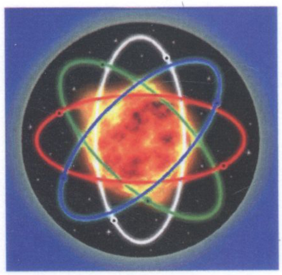
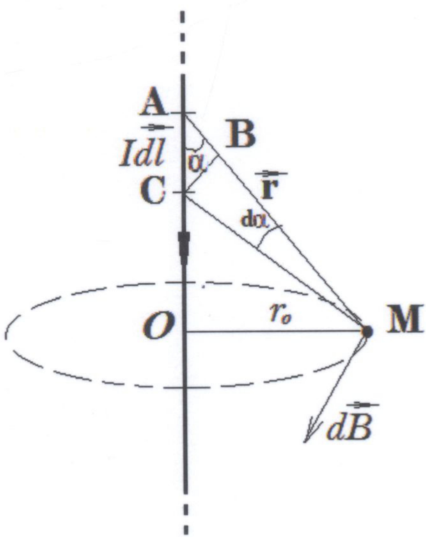
А. Д. Слободяник, М. Д. Мельник



ФІЗИКА

АУДИТОРНА, САМОСТІЙНА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. Д. Слободяник, М. Д. Мельник

ФІЗИКА

Аудиторна, самостійна та індивідуальна робота студентів

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 53 (075)
С48

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 30.03.2017 р.)

Рецензенти:

В. Г. Колобродов, доктор технічних наук, професор

В. П. Кожем'яко, доктор технічних наук, професор

В. Ф. Заболотний, к.ф.-м.н., доктор педагогічних наук, професор

Слободяник, А. Д.

С48 Фізика. Аудиторна, самостійна та індивідуальна робота студентів : навчальний посібник / А. Д. Слободяник, М. Д. Мельник. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 180 с.

Збірник задач з фізики розроблено відповідно до програми курсу фізики у вищих інженерно-технічних навчальних закладах. До кожного розділу програми подано відповідну кількість тематичних задач. На початку кожного параграфа наведено основні формули, необхідні для розв'язування запропонованих задач. До кожної теми розглянуто особливості розв'язування типових задач.

Рекомендовано для студентів інженерних спеціальностей та студентів-заочників.

УДК 53 (075)

ЗМІСТ

БАЗОВА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З ДИСЦИПЛІНИ «ФІЗИКА»

Мета дисципліни: метою викладання програми є забезпечення фундаментальної фізико-математичної бази, без якої неможлива успішна діяльність інженера.

Вивчення курсу фізики повинно сприяти формуванню у студентів наукового світогляду і сучасного фізичного мислення. Вони повинні творчо використовувати набуті знання у майбутній фаховій діяльності.

Вступ. Предмет і моделі фізики. Методи фізичного дослідження. Розмірності фізичних величин. Основні фізичні одиниці.

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

Елементи кінематики. Поступальний рух. Радіус-вектор, траєкторія, шлях, переміщення, система координат. Швидкість. Прискорення. Нормальне і тангенціальне прискорення. Рівномірний, рівнозмінний рух. Обертальний рух. Кутова швидкість. Кутове прискорення. Зв'язок між кутовими і лінійними швидкостями і прискореннями.

Динаміка матеріальної точки. Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку. Маса. Сила. Сили в механіці (гравітаційні, пружні, сили тертя). Імпульс. Закон збереження імпульсу. Центр мас.

Механічна енергія. Робота і потужність. Енергія (кінетична, потенціальна, повна). Закон збереження енергії в механіці.

Динаміка обертального руху. Кінетична енергія обертального руху. Момент інерції. Теорема Штейнера. Основне рівняння обертального руху. Момент сили. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу.

Механічний принцип відносності. Перетворення Галілея. Постулати Ейнштейна. Перетворення координат Лоренца. Відносність довжини і часу. Релятивістський закон додавання швидкостей. Елементи релятивістської динаміки.

ЕЛЕКТРИКА

Електростатика. Електростатичне поле. Заряд. Закон збереження заряду. Закон Кулона. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції електричних полів. Поле точкового заряду. Потік вектора електричного зміщення. Теорема Гаусса. Електричне поле рівномірно зарядженої площини. Поле двох площин. Поле рівномірно зарядженої сфери, циліндра і кулі. Робота сил поля. Циркуляція вектора напруженості. Потенціал. Різниця потенціалів. Потенціал точкового заряду, системи зарядів. Зв'язок потенціалу з напруженістю поля.

Провідник в електричному полі. Розподіл заряду. Електричне поле біля поверхні провідника. Електроємність ізольованого провідника. Конденсатори. Електроємність конденсаторів (плоского, сферичного, циліндричного). З'єднання конденсаторів. Енергія системи зарядів, провідника, конденсатора. Енергія електричною поля. Об'ємна густина енергії.

Електричне поле в діелектрику. Зв'язані і вільні електричні заряди. Поляризація діелектриків. Поляризованість. Діелектрична сприйнятливість. Вектор електричного зміщення. Напруженість поля в діелектрику. Теорема Гаусса для поля в діелектрику. Діелектрична проникність. Умови на межі двох діелектриків. П'єзоелектричний ефект. Сегнетоелектрики.

Електричний струм. Постійний струм та його характеристики (сила струму, густина струму). Умови існування струму. Сторонні сили, електрорушійна сила (е.р.с.), напруга, різниця потенціалів. Закон Ома в інтегральній та диференціальній формі. Опір і його залежність від температури. Закон Джоуля–Ленца в інтегральній та диференціальній формі. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа.

МАГНЕТИЗМ

Магнітне поле. Магнітна індукція. Закон Ампера. Принцип суперпозиції. Закон Біо–Савара–Лапласа. Магнітне поле прямолінійного і колового струмів. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Поле тороїда і нескінченного соленоїда. Магнітний потік. Контур зі струмом в магнітному полі. Магнітний момент колового струму.

Магнітне поле рухомого заряду, явище електромагнітної індукції. Сила Лоренца. Рух заряджених частинок у магнітному полі. Ефект Холла. Магніто-газодинамічний генератор та його використання.

Рівняння Максвелла в інтегральній формі. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея. Правило Ленца. Електронний механізм явища електромагнітної індукції. Самоіндукція. Індуктивність. Індуктивність соленоїда. Взаємоіндукція. Трансформатор.

Вихровий характер магнітного поля. Закон повного струму. Використання закону повного струму для розрахунку магнітного поля. Магнітний потік. Теорема Гаусса для магнітного поля. Енергія провідника зі струмом. Енергія магнітного поля. Об'ємна густина енергії.

Магнітне поле в речовині. Намагніченість. Магнітна сприйнятливість і проникність. Магнітне поле в магнетику. Діамагнетизм. Парамагнетизм. Феромагнетики, їх властивості. Умови на межі двох магнетиків.

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Гармонічні коливання. Гармонічні коливання і їх характеристики. Гармонічний осцилятор. Пружинний, фізичний і математичний маятники. Вільні коливання в контурі без активного опору. Зображення гармонічних коливань за допомогою векторної діаграми. Енергія гармонічних коливань. Додавання однаково напрямлених коливань. Биття. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.

Загасаючі і вимушені коливання. Механічні загасаючі коливання. Електромагнітні загасаючі коливання. Диференціальне рівняння вимушених коливань (механічних і електромагнітних) і його розв'язок. Амплітуда і фаза вимушених коливань. Резонанс. Резонансні криві. Параметричний резонанс. Добротність коливальних систем. Автоколивання. Змінний струм. Резонанс напруг і струмів.

Хвилі. Пружні хвилі. Поздовжні і поперечні хвилі. Рівняння плоскої хвилі. Довжина хвилі. Фазова швидкість. Сферична хвиля. Енергія пружних хвиль. Хвильове рівняння. Електромагнітні хвилі та їх властивості. Хвильові рівняння електромагнітних хвиль. Швидкість поперечних і поздовжніх електромагнітних хвиль. Енергія хвильового руху. Вектор Пойнтінга.

ОПТИКА

Хвильова оптика. Інтерференція двох хвиль. Умови утворення максимумів і мінімумів. Стоячі хвилі. Інтерференція в тонких плівках. Кільця Ньютона. Інтерференція багатьох хвиль. Інтерферометри. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракція світла на круглому отворі і круглому диску. Метод зон Френеля. Дифракція від щілини. Дифракційна ґратка. Дифракція рентгенівських променів. Формула Вульфа–Брегга. Поляризоване світло. Подвійне променезаломлення. Закон Брюстера. Закон Малюса. Штучна анізотропія. Інтерференція поляризованого світла. Поняття про голографію.

Квантова оптика. Теплове випромінювання. Закони Кірхгофа, Віна і Стефана–Больцмана. Розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла.

Гіпотеза і формула Планка. Фотоефект. Рівняння Ейнштейна для фотоефекту. Фотони. Імпульс фотона. Ефект Комптона і його пояснення.

ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

Постулати Бора. Гіпотеза і формула де-Бройля. Співвідношення невизначеностей. Подання стану частинки в квантовій механіці. Хвильова функція. Загальне та стаціонарне рівняння Шредінгера. Частинка в одномірному «потенціальному ящику». Гармонічний осцилятор. Тунельний ефект.

ФІЗИКА АТОМІВ І АТОМНИХ ЯДЕР

Атом водню. Квантові числа. Схеми енергетичних рівнів атома водню з точки зору квантової механіки. Енергія атома водню і його спектр. Виродження енергетичних рівнів. Правила відбору. Механічний і магнітний моменти електрона в атомі водню. Просторове квантування. Досліди Штерна і Герлаха. Спін електрона. Принцип нерозрізненості частинок. Принцип Паулі. Розподіл електронів за станами. Періодична система елементів. Рентгенівські промені. Суцільний і характеристичний спектри. Закон Мозлі. Взаємодія атомів. Іонний та ковалентний зв'язок. Енергетичні рівні молекул. Молекулярні спектри. Парамагнітний резонанс. Комбінаційне розсіяння світла. Поглинання світла речовиною. Спонтанне і вимушене випромінювання. Квантові генератори.

Атомне ядро. Основні характеристики ядра. Будова ядер. Нуклони. Енергія зв'язку, дефект маси. Ядерні сили. Радіоактивність. Закони радіоактивного розпаду. Взаємодія гамма-променів з речовиною. Реакції ділення та синтезу. Ядерна енергетика.

СТАТИСТИЧНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

Статистична фізика. Фізика газів. Основні статистичні поняття. Статистичний і термодинамічний методи. Імовірність. Середні значення фізичних величин. Густина станів. Функція розподілу. Фазовий простір. Комірка фазового простору. Число станів в просторі імпульсів. Розподіли Фермі–Дірака, Бозе–Ейнштейна і Максвелла–Больцмана. Критерій виродження. Розподіл Максвелла. Швидкості газових молекул. Середня, середньоквадратична та найбільш імовірна швидкості газових молекул. Розподіл Больцмана. Барометрична формула.

Елементи термодинаміки. Енергія однієї молекули. Температура. Число ступенів вільності. Рівняння стану ідеального газу. Ізопроцеси. Внутрішня енергія. Робота розширення газу. Закон збереження енергії для теплових процесів. Зворотні і незворотні процеси. Теплова машина та її ККД.

Другий закон термодинаміки. Ентропія. Розрахунок зміни ентропії. Статистичний зміст ентропії.

ФІЗИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Кристалічна ґратка. Елементи зонної теорії. Будова кристалів. Дефекти в кристалах. Фонони. Теплоємність кристалів та її залежність від температури. Енергетичні зони. Метали, діелектрики, напівпровідники з точки зору зонної теорії. Густина квантових станів в енергетичній зоні. Носії струму в кристалах. Ефективна маса. Електронні властивості металів. Розподіл електронів за енергіями в металі. Енергія Фермі. Температура виродження.

ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ

Термоелектричні явища. Надпровідність. Електронні властивості напівпровідників. Власна провідність напівпровідників. Домішкова провідність напівпровідників. Розрахунок концентрації дірок і електронів у власному напівпровіднику. Положення рівня Фермі. Контакти двох напівпровідників з різним типом провідності. Напівпровідникові діоди. Тунельні діоди. Подвійний p-n-перехід. Транзистори. Фотоелектричні явища в напівпровідниках. Фоторезистори. Фотоелементи.

ЧАСТИНА І

РОЗДІЛ 1 ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

§1 Кінематика матеріальної точки

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Положення матеріальної точки задається радіус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

2. Середня швидкість $\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, де $\Delta\vec{r}$ – зміна переміщення матеріальної точки за час Δt.

3. Миттєва швидкість $\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, де $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_z = \frac{dz}{dt}$ – проекції вектора швидкості на осі координат.

4. Абсолютне значення швидкості $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

5. Середнє прискорення $\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, де $\Delta\vec{v}$ – зміна швидкості матеріальної точки за час Δt.

6. Миттєве прискорення $\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де $a_x = \frac{dv_x}{dt}$; $a_y = \frac{dv_y}{dt}$; $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ – проекції вектора прискорення на осі координат.

7. Абсолютне значення прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

8. При криволінійному русі прискорення можна подавати як суму нормальної $\vec{a}_n$ і тангенціальної $\vec{a}_\tau$ складових $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Абсолютні значення цих прискорень $a_n = \frac{v^2}{R}$; $a_\tau = \frac{dv}{dt}$; $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$, де R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

9. Переміщення при прямолінійному рівнозмінному русі визначають за формулою: $\vec{r} = \vec{V}_0 t \pm \frac{\vec{a}t^2}{2}$, де $\vec{v}_0$ – початкова швидкість. Координата $x = x_0 + V_{0x}t \pm \frac{a_x t^2}{2}$. У прямолінійному рівноприскореному русі модуль переміщення чисельно дорівнює шляху. Якщо вісь Ox напрямлена вздовж руху, шлях чисельно дорівнює проекції переміщення.

10. Рівняння швидкості при рівнозмінному русі $\vec{V} = \vec{V}_0 \pm \vec{a}t$, або

$$V_x = V_{0x} \pm a_x t,$$
$$V_y = V_{0y} \pm a_y t,$$
$$V_z = V_{0z} \pm a_z t.$$

11. Положення матеріальної точки при обертальному русі визначається кутовим переміщенням $\vec{\varphi}$.

12. Середня кутова швидкість $\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$, де $\Delta\vec{\varphi}$ – зміна кутового переміщення матеріальної точки за час Δt.

13. Миттєва кутова швидкість $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$.

14. Середнє кутове прискорення $\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$, де $\Delta\vec{\omega}$ – зміна кутової швидкості матеріальної точки за час Δt.

15. Миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

16. Кінематичне рівняння рівномірного обертального руху $(\omega = const)$: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, де φ_0 – початкове кутове переміщення. Кінематичне рівняння рівнозмінного обертального руху $(\varepsilon = const)$: $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$, де ω_0 – початкова кутова швидкість. Рівняння швидкості при рівнозмінному обертальному русі $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$.

17. Зв'язок між лінійними та кутовими величинами. Лінійна та кутова відстань пов'язані між собою таким співвідношенням $S = R\varphi$, де S – довжина дуги, R – радіус кола. Лінійна та кутова швидкість $v = \omega R$. Лінійне та кутове прискорення $a_\tau = \varepsilon R$, $a_n = \omega^2 R$, $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

§ 2 Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Матеріальна точка здійснює прямолінійний рух (вздовж осі Ox), кінематичне рівняння руху якої має такий вигляд

$$x(t) = A + Bt + Ct^3,$$

де $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^3. Визначити координату точки, миттєву швидкість $v(t)$ та прискорення $a(t)$ для моменту часу $t = 2$ с після початку руху.

Дано:

$x(t) = A + Bt + Ct^3$

$A = 4$ м

$B = 2$ м/с

$C = -0{,}5$ м/с^3

$t = 2$ с

$x(t)$–?

$v(t)$–?

$a(t)$–?

Розв'язування

Координату точки $x(t)$ знаходимо, в рівняння руху підставляємо час $t = 2$ *с*: $x(t) = A + Bt + Ct^3 = 4 + 2 \cdot 2 + (-0{,}5) \cdot 2^3 = 4$ м.

Миттєву швидкість $v(t)$ знаходимо, продиференціювавши координату x за часом t (взяти похідну):

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 2 + 3 \cdot (-0{,}5) \cdot 2^2 = -4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Знак мінус вказує на те, що в заданий момент часу точка рухається в від'ємному напрямку координатної осі Ох.

Миттєве прискорення $a(t)$ в довільний момент часу, знаходимо, взявши другу похідну від координати x за часом t або першу похідну від швидкості за часом t: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 6Ct = 6 \cdot (-0{,}5) \cdot 2 = -6$ м/с^2. Знак мінус вказує на те, що в заданий момент часу прискорення направлено в від'ємному напрямку координатної осі Ох.

Відповідь: 4 м, –4 м/с, –6 м/с^2.

Приклад 2

Матеріальна точка здійснює обертальний рух, кінематичне рівняння руху якої має такий вигляд: $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$, де $A = 4$ рад, $B = 2$ рад/с, $C = -0{,}5$ рад/с^3. Визначити кутову координату точки, миттєву кутову швидкість $\omega(t)$ та кутове прискорення $\varepsilon(t)$ для моменту часу $t = 2$ с після початку руху.

Дано:

$\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$

$A = 4$ рад

$B = 2$ рад/с

$C = -0{,}5$ рад/с^3

$t = 2\ c$

$\varphi(t)$–?

$\omega(t)$–?

$\varepsilon(t)$–?

Розв'язування

Кутову координату точки $\varphi(t)$ знаходимо, в рівняння руху підставляючи час $t = 2\ c$: $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3 = 4 + 2 \cdot 2 + (-0{,}5) \cdot 2^3 = 4$ рад.

Миттєву кутову швидкість $\omega(t)$ знаходимо, продиференціювавши кутову координату φ за часом t (беремо похідну): $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2 = 2 + 3 \cdot (-0{,}5) \cdot 2^2 = -4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Миттєве кутове прискорення $\varepsilon(t)$ в довільний момент часу знаходимо, взявши другу похідну від кутової координати φ за часом t або першу похідну від кутової швидкості за часом t:

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 6Ct = 6 \cdot (-0{,}5) \cdot 2 = -6\ \text{рад/с}^2.$$

Відповідь: 4 рад, -4 рад/с, -6 рад/с^2.

Приклад 3

Тіло обертається навколо нерухомої осі. Залежність кута повороту тіла від часу задана рівнянням $\varphi(t) = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2$ рад/с^2. Знайти модуль повного прискорення точки $|\vec{a}|$, розміщеної на відстані $R = 0{,}1$ м від осі обертання, в момент часу $t = 4$ с.

Дано:

$\varphi(t) = A + Bt + Ct^2$
$A = 10$ рад
$B = 20$ рад/с
$C = -2$ рад/с^2
$t = 4$ с
$R = 0{,}1$ м

$|\vec{a}|$–?

Розв'язування

Повне прискорення точки $\vec{a}$, яка рухається по кривій лінії, можна знайти як геометричну суму тангенціального прискорення $\overrightarrow{a_\tau}$, направленого по дотичній до траєкторії, та нормального прискорення $\overrightarrow{a_n}$, направленого до центра кривизни траєкторії:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (1)$$

Оскільки вектори взаємно перпендикулярні, то модуль повного прискорення: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. (2)

Тангенціальне та нормальне прискорення точки тіла, що обертається, виражаються за формулами:

$$a_\tau = \varepsilon R,\ a_n = \omega^2 R,$$

де ε — кутове прискорення тіла; ω – кутова швидкість тіла.

Замінимо у формулі (2) a_τ і a_n на відповідні вирази. Тоді знайдемо:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (3)$$

Кутову швидкість ω обчислюємо за першою похідною від кута повороту за часом t:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct = 20 + 2 \cdot (-2) \cdot 4 = 4 \text{ (рад/с)}.$$

Кутове прискорення ε знаходимо, взявши першу похідну від кутової швидкості ω за часом t:

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = 2C = 2 \cdot (-2) = -4 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Кутове прискорення заданого руху є сталим, тобто не залежить від часу. Підставимо значення ω і ε та задане значення R у формулу (3):

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1{,}65 \text{(м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: 1,65 м/с^2.

Приклад 4

Тіло кинуто з висоти $H = 20$ м в горизонтальному напрямі із швидкістю $v_0 = 5$ м/с. Визначити, як залежать від часу координати тіла та його повна швидкість і визначити їх для моменту часу $t = 2$ с. Вивести рівняння траєкторії.

Дано:

$H = 20$ м

$v_0 = 5$ м/с

$t = 2$ с

$x(t)$–?

$y(t)$–?

$v(t)$–?

$y(x)$–?

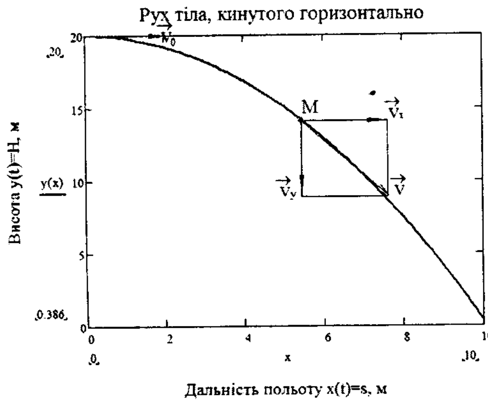


Рисунок 1

Розв'язування

Візьмемо систему координат XOY (рис. 1), початок якої розміщений на поверхні землі, вісь OX спрямована вздовж цієї поверхні в сторону початкової швидкості, а вісь OY – вертикально вгору і проходить через точку A, з якої кинуто тіло. Рух тіла можна подати як суму рівномірного руху з швидкістю v_0 в горизонтальному напрямі і рівноприскореного руху без початкової швидкості у вертикальному напрямі з прискоренням $a_y = -g$, напрямленим вниз. Складові швидкості по осях координат у цьому разі дорівнюють:

$$v_x = v_0 \tag{1}$$

$$v_y = -gt, \tag{2}$$

повна швидкість:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}. \tag{3}$$

У формулу (3) підставляємо числові значення:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} = \sqrt{5^2 + 9{,}8^2 \cdot 2^2} = 20{,}2 \text{ м/с}.$$

Закони руху для координат

$$x = v_0 t, \tag{4}$$

$$y = H - \frac{gt^2}{2}. \tag{5}$$

У формули (4) і (5) підставляємо числові значення

$$x = v_0 t = 5 \cdot 2 = 10 \text{ м}, \ \ y = H - \frac{gt^2}{2} = 20 - \frac{9{,}8 \cdot 2^2}{2} = 0 \text{ м}.$$

Виключивши з виразів (4) і (5) час t, отримаємо рівняння траєкторії:

$$y = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \tag{6}$$

Це є рівняння параболи.

Відповідь: 20,2 м/с; 10 м; 0 м; $y = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}$.

Приклад 5

Тіло кинуто під кутом $\alpha_0 = 30^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. Визначити, як залежить від часу швидкість v тіла і кут β її нахилу до горизонту.

Дано:

$\alpha_0 = 30^\circ$

$v_0 = 10$ м/с

---

v—?

β—?

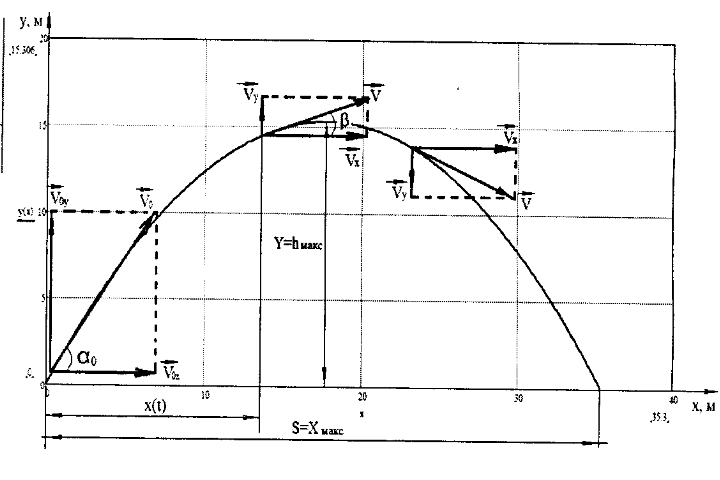


Рисунок 2

Розв'язування

Візьмемо прямокутну систему координат з початком у тому місці, звідки кинуто тіло. Вісь OX направимо горизонтально в той бік, куди тіло кинуто, а вісь OY – вертикально вгору (див. рис. 2). У цій системі координат рух можна подати у вигляді суми рівномірного руху вздовж горизонтальної осі з початковою швидкістю $v_{ox} = v_0 cos\alpha_0$ і рівноприскореного руху вздовж вертикальної осі з початковою швидкістю $v_{oy} = v_0 sin\alpha_0$ та прискоренням $a_y = -g$. Проекції швидкості на осі координат в цьому разі будуть:

$$v_x = v_{ox} = v_0 cos\alpha_0, \tag{1}$$

$$v_y = v_{oy} - gt = v_0 sin\alpha_0 - gt, \tag{2}$$

повна швидкість

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 gtsin\alpha_0}. \tag{3}$$

Залежність кута β від часу t визначається виразом:

$$tg\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 sin\alpha_0 - gt}{v_0 cos\alpha_0}.$$

На висхідній частині траєкторії (при $v_{0y} > gt$) $tg\beta > 0$ і складова швидкості v_y направлена вгору, на низхідній (при $v_{0y} < gt$) $tg\beta < 0$ і складова швидкості v_y направлена вниз.

Приклад 6

Тіло кинуто під кутом $\alpha_0 = 30^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. Знайти залежність координат тіла від часу (закони руху тіла) і визначити ці координати для моменту часу $t = 0{,}2$ с. Знайти рівняння траєкторії.

Дано:

$\alpha_0 = 30^\circ$

$v_0 = 10$ м/с

$t = 0{,}2$ с

$x(t)-?$

$y(t)-?$

$y(x)-?$

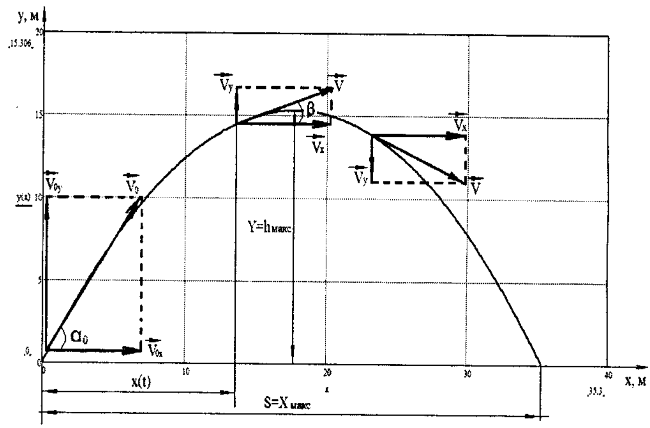


Рисунок 3

Розв'язування

Візьмемо прямокутну систему координат з початком у тому місці, звідки кинуто тіло. Вісь OX направимо горизонтально в той бік, куди тіло кинуто, а вісь OY – вертикально вгору (рис. 3). У цій системі координат рух можна подати у вигляді суми рівномірного руху вздовж горизонтальної осі з початковою швидкістю $v_{ox} = v_0 cos\alpha_0$ і рівноприскореного руху вздовж вертикальної осі з початковою швидкістю $v_{oy} = v_0 sin\alpha_0$ та прискоренням $a_y = -g$.

Залежності координат від часу (закони руху) мають такий вигляд:

$$x = v_x t = (v_0 cos\alpha_0) \cdot t, \qquad (1)$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 sin\alpha_0) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$x = v_x t = (v_0 cos\alpha_0) \cdot t = (10 \cdot cos30^\circ) \cdot 0{,}2 = 1{,}732 \text{ м}.$$

$$y = (v_0 sin\alpha_0) \cdot t - \frac{gt^2}{2} = (10 \cdot sin30^\circ) \cdot 0{,}2 - \frac{9{,}8 \cdot 0{,}2^2}{2} = 0{,}804 \text{ м}.$$

Рівняння траєкторії тіла дістанемо, виключивши час t з рівнянь (1) та (2):

$$t = \frac{x}{v_0 cos\alpha_0},$$

$$y = (v_0 sin\alpha_0) \cdot \frac{x}{v_0 cos\alpha_0} - \frac{g\left(\frac{x}{v_0 cos\alpha_0}\right)^2}{2} = x \cdot tg\alpha_0 - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot cos^2\alpha_0}.$$

Це є рівняння параболи.

Відповідь: 1,732 м; 0,804 м.

Приклад 7

Тіло кинуто під кутом $\alpha_0 = 30^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. На яку висоту $h_{\text{макс}}$ підніметься тіло? Протягом якого часу t воно підніматиметься вгору?

Дано:

$\alpha_0 = 30^\circ$

$v_0 = 10$ м/с

$h_{\text{макс}}$—?

t—?

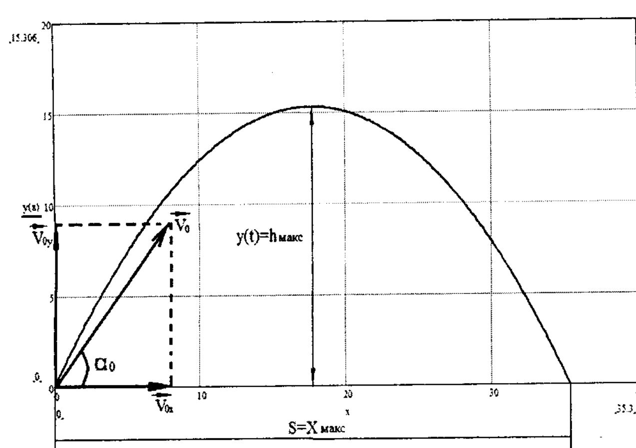


Рисунок 4

Розв'язування

Візьмемо прямокутну систему координат з початком у тому місці, звідки кинуто тіло. Вісь OX направимо горизонтально в той бік, куди тіло кинуто, а вісь OY – вертикально вгору (див. рис. 4). У цій системі координат рух можна подати у вигляді суми рівномірного руху вздовж горизонтальної осі з початковою швидкістю $v_{ox} = v_0 cos\alpha_0$ і рівноприскореного руху вздовж вертикальної осі з початковою швидкістю $v_{oy} = v_0 sin\alpha_0$ та прискоренням $a_y = -g$.

Залежності координат від часу (закони руху) мають такий вигляд:

$$x = v_{0x}t = (v_0 cos\alpha_0) \cdot t, \tag{1}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 sin\alpha_0) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Проекції швидкості на осі координат в цьому випадку будуть:

$$v_x = v_{ox} = v_0 cos\alpha_0, \tag{3}$$

$$v_y = v_{oy} - gt = v_0 sin\alpha_0 - gt, \tag{4}$$

повна швидкість

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 gt sin\alpha_0}. \tag{5}$$

Для $y = h_{\text{макс}}$ проекція швидкості $v_y = 0$. Тоді з рівняння (4) час піднімання t: $0 = v_0 sin\alpha_0 - gt \underset{\text{звідси}}{\Longrightarrow} t = \frac{v_0 sin\alpha_0}{g}$. ... (6)

З формули (2) максимальна висота піднімання $h_{\text{макс}}$:

$$h_{\text{макс}} = (v_0 sin\alpha_0) \cdot t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 sin\alpha_0) \cdot \frac{v_0 sin\alpha_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 sin\alpha_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 sin^2\alpha_0}{2g}. \tag{7}$$

Підставляємо числові значення фізичних величин у формули (6) та (7):

$$t = \frac{v_0 sin\alpha_0}{g} = \frac{10 sin30^\circ}{9{,}8} = 0{,}51 \text{ с},$$

$$h_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g} = \frac{10^2 \cdot sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9{,}8} = 1{,}276 \text{ м}.$$

Відповідь: 0,51 с; 1,276 м.

Приклад 8

Тіло кинуто під кутом $\alpha_0 = 30^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. Який час t тіло перебуватиме в польоті? На якій відстані s в горизонтальному напрямі від місця кидання тіло впаде на землю?

Дано:

$\alpha_0 = 30^\circ$

$v_0 = 10$ м/с

$s-?$

$t-?$

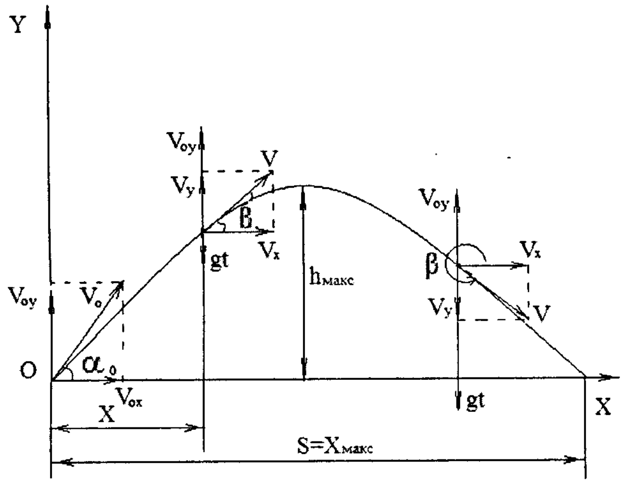


Рисунок 5

Розв'язування

Візьмемо прямокутну систему координат з початком у тому місці, звідки кинуто тіло. Вісь OX направимо горизонтально в той бік, куди тіло кинуто, а вісь OY – вертикально вгору (рис. 5). У цій системі координат рух можна подати у вигляді суми рівномірного руху вздовж горизонтальної осі з початковою швидкістю $v_{ox} = v_0 cos\alpha_0$ і рівноприскореного руху вздовж вертикальної осі з початковою швидкістю $v_{oy} = v_0 sin\alpha_0$ та прискоренням $a_y = -g$.

Залежності координат від часу (закони руху) мають такий вигляд:

$$x = v_{0x}t = (v_0 cos\alpha_0) \cdot t, \tag{1}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 sin\alpha_0) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Проекції швидкості на осі координат в цьому разі будуть:

$$v_x = v_{ox} = v_0 cos\alpha_0, \tag{3}$$

$$v_y = v_{oy} - gt = v_0 sin\alpha_0 - gt, \tag{4}$$

повна швидкість

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 gtsin\alpha_0}. \tag{5}$$

Оскільки у місці падіння $y = 0$, то з рівняння (2) знайдемо час польоту:

$$t = \frac{2v_0 sin\alpha_0}{g}. \tag{6}$$

Дальність польоту, тобто координату місця падіння, знайдемо з рівняння (1), підставивши в нього знайдене значення часу польоту:

$$s = x_{\text{макс}} = (v_0 cos\alpha_0) \cdot t = (v_0 cos\alpha_0) \cdot \frac{2v_0 sin\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 sin2\alpha_0}{g}. \tag{7}$$

Підставляємо числові значення фізичних величин у формули (6) та (7):

$$t = \frac{2v_0 sin\alpha_0}{g} = \frac{2 \cdot 10 \cdot sin30^\circ}{9{,}8} = 1{,}02 \text{ с},$$

$$s = x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 sin2\alpha_0}{g} = \frac{10^2 sin2 \cdot 30^\circ}{9{,}8} = 8{,}837 \text{ м}.$$

Відповідь: 1,02 с; 8,837 м.

Приклад 9

Матеріальна точка масою $m = 5$кг кинута з початковою швидкістю $v_0 = 2$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Знайти рух цієї точки в просторі під дією сили земного тяжіння, тобто визначити модуль вектора переміщення $|\vec{r}(t)|$ для моменту часу $t = 10$ с та знайти рівняння траєкторії.

Дано:

$m = 5$ кг
$v_0 = 2$ м/с
$\alpha = 30^\circ$
$t = 10$ с

$\vec{r}(t)$–?
$z(y)$–?

Розв'язування

Для спрощення початкове положення тіла приймемо за початок координат системи відліку, пов'язаного з поверхнею Землі. Систему координат розмістимо так, щоб початкова швидкість знаходилась у площині YOZ, вісь OZ спрямуємо вертикально вгору, а вісь OY – горизонтально.

На точку А діє лише сила земного тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$. За такого вибору системи координат проекції сили на осі координат дорівнюватимуть: $F_x = F_y = 0, F_z = -mg$.

Початковими кінематичними характеристиками руху точки будуть:

$$t = 0, x_0 = y_0 = z_0 = 0, v_{0x} = 0, v_{0y} = v_0 cos\alpha, v_{0z} = v_0 sin\alpha .$$

З цих умов диференціальними рівняннями руху точки є:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg.$$

Скоротивши ліві і праві частини наведених рівнянь на m, дістанемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Проінтегруємо перше з цих рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = C_1.$$

Тоді $\frac{dx}{dt} = v_x = C_1$. Тобто проекція швидкості $\vec{v}$ на вісь X є величина стала під час руху точки. Оскільки в початковий момент часу $v_x = v_{0x} = 0$, то $C_1 = 0$. Врахувавши це отримаємо: $\frac{dx}{dt} = 0$, звідки $x = C_2$. Для початкового моменту часу $x = x_0 = C_2 = 0$.

Отже, розв'язок першого диференціального рівняння – це $x(t) = 0$.

З другого диференціального рівняння знаходимо $\frac{dy}{dt} = v_y = C_3$. $C_3 = v_{0y} = v_0 cos\alpha$. Проінтегрувавши останнє рівняння, отримаємо $y(t) = v_0 cos\alpha\, t + C_4$. З початкових умов випливає, що $C_4 = 0$. Тоді розв'язок другого диференціального рівняння має вигляд: $y(t) = v_0 cos\alpha\, t$.

Проінтегрувавши третє рівняння $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$, дістанемо: $\frac{dz}{dt} = -gt + C_5$. Константу C_5 визначаємо з початкових умов. При $t = 0$, $v_{0z} = v_0 sin\alpha = C_5$. Отже, $\frac{dz}{dt} = v_0 sin\alpha - gt$. Проінтегруємо отримане рівняння: $z(t) = v_0 sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} + C_6$. З початкових умов при $t = 0$ випливає, що $z_0 = C_6 = 0$.

Розв'язком третього диференціального рівняння є:

$$z(t) = v_0 sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Отже, кінематичні рівняння руху точки в параметричній формі такі:

$$x(t) = 0, y(t) = v_0 cos\alpha t,\ z(t) = v_0 sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Модуль вектора переміщення $|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{0^2 + (v_0 t cos\alpha)^2 + \left(v_0 t sin\alpha\ - \frac{gt^2}{2}\right)^2}$$

$|\vec{r}(10)| = \sqrt{0^2 + (2 \cdot 10 \cdot cos30^0)^2 + \left(2 \cdot 10 \cdot sin30^0\ - \frac{9{,}8 \cdot 10^2}{2}\right)^2} =$ 480,31 (м).

Виключивши з цих рівнянь параметр t, знайдемо рівняння траєкторії даної матеріальної точки в координатах:

$$z = ytg\alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}.$$

Згідно з цим рівнянням матеріальна точка, кинута під кутом до горизонту, на яку діє лише сила земного тяжіння, рухається по параболі.

