$$

Из геометрических соотношений координаты точек  $A'$  и  $C'$

$$\begin{aligned} x_{A'} &= x_A; & y_{A'} &= y_A + l_2/\cos \varphi_1; \\ x_{C'} &= x_C; & y_{C'} &= y_C + l_3/\cos \varphi_4. \end{aligned}$$

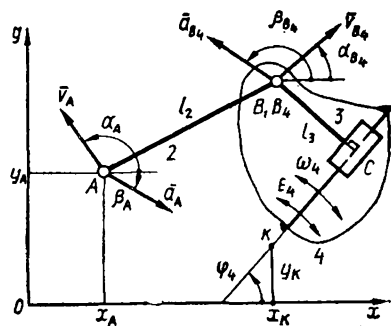
После подстановки этих значений в уравнения (16.19), получим

$$\left. \begin{aligned} y - k_1x &= y_A + l_2/\cos \varphi_1 - k_1x_A; \\ y - k_2x &= y_C + l_3/\cos \varphi_4 - k_2x_C. \end{aligned} \right\} \quad (16.20)$$

Координаты точки  $B$  определяются решением системы уравнений (16.20), реализуемой операторной функцией

$$\text{СИСТЕМА } (2, A(2, 2), C(2); y_B, x_B).$$

Таблица 16.2. Алгоритм кинематического расчета звеньев структурной группы 2-го класса второго вида



$$1. k_1 = \operatorname{tg} \varphi_4.$$

$$2. \left. \begin{aligned} x_{O'} &= ((x_A + k_1^2 x_K) - k_1 (y_K - y_A)) / (k_1^2 + 1); \\ y_{O'} &= ((y_K + k_1^2 y_A) - k_1 (x_K - x_A)) / (k_1^2 + 1). \end{aligned} \right\}$$

$$3. \varphi' = UGL1(y_{O'}, y_A, (\varphi_4 - \pi/2); \varphi_{O'y}) - \pi/2.$$

$$4. AO' = \sqrt{(x_A - x_{O'})^2 + (y_A - y_{O'})^2}.$$

$$5. y'_B = l_3 \sin(\varphi' - \varphi_4).$$

$$11. \text{СИСТЕМА } (2, A(2, 2), C(2); v_{BA}, v_{BB_4}).$$

$$12. UGL3(\varphi_2, \pi/2, v_{BA}; \alpha_{BA}).$$

$$13. UGL4(\varphi_4, \pi, v_{BB_4}; \alpha_{BB_4}).$$

$$14. \text{ОМЕГА}(l_2, \varphi_2, v_{BA}, \alpha_{BA}; \omega_2).$$

$$15. \text{СМВКТ}(v_{B_4}, \alpha_{B_4}, v_{BB_4}, \alpha_{BB_4}; v_B, \alpha_B).$$

$$16. a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2.$$

$$17. a_{BB_4}^k = 2 |\omega_4| v_{BB_4}.$$

$$18. UGL3(\alpha_{BB_4}, \pi/2, \omega_4; \beta_{BB_4, k}).$$

$$19. A(2, 2) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{BA} & -\cos \alpha_{BB_4} \\ \sin \alpha_{BA} & -\sin \alpha_{BB_4} \end{bmatrix}.$$

$$6. \dot{x}_B = ql_2 \sin(\arccos((AO' - y'_B)/l_2) + (\varphi' - \varphi_2)).$$

$$7. \left. \begin{aligned} x_B &= \dot{x}_B \cos \varphi' - \dot{y}_B \sin \varphi' + x_C; \\ y_B &= \dot{x}_B \sin \varphi' + \dot{y}_B \cos \varphi' + y_C. \end{aligned} \right\}$$

$$8. UGL2(x_A, y_A, x_B, y_B; \varphi_2).$$

$$9. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_2 + \pi), & -\cos(\varphi_2 + \pi/2) \\ \sin(\varphi_2 + \pi), & -\sin(\varphi_2 + \pi/2) \end{vmatrix}.$$

$$10. C(2) = \begin{vmatrix} v_{B_1} \cos \alpha_{B_1} - v_A \cos \alpha_A \\ v_{B_1} \sin \alpha_{B_1} - v_A \sin \alpha_A \end{vmatrix}.$$

$$20. C(2) = \begin{vmatrix} a_{B_1} \cos \alpha_{B_1} + a_{BB_1k}^k \cos \beta_{BB_1k} - \\ -a_A \cos \beta_A - a_{BA}^n \cos(\varphi_2 + \pi); \\ a_{B_1} \sin \alpha_{B_1} + a_{BB_1k}^k \sin \beta_{BB_1k} - \\ -a_A \sin \beta_A - a_{BA}^n \sin(\varphi_2 + \pi). \end{vmatrix}$$

$$21. \text{SISTEMA}(2, A(2, 2), C(2); a'_{BA}, a'_{BB_1}).$$

$$22. UGL4(\alpha_{BA}, \pi, a'_{BA}; \beta_{BA1}).$$

$$23. UGL4(\alpha_{BB_1}, \pi, a'_{BB_1}; \beta_{BB_1r}).$$

$$24. SMVKT(a_{B_1}, \beta_{B_1}, a_{BB_1k}^k, \beta_{BB_1k}; a, \beta).$$

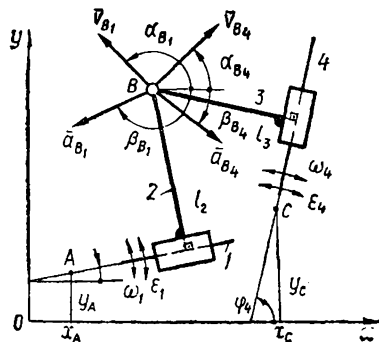
$$25. SMVKT(a, \beta, a'_{BB_1}, \beta_{BB_1r}; a_B, \beta_B).$$

$$26. \text{OMEGA}(l_2, \varphi_2, a'_{BA}, \beta_{BA1}; \varepsilon_2).$$

$$KNMA2(x_A, y_A, x_k, y_k, \varphi_4, l_2, l_3, v_A, \alpha_A, v_{B_1}, \alpha_{B_1}, \omega_4, a_A, \beta_A, a_{B_1}, \beta_{B_1}, q; x_B, y_B, \varphi_2, v_{BA}, \alpha_{BA}, v_{BB_1}, \alpha_{BB_1}, v_B,$$

$$\alpha_B, \omega_2, a_{BA}^n, a_{BB_1k}^k, \beta_{BB_1k}, a'_{BA}, \beta_{BA1}, a'_{BB_1}, \beta_{BB_1r}, a_B, \beta_B, \varepsilon_2).$$

Таблица 16.3. Алгоритм кинематического расчета звеньев структурной группы 2-го класса четвертого вида



$$1. A(2, 2) = \begin{vmatrix} 1, & -\operatorname{tg} \varphi_1 \\ 1, & -\operatorname{tg} \varphi_4 \end{vmatrix}.$$

$$2. C(2) = \begin{vmatrix} y_A + l_2 / \cos \varphi_1 - x_A \operatorname{tg} \varphi_1 \\ y_C + l_3 / \cos \varphi_4 - x_C \operatorname{tg} \varphi_4 \end{vmatrix}.$$

3. СИСТЕМА (2, A(2, 2), C(2);  $x_B, y_B$ ).

$$4. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1, & \cos \varphi_4 \\ \sin \varphi_1, & \sin \varphi_4 \end{vmatrix}.$$

9. SMVKT ( $v_{B_1}, \alpha_{B_1}, v_{BB_1}, \alpha_{BB_1}; v_B, \alpha_B$ ).

$$10. a_{BB_1}^k = 2 |\omega_1| v_{BB_1}.$$

$$11. a_{BB_4}^k = 2 |\omega_4| v_{BB_4}.$$

12. UGL3 ( $\alpha_{BB_1}, \pi/2, \omega_1; \beta_{BB_1k}$ ).

13. UGL3 ( $\alpha_{BB_4}, \pi/2, \omega_4; \beta_{BB_4k}$ ).

$$14. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{BB_1}, & -\cos \alpha_{BB_4} \\ \sin \alpha_{BB_1}, & -\sin \alpha_{BB_4} \end{vmatrix}.$$

$$15. C(2) = \begin{vmatrix} a_{B_4} \cos \beta_{B_4} + a_{BB_4}^k \cos \beta_{BB_4k} - \\ -a_{B_1} \cos \beta_{B_1} - a_{BB_1}^k \cos \beta_{BB_1k}; \\ a_{B_4} \sin \beta_{B_4} + a_{BB_4}^k \sin \beta_{BB_4k} - \\ -a_{B_1} \sin \beta_{B_1} + a_{BB_1}^k \sin \beta_{BB_1k}; \end{vmatrix}.$$

$$5. C(2) = \begin{vmatrix} v_{B_4} \cos \alpha_{B_4} - v_{B_1} \cos \alpha_{B_1} \\ v_{B_4} \sin \alpha_{B_4} - v_{B_1} \sin \alpha_{B_1} \end{vmatrix}.$$

6. SISTEMA (2, A (2, 2), C (2);  $v_{BB_1}, v_{BB_4}$ ).

7. UGL4 ( $\varphi_1, \pi, v_{BB_1}; \alpha_{BB_1}$ ).

8. UGL4 ( $\varphi_4, \pi, v_{BB_4}; \alpha_{BB_4}$ ).

16. SISTEMA (2, A (2, 2), C (2);  $a'_{BB_1}, a'_{BB_4}$ ).

17. UGL4 ( $\alpha_{BB_1}, \pi, a'_{BB_1}; \beta_{BB_1,r}$ ).

18. UGL4 ( $\alpha_{BB_4}, \pi, a'_{BB_4}; \beta_{BB_4,r}$ ).

19. SMVKT ( $a_{B_1}, \beta_{B_1}, a^k_{BB_1}, \beta_{BB_1,k}; a, \beta$ ).

20. SMVKT ( $a, \beta, a'_{BB_1}, \beta_{BB_1,r}; a_B, \beta_B$ ).

KNMA4 ( $x_A, y_A, \varphi_1, x_C, y_C, \varphi_4, v_{B_1}, \alpha_{B_1}, \omega_1, v_{B_4}, \alpha_{B_4}, \omega_4, a_{B_1}, \beta_{B_1}, \alpha_{B_4}, \beta_{B_4}, l_2, l_3; x_B, y_B, v_{BB_1}, \alpha_{BB_1}, v_{BB_4}, \alpha_{BB_4},$

$v_B, \alpha_B, a^k_{BB_1}, \beta_{BB_1,k}, a^k_{BB_4}, \beta_{BB_4,k}, a'_{BB_1}, \beta_{BB_1,r}, a'_{BB_4}, \beta_{BB_4,r}, a_B, \beta_B$ ).

Параметры линейных и угловых скоростей звеньев определяются из плана скоростей (б) решением уравнения

$$\bar{v}_B + \bar{v}_{BB_1} = \bar{v}_{B_1} + \bar{v}_{BB_1}$$

а параметры линейных и угловых ускорений из плана ускорений — уравнением

$$\bar{a}_B + \bar{a}_{BB_1}^k + \bar{a}'_{BB_1} = \bar{a}_{B_1} + \bar{a}_{BB_1}^k + \bar{a}'_{BB_1}$$

Операторную функцию кинематического расчета структурной группы четвертого вида, алгоритм которой приведен в табл. 16.3, обозначим  $KNMA4$ ; входные параметры ее —  $x_A, y_A, \varphi_1, x_C, y_C, \varphi_4, v_{B_1}, \alpha_{B_1}, \omega_1, v_{B_4}, \alpha_{B_4}, \omega_4, a_{B_1}, \beta_{B_1}, \varepsilon_1, a_{B_4}, \beta_{B_4}, \varepsilon_4, l_2, l_3$ .

### 16.7. Алгоритмы кинематического расчета структурных групп с внутренней поступательной парой

Для группы третьего вида (рис. 16.12, а) будут заданы координаты центров вращательных пар  $A$  и  $C$  ( $x_A, y_A, x_C, y_C$ ), линейные и угловые размеры звеньев 2 и 3, а также условие сборки звеньев группы. Для определения линейных и угловых координат звеньев используют точку  $B'$  пересечения двух прямых, одна из которых проходит

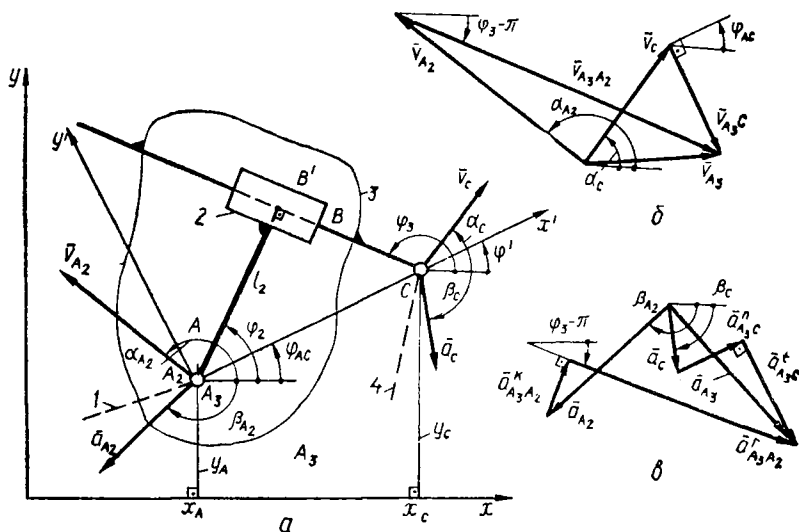


Рис. 16.12. Кинематика звеньев структурной группы третьего вида

параллельно направляющей через центр присоединительной кинематической пары звена, имеющего направляющую, а вторая — через центр присоединительной пары другого звена перпендикулярно направляющей. Воспользуемся вспомогательной системой координат  $x'Ay'$ , начало которой поместим в точку  $A$ , а ось абсцисс направим по линии, соединяющей центры  $A$  и  $C$  так, чтобы точка  $C$  всегда лежала на ее положительном направлении. Угол  $\varphi'$  поворота

координатных осей  $x'Ay'$  определим с помощью операторной функции

$$UGL1(y_A, y_C, \varphi_{AC}; \varphi'),$$

в которой угол  $\varphi_{AC} = \arctg((y_C - y_A)/(x_C - x_A))$ .

Во вспомогательной системе определим координаты точки звена 2, например точки  $B'$  пересечения перпендикуляра  $AB'$  из точки

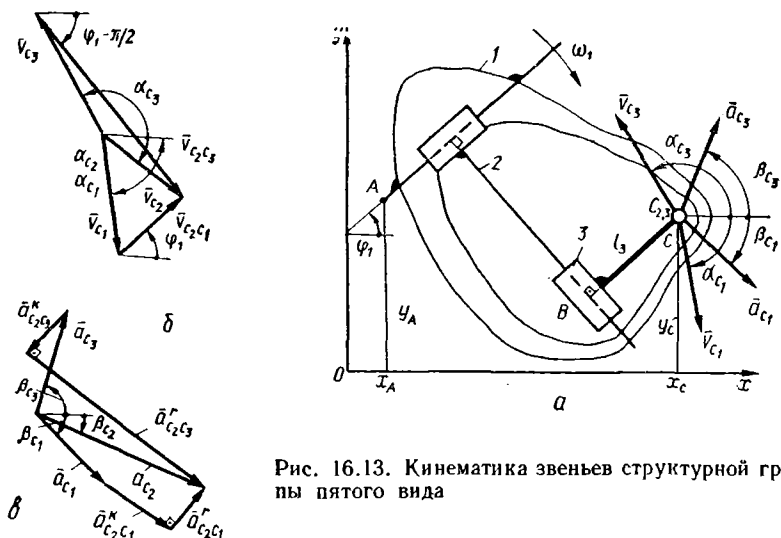


Рис. 16.13. Кинематика звеньев структурной группы пятого вида

$A$  на линию, параллельную направляющей звена 3. Из  $\Delta AB'C$  получим

$$\Rightarrow B'CA = \arcsin(l_2/l_{AC});$$

$$\Rightarrow B'AC = \pi/2 - \arcsin(l_2/l_{AC}),$$

где

$$l_{AC} = \sqrt{(y_A - y_C)^2 + (x_A - x_C)^2}.$$

Тогда

$$x_{B'} = l_2 \cos \Rightarrow BAC;$$

$$y_{B'} = ql_2 \sin \Rightarrow BAC;$$

координаты точки  $B$  в исходной системе координат будут

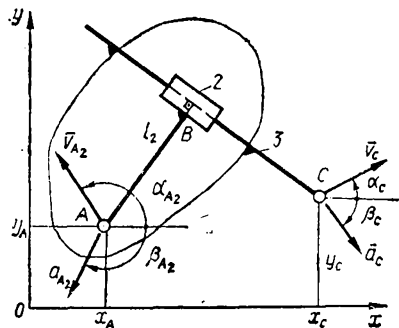
$$\left. \begin{aligned} x_{B'} &= x_B \cos \varphi' - y_B \sin \varphi' + x_A; \\ y_{B'} &= y_B \sin \varphi' + x_B \cos \varphi' + y_A. \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

Направляющий угол  $\varphi_3$  звена 3 определим с помощью операторной функции

$$UGL2(x_C, y_C, x_B, y_B; \varphi_3).$$

Если на звене 3 выбрать точку  $A_3$ , геометрически совпадающей с центром вращательной пары  $A$ , то параметры линейных и угловых скоростей звеньев этой группы определяются из решения вектор-

Таблица 16.4. Алгоритм кинематического расчета звеньев структурной группы 2-го класса третьего вида



$$1. \varphi = \arctg((y_C - y_A)/(x_C - x_A)).$$

$$2. UGL1(y_A, y_C, \varphi; \varphi').$$

$$3. AC = \sqrt{(y_A - y_C)^2 + (x_A - x_C)^2}.$$

$$4. \sphericalangle BAC = \pi/2 - \arcsin(l_2/AC).$$

$$5. x_B = l_2 \cos \sphericalangle BAC; \quad y_B = l_2 \sin \sphericalangle BAC.$$

$$6. \left. \begin{aligned} x_B &= x'_B \cos \varphi' - y'_B \sin \varphi' + x_A; \\ y_B &= x'_B \sin \varphi' + y'_B \cos \varphi' + y_A. \end{aligned} \right\}$$

$$12. UGL3(\varphi', \pi/2, v_{A_2C}; \alpha_{A_2C}).$$

$$13. OMEGA(AC, \varphi', v_{A_2C}, \alpha_{A_2C}; \omega_3).$$

$$14. SMVKT(v_C, \alpha_C, v_{A_2C}, \alpha_{A_2C}; v_A, \alpha_A).$$

$$15. a_{A_1A_2}^k = 2|\omega_3|v_{A_2A_1}; \quad a_{A_2C}^n = \omega_3^2 AC.$$

$$16. UGL3(\alpha_{A_1A_2}, \pi/2, \omega_3; \beta_{A_1A_2k}).$$

$$17. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{A_1A_2}, & -\cos((\varphi' + \pi) + \pi/2) \\ \sin \alpha_{A_1A_2}, & -\sin((\varphi' + \pi) + \pi/2) \end{vmatrix}.$$

$$18. C(2) = \begin{vmatrix} a_C \cos \beta_C + a_{A_2C}^n \cos \varphi' - \\ -a_{A_1A_2}^k \cos \beta_{A_1A_2k} - a_{A_2} \cos \beta_{A_2}; \\ a_C \sin \beta_C + a_{A_2C}^n \sin \varphi' - \\ -a_{A_1A_2}^k \sin \beta_{A_1A_2k} - a_{A_2} \sin \beta_{A_2} \end{vmatrix}.$$



7.  $UGL2(x_C, y_C, x_B, y_B; \varphi_3)$ .

$$8. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_3, & -\cos((\varphi' + \pi) + \pi/2) \\ \sin \varphi_3, & -\sin((\varphi' + \pi) + \pi/2) \end{vmatrix}.$$

$$9. C(2) = \begin{vmatrix} v_C \cos \alpha_C - v_{A_2} \cos \alpha_{A_2} \\ v_C \sin \alpha_C - v_{A_2} \sin \alpha_{A_2} \end{vmatrix}.$$

10.  $STSTEMA(2, A(2, 2), C(2); v_{A_3A_2}, v_{A_3C})$ .

11.  $UGL4(\varphi_3, \pi, v_{A_3A_2}; v_{A_3A_2})$ .

19.  $SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); a_{A_3A_2}^r, a_{A_3C}^t)$ .

20.  $UGL4(\alpha_{A_3A_2}, \pi, a_{A_3A_2}^r; \beta_{A_3A_2r})$ .

21.  $UGL4(\alpha_{A_3C}, \pi, a_{A_3C}^t; \beta_{A_3Ct})$ .

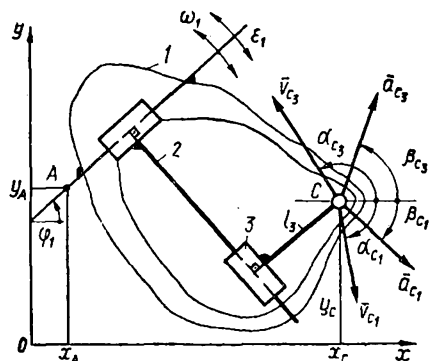
22.  $SMVKT(a_{A_2}, \beta_{A_2}, a_{A_3A_2}^k, \beta_{A_3A_2}; a, \beta)$ .

23.  $SMVKT(a, \beta, a_{A_3A_2}^r, \beta_{A_3A_2r}; a_{A_2}, \beta_{A_2})$ .

24.  $OMEGA(AC, \varphi', a_{A_3C}^t, \beta_{A_3Ct}; \varepsilon_3)$ .

$KNMA3(x_A, y_A, x_C, y_C, l_2, v_{A_2}, \alpha_{A_2}, v_G, \alpha_G, a_{A_2}, \beta_{A_2}, a_G, \beta_G, q; x_B, y_B, \varphi_3, v_{A_3A_2}, \alpha_{A_3A_2}, v_{A_3C}, \alpha_{A_3C}, v_{A_3}, \alpha_{A_3}, \omega_3, u_{A_3A_2}, \beta_{A_3A_2r}, a_{A_3C}^n, a_{A_3C}^t, \beta_{A_3Ct}, a_{A_3A_2}^r, \beta_{A_3A_2r}, a_{A_2}, \beta_{A_2}, \varepsilon_3)$ .

Таблица 16.5. Алгоритм кинематического расчета звеньев структурной группы 2-го класса пятого вида



$$1. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \pi/2), & -\cos \varphi_1 \\ \sin(\varphi_1 + \pi/2), & -\sin \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

$$2. C(2) = \begin{vmatrix} v_{C_1} \cos \alpha_{C_1} - v_{C_3} \cos \alpha_{C_3} \\ v_{C_1} \sin \alpha_{C_1} - v_{C_3} \sin \alpha_{C_3} \end{vmatrix}.$$

$$3. SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); v_{C_2C_3}, v_{C_2C_1}).$$

$$4. UGL4(\varphi_1 + \pi/2, \pi, v_{C_2C_1}; \alpha_{C_2C_3}).$$

$$5. UGL4(\varphi_1, \pi, v_{C_2C_1}; \alpha_{C_2C_1}).$$

$$6. SMVKT(v_{C_1}, \alpha_{C_1}, v_{C_2C_1}, \alpha_{C_2C_1}; v_{C_2}, \alpha_{C_2}).$$

$$7. a_{C_2C_1}^k = 2 |\omega_1| v_{C_2C_1}.$$

$$3. UGL3(\alpha_{C_2C_1}, \pi/2, \omega_1; \beta_{C_2C_1k}).$$

$$9. a_{C_2C_n}^k = 2 |\omega_1| v_{C_2C_n}.$$

$$10. UGL3(\alpha_{C_2C_3}, \pi/2, \omega_1; \beta_{C_2C_3k}).$$

$$11. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{C_2C_3}, & -\cos \alpha_{C_2C_1} \\ \sin \alpha_{C_2C_3}, & -\sin \alpha_{C_2C_1} \end{vmatrix}.$$

$$12. C(2) = \begin{vmatrix} a_{C_1} \cos \beta_{C_1} + a_{C_2C_1}^k \cos \beta_{C_2C_1k} - \\ -a_{C_2C_3}^k \cos \beta_{C_2C_3k} - a_{C_3} \cos \beta_{C_3}; \\ a_{C_1} \sin \beta_{C_1} + a_{C_2C_1}^k \sin \beta_{C_2C_1k} - \\ -a_{C_2C_3}^k \sin \beta_{C_2C_3k} - a_{C_3} \sin \beta_{C_3} \end{vmatrix}.$$

$$13. SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); a_{C_2C_3}^r, a_{C_2C_1}^r).$$

$$14. UGL4(\alpha_{C_2C_1}, \pi, a_{C_2C_3}^r; \beta_{C_2C_3r}).$$

$$15. UGL4(\alpha_{C_2C_1}, \pi, a_{C_2C_1}^r; \beta_{C_2C_1r}).$$

$$16. SMVKT(a_{C_1}, \beta_{C_1}, a_{C_2C_1}^k, \beta_{C_2C_1k}; a, \beta).$$

$$17. SMVKT(a, \beta, a_{C_2C_1}^r, \beta_{C_2C_1r}; \alpha_{C_2}, \beta_{C_2}).$$

$KNMA5(\varphi_1, l_3, \omega_1, v_{C_3}, \alpha_{C_3}, a_{C_3}, \beta_{C_3}; v_{C_2C_3}, \alpha_{C_2C_3}, v_{C_2C_1}, \alpha_{C_2C_1}, v_{C_2}, \alpha_{C_2}, a_{C_2C_n}^k, \beta_{C_2C_nk}, a_{C_2C_1}^k, \beta_{C_2C_1k}, a_{C_2C_3}^r, \beta_{C_2C_3r}, a_{C_2C_1}^r, \beta_{C_2C_1r}; a_{C_2}, \beta_{C_2}).$

ного уравнения (б)

$$\bar{v}_{A_1} = \bar{v}_{A_2} + \bar{v}_{A_2 A_1} = \bar{v}_C + \bar{v}_{A_2 C}, \quad (16.22)$$

а параметры линейных и угловых ускорений — из решения векторного уравнения (в)

$$\bar{a}_{A_1} = \bar{a}_{A_2} + \bar{a}_{A_2 A_1}^k + \bar{a}_{A_2 A_1}^r = \bar{a}_C + \bar{a}_{A_2 C}^k + \bar{a}_{A_2 C}^r. \quad (16.23)$$

Решение уравнений (16.22) и (16.23) выполняется с использованием алгоритмов, полученных ранее для звеньев, образующих вращательную кинематическую пару. Операторную функцию кинематического расчета структурной группы третьего вида, алгоритм которой приведен в табл. 16.4, обозначим *KNMA3*, входные параметры ее —  $x_A, y_A, x_C, y_C, l_2, v_A, \alpha_A, v_C, \alpha_C, a_A, \beta_A, a_C, \beta_C$ .

В структурной группе пятого вида (рис. 16.13, а) исходные данные по геометрии звеньев группы, координаты присоединительных элементов полностью определяют положение звеньев на координатной плоскости. Параметры линейных и угловых скоростей и ускорений определяют с помощью вспомогательных точек  $C_2$  и  $C_3$ , принадлежащих соответственно звеньям 2 и 3 и совпадающих с центром вращательной пары  $C$ , решением уравнений

$$\begin{aligned} \bar{v}_{C_2} &= \bar{v}_C + \bar{v}_{C_2 C}, & \bar{v}_{C_3} &= \bar{v}_C + \bar{v}_{C_3 C}; \\ \bar{a}_{C_2} &= \bar{a}_C + \bar{a}_{C_2 C}^k + \bar{a}_{C_2 C}^r, & \bar{a}_{C_3} &= \bar{a}_C + \bar{a}_{C_3 C}^k + \bar{a}_{C_3 C}^r. \end{aligned}$$

Операторную функцию, описывающую алгоритм кинематического расчета группы пятого вида (табл. 16.5), обозначим *KNMA5*, ее входные параметры —  $\varphi_1, l_3, \omega_1, \varepsilon_1, v_G, \alpha_G, a_G, \beta_G$ .

## 16.8. Структура алгоритмов кинематического исследования механизмов

Так как любой механизм может быть получен последовательным присоединением к механизму 1-го класса структурных групп звеньев, то алгоритм кинематического расчета механизма тоже может быть представлен как последовательность операторных функций кинематического расчета структурных групп и зависимостей для определения их входных параметров. Разберем пример составления алгоритма кинематического расчета механизма, схема которого приведена на рис. 16.14. Координаты и кинематические характеристики центра вращательной пары  $A$ , которая образована входным звеном 1 и присоединенным к нему звеном 2, определяются по условиям:  $x_A = l_1 \cos \varphi_1, y_A = l_1 \sin \varphi_1, v_A = |\omega_1| l_1, \alpha_A = \dot{\varphi}_1 - \pi/2, a_A = \omega_1^2 l_1, \beta_A = \varphi_1 - \pi$ .

Линейные и угловые координаты звеньев 2 и 3, их характерных точек и кинематические параметры этих звеньев определим через операторную функцию *KNMA1* ( $x_A, y_A, l_{OD}, 0, l_2, l_{BD}, v_A, \alpha_A, 0, 0, a_A, \beta_A, 0, 0, 1; x_B, y_B, \varphi_2, \varphi_3, v_{BA}, \alpha_{BA}, v_{BC}, \alpha_{BC}, v_B, \alpha_B, \omega_2, \omega_3, a_{BA}^n, a_{BD}^n, a_{BA}^t, a_{BD}^t, \beta_{BA}^t, \beta_{BD}^t, a_B, \beta_B, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ).

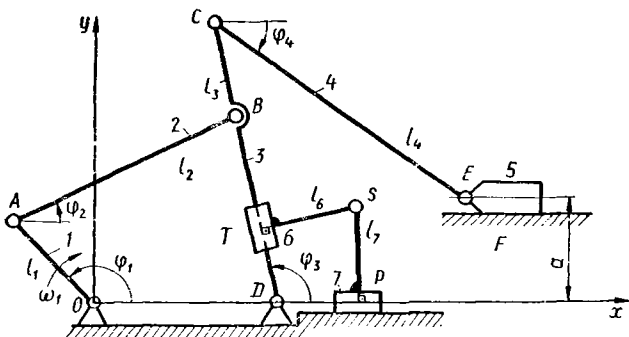


Рис. 16.14. Составление алгоритма кинематического расчета

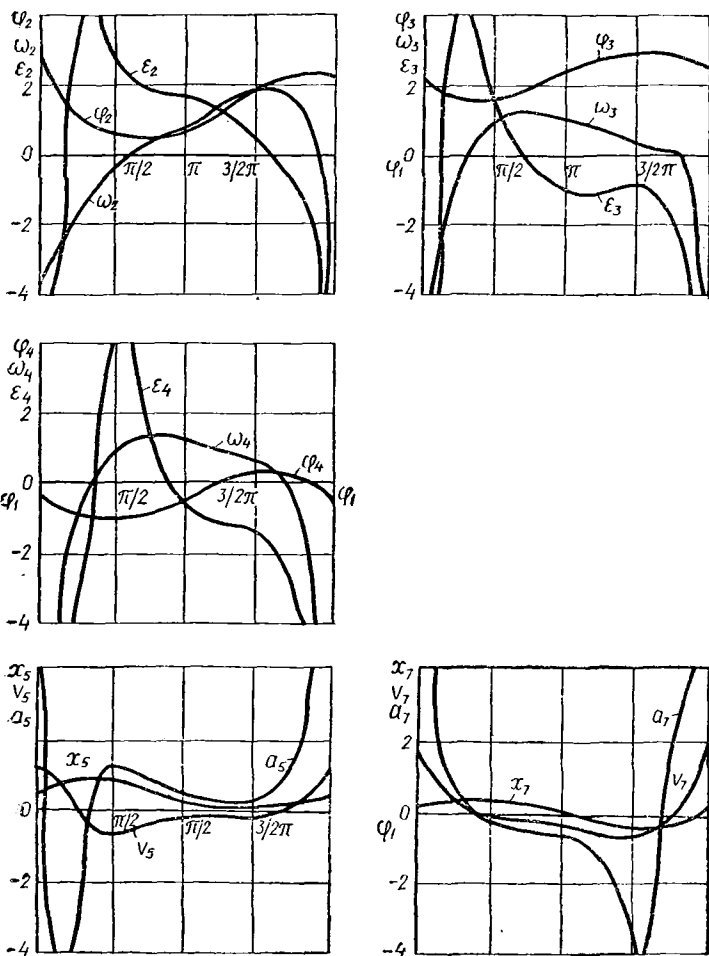


Рис. 16.15. Законы движения звеньев восьмизвенного механизма

Для кинематического исследования групп второго (звенья 4 и 5) и четвертого (звенья 6 и 7) видов определим кинематические параметры, необходимые для обращения к операторным функциям  $KNMA2$  и  $KNMA4$ :

$$x_C = l_{DC} \cos \varphi_3 + l_{OD}; \quad y_C = l_{DC} \sin \varphi_3; \quad v_C = |\omega_3| \cdot l_{DC};$$

$$UGL3(\varphi_3, \pi/2, \omega_3; \alpha_C); \quad a_C = l_{DC} \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}; \quad UGL3(\varphi_3 \pi -$$

$$- \arctg(|\varepsilon_3|/\omega_3^2), \varepsilon_3; \beta_C).$$

Координаты и законы движения звеньев 4, 5 и 6, 7 определим через соответствующие операторные функции:

$$KNMA2(x_C, y_C, 0, a, 0, l_4, 0, v_G, \alpha_C, 0, 0, 0, a_G, \beta_C, 0, 0, 0);$$

$$x_E, y_E, \varphi_4, v_{EC}, \alpha_{EC}, v_{EE0}, \alpha_{EE0}, v_E, \alpha_E, \omega_4, a_{EG}^n, a_{EE0}^k,$$

$$\beta_{EE0k}, a_{EA}^l, \beta_{EA}, a_{EE0}, \beta_{EE0}, a_E, \beta_E, \varepsilon_2);$$

$$KNMA4(l_{OD}, 0, \varphi_3, 0, 0, 0, v_B, \alpha_B, \omega_3, 0, 0, 0, a_B, \beta_B, 0, 0, l_6, l_7);$$

$$x_S, y_S, v_{SS_s}, \alpha_{SS_s}, \alpha_{SS_s}, v_{SS_0}, v_S, \alpha_S, a_{SS_s}^k, \beta_{SS_s,k}, a_{SS_0}^k,$$

$$\beta_{SS_0k}, a_{SS_s}^l, \beta_{SS_s,l}, a_{SS_0}^l, \beta_{SS_0,l}, a_S, \beta_S).$$

Приведенный алгоритм может быть реализован программой на алгоритмическом языке ФОРТРАН. В программе предполагается, что используемые операторные функции реализованы подпрограммами, которые находятся в библиотеке стандартных программ ЭВМ. На рис. 16.15 приведены законы движения звеньев рассматриваемого механизма, полученные реализацией программы на ЭВМ для следующих значений:  $\omega_1 = 2,5 \text{ с}^{-1}$ ;  $l_1 = 0,3 \text{ м}$ ;  $l_2 = 0,5 \text{ м}$ ;  $l_{DB} = 0,6 \text{ м}$ ;  $l_{DC} = 0,75 \text{ м}$ ;  $l_4 = 0,5 \text{ м}$ ;  $l_6 = l_7 = 0,1 \text{ м}$ ;  $a = 0,3 \text{ м}$ ;  $l_{OD} = 0,45 \text{ м}$ .

## 17. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ С НИЖШИМИ ПАРАМИ

### 17.1. Методы кинематического анализа пространственных механизмов

При кинематическом исследовании пространственных механизмов с низшими парами используют те же зависимости и соотношения между векторами перемещений, скоростей и ускорений, что и для плоских механизмов, только необходимые преобразования проводятся в пространственной системе координат. **Основная задача анализа пространственных механизмов — это определение перемещений точек звеньев, получение функций положения и уравнений траекторий движения.** Эти задачи решаются как общим векторным методом, применимым для всех механизмов, так и аналитическим, применяющимся для малозвенных механизмов с простыми соотношениями линейных и угловых координат. При анализе пространственных

механизмов широко применяются *методы преобразования координат* (см. гл. 5), что позволяет использовать разные координатные системы для звеньев одного механизма.

Скорости и ускорения точек звеньев пространственных механизмов обычно не определяют векторным методом, так как решение векторных пространственных многоугольников требует сложных пространственных построений и способ теряет свою наглядность. Скорости и ускорения точек для этих механизмов проще определять дифференцированием функций положения или законов перемещений. При численном решении задачи дифференцируются матрицы векторных соотношений.

## 17.2. Кривошипно-коромысловые механизмы

Определим угол поворота  $\varphi_3$  коромысла 3 при повороте на угол  $\varphi_1$  кривошипа 1 четырехзвенного механизма (рис. 17.1), для которого описание выбора координатных систем, а также ортов  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  рассмотрено в гл. 8.

Из условия замкнутости векторного  $\Delta DBC$  получим

$$l_{DB}\bar{e}_{DB} + l_2\bar{e}_2 - l_3\bar{e}_3 = 0. \quad (17.1)$$

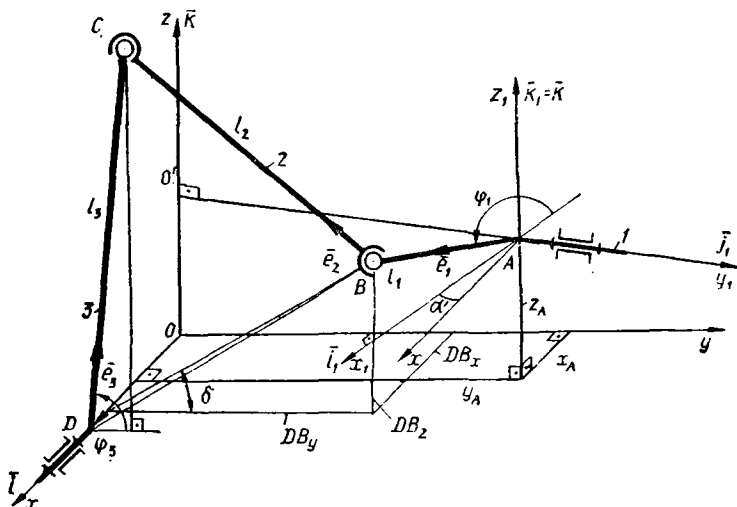


Рис. 17.1. Кинематика кривошипно-коромыслового механизма

Перенесем вектор  $l_2\bar{e}_2$  в правую часть выражения (17.1) и, возводя его в скалярный квадрат, исключим орт  $\bar{e}_2$ . После преобразований, обозначив  $2p = l_{DB}^2 + l_3^2 - l_2^2$ , получим  $p - l_{DB}l_3\bar{e}_{DB}\bar{e}_3 = 0$ . Определим орты  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_3$ , рассматривая обе координатные системы:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \bar{i}_1 \cos \varphi_1 + \bar{k}_1 \sin \varphi_1 = \bar{i} \cos \alpha \cos \varphi_1 + \bar{j} \sin \alpha \cos \varphi_1 + \bar{k} \sin \varphi_1; \\ \bar{e}_3 &= \bar{j} \cos \varphi_3 + \bar{k} \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Тогда, используя свойства скалярных произведений ортов координатных осей (см. гл. 5), получим:

$$l_{DB} \bar{e}_{DB} \bar{e}_3 = (DB_x \bar{i} + DB_y \bar{j} + DB_z \bar{k}) (\bar{j} \cos \varphi_3 + \bar{k} \sin \varphi_3) = \rho/l_3;$$

$$DB_x \cos \varphi_3 \cdot \bar{i} \cdot \bar{j} + DB_x \sin \varphi_3 \cdot \bar{i} \cdot \bar{k} + DB_y \cos \varphi_3 \cdot \bar{j} \cdot \bar{j} + \\ + DB_y \sin \varphi_3 \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} + DB_z \cos \varphi_3 \cdot \bar{k} \cdot \bar{j} + DB_z \sin \varphi_3 \bar{k} \cdot \bar{k} = \rho/l_3.$$

На основании свойства скалярных произведений ортов

$$DB_y \cos \varphi_3 + DB_z \sin \varphi_3 = \rho/l_3,$$

и, вводя в рассмотрение угол  $\delta$ , для которого  $\operatorname{tg} \delta = DB_z/DB_y$ , получим

$$DB_y \cos (\varphi_3 - \delta) / \cos \delta = \rho/l_3,$$

откуда

$$\varphi_3 = \delta + \arccos (\rho \cos \delta / l_3 DB_y). \quad (17.2)$$

Для приведения выражения (17.2) к явному виду рассмотрим векторный многоугольник  $ODBAO'O$ , условие замкнутости которого имеет такой вид:

$$l_{OD} \bar{i} + l_{DB} \bar{e}_{DB} - l_1 \bar{e}_1 - l_{AO'} \cdot \bar{j}_1 - l_{O'O} \bar{k} = 0. \quad (17.3)$$

Выражая вектор  $\bar{l}_{DB}$  в проекциях на координатные оси и учитывая  $\bar{e}_1, \bar{j}_1 = \bar{i} \sin \alpha + \bar{j} \cos \alpha$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} DB_x &= l_1 \cos \alpha \cos \varphi_1 - l_{OD} + l_{AO'} \sin \alpha; \\ DB_y &= l_1 \sin \alpha \cos \varphi_1 + l_{AO'} \cos \alpha; \\ DB_z &= l_1 \sin \varphi_1 + l_{O'O}. \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

Подставляя значения проекций из уравнений (17.4) в формулу (17.2), найдем

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \arctg ((l_1 \sin \varphi_1 + l_{O'O}) / (l_1 \sin \alpha \cos \varphi_1 + l_{AO'} \cos \alpha)); \\ \varphi_3 &= \delta + \arccos (\rho \cos \delta / l_3 (l_1 \sin \alpha \cos \varphi_1 + l_{AO'} \cos \alpha)). \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

Для получения передаточной функции выражение  $\varphi_3(\varphi_1)$  необходимо продифференцировать по  $\varphi_1$ , а для получения угловой скорости звена 3 — по  $t$ .

Направление орта  $\bar{e}_2$  звена 2 определяем, воспользовавшись выражением (17.1):

$$l_2 \bar{e}_2 = l_3 \bar{e}_3 - l_{DB} \bar{e}_{DB} = l_3 \cos \varphi_3 \cdot \bar{j} + l_3 \sin \varphi_3 \bar{k} - DB_x \bar{i} - DB_y \bar{j} - DB_z \bar{k},$$

откуда

$$\bar{e}_2 = -\bar{i} DB_x / l_2 + \bar{j} (l_3 \cos \varphi_3 - DB_y) / l_2 + \bar{k} (l_3 \sin \varphi_3 - DB_z) / l_3. \quad (17.6)$$

Определяя по (17.4) и (17.5)  $\nu = (\widehat{e}_2, \bar{i})$ ,  $\mu = (\widehat{e}_2, \bar{j})$ ,  $\gamma = (\widehat{e}_2, \bar{k})$  через направляющие косинусы, дифференцируя зависимости по  $t$ , получим составляющие вектора угловой скорости звена 2 —  $\omega_{2x}$ ,  $\omega_{2y}$ ,  $\omega_{2z}$ . По их значениям можно определить величину и направление вектора  $\bar{\omega}_2$ .

### 17.3. Кривошипно-ползунные механизмы

Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 17.2) основной задачей анализа является определение перемещения  $l_{OC}$  ползуна 3 и угловых координат шатуна 2. Рассмотрим условие замкнутости векторного контура  $ABCO'A$ :

$$l_1 \bar{e}_1 + l_2 \bar{e}_2 - l_{OC} \bar{i} + l_{OO'} \bar{k} + l_{O'A} \bar{j}_1 = 0. \quad (17.7)$$

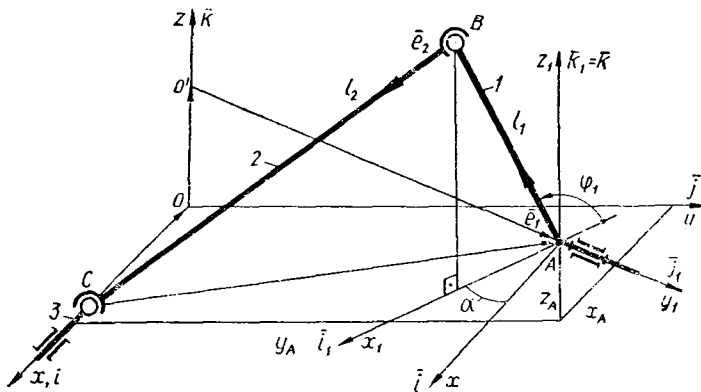


Рис. 17.2. Кинематика кривошипно-ползунного механизма

Орт  $\bar{e}_1 = \bar{i}_1 \cos \varphi_1 + \bar{k}_1 \sin \varphi_1 = \bar{i} \cos \alpha \cos \varphi_1 + \bar{j} \sin \alpha \cos \varphi_1 + \bar{k} \sin \varphi_1$ , а орт  $\bar{j}_1 = \bar{i} \sin \alpha + \bar{j} \cos \alpha$  по свойствам координатных систем; орт  $\bar{e}_2$  представим в проекциях

$$\bar{e}_2 = \bar{i} e_{2x} + \bar{j} e_{2y} + \bar{k} e_{2z}. \quad (17.8)$$

Умножим уравнение (17.7) скалярно на  $\bar{j}$  и  $\bar{k}$ :

$$l_1 \bar{e}_1 \bar{j} + l_2 \bar{e}_2 \bar{j} - l_{OC} \bar{i} \cdot \bar{j} + l_{OO'} \bar{k} \bar{j} + l_{O'A} \bar{j}_1 \cdot \bar{j} = 0;$$

$$l_1 \bar{e}_1 \bar{k} + l_2 \bar{e}_2 \bar{k} - l_{OC} \bar{i} \cdot \bar{k} + l_{OO'} \bar{k} \cdot \bar{k} + l_{O'A} \bar{j}_1 \cdot \bar{k} = 0.$$

Подставляя значения  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{j}_1$  и используя свойства скалярного произведения ортов, получим

$$\cos \mu = e_{2y} = (l_{O'A} \cos \alpha - l_1 \sin \alpha \cos \varphi_1) / l_2; \quad (17.9)$$

$$\cos \gamma = e_{2z} = -(l_{OO'} + l_1 \sin \varphi_1) / l_2. \quad (17.10)$$

Тогда

$$\cos \nu = e_{2x} = \sqrt{1 - e_{2y}^2 - e_{2z}^2}. \quad (17.11)$$

Умножая уравнение (17.7) на орт  $\bar{i}$ , найдем

$$l_{OC} = l_1 \cos \alpha \cos \varphi_1 - l_{O'A} \sin \alpha + l_2 \sqrt{1 - e_{2y}^2 - e_{2z}^2}. \quad (17.12)$$

Для получения передаточной функции ползуна необходимо продифференцировать выражение (17.12) по  $\varphi_1$ ; для получения функции



скорости — по  $t$ . Для получения составляющих  $\omega_{2x}$ ,  $\omega_{2y}$ ,  $\omega_{2z}$  векторов угловой скорости  $\bar{\omega}_2$  шатуна необходимо продифференцировать по  $t$  зависимости (17.9), (17.10) и (17.11). По значениям этих составляющих можно определить величину и направление вектора  $\bar{\omega}_2$ .

#### 17.4. Механизм универсального шарнира

Механизм универсального шарнира представляет собой пространственный шарнирный четырехзвенный механизм с вращательными парами 5-го класса, оси которых пересекаются в одной точке. Его кинематическое исследование выполняется так же, как и ранее для кривошипно-коромыслового механизма. Однако из-за сложной геометрической формы звеньев зависимости для ортов имеют громоздкую структуру. Удобнее рассматривать кинематику механизма

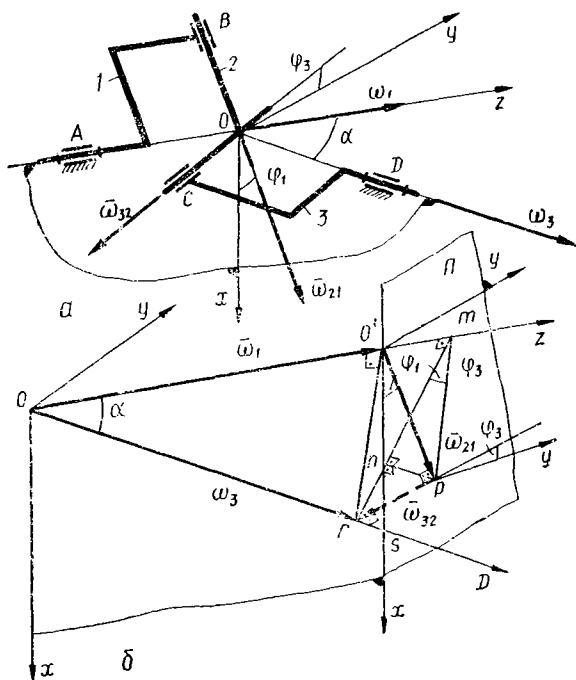


Рис. 17.3. Кинематика звеньев универсального шарнира

универсального шарнира, основываясь на свойствах векторов угловых скоростей. Поместим начало координат  $O$  системы  $Oxyz$  (рис. 17.3,  $a$ ) в центр крестовины 2 механизма. Ось  $Oz$  направим по оси вращательной кинематической пары  $A$ , ось  $Ox$  — перпендикулярно  $Oz$  в плоскости осей вращательных кинематических пар  $A$  и  $D$ .

Вектор угловой скорости перпендикулярен плоскости вращения, поэтому вектор  $\bar{\omega}_1$  угловой скорости звена 1 будет направлен по оси  $Oz$ , вектор  $\bar{\omega}_3$  — по оси  $OD$ , векторы относительных угловых

скоростей  $\bar{\omega}_{21}$  крестовины 2 относительно звена 1 и  $\bar{\omega}_{32}$  звена 3 относительно крестовины 2 — соответственно по осям кинематических пар  $B$  и  $C$ . На основании теоремы о сложном движении запишем

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{32}. \quad (17.13)$$

Так как угловые скорости звеньев 1 и 3  $\omega_1 = d\varphi_1/dt$  и  $\omega_3 = d\varphi_3/dt$  определяются через углы поворота  $\varphi_1$  и  $\varphi_3$  крестовины относительно координатных осей  $O$  и  $Oy$ , а векторы  $\bar{\omega}_{21}$  и  $\bar{\omega}_{32}$  всегда перпендикулярны к осям кинематических пар  $A$  и  $D$  и друг другу, то согласно условию (17.13) величина и направление вектора  $\bar{\omega}_1$  полностью определяют вектор  $\bar{\omega}_3$ , так как направление его задано положением оси вращательной пары  $D$ .

Построим пространственный векторный многоугольник по уравнению (17.13). Из конца вектора  $\bar{\omega}_1$  в плоскости  $\Pi$ , параллельной плоскости  $xOy$  (рис. 17.3, б), отложим вектор  $\bar{\omega}_{21}$  под углом  $\varphi_1$  к оси  $Ox$ . Из конца вектора  $\bar{\omega}_{21}$  в плоскости, перпендикулярной к оси  $AO$ , опустим на ось  $OD$  перпендикуляр. Этот перпендикуляр определит вектор  $\bar{\omega}_{32}$ , конец которого на оси  $OD$  совпадает с концом вектора  $\bar{\omega}_3$ .

Спроецируем векторы уравнения (17.13) на плоскость, образованную векторами  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_3$ . Точка  $P$  пересечения векторов  $\bar{\omega}_{21}$  и  $\bar{\omega}_{32}$  проецируется в точку  $n$ . Тогда  $O'n = \omega_{21} \cos \varphi_1$ ;  $nr = \omega_{32} \sin \varphi_3$ .

Спроецируем многоугольник на плоскость, перпендикулярную вектору  $\bar{\omega}_3$ . Угол  $\angle Pmr = \varphi_3$ , так как  $Pn \perp mr$ ;  $Pm \perp \bar{\omega}_3$ , потому что  $\angle O'Pr$  проецируется на эту плоскость тоже как прямой. Если  $\text{tg } \varphi_1 = Pn/O'n$ ;  $Pn = mn \text{ tg } \varphi_3'$ , а  $O'n = mn/\cos \alpha$ , то

$$\text{tg } \varphi_1 = \text{tg } \varphi_3 \cos \alpha. \quad (17.14)$$

Дифференцируя формулу (17.14) по  $\varphi_1$ , получим передаточную функцию

$$i_{31} = \omega_3/\omega_1 = \cos \alpha / (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1). \quad (17.15)$$

Из проекций векторного многоугольника (см. рис. 17.3, б) на плоскость  $xOy$  получим относительные угловые скорости крестовины. Из  $\Delta O'PS$  следует

$$\left. \begin{aligned} \omega_{21} &= O'S \cos \varphi_1 = \omega_3 \sin \alpha \cos \varphi_1; \\ \omega_{32} &= \omega_1 \sin \alpha \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (17.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_1 \cos \alpha + O'n \sin \alpha = \omega_1 \cos \alpha + \omega_{21} \cos \varphi_1 \sin \alpha = \\ &= \omega_1 \cos \alpha + \omega_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1. \end{aligned}$$

Выразим относительную угловую скорость крестовины  $\omega_{21}$  и  $\omega_{32}$  через угловую скорость звена 1:

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= \omega_1 \text{tg } \alpha \cos \varphi_1 / (1 + \text{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi_1); \\ \omega_{32} &= \omega_1 \text{tg } \alpha \sin \varphi_1 / (1 + \text{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi_1). \end{aligned}$$

Из зависимости (17.16) получим экстремальные значения угловых скоростей. При  $\varphi_1 = 0$  имеем  $\omega_{3 \max} = \omega_1 / \cos \alpha$ ;  $\omega_{21 \max} = \omega_1 / \operatorname{tg} \alpha$ ;  $\omega_{32 \min} = 0$ ; при  $\varphi_1 = \pi/2$  —  $\omega_{3 \min} = \omega_1 \cos \alpha$ ;  $\omega_{21 \min} = 0$ ;  $\omega_{32 \max} = \omega_1 \sin \alpha$ .

Для того чтобы получить равномерное вращение ведомого звена, применяют сдвоенный сферический шарнир (рис. 17.4). В этом механизме при углах  $\alpha_1 = \alpha_2$  между осями вращения звеньев 1 и 4 промежуточным валом 3, а также расположении вилок крестовин 2 и 2' на оси 3 в одной плоскости получим  $\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_1$ .

## 17.5. Винтовые механизмы

Движение звеньев **винтового механизма** (рис. 17.5) состоит из вращения вокруг своей оси и прямолинейного поступательного движения вдоль нее. Если векторы скоростей  $\bar{\omega}$  и  $\bar{v}$ , описывающие эти движения, направлены вдоль координатной оси в правой системе координат в одну сторону, то такой винт называют *правым*; противоположно направленные векторы  $\bar{\omega}$  и  $\bar{v}$  характеризуют *левый*

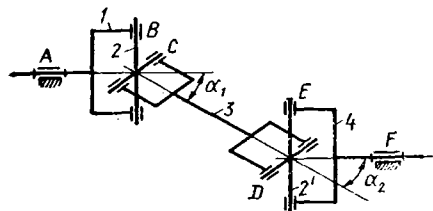


Рис. 17.4. Сдвоенный сферический шарнир

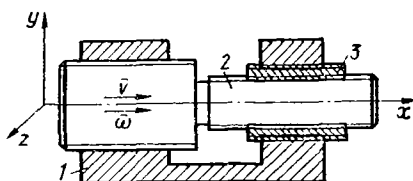


Рис. 17.5. Винтовой механизм

винт. Для правого винта  $v > 0$ ,  $\omega > 0$  соответствуют ввинчиванию,  $v < 0$ ,  $\omega < 0$  — вывинчиванию. Отношение  $p = v/\omega$  называется *параметром винта*.

Если  $\varphi$  — угол поворота винта относительно оси,  $s$  — соответствующее ему перемещение, то  $v = ds/dt$ ,  $\omega = d\varphi/dt$  и  $p = ds/d\varphi$ . При  $p = ds/d\varphi = \text{const}$ ,  $s = p\varphi$ , т. е.  $s$  и  $\varphi$  — пропорциональные величины. При  $\varphi = 2\pi$  и перемещении, равном шагу  $h$ , получим  $s = h = 2\pi p$  и  $p = h/2\pi$ .

Если на винте нарезаны  $z$  винтовых поверхностей одного шага, то при  $\varphi = 2\pi$  и перемещении, равном ходу винта  $H$ , получим

$$s = H = 2\pi pz \text{ и } p = H/2\pi z.$$

Рассмотрим соотношения между перемещениями и угловыми скоростями вращения винтов в механизме с тремя винтовыми парами с параметрами  $p_{21} = h_1/2\pi$ ;  $p_{32} = h_2/2\pi$ ;  $p_{31} = h_3/2\pi$ , где  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  — шаги соответствующих резьб.

При повороте винта 2 на угол  $\varphi_{21}$  относительные углы поворота в парах 3 — 2 и 3 — 1 будут  $\varphi_{32}$  и  $\varphi_{31}$ . Тогда

$$\varphi_{31} = \varphi_{21} + \varphi_{32}, \quad (17.17)$$

а перемещение

$$s_{31} = s_{21} + s_{32}. \quad (17.18)$$

Так как  $s = r\varphi$ , то  $s_{31} = h_3\varphi_{31}/2\pi$ ;  $s_{32} = h_2\varphi_{32}/2\pi$ ;  $s_{21} = h_1\varphi_{21}/2\pi$ , и после подстановки значений  $s$  в формулу (17.18) получим

$$h_3\varphi_{31} = h_1\varphi_{21} + h_2\varphi_{32}. \quad (17.19)$$

Подставляя значение  $\varphi_{32}$  из формулы (17.17) в формулу (17.19), получим

$$\varphi_{31} = \varphi_{21}(h_1 - h_2)/(h_3 - h_2); \quad s_{31} = \varphi_{31}h_3/2\pi.$$

Аналогично находят углы поворота  $\varphi_{21}$  и  $\varphi_{32}$ .

## 18. ПРОМЫШЛЕННЫЕ РОБОТЫ

### 18.1. Общие понятия и определения

В качестве эффективных средств автоматизации и механизации различных видов производства широкое распространение получили **промышленные роботы (ПР)**. Они предназначены для различных манипуляций при выполнении основных и вспомогательных производственных и транспортных операций без непосредственного участия человека. Промышленные роботы характеризуются возможностью

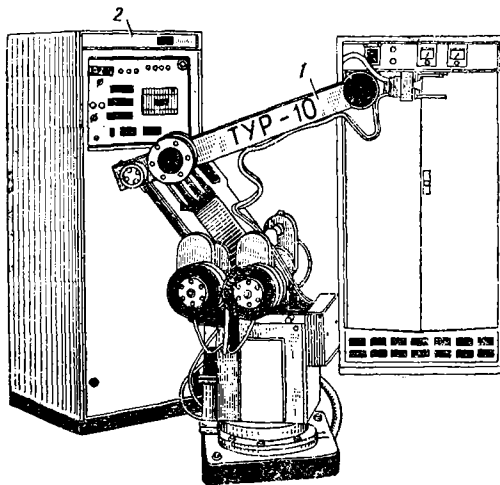


Рис. 18.1. Промышленный робот ТУР-10

и быстрой переходом на выполнение новых операций при перепрограммировании управляющего устройства и перестройке манипуляционной части.

Отличительный признак ПР (рис. 18.1) — наличие **манипулятора 1**. В сочетании с автоматическим устройством управления **2** манипулятор становится промышленным роботом. В общем случае ПР состоит из **трех систем: манипуляционной** — для целенаправленного воздействия на окружающую среду, **ин-**

**формационной** — для определения состояния системы робота и оценки результатов воздействия на окружающую среду и **управляющей** — для выработки алгоритма оптимального взаимодействия с окружающей средой.

Промышленный робот представляет сочетание разнообразных устройств механических звеньев, управляемых приводов различных типов, измерительных датчиков обратной связи и оцувствле-

ния, управляющих ЭВМ, встроенных микропроцессорных и логических устройств, работающих взаимосвязанно как единая динамическая и информационно-управляющая система. Поэтому из-за многообразия факторов, явлений и процессов, лежащих в основе строения и функционирования ПР, их классификация характеризуется большим числом параметров и критериев качества. Они объединены в **основные группы характеристик**: *структурные, кинематические, силовые, динамические, эксплуатационные, управляемая, информационной емкости и типа исполнения.*

По назначению ПР делятся на *универсальные, специализированные и специальные*. По грузоподъемности различают роботы: сверхлегкие (до 1 кг), легкие (1...10 кг), средние (10...200 кг), тяжелые (200...1000 кг), сверхтяжелые (более 1000 кг). По типу силового привода звеньев манипулятора различают роботы с гидравлическим, пневматическим, электрическим и комбинированным приводом. Промышленные роботы по типу системы управления делятся на *программные* — это роботы, работающие по жесткой программе с цикловой или числовой системой программного управления, *адаптивные* роботы, оснащенные датчиками с управлением от системы ЭВМ или ЧПУ, позволяющими реагировать на изменение некоторых условий эксплуатации, и *интеллектуальные* роботы, управляемые от ЭВМ с программированием цели и обладающие широкими возможностями реагирования на изменение технологии процесса, распознавания объектов, принятия решений и т. п.

## **18.2. Основные схемы манипуляторов промышленных роботов**

Основой схем манипуляторов являются кинематические цепи, не образующие структурные замкнутые контуры, звенья которых соединены кинематическими парами 3, 4, 5-го классов. Положение каждого звена таких кинематических цепей изменяется обычно отдельным приводом. Если привод смонтирован на звеньях, составляющих кинематическую пару, то такая кинематическая пара называется *приводной*. Наибольшее распространение получили манипуляторы с поступательными и вращательными приводными кинематическими парами 5-го класса, однако известны конструкции с приводными парами цилиндрической 4-го и сферической 3-го классов. Число степеней свободы манипулятора с кинематическими парами 5-го класса соответствует числу приводных кинематических пар.

