

А. С. Моргун, І. М. Метъ

ДИНАМІКА ТА СТІЙКІСТЬ СПОРУД



Міністерство освіти та науки України
Вінницький національний технічний університет

А. С. Моргун, І. М. Меть

ДИНАМІКА ТА СТІЙКІСТЬ СПОРУД

Вінниця
ВНТУ
2021

УДК 681.3.06:69

М79

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 13 від 29.04.2021 р.)

Рецензенти:

М. М. Сорока, кандидат технічних наук, професор, ОДАБА

В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор

М. Ф. Друківаний, доктор технічних наук, професор

Моргун, А. С.

М79 Динаміка та стійкість споруд : навчальний посібник /
А. С. Моргун, І. М. Меть. – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 75 с.
ISBN 978-966-641-853-4

Навчальний посібник містить класичні методи розрахунку стержневих систем на стійкість та на динамічні вібраційні дії. В ньому також викладено основи МСЕ та уявлення про математичне опрацювання реальних прикладних задач будівництва. Розділи супроводжуються прикладами розв'язання типових задач. Розглянутим темам передують короткі теоретичні відомості.

Посібник призначений для студентів вищих технічних закладів, фахівців у галузі механіки суцільних середовищ та будівельної механіки .

УДК 681.3.06:69

ISBN 978-966-641-853-4

© ВНТУ, 2021

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	4
ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1 ДИНАМІКА СПОРУД	6
1.1 Види подання деформацій	6
1.2 Види динамічних навантажень	8
1.3 Суть динамічного розрахунку. Динамічна розрахункова схема. Число динамічних ступеней вільності. Методи проведення динамічного розрахунку	10
1.4 Система з одним ступенем вільності $n_{\text{дин}}=1$. Вільні затухаючі коливання	13
1.5 Вільні незатухаючі коливання	16
1.6 Вимушені коливання без урахування сили опору F	17
1.7 Вільні коливання системи з декількома ступенями вільності $n = n_{\text{оптам}}$	18
1.8 Розрахунок на ударне динамічне навантаження	21
1.9 Динамічний розрахунок статично невизначеної рами на вільні та вимушені коливання від дії гармонійного навантаження	25
1.9.1 Послідовність розрахунку на вільні коливання	26
1.9.2. Динамічний розрахунок на вимушені коливання	32
1.10 Заходи боротьби з вібраційними впливами	38
1.10.1 Способи зменшення резонансних впливів	38
РОЗДІЛ 2 СТІЙКІСТЬ СПОРУД	42
2.1 Поняття критичної сили. Методи розв'язання задач на стійкість	42
2.2 Стійкість прямих центрально стиснених стержнів	45
2.3 Стійкість прямого центрально стисненого стержня з пружнопіддатливою опорою	50
2.4 Визначення стійкості статично невизначеної рами з залученням методу переміщень	52
РОЗДІЛ 3 МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	61
3.1 Постановка задач будівельної механіки. Локальний метод. Інтегральний метод	61
3.2 Основи МСЕ. Приклад розрахунку	63
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	73

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

Г	– границя досліджуваного елемента
ДБН	– державні будівельні норми
МСЕ	– метод скінченних елементів
МГЕ	– метод граничних елементів
НДС	– напружено-деформований стан
СЕ	– скінченний елемент
САПР	– системи автоматизованого проектування
СЛАР	– система лінійних алгебраїчних рівнянь
ОС	– основна система

ВСТУП

Матеріали – кості тварин, деревина рослин – мають деякі граничні несучі спроможності, які не можуть бути перевищені. Величина об'єкта обумовлюється зусиллями і напруженнями, які можуть витримати його скелет, а також деформаціями, які не можуть бути платнею за функціонування організму чи цілісність об'єкта.

Приблизно так звучать фундаментальні висновки про живу і неживу природу, зроблені з інженерних позицій близько 5 століть тому [21].

Після цього було відкриття Гука – новий ключ до пояснень природи твердих тіл. Вони пружні, стійко опираються зовнішнім впливам, їм властиві особливості поведінки.

В XVIII–XIX століттях був стрімкий розвиток науки. Якісно новою формою її розвитку стало диференціальне та інтегральне числення – форма абстрактного наукового мислення.

Будівництво – одна із провідних галузей народного господарства в історичному аспекті його розвитку. Успішне спорудження будівель промислового призначення, висотних споруд цивільного призначення, резервуарів та інших споруд потребує більш глибокого проникнення в таємниці неживої природи, постійного розвитку основ механіки за дії як сталих, так і динамічних навантажень.

1 м^3 води важить 1 т, 1 м^3 сталі має масу в 8 раз більшу. Повітря, яке майже без тіла, може бути носієм колосальної кінетичної енергії, яка на своєму шляху залишає багаточисленні руйнування створених людиною споруд, несучі конструкції яких насамперед призначаються для витримування сталого гравітаційного вертикального навантаження.

Питання висотного будівництва тісно пов'язані із їх стійкістю, з динамічними та сейсмічними впливами і мають значну економічну та соціальну складові.

Сейсмічні впливи є одними із найсильніших в плані руйнування, до споруд в сейсмічних районах висуваються підвищені вимоги щодо міцності конструктивних елементів.

Тому прогностні розрахунки сьогодення потребують напрацювання математичних моделей визначення НДС споруди, її стійкості від дії як сталих, так і динамічних впливів та для інженера-будівельника є актуальними.

РОЗДІЛ 1 ДИНАМІКА СПОРУД

1.1 Види подання деформацій

Термін «деформація» відноситься до зміни форми континуума від деякої початкової (недеформованої) конфігурації до наступної (деформованої) конфігурації.

Під час вивчення деформацій враховуються лише початкова і кінцева конфігурації, проміжним станам уваги не приділяється. На противагу цьому термін «течія» використовується для позначення неперервного стану руху континуума, і вивчення історії конфігурації є невід'ємною частиною дослідження течії.

Якщо в деякому об'ємі суцільного середовища проходить деформація (чи течія), то його частинки рухаються вздовж різних шляхів в просторі.

Цей рух можна описати рівняннями:

$$x_i = f(X_1, X_2, X_3, t), \quad (1.1)$$

які дають положення x_i частинки в поточний момент, яка в момент $t = 0$ займала точку (X_1, X_2, X_3) .

Рівняння (1.1) можна тлумачити як встановлення відповідності між точками початкової конфігурації і їх положенням в поточному стані. Така відповідність вважається однозначною і неперервною з неперервними частинними похідними будь-якого порядку. Такий спосіб опису руху чи деформацій називають *лагранжевим*.

Коли рух задається як:

$$X_i = f(x_1, x_2, x_3, t), \quad (1.2)$$

де незалежними змінними є x_i і t , то цей спосіб опису руху чи деформацій називають *ейлеровим*.

Ці дві відповідності (1.1, 1.2) подаються єдиною парою взаємно обернених функцій. Необхідною і достатньою умовою оберненої функції є відмінність від нуля якобіана

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|. \quad (1.3)$$

Диференціювання (1.1) за X_j приводить до тензора $\left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|$, котрий називається *матеріальним градієнтом* деформацій:

$$F = \left| \frac{\partial x}{\partial X_1} \right| e_1 + \left| \frac{\partial x}{\partial X_2} \right| e_2 + \left| \frac{\partial x}{\partial X_3} \right| e_3. \quad (1.4)$$

Частинне диференціювання (1.2) за x_j приводить до тензора $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, який називають *просторовим градієнтом* деформацій Н.

Матеріальний і просторовий тензори деформацій пов'язані правилом частинного диференціювання:

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial X_j}{\partial X_k} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \delta_{ik}. \quad (1.5)$$

Теорія малих деформацій в механіці суцільних середовищ має своєю основною умовою вимогу малості градієнтів перемішень порівняно з одиницею.

Коли в тензорі деформацій Коші, чи в тензорі деформацій Гріна знехтувати похідними другого порядку, то:

- лагранжів тензор нескінченно малих деформацій матиме вигляд

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right); \quad (1.6)$$

- ейлерів тензор нескінченно малих деформацій матиме вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.7)$$

Якщо переміщення і градієнти малі, то різниця між матеріальними і просторовими координатами частин середовища дуже мала. Тому

компоненти матеріального градієнта $\left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|$ і компоненти просторового

градієнта $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ майже однакові, тому ейлерів та лагранжів тензори нескінченно малих деформацій можна вважати такими, що дорівнюють один одному, $l_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}$.

1.2 Види динамічних навантажень

Динаміка споруд – це розділ будівельної механіки, в якому розглядаються методи розрахунку споруд на дію динамічного навантаження $P_{дин}$, тобто такого навантаження, що змінює в часі:

- величину,
- напрям дії,
- точку прикладання.

Під час дії на споруду $P_{дин}$ виникають і відіграють значну роль **сили інерції** (за другим законом Ньютона $F=ma$), які викликають значні коливання. Коливання, спричинені дією $P_{дин}$, небезпечні для споруд (особливо за резонансу) та шкідливі для людей.

Прикладами дії $P_{дин}$ можуть слугувати такі факти:

- в 1937 р. в Канаді був побудований міст через річку; під час відкриття транспортного руху через міст почав дути сильний вітер. Вітрові пасати (смерчі) в Канаді характеризуються дуже сильним напором вітру, який може піднімати в повітря та переносити одноповерхові будівлі. Цей випадок описаний в книзі «Волшебник изумрудного города». Частота коливань мостової конструкції збіглася з частотою коливань вітру – як результат – резонанс, міст зруйнувався та впав в річку разом із транспортом, який був на ньому;
- був напрацьований в ХХ столітті варіант транспортування нафти морем в бурдюці, який на тросі кріпився до корабля. Поки море було спокійним, бурдюк з нафтою рухався за кораблем. Та поява вітру викликала коливання бурдюка і розривала трос, а штормовий вітер відносив бурдюк з нафтою в непередбаченому напрямку та руйнував його;
- на березі Чорного моря в субтропічному кліматі Піцунди (Абхазія) будували курорт світового значення. В 1967 році на Чорному морі розігрався шторм. Хвилі були висотою 1,5 – 2 м та вибігали на берег, ударяючи по висотних будівлях курортного містечка, які саме будувалось та знаходились на відстані приблизно 10 м від моря, руйнуючи ці споруди. Деякі панелі перекриття від цих будівель були хвилями віднесені аж до Одеси. Курортні споруди довелося відбудовувати, а з тих пір для запобігання впливу ударної динамічної хвилі на берег, майже по всьому берегу Чорного моря були споруджені біля берега хвилерізи;
- башти висотної будівлі універсагу в США в 2001 році після динамічного удару літака розсипались дуже швидко;

Сильні пошкодження спорудам наносять землетруси. Прикладів дії сейсмічного навантаження можна навести досить багато, тому задача знаходження напружено-деформованого стану споруд від дії $P_{дин}$ та

напрацювання методів уникнення аварій від дії $P_{дин}$ є вельми актуальною і для сьогодення.

Динамічні навантаження мають різну фізичну природу:

- **вібраційне** $P_{дин}$ – створюється стаціонарними машинами з рухомими частинами (електромотор, станок, турбогенератор). Таке $P_{дин}$ майже не залежить від властивостей конструкції, на яку вони діють, але є основним джерелом коливань цих конструкцій.

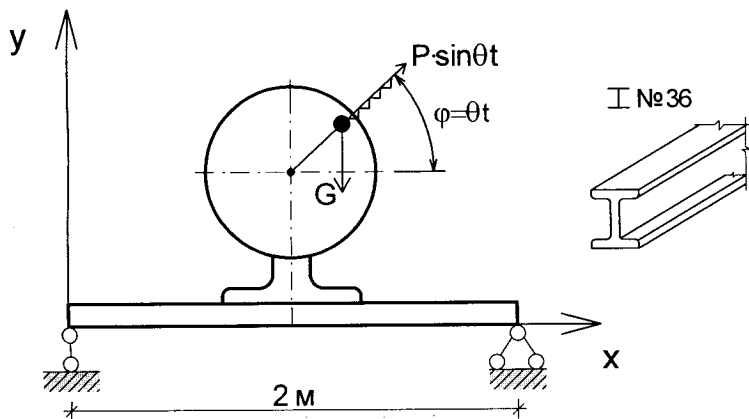


Рисунок 1.1 – Приклад дії вібраційного навантаження

Нехай на балку $L=2$ м (двотавр № 36, $q=0,7$ кН/м) встановлено електромотор вагою 7 т (в 50 раз його вага більша за вагу балки).

В момент включення електромотора рух маси G викликає появу динамічного вібраційного навантаження, яке змінюється за синусоїдою $P_{дин} = P \cdot \sin \theta \cdot t$, що й викликає коливання балки;

- **ударне імпульсивне** $P_{дин}$ створюють падаючі вантажі та частини силових установок (молот, копер). Ці $P_{дин}$ характеризуються невеликим часом дії, але залежать від пружних та інерційних властивостей об'єкта, до якого вони прикладаються (ось чому на будівельному майданчику інженери-будівельники мають носити каску на голові);

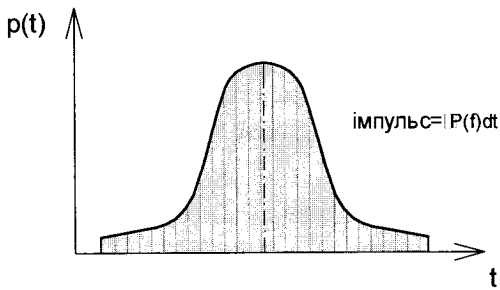


Рисунок 1.2 – Графік залежності « $P_{дин} - t$ » для визначення величини імпульсу ударного навантаження

- рухоме $P_{дин}$ – його положення змінюється в часі. Створюють рухоме $P_{дин}$ залізничні потяги, автомобілі, крани;
- до $P_{дин}$ відносяться також : **вітер, вибухова хвиля, сейсміка.**

Таким чином, однією із основних задач інженера-будівельника є напрацювання методів визначення НДС споруд від дії $P_{дин}$ та напрацювання передумов протидії виникненню аварійного стану споруди.

Основою будь-якого розрахунку нині є перехід до спрощеної динамічної розрахункової схеми споруди, яка складається із спрощених геометрії, навантажень, зв'язків та створення математичного апарату (математичної моделі) визначення НДС такої розрахункової схеми.

1.3 Суть динамічного розрахунку. Динамічна розрахункова схема. Число динамічних ступенів вільності. Методи проведення динамічного розрахунку

Суть динамічного розрахунку:

1. Знаходження вектора частот власних коливань споруди (спектра частот) $\vec{\lambda}$,
2. Побудова динамічної епюри згинальних моментів, поперечних сил, подовжених сил $M_{дин}, Q_{дин}, N_{дин}$.

Вимогами до динамічного розрахунку є:

- забезпечення міцності споруди;
- гранично допустимі відхилення точок коливання від положення рівноваги.

Спектр частот власних коливань споруди знаходиться із розв'язку вікового рівняння:

$$(C - \lambda) \cdot \vec{Y} = 0, \quad (1.8)$$

де $\vec{\lambda} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)^T$ – спектр частот власних коливань споруди,
 \vec{Y} – вектор коливань;

$$C = A \cdot \vec{m}, \quad (1.9)$$

де \vec{m} – вектор мас $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3, \dots, m_n)^T$,
 A – матриця піддатливості розрахункової схеми,

$$A = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Динамічна розрахункова схема – механічна невагома коливальна система, в якій наводиться сукупність зосереджених чи розподілених мас, рух яких обумовлює деформування конструкції.

Найголовніша характеристика динамічної розрахункової схеми:

- **число динамічних ступенів вільності** $n_{\text{дин}}$ – це число незалежних геометричних параметрів (узагальнених координат), що визначають положення всіх мас системи за їх можливих переміщень.

Приклади динамічних розрахункових схем.

1. В процесі формулювання видів $P_{\text{дин}}$ (а саме – вібраційного навантаження, рис. 1.1) для прикладу взято балку $L=2$ м з погонним навантаженням $q=0,7$ кН/м) (двотавр № 36), на яку встановлено електромотор вагою 7 т (вага електромотора в 50 раз більша за вагу балки), рис. 1.3, а), б), в).

Під час вмикання електромотора коливатись буде вся балка, та визначальним буде переміщення точки посередині балки (в місці установа електромотора). Тому за динамічну розрахункову схему береться невагома балка $L=2$ м, вся маса якої зібрана в точці посередині балки (m), рис. 1.3, г). В цьому прикладі число динамічних ступенів вільності $n_{\text{дин}} = 1$.

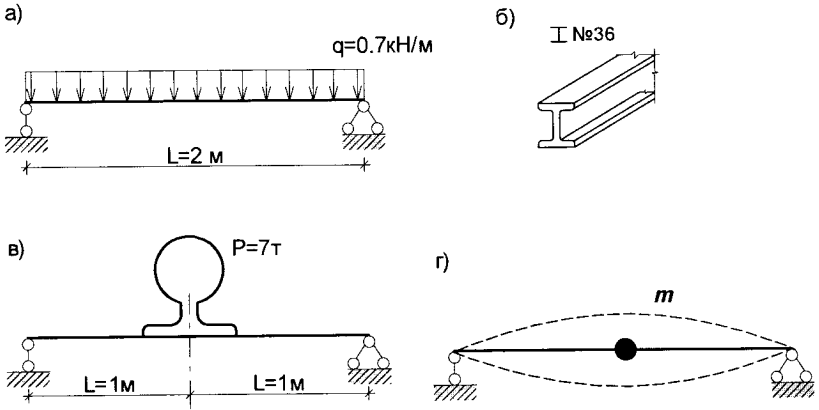


Рисунок 1.3 – а) схема балки; б) поперечний переріз балки; в) схема установлення електромотора; г) динамічна розрахункова схема балки

2. Телевежі є важливими ($H > 100 \text{ м.}$) інженерними конструкціями, рис. 1.4. З метою збереження їхньої стійкості за допомогою стержнів вони прикріплюються до землі. За дії вітрового динамічного навантаження щогла починає коливатись. Коливаються всі її маси, яких в щоглі є нескінченне число.