Відповідь: 480,31 м; $z = ytg\alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}$.

§3 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1.1. Першу половину часу свого руху автомобіль рухався зі швидкістю 60 км/год, а другу половину часу – зі швидкістю 30 км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

1.2. Першу половину свого шляху автомобіль рухався зі швидкістю 60 км/год, а другу половину шляху – зі швидкістю 30 км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

1.3. Пароплав пливе річкою від пункту А до пункту В зі швидкістю 10 км/год, а назад зі швидкістю 16 км/год. Знайти середню швидкість пароплава і швидкість течії річки.

1.4. Координати матеріальної точки змінюються з часом за законом $x = 4t$, $y = 3t$, $z = 0$. Знайти залежність пройденого точкою шляху від часу, відраховуючи відстань від початкового її положення. Який шлях пройде точка за 5 с?

1.5. Першу чверть шляху мотоцикліст проїхав зі швидкістю $v_1 = 10$ м/с, другу зі швидкістю $v_2 = 15$ м/с, третю зі швидкістю $v_3 = 20$ м/c, а останню зі швидкістю $v_4 = 5$ м/с . Визначити середню швидкість мотоцикліста на всьому шляху.

1.6. Знайти середню швидкість руху автомобіля, якщо відомо, що ¼ частини часу він рухався зі швидкістю 16 м/с, а весь інший час зі швидкістю 8 м/с.

1.7. Пасажир електропоїзда, що рухається зі швидкістю 15 м/с помітив, що зустрічний поїзд довжиною 210 м пройшов повз нього за 60 с. Визначити швидкість руху зустрічного поїзда.

1.8. Визначити швидкості велосипедиста і пішохода, якщо відомо, що при їх русі в одному напрямі за кожну хвилину руху пішохід відстає від велосипедиста на відстань $S_1 = 210$ м, а якщо не змінюючи за модулем швидкості, вони рухаються назустріч один одному, то за кожні 2 хв відстань між ними зменшується на $S_2 = 780$ м.

1.9. При нерухомому ескалаторі метрополітену пасажир піднімається за час $t = 120$ с, а на рухомому, за тієї ж швидкості відносно сходинок, за час $t = 30$ с. Визначити час піднімання пасажира, що стоїть на рухомому ескалаторі.

1.10. Моторний човен пливе річкою з одного пункту в інший і назад. В скільки разів час руху човна проти течії більший за час руху за течією, якщо швидкість течії $v_1 = 2$ м/с, а швидкість човна відносно води $v_2 = 10$ м/с?

1.11. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 9{,}8$ м/с. Побудувати графік залежності висоти h і швидкості v від часу t для інтервалу $0 \le t \le 2$ с через 0,2 с.

1.12. Тіло падає з висоти $h = 19{,}6$ м без початкової швидкості ($v_0 = 0$). Який шлях пройде тіло за першу і останню 0,1 с свого руху?

1.13. Тіло падає з висоти $h = 19{,}6$ м без початкової швидкості ($v_0 = 0$). За який час тіло пройде перший і останній 1м свого шляху?

1.14. Вільно падаюче тіло в останню секунду руху проходить половину всього шляху. З якої висоти h падає тіло і який час t його падіння?

1.15. Визначити швидкість моторного човна відносно води, якщо при русі за течією річки його швидкість 10 м/с, а при русі проти течії 6,0 м/с. Чому дорівнює швидкість течії води в річці?

1.16. Визначити тривалість польоту літака між двома пунктами, розташованими на відстані 1000 км, якщо швидкість зустрічного вітру $v_1 = 25$ м/с, а середня швидкість літака відносно повітря $v_2 = 250$ м/с. Чому дорівнює час польоту літака при попутному вітрі?

1.17. Потяг рухається зі швидкістю 36 км/год. Якщо вимкнути струм, потяг, рухаючись рівносповільнено, зупиняється через час $t = 20$ с. Яке прискорення a потягу? На якій відстані S до зупинки необхідно вимкнути струм?

1.18. Потяг, рухаючись рівносповільнено, протягом часу $t = 1{,}00$ хв зменшує свою швидкість від 40,0 км/год до 28,0 км/год. Знайти прискорення $\vec{a}$ потягу і відстань s, пройдену ним за час гальмування.

1.19. Визначити швидкість зустрічного вітру, якщо при русі автомобіля зі швидкістю $v_1 = 15$ м/с краплі дощу, що мають вертикальну складову швидкості $v_2 = 10$ м/с, утворять на шибці автомобіля смуги під кутом $\alpha = 30^{\circ}$.

1.20. Визначити час польоту літака між двома пунктами, що знаходяться на відстані 500 км, якщо швидкість літака відносно повітря $v_1 = 100$ м/с, швидкість зустрічного вітру, напрямленого під кутом до напряму руху, $v_2 = 30$ м/с.

1.21. Рух матеріальної точки задано рівнянням $x(t) = at + bt^2 + ct^3$, де $a = 5{,}0$ м/с, $b = 0{,}20$ м/с^2, с $= 0{,}10$ м/с^3. Визначити швидкість точки в момент часу $t_1 = 2{,}0$ с і $t_2 = 4{,}0$ с, а також середню швидкість в проміжку часу від t_1 до t_2.

1.22. Визначити траєкторію руху точки, задану рівняннями:

$$x(t) = 4t^2 + 2; y(t) = 6t^2 - 3; z(t) = 0.$$

Побудувати графік залежності шляху, пройденого точкою, від часу.

1.23. Рух матеріальної точки задано рівняннями: $x(t) = 8t^2 + 4$; $y(t) = 6t^2 - 3$; $z(t) = 0$. Визначити модулі швидкості і прискорення точки в момент часу t=10 с.

1.24. Який шлях пройде тіло за час $t = 10$ с від початку руху, якщо рівняння його руху $x(t) = 2t^2 + 3t - 4$; $y(t) = 3t^2 + 4t - 2$; $z(t) = 0$?

1.25. Прямолінійний рух точки описується рівнянням $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 8t\vec{k}$. Знайти шлях, пройдений точкою за перші 4 с руху.

1.26. Швидкість матеріальної точки, що рухається уздовж осі X, визначається рівнянням $v_x = 0{,}2 - 0{,}1t$. Знайти координату точки в момент часу t=10 с, якщо в початковий момент часу вона знаходилася в точці $x_0 = 1$ м.

1.27. Тіло, що здійснює рівноприскорений рух, проходить однакові відрізки шляху довжиною $s = 15$ м відповідно за $t_1 = 2{,}0$ с і $t_2 = 1{,}0$ с. Визначити модулі прискорення і швидкості тіла на початку першого відрізка шляху.

1.28. Визначити шлях, який проходить частинка, що рухається прямолінійною траєкторією протягом 10 с, якщо її швидкість змінюється за законом $v = 30 + 2t$. У момент часу $t_0 = 0$, $s = 0$.

1.29. Визначити початкову швидкість тіла, кинутого вертикально вгору, якщо відмітку (висоту) 60 м воно проходило 2 рази з проміжком часу 4,0 с. Опір повітря не враховувати.

1.30. Камінь кинуто горизонтально зі швидкістю 15,00 м/с. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення каменя через час t = 1,00 с після початку руху.

1.31. Камінь кинуто горизонтально зі швидкістю 10,00 м/с. Знайти радіус кривизни траєкторії каменя через час t=3,00 с після початку руху.

1.32. М'яч кинуто зі швидкістю 10,00 м/с під кутом $\alpha = 40^\circ$ до горизонту. На яку висоту підніметься м'яч? На якій відстані від місця кидання він упаде на землю? Який час він буде в русі?

1.33. Тіло, кинуте вертикально вниз з початковою швидкістю 19,6 м/с, за останню секунду пройшло n = 1/4 частину усього шляху. Визначити час падіння тіла і його кінцеву швидкість. З якої висоти кинуто тіло?

1.34. Частинка рухається з прискоренням. Визначити модуль швидкості частинки в момент часу t = 2 с, якщо в початковий момент часу t = 0 її швидкість була $\vec{v}_0 = 3\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{k}$.

1.35. На похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$ лежить тіло. Яке мінімальне прискорення необхідно надати похилій площині в горизонтальному напрямі, щоб тіло, яке лежить на ній, вільно падало?

1.36. Яка траєкторія точки, якщо її радіус-вектор відносно початку координат змешується з часом за законом $\vec{r} = 2t\vec{i} + 8t^2\vec{j}$?

1.37. Радіус-вектор частинки визначається виразом $\vec{r} = 2t\vec{i} + 4t^2\vec{j}$. Визначити модулі швидкості і прискорення частинки в момент t=5 с.

1.38. Під яким кутом до горизонту потрібно направити струмінь води, щоб висота його підняття дорівнювала відстані, на яку б'є струмінь води?

1.39. Під яким кутом до горизонту кинуто тіло, якщо відомо, що максимальна висота підйому дорівнює 1/4 частини дальності польоту? Опір повітря не враховувати.

1.40. З вежі висотою 19,6 м у горизонтальному напрямі кинуто тіло із швидкістю 10 м/с. Записати рівняння траєкторії руху тіла. Чому дорівнює швидкість тіла в момент падіння? Який кут утворить ця швидкість з горизонтальним напрямом? Опір повітря не враховувати.

1.41. З однієї точки одночасно кинуто два тіла з однаковою швидкістю під різними кутами α_1 і α_2 до горизонту. Визначити відстань між тілами через час t = 2,0 с після початку руху, якщо $v_0 = 10$ м/с, а $\alpha_1 = 30^\circ$ і $\alpha_2 = 60^\circ$.

1.42. На якій висоті вектор швидкості тіла, кинутого під кутом $\alpha_2 = 45^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с, буде становити з горизонтом кут $\beta = 30^\circ$? Опір повітря не враховувати.

1.43. Тіло кинуто горизонтально зі швидкістю $\vec{v}_0 = 15$ м/с . Знайти нормальне a_n і тангенціальне a_τ, повне прискорення через час $t = 1$ с після початку руху тіла.

1.44. Тіло кинуто під кутом α_0 до горизонту зі швидкістю v_0. Визначити, як залежить від часу швидкість v тіла і кут β її нахилу до горизонту.

1.45. Тіло кинуто під кутом α_0 до горизонту зі швидкістю v_0. Знайти залежність координат тіла від часу (закони руху тіла) і написати рівняння траєкторії.

1.46. З вершини гори кинуто тіло в горизонтальному напрямі зі швидкістю 19,6 м/с. Визначити тангенціальне і нормальне прискорення тіла через 2,0 с після початку руху. Який кут утворює вектор повного прискорення з вектором швидкості?

1.47. Матеріальна точка рухається у площині XOY, що описується рівняннями $x = 2sin\omega t$, $y = 2cos\omega t$. Записати рівняння траєкторії руху точки. Знайти залежність пройденого точкою шляху від часу, вважаючи, що при t=0, S=0.

1.48. Матеріальна точка рухається в площині XOY. Визначити траєкторію руху точки, якщо її рух задано рівняннями: $x = 3sin\omega t$, $y = 2cos\omega t$.

1.49. На горизонтальному валу, що робить 200 об/с, на відстані 20 см один від одного закріплено два тонких диски. Для визначення швидкості польоту кулі зроблено постріл так, що куля пробила обидва диски на однаковій відстані від осі обертання. Визначити швидкість кулі, якщо кутовий зсув пробоїн дорівнює 18°.

1.50. При повороті танка, що рухається зі швидкістю 24 км/год, його центр мас описує дугу радіусом R = 9,0 м. Знайти різницю швидкостей гусениць танка, якщо відстань між ними d = 1,5 м.

1.51. Скільки обертів зробили колеса автомобіля після включення гальма до повної зупинки, якщо в момент початку гальмування автомобіль мав швидкість $v_0 = 60$ км/год і зупинився за t = 3,0 с після початку гальмування? Діаметр коліс D = 0,70 м. Чому дорівнює середнє кутове прискорення коліс при гальмуванні?

1.52. Визначити кутове прискорення маховика, частота обертання якого за час N = 20 повних обертів зростає рівномірно від $n_0 = 1{,}0$ об/с до $n = 5{,}0$ об/с.

1.53. Визначити кутову швидкість та кутове прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Z за законом $\varphi(t) = at + bt^2$, де $a = 20$ с$^{-1}$, $b = 1$ с$^{-2}$. Який характер цього руху? Побудувати графіки залежності кутової швидкості і кутового прискорення від часу t.

1.54. Матеріальна точка рухається траєкторією, що являє собою коло радіусом $R = 20$ см, рівноприскорено з тангенціальним прискоренням $a_\tau = 5\ м/с^2$. Через який час t після початку руху нормальне (доцентрове) прискорення a_n буде більшим від тангенціального a_τ в $n = 2$ рази?

1.55. Матеріальна точка почала рухатись рівноприскорено траєкторією, що являє собою коло радіусом $R = 1$ м і за час $t = 10$ с пройшла шлях s=50 м. З яким доцентровим прискоренням a_n рухалась точка через час $t = 5$ с після початку руху?

1.56. Вісь обертового диска рухається поступально в горизонтальному напрямі зі швидкістю $\vec{v}$. Вісь горизонтальна, напрям її руху перпендикулярний до неї. Визначити миттєву швидкість верхньої точки $\vec{v}_в$ диска, якщо миттєва швидкість нижньої точки $\vec{v}_н$.

1.57. Під час обертання тіла траєкторією, що являє собою коло, кут між повним прискоренням $\vec{a}$ і лінійною швидкістю $\vec{v}$ дорівнює $\alpha = 30^\circ$. Яке числове значення відношення $^{a_n}/_{a_\tau}$?

1.58. Махове колесо, що оберталося зі швидкістю $\omega = 240$ об/хв зупиняється протягом часу $t = 0,5$ хв. Вважаючи його рух рівнозмінним, знайти скільки обертів N воно зробило до повної зупинки.

1.59. Поїзд в'їжджає на закруглену ділянку з початковою швидкістю $v_0 = 54$ км/год і проходить шлях $S = 600$ м за час $t = 30$ с. Радіус закруглення дорівнює $R = 1$ км. Визначити швидкість $\vec{v}$ і повне прискорення $\vec{a}$ поїзда в кінці повороту.

1.60. На шків радіусом $R = 10$ см намотана нитка, до одного краю якої прикріплено вантаж. Вантаж починає опускатися з прискоренням $a = 0,02\ м/с^2$. Чому дорівнює кутова швидкість шківа в той момент, коли вантаж опуститься на висоту $h = 1$ м ?

§4 Динаміка матеріальної точки

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Рівняння руху матеріальної точки (другий закон Ньютона) у векторній формі має вигляд

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F},$$

або у випадку, коли $m = const$

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i ,$$

де $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ – геометрична сума сил, що діють на матеріальну точку;

m – маса;

$\vec{a}$ – прискорення;

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – імпульс;

N – кількість сил, що діють на матеріальну точку.

У координатній (скалярній) формі

$$ma_x = \sum_{i=1}^{N} F_{xi}, \quad ma_y = \sum_{i=1}^{N} F_{yi}, \quad ma_z = \sum_{i=1}^{N} F_{zi},$$

або

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} F_{xi}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} F_{yi}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} F_{zi},$$

де під знаком суми стоять проекції сил F_i на відповідні осі координат.

2. Сила пружності

$$F_{\text{пр}} = -kx,$$

де k – коефіцієнт пружності;

x – абсолютна деформація.

3. Сила гравітаційної взаємодії

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де G – гравітаційна стала;

m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл;

r – відстань між матеріальними точками або тілами.

4. Сила тертя ковзання:

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

де f – коефіцієнт тертя;

N – сила нормального тиску.

5. Координати центра мас системи матеріальних точок:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},$$

де m_i – маса i-ї матеріальної точки;

x, y, z – координати цієї точки.

Закони збереження. Робота і енергія

1. Закон збереження імпульсу

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const \qquad \text{або} \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i = const,$$

де N – кількість матеріальних точок (тіл) системи.

2. Робота, яка виконується постійною силою:

$$\Delta A = (\vec{F} \Delta \vec{r}) \qquad \text{або} \qquad \Delta A = F \Delta r \cos\alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів сили F та переміщення Δr.

3. Робота, яка виконується змінною силою:

$$A = \int_L F(r) \cos\alpha dr,$$

де інтегрування здійснюється вздовж траєкторії, що позначається через L.

4. Середня потужність за інтервал часу Δt:

$$\langle N\rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

5. Миттєва потужність

$$N = \frac{dA}{dt} \quad \text{або} \quad N = F\upsilon\cos\alpha .$$

6. Кінетична енергія матеріальної точки (тіла), що рухається поступально:

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} \quad \text{або} \quad K = \frac{p^2}{2m}.$$

7. Потенціальна енергія тіла і сила, що діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношеннями:

$$\vec{F} = -grad\Pi \quad \text{або} \quad \vec{F} = -(\vec{i}\frac{\partial\Pi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\Pi}{\partial z}),$$

де i, j, k – орти (одиничні вектори в напрямку осей x, y, z).

Якщо поле сил має сферичну симетрію, одержимо такий зв'язок

$$\vec{F} = -\frac{d\vec{\Pi}}{dr}.$$

8. Потенціальна енергія пружно деформованого тіла

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

9. Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (тіл) масами m_1 і m_2, що знаходяться на відстані r:

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

10. Потенціальна енергія тіла, що міститься в однорідному полі сили тяжіння

$$\Pi = mgh,$$

де h $(h \ll R)$ – висота тіла над нульовим рівнем (рівнем, потенціальна енергія на якому умовно дорівнює нулю);

R – радіус Землі.

11. У замкненій системі, в якій діють тільки консервативні сили, виконується закон збереження енергії:

$$K + П = \text{const}.$$

12. Швидкість руху куль після абсолютно непружного удару:

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

13. Швидкості руху куль після абсолютно пружного удару:

$$u_1 = \frac{\upsilon_1(m_1 - m_2) + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{\upsilon_2(m_2 - m_1) + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2},$$

де m_1 і m_2 – маси куль;

υ_1 і υ_2 – швидкості куль до взаємодії.

Динаміка твердого тіла

1. Основне рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

де $\vec{M}$ – результуючий момент всіх діючих сил;

$\vec{L}$ – вектор моменту імпульсу тіла.

Вектор моменту імпульсу тіла дорівнює:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot m\vec{\upsilon}],$$

де r – радіус-вектор;

$m\upsilon$ – імпульс тіла.

У випадку постійного моменту інерції:

$$M = I\beta,$$

де β – кутове прискорення;

I – момент інерції тіла (міра інертності тіла при обертальному русі).

2. Момент імпульсу тіла, що обертається відносно осі

$$L = I \cdot \omega.$$

3. Момент сили F, що діє на тіло відносно осі обертання:

$$M = Fl,$$

де l – плече сили – найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили.

4. Момент інерції матеріальної точки відносно нерухомої осі обертання:

$$I = mr^2,$$

де m – маса матеріальної точки;

r – відстань від положення матеріальної точки до осі обертання.

5. Момент інерції довільного твердого тіла:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2,$$

де r_i – відстань елемента маси Δm_i від осі обертання.

Це ж співвідношення в інтегральній формі (для тіл правильної геометричної форми):

$$I = \int r^2 dm.$$

Якщо тіло однорідне, тобто його густина ρ однакова по всьому об'єму, то

$$dm = \rho dV \quad \text{і} \quad I = \rho \int r^2 dV,$$

де V – об'єм тіла.

6. Теорема Штейнера. Момент інерції твердого тіла або матеріальної точки відносно довільної осі обертання, але обов'язково паралельній осі, що проходить через центр мас тіла, дорівнює:

$$I = I_0 + ma^2,$$

де I_0 – момент інерції цього тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла;

a – відстань між паралельними осями;

m – маса тіла.

7. Закон збереження моменту імпульсу:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const .$$

Для двох взаємодіючих тіл закон збереження моменту імпульсу записується так:

$$I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 = I_1'\vec{\omega}_1' + I_2'\vec{\omega}_2',$$

де I_1, I_2, $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ – моменти інерції і кутові швидкості тіл до взаємодії;

I_1', I_2', $\vec{\omega}_1'$, $\vec{\omega}_2'$ – ті самі величини після взаємодії.

Закон збереження моменту імпульсу для одного тіла зі змінним моментом інерції:

$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2,$$

де I_1 *і* I_2 – початковий і кінцевий моменти інерції;

$\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ – початкова і кінцева кутові швидкості тіла.

8. Робота постійного моменту сили M, що діє на тіло, яке здійснює обертання:

$$A = M\varphi,$$

де φ – кут повороту тіла.

9. Миттєва потужність, яка розвивається при обертанні тіла:

$$N = M\omega \, .$$

10. Кінетична енергія тіла, яке здійснює обертальний рух

$$K = \frac{I\omega^2}{2}.$$

11. Кінетична енергія тіла, яке котиться без ковзання вздовж будь-якої площини:

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

де $\frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія поступального руху центра мас тіла;

υ – швидкість руху центра інерції тіла;

$\frac{I\omega^2}{2}$ – кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр інерції.

12. Зв'язок між роботою, яка виконується при обертанні тіла і зміною кінетичної енергії:

$$A = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}.$$

§5 Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Маховик у вигляді суцільного диска, що має радіус $R = 0{,}2$ м і масу $m = 50$ кг, розкрутили до частоти обертання $\nu_0 = 480$ хв$^{-1}$ і залишили в такому стані. Під дією сили тертя маховик зупинився через час $t = 50$ с. Знайти момент сили тертя.

Дано:

$R = 0{,}2$ м

$m = 50$ кг

$\nu_0 = 480$ хв$^{-1} = 8$ с$^{-1}$

$t = 50$ с

M–?

Розв'язування

Розв'яжемо задачу, скориставшись основним рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла навколо осі:

$$M = \frac{dL}{dt}, \text{ або } dL = Mdt, \tag{1}$$

де dL – зміна моменту імпульсу маховика, що обертається навколо осі, яка збігається з його віссю симетрії, за інтервал часу dt;

M – момент сили тертя, що діє на маховик відносно тієї самої осі.

Момент сил тертя можна вважати сталим ($M = const$), тому, проінтегрувавши рівняння динаміки (1), дістанемо вираз:

$$\int_0^L dL = M\int_0^t dt \text{ або } \Delta L = Mt. \tag{2}$$

Під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі зміна моменту імпульсу рівна:

$$\Delta L = I\Delta\omega, \tag{3}$$

де I – момент інерції маховика як диска відносно осі;

$\Delta\omega$ – зміна кутової швидкості маховика.

Тому з врахуванням виразів (2) та (3) можна записати:

$$Mt = I\Delta\omega, M = \frac{I\Delta\omega}{t}. \tag{4}$$

Момент інерції маховика як диска, згідно з означенням, $I = \frac{1}{2}mR^2$, а зміна кутової швидкості $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 2\pi\nu - 2\pi\nu_0 = 2\pi(\nu - \nu_0)$.

Отже,

$$M = \frac{mR^2 \cdot 2\pi(\nu - \nu_0)}{2t} = \frac{mR^2 \cdot \pi(\nu - \nu_0)}{t}. \tag{5}$$

Підставимо числове значення фізичних величин до робочої формули (5) і виконаємо обчислення:

$$M = \frac{mR^2 \cdot \pi(\nu - \nu_0)}{t} = \frac{50 \cdot 0{,}2^2 \cdot 3{,}14(0 - 8)}{50} = -1 \text{ (Н·м)}.$$

Знак « - » вказує на те, що сила тертя чинить на маховик гальмівну дію.

Відповідь: -1 Н·м.

Приклад 2

Тонкий стержень масою $m = 0{,}3$ кг і завдовжки $l = 0{,}5$ м обертається з кутовою швидкістю у горизонтальній площині навколо вертикальної осі, що проходить через середину стержня. Продовжуючи обертатись у тій самій площині, стержень переміщується так, що вісь обертання тепер проходить через кінець стержня. Знайти момент інерції I_2 і кутову швидкість ω_2 після переміщення стержня.

Дано:

$m = 0{,}3$ кг

$l = 0{,}5$ м

$\omega_1 = 10$ с$^{-1}$

$I_2 - ?$

$\omega_2 - ?$

Розв'язування

Скористаємось законом збереження моменту імпульсу $I\vec{\omega} = const$, де I – момент інерції стержня відносно осі обертання; $\vec{\omega}$ – кутова швидкість стержня.

Для ізольованої системи тіл момент імпульсу залишається величиною сталою. У цій задачі внаслідок зміни розподілу маси стержня відносно осі обертання момент інерції також змінюється:

$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2.$$

Момент інерції стержня відносно осі, яка проходить через центр мас і перпендикулярна до стержня (перший стан), визначається за формулою

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{12}\mathrm{m}l^2.$$

За теоремою Штейнера $I_2 = I_1 + ml_1^2$, де I_2 – момент інерції стержня відносно будь-якої осі обертання; I_1 – момент інерції стержня відносно паралельної осі, яка проходить через центр мас стержня; l_1 – відстань від центра мас стержня до осі обертання.

Знайдемо момент інерції стержня відносно осі, яка проходить через його кінець і перпендикулярна до нього (після переміщення стержня):

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

Після підстановки числових значень, отримаємо:

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}025\ (кг \cdot м^2).$$

Підставимо вирази моментів інерції I_1 і I_2 у формулу закону збереження моменту імпульсу:

$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2 = \frac{1}{12}\mathrm{m}l^2\vec{\omega}_1 = \frac{1}{3}ml^2\vec{\omega}_2,$$

звідки $\vec{\omega}_2 = \frac{1}{4}\vec{\omega}_1$; $\omega_2 = \frac{1}{4}\omega_1$.

Після підстановки числових значень в отриману формулу отримаємо: $\omega_2 = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2{,}5\ \mathrm{c}^{-1}$.

Відповідь: 0,025 кг·м^2; 2,5 с$^{-1}$.

Приклад 3

Матеріальна точка масою $m = 5$ кг рухається по колу радіусом $r = 3$ м в площині XOY, причому рух її заданий такими кінематичними рівняннями: $x = 3sin4\pi t$; $y = 3cos4\pi t$. Визначити силу $\vec{F}$, яка діє на цю точку в момент часу $t = 1c$.

Дано:

$r = 3$ м
$m = 5$ кг
$x = 3sin4\pi t$
$y = 3cos4\pi t$
$t = 1c$

$\vec{F}$–?

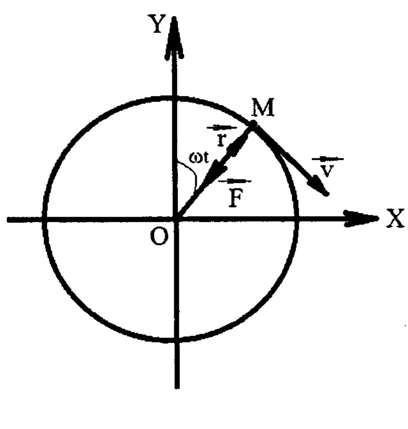


Рисунок 6

Розв'язування

За відомими кінематичними рівняннями руху точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ та її масою знайдемо силу, що діє на точку в будь-який момент часу.

Розв'язок цієї задачі одержуємо безпосередньо з другого закону Ньютона в диференціальній формі. Для цього знаходимо проекції сили на осі координат:

$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$, $F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$, $F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$, за проекціями сили визначаємо модуль сили $\vec{F}$: $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, а також її напрямок у будь-який момент часу t.

Із заданих рівнянь знаходимо проекції прискорення на осі координат:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -(4\pi)^2 3sin4\pi t,\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -(4\pi)^2 3cos4\pi t.$$

Помноживши ці рівняння на масу матеріальної точки, дістанемо проекції сили на ці осі:

$$F_x = ma_x = -m(4\pi)^2 3sin4\pi t,\ F_y = ma_y = -m(4\pi)^2 3cos4\pi t\ .$$

Модуль шуканої сили визначимо за формулою:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-m(4\pi)^2 3sin4\pi t)^2 + (-m(4\pi)^2 3cos4\pi t)^2} = m16\pi^2 3.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$|\vec{F}| = 5 \cdot 16 \cdot 3{,}14^2 \cdot 3 = 2366{,}3\ (H).$$

Визначимо напрямок сили $\vec{F}$. Для цього знайдемо напрямні косинуси:

$$cos\left(\widehat{\vec{F},\ \vec{i}}\right) = \frac{F_x}{F} = \frac{-m(4\pi)^2 3sin4\pi t}{m16\pi^2 3} = -sin4\pi t;$$

$$cos\left(\widehat{\vec{F},\ \vec{j}}\right) = \frac{F_y}{F} = \frac{-m(4\pi)^2 3cos4\pi t}{m16\pi^2 3} = -cos4\pi t.$$

Одночасно напрямні косинуси радіуса-вектора $\vec{r}$ можна виразити так:

$$cos\left(\widehat{\vec{r},\ \vec{i}}\right) = \frac{x}{r} = \frac{3sin4\pi t}{3} = sin4\pi t;$$

$$cos\left(\widehat{\vec{r},\ \vec{j}}\right) = \frac{y}{r} = \frac{3cos4\pi t}{3} = cos4\pi t.$$

Отже, ці вектори спрямовані по одній прямій, але в різні боки. Тому силу визначають за такою формулою: $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$. З цього рівняння видно, що сила притягувальна, оскільки її напрямок протилежний до напрямку радіуса-вектора і вона пропорційна масі точки та її відстані до центра притягання, який знаходиться в центрі кола (див. рис. 6).

Відповідь: 2366,3 Н.

§6 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1. Під дією деякої сили тіло масою $m = 3$ кг здійснює прямолінійний рух, описуваний рівнянням $x(t) = 2t^3 - 3t^2 + 5t + 4$? Чому дорівнює діюча на тіло сила в момент часу $t = 5$ с? Побудувати графік.

2.2. Вагон масою 10^4 кг відчепився від рухомого локомотиву і, рухаючись рівносповільнено, за 20 с пройшов шлях 20 м, після чого зупинився. Знайти силу тертя, коефіцієнт тертя і початкову швидкість вагону.

2.3. Якої маси баласт потрібно скинути з аеростата, який рівномірно опускається, щоб він почав рівномірно підніматися з тією ж швидкістю? Маса аеростата з баластом 1600 кг, піднімальна сила аеростата 12,00 кН. Вважати силу опору повітря однією і тією ж при підніманні і при опусканні.

2.4. До нитки підвішений вантаж масою 1,000 кг. Знайти силу натягу нитки T, якщо нитка з вантажем: 1) піднімається з прискоренням 5,00 м/с^2 ; 2) опускається з тим же прискоренням.

2.5. Сталевий дріт витримує силу натягу 4,40 кН. З яким найбільшим прискоренням можна піднімати вантаж масою 400 кг, підвішений на цьому дроті, щоб дріт не розірвався?

2.6. Маса ліфта з пасажиром m= 800 кг. З яким прискоренням і в якому напрямі рухається ліфт, якщо відомо, що сила натягу троса, що підтримує ліфт: а)12,0 кН; б) 6,0 кН?

2.7. До нитки підвішена гиря. Якщо піднімати гирю з прискоренням a= 2,00 м/с^2, то сила натягу нитки T_1 її буде вдвічі менша тієї сили натягу T_2, при якій нитка розривається. З яким прискоренням a_2 треба піднімати гирю, щоб нитка розірвалася?

2.8. Потяг, маса якого m = 500 т, після припинення дії сили тяги тепловоза зупиняється під дією сили тертя $F = 10^5$ Н через 1 хв. З якою швидкістю v йшов поїзд до моменту припинення дії сили тяги тепловоза?

2.9. Потяг на горизонтальному відрізку шляху довжиною 600 м розвиває постійну силу тяги $F = 14{,}7\cdot 10^4$ Н. Швидкість потягу зростає при цьому від 36 км/год до 54 км/год. Визначити силу опору руху, вважаючи її незмінною. Маса поїзда m = 1000 т.

2.10. З якою силою треба діяти на тіло масою m = 5 кг, щоб воно падало вертикально вниз з прискоренням a = 15 м/с^2?

2.11. Автомобіль рухається з прискоренням a = 1 м/с^2. З якою силою людина масою m = 70 кг натискає на спинку сидіння?

2.12. Сталева дротина витримує вантаж, маса якого до 450 кг. З яким найбільшим прискоренням можна піднімати вантаж m = 400 кг, підвішений на цій дротині, щоб вона не обірвалася?

2.13. Мотузка витримує вантаж масою m_1=110 кг при піднятті його з деяким прискоренням вертикально і вантаж масою m_2 = 690 кг при опусканні його з таким самим за величиною прискоренням. Яка максимальна маса m вантажу, що його можна підняти на цій мотузці з постійною швидкістю?

2.14. Автомобіль рухається вгору зі швидкістю $v = 10$ м/с. Визначити шлях, пройдений автомобілем до зупинки, і час його руху, якщо коефіцієнт тертя μ=05, а кут нахилу $\alpha = 10^{\circ}$.

2.15. Визначити коефіцієнт тертя між похилою площиною і тілом, що рухається по ній, якщо відомо, що це тіло, маючи початкову швидкість $v_0 = 5{,}0$ м/с і рухаючись вгору по похилій площині, проходить шлях $s = 2{,}0$ м. Кут нахилу площини $\alpha = 10^{\circ}$.

2.16. Тіло, якому надана початкова швидкість, паралельна похилій площині, піднімається по похилій площині і потім опускається. У якому випадку при підніманні чи опусканні і в скільки разів час руху тіла більший, якщо воно повернулося в початкове положення? Чи буде кінцева швидкість при опусканні дорівнювати початковій швидкості при підніманні? Коефіцієнт тертя з похилою площиною μ = 0,20. Кут нахилу площини $\alpha = 45^{\circ}$.

2.17. Чому дорівнює коефіцієнт тертя коліс автомобіля об дорогу, якщо при швидкості автомобіля $v = 10$ м/с гальмівний шлях дорівнює $s = 8{,}0$ м?

2.18. На візку масою m_1 = 20 кг лежить вантаж масою m_2 = 5,0 кг. До вантажу прикладена сила F, що надає візку з вантажем прискорення a. Сила діє під кутом 30° до горизонту. Яке максимальне значення цієї сили, при якому вантаж не буде ковзати на візку? Коефіцієнт тертя між вантажем і візком μ=0,20. Тертям між візком і дорогою знехтувати. З яким прискоренням буде рухатися візок під дією сили F.

2.19. Однорідний стержень довжиною L = 5,0 м піднімається вертикально вверх під дією сили F = 500 Н, прикладеної до одного з його кінців. З якою силою розтягується стержень у точці, що знаходиться на відстані l = 1,0 м від його нижнього кінця?

2.20. Тіло масою m лежить на похилій площині з кутом нахилу a =30°. Який шлях пройде тіло на похилій площині за t = 1,0 с, якщо похилій площині надати прискорення a = 3,8 м/с^2, напрямленого вертикально вниз? Коефіцієнт тертя вважати рівним μ = 0,20.

2.21. Два вантажі масами $m_1 = 4{,}0$ кг і $m_2 = 1{,}0$ кг зв'язані ниткою, перекинутою через блок, що прикріплений до призми, і можуть ковзати на гранях цієї призми. Знайти прискорення вантажів, якщо $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, а коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}20$. Дослідити можливі випадки.

2.22. Яке найбільше прискорення може мати автомобіль при русі вгору з кутом нахилу $a = 20°$, якщо коефіцієнт тертя коліс об покриття дороги $\mu = 0{,}5$. Який шлях пройде автомобіль за $t = 10$ с, якщо в момент початку підйому швидкість його $v_0 = 10$ м/с?

2.23. На горизонтальній поверхні лежить тіло масою 5,0 кг. Який шлях пройде це тіло за час $t = 1{,}0$ с, якщо до нього прикласти силу $F = 50$ Н, що утворить кут $\alpha = 60^\circ$ з горизонтом? Коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею $\mu = 0{,}20$.

2.24. З яким прискоренням буде рухатися тіло масою $m = 2{,}0$ кг у горизонтальному напрямі, якщо до нього прикладена сила $F = 5{,}0$ Н, направлена під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту? Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}10$.

2.25. До стелі кабіни ліфта прикріплений динамометр, на якому підвішений блок. Через блок перекинуто нерозтяжний шнур, до кінців якого прив'язані вантажі масами $m_1 = 1{,}0$ кг і $m_2 = 2{,}0$ кг. Які будуть покази динамометра при русі вантажів, якщо ліфт нерухомий чи рухається вгору з прискоренням 3,0 м/с^2? Масою блока і шнура знехтувати.

2.26. Бак з водою знаходиться на похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$. З яким спрямованим горизонтально прискоренням повинна рухатися похила площина, щоб поверхня води в баці була паралельна їй?

2.27. Яку силу треба прикласти до вагона, що стоїть на рейках, щоб вагон почав рухатися рівноприскорено і за час $t = 30{,}0$ с пройшов шлях $s = 11{,}0$ м ? Маса вагона $m = 16{,}0$ т. Під час руху на вагон діє сила тертя, що дорівнює 0,05 діючої на нього ваги P.

2.28. Потяг масою $m = 500$ т після припинення тяги паровоза під дією сили тертя 98 кН зупиняється через час $t = 1{,}00$ хв. З якою швидкістю йшов потяг?

2.29. Вагон масою $m = 20$ т рухається рівносповільнено, маючи початкову швидкість 54 км/год і прискорення $0{,}300$ м/с^2. Яка сила гальмування діє на вагон? Через який час вагон зупиниться? Яку відстань вагон пройде до зупинки?

2.30. Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху s від часу t задається рівнянням $s(t) = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де $C = 5$ м/с^2 і $D = 1$ м/с^3. Знайти величину сили, що діє на тіло наприкінці першої секунди руху.

2.31. Під дією постійної сили 10 Н тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху S від часу t задається рівнянням $S(t) = A - Bt + Ct^2$, де $C = 5$ м$/c^2$. Знайти масу m тіла.

2.32. Тіло масою 0,5 кг рухається так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу t задається рівнянням $s(t) = A sin\omega t$, де $A = 5$ см і $\omega = \pi$ рад/с. Знайти силу F, що діє на тіло через час t=1/6 с після початку руху.

2.33. На візку, що рухається в горизонтальному напрямі з прискоренням $a = 9{,}8$ м$/$с^2, установлено висок. Знайти натяг нитки виска і кут, що утворить нитка з вертикаллю, якщо маса підвішеного на нитці вантажу $m = 0{,}01$ кг.

2.34. Через нерухомий блок перекинута тонка нерозтяжна нитка, на кінцях якої підвішені вантажі масами $m_1 = 1{,}0$ кг і $m_2 = 2{,}0$ кг. У початковий момент часу обидва вантажі знаходилися на одній висоті. Визначити на яку відстань зміститься центр мас вантажів через t = 1 с від початку руху. Вважати, що тертя відсутнє, а масами блока і нитки можна знехтувати. Знайти прискорення центра мас вантажів.

