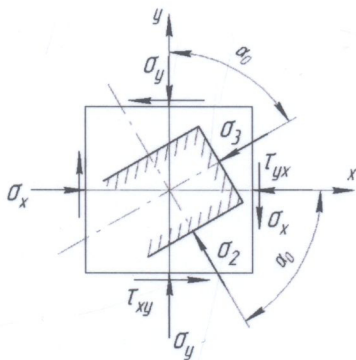


# МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ ТА КОНСТРУКЦІЙ

ЗБІРНИК РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ  
ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

# **МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ ТА КОНСТРУКЦІЙ**

**ЗБІРНИК РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ  
ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

*Навчальний посібник*

Вінниця  
ВНТУ  
2021

УДК 620(075):531  
М55

Автори:

**В. А. Огородніков**, **О. В. Грушко**, **Т. Ф. Архіпова**, **С. І. Сухоруков**,  
**Т. І. Молодецька**

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №13 від 29.04.2021 р.)

Рецензенти:

**В. А. Матвійчук**, доктор технічних наук, професор  
**В. М. Михалевич**, доктор технічних наук, професор  
**Р. Р. Обертюх**, кандидат технічних наук, професор

**Механіка** матеріалів та конструкцій. Збірник розрахунково-графічних завдань з прикладами розрахунків для самостійної роботи : навчальний посібник / [В. А. Огородніков, О. В. Грушко, Т. Ф. Архіпова та ін.]. – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 190 с.

ISBN 978-966-641-877-0

Посібник призначений для студентів напрямів підготовки 131 – Прикладна механіка, 132 – Матеріалознавство, 133 – Галузеве машинобудування та 274 – Автомобільний транспорт закладів вищої освіти денної та заочної форм навчання, що вивчають механіку матеріалів та конструкцій.

УДК 620(075): 531

ISBN 978-966-641-877-0

© ВНТУ, 2021

## ЗМІСТ

Вступ.....	5
Основні вимоги та порядок виконання розрахункової роботи .....	5
1 СКЛАДНИЙ ОПІР .....	7
1.1 Згинання з крученням. Короткі теоретичні відомості.....	8
1.1.1 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	13
Задача 1. Розрахунок вала редуктора на міцність.....	13
1.1.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	25
Задача 2. Розрахунок плоскої рами з просторовим навантаженням.....	25
2 ЕНЕРГЕТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ .....	34
2.1 Короткі теоретичні відомості.....	34
2.1.1 Узагальнена сила, узагальнене переміщення та їх відповідність .....	34
2.1.2 Визначення переміщень. Інтеграл Мора.....	38
2.1.3 Послідовність визначення переміщень за методом Мора. ....	39
2.1.4 Обчислення інтеграла Мора за способом Верещагіна.....	43
2.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	47
Задача 3. Розрахунок на міцність та жорсткість у разі згину бруса малої кривини.....	47
3 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ .....	57
3.1 Короткі теоретичні відомості. Основні поняття та означення .....	57
3.1.1 Канонічні рівняння методу сил.....	60
3.1.2 Розрахунок переміщень у статично невизначуваних системах .....	63
3.1.3 Контроль правильності розв'язання статично невизначуваної системи.....	65
3.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	66
Задача 4. Розкриття статичної невизначуваності рами .....	66
4 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТРИЖНІВ .....	76
4.1 Короткі теоретичні відомості .....	76.
4.1.1 Стьїка та нестьїка форма пружної рівноваги.....	76
4.1.2 Формула Ейлера для визначення критичної сили стиснутого стрижня .....	77
4.1.3 Вплив умов закріплення кінців стрижня на значення критичної сили.....	78
4.1.4 Поняття про втрату стійкості за напружень, що перевищують границю пропорційності .....	78
4.1.5 Розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження .....	81
4.1.6 Перевірочний розрахунок стиснутих стрижнів .....	83
4.1.7 Проектувальний розрахунок .....	84
4.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	87
Задача 5. Проектувальний розрахунок на стійкість .....	87
5 РОЗРАХУНКИ ЗА УДАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ .....	95
5.1 Розрахунок за осьової дії ударного навантаження .....	95

5.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	98
Задача 6. Розрахунок балки за ударного навантаження .....	98
<b>6 РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ НА ВИТРИВАЛІСТЬ</b> .....	<b>105</b>
6.1 Короткі теоретичні відомості .....	105
6.1.1 Явище втоми матеріалів. Характеристики циклів .....	105
6.1.2 Визначення границі витривалості. Діаграма втоми .....	108
6.1.3 Вплив конструктивно-технологічних факторів на границю витривалості .....	109
6.1.4 Розрахунок на міцність у разі повторно-змінних навантажень .....	113
6.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	114
Задача 7. Розрахунок вала на витривалість за згинання та кручення .....	114
<b>7 КАРТА МАТЕРІАЛУ</b> .....	<b>123</b>
7.1 Діаграма зміцнення матеріалу (крива течії) .....	123
7.2 Діаграма пластичності матеріалу .....	126
7.3 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	128
Задача 8. Побудова кривої течії та діаграми пластичності .....	128
<b>8 ФРАКТОГРАФІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН</b> .....	<b>130</b>
8.1 Макроскопічне дослідження поверхні зломів деталей машин .....	130
8.1.1 Поняття та завдання фрактографії .....	130
8.1.2 Задачі фрактографії .....	130
8.2 Особливості будови зломів .....	138
8.3 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	149
Задача 9. Дослідження причин втрати роботоздатності деталей машин та конструкцій .....	149
<b>ТЕРМІНИ ТА ПОНЯТТЯ</b> .....	<b>151</b>
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	<b>154</b>
<b>ДОДАТКИ</b> .....	<b>156</b>
Додаток А. Оформлення розрахунково-графічної роботи .....	157
Додаток Б. Механічні характеристики матеріалів .....	159
Додаток В. Сортамент прокатної сталі .....	162
Додаток Г. Геометричні характеристики деяких перерізів .....	170
Додаток Д. Значення інтегралів для визначення переміщень в кривих стрижнях .....	172
Додаток Е. Дані до розрахунку стиснутих стрижнів .....	173
Додаток Ж. Дані до визначення переміщень графічними методами .....	176
Додаток И. Дані до розрахунку валів .....	178
Додаток К. Співвідношення між деякими фізичними величинами в різних системах вимірювання .....	179
Додаток Л. Експериментальні дані для побудови кривої течії .....	180
Додаток М. Експериментальні дані для побудови діаграми пластичності .....	188

## ВСТУП

Навчальний посібник написано із врахуванням багаторічного досвіду викладання курсу механіки матеріалів та конструкцій у Вінницькому національному технічному університеті. Посібник відрізняється від більшості подібних видань конспективним викладенням матеріалу, його структурованістю за змістовними модулями та наявністю достатньої кількості варіантів завдань для самостійної роботи студентів із типовими розрахунками і рекомендаціями до застосування сучасних пакетів прикладних програм та комп'ютерної математики, зокрема Maple, MathCad, MathLab, Abaqus, AutoCad, Mathematical, SolidWorks тощо.

В посібнику розкрито такі важливі розділи, як складний опір (згин з крученням валів редукторів), енергетичні методи визначення переміщень, методи розкриття статичної невизначуваності систем, стійкість у разі поздовжнього згину, міцність за ударних та витривалість конструкцій за повторно-змінних навантажень, карта матеріалу та макроскопічні дослідження зломів.

Посібник призначено для студентів закладів вищої освіти напрямів підготовки 131 – Прикладна механіка, 132 – Матеріалознавство, 133 – Галузеве машинобудування та 274 – Автомобільний транспорт.

Автори прагнули створити посібник, максимально корисний студентам не лише під час вивчення дисципліни «Механіка матеріалів та конструкцій», але й в процесі курсового та дипломного проектування. Кожне із завдань ілюстроване детальним прикладом розрахунку задачі із поясненнями та посиланнями на довідкові дані.

## ПОРЯДОК ТА ОСНОВНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ

З метою опанування дисципліни «Механіка матеріалів та конструкцій» студенти мають виконати комплекс розрахунково-графічних робіт (РГР). Цей посібник має забезпечити організацію самостійної роботи студентів (СРС).

РГР мають бути оформлені згідно з чинними стандартами Єдиної системи конструкторської документації (ЄСКД 2.105 і ЄСКД 2.106 для текстових конструкторських документів та ЄСКД 2.104 – для основних надписів). РГР виконуються на аркушах формату А4 (210×297 мм) основним креслярським шрифтом (стандарт 2.304-68) з висотою літер не менше 2,5 мм, машинописним або на принтері ПЕОМ (Times New Roman 14 пт., одинарний інтервал) на одній стороні аркуша. Перша сторінка протоколу оформляється за стандартом ДСТУ 2.105-95; на наступних сторінках має бути штамп згідно зі стандартом 2.104-68 (додаток А). На

титульній сторінці вказують номер РГР, назву дисципліни, прізвище та ініціали студента, варіант завдання, факультет і групу.

Допускається писати текст роботи креслярським розбірливим почерком пастою або чорнилом синього чи чорного кольору. За необхідності дозволяється виправити помилку, неправильний символ, закреслюючи його, а над ним написати виправлення. Допускається також застосування канцелярського коректора. На одній сторінці допускається не більше трьох виправлень.

Розв'язання кожної задачі бажано починати на новому аркуші у такий спосіб, щоб розрахункова схема, епюри внутрішніх силових факторів, аналітичні вирази та формули знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант. Далі навести повну та скорочену умови задачі з вказанням невідомих параметрів та величин, які потрібно знайти. Розрахункові схеми (рисунок) виконують за допомогою креслярських приладів або відповідних пакетів прикладних графічних програм (Paint MS, Compass, AutoCAD). Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями.

Студент має до іспиту захистити всі задачі відповідних розрахунково-графічних робіт.

Вибір варіанта завдання здійснюється за шифром, який надається викладачем. Наприклад: шифр варіанта – 310.

Варіант чисельних даних в таблиці – рядок 3.

Номер схеми рисунка – 10.

Приклад шифру в основному написі:

*ОМ.ІГМ-19.37.310*

Студенти, що не виконали або не захистили хоча б одну розрахунково-графічну роботу, не допускаються до іспиту з дисципліни «Механіка матеріалів та конструкцій».

## 1 СКЛАДНИЙ ОПІР

У загальному випадку навантаження елемента конструкції у поперечних перерізах можуть діяти шість компонент внутрішніх силових факторів –  $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_x = M_{KP}$ , пов'язаних з простими деформаціями стрижня – розтягом (стиском), зсувом, крученням та згинанням (рис. 1.1).

Під складним опором (*combined stress*) розуміють різні комбінації простих навантажень елемента конструкції (розтяг/стиск (*tension/compression*), зсув (*shear*), кручення (*torsion*) та згин (*bending*)).



Рисунок 1.1 – Види деформацій стрижневих конструкцій



## 1.1 Згинання з крученням. Короткі теоретичні відомості

Вали різних машин є в більшості випадків брусами круглого суцільного або кільцевого перерізу. Сили, що діють на вали (тиск на зубці шестерень та коліс, натяг пасів пасових передач, власна вага валів та шківів тощо) спричиняють у поперечних перерізах внутрішні силові фактори  $M_{KP} = M_x, M_y, M_z, Q_y$  та  $Q_z$ . У загальному випадку навантаження вони працюють на сумісну дію згинання та кручення.

Застосування гіпотез міцності дозволяє виконувати розрахунки валів з врахуванням сумісної дії згинання з крученням. Під час розрахунків валів, а також інших елементів конструкцій впливом поперечних сил можна нехтувати, тому що відповідні дотичні напруження в небезпечних перерізах бруса менші порівняно з дотичними напруженнями від кручення та нормальними напруженнями від згинання.

Як приклад складного опору у разі згинання з крученням (bending combined with torsion) розглянемо вали круглого поперечного перерізу. З метою визначення небезпечного перерізу вала потрібно побудувати епори згинальних моментів  $M_y, M_z$  та крутного моменту  $M_{KP} = M_x$ .

На рис. 1.2 показано дію згинального моменту  $M$ , який є результатом вертикального ( $M_z$ ) та горизонтального ( $M_y$ ) згину вала круглого або кільцевого перерізу:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.1)$$

На рис. 1.3 показано положення нейтральної лінії (н. л.) та епори нормальних напружень  $\sigma$  від дії результуючого згинального моменту  $M$ . Дотичні та нормальні напруження зростають прямо пропорційно відстані точок від нейтральної лінії. Водночас точки  $A$  та  $B$ , які найбільш віддалені від нейтральної лінії, є небезпечними точками перерізу вала. В цих точках одночасно мають місце і нормальні напруження  $\sigma$  від деформації згину, і дотичні напруження  $\tau$  від деформації кручення:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}, \quad (1.2)$$

$$\tau_{max} = M_{KP} / W_\rho. \quad (1.3)$$

Тут  $W$  та  $W_\rho$  – осьовий та полярний моменти опору перерізу круглого вала, відповідно.

Якщо поблизу від небезпечної точки  $B$  виділити елементарний об'єм (рис. 1.4), то по чотирьох його гранях будуть діяти дотичні напруження  $\tau$ , а

до двох із цих граней будуть прикладені ще й нормальні напруження  $\sigma$ . Решта граней будуть вільними від напружень.

Отже, у випадку згинання з крученням елементарний об'єм поблизу небезпечної точки перебуває в плоскому напруженому стані. Аналогічні напруження мають місце на гранях виділеного елемента вала, що зазнає деформації згину. В такому випадку складного напруженого стану впливом дотичних напружень від поперечних сил  $Q_y$  та  $Q_z$  можна знехтувати, оскільки вони значно менші за дотичні напруження  $\tau$ , спричинені деформацією кручення ( $M_{KP} = M_x$ ).



Рисунок 1.2 –  
Результуючий  
згинальний  
момент

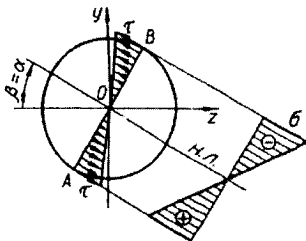


Рисунок 1.3 –  
Епюри нормальних і  
дотичних напружень

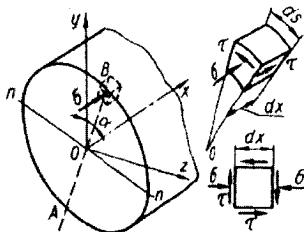


Рисунок 1.4 –  
Напружений стан в  
небезпечній точці

Для перевірки міцності елемента, який виділено біля небезпечної точки  $B$ , необхідно вибрати відповідну гіпотезу міцності. Скористаємося, наприклад, формулою за IV теорією міцності, для якої еквівалентне напруження визначається виразом:

$$\sigma_{ekvIV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1.4)$$

Підставляючи у формулу (1.4) вирази (1.2), (1.3) для напружень та враховуючи, що  $W_p = 2 \cdot W$ , матимемо:

$$\sigma_{ekvIV} = \frac{\sqrt{0,75M_{KP}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (1.5)$$

Чисельник формули (1.5) є приведеним моментом. Дія приведенного моменту  $M_{np}$ , згідно з вибраною теорією міцності, еквівалентна спільній дії трьох моментів  $M_{KP}$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . Отримуємо:

$$M_{np}^{IV} = \sqrt{0,75 \cdot M_{KP}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_{KP}^2}. \quad (1.6)$$

У такий спосіб можна здобути формули для приведених моментів і за іншими гіпотезами міцності. Тепер умову міцності (1.6) замінюємо однією простою формулою:

$$\sigma_{ekv} = \frac{M_{np}}{W} \leq [\sigma]. \quad (1.7)$$

Отже, у разі спільної дії деформації згинання з крученням стрижні круглого перерізу необхідно розраховувати на згинання від приведенного моменту  $M_{np}$ .

Розв'язання нерівності (1.7) відносно моменту опору  $W$  дає можливість визначити значення моменту опору  $W$  та, як наслідок, діаметр круглого вала  $d$ :

$$W \geq \frac{M_{np}}{[\sigma]},$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{np}}{\pi[\sigma]}} \approx \sqrt[3]{\frac{10M_{np}}{[\sigma]}}.$$

Зазначимо, що наведені формули цілком придатні також для розрахунків на міцність стрижнів кільцевого перерізу.

### Приклад

**Дано.** На вал (рис. 1.5) насаджено три зубчасті колеса, навантажених силами:

$$P_1 = 4 \text{ кН}, \quad P_2 = 3 \text{ кН}, \quad P_3 = 2 \text{ кН}.$$

Вертикальна сила  $P_1$  та горизонтальні сили  $P_2$  та  $P_3$ .

Зубчасті колеса діаметрами:

$$D_1 = 100 \text{ мм}; \quad D_2 = 300 \text{ мм}; \quad D_3 = 250 \text{ мм}.$$

Допустиме напруження  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

**Знайти.** Підібрати діаметр вала за IV теорією міцності.

### Розв'язування

#### 1. Побудова розрахункової схеми

Замінімо діюче статичне навантаження еквівалентною системою сил. В точках  $B$ ,  $C$  та  $D$  на осі вала зобразимо відповідно прикладені сили  $P_1$ ,  $P_2$  та  $P_3$ , замінюючи дію кожної з них крутним моментом  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Тоді:

$$M_1 = \frac{1}{2} P_1 \cdot D_1; \quad M_2 = \frac{1}{2} P_2 \cdot D_2; \quad M_3 = \frac{1}{2} P_3 \cdot D_3.$$

За такої умови отримуємо розрахункову схему (рис. 1.5).

На схемі наведено значення прикладених зовнішніх навантажень ( $P_i$ ,  $M_i$ ) та значення спричинених ними опорних реакцій ( $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$ ).

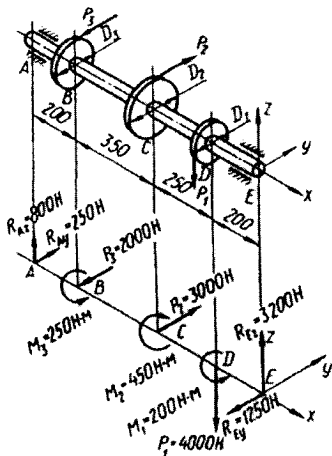


Рисунок 1.5 – Розрахункова схема

## 2. Побудова епюр згинальних моментів

Будуємо епюри згинальних моментів відповідно в горизонтальній та вертикальній площинах (рис. 1.6, а та б). Для побудови сумарної епюри згинальних моментів  $M$  визначаємо ординати для характерних точок перерізів за формулою (1.1):

$$\text{Переріз B: } M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{160^2 + 50^2} = \sqrt{28100} = 167,6 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{Переріз C: } M = \sqrt{440^2 + 562,5^2} = \sqrt{510006} = 714,2 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{Переріз D: } M = \sqrt{640^2 + 250^2} = \sqrt{472100} = 687,1 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

Епюру від сумарного моменту  $M$ , побудовану за цими даними, наведено на рис. 1.6, в. На ділянках  $BC$  та  $CD$  дійсні значення показано штриховою лінією. На рис. 1.6, в у відповідних ділянках епюра має завищені значення ординат.

## 3. Побудова епюр крутних моментів

Будуємо епюру крутних моментів  $M_{кр}$ , що діють на вал (рис. 1.6, г). Із порівняння епюр  $M$  та  $M_{кр}$  знаходимо, що небезпечним є переріз 1–1 ліворуч від точки  $C$ . В цьому перерізі одночасно діють сумарний згинальний момент  $M = 714,2 \text{ Н}\cdot\text{м}$  та крутний момент  $M_{кр} = 250 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

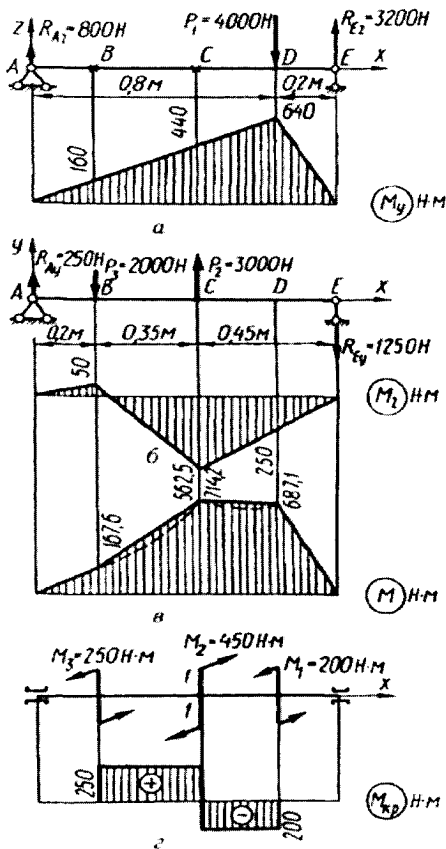


Рисунок 1.6 – Епюри внутрішніх силових факторів

#### 4. Підбір діаметра вала за IV теорією міцності

За IV теорією міцності приведений момент визначасмо за формулою (1.5):

$$M_{np} = \sqrt{0,75 \cdot 250^2 + 714,2^2} = \sqrt{556956,64} = 746,3 \text{ (H}\cdot\text{м)}$$

Обчислюємо потрібний осьовий момент опору, підставляючи значення приведенного моменту у формулу (1.7):

$$W \geq \frac{M_{np}}{[\sigma]} = \frac{746,3}{160 \cdot 10^6} = 12,44 \text{ см}^3$$

З рівняння  $W \approx 0,1 \cdot d^3$  знаходимо значення потрібного діаметра вала:

$$d \geq \sqrt[3]{10 \cdot W} = \sqrt[3]{10 \cdot 12,44} = \sqrt[3]{124,4} = 4,99 \text{ (см.)}$$

Округлюємо отримане значення до найближчого стандартного діаметра (Додаток И), вибираємо  $d = 50 \text{ мм}$ .

**Відповідь:** діаметр вала  $d = 50 \text{ мм}$ .

### 1.1.1 Завдання до розрахунково-графічної роботи

#### Задача 1. Розрахунок вала редуктора на міцність

На валу насаджено зубчасті прямозубі колеса, до яких прикладено колові зусилля  $F_{11}$ ,  $F_{12}$ ,  $F_{13}$ . Необхідно:

- 1) визначити величини  $F_{11}$  та  $F_{13}$  з умови рівноваги;
- 2) визначити сили  $F_t$  і  $F_r$  ( $F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ), які згинають вал відповідно в горизонтальній та вертикальній площинах, де  $F_r$  – радіальна сила;
- 3)  $\alpha = 20^\circ$  – нормальний кут зачеплення;
- 4) побудувати епюри згинальних моментів в горизонтальній і вертикальній площинах;
- 5) побудувати епюру сумарних згинальних моментів;
- 6) побудувати епюри крутних моментів;
- 7) підібрати діаметр вала за III теорією міцності.

Дані для розв'язання задач взяті з таблиці 1.1 та рисунків 1.7 – 1.11.

Питання до захисту задачі 1 на С. 33.

Таблиця 1.1

№ варіанта	$F_{11}$ , кН	$F_{12}$ , кН	$F_{13}$ , кН	$[\sigma]$ , МПа	$a$ , м	$b$ , м	Ділильні діаметри зубчастих коліс, м		
							$d_1$	$d_2$	$d_3$
1	–	6,0	6,0	120	0,08	0,10	0,12	0,10	0,08
2	5,5	6,5	–	120	0,10	0,08	0,09	0,11	0,15
3	–	7,0	6,5	140	0,09	0,12	0,18	0,12	0,09
4	6,0	7,5	–	140	0,11	0,13	0,10	0,14	0,18
5	–	8,0	7,0	160	0,13	0,14	0,18	0,15	0,10
6	6,5	6,0	–	120	0,12	0,09	0,08	0,11	0,16
7	–	6,5	7,5	140	0,14	0,12	0,14	0,12	0,09
8	7,0	7,0	–	140	0,12	0,14	0,08	0,13	0,16
9	–	7,5	8,0	160	0,15	0,16	0,16	0,14	0,12
10	7,5	8,0	–	160	0,10	0,14	0,11	0,15	0,20

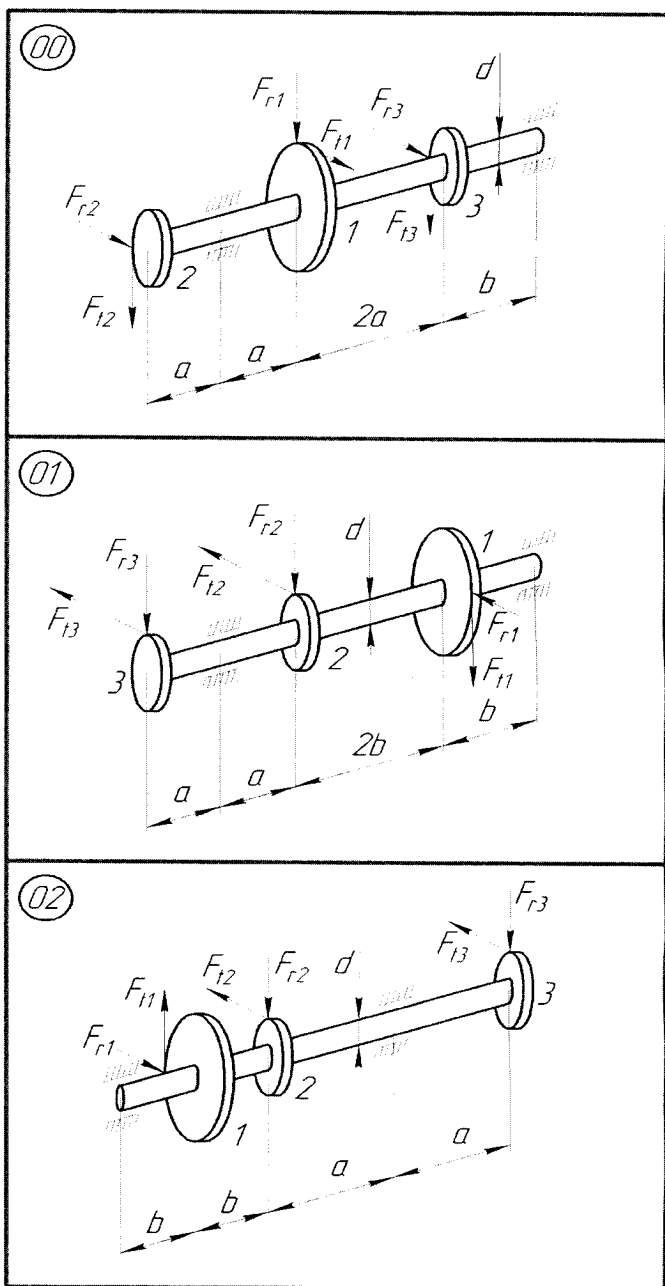


Рисунок 1.7 – Схеми до виконання задачі 1

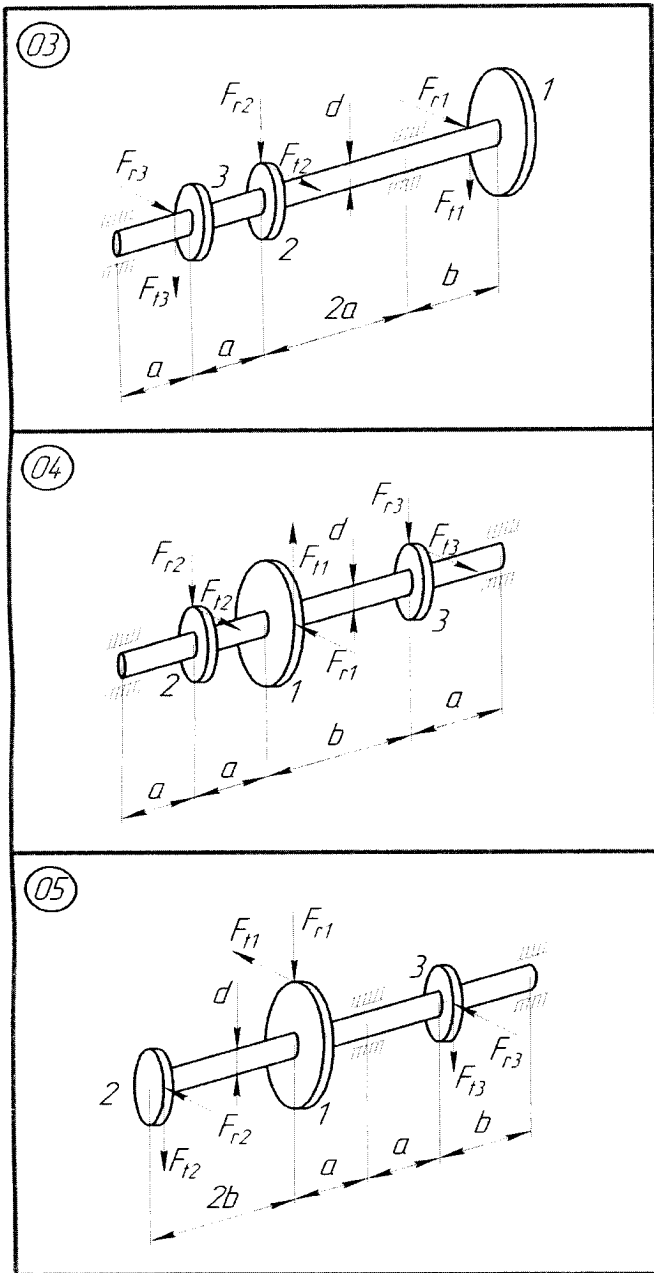


Рисунок 1.8 – Схеми до виконання задачі 1



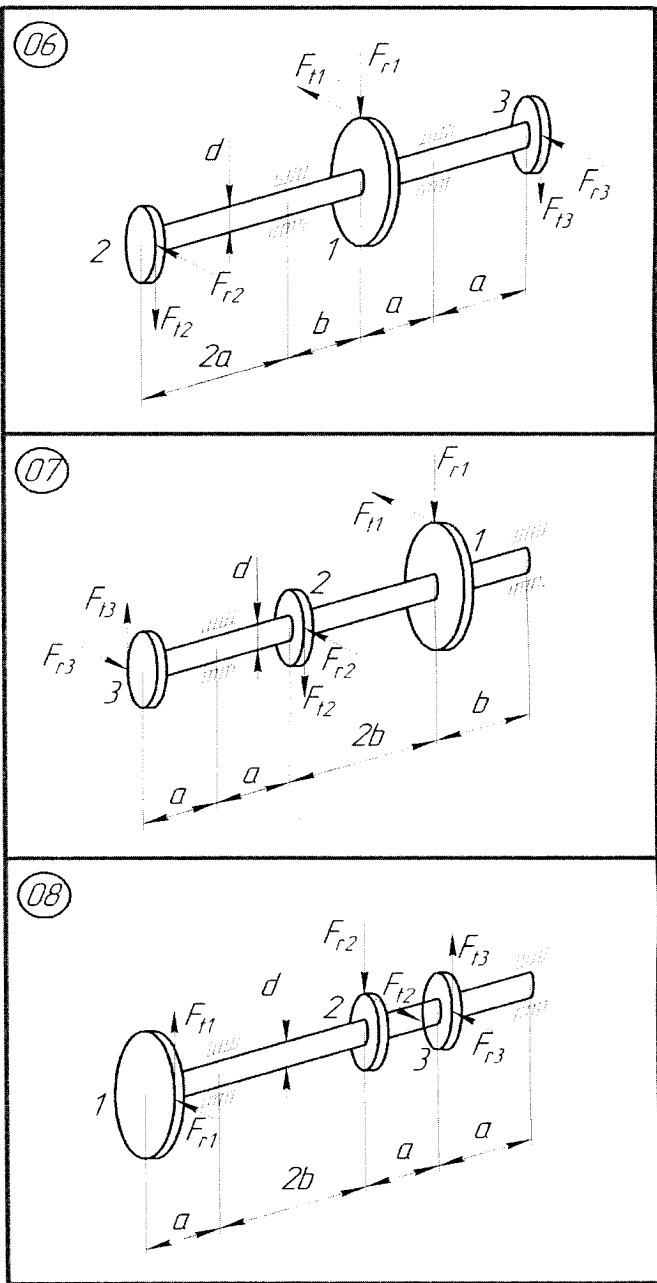
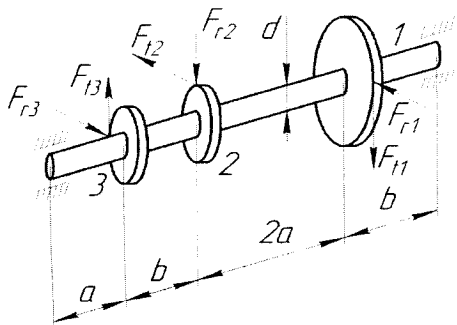
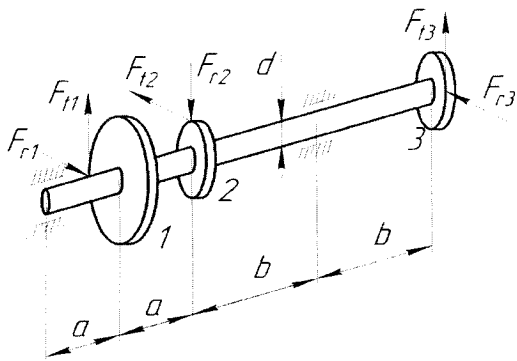


Рисунок 1.9 – Схеми до виконання задачі 1

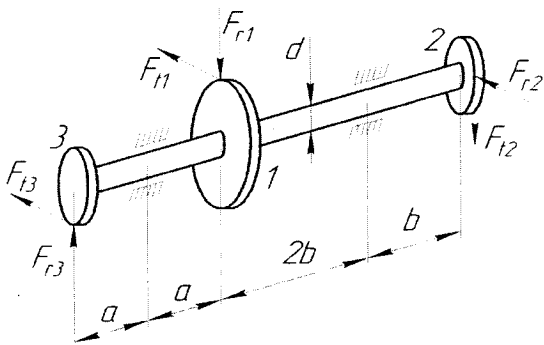
09



10



11



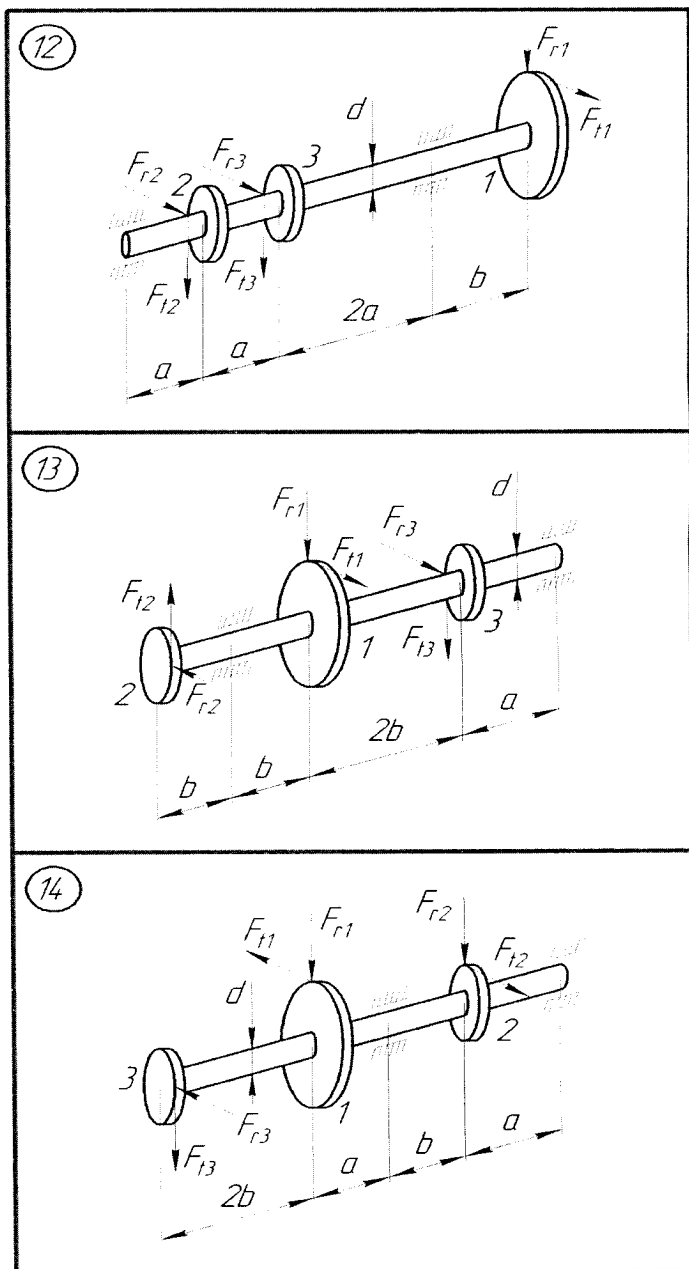


Рисунок 1.11 – Схеми до виконання задачі 1

### Приклад виконання задачі 1

Відповідно до схеми навантаження (рис. 1.12) визначити діаметри вала редуктора.

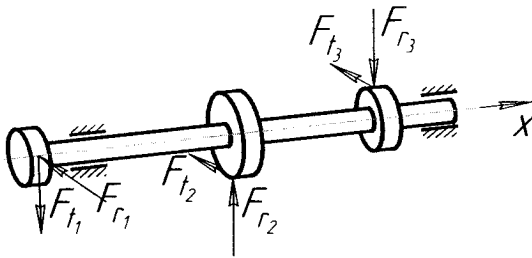


Рисунок 1.12 – Схема до прикладу задачі 1

**Дано:**

$$D_1 = 0,1 \text{ м}; \quad D_2 = 0,15 \text{ м}; \quad D_3 = 0,11 \text{ м};$$

$$[\sigma] = 120 \text{ МПа};$$

$$F_{t1} = 5 \text{ кН}; \quad F_{t2} = 4 \text{ кН}.$$

**Знайти:**

$$d_1, d_2, \dots - ?$$

#### Розв'язування

1. Визначимо невідому колову силу  $F_{t3}$  з умови рівноваги вала:

$$\sum M_x = -F_{t1} \cdot \left(\frac{D_1}{2}\right) - F_{t2} \cdot \left(\frac{D_2}{2}\right) + F_{t3} \cdot \left(\frac{D_3}{2}\right) = 0;$$

$$F_{t3} = \frac{1}{d_3} (F_{t1} \cdot D_1 + F_{t2} \cdot D_2) = \frac{1}{11} (5 \cdot 10 + 4 \cdot 15) = 10 \text{ (кН)}.$$

Визначаємо відповідні радіальні сили, що діють на зубчасті колеса за  $\text{tg} \alpha = \text{tg} 20^\circ = 0,364$ :

$$F_{r1} = F_{t1} \cdot 0,364 = 5 \cdot 0,364 = 1,82 \text{ (кН)};$$

$$F_{r2} = F_{t2} \cdot 0,364 = 4 \cdot 0,364 = 1,46 \text{ (кН)};$$

$$F_{r3} = F_{t3} \cdot 0,364 = 10 \cdot 0,364 = 3,64 \text{ (кН)}.$$

2. Визначаємо відповідні крутні моменти на кожному зубчастому колесі:

$$T_1 = F_{t1} \cdot \frac{D_1}{2} = 5 \cdot \frac{0,1}{2} = 0,25 \text{ (кН·м)};$$

$$T_2 = F_{t2} \cdot \frac{D_2}{2} = 4 \frac{0,15}{2} = 0,3 \text{ (кН·м)};$$

$$T_3 = F_{t3} \cdot \frac{D_3}{2} = 10 \frac{0,11}{2} = 0,55 \text{ (кН·м)}.$$

3. Замінімо діюче навантаження статично еквівалентною системою сил.

В точках *C*, *D*, *E* на осі вала зобразимо відповідно прикладені сили  $F_{r1}$ ,  $F_{r2}$ ,  $F_{r3}$ , замінюючи дію кожної з них крутним моментом  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ .

Отримуємо розрахункову схему (рис. 1.13), на якій показано лише вісь вала та систему силових факторів.

Проектуємо сили на вибрані розрахункові вертикальну  $xOy$  та горизонтальну  $xOz$  площини.

4. Розглядаємо кожну площину окремо та будуємо епюри внутрішніх силових факторів в цій площині.

4.1. Горизонтальна площина

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = F_{r1} \cdot 0,1 - F_{r2} \cdot 0,2 - F_{r3} \cdot 0,4 + R_{By} \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum M_B = F_{r1} \cdot 0,6 - R_{Ay} \cdot 0,5 + F_{r2} \cdot 0,3 + F_{r3} \cdot 0,1 = 0;$$

$$R_{By} = 9,24 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ay} = 6,58 \text{ (кН)}.$$

Виконуємо перевірку:

$$\sum F_{y_i} = -F_{r1} + R_{Ay} - F_{r2} - F_{r3} + R_{By} = -1,82 + 6,58 - 4 - 10 + 9,24 = 0.$$

Побудова епюри поперечних сил

Особливістю епюр поперечних сил є наявність горизонтальних ділянок зі стрибками на величину відповідних поперечних сил. Епюри поперечних сил будуємо зліва направо.

Ділянка DA:  $Q_y = -F_{r1} = -1,82 \text{ (кН)}.$

Ділянка AC:  $Q_y = -F_{r1} + R_{Ay} = -1,82 + 6,58 = 4,76 \text{ (кН)}.$

Ділянка CE:  $Q_y = -F_{r1} + R_{Ay} - F_{r2} = -1,82 + 6,58 - 4 = 0,76 \text{ (кН)}.$

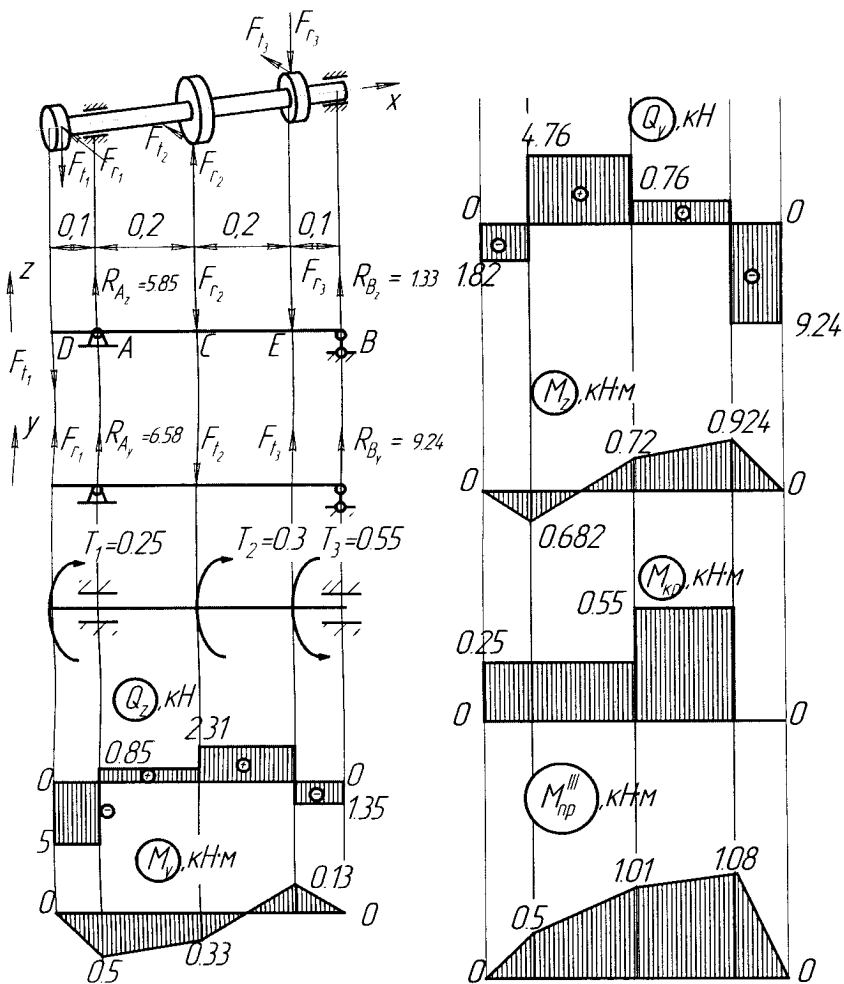


Рисунок 1.13 – Розрахункова схема та епюри внутрішніх зусиль

Ділянка BE:

$$Q_y = -F_{r1} + R_{Ay} - F_{r2} - F_{r3} = -1,82 + 6,58 - 4 - 10 = -9,24 \text{ (кН)}.$$

Побудова епюри згинальних моментів

З'єднуємо ординати значень згинальних моментів в характерних точках прямими лініями.

Ділянка DA (зліва направо):

$$\text{т. D: } M_z = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{т. A: } M_z = -F_{r1} \cdot 0,1 = -1,82 \cdot 0,1 = -0,182 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Ділянка AC т. C:

$$M_z = -F_{r1} \cdot (0,1 + 0,2) + R_{Ay} \cdot 0,2 = -1,82 \cdot 0,3 + 6,58 \cdot 0,2 = 0,77 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Ділянка EB (справа наліво):

$$\text{т. B: } M_z = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{т. E: } M_z = R_{By} \cdot 0,1 = 9,24 \cdot 0,1 = 0,924 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

#### 4.2. Вертикальна площина

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = F_{r1} \cdot 0,1 + F_{r2} \cdot 0,2 - F_{r3} \cdot 0,4 + R_{Bz} \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum M_B = F_{r1} \cdot 0,6 - R_{Az} \cdot 0,5 + F_{r2} \cdot 0,3 + F_{r3} \cdot 0,1 = 0;$$

$$R_{Bz} = 1,33 \text{ (кН)};$$

$$R_{Az} = 5,85 \text{ (кН)}.$$

Виконуємо перевірку:

$$\sum F_{y1} = -F_{r1} + R_{Az} + F_{r2} - F_{r3} + R_{Bz} = -5 + 5,85 + 1,46 - 3,64 + 1,33 = 0.$$

Побудова епюри поперечних сил

$$\text{Ділянка DA: } Q_z = -F_{r1} = -5 \text{ (кН)}.$$

$$\text{Ділянка AC: } Q_z = -F_{r1} + R_{Az} = -5 + 5,85 = 0,85 \text{ (кН)}.$$

$$\text{Ділянка CE: } Q_z = -F_{r1} + R_{Az} - F_{r2} = -5 + 5,85 + 1,46 = 2,31 \text{ (кН)}.$$

Ділянка EB:

$$Q_z = -F_{r1} + R_{Az} + F_{r2} - F_{r3} = -5 + 5,85 + 1,46 - 3,64 = -1,33 \text{ (кН)}.$$

Побудова епюри згинальних моментів

Ділянка DA: т. D:

$$M_y = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

т. А:  $M_y = -F_{11} \cdot 0,1 = -5 \cdot 0,1 = -0,5 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

Ділянка AC: т. C:

$$M_y = -F_{11} \cdot (0,1 + 0,2) + R_{Az} \cdot 0,2 = -5 \cdot 0,3 + 5,85 \cdot 0,2 = -0,33 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Ділянка EB: т. B:  $M_y = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

т. E:  $M_y = R_{Bz} \cdot 0,1 = 1,33 \cdot 0,1 = 0,133 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

#### 4.3. Побудова епюри крутних моментів

Особливістю епюр крутних моментів є наявність горизонтальних ділянок зі стрибками на величину відповідних крутних моментів. Епюри крутних моментів будують зліва направо.

Ділянки DA, AC:  $M_{кр} = T_1 = 0,25 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

Ділянка CE:  $M_{кр} = T_1 + T_2 = T_3 = 0,55 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

Ділянка EB:  $M_{кр} = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

#### 4.4. Будуємо епюри приведених моментів (використовуємо третю теорію міцності)

За третьою теорією міцності (найбільших дотичних напружень) приведений момент визначають за формулою:

$$M_{пр}^{III} = \sqrt{M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

З'єднуємо визначені значення приведених моментів в характерних перерізах прямими лініями, якщо лінія починається з нуля, і кривими – в інших випадках:

т. D:  $M_{пр}^{III} = \sqrt{M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0,25^2 + 0 + 0} = 0,25 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

т. А:  $M_{пр}^{III} = \sqrt{M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0,25^2 + 0,5^2 + 0,182^2} = 0,59 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$



$$\text{т. С: } M_{np}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0,55^2 + 0,33^2 + 0,77^2} = 1,01 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{т. В: } M_{np}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0,55^2 + 0,133^2 + 0,924^2} = 1,08 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$\text{т. Е: } M_{np}^{III} = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

5. Розраховуємо мінімальні діаметри ділянок вала за умови міцності у разі згину з крученням.

$$\sigma = \frac{M_{np}}{W_z} \leq [\sigma],$$

де  $W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$  – осьовий момент опору круга, звідки:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}}.$$

Ділянки EB, CE:  $M_{np \max}^{III} = 1,08 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,08 \cdot 10^3}{\pi \cdot 120 \cdot 10^6}} \approx 0,045 \text{ (м)}.$$

Ділянка DA:  $M_{np \max}^{III} = 1,01 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,01 \cdot 10^3}{\pi \cdot 120 \cdot 10^6}} \approx 0,042 \text{ (м)}.$$

Ділянка AC:  $M_{np \max}^{III} = 1,59 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,59 \cdot 10^3}{\pi \cdot 120 \cdot 10^6}} \approx 0,037 \text{ (м)}.$$

Округлюємо отримані значення до найближчих стандартних діаметрів (Додаток И) та остаточно беремо  $d_{AD} = 45 \text{ мм}$ ,  $d_{AC} = 40 \text{ мм}$ ,  $d_{CE} = 45 \text{ мм}$ ,  $d_{EB} = 45 \text{ мм}$ .

**Відповідь:**  $d_{AD} = 45 \text{ мм}$ ,  $d_{AC} = 40 \text{ мм}$ ,  $d_{CE} = 45 \text{ мм}$ ,  $d_{EB} = 45 \text{ мм}$ .

### 1.1.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

#### Задача 2. Розрахунок плоскої рами з просторовим навантаженням

На стрижневі ділянки плоскої рами діють сила  $P$  та вертикальне навантаження інтенсивністю  $q$ . На рисунках 1.14 – 1.15 зображено в аксонометрії вісь ламаного стрижня круглого поперечного перерізу, розташованого в горизонтальній площині.

Зобразити розрахункову схему в аксонометрії.

Необхідно побудувати:

- окремо епюри згинальних і крутних моментів;
- визначити діаметри ділянок стрижня за третьою теорією міцності, якщо допустиме напруження в матеріалі  $\sigma_{adm} = [\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;
- округлити отримані діаметри стрижнів до стандартних (Додаток И) відповідно для кожної ділянки плоскої рами.

Дані для розрахунку взяти з таблиці 1.2 та рисунків 1.14 – 1.15.