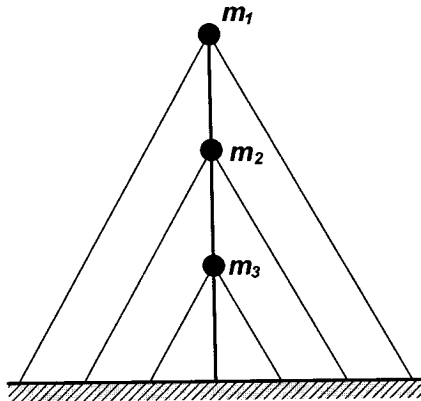


Рисунок 1.4 – Динамічна розрахункова схема щогли телевежі

Для виконання динамічного розрахунку інженер-проектувальник переходить до спрощеного зображення – до динамічної розрахункової

схеми, вважаючи, що щогла невагома, а її вагу визначають 3 маси – m_1, m_2, m_3 (див. рис. 1.4) і $n_{\text{дин}}=3$ для цього випадку.

Динамічний розрахунок проводиться з метою перевірки на міцність і визначення динамічних переміщень, які під час дії на людей і будівельні конструкції не мають перевищувати допустимі значення.

Напрацьовано способи проведення динамічного розрахунку:

I – *Статичний спосіб* – запис рівнянь динамічної рівноваги з додатковим урахуванням згідно принципу Даламбера сил інерції (добутку мас, чи їх моментів інерції на прискорення):

$$\sum_1^n F_K + \sum_1^n F_{IK} = 0; \quad F_{IK} = -m_K \cdot a_K, \quad (1.11)$$

де F_K – динамічна сила, що діє на споруду;

F_{IK} – сила інерції.

II – *Енергетичний спосіб* – застосування закону збереження енергії; застосування енергетичного критерію рівноважного стану системи:

повна потенціальна енергія системи в рівновазі має екстремальне значення (мінімальне).

Проводиться запис виразу потенціальної енергії системи в деформованому стані і ведеться пошук екстремуму цієї функції.

III – *Кінематичний метод* – базується на принципі можливих (віртуальних) переміщень Лагранжа. Робота всіх сил системи, що знаходиться в рівновазі, на нескінченно малих можливих переміщеннях системи = 0.

Тобто, робота внутрішніх сил дорівнює роботі зовнішніх сил за рівноваги системи.

1.4 Система з одним ступенем вільності $n_{\text{дин}}=1$. Вільні затухаючі коливання

Нехай маємо динамічну розрахункову систему з $n_{\text{дин}}=1$ – невагома консоль, її вага зібрана на кінці консолі (m). Відведемо масу m від горизонталі на величину переміщення Y_0 та відпустимо. Сили, які діють на масу m , подано на рис. 1.5.

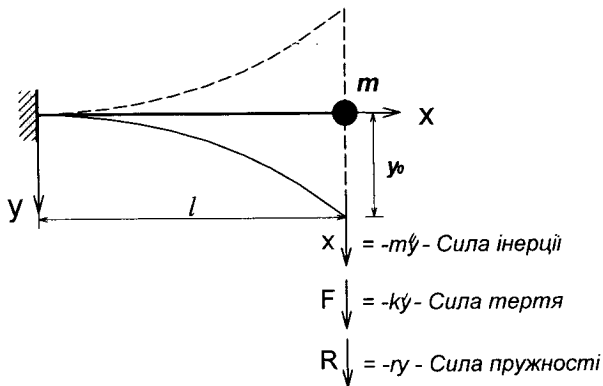


Рисунок 1.5 – Динамічна розрахункова схема невагомої консолі з $n_{дин}=1$

На рис. 1.5 m, k, r – фізичні параметри системи: m – маса, r – реакція в системі за переміщення системи $\delta = 1$. Для визначення r скористаємось формулою Максвелла–Мора для визначення переміщень. Для цього потрібні вантажна епюра згинальних моментів M_p та одинична епюра згинальних моментів \bar{M}_1 від дії $P=1$, прикладеної у шуканому напрямку, рис. 1.6.

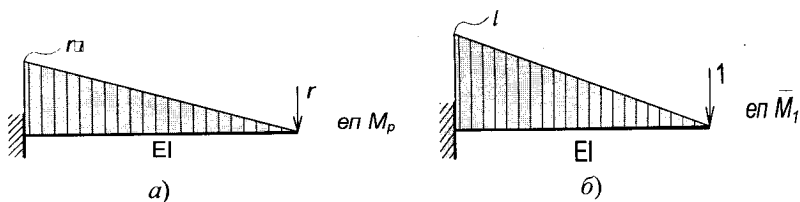


Рисунок 1.6 – Вантажна (а) та одинична (б) епюри моментів для визначення r

$$\delta_{11} = 1 = \int_0^l \frac{M_p \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{rl \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{EI} = \frac{r \cdot l^3}{3EI} = 1.$$

Звідси

$$r = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{l^3}.$$

Через F на рис. 1.5 позначена сила тертя – дисипативна сила опору – результат розсіювання енергії деформацій під час коливань. Сила опору складається із компонентів:

- а) – внутрішнє тертя в матеріалі;
- б) – тертя в з'єднаннях матеріалу конструкції;
- в) – опір зовнішнього середовища.

$$F = -k \cdot y',$$

де k – сила опору за $y' = 1$;

y' – коефіцієнт опору.

Динамічний розрахунок можна провести статичним способом, записавши рівняння кінестатики:

$$\sum Y = X + F + R = 0, \quad y'' + \frac{k}{m} y' + \frac{r}{m} y = 0. \quad (1.12)$$

Розв'язок цього диференціального рівняння:

$$y = a_0 \cdot e^{\frac{-kt}{2m}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad (1.13)$$

де a_0 – величина (амплітуда) відхилення;

ω – кругова частота власних коливань;

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}}$$

φ_0 – початкова фаза вільних коливань

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{y_0}{a_0}.$$

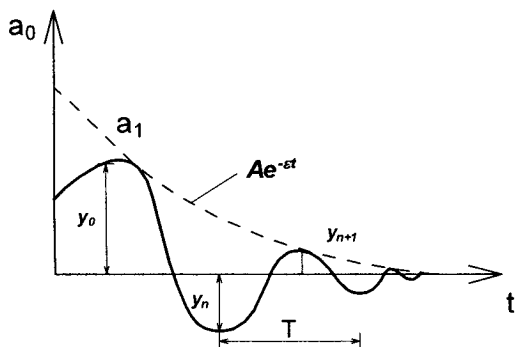


Рисунок 1.7 – Графік вільних затухаючих коливань

$$\omega^2 = \frac{r}{m}; \quad r = \frac{1}{\delta_{11}}; \quad \varepsilon = \frac{k}{2m}.$$

Логарифмічний декремент:

$$\delta = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}}. \quad (1.14)$$

Логарифмічний декремент згасання використовується як міра внутрішнього тертя.

1.5 Вільні незатухаючі коливання

В цьому випадку відсутні сили тертя. Диференціальне рівняння рівноваги за вільних незатухаючих коливань та його розв'язок (рис. 1.8):

$$y'' + \frac{r}{m} y = 0; \quad y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \lambda). \quad (1.15)$$

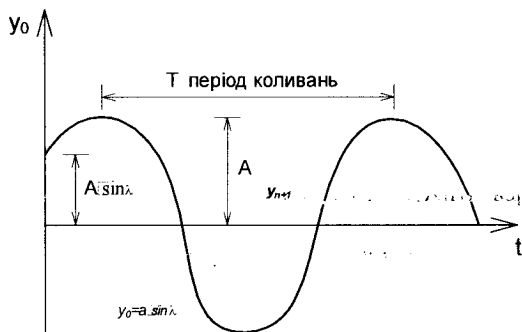


Рисунок 1.8 – Графік вільних незатухаючих коливань

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0}{\omega}\right)^2}, \quad \varphi_0 \rightarrow \lambda \rightarrow \arctg \frac{y_0}{y_0'} - \text{початкова фаза коливань.}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ – час повного циклу коливань. $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кругова частота власних коливань.

$n = \frac{60}{T} = 60\lambda$ – технічна частота (число коливань за 1 хвилину).

$y_0 = A \cdot \sin \lambda, \quad y_0' = A \cdot \omega \cdot \cos \lambda, \quad \lambda = \frac{1}{T}$ – частота коливань (число повних циклів в 1 секунду).

1.6 Вимушені коливання без урахування сили опору F

В цьому випадку вигляд диференціального рівняння та його розв'язок (рис. 1.9):

$$y'' + \frac{r}{m} y = \frac{P(t)}{m}, \quad (1.16)$$

де $P(t)$ – вібраційне навантаження, $P(t) = P \cdot \sin \theta \cdot t$.

$$y = A_1 \cdot \sin \omega \cdot t + A_2 \cdot \cos \omega \cdot t + y_{cm} \left| \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} \right| \cdot \sin \theta \cdot t, \quad (1.17)$$

де ω – кругова частота власних коливань,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}},$$

$$\delta_{11} \cdot r = 1, \quad r = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

r – сила пружності, за якої переміщення $\delta_{11} = 1$.

$$\lambda = \arctg \omega \cdot \frac{y_0}{y'_0}, \quad A_1 = A \cdot \cos \lambda, \quad A_2 = A \cdot \sin \lambda.$$

$$\mu = \left[\frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} \right] - \text{динамічний коефіцієнт,}$$

θ – частота вимушених коливань,

$y_{стат} = F \cdot \delta_{11}$ – статичне переміщення від амплітудного значення збудовальної сили.

Із графіка на рис. 1.9 динамічний коефіцієнт μ без урахування затухання прямує до безмежності.

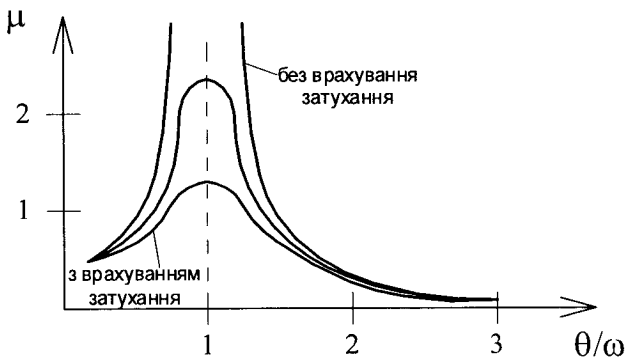


Рисунок 1.9 – Графік вимушених коливань без урахування сил опору

1.7 Вільні коливання системи з декількома ступенями вільності

$$n = n_{\text{оин}}$$

На рис.1.10 подано динамічну розрахункову схему невагомій балки, вага якої зібрана в n масах.

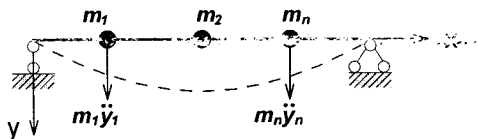


Рисунок 1.10 – Динамічна розрахункова схема з $n = n_{\text{оин}}$

Коли діють лише сили пружності та інерції, маємо вільні коливання. Рівняння руху на основі динамічної рівноваги для кожного із ступенів вільності на основі принципу кінестатики:

$$\sum_1^n F_{s,ik} + I_i = 0, \quad r y_i + m_i \cdot y_i'' = 0, \quad r = 1/\delta_{ii}, \quad (1.18)$$

де перша складова – сили пружності, друга складова – сили інерції.

Оскільки $\delta = 1/r$, а переміщення знайти легше, ніж силу пружності за одиничного переміщення, можна перейти до рівняння руху в переміщеннях ($y_i = \sum_1^n y_{ik}$) $i = 1, 2 \dots n$.

Ненульове рішення однорідної СЛАР:

$$\det(C - \lambda) = 0, \quad (1.23)$$

$$\det \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11} - 1/\omega^2) & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22} - 1/\omega^2) & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & (m_n\delta_{nn} - 1/\omega^2) \end{vmatrix} = 0.$$

В (1.23):

$$m = \begin{vmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{vmatrix} \text{ – вектор мас; } \quad \lambda = \begin{vmatrix} \omega_1 \rightarrow \min \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{vmatrix} \text{ – спектр частот;}$$

$$C = A \cdot m, \quad A = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} \text{ – матриця піддатливості.}$$

Частоти власних коливань $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ є власними числами матриці $(C - \lambda E)$.

Перевірка правильності вектора λ :

1. Сума власних чисел матриці $(C - \lambda E)$ – це слід цієї матриці.

2. Добуток частот власних коливань

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \dots \cdot \omega_n = \det \text{ матриці } (C - \lambda E).$$

Для $n_{\text{дин}} = 2$ вікове рівняння має вигляд:

$$\det \begin{vmatrix} m_1\delta_{11} - 1/\omega^2 & m_2\delta_{12} \\ m_1\delta_{21} & m_2\delta_{22} - 1/\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.24)$$

Матриця піддатливості $A = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}$.

Шуканий спектр частот $\bar{\omega} = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{vmatrix}$.

Коефіцієнти вікового рівняння:

$$\delta_{11} = M_{I_1=1} \cdot M_{I_1=1}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = M_{I_1=1} \cdot M_{I_2=1}, \quad \delta_{22} = M_{I_2=1} \cdot M_{I_2=1}.$$

1.8 Розрахунок на ударне динамічне навантаження

Під час дії ударного навантаження визначається імпульс – кількість руху $S = \int F(t)dt$, рис. 1.11.

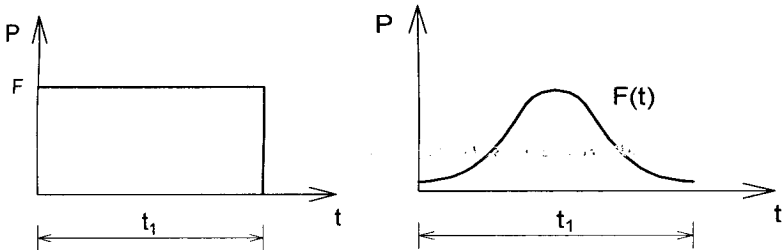


Рисунок 1.11– До визначення імпульсу руху

Буває важко встановити закон зміни імпульсу, тому можна рахувати наближено імпульс миттєвим $S = my'$.

Динамічне рівняння руху за удару :

$$y'' + \frac{r}{m} y = \frac{F(t)}{m}. \quad (1.25)$$

Розв'язок диференціального рівняння:

$$y = y_{стат} \frac{\dot{y}}{\sqrt{q \cdot y_{стат}}} = y \cdot \mu, \quad (1.26)$$

де \dot{y} – швидкість руху маси в момент удару $\dot{y} = \sqrt{2gh}$;

μ – динамічний коефіцієнт:

а) без урахування ваги системи, по якій здійснюється удар:

$$\mu = \frac{\dot{y}}{\sqrt{q \cdot y_{\text{стат}}}}, \quad \omega = \sqrt{q/y_{\text{стат}}} = \sqrt{r/m} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}},$$

$$\omega = 2\pi/T, \quad r - \text{реакція в системі за } \delta = 1, \quad r = 1/\delta_{11};$$

б) Значення μ – динамічного коефіцієнта з урахування ваги системи, по якій здійснюється удар:

$$\mu_1 = \mu \frac{G}{G + G_1},$$

де G – вага падаючого вантажу;

G_1 – вага самої споруди.

Приклад.

Нехай на балку (двотавр № 30) падає вантаж з висоти 0,18 м вагою $G=15$ кН (1500 кг). Довжина балки $L=3$ м. Потрібно знайти максимальні напруження σ_{max} , які виникнуть в балці, рис. 1.12.

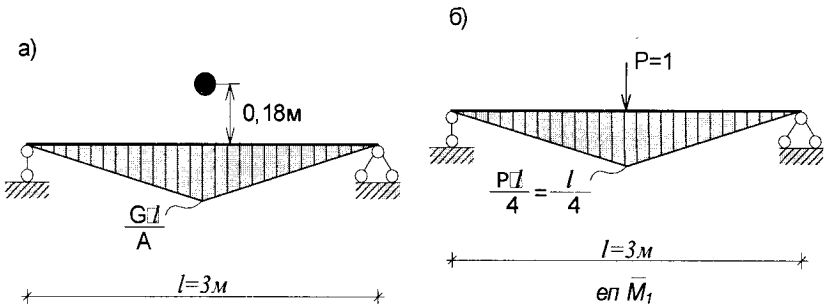


Рисунок 1.12 – Динамічна розрахункова схема балки та вантажна епюра M_p , (а); одинична епюра \bar{M}_1 (б)

Момент інерції балки $I_x = 0,768 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$. Власна вага погонного метра (1пм) балки двотавра дорівнює 0,365 кН. Модуль деформацій матеріалу балки $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кПа}$.

Нормальні напруження шукаємо за максимальним значенням згинального моменту в балці за формулою

$$\sigma = \frac{M}{W} \cdot \mu,$$

де $W = \frac{I_x}{h/2}$ – момент опору,

μ – динамічний коефіцієнт.

