

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ФІЗИКИ**

**Частина 2. Хвильова оптика.**

**Теплове випромінювання**



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ФІЗИКИ**

**Частина 2. Хвильова оптика.**

**Теплове випромінювання**

Вінниця  
ВНТУ  
2019

Рекомендовано до друку Методичною радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 24.04.2019 р.)

Рецензенти:

**В. М. Михалевич**, доктор технічних наук, професор,  
завідувач кафедри вищої математики ВНТУ

**М. В. Лисий**, кандидат фізико-математичних наук,  
доцент загальної фізики ВНТУ

Методичні вказівки для практичних занять і самостійної роботи з фізики.  
Частина 2. Хвильова оптика. Теплове випромінювання / Уклад. В. М. Бурдейний.  
– Вінниця : ВНТУ, 2019. – 56 с.

У методичних вказівках подано загальні правила розв'язання текстових задач з фізики, з детальним поясненням наведено зразки розв'язування 20-ти задач з розділу «Хвильова оптика. Теплове випромінювання» другої частини курсу загальної фізики, запропоновано більше ніж 50 задач для самостійної роботи студентів.

---

*Навчальне видання*

**Методичні вказівки для практичних занять і самостійної роботи з фізики.  
Частина 2. Хвильова оптика. Теплове випромінювання**

Укладач: *Бурдейний Володимир Мефодійович*

Рукопис оформив *В. Бурдейний*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет підготував *О. Ткачук*

Підписано до друку 23.05.2019. Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman. Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 3,36.  
Наклад 40 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2019-070.

Видавець та виготовлювач  
Вінницький національний технічний університет,  
інформаційний редакційно-видавничий центр.  
ВНТУ, ГНК, к. 114. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021. Тел. (0432) 65-18-06.  
**press.vntu.edu.ua**; *E-mail*: kivc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

## ЗМІСТ

Вступ .....	4
Тема 1 КОГЕРЕНТНІ ХВИЛІ. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА. ІНТЕРФЕРОМЕТРИ.....	5
Тема 2 ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА-ФРЕНЕЛЯ. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА. МЕТОД ЗОН ФРЕНЕЛЯ .....	22
Тема 3 ДИФРАКЦІЯ НА ПРОСТОРОВІЙ ГРАТЦІ. ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА.....	35
Тема 4 ЗАКОНОМІРНОСТІ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ. ФОРМУЛА ПЛАНКА .....	46
Рекомендована література .....	56
Інформаційні ресурси INTERNET .....	56

## Вступ

Практичні заняття є органічною невід'ємною частиною курсу фізики технічних ЗВО (закладів вищої освіти). Основна мета цього виду занять полягає у засвоєнні законів і закономірностей, притаманних найпростішим, а саме фізичним, формам руху матерії. Вказана мета досягається шляхом розв'язування задач, серед них чи не найбільш інструктивними є кількісні текстові задачі, розв'язуючи які набуваємо досвіду і навичок застосування фізичні закони, засвоюємо методи отримання аналітичних результатів, удосконалюємо техніку числових розрахунків, навчаємося давати критичну оцінку одержаних результатів.

Розв'язування задач з фізики у високій мірі алгоритмізоване. Дотримуючись певних формальних правил, можна знайти розв'язок великої кількості стандартних задач. Ці правила зводяться до таких дій:

- 1) уважно прочитати умову задачі;
- 2) встановити, які фізичні явища є предметом розгляду у задачі;
- 3) пригадати основні якісні і кількісні закономірності, які описують чи пояснюють ці явища;
- 4) з'ясувати, які величини необхідно знайти в результаті розв'язання задачі;
- 5) чітко виділити величині, задані в умові, звернувши увагу також на ті, які можуть бути подані у прихованій формі;
- 6) доповнити дані, приєднавши необхідні табличні значення;
- 7) виразити числові дані в основних одиницях системи СІ;
- 8) проілюструвати постановку задачі схематичними рисунками з нанесенням відомих величин і тих, які підлягають встановленню;
- 9) записати в аналітичній формі зв'язки між фізичними величинами і закони, які описують досліджуване фізичне явище;
- 10) розв'язавши одержану систему рівнянь (рівняння), знайти шукані фізичні величини, виражені через дані умови задачі;
- 11) перевірити розмірність одержаних результатів;
- 12) виконавши обчислення, знайти числове значення;

Зрозуміло, що не всі елементи є обов'язковими. Деякі з них можуть бути опущені на основі інтуїції та набутого досвіду.

Запропоновані тут «Методичні вказівки...» містять біля 20-ти прикладів розв'язування типових задач та більше ніж 50 задач для самостійної роботи, які охоплюють розділи «Хвильова оптика. Теплове випромінювання» курсу загальної фізики.

# Тема 1 Когерентні хвилі. Інтерференція світла. Інтерферометри

## План

1. Розрахунок інтерференційної картини від двох когерентних джерел.
2. Ширина інтерференційної смуги. Роль немонохроматичності джерела.
3. Інтерференція багатьох хвиль.
4. Інтерференція в тонких плівках.
5. Інтерферометри Жамена, Майкельсона і Фабрі–Перо.

## Основні співвідношення

1. Оптичний шлях променя

$$L_o = nL,$$

де  $L$  – геометричний шлях променя у середовищі з показником заломлення  $n$ .

2. Оптична різниця ходу двох променів, що поширюються у різних середовищах

$$\Delta = n_1L_1 - n_2L_2$$

3. Умова максимального підсилення світла внаслідок інтерференції

$$\Delta = \pm k\lambda, (k = 0, 1, 2, \dots).$$

4. Умова максимального послаблення світла

$$\Delta = \pm(2k + 1)\frac{\lambda}{2}, (k = 0, 1, 2, \dots).$$

5. Ширина інтерференційної картини в класичній постановці досліду Юнга:

$$D = \frac{L\lambda}{d},$$

де  $d$  – відстань між когерентними джерелами світла,  $\lambda$  – довжина хвилі,  $L$  – відстань від джерел до екрана.

6. Значення амплітуди при складанні  $N$  когерентних хвиль рівної амплітуди з різницею фаз  $\Delta\Phi$  між суміжними хвилями:

$$A = A_0 \left| \frac{\text{Sin}(N\Delta\Phi / 2)}{\text{Sin}(\Delta\Phi / 2)} \right|.$$

7. Оптична різниця ходу при інтерференції в тонких плівках для спостереження у відбитому світлі:

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \lambda / 2,$$

де  $h$  – товщина плівки,  $\alpha$  – кут падіння,  $n$  – показник заломлення матеріалу плівки.

### Приклади розв'язання задач

#### Задача 1.

Біле світло проходить через дві щілини, які перебувають на відстані  $d = 0,5$  мм одна від одної. Інтерференційна картина спостерігається на екрані, віддаленому на  $L = 2,5$  м від щілин. Інтерференційна смуга першого порядку забарвлена як веселка, причому фіолетовий колір знаходиться на відстані 2 мм, а червоний – на 3,5 мм від середини центральної білої смуги. Знайти довжини хвиль червоного і фіолетового світла.

**Дано:**

$$d = 0,5 \text{ мм} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$L = 2,5 \text{ м};$$

$$m = 1;$$

$$Y_{1f} = 2 \text{ мм} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$Y_{1r} = 3,5 \text{ мм} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

**Знайти:** а) довжину хвилі  $\lambda_f$  світла фіолетового кольору; б) довжину хвилі  $\lambda_r$  червоного кольору.

#### Розв'язування

Схема спостереження інтерференції (схема Юнга) світла від двох когерентних джерел подана на рис. 1.

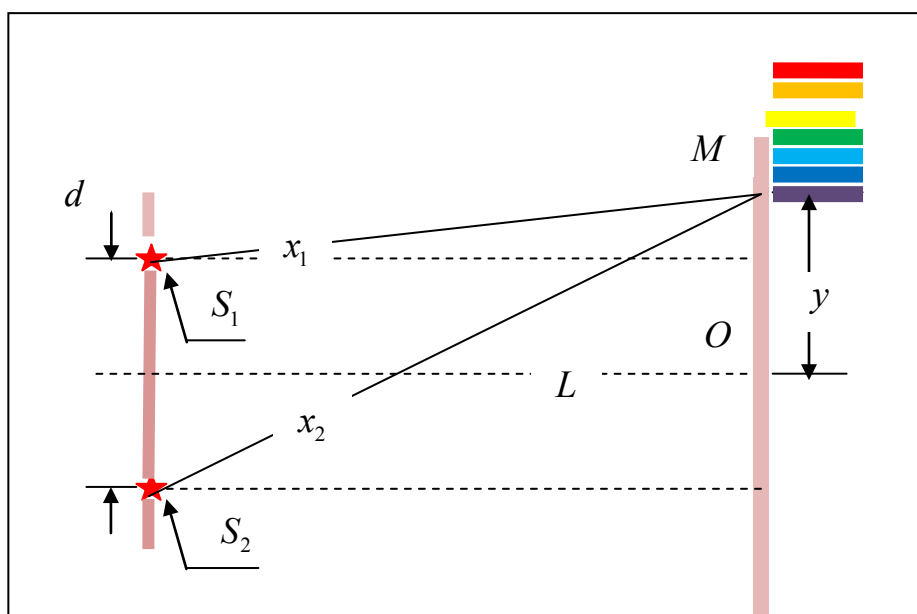


Рисунок 1 – Постановка інтерференційного досліду до задачі 1

Схема рис. 1 за своєю суттю відтворює класичний досвід Юнга, в якому когерентні джерела одержуємо, освітлюючи діафрагму з двома щілинами  $S_1$  і  $S_2$ . Світло, яке проходить через щілини, падає на екран, перпендикулярний до осі симетрії, де відбувається додавання обох хвиль. Якщо набута хвилями оптична різниця ходу менша, ніж довжина когерентності, то у відповідних точках екрана додаються імпульси (цуги), одержані в результаті розщеплення одного і того ж імпульсу. Оскільки при вказаній умові зберігається когерентність хвиль, то при їх накладанні матиме місце інтерференція поблизу центра екрана інтерференційна картина має вигляд паралельних смуг, забарвлених відповідно до спектрального складу падаючого світла, що демонструє рис. 1. Будемо розглядати світло з довжиною хвилі  $\lambda$  і встановимо відстань  $Y_m$  від центра екрана, на якій спостерігається інтерференційна смуга з порядковим номером  $m$ . Інтенсивність досягає максимуму тоді, коли «гребінь» однієї хвилі накладається на «гребінь» іншої. Це означає, різниця фаз  $\Delta\Phi$  хвиль, які інтерферують, має бути кратною  $2\pi$ . Отже, умова спостереження максимуму виражається співвідношенням:

$$\Delta\Phi = 2\pi m, \quad m : 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1)$$

Потрібно відзначити, що кількість максимумів є скінченною і залежить від ступеня монохроматичності світла.

Різниця фаз виникає внаслідок того, що хвилі, які додаються у точці спостереження  $M$ , проходять до цієї точки різні шляхи.

Визначивши фазу хвилі формулою

$$\Phi = \frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t, \quad (2)$$

де  $x$  – геометричний шлях хвилі,  $\lambda$  – довжина хвилі,  $\omega$  – циклічна частота, а  $t$  – час, для різниці фаз одержуємо:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{2\pi x_2}{\lambda} - \omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \omega t = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}. \quad (3)$$

Підстановкою (3) в (1) встановлюємо, при якій різниці ходу  $\Delta x = x_2 - x_1$  матиме місце максимум порядку  $m$ :

$$\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = 2\pi m \Rightarrow \Delta x = m\lambda. \quad (4)$$

Виразимо різницю ходу через відстань  $y$  точки спостереження від центра екрана (див. рис. 1). Для цього розглянемо два прямокутних трикутники з



вершинами в точках  $S_2$  і  $S_1$ . Геометричні шляхи  $x_2$  і  $x_1$  хвиль є гіпотенузами цих трикутників, а тому застосування теореми Піфагора дає:

$$x_2^2 = L^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2, \quad (5)$$

$$x_1^2 = L^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2. \quad (6)$$

Почленно віднімаючи (5) і (6) знаходимо:

$$x_2^2 - x_1^2 = 2yd. \quad (7)$$

Розкладенням на множники приводимо вираз (7) до такого вигляду:

$$(x_2 + x_1)\Delta x = 2yd. \quad (8)$$

Інтерференція спостерігається поблизу осової лінії екрана. А тому запишемо наближену рівність:

$$x_2 + x_1 \approx 2L. \quad (9)$$

Підстановкою (9) в (8) одержуємо:

$$\Delta x = \frac{yd}{L}. \quad (10)$$

Комбінуючи (10) з умовою (4), знаходимо відстань  $Y_m$ , на якій спостерігається максимум порядку  $m$  для довжини хвилі  $\lambda$ :

$$Y_m = \frac{L}{d} m \lambda. \quad (11)$$

Розв'яжемо (11) відносно довжини хвилі. Це дає таку розрахункову формулу:

$$\lambda = \frac{Y_m d}{mL}. \quad (12)$$

**Аналіз одиниць вимірювання:**

$$[\lambda] = \frac{[Y_m][d]}{[L]} = \frac{\text{м}^2}{\text{м}} = \text{м}. \quad (13)$$

**Обчислення:**

$$\text{а) } \lambda_v = \frac{Y_v d}{1 \cdot L} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2,5} = 4,0 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}. \quad (14)$$

$$\text{б) } \lambda_r = \frac{Y_r d}{1 \cdot L} = \frac{3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2,5} = 7,0 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}. \quad (15)$$

**Відповідь:** а)  $\lambda_v = 400 \text{ нм}$  ; б)  $\lambda_r = 700 \text{ нм}$  ; в загальному вигляді  $\lambda = \frac{Y_m d}{mL}$

### Задача 2.

Мильна бульбашка з боку найближчого до спостерігача виглядає зеленою ( $\lambda = 540$  нм). Яка найменша товщина бульбашки, якщо показник заломлення плівки з мильної води  $n = 1,35$ ? Як зміниться колір мильної бульбашки, якщо товщина плівки збільшиться в 1,5 раза?

**Дано:**

$$\lambda = 540 \text{ нм} = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

$$n = 1,35;$$

$$H / h_{\min} = 1,5$$

**Знайти:** а) найменшу товщину плівки  $h_{\min}$ ; б) як зміниться колір плівки зі збільшенням її товщини до значення  $H$ .

### Розв'язування

а) Дві поверхні, внутрішня і зовнішня, мильної бульбашки разом із мильною водою між ними утворюють тонку плівку. Кольори, які спостерігаються у відбитому світлі пояснюються інтерференцією, схема якої зображена на рис. 2.

Падаюча хвиля межею розділу розділяється на дві. Одна з них, відбиваючись від поверхні плівки, поширюється у напрямі променя 1. Інша, заломлюючись на поверхні плівки, після відбивання від нижньої поверхні повертається у попереднє середовище (повітря) і поширюється у ньому в напрямі променя 2. Обидві хвилі при виконанні умови щодо оптичної різниці ходу, розглянутої у задачі 1, зберігають свою когерентність і при додаванні утворюють інтерференційну картину.