Таблиця 1.2

№	$P$ , кН	$q$ , кН/м	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м
0	6	10	1	0,5	1,2
1	7	8	1,2	1	0,5
2	8	6	1,2	0,5	1
3	9	12	1	0,8	0,6
4	10	14	0,5	1	0,8
5	11	11	1	0,5	1
6	12	9	0,5	0,8	1
7	13	8	0,6	1	1,2
8	14	5	1	0,4	0,8
9	12	4	1	1	1

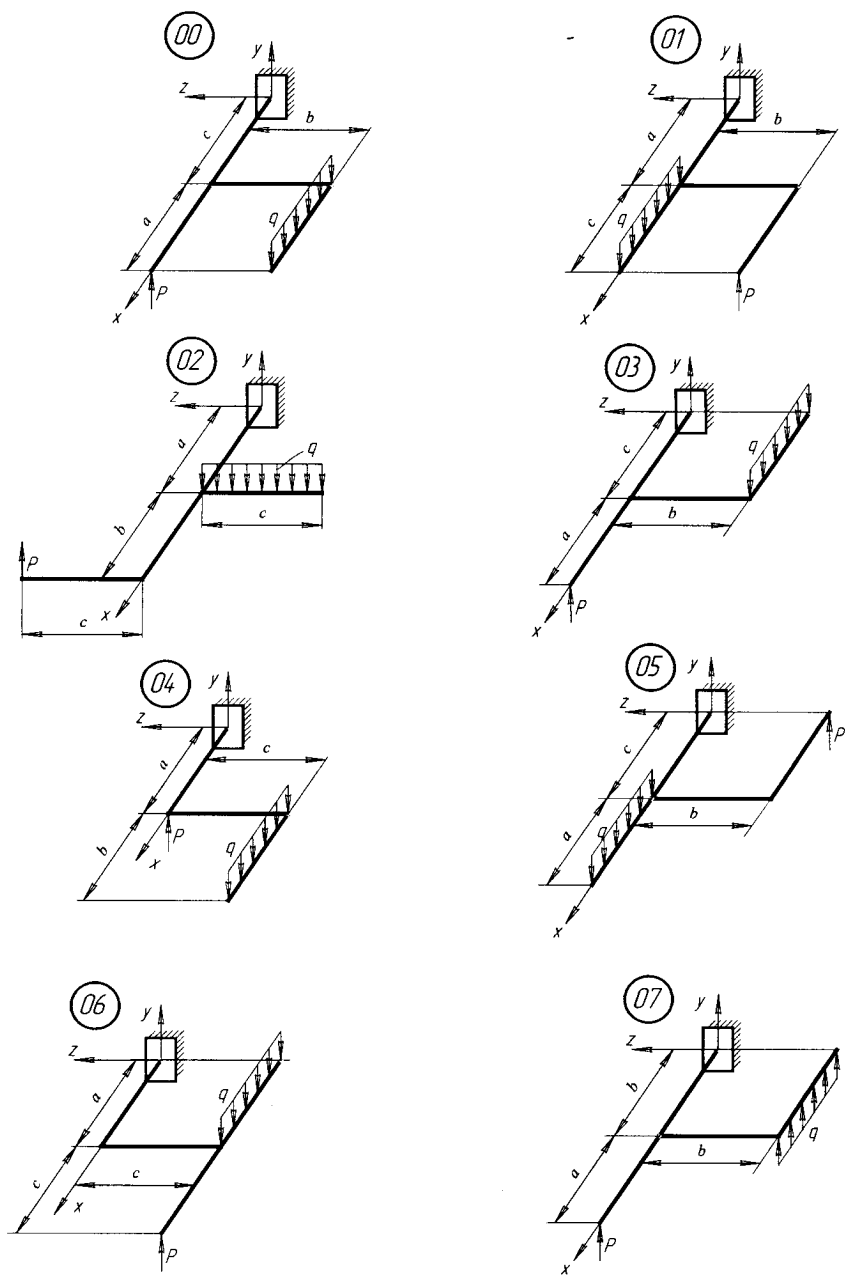


Рисунок 1.14 – Схеми до виконання задачі 2

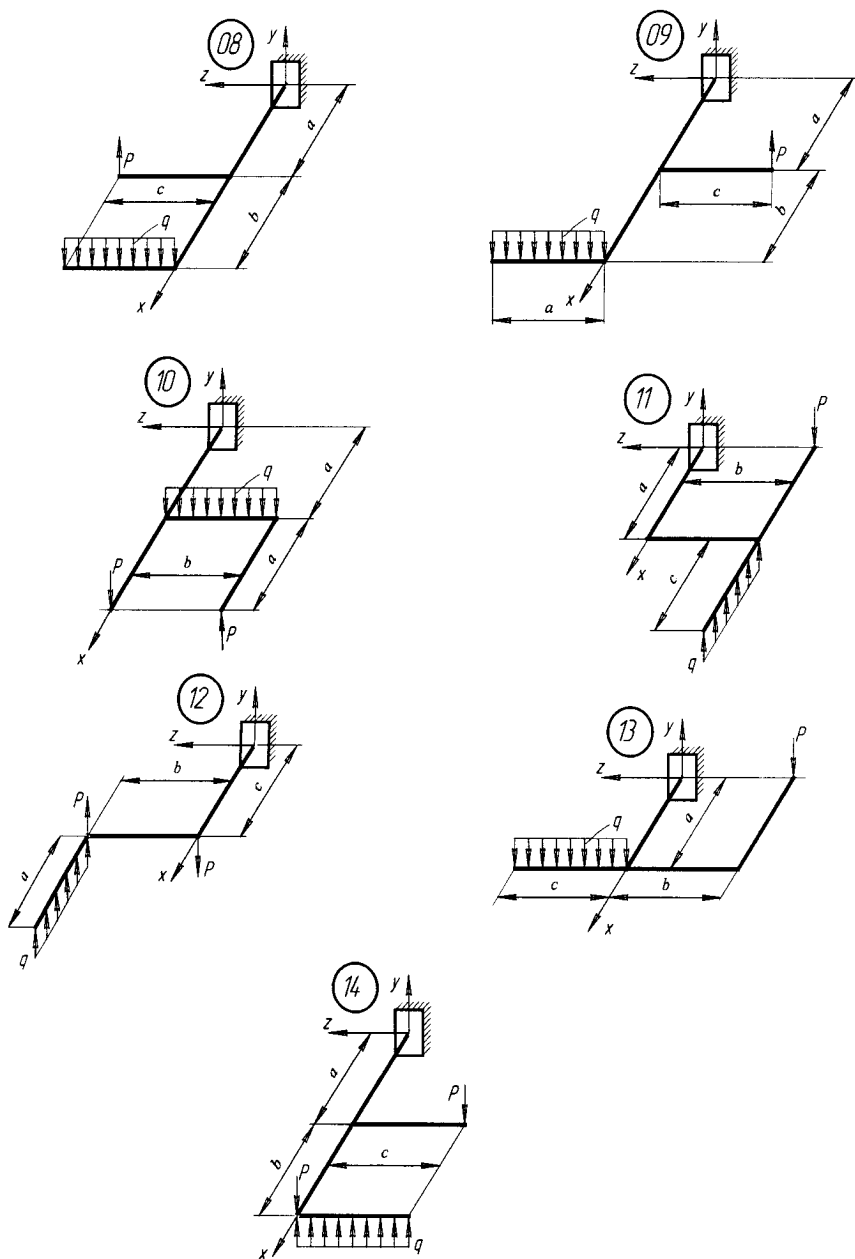


Рисунок 1.15 – Схеми до виконання задачі 2

## Приклад виконання задачі 2

Для просторової плоскої рами, що навантажена згідно зі схемою (рис. 1.16), побудувати епюри внутрішніх силових факторів  $Q_y$ ,  $M_z$ ,  $M_{кр}$ . За третьою теорією міцності визначити необхідні діаметри поперечних перерізів ділянок за умови:  $\sigma_{adm} = [\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

**Дано:**

$$P = 8 \text{ кН}; \quad q = 6 \text{ кН/м};$$

$$a = 1 \text{ м}; \quad b = 0,6 \text{ м}; \quad c = 1,2 \text{ м};$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

**Знайти:**

$d_i - ?$

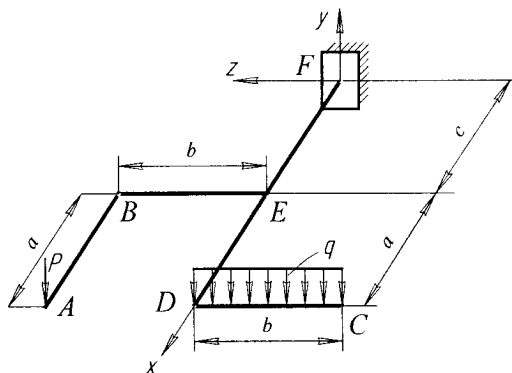


Рисунок 1.16 – Схема до прикладу задачі 2

### 1. Будуємо епюри внутрішніх силових факторів

Розглядаємо консольну частину рами та вибираємо характерні перерізи (рис. 1.17). Для кожного перерізу вказуємо локальну систему координат. Водночас вісь  $x$  має збігатися з віссю ділянки рами та має бути спрямована до частини стрижня, що розглядається. Вісь  $y$  спрямовуємо вертикально. Вісь  $z$  утворює з осями  $x$  та  $y$  праву систему координат. Тоді моменти зовнішніх сил:

- відносно осі  $x$  будуть крутними моментами  $M_{кр}$ ,
- відносно осі  $y$  – згинальними моментами в горизонтальній площині  $M_y$ ,
- відносно осі  $z$  – згинальними моментами в вертикальній площині  $M_z$ .

### Розв'язування

Поперечні сили  $Q_y$  та згинальні моменти  $M_z$  (епюри) будуть лежати в вертикальній площині  $xOy$ , оскільки навантаження на раму вертикальне.

Поздовжні сили  $N_x$  за такого навантаження в рамі не будуть виникати.

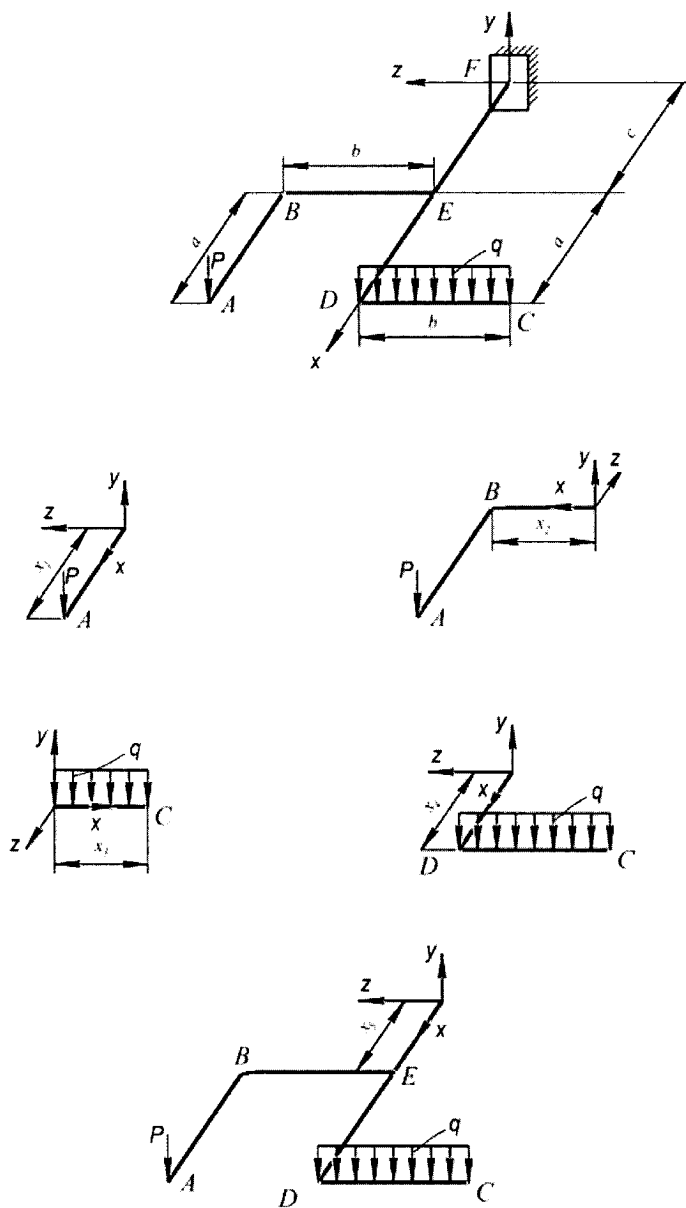


Рисунок 1.17 – Розрахункова схема плоскої рами з характерними перерізами на відповідних ділянках

Запишемо для кожної ділянки рівняння поперечних сил  $Q_y$ , згинальних  $M_z$  та крутних моментів  $M_x$ .

Ділянка АВ:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}, \\ Q_y = P = 8 \text{ (кН)}, \\ M_z(x_1) = P \cdot x_1 = 8 \cdot x_1, \\ \text{якщо } x_1 = 0 \text{ м, то } M_z(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ \text{якщо } x_1 = 1 \text{ м, то } M_z(0) = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Ділянка ВЕ:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_2 \leq 0,6 \text{ м}, \\ Q_y = P = 8 \text{ (кН)}, \\ M_x(x_2) = P \cdot a = 8 \cdot 1 = 8 \text{ (кН}\cdot\text{м)}, \\ M_z(x_2) = P \cdot x_2 = 8 \cdot x_2, \\ \text{якщо } x_2 = 0 \text{ м, то } M_z(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ \text{якщо } x_2 = 0,6 \text{ м, то } M_z(0,6) = 4,8 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Ділянка CD:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_3 \leq 0,6 \text{ м}, \\ Q_y(x_3) = q \cdot x_3 = 6 x_3 \text{ (кН)}, \\ M_x = 0 \text{ (кН}\cdot\text{м)}, \\ M_z(x_3) = \frac{q \cdot x_3^2}{2} = \frac{6}{2} \cdot x_3^2 = 3 \cdot x_3^2, \\ \text{якщо } x_3 = 0 \text{ м, то } Q_y(0) = 0 \text{ кН, } M_z(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ \text{якщо } x_3 = 0,6 \text{ м, то } Q_y(0,6) = 3,6 \text{ кН, } M_z(0,6) = 1,08 \text{ кН}\cdot\text{м}, \end{aligned}$$

Ділянка DE:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_4 \leq 1 \text{ м}, \\ Q_y = q \cdot 0,6 = 3,6 \text{ кН}, \\ M_x = \frac{q \cdot 0,6^2}{2} = \frac{6}{2} \cdot 0,6^2 = 1,08 \text{ (кН}\cdot\text{м)}, \\ M_z(x_4) = q \cdot 0,6 \cdot x_4 = 3,6 \cdot x_4, \\ \text{якщо } x_4 = 0 \text{ м, то } M_z(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ \text{якщо } x_4 = 1 \text{ м, то } M_z(1) = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Ділянка EF:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_5 \leq 1,2 \text{ м}, \\ Q_y = P + q \cdot 0,6 = 8 + 6 \cdot 0,6 = 11,6 \text{ (кН)}, \\ M_x = \frac{q \cdot 0,6^2}{2} - P \cdot 0,6 = 1,08 - 4,8 = -3,72 \text{ (кН}\cdot\text{м)}, \\ M_z(x_5) = q \cdot 0,6 \cdot (1 + x_5) + P \cdot (1 + x_5) = 11,6 + 11,6 \cdot x_5, \\ \text{якщо } x_5 = 0 \text{ м, то } M_z(0) = 11,6 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ \text{якщо } x_5 = 1,2 \text{ м, то } M_z(1,2) = 25,52 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Для всіх ділянок:

$$\begin{aligned} Q_z = N = 0, & \quad M_y = 0, \\ M_x = M_{KP}, & \quad M_z = M_{3Г}. \end{aligned}$$

За отриманими значеннями будуюмо епюри в аксонометрії (рис. 1.18).

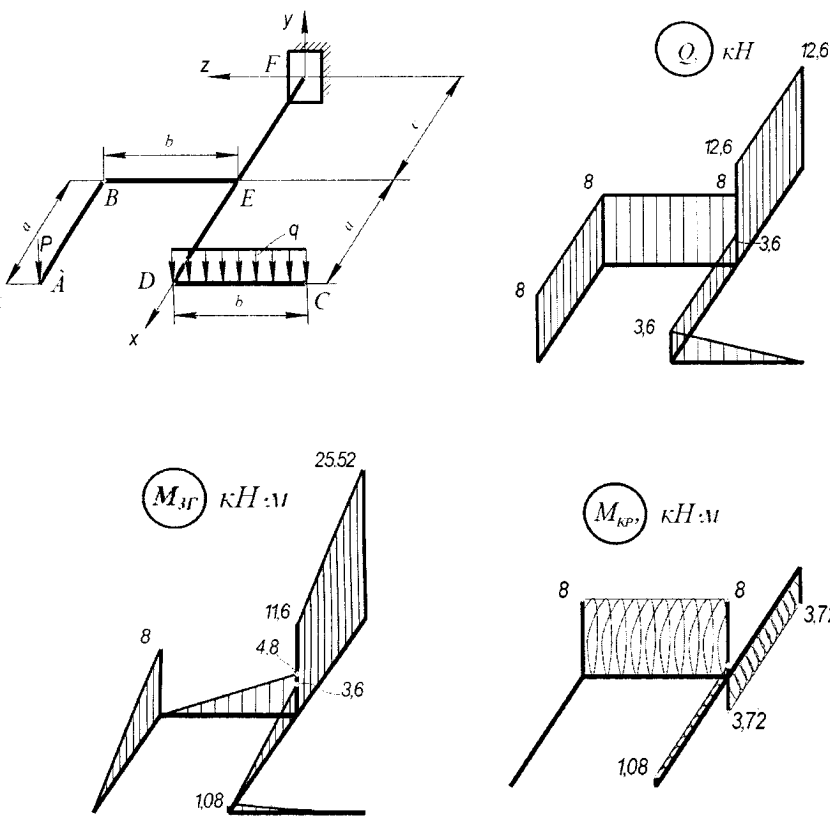


Рисунок 1.18 – Епюри внутрішніх силових факторів

Додатні значення поперечної сили  $Q_y$  відкладаємо над віссю. На розтягнутих волокнах будемо епюри згинальних моментів  $M_z$ . Розташування епор крутних моментів  $M_{kr}$  особливого значення не має.

## 2. Розрахунок на міцність

Приведений момент за III теорією міцності  $M_{np}^{III}$  (теорією найбільших дотичних напружень):



$$M_{np}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Максимальні значення приведених моментів в характерних перерізах кожної ділянки плоскої рами обчислюємо таким чином:

$$AB: \text{ т. В: } M_{np \max}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0 + 0 + 8^2} = 8 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$BE: \text{ т. Е: } M_{np \max}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + M_z^2} = \sqrt{8^2 + 4,8^2} = 9,33 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$CD: \text{ т. D: } M_{np \max}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + M_z^2} = \sqrt{0^2 + 1,08^2} = 1,08 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$DE: \text{ т. Е: } M_{np \max}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + M_z^2} = \sqrt{1,08^2 + 3,6^2} = 3,76 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

$$EF: \text{ т. F: } M_{np \max}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + M_z^2} = \sqrt{3,72^2 + 25,52^2} = 25,79 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Мінімальні діаметри ділянок вала обчислюємо за умовою міцності в процесі згинання з крученням.

$$\sigma = \frac{M_{np}}{W_z} \leq [\sigma],$$

де  $W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$  – осьовий момент опору круга, звідки:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}}$$

$$\text{Ділянка AB: } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 8 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} \approx 0,0799 \text{ (м)}.$$

$$\text{Ділянка BE: } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 9,33 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} \approx 0,0841 \text{ (м)}.$$

$$\text{Ділянка CD: } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,08 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} \approx 0,0410 \text{ (м)}.$$

$$\text{Ділянка DE: } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,76 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} \approx 0,0621 \text{ (м)}.$$

$$\text{Ділянка EF: } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 25,79 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} \approx 0,1180 \text{ (м)}.$$

Отримані значення діаметрів округлюємо до стандартних (Додаток И, ряд  $R_a 40$ ) та остаточно вибираємо:

$$\begin{aligned}d_{AB} &= 80 \text{ мм}, & d_{BE} &= 85 \text{ мм}, & d_{CD} &= 42 \text{ мм}, \\d_{DE} &= 63 \text{ мм}, & d_{EF} &= 120 \text{ мм}.\end{aligned}$$

**Відповідь:**

$$\begin{aligned}d_{AB} &= 80 \text{ мм}, & d_{BE} &= 85 \text{ мм}, & d_{CD} &= 42 \text{ мм}, \\d_{DE} &= 63 \text{ мм}, & d_{EF} &= 120 \text{ мм}.\end{aligned}$$

### Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задачі 1, 2)

1. Як перевірити міцність елемента конструкції за простого та за складного напруженого стану?
2. В яких випадках для перевірки міцності конструкції змушені використовувати гіпотези міцності?
3. Записати умову міцності для випадку згину з крученням та пояснити її.
4. Що таке приведений момент? Як він визначається за III та IV теоріями міцності?
5. Які види простих деформацій мають місце за згину з крученням?
6. В елементах яких конструкцій реалізуються деформації згину з крученням – навести приклади.
7. Як використовують поняття «рівнонебезпечних напружених станів» для перевірки міцності за складного опору?
8. Якою є умова міцності за згину з крученням?
9. Які особливості епюр внутрішніх зусиль вказують на згин з крученням?
10. Чому для вала будують епюри в двох розрахункових площинах – вертикальній та горизонтальній? Чи має значення саме такий вибір площин?
11. Які види простих деформацій мають місце за поперечного згину?

## 2 ЕНЕРГЕТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

### 2.1 Короткі теоретичні відомості

#### 2.1.1 Узагальнена сила, узагальнене переміщення та їх відповідність

Оцінення жорсткості конструкції або ступеня її деформації є однією з найважливіших задач механіки матеріалів та конструкцій. Деформації прямих стрижнів за простих видів опору визначають за допомогою закону Гука. В більш вккладних випадках, коли в поперечних перерізах стрижнів виникає до шести внутрішніх силових факторів, а самі стрижні є криволінійними та є елементами просторових конструкцій, визначити пружні переміщення за законом Гука стає складною задачею, а часом просто неможливою. Величину пружних переміщень (лінійних та кутових) необхідно визначати для перевірки умов жорсткості, для розкриття статичної невизначуваності систем, а також у разі визначення коливань під час розрахунків конструкцій в умовах динамічних навантажень. В таких випадках пружні переміщення перерізів можна визначати за допомогою енергетичних методів на базі оцінки потенціальної енергії деформування системи.

Для розв'язання задачі оцінення жорсткості потрібно визначати переміщення перерізів навантаженої пружної конструкції (колони, балки, рами криволінійного стрижня, ферми тощо). Для цього, як уже зазначалося [16, 17], складають рівняння сумісності деформацій.

Загальний метод визначення переміщень у стрижневих системах ґрунтується на двох фундаментальних принципах механіки: принципі можливих переміщень та законі збереження енергії.

Робота постійної сили  $P$  на переміщенні  $\Delta$  за її напрямом дорівнює добутку значення сили на зазначене переміщення:

$$A = P \cdot \Delta.$$

Зовнішні навантаження характеризуються значною різноманітністю. Як правило, вони утворюють групи сил. Вираз для роботи групи постійних сил можна подати у вигляді добутку *узагальненої сили*  $P$  (*generalized force*) та *узагальненого переміщення*  $\Delta_p$  (*generalized displacement*):

$$A = P \cdot \Delta_p. \quad (2.1)$$

Під *узагальненою силою* будемо розуміти систему сил, прикладених до тіла, які пропорціональні єдиному параметру (зосередженій силі, зосередженому моменту, розподіленому навантаженню) і деформують тіло. Під *узагальненим переміщенням* – незалежний параметр, що однозначно і повною мірою характеризує деформування тіла (лінійне та кутове переміщення).

### Приклади узагальнених сил та переміщень

1. Узагальнену силу, яка складається з двох однакових за модулем але протилежних за напрямом сил  $P$ , прикладених у точках  $A$  та  $B$  і напрямлених по одній прямій, зображено на рис. 2.1. Якщо точки прикладання сил перемістились у напрямі  $BA$  на відрізки  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$ , то робота системи постійних сил на цих переміщеннях:

$$A = P \cdot \Delta_1 - P \cdot \Delta_2 = P \cdot (\Delta_1 - \Delta_2) = P \cdot \Delta_p, \quad (2.2)$$

де  $\Delta_p = \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l$  – зміна відстані  $l$  між точками  $A$  і  $B$  прикладення сил.

В цьому прикладі  $P$  – узагальнена сила,  $\Delta l$  – зміна довжини відрізка  $AB$  – узагальнене переміщення.

2. Група сил, що складається з пари сил, момент якої  $M = P \cdot a$ , зображено на рис. 2.2. Якщо елемент  $AB$  повернувся на кут  $d\theta$ , то шляхи, пройдені силами пари в напрямі їхньої дії, дорівнюють, відповідно:

$$AA_1 = |OA| \cdot d\theta; \quad BB_1 = |OB| \cdot d\theta.$$

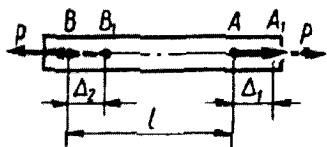


Рисунок 2.1 –  
Узагальнена сила

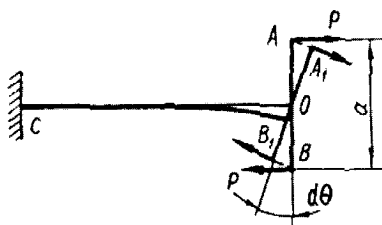


Рисунок 2.2 –  
Узагальнений момент

Сумарна робота обох сил:

$$A = P \cdot AA_1 + P \cdot BB_1 = P \cdot (OA + OB) \cdot d\theta = P \cdot a \cdot d\theta = M \cdot d\theta. \quad (2.3)$$

Якщо узагальненою силою є момент  $M$  пари, то узагальненим переміщенням буде кут повороту  $d\theta$  у площині дії пари сил.

Узагальненою силою у разі дії на елементи  $AB$  і  $CD$  (рис. 2.3) двох однакових за модулем і протилежно напрямлених пар з моментом  $M$  є момент пари  $M$ , а узагальненим переміщенням – зміна кута  $\varphi$  між елементами  $AB$  і  $CD$ . Інакше:

$$\Delta_p = d\theta_1 + d\theta_2.$$

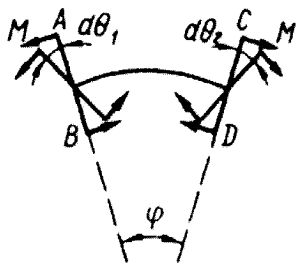


Рисунок 2.3 – Дія пари сил на елементи  $AB$  і  $CD$

Надалі умовимось узагальнені переміщення (як лінійні, так і кутові) будь-якого перерізу стрижня позначати літерою  $\Delta$  або  $\delta$  з двома індексами:  $\delta_{ij}$ . Перший індекс ( $i$ ) відображує точку і напрям переміщення, другий ( $j$ ) – указує причину цього переміщення. Наприклад,  $\Delta_{PP}$  означає переміщення точки прикладення сили  $P$  у напрямі її дії, спричинене цією самою силою  $P$  (рис. 2.4, *a*). На рисунку 2.4, *б* зображено консоль, навантажену на вільному кінці зосередженим моментом  $M$ . Очевидно, кут повороту перерізу, де прикладений момент, потрібно позначити

$\Delta_{MM}$ . Тут перший індекс означає переміщення точки прикладення моменту в напрямі дії моменту  $M$ .

Для позначення повного переміщення точки, спричиненого кількома зусиллями, при  $\Delta$  зберігається тільки перший індекс. Так, повний прогин і кут повороту перерізу  $B$  балки, зображеної на рис. 2.5, потрібно позначити відповідно через  $\Delta_P$  і  $\Delta_M$ , а прогин перерізу  $C$  – через  $\Delta_Q$ .

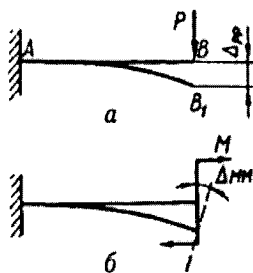


Рисунок 2.4 – Позначення переміщень

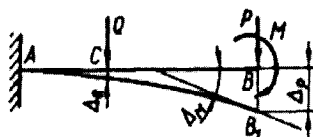


Рисунок 2.5 – Узагальнені переміщення

Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції) дозволяє визначати повні переміщення точок для систем, деформації яких відповідають закону Гука (описуються лінійними рівняннями), як суму переміщень, спричинених кожним навантаженням окремо.

Прогин ( $\Delta_P$ ) і кут повороту ( $\Delta_M$ ) перерізу  $B$  для зображеної на рис. 2.5 балки можна записати у вигляді:

$$\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM}; \quad (2.4)$$

$$\Delta_M = \Delta_{MP} + \Delta_{MQ} + \Delta_{MM},$$

- де  $\Delta_{PP}$  – переміщення точки  $B$  балки у напрямі сили  $P$  від сили  $P$ ;  
 $\Delta_{PQ}$  – те саме від сили  $Q$ ;  
 $\Delta_{PM}$  – те саме від моменту  $M$ ;  
 $\Delta_{MP}$  – переміщення перерізу  $B$  у напрямі пари  $M$  (кут повороту) від сили  $P$ ;  
 $\Delta_{MQ}$  – те саме від сили  $Q$ ;  
 $\Delta_{MM}$  – те саме від пари  $M$ .

Переміщення, спричинене одиничною силою  $\bar{P} = 1$  або одиничною парою  $\bar{M} = 1$ , будемо позначати літерою  $\delta$  і називати *питомим*. Умовимося вважати одиничні сили чи одиничні пари, які спричиняють переміщення  $\delta$ , безрозмірними величинами. За умови, що одинична сила  $\bar{P} = 1$  спричинила переміщення  $\delta_P$  (згідно з принципом незалежності дії сил) повне переміщення  $\Delta_P$ , спричинене силою  $P$ , буде визначатися за формулою:

$$\Delta_P = P \cdot \delta_P. \quad (2.5)$$

З виразу (2.5) можна визначити одиницю питомого переміщення:

$$[\delta_P] = \text{одиниця узагальненого переміщення} / \text{одиниця узагальненої сили} \quad (2.6)$$

Навантаження, які діють на досить жорсткі лінійно деформівні конструкції, як правило, позначають літерами  $P, M, X, \dots$  з числовими індексами (наприклад,  $X_1, X_2, \dots$ ). Тоді літерні індекси при  $\Delta$  або  $\delta$  замінюють відповідними числовими індексами, тобто замість  $\Delta_{X1}$  пишуть  $\Delta_1, (\Delta_2, \delta_{12}, \dots)$ .

На рис. 2.6 зображено позначення переміщень вільного кінця рами від дії різних сил ( $X_1, X_2, X_3, P$ ).

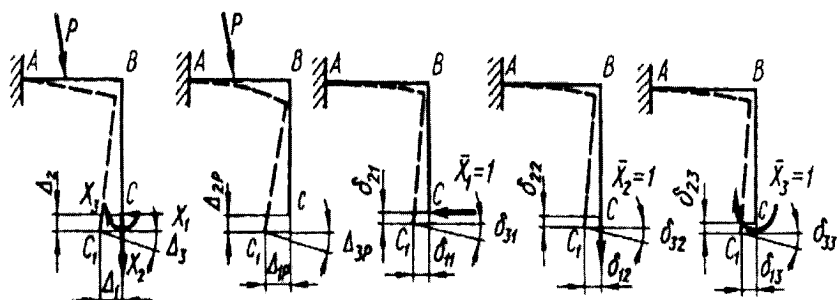


Рисунок 2.6 – Позначення переміщень точки  $C$

Відповідно до принципу суперпозиції переміщення перерізу  $C$  у горизонтальному і вертикальному напрямках (тобто в напрямках дії сил  $X_1$  і  $X_2$ ), а також кут повороту перерізу  $C$  (в напрямі дії  $X_3$ ) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1P} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13}; \\ \Delta_2 &= \Delta_{2P} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23}; \\ \Delta_3 &= \Delta_{3P} + X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тут

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{11} &= \Delta_{11}; & X_2 \cdot \delta_{12} &= \Delta_{12}; \\ X_3 \cdot \delta_{13} &= \Delta_{13}; & X_i \cdot \delta_{mi} &= \Delta_{mi}. \end{aligned}$$

Для оцінення одиниці переміщення  $\delta_{mi}$  множимо останнє рівняння на  $X_m$ .

Отримуємо:

$$X_m \cdot X_i \cdot \delta_{mi} = X_m \cdot \Delta_{mi},$$

яке виражатиметься в одиницях роботи (Дж).

Тоді переміщення:

$$[\delta_{mi}] = \frac{X_m \cdot \Delta_{mi}}{[X_m] \cdot [X_i]} \Rightarrow \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{Н} \cdot \text{Дж}} \right] = \left[ \frac{1}{\text{Н}} \right].$$

## 2.1.2 Визначення переміщень. Інтеграл Мора

*Інтеграл Мора (Integral Mora)* дозволяє визначити переміщення довільного перерізу балки та має такий фізичний зміст: *це робота одиначної сили на переміщенні її точки прикладення від заданого навантаження.*

Нехай потрібно визначити переміщення (узагальнене) будь-якої точки системи в напрямі  $i$  –  $i$  на прикладі довільної плоскої стрижневої системи (балка, рама, ферма тощо), навантаженої заданими силами  $P$  (рис. 2.7, а). Зусилля в довільному перерізі системи позначимо через  $M_p, Q_p, N_p$ .

Допоміжний стан (рис. 2.7, б) системи завантажимо однією одиначною силою (узагальненою)  $\bar{X}_i = 1$ , прикладеною в тій самій точці  $m$  і в напрямі шуканого переміщення  $\Delta_{iP}$ . Тоді внутрішні зусилля в довільному перерізі  $m$  допоміжного стану, спричинені дією одиначної сили  $\bar{X}_i = 1$ , позначимо через  $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ . За умов загального випадку дії сил формула для визначення переміщення містить шість доданків, в якій

індекси «у» та «z» відповідають головним осям перерізу, індекс «KP» – крутному моменту:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_{iy}M_{Py}}}{EJ_y} + \frac{\overline{M_{iz}M_{Pz}}}{EJ_z} + \frac{\overline{M_{iKP}M_{PKP}}}{GJ_P} + k_y \frac{\overline{Q_{iy}Q_{Py}}}{GF} + k_z \frac{\overline{Q_{iz}Q_{Pz}}}{GF} + \frac{\overline{N_iN_P}}{EF} \right) ds \quad (2.8)$$

Вперше формулу (2.8) було виведено Отто Мором. Визначення переміщень за цією формулою називають *методом Мора (Maxwell-Mohr's method, unit-load method)*. Зазначимо, що *метод Мора* – це найзагальніший метод визначення переміщень стрижневих систем. Його особливо велика значущість у випадках розрахунків *статично невизначуваних систем*. Наведену формулу застосовують також для кривих стрижнів малої кривини.

Здебільшого під час визначення переміщень у балках, рамах та арках можна нехтувати впливом поздовжніх деформацій і деформацій зсуву, враховуючи лише переміщення, спричинені згинанням і крученням. Тоді формула (2.8) для плоскої системи набуває вигляду:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_iM_P}}{EJ} \right) ds. \quad (2.9)$$

Для довільного просторового навантаження формула (2.8) набуває вигляду:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_{iy}M_{Py}}}{EJ_y} \right) ds + \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_{iz}M_{Pz}}}{EJ_z} \right) ds + \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_{iKP}M_{PKP}}}{GJ_P} \right) ds. \quad (2.10)$$

Для визначення переміщень вузлів шарнірних ферм, що складаються з прямих стрижнів, у формулі Мора зберігається лише один доданок:

$$\Delta_{iP} = \sum_m \left( \frac{\overline{N_iN_P}}{E_m F_m} l_m \right). \quad (2.11)$$

Ця формула (2.11) має назву *формули Максвелла*.

### 2.1.3 Послідовність визначення переміщень за методом Мора

Для визначення переміщень за методом Мора необхідно виконати таку послідовність дій:

1. Побудувати допоміжну систему, навантажену одиничним навантаженням у точці перерізу, в якій необхідно визначити переміщення. Для визначення лінійних переміщень у заданому напрямі прикладають одиничну силу, для визначення кутових переміщень – одиничний момент.



- Для кожної ділянки системи записати вирази силових факторів у довільному перерізі заданої ( $M_p, N_p, Q_p$ ) і допоміжної ( $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$ ) систем.
- По ділянках у межах всієї системи обчислити інтеграли Мора. В процесі розрахунку деформації плоских балок, рам та арок виходять з формули (2.9), просторових систем – (2.10), ферм – за формулою Максвелла (2.11).
- Додатний знак обчисленого переміщення означає, що напрям переміщення збігається з вибраним напрямом одиничної сили. Від'ємний знак свідчить про те, що дійсний напрям переміщення є протилежним напрямку одиничної сили.

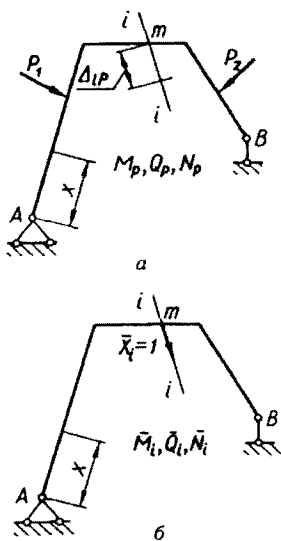


Рисунок 2.7 – До визначення переміщень в напрямі  $i-i$

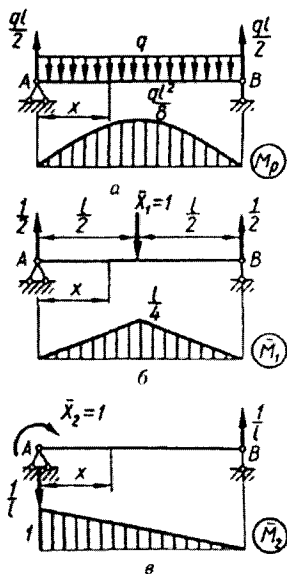


Рисунок 2.8 – Визначення прогину і кута повороту

Розглянемо декілька прикладів застосування методу Мора для визначення пружних переміщень перерізів балок і стрижневих систем.

Припустимо, що потрібно визначити стрілу прогину  $\Delta_{1P} = f = u_{max}$  та кут повороту  $\Delta_{2P}$  на опорі шарнірно обпертої балки сталої жорсткості ( $EJ = const$ ), навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q$  (рис. 2.8, а). Дослідити вплив поперечних сил  $Q_y$  на величину максимального прогину  $f = u_{max}$ .

Для визначення прогину посередині прогону однопролітної двоопорної балки прикладаємо в цьому місці допоміжної балки

(рис. 2.8, б) одиничну зосереджену силу  $\bar{X}_1 = 1$ . В довільному перерізі першої ділянки балки ( $0 \leq x \leq l/2$ ):

$$M_P(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}; \quad \bar{M}_1(x) = \frac{1}{2}x.$$

Враховуючи симетрію, отримаємо:

$$\Delta_{1P} = 2 \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EJ} dx = \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} \left[ \frac{x}{2} \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) \right] dx = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}.$$

Врахуємо вплив дотичних напружень на шуканий прогин, припускаючи, що балка має прямокутний переріз. Очевидно, за  $0 \leq x \leq l/2$

$$Q_P(x) = \frac{ql}{2} - qx; \quad \bar{Q}_1(x) = \frac{1}{2}.$$

Прогин, спричинений дією поперечних сил  $Q$ , на підставі формули (2.8) дорівнює:

$$\Delta_{1P}^Q = 2 \int_0^{l/2} \left( k \frac{\bar{Q}_1 Q_P}{GF} \right) dx = \frac{2k}{GF} \int_0^{l/2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{ql}{2} - qx \right) \right] dx = k \frac{ql^2}{8GF} = \frac{2}{5} \frac{ql^2}{EJ}.$$

Коефіцієнт форми для прямокутного перерізу:

$$k = 1, 2, \quad \text{а} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \approx \frac{3}{8}E.$$

Підсумовуючи вирази для переміщень, знаходимо, що:

$$\Delta_{1P} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{2}{5} \frac{ql^2}{EF} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \left( 1 + 2,6 \frac{h^2}{l^2} \right).$$

Вплив поперечної сили  $Q$  відображає другий доданок у дужках. У разі відношення висоти прямокутного перерізу до довжини прогону  $h/l = 1/10$  цей доданок не перевищує 0,026 (2,6%). Отже, прогин, спричинений поперечною силою, становить менше, ніж 3% від величини прогину, спричиненого згинальним моментом  $M_P$ .

Для визначення кута повороту опорного перерізу допоміжну балку навантажуюмо одиничним моментом  $\bar{X}_2 = 1$  (рис. 2.8, в). За  $0 \leq x \leq l/2$  маємо:

$$M_P(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}; \quad \bar{M}_2(x) = 1 - \frac{x}{l};$$

$$\Delta_{2P} = \int_0^l \left( \frac{\bar{M}_2(x)M_P(x)}{EJ} \right) dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left( \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right) dx = \frac{ql^3}{24EJ}. \quad (2.12)$$

Додатний знак обчисленого переміщення свідчить про те, що напрям повороту збігається з вибраним напрямом одиничного моменту  $\bar{X}_2 = 1$ .

Для визначення вертикального переміщення вузла  $B$  шарнірно-стрижневої системи (рис. 2.9,  $a$ ), яка складається з двох однакових стрижнів  $AB$  і  $BC$  постійного поперечного перерізу, розглянемо допоміжну систему (рис. 2.9,  $b$ ).

Рівняння рівноваги виокремленого вузла  $B$  дають можливість визначити невідомі зусилля в стрижнях для обох станів (рис. 2.9,  $a, б$ ):

Стрижень	$N_P$	$\bar{N}_1$
$AB$	$P$	$1$
$BC$	$-P$	$-1$

З формули Максвелла (2.11) маємо:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\bar{N}_1 N_P l}{EF} = 2 \frac{Pl}{EF}. \quad (2.13)$$

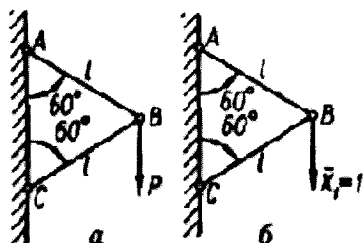


Рисунок 2.9 – Визначення вертикального переміщення ферми

**Приклад.** Розміщена в горизонтальній площині рама  $ABC$  (рис. 2.10,  $a$ ) складається з двох стрижнів однакового круглого поперечного перерізу. Визначимо вертикальне переміщення точки  $C$ . Допоміжну систему зображено на рис. 2.10,  $b$ .

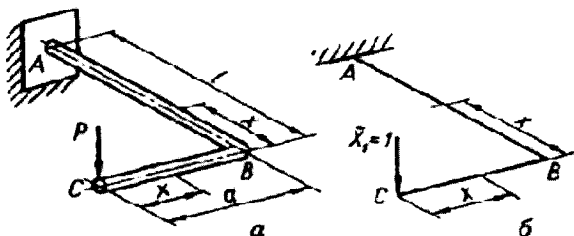


Рисунок 2.10 – Визначення вертикального переміщення рами  
Переміщення  $\Delta_{1P}$  можна визначити з формули (2.8). Для довільних перерізів двох ділянок маємо:

- для I ділянки ( $0 \leq x \leq l/2$ ):

$$M_P = P \cdot x ; \quad M_{PKP} = 0 ; \quad \overline{M}_1 = x ; \quad M_{1KP} = 0 ;$$

- для II ділянки ( $0 \leq x \leq l$ ):

$$M_P = P \cdot x ; \quad M_{PKP} = P \cdot a ; \quad \overline{M}_1 = x , \quad M_{1KP} = a ;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int_s \left( \frac{\overline{M}_1 M_P}{EJ} \right) dx + \int_s \left( \frac{\overline{M}_{1KP} M_{PKP}}{GJ_P} \right) dx = \\ &= \int_0^a \left( \frac{Px^2}{EJ} \right) dx + \int_0^l \left( \frac{Px^2}{EJ} \right) dx + \int_0^l \left( \frac{Pa^2}{GJ_P} \right) dx = \\ &= \frac{P(a^3 + l^3)}{3EJ} + \frac{Pa^2 l}{GJ_P} \end{aligned} \quad (2.14)$$

#### 2.1.4 Обчислення інтеграла Мора за способом Верещагіна

Визначення переміщень за допомогою інтеграла Мора потребує формування аналітичних виразів для внутрішніх силових факторів від зовнішнього навантаження (заданого) і від одиничних сил для кожної навантаженої ділянки кожного елемента стрижневої системи. Якщо ділянок навантаження багато, то такі розрахунки стають досить кропіткими. Проте обчислення інтегралів Мора істотно спрощується, якщо одна з епор (у дійсному чи одиничному стані) прямолінійна у випадку сталого по довжині поперечного перерізу. Тоді складати аналітичні функції для силових факторів та інтегрувати їх не обов'язково.

Для систем, що складаються з прямих стрижнів, епори внутрішніх силових факторів від одиничного навантаження (зосередженої сили або пари) завжди обмежено прямими лініями (рис. 2.11).

Обчислення інтеграла Мора можна реалізувати за способом визначення, який був запропонований О. М. Верещагіним і має назву *способу Верещагіна*. Згідно з цим способом (графоаналітичний спосіб) загальна формула (2.9) для визначення пружних переміщень у системах з прямих стрижнів набуває вигляду:

$$\Delta_{iP} = \int_l \left( \frac{\overline{M}_1 M_P}{EJ} \right) dx = \frac{\Omega \overline{M}_c}{EJ} . \quad (2.15)$$

де  $\Omega$  – площа епюри  $M_P$ ,

$c$  – її центр ваги,

$\overline{M}_c$  – ордината епюри від одиничного навантаження під центром ваги епюри  $M_P$ .

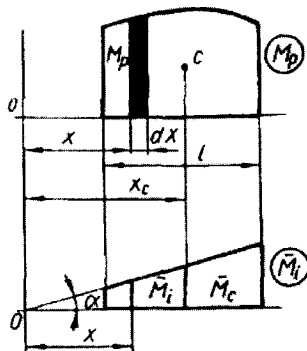


Рисунок 2.11 – До виведення формули Верещагіна

**Інтеграл Мора** дорівнює добутку площі епюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної епюри від одиничного навантаження, розміщену під центром ваги епюри від заданого зовнішнього навантаження.

Обчислення за формулою (2.15) виконують по тих ділянках, на яких епора від одиничного навантаження є прямолінійною (рис. 2.12). За умови, коли обидві епюри в межах однієї ділянки прямолінійні, можна помножити площу будь-якої з них на ординату іншої під центром ваги першої.

Щоб не «зв'язувати» себе будь-яким правилом знаків та уникати помилок, доцільно епюри вантажних та одиничних епор згинальних моментів будувати на стиснутих волокнах стрижня. Тоді перемножування епор, відкладених по один бік даватиме знак «плюс», а в різні боки – «мінус».

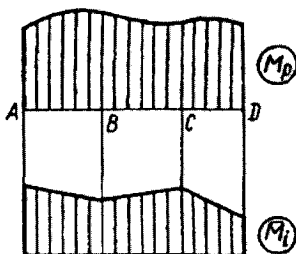


Рисунок 2.12 – Розбиття епор на характерні ділянки

За умови складної епюри  $M_p$  (рис. 2.13), потрібно розбити її на прості фігури, для яких легко визначити і площу, і положення центра ваги  $S_k$ . Водночас кожна з площ потрібно помножити на ординату одиничної

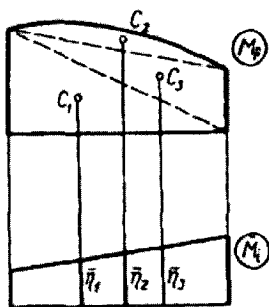
епюри під центром ваги відповідної площі. Ординати в цьому разі зручно позначати замість  $\overline{M_{Ck}}$  літерами  $\eta_k$ , де  $k = 1; 2; \dots$

Отже:

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\Omega_k \eta_k}{EJ} \right). \quad (2.16)$$

Значення переміщень від дії осевих і поперечних сил, а також крутних моментів визначають відповідно за формулами:

$$\begin{aligned} \Delta_{iPN} &= \sum \frac{\Omega \overline{N_C}}{EF}; & \Delta_{iPQ} &= \sum k \frac{\Omega \overline{Q_C}}{GF}; \\ \Delta_{iPKP} &= \sum \frac{\Omega \overline{M_{CKP}}}{GJ_P}, \end{aligned}$$



де  $\Omega$  – площа епюри  $N_P$  або  $Q_P$ , або  $M_{PKP}$  від заданого навантаження;

$\overline{N_C}$ ,  $\overline{Q_C}$ ,  $\overline{M_{CKP}}$  – ординати відповідних епюр осевих, поперечних сил і крутних моментів від одиничного навантаження, взяті під центрами ваги вантажних епюр  $N_P$ ,  $Q_P$ ,  $M_{PKP}$ .

Рисунок 2.13 – Розбиття епюри на ділянки з простих фігур

Спосіб Верещагіна можна використати в разі розрахунку рамних конструкцій (конструкцій, в яких кути в місцях з'єднання окремих стрижнів є жорсткими до деформації та залишаються жорсткими після навантаження).

Розглянемо приклад визначення переміщення за способом Верещагіна у стрижневій системі.

Нехай необхідно визначити прогин у точці  $D$  і кут повороту перерізу  $B$  консолі, зображеної на рис. 2.14, а. Відповідні допоміжні (одиничні) стани та епюри згинальних моментів  $M_P$  і  $\overline{M}_i$  зображено на рис. 2.14, б, в.

Прогин у точці  $D$  балки за способом Верещагіна:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\Omega \overline{M_{C1}}}{EJ}.$$

На ділянці  $AB$  площа вантажної  $M_P$  епюри від дії розподіленого навантаження  $q$  становить  $\Omega_{(q)} = (1/6) \cdot q \cdot a^3$ . Центр ваги цієї площі  $\Omega_{(q)}$ , обмеженої квадратичною параболою  $q \cdot (a-x)^2 / 2$  (рис. 2.14, а), розміщений на відстані  $(3/4)a$  від точки  $B$ . Ордината допоміжної епюри  $\overline{M_{C1}} = 7a/4$ .

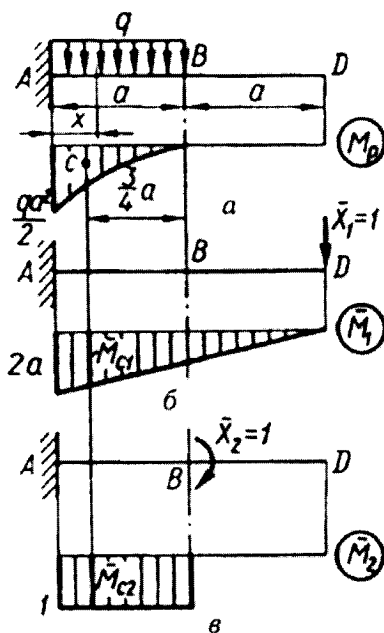


Рисунок 2.14 – Визначення переміщень за способом Верещагіна

На ділянці  $BD$ :  $\Omega = 0$ . Отже:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \frac{qa^3}{6} \frac{7}{4} a = \frac{7}{24} \frac{qa^4}{EJ}.$$

Допоміжну систему навантажимо одиничною парою  $\bar{X}_2 = 1$  з метою визначення кута повороту перерізу  $B$ . Очевидно,  $\bar{M}_{C2} = 1$ . Отже, кут повороту перерізу  $B$ :

$$\Delta_{2P} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_{C2}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{qa^3}{6} \cdot 1 = \frac{qa^3}{6EJ}.$$

Для визначення переміщень використовують також і інші способи, які ґрунтуються на способі Верещагіна. А саме – спосіб Верещагіна-Даркова та спосіб Сімпсона-Карнаухова (додаток Ж).