Швидкість руху маси в момент удару $\dot{y} = \sqrt{2gh}$.

$$\dot{y} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,18} = 1,88 \text{ м/с}.$$

Власна вага балки, приведена до точки удару (відповідно до даних експерименту):

$$G_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,365 = 0,5475 \text{ кН}.$$

Рівномірно розподілена маса конструкції приводиться до маси, зосередженої в місці удару, шляхом домноження її на деякий коефіцієнт β , який залежить від умов опирання кінців стержня [10]. Для шарнірно опертої балки $\beta = 0,493$.

Для використання формули із визначення динамічного коефіцієнта без урахування ваги системи, по якій здійснюється удар

$$\mu = \frac{y}{\sqrt{q \cdot y_{стат}}}$$

необхідно визначити прогин балки за статичного прикладення ваги падаючого вантажу.

Скористаємось формулою Максвелла–Мора; вантажну та одиничну епюри згинальних моментів наведено на рис. 1.12.

$$y_{стат} = \int_0^L \frac{M_P \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{G \cdot L^3}{EI} = \frac{1,5 \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,768 \cdot 10^{-4}} = 0,0006 \text{ м}.$$

$$\mu = \frac{1,88}{\sqrt{9,8 \cdot 0,0006}} = 77,5.$$

Динамічний коефіцієнт з урахуванням ваги балки:

$$\mu_1 = \mu \frac{G}{G + G_1} = 77,5 \cdot \frac{15}{15 + 0,5475} = 57,9.$$

Максимальні напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \cdot \mu = \frac{G \cdot L}{4 \cdot W} \cdot \mu = 184760 \text{ кПа.}$$

З урахуванням ваги балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \cdot \mu_1 = \frac{G \cdot L}{4 \cdot W} \cdot \mu_1 = 138000 \text{ кПа.}$$

Таким чином, ударне динамічне навантаження значно збільшує величину напружень в будівельні конструкції та потребує попередніх обрахунків з метою запобігання аварій будівельних конструкцій.

В цьому плані цікавим є питання визначення величини динамічного коефіцієнта μ (який показує в скільки разів дія динамічних сил перебільшує дію статично прикладених цих самих сил) під час падіння звичайної будівельної цеглини на цю саму балку (наведений вище приклад) всього лише з першого поверху будівлі (з висоти приблизно 3 м).

Розміри цеглини: 25 см × 6,5 см × 12,5 см.

Вага її в межах 2,5–3,2 кг.

Швидкість руху цеглини в момент удару

$$\dot{y} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,3 \cdot 3} = 7,67 \text{ м/с.}$$

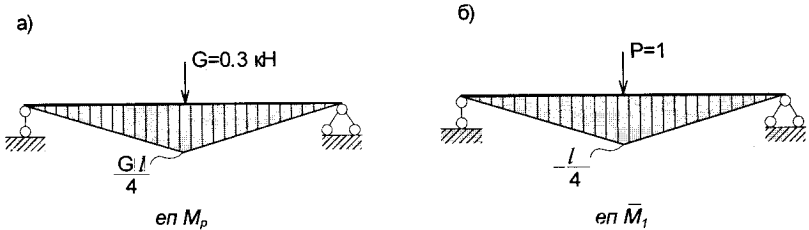


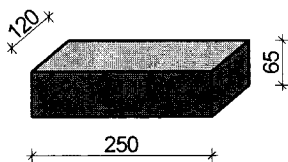
Рисунок 1.13 – Вантажна та одинична епюри моментів

Статичний прогин:

$$y_{\text{стат}} = \int_0^L \frac{M_p \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{G \cdot L^3}{EI} = \frac{0,03 \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,768 \cdot 10^{-4}} = 0,00011 \text{ м.}$$

Динамічний коефіцієнт μ без урахування ваги балки:

$$\mu = \frac{7,67}{\sqrt{9,8 \cdot 0,00011}} = 234.$$



Ці факти підтверджують необхідність врахування дії ударних навантажень в будівельній практиці.

1.9 Динамічний розрахунок статично невизначеної рами на вільні та вимушені коливання від дії гармонічного навантаження

В цьому випадку система з нескінченним числом ступенів вільності зводиться до системи з однією чи двома $n_{\text{дин}}$. Коливальні маси розташовуються на невагомій рамі в точках з переважаючим рухом.

Нехай маємо динамічну розрахункову схему рами, рис. 1.14.

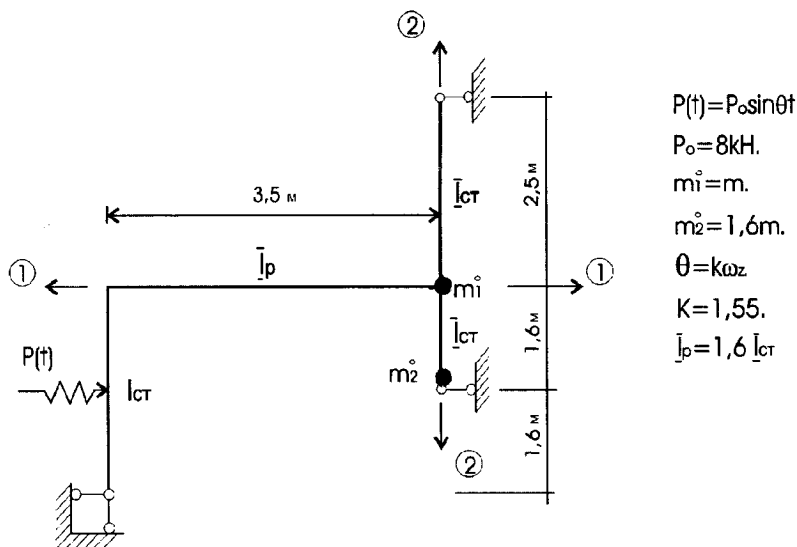


Рисунок 1.14 – Динамічна розрахункова схема рами при дії на раму гармонічного навантаження, що змінюється синусоїдально,

$$P(t) = P_0 \sin \theta \cdot t \text{ та вихідні дані}$$

Для побудови динамічної епюри згинальних моментів в статично невизначеній рамі необхідно виконати такі етапи:

1. Вибрати розрахункову схему.
2. Встановити ступінь статичної невизначеності рами за методом сил і число динамічних ступенів вільності $n_{\text{дин}}$.
3. Побудувати епюри згинальних моментів $M_{I_1=1}$, $M_{I_2=1}$, $M_{P=1}$ від окремо діючих одиничних інерційних сил і збурювальної сили в статично невизначеній рамі.
4. Записати вікове рівняння.
5. Обчислити коефіцієнти вікового рівняння.
6. Обчислити частоти власних коливань.
7. Виконати перевірку власних чисел і власних векторів.
8. Обчислити коефіцієнти головних форм коливань.
9. Побудувати головні форми коливань.
10. Записати систему амплітудних рівнянь.
11. Розрахувати і побудувати графіки розвитку амплітуд вимушених коливань від гармонічного вібраційного навантаження.
12. Побудувати графіки динамічних коефіцієнтів.
13. Обчислити частоти віброгасіння.
14. Обчислити інерційні сили для заданої частоти збурювальної сили.
15. Розрахувати і побудувати динамічну епюру згинальних моментів.

1.9.1 Послідовність розрахунку на вільні коливання

– Ступінь статичної невизначеності рами за методом сил:

$$L = 2III + C_0 - 3D = 1.$$

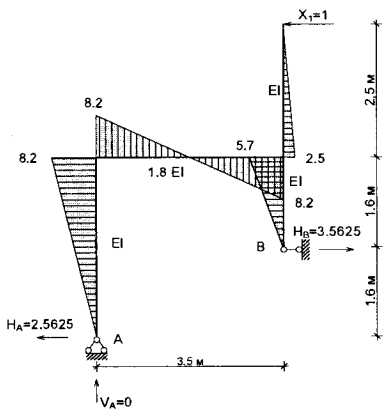
– Число динамічних ступенів вільності $n_{\text{дин}}$ (див. рис. 1.14):

(1) – перший можливий напрям коливань маси $m_1 = m_1^0 = m$;

(2) – другий можливий напрям коливань маси $m_2 = m_1^0 + m_2^0 = 2,6m$.

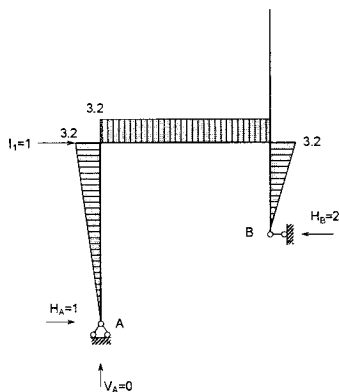
Отже, число динамічних ступенів вільності $n_{\text{дин}}$ дорівнює двом.

За методом сил розраховуємо епюри згинальних моментів від окремо діючих одиничних інерційних сил ($I_1 = 1$, $I_2 = 1$) і збурювальної сили одиничної величини ($P = 1$). Оскільки система 1 раз статично невизначена, вибір основної системи методу сил та побудова епюр M в ОС від $X_1 = 1$, $I_1 = 1$, $I_2 = 1$, $P = 1$ наведено на рис. 1.15, а), б), в), г).



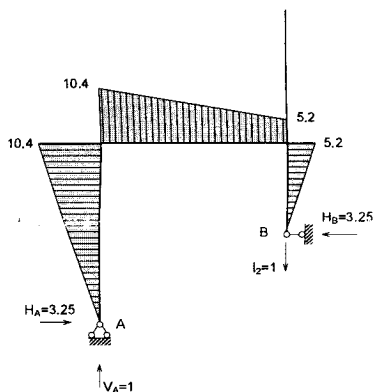
еп $M^0_{X_1=1}$

а)



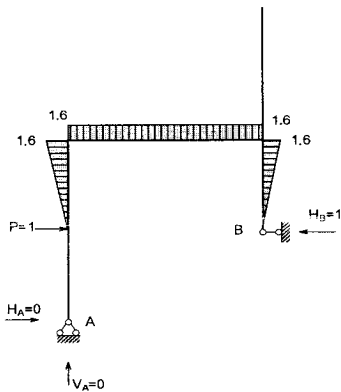
еп $M^0_{I_1=1}$

б)



еп $M^0_{I_2=1}$

в)



еп $M^0_{P=1}$

г)

Рисунок 1.15 – Епюри М в ОС методу сил від:

а) – зайвого невідомого $X_1 = 1$, б) – від $I_1 = 1$,

в) – від $I_2 = 1$, г) – від $P = 1$

Канонічні рівняння для побудови кінцевої епюри $M_{I_1=1}$:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1I_1=1} = 0, \quad \delta_{11} = M^0_{X_1=1} \cdot M^0_{X_1=1},$$

$$\Delta_{1I_1=1} = M^0_{X_1=1} \cdot M^0_{I_1=1}; \quad M_{I_1=1} = M^0_{X_1=1} \cdot X_1 + M^0_{I_1=1}$$

Канонічні рівняння для побудови кінцевої епюри $M_{I_2=1}$:

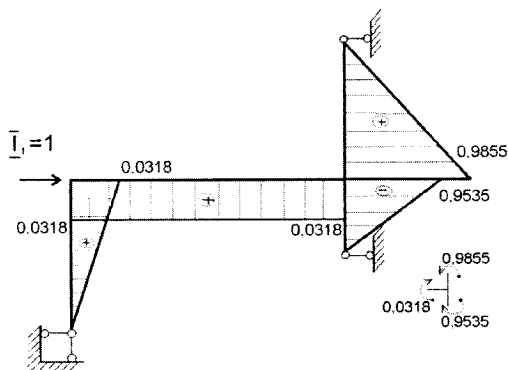
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1I_2=1} = 0, \quad \delta_{11} = M_{X_1=1}^0 \cdot M_{X_1=1}^0,$$

$$\Delta_{1I_2=1} = M_{X_1=1}^0 \cdot M_{I_2=1}^0; \quad M_{I_2=1} = M_{X_1=1}^0 \cdot X_1 + M_{I_2=1}^0.$$

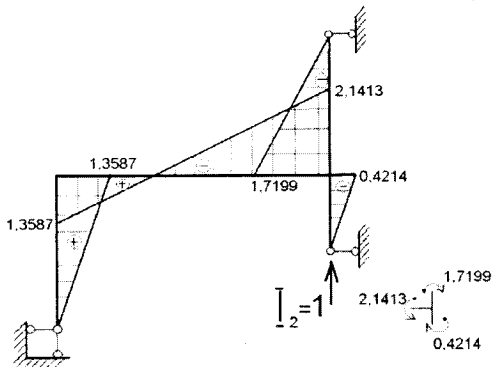
Канонічні рівняння для побудови кінцевої епюри $M_{P=1}$:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P=1} = 0, \quad \delta_{11} = M_{X_1=1}^0 \cdot M_{X_1=1}^0,$$

$$\Delta_{1P=1} = M_{X_1=1}^0 \cdot M_{P=1}^0; \quad M_{P=1} = M_{X_1=1}^0 \cdot X_1 + M_{P=1}^0.$$

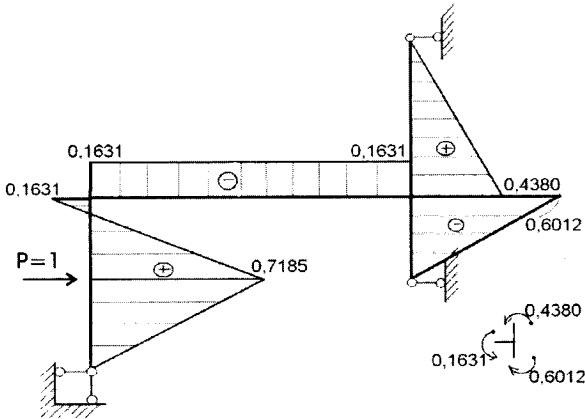


а) епюра $M_{I_1=1}$



б) епюра $M_{I_2=1}$

Рисунок 1.16 – Епюри моментів у статично невизначеній рамі від дії одиничних інерційних сил $I_1=1$ (а), $I_2=1$ (б) (після розкриття статичної невизначеності за методом сил)



епюра $M_{P=1}$

Рисунок 1.17 – Епюра моментів в статично невизначеній рамі від дії одиничного зовнішнього навантаження (після розкриття статичної невизначеності за методом сил)

Спектр частот власних коливань споруди знаходиться із розв'язку вікового рівняння (1.1), що описує вільні коливання:

$$(C - \lambda) \cdot \vec{Y} = 0, \quad \leftarrow \leftarrow \leftarrow$$

де $\vec{\lambda} = (w_1, w_2)^T$ – спектр частот власних коливань рами,

$$C = A \cdot \vec{m},$$

де \vec{m} – вектор мас, $\vec{m} = (m_1, m_2)^T$,

A – матриця піддатливості розрахункової схеми,

$$A = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}$$

\vec{Y} – вектор коливань.

Запис вікового рівняння для систем з $n_{\text{дин}}=2$:

$$\begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1) & m_2 \delta_{12} \omega^2 \\ m_2 \delta_{21} \omega^2 & (m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.27)$$

Назва «вікове рівняння» з'явилася за аналогією під час розгляду задач небесної механіки про періодичне відхилення планет від своїх орбіт.

Коефіцієнти вікового рівняння:

$$EJ\delta_{11} = M_{I_1=1} \cdot M_{I_1=1} = 1,2975;$$

$$EJ\delta_{22} = M_{I_2=1} \cdot M_{I_2=1} = 7,0968;$$

$$EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21} = M_{I_1=1} \cdot M_{I_2=1} = -1,1793;$$

$$EJ\Delta_{1p} = M_{I_1=1} \cdot M_{P=1} = 0,6689;$$

$$EJ\Delta_{2p} = M_{I_2=1} \cdot M_{P=1} = 0,2801.$$

Матриця піддатливості для рами, що розглядається:

$$A = \begin{vmatrix} \delta_{11} = 1,2975/EI & \delta_{12} = -1,1793/EI \\ \delta_{21} = -1,1793/EI & \delta_{22} = 7,0968/EI \end{vmatrix}.$$

Спектр частот власних коливань для систем з $n_{\text{оин}} = 2$ обчислюється за формулою:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1\delta_{11} - m_2\delta_{22})^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \quad (1.28)$$

Після підстановки коефіцієнтів вікового рівняння δ_{ij} отримаємо:

$$\omega_1^2 = 0,05359 \frac{EJ}{m}; \quad \omega_2^2 = 0,91849 \frac{EJ}{m};$$

$$\omega_1 = 0,23149 \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad \omega_2 = 0,95838 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Спектр частот власних коливань:

$$\bar{\omega} = \begin{vmatrix} \omega_1 = 0,23149 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \\ \omega_2 = 0,95838 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \end{vmatrix}.$$

Перевірка властивостей власних чисел виконується за формулою

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} . \quad (1.29)$$

Після підстановки коефіцієнтів отримаємо аналітичний вираз:

$$\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = 19,74868 \frac{m}{EI} \right) \approx \left(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} = 19,74873 \frac{m}{EI} \right).$$

Коефіцієнти головних форм коливань обчислюються за формулами

$$\rho_{21} = -\frac{m_1 \delta_{21} \omega_1^2}{m_2 \delta_{22} \omega_1^2 - 1}, \quad \rho_{22} = -\frac{m_1 \delta_{12} \omega_2^2}{m_2 \delta_{22} \omega_2^2 - 1}. \quad (1.30)$$

Після обчислень одержуємо:

$$\rho_{21} = -5,6566; \quad \rho_{22} = 0,06792.$$

Перевірка ортогональності головних форм коливань за їхніми відомими коефіцієнтами виконується за рівністю:

$$m_1 + m_2 \rho_{21} \rho_{22} = 0, \quad (1.31)$$

яка після підстановки коефіцієнтів приводить до тотожності:

$$m + 2,6m(-5,6566)0,06792 = m(1 - 0,999) \approx 0.$$

Побудова головних форм коливань виконується за допомогою коефіцієнтів ρ_{ik} , для цього у напрямі першого коливання відкладається амплітуда, що дорівнює одиниці (в довільному масштабі).