Функционально манипулятор состоит из двух частей — *транспортирующей и ориентирующей* (рис. 18.2). Звенья, составляющие транспортирующую кинематическую цепь, предназначены для переноса объекта манипулирования в заданную точку пространства. Для этой цели достаточно трех степеней свободы, поэтому в состав транспортирующих кинематических цепей входят обычно четыре звена, включая и неподвижное звено — стойку манипулятора, составляющие три приводные кинематические пары 5-го класса. При этом могут быть четыре основные схемы (рис. 18.3). При трех

поступательных кинематических пар (рис. 18.3, а), движение заданной точки  $D_1$  звена 3 организуется в прямоугольной системе координат, при одной вращательной и двух поступательных (рис. 18.3, б) — в цилиндрической, при двух вращательных и одной поступательной (рис. 18.3, в) — в сферической системе координат. При

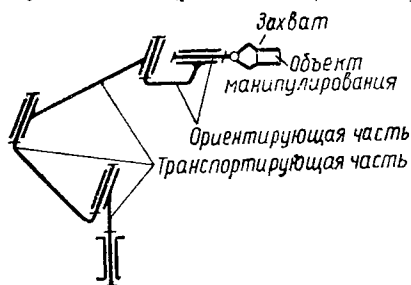


Рис. 18.2. Манипулятор промышленного робота

Рис. 18.3. Транспортирующие кинематические цепи

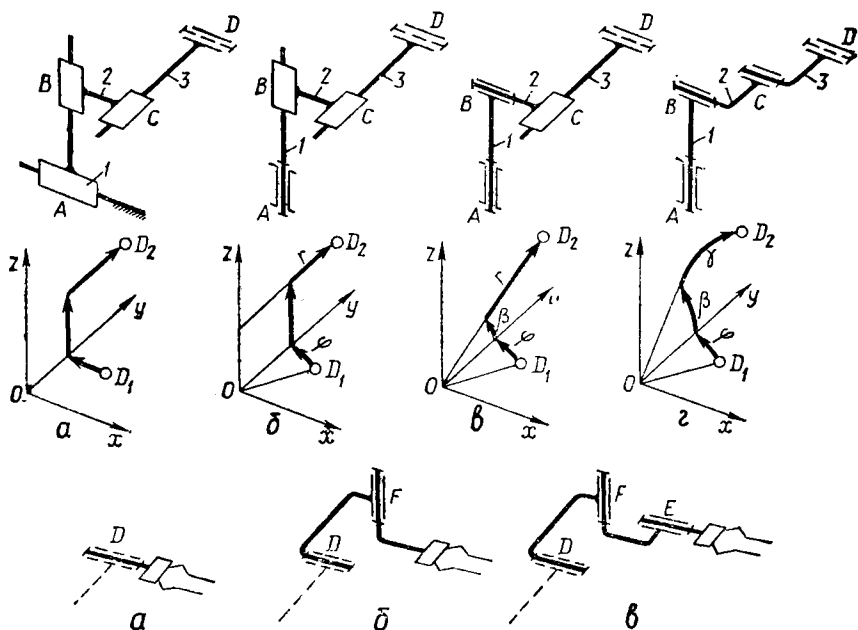


Рис. 18.4. Ориентирующие кинематические цепи

трех вращательных кинематических пар (рис. 18.3, г), манипулятор называется *антропоморфным* и перемещение заданной точки звена 3 организуется в системе координат, называемой *ангулярной*.

Ориентирующие кинематические цепи присоединяются обычно вращательной кинематической парой к транспортирующим (рис. 18.4). Оси кинематических пар ориентирующих кинематических цепей манипулятора располагаются обычно перпендикулярно друг другу. К ориентирующим кинематическим цепям присоединяется захватное устройство (захват), предназначенное для удержания

объекта манипулирования в определенном положении. **Захваты** могут быть *механическими*, *пневматическими* или *электромагнитными*. Они относятся к числу сменных звеньев манипуляторов, которые меняют в зависимости от требования конкретного рабочего задания.

В схемах механических захватов используются различные шарнирно-рычажные механизмы (рис. 18.5). В большинстве конструк-

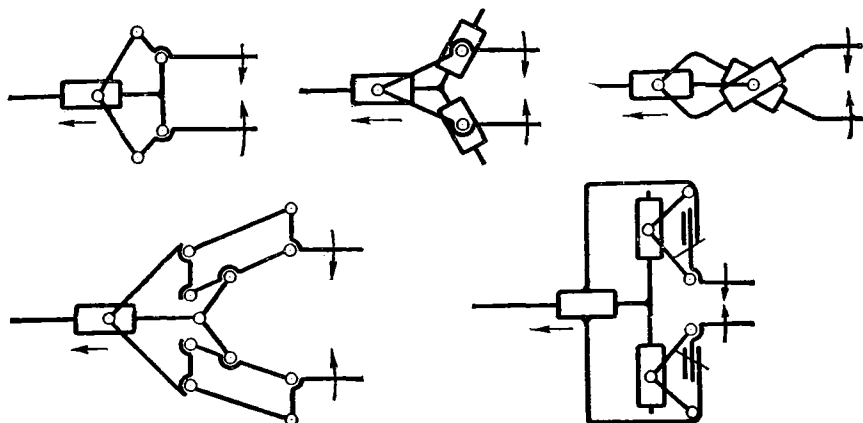


Рис. 18.5. Шарнирно-рычажные механизмы манипуляторов

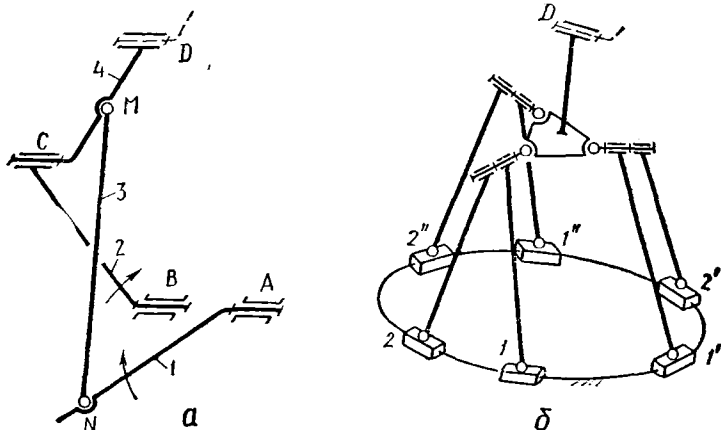


Рис. 18.6. Манипуляторы, звенья которых образуют замкнутые контуры

ций губки захвата располагаются параллельно и симметрично оси последней перед захватом вращательной кинематической пары, что позволяет осуществить широкий класс таких технологических операций, как сверление, нарезание резьбы, завинчивание гаек, винтов, шурупов и т. п.

Манипуляторы с такими схемами позволяют совершать сложные движения захвата. Необходимая точность позиционирования достига-

ется с помощью микропроцессорного управления движением входных звеньев. На рис. 18.6 показаны схемы манипуляторов, требуемая точность позиционирования у которых достигается применением транспортирующих кинематических цепей, образующих замкнутые контуры. Общий принцип построения таких схем заключается в следующем. К входным звеньям, составляющим со стойкой приводные вращательные (рис. 18.6, *а*) или поступательные (*б*) кинематические пары, присоединяется пространственная структурная группа, число поводков которой соответствует числу входных звеньев. К входным звеньям 1 и 2 (см. рис. 18.6, *а*), составляющим со стойкой приводные вращательные кинематические пары *A* и *B*, присоединяется диада 3 — 4 с вращательной *C* и сферическими *N* и *M* кинематическими парами. В таком манипуляторе число степеней свободы звена 4 равно двум. Большее число степеней свободы может быть получено использованием многоповодковой структурной группы с входными звеньями 1, 1', 1'', 2, 2', 2'' (*б*).

### 18.3. Определение положения объекта манипулирования

С целью упрощения кинематического и геометрического исследования каждому подвижному звену манипулятора, начиная от стойки, присваивают порядковый номер, неподвижному звену — стойке — присваивают индекс 0. При таких обозначениях номер звена с захватом будет соответствовать числу подвижных звеньев манипулятора. С каждым звеном манипулятора жестко связывается правая система декартовых координат, одна из осей которой совпадает с осью *OO* кинематической пары. Под осью вращательной кинематической пары (рис. 18.7, *а*) понимают ось относительного поворота, а поступательной (рис. 18.7, *б*) — прямую, параллельную направлению относительного перемещения.

Ось  $z_i$  (рис. 18.8, *а*) должна совпадать с осью кинематической пары, связывающей звенья  $i$  и  $i + 1$ ; ось  $x_i$  должна пересекать ось  $z_{i-1}$  под углом  $90^\circ$ ; оси  $y_i$  обеспечивают правую ориентацию всех систем координат; ось  $z_n$  системы координат, связанной с захватом (рис. 18.8, *б*), расположена вдоль губок захвата, а ось  $y_n$  — перпендикулярно губкам захвата. Направление оси  $x_0$  системы координат, связанной со стойкой (рис. 18.8, *в*), выбирается произвольно.

Преимущество таких связанных систем координат заключается в том, что две последовательные системы координат звеньев, например  $T_i$  и  $T_{i-1}$ , всегда могут быть совмещены при помощи четырех промежуточных преобразований. Операция совмещения систем координат (рис. 18.9) выполняется в следующей последовательности: а) поворот вокруг оси  $x_i$  на угол  $\beta$  до достижения параллельности осей  $z_i$  и  $z_{i-1}$ ; б) перенос вдоль оси  $x_i$  на расстояние  $b$  до совпадения осей  $z_i$  и  $z_{i-1}$ ; в) перенос вдоль оси  $z_i$  на расстояние  $c$  до совмещения начал координат  $O_i$  и  $O_{i-1}$ ; г) поворот вокруг оси  $z_i$  на угол  $\varphi$  до совмещения всех осей. Эти элементарные перемещения описываются матрицами преобразования размера  $4 \times 4$ , задающими как



Рис. 18.7. Положение осей кинематических пар

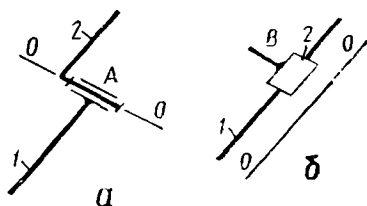


Рис. 18.8. Образование связанных систем координат

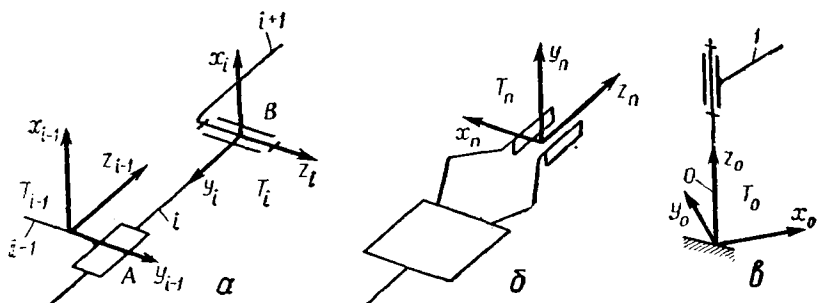
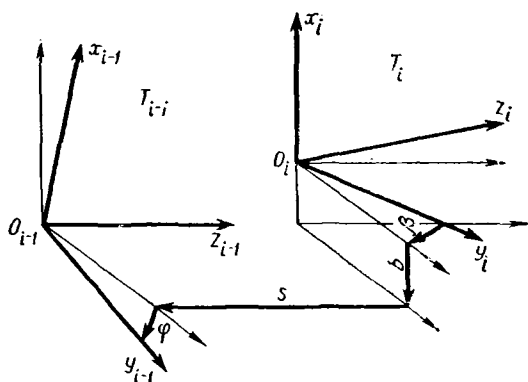


Рис. 18.9. Совмещение систем координат

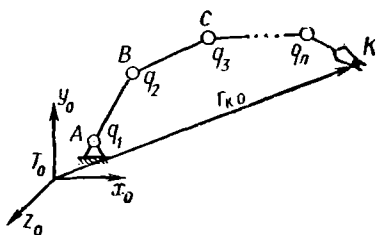


преобразование поворота, так и преобразование переноса (см. гл. 5):

$$M = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & l_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & l_2 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & l_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & \bar{l} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (18.1)$$

где  $\gamma$  — матрица размером  $3 \times 3$ , задающая преобразование поворота для декартовых координат, а  $\bar{l}$  — столбцовая матрица, задающая перенос.

Рис. 18.10. Определение функции перемещения точки захвата манипулятора



Для последовательных движений, соответствующих переходу от  $i$ -й системы к  $i - 1$ -й, матрицы преобразований запишутся в следующем виде:

$$M_{\beta} = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| ; \quad (18.2)$$

$$M_b = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| ; \quad (18.3)$$

$$M_s = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| ; \quad (18.4)$$

$$M_{\varphi} = \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| . \quad (18.5)$$

На основании этого переход от системы координат  $i$  к системе  $i - 1$  через четыре указанных промежуточных преобразований запишется матричным произведением

$$M_i = M_{\varphi} M_s M_b M_{\beta}, \quad (18.6)$$

а матрица перехода от системы  $T_i$  к системе  $T_{i-1}$  будет иметь вид

$$M_i = \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \beta & \sin \varphi \sin \beta & b \cos \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \cos \beta & -\cos \varphi \sin \beta & b \sin \varphi \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & s \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| . \quad (18.7)$$

Координаты точки  $K$  объекта манипулирования (рис. 18.10) в системе  $T_0(x_0, y_0, z_0)$ , связанной со стойкой, определяются следующим матричным уравнением:

$$\bar{r}_{K0} = M_1 M_2 M_3 \dots M_n \bar{r}_{kn} = \Gamma_n \bar{r}_{Kn}, \quad (18.8)$$

где  $n$  — число подвижных звеньев манипулятора;  $M_1, M_2, \dots$  — матрицы перехода вида (18.7);  $r_{Kn}$  — столбцевая матрица координат точки  $K$  объекта манипулирования в системе  $T_n$ , связанной с захватом;  $\Gamma_n$  — матрица перехода от системы  $T_n$  к системе  $T_0$ .

Столбцовая матрица  $r_{Kn}$  имеет вид

$$r_{Kn} = \begin{pmatrix} x_{Kn} \\ y_{Kn} \\ z_{Kn} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (18.9)$$

а матрица перехода:

$$\Gamma_n = \prod_{i=1}^n M_i. \quad (18.10)$$

#### 18.4. Исследование кинематики манипуляторов

При исследовании кинематики манипулятора решают две задачи: определение перемещения, скорости и ускорения объекта манипулирования при заданных перемещениях, скоростях и ускорениях приводов в кинематических парах и обратную — определение необходимых перемещений, скоростей и ускорений в кинематических парах по заданному перемещению, скорости и ускорению объекта манипулирования. Решить первую задачу можно, раскрывая матричное выражение (18.8), в результате чего получим функцию перемещения объекта манипулирования, определяющую зависимость координат его точки  $K$  от перемещений в кинематических парах  $A, B, C, \dots$  (рис. 18.10). Эти перемещения в  $n$  приводных кинематических парах манипулятора, выполненного по разомкнутой кинематической схеме, обозначим  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Под перемещениями будем понимать как углы поворота во вращательных, так и перемещения в поступательных кинематических парах. Тогда функция перемещения точки  $K$  объекта манипулирования в системе координат  $T_0$ , связанной со стойкой, запишется в виде

$$r_{K0} = r_{K0}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n). \quad (18.11)$$

Скорость объекта манипулирования определится дифференцированием выражения (18.11):

$$v_{K0} = \dot{r}_{K0} = \dot{\Gamma}_n r_{Kn}. \quad (18.12)$$

Рассмотрим способ дифференцирования матрицы  $\Gamma_n$ . Если кинематическая пара, соединяющая  $i-1$ -е и  $i$ -е звенья манипулятора, является вращательной, то перемещением  $q$  в выражении (18.11) будет изменяемый угловой параметр  $\varphi$ . Тогда из выражения (18.7), пользуясь правилом дифференцирования матриц (см. гл. 5), получим

$$\frac{dM_i}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \cos \beta & \cos \varphi \sin \beta & -b \sin \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \beta & \sin \varphi \sin \beta & b \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad (18.13)$$

где  $\frac{d\varphi}{dt}$  — угловая скорость поворота во вращательной кинематической паре.

Нетрудно убедиться, что в соответствии с правилами умножения матриц (см. гл. 5) дифференцирование соответствует умножению матрицы  $M$  на матрицу  $\theta_\varphi$ :

$$\theta_\varphi = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для  $i$ -й вращательной кинематической пары получим

$$dM_i/dt = \theta_\varphi M_i d\varphi/dt.$$

Если кинематическая пара, соединяющая  $i-1$ -е и  $i$ -е звенья, поступательная, то перемещением  $q$  в выражении (18.11) будет изменяемый линейный параметр  $s$ . Тогда матрица будет иметь следующий вид:

$$\frac{dM_i}{dt} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{ds}{dt}, \quad (18.14)$$

где  $\frac{ds}{dt}$  — линейная скорость перемещения в кинематической паре.

Дифференцирование в случае поступательной кинематической пары, аналогично ранее указанному (см. гл. 5), соответствует умножению на матрицу

$$\theta_s = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для  $i$ -й поступательной кинематической пары получим

$$dM_i/dt = \theta_s M_i ds/dt. \quad (18.15)$$

Далее матрицу  $\theta$  будем записывать без индекса, а  $d\varphi_i/dt$  и  $ds_i$  для вращательной и поступательной кинематической пары — обозначать через  $q_i$ .

Общее выражение для производной матрицы  $\dot{\Gamma}_n$  будет иметь вид

$$\dot{\Gamma}_n = \sum U_{ni} q_i, \quad U_{ni} = M_1 M_2 \dots M_{i-1} \theta M_i \dots M_n, \quad (18.16)$$

где  $\theta$  — матрица, соответствующая кинематической паре, которую составляют  $i-1$  и  $i$ -е звенья.

Аналогично может быть найдено и ускорение точки  $K$ , принадлежащей захвату

$$\ddot{r}_{K0} = \dot{\Gamma}_n r_{Kn}. \quad (18.17)$$

Решение обратной задачи, т. е. определение перемещений  $q_1, q_2, \dots, q_n$  в кинематических парах по заданной матрице  $\Gamma_n$ , как правило, является сложной задачей с  $n$  неизвестными, требующей реше-

ния уравнения

$$M_1(q_1)M_2(q_2)\dots M_n(q_n) = \Gamma_n. \quad (18.18)$$

Каждая комбинация перемещений  $q$  соответствует определенному взаимному расположению звеньев механизма. Существует множество методов решения этой задачи, которые в основном заключаются в сведении ее к задаче с меньшим количеством неизвестных путем наложения различных относительных связей на перемещения в кинематических парах.

### 18.5. Манипулятор с кинематическими парами 5-го класса

Определение функции положения объекта манипулирования рассмотрим на примере манипулятора, все звенья которого связаны кинематическими парами 5-го класса (рис. 18.11). Транспортирующая кинематическая цепь состоит из стойки 0 и звеньев 1, 2, 3.

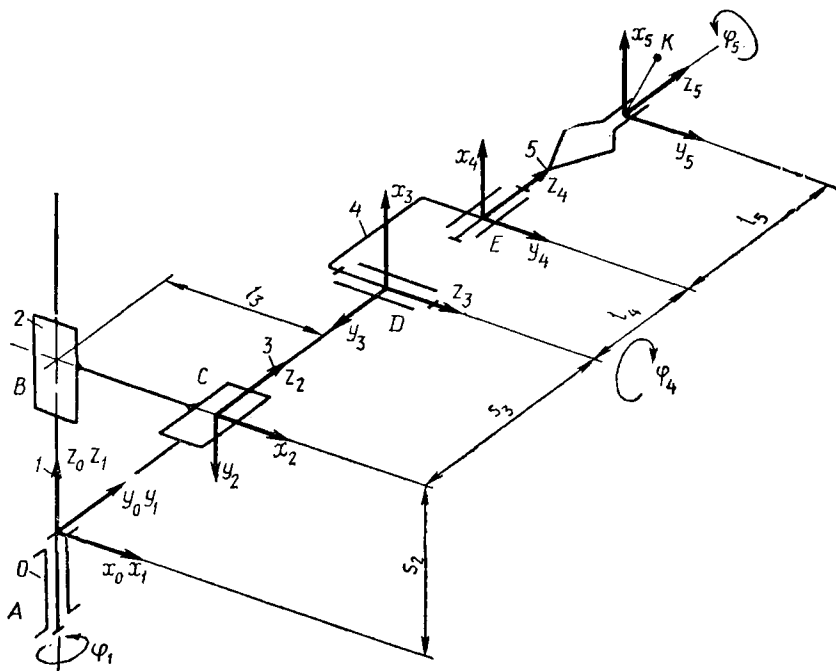


Рис. 18.11. Схема манипулятора с кинематическими парами 5-го класса

К этой кинематической цепи присоединена ориентирующая кинематическая цепь, состоящая из звеньев 4, 5; на звене 5 закреплен захват. Системы координат в каждой кинематической паре расположим в соответствии с последовательностью, указанной выше.

Со стойкой свяжем неподвижную систему координат  $T_0$ , ось  $z_0$  которой направим по оси кинематической пары  $A$ , ось  $x_0$  — произвольно, а ось  $y_0$  — в соответствии с правой системой координат.

Так как оси кинематических пар  $A$  и  $B$  совпадают, то при угле  $\varphi = 0$  оси системы координат  $T_1$ , связанной со звеном 1, и оси системы  $T_0$  будут совпадать. Ось  $z_2$  системы координат  $T_2$ , связанной со звеном 2, совпадает с осью кинематической пары  $C$ , а ось  $x_2$  направлена перпендикулярно оси  $z_1$ . Ось  $z_3$  системы координат  $T_3$ , связанной со звеном 3, направлена по оси кинематической пары  $D$ , а ось  $x_3$  располагается перпендикулярно оси  $z_2$  при  $\varphi_1 = 0$ . Ось  $z_4$  системы

Таблица 18.1. Значения коэффициентов в матрицах совмещения систем координат

	$\beta$	$b$	$s$	$\varphi$
$M_1$	0	0	0	$\varphi_1$
$M_2$	$3\pi/2$	$l_3$	$s_2$	0
$M_3$	$3\pi/2$	0	$s_3$	$3\pi/2$
$M_4$	$\pi/2$	$-l_4$	0	$\varphi_1$
$M_5$	0	0	$l_5$	$\varphi_5$

координат  $T_4$ , связанной со звеном 4, совпадает с осью кинематической пары  $E$ , а ось  $x_4$  перпендикулярна оси  $z_3$  при  $\varphi_5 = 0$ . Ось  $z_5$  системы  $T_5$ , связанной с захватом, ориентируется параллельно его губкам и в данной кинематической схеме совпадает с осью  $z_4$ . Ось  $x_5$  направляется перпендикулярно оси  $z_4$  и при  $\varphi_5 = 0$  параллельна оси  $x_4$ .

Пользуясь этими системами координат, определим функцию положения точки  $K$  объекта манипулирования с координатами  $x_{5K}$ ,  $y_{5K}$ ,  $z_{5K}$  в системе координат  $T_5$ . Координаты этой точки определяются матричным уравнением вида (18.8), которое для этого манипулятора имеет вид

$$\bar{r}_{K0} = M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 \bar{r}_{K5} = \Gamma_5 \bar{r}_{K5}. \quad (18.19)$$

Для совмещения системы  $T_5$  с системой  $T_4$  необходимо переместить систему  $T_5$  вдоль оси  $z_3$  на расстояние  $l_5$  до совпадения начал координат и повернуть систему  $T_5$  на угол  $\varphi_5$  до полного совпадения систем. Матрица  $M_5$  определится подстановкой в матрицу (18.7) значений  $\beta = 0$ ,  $b = 0$ ,  $s = l_5$ ,  $\varphi = \varphi_5$ :

$$M_5 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_5 & -\sin \varphi_5 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_5 & \cos \varphi_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18.20)$$

Значения  $\beta$ ,  $b$ ,  $s$  и  $\varphi$  для остальных матриц сведены в табл. 18.1.

Подставляя значения  $\beta$ ,  $b$ ,  $s$  и  $\varphi$  из табл. 18.1 в матрицу (18.7), определим матрицы  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  и  $M_5$ , перемножая которые по формуле (18.20), получим элементы  $a_{ij}$ ,  $i = 1,4$ ,  $j = 1,4$  матрицы  $\Gamma$  в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_4 \cos \varphi_5 + \cos \varphi_4 \sin \varphi_5, \\ a_{21} &= -\cos \varphi_1 \sin \varphi_4 \cos \varphi_5 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_5, \\ a_{31} &= \cos \varphi_4 \cos \varphi_5, \quad a_{41} = 0, \\ a_{12} &= -\sin \varphi_1 \sin \varphi_4 \sin \varphi_5 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_5, \\ a_{22} &= \cos \varphi_1 \sin \varphi_4 \sin \varphi_5 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_5, \\ a_{32} &= -\cos \varphi_4 \sin \varphi_5, \quad a_{42} = 0, \quad a_{13} = -\cos \varphi_4 \sin \varphi_1, \\ a_{23} &= \cos \varphi_4 \cos \varphi_1, \quad a_{33} = \sin \varphi_4, \quad a_{43} = 0, \\ a_{14} &= l_3 \cos \varphi_1 - s_3 \sin \varphi_1 - l_4 \sin \varphi_1 \cos \varphi_4 - l_5 \sin \varphi_1 \cos \varphi_4, \\ a_{24} &= s_2 + l_4 \sin \varphi_4 + l_5 \sin \varphi_4, \quad a_{44} = 1. \end{aligned} \right\} (18.21)$$

Так как дифференцирование такой матрицы непосредственно на основании известных правил (см. гл. 5) сложно, то скорости и ускорения точки захвата получают, пользуясь выражениями (18.16) и (18.17). Кинематический анализ манипулятора с вращательными и поступательными кинематическими парами производится операторной функцией

$$\begin{aligned} KINMAP(n, b_1, \dots, b_n, s_1 \dots s_n, \varphi_1 \dots \varphi_n, \beta_1 \dots \beta_2, \theta_1 \dots \theta_n, \\ \omega_1 \dots \omega_n, v_1 \dots v_n, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n, a_1 \dots a_n, x_{nK}, \quad (18.22) \\ y_{nK}, z_{nK}; r_K, v_K, a_K), \end{aligned}$$

где  $n$  — число подвижных звеньев манипулятора;  $\omega_i$ ,  $\varepsilon_i$  — угловые скорости и ускорения во вращательных парах;  $v_i$ ,  $a_i$  — линейные скорости и ускорения в поступательных парах;  $x_{nK}$ ,  $y_{nK}$ ,  $z_{nK}$  — координаты объекта манипулирования в системе  $T_n$ ,  $r_K$ ,  $v_K$ ,  $a_K$  — положение, скорость и ускорение точки  $K$ .

## 19. ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ С ВЫСШИМИ ПАРАМИ

### 19.1. Фрикционные механизмы

Простейший фрикционный механизм (рис. 19.1) состоит из двух круглых фрикционных колес. Если обеспечить достаточную силу сцепления (трения) между этими цилиндрическими колесами, чтобы отсутствовало проскальзывание, то при перекачивании колес модуль вектора скорости  $v_w$  по линии их касания  $WW$  определится из условия

$$v_{w_1} = v_{w_2} = v_w = 0,5\omega_1 d_{w_1} = 0,5\omega_2 d_{w_2}.$$

Передаточное отношение  $i_{12}$  таких механизмов имеет: знак «—» для внешнего (а) контакта, знак «+» — для внутреннего (б):

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = \pm d_{W_2}/d_{W_1}, \quad (19.1)$$

где  $\omega_1, d_{W_1}$  и  $\omega_2, d_{W_2}$  — угловые скорости и диаметры фрикционных колес.

Знак передаточного отношения определяется по общему правилу, вытекающему из основной теоремы зацепления (см. гл. 9).

Фрикционные механизмы с коническими колесами, представляющими собой усеченные конусы 1 и 2 (рис. 19.2), являющиеся аксонадами в относительном движении, служат для передачи вращения

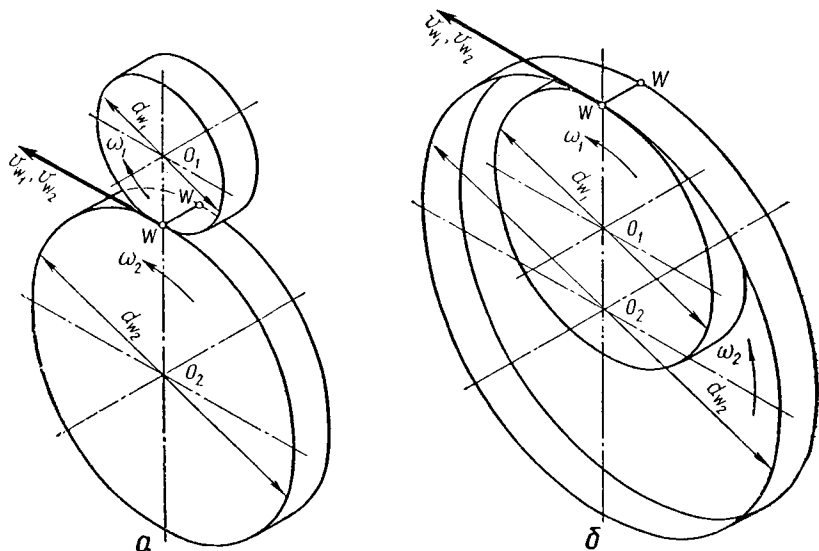


Рис. 19.1. Фрикционные механизмы с цилиндрическими колесами

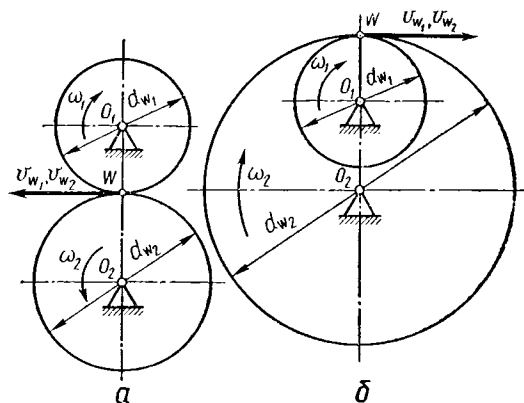
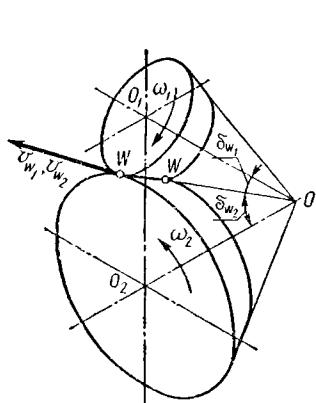


Рис. 19.2. Фрикционные механизмы с коническими колесами

Рис. 19.3. Трехзвенный зубчатый механизм



между звеньями с пересекающимися осями. Передаточное отношение при отсутствии проскальзывания будет

$$i_{12} = \sin \delta_w / \sin \delta_{w_1}. \quad (19.2)$$

Если имеет место проскальзывание, то оно может быть учтено коэффициентом относительного скольжения

$$\xi = (v_{w_1} - v_{w_2}) / v_{w_1}. \quad (19.3)$$

Преобразуя выражения (19.3), получим

$$\xi = 1 - v_{w_2} / v_{w_1} = 1 - \omega_1 d_1 / \omega_2 d_2 = 1 - (i_{12} d_1 / d_2),$$

откуда

$$i_{12} = (1 - \xi) d_2 / d_1. \quad (19.4)$$

Коэффициент  $\xi$  незначителен и колеблется в пределах 0,01...0,03.

## 19.2. Зубчатые механизмы с неподвижными осями колес

Для простейшего трехзвенного механизма с двумя зубчатыми колесами (рис. 19.3) передаточное отношение определится из кинематики центроид (аксоид) колес. Для точки касания центроид  $W$  (полюс) имеем  $v_W = v_{w_2}$  или, выражая длины окружностей через числа зубьев  $z_1$  и  $z_2$  и шаг  $P$ ,

$$v_W = 0,5\omega_1 d_W = 0,5\omega_2 d_{W_2} = \omega_2 z_1 P = \omega_2 z_2 P,$$

откуда

$$i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = \pm z_2 / z_1. \quad (19.5)$$

Знак «—» относится к случаю наружного зацепления (рис. 19.3, а), знак «+» — к случаю внутреннего (рис. 19.3, б). Для трехзвенных механизмов, оси колес которых непараллельны, знак передаточного отношения не учитывается.

При необходимости реализовать большие передаточные отношения применяются составные многоступенчатые зубчатые механизмы (рис. 19.4). Так как передаточное отношение от звена 1 к звену 2  $i_{12} = \omega_1 / \omega_2$ , а от звена 2 к звену 3  $i_{23} = \omega_2 / \omega_3$ , то передаточное отношение  $i_{13}$  (рис. 19.4, а) определится из выражения

$$i_{12} \cdot i_{23} = (\omega_1 / \omega_2) (\omega_2 / \omega_3) = \omega_1 / \omega_3 = i_{13}. \quad (19.6)$$

т. е. общее передаточное отношение равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней. Выражая его через числа зубьев, получим

$$i_{12} = (-z_2 / z_1) (-z_3 / z_2) = z_2 z_3 / z_1 z_2. \quad (19.7)$$

При  $n$  ступенях

$$\begin{aligned} i_{1n} &= i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} \cdot \dots \cdot i_{n-1,n} = \\ &= (-1)^c (z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot \dots \cdot z_n) / (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_{n-1}), \end{aligned} \quad (19.8)$$

где  $c$  — число ступеней с внешним зацеплением.

Если зубчатое колесо входит в зацепление с двумя другими колесами (рис. 19.4, б), то оно не оказывает влияния на передаточ-

ные отношения между ними. Для такого механизма получим

$$i_{13} = -(z_2/z_1)(z_3/z_2) = z_3/z_1. \quad (19.9)$$

Такие *промежуточные* («паразитные») колеса влияют не только на знак передаточного отношения механизма.

Знак передаточного отношения в конических механизмах с параллельными осями входных и выходных звеньев определяется по *правилу стрелок* следующим образом. Перпендикулярно к оси коле-

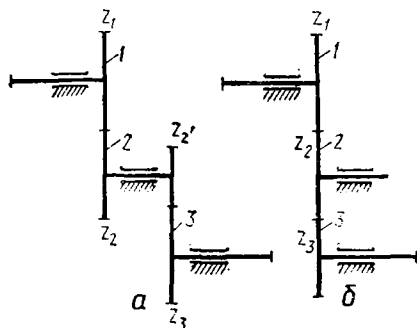


Рис. 19.4. Двухступенчатые зубчатые механизмы

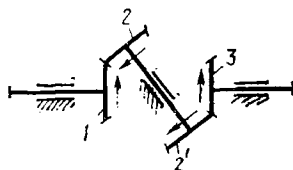


Рис. 19.5. Двухступенчатый зубчатый механизм с коническими колесами

са входного звена 1 (рис. 19.5) проводится стрелка в направлении зацепления зубчатых колес 1 и 2. Стрелка на колесе 2 проводится перпендикулярно его оси таким образом, чтобы острие шло навстречу стрелке 1. В этом же направлении проводится стрелка на колесе 2', острие которой будет направлено в сторону удаления от зацепления зубчатых колес 2' и 3. Аналогично на колесе 3 располагаем стрелку в направлении удаления от зацепления колес 2 и 3. Одинаковое или противоположное направление стрелок на входном и выходном звеньях механизма определяет положительный или отрицательный знак передаточного отношения.

### 19.3. Сателлитные зубчатые механизмы

Если ось одного из колес механизма перемещается в пространстве, то характер относительного движения их центров изменится, поэтому выражением (19.5) для кинематических расчетов механизмов с подвижными осями вращения колес пользоваться нельзя. Рассмотрим определение отношения угловых скоростей колес для сателлитных механизмов. В общем случае простейший сателлитный механизм (рис. 19.6, а) имеет степень подвижности  $W = 2$ , т. е. у него два входных звена. Для определения передаточного отношения между колесами 1 и 2 механизма его звеньям надо дать такое движение, при котором центры колес 1 и 2 будут перекатываться друг по другу при неподвижных осях. Придадим всей системе угловую скорость ( $-\omega_n$ ). Тогда звено 1 в неподвижной координатной

системе будет иметь скорость  $\omega_1' = (\omega_1 - \omega_h)$ , звено 2 —  $\omega_2' = (\omega_2 - \omega_h)$ , водило  $h$  —  $\omega_h' = \omega_h - \omega_h = 0$ , т. е. будет неподвижным. Так как теперь оси звеньев 1 и 2 относительно неподвижны, то для определения передаточного отношения можно воспользоваться выражением (19.5):

$$\omega_1'/\omega_2' = i_{12}^{(h)} = (\omega_1 - \omega_h)/(\omega_2 - \omega_h), \quad (19.10)$$

где  $i_{12}^{(h)}$  — передаточное отношение обращенного механизма, получаемого из сателлитного остановкой водила  $h$ .

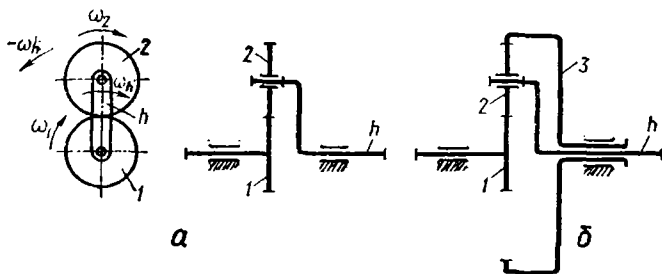
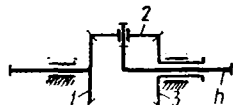


Рис. 19.6. Сателлитные зубчатые механизмы

Рис. 19.7. Конический зубчатый дифференциал



При входных звеньях 1 и 2 угловая скорость водила  $h$  определится из формулы (19.10):

$$\omega_h = (\omega_1 - \omega_2 i_{12}^h)/(1 - i_{12}^h). \quad (19.11)$$

Выражения (19.10) и (19.11) используют для анализа более сложных сателлитных механизмов с двумя центральными зубчатыми колесами (рис. 19.6, б), для которых

$$\omega_h = (\omega_1 - \omega_3 i_{13}^h)/(1 - i_{13}^h). \quad (19.12)$$

Передаточное отношение  $i_{13}^h$  определится по формуле

$$i_{13}^h = (-1)^1 (z_2 \cdot z_3)/(z_1 \cdot z_2) = -z_3/z_1. \quad (19.13)$$

Большое распространение получили дифференциальные механизмы с коническими зубчатыми колесами, у которых числа зубьев зубчатых колес 1 и 3 равны (рис. 19.7). Соотношение скоростей звеньев в этих механизмах определяется выражением (19.12), а знак передаточного отношения  $i_{13}^h$  находят по правилу стрелок. Так как  $i_{13}^h = -1$ , формула (19.12) преобразуется к виду

$$\omega_h = (\omega_1 + \omega_3)/2.$$

#### 19.4. Планетарные зубчатые механизмы

Планетарные зубчатые механизмы представляют собой дифференциальные механизмы с остановленным центральным зубчатым колесом. Для их кинематического анализа можно воспользоваться

выражениями (19.10) и (19.11), приравняв в них скорость остановленного звена к нулю. Определим передаточное отношение  $i_{2h}^h$  в планетарном механизме с остановленным центральным колесом 1 (рис. 19.8, а). Тогда согласно формуле (19.10)

$$i_{21}^h = (\omega_2 - \omega_h)/(\omega_1 - \omega_h) = (\omega_2 - \omega_h)/-\omega_h = -\omega_2/\omega_h + 1. \quad (19.14)$$

Так как  $\omega_2/\omega_h = i_{2h}$ , то, преобразуя выражение (19.14), получим:

$$i_{2h} = 1 - i_{21}^h = 1 + z_1/z_2. \quad (19.15)$$

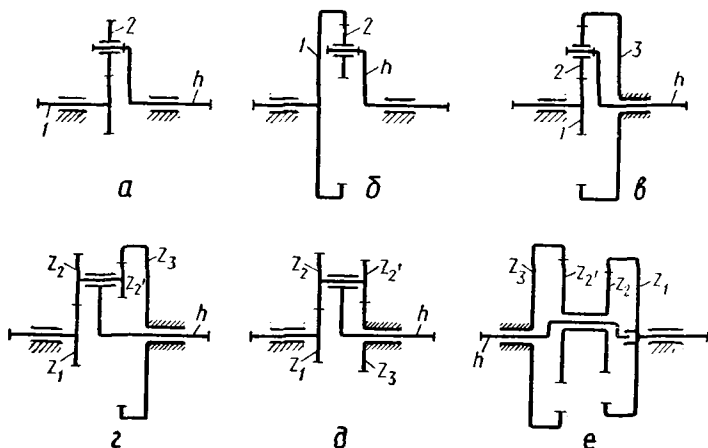
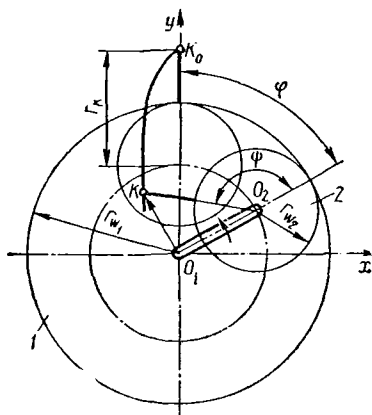


Рис. 19.8. Планетарные зубчатые механизмы

Рис. 19.9. Направляющий планетарный зубчатый механизм

Рис. 19.10. Замкнутый дифференциальный механизм



Аналогично для механизма с внутренним зацеплением колес 1 и 2 (рис. 19.8, б) имеем

$$i_{2h} = 1 - z_1/z_2. \quad (19.16)$$

Передаточное отношение для планетарного механизма с двумя центральными колесами, из которых одно колесо 3 остановлено

(рис. 19.8, в), определится аналогично

$$i_{13}^h = (\omega_1 - \omega_h)/(\omega_2 - \omega_h) = (\omega_1 - \omega_h)/\omega_h = -i_{1h} + 1; \quad (19.17)$$

$$i_{1h} = 1 - i_{13}^h = 1 + z_3/z_1$$

Используя формулу (19.17), получим передаточное отношение для планетарных механизмов с одним внешним и одним внутренним зацеплениями (рис. 19.8, з):

$$i_{1h} = 1 - i_{13}^h = 1 + z_2 z_3 / z_1 z_2; \quad (19.18)$$

с двумя внешними (рис. 19.8, д) и двумя внутренними (рис. 19.8, е) зацеплениями двухвенцовых сателлитов с центральными колесами:

$$i_{1h} = 1 - i_{13}^{(h)} = 1 - z_2 z_3 / z_1 z_2. \quad (19.19)$$

При исследовании направляющих планетарных зубчатых механизмов определяется функция положения заданной точки  $K$  сателлита 2 (рис. 19.9). Свяжем неподвижную систему координат  $x, y$  с неподвижным центральным колесом 1, входящим в зацепление с сателлитом 2. При повороте водила на угол  $\varphi$  точка  $K$  сателлита опишет циклическую кривую  $KK_0$ . Радиус-вектор  $\overline{O_1 K}$  этой точки определяется уравнением

$$\overline{O_1 K} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 K}. \quad (19.20)$$

Спроецируем эти векторы на оси координат:

$$x_K = (r_{w_1} - r_{w_2}) \sin \varphi - r_K \sin (\psi - \varphi); \quad (19.21)$$

$$y_K = (r_{w_1} - r_{w_2}) \cos \varphi + r_K \cos (\psi - \varphi),$$

где  $r_K$  — радиус точки  $K$  на сателлите;  $r_{w_1}$  и  $r_{w_2}$  — радиусы начальных окружностей центрального колеса и сателлита;  $\psi$  — угол поворота сателлита относительно водила.

При повороте водила на угол  $\varphi$  получим

$$\psi = i_{21}^h \varphi = \varphi z_1 / z_2. \quad (19.22)$$

При  $r_K = r_{w_2}$  кривая  $KK_0$  представляет собой гипоциклоиду, а при  $i_{21}^{(h)} = 2$  гипоциклоида вырождается в прямую, определяемую уравнением

$$x = 0; \quad y = r_{w_2} \cos \varphi.$$

## 19.5. Замкнутые дифференциальные механизмы

Для определения передаточного отношения *замкнутого дифференциального механизма* (рис. 19.10) разомкнем кинематические цепи 4—1' и 4'—3' и рассмотрим собственно дифференциальный зубчатый механизм, для которого в соответствии с формулой (19.10) можно записать

$$i_{h3}^{(1)} = (\omega_h - \omega_1)/(\omega_3 - \omega_1); \quad i_{k1}^{(3)} = (\omega_h - \omega_3)/(\omega_1 - \omega_3). \quad (19.23)$$

Сложив эти равенства, получим

$$i_{h3}^{(1)} + i_{k1}^{(3)} = 1. \quad (19.24)$$

Подставив  $i_{h1}^{(3)} = 1 - i_{h3}^{(1)}$  в формулу (19.23), найдем

$$\omega_h = i_{h1}^{(3)}\omega_1 + i_{h3}^{(1)}\omega_3. \quad (19.25)$$

Выражение для  $i_h$ , можно получить, разделив это уравнение на  $\omega_1$ :

$$\omega_h/\omega_1 = i_{h1} = i_{h1}^{(3)}\omega_1/\omega_1 + i_{h3}^{(1)}\omega_3/\omega_1 = i_{h1}^{(3)} + i_{h3}^{(1)} \cdot i_{31}, \quad (19.26)$$

где  $i_{31}$  — передаточное отношение механизма, замыкающего кинематическую цепь дифференциального механизма.

Пользуясь формулой (19.26), определяют передаточное отношение замкнутого механизма, если известны числа зубьев зубчатых колес. Так, для схемы на рис. 19.10 при известных  $z_1, z_2, z_3, z_1', z_3', z_4, z_4'$

$$\left. \begin{aligned} i_{h1} &= 1/i_{1h}^{(3)} = 1/(1 - i_{13}^{(h)}) = 1/(1 + z_3/z_1); \\ i_{h3} &= 1/i_{3h}^{(1)} = 1/(1 - i_{31}^{(h)}) = 1/(1 + z_1/z_3); \\ i_{31} &= z_1 z_4 / z_3 z_4'; \\ i_{h1} &= (1/(1 + z_3/z_1)) + (1/(1 + z_1/z_3)) (z_1' z_4') / (z_3' z_4'). \end{aligned} \right\} \quad (19.27)$$

## 19.6. Волновые механизмы

При вращении генератора 1 волнового фрикционного механизма (рис. 19.11) гибкое колесо 2 диаметром  $d_w$  обкатывается по жесткому колесу 3 диаметром  $d_{w_3}$ . Если обкатка осуществляется без скольжения, колесо 2 должно повернуться на угол, определяемый разностью длин окружностей гибкого и жесткого колеса. При разности диаметров жесткого и гибкого колес  $d_{w_3} - d_w = W_0$  разность длин окружностей гибкого и жесткого колес будет  $\pi W_0$ . При невращающемся гибком колесе жесткое колесо повернется в направлении вращения генератора на угол  $\varphi_3 = 2\pi W_0/d_{w_3}$ . Передаточное отношение в этих случаях будет:

при невращающемся гибком колесе

$$i_{13}^{(2)} = \omega_1/\omega_3 = \varphi_h/\varphi_3 = d_{w_3}/W_0 = d_{w_3}/(d_{w_3} - d_w); \quad (19.28)$$

при неподвижном жестком колесе

$$i_{12}^{(3)} = -d_{w_3}/W_0 = -d_{w_3}/(d_{w_3} - d_w). \quad (19.29)$$

В зубчатых волновых механизмах гибкие колеса имеют наружные, а жесткие — внутренние зубья. Так как отношение диаметров можно заменить отношением чисел зубьев, то передаточное отношение для рассматриваемых механизмов будет:

$$i_{13}^{(2)} = z_3/(z_3 - z_2); \quad (19.30)$$

$$i_{12}^{(3)} = -z_2/(z_3 - z_2). \quad (19.31)$$

## 19.7. Зубчато-рычажные механизмы

В зависимости от назначения зубчато-рычажного механизма (рис. 19.12) и с целью определения его кинематических параметров необходимо найти функцию  $s_B = s(\varphi)$ , если механизм *передаточный*, либо функцию положения точки шатуна  $M$ , если механизм *направляющий*. Для обоих случаев необходимо определить координаты точки  $M$  сателлита планетарного зубчатого механизма в функции от поворота водила  $1$ , являющегося входным звеном механизма.

Радиус-вектор  $O_0M$  точки  $M$  определяется уравнением

$$\overline{O_2M} = \overline{O_0O_2} + \overline{O_2M}. \quad (19.32)$$

Уравнение траектории точки  $M$  в прямоугольных координатах

$$\begin{aligned} x_M &= (r_{w_0} + r_{w_2}) \sin \varphi - r_M \sin(\varphi + \psi); \\ y_M &= (r_{w_0} + r_{w_2}) \cos \varphi + r_M \cos(\varphi + \psi), \end{aligned} \quad (19.33)$$

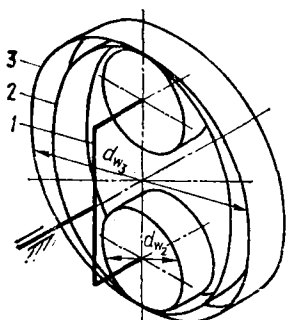


Рис. 19.11. Волновой механизм

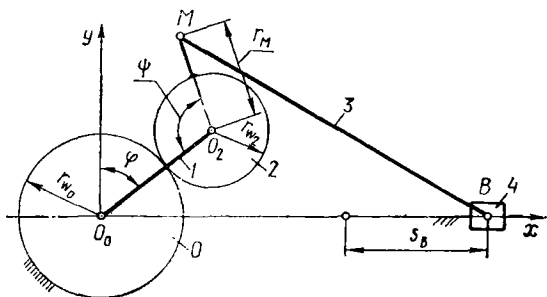


Рис. 19.12. Зубчато-рычажный механизм

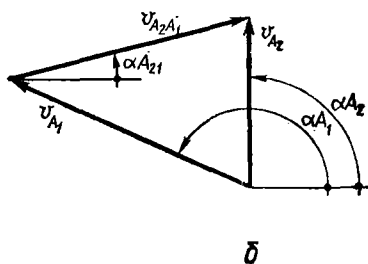
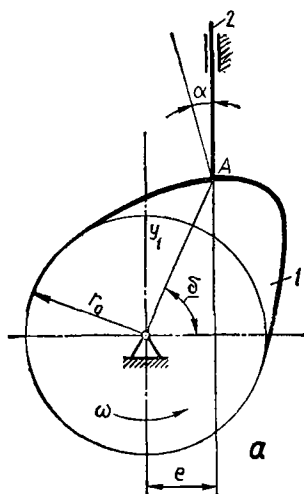


Рис. 19.13. Кулачковый механизм

где  $\psi$  — угол поворота сателлита 2 относительно водила 1 при повороте его на угол  $\varphi$ ,  $\psi = i_{20}^{(1)}\varphi = \varphi z_0/z_2$ .

Дальнейшее исследование осуществляется так же, как для кривошипно-ползунного механизма с кривошипом  $O_2M$  (см. гл. 16).

### 19.8. Кулачковые механизмы

При известных профиле кулачка и основных размерах механизма необходимо определить функцию положения, скорости и ускорения выходного звена. Кинематический анализ кулачкового механизма рассмотрим на примере механизма с поступательно движущимся толкателем, минимальным радиусом  $r_0$  и эксцентриситетом  $e$  (рис. 19.13, а). Запишем уравнение, связывающее скорости точек профиля кулачка и толкателя (рис. 19.12, б),

$$\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{A_2A_1}, \quad (19.34)$$

где  $\bar{v}_{A_1}$  и  $\bar{v}_{A_2}$  — векторы скоростей точки контакта  $A$  кулачка 1 и толкателя 2;  $\bar{v}_{A_2A_1}$  — вектор относительной скорости точки  $A_2$  толкателя относительно точки  $A_1$  кулачка.

Представим это векторное уравнение в виде системы

$$\begin{aligned} v_{A_2} \cos \alpha_{A_2} &= v_{A_1} \cos \alpha_{A_1} + v_{A_2A_1} \cos \alpha_{A_{21}}; \\ v_{A_2} \sin \alpha_{A_2} &= v_{A_1} \sin \alpha_{A_1} + v_{A_2A_1} \sin \alpha_{A_{21}}, \end{aligned}$$

решение которой может быть выполнено посредством операторной функции *SISTEMA* ( $v_{A_1}$ ,  $\alpha_{A_1}$ ,  $\alpha_{A_2}$ ,  $\alpha_{A_{21}}$ ;  $v_{A_2}$ ,  $v_{A_2A_1}$ ).

Вектор  $v_{A_1} = \omega_1 r_1$  известен по численному значению и направлению. Угол  $\alpha_{A_1} = \delta + \pi/2$ , если направление вращения кулачка совпадает с показанным на рис. 19.13, а, и  $\alpha_{A_1} = \delta - \pi/2$  — при вращении кулачка в противоположную сторону. Угол  $\alpha_{A_2}$  положителен, если он отсчитывается в направлении вращения кулачка (см. 19.13, б), и отрицателен, если отсчитывается в обратную сторону. Угол  $\alpha_{A_{21}}$  равен углу давления  $\alpha$ , если направление скорости вращения кулачка совпадает с показанным на схеме (см. рис. 19.3, а), и  $\alpha_{A_{21}} = \alpha - \pi$  — при вращении кулачка в противоположную сторону.

Функция ускорения толкателя может быть получена из функции скоростей при использовании операторной функции дифференцирования.



**ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ****20. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМОВ****20.1. Классификация сил**

*Силы, действующие при работе механизмов на их звенья, делятся на внутренние и внешние.* Под внутренними силами понимают реакции связей, возникающих в кинематических парах. Все другие силы, не относящиеся к реакциям связей, образуют систему внешних сил. **Нагружение звеньев** механизма может иметь различный характер. При *точечном контакте* звеньев оно выражается в действии сосредоточенной силы, в других случаях — нагрузка распределяется по линии, поверхности либо объему звена. Например, сила тяжести представляет собой нагрузку, распределенную по всему объему звена, сила гидродинамического сопротивления, возникающая при движении звена в жидкой среде, представляет собой нагрузку, распределенную по поверхности звена.

Соблюдение соответствия расчетной схемы действительной системе действующих нагрузок необходимо при расчетах на прочность. При решении задач динамики (определение реактивных усилий и законов движения звеньев механизма под действием приложенных сил) распределенные нагрузки заменяют **эквивалентными силовыми факторами**. В частности, это относится к силам, которые характеризуют инерционность звеньев.

В зависимости от источника внешнего силового воздействия силы делятся на *движущие* и *силы сопротивления движению*. *Движущие силы (моменты)* появляются при преобразовании какого-либо вида энергии в механическую энергию движения звеньев механизма. *Силы сопротивления движению* появляются при преобразовании механической энергии движущегося звена в другие виды энергии, как результат взаимодействия его с другим звеном механизма (силы непроизводительного сопротивления) либо с другими механическими системами. Если сила сопротивления является результатом взаимодействия звена с другой механической системой, то она называется *силой производительного сопротивления*. Например, в компрессорных машинах кинетическая энергия движущихся звеньев преобразуется в потенциальную энергию сжатого газа, в металлообрабатывающих станках — в механическую энергию разрушения обрабатываемого материала.

Одними из важнейших в категории сил непроизводительного сопротивления являются силы трения, местом приложения которых являются элементы кинематических пар. Вопрос о природе трения разбирается подробно в курсе физики: процесс трения представляется как совокупность сложных физических, химических и механических явлений, происходящих при относительном движении тел.

## 20.2. Движущие силы

Для приведения механизма в движение к ведущим звеньям необходимо приложить движущие моменты  $T_d$  или силы  $F_d$ , направленные в сторону движения звена или точек приложения сил. Движущие силы и моменты за время своего действия совершают положительную работу. В механизмах циклического действия они имеют периодический характер. Движущие силы создаются двигателями, которые осуществляют преобразование какого-либо вида энергии в механическую работу. В тепловых двигателях (внутреннего сгорания, паровые и газовые турбины) в механическую работу превращается тепловая энергия, в электродвигателях — электрическая энергия, в пружинных двигателях — потенциальная энергия деформированной пружины.

Тип двигателя определяет закон изменения движущей силы и момента. Они по-разному изменяются в зависимости от скорости рабочего звена. Разные двигатели имеют различные механические характеристики  $T_d = T_d(\omega)$  (рис. 20.1). Данная механическая характеристика соответствует определенному уровню преобразуемой энергии. Например, при увеличении количества сжигаемого топлива двигатель внутреннего сгорания имеет механическую характеристику, расположенную выше, чем приведенная на рис. 20.1, *е*. Уравнения механических характеристик используют при описании воздействия двигателя на механизм.

## 20.3. Силы производственных и непроизводственных сопротивлений

Важной категорией внешних сил являются силы  $F_{п.в}$  и моменты  $T_{п.с}$  сил производственного сопротивления, которые приложены к исполнительным звеньям механизмов. Так как механизмы предназначены для преодоления сил производственного сопротивления, то значение и направление этих сил определяются технологическим процессом. Например, в металлорежущих станках силой производственного сопротивления является сила резания, приложенная к режущему инструменту; в компрессорных машинах — сила давления сжимаемого газа, в транспортирующих машинах — силы сопротивления перемещению груза. Работа сил производственного сопротивления по отношению к работе движущих сил является отрицательной. Силы производственного сопротивления, также как и движущие силы, зависят от кинематических параметров. Эти зависимости являются механическими характеристиками рабочих машин (рис. 20.2), представляющими функциональную зависимость  $T_{п.с} = T_{п.с}(\omega)$ .

К категории внешних сил относятся силы и моменты непроизводственного сопротивления, которые могут действовать на любые звенья механизма и на преодоление которых затрачивается дополнительная работа: силы трения в кинематических парах, сопротивления движению звеньев со стороны среды (воздух, жидкость и т. п.),

тяжести, инерции и т. д. Работа сил непроизводительного сопротивления на разных фазах движения бывает как *положительной*, так и *отрицательной*. Например, если при работе механизма его звенья поднимаются в вертикальной плоскости, то силы тяжести звеньев совершают отрицательную работу, если опускаются — положительную.

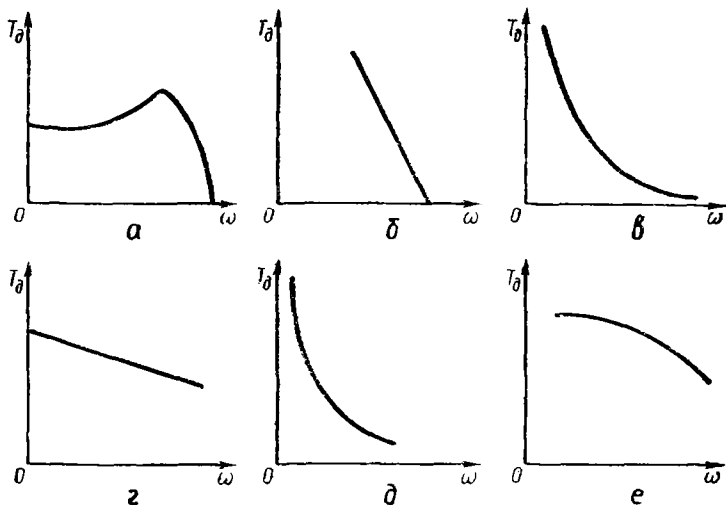


Рис. 20.1. Механические характеристики двигателей: электродвигатели асинхронные (а), постоянного тока с параллельным (б) и последовательным (в) возбуждением; механические пружинные (г), паровые (д), внутреннего сгорания (е)

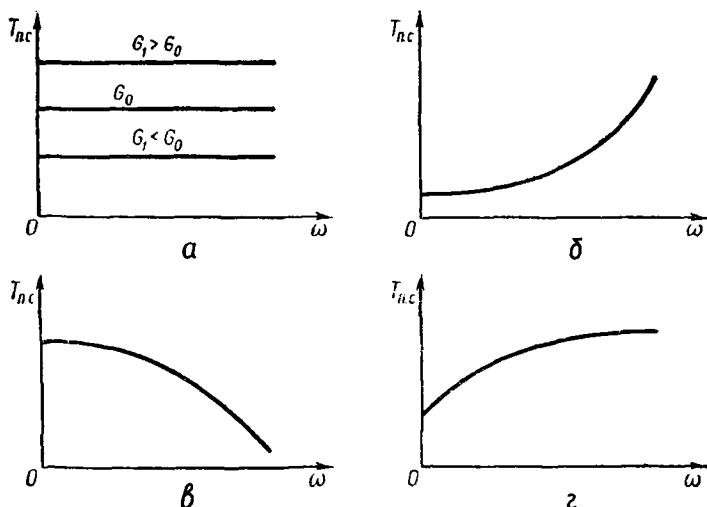


Рис. 20.2. Механические характеристики: грузоподъемной машины (а), центробежного насоса (б), лифта (в), бетономешалки (г)

Работа сил трения всегда отрицательна относительно работы движущих сил. В зависимости от типа кинематической пары, характера относительного движения образующих ее звеньев сопротивление движению оказывают силы трения скольжения и силы трения качения. Так как силы трения препятствуют относительному движению звеньев, то они действуют при рабочем и холостом ходе машин. Во многом эффективность конструкции механизма определяется затратами энергии на преодоление сил трения.

## 20.4. Силы инерции звеньев

**Инерционность звеньев способствует или препятствует движению рабочих органов механизмов.** В соответствии с известными положениями динамики материального тела, рассматриваемого как системы материальных точек, силы инерции учитываются при решении дифференциальных уравнений движения звеньев, решение которых позволяет определить истинный закон движения. При инженерных расчетах часто вместо учета истинного закона изменения внешних сил при силовом расчете движущегося звена решением дифференциальных уравнений движения учитывают действие нагрузок на звено в конкретных его положениях, придавая уравнениям движения форму уравнений статики. Этот расчет проводится в соответствии с **принципом Д'Аламбера** (см. прил.): *механическая система может считаться находящейся в равновесии, если ко всем действующим на нее силам добавлены силы инерции.* Следовательно, для выполнения силового расчета механизма необходимо определить силы и моменты сил инерции его звеньев для рассматриваемых их положений.