## 2.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

### Задача 3. Розрахунок на міцність та жорсткість у разі згину бруса малої кривини

Для заданого кривого бруса (рис. 2.15) підібрати двотавровий переріз, виходячи з умови міцності у разі згину за нормальними напруженнями. Вважати допустиме напруження таким:  $\sigma_{adm} = [\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Визначити кут повороту перерізу бруса та горизонтальне переміщення перерізу в т. А. Радіус кривини осі бруса 3 м, матеріал стрижня – Ст3. Розрахункова схема на рис. 2.15.

Дані для розрахунку взяти з таблиці 2.1.

План розв'язування:

1. З побудованих епор внутрішніх силових факторів визначити небезпечний переріз бруса.
2. З умови міцності за нормальними напруженнями визначити розміри двотаврового перерізу як для бруса малої кривини. Запропонувати раціональне розташування перерізу бруса.
3. Обчислити інтеграл Мора та визначити горизонтальне переміщення і кут повороту в точці А, нехтуючи впливом осьової і поперечної сил.

**Увага!** Під час виконання завдання бажано виконати перевірку інтегрування, рекомендуємо користуватись сучасними математичними прикладними пакетами програм (Excel, MathCAD, Math Lab, Mathematical тощо).

Таблиця 2.1

№	$P_1,$ кН	$P_2,$ кН	$M,$ кН·м	$\alpha,$ рад.
0	11	2	3	$\pi/6$
1	2	1	2	$\pi/4$
2	3	2	1	$\pi/4$
3	4	1	2	$\pi/6$
4	5	2	1	$\pi/4$
5	3	3	3	$\pi/4$
6	2	4	2	$\pi/6$
7	3	2	2	$\pi/4$
8	2	3	3	$\pi/4$
9	1	4	3	$\pi/6$



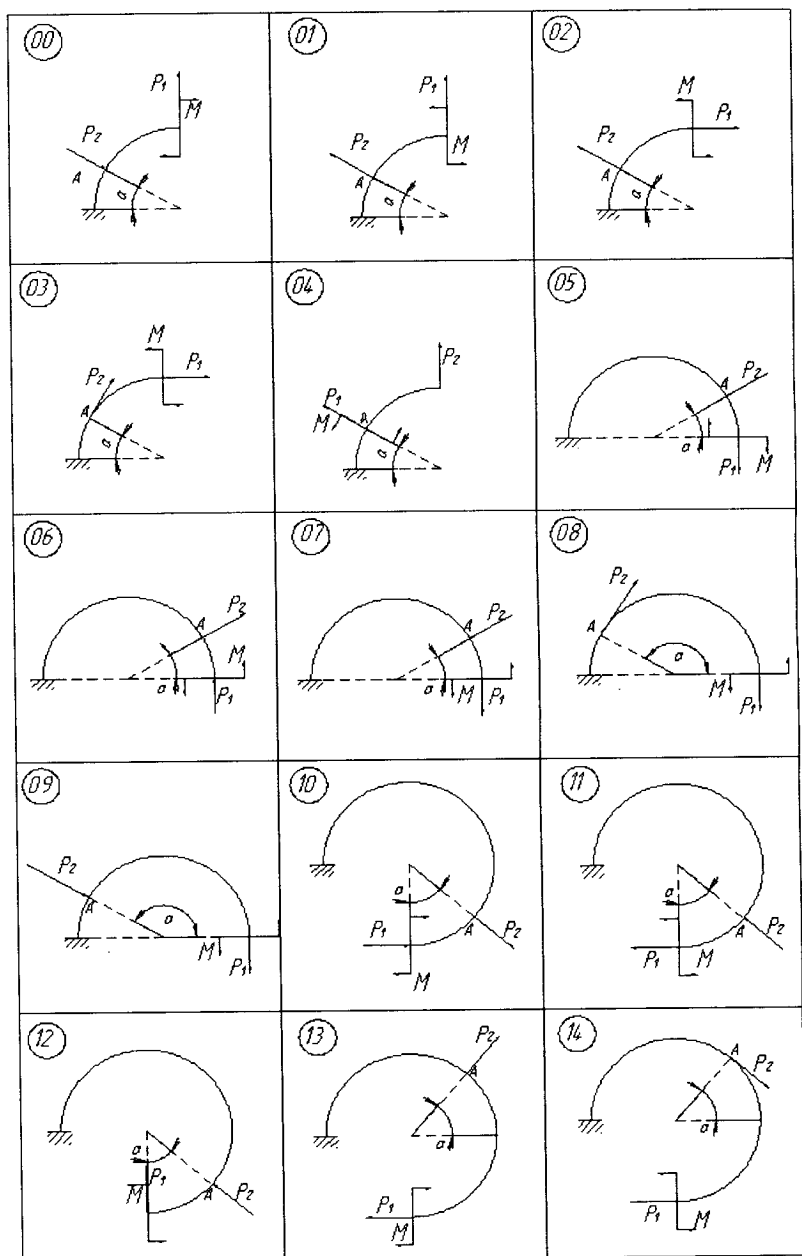


Рисунок 2.15 – Схеми до виконання задачі 3

### Приклад виконання задачі 3

Підібрати двотавровий переріз для заданого кривого бруса (рис. 2.16), Визначити кутове, горизонтальне та вертикальне переміщення перерізу в точці прикладення сили  $P_2$ . Матеріал стрижня – сталь Ст.3, допустимі нормальні напруження  $\sigma_{adm} = [\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

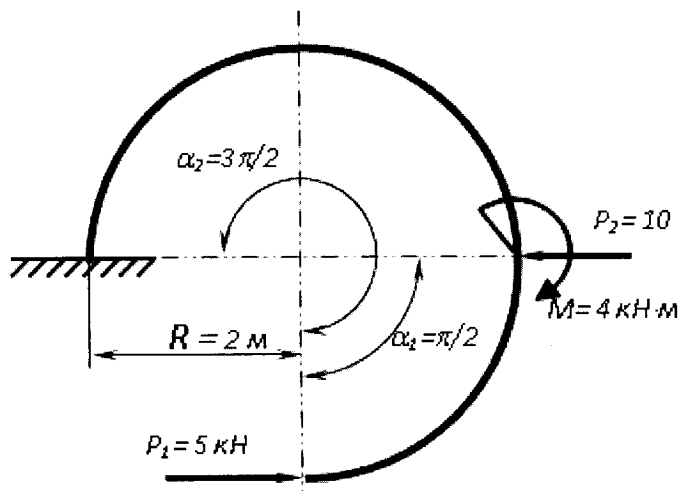


Рисунок 2.16 – Схема до прикладу задачі 3

**Дано:**

$$P_1 = 5 \text{ кН}; \quad P_2 = 10 \text{ кН};$$

$$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad R = 2 \text{ м},$$

$$\alpha_1 = \pi/2, \quad \alpha_2 = 3\pi/2, \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

**Знайти:**

$$N(\varphi), Q(\varphi), M(\varphi);$$

№ двотаврового перерізу;

$$\theta_B, f_B^\uparrow, f_B^{\leftrightarrow} - ?$$

#### Розв'язування

Будуємо епюри внутрішніх силових факторів.

Розділяємо стрижень на дві ділянки. Складаємо рівняння поздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів для кожної з ділянок (рис. 2.17).

$$\text{Ділянка АВ:} \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2.$$

$$N(\varphi_1) = -P_1 \cdot \cos(\varphi_1) = -5 \cdot \cos(\varphi_1);$$

$$Q(\varphi_1) = -P_1 \cdot \sin(\varphi_1) = -5 \cdot \sin(\varphi_1);$$

$$M(\varphi_1) = -P_1 \cdot R \cdot [1 - \cos(\varphi_1)] = -10 \cdot [1 - \cos(\varphi_1)].$$

Ділянка BC:  $0 \leq \varphi_2 \leq \pi$ .

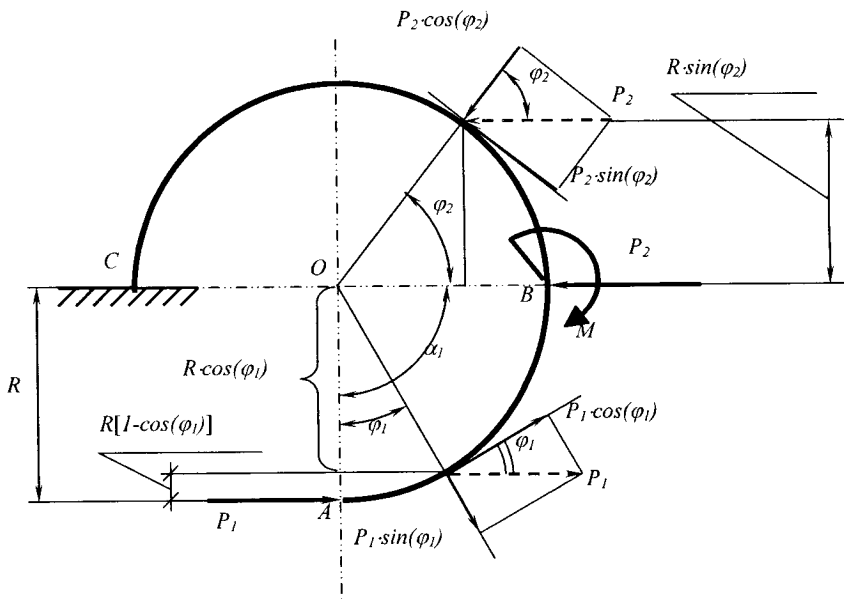


Рисунок 2.17 – Розрахункова схема

$$N(\varphi_2) = -P_1 \cdot \cos(\varphi_2 + \alpha_1) - P_2 \cdot \sin(\varphi_2) = -5 \cos(\varphi_2 + \pi/2) - 10 \sin(\varphi_2) = -5 \cdot \sin(\varphi_2);$$

$$Q(\varphi_2) = -P_1 \cdot \sin(\varphi_2 + \alpha_1) + P_2 \cdot \cos(\varphi_2) = -5 \cdot \sin(\varphi_2 + \pi/2) + 10 \cdot \cos(\varphi_2) = 5 \cdot \cos(\varphi_2);$$

$$M(\varphi_2) = -P_1 \cdot R \cdot [1 - \cos(\varphi_2 + \alpha_1)] + P_2 \cdot R \cdot \sin(\varphi_2) + M =$$

$$= -10 \cdot [1 - \cos(\varphi_2)] + 20 \cdot \sin(\varphi_2 - \pi/2) + 4 = -6 + 10 \cdot \sin(\varphi_2).$$

Значення внутрішніх силових факторів в перерізах, визначені з інтервалом в  $\pi/6$  ( $30^\circ$ ), заносимо в табл. 2.2.

За отриманими значеннями (табл. 2.2) будемо на осі криволінійного стрижня епюри поздовжніх сил  $N(\varphi)$ , поперечних сил  $Q(\varphi)$  та згинальних моментів  $M(\varphi)$  (рис. 2.18, а, б, в).

Таблиця 2.2

	Ділянка АВ				Ділянка ВС							
	$0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$				$0 \leq \varphi_2 \leq \pi$							
	$0^0$	$30^0$	$60^0$	$90^0$	$0^0$	$30^0$	$60^0$	$90^0$	$120^0$	$150^0$	$180^0$	
$N(\varphi), \text{кН}$	-5	-4.33	-2.5	0	0	-2.5	-4.33	-5	-4.33	-2.5	0	
$Q(\varphi), \text{кН}$	0	-2.5	-4.33	-5	5	4.33	2.5	0	-2.5	-4.33	-5	
$M(\varphi), \text{кН}\cdot\text{м}$	0	-1.34	-5	-10	-6	-1	2.66	4	2.66	-1	-6	

Ординати згинальних моментів  $M(\varphi)$  без вказання знака відкладено в бік стиснутих волокон. За прийнятим правилом знаків ординати зі знаком «+» до центра кривини від осі стрижня, «-» від центра кривини від осі стрижня. У випадку побудови на розтягнутих волокнах – навпаки.

### 1. Підбираємо переріз за умови міцності під час згинання

За рахунок малості кривини стрижня впливом поперечних та поздовжніх сил нехтуємо. Допустимим є також нехтування зміщенням нейтральної лінії від осі стрижня.

Отже умова міцності у разі згину:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{zmax}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Необхідний момент опору:

$$W_z \geq \frac{M_{zmax}}{[\sigma]} = \frac{47,174 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 297,8 \cdot 10^{-6} (\text{м}^3) = 297,8 \text{ см}^3.$$

За сортаментом підбираємо двотавр №24а (додаток В), для якого

$$W_z = 317 \text{ см}^3, \quad I_z = 3800 \text{ см}^4.$$

### 2. Визначаємо кутове, горизонтальне та вертикальне переміщення перерізу в т. А

Для плоского стрижня малої кривини згідно з формулою Мора маємо:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \left( \frac{\overline{M}_{iz} M_{Pz}}{EJ_z} + k_y \frac{\overline{Q}_{iy} Q_{Py}}{GF} + \frac{\overline{N}_i N_P}{EF} \right) ds.$$

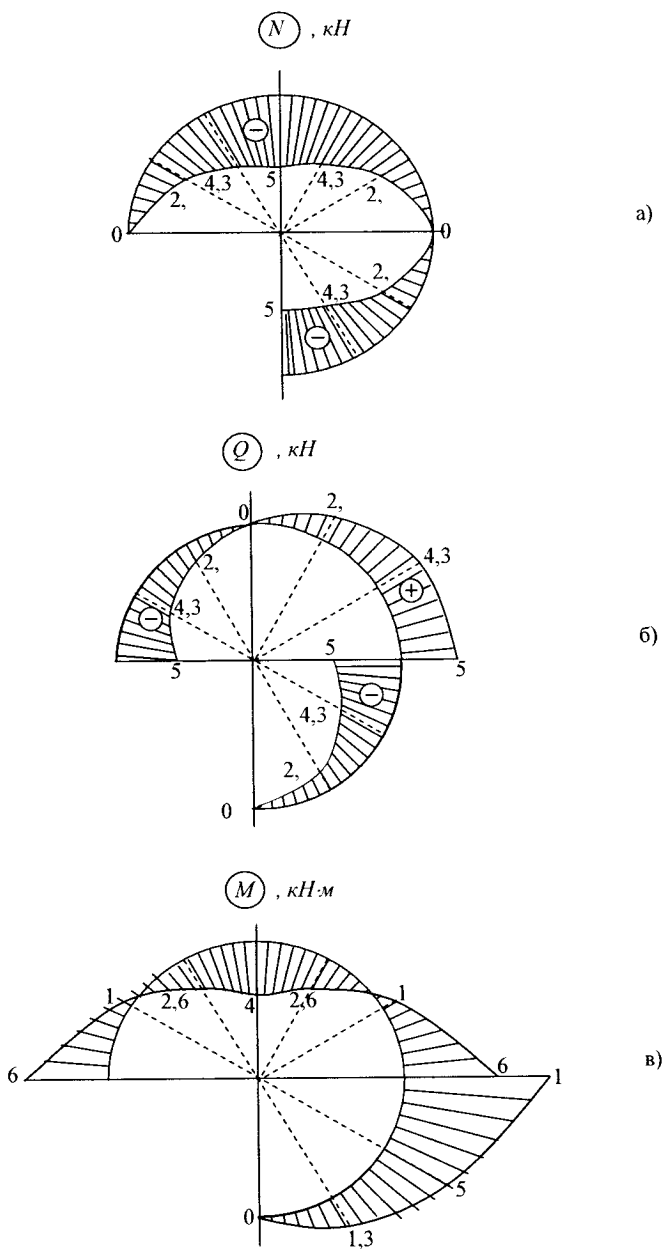


Рисунок 2.18 – Епюри внутрішніх зусиль

Нехтуючи переміщеннями від дії поперечних та поздовжніх сил, переходимо до інтегрування за центральним кутом  $\varphi_2$  ( $0 \leq \varphi_2 \leq \pi$ ):

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_i} M_P}{EJ_z} \right) ds = \int_0^\alpha \frac{\overline{M_i}(\varphi_2) M_P(\varphi_2)}{EJ_z} R d\varphi_2 = \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi \overline{M_i}(\varphi_2) M_P(\varphi_2) d\varphi_2.$$

### 3. Кутове переміщення перерізу

Прикладемо в т. В перерізу одиничний згинальний момент  $\overline{X_1}$  для визначення кутового переміщення. Значення крутного моменту (рис. 2.19):

$$M_P(\varphi_2) = -6 + 10 \cdot \sin(\varphi_2).$$

Згинальний момент в перерізі від цієї сили:

$$\overline{M_1}(\varphi_2) = \overline{X_1} = 1.$$

$$\begin{aligned} \theta_B = \Delta_{1P} &= \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi \overline{M_1}(\varphi_2) M_P(\varphi_2) d\varphi_2 = \frac{R}{EJ_z} \int_0^\pi (-6 + 10 \cdot \sin(\varphi_2)) d\varphi_2 = \\ &= \frac{R}{EJ_z} \left[ -6 \int_0^\pi d\varphi_2 + 10 \int_0^\pi \sin(\varphi_2) d\varphi_2 \right] = \frac{R}{EJ_z} [-6\pi + 10 \cdot 2] = \\ &= \frac{2}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} [-6\pi + 10 \cdot 2] \cdot 10^3 = 2,88 \cdot 10^{-4} (\text{рад}) \approx 0,017^\circ. \end{aligned}$$

Використовуючи допоміжну таблицю додатка Д, знаходимо значення інтегралів в виразі. Отриманий знак «+» означає, що переріз повертається за напрямком одиничного моменту  $\overline{X_1} = 1$ .

### 4. Вертикальне переміщення перерізу

Прикладемо в т. В вертикальну одиничну силу  $\overline{X_2} = 1$  для визначення вертикального переміщення перерізу в т. В (рис. 2.20).

Згинальний момент в перерізі від цієї сили:

$$\overline{M_2}(\varphi_2) = -\overline{X_2} \cdot R(1 - \cos(\varphi_2)) = -1 \cdot 2(1 - \cos(\varphi_2)) = -2 + 2 \cos(\varphi_2).$$

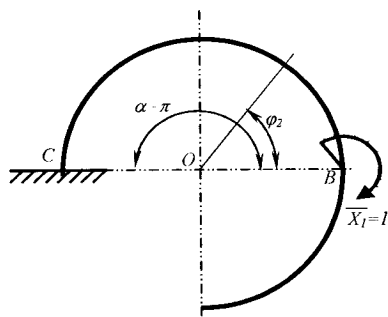


Рисунок 2.19 – Визначення кутового переміщення

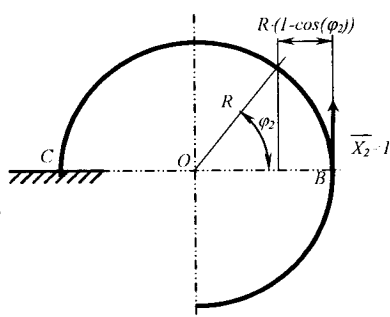


Рисунок 2.20 – Визначення вертикального переміщення

$$\begin{aligned}
 f_B^1 &= \Delta_{2P} = \frac{R}{E \cdot J_z} \int_0^\pi (\overline{M}_2(\varphi_2) \cdot M_P(\varphi_2)) d\varphi_2 = \\
 &= \frac{R}{E J_z} \int_0^\pi [-2 + 2\cos(\varphi_2)] [-6 + 10\sin(\varphi_2)] d\varphi_2 = \\
 &= \frac{R}{E J_z} \int_0^\pi (-12 + 20\sin(\varphi_2) - 12\cos(\varphi_2) + 20\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2)) d\varphi_2 = \\
 &= \frac{R}{E J_z} \left[ 12 \int_0^\pi d\varphi_2 - 20 \int_0^\pi \sin(\varphi_2) d\varphi_2 - 12 \int_0^\pi \cos(\varphi_2) d\varphi_2 + 20 \int_0^\pi \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_2) d\varphi_2 \right] = \\
 &= \frac{R}{E J_z} [12\pi - 20 \cdot 2 - 12 \cdot 0 + 20 \cdot 0] = \frac{2 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} [12\pi - 40] \approx \\
 &\approx -0,000577(\text{м}) \approx -0,577\text{мм}.
 \end{aligned}$$

Отриманий знак «-» означає, що переріз переміщується в напрямі, протилежному напрямку одиничної сили  $\overline{X}_2 = 1$ , тобто вниз.

### 5. Горизонтальне переміщення перерізу

Прикладемо в т. В горизонтальну одиничну силу  $\overline{X}_3 = 1$  для визначення горизонтального переміщення (рис. 2.21).

Згинальний момент в перерізі від цієї сили:

$$\overline{M}_3(\varphi_2) = -\overline{X}_3 \cdot R \sin \varphi_2 = -1 \cdot 2 \sin(\varphi_2) = -2 \sin(\varphi_2).$$

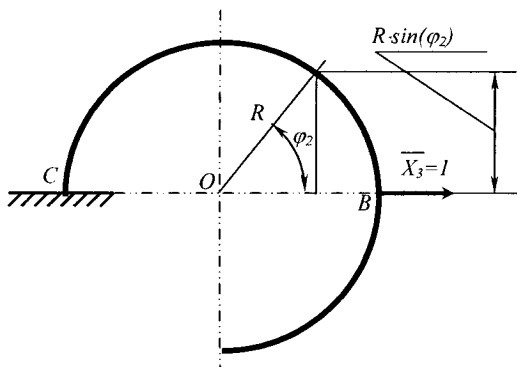


Рисунок 2.21 – Визначення горизонтального переміщення

$$\begin{aligned}
 f_B^{\leftarrow} &= \Delta_{3P} = \frac{R}{E \cdot J_z} \int_0^{\pi} (\overline{M}_3(\varphi_2) \cdot M_P(\varphi_2)) d\varphi_2 = \\
 &= \frac{R}{E J_z} \int_0^{\pi} (-2 \sin(\varphi_2) \cdot (-6 + 10 \sin(\varphi_2)) d\varphi_2) = \\
 &= \frac{R}{E J_z} \int_0^{\pi} [12 \sin(\varphi_2) - 20 \sin^2(\varphi_2)] d\varphi_2 = \\
 &= \frac{R}{E J_z} \left[ \int_0^{\pi} \sin(\varphi_2) d\varphi_2 - 20 \int_0^{\pi} \sin^2(\varphi_2) d\varphi_2 \right] = \\
 &= \frac{2 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} [12 \cdot 2 - 20 \cdot 1,571] = -0,00187(\text{м}) = -1,87\text{мм}.
 \end{aligned}$$

Отриманий знак « $\leftarrow$ » означає, що переріз переміщується в напрямі, протилежному напрямку одиничної сили  $\overline{X}_3 = 1$ , тобто ліворуч.

Повне переміщення знаходимо за формулою:

$$f = \sqrt{(f_B^{\uparrow})^2 + (f_B^{\leftarrow})^2} = \sqrt{(0,577)^2 + (1,87)^2} = 1,96 \text{ (мм)}.$$

**Відповідь:** двотавр №14,  $\theta_B = 0,017^\circ$ ,  $f = 1,96 \text{ мм}$ ,  
 $f_B^{\uparrow} = 0,577 \text{ мм}$ ,  $f_B^{\leftarrow} = 1,87 \text{ мм}$ .



### Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 3)

1. Як визначають роботу зовнішніх статично прикладених силових факторів через їх величину та відповідні деформації перерізів пружного тіла?
2. Як визначається потенціальна енергія деформації в загальному випадку навантаження стрижня?
3. Що таке «узагальнена сила» та «узагальнене переміщення»? Що означає відповідність між ними?
4. Записати інтеграл Мора для загального випадку навантаження стрижня.
5. Які епюри необхідно побудувати для розрахунку на міцність кривих плоских стержнів? Поясніть необхідність кожної епюри.
6. Записати інтеграл Мора у разі визначення переміщень перерізу кривого стрижня та пояснити його.
7. За яким алгоритмом визначаються переміщення в стрижневих системах довільної конфігурації?
8. Що називається вантажним станом?
9. Що називається одиничним станом?
10. Які відмінності розрахунку лінійного і кутового переміщення стрижня малої кривини?
11. Що означає знак мінус перед числом визначеного переміщення?
12. Визначити повне переміщення перерізу та напрямок цього переміщення.
13. Визначити переміщення (кутове або лінійне) вказаного перерізу.
14. Чому для розрахунку переміщень стрижневих конструкцій використовують лише залежності згинального моменту?
15. Як можна спростити розрахунки, використовуючи властивості геометричної та вантажної симетрії?

### 3 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ

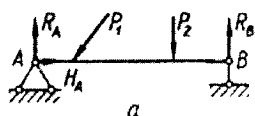
#### 3.1 Короткі теоретичні відомості. Основні поняття та означення

Розрахунок статично невизначуваних систем зводиться до того, що знаючи розрахункову схему, зовнішнє навантаження, механічні характеристики матеріалу елементів конструкції, необхідно визначити реакції та *внутрішні силові фактори* (ВСФ), напруження та переміщення (напружено-деформований стан) в елементах системи.

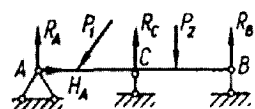
Як зазначено в [16], *статично невизначуваними системами* (СНС) називаються *системи*, силові фактори в елементах яких з рівнянь рівноваги визначити неможливо. У таких системах кількість в'язей більша за необхідну для рівноваги конструкції. Отже, деякі в'язі виявляються в цьому розумінні «зайвими», а зусилля в них – «зайвими невідомими». За кількістю зайвих в'язей або зайвих невідомих силових факторів встановлюють ступінь статичної невизначуваності системи.

Оскільки невідомих зусиль більше, ніж рівнянь рівноваги, то розкриття статичної невизначуваності системи можливе лише за допомогою додаткових рівнянь, що доповнюють кількість рівнянь статички до кількості невідомих. Ці додаткові рівняння мають відобразити особливості в'язей, що накладено на стрижневу систему. Ці рівняння може бути складено за допомогою уявлення та зображення схеми можливих переміщень перерізів елементів конструкції за її деформування, тому їх називають *рівняннями сумісності переміщень* системи.

Розглянемо більш загальні випадки статично невизначуваних систем. Основну увагу приділимо статично невизначуваним балкам та рамам.



а



б

На рис. 3.1, а зображено двоопорну однопролітну шарнірно опертую балку. Система є статично визначуваною і геометрично незмінною. Всі три реакції ( $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$ ) визначаються з трьох умов рівноваги для плоскої системи сил. Використовуючи метод перерізів, легко визначити внутрішні силові фактори  $Q_v$ ,  $M_z$  для будь-якого перерізу балки.

Додамо ще одну в'язь: шарнірно-рухому опору в т. С (рис. 3.1, б). Внаслідок цього система набула більшої міцності та жорсткості. З погляду геометричної незмінюваності ця в'язь в перерізі С є зайвою. Тепер з трьох рівнянь рівноваги плоскої системи сил чотири реакції  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  визначити неможливо. Отже,

зображена на рис. 3.1, б балка є один раз статично невизначуваною.

Рисунок 3.1 –  
Статично визначена  
(а) і статично  
невизначена балка (б)

На рис. 3.2, а наведено два рази статично невизначену балку ( $M_A$ ,  $H_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ). Три рівняння рівноваги для такої плоскої системи дають змогу визначити три реакції в'язей з п'яти невідомих. Отже, система має дві зайвих в'язі. На рис. 3.2, б наведена статично визначена система. Ця система складається із консолі. Вона є *основною* для системи, яка була утворена встановленням шарнірно-рухомих опор у перерізах В та С (рис. 3.2, а).

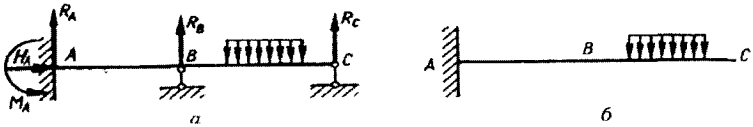


Рисунок 3.2 – Двічі статично невизначена

У конструкціях часто застосовують *рами* – статично невизначувані балки з ламаною віссю. Вони мають один або кілька жорстких вузлів на відміну від *ферм*, в яких стрижні з'єднані між собою шарнірами й навантажені силами, прикладеними у вузлах. У жорсткому вузлі рами торці з'єднаних стрижнів не зазнають відносних поворотів та переміщень.

Рамні конструкції можуть складатись з прямолінійних та криволінійних елементів. На рис. 3.3 зображено плоску раму, яка є два рази статично невизначуваною. В цьому прикладі для визначення п'яти реакцій зовнішніх в'язей маємо лише три рівняння рівноваги.

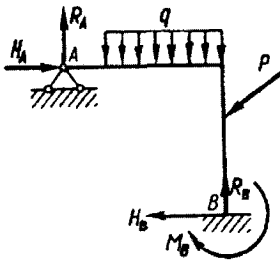


Рисунок 3.3 – Два рази СНС

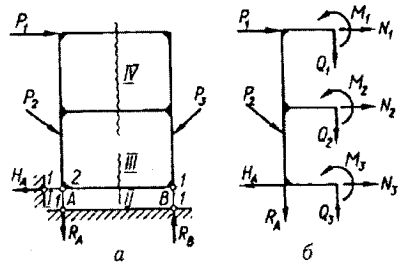


Рисунок 3.4 – Шість разів статично невизначена рама

Рами можуть мати довільне навантаження. Статична невизначуваність в загальному випадку може бути наслідком не тільки введення додаткових зовнішніх в'язей, а й умов утворення системи. Для рами, зображеної на рис. 3.4, а, реакції  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$  зовнішніх в'язей (опор)

легко визначити з рівнянь рівноваги. Проте після цього рівняння рівноваги не дають змоги визначити всі ВСФ в елементах рами. Розріжемо раму на дві частини й розглянемо рівновагу однієї з частин (рис. 3.4, б). Дію відкинутої частини на залишену замінимо в кожному з перерізів розрізу трьома ВСФ: осовою силою  $N_x$ , поперечною силою  $Q_v$  та згинальним моментом  $M_z$ . Отже, з трьох рівнянь рівноваги неможливо визначити дев'ять невідомих зусиль. Система шість разів статично невизначувана. Вона складається з двох замкнених безшарнірних контурів, кожен з яких є тричі статично невизначуваним.

Встановлення шарніра на осі стрижня (рис. 3.5, а) перетворює на нуль згинальний момент у цьому перерізі, отже, знижує ступінь СНС на одиницю. Встановлений шарнір називають *одиначним*. Очевидно, рама, зображена на рис. 3.5, а, п'ять разів статично невизначувана. Шарнір, розміщений у вузлі, де збігаються  $n$  стрижнів (рис. 3.5, в), знижує ступінь статичної невизначуваності на  $n - 1$ , оскільки замінює собою таку саму кількість одиначних шарнірів (рис. 3.5, з). Подібний шарнір називається *загальним*. Рама, зображена на рис. 3.5, б, є чотири рази статично невизначуваною.

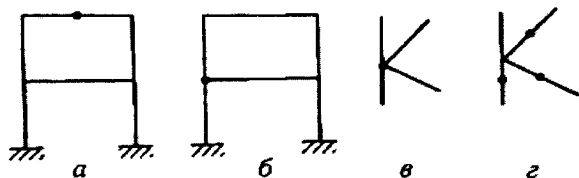


Рисунок 3.5 – П'ять разів статично невизначена рама

Ступінь невизначуваності плоских систем можна визначати за формулою:

$$s = 3k - u, \quad (3.1)$$

де  $s$  – ступінь статичної невизначуваності;

$k$  – кількість замкнених контурів за умови повної відсутності шарнірів;

$u$  – кількість шарнірів у перерахунку на одиначні.

Основа (земля) розглядається як стрижень. Наприклад, рама, наведена на рис. 3.4, має чотири замкнених контури; біля кожного шарніра вказано відповідну кількість одиначних шарнірів, водночас група стрижнів, жорстко зв'язаних між собою, вважається одним стрижнем.

Тож у наведеному прикладі  $k = 4$ ,  $u = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6$ .

Отже,  $s = 3 \cdot 4 - 6 = 6$ .

Для визначення ВСФ у СНС додатково до рівнянь статки становлять так звані рівняння *сумісності деформацій*. Насправді, зайві в'язі обмежують переміщення тих перерізів, до яких вони прикладені. Цю обставину й використовують для складання додаткових рівнянь, які разом

з рівняннями статички дають змогу визначити всі силові фактори в елементах системи.

Розглянемо етапи розрахунку СНС.

1. Визначити ступінь статичної невизначуваності системи, тобто кількість зайвих в'язей або зайвих зусиль.

2. Усуваючи зайві в'язі, замінити вихідну систему статично визначуваною, яку називають *основною системою (main system)*. Для однієї й тієї самої вихідної СНС можливі різні варіанти *основних систем*. Потрібно стежити лише за тим, щоб кожна з них була геометрично незмінною. До того ж раціональний вибір *основної системи* спрощує подальший розрахунок.

Отже, *основною системою називається будь-який із статично визначуваних варіантів заданої системи, здобутої звільненням її від зайвих в'язей*.

3. Завантажити основну систему заданим навантаженням і зайвими невідомими зусиллями, що замінюють дію усунених в'язей. Така система називається *еквівалентною системою (equivalent system)*.

4. Прирівняти до нуля переміщення точок перерізів прикладання невідомих зусиль у напрямку їх дії. Визначити з цих рівнянь значення зайвих невідомих. Для того, щоб *основна система* була *еквівалентною* вихідній системі, невідомі зусилля потрібно добирати так, щоб деформація *основної системи* не відрізнялася від деформації вихідної СНС. Найкращими загальними методами визначення переміщень відповідних точок *основної системи* є *метод Мора* або *спосіб Верещагіна*.

5. Визначити реакції після обчислення зайвих невідомих зусиль та побудувати епюри ВСФ. Добрати перерізи та перевірити міцність системи за відповідними умовами міцності.

За основні невідомі ( $X_1, X_2, X_3, \dots$ ) вибрано відповідні зусилля зайвих в'язей, тому запропоновані вище етапи розрахунку мають назву *метода сил (work method)*.

*Метод переміщень* частіше застосовують для розкриття статичної невизначуваності в курсі будівельної механіки.

### 3.1.1 Канонічні рівняння методу сил

Метод сил полягає в тому, що для заданої СНС дію зайвих в'язей замінюють невідомими силами. Значення цих сил знаходять з додаткових рівнянь, що відображають особливості відкинутих зайвих в'язей. Оскільки невідомими в рівняннях виступають сили, тому і назва його – «метод сил».

Додаткові рівняння переміщень, що визначають рівність нулю переміщень у напрямках зайвих невідомих, зручно складати в так званій *канонічній формі*, тобто за певною послідовністю.

Розглянемо один раз СНС (рис. 3.6, а). Як зайву невідому виберемо шарнірно-рухому опору в точці В. Тоді, навантаживши *основну систему*

заданим навантаженням і зайвою невідомою силою  $X_1$  (рис. 3.6, б), маємо рівняння:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (3.2)$$

де  $\Delta_{1P}$  – переміщення від заданого навантаження (рис. 3.6, в);

$\delta_{11}$  – переміщення в напрямі  $X_1$  від сили  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 3.6, д).

Рівняння (3.2) є канонічною формою рівняння переміщень для один раз СНС. З формули (3.2) маємо:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} \quad (3.3)$$

або, після обчислення переміщення  $\delta_{11}$  та  $\Delta_{1P}$  за формулою Верещагіна та даними з рис. 3.6, з, е, матимемо:

$$\delta_{11} = \frac{\overline{\omega_1 M_{C1}}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega_P \overline{M_{CP}}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{P \cdot l^2}{4} \left(-\frac{5}{6} l\right) = -\frac{5Pl^3}{48EJ}.$$

Після підстановки цих даних у формулу (3.3) остаточно знайдемо реакцію в опорі В:

$$X_1 = \frac{5}{16} P.$$

Для системи з двома зайвими в'язями, як, наприклад, на рис. 3.7, а, б матимемо систему рівнянь:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Для два рази СНС наведена система рівнянь є канонічною формою рівнянь переміщень.

За аналогією можна записати в канонічній формі рівняння переміщень для будь-якої  $n$  разів СНС:

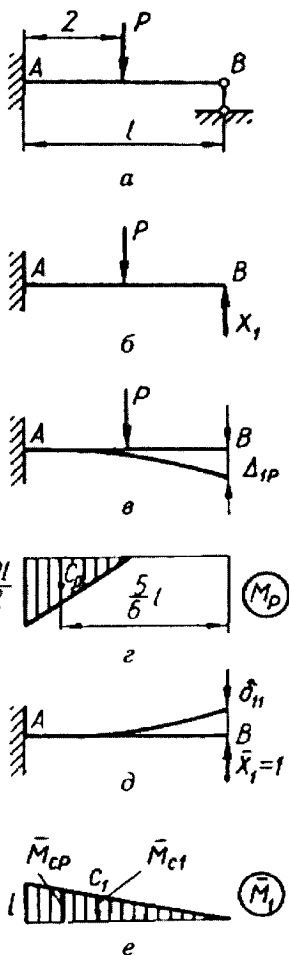


Рисунок 3.6 – Розкриття статичної невизначеності



Вочевидь всі ці переміщення додатні.

Питомі переміщення, в яких індекси не є однаковими ( $i \neq k$ ), називають *побічними коефіцієнтами* й визначають за формулами:

$$\delta_{12} = \int_S \left( \frac{\overline{M_1 M_2}}{EJ} \right) ds; \quad \delta_{13} = \int_S \left( \frac{\overline{M_1 M_3}}{EJ} \right) ds; \quad \dots; \quad \delta_{ik} = \int_S \left( \frac{\overline{M_i M_k}}{EJ} \right) ds.$$

Вони можуть бути додатними або від'ємними, а також дорівнювати нулю.

На підставі теореми про взаємність переміщень  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ .

Для СНС, у якій стрижневу систему складено з прямолінійних елементів, обчислення інтегралів можна реалізувати за способом Верещагіна. Для статично невизначуваної балки, зображеної на рис. 3.6, маємо:

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega_P \overline{M_{CP}}}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{\Omega_1 \overline{M_{C1}}}{EJ}; \quad \Omega_P = \frac{Pl^3}{8};$$

$$\overline{M_{CP}} = \frac{5}{6}l; \quad \Omega_1 = \frac{l^2}{2}; \quad \overline{M_{C1}} = \frac{2}{3}l.$$

Отже,

$$\Delta_{1P} = -\frac{5}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

З формули (3.3) знаходимо:

$$X_1 = \frac{5}{16}P.$$

### 3.1.2 Розрахунок переміщень у статично невизначуваних системах

Визначивши зайві невідомі зусилля, переміщення в статично невизначуваних системах можна знайти багатьма способами. Потрібно користуватися способами, які в кожному окремому випадку найбільш швидко приводять до результату. Наприклад, прогини та кути повороту перерізів статично невизначуваних балок, що зазнають складного навантаження, доцільно визначати за методом початкових параметрів. Спосіб обчислення інтеграла Мора, що є універсальним, може застосовуватися для усіх випадків. Його широко використовують для визначення переміщень у балках, рамах, фермах.

Обчислюючи переміщення за формулою Мора:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_i M_P}}{EJ} + \frac{\overline{Q_i Q_P}}{GF} + \frac{\overline{N_i N_P}}{EF} \right) ds, \quad (3.4)$$



потрібно розглянути задану систему під дією навантаження (епюри внутрішніх силових факторів  $M$ ,  $N$  та  $Q$  для СНС), а також під дією одиничного силового фактора, що відповідає шуканому переміщенню (одиничні епюри  $\overline{M}_i$ ,  $\overline{N}_i$ ,  $\overline{Q}_i$ ). Якщо ще й одиничні навантаження прикладати безпосередньо до заданої СНС, то кожен раз для побудови одиничних епор  $\overline{M}_i$ ,  $\overline{N}_i$ ,  $\overline{Q}_i$  знову доведеться розкривати статично невизначувану задачу. Проте цього можна уникнути, якщо врахувати, що вихідна СНС й *основна* статично визначувана система, яка навантажена заданими силами та знайденими зайвими невідомими, повністю тотожні за умовами роботи. Тому, визначаючи будь-яке переміщення, ми маємо право прикладати одиничне навантаження до основної СНС. Остання може бути вибрана за будь-яким можливим варіантом.

Як приклад обчислимо взаємні переміщення точок  $A_1$ ,  $A_2$  та  $B_1$ ,  $B_2$  відповідно в горизонтальному та вертикальному напрямках для рами, зображеної на рис. 3.8, *a*.

Визначимо лише ті переміщення, які спричинені згинанням, оскільки переміщеннями від поздовжніх деформацій та зсуву можна знехтувати. На рис. 3.8, *б* наведено складові сумарної епюри згинальних моментів у вигляді, зручному для розрахунку переміщень за способом Верещагіна.

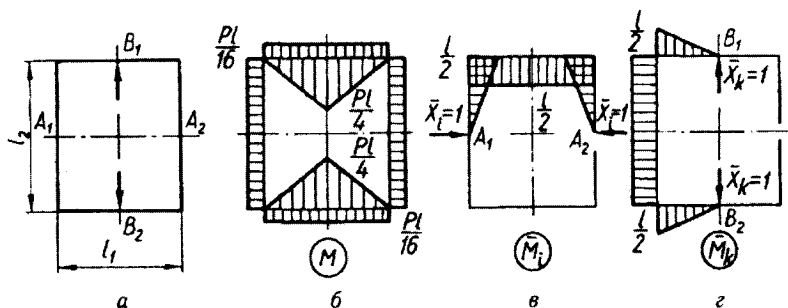


Рисунок 3.8 – До визначення взаємних переміщень

Для визначення взаємного переміщення точок  $A_1$ ,  $A_2$  в горизонтальному напрямі прикладаємо до основної системи в точках  $A_1$ ,  $A_2$  (рис. 3.8, *в*) одиничні сили  $\overline{X}_i = 1$ . Перемножуючи епюри вантажні  $M$  та одиничні  $\overline{M}_i$  і вважаючи, що  $l_1 = l_2 = l$ , знаходимо:

$$\Delta_{A_1-A_2} = \Delta_i = \frac{1}{EJ} \left( -\frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Pl^2}{8} \cdot \frac{l}{2} - 2 \frac{Pl^2}{32} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{Pl^3}{64EJ}$$

Для визначення взаємного вертикального переміщення точок  $B_1$  та  $B_2$ , прикладаємо до основної системи в цих точках дві одиничні сили

$\bar{X}_k = 1$  (рис. 3.8,  $\varepsilon$ ). Перемножуючи епюри  $M$  та  $\bar{M}_k$ , знаходимо, що:

$$\Delta_{B_1-B_2} = \Delta_k = \frac{1}{EJ} \left( \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} - 2 \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{6} + 2 \frac{Pl}{16} \cdot \frac{l^2}{8} \right) = \frac{5}{192} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}.$$

### 3.1.3 Контроль правильності розв'язання статично невизначуваної системи

Для перевірки правильності розв'язання СНС побудовані епюри внутрішніх силових факторів ( $N$ ,  $Q$  та  $M$ ) піддають перевірці за умов рівноваги та деформацій. Для цього потрібно вирізати вузол або будь-яку частину СНС та переконатися в її рівновазі. За виконання умови рівності нулю суми проєкцій або моментів усіх зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до цієї частини СНС

$$\sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0; \quad \sum M_{iz} = 0$$

роблять висновок про правильність розв'язання СНС.

Водночас потрібні величини потрібно безпосередньо брати з побудованих епор ( $N_x$ ,  $Q_y$  та  $M_z$ ).

Розглянемо, як потрібно перевірити умови рівноваги для епюри згинальних моментів, наведеної на рис. 3.9. Виріжемо вузли  $B$  та  $C$  (рис. 3.10). Дію відкинутих частин рами на вузли замінимо відповідно згинальними моментами  $M_{BA}$ ,  $M_{BC}$ ,  $M_{BE}$  та  $M_{CB}$ ,  $M_{CD}$ . Напрями моментів відповідають розміщенню епор на стиснутих волокнах.

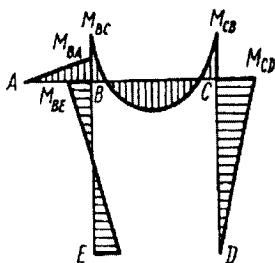


Рисунок 3.9 – Епюри згинальних моментів

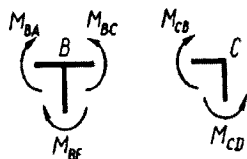


Рисунок 3.10 – Рівновага вузлів рами

З умов рівноваги вузла  $B$  випливає, що

$$M_{BA} + M_{BE} - M_{BC} = 0.$$

З умови рівноваги вузла  $C$  випливає, що моменти  $M_{CB}$  та  $M_{CD}$  мають бути однаковими за модулем та протилежні за напрямом. Аналогічно можна перевірити епюри  $N_x$  та  $Q_v$ .

Зазначимо, що перевірка умов рівноваги не є достатньою умовою правильності розрахунку переміщень, оскільки перевірка правильності побудови епюр за знайденими значеннями зайвих невідомих зусиль не дає підстав для міркування про правильність самих величин. Основним контролем є перевірка виконання умов нерозривності деформацій. Потрібно переконатися, що остаточно епюри узгоджуються з умовами опорних закріплень та нерозривності контуру.

Оскільки в заданій СНС переміщення в напрямі будь-якої зайвої в'язі дорівнює нулю, тому і добуток остаточної епюри згинальних моментів на епюру моментів якого завгодно  $i$ -го стану основної системи має дорівнювати нулю, тобто:

$$\sum \int_s \left( \frac{\overline{M}_i \cdot M}{EJ} \right) ds = 0.$$

За основну систему  $i$ -го стану доцільно вибирати систему, відмінну від взятої під час розрахунку переміщень. Кількість перевірок умов деформацій має дорівнювати кількості зайвих в'язей.

Під час розрахунку системи зайві невідомі обчислюються з певною похибкою, тоді й результати перевірки, зазвичай, мають певну похибку – шукані переміщення не дорівнюють нулю. Тому в процесі перевірки рекомендується окремо обчислювати суми додатних та від'ємних членів. Якщо різниця між обома сумами, виражена у відсотках до меншої з них, не перевищує 5%, то результат розрахунку можна вважати задовільним.

### 3.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

#### Задача 4. Розкриття статичної невизначуваності рами

Для заданої статично невизначеної сталевий рами (рис. 3.11) двотаврового поперечного перерізу побудувати епюри внутрішніх силових факторів. З умови міцності за нормальними напруженнями підібрати номер двотавра за  $\sigma_{adm} = [\sigma] = 160 \text{ МПа}$  та визначити величину переміщень вертикального  $f_A^\uparrow$ , горизонтального  $f_A^{\leftrightarrow}$  або кут повороту  $\theta_A$  перерізу в т. А, вказаного в таблиці 3.1.

План розв'язування:

1. Визначити ступінь статичної невизначуваності.
2. Вибрати основну та скласти еквівалентну систему.

3. Скласти канонічні рівняння методу сил, визначити коефіцієнти цих рівнянь та розв'язати отриману систему рівнянь.
4. Побудувати епюри поперечної  $Q$ , поздовжньої  $N$  сили та згинального моменту  $M_z$ .
5. Виконати деформаційну перевірку правильності розкриття статичної невизначуваності.
6. Підібрати двотавровий переріз рами з умови міцності за нормальними напруженнями.
7. Визначити переміщення перерізу в т. А, вказаного в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Ч.ч.	$q$ , кН/м	$P$ , кН	$M$ , кН·м	Переміщення
0	0	20	30	$f_A^{2*}$
1	30	20	0	$\theta_A$
2	20	0	40	$f_A^{4*}$
3	0	20	30	$\theta_A$
4	40	20	0	$f_A^{2*}$
5	30	0	20	$\theta_A$
6	0	20	10	$f_A^{4*}$
7	10	20	0	$\theta_A$
8	20	0	60	$f_A^{2*}$
9	0	20	50	$\theta_A$

\*Якщо вказане переміщення дорівнює нулю (за схемою навантаження одиничною силою), то необхідно шукати інше переміщення:  $f_A^{\downarrow}$  або  $f_A^{\leftrightarrow}$ .

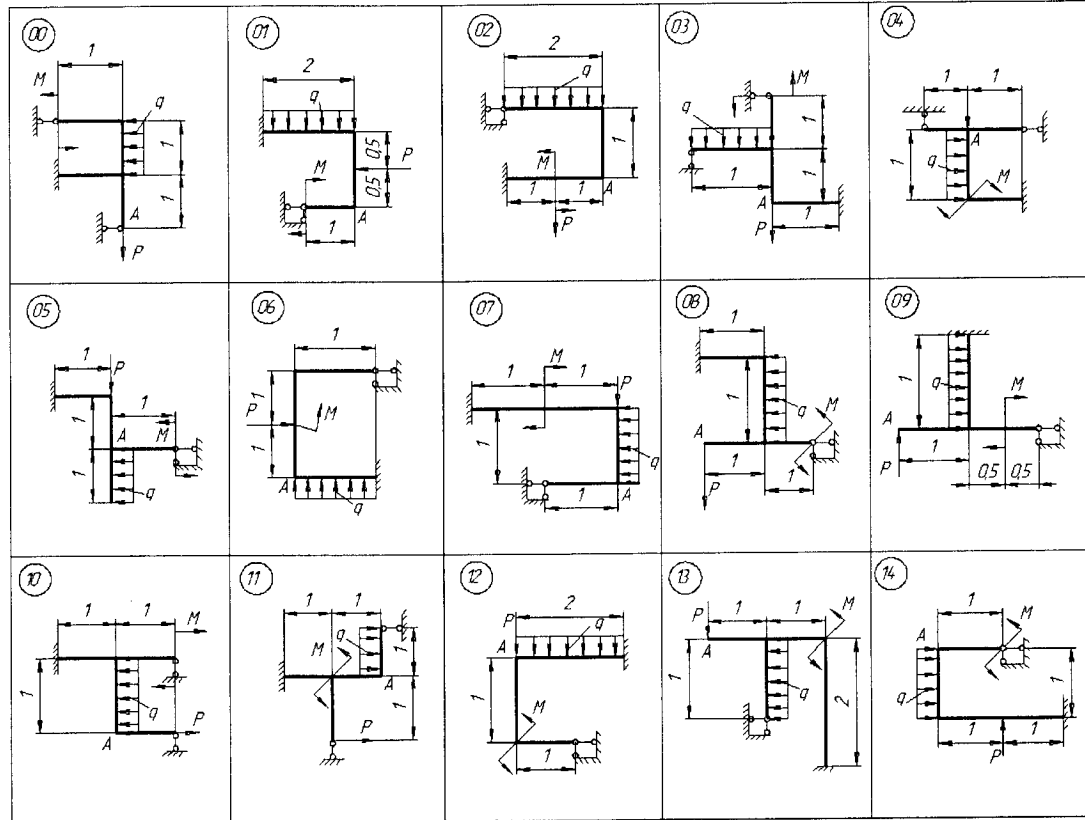


Рисунок 3.11 – Схеми до виконання задачі 4

### Приклад виконання задачі 4

Розрахувати статично невизначену раму (рис. 3.12, а) відповідно до плану задачі 4.

**Дано:**

$$P = 5 \text{ кН};$$

$$M = 15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$q = 10 \text{ кН/м};$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

**Знайти:**

$N$ ,  $Q$  і  $M_z$ ;

№ перерізу;

вертикальне та кутове переміщення т. С.