Для зображення першої головної форми коливань необхідно за напрямом другого коливання відкласти амплітуду, яка дорівнює коефіцієнту ρ_{21} , а для отримання другої головної форми коливань необхідно відкласти за напрямом другого коливання амплітуду, яка дорівнює коефіцієнту ρ_{22} .

Деформований стан рами викреслюється з дотриманням таких правил: прямі жорсткі вузли рами до деформації залишаються прямими і після деформації; на першій головній формі коливань не має бути точок перегину пружних осей ригелів і стояків; на другій головній формі коливань можлива поява однієї точки перегину.

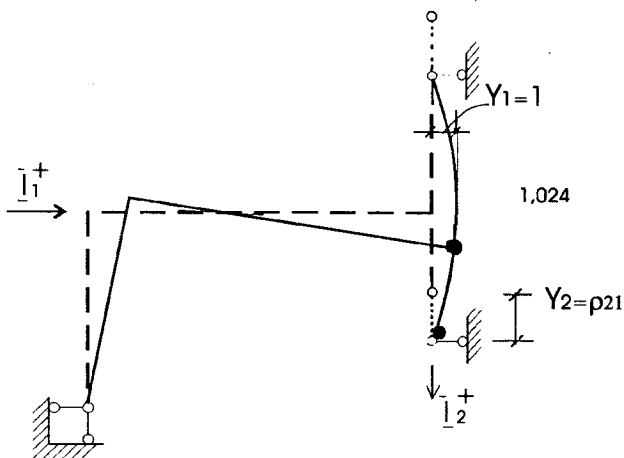


Рисунок 1.18 – Перша головна форма коливань

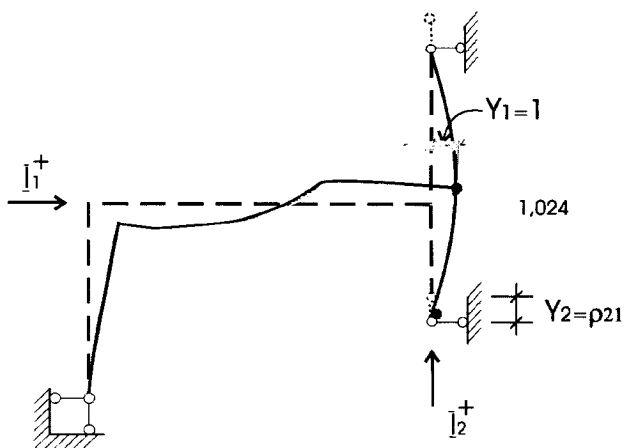


Рисунок 1.19 – Друга головна форма коливань

1.9.2 Динамічний розрахунок на вимушені коливання

В цьому випадку вільні коливання, спричинені силами опору, відсутні. Маси будуть коливатись гармонічно з частотою $\theta = k \cdot \omega_2$, $y_n(t) = a \sin \theta \cdot t$.

Система канонічних рівнянь руху споруди в цьому випадку описується рівняннями Безухова:

$$\begin{cases} I_1 \delta_{11}^* + I_2 \delta_{12} + \dots + I_n \delta_{1n} + \Delta_{1P} = 0, \\ I_1 \delta_{21} + I_2 \delta_{22}^* + \dots + I_n \delta_{2n} + \Delta_{2P} = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ I_1 \delta_{n1} + I_2 \delta_{n2} + \dots + I_n \delta_{nn} + \Delta_{nP} = 0, \end{cases} \quad (1.32)$$

де $\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}$,

Δ_{iP} – переміщення i -ї маси від дії одиничного значення збурювальної сили (коефіцієнти вікового рівняння),

δ_{ij} – переміщення i -ї маси від дії одиничного значення інерційної сили (коефіцієнти вікового рівняння).

Коренями системи рівнянь Безухова є дійсні значення інерційних сил. Після визначення дійсних сил інерції визначається динамічна еюра згинальних моментів:

$$M_{оин} = M_P + \sum_{i=1}^N M_{I_i} \cdot I_i + M_G, \quad (1.33)$$

де M_P – еюра моментів від амплітудного значення збурювальної сили;

M_G – еюра моментів від власної ваги.

Для прикладу, що розглядається:

$$\theta = k \cdot \omega_2 = 1,55 \cdot 0,9584 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 1,4855 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\theta^2 = (1,4855 \sqrt{\frac{EI}{m}})^2 = 2,207 \frac{EI}{m}$$

$$\delta_{11}^* = \frac{1,2975}{EI} - \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{2,207 EI} = \frac{0,844}{EI}$$

$$\delta_{22}^* = \frac{7,097}{EI} - \frac{1}{2,6 \cdot m} \cdot \frac{m}{2,207 EI} = \frac{6,923}{EI}$$

Система рівнянь Безухова:

$$\begin{cases} 0,844 \cdot I_1 - 1,1793 I_2 + 0,6689 = 0, \\ -1,1793 \cdot I_1 + 6,923 \cdot I_2 = 0,2801. \end{cases}$$

Корені система рівнянь Безухова:

а) інерційна сила за напрямом першого коливання:

$$I_1 = -2,1149;$$

б) інерційна сила за напрямом другого коливання:

$$I_2 = 0,6108.$$

Динамічна еюра згинальних моментів:

$$M_{дин} = M_p + M_1 \cdot I_1 + M_2 \cdot I_2,$$

яка остаточно має такий вигляд:

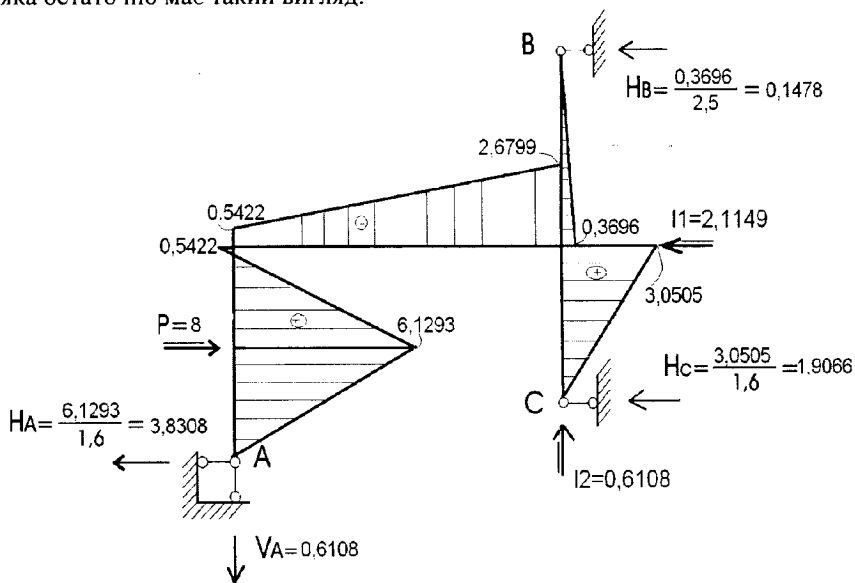
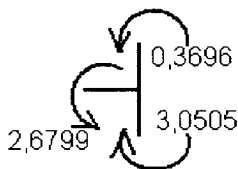
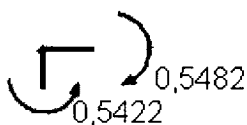


Рисунок 1.20 – Кінцева динамічна еюра згинальних моментів $M_{дин}$

Для перевірки динамічної епюри згинальних моментів необхідно обчислити за величинами ординат моментів реакції в опорних стержнях (M_{out}) і вимагати виконання рівнянь статки:

а) вузли рами мають перебувати в рівновазі:



$$0,5422 - 0,5422 = 0,$$

$$2,6799 + 0,3696 - 3,0505 = 0,001,$$

$$\Delta\% = 100 \frac{0,001}{3,0505} = 0,033\%;$$

б) сума проєкцій на горизонтальну вісь:

$$8 - 3,8308 - 1,9066 - 2,1149 - 0,1478 = 8 - 8,0001 \approx 0;$$

в) сума проєкцій всіх сил на вертикальну вісь:

$$0,6108 - 0,6108 = 0.$$

Побудова і розрахунок графіків розвитку амплітуд вимушених коливань виконується за такими формулами:

$$c_1(\theta) = \Delta_1 / \Delta, \quad c_2(\theta) = \Delta_2 / \Delta,$$

$$\Delta_1 = -\delta_{1p} P_0 (m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1) + \delta_{2p} P_0 m_2 \delta_{12} \theta^2,$$

$$\Delta_2 = -\delta_{2p} P_0 (m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1) + \delta_{1p} P_0 m_1 \delta_{21} \theta^2,$$

$$\Delta = (m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1)(m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1) - m_1 m_2 \delta_{12}^2 \theta^4. \quad (1.34)$$

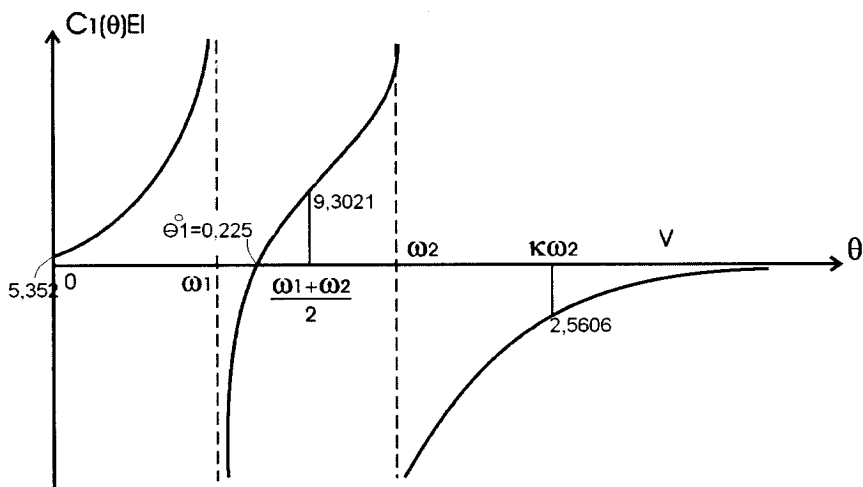


Рисунок 1.21 – Графік розвитку амплітуди за напрямом першої форми коливання

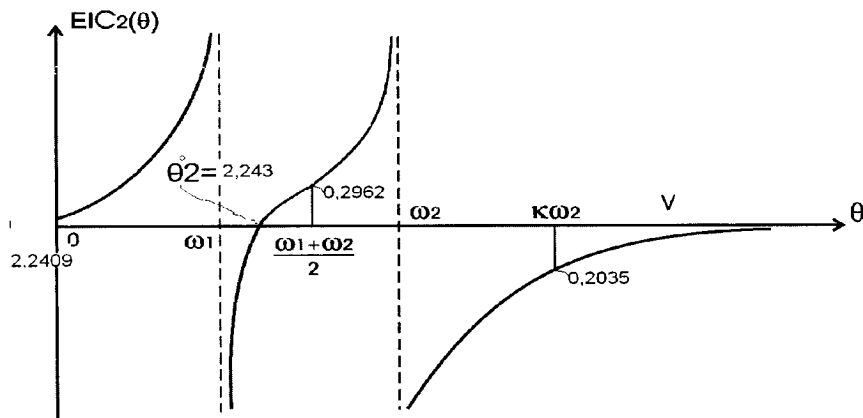


Рисунок 1.22 – Графік розвитку амплітуди за напрямом другої форми коливання

Графіки розвитку динамічних коефіцієнтів розраховують за формулами:

$$\mu_1(\theta) = \frac{c_1(\theta)}{c_1^0(\theta)}, \quad \mu_2(\theta) = \frac{c_2(\theta)}{c_2^0(\theta)}, \quad (1.35)$$

де $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$ – амплітуди вимушених коливань відповідно за першим і другим напрямми за заданої частоти θ ,
 $c_1^0(\theta)$, $c_2^0(\theta)$ – переміщення мас, які коливаються відповідно за першим і другим напрямми, викликані статичною дією збудовальної сили P .

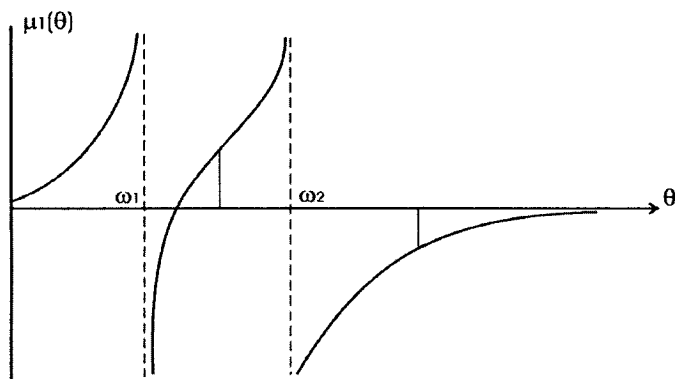


Рисунок 1.23 – Графік розвитку першого динамічного коефіцієнта

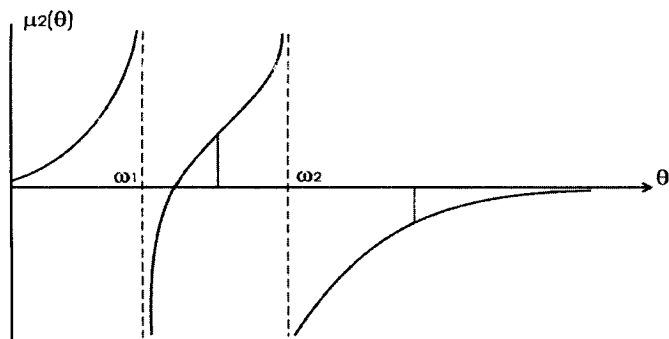


Рисунок 1.24 – Графік розвитку другого динамічного коефіцієнта

Частоти віброгасіння обчислюємо за формулами:

$$\theta_1^0 = \sqrt{\frac{\delta_{1p}}{\delta_{1p} m_2 \delta_{22} \delta_{2p} m_2 \delta_{12}}} = 0,225 \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\theta_2^0 = \sqrt{\frac{\delta_{2p}}{\delta_{2p} m_1 \delta_{11} \delta_{1p} m_1 \delta_{21}}} = 0,243 \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (1.36)$$

1.10 Заходи боротьби з вібраційними впливами

Коливання будівельних конструкцій залежно від частоти та амплітуди можуть здійснювати негативний фізіологічний вплив на організм людини та заважати роботі промислових будівель. На основі дослідних даних зроблено висновок, що критерієм чутливості людини до коливань з низькими частотами (від 1-10 Гц, тобто, коливання /секунду) може слугувати прискорення коливань, а для коливань з високими частотами (>10 кол/с) – швидкості коливань.

Таблиця 1.1 – Характеристики фізіологічного впливу гармонічних коливань

Характеристики впливу коливань на людей	Для частот від 1 до 10 Гц	Для частот від 10 до 100 Гц
	Граничне прискорення в $мм/с^2$	Граничне прискорення в $мм/с^2$
Нечутливі	10	0,16
Слабо чутливі	40	0,24
Добре чутливі	125	2
Сильно чутливі (заважають)	400	6,4
Шкідливі за довготривалого впливу	1000	16
Безумовно шкідливі	> 1000	> 16

Як допустимі мають вважатись коливання з характеристикою їх нешкідливого впливу на людей.

Для різних машин і обладнання, які монтуються на фундаментах та перекриттях, нормами встановлено допустимі значення амплітуд і швидкостей коливань.

1.10.1 Способи зменшення резонансних впливів

Коли в результаті динамічного розрахунку будівельних конструкцій вимоги міцності, жорсткості чи характеристики впливу на людей та обладнання не задовольняються, необхідно вживати заходи протидії коливанням.

Ці заходи доволі різноманітні та ефективні за умови їх правильного вибору в кожному конкретному випадку.

1. Доцільність розстановки машин.

Шляхом того чи іншого встановлення (розташування) машини, яка є джерелом коливань, можна зменшити чи навіть обійтись без резонансних явищ.

Наприклад, пересунути таку машину ближче до опори балки, *це збільшить частоту власних коливань балки*. Машину, що створює горизонтальні сили інерції, потрібно розташовувати так, щоб сили інерції діяли в напрямку, де жорсткість будівлі більша.

2. *Зміна жорсткості конструкції.*

Можна змінити жорсткість конструкції шляхом збільшення розмірів поперечного перерізу, шляхом зменшення прольотів. Це приводить *до підняття частот власних коливань* і може бути використано для *зміщення нижчої з цих частот вгору* від частоти збурювальних навантажень.

Зменшення жорсткості конструкцій може бути доцільним лише в окремих випадках, оскільки призводить до зниження міцності самої конструкції і створює *можливість резонансу* з більш високими тонами коливань зміненої конструкції.

3. *Зміна режиму роботи машини.*

Зменшення чи збільшення числа обертів може призвести до такого самого ефекту, як зменшення чи збільшення жорсткості конструкції, тобто до зниження динамічного коефіцієнта.

Колівання, що створюють машини з обертальними масами з обернено-поступальним ходом, можна значно зменшити шляхом урівноваження інерційних сил.