2.35. На яку відстань зміститься нерухомий на воді човен, якщо людина масою $m_1 = 70$ кг пройде з носа човна на корму? Довжина човна 2,5 м, його маса $m_2 = 100$ кг. Опором води знехтувати.

2.36. Куля котиться без ковзання по горизонтальній поверхні. Повна кінетична енергія K кулі дорівнює 14 Дж. Визначити кінетичну енергію K_1 поступального і K_2 обертального рухів кулі.

2.37. Визначити момент інерції J тонкого однорідного стержня довжиною l = 30 см і масою m = 100 г відносно осі, перпендикулярної до стержня, яка проходить через: а) його кінець, б) його середину; в) точку, що віддалена від кінця стержня на 1/3 його довжини.

2.38. Горизонтально розташований диск обертається навколо вертикальної осі, що проходить через його центр. На диску лежать вантаж на відстані R=10 см від осі обертання. Знайти коефіцієнт тертя спокою між диском і вантажем, якщо при частоті обертання диска $n = 0{,}5$ об$/c$ вантаж починає ковзати на поверхні диска.

2.39. Визначити максимальне значення швидкості, з якою автомобіль може рухатися на заокругленні асфальтованого шосе радіусом R = 100 м, якщо коефіцієнт тертя між шинами автомобіля з асфальтом μ = 0,60.

2.40. При якій швидкості автомобіля тиск, що робиться ним на вгнутий міст, у 2 рази більший тиску на опуклий міст? Радіус кривизни мостів в обох випадках R = 30 м.

2.41. Визначити період обертання конічного маятника, якщо його довжина $l = 49$ см, а кут, утворений ниткою з вертикаллю, $\alpha = 60°$.

2.42. Тіло масою $m = 200$ г підвішено на нитці довжиною $l = 80$ см. Його відхилили від положення рівноваги до висоти точки підвісу і відпустили, у результаті чого нитка обірвалася. На якій висоті знаходилося тіло в момент розриву нитки, якщо вона розривається під дією сили $F = 4{,}0$ Н?

2.43. Посудина з водою, підвішена на мотузці довжиною $l = 1$ м, обертається у вертикальній площині так, що вода з неї не виливається. Визначити максимальне значення періоду обертання.

2.44. Амплітуда гармонічного коливання дорівнює 5,0 см, період – 4,0 с. Визначити максимальні швидкість і прискорення коливної точки, якщо в початковий момент часу точка знаходилася в положенні максимального зміщення. Через який час від початку руху точка, що робить гармонічні коливання з періодом 12 с і початковою фазою, рівною 0, зміститься від положення рівноваги на відстань, що дорівнює половині амплітуди?

2.45. Написати рівняння коливального руху матеріальної точки, що робить коливання з амплітудою 5 см, періодом 2 с і початковою фазою 45°.

2.46. Коливання матеріальної точки описуються рівнянням $x(t) = 0{,}03 sin\pi(t + 0{,}5)$. Визначити найбільше значення швидкості і прискорення. Чому дорівнює фаза коливань через час $t = 5{,}0$ с від початку руху?

2.47. Визначити початкову фазу гармонічного коливання тіла, якщо через 0,25 с від початку руху зміщення, що змінюється за законом синуса, дорівнювало половині амплітуди. Період коливання 6,0 с.

2.48. Вважаючи рух поршня в циліндрі автомобільного двигуна гармонічним коливанням, визначити максимальне значення його швидкості і прискорення, якщо автомобіль рухається зі швидкістю $v = 72$ км/год на прямій передачі, радіус коліс $R = 344$ мм, хід поршня $l = 100$ мм.

2.49. Написати рівняння коливального руху матеріальної точки, що робить два однаково напрямлених гармонічних коливання, які описуються рівняннями: $x_1 = 4 sin\pi\left(2t + {}^1/_3\right)$, $x_2 = 3 sin\left(2\pi t + {}^\pi/_2\right)$.

2.50. Яка частота зміни амплітуди складного коливання, отриманого в результаті додавання двох однаково напрямлених гармонічних коливань з частотами 440 і 440,5 Гц?

2.51. Знайти рівняння траєкторій руху матеріальної точки, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, заданих рівняннями: $x = 2 sin\pi(2t + 1)$ і $y = 2 sin(2\pi t + 90^\circ)$. Указати напрям руху.

2.52. Додати графічно два взаємно перпендикулярних коливання з однаковими амплітудами і фазами, періоди яких відповідно дорівнюють 1 і 2 с.

2.53. Знайти роботу, що виконується при підніманні вантажу масою $m = 10$ кг на похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 45^\circ$ на відстані $s = 2$ м, якщо час піднімання t = 2,0 с, а коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}10$.

2.54. Парашутист масою $m = 70$ *кг* робить затяжний стрибок і через $t = 14$ с має швидкість $v = 60$ м/с . Вважаючи рух парашутиста рівноприскореним, знайти роботу з подолання опору повітря.

2.55. Яку потужність повинен розвивати трактор при переміщенні причепа масою $m = 5 \cdot 10^3$ кг вгору зі швидкістю $v = 1{,}0$ м/с, якщо кут нахилу $\alpha = 20^\circ$, а коефіцієнт тертя причепа $\mu = 0{,}20$?

2.56. Тіло масою $m = 1{,}0$ кг кинули з поверхні Землі під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 8{,}0$ м/с. Знайти потужність сили тяжіння в момент часу $t = 5{,}0$ с. Чому дорівнює робота цієї сили за час $t = 5{,}0$ с? Опором повітря знехтувати.

2.57. Яку роботу виконують двигуни електропотягу на шляху 100 м при розгоні з прискоренням 1,5 м/с^2 вгору з кутом нахилу 10°, якщо маса електропотягу $1{,}2 \cdot 10^5$ кг, а коефіцієнт тертя 0,05 ?

2.58. Визначити потужність двигуна шахтної кабіни, що піднімає із шахти глибиною 200 м вантаж масою $1 \cdot 10^4$ кг за 60 с, якщо ККД дорівнює 80%.

2.59. Потяг масою $1 \cdot 10^6$ кг піднімається вгору з кутом нахилу $\alpha = 10^\circ$ з швидкістю 15 м/с і проходить шлях 2,0 км. Визначити роботу і середню потужність, що розвивається тепловозом при русі потягу. Коефіцієнт тертя 0,05.

2.60. Кінетична енергія маховика, що обертається навколо нерухомої осі з постійною швидкістю, яка відповідає частоті $n = 5$ об/с, дорівнює $W_k = 60$ Дж. Знайти момент імпульсу маховика.

2.61. Яку роботу необхідно виконати, щоб телеграфний стовп масою 200 кг, до вершини якого прикріплена хрестовина масою 70,0 кг, перевести з горизонтального положення у вертикальне? Довжина стовпа 10,0 м.

2.62. Один раз камінь кидають зі швидкістю v_1 на горизонтальній поверхні льоду, а другий раз зі швидкістю v_2 у повітря під кутом 45° до горизонту. У якому випадку каменю надано більшу початкову швидкість і в скільки разів, якщо в обох випадках переміщення каменя однакове? Коефіцієнт тертя каменя об лід взяти 0,02. Опір повітря не враховувати.

2.63. Тіло масою 2,0 кг під дією сили 50 Н піднімається на похилій площині з кутом нахилу 30° на висоту 1,0 м. Коефіцієнт тертя тіла об похилу площину 0,20. Визначити значення зробленої роботи. На що піде ця робота?

2.64. На тонкій нитці довжиною 0,50 м підвішено пружинний пістолет так, що ствол розташований горизонтально. На який кут відхилиться нитка після пострілу, якщо куля масою m = 20 г при вильоті зі ствола має швидкість $v = 10$ м/с? Маса пістолета M = 200 г.

2.65. Визначити потужність водоспаду, якщо його висота h = 50 м, а середньорічна витрата води Q = 5900 м^3/с.

2.66. Яку кінетичну енергію має тіло масою 2,0 кг, якщо воно піднялося по похилій площині з кутом нахилу 30° на висоту 1,0 м? Коефіцієнт тертя між тілом і похилою площиною 0,10.

2.67. Куля масою m вдаряється об балістичний маятник масою M і застряє в ньому. Яка частина кінетичної енергії кулі перейде в теплоту?

2.68. Дві кулі масами m_1 = 0,20 кг і m_2 = 0,80 кг, підвішені на двох паралельних нитках довжиною по 2,0 м, дотикаються одна до одної. Менша куля відхиляється на 90° від початкового положення і відпускається.

1) Знайти швидкості куль після зіткнення, вважаючи удар абсолютно пружним. 2) Яка швидкість куль після зіткнення, якщо удар абсолютно непружний? Яка частина енергії піде на нагрівання куль?

2.69. Яка енергія пішла на деформацію двох куль, що зіткнулися, масами $m_1 = m_2 = 4{,}0$ кг, якщо вони рухалися назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = 3{,}0$ м/с і $v_2 = 8{,}0$ м/с, а удар був прямий непружний?

2.70. Дві кулі підвішені на тонких паралельних нитках, дотикаються одна до одної. Менша куля відхиляється на 90° від початкового положення і відпускається. Після удару кулі піднімаються на однакову висоту. Визначити масу меншої кулі, якщо маса більшої 0,6 кг, а удар абсолютно пружний.

2.71. Кулька масою m, що рухається горизонтально, вдаряється об поверхню призми масою M так, що відскакує вертикально вгору на висоту h. Вважаючи удар абсолютно пружним, визначити швидкість, отриману призмою в результаті удару. Тертям призми знехтувати.

2.72. Молоток масою 0,80 кг у момент удару об головку цвяха має швидкість 1,5 м/с і забиває його в колоду на глибину 5,0 мм. Якої маси вантаж необхідно покласти на головку цвяха, щоб він ввійшов у колоду на таку ж глибину?

2.73. Знайти миттєву потужність, що розвивається силою тяжіння до кінця першої секунди падіння тіла масою 1,0 кг. Опір повітря не враховувати.

2.74. Кулька для гри в настільний теніс радіусом r = 15 мм і масою m = 5,0 г занурена у воду на глибину h = 30 см. Коли кульку відпустили, вона вистрибує з води на висоту H = 10 см. Яка кількість теплоти виділилася внаслідок тертя кульки об воду?

2.75. Тіло ковзає на похилій площині, що утворює з горизонтом кут 45°. залежність пройденого тілом шляху s від часу t задається рівнянням $s(t) = Ct^2$, де C = 1,73 м/с². Знайти коефіцієнт тертя тіла об площину.

2.76. Вантаж масою m = 5,0 кг піднімається похилою площиною з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$ під дією сили F = *40* Н, що утворює кут β = 30° з напрямом переміщення. На яку відстань зміститься вантаж уздовж похилої площини до моменту, коли його швидкість дорівнюватиме $v = 1{,}0$ м/с, якщо початкова швидкість вантажу v_0 = 0 і коефіцієнт тертя μ = 0,10?

2.77. М'яч кинули вертикально вгору. Що більше: час підйому чи час падіння?

2.78. З вишки кидають велику надувну кулю так, що один раз їй надають початкову швидкість, спрямовану вертикально вгору, а інший раз таку ж швидкість, але спрямовану вертикально вниз. У якому випадку в момент удару кулі об землю її вертикальна швидкість буде більшою?

2.79. Вантаж масою m піднімається на висоту h. Чи залежить при цьому робота, що виконується піднімальним механізмом, від швидкості підйому? Чому?

2.80. Брусок масою m і довжиною l лежить на горизонтальній поверхні столу. Яку роботу треба виконати, щоб повернути брусок навколо центра мас у горизонтальній площині на малий кут α, якщо коефіцієнт тертя бруска об стіл μ.

2.81. При вибуху гранати, що летить зі швидкістю 8,0 м/с, утворилися два осколки. Осколок, маса якого становила 0,3 маси гранати, продовжив рухатись в тому ж напрямі зі швидкістю 30 м/с. Визначити швидкість другого осколка.

2.82. М'яч масою 150 г, що рухається зі швидкістю 6 м/с, вдаряється об стінку так, що кут між векторами швидкості до удару і після удару дорівнює 60°. Вважаючи удар пружним, визначити його тривалість, якщо відомо, що середня сила удару 20 Н.

2.83. Із труби перерізом S = 5,0 см² горизонтальний струмінь води б'є зі швидкістю $v = 10$ м/с у вертикальну стінку вагонетки, що стоїть на рейках, і вільно стікає зі стінки вниз. З яким прискоренням буде рухатися вагонетка, якщо її маса m = 200 кг, а напрям струменя води паралельний рейкам? Опір руху вагонетки взяти $k = 0{,}01$ її ваги.

2.84. Знайти початкову швидкість хокейної шайби, якщо вона до удару об бортик пройшла шлях S = 5,0 м, а після удару, який можна вважати абсолютно пружним, пройшла ще деякий шлях і через $t = 2{,}0$ с зупинилася. Коефіцієнт тертя шайби об лід 0,10.

2.85. На підніжку вагонетки, що рухається прямолінійно зі швидкістю 2,0 м/с, стрибає людина масою $m_2 = 60$ кг у напрямі, перпендикулярному до ходу вагонетки. Маса вагонетки $m_1 = 240$ кг. Визначити швидкість вагонетки разом із людиною.

2.86. З гармати масою $m = 1{,}1 \cdot 10^3$ кг зроблено постріл у горизонтальному напрямі. Маса снаряда 54 кг. Швидкість снаряда відносно Землі $v = 900$ м/с. Визначити швидкість вільного відкоту гармати в момент вильоту снаряда.

2.87. На платформі встановлена гармата, з якої зроблено постріл уздовж колії під кутом 45° до горизонту. Визначити початкову швидкість снаряда, якщо відомо, що після пострілу платформа відкотилася на відстань 3,0 м. Маса платформи з гарматою $M = 2 \cdot 10^4$ *кг*, маса снаряда $m = 10$ кг, коефіцієнт тертя кочення між колісьми платформи і рейками $\mu = 0{,}002$.

2.88. Гранату кинуто під кутом 45° до горизонту зі швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Через 2,0 с після моменту кидання граната розривається на два осколки, маси яких відносяться як 1:2. Менший осколок у результаті вибуху одержав додаткову швидкість $v_1 = 50$ м/с, напрямлену горизонтально уздовж напряму кидання гранати. Визначити дальність польоту більшого осколка, якщо відомо, що менший осколок упав на відстань $s_1 = 83$ м. Опір повітря не враховувати.

2.89. Три човни, кожний масою $M = 250$ кг, йдуть один за одним зі швидкістю $v = 5$ м/с. З другого човна одночасно в перший і третій кидають вантажі масами $m = 20$ кг кожний зі швидкістю $u = 2{,}0$ м/с відносно середнього човна. Визначити швидкості човнів після перекидання вантажів.

2.90. Два човни масою $M = 100$ кг кожний йдуть паралельним курсом назустріч один одному з однаковою швидкістю 5,0 м/с. Коли човни зустрічаються, з першого в другий перекидають вантаж масою $m = 25$ кг, а потім із другого човна в перший перекидають такий самий вантаж. Іншим разом вантажі перекидають з човна в човен одночасно. Визначити швидкості човнів в обох випадках.

2.91. Кувалда масою 20 кг, піднята на висоту $h = 1{,}2$ м, вільно падає на ковадло. Яка середня сила удару кувалди об ковадло, якщо удар непружний, а тривалість удару 0,005 с?

2.92. До матеріальної точки, положення якої визначається радіусом-вектором $\vec{r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, прикладена сила $\vec{F} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$. Визначити момент сили $\overrightarrow{M}$ відносно початку координат, модуль вектора $|\overrightarrow{M}|$ і момент сили M_Z відносно осі Z.

2.93. Тіло масою m = 100 г кинуто під кутом 45° до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Знайти модуль моменту імпульсу тіла відносно точки кидання в момент перебування його в найвищій точці траєкторії. Опір повітря не враховувати.

2.94. Довести, що при русі тіла під дією центральної сили момент імпульсу тіла відносно точки, яка є полюсом поля, є величина постійна.

2.95. Показати, що планети, які рухаються під дією центральних сил, мають плоску траєкторію. Силою опору руху знехтувати.

2.96. На гладкій горизонтальній площині лежить однорідний стержень довжиною l = 0,50 м і масою m = 1,0 кг. На площині ковзає кулька масою m_1 = 0,30 кг зі швидкістю v = 10 м/с, напрямленою перпендикулярно до стержня. Кулька вдаряється об стержень і зупиняється. Точка удару знаходиться на відстані l_1 = 20 см від середини стержня. Діаметр кульки дорівнює діаметру стержня. Визначити поступальну швидкість стержня після удару і кутову швидкість відносно його центра мас.

2.97. Довести, що людина, яка стоїть на ідеально гладкій горизонтальній площині, може повернутися навколо вертикальної осі, якщо вона почне обертати руку над головою.

2.98. Показати, що другий закон Кеплера (радіус-вектор, проведений від Сонця до планети, за однаковий час описує однакові площі) є наслідком закону збереження моменту імпульсу.

2.99. Тіло масою m кинуто під кутом a до горизонту зі швидкістю $\vec{v}$. Знайти залежність від часу модуля моменту імпульсу тіла відносно точки кидання. Опором повітря знехтувати.

2.100. Із точки з координатами (0, 3, 0) (м) вертикально вгору кинули тіло масою m = 0,5 кг зі швидкістю v = 5 м/с. Знайти збільшення імпульсу тіла відносно початку координат за час його польоту вгору і назад в початкову точку. Опором повітря знехтувати. Вісь напрямлена вгору.

2.101. Визначити момент інерції кулі відносно осі, що збігається з дотичною до його поверхні. Радіус кулі 0,1 м, її маса 5 кг.

2.102. Чому дорівнює момент інерції тонкого прямого стержня довжиною 0,5 м і масою 0,2 кг відносно осі, перпендикулярної до нього, яка проходить через точку стержня, що віддалена на 0,15 м від одного з його кінців?

2.103. Визначити момент інерції Землі відносно осі обертання, вважаючи її кулею радіусом 6,4 Мм і масою $6 \cdot 10^{24}$ кг .

2.104. На барабан радіусом R = 10 см намотана нитка, до кінця, якої прив'язаний вантаж масою m = 0,50 кг. Знайти момент інерції барабана, якщо вантаж опускається з прискоренням a = 1,0 м/с^2.

2.105. Маховик, що являє собою диск масою m = 10 кг і радіусом R = 10 см, вільно обертається навколо осі, що проходить через центр, із круговою частотою 6 с$^{-1}$. При гальмуванні маховик зупиняється через t = 5 с. Визначити гальмівний момент.

2.106. Через блок, маса якого m = 100 г, перекинуто тонку гнучку нерозтяжну нитку, до кінців якої підвішено два вантажі масами m_1 = 200 кг і m_2 = =300 кг (рис. 7). Вантажі утримуються в нерухомому положенні. З яким прискоренням будуть рухатися вантажі, якщо їх відпустити? Чому дорівнює кутове прискорення блока, якщо його радіус 10 см? Тертям знехтувати.

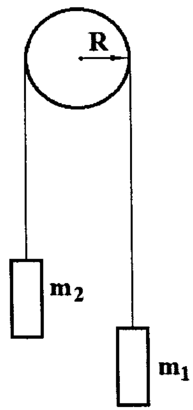


Рисунок 7

2.107. З колодязя за допомогою корби піднімалося відро з водою m = 10 кг. У момент, коли відро знаходилося на висоті h = 5,0 м від води, рукоятка звільнилася, і відро стало рухатися вниз. Визначити лінійну швидкість рукоятки в момент удару відра об поверхню води в колодязі, якщо радіус рукоятки r = 30 см, радіус вала корби R = 10 см, його маса m_1 = 20 кг. Тертям і масою троса, на якому підвішено відро, знехтувати.

2.108. Маховик масою m_1 = 1,0 кг укріплений на шківі радіусом R = 5,0 см і масою m_2 = 200 кг, приводиться в обертання за допомогою гирі, що опускається, масою m_3 = 500 г, прив'язаної до кінця намотаної на шків мотузки. Через який час швидкість маховика досягне n = 5,0 об/с ? Вважати, що вся маса маховика розподілена на його ободу на відстані R = 40 см від осі обертання.

2.109. До кінця тонкої нерозтяжної нитки, намотаної на циліндричний суцільний нерухомий блок масою m_1 = 200 г, прикріплено тіло масою m_2 = 500 г, що знаходиться на похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 45^\circ$ (рис. 8). Нитка, що утримує тіло, паралельна похилій площині. Який шлях пройде тіло на похилій площині за t = 1,0 с, якщо коефіцієнт тертя ковзання на похилій площині μ = 0,10? Тертям у блоці знехтувати.

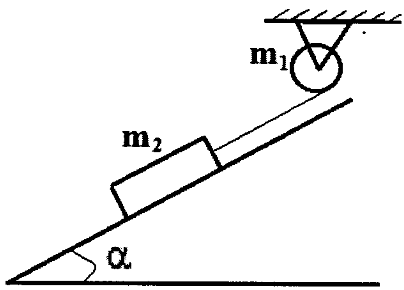


Рисунок 8

2.110. Який шлях пройде диск, що котиться без ковзання, піднімаючись вгору по похилій площині з кутом нахилу a = 30°, якщо йому надана початкова швидкість 7,0 м/с, паралельна похилій площині?

2.111. Куля скочується на похилій площині з кутом нахилу 30°. Яку швидкість буде мати центр кулі відносно похилої площини через 1,5 с, якщо її початкова швидкість дорівнювала нулю?

2.112. На горизонтальній обертовій платформі на відстані R = 50 см від її вертикальної осі обертання лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між вантажем і платформою k = 0,05. При якій кількості її обертів за секунду вантаж почне ковзати?

2.113. На краю горизонтальної платформи радіусом R = 1 м, яка обертається, лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між вантажем і платформою k = 0,05. В який момент часу t після початку обертання платформи вантаж зісковзне з неї, якщо її обертання рівноприскорене і в момент часу $t = 2$ хв вона має кутову швидкість $\omega = 1,4$ рад/с?

2.114. Яким має бути мінімальний коефіцієнт тертя k між шинами автомобіля і асфальтом, щоб автомобіль міг пройти без ковзання заокруглення радіусом $R = 100$ м при швидкості $v = 50$ км/год?

2.115. Тіло масою $m = 200$ г рівномірно обертається в горизонтальній площині по колу радіусом $R = 0,5$ м і робить $n_1 = 3$ оберти за секунду. Яку роботу А треба виконати, щоб збільшити кількість обертів до $n_2 = 5$ обертів за секунду?

2.116. Барабан сушильної машини діаметром $D = 1,96$ м обертається з кутовою швидкістю $\omega = 20$ рад/с. Визначити, у скільки разів сила F, з якою тканина притискується до стінки, більша від сили тяжіння P.

2.117. Літак робить «мертву петлю» радіусом $R = 255$ м. Яку найменшу швидкість $\vec{v}$ повинен мати літак у верхній точці петлі, щоб пілот не повиснув на ремінцях, якими він пристебнутий до пілотського крісла?

2.118. З яким максимальним періодом T можна рівномірно обертати у вертикальній площині кульку, прив'язану до нитки довжиною $l = 2,45$ м?

2.119. Невагомий стержень рівномірно обертається в горизонтальній площині і робить n обертів за секунду. На відстанях l_1 і l_2 від осі обертання закріплені вантажі з масами m_1 і m_2. Яка горизонтальна сила P діє на вісь обертання, якщо вісь знаходиться між вантажами?

2.120. Автомобіль масою $m = 1000$ кг рухається по опуклому мосту, що має радіус кривизни $R = 50$ м, з швидкістю $v_1 = 36$ км/год. З якою силою F тисне автомобіль на середину мосту? З якою найменшою швидкістю v_2 повинен рухатись автомобіль, щоб у верхній точці він перестав тиснути на міст?

2.121. Автомобіль масою $m = 2000$ кг рухається зі швидкістю $v = 36$ км/год по вгнутому мосту. Радіус кривизни мосту $R = 100$ м. З якою силою F тисне автомобіль на міст, проїжджаючи його середину?

2.122. Автомобіль масою m рухається опуклим мостом, радіус кривизни якого R, зі швидкістю v. З якою силою P тисне автомобіль на міст у точці, напрям на яку з центра кривизни мосту утворює з напрямом на середину мосту кут α?

2.123. Через річку шириною $d = 100$ м перекинуто опуклий міст, що має форму дуги кола. Найвища точка мосту піднімається над берегом на $H = 10$ м. Максимальне навантаження, яке може витримати міст $F = 44100$ Н. Через міст треба пройти вантажному автомобілю масою $m = 5000$ кг. За яких швидкостей руху це неможливо?

2.124. Людина масою m = 70 кг сидить на середині трапеції. Палицю трапеції підвішено на мотузках довжиною l = 8 м. Під час гойдання людина проходить положення рівноваги зі швидкістю 6 м/с. Який натяг T кожної мотузки в цей момент?

2.125. Кульку масою m, підвішену на нитці, відхилили від положення рівноваги на кут $\alpha = 90^{\circ}$ і відпустили. Якою має бути міцність нитки, щоб кулька під час руху не обірвала її?

2.126. Вантаж масою m = 20 г прикріплено до кінця невагомого стержня довжиною l = 40 см, який рівномірно обертається у вертикальній площині навколо іншого кінця, роблячи 10 обертів за секунду. Чому дорівнює натяг стержня, коли тягарець проходить верхню і нижню точки своєї траєкторії?

2.127. Тіло масою m обертається у вертикальній площині на жорсткій невагомій штанзі. Знайти різницю сил натягу штанги у двох випадках: а) швидкість обертання постійна; б) швидкість обертання змінна, її зміна зумовлюється силою тяжіння.

2.128. Яку потужність повинен розвинути двигун, що приводить у рух стабілізувальний гіроскоп, який має форму диска радіусом R = 1,0 м і масою m= 1000 кг, якщо протягом t = 1 хв кутова швидкість збільшується до ω = =31 рад/с? Тертям і опором повітря знехтувати.

2.129. Обчислити кінетичну енергію диска масою 2 кг, що котиться без ковзання горизонтальною поверхнею з відносною швидкістю 2 м/с.

2.130. Яку роботу потрібно зробити, щоб маховику у вигляді диска масою 100 кг і радіусом 0,4 м надати частоту обертання n = 10 рад/с, якщо він знаходився в стані спокою?

2.131. Визначити гальмівний момент, яким можна зупинити за t = 20 с махове колесо масою m = 50 кг і радіусом R = 0,30 м, що обертається з частотою n = 20 об/с. Масу маховика вважати розподіленою по ободу. Чому дорівнює робота, що виконується гальмівним моментом?

2.132. Знайти корисну потужність двигуна, що приводить у рух платформу у вигляді диска масою m_1 = 280 кг і радіусом R = 1,0 м, на краю якої стоїть людина масою m_2 = 60 кг, якщо за t = 30 с платформа набуває швидкість, що відповідає частоті n = 1,2 об/с.

2.133. Диск масою m_1 = 5 кг і радіусом R = 5 см, що обертається з частотою n = 10 об/хв приводиться в зчеплення з нерухомим диском масою m_2 = 10 кг такого ж радіуса. Визначити енергію, що піде на нагрівання дисків, якщо при їхньому зчепленні ковзання відсутнє.

2.134. За наявності тертя обруч скочується з похилої площини, а за відсутності – ковзає на ній. У якому випадку і в скільки разів швидкість, яку буде мати обруч при основі похилої площини, більша?

2.135. Кулька, що скочується без ковзання на похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$, вдаряється об горизонтальну площину і після удару підскакує на висоту $h = 12{,}5$ см (рис. 9). Нехтуючи тертям і вважаючи удар абсолютно пружним, визначити шлях s, пройдений кулькою по похилій площині.

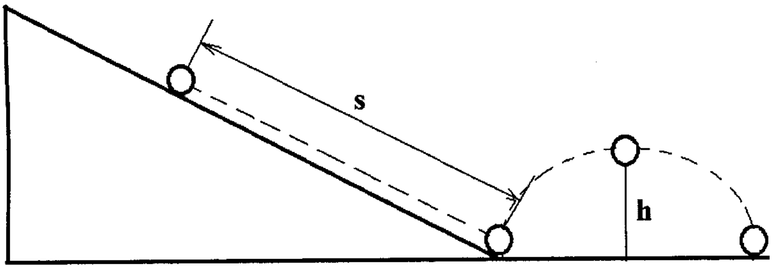


Рисунок 9

2.136. Диск радіусом R розкручується навколо вертикальної осі за допомогою мотузки довжиною l, яку тягнуть з постійною силою $\vec{F}$ (рис. 10). Після цього диск зіскакує з осі і потрапляє на горизонтальну площину. Скільки обертів зробить диск на площині до повної зупинки, якщо його маса M, а коефіцієнт тертя диска об площину μ?

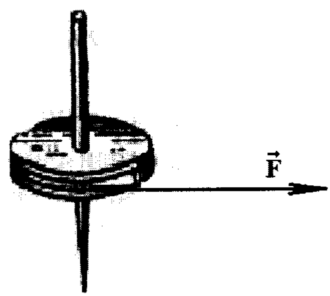


Рисунок 10

2.137. Дві кулі однакового розміру, виготовлені з алюмінію і міді, обертаються незалежно одна від одної навколо загальної нерухомої осі, що проходить через їхні центри, з кутовими швидкостями $\omega_1 = 5{,}0$ рад/с, $\omega_2 = 10$ рад/с. З якою кутовою швидкістю оберталися б обидві кулі, якби їх жорстко з'єднали?

2.138. Однорідна куля масою 2 кг прикріплена до вертикальної стіни за допомогою нитки (рис. 11). З якою силою куля тисне на стіну, якщо нитка утворює з нею кут $\alpha = 30^\circ$. Тертя не враховувати.

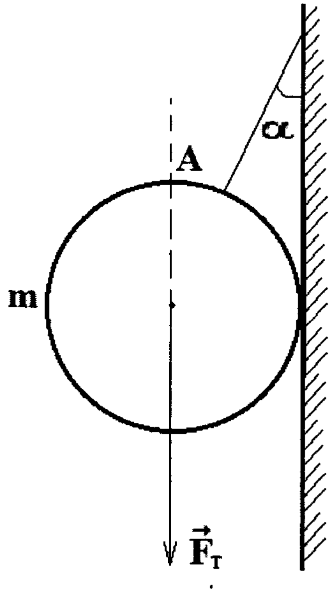


Рисунок 11

2.139. За якого найменшого значення коефіцієнта тертя між стіною і кулею (рис. 11) точка А, в якій закріплена нитка, і центр кулі будуть знаходитись на одній вертикалі?

2.140. Однорідний стержень довжиною 1,0 м і масою 5,0 кг підвішено горизонтально на двох паралельних мотузках однакової довжини. До стержня прикріплено вантаж масою 10 кг на відстані 0,25 м від одного з його кінців. Визначити натяг мотузок.

2.141. На похилій площині з кутом нахилу 35° знаходиться однорідний прямий циліндр радіусом 10 см. Чому дорівнює найбільша висота циліндра, при якій він ще не перекинеться?

2.142. Визначити положення центра мас стержня, що складається з двох частин однакової довжини й однакового поперечного перерізу, одна з яких свинцева, а друга залізна, якщо його загальна довжина 0,50 м.

2.143. Вантаж, підвішений на гумовому шнурі довжиною 50 см, обертають у горизонтальній площині з постійною швидкістю так, що шнур описує конічну поверхню з кутом при вершині 120°. Визначити відносне видовження шнура при обертанні, якщо при нерухомому вантажі видовження шнура 1 см. Видовження вважати пропорційним прикладеній силі.

2.144. Яке навантаження необхідно прикласти до алюмінієвого стержня, щоб він при температурі 10 °С мав ту ж довжину, що і при 0° С? Площа поперечного перерізу стержня $S = 1{,}5$ см^2. Модуль Юнга $E = 70$ ГПа.

2.145. Гумовий шнур розтягнули так, що його довжина збільшилася в 2 рази. Який діаметр розтягнутого шнура, якщо до розтягання він був 1 см, а коефіцієнт Пуассона для гуми 0,5?

2.146. Визначити відносну зміну об'єму сталевого дроту діаметром 2 мм при розтяганні його силою 1 кН. Коефіцієнт Пуассона $\mu = 0{,}3$.

2.147. При якій довжині підвішений вертикально сталевий дріт починає рватися під дією власної ваги? Межа міцності сталі $p_m = 0{,}69$ ГПа.

2.148. Відносна зміна об'єму при поздовжній деформації стержня дорівнює нулю. Визначити коефіцієнт Пуассона матеріалу стержня.

2.149. Прямий дріт довжиною l піднімається вертикально вгору під дією сили, прикладеної до його верхнього кінця. За якого прискорення дріт розірветься?

2.150. Знайти відносне видовження дроту довжиною l, що піднімається вертикально вгору з прискоренням a, під дією постійної сили, що прикладена до верхнього кінця.

2.151. Визначити коефіцієнт Пуассона алюмінієвого стержня, якщо відомо, що під дією деякої сили, перпендикулярної до перерізу стержня відносна поздовжня деформація дорівнює $\varepsilon_l = 0{,}001$, а при дотичному напрямі такої ж сили відносний зсув дорівнює $\Psi = 0{,}0027$.

2.152. Визначити товщину нитки, на якій підвішено рамку дзеркального гальванометра, якщо під дією обертального моменту $M = 0{,}3$ $Н{\cdot}м$ вона повертається на кут $\varphi = 2°$. Довжина нитки $l = 10$ см. Модуль зсуву матеріалу нитки $G = 6{,}5$ ГПа.

2.153. Визначити відносне видовження мідного стержня, якщо при його розтяганні виконується робота 0,12 Дж. Довжина стержня 2 м, площа його поперечного перерізу 1 мм^2.

2.154. Чому дорівнює густина пружної енергії розтягнутого сталевого стержня, якщо відносне видовження 0,001?

2.155. Два вагони масами $m = 2{,}0 \cdot 10^4$ кг, що рухаються назустріч один одному зі швидкостями $v = 2$ м/с, зіштовхуються. Визначити стиск пружини буферів вагонів, якщо під дією сили $F = 40$ кН пружина стискається на $x_0 = 1$ см. Вважати, що стиск пружини пропорційний силі.

2.156. Визначити силу, з якою гімнаст масою $m = 60$ кг діє на пружну сітку при стрибку з висоти $h = 8{,}0$ м, якщо під дією сили тяжіння гімнаста сітка прогинається на $x_0 = 16$ см.

2.157. Яку силу необхідно розвити при натягу лука на $x = 0{,}20$ м, якщо вся робота йде на надання стрілі кінетичної енергії, а найбільша дальність польоту стріли $s = 36$ м? Маса стріли $m = 50$ г.

2.158. На яку висоту піднімається камінь масою $m = 30$ кг, випущений вертикально вгору з рогатки, гумовий метальний джгут якої перерізом $S = 0{,}20$ см^2 і довжиною $l = 30$ см був розтягнутий на $\Delta l = 20$ см? Опір повітря не враховувати. Модуль Юнга для гуми $E = 7{,}8$ МПа.

2.159. Літак сідає на палубу авіаносця зі швидкістю 100 км/год. Зачепившись за канат гальмування, літак пробігає до повної зупинки 50 м. Визначити перевантаження, якщо жорсткість канату не змінюється із розтяганням.

2.160. Підставку, на якій знаходиться тіло, підвішене на пружині, опускають із прискоренням $a < g$. До якої максимальної довжини розтягнеться пружина, якщо в початковий момент вона була нерозтягнута? Маса тіла m, жорсткість пружини k.

2.161. Одержати обернені перетворення Лоренца:

$$x = \frac{x' - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, y = y', z = z', t = \frac{t' - (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

2.162. Стержень рухається з деякою постійною швидкістю V. Його довжина в нерухомій системі $l_1 = 3$ м, а в системі відліку, пов'язаній зі стержнем, $l_2 = 6{,}0$ м. Визначити власну довжину стержня і його швидкість відносно нерухомої системи відліку.

2.163. Швидкість руху Землі навколо Сонця $v = 30$ км/с. Знайти скорочення діаметра Землі в системі координат, пов'язаній із Сонцем.

2.164. Реактивний літак летить зі швидкістю 1000 м/с. На скільки годинник, що знаходиться в літаку, буде відставати від годинника на Землі ?

2.165. Один із близнюків у віці 20 років відправляється в далеку космічну подорож до зірки на кораблі зі швидкістю $v = 0{,}99\ c$ $(c = 3 \cdot 10^8$ м/с). Для жителів Землі відстань до зірки становить 40 світлових років (тобто таку відстань світло від зірки до Землі проходить за 40 років). На скільки років космічний мандрівник виявиться молодшим за свого брата, що залишився на Землі?

2.166. Користуючись перетвореннями Лоренца, вивести релятивістський закон додавання швидкостей.

2.167. Користуючись формулами додавання швидкостей теорії відносності, довести, що додавання швидкостей ніколи не приводить до швидкостей, більших швидкості світла.

2.168. Показати, що фотон, випромінюваний у напрямі Землі зі швидкістю c зіркою, що рухається до Землі зі швидкістю v, наближається до неї не зі швидкістю $c + v$, а зі швидкістю c.

2.169. Дві ракети віддаляються від Землі в протилежні боки зі швидкістю 0,8 с відносно Землі. Знайти, з якою швидкістю рухається одна ракета в системі відліку, пов'язаній з іншою ракетою.

2.170. Прискорювач надав радіоактивному ядру швидкість $v = 0{,}4\,c$. У момент вильоту з прискорювача ядро викинуло в напрямі свого руху α-частинку зі швидкістю 0,75 с відносно прискорювача. Знайти швидкість частинки відносно ядра.

2.171. Який вік космонавта за годинником Землі, якщо він у 30-літньому віці полетів на відстань до 20 світлових років? Вважати його вік за годинником космонавта 35 років.

2.172. У скільки разів релятивістська маса електрона, що рухається зі швидкістю $v = 0{,}999\ c$, більша за його масу спокою?

2.173. Релятивістська маса тіла, що рухається з певною швидкістю, зросла порівняно з його масою спокою на 20%. В скільки разів при цьому зменшилася його довжина?

2.174. Релятивістська маса рухомого протона у 10 разів більша його маси спокою. Знайти швидкість протона.

2.175. Тіло рухається зі швидкістю 200,0 Мм/с. В скільки разів збільшилася густина тіла, що рухається, порівняно зі щільністю того ж тіла, що знаходиться в спокої? (Розміри тіла, перпендикулярні до напряму руху, не скорочуються.) При розв'язанні задачі використовувати визначення густини як відношення маси спокою тіла до його об'єму.

2.176. Електрон рухається зі швидкістю 200,0 Мм/с, Визначити кінетичну енергію за класичною і релятивістською формулами. Порівняти результати.

2.177. Знайти відношення кінетичної енергії електрона до його енергії спокою, якщо швидкість електрона 150,0 Мм/с. Який релятивістський імпульс електрона?