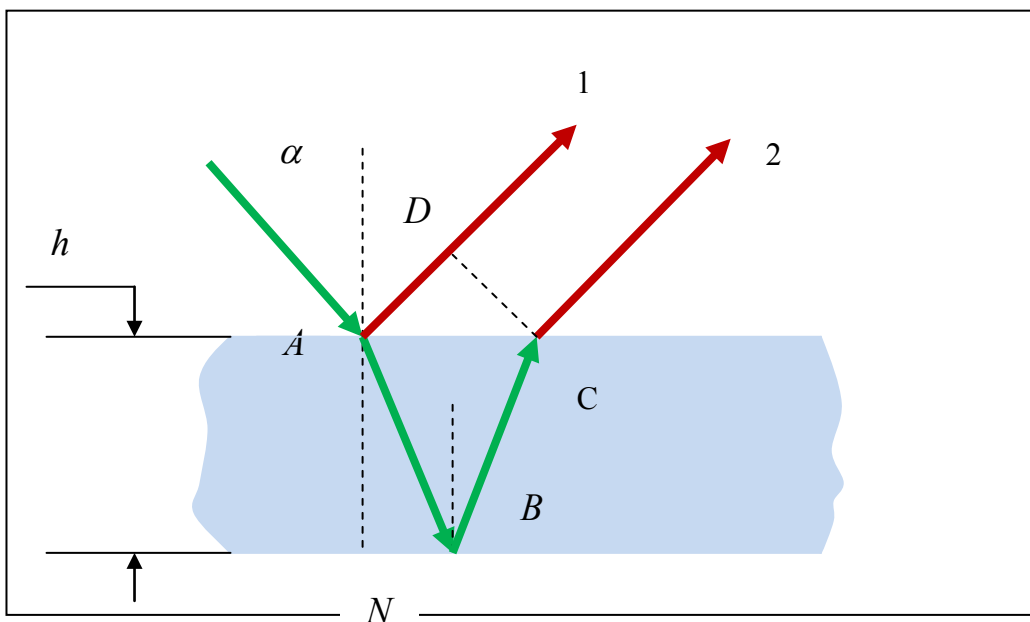


Рисунок 2 – Хід променів при інтерференції у тонкій плівці

Результат інтерференції визначається різницею фаз, яка також залежить від оптичної різниці ходу. Для розрахунку різниці ходу звернемося до рис. 2. Геометричний шлях хвилі (2) у плівці збігається з довжиною ламаної  $ABC$ . Тепер позначимо як  $\beta$  кут заломлення. Тоді із  $\triangle ABN$  випливає

$$AB = \frac{h}{\cos \beta}, \quad (1)$$

$$NB = h \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (2)$$

Беручи до уваги співвідношення (1), геометричний шлях хвилі у плівці виразимо формулою:

$$AB + BC = \frac{2h}{\cos \beta}. \quad (3)$$

Точки  $C$  і  $D$  за побудовою ( $AD \perp CD$ ) належать одній і тій самій хвильовій поверхні. Геометричний шлях відбитої хвилі до досягнення нею цієї хвильової поверхні визначається катетом  $AD$  прямокутного трикутника  $\triangle ADC$ , в якому кут при вершині  $C$  дорівнює куту падіння  $\alpha$ . З  $\triangle ADC$  при врахуванні співвідношення (2) знаходимо:

$$AD = AC \cdot \sin \alpha = 2NB \cdot \sin \alpha = 2h \operatorname{tg} \beta \sin \alpha. \quad (4)$$

Оскільки за законом заломлення світла  $\sin \alpha = n \sin \beta$ , то геометричний, він же і оптичний, шлях першої хвилі визначається формулою:

$$AD = 2h \cdot n \cdot (\operatorname{tg} \beta) \sin \beta. \quad (5)$$

Обчислюючи оптичну різницю ходу, потрібно врахувати дві обставини, а саме, що за означенням оптичний хід дорівнює геометричному шляху, помноженому на показник заломлення середовища і, окрім цього, потрібно враховувати, що при відбиванні від оптично більш густого середовища (з більшим показником заломлення) фаза хвилі змінюється на  $\pi$ . Взявши до уваги ці міркування, для оптичної різниці ходу  $\Delta$  отримуємо:

$$\Delta = n(AB + BC) - AD + \frac{\lambda}{2} = \frac{2hn}{\cos \beta} - 2h n \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \beta + \frac{\lambda}{2}. \quad (6)$$

Зауважимо, що саме останнім доданком у формулі (6) враховується зміна фази, так звана «втрата півхвилі» при відбиванні.

Співвідношення (6) зводиться до більш компактної і зручнішої з огляду на тлумачення спостережуваної інтерференційної картини форми, а саме:

$$\Delta = 2hn \cos \beta + \frac{\lambda}{2} = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}, \quad (7)$$

в якій  $\cos \beta$  виключено із застосування закону заломлення світла. Спостереження певного забарвлення у відбитому світлі свідчить про те, що для відповідної довжини хвилі має місце інтерференційний максимум. Підставимо (7) в умову спостереження інтерференційного максимуму порядку  $m$ , тобто

$$\Delta = 2m \cdot \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad , \quad m : 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Розв'язавши одержане рівняння відносно  $h_m$ , дістанемо:

$$h_m = \frac{(2m-1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (9)$$

Найменшій товщині відповідає нормальне падіння, тобто  $\alpha = 0$ , і порядок  $m = 1$ . Отже, із формули (9) випливає шуканий результат:

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4n} \quad (10)$$

**Аналіз одиниць вимірювання:**

З формули (9) одержуємо:

$$[h_m] = [\lambda] = \text{м} \quad (11)$$

**Обчислення:**

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{5,4 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 1,35} = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ (м)} \quad (12)$$

**а) Відповідь:**  $h_{\min} = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,1 \text{ мкм}$ , у загальному вигляді

$$h_m = \frac{(2m-1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (9)$$

**б)** Для того, щоб встановити як зміниться забарвлення бульбашки при збільшенні товщини мильної плівки, знайдемо мінімальну довжину хвилі, яка ще забезпечує виконання умови інтерференції (10). Зі співвідношення (10) випливає:

$$\lambda_H = 4nH \quad (14)$$

Врахувавши дані задачі та формулу (10), знаходимо:

$$\lambda_H = 4n \cdot 1,5 \cdot h_{\min} = 4n \cdot 1,5 \cdot \frac{\lambda}{4n} = 1,5 \cdot \lambda \quad (15)$$

Підстановка заданого значення  $\lambda$  дає:

$$\lambda_H = 1,5 \cdot \lambda = 1,5 \cdot 540 = 810 \text{ (нм)} \quad (16)$$

Одержане значення довжини хвилі перевищує граничну довжину хвилі видимого світла з боку довгих хвиль. Отже, інтерференція не може спостерігатися для жодної із хвиль видимого спектру. А тому бульбашка буде мати білий колір. Цей результат відповідає аналізу, який базується на основі оцінки ролі немонохроматичності світла при спостереженні інтерференції. Зі зростанням товщини плівки максимумами певного порядку, як це видно із формули (9), накладаються на максимумами порядку, більшого на одиницю, а тому в силу немонохроматичності порядок інтерференції обмежений зверху. Накладання інтерференційних смуг означає, що обом максимумам відповідає одне і те саме значення оптичної різниці ходу. А тому можемо записати:

$$M\lambda_r = (M + 1)\lambda_v. \quad (17)$$

Тут  $M$  – максимальний порядок інтерференційного максимуму, а  $\lambda_r$  і  $\lambda_v$  – граничні довжини хвиль спектрального інтервалу. Вважаючи, що бульбашка спостерігається у сонячному світлі, із (17) знаходимо:

$$M = \frac{\lambda_v}{\lambda_r - \lambda_v} = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{(7,5 - 4) \cdot 10^{-7}} = [1,14] = 1, \quad (18)$$

де взято до уваги, що  $M$  – ціле число. Використовуючи (9) і (18), оцінимо товщину, при якій інтерферують хвилі, що належать червоній області

$$h_M = \frac{\lambda_r}{4n} = \frac{7,5 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 1,35} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}. \quad (19)$$

Оскільки  $H = 1,5h_{\min} = 1,5 \cdot 10^{-7}$  (м), то  $H > h_M$  і інтерференція не спостерігається, що узгоджується із зробленим вище висновком. Фізичною причиною відсутності інтерференції є те, що при збільшеній товщині плівки оптична різниця ходу перевищує довжину когерентності.

**б) Відповідь:** мильна бульбашка буде розфарбована у білий колір.

### Задача 3.

В досліді Юнга щілина освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 580$  нм. Відстань між щілинами у непрозорому екрані  $d = 1$  мм, відстань від них до екрана, на якому спостерігається інтерференційна картина,  $L = 5$  м. Знайти, на якій відстані від центральної осьової лінії екрана знаходяться три перші інтерференційні смуги.

**Дано:**

$$\lambda = 580 \text{ нм} = 5,80 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$d = 1 \text{ мм} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$L = 5 \text{ м}$$

$$m = 1, 2, 3$$

**Знайти:** координату максимуму  $Y_m$

**Розв'язування**

Схема спостереження подана на рис. 1 до задачі 1, який на рис. 3 адаптовано до цього прикладу.

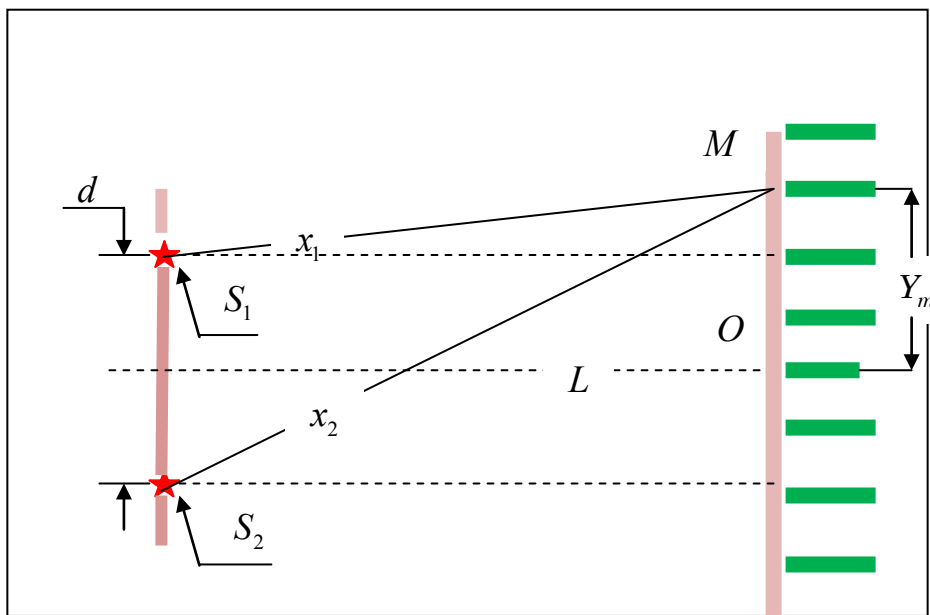


Рисунок 3 – Схема інтерференційного досліду до прикладу 3

Розподіл інтенсивності в інтерференційній картині визначається різницею ходу  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Зокрема, якщо різниця ходу задовольняє умову:

$$\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = 2\pi m \Rightarrow \Delta x = m\lambda, \quad (1)$$

то матиме місце максимум порядку  $m$ .

Виразимо різницю ходу через відстань  $y$  до точки спостереження від центра екрана (див. рис. 3). Для цього розглянемо два прямокутних трикутники з вершинами в точках  $S_2$  і  $S_1$ . Геометричні шляхи  $x_2$  і  $x_1$  хвиль є гіпотенузами цих трикутників, а тому застосування теореми Піфагора дає:

$$x_2^2 = L^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2, \quad (2)$$

$$x_1^2 = L^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2. \quad (3)$$

Почленним відніманням (2) і (3) знаходимо:

$$x_2^2 - x_1^2 = 2yd. \quad (4)$$

Розкладанням на множники зводимо вираз (4) до такого вигляду:

$$(x_2 + x_1)\Delta x = 2yd. \quad (5)$$

Інтерференція спостерігається поблизу осьової лінії екрана. А тому запишемо наближену рівність:

$$x_2 + x_1 \approx 2L. \quad (6)$$

Підстановкою (6) в (5) одержуємо:

$$\Delta x = \frac{yd}{L}. \quad (7)$$

Комбінуючи (7) з умовою (1), знаходимо відстань  $Y_m$ , на якій спостерігається максимум порядку  $m$  для довжини хвилі  $\lambda$ :

$$Y_m = \frac{L}{d} m \lambda. \quad (11)$$

Враховуючи числові дані, знаходимо:

$$Y_m = \frac{5 \cdot 5,80 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10^{-3}} m = 2,9 \cdot 10^{-3} m \quad (\text{м}) \quad (12)$$

Звідси для координат трьох послідовних максимумів одержуємо результати, подані у відповіді:

Відповідь: $Y_1 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , $Y_2 = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , $Y_3 = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
--

#### Задача 4.

Між двома плоскопаралельними пластинками на відстані  $L = 10$  см від лінії їх дотику знаходиться провід діаметром  $d = 0,01$  мм так, що між пластинками виникає повітряний клин. Пластинки освітлюються нормально падаючим монохроматичним світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 0,6$  мкм.

Знайти ширину  $b$  інтерференційних смуг, які спостерігаються у відбитому світлі.

**Дано:**

$$L = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м};$$

$$d = 0,01 \text{ мм} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\lambda = 0,6 \text{ мкм} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

---

**Знайти:** ширину  $b$  інтерференційних смуг.

## Розв'язування

Постановка задачі цілком відповідає розглянутому раніше явищу інтерференції в тонких плівках (див. приклад 2). У цьому випадку роль такої плівки відіграє повітряний клин, утворений внутрішніми поверхнями пластинок, кут між якими  $\alpha$  в радіанній мірі набагато менший від одиниці. Монохроматична хвиля, яка падає на повітряний клин розщеплюється на дві. Одна з них, яка відбита від верхньої грані клина, поширюється у напрямі променя 1. Інша, яка проникає у повітряний клин, відбивається від його нижньої грані і після заломлення на верхній грані, поширюється у напрямі променя 2. Обидві хвилі когерентні, а тому, додаючись (при безпосередньому спостереженні додавання хвиль здійснюється кришталиком людського ока, який фокусує хвилі на сітківці) утворюють інтерференційну картину, а саме, рівновіддалені смуги рівної товщини, паралельні ребру повітряного клина.

Результат інтерференції визначається різницею фаз, яка також залежить від оптичної різниці ходу.