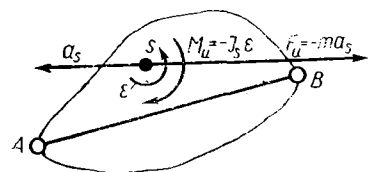


Рис. 20.3. Приведение сил инерции

Следовательно, для выполнения силового расчета механизма необходимо определить силы и моменты сил инерции его звеньев для рассматриваемых их положений.

При проведении динамических расчетов механизмов всегда следует помнить, что силы инерции и их моменты только условно считаются приложенными к рассматриваемому звену, чтобы сделать систему равновесной и получить возможность использовать уравнения статики. Поэтому уравнения равновесия с включением сил инерции лишены физической сущности и дают только математическое решение задачи.

Для звена, совершающего неравномерное движение, главный вектор внешних сил, действующих на рассматриваемое звено, равен и противоположно направлен главному вектору сил инерции звена. Если кроме сил звено испытывает воздействие пар сил, то главный момент сил, действующих на звено, равен и противоположно направлен главному моменту сил инерции звена.

Для звена, совершающего плоскопараллельное движение (рис. 20.3), элементарные силы инерции можно привести к главному вектору сил инерции и главному моменту сил инерции:

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_s \text{ и } \vec{M}_u = -J_s\bar{\epsilon}, \quad (20.1)$$

где  $m$  и  $J_s$  — соответственно масса и момент инерции звена;  $\bar{a}_s$  и  $\bar{\epsilon}$  — векторы линейного ускорения центра масс и углового ускорения звена.

Если звено движется поступательно, то  $\bar{\epsilon} = 0$ , а следовательно,  $M_n = 0$ , и силы инерции приводятся только к главному вектору сил инерции  $\bar{F}_n$ . Если звено совершает вращательное движение вокруг точки, совпадающей с центром масс  $S$ , то  $\bar{a}_s = 0$ , а следовательно,  $\bar{F}_n = 0$ , и силы инерции приводятся к главному моменту сил инерции  $M_n$ .

## 20.5. Силы трения скольжения

Трение представляет собой явление сопротивления относительно перемещению, возникающее между двумя звеньями на элементах кинематических пар. По характеру относительного движения различают трение скольжения и качения, по состоянию поверхностного слоя элементов пары и наличию смазочного материала — трение без смазывания, граничное и жидкостное. Эти факторы и многие другие влияют на силу трения, которая направлена в сторону, противоположную направлению относительной скорости. Сила трения  $\bar{F}_T$  согласно формуле Кулона (см. прил.) зависит от нормальной составляющей  $\bar{F}_n$  нагрузки, действующей на кинематическую пару, и определяется через коэффициент трения  $f$ :

$$F_T \leq F_n f. \quad (20.2)$$

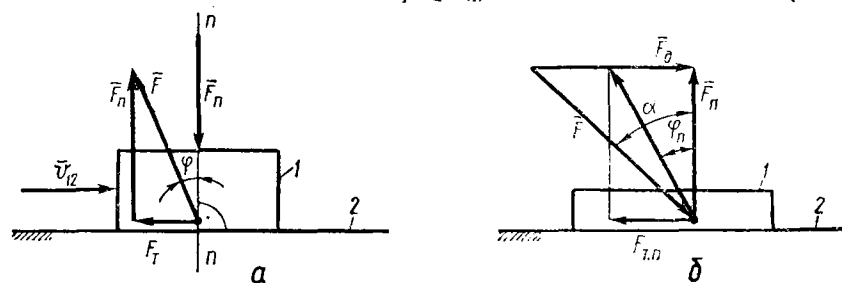


Рис. 20.4. Трение на плоскости

Из рис. 20.4, а следует, что  $f = F_T/F_n = \text{tg } \varphi$ . Угол  $\varphi$  называется *углом трения*. Коэффициенты трения определяются экспериментально для различных сочетаний трущихся материалов и условий трения и приводятся в справочниках. Различают *коэффициент трения покоя*  $f_n = \text{tg } \varphi_n$ , определяющий предельную силу трения  $F_{T,n}$  в момент начала движения, и *коэффициент трения движения*  $f_d < f_n$ . Пределы изменения коэффициента трения для материалов общемашиностроительного применения широки:  $f_n = 0,1 \dots 0,5$ ;  $f = 0,05 \dots 0,2$ .

Если на звено 1 действует сила  $\bar{F}$  (рис. 20.4, б), направленная под углом  $\alpha$  относительно нормали к поверхности контакта его со

звеном 2, то составляющая этой силы  $\bar{F}_d$ , сдвигающая звено 1, до момента начала движения будет уравновешиваться силой трения  $\bar{F}_{\tau, n}$ , зависящей от нормальной составляющей  $\bar{F}_n$ :

$$F_{\tau, n} = f_n F_n = f_n F \cdot \cos \alpha = F \cdot \sin \alpha = F_d. \quad (20.3)$$

Только когда движущая составляющая  $F \sin \alpha$  силы  $\bar{F}$  будет больше предельной силы трения, т. е. когда  $F_d = F \sin \alpha > F_{\tau, n} = f_n F \cos \alpha$ , наступит движение. Следовательно, условие движения будет

$$\sin \alpha / \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha > f_n = \operatorname{tg} \varphi_n.$$

Формула (20.2) устанавливает простейшую связь между силами нормальной и трения, удобную для инженерных расчетов, и используется в большинстве случаев конструктивных исполнений кинематических пар, если применять *приведенный коэффициент трения*  $f'$ :

$$F_{\tau} \leq f' F_n \text{ и } f' = \operatorname{tg} \varphi'. \quad (20.4)$$

Приведенный коэффициент трения определяют теоретически и экспериментально через коэффициент  $f$  для конкретных кинематических пар со сложными элементами.

## 20.6. Силы трения качения

В высшей кинематической паре, находящейся в покое, внешняя нагрузка и реакция расположены на одной линии (рис. 20.5, а). При относительном качении сопротивление движению обусловлено **эффектом молекулярного сцепления и трением** при относительном скольжении элементов в пределах упругих деформаций в зоне контакта. Благодаря этим явлениям при качении реакция  $\bar{F}_n$  звена 1 на звено 2 (б) смещается в направлении перекачивания на некоторое расстояние  $k$  относительно вектора нагружающей силы  $\bar{F}$ . Для осуществления равномерного качения движущий момент  $M_d$  должен быть равен моменту  $M_{\tau}$  сопротивления качению

$$M_d = M_{\tau} = k F_n. \quad (20.5)$$

*Коэффициент трения качения* имеет размерность длины и в зависимости от сочетания материалов и качества контактирующих поверхностей изменяется в широких пределах (для стали ориентировочно  $k = 0,001 \dots 0,005$  см).

При относительном качении под действием силы  $F_d$  (б), создающей движущий момент, возникает сила трения  $\bar{F}_{\tau}$  на элементах кинематической пары, направленная в сторону, противоположную движению. Предельное значение этой силы  $\bar{F}_{\tau, n}$  в соответствии с формулой (20.4) будет  $F_{\tau, n} = f'_n F_n = F_d$ , а движущий момент согласно формуле (20.5)  $M_d = F_d h = f'_n F_n h = k F_n$ . В зависимости от соотношения  $f'_n \approx k/h$  возможны: равномерное качение ( $f'_n > k/h$ ), одновременное качение и скольжение ( $f'_n = k/h$ ) и только скольжение ( $f'_n < k/h$ ).

Пользуясь понятием приведенного коэффициента трения, можно сопротивление движению при качении выразить через силу трения. Из условия (20.5) при  $F_d h = k F_n$  получим

$$F_\tau = F_d = (k/h) F_n = f' F_n \text{ и } f' = k/h. \quad (20.6)$$

## 20.7. Трение в низших кинематических парах

Для различных видов кинематических пар сила трения и момент от сил трения при одинаковой нормальной силе  $\bar{F}_n$  зависят от значения приведенного коэффициента трения. Его значение определяется формой и расположением элементов пары.

Рассмотрим определение приведенного коэффициента трения  $f'$  в поступательной кинематической паре, образованной звеньями 1 и 2 (рис. 20.6), контактирующими по произвольной цилиндрической поверхности. Радиус поверхности  $\rho$  ( $\beta$ ) длиной  $l$  является функцией угла  $\beta$ , образованного радиусом  $\rho$  и вектором нормальной силы  $d\bar{F}_n$ . Эта сила, являющаяся реакцией в кинематической паре, создает на поверхности контакта давление  $p$  ( $\beta$ ). Тогда элементарная сила трения на элементе  $ds = \rho$  ( $\beta$ )  $d\beta$ , значение которой определяется по формуле (20.2), будет

$$dF_\tau = f dF_n = f p$$
 ( $\beta$ )  $l ds = f p$  ( $\beta$ )  $l \rho$  ( $\beta$ )  $d\beta$ , (20.7)

а результирующая сила трения

$$F_\tau = f l \int_{-\beta_1}^{\beta_2} p$$
 ( $\beta$ )  $\rho$  ( $\beta$ )  $d\beta$ . (20.8)

Для кинематической пары с элементами в виде поверхности круглого цилиндра (рис. 20.7, а)  $\rho$  ( $\beta$ ) =  $r$  = const. Если пара неприрабочанная, то принимают равномерное распределение давления по поверхности контакта. Тогда из условия равновесия звена 1 (при

$2\beta = \pi$ )  $F = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p r l \cos \beta d\beta = p l d$  получим  $p$  ( $\beta$ ) =  $p = F/l d$ . После подстановки значений  $p$  ( $\beta$ ) и  $\rho$  ( $\beta$ ) в формулу (20.8) получим

$$F_\tau = f F l \pi r / l d = f \pi F / 2 = f' F \text{ и } f' = (\pi/2) f. \quad (20.9)$$

Для прирабочанной пары принимают **косинусоидальный закон**  $p$  ( $\beta$ ) =  $p_0 \cos \beta$ . Тогда получим

$$F_\tau = f r l p_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta d\beta = 2 f r l p_0, \quad (20.10)$$

где  $p_0$  — максимальное давление на элементарном участке поверхности.

Из условия равновесия звена 1

$$-F + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p l \cos \beta ds = -F + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 l r \cos^2 \beta d\beta = 0;$$

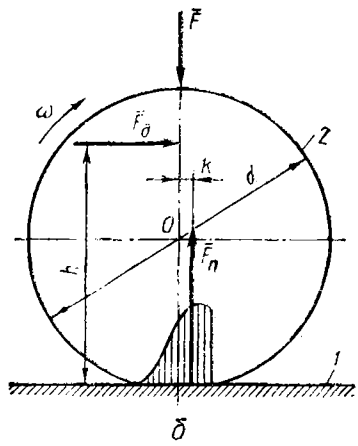
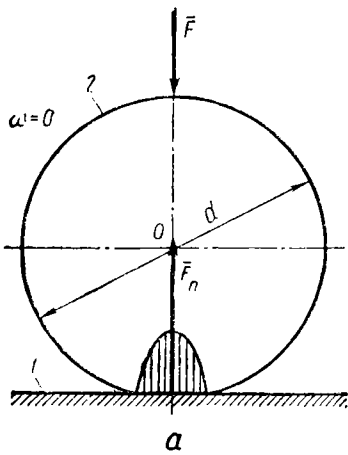


Рис. 20.5. Трение качения

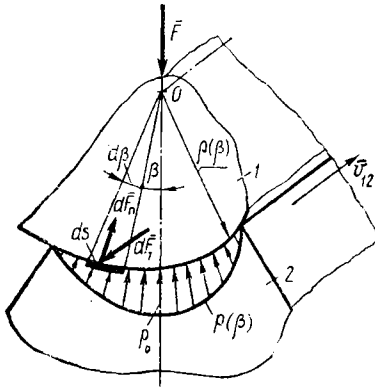
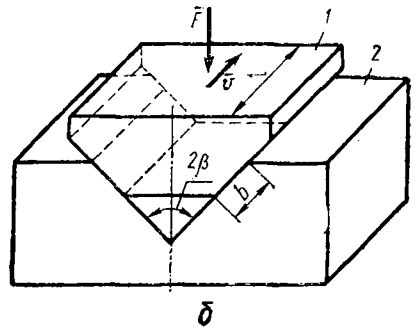
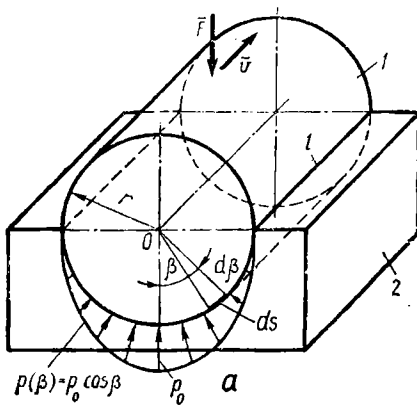


Рис. 20.6. Определение приведенного коэффициента трения

Рис. 20.7. Трение в поступательной паре





после интегрирования, учитывая, что  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = \pi/2$ , найдем

$$\rho_0 = 2F/(\pi l r). \quad (20.11)$$

Подставляя значение  $\rho_0$  в формулу (20.10), получим

$$F_\tau = (4/\pi) f F = f' F \text{ и } f' = (4/\pi) f. \quad (20.12)$$

Для пары с элементами в виде треугольных направляющих (б) имеем  $\rho(\beta) = F/(2lb \sin \beta)$  и, принимая  $\rho(\beta) = 2b$ , согласно формуле (20.8)

$$F_\tau = 2fFbl/(2lb \sin \beta) \text{ и } f' = f/\sin \beta. \quad (20.13)$$

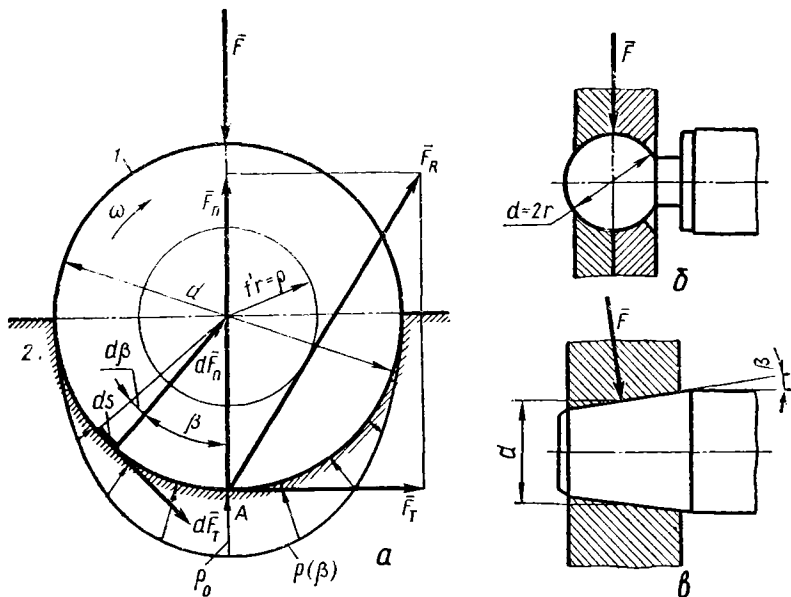


Рис. 20.8. Трение во вращательной паре при действии радиальной силы

Во вращательных кинематических парах элементами являются плоскости или цилиндрические поверхности с образующей произвольной формы. Для пары с элементами в виде поверхности круглого цилиндра (рис. 20.8, а), нагруженной радиальной силой  $\bar{F}$ , суммарная сила трения определяется так же, как и в случае поступательной пары с такими же элементами, по формулам (20.9) и (20.12). Наличие силы трения  $\bar{F}_\tau$  приводит к отклонению суммарной силы  $\bar{F}_R = \bar{F}_n + \bar{F}_\tau$  от направления силы  $\bar{F}$ , действующей на соединение. Сила  $\bar{F}_R$  будет касаться окружности радиуса  $\rho = f'r$ , называемой *кругом трения*, и направлена так, что своим действием будет препятствовать вращению элементов кинематической пары относительно друг друга. Для кинематических шар с элементами в виде сферических (рис. 20.8, б) и конических поверхностей (рис. 20.8, в)

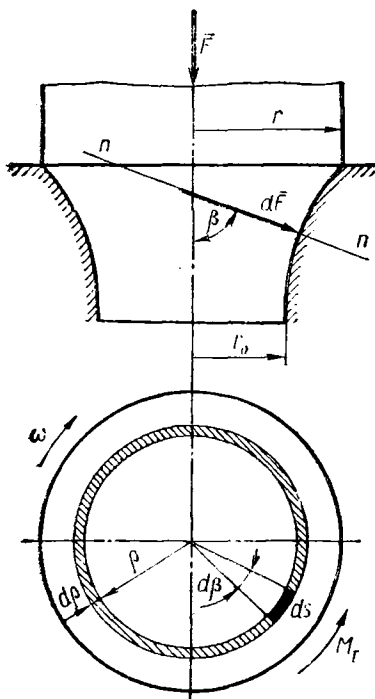


Рис. 20.9. Трение во вращательной паре при действии осевой силы

приведенные коэффициенты трения будут соответственно  $f'_c = 1,27f$  и  $f'_k = f'/\cos \beta$ . Момент сил трения, который необходимо преодолеть при вращении кинематической пары, будет

$$M_T = 0,5F r_T d = 0,5f' F r_n d. \quad (20.14)$$

При нагружении кинематической пары осевой силой (рис. 20.9) на элементарную площадку  $ds$  будет действовать сила  $dF = p(\beta) \times \rho(\beta) d\beta$ , а элементарный момент трения составит  $dM_T = f \rho dF = f p(\beta) \rho^2 d\rho d\beta$ . Полный момент трения —  $M_T = f \int_0^{2/\pi} d\beta \int_{r_0}^r p(\beta) \rho^2 \times \times d\rho = 2\pi f \int_{r_0}^r p(\beta) \rho^2 d\rho$ . Для кинематической пары с элементом в виде плоского кольца  $p = F/(\pi(r^2 - r_0^2))$ , а момент трения

$$M_T = 2\pi f F / (\pi(r^2 - r_0^2)) \int_{r_0}^r \rho^2 d\rho =$$

$$= f F (2(r^3 - r_0^3) / (3(r^2 - r_0^2))) = f' F, \quad (20.15)$$

где  $f' = f(2/3)(r^3 - r_0^3)/(r^2 - r_0^2)$ .

Для пары с элементом в виде плоского круга (при  $r_0 = 0$ ) получим

$$M_T = 2f F r / 3 \text{ и } f' = 2f/3. \quad (20.16)$$

Для кинематической пары с элементами в виде конической поверхности

$$f'_k = f'/\sin \beta = 2f/(3 \sin \beta). \quad (20.17)$$

## 20.8. Трение в высших кинематических парах

Звенья, образующие высшие кинематические пары, совершают плоскопараллельное и пространственное движение. В этих случаях наряду с трением скольжения имеет место и трение качения. Сопротивление качению, как указывалось ранее, оценивают моментом пары сил трения качения по формуле (20.5) или силой по формуле (20.6). Для вращательных высших кинематических пар с многопарным контактом (рис. 20.10, а) взаимодействие поверхностей качения может быть описано следующим образом. При действии на звено 1 радиальной силы  $\vec{F}$  нагрузки на элементах пар, образован-

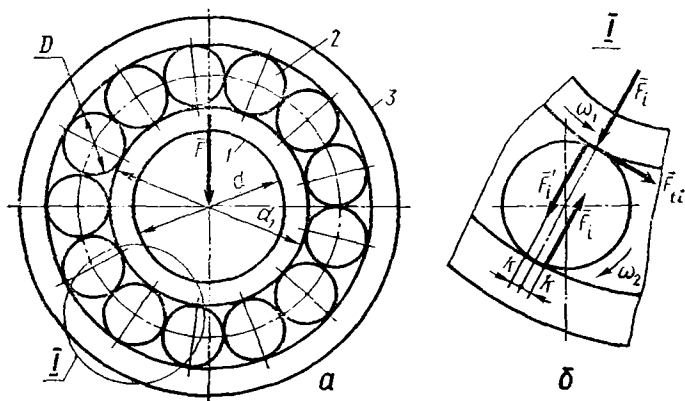


Рис. 20.10. Трение качения во вращательной паре с многопарным контактом при действии радиальной силы

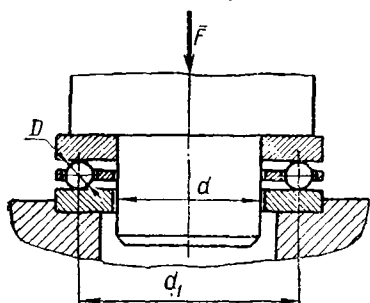


Рис. 20.11. Трение качения во вращательной паре с многопарным контактом при действии осевой силы

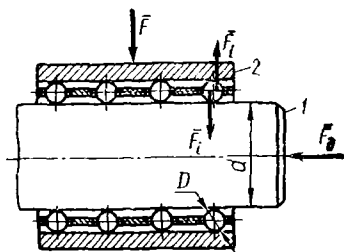


Рис. 20.12. Трение качения в поступательной кинематической паре

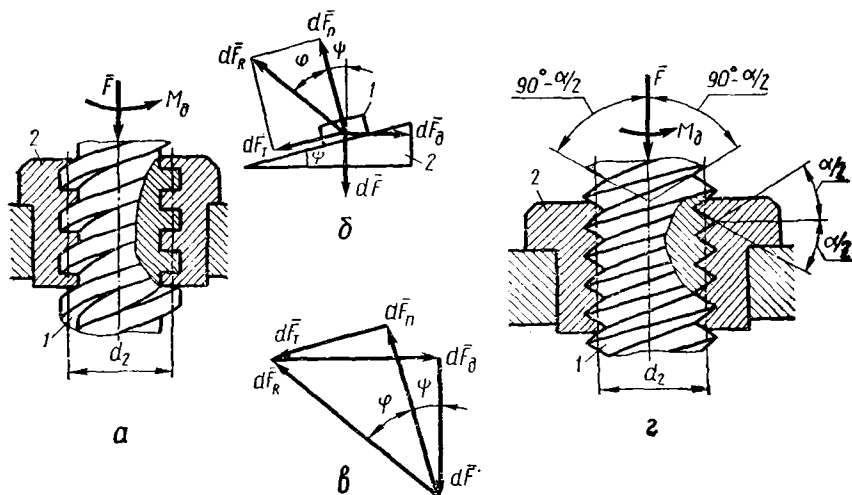


Рис. 20.13. Трение в винтовой кинематической паре

ных звеньями 1 и 2, будут смещены относительно теоретической точки контакта в сторону относительного движения на коэффициент трения качения  $k$  (6). Со стороны звена 3 к звену 2 будет приложена сила  $F_{ti}$ , момент которой равен моменту реакции  $F_i$  при качении  $F_{ti}D = 2F_i k$ , откуда  $F_{ti} = 2F_i k/D$ . Для преодоления моментов сил  $\bar{F}_{ti}$  и  $\bar{F}_i$  к звену 3 необходимо приложить момент  $M_i = F_{ti}d_1/2 + F_i k = F_i k (1 + d_1/D)$ . Полный момент трения складывается из суммы потерь в каждой нагруженной зоне звеньев 2:

$$M_T = \sum_{i=1}^n M_i = k(1 + d_1/D) \sum_{i=1}^n F_i = F\gamma k(1 + d_1/D), \quad (20.18)$$

где  $\gamma$  — коэффициент, учитывающий закон распределения сил  $F_i$  в нагруженной зоне.

Предполагая, что распределение сил  $F_i$  подчиняется косинусоидальному закону, получим  $\gamma \approx 1,3$ . Потери на трение качения можно представить в форме потерь на трение скольжения, воспользовавшись понятием о *приведенном коэффициенте трения*. Для этого трение качения в многопарном контакте следует условно заменить трением скольжения на поверхность радиуса  $d/2$ . В результате получим

$$M_T = (1,3Fk/0,5d)(1 + d_1/D)d/2 = f'Fd/2, \quad (20.19)$$

где  $f' = (2,6k/d)(1 + d_1/D)$  — приведенный коэффициент трения к поверхности диаметром  $d$ .

Для пары, нагруженной осевой силой (рис. 20.11), полагая  $\gamma = 1$ ,

$$M_T = Fk(1 + d_1/D). \quad (20.20)$$

Если использовать приведенный коэффициент трения, то при представлении потерь трения качения потерями на поверхности диаметром  $d$  по формуле (20.19),  $M_T = Fk(1 + d_1/D) = f'Fd/2$ , получим

$$f' = (2k/d)(1 + d_1/D). \quad (20.21)$$

В поступательной кинематической паре с многопарным контактом (рис. 20.12) возможное относительное перемещение звеньев 1 и 2 под действием силы  $F_d$  будет при условии

$$F_d D = 2k \sum_{i=1}^n F_i = 2kF. \quad (20.22)$$

Уподобляя эту пару условной кинематической паре с трением скольжения, получим

$$F_d = F_T = f \sum_{i=1}^n F_i = 2kF/D = f'F, \quad (20.23)$$

где  $f' = 2k/D$  — приведенный коэффициент трения.

## 20.9. Трение в винтовой кинематической паре

Для определения момента трения в винтовой паре (рис. 20.13, а) полагаем, что давление от внешней нагрузки  $F$  по поверхности витков распределяется равномерно и закон Кулона применим для эле-

ментарной площадки  $ds$ . Сведем пространственную систему сил, действующих на звенья 1 и 2 кинематической пары, к условной плоской, состоящей из развертки резьбы 2 в виде наклонной плоскости и призмы, представляющей звено 1. На элемент 1 (рис. 20.13, б) при движении будут действовать элементарные нагрузки  $d\bar{F}$ , реакция  $d\bar{F}_n$ , сила трения  $d\bar{F}_\tau$  и движущая сила  $d\bar{F}_d$ , произведение которой на средний радиус резьбы  $0,5d_2$  создает элементарный вращающий момент  $dM_d$ . При равномерном движении должно соблюдаться условие

$$d\bar{F} + d\bar{F}_n + d\bar{F}_\tau + d\bar{F}_d = 0.$$

Из условия равновесия многоугольника сил (рис. 20.13, в) найдем

$$dF_d = dF \cdot \operatorname{tg}(\psi + \varphi), \quad (20.24)$$

где  $\psi$  — угол подъема винтовой линии резьбы;  $\varphi$  — угол трения — угол между полной реакцией  $dF_R$  и нормальной силой  $d\bar{F}_n$ .

Полный момент трения будет

$$M_\tau = \int dF_d \cdot d_2/2 = (Fd_2/2) \operatorname{tg}(\psi + \varphi). \quad (20.25)$$

При движении звена 1 в направлении, совпадающем с направлением силы  $\bar{F}$  (рис. 20.13, в), момент сил трения будет

$$M_\tau = (Fd_2/2) \operatorname{tg}(\psi - \varphi). \quad (20.26)$$

В винтовых кинематических парах с  $\psi > \varphi$  поступательное и одновременно вращательное движение звена 1 возможно. Винтовые пары, у которых  $\psi < \varphi$ , называются *самотормозящимися*: движение звена при любом значении силы  $\bar{F}$  невозможно.

Эти же зависимости пригодны для винтовой пары с треугольной резьбой (рис. 20.13, г), если вместо угла трения  $\varphi$  подставить приведенный угол трения  $\varphi' = \operatorname{arctg} f'$ . Величину его определяют, предполагая, что звено совершает движение в треугольных направляющих с углом при вершине  $2(90^\circ - \alpha/2)$ , образованных боковыми поверхностями витков резьбы. В соответствии с формулой (20.13) получим

$$f' = f/\sin(90^\circ - \alpha/2) = f/\cos(\alpha/2). \quad (20.27)$$

Поскольку  $f' > f$  и, следовательно  $\varphi' > \varphi$ , то потери в винтовой паре с треугольной резьбой больше, чем в паре с прямоугольной резьбой (при  $\alpha = 60^\circ$  примерно на 15 %).

## 20.10. Трение в кинематической паре с гибким звеном

В кинематической паре с гибким звеном 1 (рис. 20.14) сопротивление движению возникает на поверхности контакта его со звеном 2. Для движения гибкого звена при нагрузке  $\bar{F}_1$  на одном конце его к другому нужно приложить силу  $F_2 > F_1$ . Выделим элементарный участок гибкого звена в пределах угла  $d\alpha$ . На него будут действовать силы натяжения  $\bar{F}$  и  $\bar{F} + d\bar{F}$  и элементарные силы — нормальная

$d\bar{F}_n$  и трения  $d\bar{F}_\tau$ . Из условия равновесия в вертикальной плоскости  $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$  получим

$$dF_n = (F + (F + dF)) \sin(\alpha/2) \approx Fd\alpha. \quad (20.28)$$

Из условия равновесия в горизонтальной плоскости при  $\cos(\alpha/2) \approx 1$  получим

$$dF_\tau = ((F + dF) - F) \cos(\alpha/2) \approx dF. \quad (20.29)$$

По формуле (20.4) с учетом формул (20.28) и (20.29) найдем

$$dF_\tau = f' dF_n = f' F d\alpha,$$

откуда

$$dF_\tau/F = f' d\alpha. \quad (20.30)$$

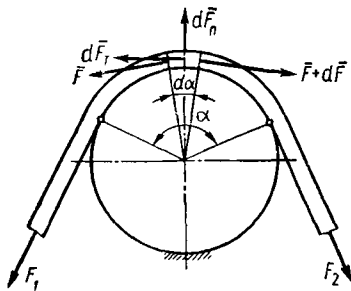


Рис. 20.14. Трение в кинематической паре с гибким звеном

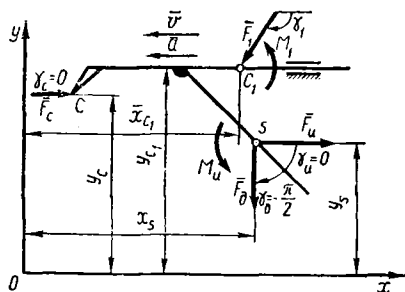


Рис. 20.15. Приведение сил и моментов, действующих на звено

Проинтегрировав уравнение (20.30) в пределах дуги обхвата  $\alpha - \int_{F_1}^{F_2} dF/F = f' \int_0^\alpha d\alpha$ , получим  $\ln(F_2/F_1) = f'\alpha$  и  $F_2/F_1 = e^{f'\alpha}$ , следовательно,

$$F = F_\tau = F_2 - F_1 = F_1(e^{f'\alpha} - 1), \quad (20.31)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

Формула (20.31) получена Л. Эйлером (см. прил.) и носит его имя.

## 20.11. Приведение сил, действующих на звено, к эквивалентной системе сил

В силовых расчетах систему сил и моментов сил, действующих на звено, удобно сводить к эквивалентной системе — одной силе и одной паре сил. Для этого определяют главный вектор всех сил, действующих на звено, и прикладывают его в любой точке звена, называемой *точкой приведения*. Чтобы равновесие системы не нарушалось, при переносе каждой силы необходимо добавить пару сил, момент которых равен моменту переносимой силы относительно точки приведения. Главный момент системы сил определяется как сумма моментов внешних сил и моментов пар сил, добавленных при переносе сил в точку приведения.

Рассмотрим пример приведения к одной силе и паре сил заданной системы сил, действующих на звено механизма (рис. 20.15). За точку приведения примем центр масс  $S$  звена, который является точкой приложения силы тяжести  $\bar{F}_g$  звена и силы инерции  $\bar{F}_n$ . Главный вектор сил, действующих на звено,  $\bar{F} = \bar{F}_c + \bar{F}_1 + \bar{F}_g + \bar{F}_n$ . Значение и направление силы  $F$  можно получить аналитически, используя операторную функцию  $SMVKT$  (см. гл. 5):

$$\left. \begin{aligned} SMVKT(F_c, 0, F_1, \gamma_1; F_\psi, \psi); \\ SMVKT(F_\psi, \psi, F_g, -\pi/2; F_\psi, \psi); \\ SMVKT(F_\psi, \psi, F_n, 0; F, \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (20.32)$$

где  $F_\psi$  и  $\psi$  — промежуточные значения вектора суммы двух векторов и его направляющего угла.

Определим моменты от сил  $\bar{F}_c$  и  $\bar{F}_1$ , которые добавятся при переносе этих сил в точку  $S$ . Для этого воспользуемся общим выражением момента через векторное произведение силы  $\bar{F}_i$  и радиуса вектора  $\bar{r}_i$  до точки ее приложения  $M(\bar{F}_i) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i = r_x \bar{F}_y - r_y \bar{F}_x$  (индексы  $x$  и  $y$  определяют проекцию вектора на соответствующую координатную ось). Тогда получим

$$M_{F_c} = F_c(y_s - y_c); \quad (20.33)$$

$$M_{F_1} = F_1 y_s \cos \gamma_1 - F_1 (x_c - x_s) \sin \gamma_1. \quad (20.34)$$

Главный момент системы сил

$$M = M_1 + M_2 + M_{F_c} + M_{F_1}. \quad (20.35)$$

Сведение системы сил, действующих на звено, к одной силе и к паре сил позволяет в дальнейшем формализовать алгоритм расчета, что особенно важно при применении электронных вычислительных машин.

## 21. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМОВ

### 21.1. Реакции в кинематических парах

В элементах кинематических пар возникают реакции связей, являющиеся результатом силового взаимодействия звеньев. Во вращательной кинематической паре 1—2 (рис. 21.1) давления  $p$  ( $\beta$ ) распределяются по поверхности цилиндра. Если потери на трение малы и ими можно пренебречь, то равнодействующая  $\bar{F}_{12}$  распределенной по поверхности силы пройдет через центр пары (рис. 21.1, а). При учете трения (см. гл. 20) равнодействующая будет касаться окружности радиуса  $\rho = f'r$  (рис. 21.1, б).

В плоской поступательной кинематической паре 1—2 закон  $p$  ( $x$ ) распределения нагрузки зависит от вида элементов (рис. 21.2). Равнодействующая  $\bar{F}_{12}$  распределенной нагрузки будет направлена или по нормали к поверхности контакта (рис. 21.2, а), если трением пренебречь, или под углом трения  $\phi$  к нормали (рис. 21.2, б), если

силы трения учитывают. Для каждого звена в плоской координатной системе могут быть составлены три уравнения равновесия: для  $n$  звеньев число уравнений равновесия будет  $3n$ . Сила, как мера физического взаимодействия двух тел, характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. Для низших кинематических пар плоских механизмов всегда известно либо направление (в поступательной паре), либо точка приложения (во вращательной паре) и неизвестными остаются две характеристики. Тогда

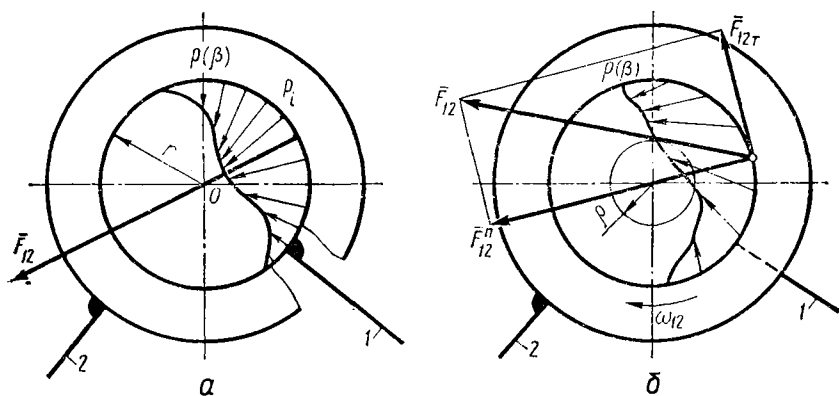


Рис. 21.1. Определение реакций во вращательной кинематической паре

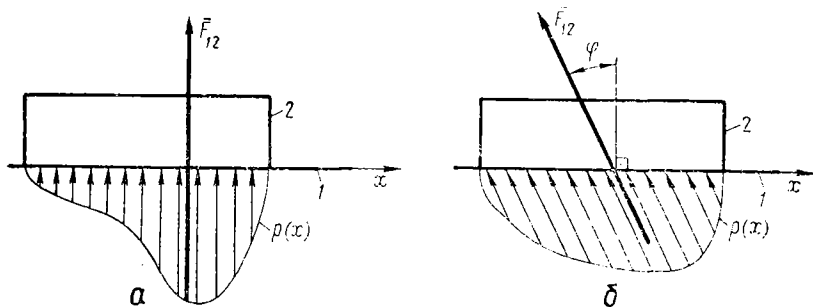


Рис. 21.2. Определение реакций в поступательной кинематической паре

при числе неизвестных, равном числу уравнений, условие статической определимости для кинематической цепи с низшими кинематическими парами будет иметь вид  $3n - 2p_5 = 0$ , откуда

$$p_5 = 3n/2. \quad (21.1)$$

Полученное условие совпадает со структурным соотношением, справедливым для структурных групп (см. гл. 3). Это позволяет сделать вывод, что шарнирно-рычажные механизмы без избыточных связей, образованные присоединением к ведущим звеньям структурных групп, являются статически определимыми системами.

Для плоской высшей кинематической пары без учета трения (рис. 21.3, а) и с учетом трения (б) всегда известны направление



и точка приложения реакции, а неизвестно ее значение. Тогда для механизмов с высшими парами условие статической определенности будет  $3n - 2p_3 - p_4 = 0$ . Это соотношение в простейшем случае удовлетворяется при  $n = 1$ ,  $p_3 = 1$ ,  $p_4 = 1$ , откуда следует, что

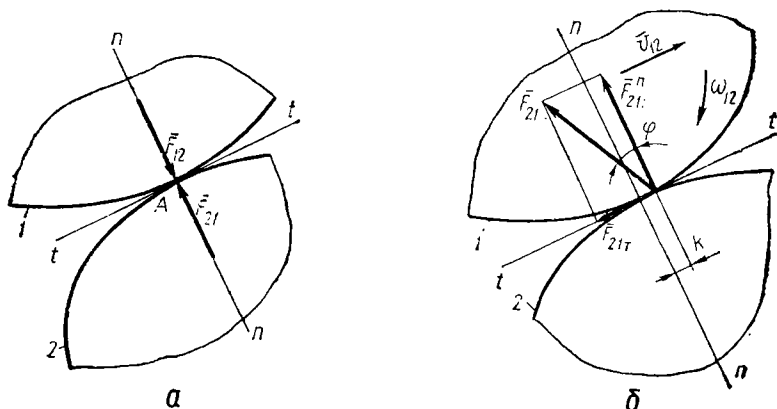


Рис. 21.3. Определение реакций в высшей кинематической паре

статически определенной системой является звено, входящее в высшую и низшую кинематические пары. Этому условию соответствуют звенья зубчатых, кулачковых, фрикционных и других подобных механизмов.

## 21.2. Определение реакций в кинематических парах структурных групп с внутренней вращательной парой

Внутреннюю вращательную пару имеют группы первого, второго и четвертого видов (см. гл. 3). Так как способ определения реакций зависит от типа присоединительных кинематических пар (вращательной или поступательной), то типичной для этих групп является группа второго вида (рис. 21.4, а). Она содержит и поступательную, и вращательную присоединительные пары. Сведем внешние силы, действующие на звенья 2 и 3 группы, к главным векторам  $\bar{F}_2$  и  $\bar{F}_3$  и главным моментам  $M_2$  и  $M_3$ . В кинематических парах А и С приложим реакции  $\bar{F}_{12}$  и  $\bar{F}_{43}$ . Для реакции  $\bar{F}_{12}$  известна точка приложения, а для реакции  $\bar{F}_{43}$  — линии действия. Чтобы определить вектор  $\bar{F}_{43}$  и точку его приложения, а также вектор  $\bar{F}_{12}$  и его направление, рассмотрим равновесие звеньев группы. Уравнение равновесия для группы будет

$$\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0. \quad (21.2)$$

Разложим вектор  $\bar{F}_{12}$  по двум направлениям. Первый  $\bar{F}_{12n}$  направлен к центру внутренней вращательной пары, т. е. к точке В; второй —  $\bar{F}_{12t}$  направлен перпендикулярно. Тогда уравнение

(21.2) запишется в виде

$$\bar{F}_{12n} + \bar{F}_{12t} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0. \quad (21.3)$$

Значение вектора  $\bar{F}_{12t}$  можно определить, рассмотрев равновесие звена 2, воспользовавшись уравнением моментов относительно центра ближайшей вращательной пары B:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) &= M_B(\bar{F}_2) + F_{12t}l_{AB} + F_{12n} \cdot 0 + F_{32} \cdot 0 + M_2 = \\ &= M_B(\bar{F}_2) + F_{12t}l_{AB} + M_2 = 0. \end{aligned} \quad (21.4)$$

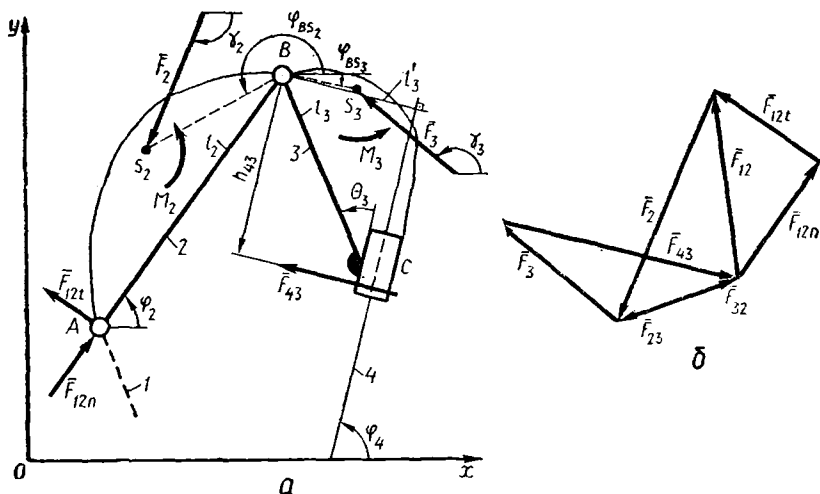


Рис. 21.4. Определение реакций в кинематических парах группы второго вида

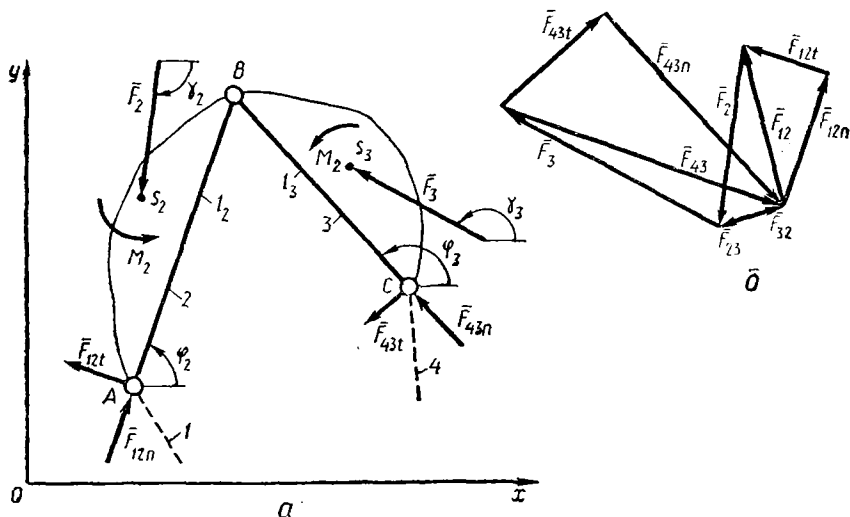


Рис. 21.5. Определение реакций в кинематических парах группы первого вида

В уравнении (21.4) момент  $M_2$  подставляют со своим знаком, моменты сил  $\bar{F}_{12n}$  и  $\bar{F}_{32}$  равны нулю, так как линии их действия проходят через точку  $B$ , знак  $M_B(\bar{F}_2) = \overline{BS_2} \times \bar{F}_2$  определится после разложения векторного произведения. Тогда

$$F_{12t} = -(M_2 + M_B(F_2))/l_{AB}. \quad (21.5)$$

Если после вычисления значение силы  $F_{12t}$  получим с отрицательным знаком, то перед решением уравнения (21.3) направление ее вектора необходимо изменить на обратное. Из решения этого

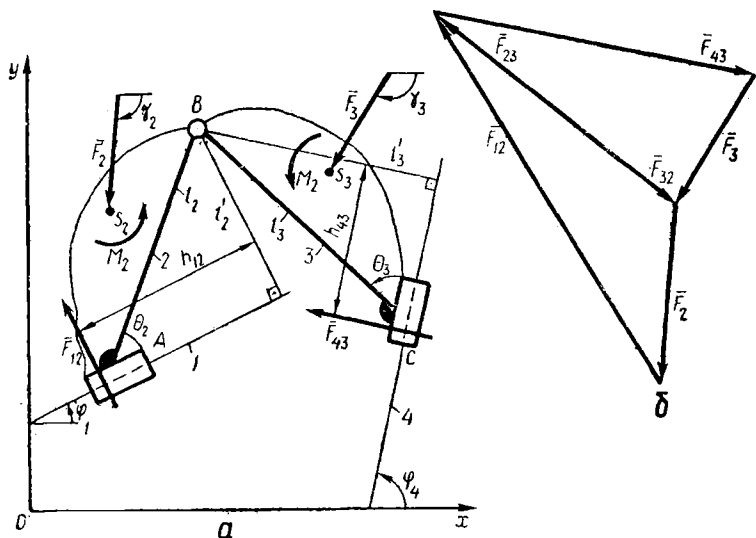


Рис. 21.6. Определение реакций в кинематических парах группы четвертого вида

уравнения (б) получаем значения и направления векторов  $\bar{F}_{12n}$  (значит,  $\bar{F}_{12} = \bar{F}_{12n} + \bar{F}_{12t}$ ) и  $\bar{F}_{43}$ . Реакцию в кинематической паре  $B$  находим из условия равновесия одного из звеньев группы, например 2:  $\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32} = 0$ . Вектор  $\bar{F}_{32}$  определится при замыкании векторного треугольника, в который входят силы  $\bar{F}_{12}$  и  $\bar{F}_2$ . Точка приложения вектора  $\bar{F}_{43}$  определяется из рассмотрения равновесия звена 3 по уравнению моментов относительно точки  $B$  при

$$M_B(\bar{F}_{43}) = \bar{h}_{43} \times \bar{F}_{43}; \quad M_B(\bar{F}_{43}) + M_3 + M_B(\bar{F}_3) = 0 \text{ и} \\ h_{43} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_3))/F_{43}. \quad (21.6)$$

Для группы первого вида (рис. 21.5, а) уравнение равновесия запишем, раскладывая реакции в присоединительных вращательных парах  $A$  и  $C$  на составляющие, как указано ранее:

$$\bar{F}_{12n} + \bar{F}_{12t} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43n} + \bar{F}_{43t} = 0. \quad (21.7)$$

Векторы  $\bar{F}_{12t}$  и  $\bar{F}_{43t}$  определим из рассмотрения равновесия соответственно звеньев 2 и 3, составив уравнения моментов для

каждого из них относительно точки  $B$ :

$$M_B(\bar{F}_{12}) = M_B(\bar{F}_2) + M_2 + F_{12l}l_{AB} + M_1(\bar{F}_{32}) = 0;$$

$$M_B(\bar{F}_{13}) = M_B(\bar{F}_3) + M_3 + M_B(\bar{F}_{23}) + F_{43l}l_{CB} = 0,$$

откуда при  $M_B(\bar{F}_{32}) = 0$  и  $M_B(\bar{F}_{23}) = 0$

$$F_{12l} = -(M_2 + M_B(\bar{F}_2))/l_{AB} \text{ и } F_{43l} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_3))/l_{CB}. \quad (21.8)$$

Из решения уравнения (21.7) найдем неизвестные векторы  $\bar{F}_{12n}$  и  $\bar{F}_{12t}$  (рис. 21.5, б), а рассматривая равновесие звена 2 — вектор  $\bar{F}_{32}$ .

Для группы четвертого вида (рис. 21.6, а) линии действия векторов  $\bar{F}_{12}$  и  $\bar{F}_{43}$  известны. Они перпендикулярны направляющим кинематических пар  $A$  и  $C$ . Реакции  $\bar{F}_{13}$  и  $\bar{F}_{43}$  определим решением уравнения типа (21.3)  $\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0$  (б). Точки приложения этих реакций определяют из условий, аналогичных для поступательной кинематической пары  $C$  группы второго вида (21.6).

### 21.3. Определение реакций в кинематических парах структурных групп с внутренней поступательной парой

При силовом взаимодействии звеньев 2 и 3 группы с внутренними поступательными парами неизвестна точка приложения внутренней реакции. Это не дает возможности использовать *уравнение моментов* при рассмотрении равновесия каждого звена в отдельности. Поэтому неизвестные составляющие векторов определяют из уравнения моментов, составленного для всей группы.

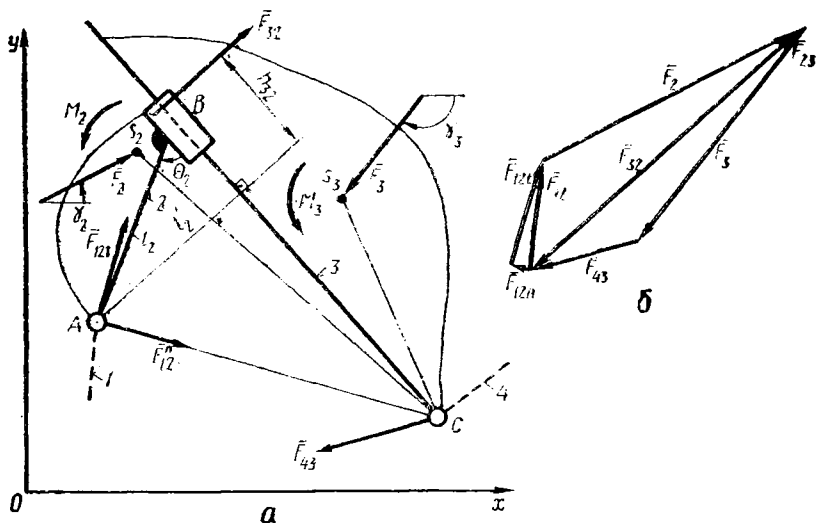


Рис. 21.7. Определение реакций в кинематических парах группы третьего вида

Условие равновесия звеньев группы третьего вида (рис. 21.7, а) будет аналогично уравнению (21.2)  $\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0$ . Для определения направления вектора  $\bar{F}_{12}$  разложим его на составляющие по направлению к центру ближайшей вращательной пары  $C - \bar{F}_{12n}$  и перпендикулярному к нему  $-\bar{F}_{12t}$ . Значение вектора  $\bar{F}_{12t}$  определим из уравнения моментов вокруг центра вращательной пары  $C$ :

$$\sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = F_{12n} \cdot 0 + F_{12t} l_{AC} + M_C(\bar{F}_2) + M_C(\bar{F}_3) + M_2 + M_3 = 0. \quad (21.9)$$

откуда

$$F_{12t} = -(M_2 + M_3 + M_C(\bar{F}_2) + M_C(\bar{F}_3))/l_{AC}. \quad (21.10)$$

В этих уравнениях при  $S_2$  и  $S_3$  — точках приведения внешних сил  $M_C(\bar{F}_2) = \overline{CS}_2 \times \bar{F}_2$ ,  $M_C(\bar{F}_3) = \overline{CS}_3 \times \bar{F}_3$ . Направление вектора  $\bar{F}_{12t}$  корректируется в зависимости от знака, полученного после вычислений.

Так как направление реакции  $\bar{F}_{32}$  известно и перпендикулярно к направляющей поступательной пары  $B$ , то составляющая  $\bar{F}_{12n}$  реакции  $\bar{F}_{12}$ , а также значение реакции  $\bar{F}_{32}$  определяются из условия равновесия звена 2 (б):

$$\bar{F}_{12n} + \bar{F}_{12t} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32} = 0. \quad (21.11)$$

Вектор  $\bar{F}_{43}$  определится из условия  $\bar{F}_{23} + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0$ . Точка приложения реакции  $\bar{F}_{23}$  в поступательной кинематической паре  $B$  определится расстоянием  $h_{23}$  при рассмотрении равновесия звена 2 из решения уравнения моментов  $\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = M_2 + F_{32}h_{32} + M_A(\bar{F}_2) = 0$  относительно центра вращательной пары  $A$

$$h_{32} = -(M_2 + M_A(\bar{F}_2))/F_{32}.$$

При рассмотрении равновесия звеньев структурной группы пятого вида (рис. 21.8, а) следует иметь в виду, что внешняя кинематическая пара  $A$  — поступательная и точка приложения реакции  $F_{12}$  неизвестна. Следовательно, составить уравнение моментов для определения составляющей реакции  $\bar{F}_{43}$  нельзя. Поэтому для определения реакций в кинематических парах рассмотрим равновесие каждого звена в отдельности, начиная со звена 2, образующего две поступательные кинематические пары со звеньями 1 и 3. Условие равновесия звена 2 имеет вид  $\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32} = 0$ , откуда найдем значения векторов  $\bar{F}_{32}$  и  $\bar{F}_{12}$  (б), так как их линии действия известны. Они перпендикулярны направляющим поступательных пар  $B$  и  $A$ . Затем из графического решения уравнения равновесия звена 3  $\bar{F}_{23} + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0$  определяют направление и модуль вектора  $\bar{F}_{43}$ .

Точки приложения реакций  $\bar{F}_{12}$  и  $\bar{F}_{23}$  определяют из уравнений моментов относительно центра вращательной пары  $C$  по условию равновесия звеньев группы

$$h_{12} = -(M_2 + M_C(\bar{F}_2) + M_3 + M_C(\bar{F}_3))/F_{12}$$

и звена 3

$$h_{23} = -(M_3 + M_C(\bar{F}_3))/F_{23}$$

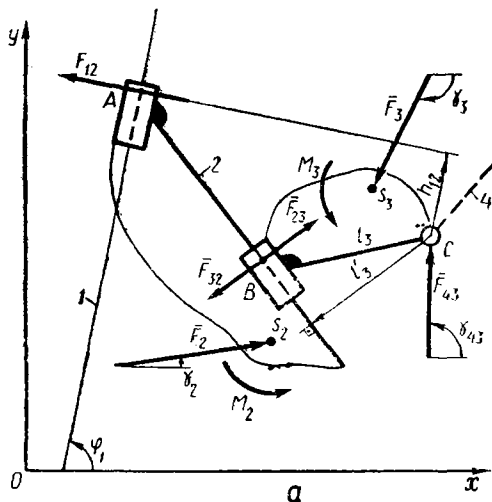
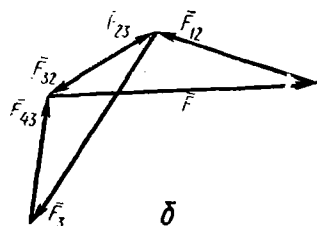


Рис. 21.8. Определение реакций в кинематических парах группы пятого вида



Если значения  $h_{12}$  и  $h_{23}$  получатся с отрицательным знаком, то точки приложения реакций располагаются на соответствующих направляющих по другую сторону относительно точки  $C$ .

#### 21.4. Определение реакций в кинематических парах структурных групп с учетом трения

С учетом трения в поступательных кинематических парах, кроме нормальных к поверхностям направляющих реакций, будут действовать силы трения, направленные вдоль направляющих в сторону, противоположную относительной скорости элементов пары. Во вращательных кинематических парах появятся моменты сил трения, направления которых будут противоположны относительным угловым скоростям звеньев, образующих кинематическую пару. Следовательно, определению реакций в кинематических парах с учетом сил трения должен предшествовать кинематический расчет механизма. С учетом указанных обстоятельств в уравнениях равновесия должны быть учтены дополнительные факторы. Так, например, в структурной группе второго вида (рис. 21.9) появятся моменты сил трения  $M_{TA}$  во вращательной паре  $A$  и  $M_{TB}$  в паре  $B$  и сила трения  $\bar{F}_{TC}$  в поступательной паре  $C$ . Поэтому уравнение равновесия (21.2) приобретает вид

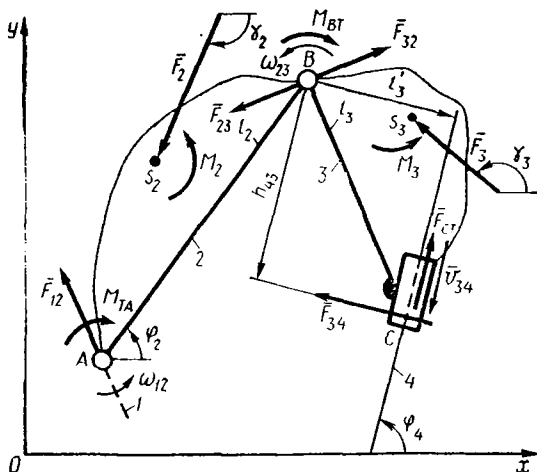
$$\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} + \bar{F}_{TC} = 0, \quad (21.12)$$

а уравнение моментов относительно точки  $B$  при рассмотрении равновесия звена 2 вместо (21.4) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = M_B(\bar{F}_{12}) + M_2 + M_B(\bar{F}_2) + M_{TA} + M_{TB} = 0,$$

где  $M_{TA} = 0,5F_{12}f_A d_A$ ;  $M_{TB} = 0,5F_{32}f_B d_B$ ;  $0,5d_A$  и  $0,5d_B$  — радиусы цилиндрических элементов вращательных пар  $A$  и  $B$ ;  $f_A$ ,  $f_B$  — приведенные коэффициенты трения в этих кинематических парах.

Рис. 21.9. Учет трения в кинематических парах при определении реакций



Так как векторы  $\bar{F}_{12}$  и  $\bar{F}_{43}$  неизвестны, то уравнение (21.12) не решается. В этом случае неизвестные силы могут быть определены только из совместного решения шести уравнений для общего случая равновесия. Однако такое решение очень громоздко и неудобно на практике.

Достаточную для инженерных расчетов точность дает способ *последовательных приближений*. В первом приближении принимают, что силы трения равны нулю, и реакции в кинематических парах определяют так же, как указано выше. Используя полученные значения реакций, в кинематических парах вычисляют моменты сил трения  $M_{TA}$  и  $M_{TB}$  в силу трения  $\bar{F}_{TC}$  в поступательной паре  $C$  (см. гл. 20). Затем производят расчет в той же последовательности, как и без учета сил трения, но к внешним силам прибавляют силы трения в поступательных парах и моменты сил трения во вращательных, направляемые в сторону, противоположную относительному движению. Новые векторы  $\bar{F}_{T12}$ ,  $\bar{F}_{T32}$ ,  $\bar{F}_{T43}$  будут отличаться по значениям модулей и направлениям от векторов  $\bar{F}_{12}$ ,  $\bar{F}_{32}$ ,  $\bar{F}_{43}$ . Далее полученные в первом приближении новые значения  $\bar{F}_{T12}$ ,  $\bar{F}_{T32}$  и  $\bar{F}_{T43}$  снова подставляют в зависимости для определения сил и моментов сил трения и повторяют все вычисления. В результате получают второе приближение значений реакций. Указанный

процесс может быть продолжен до достижения требуемой точности расчета. Он применяется только в случаях, когда каждое последующее приближение дает меньшее приращение силы или момента, чем предыдущее. Обычно второе приближение дает вполне приемлемые результаты.

## 21.5. Алгоритмизация силового расчета структурных групп

Для решения задач силового расчета структурных групп на ЭВМ составляют алгоритмы, реализуемые через операторные функции. Структура алгоритмов расчета групп всех видов одинакова, так как она основана на решении соответствующих векторных уравнений. Рассмотрим для примера алгоритм силового расчета структурной группы второго вида. Уравнение равновесия этой группы (см. рис. 21.4, а) имеет вид (21.3). Значение вектора  $\bar{F}_{12t}$  определится по формуле (21.5). Направление вектора уточняют в зависимости от знака  $\bar{F}_{12t}$ :

$$UGL3(\varphi_4, \pi/2, F_{12t}; \gamma_{12t}), \quad (21.13)$$

после чего принимают  $F_{12t} = |F_{12t}|$ .

Система линейных уравнений, соответствующая условию равновесия звеньев группы, приведенная к каноническому виду, будет

$$\left. \begin{aligned} F_{12n} \cos \varphi_2 + F_{43} \cos(\varphi_4 + \pi/2) &= -(F_{12t} \cos \gamma_{12t} + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3); \\ F_{12n} \sin \varphi_2 + F_{43} \sin(\varphi_4 + \pi/2) &= -(F_{12t} \sin \gamma_{12t} + F_2 \sin \gamma_2 + F_3 \sin \gamma_3). \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, получим:

$$SISTEMA(2, A(2,2), C(2); F_{12n}, F_{43}); \quad (21.14)$$

$$UGL4(\varphi_2, \pi, F_{12n}; \gamma_{12n}); \quad (21.15)$$

$$UGL3(\varphi_4, \pi/2, F_{43}; \gamma_{43}); \quad (21.16)$$

$$F_{12n} = |F_{12n}|, \quad F_{43} = |F_{43}|; \quad (21.17)$$

$$SMVKT(F_{12n}, \gamma_{12n}, F_{12t}, \gamma_{12t}; F_{12}, \gamma_{12}).$$

Точку приложения реакции  $\bar{F}_{43}$  определяют, рассмотрев равновесие звена 3. Из уравнения моментов относительно центра вращательной пары  $B$  (21.6) получим

$$h_{43} = -(M_B(\bar{F}_3) + M_3)/F_{43}. \quad (21.18)$$

Реакция во внутренней вращательной паре  $B$  определится из уравнения равновесия звена 2 ( $\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32} = 0$ ), решаемого операторной функцией

$$SMVKT(F_{12}, \gamma_{12}, F_2, \gamma_2; F_{32}, \gamma_{32}). \quad (21.19)$$

Если системы сил, действующие на звенья группы, предварительно приведены к одной силе и паре сил, то алгоритм силового расчета всегда будет представлять последовательность зависимостей (21.13) ... (21.19). Он может быть описан операторной функцией,



обозначенной DNMA2. Ее входными параметрами будут:  $l_1, \varphi_1, l_2, \varphi_2, l_{BS_2}, \varphi_{BS_2}, l_{BS_3}, \varphi_{BS_3}, M_2, F_2, \gamma_2, M_3, F_3, \gamma_3$ .

