

А. Д. СЛОБОДЯНИК, С. Є. ТУЖАНСЬКИЙ,
В. М. САЙЧУК

ФІЗИКА

ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЬ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. Д. Слободяник, С. Є. Тужанський, В. М. Сайчук

ФІЗИКА
Теорія коливань та хвиль

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2021

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 15 від 31.05.2021 р.)

Рецензенти:

А. Я. Кулик, доктор технічних наук, професор

А. А. Яровий, доктор технічних наук, професор

А. М. Сільвейстр, доктор педагогічних наук, професор

Слободяник, А. Д.

С 48 Фізика. Теорія коливань та хвиль : навч. пос. / А. Д. Слободяник, С. Є. Тужанський, В. М. Сайчук – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 142 с.

ISBN 978-966-641-876-3

Начальний посібник з фізики розроблено відповідно до програми курсу фізики у вищих інженерно-технічних закладах освіти. Розкрито теорію механічних і електромагнітних коливань та хвиль. До кожного розділу програми наведено відповідну кількість тематичних задач. На початку кожного підрозділу наведені основні формули, потрібні для розв'язування запропонованих задач. Для контролю та самоконтролю наведено тести. Рекомендовано для студентів інженерних спеціальностей та студентів-заочників. Матеріали посібника подано з використанням сучасного математичного редактора Mathcad. Електронний варіант посібника можна використовувати в умовах дистанційної форми навчання.

УДК 53

ISBN 978-966-641-876-3

©ВНТУ, 2021

ЗМІСТ

I ВСТУП	4
II Загальні відомості про теорію коливань та хвиль	7
2.1 Кінематика механічних коливань	7
2.2 Динаміка гармонічних коливань	11
2.3 Маятники	12
2.4 Енергія гармонічних коливань	18
2.5 Математичний маятник	23
2.6 Фізичний маятник	25
III Механічні коливання та хвилі	27
3.1 Згасальні механічні коливання	27
3.2 Вимушені механічні коливання	30
3.3 Додавання гармонічних коливань однакового напрямку. Биття	36
3.4 Додавання взаємно перпендикулярних коливань	40
3.5 Хвильові процеси. Енергія хвилі. Рівняння плоскої хвилі	45
3.6 Рівняння сферичної хвилі	48
3.7 Фазова швидкість. Дисперсія хвиль. Групова швидкість	49
3.8 Хвильове рівняння	52
3.9 Енергія хвилі	53
IV Електромагнітні коливання та хвилі	58
4.1 Вільні згасальні електричні коливання	58
4.2 Вимушені електромагнітні коливання	63
4.3 Змінний струм	69
4.4 Резонанс напруг	74
4.5 Електромагнітні хвилі. Природа електромагнітних хвиль	75
4.6 Хвильові рівняння електромагнітних хвиль	78
4.7 Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Пойнтінга	82
V Розв'язування задач з теорії коливань та хвиль	85
5.1 Механічні гармонічні коливання	85
5.2 Механічні хвилі. Основні формули	89
5.3 Приклади розв'язування задач	93
5.4 Задачі для самостійного розв'язування	119
5.5 Електромагнітні коливання	124
5.6 Приклади розв'язування задач	126
5.7 Задачі для самостійного розв'язування	131
VI Тести	132
Література	136
VII Додатки	137

І ВСТУП

Коливаннями називають зміну деякої фізичної величини, що відбувається через рівні проміжки часу. Це рухи або процеси, які характеризуються певною повторюваністю в часі. Коливальні процеси значно поширені в природі й техніці, наприклад, коливання маятника годинника, змінний електричний струм і т. д. При коливальному русі маятника змінюється координата його центра мас, а у випадку змінного струму – коливаються напруга й струм у колі. Фізична природа коливань може бути різною, тому розрізняють коливання механічні, електромагнітні й інші. Однак різні коливальні процеси описуються однаковими характеристиками й однаковими рівняннями. Звідси випливає доцільність єдиного підходу до вивчення коливань різної фізичної природи.

Коливання будуть вільними (або власними), якщо вони відбуваються за рахунок деякої енергії, переданої коливальній системі в початковий момент часу, при відсутності в наступні моменти часу будь-яких зовнішніх впливів на цю систему. Найпростішими коливаннями є гармонічні коливання, при яких коливна величина змінюється з часом за законом косинуса або синуса. Вивчення гармонічних коливань важливе з двох причин:

1) коливання, які зустрічаються у природі й техніці, за певних наближень є гармонічними;

2) різні періодичні процеси (процеси, які повторюються через рівні проміжки часу) можна подавати як суперпозицію гармонічних коливань.

Гармонічні коливання деякої фізичної величини x описуються таким рівнянням

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.1)$$

де A – максимальне значення коливної величини x , яке називається *амплітудою коливань*;

ω_0 – колова, або циклічна частота;

φ – початкова фаза коливань для моменту часу $t = 0$;

$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза коливань для довільного моменту часу t .

Оскільки косинус змінюється в межах від +1 до -1, то x може набувати значень від $+A$ до $-A$.

Певні стани системи в процесі гармонічних коливань повторюються через однаковий проміжок часу T , який називається *періодом коливань*. За цей час фаза коливання зростає на 2π , тобто

$$\omega_0(t+T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi,$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (1.2)$$

Величина, обернена до періоду коливань,

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (1.3)$$

виконана коливною системою за одиницю часу, називається *частотою коливань*. Прирівнюючи (1.2) і (1.3), одержимо

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Одиницею частоти є герц (Гц), це частота такого періодичного процесу, при якому за 1 с відбувається одне повне коливання.

Запишемо першу й другу похідні фізичної величини x гармонічного коливання, тобто визначимо швидкість і прискорення коливання:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0^2 t + \varphi + \pi). \quad (1.5)$$

Тобто, маємо гармонічні коливання тієї ж циклічної частоти. Амплітуди величин (1.4) і (1.5) відповідно дорівнюють $A\omega_0$ і $A\omega_0^2$. Фаза швидкості (1.4) відрізняється від фази фізичної величини (1.1) на $\pi/2$, а фаза прискорення (1.5) відрізняється від фази фізичної величини (1.1) на π .

Отже, у моменти часу, коли $x = 0$, $\frac{dx}{dt}$ має найбільші значення; коли ж x досягає максимальних від'ємних значень, то в ці моменти часу $\frac{d^2x}{dt^2}$ будуть мати найбільші додатні значення.

З рівняння (1.5) одержуємо диференціальне рівняння гармонічних коливань (де враховано, що $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.6)$$

Таким чином, розв'язком диференціального рівняння (1.6) є вираз (1.1).

Гармонічні коливання можна зобразити графічно за допомогою методу обертання вектора амплітуди або методу векторних діаграм. Для цього з довільної точки O , взятої на осі x , під кутом φ , який дорівнює початковій фазі коливання, відкладається вектор \vec{A} , модуль якого дорівнює амплітуді A гармонічного коливання.

Якщо цей вектор привести до обертання з кутовою швидкістю ω_0 то проекція кінця вектора буде переміщуватися по осі x і набувати значень від $-A$ до $+A$, а коливна величина буде змінюватися з часом за законом $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. У фізиці часто застосовується інший метод, який відрізняється від методу обертання вектора амплітуди лише за формою. У цьому методі коливну величину подають комплексним числом відповідно до формули Ейлера для комплексних чисел

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (1.7)$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тому рівняння гармонічного коливання (1.1) можна записати також в експонентній формі

$$x = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (1.8)$$

Права частина рівняння (1.8) є рівнянням гармонічних коливань.

II ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ТЕОРІЮ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЬ

2.1 Кінематика механічних коливань

Коливальним рухом, або просто *коливанням*, називають будь-який рух чи зміну стану, що характеризується повторюваністю в часі значень фізичних величин, які визначають цей рух чи стан. З коливаннями ми стикаємося під час вивчення найрізноманітніших явищ: звуку, світла, змінних струмів, радіохвиль, руху маятника тощо. Є загальні закономірності цих явищ та математичні методи їх дослідження.

Прикладами коливального руху в механіці можуть бути коливання маятників, струн, мембран телефонів, балансирів годинників, поршнів двигунів внутрішнього згорання, мостів та інших споруд, що зазнають змінних навантажень.

Коливальний рух називають *періодичним*, якщо значення фізичних величин, що змінюються в процесі коливань, повторюються через однакові інтервали часу.

Мінімальний інтервал (проміжок) часу, через який повторюється положення тіла в коливальному русі, називають *періодом коливання* T . Число коливань, що здійснює тіло за одиницю часу, називають *частотою коливань* ν .

Серед різних коливальних рухів у природі і техніці важливе значення мають гармонічні коливальні рухи. *Гармонічним* називають коливальний рух, за якого матеріальна точка зміщується від положення рівноваги за законом синуса або косинуса. Важливість цього руху пояснюють тим, що коливання в природі і техніці дуже близькі до гармонічних, а також тому, що складні коливання можна розкласти на гармонічні.

Розглянемо, наприклад, зв'язок між рухом по колу і гармонічним коливанням. Нехай матеріальна точка M рівномірно рухається по колу радіусом R з кутовою швидкістю ω . Розглянемо рух проекції цієї точки M' на осі OX (рис. 1, а):

$$x = R \sin \varphi = R \sin \omega t, \quad (2.1)$$

де $\varphi = \omega t$.

Якщо точка M почала свій рух по колу не з початкового положення M_0 , а з довільного M_1 (рис. 1, б), то зміщення точки M' від положення рівноваги становитиме

$$x = R \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.2)$$

З рис. 1, б видно, що рух проекції точки M на вісь OY N також є гармонічним коливанням. Зміщення цієї точки N дорівнює

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2.3)$$

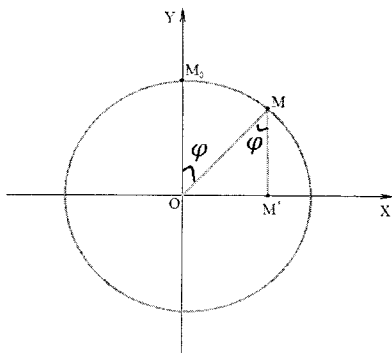


Рисунок 1, а

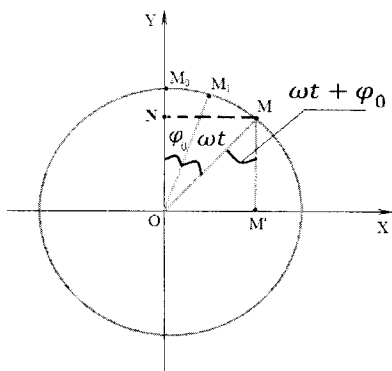


Рисунок 1, б

Вирази (2.2) і (2.3) є рівняннями гармонічного коливання в загальному вигляді.

Визначимо основні кінематичні елементи цього руху. Літерою x позначено відстань точки, що перебуває в коливальному русі, від положення рівноваги; її називають *зміщенням*. Максимальне зміщення точки від положення рівноваги називають *амплітудою коливання*. В нашому прикладі $x_{max} = R = A$.

Аргумент $(\omega t + \varphi_0)$ називають *фазою коливання*, а величину φ_0 – *початковою фазою коливання*, тобто це значення фази в початковий момент часу ($t = 0$).

Фаза дає змогу визначити числове значення і напрямок зміщення, а отже, положення точки за коливального руху в будь-який момент часу.

Знайдемо повний період гармонічного коливання T . Оскільки період синуса і косинуса дорівнює 2π , то через інтервал часу T фаза коливання збільшиться на 2π , тому матимемо:

$$\omega(t + T) + \varphi_0 - (\omega t + \varphi_0) = 2\pi,$$

звідки знаходимо

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.4)$$

Згідно з цією залежністю частота гармонічних коливань

$$\vartheta = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \quad (2.5)$$

$$\omega = 2\pi\vartheta. \quad (2.6)$$

За одиницю частоти взято частоту такого коливання, період якого дорівнює 1 с. Цю одиницю називають *герцом* (Гц).

З формули (2.6) випливає, що величина ω визначає число повних коливань, які здійснює точка упродовж 2π секунд. Цю величину називають *циклічною* (або *коловою*) *частотою* гармонічного коливання.

Швидкість точки в гармонічному коливанні знайдемо як першу похідну від зміщення за часом із формули (2.2):

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.7)$$

або

$$v = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.8)$$

Знак похідної $\frac{dx}{dt}$ визначає, в якому напрямку (додатному чи від'ємному) по осі X в даний момент часу рухається точка M' .

Амплітуду A і початкову фазу φ_0 коливання визначають за початковими умовами руху. Нехай у початковий момент ($t = 0$) зміщення точки M' дорівнює x_0 , а її швидкість — v_0 . Підставивши у формули (2.2) і (2.7) $t = 0$, дістанемо

$$x_0 = A \sin \varphi_0, v_0 = A \omega \cos \varphi_0, \quad (2.9)$$

звідки

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \text{ і } \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega x_0}{v_0}. \quad (2.10)$$

Прискорення точки за гармонічного коливання знаходимо як похідну від швидкості за часом

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.11)$$

З урахуванням виразів (2.2) і (2.11) рівняння прискорення точки за гармонічного коливання можна записати в такому вигляді

$$a = -\omega^2 x, \quad (2.12)$$

або

$$a = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (2.13)$$

Рівняння (2.2) гармонічного коливання можна подати і в іншій формі. Для цього розкриємо значення синуса як суми двох кутів:

$$x = A \sin \omega t \cos \varphi_0 + A \cos \omega t \sin \varphi_0. \quad (2.14)$$

Ввівши позначення $B = A \cos \varphi_0$ і $C = A \sin \varphi_0$, дістанемо

$$x = B \sin \omega t + C \cos \omega t. \quad (2.15)$$

Взявши до уваги залежності (2.9) і (2.10), знайдемо значення B і C :

$$B = \frac{v_0}{\omega}; \quad C = x_0. \quad (2.16)$$

Підставимо значення B і C з виразу (2.16) у формулу (2.15), дістанемо вираз

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t. \quad (2.17)$$

Зміщення, швидкість і прискорення за гармонічного коливального руху, як видно з рівнянь (2.2), (2.8) і (2.13), є гармонічними змінними величинами з однаковим періодом, але з різницею фаз, відповідно, $\frac{\pi}{2}$ і π . Графіки цих кінематичних характеристик є, очевидно, синусоїдами (рис. 3, 4, 5). Зі співвідношень (2.10) і (2.17) випливає, що для однієї й тієї самої коливальної системи амплітуда A , початкова фаза φ_0 і зміщення точки x залежать від початкових умов: x_0 і v_0 .

Якщо у формулі (2.12) замість прискорення руху точки підставити його значення через зміщення точки, тобто другу похідну від зміщення за часом, то дістанемо диференціальне рівняння гармонічних коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (2.18)$$

Систему, яка описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку (2.18), називають *гармонічним осцилятором*.

$$A := 5 \quad \omega := \pi \quad \varphi_0 := \frac{\pi}{3}$$

$$x(t) := A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$v(t) := A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

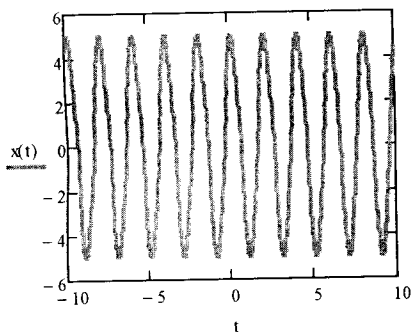


Рисунок 3

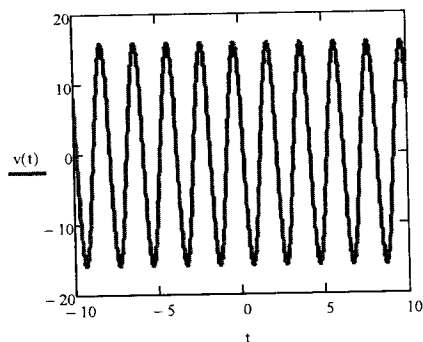


Рисунок 4

$$a(t) := -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

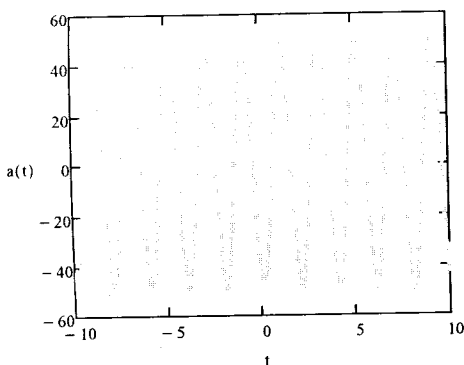


Рисунок 5

2.2 Динаміка гармонічних коливань

Характерною особливістю гармонічних коливань є те, що прискорення пропорційне зміщенню і спрямоване в бік, протилежний зміщенню (2.12). Знаючи прискорення руху і масу точки, за другим законом Ньютона знайдемо діючу силу, що спричинює цей рух

$$F = ma = -m\omega^2 x. \quad (2.19)$$

Отримана сила пропорційна зміщенню точки від положення рівноваги і направлена в бік, протилежний зміщенню, тобто до положення рівноваги. Тому її називають вертальною силою і записують у вигляді

$$F = -kx, \quad (2.20)$$

де $k = m\omega^2$ – коефіцієнт вертальної сили.