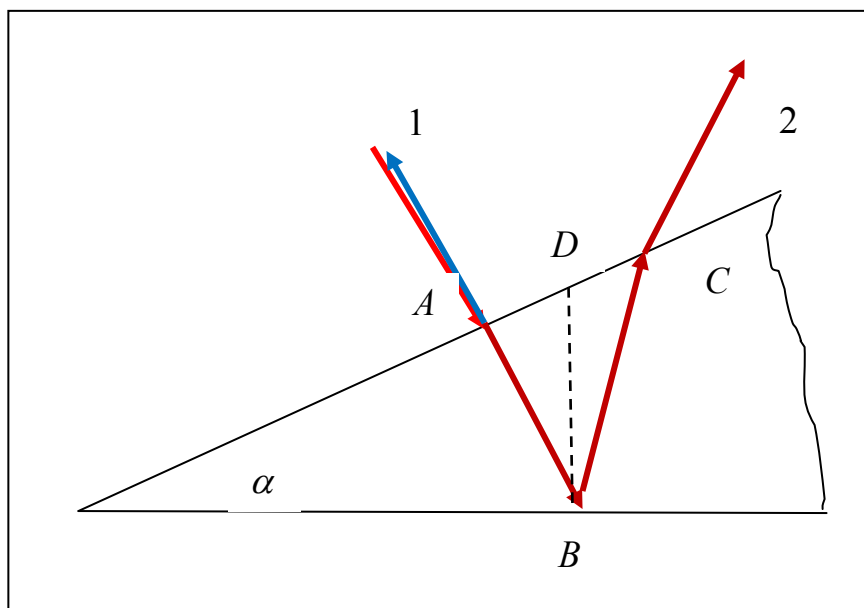


Рисунок 4 – Хід променів при інтерференції на клині

Для розрахунку різниці оптичних шляхів, при якій спостерігається максимум порядку  $m$ , звернемось до рис. 4. Нехай товщина клина в точці  $B$ , яка відповідає цьому максимуму, дорівнює  $h_m$ . Геометричний шлях хвилі 2 в повітряній плівці визначається довжиною ламаної  $ABC$ . Оскільки кут  $\angle ABD$  при нормальній падінні світла дорівнює  $\alpha$ , то з  $\triangle ABD$  випливає співвідношення:



$$AB = h_m \cos \alpha. \quad (1)$$

За законом відбивання світла  $\angle ABC$  дорівнює  $2\alpha$ . Тому, розглядаючи  $\triangle ABC$ , знаходимо:

$$BC = \frac{AB}{\cos 2\alpha} = h_m \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha}. \quad (2)$$

Таким чином, геометричний шлях хвилі **2** в повітряному клині виражається формулою:

$$AB + BC = h_m \cos \alpha \left( 1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right). \quad (3)$$

Зауважимо, що кожна із хвиль двічі проходить через скляну пластинку, але через мале значення кута при ребрі повітряного клина це не призводить до появи додаткової різниці шляхів.

Різниця фаз визначається різницею оптичних шляхів, яка є добутком різниці геометричних шляхів на показник заломлення середовища  $n$ . Окрім цього, потрібно врахувати, що при відбиванні від оптично більш густого середовища фаза хвилі змінюється на  $\pi$ , що відповідає додатковому оптичному шляху  $\lambda/2$ . За умовою задачі кут сходження клина  $\alpha \ll 1$ . В зв'язку з цим можна використати наближення, за якими

$$\cos \alpha \approx 1; \quad \cos 2\alpha \approx 1. \quad (4)$$

Підстановка (4) в (3) з врахуванням «втрати півхвилі» дає для оптичної різниці ходу такий результат

$$\Delta = 2n \cdot h_m + \frac{\lambda}{2}. \quad (5)$$

Різницю фаз отримаємо, помноживши вираз (5) на  $2\pi/\lambda$ . В такий спосіб отримуємо

$$\Delta\Phi = \left( 2nh_m + \frac{\lambda}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6)$$

Комбінуючи (6) з умовою спостереження максимуму порядку  $m$

$$\Delta\Phi = 2\pi m$$

дістаємо

$$2nh_m + \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \quad (7)$$

Максимум наступного порядку спостерігається в точці, якій відповідає товщина плівки  $h_{m+1}$ , що за формулою (7) задовольняє умову

$$2nh_{m+1} + \frac{\lambda}{2} = (m+1)\lambda. \quad (8)$$

Із співвідношень (8) і (7) отримуємо різницю товщин, яка відповідає спостереженню двох сусідніх максимумів:

$$2n(h_{m+1} - h_m) = 2n\Delta h_m = \lambda. \quad (9)$$

Різниця товщин як катет виражається через відстань між сусідніми інтерференційними смугами, тобто ширину  $b$  інтерференційної картини, як гіпотенузу співвідношенням:

$$\Delta h_m = b \sin \alpha. \quad (10)$$

Комбінуючи (10) і (9), приходимо до рівняння

$$b \sin \alpha = \lambda / 2n, \quad (11)$$

з якого при врахуванні малих значень кута  $\alpha$  випливає:

$$b = \frac{\lambda}{2n\alpha}. \quad (12)$$

Кут  $\alpha$  виражається таким чином

$$\alpha = \frac{d}{L} \quad (13)$$

через геометричні характеристики клина.

Підстановка (13) в (12) з врахуванням того, що для повітря  $n=1$ , дає остаточний результат:

$$b = \frac{\lambda L}{2d}. \quad (14)$$

#### **Аналіз одиниць вимірювання**

$$[b] = \frac{[\lambda][L]}{[d]} = (\text{м} \cdot \text{м}) / \text{м} = \text{м}. \quad (15)$$

#### **Обчислення:**

$$b = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-5}} = 0,3 (\text{м}). \quad (16)$$

**Відповідь:**  $b = 0,3 \text{ м}$  ;  $b = \frac{\lambda L}{2d}$ .

#### **Задача 5.**

Від двох когерентних джерел  $S_1$  і  $S_2$  промені світла з довжиною хвилі  $\lambda = 700$  нм потрапляють на екран, на якому спостерігається інтерференційна картина. Коли на шляху одного з променів перпендикулярно до нього помістили мильну плівку з показником заломлення  $n = 1,33$ , інтерференційна картина змінилася на протилежну. При якій найменшій товщині плівки це можливо?

**Дано:**

$$\lambda = 700 \text{ нм};$$

$$n = 1,33$$

$$\Delta = \lambda / 2$$

**Знайти:**  $d_{\min}$

### Розв'язування

Зміна інтерференційної картини на протилежну означає, що на тих ділянках екрана, де спостерігалися інтерференційні максимуми, почали спостерігатись інтерференційні мінімуми. Таке зміщення інтерференційної картини можливе при зміні оптичної різниці ходу пучків світлових хвиль на непарну кількість половин довжин хвиль, тобто

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

де  $\Delta_1$  – оптична різниця ходу світлових хвиль до внесення плівки;  $\Delta_2$  – оптична різниця ходу після внесення плівки;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Найменшій товщині  $d_{\min}$  плівки відповідає  $k = 0$ :

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

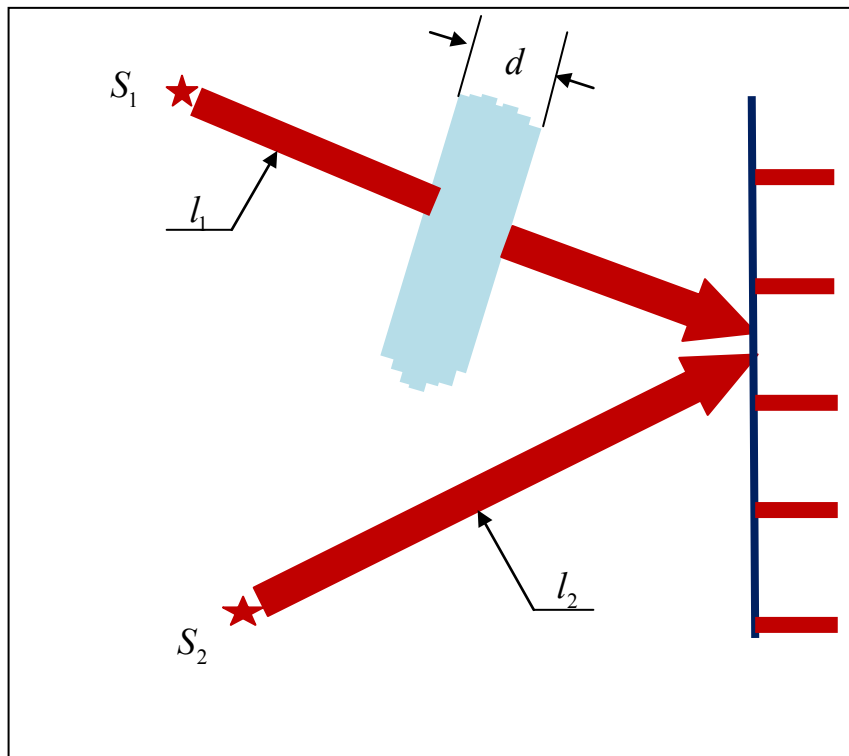


Рисунок 5 – Ілюстрація до задачі 5

Подана схема розташування інтерференційних смуг після внесення мильної плівки.

З рисунка 5 отримуємо:

$$\Delta_1 = l_1 - l_2, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= [(l_1 - d_{\min}) + nd_{\min}] - l_2 = \\ &= (l_1 - l_2) + d_{\min}(n - 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta_2 - \Delta_1 &= (l_1 - l_2) + \\ &+ d_{\min}(n - 1) - (l_1 - l_2) = \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

або

$$d_{\min}(n - 1) = \frac{\lambda}{2}. \quad (6)$$

Звідси

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2(n - 1)}. \quad (7)$$

Підставимо числові значення, що дає

$$d_{\min} = \frac{700}{2(1,33 - 1)} = 1050 \text{ (нм)}.$$

**Відповідь:**  $d_{\min} = 1050 \text{ (нм)}$ . У загальному вигляді  $d_{\min} = \frac{\lambda}{2(n - 1)}$ .

### Завдання для самостійної роботи з Теми 1

1. Відстань від щілин до екрана в досліді Юнга  $L = 1 \text{ м}$ . Визначити відстань між щілинами, якщо на відрізку завдовжки  $l = 1 \text{ см}$  укладається  $N = 10$  темних інтерференційних смуг. Довжина хвилі  $\lambda = 0,7 \text{ мкм}$ .

2. В досліді Юнга на шляху одного з інтерференційних променів помістили тонку скляну пластинку з показником заломлення  $n = 1,5$ , внаслідок чого центральна світла смуга змістилась в положення, яке займала спочатку п'ята світла смуга. Промінь світла падає перпендикулярно до поверхні пластинки. Довжина хвилі світла  $\lambda = 600 \text{ нм}$ . Якою є товщина пластинки?

3. В досліді з інтерферометром Майкельсона переміщення одного з дзеркал на відстань  $l = 0,161$  мм призводить до зміщення інтерференційної картини на  $N = 500$  смуг. Знайти довжину хвилі використовуваного джерела світла.
4. В одне із пліч інтерферометра Жамена помістили трубку довжиною  $l = 10$  см, заповнену хлором. В результаті цього інтерференційна картина змістилася на  $N = 131$  смугу. Знайти показник заломлення хлору, якщо довжина хвилі світла  $\lambda = 5,9 \cdot 10^{-5}$  см.
5. Інтерференція спостерігається для немонохроматичного світла з довжинами хвиль в інтервалі  $480 \leq \lambda \leq 520$  нм. Зайти максимальний порядок інтерференційного максимуму і оцінити довжину та час когерентності.
6. Інтерференційну картину від двох точкових когерентних джерел, відстань між якими  $d = 0,25$  мм, спостерігається на екрані, перпендикулярному до прямої, яка проходить через джерела на відстані  $L = 0,5$  м від одного з них. Встановити геометричну форму інтерференційних смуг і знайти їх кількість, якщо довжина хвилі  $\lambda = 500$  нм.
7. Відстань між щілинами в досліді Юнга  $d = 0,5$  мм. Яка відстань від щілин до екрана, якщо відстань між сусідніми темними смугами дорівнює  $\Delta y = 1$  мм? Довжина хвилі світла  $\lambda = 550$  нм. Пристрій Юнга знаходиться в прозорій рідині з показником заломлення  $n = 1,5$ .
8. Визначити кут між дзеркалами Френеля, якщо відстань між інтерференційними смугами на екрані  $\Delta x = 1$  мм. Ребро дзеркал знаходиться на відстані  $R = 10$  см від паралельної йому щілини, яка є джерелом світла завдовжки  $\lambda = 486,1$  нм, і перебуває на відстані  $D = 1$  м від екрана. Інтерференційні промені падають на екран приблизно перпендикулярно.
9. Визначити найменшу товщину мильної плівки, якщо у відбитому світлі вона здається зеленою ( $\lambda = 500$  нм). Кут між нормаллю і променем зору  $\alpha = 35^\circ$ . Показник заломлення плівки  $n = 1,33$ .

10. В яких межах може змінюватись товщина пластинки, щоб можна було спостерігати максимум  $k = 12$  порядку для довжини хвилі світла  $\lambda = 600$  нм? Показник заломлення пластинки  $n = 1,6$ .

11. Пристрій для отримання кілець Ньютонa освітлюється монохроматичним світлом, яке падає нормально до поверхні пластинки. Спостереження ведеться у відбитому світлі. Радіуси двох сусідніх темних кілець  $r_k = 4,000$  мм і  $r_{k+1} = 4,38$  мм. Радіус кривини лінзи  $R = 6,4$  м. Знайти порядкові номери кілець і довжину хвилі світла, що падає.

12. На поверхню скляної пластинки, показник заломлення якої  $n = 1,6$ , нанесено прозору плівку ( $n = 1,4$ ), що освітлюється хвилею світла з довжиною  $\lambda = 0,7$  мкм, що йде з повітря перпендикулярно до поверхні плівки. Яку найменшу товщину має мати плівка для того, щоб не було відбивання світла?

13. Мильна плівка з показником заломлення  $n = 1,33$  розміщена вертикально і утворює клин внаслідок стікання рідини. Під час спостереження інтерференційних смуг у відбитому світлі ртутної дуги ( $\lambda = 546,1$  нм) виявилось, що відстань між п'ятьма смугами  $l = 2$  см. Знайти кут клина. Світло падає перпендикулярно до поверхні плівки.

14. Поверхні скляного клина ( $n = 1,6$ ) утворюють між собою кут  $\alpha = 0,1'$ . На клин падає нормально до його поверхні пучок монохроматичних променів, довжина хвилі яких  $\lambda = 0,5$  мкм. Знайти лінійну відстань між темними інтерференційними смугами.

## Тема 2 Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракція світла. Метод зон Френеля

### План

1. Поняття про дифракцію. Побудови Гюйгенса.
2. Принцип Гюйгенса-Френеля. Формула Кірхгофа. Зони Френеля.
3. Дифракція на отворі і диску.
4. Дифракція в паралельних променях. Дифракція на щілині.
5. Дифракція на ґратці. Дифракційна ґратка як спектральний прилад.
6. Дифракція на просторовій ґратці. Формула Вульфа-Брегга.