Урівноваження машини може бути досягнуто за рахунок урівноваження її рухомих мас, а також шляхом зустрічного подвоювання чи потроювання, за якого дві чи три однакові машини встановлюються на одному валу і працюють з відносним зсувом фаз на 180° чи 120° . З цією метою до машини може бути встановлено додатковий спеціальний антивібратор.

4. *Використання віброгасника.*

Динамічний віброгасник – це додаткова система, яку встановлюють на будівельну конструкцію, що отримує вимушені коливання, з метою нейтралізації своїми реакціями збурювального навантаження.

Для цього частота власних коливань віброгасника має дорівнювати частоті збурювального навантаження.

5. *Віброізоляція.*

Віброізоляція є одним із найбільш простих методів для зменшення шкідливих дій коливань.

Розрізняють *активну віброізоляцію*, призначенням якої є зменшення динамічних сил, що передаються коливальною машиною на несучу конструкцію, і *пасивну віброізоляцію*, яка має за мету ізолювати ті чи інші місця роботи чи прибори від коливань несучої конструкції.

Прикладом активної віброізоляції може бути маса на амортизаторах, рис. 1.26.

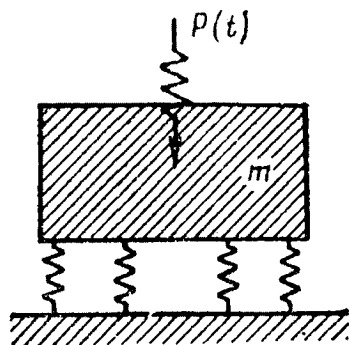


Рисунок 1.26 – Розрахункова схема активної віброізоляції

Масу m на амортизаторах (рис. 1.26) можна розглядати як систему з одним ступенем вільності, яка може здійснювати лише вертикальні коливання і для якої динамічний коефіцієнт виражається формулою [10, 11]:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\theta}{\omega}\right)^2}},$$

де γ – коефіцієнт непружного опору матеріалів в конструкції, який зазвичай вводиться в розрахунок, дорівнює коефіцієнту поглинання, поділеному на 2π , і є відношенням амплітуд непружної і пружної деформацій:

$$\gamma = \frac{y_{непр}}{y_{пр}} = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Значення цього коефіцієнта для різних матеріалів подано в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Коефіцієнт непружного опору матеріалів γ

Амплітуда інерційної сили в кг	Залізобетон	Цегляна кладка	Дерево	Прокатна сталь
< 100	0,05	0,04	0,03	0,01
≥ 100	0,1	0,08	0,05	0,025

В системі з затуханням (рис. 1.27) залежність між силою P і переміщенням y нелінійна, тому за кожного циклу коливань на діаграмі P - y виходить замкнена крива (рис. 1.28), яку називають петлею гістерезису.

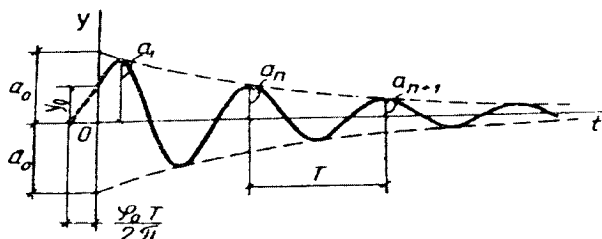


Рисунок 1.27 – Графік вільних затухаючих коливань

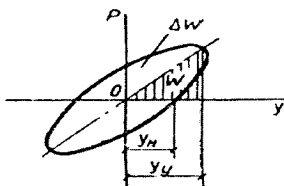


Рисунок 1.28 – Графік залежності « P - y » в системі з затуханням демонструє петлю гістерезису

Для ефективності віброізоляції відношення частоти збурювальної сили θ до частоти вільних коливань ω підресореної маси має бути не менше 4. В цьому випадку величина η (коефіцієнт передачі сили, який оцінює ефективність віброізоляції) буде не більшим $\frac{1}{15}$ і ефективність віброізоляції сягатиме 93,5%.

За малих значень частоти θ вимушених коливань $\eta \approx 1$ і віброізоляція стає неідеальною.

За $\frac{\theta}{\omega} < 1,41$ $\eta > 1$ і тоді віброізоляція дає навіть небажану дію.

За $\frac{\theta}{\omega} \approx 1$ настає резонанс, який може бути небезпечний для пружинних амортизаторів.

Для гасіння коливань із середніми частотами (6-25 Гц) найбільше підходять сталеві пружинні ізолятори, які допускають великі статичні осідання і дають можливість знизити частоту власних коливань маси, яка ізолюється.

РОЗДІЛ 2 СТІЙКІСТЬ СПОРУД

2.1 Поняття критичної сили. Методи розв'язання задач на стійкість

Втрата стійкості – неможливість споруди зберегти своє початкове положення внаслідок порушення рівноваги між зовнішніми та внутрішніми силами.

Втрата стійкості становить потенційну загрозу для всіх стиснутих елементів конструкції. Це одна із **найбільш гострих форм конфлікту** між конструкцією і навантаженням, найнебезпечніший варіант цієї невидимої боротьби.

Розглянемо питання стійкості тривимірної конструкції дамби, рис. 2.1.

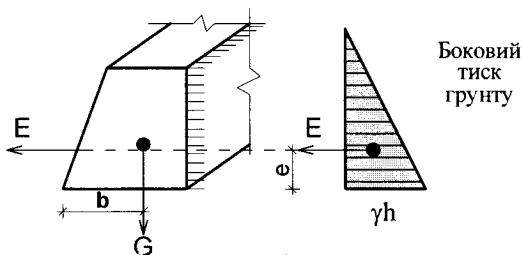


Рисунок 2.1 – Стійкість дамби

Перекидний згинальний момент від рівнодійної тиску ґрунту E :

$$M_{пер.} = E \cdot e.$$

Утримувальний ефект дає власна вага дамби G :

$$M_{упр.} = G \cdot b.$$

Умовою стійкості є

$$M_{упр.} > M_{пер.}$$

Є три форми рівноваги, рис. 2.2 – стійка, нестійка, байдужа.

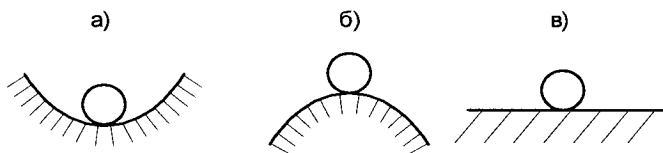


Рисунок 2.2 – Форми рівноваги: стійка, нестійка, байдужа

Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких тонкостінних будівельних конструкцій типу гнучких стержнів, пластин, оболонки.

Деформації за втрати стійкості йдуть катастрофічно швидко, тому граничний стан, що передуює руйнуванню конструкції, є недопустимий.

Критична сила – максимальне значення стискальної сили, для якої прямолинійна форма рівноваги стержня залишається стійкою. Потім **стиск переходить в згин**.

Для конструкцій на рис. 2.3:

$$F \leq [F] = \frac{F^{cr}}{S_m}, \quad (2.1)$$

де $[S_m]$ – допустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Значення $[S_m]$ для: сталей = 1,8 ... 3;
чавуну = 5 ... 5,5;
дерева = 2,8 ... 3,2.

Система має бути в стані стійкої рівноваги, а коли щось її виведе з цього стану, то після зняття цих причин система має повернутись у вихідне становище.

Вихід системи зі стану рівноваги – втрата стійкості, а навантаження, при яких з'являється **біфуркація** (роздвоєння) форм рівноваги – **критична сила**.

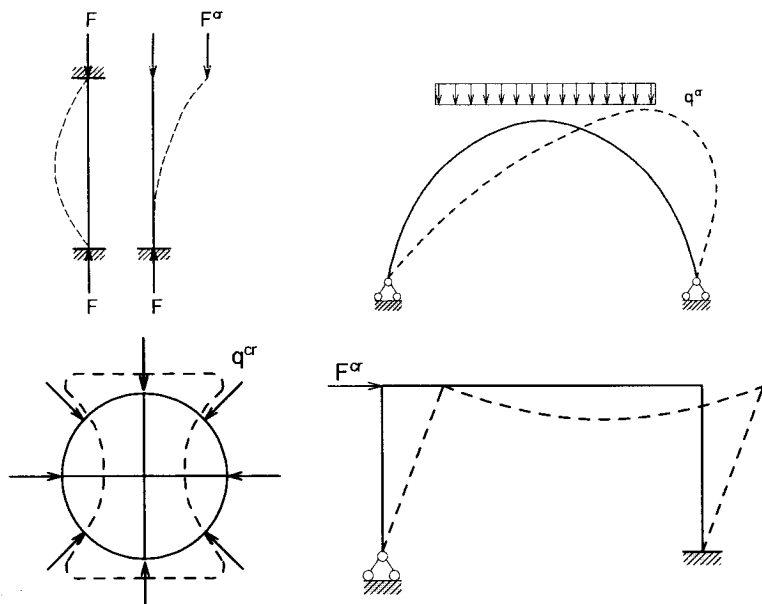


Рисунок 2.3 – Приклади втрати стійкості в стержні, арці, циліндрі, рамі

Постановка задач для визначення P^{cr}

Споруда за P^{cr} втратила стійкість і перейшла в новий деформований стан. Знайти P^{cr} , коли цей новий стан буде станом рівноваги.

В такому випадку можна застосовувати всі методи, що застосовують до систем в рівновазі.

Статичний метод: оскільки вся система в рівновазі, то в рівновазі буде і будь-який її нескінченно малий елемент. Записується диференціальне рівняння рівноваги для нескінченно малого елемента в деформованому стані від дії зовнішніх навантажень і внутрішніх сил.

Проінтегрувавши це рівняння, знаходиться величина P^{cr} .

Кінематичний спосіб: безпосереднє застосування принципу можливих (віртуальних) переміщень Лагранжа. Робота всіх сил системи, що знаходяться в рівновазі, на нескінченно малих можливих переміщеннях системи дорівнює нулю в деформованому стані.

Звідси: робота внутрішніх сил дорівнює роботі зовнішніх сил.

Енергетичний спосіб: використання енергетичного критерію рівноважного стану: повна потенціальна енергія системи в рівновазі має екстремальне значення. Тому записується вираз потенціальної енергії системи в деформованому стані і ведеться пошук екстремуму цієї функції.

В процесі визначення критичної сили енергетичним способом застосовується закон збереження енергії Ломоносова:

– сума потенціальної (mgh) та кінетичної енергії $\frac{mV^2}{2}$ пружної системи – величина стала в часі.

Забезпечення стійкості будівельної конструкції є дуже важливим, оскільки втрата стійкості проходить дуже швидко і практично призводить до руйнування.

Існують поняття Ейлерівської критичної сили та критичної сили другого роду.

Перша критична сила (чи Ейлерівська) – втрата стійкості, за якої з'являються якісно нові деформації, це втрата стійкості першого роду (проходить біфуркація форм рівноваги).

В будівельній практиці часто зустрічається другий клас задач. В будівельній конструкції з самого початку існують згинальний момент M та поперечна сила Q .

За малих навантажень переміщення в цих будівельних конструкціях малі. Під час зростання навантажень переміщення зростають пропорційно. В процесі збільшення навантажень настає момент, коли переміщення різко зростають, навіть коли навантаження не збільшуються.

Провальний приріст переміщень за відсутності приросту навантажень – втрата стійкості другого роду, а сила дорівнює P^{KP} .

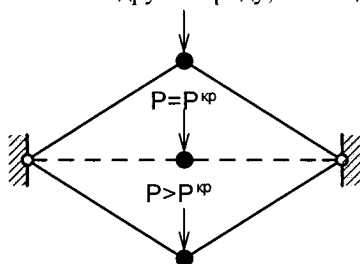


Рисунок 2.4 – Втрата стійкості II-го роду – лавиноподібний приріст переміщень

2.2 Стійкість прямих центрально стиснених стержнів

В кінці XVIII століття Ейлер (1701 – 1783 р.) застосувавши кінематичний спосіб для визначення критичної сили отримав формулу для визначення P^{cr} для шарнірно опертого стержня, рис. 2.5.

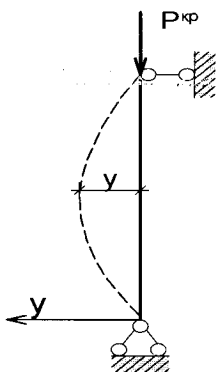


Рисунок 2.5 – До визначення P^{cr} для шарнірно опертого стержня;

$$y \cdot P^{cr} = M(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot EI_{\min}; \quad n^2 = \frac{P^{cr}}{EI_{\min}}.$$

Диференціальне рівняння рівноваги стержня:

$$y'' + n^2 y = 0.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y(x) = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx,$$

де C_1, C_2 визначаються із граничних умов:

$$- \text{за } x=0 \quad y(0)=0. \quad y(0) = 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \quad C_1 = 0.$$

$$- \text{за } x=L \quad y(L)=0. \quad y(L) = C_2 \cdot \sin nL = 0. \quad C_2 = 0$$

За $C_2 = 0$ фізична сторона задачі не матиме сенсу.

$$\sin nL = 0,$$

$$nL = 0 + \pi(2i + 1).$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \cdot \sin nL = 0 \end{cases}; \quad \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin nL \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} \sin nL = 0 \\ nL = 0 \end{matrix},$$

$$\sqrt{\frac{P^{cr}}{EI_{\min}}} \cdot L = 0 + \pi \Rightarrow \frac{P^{cr} \cdot L^2}{EI_{\min}} = \pi^2.$$

Ввівши поняття параметра стійкості:

$$v = L \cdot n = L \sqrt{P^{cr} / EI_{\min}}, \quad (2.2)$$

Ейлер записав вираз для критичної сили:

$$P^{cr} = \frac{\tau^2 \cdot EI_{\min}}{(\mu \cdot L)^2}, \quad (2.3)$$

де μ – коефіцієнт зведеної довжини;

$\mu \cdot L$ – зведена довжина.

Багато структурних рішень прямих стержнів можна звести до п'яти розрахункових схем.

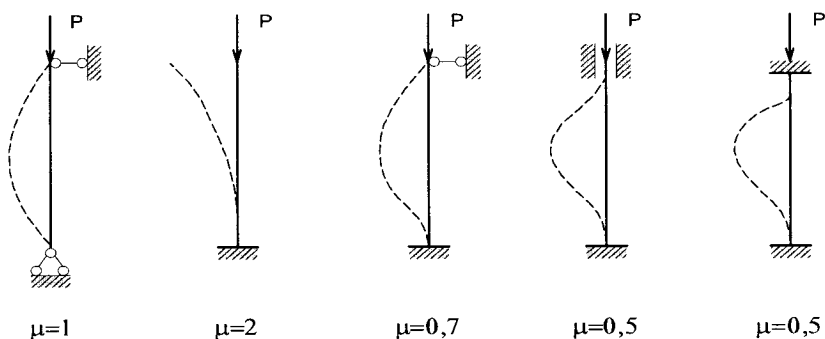


Рисунок 2.6 – Коефіцієнт зведеної довжини для стержнів

За умови переходу до граничних напружень:

$$\sigma^{cr} = \frac{P^{cr}}{A} = \frac{\tau^2 \cdot EI_{\min}}{(\mu L)^2 \cdot A} \quad (2.4)$$

Запис для σ^{cr} через найменший радіус інерції поперечного перерізу i_{\min} :

$$\sigma^{cr} = \frac{\tau^2 \cdot E}{(\mu L / i_{\min})^2}, \quad (2.5)$$

де

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \quad (2.6)$$

Приклад знаходження мінімального моменту інерції поперечного перерізу колони I_x^{\min} , I_y^{\max} .

Нехай розміри поперечного перерізу колони $h \times b$, рис. 2.7.

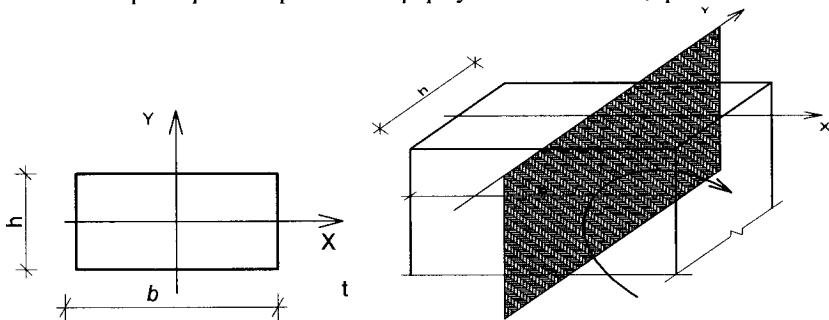


Рисунок 2.7 – До визначення моменту інерції колони

Згин в площині, перпендикулярній до осі X:

$$I_x^{\min} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Згин в площині, перпендикулярній до осі Y:

$$I_y^{\max} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Під час запису формул для моментів інерції можна скористатись правилом двох «П» – розмір, паралельний осі, до якої записується момент інерції, береться в першому степені.

На рис. 2.7 мінімальним буде момент інерції I_x^{\min} , згин буде проходити в площині, перпендикулярній до осі X.

В процесі розрахунків на стійкість вводиться поняття гнучкості стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}} \quad (2.7)$$

Через λ позначається безрозмірна величина, що характеризує вплив розмірів стержня і способу закріплення кінців стержня на здатність конструкції чинити опір втраті стійкості.

$$\lambda_{\text{граничне}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пр}}}}$$

$\lambda_{\text{граничне}}$ залежить лише від фізико-механічних характеристик матеріалу і є const для цього матеріалу. Для сталі С345 $\sigma_{\text{пр}} = 270$ МПа, $E = 2 \cdot 10^6$ МПа і $\lambda_{\text{граничне}} = 85$.