2.178. Повна енергія мезона в 8 разів більша його енергії спокою. Яка швидкість мезона?

2.179. Якій зміні маси відповідає зміна енергії на 1,0 Дж?

2.180. Показати, що кінетична енергія $E_к = E - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$ в релятивістському випадку при малих швидкостях руху переходить у класичний вираз для кінетичної енергії: $\frac{mv^2}{2}$.

РОЗДІЛ 2 ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

§ 7 Електростатика

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{\varepsilon \cdot r^2},$$

де F – сила взаємодії двох точкових зарядів q_1 і q_2;

r – відстань між зарядами;

ε – діелектрична проникність середовища;

ε_0 – електрична стала, яка дорівнює:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\,Ф/м = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,Ф/м.$$

2. Закон збереження електричного заряду:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = const,$$

де $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраїчна сума всіх зарядів, які входять до ізольованої системи.

3. Напруженість електричного поля точкового заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

де $\vec{F}$ – результуючий вектор всіх діючих сил на точковий заряд *q*, який поміщений в дану точку поля.

Сила, що діє на точковий заряд *q*, розміщений в електричному полі напруженістю $\vec{E}$:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Потік вектора напруженості $\vec{E}$ електричного поля:

а) через довільну поверхню *S*, яка поміщена в неоднорідне електричне поле,

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha dS \qquad \text{або} \qquad \Phi_E = \int_S E_n dS,$$

де *а* – кут між напрямком вектора напруженості $\vec{E}$ і нормаллю $\vec{n}$ до елемента поверхні;

dS – площа елемента поверхні;

E_n – проекція вектора напруженості на напрям нормалі;

б) через плоску поверхню, яка поміщена в однорідне електричне поле,

$$\Phi_E = E \cdot S\cos\alpha.$$

4. Потік вектора напруженості *E* через замкнену поверхню S дорівнює:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS,$$

де інтегрування ведеться через замкнуту поверхню.

5. Теорема Гаусса в інтегральній формі. Потік вектора напруженості електричного поля Φ_E через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, які охоплені цією поверхнею, поділеній на ε_0.

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \qquad \text{або} \qquad \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i ,$$

де $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраїчна сума зарядів, які розміщені всередині замкнутої поверхні;

n – кількість окремих електричних зарядів.

6. Напруженість електричного поля, яке створюється точковим зарядом q на відстані r від заряду:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon \cdot r^2} .$$

7. Напруженість електричного поля, яка створюється зарядженою металевою кулею радіусом R з зарядом q, на відстані r від центра кулі:

– всередині кулі ($r < R$) – $E = 0$,

– на поверхні кулі ($r = R$) – $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R^2}$,

– поза кулею ($r > R$) – $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon \cdot r^2}$.

8. Принцип суперпозиції (накладання) електричних полів, згідно з яким напруженість $\vec{E}$ результуючого електричного поля, створеного двома (і більше) точковими зарядами, дорівнює векторній (геометричній) сумі напруженостей цих полів:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n .$$

У випадку двох електричних полів з напруженостями $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ абсолютне значення вектора напруженості дорівнює:

$$E = \sqrt{E_1^{\,2} + E_2^{\,2} + 2E_1 \cdot E_2 \cos\alpha} ,$$

де α – кут між векторами $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$.

9. Напруженість електричного поля, що створюється нескінченно довгою рівномірно зарядженою ниткою (або циліндром) на відстані r від її осі:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot r},$$

де τ – лінійна густина заряду.

Лінійна густина заряду визначається відношенням заряду, який розподілений вздовж нитки, до довжини нитки (циліндра):

$$\tau = dq / dl.$$

10. Напруженість електричного поля, створеного безмежною, рівномірно зарядженою площиною, дорівнює:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

де σ – поверхнева густина заряду.

Поверхнева густина заряду дорівнює відношенню заряду, рівномірно розподіленого на поверхні, до площі цієї поверхні:

$$\sigma = dq / dS.$$

11. Напруженість електричного поля, яке створюється двома паралельними нескінченними рівномірно і різнойменно зарядженими площинами, з однаковою поверхневою густиною зарядів σ (поле плоского конденсатора), дорівнює:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Наведена формула справедлива для обчислення напруженості електричного поля між пластинами плоского конденсатора (в середній його частині) за умови, що відстань між пластинами значно менша за лінійні розміри пластин конденсатора.

12. Електричне зміщення $\vec{D}$, пов'язано з напруженістю електричного поля $\vec{E}$ таким співвідношенням:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}.$$

13. Циркуляція вектора напруженості електричного поля вздовж будь-якого замкненого контура чисельно дорівнює роботі, яку слід виконати, щоб перемістити одиничний точковий позитивний заряд по цьому контура.

Циркуляція вектора напруженості виражається коловим інтегралом:

$$\oint E_l dl,$$

де E_l – проекція вектора напруженості в даній точці контура на напрямок дотичної до контура в цій самій точці.

У випадку електростатичного поля циркуляція вектора напруженості електричного поля дорівнює нулю:

$$\oint Edl = 0 .$$

14. Потенціал електростатичного поля – це фізична величина, яка дорівнює відношенню потенціальної енергії в даній точці електричного поля до заряду, який поміщений у цю точку:

$$\varphi = \Pi / \mathrm{q} .$$

Або потенціал електростатичного поля – це фізична величина, яка чисельно дорівнює відношенню роботи сил поля для переміщення точкового позитивного заряду з даної точки поля в нескінченність, до величини цього заряду:

$$\varphi = A / \mathrm{q}.$$

15. Потенціал електростатичного поля у нескінченності умовно береться за нуль. При переміщенні заряду в електричному полі між точками B і C робота A_{BC} зовнішніх сил дорівнює за абсолютним значенням роботі A_{CB} :

$$A_{BC} = -A_{CB} .$$

Потенціал електростатичного поля, який створюється точковим зарядом q на відстані r від заряду дорівнює:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} .$$

16. Потенціал електричного поля, який створюється зарядженою суцільною металевою кулею радіусом R і зарядом q на відстані r від кулі дорівнює:

— всередині кулі ($r < R$) – $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$,

— на поверхні кулі ($r = R$) – $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$,

— поза кулею ($r > R$) – $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$.

17. Потенціал електростатичного поля, яке створене системою n точкових зарядів, визначається в даній точці поля за принципом суперпозиції і дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, які створюються окремими точковими зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_n$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \,.$$

18. Енергія W взаємодії системи точкових зарядів q_1, q_2, ..., q_n визначається роботою, яку ця система зарядів має виконати за умови перенесення кожного із зарядів, один відносно одного, у нескінченність і виражається формулою:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i \,,$$

де φ_i – потенціал поля, яке створюється усіма n-1 зарядами (за виключенням *i-го)* у точці, де розміщений заряд q_i.

19. Потенціал пов'язаний із напруженістю електричного поля співвідношенням:

$$\vec{E} = -gr\vec{a}d\varphi \,.$$

У випадку електричного поля, яке має сферичну симетрію, цей зв'язок виражається формулою:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

або в скалярній формі:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

а у випадку однорідного поля, тобто поля, напруженість якого у кожній точці поля однакова:

$$E = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{d},$$

де d – відстань між цими поверхнями вздовж електричної силової лінії.

20. Робота, яка виконується електричним полем при переміщенні точкового заряду із однієї точки поля з потенціалом φ_1 в іншу з потенціалом φ_2, дорівнює:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad \text{або} \qquad A = q\int_L E_l dl,$$

де E_l – проекція вектора напруженості $\vec{E}$ на напрямок переміщення;

dl – переміщення.

У випадку однорідного поля остання формула набуває вигляду:

$$A = qEl\cos\alpha,$$

де l – переміщення;

α – кут між напрямами вектора $\vec{E}$ і переміщення l.

Електричне поле у діелектриках

Основні формули

1. Диполь – це система двох однакових за модулем і протилежних за знаком зарядів, які розміщені на деякій відстані один від одного.

Електричний момент p диполя це вектор, який напрямлений від негативного заряду до позитивного і який дорівнює добутку заряду $|q|$ на вектор $\vec{l}$, що проведений від негативного заряду до позитивного та називається плечем диполя, тобто

$$\vec{p} = |q|\vec{l} \ .$$

Диполь має назву точкового, якщо плече l диполя значно менше за відстань r від центра диполя до точки, у якій визначається дія диполя ($l \ll r$).

2. Напруженість поля точкового диполя визначається за формулою:

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha} \ ,$$

де $\vec{p}$ – електричний момент диполя;

r – абсолютне значення радіуса-вектора, який проведений від центра диполя до точки, напруженість поля в якій визначається;

α – кут між радіусом-вектором r та плечем l диполя.

Напруженість поля точкового диполя у точці, яка лежить на осі диполя *($\alpha = 0$)*

$$E = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}$$

і в точці, яка лежить на перпендикулярі до плеча диполя, що проведений із його середини *($a = \pi/2$)*

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3} \ .$$

3. Потенціал поля точкового диполя на відстані r від диполя:

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha \ .$$

4. Потенціал поля точкового диполя у точці, яка лежить на осі диполя *($\alpha = 0$)*

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \ ,$$

і в точці, яка лежить на перпендикулярі до плеча диполя, що проведений із його середини *($\alpha = \pi/2$)*

$$\varphi = 0 \ .$$

Напруженість і потенціал неточкового диполя визначаються як для системи зарядів.

Механічний момент, який діє на диполь з електричним моментом $\vec{p}$, розміщеним в однорідному електричному полі з напруженістю E, визначається співвідношенням:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}\vec{E}\right] \qquad \text{або} \qquad M = pE\sin\alpha ,$$

де α – кут між напрямками векторів $\vec{p}$ та $\vec{E}$.

У неоднорідному електричному полі, окрім механічного моменту (пари сил), на диполь діє ще деяка сила. У випадку поля, яке має симетрію відносно осі x, ця сила виражається співвідношенням:

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha ,$$

де $\dfrac{\partial E}{\partial x}$ – частинна похідна напруженості поля, яка характеризує ступінь неоднорідності поля у напрямку осі x.

При $\alpha > \pi/2$ сила F_x позитивна. Це означає, що під її дією диполь втягується в область сильного поля.

5. Електричне зміщення D пов'язано з напруженістю E електричного поля таким співвідношенням:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} .$$

Це співвідношення може бути застосованим лише для ізотропних діелектриків.

6. Потік вектора електричного зміщення визначається аналогічно потоку вектора напруженості електричного поля:

– у випадку однорідного поля:

$$\Delta\psi = D\Delta S\cos\alpha ;$$

– у випадку неоднорідного поля:

$$\psi = \int_S D_n dS ,$$

де D_n – проекція вектора $\vec{D}$ на напрямок нормалі до елемента поверхні, площа якої дорівнює dS.

7. Теорема Гаусса для поля в діелектриках. Потік вектора електричного зміщення через будь-яку замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі сторонніх зарядів, що охоплені цією поверхнею:

$$\oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{n} q_i ,$$

де n – кількість сторонніх зарядів, що охоплені замкнутою поверхнею.

Провідники в електричному полі

Основні формули

1. Електроємність ізольованого провідника або конденсатора:

$$C = dq / d\varphi ,$$

де dq – заряд, переданий провіднику (конденсатору);

$d\varphi$ – зміна потенціалу, яка викликана цим зарядом.

2. Електроємність ізольованої провідної сфери радіусом R, яка розміщена у нескінченному середовищі з діелектричною проникністю ε:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R .$$

Якщо сфера порожня і заповнена діелектриком, то електроємність її від цього не змінюється.

3. Електроємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} ,$$

де S – площа кожної з пластин;

d – відстань між ними;

ε – діелектрична проникність діелектрика, який заповнює простір між пластинами.

Електроємність плоского конденсатора, який заповнений n шарами діелектрика товщиною d кожний, діелектричні проникності яких ε_i (шаруватий конденсатор):

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2 + \ldots + d_n/\varepsilon_n}.$$

4. Електроємність сферичного конденсатора (дві концентричні сфери радіусами R_1 і R_2, простір між якими заповнено діелектриком з діелектричною проникністю ε):

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2/(R_2 - R_1).$$

5. Електроємність циліндричного конденсатора (два коаксіальних циліндри довжиною l і радіусами R_1 і R_2, простір між якими заповнено діелектриком з діелектричною проникністю ε):

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}.$$

6. Електроємність послідовно з'єднаних конденсаторів визначається формулою:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n},$$

де n – кількість конденсаторів;

У випадку двох конденсаторів:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

У випадку n однакових конденсаторів з електроємністю C_1 кожний:

$$C = C_1/n.$$

7. Електроємність паралельно з'єднаних конденсаторів:

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

де n – кількість конденсаторів.

У випадку двох конденсаторів:

$$C = C_1 + C_2.$$

У випадку n однакових конденсаторів з електроємністю C_2 кожний:

$$C = nC_2.$$

Енергія електричного поля

Основні формули

1. Енергія зарядженого провідника виражається через заряд q, потенціал φ та ємність С провідника такими співвідношеннями:

$$W = \frac{1}{2}C\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}q\varphi.$$

Енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}qU,$$

де С – електроємність конденсатора;

U – різниця потенціалів на його пластинах.

3. Об'ємна густина енергії (енергія електричного поля, що припадає на одиницю об'єму)

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED,$$

де E – напруженість електричного поля в середовищі з діелектричною проникністю ε;

$\vec{D}$ – вектор електричного зміщення.

§ 8 Приклади розв'язування задач

Приклад 1

На відстані $r = 3$ м один від одного розміщено два точкових негативних заряди $q_1 = -9$ нКл і $q_2 = -36$ нКл. Коли у якійсь точці вмістити заряд q_0, то всі три заряди будуть у рівновазі. Знайти заряд q_0 і відстань x між зарядами q_1 і q_0.

Дано:

$r = 3$ м

$q_1 = -9$ нКл

$q_2 = -36$ нКл

$q_0 -?$

$x -?$

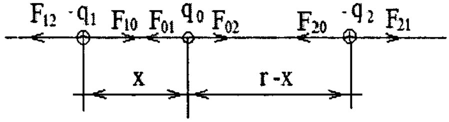


Рисунок 12

Розв'язування

Позначимо сили буквою F з двома індексами, з яких перший показує, на який заряд діє сила, а другий – з боку якого заряду вона діє (наприклад, F_{01} – сила, що діє на заряд q_0 з боку заряду q_1). За початок відліку О візьмемо точку, де знаходиться заряд q_1, а за додатний напрям – напрям від заряду q_1 до q_2 (рис. 12). Закон Кулона не дає можливості визначити напрям сили. Наприклад, обидві сили F_{12} і F_{21}, знайдені за законом Кулона з урахуванням знаків зарядів q_1 і q_2, мають додатний знак, тоді як за третім законом Ньютона їх напрями протилежні. Тому за законом Кулона визначатимемо лише абсолютну величину сили, а знак сили вважатимемо додатним, коли сила направлена в додатному напрямі осі OX, і від'ємним – у протилежному.

На кожен з трьох зарядів діють з боку двох інших по дві сили. Для рівноваги необхідно, щоб ці дві сили були протилежні за напрямом. Легко побачити, що ця умова виконується лише тоді, коли заряд q_0 буде на осі OX між зарядами q_1 і q_2 і матиме протилежний, порівняно з q_1 і q_2, знак. Нехай відстань між зарядами q_1 і q_0 дорівнює x $(0 < x < r)$. Тоді на заряди діятимуть сили (рис. 12):

1) на заряд q_0 діють сили $F_{01} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_0||q_1|}{x^2}$ і $F_{02} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_0||q_2|}{(r-x)^2}$;
2) на заряд q_1 діють сили $F_{10} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_1||q_0|}{x^2}$ і $F_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$;
3) на заряд q_2 діють сили $F_{20} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_2||q_0|}{(r-x)^2}$ і $F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_2||q_1|}{r^2}$.

При рівновазі всіх трьох зарядів виконуються такі умови:

$$F_{01} + F_{02} = 0, \qquad (1)$$
$$F_{12} + F_{10} = 0, \qquad (2)$$
$$F_{21} + F_{20} = 0. \qquad (3)$$

З виразу (1) випливає таке квадратне рівняння:

$$F_{01} + F_{02} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_0||q_1|}{x^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_0||q_2|}{(r-x)^2} = 0,$$

$$x^2|q_2| - (r-x)^2|q_1| = 0,$$

$$x^2|q_2| - r^2|q_1| + 2rx|q_1| - x^2|q_1| = 0,$$

$$(|q_2| - |q_1|)x^2 + 2r|q_1|x - r^2|q_1| = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = 4r^2|q_1|^2 + 4(|q_2| - |q_1|)r^2|q_1| = 4r^2|q_1||q_2|.$$

Корені цього рівняння виражаються так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2r|q_1| \pm 2r\sqrt{|q_1||q_2|}}{2(|q_2| - |q_1|)}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$x_{1,2} = \frac{-2r|q_1| \pm 2r\sqrt{|q_1||q_2|}}{2(|q_2| - |q_1|)} = \frac{-2\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 3\sqrt{9\cdot 36}}{2(36-9)} = \frac{-54+108}{54} = \frac{54}{54} = 1 \text{ м}.$$

З рівності (2) випливає:

$$\frac{|q_0 q_1|}{x^2} = \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \text{ Звідси } |q_0| = \frac{|q_2|x^2}{r^2} = \frac{36\cdot 10^{-9}\cdot 1^2}{3^2} = 4\cdot 10^{-9} \text{ Кл}.$$

Відповідь: 1 м; $4 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Приклад 2

Три однакові позитивні заряди $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл розміщено у вершинах рівностороннього трикутника. Який негативний точковий заряд q_4 потрібно помістити в центр трикутника, щоб сила притягання з його боку урівноважила сили взаємного відштовхування зарядів, які знаходяться у вершинах?

Дано:

$q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл

$q_4 - ?$

Розв'язування

Заряд q_1 перебуватиме в рівновазі, якщо векторна сума діючих на нього сил дорівнюватиме нулю:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \qquad (1)$$

де $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ – сили, з якими діють на заряд q_1 відповідно заряди q_2, q_3 і q_4;

$\vec{F}$ – рівнодійна сил $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$.

Оскільки $\vec{F}$ і $\vec{F}_4$ направлені по одній прямій, то з (1) випливає $F - F_4 = 0$ або $F = F_4$.

Виразивши в останньому рівнянні F через F_2 і F_3 та врахувавши, що $F_2 = F_3$, отримаємо:

$$F_4 = \sqrt{F_2^2 + F_3^2 + 2F_2F_3cos\alpha} = \sqrt{2F_2^2 + 2F_2^2cos\alpha} = F_2\sqrt{2(1 + cos\alpha)}.$$

Згідно із законом Кулона і з врахуванням, що $q_1 = q_2 = q_3$, знайдемо

$$\frac{q_1q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2(1 + cos\alpha)},$$

Звідки

$$q_4 = \frac{q_1r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1 + cos\alpha)} \qquad (2)$$

З геометричних побудов у рівносторонньому трикутнику випливає:

$$r_1 = \frac{\frac{r}{2}}{cos30^0} = \frac{r}{2cos30^0} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Підставивши значення r_1 і $cos\alpha$ з останніх співвідношень у формулу (2), отримаємо:

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}}. \qquad (3)$$

Підставимо числове значення q_1 у формулу (3) і знайдемо

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{3}} = 5{,}8 \cdot 10^{-10}\ (\text{Кл}) = 0{,}58\ (\text{нКл}).$$

Відповідь: 0,58 нКл.

Приклад 3

Тонке кільце радіусом $R = 15$ см несе заряд з рівномірно розподіленою лінійною густиною $\tau = 2\,\frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Визначити напруженість електростатичного поля в точці, що рівновіддалена від усіх точок кільця на відстань $r = 50$ см.

Дано:

$R = 15$ см

$\tau = 2\frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$

$r = 50$ см

E–?

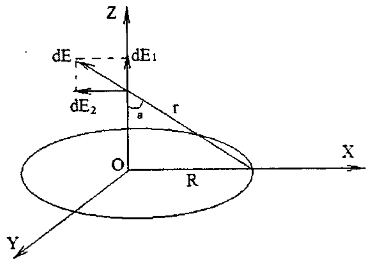


Рисунок 13

Розв'язування

Розмістимо прямокутну систему координат так, щоб кільце лежало в координатній площині XOY, а початок координат O збігався з центром кільця (рис. 13).

При цьому точка M, що знаходиться на осі OZ, рівновіддалена від усіх точок кільця на відстань r. Для обчислення напруженості поля заряду, що знаходиться на кільці, розділимо довжину кільця на елементи дуги dl. Заряд dq на такому елементі дуги дорівнює $dq = \tau dl$. Напруженість поля цього заряду:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Напрямок $d\vec{E}$ збігається з напрямком радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки, що лежить на середині елемента дуги dl, в точку M.

Розкладемо вектор $d\vec{E}$ на дві складові: в напрямку осі OZ – $d\vec{E}_1$ і в напрямку $d\vec{E}_2$, перпендикулярному до $d\vec{E}_1$.

Скориставшись міркуванням симетрії, побачимо, що сума всіх векторів $d\vec{E}_2$ дорівнює нулю. Суму складових $d\vec{E}_1$, які перпендикулярні до площини кільця і мають однаковий напрямок (вздовж осі OZ), можна виразити інтегралом

$$dE = dE_1 cos\alpha,\ E = \int_0^{2\pi R} \frac{\tau cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dl = \frac{\tau cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\tau R cos\alpha}{2\varepsilon_0 r^2}.$$

З трикутника ΔMON знайдемо $cos\alpha = \frac{OM}{R}$. Врахувавши, що $OM = \sqrt{r^2 - R^2}$ (теорема Піфагора),

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r}.$$

Підставимо значення $cos\alpha$ в отриману формулу і знайдемо робочу формулу для обчислення напруженості поля зарядженого кільця в точці М:

$$E = \frac{\tau R cos\alpha}{2\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau R}{2\varepsilon_0 r^2}\frac{\sqrt{r^2-R^2}}{r} = \frac{\tau R\sqrt{r^2-R^2}}{2\varepsilon_0 r^3}.$$

Обчислимо значення напруженості поля:

$$E = \frac{2\cdot10^{-6}\cdot0{,}15\sqrt{0{,}5^2-0{,}15^2}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}5^3} = 30850 \left(\frac{В}{м}\right).$$

Відповідь: $30850 \left(\frac{В}{м}\right)$.

Приклад 4

Два точкові електричні заряди $q_1 = 1$ нКл та $q_2 = -2$ нКл перебувають у повітрі на відстані $d = 10$ см один від одного. Визначити напруженість і потенціал поля, створюваного цими зарядами в точці А, віддаленій від першого заряду на відстань $r_1 = 9$ см та від другого заряду на відстань $r_2 = 7$ см.

Дано:

$q_1 = 1$ нКл $= 10^{-9}$ Кл

$q_2 = -2$ нКл $= -2\cdot10^{-9}$ Кл

$d = 10$ см $= 0{,}1$ м

$r_1 = 9$ см $= 0{,}09$ м

$r_2 = 7$ см $= 0{,}07$ м

E_A—?

φ—?

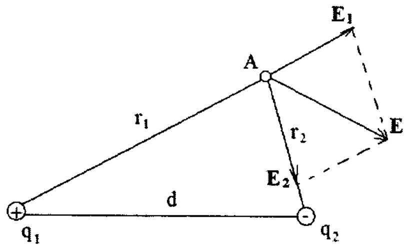


Рисунок 14

Розв'язування

За принципом суперпозиції полів напруженість поля в точці може бути знайдена як векторна сума напруженостей полів, створюваних кожним із зарядів окремо:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Напруженості полів, створюваних зарядами q_1 і q_2, дорівнюють (у повітрі $\varepsilon = 1$):

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}, \tag{1}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}. \tag{2}$$

Вектор $\vec{E}_1$ напрямлений по силовій лінії від позитивного заряду q_1, вектор $\vec{E}_2$ напрямлений по силовій лінії до негативного заряду q_2 (див. рис. 14). Модуль вектора напруженості результуючого поля знаходимо за теоремою косинусів:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 cos\alpha}, \tag{3}$$

де α – кут між векторами $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$.

З трикутника випливає, що

$$cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{0{,}1^2 - 0{,}09^2 - 0{,}07^2}{2 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}07} = -0{,}238.$$

Підставляючи вирази E_1 та E_2 з формул (1) та (2) у формулу (3), дістанемо:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + \frac{2q_1q_2}{r_1^2r_2^2}cos\alpha}.$$

Виконуємо обчислення:

$$E = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{0{,}09^4} + \frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{0{,}07^4} + 2\frac{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{0{,}09^2 \cdot 0{,}07^2} \cdot (-0{,}238)} = 3{,}58 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right).$$

Потенціал результуючого поля визначаємо згідно з принципом суперпозиції електричних полів:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Потенціали полів, створюваних зарядами, дорівнюють

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}; \ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}.$$

У даному разі маємо:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right).$$

Виконуємо обчислення:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = \frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{10^{-9}}{0{,}09} + \frac{-2\cdot 10^{-9}}{0{,}07}\right) = -157 \text{ В}.$$

Приклад 5

Визначити напруженість електричного поля біля безмежної, рівномірно зарядженої площини з поверхневою густиною зарядів σ (рис. 15).

Дано:

σ

E–?

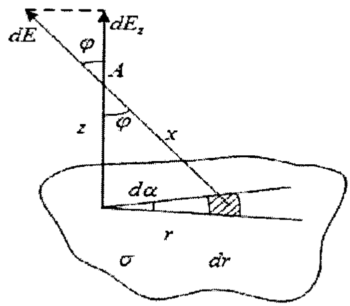


Рисунок 15

Розв’язування

Скористаємось формулою напруженості точкового заряду:

$$\mathrm{dE} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}, \tag{1}$$

де dq – це заряд заштрихованої безмежно малої ділянки поверхні;

x – відстань від цієї ділянки до точки А, в якій розраховується напруженість електричного поля E.

З рисунка видно, що $x^2 = z^2 + r^2$, а $dq = rd\alpha\, dr\sigma$ й $dE_z = dE\cos\varphi$.

З урахуванням цих позначень одержуємо:

$$dE_z = \frac{\sigma r dr \cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \left(z^2 + r^2\right)}. \tag{2}$$

Але, оскільки $\cos\varphi = \dfrac{z}{x}$, тому:

$$dE_z = \frac{\sigma z r dr d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d\left(z^2 + r^2\right)}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} d\alpha.$$

Інтегруємо цей вираз у межах: для r – від 0 до ∞; для α – від 0 до 2π, одержимо:

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\infty}\frac{d\left(z^2+r^2\right)}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\cdot\int_0^{2\pi}d\alpha = \frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\int_0^{\infty}(z^2+r^2)^{-3/2}d(z^2+r^2)\cdot\int_0^{2\pi}d\alpha =$$

$$= -\frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot 2\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\Bigg|_0^{\infty}\cdot 2\pi = \frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{z}\cdot 2\pi = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

З розрахунків видно, що напруженість електричного поля біля безмежної, рівномірно зарядженої площини з поверхневою густиною зарядів σ, визначається досить простою формулою і не залежить від відстані до самої площини:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\,\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Приклад 6

Визначити напруженість електричного поля на відстані $a = 10$ см від тонкої, досить довгої, рівномірно зарядженої нитки із лінійною густиною зарядів $\tau = 20\,\frac{\text{нКл}}{\text{м}}$ (рис. 16).

Дано:

$a = 10$ см

$\tau = 20\ \frac{\text{нКл}}{\text{м}}$

E–?

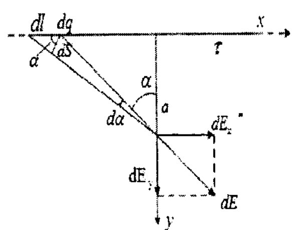


Рисунок 16

Розв'язування

Скористаємось формулою для напруженості поля точкового заряду:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r^2}. \qquad (1)$$

З рисунка 16 видно, що: $dq = \tau dl$ і $dS = rd\alpha$, а також $dS = dl{\cdot}cos\alpha$.

З урахуванням цих залежностей одержуємо величину точкового заряду:

$$dq = \frac{\tau\, rd\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Тоді напруженість електричного поля у напряму осі y dE_y – буде дорівнювати:

$$dE_y = dEcos\alpha = \frac{\tau r d\alpha\cos\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2\cos\alpha} = \frac{\tau\, d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Величину радіуса-вектора $\vec{r}$ виразимо через відстань a і кут α:

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

З урахуванням останнього одержимо:

$$dE_y = \frac{\tau\cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}. \qquad (3)$$

Інтегруємо останній вираз у межах зміни α від 0 до $\pi/2$, помноживши весь вираз на 2 (враховується друга, симетрична частина нитки).

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\cdot d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}\cdot 2\sin\alpha\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}.$$

Таким чином, одержано досить просту залежність напруженості електричного поля біля довгої, рівномірно зарядженої нитки або циліндра:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}. \qquad (4)$$

$$\mathrm{E} = \frac{20\cdot 10^{-9}}{2\cdot 3{,}14\cdot 1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1} = 3{,}59\cdot 10^3\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Паралельна складова напруженості E_x, завдяки симетричності нитки, буде дорівнювати нулю.

Відповідь: $3{,}59 \cdot 10^3\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

Приклад 7

Електричне поле створено тонкою нескінченно довгою ниткою, рівномірно зарядженою з лінійною густиною заряду $\tau = 30$ нКл/м. На відстані $a = 20$ см від нитки знаходиться плоска кругла пластинка радіусом $r = 1$ см. Визначити потік вектора напруженості через цю пластинку, якщо площина її утворює кут $\beta = 30^\circ$ з лінією напруженості, що проходить через середину пластинки.

Дано:

$\tau = 30$ нКл/м

$a = 20$ см

$r = 1$ см

$\beta = 30^\circ$

$\Phi_E - ?$

Розв'язування

Поле, що створене нескінченною рівномірно зарядженою ниткою, є неоднорідним. Потік вектора напруженості в цьому випадку виражається інтегралом:

$$\Phi_E = \int E_n dS, \qquad (1)$$

де E_n – проекція вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ до поверхні пластинки dS.

Інтегрування виконують по всій поверхні пластики, яку пронизують лінії напруженості.

Проекція E_n вектора напруженості дорівнює:

$$E_n = E\cos\alpha,$$

де α – кут між вектором напруженості $\vec{E}$ і нормаллю $\vec{n}$.

З урахуванням всього формула (1) матиме вигляд:

$$\Phi_E = \int E cos\alpha dS. \qquad (2)$$

Оскільки пластинки малі, порівняно з відстанню до нитки ($r \ll a$), то електричне поле в межах пластинки можна вважати однорідним. Тому вектор напруженості $\vec{E}$ дуже мало змінюється за абсолютним значенням та напрямком в межах пластинки і це дозволяє замінити під знаком інтеграла значення E і $cos\alpha$ їх середніми значеннями $\langle E\rangle$ і $\langle cos\alpha\rangle$ і винести їх за знак інтеграла:

$$\Phi_E = \int \langle E\rangle\langle cos\alpha\rangle dS = \langle E\rangle\langle cos\alpha\rangle \int dS.$$

Виконуємо інтегрування і замінюємо $\langle E\rangle$ та $\langle cos\alpha\rangle$ їх наближеними значеннями E_A й $cos\alpha_A$, які обчислені для середньої точки пластинки. Як результат отримаємо:

$$\Phi_E = E_A cos\alpha_A S = \pi r^2 E_A cos\alpha_A. \qquad (3)$$

Напруженість в точці А E_Aобчислюється за формулою $E_A = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}$. Із тригонометричних формул випливає, що $cos\alpha_A = cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = sin\beta$. З врахуванням цього, формула (3) матиме вигляд:

$$\Phi_E = \frac{\pi r^2\tau}{2\pi\varepsilon_0 a} sin\beta \text{ або } \Phi_E = \frac{r^2\tau}{2\varepsilon_0 a} sin\beta.$$

Після підстановки числових значень в останню формулу виконаємо обчислення:

$$\Phi_E = \frac{r^2\tau}{2\varepsilon_0 a} sin\beta = \frac{(10^{-2})^2 \cdot 30 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} \cdot sin30^\circ = \frac{(10^{-2})^2 \cdot 30 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} \cdot 0{,}5 = 0{,}424 \text{ мВ} \cdot \text{м}.$$

Відповідь: 0,424 мВ · м.

Приклад 8

Визначити напруженість E_A електричного поля, що створюється точковим зарядом $Q = 10$ нКл на відстані $r = 10$ см від нього. Діелектрик – масло з $\varepsilon = 2{,}2$.

Дано:

$Q = 10$ нКл $\quad 10^{-8}$ Кл

$r = 10$ см $\quad 0{,}1$ м

$\varepsilon = 2{,}2$

$E_A - ?$

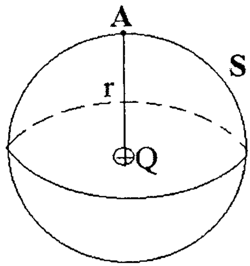


Рисунок 17

Розв'язування

Для розв'язування цієї задачі використаємо теорему Остроградського-Гаусса:

$$\Phi_E = \int E_A dS = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В цьому випадку слід правильно вибрати замкнуту поверхню S. Її вибирають у вигляді сфери, радіус якої r, а поверхня сфери проходить через точку А, заряд Q знаходиться в центрі сфери. Тоді теорема Гаусса матиме вигляд:

$$\Phi_E = \int_0^{4\pi r^2} E_A dS = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$E_A \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ звідси}$$

$$\mathrm{E_A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Після підстановки числових значень, отримаємо:

$$E_A = \frac{10^{-8}}{4{\cdot}3{,}14{\cdot}2{,}2{\cdot}8{,}85{\cdot}10^{-12}{\cdot}0.1^2} = 4089{,}3\ \frac{Н}{Кл}.$$

Відповідь: $4089{,}3\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

Приклад 9

Розрахувати напруженість поля прямої нескінченної нитки, рівномірно зарядженої з лінійною густиною τ, в точці O, віддаленій від нитки на відстань r_0.

Дано:

τ

r_0

E_O—?

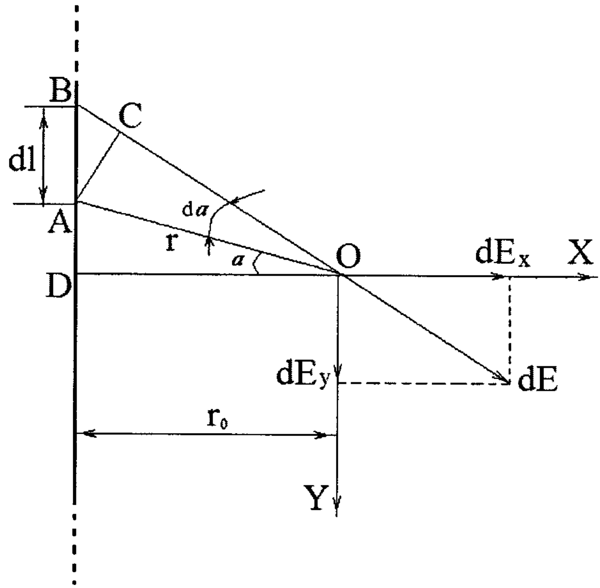


Рисунок 18

Розв'язування

Заряд нитки неточковий, тому застосовувати формулу закона Кулона не можна.

Для розв'язування цієї задачі необхідно розділити нитку на досить малі елементи, щоб заряд на кожному з цих елементів був точковим. Розглянемо один такий елемент довжиною dl, що має заряд $dQ = \tau dl$ (рис. 18).

В точці O елементарна напруженість поля цього заряду:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1)$$

З трикутника ADO розраховуємо $r = \frac{r_0}{cos\alpha}$.

Оскільки $|AC| = rd\alpha = \frac{r_0}{cos\alpha}d\alpha$, то з трикутника ABC визначимо $dl = \frac{|AC|}{cos\alpha} = \frac{r_0}{cos^2\alpha}d\alpha$.

Підставляючи значення r і dl в рівняння (1), отримаємо:

$$dE = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Проекції вектора dE на осі координат OX і OY:

$$dE_x = \frac{\tau cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0};\ dE_y = \frac{\tau sin\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Звідси після інтегрування отримаємо

$$dE_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0};\ dE_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau sin\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = 0.$$

Таким чином, остаточно $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}$.

Відповідь: $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}$.

Приклад 10

Розрахувати напруженість поля прямої нескінченної нитки, рівномірно зарядженої з лінійною густиною τ, в точці О, віддаленій від нитки на відстань r_0.

Дано:

τ

r_0

E_O–?

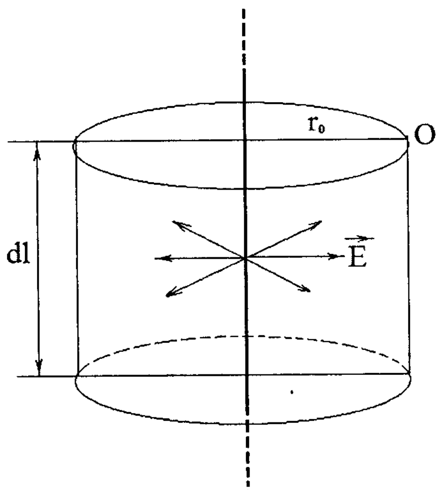


Рисунок 19

Розв'язування

Для Розв'язування цієї задачі використаємо теорему Остроградського-Гаусса:

$$\Phi_E = \int E_A dS = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\tau dl}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В цьому випадку треба правильно вибрати замкнуту поверхню S. Її вибирають у вигляді циліндра, радіус якого r_0, а бічна поверхня його проходить через точку О. Вісь обертання циліндра збігається з зарядженою ниткою. Потік вектора напруженості буде проходити тільки через бічну поверхню циліндра.

Тоді теорема Гаусса матиме вигляд:

$$\Phi_E = \int E_O dS_{б.пов.} = \frac{\tau dl}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$\Phi_E = E_O \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot dl = \frac{\tau dl}{\varepsilon\varepsilon_0}$, звідси

$$E_O = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0}.$$

Відповідь: $E_O = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0}$.

Приклад 11

Розрахувати напруженість поля прямої нескінченної нитки, рівномірно зарядженої з лінійною густиною $\tau = 20$ нКл/м, в точці О, віддаленій від нитки на відстань $r_0 = 1{,}5$ м. Діелектрик – масло $\varepsilon = 2{,}2$.

Дано:

$\tau = 20$ нКл/м

$r_0 = 1{,}5$ м

$\varepsilon = 2{,}2$

E_O–?

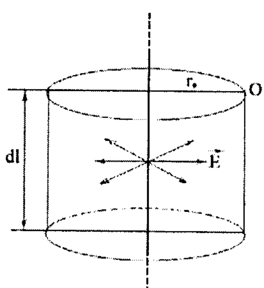


Рисунок 20

Розв'язування

Для розв'язування цієї задачі використаємо теорему Остроградського-Гаусса:

$$\Phi_E = \int E_A dS = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\tau dl}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В цьому випадку слід правильно вибрати замкнуту поверхню S. Її вибирають у вигляді циліндра, радіус якого r_0, а бічна поверхня його проходить через точку О. Вісь обертання циліндра збігається з зарядженою ниткою. Потік вектора напруженості буде проходити тільки через бічну поверхню циліндра.