За виразом цього коефіцієнта можна визначити циклічну частоту коливання і період

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad (2.21)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.22)$$

Оскільки вираз вертальної сили (2.20) аналогічний виразу сили пружності, то її називають *квазіпружною* (начебто, пружною) силою. Звідси випливає, що коли на матеріальну точку (тіло) діє лише квазіпружна сила, то вона спричинює гармонічний рух матеріальної точки (тіла). Отже, з погляду динаміки, гармонічним коливанням називають процес, який виникає під дією квазіпружної сили. Як приклад розглянемо рухи пружинного, математичного і фізичного маятників.

2.3 Маятники

Пружинний маятник. Тіло, підвішене на пружині, яке може здійснювати коливання під дією сили пружності, називають *пружинним маятником* (рис. 6).

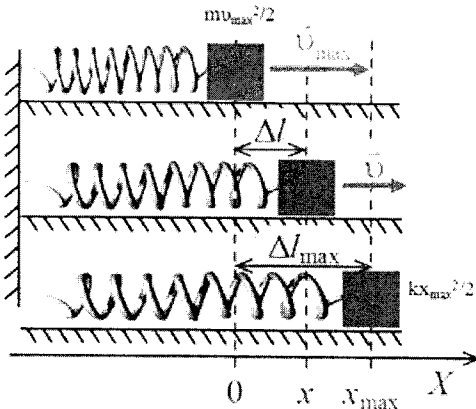


Рисунок 6

Охарактеризуємо зміщення тіла від положення рівноваги координатою x . Причому вісь OX спрямуємо горизонтально, а початок координат сумісно з положенням рівноваги тіла.

При цьому проти сили пружності буде виконано роботу $\frac{kA^2}{2}$, внаслідок чого зміниться потенціальна енергія системи. Якщо потенціальну енергію пружинного маятника у стані рівноваги взяти такою, що дорівнює нулю, то запас його потенціальної енергії становитиме

$$W_{\text{п}} = \frac{kA^2}{2}. \quad (2.23)$$

Звільнившись від зв'язків, тіло під дією рівнодійної сили \vec{F} прискорено рухатиметься до стану рівноваги, його кінетична енергія зростає за рахунок зменшення потенціальної енергії деформованої пружини. В момент проходження маятником стану рівноваги рівнодійна сила \vec{F} і його потенціальна енергія $W_{\text{п}}$ дорівнюють нулю, а кінетична енергія максимальна. За інерцією тіло продовжує рухатись вліво від положення рівноваги. Цей рух буде сповільненим і припиниться тоді, коли кінетична енергія повністю перейде в потенціальну, тобто коли зміщення тіла дорівнюватиме $-A$. В момент проходження положення рівноваги рівнодійна сила і потенціальна енергія дорівнюватимуть нулю, а швидкість і кінетична енергія будуть максимальними. Тіло за інерцією продовжує рухатись вліво, стискає пружину за рахунок перетворення кінетичної енергії тіла у потенціальну. Коли зміщення тіла почне дорівнювати A , рух вліво припиниться. Після миттєвої зупинки тіла у лівій точці цей процес повторюватиметься знову.

Отже, тіло здійснює коливальний рух відносно положення рівноваги під дією вертальної сили \vec{F} .

Запишемо рівняння руху пружинного маятника в проекціях на вісь OX

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(\Delta l + x). \quad (2.24)$$

Врахувавши (2.23) і поділивши ліву і праву частини рівняння (2.24) на m , дістанемо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (2.25)$$

Оскільки коефіцієнт пружності k пружини і маса тіла m є величинами додатними, то, ввівши позначення

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad (2.26)$$

отримасмо рівняння руху пружинного маятника в диференціальній формі

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad (2.27)$$

Як уже зазначалось, ця залежність є диференціальним рівнянням гармонічного коливання, розв'язком його є

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.28)$$

Отже, пружинний маятник здійснює гармонічні коливання навколо положення рівноваги. Їхню циклічну частоту визначають за виразом (2.26), а період

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.29)$$

Математичний маятник. Моделлю математичного маятника може бути кулька, підвішена на довгій ($l \gg R_k$) нитці, що мало розтягується. Масою нитки можна знехтувати порівняно з масою кульки ($m_n \ll m_k$) (рис. 7). Позначимо через φ кут відхилення маятника від вертикалі.

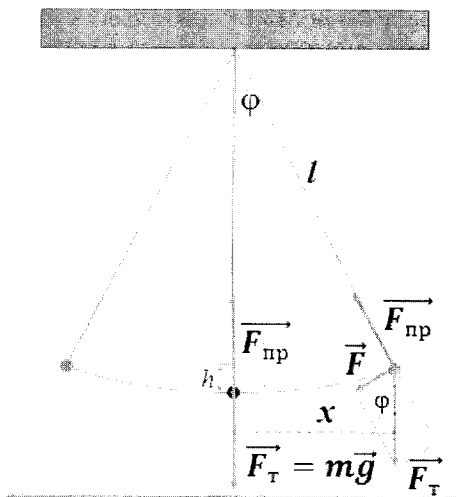


Рисунок 7

Колівання математичного маятника відбувається в заданій площині під дією сили тяжіння. Коли маятник перебуває у стані рівноваги, сила тяжіння зрівноважується силою пружності нитки. Якщо такий маятник

відхилити на деякий кут $\varphi = \alpha$, то сила пружності нитки зрівноважуватиме тільки одну складову сили тяжіння \vec{F}_1 напрямлену вздовж нитки. Друга складова \vec{F}_2 , спрямована до положення рівноваги, залишиться незрівноваженою. Вона є вертальною силою. Згідно з рис. 7 $F_2 = F_1 \sin \alpha = mg \sin \alpha$. Розкладемо $\sin \alpha$ у ряд Тейлора

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \quad (2.30)$$

З ряду (2.30) бачимо, що для достатньо малих α можна знехтувати всіма його членами, за винятком першого. У зв'язку з цим вертальна сила дорівнюватиме $F_2 = mg\alpha$. Оскільки $\alpha = -\frac{x}{l}$, то цю залежність можна подати у вигляді

$$F_2 = -mg \frac{x}{l}. \quad (2.31)$$

Звідси випливає, що вертальна сила F_2 пропорційна зміщенню і спрямована в протилежний бік. Під дією такої сили виникають, як відомо, гармонічні коливання. Запишемо диференціальне рівняння, яке описує ці коливання,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{mg}{l} x. \quad (2.32)$$

Після відповідних перетворень дістанемо:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (2.33)$$

де ω – циклічна частота власних коливань математичного маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.34)$$

Співвідношення (2.33) є диференціальним рівнянням гармонічного коливання математичного маятника, загальний розв'язок його

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.35)$$

Дві сталі – амплітуда A і початкова фаза φ_0 – визначаються за початковими умовами (формули (2.9) і (2.10)).

Період коливань математичного маятника описується залежністю

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.36)$$

З формули (2.36) випливають такі закономірності коливання математичного маятника:

- 1) період коливання маятника не залежить від його маси;
- 2) період коливання маятника не залежить від амплітуди за умови, що $\sin \alpha \approx \alpha$. Це справджується для малих кутів $10\text{--}15^\circ$;
- 3) період коливання прямо пропорційний кореню квадратному зі значення довжини математичного маятника й обернено пропорційний кореню квадратному з прискорення вільного падіння.

За допомогою математичного маятника можна визначити прискорення вільного падіння в будь-якій точці земної поверхні. Оскільки земна кора в різних місцях має неоднаковий склад, то й густина її в різних місцях різна. У тих місцях, де густина більша, прискорення вільного падіння буде більшим. Вимірюючи його величини за допомогою математичного маятника, можна розвідувати поклади корисних копалин.

Фізичний маятник. Фізичним маятником називають тверде тіло довільної форми, яке під дією сили земного тяжіння здатне коливатися відносно горизонтальної осі, що не проходить через його центр мас (центр тяжіння).

У положенні стійкої рівноваги центр мас маятника розміщується під дією сили тяжіння на вертикалі, яка проходить через центр мас і перетинає вісь O .

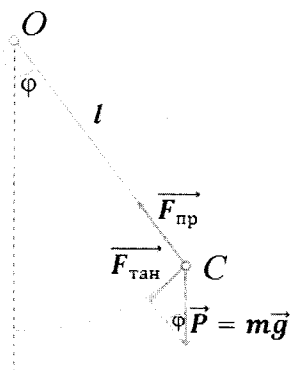


Рисунок 8

У разі відхилення маятника від положення рівноваги на деякий кут α (рис. 8) виникає момент сили, який намагається повернути його у положення рівноваги. За малих величин кута α коли можна вважати, що $\sin \alpha \approx \alpha$, цей момент дорівнюватиме (рис. 8):

$$M = -mgl_c \alpha, \quad (2.37)$$

де m – маса маятника;

l_c – відстань від осі O до центра мас маятника.

Знак «мінус» у рівнянні (2.37) означає, що момент сили M спрямований у бік, протилежний кутовому зміщенню $\vec{\alpha}$.

Позначимо момент інерції маятника відносно осі коливання через J і візьмемо до уваги закон динаміки обертального руху, за яким $M = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}$. Тоді залежність (2.37) набуде вигляду

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl_c\alpha, \quad (2.38)$$

або

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl_c}{J} \alpha = 0. \quad (2.39)$$

Оскільки m , g , l_c і J є додатними величинами, введемо позначення

$$\omega^2 = \frac{mgl_c}{J}. \quad (2.40)$$

Тоді вираз (2.39) можна записати так:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0. \quad (2.41)$$

Це рівняння цілком аналогічне рівнянню гармонічного осцилятора. Отже, воно є диференціальним рівнянням гармонічного коливання фізичного маятника. Загальним розв'язком його, у чому легко переконатися підстановкою, буде таке рівняння коливального руху фізичного маятника:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (7.42)$$

де α_0 – амплітуда коливання (найбільший кут відхилення від положення рівноваги, радіан);

ω – циклічна частота, яку визначають за формулою (2.40);

φ_0 – початкова фаза коливання.

Період коливання фізичного маятника визначимо за циклічною частотою

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl_c}}. \quad (2.43)$$

Фізичний маятник можна розглядати як такий, що складається з матеріальних точок, які коливаються, а кожен матеріальну точку – як окремий математичний маятник з відповідним періодом коливань. Одні з них прискорюють рух маятника, а інші – сповільнюють. Однак для кожного фізичного маятника можна підібрати такий математичний маятник, період коливання якого дорівнюватиме періоду коливання цього

фізичного маятника. Довжину такого математичного маятника називають *зведеною довжиною фізичного маятника*.

Прирівнявши праві частини рівнянь (2.36) і (2.43), знайдемо формулу для визначення зведеної довжини $l_{зв}$ фізичного маятника

$$l_{зв} = \frac{J}{ml_c}. \quad (2.44)$$

Точку на фізичному маятнику, що відповідає зведеній його довжині, називають *центром коливань*. Точка підвішування фізичного маятника і центр його коливань є спряженими точками. Якщо їх поміняти ролями, то період коливань фізичного маятника не зміниться.

Фізичний маятник так само, як і математичний, має властивість ізохронності, тобто період його коливань не залежить від амплітуди. Завдяки цій властивості він став важливою складовою частиною годинника. За періодом коливання фізичного маятника можна легко визначити прискорення вільного падіння g та моменти інерції тіл неправильної форми.

За зведеною довжиною фізичного маятника визначають момент інерції тіл різної форми.

2.4 Енергія гармонічних коливань

Гармонічний коливальний рух матеріальної точки здійснюється під дією квазіпружної вертальної сили. Оскільки квазіпружні сили є консервативними, то повна енергія гармонічного коливання має залишатися сталою. Нехай матеріальна точка масою m здійснює коливання під дією квазіпружної сили $F = -kx$.

При зміщенні матеріальної точки на x ця сила виконує роботу

$$A = \int_0^x -kx dx = -\frac{kx^2}{2}, \quad (2.45)$$

яка витрачається на зміну потенціальної енергії системи, тобто

$$A = -\Delta W_n = -(W_{n2} - W_{n1}) = -W_{n2} + W_{n1}. \quad (2.46)$$

Якщо початкову потенціальну енергію системи взяти такою, що дорівнює нулю $W_{n1} = 0$, то, згідно з формулою (2.46),

$$W_{n2} = W_n = -A = \frac{kx^2}{2}.$$

Отже, потенціальна енергія матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання, дорівнює

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}. \quad (2.47)$$

Матеріальна точка, що коливається, має певну швидкість v , а отже, й кінетичну енергію

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.48)$$

Підставивши значення k , x і v у формули (2.47) і (2.48) відповідно з виразів (2.26), (2.2) і (2.7), дістанемо

$$W_{\text{п}} = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}, \quad (2.49)$$

$$W_{\text{к}} = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \quad (2.50)$$

Потенціальна енергія $W_{\text{п}}$ матеріальної точки досягає максимуму в крайніх точках (за $x = A$):

$$W_{\text{п max}} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad (2.51)$$

а кінетична енергія $W_{\text{к}}$ в цих точках дорівнює нулю. І навпаки, кінетична енергія матеріальної точки досягає максимуму при проходженні нею через положення рівноваги

$$W_{\text{к max}} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad (2.52)$$

а потенціальна енергія в цих точках дорівнює нулю.

Повна енергія матеріальної точки, що перебуває в гармонічному коливальному русі, дорівнює сумі обох видів потенціальної і кінетичної енергій

$$\begin{aligned} W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} &= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \\ &= \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

Тобто, повна енергія гармонічних коливань є сталою величиною. Вона пропорційна масі тіла, квадрату амплітуди і квадрату частоти.

Графічне зображення потенціальної енергії при коливальних рухах як функції зміщення x подано на рис. 9 параболою (2.47). Якщо повну енергію W зобразити відрізком AN, то потенціальній енергії за даного значення x відповідатиме відрізок BC, а кінетичній – відрізок CD. Можливі

зміщення лежать між $-A$ та A . Звідси випливає, що матеріальна точка здійснює коливання в цих межах відносно положення рівноваги, яке визначається зміщенням $x = 0$. Під час цього процесу енергія весь час переходить із потенціальної в кінетичну і навпаки.

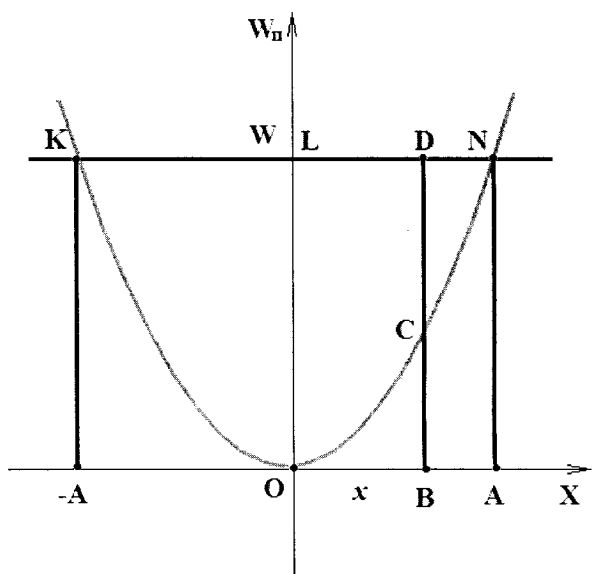


Рисунок 9

За один період коливання T повна енергія двічі повністю переходить у потенціальну — крайні положення з обох боків, і двічі цілком переходить у кінетичну під час проходження положення рівноваги. Зі сказаного випливає, що енергія «коливається» з періодом T' який вдвічі менший за період самого коливального руху T , тобто частота зміни потенціальної і кінетичної енергій вдвічі більша за частоту гармонічних коливань 2ω . Щоб проілюструвати це наочно, досить виразити квадрати синуса і косинуса кута у формулах (2.49) і (2.50) через косинус подвійного кута

$$W_n = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = W \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \varphi_0) \right]; \quad (2.54)$$

$$W_k = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = W \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \varphi_0) \right], \quad (2.55)$$

де W — повна енергія системи.

Згідно з формулами (2.54) і (2.55) W_n і W_k змінюються з частотою 2ω .

На рис. 10 зображено графіки залежності W , W_n і W_k від часу.

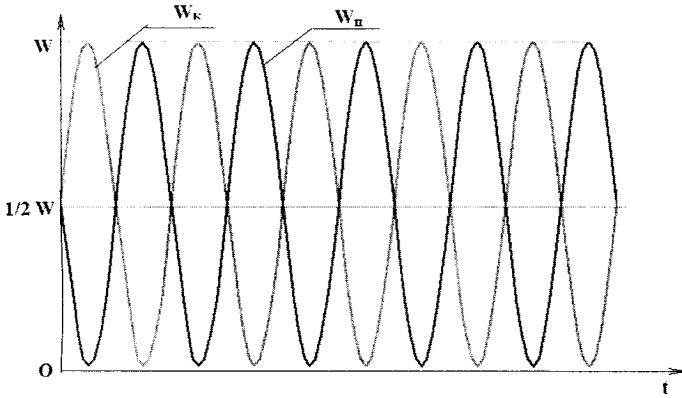


Рисунок 10

Повній енергії W відповідає пряма, паралельна осі абсцис, потенціальній W_n – синя синусоїда, кінетичній W_k – червона.