Напрацьовано графік взаємозв'язку величин критичних напружень залежно від гнучкості стержня, рис. 2.8.

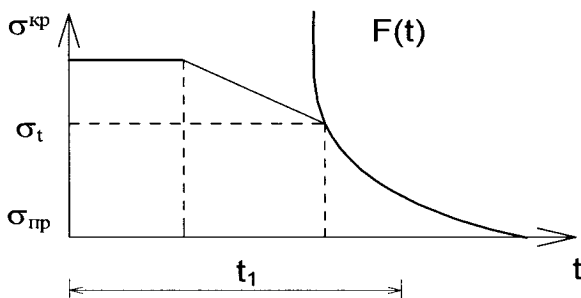


Рисунок 2.8 – Залежність $\lambda - \sigma^{\text{кр}}$

При практичних розрахунках на стійкість використовуються залежності:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{\text{стійкості}}],$$

$$[\sigma_{\text{стійкості}}] = \varphi \cdot [\sigma_{\text{стиск}}],$$

де φ – коефіцієнт поздовжнього згину, визначається відповідно до нормативних документів.

Таблиця 2.1 – Значення коефіцієнта φ

λ	Сталь А-ІІ – і А-ІV	Сталь А-V	Чавун	Дерево
10	0,99	0,98	0,97	0,99
70	0,91	0,76	0,34	0,6
90	0,89	0,62	0,2	0,38
120	0,45	0,36	0	0,22

Приклад.

Підібрати розміри двотаврового поперечного перерізу колони із прокатної сталі $\sigma_{\text{стиск}} = 160 \text{ МПа}$ (А-V) на дію стискальної сили $F = 300 \text{ кН}$. Розрахунковою схемою колони є жорстке закріплення зверху і знизу, довжина колони – $L = 5 \text{ м}$.

I спроба. Нехай коефіцієнт поздовжнього згину $\varphi = 0,5$.

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_{\text{стиск}}]} = \frac{300 \text{ кН}}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^3 \text{ кН}} = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

За сортаментом підбираємо І № 24 з площею $A = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ та з мінімальним радіусом інерції $i_{\min} = i_y = 0,0263 \text{ м}$.

Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{L_{\text{приведене}}}{i_{\min}} = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 5}{0,0263} = 95,1.$$

З таблиці для значень φ за лінійною інтерполяцією $\varphi_1 = 0,644$.

II спроба. Візьмемо коефіцієнт поздовжнього згину $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,644}{2} = 0,572$.

$$A = \frac{F}{\varphi_2 \cdot [\sigma_{\text{стиск}}]} = \frac{300 \text{ кН}}{0,572 \cdot 160 \cdot 10^3 \text{ кН}} = 32,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

За сортаментом підбираємо I № 22а з площею $A = 32,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ з мінімальним радіусом інерції $i_{\min} = 0,025 \text{ м}$.

$$\text{Гнучкість такого стержня } \lambda = \frac{L_{\text{приведене}}}{i_{\min}} = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 5}{0,025} = 100.$$

З таблиці для значень φ за лінійною інтерполяцією $\varphi_2' = 0,6$.

$$\text{III спроба. } \varphi_3 = \frac{0,572 + 0,6}{2} = 0,586.$$

Необхідна площа

$$A = \frac{F}{\varphi_3 \cdot [\sigma_{\text{стиск}}]} = \frac{300 \text{ кН}}{0,586 \cdot 160 \cdot 10^3 \text{ кН}} = 32 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

За сортаментом цій площі відповідає двотавр № 22а, у якого:

$$A = 32,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad i_{\min} = 0,025, \\ \lambda = 100, \quad \varphi = 0,6.$$

Визначимо напругу

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{300 \text{ кН}}{0,6 \cdot 32,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 152,4 \text{ МПа}.$$

Остаточно вибираємо двотавр I № 22а, оскільки $152,4 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$.

2.3 Стійкість прямого центрально стисненого стержня з пружно-піддатливою опорою

Піддатливістю називають переміщення опори від дії одиничного зусилля (в цьому випадку від дії згинального моменту $M=1$), рис. 2.9. Кут $\angle \alpha$ – піддатливість опори за $M=1$.

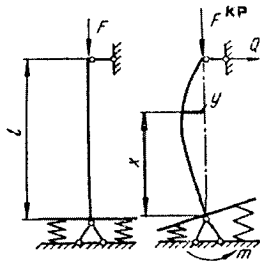


Рисунок 2.9 – Стержень з пружно-піддатливою опорою

Запишемо диференціальне рівняння (ДР) рівноваги стержня:

$$\frac{1}{\rho} \approx y'' = -\frac{M}{EI}.$$

$M_x = -F \cdot y - Q(L - x)$, тоді диференціальне рівняння матиме вигляд

$$EI \cdot y'' = M = -F \cdot y - Q(L - x).$$

Розв'язок ДР:

$$y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx - \frac{Q(L - x)}{F},$$

де $n = \sqrt{\frac{F^{kp}}{EI_{\min}}}$,

α – кут повороту опори від одиничного моменту M . $M = -Q \cdot L$.

Перша похідна від розв'язку диференціального рівняння:

$$y' = C_1 \cdot n \cdot \sin nx + C_2 \cdot n \cdot \cos nx + \frac{Q}{F},$$

де $F = n^2 \cdot EI_{\min}$.

Для визначення C_1, C_2 розглянемо 3 граничні умови:

I $x=0, y=0;$

II $x=L, y=0;$

III $\frac{dy}{dx} = -\alpha \cdot m$ за $x=0$.

Підстановка граничних умов у вихідне диференціальне рівняння дає СЛАР з $n=3$:

$$\begin{cases} C_1 - \frac{Q}{F} \cdot L = 0, \\ C_1 \cos nL + C_2 \sin nL = 0, \\ C_2 \cdot n + \frac{Q}{F} = -\alpha QL = -\alpha \cdot \frac{Q}{F} \cdot F \cdot L. \end{cases}$$

Для розв'язання СЛАР компонується визначник із коефіцієнтів $(C_1, C_2, \frac{Q}{F})$, що стоять перед невідомими.

$$C_1 \quad C_2 \quad \frac{Q}{F}$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -L \\ \cos nL & \sin nL & 0 \\ 0 & n & 1 + \lambda n^2 \cdot L \cdot EI \end{vmatrix} = 0.$$

Отримуємо нелінійне трансцендентне рівняння, яке обчислюється графічно:

$$\operatorname{tg}nL = nL \frac{1}{1 + (nL)^2 EI \cdot \alpha / L}.$$

Коли внизу стержня жорстке закріплення ($\alpha = 0$) $\operatorname{tg}n\alpha = n\alpha$,

$$F^{kp} = 20,14 \frac{EI}{L^2},$$

це відповідає $\mu = 0,7$.

2.4 Визначення стійкості статично невизначеної рами з залученням методу переміщень

Приклад розрахунку кінематично невизначеної рами

Для визначення величини критичної сили P^{kp} для рами, показаної на рис. 2.10, необхідно виконати такі етапи:

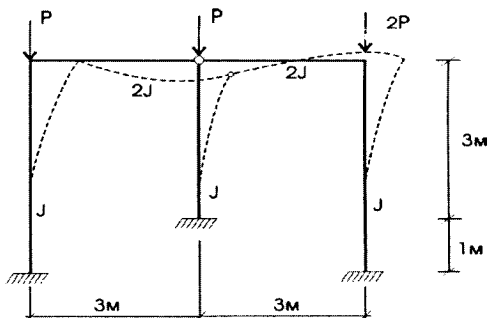


Рисунок 2.10 – Розрахункова схема рами

1. Встановити ступінь кінематичної невизначеності розрахункової схеми рами за методом переміщень.
2. Вибрати основну систему методу переміщень для розрахунку на стійкість.
3. В основній системі методу переміщень побудувати одиничні епюри від вимушених кутів повороту та лінійних зміщень, використавши таблицю методу переміщень для зігнуто-стиснених стержнів.

Вантажна еюра буде нульовою, оскільки зовнішнє навантаження в розрахунковій схемі прикладається лише в вузлах на кінцях стержнів.

4. Записати рівняння стійкості (вікове рівняння) і обчислити його коефіцієнти, розглянувши рівняння статички в вузлах одиничних еюр, побудованих в основній системі методу переміщень.
5. Розв'язати нелінійне трансцендентне рівняння стійкості і обчислити критичні сили P^{KP} , а також коефіцієнти вільних довжин стояків рами.

До втрати стійкості в стержнях рами не виникає згину. За умови досягнення стискальним навантаженням критичного значення вузли рами можуть отримати як кутові, так і лінійні зсуви (можливу форму втрати стійкості показано на рис. 2.10 пунктиром). В процесі розрахунку рами за методом переміщень матимемо три невідомі – два кути повороту і одне лінійне зміщення:

$$n_K = n_{жс} + n_i = 2 + 1 = 3.$$

Основну систему методу переміщень для розрахунку стійкості подано на рис. 2.11.

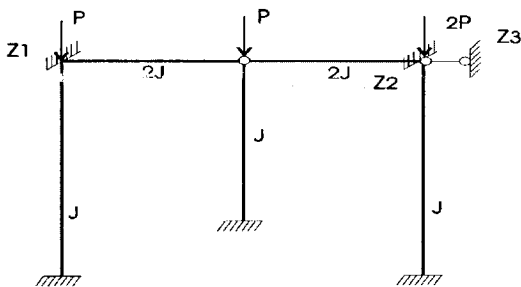


Рисунок 2.11 – Основна система методу переміщень

На рис. 2.12 показано еюри згинальних моментів від одиничних поворотів вузлів (рис. 2.12, а), б) і від одиничного горизонтального зсуву (рис. 2.12, в).

Для всіх трьох стояків рами значення параметра v матимуть різні величини, оскільки поздовжні сили і довжини стояків неоднакові:

для лівого стояка
$$v_1 = 4 \sqrt{\frac{P}{EI}} = v;$$

для правого стояка $v_3 = 4\sqrt{\frac{2P}{EI}} = 1,41v;$

для середнього стояка $v_2 = 3\sqrt{\frac{P}{EI}} = 0,75v.$

Для побудови одиничних епюр (рис. 2.13) використано таблицю методу переміщень реакцій стиснено зігнутих балок.

Оскільки до втрати стійкості вигину не було, то канонічні рівняння однорідні (тобто, вільні члени дорівнюють нулю) і система розрахункових рівнянь для заданої рами матиме вигляд:

$$r_{11}^* z_1 + r_{12}^* z_2 + r_{13}^* z_3 = 0;$$

$$r_{21}^* z_1 + r_{22}^* z_2 + r_{23}^* z_3 = 0;$$

$$r_{31}^* z_1 + r_{32}^* z_2 + r_{33}^* z_3 = 0.$$

Значення коефіцієнтів обчислюють за правилами методу переміщень:

$$r_{11}^* = \frac{4EI}{4} \varphi_2(v_1) + 2EI = EI[\varphi_2(v) + 2],$$

$$r_{22}^* = \frac{4EI}{4} \varphi_2(v_3) + 2EI = EI[\varphi_2(1,41v) + 2]$$

$$r_{33}^* = \frac{12EI}{4^3} [\eta_2(v_1) + \eta_2(v_3)] + \frac{3EI}{3^3} \eta_1(v_2) = EI \left\{ \frac{3}{16} [\eta_2(v) + \eta_2(1,41v) + \frac{1}{9} \eta_1(0,75v)] \right\};$$

$$r_{12}^* = r_{21}^* = 0$$

$$r_{13}^* = r_{31}^* = -\frac{6EI}{4^2} \varphi_4(v_1) = -\frac{3}{8} \varphi_4(v)$$

$$r_{23}^* = r_{32}^* = -\frac{6EI}{4^2} \varphi_4(v_3) = -\frac{3}{8} \varphi_4(1,41v)$$

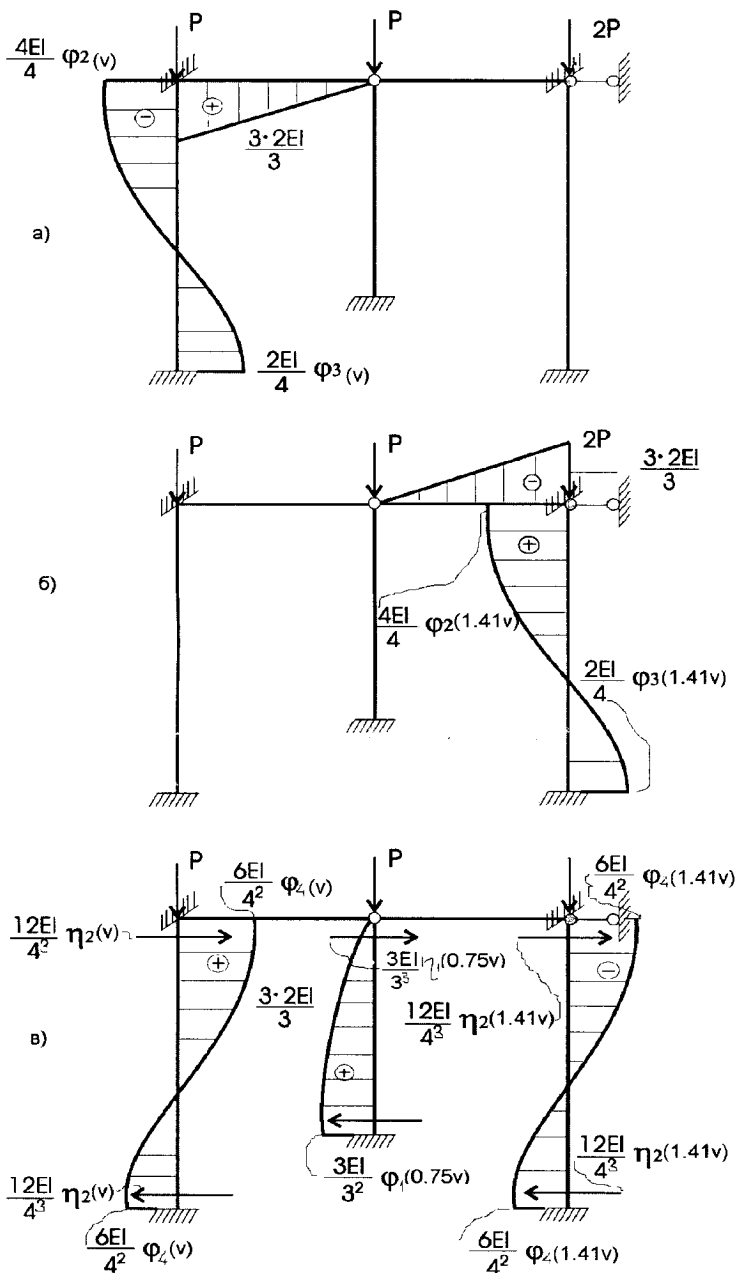


Рисунок 2.12 – Епюри моментів в основній системі методу переміщень

Рівняння стійкості:

$$D(v) = \begin{vmatrix} r_{11}^* & r_{12}^* & r_{13}^* \\ r_{21}^* & r_{22}^* & r_{23}^* \\ r_{31}^* & r_{32}^* & r_{33}^* \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкриття визначника з врахуванням того, що $r_{12}^* = r_{21}^* = 0$, одержимо

$$D(v) = r_{11}^* r_{22}^* r_{33}^* - r_{13}^{*2} r_{22}^* - r_{11}^* r_{23}^{*2} = 0,$$

або

$$D(v) = r_{33}^* - \frac{r_{13}^{*2}}{r_{11}^*} - \frac{r_{23}^{*2}}{r_{22}^*} = 0.$$

Після підстановки величин коефіцієнтів одержуємо трансцендентне рівняння стійкості, яке розв'язується за допомогою методу підбору:

$$D(v) = \frac{4}{3} [\eta_2(v) + \eta_2(1,41v)] + \frac{64}{81} \eta_1(0,75v) - \frac{[\varphi_4(v)]^2}{2 + \varphi_2(v)} - \frac{[\varphi_4(1,41v)]^2}{2 + \varphi_2(1,41v)} = 0$$

Перш ніж задатися якимись значеннями v , доцільно подивитися, в яких межах вони можуть змінюватися. Лівий стояк рами, до параметра функції v якого «прив'язані» параметри решти стояків, знаходиться в умовах, коли її верхній кінець може зміщуватися по горизонталі (під час зміщення чиниться опір жорсткості інших стояків) і пружно повертатися (повертання чинить опір жорсткості ригеля).

Отже, критична сила лівого стояка рами буде вищою, ніж для стержня, вигляд якого показано на рис. 2.13, а), і нижчою, ніж для стержня, зображеного на рис. 2.13, б).