### Основні співвідношення

$$2. \text{ а) } A_M = \frac{k}{2\pi i} \int_S \frac{u e^{ikr} dS_n}{r} ; \text{ б) } \sigma_k = \frac{\pi ab \lambda}{a+b} ; \text{ в) } r_k = \sqrt{\frac{kab\lambda}{a+b}} ;$$

$$\text{ г) } A_M = \begin{cases} \frac{A_1 + A_k}{2} \\ \frac{A_1 + A_{k-1}}{2} - A_k \end{cases}$$

3. а)  $k \gg 1$  дифракція відсутня;  $k \sim 1$  – дифракція Френеля ;  
 $k < 1$  – дифракція Фраунгофера:  $k = 2m + 1$  – умова максимуму;  
 $k = 2m$  – умова мінімуму.

Позначення:  $A_M$  – амплітуда в точці спостереження,  $k$  – хвильове число,  $S$  – поверхня вторинних джерел,  $dS$  – елемент поверхні,  $u$  – амплітуда в точках допоміжної поверхні,  $r$  – відстань від елемента поверхні до точки спостереження,  $\sigma_k$  – площа  $k$ -тої зони Френеля,  $r_k$  – радіус  $k$ -тої зони Френеля,  $a$  – радіус хвильової поверхні,  $b$  – відстань від полюса сфери до точки спостереження.

4. а) Інтенсивність монохроматичної хвилі дифрагрованої на кут  $\varphi$ :

$$I(\varphi) = I_0 \left[ \frac{\lambda \sin\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right)}{\pi b \sin \varphi} \right]^2.$$

Тут  $b$  – ширина щілини,  $\lambda$  – довжина хвилі,  $I_0$  – інтенсивність падаючої хвилі;

б) Умова спостереження мінімуму при дифракції Фраунгофера на щілині шириною  $b$

$$b \sin \varphi = m\lambda;$$

в) Умова спостереження дифракційного максимуму

$$b \sin \varphi \approx (2m + 1)\lambda / 2;$$

г) Інтенсивність дифракційних максимумів

$$I(\varphi) = I_0 \left[ \frac{2}{\pi(2m + 1)} \right]^2;$$

5. а) Інтенсивність монохроматичної хвилі дифрагрованої ґраткою на кут  $\varphi$ :

$$I_d(\varphi) = I(\varphi) \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi Nd \sin \varphi}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}\right)} \right]^2;$$

тут  $d$  – стала (період) ґратки,  $N$  – кількість щілин;

б) Умова спостереження головних дифракційних максимумів

$$d \sin \varphi = m\lambda;$$

в) Побічні дифракційні мінімуми спостерігаються для кутів

$$d \sin \varphi = m\lambda + \frac{p\lambda}{N}, \quad p: 1, 2, 3, \dots, (N - 1);$$

г) Умова спостереження побічних дифракційних максимумів

$$d \sin \varphi \approx m\lambda + (2p + 1)\lambda / 2N;$$

д) Інтенсивність побічних максимумів

$$I_{d,\max}(\varphi) = I(\varphi_{mp}) \left[ \frac{2N}{\pi(2m + 1)} \right]^2 \approx I_0 \frac{4N^2}{\pi^2(2m + 1)^2};$$

е) Кутова дисперсія ґратки:

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda};$$

ж) Роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda};$$

и) Роздільна здатність за критерієм Релея

$$R = \frac{Nd}{\lambda}.$$



6. а) Умова Вульфа-Брегга для дифракції на просторовій ґратці:

$$d \sin \vartheta = m\lambda .$$

Тут  $\vartheta$  – кут ковзання.

### Приклади розв'язання задач

#### Задача 1.

На дифракційну ґратку нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі  $\lambda = 410 \text{ нм}$ . Кут  $\Delta\varphi$  між напрямками на максимумах першого і другого порядків дорівнює  $2^\circ 21'$ . Знайти число штрихів  $n$  на 1 мм дифракційної ґратки.

**Дано:**

$$\lambda = 410 \text{ нм};$$

$$m_1 = 1;$$

$$m_2 = 2;$$

$$\Delta\varphi = 2^\circ 21';$$

$$l = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

---

**Знайти:** число штрихів  $n$  на 1 мм.

#### Розв'язування

Постановку задачі ілюструє рисунок 1.

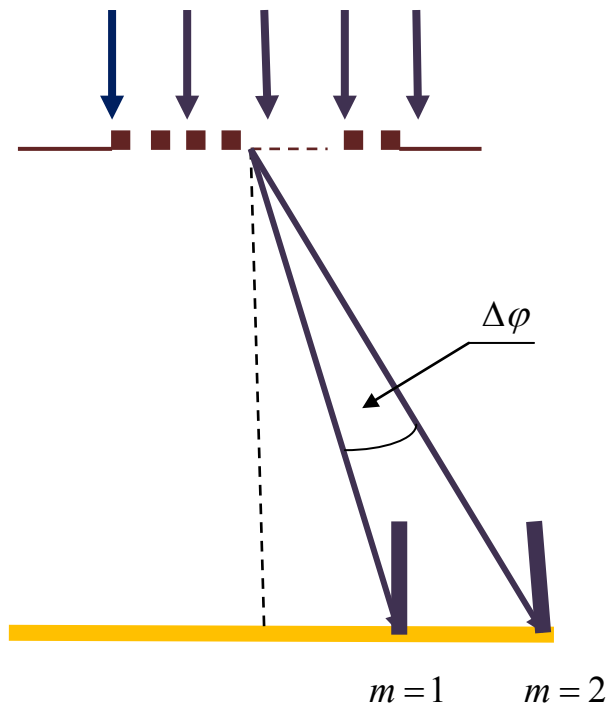


Рисунок 1 – Ілюстрація до задачі 1

Нехай період ґратки дорівнює  $d$ . Тоді на довжині  $l$  вкладається кількість штрихів, яка визначається формулою:

$$N = \frac{l}{d}. \quad (1)$$

Отже, задача зводиться до обчислення сталої ґратки. Для цього запишемо умову спостереження дифракційного максимуму порядку  $m$ :

$$d \sin \varphi = m\lambda. \quad (2)$$

Для двох заданих в умові мінімумів одержуємо співвідношення:

$$d \sin \varphi_2 = m_2\lambda, \quad (3)$$

$$d \sin \varphi_1 = m_1\lambda. \quad (4)$$

Підставимо в (3)  $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$ , що дає:

$$d \sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) = m_2\lambda. \quad (5)$$

Відніманням від (5) рівняння (4) одержуємо:

$$d[\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) - \sin \varphi_1] = (m_2 - m_1)\lambda. \quad (6)$$

Використанням тригонометричних тотожностей рівняння (6) можна звести до квадратного рівняння відносно  $\sin \varphi_1$ . Проте, має сенс врахувати, що різниця кутів дифракції мала; це дозволяє застосувати наближення, виражене рівністю:

$$\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) \approx \sin \varphi_1 + \Delta\varphi \cos \varphi_1 = \sin \varphi_1 + \Delta\varphi. \quad (7)$$

Комбінуючи (7) і (6), приходимо до рівняння:

$$d \cdot \Delta\varphi = (m_2 - m_1)\lambda, \quad (8)$$

з якого випливає:

$$d = \frac{(m_2 - m_1)\lambda}{\Delta\varphi}. \quad (9)$$

Після підстановки (9) у співвідношення (1) знаходимо:

$$N = \frac{l \cdot \Delta\varphi}{(m_2 - m_1)\lambda}. \quad (10)$$

Тепер, діленням на  $l$ , одержуємо шуканий результат:

$$n = \frac{\Delta\varphi}{(m_2 - m_1)\lambda}. \quad (11)$$

**Аналіз одиниць вимірювання:**

$$[n] = \frac{1}{[\lambda]} = \text{м}^{-1}. \quad (12)$$

**Обчислення:**

$$n = \frac{2,35}{(2-1) \cdot 0,410 \cdot 10^{-6} \cdot 180} = 3,184 \cdot 10^4 \text{ (м}^{-1}\text{)}. \quad (13)$$

**Відповідь:**  $n = 3,184 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1} = 32 \text{ мм}^{-1}$ ; у загальному вигляді  $n = \frac{\Delta\varphi}{(m_2 - m_1)\lambda}$ .

### Задача 2.

На щілину шириною  $a = 0,1 \text{ мм}$  нормально падає паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі  $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ . Встановити ширину  $l$  центрального максимуму в дифракційній картині, яка проектується за допомогою лінзи, що знаходиться одразу за щілиною, на екран, який перебуває на відстані  $\Delta = 1 \text{ м}$  від лінзи.

**Дано:**

$$a = 0,1 \text{ мм} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$\lambda = 0,6 \text{ мкм} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta = 1 \text{ м}$$

**Знайти:**  $l$

### Розв'язування

Розподіл інтенсивності при дифракції на щілині подано на рис. 2.

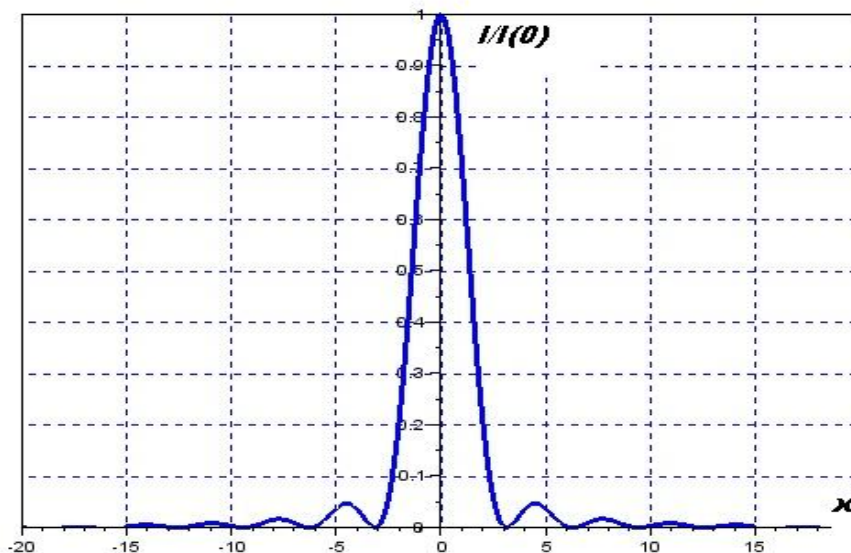


Рисунок 2 – Розподіл інтенсивності при дифракції на щілині

На цьому рисунку  $I/I(0)$  – відносна інтенсивність калібрована на інтенсивність центрального максимуму, а  $x = (\pi a \cdot \sin\varphi) / \lambda$ . Позначимо як  $\varphi$  кут, який відповідає мінімуму першого порядку( на рис. 2 відносна інтенсивність при цьому дорівнює нулю). Для дифракції на щілині при нормальному падінні монохроматичного світла цей кут визначається співвідношенням:

$$a \cdot \sin\varphi = \lambda. \quad (1)$$

Півширина центрального максимуму як катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута  $\varphi$ , описується формулою

$$\frac{l}{2} = \Delta \cdot \operatorname{tg}\varphi. \quad (2)$$

Взявши до уваги, що

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}}, \quad (3)$$

та виключивши, на основі умови мінімуму (1), звідси  $\sin\varphi$  для ширини максимуму, одержимо:

$$l = \frac{2\lambda\Delta}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}. \quad (4)$$

Оскільки  $a \gg \lambda$ , то остаточний результат набуває такого вигляду:

$$l = \frac{2\lambda\Delta}{a}. \quad (5)$$

**Аналіз одиниць вимірювання:**

$$[l] = \frac{[\lambda][\Delta]}{[a]} = \text{м} \cdot \text{м} / \text{м} = \text{м}.$$

**Обчислення:**

Підстановка числових значень дає :

$$l = \frac{2 \cdot 6,0 \cdot 10^{-7}}{1,0 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}. \quad (6)$$

**Відповідь:** ширина центрального максимуму  $l = 1,2 \cdot 10^{-2}$  (м);

у загальному вигляді  $l = \frac{2\lambda\Delta}{a}$ .

**Задача 3.**

Плоска монохроматична світлова хвиля з довжиною хвилі  $\lambda = 0,65$  мкм падає нормально на непрозорий екран з круговою діафрагмою радіусом  $r = 0,8$  мм. На якій відстані від діафрагми перебуває точка спостереження,

якщо з неї на відкритій частині хвильової поверхні можна побудувати  $k=3$  зони Френеля? Що буде спостерігатися, якщо ця відстань збільшиться в  $\gamma=1,5$  рази?

**Дано:**

$$\lambda = 0,65 \text{ мкм};$$

$$r = 0,8 \text{ мм};$$

$$k = 3;$$

$$b_\gamma = \gamma b = 1,5b;$$

**Знайти:** а) відстань  $b$ ; б) результат дифракції у точці, віддаленій на  $b_\gamma$ .

### Розв'язування

Точка спостереження  $M$  і відповідні геометричні параметри вказані на рис. 3.

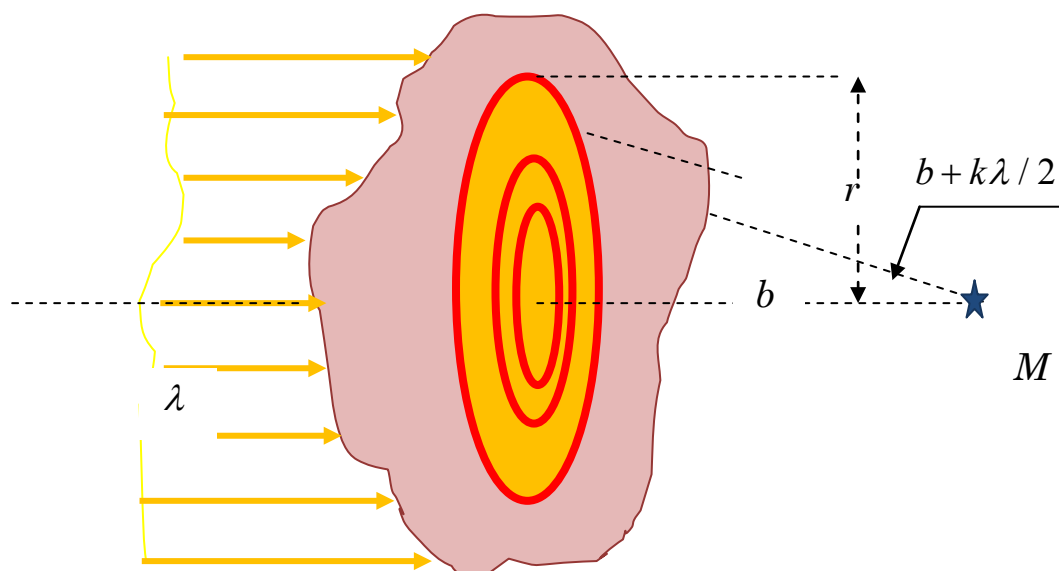


Рисунок 3 – Схема побудови зон Френеля в задачі 3

Нехай радіус зони Френеля з порядковим номером  $k$  дорівнює  $r_k$ . Його можна виразити за формулами, поданими в «Основних співвідношеннях». Проте, у такому випадку доцільно звернутися до методу побудови зон Френеля. За теоремою Піфагора запишемо:

$$r_k^2 = (b + k\lambda / 2)^2 - b^2. \quad (1)$$

Після спрощень отримуємо:

$$r_k^2 = bk\lambda + (k\lambda / 2)^2. \quad (2)$$

Оскільки  $\lambda \ll b$ , то останнім доданком у рівнянні (2) можна знехтувати, що приводить до простішої форми, а саме:

$$r_k^2 = bk\lambda. \quad (3)$$

На відкритій частині хвильової поверхні побудовано  $k$  зон. Це означає, що радіус останньої зони збігається з радіусом діафрагми, а тому

$$r_k = r. \quad (4)$$

Поєднавши (3) і (4), одержуємо:

$$bk\lambda = r^2. \quad (5)$$

Розв'язавши (5) відносно  $b$ , знаходимо:

$$b = \frac{r^2}{k\lambda}. \quad (6)$$

Якщо відстань до точки спостереження зростає до значення  $b_\gamma = \gamma b$ , то формула (6) набуває такого вигляду:

$$b_\gamma = \frac{r^2}{k_\gamma \lambda}. \quad (7)$$

Почленне ділення (6) на (7) для відповідної новій відстані кількості зон Френеля дає:

$$k_\gamma = k \cdot \frac{b}{b_\gamma} = \frac{k}{\gamma}. \quad (8)$$

**Аналіз одиниць вимірювання:**

$$[b] = \frac{[r^2]}{[k][\lambda]} = \text{м}^2/\text{м} = \text{м}. \quad (9)$$

**Обчислення:**

а)

$$b = \frac{(0,8 \cdot 10^{-3})^2}{3 \cdot 0,65 \cdot 10^{-6}} = 0,33 \text{ (м)};$$

б)

$$k_\gamma = \frac{k}{\gamma} = \frac{3}{1,5} = 2.$$

Кількість зон Френеля парна, а тому у точці спостереження має місце мінімум інтенсивності.