Оскільки середні значення квадрата синуса і квадрата косинуса дорівнюють $\frac{1}{2}$, то середнє значення W_n збігається з середнім значенням W_k і дорівнює $\frac{1}{2}W$.

Приклад

Однорідний диск радіусом $R = 0,4$ м коливається навколо горизонтальної осі, що проходить через твірну циліндричної поверхні диска (рис. 11). Визначити зведену довжину $l_{зв}$ і період коливання такого маятника.

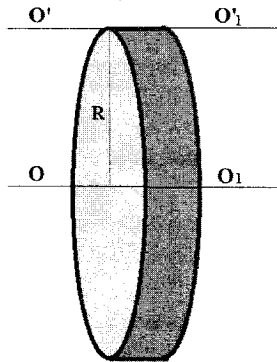


Рисунок 11

$$R = 0,4 \text{ м}$$

$$l_{\text{зв}} \text{ — ?}$$

$$T \text{ — ?}$$

Розв'язування

Диск є нічим іншим, як фізичним маятником. Його зведenu довжину і період коливання визначимо відповідно за формулами зведеної довжини та періоду коливань

$$l_{\text{зв}} = \frac{J}{ml_c};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl_c}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{зв}}}{g}},$$

де J – момент інерції фізичного маятника відносно осі $O'O'_1$, що проходить через твірну циліндричної поверхні диска;

m – маса диска;

l_c – відстань від осі коливання до центра мас (інерції) тіла.

Момент інерції диска знайдемо за формулою Штейнера

$$J_{O'O'_1} = J_{OO_1} + mR^2,$$

де $J_{OO_1} = \frac{mR^2}{2}$ – момент інерції диска відносно осі OO_1 , яка проходить через його центр мас;

m – маса диска;

R – т відстань між паралельними осями OO_1 і $O'O'_1$.

Підставивши значення J_{OO_1} у формулу Штейнера, отримаємо

$$J_{O'O'_1} = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Взявши до уваги, що $l_c = R$, дістанемо

$$l_{\text{зв}} = \frac{3}{2}mR^2 \frac{1}{mR} = \frac{3}{2}R;$$

$$l_{\text{зв}} = \frac{3}{2} \cdot 0,4 = 0,6 \text{ (м)}.$$

Визначимо період коливання цього фізичного маятника, скориставшись формулою періоду коливань і знайденим значенням $l_{\text{зв}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{3 \cdot 0,4}{2 \cdot 9,8}} = 1,55 \text{ (с)}.$$

Відповідь: $l_{зв} = 0,6 \text{ м}$; $T = 1,55 \text{ с}$.

2.5 Математичний маятник

Одним з найпростіших прикладів гармонічного коливання є коливальний рух математичного маятника. Математичним маятником називають матеріальну точку, підвішену на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 12).

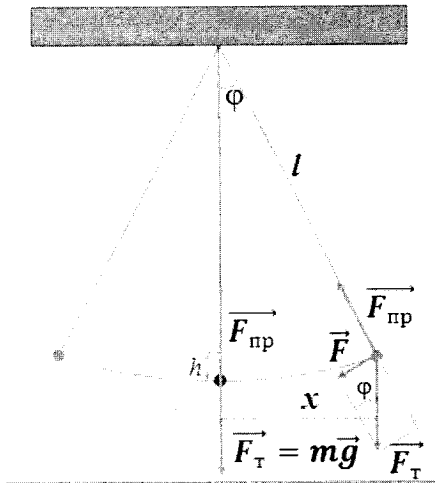


Рисунок 12

До математичного маятника за своїми властивостями найбільше подібна система, що складається з нерозтяжної легкої нитки, до одного з кінців якої підвішено металеву кульку. Можна вважати, що центр маси такої системи збігається з центром мас кульки.

Коли система перебуває у спокої, то сила тяжіння $\vec{F}_T = m\vec{g}$ зрівноважується силою натягу нитки $\vec{F}_{пр}$. Якщо кульку відхилити на деякий кут φ , то рівнодійна \vec{F} сил натягу $\vec{F}_{пр}$ і земного тяжіння \vec{F}_T намагається повернути кульку в положення рівноваги. Цю силу називають вертальною силою.

Вертальна сила

$$F = mg \sin \varphi. \quad (2.56)$$

Оскільки залежність такої сили від кута φ нелінійна, то коливання маятника не будуть гармонічними. Для малих кутів φ можна записати, що $\sin \varphi = \frac{x}{l} \approx \varphi$, і вираз вертальної сили буде

$$F = mg \frac{x}{l}, \quad (2.57)$$

де l – довжина маятника.

За такої умови вертальна сила пропорційна куту φ , тому коливання маятника можна вважати гармонічними.

Відповідно до другого закону Ньютона, рівняння руху математичного маятника має вигляд

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \frac{x}{l}. \quad (2.58)$$

Знак «мінус» вказує на те, що вертальна сила направлена до положення рівноваги, а зміщення відраховується від положення рівноваги, тому знак прискорення протилежний знаку зміщення.

Перетворимо вираз (2.58) і зробимо таку заміну: $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. В результаті отримаємо диференціальне рівняння другого порядку, що описує вільні незгасальні коливання математичного маятника,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.59)$$

Розв'язком рівняння (2.59) є періодична функція, що має вигляд

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.60)$$

Формула періоду коливань математичного маятника має вигляд

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.61)$$

Звідси випливає, що період коливань математичного маятника не залежить від амплітуди коливань (для малих значень кута відхилень φ) і маси маятника, а визначається його довжиною і прискоренням вільного падіння тіл у даному місці Землі.

2.6 Фізичний маятник

Фізичним маятником називають тверде тіло, здатне здійснювати коливання навколо нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через центр мас (рис. 13).

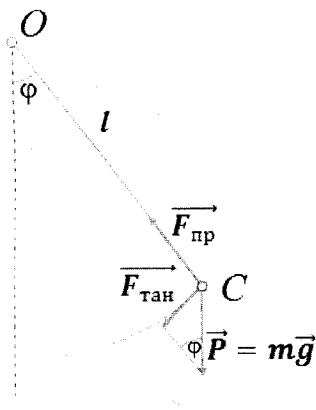


Рисунок 13

Зрозуміло, що у положенні рівноваги фізичного маятника його центр мас C знаходиться на вертикалі з точкою підвісу O , але нижче від неї. При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає обертальний момент M сили тяжіння, плече якої $l' = l \sin \varphi$. Він намагається повернути маятник у положення рівноваги. Якщо дією моментів сил тертя нехтувати, то з основного рівняння динаміки обертового руху дістанемо рівняння руху фізичного маятника

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi, \quad (2.62)$$

де I – момент інерції тіла відносно горизонтальної осі, що проходить через точку підвісу O (у даному разі вісь перпендикулярна до площини рисунка);
 m – маса маятника.

Знак «мінус» вказує на те, що повертаючий момент намагається повернути маятник до положення рівноваги, а кут відхилення φ від положення рівноваги відраховується у протилежному напрямі. Для малих кутів відхилення $\sin \varphi \approx \varphi$, і рівняння (2.62) набуває вигляду

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \varphi \quad (2.63)$$

Перетворимо вираз (2.63) і зробимо таку заміну $\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$.

В результаті отримаємо диференціальне рівняння другого порядку, що описує вільні незгасальні коливання фізичного маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (2.64)$$

Розв'язком рівняння (2.64) є періодична функція, що має вигляд

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.65)$$

Формула періоду коливань фізичного маятника має вигляд

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L_{зв}}{g}}. \quad (2.66)$$

Величину $L_{зв}$ називають зведеною довжиною фізичного маятника. Очевидно математичний маятник матиме такий самий період коливань, як і фізичний маятник, за умови, що його довжина дорівнює зведеній довжині фізичного маятника.

ІІІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

3.1 Згасальні механічні коливання

В реальних умовах будь-яке коливання матеріальної точки, якщо воно не підтримується ззовні, згасає. Причинами згасання є сили тертя в місцях підвішування, що виникають під час коливання маятника, сила опору середовища, передавання енергії коливання іншим тілам, теплові ефекти в разі деформації пружини тощо. Через це механічна енергія коливальної системи, а отже, й амплітуда коливань, з часом зменшуються.

Розглянемо коливання, коли точка здійснює коливання у в'язкому середовищі, зокрема в повітрі. За малих швидкостей сила опору середовища пропорційна швидкості тіла й направлена в бік, протилежний швидкості, тобто $F_{\text{оп}} = -rv = -r \frac{dx}{dt}$, де r – стала величина, яку називають *коефіцієнтом опору*.

Знайдемо диференціальне рівняння згасальних коливань. Для цього запишемо рівняння другого закону Ньютона для коливання тіл під впливом квазіпружної сили з урахуванням того, що нього діє ще сила опору середовища

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (3.1)$$

Поділимо ліву і праву частини цього рівняння на масу m і перенесемо всі його доданки в ліву частину. В результаті дістанемо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (3.2)$$

Введемо таку заміну: $\frac{r}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$.

Загальне рівняння згасальних коливань набуде вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.3)$$

Виразимо x через нову змінну

$$\bar{x} = ze^{-\beta t}. \quad (3.4)$$

Знайдемо першу та другу похідні від цього виразу

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} - z\beta e^{-\beta t};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} - \frac{dz}{dt} \beta e^{-\beta t} - \frac{dz}{dt} \beta e^{-\beta t} + z\beta^2 e^{-\beta t}. \quad (3.5)$$

Підставляємо заміну (3.5) у формулу (3.3)

$$\frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} - \frac{dz}{dt} \beta e^{-\beta t} - \frac{dz}{dt} \beta e^{-\beta t} + z\beta^2 e^{-\beta t} + 2\beta \left(\frac{dz}{dt} e^{-\beta t} - z\beta e^{-\beta t} \right) + \omega_0^2 (z e^{-\beta t}) = 0. \quad (3.6)$$

Після скорочення виразу (3.6) отримаємо

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0. \quad (3.7)$$

Зробимо заміну $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0. \quad (3.8)$$

Розв'язком рівняння (3.8) буде

$$z = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.9)$$

Величина z змінюється періодично з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

Після підстановки виразу (3.9) в (3.8) для випадку малих згасань ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) одержуємо розв'язок рівняння (3.4) в такому вигляді

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.10)$$

Це рівняння згасального коливання матеріальної точки, що рухається в середовищі, яке чинить опір її руху. Амплітуда цього коливання $A = A_0 e^{-\beta t}$ змінюється з часом. Період коливання системи у середовищі з опором більший, ніж період коливання $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ такої самої системи у середовищі без опору.

Графічно згасальне коливання зображено на рис. 14.

Відношення двох послідовних значень амплітуд залишається сталим для усієї кривої. Це відношення характеризує коливальну систему, його називають коефіцієнтом, або *декрементом згасання*

$$\delta = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\beta(t+nT)}}{A_0 e^{-\beta(t+(n+1)T)}} = e^{\beta T}. \quad (3.11)$$

А натуральний логарифм цього відношення – *логіфічним декрементом згасання*

$$\lambda = \ln \delta = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (3.12)$$

$$\beta = 0.2 \quad A_0 = 15 \quad \tau = 0.01 \dots 30 \quad \omega = 1.5 \cdot \pi \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad A(t) = A \cdot e^{-\beta \cdot t}$$

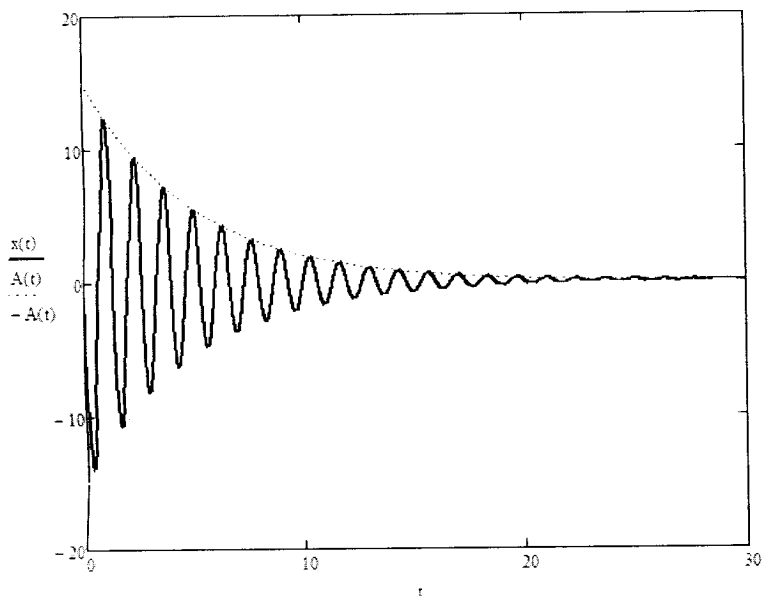


Рисунок 14

Розкриємо фізичний зміст логарифмічного декременту згасання. Нехай за час τ амплітуда коливань зменшилась у e разів. Тоді можна записати

$$\frac{A_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t}}{A_0 e^{-\frac{\lambda}{T} (t+\tau)}} = e.$$

Після алгебраїчних перетворень у лівій частині цього рівняння отримаємо

$$e^{\lambda \frac{\tau}{T}} = e, \text{ звідки } \lambda \frac{\tau}{T} = 1.$$

Оскільки $\frac{\tau}{T} = N_e$ – кількість коливань, які система здійснює за час τ , протягом якого амплітуда зменшується e разів, то

$$\lambda = \frac{1}{N_e}. \quad (3.13)$$

Отже, логарифмічний декремент згасання дорівнює оберненій величині до числа коливань, що їх здійснює система за час, протягом якого амплітуда зменшується в e разів.

Колівальну систему часто характеризують величиною, яку називають *добротністю колівальної системи*,

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (3.14)$$

3.2 Вимушені механічні коливання

Колівальна система, виведена з положення рівноваги і залишена сама на себе, здійснюватиме вільні згасальні коливання, поступово втрачаючи початковий запас механічної енергії на роботу проти сил опору середовища. Швидкість згасання вільних коливань реальних систем залежить від параметрів системи та величини сил опору. Для підтримання незгасальних коливань реальної системи потрібно періодично поповнювати втрати механічної енергії системи на роботу проти сил опору. Таке поповнення енергії можна здійснювати за рахунок роботи зовнішньої сили, що періодично діє на колівальну систему, яка змінюється з часом за гармонічним законом

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (3.14)$$

де F_0 – амплітуда зовнішньої сили;

ω – її циклічна частота.

Незгасальні коливання системи, які відбуваються внаслідок дії зовнішньої сили, що змінюється за законом (3.14), називають *вимушеними коливаннями*, а силу F – *змушувальною силою*. Вимушені коливання здійснюють висотні будинки, телевізійні башти, довгі мости під дією змінних аеродинамічних й інших сил, корпуси і фундаменти машин при обертанні незрівноважених роторів, двигуни автомобілів внаслідок зворотно-поступального руху поршнів, мембрани гучномовців під дією змінних електромагнітних полів та ін.

Під дією змушувальної сили виконується робота. Якщо напрям руху колівальної системи збігається з напрямом дії змушувальної сили, то виконуватиметься додатна робота. І навпаки, робота буде від'ємною, якщо напрями дії сили і руху системи протилежні. У першому випадку амплітуда коливань збільшуватиметься, у другому – зменшуватиметься, тобто коливання гальмуватимуться. Якщо змушувальна сила діє протягом тривалого часу, то встановлюються коливання зі сталими амплітудою і частотою змушувальної сили, тобто система здійснює гармонічні коливання.

Якщо в коливальній системі діє пружна або квазіпружна сила, а сила опору пропорційна швидкості коливального руху, то основне рівняння динаміки вимушених коливань має вигляд диференціального рівняння

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t. \quad (3.15)$$

Поділимо це рівняння на масу m коливальної системи і введемо такі позначення:

$$\frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{F_0}{m} = f_0$$

Тоді рівняння (3.15) набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (3.16)$$

де ω_0 – циклічна частота власних коливань системи;

β – коефіцієнт згасання коливань;

f_0 – амплітуда змущувальної сили, віднесена до одиниці маси.

Рівняння (3.16) є неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку. У теорії диференціальних рівнянь доведено, що загальний розв'язок такого рівняння складається з суми розв'язка відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язка неоднорідного рівняння (3.16).

Розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння маємо у попередньому підрозділі. Він характеризує згасальні коливання, які через деякий проміжок часу практично зникають. Тому знайдемо частинний розв'язок рівняння (3.16). При цьому вважатимемо, що під дією сили (3.14) коливання встановилися, і система здійснює гармонічні вимушені коливання з частотою, яка дорівнює частоті змущувальної сили. Тоді розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.17)$$

де A – амплітуда усталених коливань;

φ – зсув фаз між зміщенням і змущувальною силою. Величини A і φ потрібно визначити. Для цього знайдемо з (3.17)

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Підставимо x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ у рівняння (3.16)

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta A \omega \sin(\omega t + \varphi) + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos \omega t. \quad (3.18)$$

Розкладемо синус і косинус суми за відомими тригонометричними формулами і запишемо рівняння (3.18) так:

$$\begin{aligned} & -A\omega^2(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) - 2\beta A \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \\ & \quad + A\omega_0^2(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = f_0 \cos \omega t. \\ & -A\omega^2 \cos \omega t \cos \varphi + A\omega^2 \sin \omega t \sin \varphi - 2\beta A \omega \sin \omega t \cos \varphi - \\ & - 2\beta A \omega \cos \omega t \sin \varphi + A\omega_0^2 \cos \omega t \cos \varphi - A\omega_0^2 \sin \omega t \sin \varphi = f_0 \cos \omega t. \\ & A((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t \cos \varphi - (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t \sin \varphi \\ & \quad - 2\beta \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi)) = f_0 \cos \omega t \\ & A((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta \omega \sin \varphi) \cos \omega t - A((\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta \omega \cos \varphi) \sin \omega t = f_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Рівняння (3.19) задовольнятиме усі значення t за умови, що коефіцієнти біля виразів $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ у лівій і правій частинах рівняння однакові. Звідси дістаємо

$$\begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta \omega A \sin \varphi &= f_0 \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta \omega A \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Щоб визначити A , піднесемо до квадрата рівняння (3.20) і додамо їх. Тоді матимемо

$$A^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2) = f_0^2,$$

звідки знаходимо амплітуду вимушених коливань

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (3.21)$$

а з другого рівняння системи (3.20) – вираз для визначення зсуву фаз φ між коливаннями зміщення системи від положення рівноваги і змущувальною силою

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.22)$$

Отже, рівняння вимушених коливань зміщення має вигляд

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.23)$$

де зсув фаз φ дається виразом (3.22). Із рівності (3.23) випливає, що вимушені коливання є гармонічними коливаннями з частотою ω змушувальної сили. Амплітуда коливань даної системи ($\omega_0 = const$) при незмінних силах тертя і опору середовища ($\beta = const$) пропорційна амплітуді F_0 змушувальної сили і залежить від її частоти ω . Вимушені коливання відстають за фазою від змушувальної сили на величину φ , яка також є функцією ω (рівність (3.22)).

При заданих значеннях амплітуди змушувальної сили f_0 , яка припадає на одиницю маси коливальної системи, і коефіцієнта згасання β амплітуда (3.15) вимушених коливань є функцією тільки частоти ω змушувальної сили. Функція $A(\omega)$ проходить через максимум при деякій характерній для даної системи частоті $\omega = \omega_{рез}$. Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при частотах ω змушувальної сили, близьких до $\omega_{рез}$, називається *резонансом*. Частота змушувальної сили $\omega_{рез}$, при якій амплітуда коливань досягає найбільшого значення $A_{рез}$, називається *резонансною частотою*.

Очевидно, що максимальне значення амплітуди досягається при мінімальному значенні підкореневого виразу у формулі (3.21). Умовою мінімуму є рівність нулю похідної від підкореневого виразу за частотою, тобто

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{рез}^2)\omega_{рез} + 8\beta^2\omega_{рез} = 0$$

Звідси знаходимо резонансну частоту

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (3.24)$$

Підставивши значення $\omega_{рез}$ у формулу (3.21), отримаємо резонансне значення амплітуди

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (3.25)$$

Резонансна частота (3.24) при згасанні коливань ($\beta > 0$) завжди менша від власної частоти ω_0 системи. При незначному згасанні ($\beta \approx 0$) $\omega_{рез} \approx \omega_0$, і резонансна амплітуда (3.25) перетворюється на нескінченність, що означає практично руйнування коливальної системи. На рис. 15 показано залежність амплітуди вимушених коливань від частоти змушувальної сили для різних значень коефіцієнта згасання β . Криві залежності $A(\omega)$ називають *амплітудними резонансними кривими*. Із збільшенням β максимуми резонансних кривих знижуються і зміщуються у бік менших частот. При $\beta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ явище резонансу зникає, тобто $\omega_{рез} = 0$, і

система отримує статичне зміщення від положення рівноваги $A_0 = f_0/\omega_0^2$ під дією сталої сили F_0 , що дорівнює амплітуді змушувальної сили.

Вираз для статичного зміщення A_0 разом з формулою (3.25) дає можливість з'ясувати фізичний зміст добротності коливальної системи.

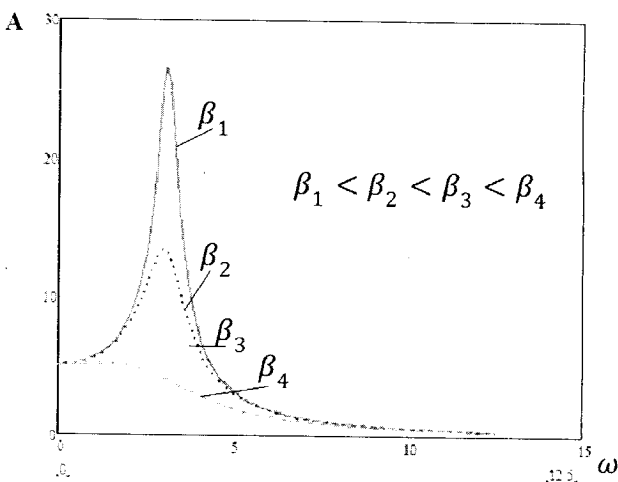


Рисунок 15 – Залежність амплітуди A вимушених коливань від частоти ω для випадків:

$$\beta_1 = 0,3; \beta_2 = 0,6; \beta_3 = 0,9; \beta_4 = 2; \omega_0 = \pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

При малому згасанні, згідно з формулою (3.25), впливає з рівності (3.14) добротність системи

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} \approx \frac{A_{\text{рез}}}{A_0}$$

Добротність при $\beta \ll \omega_0$ показує, у скільки разів амплітуда вимушених коливань у момент резонансу перевищує статичне зміщення A_0 системи під дією сталої сили, що дорівнює амплітуді змушувальної сили. Чим вища добротність системи, тим вищий та гостріший максимум амплітудної резонансної кривої і тим повільніше згасають її вільні коливання.

Проаналізуємо залежність зсуву фаз від частоти ω . Якщо $\omega \ll \omega_0$, то з формули (3.22) випливає, що $\text{tg} \varphi = 0$, тобто, фаза вимушених коливань збігається з фазою змушувальної сили. Із збільшенням частоти ω , коли вона набуває значень, близьких до ω_0 , $\varphi = -\pi/2$, тобто, зміщення коливальної системи відстає від змушувальної сили за фазою на $\pi/2$. При подальшому збільшенні частоти ($\omega \gg \omega_0$) зсув фаз досягає майже $-\pi$, тобто, зміна зміщень і змушувальної сили з часом відбувається майже у протилежних фазах.

Зсув фаз на $\pi/2$ при резонансі має істотне значення для вимушених коливань. Оскільки змушувальна сила випереджає зміщення на $\pi/2$, то вона діє у тому самому напрямі, що й вертальна сила, тобто в напрямі руху. При цьому робота змушувальної сили завжди додатна. Внаслідок цього енергія системи збільшується.

Вимушені коливання виникають також при періодичній короточасній дії зовнішніх сил на коливальну систему. Така дія може мати характер удару, поштовхів. У цих випадках також може спостерігатися явище резонансу. Характерним є те, що резонанс відбуватиметься не тільки тоді, коли частота силової дії близька до частоти вільних коливань систем, а й тоді, коли дія зовнішніх сил повторюється з частотою, кратною частоті власних коливань системи.

Виявляється, що можливі коливання систем під дією сталої сили. Так, при великій швидкості польоту літака його крила можуть раптово набути коливального руху. Коливання зі зростаючою амплітудою, що виникають у потоці повітря під дією аеродинамічних сил, називають коливаннями типу флатер. При таких коливаннях амплітуда зростає досить швидко і конструкція може зруйнуватися. Ці коливання настають при так званій критичній швидкості польоту. Тому при проектуванні літака потрібно забезпечити конструкції критичну швидкість значно більшу, ніж швидкість самого літака. Поряд з флатером крил літака можуть виникнути подібні коливання будь-якої несучої поверхні. Небажані коливання можуть виникати під дією повітряних потоків і вихорів у висотних будовах, маяках, телевізійних баштах, лініях електропередач, заводських димарях, Байтових мостах тощо. Їхні коливання залишаються незначними, поки вітер не досягне критичної швидкості, при якій частота коливань від дії вихорів дорівнюватиме частоті власних коливань конструкції. При критичному значенні швидкості вітру споруди можуть зруйнуватися. Так сталася катастрофа Байтового моста через протоку Такома у США в 1940 р. Міст з трьох прогонів мав довжину 1662 м, один з прогонів – 854 м. У день катастрофи швидкість вітру становила 18 м/с. Частота коливань моста досягла 36 Гц, потім раптово зменшилася до 14 Гц, вертикальні коливання обох підвісних систем відбувалися в протилежних фазах. Це призвело до закручування проїзної частини моста навколо осі, яка проходить вздовж моста, що й зумовило його руйнування.

Явище резонансу потрібно враховувати під час конструювання різних машин та споруд. Їхня власна частота має значно відрізнитися від частоти змушувальних сил.

Явище резонансу в деяких випадках відіграє і позитивну роль, особливо в акустиці, радіотехніці. Його також використовують у приладах для вимірювання частоти.

3.3 Додавання гармонічних коливань однакового напрямку. Биття

Часто тіло одночасно бере участь у декількох коливаннях однакового напрямку. Розглянемо випадок, коли воно одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях однакових напрямків і частоти за рівняннями

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}); \\x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}).\end{aligned}\quad (3.26)$$

Зміщення x з положення рівноваги за участі тіла одночасно у двох коливаннях дорівнюватиме алгебричній сумі зміщень x_1 і x_2

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}).\quad (3.27)$$

Виконаємо це додавання графічно у прямокутній системі координат (рис. 16).

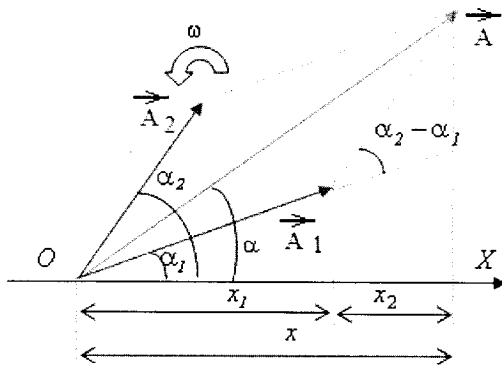


Рисунок 16

У площині XOY з точки O побудуємо вектор завдовжки \vec{A}_1 під кутом $\varphi_{01} = \alpha_1$. Якщо привести цей вектор в обертання з кутовою швидкістю ω , то проекція кінця вектора на вісь абсцис, як зазначалось раніше, здійснюватиме гармонічні коливання за законом $x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01})$.

Якщо аналогічно побудувати вектор завдовжки \vec{A}_2 під кутом $\varphi_{02} = \alpha_2$ і привести його в обертання з такою самою кутовою швидкістю ω , то проекція його кінця на вісь абсцис здійснюватиме гармонічні коливання за законом $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02})$.

У разі обертання векторів \vec{A}_1 і \vec{A}_2 кут між ними весь час дорівнюватиме $\varphi_{02} - \varphi_{01}$. Оскільки сума проєкцій двох векторів на деяку вісь дорівнює проєкції на цю саму вісь вектора, який є їх сумою, то підсумкове коливання можна зобразити коливанням проєкції кінця вектора $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Всі три вектори \vec{A}_1 , \vec{A}_2 і \vec{A} обертаються одночасно з кутовою швидкістю ω . Тому підсумковий вектор \vec{A} буде сталим за величиною. Його проєкція на вісь OX

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3.28)$$

Звідси випливає, що коли додати два гармонічних коливання однакових частоти і напрямку, то підсумковий рух буде також гармонічним коливанням таких самих частоти і напрямку. Амплітуду A і початкову фазу коливання φ визначимо за векторною діаграмою (див. рис. 16).

За теоремою косинусів з трикутника OA_1A знайдемо

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos\theta \\ &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})]; \\ A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

З $\triangle OAM'$ визначимо початкову фазу підсумкового коливання. Вона дорівнює куту між віссю OY і вектором \vec{A} , тобто φ_0

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{x+y}{y+y} = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}}. \quad (3.30)$$

Згідно з формулою (3.28) амплітуда підсумкового коливання залежить від різниці фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ коливань, які додаються. Оскільки косинус кута не може бути більшим за +1 і меншим за -1, то з формули (3.29) випливає, що підсумкова амплітуда A не перевищує суму і не менша, ніж абсолютне значення різниці амплітуд A_1 і A_2 складових коливань, тобто вона знаходиться в межах

$$|A_2 - A_1| \leq A \leq A_2 + A_1.$$

Абсолютне значення різниці $A_2 - A_1$ беруть тому, що амплітуда A за своїм змістом може бути тільки додатною величиною.

Якщо різниця фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm 2m\pi$, де $m = 0, 1, 2, \dots$, тобто, дорівнює 0 або парному числу π , то косинус різниці фаз дорівнює +1. Тоді за формулою (3.29) дістанемо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2,$$

звідки $A = A_1 + A_2$, тобто, за цих умов амплітуда підсумкового коливання дорівнюватиме сумі амплітуд складових коливань.

Якщо різниця фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2m + 1)\pi$, тобто, дорівнює непарному числу π , то косинус різниці фаз дорівнює -1. Тоді

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2,$$

звідки $A = |A_2 - A_1|$.

Розглянемо випадок, коли складові коливання відбуваються в одному напрямку, але з різними частотами ω_1 , і ω_2 , які мало відрізняються одна від одної. У цьому разі у векторній діаграмі коливань (див. рис.16) вектори складових амплітуд A_1 і A_2 обертатимуться з різними кутовими швидкостями, внаслідок чого кут між векторами \vec{A}_1 і \vec{A}_2 з часом змінюватиметься, підсумковий вектор $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ пульсуватиме за величиною й буде обертатися зі змінною швидкістю. Отже, підсумкове коливання в цьому випадку буде не гармонічним, а складним коливальним процесом.

Розглянемо окремий випадок додавання двох коливань з однаковими амплітудами, колові частоти яких мало відрізняються одна від одної. Оскільки різниця фаз складових коливань змінна, то за початковий момент можна взяти такий, за якого початкові фази обох коливань однакові, тобто подати коливання у вигляді

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0);$$

$$x_2 = A_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_0), \quad (3.31)$$

де, наприклад, $\omega_2 > \omega_1$. За цих умов різниця фаз складових коливань дорівнюватиме $(\omega_2 - \omega_1)t = \Delta\omega t$. Підставивши це значення різниці фаз у формулу (3.29) замість $\varphi_{02} - \varphi_{01}$, дістанемо величину квадрата підсумкової амплітуди

$$A^2 = 2A_1^2 [1 + \cos \Delta\omega t] = 4A_1^2 \cos^2 \frac{\Delta\omega}{2} t,$$

звідки

$$A = \left| 2A_1^2 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (3.32)$$

Період абсолютного значення косинуса кута дорівнює π , тому період τ зміни абсолютного значення амплітуди підсумкового коливання визначається з умови $\frac{\Delta\omega}{2} \tau = \pi$, звідки

$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (3.33)$$

Отже, амплітуда підсумкового коливання змінюється за законом косинуса з періодом τ .

Кут, який утворює підсумкова амплітуда з віссю OY , визначимо за формулою (3.30), підставивши в неї замість φ_{01} і φ_{02} відповідно значення $\omega_1 t + \varphi_0$ і $\omega_2 t + \varphi_0$ (див. рис.16)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + A_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)}{A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + A_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_0)} \\ &= \frac{\sin(\omega_1 t + \varphi_0) + \sin(\omega_2 t + \varphi_0)}{\cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \cos(\omega_2 t + \varphi_0)}. \end{aligned}$$

Скориставшись формулами суми синусів і суми косинусів, дістанемо вираз для обчислення фази підсумкового коливання

$$\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi_0. \quad (3.34)$$

Отже, вектор підсумкової амплітуди в цьому випадку обертається зі сталою кутовою швидкістю, що дорівнює півсумі циклічних частот складових коливань. Рівняння підсумкового руху одержимо, якщо візьмемо проекцію вектора підсумкової амплітуди на вісь OX . Отже, зміщення підсумкового коливання дорівнюватиме

$$x = A \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi_0 \right) = \left| 2A_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi_0 \right). \quad (3.35)$$

Оскільки, за припущенням, ω_2 дуже мало відрізняється від ω_1 , то величина $\omega' = \omega_2 - \omega_1$ мала порівняно з величиною $\omega_1 + \omega_2$. У зв'язку з цим підсумковий коливальний рух, що відбувається з коловою частотою $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, можна розглядати як гармонічний. Однак його амплітуда A не залишається сталою, а повільно періодично змінюється з часом за залежністю (3.32). Період зміни амплітуди A визначають за формулою (3.33) (рис. 17).