#### Розв'язування

1. Визначасмо ступінь статичної невизначуваності

$$s = 3 \cdot k - \omega = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

2. Виберасмо основну систему (рис. 3.12, б).

3. Будусмо еквівалентну систему (рис. 3.12, в).  $X_1$ ,  $X_2$  – це невідомі реакції шарнірно-нерухомої опори.

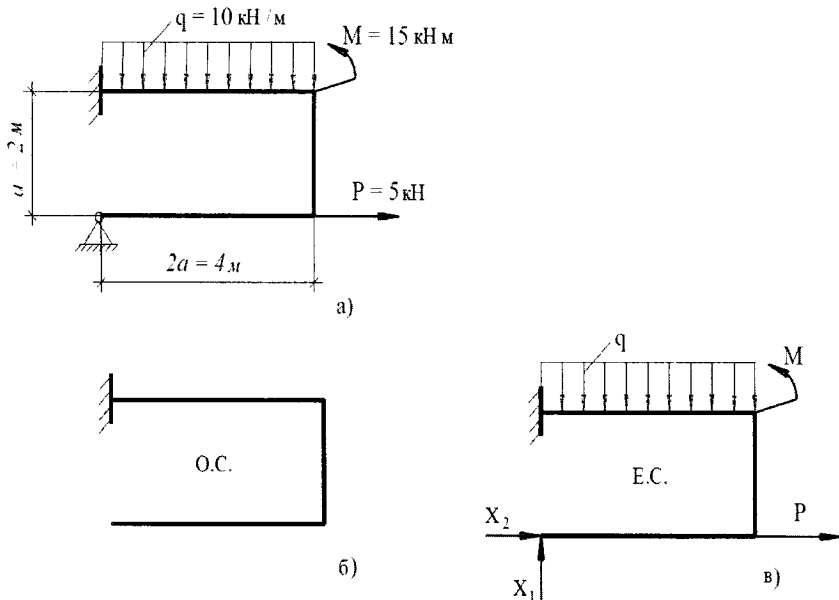


Рисунок 3.12 – Задана (а), основна (б) і еквівалента (в) системи

4. Запишемо систему канонічних рівнянь за методом сил та визначимо коефіцієнти канонічних рівнянь.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

4.1. Завантажуємо основну систему одиничною силою  $\bar{X}_1 = 1$  (замість невідомої  $X_1$  в тому самому напрямку) (рис. 3.13). Будуємо епюри згинального моменту  $\bar{M}_1$  від дії одиничної сили (вважаємо, що поздовжні  $N$  та поперечні  $Q$  сили спричиняють набагато менші переміщення порівняно зі згинальним моментом).

4.2. Завантажуємо основну систему одиничною силою  $\bar{X}_2 = 1$ . Будуємо епюри згинального моменту  $\bar{M}_2$  для одиничного стану (рис. 3.13).

4.3. Завантажуємо основну систему зовнішнім навантаженням. Будуємо епюри згинального моменту  $M_p$  для вантажного стану (рис. 3.13).

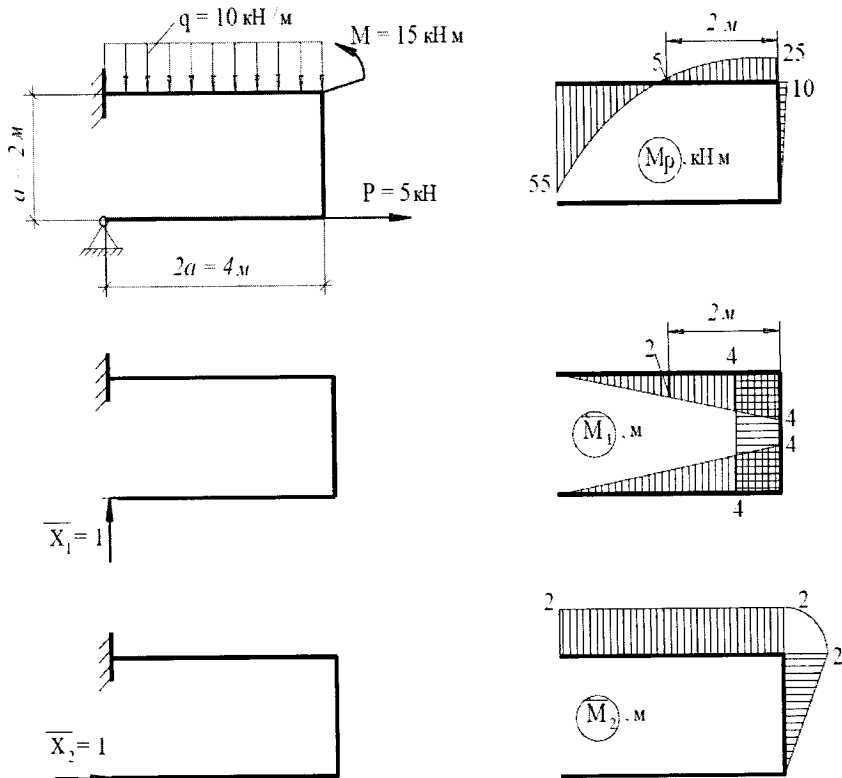


Рисунок 3.13 – Вантажні та одиничні епюри

4.4. Визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь шляхом обчислення інтеграла Мора за способами Верещагіна, Сімпсона-Карнаухова, Верещагіна-Даркова (додаток Ж). Спосіб перемноження епюр на кожній ділянці вибирається за бажанням. Проте необхідно пам'ятати, що спосіб Верещагіна-Даркова є справедливим лише для прямолінійних епюр.

$$\delta_{11} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_1 \cdot M_1}}{EJ_z} \right) ds = \frac{1}{EJ_z} \left( 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \cdot 2 + \frac{1}{EJ_z} (4 \cdot 2) \cdot 4 = \frac{224}{3EJ_z}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_1 \cdot M_2}}{EJ_z} \right) ds = \frac{1}{EJ_z} \left( 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 2 - \frac{1}{EJ_z} (4 \cdot 2) \cdot 1 = \frac{24}{EJ_z}$$

$$\delta_{22} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_2 \cdot M_2}}{EJ_z} \right) ds = \frac{1}{EJ_z} (2 \cdot 4) \cdot 2 + \frac{1}{EJ_z} \left( 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{56}{3EJ_z}$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_P \cdot M_1}}{EJ_z} \right) ds = \frac{4}{6EJ_z} (-25 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 5) - \frac{1}{EJ_z} \left( 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 4 = \frac{400}{3EJ_z}$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int_S \left( \frac{\overline{M_P \cdot M_2}}{EJ_z} \right) ds = \frac{4}{6EJ_z} (-55 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 5 + 25 \cdot 2) + \frac{1}{EJ_z} \left( 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = 0$$

4.5. Розв'язуємо систему канонічних рівнянь методу сил та визначаємо  $X_1, X_2$  з системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{224}{3EJ_z} X_1 - \frac{24}{EJ_z} X_2 - \frac{400}{3EJ_z} &= 0; \\ -\frac{24}{EJ_z} X_1 + \frac{56}{3EJ_z} X_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{224}{3} X_1 - 24X_2 - \frac{400}{3} &= 0; \\ -24X_1 + \frac{56}{3} X_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ або } \left. \begin{aligned} 28X_1 - 9X_2 - 50 &= 0; \\ -9X_1 + 7X_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Звідки дістаємо (шляхом стандартного розв'язання отриманої системи рівнянь):

$$X_1 = \frac{70}{23} = 3,043 \text{ (кН)},$$

$$X_2 = \frac{90}{23} = 3,913 \text{ (кН)}.$$

Виконуємо перевірку розв'язку:

$$28 \cdot \frac{70}{23} - 9 \cdot \frac{90}{23} = 0;$$



$$-9 \cdot \frac{70}{23} + 7 \cdot \frac{90}{23} = 0.$$

5. Аналіз еквівалентної системи разом із знайденими реакціями  $X_1$ ,  $X_2$  (рис. 3.14) дозволяє побудувати епюри нормальних  $N$ , поперечних  $Q$  сил та згинальних моментів  $M_z$ .

6. Виконуємо перевірку розкриття статичної невизначеності (деформаційну). Кількість перевірок має дорівнювати ступеню статичної невизначеності.

Вибираємо основну систему, відмінну від попередньої і враховуємо переміщення тих точок, переміщення яких за умовою задачі дорівнюють нулю. Наприклад, вертикальне та кутове переміщення перерізу в точці D (рис. 3.14).

6.1. Завантажуємо основну систему одиничною силою  $\bar{X}_3 = 1$ . Знаходимо необхідні реакції. Будуємо епюри згинального моменту  $\bar{M}_3$  для одиничного стану (рис. 3.14).

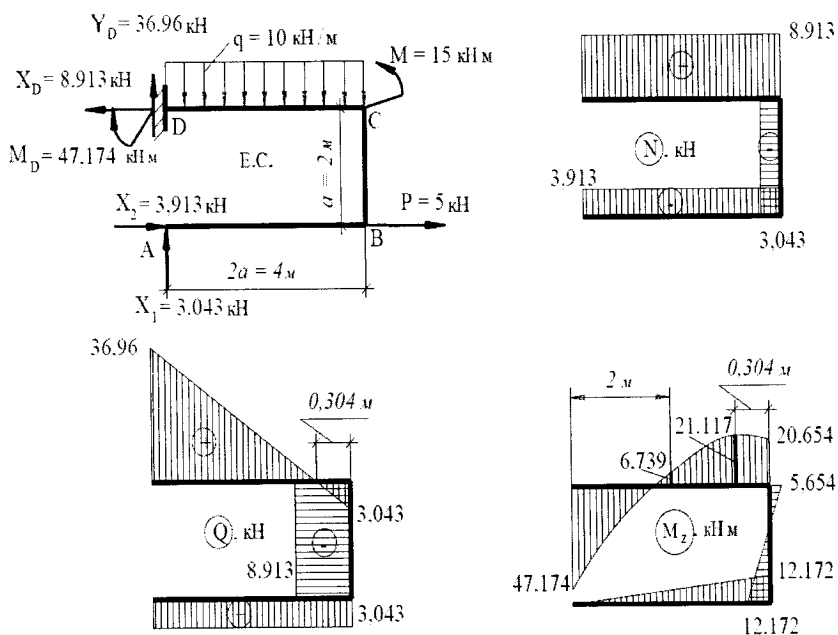


Рисунок 3.14 – Епюри внутрішніх силових факторів

Вертикальне переміщення перерізу в точці D:

$$f_D^{\uparrow} = \Delta_{3P} = \sum \int_S \left( \frac{M_z \overline{M_3}}{EJ_z} \right) ds = \frac{4}{6EJ_z} (-4 \cdot 6,739 \cdot 2 - 20,654 \cdot 4) -$$

$$- \frac{2}{6EJ_z} (-2 \cdot 5,654 \cdot 4 + 2 \cdot 12,172 \cdot 4 + 5,654 \cdot 4) +$$

$$+ \frac{1}{EJ_z} \left[ \frac{1}{2} \cdot 12,174 \cdot 4 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] = \frac{0,03}{EJ_z} \approx 0.$$

6.2. Завантажуємо основну систему одиничним моментом  $\overline{X_4} = 1$ . Знаходимо необхідні реакції. Будуємо епюри згинального моменту  $\overline{M_4}$  для одиничного стану (рис. 3.15).

Кутове переміщення перерізу в точці D:

$$\theta_D = \Delta_{4P} = \sum \int_S \left( \frac{M_z \overline{M_4}}{EJ_z} \right) ds = \frac{2}{6EJ_z} (5,654 \cdot 2 \cdot 1 - 12,172 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{4}{6EJ_z} (-47,174 \cdot 1 + 4 \cdot 6,739 \cdot 1 + 20,654 \cdot 1) = \frac{0,003}{EJ_z} \approx 0.$$

Оскільки знайдені переміщення близькі до нуля (через округлення розрахункових величин), то робимо висновок, що розкриття статичної невизначеності виконано правильно.

### 7. Підбираємо переріз за умови міцності.

Впливом поперечних та поздовжніх сил нехтуємо.

Умова міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z max}{W_z} \leq [\sigma].$$

Необхідний момент опору

$$W_z \geq \frac{M_z max}{[\sigma]} = \frac{47,174 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 297,8 \cdot 10^{-6} (m^3) = 297,8 \text{ см}^3.$$

За даними додатка В підбираємо із переліку сортаменту прокату двотавр № 24а, для якого  $W_z = 317 \text{ см}^3$ ,  $J_z = 3800 \text{ см}^4$ .

### 8. Визначаємо вертикальне та кутове переміщення т. С.

8.1. Завантажуємо основну систему (можна будь-яку, проте простіше працювати з консольною рамою під час побудови епюр)

одиночною силою  $\bar{X}_5 = 1$ . Будемо епюри згинального моменту  $\bar{M}_5$  для одиночного стану (рис. 3.15).

Вертикальні переміщення  $f_C^1$  перерізу в точці С:

$$f_C^1 = \Delta_{5P} = \sum \int_s \left( \frac{M_z \bar{M}_5}{EJ_z} \right) ds = \frac{4}{6EJ_z} (4 \cdot 6,739 \cdot 2 - 47,174 \cdot 4) =$$

$$= -\frac{89,86}{EJ_z} = -\frac{89,86 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = -0,0113(\text{м}) = -11,3(\text{мм}).$$

Знак мінус показує, що переріз переміщується вниз (проти напрямку одиночної сили  $\bar{X}_5 = 1$ ).

8.2. Завантажуємо основну систему одиночним моментом  $\bar{X}_6 = 1$ . Будемо епюри згинального моменту  $\bar{M}_6$  для одиночного стану (рис. 3.15).

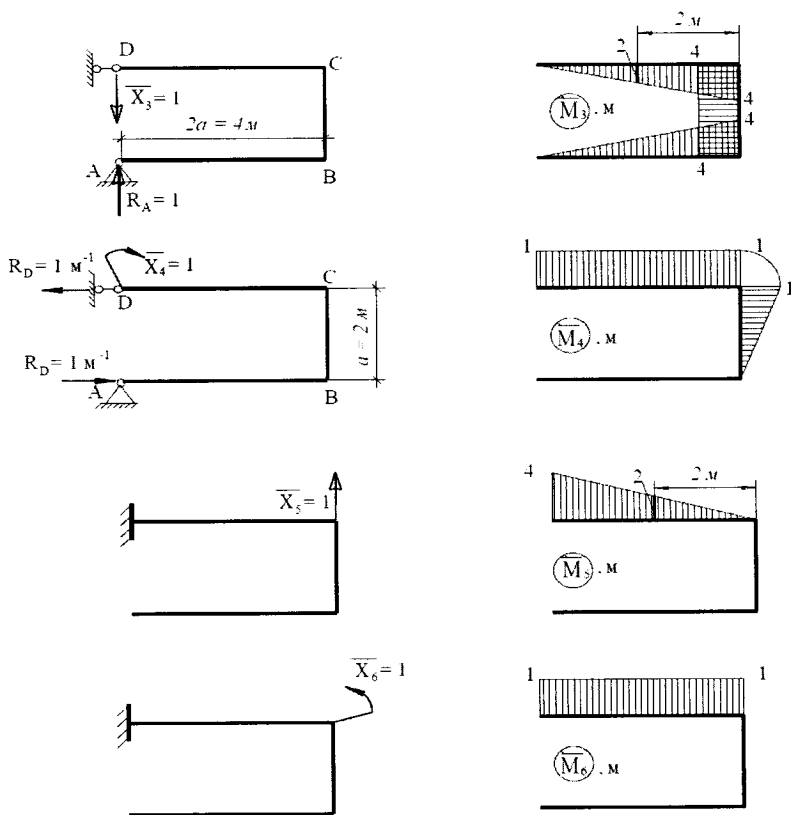


Рисунок 3.15 – Одиночні епюри

Кутове переміщення  $\theta_C$  перерізу в точці С:

$$\begin{aligned}\theta_C = \Delta_{6P} &= \sum \int_S \left( \frac{M_z \overline{M_6}}{EJ_z} \right) ds = \frac{4}{6EJ_z} (-47,174 \cdot 1 + 4 \cdot 6,739 \cdot 1 + 20,654 \cdot 1) = \\ &= \frac{0,291}{EJ_z} = \frac{0,291 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = 3,65 \cdot 10^{-5} (\text{рад}) \approx 0,0021^\circ.\end{aligned}$$

Отриманий кут повороту прямує до нуля.

**Відповідь:** двотавр № 24а,

$$\theta_C = 0,0021^\circ \approx 0, \quad f_C^\dagger = 11,3 \text{ мм.}$$

### Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 4)

1. Які системи називають статично невизначуваними? Чим зумовлена статична невизначуваність?
2. Як визначити ступінь статичної невизначуваності? Навести приклади.
3. Які в'язі називають «зайвими»? У чому полягає метод сил та метод переміщень у разі розкриття статичної невизначуваності?
4. Назвіть переваги та недоліки статично невизначуваних систем.
5. Як для заданої стрижневої системи, що має певний ступінь статичної невизначуваності, вибирають основну та еквівалентну системи?
6. Як скласти додаткові рівняння методу сил – рівняння сумісності переміщень? Що відображає кожне канонічне рівняння?
7. Що означають коефіцієнти в канонічних рівняннях за методом сил? Яку вони мають властивість?
8. Що означають вільні члени канонічних рівнянь?
9. Записати систему канонічних рівнянь для один раз та два рази статично невизначуваної системи.
10. Що називається основною системою? Накреслити принаймні дві основних системи для заданої статично невизначуваної системи.
11. Що називається еквівалентною системою?
12. Що називається «вантажним станом» у разі розкриття статичної невизначуваності системи?
13. Як визначаються коефіцієнти канонічних рівнянь за методом сил? Показати на прикладі.
14. За яким алгоритмом розкривають статичну невизначуваність рами?
15. За яким алгоритмом визначаються переміщення перерізу в статично невизначуваній рамній конструкції?
16. В чому полягає сенс деформаційної перевірки правильності розкриття статичної невизначуваності?

## 4 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТРИЖНІВ

### 4.1 Короткі теоретичні відомості

#### 4.1.1 Стійка та нестійка форми пружної рівноваги

Розрахунок стійкості важливий для таких конструктивних елементів: відносно довгих та тонких стрижнів, тонких пластин та оболонок.

Давайте розглянемо основні означення видів рівноваги.

Якщо деформоване тіло намагається повернутися в початковий стан за будь-якого незначного відхилення від стану рівноваги і повертається у початковий стан після припинення зовнішнього впливу, що перериває початковий стан рівноваги, то *пружна рівновага* буде *стійкою*.

Якщо деформоване тіло, вилучене з-під будь-якої зовнішньої дії, продовжує деформуватися в напрямку заданого йому відхилення і не повертається у початковий стан після закінчення зовнішньої дії, тоді *пружна рівновага нестійка*.

Між цими двома станами рівноваги існує *перехідний стан*, який називається *критичним станом*. У цьому стані деформоване тіло знаходиться в недиференційованому стані рівноваги: воно може зберігати первісну форму, але може й втратити її (форму) внаслідок навіть невеликого удару.

Основним завданням в механіці матеріалів та конструкцій є визначення залежності типу рівноваги від сил, що діють на конструктивні елементи.

Стійкість форми рівноваги деформованого тіла залежить від навантаження, яке до нього прикладається. Наприклад, якщо сила стискання стрижня мала, то початкова форма рівноваги залишається стійкою (рис. 4.1, *а*). Зі збільшенням сили досягається недиференційований стан рівноваги. У цьому стані, за прямолінійної форми стрижня, може з'явитися злегка деформована форма рівноваги (штрихові лінії на рис. 4.1, *б*). З подальшим незначним збільшенням навантаження деформаційні властивості стрижня зазнають величезних змін – стрижень згинається (рис. 4.1, *в*), прямолінійна форма рівноваги вже не є стійкою. Висновок – навантаження перевищило критичне значення.

*Навантаження, через яке початкова форма тіла втрачає стійкість, називається критичним і позначається  $P_{кр}$  (critical load).*

Можна сказати, що досягнення критичних значень навантаженням еквівалентно руйнуванню конструкції, оскільки нестійка форма рівноваги втрачається через нескінченне зростання деформацій та напружень. Особливою небезпекою руйнування внаслідок втрати стійкості є те, що це відбувається раптово й за низьких значень напружень, коли міцність елемента ще не вичерпана достатньо.

У разі досягнення критичного стану модуль пружної деформації дуже малий і зростання майже непомітне неозброєним оком. Однак від критичного стану до моменту руйнування залишкові деформації збільшуються занадто швидко, і фактично немає часу вживати заходів для запобігання неминучій катастрофи. Отже, у разі розрахунку стійкості критичне навантаження схоже на руйнівне навантаження у випадку розрахунку на міцність.

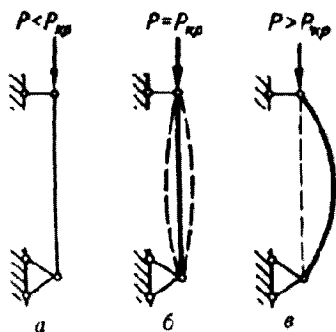


Рисунок 4.1 – Різновид втрат стійкості

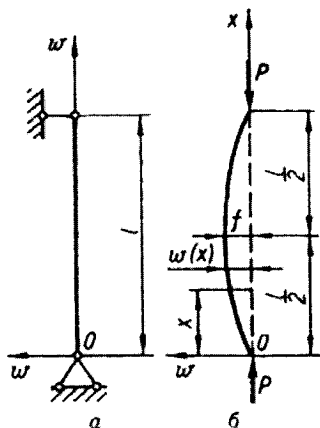


Рисунок 4.2 – Задача на виведення формули Ейлера

Щоб забезпечити певний запас стійкості, мають бути дотримані умови:

$$P \leq [P]. \quad (4.1)$$

Тут

$$[P] = P_{KR} / n_{CT}, \quad (4.2)$$

де  $P$  – діюче навантаження;

$P_{KR}$  – критичне навантаження;

$n_{CT}$  – коефіцієнт запасу стійкості.

Отже, для розрахунку стійкості стиснутих стрижнів необхідно вивчити методи визначення критичних навантажень  $P_{KR}$ .

#### 4.1.2 Формула Ейлера для визначення критичної сили стиснутого стрижня

*Задача про критичну силу стиснутого стрижня*

Кінці стиснутого стержня закріплено шарнірно (рис. 4.2, а).

Припустимо, що під дією сили  $P$ , яка дещо перевищує критичну силу  $P_{KR}$ , стрижень трохи зігнувся (рис. 4.2, б).

Мінімальне значення поздовжньої критичної сили стискування (*Euler load*)  $P_{KP}$ , за якого можлива реалізація поздовжнього згинання:

$$P_{KP} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2}. \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) вперше вивів Ейлер.

#### 4.1.3 Вплив умов закріплення кінців стрижня на значення критичної сили

Різні випадки закріплення та навантаження стрижня зводяться до основного випадку введенням у формулу для  $P_{KP}$  так званої зведеної довжини  $l_{np} = \mu l$ . Це визначення вперше було використано Ф. С. Ясинським.

$$P_{KP} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (4.4)$$

де  $l_{np} = \mu l$  – приведена довжина стрижня;  
 $l$  – фактична довжина стрижня;  
 $\mu$  – коефіцієнт приведення довжини.

Згідно з формулою Ейлера (4.4), критичне навантаження залежить від мінімальної жорсткості  $EJ_{min}$ , довжини стрижня  $l$  та коефіцієнта  $\mu$ . Рис. 4.3 показує значення  $\mu$  для найпоширеніших стрижнів.

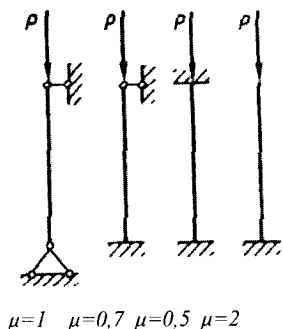


Рисунок 4.3 – Значення  $\mu$  для найпоширеніших стрижнів

#### 4.1.4 Поняття про втрату стійкості за напружень, що перевищують границю пропорційності

Виведення формули Ейлера базується на використанні пружних лінійних диференціальних рівнянь. Тому лише тоді, коли діє закон Гука, тобто до тих пір, поки критичне напруження (напруження стискування, що відповідає критичній силі) не перевищує границі пропорційності  $\sigma_{пц}$ , можна використовувати формулу:

$$\sigma_{KP} = \frac{P_{KP}}{F} \leq \sigma_{пц}. \quad (4.5)$$

Виведемо формулу для критичного напруження  $\sigma_{KP}$ . Відповідно до виразів (4.5) та (4.4):

$$\sigma_{KP} = \frac{P_{KP}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{F(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l/i)^2}. \quad (4.6)$$

Тут  $i^2 = i_{min}^2 = J_{min}/F$  – квадрат найменшого з головних радіусів інерції стрижня;

$F = F_{br}$  – площа бруто поперечного перерізу стрижня.

Введемо безрозмірну величину:

$$\lambda = \mu l / i, \quad (4.7)$$

що має назву *гнучкість стрижня* (the flexibility of the rod), тоді знайдемо:

$$\sigma_{KP} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4.8)$$

Отже, критичне напруження стрижня визначається пружними властивостями матеріалу (модуль пружності  $E$ ) та гнучкістю стрижня  $\lambda$ .

Функціональна кореляція (4.8) – це модифікована формула Ейлера. В системі координат  $\sigma_{KP} - \lambda$  цю залежність можна виразити як гіперболу, яка називається «гіпербола Ейлера». Наприклад, розглянемо детальніше графік (рис. 4.4) для стрижня зі сталі Ст 3, для якої модуль пружності  $E \approx 2,1 \cdot 10^5$  МПа, границя текучості  $\sigma_m = 240$  МПа, а границя пропорційності  $\sigma_{nc} = 200$  МПа. З рис. 4.4 видно:

1) зі збільшенням гнучкості стрижня  $\lambda$  критичне напруження  $\sigma_{KP}$  стає нульовим;

2) коли гнучкість стрижня наближається до нуля, критичне напруження стає нескінченним.

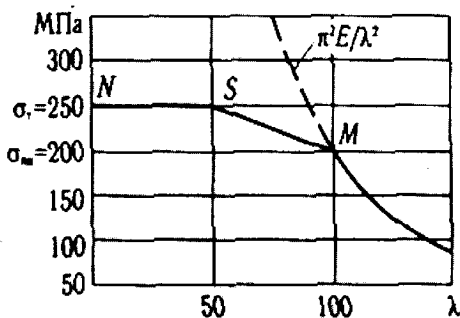


Рисунок 4.4 – Залежність критичних напружень від гнучкості

Однак з умови стійкості (4.5), отриманої з формули Ейлера, за формулою (4.8) можна записати:

$$\sigma_{KP} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{nc}$$

Отже:

$$\lambda_{lim} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{nc}}} \quad (4.9)$$



Це означає, що коли гнучкість стрижня менша граничного значення  $\lambda_{lim}$ , формула Ейлера недоступна. Граничне значення визначається властивостями матеріалу ( $E$  та  $\sigma_{ny}$ ). В цьому прикладі:

$$\lambda < \lambda_{lim} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Такий самий результат можна отримати графічно (див. рис. 4.4). Якщо значення границі пропорційності ( $\sigma_{ny} = 200$  МПа) відкласти на осі ординат ( $\sigma_{KP}$ ), а з отриманої точки  $K$  провести пряму лінію, паралельну осі абсцис, то вона перетинає гіперболу Ейлера в точці  $M$ , абсциса якої є  $\lambda_{lim}$ . Ліворуч від точки  $M$  гіпербола Ейлера подана пунктиром, оскільки наведене тут значення напружень перевищує границю пропорційності ( $\sigma_{ny}$ ).

Однак явище поздовжнього згинання зберігається й за границею пружності. Експерименти показали, що фактичні критичні напруження для стрижнів середньої та малої гнучкості  $\lambda < \lambda_{lim}$  менші критичного напруження, визначеного за формулою Ейлера. Тому в цьому випадку формула Ейлера дає завищену величину критичної сили, тобто вона завжди перебільшує фактичну стійкість стрижня.

**Примітка.** Для стрижнів, які втрачають стійкість за границею пружності, використання формули Ейлера є не тільки принципово неправильним, а й дуже небезпечним з погляду наслідків.

Теоретичне вирішення проблеми стійкості за границею пропорційності є складним, тому зазвичай використовуються емпіричні формули, отримані в результаті обробки багатьох експериментальних даних.

Ф. С. Ясинський зібрав та обробив велику кількість дослідницьких матеріалів, пов'язаних з поздовжнім згинанням стрижнів та склав таблицю критичних напружень, оснований на гнучкості різних матеріалів. Він також запропонував просту емпіричну формулу для розрахунку критичних напружень поза границею пропорційності:

$$\sigma_{KP} = a - b\lambda. \quad (4.10)$$

Для різних матеріалів значення коефіцієнтів  $a$  та  $b$  подано в табл. Е.2 (додаток Е). Для чавуну використовують параболічну залежність:

$$\sigma_{KP} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (4.11)$$

де  $c = 0,53$ .

Відповідно до цих даних для кожного матеріалу за  $0 < \lambda < \lambda_{lim}$  можна побудувати залежність критичних напружень від гнучкості стрижня.

За певного значення гнучкості (виразимо його  $\lambda_0$ ) напруження  $\sigma_{KP}$ , розраховане за формулою (4.10) або (4.11), дорівнює граничному напруженню під час стискання, а саме:

- для пластичних матеріалів  $\sigma_{KP} = \sigma_T$ ;
- для крихких матеріалів

$$\sigma_{KP} = \sigma_b. \quad (4.12)$$

*Стрижні малої гнучкості* – це стрижні, в яких  $\lambda < \lambda_0$ . Їх розраховують тільки на міцність.

У прикладі (див. рис. 4.4) частина кривої критичних напружень за границею пропорційності (за  $50 < \lambda < 100$ ) має вигляд злегка похилої лінії  $SM$ , а частина (за  $\lambda < 50$ ) – горизонтальної лінії  $NS$ .

Отже, в графіку  $\sigma_{KP} = f(\lambda)$  для сталі Ст3 виділяють три складові:

- гіперболи Ейлера за  $\lambda > 100$ ,
- похилої прямої за  $50 < \lambda < 100$ ;
- майже горизонтальної прямої за  $\lambda < 50$ .

Нахилена пряма  $SM$  відповідає напруженням між границею пропорційності і границею текучості. Горизонтальна пряма  $SN$  відповідає напруженню, яке дорівнює границі текучості.

#### 4.1.5 Розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження

Можна припустити, що стрижні за нейтрального стиснення втрачають свою носійну здатність як результат втрати стійкості раніше, ніж втрати міцності, оскільки критичне напруження завжди менше за границю текучості або границю міцності:

$$\sigma_{KP} = \sigma_H,$$

де  $\sigma_H = \sigma_m$  – для пластичних матеріалів;

$\sigma_H = \sigma_b$  – для крихких матеріалів.

Потрібно мати на увазі, що для стрижнів із низькою гнучкістю ( $\lambda < \lambda_0$ ) важче описати процес втрати стійкості прямолінійної форми стрижня, на відміну від стрижнів середньої та великої гнучкості. Носійна здатність стрижнів низької гнучкості визначається міцністю матеріалу.

Критичне напруження центрально стиснутих стрижнів середньої та великої гнучкості ( $\lambda$ ) є більш небезпечним, порівняно з границею текучості пластичних матеріалів ( $\sigma_m$ ) або границею міцності крихких матеріалів ( $\sigma_b$ ) в умовах простого розтягу. Під час практичного вирішення задачі визначення стійкості стрижня неможливо допустити наявність в перерізі критичного напруження ( $\sigma_{KP}$ ). Для цього потрібно призначити відповідний запас стійкості ( $n_{CT}$ ).

Для визначення допустимого напруження на стійкість, необхідно вибрати коефіцієнт запасу  $n_{CT}$ . Тоді:

$$[\sigma_{CT}] = \sigma_{KP} / n_{CT}. \quad (4.13)$$

Коефіцієнт запасу стійкості вибирають у межах:

- для сталей – 1,8...3,0;
- для чавуну – 5,0...5,5;
- для деревини – 2,8...3,2.

Коефіцієнт запасу на стійкість трохи перевищує базовий коефіцієнт запасу на міцність ( $n_{CT} > n$ ). Це пов'язано з тим, що стрижню, стиснутому в центрі, практично не уникнути ряду обставин (ексцентриситет прикладання стискальних сил, початкова кривина і неоднорідність стрижня), що сприяє поздовжньому згинанню, тоді як за інших типів деформації ці обставини майже не відображаються.

Допустиме напруження на стійкість  $[\sigma_{CT}] = \sigma_{KP} / n_{CT}$  та допустиме напруження на міцність у разі стискання  $[\sigma_-] = \sigma_H / n$  взаємно пов'язані. Покажемо їх залежності:

$$\frac{[\sigma_{CT}]}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{KP}}{n_{CT}} \cdot \frac{n}{\sigma_H} \quad \text{або} \quad [\sigma_{CT}] = \frac{\sigma_{KP}}{\sigma_H} \cdot \frac{n}{n_{CT}} \cdot [\sigma_-]. \quad (4.14)$$

Якщо

$$\frac{\sigma_{KP}}{\sigma_H} \cdot \frac{n}{n_{CT}} = \varphi,$$

то матимемо:

$$[\sigma_{CT}] = \varphi \cdot [\sigma_-]. \quad (4.15)$$

Тут  $\varphi$  – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження під час розрахунку на стійкість. Коефіцієнт кожного матеріалу можна розраховувати для всіх значеннях гнучкості  $\lambda$  й подати у вигляді таблиці або графіка залежності  $\varphi$  від  $\lambda$ . Значення коефіцієнта  $\varphi$  для сталей, чавуну та деревини наведено в таблиці Е.1 (додаток Е). Використовуючи подібну таблицю, можна досить легко розрахувати стійкість стрижня.

Складемо умову стійкості стиснутих стрижнів:

$$\sigma \leq [\sigma_{CT}]. \quad (4.16)$$

Оскільки

$$\sigma = N / F_{bp}, \quad \text{а} \quad [\sigma_{CT}] = \varphi [\sigma_-],$$

то умову стійкості запишемо таким чином:

$$\sigma = N / F_{bp} \leq \varphi \cdot [\sigma_-]. \quad (4.17)$$

Під час розрахунку стійкості локального ослаблення перерізу значення критичної сили не змінюється, тому в формули розрахунку вводять загальну площу  $F_{bp}$  поперечного перерізу.

Проаналізуємо два види розрахунку стійкості стиснутих стрижнів – перевірочний та проектувальний.

#### 4.1.6 Перевірочний розрахунок стиснутих стрижнів

Алгоритм перевірного розрахунку стійкості за використання таблиці коефіцієнтів  $\varphi$  (в таблиці Е.1 додатка Е) такий:

1) визначаємо найменший осьовий момент інерції  $J_{min}$ , площу  $F_{bp}$ , обчислюємо мінімальний радіус інерції:

$$i_{min} = \sqrt{J_{min}/F_{bp}}$$

та гнучкість:

$$\lambda = \mu l / i_{min};$$

2) з таблиці вибираємо коефіцієнт  $\varphi$  та розраховуємо допустиме напруження на стійкість:

$$[\sigma_{CT}] = \varphi \cdot [\sigma_-];$$

3) порівнюємо дійсне напруження  $\sigma = P/F_{bp}$  з допустимим напруженням  $\sigma_{CT}$  на стійкість:

$$\sigma \leq [\sigma_{CT}].$$

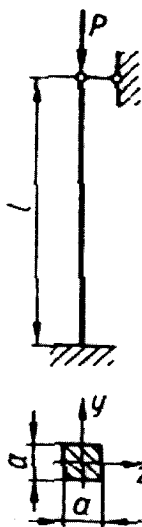


Рисунок 4.5 – Колонна та її переріз

#### Приклад.

Перевіримо на стійкість стиснуту дерев'яну колонну (рис. 4.5) квадратного поперечного перерізу ( $a = 15$  см) завдовжки  $l = 5$  м, якщо основне допустиме напруження  $[\sigma_-] = 10$  МПа, а сила стиску  $P = 100$  кН.

Знайдемо основні величини:

- площу:

$$F = a^2 = 225 \text{ см}^2;$$

- момент інерції:

$$J = \frac{a^4}{12} = \frac{15^4}{12} = 4210 \text{ см}^4;$$

- радіус інерції:

$$i = \sqrt{J/F} = 4,34 \text{ см};$$

- приведену довжину:

$$l_{np} = \mu \cdot l = 0,7 \cdot l = 0,7 \cdot 5 = 3,5 \text{ м} = 350 \text{ см};$$

- гнучкість:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{350}{4,34} = 80,6.$$

З таблиці Е.1 (додаток Е) інтерполяцією знаходимо, що:

$$\varphi = 0,48 - \frac{0,48-0,38}{10} \cdot 0,6 = 0,474.$$

Тоді:

$$[\sigma_{cr}] = \varphi \cdot [\sigma_{-}] = 0,474 \cdot 10 = 4,74 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{100 \cdot 10^3}{225 \cdot 10^{-4}} = 4,44 \text{ МПа}.$$

Оскільки  $\sigma = 4,44 \text{ МПа} < 4,74 \text{ МПа}$ , то стійкість колони забезпечено.

#### 4.1.7 Проектувальний розрахунок

Умова стійкості:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi \cdot F_{bp}} \leq [\sigma_{-}] \quad \text{або} \quad F_{bp} \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma_{-}]}.$$

Є два невідомих значення – коефіцієнт  $\varphi$  та необхідна загальна площа бруто  $F_{bp}$  поперечного перерізу. Тому в процесі підбору перерізів потрібно використовувати метод послідовного наближення, для зміни значення коефіцієнта  $\varphi$ . Зазвичай з першої спроби беруть  $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,4$ . Вибравши одне з цих значень  $\varphi_1$ , визначають необхідну площу  $F_{bp}$  та підбирають переріз. Обраний переріз перевіряють та визначають фактичне значення  $\varphi'_1$ . Якщо  $\varphi'_1$  суттєво відрізняється від  $\varphi_1$ , то й напруження відрізняється від допустимого значення.

В такому випадку потрібно повторно зробити розрахунок, тобто – другу спробу, взявши середнє за модулем значення між  $\varphi_1$  та  $\varphi'_1$ :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}. \quad (4.18)$$

За результатом виконаної другої спроби визначають  $\varphi_2$ . Якщо потрібна третя спроба, то:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2}$$

і т. д. Як правило, для підбору перерізів необхідно не більше ніж дві-три спроби.

### Приклад.

Необхідно підібрати за сортаментом двотавровий поперечний переріз стрижня, що має довжину 5 м та зазнає дії центрального стискального навантаження 320 кН. Кінці стрижня затиснуті. Матеріал – Ст3. Основне допустиме напруження  $[\sigma] = 160$  МПа.

Спершу знайдемо розрахункову зведену довжину стрижня:

$$l_{np} = \mu \cdot l = 0,5 l = 0,5 \cdot 500 = 250 \text{ см.}$$

Підберемо поперечний переріз за методом послідовних наближень.

Перша спроба:

вибираємо  $\varphi_1 = 0,5$ ;

тоді необхідна площа поперечного перерізу:

$$F_{bp} \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 27 з площею  $F = 40,2 \text{ см}^2$  та мінімальним радіусом інерції  $i_{min} = i_{ст} = 2,54 \text{ см}$ .

Гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{l_{np}}{i_{min}} = \frac{250}{2,54} = 98,5.$$

З табл. Е.1 (додаток Е) за лінійної інтерполяції:

$$\varphi_1' = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 8,5 = 0,614 \gg \varphi_1 = 0,4.$$

Перейдемо до другого наближення. Для нього беремо:

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,614}{2} \approx 0,557.$$

Площа поперечного перерізу стрижня:

$$F = \frac{320 \cdot 10^3}{0,557 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 36 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 24а з площею  $F = 37,5 \text{ см}^2$  та мінімальним радіусом інерції  $i_{min} = i_{CT} = 2,63 \text{ см}$ .

Гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{l_{np}}{i_{min}} = \frac{250}{2,63} = 95.$$

З таблиці Е.1 (додаток Е) знаходимо коефіцієнт  $\varphi'_2$ :

$$\varphi'_2 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 5 = 0,645 \gg \varphi_2 = 0,557.$$

Переходимо до третього наближення, визначаємо:

$$\varphi_3 = \frac{0,557 + 0,645}{2} \approx 0,60.$$

Знаходимо необхідну площу:

$$F = \frac{320 \cdot 10^3}{0,60 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 33,3 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 24 з площею  $F = 34,8 \text{ см}^2$  та мінімальним радіусом інерції  $i_{min} = i_{CT} = 2,37 \text{ см}$ .

Гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{l_{np}}{i_{min}} = \frac{250}{2,37} = 105.$$

Для  $\lambda = 105$  коефіцієнт:

$$\varphi_2 = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} \cdot 5 = 0,56.$$

Обчислимо напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi \cdot F} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,56 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4}} = 164 \text{ МПа}$$

Перевищення напруження становить:

$$\frac{164 - 160}{160} \cdot 100\% \approx 2,5\%.$$

Отже, остаточно обираємо для стрижня двотавр № 24.

## 4.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

### Задача 5. Проектувальний розрахунок на стійкість

Стрижень довжиною  $l$  складного поперечного перерізу в процесі центрального стискального навантаження  $P$  (рис. 4.6). Матеріал – сталь Ст3, основне допустиме напруження на стиск  $[\sigma_-] = 160 \text{ МПа}$ .

Поперечний переріз стрижня взяти згідно з рис. 4.7. Схеми закріплення кінців стрижня в двох головних площинах подано в таблиці 4.1.

Необхідно:

- 1) визначити раціональне розміщення перерізу щодо умов закріплення для подальшого розрахунку стояка на стійкість в площині мінімальної жорсткості;
- 2) підібрати за сортаментом (додаток В) поперечний переріз стрижня, користуючись таблицями коефіцієнтів зниження допустимого напруження (додаток Е);
- 3) обчислити критичну силу та запас за стійкістю стрижня.

**Увага!** Умови закріплення кінців стрижня брати з таблиці 4.1

Таблиця 4.1

Ч.ч.	P, кН	l, м	Спосіб закріплення кінців стрижня			
			Площина XOZ		Площина XOY	
			Нижній кінець	Верхній кінець	Нижній кінець	Верхній кінець
0	300	8,5	защемлення	шарнір	шарнір	шарнір
1	350	8	защемлення	шарнір	шарнір	шарнір
2	400	7,5	шарнір	защемлення	шарнір	шарнір
3	450	7	шарнір	шарнір	защемлення	защемлення
4	500	6,5	защемлення	защемлення	защемлення	шарнір
5	550	6	защемлення	шарнір	шарнір	шарнір
6	600	5,5	шарнір	шарнір	защемлення	шарнір
7	650	3	защемлення	вільне	шарнір	шарнір
8	700	3,5	шарнір	шарнір	защемлення	вільне
9	750	4	шарнір	шарнір	защемлення	шарнір



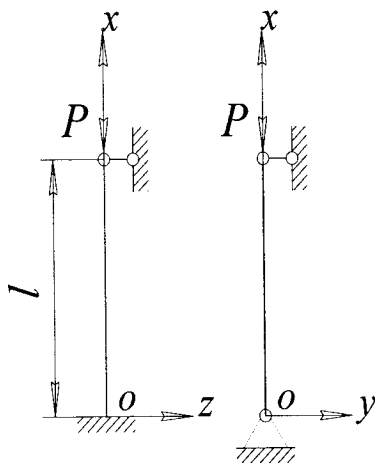


Рисунок 4.6 – Схеми закріплення кінців стрижня

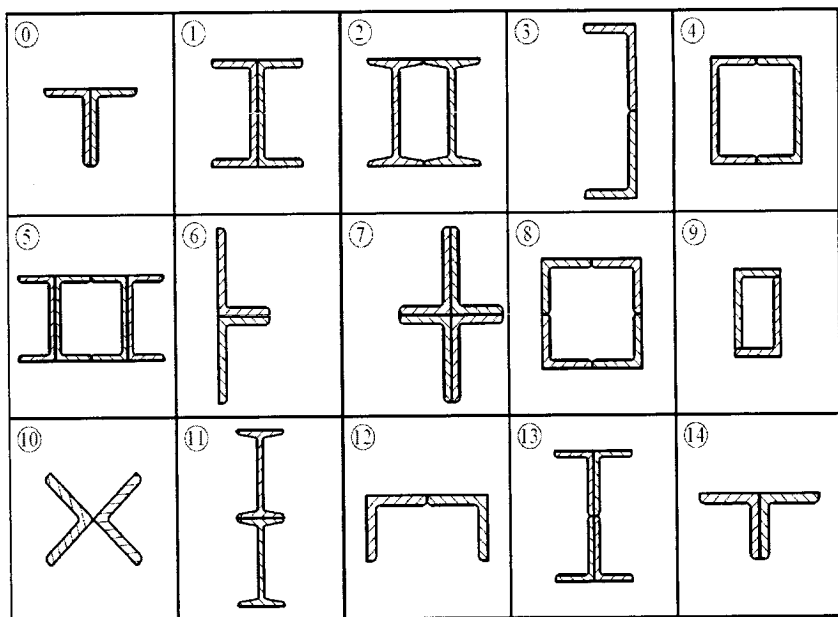


Рисунок 4.7 – Схеми до виконання задачі 5

## Приклад виконання задачі 5

Стрижень довжиною  $l = 6 \text{ м}$  в процесі центрального стискального навантаження  $P = 800 \text{ кН}$ . Матеріал стрижня – сталь Ст3. Основне допустиме напруження  $[\sigma_-] = 160 \text{ МПа}$ . Підібрати за сортаментом поперечний переріз стрижня, що складається з двох жорстко з'єднаних між собою двотаврів (рис. 4.8, б).

Схеми закріплення кінців стрижня в двох головних площинах показано на рисунку (рис. 4.8, а). Розрахунок виконати для раціонального розміщення перерізу відносно закріплення. Розрахувати запас за стійкістю стрижня.

### Розв'язування

Коефіцієнти умов закріплення стрижня згідно з рис. Е.1 додатка Е:

$$\mu_z = 1, \quad \mu_y = 0,7.$$

#### 1. Перша спроба

Задаємось:  $\varphi_1 = 0,5$ ;

потрібна площа поперечного перерізу (брутто):

$$A_{bp} = \frac{P}{\varphi[\sigma_-]} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 100 \text{ см}^2.$$

Потрібна площа одного двотавра:

$$A'_{bp} = \frac{A_{bp}}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ (см}^2\text{)},$$

де 2 – кількість однакових двотаврів.

За сортаментом (додаток В) вибираємо двотавр № 30а з такими геометричними характеристиками: площа  $A = 49,9 \text{ см}^2$ , радіус інерції  $i_z = 12,5 \text{ см}$ , ширина полиці  $b = 14,5 \text{ см}$ , момент інерції  $I_y = 436 \text{ см}^4$ .

Вибираємо раціональне розміщення перерізу.

Розміщуємо переріз так, як показано на рис. 4.8, б.

Визначаємо радіус інерції відносно осі у:

$$i_y = \sqrt{\frac{2(I_y + A(\frac{b}{2})^2)}{2A}} = \sqrt{\frac{436 + 49,9(\frac{14,5}{2})^2}{49,9}} = 7,83 \text{ (см)}.$$

Гнучкість стрижня в двох головних площинах:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 600}{7,83} = 53,64;$$

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{1 \cdot 600}{12,5} = 48.$$

$\lambda_y = \lambda_{max1}$ , отже розрахунок за такого вибору закріплення необхідно проводити по осі  $y$  (в площині  $xOz$ ).

Розміщуємо переріз так, як вказано на рис. 4.8, в.

В такому випадку радіуси інерції  $i_y = 12,5$  см,  $i_z = 7,83$  см.

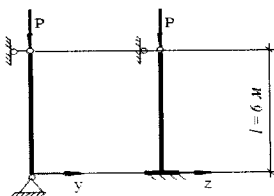
Гнучкості стрижня:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 600}{12,5} = 33,6;$$

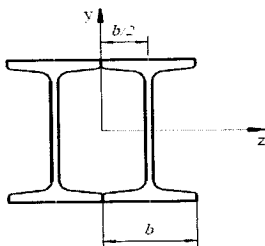
$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{1 \cdot 600}{7,83} = 76,6;$$

$$\lambda_z = \lambda_{max2}.$$

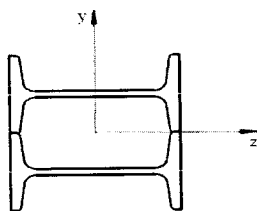
Оскільки  $\lambda_{max1} < \lambda_{max2}$ , то розміщення перерізу у такому випадку буде раціональним (рис. 4.8, б). Отже подальший розрахунок будемо проводити саме для такого закріплення.



а)



б)



в)

Рисунок 4.8 – Схеми до прикладу задачі 5

### **Вказівка.**

Раціональному розміщенню перерізу завжди буде відповідати така умова: якщо  $\mu_y < \mu_z$ , то  $i_y < i_z$ ; якщо  $\mu_y > \mu_z$  то  $i_y > i_z$ .

Таким чином, за  $\lambda_{max} = 53,643$  табл. Е.1 (додаток Е) у разі лінійної інтерполяції:

$$\begin{aligned}\varphi'_1(\lambda_{max}) &= \varphi(53,64) = \varphi(50) - \frac{\varphi(50) - \varphi(60)}{10} 3,64 = \\ &= 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{10} 3,64 = 0,878.\end{aligned}$$

Оскільки  $\varphi'_1 = 0,878 \gg \varphi_1 = 0,5$ , то будемо проводити подальші уточнення. (Розв'язок вважається приблизно знайденим, якщо розбіжність між цими величинами становить не більше 5 % від більшого значення).

### **2. Друге наближення.**

Беремо

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,878}{2} \approx 0,6892.$$

Потрібна площа поперечного перерізу:

$$A_{bp} = \frac{P}{\varphi[\sigma_-]} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,6892 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,25 \cdot 10^{-3} (\text{м}^2) = 72,5 \text{ см}^2.$$

Потрібна площа одного двотавра:

$$A'_{bp} = \frac{A_{bp}}{2} = \frac{72,5}{2} = 36,25 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 24а з такими геометричними характеристиками: площа  $A = 37,5 \text{ см}^2$ , радіус інерції  $i_z = 10,1 \text{ см}$ , ширина полиці  $b = 12,5 \text{ см}$ , момент інерції  $I_y = 260 \text{ см}^4$ .

Визначаємо радіус інерції відносно осі  $y$ :

$$i_y = \sqrt{\frac{2(I_y + A \cdot (\frac{b}{2})^2)}{2A}} = \sqrt{\frac{260 + 37,5 \cdot (\frac{12,5}{2})^2}{37,5}} = 6,78 \text{ (см)}.$$

Гнучкість стрижня в двох головних площинах:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 600}{6,78} = 61,98;$$

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{1 \cdot 600}{10,1} = 59,4; \quad \lambda_y = \lambda_{\max}.$$

Отже розрахунок проводимо по осі у.