**Відповідь:** а)  $b = 0,33 \text{ (м)}$ , в загальному вигляді  $b = \frac{r^2}{k\lambda}$ ; б)  $k_\gamma = 2$ , мінімум

#### Задача 4.

Скільки повних спектрів можна спостерігати за допомогою дифракційної ґратки з  $N = 500$  штрихами на  $l = 1$  мм довжини, якщо ширина щілини дорівнює ширині проміжку між щілинами? Вважати, що повний спектр видимого світла з боку довгохвильового краю обмежений довжиною хвилі  $\lambda = 760$  нм.

**Дано:**

$$N = 500;$$

$$d = a + b = 2b;$$

$$l = 1 \text{ мм};$$

$$\lambda = 760 \text{ нм}$$

---

**Знайти:** кількість повних спектрів  $m$

#### Розв'язування

Задача розв'язується на основі сумісного аналізу двох співвідношень, а саме, умови спостереження дифракційних максимумів

$$d \cdot \sin\varphi = k\lambda, \quad (1)$$

де  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  – додатні чи від'ємні цілі числа, і умови спостереження мінімумів на одиночній щілині шириною  $b$ , тобто

$$b \cdot \sin\varphi = n\lambda. \quad (2)$$

Тут  $n$  є також цілим числом. Оскільки  $|\sin\varphi| \leq 1$ , то кількість дифракційних максимумів обмежена. Із формули (1) для максимально можливого порядку максимуму знаходимо:

$$k_{\max} = \left[ \frac{d}{\lambda} \right]. \quad (3)$$

У цьому співвідношенні запис  $[x]$  означає цілу частину числа  $x$ . Для деяких кутів дифракції одночасно можуть виконуватися обидві умови – як (1), так і (2). Але за умовою (2) вторинні хвилі, які випромінюються кожною щілиною, досягають точки спостереження з такою різницею фаз, що при їх додаванні інтенсивність, пов'язана із однією щілиною, дорівнює нулю. Ця інтенсивність входить до результуючої інтенсивності у вигляді добутку (див. відповідну формулу у теоретичній частині до Теми 2). Таким чином при одночасному виконанні обох умов результуюча інтенсивність дорівнює нулю, а, значить, деякі головні дифракційні максимуми

випадають, тобто не спостерігаються. Визначивши  $\text{Sin}\varphi$  з формул (1) і (2), отримаємо:

$$\text{Sin}\varphi = \frac{k\lambda}{d}, \quad (4)$$

$$\text{Sin}\varphi = \frac{n\lambda}{b}. \quad (5)$$

Звідси знаходимо порядок тих дифракційних максимумів, які «випадають» зі спектра:

$$k = n \frac{d}{b}. \quad (6)$$

Звідси випливає, що зникнення деяких максимумів можливе лише тоді, коли, як у нашому випадку, відношення  $d/b$  виражається раціональним числом. Підстановка цього відношення, взятого із умови, дає:

$$k = n \frac{2b}{b} = 2n. \quad (7)$$

Отже, в умовах цієї задачі зі спектра випадають всі максимуми парних порядків.

Тепер знайдемо  $k_{\max}$ . Оскільки

$$d = \frac{l}{N}, \quad (8)$$

то за формулою (3) маємо:

$$k_{\max} = \left[ \frac{l}{N\lambda} \right]. \quad (9)$$

### **Аналіз одиниць вимірювання**

$$[k_{\max}] = \frac{[l]}{[N][\lambda]} = \text{м/м} = 1.$$

### **Обчислення:**

$$k_{\max} = \left[ \frac{l}{N\lambda} \right] = \left[ \frac{1 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 0,76 \cdot 10^{-6}} \right] = \left[ \frac{2}{0,76} \right] = [2,63] = 2. \quad (10)$$

Як встановлено, спектри парних порядків не спостерігаються. Таким чином, залишаються лише спектри непарного, а саме, першого порядку. Отже, спостерігаються спектри першого порядку, симетричні відносно головного дифракційного максимуму з  $k = 0$ .

**Відповідь:**  $m = 1$



### Задача 5.

На щілину шириною  $b = 0,1$  мм падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм. Що буде спостерігатися на екрані (максимум чи мінімум), якщо кут дифракції а)  $\varphi = 17'$ ; б)  $\varphi = 43'$ ?

**Дано:**

$$b = 0,1 \text{ мм} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

$$\varphi_1 = 17';$$

$$\varphi_2 = 43'.$$

---

**Встановити:** результат дифракції

### Розв'язування

При дифракції на щілині шириною  $b$  результат дифракції визначається різницею оптичних шляхів  $\Delta$ , яка таким чином

$$\Delta = d \sin \varphi \quad (1)$$

залежить від кута дифракції  $\varphi$ .

Дифракційний мінімум спостерігається за умови

$$b \sin \varphi = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

де  $k$  – ціле число, яке визначає порядковий номер мінімуму. Що ж до максимуму, то відповідна умова має наближений характер і зводиться до співвідношення

$$b \sin \varphi = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

Таким чином, якщо числове значення виразу  $2b \sin \varphi / \lambda$  – величина парна, то у напрямі відповідного кута дифракції спостерігатиметься мінімум, якщо ж значення цього виразу непарне, то для такого кута дифракції матиме місце максимум.

**Аналіз одиниць вимірювання:**

Результат дифракції визначається відношенням величин з розмірністю довжини, а тому, як і має бути, є величиною безрозмірною.

**Обчислення:**

$$\text{а) } \left( \frac{2b \sin \varphi}{\lambda} \right) = \frac{2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-4} \sin 17'}{5 \cdot 10^{-7}} = 2 \text{ – спостерігається мінімум.}$$

$$\text{б) } \left( \frac{2b \sin \varphi}{\lambda} \right) = \frac{2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-4} \sin 43'}{5 \cdot 10^{-7}} = 5 \text{ – спостерігається максимум.}$$

<b>Відповідь:</b> а) $\left( \frac{2b \sin \varphi}{\lambda} \right) = 2$ – мінімум; б) $\left( \frac{2b \sin \varphi}{\lambda} \right) = 5$ – максимум.
--

## Завдання для самостійної роботи з Теми 2

1. Обчислити площу  $k$ -ої зони Френеля, якщо радіус сферичної хвильової поверхні  $a = 1,2$  м, відстань від хвильової поверхні до точки спостереження  $b = 0,8$  м, а довжина хвилі  $\lambda = 550$  нм.

2. Взявши до уваги співвідношення  $A_0 = B/r$ , яке встановлює залежність амплітуди сферичної хвилі від відстані  $r$  від точкового джерела, довести, що амплітуда  $A_M$  в точці спостереження  $M$  визначається формулою:

$$A_M = \begin{cases} \frac{A_1 + A_k}{2}, & k = 1, 3, 5, \dots, 2m+1, \\ \frac{A_1 + A_{k-1}}{2} - A_k, & k = 2, 4, 6, \dots, 2m. \end{cases}$$

3. Знайти радіуси перших п'яти зон Френеля, якщо відстань від джерела світла до хвильової поверхні  $R = 1$  м, відстань від хвильової поверхні до точки спостереження  $L = 1$  м Довжина хвилі світла  $\lambda = 500$  нм.

4. На плоску діафрагму з круглим отвором радіусом  $r = 2$  мм падає від точкового джерела монохроматичне світло з довжиною хвилі  $\lambda = 0,6$  мкм. Джерело світла розташоване на осі отвору на відстані  $R = 1$  м від нього. Для точки спостереження на тій самій осі діафрагма відкриває  $k = 10$  зон Френеля. Знайти відстань  $L$  від цієї точки до діафрагми.

5. Плоска світлова хвиля з довжиною  $\lambda = 0,5$  мкм падає нормально на діафрагму з круглим отвором діаметром  $D = 4$  мм. Точка спостереження знаходиться на осі отвору на відстані  $L = 2$  м від нього. Яка кількість зон Френеля вкладається на отворі? Яким буде результат дифракції в цій точці?

6. Радіус четвертої зони Френеля для плоского хвильового фронту  $r_4 = 2$  мм. Визначити радіус дев'ятої зони Френеля.

7. Знайти площу першої зони Френеля у випадку плоского фронту хвилі, якщо відстань від поверхні хвилі до точки спостереження  $r = 5$  м, а довжина світлової хвилі  $\lambda = 600$  нм.

8. На пластинку з щілиною, ширина якої  $a = 0,01$  мм, падає нормально паралельний пучок променів з довжиною хвилі  $\lambda = 500$  нм. Дифракційне зображення щілини утворюється на екрані, розміщеному на відстані  $L = 1$  м від пластинки. Знайти відстань між першою та другою темними лініями на екрані.

9. Яку мінімальну кількість рисок має мати дифракційна ґратка, щоб за допомогою неї можна було розділити лінії  $D_1$  і  $D_2$  жовтого дублета натрію, що має довжини хвиль  $\lambda_1 = 589$  нм і  $\lambda_2 = 589,6$  нм, якщо стала ґратки  $d = 2,5 \cdot 10^{-4}$  см?

10. Дифракційна ґратка завдовжки  $l = 3$  см має сталу  $d = 3$  мкм. Якою є її роздільна здатність у спектрі другого порядку? Чому дорівнює різниця довжин двох найближчих хвиль, які розділяються у спектрі другого порядку, якщо довжина першої хвилі  $\lambda_1 = 500$  нм?

11. На екрані отримано дифракційні спектри за допомогою дифракційної ґратки, яка має  $N = 500$  штрихів на  $1$  мм довжини і яка розташована паралельно до екрана. Вважаючи, що граничні довжини хвиль, які сприймає людське око,  $\lambda_1 = 780$  нм і  $\lambda_2 = 390$  нм, знайти ширину спектра першого порядку, якщо екран знаходиться на відстані  $L = 1,8$  м від ґратки.

12. На дифракційну ґратку нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі  $\lambda = 410$  нм. Кут між напрямками на максимумах першого і другого порядків  $\Delta\varphi = 2^\circ 21'$ . Визначити кількість штрихів на  $1$  мм дифракційної ґратки.

13. На поверхню дифракційної ґратки нормально до її поверхні падає монохроматичне світло. Стала дифракційної ґратки в  $n = 4,6$  разів більша від довжини світлової хвилі. Знайти загальну кількість дифракційних максимумів, які теоретично можна спостерігати в цьому випадку.

## Тема 3 Дифракція на просторовій ґратці. Поляризація світла

### План

1. Поняття про просторову ґратку. Формула Вульфа–Брегга.
2. Поляризація світла. Плоскополяризоване і еліптично поляризоване світло.
3. Поляризація світла при відбиванні. Закон Брюстера.
4. Поляризаційні прилади. Закон Малюса.

### Основні співвідношення

1. Умова Вульфа–Брегга для дифракції на просторовій ґратці:

$$2d \sin \vartheta = m\lambda.$$

Тут  $\vartheta$  – кут ковзання,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ .

2. Вектор результуючого поля при еліптичній поляризації змінюється за законом:

$$\frac{E_y^2}{E_1^2} + \frac{E_z^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_y E_z}{E_1 E_2} \cos \Delta\Phi = \sin^2 \Delta\Phi.$$

Світлові хвилі поширюються вздовж осі  $x$ ,  $E_1, E_2$  – їхні амплітуди, а  $\Delta\Phi$  – різниця фаз.

3. Кут падіння, при якому відбита хвиля повністю поляризована, залежить від відносного показника заломлення  $n$ , визначається законом Брюстера:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n.$$

4. Закон Малюса:

$$I_a = I_p \cos^2 \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут між площинами поляризатора і аналізатора, встановлює залежність інтенсивності поляризованого світла  $I_a$ , яке пройшло через аналізатор від кута між головними площинами.

### Приклади розв'язання задач

#### Задача 1.

Кут  $\alpha$  між площинами поляризатора і аналізатора дорівнює  $50^\circ$ . Природне світло, яке проходить через таку систему, ослаблюється в  $n = 8$  разів. Нехтуючи втратами на відбивання, знайти коефіцієнт поглинання світла  $k$  в поляроїдах.

**Дано:**

$$\alpha = 50^\circ;$$

$$n = 8;$$

---

**Знайти:** коефіцієнт поглинання  $k$ .

### Розв'язування

Для розв'язання задачі потрібно звернутися до закону Малюса

Нехай  $I_p$  – інтенсивність світла, яке пройшло через поляризатор. Якщо  $k$  – коефіцієнт поглинання світла одним з поляризаційних приладів (поляроїдів), то через аналізатор проходить частка, яка дорівнює  $1 - k$ . Отже, з врахуванням поглинання закон Малюса набуває такого вигляду:

$$I_a = I_p(1 - k) \cos^2 \alpha. \quad (1)$$

Поляризатор, через принцип своєї дії, пропускає лише половину інтенсивності світла, яке падає на нього. Крім цього, як і у випадку аналізатора, частка світла, що проходить через поляризатор, дорівнює  $1 - k$ . Таким чином, якщо інтенсивність природного світла позначити як  $I_0$ , то з врахуванням принципу дії поляризатора і поглинання для інтенсивності світла, яке пройшло через поляризатор, можемо записати:

$$I_p = \frac{1}{2}(1 - k)I_0. \quad (2)$$

Підстановка (2) в (1) дає:

$$I_a = \frac{1}{2}I_0(1 - k)^2 \cos^2 \alpha. \quad (3)$$

За умовою задачі маємо:

$$\frac{I_0}{I_a} = n. \quad (4)$$

Комбінуючи (4) і (3), одержуємо:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}(1 - k)^2 \cos^2 \alpha. \quad (5)$$

Розв'яжемо рівняння (5) відносно коефіцієнта поглинання. В результаті отримуємо:

$$k = 1 - \sqrt{\frac{2}{n}}(\cos \alpha)^{-1}. \quad (6)$$

### **Аналіз одиниць вимірювання:**

Оскільки всі величини у формулі (6) є безрозмірними, то результат, як це і має бути, є числом відносним.