Операторные функции, описывающие эти алгоритмы для структурных групп (табл. 21.1...21.5), обозначаются цифрой, соответствующей виду группы. Порядок входных и выходных параметров, приведенный в каждой таблице, должен сохраняться в обращении к функциям.

## 21.6. Структура алгоритмов силового расчета плоских механизмов с низшими парами

При силовом расчете многозвенных механизмов с низшими парами, как и при кинематическом расчете, применяют метод последовательного обращения к операторным функциям, реализующим алгоритмы силового расчета отдельных групп. Расчет начинают с групп, наиболее отдаленных в структурном отношении от ведущего звена механизма, на звенья которых воздействуют системы внеш-

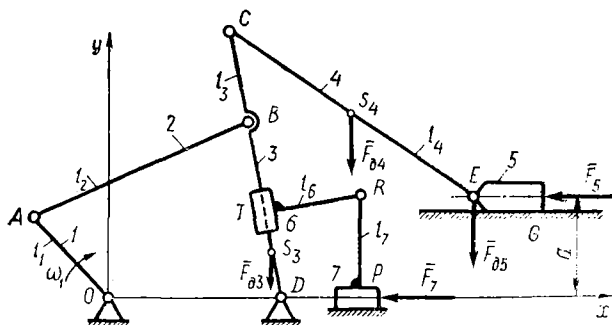


Рис. 21.10. Определение реакций в кинематических парах восьмизвенного механизма

них сил. В качестве примера рассмотрим алгоритм силового расчета восьмизвенного механизма (рис. 21.10). Примем, что силы тяжести звеньев приложены в центрах их масс  $S$ . Центр масс звена 5 находится в центре шарнира  $E$ , а звена 4 — посередине  $CE$ . Расчет начинают с группы звеньев 4—5. На звено 5 во время рабочего хода действует сила

$$F_5 = \begin{cases} \bar{F}_{п.сб}, & \alpha_{E_5} = 0; \\ 0, & \alpha_{E_5} = \pi, \end{cases}$$

где  $F_{п.сб}$  — модуль вектора силы производственного сопротивления, действующей на звено 5;  $\alpha_{E_5}$  — направляющий угол вектора скорости точки  $E_5$ .

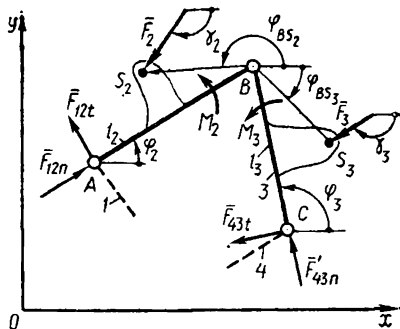
Сведем силы  $\bar{F}_5$  и  $\bar{F}_{g5}$  к одной силе  $F_{\Sigma 5}$ :

$$SMVKT(F_5, \pi, F_{g5}, -\pi/2; F_{\Sigma 5}, \gamma_5).$$

Определим реакции  $\bar{F}_{34}, \bar{F}_{45}, \bar{F}_{05}$ , обратившись к операторной функции

$$DNMA2(l_4, \varphi_4, 0, 0, 0, (0,5l_4), 0, 0, F_{g4}, -\pi/2, 0, F_{\Sigma 5}, \gamma_5; F_{34}, \gamma_{34}, F_{45}, \gamma_{45}, F_{05}, \gamma_{05}, h_{05}).$$

Таблица 21.1. Алгоритм силового расчета структурной группы 2-го класса первого вида



$$1. M_B(\bar{F}_2) = l_{BS_2} \cos \varphi_{BS_2} F_2 \sin \gamma_2 - l_{BS_2} \sin \varphi_{BS_2} F_2 \cos \gamma_2.$$

$$2. M_B(\bar{F}_3) = l_{BS_3} \cos \varphi_{BS_3} F_3 \sin \gamma_3 - l_{BS_3} \sin \varphi_{BS_3} F_3 \cos \gamma_3.$$

$$3. F_{12t} = -(M_2 + M_B(\bar{F}_2))/l_2.$$

$$4. UGL3(\varphi_2, \pi/2, F_{12t}; \gamma_{12t}).$$

$$5. F_{43t} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_3))/l_3.$$

$$6. UGL3(\varphi_3, \pi/2, F_{43t}; \gamma_{43t}).$$

$$7. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_2 & \sin \varphi_3 \end{vmatrix}.$$

$$8. C(2) =$$

$$= \begin{vmatrix} -( |F_{12t}| \cos \gamma_{12t} + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3 + |F_{43t}| \cos \gamma_{43t} ) \\ -( |F_{12t}| \sin \gamma_{12t} + F_2 \sin \gamma_2 + F_3 \sin \gamma_3 + |F_{43t}| \sin \gamma_{43t} ) \end{vmatrix}.$$

$$9. SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); F_{12n}, F_{43n}).$$

$$10. UGL4(\varphi_2, \pi, F_{12n}; \gamma_{12n}).$$

$$11. UGL4(\varphi_3, \pi, F_{43n}; \gamma_{43n}).$$

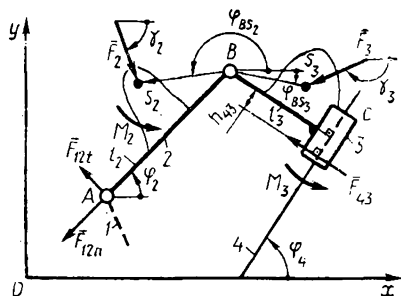
$$12. SMVKT(|F_{12t}|, \gamma_{12t}, |F_{12n}|, \gamma_{12n}; F_{12}, \gamma_{12}).$$

$$13. SMVKT(|F_{43t}|, \gamma_{43t}, |F_{43n}|, \gamma_{43n}; F_{43}, \gamma_{43}).$$

$$14. SMVKT(F_{12}, \gamma_{12}, F_2, \gamma_2; F_{23}, \gamma_{23}).$$

$$DNMA1(l_2, \varphi_2, l_3, \varphi_3, l_{BC_2}, \varphi_{BS_2}, l_{BS_3}, \varphi_{BS_3}, M_2, F_2, \gamma_2, M_3, F_3, \gamma_3; F_{12}, \gamma_{12}, F_{23}, \gamma_{23}, F_{43}, \gamma_{43}).$$

Таблица 21.2. Алгоритм силового расчета структурной группы 2-го класса второго вида



$$1. M_B(\bar{F}_2) = l_{BS_2} \cos \varphi_{BS_2} F_2 \sin \gamma_2 - l_{BS_2} \sin \varphi_{BS_2} F_2 \cos \gamma_2.$$

$$2. F_{12t} = -(M_2 + M_B(\bar{F}_2)) / l_2.$$

$$3. UGL3(\varphi_2, \pi/2, F_{12t}; \gamma_{12t}).$$

$$4. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \cos(\varphi_4 + \pi/2) \\ \sin \varphi_2 & \sin(\varphi_4 + \pi/2) \end{vmatrix}.$$

$$5. C(2) = \begin{vmatrix} -( |F_{12t}| \cos \gamma_{12t} + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3 ) \\ -( |F_{12t}| \sin \gamma_{12t} + F_2 \sin \gamma_2 + F_3 \sin \gamma_3 ) \end{vmatrix}.$$

$$6. SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); F_{12n}, F_{43}).$$

$$7. UGL4(\varphi_2, \pi, F_{12n}; \gamma_{12n}).$$

$$8. UGL3(\varphi_4, \pi/2, F_{43}; \gamma_{43}).$$

$$9. SMVKT(|F_{12n}|, \gamma_{12n}, |F_{12t}|, \gamma_{12t}; F_{12}, \gamma_{12}).$$

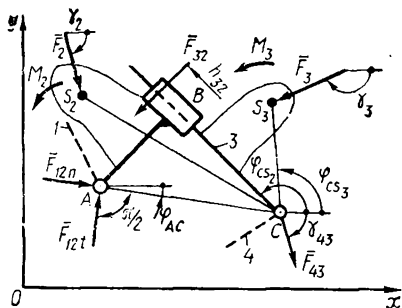
$$10. h_{43} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_3)) / |F_{43}|.$$

$$11. SMVKT(F_{12}, \gamma_{12}, F_2, \gamma_2; F_{23}, \gamma_{23}).$$

$$12. F_{43} = |F_{43}|.$$

$$DNMA2(l_2, \varphi_2, l_3, \varphi_4, l_{BS_2}, \varphi_{BS_2}, l_{BS_3}, \varphi_{BS_3}, M_2, F_2, \gamma_2, M_3, F_3, \gamma_3; F_{12}, \gamma_{12}, F_{23}, \gamma_{23}, F_{43}, \gamma_{43}, h_{43}).$$

Таблица 21.3. Алгоритм силового расчета звеньев структурной группы 2-го класса третьего вида

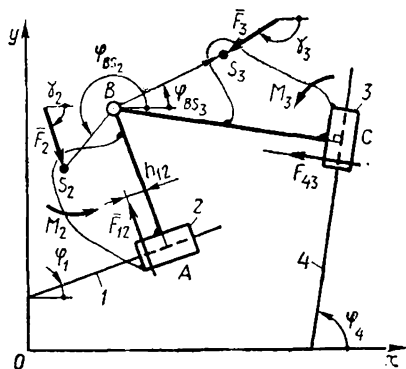


1.  $M_C(\bar{F}_2) = l_{CS_2} \cos \varphi_{CS_2} F_2 \sin \gamma_2 - l_{CS_2} \sin \varphi_{CS_2} F_2 \cos \gamma_2$ .
2.  $M_C(\bar{F}_3) = l_{CS_3} \cos \varphi_{CS_3} F_3 \sin \gamma_3 - l_{CS_3} \sin \varphi_{CS_3} F_3 \cos \gamma_3$ .
3.  $F_{12t} = -(M_2 + M_C(\bar{F}_2) + M_3 + M_C(\bar{F}_3)) / l_{AC}$ .

4.  $UGL3(\varphi_{AC} + \pi, \pi/2, F_{12t}; \gamma_{12t})$ .
5.  $A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{AC} & \cos(\varphi_3 + \pi/2) \\ \sin \varphi_{AC} & \sin(\varphi_3 + \pi/2) \end{vmatrix}$ .
6.  $C(2) = \begin{vmatrix} -(F_{12t} \cos \gamma_{12t} + F_2 \cos \gamma_2) \\ -(F_{12t} \sin \gamma_{12t} + F_3 \sin \gamma_2) \end{vmatrix}$ .
7. СИСТЕМА (2, A(2, 2), C(2);  $F_{12n}, F_{32}$ ).
8.  $UGL4(\varphi_{AC}, \pi, F_{12n}; \gamma_{12n})$ .
9.  $SMVKT(F_{12n}, \gamma_{12n}, F_{12t}, \gamma_{12t}; F_{12}, \gamma_{12})$ .
10.  $UGL3(\varphi_3, \pi/2, F_{32}; \gamma_{32})$ .
11.  $SMVKT(|F_{32}|, \gamma_{32} + \pi, F_3, \gamma_3; F_{43}, \gamma_{34})$ .
12.  $\gamma_{43} = \nu_{24} + \pi$ .
13.  $F_{32} = |F_{32}|$ .
14.  $h_{32} = (M_3 + M_C(F_3)) / F_{32}$ .

DNMA3 ( $l_{CS_2}, \varphi_{CS_2}, l_{CS_3}, \varphi_{CS_3}, l_{AC}, \varphi_{AC}, M_2, F_2, \gamma_2, M_3, F_3, \gamma_3, F_{12}, \gamma_{12}, F_{32}, \gamma_{32}, \nu_{24}, \nu_{34}, \nu_{43}$ ).

Таблица 21.4. Алгоритм силового расчета звеньев структурной группы 2-го класса четвертого вида



$$1. M_B(\bar{F}_2) = l_{BS_2} \cos \varphi_{BS_2} F_2 \sin \gamma_2 - l_{BS_2} \sin \varphi_{BS_2} F_2 \cos \gamma_2.$$

$$2. M_B(\bar{F}_3) = l_{BS_3} \cos \varphi_{BS_3} F_3 \sin \gamma_3 - l_{BS_3} \sin \varphi_{BS_3} F_3 \cos \gamma_3.$$

$$3. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \pi/2) \cos(\varphi_4 + \pi/2) \\ \sin(\varphi_1 + \pi/2) \sin(\varphi_4 + \pi/2) \end{vmatrix}.$$

$$4. C(2) = \begin{vmatrix} -(F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3) \\ -(F_2 \sin \gamma_2 + F_3 \sin \gamma_3) \end{vmatrix}.$$

$$5. \text{СИСТЕМА } (2, A(2, 2), C(2)); F_{12}, F_{43}.$$

$$6. \text{UGL3}(\varphi_1, \pi/2, F_{12}; \gamma_{12}).$$

$$7. \text{UGL3}(\varphi_4, \pi/2, F_{43}; \gamma_{43}).$$

$$8. F_{12} = |F_{12}|; \quad F_{43} = |F_{43}|.$$

$$9. h_{12} = -(M_2 + M_B(\bar{F}_2))/F_{12}.$$

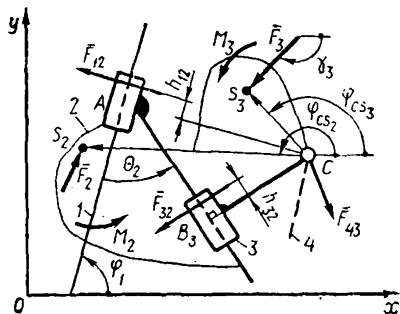
$$10. h_{43} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_3))/F_{43}.$$

$$11. \text{СМВКТ}(F_{12}, \gamma_{12}, F_2, \gamma_2; F_{23}, \gamma_{23}).$$

$$12. F_{23} = |F_{23}|.$$

$$\text{DNMA4}(l_{BS_2}, \varphi_{BS_2}, l_{BS_3}, \varphi_{BS_3}, M_2, F_2, \gamma_2, M_3, F_3, \gamma_3; F_{12}, \gamma_{12}, h_{12}, F_{23}, \gamma_{23}, F_{43}, \gamma_{43}, h_{43}).$$

Таблица 21.5. Алгоритм силового расчета звеньев структурной группы 2-го класса пятого вида



$$1. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \pi/2) & \cos(\varphi_1 + \theta_2 + \pi/2) \\ \sin(\varphi_1 + \pi/2) & \sin(\varphi_1 + \theta_2 + \pi/2) \end{vmatrix}$$

$$2. C(2) = \begin{vmatrix} -F_2 \cos \gamma_2 \\ -F_2 \sin \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$9. \text{СИСТЕМА}(2, A(2, 2), C(2); F_{12}, F_{32}).$$

$$10. \text{UGL3}(\varphi_1, \pi/2, F_{12}; \gamma_{12}).$$

$$11. \text{UGL3}(\varphi_1 + \theta_2, \pi/2, F_{32}; \gamma_{32}).$$

$$12. F_{12} = |F_{12}|; F_{32} = |F_{32}|.$$

$$13. \text{SMVKT}(F_{32}, \gamma_{32} + \pi, F_3, \gamma_3; F_{43}, \gamma_{34}).$$

$$14. \gamma_{43} = \gamma_{34} + \pi.$$

$$15. M_C(\bar{F}_2) = l_{CS_2} \cos \varphi_{CS_2} F_2 \sin \gamma_2 - l_{CS_2} \sin \varphi_{CS_2} F_2 \cos \gamma_2.$$

$$16. M_C(\bar{F}_3) = l_{CS_3} \cos \varphi_{CS_3} F_3 \sin \gamma_3 - l_{CS_3} \sin \varphi_{CS_3} F_3 \cos \gamma_3.$$

$$17. h_{12} = -(M_2 + M_C(\bar{F}_2) + M_3 + M_C(\bar{F}_3))/F_{12}.$$

$$18. h_{32} = -(M_2 + M_C(\bar{F}_3))/F_{32}.$$

$$DNMA5(\varphi_1, \theta_2, l_{CS_2}, \varphi_{CS_2}, l_{CS_3}, \varphi_{CS_3}, M_2, F_2, \gamma_2, M_3, F_3, \gamma_3; F_{12}, \gamma_{12}, h_{12}, F_{32}, \gamma_{32}, F_{43}, \gamma_{43}, h_{43}).$$

Перейдем к расчету группы, состоящей из звеньев 6—7

$$F_7 = \begin{cases} F_{п.с7}, & \alpha_{S7} = 0; \\ 0, & \alpha_{S7} = \pi. \end{cases}$$

Определим реакции  $\bar{F}_{36}$ ,  $\bar{F}_{67}$ ,  $\bar{F}_{07}$ , обратившись к операторной функции

$$DNMA4(\varphi_3, \pi/2, 0, \pi/2, 0, l_7, 0, 0, 0, 0, F_7, \pi; F_{36}, \gamma_{36}, h_{36}, F_{67}, \gamma_{67}, F_{07}, \gamma_{07}, h_{07}).$$

При расчете структурной группы из звеньев 2—3 необходимо силы  $\bar{F}_{43}$ ,  $\bar{F}_{63}$ ,  $\bar{F}_{g3}$  свести к одной силе и паре сил, действующих на звено 3. За точку приведения примем центр масс — точку  $S_3$ . Тогда

$$SMVKT(F_{34}, \gamma_{34} + \pi, F_{g3}, -\pi/2; F, \gamma);$$

$$SMVKT(F, \gamma, F_{36}, \gamma_{36} + \pi; F_{\Sigma 3}, \gamma_3).$$

Моменты от переноса сил параллельно линиям действия

$$M_{S_3}(\bar{F}_{43}) = \bar{l}_{S_3C} \times \bar{F}_{43} = l_{S_3C} \cos \varphi_3 \cdot F_{43} \cdot \sin(\gamma_{34} + \pi) - \\ - l_{S_3C} \sin \varphi_3 \cdot F_{43} \cos(\gamma_{34} + \pi);$$

$$l_{S_3T} = l_{S_3D} - (y_S \cos(\pi/2 - \varphi_3) + (x_S - x_D) \cos \varphi_3);$$

$$M_{S_3}(\bar{F}_{63}) = \bar{l}_{S_3T} \times \bar{F}_{63} = l_{S_3T} \cos(\varphi_3 + \pi) \cdot F_{63} \cdot \sin(\gamma_{36} + \pi) - \\ - l_{S_3T} \sin(\varphi_3 + \pi) \cdot F_{63} \cos(\gamma_{36} + \pi);$$

$$M_3 = M_{S_3}(\bar{F}_{43}) + M_{S_3}(\bar{F}_{63}).$$

Определим реакции  $\bar{F}_{12}$ ,  $\bar{F}_{23}$ ,  $\bar{F}_{03}$ :

$$DNMA1(l_2, \varphi_2, l_{BD}, \varphi_3, (0,5l_2), \varphi_2 - \pi, l_{BS_2}, \varphi_3 - \pi, 0, 0, 0,$$

$$M_3, F_{\Sigma 3}, \gamma_3; F_{12}, \gamma_{12}, F_{23}, \gamma_{23}, F_{03}, \gamma_{03}).$$

Так как сила тяжести звена 2 не учтена, то за точку приведения можно принять любую точку звена 2, например при  $l_{BS_2} = 0,5l_2$ .

## 21.7. Силовой расчет пространственных механизмов с низшими парами

При силовом расчете пространственных механизмов векторные уравнения равновесия представляют пространственными многоугольниками векторов сил. Векторы сил удобно выражать через их проекции на координатные оси, моменты сил — через векторные произведения радиусов-векторов точек приложения и векторов сил. Рассмотрим на примерах расчета простейших пространственных шарнирно-рычажных механизмов последовательность определения реакций в кинематических парах.

Пусть к шатуну 2 кривошипно-коромыслового механизма (рис. 21.11) приложены сила  $\bar{F}_2 (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z})$  в точке  $S_2$ , момент  $\bar{M}_2 (M_{2x}, M_{2y}, M_{2z})$ , являющиеся главным вектором и главным моментом системы сил звена 2. Аналогично примем, что к звену 3 — коромыслу — приложены сила  $\bar{F}_3 (F_{3x}, F_{3y}, F_{3z})$  в точке  $S_3$ , момент  $\bar{M}_3 (M_{3x}, M_{3y}, M_{3z})$ . Поместим в точки  $C$  и  $B$  начала координатных систем с осями, параллельными осям основной системы.

Для определения реакции в кинематической паре  $D$  рассмотрим равновесие звена 3. Составим векторное уравнение моментов сил, действующих на коромысло, относительно точки  $C$ :

$$(-\vec{l}_{CS_3}) \times \vec{F}_3 + \vec{M}_3 + (-\vec{l}_3) \times \vec{F}_D + \vec{M}_D = 0, \quad (21.20)$$

где  $\vec{F}_D (F_{Dx}, F_{Dy}, F_{Dz})$  и  $\vec{M}_D (0, M_{Dy}, M_{Dz})$  — векторы реакции и реактивного момента в кинематической паре  $D$ .

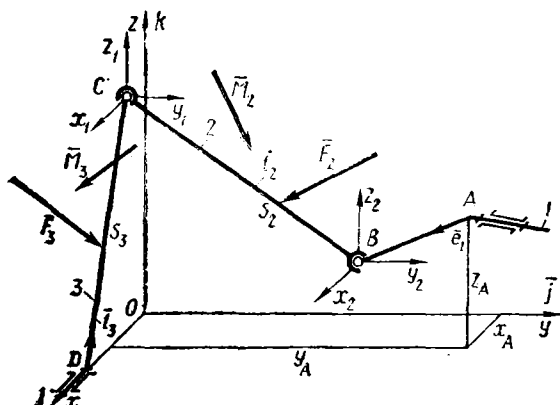


Рис. 21.11. Пространственный кривошипно-коромысловый механизм

Представим уравнение (21.20) в виде

$$-l_{CS_3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_{3x} & l_{3y} & l_{3z} \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{vmatrix} + \vec{M}_3 - l_3 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_{3x} & l_{3y} & l_{3z} \\ F_{Dx} & F_{Dy} & F_{Dz} \end{vmatrix} + \vec{M}_D = 0. \quad (21.21)$$

Проекции орта  $\vec{l}_3$  определяются по формуле (8.3). Развернем определители по элементам первых строк:

$$\left. \begin{aligned} l_{CS_3} (F_{3z} \cos \varphi_3 - F_{3y} \sin \varphi_3) - M_{3x} &= l_3 (F_{Dz} \cos \varphi_3 - F_{Dy} \sin \varphi_3); \\ F_{Dx} \sin \varphi_3 + M_{Dy} &= l_{CS_3} F_{3x} \sin \varphi_3 - M_3; \\ F_{Dx} \cos \varphi_3 + M_{Dz} &= l_{CS_3} (F_{3z} \cos \varphi_3 - F_{3y} \sin \varphi_3) - M_{3z}. \end{aligned} \right\} \quad (21.22)$$

Уравнения системы (21.22) содержат пять неизвестных, для отыскания которых необходимо иметь дополнительно еще два уравнения. Составив векторное уравнение моментов равновесия звеньев 3 и 2 относительно точки  $B$ :

$$(-\vec{l}_{DB}) \times \vec{F}_D + \vec{M}_3 + (l_{BC}\vec{e}_2 - l_{CS_3}\vec{e}_3) \times \vec{F}_3 + \vec{M}_2 + \vec{l}_{BS_2} \times \vec{F}_2 + M_D = 0, \quad (21.23)$$

и проецируя векторы на ось  $Bx_2$ , получим

$$(\vec{l}_{DB} \times \vec{F}_D) \vec{i} = M_{3x} + ((l_{BC}\vec{e}_2 - l_{CS_3}\vec{e}_3) \times \vec{F}_3) \vec{i} + M_{2x} + (l_{BS_2}\vec{e}_2 \times \vec{F}_2) \vec{i}, \quad (21.24)$$

где  $(\vec{l}_{DB} \times \vec{F}_D) \vec{i} = l_{DBy}F_{Dz} - l_{DBz}F_{Dy}$ .



Проецируя векторы на ось  $Bz_2$ , получим

$$(\bar{l}_{DB} \times \bar{F}_D) \bar{k} = M_{3z} + ((l_{BS} e_2 - l_{CS} e_3) \times \bar{F}_3) \bar{k} + M_{2z} + (l_{BS} \bar{e}_2 \times \bar{F}_2) \bar{k} + M_{Dz}, \quad (21.25)$$

где  $(\bar{l}_{DB} \times \bar{F}_D) \bar{k} = l_{DBx} F_{Dy} - l_{DBz} F_{Dx}$ .

В уравнениях (21.24) и (21.25) проекции вектора  $\bar{l}_{DB}$  определяются по формуле (17.7), а проекции ортов  $\bar{e}_2$  и  $\bar{e}_3$  — как указано

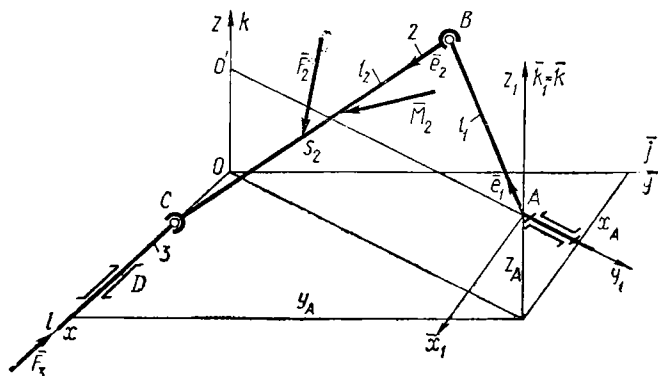


Рис. 21.12. Пространственный кривошипно-ползунный механизм

в гл. 8. Из совместного решения уравнений (21.22), (21.24), (21.25) определим проекции векторов  $\bar{F}_D$  и  $\bar{M}_D$ . Рассматривая равновесие звена 3, получим уравнение  $\bar{F}_D + \bar{F}_3 + \bar{F}_{23} = 0$ , в котором векторы  $\bar{F}_D$  и  $\bar{F}_{23}$  полностью определены, а проекции вектора  $\bar{F}_{23}$  определяются при представлении векторного уравнения уравнениями проекций на координатные оси. Аналогично решается уравнение равновесия звена 2:  $\bar{F}_{32} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{12} = 0$ .

В той же последовательности определим реакции в кинематических парах кривошипно-ползунного механизма (рис. 21.12). Из условия равновесия звеньев 2 и 3 получим уравнение моментов относительно центра вращательной пары B:

$$\bar{l}_{BS_2} \times \bar{F}_2 + \bar{M}_2 + \bar{l}_2 \times \bar{F}_3 + \bar{l}_2 \times \bar{F}_D + \bar{M}_D = 0, \quad (21.26)$$

или в другой форме

$$l_{BS_2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} + \bar{M}_2 + l_2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{vmatrix} + l_2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ F_{Dx} & F_{Dy} & F_{Dz} \end{vmatrix} + \bar{M}_D = 0. \quad (21.27)$$

В условиях (21.26) и (21.27)  $\bar{F}_D(0, F_{Dy}, F_{Dz})$ ,  $M_D(M_{Dx}, 0, 0)$  — векторы опорной реакции и опорного момента. Развернув уравнение (21.27) по элементам  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , получим необходимое число уравнений для определения  $F_{Dz}$ ,  $F_{Dy}$  и  $M_{Dx}$ . Реакции  $\bar{F}_C$  и  $\bar{F}_B$  определим, составляя уравнения равновесия для звеньев 3 и 2.

## 21.8. Силовой расчет механизмов с высшими кинематическими парами

Исходя из того, что звено, входящее в высшую кинематическую пару, является статически определимой системой, силовой расчет механизмов с высшими парами заключается в последовательном рассмотрении равновесия звеньев, начиная от тех, на которые действуют силы производственного сопротивления. Так, например, при расчете кулачкового механизма (рис. 21.13), на толкатель которого действует сила производственного сопротивления  $\bar{F}_{п.с}$ , из рассмотрения равновесия толкателя получим

$$\bar{F}_{12} + \bar{F}_{п.с} + \bar{F}'_{02} + \bar{F}''_{02} = 0, \quad (21.28)$$

где  $\bar{F}_{12}$  — сила воздействия кулачка на толкатель;  $\bar{F}'_{02}$  и  $\bar{F}''_{02}$  — реакции стойки на толкатель, отклоняющиеся от нормали к направляющей в сторону, противоположную движению толкателя.

Заменим условие (21.28) уравнениями проекций на координатные оси  $xOy$ :

$$\left. \begin{aligned} -F_{12} \sin \alpha + F'_{02} \cos \varphi - F''_{02} \cos \varphi &= 0; \\ F_{12} \cos \alpha - F'_{02} \sin \alpha - F''_{02} \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.29)$$

Уравнение моментов относительно точки  $B_1$

$$\sum_{i=1}^n M_{B_1}(\bar{F}_i) = F'_{02} h \cos \varphi - F_{12} (a - (r_0 + s_2(\varphi_1))) \sin \alpha = 0. \quad (21.30)$$

Решив совместно уравнения (21.29) и (21.30), получим значение векторов  $\bar{F}_{12}$ ,  $\bar{F}'_{02}$  и  $\bar{F}''_{02}$ .

Рис. 21.13. Реакции в кинематических парах кулачкового механизма

В зацеплении зубчатых колес 1 и 2 (рис. 21.14), находящихся под действием вращающих моментов  $T_1$  и  $T_2$ , направление полной реакции (с учетом сил трения) зависит от фазы зацепления. Когда точка касания рабочих профилей  $K$  находится между точками  $b_1$  и  $b_2$ , ограничивающими активный участок линии зацепления, реакция  $\bar{F}_{12}$  будет отклоняться от нормали к профилям в сторону, пре-

пятствующую скольжению зубьев, и пересекать линию  $O_1O_2$  не в полюсе  $W$ , а в точке  $C$ . Для  $b_2K < b_2W$  (а) получим

$$F_{12} = T_2 / ((r_{W_2} - h') \cos(\alpha_W + \varphi)), \quad (21.31)$$

где  $\alpha_W$  — угол зацепления зубчатых колес;  $\varphi$  — угол трения в зацеплении.

Из  $\Delta KWС$  расстояние, определяющее положение точки  $C$  относительно полюса  $h' = KW \sin \varphi / \cos(\alpha_W + \varphi)$ , достигает наи-

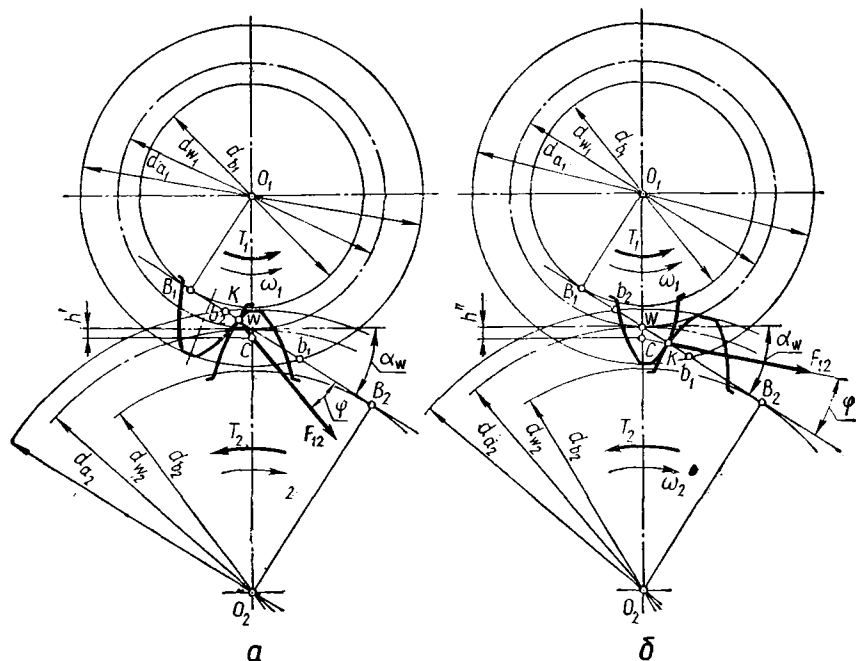


Рис. 21.14. Определение реакций в прямозубом зубчатом зацеплении

большого значения в начале зацепления при  $KW = b_2W$ , а при прохождении точки контакта через полюс  $h' = 0$ . Для  $b_2K > b_2W$  получим (б)

$$F_{12} = T_2 / ((r_{W_2} - h'') \cos(\alpha_W - \varphi)). \quad (21.32)$$

Расстояние  $h'' = WK \sin \varphi / \cos(\alpha_W - \varphi)$  достигает наибольшего значения в конце зацепления при  $WK = W_{B_1}$ . Из формул (21.31) и (21.32) следует, что сила  $\bar{F}_{12}$  в процессе зацепления не остается постоянной даже при постоянном значении момента  $T_2$ . Но так как эти колебания невелики, можно приближенно принять  $h' = h'' = h = 1 \dots 1,6m \operatorname{tg} \varphi$  и тогда

$$F_{12} = T_2 / ((r_{W_2} - h) \cos \alpha_W). \quad (21.33)$$

Зависимости (21.31), (21.32) и (21.33) используются при расчетах усилий в парах зубчатых механизмов различных видов с учетом трения. Пренебрегая трением для прямозубой передачи,

получим

$$F_{12} = F_n = T_1 / (r_w \cos \alpha_w) = 2T_1 / (mz_1 \cos \alpha), \quad (21.34)$$

где  $z_1$  — число зубьев колеса;  $\alpha$  — профильный угол.

В расчетах оперируют составляющими нормальной силы  $F_n$  — окружной

$$F_t = 2T_1 \cos \alpha_w / (mz_1 \cos \alpha) \quad (21.35)$$

и радиальной

$$F_r = 2T_1 \sin \alpha_w / (mz_1 \cos \alpha). \quad (21.36)$$

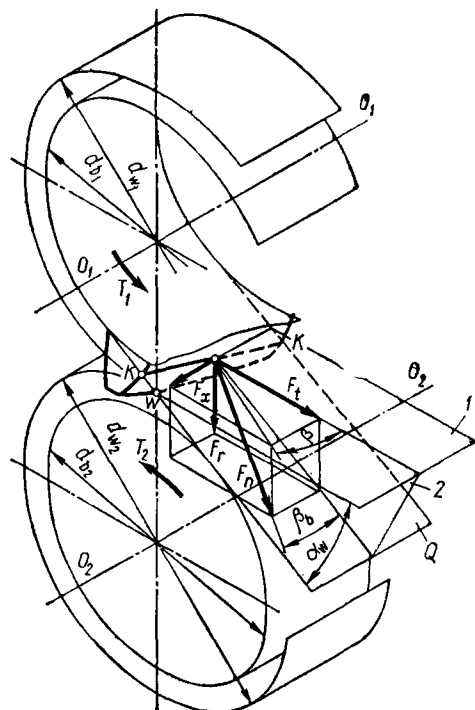
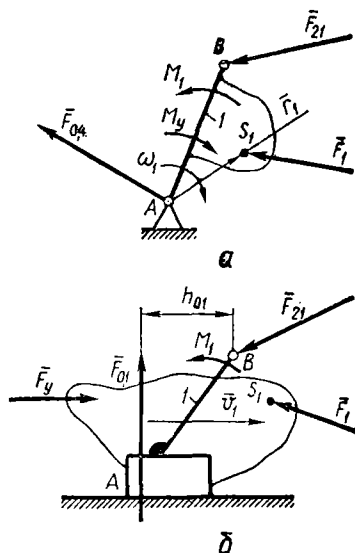


Рис. 21.15. Определение реакций в косозубом зубчатом зацеплении

Рис. 21.16. Силовой расчет входного звена



В косозубом зацеплении (рис. 21.15) вектор  $\bar{F}_{12}$  реакции, равный нормальной силе  $\bar{F}_n$ , находится в плоскости зацепления  $Q$  под углом  $\beta_b$  относительно плоскости 2, перпендикулярной осям  $O_1O_1$  и  $O_2O_2$ , в которой лежит окружная сила  $\bar{F}_t$ , расположенная на линии пересечения плоскости 2 с плоскостью 1, касательной к начальным поверхностям. Силу  $\bar{F}_n$ , как и ее составляющие, выражают через окружную силу  $F_t = 2T_1/mz_1$ :

нормальная сила

$$F_n = F_t / (\cos \alpha_w \cos \beta);$$

радиальная

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_w / \cos \beta;$$

осевая

$$F_x = F_t \operatorname{tg} \beta.$$

## 21.9. Силовой расчет входного звена

Последовательным переходом от группы к группе рассматриваемого механизма в конечном счете определяется система сил, действующих на входное звено, образующее со стойкой механизм 1-го класса (рис. 21.16). При рассмотрении его равновесия в плоском механизме составляют три уравнения статики, где определению подлежат два неизвестных; значение и направление реакции  $\bar{F}_{01}$  во вращательной паре (рис. 21.16, а) и значение и точка приложения

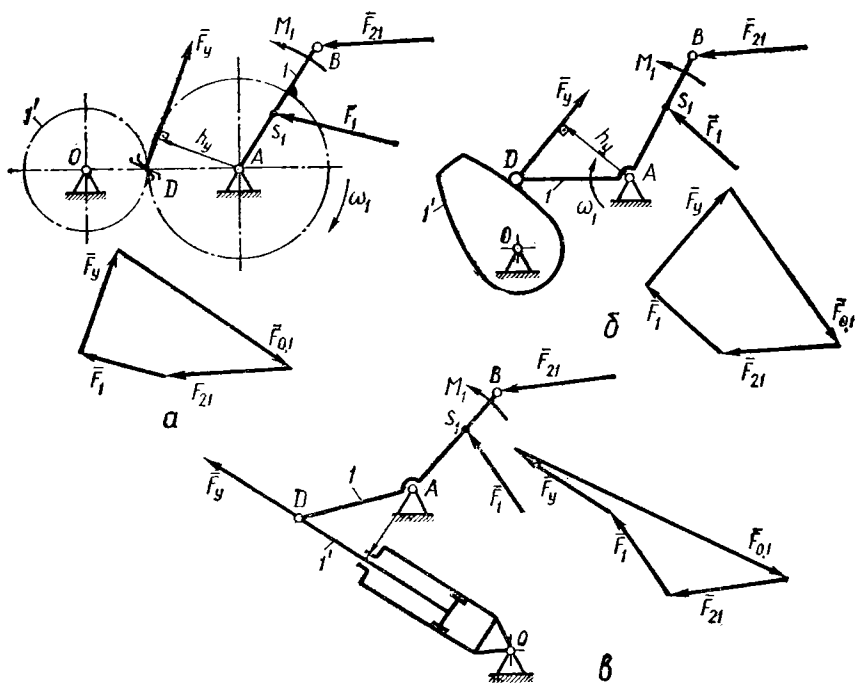


Рис. 21.17. Определение уравновешивающей силы

силы  $\bar{F}_{01}$  в поступательной паре (рис. 21.16, б), которые могут образовываться входным звеном 1 со стойкой  $O$ . Это несоответствие указывает на наличие множества математических решений задачи. Однако система сил, действующих на входное звено со стороны всех остальных звеньев механизма, преодолевается движущими силами и моментами, действующими на это звено со стороны двигателя или передаточного механизма. Следовательно, с учетом инерционности звеньев можно считать, что входное звено механизма уравновешивается движущими силами. Поэтому указанная неопределенность устраняется при приложении к входному звену уравновешивающего момента или уравновешивающей силы. В основу определения этих силовых факторов положен метод, разработанный Н. Е. Жуковским (см. прил.), основанный на принципе возможных перемещений применительно к механизмам.

Уравновешивающий момент  $M_y$ , действующий на звено 1, определяется из рассмотрения уравнения его равновесия

$$M_1 + M_y + M_A(\bar{F}_1) + M_A(\bar{F}_{21}) = 0, \quad (21.37)$$

где  $M_A(\bar{F}_1) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1$ ;  $M_A(\bar{F}_{21}) = \bar{l}_{AB} \times \bar{F}_{21}$ .

Уравновешивающий момент на звене создается непосредственно двигателем, если звено 1 соединено с ротором электродвигателя, или уравновешивающей силой, точка приложения которой определяется структурой передаточного механизма.

Уравновешивающая сила определится через уравновешивающий момент  $F_y = M_y/h_y$  при известном плече  $h_y$  ее приложения. Реакция в кинематической паре входное звено 1 — стойка 0 определяется решением одного из двух соответствующих условий:

а) при действии уравновешивающего момента

$$\bar{F}_{21} + \bar{F}_1 + \bar{F}_{01} = 0;$$

б) при действии уравновешивающей силы

$$\bar{F}_{21} + \bar{F}_1 + \bar{F}_y + \bar{F}_{01} = 0.$$

Решение этих уравнений для разных схем передаточного механизма показано на рис. 21.17 для привода от зубчатого (рис. 21.17, а) и кулачкового механизмов (рис. 21.17, б), гидравлического цилиндра (рис. 21.17, в). Из сказанного следует, что силовой расчет входного звена механизма выполняется только тогда, когда известен способ уравновешивания (моментом или силой с определенной точкой приложения).

## 22. ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННЫХ СИЛ

### 22.1. Основные задачи исследования

Движение звеньев механизма происходит под влиянием действующих на них сил. Их величины, характер воздействия и точки приложения циклически изменяются по трем основным причинам: изменение нагрузок сопротивления как на рабочем органе, так и в самом механизме; изменение движущих сил, обусловленных процессами, происходящими в двигателе машины; изменение положения звеньев за цикл работы механизма. Совокупное изменение условий нагружения приводит к ускорениям или замедлениям движения звеньев, что вызывает инерционные воздействия на них и, как следствие, — изменение скоростей. Следовательно, кинематические параметры звеньев — функции внешних сил. Они зависят от масс звеньев и их распределения по ним с учетом конкретной формы и размеров. **Задача определения закона движения звеньев в определенной геометрической форме, размерами и массой при известных внешних силах и моментах сил и законов их изменения во времени решается на основе общих принципов теоретической механики и называется динамическим расчетом.**

При динамическом расчете конкретных механизмов необходимо учитывать специфические факторы, присущие им. Например, механизмы с электрическим, гидравлическим, пневматическим приводами обладают различными свойствами, учет которых при расчете требует применения специальных математических методов. Имеются особенности в динамических расчетах механизмов, применяющихся в машинах различного назначения — станках, подъемно-транспортных устройствах, компрессорах и насосах и т. п. Поэтому в теории механизмов принято рассматривать задачи динамического расчета механизмов разных типов как самостоятельные.

Роль динамического расчета очень велика при проектировании или исследовании механизма. Только динамический расчет выявляет истинную картину взаимодействия звеньев механизма и законов их движения. Почти всегда, особенно в скоростных машинах, картина силового взаимодействия звеньев механизмов резко различается при оценке схемы статическими и динамическими методами. Если механизм, входящий в какой-либо агрегат, спроектирован без учета динамических факторов, то его надежность будет низкой, снизится точность и производительность работы агрегата, так как при проектировании не учитывалась реальная картина силового взаимодействия звеньев.

## 22.2. Пути решения задачи о движении механизма

Исходным условием, из которого определяют закон движения механизма, является равенство работы внешних сил и кинетической энергии механизма, равной сумме кинетических энергий всех движущихся звеньев:

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_{s_{i0}}^{s_i} F_i \cos(\widehat{\bar{F}}_i, \widehat{\bar{d}s}_i) ds_i + \int_{\varphi_{i0}}^{\varphi_i} M_i d\varphi_i \right) = \sum_{i=1}^n (0,5m_i v_{si}^2 + 0,5J_{si} \omega_i^2) - E_0, \quad (22.1)$$

где  $F_i$ ,  $M_i$  — силы и моменты сил, действующие на звено  $i$ ;  $m_i$ ,  $J_{si}$  — массы и моменты инерции этих звеньев;  $\omega_i$ ,  $v_{si}$  — угловые и линейные скорости звеньев и соответствующих точек на них;  $ds_i$  и  $d\varphi_i$  — элементарные перемещения точек приложения сил и звеньев из начальных положений  $s_{i0}$  и  $\varphi_{i0}$  в рассматриваемые  $s_i$  и  $\varphi_i$ ;  $E_0$  — кинетическая энергия механизма в начальном положении входного звена.

Используя это уравнение для каждого положения входного звена, можно определить действительные скорости звеньев. Если известен закон движения одного из звеньев механизма с одним входным звеном, то методами кинетики находят закон движения любого другого звена. Поэтому вместо исследования движения всего механизма под действием общей системы сил исследуют движение лишь одного из звеньев механизма, называемого звеном приведения. При этом обязательно соблюдение условия эквивалентности приведенного звена всей системе звеньев механизма. В качестве

звена приведения принимают звено, совершающее поступательное или вращательное движение, обычно входное. На это звено должны действовать такие условные нагрузки, оно должно иметь такую условную массу, чтобы в каждом положении механизма соблюдалось указанное условие эквивалентности. Силы или моменты, прикладываемые к звену приведения, называются **приведенной силой или моментом приведенной силы**; масса или момент инерции его — **приведенной массой или приведенным моментом инерции**. Условие эквивалентности будет соблюдаться, если работа приведенной силы  $\bar{F}_n$  будет равна работе всех сил, действующих на звенья механизма, а кинетическая энергия приведенной массы  $m_n$  будет равна кинетической энергии всего механизма:

$$F_n v_n \cos(\widehat{\bar{F}_n, \bar{v}_n}) = 0,5 m_n v_n^2 - E_0, \quad (22.2)$$

где  $v_n$  — скорость точки приложения приведенной силы, в которой сосредоточена приведенная масса  $m_n$ ;  $\widehat{\bar{F}_n, \bar{v}_n}$  — угол, образованный соответствующими векторами.

### 22.3. Приведенные сила и момент

Работа является мерой действия силы, поэтому **приведенная сила** — это такая сила, которая, будучи приложенной к какой-либо точке звена приведения, совершает в единицу времени работу, численно равную сумме работ всех сил и моментов сил, действующих на звенья механизма. При направлении приведенной силы  $\bar{F}_n$ , совпадающим с вектором  $\bar{v}_n$  скорости точки приведения, для поступательно движущегося звена работа приведенной силы равна

$$F_n ds_n = \int_{s_{i0}}^{s_i} F_i \cos(\widehat{\bar{F}_i, \bar{ds}_i}) ds_i + \int_{\varphi_{i0}}^{\varphi_i} M_i d\varphi_i.$$

Поделив обе части уравнения на  $dt$ , получим

$$F_n v_n = \sum_{i=1}^n (F_i v_i \cos(\widehat{\bar{F}_i, \bar{v}_i}) + M_i \omega_i),$$

откуда

$$F_n = \sum_{i=1}^n (F_i v_i \cos(\widehat{\bar{F}_i, \bar{v}_i}) + M_i \omega_i) / v_n, \quad (22.3)$$

где  $\bar{v}_i$  — скорости точек приложения сил  $\bar{F}_i$ ;  $\omega_i$  — угловые скорости звеньев;  $M_i$  — моменты сил, действующих на звенья;  $\widehat{\bar{F}_i, \bar{v}_i}$  — угол между векторами  $\bar{F}_i$  и  $\bar{v}_i$ .

Для звена приведения, совершающего вращательное движение с угловой скоростью  $\omega_n$ , приведенный момент сил получим из условия

$$M_n \omega_n = \sum_{i=1}^n (F_i v_i \cos(\widehat{\bar{F}_i, \bar{v}_i}) + M_i \omega_i),$$



откуда

$$M_n = \sum_{i=1}^n (F_i v_i \cos(\widehat{F_i, \vec{v}_i}) + M_i \omega_i) / \omega_n \quad (22.4)$$

Так, например, если в механизме, представленном на рис. 22.1, а, за точку приведения принять  $S_1$ , то по формуле (22.3) приведенная сила

$$F_n = F_5 v_C \cos(\widehat{F_5, \vec{v}_C}) / v_{S_1} + F_3 v_B \cos(\widehat{F_3, \vec{v}_B}) / v_{S_1} + M_7 \omega_7 / v_{S_1}.$$

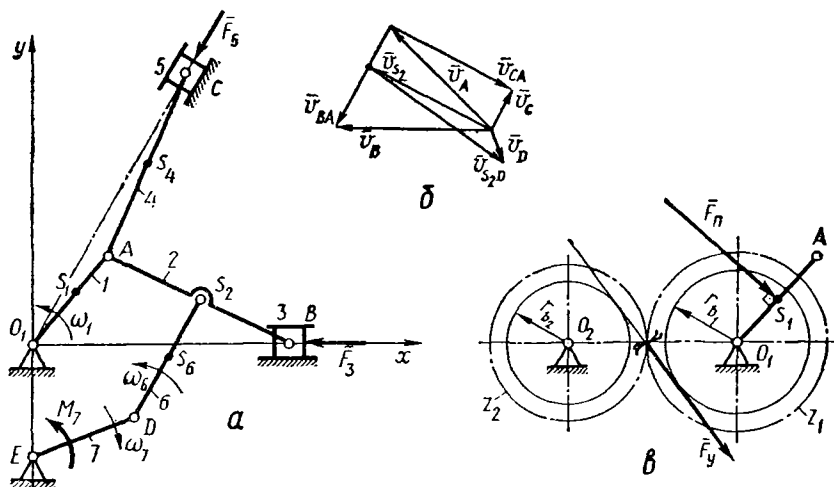


Рис. 22.1. Определение приведенной силы

Из плана скоростей (рис. 21.1, б) следует, что  $\cos(\widehat{F_5, \vec{v}_C}) = -1$ ;  $\cos(\widehat{F_3, \vec{v}_B}) = 1$ ;  $\omega_7 < 0$ ;  $v_{S_1} = \omega_1 l_{O_1 S_1}$ , тогда

$$F_n = (-F_5 v_C + F_3 v_B - M_7 \omega_7) / (\omega_1 l_{O_1 S_1}).$$

Задача определения приведенной силы или приведенного момента связана с расчетом уравновешивающей силы и уравновешивающего момента. Из рассмотрения равновесия звена 1 зубчатого механизма, использованного для приведения звена 1 во вращение (рис. 22.1, в), получим:

$$F_n l_{O_1 S_1} = F_y r_{h_2}, \text{ т. е. } M_n = M_y.$$

откуда

$$F_y = F_n l_{O_1 S_1} / r_{h_2}.$$

Если приведенную силу приложить по линии действия уравновешивающей силы, то  $F_n = -F_y$ .

Выбор точки приведения связан с конкретной структурой механизма и способом приведения его в движение. В зависимости от способа передачи движения звену приведения выбирается приведенная сила или приведенный момент. Если  $F_n = -F_y$ , то точкой приведения должна быть точка приложения уравновешивающей силы.

## 22.4. Приведенная масса и приведенный момент инерции

Звено приведения должно обладать такой же кинетической энергией, какой обладают звенья всего механизма, что обеспечивается размещением в какой-либо его точке условной приведенной массы.

**Приведенная масса** — это такая масса, которая, будучи сосредоточена в какой-либо точке звена приведения, обладает кинетической энергией, равной сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

Для звена приведения, совершающего поступательное движение со скоростью  $v_n$ , приведенная масса  $m_n$  определится из условия

$$m_n v_n^2 / 2 = \sum_{i=1}^n (m_i v_{si}^2 / 2 + J_{si} \omega_i^2 / 2);$$

откуда

$$m_n = \sum_{i=1}^n ((m_i v_{si}^2 + v_{si} \omega_i^2) / v_n^2), \quad (22.5)$$

где  $v_{si}$  — скорость центра масс звеньев;  $J_{si}$  — момент инерции звеньев относительно центра масс.

Для звена, совершающего вращательное движение с угловой скоростью  $\omega_n$ , приведенный момент инерции масс получим из условия

$$J_n \omega_n^2 / 2 = \sum_{i=1}^n (m_i v_{si}^2 + J_{si} \omega_i^2) / 2,$$

откуда

$$J_n = \sum_{i=1}^n (m_i v_{si}^2 + J_{si} \omega_i^2) / \omega_n^2. \quad (22.6)$$

Из зависимостей (22.3) ... (22.6) следует, что приведенные значения  $F_n$ ,  $M_n$ ,  $m_n$ ,  $J_n$  не зависят от скоростей точек и звеньев, а лишь от их отношения, т. е. определяются передаточной функцией звеньев. Так как передаточная функция меняет значения только при изменении относительного положения звеньев, то значения указанных величин — функция положения звена приведения.

## 22.5. Исходное уравнение движения механизма

Для поступательно движущегося звена приведения (рис. 22.2, а) приведенная масса зависит от координаты  $x$ , т. е.  $m_n = m(x)$ . В зависимости от типа механизма приведенная сила зависит не только от координаты  $x$ , но и от скорости звена и времени, т. е. в общем случае  $F_n = F(x, v, t)$ . Из теоретической механики известно, что приращение кинетической энергии массы равно элементарной работе силы, тогда  $d(m_n v^2 / 2) = F_n dx$  и, следовательно,

$$d(m_n v^2 / 2) / dx = F_n. \quad (22.7)$$

Дифференцируя выражение (22.7) по формулам для производных произведения, получим

$$(v^2 / 2) dm_n / dx + m_n v dv / dx = F_n.$$

Заменяя  $v = dx/dt$ , получим

$$0,5(dx/dt)^2 dm_n/dx + m_n(dx/dt) d(dx/dt)/dx = F_n,$$

откуда

$$m(x) (d^2x/dt^2) + 0,5dm(x)/dx (dx/dt)^2 = F_n. \quad (22.8)$$

Аналогично получим уравнение движения звена приведения для случая вращательного движения (рис. 22.2, б). В этом случае

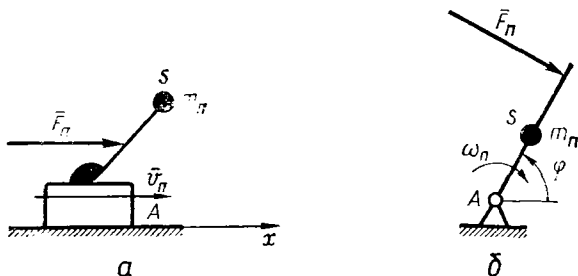


Рис. 22.2. Вывод уравнения движения звена приведения

$J_n = J(\varphi)$ ,  $M_n = M(\varphi, \omega, t)$ , тогда  $d(J_n \omega^2/2) = M_n d\varphi$  и, следовательно,

$$d(J_n \omega^2/2)/d\varphi = M_n.$$

Заменяя  $\omega = d\varphi/dt$ , получим

$$0,5(d\varphi/dt)^2 dJ_n/d\varphi + J_n(d\varphi/dt) d(d\varphi/dt)/d\varphi = M_n,$$

откуда

$$J(\varphi) d^2\varphi/dt^2 + 0,5dJ(\varphi)/d\varphi (d\varphi/dt)^2 = M_n. \quad (22.9)$$

Если масса и момент инерции постоянны, то выражения (22.8) и (22.9), как известно из теоретической механики, являются дифференциальными уравнениями Лагранжа (см. прил.) второго рода. Записанные в приведенном виде, они называются *уравнениями движения механизма в дифференциальной форме*. Приведенная сила или момент в правой части этих уравнений может быть представлена алгебраической суммой двух слагаемых, одно из которых определено для движущих сил, а другое — для сил сопротивления. Для машин различного технологического назначения силы движущие и силы сопротивления зависят от одного или нескольких параметров — перемещения, скорости и времени, что определяется механическими характеристиками двигателя и механизма исполнительного органа.

Для каждого механизма существует зависимость момента на ведущем валу механизма и двигателя от скорости его вращения — *механические характеристики* (см. гл. 20). Когда конкретный механизм приводится в движение двигателем определенного типа, то установившееся движение возможно только в случае пересечения их механических характеристик: в точке  $A$  (рис. 22.3, а) приведенные моменты сил движущих и сил сопротивления одинако-

вы:  $M_d = M_c$ , поэтому имеет место установившееся движение с угловой скоростью  $\omega_y$ .

Если под влиянием какого-либо возмущающего фактора увеличивается скорость механизма, то при указанных характеристиках возникает неравенство  $M_c > M_d$ , и установившееся движение в данное мгновение (правее точки  $A$ ) окажется невозможным. В этом случае произойдет уменьшение кинетической энергии механизма за счет большей работы сил сопротивления и снижение угловой скорости до  $\omega_y$ . Если угловая скорость станет меньше  $\omega_y$ , то равнове-

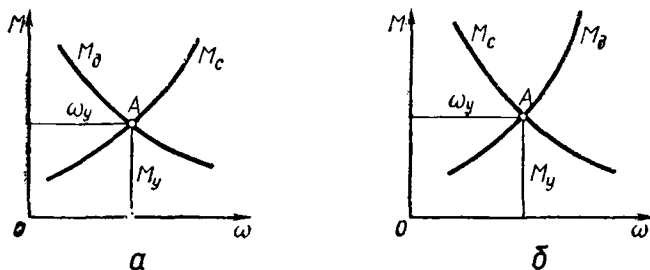


Рис. 22.3. Графики приведенных моментов сил движущих и сопротивления

сие также невозможно, так как в этом случае  $M_d > M_c$  и увеличение кинетической энергии машины пойдет на увеличение скорости до  $\omega_y$ . Если механическая характеристика двигателя имеет восходящую форму, а исполнительного механизма — нисходящую (рис. 22.3, б), то работа такой машины возможна только при скорости  $\omega_y$ , которая должна поддерживаться специальными устройствами — регуляторами скорости (см. гл. 28). Следовательно, для устойчивой работы машины необходимо, чтобы ее двигатель имел нисходящую, а исполнительный механизм — восходящую формы механической характеристики. Такая машина обладает *свойством саморегулирования*. В противном случае машина свойством саморегулирования не обладает.

В общем случае уравнение движения механизма не решается точно в виде конечной функции. Обычно применяют приближенные либо численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений, а уравнения движения механизма придают вид, наиболее удобный для исследования в данных конкретных условиях характеристик нагружения.

## 22.6. Движение механизма при условии, что моменты сил и моменты инерции — функции положений звеньев

Для случая вращательного движения звена приведения при условии, что  $M_n = M(\varphi)$  и  $J_n = J(\varphi)$ , рассмотрим метод численного решения дифференциального уравнения движения механизма. Перепишем уравнение (22.9) в виде

$$J_n \ddot{\varphi} + 0,5\omega^2 dJ_n/d\varphi = M_d.$$

Разобьем угол поворота  $\varphi$  звена приведения на  $n$  достаточно малых интервалов при условии  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \dots = \varphi_{j+1} - \varphi_j$ .

На интервале  $(\varphi_j \dots \varphi_{j+1})$

$$d\omega/d\varphi = (\omega_{j+1} - \omega_j) \Delta\varphi;$$

$$dJ_n/d\varphi = (J_{n,j+1} - J_{n,j}) \Delta\varphi$$

и при  $\epsilon = (d\omega/dt) \cdot (d\varphi/d\varphi) = (d\omega/d\varphi) \omega$  получим

$$J_{n,j} \omega_j (\omega_{j+1} - \omega_j) / \Delta\varphi + 0,5 \omega_j^2 (J_{n,j+1} - J_{n,j}) / \Delta\varphi = M_{n,j}. \quad (22.10)$$

Решим уравнение (22.10) относительно  $\omega_{j+1}$ :

$$2J_{n,j} \omega_j (\omega_{j+1} - \omega_j) + (J_{n,j+1} - J_{n,j}) \omega_j^2 = 2M_{n,j} \Delta\varphi,$$

откуда

$$\omega_{j+1} = \omega_j (3J_{n,j} - J_{n,j+1}) / 2J_{n,j} + M_{n,j} \Delta\varphi / (\omega_j J_{n,j}). \quad (22.11)$$

Принимая в уравнении (22.11)  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  и используя соответствующие значения приведенных величин, последовательно определяя закон изменения угловой скорости звена приведения  $\omega(\varphi)$ .

Если для механизма справедливы условия, что  $M_c = M_c(\varphi)$ ,  $M_d = M_d(\varphi)$ , то исходное уравнение для вращательного движения звена приведения запишется в виде

$$d(\omega^2 J_n / 2) = (M_d - M_c) / d\varphi.$$

Так как в этом уравнении переменные разделены, то его можно проинтегрировать:

$$\int_{E_0}^{E_j} dE = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} d(\omega^2 J_n / 2) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} (M_d - M_c) d\varphi,$$

и, следовательно,

$$J_{n,j} \omega_j^2 / 2 - J_{n,0} \omega_0^2 / 2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} (M_d - M_c) d\varphi, \quad (22.12)$$

где  $dE$  — приращение кинетической энергии звеньев механизма при переходе из начального положения с кинетической энергией  $E_0$  в  $j$ -е положение с кинетической энергией  $E_j$ .

Полученное уравнение для рассматриваемого частного случая называют *уравнением движения механизма в форме кинетической энергии*. Преобразуя его, получим угловую скорость звена приведения в  $j$ -м положении:

$$\omega_j = \sqrt{(2/J_{n,j}) \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} (M_d - M_c) d\varphi + \omega_0^2 (J_{n,0}/J_{n,j})}. \quad (22.13)$$

Аналогично получим выражение для определения скорости звена приведения при поступательном его движении:

$$v_j = \sqrt{(2/m_{n,j}) \int_{x_0}^{x_j} (F_d - F_c) dx + v_0^2 (m_{n,0}/m_{n,j})}. \quad (22.14)$$

Зависимости (22.13) и (22.14) позволяют вынести только качественные суждения о характере изменения скорости звена привода, так как для реальных механизмов задается средняя скорость, а не начальная. Поэтому на практике уравнение движения механизма в форме кинетической энергии может быть решено приближенно. Рассмотрим алгоритм одного из приближенных методов решения этого уравнения.