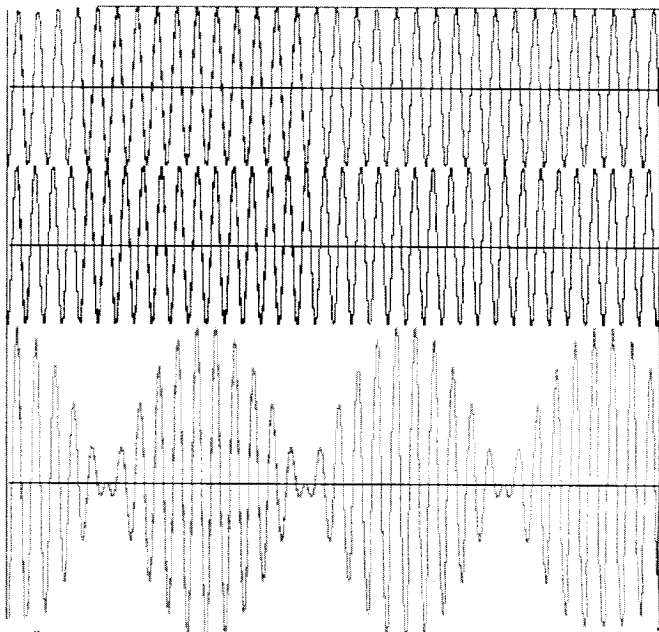


Рисунок 17

Амплітуда цього коливання то збільшується, то зменшується. Таке коливання називають *биттям*.

3.4 Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Розглянемо систему, яка може здійснювати коливання в двох взаємно перпендикулярних напрямках. Візьмемо випадок, коли матеріальна точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях однакової частоти вздовж осей OX і OY .

Ці коливання можна описати рівняннями

$$\begin{aligned}
 x &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}); \\
 y &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}),
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

де $A_1, A_2, \varphi_{01}, \varphi_{02}$ – відповідно, амплітуди та початкові фази першого і другого коливань.

Щоб одержати рівняння траєкторії точки, яка одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях, з рівнянь (3.36) потрібно вилучити час. Для цього запишемо їх у вигляді

$$\frac{x}{A_1} = \sin\omega t \cos\varphi_{01} + \cos\omega t \sin\varphi_{01}; \quad (3.37)$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin\omega t \cos\varphi_{02} + \cos\omega t \sin\varphi_{02}, \quad (3.38)$$

Помноживши рівняння (3.37) на $\sin\varphi_{02}$ і (3.38) на $\sin\varphi_{01}$ та віднявши їх одне від одного, одержимо

$$\frac{x}{A_1} \sin\varphi_{02} - \frac{y}{A_2} \sin\varphi_{01} = \sin\omega t \sin(\varphi_{01} - \varphi_{02}). \quad (3.39)$$

Помножимо ці самі рівняння відповідно на $\cos\varphi_{02}$, та $\cos\varphi_{01}$ і також візьмемо їх різницю

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_{02} - \frac{y}{A_2} \cos\varphi_{01} = \cos\omega t \sin(\varphi_{01} - \varphi_{02}). \quad (3.40)$$

Піднесемо до квадрата і додамо почленно рівняння (3.39) і (3.40). В результаті знайдемо рівняння траєкторії точки, яка одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (3.41)$$

Цей вираз є *рівнянням еліпса*, осі якого довільно орієнтовані відносно осей координат OX і OY . Характеристики еліпса визначають за різницею фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01}$.

Розглянемо окремі випадки.

1. За різниці $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0$, тобто коли $\varphi_{02} = \varphi_{01}$, з рівняння (3.41) отримаємо *рівняння виродженого еліпса або рівняння прямої, що проходить через початок координат і має додатний нахил до осі OX* (рис. 18). Справді, у цьому випадку рівняння (3.41) перетворюється на

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} = \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0$$

звідки

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (3.42)$$

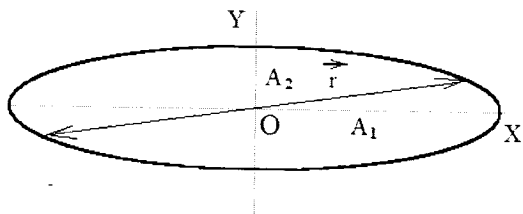


Рисунок 18

По цій прямій точка здійснює гармонічні коливання, оскільки її положення на прямій задається відрізком r , який дорівнює

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + A_2^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3.43)$$

Циклічна частота, а отже, і період підсумкового коливання, дорівнюють циклічній частоті і періоду складових коливань. Амплітуда підсумкового коливання буде

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \quad (3.44)$$

2. За різниці фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pi$ рівняння (3.41) набуває вигляду

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + 2 \frac{xy}{A_1 A_2} = \left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0,$$

звідки

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (3.45)$$

Цей вираз також є рівнянням виродженого еліпса або рівнянням прямої, що проходить через початок координат і має від'ємний нахил до осі OX (рис. 19).

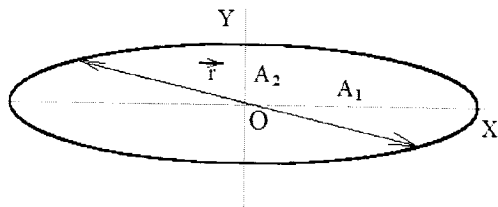
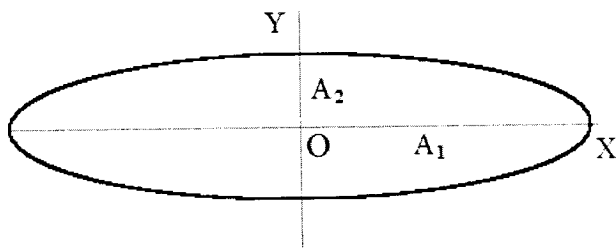


Рисунок 19

Вздовж цієї прямої точка здійснює гармонічні коливання з такими самими амплітудою і частотою, як і в першому випадку.

3. Якщо різниця фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ складових коливань дорівнює $\frac{\pi}{2}$ або $\frac{3\pi}{2}$, то залежність (3.41) перетворюється на рівняння еліпса, зведеного до координатних осей,

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 1. \quad (3.46)$$



Півосі цього еліпса дорівнюють відповідним амплітудам коливань. Якщо $A_1 = A_2 = A$, еліпс перетворюється на коло радіусом $R = A$. Випадки, коли $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{2}$ і $\varphi_{02} - \varphi_{01} = -\frac{\pi}{2}$, відрізняються напрямком руху точки по еліпсу (колу): за різниці фаз $\frac{\pi}{2}$ точка рухається за годинниковою стрілкою, за різниці фаз $-\frac{\pi}{2}$ – проти (рис. 20).

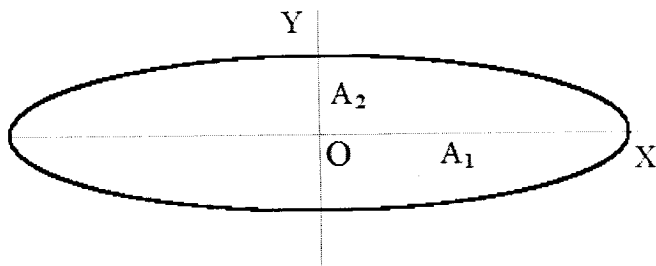


Рисунок 20

Для інших різниць фаз траєкторії точки є еліпсами, які здійснюють таку еволюцію зі збільшенням різниці фаз:

- 1) у разі зростання різниці фаз від 0 до $\frac{\pi}{2}$ відношення півосей еліпсів

зростає від 0 до $\frac{A_2}{A_1}$ і кут нахилу великої півосі зменшується від $\varphi = \arctg \frac{A_2}{A_1}$ до $\varphi = 0$;

2) у разі зростання різниці фаз від $\frac{\pi}{2}$ до π відношення півосей еліпсів зменшується від $\frac{A_2}{A_1}$ до 0, а кут нахилу великої півосі зменшується від $\varphi = 0$ до $\varphi = -\arctg \frac{A_2}{A_1}$.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних гармонічних коливань неоднакові, то траєкторії підсумкового руху матимуть складнішу форму. Її називають *фігурами Ліссажу*. На рис. 21 наведено деякі з них, отримані за різних відношень частот і різних фаз.

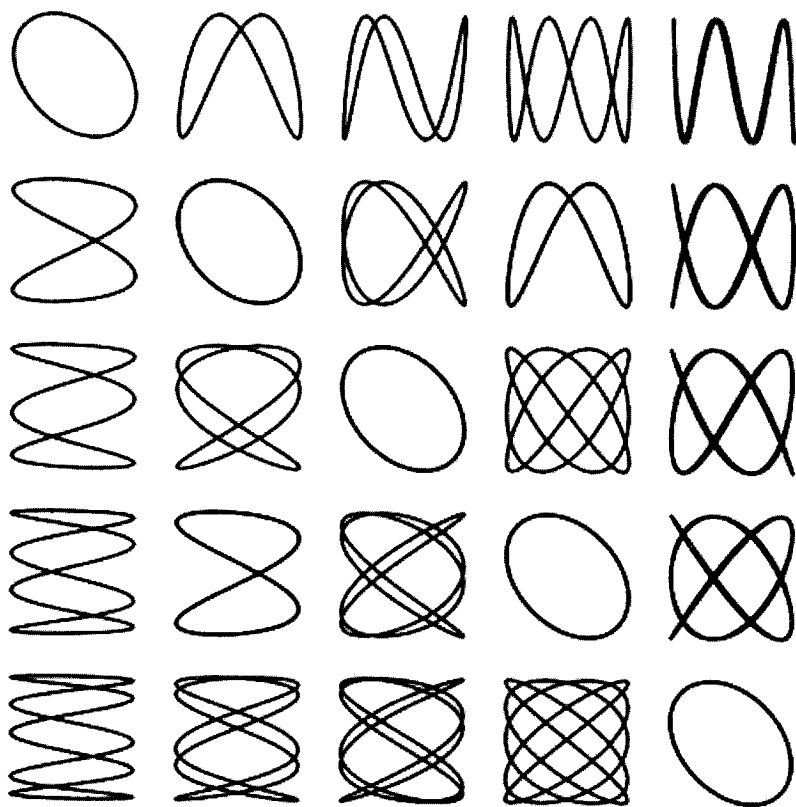


Рисунок 21

3.5 Хвильові процеси. енергія хвилі. Рівняння плоскої хвилі

Припустимо, що хвиля поширюється в однорідному середовищі. З'ясуємо, як саме можна аналітично охарактеризувати цей процес, тобто знайдемо вираз, за яким можна визначити зміщення точки середовища, збудженого хвилею, як функцію координат x, y, z рівноважного положення точки і часу t .

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t). \quad (3.47)$$

Це рівняння хвилі.

Знайдемо рівняння плоскої хвилі за умови, що коливання є гармонічними, а енергія хвилі не поглинається, й тому амплітуда коливання залишається сталою. Для спрощення координатні осі виберемо так, щоб вісь X збігалася з напрямком поширення хвилі. За цих умов хвильові поверхні будуть перпендикулярними до осі X . Оскільки всі точки хвильової поверхні коливаються однаково, то зміщення залежатиме лише від параметрів x і t

$$\Psi = \Psi(x, t). \quad (3.48)$$

Нехай коливання точок, що лежать у площині $x = 0$ (рис. 22), описує рівняння

$$\Psi = \Psi(0, t) = A \sin \omega t. \quad (3.49)$$

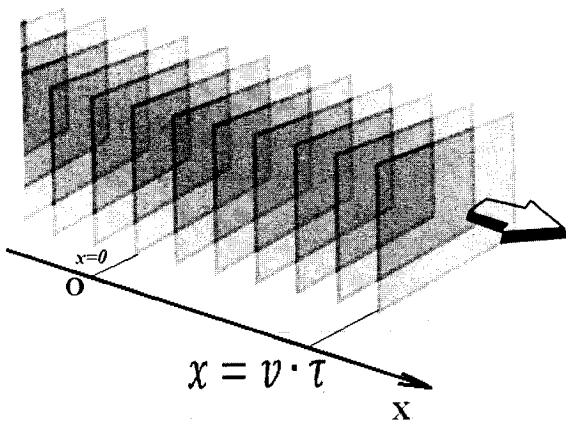


Рисунок 22

Знайдемо функцію (3.48), яка б описувала коливання точок, що знаходяться у площині, розміщеній на відстані x від початку координат. Очевидно, що точки в цій площині почнуть коливатися пізніше, ніж точки у площині $x = 0$. Час, за який хвиля пошириться на відстань x , дорівнюватиме

$$\tau = \frac{x}{v},$$

де v — швидкість поширення хвилі.

Тому у вираз (3.49) замість значення t потрібно підставити значення $t - \tau = t - \frac{x}{v}$. Внаслідок цього отримаємо

$$\Psi(x_1, t) = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (3.50)$$

Отже, рівняння плоскої хвилі набуде вигляду

$$\Psi(x_1, t) = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right) = A \sin(\omega t - kx), \quad (3.51)$$

де

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.52)$$

Величину k називають хвильовим числом.

Знайдемо рівняння плоскої хвилі, яка поширюється в напрямку, що утворює з осями координат X , Y , Z кути α , β і γ . Нехай коливання у площині, що проходить через початок координат (рис. 23), описується рівнянням

$$\Psi_0(x, y, z, t) = \Psi_0(r, t) = A \sin \omega t \quad (3.53)$$

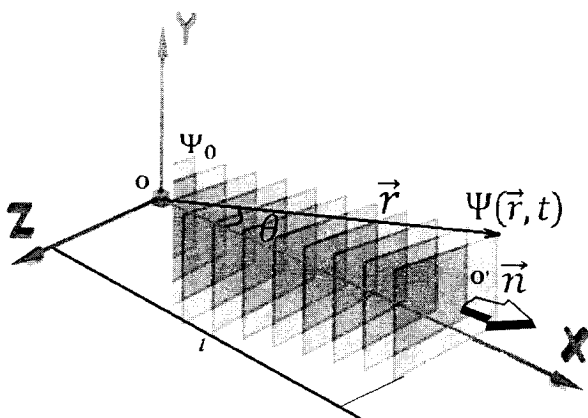


Рисунок 23

Візьмемо хвильову поверхню, яка знаходиться на відстані l від початку координат. Коливання в цій площині відставатимуть від коливань (3.53) на час $\tau = \frac{l}{v}$. Зміщення точок у цій площині дорівнюватиме

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(r, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{l}{v} \right). \quad (3.54)$$

Виразимо l через радіус-вектор \vec{r} довільної точки хвильової поверхні, що розглядається. Для цього в напрямку променя OO' проведемо одиничний вектор \vec{n} . Як видно з рисунка 23, скалярний добуток векторів \vec{r} і \vec{n} дорівнює

$$\vec{n} \vec{r} = r \cos \theta = l. \quad (3.55)$$

Підставимо у рівняння (3.54) це значення l , зробимо певні перетворення і дістанемо

$$\Psi(r, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{\vec{n} \vec{r}}{v} \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} \vec{n} \vec{r} \right) = A \sin(\omega t - k \vec{n} \vec{r}) = A \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}),$$

де вектор $\vec{k} = k \vec{n}$.

Величину \vec{k} називають хвильовим вектором.

Отже, рівняння плоскої хвилі, яка поширюється в довільному напрямку відносно осей координат, має вигляд

$$\Psi(r, t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}). \quad (3.56)$$

Перейдемо від радіуса-вектора точки до її координат x, y, z . Для цього знайдемо скалярний добуток векторів \vec{k} і \vec{r} через їхні проекції на осі координат

$$\vec{k} \vec{r} = (k_x \vec{x}_0 + k_y \vec{y}_0 + k_z \vec{z}_0)(x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0) = k_x x + k_y y + k_z z,$$

де $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha$, $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta$, $k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma$;

$\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – одиничні вектори координатних осей.

Підставимо значення $\vec{k} \vec{r}$ у рівняння (3.56), воно набуде вигляду

$$\Psi(x, y, z, t) = A \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \quad (3.57)$$

За цією функцією можна визначати зміщення точки, положення рівноваги якої має координати x, y, z у момент часу t .

3.6 Рівняння сферичної хвилі

Сферичні хвилі збуджуються точковим джерелом коливань. Будь-яке джерело коливань має певні розміри, однак, якщо хвилі розглядати на відстані, що значно більша від розмірів джерела, то останнє можна вважати точковим. Зробимо такі припущення: коливання поширюються в однорідному середовищі, тому їх швидкість в усіх напрямках однакова; коливання є гармонічними, енергія середовищем не поглинається.