**Обчислення:**

$$k = 1 - \sqrt{\frac{2}{8}} (\cos 50^\circ)^{-1} = 0,22. \quad (7)$$

**Відповідь:**  $k = 0,22$ ; у загальному вигляді  $k = 1 - \sqrt{\frac{2}{n}} (\cos \alpha)^{-1}$ .

### Задача 2.

У скільки разів зміниться інтенсивність світла, яке пройшло через два поляризаційні прилади, якщо кут між їх головними площинами збільшується від  $30^\circ$  до  $60^\circ$ . Втратами на поглинання і відбивання знехтувати.

**Дано:**

$$\alpha_1 = 30^\circ$$

$$\alpha_2 = 60^\circ$$

---

**Знайти:** відношення інтенсивностей  $\frac{I_2}{I_1}$ .

### Розв'язування

Нехай кут між головними площинами поляризатора і аналізатора дорівнює  $\alpha$ . Тоді інтенсивність світла, яке пройшло через аналізатор, за законом Малюса визначається співвідношенням:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha. \quad (1)$$

Записавши закон Малюса двічі для кожного із значень кута  $\alpha$ , матимемо

$$I_2 = I_0 \cos^2 \alpha_2, \quad (2)$$

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha_1. \quad (3)$$

Почленно діленням (2) на (3) одержуємо шуканий результат:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1}. \quad (4)$$

**Аналіз одиниць вимірювання:**

$$\left[ \frac{I_2}{I_1} \right] = \frac{[\cos^2 \alpha_2]}{[\cos^2 \alpha_1]} = 1/1 = 1. \quad (5)$$

**Обчислення:**

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 60^\circ}{\cos^2 30^\circ} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^2}{3} = \frac{1}{3}. \quad (6)$$

**Відповідь:**  $\frac{I_1}{I_3} = 3$ , інтенсивність зменшується у 3 рази; у загальному вигляді  $\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1}$ .

### Задача 3.

При якій кутовій висоті Сонця над горизонтом сонячне світло, відбите від гладкої поверхні озера, буде повністю поляризованим? Показник заломлення води  $n = 1,33$ .

**Дано:**

$$\alpha = \alpha_{Br}$$

$$n = 1,33$$

**Знайти:** кутову висоту Сонця  $\beta$ .

### Розв'язування

Постановка задачі ілюструється рисунком 1:

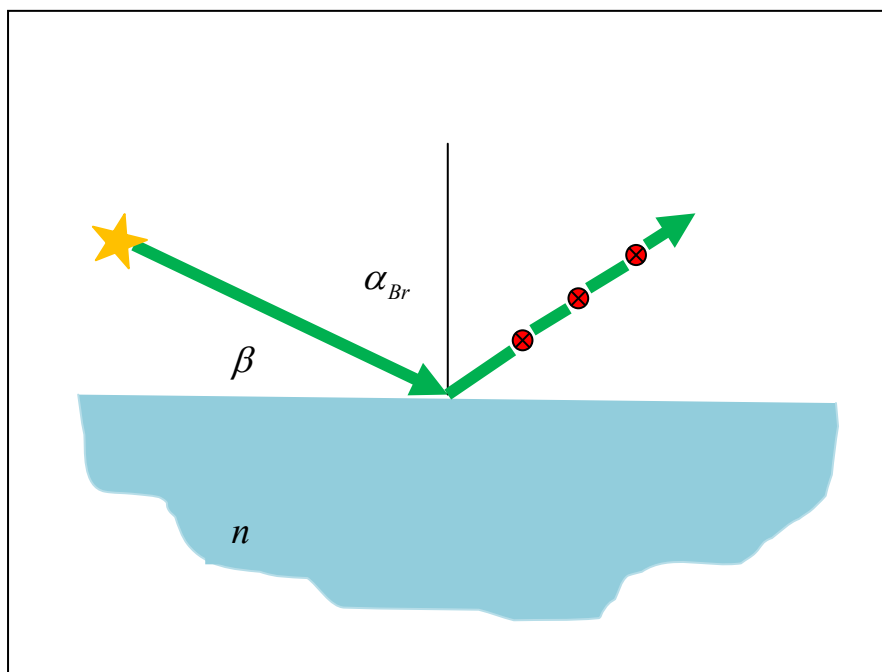


Рисунок 1 – До спостереження поляризації при відбиванні за умов задачі 3

Досліди показують, що при відбиванні світла від поверхні діелектрика відбувається часткова поляризація як відбитої, так і заломленої хвилі, причому у відбитій хвилі переважають коливання електричного вектора, перпендикулярні до площини падіння. Ступінь поляризації залежить від кута падіння. При деякому куті падіння  $\alpha_{Br}$ , який називається кутом

Брюстера, відбита хвиля повністю поляризована. Саме такий стан зображено на рис. 1.

Важливо, що при падінні під кутом Брюстера відбитий і заломлений промені виявляються взаємно перпендикулярними. Цей факт, якщо його аналізувати сумісно із законом заломлення світла та закономірностями випромінювання диполями, дає можливість довести закон Брюстера, який саме і визначає кут Брюстера. Отже, маємо

$$\operatorname{tg} \alpha_{Br} = n, \quad (1)$$

де  $n$  – відносний показник заломлення контактуючих середовищ.

Кутова висота Сонця визначається кутом  $\beta$ . Оскільки цей кут доповнює кут Брюстера до прямого кута, то можемо записати:

$$\beta + \alpha_{Br} = \pi / 2. \quad (2)$$

Виключивши за формулами зведення зі співвідношень (1) і (2) кут Брюстера, одержуємо:

$$\operatorname{ctg} \beta = n. \quad (3)$$

Звідси знаходимо шукану кутову висоту Сонця

$$\beta = \operatorname{arcctg}(n). \quad (4)$$

#### **Аналіз одиниць вимірювання:**

Відносний показник заломлення є величиною безрозмірною. А тому відповідна обернена тригонометрична функція приводить до результату, вираженого або в радіанному, або у градусному вимірюванні.

#### **Обчислення:**

$$\beta = \operatorname{arcctg}(n) = \operatorname{arcctg} 1,33 = 0,6447 = 37^\circ. \quad (5)$$

**Відповідь:**  $\beta = 37^\circ$  ;

у загальному вигляді  $\beta = \operatorname{arcctg}(n)$ .

#### **Задача 4.**

Пучок рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda = 2,27 \cdot 10^{-11}$  м проходить через алюмінієву фольгу, після чого на екрані спостерігається дифракційна картина. Відбиванню третього порядку відповідає кільце діаметром  $D = 3,35$  см. Знайти сталу кристалічної ґратки алюмінію, якщо відстань між фольгою і екраном  $L = 9,91$  см.



**Дано:**

$$\lambda = 2,27 \cdot 10^{-11} \text{ м};$$

$$m = 3;$$

$$D = 3,35 \text{ см};$$

$$L = 9,91 \text{ см}.$$

---

**Знайти:** сталу ґратки  $d$ .

### Розв'язування

Схема спостереження дифракції на кристалічній ґратці зображена на рисунку 2.

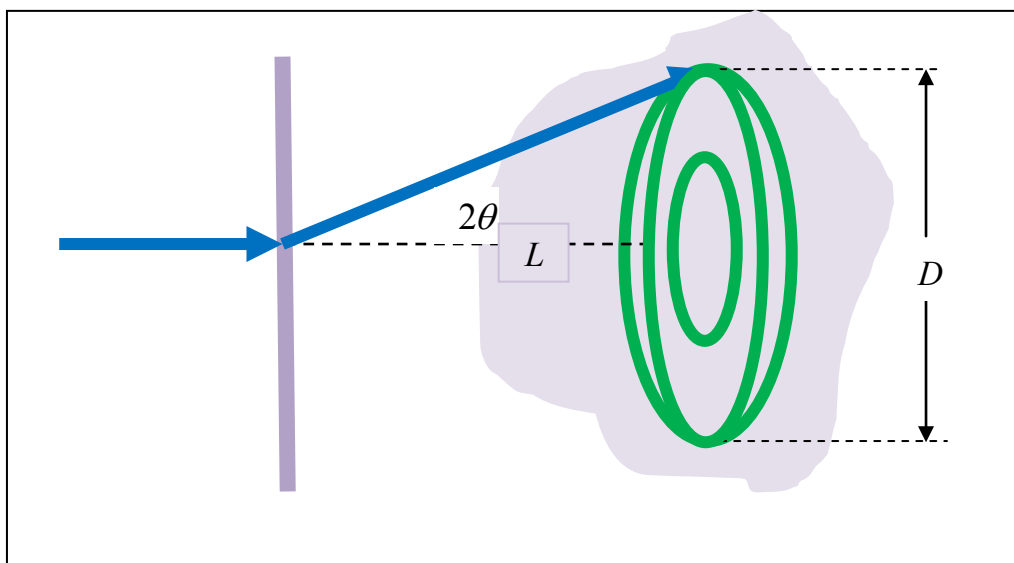


Рисунок 2 – Ілюстрація до задачі 4. Спостереження дифракції на ґратці

В ідеальному кристалі атоми розташовані впорядковано, утворюючи тривимірну періодичну ґратку, яка для рентгенівських променів потрібної довжини хвилі відіграє роль оптичної дифракційної ґратки. Особливість металевої фольги, як і будь-якого реального зразка металу, полягає у тому, що вона утворена маленькими кристалітами, які відтворюють структуру масивного кристала, але є хаотично орієнтованими в просторі. Якщо промінь падає на атомну площину під кутом ковзання, який задовольняє умову Вульфа–Брегга

$$2d \sin \theta = m \lambda, \quad (1)$$

то, інтерферуючи, відбиті хвилі дадуть максимум порядку  $m$ . При цьому відбиті промені утворюють з тим, який пройшов через фольгу, як це видно з рисунка 3, кут, що дорівнює  $2\theta$ .

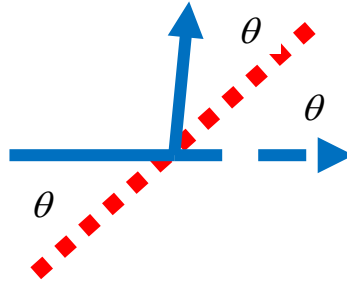


Рисунок 3 – Відбивання рентгенівського променя від атомної площини, яка вказана квадратними позначками

З умови Вульфа–Брегга (1) дістаємо:

$$d = \frac{m\lambda}{2\sin\theta} \quad (2)$$

Звернувшись до рис. 2, одержимо:

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{D}{2L}. \quad (3)$$

Тепер можна підставити числові значення і обчислити кут ковзання  $\theta$ . Але одержане рівняння можна привести до такого вигляду:

$$\operatorname{tg}^2\theta + \frac{4L}{D}\operatorname{tg}\theta - 1 = 0. \quad (4)$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо:

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{1 + \left(\frac{2L}{D}\right)^2} - \frac{2L}{D}. \quad (5)$$

Оскільки має місце тотожність

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}},$$

то, поєднуючи її з результатом (5), приходимо до співвідношення:

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2L}{D}\right)^2} - \frac{2L}{D}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\left[1 + \left(\frac{2L}{D}\right)^2\right] - \frac{4L}{D}\sqrt{1 + \left(\frac{2L}{D}\right)^2}}}.$$

Спрощення цього виразу дає

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{1 + \left(\frac{2L}{D}\right)^2}\operatorname{tg}\theta}}. \quad (6)$$

Таким чином, матимемо остаточний результат:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\theta}}{\sqrt{2\sqrt{1+\left(\frac{2L}{D}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{2L}{D}\right)^2} - \frac{2L}{D}}{2\sqrt{1+\left(\frac{2L}{D}\right)^2}}, \quad (7)$$

який можна підставити у основну формулу (2).

Вищезгадані кристаліти орієнтовані хаотично. А тому при обертанні фольги навколо падаючого променя, обов'язково знайдеться такий кристаліт, для якого виконується умова Вульфа–Брегга. Звідси випливає висновок, за яким дифракційна картина має мати осьову симетрію з віссю симетрії, яка збігається з напрямом падаючого пучка. Це означає, що дифракційна картина матиме вигляд кілець, кожне з яких відповідає певному порядку дифракції.

**Аналіз одиниць вимірювання:**

$$[\operatorname{tg}2\theta] = \frac{[D]}{[L]} = \text{м/м} = 1.$$

**Обчислення:**

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{2 \cdot 9,91}{3,35}\right)^2} - \frac{2 \cdot 9,91}{3,35}}{2\sqrt{1+\left(\frac{2 \cdot 9,91}{3,35}\right)^2}} = 0,084,$$

$$d = \frac{3 \cdot 0,227 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 0,0836} = 4,07 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (8)$$

**Відповідь:**  $d = 4,07 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ ; у загальному вигляді  $d = \frac{m\lambda}{2\sin\theta}$ .

### Задача 5.

Плоскополяризоване монохроматичне світло з довжиною хвилі  $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$  падає нормально на пластинку кварцу, вирізану паралельно до оптичної осі так, що площина поляризації утворює з оптичною віссю кут  $\alpha = 45^\circ$ . Знайти різницю фаз звичайної і незвичайної хвилі, якщо різниця показників заломлення  $n_o - n_e = 0,0090$ , а товщина пластинки  $d = 0,15 \text{ мм}$ .

**Дано:**

$$\lambda = 0,55 \text{ мкм}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$n_o - n_e = 0,0090$$

$$d = 0,15 \text{ мм}$$

---

**Знайти :** різницю фаз  $\Delta\Phi$ .

### Розв'язування

Хід променів згідно з умовою задачі зображено на рис. 5. Плоскополяризована хвиля з напруженістю електричного поля  $\vec{E}$  падає на пластинку перпендикулярно до її передньої грані.