Перепишем уравнение (22.12) для произвольного положения в виде

$$E_c + E_v - E_0 = \Sigma A, \quad (22.15)$$

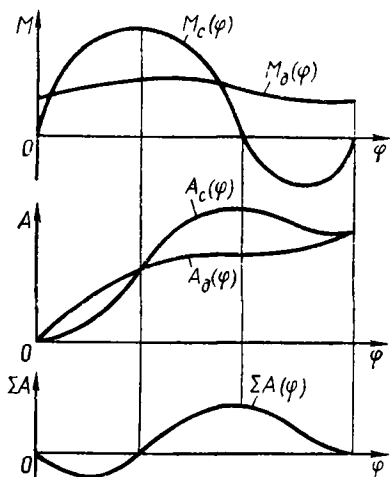


Рис. 22.4. Графики работ в зависимости от угла поворота ведущего звена

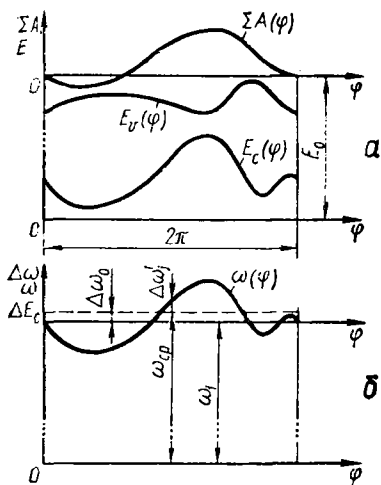


Рис. 22.5. Графики изменения кинетической энергии и угловой скорости звена привода

где  $E_c = 0,5J_c\omega^2$  — кинетическая энергия звеньев с постоянным приведенным моментом инерции  $J_c$ ;  $E_v = 0,5J_v\omega^2$  — кинетическая энергия звеньев с переменным приведенным моментом инерции  $J_v$ ;  $E_0$  — кинетическая энергия механизма при скорости звена привода  $\omega_0$ ;  $\Sigma A$  — суммарная работа сил движущих и сопротивления, приведенных к звену привода, при перемещении его из положения  $\varphi_0$  в положение  $\varphi_1$ .

Значение суммарной работы для любого положения находится интегрированием функции  $M_d(\varphi)$  и  $M_c(\varphi)$  и их алгебраическим суммированием (рис. 22.4). Закон изменения кинетической энергии получают, если известны кинетические характеристики звеньев с переменным приведенным моментом инерции. Тогда

$$E_c - E_0 = \Sigma A - E_v \text{ и } E_c = \Sigma A - E_v + E_0. \quad (22.16)$$

Графически значение  $E_c - E_0$  получается алгебраическим суммированием функций  $\Sigma A$  и  $E_v$  (рис. 22.5, а). Так как  $E_0$  — величина постоянная, то график для  $E_c$  соответствует графику для  $E_c - E_0$ , только ось абсцисс для него сдвигается на  $E_0$  (в общем случае неизвестную).

Так как  $J_c$  постоянен, то кинетическая энергия  $E_c$  меняется только за счет изменения скорости звена приведения, а следовательно,  $E_c$  и  $\omega$  пропорциональны. Поэтому изменения  $E_c$  полностью определяют колебания скорости звена приведения относительно начального значения. Определим изменение  $E_c$  относительно ее начального значения  $E_{c1}$ .

Графически это равносильно определению ординат графика  $E_c(\varphi)$  относительно оси абсцисс, приведенной через начальную его точку  $E_{c1}$ :

$$\Delta E'_{cj} = E_{cj} - E_{c1} = 0,5J_c\omega_j^2 - 0,5J_c\omega_1^2 = 0,5J_c(\omega_j + \omega_1)(\omega_j - \omega_1). \quad (22.17)$$

При установившемся движении угловая скорость колеблется в определенном диапазоне. Если эти колебания невелики, то  $(\omega_j + \omega_1)/2 \approx \omega_{cp}$ , и, обозначив  $\omega_j - \omega_1 = \Delta\omega'_j$ , получим

$$\Delta E'_{cj} = J_c\omega_{cp}\Delta\omega'_j. \quad (22.18)$$

Так как  $J_c$  и  $\omega_{cp}$  — величины постоянные, то график  $\Delta E'_{cj}$  определяет в другом масштабе и график изменения  $\Delta\omega_j$  (рис. 22.5, б). Средняя угловая скорость будет

$$\omega_{cp} = (\omega_{max} + \omega_{min})/2$$

и на графике отобразится соответствующей линией, лежащей от оси абсцисс на расстоянии

$$\Delta\omega_0 = (|\Delta\omega'_{max}| - |\Delta\omega'_{min}|)/2, \quad (22.19)$$

где  $\Delta\omega'_{max}$  и  $\Delta\omega'_{min}$  — максимальное и минимальное отклонения приращения угловой скорости относительно  $\omega_1$ .

Отклонения угловой скорости  $\omega_j$  от ее среднего значения в этом случае:

$$\Delta\omega_j = \Delta\omega'_j - \Delta\omega_0.$$

Для произвольного положения звена приведения, определяемого углом  $\varphi_j$ , получим

$$\omega_j = \omega_{cp} + \Delta E'_{cj}/(J_c\omega_{cp}) - (|\Delta\omega'_{max}| - |\Delta\omega'_{min}|)/2. \quad (22.20)$$

Алгоритм определения угловой скорости и углового ускорения звена приведения описывается операторной функцией, которая последовательно реализует зависимости (22.16), (22.17), (22.18), (22.20):

$$ZKNDV(N, z, \omega_{cp}, M_c(N), M_d(N), J_v(N); \Delta E'_c(N), \omega(N), \epsilon(N)), \quad (22.21)$$

где  $N$  и  $z$  — целая и действительная переменные, соответствующие количеству значений  $\varphi_j$ , для которых определяется закон движения звена приведения;  $M_c(N)$ ,  $M_d(N)$ ,  $J_v(N)$  — массивы чисел, соответствующие значениям переменных  $M_c$ ,  $M_d$ ,  $J_v$  для разных  $\varphi_j$ .

Угловые ускорения  $\epsilon_j$  массива  $\epsilon(N)$  определяются численным дифференцированием.

## 22.7. Движение механизма при условии, что движущие силы зависят от скорости звеньев, а силы сопротивления — от времени

Зависимость движущих сил от скорости звеньев, а сопротивлений — от времени типична для машин, приводимых в действие электродвигателями. Для электродвигателей разных типов характерны различные формы их механических характеристик (см. гл. 20), различные интегрирующие их аналитические зависимости и способы решения уравнения движения механизма.

Рассмотрим механическую характеристику механизма, приводимого в движение асинхронным электродвигателем (рис. 22.6).

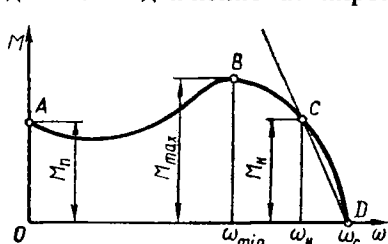


Рис. 22.6. Механическая характеристика механизма с приводом от электродвигателя

Левая нерабочая ее часть заключена между точками *A* и *B* с ординатой  $M_{\max}$ , рабочая часть ветви — справа от точки *B*. На этой кривой можно отметить характерные точки: *A* — с координатами  $0, M_n$  ( $M_n$  — начальный пусковой момент двигателя при угловой скорости, равной нулю); *B* — с координатами  $\omega_{\min}, M_{\max}$  ( $\omega_{\min}$  — минимальная угловая скорость ротора двигателя, при которой допустима его устойчивая работа при нагрузке  $M_{\max}$ ); *C* — с координатами  $\omega_n$  и  $M_n$  ( $\omega_n$  — номинальная угловая скорость при работе с номинальным моментом  $M_n$ ); *D* — с координатами  $\omega_c, 0$  ( $\omega_c$  — синхронная угловая скорость, т. е. скорость вращения электромагнитного поля, при которой момент  $M_d = 0$ ).

Так как устойчивая работа агрегата и саморегулирование его возможны только при нисходящей характеристике двигателя, то устойчивая работа механизма с асинхронным двигателем возможна только на правой ветви характеристики. Для большинства двигателей данного типа с достаточной для практики точностью истинная характеристика заменяется на рабочем участке отрезком прямой линии, проходящей через точки *C* и *D*. Из уравнения этой прямой

$$(M - M_n)/M_n = (\omega - \omega_n)/(\omega_c - \omega_n)$$

получим

$$M = M_n \omega_c / (\omega_c - \omega_n) - \omega M_n / (\omega_c - \omega_n). \quad (22.22)$$

Принимая зависимость для момента движущей силы по этому условию, запишем уравнение движения механизма с асинхронным двигателем в виде зависимости (22.9)

$$J(\varphi) \cdot d^2\varphi/dt^2 + 0,5(d\varphi/dt)^2 dJ(\varphi)/d\varphi = a - b\omega - M_c(t) \quad (22.23)$$

или

$$J(\varphi) d\omega/dt + 0,5\omega^2 dJ(\varphi)/d\varphi = a - b\omega - M_c(t), \quad (22.24)$$



где  $a = M_n \omega_c / (\omega_c - \omega_n)$ ;  $b = M_n / (\omega_c - \omega_n)$ ;  $M_c(t)$  — функция приведенного момента сил сопротивления.

В общем случае уравнение (22.24) не решается. Приближенно оно может быть решено по выражению (22.11). Для случаев, когда приведенный момент инерции постоянен либо мало изменяется (этот случай типичен для механизмов приводов разного рода роторных машин, лебедок, насосов и т. п.)  $dJ(\varphi)/d\varphi = 0$  и тогда

$$J d\omega/dt = a - b\omega - M_c(t),$$

откуда

$$d\omega/dt + \omega b/J = (a - M_c(t))/J. \quad (22.25)$$

Если в уравнении (22.25) функция  $M_c(t)$  задается аналитически, то его можно решить. Так как приведенный момент сил сопротивления является периодической функцией, то можно принять  $M_c = M_c(t) = c + d \sin kt$ . Если обозначить  $\lambda = b/J = M_n / (J(\omega_c - \omega_n))$  и  $\alpha = (a - c)/J = (M_n \omega_c / (\omega_c - \omega_n) - c)/J$ ,  $\beta = d/J$ , то из уравнения (22.25) получим

$$d\omega/dt + \lambda\omega = \alpha - \beta \sin kt. \quad (22.26)$$

Умножим обе части последнего уравнения на интегрирующий множитель  $e^{\lambda t}$ . Тогда

$$e^{\lambda t} d\omega/dt + \lambda \omega e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (\alpha - \beta \sin kt)$$

или

$$d(\omega e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} (\alpha - \beta \sin kt) dt. \quad (22.27)$$

Интегрируя выражение (22.27), получим

$$\omega e^{\lambda t} = \int_0^t e^{\lambda t} (\alpha - \beta \sin kt) dt = \int_0^t \alpha e^{\lambda t} dt - \int_0^t e^{\lambda t} \beta \sin ktdt. \quad (22.28)$$

Интегралы в правой части выражения (22.28) — табличные. После интегрирования получим

$$\omega e^{\lambda t} = \alpha (e^{\lambda t} - 1)/\lambda - (e^{\lambda t} (\lambda \sin kt - k \cos kt) - k) \beta / (\lambda^2 + k^2),$$

откуда закон движения звена приведения в функции времени

$$\omega(t) = \alpha/\lambda - \alpha/(\lambda e^{\lambda t}) - (\lambda \sin kt - k \cos kt - k/e^{\lambda t}) \beta / (\lambda^2 + k^2). \quad (22.29)$$

Так как интегрирование выражения (22.27) выполнено в пределах от 0 до  $t$ , то выражение (22.29) описывает закон движения звена приведения со времени пуска (рис. 22.7). Движение становится установившимся при  $t \rightarrow \infty$ . Однако уже через некоторое малое время  $t$  величина  $e^{-\lambda t}$  быстро убывает, и движение считается установившимся с достаточной степенью точности. Поэтому для периода установившегося движения записывают

$$\omega(t) = \alpha/\lambda - (\lambda \sin kt - k \cos kt) \beta / (\lambda^2 + k^2). \quad (22.30)$$

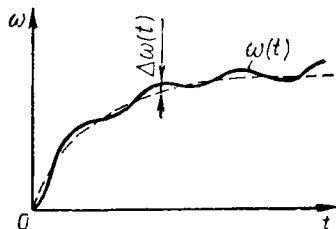


Рис. 22.7. Закон движения звена приведения с момента пуска

Экстремальные значения угловой скорости определяют, продифференцировав уравнение (22.30) по  $t$ :

$$d\omega(t)/dt = \beta k (\lambda \cos kt + k \sin kt) / (\lambda^2 + k^2). \quad (22.31)$$

Приравняв выражение (22.31) нулю, получим значения  $t$ , при которых функция  $\omega(t)$  имеет экстремум. Если  $\lambda \cos kt + k \sin kt = 0$ , то  $\lambda + k \operatorname{tg} kt = 0$  и  $\operatorname{tg} kt = -\lambda/k$ , откуда

$$kt = \operatorname{arctg}(-\lambda/k). \quad (22.32)$$

Функция (22.29) имеет период  $2\pi$ , равный периоду изменения синуса и косинуса. Значения тангенса одинаковы для углов, разность между которыми равна  $\pi$ . Следовательно, за время периода колебания угловой скорости  $T = 2\pi/k$  экстремальные значения функция  $\omega(t)$  примет при времени от начала периода  $t_1 = (1/k) \operatorname{arctg}(-\lambda/k)$  и  $t_2 = (1/k) (\pi + \operatorname{arctg}(-\lambda/k))$ . Тогда

$$\omega_{\min} = \alpha/\lambda - \beta (\lambda \sin(\operatorname{arctg}(-\lambda/k)) - k \cos(\operatorname{arctg}(-\lambda/k))) / (\lambda^2 + k^2),$$

$$\omega_{\max} = \alpha/\lambda - \beta (\lambda \sin(\operatorname{arctg}(-\lambda/k) + \pi) - k \cos(\operatorname{arctg}(-\lambda/k) + \pi)) / (\lambda^2 + k^2).$$

После того, как получен закон движения звена приведения, находят истинный закон изменения движущих сил  $M_d(t)$ , для чего необходимо выражение (22.30) подставить в формулу (22.22).

## 22.8. Движение механизма при нелинейной характеристике двигателя

Если механизм приводится в движение двигателем, механическая характеристика которого нелинейна, то для получения аналитического решения уравнения движения эту характеристику можно аппроксимировать кривой второго или более высокого порядка. Подобные случаи характерны для двигателей постоянного тока с последовательным возбуждением, крановых асинхронных электродвигателей, а также для гидро- и тепловых двигателей. Большое значение для точности решения имеет характер изменения момента сопротивления. Если движущий момент аппроксимировать отрезком параболы, то при  $J = \text{const}$  уравнение движения будет

$$a + b\omega + c\omega^2 - M_c = J \cdot d\omega/dt, \quad (22.33)$$

где  $a, b, c$  — числовые коэффициенты, полученные при аппроксимации механической характеристики.

Принимая  $a - M_c = A$ , получим

$$A + b\omega + c\omega^2 = J d\omega/dt. \quad (22.34)$$

Если  $M_c = M_c(t)$ , то, разделяя переменные и интегрируя, получим табличный интеграл

$$t - t_i = J \int_{\omega_i}^{\omega} d\omega / (A + b\omega + c\omega^2),$$

вид решения которого зависит от знака выражения  $(4Ac - b^2)$ .  
 При  $4Ac - b^2 > 0$  имеем

$$t - t_1 = 2J\sqrt{4Ac - b^2} \left| \arctg((2c\omega + b)/\sqrt{4Ac - b^2}) \right|_{\omega_1}^{\omega}; \quad (22.35)$$

при  $4Ac - b^2 < 0$  имеем

$$t - t_1 = J \left| \ln((2c\omega + b - \sqrt{b^2 - 4Ac})(2c\omega + b + \sqrt{b^2 - 4Ac})) \right|_{\omega_1}^{\omega} / \sqrt{b^2 - 4Ac}. \quad (22.36)$$

Зная  $\omega_i$  при  $t_i$ , получают закон движения звена приведения при установившемся движении механизма. Если  $M_o = M_c(\varphi)$ , то уравнение (22.34) переписывают в виде

$$A + b\omega + c\omega^2 = J\omega \cdot d\omega/d\varphi,$$

после интегрирования получим

$$\varphi - \varphi_1 = J \int_{\omega_1}^{\omega} \omega d\omega / (A + b\omega + c\omega^2), \quad (22.37)$$

где  $\varphi_1$  и  $\omega_1$  — начальные значения угла поворота и угловой скорости звена приведения.

Вид решения уравнения (22.37) зависит от знака выражения  $4Ac - b^2$ , а само решение, как и в предыдущем случае, получается с помощью таблиц интегралов. Особенность решения заключается в том, что из-за громоздкости полученных выражений практически нельзя перейти от зависимости  $\varphi = \varphi(\omega)$  к зависимости  $\omega = \omega(\varphi)$ , что делает предпочтительным численные методы решения.

## 22.9. Коэффициенты неравномерности движения и динамичности механизма

Из зависимости (22.13) следует, что угловая скорость звена приведения за полный оборот не остается постоянной, а меняется, периодически принимая одинаковые значения, если не меняются законы изменения  $J_n(\varphi)$  и  $M_n(\varphi)$ . Постоянный характер функций приведенных величин возможен только в случае установившегося движения механизма. Такое движение имеет место, если при работе машины приведенный момент сил движущих постоянно равен приведенному моменту сил сопротивления. В этом случае кинетическая энергия машины  $E = 0,5J_n\omega_n^2$  не должна изменяться. Так как

$$dE = J_n\omega_n d\omega_n, \quad (22.38)$$

то установившееся движение возможно только при отсутствииращения скорости  $d\omega_n$  звена приведения.

Выше уже говорилось, что так как приведенные величины периодически меняют свои значения, то при установившемся движении

истинная угловая скорость звена привода принимает периодические значения, величина которых колеблется относительно  $\omega_y$  (рис. 22.8). Из этого следует, что **скорость установившегося движения является интегральной характеристикой движения звена привода**. В теории механизмов ее называют *средней скоростью звена привода*  $\omega_{cp}$ . Для характеристики отклонений мгновенных значений угловой скорости за цикл от среднего значения используют *коэффициент неравномерности движения механизма*

$$\delta = (\omega_{max} - \omega_{min})/\omega_{cp}, \quad (22.39)$$

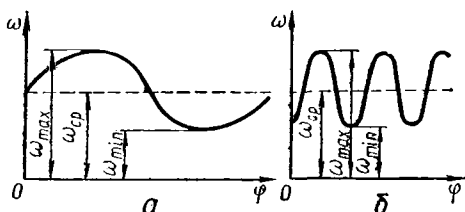
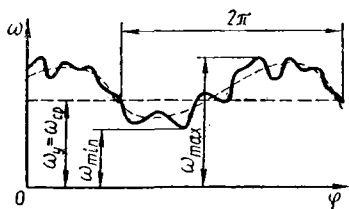


Рис. 22.8. График истинной скорости звена привода

Рис. 22.9. Оценка динамичности механизма

где  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$  — соответственно максимальное и минимальное мгновенные значения угловой скорости звена привода.

Обычно принимают

$$\omega_{cp} = (\omega_{max} + \omega_{min})/2. \quad (22.40)$$

Решая совместно уравнения (22.39) и (22.40), получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{max} &= \omega_{cp} (1 + \delta/2); \\ \omega_{min} &= \omega_{cp} (1 - \delta/2). \end{aligned} \right\} \quad (22.41)$$

При большой разнице между угловыми скоростями  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$  возникают динамические нагрузки, снижающие надежность и долговечность машин. Кроме того, ухудшаются и эксплуатационные показатели механизмов. Из-за колебаний нагрузки снижается точность изготовления деталей в металлорежущих станках, точность установки магнитной ленты в лентопротяжных механизмах ЭВМ, ухудшается звукозапись и звуковоспроизведение в магнитофонах.

Практикой установлены оптимальные значения амплитуды колебаний скорости звена привода, например,  $\delta = 0,04$  — для сельскохозяйственных машин,  $\delta = 0,01$  — для металлообрабатывающих станков общего назначения,  $\delta = 0,005$  — для роторных двигателей. При динамическом расчете механизма ставится задача обеспечения требуемого коэффициента неравномерности движения механизма. Чем меньше  $\delta$ , тем более равномерно вращается входное звено механизма, следовательно, меньше колебания скоростей его звеньев.

*Коэффициент неравномерности движения* не характеризует динамику движения звена привода внутри одного цикла периода установившегося движения. На рис. 22.9, а, б показаны графики зависимости  $\omega = \omega(\varphi)$  для механизмов, у которых одинакова вели-

чина  $\delta$ , но резко различны динамические свойства. Динамические свойства механизмов, как это известно из теоретической механики, характеризуются *коэффициентом динамичности*

$$k_d = \varepsilon_{\max} / \omega_{\text{ср}}^2, \quad (22.42)$$

где  $\varepsilon_{\max}$  — максимальное значение углового ускорения звена.

## **23. ВЛИЯНИЕ УПРУГОСТИ ЗВЕНЬЕВ НА ТОЧНОСТЬ ИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАГРУЗКИ В МЕХАНИЗМАХ**

### **23.1. Проявление упругого взаимодействия звеньев**

В реальных механизмах звенья и их соединения упруги. Это приводит к отклонению фактических характеристик движения звеньев механизма от полученных в предположении их недеформируемости. *Упругость проявляется в возникновении погрешностей положения звеньев при их относительном движении, перераспределении сил, действующих на звенья, и давлений в кинематических парах, в возникновении динамических нагрузок на звенья и элементы кинематических пар.*

Погрешности положения звеньев из-за их деформаций нарушают точность движения, что особенно важно для механизмов приборов. Перераспределение нагрузок между звеньями и в элементах кинематических пар особенно важно учитывать при проектировании высокоскоростных машин. *Динамические нагрузки, обусловленные упругостью звеньев, достигают величин, соизмеримых с нагрузками от действия сил технологического сопротивления.* Необходимость их учета приводит к росту материалоемкости конструкции. В некоторых случаях упругость звеньев такова, что при их деформировании потенциальная энергия упругой деформации становится соизмеримой с кинетической энергией звеньев механизма, с работой сил технологического сопротивления и движущих сил. В этих случаях пренебрежение упругостью звеньев при описании динамических процессов приводит к неправильным представлениям о движениях звеньев и их взаимодействии и, как следствие, к выбору неработоспособной конструкции механизма.

Следовательно, необходимость учета упругих свойств материалов звеньев полностью определяется назначением механизма и, как следствие, требуемой точностью инженерного расчета его.

### **23.2. Характеристики упругих свойств звеньев и механизмов**

Наиболее важной характеристикой, отражающей влияние упругости звена на его динамику, является жесткость. Под жесткостью звена в данном направлении понимают силу или момент силы, вызываемые в этом направлении единичное упругое перемещение, определяемое одной координатой. Так, если связи звена допускают только поступательное движение (рис. 23.1, а), то жесткость  $C$  упругого звена  $I$  равна силе  $F$ , вызывающей удлинение его на единицу

длины. Для звена, подвергающегося действию крутящего момента  $M$  (рис. 23.1, б), жесткость будет равна моменту, вызвавшему закручивание звена на единичный угол.

Характер зависимостей для определения жесткости звена определяется его конструкцией и системой действующих нагрузок. При осевом действии силы на звено (рис. 23.1, а)

$$C = EA/l; \quad (23.1)$$

при кручении звена (рис. 23.1, б)

$$C = GJ_p/l. \quad (23.2)$$

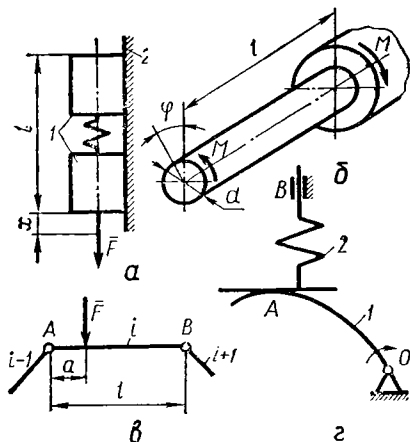
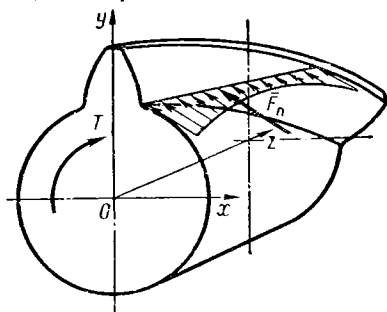


Рис. 23.1. Определение жесткостей звеньев

Рис. 23.2. Жесткость высшей кинематической пары



Если на звено действует перпендикулярно его оси сила  $\bar{F}$  (рис. 23.1, в), то жесткость в направлении действия силы получим из рассмотрения деформации изгиба

$$C = 3EJl/(a^2(l-a)^2). \quad (23.3)$$

В формулах (23.1) ... (23.3)  $E$  и  $G$  — модули продольной упругости и сдвига материала;  $l$  — длина звена;  $A$  — площадь его поперечного сечения;  $J_p$  — полярный момент инерции сечения;  $J$  — момент инерции сечения.

Если для замыкания кинематической пары применяются звенья специальной конструкции, обладающие малой жесткостью, например, витая пружина 2 (з), то ее жесткость

$$C = 8D^3n/(Gd^4), \quad (23.4)$$

где  $n$  — число витков;  $D$  — диаметр пружины;  $d$  — диаметр проволоки пружины.

Для пространственных механизмов понятие жесткости звена связывается с направлением деформации при любом направлении силы. Звенья таких механизмов имеют в общем случае неодинаковые жесткости в разных направлениях. Так, зубчатое колесо с косыми зубьями (рис. 23.2) имеет различную жесткость в направлениях координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , так как зуб по-разному деформируется в

этих направлениях. Тело колеса изгибается в двух плоскостях и скручивается вокруг оси  $Ox$ .

В некоторых случаях удобно оперировать обратной жесткостью звена — податливостью  $\lambda = 1/C$ . Под податливостью звена в данном направлении понимают упругое перемещение, вызванное действием единичной силы.

Упругие звенья соединяются кинематическими парами в кинематическую цепь, обладающую упругими свойствами. Поэтому вводят понятие жесткости механизма, под которым подразумевают силу или момент силы, приложенные к входному звену и вызывающие его единичное линейное или угловое перемещение. Жесткость механизма зависит от структурной и конструктивной схемы, жесткостей его звеньев, от вида кинематических пар, соединяющих звенья, и упругих свойств их элементов. Податливость механизма, состоящего из  $n$  звеньев, последовательно соединенных  $p$  кинематическими парами, равна сумме податливостей его звеньев  $\lambda_{zi}$  и кинематических пар  $\lambda_{pi}$ :

$$\lambda_M = \sum_{i=1}^n \lambda_{zi} + \sum_{i=1}^p \lambda_{pi}; \quad (23.5)$$

жесткость механизма  $C_M = 1/\lambda_M$ .

В разветвленных кинематических цепях звено входит в несколько кинематических пар и образует параллельные структурные цепи. В этих случаях перемещение входного звена, вызванное податливостью всей кинематической цепи, определяется в основном деформациями наиболее жестких соединений. Жесткость механизма при параллельном соединении упругих звеньев равна сумме жесткостей его звеньев  $C_{zi}$  и кинематических пар  $C_{pi}$ :

$$C_M = \sum_{i=1}^n C_{zi} + \sum_{i=1}^p C_{pi}. \quad (23.6)$$

Рассмотрим определение жесткости зубчатого передаточного механизма (рис. 23.3). При зафиксированном положении звена 4 и приложении к колесу 1 момента  $M$  из-за деформации всех звеньев и пар этой кинематической цепи оно повернется на угол  $\varphi$ . Тогда жесткость механизма составит  $C_M = M/\varphi$ . Определяя угловые деформации (податливости) каждого из упругих соединений и приводя их к колесу 1, получим

$$\varphi = M/C_M = M/C_1 + M i_{12}^2/C_{23} + M i_{12}^2/C_{34} + M i_{14}^2/C_4,$$

откуда

$$\lambda_M = 1/C_M = 1/C_1 + i_{12}^2/C_{23} + i_{12}^2/C_{34} + i_{14}^2/C_4. \quad (23.7)$$

Зная значения жесткостей соединений  $C_1, C_{12}, \dots, C_4$ , из формулы (23.7) определяют жесткость механизма  $C_M$ .

### 23.3. Перераспределение нагрузки в кинематических парах

Так как элементы кинематических пар обладают определенными упругими свойствами, то из-за деформаций поверхностей их контакта происходит перераспределение нагрузки. Деформации поверх-

ностей, по которым взаимодействуют звенья, включают не только контактные, но и другие виды деформаций: изгиба, кручения, сжатия и т. п. В общем случае определение функций жесткости или податливости элементов кинематических пар представляет собой трудную задачу, так как требует учета сложной геометрической формы элементов, непропорциональности контактных деформаций приложенным силам, физико-механических свойств материалов.

В зависимости от типа кинематической пары закон распределения нагрузки по поверхности элементов определяется разными методами.

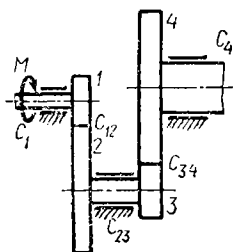


Рис. 23.3. Определение жесткости зубчатого механизма

Рис. 23.4. Распределение удельной нагрузки в нижней кинематической паре

Однако в определенных границах точности инженерных расчетов в первом приближении можно принять функцию распределенной нагрузки в виде

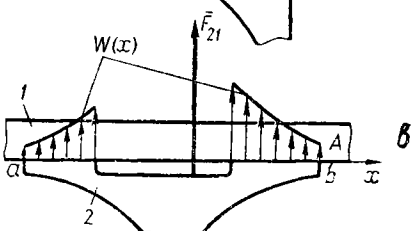
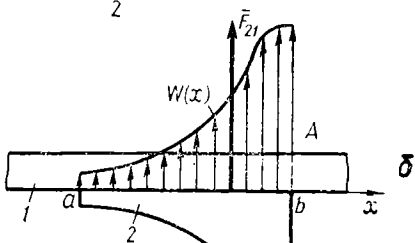
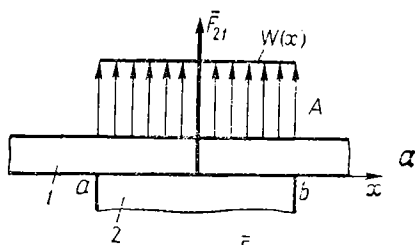
$$W(x) = W/\lambda(x), \quad (23.8)$$

где  $\lambda(x)$  — функция изменения податливости;  $W$  — средняя распределенная нагрузка,

полученная в предположении равномерного распределения реакции по элементам кинематической пары.

Для поступательной кинематической пары с контактом звеньев по плоскости (рис. 23.4) определение контактной деформации сводится к расчету деформации изгиба стержня 1 на упругом основании 2, рассматриваемой в курсе сопротивления материалов. При сплошной массивной конструкции элемента звена 2 распределение нагрузки определяется контактной жесткостью поверхностей и может быть принято равномерным на участке  $ab$  (рис. 23.4, а). Если конструкция элементов позволяет им деформироваться, то изгибная деформация элемента 2 приведет к перераспределению нагрузки и смещению равнодействующей  $\bar{F}_{21}$  (рис. 23.4, б, в).

Во вращательной кинематической паре перераспределение нагрузки возможно из-за контактных и изгибных деформаций элемен-





тов, что приводит к незначительному изменению направления реакции и смещению точки ее приложения.

В высшей кинематической паре нагрузка между звеньями передается в точке или по линии, поэтому контактные деформации имеют значительно большее влияние на распределение нагрузки. Из курса теории упругости известно, что упругие контактные перемещения в этих случаях зависят от модуля упругости материала и радиусов кривизны контактирующих поверхностей. Зависимости, оп-

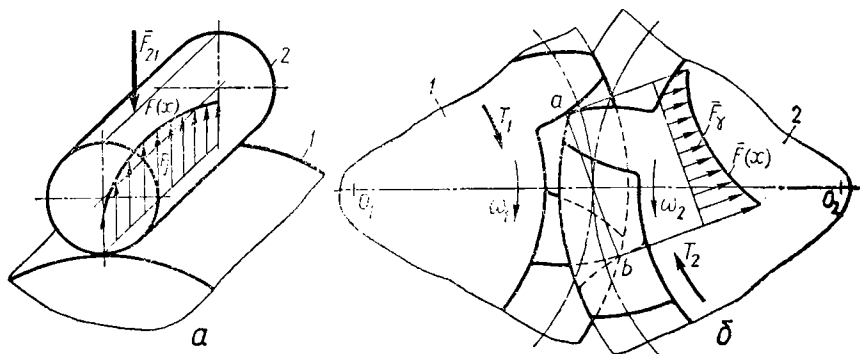


Рис. 23.5. Распределение удельной нагрузки в высшей кинематической паре

ределяющие сближение звеньев, не учитывают реального состояния поверхности контакта в начале работы машины. В подвижном контакте на сближение оказывает влияние шероховатость поверхности, меняющаяся со временем. В результате износа и деформации микронеровностей со временем контактная жесткость растет, поэтому теоретические зависимости лучше описывают податливость соединения после приработки.

Задача распределения нагрузки вдоль контактных линий в высшей кинематической паре решается с учетом не только контактной жесткости, но и с учетом других деформаций, зависящих от конкретной формы звеньев. Предположим, что нагрузка в кинематической паре с линейным контактом передается от звена 1 к звену 2 (рис. 23.5, а). Внешняя нагрузка может быть в виде вращающего момента (как, например, в зубчатом механизме, рис. 23.5, б) или силы (как в паре кулачок — толкатель). Из-за деформации элементов кинематической пары нагрузка по контактным линиям распределяется неравномерно. Задача определения закона распределения нагрузки в контакте имеет точное решение, сущность которого заключается в следующем. Контактная линия разбивается на участки, а полная реакция  $\bar{F}_{21}$  заменяется сосредоточенными силами  $F_j$ , приложенными посередине каждого участка по условию  $F_{21} = \sum_{j=1}^n F_j$ .

С помощью математического аппарата метода сил рассматривается условие равновесия звена под действием внешних силовых

факторов и сил реакции в элементе кинематической пары:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n F_j \delta_{1j} - \delta_0 - \delta_1 &= 0; \\ \sum_{j=1}^n F_j \delta_{2j} - \delta_0 - \delta_2 &= 0; \\ \sum_{j=1}^n F_j \delta_{nj} - \delta_0 - \delta_n &= 0; \\ \sum_{j=1}^n F_j - F_{12} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

где  $F_j$  — сила на  $j$ -м участке контактной линии при условии разбиения контактных линий на  $n$  участков;  $\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj}$  — перемещения участков контактных линий от всех видов деформации звеньев или их элементов под действием сил  $F_j$ , приложенных на  $j$ -х участках;  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  — перемещения участка контактной линии под действием внешних сил и моментов сил;  $\delta_0$  — перемещение под действием внешней нагрузки участка контактных линий, относительно которого ведется отсчет перемещений.

В системе (23.9) каждое уравнение описывает равенство перемещений от внешних и внутренних сил на участке контактной линии, последнее уравнение — условие равновесия кинематической пары под действием внешних и внутренних сил.

Решения системы уравнений (23.9) позволяют определить функцию  $F(x)$ , т. е. картину распределения реакции вдоль контактных линий. Это позволяет рационально конструировать звенья механизмов и элементы кинематических пар, стремясь к выравниванию нагрузки вдоль контактных линий, например, в зубчатых механизмах зубьям придавать бочкообразную форму, что, кроме того, повышает класс кинематической пары в зацеплении, в фрикционных механизмах делать криволинейные образующие колес и т. п. Использование реального закона распределения нагрузки позволяет избежать ошибок при конструировании звеньев механизма. Учет действия различных факторов проводится добавлением в уравнения системы (23.9) соответствующих перемещений участков контактных линий.

#### 23.4. Изменение сил, действующих на звенья

**Упругость** звеньев в шарнирно-рычажных механизмах при наличии избыточных связей приводит к перераспределению нагрузок, действующих на звенья (рис. 23.6, а). Из-за разной формы звеньев, параллельно работающих в силовых потоках, деформации могут быть неодинаковыми как по величине, так и по направлению. Вследствие этого звенья более жесткие (рис. 23.6, б, в) воспримут большие усилия, что учитывается в дальнейших расчетах на прочность, либо вынудят изменить структурную схему механизма.

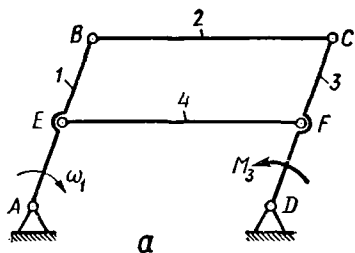


Рис. 23.6. Распределение сил между звеньями механизма

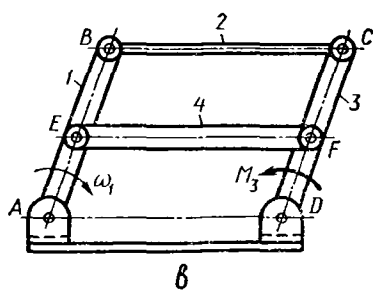
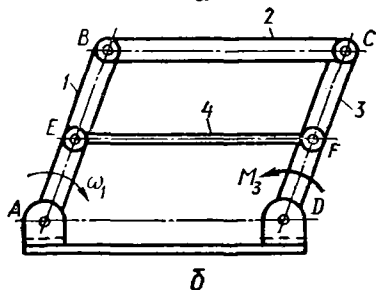
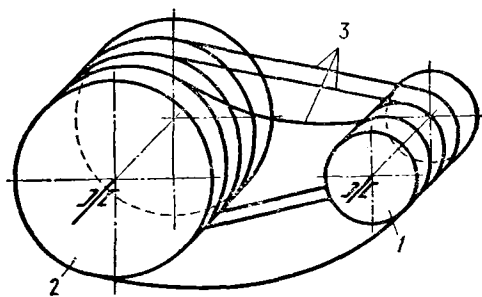
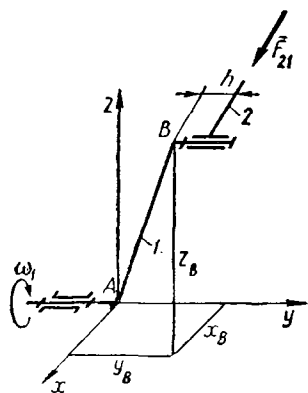


Рис. 23.7. Схема реального нагружения звеньев  
Рис. 23.8. Неравномерное распределение нагрузки из-за деформации гибких звеньев



При работе механизма изменяются направления и нагрузки на звенья (см. гл. 22). Это приводит к переменным значениям деформаций, что, в свою очередь, вызывает изменение нагрузок на звенья. Периодические колебания нагрузок, связанные с непостоянной жесткостью звеньев, могут привести к их вибрации. При кинематических расчетах механизмов (см. гл. 21) исходили из того нереального положения, что все звенья находятся в одной плоскости, в то время как в плоских механизмах звенья расположены в параллельных плоскостях (рис. 23.7). При перераспределении нагрузки между элементами кинематических пар происходит внецентренное приложение ее к звеньям, а следовательно, возникает продольный изгиб, кручение, что, в свою очередь, влияет на реакции в кинематических парах. В быстроходных механизмах вследствие этого возможно возникновение дополнительных динамических нагрузок.

В механизмах с высшими кинематическими парами перераспределение нагрузки по элементам пар в процессе работы может привести к периодически изменяющейся системе сил, действующих на стойку механизма (например, в зубчатом зацеплении, кулачковых механизмах и т. п.). В механизмах с гибкими связями (рис. 23.8) деформации гибких звеньев  $Z$  нарушают распределение нагрузки между ними (в клиноремных механизмах), способствуют усилению износа (в цепных механизмах), приводят к колебаниям скорости и вибрации.

### 23.5. Ошибка положения звеньев механизма из-за их упругости

Для определения погрешностей положения из-за упругих деформаций звеньев механизма обычно используют *дифференциальный метод*, который рассматривает функции положения механизма  $s = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$  в зависимости от переменных  $q_i$ , ее определяющих. Приращения переменных  $q_i$  в первом приближении

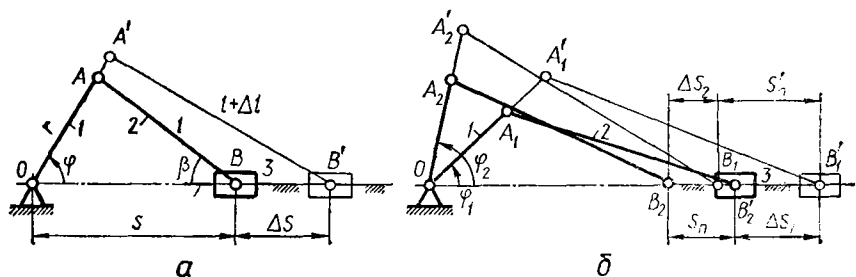


Рис. 23.9. Влияние упругости звеньев на ошибку их положения

рассматриваются как погрешности (см. гл. 27). Тогда ошибка положения механизма определится полным дифференциалом функции переменных

$$ds = (\partial f / \partial q_1) dq_1 + (\partial f / \partial q_2) dq_2 + \dots + (\partial f / \partial q_n) dq_n$$

или

$$\Delta s = (\partial f / \partial q_1) \Delta q_1 + (\partial f / \partial q_2) \Delta q_2 + \dots + (\partial f / \partial q_n) \Delta q_n, \quad (23.10)$$

где  $\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n$  — упругие деформации звеньев.

Рассмотрим применение дифференциального метода для шарнирно-рычажного механизма, например — кривошипно-ползунного (рис. 23.9, а). Из-за деформаций растяжения (сжатия)  $\Delta L_1$  кривошипа и  $\Delta L_2$  шатуна возникнет ошибка положения  $\Delta s$  ползуна 3. При повороте кривошипа из положения 1 в положение 2 на угол  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  ошибка перемещения ползуна будет  $\Delta s = \Delta s_1 - \Delta s_2$ . Функция положения механизма определится из условия (см. гл. 7)

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \beta &= s; \\ l_1 \sin \varphi &= l_2 \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (23.11)$$

Продифференцируем уравнения (23.11) по  $l_1, l_2, s, \beta$  и, переходя к конечным приращениям этих параметров, получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi \Delta l_1 + \cos \beta \Delta l_2 - l_2 \sin \beta \Delta \beta &= \Delta s; \\ \sin \varphi \Delta l_1 &= \sin \beta \Delta l_2 + l_2 \cos \beta \Delta \beta. \end{aligned} \right\} \quad (23.12)$$

Найдя из условий (23.12) значение

$$\Delta \beta = (\sin \varphi \Delta l_1 - \sin \beta \Delta l_2) / (l_2 \cos \beta), \quad (23.13)$$

получим

$$\Delta s = \Delta l_1 \cos(\varphi - \beta) / \cos \beta + \Delta l_2 / \cos \beta. \quad (23.14)$$

В формуле (23.13)

$$\Delta l_1 = F_{21} l_1 / (E_1 A_1); \quad \Delta l_2 = F_{32} l_2 / (E_2 A_2),$$

где  $F_{21}, F_{32}$  — усилия, сжимающие звенья 1 и 2.

В более точном решении дополнительно учитывается влияние изгибных деформаций звеньев на перемещение ползуна 3. Например, для зубчатого механизма (рис. 23.3) функция положения будет иметь вид  $\varphi_1 = \varphi_{412} \cdot i_{34}$ . Тогда  $\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_2 \cdot i_{12} \cdot i_{34}$ , и ошибка положения звена 1 из-за упругости звеньев механизма составит

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_{01} + \Delta_{12} + \Delta \varphi_{23} i_{12} + \Delta_{34} i_{12} + \Delta \varphi_{45} i_{12} \cdot i_{34},$$

где  $\Delta \varphi_{01} = M / C_{01}$ ,  $\Delta \varphi_{23} = M_{i_{12}} / C_{23}$ ,  $\Delta \varphi_{45} = M_{i_{12}} \cdot i_{34} / C_{45}$  — упругие деформации кручения соответствующих звеньев, жесткость которых определяется по формуле (22.2);  $\Delta_{12} = (2M / (m_1 z_1 \cos \alpha_w)) / C_{12}$ ,  $\Delta_{34} = ((2M_{i_{12}} / (m_3 z_3 \cos \alpha_w)) / C_{34}$  — упругие деформации контактирующих зубьев в плоскостях действия окружных усилий колес 1, 2 и 3, 4.

## 24. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МЕХАНИЗМАХ

### 24.1. Виды колебаний звеньев механизмов

Так как при работе механизма нагрузки на звенья непрерывно меняются даже при постоянных силах производственного сопротивления, то из-за упругости материала звенья испытывают изменяющиеся деформации, вызывающие их колебания. Эти колебания необходимо учитывать при динамических расчетах, так как они оказывают вредное влияние на работоспособность машин. **Колебания звеньев** в зависимости от причин, их вызывающих, разделяют на четыре группы: *свободные, вынужденные, параметрические* и *автоколебания*.

К свободным относятся колебания, возникающие в механизме из-за импульсного внешнего силового воздействия. Особенностью этих колебаний является то, что энергия для возбуждения колебаний вводится в систему извне, а их характер после воздействия импульса силы определяется силами упругости. Для свободных (гармонических) колебаний характерно постоянство их амплитуды через определенный период времени  $T$  (рис. 24.1, а),

для затухающих — уменьшение амплитуды с течением времени (рис. 24.1, б).

К вынужденным относятся колебания, вызываемые действием внешних сил, изменяющихся по определенному закону. Для вынужденных колебаний характерно протекание свободных колебаний одновременно с колебаниями периодического характера от внешнего возбудителя (рис. 24.2). При таких колебаниях амплитуда меняется во времени и при определенных условиях имеет тенденцию к неограниченному росту (резонансные колебания).

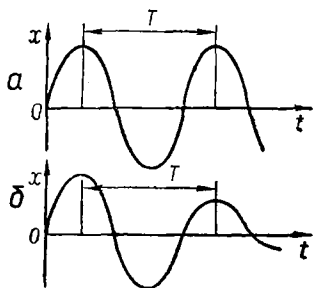


Рис. 24.1. Графики свободных и затухающих колебаний

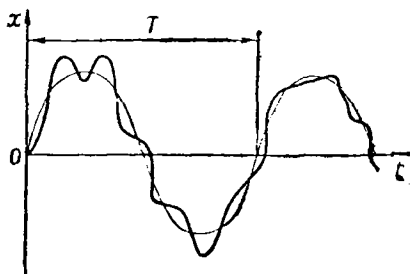


Рис. 24.2. Вынужденные колебания

Параметрические колебания вызываются изменением параметров механизма — масс, моментов инерции и т. п. Автоколебания возникают в машине, находящейся под действием сил, не обладающих колебательными свойствами, в которой режим колебаний поддерживается силой, вызываемой движением и исчезающей при остановке движения. Например, в фрикционных передачах скорость скольжения колеблется около среднего значения, автоколебаниям подвержен груз на движущемся конвейере и т. п.

Механические колебания в технике часто называют *вибрациями*. Вибрации оказывают как полезное, так и вредное действие на работу механизмов. В машинах и приборах, где механические колебания используют для выполнения основных функций (виброконвейеры, вибробункеры и т. п.) вибрации полезны. В противном случае они вызывают нагружение деталей механизмов и приборов дополнительными инерционными силами, а при больших амплитудах приводят в конечном счете к разрушению деталей.

## 24.2. Свободные колебания

Свободным колебаниям подвержены звенья, совершающие поступательное или вращательное движения, соединенные с другими звеньями упругой связью. Таким колебаниям подвержены толкатели кулачковых механизмов, диски и колеса на упругих валах, буферные системы и т. п.

Определим закон движения звена (рис. 24.3), колеблющегося под действием сил упругости после деформирования упругой свя-

зи (пружины) силой тяжести звена  $\bar{F}_g$ . Для произвольного положения вертикально перемещающегося звена на него действует сила тяжести  $\bar{F}_g$  и сила  $F_n$ , растягивающая пружину

$$F_n = F_g + Cx, \quad (24.1)$$

где  $C$  — жесткость пружины;  $x$  — перемещение звена от положения равновесия ( $x$  положительно при перемещении звена вниз).

В рассматриваемом случае звено находится в равновесии под действием сил  $\bar{F}_n$ ,  $\bar{F}_g$  и силы инерции  $\bar{F}_u = (F_g/g) d^2x/dt^2$ . Тогда

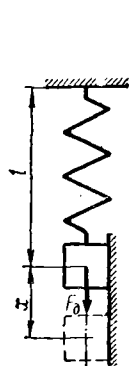


Рис. 24.3. Схема колеблющегося звена

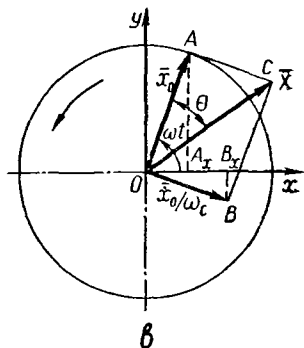
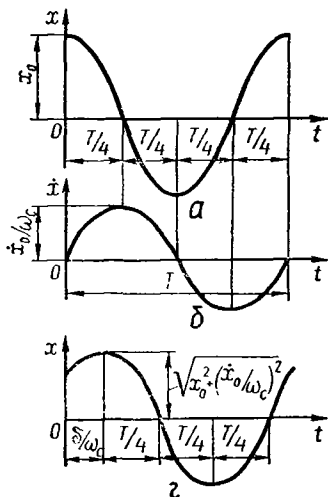


Рис. 24.4. Определение закона колебательного движения

закон движения звена описывается дифференциальным уравнением, справедливым для любого положения звена относительно состояния равновесия:

$$(F_g/g) d^2x/dt^2 = F_g - (F_g + Cx) = -Cx, \quad (24.2)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Из уравнения (24.2) получим  $d^2x/dt^2 = -(Cg/F_g)x$ , откуда, обозначив  $Cg/F_g = \omega_c^2$ , найдем

$$d^2x/dt^2 + \omega_c^2 x = 0. \quad (24.3)$$

Как известно из математики, уравнению (24.3) удовлетворяют решения  $x = C_1 \cos \omega_c t$  и  $x = C_2 \sin \omega_c t$  ( $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные). Общее решение получим как сумму этих решений:

$$x = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t. \quad (24.4)$$

Так как функции  $\cos \omega_c t$  и  $\sin \omega_c t$  являются периодическими: повторяющими свои значения после некоторого интервала  $T$  — периода колебаний, так, что  $\omega_c(t + T) - \omega_c(t) = 2\pi$ , то  $T = 2\pi/\omega_c$ , или

$$T = 2\pi \sqrt{F_g/Cg} = 2\pi \sqrt{\delta/g}, \quad (24.5)$$

где  $\delta = F_g/C$  — статическая деформация пружины под действием силы  $\bar{F}_g$ .

Величина, обратная периоду  $T$ , называется *частотой колебаний*:

$$f = 1/T = (1/2\pi) \sqrt{g/\delta}. \quad (24.6)$$

Для определения закона колебательного движения определим постоянные  $C_1$  и  $C_2$ . Пусть в момент, когда  $t = 0$ , положение звена характеризуется перемещением  $x_0$ . Тогда начальная скорость будет  $dx_0/dt$ , и, следовательно, из уравнения (24.4) следует, что  $x_0 = C_1$ . Дифференцируя это же уравнение и подставляя в него  $t = 0$ , получим  $C_2 = (dx_0/dt)/\omega_c$ . Тогда закон колебательного движения описывается выражением

$$x = x_0 \cos \omega_c t + ((dx_0/dt)/\omega_c) \sin \omega_c t. \quad (24.7)$$

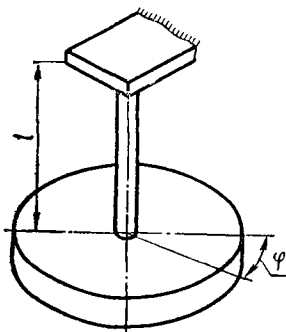


Рис. 24.5. Схема крутильных колебаний

Из выражения (24.7) видно, что колебания состоят из двух частей — колебаний, пропорциональных  $\cos \omega_c t$  и зависящих от  $x_0$  (рис. 24.4, а), и колебаний, пропорциональных  $\sin \omega_c t$  и зависящих от  $(dx_0/dt)/\omega_c$  (б). Так как обе кривые смещены друг относительно друга на фазу  $T/4 = \pi/2$ , то геометрической интерпретацией выражения (24.7) служат два взаимно перпендикулярных вектора  $\bar{x}_0$  и  $\bar{x}_0/\omega_c$ , вращающихся с угловой скоростью  $\omega_c$  вокруг точки  $O$  (в). При этом перемещение  $x$  найдем как сумму проекций векторов на ось абсцисс. То же самое получим, используя вектор  $\bar{X}$ , который равен

$$x = \sqrt{x_0^2 + (x_0/\omega_c)^2}. \quad (24.8)$$

Тогда из рис. 24.4, в

$$x = X \cos(\omega_c t - \theta). \quad (24.9)$$

В этой формуле сдвиг фаз колебаний

$$\theta = \text{arctg}((x_0/\omega_c)/x_0). \quad (24.10)$$

График закона (24.7) или (24.9) представлен на рис. 24.4, г. Максимальная ордината этого графика вычисляется по формуле (24.8) и называется *максимальной амплитудой колебаний*.

Для звена, подверженного *крутильным колебаниям* (рис. 24.5), после аналогичных рассуждений получим дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс:

$$d^2\varphi/dt^2 = -(C/J)\varphi, \quad (24.11)$$

где  $C$  — крутильная жесткость звена;  $J$  — момент инерции звена.

Решение уравнения (24.11) найдем в виде

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_c t + ((d\varphi_0/dt)/\omega_c) \sin \omega_c t. \quad (24.12)$$

Период и частота колебаний соответственно будут

$$T = 2\pi \sqrt{J/C}; \quad f = (1/2\pi) \sqrt{C/J}. \quad (24.13)$$



### 24.3. Вынужденные колебания

В реальных механизмах на звенья действуют периодически изменяющиеся силы, поэтому, кроме свободных колебаний, звенья подвержены *вынужденным колебаниям*. В простейшем случае полагают, что возмущающая сила действует по периодическому закону  $F(t) = F \sin \omega_B t$ , период изменения силы равен  $T_F = 2\pi/\omega_B$ , а частота  $f_F = \omega_B/2\pi$ . Дифференциальное уравнение, описывающее колебательное движение звена в этих условиях, будет

$$(F_g/q) d^2x/dt^2 = F_g - (F_g + Cx) + F \sin \omega_B t$$

или при  $q = F_g/F_g$

$$d^2x/dt^2 + \omega_c^2 x = q \sin \omega_B t. \quad (24.14)$$

Если предположить, что перемещение  $x$  пропорционально  $\sin \omega_B t$ , то  $x = k \sin \omega_B t$  и  $d^2x/dt^2 = -k\omega_B^2 \sin \omega_B t$ . После подстановки  $x$  и  $d^2x/dt^2$  в уравнение (24.14) получим  $k = q/(\omega_c^2 - \omega_B^2)$  и

$$-k\omega_B^2 \sin \omega_B t + k\omega_c^2 \sin \omega_B t = q \sin \omega_B t. \quad (24.15)$$

Частное решение уравнения (24.14) получим в виде

$$x = q \sin \omega_B t / (\omega_c^2 - \omega_B^2). \quad (24.16)$$

Общее решение уравнения (24.14) выразим как сумму двух решений (24.16) и (24.14):

$$x = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t + q/(\omega_c^2 - \omega_B^2) \sin \omega_B t. \quad (24.17)$$

В этом выражении первые два слагаемые характеризуют рассмотренные выше собственные колебания, а третье — вынужденные, зависящие от возбуждающей силы. Если собственные колебания малы по сравнению с вынужденными или отсутствуют, что имеет место при наличии сопротивления движению, то колебательный процесс будет описываться уравнением (24.16).

Используя выражения для  $q$  и  $\omega_c^2$ , получим после преобразования

$$x = (F/C) \sin \omega_B t / (1 - \omega_B^2/\omega_c^2), \quad (24.18)$$

где  $F/C$  — деформация звена при статическом действии силы  $\bar{F}$ .

Выражение  $k_d = 1/(1 - \omega_B^2/\omega_c^2)$  называется *динамическим коэффициентом*. Как видно, динамический коэффициент зависит только от соотношения частот возмущающей силы и собственных колебаний (рис. 24.6). При малых значениях  $\omega_B/\omega_c$  амплитуда колебаний близка к статической деформации. При приближении отношения  $\omega_B/\omega_c$  к единице динамический коэффициент и амплитуда быстро возрастают и при  $\omega_B = \omega_c$  (условие резонанса) теоретически обращаются в бесконечность.

В реальных механизмах значения  $k_d$  и  $x$  не достигают бесконечности, потому что на звенья всегда налагаются и неупругие связи. Однако нормальная работа механизмов в зоне резонанса

недопустима, так как в конечном счете это приводит либо к поломкам деталей механизмов, либо к выходу из строя установленных на них приборов и устройств. Машины специального назначения работают в условиях резонанса.

Если собственные колебания соизмеримы с вынужденными и не гасятся, то функция, описывающая закон колебательного движения, получится из выражения (24.17) определением постоянных  $C_1$  и  $C_2$  при рассмотрении начальных условий. Если в начальный

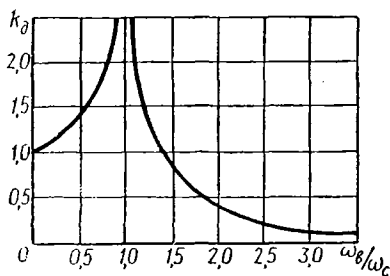


Рис. 24.6. График динамического коэффициента

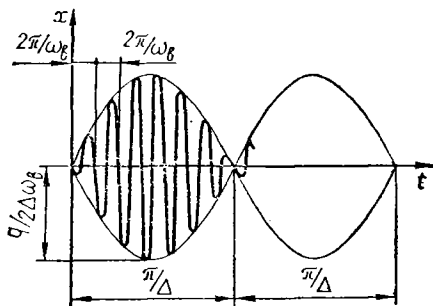


Рис. 24.7. Совместный график собственных и вынужденных колебаний

момент ( $t = 0$ ) перемещения и скорость колеблющейся детали равны нулю, т. е.  $x = 0$  и  $dx/dt = 0$ , то из зависимости (24.17) найдем

$$C_1 = 0; \quad C_2 = - (q\omega_B/\omega_c)/(\omega_c^2 - \omega_B^2).$$

Подстановкой  $C_1$  и  $C_2$  в уравнение (24.17) после преобразований получим (рис. 24.7)

$$x = q (\sin \omega_B t - (\omega_B/\omega_c) \sin \omega_c t) / (\omega_c^2 - \omega_B^2). \quad (24.19)$$

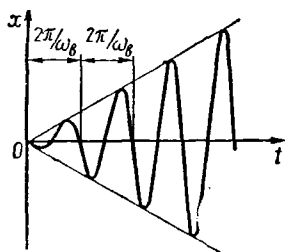


Рис. 24.8. График колебаний при наступлении резонанса

При работе в резонансной зоне, когда разность  $\omega_c - \omega_B = 2\Delta$  весьма мала, пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$x = (\sin \omega_B t - ((\omega_c + 2\Delta)/\omega_c) \sin \omega_c t) q / (\omega_c^2 - \omega_B^2) = (\sin \omega_B t - \sin \omega_c t) q / (\omega_c^2 - \omega_B^2).$$

Используя известные тригонометрические соотношения, найдем

$$\begin{aligned} x &= (2q/(\omega_c^2 - \omega_B^2)) \cos(0,5t(\omega_B + \omega_c)) \sin(0,5t(\omega_B - \omega_c)) = \\ &= - (2q/\sin t\Delta) \cos(0,5t(\omega_B + \omega_c))/(\omega_c^2 - \omega_B^2). \end{aligned}$$

После преобразований, пренебрегая  $2\Delta^2$  и считая  $\cos(\omega_B t + t\Delta) \approx \cos \omega_B t$ , определим

$$x = - q \sin t\Delta \cos \omega_B t / (2\omega_B \Delta). \quad (24.20)$$

Так как величина  $\Delta$  мала, то  $\sin t\Delta \approx t\Delta$  меняется медленно с периодом  $T = 2\pi/\Delta$ . При  $\omega_B = \omega_c$ , т. е. при наступлении условия резонанса, получим

$$x = -(qt/2\omega_B) \cos \omega_B t. \quad (24.21)$$

Анализ этого выражения показывает, что амплитуда колебаний растет со временем (рис. 24.8). Это означает, что хотя  $k_d$ , как это видно из уравнения (24.15), стремится к бесконечности, для получения больших амплитуд колебаний необходимо время. Следовательно, в реальном механизме разрушения деталей не возникнут, если переход через резонансную зону осуществить достаточно быстро.

#### 24.4. Особенности колебаний вращающихся звеньев

В быстроходных машинах вращающиеся звенья устанавливают таким образом, чтобы центр масс звена находился на оси его вращения. Однако точно выполнить это условие не всегда удастся из-за сложности геометрической формы звеньев и неоднородности материала, и при вращении их возникает неуравновешенная центробежная сила, вызывающая колебания. Движение при наличии поперечных колебаний становится неустойчивым, что меняет условия взаимодействия звеньев механизма.

Рассмотрим звено с диском, центр масс которого смещен относительно оси вращения на  $e$  (рис. 24.9). Силы тяжести звена будем считать малыми, следовательно, не влияющими на его деформацию. При вращении появится центробежная сила

$$F_u = m\omega^2 |y + e|,$$

где  $m$  — масса вращающегося звена;  $\omega$  — угловая скорость вращения;  $y$  — прогиб звена под действием центробежной силы.

Как известно из курса «Сопротивление материалов», прогиб

$$y = F_u/C = F_u l^3/48EJ,$$

где  $l$  — расстояние между опорами;  $C$  — жесткость звена при изгибе;  $E$  и  $J$  — соответственно модуль продольной упругости материала и момент инерции звена.