При  $\lambda_{\max} = 61,98$  за лінійної інтерполяції:

$$\varphi'_2(61,98) = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} 1,98 = 0,8504.$$

Оскільки  $\varphi'_2 = 0,8504 \gg \varphi_2 = 0,6892$ , то будемо в той самий спосіб проводити подальші уточнення.

Для наочності подальші наближення, разом із попередніми, зведемо в таблицю 4.2.

**Вказівка.** Зверніть увагу на монотонне зростання або спадання розрахункових величин у таблиці в кожному рядку. Це ознака правильності проведення наближень. Якщо на черговому наближенні порушується така тенденція, то необхідно переглянути розрахунки саме на цьому етапі. Особливо це стосується перерізів, що складаються з кутиків, оскільки необхідній площі відповідають декілька кутиків з різними радіусами інерції. В цьому випадку необхідно взяти інший розмір перерізу та повторити наближення.

Бачимо, що в останньому наближенні:

$$\varphi'_4 = 0,8034 \approx \varphi_4 = 0,8063.$$

Обчислимо еквівалентні напруження:

$$\sigma_{ekv} = \frac{P}{\varphi_4 2A} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,8063 \cdot 2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4}} = 162 \text{ (МПа)}$$

Перенапруження становить:

$$\Delta = \frac{\sigma_{ekv} - [\sigma_-]}{[\sigma_-]} \cdot 100 = \frac{162 - 160}{160} \cdot 100 = 1,25\% < 5\%.$$

Допустиме значення перевищення напруження  $[\Delta] = 5\%$ .

**Вказівка.** Інколи два сусідніх за сортаментом перерізи дають перенапруження і недонапруження, що перевищує допуск в 5 %, тоді залишають переріз з недонапруженням, пояснивши вибір.

Таблиця 4.2

Ч.ч.	Величина	Наближення			
		перше	друге	третє	четверте
1	$\varphi = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$	$\varphi_1=0,5$	0,6892	0,7698	0,8034
2	$A_{bp} \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}$ , см <sup>2</sup>	100	72,5	64,95	62,23
3	$A'_{bp} = \frac{A_{bp}}{2}$ , см <sup>2</sup>	50	36,25	32,48	31,23
4	Двотавр, номер	30а	24а	22а	22
5	A, см <sup>2</sup>	49,9	37,5	32,8	30,6
6	$i_v = \sqrt{\frac{I_y + A\left(\frac{b}{2}\right)^2}{A}}$ , см	7,83	6,78	6,502	5,948
7	$i_z$ , см	12,5	10,1	9,22	9,13
8	$\lambda_y$	53,64= $\lambda_{max}$	61,98= $\lambda_{max}$	65,08= $\lambda_{max}$	70,61= $\lambda_{max}$
9	$\lambda_z$	48,78	59,4	64,592	65,71
10	$\varphi'(\lambda_{max})$	0,878	0,8504	0,837	0,8063

### 3. Визначаємо запас за стійкістю

Оскільки  $61 < \lambda_{max} < 100$ , де 61 та 100 – граничні значення гнучкості для сталі Ст. 3 (табл. Е.2, додаток Е), то критичне напруження визначаємо з формули Ясинського:

$$\sigma_{KP} = a - b \cdot \lambda_{max} = 304 - 1,11 \cdot 70,61 = 225,6 \text{ (МПа)}.$$

Критична сила:

$$P_{KP} = \sigma_{KP} \cdot 2A = 225,6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4} = 1,38 \cdot 10^6 \text{ (Н)}.$$

Коефіцієнт запасу за стійкістю:

$$k_{CT} = \frac{P_{KP}}{D} = \frac{1,38 \cdot 10^6}{800 \cdot 10^3} = 1,73.$$

**Відповідь:** двотавр №22,  $k_{CT} = 1,73$ .

**Питання до захисту розрахунково-графічної роботи  
(задача 5)**

1. За яким алгоритмом підбирається переріз стиснутого стрижня (із використанням коефіцієнта зниження допустимого напруження)?
2. Чому у разі проектного розрахунку використовують послідовні наближення?
3. Записати формулу Ейлера та пояснити її.
4. Записати формулу розрахунку гнучкості та пояснити її.
5. Записати умову стійкості стрижня із використанням коефіцієнта зниження допустимого напруження та пояснити її.
6. Коли критичні напруження розраховуються за формулою Ейлера (границі застосування формули Ейлера)?
7. Коли критичні напруження розраховуються формулою Ясинського?
8. Коли можна говорити про раціональне розміщення перерізу щодо умов закріплення? Якій умові відповідає це розміщення?
9. Чому під час розрахунку на стійкість беруть до уваги лише максимальну гнучкість?
10. Що називається критичною силою?
11. Що таке запас за стійкістю та як він визначається для заданого стрижня і навантаження? Які орієнтовні значення запасу для різних конструкційних матеріалів?

## 5 РОЗРАХУНКИ ЗА УДАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

### 5.1 Розрахунок за осьової дії ударного навантаження

У випадку, коли швидкість розглянутого конструктивного елемента або частини, що контактує з ним, за короткий проміжок часу змінює кінцеве значення, виникає явище удару. В такому разі виникнення значного прискорення (сповільнення) призведе до великої інерційної сили. Напрямок дії цих інерційних сил протилежний напрямку прискорення, тобто напрямку руху тіла. Для випадку падаючого вантажу силу удару (динамічну силу  $P_{dyn}$ ) можна розрахувати за формулою:

$$P_{dyn}(t) = \frac{Q}{g} a(t), \quad (5.1)$$

де  $Q$  – вага падаючого вантажу,  $H$ ;

$g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$  – прискорення вільного падіння;

$a(t)$  – прискорення вантажу, що впав, після зіткнення його з іншим тілом.

За формулою (5.1) визначається сила удару  $P_{dyn}(t)$ . Це пов'язано з деякими труднощами, оскільки час зіткнення залишається невідомим (від початку до кінця удару).

У поєднанні із вищезазначеним змістом визначення динамічних напружень та деформацій в інженерній практиці базуються на так званій *технічній теорії удару*, яка оснований на таких припущеннях:

1. Під час зіткнення ударне тіло рухається разом з тілом, що зазнає удару, забезпечуючи максимальну деформацію. У той самий час відсутні пружні хвилі у тілах і пов'язані з ними відскоки тіла, що зазнає удару (такий удар називають *непружним*).

2. Протягом періоду зіткнень деформації розподіляються по всьому об'єму тіла, що зазнає удару, а зв'язок між силами та деформаціями, що виникають, відбувається згідно із законом Гука.

3. Під час зіткнення рухомих тіл зменшення кінетичної енергії системи дорівнює збільшенню потенціальної енергії деформації тіл. У той самий час втрата енергії внаслідок локальної пластичної деформації ігнорується. Інерцією маси тіла, що зазнає удару теж нехтують.

4. Передбачається, що система тіл під час зіткнення має один ступінь вільності, тобто положення системи визначається однією координатою.

Розглянемо систему (рис. 5.1), що складається з вертикально розміщеного пружного призматичного стрижня з жорсткістю  $c = EF/l$  (за розтягу/стиску), на торець якого з висоти  $H$  вільно падає вантаж  $Q$ . Формули для розрахунку динамічних напружень та деформацій за осьового удару наведемо на прикладі системи, що зазнає удару.



Припустимо, що до стрижня прикладений вантаж статично, тобто навантаження повільно збільшується від нуля до максимального значення (рис. 5.1, а) і стискає стрижень на величину  $\delta_{stat}$ . Коли вантаж падає з висоти  $H$ , унаслідок удару на стрижень діятиме динамічна сила  $P_{dyn}$ , більша за силу  $Q$ . Вкорочення стрижня  $\delta_{dyn}$  буде більшим ніж  $\delta_{stat}$  (рис. 5.1, б).

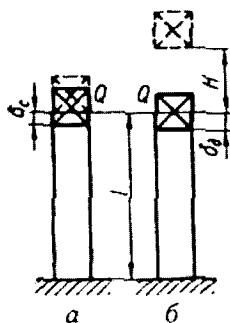


Рисунок 5.1 – Статична і динамічна деформації

Порівняно з переміщеннями (деформаціями) під статичною дією того самого навантаження, зміна переміщень та деформацій під дією навантаження  $Q$  характеризується коефіцієнтом динамічності:

$$k_{dyn} = \delta_{dyn} / \delta_{stat} \quad (5.2)$$

Формула, за допомогою якої динамічну деформацію можна виразити через статичну, записується так:

$$\delta_{dyn} = k_{dyn} \cdot \delta_{stat} \quad (5.3)$$

Беручи до уваги прямо пропорційний зв'язок між напруженнями та деформаціями, і припускаючи, що модулі пружності за статичних і ударних навантажень однакові, аналогічно формулі (5.3) можна встановити залежність між статичним та динамічним напруженнями:

$$\sigma_{dyn} = k_{dyn} \cdot \sigma_{stat}, \quad (5.4)$$

де  $\sigma_{stat} = Q/F$  – напруження, яке виникає в стрижні під час стискання з силою, що дорівнює вазі падаючого вантажу.

Співвідношення статичних та динамічних навантажень між зусиллями та деформаціями виявляється однаковим. Коефіцієнт динамічності  $k_{dyn}$ , необхідний для використання формул (5.3), (5.4), розраховується на підставі теорії удару:

$$\sigma_{stat} = P_{stat} / c; \quad (5.6)$$

$$\delta_{dyn} = P_{dyn} / c, \quad (5.7)$$

де  $P_{stat}$  – статичне навантаження, що дорівнює вазі падаючого вантажу (у цьому разі  $P_{stat} = Q$ );

$P_{dyn}$  – динамічне навантаження, яке є силою інерції тіла, що завдає удару на момент його зіткнення зі стрижнем;

$c$  – жорсткість стрижня.

Коефіцієнт динамічності:

$$k_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{stat}}}. \quad (5.8)$$

Враховуючи, що  $H = v^2/2g$  ( $v$  – швидкість вантажу, що падає, на момент початку удару), коефіцієнт динамічності можна розрахувати за формулою:

$$k_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{stat}}}. \quad (5.9)$$

Напруження у разі удару з (5.4):

$$\sigma_{dyn} = k_{dyn} \cdot \sigma_{stat} = \sigma_{stat} \left(1 + \sqrt{1 + 2H/\delta_{stat}}\right) \quad (5.10)$$

або

$$\sigma_{dyn} = \sigma_{stat} \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\sigma_{stat}}}\right) = \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{lF}}. \quad (5.11)$$

Аналогічно визначаємо зусилля під час удару:

$$P_{dyn} = \sigma_{dyn} \cdot F = P_{stat} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + 2H/\delta_{stat}}\right). \quad (5.12)$$

З аналізу формул (5.10) і (5.11) можна зробити висновок: в умовах рівномірно розподілених напружень, однакових за модулем в поперечних перерізах стрижня, динамічні напруження залежать не тільки від площі поперечного перерізу  $F$ , а й від довжини  $l$  та модуля пружності матеріалу стрижня  $E$ .

Таким чином, динамічні напруження в стрижні у разі удару залежать як від об'єму, так і від якості матеріалу стрижнів. У цьому випадку, чим більший об'єм пружного стрижня, що зазнає удару (чим більша «енергоємність» стрижня), тим менші динамічні напруження. У випадку коли більший модуль пружності матеріалу стрижня, то динамічні напруження теж більші.

Сказане є справедливим для призматичних стрижнів сталого поперечного перерізу.

## 5.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

### Задача 6. Розрахунок балки за ударного навантаження

На балку двотаврового поперечного перерізу, що закріплена шарнірно, з висоти  $h$  падає вантаж  $P$ .

Необхідно:

1. Знайти найбільше нормальне напруження  $\sigma_{max}^{stat}$  в небезпечному перерізі балки у разі статичної дії вантажу  $P$ .
2. Знайти максимальне динамічне напруження під час удару  $\sigma_{max}^{dyn}$ .
3. Знайти максимальне динамічне напруження під час падіння вантажу на балку  $\sigma_{max}^{dyn'}$  для випадку, коли на опорах вмонтовано амортизатори з піддатливістю  $\alpha$  (*піддатливість* – це переміщення, що припадає на одиницю сили).

Варіанти схем балок показано на рис. 5.2.

Дані – в таблиці 5.1.

У розрахунках взяти модуль пружності  $E \approx 2 \cdot 10^5$  МПа.

Вагою балки знехтувати.

Таблиця 5.1

№ варіанта	№ двотавра	$l$ , м	$P$ , кН	$h$ , м	$\alpha$ , м/кН
0	30	2	0,5	0,5	0,025
1	24	2,7	1,0	0,1	0,02
2	20а	2,5	1,5	0,2	0,023
3	22а	3,0	2,0	0,3	0,027
4	24а	2,8	0,75	0,15	0,028
5	27	3,5	0,80	0,35	0,03
6	30	3,2	0,9	0,40	0,027
7	27а	3,1	1,25	0,45	0,029
8	30а	2,2	1,28	0,55	0,03
9	27	1,75	1,2	0,5	0,035

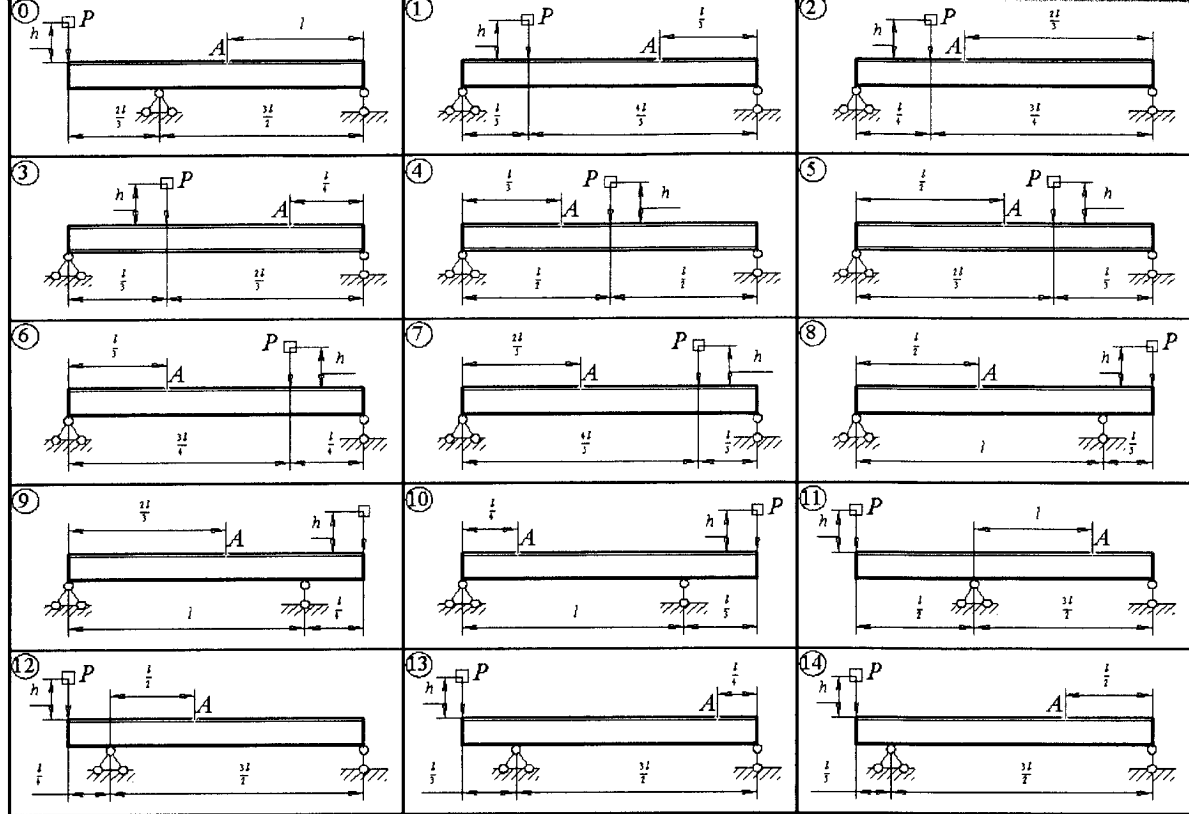


Рисунок 5.2 – Схеми до виконання задачі 6

## Приклад виконання задачі 6

**Дано:**

схема (рис. 5.3);

двотавр № 30а,

$l = 2,5$  м;

$P = 1,3$  кН;

$h = 0,15$  м;

$\alpha = 0,025$  м/кН.

**Знайти:**  $\sigma_{max}^{stat}$ ,  $\sigma_{max}^{dyn}$ ,  $\sigma_{max}^{dyn'}$  - ?

### Розв'язування

1. Знаходимо найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі балки за статичного навантаження:

$$\sigma_{max}^{stat} = \frac{M_{max}}{W_z}.$$

За таблицями сортаменту двотавра № 30а,  $W_z = 518$  см<sup>3</sup>.

Знаходимо реакції з умов рівноваги та будемо епюру  $M$  (рис. 5.3).

$$\sum M_B = 0, \quad R_A \cdot l - P \cdot \frac{1}{5}l = 0 \Rightarrow R_A = 0,2P.$$

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot l - P \cdot \frac{4}{5}l = 0 \Rightarrow R_B = 0,8P.$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_B = P; \quad 0,2P + 0,8P = P.$$

Епюра  $M$  на ділянках лінійна, зі зломом у точці  $C$ .

$$M_C = R_A \cdot \frac{4}{5}l = 0,2P \cdot \frac{4}{5}l = \frac{1}{5}P \cdot \frac{4}{5}l = \frac{4}{25}Pl.$$

Максимальний згинальний момент у перерізі  $C$ .

$$M_{max} = \frac{4}{25} \cdot P \cdot l = \frac{4}{25} \cdot 1300 \cdot 2,5 = 520 \text{ (Н}\cdot\text{м)} = 0,52 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальне напруження:

$$\sigma_{max}^{stat} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{520}{518 \cdot 10^{-6}} \approx 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ МПа}.$$

2. Максимальне напруження під час удару по балці з жорсткими опорами.

Коефіцієнт динамічності:

$$K_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{stat}}}.$$

Переміщення точки удару від статично прикладеної сили (прогин перерізу  $C$ ) визначаємо методом Мора за правилом Верещагіна. Будемо епюру одиничних сил  $M^0$  (рис. 5.3).

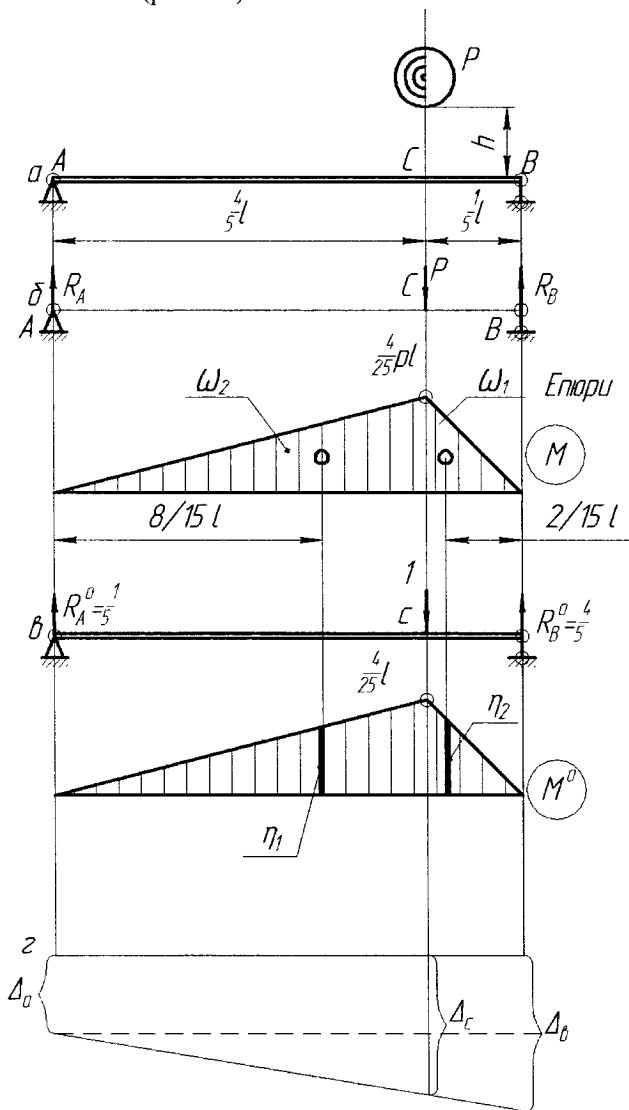


Рисунок 5.3 – До розв'язання прикладу задачі 6

Реакції від дії одиничної сили  $F^0$  знаходимо так само, як від дії сили  $P$ :

$$R_A^0 = 0,2F^0 = 1/5 = 0,2;$$

$$R_B^0 = 0,8F^0 = 4/5 = 0,8.$$

Ордината епюри  $M^0$  у точці С:

$$M_C^0 = R_A^0 \cdot \frac{4}{5}l = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}l = \frac{4}{25}l = 0,4 (M).$$

Переміщення:

$$\Delta_{stat} = \sum \frac{\omega_i \eta_i}{EJ} = \frac{\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2}{EJ},$$

де  $\omega_1, \omega_2$  – площі епюри  $M$ :

$$\omega_1 = \frac{4}{25}Pl \cdot \frac{4}{5}l \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{125} \frac{Pl^2}{EJ};$$

$$\omega_2 = \frac{4}{25}Pl \cdot \frac{1}{5}l \cdot \frac{1}{2EJ} = \frac{2}{50} \frac{Pl^2}{EJ},$$

$\eta_1, \eta_2$  – ординати одиничної епюри під центром ваги відповідної вантажної площі:

$$\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{15}l = \frac{8}{75}l.$$

Таким чином, статичне переміщення:

$$\Delta_{stat} = \frac{8}{125} \frac{Pl^2}{EJ} \cdot \frac{8}{75}l + \frac{2}{50} \frac{Pl^2}{EJ} \cdot \frac{8}{75}l = \frac{Pl^3}{EJ} (0,00683 + 0,00423) = 0,0111 \frac{Pl^3}{EJ} =$$

$$= 0,0111 \cdot \frac{130 \cdot 250^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 7780} = 0,00145 (cm) = 1,45 \cdot 10^{-5} m.$$

Коефіцієнт динамічності:

$$K_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,15}{1,45 \cdot 10^{-5}}} = 146.$$

Максимальне динамічне напруження:

$$\sigma_{max}^{din} = 146 \cdot 1,0 = 146 (MPa).$$

3. Максимальне динамічне напруження для випадку, коли на опорах вмонтовано амортизатори.

Ця задача відрізняється величиною коефіцієнта динамічності:

$$\sigma_{max}^{dyn} = \sigma_{max}^{stat} \cdot K'_{dyn};$$

$$K'_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta'_{stat}}}.$$

Статичне переміщення точки удару визначаємо з урахуванням піддатливості опор:

$$\Delta'_{stat} = \Delta_{stat} + \Delta_{cm},$$

де  $\Delta_{cm}$  – переміщення точки  $C$ , спричинене деформацією компенсаторів.  
З рис. 5.3:

$$\Delta_{stat} = \Delta_A + \frac{4}{5}(\Delta_B - \Delta_A);$$

$$\Delta_A = \alpha \cdot R_A = 0,025 \cdot 0,26 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ (м)};$$

$$\Delta_B = \alpha \cdot R_B = 0,025 \cdot 1,04 = 26 \cdot 10^{-3} \text{ (м)};$$

$$\Delta_{stat} = 6,5 \cdot 10^{-3} + \frac{4}{5}(26 \cdot 10^{-3} - 6,5 \cdot 10^{-3}) = 22,1 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.$$

Коефіцієнт динамічності:

$$K'_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,15}{1,45 \cdot 10^{-5} + 22,1 \cdot 10^{-3}}} = 4,82.$$

Максимальні динамічні напруження:

$$\sigma_{max}^{dyn'} = 4,82 \cdot 1 = 4,82 \text{ (МПа)};$$

$$\frac{\sigma_{max}^{dyn}}{\sigma_{max}^{dyn'}} = \frac{146}{4,82} = 30,3.$$

Таким чином, використання амортизаторів зменшує величину максимальних напружень при ударі приблизно в 30 разів.



## Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача б)

1. Дати означення коефіцієнта динамічності.
2. Як визначається коефіцієнт динамічності через висоту падіння вантажу? Пояснити формулу.
3. Для яких перерізів визначають коефіцієнт динамічності?
4. Як визначити напруження та деформації в будь-якій точці системи, що зазнає дії ударних навантажень?
5. Визначити максимальні напруження та динамічні деформації перерізу в т. А під час удару на прикладі наведеної задачі.
6. Яким чином розраховується система на міцність та жорсткість в умовах ударних навантажень?
7. Як можна зменшити дію ударних навантажень? На яку характеристику системи впливають в цьому випадку?
8. В яких практичних випадках намагаються посилити дію ударних навантажень? За рахунок чого?
9. Записати умови міцності та жорсткості в умовах динамічних навантажень.

## 6 РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ НА ВИТРИВАЛІСТЬ

### 6.1 Короткі теоретичні відомості

#### 6.1.1 Явище втоми матеріалів. Характеристики циклів

Опір матеріалу до зміни модуля або модуля та знака навантаження з часом очевидно відрізняється від опору статичного навантаження. У цьому випадку за змінного навантаження елемент конструкції деформується у разі значно меншого навантаження, ніж за статичного. Поширеним прикладом деталі, на яку діють змінні навантаження, є шток поршневої машини. Знак напружень в штоці змінюється відповідно до напрямку руху поршня.

Насправді можна визначити, що коли елемент конструкції неодноразово зазнає змінного навантаження певного рівня, то після багатьох змін напружень у ньому утвориться мікротріщина, яка буде розвиватись. Зрештою, навіть деталі з високопластичних матеріалів зруйнуються без значних залишкових деформацій.

Чим менші напруження, тим більше число циклів потрібно до виникнення першої тріщини, а далі і до повного руйнування. Що стосується характеристик, то руйнування матеріалу за повторно прикладеного навантаження відбуватиметься під напруженнями, меншими ніж границя текучості.

*Руйнуванням від втоми* називають руйнування матеріалу під дією повторно прикладених напружень.

*Втомою матеріалів* (особливо металів) називають явище руйнування, яке призводить до утворення тріщин, спричинених багаторазовими навантаженнями внаслідок накопичених пошкоджень.

*Опором втоми матеріалу* називають здатність металів протистояти руйнуванню за повторних змінних напружень.

Вивчення втоми матеріалів є дуже важливим. Пошкодження базових компонентів, таких як осі залізничних вагонів, колінчасті вали, шатуни моторів, гребні гвинти, пружини клапанів, повітряні гвинти, поршневі пальці й багато інших деталей переважно пов'язані зі втомою металу.

Руйнування від втоми спостерігається, коли присутня одна з двох характеристик прикладання навантаження:

- 1) багаторазове прикладання навантаження певного знака, наприклад, періодично змінюваного від нуля до максимуму (рис. 6.1, а);
- 2) багаторазове повторення навантаження, що періодично змінюється не тільки за модулем, а й за знаком (знакозмінні навантаження), коли на опір втоми матеріалу одночасно впливають як циклічність, так і зміна навантаження. Водночас розрізняють зміну

навантаження за симетричним циклом (рис. 6.1, б) та за несиметричним (рис. 6.1, в).

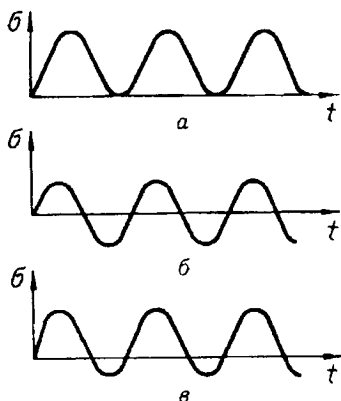


Рисунок 6.1 – Види циклічних навантажень

Максимальне напруження, за якого матеріал витримує багаторазові напруження, що виникають неодноразово, не руйнуючись за таких умов, називається **границею витривалості** (границею втоми).

У більшості інженерних практик, розглядаючи опір матеріалів до змінних напружень, передбачається, що ці напруження є періодичними функціями часу  $p = f(t)$  з періодом  $T$ .

Збір усіх значень напружень за певний період називають **циклом напружень**. На опір до втоми переважно впливають максимальні  $p_{max}$  та мінімальні  $p_{min}$  напруження циклу. Крім них поняття *постійного*, або *середнього*, напруження циклу  $p$  вивчають в механіці матеріалів та конструкцій (рис. 6.2):

$$p_{cp} = \frac{p_{max} + p_{min}}{2}, \quad (6.1)$$

та поняття про амплітуду  $p_a$  циклу, що характеризує змінність напружень:

$$p_a = \frac{p_{max} - p_{min}}{2}. \quad (6.2)$$

Подвоєне значення амплітуди коливань напружень називається **проміжком циклу**. Враховуючи знаки цих напружень, відношення мінімального напруження циклу до максимального називається **характеристикою циклу** або **коефіцієнтом асиметрії циклу** і позначається літерою  $r$ :

$$r = \frac{p_{min}}{p_{max}}. \quad (6.3)$$

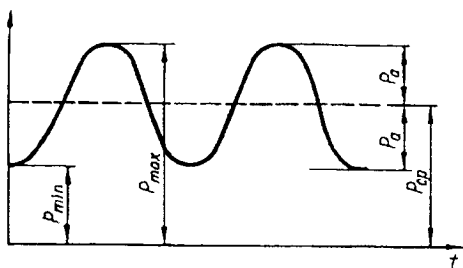


Рисунок 6.2 – Характеристики циклу

1. Найнебезпечнішим є *симетричний цикл*, коли,

$$p_{max} = -p_{min} \quad \text{та} \quad p_{cp} = 0,$$

де

$$r = \frac{p_{min}}{p_{max}} = -1.$$

Границя витривалості за симетричного циклу є мінімальною для такого типу деформації й позначається через  $p_{-1}$ .

2. У випадку *пульсуючого циклу* ( $p_{min} = 0$ ), коли напруження змінюються від 0 до  $p_{max}$ , коефіцієнт асиметрії циклу:

$$r = \frac{0}{p_{max}} = 0.$$

Границя витривалості, що відповідає такому циклу, позначається через  $p_0$ .

3. За  $p_0 = const$ , тобто коли діє постійне статичне навантаження,  $p_{max} = p_{min} = p$  і характеристика циклу:

$$r = \frac{p_{min}}{p_{max}} = \frac{p}{p} = 1.$$

4. У найзагальнішому випадку границю витривалості, отриману в процесі характеризування  $r$ , позначають  $p_r$ . Границю витривалості, визначену за будь-якого певного значення  $r$ , наприклад за  $r = -0.5$ , позначають відповідно  $p_{-0.5}$ .

*Подібними циклами* називають цикли, що мають однакові характеристики  $r$ .

Характеристика циклу, або коефіцієнт асиметрії, може змінюватися від  $-\infty$  до  $+\infty$ .

### 6.1.2 Визначення границі витривалості. Діаграма втоми

Для того, щоб розрахувати границю витривалості матеріалу, необхідно випробувати партію зразків цього матеріалу (в кількості 6-12 шт.) на відповідній випробувальній машині. Для цього зазвичай вибирають циліндричні зразки діаметром 7...10 мм.

Границі витривалості матеріалу за вибраної характеристики циклу  $r$  будуть однаковими залежно від виду деформації, тобто залежно від умов випробувань: за змінних напружень розтягання-стискання, змінного кручення, згинання або ж в умовах складного напруженого стану. Тому перед визначенням границі витривалості потрібно заздалегідь прописати, який тип деформації та характер зміни напружень протягом циклу необхідно дослідити.

У лабораторії найпростіше провести тест симетричного циклу. На рис. 6.3. показано схему обладнання для визначення границі витривалості за ротатійного згинання у разі симетричного циклу. Під час обертання зразка його зовнішні волокна почергово розтягуються (коли вони знизу), а потім стискаються (у разі повороту зразка на  $180^\circ$ ).

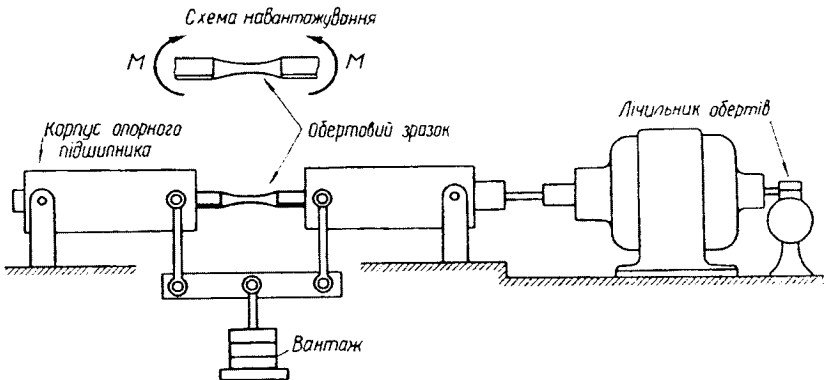


Рисунок 6.3 – Обладнання для випробування на втому міцність дослідних зразків

Випробовуючи серію зразків, щоб визначити границю витривалості, необхідно давати окремим зразкам такі навантаження, які не будуть руйнувати зразок, витримуючи різну кількість циклів навантаження.

Обробка отриманих експериментальних даних, зазвичай, супроводжується побудовою кривої втоми, яку в літературі часто називають кривою Веллера (рис. 6.4). Крива втоми будується по точках у координатах кількості циклів  $N$  та напруження  $p_{max}$ . Кожен зразок, що зруйнувався, відповідає одній точці з координатами  $N$  (кількість циклів до

руйнування) та  $p_{max}$  (напруження) на діаграмі, тобто крива втомі є функцією  $p_{max} = f(N)$ .

Процедуру прикладання навантажень до зразка зазвичай обирають у порядку зменшення. Тобто навантаження першого зразка явно перевищує границю витривалості, а навантаження наступних зразків поступово зменшується. Очевидно, що кожен зразок з меншим навантаженням буде витримувати все більше і більше циклів. Також доступний інакший порядок навантаження.

Неважко помітити, що крива втомі будується по точках зруйнованих зразків. Наприклад, під час випробування сталі (рис. 6.4, крива 1) під великим напруженням крива різко спадає і зі зниженням їх крутість зменшується. Крива асимптотично наближається до певної горизонтальної лінії, що відсікає на осі ординат відрізок, значення якого й визначається як границя витривалості.

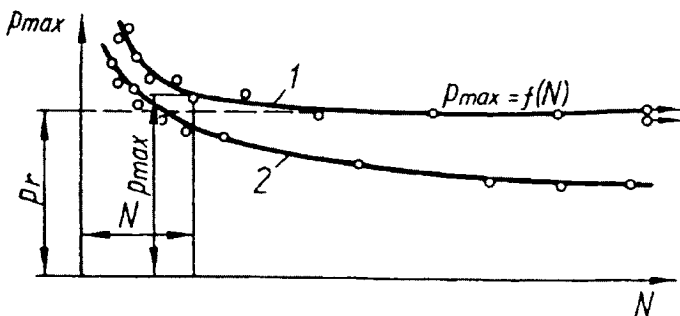


Рисунок 6.4 – Крива Веллера

Ордината точки на кривій фактично починає збігатись із зазначеною асимптотичною лінією. Ордината цієї точки відповідає напруженню, за якого зразок не руйнується, пройшовши наперед задану певну кількість циклів випробування (так звану *базу випробувань*  $N_0$ ).

### 6.1.3 Вплив конструктивно-технологічних факторів на границю витривалості

#### *Вплив концентрації напружень*

Найважливішим фактором зменшення границі витривалості є концентрація напружень, спричинена різкою зміною поперечного перерізу деталі. Насправді концентратори напружень містять шпонкові канавки, отвори на деталях, порізи на поверхні, невеликі радіуси кривини у місцях різкої зміни розмірів перерізів тощо. Зазвичай концентрація напружень

призводить до втоми, яка сприяє утворенню тріщин і урешті-решт до руйнування деталі.

В процесі дослідження опору втоми використовують поняття *ефективного* або *дійсного коефіцієнта концентрації*. Цей коефіцієнт є відношенням границі витривалості гладкого зразка до границі витривалості зразка з концентратором напружень за умови однаковості абсолютних розмірів перерізів. Ці коефіцієнти надалі позначаються так:

- для нормальних напружень:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}; \quad (6.4)$$

- для дотичних напружень:

$$k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}}, \quad (6.5)$$

де  $\sigma_{-1}$  та  $\tau_{-1}$  – границі витривалості для гладеньких зразків;

$\sigma_{-1k}$  та  $\tau_{-1k}$  – границі витривалості зразків з концентрацією напружень.

#### *Вплив розмірів (масштабний фактор)*

Ефективність концентрації напружень обумовлена абсолютними розмірами перерізу деталі, а саме: зі збільшенням розмірів деталі (за збереження її геометричної подібності) збільшуються значення ефективних коефіцієнтів концентрації напружень.

Абсолютні розміри перерізів деталі, які впливають на ефективність концентрації напружень, також суттєво впливають на границю витривалості зразків без концентрації напружень. Одночасно зі збільшенням абсолютних розмірів перерізів границі витривалості знижуються. Відношення границі витривалості деталі розміром  $d$  до границі витривалості дослідного зразка подібної конфігурації, що має малі розміри ( $d_0 = 7 \dots 10$  мм), називають *коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів перерізу* і позначають відносно нормальних напружень таким чином:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1d_0}}. \quad (6.6)$$

Коефіцієнти впливу абсолютних розмірів перерізу можна розрахувати й на зразках з концентрацією напружень. У такому випадку:

$$\varepsilon_{\sigma k} = \frac{\sigma_{-1kd}}{\sigma_{-1kd_0}}. \quad (6.7)$$

Причому деталь розміром  $d$  та зразок малого розміру  $d_0$  мають бути геометрично схожі.

Для розрахунку елементів машин з урахуванням впливу розмірів деталі (як за наявності концентраторів напружень, так і без них) доступні спеціальні графічні дані на основі експериментів подібні до тих, що показано на рис. 6.5 (тут шкала  $d$  – логарифмічна). Крива 1 відповідає деталі з вуглецевої сталі без джерела концентрації напружень, а крива 2 – деталі з легованої сталі ( $\sigma_b = 1000 \dots 1200 \text{ МПа}$ ) за відсутності концентрації напружень та вуглецевої сталі за наявності помірної концентрації напружень. Крива 3 відповідає деталі з легованої сталі за наявності концентрації напружень, а крива 4 – будь-якій сталі у разі сильного концентратора (типу нарізки).

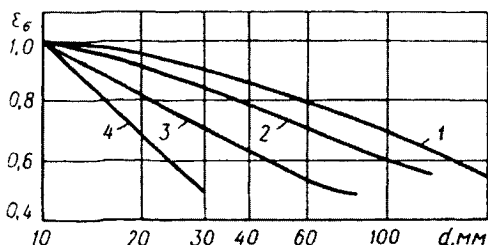


Рисунок 6.5 – Графіки коефіцієнта впливу абсолютних розмірів

Згідно з експериментами, у разі збільшення діаметра до 150...200 мм границя витривалості зразків під час ротаційного згинання може бути зменшена на 30...45%. Експериментальні дані показують, що за однорідного напруженого стану абсолютний розмір мало впливає на опір втоми у випадку розтягу-стиску. Під час кручення і згинання, коли розмір деталі збільшується, границя витривалості зменшується більш очевидно. Це пов'язано з впливом градієнта напружень.

Границя витривалості зменшується зі збільшенням абсолютного розміру деталі, що також можна пояснити впливом таких факторів:

1) навіть якщо термічну обробку виконати належним чином, діаметр заготовки збільшується, а механічна міцність матеріалу зменшується;

2) зміною властивостей поверхневого шару після механічної обробки, оскільки ці зміни виявляються різними у випадку різних розмірів деталі;

3) неоднорідністю механічних властивостей та напруженістю різних зерен, пов'язаних з полікристалічною структурою металу, як результат – зі збільшенням розміру деталі зростає можливість раннього руйнування від втоми; цей фактор, мабуть, є головним.

Опір втоми матеріалів оцінюється за границею витривалості  $\sigma_{-1d0}$ , яка визначається на гладеньких дослідних зразках малого діаметра, а для висновку про міцність деталі за змінних напружень має бути відома



границя витривалості  $\sigma_{-1kd}$ . Тому вводять додаткове поняття *ефективного коефіцієнта концентрації напружень деталі*:

$$k_{\sigma d} = \frac{\sigma_{-1d_0}}{\sigma_{-1kd}}. \quad (6.8)$$

Коефіцієнт  $k_{\sigma d}$  враховує загальний вплив концентрації напружень та абсолютних розмірів на опір втоми й визначається за допомогою даних досліджень зразків та моделей різних перерізів.

#### *Вплив стану поверхні*

У більшості випадків поверхневий шар елементів конструкцій, які зазнають періодичних навантажень, є більш напруженим, ніж внутрішній поверхневий шар (зокрема, це відбувається за згинання та кручення). Крім того, поверхня деталей майже завжди має дефекти, пов'язані з якістю механічної обробки та корозією внаслідок впливу навколишнього середовища. Тому тріщини від втоми зазвичай починаються з поверхні, а погана якість останньої призводить до зниження опору втоми.

Коефіцієнт  $\beta$  використовується для оцінення впливу стану обробленої поверхні на втому. Коефіцієнт  $\beta$  дорівнює відношенню границі витривалості дослідного зразка після певної обробки поверхні до границі витривалості ретельно відшліфованого зразка.

Шкідливий вплив поверхневої мікронерівності здебільшого пом'якшується пластичною деформацією, спричиненою механічною обробкою у поверхневому шарі і поширюється на певну глибину. Глибина залежить від режимів різання, особливо від подачі. За грубого точіння вона може досягати 1 мм і більше, а у разі шліфування й полірування не перевищує сотих часток міліметра. Пластична деформація поверхневого шару може збільшити границю витривалості на 10...20 %.

На границю витривалості сильно впливає корозія. Цей ефект буде іншим тоді, коли метал, що не був корозійним до випробування на опір втоми, не піддається корозії під час випробувань, і тоді, коли метал піддається корозії під час випробувань. В обох зазначених випадках, особливо в другому, корозія призведе до різкого зниження границь витривалості (до 70...80 %). Зменшення границі витривалості за корозії виражається тим більше, чим вища границя міцності металу і чим більше останній схильний до корозії.

У разі простих видів деформації під час зміни напружень у деталі за симетричним циклом запас міцності за дії, наприклад, нормальних напружень можна обчислити за формулою:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1kd}}{\sigma_a}, \quad (6.9)$$

де  $\sigma_{-1kd}$  – границя витривалості матеріалу деталі за розтягу/стиску або за згину;

$\sigma_a$  – номінальні значення знакозмінних напружень.

#### 6.1.4 Розрахунок на міцність за повторно-змінних навантажень

За змінного навантаження у разі складного напруженого стану для розрахунку на міцність може бути використана відповідна теорія міцності. Для матеріалів у пластичному стані, зазвичай, застосовують III та IV теорії міцності.

Для визначення запасу міцності  $n$  за складного напруженого стану (наприклад, у разі згину з крученням) потрібно скористатися співвідношенням:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}, \quad (6.10)$$

де  $n_\sigma = \frac{\sigma_{-1kd}}{\sigma_a}$  – коефіцієнт, який характеризує запас міцності лише за нормальними напруженнями;

$n_\tau = \frac{\tau_{-1kd}}{\tau_a}$  – коефіцієнт, що характеризує міцність тільки за дотичними напруженнями.

Тоді запас міцності  $n$  у разі складного напруженого стану визначатиметься формулою:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 n_\tau^2}}. \quad (6.11)$$

Позначимо:

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \quad (6.12)$$

Звідки формули для запасу міцності запишемо таким чином:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_N}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma d} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_{cpM}}, \quad (6.13)$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{k_\tau \tau_a + \psi_\tau \tau_{cpM}}. \quad (6.14)$$

Запаси міцності у разі розрахунку на опір утомі залежать від точності визначення зусиль та напружень, однорідності матеріалів, якості технології виготовлення деталі та інших факторів. З підвищенням точності розрахунку (широке використання дослідних даних для визначення зусиль, напружень та характеристик міцності), за достатньої однорідності матеріалу та високої якості технологічних процесів береться запас міцності  $n = 1,3 \dots 1,4$ . Для звичайної точності розрахунку (без належної експериментальної перевірки зусиль та напружень) за помірної

однорідності матеріалу  $n = 1,4 \dots 1,7$ . У випадку низької точності розрахунку (відсутності експериментальної перевірки зусиль та напружень) і недостатньої однорідності матеріалу, особливо для деталей великих розмірів або ливарного виробництва,  $n = 1,7 \dots 3,0$ .

Відповідно до результатів випробувань деталей або досвіду експлуатації машини з типовими деталями, можна отримати більш надійні дані про значення коефіцієнта запасу міцності.

## 6.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

### Задача 7. Розрахунок вала на витривалість за згинання та кручення

Східчастий вал, що обертається на двох шарикопідшипниках (рис. 6.6), зазнає дії поперечної сили  $P$  та циклічного крутного моменту  $T$  з коефіцієнтом асиметрії циклу  $r$ .

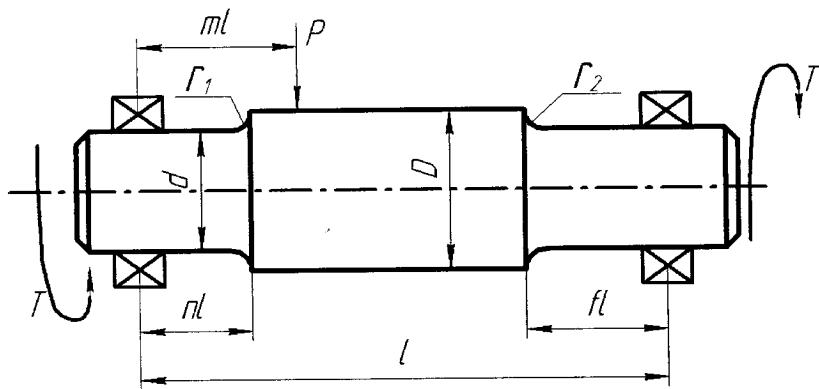


Рисунок 6.6 – Схема до виконання задачі 7

Якість поверхні характеризується величиною шорсткості.

Дані взяті з табл. 6.1 та 6.2.

За даними самостійно зобразити рисунок в масштабі.

Необхідно:

1. Показати розрахункову схему вала.
2. Побудувати епюри згинальних моментів та визначити небезпечні перерізи.
3. Розрахувати згинальні моменти в небезпечних перерізах.
4. Визначити  $[P]$  (допустиму величину сили  $P$ ) з умови міцності за згинання і кручення.
5. Розрахувати коефіцієнт запасу вала.

Таблиця 6.1

№ варіанта	Матеріал	$[n_\sigma], [n_\tau]$	$r$	Шорсткість $R_a$ , мм
0	Сталь 35	2,2	-0,7	1,25
1	Сталь 30	2,1	-0,8	2,3
2	Сталь 10	2,4	-0,6	0,32
3	Сталь 45	2,3	-0,4	0,16
4	Сталь 50	2,7	-0,3	2,5
5	30ХМ	2,8	0,4	1,26
6	40Х	2,9	0,5	0,32
7	12ХНЗА	2,6	0,4	0,63
8	30ХГСА	3,0	0,7	0,16
9	40ХНМА	2,9	0,6	0,32

Таблиця 6.2 – Дані геометрії вала (схеми 00, 01 ... 14)

№ рисунка	$L$	$a$	$M$	$n$	$f$	$d$	$D$	$r_1$	$r_2$
	см					мм			
00	85	25	0,44	0,32	0,39	42	98	2	9
01	80	20	0,42	0,34	0,40	41	80	1	10
02	95	35	0,48	0,34	0,39	43	74	4	7
03	90	30	0,46	0,33	0,38	38	76	3	8
04	105	45	0,52	0,30	0,36	46	70	6	4
05	100	40	0,50	0,35	0,34	45	72	3	3
06	115	55	0,56	0,38	0,37	48	66	9	3
07	110	50	0,54	0,37	0,33	47	68	10	3
08	125	65	0,48	0,40	0,31	50	62	10	1
09	120	60	0,58	0,39	0,32	49	64	9	2
10	80	20	0,44	0,32	0,39	43	74	4	7
11	90	30	0,48	0,34	0,39	45	72	3	3
12	100	40	0,52	0,30	0,36	50	62	10	1
13	110	50	0,56	0,38	0,37	42	98	2	9
14	120	60	0,48	0,40	0,31	41	80	1	10

## Приклад розв'язання задачі 7

**Дано:**

матеріал – сталь 40ХН;

$l = 120 \text{ см}$ ,  $a = 50 \text{ см}$ ;  $m = 0,52$ ;  $n = 0,35$ ;  $f = 0,30$ ;

$d = 45 \text{ мм}$ ;  $D = 70 \text{ мм}$ ;  $r_1 = 9 \text{ мм}$ ;  $r_2 = 5 \text{ мм}$ ;  $[n_\sigma] = 2,5$ ;

$r = -0,4$ ; шорсткість  $R_a = 0,32 \text{ мкм}$ .

**Знайти:**

$[P]$  – ?  $n$  – ?

### Розв'язування

Показники статичної і циклічної міцності сталі 40ХН (додатки В, Г)

$\sigma_b = 1000 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{0,2} = 800 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{0,2} = 390 \text{ МПа}$ ;

$\sigma_{-1} = 400 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{-1} = 240 \text{ МПа}$ ;

$\psi_n = 0,15$ ;  $\psi_\tau = 0,075$ .

1. Знаходимо максимальну і мінімальну величини крутних моментів:

$$M_{max} = P \cdot a = P \cdot 50 \text{ (см)}; \quad M_{min} = r \cdot M_{max} = (-0,4) \cdot 50P = -20P \text{ (см)}.$$

2. Креслимо розрахункову схему вала згідно з вихідними даними (рис. 6.6).

3. Будуємо епюри згинальних моментів і визначаємо небезпечні перерізи вала.

4. Визначаємо опорні реакції (рис. 6.6).

$$V_B = \frac{0,52 \cdot 120 \cdot P}{120} = 0,52P; \quad \sum M_B = 0; \quad V_A = 120 - P \cdot 57,6 = 0;$$

$$V_A = \frac{P \cdot 57,6}{120} = 0,48P.$$

*Перевірка:*

$$\sum Y = 0; \quad V_A - P + V_B = 0; \quad 0,48P + 0,52P - P = 0.$$

5. Визначаємо згинальні моменти у характерних перерізах:

$$M_A = 0; \quad M_C = V_A \cdot 62,4 = 0,48 \cdot P \cdot 62,4 = 30P \text{ (см)}.$$

Будуємо епору  $M$  згинальних моментів (рис. 6.7). Крутні моменти по довжині вала однакові. Тому небезпечні перерізи визначаємо, орієнтуючись на розрахункову схему вала і епору згинальних моментів (рис. 6.7). Такими є перерізи  $C$  і  $E$ , тому що за наявності концентраторів напружень у вигляді ступінчастої зміни діаметрів, тут діють згинальні моменти, близькі до максимальних.