Нехай зміщення точкового джерела, що знаходиться в початку координат O , визначається рівнянням

$$\Psi(r, t) = A \sin \omega t. \quad (3.58)$$

Знайдемо фазу та амплітуду коливання на хвильовій поверхні радіусом r . Міркуватимемо аналогічно, як і під час виведення рівняння плоскої хвилі. Отже, фаза точки, що лежить на хвильовій поверхні,

$$\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) = (\omega t - kr). \quad (3.59)$$

Амплітуда коливання точок з віддаленням від джерела не залишатиметься сталою, а весь час зменшуватиметься. Енергія, яка передається точковим джерелом коливання суміжним з ним точкам середовища за кожне коливання, залишається сталою. Проте чим далі знаходиться сферична поверхня від центра коливання, тим більше на ній буде частинок, які приводяться в коливальний рух тією самою за величиною енергією. Отже, енергія хвилі в розрахунку на одну частинку зі збільшенням радіуса хвильової поверхні зменшується. Оскільки площа поверхні сфери $S = 4\pi r^2$, то енергія, яка припадає на одиницю хвильової поверхні, буде

$$w = \frac{W}{S} = \frac{W}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2},$$

де W – енергія, що передається від джерела за одне коливання.

Звідси випливає, що енергія, яка припадає на одиницю поверхні, а також на одну частинку, обернено пропорційна квадрату радіуса хвильової поверхні. З урахуванням того, що енергія частинки, яка здійснює гармонічне коливання, пропорційна квадрату амплітуди, знаходимо, що амплітуда сферичної хвилі обернено пропорційна радіусу сферичної хвилі.

Ґрунтуючись на цих міркуваннях і на співвідношеннях (3.58) і (3.59), рівняння сферичної хвилі запишемо у вигляді

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) = \frac{A}{r} \sin (\omega t - kr). \quad (3.60)$$

Нагадаємо, що рівняння сферичної хвилі справедливе лише за умови, що відстань до джерела значно більша за його розміри.

3.7 Фазова швидкість. дисперсія хвиль. групова швидкість

Знайдемо швидкість переміщення хвильової поверхні в напрямку променя. Оскільки всі точки хвильової поверхні мають однакові фази, то цю швидкість називають фазовою v_ϕ . Знайдемо її значення за умови, що фаза рівняння хвилі (3.51) і (3.60) залишається сталою, тобто

$$\omega t - kx = \text{const.} \quad (3.61)$$

Візьмемо повний диференціал від цього виразу й отримаємо

$$\omega dt - k dx = 0,$$

звідки фазова швидкість дорівнюватиме

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (3.62)$$

Підставивши у цей вираз значення ω і k , дістанемо

$$v_\phi = \frac{2\pi\lambda}{T2\pi} = \frac{\lambda}{T} = v.$$

Отже, швидкість поширення гармонічної хвилі v , що описується рівняннями (3.51) і (3.60), дорівнює фазовій швидкості (3.62).

Постає запитання, чи для всіх видів хвиль справедлива така залежність? Усі реальні хвилі не є гармонічними. Проте можна довести, що будь-яку несинусоїдальну хвилю можна розкласти на еквівалентну їй систему синусоїдальних хвиль. Таке розкладання називають гармонічним, або спектральним, аналізом несинусоїдальної хвилі. Сукупність значень амплітуд, початкових фаз і частот еквівалентної системи синусоїдальних хвиль називають спектром відповідно амплітуди, початкових фаз і частот несинусоїдальної хвилі, що розглядається. Спектр може бути як дискретним, або лінійчастим, тобто множиною окремих різних значень, так і безперервним (суцільним).

Встановлено, що всі синусоїдальні (гармонічні) хвилі поширюються в середовищі незалежно одна від одної, а підсумкове зміщення будь-якої частинки середовища дорівнює векторній сумі її зміщень, зумовлених кожною з хвиль. Цей результат справедливий для хвиль будь-якої природи, його називають принципом суперпозиції хвиль. Суперпозицію гармонічних хвиль, які мало відрізняються одна від одної за частотою (чи довжиною хвиль), називають групою хвиль, або хвильовим пакетом.

Якщо швидкість поширення синусоїдальних хвиль у середовищі не залежить від їх частоти (довжини хвилі), то швидкість поширення пакета дорівнюватиме фазовій швидкості. Проте існують і такі гармонічні хвилі, фазова швидкість яких залежить від їх частоти (довжини хвилі). Залежність фазової швидкості від частоти (довжини хвилі) називають дисперсією хвиль, а середовище, де спостерігається це явище, - дисперсійним.

Якщо хвильовий пакет поширюється в дисперсійному середовищі, то швидкість окремих його синусоїдальних хвиль різна. Внаслідок цього безперервно змінюватимуться різниці фаз між хвилями, імпульс складного коливання дещо змінюватиме свою форму, а амплітудне значення хвилі змішуватиметься відносно складових хвиль. При цьому швидкість поширення хвильового пакета не збігається зі швидкістю жодної з них.

Для прикладу розглянемо простий хвильовий пакет, утворений двома плоскими синусоїдальними хвилями, що поширюються вздовж осі X . Не порушуючи загальності результату, вважатимемо, що амплітуди цих хвиль однакові, початкові фази $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$, а циклічні частоти і хвильові числа їх різні, але мало відмінні між собою

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= A_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x) \\ \Psi_2(x, t) &= A_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x) \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Згідно з принципом суперпозиції хвиль рівняння підсумкової хвилі буде

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \sin(\omega_{\text{сеп}}t - k_{\text{сеп}}x), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_1 - \omega_2, \omega_{\text{сеп}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \\ \Delta k &= k_1 - k_2, k_{\text{сеп}} = \frac{k_1 + k_2}{2}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

З виразу (3.64) випливає, що підсумкова хвиля є плоскою, її циклічна частота і хвильове число дорівнюють півсумі циклічних частот і хвильових чисел синусоїдальних хвиль, що утворюють хвильовий пакет. Однак амплітуда цієї хвилі не стала, а залежить від координати x і часу t

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right). \quad (3.66)$$

Цей вираз для амплітуди хвильового пакета сам по собі є виразом рівняння плоскої синусоїдальної хвилі – хвилі амплітуди коливань, фаза якої

$$\varphi_A = \frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x. \quad (3.67)$$

Таке коливання, як зазначалось у підр. 3.3, називають биттям. Графік його для коливань, що поширюються в недисперсійному середовищі, наведено на рис. 17.

Знайдемо, чому дорівнює швидкість підсумкової хвилі у дисперсійному середовищі. Хвиля, поширюючись у середовищі, переносить енергію.

Швидкість v поширення енергії хвилі дорівнює швидкості переміщення в просторі поверхні, через яку переноситься максимальна кількість енергії за одиницю часу. Оскільки енергія в разі коливального процесу пропорційна квадрату амплітуди, то швидкість поширення енергії хвильового пакета збігається з фазовою швидкістю хвилі амплітуди. Очевидно, що для того, щоб амплітуда $A(x, t)$ (див. (3.66)) мала сталі значення, наприклад максимальне, її фаза φ_A , (3.67) мусить залишатися сталою, тобто,

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = \text{const}. \quad (3.68)$$

Взявши повний диференціал від цього виразу, одержимо

$$\frac{\Delta\omega}{2}dt - \frac{\Delta k}{2}dx = 0$$

звідки

$$v_{\text{гр}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (3.69)$$

За умови, що $\Delta\omega$, а отже, і Δk , прямують до нуля,

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.70)$$

Цю швидкість називають груповою швидкістю пакета хвиль.

Швидкість гармонічних хвиль (див. (3.62)) дорівнює $v = \frac{\omega}{k}$. Отже, згідно зі співвідношеннями (3.62) і (3.70), групова швидкість пакета хвиль не дорівнює жодній зі швидкостей синусоїдальних складових цього пакета.

Вираз для групової швидкості (3.70) можна подати ще й у такій формі. Згідно з (3.62)

$$\omega = vk. \quad (3.71)$$

Підставивши це значення у (3.70), одержимо

$$v_{\text{гр}} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}. \quad (3.72)$$

В останньому виразі $\frac{dv}{dk}$ замінимо на $\frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}$ і візьмемо до уваги, що $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ або $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Внаслідок цього дістанемо, що $\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k} \frac{dv}{d\lambda}$. Підставивши ці значення в (3.72), отримаємо такий вираз для групової швидкості:

$$v_{\text{гр}} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (3.73)$$

За відсутності дисперсних хвиль у середовищі $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ їх фазові швидкості однакові і не залежать від довжини хвилі. Тому в таких середовищах групова швидкість хвиль збігається з фазовою.

3.8 Хвильове рівняння

Знайдемо диференціальне рівняння, яке в більш загальному вигляді описує поширення хвильового процесу в недисперсійному середовищі. Для цього візьмемо частинні похідні другого порядку за координатами і часом від рівняння хвилі (3.57)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= -Ak_x^2 \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -k_x^2 \Psi \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= -Ak_y^2 \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -k_y^2 \Psi \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= -Ak_z^2 \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -k_z^2 \Psi \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= -A\omega^2 \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -\omega^2 \Psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

Додамо рівняння (3.74)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Psi = -k^2 \Psi. \quad (3.76)$$

Визначивши Ψ з рівняння (3.75) і підставивши його в рівняння (3.76), отримаємо

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (3.77)$$

Підставимо в це рівняння значення $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$, знайдене зі співвідношення (3.62). Дістанемо

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (3.78)$$

Це рівняння називають хвильовим.

Очевидно, що розв'язком рівняння (3.78) є функція (3.57). Проте можна також переконатися, що розв'язком хвильового рівняння можуть бути й інші функції, які описують поширення в середовищі хвильового збурення довільної форми зі швидкістю $v = \frac{\omega}{k}$.

3.9 Енергія хвилі

Уявімо плоску хвилю, яка поширюється в пружному середовищі в напрямку осі x , що задана рівнянням

$$\Psi(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \omega (\omega t - kx). \quad (3.79)$$

Виділимо в середовищі елементарний циліндр, вісь якого паралельна осі x , а об'єм $d\theta$ настільки малий, що деформації й швидкості руху всіх точок цього об'єму можна вважати однаковими. Знайдемо зміну енергії цього об'єму пружного середовища за рахунок притоку енергії хвилі. Вона дорівнює сумі кінетичної dW_k і потенціальної dW_p енергій об'єму $d\theta$ середовища. Позначимо масу виділеної частини середовища через dm , швидкість – через v . Тоді кінетична енергія об'єму $d\theta$ дорівнюватиме

$$dW_k = \frac{dmv^2}{2}.$$

Оскільки $dm = \rho d\theta$ (де ρ – густина середовища), а v дорівнює першій частинній похідній за часом від зміщення точок (3.79) $v = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx)$, вираз кінетичної енергії набуде вигляду

$$dW_k = \frac{1}{2} \rho d\theta A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (3.80)$$

Потенціальну енергію об'єму $d\theta$ знайдемо як енергію пружно деформованого стержня завдовжки ∂x , площею поперечного перерізу S . Зміщення частинок, що знаходяться одна від одної на відстані ∂x , дорівнює $\partial \Psi$ (рис. 24). Згідно з законом Гука відносно видовження елементарного стержня дорівнює

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \alpha \frac{F}{S},$$

звідки $F = \frac{S}{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$, де α – коефіцієнт пружності середовища; F – сила, що діє.

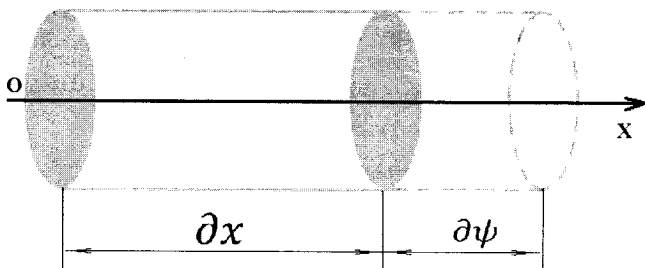


Рисунок 24

Знайдемо роботу сили F у разі видовження елементарного циліндра від ∂x до $\partial x + \partial \psi$

$$\delta A = F_{\text{сер}} \partial \psi = \frac{1}{2} F \partial \psi = \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \partial \psi.$$

Помножимо праву частину цього виразу на $\frac{\partial x}{\partial x}$ й отримаємо

$$\delta A = \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\alpha} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{\alpha} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2.$$

Знайдемо значення $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ з рівняння хвилі (3.79) і підставимо у цей вираз. Дістанемо

$$\delta A = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{\alpha} \frac{A^2 \omega^2}{v^2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{\alpha} \frac{A^2 \omega^2}{v^2} \cos^2(\omega t - kx).$$

Враховуючи швидкість поширення хвилі одержимо

$$\delta A = \frac{1}{2} \frac{d\theta A^2 \omega^2 \alpha \rho}{\alpha} \cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} \rho d\theta A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Ця робота витрачається на зміну потенціальної енергії елементарного об'єму середовища. Отже,

$$\delta A = dW_{\text{п}} = \frac{1}{2} \rho d\theta A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (3.81)$$

З порівняння виразів (3.80) і (3.81) бачимо, що кінетична енергія $dW_{\text{к}}$ елементарного об'єму $d\theta$ середовища дорівнює його потенціальній енергії $dW_{\text{п}}$. Вони змінюються в одній фазі, тобто одночасно досягають максимуму і мінімуму. Ця енергія коливань ділянки середовища істотно відрізняється від енергії ізольованої точки, де за максимуму кінетичної

енергії потенціальна енергія мінімальна і навпаки. У разі коливання окремої точки повний запас енергії коливань залишається сталим. Під час поширення механічної хвилі в середовищі кожен елемент середовища зв'язаний з суміжними елементами, отже, енергія від одного елемента середовища переходить до іншого. Тому повна енергія ділянки середовища, в якому поширюється хвиля, не залишається сталою величиною, а змінюється згідно з рівняннями (3.80) і (3.81)

$$dW = dW_k + dW_n = \rho d\theta A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (3.82)$$

Отже, повна енергія коливань довільного елемента $d\theta$ пружного середовища пропорційна густині середовища, квадрату амплітуди, квадрату частоти коливань і залежить від фази хвилі, тобто є періодичною функцією координати x і часу t . Ця закономірність справедлива для будь-яких хвиль, оскільки пов'язана тільки з механізмом поширення коливань у пружному середовищі і не залежить ні від форми хвильових поверхонь, ні від типу деформації середовища.

Важливою енергетичною характеристикою хвиль є об'ємна густина енергії хвиль. Її визначають як відношення повної механічної енергії хвильового руху ділянки середовища об'ємом $d\theta$ до величини цього об'єму $d\theta$:

$$w = \frac{dW}{d\theta}. \quad (3.83)$$

Згідно з формулами (3.82), (3.83) об'ємна густина енергії плоских гармонічних хвиль дорівнює

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (3.84)$$

Об'ємна густина енергії, як і сама енергія, – величини змінна. Період коливання густини енергії дорівнює половині періоду хвилі, тобто через півперіоду густина енергії набуває початкового значення. Для розв'язування багатьох задач потрібно знати середнє значення об'ємної густини енергії. Оскільки середнє значення квадрата синуса за період дорівнює $\frac{1}{2}$, то середнє значення густини енергії дорівнюватиме

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (3.85)$$

Формула (3.85) справедлива для будь-якої хвилі, що поширюється в пружному середовищі.

Для характеристики процесу перенесення енергії хвилями введено фізичну величину, названу потоком енергії.

Потоком енергії крізь яку-небудь поверхню площею S називають фізичну величину, що проходить за одиницю часу крізь поверхню.

$$\Phi_w = \frac{W}{t}. \quad (3.86)$$

Знайдемо середній потік енергії, який проходить крізь поверхню S , перпендикулярну до напрямку швидкості хвилі. За час t крізь цю поверхню пройде кількість енергії, що дорівнює енергії, яка міститься в паралелепіпеді завдовжки vt (рис. 25).

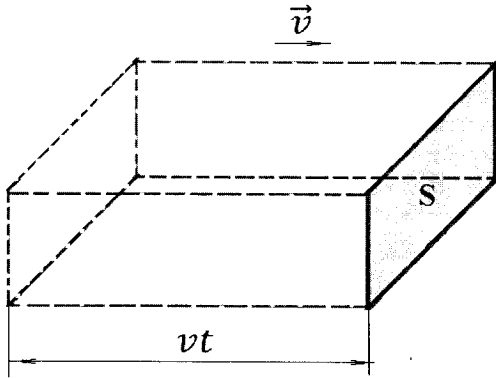


Рисунок 25

Ця кількість енергії дорівнює добутку середнього значення об'ємної густини енергії на об'єм паралелепіпеда vtS , звідки

$$W = \bar{w}vtS.$$

Середній потік енергії, згідно з виразом (3.86), становитиме

$$\Phi_w = \frac{W}{t} = \bar{w}vS. \quad (3.87)$$

Підставивши значення \bar{w} з (3.85), дістанемо

$$\Phi_w = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 vS. \quad (3.88)$$

У загальному випадку поверхня S може мати довільні форму та орієнтацію відносно напрямку поширення хвилі. При цьому потоки енергії крізь різні ділянки поверхні S , що мають однакові площі, не завжди будуть однаковими. Тому виникла потреба у введенні нової фізичної величини – густини потоку енергії хвилі.