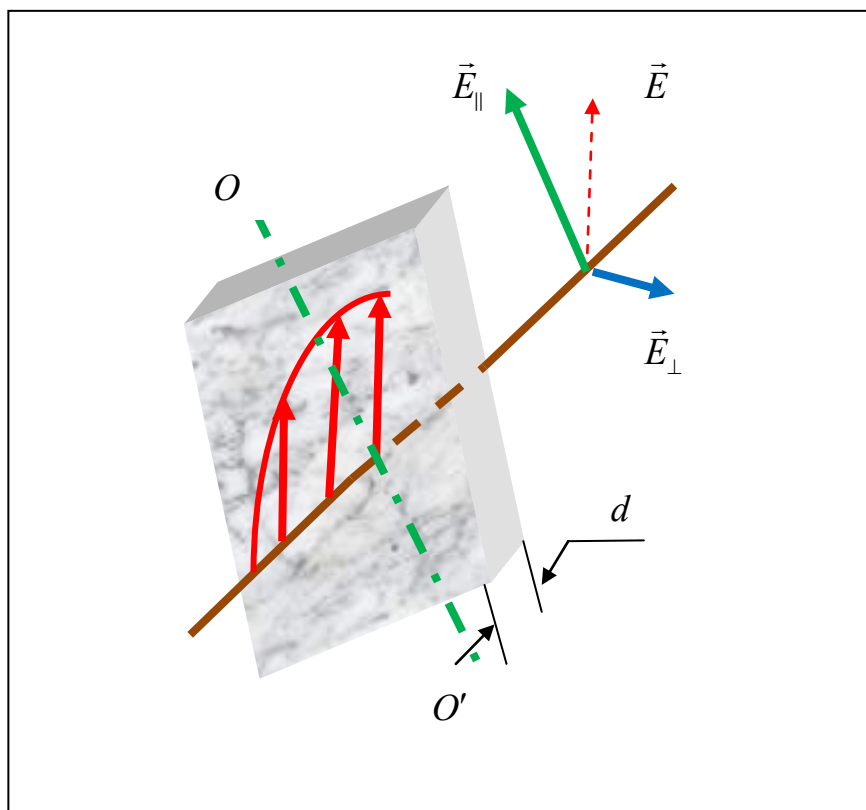


Рисунок 5 – Ілюстрація до задачі 5

Через те, що кут падіння дорівнює нулю, то подальше поширення світла відбувається без заломлення.

Оскільки оптична вісь  $OO'$  лежить у площині пластинки, то вздовж цього напрямку у кристалі швидкість поширення хвиль має одне і те саме значення незалежно від поляризації світла. Проте, при поширенні світла у напрямі, перпендикулярному до оптичної осі, як це має місце у цій задачі,

хвиля з вектором  $\vec{E}_\perp$ , перпендикулярним до оптичної осі (звичайна хвиля), має фазову швидкість  $v_o$ , в той час як хвиля з вектором  $\vec{E}_\parallel$ , паралельним оптичній осі (незвичайна хвиля), має фазову швидкість  $v_e$ . Вважаючи і швидкості заданими, для фаз, яких набуває кожна із хвиль, запишемо:

$$\Phi_o = \frac{2\pi d}{Tv_o}, \quad (1)$$

$$\Phi_e = \frac{2\pi d}{Tv_e}. \quad (2)$$

Тут  $T$  – період падаючої хвилі, який не залежить від властивостей середовища. Тепер потрібно взяти до уваги фізичний зміст показника заломлення, що дозволяє виразити швидкості звичайної і незвичайної хвиль таким чином:

$$v_o = \frac{c}{n_o}, \quad v_e = \frac{c}{n_e}. \quad (3)$$

Комбінуючи формули (3) із відповідними співвідношеннями (1) і (2), одержимо:

$$\Phi_o = \frac{2\pi d n_o}{\lambda}, \quad (4)$$

$$\Phi_e = \frac{2\pi d n_e}{\lambda}. \quad (5)$$

В цих формулах  $\lambda = cT$  – довжина хвилі у вакуумі, задана в умові задачі.

Почленним відніманням від (4) виразу (5) знаходимо шукану різницю фаз:

$$\Delta\Phi = \Phi_o - \Phi_e = \frac{2\pi d(n_o - n_e)}{\lambda}. \quad (6)$$

**Аналіз одиниць вимірювання:**

$$[\Delta\Phi] = \frac{[\pi][d][(n_o - n_e)]}{[\lambda]} = \frac{[d]}{[\lambda]} = \text{м/м} = 1. \quad (7)$$

**Обчислення:**

$$\Delta\Phi = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,15 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0090}{0,55 \cdot 10^{-6}} = 15,41 \text{ рад.} \quad (8)$$

**Відповідь:**  $\Delta\Phi = 15,41$  рад, у загальному вигляді  $\Delta\Phi = \frac{2\pi d(n_o - n_e)}{\lambda}$ .

### Завдання для самостійної роботи з Теми 3

1. Кут максимальної поляризації при відбиванні світла від кристала кам'яної солі дорівнює  $i_B = 57^\circ$ . Визначити швидкість поширення світла в цьому кристалі.
2. Кут між головними площинами поляризатора і аналізатора  $\varphi_1 = 45^\circ$ . У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, яке виходить із аналізатора, якщо кут збільшиться до  $\varphi_2 = 60^\circ$ ?
3. Промінь природного світла послідовно проходить через поляризатор і аналізатор, кут між головними площинами яких  $\varphi = 60^\circ$ . Яка частка початкової інтенсивності світла буде на виході з аналізатора?
4. У скільки разів послаблюється природне світло, проходячи через два ніколя, головні площини яких утворюють між собою кут  $\varphi = 63^\circ$ , якщо в кожному із них втрачається  $\varphi = 63^\circ$  інтенсивності світла, що падає?
5. Кут між площинами поляризатора й аналізатора  $\varphi = 50^\circ$ . Природне світло, проходячи через таку систему, ослаблюється в  $n = 8$  разів. Нехтуючи втратою світла під час відбиття, визначити коефіцієнт поглинання світла в поляризаторі та аналізаторі.
6. Пучок світла проходить із рідини в скло. Кут падіння пучка  $\alpha_1 = 60^\circ$ , кут заломлення  $\beta_1 = 50^\circ$ . При якому куті падіння  $\alpha_2$  пучок світла, відбитий від межі поділу цих середовищ, буде максимально поляризованим?
7. Пучок світла падає на плоскопаралельну скляну пластину ( $n_1 = 1,50$ ), нижня поверхня якої знаходиться у воді ( $n_2 = 1,33$ ). При якому куті падіння світло, відбите від межі скло–вода, буде максимально поляризованим?
8. Граничний кут повного внутрішнього відбивання пучка світла на межі рідини з повітрям  $i_l = 43^\circ$ . Визначити кут Брюстера для падіння променя з повітря на поверхню цієї рідини.
9. Промінь світла падає на поверхню рідини під кутом  $\alpha = 60^\circ$ . Знайти кут заломлення променя, якщо відбитий промінь максимально поляризований.

## Тема 4 Закономірності теплового випромінювання. Формула Планка

### План

1. Інтегральні і спектральні характеристики випромінювання.
2. Теплове випромінювання. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа.
3. Дослідні закони Віна, Стефана-Больцмана.
4. Гіпотеза Планка. Формула Планка.

### Основні співвідношення

1. а)  $R = \frac{dW}{dSdt}$ ; б)  $dR = r(\nu)d\nu$ ; в)  $R = \int_0^{\infty} r(\nu)d\nu$ ;

2. а)  $\alpha(\nu) = \frac{dI_a}{dI}$ ; б)  $\alpha_{bb}(\nu) = 1$ ; в)  $\frac{r(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)} = \varepsilon(\nu, T)$ ;

3. а)  $\varepsilon(\nu, T) = \nu^3 f(\nu / T)$ ; б)  $\nu_m = bT$ ; в)  $R = \sigma T^4$ ;

4. а)  $E_n = nh\nu$ ; б)  $E = h\nu$ ; в)  $\varepsilon(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$ .

Позначення:  $R$  — інтегральна світність;  $r(\nu)$  — монохроматична (спектральна) світність;  $\alpha(\nu)$  — монохроматична поглинальна здатність;  $\varepsilon(\nu, T)$  — монохроматична світність абсолютно чорного тіла (функція Кірхгофа);  $b$  — стала Віна;  $\sigma$  — стала Стефана-Больцмана;  $h$  — стала Планка.

### Приклади розв'язання задач

#### Задача 1.

Температура зачорненої кульки, яка випромінює як абсолютно чорне тіло, змінюється від  $27^\circ \text{C}$  до  $20^\circ \text{C}$ . На скільки змінилася довжина хвилі, яка відповідає максимуму спектральної енергетичної світності?

**Дано:**

$$t_1 = 27^\circ \text{C} \Rightarrow T_1 = 300 \text{ K};$$

$$t_2 = 20^\circ \text{C} \Rightarrow T_2 = 293 \text{ K};$$

$$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}.$$

---

**Знайти:** Зміну довжини хвилі  $\Delta\lambda$ .

## Розв'язування

За умовою кулька випромінює як абсолютно чорне тіло. А тому спектральна енергетична світність у шкалі довжин хвиль має максимум при деякій, залежній від температури, довжині хвилі  $\lambda_m$ .

Згадана довжина хвилі зменшується зі зростанням температури відповідно до закону зміщення Віна:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}. \quad (1)$$

Запишемо закон Віна для двох заданих значень температури, тобто:

$$\lambda_{2m} = \frac{b}{T_2}, \quad (2)$$

$$\lambda_{1m} = \frac{b}{T_1}. \quad (3)$$

Почленним відніманням (2) і (3) для шуканої зміни довжин хвиль отримаємо:

$$\Delta\lambda_m = b \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right). \quad (4)$$

**Аналіз одиниць вимірювання:**

$$[\Delta\lambda_m] = \frac{[b]}{[T]} = (\text{м} \cdot \text{К}) / \text{К} = \text{м}. \quad (5)$$

**Обчислення:**

$$\Delta\lambda_m = b \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = 2,9 \cdot 10^{-3} \left( \frac{1}{293} - \frac{1}{300} \right) = 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}. \quad (6)$$

**Відповідь:**  $\Delta\lambda_m = 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , у загальному вигляді  $\Delta\lambda_m = b \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$ .

## Задача 2.

Потік випромінювання абсолютно чорного тіла  $\Phi = 10 \text{ кВт}$ . Максимум енергії випромінювання спостерігається при довжині хвилі  $\lambda_m = 0,8 \text{ мкм}$ . Знайти площу  $S$  поверхні, яка випромінює.



**Дано:**

$$\Phi = 10 \text{ кВт} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Вт};$$

$$\lambda_m = 0,8 \text{ мкм} = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4);$$

$$b_m = 0,290 \text{ см} \cdot \text{К} = 0,290 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$$

---

**Знайти:** площу випромінювальної поверхні  $S$ .

### Розв'язування

Для розв'язання задачі звернемося до двох фундаментальних законів теплового випромінювання. Перший з них – це закон Стефана-Больцмана

$$R = \sigma T^4, \quad (1)$$

яким означається енергетична світність  $R$  абсолютно чорного тіла як функція абсолютної температури  $T$ .

Другий встановлює залежність від температури довжини хвилі, при якій спостерігається максимум спектральної енергетичної світності:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}. \quad (2)$$

Тепер можемо записати співвідношення для світлового потоку:

$$\Phi = R \cdot S. \quad (3)$$

Звідси випливає:

$$S = \frac{\Phi}{R}. \quad (4)$$

Комбінуючи (4) із законом Стефана-Больцмана (1), одержуємо:

$$S = \frac{\Phi}{\sigma T^4}. \quad (5)$$

З іншого боку, за законом Віна

$$T = \frac{b}{\lambda_m}. \quad (6)$$

А тому після підстановки (6) в (5) матимемо :

$$S = \frac{\Phi}{\sigma} \left( \frac{\lambda_m}{b} \right)^4. \quad (7)$$

**Аналіз одиниць вимірювання:**

$$[S] = \frac{[\Phi]}{[\sigma]} \left( \frac{[\lambda_m]}{[b]} \right)^4 = (\text{Вт}/(\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)) \cdot (\text{м}/(\text{м} \cdot \text{К}))^4 = \text{м}^2. \quad (8)$$

**Обчислення:**

$$S = \frac{10^4}{5,67 \cdot 10^{-8}} \left( \frac{0,8 \cdot 10^{-6}}{0,29 \cdot 10^{-2}} \right)^4 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^2\text{)}$$

**Відповідь:**  $S = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ; у загальному вигляді  $S = \frac{\Phi}{\sigma} \left( \frac{\lambda_m}{b} \right)^4$ .

### Задача 3.

Вважаючи відомою спектральну енергетичну світність абсолютно чорного тіла в шкалі частот, виразити її в шкалі довжин хвиль.

**Дано:**

$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

---

**Встановити:**  $\varepsilon(\lambda, T)$

### Розв'язування

Виділимо частотний інтервал  $(\nu, \nu + d\nu)$ . Врахувавши означення спектральної енергетичної світності для енергії  $dR$ , яка випромінюється в усіх напрямках за одиницю часу одиницею площі абсолютно чорного тіла у вибраному частотному інтервалі, запишемо:

$$dR = \varepsilon(\nu, T) d\nu. \quad (1)$$

Виділеному діапазону частот у шкалі довжин хвиль відповідає відрізок  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ . Повторне використання означення спектральних характеристик випромінювання для тієї самої світності  $dR$  дає:

$$dR = \varepsilon(\lambda, T) d\lambda. \quad (2)$$

Як відомо, частота і довжина хвилі пов'язані співвідношенням

$$\nu = \frac{c}{\lambda}. \quad (3)$$

Диференціюванням формули (3) знаходимо:

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda. \quad (4)$$

Тепер співвідношення (3) і (4) підставимо у рівність (1). При цьому потрібно взяти до уваги, що випромінювана енергія є величиною додатною, а тому вираз (4) потрібно брати за абсолютною величиною. Отже, отримаємо:

$$dR = \varepsilon\left(\frac{c}{\lambda}, T\right) \frac{c}{\lambda^2} d\lambda. \quad (5)$$

Комбінуючи (5) і (2) приходимо до такого результату:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \varepsilon\left(\frac{c}{\lambda}, T\right) \frac{c}{\lambda^2}. \quad (6)$$

Підстановка формули Планка у формі, заданій в умові, дає:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{2\pi}{\lambda^5} \frac{hc^2}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (7)$$

**Відповідь:**  $\varepsilon(\lambda, T) = \frac{2\pi}{\lambda^5} \frac{hc^2}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$

#### Задача 4.

При дослідженні теплового випромінювання деякої моделі абсолютно чорного тіла частина даних була втрачена, а тому графік функції Планка виявився неповним, так як це показано на рис. 1.