Тоді теорема Гаусса набуде вигляду:

$$\Phi_E = \int E_O dS_{б.пов.} = \frac{\tau dl}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\Phi_E = E_O \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot dl = \frac{\tau dl}{\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ звідси}$$

$$E_O = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$E_O = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0} = \frac{20\cdot10^{-9}}{2\cdot3{,}14\cdot2{,}2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot1{,}5} = 109{,}047\ Н/Кл.$$

Відповідь: 109,047 Н/Кл.

§ 9 Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Точкові заряди $Q_1 = 50$ мкКл, $Q_2 = 20$ мкКл, знаходяться на відстані $d = 15$ см один від одного. Визначити напруженість поля в точці, віддаленій на $r_1 = 3$ см від першого і $r_2 = 4$ см від другого заряду. Визначити також силу $\vec{F}$, що діє в цій точці на точковий заряд $Q = 2$ мкКл.

3.2. Три однакових точкових заряди $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 5$ нКл знаходяться в вершинах рівностороннього трикутника зі стороною $Q = 15$ см. Визначити модуль і напрям сили $\vec{F}$, яка діє на один із зарядів з боку інших двох.

3.3. Два позитивних точкових заряди Q_1 і Q_2 закріплено на відстані $l = 700$ см один від одного. Визначити, в якій точці на прямій, що проходить через заряди, слід розмістити третій заряд так, щоб він знаходився в рівновазі. Який знак повинен мати цей заряд для того, щоб рівновага була стійкою, якщо переміщення заряду можливе лише вздовж прямої, що проходить через закріплені заряди.

3.4. Дві однакові заряджені кульки підвішено в одній точці на нитках однакової довжини, при цьому нитки розійшлися на кут α. Кульки занурені в олію. Яка густина олії ρ_0, якщо кут α при зануренні не змінюється. Густина матеріалу кульок ρ =1,5 10^3 кг/м^3; діелектрична проникність олії ε= 2,3.

3.5. Чотири однакових заряди $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 50$ нКл закріплені в вершинах квадрата зі стороною a =10 см. Знайти силу $\vec{F}$, яка діє на один з цих зарядів з боку трьох інших.

3.6. У вершинах квадрата знаходяться однакові заряди $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 8 \cdot 10^{-10}$ Кл. Який негативний заряд Q треба розмістити в центрі квадрата, щоб сила взаємного відштовхування позитивних зарядів була врівноважена силою притягання негативного заряду?

3.7. На відстані d = 20 см знаходяться два точкових заряди Q_1 = -50 нКл і Q_2 =100 нКл. Визначити силу $\vec{F}$, яка діє на заряд $Q_3 = -10$ нКл, який знаходиться на відстані d=20 см від обох зарядів.

3.8. Відстань d між двома точковими зарядами Q_1 = 2 нКл і Q_2 = 4 нКл дорівнює 60 см. Визначити точку, в якій потрібно розмістити третій заряд Q_3 так, щоб система зарядів знаходилась у рівновазі. Визначити величину та знак заряду. Стійка чи нестійка буде рівновага?

3.9. На тонкому кільці рівномірно розподілено заряд з лінійною густиною τ= 0,2 нКл/см. Радіус кільця R = 15 см. На осі кільця знаходиться точковий заряд Q = 10 нКл. Визначити силу F, яка діє на точковий заряд з боку зарядженого кільця, якщо він знаходиться від центра кільця на відстані: 1) $R_1 = 20\,\text{см}$; 2) $R_2 = 10\,\text{м}$

3.10. На тонкій нитці, зігнутій в дугу кола радіусом R = 10 см, рівномірно розподілено заряд Q = 20 нКл. Визначити напруженість $\vec{E}$ поля, створеного цим зарядом у точці, яка збігається з центром кривизни дуги, якщо довжина нитки дорівнює чверті довжини кола.

3.11. Визначити напруженість $\vec{E}$ поля, яка створюється зарядом, рівномірно розподіленим по тонкому прямому стрижню з лінійною густиною заряду τ =200 нКл/м, в точці, яка лежить на продовженні осі стержня на відстані d =20 см від ближнього кінця. Довжина стержня l = 40 см.

3.12. На продовженні осі тонкого прямого стержня, рівномірно зарядженого з лінійною густиною заряду τ = *15* нКл/см, на відстані a = 40 см від кінця стержня знаходиться точковий заряд Q = 10 мкКл. Другий кінець стержня спрямований до нескінченності. Визначити силу взаємодії стержня і заряду Q.

3.13. Тонким кільцем радіусом R=10 см рівномірно розподілено заряд Q=10 нКл. Яка напруженість $\vec{E}$ поля в точці, що знаходиться на осі кільця на відстані a = 20 см від центра кільця?

3.14. Два довгих тонких рівномірно заряджених (τ = 1 мкКл) стержня розташовані перпендикулярно один до одного так, що точка перетину їх осей знаходиться на відстані a = 10 см і b = 15 см від ближчих кінців стержнів. Знайти силу $\vec{F}$, що діє на заряд Q = 10 нКл, розміщений в точці перетину осей стержнів.

3.15. Тонке півкільце радіусом R = 20 см має рівномірно розподілений заряд Q_1 =2 мкКл. Визначити силу $\vec{F}$, яка діє на точковий заряд Q_2 = 40 нКл, розташований в центрі кривизни півкільця.

3.16. Визначити напруженість $\vec{E}$ поля, утвореного тонким довгим стержнем, рівномірно зарядженим з лінійною густиною заряду τ =20 мкКл/м в точці, яка знаходиться на відстані a = 2 см від стержня біля його середини.

3.17. Паралельно нескінченній площині, зарядженій з поверхневою густиною заряду σ = 4 мкКл/м^2, розташована нескінченно довга пряма нитка, заряджена з лінійною густиною заряду τ = 100 нКл/м. Визначити силу $\vec{F}$, що діє з боку площини на відрізок нитки довжиною l = 1 м.

3.18. У точці А, розташованій на відстані 5 см від нескінченно довгої зарядженої нитки, напруженість електричного поля 150 кВ/м. При якій граничній довжині нитки знайдене значення напруженості буде правильним з точністю до 2%, якщо точка А розташована на нормалі до середини нитки? Яка напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точці А, якщо довжина нитки 20 см? Лінійну густину заряду на нитці скінченної довжини вважати такою, що дорівнює лінійній густині заряду на нескінченно довгій нитці. Знайти лінійну густину заряду на нитці.

3.19. Кільце з дроту радіусом 10 см має негативний заряд 5 нКл. Знайти напруженості $\vec{E}$ електричного поля на осі кільця в точках, розташованих від центра кільця на відстанях L 0, 5, 8, 10 і 15 см. Побудувати графік $\vec{E} = f(L)$, На якій відстані L від центра кільця напруженість $\vec{E}$ електричного поля буде мати максимальне значення?

3.20. Напруженість електричного поля на осі зарядженого кільця має максимальне значення на відстані L від центра кільця. В скільки разів напруженість електричного поля в точці, яка розташована на відстані 0,5L від центра кільця буде менша максимального значення напруженості?

3.21. Показати, що електричне поле, утворене зарядженим диском, у граничних випадках переходить в електричне поле: а) нескінченно протяжної площини; б) точкового заряду.

3.22. Діаметр зарядженого диска $D = 25$ см. При якій граничній відстані a від диска електричне поле можна розглядати як поле нескінченно протяжної площини? Похибка при такому допущенні не повинна перевищувати $\delta = 0,05$.

3.23. На відстані 4 см від безмежно довгої зарядженої нитки знаходиться точковий заряд 0,55 пКл. Під дією поля заряд наближається до нитки на відстань 2 см; при цьому здійснюється робота 50 мДж. Знайти лінійну густину заряду нитки.

3.24. Дві довгі однойменно заряджені нитки розташовані на відстані 5 см одна від одної. Лінійна густина заряду на нитках 15 мкКл/м. Знайти модуль і напрям напруженості $\vec{E}$ результуючого електричного поля в точці, що знаходиться на відстані 20 см від кожної нитки.

3.25. З якою силою на одиницю площі відштовхуються дві однойменно заряджені нескінченно протяжні площини ? Поверхнева густина заряду на площинах 5 мкКл/м^2 .

3.26. Дві однакові круглі пластини площею $S = 200$ см^2 розташовані паралельно одна до одної. Заряд однієї пластини Q_1=200 нКл, іншої Q_2=-200 нКл. Визначити силу $\vec{F}$ взаємного притягання пластин, якщо відстань між ними: а) $r_1 = 5$ мм; б) $r_2 = 20$ м.

3.27. На нескінченному тонкостінному циліндрі діаметром $d = 20$ см рівномірно розподілено заряд з поверхневою густиною $\sigma = 4$ мкКл/м^2. Визначити напруженість поля в точці, яка віддалена від поверхні циліндра на $a = 15$ см.

3.28. З якою силою (на одиницю площі) взаємодіють дві нескінченні паралельні площини, заряджені з однаковою поверхневою густиною заряду $\sigma = 5$ мкКл/м^2?

3.29. Дві довгі прямі паралельні нитки знаходяться на відстані $d = 5$ см одна від одної. На нитках рівномірно розподілено заряди з лінійною густиною заряду τ_1= 5 нКл/см і τ_2= 10 нКл/см. Визначити напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точці, яка знаходиться на відстані $r_1 = 3$ см від першої нитки і на відстані $r_2 = 4$ см від другої нитки.

3.30. До нескінченної рівномірно зарядженої вертикальної площини підвішено на нитці однойменно заряджену кульку масою $m = 30$ мг і зарядом $Q = 0,5$ нКл. Сила натягу нитки, на якій висить кулька, $\vec{F} = 0,9$ мН. Знайти поверхневу густину заряду σ на площині.

3.31. З якою силою (на одиницю довжини) взаємодіють дві заряджені нескінченно довгі паралельні нитки з однаковою лінійною густиною заряду τ= 20 мкКл/м, які знаходяться на відстані r = 10 см одна від одної?

3.32. Поверхнева густина заряду σ нескінченної вертикальної площини дорівнює 400 мкКл/м^2. До площини на нитці підвішено заряджену кульку масою m = 10 г. Визначити заряд Q кульки, якщо нитка створює з площиною кут φ = 30°.

3.33. Визначити потенціальну енергію W системи двох точкових зарядів Q_1 = 400 нКл і Q_2 = 20 нКл, які знаходяться на відстані r = 5 см один від одного. Побудувати графік залежності енергії електростатичної взаємодії двох точкових зарядів від відстані між ними в інтервалі $2 \le r \le 10$ см через кожні 2 см. Заряди Q_1 = 1нКл і Q_2 = 3 нКл, ε =1. Графік побудувати для: а) однойменних зарядів; б) різнойменних зарядів.

3.34. Знайти напруженість електричного поля в точці, що лежить посередині між точковими зарядами Q_1 = 8 нКл і Q_2 = 6 нКл. Відстань між зарядами r = 10 см, ε = 1.

3.35. Дві паралельні заряджені площини, поверхнева густина заряду яких σ_1 = 2 мкКл/м^2 і σ_2 = -0,8 мкКл/м^2 знаходяться на відстані d = 0,6 см одна від одної. Визначити різницю потенціалів U між площинами.

3.36. Поле утворене нескінченною рівномірно зарядженою площиною з поверхневою густиною заряду σ = 40 нКл/м^2. Визначити різницю потенціалів U двох точок поля, віддалених від площини на r_1 = 15 см і r_2 = 20 см.

3.37. Чотири однакових краплі ртуті, заряджені до потенціалу φ = 10 В з'єднуються в одну. Який буде потенціал φ_1 краплі, що виникла?

3.38. Тонкий стержень зігнутий в кільце радіусом R = 10 см. Він рівномірно заряджений з лінійною густиною заряду τ = 800 нКл/м. Визначити потенціал φ в точці, яка знаходиться на осі кільця на відстані h = 10 см від його центра.

3.39. Поле створене точковим диполем з електричним моментом p = 200 нКл м. Визначити різницю потенціалів U двох точок поля, розташованих симетрично відносно диполя на його осі на відстані r = 40 см від центра диполя.

3.40. Електричне поле створене нескінченно довгою зарядженою ниткою, лінійна густина заряду якої τ = 20 нКл/м. Визначити різницю потенціалів U двох точок поля, віддалених від нитки на відстань r_1 = 8 см i r_2 = 12 см.

3.41. Тонка квадратна рамка рівномірно заряджена з лінійною густиною

$\tau = 200$ нКл/м. Визначити потенціал φ поля в точці перетину діагоналей.

3.42. Порошинка масою 200 мкг, яка несе на собі заряд $Q = 40$ нКл влетіла в електричне поле в напрямі силових ліній. Після проходження різниці потенціалів U=200 В порошинка мала швидкість $\vec{V}_0$=10 *м/с*. Визначити швидкість порошинки до того, як вона влетіла в поле.

3.43. Електрон з кінетичною енергією $T = 10$ еВ влетів в однорідне електричне поле в напрямі силових ліній поля. Яку швидкість буде мати електрон, пройшовши в цьому полі різницю потенціалів $U = 8$ В ?

3.44. Знайти відношення швидкостей іонів Cu^- і K^-, що пройшли однакову різницю потенціалів.

3.45. Електрон з енергією $T = 400$ еВ (в нескінченності) рухається вздовж силової лінії до поверхні металевої зарядженої сфери радіусом $R = 10$ см. Визначити мінімальну відстань, на яку наблизиться електрон до поверхні сфери, якщо заряд її $Q = -10$ нКл.

3.46. Електрон, пройшовши в плоскому конденсаторі шлях від однієї пластини до іншої, мав швидкість $\vec{v} = 10$ м/с. Відстань між пластинами $d = 8$ мм. Знайти: 1) різницю потенціалів U між пластинами; 2) поверхневу густину заряду σ на пластинах.

3.47. Електрон з деякою початковою швидкістю влітає в плоский конденсатор паралельно до пластин на однаковій відстані від них. До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів 300 В. Відстань між пластинами 2 см, довжина конденсатора 10 см. Якою має бути гранична початкова швидкість електрона, щоб електрон не вилетів із конденсатора?

3.48. Частинка масою 5 нг, яка несе на собі N=100 електронів, пройшла в вакуумі прискорювальну різницю потенціалів U=1 мВ, яка кінетична енергія частинки ? Яку швидкість здобула частинка ?

3.49. Іон атому Li пройшов різницю потенціалів $U = 400$ В, іон атому Na – різницю потенціалів $U = 300$ В. Знайти відношення швидкостей цих іонів.

3.50. При бомбардуванні нерухомого ядра K^+ α-частинкою сила відштовхування між ними досягає $\vec{F} = 100$ Н. На яку найменшу відстань наблизилась α-частинка до ядра атома калію? Яку швидкість мала α-частинка на великій відстані від ядра? Впливом електронної оболонки атома калію знехтувати.

3.51. Відстань між пластинами плоского конденсатора $d = 2$ мм різниця потенціалів $U = 600$ В. Заряд кожної пластини $Q = 40$ нКл. Визначити енергію W поля конденсатора та силу $\vec{F}$ взаємного притягання пластин.

3.52. У плоскому горизонтально розташованому конденсаторі заряджена крапелька ртуті знаходиться в рівновазі при напруженості електричного поля 60 кВ/м. Заряд краплі $Q = 5$ мкКл. Знайти радіус краплі.

3.53. Два однакових плоских повітряних конденсатори, ємністю $C = 100$ мкФ кожен, з'єднані послідовно. Визначити, на скільки зміниться ємність батареї, якщо простір між пластинами одного з конденсаторів заповнити парафіном.

3.54. Два конденсатори із ємностями $C_1 = 5$ мкФ і $C_2 = 8$ мкФ з'єднані послідовно і приєднані до батареї з е.р.с. $\varepsilon = 80$ В. Визначити заряди Q_1 і Q_2 конденсаторів та різницю потенціалів U_1 і U_2 між їхніми обкладками.

3.55. Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин радіусом $R = 10$ см кожна. Відстань між пластинами $d = 2$ мм. Конденсатор приєднаний до джерела струму з напругою $U = 80$ В. Визначити заряд Q і напруженість E поля конденсатора в двох випадках: а) діелектрик – повітря; б) діелектрик – скло.

3.56. Два однакових плоских повітряних конденсатори з'єднали послідовно в *батарею*, яка під'єднана до джерела струму з е.р.с. $\varepsilon = 12$ В. Визначити, на скільки зміниться напруга на одному з конденсаторів, якщо другий занурити в трансформаторне масло.

3.57. Плоский повітряний конденсатор складається із двох круглих пластин радіусом $r = 10$ см кожна. Відстань d_1 між пластинами дорівнює 1 см. Конденсатор зарядили до різниці потенціалів $U = 1{,}2$ кВ і від'єднали від джерела струму. Яку роботу A потрібно здійснити, щоб, віддаляючи пластини одна від одної, збільшити відстань між ними до $d_2 = 3{,}5$ см?

3.58. Дві металеві кульки радіусами $R_1 = 5$ см і $R_2 = 10$ см мають заряди $Q_1 = 40$ нКл і $Q_2 = -20$ нКл, відповідно. Знайти енергію, яка виділяється при розряді, якщо кульки з'єднані провідником.

3.59. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений двома шарами діелектрика: склом товщиною $d_1 = 0{,}2$ см і парафіну товщиною $d_1 = 0{,}3$ см. Різниця потенціалів між обкладками $U = 300$ В. Визначити напруженість поля і спад потенціалу в кожному шарі.

3.60. Плоский конденсатор, з площею пластин $S = 200$ см^2 кожна, заряджений до різниці потенціалів $U = 2$ кВ. Відстань між пластинами $d = 2$ см. Діелектрик – скло. Визначити енергію W поля конденсатора і густину енергії ω поля.

§ 10 Закони постійного струму

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Сила постійного струму:

$$I = q/t,$$

де q – заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час t.

2. Густина електричного струму є векторна величина, яка дорівнює відношенню сили струму до площі S поперечного перерізу провідника:

$$\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{k},$$

де k – одиничний вектор, який за напрямком збігається з напрямком руху позитивних носіїв заряду.

3. Опір однорідного провідника:

$$R = \rho\frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір речовини провідника;

l – його довжина.

4. Провідність G провідника і питома провідність σ речовини:

$$G = \frac{1}{R}, \qquad \sigma = \frac{1}{\rho}.$$

5. Залежність питомого опору від температури:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

де ρ і ρ_0 – питомі опори відповідно при t і 0 °C;

t – температура (за шкалою Цельсія);

α – температурний коефіцієнт опору.

6. Опір послідовно з'єднаних провідників:

$$R=\sum_{i=1}^{n} R_i .$$

Опір паралельно з'єднаних провідників:

$$\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i},$$

де R_i – опір i-го провідника;

n – кількість провідників.

7. Закон Ома в інтегральній формі:

– для неоднорідної ділянки кола

$$I=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)+\varepsilon_{12}}{R+\mathrm{r}};$$

– для однорідної ділянки кола $(\varepsilon_{12}=0)$

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=\frac{U}{R};$$

– для замкнутого кола $(\varphi_1=\varphi_2)$

$$I=\frac{\varepsilon}{R+r},$$

де $(\varphi_1-\varphi_2)$ – різниця потенціалів на кінцях ділянки кола;

$\varepsilon_{1,2}$ – е.р.с. джерел струму, що входять у цю ділянку;

U – напруга на ділянці кола;

R – опір кола (ділянки кола);

ε – е.р.с. усіх джерел струму замкнутого кола.

8. Правила Кірхгофа.

Перше правило: алгебраїчна сума сил струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

де n – кількість струмів, що сходяться у вузлі.

Друге правило: у замкненому контурі алгебраїчна сума спадів напруги на всіх ділянках контура дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i,$$

де I – сила струму на і-й ділянці;

R_i – активний опір на і-й ділянці;

ε_1 – е.р.с. джерел струму на і-й ділянці;

n – кількість ділянок, що містять активний опір;

k – кількість джерел струму на всіх ділянках замкнутого контура.

9. Робота, яка виконується електростатичним полем і сторонніми силами на ділянці кола постійного струму за час t:

$$A = IUt.$$

10. Потужність струму:

$$P = IU.$$

11. Закон Джоуля – Ленца:

$$Q = I^2 Rt,$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється на ділянках кола за час t.

Закон Джоуля – Ленца має місце за умови, що ділянка кола нерухома і в ній не здійснюються хімічні перетворення, струм постійний.

12. Густина струму $\vec{j}$, середня швидкість $<\vec{\upsilon}>$ впорядкованого руху носіїв заряду та їх концентрація n пов'язані співвідношенням:

$$\vec{j} = nq<\vec{\upsilon}>,$$

де q – елементарний заряд.

13. Закон Ома у диференціальній формі:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

де σ – питома провідність провідника ($\sigma = \frac{\mathrm{nq}^2\tau}{2m}$);

E – напруженість електричного поля;

τ – середній час вільного руху носіїв струму;

m – маса електрона.

14. Закон Джоуля – Ленца у диференціальній формі:

$$\omega = \sigma E^2,$$

де ω – об'ємна густина теплової потужності.

15. Закони електролізу Фарадея. Перший закон:

$$m = kQ,$$

де m – маса речовини, що виділилась на електроді під час проходження через електроліт електричного заряду Q;

k – електрохімічний еквівалент речовини.

Другий закон:

$$k = \frac{\mu}{nF},$$

де F – стала Фарадея (F = 96,5 кКл/моль);

μ – молярна маса іонів даної речовини;

n – валентність іонів.

Об'єднаний закон:

$$m = \frac{1}{F}\frac{\mu}{n}Q = \frac{1}{F}\frac{\mu}{n}It,$$

де I – сила струму, що проходить через електроліт;

t – час, протягом якого протікав струм.

16. Рухливість іонів:

$$b = \frac{<\upsilon>}{E},$$

де $<\upsilon>$ – середня швидкість впорядкованого руху іонів;

E – напруженість електричного поля.

17. Закон Ома у диференціальній формі для електролітів і газів при самостійному розряді в області, яка далека від насичення:

$$\vec{j} = Qn(b_+ + b_-)\vec{E},$$

де Q – заряд іона;

n – концентрація іонів;

b_+ *і* b_- – рухливість відповідних іонів;

18. Густина струму насичення:

$$I_{нас} = Qn_0d\ ,$$

де n_o – кількість пар іонів, які створює іонізатор в одиниці об'єму за одиницю часу;

d – відстань між електродами ($n_0 = N/(Vt)$, де N – кількість пар іонів, що створює іонізатор за час t у просторі між електродами;

V – об'єм цього простору.

§ 11 Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Сила струму в провіднику рівномірно зростає від $I_0 = 0$ А до $I = 3$ А протягом часу $t = 10$ с. Визначити заряд q, що пройшов в провіднику.

Дано:

$I_0 = 0$ А

$I = 3$ А

$t = 10$ с

$q - ?$

Розв'язування

За означенням сили струму маємо: $I = \frac{dq}{dt}$, звідки $dq = I(t)dt$. Щоб розв'язати це рівняння, потрібно проінтегрувати його ліву та праву частини:

$$\int_0^q dq = \int_0^t I(t)dt \quad \xrightarrow{\text{звідси}} \quad q = \int_0^t 0{,}3t dt = 0{,}3\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{10} = 0{,}3 \cdot \frac{10^2}{2} =$$

15 (Кл).

Відповідь: 15 Кл.

Приклад 2

Сила струму в провіднику змінюється за законом $I(t) = 2t + 3t^2$ протягом часу $t = 10$ с. Визначити заряд q, що пройшов у провіднику.

Дано:

$I(t) = 2t + 3t^2$

$t = 10$ с

$q - ?$

Розв'язування

За означенням сили струму маємо: $I = \frac{dq}{dt}$, звідки $dq = I(t)dt$. Щоб розв'язати це рівняння, потрібно проінтегрувати його ліву та праву частини:

$$\int_0^q dq = \int_0^t I(t)dt$$

звідки $q = \int_0^t (2t + 3t^2)dt = (t^2 + t^3)_0^{10} = 10^2 + 10^3 = 1100$ (Кл).

Відповідь: 1100 Кл.

Приклад 3

Визначити густину струму j в залізному провіднику довжиною $l = 10$ м, якщо провідник знаходиться під напругою $U = 6$ В. Питомий опір провідника $\rho = 9{,}8$ нОм·м.

Дано:

$l = 10$ м

$U = 6$ В

$\rho = 9{,}8$ нОм·м

j–?

Розв'язування

За означенням густини струму та за законом Ома для ділянки кола знайдемо: $I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\rho\frac{l}{S}}$. Тоді $j = \frac{I}{S} = \frac{US}{\rho l S} = \frac{U}{\rho l}$.

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$j = \frac{6}{9{,}8 \cdot 10^{-9} \cdot 10} = 6 \cdot 10^6 \, \frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 6 \left(\frac{\text{МА}}{\text{м}^2}\right).$$

Відповідь: 6 $\frac{\text{МА}}{\text{м}^2}$.

Приклад 4

Визначити заряд q, що проходить через провідник опором $R = 3$ Ом при рівномірному зростанні напруги на кінцях провідника від $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В протягом часу $t = 20$ с.

Дано:

$R = 3$ Ом

$U_0 = 2$ В

$U = 4$ В

$t = 20$ с

---

q–?

Розв'язування

За означенням сили струму маємо: $I = \frac{dq}{dt}$, звідки $dq = I(t)dt$. Щоб розв'язати це рівняння, потрібно проінтегрувати його ліву та праву частини:

$$\int_0^q dq = \int_0^t I(t)dt = \int_0^t \frac{U(t)}{R} dt. \quad (1)$$

Напруга в даному випадку є змінною. Тому при рівномірному зростанні напруги вона може бути виражена формулою:

$$U = U_0 + kt, \quad (2)$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Підставивши цей вираз у формулу (1), знайдемо:

$$q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{kt}{R}\right) dt = \frac{U_0}{R}\int_0^t dt + \frac{k}{R}\int_0^t tdt.$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо:

$$q = \frac{U_0 t}{R} + \frac{kt^2}{2R} = \frac{t}{2R}(2U_0 + kt). \quad (3)$$

Значення коефіцієнта пропорційності k знайдемо із формули (2), враховуючи, що $t = 20$ с, $U_0 = 2$ В, $U = 4$ В:

$$k = \frac{U - U_0}{t} = \frac{4-2}{20} = 0{,}1\ \frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

Підставляючи значення фізичних величин у формулу (3), знайдемо

$$q = \frac{20}{2 \cdot 3}(2 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 20) = 20\ (\text{Кл}).$$

Відповідь: 20 Кл.

Приклад 5

До джерела з е.р.с. $\varepsilon = 60$ В підключили послідовно вольтметр і амперметр. Визначити внутрішній опір джерела, якщо амперметр показує силу струму $I = 0{,}25$ А, вольтметр напругу $U = 50$ В, а внутрішній опір амперметра $r = 4$ Ом.

Дано:

$\varepsilon = 60$ В

I=0,25 A

U=50 B

r_A=4 Ом

r-?

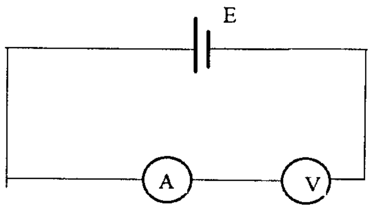


Рисунок 21

Розв'язування

За законом Ома для повного кола:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + r_A + r_V}.$$

Звідки внутрішній опір джерела r:

$$r = \frac{\varepsilon}{I} - r_A - r_V.$$

Опір вольтметра $r_V = \frac{U}{I} = \frac{50}{0{,}25} = 200$ Ом.

Після підстановки числових значень у формулу $r = \frac{\varepsilon}{I} - r_A - r_V$ отримаємо $r = \frac{60}{0{,}25} - 4 - 200 = 36$ Ом.

Відповідь: 36 Ом.

Приклад 6

Два джерела струму з електрорушійними силами $\varepsilon_1 = 1{,}5$ В та $\varepsilon_2 = 1{,}5$ В під'єднані в коло постійного струму, електрична схема якого показана на рис. 22. Внутрішній опір кожного джерела струму $r_1 = 2$ Ом,

$r_2 = 3$ Ом. Опір зовнішнього навантаження $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5$ Ом. Знайти струми I_i на кожному провіднику електричного кола.

Дано:

$\varepsilon_1 = 1{,}5$ В

$\varepsilon_2 = 1{,}5$ В

$r_1 = 2$ Ом

$r_2 = 3$ Ом

$R_i = 5$ Ом

$i = 1..4$

$I_i - ?$

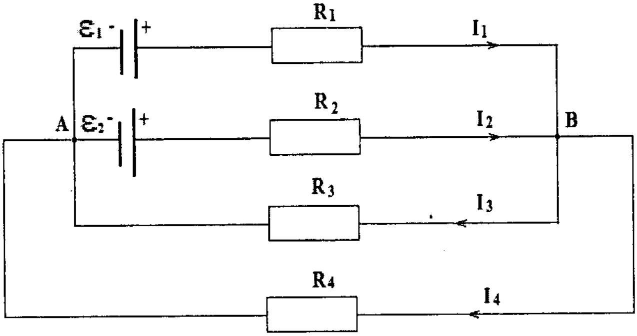


Рисунок 22

Розв'язування

Відповідно до першого правила Кірхгофа алгебраїчна сума сил струмів в електричному вузлі дорівнює нулю. Для цього слід врахувати правило знаків: струмам, які входять до електричного вузла, присвоюють знак «плюс», а струмам, які виходять з електричного вузла, присвоюють знак «мінус».

Математично це записується так:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0.$$

Для нашої електричної схеми, зокрема для вузла А, маємо:

$$I_3 + I_4 - I_1 - I_2 = 0. \qquad (1)$$

Відповідно до другого правила Кірхгофа алгебраїчна сума електрорушійних сил E в замкнутому електричному контурі дорівнює алгебраїчній сумі спадів напруг на кожному елементі контура, враховуючи спад напруги на джерелі. Для цього теж враховують правило знаків: якщо струм за напрямком збігається з вибраним напрямком обходу контура (за годинниковою стрілкою), то відповідний спад напруги (добуток струму на опір IR) входить в рівняння зі знаком «плюс», в іншому випадку спад напруги входить в рівняння зі знаком «мінус». Якщо електрорушійна сила E при обході контура змінює свій знак всередині джерела з «мінуса» на «плюс», то їй присвоюють знак «плюс», в іншому випадку її присвоюють знак «мінус».

За другим правилом Кірхгофа отримаємо відповідно для контурів: AR_1BR_2A, AR_2BR_3A, AR_3BR_4A такі рівняння:

$$I_1R_1 - I_2R_2 + I_1r_1 - I_2r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{2}$$

$$I_2R_2 + I_3R_3 + I_2r_2 = \varepsilon_2, \tag{3}$$

$$-I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \tag{4}$$

Підставимо в рівняння (2) – (4) значення відповідних опорів і електрорушійних сил та отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$

$$5I_1 - 5I_2 + 2I_1 - 3I_2 = 1{,}5 - 1{,}5,$$

$$5I_2 + 5I_3 + 3I_2 = 1{,}5,$$

$$-5I_3 + 5I_4 = 0.$$

Необхідно розв'язати систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими. Для цього можна використати різні методи, зокрема метод Гаусса, метод детермінантів. Для цього перепишемо рівняння в такому вигляді:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$

$$7I_1 - 8I_2 + 0 + 0 = 0,$$

$$0 + 8I_2 + 5I_3 + 0 = 1{,}5,$$

$$0 + 0 - 5I_3 + 5I_4 = 0.$$

Значення відповідних струмів знайдемо із таких виразів:

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta}, I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta}, I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta}, I_4 = \frac{\Delta_{I_4}}{\Delta},$$

де Δ – визначник системи рівнянь;

Δ_{I_1}, Δ_{I_2}, Δ_{I_3}, Δ_{I_4} – визначники, отримані заміною відповідних стовпців визначника Δ стовпцями, складеними із вільних членів чотирьох рівнянь системи. Знайдемо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 7 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 7 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}\right| = -935$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 1.5 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}\right| = -120 \qquad \frac{-120}{-935} = 0.128$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}\right| = -105 \qquad \frac{-105}{-935} = 0.112$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right| = -112.5 \qquad \frac{-112.5}{-935} = 0.12$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1.5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}\right| = -112.5 \qquad \frac{-112.5}{-935} = 0.12$$

$$0.128 + 0.112 - 0.12 - 0.12 = 0$$

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{-120}{-935} = 0{,}128 \text{ (A)},$$

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{-105}{-935} = 0{,}112 \text{ (A)},$$

$$I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta} = \frac{-112{,}5}{-935} = 0{,}12 \text{ (A)},$$

$$I_4 = \frac{\Delta_{I_4}}{\Delta} = \frac{-112{,}5}{-935} = 0{,}12 \text{ (A)}.$$

Відповідь: $I_1 = 0{,}128$ (A), $I_2 = 0{,}112$ (A), $I_3 = 0{,}12$ (A), $I_4 = 0{,}12$ (A).

§ 12 Задачі для самостійного розв'язування

4.1. Котушка і амперметр з'єднані послідовно та приєднані до джерела струму. До клем котушки приєднано вольтметр з опором r = 4 кОм. Амперметр показує силу струму I = 0,3 А, вольтметр – напругу U = 120 В. Визначити опір R котушки. Визначити відносну похибку ε, яка буде допущена при вимірюванні опору, якщо знехтувати силою струму, що тече через вольтметр.

4.2. Е.р.с. батареї $\varepsilon = 80$ В, внутрішній опір $r_1 = 5$ Ом. Зовнішнє коло споживає потужність P = 100 Вт. Визначити силу струму в колі, напругу U, під якою знаходиться зовнішнє коло, та його опір R.

4.3. Від батареї, е.р.с. якої $\varepsilon = 600$ В, треба передати енергію на відстань l = 1 км. Споживана потужність P = 5 кВт. Визначити мінімальні втрати потужності в колі, якщо діаметр мідних підвідних дротів d = 0,5 см.

4.4. Визначити кількість електронів, що проходять за час t = 1 с через поперечний переріз площею S = 1 мм^2 залізного дроту довжиною l = 20 м при напрузі на його кінцях U = 16 В.

4.5. Е.р.с. батареї $\varepsilon = 24$ В. Найбільша сила струму, яку може дати батарея, I_{max} = 10 А. Визначити максимальну потужність P_{max}, яка може виділитися в зовнішньому колі.

4.6. При зовнішньому опорі R_1 =8 Ом сила струму в колі I_1 = 0,8 А, при опорі R_2=15 Ом сила струму I_2 = 0,5 А. Визначити силу струму короткого замикання джерела е.р.с.

4.7. В мережу з напругою U = 100 В під'єднали котушку з опором R_1 = = 2 кОм і вольтметр, з'єднані послідовно. Вольтметр показує U_1 =80 В. Коли котушку замінили іншою, вольтметр став показувати U = 60 В. Визначити опір R_2 цієї котушки.

4.8. За час t = 20 с при силі струму, що рівномірно зростає від нуля до деякого максимуму, в провіднику з опором R = 5 Ом виділилась кількість теплоти Q = 4 кДж. Визначити швидкість зростання сили струму, якщо опір провідника R = 5 Ом.

4.9. Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом $I = I_0 e^{-\alpha t}$, де I_0 = 20 А, $\alpha = 10^2$ с$^{-1}$ Визначити кількість теплоти, що виділиться в провіднику за час $t = 10^{-2}$ с.

4.10. Сила струму в провіднику з опором R = 10 Ом за час t = 50 с рівномірно зростає від I_1 = 5 А до I_2 = 10 А. Визначити кількість теплоти Q, яка виділиться за цей час у провіднику.

4.11. В провіднику за час t = 10 с при рівномірному зростанні сили струму від I_1 = 5 А до I_2 = 10 А виділилась кількість теплоти Q = 5 кДж. Знайти опір R провідника.

4.12. Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом $I = I_0 sin\omega t$. Знайти заряд Q, що проходить через поперечний переріз провідника за час, що дорівнює половині періоду T, якщо початкова сила струму $I_0 = 10$ А, циклічна частота $\omega = 50\pi$ с$^{-1}$.

4.13. За час $t = 10$ с при силі струму, що рівномірно зростає від нуля до деякого максимуму, у провіднику виділилась кількість теплоти $Q = 40$ кДж. Визначити середню силу струму $\langle I \rangle$ в провіднику, якщо його опір $R =$ $=2$ Ом.

4.14. За час $t = 8$ с при силі струму, що рівномірно зростає, в провіднику з опором $R = 8$ Ом виділилась кількість теплоти $Q = 500$ Дж. Визначити заряд q, що пройшов через провідник, якщо сила струму в момент $t = 0$ дорівнює нулю.

4.15. Визначити кількість теплоти, яка виділилась за час $t = 10$ с в провіднику з опором $R = 10$ Ом, якщо сила струму в ньому рівномірно зменшувалась від $I_1 = 10$ А до $I_2 = 0$ А.

4.16. Резистор з опором $R = 6$ Ом підключено до двох паралельно з'єднаних джерел струму з е.р.с. $\varepsilon_1 = 2{,}2$ В і $\varepsilon_2 = 2{,}4$ В і з внутрішнім опором $R_1 = 0{,}8$ Ом та $R_2 = 0{,}2$ Ом. Визначити силу струму I в цьому резисторі і напругу U на клемах другого джерела струму.

4.17. Визначити силу струму в кожному елементі і напругу на реостаті (рис. 24), якщо $\varepsilon_1 = 12$ В, $R_1 = 1$ Ом, $\varepsilon_2 = 6$ В, $R_2 = 1{,}5$ Ом і $R = 20$ Ом.

4.18. Визначити силу струму на всіх ділянках електричної мережі (рис. 25), якщо $\varepsilon_1 = 8$ В, $E_2 = 12$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 4$ Ом, $R_4 = 2$ Ом. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

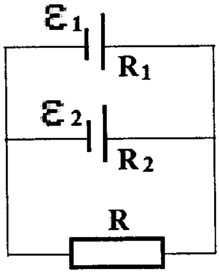


Рисунок 24

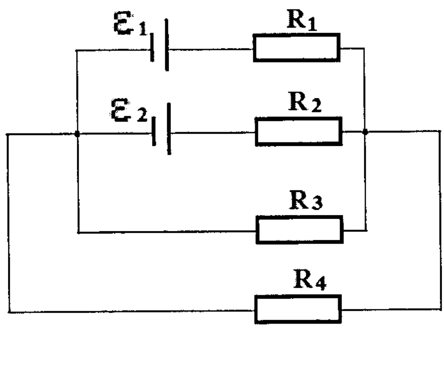


Рисунок 25

4.19. Джерела струму з е.р.с. $\varepsilon_1 = 12$ В та $\varepsilon_2 = 8$ В і внутрішніми опорами $R_1 = 4$ Ом та $R_2 = 2$ Ом, а також провідник з опором $R = 20$ Ом з'єднані, як показано на рис. 24. Визначити силу струму в резисторі та в джерелах струму.