Кількість енергії, що проходить за одиницю часу крізь одиницю площі поверхні, називають густиною потоку енергії U .

Згідно з цим означенням і за формулою (3.87) знайдемо

$$U = \frac{\Phi_w}{S} = \bar{w}v, \quad (3.89)$$

тобто, густина потоку енергії дорівнює добутку середньої об'ємної густини енергії хвилі і швидкості її поширення.

Оскільки швидкість є векторною величиною, то густину потоку можна розглядати як вектор, спрямований у напрямку поширення хвилі, тобто

$$\vec{U} = \bar{w}\vec{v} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\vec{v}. \quad (3.90)$$

Отже, вектор густини потоку енергії дорівнює добутку об'ємної густини енергії хвилі на вектор швидкості її поширення. Такий вектор для хвиль у пружному середовищі вперше ввів 1874 р. М. О. Умов, тому його називають вектором Умова.

За відомим значенням вектора Умова можна визначити потік крізь будь-яку поверхню. Обчислимо потік енергії крізь хвильову поверхню сферичної хвилі. Хвиля й енергія в сферичній хвилі поширюються в напрямку радіусів, тобто перпендикулярно до хвильових поверхонь. За одиницю часу крізь одиницю сферичної хвильової поверхні проходить енергія, що дорівнює модулю вектора Умова, тобто

$$U = \frac{1}{2}\rho A_r^2\omega^2v,$$

де A_r , — амплітуда сферичної хвилі на відстані r від джерела.

Тоді потік крізь довільну хвильову поверхню дорівнюватиме

$$\Phi_w = US = \frac{1}{2}\rho A_r^2\omega^2v4\pi r^2 = 2\pi\rho A_r^2\omega^2vr^2 = const. \quad (3.91)$$

Звідси випливає, що $A_r^2r^2 = const$. Отже, амплітуда сферичної хвилі A_r обернено пропорційна відстані r від джерела хвилі.

IV ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

4.1 Вільні затухаючі електричні коливання

Колівальний контур без джерела напруги

Колівальний контур, що складається з послідовно з'єднаних котушки індуктивності L та конденсатора ємністю C та активного резистора R називається RLC-контуром. В загальному випадку активний опір R містить не тільки активні опори провідників, а й опір, пов'язаний з витратами на випромінювання, що виникає внаслідок відкритості конденсатора та індуктивності.

У випадку, коли активний опір малий, і ним можна знехтувати, колівальний контур називають LC-контуром.

В ланку колівального контуру можна додати перемикач для аналізу процесу накопичення зарядів на ємності.

Якісний опис

Нехай у певний момент часу на обкладинках конденсатора C існує певний заряд: додатний на одній з них, від'ємний – на іншій. Оскільки обкладинки сполучені між собою колом, що складається з індуктивності і опору, то конденсатор почне розряджатися, а через коло потече струм. Збільшення струму на котушці індуктивності викликає в ній електрорушійну силу, яка діятиме проти струму, перешкоджаючи йому зростати миттєво. Крім того, проходячи через активний опір, струм буде викликати нагрівання цього опору за законом Джоуля-Ленца, призводячи до втрат енергії.

Сила струму в колі буде збільшуватися доти, доки на обкладинках конденсатора залишатиметься заряд. Тоді, коли заряд на обкладинках конденсатора дорівнюватиме нулю, сила струму в колі буде максимальною, і відтоді почне зменшуватися. Зменшення струму в індуктивності приводить до виникнення електрорушійної сили, яка намагатиметься сповільнити це зменшення, тому струм в колі не зменшиться до нуля миттєво, а продовжуватиме протікати, заряджаючи конденсатор уже оберненим зарядом. На обкладинці, зарядженій спочатку додатно, зосереджуватиметься від'ємний заряд, і навпаки. Максимального значення заряд досягне тоді, коли струм через коло знизиться до нуля. В цю мить на обкладинках конденсатора утвориться заряд майже рівний початковому, тільки з оберненим знаком. Зменшення заряду зумовлене втратами в активному опорі, що викликають зменшення струму перезарядження. Далі процес повторюється у зворотному напрямку, а саме: конденсатор починає розряджатися, викликаючи в колі струм, індуктивність спочатку обмежує швидкість зростання струму, а потім швидкість його зменшення викликає електрорушійну силу, що втримує

заряд, і, як наслідок, конденсатор знову заряджається. Якщо втрати струму (на утворення тепла, на випромінювання електромагнітних хвиль тощо) невеликі, то коливання можуть продовжуватися дуже довго. У ідеальному випадку нульового опору – вічно. В реальних колах активний опір завжди існує, а тому реальні коливання завжди затухають.

У будь-якому реальному коливальному контурі є активний електричний опір. Тому запас електромагнітної енергії, що знаходиться в контурі, поступово витрачається на подолання електричного опору нагрівання, внаслідок чого вільні коливання згасають.

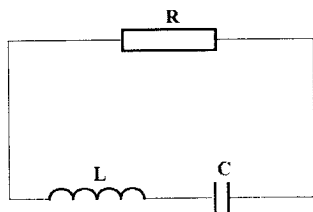


Рисунок 26

Рівняння згасальних електричних коливань в реальному контурі (рис.1) можна отримати з закону збереження енергії в коливальному контурі

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} + I^2Rt = W_{\text{повн}} = \text{const}, \quad (4.1)$$

де I^2Rt – кількість електромагнітної енергії, яка перетворюється на внутрішню енергію контуру за час t .

Це рівняння можна також отримати з закону Ома. Відомо, що коли розміри кола невеликі, а електроємність конденсатора та індуктивність соленоїда значні, силу струму в усіх перерізах цього кола можна вважати однаковою. Тому миттєве значення сили змінного струму I має задовольняти всі закони постійного струму. Такі змінні струми називають квазістаціонарними. Знайдемо залежність сили квазістаціонарного струму від часу для нашого кола. За законом Ома для неоднорідної ділянки кола

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}, \quad (4.2)$$

де I , $\varphi_1 - \varphi_2$, \mathcal{E} – відповідно, миттєві значення сили струму в колі, різниці потенціалів між обкладками конденсатора та алгебраїчна сума ЕРС, що діють на цій ділянці. В нашому випадку це є ЕРС самоіндукції

$$\mathcal{E}_{\text{ci}} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.3)$$

Підставивши формулу (4.3) у формулу (4.2), одержимо

$$IR = \Delta\varphi - L \frac{di}{dt}. \quad (4.4)$$

Якщо заряд на обкладках конденсатора q , то сила струму в колі дорівнюватиме

$$I = -\frac{dq}{dt}, \quad (4.5)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}. \quad (4.6)$$

Різниця потенціалів між обкладками конденсатора буде

$$\Delta\varphi = \frac{q}{c} \quad (4.7)$$

Підставивши вирази (4.5)–(4.7) у рівняння (4.4), отримаємо

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0, \quad (4.8)$$

або

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

Зробимо заміну $2\beta = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

З урахуванням такої заміни формула (4.8) набуде такого вигляду

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.9)$$

Знайдемо розв'язок рівняння (4.9) методом підстановки нової змінної величини z

$$q = ze^{-\beta t}, \quad (4.10)$$

де z – змінна величина від часу t .

Підставимо вираз (4.10) у (4.9) і зробимо перетворення

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + z(-\beta) e^{-\beta t}, \quad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} + \frac{dz}{dt} (-\beta) e^{-\beta t} - \beta \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + z\beta^2 e^{-\beta t} = \\ &= \frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} - 2\beta \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + z\beta^2 e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} - 2\beta \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + z\beta^2 e^{-\beta t} + 2\beta \left(\frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + z(-\beta) e^{-\beta t} \right) + \omega_0^2 z e^{-\beta t} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) z &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

або

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0.$$

Це рівняння для випадку, коли $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ є гармонічним, і його розв'язком може бути функція

$$z = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.12)$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (4.13)$$

Підставимо z із формули (4.12) у вираз (4.10) і знайдемо

$$q = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.14)$$

Величину A визначимо з початкових умов: $t = 0, q = q_0$. Тоді $A = q_0$ – максимальне значення заряду на обкладці конденсатора.

Отже, залежність

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.15)$$

є розв'язком диференціального рівняння (4.9).

Цей розв'язок описує затухаючі коливання заряду q на обкладках конденсатора. Величина $q_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда, яка зменшується з часом за експоненціальним законом. Оскільки $\beta = \frac{R}{2L}$, згасання коливань буде тим швидшим, чим більше значення опору R і менше значення індуктивності L .

Період вільних згасальних електричних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (4.16)$$

Частота вільних згасальних коливань

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (4.17)$$

Отже, період вільних згасальних електричних коливань більший за період власних коливань, а частота згасальних електричних коливань менша за частоту власних коливань контуру.

Крім заряду, згасальні електричні коливання можна характеризувати ще різницею потенціалів (напругою) $\Delta\varphi = U$ на обкладках конденсатора або силою струму, який тече у контурі.

Зі співвідношення між зарядом, напругою і смістю можна записати

$$U = \frac{q}{c} = \frac{q_0}{c} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.18)$$

Силу струму знайдемо з означення миттєвої величини сили струму в колі

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)] = -\beta q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) = q_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)].$$

Помножимо і поділимо праву частину цього рівняння на $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$.
Дістанемо

$$I = q_0 \omega_0 e^{-\beta t} \left[-\frac{\beta}{\omega_0} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t + \varphi) \right].$$

Введемо кут θ , який визначається умовами

$$\cos \theta = -\frac{\beta}{\omega_0} \quad \text{і} \quad \sin \theta = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Тоді можна записати

$$\begin{aligned} I &= q_0 \omega_0 e^{-\beta t} [\cos \theta \cos(\omega t + \varphi) - \sin \theta \sin(\omega t + \varphi)] \\ I &= q_0 \omega_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \theta) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Оскільки $\cos \theta = -\frac{\beta}{\omega_0} < 0$ і $\sin \theta = \frac{\omega}{\omega_0} > 0$, то $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Отже, за наявності активного опору в коливальному контурі сила струму випереджає за фазою напругу на конденсаторі більше ніж на $\frac{\pi}{2}$.

Швидкість згасання електричних коливань, згідно з формулами (4.15), (4.18), (4.19), характеризується величиною *коефіцієнта згасання*

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

Замість коефіцієнта згасання часто розглядають *логарифмічний декремент згасання*, який дорівнює логарифму натуральному відношення амплітуди сили струму в момент часу t до амплітуди сили струму в момент часу $t + T$

$$\Delta = \ln \frac{q_0 \omega_0 e^{-\beta t}}{q_0 \omega_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (4.20)$$

Отже, логарифмічний декремент згасання дорівнює добутку коефіцієнта згасання на період коливання.

Оскільки період $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$, а $\beta = \frac{R}{2L}$, то

$$\Delta = \pi \frac{R}{\sqrt{L}} = \frac{R}{R_x}. \quad (4.21)$$

З виразу (4.21) випливає, що логарифмічний декремент згасання вимірюється відношенням активного опору контуру до його хвильового опору, помноженого на π .

На рисунку наведено графіки згасальних коливань заряду однакового періоду при різних значеннях логарифмічного декременту згасання.

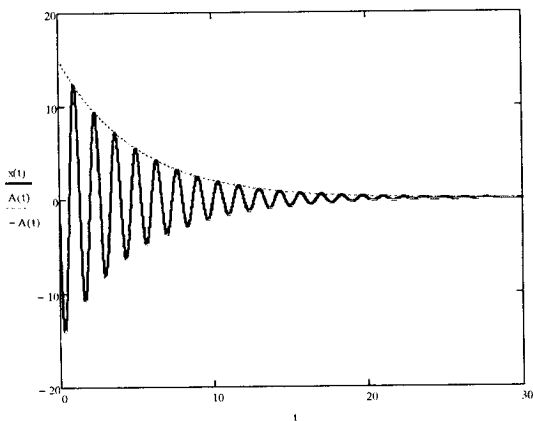


Рисунок 27

Нерідко замість логарифмічного декременту згасання вводять іншу величину, що характеризує згасання, так звану **добротність** коливального контуру

$$Q = 2\pi \frac{\text{Енергія електромагнітного коливання}}{\text{Втрата енергії за період}}$$

$$Q = 2\pi \frac{\frac{LI_0^2}{2}}{I_{e\phi}^2 RT} = 2\pi \frac{\frac{LI_0^2}{2}}{\frac{I_0^2}{2} RT} = 2\pi \frac{L}{R \cdot 2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_x}{R},$$

$$Q = \frac{R_x}{R} = \frac{\pi}{\Delta}. \quad (4.22)$$

Отже, добротність коливального контуру дорівнює відношенню хвильового опору до його активного опору і є величиною обернено пропорційною логарифмічному декременту згасання з коефіцієнтом пропорційності π .

4.2 Вимушені електромагнітні коливання

Електричний опір реального коливального контуру не дорівнює нулеві, тому вільні електричні коливання в контурі поступово згасають. Щоб одержати незгасальні коливання, треба ззовні підводити в

коливальний контур енергію, яка компенсує втрати на виділення тепла та на випромінювання електромагнітних хвиль. При цьому виникають *вимушені електричні коливання*. Для їх реалізації потрібна періодична дія на коливальний контур. Це можна здійснити, якщо ввімкнути послідовно з елементами контуру змінну ЕРС.

Розглянемо вимушені електричні коливання у контурі під дією ЕРС, яка змінюється за законом $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$.

На основі другого правила Кірхгофа можна записати

$$U_c + IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_i, \quad (4.23)$$

де U_c – напруга на обкладках конденсатора;

IR – спад напруги на активному опорі;

$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$ – ЕРС самоіндукції.

Враховавши, що $I = \frac{dq}{dt}$, $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, рівняння (4.23) можна переписати так:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t = f_0 \cos \omega t \quad (4.24)$$

Рівняння (4.24) називають *диференціальним рівнянням вимушених коливань*, яке є неоднорідним рівнянням другого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння складається з суми розв'язків відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язка неоднорідного рівняння (4.24). Розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння є згасальні коливання, тому через порівняно короткий час після початку коливань впливом цього доданка на загальний розв'язок рівняння (4.24) можна знехтувати. Частинний розв'язок рівняння (4.24) шукатимемо у вигляді

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.25)$$

де q_m – амплітуда усталених коливань;

φ – зсув фаз між змінами заряду і зовнішньої ЕРС.

Значення q_m і φ потрібно визначити.

Для цього знайдемо з (4.25)

$$\frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi), \quad \frac{d^2q}{dt^2} = -q_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Підставимо q , $\frac{dq}{dt}$, $\frac{d^2q}{dt^2}$ у рівняння (4.24)

$$-q_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta q_m \omega \sin(\omega t + \varphi) + q_m \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos \omega t \quad (4.26)$$

Розкладемо синус і косинус суми за відомими тригонометричними формулами і запишемо рівняння (4.26) так:

$$\begin{aligned}
& -q_m \omega^2 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) - 2\beta q_m \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \\
& \quad + q_m \omega_0^2 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = f_0 \cos \omega t. \\
& \quad -q_m \omega^2 \cos \omega t \cos \varphi + q_m \omega^2 \sin \omega t \sin \varphi - 2\beta q_m \omega \sin \omega t \cos \varphi - \\
& \quad 2\beta q_m \omega \cos \omega t \sin \varphi + q_m \omega_0^2 \cos \omega t \cos \varphi - q_m \omega_0^2 \sin \omega t \sin \varphi = f_0 \cos \omega t. \\
q_m ((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t \cos \varphi - (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t \sin \varphi - 2\beta \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \\
= f_0 \cos \omega t \\
& \quad q_m ((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta \omega \sin \varphi) \cos \omega t - q_m ((\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta \omega \cos \varphi) \sin \omega t = f_0 \cos \omega t. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Рівняння (4.27) задовольнятиме усі значення t за умови, що коефіцієнти біля виразів $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ у лівій і правій частинах рівняння однакові. Звідси дістаємо

$$\begin{aligned}
q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta \omega q_m \sin \varphi &= f_0, \\
q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta \omega q_m \cos \varphi &= 0. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Щоб визначити A , піднесемо до квадрата рівняння (4.28) і додамо їх. Тоді матимемо

$$q_m^2 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2) = f_0^2,$$

звідки знаходимо амплітуду вимушених коливань

$$q_m = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \tag{4.29}$$

а з другого рівняння системи (4.28) — вираз для визначення зсуву фаз φ між коливаннями зміщення системи від положення рівноваги і змущувальною силою

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{4.30}$$

Отже, рівняння вимушених коливань зміщення має вигляд

$$x = q_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi). \tag{4.31}$$

Підставивши у формули (4.29) і (4.30) $\beta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, одержимо

$$q_m = \frac{\varepsilon_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (4.24) має вигляд

$$q = \frac{\varepsilon_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \arctg\left(-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right). \quad (4.32)$$

Отже, вимушене коливання є гармонічним, амплітуда і фаза якого визначаються формулами (4.29) і (4.30). Характерною особливістю розв'язку (4.32) є те, що він не залежить від початкових умов. З формул (4.29) і (4.30) видно, що амплітуда вимушених коливань, які встановилися, та зсув фаз між зміщеннями і зміною зовнішньої ЕРС залежать від різниці квадратів частот, а також від коефіцієнта згасання коливального контуру. Амплітуда зміни заряду вимушених коливань залежить також від амплітуди змінної ЕРС ε_0 . Якщо поділити заряд q на ємність конденсатора, то одержимо закон зміни (коливань) напруги на конденсаторі

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t + \varphi) = U_{mC} \cos(\omega t + \varphi),$$

де

$$U_{mC} = \frac{q_m}{C} = \frac{\varepsilon_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (4.33)$$

Диференціюючи за часом рівність (4.25), одержуємо закон зміни струму в коливальному контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Амплітуда сили струму виражається формулою

$$I_m = \omega q_m = \frac{\varepsilon_0}{C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (4.34)$$

Резонансна частота для заряду q і напруги на конденсаторі U_C визначається так:

$$\omega_q = \omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Амплітуда сили струму матиме максимальне значення за умови $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, тобто під час резонансу. Криві, які відображають залежність

амплітуди вимушених коливань сили струму I_m від циклічної частоти зміни зовнішньої ЕРС (рис. 28), називають *резонансними*.