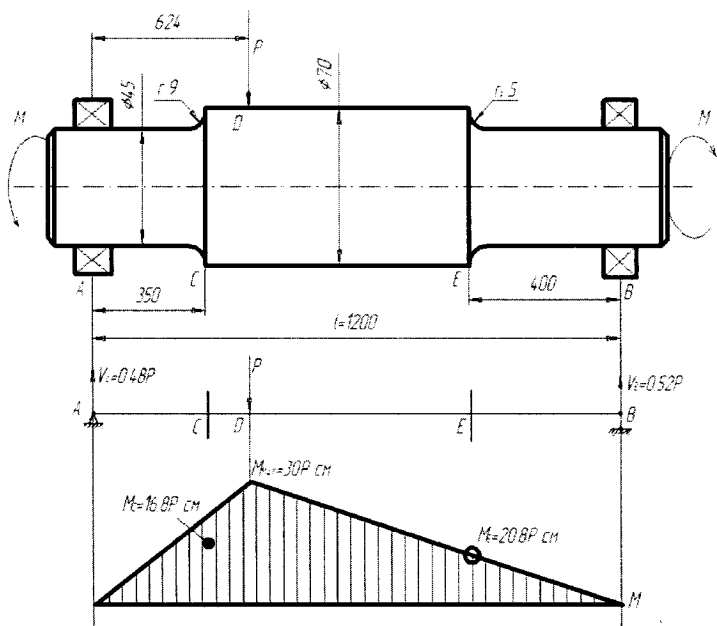


Рисунок 6.7 – Розрахункова схема вала

6. Обчислюємо згинальні моменти у небезпечних перерізах.

Переріз С:

$$M_C = V_A \cdot 35 = 0,48P \cdot 35 = 16,8P \text{ (см)}.$$

Переріз Е:

$$M_E = V_B \cdot 40 = 0,52P \cdot 40 = 20,8P \text{ (см)}.$$

7. Визначаємо  $[P]$ . Знаходимо  $[P]_C$  і  $[P]_E$  – величини допустимої сили для кожного перерізу. Менша з них і буде  $[P]$ .

Переріз С: знаходимо  $[P]_C^C$  – допустиму величину сили  $P$  з умови міцності у разі згину:

$$n_\sigma \geq [n_\sigma].$$

Нормальне напруження в небезпечній точці перерізу під час обертання вала змінюється за симетричним циклом. Тому коефіцієнт запасу обчислимо за формулою:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\text{дин}} \cdot \sigma_a}.$$

Амплітудне напруження:

$$\sigma_a = \sigma_{max} = \frac{M}{W}.$$

Осьовий момент опору перерізу вала:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4,5^3}{32} = 8,95 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Тоді

$$\sigma_a^C = \frac{M_C}{W} = \frac{16,8P}{8,95} = 1,89P \left[ \frac{1}{\text{см}^2} \right].$$

Загальний коефіцієнт зниження границі витривалості деталі за симетричного циклу знайдемо за формулою:

$$K_{\sigma dyn} = \frac{K_{\sigma}}{\beta \varepsilon_{\sigma}}.$$

За  $\frac{D}{d} = \frac{70}{45} = 1,56$ ;  $\frac{r^C}{d} = \frac{r_1}{d} = \frac{9}{45} = 0,2$  і  $\sigma_b = 1000 \text{ МПа}$  коефіцієнти концентрації напружень:

-  $K_{\sigma}^C = 1,38$ ;  $K_{\tau}^C = 1,24$  (додаток Д);

-  $\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\tau} = 0,755$  (додаток Е).

За шорсткості  $R_a = 0,32 \text{ мкм}$  маємо  $0,32 \frac{1}{\beta} = 1$  (додаток Ж):

$$K_{\sigma dyn}^C = \frac{1,38 \cdot 1}{0,755} = 1,83; \quad K_{\tau dyn}^C = \frac{1,24 \cdot 1}{0,755} = 1,64.$$

Використовуючи (6.1) і (6.2) одержимо:

$$\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma dyn}^C \cdot \sigma_a^C} \geq [n_{\sigma}] = \frac{400}{1,83 \cdot 1,89P/10^2} \geq 2,5;$$

$$[P]_{\sigma}^C = \frac{400 \cdot 10^2}{1,83 \cdot 1,89 \cdot 2,5} = 4626 \text{ (Н)}.$$

Розмірність величин:  $\sigma_{-1} - [Н/мм^2]$ ,  $\sigma_a^C - [P/мм^2]$ .

Знаходимо  $[P]_{\tau}^C$  - допустиму величину сили  $P$  з умови міцності у разі кручення:

$$n_{\tau} \geq [n_{\tau}].$$

Матеріал у небезпечній точці сприймає асиметричний цикл дотичних напружень. Тому визначимо допустиме значення сили  $[P]_{\tau(r)}^C$  з умови міцності утоми і сили  $[P]_{\tau(r)}^C$ .

Записуємо умову міцності утоми:

$$n_{\tau(r)} \geq [n_{\tau}].$$

Визначаємо коефіцієнт запасу  $n_{\tau(r)}$  відносно границі витривалості.

Для цього обчислюємо добуток  $\rho \cdot K_{\tau dyn}^C$ . Характеристика  $\rho = \frac{\tau_a}{\tau_c}$ :

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{M_{KPmax}}{W_p} - \frac{M_{KPmin}}{W_p} \right);$$

$$\tau_c = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{M_{KPmax}}{W_p} + \frac{M_{KPmin}}{W_p} \right).$$

Полярний момент опору перерізу вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W = 2 \cdot 8,946 = 17,9 \text{ (см}^3\text{)};$$

$$\tau_a = \frac{M_{KPmax} - M_{KPmin}}{2W_p} = \frac{(50 - (-20))P}{2 \cdot 17,9} = 1,96P \left[ \frac{1}{\text{см}^2} \right].$$

$$\tau_c = \frac{(50 + 20) \cdot P}{2 \cdot 17,9} = 0,84P \left[ \frac{1}{\text{см}^2} \right];$$

$$\rho = \frac{1,96P}{0,84P} = 2,33.$$

Оскільки величина добутку  $\rho \cdot K_{\tau dyn}^C = 2,33 \cdot 1,64 > 1$ , то для обчислення коефіцієнта запасу використовуємо формулу:

$$n_{\tau(r)} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau dyn}^C \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_c} \geq [n_{\tau}] = \frac{240}{1,64 \left( \frac{1,96P}{10^2} \right) + 0,075 \left( \frac{0,84P}{10^2} \right)} \geq 2,5.$$

$$[P]_{\tau(r)}^C = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,64 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84) \cdot 2,5} = 2970 \text{ (Н)}.$$

Розмірність:  $\tau_{-1} - [H/мм^2]$ ,  $\tau_a, \tau_c - [P/мм^2]$ .

Знаходження  $[P]_{\tau(r)}^L$

Записуємо умову статичної міцності:

$$n_{\tau(T)} \geq [n_{\tau}].$$

Коефіцієнт запасу відносно границі текучості обчислюємо за формулою:

$$n_{\tau(T)} = \frac{\tau_m}{\tau_{max}},$$



$$\text{де } \tau_{\max} = \tau_a + \tau_c = (1,956 + 0,838)P \left[ \frac{1}{\text{см}^2} \right] = 2,9P \left[ \frac{1}{\text{см}^2} \right]. \quad (6.15)$$

Враховуючи (6.13 – 6.15), одержимо:

$$\frac{\tau_m}{\tau_{\max}} \geq [n_\tau] \Rightarrow \frac{390}{2,90/10^2} \geq 2,5 \Rightarrow [P]_{\tau(T)}^\omega = \frac{390 \cdot 10^2}{2,9 \cdot 2,5} \Rightarrow [P]_{\tau(T)}^\omega = 5390 \text{ (H)}.$$

Порівнюючи знайдені значення величин навантаження:

$$[P]_\sigma^\omega = 3720 \text{ H}, \quad [P]_{\tau(r)}^\omega = 2970 \text{ H}, \quad [P]_{\tau(T)}^\omega = 5390 \text{ H},$$

робимо висновок, що для перерізу  $L$  допустима величина сили:

$$[P]^L = 2970 \text{ H}.$$

*Переріз E:*

1. Знаходимо  $[P]_\sigma^E$ :

$$\sigma_a^E = \sigma_{\max}^E = \frac{M_E}{W} = \frac{20,8P}{8,95} = 2,32P \left[ \frac{1}{\text{см}^2} \right].$$

*Визначаємо коефіцієнти*

$$K_{\sigma \text{ дун}}^A \text{ і } K_{\tau \text{ дун}}^A.$$

$$\text{За } \frac{D}{d} = \frac{70}{45} = 1,56; \quad \frac{r^E}{d} = \frac{r_2}{d} = \frac{5}{45} = 0,11 \text{ і } \sigma_b = 1000 \text{ МПа},$$

$$K_\sigma^E = 1,62, \quad K_\tau^E = 436, \quad \varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = 0,76, \quad 1/\beta = 1.$$

$$\text{Тоді: } K_{\sigma \text{ дун}}^E = \frac{1,62}{0,76} = 2,15; \quad K_{\tau \text{ дун}}^E = \frac{1,36 \cdot 1}{0,76} = 1,8;$$

$$\frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma^E \cdot \sigma_a^E} \geq [n_\sigma] = \frac{400}{2,15 \cdot (1,79P/10^2)} \geq 2,5 \Rightarrow [P]_\sigma^E = \frac{400 \cdot 10^2}{2,15 \cdot 1,79 \cdot 2,5} \Rightarrow [P]_\sigma^E = 4160 \text{ H}.$$

$$\text{Розмірність величин: } \sigma_{-1} - [H/\text{мм}^2], \quad \sigma_a^E - [P/\text{мм}^2].$$

*Обчислюємо  $[P]_\tau^E$  у випадку асиметричного кручення.*

Критерій  $\rho \cdot K_{\tau \text{ дун}}^E = 2,33 \cdot 1,8 > 1$  і коефіцієнт запасу відносно границі витривалості обчислюємо за формулою:

$$n_{\tau(r)} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D}^E \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_c} \geq [n_\tau] \Rightarrow \frac{240}{1,8 \frac{1,961}{10^2} + 0,0075 \frac{0,841}{10^2}} \geq 2,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [P]_{\tau(r)}^E = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,8 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84) \cdot 2,5} \Rightarrow [P]_{\tau(r)}^E = 2680 \text{ (H)} .$$

Амплітудні  $\tau_a$  і середні  $\tau_{cp}$  напруження в перерізах  $L$  і  $E$  однакові.

Тому:

$$[P]_{\tau(r)}^E = [P]_{\tau(r)}^L = 5340 \text{ H} .$$

Як видно з порівняння  $[P]_{\sigma}^E$ ,  $[P]_{\tau(r)}^E$  і  $[P]_{\tau(r)}^L$ , для перерізу  $E$  допустима величина сили  $[P]^E = 2680 \text{ H}$ .

Отже, допустима величина сили  $P$  для вала визначається міцністю утоми матеріалу в небезпечній точці перерізу  $E$ :

$$[P] = [P]^E = 2680 \text{ H} .$$

*Обчислення коефіцієнта запасу міцності.*

У разі плоского напруженого стану коефіцієнт запасу  $n$  визначають за формулою:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} .$$

Обчислюємо його для кожного вірогідно небезпечного перерізу. Менша з величин  $n$  є коефіцієнтом запасу вала.

Коефіцієнт запасу за нормальними напруженнями  $n_{\sigma}$  обчислюється в небезпечних точках перерізів  $L$  та  $E$ .

*Переріз L:*

$$n_{\sigma}^L = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma dyn} \cdot \sigma_a^L} ,$$

$$\sigma_a^L = 1,88 \cdot [P] / \text{см}^2 = \frac{1,88 \cdot 2680}{10^2} \cdot \frac{\text{H}}{\text{мм}^2} = 50,4 \text{ МПа} .$$

Тоді:

$$n_{\sigma}^L = \frac{400}{1,83 \cdot 50,4} \Rightarrow n_{\sigma}^L = 4,34 ,$$

$$n_{\tau}^L = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau dyn}^L \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_a} = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,64 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84) \cdot 2680} \Rightarrow n_{\tau}^L = 2,74 ,$$

$$n_L = \frac{n_{\sigma}^L \cdot n_{\tau}^L}{\sqrt{(n_{\sigma}^L)^2 + (n_{\tau}^L)^2}} = \frac{4,34 \cdot 2,74}{\sqrt{4,34^2 + 2,74^2}} \Rightarrow n_L = 2,3 .$$

Переріз  $E$ :

$$n_{\sigma}^E = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma dyn}^E \cdot \sigma_a^E},$$

$$\sigma_a^E = 1,79 [P]/\text{см}^2 = \frac{1,79 \cdot 2680}{10^2} \left[ \frac{H}{\text{мм}^2} \right] = 48 \text{ МПа}.$$

Тоді:

$$n_{\sigma}^E = \frac{400}{48 \cdot 2,3} \Rightarrow n_{\sigma}^E = 3,6.$$

Оскільки величина  $[P]$  визначена з умови міцності матеріалу в небезпечній точці перерізу  $E$  у разі кручення, то:

$$n_{\tau}^E = [n_{\tau}] = 2,5;$$

$$n_E = \frac{n_{\sigma}^E \cdot n_{\tau}^E}{\sqrt{(n_{\sigma}^E)^2 + (n_{\tau}^E)^2}} = \frac{3,6 \cdot 2,5}{\sqrt{3,6^2 + 2,5^2}} \Rightarrow n_{\sigma} = 2,05.$$

Отже, коефіцієнт запасу вала:

$$n = n_E = 2,05.$$

**Відповідь:**  $[P] = 2680 \text{ Н}$ ;  $n = 2,05$ .

### Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 7)

1. Який порядок розрахунку вала на витривалість у випадку згину та кручення?
2. Як знаходяться максимальні і мінімальні величини крутних моментів?
3. Як визначаються небезпечні перерізи?
4. Як визначається амплітудне навантаження?
5. Як знаходиться полярний момент опору перерізу вала?
6. Як обчислюється коефіцієнт запасу міцності?
7. Як визначається величина допустимого зусилля?
8. Що таке втома матеріалу?
9. Що називають опором втоми матеріалу?
10. Дати поняття границі витривалості.

## 7 КАРТА МАТЕРІАЛУ

### 7.1 Діаграма зміцнення матеріалу (крива течії)

Розрахунок технологічних процесів холодного пластичного формоутворення виробів з листових заготовок, передбачення руйнування матеріалу із застосуванням сучасних комп'ютерних програм потребує знання поведінки металу в пластичній області у вигляді діаграм зміцнення, які також набули поширення в літературі під назвою кривих течії, кривих зміцнення і т. д. [4, 6–8, 11]. Такі відомості важливі, коли здійснюються аналіз та проектні розрахунки операцій пластичного деформування.

Важливим моментом практичного використання діаграм зміцнення є пошук і подальше використання вдалої апроксимації експериментальних точок у вигляді аналітичних функцій. Найкраще використовувати апроксимувальні рівняння, в яких коефіцієнти мають зрозумілий фізичний зміст.

Зокрема, для теоретичних розрахунків процесів холодного пластичного формозмінення, використовується степенева залежність Г. Свіфта у вигляді дво- або трипараметричної функції [8]:

$$\sigma_u = A(e + \varepsilon_u)^n; \quad (7.1)$$

$$\sigma_u = A\varepsilon_u^n, \quad (7.2)$$

де  $\sigma_u$  – інтенсивність напружень (напруження Мізеса),

$\varepsilon_u$  – накопичена логарифмічна деформація,

$A, n$  – апроксимувальні коефіцієнти діаграми зміцнення.

Важливою гіпотезою, що постулюється в теорії обробки тиском і яка знайшла експериментальне підтвердження, є твердження про єдину діаграму зміцнення – ця крива залежить лише від виду матеріалу і не залежить від виду навантаження, яке призводить до деформації матеріалу.

Відповідно вихідні дані для отримання діаграми зміцнення отримуються із найпростіших випробувань (розтягування, стискання, кручення тощо). В практиці набуло поширення випробовування в умовах стискання циліндричних зразків. В цьому випадку інтенсивність напружень визначається в такий спосіб:

$$\sigma_u = \frac{4P}{\pi d_i^2}; \quad (7.3)$$

$$\sigma_u = \frac{4P}{\pi d_0^2 \frac{h_0}{h_i}}, \quad (7.4)$$

де  $d_0$  і  $d_i$  – діаметри зразка до і в процесі осадження;  
 $h_0, h_i$  – висота зразка до і в процесі осадження.

Крім того, інтенсивність деформацій розраховується за формулою:

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}, \quad (7.5)$$

де  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , – головні логарифмічні деформації.

Логарифмічні деформації під час стискання циліндричного зразка визначаються так:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 = 2 \ln \frac{d_0}{d_i}; \quad (7.6)$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 = \ln \frac{A_0}{A_i}; \quad (7.7)$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 = \ln \frac{H_0}{H_i}, \quad (7.8)$$

де  $d_0, A_0, H_0, d_i, A_i, H_i$  – діаметр, площа і висота циліндричного зразка в початковому стані і після випробування.

Таким чином, як експериментальні дані використовують  $\sigma_u$  і  $\varepsilon_u$  (для деяких матеріалів ці дані наведено в додатку Л). Дані для отримання кривих течії взято з власних робіт [9–12, 15] або в роботах [4, 6, 22].

Нехай ми бажаємо апроксимувати криву течії формулою (7.2).

Візьмемо логарифм виразу (7.2):

$$\ln \sigma_u = \ln A + n \ln \varepsilon_u \quad (7.9)$$

Тоді показник  $n$ :

$$n = \frac{\ln \sigma_u - \ln A}{\ln \varepsilon_u}. \quad (7.10)$$

Значення параметра  $n$  осереднюється за результатами п'яти-шести розрахунків

$$n_{cp} = \frac{n_i}{5 \div 6}. \quad (7.11)$$

Варто відмітити, що коефіцієнт  $A$  в формулі (7.2) має фізичний зміст:  $A$  відповідає інтенсивності напружень  $\sigma_u$  за  $\varepsilon_u = 1$ . Отже, взявши два відповідних значення  $\sigma_u$  і  $\varepsilon_u$ , знаходимо  $n$ . Зауважимо, що показнику  $n$

відповідає деформація  $\varepsilon_u$  у випадку досягнення максимального навантаження  $P_{max}$  на умовній діаграмі розтягу ізотропного матеріалу (рис. 7.1).

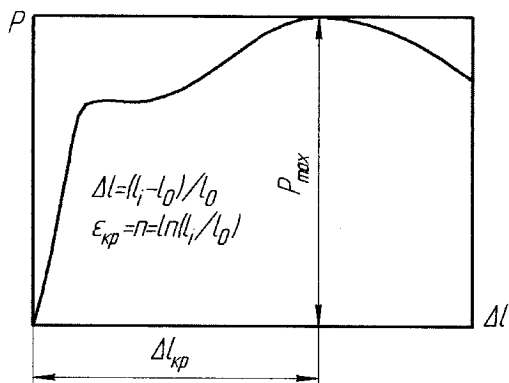


Рисунок 7.1 – Умовна діаграма розтягу досліджуваного матеріалу

На рис. 7.2 показано діаграми зміцнення сталей 38Х2МЮА і 30Х3МФА, отримані за експериментальними результатами випробувань на осьовий стиск циліндричних зразків із змаченням торців [10]. Суцільною лінією показано апроксимацію кривої течії за (7.2).

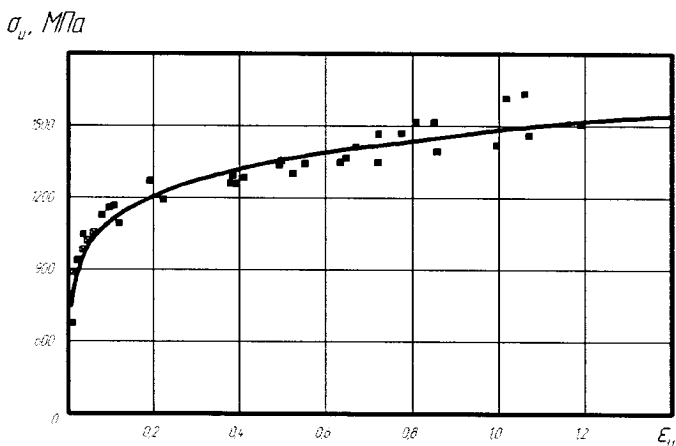


Рисунок 7.2 – Діаграма зміцнення сталі 38Х2МЮА  
 (точками показано експериментальні дані, апроксимація –  $\sigma_u = A\varepsilon_u^n$ ,  
 $A = (1488 \pm 1,6) \text{ МПа}$ ,  $n = (0,131 \pm 0,009)$ )

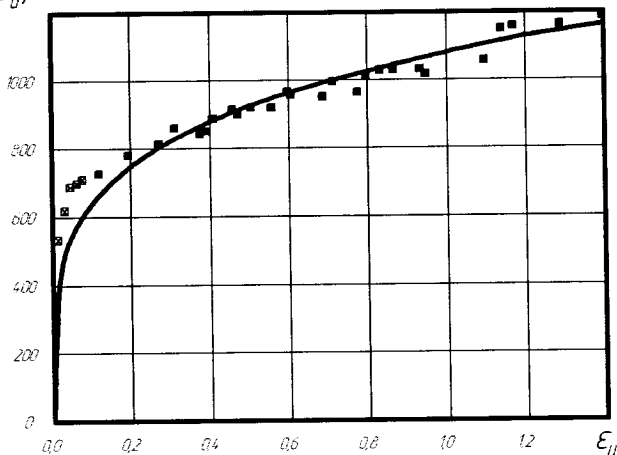
$\sigma_u, \text{ МПа}$ 

Рисунок 7.3 – Діаграма зміцнення сталі 30Х3МФА у стані постачання (точками показано експериментальні дані, апроксимація –  $\sigma_u = A\varepsilon_u^n$ ,  $A = (1081 \pm 0,92) \text{ МПа}$ ,  $n = (0,227 \pm 0,013)$ )

## 7.2 Діаграма пластичності матеріалу

Діаграмою пластичності [4, 6, 11] називається графічна залежність пластичності матеріалу від параметрів напруженого стану. Найчастіше як параметр напруженого стану використовується відносне середнє напруження тиску у вигляді:

$$\eta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_u} = \frac{3\sigma}{\sigma_u}, \quad (7.12)$$

де  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження,  
 $\sigma_u$  – напруження за Мізесом,  
 $\sigma$  – середнє нормальне напруження.

Показник  $\eta$  характеризує «жорсткість» напруженого стану. Як правило, зі зростанням жорсткості пластичність металу знижується.

Під пластичністю тут розуміємо, як вже було зазначено раніше, накопичену інтенсивність деформацій до моменту руйнування:

$$\varepsilon_p = \int_0^{\tau_p} \varepsilon_i d\tau. \quad (7.13)$$

Діаграма пластичності вважається механічною характеристикою матеріалу, яка входить до «карти матеріалу» і використовується для технологічних розрахунків процесів пластичної формозміни.

Діаграма пластичності (рис. 7.4) будується за результатами випробувань стандартних циліндричних зразків на розтяг [4, 6–8, 11, 20, 22].

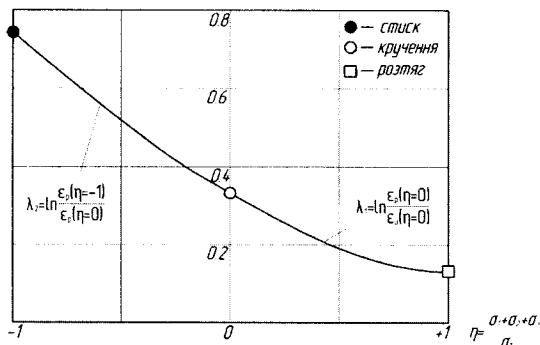


Рисунок 7.4 – Діаграма пластичності

Показник напруженого стану знаходимо за формулою:

$$\eta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_u} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1} = 1, \quad (7.14)$$

оскільки  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_u = \sigma_1$ .

У разі зсуву показник напруженого стану  $\eta = 0$ , оскільки

$$\sigma_1 = +\tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau:$$

$$\eta = \frac{\tau - \tau}{\sigma_u} = 0. \quad (7.15)$$

У випадку стиску  $\sigma_1 = -\sigma_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Тоді:

$$\eta = \frac{-\sigma_1 + 0}{\sigma_1} = -1. \quad (7.16)$$

В умовах розтягу:

$$\varepsilon_{p(\eta=1)} = 2 \ln \frac{d_0}{d_u}. \quad (7.17)$$

В умовах зсуву:

$$\varepsilon_{p(\eta=0)} = \frac{tg \alpha_p}{\sqrt{3}}, \quad (7.18)$$

де  $\alpha$  – кут, який вимірюється між віссю зразка і zdeформованою лінією (яка наноситься на зразок до експерименту) після його закручування в місці руйнування (рис. 7.5).



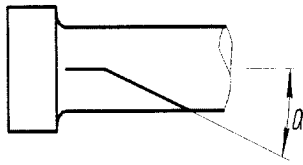


Рисунок 7.5 – Вид злому закрученого до руйнування зразка

Зображену на рис. 7.4 діаграму пластичності можна апроксимувати за допомогою формули:

$$\varepsilon_p(\eta) = \varepsilon_p(\eta=0) \exp(-\lambda_1 \eta), \quad (7.19)$$

де  $\varepsilon_p(\eta)$  – гранична деформація за будь-якого показника  $\eta$ ,  
 $\varepsilon_p(\eta=0)$  – гранична деформація у разі зсуву:

$$\lambda_1 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=0)}{\varepsilon_p(\eta=1)}, \quad (7.20)$$

$$\lambda_2 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=-1)}{\varepsilon_p(\eta=0)}, \quad (7.21)$$

де  $\lambda_1$  – коефіцієнт чутливості пластичності металу в жорсткій області  $1 \geq \eta \geq 0$ ,  
 $\lambda_2$  – коефіцієнт чутливості пластичності металу в м'якій області  $0 \geq \eta \geq -1$ .

Задаючись різними значеннями  $\eta$ , розраховуємо за формулою (7.19) значення  $\varepsilon_p$  і відкладаємо на діаграмі пластичності. На рис. 7.4 зображено діаграму пластичності сталі 38Х2МЮА, яка отримана за вищенаведеною методикою.

### 7.3 Завдання до розрахунково-графічної роботи

#### Задача 8. Побудова кривої течії та діаграми пластичності

##### Порядок побудови кривої течії

1. На міліметровому папері у масштабі зобразити графік у координатах  $\sigma_u$  (МПа) –  $\varepsilon_u$  (безрозмірна величина).  
 Причому  $(\varepsilon_u)_{\max} = 1$ , а  $\sigma_u$  у разі  $\varepsilon_u = 1$  порівняти до величини  $A$ .
2. Розрахувати величину « $n$ » як середнє 5÷6 даних (додаток Л), за формулою (7.10).
3. Суцільною лінією провести апроксимувальну криву за формулою (7.2).

4. Сформулювати надпис під графіком:  
«Діаграма зміцнення сталі ... ,  $A = \dots$  ,  $n = \dots$  » (вказати необхідні дані).

### Побудова діаграми пластичності

1. В зручному масштабі нанести на аркуш експериментальні точки (див. додаток М):
  - розтягу – „□”,
  - зсуву – „○”,
  - стиску – „●”.
2. Розрахувати коефіцієнти  $\lambda_i$  для відповідного матеріалу (додаток М).
3. За формулою (7.19) обчислити  $\varepsilon_p(\eta)$  для:  
 $\eta = -0,75$ ;       $\eta = -0,5$ ;       $\eta = -0,25$ .  
У формулу (7.19) підставити  $\lambda_2$ .
4. За формулою (7.19) розраховуємо  $\varepsilon_p(\eta)$  для:  
 $\eta = 0,75$ ;       $\eta = 0,5$ ;       $\eta = 0,25$ .  
У формулу (7.19) підставити  $\lambda_1$ .
5. Суцільною лінією показати діаграму пластичності, апроксимовану формулою (7.19).

### Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 8)

1. Яким чином будується діаграма зміцнення матеріалу?
2. Як здійснюється апроксимація діаграми зміцнення?
3. Який фізичний зміст коефіцієнтів апроксимації?
4. Що називають діаграмою пластичності матеріалу?
5. Як визначаються показники напруженого стану у випадку різних видів навантаження?
6. Що розуміють під поняттям «діаграма пластичності»?
7. Як будується діаграма пластичності матеріалу?
8. Як виконується апроксимація діаграми пластичності?

## 8 ФРАКТОГРАФІЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

### 8.1 Макроскопічне дослідження поверхні зломів деталей машин

#### 8.1.1 Поняття та завдання фрактографії

В сучасному світі одним із головних завдань машинобудівного виробництва є підвищення експлуатаційної надійності та довговічності деталей машин і механізмів. Це завдання неможливо вирішити без чіткого розуміння причин руйнування та ефективної системи діагностики. Використання сучасних методів технічної діагностики та аналіз отриманих результатів дозволяє покращити якість продукції, зменшити витрати металу, зменшити час простою машин та механізмів і знизити витрати на ремонт. Діагностика руйнування базується на аналізі залежності виду злomu від способу навантаження та виду напруженого стану в місці злomu. В основу способу діагностики руйнувань покладено аналіз природи дефектів металів та впливу кінетики на механізму руйнування.

**Фрактографія** (*fractus* – злом) – вивчає будову зломів після механічного руйнування під час експлуатації або випробування.

Руйнування конструкцій, без видимої на те причини, стали причиною розвитку наукового пошуку розв'язку проблеми міцності металевих конструкцій. Базові поняття механізму крихкого руйнування запропоновані А. Гріфітсом [25] та Я. І. Френкелем [23]. В цей самий час Жак Фрідель [24] у своїй теорії дислокацій пояснив причину невідповідності теоретичної міцності кристалічної ґратки металів реальній міцності полікристалічних металів і сплавів.

Використання методів фрактографії дозволяє проводити дослідження закономірностей руйнування металів з урахуванням фізики і механіки руйнування. На основі фізичної теорії руйнування металевих конструкцій будують діаграми механічного стану металу. Їх використання дає можливість визначити можливий характер руйнування за рахунок аналізу виду напруженого стану і структури сталі, що в кінцевому результаті дає можливість забезпечити необхідну конструкційну міцність та підвищити надійність конструкції в цілому.

#### 8.1.2 Задачі фрактографії

Фрактографія дозволяє вирішувати такі задачі.

**Перша задача** – визначення типу руйнування залежно від виду навантаження (статичне, повторно-статичне, динамічне, втомне, згинання, кручення). Для вирішення цієї задачі необхідно дослідити макробудову злomu. Таке дослідження дає інформацію про розташування і характер осередку руйнування, кінетику і фронт розвитку тріщини. Аналіз

результатів дослідження дає можливість визначити характер діючих напружень в осередку руйнування, ступінь перевантаження, вплив залишкових напружень та зовнішнього середовища. Вид та розташування осередку руйнування дає можливість визначити наявність дефектів металу, отримати дані про ступінь впливу конструктивних і технологічних концентраторів напруження.

**Друга задача** – визначення механізму розвитку тріщини та аналіз чинників, які впливають на процес руйнування. Для цього проводиться дослідження мікробудови поверхні злому.

Розрізняють макро- та мікроскопічні методи дослідження виду зломів.

Розташування та вид поверхні злому дає інформацію для оцінки якості металу. Найчастіше використовують умовний поділ зломів на **крихкий** і **в'язкий**. Основною ознакою такого поділу є ступінь макропластичної деформації, що супроводжує руйнування. Зломи можна класифікувати за характером руйнування, характером силової дії, за умовами навантаження, за морфологією поверхні руйнування та ін. Найбільш повну класифікацію поверхні зломів за ознаками наведено на рис. 8.1.

Для опису характеру будови зломів використовують такі поняття:

**Фасетки** – елементи поверхні руйнування з чіткими межами, мають слабо розвинений мікрорельєф, (рис. 8.2, а).

**Сходинка** – елемент мікрорельєфу злому прямолинійної або вигнутої форми, який утворюється за з'єднання двох поверхонь руйнування. Ці елементи поверхонь зазвичай розташовані на різних рівнях або вздовж межі мікродвійників, які утворилися в результаті відколу (рис. 8.2, б).

**Відкол** – механізм крихкого руйнування, який характеризується поширенням тріщин та відокремленням металу за кристалографічними площинами, що збігаються з площинами кристалічних ґраток (внутрішньозеренний відкол) або плоскими ділянками між зернами (міжзеренний відкол). Під час руйнування відколом утворюється поверхня руйнування, яка складається з фасеток внутрішньозеренного або міжзеренного типу та сходинок. Водночас у разі відколу відсутні ознаки пластичного деформування.

**Квазівідкол** – механізм внутрішньозеренного квазікрихкого руйнування, яке характеризується поширенням тріщини за рахунок розділення металу по площинах, що не збігаються з кристалографічними площинами зерен. Під час руйнування квазівідколом утворюється поверхня руйнування, яка складається з фасеток, що мають невеликі ознаки локального пластичного деформування та розміри, менші розмірів зерен.

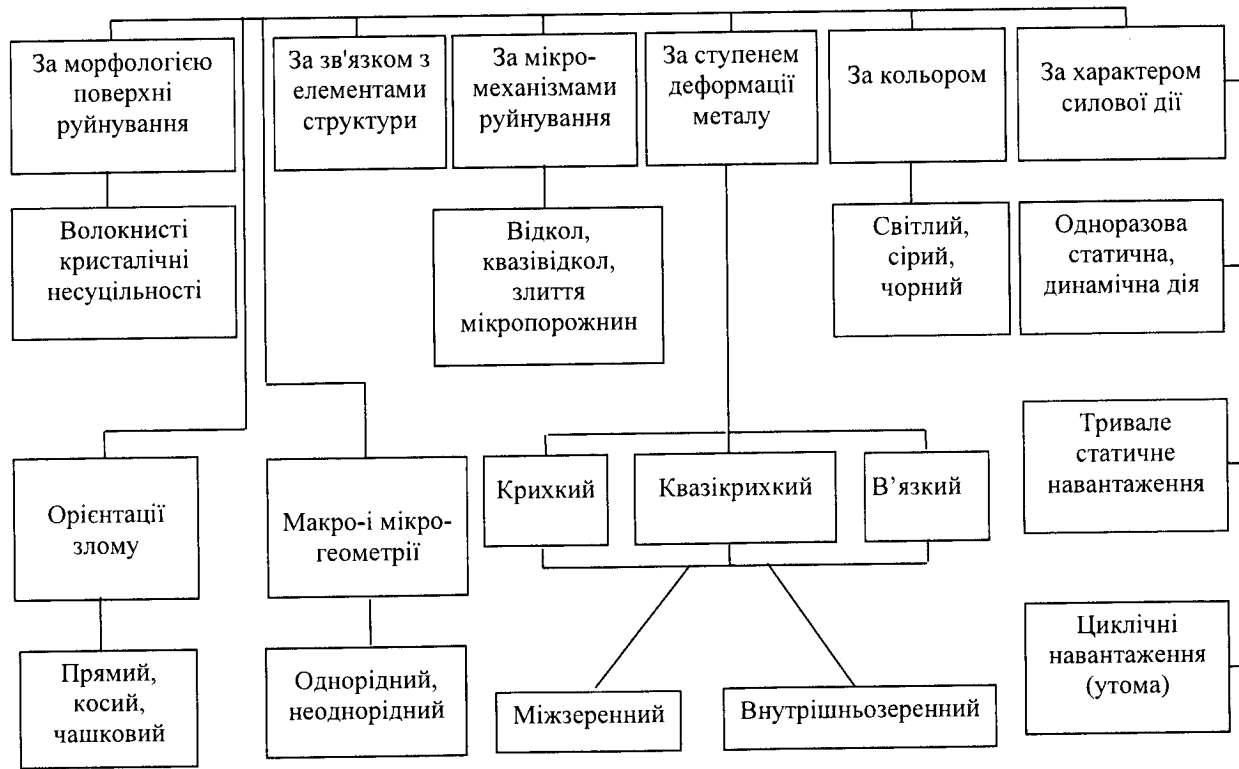
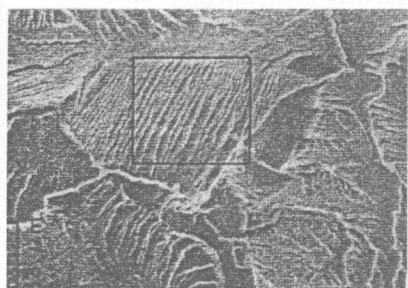
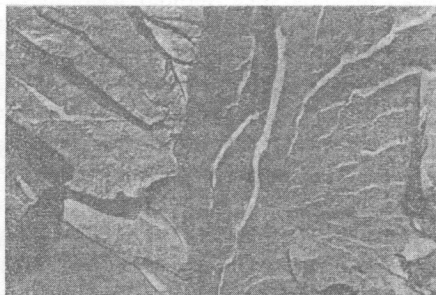


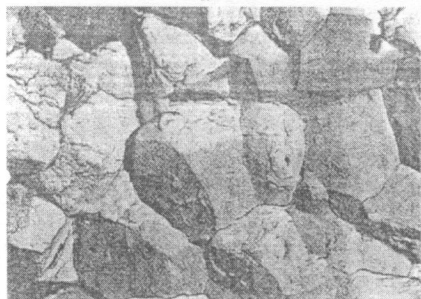
Рисунок 8.1 – Класифікація зломів за основними ознаками



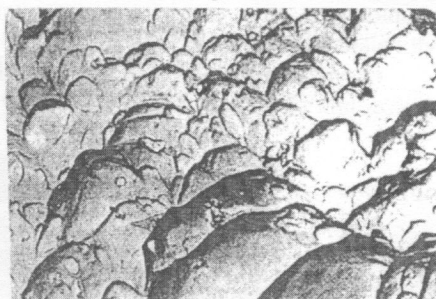
*a*



*б*



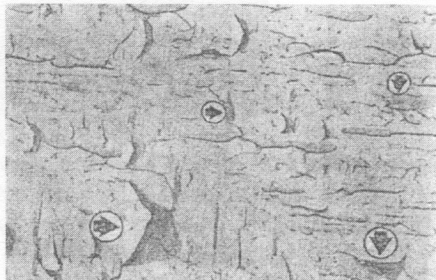
*в*



*г*



*д*



*e*

Рисунок 8.2 – Мікрофото елементів будови поверхні зломів:  
*a* – ділянка втомних рівчаків на фасетці відколу; *б* – сходинки відколу,  
*в* – міжзеренне руйнування відколу, *г* – внутрішньозеренне в'язке  
 руйнування відколу, *д* – рівчаковий візерунок, *e* – язички

**Злиття мікропорожнин** – механізм внутрішньозеренного або міжзеренного в'язкого руйнування металу, що відбувається за рахунок злиття мікропорожнин, які утворились та розвивались за пластичної течії металу. Під час руйнування злиттям мікропорожнин утворюється поверхня

руйнування, яка має ямковий мікрорельєф з різним ступенем розвитку ямок і значною пластичною деформацією по всій поверхні (рис. 8.2 в, з).

**Рівчаковий візерунок** – елемент будови поверхні фасеток відколу і квазівідколу; являє собою систему сходинок відколу, що зливаються. Утворюється як результат руйнування перемичок між крихкими мікротріщинами, які розташовані в довколишніх кристалографічних площинах, паралельних одна одній. Напрямок злиття сходинок відколу в рівчаковому візерунку збігається з напрямком поширення тріщини (рис. 8.2, д).

**Язички** – елементи будови поверхні фасеток відколу трикутної або трапецієподібної форми, які формуються як результат локального руйнування вздовж поверхні розділу матриця – двійник. Такі елементи утворюються за внутрішньозеренного крихкого або квазікрихкого руйнування (рис. 8.2, е).

**Осередок руйнування** – ділянка на поверхні злому, в якому відбулося зародження тріщини (рис. 8.3).

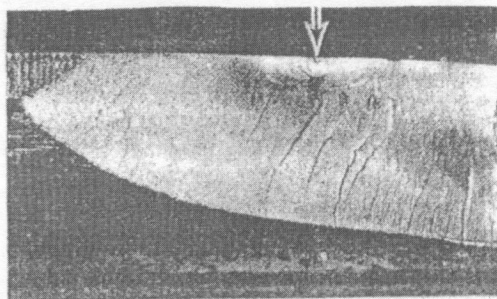


Рисунок 8.3 – Мікрофото зуба шестерні з осередком руйнування на поверхні злому

**Зона зародження тріщини** – ділянка злому, що прилягає до осередку руйнування.

**Зона розвитку тріщини** – ділянка злому, що знаходиться далеко від осередку зародження тріщини.

**Зона долому** – ділянка злому, яка знаходиться біля закінчення тріщини близько поверхні зразка і розташована протилежно осередку зародження тріщини. Існує два типи тріщин: первинні та вторинні. Первинні тріщини поширюються з осередку руйнування і утворюють поверхню руйнування. Вторинні тріщини розташовані на поверхні злому і є поперечними відносно площини первинного злому.

Злом чітко відтворює ті процеси, які відбувалися під час руйнування деталі. В процесі проведення фрактографічних досліджень матеріалів використовують такі методи аналізу:

а) макроскопічна фрактографія – метод вивчення зломів за невеликого (до  $\times 50$ ) збільшення, іноді неозброєним оком;

б) мікроскопічна фрактографія – метод вивчення зломів із застосуванням різного роду оптичних пристроїв (збільшення до  $\times 500$ );

в) електронна мікрофрактографія – метод вивчення зломів за допомогою просвітлювального електронного мікроскопа;

г) растрова електронна мікрофрактографія – метод вивчення зломів за допомогою сканувального електронного мікроскопа;

д) рентгеноструктурний аналіз;

е) мікрорентгеноспектральний аналіз;

ж) рентгеноструктурна фрактографія та інші.

Для вибору методу досліджень необхідно визначити характер об'єкта, що вивчається.

Початковою стадією будь-якого фрактографічного дослідження є **макрофрактографія** будови зломів. Вона дозволяє визначити:

а) характер руйнування (в'язке або крихке, транс- або інтеркристалітне);

б) характер дії навантажень (циклічне або статичне);

в) схем навантажень (стискання, розтягування, згин, кручення та інші);

г) кількісні характеристики процесу руйнування (частка прямого злому і частка крихкого руйнування, ступені волокнистого злому).

Для проведення макроаналізу необхідно провести фотографування зломів за допомогою спеціальних оптичних приладів або фотоприставок.

На початковому етапі відбувається ретельний аналіз експлуатаційних руйнувань без очищення місця злому, оскільки наявність пилу, слідів масла, окислення металу тощо може доповнити загальну картину про умови зародження тріщини і розвиток процесу руйнування.

Під час проведення макроаналізу відбувається огляд поверхні руйнування неозброєним оком. На наступному етапі оглядають зі збільшенням у 10...50 разів. Водночас визначають ті ділянки, які необхідно розглянути докладніше. У разі фотографування ділянки руйнування необхідно правильно підібрати кут зйомки та інтенсивність освітлення злому для отримання об'ємної та контрастної картини.

Найчастіше **мікрофрактографію** застосовують в процесі дослідження напівкрихких та крихких зломів за наявності гладких фасеток великого розміру, втомних та міжзеренних зломів. Мікрофрактографія дає змогу встановлення природи руйнування за рахунок аналізу тонкої будови гладких площин. За наявності втомного злому проводиться оцінення будови втомних борозен. У випадку міжзеренного злому проводиться вивчення будови і стану міжзеренних поверхонь.

За допомогою мікрофрактографії є можливість робити кількісні оцінки. Наприклад, визначення частки злому за змішаного виду руйнування можна визначити як співвідношення площі ділянок, зайнятих

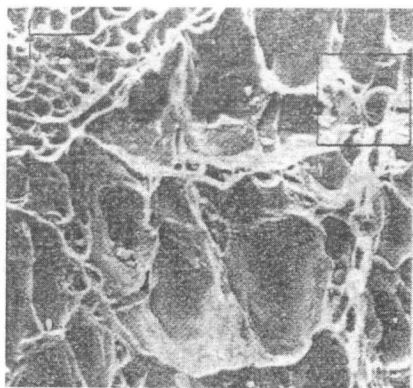


транскристалітними фасетками, до загальної площі злому. Для отримання додаткової інформації необхідно провести мікроструктурні дослідження матеріалу в зонах, які розташовані навколо місця руйнування.

За допомогою **електронної мікрофрактографії** вивчають закономірності процесу руйнування в мікрооб'ємі та оцінюють вплив на ці процеси мікро- і субмікроструктури матеріалу. Найбільшої ефективності використання електронної мікрофрактографії досягається під час аналізу природи експлуатаційних руйнувань. Вона дозволяє визначити вплив розміру та форми зерен процес руйнування, наявність фаз та їх морфологію. Використання електронної мікрофрактографії дає можливість оцінити міцність внутрішніх зв'язків між матрицею і дисперсними частинками, визначити роль внутрішнього напруження навколо дисперсних частинок. В процесі аналізу будови зломів використовують два типи електронних мікроскопів: растрові та просвітлювальні. Растровий електронний мікроскоп використовують під час дослідження елементів зруйнованої поверхні величиною до 25 мм. За більших площ злому необхідно розрізати зразок або деталь на окремі частини. Растровий електронний мікроскоп дозволяє повторно використовувати один і той самий зразок для аналізу. Також є можливість регулювати величину збільшення в широкому діапазоні. Це дає змогу досліджувати не тільки загальну топографію злому, а й окремі його елементи. Завдяки великій глибині фокуса мікроскопа з'являється можливість отримувати тривимірне зображення елементів структури складного геометричного рельєфу. Для проведення кількісного оцінення (наприклад для визначення частки площі з відповідним рельєфом) використовують регулювання контрасту зображення (рис. 8.4). Для проведення комплексного дослідження із визначення природи структурних складових або різного роду включень на поверхні руйнування застосовують зонд.

Просвітлювальна електронна мікроскопія має набагато вищу роздільну здатність порівняно з растровим електронним мікроскопом. Це дозволяє досліджувати дрібні елементи рельєфу і тонкої структури за втомного руйнування (рис. 8.5). Водночас відсутня можливість безпосередньо спостерігати за площинами на поверхні руйнування. Для проведення дослідження виконати репліки, які копіюють рельєф поверхні руйнування. Це потребує підготовчого етапу до дослідження злому для визначення місця дослідження. За допомогою мікродифракції відбувається перенесення дисперсних частинок з поверхні руйнування на репліку. Це дозволяє визначити кристалічну структуру частинок поверхні. За використання просвітлювальної електронної мікроскопії дуже важко провести кількісний аналіз руйнування. Причиною є неможливість точно вказати, з якої площини знято репліку.

Для підвищення точності отриманих результатів найчастіше застосовують обидва методи фрактографії.

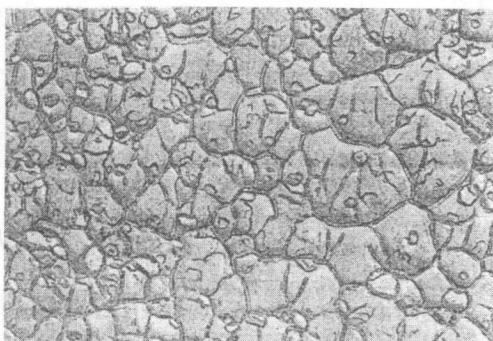


$a - \times 1000$



$b - \times 5000$

Рисунок 8.4 – Фрактограми з растрового електронного мікроскопа поверхні руйнування з наявністю включень оксисульфідів



$\times 30000$

Рисунок 8.5 – Фрактограма з просвітлювального електронного мікроскопа, що відображає наявність дисперсних включень на поверхні руйнування

Використання рентгеноструктурного та мікрорентгеноспектрального аналізу дає можливість більш точно визначати форму фаз і природу різних включень на зломі. Це дає можливість отримати додаткову інформацію для визначення причин зниження опору руйнуванню в тих або інших умовах на поверхні руйнування.

Мікрорентгеноспектральний аналіз дозволяє вносити необхідні корективи до технологічних процесів в процесі виготовлення деталі за рахунок дослідження структур неоднорідність сплавів. Також він застосовується для вивчення напружень в зоні злому. Це дає можливість отримати інформацію про ступінь і глибину пластичної деформації, що

передують появі тріщин. Використання мікрорентгеноспектрального аналізу дозволяє оцінити щільності дислокацій, ступінь зміни фазового складу, параметри кристалічної ґратки в процесі руйнування.

## 8.2 Особливості будови зломів

Фрактограма поверхні злому містить різні залишкові ознаки, за якими можна оцінити розміщення осередку руйнування, умови навантаження в ньому та процес збільшення тріщини до остаточного руйнування. Характерні особливості будови зломів змінюються залежно від зміни в'язкості матеріалу, пов'язаного з конфігурацією зразка та його термічною обробкою.

*За статичного одноосового розтягування* циліндричного гладкого зразка напружений стан матеріалу описується такими параметрами:  $\sigma_1$  – розтягувальне напруження, яке діє в поздовжньому напрямі,  $\sigma_3$  – стискальне напруження, направлене в поперечному напрямі,  $\tau$  – дотичне напруження, яке спрямоване під кутом майже  $45^\circ$  до осі зразка (рис. 8.6).

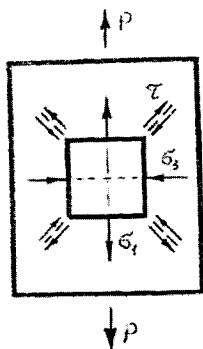
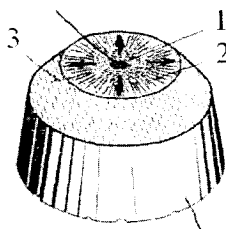


Рисунок 8.6 – Схема розподілу напруження за розтягування циліндричного гладкого зразка

Осередок руйнування



Шийка зразка

Рисунок 8.7 – Схема будови поверхні злому циліндричного гладкого зразка:  
1) волокниста зона; 2) радіальна зона; 3) зона зрізу

Руйнування у разі осового розтягування гладкого циліндричного зразка розпочинається на осі та поширюється у напрямку до поверхні. Зазвичай для поверхні зломів характерні три зони: волокниста зона, радіальна зона і зона зрізу (рис. 8.7). На поверхні злому можуть бути відсутні деякі зони залежно від структури і властивостей матеріалу зразка. Волокниста зона оточує осередок руйнування і відповідає області повільного зростання тріщини.

Для в'язкого руйнування характерною є зона поширення тріщини, яка утворюється в результаті злиття мікропорожнин (рис. 8.8, а). За радіального напрямку максимального напруження ( $\sigma_{\max}$ ) характерним є перехід до нестабільного розвитку тріщини з утворенням радіальних втомних ривчаків, напрям яких збігається з напрямом розвитку тріщини. Під час руйнування менш пластичних матеріалів злом формується у вигляді «зірочки» з утворенням ривчаків в напрямку від осередку руйнування. Для більш пластичних матеріалів втомні рубці формуються від периферії волокнистої зони з формуванням так званого dna «чашки».