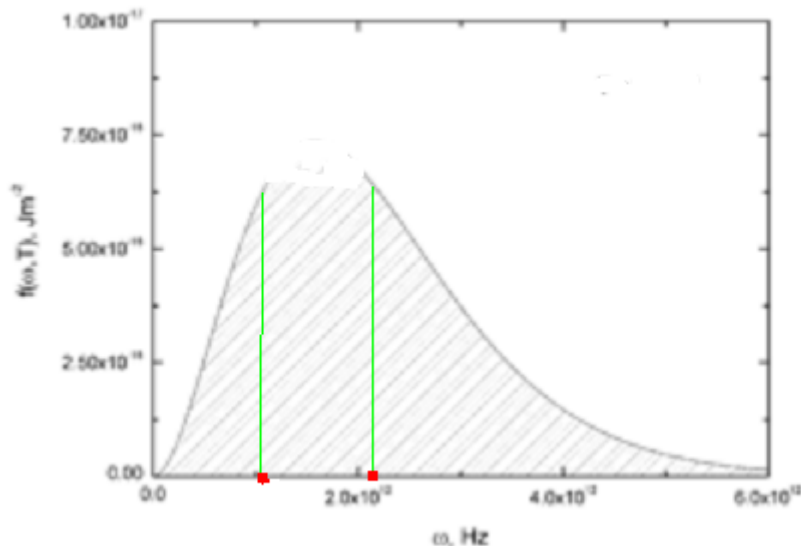


Рисунок 1 – Графічне зображення даних до задачі 4

При аналізі результатів виявилось, що монохроматична енергетична світність для частот  $\nu_1 = 1,1 \cdot 10^{12}$  Гц і  $\nu_2 = 2\nu_1 = 2,2 \cdot 10^{12}$  Гц має одне і те саме значення. Знайти за цими даними частоту, при якій спектральна енергетична світність досягає максимального значення.

**Дано:**

$$\nu_1 = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ Гц};$$

$$\nu_2 = 2\nu_1 = 2,2 \cdot 10^{12} \text{ Гц};$$

$$\varepsilon(\nu_1, T) = \varepsilon(\nu_2, T)$$

**Знайти:**  $\nu_m$ .

## Розв'язування

Частота  $\nu_m$ , при якій монохроматична енергетична світність досягає свого максимального значення, визначається законом зміщення Віна:

$$\nu_m = b_\nu T, \quad (1)$$

в якому  $T$  – абсолютна температура, а  $b_\nu = 5,87 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}\text{К}^{-1}$  – стала Віна.

Із закону Віна випливає, що для обчислення шуканої частоти потрібно встановити температуру абсолютно чорного тіла, з яким виконувалися експерименти. Для цього звернемося до формули Планка:

$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2)$$

Запишемо вирази, як і стосуються кожної із заданих частот:

$$\varepsilon(\nu_1, T) = \frac{2\pi\nu_1^2}{c^2} \frac{h\nu_1}{e^{h\nu_1/kT} - 1}, \quad (3)$$

$$\varepsilon(\nu_2, T) = \frac{2\pi\nu_2^2}{c^2} \frac{h\nu_2}{e^{h\nu_2/kT} - 1}. \quad (4)$$

За умовою задачі ліві частини записаних співвідношень рівні між собою. А тому, прирівнявши праві частини, після спрощень одержимо рівняння:

$$\frac{\nu_1^3}{e^{h\nu_1/kT} - 1} = \frac{\nu_2^3}{e^{h\nu_2/kT} - 1}. \quad (5)$$

Введемо невідому величину  $x$  за формулою:

$$x = \exp\left(\frac{h\nu_1}{kT}\right). \quad (6)$$

Оскільки  $\nu_2 = 2\nu_1$ , то тепер рівняння (5) набуває такого вигляду:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{8}{x^2-1}. \quad (7)$$

Розв'язок  $x=1$  не має фізичного змісту. Скорочення множника  $x-1$  приводить до рівняння:

$$x+1=8. \quad (8)$$

Звідси випливає розв'язок  $x=7$ , який і має фізичний зміст:

Підстановкою (7) у (6) знаходимо температуру абсолютно чорного тіла:

$$T = \frac{h\nu_1}{k \cdot \ln 7}. \quad (9)$$

Поєднавши формулу (9) із законом Віна (1), приходимо до шуканого результату, а саме:

$$\nu_m = \frac{b_v \cdot h\nu_1}{k \cdot \ln 7}. \quad (10)$$

**Аналіз одиниць вимірювання**

$$[\nu_m] = \frac{[b_v] \cdot [h][\nu_1]}{[k] \cdot [\ln 7]} = \text{с}^{-1} \text{К}^{-1} \text{Дж} \cdot \text{с} / (\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1}) \cdot \text{Гц} = \text{Гц}. \quad (11)$$

**Обчислення:**

$$\nu_m = \frac{b_v \cdot h\nu_1}{k \cdot \ln 7} = \frac{5,87 \cdot 10^{10} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1,1 \cdot 10^{12}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1,946} = 1,6 \cdot 10^{12} \text{ (Гц)}. \quad (12)$$

**Відповідь:**  $\nu_m = 1,6 \cdot 10^{12}$  Гц , у загальному вигляді  $\nu_m = \frac{b_v \cdot h\nu_1}{k \cdot \ln 7}$ .

### Задача 5.

Площа поверхні  $S$  нагрівника, який випромінює як абсолютно чорне тіло, дорівнює  $20 \text{ см}^2$ . Яку енергію випроміню нагрівник протягом часу  $t = 45 \text{ хв.}$  в інтервалі частот  $(\nu_m - 0,113\nu_m, \nu_m + 0,241\nu_m)$ , якщо його середня температура  $T = 1200 \text{ К}$ ?

**Дано:**

$$S = 20 \text{ см}^2 = 0,002 \text{ м}^2;$$

$$t = 45 \text{ хв.} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ с};$$

$$T = 1200 \text{ К.}$$

**Знайти:** енергію, яка випромінюється в інтервалі  $(\nu_m - 0,113\nu_m, \nu_m + 0,241\nu_m)$

### Розв'язування.

Прийнявши до уваги означення енергетичної світності, для енергії  $\Delta W$ , яка випромінюється в усіх напрямках нагрівником заданої площі, знаходимо:

$$\Delta W = \Delta R \cdot S \cdot t. \quad (1)$$

Тут  $\Delta R$  – енергетична світність у певному частотному діапазоні, яка за означенням монохроматичної світності  $\varepsilon(\nu)$  виражається наступним чином

:

$$\Delta R = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \varepsilon(\nu, T) d\nu. \quad (2)$$

Звернемося до графіка функції Планка, який у відносних одиницях зображено на рис. 2.

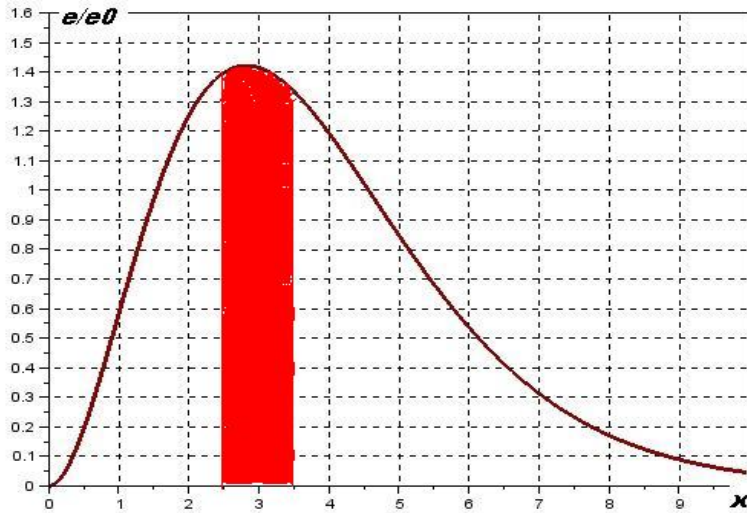


Рисунок 2 – Графік залежності монохроматичної світності абсолютно чорного тіла від частоти

На поданому вище графіку  $x = hv/kT$ , а  $\varepsilon_0 = 2\pi(kT)^3/c^2h^2$ . Графік показує, що в заданому діапазоні частот спектральну світність можна вважати сталою, а тому застосування теореми про середнє до формули (2) дає:

$$\Delta R = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \varepsilon(\nu, T) d\nu \approx \varepsilon(\nu_m, T)(\nu_2 - \nu_1). \quad (3)$$

Підстановкою (3) в (1) одержуємо:

$$\Delta W = \varepsilon(\nu_m, T)(\nu_2 - \nu_1)St. \quad (4)$$

Крім цього, за формулою Планка

$$\varepsilon(\nu_m, T) = \frac{2\pi\nu_m^2}{c^2} \frac{h\nu_m}{e^{h\nu_m/kT} - 1}. \quad (5)$$

Комбінуючи (5) і (4), приходимо до результату:

$$\Delta W = \frac{2\pi\nu_m^2}{c^2} \frac{h\nu_m(\nu_2 - \nu_1)St}{e^{h\nu_m/kT} - 1}, \quad (6)$$

в якому частота, що відповідає максимуму монохроматичної світності, визначається законом зміщення Віна, тобто

$$\nu_m = b_\nu T. \quad (7)$$

### **Аналіз одиниць вимірювання**

Аналіз виконуємо на основі формули (4). Одержуємо:

$$[\Delta W] = [\varepsilon(\nu_m, T)][(\nu_2 - \nu_1)][S][t] = (\text{Дж}/\text{м}^2) \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с} = \text{Дж}$$

**Обчислення:**

$$\Delta W = \frac{2 \cdot 0,354 \pi v_m^3}{c^2} \frac{hSt}{e^{hv_m/kT} - 1} = \frac{2,223}{(3 \cdot 10^8)^2} \cdot \frac{2,82^3 (1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1200)^3 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2,7 \cdot 10^3}{(6,63 \cdot 10^{-34})^2 (e^{2,82} - 1)}$$

Тут враховано, що  $v_m = 2,82kT / h$ . Спрощення дає:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{2,223}{(3 \cdot 10^8)^2} \cdot \frac{2,82^3 (1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1200)^3 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2,7 \cdot 10^3}{(6,63 \cdot 10^{-34})^2 (e^{2,82} - 1)} = \\ &= \frac{1,76 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{16}} = 0,2 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\Delta W = 0,2 \cdot 10^{-8}$  Дж; у загальному вигляді

$$\Delta W = \frac{2\pi v_m^2}{c^2} \frac{h v_m (v_2 - v_1) St}{e^{hv_m/kT} - 1}$$

#### **Завдання до самостійної роботи з Теми 4.**

1. Температура абсолютно чорного тіла  $T = 2000$  К. Визначити довжину хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання і спектральну густину енергетичної світності (випромінювальну здатність) для цієї довжини хвилі.
2. Чорне тіло має температуру  $T_1 = 500$  К. Якою буде температура тіла, якщо внаслідок нагрівання потік випромінювання збільшиться в  $n = 5$  разів?
3. Визначити температуру і енергетичну світність абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі  $\lambda_m = 600$  нм.
4. Із оглядового віконечка печі випромінюється потік  $\Phi = 4$  кДж/хв. Визначити температуру печі, якщо площа віконечка  $S = 8$  см<sup>2</sup>.
5. Потік випромінювання абсолютно чорного тіла  $\Phi = 10$  кВт. Максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі  $\lambda_m = 0,8$  мкм. Визначити площу випромінювання поверхні.
6. Обчислити температуру поверхні Сонця, якщо відомо, що сонячна стала – потужність променевої енергії, що падає на 1 м<sup>2</sup> площі поверхні Землі, розміщеної перпендикулярно до сонячного проміння –  $\gamma = 1,395 \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>.

7. У скільки разів зміниться потік випромінювання абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання зміститься з червоної межі видимого спектра ( $\lambda_{m1} = 780$  нм) у фіолетову ( $\lambda_{m2} = 390$  нм)?
8. У скільки разів зросте потужність випромінювання абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії в спектрі зміститься з  $\lambda_{m1} = 600$  нм до  $\lambda_{m2} = 500$  нм?
9. У чорну металеву посудину, що має форму куба, налито  $m = 1$  кг води, температура  $T_2 = 323$  К. Знайти час остигання посудини до температури  $T_1 = 283$  К, якщо її вміщено у чорний резервуар, температуру стінок якого можна прийняти такою, що дорівнює  $T = 273$  К.
10. Потужність випромінювання абсолютно чорного тіла  $P = 34$  кВт. Знайти температуру цього тіла, якщо відомо, що його поверхня  $S = 0,6$  м<sup>2</sup>.
11. Чорне тіло має температуру  $T_1 = 500$  К. У скільки разів збільшиться потік випромінювання, якщо температура зросте до  $T_f = 1800$  К?
12. Температура абсолютно чорного тіла  $T = 2500$  К. Визначити частоту, на яку припадає максимум енергії випромінювання і спектральну густину енергетичної світності (випромінювальну здатність) для цієї довжини хвилі.
13. Визначити температуру і енергетичну світність абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі  $\nu_m = 5,0 \cdot 10^{14}$  Гц.
14. Із оглядового віконечка печі при температурі  $T = 2000$  К випромінюється потік  $\Phi = 16 \frac{\text{кДж}}{\text{хв}}$ . Визначити площу оглядового віконечка печі.
15. Потік випромінювання абсолютно чорного тіла  $\Phi = 20$  кВт. Максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі  $\lambda_m = 0,6$  мкм. Визначити площу випромінювання поверхні.
16. У скільки разів зміниться потік випромінювання абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання зміститься з  $\lambda_{m1} = 580$  нм до  $\lambda_{m2} = 400$  нм?



## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Фізика : [підручник] / І. Є. Лопатинський, І. Р. Зачек, Г. А. Ільчук, Б. М. Романишин. – Львів : Афіша, 2013. – 394 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики : в 3-х т. : учеб. пособие / Савельев И. В. – М. : Наука, 1978. – Т 2: Электричество и магнетизм, волны, оптика. – 1978. – 480 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики : в 3-х т. : учеб. пособие / Савельев И. В. – М. : Наука, 1978. – Т 3. Квантовая физика. – 1982. – 380 с.
4. Воловик П. М. Фізика для університетів. Повний курс в одному томі / Воловик П. М. – К. : Перун Ірпінь, 2014. – 864 с.
5. Бушок Г. Ф. Курс фізики : в 2-х частинах / Г. Ф. Бушок, Г. Ф. Півень. – Київ : Вища школа, 1983.
6. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике : учеб. пособие / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 2014. – 496 с.
7. Авдеев С. Г. Збірник задач з фізики: в 3-х частинах / С. Г. Авдеев, Т. І. Бабюк. – Вінниця : ВНТУ, 2010.
8. Лукіянець Б. А. Основи квантової фізики : навчальний посібник / Лукіянець Б. А., Понеділок Г. В., Рудавський Ю. К. – Львів : Вид. «Львівська політехніка», 2009. – 420 с.
9. Збірник задач з фізики : навчальний посібник. / за редакцією І. Є. Лопатинського, А. М. Андрейка. – [2-ге вид., доп. та перероб. ]. – Львів : Видавництво НУ «ЛП», 2010. — 320 с.
10. Сивухин Д. В. Общий курс физики : в 6-ти томах / Сивухин Д. В. – М. : Высш. школа, 1979.

## ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ INTERNET

1. [www.lp.edu.ua](http://www.lp.edu.ua) ;
2. [www.ekniga.ua](http://www.ekniga.ua);
3. [www.physorg.ru](http://www.physorg.ru);
4. [www.elementy.ru](http://www.elementy.ru);
5. [www.freescience.info](http://www.freescience.info);
6. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org);
7. [www.quant](http://www.quant);
8. eqWorld