4.20. Дві батареї (ε_1 = 12 В, R_1 = 2 Ом, ε_2 = 24 В, R_2 = 6 Ом) і провідник з опором R = 16 Ом з'єднані, як показано на рис. 24. Визначити силу струму в батареях та резисторі.

4.21. Три резистори з опорами R_1 = 6 Ом, R_2 = 3 Ом і R_3 = 2 Ом, а також джерело струму ε_1 = 2,2 В з'єднані, як показано на рис. 26. Визначити е.р.с. ε_2 джерела, яке треба під'єднати в мережу між точками А і В, щоб у провіднику з опором R_3 йшов струм силою I_3 = 1 А в напрямі, показаному стрілкою. Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

4.22. Визначити різницю потенціалів між точками А і В (рис. 26), якщо ε_1 = 8 В, ε_2= 6 В, R_1 = 4 Ом, R_2 = 8 Ом, R_3 = 6 Ом. Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

4.23. Визначити силу струму I_3 в провіднику з опором R_3 (рис. 27) і напругою на кінцях цього провідника U_3, якщо ε_1 = 6 В, ε_2 = 8 В, R_1 = 4 Ом, R_2 = 8 Ом, R_3 = 6 Ом. Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

4.24. Об'єм газу, який знаходиться між електродами іонізаційної камери, V = 0,8 л. Газ іонізується рентгенівським випромінюванням. Сила струму насичення $I_{нас}$= 6 нА. Скільки пар іонів утворюється за час t = 1 с в об'ємі V = 1 см^3 газу? Заряд кожного іона дорівнює елементарному заряду.

4.25. На відстані d=1 см одна від одної розташовані дві пластини площею S = 400 см^2 кожна. Водень між пластинами іонізують рентгенівським випромінюванням. При напрузі U = 100 В між пластинами протікає далекий від насичення струм силою I = 2 мкА. Визначити концентрацію іонів одного знаку між пластинами. Заряд кожного іона вважати рівним елементарному заряду.

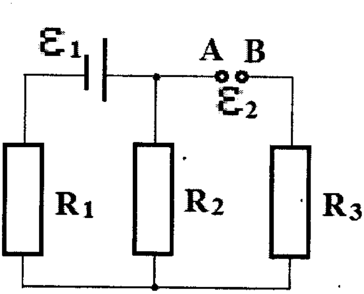


Рисунок 26

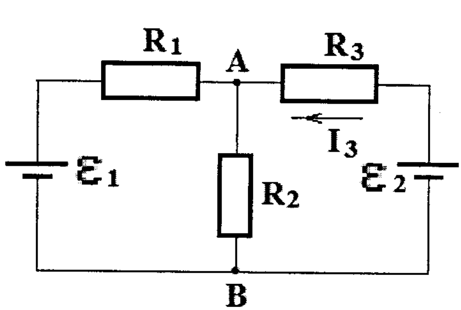


Рисунок 27

4.26. Посередині між електродами іонізаційної камери пролетіла α-частинка, яка рухалась паралельно електродам і створила на своєму шляху ланцюжок іонів. Через який час τ після прольоту α-частинки іони дійдуть до електродів, якщо відстань між електродами d = 2 см, різниця потенціалів U = 6 кВ і рухливість іонів обох знаків в середньому дорівнює b = 1,5 см^2/В·с ?

4.27. Визначити опір трубки довжиною l = 0,5 м і площею поперечного перерізу S = 5 мм^2, якщо вона наповнена азотом, іонізованим так, що в об'ємі V = 1 см^3 знаходиться при рівновазі n =10^8 пар іонів. Іони одновалентні.

4.28. До електродів розрядної трубки, яка вміщує водень, прикладена різниця потенціалів U = 10 В. Відстань між електродами d = 25 см. Іонізатор створює в об'ємі V = 1 см^3 водню n = 10^8 пар іонів за секунду. Визначити густину струму у трубці. Визначити також, яка частина сили струму створюється рухом позитивних іонів. Коефіцієнт рекомбінації $\beta = 10\ м^{-2} \cdot с^{-3}$

4.29. Повітря іонізується рентгенівським випромінюванням. Визначити питому провідність γ повітря, якщо в об'ємі V = 1см^3 газу знаходиться при рівновазі n = 10^8 пар іонів.

4.30. Азот між плоскими електродами іонізаційної камери іонізується рентгенівським випромінюванням. Сила струму, що протікає через камеру I = 1,5 мкА. Площа кожного електрода S = 200 см^2, відстань між ними l = 1,5 см, різниця потенціалів U = 150 В. Визначити концентрацію n іонів між пластинками, якщо струм є далекий від насичення. Заряд кожного іона дорівнює елементарному заряду.

§ 13 Електромагнетизм. Магнітне поле постійного струму

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Закон Біо–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r^3} \left[d\vec{l}\, \vec{r} \right],$$

де $d\vec{B}$ – індукція магнітного поля, яку створює елемент провідника зі струмом;

μ – магнітна проникність;

μ_0 – магнітна стала (μ_0= 4π·10^{-7} Гн/м);

$d\vec{l}$ – вектор, який дорівнює за модулем довжині dl провідника і збігається за напрямком зі струмом у провіднику);

I – сила струму;

$\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від середини елемента провідника до точки, в якій визначається магнітна індукція.

2. Модуль вектора $d\vec{B}$ виражається формулою:

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I \sin\varphi}{r^2} dl,$$

де φ – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{r}$.

3. Магнітна індукція поля довгого прямого провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2),$$

де r_0 – відстань від осі провідника до точки, у якій визначається магнітна індукція (рис. 28).

При симетричному розміщенні кінців провідника відносно точки, в якій визначається магнітна індукція (рис. 29), – $\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 = \cos\varphi$, а тому:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cos\varphi.$$

4. Магнітна індукція поля безмежно довгого провідника зі струмом виражається формулою:

$$B = \frac{\mu\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r_0}$$

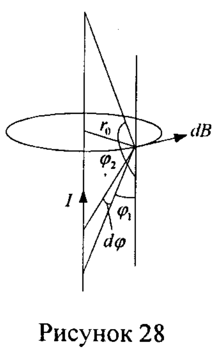


Рисунок 28

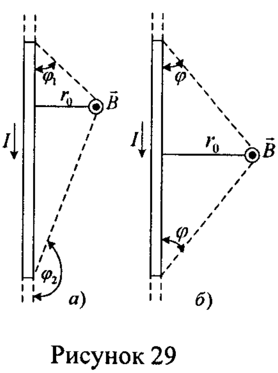


Рисунок 29

Позначення зрозумілі з рис. 28. Напрямок вектора $\vec{B}$ збігається з дотичною до силової лінії, напрям якої визначається правилом правого гвинта.

5. Магнітна індукція B пов'язана з напруженістю H магнітного поля співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

або у вакуумі:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} .$$

6. Магнітна індукція у центрі колового провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{I}{R},$$

де R – радіус кривизни провідника.

7. Магнітна індукція поля, яку створює соленоїд у середній його частині (або на осі тороїда)

$$B = \mu_0 \mu n I ,$$

де n – кількість витків, які припадають на одиницю довжини соленоїда або тороїда;

I – сила струму в одному витку.

8. Принцип суперпозиції магнітних полів. Магнітна індукція B результуючого поля дорівнює векторній сумі магнітних індукцій B_1 , $B_2, \dots,$ B_n полів, що існують у даній точці, тобто:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i .$$

У випадку накладання двох полів:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 ,$$

а абсолютне значення вектора магнітної індукції:

$$B = \sqrt{B^2{}_1 + B^2{}_2 + 2B_1 B_2 \cos\alpha},$$

де α – кут між векторами B_1 і B_2.

9. Закон Ампера. Сила, яка діє на провідник зі струмом в магнітному полі:

$$\vec{F} = \left[\vec{l}\vec{B}\right]I,$$

де I – сила струму;

$\vec{l}$ – вектор, який дорівнює за модулем довжині l провідника і збігається за напрямком зі струмом.

Модуль вектора F визначається такою формулою:

$$F = BIl\sin\alpha,$$

де α – кут між векторами $\vec{l}$ і $\vec{B}$.

Сила взаємодії двох прямих нескінченно довгих паралельних провідників зі струмами I_1 і I_2, розміщених на відстані d один від одного, що діють на відрізок провідника довжиною l, виражається формулою:

$$F = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\frac{I_1I_2}{d}l.$$

10. Магнітний момент контура зі струмом:

$$\vec{P}_m = I\vec{S},$$

де $\vec{S}$ – вектор, який дорівнює за модулем площі S, яку охоплює контур, і збігається за напрямком з нормаллю до його площини.

11. Механічний момент, який діє на контур зі струмом, розміщений в однорідному магнітному полі:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m\vec{B}\right].$$

Модуль механічного моменту:

$$M = p_m B\sin\alpha,$$

де α – кут між векторами $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$.

12. Сила, що діє на контур зі струмом в магнітному полі (змінному вздовж осі Ox),

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos\alpha ,$$

де $\frac{\partial B}{\partial x}$ – зміна магнітної індукції вздовж осі x, розрахована на одиницю довжини;

α – кут між напрямками векторів $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$.

13. Закон повного струму для струму провідності: циркуляція вектора напруженості H магнітного поля вздовж замкненого контура, що охоплюється струмом I, виражається формулою:

$$\oint H_l dl = I ,$$

де H_l – проекція вектора H на напрямок дотичної до контура, що містить елемент dl;

I – сила струму, яка охоплюється контуром.

Якщо контур охоплює n струмів, то

$$\oint H_l dl = \sum_{i=1}^{n} I_i ,$$

де $\sum_{i=1}^{n} I_i$ – алгебраїчна сума струмів, які охоплює контур.

14. Магнітний потік Φ через плоский контур площею S:

– у випадку однорідного поля:

$$\Phi = BS\cos\alpha \quad \text{або} \quad \Phi = B_n S,$$

де α – кут між вектором нормалі до площини контура і вектором магнітної індукції $\vec{B}$;

B_n – проекція вектора $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$ ($B_n = B\cos\alpha$);

– у випадку неоднорідного поля:

$$\Phi = \int_S B_n dS ,$$

де інтегрування ведеться через всю площу S.

15. Потокозчеплення, тобто повний магнітний потік, зчеплений зі всіма витками соленоїда або тороїда:

$$\psi = N\Phi,$$

де Φ – магнітний потік через один виток;

N – кількість витків соленоїда або тороїда.

16. Магнітна індукція на осьовій лінії тороїда:

$$B = \frac{IN\mu\mu_0}{l},$$

де I – сила струму в обмотці тороїда;

N – кількість витків в тороїді;

l – довжина середньої лінії осердя тороїда;

μ – магнітна проникність речовини тороїда;

μ_0 – магнітна стала;

17. Напруженість магнітного поля на осьовій лінії осердя тороїда:

$$H = \frac{B}{\mu\,\mu_0};$$

– магнітний потік в осерді тороїда:

$$\Phi = \frac{IN\mu\,\mu_0 S}{l};$$

– магнітний опір ділянки кола

$$R_m = \frac{1}{\mu\mu_0 S}.$$

18. Магнітна проникність μ феромагнетика, пов'язана з магнітною індукцією B поля в ньому і напруженістю H намагнічувального зовнішнього магнітного поля співвідношенням:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

§ 14 Приклади розв'язування задач

Приклад 1

По відрізку прямого провідника завдовжки $l = 50$ см протікає струм силою $I = 3$ А. Визначити індукцію магнітного поля цього струму в точці, що лежить на перпендикулярі до середини відрізка і віддалена від нього на відстань $r_0 = 10$ см.

Дано:

$l = 50$ см

$I = 3$ А

$r_0 = 10$ см

B – ?

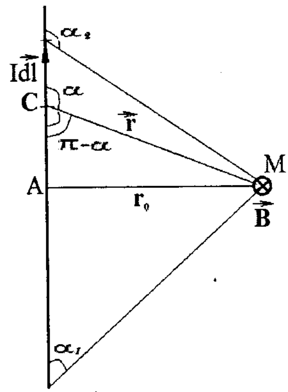


Рисунок 30

Розв'язування

Для визначення індукції магнітного поля скористаємося законом Біо–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\![I d\vec{l}\cdot\vec{r}]\!]}{r^3},$$

де $d\vec{B}$ – індукція магнітного поля елемента струму в точці М;

$\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від початку вектора елемента струму $Id\vec{l}$ в точку М, де потрібно визначити індукцію магнітного поля.

Згідно з принципом суперпозиції магнітних полів індукція магнітного поля струму, що протікає по провіднику, в точці М дорівнюватиме векторній сумі елементарних індукцій магнітних полів усіх елементів струму. Із закону Біо–Савара–Лапласа та з рисунку випливає, що усі елементарні вектори $d\vec{B}$ направлені перпендикулярно до площини, яка проходить через вісь струму і точку М. Тому модуль індукції магнітного поля провідника зі струмом дорівнюватиме сумі модулів усіх елементарних індукцій $d\vec{B}$, що характеризують у точці М відповідні магнітні поля елементів струму. Отже,

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idlsin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dlsin\alpha}{r^2},$$

де кут $\alpha = (\widehat{Id\vec{l},\vec{r}})$.

Інтегрування слід провести вздовж усього провідника. Виконаємо такі перетворення. З трикутника ΔАСМ видно, що:

$$r = \frac{r_0}{sin(\pi-\alpha)} = \frac{r_0}{sin\alpha};$$

$$l = r_0 ctg(\pi - \alpha) = -r_0 ctg\alpha.$$

Продиференціюємо останній вираз:

$$dl = \frac{r_0}{sin^2\alpha}\, d\alpha.$$

Підставимо значення r і dl з отриманих виразів у закон Біо–Савара–Лапласа. Одержимо:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(cos\alpha_1 - cos\alpha_2).$$

Оскільки $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, то $cos\alpha_2 = -cos\alpha_1$.

Тоді з врахуванням цього остаточна формула матиме вигляд:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}cos\alpha_1.$$

Значення кута α_1 знайдемо зі співвідношення:

$$tg\alpha_1 = \frac{r_0}{l/2} = \frac{2r_0}{l}.$$

Підставивши числові значення, одержимо:

$$tg\alpha_1 = \frac{r_0}{l/2} = \frac{2r_0}{l} = \frac{2\cdot 0{,}1}{0{,}5} = 0{,}4, \text{ звідки } \alpha_1 = 22^\circ.$$

Обчислимо індукцію магнітного поля провідника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}cos\alpha_1 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}}{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1}\cdot \cos 22^\circ = 5{,}6\cdot 10^{-6} \text{ Тл}.$$

Відповідь: $B = 5{,}6\cdot 10^{-6}$ Тл.

Приклад 2

Обчислити індукцію магнітного поля провідника зі струмом $I = 2$ А в точці М, розміщеній на відстані $r_0 = 80$ см від провідника.

Дано:

$I = 2\,A$

$r_0 = 80$ см = 0,8 м

$\vec{B}_M$–?

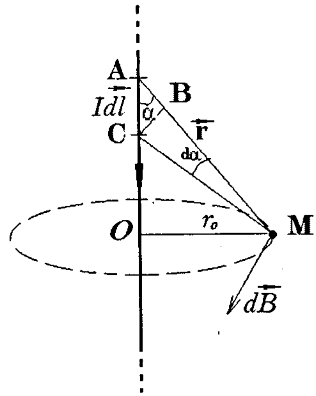


Рисунок 31

Розв'язування

Щоб обчислити індукцію магнітного поля $\vec{B}_M$ в точці М на відстані r_0 від нескінченно довгого лінійного провідника зі струмом, поділимо його на нескінченно малі елементи $Id\vec{l}$ і обчислимо спочатку за законом Біо–Савара–Лапласа індукцію $d\vec{B}$, створювану елементом $Id\vec{l}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\![Id\vec{l}\cdot\vec{r}]\!]}{r^3}. \quad (1)$$

Для заданого напрямку струму I всі елементарні значення індукції магнітного поля в точці M напрямлені в один бік по одній прямій перпендикулярно до площини рисунка до нас. Тому результуюча індукція магнітного поля всіх елементів струму в точці M визначається так:

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dl\sin\alpha}{r^2}. \quad (2)$$

Перейдемо до однієї змінної. З рисунка 31 маємо:

$$r = \frac{r_0}{\sin\alpha};\ dl = \frac{\mathrm{BC}}{\sin\alpha} \approx \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r_0}{\sin\alpha}\frac{d\alpha}{\sin\alpha}.$$

Пряму BC замінимо елементом дуги r, яка спирається на нескінченно малий центральний кут $d\alpha$ ($BC = rd\alpha$).

Підставивши r і dl у вираз (2), одержимо:

$$B_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(cos\alpha_1 - cos\alpha_2). \qquad (3)$$

Для провідника скінченної довжини кути α_1 і α_2 показані на рис. 32.

Для нескінченно довгого провідника зі струмом $\alpha_1 \to 0$ і $\alpha_2 \to \pi$. За цієї умови формула (3) матиме вигляд:

$$B_М = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}. \qquad (4)$$

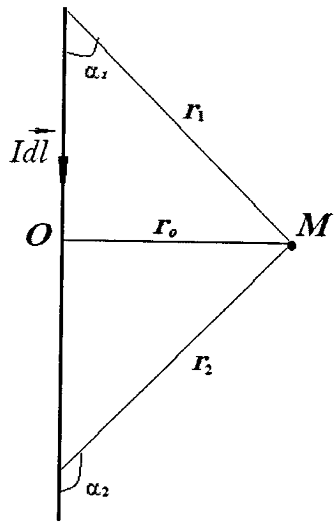


Рисунок 32

Підставивши числові значення у формулу (4), одержимо:

$$B_М = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2}{2\pi\cdot 0{,}8} = \frac{4\cdot 10^{-7}}{0{,}8} = 5\cdot 10^{-7}\ \text{Тл}.$$

Відповідь: $B_м = 5\cdot 10^{-7}$ Тл.

Приклад 3

Обчислити індукцію магнітного поля $\vec{B}_O$ в центрі лінійного колового провідника радіуса $r_0 = 50$ см, по якому проходить струм силою $I = 0{,}5$ А.

Дано:

$r_0 = 50$ см $= 0{,}5$ м

$I = 0{,}5$ А

$\vec{B}_O$–?

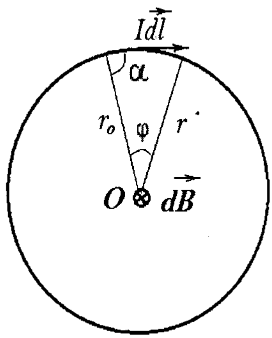


Рисунок 33

Розв'язування

Щоб обчислити індукцію магнітного поля $\vec{B}_O$ в точці О на відстані r_0 від лінійного колового провідника зі струмом, поділимо його на нескінченно малі елементи $Id\vec{l}$ і обчислимо спочатку за законом Біо–Савара–Лапласа індукцію $d\vec{B}$, створювану елементом $Id\vec{l}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[Id\vec{l}\cdot\vec{r}]}{r^3}. \qquad (1)$$

За цією формулою можна встановити, що елементарні значення індукції магнітного поля $d\vec{B}$ кожного елемента струму $Id\vec{l}$ у точці О будуть направлені в один бік (на рисунку 33 направлені від нас за площину рисунка). Тоді:

$$B_0 = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dl\sin\alpha}{r^2}. \qquad (2)$$

Для довільного елемента $d\vec{l}$ ($r = r_0 = const$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ – кут між $Id\vec{l}$ і $\vec{r}$) одержуємо:

$$dl = r_0\, d\varphi.$$

Тоді:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2r_0}. \qquad (3)$$

Підставивши числові значення у формулу (3), одержимо

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2r_0} = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}5}{2\cdot 0{,}5} = 6{,}28\cdot 10^{-7}\text{ Тл}.$$

Відповідь: $B_O = 6{,}28 \cdot 10^{-7}$ Тл.

Приклад 4

Обчислити індукцію магнітного поля $\vec{B}_{O'}$ лінійного колового провідника радіуса $r_0 = 50$ см, по якому проходить струм силою $I = 0{,}5$ А у точці O', віддаленій уздовж осі Oz від центра кола O на відстань $h = 2$ м (рис. 34).

Дано:

$r_0 = 50$ см = 0,5 м

$I = 0{,}5$ А

$h = 2$ м

$\vec{B}_{O'}$–?

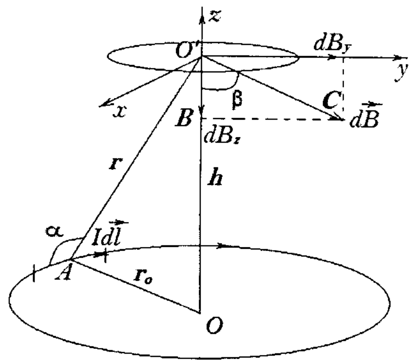


Рисунок 34

Розв'язування

Щоб обчислити індукцію магнітного поля $\vec{B}_{O'}$ в точці O' на відстані h від лінійного колового провідника зі струмом, поділимо його на нескінченно малі елементи $Id\vec{l}$ і обчислимо спочатку за законом Біо–Савара–Лапласа індукцію $d\vec{B}$, що створюється елементом $Id\vec{l}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\![Id\vec{l}\cdot\vec{r}]\!]}{r^3} \quad \text{або} \qquad (1)$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\,sin\alpha}{r^2}, \qquad (2)$$

де $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Вектор $d\vec{B}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $Id\vec{l}$ та $\vec{r}$, і направлений до осі OO' під кутом β. Тому проекція $d\vec{B}$ на вісь Oz $dB_z = dB\ cos\beta$, а на вісь $Oy - dB_y = dBsin\beta$.

Визначивни відповідні проекції елементарних індукцій від інших елементів струму $Id\vec{l}$, на які можна розбити увесь коловий струм, помітимо, що всі проекції на осі Ox і Oy елементарних індукцій взаємно компенсуються і результуючі значення цих проекцій дорівнюватимуть нулю $(B_x = B_y = 0)$, а проекції на вісь Oz будуть направлені вздовж осі Oz в один бік. Тому їх можна додавати алгебраїчно, тобто:

$$B_z = \int dBcos\beta.$$

З подібності трикутників OAO' і $O'BC$ випливає рівність кутів $\angle O'AO = \angle BO'C$ (як кутів, сторони яких є взаємно перпендикулярними, $d\vec{B} \perp \vec{r}, O'B \perp OA$). З трикутника $\Delta OAO'$ випливає:

$$cos\beta = \frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + h^2}}.$$

Тоді:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0^2 + h^2} \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + h^2}} \int_0^{2\pi r_0} dl = \frac{\mu_0 I\, r_0^2}{2(r_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (3)$$

Підставивши числові значення у формулу (3), одержимо:

$$B_z = \frac{\mu_0 I\, r_0^2}{2(r_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^2}{2(0{,}5^2 + 2^2)^{\frac{3}{2}}} = 8{,}96 \cdot 10^{-9}\ \text{Тл}.$$

Відповідь: $B_z = 8{,}96 \cdot 10^{-9}$ Тл.

Приклад 5

Обчислити індукцію магнітного поля на осі соленоїда, якщо кількість витків на одиницю його довжини $n = 100\ \text{м}^{-1}$, а сила струму у витках $I = 0{,}25$ А.

Дано:

$n = 100\ \text{м}^{-1}$

$I = 0{,}25$ А

$\vec{B}$–?

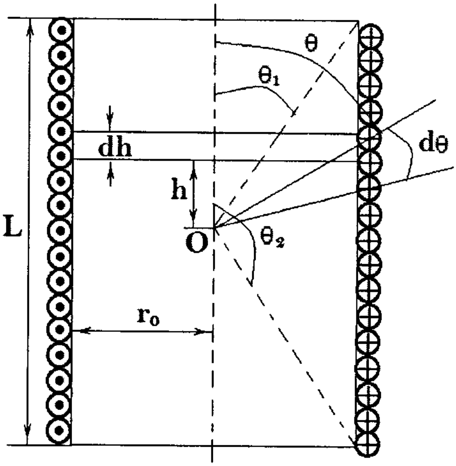


Рисунок 35

Розв'язування

Соленоїдом називають сукупність спірально намотаних на циліндричну поверхню витків ізольованого провідника, по якому проходить електричний струм. Як правило, вважають, що провідник намотаний в один шар щільно, рівномірно і кількість витків обмотки на одиницю довжини циліндричної поверхні є величиною сталою і дорівнює n. Нехтуючи зазором між витками при щільному упакуванні їх, можна вважати, що $n = {}^{N}/_{L}$, де N – загальна кількість витків соленоїда, а L – його довжина. У такому разі соленоїд можна вважати сукупністю кілець зі струмом і тоді для обчислення індукції магнітного поля в довільній точці його осі можна скористатися формулою $B = \frac{\mu_0 I\, r_0^2}{2(r_0^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$ – індукція магнітного поля на осі колового струму.

Якщо довжина соленоїда L більше ніж у 10 разів перевищує діаметр його витків D, то такий соленоїд називають нормальним (нехтують крайовими ефектами). Особливістю такого соленоїда є те, що всередині нього вздовж осі магнітне поле має однаковий напрям і має однакове в усіх точках значення, тобто є однорідним.

Розрахуємо індукцію магнітного поля, наприклад у точці О осі нормального соленоїда (див. рис. 35). Для цього виділимо спочатку вузьку (плоску) смугу витків соленоїда завтовшки dh, розміщену між проведеними з точки О радіусами r, які утворюють з віссю соленоїда кути θ і $\theta+\Delta\theta$. Довжина цієї смуги $dh = \frac{rd\theta}{sin\theta}$. Кількість витків dN, що укладаються на виділеній смузі:

$$dN = ndh = n\frac{rd\theta}{sin\theta}.$$

Елементарна індукція магнітного поля dB, створювана в точці О витками dN провідника зі струмом I, за формулою $B = \frac{\mu_0 I\, r_0^2}{2(r_0^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$ буде такою:

$$dB = \frac{\mu_0 I\, r_0^2}{2(r_0^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} n\frac{rd\theta}{sin\theta}.$$

Оскільки $(r_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} = r^3$, а $r = \frac{r_0}{sin\theta}$, то:

$$dB = \frac{\mu_0 In}{2} sin\theta d\theta.$$

Щоб знайти результуюче значення індукції магнітного поля в точці О, проінтегруємо останню формулу у межах кутів θ_1 і θ_2:

$$B = \frac{\mu_0 In}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 In}{2}(cos\theta_1 - cos\theta_2).$$

Для нескінченно довгого соленоїда $\theta_1 = 0$ і $\theta_2 = \pi$. Тоді:

$$B = \frac{\mu_0 In}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 In}{2}(cos0 - cos\pi) = \mu_0 In.$$

Для довільної основи соленоїда (наприклад, у центрі верхньої основи $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ і $\theta_2 = \pi$)

$$B = \frac{\mu_0 In}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 In}{2}\left(cos\frac{\pi}{2} - cos\pi\right) = \frac{\mu_0 In}{2},$$

тобто у два рази менша, ніж на осі всередині соленоїда.

Для нашої умови задачі після підстановки числових значень отримаємо:

а) в центрі соленоїда:

$$B = \mu_0 In = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}25 \cdot 100 = 3{,}14 \cdot 10^{-5}\ \text{Тл};$$

б) в центрі верхньої основи:

$$B = \frac{\mu_0 In}{2} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}25 \cdot 100}{2} = 1{,}57 \cdot 10^{-5}\ \text{Тл}.$$

Відповідь: $B = 3{,}14 \cdot 10^{-5}$ Тл, $B = 1{,}57 \cdot 10^{-5}$ Тл.

Приклад 6

По двох нескінченно довгих паралельних провідниках у повітрі протікають в однаковому напрямку струми I_1 та I_2 (рис. 36). Провідники розташовані на відстані l = 5 см один від одного. Знайти величину струму I_1, якщо індукція магнітного поля у точці, рівновіддаленій від обох проводів на $r_1 = r_2 = 3{,}5$ см, дорівнює $B = 3 \cdot 10^{-5}$ Тл, а сила струму I_2 дорівнює 2 А.

Дано:

$l = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$I_2 = 2$ А

$r_1 = r_2 = 3{,}5$ см $= 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

$B = 3 \cdot 10^{-5}$ Тл

I_1 – ?

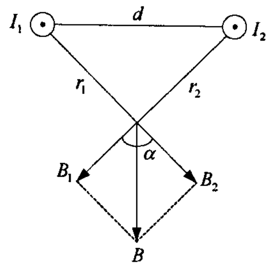


Рисунок 36

Розв'язування

Використаємо принцип суперпозиції:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2\ ,$$

де

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\ , \qquad B_2 = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\ .$$

Для розрахунку результуючого магнітного поля використаємо теорему косинусів:

$$|B| = \sqrt{\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + 2\hat{A}_1\hat{A}_2 \cos\alpha}\ , \qquad (1)$$

де α – кут між векторами $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$.

Вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ спрямовані по дотичних до силових ліній у точках, що відстоять від струмів I_1 і I_2 на відстані r_1 і r_2, відповідно.

Оскільки кут α між векторами $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ дорівнює такому ж куту між сторонами трикутника (див. рис. 36), то

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$$

або

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 3{,}5^2 - 5^2}{2\cdot 3{,}5^2} \approx -0{,}02041 \ .$$

Підставляючи в (1) вирази для B_1 і B_2 з врахуванням того, що $r_1 = r_2$, одержимо

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi r}\cdot\left(I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos\alpha \right)^{1/2} .$$

Звідки

$$I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cdot \cos\alpha = \left(\frac{B\cdot 2\pi r}{\mu\mu_0}\right)^2$$

і

$$I_1^2 + I_1(2I_2\cos\alpha) + I_2^2 - \left(\frac{B\cdot 2\pi r}{\mu\mu_0}\right)^2 = 0$$

Підставляючи дані з умови задачі, одержимо квадратне рівняння відносно I_1:

$$I_1^2 - 0{,}0816 I_1 - 23{,}56 = 0 \ .$$

Звідки

$$I_1 = \frac{0{,}0816 \pm \sqrt{0{,}0816^2 + 4\cdot 23{,}56}}{2} = \frac{0{,}0816 \pm 9{,}71}{2} \ .$$

Оскільки від'ємне значення струму I_1 відповідає протилежному відносно I_2 напрямку протікання, то воно не може бути розв'язком задачі.

Таким чином

$$I_1 = (\ 9{,}79/2\ ) = 4{,}895\ \text{А}.$$

Відповідь: I_1 = 4,895 А.

Приклад 7

Напруженість магнітного поля у центрі квадратної рамки з струмом дорівнює 30 А/м. Знайти силу струму, що протікає по рамці, якщо довжина її сторін 10 см.

Дано:

H = 30 А/м

a = 10 см = 10^{-1} м

$I - ?$

Розв'язування

Відомо, що напруженість магнітного поля пов'язана з вектором магнітної індукції співвідношенням:

$$\mu\mu_0\vec{H} = \vec{B},$$

звідки

$$B = 1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 30 = 3{,}77\cdot 10^{-5}\ \text{Тл}.$$

У центрі рамки всі вектори магнітної індукції, що відповідають магнітному полю струмів, які протікають по різних сторонах рамки, однакові за величиною й напрямком. Тому $B = 4B_1$, де B_1 – магнітна індукція магнітного поля , створеного струмом однією зі сторін:

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0{}^2}{4\pi r_0}\cdot 2\cos\alpha,$$

де r_0 – відстань від центра рамки до кожної зі сторін;

$$r_0 = a/2 = 5 \text{ см} = 0{,}05 \text{ м}.$$

Кут α для квадратної рамки дорівнює 45^o і $cos45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Тому

$$B = 4B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi \cdot a/2}\cdot\sqrt{2} \qquad \text{або} \qquad I = \frac{B\cdot a\cdot\pi}{2\sqrt{2}\mu\mu_0} .$$

Виконаємо необхідні розрахунки, підставивши всі дані в системі СІ ,

$B = 3{,}77 \cdot 10^{-5}$ Тл; $a = 0{,}1$ м; $\mu = 1$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$I = \frac{3.77\cdot10^{-5}\cdot 0{,}1\cdot 3{,}14}{2\sqrt{2}\cdot 1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}} = 3{,}33\,\text{А}.$$

Відповідь: $I = 3{,}33$ А.

Приклад 8

Індукція магнітного поля у центрі мідного дротяного кільця зі струмом дорівнює 10^{-5} Тл. Який переріз має дріт цього кільця, якщо після підключення до його кінців різниці потенціалів в 0,2 В, по кільцю тече струм силою 2 А. Питомий опір міді $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Дано:

$B = 10^{-5}$ Тл

$U = 0{,}2$ В

$I = 2$ А

$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м

$S - ?$

Розв'язування

Індукція магнітного поля у центрі кільця з струмом

$$B = \frac{\mu\mu_0{}^2}{2r} . \qquad (1)$$

Із закону Ома для ділянки кола маємо:

$$I=\frac{U}{R}=\frac{U}{\rho\cdot\frac{l}{S}}=\frac{US}{\rho l}\ , \qquad (2)$$

де $l=2\pi r$ – довжина кільця;

r – радіус кільця;

R – опір дроту кільця.

Підставляючи вираз для l в (2), одержимо:

$$I\rho 2\pi\, r=US.$$

Звідки

$$r=\frac{US}{I\rho 2\pi},$$

і

$$B=\frac{\mu\mu_0 2\pi\rho I^2}{2US}.$$

З останньої формули знаходимо переріз:

$$S=\frac{\mu\mu_0\pi\rho I^2}{BU}\ .$$

Підставимо числові дані:

$$S=\frac{1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot\pi\cdot 1,7\cdot 10^{-8}\cdot 4}{10^{-5}\cdot 0,2}=1,341\cdot 10^{-7}\text{м}^2\ =0,134\ \text{мм}^2.$$

Відповідь: $S=0,134$ мм^2.

Приклад 9

Електрон, пройшовши прискорюючу різницю потенціалів 50 В, влітає в однорідне магнітне поле під кутом 30° до ліній індукції. Визначити величину вектора магнітної індукції, якщо радіус гвинтової лінії, по якій рухається електрон, дорівнює 10 см.

Дано:

$U = 50$ В

$\alpha = 30°$

$R = 10$ см $= 10^{-1}$ м

$B - ?$

Розв'язання

У магнітному полі електрон під дією сили Лоренца бере участь у двох рухах: рівномірному русі в напрямку силових ліній магнітного поля і русі по колу в площині, перпендикулярній до силових ліній.

Рівномірний рух відбувається зі швидкістю $\upsilon_{II} = \upsilon_0 \cos\alpha$, а рух по колу характеризується швидкістю $\upsilon_\perp = \upsilon_0 \sin\alpha$. Рух по колу відбувається під дією сили Лоренца, яка є доцентровою:

$$F_л = ma_n = \frac{m\upsilon_\perp^2}{R},$$

де R – радіус кола.

З урахуванням того, що сила Лоренца дорівнює $F_л = e\upsilon_\perp B$, одержуємо співвідношення:

$$B = \frac{m\upsilon_\perp}{eR}. \tag{1}$$

Величина швидкості електрона визначається пройденою різницею потенціалів:

$$eU = \frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

Звідки $\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ й $\upsilon_\perp = \sqrt{\frac{2eU}{m}}\sin\alpha$.

Тоді, відповідно до формули (1), знаходимо

$$B = \frac{\sin\alpha}{R}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Підставимо числові дані, переводячи величини в систему СІ:

$$B=\frac{\sin 30^o}{0,1}\sqrt{\frac{2\cdot 50\cdot 9,1\cdot 10^{-31}}{1,6\cdot 10^{-19}}}=\frac{1}{0,2}\cdot 10^{-5}\cdot\sqrt{\frac{9,1}{1,6}}=1,19\cdot 10^{-4}\text{ Тл.}$$

Відповідь: $B = 1,19\cdot 10^{-4}$ Тл.

§ 15 Задачі для самостійного розв'язування

5.1. Два прямолінійних довгих провідники розташовані паралельно на відстані $d = 10$ см один від одного. Провідниками течуть струми $I_1 = I_2 = 5$ А в протилежних напрямах. Знайти модуль і напрям напруженості $\vec{H}$ магнітного поля в точці, що знаходиться на відстані $a = 10$ см від кожного провідника.

5.2. Довгим вертикальним провідником зверху вниз протікає струм $I = 8$ А. На якій відстані a від нього напруженість поля, що утворюється від додавання земного магнітного поля і поля струму, спрямована вертикально вгору? Горизонтальна складова напруженості земного поля $\vec{H}_r = 16$ А/м.

5.3. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля, створеною відрізком AB прямолінійного провідника зі струмом, у точці С, розташованій на перпендикулярі до середини цього відрізка на відстані $a = 5$ см від нього. В провіднику тече струм $I = 20$ А. Відрізок AB провідника видно із точки С під кутом 60°.

5.4. Відрізок прямолінійного провідника зі струмом має довжину 30 см. При якій граничній відстані a від нього для точок, що лежать на перпендикулярі до його середини, магнітне поле можна розглядати як поле нескінченно довгого прямолінійного струму? Похибка при такому припущенні не повинна перевищувати 5%.

Вказівка. Похибка, що допускається, $\delta=(H_2-H_1)/H_2$, де H_1 – напруженість поля від відрізка провідника зі струмом. H_2 – напруженість поля від нескінченно довгого прямолінійного струму.

5.5. У точці С, розташованій на відстані $a = 5$ см від нескінченно довгого прямолінійного провідника зі струмом, напруженість магнітного поля $\vec{H} = 400$ А/м. При якій граничній довжині провідника це значення напруженості буде правильним з точністю до 2% ? Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в точці С, якщо провідник зі струмом має довжину 20 см і точка С розташована на перпендикулярі до середини цього провідника.

5.6. Струм I=20 А протікає в довгому провіднику, зігнутому під прямим кутом. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в точці , що лежить на бісектрисі цього кута і віддалена від вершини кута на відстань a = 10 см.

5.7. Знайти магнітну індукцію в центрі тонкого кільця, в якому проходить струм силою I = 10 А. Радіус r кільця дорівнює 5 см.

5.8. Струм I = 20 А, протікаючи кільцем з мідного дроту перерізом S = 1 мм^2, створює в центрі кільця напруженість магнітного поля H = 178 А/м. Яка різниця потенціалів U прикладена до кінців дроту, що утворив кільце?

5.9. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля на осі кругового контура на відстані a = 3 см від його площини. Радіус контура R = 4 см, струм у контурі I = 2 А.