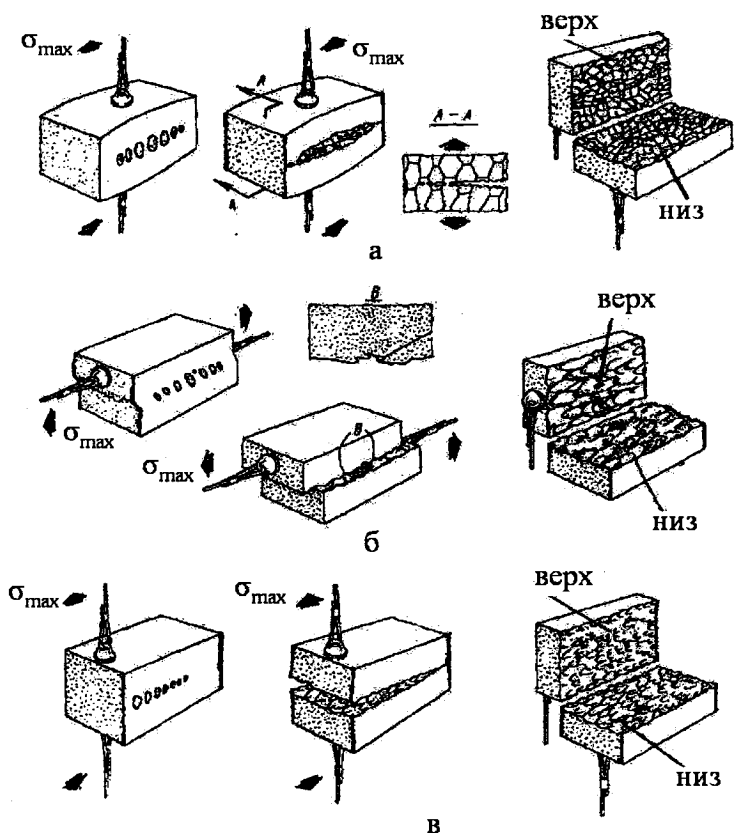


Рисунок 8.8 – Форма мікрорельєфу поверхні злому, що утворюється шляхом злиття мікропорожнин з урахуванням напрямку максимального напруження ( $\sigma_{\max}$ ): а – ямки рівноважні; б – витягнуті (овальні); в – подовжені

Зовнішній вигляд радіальних рубців на зломах сталей побічно залежить від в'язкості металу: чим менший об'єм металу сприймає

деформацію, тим менший розмір рельєфу мають радіальні рубці. Наприклад, радіальні рубці на поверхні злому в заготовок із структурою відпущеного мартенситу з високоміцних сталей є тонкими.

За рахунок зміни напружено-деформованого стану тріщина змінює напрям свого поширення в сторону максимального дотичного напруження. В такому випадку утворюється боковий кільцеподібний нахил, який спрямований під кутом  $45^\circ$  до основної поверхні руйнування. Частина зони зрізу відносно загальної площі злому напряму залежить від в'язкості матеріалу. Тому із зменшенням в'язкості матеріалу знижується частина зони зрізу в площі злому.

**Макрозломи** (рис. 8.9) за своєю орієнтацією відносно напрямку прикладеного зусилля поділяють на 3 типи: прямий, прямий зі скосами і косий. *Прямим макрозломом* є поверхня, яка орієнтована перпендикулярно до напрямку найбільших розтягувальних зусиль, що відповідає макрокрихкому руйнуванню. Прямий злом зі скосами найчастіше утворюється під час розтягування низьковуглецевих конструкційних і легованих сталей. Косий макрозлом утворюється в площині максимального дотичного напруження і має поверхню руйнування, розташовану під кутом до осі зразка. Такий тип злому характерний для анізотропних матеріалів з обмеженою пластичністю. За збільшення зони пластичної деформації збільшуються розміри скосів. Повністю конічні зломи можуть утворюватися у зоні розтягування чистих металів (Pb, Al, Cr) за максимальної пластичності матеріалів.

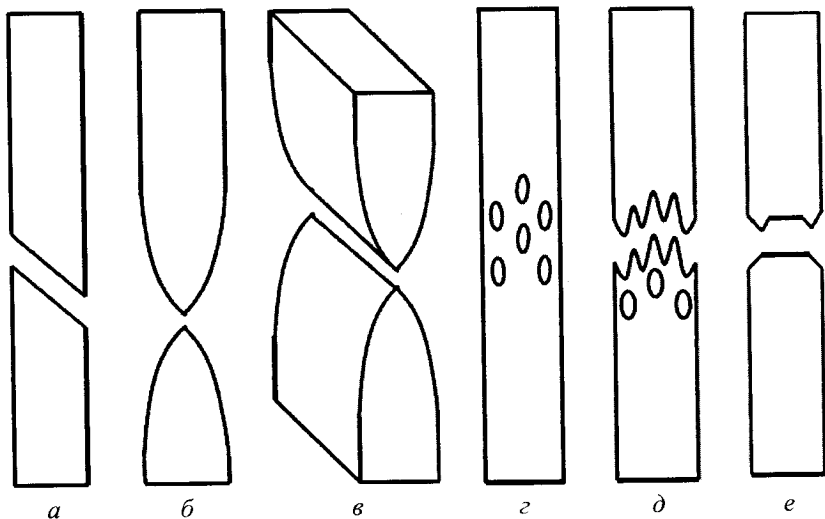


Рисунок 8.9 – Характерні види макрозлому за розтягування:  
*a* – косий ; *б* – подвійна чашка; *в* – прямий; *г* – в'язкий;  
*д* – конічний; *е* – чашка-конус

За наявності проточки на поверхні циліндричного зразка в цьому місці відбувається перерозподіл напружень в поперечному перерізі (рис. 8.10). За рахунок зняття металу з зовнішньої поверхні зразка на поверхні злому відсутня зона зрізу (рис. 8.11). В такому разі руйнування відбувається в напрямі від вершини концентратора до центра зразка. В центрі поверхні злому розташована зона долому. Розподіл величини кожної із зон у загальній площі злому залежить від глибини проточки ( $l$ ) і радіуса ( $\rho$ ), тобто від величини концентрації напружень:

$$\sigma_{\max} = 2\sigma \sqrt{\frac{l}{\rho}}$$

Зі збільшенням величини максимальних напружень  $\sigma_{\max}$ , зменшується частка волокнистої зони і збільшується величина зони долому та радіальної зони.

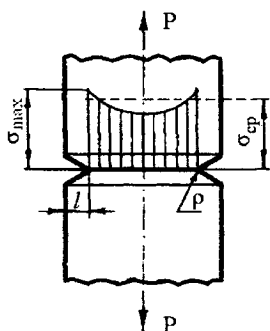


Рисунок 8.10 – Схема концентрації напружень за наявності проточки на поверхні циліндричного зразка

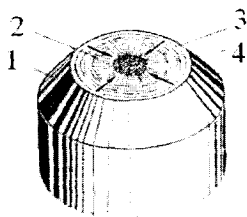


Рисунок 8.11 – Схема будови поверхні злому за розтягування циліндричного зразка з проточкою:  
1 – поверхня проточки; 2 – волокниста зона; 3 – радіальна зона; 4 – зона долому

Під час проведення випробувань одним з головних чинників, що впливають на напружений стан та вигляд поверхні злому, є **форма і розміри зразків**. В такому разі форма поверхні злому зразків з круглим поперечним перерізом суттєво відрізняється від зон злому у квадратних і прямокутних зразках. Найбільш сильно відрізняється форма та розміри радіальної зони злому.

У прямокутних зразках радіальна зона найчастіше має вигляд шеврона (рис. 8.12, 8.13). Така форма візерунку на поверхні злому пов'язана з нестабільним поширенням тріщини. Поява шевронних візерунків є наслідком незбігу напрямку розвитку тріщини та найбільш

короткого шляху від фронту тріщини до вільної поверхні. На зміну напрямку поширення тріщини впливає відстань від вільної поверхні до фронту тріщини. Водночас радіальні рубці поширюються у напрямку до вільної поверхні та втрачають прямолінійність.

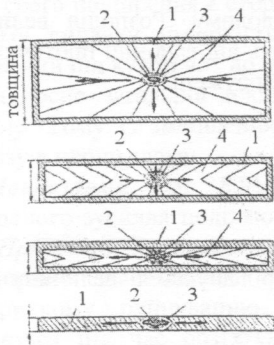


Рисунок 8.12 – Вплив товщини прямокутних зразків на будову поверхні злому за розтягування:  
1 – зона зрізу; 2 – осередок руйнування; 3 – волокниста зона; 4 – радіальна зона

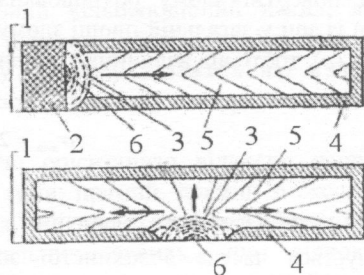


Рисунок 8.13 – Будова зломів на прямокутних зразках із концентратором напружень:  
1 – товщина перерізу; 2 – поверхня надрізу; 3 – волокниста зона; 4 – зона зрізу; 5 – радіальна зона; 6 – осередок руйнування

Вершини V-подібних шевронних візерунків спрямовані у бік, протилежний напрямку розвитку тріщини, це допомагає під час визначення місця розташування осередку руйнування. Така особливість форми поверхні злому використовується в разі визначення місця розташування осередку руйнування у виробках з листового прокату.

*За ударного згину* злом являє собою поверхню поділу, що утворюється шляхом руйнування згином зразків, які мають надріз. Будову поверхні злому показано на рис. 8.14.

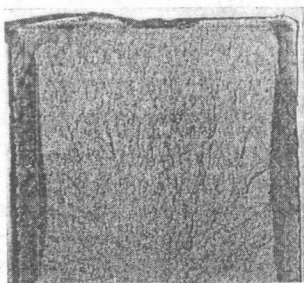


Рисунок 8.14 – Вигляд поверхні злому за ударного згину

Характерною особливістю ударного злому є утягування злому. Його величина залежить від механічних властивостей металу і температури випробування та визначається величиною максимальної деформації двох бокових площин. Вимірюється величина утягування ( $l$ , мм) за зміною положення внутрішньої поверхні (рис. 8.15).

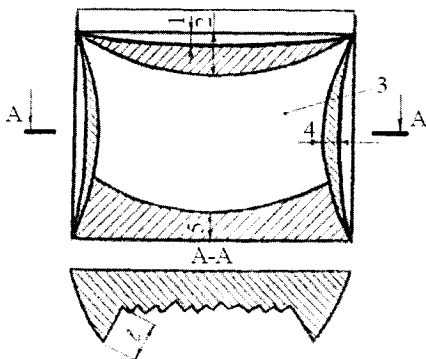


Рисунок 8.15 – Схема будови поверхні злому за ударного згину:  
 1 – осередок руйнування; 2 – зона зародження тріщини;  
 3 – зона розвитку тріщини; 4 – зона утягування; 5 – зона долому

Для визначення *критичної температури крихкості* (КТК) під час ударних випробувань проводиться аналіз будови поверхні руйнування. Він дозволяє оцінити дію на матеріал зразка високих температур, наявність включень і несучільність металу. Також є можливість оцінити вплив макро- і мікронеоднорідності будови металу та визначити особливості розвитку тріщин.

В процесі оцінювання КТК визначають частку в'язкої складової в зломі серії зразків, які випробовувались за різних температур.

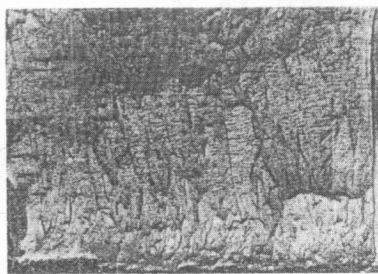
**В'язкою складовою** в зломі називають такі ділянки поверхні руйнування, які мають волокнисту будову за візуального аналізу та вирізняються ямковим внутрішньо-зеренним або міжзеренним рельєфом за використання електронно-мікроскопічного аналізу. **Крихкою складовою** в зломі називають такі ділянки поверхні руйнування, які мають блискучу кристалічну будову у разі проведення макровизначення та гладкі фасетки міжзеренного руйнування або фасетки відколу з рівчаковим візерунком під час проведення електронної мікроскопії. За *критичну температуру крихкості* вибирають таку температуру випробування, за якої частка в'язкої складової в зломі становить 50 %.

У випадку хімічної мікронеоднорідності злом має неоднорідну поверхню руйнування, на якій чітко виділяються кристалами стовбчастої форми дендритної будови металу. *Дендритний злом*, зображений на рис. 8.16, а, характерний для литих сталевих заготовок. Сталевий виливок

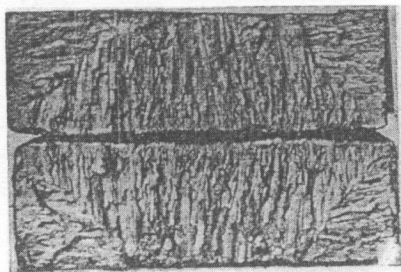


з дендритним зломом характеризується зниженими показниками ударної в'язкості та низькою пластичністю. За наявності відхилень в технологічних режимах гомогенізації та поліпшення на поверхні злому можуть спостерігатися окремі ділянки з дендритною будовою.

Під час повільного охолодження виливків за високих температур утворюються жердинуваті зломи (рис. 8.16, б), які є наслідком ліквідаційної неоднорідності. Жердинуваті зломи утворюються вздовж меж первинних стовбчастих кристалів сплаву.



А



Б

Рисунок 8.16 – Будова поверхні зломів виливків, обумовлених хімічною мікронеоднорідністю: а – дендритний злом; б – жердинуватий злом

У разі гарячого пластичного деформування неметалеві домішки, які забруднюють сталь, набувають різної форми. Це призводить до утворення шиферності і світлих смуг на поверхні злому деформованої сталі. **Світлі смуги** на поверхні руйнування відповідають місцям масивних скупчень розкатаних неметалевих включень.

**Шиферність** являє собою дрібні розщеплювання (розшарування) на поверхні злому, які орієнтовані паралельно поверхні деформації. За шиферності кожне розщеплювання має двостороннє утягування і на поперечних шліфах площа ділянки розшарування незначна (рис. 8.17) за наявності певних неметалевих включень і відсутності мікронесуцільності.

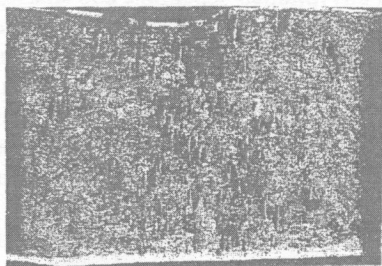


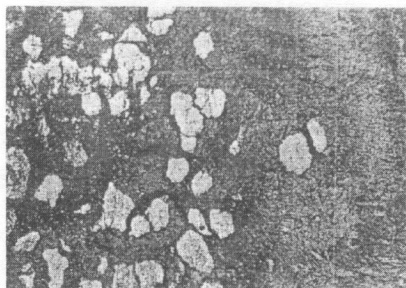
Рисунок 8.17 – Шиферність на поверхні злому

Чорний злом характерний для випробовування високовуглецевих конструкційних сталей. Він утворюється внаслідок розпаду карбідів через тривалий відпал. На зломі спостерігаються ділянки поверхні крихкого руйнування з лускоподібною поверхнею.

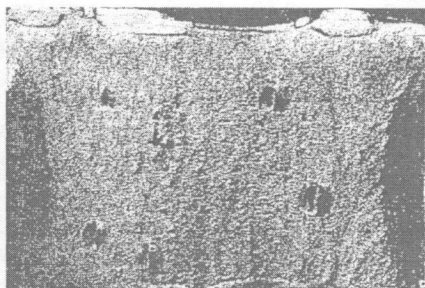
**Флокени** являють собою внутрішні трансекрystalітні тріщини, що виникають в зонах металу з підвищеним вмістом водню. Вони характерні для литих і деформованих заготовок зі сталей, схильних до водневої крихкості. Флокени спостерігаються на поверхні руйнування у вигляді чітко окреслених ділянок круглої або овальної форми.

Флокени найчастіше зустрічаються у сталевих поковках великих розмірів і в сталевих конструкціях. Причиною їх утворення є прискорене охолодження заготовок за температур, нижчих 400 °С. Наявність флокенів сприяє зниженню міцності, пластичності та ударної в'язкості заготовок. На поверхні злomu прокату на поперечних пробах флокени мають вигляд коротких тріщин (рис. 8.18).

Високі температури, найчастіше, сприяють розвитку крихкого руйнування. В такому випадку поверхня злomu має кристалічну будову без помітних ознак макропластичної деформації. Існує два основних види зломів, причиною яких є високі температури: каменеподібний злом та нафталіністий злом.



а



б

Рисунок 8.18 – Флокени на поверхні злomu: а – паралельно площині злomu; б – перпендикулярно до площині злomu

**Каменеподібний злом** (рис. 8.19 а, б) характеризується грубозернистою горбкуватою будовою з металічним блиском. Він являє собою поверхню руйнування, яка повністю або частково проходить по зернограничних об'ємах. Найчастіше спостерігається в заготовках зі сталі, що виготовлені литтям або деформуванням.

Каменеподібний злом у сталі буває двох видів: *первинний* і *вторинний*. Причиною появи *первинного злomu* є утворення гранульованої структури аустеніту, що формується після кристалізації в області високих температур під час сповільненого охолодження. Така форма злomu зазвичай спостерігається у виливках та поковках, що не підлягають

термічній обробці. Як наслідок, на межах зерен осаджуються сульфіди, нітриди, фосфіди, карбіди та деякі легувальні елементи.

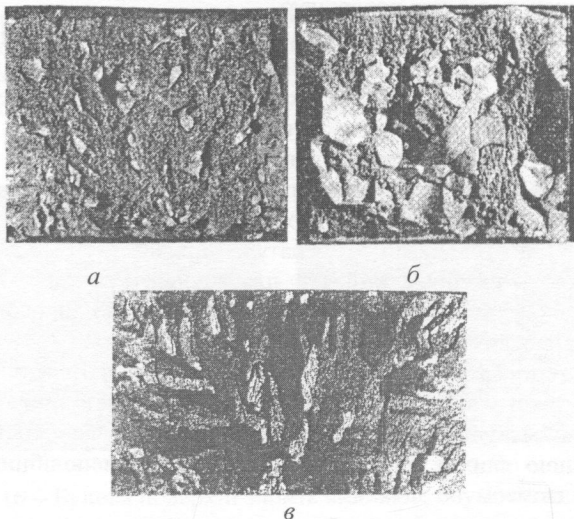


Рисунок 8.19 – Будова поверхні зломів, обумовлених дією високих температур: *a, б* – каменеподібний; *в* – нафталіністий

Причиною появи *вторинного злому* є перегрів металу під час термічної обробки або перед гарячою деформацією. В цьому випадку відбувається збагачення нових зернограничних об'ємів різноманітними включеннями: карбідами, нітридами, фосфідами, та ін. Порівняно з первинним каменеподібним зломом у вторинного злому частинки, що утворились, значно дрібніші. Покращення сталі, для якої є характерним каменеподібний злом, може бути проведено двома методами: гарячою деформацією або високотемпературною гомогенізацією за температури близько 1100 °С. До каменеподібного злому схильні леговані сталі, у яких спостерігається відпускна крихкість. Такого недоліку можна позбутись за допомогою прискореного охолодження з високотемпературного відпуску або проведення нормалізації.

**Нафталіністий злом** (рис. 8.19, *в*) відносять до дефектів, що практично не усуваються. Причиною його появи є порушення термічної і гарячої обробки тиском. У такому випадку поверхня руйнування являє собою поверхню зсуву, що проходить по кристалографічних площинах грубозернистого аустеніту. Ділянки нафталіністого злому мають плоску форму та характерний блиск. Основною причиною появи злому є насичення продуктами розпаду текстури крупних зерен аустеніту під час перетворення  $Fe_\gamma \rightarrow Fe_\alpha$ . Нафталіністий злом характерний для литих заготовок з конструкційних та швидкоріжучих сталей, які проходять

багатократне нагрівання у разі гарячого деформування за відсутності відпалу.

У випадку циклічного прикладення навантаження до заготовки найчастіше спостерігається утомний злом (рис. 8.20). Поверхня злому поділяється на такі зони:

- фокус злому – точка зародження злому;
- осередок руйнування – макроскопічне місце зародження злому;
- зона вибіркового розвитку тріщини;
- зона прискороного розвитку тріщини, яка з'являється перед остаточним руйнуванням заготовки;
- зона долому.

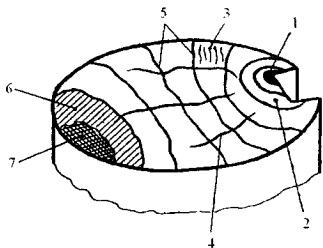


Рисунок 8.20 – Схема розподілу зон на поверхні втомного злому:

- 1 – осередок руйнування; 2 – приосередкова зона; 3 – утомні рівчаки;
- 4 – сходинки скидання; 5 – утомні лінії;
- 6 – ділянка прискороного розвитку тріщини;
- 7 – зона долому

Основними умовами, що впливають на будову втомних зломів, є: вид прикладеного навантаження в процесі появи і поширення втомної тріщини; дія зовнішнього середовища; опір руйнуванню матеріалу деталі. Величина опору руйнуванню, зі свого боку, залежить від геометричної форми заготовки, властивостей матеріалу та стану поверхні. Концентратори напруження у вигляді різних дефектів або межі зміщеного шару є осередками руйнування. Зазвичай вони розташовані на поверхні деталі. Характерною особливістю втомного злому є наявність *тракових слідів або утомних рівчаків (ліній)*. Під час аналізування мікрорельєфу спостерігаються заглиблення, що повторюються, та виступи, напрямок яких орієнтовано перпендикулярно до напрямку розвитку тріщини. Такі елементи мікрорельєфу утворюються внаслідок переміщення злому за кожний цикл навантаження (рис. 8.21).

На відстань між рівчакми впливають умови навантаження та швидкість поширення тріщини. В разі аналізування поверхонь втомних зломів можуть бути присутні інші елементи мікрорельєфу, які характерні для крихкого та в'язкого руйнування.

В процесі зародження та поширення магістральної тріщини відбувається зменшення перерізу матеріалу виробу та збільшується швидкість руйнування. Водночас формується перехідна ділянка перед зоною долому, яка може утворюватись за один або декілька циклів навантаження.

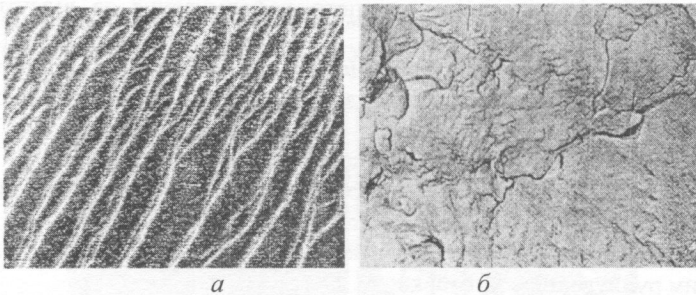


Рисунок 8.21 – Особливості мікрорельєфу злому в зоні розвитку тріщини:  
*a* – утомні рівчаки; *б* – «траковий» слід

Величина частки зони долому в загальній площі злому напряму залежить від величини напружень, що діють в металі. У табл. 8.1 подано залежності макробудови злому від вигляду і величини циклічного навантаження. Для визначення величини протидії злому матеріалу визначають співвідношення площ зони долому до загальної площі поверхні злому. Ймовірність крихкого катастрофічного руйнування деталі зменшується у разі зменшення значення цього співвідношення.

Таблиця 8.1 – Схеми утомних зломів сталевих прутків, до яких прикладено різні циклічні навантаження

Навантаження зразків		Гладкі прутки		Прутки з місцевою концентрацією напружень			
Назва	Схема	сильно навантажені	слабо навантажені	значною		незначною	
				сильно навантажені	слабо навантажені	сильно навантажені	слабо навантажені
		1	2	3	4	5	6
1. Розтягування (стискання)							
2. Односторонній згин							
3. Двосторонній згин							
4. Кручення зі згином							

### 8.3 Завдання до розрахунково-графічної роботи

#### Задача 9. Дослідження причин втрати роботоздатності деталей машин та конструкцій

Набути практичних навичок у дослідженні причин втрати роботоздатності зруйнованих деталей машин методами макроскопічного та фрактографічного аналізу.

##### Обладнання та матеріали

1. Зразки зруйнованих зразків і деталей машин.
2. Оптичні пристрої для дослідження зломів:
  - МБС-2,
  - лупи з 5-кратним та 30-кратним збільшенням,
  - цифрова камера або смартфон.
3. Розчинники, травники, бензин, розчини кислот та лугів ( $\text{HNO}_3$ ,  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{NaOH}$ ).
4. Презентації, фрагменти Media ресурсів.

##### Порядок виконання роботи

Студенти мають ознайомитись із загальними положеннями щодо дослідження поверхонь руйнування, отриманих як у лабораторних умовах статичних та динамічних випробувань, так і в процесі експлуатації.

Викладач пропонує по 3–5 зразків зі зломами за різних умов навантаження, а студенти виконують дослідження макроструктури зломів і результати дослідження зломів заносять в табл. 8.2. Візуальне оцінення характеру руйнування передбачає: визначення характеру руйнування, осередку руйнування, наявності концентраторів або дефектів, напружень тощо.

Таблиця 8.2 – Результати дослідження зломів

Номер зразка	Марка матеріалу	Вид обробки	Візуальна оцінка характеру руйнування	Характер навантаження	Макроаналіз зон руйнування	Співвідношення зон руйнування

## **Зміст роботи**

1. Сформулювати мету дослідження.
2. Дати загальну характеристику зон руйнування у випадку різних видів навантаження.
3. Виконати аналіз виданих викладачем видів зломів.
4. Скласти таблицю результатів дослідження зломів.
5. Зробити висновки.

## **Питання до захисту розрахунково-графічної роботи (задача 9)**

1. На чому ґрунтується діагностика відмов?
2. Що таке «фрактографія»?
3. Які задачі вирішує фрактографія?
4. Основні методи аналізу, що використовуються у фрактографії.
5. Основні ознаки зломів, які використовують для їх класифікації.
6. Назвіть особливості макрофрактографії.
7. Назвіть особливості мікрофрактографії.
8. Спільність і відмінність в методах РЕМ і ПЕМ.
9. У чому виявляється крихке і в'язке руйнування на зломах?
10. Чим відрізняється будова злому у разі статичного розтягування від динамічного згину?
11. В чому полягає спільність і відмінність в будові зломів циліндричного та прямокутного зразків у випадку розтягування?
12. Спільність і відмінність в будові зломів за статичного і циклічного навантаження.
13. Які дефекти будови матеріалу можна виявити під час ударного навантаження?
14. Що таке «втомні рівчаки»?
15. Як впливає наявність надрізів на будову злому циліндричного зразка за статичного і циклічного навантаження?
16. У яких випадках необхідно застосовувати структурну фрактографію?
17. Що можна визначити за орієнтацією злому напрям прикладеного зусилля?
18. Що характеризує дендритний злом?
19. Що характеризує шиферний злом?
20. Що характеризує каменеподібний злом?
21. Які чинники впливають на утворення осередку руйнування у разі циклічного навантаження?
22. Спільність і відмінність в наявності на зломах сходинки скиду і радіальних рубців.
23. Як впливає схема циклічного навантаження на вигляд макрозломів?

## ТЕРМІНИ ТА ПОНЯТТЯ

*Амплітуда коливань (amplitude of vibrations)* – найбільший зсув пружної системи від положення статичної рівноваги.

*Випробування на удар (Impact test)* – вид механічного випробування матеріалів з метою визначення їх здатності сприймати динамічні навантаження та схильності до крихкого руйнування. За ударної дії навантаження механічні характеристики матеріалу, що зазнає удару, можуть відрізнитися від характеристик, що визначаються експериментально в умовах статичного навантаження.

*Гнучкість стрижня (slenderness ration of a bar)* – відношення розрахункової довжини стрижня до найменшого радіусу інерції його поперечного перерізу.

*Деформація (deformation)* – зміна розмірів та форми тіла під дією зовнішніх сил.

*Еквівалентна система (equivalent system)* – статично визначена система, яку отримано після відкидання «зайвих» в'язей та заміни їх невідомими реакціями. Отримана статично визначена система навантажена зовнішнім навантаженням та невідомими зусиллями.

*Еюра (epюра)* – графік або схематичний кресленик, який показує розподіл внутрішніх силових факторів навантаженої конструкції.

*Жолоблення (buckling)* – це раптова зміна форми конструктивного елемента під навантаженням таким, як вигин колони під дією стиснення або зморщування плити під дією зсуву.

*Жорсткість (stiffness)* – здатність тіла або конструкції чинити опір зовнішнім силам щодо деформування.

*Інтеграл Мора (Integral Mora)* – дорівнює добутку площі еюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної еюри від одиничного навантаження, розміщену під центром ваги еюри від заданого зовнішнього навантаження.

*Канонічні рівняння методу сил (canonical equations)* – додаткові рівняння переміщень, які виражають те, що переміщення у напрямках зайвих невідомих дорівнюють нулю.

*Критичне навантаження  $P_{кр}$  (critical load, Euler load)* – навантаження, перевищення якого спричинює втрату стійкості вихідної форми тіла.

*Метод Мора (dummy-load method, Maxweel-Mohr's method, unit-load method)* – це найзагальніший метод визначення переміщень стрижневих систем. Його значення особливо велике за розрахунку статично невизначуваних систем.



*Момент інерції осьовий площі фігури (axial moment of inertia)* – це інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від заданої осі.

*Момент опору перерізу (the moment of resistance of the section)* – геометрична величина, що характеризує опір тіла напруженням залежно від його форми.

*Напружений стан в точці (stress at the point)* – це стан напружень, що виникають в множині площин, що проходять через розглядувану точку.

*Напруження (stress)* – міра внутрішніх сил, що виникають під час деформування матеріалу або інтенсивність внутрішніх сил (внутрішня сила, що припадає на одиницю площі).

*Опір утоми матеріалу (Fatigue resistance of the material)* – здатність металів чинити опір руйнуванню у разі дії повторно-змінних навантажень.

*Основна система (main system)* – це будь-який із варіантів статично визначуваних систем, здобутих звільненням їх від зайвих в'язей.

*Полярний момент інерції площі фігури відносно деякої точки (полюса) (The polar moment of inertia of the area of the figure relative to some point)* – це інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від цієї точки.

*Позацентричне розтягання-стискання (eccentric tension-compression)* – це окремий випадок складного згинання з розтяганням (стисканням), під час якого брус розтягується силами, паралельними осі бруса так, що рівнодійна їх не збігається з віссю бруса, а проходить крізь точку  $p$ , що називається *полюсом сили*.

*Принцип незалежності дії сил (the principle of independence of forces)* – якщо на тіло діють одночасно декілька сил, дію кожної з них можна розглядати незалежно від дії інших.

*Розтяг / стиск (tension / compression)* – вид простого деформування, коли в поперечному перерізі виникає один силовий фактор – нормальна сила  $N$ .

*Сила (force)* – міра механічної взаємодії.

*Складний опір (combined stress)* – деформація, що виникає як результат декількох простих деформацій, що відбуваються одночасно: згинання і розтягування, згинання з крученням або вид деформації, коли в поперечному перерізі виникає два і більше внутрішніх силових фактори.

*Статичне та динамічне навантаження (static and dynamic load)* – Навантаження, за якого в навантаженому тілі не виникає прискорень або виникають настільки малі прискорення, що ними можна знехтувати, називається *статичним*. Коли ж в навантаженому тілі виникають

прискорення, таке навантаження називається *динамічним*. Під час динамічного навантаження виникають сили інерції.

*Статично невизначувана система (statically indeterminate systems)* – система, для якої силові фактори неможливо визначити тільки з рівнянь рівноваги.

*Стійкість (stability)* – здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги, відповідаючи на малі збільшення статичного навантаження малими приростами деформацій. Стійкість конструкції відноситься до одного з видів *конструкційної міцності*.

*Стрижень (bar)* – конструктивний елемент, поперечні розміри якого малі порівняно з довжиною.

*Ударне навантаження (impact load)* – навантаження, яке швидко змінюється в часі.

*Узагальнена сила (generalized force)* – це довільне навантаження, що викликає деформацію, наприклад, зосереджена сила, зосереджений момент.

*Узагальнене переміщення (generalized displacement)* – переміщення, на якому узагальнена сила виконує роботу. Для сил – це лінійне переміщення в напрямку її прикладання, для моментів – це кут повороту.

*Утома металу (metal fatigue)* – явище руйнування металу внаслідок поступового накопичення в них пошкоджень, що призводять до виникнення тріщини за багаторазового повторення навантажень.

*Флокени (flockens)* – внутрішні транскристалітні тріщини, що виникають в зонах металу з підвищеним вмістом водню

*Фрактографія (fractus – злом)* – наука, яка вивчає будову зломів, тобто поверхню зразка або деталі, що утворилася у випадку їх руйнування (розділення на частини) в процесі експлуатації або випробування.

*Центр ваги (center of gravity)* – точка твердого тіла, через яку проходить рівнодійна всіх сил ваги, що діють на елементарні маси цього тіла за будь-якого його положення в просторі.

*Ядро перерізу (core of a cross-section)* – область навколо центра ваги поперечного перерізу стрижня; подовжня сила, прикладена до будь-якої точки ядра перерізу, викликає в перерізі напруження одного знака.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Сопротивление материалов / Беляев Н. М. – М. : Наука, 1976. – 608 с.
2. Беляев Н. М. Сборник задач по сопротивлению материалов / Беляев Н. М. ; под ред. В. К. Качурина – М. : Наука, 1968. – 348 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – К. : Вища школа, 1975. – 654 с.
4. Дель Г. Д. Технологическая механика / Дель Г. Д. – М. : Машиностроение, 1978. – 174 с.
5. Егодуров Г. С. Руководство к решению задач по механике материалов и конструкций : [учебное пособие] / Г. С. Егодуров, Л. А. Бохоева, Б. И. Зинчеев, Д. Ц. Бальжанов. – Улан-Удэ : Изд-во ВСГТУ, 2005. – 299 с.
6. Колмогоров В. Л. Напряжения. Деформация. Разрушение / Колмогоров В. Л. – М. : Metallurgiya, 1970. – 230 с.
7. Кроха В. А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации : справочник / Кроха В. А. – М. : Машиностроение, 1980. – 157 с.
8. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Малинин Н. Н. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.
9. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении : учебное пособие / Огородников В. А. – К. : УМК ВО, 1989. – 152 с.
10. Огородников В. А. О технологическом паспорте материала заготовок поршня с шатуном аксиально-роторного поршневого насоса / В. А. Огородников, В. И. Музычук, А. В. Грушко // Промислова гідравліка і пневматика. – 2004. – № 4. – С. 86-92.
11. Огородников В. А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением / Огородников В. А. – К. : Вища школа, 1983. – 175 с.
12. Огородников В. А. Энергия. Деформации. Разрушение. (Задачи автотехнических экспертиз) : Монография / Огородников В. А., Киселев В. Б., Сивак И. О. – Винница : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 204 с.
13. Огородников В. А. Механіка матеріалів і конструкцій. Лабораторний практикум : навчальний посібник / Огородников В. А., Грушко О. В., Архіпова Т. Ф. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 67 с.
14. Огородников В. А. Механіка матеріалів і конструкцій : навчальний посібник / Огородников В. А., Грушко О. В., Архіпова Т. Ф. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 91 с.
15. Огородников В. А. Механіка процесів холодного формозмінювання з однотипними схемами механізму деформації / Огородников В. А.,

- Музичук В. І., Нахайчук О. В. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – 179 с.
16. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Частина 1 : навчальний посібник / Огородніков В. А., Грушко О. В., Побережний М. І. – Вінниця : ВНТУ, 2003. – 158 с.
  17. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Частина 2 : навчальний посібник / Огородніков В. А., Грушко О. В., Кириця І. Ю. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 146 с.
  18. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підручник / Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. ; за ред. Г. С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К. : Вища школа, 2004. – 655 с.
  19. Писаренко Г. С. Справочник по сопроотивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. – К. : Наукова думка, 1975 – 704 с.
  20. Тимошенко С. П. Сопроотивление материалов. Том второй. Более сложные вопросы теории и задачи / Тимошенко С. П. – М. : Наука, 1965. – 480 с.
  21. Третьяков А. В. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением : справочник / А. В. Третьяков, В. И. Зюзин. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Металлургия. – 1973. – 224 с.
  22. Феодосьев В. И. Сопроотивление материалов : учебник для вузов / Феодосьев В. И. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
  23. Френкель Я. И. Теория обратимых и необратимых трещин в твердых телах / Я. И. Френкель // Журнал технической физики. – 1952. – т. 22. – № 11. – С. 1857–1866.
  24. Фридель Ж. Дислокации / Фридель Ж. – М. : Мир, 1967. – 694 с.
  25. Griffith A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids //Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. – 1921. – Vol.221, #2. – P.163-198.
  26. Del' G. D. Yeliseyev V. V. and other. CAD system for the elastic – medium shaping of pipe-line parts / G. D. Del', V. V. Yeliseyev // Journ. of Materials Processing Technology. – 1992. – V.35. – p.191-198.
  27. Fundamental Terms and Concepts in Mechanics of Materials. English-Russian-Ukrainian Lexicon / N. Doroshenko, M. Demenko. Ye. Puzina, A. Shevchenko, V. Demenko. Kharkiv : National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», 2010. – 760 с.

# ДОДАТКИ

Додаток А  
Оформлення розрахунково-графічної роботи  
Титульний аркуш

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

Факультет МТ

Кафедра ОМПМ

**Розрахунково-графічна робота №1**  
з дисципліни «Механіка матеріалів та конструкцій»

**Задача 1. Розрахунок вала редуктора на міцність**

**Задача 2. Розрахунок плоскої рами**

Варіант 108

Викладач: професор, д.т.н. \_\_\_\_\_ В. А. Огородніков  
(підпис)

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

Виконав: ст. гр. ІПМ-21 \_\_\_\_\_ І.О. Петров  
(підпис)

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

ВНТУ 2022

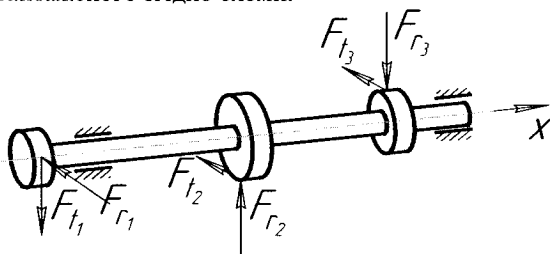
# Оформлення розрахунково-графічної роботи

Аркуш 2

## Задача 1

### Розрахунок вала редуктора на міцність

Визначити діаметр ділянок вала редуктора, навантаженого згідно схеми.



**Дано:**

$$D_1 = 0,1 \text{ м};$$

$$D_2 = 0,15 \text{ м};$$

$$D_3 = 0,11 \text{ м};$$

$$[\sigma] = 120 \text{ МПа};$$

$$F_{t1} = 5 \text{ кН};$$

$$F_{t2} = 4 \text{ кН}.$$

**Знайти:**

$$d_1, d_2, \dots - ?$$

**Розв'язування**

**Відповідь:**

7	10	23	15	10	11	10
		Петров		ГІІ		Арк
зм.	Арк.	№ док-т	Підпис	Дата	<b>ОМ.1Б-08.38.108</b>	2

297

20

5

21

5

**Додаток Б**

**Механічні характеристики матеріалів**

Таблиця Б.1 – Механічні характеристики конструкційних вуглецевих сталей звичайної якості (ГОСТ 380-2005)

Марка сталі	Статичні навантаження				Повторно-змінні навантаження		
	$\sigma_s$ , МПа	$\sigma_T$ , МПа	$\tau_T$ , МПа	$\delta$ , %	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\tau_{-1}$ , МПа
Ст1	320÷400	180	–	28	120÷150	160÷220	80÷120
Ст2	320÷400	190÷220	–	26	120÷160	170÷220	80÷130
Ст3	380÷470	210÷240	160	21÷23	120÷160	170÷220	100÷130
Ст4	420÷520	240÷260	–	19÷21	–	190÷250	–
Ст5	500÷620	260÷280	190	15÷17	170÷220	220÷300	130÷180
Ст6	600÷720	300÷310	220	–	190÷250	250÷340	150÷200

Таблиця Б.2 – Механічні характеристики конструкційних вуглецевих сталей якісних (ГОСТ 1050-74)

Марка сталі	Статичні навантаження				Повторно-змінні навантаження		
	$\sigma_s$ , МПа	$\sigma_T$ , МПа	$\tau_T$ , МПа	$\delta$ , %	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\tau_{-1}$ , МПа
10	340	210	140	31	120÷150	160÷220	80÷120
20	420	250	160	25	120÷160	170÷220	100÷130
25	460	280	–	23	–	190÷250	–
30	500	300	170	21	170÷210	200÷270	110÷140
35	540	320	190	20	170÷220	220÷300	130÷180
40	580	340	–	19	180÷240	230÷320	140÷190
45	610	360	220	16	190÷250	250÷340	150÷200
50	640	380	–	14	200÷260	270÷350	160÷210
55	660	390	–	13	–	–	–
60	690	410	–	12	220÷280	310÷380	180÷220
20Г	460	280	–	24	–	–	–
30Г	550	320	–	20	–	220÷320	–
50Г	660	400	–	13	–	290÷360	–

Таблиця Б.3 – Механічні характеристики деяких конструкційних легованих сталей (ГОСТ 4543-71)

Марка сталі	Статичні навантаження				Повторно-змінні навантаження		
	$\sigma_s$ , МПа	$\sigma_T$ , МПа	$\tau_T$ , МПа	$\delta$ , %	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\tau_{-1}$ , МПа
20Х	800	650	–	11	–	380	170÷230
40Х	1000	800	–	10	250	350÷380	225
45Х	1050	850	–	9	–	400÷500	–
30ХМ	950	750	–	11	370	310÷410	230
40ХН	1000	800	390	11	290	400	240
12ХНЗА	950	700	400	11	270÷320	390÷470	220÷260
20ХНЗА	950	750	–	12	300÷320	430÷450	245÷255
40ХНМА	1000	950	–	12	–	500÷700	270÷380
30ХГСА	1100	850	–	10	500÷535	510÷540	220÷245



Таблиця Б.4 – Механічні характеристики пружинних сталей

Сталі	Характеристики міцності					Модулі пружності		$\tau_{-1}$ , МПа
	$\sigma_{sp}$ , МПа	$\sigma_{sp}$ , МПа	$\sigma_{нцр}$ , МПа	$\tau_{тс}$ , МПа	$\tau_{вс}$ , МПа	$E$ , МПа	$G$ , МПа	
Середньо-вуглецева	1500–1600	1000–1200	750–900	600–800	850–1100	$2,1 \cdot 10^5$	$8,1 \cdot 10^4$	300–390
Високо-вуглецева	1450–1700	950–1350	800–1000	650–900	1100–1400	$2,0 \cdot 10^5$ – $2,2 \cdot 10^5$	$7,6 \cdot 10^4$ – $8,3 \cdot 10^4$	300–420
Хромо-ванадієва	1600–1750	1500–1600	900–1000	950–1000	1700–1300	$2,01 \cdot 10^5$ – $2,05 \cdot 10^5$	$8,0 \cdot 10^4$	330–360
Кремне-марганцева	1600–1700	1400–1500	900–950	950–1000	1350	$2,05 \cdot 10^5$	$7,6 \cdot 10^4$	300–330
Кремне-ванадієва	1400–1500	950–1050	600–650	900	1200–1250	$2,3 \cdot 10^5$	$8,3 \cdot 10^4$	270–300

Таблиця Б.5 – Механічні характеристики сірих чавунів (ГОСТ 1412-85)

Марка чавуну	Статичні навантаження			Повторно-змінні навантаження		
	$\sigma_{sp}$ , МПа	$\sigma_{вс}$ , МПа	$\tau_{тс}$ , МПа	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\tau_{-1}$ , МПа
СЧ10	100	417	–	–	–	–
СЧ12	120	500	–	–	–	–
СЧ 15	150	650	240	–	70	50
СЧ 18	180	700	–	35	90	–
СЧ 20	200	714	280	–	95	76
СЧ 21	210	950	280	–	100	80
СЧ 24	240	1000	300	65	120	100
СЧ 25	250	885	312	68	125	104
СЧ 28	280	1100	350	75	150	110
СЧ 30	300	1150	365	70	130	110
СЧ 32	320	1200	390	70	140	115
СЧ 35	350	1200	400	75	150	115
СЧ 38	380	1400	460	–	150	115

Таблиця Б.6 – Механічні характеристики високоміцних чавунів з кулястим графітом (ГОСТ 7293-85)

Марка чавуну	Статичні навантаження				$\delta$ , %	Повторно-змінні навантаження	
	$\sigma_{sp}$ , МПа	$\sigma_{вс}$ , МПа	$\sigma_{т}$ , МПа	$\tau_{н}$ , МПа		$\sigma_{-1}$ , МПа	$\tau_{-1}$ , МПа
ВЧ 45-0	450-500	1500÷1600	350-400	450÷500	0,4-1,4	180÷200	–
ВЧ 50-1,5	500-600	1700÷1800	400-500	500÷550	1,5-3,0	200÷220	170÷210
ВЧ 60-2	600-700	2000÷2100	420-550	600÷750	2-3	170÷230	150÷160
ВЧ 45-5	450-550	1800-2000	320-420	400-450	5-10	180-200	–
ВЧ 40-10	400-550	2000-2200	300-400	–	10-20	250-280	198

Таблиця Б.7 – Механічні характеристики ковких чавунів (ГОСТ 1215-79)

Марка чавуну	Статичні навантаження				$\delta$ , %	Повторно-змінні навантаження		
	$\sigma_{sp}$ , МПа	$\sigma_{bc}$ , МПа	$\sigma_r$ , МПа	$\tau_B$ , МПа		$\sigma_{-1}^c$ , МПа	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\tau_{-1}$ , МПа
КЧ 30-6-Ф	300	–	190	340	6(7)	70	120	110
КЧ 33-8-Ф	330	–	210	345	8(9)	80	130	120
КЧ 35-10-Ф	350	–	220	350	10(11)	80	140	130
КЧ 37-12-Ф	370	–	230	370	12(13)	80	140	130
КЧ 50-4-П	500	–	270	520	4(3,5)	110	180	160

Таблиця Б.8 – Механічні характеристики деяких матеріалів

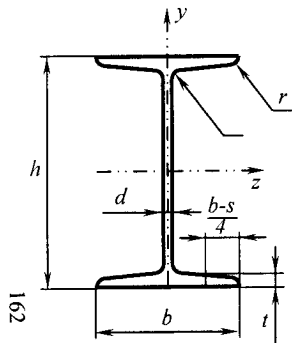
Матеріал	$\sigma_r$ , МПа	$\sigma_B$ , МПа	$\delta$ , %	НВ	Галузь застосування
Латунь Л68*	91; 520	320; 660	55; 30	55; 150	Труби, дрiт, листи
Бронза олов'яна БрО10*	–	250	11	80	Арматура
Дуралюмін нормальний Д1*	110; 240	210; 420	18; 15	45; 113	Труби, пресовані профілі
Дуралюмін підвищеної якості Д6*	50; 380	180; 500	8; 20	50; 125	Труби, профілі
Сосна звичайна (15% вологості)	61...31	93,1...115	–	1,99...2,7	–
Дуб (15% вологості)	29...74	128,8	–	4,63...6,53	–
Текстоліти на основі бавовняних тканин	70...80	45...110	–	30	Колеса зубчасті, підшипники ковзання, панелі
Капрон	–	60	150; 200	10...12	Канати

Примітка до таблиці Б.8.

\* Перші цифри дано для м'якого стану матеріалу, другі – для твердого.