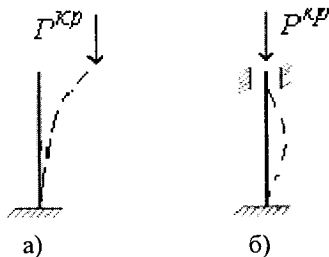


Рисунок 2.13 – Вигляд деформованого стержня за втрати стійкості

Для цих двох граничних випадків знаходимо значення v :

$$P^{KP} = \pi^2 EJ / 4h^2 = v^2 EJ / h^2, \quad v = \pi / 2 = 1,57;$$

$$P^{KP} = 4\pi^2 EJ / h^2 = v^2 EJ / h^2, \quad v = 2\pi = 6,28.$$

Отже,

$$1,57 < v < 6,28.$$

Зазначимо, що можливість горизонтальних зсувів значно зменшує жорсткість системи і тому доцільно задатись значенням v , більш близьким до нижньої межі, а не до верхньої.

$$1. \quad v = 2; \quad 1,41v = 2,82; \quad 0,75v = 1,5.$$

За таблицею 2.2 визначаємо:

$$\varphi_2(v) = 0,8590; \quad \varphi_2(1,41v) = 0,6996;$$

$$\varphi_4(v) = 0,9313; \quad \varphi_4(1,41v) = 0,8583;$$

$$\eta_2(v) = 0,5980; \quad \eta_2(1,41v) = 0,1919;$$

$$\eta_1(0,75v) = 0,0893.$$

$$D(v) = \frac{4}{3}[0,5980 + 0,1919] + \frac{64}{81}0,0893 - \frac{[0,9313]^2}{2 + 0,8590} - \frac{[0,8583]^2}{2 + 0,6996} = 0,5474 \neq 0.$$

$$1. \quad v = 2,3; \quad 1,41v = 3,24; \quad 0,75v = 1,72;$$

$$\varphi_2(v) = 0,8099; \quad \varphi_2(1,41v) = 0,5839;$$

$$\varphi_4(v) = 0,9083; \quad \varphi_4(1,41v) = 0,8086;$$

$$\eta_2(v) = 0,4675; \quad \eta_2(1,41v) = -0,0728;$$

$$\eta_1(0,75v) = -0,2097.$$

$$D(v) = \frac{4}{3}[0,4675 - 0,0728] - \frac{64}{81}0,2097 - \frac{[0,9083]^2}{2 + 0,8099} - \frac{[0,8086]^2}{2 + 0,5839} = -0,1861 \neq 0.$$

Вважаючи, що в діапазоні $2,0 < v < 2,3$ функція $D(v)$ є лінійною, уточнимо значення v , за якого $D(v) = 0$ (рис. 2.14).

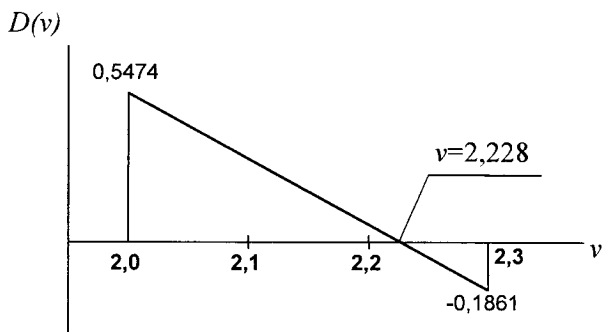


Рисунок 2.14 – Наближене знаходження кореня рівняння стійкості шляхом лінійної інтерполяції

За корінь рівняння беремо $v_0 = 2,228$.

Критичний параметр навантаження

$$P^{кр} = \frac{v_0^2 EI}{h^2} = \frac{2,228^2 EI}{4^2} = 0,310 EJ \text{ кН}.$$

Коефіцієнти вільних довжин стояків рами:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{v_1} = \frac{3,1416}{2,228} = 1,410;$$

$$\mu_2 = \frac{\pi}{v_2} = \frac{3,1416}{0,75 \cdot 2,228} = 1,880;$$

$$\mu_3 = \frac{\pi}{v_3} = \frac{3,1416}{1,41 \cdot 2,228} = 1,0.$$

Таблиця 2.2 – Значення нелінійних функцій методу переміщень для стиснуто-зігнутих стержнів

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
1	2	3	4	5	6	7
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,997	0,998	1,001	0,999	0,984	0,996
0,4	0,989	0,994	1,003	0,997	0,936	0,984
0,6	0,986	0,988	1,006	0,994	0,856	0,964
0,8	0,957	0,979	1,011	0,989	0,743	0,936
1,00	0,931	0,966	1,017	0,983	0,598	0,900
1,10	0,916	0,959	1,021	0,980	0,513	0,879
1,2	0,900	0,951	1,025	0,975	0,420	0,856
1,3	0,881	0,942	1,030	0,971	0,318	0,831
1,4	0,861	0,933	1,035	0,967	0,208	0,803
1,5	0,833	0,923	1,040	0,962	0,089	0,774
1,6	0,815	0,912	1,046	0,957	-0,038	0,743
1,7	0,789	0,900	1,053	0,951	-0,174	0,710
1,8	0,761	0,877	1,060	0,945	-0,319	0,675
1,9	0,730	0,873	1,068	0,938	-0,474	0,637
2,0	0,696	0,859	1,076	0,931	-0,637	0,598
2,10	0,660	0,844	1,085	0,924	-0,810	0,556
2,2	0,620	0,827	1,095	0,916	-0,993	0,513
2,3	0,577	0,810	1,105	0,908	-1,186	0,467
2,4	0,530	0,791	1,116	0,900	-1,389	0,420
2,5	0,479	0,772	1,129	0,891	-1,604	0,370
2,6	0,423	0,751	1,142	0,881	-1,830	0,318
2,7	0,362	0,729	1,156	0,872	-2,068	0,264
2,8	0,294	0,706	1,171	0,861	-2,319	0,208
2,9	0,219	0,682	1,188	0,851	-2,584	0,150
3,00	0,136	0,656	1,206	0,840	-2,864	0,089
3,10	0,042	0,629	1,225	0,827	-3,161	0,021
3,2	-0,063	0,600	1,246	0,815	-3,478	-0,038
3,3	-0,185	0,569	1,269	0,802	-3,815	-0,105

Продовження таблиці 2.2

1	2	3	4	5	6	7
3,4	-0,325	0,537	1,294	0,789	-4,178	-0,174
3,5	-0,489	0,502	1,321	0,775	-4,573	-0,246
3,6	-0,686	0,466	1,351	0,761	-5,006	-0,319
3,7	-0,9,27	0,426	1,383	0,746	-5,490	-0,395
3,8	-1,230	0,325	1,419	0,730	-6,044	-0,474
3,9	-1,627	0,341	1,458	0,713	-6,697	-0,554
4,00	-2,173	0,293	1,502	0,696	-7,506	-0,637
4,10	-2,981	0,242	1,550	0,678	-8,584	-0,722
4,2	-4,315	0,188	1,604	0,660	-10,20	-0,810
4,3	-6,995	0,129	1,664	0,640	-13,14	-0,900
4,4	-15,33	0,065	1,731	0,620	-27,78	-0,993
4,5	227,8	-0,005	1,807	0,599	221,05	-1,088
4,6	14,67	-0,081	1,893	0,577	7,616	-1,186
4,7	7,818	-0,165	1,992	0,554	0,455	-1,286
4,8	5,402	-0,257	2,106	0,530	-2,278	-1,389
4,9	4,146	-0,361	2,235	0,505	-3,8557	-1,495
5,00	3,361	-0,477	2,392	0,479	-4,972	-1,604
5,10	2,813	-0,610	2,576	0,452	-5,857	-1,715
5,2	2,399	-0,763	2,796	0,423	-6,655	-1,830
5,3	2,067	-0,942	3,065	0,393	-7,296	-1,947
5,4	1,788	-0,156	3,399	0,362	-7,932	-2,068
5,5	1,545	-1,418	3,823	0,329	-8,538	-2,192
5,6	1,326	-1,748	4,379	0,294	-9,127	-2,319
5,7	1,123	-2,180	5,135	0,258	-9,706	-2,449
5,8	0,930	-2,778	6,214	0,219	-10,28	-2,584
5,9	0,742	-3,668	7,873	0,179	-10,86	-2,723
6,00	0,555	-5,159	10,73	0,136	-10,44	-2,864
6,1	0,366	-8,2355	16,74	0,091	-12,04	-3,010
6,2	0,170	-18,59	37,31	0,042	-12,64	-3,161
6,28	0,000	-∞	+∞	0,000	-13,03	-3,290

РОЗДІЛ 3 МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

3.1 Постановка задач будівельної механіки. Локальний метод. Інтегральний метод

МСЕ – один із найбільш популярних числових методів розв'язання задач механіки суцільних середовищ. В будівельній механіці МСЕ мінімізацією потенціальної енергії дозволяє звести задачу до системи лінійних рівнянь рівноваги.

В математичній теорії пружності встановлено принципи, в яких використовується умова, що потенціальна енергія пружного тіла *в стані стійкої рівноваги мінімальна* порівняно з її значеннями в довільному близькому положенні. Принцип ввів Кірхгоф Т. (1850 р.).

Принцип можливих переміщень – варіація повної потенціальної енергії дорівнює нулю коли тіло знаходиться в стані стійкої рівноваги.

Проектування будівельних конструкцій являє собою комплекс розрахункових та графічних робіт із виготовлення, транспортування та експлуатації будівельних конструкцій.

Для проектування *необхідна математична модель* об'єкта. Математичним описом об'єктів проектування на мікрорівні слугують, як правило, *диференціальні рівняння (ДР) в частинних похідних*, точне рішення яких вдається отримати лише в небагатьох часткових випадках. З огляду на це, для аналізу об'єктів *розробляються наближені моделі*, в основі яких лежить *варіаційне числення (МСЕ) чи інтегральні рівняння (метод граничних елементів МГЕ)*.

В теорії пружності НДС довільної системи можна отримати за допомогою **2-х еквівалентних підходів: локального та інтегрального**.

Локальний метод базується на розгляді повної системи рівнянь будівельної механіки (рівнянь статички, геометричних, фізичних), що приводить до необхідності розв'язання *крайової задачі* (ДР з заданими граничними умовами) 15 порядку (невідомими є: тензор напружень T_σ , тензор деформацій T_ε , вектор переміщень \bar{u}).

Матричний запис:

- статичні рівняння $|A| \cdot \{S\} = \{F\}$, (3.1)

- геометричні рівняння $\{\varepsilon\} = |B| \cdot \{\Delta\}$,

- фізичні рівняння $\{\varepsilon\} = |D| \cdot \{S\}$.

$\Sigma = 15$ ДР в частинних похідних,

де $|A|$ – матриця умов рівноваги;

$\{S\}$ – вектор шуканих зусиль (σ, τ);

$\{F\}$ – вектор зовнішнього навантаження;

$|D|$ – матриця піддатливості;

$|D|^{-1}$ – матриця жорсткості $|K|$;

$|B|$ – матриця градієнтів, похідних від матриці форми $|N|$, яка пов'язує переміщення по довжині СЕ з переміщеннями в його вузлах, її ще називають інтерполяційною функцією.

$\{\varepsilon\} \rightarrow$ вектор деформацій стержня, $\{\varepsilon\} = \{\varphi_i, \varphi_j, \Delta l\}$.

$\{\Delta_i\} = \{\Delta_i, \Delta_j\} \rightarrow$ вектор переміщень вузлів стержня,

$$\Delta_i \Rightarrow \{\Delta_{xi}, \Delta_{yi}, \varphi_i\}^T, \quad \Delta_j \Rightarrow \{\Delta_{xj}, \Delta_{yj}, \varphi_j\}^T.$$

Запис розрахункової крайової задачі в позначеннях Ейнштейна:

- $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$, рівняння статки, (3.2)
- $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$, геометричні,
- $\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}) \cdot \delta_{ij}$, фізичні.

В багатьох випадках простіше розглядати *не силову взаємодію* між тілами, а *енергію цієї взаємодії*, оскільки тоді можливо для виконання розрахунків використовувати закон збереження енергії (I закон термодинаміки).

Енергетичний (термодинамічний) метод вивчення явищ природи зміни в системі розглядає як виділення чи поглинання енергії, *перетворення одних видів енергії на інші*. Енергія – найбільш загальна кількісна характеристика руху. *Внутрішня енергія системи* – міра всіх форм руху, що проявляються за взаємодії внутрішніх елементів системи, утворюючи структуру цього рівня.

Інтегральний метод полягає в мінімізації інтегральної величини, пов'язаної з роботою напружень і зовнішнього прикладеного навантаження (тобто на дослідженні та мінімізації енергії системи).

Базується *інтегральний метод на варіаційному численні*. Лежить в основі МСЕ. МСЕ сьогодні найпопулярніший числовий метод. Він значно розширив можливості розв'язання крайових задач будівельної механіки, добре реалізується на ЕОМ, тому ліг в основу великої кількості програмних комплексів і перетворився на робочий інструмент досліджень та розв'язання задач техніки та будівництва.

В процесі його використання дослідна область ділиться на групу з'єднаних між собою підобластей – скінчених елементів СЕ.

Реалізується ідея Пуассона подання складного об'єкта його простими складовими.

Таке подання розрахунку дозволяє об'єднати підхід як до об'єктів будівельної механіки стержневих систем, так і до об'єктів теорії пружності, тобто до розрахунку реальних конструкцій, в яких тісно переплетені стержні, плити, пластини, оболонки, масиви.

Після дискретизації об'єкта підбираються пробні (*координатні чи інтерполяційні*) функції (зазвичай поліноми), щоб локально апроксимувати дійсну поведінку розв'язку.

Ці функції однозначно визначають наближене рішення в призначених вузлових точках. Їх характер має забезпечити нерозривність переміщень під час переходу від одного СЕ до іншого. Результат такого рішення отримують на основі варіаційних принципів (мінімізації енергії), що приводить до отримання розрахункової СЛАР.

Задача розв'язання рівнянь рівноваги (3.1) і варіаційна задача мінімізації функціонала виразу енергії є еквівалентними та мають одне і те саме рішення.

Яка величина в механіці набуває *екстремального* значення? На це запитання дали відповідь:

- задача Бернуллі про криву найшвидкішого спуску (1696 р.),
- висновки Ейлера: істинна траєкторія руху буде та, на якій *повна потенціальна енергія* системи матиме *мінімальне* значення.

Принцип найменшої дії продовжили Лагранж, Остроградський, Гамільтон, Якобі, Д'Аламбер та інші.

Принцип можливих переміщень Лагранжа: задана механічна система буде в рівновазі, коли повна віртуальна робота всіх прикладених до неї сил дорівнює нулю;

$$\delta\Pi = \delta(U - A). \quad (3.3)$$

3.2 Основи МСЕ. Приклад розрахунку

Основний принцип МСЕ – поведінка складного суцільного середовища подається сумарною поведінкою його складових.

Інформацію щодо об'єкта, який розглядається, можна розділити на 3 типи (що *дано*):

- 1) – *геометрична інформація*, топологічна інформація (координати вузлів системи і зв'язок між вузлами);
- 2) – *фізична інформація* – жорсткості поперечних перерізів;
- 3) – *завантаження системи* – вектор зовнішнього навантаження F .

Потрібно визначити:

- 1) – зусилля у всіх стержнях (вектор $\{S\}$),
- 2) – переміщення всіх вузлів системи $\{\Delta\}$.
- 3)

Для розв'язання задачі потрібно побудувати:

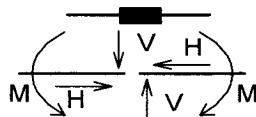
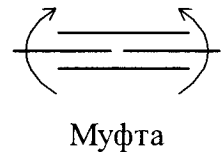
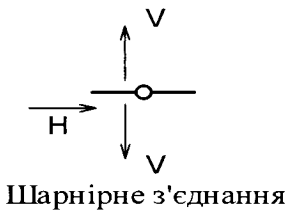
- матрицю умов рівноваги $|A|$,
- матрицю градієнтів (матрицю Якобі) $|B|$,
- матрицю піддатливості $|D|$.

Проста двовимірна задача є зручною відправною точкою для подальших викладок, оскільки вона дозволяє проілюструвати всю послідовність дій для конкретного числового прикладу. В тривимірному випадку обсяг обчислень значно зростає.

I Статичні рівняння

Матриця умов рівноваги $|A|$. У стержневій системі 2 типи СЕ: стержні і вузли. Сукупність рівнянь, складених для кожного стержня і вузла може розглядатись як система умов рівноваги для всієї стержневої системи.

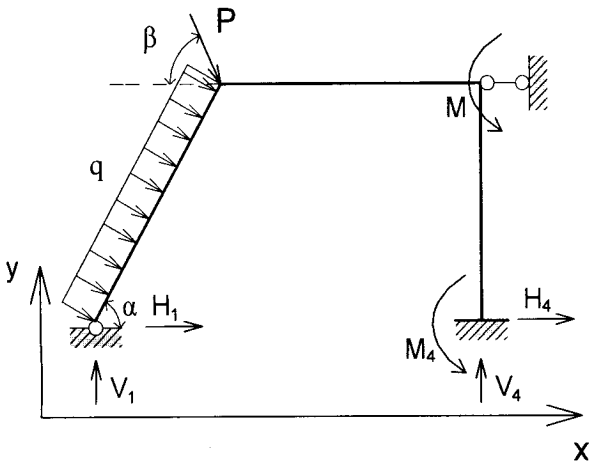
Рівняння умов рівноваги для вузлів доцільно записувати в загальній системі координат усієї системи. Під час складання умов рівноваги для стержнів зручно обирати для кожного стержня свою власну систему координат (місцеву або локальну x', y'). Початок її у вузлі з меншим номером.