Центробежная сила  $F_u$  уравновешивается силой упругости звена. Тогда из условия равновесия следует

$$m\omega^2 (y + e) = Cy, \quad (24.22)$$

откуда после преобразований получим

$$y = e/(C/m\omega^2 - 1). \quad (24.23)$$

Из анализа этой зависимости следует, что прогиб звена возрастает при приближении  $\omega$  к  $\sqrt{C/m}$ . Если частота вращения

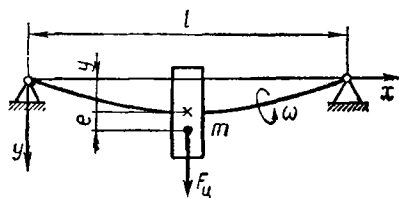


Рис. 24.9. Колебания вращающихся звеньев

звена  $\omega$  становится равной частоте собственных колебаний, то прогиб теоретически становится равным бесконечности. Следовательно, критическое значение угловой скорости равно

$$\omega_{кр} = \sqrt{C/m}. \quad (24.24)$$

Из формулы (24.24) следует, что вращение звена не будет сопровождаться поперечными колебаниями, если оно будет вращаться с частотой, как меньшей критической, так и большей. Если связать ось ординат  $y$  с вращающимся диском так, чтобы она проходила через его центр масс, то получим

$$y = |1/((\omega_{кр}/\omega)^2 - 1)| e. \quad (24.25)$$

Из формулы (24.25) следует, что с увеличением скорости вращения прогиб звена начинает уменьшаться и стремится к смещению  $e$ , т. е. центр масс диска устанавливается на геометрической оси вращения.

### 24.5. Особенности колебаний поступательно движущихся звеньев

При определении закона движения поступательно движущегося звена необходимо обращать внимание на соотношение частот собственных и вынужденных колебаний. При определенном их сочетании возможны существенные погрешности в законах движения звеньев. Учет упругости звеньев позволяет подобрать массы и размеры их такими, чтобы удовлетворить частотным характеристикам. Рассмотрим влияние упругости звена на закон его движения на примере толкателя кулачкового механизма.

При изучении законов движения толкателей кулачковых механизмов (см. гл. 15) звенья их принимали абсолютно жесткими. В реальных механизмах жесткость кулачка намного больше жесткости толкателя, а для обеспечения замыкания кинематической пары кулачок — толкатель в конструкции узла толкателя предусматривается пружина (рис. 24.10). Поэтому под действием сил технологического сопротивления и давления кулачка толкатель деформируется. Дифференциальное уравнение движения упругого толкателя будет иметь вид

$$d^2y/dt^2 + (C/m)y = Cs/m, \quad (24.26)$$

где  $C$  — коэффициент жесткости толкателя;  $m$  — масса толкателя;  $y$  — перемещение толкателя;  $s$  — перемещение точки контакта упругого толкателя, взаимодействующего с профилем кулачка (в общем случае из-за упругости системы толкателя  $s \neq y$ ).

Для косинусоидального закона изменения ускорений толкателя функцию ускорения получим в виде  $a(t) = a \cos(\pi t/t_y)$ , а функцию перемещения толкателя

$$s(t) = (at_y^2/\pi^2)(1 - \cos(\pi t/t_y)),$$

где  $t_y$  — время прохождения фазы удаления толкателя.

Учтя, что  $\omega_c^2 = C/m$ , уравнение (24.26) запишем в виде

$$d^2y/dt^2 + \omega_c^2 y = (a\omega_c^2 t_y/\pi)(1 - \cos(\pi t/t_y)). \quad (24.27)$$

Уравнение (24.27) есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью. Его решение получим суммированием решения однородного уравнения и частного решения:

$$y = A \sin \omega_c t + B \cos \omega_c t + (at_y^2/\pi^2)(1 - \cos(\pi t/t_y)/(1 - (\pi/\omega_c t_y)^2)). \quad (24.28)$$

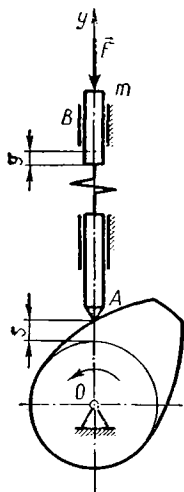


Рис. 24.10. Колебания толкателя кулачкового механизма

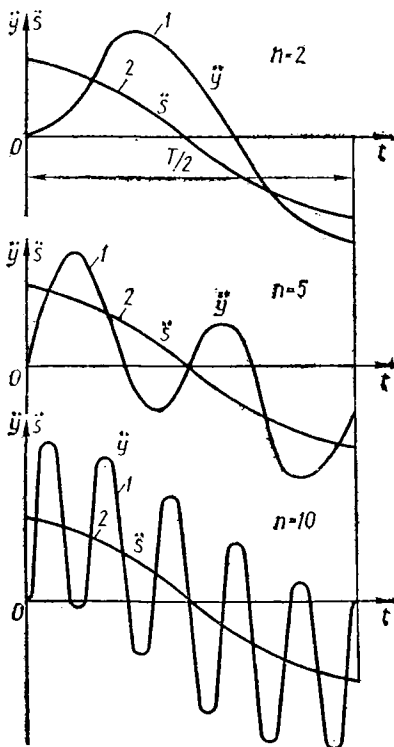


Рис. 24.11. Законы движения толкателя в зависимости от параметра  $n$

В уравнении (24.28) круговая собственная частота  $\omega_0$  связана с периодом собственных колебаний соотношением  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . Принимая  $\omega_c t_y/\pi = n = 2t_y/T_0$ , определяя коэффициенты  $A$  и  $B$  из условий при  $t = 0$ ,  $y = 0$ ,  $dy/dt = 0$ , после преобразований получим

$$y = (at_y^2/\pi^2)(1 - (n^2 \cos(\pi t/t_y) - \cos(\pi n t/t_y))/(n^2 - 1)). \quad (24.29)$$

Дважды продифференцировав выражение (24.29), получим закон изменения ускорений толкателя

$$d^2y/dt^2 = (\cos(\pi t/t_y) - \cos(\pi n t/t_y)) an^2/(n^2 - 1). \quad (24.30)$$

На рис. 24.11 показаны законы движения 1 толкателя для разных значений  $n$  и их сравнение с законом движения 2 жесткого

толкателя. Как видно, уменьшение периода  $T_c$  собственных колебаний по сравнению с  $t_y$  ведет к существенным искажениям закона движения толкателя.

## 24.6. Демпфирование свободных колебаний

В реальных механизмах относительное движение звеньев всегда сопровождается действием сил сопротивления движению: сил трения в кинематических парах, электромагнитного сопротивления в электромашинах, гидродинамического сопротивления в гидромашинах и т. п. Поэтому колебательные движения звеньев сопровождаются действием сил неупругого сопротивления. Эти силы демпфируют колебания, т. е. способствуют гашению вибраций механизмов. Обычно силы демпфирования (гашения) в первом приближении принимают пропорциональными скорости движения. Тогда для схемы на рис. 24.3 вместо уравнения (24.2) будем иметь

$$(F_g g) d^2x/dt^2 = -Cx + kdx/dt, \quad (24.31)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Обозначая  $kg/F_g = 2n$ , получим дифференциальное уравнение

$$d^2x/dt^2 + 2ndx/dt + \omega_c^2 x = 0, \quad (24.32)$$

решение которого может быть принято в виде

$$x = e^{\alpha t}. \quad (24.33)$$

Постоянная  $\alpha$  определяется из условия, что решение удовлетворяет уравнению (24.32). Определяя из формулы (24.33)  $dx/dt$ ,  $d^2x/dt^2$  и подставляя их значения в уравнение (24.32), получим

$$\alpha^2 + 2n\alpha + \omega_c^2 = 0,$$

откуда

$$\alpha = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_c^2}. \quad (24.34)$$

В решении (24.34) возможны два случая:  $n^2 < \omega_c^2$  и  $n^2 > \omega_c^2$ . Случай  $n^2 < \omega_c^2$  соответствует условиям, когда силы демпфирования малы. Тогда получим два комплексных корня  $\alpha_1 = -n + \beta i$  и  $\alpha_2 = -n - \beta i$  (при  $\beta = \sqrt{\omega_c^2 - n^2}$  и  $i = \sqrt{-1}$  — мнимое число).

Подставляя  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в выражение (24.33), найдем частные решения уравнения (24.33). Общее решение получится как их сумма:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t). \quad (24.35)$$

Выражение в скобках имеет тот же характер, что и выражение (24.4), и представляет периодическую функцию с периодом

$$T = 2\pi/\beta = (2\pi/\omega_c)/\sqrt{1 - n^2/\omega_c^2}. \quad (24.36)$$

Из сравнения выражений (24.36) и (24.5) следует, что при действии демпфирующей силы период колебаний возрастает. Если  $n \ll \omega_c$ , то это возрастание незначительно и демпфирование не

учитывается. Множитель  $e^{-nt}$  в формуле (24.35) убывает с ростом  $t$ , следовательно, колебания затухают со временем.

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим как и для выражения (24.4). После преобразований получим (рис. 24.12)

$$x = e^{-nt} (x_0 \cos \beta t + ((dx/dt + nx_0) \sin \beta t) / \beta). \quad (24.37)$$

Если в выражении (24.34)  $n^2 \gg \omega_c^2$ , то оба корня уравнения — действительные числа. Тогда получим решение

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (24.38)$$

которое не содержит периодических членов, следовательно, в этом случае колебательное движение не происходит. Этот случай соответствует большим значениям демпфирующих сил.

## 24.7. Демпфирование вынужденных колебаний

Колебания сложных конструкций опасны тем, что трудно выделить источник силы, вызывающей колебания. Примером таких колебаний являются колебания железнодорожных вагонов, крыла самолета, лопастей роторов вертолетов и т. п. Особенно опасны автоколебания, вызывающие в некоторых случаях неограниченный рост амплитуды,

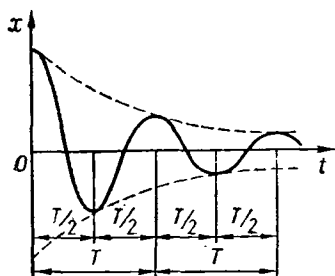


Рис. 24.12. График затухающих колебаний

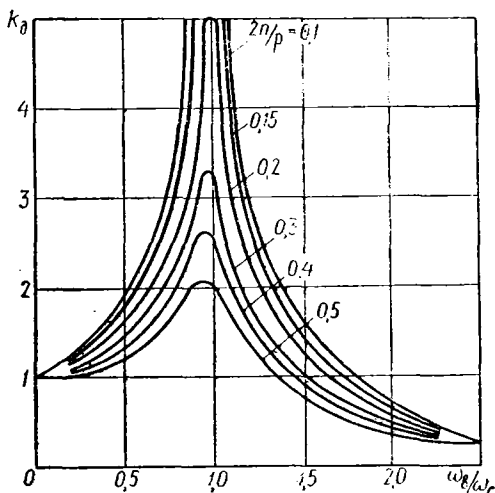


Рис. 24.13. График динамического коэффициента при наличии демпфирования

что приводит к быстрому разрушению машин. В этих случаях ограничение амплитуды автоколебаний достигается за счет демпфирования, обеспечивая этим рассеяние энергии, направленной на возбуждение колебаний. Для этой цели применяют специальные устройства — *демпферы* (гасители).

Если демпфирующие силы имеют место при вынужденном характере колебаний (рис. 24.3), то дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс при  $q = F_q/F_g$ , примет вид

$$d^2x/dt^2 + 2ndx/dt + \omega_c^2 x = q \sin \omega_B t, \quad (24.39)$$

где  $q \sin \omega_B t$  — возмущающая сила.

Общим решением уравнения (24.39) будет выражение

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + M \sin \omega_B t + N \cos \omega_B t. \quad (24.40)$$

Последние два слагаемых соответствуют вынужденным колебаниям, описываемым частным решением

$$x = M \sin \omega_B t + N \cos \omega_B t. \quad (24.41)$$

Подставляя значение  $x$  из формулы (24.41) в уравнение (24.39), после преобразований найдем

$$M = q(\omega_c^2 - \omega_B^2)/((\omega_c^2 - \omega_B^2) + 4n^2\omega_B^2) \quad (24.42)$$

и

$$N = -2qn\omega_B/((\omega_c^2 - \omega_B^2) + 4n^2\omega_B^2). \quad (24.43)$$

С учетом проведенных преобразований получим выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$x = (F/C)/\sqrt{(1 - \omega_B^2/\omega_c^2)^2 + 4n^2\omega_B^2/\omega_c^4} \sin(\omega_B t - \theta), \quad (24.44)$$

где  $\theta = \text{arctg}(2n\omega_B/(\omega_c^2 - \omega_B^2))$  — сдвиг фаз;  $F/C$  — статическая деформация;  $k_d = 1/\sqrt{(1 - \omega_B^2/\omega_c^2)^2 + 4n^2\omega_B^2/\omega_c^4}$  — динамический коэффициент при наличии демпфирования (рис. 24.13).

Если частота возмущающей силы по сравнению с собственной частотой колебаний системы мала, то  $k_d \approx 1$ . При  $\omega_B \gg \omega_c$ ,  $k_d \rightarrow 0$ . В этих диапазонах отношений частот силы демпфирования не оказывают влияния на амплитуды колебаний. При  $\omega_B = \omega_c$  величина  $k_d$  становится весьма чувствительной к изменению демпфирования, особенно если оно мало. Дифференцируя  $k_d$  по  $(\omega_B/\omega_c)$  и приравнивая нулю  $dk_d/d(\omega_B/\omega_c)$ , получим  $k_d = k_{d\text{max}}$  при  $\omega_B^2/\omega_c^2 = 1 - 2n^2/\omega_c^2$ .

Раздел пятый.

## КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РАБОТЫ МЕХАНИЗМОВ

### 25. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЗМОВ

#### 25.1. Постановка задач оптимизации при синтезе механизмов

Процесс проектирования машины начинается с формулировки задачи и определения принципиального направления поиска ее решения. На первом этапе исследуются и прогнозируются условия функционирования машин, являющиеся выходными параметрами, к которым относятся скорости, ускорения и усилия на выходных звеньях. Кроме этого, определяются число, вид, передаточные функции и характеристики механизмов, входящих в состав маши-



ны, и их место в общем энергетическом потоке, преобразуемом проектируемой машиной. Этим обеспечиваются показатели, определяющие *технологическое назначение машины*: производительность, надежность, энергоемкость, материалоемкость и габаритные размеры. Так, выходными параметрами механизма являются законы движения его звеньев, определяемые их размерами — внутренними параметрами (например, для механизма, представленного на рис. 16.14,  $l_1, l_2, l_{DB}, l_{DC}, l_4, l_6, l_7, a, l_{OD}$ ) и внешними параметрами — перемещением, скоростью и ускорением входного звена. Каждому из перечисленных выходных параметров соответствует свой критерий оптимальности (точность воспроизведения заданной траектории, КПД, масса и т. д.).

Связь между критериями оптимальности и параметрами проектируемого механизма (внутренними параметрами) формализуется математической моделью (ММ), которая может быть представлена либо в виде алгоритма расчета на ЭВМ или матричного выражения, как, например для промышленного робота (см. гл. 18), либо в виде передаточной функции для кривошипно-ползунного механизма (см. гл. 17). При разработке таких ММ используются методы кинематического и динамического анализа, представленные в разд. 3 и 4.

**Синтез механизма** заключается в поиске *оптимальной совокупности значений его внутренних параметров*. С этой целью критерии оптимальности выражают *целевыми функциями*, в основе которых лежат математические модели механизмов, представленные таким образом, что при оптимальной совокупности внутренних параметров механизмов, соответствующей наилучшему значению выходных параметров, целевые функции имеют экстремальное значение. Примерами подобных функций являются зависимости, применяемые при подборе чисел зубьев рядовых и планетарных зубчатых передач (см. гл. 14). Если среди всех показателей качества выделить один критерий, наиболее полно отражающий эффективность проектируемой машины или механизма, то выбор оптимальной совокупности внутренних параметров механизма производится по целевой функции, формализующей этот частный критерий. Такая операция называется *оптимизацией по доминирующему критерию*. Остальные критерии при этом лишь ограничивают область допустимых решений. Оптимизация по доминирующему критерию при всей простоте постановки задачи обладает тем недостатком, что остальные выходные параметры находятся обычно в области предельных значений.

В случаях, когда трудно выделить один показатель из многих, применяется *многокритериальная оптимизация*, при которой число выходных параметров больше единицы. Обычно бывает трудно найти вариант решения, который был бы лучше других по всем выходным параметрам. Чаще всего одно решение лучше других по одним параметрам, но в то же время хуже по остальным. Так, при проектировании кулачкового механизма (см. гл. 15) стоит задача обеспечения его минимальных габаритных размеров

и минимальных потерь на трение. Такие выходные параметры называются *противоречивыми*, потому что с уменьшением радиуса основной шайбы кулачка, приводящим к уменьшению габаритных размеров, увеличиваются углы давления и потери на трение, что снижает КПД механизма.

Примером непротиворечивых выходных параметров являются изгибная и контактная прочность зубьев цилиндрических зубчатых колес (см. гл. 12). При увеличении внутренних параметров — коэффициентов смещений  $x_1$  и  $x_2$ , определяющих геометрические характеристики торцевых сечений зубьев, увеличивается толщина основания зуба и радиус кривизны боковой поверхности, что способствует увеличению как изгибной, так и контактной прочности зубьев. Однако при увеличении коэффициентов смещения снижается коэффициент перекрытия передачи, определяющий плавность пересопряжения. В подобных разобранных случаях проектируемые машина или механизм имеют векторный характер противоречивых выходных параметров синтеза.

## 25.2. Построение комплексных целевых функций

Предположим, что при проектировании машины рассматриваются два противоречивых выходных параметра, формализуемые целевыми функциями  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  от оптимизируемых параметров механизма. В общем случае оптимальной совокупности определяемых внутренних параметров механизма соответствует максимум одной функции и минимум другой. Кроме того, эти целевые функции

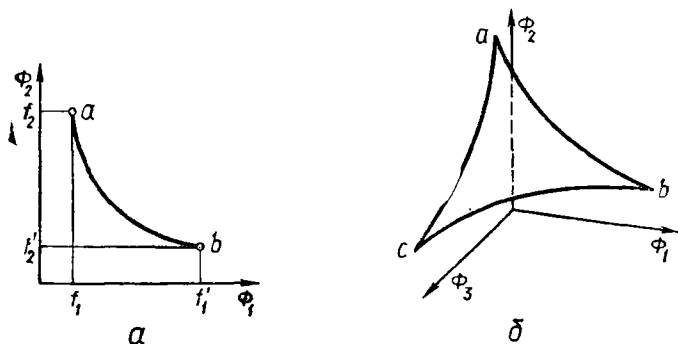


Рис. 25.1. Схема образования равнозначных решений в многокритериальных задачах

могут иметь различную физическую размерность. Пока примем, что значения этих функций безразмерны и оптимальная совокупность внутренних параметров соответствует минимуму целевых функций.

Отложим значения этих функций, соответствующих определенному рассматриваемому варианту механизма, на двух взаимно перпендикулярных осях  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  (рис. 25.1, а). Пусть минимальное значение целевой функции  $\Phi_1$  определится точкой  $f_1$  на оси  $\Phi_1$ .

Совокупности внутренних параметров проектируемого механизма, при которой целевая функция  $\Phi_1$  принимает минимальное значение  $f_1$ , соответствует определенное значение  $f_2$  целевой функции  $\Phi_2$ . В системе координат  $\Phi_1\Phi_2$  эти два значения  $f_1$  и  $f_2$  определяют точку  $a$ , характеризующую вектор  $\underline{x}_1$  внутренних параметров механизма. Аналогично, если определить минимальное значение  $f_2$  целевой функции  $\Phi_2$ , то можно найти соответствующее ему значение  $f_1$  целевой функции  $\Phi_1$ . В системе координат  $\Phi_1\Phi_2$  эти два значения  $f_2$  и  $f_1$  определяют точку  $b$ , характеризующую другой вектор  $\underline{x}_2$  внутренних параметров механизма. Эти два решения при двух критериях  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  равнозначны. Аналогично можно получить бесконечное количество решений, лежащих на кривой  $ab$ , называемой *линией безразличия*. При трех критериях  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  равнозначные решения будут находиться на поверхности безразличия  $abc$  (рис. 25.1, б). Для однозначного решения задачи синтеза многокритериальную задачу следует свести к однокритериальной, определив комплексную целевую функцию. Этот процесс носит название *свертки векторного критерия*.

Известно множество способов построения комплексных целевых функций. Среди них наиболее часто при синтезе механизмов используют метод взвешенных сумм, при котором все выходные параметры объединяют в две группы. В первую группу входят параметры, значения которых нужно повышать: КПД, производительность, точность воспроизведения заданной функции или траектории, а в частном случае — изгибная и контактная прочность зубьев, коэффициент перекрытия и т. п. Целевые функции, соответствующие этим выходным параметрам, обозначим  $\Phi_j^+$ . Во вторую группу входят параметры, значения которых нужно снижать, например, габаритные размеры, скорости скольжения, углы давления, силы, действующие на звенья и кинематические пары, вибрационная, неравномерность движения, силовое воздействие на стойку вследствие проявления инерционности. Целевые функции, соответствующие этим параметрам, будем обозначать  $\Phi_j^-$ . Тогда для случая минимизации комплексной целевой функции свертка векторного критерия будет иметь вид

$$\Phi = \sum_{j=1}^n q_j \Phi_j^- - \sum_{j=n+1}^m q_j \Phi_j^+, \quad (25.1)$$

где  $n$  и  $m$  — количество показателей первой и второй группы при  $m > n$ .

Степень важности  $j$ -го критерия в выражении (25.1) определяется весовым коэффициентом  $q_j$ , который сводит значения всех целевых функций к одной размерности или к безразмерным величинам. Коэффициенты  $q_j > 0$  устанавливаются в зависимости от назначения машины с учетом опыта эксплуатации и в процессе оптимизации обычно остаются постоянными. Примерами таких комплексных целевых функций являются зависимости, рассмот-

ренные при синтезе механизмов со ступенчато изменяющимся передаточным отношением (см. гл. 14).

Сущность оптимизации при выбранной комплексной целевой функции сводится к отысканию при наложенных ограничениях таких значений параметров механизма, которые дают максимум (минимум) целевой функции, характеризующей комплексную эффективность проектируемой машины. При этом используются математические методы оптимизации, позволяющие осуществить непрерывный поиск направления улучшения внутренних параметров механизма за счет количественного изменения их значений. Так как комплексная целевая функция, получаемая сверткой векторных критериев, определяется неявным образом от внутренних параметров синтеза, что не позволяет оценить ее свойства (выпуклость, вогнутость и т. д.), то решение задач оптимизации ведется с помощью поисковых методов, получивших название *методов математического программирования*. В настоящее время нет экономичного, универсального метода, дающего высокую гарантию получения наилучшей совокупности внутренних параметров машины и механизма, пригодного для решения любой задачи оптимизации. В зависимости от класса решаемых задач из имеющихся в наличии программ, входящих в программное обеспечение методов оптимизации, выбирают такую, которая дает наиболее высокую вероятность отыскания оптимальной совокупности определяемых параметров с наименьшими затратами машинного времени.

При описании комплексной целевой функции нелинейными зависимостями от внутренних параметров задача оптимизации решается методами линейного программирования; если же целевая функция является линейной функцией от внутренних параметров, то имеет место задача линейного программирования. В общем случае целевая функция может иметь несколько экстремумов, отличающихся по абсолютной величине. В зависимости от типа экстремума, в котором заканчивается поиск оптимального решения, различают методы поиска локального и глобального экстремума. Если на значение определяемых параметров наложены некоторые ограничения, то решение задачи синтеза механизмов осуществляется методами условной оптимизации. В противном случае (при отсутствии ограничений) при синтезе механизмов для поиска значений определяемых параметров используют методы безусловной оптимизации.

### 25.3. Методы безусловной оптимизации

Среди методов поиска локального экстремума **методы безусловной оптимизации** составляют наиболее многочисленную группу. Сущность этих методов заключается в том, что строится такая последовательность значений вектора внутренних параметров  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ , при которой в случае поиска минимума целевой функции в

процессе оптимизации обеспечивается последовательность

$$\Phi(\bar{x}_0) > \Phi(\bar{x}_1) > \Phi(\bar{x}_2) \dots, \quad (25.2)$$

где  $\bar{x}_0$  — вектор исходной совокупности внутренних параметров, выбор которого во многом определяет успех решения задачи синтеза.

Схема алгоритма поиска для общего случая представлена на рис. 25.2. Выбор вектора исходной совокупности внутренних параметров производится в блоке 1. Эта совокупность должна принадлежать области определения целевой функции, и чем ближе к экстремуму она выбрана, тем быстрее он может быть найден. В блоке 2 производится вычисление целевой функции, значение которой попадает в блок 3, определяющий условия прекращения поиска. Если эти условия позволяют сделать вывод, что поиск следует продолжить, то в блоке 4 определяются направление и шаг поиска в достигнутой точке, а в блоке 5 — удовлетворительность нахождения новой совокупности в области определения целевой функции. Процесс вычислений повторяется до тех пор пока удовлетворяются условия прекращения поиска. Таким условием для большинства методов является значение шага поиска, которое в конце вычислений обычно соизмеримо с требуемой точностью определения внутренних параметров механизма.

В зависимости от количества внутренних параметров в целевой функции различают **методы одномерного** (если аргументом целевой функции является один внутренний параметр) и **многомерного поиска** при числе внутренних параметров больше единицы. Так, например, выбор коэффициентов смещения  $x_1$  и  $x_2$  колес зубчатой передачи является задачей двумерного поиска. Алгоритмы одномерного поиска применяются внутри алгоритмов многомерного. При выборе направлений и шагов в многомерном поиске внутренние параметры необходимо привести к одной размерности или к безразмерному виду. При этом  $i$ -й внутренний параметр синтеза  $a_i$  преобразуется в безразмерный

$$x_i = \ln(a_i/\varepsilon_i), \quad (25.3)$$

где  $\varepsilon_i$  — коэффициент, численно равный единице измерения внутреннего параметра.

**Методы безусловной оптимизации** по способу определения направления поиска делятся на методы нулевого, первого и второго порядков. Для методов *нулевого порядка* типичен выбор направления поиска по результатам последовательных вычислений целевой функции. По способу выбора совокупности оптимизируемых параметров эти методы делятся на *детерминированные* и *случайного поиска*. В детерминированных методах процесс перехода от вектора внутренних параметров  $\bar{x}_i$  к вектору  $\bar{x}_{i+1}$  происходит в

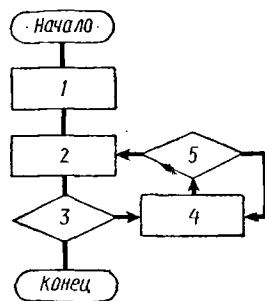


Рис. 25.2. Обобщенный алгоритм методов безусловной оптимизации

соответствии с некоторым алгоритмом, определяющим тот или иной метод. В методах случайного поиска в этот процесс вносится элемент случайности. В методах *первого порядка* переход от вектора  $x_i$  к вектору  $x_{i+1}$  производится с использованием первой производной от целевой функции в точке, определяемой вектором внутренних параметров  $x_i$ , а в методах *второго порядка* с этой же целью вычисляют вторую производную в этой же точке. В задачах многомерного поиска с целевыми функциями сложного вида применение методов безусловной оптимизации первого и второго порядков нецелесообразно. Методы нулевого порядка проще программируются и требуют меньших затрат машинного времени.

#### 25.4. Методы условной оптимизации

*Наиболее типичен синтез механизмов методами условной оптимизации, когда на внутренние параметры синтеза наложены определенные ограничения.* Различают параметрические, дискретизирующие и функциональные ограничения. *Параметрические ограничения*, примером которых могут служить ограничения на длины звеньев, представляют собой систему неравенств

$$x_{\min i} \leq x_i \leq x_{\max i} \text{ при } i \in \{1; n\}, \quad (25.4)$$

где  $x_{\min i}$  и  $x_{\max i}$  — минимальные и максимальные значения  $i$ -го определяемого параметра механизма;  $n$  — число параметрических ограничений.

*Дискретизирующие ограничения* налагаются на значения параметров в связи с их физической сущностью либо в связи с требованиями ГОСТ. Так, параметр «число зубьев» зубчатой передачи принимает только целые положительные значения, а параметр «модуль зубьев» — только значения из стандартного ряда модулей. Эти ограничения имеют вид

$$x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}) \text{ при } k \in \{1; m\}, \quad (25.5)$$

где  $x_j$  —  $j$ -й параметр проектируемого механизма;  $x_{jk}$  — допустимые дискретные значения  $j$ -го параметра;  $m$  — число дискретных значений  $j$ -го параметра.

*Функциональные ограничения* представляют собой условия работоспособности механизма, не отражаемые целевой функцией: условия проворачиваемости звеньев механизмов (см. гл. 6), предотвращения подреза зубьев, ограничения по коэффициенту перекрытия (см. гл. 10) и т. д. и имеют вид

$$f_l(x) \leq 0; \quad f_j(x) = 0; \quad f_k(x) < 0, \quad (25.6)$$

где  $f(x)$  — функция от вектора внутренних параметров.

Указанные ограничения формируют допустимую область поиска оптимальной совокупности параметров механизма. Если эти ограничения совпадают с условиями работоспособности, то допустимую область называют также областью работоспособности. Назначение ограничений является ответственным этапом в процессе постановки и решения задач оптимального проектирования

механизмов. Неучет каких-либо ограничений приводит к снижению технико-экономических показателей и других выходных характеристик механизма. Вместе с тем избыточные ограничения (особенно функциональные) повышают сложность алгоритмов и методов решения задач, а также увеличивают затраты машинного времени. Важное значение при постановке задачи оптимального проектирования имеет анализ совместимости принятых ограничений, так как может оказаться, что допустимая область поиска не содержит ни одного решения, т. е. является пустым множеством.

При решении задач условной оптимизации целесообразно использовать методы безусловной оптимизации, учитывая большое количество разработанных по этим методам программ. С этой целью задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации устранением ограничений путем преобразования параметра  $x_i$ , на значения которого наложены ограничения, в неограничиваемый.

Вообще задачи условной оптимизации более сложны, чем задачи безусловной оптимизации. Для их решения используют специально разработанные методы программирования с ограничениями. Одним из таких методов, которые относятся к методам поиска глобального экстремума, является метод сканирования, состоящий в том, что допустимая область поиска, определяемая системой ограничений, разбивается на  $k$  подобластей, в центре каждой из которых определяется значение целевой функции. Если целевая функция зависит от  $n$  параметров, необходимо выполнить  $k^n$  вариантов расчета. Для надежного определения глобального минимума необходимо увеличивать число  $k$  подобластей, что приводит к большим затратам машинного времени.

Методы математического программирования применяются на всех этапах синтеза машин и механизмов, в частности, когда рассматриваются вопросы прочности деталей, из которых состоят звенья механизмов, долговечности, надежности, технологичности и др. Чем больше частных характеристик использовано в формировании комплексного критерия и функциональных ограничений, тем более оптимальным с точки зрения функционирования будет выбор внутренних параметров проектируемой машины и механизма.

## 25.5. Управляемые внутренние параметры синтеза

При решении задач оптимизации необходимо организовать целенаправленный поиск оптимальной совокупности внутренних параметров так, чтобы, с одной стороны, получить наилучшие значения выходных параметров механизмов, а с другой — максимально сократить машинное время поиска этих значений. Внутренние параметры, значения которых могут меняться в процессе синтеза, называются управляемыми. При уменьшении числа управляемых параметров снижается размерность области допустимых решений, упрощается ее анализ и, следовательно, уменьшаются вычислительные трудности, связанные с поиском экстремума целевой функции.

Значения некоторых внутренних унифицированных параметров синтеза назначаются и не подлежат изменению. Некоторые внутренние параметры нежелательно изменять из конструктивных и технологических соображений. Так, внутренними параметрами синтеза эвольвентного зацепления будут параметры *исходного контура* и значения коэффициентов его смещения. Однако изменение параметров исходного контура (например, угла профиля  $\alpha$ ) вызывает увеличение номенклатуры режущего инструмента, что неэкономично. Поэтому в качестве управляемых параметров обычно выбирают *коэффициенты смещения исходного контура*  $x_1$  и  $x_2$ . Из остальных внутренних параметров для формирования вектора управляемых параметров выбирают такие, изменение которых наибольшим образом изменяет выходные параметры.

Степень влияния внутренних параметров на выходные оценивается абсолютным  $b_{ij}$  и относительным  $c_{ij}$  *коэффициентами чувствительности*, определяемыми по зависимостям

$$b_{ij} = d_{y_i}/dx_j \text{ и } c_{ij} = b_{ij}x_{j \text{ ном}}/y_{i \text{ ном}}, \quad (25.7)$$

где  $y_i$  —  $i$ -й выходной параметр;  $x_j$  —  $j$ -й внутренний параметр;  $x_{j \text{ ном}}$  и  $y_{i \text{ ном}}$  — номинальные значения этих параметров.

Из всех внутренних параметров в качестве управляемых выбирают такие, у которых эти коэффициенты имеют наибольшее значение. В результате из всех внутренних параметров определяют наиболее влияющие и формируют из них вектор управляемых параметров синтеза. Кроме этого, появляется возможность оценки стабильности выходных характеристик проектируемых машин и механизмов при учете погрешностей изготовления и деформации звеньев, что способствует правильному назначению допусков на параметры синтеза.

При оптимальном синтезе механизмов сравнение вариантов решения на любой стадии проектирования производится при помощи показателей качества (выходных параметров синтеза). К показателям, учитываемым на первом этапе проектирования, относятся: коэффициент полезного действия, точность воспроизведения заданной функции или заданной траектории, равномерность движения исполнительного звена, силы, возникающие в звеньях и кинематических парах, динамические нагрузки, уровень механических колебаний, виброакустическая активность.

## 26. ПУТИ ОПТИМИЗАЦИИ МЕХАНИЗМОВ ПО МИНИМУМУ ПОТЕРЬ МОЩНОСТИ

### 26.1. Механический коэффициент полезного действия и коэффициент потерь

*Механический коэффициент полезного действия (КПД) — один из важнейших качественных показателей работы машины. Чем он выше, тем выгоднее в эксплуатации машина. При выборе структуры механизмов, образующих машину, необходимо ориентироваться*



на такие параметры звеньев и кинематических пар, которые обеспечат наибольший коэффициент полезного действия не только в отдельные моменты работы или за цикл, но и за весь срок службы машины.

**Мгновенный КПД** — это отношение полезной мощности  $P_2$ , отводимой с ведомого звена, к мощности  $P_1$  внешних сил (сил движущих), затраченной на ведущем звене. Так как для преодоления потерь в силовом потоке механизма от ведущего звена к ведомому затрачивают определенную мощность  $P_{вс}$ , а мощность, которую необходимо подвести к ведущему звену,  $P_1 = P_2 + P_{вс}$ , то коэффициент полезного действия будет

$$\eta = P_2/P_1 = P_2/(P_2 + P_{в.с}). \quad (26.1)$$

**Цикловый КПД** — это отношение затрат полезной работы к затратам работы движущих сил за цикл установившегося движения. По аналогии с предыдущим

$$\eta = A_2/A_1 = A_2/(A_2 + A_{в.с}), \quad (26.2)$$

где  $A_1$  — работа сил движущих;  $A_2$  — работа сил полезного сопротивления;  $A_{в.с}$  — работа, затраченная на преодоление сил вредного сопротивления.

Если один цикл соответствует одному обороту входного звена, то работа

$$A_1 = \int_0^{2\pi} T_1(\varphi) d\varphi \text{ и } A_{в.с} = \int_0^{2\pi} M_{в.с}(\varphi) d\varphi, \quad (26.3)$$

где  $T_1$  — момент движущих сил;  $M_{в.с}$  — момент сил вредных сопротивлений.

По значению КПД сравнивают достоинства однотипных машин, например, двигателей внутреннего сгорания, турбин. Чем больше КПД, тем эффективнее машина при прочих равных условиях. Эксплуатационные качества механизмов одинакового назначения, например шарнирно-рычажных, отдельных кинематических соединений и кинематических пар (например, пар 5-го класса скольжения и качения) также сравнивают по величине их КПД.

Причины, вызывающие необходимость затраты дополнительной энергии, отличаются большим разнообразием. Наиболее существенны потери на преодоление сопротивления относительно движению контактирующих твердых звеньев. Затраты мощности необходимы также для преодоления сопротивления движению звеньев окружающей среды — воздуха (особенно при больших скоростях), жидкостей, в частности смазочных материалов, для звеньев, полностью или частично погруженных в них (например, зубчатых колес, шарнирных соединений и т. п.). В процессе работы звенья испытывают деформации под воздействием передаваемых нагрузок, в результате чего потенциальная энергия упругих деформаций переходит в тепловую. Такие потери имеют место в упругом контакте колес фрикционных механизмов, в гибких звеньях соответствующих механизмов (например, ременных). Относительные

значения этих потерь зависят от упругих свойств материалов звеньев и их нагруженности. Ниже рассматриваются лишь потери в кинематических парах.

Сравнение эффективности механизмов, кинематических соединений и пар в ряде случаев более наглядно не по КПД, а по значению потерь, оцениваемому коэффициентом потерь (КП), который представляет отношение работы  $A_{в.с}$  за некоторый интервал времени при преодолении сил вредного сопротивления, к работе  $A_1$  сил движущих:

$$\psi = A_{в.с}/A_1. \quad (26.4)$$

С учетом формулы (26.2) получим

$$\eta = 1 - \psi. \quad (26.5)$$

Коэффициент потерь дает представление о дополнительных затратах энергии в машине при получении полезной работы. При сравнении коэффициентов потерь становятся более очевидными недостатки отдельных механизмов или кинематических пар. Так, например, для рядового зубчатого механизма  $\eta_3 = 0,97$ , а для червячного  $\eta_4 = 0,80$  и отношение этих КПД составляет  $\eta_3/\eta_4 = = 0,97/0,80 = 1,21$ . Вместе с тем отношение коэффициентов потерь в этом случае будет  $\psi_4/\psi_3 = 0,20/0,03 \approx 6,7$ , что более убедительно показывает преимущества зубчатого механизма перед червячным по энергетическим затратам. При непрерывной работе стоимость излишних затрат энергии на преодоление потерь в червячном механизме в течение года эксплуатации оказывается выше стоимости зубчатого механизма. Чаще всего определение КПД производят по формуле (26.5), так как во многих случаях отыскание коэффициента потерь оказывается более удобным.

## 26.2. Влияние на КПД места расположения механизмов в энергетическом потоке

Машины представляют собой последовательное, параллельное или смешанное соединение механизмов. В свою очередь, в цепи механизмов от входного к выходному звену кинематические пары располагают подобным же образом. Расположение механизмов в силовом потоке машины от ведущего к ведомому звену влияет на КПД. Потери в каждом механизме, в свою очередь, зависят от расположения кинематических пар в этом потоке.

Если КПД и коэффициент потерь каждой кинематической пары находят по формулам (26.1) и (26.4), то из рассмотрения потерь в силовом потоке получают зависимости для определения коэффициентов  $\eta$  и  $\psi$  для всего механизма. Также, полагая известным КПД и КП каждого механизма, определяют полный КПД машины. На рис. 26.1, а показано последовательное соединение  $n$  механизмов с коэффициентами полезного действия  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ . Первый механизм затрачивает работу движущих сил  $A_1$  и совершает полезную работу  $A_2 = A_1\eta_1$ . Второй механизм затрачивает работу дви-

жущих сил  $A_2$  и совершает полезную работу  $A_3 = A_2\eta_2 = A_1\eta_1\eta_2$ . Продолжая подобные рассуждения, получим выражение для полезной работы  $n$ -го механизма

$$A_n = A_1 \prod_{i=1}^n \eta_i. \quad (26.6)$$

Общий КПД цепи механизмов с *последовательным соединением* относительно энергетического потока определится по формуле

$$\eta = A_n/A_1 = \prod_{i=1}^n \eta_i. \quad (26.7)$$

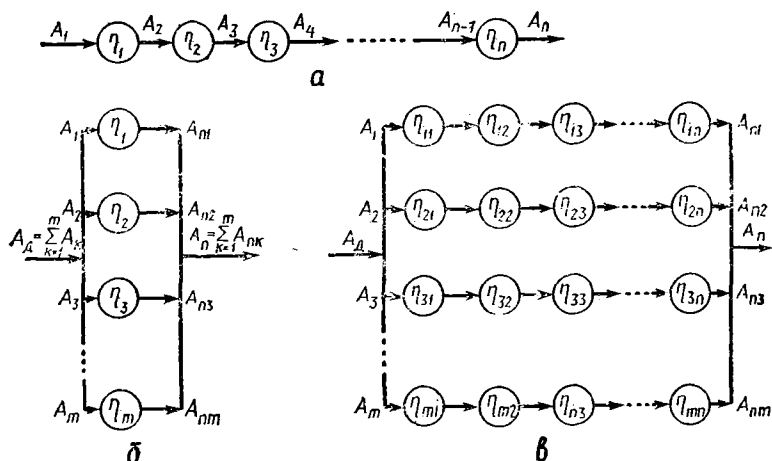


Рис. 26.1. Схемы расположения механизмов в машине относительно энергетического потока

При *параллельном соединении*  $m$  механизмов (рис. 26.1, б) каждый  $k$ -й механизм затрачивает работу  $A_k$  и производит полезную работу  $A_{nk} = A_k\eta_k$ . Общая работа движущих сил, затраченная всеми механизмами,  $A = \sum_{k=1}^m A_k$ , а полезная работа всех механиз-

мов  $A_n = \sum_{k=1}^m A_k\eta_k$ . В этом случае КПД зависит от того, как распределяется работа движущих сил  $A_d$  между отдельными потоками, что учитывается соответствующими коэффициентами распределения нагрузки  $\Omega_k$  при условии, что  $\sum_{k=1}^m \Omega_k = 1$ . Тогда

$$\eta = \sum_{k=1}^m A_k\eta_k / \sum_{k=1}^m A_k = \left( \sum_{k=1}^m A_d\Omega_k\eta_k \right) / A_d = \sum_{k=1}^m \Omega_k\eta_k. \quad (26.8)$$

При *смешанном соединении* механизмов (рис. 26.1, в) рассматривают отдельные участки цепей, имеющих последовательный или параллельный характер соединения, КПД которых рассчитыва-

ется по формулам (26.7) и (26.8). После этого, в зависимости от структуры смешанного соединения, определяется общий КПД. Для схемы, представленной на рис. 26.1, в, записывают

$$\eta = \sum_{k=1}^m A_{\tau k} / \sum_{k=1}^m A_k = \sum_{k=1}^m A_k \prod_{i=1}^n \eta_{ki} / \sum_{k=1}^m A_k = \sum_{k=1}^m \left( \Omega_k \prod_{i=1}^n \eta_{ki} \right), \quad (26.9)$$

где  $n$  — число механизмов, соединенных последовательно в параллельных ветвях;  $m$  — число параллельных ветвей.

Так как каждый отдельный механизм рассматривают как последовательное, параллельное или смешанное по отношению к энергетическому потоку расположение кинематических пар, то формулы (26.7), (26.8) и (26.9) используют для определения КПД отдельных механизмов, если известны КПД кинематических пар, входящих в их состав. Такой же подход целесообразен при нахождении потерь в составной кинематической паре, если элементы, ее образующие, совершают сложное движение. Для этого относительное движение звеньев (как, например, в червячном зацеплении, см. гл. 13) представляют состоящим из простых движений, и потери определяют для каждого из них отдельно.

### 26.3. Коэффициент полезного действия низших кинематических пар

Рассмотрим определение КПД наиболее распространенных кинематических пар — поступательной и вращательной, используя зависимости сил трения от параметров кинематических пар (см. гл. 20). Пусть в поступательной кинематической паре с силовым замыканием (рис. 26.2, а) звено 1 движется относительно звена 2 со скоростью  $v_{12}$ .

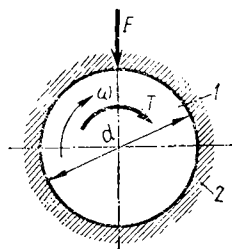
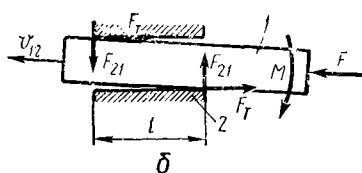
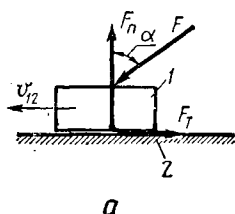


Рис. 26.2. Определение КПД в поступательной кинематической паре

Рис. 26.3. Схема определения КПД во вращательной кинематической паре

ростью  $v_{12}$  под действием силы  $F$ , приложенной под углом  $(\pi/2 - \alpha)$  к направляющей. Сопротивление этому движению оказывает сила трения, пропорциональная нормальной составляющей силы  $F$ , а работа, затраченная на преодоление сил вредного сопротивления — сил трения, будет

$$A_{\text{вс}} = F_T \cdot v_{12} t = F_n f' v_{12} t = F f' v_{12} t \cos \alpha, \quad (26.10)$$

где  $F_n$  — нормальная составляющая силы  $F$ ;  $f'$  — приведенный коэффициент трения.

Если обозначить проекцию силы  $F$  на направление относительной скорости  $F_x = F \sin \alpha$ , то работа сил движущих  $A_1 = F_x v_{12} t = = F v_{12} t \sin \alpha$ . Тогда в соответствии с зависимостью (26.5) КПД

$$\eta = 1 - \psi = 1 - A_{в.с}/A_1 = 1 - f' \operatorname{tg} \alpha. \quad (26.11)$$

В поступательной кинематической паре с геометрическим замыканием при перекосе звена  $I$  под действием эксцентрично приложенных сил или момента  $M$  (рис. 26.2, б) возникают силы реакции  $F_{21}$ , расположенные друг от друга на расстоянии, равном длине  $l$  направляющей. В этом случае работа, затрачиваемая на преодоление сил трения,

$$A_{в.с} = 2F_{\tau} v_{12} t = 2F_{21} f' v_{12} t = M f' v_{12} t / l. \quad (26.12)$$

Работа сил движущих, как и в первом случае,  $A_1 = F v_{12} t$ . Тогда КПД поступательной пары при перекосе поступательно движущегося ползуна

$$\eta = 1 - \psi = 1 - M f' v_{12} t / (F l v_{12} t) = 1 - M f' / (F l). \quad (26.13)$$

Из этой формулы следует, что для повышения КПД поступательных кинематических пар с геометрическим замыканием необходимо увеличивать длину направляющей.

Во вращательной кинематической паре (рис. 26.3), нагруженной радиальной силой  $F$ , работа, затрачиваемая на преодоление потерь на трение (см. гл. 20),  $A_{в.с} = 0,5 \omega d f' F t$ . Если вращающий момент будет  $T$ , то работа сил движущих  $A_1 = \omega T t$ . На основании этого КПД вращательной кинематической пары определится по формуле

$$\eta = 1 - A_{в.с}/A_1 = 1 - 0,5 \omega d f' F t / (\omega T t) = 1 - 0,5 f' F d / T. \quad (26.14)$$

Потери в винтовой паре зависят от двух параметров — угла  $\gamma$  подъема винтовой линии и приведенного коэффициента трения  $f'$ , которые определяются элементами пары (см. гл. 20). При повороте звена  $I$  (рис. 26.4) на угол  $\theta$  необходимо затратить работу  $A_1 = = T \theta$ . При этом получим полезную работу силы  $F$ , равную  $A_2 = = 0,5 F \theta d_2 \operatorname{tg} \gamma$ . Учтя (см. гл. 20), что  $T = 0,5 d_2 F \operatorname{tg} (\gamma + \varphi')$ , получим

$$\eta = A_2/A_1 = 0,5 d_2 F \theta \operatorname{tg} \gamma / (0,5 d_2 F \theta \operatorname{tg} (\gamma + \varphi')) = \operatorname{tg} \gamma / \operatorname{tg} (\gamma + \varphi'). \quad (26.15)$$

При движении звена  $I$  под действием силы  $F$  получим

$$\eta = \operatorname{tg} (\gamma - \varphi') / \operatorname{tg} \gamma. \quad (26.16)$$

Приведенный угол трения  $\varphi'$  (а по  $\varphi'$  и приведенный коэффициент трения  $f'$ ) принимают в зависимости от типа резьбы и вида трения в винтовой паре — скольжения или качения.

Для определения потерь и коэффициента полезного действия кинематических пар 5-го класса, содержащих тела качения — шарики или ролики, также используют приведенные выше формулы.

Значения приведенных коэффициентов трения в этих случаях определяют через коэффициенты трения качения  $k$  и диаметры  $d$  тел качения (см. гл. 20).

#### 26.4. Коэффициент полезного действия высших кинематических пар

Звенья, входящие в высшие кинематические пары, совершают плоскопараллельное или пространственное относительное движение. В последнем случае наряду с трением скольжения имеет место и трение качения. Пусть звенья 1 и 2 высшей кинематической пары (рис. 26.5), контактирующие по линии, перпендикулярной плоскости их относительного вращения и проходящей через точку

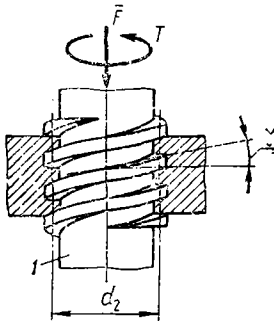


Рис. 26.4. Потери в винтовой кинематической паре

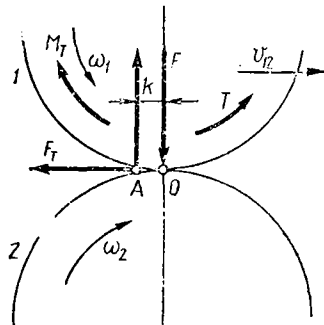


Рис. 26.5. Взаимодействие звеньев в высшей кинематической паре

$O$ , нагружены нормальной силой  $F$ . При вращении звеньев с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в зоне контакта кроме качения возможно относительное скольжение со скоростью  $v_{12} = v_1 - v_2$ , если в зоне контакта (точка  $A$ ) окружные скорости звеньев не будут равными. Мгновенные потери мощности в этом случае складываются из мощности на преодоление потерь на трение качения и на трение скольжения:

$$P_n = P_{п.к} + P_{п.с} = M_T \omega_{12} + F_T v_{12}, \quad (26.17)$$

где  $M_T$  — момент потерь на трение качения;  $F_T$  — сила трения в контакте;  $\omega_{12}$  — относительная угловая скорость качения;  $v_{12}$  — относительная скорость скольжения в контакте.

Подставляя в формулу (26.17) значения  $M_T$  и  $F_T$  (см. гл. 20) и  $\omega_{12}$  и  $v_{12}$  (см. гл. 9.10), получим

$$P_n = Fk(\omega_1 + \omega_2) + Ff'(\omega_1 + \omega_2)OA = F(\omega_1 + \omega_2)(k + f'OA), \quad (26.18)$$

где  $OA$  — расстояние от мгновенного центра вращения  $O$  до точки контакта  $A$ .

Обычно в высших кинематических парах с переменными радиусами кривизны расстояние  $OA$  периодически изменяется. В этом

случае для приближенного определения потерь мощности за цикл часто используют усредненное значение расстояния —  $(OA)_m$ . Тогда коэффициент полезного действия при ведущем звене 1

$$\eta = 1 - \psi = 1 - P_n/P_1 = 1 - F(\omega_1 + \omega_2)(k + f'(OA)_m)/(T\omega_1). \quad (26.19)$$

Если нормальная сила  $F$  является результатом действия вращающего момента  $T$ , т. е.  $F = T/r$ , то

$$\eta = 1 - (k + f'(OA)_m)(1 + \omega_2/\omega_1)/r, \quad (26.20)$$

где  $r$  — радиус, на котором действует сила  $F$ .

### 26.5. Определение КПД механизмов с последовательным расположением кинематических пар

Простейшим механизмом с последовательным расположением кинематических пар в энергетическом потоке является кривошипно-ползунный механизм (рис. 26.6, а). При действии движущего момента  $T_1$  на звено 1 и силы сопротивления  $F_3$  на звено 3 расположение кинематических пар по отношению к энергетическому по-

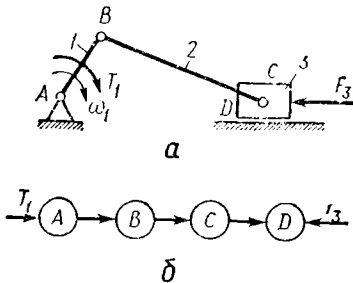


Рис. 26.6. Определение КПД в кривошипно-ползунном механизме

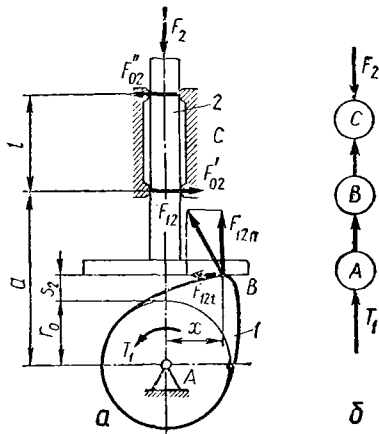


Рис. 26.7. Схема определения КПД кулачкового механизма

току соответствует схеме (рис. 26.6, б), и при учете потерь только в кинематических парах КПД механизма согласно выражению (26.7) будет:

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i = \eta_A \eta_B \eta_C \eta_D. \quad (26.21)$$

Для вращательных кинематических пар  $A$ ,  $B$  и  $C$  КПД определяется по формуле (26.14) с учетом соответствующих значений диаметров  $d$  кинематических пар, приведенных коэффициентов трения  $f'$  (см. гл. 20) и реакций в кинематических парах  $F_i$  (см. гл. 21). КПД поступательной кинематической пары  $D$  определится из выражений (26.11) или (26.13).

Такой метод определения КПД будет приближенным, если реакции в кинематических парах определены без учета влияния сил трения. Более точное решение получают, если реакции найдены *методом последовательного приближения* (см. гл. 21). Однако в каждой машине имеются дополнительные потери (сопротивление окружающей среды — воздуха, смазочного материала и др.), не зависящие от реакций в кинематических парах. Кроме этого, коэффициент трения, который является функцией скорости скольжения или качения, давление, температура и сорта смазочного материала не точны. Поэтому расчетное значение КПД всегда будет приближенным.

Если в зависимость (26.21) подставить выражения для  $\eta_A$ ,  $\eta_B$ ,  $\eta_C$  и  $\eta_D$  из формул (26.11) и (26.13), в которых в качестве  $\alpha$  и  $F$  подставляются их средние значения за один цикл движения механизма, то эта зависимость может быть использована в качестве целевой функции, формализующей частный критерий, который при заданной структуре механизма выражает требование наиболее высокого его КПД. В качестве управляемых параметров в этой целевой функции принимаются длины звеньев, соотношение которых влияет на средние значения  $\alpha$  и  $F$ , диаметры вращательных кинематических пар и параметры, влияющие на значение коэффициентов трения.

При наличии в механизме высших кинематических пар, как, например, в кулачковом механизме (рис. 26.7, а), способ определения КПД остается таким же. Пусть к кулачку 1 подведен движущий вращающий момент  $T_1$ . На толкатель 2 действует сила полезного сопротивления  $F_2$ . Так как расположение кинематических пар по отношению к силовому потоку последовательное (рис. 26.7, б), то КПД механизма определяется также по формуле (26.21) —  $\eta = \eta_A \cdot \eta_B \cdot \eta_C$ . КПД вращательной кинематической пары А определяется формулой (26.14). КПД поступательной кинематической пары С определится формулой (26.13), в которую необходимо подставить момент  $M = F_{12r}(a - r_0 - s_2) - F_{12n}x$ , а вместо  $F$  подставить  $F_2$ . КПД высшей кинематической пары В определяют по формуле (26.19), если подставить в нее  $F_{12n}$ , движущий момент  $T_1$ , вместо  $(OA)_m$  — расстояние АВ. Пренебрегая потерями на трение качения ввиду незначительности по сравнению с потерями на трение скольжения, получим

$$\eta = 1 - F_{12n}f'\omega_1(AB)/(T_1\omega_1), \quad (26.22)$$

где  $F_{12n}$  — нормальная составляющая силы  $F_{12}$  в точке контакта В, равная  $T_1/x$ .

После подстановки в формулу (26.22) соответствующих значений, получим

$$\eta = 1 - T_1f'\omega_1(r_0 + s_2)/(T_1\omega_1x) = f'(r_0 + s_2)/x, \quad (26.23)$$

где  $r_0$  — радиус основной шайбы кулачка;  $s_2$  — перемещение толкателя.

Так как значения  $s_2$  и  $x$  переменны, то переменным будет и коэффициент полезного действия, т. е., как и для механизма шар-



нирного четырехзвенника, КПД кулачкового механизма является функцией положения кулачка. Поэтому в качестве целевой функции при оптимизации параметров кулачкового механизма используется зависимость (26.21), в которой оценивается средний КПД механизма за один оборот кулачковой шайбы. Управляемыми параметрами при этом являются  $r_{001}$   $x$  и режимы движения толкателя на участках подъема и опускания.

При определении КПД зубчатого механизма (рис. 26.8) необходимо учесть потери мощности в опорах, зубчатом зацеплении и на перемешивание смазочного материала. КПД опор определяется по формулам для вращательных кинематических пар. Мгновенные потери мощности в кинематической паре  $B$ , если пренебречь потерями на трение качения и учесть только потери на трение скольжения, определяются из выражения (26.18) (знак «—» — для внутреннего зацепления)

$$P_n = F_{12} f' (WK) (\omega_1 \pm \omega_2). \quad (26.24)$$

Так как расстояние от точки контакта  $K$  до полюса зацепления  $W$  изменяется от  $b_1 W$  до  $W b_2$ , то потери на трение в зацеплении переменны. Поэтому при определении среднего значения КПД зубчатого зацепления следует учитывать средние потери мощности за время нахождения в зацеплении пары зубьев, используя среднее значение расстояния точки контакта зубьев от полюса зацепления  $W$ , выраженное через основной шаг  $P_b$  и торцовый коэффициент перекрытия  $\epsilon_\alpha$  (см. гл. 10):

$$(WK)_m = 0,5 (b_1 W/2 + W b_2/2) = l/4 = \epsilon_\alpha P_b/4.$$

Тогда усредненные потери мощности на трение в зацеплении будут

$$P_n = F_{12} f' \epsilon_\alpha P_b (\omega_1 \pm \omega_2)/4, \quad (26.25)$$

а КПД зубчатого зацепления

$$\eta = 1 - P_n/P_1 = 1 - F_{12} f' \epsilon_\alpha P_b (\omega_1 \pm \omega_2)/(4 F_{12} r_{b1} \omega_1). \quad (26.26)$$

Подставляя в эту формулу  $r_{b1} = m z_1 (\cos \alpha)/2$ ,  $P_b = \pi m \cos \alpha$  и  $\omega_2/\omega_1 = z_1/z_2$ , после преобразований получим

$$\eta = 1 - \pi f' \epsilon_\alpha (1/z_1 \pm 1/z_2)/2. \quad (26.27)$$

## 26.6. Определение КПД механизмов с разветвленным энергетическим потоком

Механизмы с разветвленным энергетическим потоком отличаются сложностью, поэтому требуется четко разделить последовательное и параллельное расположение источников потерь — кинемати-

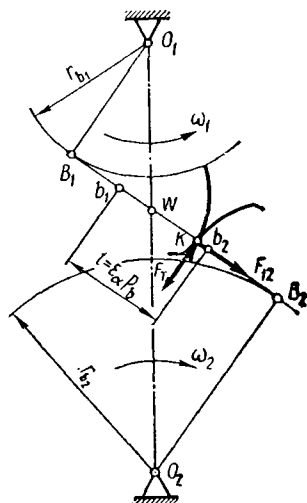


Рис. 26.8. Взаимодействие звеньев зубчатого механизма

ческих пар. Рассмотрим сателлитный зубчатый механизм (рис. 26.9, а). Входными в механизме являются звенья 1 и 3, к которым подводятся движущие моменты  $T_1$  и  $T_3$ , а выходным — водило  $h$ , к которому приложен момент сопротивления  $T_h$ . В соответствии с энергетическим потоком последовательность расположения кинематических пар изображена на рис. 26.9, б. По формуле (26.9) для смешанных соединений, заменив работу  $A$  на мощность  $P$ , для рассматриваемого механизма записывают

$$\eta = [(P_1 \eta_A \eta_B + P_3 \eta_E \eta_K) / (P_1 + P_3)] \eta_C \eta_D, \quad (26.28)$$

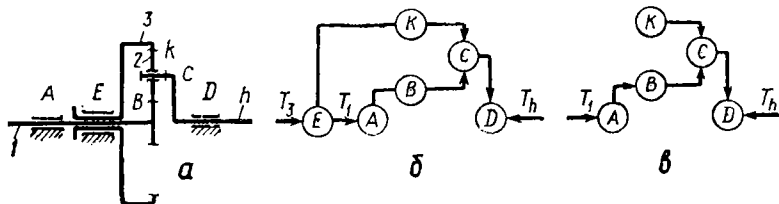


Рис. 26.9. Схема расположения кинематических пар по отношению к энергетическому потоку в механизмах с одним сателлитом

где  $P_1 = T_1 \omega_1$  и  $P_3 = T_3 \omega_3$  — мощности движущих моментов на звеньях 1 и 3;  $\eta_A$ ,  $\eta_C$ ,  $\eta_E$  и  $\eta_D$  — КПД соответствующих вращательных кинематических пар;  $\eta_B$  и  $\eta_K$  — КПД зубчатых зацеплений — соответственно внешнего и внутреннего.

При закреплении одного из звеньев, например звена 3, дифференциальный механизм превращается в планетарный с энергетическим потоком, соответствующим схеме (рис. 26.9, в). Формула (26.28) КПД для этого механизма преобразуется к виду

$$\eta = [(P_1 \eta_A \eta_B + P_K \eta_K) / (P_1 + P_K)] \eta_C \eta_D. \quad (26.29)$$

Здесь  $P_K$  — мощность, затрачиваемая на трение в кинематической паре  $K$  — зубчатом зацеплении.