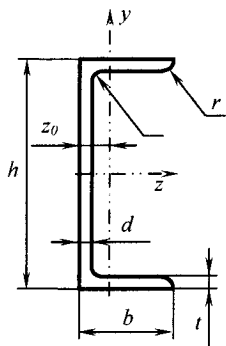
## Додаток В Сортамент прокатної сталі

Таблиця В.1 – Сталь гарячекатана. Балки двотаврові. Сортамент (ГОСТ 8239 – 89)



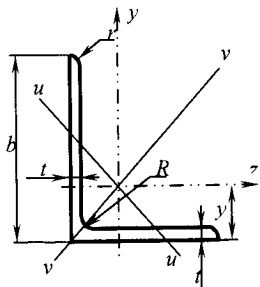
Номер швелера	h	b	d	t	R	r	Площа перерізу	Маса 1 м	Довідникові дані для осей							
									z				y			
									$A, \text{ см}^2$	$I_z, \text{ см}^4$	$W_z, \text{ см}^3$	$i_z, \text{ см}$	$\sigma_z^{\max}, \text{ см}^3$	$I_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$
	мм															
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55	
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70	
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88	
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12	
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07	
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114	155	28,2	2,32	
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131	157	28,6	2,27	
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143	206	34,3	2,50	
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163	198	34,5	2,37	
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407	11,3	229	337	50	2,80	
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	

Таблиця В.2 – Сталь гарячекатана. Швелери з паралельними гранями полиць (ГОСТ 8240 – 97)



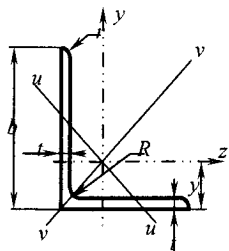
Номер швелера	h	b	d	t	R	r	Площа перерізу	Маса 1 м	Довідникові дані для осей						z <sub>0</sub> , см	
									z				y			
									I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	S <sub>зміна</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>		i <sub>y</sub> , см
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84	22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90	48,8	15,0	2,55	9,02	9,35	4,06	1,120	1,29
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05	89,8	22,5	3,16	13,3	13,9	5,31	1,240	1,38
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,9	8,59	175	34,9	3,99	20,5	22,6	7,37	1,440	1,53
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,3	10,4	305	50,8	4,79	29,7	34,9	9,84	1,620	1,66
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,6	12,3	493	70,4	5,61	40,9	51,5	12,9	1,810	1,82
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	17,0	13,3	547	78,2	5,68	45,2	65,2	15,7	1,960	2,04
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,1	14,2	750	93,8	6,44	54,3	72,8	16,4	2,000	1,97
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,5	15,3	827	103	6,51	59,5	90,5	19,6	2,150	2,19
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,7	16,3	1090	121	7,26	70,0	100	20,6	2,200	2,14
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,2	17,4	1200	133	7,34	76,3	123	24,3	2,350	2,36
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,4	18,4	1530	153	8,08	88,0	134	25,2	2,390	2,30
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,2	19,8	1680	168	8,17	96,2	162	29,7	2,540	2,53
22	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,7	21,0	2120	193	8,90	111	178	31,0	2,580	2,47
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	6,0	28,8	22,6	2340	212	9,01	121	220	37,0	2,770	2,75
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,6	24,0	2910	243	9,75	139	248	39,5	2,850	2,72
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,9	25,8	3200	266	9,86	152	302	46,5	3,030	3,01
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,2	27,7	4180	310	10,9	178	314	46,7	2,990	2,78
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,5	31,8	5830	389	12,0	224	393	54,8	3,120	2,83
33	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,5	36,5	8010	486	13,1	281	491	64,6	3,250	2,90
36	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,4	41,9	10850	603	14,3	350	611	76,3	3,380	2,99
40	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,5	48,3	15260	763	15,8	445	760	89,9	3,510	3,05

Таблиця В.3 – Кутики сталеві гарячекатані рівнобічні. Сортамент (ГОСТ 8509 – 86)



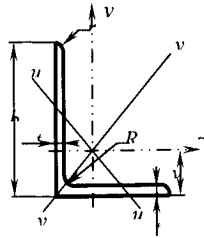
Номер кутика	Розміри, мм				Площа пере-різу, А см <sup>2</sup>	Довідникові величини для осей										Маса 1 м кг
	b	t	R	r		z			v-v		u-u			I <sub>zv</sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	
						I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	I <sub>vmax</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>vmax</sub> , см	I <sub>umin</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>u</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>umin</sub> , см			
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4			1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4			1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
		5			2,27	1,22	0,72	0,73	1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	0,69	0,80	1,78
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	4	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4			2,27	1,84	0,87	0,90	2,29	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
		5			2,78	2,20	1,06	0,89	3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	1,27	0,93	2,18
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
		4			2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
		5			3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	5	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		5			3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
		6			4,48	6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52
4,5	45	3	5	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	2,04	1,38	10,5	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
		5			4,29	8,03	2,51	1,37	12,7	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
		6			5,08	9,35	2,95	1,36	14,8	1,71	3,90	2,06	0,88	5,45	1,34	3,99
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,3	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	2,54	1,54	14,6	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	3,13	1,53	17,8	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6			5,69	13,07	3,69	1,52	20,7	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
		7			6,56	14,84	4,23	1,50	23,5	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15
		8			7,41	16,51	4,76	1,49	26,0	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82
5,6	56	4	6	2	4,38	13,10	3,21	1,73	20,8	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5			5,41	15,97	3,96	1,72	25,4	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25

Продовження таблиці В.3



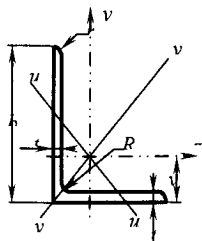
Номер кутика	Розміри, мм				Площа перерізу, $A$ см <sup>2</sup>	Довідникові величини для осей										$I_{y_0}$ , см <sup>4</sup>	$y_0$ , см	Маса 1 м, кг
	$h$	$l$	$R$	$r$		$z$			$v-v$		$u-u$			$I_{z_0}$ , см <sup>4</sup>	$y_0$ , см			
						$I_{z_1}$ , см <sup>4</sup>	$W_{z_1}$ , см <sup>3</sup>	$i_{z_1}$ , см	$I_{v_{max}}$ , см <sup>4</sup>	$i_{v_{max}}$ , см	$I_{u_{min}}$ , см <sup>4</sup>	$W_{u_1}$ , см <sup>3</sup>	$i_{u_{min}}$ , см					
6	60	4	7,0	2,3	4,72	16,21	3,70	1,85	25,7	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71		
					5,83	19,79	4,56	1,84	31,4	2,32	8,18	3,49	1,18	11,6	1,66	4,58		
					6,92	23,21	5,40	1,83	36,8	2,31	9,60	3,99	1,18	13,6	1,70	5,43		
					9,04	29,55	7,00	1,81	46,8	2,27	12,34	4,90	1,17	17,2	1,78	7,10		
6,3	63	5	7	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,9	2,45	7,81	3,26	1,25	11,0	1,69	3,90		
					6,13	23,10	5,05	1,94	36,6	2,44	9,52	3,87	1,25	13,7	1,74	4,81		
					7,28	27,06	5,98	1,93	42,9	2,43	11,2	4,44	1,24	15,9	1,78	5,72		
7	70	4,5	8	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,0	2,72	12,0	4,53	1,39	17,0	1,88	4,87		
					6,86	31,94	6,27	2,16	50,7	2,72	13,2	4,92	1,39	18,7	1,90	5,38		
					8,15	37,58	7,43	2,15	59,6	2,71	15,5	5,66	1,38	22,1	1,94	6,39		
					9,42	42,98	8,57	2,14	68,2	2,69	17,8	6,31	1,37	25,2	1,99	7,39		
					10,67	48,16	9,68	2,12	76,4	2,68	20,0	6,99	1,37	28,2	2,02	8,37		
7,5	75	5	9	3	13,11	57,90	11,8	2,10	91,5	2,64	24,3	8,17	1,36	33,6	2,10	10,3		
					7,39	39,53	7,21	2,31	62,6	2,91	16,4	5,74	1,49	23,1	2,02	5,80		
					8,78	46,57	8,57	2,30	73,9	2,90	19,3	6,62	1,48	27,3	2,06	6,89		
					10,10	53,34	9,89	2,29	84,6	2,89	22,1	7,43	1,48	31,2	2,10	7,96		
8	80	5,5	9	3	11,50	59,84	11,2	2,28	94,9	2,87	24,8	8,16	1,47	35,0	2,15	9,02		
					12,80	66,10	12,4	2,27	105	2,86	27,5	8,91	1,46	38,6	2,18	10,10		
					8,63	52,68	9,03	2,47	83,6	3,11	21,8	7,10	1,59	30,9	2,17	6,78		
					9,38	56,97	9,80	2,47	90,4	3,11	23,5	7,60	1,58	33,4	2,19	7,36		
					10,85	65,31	11,3	2,45	104	3,09	27,0	8,55	1,58	38,3	2,23	8,51		
9	90	7	10	3,3	12,30	73,36	12,8	2,44	116	3,08	30,3	9,44	1,57	43,0	2,27	9,65		
					15,14	88,58	15,7	2,42	140	3,04	36,9	11,1	1,56	56,7	2,35	11,9		
					17,90	102,7	18,4	2,40	162	3,01	43,2	12,6	1,55	59,5	2,42	14,1		
					10,61	82,10	12,5	2,78	130	3,50	34,0	9,88	1,79	48,1	2,43	8,33		
					12,28	94,30	14,5	2,77	150	3,49	38,9	11,2	1,78	55,4	2,47	9,64		
9	90	8	10	3,3	13,93	106,1	16,4	2,76	168	3,48	43,8	12,3	1,77	62,3	2,51	10,9		
					15,60	118,0	18,3	2,75	186	3,46	48,6	13,5	1,77	68,0	2,55	12,2		
					17,17	128,6	20,1	2,74	204	3,45	53,3	14,5	1,76	75,3	2,59	13,5		
					20,33	149,7	23,9	2,71	236	3,41	62,4	16,5	1,75	86,2	2,67	16,0		

Продовження таблиці В.3



Номер кутка	Розміри, мм				Площа перерізу, $A$ см <sup>2</sup>	Довідникові величини для осей									Маса 1 м, кг	
	$h$	$t$	$R$	$r$		$z$			$v-v$		$u-u$			$I_{zv}$ , см <sup>4</sup>		$y_0$ , см
						$I_z$ , см <sup>4</sup>	$W_z$ , см <sup>3</sup>	$i_z$ , см	$I_{vmax}$ , см <sup>4</sup>	$i_{vmax}$ , см	$I_{umin}$ , см <sup>4</sup>	$W_u$ , см <sup>3</sup>	$i_{umin}$ , см			
10	100	6,5	12	4	12,82	122,1	16,7	3,09	193	3,88	50,7	13,4	1,99	71,4	2,68	10,1
		7			13,75	130,6	17,9	3,08	207	3,88	54,2	14,1	1,98	76,4	2,71	10,8
		8			15,60	147,2	20,3	3,07	233	3,87	60,9	15,7	1,98	86,3	2,75	12,2
		10			19,24	178,9	25,0	3,05	284	3,84	74,1	18,5	1,96	110	2,83	15,1
		12			22,80	208,9	29,5	3,03	331	3,81	86,8	21,1	1,95	122	2,91	17,9
		14			26,28	237,2	33,8	3,00	375	3,78	99,3	23,5	1,94	138	2,99	20,6
		15			27,99	250,7	36,0	2,99	396	3,76	105	24,6	1,94	145	3,03	22,0
16	29,68	263,8	38,0	2,98	416	3,74	112	25,8	1,94	152	3,06	23,3				
11	110	7	12	4	15,2	175,6	21,8	3,40	279	4,29	72,7	17,4	2,19	106	2,96	11,9
		8			17,2	198,2	24,8	3,39	315	4,28	81,8	19,3	2,18	116	3,00	13,5
12	120	8	12	4,0	18,80	260	29,7	3,72	412	43,68	107	23,3	2,39	153	3,25	14,76
		10			23,24	317	36,6	3,69	504	4,66	131	27,7	2,37	187	3,33	18,24
		12			27,60	372	43,3	3,67	590	4,62	153	31,8	2,36	218	3,41	21,67
		15			33,99	449	53,0	3,63	711	4,57	186	37,4	2,34	262	3,53	26,68
12,5	125	8	14	4,6	19,7	294	32,2	3,87	467	4,87	122	25,7	2,49	172	3,36	15,5
		9			22,0	327	36,0	3,86	520	4,86	135	28,3	2,48	192	3,40	17,3
		10			24,3	360	39,7	3,85	571	4,84	149	30,5	2,47	211	3,45	19,1
		12			28,9	422	47,1	3,82	670	4,82	174	34,9	2,46	248	3,53	22,7
		14			33,4	482	54,2	3,80	764	4,78	200	39,1	2,45	282	3,61	26,2
		16			37,8	539	61,1	3,78	853	4,75	224	43,1	2,44	315	3,68	29,6
14	140	9	14	4,6	24,7	466	45,6	4,34	739	5,47	192	35,9	2,79	274	3,78	19,4
		10			27,3	512	50,3	4,33	814	5,46	211	39,1	2,78	301	3,82	21,5
		12			32,5	602	59,7	4,31	957	5,43	248	45,0	2,76	354	3,90	25,5
15	150	10	14	4,6	29,33	635	58,1	4,65	1009	5,86	261	45,3	2,98	374	4,07	23,02
		12			34,89	747	68,9	4,63	1188	5,83	307	52,3	2,97	440	4,15	27,39
		15			43,08	908	84,7	4,59	1443	5,79	374	62,0	2,95	534	4,27	33,82
		18			51,09	1060	99,9	4,56	1681	5,74	439	70,9	2,93	621	4,38	40,11
16	160	10	16	5,3	31,4	774	66,2	4,96	1229	6,25	319	52,5	3,19	455	4,30	24,7
		11			34,4	844	72,4	4,95	1341	6,24	348	56,5	3,18	496	4,35	27,0
		12			37,4	913	78,6	4,94	1450	6,23	376	60,5	3,17	537	4,39	29,4
		14			43,3	1046	90,8	4,92	1662	6,20	431	68,2	3,16	615	4,47	34,0
		16			49,1	1175	103	4,89	1866	6,17	485	75,9	3,14	690	4,55	38,5
		18			54,8	1290	114	4,87	2061	6,13	537	82,1	3,13	771	4,63	43,0
		20			60,4	1419	126	4,85	2248	6,10	589	90,0	3,12	830	4,70	47,4

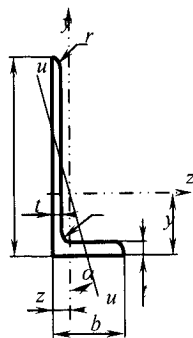
Продовження таблиці В.3



Номер кутика	Розміри, мм				Площа перерізу, $A$ см <sup>2</sup>	Довідникові величини для осей								Маса $l$ м, кг		
	$h$	$t$	$R$	$r$		$z$			$v-v$		$u-u$				$I_{D,z}$ см <sup>4</sup>	$y_0$ см
						$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см	$I_{vmax}$ см <sup>4</sup>	$I_{vmax}$ см <sup>4</sup>	$I_{umin}$ см <sup>4</sup>	$W_u$ см <sup>3</sup>	$I_{umin}$ см <sup>4</sup>			
18	180	11	16	5,3	38,8	1216	92,5	5,60	1933	7,06	500	72,9	3,59	716	4,85	30,5
					42,2	1317	100	5,59	2093	7,04	540	78,2	3,58	776	4,89	33,1
					52,2	1607	124	5,55	2555	7,00	660	93,1	3,56	948	5,01	41,0
					62,0	1884	146	5,51	2993	6,95	775	107	3,54	1108	5,13	48,7
					68,4	2061	161	5,49	3271	6,91	851	116	3,53	1210	5,20	53,7
20	200	12	18	6	47,1	1823	125	6,22	2896	7,84	749	98,7	3,99	1073	5,37	37,0
					50,9	1961	134	6,21	3116	7,83	805	105	3,98	1156	5,42	39,9
					54,6	2097	144	6,20	3333	7,81	861	112	3,97	1236	5,46	42,8
					62,0	2363	163	6,17	3755	7,78	970	124	3,96	1393	5,54	48,7
					69,3	2621	182	6,15	4165	7,75	1077	136	3,94	1544	5,62	54,4
					76,5	2871	201	6,12	4560	7,72	1182	147	3,93	1689	5,70	60,1
					90,8	3351	237	6,08	5314	7,65	1388	168	3,91	1963	5,85	71,2
					94,3	3466	246	6,06	5494	7,63	1438	173	3,91	2028	5,89	74,0
22	220	14	21	7	111,5	4020	289	6,00	6351	7,55	1698	193	3,86	2332	6,07	87,6
					60,4	2814	175	6,83	4470	8,60	1159	139	4,38	1655	5,93	47,4
25	250	16	24	8	68,6	3175	199	6,81	5045	8,58	1306	153	4,36	1862	6,92	53,8
					78,4	4717	258	7,76	7492	9,78	1942	203	4,98	2775	6,75	61,5
					87,7	5247	289	7,73	8337	9,75	2158	223	4,96	3089	6,83	68,9
					97,0	5765	319	7,71	9160	9,72	2370	243	4,94	3395	6,91	76,1
					106,1	6270	348	7,69	9961	9,69	2579	261	4,93	3691	7,00	83,3
					119,7	7006	392	7,65	11125	9,64	2887	287	4,91	4119	7,11	94,0
					113,1	7717	435	7,61	12244	9,59	3190	312	4,89	4527	7,23	104,5
					142,0	8177	462	7,59	12965	9,56	3389	328	4,89	4788	7,31	111,4

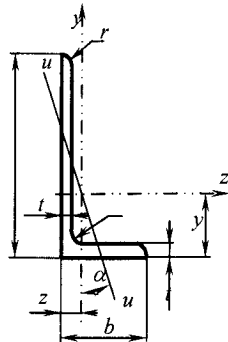


Таблиця В.4 – Кутики сталеві гарячекатані нерівнобічні. Сортамент (ГОСТ 8510 – 86)



Номер кутика	мм					Площа перерізу, см <sup>2</sup>	Довідникові дані для осей															Кут нахилу осі, tg α	Маса 1 м, кг
	B	b	t	R	r		z			y			u – u (mm)			z <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	I <sub>z0</sub> , см <sup>4</sup>					
							I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>u</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>u</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>u</sub> , см								
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,39	0,91			
3/2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43	0,42	1,12			
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,42	1,46			
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,38	1,17			
			4			1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,37	1,52			
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,38	1,48			
			4			2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,38	1,94			
			5			3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,37	2,38			
4/3	40	30	4	4,0	1,3	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,54	2,09			
			5			3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00	0,53	2,57			
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,38	1,68			
			4			2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,37	2,20			
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,40	1,90			
			4			3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,40	2,49			
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,4	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,40	2,81			
			5			4,41	13,8	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,40	3,46			
6,3/4	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,3	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,39	3,17			
			5			4,98	19,9	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,39	3,91			
			6			5,90	23,3	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,39	4,63			
			8			7,68	29,6	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,38	6,03			
6,5/5	65	50	5	6,0	2,0	5,56	23,4	5,20	2,05	12,1	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77	0,57	4,36			
			6			6,60	27,5	6,16	2,04	14,1	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,5	0,57	5,18			
			7			7,62	31,3	7,08	2,03	16,1	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,9	0,57	5,98			
			8			8,62	35,0	7,99	2,02	18,9	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,6	0,57	6,77			
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,8	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,40	4,39			
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	34,8	6,81	2,39	12,5	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,0	0,43	4,79			
			6			7,25	40,9	8,08	2,38	14,6	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,1	0,43	5,69			
			7			8,37	46,8	9,31	2,36	16,6	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,2	0,43	6,57			
			8			9,47	52,4	10,5	2,35	18,5	4,88	1,40	10,9	4,14	1,07	1,29	2,52	17,8	0,43	7,43			
8/5	80	50	5	8,0	2,7	6,36	41,6	7,71	2,56	12,7	3,28	1,41	7,57	2,75	1,09	1,13	2,60	13,2	0,38	4,99			
			6			7,55	49,0	9,15	2,55	14,9	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,5	0,38	5,92			

Продовження таблиці В.4

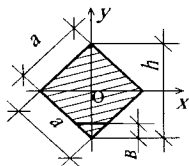
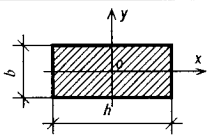
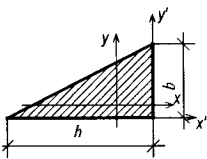
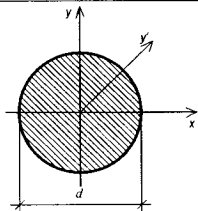
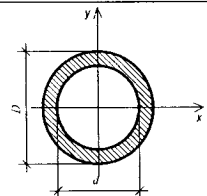


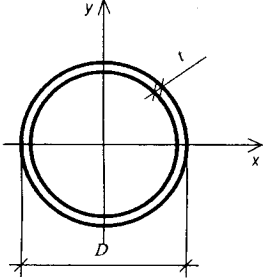
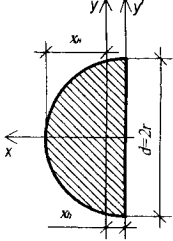
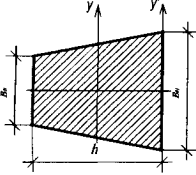
Номер кутика	мм					Площа перерізу, см <sup>2</sup>	Довідникові дані для осей											Кут нахилу осі, tg α	Маса 1 м, кг	
	B	h	t	R	r		z			y			u - u (mm)			z <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см			I <sub>z<sub>0</sub></sub> , см <sup>4</sup>
							I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>u</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>u</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>u</sub> , см					
8/6	80	60	6	8,0	2,7	8,15	52,1	9,42	2,53	25,2	5,58	1,76	13,6	4,66	1,29	1,49	2,47	21,0	0,54	6,39
			7			9,42	59,6	10,9	2,52	28,7	6,43	1,75	15,6	5,34	1,29	1,53	2,52	24,0	0,54	7,39
			8			10,7	66,9	12,4	2,50	32,2	7,26	1,74	17,5	5,99	1,28	1,57	2,56	26,8	0,54	8,37
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	65,3	10,7	2,88	19,7	4,53	1,58	11,8	3,81	1,22	1,26	2,92	20,5	0,38	6,17
			6			8,54	70,6	11,7	2,88	21,2	4,91	1,58	12,7	4,12	1,22	1,28	2,95	22,2	0,38	6,70
			8			11,2	90,9	15,2	2,85	27,1	6,39	1,56	16,3	5,32	1,21	1,36	3,04	28,3	0,38	8,77
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,58	98,3	14,5	3,20	30,6	6,27	1,79	18,2	5,27	1,38	1,42	3,23	31,5	0,39	7,53
			7			11,1	113	16,8	3,19	35,0	7,23	1,78	20,8	6,06	1,37	1,46	3,28	36,1	0,39	8,70
			8			12,6	127	19,0	3,18	39,2	8,17	1,77	23,4	6,82	1,36	1,50	3,32	40,5	0,39	9,87
			10			15,5	154	23,3	3,15	47,2	9,99	1,75	28,3	8,31	1,35	1,58	3,40	48,6	0,38	12,1
10/6,5	100	65	7	10	3,3	11,2	114	16,9	3,19	38,3	7,70	1,85	22,8	6,43	1,41	1,52	3,24	38,0	0,41	8,81
			8			12,7	138	19,1	3,18	43,0	8,70	1,84	25,2	7,26	1,41	1,56	3,28	42,6	0,41	9,99
			10			15,7	156	23,5	3,15	51,7	10,6	1,82	30,6	8,83	1,40	1,64	3,37	51,2	0,41	12,3
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,5	142	19,1	3,53	45,6	8,42	2,00	26,9	7,05	1,53	1,58	3,55	46,8	0,40	8,98
			8			13,9	172	23,2	3,51	54,6	10,2	1,98	32,3	8,50	1,52	1,64	3,61	55,9	0,40	10,9
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	227	26,7	4,01	73,7	11,9	2,29	43,4	9,96	1,76	1,80	4,01	74,7	0,40	11,0
			8			16,0	256	30,3	4,00	81,0	13,5	2,28	48,8	11,3	1,75	1,84	4,04	84,1	0,40	12,9
			10			19,7	312	37,3	3,98	101	16,5	2,26	59,3	13,7	1,74	1,92	4,14	102	0,40	15,5
			12			23,4	365	44,1	3,95	117	19,5	2,24	69,5	16,1	1,72	2,00	4,22	118	0,40	18,3
14/9	140	90	8	12	4,0	18,0	364	38,3	4,49	120	17,2	2,58	70,3	14,4	1,98	2,03	4,49	121	0,41	14,1
			10			22,2	444	47,2	4,47	146	21,1	2,56	85,5	17,6	1,96	2,12	4,58	147	0,40	17,5
16/10	160	100	9	13	4,3	22,9	606	56,0	5,15	186	24,0	2,85	110	20,0	2,20	2,24	5,19	194	0,39	18,0
			10			25,3	667	61,9	5,13	204	26,4	2,84	121	22,0	2,19	2,28	5,23	213	0,39	19,9
			12			30,0	784	73,4	5,11	239	31,2	2,82	142	25,9	2,18	2,36	5,32	249	0,38	23,6
			14			34,7	897	84,7	5,08	272	35,9	2,80	162	29,8	2,16	2,43	5,40	282	0,38	27,3
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	952	78,6	5,80	276	32,3	3,12	165	27,0	2,42	2,44	5,88	295	0,37	22,2
			12			33,7	1123	93,3	5,77	324	38,2	3,10	194	31,8	2,40	2,52	5,97	348	0,37	26,5
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	1449	107	6,45	446	46,0	3,58	264	38,3	2,75	2,79	6,50	465	0,39	27,4
			12			37,9	1568	117	6,43	482	49,9	3,57	285	41,5	2,74	2,83	6,54	503	0,39	29,7
			14			43,9	1801	135	6,41	551	57,4	3,54	327	47,6	2,73	2,91	6,62	575	0,39	34,4
			16			49,8	2026	152	6,38	617	64,8	3,52	367	53,6	2,72	2,99	6,71	643	0,38	39,1

## Додаток Г

### Геометричні характеристики деяких перерізів

Таблиця Г.1

Переріз	Параметри перерізу
	<p style="text-align: center;"><b>Квадрат на ребро</b></p> <p style="text-align: center;"><math>A = a^2; h = a\sqrt{2};</math></p> <p style="text-align: center;"><math>J_x = J_y = \frac{a^4}{12}; W_x = 0,118a^3</math></p> <p style="text-align: center;">За зрізу верхнього та нижнього кутів <math>W_x</math> збільшується. Найбільший момент опору у разі зрізу кутів <math>W_{x \text{ зріз}} 0,124h^3</math> за <math>b-h/18</math>.</p>
	<p style="text-align: center;"><b>Прямокутник</b></p> <p style="text-align: center;"><math>A = bh; J_y = \frac{bh^3}{12}; J_x = \frac{hb^3}{12}; W_x = \frac{b^2h}{6};</math></p> <p style="text-align: center;"><math>W_y = \frac{bh^2}{6}.</math></p>
	<p style="text-align: center;"><b>Прямокутний трикутник</b></p> <p style="text-align: center;"><math>A = \frac{bh}{2}; x_{h_1} = \frac{h}{3}; x_{h_2} = \frac{2h}{3}; b_1 = \frac{b}{3};</math></p> <p style="text-align: center;"><math>b_2 = \frac{2b}{3}; J_x = \frac{hb^3}{36}; J_y = \frac{h^3b}{36}; J_{x'} = \frac{hb^3}{12};</math></p> <p style="text-align: center;"><math>J_{y'} = \frac{h^3b}{12}.</math></p>
	<p style="text-align: center;"><b>Круг</b></p> <p style="text-align: center;"><math>A = \frac{\pi d^2}{4}; J_x = J_y = J_{y'} = \frac{\pi d^4}{64};</math></p> <p style="text-align: center;"><math>J_{p_0} = 2J_y = \frac{\pi d^4}{32}; W_y = W_x = W_{y'} = \frac{\pi d^3}{32};</math></p> <p style="text-align: center;"><math>W_p = \frac{\pi d^3}{16}.</math></p>
	<p style="text-align: center;"><b>Кільце</b></p> <p style="text-align: center;"><math>A = \frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2); \alpha = \frac{d}{D};</math></p> <p style="text-align: center;"><math>J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4); W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4);</math></p> <p style="text-align: center;"><math>W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4); I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4).</math></p>

	<p>Тонке кільце (<math>t \ll D</math>)</p> $A = \pi D t; \quad J_x = J_y = \frac{\pi D^3 t}{4};$ $W_x = W_y = \frac{\pi D^2 t}{2};$ $I_p = \frac{\pi D^3 t}{2};$ $W_p = \pi D^2 t.$
	<p>Півколо</p> $A = \frac{\pi d^2}{8};$ $x_h = 0,2122d; \quad x_b = 0,2878d;$ $J_y = 0,0068d^4; \quad J_x = J_{y'} = \frac{\pi d^4}{128}.$
	<p>Трапеція</p> $A = \frac{1}{2}(b_h + b_b)h;$ $x_h = (b_h + 2b_b)h/[3(h_h + h_b)];$ $x_b = (2b_h + b_b)h/[3(b_h + b_b)];$ $J_y = h^3(b_h^2 + 4b_h b_b + b_b^2)/[36(b_h + b_b)];$ $J_{y'} = h^3(b_h + 3b_b)/12;$ $J_{y''} = h(2b_h + b_b)/12.$

## Додаток Д

Значення інтегралів для визначення переміщень в кривих стрижнях  
Таблиця Д.1

Інтеграл	Границя інтегрування			
	від 0 до $\alpha$	від 0 до $\frac{\pi}{4}$	від 0 до $\frac{\pi}{2}$	від 0 до $\pi$
$\int \sin \varphi d\varphi$	$1 - \cos \alpha$	0,293	1	2
$\int \cos \varphi d\varphi$	$\sin \alpha$	0,707	1	0
$\int \sin^2 \varphi d\varphi$	$-\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,143	0,785	1,571
$\int \cos^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,643	0,785	1,571
$\int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{\sin^3 \alpha}{3}$	0,118	0,333	0
$\int \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi$	$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{3}$	0,216	0,333	0,667
$\int \sin 2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}$	0,5	1	0
$\int \cos 2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin 2\alpha$	0,5	0	0
$\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{\sin^2 \alpha}{2}$	0,25	0,5	0
$\int \varphi \sin \varphi d\varphi$	$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha$	0,152	1	3,141
$\int \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1$	0,262	0,571	-2
$\int \varphi \sin^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha) - \frac{1}{8}(\cos 2\alpha - 1)$	0,0833	0,868	2,47
$\int \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha \sin 2\alpha) + \frac{1}{8}(\cos 2\alpha - 1)$	0,226	0,368	2,47
$\int \varphi \sin 2\varphi d\varphi$	$\frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\alpha \cos 2\alpha}{2}$	0,25	0,785	-1,571
$\int \varphi \cos 2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{4}(\cos 2\alpha - 1) + \frac{\alpha \sin 2\alpha}{2}$	0,143	-0,5	0
$\int \sin(\alpha - \varphi) \sin \varphi d\varphi$	$\frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{\alpha \cos 2\alpha}{2}$	0,076	0,5	1,571
$\int \cos(\alpha - \varphi) \cos \varphi d\varphi$	$\frac{\alpha \sin \alpha}{2}$	0,278	0,785	0

## Додаток Е

### Дані до розрахунку стиснутих стрижнів

Таблиця Е.1 – Значення коефіцієнта  $\varphi$  зниження основного допустимого напруження на стиск

Гнучкість $\lambda = \mu \cdot l / i_{\min}$	$\varphi$						
	сталі Ст3 і Ст4	сталь Ст5	Бетон		Дюралю- мін Д16Т	сірий чавун	деревина
			важкий	легкий			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	1,0	1,0	0,999	0,97	0,99
20	0,97	0,96	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,95	0,93	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,85	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,80	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,74	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,67	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,59	0,51	–	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,50	0,45	–	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	–	–	0,142	–	0,25
120	0,45	0,37	–	–	0,119	–	0,22
130	0,40	0,32	–	–	0,101	–	0,18
140	0,36	0,28	–	–	0,087	–	0,16
150	0,32	0,25	–	–	0,076	–	0,14
160	0,29	0,23	–	–	–	–	0,12
170	0,26	0,21	–	–	–	–	0,11
180	0,23	0,19	–	–	–	–	0,10
190	0,21	0,17	–	–	–	–	0,09
200	0,19	0,16	–	–	–	–	0,08

Таблиця Е.2 – Параметри для визначення критичних напружень  $\sigma_{кр}$ 

Матеріал	$\sigma_y$ ( $\sigma_{0,2}$ )	$\sigma_{pr}$	$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda$		Граничні значення гнучкості	
			$a$	$b$	$\lambda_u$	$\lambda_0$
	МПа					
Сталь:						
Ст2	215	215	258	0,68	105	62
Ст3	235	195	304	1,11	100	61
Сталь20, Ст4	255	215	328	1,07	96	60
Сталь25, Ст5, Сталь35л	275	235	343	1,13	92	57
Сталь35, Сталь45л	314	265	390	1,40	90	55
Сталь45	353	300	440	1,64	85	52
Сталь50, Сталь 55л	373	314	464	1,83	82	50
10Г2СД, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15ХСНД	343	294	421	1,49	83	50
30ХМА, 35ХМФА, 30ГСА, 40ХНМА	834	687	981	5,46	55	28
30ХГСА	890	750	1100	6,65	58	30
Дюралюмін:						
Д16Т	314	250	398	2,78	53	30
Д6Т	275	215	294	1,40	57	15
Сосна, ялина	--	--	28,7	0,19	70	--

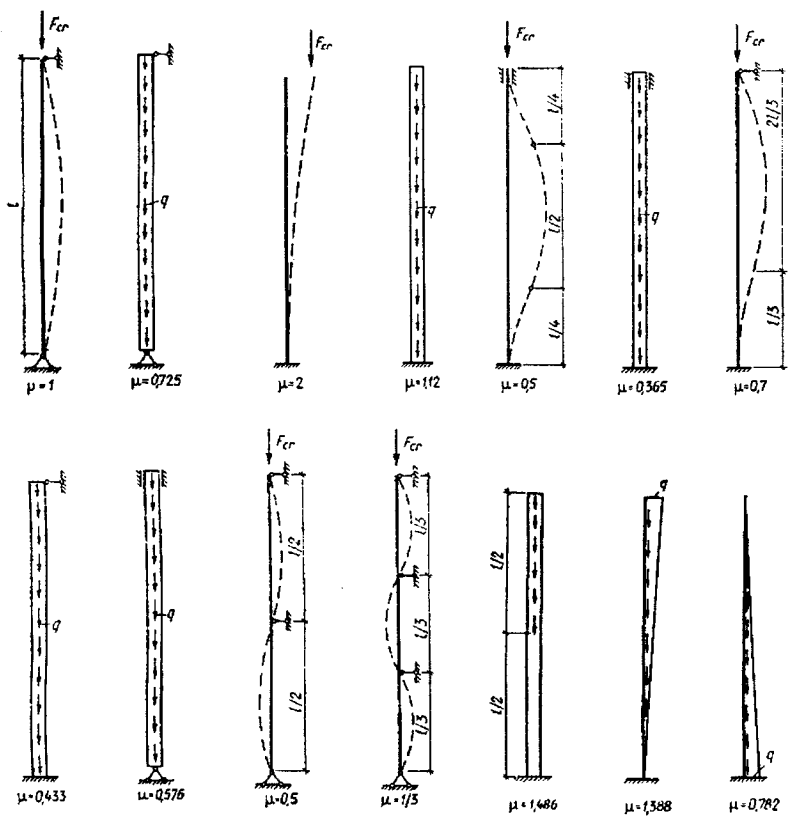


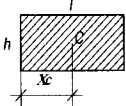
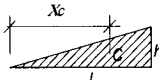
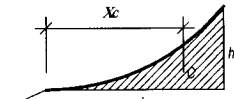
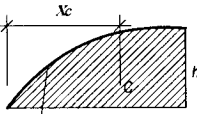
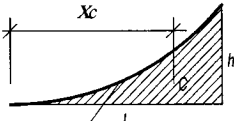
Рисунок Е.1 – Коэффициенты приведения длины



## Додаток Ж

### Дані до визначення переміщень графічними методами

Таблиця Ж.1 – Площі і абсиси центрів ваги простих фігур

Фігура	Площа $A$	Положення центра ваги $X_C$
	$l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}l \cdot h$	$\frac{2}{3}l$
 <p data-bbox="150 677 409 710"><i>вершина параболы квадратична параболы</i></p>	$\frac{1}{3}l \cdot h$	$\frac{3}{4}l$
 <p data-bbox="170 867 388 892"><i>квадратична параболы</i></p>	$\frac{2}{3}l \cdot h$	$\frac{5}{8}l$
 <p data-bbox="150 1040 409 1065"><i>кубічна параболы</i></p>	$\frac{1}{4}l \cdot h$	$\frac{4}{5}l$

Таблиця Ж.2 – До розкриття інтегралу Мора

	<p>Спосіб Верещагіна</p> $\int_0^l M(x)M_1(x)dx = \Omega \cdot \eta;$ <p><math>M(x)</math> – довільна;  <math>M_1(x)</math> – прямолінійна;  <math>\Omega</math> – площа епюри <math>M(x)</math>;  <math>C</math> – координата центра ваги площі <math>\Omega</math>;  <math>\eta</math> – значення <math>M_1</math> під центром ваги <math>C</math>.</p>
	<p>Спосіб Сімпсона-Карнаухова</p> $\int_0^l M(x)M_1(x)dx = \frac{l}{6}(ab + 4ef + cd);$ <p><math>M(x)</math> – довільна;  <math>M_1(x)</math> – прямолінійна.</p>
	<p>Верещагіна-Даркова          (Мюллера-Бреслау)</p> $\int_0^l M(x)M_1(x)dx = \frac{l}{6}(2ab + ad + bc + 2cd);$ <p><math>M(x), M_1(x)</math> – прямолінійні.</p>

## Додаток И

### Дані до розрахунку валів

Таблиця И.1 – Шпонки призматичні

<i>d</i> вала, мм	Шпонка, мм			
	<i>b</i>	<i>h</i>	$\rho$	<i>l</i> *
12-17	5	5	0,25-0,40	10-56
17-22	6	6		14-70
22-30	8	7		18-90
30-38	10	8	0,40-0,60	22-110
38-44	12	8		28-140
44-50	14	9		36-160
50-58	16	10		45-180
58-65	18	11		50-200
65-75	20	12	0,60-0,80	56-220
75-85	22	14		63-250
85-95	25	14		70-280

\* Довжина шпонки вибирається із такого ряду: 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200; 220; 250; 280.

Ряди діаметрів валів:

а) на ділянках без підшипників кочення (ГОСТ 6636-69,  $R_a$  40): 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 53; 56; 60; 63; 67; 71; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150; 160; 170; 180; 190; 200.

б) на ділянках з підшипниками кочення (ГОСТ 8338-75): 15; 17; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 130; 140; 150; 160.

Таблиця И.2 – Коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\gamma$  в розрахунках на кручення стрижнів прямокутного перерізу

<i>h/b</i>	1	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
$\alpha$	0,208	0,346	0,418	0,493	0,645	0,801	1,128	1,789	2,456	3,123
$\beta$	0,141	0,294	0,375	0,457	0,622	0,790	1,123	1,789	2,456	3,123
$\gamma$	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,746	0,743	0,742	0,742

$$W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2, \quad I_k = \beta \cdot h \cdot b^3, \quad (h \geq b), \quad \tau'_{max} = \gamma \cdot \tau_{max}$$

Таблиця И.3 – Значення масштабного фактора  $\alpha_m$

<i>d</i> , мм	15	20	30	40	50	70	100	200
$\alpha_m$	1,15	1,2	1,3	1,4	1,45	1,55	1,7	1,9

Таблиця И.4 – Значення коефіцієнта чутливості  $\alpha_n$

Спосіб обробки	$\sigma_n$ , МПа		
	400	800	1200
Полірування	1	1	1
Шліфування	1,1	1,1	1,15
Тонка обточування	1,15	1,25	1,35
Грубе шліфування чи обточування	1,2	1,35	1,55
Наявність окалини	1,35	1,9	2,75

## Додаток К

### Співвідношення між деякими фізичними величинами в різних системах вимірювання

Одиниці напруження (тиску, питомої потенціальної енергії деформації)

$$1 \text{ кгс/см}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па} \approx 0,1 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$1 \text{ кгс/мм}^2 = 9,81 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 10 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$1 \text{ тс/см}^2 = 9,81 \cdot 10^7 \text{ Па} \approx 100 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^8 \text{ Па};$$

$$1 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Одиниці зусиль

$$1 \text{ кгс} = 9,81 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н};$$

$$1 \text{ тс} = 1 \cdot 10^3 \text{ кгс} = 9,81 \cdot 10^3 \text{ Н} \approx 1 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$1 \text{ кН} = 1 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Одиниці моментів сил:

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 9,81 \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 10 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{см} = 9,81 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$1 \text{ кН} \cdot \text{м} = 1 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Одиниці довжини, площі, моментів опору, моментів інерції:

$$1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$1 \text{ см} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$1 \text{ мм}^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$1 \text{ см}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$1 \text{ см}^3 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$1 \text{ см}^4 = 1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Одиниці вимірювання кута:

$$1^\circ = \pi/180 \text{ рад.} = 0,01745 \text{ рад.}$$

Одиниці потужності

$$1 \text{ к.с. (кінська сила)} = 745,7 \text{ Вт}.$$

## ДОДАТОК Л

Експериментальні дані для побудови кривої течії  $\sigma_s = f(\varepsilon_s)$

Таблиця Л.1

Ч.ч.	Марка Матеріалу	Інтенсивність напружень $\sigma_s$ , МПа	Інтенсивність деформацій $\varepsilon_s$	Коефіцієнти апроксимації	
				A	n
1	2	3	4	5	6
1	Ст08кп	300	0,00	1000	0,31
		400	0,25		
		450	0,05		
		520	0,10		
		580	0,20		
		650	0,30		
		720	0,40		
		780	0,50		
		860	0,60		
		900	0,70		
		950	0,80		
		980	0,90		
1000	1,00				
2	Сталь 45	450	0,00	840	0,19
		540	0,05		
		590	0,10		
		650	0,20		
		700	0,30		
		750	0,40		
		780	0,50		
		800	0,60		
		810	0,70		
		820	0,80		
		830	0,90		
		840	1,00		
3	VOLKSWAGEN	30	0,00	840	021
		200	0,025		
		400	0,050		
		540	0,10		
		590	0,20		
		650	0,30		
		700	0,40		
		730	0,50		
		760	0,60		
		790	0,70		
		810	0,80		
		830	0,90		
840	1,00				

## Продовження таблиці Л.1

1	2	3	4	5	6
4	ЛС59-1	5,6	0,00	892	0,43
		248	0,05		
		331	0,10		
		438	0,20		
		528	0,30		
		600	0,40		
		672	0,50		
		718	0,60		
		758	0,70		
		804	0,80		
		854	0,90		
890	1,00				
5	Сталь 20	400	0,00	810	0,205
		438	0,05		
		505	0,10		
		583	0,20		
		633	0,30		
		673	0,40		
		703	0,50		
		729	0,60		
		753	0,70		
		774	0,80		
		793	0,90		
810	1,00				
6	Сталь 10	380	0,00	720	0,21
		384	0,05		
		444	0,10		
		704	0,20		
		559	0,30		
		594	0,40		
		622	0,50		
		647	0,60		
		668	0,70		
		687	0,80		
		704	0,90		
720	1,00				
7	03ХСЮ	400	0,00	930	0,20
		445	0,025		
		511	0,050		
		587	0,100		
		614	0,105		
		636	0,150		
		674	0,20		
		705	0,25		
		730	0,30		
		774	0,40		
		809	0,50		
		840	0,60		
		866	0,70		
889	0,80				
911	0,90				
930	1,00				

Продовження таблиці Л.1

1	2	3	4	5	6
8	13145А	320	0,00	780	
		430	0,05		
		500	0,10		
		560	0,20		
		605	0,30		
		650	0,40		
		680	0,50		
		705	0,60		
		735	0,70		
		745	0,80		
		760	0,90		
		780	1,00		
		9	Х18ХГСА		
605	0,05				
732	0,10				
880	0,20				
1002	0,30				
1092	0,40				
1168	0,50				
1181	0,60				
1208	0,70				
1223	0,80				
1236	0,90				
1450	1,00				
10	30ХГСА			502	0,00
		686	0,05		
		736	0,10		
		776	0,20		
		818	0,30		
		847	0,40		
		868	0,50		
		878	0,60		
		882	0,70		
		892	0,80		
		901	0,90		
		920	1,00		
		11	51ХФА	421	0,00
607	0,05				
671	0,10				
752	0,20				
791	0,30				
831	0,40				
852	0,50				
872	0,60				
886	0,70				
893	0,80				
902	0,90				
915	1,00				

Продовження таблиці Л.1

1	2	3	4	5	6
12	15X	242	001	800	
		277	0,015		
		307	0,02		
		359	0,03		
		454	0,04		
		515	0,0715		
		564	0,10		
		623	0,18		
		656	0,24		
		735	0,38		
		773	0,554		
		782	0,70		
		800	1,00		
13	08ХГСЮФ	350	0,00	1380	0,23
		440	0,05		
		500	0,10		
		350	0,15		
		600	0,20		
		700	0,30		
		800	0,40		
		900	0,50		
		1000	0,60		
		1080	0,70		
		1150	0,80		
		1300	0,90		
		1380	1,00		
14	Сталь 35	440	0,00	950	0,15
		600	0,05		
		680	0,10		
		750	0,20		
		800	0,30		
		820	0,40		
		850	0,50		
		870	0,60		
		890	0,70		
		900	0,80		
		920	0,90		
		940	1,00		
		950	1,10		
		960	1,20		
		970	1,30		
		990	1,40		
1000	1,50				
15	08ХПО	400	0,00	1000	
		455	0,05		
		525	0,10		
		575	0,15		
		620	0,20		
		700	0,30		
		750	0,40		
		790	0,50		
		800	0,60		
		860	0,70		
		900	0,80		
		950	0,90		
		1000	1,00		



## Продовження таблиці Л.1

1	2	3	4	5	6
16	ХН77ТЮР	525	0,00	2350	
		1400	0,10		
		1625	0,20		
		1775	0,30		
		1900	0,40		
		200	0,50		
		2100	0,60		
		2175	0,70		
		2225	0,80		
		2300	0,90		
		2350	1,00		
		17	ОТ-4		
408	0,10				
415	0,20				
420	0,30				
430	0,40				
440	0,50				
450	0,60				
510	0,70				
520	0,80				
530	0,90				
535	1,00				
18	Р6145			560	0,00
		1120	0,20		
		1180	0,40		
		1300	0,60		
		1360	0,80		
		1480	1,00		
19	ХН70ВМТЮ	650	0,00		
		1175	0,10		
		1425	0,20		
		1600	0,30		
		1750	0,40		
		1850	0,50		
		1975	0,60		
		2050	0,70		
		2125	0,80		
		2200	0,90		
2275	1,00				
20	Л160	00	0,00		
		100	0,10		
		200	0,20		
		300	0,30		
		375	0,40		
		475	0,50		
		550	0,60		
		600	0,70		
		700	0,80		
		775	0,90		
850	1,00				

## Продовження таблиці Л.1

1	2	3	4	5	6
21	В95	200	0,00		
		275	0,10		
		300	0,20		
		325	0,30		
		325	0,40		
		350	0,50		
		350	0,60		
		375	0,70		
		375	0,80		
		375	0,90		
22	АД1	75	0,00		
		100	0,10		
		100	0,20		
		100	0,30		
		100	0,40		
		125	0,50		
		125	0,60		
		125	0,70		
		125	0,80		
		150	0,90		
23	ШХ15	442	0,00		
		800	0,10		
		880	0,20		
		910	0,30		
		960	0,40		
		1000	0,50		
24	Ст3	471	0,00		
		671	0,10		
		800	0,20		
		842	0,30		
		861	0,40		
		900	0,50		
		914	0,60		
25	Мідь М1	50	0,00		
		166	0,10		
		243	0,20		
		300	0,30		
		333	0,40		
		360	0,50		
		366	0,60		
26	08ГСЮФ	275	0,00		
		500	0,10		
		605	0,20		
		700	0,30		
		800	0,40		
		900	0,50		
		995	0,60		
1400	0,70				

## Продовження таблиці Л.1

1	2	3	4	5	6
27	Сталь 4X13	230	0,00		
		907	0,10		
		1061	0,20		
		1107	0,30		
		1123	0,40		
		1138	0,50		
		1153	0,60		
28	Сталь 40X	628	0,00		
		986	0,10		
		1057	0,20		
		1100	0,30		
		1143	0,40		
		1171	0,50		
		1186	0,60		
		1200	0,70		
		1214	0,80		
		1228	0,90		
1257	1,00				
29	W62	00	0,00		0,2
		4700	0,10		
		5800	0,20		
		6400	0,30		
		6900	0,40		
		7300	0,50		
		7600	0,60		
		7900	0,70		
		8100	0,80		
		8200	0,90		
8300	1,00				
30	P12	480	0,00		
		1040	0,10		
		1040	0,20		
		1040	0,30		
		1140	0,40		
		1140	0,50		
		1220	0,60		
		1220	0,70		
		1280	0,80		
		1280	0,90		
1320	1,00				
31	4X14H14B2M	425	0,00		
		900	0,10		
		1075	0,20		
		1200	0,30		
		1300	0,40		
		1400	0,50		
		1475	0,60		
		1550	0,70		
		1600	0,80		
		1650	0,90		
1725	1,00				

Продовження таблиці Л.1

1	2	3	4	5	6
32	12X18H9T	350	0,00		
		750	0,10		
		950	0,20		
		1100	0,30		
		1200	0,40		
		1300	0,50		
		1400	0,60		
		1475	0,70		
		1550	0,80		
		1600	0,90		
		1650	1,00		
33	40ХНМА	800	0,00		
		950	0,10		
		1000	0,20		
		1050	0,30		
		1050	0,40		
		1075	0,50		
		1100	0,60		
		1100	0,70		
		1125	0,80		
		1125	0,90		
		1150	1,00		
34	ВТ14	525	0,00		
		1400	0,10		
		1625	0,30		
		1775	0,40		
		1900	0,50		
		2000	0,60		
		2100	0,70		
		2175	0,80		
		2225	0,90		
2350	1,00				

## ДОДАТОК М

## Експериментальні дані для побудови діаграми пластичності

Таблиця М.1

Ч.ч.	Марка матеріалу	Дані для побудови діаграми пластичності			Коефіцієнти чутливості пластичності до показника $\eta$	
		$e_p(\eta=1)$	$e_p(\eta=0)$	$e_p(\eta=-1)$	$\lambda_1 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=0)}{\varepsilon_p(\eta=1)}$	$\lambda_2 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=-1)}{\varepsilon_p(\eta=0)}$
1.	2	3	4	5	6	7
1.	ВТ-1	0,64	1,15	2,9	0,58	0,92
2.	P12	0,17	0,55	1,9	1,17	1,236
3.	P6M5	0,23	0,46	0,95	0,69	0,72
4.	20A	1	1,3	1,7	0,26	0,25
5.	AMГ2	1,05	1,57	2,25	0,4	0,35
6.	ВТ14	0,15	0,64	1,3	1,45	0,7
7.	P18	0,03	0,37	1,16	2,5	1,14
8.	P9	0,1	0,48	1,2	1,56	0,91
9.	40ХН2МА	0,48	0,76	1,52	0,45	0,69
10.	Сталь 40	0,09	0,37	$\infty$	1,4	$\infty$
11.	ОТ-4	0,35	0,75	1,6	0,762	0,757
12.	Сталь 40Х	0,08	0,86	1,5	2,37	0,556
13.	Сталь 30ХМА	0,31	0,48	2,0	0,43	1,42
14.	Сталь 35	0,2	0,53	1,63	0,97	1,1
15.	Сталь 08кп	0,355	0,5	0,7	0,342	0,336
16.	У8А	0,03	0,39	1,2	2,56	1,12
17.	13М5А	0,28	0,38	0,9	0,305	0,862
18.	ХН70ВМТЮ	0,38	0,68	1,1	0,58	0,481
19.	ХН77ПЮР	0,29	0,62	0,96	0,76	0,437

## Продовження таблиці М.1

1	2	3	4	5	6	7
20.	ЛС59-1	0,4	0,55	0,65	0,318	0,176
21.	ШХ15	0,2	0,52	1,8	2,6	1,24
22.	Д-1	0,3	0,47	0,5	0,2	0,3
23.	Сталь 30ХГСА	0,75	1,05	1,45	0,33	0,32
24.	Ст3	0,25	0,36	∞	0,365	∞
25.	Сталь 10	0,3	0,67	2,67	0,803	1,38
26.	Сталь 40Х13	0,35	0,84	3,3	0,875	1,37
27.	АВ	1,25	2,25	3,5	0,59	0,44
28.	ЛС62	0,45	1,1	1,5	0,894	0,31
29.	Сталь 45	0,15	0,4	1,1	0,981	1,01
30.	Д16Т	0,08	0,42	0,9	1,66	0,762
31.	Х18Н9Т	0,38	0,76	1,6	0,693	0,744
32.	Сталь 20	0,32	0,62	1,23	0,66	0,685
33.	АМГ5В	0,735	1,0	1,25	0,31	0,223
34.	Д16	0,875	1,25	1,625	0,36	0,262
35.	Сталь 35	0,25	0,534	1,63	0,76	1,12
36.	Л62	0,4	0,59	1,75	0,39	1,09
37.	У8А (2 партія)	0,255	0,39	1,2	0,425	1,12
38.	Д16 (2 партія)	0,10	0,41	1,5	1,46	1,30
39.	Сталь 20 (2 партія)	0,3	0,65	1,25	0,773	0,654
40.	Сталь 10 (2 партія)	0,32	0,65	1,42	0,710	0,780
41.	Сталь 38Х2МЮА	0,55	0,75	1,30	0,30	0,551
42.	Сталь 38Х2МЮА термооброблена	0,485	0,74	1,00	0,42	0,30
43.	Сталь 30Х3МФА	0,74	0,85	1,13	0,14	0,28
44.	Сталь 30Х3МФА термооброблена	0,74	0,85	1,13	0,11	0,92

*Навчальне видання*

**Огородніков Віталій Антонович**

**Грушко Олександр Володимирович**

**Архіпова Тетяна Федорівна**

**Сухоруков Сергій Іванович**

**Молодецька Тетяна Ігорівна**

# **МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ ТА КОНСТРУКЦІЙ**

## **ЗБІРНИК РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

*Навчальний посібник*

*Рукопис оформила Т. Архіпова*

*Редактор Т. Старічек*

*Оригінал-макет підготувала О. Кушнір*

Підписано до друку 09.11.2021.

Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman.

Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 11,4

Наклад 50 (1-й запуск 1-21) пр. Зам. № 2021-116.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,  
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

Тел. (0432) 65-18-06.

**press.vntu.edu.ua;**

*Email: irvc.vntu@gmail.com*

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.