5.10. Напруженість магнітного поля в центрі кругового витка $\vec{H}_0 = 0{,}8\ \text{А} \cdot \text{м}$. Радіус витка R = 11 см. Знайти напруженість магнітного поля на осі витка на відстані a = 10 см від його площини.

5.11. Два кругових витки радіусом R = 4 см кожний розташовані в паралельних площинах на відстані d = 10 см один від одного. Витками течуть струми $I_1 = I_2$ = 5 А. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля на осі витків у точці, що знаходиться на рівній відстані від них. Задачу розв'язати, коли: а) струми у витках течуть в одному напрямку; б) струми у витках течуть у протилежних напрямках.

5.12. Два кругових витки радіусом R = 4 см кожний розташовані в паралельних площинах на відстані d = 5 см один від одного. Витками течуть струми $I_1 = I_2$ = 2 А. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в центрі одного з витків. Задачу розв'язати, коли: а) струми у витках течуть в одному напрямі, б) струми у витках течуть у протилежних напрямах.

5.13. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в точках осі кругового витка діаметром D = 10 см, в якому тече струм I = 10 А. Скласти таблицю значень $\vec{H}$ і побудувати графік для значень x в інтервалі $0 \le x \le 10$ см через кожних 2 см.

5.14. Два кругових витки розташовані в двох взаємно перпендикулярних площинах так, що центри цих витків збігаються. Радіус кожного витка R = 2 см, струми у витках $I_1 = I_2$ = 5 А. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в центрі цих витків.

5.15. Із дроту довжиною 1 м зроблена квадратна рамка. В рамці тече струм I = 10 А. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в центрі рамки.

5.16. У центрі кругового витка із дроту створюється магнітне поле напруженістю $\vec{H}$ при різниці потенціалів U_1 на кінцях витка. Яку треба прикласти різницю потенціалів U_2, щоб одержати таку ж напруженість магнітного поля в центрі витка вдвічі більшого радіуса, зробленого з того ж дроту?

5.17. В дротяній рамці, що має форму правильного шестикутника, протікає струм I = 2 А. При цьому в центрі рамки утвориться магнітне поле напруженістю $\vec{H}$ = 33 А/м. Знайти довжину дроту, з якого зроблена рамка.

5.18. В обмотці дуже короткої котушки радіусом r = 16 см протікає струм силою I = 5 А. Скільки витків N дроту намотано на котушку, якщо напруженість магнітного поля в її центрі дорівнює 800 А/м ?

5.19. Котушка довжиною l = 20 см має N = 100 витків. В обмотці котушки протікає струм силою I = 5 А. Діаметр d котушки дорівнює 20 см. Визначити магнітну індукцію B в точці, що лежить на осі котушки на відстані a = 10 см від її краю.

5.20. Довгий прямий соленоїд із дроту діаметром d = 0,5 мм намотаний так, що витки щільно прилягають один до одного. Яка напруженість $\vec{H}$ магнітного поля всередині соленоїда при силі струму I= 4 А ? Товщиною ізоляції знехтувати.

5.21. Обмотка котушки діаметром d = 10 см складається з витків дроту, що щільно прилягають один до одного. Визначити мінімальну довжину l_{min} котушки, при якій магнітна індукція всередині її відрізняється від магнітної індукції нескінченного соленоїда, що має таку ж кількість витків на одиницю довжини, не більшу ніж на 5,0%. Сила струму, що проходить в обмотці, в обох випадках однакова.

5.22. Довгий прямий соленоїд , що має n = 5 витків на кожний сантиметр довжини, розташований перпендикулярно до площини магнітного меридіана. (Горизонтальна складова магнітної індукції поля Землі B_l = 20 мкТл). Всередині соленоїда, в його внутрішній частині, знаходиться магнітна стрілка, що встановилася в магнітному полі Землі. Коли в соленоїді проходить струм, стрілка відхиляється на кут α = 60°. Знайти силу струму I.

5.23. Квадратна рамка з провідника розташована в одній площині з довгим прямим провідником. Дві сторони рамки паралельні провіднику. В рамці і провіднику проходить однаковий струм величиною I = 1 кА. Визначити силу, що діє на рамку, якщо найближча до провідника сторона рамки знаходиться на віддалі, що дорівнює її довжині.

5.24. Провідник має форму півкільця радіусом R = 10 см і знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ = 50 мТл. В провіднику тече струм величиною I = 10 А. Знайти силу $\vec{F}$, яка діє на провідник, якщо площина півкільця перпендикулярна до ліній індукції.

5.25. В провіднику, який має форму кільця радіусом R = 20 см проходить струм величиною I = 100 А. Перпендикулярно до площини кільця виникає однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$ = 20 мТл. Розрахувати силу, з якою розтягується кільце.

5.26. В кільці радіусом R проходить струм. На осі кільця на відстані d = 1 м від його площини магнітна індукція B = 10 нТл. Розрахувати силу струму у витку і його радіус.

5.27. Тонке кільце радіусом R = 10 см несе заряд Q = 10 нКл. Кільце рівномірно обертається з частотою f = 10 с$^{-1}$ відносно осі, що перпендикулярна до площини кільця та проходить через його центр. Знайти: 1) магнітний момент кругового струму, обумовленого кільцем; 2) відношення магнітного моменту до моменту імпульсу, якщо маса кільця дорівнює 10 г.

5.28. При подвійному обході магнітним полюсом навколо провідника зі струмом в 100 А була виконана робота A = 1 мДж. Знайти магнітний потік Φ, створений полюсом.

5.29. Електрон зі швидкістю $\vec{V}$= 1 Мм/с влетів до однорідного магнітного поля з індукцією $\vec{B} = 30$ мТл під кутом $\alpha = 30°$ до напряму лінії індукції. Визначити радіус R і крок h гвинтової лінії, якою буде рухатися електрон.

5.30. Рамка з провідника площею S рівномірно обертається в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ навколо осі, яка перпендикулярна до напряму поля. Період обертання – T. Виразити магнітний потік Φ, який перетинає рамку, і е.р.с. індукції в рамці як функцію часу.

§ 16 Механічні гармонічні коливання та хвилі

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Зміщення, швидкість і прискорення матеріальної точки при гармонійних коливаннях визначаються рівняннями:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$v = -A\,\omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$a = -A\,\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x,$$

де A – амплітуда коливань;

ω – циклічна частота;

φ_0 – початкова фаза коливань.

2. Зв'язок циклічної частоти ω з періодом коливань T і частотою ν:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

3. Сила, яка діє на тіло при вільних гармонічних коливаннях (квазіпружна сила):

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx,$$

де $k = m\omega^2$ – коефіцієнт квазіпружної сили, який вимірюється силою, що викликає зміщення $x = 1$.

4. Кінетична, потенціальна і повна енергії гармонічних коливань матеріальної точки:

$$\hat{E} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$W = K + \Pi = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

5. Диференціальні рівняння малих коливань:

а) математичний маятник:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \text{звідки } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

б) пружинний маятник:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\kappa}{m}x = 0, \quad \text{де } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \text{звідки } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

в) фізичний маятник:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mgl}{I}x = 0, \quad \text{де } \omega_0^2 = \frac{mgl}{I}, \text{ звідки } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

де I – момент інерції маятника відносно осі коливань;

l – відстань від осі коливань до центра мас маятника;

$\frac{I}{ml} = L$ – зведена довжина.

За відсутності опору середовища циклічна частота коливань ω називається власною циклічною частотою і позначається через ω_0.

6. При додаванні двох однаково направлених гармонічних коливань однакового періоду одержуємо гармонічне коливання того ж періоду, амплітуда якого A і початкова фаза φ_0 визначаються рівняннями :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$tq\ \varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

де A_1 і A_2 – амплітуди коливань, що додаються;

φ_1 і φ_2 – початкові фази цих коливань.

7. При додаванні двох однаково направлених гармонічних коливань однакової амплітуди і близьких частот ($\omega_1 \approx \omega_2$) одержуємо биття, яке описується рівнянням:

$$x = \left|2A\cdot\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right|\cos\ \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t,$$

де $\left|2A\cdot\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right|$ – амплітуда биття.

Періодичність зміни амплітуди визначається періодичністю зміни модуля косинуса, тому період биття дорівнює:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}T_б = \pi\ ,\ \text{звідки}\ \ T_б = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}.$$

8. При додаванні двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань з однаковою частотою в напрямі координатних осей x і y матимемо рівняння траєкторії результуючого руху матеріальної точки:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1\cdot A_2}cos(\varphi_2 - \varphi_1) = sin^2\ (\varphi_2 - \varphi_1),$$

де A_1 і A_2 – амплітуди коливань, що додаються;

$\varphi_2 - \varphi_1$ – різниця фаз цих коливань.

9. Диференціальне рівняння згасаючих коливань :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=0,$$

де $\beta=\frac{r}{2m}$ – коефіцієнт згасання;

r – коефіцієнт опору середовища;

$\omega_0^2=\frac{k}{m}$ – квадрат власної циклічної частоти коливань.

10. Загальний розв'язок диференціального рівняння для згасаючих коливань має вигляд:

$$x = A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha),$$

де $A_0e^{-\beta t}$ – амплітуда згасаючих коливань;

ω – циклічна частота згасаючих коливань.

11. Швидкість зменшення амплітуди згасаючих коливань характеризують логарифмічним декрементом згасання:

$$\delta=ln\ \frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta(t+T)}}=\beta T,$$

де δ – логарифмічний декремент згасання;

β – коефіцієнт згасання;

T – період згасаючих коливань.

12. Циклічна частота згасаючих коливань:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\quad \text{або}\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}\ .$$

13. Період згасаючих коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{або} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} \; .$$

14. Добротність коливальних систем:

$$\theta = 2\pi \frac{W_t}{\Delta W_{(t=T)}} \quad \text{або} \quad \theta = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta} \; ,$$

де W_t – повна енергія, яку має коливальна система на момент часу t;

$\Delta W_{(t=T)}$ – втрати енергії коливальної системи за один період;

δ – логарифмічний декремент згасання;

β – коефіцієнт згасання;

ω_0 – власна циклічна частота коливань;

T – період згасаючих коливань (при малих згасаннях $T \approx T_0$).

15. Диференціальне рівняння вимушених коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

або

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t \, ,$$

де F_0 – вимушувальна сила;

ω – циклічна частота вимушених коливань.

16. Загальний розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань, які протягом певного часу встановлюються під дією вимушувальної сили, має вигляд:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

де A – амплітуда вимушених коливань;

α – зсув за фазою вимушених коливань і вимушувальної сили.

17. Амплітуда вимушених коливань:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

де $f_0 = \frac{F_0}{m}$;

ω_0 – власна частота коливань системи;

ω – циклічна частота вимушувальної сили.

18. Зсув фази вимушених коливань:

$$tg\alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

19. Резонансна частота і резонансна амплітуда:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2};$$

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Рівняння плоскої хвилі:

$$U_{x,t} = A\cos(\omega t - kx),$$

де $U_{x,t}$ – зміщення точок пружного середовища від положення рівноваги на відстані x від джерела;

A – амплітудне зміщення цих точок;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число;

λ – довжина хвилі;

ω – циклічна частота коливань.

2. Рівняння сферичної хвилі:

$$U_{x,t} = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr),$$

де r – радіус-вектор пружного середовища.

3. Зв'язок довжини хвилі з періодом коливань і частотою:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu},$$

де υ – швидкість поширення хвиль в пружному середовищі;
T – період коливань;
ν – частота коливань.

4. Швидкість поширення хвиль (фазова швидкість хвильового руху):
а) поздовжня хвиля в твердому середовищі:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де E – модуль Юнга;

ρ – густина твердого середовища.

б) поперечна хвиля в твердому середовищі:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}} ,$$

де G – модуль зсуву;

ρ – густина твердого середовища.

в) повздовжня хвиля в рідкому середовищі:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}} ,$$

де K – модуль об'ємної пружності рідини;

ρ – густина рідини.

г) поздовжня хвиля в газоподібному середовищі:

$$\upsilon = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} .$$

5. Енергія пружних хвиль:

а) кінетична енергія

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{\rho S \Delta x \omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t - kx) ,$$

де $m = \rho S \Delta x$ – маса виділеного елемента пружного середовища;

$\upsilon = \frac{\partial U_{x,t}}{\partial t}$ – швидкість хвильового руху точок середовища;

б) потенціальна енергія

$$\Pi = \frac{k\Delta u_{x,t}^2}{2} = \frac{\rho S\Delta x\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t - kx);$$

в) повна енергія хвиль

$$W = K + \Pi = \rho S\Delta x\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx);$$

г) середні значення повної енергії і густини енергії за час в один період

$$\overline{W} = \frac{\rho S\Delta x\omega^2 A^2}{2}, \qquad \overline{w} = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}.$$

6. Потік енергії пружних хвиль:

$$R = \frac{\overline{W}}{S\Delta t},$$

де $\overline{W}$ – середнє значення повної енергії хвиль.

7. Вектор потоку енергії пружних хвиль:

$$\vec{R} = \overline{w}\,\vec{\upsilon},$$

де $\overline{w}$ – середня густина енергії пружних хвиль;

$\vec{\upsilon}$ – вектор швидкості поширення хвиль в пружному середовищі.

8. Ефект Допплера для звукових хвиль:

$$\nu' = \frac{c \pm \upsilon}{c \mp u}\cdot \nu,$$

де ν' – частота звуку, яка сприймається приймачем;

ν – частота звуку джерела;

c – швидкість поширення звукових хвиль в пружному середовищі;

υ – швидкість руху приймача звуку;

u – швидкість руху джерела звуку (нижній знак – джерело і приймач розходяться; верхній знак – джерело і приймач сходяться).

9. Інтерференція когерентних хвиль:

а) максимуми інтерференції спостерігаються, коли

$$\Delta\varphi = 2\pi\,\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \pm 2n\,\pi,$$

де $x_2 - x_1$ – різниця ходу двох хвиль;

$\Delta\varphi$ – різниця фаз хвиль;

λ – довжина хвилі;

$n = 0, 1, 2, 3, ...$ – порядок max.

Або

$$\Delta x = (x_2 - x_1) = n \cdot \lambda;$$

б) мінімуми інтерференції спостерігаються, коли:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \pm(2n + 1)\pi.$$

або

$$\Delta x = (x_2 - x_1) = \pm\ (2n + 1)\ \lambda/2.$$

10. Рівняння стоячої хвилі

$$u_{x,t} = \left|A\cos kx\right|\cos\omega t,$$

де $u_{x,t}$ – зміщення точок середовища від положення рівноваги на відстані x від джерела коливань;

A – амплітуда зміщення;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число;

ω – циклічна частота коливань;

$\left|A\cos kx\right|$ – амплітуда стоячої хвилі.

а) координати вузлів стоячої хвилі

$$kx = \pm(2n + 1)\pi/2 \quad \text{або} \quad x = \pm(2n + 1)\lambda/4,$$

де $n = 0, 1, 2, 3, ...;$

x – координати вузлів стоячої хвилі.

б) координати пучностей стоячої хвилі

$$kx = \pm n\pi \qquad \text{або} \quad x = \pm n\,\lambda,$$

де $n = 0, 1, 2, 3, ...$.

§ 17 Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Матеріальна точка масою $m = 5$ кг здійснює гармонічні коливання, рівняння руху яких має такий вигляд $x(t) = 0{,}02cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Визначити усі характеристики гармонічних коливань для моменту часу $t = 1$ с. Чому дорівнює період T та частота ν гармонічного коливання, максимальна сила $\vec{F}_{max}$, що діє на точку? Фізичні величини подані в системі СІ.

Дано:

$m = 5$ кг

$x(t) = 0{,}02cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

$t = 1$ с

$\varphi -?$, $\varphi_0 -?$, $\omega -?$, $\text{T} -?$, $\nu -?$

$x(t) -?$, $v(t) -?$, $a(t) -?$,

$E_{кін.} -?$, $E_{пот.} -?$, $E_{повн.} -?$,

$\vec{F}_{max} -?$

Розв'язування

З рівняння гармонічних коливань $x(t) = 0{,}02cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ випливає, що фаза коливань φ даного коливання для моменту часу $t = 1$ с обчислюється за формулою $\varphi = \left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{3}\pi = 420^{\circ}$.

Початкова фаза даного коливання $\varphi_0 = \frac{\pi}{3} = 60^{\circ}$.

Циклічна частота $\omega = 2\pi\ \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$.

Період коливань $\text{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ (с).

Частота коливань $\nu = \frac{1}{\text{T}} = \frac{1}{1} = 1$ (Гц).

Зміщення гармонічного коливання для моменту часу $t = 1$ с визначається з рівняння гармонічного коливання

$$x(1) = 0{,}02cos\left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}02\ cos420^{\circ} = 0{,}02 \cdot 0{,}5 = 0{,}01 \text{ м}.$$

Швидкість матеріальної точки для моменту часу $t = 1$ с визначається як похідна від координати $x(t)$ за часом t:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -0{,}02 \cdot 2\pi \cdot sin\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$v(1) = \frac{dx}{dt} = -0{,}02 \cdot 2\pi \cdot sin\left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = -0{,}108 \text{ м/с}.$$

Прискорення матеріальної точки для моменту часу $t = 1$ с визначається як похідна від швидкості $v(t)$ за часом t:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0{,}02 \cdot (2\pi)^2 \cdot cos\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$a(1) = \frac{dv}{dt} = -0{,}02 \cdot (2\pi)^2 \cdot cos\left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}394 \text{ м/с}^2.$$

Кінетична енергія матеріальної точки для моменту часу $t = 1$ с визначається за формулою:

$$\text{Е}_{\text{кін.}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{5 \cdot (\cdot 0{,}108)^2}{2} = 0{,}029\,\textit{Дж}.$$

Повна енергія матеріальної точки обчислюється за формулою:

$$\text{Е}_{\text{повн.}} = \frac{mv_{max}^2}{2},\ v_{max} = \text{A} \cdot \omega.$$

$$E_{повн.} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{m(A \cdot \omega)^2}{2} = \frac{5 \cdot (0{,}02 \cdot 2\pi)^2}{2} = 0{,}039\,\textit{Дж}.$$

Потенціальна енергія обчислюється із закону збереження енергії:

$$E_{повн.} = E_{кін.} + E_{пот.}\text{, звідси}$$

$$\text{Е}_{\text{пот.}} = \text{Е}_{\text{повн}} - \text{Е}_{\text{кін.}} = 0{,}039 - 0{,}029 = 0{,}01\,\textit{Дж}.$$

Максимальна сила $\vec{F}_{max}$, що діє на точку, визначається за другим законом Ньютона:

$$\vec{F}_{max} = m \cdot \vec{a}_{max},\ a_{max} = A \cdot \omega^2.$$

Тоді максимальна сила $F_{max} = m \cdot A \cdot \omega^2 = 5 \cdot 0{,}02 \cdot (2\pi)^2 = 3{,}947$ Н.

Приклад 2

Частинка здійснює гармонічні коливання вздовж осі x біля положення рівноваги $x = 0$. Циклічна частота коливань $\omega = 4$ с$^{-1}$. В момент часу $t = 0$ координата частинки $x_0 = 25{,}0$ см, а її швидкість $\upsilon_0 = 100$ см/с. Знайти координату x і швидкість υ цієї частинки через $t = 2{,}40$ с.

Дано:

$\omega = 4$ с$^{-1}$

$x_0 = 25{,}0$ см

$\upsilon_0 = 100{,}0$ см/с

$t = 2{,}40$ с

$x - ?$ $\upsilon - ?$

Розв'язування

Рівняння гармонічних коливань має вигляд:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{1}$$

Швидкість частинки в довільний момент часу дорівнює:

$$\upsilon = -A\,\omega\sin(\omega t + \varphi)\,. \tag{2}$$

В початковий момент часу $t = 0$ величини x і υ відповідно дорівнюють x_0 і υ_0:

$$x_0 = A\cos\varphi \qquad \text{і} \qquad \upsilon_0 = -A\omega\,\sin\varphi\,. \tag{3}$$

Розв'язавши систему рівнянь (3), одержимо значення амплітуди коливань і початкової фази:

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{\upsilon_0^2}{A^2\cdot\omega^2} = 1, \quad \text{звідки} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}\;;$$

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{A}\,, \qquad \text{звідки} \qquad \varphi = \arccos\frac{x_0}{A}\,.$$

Числові значення амплітуди і початкової фази в одиницях умови задачі

$$A = \sqrt{625 + \frac{10^4}{16}} = 35{,}5 \text{ см},$$

$$\varphi = arc\ cos\ \frac{25}{35{,}5} = \frac{\pi}{4}\ .$$

Скориставшись значеннями амплітуди коливань і початкової фази, знаходимо координату x і швидкість υ в момент часу t:

$$x = 35{,}5\ cos\ (4 \cdot 2{,}40 + \pi/4) = -\ 20{,}2 \text{ см},$$

$$\upsilon = -\ 35{,}5 \cdot 4sin\ (4 \cdot 2{,}40 + \pi/4) = 115{,}7 \text{ см/с}.$$

Відповідь: $x = -20{,}2$ см; $\upsilon = 115{,}7$ см/с.

Приклад 3

Матеріальна точка бере участь одночасно у двох гармонічних коливальних процесах, які відбуваються в одному напрямку з однаковим періодом $T = 2$ с та з амплітудами $A_1 = 0{,}03\, м$ і $A_2 = 0{,}04\, м$. Різниця фаз між цими коливаннями дорівнює $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{4}$. Початкова фаза одного з цих коливань дорівнює нулю $\varphi_{01} = 0$. Знайти закон руху $x(t)$ результуючого процесу.

Дано:

$T_1 = T_2 = T = 2$ с

$A_1 = 0{,}03\, м$

$A_2 = 0{,}04\, м$

$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{4}$

$\varphi_{01} = 0$

$x(t)-?$

Розв'язування

Закони руху для кожного з процесів у загальному вигляді можна записати рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = A_1\, sin(\omega t + \varphi_{01}\,) \\ x_2 = A_2 sin(\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Закон руху точки, яка бере участь у двох коливальних процесах, буде

$$x(t) = x_1 + x_2 = A_1\, sin(\omega t + \varphi_{01}\,) + A_2 sin(\omega t + \varphi_{02}), \qquad (2)$$

де $x(t)$ – зміщення точки від положення рівноваги.

Оскільки обидва коливання гармонічні, мають однакові частоти і напрямки поширення, то результуюче коливання також буде гармонічним і матиме таку саму частоту. Тому закон руху можна записати у вигляді:

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi_0), \qquad (3)$$

де A і φ_0 – відповідно амплітуда і початкова фаза результуючого коливання.

Їх можна знайти графічно методом векторних діаграм або аналітичним методом.

Скористаємось аналітичним методом. Прирівняємо праві частини рівностей (2) і (3):

$$Asin(\omega t + \varphi_0) = A_1\, sin(\omega t + \varphi_{01}\,) + A_2 sin(\omega t + \varphi_{02}). \qquad (4)$$

Розкриємо синуси суми двох кутів і згрупуємо окремо члени, до складу яких входять $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$.

Одержимо

$$Asin\omega t\; cos\varphi_0 + Acos\omega t sin\varphi_0 = (A_1 cos\varphi_{01} + A_2 cos\varphi_{02}) sin\omega t +$$
$$(A_1 sin\varphi_{01} + A_2 sin\varphi_{02}) cos\omega t.$$

Цей вираз перетворюється на тотожність за будь-яких значень t, коли коефіцієнти біля $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ у лівій і правій частинах рівняння будуть однаковими, тобто

$$Acos\varphi_0 = A_1 cos\varphi_{01} + A_2 cos\varphi_{02}; \qquad (5)$$

$$Asin\varphi_0 = A_1 sin\varphi_{01} + A_2 sin\varphi_{02}. \qquad (6)$$

Поділивши рівняння (6) на рівняння (5), дістанемо:

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 sin\varphi_{01} + A_2 sin\varphi_{02}}{A_1 cos\varphi_{01} + A_2 cos\varphi_{02}}. \qquad (7)$$

Піднесемо ліві і праві частини рівнянь (5) і (6) до квадрата, додамо їх і згрупуємо члени. Отримаємо:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \qquad (8)$$

За формулою (7) знайдемо початкову фазу результуючого коливання:

$$tg\varphi_0 = \frac{0{,}03sin0+0{,}04sin\frac{\pi}{4}}{0{,}03cos0+0{,}04cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}49 \text{ або } \varphi_0 = arctg0{,}49 = 0{,}45 \text{ рад.}$$

За формулою (8) знайдемо амплітуду результуючого коливання:

$$A = \sqrt{0{,}03^2 + 0{,}04^2 + 2 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}04 \cdot cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}06 \text{ м.}$$

Циклічна частота коливання визначається за періодом:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Підставивши значення A, φ_0 і ω в рівняння (3), дістанемо закон руху результуючого коливання:

$$x(t) = 0{,}06sin(\pi t + 0{,}45) \text{ (м).}$$

Відповідь: $x(t) = 0{,}06sin(\pi t + 0{,}45)$ м.

Приклад 4

Рух матеріальної точки задано рівняннями $x = 25\sin 4t$ см; $y = 12sin(4t + 1{,}57)$ см. Знайти рівняння траєкторії $f(x, y)$ і швидкість $v(t)$ руху точки в момент часу $t = 0{,}5$ с.

Дано:

$x = 25\sin 4t$ см

$y = 12sin(4t + 1{,}57)$ см

$t = 0{,}5$ с

$f(x, y)$–?

$v(\text{t})$–?

Розв'язування

З рівнянь руху матеріальної точки видно, що точка одночасно здійснює гармонічні коливання з однаковою частотою в напрямку координатних осей OX і OY.

Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху. Для цього виключимо із заданих рівнянь час t. Із першого рівняння визначимо:

$$sin4t = \frac{x}{25},$$

друге перетворимо так:

$$y = 12sin\left(4t + \frac{\pi}{2}\right) = 12\,cos4t.$$

З урахуванням першого рівняння друге запишемо у вигляді:

$$\frac{y}{12} = cos4t = \sqrt{1 - sin^2 4t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25^2}}.$$

Піднесемо його до квадрата:

$$\frac{y^2}{12^2} = 1 - \frac{x^2}{25^2},$$

звідки

$$\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

Це рівняння результуючого коливання, що є рівнянням еліпса, осі якого зведені до координатних осей OX і OY, з півосями $a = 25$ см і $b = 12$ см (рис. 37).

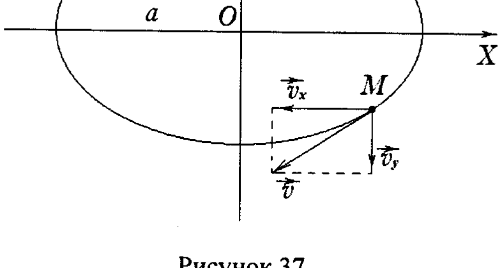


Рисунок 37

Знайдемо швидкість точки в момент часу $t = 0{,}5$ с.

Модуль швидкості, як відомо, дорівнює:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$\text{де } v_x = \frac{dx}{dt} = 25 \cdot 4cos4t = 100cos4 \cdot 0{,}5 = -42 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -12 \cdot 4sin4t = -48sin4 \cdot 0{,}5 = -44 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

Тоді модуль швидкості матеріальної точки:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-42)^2 + (-44)^2} = 61 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

Визначимо напрямок швидкості точки і, отже, напрямок її руху по еліптичній траєкторії.

Для цього знайдемо координати точки в момент часу $t = 0{,}5$ с, тобто її зміщення в напрямку осей OX і OY:

$$x = 25\sin 4t = 25sin4 \cdot 0{,}5 = 22{,}7 \text{ (см)};$$

$$y = 12sin\left(4t + \frac{\pi}{2}\right) = 12\, cos4t = 12cos4 \cdot 0{,}5 = -5{,}0 \text{ (см)}.$$

Отже, в момент часу $t = 0{,}5$ с координати точки М становлять $x = 22{,}7$ (см), $y = -5{,}0$ (см). У точці М (22,7; -5,0) побудуємо проекції швидкостей v_x і v_y, тоді знайдемо напрямок швидкості $\vec{v}$ (див. рис. 37).

З рисунка 37 видно, що точка рухається по еліпсу за годинниковою стрілкою.

Відповідь: рівняння траєкторії руху точки $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{144} = 1$.

Приклад 5

Рух матеріальної точки задано рівняннями $x = 25\sin 2\pi t$ см; $y = 25sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ см. Знайти рівняння траєкторії $f(x, y)$ і швидкість $v(t)$ руху точки в момент часу $t = 0{,}5$ с.

Дано:

$x = 25\sin 2\pi t$ см

$y = 25 sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ см

$t = 0{,}5$ с

$f(x, y) - ?$, $v(t) - ?$

Розв'язування

З рівнянь руху матеріальної точки видно, що точка одночасно здійснює гармонічні коливання з однаковою частотою в напрямку координатних осей OX і OY.

Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху. Для цього виключимо із заданих рівнянь час t. Із першого рівняння визначимо:

$$sin2\pi t = \frac{x}{25},$$

друге перетворимо так:

$$y = 25 sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 25\, cos2\pi t.$$

З урахуванням першого рівняння друге запишемо у вигляді:

$$\frac{y}{25} = cos2\pi t = \sqrt{1 - sin^2 2\pi t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25^2}}.$$

Піднесемо його до квадрата:

$$\frac{y^2}{25^2} = 1 - \frac{x^2}{25^2},$$

звідки

$$\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{625} = 1.$$

Це рівняння результуючого коливання, що є рівнянням кола із радіусом $R = 25$ см.

Знайдемо швидкість точки в момент часу $t = 0{,}5$ с. Модуль швидкості, як відомо, дорівнює

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

де $v_x = \frac{dx}{dt} = 25 \cdot 2\pi \cdot cos2\pi t = 25 \cdot 2\pi \cdot cos2\pi \cdot 0{,}5 = -157 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right),$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -25 \cdot 2\pi \cdot sin2\pi t = -157{,}07 sin2\pi \cdot 0{,}5 = 0 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

Тоді модуль швидкості матеріальної точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-157)^2 + (0)^2} = 157 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

Визначимо напрямок швидкості точки і, отже, напрямок її руху по коловій траєкторії. Для цього знайдемо координати точки в момент часу $t = 0{,}5$ с, тобто її зміщення в напрямку осей OX і OY:

$$x = 25 \sin 2\pi t = 25 sin2\pi \cdot 0{,}5 = 0 \text{ (см)};$$

$$y = 25 sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 25\, cos2\pi t = 25 cos2\pi \cdot 0{,}5 = -25{,}0 \text{ (см)}.$$

Отже, в момент часу $t = 0{,}5$ с координати точки M становлять $x = 0$ (см), $y = -25{,}0$ (см). У точці M (0; -25,0) побудуємо проекції швидкостей v_x і v_y, тоді знайдемо напрямок швидкості $\vec{v}$ (рис. 38).

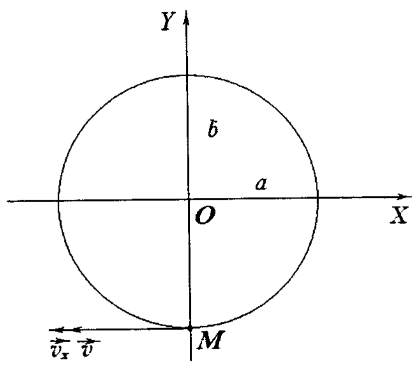


Рисунок 38

З рисунка видно, що точка рухається по колу за годинниковою стрілкою.

Відповідь: рівняння траєкторії точки $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{625} = 1$.

Приклад 6

Рух матеріальної точки задано рівняннями $x = 25\sin 2\pi t$ см; $y = 25sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ см. Знайти рівняння траєкторії $f(x, y)$ і швидкість $v(t)$ руху точки в момент часу $t = 0{,}5$ с.

Дано:

$x = 25\sin 2\pi t$ см

$y = 25sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ см

$t = 0{,}5\ c$

$f(x, y)$–?

v(t)–?

Розв'язування

З рівнянь руху матеріальної точки видно, що точка одночасно здійснює гармонічні коливання з однаковою частотою в напрямку координатних осей OX і OY.

Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху. Для цього виключимо із заданих рівнянь час t. Із першого рівняння визначимо:

$$sin2\pi t = \frac{x}{25},$$

друге перетворимо так:

$$y = 25sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = -25\,cos2\pi t.$$

З урахуванням першого рівняння друге запишемо у вигляді:

$$\frac{y}{25} = -cos2\pi t = -\sqrt{1 - sin^2 2\pi t} = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{25^2}}.$$

Піднесемо його до квадрата:

$$\frac{y^2}{25^2} = 1 - \frac{x^2}{25^2},$$

звідки

$$\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{625} = 1.$$

Це рівняння результуючого коливання, що є рівнянням кола із радіусом $R = 25$ см (рис. 39).

Знайдемо швидкість точки в момент часу $t = 0{,}5$ с. Модуль швидкості, як відомо, дорівнює:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

де $v_x = \frac{dx}{dt} = 25 \cdot 2\pi \cdot cos2\pi t = 25 \cdot 2\pi \cdot cos2\pi \cdot 0{,}5 = -157 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)$,

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 25 \cdot 2\pi \cdot sin2\pi t = 157{,}07 sin2\pi \cdot 0{,}5 = 0 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

Тоді модуль швидкості матеріальної точки:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-157)^2 + (0)^2} = 157 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

Визначимо напрямок швидкості точки і, отже, напрямок її руху по коловій траєкторії. Для цього знайдемо координати точки в момент часу $t = 0{,}5$ с, тобто її зміщення в напрямку осей OX і OY:

$$x = 25 \sin 2\pi t = 25 sin2\pi \cdot 0{,}5 = 0 \text{ (см)};$$

$$y = 25 sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = -25\, cos2\pi t = -25 cos2\pi \cdot 0{,}5 = 25{,}0 \text{ (см)}.$$

Отже, в момент часу $t = 0{,}5$ с координати точки M становлять $x = 0$ (см), $y = 25{,}0$ (см). У точці M (0; 25,0) побудуємо проекції швидкостей v_x і v_y, тоді знайдемо напрямок швидкості $\vec{v}$ (рис. 39).

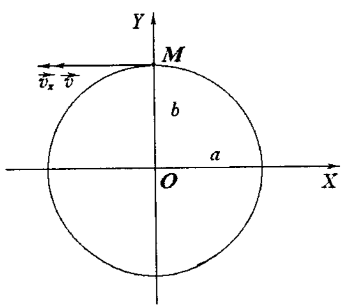


Рисунок 39

З рис. 39 видно, що точка рухається по колу проти годинникової стрілки.

Відповідь: рівняння траєкторії точки $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{625} = 1$.

Приклад 7

Вантаж масою $m = 500$ г, підвішений до пружини з жорсткістю $k = 20\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, здійснює гармонічні коливання в деякому середовищі. Логарифмічний декремент затухання коливань $\theta = 0{,}004$. Скільки коливань має здійснити вантаж, щоб їх амплітуда зменшилась удвічі? Скільки при цьому коливальна система втратить енергії ? За який час t відбудеться це зменшення ?

Дано:

$m = 500$ г = 0,5 кг

$k = 20\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$

$\theta = 0{,}004$

$\frac{\text{A}_1}{\text{A}_n} = 2$

$n-?$

$\eta - ?$

$t-?$

Розв'язування

Вантаж зазнає затухаючих коливань. Амплітуда першого коливання $\text{A}_1 = \text{A}_0 e^{-\beta t}$, а n-го коливання $\text{A}_n = \text{A}_0 e^{-\beta(t+nT)}$, де n – кількість коливань; T – період затухаючого коливання; β – коефіцієнт затухання.

Знайдемо відношення амплітуд:

$$\frac{\text{A}_1}{\text{A}_n} = \frac{\text{A}_0 e^{-\beta t}}{\text{A}_0 e^{-\beta(t+nT)}} = e^{\beta nT} = e^{n\theta},$$

де $\theta = \beta\text{T}$ – логарифмічний декремент затухання коливань.

Визначимо з цієї формули кількість коливань n:

$$ln\frac{\text{A}_1}{\text{A}_n} = n\theta lne = n\theta,$$

звідки

$$n = \frac{ln\frac{A_1}{A_n}}{\theta} = \frac{ln2}{0{,}004} = 173.$$

Енергія коливального процесу пропорційна квадрату амплітуди. Тому можна записати:

$$\frac{W_1}{W_n} = \left(\frac{A_1}{A_n}\right)^2 = 2^2 = 4,$$

де W_1 і W_n – повна енергія коливальної системи відповідно в початковий момент і через n коливань.

З останньої формули знайдемо, що $W_n = \frac{1}{4}W_1$.

Тоді втрата енергії коливальної системи у відсотках

$$\eta = \frac{\Delta W}{W_1} \cdot 100\% = \frac{W_1 - \frac{1}{4}W_1}{W_1} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%.$$

Отже, втрата енергії за n коливань становить 75%.

Час, упродовж якого амплітуда коливань зменшується вдвічі і розсіюється 75% енергії, дорівнює:

$$t = nT,$$

де $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ – період затухаючих коливань;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклічна частота власних коливань пружинного маятника.

Період затухаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\theta}{T}\right)^2}}, \text{ звідки } T = \sqrt{\frac{4\pi^2 + \theta^2}{\omega_0^2}}.$$

Взявши до уваги, що $\theta \ll 4\pi^2$, значенням θ^2 у цій формулі можна знехтувати. Тоді:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Після підстановки отримаємо остаточну формулу:

$$t = nT = n2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 173 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{0.5}{20}} = 171{,}86 \text{ (c)}.$$

Відповідь: $n = 173$; $\eta = 75\%$; $t = 171{,}86$ с.

§ 18 Задачі для самостійного розв'язування

6.1. Тіло масою 5 кг робить коливання, що описується рівнянням $x = 0{,}1\, sin\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{3}\right)$. Знайти значення кінетичної і потенціальної енергій тіла через 20 с від моменту часу $t = 0$. Чому дорівнює повна енергія тіла?

6.2. Визначити масу тіла, що робить гармонічні коливання з амплітудою 0,10 м, частотою 2,0 Гц і початковою фазою 30°, якщо повна енергія коливань 7,7 мДж. Через скільки секунд від початку відліку часу кінетична енергія буде дорівнювати потенціальній?

6.3. Визначити амплітуду гармонічних коливань матеріальної точки, якщо її повна коливальна енергія 40 мДж, а сила, яка діє на неї при зміщенні, що дорівнює половині амплітуди, 2,0 Н.

6.4. У скільки разів зменшиться повна енергія коливань секундного маятника за 5 хв, якщо логарифмічний декремент загасання 0,031?

6.5. Амплітуда коливань камертона за 15 с зменшилася в 100 разів. Знайти коефіцієнт загасання коливань β.

6.6. Амплітуда загасаючих коливань маятника за час t_1=5 хв зменшилась в два рази. За який час t_2 від початкового моменту амплітуда зменшиться в 10 разів?