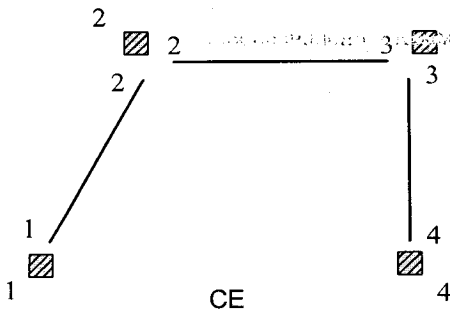
Проста припайка

Рисунок 3.1 – Види з'єднань

Як приклад розглянемо плоску раму, рис. 3.2



а)



Скінченні елементи

б)

Рисунок 3.2 – Розрахункова схема рами (а) та розбиття на СЕ плоскої рами (б)

Для кожного СЕ та вузла записуються рівняння рівноваги:

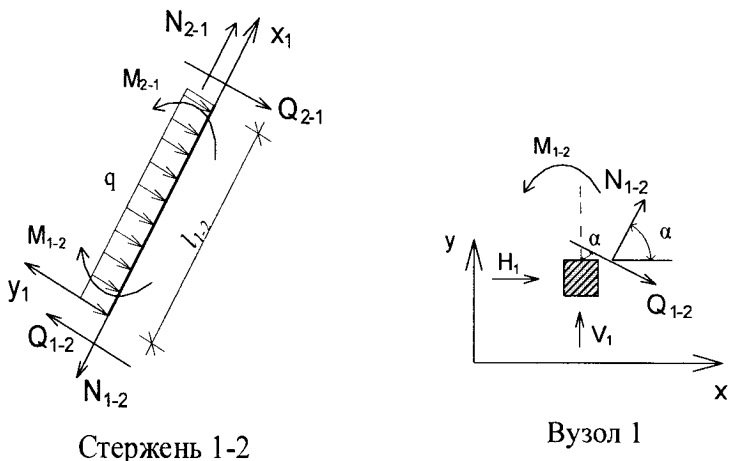


Рисунок 3.3

– 3 умов рівноваги стержня 1-2 (рис. 3.3):

$$\sum F_{x1} = 0. \quad -N_{1-2} + N_{2-1}.$$

$$\sum Y_1 = 0. \quad Q_{1-2} - Q_{2-1} - q \cdot l_{1-2} = 0.$$

$$\sum M_1 = 0. \quad Q_{2-1} \cdot l_{1-2} + M_{1-2} - M_{2-1} + ql^2_{1-2}/2 = 0$$

– 3 умов рівноваги сил в вузлі 1 (рис. 3.3):

$$\sum F_x = 0. \quad H_1 + N_{1-2} \cdot \cos \lambda + Q_{1-2} \cdot \sin \lambda = 0$$

$$\sum F_y = 0. \quad V_1 + N_{1-2} \cdot \sin \lambda - Q_{1-2} \cdot \cos \lambda = 0.$$

$$\sum M_1 = 0. \quad -M_{1-2} = 0$$

.....

Записані для кожного окремого СЕ рівняння рівноваги «збираються» в одну систему $|A| \cdot \{S\} = \{F\}$, а потім для всієї конструкції формуються матриці $|A|$ та $\{F\}$.

$\{S\} = \{N_{1-2}, Q_{1-2}, M_{1-2}, N_{2-1}, Q_{2-1}, M_{2-1}, V_1, H_1 \dots\}^T \Rightarrow$ вектор невідомих зусиль.

Стержень 1-2				Вузол 1				Стержень 2-3				Вільні члени	
--------------	--	--	--	---------	--	--	--	--------------	--	--	--	--------------	--

N_{1-2}	Q_{1-2}	M_{1-2}	N_{2-1}	Q_{2-1}	M_{2-1}	V_1	H_1	N_{2-3}	Q_{2-3}	M_{2-3}	\bullet	F	
-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	\bullet	0	$\sum F_{x1} = 0$
0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	\bullet	$q \cdot l_{1-2}$	$\sum F_{y1} = 0$
0	0	1	0	l_{1-2}	-1	0	0	0	0	0	\bullet	$-\frac{q}{2} \cdot l_{1-2}^2$	$\sum M_1 = 0$
$\cos \lambda$	$\sin \lambda$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	\bullet	0	$\sum F_x = 0$
$\sin \lambda$	$-\cos \lambda$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	\bullet	0	$\sum F_y = 0$
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	\bullet	0	$\sum M_1 = 0$

Матриця умов рівноваги

$$A =$$

$(m \times k)$

-1	0	0	1	0	0	0	0	...
0	1	0	0	-1	0	0	0	...
0	0	1	0		-1	0	0	...
$\cos \lambda$	$\sin \lambda$	0	0	0	0	0	1	...
$\sin \lambda$	$-\cos \lambda$	0	0	0	0	1	0	...
0	0	-1	0	0	0	0	0	...
...

m – кількість рівнянь рівноваги,

k – кількість невідомих внутрішніх зусиль.

$$\{F\} = \left\{ 0, q \cdot l_{1-2}, -q \cdot \frac{l_{1-2}^2}{2}, \dots \right\}^T \Rightarrow \text{вектор зовнішнього навантаження.}$$

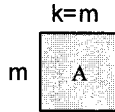
$$|A| \cdot \{S\} = \{F\}, \text{ коли } m=k - \text{це статично визначена задача.}$$



Статично невизначена задача



Геометрично змінна задача



Статично визначена задача

II Геометричні рівняння нерозривності Сен-Венана, Коші

Внаслідок виникнення внутрішніх зусиль стержні деформуються, вузли переміщуються. Проте стержні не відокремлюються один від одного.

Тобто, стержні деформуються *сумісно* і узгоджено, залежно від переміщення їх кінців, які являють собою вузли стержневої системи. *Аналітичні залежності між деформаціями стержнів і переміщеннями їх вузлів – геометричні рівняння:*

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\Delta\},$$

де $\{\Delta\}$ – вектор переміщень вузлів $\Rightarrow \{\{\Delta_1\}, \{\Delta_2\}, \dots, \{\Delta_n\}\}^T$,

$[B]$ – матричний лінійний диференціальний оператор, за допомогою якого вектор деформацій $\{\varepsilon\}$ виражається через вектор переміщень. В МСЕ цю матрицю називають *матрицею градієнтів* (це матриця похідних від матриці форми N).

Матриця Якобі $[B]$.

$$\text{Співвідношення Коші: } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \Rightarrow \{\varepsilon\} = [B] \cdot \{A\}.$$

$\{\Delta_i\} = \{\Delta_{xi}, \Delta_{yi}, \varphi_i\}^T$. Кожен вузол i має три компоненти переміщень:

$\{\Delta_{xi}, \Delta_{yi}\}$ – поступальні переміщення в напрямку X, Y та кут повороту φ_i .

Вектор $\{\varepsilon\}$ характеризує деформації стержнів. В кожному стержні $\{\varepsilon\}_e = \{\varphi_i, \varphi_j, \Delta l\}$ три компоненти – кут повороту на початку та кінці стержня і лінійне подовження, рис. 3.4.

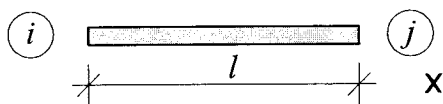


Рисунок 3.4 – Початок, кінець стержня

$$\{\varepsilon\}_e = [B] \cdot \{\Delta_e\},$$

де переміщення кожного стержня «e» складається із двох складових $\{\Delta_e\} = \{\Delta_i, \Delta_j\}$, кожна складова має 3 компоненти:

$$\{\Delta_i\} = \{\Delta_{xi}, \Delta_{yi}, \varphi_i\},$$

$$\{\Delta_j\} = \{\Delta_{xj}, \Delta_{yj}, \varphi_j\}.$$

Для визначення матриці градієнтів $[B]$ (похідної від матриці форми $[N]$) можна скористатись принципом можливих переміщень Лагранжа.

Якщо система в рівновазі, то сума робіт зовнішніх та внутрішніх сил на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю.

$$A + U = 0.$$

Матриця $[N]$ – це функція, що пов'язує переміщення в СЕ з переміщеннями у вузлах, її ще називають *інтерполяційною функцією*.

Модуль пружності стержня визначається за формулою:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \lambda = \frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E} = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{(3(1 - 2\nu))}.$$

Між статичними та геометричними рівняннями існує певний зв'язок.

Передусім, використовуючи матрицю рівноваги $[A]$ однієї категорії, можна записати рівняння іншої категорії. Це набагато полегшує складання геометричних рівнянь, оскільки геометричні дослідження споруд становлять чималі труднощі, а складання рівнянь рівноваги здійснюється порівняно просто.

Вектори $\{F\}$ і $\{\Delta\}$, $\{S\}$ і $\{\varepsilon\}$ теж пов'язані ($\{\varepsilon\} = [D] \cdot \{\sigma\}$).

Існує *правило подвійності* – умовам однієї системи відповідають змінні іншої системи і навпаки.

III Фізичні рівняння

Розглянемо стержень i - j під навантаженням. Деформацію стержня $\{\varepsilon\}_e$ характеризує три компоненти $\{\varepsilon\}_e = \{\varphi_i, \varphi_j, \Delta l\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i = \delta_{ii} \cdot M_i + \delta_{ij} \cdot M_j \\ \varphi_j = \delta_{ji} \cdot M_i + \delta_{jj} \cdot M_j \\ \Delta l = N \cdot l / EA \end{array} \right\}$$

Запис в матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & l/EA \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} M_i \\ M_j \\ N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \Delta l \end{vmatrix}$$

Переміщення δ_{ij} можна знайти за формулами Максвелла–Мора. Необхідні для визначення переміщень епюри подано на рис. 3.5.

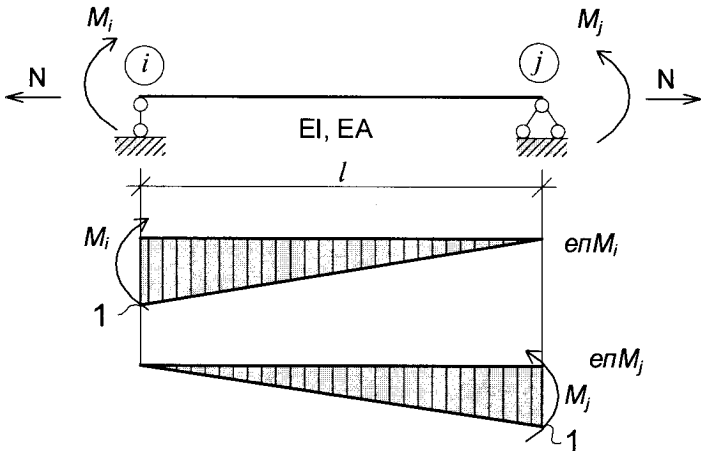


Рисунок 3.5 – Епюри одиничних згинальних моментів в стержні

$$\delta_{ii} = \int_0^l \frac{M_i^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i \cdot M_j}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l}{6EI}$$

$$\delta_{jj} = \int_0^l \frac{M_j^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l}{3EI}$$

Запис в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} & 0 \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EA} \end{pmatrix} * \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \Delta l \end{Bmatrix}$$

$$[d]_e \times \{S\}_e = \{\varepsilon\}_e,$$

де $\{\varepsilon\}_e = \{\varphi_i, \varphi_j, \Delta l\}^T$ – вектор деформацій стержня;

$\{S\}_e = \{M_i, M_j, N\}^T$ – вектор кінцевих зусиль;

$[d]_e$ – матриця піддатливості – співвідношення закону Гука для стержня «e».

Коли стержнів в системі «n»

$$\{\varepsilon\} = [D] \cdot \{S\},$$

де вектор деформацій системи $\{\varepsilon\} = \{\{\varepsilon\}_1, \{\varepsilon\}_2, \dots, \{\varepsilon\}_n\}^T$,

вектор зусиль системи $\{S\} = \{\{S\}_1, \{S\}_2, \dots, \{S\}_n\}^T$.

Матрицю $[D]$ можна отримати із виразів потенціальної енергії системи:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (M(x) \cdot \rho(x) + N(x) \cdot \varepsilon(x)) dx,$$

де $\rho(x) = \frac{M(x)}{EI}$, $\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA}$

Проінтегрувавши вираз потенціальної енергії системи можна отримати матрицю піддатливості $|D|$.

Для одного стержня, коли знехтувати поздовжніми деформаціями,

$$D_e = \begin{vmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} & 0 \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EA} \end{vmatrix} = \frac{l}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$|K| = |D|^{-1}$ – *матриця жорсткості* (матриця механічних характеристик матеріалу) отримується шляхом мінімізації функціонала енергії деформацій за узагальненими координатами.

Тобто, $|K|$ отримується із варіаційного принципу Лагранжа, тому МСЕ в такій формі є варіативним.

У лінійно деформованих об'єктах між вузловими реакціями і вузловими переміщеннями, що їх зумовлюють, існує лінійна залежність:

$$R = K \cdot \Delta,$$

де K – *матриця жорсткості*, – *це вузлова реакція, що зумовлюється вузловим переміщенням $\Delta = 1$ за умови, що всі інші переміщення дорівнюють нулю.*

Рівняння рівноваги вузлів дискретної моделі

$$\left(\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M = 0 \right), \quad R = F, \quad K\Delta - F = 0.$$

Для знаходження K_{ij} *потрібно почергово надавати одиничні переміщення вузлам дискретної моделі і знаходити сили, які передаватимуться на вузли.*

Взаємодію системи з довкіллям подають зазвичай у вигляді навантажень або впливів, прикладених до вузлів системи (*вузлові навантаження*) чи до внутрішніх точок її СЕ (*місцеві навантаження*).

Місцеві навантаження можуть бути силами чи моментами зосередженими або розподіленими по лініях, площах чи об'ємах.

Іноколи завантаження системи подають у вигляді температурних впливів на СЕ або заданими зміщеннями у вузлах. Тобто ці впливи подаються не як силові, а як *кінематичні фактори*.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Баженов В. А., Іванченко Г. М., Шишов О. В. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. – К. : Каравелла, 2006. – 344 с.
2. Баженов В. А., Гранат С. Я., Шишов О. В. Будівельна механіка. Комп'ютерний курс. – К. : Вища школа, 1999. – 540 с.
3. Баженов В. А. Будівельна механіка. – К. : Вища школа, 2000. – 670 с.
4. Баженов В. А., Дашенко А. Ф., Коломиєць Л. В., Оробей В. Ф. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. – Одесса : Астропринт, 2001. – 580 с.
5. Безухов Н. И., Лужин О. В., Колкунов Н. В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах : учебное пособие для строительных специальностей вузов. – М. : Высшая школа, 1987. – 264 с.
6. Бутенко Ю. Н. Строительная механика. – К. : Вища школа, 1989. – 480 с.
7. Бутенко Ю. И. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. – К. : Вища школа, 1984. – 327 с.
8. Дарков А. В. Шапошников Н. Н. Строительная механика. – М. : Высшая школа, 1986. – 607 с.
9. Ржаницын А. Р. Строительная механика. – М. : Высшая школа, 1982. – 400 с.
10. Клейн Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем). – М. : Высшая школа, 1980. – 384 с.
11. Клейн Г. К., Рекач В. Г., Розенблат Г. И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (Основы теории устойчивости, динамики сооружений и расчета пространственных систем). – М. : Высшая школа, 1972. – 318 с.
12. Дарков А. В., Клейн Г. К., Кузнецов В. И., Лужин О. В., Рекач В. Г. и др. Строительная механика. – М. : Высшая школа, 1976. – 600 с.
13. Моргун А. С. Теорія споруд. Ч. III. Будівельна механіка. – Вінниця : ВДТУ, 1997. – 90 с.
14. Моргун А. С. Практикум з будівельної механіки. – Вінниця : ВДТУ, 1997. – 90 с.
15. Моргун А. С., Сорока М. М. Механіка тонких оболонки подвійної кривизни. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 120 с.

16. Орлов А. М., Сорока М. М., Калініна Т. О. Методичні вказівки та вихідні дані до розрахунково-проектувальних робіт по IV частині курсу «Будівельна механіка». – Одеса, 2001. – 76 с.
17. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М. : АМК, 2007. – 596 с.
18. Піскунов В. Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності і пластичності. Ч. I. Книга 3. Опір дво- і тривимірних тіл. – К. : Вища школа, 1995. – 272 с.
19. Піскунов В. Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. Ч. II. Книга 5. – К. : Вища школа, 1995. – 207 с.
20. Піскунов В. Г., Шевченко В. Д., Рубан М. М. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. Книга III. – К. : Вища школа, 1995. – 320 с.
21. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лашеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.
22. Сорока М. М. Методичні вказівки та вихідні дані до розрахунково-проектувальної роботи із спецкурсу «Будівельна механіка» – Визначення сейсмічних сил для плоскої залізобетонної рами спектральним методом. – Одеса : ОДАБА, 2007. – 26 с.
23. СНиП 2.01.07 – 85. «Нагрузки и воздействия».
24. СНиП 2.03.01 – 84* «Бетонные и железобетонные конструкции».
25. Чирас А. А. и др. Строительная механика. Программы и решения задач на ЭВМ. – М. : Стройиздат, 1990. – 360 с.
26. Шкодін М. М., Моргун А. І., Моргун А. С. Програмування та чисельні методи в розрахунках інженерних споруд. – К. : НМК ВО, 1992. – 207 с.
27. Исаханов Г. В., Гранат С. Я., Мельниченко Г. И., Шышов О. В. Строительная механика. Расчет стержневых систем на ЭВМ. – Киев : Вища школа, 1990. – 227 с.

Навчальне видання

**Алла Серафимівна Моргун
Іван Миколайович Меть**

Динаміка та стійкість споруд

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *А. Моргун*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовив *Г. Багдасар'ян*

Підписано до друку 13.07.2021 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 4,39.
Наклад 50 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2021-074.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

Тел. (0432) 65-18-06.

press.vntu.edu.ua;

Email: irvc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.