Зависимости (26.28) и (26.29) справедливы для механизма с одним сателлитом. Для дифференциального механизма с двумя сателлитами (рис. 26.10, а) и входными звеньями 1 и 3, к которым подводятся вращающие моменты  $T_1$  и  $T_3$ , последовательность расположения кинематических пар в соответствии с энергетическим потоком существенно изменяется (рис. 26.10, б). По формуле (26.9) для смешанных соединений, заменив работу  $A$  на мощность  $P$ , в этом случае можно записать

$$\eta = [P_1 (\Omega_1 \eta_B \eta_C + \Omega_2 \eta_B \eta_C) \eta_A + P_3 (\Omega_1 \eta_K \eta_C + \Omega_2 \eta_K \eta_C) \eta_E] / (P_1 + P_3) \eta_D, \quad (26.30)$$

где  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — коэффициенты распределения нагрузки по двум потокам ( $\Omega_1 + \Omega_2 = 1$ ; при равенстве передаваемых мощностей  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,5$ ).

При закреплении одного из звеньев, например звена 3, дифференциальный механизм превращается в планетарный с энергетическим потоком, соответствующим схеме (рис. 26.10, в), для ко-

торой формула (26.30) преобразуется к виду

$$\eta = (\Omega_1 \eta_B \eta_C + \Omega_2 \eta_{B'} \eta_{C'}) \eta_A / \eta_D + \Omega_K (\Omega_1 \eta_K \eta_C + \Omega_2 \eta_{K'}) / \eta_D, \quad (26.31)$$

где  $\Omega_K = P_K / P_1$ .

При сравнительном анализе источников потерь мощности в механизмах со сложными силовыми потоками учитывается наличие кинематических пар с повторяющимися элементами. В качестве таких выступают низшие вращательные и поступательные

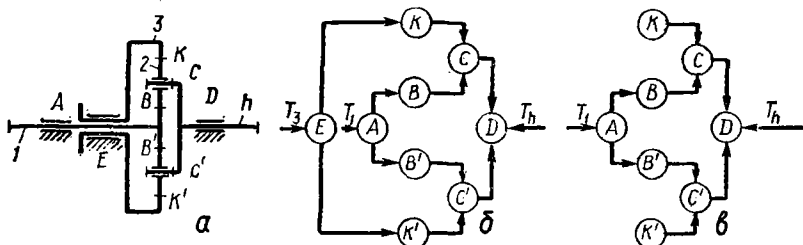


Рис. 26.10. Схема расположения кинематических пар по отношению к энергетическому потоку в механизмах с двумя сателлитами

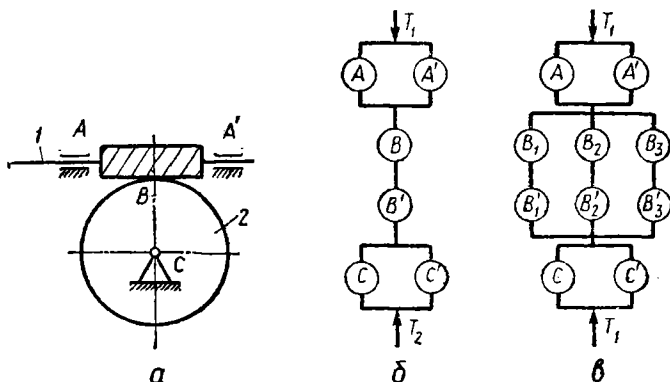


Рис. 26.11. Определение КПД механизмов с повторяющимися элементами кинематических пар

пары скольжения или качения, высшие — в виде зацеплений параллельно работающих зубчатых колес, зубчатых зацеплений с несколькими одновременно контактирующими зубьями, высших кинематических пар с несколькими контактными точками и линиями (см. гл. 10, 11) и т. п. Так, например, в червячном механизме (рис. 26.11, а) червяк 1 составляет со стойкой вращательную кинематическую пару с повторяющимися элементами  $A$  и  $A'$  и с червячным колесом 2 зацепление  $B$ . Червячное зацепление (см. гл. 13) рассматривают как зубчато-реечное зацепление и пару винт — гайка, т. е. кинематическую пару с повторяющимися элементами  $B$  и  $B'$ . Червячное колесо со стойкой составляет вращательную кинематическую пару с повторяющимися элементами  $C$  и  $C'$ . В соответствии с последовательностью расположения кинематических пар в силовом потоке (рис. 26.11, б) по формуле (26.9) для смешан-

ных соединений записывают

$$\eta = (\Omega_A \eta_A + \Omega_{A'} \eta_{A'}) \eta_B \eta_{B'} (\Omega_C \eta_C + \Omega_{C'} \eta_{C'}). \quad (26.32)$$

В этой формуле  $\eta_A, \eta_{A'}$ ;  $\eta_C$  и  $\eta_{C'}$  — КПД вращательных кинематических пар, определяется по формуле (26.14);  $\eta_B$  — КПД зубчато-реечного зацепления — по формуле (26.27) при  $z_2 = \infty$ ;  $\eta_{B'}$  — КПД винтовой пары — по формуле (26.16). Сумма коэффициентов неравномерности передачи мощности по повторяющимся элементам кинематических пар попарно равна единице, а именно:

$$\Omega_A + \Omega_{A'} = 1; \quad \Omega_C + \Omega_{C'} = 1.$$

В механизме с цилиндрическим червяком в зацеплении находятся попеременно один-два зуба колеса. Поэтому дальнейшее уточнение потерь в силовом потоке получают при рассмотрении обоих случаев зацепления. В механизме с глобоидным червяком в зацеплении одновременно находятся три-четыре зуба, чему соответствует схема (рис. 26.11, в).

Приведенные аналитические зависимости служат в качестве целевых функций для сравнительной характеристики различных механизмов, однако они не дают точного значения КПД, так как не учитывают действительных условий трения в кинематических парах. Только экспериментальные исследования дают надежные значения КПД механизмов и кинематических пар.

## 27. ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ НА РАБОТУ МЕХАНИЗМОВ

### 27.1. Ошибки в реальных механизмах

При решении задач анализа (см. гл. 16...19) и синтеза механизмов (см. гл. 7...15) были приняты допущения, идеализирующие условия их изготовления и работы; звенья — абсолютно жесткие, кинематические пары — без зазоров, законы движения входных звеньев — совпадающие с принятыми в исходных данных и т. д. При этих допущениях получены зависимости, определяющие перемещения, скорости, ускорения, силы и т. п. для различных типов механизмов. Но в реальных механизмах эти закономерности точно не выполняются, так как всегда имеют место отклонения действительных параметров звеньев и кинематических пар от принятых при расчете. Это объясняется неизбежными погрешностями при изготовлении звеньев и сборке механизма, изнашивании элементов кинематических пар и т. п., что приводит к отклонению положения звеньев от предусмотренных на схеме механизма. Чем больше значения отклонений соизмеримы с линейными размерами звеньев, тем сильнее их влияние на работу механизма. Это проявляется в отклонении законов движения реального механизма от предусмотренных при проектировании.

Указанные отклонения особенно существенны в быстроходных механизмах, где они — причина добавочных сил инерции, дина-

мических нагрузок в кинематических парах, вибраций и др. Для роботов, машин-автоматов, измерительных и управляющих механизмов точность работы — основная качественная характеристика.

Отклонения в законах движения механизма являются его ошибками: чем больше ошибка, тем менее точен механизм. Для оценки ошибок реальный механизм сравнивают с теоретическим, который не содержит никаких неточностей в размерах и форме звеньев и

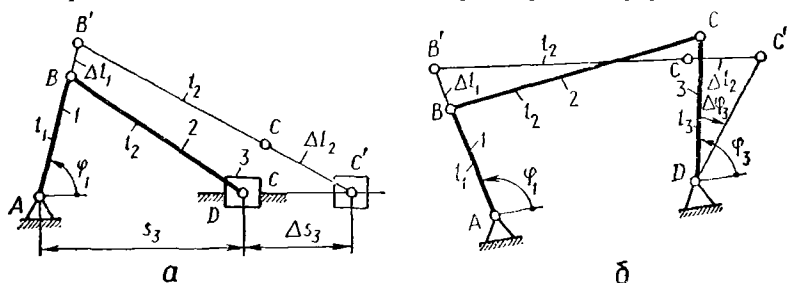


Рис. 27.1. Ошибка положения в шарнирно-рычажных механизмах

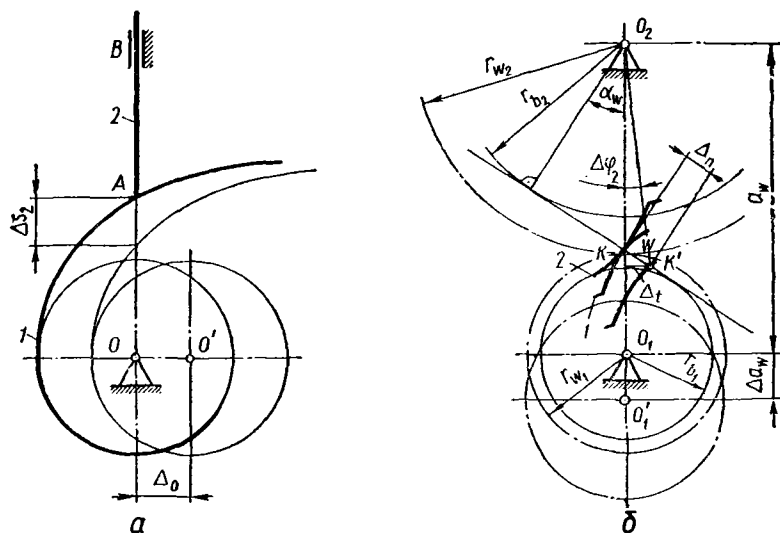


Рис. 27.2. Ошибка положения в механизмах с высшими парами

точно воспроизводит заданный закон движения. Разность в положении выходных звеньев при одинаковых положениях входных звеньев реального и теоретического механизмов называют *ошибкой положения механизма*. На рис. 27.1 для простейших рычажных механизмов показаны линейная (а) ошибка положения  $\Delta s_3$  ползуна 3 и угловая (б) ошибка положения  $\Delta \varphi_3$  коромысла 3, возникшие из-за погрешностей  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  длин кривошипов 1 и шатунов 2. Ошибка положения возникает и при погрешности  $\Delta o$ ,  $\Delta a_w$  относительного расположения центров вращательных

пар и направляющих, как например, в кулачковом (рис.27.2, а) или зубчатом (б) механизмах.

Разница перемещений выходных звеньев реального и теоретического механизмов при одинаковых перемещениях их входных звеньев называют *ошибкой перемещения механизма*. Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 27.3, а) при перемещении входного звена из положения 1 в положение 2 ошибка перемещения  $\Delta s_{3п} = s_3 - s'_3$ , для кривошипно-коромыслового (б) —  $\Delta \varphi_{3п} =$

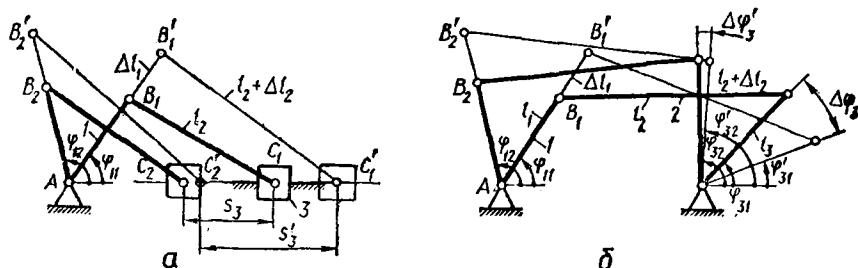


Рис. 27.3. Ошибка перемещения в шарнирно-рычажных механизмах

$= \Delta \varphi_3 - \Delta \varphi'_3$ . Ошибка перемещения, заключающаяся в отставании перемещения выходного звена при изменении направления движения входного, называется «*мертвым ходом*». Он появляется в основном из-за зазоров в кинематических парах и изменения деформаций звеньев механизмов.

Ошибки положения и перемещения при движении звеньев изменяются, а при неизменных погрешностях —  $\Delta s = \Delta s(t)$ ,  $\Delta \varphi_3 = \Delta \varphi_3(t)$ ,

$$\Delta s_{п} = \Delta s_{п}(t), \Delta \varphi_{3п} = \Delta \varphi_{3п}(t).$$

Продифференцировав функцию ошибки положения по времени, получим последовательно *ошибки скорости и ускорения механизма*. Продифференцировав функции ошибки перемещения по обобщенной координате, характеризующей положения входного звена, получим *ошибку передаточного отношения*  $\Delta i(\varphi_3)$ .

## 27.2. Причины появления ошибок механизмов

**Ошибки механизмов можно условно разделить на три группы:**

1. *Ошибки систематические для данного типа механизма.* Это ошибки, которые одинаковы по величине или закону их изменения в функции того или иного параметра не только для рассматриваемого механизма, но и для всех механизмов этого типа.

2. *Ошибки систематические для единичного механизма,* но случайные для множества механизмов данного типа. Значения и законы изменения таких ошибок повторяются при многократных действиях данного механизма, но они различны для каждого отдельного механизма.

3. Ошибки *случайные* и для типа и для отдельного механизма. Они не повторяются не только в разных механизмах, но и при повторных действиях рассматриваемого механизма.

Ошибки первой группы появляются, когда в механизме вместо схемы, точно воспроизводящей заданный закон движения, применяют простую кинематическую схему, воспроизводящую этот закон приближенно. Такая упрощенная конструкция является экономически более выгодной, а требуемая точность работы механизма достигается его

последующей регулировкой. Ошибка механизма в этом случае называется *ошибкой схемы*  $\Delta s_{сх}$  и определяется как разность перемещений выходных звеньев действительного механизма с упрощенной схемой  $s_y$  и теоретического механизма  $s_r$ . Например, для преобразования вращательного движения в поступательное применяется зубчатый реечный механизм (рис. 27.4, а)

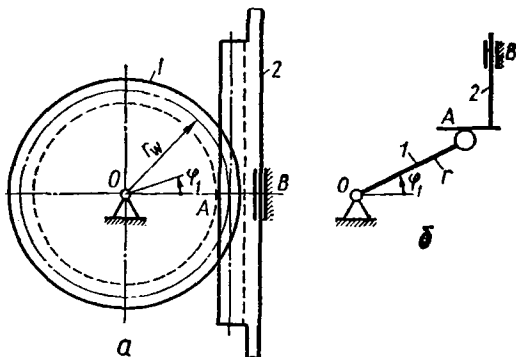


Рис. 27.4. К вопросу об ошибке схемы механизма

или более простой рычажный механизм (б). В первом механизме поступательное перемещение выходного звена 2 будет  $s_r = r_w \varphi_1$ , во втором — по упрощенной схеме  $s_y = r \sin \varphi_1$ . Ошибка схемы механизма составит при  $r = r_w$ :  $\Delta s_{сх} = s_y - s_r$ .

При малом угле  $\varphi_1$  поворота входного звена 1 ошибка  $\Delta s_{сх} \approx 0$ , но при увеличении  $\varphi_1$  она становится существенной.

Ошибки второй группы возникают из-за неизбежных отклонений размеров и форм звеньев и их деталей при изготовлении и сборке механизмов. Они определяются технологией производства. Их источниками являются неточности станков и инструмента, деформации деталей при их обработке на станке и монтаже, неоднородность материала деталей и т. п. Они проявляются в перекосах и непараллельностях осей кинематических пар, изменении взаимного расположения их элементов.

Ошибки третьей группы возникают при эксплуатации механизмов. Они обусловлены местными искажениями профиля контактирующих поверхностей, изменением упругих деформаций, колебательными процессами и т. п., вызванными действующими силами (см. гл. 23, 24). К этой группе относятся и температурные ошибки, возникающие при изменении линейных размеров звеньев и механических свойств их материалов, а также вязкости смазывающих материалов при изменении температуры в механизме. Весьма существенны ошибки, связанные с изнашиванием элементов кинематических пар.

### 27.3. Дифференциальный метод определения ошибок механизмов

Наиболее общий метод определения ошибок механизма — это *дифференциальный метод*, в котором ошибка положения механизма определяется как полный дифференциал функции положения, а приращения переменных этой функции рассматриваются как погрешности. Функция положения при этом может задаваться как в явном, так и в неявном виде (системой уравнений, тригонометрическими соотношениями и т. п.). *Неявный способ задания функции* при оценке ошибок более удобен в случаях, когда функция положения представляет громоздкое выражение, например в механизмах с низшими кинематическими параметрами.

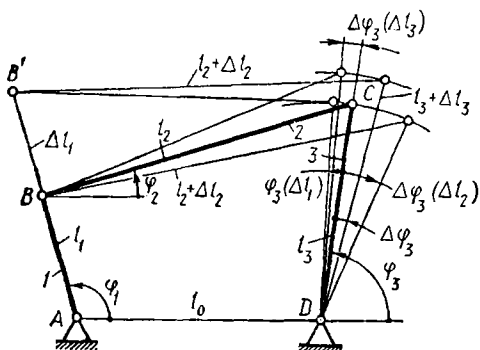


Рис. 27.5. Определение ошибки положения дифференциальным методом

Рассмотрим применение дифференциального метода для определения ошибки положения  $\Delta\varphi_3$  коромысла 3 четырехзвенника (рис. 27.5), звенья 1, 2 и 3 которого имеют погрешности линейных размеров соответственно  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  и  $\Delta l_3$ . Спроецируем векторный контур, образованный осями звеньев на координатные оси (см. гл. 7):

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_0 + l_3 \cos \varphi_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= l_3 \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (27.1)$$

Продифференцируем выражения (27.1) по переменным  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , заменяя знак дифференциала на знак ошибки:

$$\cos \varphi_1 \Delta l_1 + \cos \varphi_2 \Delta l_2 - l_2 \sin \varphi_2 \Delta \varphi_2 = \cos \varphi_3 \Delta l_3 - l_3 \sin \varphi_3 \Delta \varphi_3; \quad (27.2)$$

$$\sin \varphi_1 \Delta l_1 + \sin \varphi_2 \Delta l_2 + l_2 \cos \varphi_2 \Delta \varphi_2 = \sin \varphi_3 \Delta l_3 + l_3 \cos \varphi_3 \Delta \varphi_3. \quad (27.3)$$

Представляя  $\Delta\varphi_2$  в выражении (27.3) через другие переменные и подставляя его значения в условия (27.2), после преобразований получим для ошибки положения  $\Delta\varphi_3$  звена 3:

$$\Delta\varphi_3 = (1/l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)) (\cos(\varphi_2 + \varphi_3) \Delta l_3 - \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \Delta l_1 - \Delta l_2). \quad (27.4)$$

В выражении (27.4) значения  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  определяются из зависимостей для функций положения звеньев 2 и 3 (см. гл. 7). Множители перед погрешностями  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$ ,  $\Delta l_3$  называются *коэффициентами влияния*. На рис. 27.5 графически проиллюстрировано влияние каждой из погрешностей на  $\Delta\varphi_3$ .

Дифференциальный метод позволяет найти ошибку механизма независимо от причины ее появления. С помощью этого метода



легко определить ошибки положения простых механизмов, входящих в сложные кинематические схемы. Недостатком его является то, что в нем не учитываются погрешности параметров, не входящих в выражение для функции положения, например ошибки взаимного расположения элементов кинематических пар, определяющих зазоры в них.

Для определения влияния погрешностей звеньев на ошибку механизмов, имеющих сложные функции положения звеньев, удобно применять *метод преобразованного механизма*, вытекающий из дифференциального. В нем используется свойство незави-

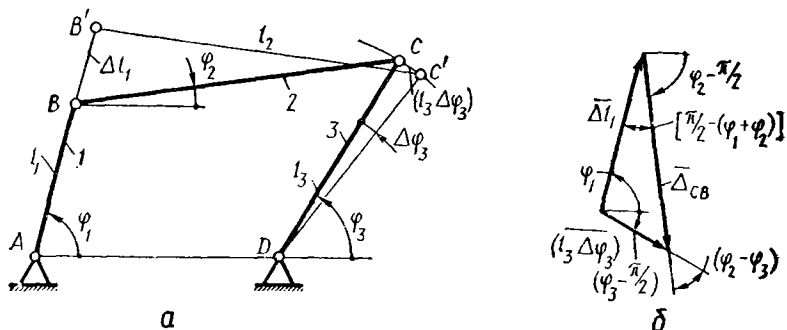


Рис. 27.6. Определение ошибки положения методом преобразованного механизма

симости частных производных функции от дифференциала переменной, по которой вычисляется производная. Так, например в выражении (27.4) коэффициенты влияния перед погрешностями от них не зависят. Это дает возможность, представляя погрешность как возможное перемещение точек звена, на котором она возникла, определить погрешности положения других звеньев как их соответствующие перемещения.

Рассмотрим определение этим методом ошибки положения  $\Delta \varphi_3$  звена 3 шарнирного четырехзвенника (рис. 27.6, а) от погрешности  $\Delta l_1$  длины кривошипа 1. Пусть точка B звена 1 получит перемещение  $\Delta l_1$  в направлении увеличения длины кривошипа. Тогда перемещение точки C по дуге радиуса DC составит  $l_3 \Delta \varphi_3$ . Его можно определить как сумму двух перемещений:  $\overline{\Delta l_1}$  и  $\overline{\Delta_{CB}}$  — перемещение точки C относительно точки B по дуге окружности CB радиуса  $(l_3 \Delta \varphi_3) = \overline{\Delta l_1} + \overline{\Delta_{CB}}$ . Из векторного многоугольника (б) получим

$$\Delta l / (l_3 \Delta \varphi_3) = \sin(\varphi_2 - \varphi_3) / \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \pi/2) = \sin(\varphi_2 - \varphi_3) / (-\cos(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

откуда получим зависимость, соответствующую выражению (27.4):

$$\Delta \varphi_3 = -(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) / (l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3))) \Delta l_1.$$

## 27.4. Метод малых перемещений

Для многосвязных механизмов ошибку положения определяют построением векторного многоугольника малых перемещений. При его построении относительное перемещение представляется состоящим из нормального, учитывающего изменение размера по оси звена, и тангенциального перемещения, являющегося следствием его

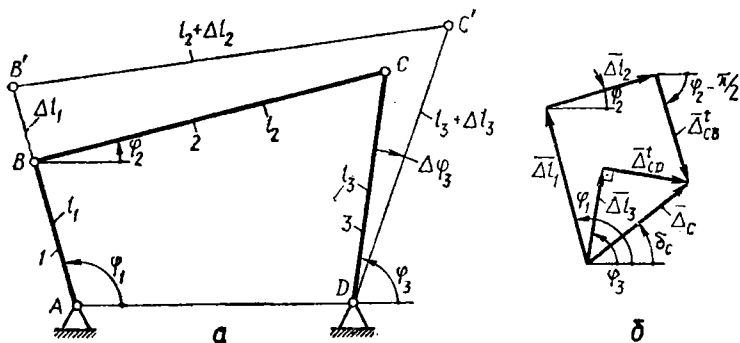
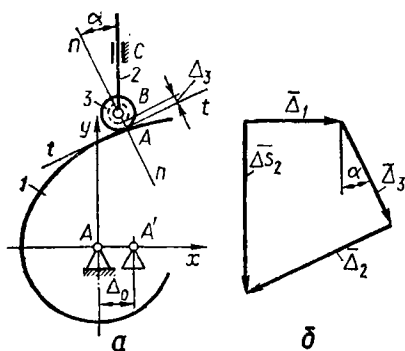


Рис. 27.7. Определение ошибки положения методом малых перемещений

Рис. 27.8. Определение ошибки положения кулачкового механизма



углового перемещения. Построение многоугольника перемещений по методике аналогично построению многоугольника ускорений. Так, для механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 27.7, а) многоугольник перемещений (рис. 27.7, б) строится реализацией векторных уравнений

$$\bar{\Delta}_C = \bar{\Delta}_B + \bar{\Delta}_{CB}^n + \bar{\Delta}_{CB}^t \quad \text{и} \quad \Delta_C = \bar{\Delta}_{CD}^n + \bar{\Delta}_{CD}^t, \quad (27.5)$$

где  $\Delta_B = \Delta l_1$  — перемещение центра шарнира  $B$  при изменении длины звена  $I$ ;  $\Delta_{CB}^n = \Delta l_2$ ;  $\Delta_{CB}^t = \Delta l_3$  — нормальные составляющие перемещений центра шарнира  $C$  относительно центров  $B$  и  $D$ ;  $\Delta_{CB}^t$  и  $\Delta_{CD}^t$  — тангенциальные составляющие перемещений, направленные по линии векторов относительных скоростей;  $\Delta_C$  — перемещение центра шарнира  $C$  от действия погрешностей  $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ .

Имея многоугольник малых перемещений, проводят любые расчеты, связанные с точностью, например, определяют ошибки положения звеньев 2 и 3 соответственно по перемещениям  $\bar{\Delta}_{CB}^t$  и  $\bar{\Delta}_{CD}^t$ . Уравнения (27.5) решают с помощью операторных функций, представляя векторное уравнение  $\bar{\Delta}_B + \bar{\Delta}_{CB}^n + \bar{\Delta}_{CB}^t = \bar{\Delta}_{CD}^n + \bar{\Delta}_{CD}^t$  системой линейных уравнений, и задаваясь направлениями векторов погрешностей на линиях их действия так, как это выполнялось

при расчетах кинематики структурных групп (см. гл. 16):

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_{CB} \cos(\varphi_2 + \pi/2) - \Delta'_{CD} \cos(\varphi_3 + \pi/2) &= \Delta l_3 \cos \varphi_3 - \Delta l_1 \cos \varphi_1 - \\ &\quad - \Delta l_2 \cos \varphi_2; \\ \Delta'_{CB} \sin(\varphi_2 + \pi/2) - \Delta'_{CD} \sin(\varphi_3 + \pi/2) &= \Delta l_3 \sin \varphi_3 - \Delta l_1 \sin \varphi_1 - \\ &\quad - \Delta l_2 \sin \varphi_2; \end{aligned} \right\}$$

$$A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_2 + \pi/2) & -\cos(\varphi_3 + \pi/2) \\ \sin(\varphi_2 + \pi/2) & -\sin(\varphi_3 + \pi/2) \end{vmatrix};$$

$$C(2) = (\Delta l_3 \cos \varphi_3 - \Delta l_1 \cos \varphi_1 - \Delta l_2 \cos \varphi_2); \quad \Delta l_3 \sin \varphi_3 - \Delta l_1 \sin \varphi_1 - \\ - \Delta l_2 \sin \varphi_2);$$

$$\text{СИСТЕМА } (2, A(2, 2), C(2); \Delta'_{CB}, \Delta'_{CD}).$$

Направления тангенциальных составляющих погрешностей определяют, используя операторную функцию  $UGL3$ :

$$UGL3(\varphi_2, \pi/2, \Delta'_{CB}; \delta_{CBt});$$

$$UGL3(\varphi_3, \pi/2, \Delta'_{CD}; \delta_{CDt}),$$

где  $\delta_{CBt}$  и  $\delta_{CDt}$  — направляющие углы векторов  $\bar{\Delta}'_{CB}$  и  $\bar{\Delta}'_{CD}$ .

Тогда, принимая  $\Delta'_{CB} = |\Delta'_{CB}|$ ,  $\Delta'_{CD} = |\Delta'_{CD}|$ , вектор погрешности перемещения центра шарнира  $C$  получим, применяя операторную функцию

$$SMVKT(\Delta l_3, \varphi_3, \Delta'_{CD}, \delta_{CDt}; \Delta_C, \delta_C).$$

Ошибки положения звеньев 2 и 3 будут вычисляться по зависимостям:

$$\Delta \varphi_2 = \Delta'_{CB}/l_2, \quad \Delta \varphi_3 = \Delta'_{CD}/l_3.$$

При наличии в цепи высшей кинематической пары наличие ошибки положения требует рассмотрения функции положения как векторного уравнения, описывающего условия существования высшей кинематической пары. Для плоских механизмов задача сводится к построению многоугольника перемещений. При этом следует иметь в виду, что вектор перемещения точки контакта представляется как сумма векторов нормального и тангенциального к поверхности элемента перемещений.

Ошибку положения  $\Delta s_2$  кулачкового механизма (рис. 27.8) из-за смещения  $\Delta_1 = \Delta_0$  центра  $O$  кулачкового механизма и погрешности  $\Delta_3$  изменения радиуса ролика толкателя определяют из уравнения  $\bar{\Delta} S_2 = \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_3 + \bar{\Delta}_2$ . Вектор тангенциального перемещения  $\Delta_2$  направлен по касательной к профилю кулачка, а вектор  $\bar{\Delta}_2$  — по линии скорости толкателя 2. Тогда из рассмотрения многоугольника перемещений, проецируя векторы на направление нормали  $n - n$ , получим

$$\Delta s_2 = \Delta_3/\cos \alpha + \Delta_1 \operatorname{tg} \alpha, \quad (27.6)$$

где  $\alpha$  — угол давления.

Из выражения (27.6) следует, что ошибка положения кулачкового механизма зависит от угла давления. С уменьшением угла давления уменьшается и ошибка положения механизма.

### 27.5. Учет влияния зазоров в кинематических парах на ошибку механизмов

Для обеспечения подвижности размеры элементов кинематических пар охватывающих поверхностей звеньев выполняют несколько большими, чем охватываемых. Из-за этого появляется возможность относительного перемещения звеньев по линии действия реакции на величину образуемого зазора: во вращательной паре (рис. 27.9, а) это разность диаметров охватываемого  $d_1$  и охватывающего  $d_2$  элементов  $\Delta = d_2 - d_1$ . Аналогично находят зазор

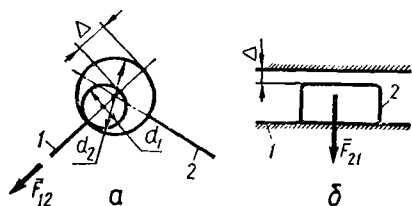


Рис. 27.9. Влияние зазоров на ошибку механизма

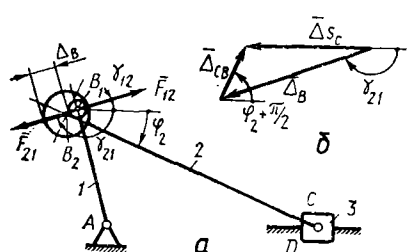


Рис. 27.10. Определение ошибки положения ползуна из-за зазора во вращательной кинематической паре

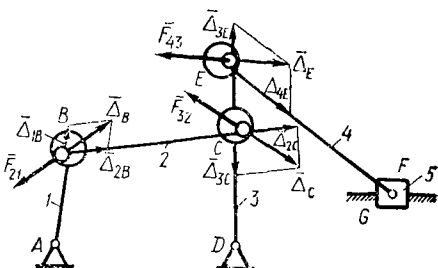


Рис. 27.11. Использование многоугольника перемещений для учета зазоров при определении ошибки положения механизма

в поступательной паре (б). Из-за действия сил трения поверхности элементов кинематических пар изнашиваются и со временем зазор  $\Delta$  увеличивается, в результате чего растет ошибка механизма. Зная направления реакций в каждой кинематической паре, можно, используя метод преобразованного механизма, определить влияние зазора в каждой кинематической паре на ошибку положения. Например, погрешность  $\Delta_{SC}$  положения ползуна 3 из-за зазора в кинематической паре B (рис. 27.10, а) определится из векторного треугольника перемещений (рис. 27.10, б), образованного вектором перемещения  $\bar{\Delta}_B$  центра  $B_2$  элемента кинематической пары звена 2 в направлении действия силы  $\bar{F}_{21}$ , вектора  $\bar{\Delta}_{CB}$  перемещения центра пары C относительно точки  $B_2$  и замыкающего искомого вектора  $\Delta_{SC}$ .

В более сложных механизмах ошибка положения из-за зазоров в кинематических парах определяется также построением многоугольника перемещений, но зазоры по линиям действия реакций раскладываются на составляющие по осям звеньев, образующих кинематические пары (рис. 27.11). Эти составляющие как бы удлиняют или укорачивают размеры звеньев по оси. Если при определении ошибки положения необходимо учесть и погрешности осевых размеров, то они алгебраически суммируются с погрешностями от зазоров.

При изменении направления вращения входного звена появляется ошибка мертвого хода  $\Delta_{м.х.}$ . Она определяется суммированием ошибок положений от зазоров в кинематических парах с учетом изменения направлений реакций при изменении направления вращения. Ошибка мертвого хода возникает и из-за погрешностей звеньев. Так, например, в эвольвентном зацеплении цилиндрических колес (рис. 27.2, б) из-за погрешности  $\Delta a_w$  межосевого расстояния возникает нормальный зазор  $\Delta_n$  между зубьями колес и, следовательно, мертвый ход  $\Delta_{м.х.}$ . Для компенсации его колесо 2 поворачивается на угол  $\Delta\varphi_2 = \Delta a_w \operatorname{tg} \alpha_w$ . Так как  $\Delta_l = \Delta a_w \operatorname{tg} \alpha_w$ , то  $\Delta\varphi_2 = (\Delta a_w / r_{w_2}) \operatorname{tg} \alpha_w$ . Тогда при изменении направления вращения колеса 1 получим

$$\Delta_{м.х.} = (2\Delta a_w / r_{w_2}) \operatorname{tg} \alpha_w.$$

## 27.6. Компенсация ошибок и регулировка механизмов

Технологические возможности оборудования, на котором изготавливаются детали и звенья, не позволяют получать механизмы, точно воспроизводящие требуемые законы движения. В различных механизмах указанные ошибки проявляются по-разному. В зависимости от назначения механизма и его конструкции преобладающее значение имеет одна из каких-либо ошибок. В этом случае анализируются причины, ее вызывающие, и принимаются меры по устранению ее влияния с учетом действия этой ошибки. Иногда в механизмах предусматривают специальные **регулирующие устройства**, предназначенные для компенсации при сборке механизмов ошибок изготовления звеньев. Компенсатор представляет собой устройство, изменяющее отклонение одного из параметров механизма от номинального значения, для устранения ошибки положения или перемещения. **Компенсиремыми при регулировании параметрами** обычно являются линейные и угловые размеры звеньев или координаты взаимного расположения элементов стойки.

Различают три основных типа регулирования механизмов. Ошибка схем и другие, относящиеся к первому типу ошибок, компенсируются введением на выходном звене постоянной поправки  $\Delta_n$  (рис. 27.12, а), которая позволяет существенно уменьшить ошибку положения (перемещения) механизма, сводя ее до уровня отклонений относительно  $\Delta_n$  (заштрихованная часть графика). Ошибки второго типа часто зависят от изменения обобщенной координаты

входного звена. Они в значительной степени скомпенсированы введением поправки  $\delta_n$ , линейно зависящей от изменения обобщенной координаты (рис. 27.12, б). При отсутствии закономерностей в изменении ошибки для ее компенсации требуется более сложная регулировочная функция (рис. 27.12, в).

Постоянная поправка  $\Delta_n$  вводится применением простых регулировочных устройств для компенсации возможных неточностей

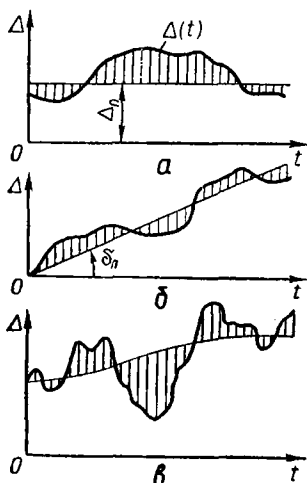


Рис. 27.12. Три типа регулировочных функций

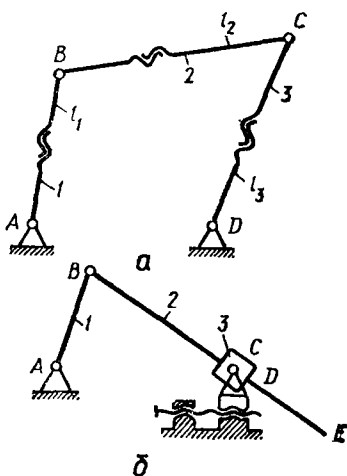


Рис. 27.13. Регулировочные устройства

длины звеньев (рис. 27.13, а). Линейная поправка  $\delta_n$  вводится изменением соотношения линейных размеров участков звеньев (рис. 27.13, б). При сложном характере регулировочной функции конструкции компенсаторов усложняются. Часто требуемая точность достигается одновременной регулировкой нескольких компенсирующих устройств (рис. 27.13, а). Необходимое количество компенсаторов и их параметров определяются оценкой коэффициентов влияния или расчетом многоугольников перемещений.

## 28. РЕГУЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СКОРОСТИ ЗВЕНЬЕВ МЕХАНИЗМОВ

### 28.1. Способы регулирования движения механизма

В период установившегося движения машинного агрегата скорости звеньев не постоянны (см. гл. 22). Они циклически изменяются относительно значений средних скоростей. Закон изменения этих колебаний зависит от типа механизма, масс и моментов инерции его звеньев, систем сил, на них действующих, способа приведения механизма в движение. Неравномерность движения вызывает колебания в механизмах, которые являются одной из причин неточностей

изготавливаемых на станках деталей, вибраций в транспортирующих машинах, ошибок в показаниях приборов и т. п.

Для большинства машин и приборов колебания скоростей звеньев допустимы только в пределах, определяемых коэффициентом неравномерности движения  $\delta$  (см. гл. 22). Для ограничения этих колебаний в границах рекомендуемых значений  $\delta$  регулируют отклонения скорости звена приведения от ее среднего значения. Для машинных агрегатов, обладающих свойством саморегулирования, регулирование заключается в подборе масс и моментов инерции звеньев, соответствующих системам движущих сил и сил сопротивления в агрегате для обеспечения энергетического баланса. Так как менять массы и моменты инерции всех звеньев нецелесообразно, задача решается установкой дополнительной маховой массы. Конструктивно ее оформляют в виде маховика — массивного диска или кольца со спицами. Часто функции маховика выполняют зубчатые колеса или шкивы ременных передач, тормозные барабаны и другие детали, для чего им придают соответствующую массу. Маховые массы накапливают кинетическую энергию в периоды цикла, когда приведенный момент движущих сил больше приведенного момента сил сопротивления и скорость звена возрастает. В периоды цикла, когда имеет место обратное соотношение между моментами сил, накопленная кинетическая энергия маховых масс расходуется, препятствуя снижению скорости. Следовательно, маховик выполняет роль аккумулятора кинетической энергии и способствует уменьшению пределов колебаний скорости относительно среднего значения ее при постоянной мощности двигателя.

Если машинный агрегат не обладает свойством саморегулирования, то колебания скорости звена приведения не имеют периодического характера. Равномерность движения достигается применением специальных устройств — регуляторов скорости. Регуляторы скорости увеличивают или уменьшают мощность двигателя, сохраняя постоянство скорости ведущего звена механизма, т. е. регулирование осуществляется за счет изменения внешних воздействий на механизм со стороны двигателя.

## **28.2. Обеспечение равномерности движения агрегата без учета характеристики его двигателя**

Если не учитывается механическая характеристика двигателя машинного агрегата, то приведенная сила и ее момент зависят только от положения звена приведения. Тогда для периода установившегося движения механизма уравнение его движения в энергетической форме (см. гл. 22) имеет вид  $E - E_0 = \Sigma A$ , или  $\Delta E = \Sigma A = \Delta E (\varphi_n)$ . Количество кинетической энергии звеньев механизма в рассматриваемом  $E$  и начальном  $E_0$  положениях звена приведения определяется значениями его угловой координаты  $\varphi_n$ . Если в механизме выделить постоянную  $J_c$  и переменную  $J_v$  составляющие момента инерции, то зависимость момента инерции звена приведения от угловой координаты  $\varphi_n$  описывается функцией

$J_n = J_n(\varphi_n) = J_c + J_v(\varphi_n)$ . Исключая из выражений для  $\Delta E(\varphi_n)$  и  $J_n(\varphi_n)$  координату  $\varphi_n$ , получим функцию  $\Delta E = \Delta E(J_n)$ , графическая интерпретация которой (рис. 28.1) называется *диаграммой энергомасс* (диаграмма Ф. Виттенбауэра, см. прил.).

Если диаграмму энергомасс сместить вверх на величину  $E_0$ , что равносильно смещению оси  $OJ_n$  вниз на эту же величину, то она будет отображать изменение всей кинетической энергии механизма в зависимости от  $J_n$ . Колебания угловой скорости звена привода определяют соотношением  $J_v(\varphi_n)$  и  $J_c$ . Для того чтобы эти коле-

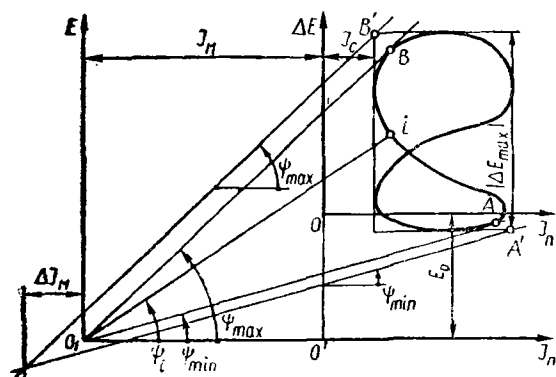


Рис. 28.1. Диаграмма энергомасс

бания не превышали максимального  $\omega_{\max}$  и минимального  $\omega_{\min}$  значений скорости, определяемых значениями коэффициента неравномерности движения  $\delta$ , необходимо добавить к постоянной составляющей момента инерции  $J_c$  маховую массу с моментом инерции  $J_m$ . Графически это отобразится смещением оси  $O\Delta E$  влево на величину  $J_m$ . В полученной таким образом координатной системе  $J_n O_1 E$  для любой точки  $i$  диаграммы энергомасс справедливо равенство  $E_i/J_{ni} = \omega_i^2/2$ , а угловой коэффициент прямой  $O_1 i$  равен  $\operatorname{tg} \psi_i = \omega_i^2/2$ .

При различных положениях точки  $i$  на диаграмме угол  $\psi_i$  будет меняться от  $\psi_{\min}$  до  $\psi_{\max}$ , которым соответствуют положения касательных  $O_1 A$  и  $O_1 B$ , проведенных к нижним и верхним участкам диаграммы под этими углами. Угловые коэффициенты этих прямых будут

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 0,5(1 + \delta/2)^2 \omega_{\text{ср}}^2; \\ k_2 &= 0,5(1 - \delta/2)^2 \omega_{\text{ср}}^2. \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

Уравнения касательных запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta E - \Delta E_A &= k_1(J_n - J_A); \\ \Delta E - \Delta E_B &= k_2(J_n - J_B), \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

где  $J_A$ ,  $\Delta E_A$ ,  $J_B$ ,  $\Delta E_B$  — координаты точек  $A$  и  $B$  касания с диаграммой энергомасс прямых с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$ .

Решение системы уравнений (28.2) относительно  $J_n$  определит момент инерции маховой массы, при котором колебания угловой



скорости звена приведения относительно  $\omega_c$  ограничены:  $\omega_{\max} = (1 + \delta/2) \omega_{\text{ср}}$  и  $\omega_{\min} = (1 - \delta/2) \omega_{\text{ср}}$ .

После преобразований из выражений (28.2) получим зависимость для определения момента инерции маховой массы:

$$J_m = |(1/2\delta)((J_A - J_B)(1 + \delta^2/4) + (J_A + J_B)\delta) + (\Delta E_A - \Delta E_B)/(\delta\omega_{\text{ср}}^2)|. \quad (28.3)$$

Выражение (28.3) реализуется, если известны координаты точек  $A$  и  $B$ . Их определяют либо графически с помощью диаграммы энергомасс, либо при численном решении на ЭВМ для массивов значений  $\Delta E$  ( $\varphi_n$ ) и  $J_n$  ( $\varphi_n$ ). Небольшая погрешность в определение  $J_m$  вносится, если проводить не касательные к диаграмме, а под углами  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  прямые через точки с координатами  $B$  ( $J_{n \min}$ ,  $\Delta E_{\max}$ ) и  $A$  ( $J_{n \max}$ ,  $\Delta E_{\min}$ ) (рис. 28.1).

Если пренебречь влиянием переменной составляющей  $J_v$  приведенного момента инерции на неравномерность движения, т. е. принять  $J_A = J_B = J_c$ , то из выражения (28.3) получим

$$J_m = |\Delta E_{\max}|/(\delta\omega_{\text{ср}}^2) - J_c. \quad (28.4)$$

Аналогичный результат получим, рассматривая уравнение движения машины (см. гл. 22):

$$\omega(\varphi) = \omega_{\text{ср}} + \Delta E_c(\varphi)/(J_c\omega_{\text{ср}}) - (|\Delta\omega_{\max}| - |\Delta\omega_{\min}|)/2 \approx \omega_{\text{ср}} + \Delta E_c(\varphi)/(J_c\omega_{\text{ср}}).$$

Так как  $\omega(\varphi)$  и  $\Delta E_c(\varphi)$  пропорциональны, то экстремальные значения функции  $\Delta E_c(\varphi)$  соответствуют экстремальным значениям функции  $\omega(\varphi)$ . Тогда при установке маховой массы получим:

$$\Delta E_{c \max} = 0,5(J_m - J_c)(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = 0,5(J_m - J_c)(\omega_{\max} + \omega_{\min})(\omega_{\max} - \omega_{\min}). \quad (28.5)$$

Вводя в выражение (28.5) множитель  $(\omega_{\text{ср}}/\omega_{\text{ср}})$  и учитывая, что

$$\omega_{\text{ср}} = (\omega_{\max} + \omega_{\min})/2 \text{ и } \delta = (\omega_{\max} - \omega_{\min})/\omega_{\text{ср}},$$

получим

$$J_m = |\Delta E_{\max}|/(\delta\omega_{\text{ср}}^2) - J_c. \quad (28.6)$$

### 28.3. Обеспечение равномерности движения агрегата с учетом характеристики его двигателя

Колебания скорости звена приведения при работе машинного агрегата приводят к изменению момента движущей силы  $M_d$ , так как для большинства двигателей  $M_d$  является функцией  $\omega$  (см. гл. 22). У ряда двигателей — синхронных электродвигателей, гидродвигателей и др. (см. гл. 20), имеющих жесткую характеристику, эти колебания незначительны. Но для некоторых (асинхронных, постоянного тока с параллельным возбуждением и др.) они существенны. Поэтому для более точного определения момента инерции маховика следует учитывать характеристику двигателя. Если участок

рабочей характеристики двигателя заменить отрезком прямой, то график  $M_d(\omega)$  имеет вид, представленный на рис. 28.2, а. Тогда при скорости звена приведения  $\omega = \omega_{cp}$  из функции  $M_d(\omega)$  получим среднее значение момента движущей силы  $M_{d,cp}$  и примем его равным среднему моменту сил сопротивления ( $M_{d,cp} = M_{cp}$ ).

Амплитуды колебаний угловой скорости звена приведения устанавливаются либо через коэффициент  $\delta$ , либо интегрированием дифференциального уравнения движения механизма с двигателем

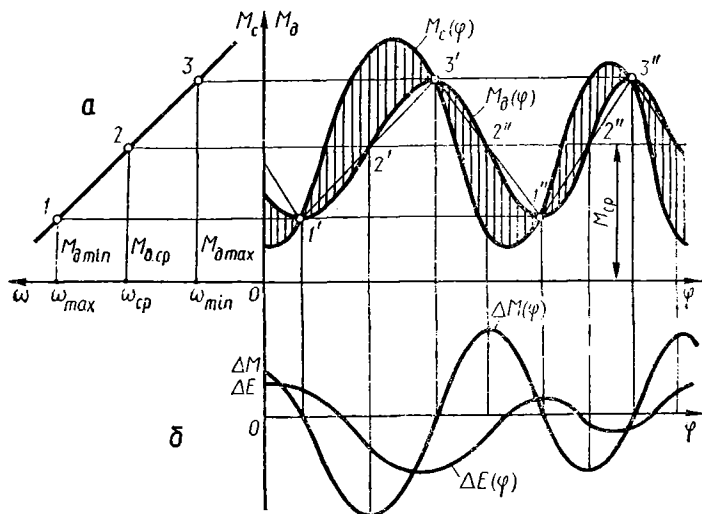


Рис. 28.2. Графики моментов сил движущих, сопротивлений и избыточной работы

(см. гл. 22). Определив значения  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$  по рабочей характеристике, найдем соответствующие им значения движущего момента  $M_{d, min}$  и  $M_{d, max}$ .

Так как при экстремальных значениях угловой скорости звена приведения угловое ускорение равно нулю, то приведенные моменты движущих сил и сил сопротивления равны. Следовательно, в точках пересечения графика функции  $M_d(\omega)$  с линиями для  $M_{d, max}$  и  $M_{d, min}$  имеем  $M_c = M_d$ . На интервалах  $1'-3'$ ,  $3'-1''$ ,  $1''-3''$  между точками пересечения функция  $M_d(\omega)$  имеет точки перегиба, и ее истинный характер устанавливается подстановкой значения  $\omega$  в уравнение характеристики двигателя. Тогда функция избыточной работы  $\Delta A(\varphi) = \Delta E(\varphi)$  определится интегрированием функции  $\Delta M(\varphi) = M_d(\omega) - M_c(\varphi)$ . Дальнейший ход решения рассматриваемой задачи аналогичен случаю, когда не учитывается характеристика двигателя и момент инерции маховика может быть определен по зависимостям (28.3) или (28.6).

## 28.4. Определение размеров маховика и выбор места его установки

Конструктивно маховики оформляют в виде дисков или колец со спицами (рис. 28.3). Их изготавливают из чугуна или стали. Для дисковых маховиков (а) момент инерции относительно оси равен  $J_m = mD^2/8$ . Если массу  $m$  выразить через объем и плотность  $\rho$  материала, то получим

$$D = \sqrt[4]{32J_m/\pi b\rho}. \quad (28.7)$$

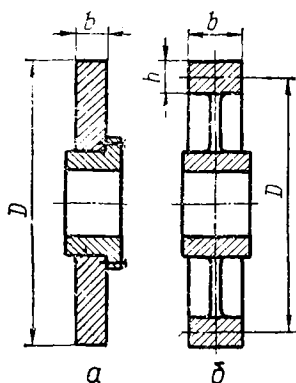


Рис. 28.3. Определение момента инерции маховика

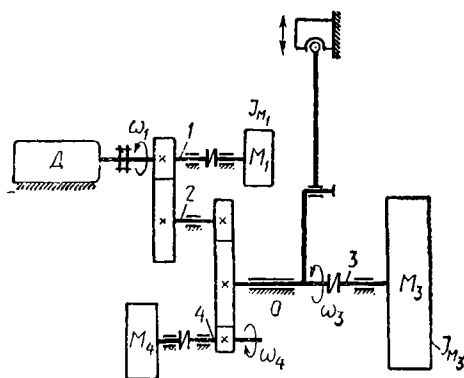


Рис. 28.4. Выбор места установки маховика

Для маховика в виде кольца со спицами (б), пренебрегая массой спиц, получим  $J_m = mD^2/4$ , или  $J_m = \pi b h \rho D^3/4$ . Обозначая  $\lambda_b = b/D$  и  $\lambda_h = h/D$ , получим  $J_m = \pi \lambda_b \lambda_h \rho D^3/4$ , откуда

$$D = \sqrt[3]{4J_m/\pi \lambda_b \lambda_h \rho}. \quad (28.8)$$

Из анализа выражений (28.7) и (28.8) следует, что материалоемкость маховика обратно пропорциональна квадрату его диаметра. При одинаковых диаметрах масса дискового маховика примерно в два раза больше, чем маховика со спицами. Из зависимостей (28.3) и (28.6) видно, что момент инерции маховика обратно пропорционален квадрату угловой скорости звена приведения. Поэтому для уменьшения размеров маховика целесообразно устанавливать его на самом быстроходном валу механизма. Однако такое решение не всегда рационально, так как при этом не учитывается реальная жесткость звеньев и возникающих из-за этого колебаний в механизмах.

Если вращение к рабочей машине передается от двигателя через передаточный механизм, например зубчатый (рис. 28.4), то источником возмущающих колебаний в агрегате будут как двигатель, так и передаточный механизм. Так как звенья этого механизма упругие, то под действием возмущающих сил они колеблются (см. гл. 24). Выбором звена передаточного механизма для установки

маховика достигается эффективное снижение колебаний угловой скорости звена приведения. Если источником колебаний в агрегате с приводом от электродвигателя является рабочая машина (поршневые машины, молоты, прессы и т. п.), то маховик целесообразно устанавливать на валу 3 этой машины — звене приведения. В этом случае передаточный механизм и двигатель разгружаются от динамических воздействий из-за колебаний звеньев, которые превышают номинальную нагрузку (особенно при резонансных режимах) и передаточный механизм рассчитывается без учета пиковых моментов. Кроме того, улучшаются условия пуска электродвигателя за счет сокращения времени пуска.

Для уменьшения момента инерции и массы маховика его помещают на валу 4, соединенном с валом звена приведения повышающей передачей. В этом случае  $J_{M_4} = J_M (\omega_n/\omega_4)^2$  и для двигателя и передаточного механизма сохраняется разгружающий эффект. Если в агрегатах с приводом от поршневых машин (двигателей внутреннего сгорания, поршневых гидродвигателей и др. источником колебаний является двигатель, то для защиты передаточного и рабочего механизмов от динамических воздействий маховик целесообразно устанавливать на валу 1 двигателя. В этом случае  $J_{M1} = J_M (\omega_n/\omega_1)^2$ .

При отступлении от указанных рекомендаций, например при установке маховика на валу 1 при приводе от электродвигателя и действии возмущающих колебаний от рабочей машины, между двигателем и звеном приведения появляется упругая связь (передаточный механизм). Если жесткость этой связи принять равной  $C$  и предположить, что силы сопротивления деформированию создают момент, пропорциональный скорости поворота вала  $k(d\varphi/dt)$ , а возмущающий момент, действующий на звено приведения,  $M = M \sin \omega_B t$ , то дифференциальное уравнение, описывающее движение звена приведения механизма, имеет вид (см. гл. 24)

$$d^2\varphi/dt^2 + 2nd\varphi/dt + \omega_c^2\varphi = q \sin \omega_B t, \quad (28.9)$$

где  $\omega_c = \sqrt{C/J_n}$  — частота собственных колебаний звена приведения:  $2n = k/J_n$ ;  $q = M/J_n$ .

Из решения уравнения (28.9) следует, что при  $\omega_B = \omega_{cp}$  максимальный угол закручивания вала звена приведения равен (см. гл. 24)  $\varphi_n = (M/C) k_d$  при коэффициенте динамичности

$$k_d = 1/\sqrt{(1 - (\omega_{cp}/\omega_c)^2) + 4n^2 (\omega_{cp}/\omega_c)^2}. \quad (28.10)$$

Из выражения (28.10) следует, что при совпадении  $\omega_{cp}$  с собственной частотой колебаний системы  $\omega_c$  наступает резонанс. Следовательно, увеличение приведенного момента инерции за счет добавления маховой массы приводит к увеличению колебаний угловой скорости звена приведения. Этот фактор не учитывается при выводе зависимостей (28.3) и (28.6).

## 28.5. Обеспечение равномерности движения машины с помощью регуляторов скорости

Если машинный агрегат не обладает свойством саморегулирования, то его движение становится неустойчивым. Нарушение равенства приведенных моментов движущих сил и моментов сил сопротивления вызовет либо остановку машины, либо увеличение скорости движения до недопустимого, с точки зрения нормальной эксплуатации, уровня. Неустойчивость движения характерна для машинных агрегатов с приводом от двигателей внутреннего сгорания, с асинхронным двигателем в период его пуска и т. п. Так как условия на-

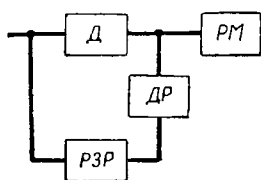


Рис. 28.5. Схема подключения регулятора к рабочей машине

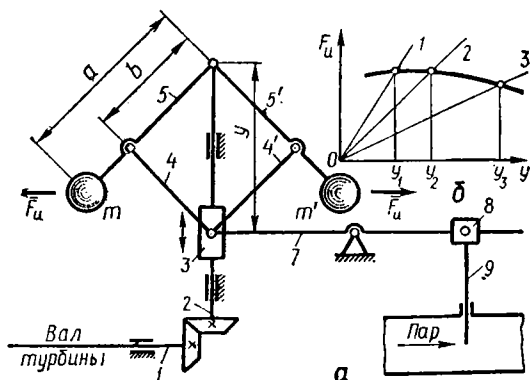


Рис. 28.6. Схема прямого регулирования

гружения многих машин непрерывно меняются во время их эксплуатации, то нормальная работа таких агрегатов возможна только при наличии специальных устройств, поддерживающих постоянной угловую скорость звена привода, — регуляторов.

Работа регулятора основана на применении принципа обратной связи, заключающегося в следующем. Пусть двигатель  $D$  (рис. 28.5) соединен с рабочей машиной  $PM$ , на которую действует сила сопротивления, меняющаяся по произвольному закону. Воздействие рабочей машины на двигатель, следовательно, тоже непрерывно изменяется. Эти изменения воспринимаются датчиком регулятора  $ДР$ , который, воздействуя на рабочее звено  $РЗР$  регулятора, увеличивает или уменьшает подачу энергии на двигатель. Таким образом, двигатель при работе действует на регулятор, который, в свою очередь, управляет работой двигателя.

Регулирование по принципу обратной связи может быть *прямым*, когда регулятор воздействует непосредственно на регулирующий орган двигателя, и *непрямым* — через вспомогательные устройства (сервомоторы). На рис. 28.6 приведена схема прямого регулирования паровых турбин, принцип которого практически не изменился с момента их изобретения. Вал паровой турбины 1 приводит во вращение вал регулятора 2, связанный со звеньями 3—4—5 и 3—4'—5', образующими два симметрично расположенных кривошипно-ползунных механизма с грузами  $m$  и  $m'$ . При изменении скорости вращения турбины грузы под действием центробеж-

ных сил  $\bar{F}_n$  перемещаются в радиальном направлении, благодаря чему ползун 3 передвигается по валу 2 регулятора. Движение звена 3 с помощью звеньев 7—8 приводит к перемещению задвижки 9, в результате чего соответственно изменяется подача пара в турбину. Скорость вращения ее вала сохраняется в установленных пределах.

При непрямом регулировании используются не механические воздействия двигателя на обратную связь, а электрические, гидравлические и др. На рис. 28.7 изображена схема регулирования

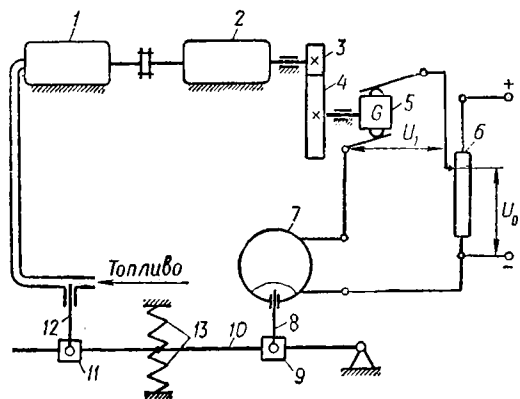


Рис. 28.7. Схема непрямого регулирования

с помощью электрического сигнала, вырабатываемого тахогенератором 5, ротор которого приводится в движение через зубчатые колеса 3—4, связывающие его с валом рабочей машины 2, приводимой в движение двигателем внутреннего сгорания 1. Тахогенератор 5 вырабатывает ток напряжением  $U_1$ . Один зажим тахогенератора соединен со щеткой потенциометра 6, находящегося под напряжением постоянно-

го тока. В усилительное устройство электромагнита 7 подается разность напряжений  $U_1 - U_0$ , которая равна нулю для установленной средней скорости двигателя. При изменении скорости вала рабочей машины напряжение  $U_1$  увеличивается или уменьшается. Происходит рассогласование напряжений, и сердечник 8 электромагнита опускается или поднимается. Его движение преобразуется звеньями 9, 10, 11 в перемещение задвижки 12, регулирующей количество топлива, подаваемого в двигатель. Пружины 13 уравнивают усилие, действующее на сердечник 8.

Регулирующие свойства регуляторов могут быть оценены по характеристикам, представляющим зависимость силы инерции  $\bar{F}_n$  масс грузов регулятора, напряжения тахогенератора  $U$  и т. п. от координаты перемещения рабочих звеньев приборов. Для механического регулятора характеристику получают из условия равновесия грузов при вращении его вала, для электрического — рассмотрением влияния скорости ротора на вырабатываемое напряжение. Для механического регулятора (рис. 28.7, а) получим зависимость силы инерции  $F_n = -m(a^2/2b^2)\omega^2y$  от  $\omega$  и  $y$ . Задаваясь частотами вращения  $\omega$ , для которых необходимо обеспечить регулирование, получим значения координат  $y$  ползуна 3 (рис. 28.6). Зависимость  $F_n(y)$  является характеристикой регулятора (рис. 28.7, б), а кривая, образованная точками  $y_i, F_i$ , представляет уравнивающую функцию регулятора.

Важное свойство регуляторов — это их *статическая устойчивость*, проявляющаяся в стремлении регулятора вернуть систему в состояние равновесия, из которого она выведена возмущающими силами, и *динамическая неустойчивость*, проявляющаяся в изменении угловой скорости регулируемого вала со временем при изменении нагрузки на машину. Свойства регуляторов и оценка устойчивости их работы исследуются *методами теории автоматического регулирования*.

## 29. ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАШИННОГО АГРЕГАТА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

### 29.1. Пути ограничения динамических воздействий машин на окружающую среду

Работа машинного агрегата сопровождается динамическими воздействиями его на окружающую среду. При относительном движении звеньев усилия в кинематических парах изменяются, что приводит к переменному нагружению стойки механизма. Вследствие этого фундамент, на котором установлен машинный агрегат, испытывает циклически изменяющиеся по величине и направлению силы. Эти силы через фундамент передаются на несущие конструкции здания, соседние машинные агрегаты и приборы и приводят к колебаниям и вибрациям. Неравномерность движения звеньев механизмов приводит к возникновению дополнительных сил инерции. Эти силы увеличивают колебания и вибрации звеньев механизма и машины в целом и сказываются на точности их работы. Если амплитуда колебаний достаточно велика (например, при работе в зоне резонанса), то в деталях звеньев возникают напряжения, превышающие допускаемые, что приводит к их разрушению. Вибрации — это причина выхода из строя деталей самолетов и вертолетов, элементов газовых и паровых турбин, неточностей в работе станков, роботов и т. п.