6.7. За час t = 8 хв амплітуда загасаючих коливань маятника зменшилась в 3 рази. Визначити коефіцієнт загасання β.

6.8. Побудувати графік загасаючого гармонічного коливання, у якого частота 10 Гц, початкова амплітуда 6 см і логарифмічний декремент 0,01.

6.9. Амплітуда коливань маятника довжиною l = 1 м за час t = 10 хв зменшилась в два рази. Визначити логарифмічний декремент загасання Θ

6.10. Логарифмічний декремент загасання маятника 0,003. Визначити число N повних коливань, яке необхідно зробити маятнику, щоб амплітуда зменшилась у два рази.

6.11. Знайти число N повних коливань системи, під час яких енергія системи зменшилась в n = 2 рази. Логарифмічний декремент загасання Θ = 0,01.

6.12. Визначити період T загасаючих коливань, якщо період T_0 власних коливань системи дорівнює 1 с і логарифмічний декремент загасання Θ = 0,01.

6.13. Амплітуди вимушених гармонічних коливань при частоті ν_1 = 400 Гц і ν_2 = 600 Гц рівні між собою. Визначити резонансну частоту $\nu_{рез}$. Загасанням знехтувати.

6.14. Як зміниться хід маятникового годинника при піднятті його на висоту 20 км над поверхнею Землі ?

6.15. Математичний маятник підвішений до стелі вагона електропоїзда. В скільки разів зміниться його період коливань, якщо вагону надати горизонтальне прискорення a ?

6.16. Кулька масою $m = 200$ г, підвішена на пружині, коливається з частотою $\nu = 5{,}0$ Гц. Визначити коефіцієнт пружності пружини.

6.17. Визначити період коливань вантажу на пружинних вагах, якщо в стані рівноваги він зміщує стрілку ваг на $\Delta x = 2{,}0$ см від нульової поділки, що відповідає ненавантаженій пружині.

6.18. Визначити мінімальну частоту коливань похилої площини (у поздовжньому напрямі), при якій тіло, що знаходиться на ній, почне ковзати. Кут нахилу площини $\alpha = 10°$, амплітуда коливань $A = 10$ см коефіцієнт тертя тіла об похилу площину $\mu = 0{,}4$.

6.19. У склянці масою $m_1 = 20$ г і площею поперечного перерізу $S = 5$ см^2, що плаває на поверхні води, знаходиться ртуть масою $m_2 = 80$ г . Під дією вертикальної сили склянка виводиться з положення рівноваги і відпускається. Визначити період коливань системи.

6.20. Знайти частоту коливань вантажу масою $m = 0{,}20$ кг, підвішеного на пружині і поміщеного в олію, якщо коефіцієнт тертя в олії $\mu = 0{,}50$ кг/с, а жорсткість пружини $k = 50$ Н/м.

6.21. Стержень довжиною $l = 50$ см робить коливання біля горизонтальної осі, що проходить через точку, яка розташована на відстані $d = 12{,}5$ см від кінця стержня. Визначити частоту коливань стержня.

6.22. На кінцях стержня, маса якого $m = 60$ кг і довжина $l = 49$ см, закріплено дві кульки масами $m_1 = 70$ г і $m_2 = 90$ г, а стержень підвішений так, що може робити коливання навколо горизонтальної осі, яка проходить через його середину. Визначити період малих коливань стержня.

6.23. До стелі ліфта підвішено стержень за один кінець так, що він може створювати коливання. Довжина стержня 50 см. Визначити період коливань стержня, якщо ліфт рухається з прискоренням 12 м/с^2, спрямованим вгору.

6.24. Однорідний диск радіусом $R = 0{,}10$ м робить коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через точку, розташовану на відстані $R/2$ від центра диска і перпендикулярну до площини диска. Визначити частоту коливань диска.

6.25. Визначити період крутильних коливань залізної кулі радіусом $R = 0{,}1$ м, підвішеної на сталевому дроті радіусом $r = 1$ мм і довжиною $l = 1$ м. Модуль зсуву сталі взяти $G = 80$ ГПа.

6.26. Визначити амплітуду вимушених коливань вантажу масою 0,2 кг, підвішеного на пружині жорсткістю 20 Н/м, якщо діє примусова сила з амплітудою 2 Н і частотою, в 2 рази більшою власної частоти коливань вантажу, а коефіцієнт загасання 0,5 $с^{-1}$.

6.27. Дві кульки масами m_1 і m_2, скріплені між собою пружиною, жорстість якої k, лежать на горизонтальній площині. Пружина розтягується і відпускається. Визначити період виниклих коливань кульок. Тертя не враховувати.

6.28. Як визначити невідому масу тіла m_1, маючи секундомір, пружину й інше тіло відомої маси m?

6.29. Два однаково направлених гармонічних коливання однакової частоти з амплітудами $A_1 = 5$ см та $A_2 = 3$ см додаються в одне коливання з амплітудою $A = 7$ см. Визначити різницю фаз $\Delta\varphi$ складових коливань.

6.30. Два гармонічних коливання однакового напряму, що мають однакові амплітуди та частоти, утворюють одне коливання тієї ж амплітуди. Визначити різницю фаз $\Delta\varphi$ цих коливань.

6.31. Визначити амплітуду A і початкову фазу φ результуючого коливання, що утворюється при додаванні двох однаково направлених коливань з однаковими періодами: $x_1 = A_1 \sin\omega t$ і $x_2 = A_2 \sin\omega(t+\tau)$, якщо $A_1 = A_2 = 5$ см, $\omega = \pi\ c^{-1}$; $\tau = 0{,}5$ с. Знайти рівняння результуючого коливання.

6.32. Точка бере участь у двох однаково направлених коливаннях $x_1 = A_1 \sin\omega t$, $x_2 = A_2 \cos\omega t$ де $A_1 = 5$ см, $A_2 = 10$ см, $\omega = 3\ c^{-1}$. Визначити амплітуду результуючого коливання, його частоту ν і початкову фазу φ. Записати рівняння цього руху.

6.33. Точка бере участь у двох однаково направлених гармонічних коливаннях з однаковими частотами $\omega_1 = \omega_2 = \pi\ c^{-1}$ та амплітудами $A_1 = A_2 = 10$ см. Початкові фази коливань $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ і $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Визначити амплітуду результуючого коливання і початкову фазу φ. Записати рівняння цього руху. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд.

6.34. Додаються три гармонічних коливання однакового напряму з однаковими періодами $T_1 = T_2 = T_3 = 5$ с та амплітудами $A_1 = A_2 = A_3 = 10$ см. Початкові фази коливань $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \varphi_2 = \frac{\pi}{6}, \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд. Визначити амплітуду A та початкову фазу φ результуючого коливання.

6.35. Додаються два взаємно перпендикулярних коливання, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \sin \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$, де A_1 = 5 см; A_2 = 10 см; $\omega = \pi$ c^{-1} ; τ = 2 с. Визначити рівняння траєкторії та побудувати її.

6.36. Додаються два взаємно перпендикулярних коливання, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$, де A_1 = 6 см; A_2 = 12 см; $\omega = \pi$ c^{-1} ; τ = 2 с. Визначити рівняння траєкторії та побудувати її.

6.37. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = A_2 \sin \omega t$, де A_1 = 4 см: A_2 = 3 см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрям руху точки.

6.38. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \sin \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega t$, де A_1 = 3 см: A_2 = 5 см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрям руху точки.

6.39. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = -A_2 \cos 2\omega t$, де A_1 = 7 см, A_2=6 см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрямок руху точки.

6.40. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = A_2 \sin \frac{1}{2} \omega t$, де A_1 = 9 см, A_2 = = 10 см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрям руху точки.

6.41. Знайти швидкість поширення звукових коливань у повітрі, довжина хвилі яких 1,0 м, а частота коливань 340 Гц. Чому дорівнює максимальна швидкість зсуву часток повітря, якщо амплітуда коливань 0,2 мм?

6.42. На якій відстані від джерела коливань, що відбуваються за законом синуса, у момент часу $t = T/2$ зміщення точки від положення рівноваги дорівнює половині амплітуди. Швидкість поширення коливань 340 м/с. Період коливань 10^{-3} с.

6.43. Визначити швидкість поширення хвиль в озері, якщо період хитання човна, що знаходиться на поверхні води, 0,4 с, а відстань між найближчими гребенями хвиль 6,0 м.

6.44. У скільки разів змінюється довжина ультразвукової хвилі при переході хвилі зі сталі в мідь, якщо швидкості поширення ультразвуку в міді і сталі відповідно 3600 і 5500 м/с?

6.45. Знайти швидкість поширення ультразвуку в залізі, якщо модуль Юнга для заліза 20 ГПа, а густина 7800 кг/м^3.

6.46. Визначити швидкість поширення поперечних звукових хвиль у міді. Модуль зсуву для міді 12,0 ГПа, густина міді 8900 кг/м^3.

6.47. Визначити швидкість звуку у воді, якщо відомо, що модуль усебічного стиску води 1,98 ГПа.

6.48. Чому дорівнює коефіцієнт усебічного стиску води, якщо посланий з корабля ультразвуковий сигнал, відбившись на глибині h = 1,5 км, повернувся через t = 2,1 с?

6.49. Визначити натяг сталевої струни довжиною 0,50 м і діаметром 0,20 мм, якщо відомо, що вона налаштована в унісон з камертоном, частота якого 430 Гц.

6.50. Знайти швидкість поширення поперечних звукових хвиль у сталевій струні діаметром 1,0 мм, натягнутій із силою 100 Н.

6.51. Чому дорівнює швидкість поширення звукової хвилі в мідному дроті довжиною 10 м, що натягнутий силою 200 Н? Маса дроту 50 г.

6.52. Скільки биттів за секунду дає натягнута сталева струна з камертоном, частота коливань якого 430 Гц, якщо натяг струни 100 Н, її довжина 0,5 м, а діаметр 0,3 мм?

6.53. Визначити частоту основного тону відкритої труби довжиною 1,0 м, що заповнена повітрям.

6.54. Чому дорівнює частота основного тону закритої з одного кінця труби довжиною 1,5 м, якщо вона заповнена водою ? Швидкість поширення звуку у воді взяти 1,5 км/с.

6.55. Рівень гучності шуму літака на відстані 5 м дорівнює 120 дБ, а тихої розмови на тій же відстані – 40 дБ. Визначити відношення інтенсивностей і абсолютні значення інтенсивностей цих звуків.

6.56. На скільки децибелів відрізняються звуки, що відповідають порогові чутності ($I_0 = 10^{-2}$ Вт/м^2) і порогові болючих відчуттів ($I_0 = 10^2$ Вт/м^2)?

6.57. Підводний човен, що рухається зі швидкістю $\vec{V}$ = 10 м/с, посилає ультразвуковий сигнал частотою $\nu = 30$ кГц, що, відбившись від перешкоди, повертається назад. Визначити різницю між частотами сигналу, що посилається і прийнятого сигналу.

6.58. Два катери рухаються назустріч один одному з однаковими швидкостями, що дорівнюють $\vec{V}$=10,0 м/с. З першого катера посилається ультразвуковий сигнал частотою ν = 50,0 кГц, що відбивається від другого катера і приймається на першому. Визначити частоту прийнятого сигналу.

6.59. Два електропоїзди йдуть назустріч один одному зі швидкостями $\vec{V}_1$ = 30,0 м/с і $\vec{V}_2$ = 10,0 м/с. Перший потяг дає свисток, висота тону якого відповідає частоті ν = 500 Гц. Визначити частоту, яка сприймається пасажиром другого електропоїзда перед зустріччю і після зустрічі потягів. Чому б дорівнювали відповідні частоти, якби пасажир знаходився на першому електропоїзді, а сигнал давав другий ?

6.60. Човен, занурюючись вертикально, випромінює короткі звукові імпульси сигналу гідролокатора тривалістю τ_0 в напрямі дна. Тривалість відбитих сигналів, виміряних гідроакустикою на човні, дорівнює τ. Яка швидкість занурення човна ? Швидкість звуку у воді $\vec{V}$, дно горизонтальне.

§ 19 Електромагнітні коливання

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. При вільних коливаннях в контурі, який складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю C, котушки з індуктивністю L і резистора з омічним опором R, заряд на обкладках конденсатора змінюється за законом:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де $q_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасаючих коливань;

β – коефіцієнт згасання;

ω – циклічна частота згасаючих коливань;

q_0 і φ_0 – початкові значення амплітуди заряду і фази коливань.

2. Циклічна частота згасаючих коливань:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

3. Власна циклічна частота коливального контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

4. Добротність коливального контура:

$$\theta = \frac{L}{C}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

або для малих значень R (наближена формула):

$$\theta = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} .$$

5. Якщо в коливальному контурі, який складається з конденсатора ємністю C, котушки резистора з омічним опором R, з'єднаних послідовно, діє періодично діюча е.р.с. $\xi = \xi_0 \cos \omega t$, то в такому колі виникнуть вимушені коливання струму з частотою ω

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

При цьому величини I_0 і φ виражаються формулами:

$$I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$tg\,\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

6. Амплітуда струму I_0 досягне найбільшого значення (явище резонансу), якщо частота ω вимушених коливань збіжиться з частотою ω_0 власних коливань:

$$\omega_p = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}.$$

7. Швидкість поширення електромагнітних хвиль в прозорих середовищах:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}},$$

де ε і μ – діелектрична і магнітна проникності середовища;

ε_0 і μ_0 – електрична і магнітна сталі.

8. Швидкість поширення електромагнітних хвиль в вакуумі:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

9. Показник заломлення середовища:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

10. Рівняння електромагнітних хвиль:

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - kx);$$

$$H_y = H_0 \cos(\omega t - kx),$$

де E_0 і H_0 – амплітуди значень векторів напруженості електричного і магнітного полів в електромагнітній хвилі;

$k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

11. Густина енергії електромагнітних хвиль

$$w = w_e + w_м = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\, E\, H = \frac{1}{\upsilon} E\, H,$$

де w_e і $w_м$ – густини енергії відповідно електричного і магнітного полів електромагнітної хвилі.

12. Вектор густини потоку енергії електромагнітних хвиль, вектор Пойнтінга:

$$\vec{R} = w \cdot \vec{\upsilon} = \vec{E} \cdot \vec{H},$$

де w – густина енергії поля;

$\vec{\upsilon}$ – вектор швидкості електромагнітних хвиль;

$\vec{E}$ і $\vec{H}$ – вектори напруженості електричного і магнітного полів електромагнітної хвилі.

§ 20 Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Сила струму в коливальному контурі змінюється за законом $I = -0{,}2 \sin 400\, \pi t$ А. Індуктивність котушки контура $L = 1$ Гн, опором провідників знехтувати. Визначити: 1) період коливань T; 2) ємність контура C; 3) максимальне значення різниці потенціалів між обкладками конденсатора; 4) максимальне значення енергії магнітного поля; 5) максимальне значення енергії електричного поля; 6) повний максимальний магнітний потік.

Дано:

$I = -0{,}2 \sin 400\, \pi t$ А
$L = 1$ Гн

T–? C–? U_{max}–?
$W_{m\ max}$–?
$W_{e\ max}$–? Φ_{max}–?

Розв'язування

Оскільки контур складається з ємності та індуктивності, то в ньому відбуватимуться незатухаючі електричні коливання.

Період власних коливань контура визначимо за формулою Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Із заданого рівняння сили струму в контурі видно, що циклічна частота власних коливань виглядатиме так:

$$\omega_0 = 400\,\pi.$$

Між періодом T і циклічною частотою власних коливань ω_0 існує такий зв'язок:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{400\,\pi} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{с}.$$

1. Електроємність контура знайдемо за формулою циклічної частоти власних коливань:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

звідки

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L}.$$

Підставивши числові значення, обчислимо:

$$\text{C} = \frac{1}{(400\,\pi)^2 \cdot 1} = 6{,}3 \cdot 10^{-7}\ (\varPhi).$$

2. Зв'язок різниці потенціалів між обкладками конденсатора і зарядом на обкладці описує формула:

$$U = \frac{q}{\text{C}}.$$

Закон зміни заряду на обкладках конденсатора знайдемо із закону зміни сили струму:

$$dq = Idt = -0{,}02 \sin 400\,\pi\, t.$$

Проінтегруємо рівняння за часом t

$$q = \int -0{,}02 sin 400\,\pi\, t\, dt = \frac{0{,}02}{400\,\pi}\, cos 400\,\pi\, t.$$

Звідси випливає, що максимальне значення заряду на обкладці конденсатора

$$q_{max} = \frac{0{,}02}{400\,\pi} = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ (\text{Кл}).$$

Підставимо це значення у формулу для напруги й одержимо:

$$U_{max} = \frac{q_{max}}{C} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-5}}{6{,}3\cdot 10^{-7}} = 25{,}4 \text{ (В)}.$$

Максимальне значення енергії магнітного поля коливального контура буде при максимальній силі струму в контурі:

$$W_{m\,max} = \frac{LI_{max}^2}{2}.$$

З рівняння сили струму бачимо, що $I_{max} = 0{,}02$ А, отже:

$$W_{m\,max} = \frac{1\cdot 0{,}02^2}{2} = 2\cdot 10^{-4} (\text{Дж}).$$

Максимальне значення енергії електричного поля дорівнює енергії, яку має заряджений конденсатор, коли заряд на його обкладці максимальний:

$$W_{e\,max} = \frac{q_{max}^2}{2C} = \frac{\left(1{,}6\cdot 10^{-5}\right)^2}{2\cdot 6{,}3\cdot 10^{-7}} = 2\cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

Отже, для випадку вільних незатухаючих електричних коливань максимальне значення енергії електричного поля дорівнює максимальному значенню енергії магнітного поля, що й випливає із закону збереження енергії.

Повна енергія контура залишається незмінною.

Під час електричних коливань відбувається лише безперервний перехід електричної енергії, зосередженої в електричному полі конденсатора, в магнітну, зосереджену в магнітному полі котушки, і навпаки.

Це є наслідком того, що в контурі ідбувається безперервний процес перетворення електричного поля на магнітне і навпаки.

3. Повний максимальний магнітний потік спостерігається тоді, коли в контурі буде максимальна сила струму:

$$\Phi_{повн.max} = L\cdot I_{max} = 1\cdot 0{,}02 = 0{,}02 \text{ Вб}.$$

Відповідь: $T = 5\cdot 10^{-3}$ с; $C = 6{,}3\cdot 10^{-7}$ Ф;
$U_{max} = 25{,}4$ В; $W_{m\,max} = = 2\cdot 10^{-2}$ Дж;
$W_{e\,max} = 2\cdot 10^{-4}$ Дж; $\Phi_{повн.max} = 0{,}02$ Вб.

Приклад 2

Коливальний контур має індуктивність 1,6 мГн, електричну ємність 0,04 мкФ і максимальну напругу U_{max} на клемах 200 В. Визначити максимальну силу струму в контурі. Опором контура знехтувати.

Дано:

$L = 1,6$ мГн

$C = 0,04$ мкФ

$U_{max} = 200$ В

$I_{max} - ?$

Розв'язування

Згідно із законом збереження енергії, максимальна енергія електричного поля конденсатора дорівнює максимальній енергії магнітного поля котушки індуктивності. Тому

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2},$$

звідки

$$I_{max} = U_{max}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Підставимо числові значення:

$$I_{max} = 200 \cdot \sqrt{\frac{0,04 \cdot 10^{-6}}{1,6 \cdot 10^{-3}}} = 1 \text{ А}.$$

Відповідь: $I_{max} = 1$ А.

Приклад 3

Індуктивність коливального контура дорівнює 0,5 мГн. Контур резонує на довжину хвилі 300 м. Визначити електроємність такого контура. Опором контура знехтувати.

Дано:

$L = 0,5$ мГн

$\lambda = 300$ м

$C - ?$

Розв'язування

Виразимо довжину електромагнітної хвилі через швидкість поширення і період коливань контура

$$\lambda = c\,T,$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі.

Період коливань контура дорівнює

$$T = 2\pi \sqrt{LC}\,,$$

тому

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{LC}\,.$$

Звідки знаходимо ємність конденсатора

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L}\,.$$

Підставимо числові значення:

$$C = \frac{9 \cdot 10^4}{4 \cdot \pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}} = 5{,}1 \cdot 10^{-11}\ \Phi.$$

Відповідь: C = 51 пФ.

Приклад 4

Випромінювання антени міської радіостанції має потужність P = 1000 кВт. Обчислити на відстанях від радіостанції R_1 = 1 км і R_2 = 100 км: 1) величину вектора Пойнтінга; 2) напруженість електричного поля; 3) порядок напруги, яка виникає в антені радіоприймача; 4) тиск електромагнітних хвиль.

Дано:
P = 1000 кВт
R_1 = 1 км
R_2 = 100 км
Π_1–? Π_2–?
E_1 – ? E_2 – ?
U_1 – ? U_2 – ?
P_1 – ? P_2 – ?

Розв'язування

Вектор Пойнтінга дорівнює потоку електромагнітної енергії крізь одиницю поверхні, тобто потужності випромінювання через одиницю поверхні. Вважатимемо, що антена радіостанції випромінює рівномірно в усіх напрямках.

Числове значення вектора Пойнтінга в точці розміщення антени радіоприймача дорівнюватиме

$$\Pi_1 = \frac{P}{4\pi R_1^2} = \frac{10^5}{4\pi(10^3)^2} = 8\cdot 10^{-3}\ \left(\text{Вт}/_{\text{м}^2}\right),$$

$$\Pi_2 = \frac{P}{4\pi R_2^2} = \frac{10^5}{4\pi(10^5)^2} = 8\cdot 10^{-7}\ \left(\text{Вт}/_{\text{м}^2}\right).$$

Величину напруженості електричного поля знайдемо за виразом:

$$\Pi = vw,$$

де v – швидкість електромагнітних хвиль, яка дорівнює $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$ (оскільки радіохвилі поширюються в повітрі, то можна вважати, $\varepsilon = \mu = 1$, тоді $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$;

w – об'ємна густина енергії, яка дорівнює $w = \varepsilon_0 \mathrm{E}^2$.

Тоді $\Pi = c\varepsilon_0 E^2$, звідки $E = \sqrt{\frac{\Pi}{c\varepsilon_0}}$.

Обчислимо напруженості електричного поля за цією формулою:

$$E_1 = \sqrt{\frac{\Pi_1}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{8\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^8\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}} = 1{,}74\ \text{В}/_{\text{м}};$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{\Pi_2}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{8\cdot 10^{-7}}{3\cdot 10^8\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}} = 1{,}74\cdot 10^{-2}\ \text{В}/_{\text{м}}.$$

Визначимо, яка напруга (різниця потенціалів) виникає в приймальній антені завдовжки 1 м:

$$U_1 = \mathrm{E}_1 l = 1{,}74\cdot 1 = 1{,}74\ (\text{В});$$

$$U_2 = \mathrm{E}_2 l = 1{,}74\cdot 10^{-2}\cdot 1 = 1{,}74\cdot 10^{-2}\ (\text{В}).$$

Тиск електромагнітних хвиль на поглинальну поверхню знайдемо за формулою:

$$P_1 = \frac{П_1}{c} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8} = 2{,}7 \cdot 10^{-11}\ (\text{Па});$$

$$P_2 = \frac{П_2}{c} = \frac{8 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8} = 2{,}7 \cdot 10^{-15}\ (\text{Па}).$$

Відповідь: $П_1 = 8 \cdot 10^{-3}$ Вт/м^2 $П_2 = 8 \cdot 10^{-7}$ Вт/м^2; $E_1 = 1{,}74$ В/м;

$E_2 = 1{,}74 \cdot 10^{-2}$ В/м; $U_1 = 1{,}74$ В; $U_2 = 1{,}74 \cdot 10^{-2}$ В;

$P_1 = 2{,}7 \cdot 10^{-11}$ Па; $P_2 = 2{,}7 \cdot 10^{-15}$ Па.

§ 21 Задачі для самостійного розв'язування

7.1. Котушка індуктивністю L = 1 мГн і повітряний конденсатор, що складається з двох круглих пластин діаметром D = 20 см, з'єднані паралельно. Відстань d між пластинами дорівнює 1 см. Визначити період T коливального контура.

7.2. Конденсатор електроємністю C = 500 пФ з'єднаний паралельно з котушкою довжиною l = 40 см і площею перерізу S = 5 см^2. Котушка має N = 1000 витків. Осердя немагнітне. Знайти період T коливального контура.

7.3. Коливальний контур складається із котушки індуктивністю L = = 20 мкГн *і* конденсатора C = 80 нФ. Величина ємності може відхилятися від указаного значення на 2%. Визначити, в яких межах може змінюватися довжина хвилі, на яку резонує контур.

7.4. Коливальний контур має індуктивність L = 1,6 мГн, електроємність C = 0,004 мкФ, максимальна напруга U_{max} на затискачах дорівнює 200 В. Визначити максимальну силу струму I_{max} в контурі. Опір контура дуже малий.

7.5. Коливальний контур має конденсатор електроємністю C = 8 пФ і котушку індуктивністю L = 0,5 мГн. Яка максимальна напруга U_{max} на обкладках конденсатора, якщо максимальна сила струму I_{max} = 40 мА?

7.6. Котушка (без осердя) довжиною L = 50 см та площею перерізу S_1 = = 3 см^2 має N = 1000 витків та з'єднана паралельно з конденсатором. Конденсатор складається з двох пластин площею S_2 = 75 см^2 кожна. Відстань d між пластинами дорівнює 5 мм. Діелектрик – повітря. Визначити період T коливань контура.

7.7. Коливальний контур складається з паралельно з'єднаних конденсатора електроємністю C = 1 мкФ і котушки індуктивністю L = 1 мГн. Опір контура дуже малий. Знайти частоту ν коливань.

7.8. Індуктивність L коливального контура дорівнює 0,5 мГн. Яка повинна бути електроємність C контура, щоб він резонував на довжину хвилі $\lambda =$ $= 300$ м?

7.9. На яку довжину хвилі λ буде резонувати контур, що складається з котушки індуктивністю $L = 4$ мкГн і конденсатора електроємністю $C = 1{,}11$ нФ.

7.10. Для демонстрації дослідів Герца із заломлення електромагнітних хвиль беруть велику призму, що виготовлена з парафіну. Визначити показник заломлення парафіну, якщо його діелектрична проникність $\varepsilon = 2$ і магнітна проникність $\mu = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Воловик П. М. Фізика для університетів : підручник / Воловик П. М.– К. : Перун Ірпінь, 2005. – 864 с.

2. Савельев И. В. Курс общей физики : в 3-х т. : учеб. пособие / И. В. Савельев . – М. : Наука, 1986. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. – 1986. – 432 с.

3. Савельев И. В. Курс общей физики : в 3-х т. : учеб. пособие / И. В. Савельев . – М. : Наука, 1988. – Т. 2 :Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – 1988. – 496 с.

4. Савельев И. В. Курс общей физики : в 3-х т. : учеб. пособие / И. В. Савельев . – М. : Наука, 1987. –Т. 3 : Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – 1987. – 320 с.

5. Чертов А. Г. Задачник по физике : учеб. пособие / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 1981 – 496 с.

6. Зузяк П. М. Задачі з фізики. Програма курсу, контрольні завдання та методичні поради до розв'язування окремих задач : навч. посібник / П. М. Зузяк, А. Д. Слободяник. – Вінниця : ВНТУ, 2003. – 172 с.

7. Потапова М. В. Факторы, влияющие на качество усвоения знаний и умений выпускников / М. В. Потапова, В. В. Шахматова // Физика в школе. – 2008. – № 8. – С. 35–42.

8. Педагогика / [ред. Бабанский Ю. К.]. – М. : Просвещение, 1998. – 479 с.

9. Снычёва Л. В. Физика. Ч.1 (со словарем) : учеб. пособие для иностр. учащихся подготов. отд-ния / Снычёва Л. В. – Симферополь : Изд. центр КГМУ, 2000. – 173 с.

10. Снычёва Л. В. Физика. Ч. 2. : учеб. пособие для иностр. учащихся подготов. отд-ния / Снычёва Л. В. – Симферополь : ЧП «Эльиньо», 2003. – 82 с.

11. Физика для студентов-иностранцев / [Корочкина Л. Н., Каурова А. С., Шутенко Л. Д., Стасюк Б. П.]. – М. : Высш. шк., 1983. – 392 с.

12. Вердеревская Н. Н. Сборник задач и вопросов по физике : учеб. пособие / Н. Н. Вердеревская, С. П. Егорова. – [2-е изд., доп. и перераб.]. – М. : Высш. шк., 1980. – 216 с.

13. Методические указания к самостоятельной работе по физике для студентов-иностранцев подготовительного факультета / [сост. Е. И. Агеева, и др.]. - Харьков : НТУ «ХПИ», 1992. – 82 с.

14. Бондарь А. М. Физика : метод. указания для студентов-иностранцев подготов. фак. / Бондарь А. М., Чекарёв М. А., Троицкая В. В. – Харьков : Межвузовое полиграф, предприятие, 1990. – 126 с.

15. Гайдучок Г. М. Довідник з фізики для учнів / Гайдучок Г. М., Лободюк В. А., Рябошапка К. П. – К. : Рад. школа, 1981. – 240 с.

16. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики / Волькенштейн В. С.– М. : Наука, 1985. – 384 с.

17. Гончаренко С. У. Методика навчання фізики в середній школі: Механіка / Гончаренко С. У. – К. : Рад. шк., 1984. – 208 с.

18. Бендриков Г. О. Задачі з фізики для вступників до вузів / Бендриков Г. О., Буховцев Б. Б., Мякишев Г. Я. – Київ : Вища школа, 1981. – 368 с.

ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ СТАЛІ

Нормальне прискорення вільного падіння.... $g = 9.81\ м/с^2$

Гравітаційна стала.. $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ м^3/(кг \cdot с^2)$

Стала Авогадро.. $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}\ моль^{-1}$

Молярна газова стала...................................... $R = 8.31 (Дж/моль \cdot К)$

Молярний об'єм газів за н. у. .... $V_{0m} = 22.4 \cdot 10^{-3}\ м^3/моль$

Стала Больцмана... $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К$

Стала Фарадея.. $F = 9.65 \cdot 10^7\ Кл/моль$

Елементарний заряд.. $e = 1.60 \cdot 10^{-19}\ Кл$

Маса електрона.. $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ кг$

Питомий заряд електрона............................... $e/m = 1.76 \cdot 10^{11}\ Кл/кг$

Швидкість світла у вакуумі............................ $3.00 \cdot 10^8\ м/с$

Стала Стефана-Больцмана............................... $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ Вт/(м^2 \cdot K^4)$

Стала закону зміщення Віна............................ $b = 2.90 \cdot 10^{-3}\ м \cdot К$

Стала Планка.. $h = 6.63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$

$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$

Стала Рідберга.. $R = 2.07 \cdot 10^{-18}\ с^{-1}$

$R' = 1.10 \cdot 10^7\ м^{-1}$

Борівський радіус... $a = 5.29 \cdot 10^{-11}\ м$

Комптонівська довжина хвилі

електрона... $\lambda_C = 2.43 \cdot 10^{-12}\ м$

Магнетон Бора... $\mu_Б = 9.27 \cdot 10^{-24}\ Дж/Тл$

Енергія іонізації атома водню....................... $E_i = 2.18 \cdot 10^{-18}\ Дж$

Атомна одиниця маси..................................... $1\ а.о.м. = 1.66 \cdot 10^{-27}\ кг$

Ядерний магнетон.. $\mu_N = 5.05 \cdot 10^{-27}\ А \cdot м^2$

Електрична стала... $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ Ф/м$

Магнітна стала... $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м$

Таблиці фізичних величин

Густина ρ твердих тіл і рідин ($Мг/м^3$ або $г/см^3$)

Тверді тіла

Алюміній.......................2,70

Вісмут............................9,80

Вольфрам......................19,3

Залізо (чавун, сталь)..7,87

Золото...........................19,3

Кам'яна сіль..................2,20

Латунь...........................8,55

Марганець.....................7,40

Мідь...............................8,93

Нікель............................8,80

Платина.........................21,4

Свинець.........................11,3

Срібло............................10,5

Уран...............................18,7

Рідини (при 15 °C)

Вода (дистильована при 4 °C)..........1,00

Гліцерин...1,26

Гас...0,8

Масло..0,9

Олія рицинова....................................0,96

Ртуть...13,6

Сірковуглець......................................1,26

Спирт...0,8

Ефір...0,7

Густина газів за нормальних умов (кг/м^3)

Азот...1,25

Аргон..1,78

Водень..0,09

Повітря...1,29

Гелій...0,18

Кисень..1,43

Діелектрична проникність ε

Вода..81

Масло (трансформаторне)...................2,2

Парафін...2,0

Слюда...7,0

Скло..7,0

Фарфор...5,0

Ебоніт..3,0

Показник заломлення n

Алмаз..................................2,42

Вода.....................................1,63

Сірковуглець........................1,33

Скло.....................................1,50

Додаток А

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ФОРМУЛИ

1. Формули з алгебри та тригонометрії

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$Z = a + ib \qquad Z^* = a - ib$$

$$Z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad Z^* = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$Z = \rho e^{i\varphi} \qquad Z^* = \rho e^{-i\varphi}$$

$$|Z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad ZZ^* = |Z|^2$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x \qquad \sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\cos y \qquad \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\cos y$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin ax\sin bx = \frac{1}{2}\cos(a-b)x - \frac{1}{2}\cos(a+b)x$$

$$\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}\sin(a+b)x + \frac{1}{2}\sin(a-b)x$$

2. Формули диференціального й інтегрального числень

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{d(u)}{dx} + u\frac{d(v)}{dx} \qquad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{d(u)}{dx} - u\frac{d(v)}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1} \qquad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(ctgx)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d(tgx)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \quad \text{при m} \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}a^{-2}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}a^{-\frac{5}{2}}$$

$$\int_0^\infty x^{1/2} e^{-ax} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-3/2}$$

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}a^{-5/2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2{,}405$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0{,}225$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-3/2}$$

$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0{,}225$$

*Тут і далі стала інтегрування опускається.

3. Формули для наближених обчислень

Якщо $a<<1$, то в першому наближенні можна прийняти:

$$\frac{1}{1\pm a}=1\mp a; \qquad \frac{1}{\sqrt{1\pm a}}=1\mp\frac{1}{2}a;$$

$$(1\pm a)^2=1\pm 2a; \qquad e^a=1+a;$$

$$\sqrt{1\pm a}=1\pm\frac{1}{2}a; \qquad \ln(1+a)=a.$$

Якщо кут α малий ($\alpha < 5^o$ або $\alpha < 0{,}1$ *рад*) і виражений в радіанах, то в першому наближенні можна прийняти:

$$\sin\alpha = tg\alpha = \alpha\ , \ \cos\alpha = 1.$$

Додаток Б

Варіанти завдань контрольної роботи

Номер в журналі	Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5	Задача №6	Задача №7	Задача №8	Задача №9	Задача №10	Задача №11	Задача №12
1	1.1	1.2	2.1	2.31	2.61	2.91	2.12	2.15	3.1	3.31	4.1	5.1
2	1.3	1.4	2.2	2.32	2.62	2.92	2.12	2.15	3.2	3.32	4.2	5.2
3	1.5	1.6	2.3	2.33	2.63	2.93	2.12	2.15	3.3	3.33	4.3	5.3
4	1.7	1.8	2.4	2.34	2.64	2.94	2.12	2.15	3.4	3.34	4.4	5.4
5	1.9	1.10	2.5	2.35	2.65	2.95	2.12	2.15	3.5	3.35	4.5	5.5
6	1.11	1.12	2.6	2.36	2.66	2.96	2.12	2.15	3.6	3.36	4.6	5.6
7	1.13	1.14	2.7	2.37	2.67	2.97	2.12	2.15	3.7	3.37	4.7	5.7
8	1.15	1.16	2.8	2.38	2.68	2.98	2.12	2.15	3.8	3.38	4.8	5.8
9	1.17	1.18	2.9	2.39	2.69	2.99	2.12	2.15	3.9	3.39	4.9	5.9
10	1.19	1.20	2.10	2.40	2.70	2.10	2.13	2.16	3.10	3.40	4.10	5.10
11	1.21	1.22	2.11	2.41	2.71	2.10	2.13	2.16	3.11	3.41	4.11	5.11
12	1.23	1.24	2.12	2.42	2.72	2.10	2.13	2.16	3.12	3.42	4.12	5.12
13	1.25	1.26	2.13	2.43	2.73	2.10	2.13	2.16	3.13	3.43	4.13	5.13
14	1.27	1.28	2.14	2.44	2.74	2.10	2.13	2.16	3.14	3.44	4.14	5.14
15	1.29	1.30	2.15	2.45	2.75	2.10	2.13	2.16	3.15	3.45	4.15	5.15
16	1.31	1.32	2.16	2.46	2.76	2.10	2.13	2.16	3.16	3.46	4.16	5.16
17	1.33	1.34	2.17	2.47	2.77	2.10	2.13	2.16	3.17	3.47	4.17	5.17
18	1.35	1.36	2.18	2.48	2.78	2.10	2.13	2.16	3.18	3.48	4.18	5.18
19	1.37	1.38	2.19	2.49	2.79	2.10	2.13	2.16	3.19	3.49	4.19	5.19
20	1.39	1.40	2.20	2.50	2.80	2.11	2.14	2.17	3.20	3.50	4.20	5.20
21	1.41	1.42	2.21	2.51	2.81	2.11	2.14	2.17	3.21	3.51	4.21	5.21
22	1.43	1.44	2.22	2.52	2.82	2.11	2.14	2.17	3.22	3.52	4.22	5.22
23	1.45	1.46	2.23	2.53	2.83	2.11	2.14	2.17	3.23	3.53	4.23	5.23
24	1.47	1.48	2.24	2.54	2.84	2.11	2.14	2.17	3.24	3.54	4.24	5.24
25	1.49	1.50	2.25	2.55	2.85	2.11	2.14	2.17	3.25	3.55	4.25	5.25
26	1.51	1.52	2.26	2.56	2.86	2.11	2.14	2.17	3.26	3.56	4.26	5.26
27	1.53	1.54	2.27	2.57	2.87	2.11	2.14	2.17	3.27	3.57	4.27	5.27
28	1.55	1.56	2.28	2.58	2.88	2.11	2.14	2.17	3.28	3.58	4.28	5.28
29	1.57	1.58	2.29	2.59	2.89	2.11	2.14	2.17	3.29	3.59	4.29	5.29
30	1.59	1.60	2.30	2.60	2.90	2.12	2.15	2.18	3.30	3.60	4.30	5.30

Навчальне видання

Слободяник Анатолій Дмитрович

Мельник Микола Дем'янович

ФІЗИКА
Аудиторна, самостійна та індивідуальна робота студентів

Навчальний посібник

Редактори І. Городенська
Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено А.Слободяником

Підписано до друку 27.10.2017 р.
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 10,35.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2017-390.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 59-85-32, 59-87-38.
press.vntu.edu.ua; *e-mail:* kivc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р