Колебания являются причиной создания таких условий работы машин, когда затрудняется деятельность обслуживающего персонала из-за вибраций деталей и чрезмерного шума. Во многих случаях для предупреждения вредного влияния на человеческий организм требуется специальное оборудование рабочих мест машинистов экскаваторов и грузоподъемных машин, трактористов и водителей автомобилей, пилотов вертолетов и т. п.

Приведенные примеры показывают, что для нормальной эксплуатации машин требуется привести в соответствие с действующими нормами динамические параметры агрегатов. Воздействием на определенным образом выбранный параметр динамической характеристики добиваются одновременного изменения уровня шума, вибраций звеньев, фундамента и т. п. Снижение динамических воздействий агрегата на окружающую среду достигается уравниванием механизмов. *Под уравниванием механизмов понимается перераспределение масс определенных звеньев таким обра-*

зом, чтобы максимально уменьшить их воздействие на другие подвижные звенья и стойки.

Наибольший эффект уравнивания достигается при условии, когда массы звеньев подобраны и распределены таким образом, чтобы при работе механизмов машины их центры масс были неподвижны и центробежные моменты инерции звеньев относительно осей вращения были равны нулю, а относительно других осей — постоянны. При этом сумма проекций всех сил инерции на координатные оси и моменты сил инерции относительно этих осей равны нулю, а сумма количеств движения постоянна. Выполнение этих условий свидетельствует о полной уравновешенности агрегата. Не все механизмы могут быть полностью уравновешены, но выполнение этого условия требует последовательного решения задач уравнивания сил инерции звеньев шарнирно-рычажных механизмов, сил инерции вращающихся масс звеньев, сведения до минимума изменения сил, действующих на фундамент.

## 29.2. Уравнивание звеньев шарнирно-рычажных механизмов

Условия уравнивания сил инерции подвижных звеньев механизма выражаются уравнениями

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_{ni} = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n M_{ni} = 0, \quad (29.1)$$

где  $\bar{F}_{ni} = -m_i \bar{a}_{S_i}$  — главный вектор сил инерции, действующих на  $i$ -е звено механизма, имеющее массу  $m_i$ , сосредоточенную в центре масс  $S_i$  звена,двигающегося с ускорением  $\bar{a}_S$  центра масс;  $M_{ni} = -J_{S_i} \bar{\epsilon}_i$  — главный момент сил инерции, действующих на  $i$ -е звено, обладающее моментом инерции  $J_{S_i}$  относительно центра масс идвигающееся с угловым ускорением  $\bar{\epsilon}_i$ .

Оба условия (29.1) выполняются для механизмов с постоянными приведенными моментами инерции звеньев — зубчатых, фрикционных и др. Для механизмов с переменными приведенными моментами инерции звеньев — шарнирно-рычажных, кулачковых — обычно выполняется лишь первое условие:

$$\sum_{i=1}^n F_{ni} = - \sum_{i=1}^n m_{S_i} a_{S_i} = 0.$$

Оно выполняется, если центр масс  $S$  механизма неподвижен или двигается с постоянной скоростью, т. е. при  $\bar{a}_S = 0$ . Так как для механизмов характерно циклическое движение, то ускорение центра масс ( $\bar{a}_S = 0$ ) соблюдается, если центр масс неподвижен, т. е. при  $v_S = 0$ . Это достигается добавлением к звеньям дополнительных масс — противовесов, характер движения которых выбирают таким, чтобы повлиять в нужном направлении на положение центра масс механизма. Их величины и места установки определяют из следующих соображений.



В кривошипно-ползунном механизме (рис. 29.1) единственной неподвижной точкой является центр кривошипа  $A$ . Если так разместить противовесы, чтобы центр масс механизма был приведен в эту точку, то силы инерции механизма уравниваются. С этой целью приведем центр масс звеньев 2 и 3 в центр шарнира  $B$  установкой противовеса массой  $m_{n1}$ . Для определения массы  $m_{n2}$  и координат ее установки рассмотрим в координатной системе  $x_2y_2$  уравнения статических моментов для звеньев 2 и 3:

$$\left. \begin{aligned} m_2 x_{S_2} + m_3 l_2 + m_{n2} x_{n2} &= 0; \\ m_2 y_{S_2} + m_{n2} y_{n2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.2)$$

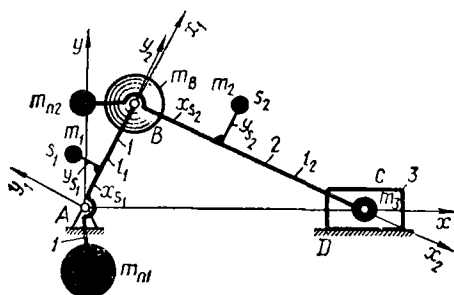


Рис. 29.1. Уравнивание звеньев кривошипно-ползунного механизма

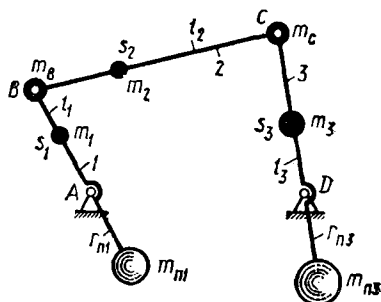


Рис. 29.2. Уравнивание звеньев шарнирного четырехзвенника

Из выражений (29.2) получим зависимости для определения координат точки установки противовеса:

$$\left. \begin{aligned} x_{n2} &= -(m_2 x_{S_2} + m_3 l_2) / m_{n2}; \\ y_{n2} &= -y_{S_2} (m_2 / m_{n2}). \end{aligned} \right\}$$

Задавая величину  $m_{n2}$ , определим координаты  $x_{n2}$  и  $y_{n2}$ . Очевидно, что чем больше  $m_{n2}$ , тем ближе к центру  $B$  устанавливается противовес. После установки противовеса  $m_{n2}$  в точке  $B$  сосредотачивается масса  $m_B = m_2 + m_3 + m_{n2}$ . Для приведения центра масс механизма в точку  $A$  введем противовес  $m_{n1}$ , координаты установки которого в системе  $x_1A y_1$  определяют из рассмотрения уравнений статических моментов:

$$\left. \begin{aligned} m_B l_1 + m_{n1} y_{n1} + m_1 x_{S_1} &= 0; \\ m_1 y_{S_1} + m_{n1} y_{n1} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x_{n1} &= -(m_B l_1 + m_1 x_{S_1}) / m_{n1}; \\ y_{n1} &= -y_{S_1} (m_{n2} / m_{n1}). \end{aligned} \right\}$$

Если в механизме имеется несколько звеньев, вращающихся относительно неподвижной точки, то задача решается установкой противовесов на звеньях, соединяющихся со стойкой. Для механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 29.2), центры масс звеньев которого расположены как указано, получим

$$m_2 = m_B + m_C; \quad m_B l_{AS_2} = m_C (l_2 - l_{BS_2}),$$

откуда

$$m_B = m_2((l_2 - l_{BS_2})/l_2); \quad m_C = m_3 l_{BS_3}/l_2.$$

Размещая массы противовесов  $m_{п1}$  и  $m_{п3}$  на продолжениях звеньев 1 и 3, найдем положения их относительно центров вращения звеньев:

$$r_{п1} = (m_B l_1 + m_1 l_{AS_1})/m_{п1};$$

$$r_{п3} = (m_C l_3 + m_3 l_{DS_3})/m_{п3}.$$

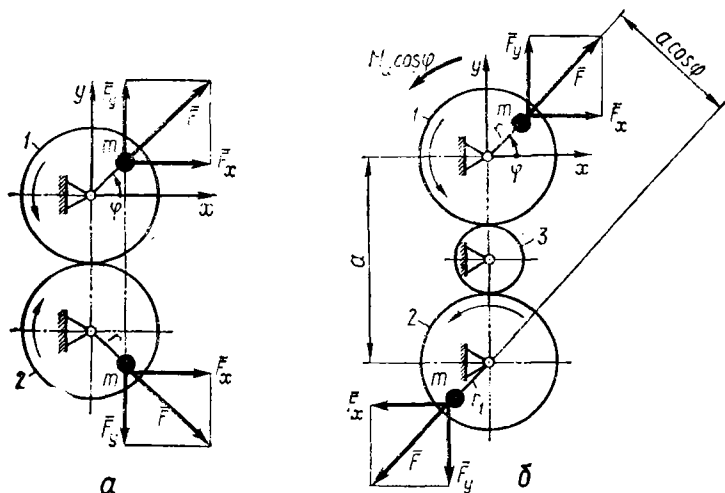


Рис. 29.3. Схемы механизмов с частичным уравновешиванием:  
а — сил инерции; б — моментов сил инерции

Дополнительные противовесы увеличивают общую материалоемкость конструкции и переменную часть приведенного момента инерции, ухудшая динамические характеристики машины в период установившегося движения. Часто уравновешивают силы инерции не полностью, а только их составляющие, которые являются возбудителями колебаний звеньев. Для этого используют различные устройства, как, например, приспособление, предназначенное для уравновешивания вертикальной составляющей  $F_y$  центробежной силы инерции неуравновешенной массы  $m$  звена 1 механизма (рис. 29.3, а), включающее дополнительное звено 2, развивающее такую же силу инерции. В механизме со звеньями (основным 1 и дополнительным 2), вращающимися в одну сторону (рис. 29.3, б), второе звено 2 предназначено для создания уравновешивающего момента  $M = m\omega^2 r a \cos \varphi$  в случае действия в механизме 1 периодически меняющегося момента силы инерции  $M_n(\varphi) = M_n \cos \varphi$ . Так как  $\cos \varphi = \cos(\pi - \varphi)$ , то  $mr = M_n/\omega^2 ra$  при установке противовесов с фазовым углом  $\pi$ .

### 29.3. Уравновешивание вращающихся звеньев с неуравновешенными массами

Конструктивное исполнение механизмов иногда приводит к необходимости расположения на оси вращающегося звена неуравновешенных масс. Массы располагаются в одной плоскости, их может быть одна или несколько. Они находятся в параллельных плоскостях вдоль оси. При вращении такого звена возникают неуравновешенные силы инерции, которые, действуя на его опоры, вызывают колебания фундамента.

Рассмотрим случай с одной неуравновешенной массой. Если элементарная масса  $dm$  (рис. 29.4), положение которой на окружности радиуса  $\rho$  определяется углом  $\varphi$ , то при вращении звена с угловой скоростью  $\omega$  действие результирующей силы инерции определится из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} dF_x &= \omega^2 \rho \cos \varphi dm - \varepsilon \rho \sin \varphi dm; \\ dF_y &= \omega^2 \rho \sin \varphi dm + \varepsilon \rho \cos \varphi dm; \\ dF_z &= 0; \\ dM_x &= dF_y z; \\ dM_y &= -dF_x z; \\ dM_z &= dF_x y - dF_y x. \end{aligned} \right\} \quad (29.3)$$

Интегрируя уравнение (29.3) по всему объему массы, получим проекции главных векторов сил инерции и их моментов:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \omega^2 \int x dm - \varepsilon \int y dm = \omega^2 x_S m - \varepsilon y_S m; \\ F_y &= \omega^2 \int y dm + \varepsilon \int x dm = \omega^2 y_S m + \varepsilon x_S m; \\ F_z &= 0; \\ M_x &= \omega^2 \int y z dm + \varepsilon \int z x dm; \\ M_y &= -\omega^2 \int z x dm + \varepsilon \int y z dm; \\ M_z &= -\varepsilon \int y^2 dm - \varepsilon \int x^2 dm = -\varepsilon \int \rho^2 dm. \end{aligned} \right\} \quad (29.4)$$

В уравнениях (29.4) интегралы  $\int y z dm$ ,  $\int z x dm$  — центробежные моменты инерции, а  $\int \rho^2 dm$  — момент инерции относительно оси вращения.

Из уравнений (29.4) следует, что силы  $F_x$  и  $F_y$  равны нулю, если центр масс лежит на оси вращения звена. Результирующая сила инерции в этом случае равна также нулю:  $F_H = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 0$ . Такое звено называется статически уравновешенным.

Выполнение условия  $F_H = 0$  для звена с несколькими неуравновешенными массами (рис. 29.5, а) достигается установкой противовеса, масса  $m_H$  которого определяется из условия равновесия

авена:

$$\bar{F}_{n1} + \bar{F}_{n2} + \bar{F}_{n3} + \bar{F}_{np} = 0.$$

Так как каждая сила инерции будет  $F_{ni} = m_i \omega^2 r_i$ , то имеем

$$m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 + m_n \bar{r}_n = 0. \quad (29.5)$$

Из решения уравнения (29.5) получим величину  $m_n r_n$  и угол установки  $\varphi_n$  уравновешивающей массы  $m_n$  (б). В зависимости от конкретной конструкции задаются  $m_n$  и  $r_n$ , чем определяют параметры противовеса.

Иногда при больших осевых размерах звеньев неуравновешенность возникает из-за неточностей изготовления, например, при

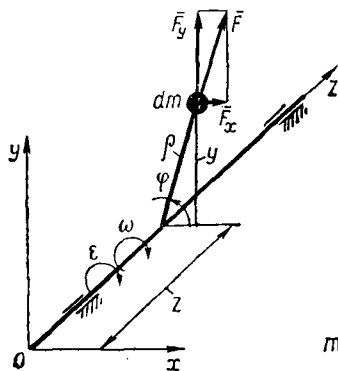


Рис. 29.4. Уравновешивание вращающегося звена с одной неуравновешенной массой

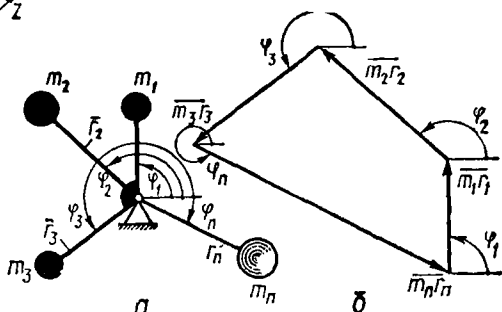


Рис. 29.5. Уравновешивание вращающегося звена с несколькими неуравновешенными массами

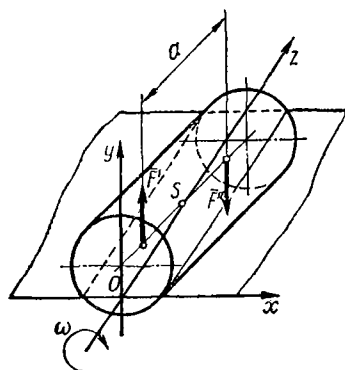
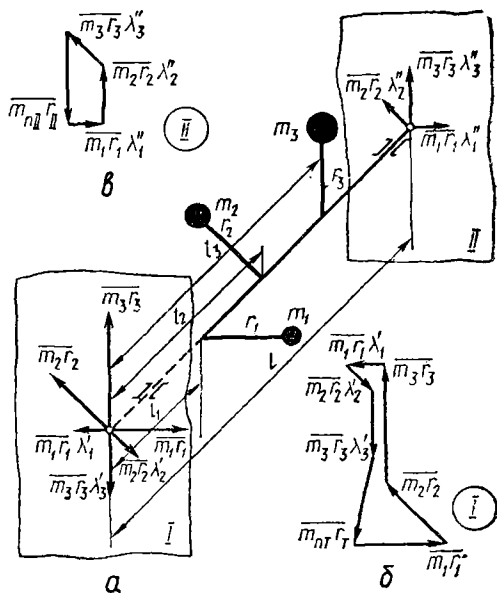


Рис. 29.6. Неуравновешенность, вызванная неточностью изготовления

Рис. 29.7. Уравновешивание вращающегося звена с неуравновешенными массами, расположенными в параллельных плоскостях



погрешности расположения оси вращения (рис. 29.6). Если в этом случае сила инерции  $\bar{F}_u = 0$ , то также равна нулю и проекция  $M_x$  вектора главного момента  $\bar{M}$ . Если не равны нулю проекции  $M_x$  и  $M_y$  вектора  $\bar{M}$ , то возникает момент сил инерции, который можно представить парой сил  $\bar{F}'$  и  $\bar{F}''$ . Этот момент возникает, если ось вращения не является главной центральной осью инерции, т. е. при условии  $\int yzdm \neq 0$  и  $\int xzdm \neq 0$ . Звено будет полностью уравновешено, если  $M_x = M_y = 0$ , т. е. ось вращения будет главной центральной осью инерции.

Если неуравновешенные массы расположены в параллельных плоскостях (рис. 29.7, а), то условия (29.4) реализуются следующим образом. Выберем произвольную плоскость  $I$  и перенесем туда силы инерции вращающихся масс. Для равновесия системы при переносе сил ее необходимо приложить моменты  $M_i = F_{ui}l_i$ . Дополнительные моменты  $M_i$  создаются парами сил  $F_{uii}$  и  $F_{uii}$  при условии  $F_{uii} = F_{uii}$ . Сила  $F_{ui}$  располагается в плоскости  $II$ , положение которой выбирается произвольно. Если расстояние между плоскостями  $I-II$  равно  $L$ , то дополнительные силы определяются из условия

$$F_{uii} = F_{uii} = m_i \omega^2 r_i (l_i/L).$$

Из условия равновесия сил в плоскостях  $I$  и  $II$ , обозначив  $\lambda_i = l_i/L$ , определим уравновешивающие силы в этих плоскостях (рис. 29.7, б и в):

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_1 \bar{r}_1 + \bar{m}_2 \bar{r}_2 + \bar{m}_3 \bar{r}_3 + \bar{m}_1 \bar{r}_1 \lambda_1 + \bar{m}_2 \bar{r}_2 \lambda_2 + \bar{m}_3 \bar{r}_3 \lambda_3 + \bar{m}_{II} \bar{r}_{II} &= 0; \\ \bar{m}_1 \bar{r}_1 \lambda_1 + \bar{m}_2 \bar{r}_2 \lambda_2 + \bar{m}_3 \bar{r}_3 \lambda_3 + \bar{m}_{II} \bar{r}_{II} &= 0. \end{aligned} \right\} (29.6)$$

В уравнениях (29.6) векторы  $\bar{m}_i \bar{r}_i \lambda_i$  и  $\bar{m}_i \bar{r}_i$  имеют противоположные направления. Из первого условия находим произведение  $\bar{m}_{II} \bar{r}_{II}$  и направление установки противовеса в плоскости  $I$ ; из второго —  $\bar{m}_{II} \bar{r}_{II}$  и направление для второго противовеса. Очевидно, что при любом числе неуравновешенных масс для уравновешивания достаточно установить два противовеса в заранее выбранных параллельных плоскостях.

#### 29.4. Балансировка вращающихся звеньев типа ротор

Вращающиеся звенья больших диаметров и длин не бывают полностью уравновешенными из-за неоднородности материала и погрешностей обработки при изготовлении. При большой угловой скорости даже незначительная неуравновешенность вызывает большие силы инерции. Поэтому такие роторы подвергаются дополнительной технологической операции — балансировке. Балансировка заключается в добавлении или удалении (обычно высверливанием) необходимой массы материала.

Неуравновешенный ротор согласно уравнению (29.6) представляют в виде условного звена с двумя массами  $m_I$  и  $m_{II}$  (рис. 29.8, а), расположенными в параллельных плоскостях, вызывающими

появление сил инерции  $\bar{F}_{n1}$  и  $\bar{F}_{n11}$ , пропорциональных статическим моментам  $m_1 r_1$  и  $m_{11} r_{11}$ . Эту неуравновешенность устраняют аналогично предыдущему двумя массами  $m_{n1}$  и  $m_{n2}$ , размещенными в плоскостях исправления  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , — обычно на торцах ротора (рис. 29.8, б). Составим для ротора уравнение равновесия проекций сил инерции на координатные оси:

$$m_{n1} \omega^2 r_{n1} \cos \alpha_1 + m_{n2} \omega^2 r_{n2} \cos \alpha_2 = m_1 \omega^2 r_1 \cos \alpha_{11} + m_{11} \omega^2 r_{11} \cos \alpha_{11};$$

$$m_{n1} \omega^2 r_{n1} \sin \alpha_1 + m_{n2} \omega^2 r_{n2} \sin \alpha_2 = m_1 \omega^2 r_1 \sin \alpha_{11} + m_{11} \omega^2 r_{11} \sin \alpha_{11}.$$

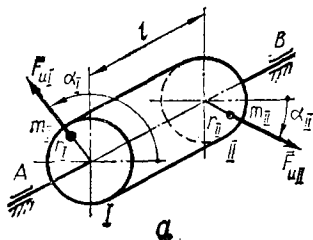


Рис. 29.8. Уравновешивание ротора

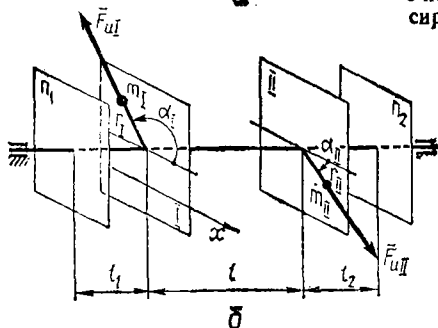
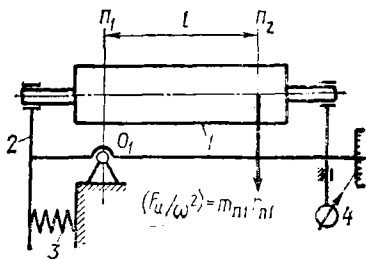


Рис. 29.9. Принципиальная схема балансировочной машины



Заменяя произведения  $r_1 \cos \alpha_1 = z_{1x}$  и  $r_1 \sin \alpha_1 = r_{1y}$  и исключая  $\omega$ , получим

$$\left. \begin{aligned} m_{n1} r_{n1x} + m_{n2} r_{n2x} &= m_1 r_{1x} + m_{11} r_{11x}; \\ m_{n1} r_{n1y} + m_{n2} r_{n2y} &= m_1 r_{1y} + m_{11} r_{11y}. \end{aligned} \right\} (29.7)$$

Выразим  $m_{n1} r_{n1x}$  и  $m_{n1} r_{n1y}$  через уравнения моментов относительно плоскости противовеса II:

$$\left. \begin{aligned} m_{n1} r_{n1x} &= (m_1 r_{1x} (l + l_2) - m_{11} r_{11x} l_2) / (l_1 + l_2 + l); \\ m_{n1} r_{n1y} &= (m_1 r_{1y} (l + l_2) - m_{11} r_{11y} l_2) / (l_1 + l_2 + l). \end{aligned} \right\} (29.8)$$

Аналогично получим  $m_{n2} r_{n2x}$  и  $m_{n2} r_{n2y}$ . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} m_{n1} r_{n1} &= \sqrt{(m_{n1} r_{n1x})^2 + (m_{n1} r_{n1y})^2}; \\ \cos \alpha_{n1} &= (m_{n1} r_{n1x}) / (m_{n1} r_{n1}); \end{aligned} \right\} (29.9)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{n2} r_{n2} &= \sqrt{(m_{n2} r_{n2x})^2 + (m_{n2} r_{n2y})^2}; \\ \cos \alpha_{n2} &= (m_{n2} r_{n2x}) / (m_{n2} r_{n2}). \end{aligned} \right\} (29.10)$$

Произведения  $m_1 r_1$  и  $m_{11} r_{11}$  определяют на специальных балансировочных машинах, одна из схем которых приведена на рис. 29.9.

Указанные параметры определяются разными способами, в основу которых положены методы определения амплитуды колебаний подшипников ротора при их упругом подвесе.

### 29.5. Воздействие неуравновешенных сил машины на фундамент

Рассмотрим механизм  $M$  (рис. 29.10), который закреплен на фундаменте  $\Phi$ . Согласно законам механики механизм находится в равновесии под действием силы тяжести  $\vec{F}_g = m_M \vec{g}$ , приложенной в центре масс  $S_M$  механизма, сил инерции механизма  $m_M \vec{a}_{SM}$  и реакции фундамента  $\vec{F}_\Phi$ . Сила  $\vec{F}_\Phi$  имеет статическую  $\vec{F}_{\Phi c}$  и динамическую  $\vec{F}_{\Phi d}$  составляющие. Динамическую составляющую определяют

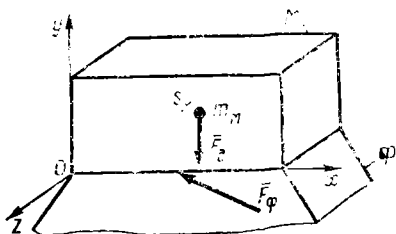


Рис. 29.10. Схема установки машины на фундаменте

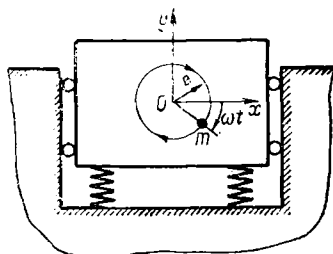


Рис. 29.11. Взаимодействие машины и фундамента

из выражения для главного вектора действующих на механизм сил  $\vec{F}_g + \vec{F}_{\Phi c} + \vec{F}_{\Phi d} = \vec{F}_\Sigma$ . Так как векторы  $\vec{F}_g$  и  $\vec{F}_{\Phi c}$  равны, а направления противоположны, то  $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_{\Phi d} = m_M \vec{a}_{SM}$ . Главный вектор сил инерции подвижных звеньев механизма  $\vec{F}_\Sigma = m_M \vec{a}_{SM}$  равен нулю только в случае  $\vec{a}_{SM} = 0$ . Это соответствует случаю полного уравнивания механизма, когда его центр масс  $S_M$  неподвижен или движется равномерно и прямолинейно. Как было показано выше, это возможно только при вращательном движении звеньев. При наличии поступательно движущихся звеньев полное уравнивание возможно при использовании специальных схем механизмов.

Если вращающиеся звенья уравновешены не полностью, то на стойку механизма и на фундамент машины передаются периодические возмущающие силы (рис. 29.11). Если центр неуравновешенной массы  $m$  расположен от оси вращения на расстоянии  $e$ , то вертикальная составляющая возмущающей силы будет

$$F_y = m\omega_b^2 e \sin \omega_b t.$$

Такое воздействие силы  $F_y$  вызывает вынужденные колебания (см. гл. 24). Подставляя в формулу (24.18)  $F = F_y$ , получим

$$y = (m\omega_b^2 e / C) \sin \omega_b t (1 - \omega_b^2 / \omega_c^2).$$

Максимальную амплитуду колебаний получим при  $\omega_a t = \pm \pi/2$ :

$$y_{\max} = (m\omega_b^2 e/C)(1 - \omega_b^2/\omega_c^2), \quad (29.11)$$

или, вводя  $\omega_c^2/\omega_c^2$ , получим

$$y_{\max} = (me\omega_c^2/C)(\omega_b^2/\omega_c^2)(1/(1 - \omega_b^2/\omega_c^2)). \quad (29.12)$$

Из уравнения (29.12) следует, что при постоянном параметре  $me\omega_c^2/C$  максимальная амплитуда зависит только от отношения  $\omega_b/\omega_c$ . При больших значениях  $\omega_b/\omega_c$  она стремится к  $y_{\max} = me\omega_c^2/C$ , так как коэффициент  $(\omega_b^2/\omega_c^2)/(1 - \omega_b^2/\omega_c^2)$  стремится к единице. Зная максимальную амплитуду вынужденных колебаний и жесткость  $C$  крепления стойки на фундаменте, можно определить величину максимальной силы, передаваемой на него:

$$F_{\max} = Cy_{\max} = me\omega_b^2/(1 - \omega_b^2/\omega_c^2). \quad (29.13)$$

Из формулы (29.13) следует, что упругое крепление машины уменьшает силу, передаваемую на фундамент. Это имеет место, если  $|1 - \omega_b^2/\omega_c^2| > 1$ , т. е. при

$$\omega_b > \omega_c \sqrt{2}. \quad (29.14)$$

Когда машина установлена на весьма податливом креплении, то  $\omega_b \gg \omega_c$  и происходит существенное уменьшение воздействия на фундамент. Следовательно, для уменьшения воздействия возмущающей силы на фундамент необходимо, чтобы собственная частота колебаний  $\omega_c$  была мала по сравнению с угловой скоростью  $\omega_b$ . Если система крепления к фундаменту позволяет совершать машине и горизонтальные колебания, то решение задачи усложняется из-за пространственного характера колебаний.

## 29.6. Защита механизмов от вибраций

Силы, действующие на стойку механизма, вызывают вибрации фундамента машины. Наложение колебаний фундамента на собственные колебания звеньев механизмов приводят к совпадению частот и возникновению резонансных режимов работы. В этих условиях механизм становится неработоспособным из-за нарушения точности работы, роста амплитуд колебаний и динамических нагрузок. Для предотвращения возникновения резонансных режимов работы в механизмы вводят успокоители колебаний — **демпферы**, создающие силы сопротивления движущимся деталям и расходующие энергию колебательного процесса, способствуя затуханию колебаний (см. гл. 24).

*Коэффициент пропорциональности между силой сопротивления движению и скоростью звена называется коэффициентом успокоения.* Движение звена с демпфером в обобщенных координатах описывается дифференциальным уравнением

$$d^2q/dt^2 + 2ndq/dt + \omega_c^2 q = 0,$$



где  $q$  — обобщенная координата;  $n = k\omega_0\sqrt{Cm}$  — для поступательного движения звена и  $n = k\omega_0\sqrt{CJ}$  — для вращательного движения звена;  $m$  и  $J$  — соответственно масса и момент инерции звена;  $C$  — жесткости звена.

Для характеристики движения звена с демпфером часто используют  $\delta = 2\pi\sqrt{\omega_c^2 - n^2} = 2\pi\beta$ , называемую *логарифмическим декрементом затухания*. В качестве характеристики демпфера

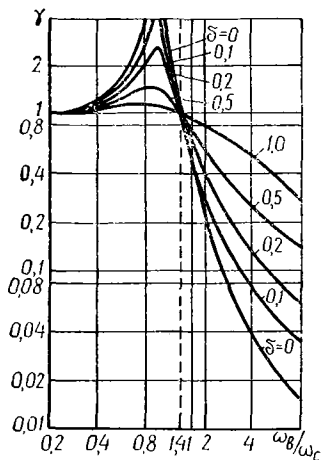


Рис. 29.12. Зависимость коэффициента виброзащиты от коэффициента демпфирования

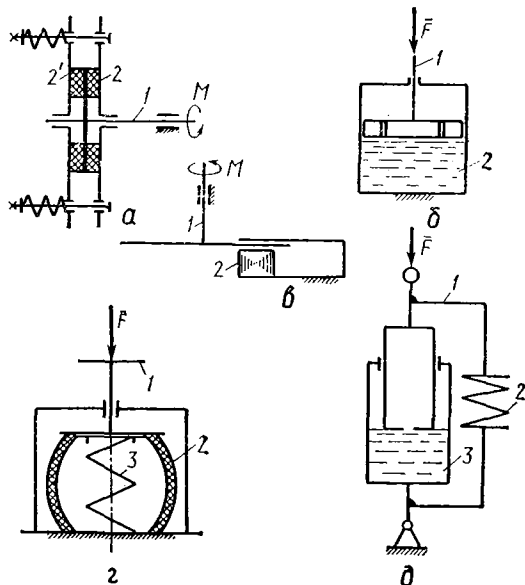


Рис. 29.13. Принципиальные схемы демпферов и амортизаторов: а — механических; б — гидравлических (пневматических); в — электромагнитных и амортизаторов; г — жидкостных

используют  $\mu = n/\omega_0 = \delta/\sqrt{4\pi^2 - \delta^2}$ , называемую *степенью демпфирования*. Период колебаний звена с демпфером будет [см. зависимость (24.40)]

$$T = 2\pi/\beta = (2\pi/\omega_0)\sqrt{1 - \mu^2},$$

откуда следует, что при  $\mu = 0$  демпфер не оказывает влияния на характер колебаний, а при  $\mu = 1$  достигается полное успокоение, так как колебательный процесс прекращается.

Перегрузки машин, механизмов и приборов из-за вибраций зависят от ускорений  $a$ , возникающих при колебаниях звеньев, и характеризуются силой инерции  $F_{in} = am$ . Наибольшее ускорение зависит от амплитуды колебаний  $x$  и частоты  $\omega_0$ :

$$a = x\omega_0^2.$$

Степень защиты механизма от вибраций оценивается *коэффициентом виброзащиты*  $\gamma$ , равным отношению амплитуды колебаний  $x_m$  звеньев механизма к амплитуде колебаний  $x_f$  фундамента:

$\gamma = x_M/x_\Phi$ . Коэффициент виброзащиты выражается через частоты колебаний звеньев  $\omega_c$  и фундамента  $\omega_\Phi$  следующим образом:

$$\gamma = \sqrt{((\omega_\Phi/\omega_c)^2 \mu^2 + 1)/((\omega_\Phi/\omega_c)^2 \mu^2 + (\omega_\Phi/\omega_c)^2 - 1)^2}. \quad (29.15)$$

На рис. 29.12 показана зависимость коэффициента виброзащиты от коэффициента демпфирования  $\mu$  и отношения частот  $\omega_\Phi/\omega_c$ . Виброзащита будет обеспечена при  $\gamma < 1$ . Это условие выполняется при  $\omega_\Phi/\omega_c > 1,41$  (см. зависимость (29.14)). Если  $\omega_\Phi/\omega_c > 1,41$ , виброзащита ухудшает условия эксплуатации, так как при этом  $\gamma > 1$  и  $x_M > x_\Phi$ . С уменьшением  $\mu$  при  $\omega_\Phi/\omega_c > 1,41$  величина  $\gamma$  уменьшается и улучшается виброзащита. Однако при низких значениях  $\mu$  демпферы плохо смягчают удары. Обычно выбирают значение  $\mu$  в пределах  $0,2 \leq \mu \leq 0,5$ .

В необходимых случаях стойку механизма устанавливают на специальные устройства с повышенной податливостью — **амортизаторы**, которые позволяют уменьшить усилия, передаваемые на фундамент за счет демпфирования их упругих элементов. В их конструкциях применены разные принципы демпфирования (рис. 29.13). К паспортным данным амортизатора относится его деформация  $f_a$ , мкм, под действием номинальной статической нагрузки. Частота собственных колебаний  $\omega_a$  определяется по зависимости

$$\omega_a = \omega_c = 99,2 \sqrt{1/f_a}.$$

Определяя из условий эксплуатации  $\omega_c = \omega_a$  и коэффициент  $\mu$  по зависимости (29.15), находят истинный коэффициент виброзащиты. Выбор амортизатора осуществляют в обратном порядке.

Отношение нагрузки  $F_a$ , воспринимаемой амортизатором, к деформации называют коэффициентом жесткости  $C_a = F_a/f$ . С увеличением  $C_a$  или уменьшением  $F_a$  увеличивается  $\omega_a$ , что при тех же частотах  $\omega_\Phi$  приводит к ухудшению виброзащиты. Поэтому лучшую виброзащиту обеспечивают амортизаторы с малой жесткостью, нагруженные нагрузкой, близкой к номинальной.

*Ученые, работавшие в области теории механизмов и машин*

**Ассур Л. В.** (1878—1920), русский ученый, один из основателей русской научной школы по теории механизмов и машин.

**Артоболовский И. И.** (1905—1977), академик АН СССР, работал в области теории механизмов и машин.

**Виттенбауэр Фердинанд** (1875—1922), немецкий инженер, работал в области применения графических методов исследований механизмов.

**Грасгоф Франц** (1826—1893), немецкий инженер и механик, работал в области исследования структуры и кинематики механизмов.

**Жуковский Н. Е.** (1847—1921), русский математик и механик, основавший гидро- и аэромеханику.

**Кулон Шарль Огюстен** (1736—1806), французский физик и инженер.

**Лагранж Жозеф Луи** (1736—1813), французский математик и механик, создал аналитическую механику.

**Малышев А. П.** (1879—1962), русский советский ученый, работал в области теории механизмов и машин.

**Новиков М. Л.** (1915—1956), профессор, лауреат Ленинской премии СССР, изобрел новый тип зацепления.

**Сомов С. П.** (1852—1917), русский ученый-механик, впервые в обобщенном виде поставил задачу о структуре кинематических цепей и дал строгое ее решение.

**Чебышев П. Л.** (1821—1894), академик Российской АН, выдающийся математик и механик, основал русскую школу теории механизмов и машин.

**Эйлер Леонард** (1707—1783), великий математик, физик, механик, член Российской АН.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

- Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин.— М. : Наука, 1988.— 638 с.
- Белоконов И. М.* Механика машин. Расчеты с применением ЭЦВМ.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1978.— 232 с.
- Крайнев А. Ф.* Словарь-справочник по механизмам.— М. : Машиностроение, 1981.— 438 с.
- Левитская О. Н., Левитский Н. И.* Курс теории механизмов и машин.— М. : Высш. шк., 1985.— 279 с.
- Озол О. Г.* Теория механизмов и машин.— М. : Наука, 1984.— 432 с.
- Петренко А. И.* Основы автоматизации проектирования.— К. : Техніка, 1982.— 295 с.
- Решетов Л. Н.* Самоустанавливающиеся механизмы.— М. : Машиностроение, 1985.— 272 с.
- Спыню Г. А.* Промышленные роботы. Конструирование и применение.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1985.— 176 с.
- Теория механизмов и машин / Под ред. К. В. Фролова.*— М. : Высш. шк., 1987.— 483 с.

**А**

- Алгоритм базовый 42, 264—270  
 — решения задач теории механизмов  
 и машин 42, 188, 189, 195—213  
 —, структура 264, 270  
 Анализ механизмов динамический  
 241—260  
 — — кинематический 187—190  
 — — структурный 36—42

**Б**

- Балансировка 357—359

**В**

- Вал ведомый 20  
 — ведущий 20  
 Величина скалярная 50

**Г**

- Гиперболоиды начальные 92, 143, 144  
 Грасгофа правило 63  
 Группа структурная 25

**Д**

- Д'Аламбера принцип 244  
 Движение звена на плоскости 189  
 Декремент затухания логарифмиче-  
 ский 361  
 Демпферы 360  
 Демпфирование колебаний вынужден-  
 ных 311, 312  
 — — свободных 310, 311  
 Деталь 6  
 Диаграмма энергомасс 344, 345  
 Диада 26

**З**

- Заклинивание 57  
 Закон движения звеньев 59, 170—173,  
 278, 279  
 — зацепления основной 125, 126  
 — изменения движущей силы и мо-

мента 242

- колебательного движения 304  
 — косинусоидальный 247  
 — сочетательный 50  
 Захват механический 223  
 — пневматический 223  
 — электромагнитный 223  
 Зацепление винтовое 144, 145  
 — зубчатое 20  
 — коническое 140, 141  
 — косозубое 109—112  
 — — эвольвентное 120  
 — — — сферическое 136  
 — — — цилиндрическое 136—139  
 — станочное 104, 105, 134, 135  
 — с линейчатым локализованным  
 контактом  
 — гипоидное 145, 146, 156, 158  
 — цилиндрическое 138  
 — — эквивалентное 138  
 — червячное 153—155  
 Звено входное 7, 13, 37  
 — выходное 13  
 Зубья внутренние 99, 100, 105—107  
 — криволинейные 99  
 — косые 98  
 — прямые 97  
 — шевронные 98

**И**

- Идентификатор функции 42  
 Инверсия 31, 32  
 Инерционность звеньев 244  
 Интерполяция 46  
 Интерференция зубьев 114, 119

**К**

- Категория внешних сил 242—244  
 Классификация сил, действующих на  
 звенья механизмов 241  
 — структурная Артоболевского И. И.  
 6  
 — — Ассура Л. В. 5, 6  
 Колебания звеньев вынужденные 301,  
 305—307  
 — — параметрические 308

- свободные 302—304
  - , соотношение частот 308—310
  - Колесо зубчатое 20, 98
    - косозубое 145
    - цилиндрическое 138
    - с зацеплением Новикова 125
    - бязквивалентное 138, 139
    - червячное 22
    - с линейчатым контактом 22, 149, 150
    - шевронное 20, 96, 98, 102—104
    - плоское исходное 132
  - Контур внешний 132
    - внутренний замкнутый 25
    - исходный 94
    - теоретический 101
    - торцевой 132
    - нормальный 132
  - Коромысло 14, 18
  - Коэффициент вибра защиты 361, 362
    - динамический 305
    - изменения средней скорости ведомого звена 57, 58
    - перекрытия осевой 126, 127
    - суммарный 139, 140
    - полезного действия (КПД) мгновенный 321
      - цикловый 321
      - потерь (КП) 322
      - приведенный 246
      - смещения 115—117, 135, 150, 151, 155
      - исходного контура 320
      - трения 245, 246
      - трения качения 246
      - успокоения 360, 361
      - чувствительности 320
  - Кулона формула 245
- Л**
- Лагранжа уравнение 283
- М**
- Манипулятор антропоморфный 220, 222
- Масса приведения 287
- Массив коэффициентов 44
- Матрица квадратная 49
  - , порядок 49
  - строчная 49
  - столбцовая 49
- Машины 322—326
  - рабочие, характеристики механические 242
- Метод безусловной оптимизации 316—319
  - векторный 79, 80
  - замкнутого векторного контура 58
  - интегрирования численный 44—46
  - математического программирования 319
    - кинематического синтеза 60
    - наложения структурных групп 28—30
    - определения ошибок механизмов 336—341
    - последовательного обращения к операторным функциям 270, 271
    - построения многозвенных механизмов 336—341
    - программирования с ограничениями 319
    - радиальной, тангенциальной или комбинированной подачи 150
    - синтеза 60
      - точный 60
      - приближенный 60
    - сканирования 319
    - условной оптимизации 318, 319
    - целочисленного программирования 161- Механизм винтовой 18, 22, 219, 220
  - гиперболоидный 143, 144
  - гипондный 22
  - двухкривошипный 31
  - дифференциальный замкнутый 237, 238
    - зубчатый 20, 233, 234
    - зубчато-рычажный 20
    - планстарный 164—168, 235—237
  - плоский дифференциальный 30
    - пространственный 22, 158—170
    - рядовой 20, 234, 235, 339
    - составной 168
  - кривошипно-коромысловый 5, 6, 13, 14, 31, 68, 70—74, 214, 215
  - кривошипно-кулисный 15, 76, 77
  - кривошипно-ползунный 15, 17, 83, 84, 74—76, 216, 217
  - кулачковый 18, 22, 20, 170—187, 240
    - мальтийский 77, 8
    - направляющий 14
    - манипуляторов 18
    - передаточный 14
    - плоский 14, 18
      - кулачковый 18
      - с гибкой связью 18
    - рациональный 36
    - с гибкой связью 18
    - с гидравлическим приводом 24
    - с пневматическим приводом 24
    - с разветвленным энергетическим потоком 329, 330
    - суммирующий 30
    - с электроприводом 23
    - универсального шарнира 217—219
    - фрикционный 18, 21, 231—233
    - волновой 238
    - червячный 22
    - шарнирно-рычажный 14, 16, 18, 29, 55, 58, 70, 71

Механизма жесткость 295  
— класс 37, 38  
— схема структурная 24, 25  
— тип 5  
— уравнивание 351, 352  
Механизмов ошибки 333—335  
Модификация червяка 26, 158  
Модуль исходного контура 101  
— червяка 151  
Момент приведенной силы 280  
Монада 25

## Н

Нагрузки динамические 293, 294

## О

Область поиска допустимая 318, 319  
Ограничения дискретизирующие 318  
— параметрические 318  
— функциональные 318  
Определитель системы 44  
Оптимизация многокритериальная  
313, 314  
— по доминирующему критерию 313

Отношение передаточное 59, 60

## П

Параметры внутренние 319, 320  
— входные 42  
— выходные 42  
— геометрические 125  
— исходного контура 101, 102, 320  
— операторной функции 42  
— управляемые 319  
Пара кинематическая 7—9  
Перекрытие осевое 126  
Поводки 10  
Поверхность винтовая 98  
— коническая соосная 131, 132  
— сопряженная 85, 93, 94, 97  
— эвольвентная 98  
— — коническая 130  
— — криволинейная 99  
Порядок системы линейных уравнений 44  
Правило Грасгофа 63  
Принцип Д'Аламбера 244  
— обращения движения 74—76  
Профили эвольвентные 95, 96  
Процесс проектирования машины 312, 313

## Р

Расчет динамический 278, 279  
— механизмов 255—257, 274—276  
— — силовой 255—257, 274—276  
Регулирование 349—351  
Регулятор скорости 343

Роботы промышленные 220, 221  
Ролик 19

## С

Самоторможение 57  
Связи и подвижности избыточные  
34—36  
Сектора зубчатые 20  
Силы и моменты движущие 242  
— производственного сопротивления  
242  
Синтез механизмов 313, 314  
— — структурный 24, 36, 170—177  
— по Чебышеву приближенный 61  
Системы зацепления точечные 119,  
120  
Скольжение удельное 113, 114  
— — скорость 113  
Смещение производящего контура  
рейки 107—109  
Соединение кинематическое 10, 11, 25  
Способ преобразования движения в  
механизме 5  
— последовательных приближений  
263  
— хорд 45  
Степень демпфирования 361  
— — подвижности 12  
Стойка 11, 37  
Сумма двух матриц 50

## Т

Теорема зацепления основная 87  
— о сложном движении 189, 190  
— — составном 194, 195  
Толкатель 18  
Трение без смазывания 245  
— граничное 245  
— жидкостное 245  
— качения 245, 250  
— скольжения 245

## У

Угол эвольвентный 95  
Упругость 293  
Уравнения векторные 188  
— Лагранжа 283  
— линейных и угловых координат  
188  
— моментов 260—262

## Ф

Формула Кулона 245  
Функция операторная 42—46  
— передаточная 59  
— положения звена механизма 58—  
60  
— целевая 159

## Х

Характеристики зацепления 111—119  
— механические рабочих машин 242

## Ц

Цель кинематическая 9  
— — замкнутая 9  
— — незамкнутая 9  
— — плоская 12  
— —, подвижная 12  
— — сложная 9, 10

## Ч

Червяк глобоидный с прямолинейным профилем витка 147, 148  
— конволютный 22, 146, 147  
— линейчатый (геликоидный) 146

— — цилиндрический 149  
— — нелинейчатый цилиндрический 146, 147  
— производящий исходный 148, 149  
Червяка модификация 26, 158  
Четырехзвенник шарнирный 14

## Ш

Шатун 14

## Э

Эвольвента 94  
— сферическая 128—130  
Эволюта 94  
Эффект молекулярного сцепления и трения 246



Введение	3
<b>Раздел первый. СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ</b>	<b>5</b>
<b>1. Основные понятия и определения</b>	<b>5</b>
1.1. Основные принципы классификации	5
1.2. Структурная классификация	5
1.3. Деталь, звено	6
1.4. Кинематические пары	7
1.5. Кинематические цепи	9
1.6. Кинематические соединения	10
1.7. Подвижность кинематической цепи	10
<b>2. Механизмы</b>	<b>13</b>
2.1. Основные признаки механизмов	13
2.2. Плоские механизмы с низшими кинематическими парами	14
2.3. Пространственные механизмы с низшими кинематическими парами	16
2.4. Плоские механизмы с высшими кинематическими парами	18
2.5. Пространственные механизмы с высшими кинематическими парами	21
2.6. Механизмы с немеханическим способом передачи движения	22
<b>3. Структурный синтез механизмов</b>	<b>24</b>
3.1. Задача структурного синтеза	24
3.2. Структурные группы	25
3.3. Образование механизмов методом наложения структурных групп	28
3.4. Образование механизмов методом инверсии	31
3.5. Переход от структурной схемы к реальному механизму	32
3.6. Избыточные связи и подвижности	34
<b>4. Структурный анализ механизмов</b>	<b>36</b>
4.1. Задачи структурного анализа	36
4.2. Определение класса механизма	37
4.3. Структурные преобразования путем замены высших кинематических пар цепями с низшими парами	38
4.4. Анализ связей, налагаемых кинематическими парами	39
<b>Раздел второй. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ</b>	
<b>5. Математические методы, используемые при исследовании механизмов</b>	<b>42</b>
5.1. Операторные функции и базовые алгоритмы	42

5.2.	Операторная функция, реализующая базовые алгоритмы решения систем линейных уравнений	43
5.3.	Операторные функции, реализующие базовые алгоритмы численного интегрирования и дифференцирования	44
5.4.	Действия с векторными величинами	46
5.5.	Матричная форма записи векторных соотношений	49
5.6.	Преобразования координат	52
<b>6.</b>	<b>Пути решения задач кинематического синтеза механизмов с низшими парами</b>	<b>54</b>
6.1.	Задачи, решаемые с помощью механизмов с низшими парами	54
6.2.	Требования к геометрическим параметрам звеньев в связи с задачами кинематики	56
6.3.	Функции положения звеньев и передаточные функции	58
6.4.	Выбор методов синтеза	60
6.5.	Многопараметрическая и многокритериальная оптимизация	62
<b>7.</b>	<b>Синтез плоских механизмов с низшими парами</b>	<b>63</b>
7.1.	Модификации шарнирного четырехзвенника	63
7.2.	Точный метод синтеза шарнирного четырехзвенника	65
7.3.	Приближенный синтез шарнирного четырехзвенника	66
7.4.	Кривошипно-коромысловые механизмы с заданными свойствами	70
7.5.	Кривошипно-ползунные механизмы	74
7.6.	Кривошипно-кулисные механизмы	76
7.7.	Механизмы останковкой ведомого звена	77
<b>8.</b>	<b>Синтез пространственных механизмов с низшими кинематическими парами</b>	<b>78</b>
8.1.	Особенности синтеза пространственных механизмов	78
8.2.	Пространственные шарнирные четырехзвенники	80
8.3.	Кривошипно-ползунные механизмы	83
<b>9.</b>	<b>Пути решения задач кинематического синтеза механизмов с высшими кинематическими парами</b>	<b>84</b>
9.1.	Задачи, решаемые с помощью механизмов с высшими парами	84
9.2.	Требования к геометрии звеньев в связи с задачами кинематики	84
9.3.	Синтез сопряженных поверхностей пространственной высшей кинематической пары	86
9.4.	Синтез элементов плоской высшей кинематической пары	92
9.5.	Формообразование элементов высшей кинематической пары реальных звеньев	93
<b>10.</b>	<b>Синтез плоских цилиндрических эвольвентных зацеплений</b>	<b>94</b>
10.1.	Эвольвентная функция	94
10.2.	Эвольвентные профили	95
10.3.	Образование прямых зубьев	97
10.4.	Образование косых зубьев	98
10.5.	Образование криволинейных зубьев	99
10.6.	Образование внутренних зубьев	99
10.7.	Зубчатая рейка	100
10.8.	Исходный контур	101
10.9.	Нарезание зубьев на заготовках колес	102
10.10.	Определение координат точек профиля зуба	105
10.11.	Определение геометрических размеров колес	107

10.12.	Свойства эвольвентного зацепления	109
10.13.	Коэффициент перекрытия	111
10.14.	Удельное скольжение	113
10.15.	Интерференция зубьев	114
10.16.	Влияние смещения на характеристики зацепления	115
10.17.	Определение межосевого расстояния пары сопряженных колес	117
<b>11.</b>	<b>Синтез точечных круговинтовых зацеплений</b>	<b>119</b>
11.1.	Профилирование зубьев с точечным контактом	119
11.2.	Принцип образования зацепления с точечным контактом	120
11.3.	Образование зубьев круговинтового зацепления	121
11.4.	Образование зубчатого механизма с одной линией зацепления	122
11.5.	Образование зубчатого механизма с двумя линиями зацепления	123
11.6.	Исходные контуры и нарезание зубьев на заготовке колеса	124
11.7.	Свойства зацепления Новикова	125
11.8.	Коэффициент перекрытия и скорости в зацеплении	126
11.9.	Определение размеров зубчатых механизмов с зацеплением Новикова	127
<b>12.</b>	<b>Синтез пространственных зацеплений при пересекающихся осях вращения</b>	<b>128</b>
12.1.	Пространственная эвольвентная функция	128
12.2.	Эвольвентные профили конических зубьев	130
12.3.	Круговые профили конических зубьев	130
12.4.	Образование конических зубьев различной формы	131
12.5.	Теоретические исходные и производящие зубчатые колеса	132
12.6.	Нарезание зубьев на заготовках колес	133
12.7.	Свойства конического эвольвентного зацепления	136
12.8.	Эквивалентные цилиндрические и конические зацепления	138
12.9.	Коэффициент перекрытия	139
12.10.	Влияние смещения на характеристики зацепления	140
12.11.	Определение геометрических размеров зацепления конических колес	141
<b>13.</b>	<b>Синтез пространственных зацеплений при скрещивающихся осях вращения</b>	<b>143</b>
13.1.	Гиперболоидное зацепление и его модификации	143
13.2.	Винтовое зацепление	144
13.3.	Гипоидное зацепление	145
13.4.	Образование линейчатых зацеплений	146
13.5.	Образование червяков различных типов	146
13.6.	Исходные и производящие червяки	148
13.7.	Нарезание элементов зацепления на заготовках червяков и колес	149
13.8.	Определение геометрических размеров червячного механизма	151
13.9.	Свойства червячного зацепления	153
13.10.	Влияние смещения на характеристики червячного зацепления	155
13.11.	Определение геометрических размеров глобоидного механизма	156
13.12.	Свойства глобоидного зацепления	157

<b>14. Синтез зубчатых механизмов</b>	<b>158</b>
14.1. Задачи синтеза зубчатых механизмов	158
14.2. Рядовые зубчатые механизмы	161
14.3. Планетарные зубчатые механизмы	164
14.4. Составные зубчатые механизмы	168
14.5. Зубчатые механизмы со ступенчато изменяющимся передаточным отношением	168
<b>15. Синтез кулачковых механизмов</b>	<b>170</b>
15.1. Основные характеристики и параметры	170
15.2. Определение размеров кулачкового механизма с заостренным толкателем	172
15.3. Определение размеров кулачкового механизма с плоским толкателем	175
15.4. Определение размеров кулачкового механизма с коромыслом	177
15.5. Построение профиля кулачка плоского механизма с толкателем	178
15.6. Построение профиля кулачка плоского механизма с коромыслом	180
15.7. Построение профиля кулачка пространственных механизмов	181
15.8. Определение параметров элементов высшей кинематической пары кулачковых механизмов	184
15.9. Алгоритмы расчета плоских кулачковых механизмов на электронных вычислительных машинах	186
<b>Раздел третий. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ</b>	<b>187</b>
<b>16. Плоские механизмы с низшими парами</b>	<b>187</b>
16.1. Основные задачи анализа	187
16.2. Методы анализа	188
16.3. Определение кинематических характеристик движения звена на плоскости	189
16.4. Кинематика звеньев, образующих вращательную кинематическую пару	191
16.5. Кинематика звеньев, образующих поступательную кинематическую пару	194
16.6. Алгоритмы кинематического расчета структурных групп с внутренней вращательной парой	195
16.7. Алгоритмы кинематического расчета структурных групп с внутренней поступательной парой	206
16.8. Структура алгоритмов кинематического исследования механизмов	211
<b>17. Пространственные механизмы с низшими парами</b>	<b>213</b>
17.1. Методы кинематического анализа пространственных механизмов	213
17.2. Кривошипно-коромысловые механизмы	214
17.3. Кривошипно-ползунные механизмы	216
17.4. Механизм универсального шарнира	217
17.5. Винтовые механизмы	219
<b>18. Промышленные роботы</b>	<b>220</b>
18.1. Общие понятия и определения	220
18.2. Основные схемы манипуляторов промышленных роботов	221
18.3. Определение положения объекта манипулирования	224
18.4. Исследование кинематики манипуляторов	227
18.5. Манипулятор с кинематическими парами 5-го класса	229

<b>19. Плоские и пространственные механизмы с высшими парами</b>	<b>231</b>
19.1. Фрикционные механизмы	231
19.2. Зубчатые механизмы с неподвижными осями колес	233
19.3. Сателлитные зубчатые механизмы	234
19.4. Планетарные зубчатые механизмы	235
19.5. Замкнутые дифференциальные механизмы	237
19.6. Волновые механизмы	238
19.7. Зубчато-рычажные механизмы	239
19.8. Кулачковые механизмы	240
<b>Раздел четвертый. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ</b>	<b>241</b>
<b>20. Силы, действующие на звенья механизмов</b>	<b>241</b>
20.1. Классификация сил	241
20.2. Движущие силы	242
20.3. Силы производственных и непроизводственных сопротивлений	242
20.4. Силы инерции звеньев	244
20.5. Силы трения скольжения	245
20.6. Силы трения качения	246
20.7. Трение в низших кинематических парах	247
20.8. Трение в высших кинематических парах	250
20.9. Трение в винтовой кинематической паре	252
20.10. Трение в кинематической паре с гибким звеном	253
20.11. Приведение сил, действующих на звено, к эквивалентной системе сил	254
<b>21. Силовой расчет механизмов</b>	<b>255</b>
21.1. Реакции в кинематических парах	255
21.2. Определение реакций в кинематических парах структурных групп с внутренней вращательной парой	257
21.3. Определение реакций в кинематических парах структурных групп с внутренней поступательной парой	260
21.4. Определение реакций в кинематических парах структурных групп с учетом трения	262
21.5. Алгоритмизация силового расчета структурных групп	264
21.6. Структура алгоритмов силового расчета плоских механизмов с низшими парами	270
21.7. Силовой расчет пространственных механизмов с низшими парами	271
21.8. Силовой расчет механизмов с высшими кинематическими парами	274
21.9. Силовой расчет входного звена	277
<b>22. Движение механизма под действием приложенных сил</b>	<b>278</b>
22.1. Основные задачи исследования	278
22.2. Пути решения задачи о движении механизма	279
22.3. Приведенная сила . момент	280
22.4. Приведенная масса и приведенный момент инерции	282
22.5. Исходное уравнение движения механизма	282
22.6. Движение механизма при условии, что моменты сил и моменты инерции — функции положений звеньев	284
22.7. Движение механизма при условии, что движущие силы зависят от скорости звеньев, а силы сопротивления — от времени	288
	373

22.8.	Движение механизма при нелинейной характеристике двигателя	290
22.9.	Коэффициенты неравномерности движения и динамичности механизма	291
23.	<b>Влияние упругости звеньев на точность их перемещений и нагрузки в механизмах</b>	293
23.1.	Проявление упругого взаимодействия звеньев	293
23.2.	Характеристики упругих свойств звеньев и механизмов	293
23.3.	Перераспределение нагрузки в кинематических парах	295
23.4.	Изменение сил, действующих на звенья	298
23.5.	Ошибка положения звеньев механизма из-за их упругости	300
24.	<b>Колебательные процессы в механизмах</b>	301
24.1.	Виды колебаний звеньев механизмов	301
24.2.	Свободные колебания	302
24.3.	Вынужденные колебания	305
24.4.	Особенности колебаний вращающихся звеньев	307
24.5.	Особенности колебаний поступательно движущихся звеньев	308
24.6.	Демпфирование свободных колебаний	310
24.7.	Демпфирование вынужденных колебаний	311
<b>Раздел пятый. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РАБОТЫ МЕХАНИЗМОВ</b>		312
25.	<b>Оптимизация параметров механизмов</b>	312
25.1.	Постановка задач оптимизации при синтезе механизмов	312
25.2.	Построение комплексных целевых функций	314
25.3.	Методы безусловной оптимизации	316
25.4.	Методы условной оптимизации	318
25.5.	Управляемые внутренние параметры синтеза	319
26.	<b>Пути оптимизации механизмов по минимуму потерь мощности</b>	320
26.1.	Механический коэффициент полезного действия и коэффициент потерь	320
26.2.	Влияние на КПД места расположения механизмов в энергетическом потоке	322
26.3.	Коэффициент полезного действия низших кинематических пар	324
26.4.	Коэффициент полезного действия высших кинематических пар	326
26.5.	Определение КПД механизмов с последовательным расположением кинематических пар	327
26.6.	Определение КПД механизмов с разветвленным энергетическим потоком	329
27.	<b>Влияние точности изготовления звеньев на работу механизмов</b>	332
27.1.	Ошибки в реальных механизмах	332
27.2.	Причины появления ошибок механизмов	334
27.3.	Дифференциальный метод определения ошибок механизмов	336

27.4. Метод малых перемещений	338
27.5. Учет влияния зазоров в кинематических парах на ошибку механизмов	340
27.6. Компенсация ошибок и регулировка механизмов	341
<b>28. Регулирование колебаний скорости звеньев механизмов</b>	<b>342</b>
28.1. Способы регулирования движения механизма	342
28.2. Обеспечение равномерности движения агрегата без учета характеристики его двигателя	343
28.3. Обеспечение равномерности движения агрегата с учетом характеристики его двигателя	345
28.4. Определение размеров маховика и выбор места его установки	347
28.5. Обеспечение равномерности движения машины с помощью регуляторов скорости	349
<b>29. Динамическое взаимодействие машинного агрегата с окружающей средой</b>	<b>351</b>
29.1. Пути ограничения динамических воздействий машин на окружающую среду	351
29.2. Уравновешивание звеньев шарнирно-рычажных механизмов	352
29.3. Уравновешивание вращающихся звеньев с неуравновешенными массами	355
29.4. Балансировка вращающихся звеньев типа ротор	357
29.5. Воздействие неуравновешенных сил машины на фундамент	359
29.6. Защита механизмов от вибраций	360
Приложение	363
<i>Список использованной и рекомендуемой литературы</i>	364
Предметный указатель	365

Учебник

*Заблонский Константин Иванович*

*Белоконев Игорь Максимович*

*Щёкин Борис Михайлович*

## **ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

Художественный редактор *С. П. Духленко*

Технический редактор *Г. Б. Верник*

Корректор *И. П. Бойко*

ИБ № 12937

Сдано в набор 30.06.88. Подписано в печать 06.03.89. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнигура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 23,5. Усл. кр.-отт. 23,5. Уч.-изд. л. 23,39. Тираж 13 000 экз. Изд. № 7878. Заказ. 8—2601. Цена 1 р. 10 к.

Головное издательство издательского объединения «Выща школа». 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия РПО «Полнграфкинига», 252057, Киев-57, ул. Довженко, 3 в Киевской книжной типографии научной книги. 252004, Киев 4, ул. Репина, 4. Зак. 9-268.