При заданих значеннях амплітуди змушувальної сили f_0 , яка припадає на одиницю індуктивності коливальної системи, і коефіцієнта згасання β амплітуда вимушених коливань є функцією тільки частоти ω змушувальної сили. Функція $A(\omega)$ проходить через максимум при деякій характерній для даної системи частоті $\omega = \omega_{\text{рез}}$. Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при частотах ω змушувальної сили, близьких до $\omega_{\text{рез}}$, називається *резонансом*. Частота змушувальної сили $\omega_{\text{рез}}$, при якій амплітуда коливань досягає найбільшого значення $A_{\text{рез}}$, називається *резонансною частотою*.

Очевидно, що максимальне значення амплітуди досягається при мінімальному значенні підкореневого виразу у формулі (4.34). Умовою мінімуму є рівність нулю похідної від підкореневого виразу за частотою, тобто

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2)\omega_{\text{рез}} + 8\beta^2\omega_{\text{рез}} = 0.$$

Звідси знаходимо резонансну частоту

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (4.35)$$

Підставивши значення $\omega_{\text{рез}}$ у формулу (4.33), отримаємо резонансне значення амплітуди

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.36)$$

Резонансна частота (4.35) при згасанні коливань ($\beta > 0$) завжди менша від власної частоти ω_0 системи. При незначному згасанні ($\beta \approx 0$) $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, і резонансна амплітуда (4.36) перетворюється на нескінченність, що означає практично руйнування коливальної системи. На рис. 28 показано залежність амплітуди вимушених коливань від частоти змушувальної сили для різних значень коефіцієнта згасання β . Криві залежності $A(\omega)$ називають *амплітудними резонансними кривими*. Із збільшенням β максимума резонансних кривих знижуються і зміщуються у бік менших частот. При $\beta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ явище резонансу зникає, тобто $\omega_{\text{рез}} = 0$, і система отримує статичне зміщення від положення рівноваги $A_0 = f_0/\omega_0^2$ під дією сталої ЕРС, що дорівнює амплітуді змушувальної сили.

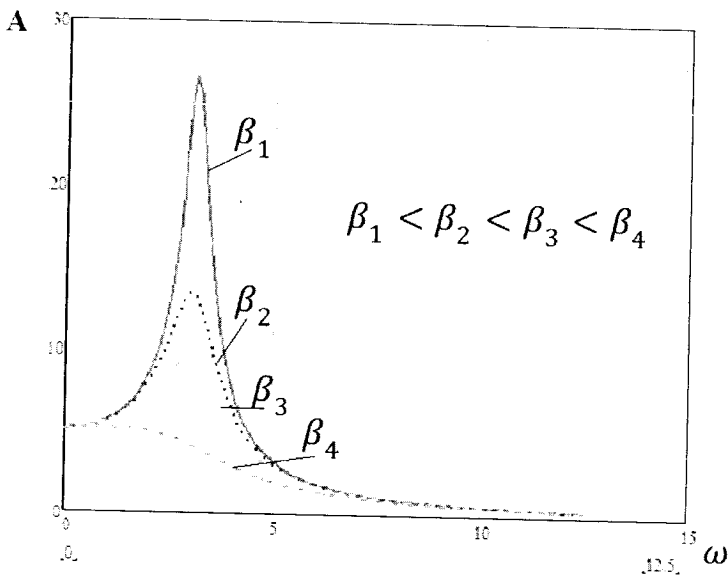


Рисунок 28 – Залежність амплітуди A вимушених коливань від частоти ω для випадку $\beta_1 = 0,3$; $\beta_2 = 0,6$; $\beta_3 = 0,9$; $\beta_4 = 2$; $\omega_0 = \pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$

Однією з характеристик резонансної кривої є значення амплітуди у максимумі. Другою важливою характеристикою є ширина резонансної кривої, під якою розуміють різницю циклічних частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, для яких енергія коливань у два рази менша від енергії для частоти, при якій амплітуда змінної величини досягає максимуму. Ширина резонансної кривої зв'язана з добротністю коливального контуру Q таким співвідношенням:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (4.37)$$

Коливання будуть найінтенсивнішими при частоті $\omega = \omega_0$. Явище збудження інтенсивних електричних коливань під дією зовнішньої змінної ЕРС з частотою, яка дорівнює або є близькою до власної частоти коливального контуру, називають *резонансом*. Уся техніка радіоприймання ґрунтується на явищі резонансу. Щоб радіоприймач селективно (вибірково) реагував на електромагнітні хвилі, які випромінюють радіостанції, потрібно досягти збігання частоти власних коливань коливального контуру радіоприймача з частотою електромагнітних хвиль, які випромінює дана радіостанція. Чутливість радіоприймача пов'язана з добротністю його коливального контуру. Чим більшою є добротність контуру, тим вищою буде чутливість приймача. Оскільки добротність коливального контуру пов'язана з шириною резонансної кривої, то на

основі (4.37) можна зробити висновок, що чутливість радіоприймача і ширина резонансної кривої обернено пропорційні. Під шириною резонансної кривої $\Delta\omega$ треба розуміти смугу частот, які здатний приймати радіоприймач. З метою уникнення частотних спотворень $\Delta\omega$ не може бути меншою ніж 9 кГц. Це означає, що при великій чутливості радіоприймач здатний приймати тільки досить вузьку смугу частот. Чим вищою є чутливість радіоприймача, тим менше перешкоджатимуть прийманню інші радіостанції, які працюють на близьких частотах.

4.3 Змінний струм

Вимушені електромагнітні коливання, які виникають в колі, що містить резистор, котушку індуктивності і конденсатор, можна розглядати як змінний струм. В той же час змінний струм вважають квазістаціонарним, оскільки миттєві значення сили струму в усіх перетинах кола практично однакові. Порівняно зі швидкістю світла будь-які зміни в колі відбуваються досить повільно. Для миттєвих значень квазістаціонарних струмів виконуються закон Ома і правила Кірхгофа.

Розглянемо послідовно процеси, які відбуваються в колі, яке містить резистор, котушку індуктивності і конденсатор, при вмиканні його до джерела змінної напруги

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (4.38)$$

де U_m – амплітуда напруги.

1. Розглянемо коло, в яке ввімкнули лише резистор R , а індуктивність L і ємність C відсутні (рис. 29, а).

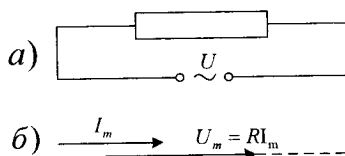


Рисунок 29, а), б)

При виконанні умови квазістаціонарності струм через резистор R визначається законом Ома

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t,$$

де амплітуда сили струму дорівнює $I_m = \frac{U_m}{R}$.

На векторній діаграмі (див. рис. 29, б) показано, що зсув фаз між напругою і струмом в колі, в якому є лише резистор R , дорівнює нулю.

2. Розглянемо випадок, коли змінний струм тече через котушку індуктивності L , в цьому випадку резистор R і ємність C в колі відсутні (рис. 30, а).

Якщо до кола прикладена змінна напруга (4.38), то через котушку потече змінний струм, в результаті чого в ній виникне е.р.с. самоіндукції $E = -L \frac{dI}{dt}$.

Тоді закон Ома для даного замкнутого кола буде мати вигляд

$$U_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0,$$

звідки

$$L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (4.39)$$

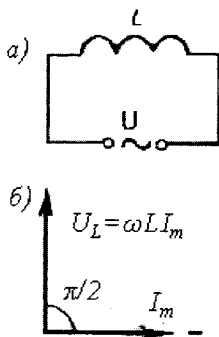


Рисунок 30, а), б)

Оскільки зовнішня напруга прикладена до котушки індуктивності, то

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \quad (4.40)$$

визначає спад напруги на котушці. З рівняння (4.39) випливає, що

$$dI = \left(\frac{U_m}{L} \right) \cos \omega t dt,$$

або після інтегрування, з урахуванням того, що постійна інтегрування дорівнює нулю, одержимо

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}), \quad (4.41)$$

де $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$.

Величина

$$R_L = \omega L \quad (4.42)$$

називається *реактивним індуктивним опором* (або індуктивним опором).

З виразу (4.41) випливає, що для постійного струму, коли $\omega = 0$, котушка індуктивності опору не чинить. Підстановка значення $U_m = \omega L I_m$ у вираз (4.39), з урахуванням (4.40), приводить до наступного значення спаду напруги на котушці індуктивності

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t. \quad (4.43)$$

Порівнюючи вирази (4.41) і (4.43) доходимо висновку, що спад напруги U_L випереджає за фазою струм I , який тече через котушку, на $\pi/2$, що й показано на векторній діаграмі (рис. 30, б).

3. Нехай змінний струм у колі тече через конденсатор ємністю C , в цьому випадку активний опір R і котушка індуктивності L відсутні, (рис. 31, а).

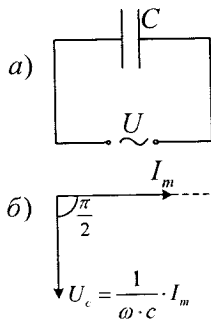


Рисунок 31, а), б)

Якщо змінна напруга (4.38) прикладена до конденсатора, то, в результаті постійного його перезарядження, у колі потече змінний струм. Оскільки вся зовнішня напруга прикладена до конденсатора, а опором підвідних проводів можна знехтувати, то

$$\frac{Q}{C} = U_c = U_m \cos \omega t.$$

Сила струму в цьому випадку буде дорівнювати

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (4.44)$$

де $I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}$.

Величина $R_c = \frac{1}{\omega C}$ називається *реактивним або ємнісним опором*. Для постійного струму ($\omega = 0$) $R_c = \infty$, тобто постійний струм через конденсатор текти не може. Спад напруги на конденсаторі у нашому випадку буде дорівнювати

$$U_c = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t. \quad (4.45)$$

Порівнюючи вирази (4.44) і (4.45) доходимо висновку, що спад напруги U_c відстає за фазою від струму, який тече через конденсатор, на $\pi/2$. Це показано на векторній діаграмі (див. рис. 31, б).

4. Розглянемо коло змінного струму, що містить послідовно ввімкнуті резистор, котушку індуктивності і конденсатор. На рис. 32, а) показано коло, що містить резистор опором R , котушку індуктивністю L і конденсатор ємністю C , на кінці якого подається змінна напруга (4.38).

У колі виникне змінний струм, який викличе на всіх елементах кола відповідні спади напруг U_R , U_L і U_c . На рис. 32, б) показана векторна діаграма амплітуд спадів напруг на резисторі U_R , котушці U_L і конденсаторі U_c .

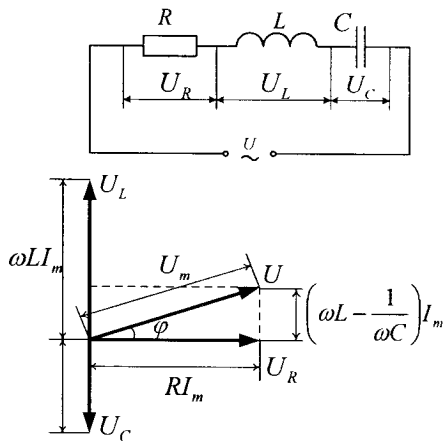


Рисунок 32

Підсумкова амплітуда U_m прикладеної напруги має бути рівною геометричній сумі амплітуд всіх спадів напруг. Як видно з рис. 32, кут φ визначає різницю або зсув фаз між напругою і силою струму. З рисунка випливає, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (4.46)$$

З прямокутного трикутника, скориставшись теоремою Піфагора, одержуємо, що $(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2$, звідки амплітуда сили струму буде дорівнювати

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (4.47)$$

Отже, якщо напруга в колі змінюється за законом $U = U_m \cos \omega t$, то в колі тече струм

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.48)$$

де φ і I_m визначаються, відповідно, формулами (4.46) і (4.47). Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (4.49)$$

називається *повним опором кола* змінного струму, а величина

$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ називається *реактивним опором*.

Розглянемо окремий випадок, коли в колі відсутній конденсатор. У цьому випадку спад напруг U_R і U_L в сумі дорівнює прикладеній напрузі U . Векторна діаграма для даного випадку показана на рис. 33, з якої видно, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad (4.50)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Отже, відсутність конденсатора в колі означає, що $C = \infty$, а не $C = 0$.

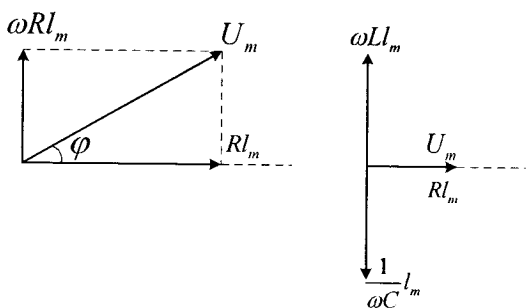


Рисунок 33

Даний висновок можна трактувати так: зближаючи обкладки конденсатора до їх повного зіткнення, прийдемо до кола, у якому конденсатор відсутній (відстань між обкладками прямує до нуля, а ємність – до нескінченності).

4.4 Резонанс напруг

Якщо в колі змінного струму, що містить послідовно ввімкнуті конденсатор, котушку індуктивності і резистор (рис. 32)

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (4.51)$$

то кут зсуву фаз між струмом і напругою (4.46) перетворюється в нуль ($\varphi = 0$), тобто, зміни струму і напруги відбуваються в одній фазі. Умову (4.51) задовольняє частота $\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

У даному випадку повний опір кола Z (4.49) стає найменшим, рівним активному опорі R , а струм у колі, визначаючись активним опором, досягає найбільших значень (при даному значенні U_m). При цьому спад напруги на активному опорі дорівнює зовнішній напрузі, прикладеній до кола ($U_R = U$), а спади напруг на конденсаторі (U_C) і котушці індуктивності (U_L) однакові за амплітудою і протилежні за фазою.

Розглянуте явище називається *резонансом напруг* (послідовним резонансом), тому що при цьому відбувається взаємна компенсація напруг U_L і U_C кожна з яких може значно перевищувати прикладену до кола напругу U . Векторна діаграма для резонансу напруг показана на рис. 33.

У випадку резонансу напруг $(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез}$, тому, підставивши в цю формулу значення резонансної частоти й амплітуди напруг на котушці індуктивності і конденсаторі, одержимо

$$(U_L)_{\text{pec}} = (U_C)_{\text{pec}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = \theta U_m,$$

де θ – добротність контуру.

Оскільки добротність звичайних коливальних контурів більша одиниці, то напруга на котушці індуктивності, а також і на конденсаторі перевищує напругу, прикладену до кола. Тому явище резонансу напруг використовується в техніці для підсилення коливання напруги певної частоти. Наприклад, у випадку резонансу на конденсаторі можна одержати напругу з амплітудою θU_m (θ у даному випадку – добротність контуру), що може бути значно більша U_m . Це підсилення напруги можливе тільки для вузького інтервалу частот біля резонансної частоти контуру, що дозволяє виділити з багатьох сигналів одне коливання певної частоти, тобто, на радіоприймачі налаштуватися на потрібну довжину хвилі. Явище резонансу напруг потрібно враховувати при розрахунку ізоляції електричних ліній, які містять конденсатори і котушки індуктивності, тому що інакше може спостерігатися їх пробій.

4.5 Електромагнітні хвилі. Природа електромагнітних хвиль

Існування електромагнітних хвиль – змінного електромагнітного поля, яке поширюється в просторі з кінцевою швидкістю, – впливає з рівнянь Максвелла. Рівняння Максвелла сформульовані ще в 1865 р. на основі узагальнення емпіричних законів електричних і магнітних явищ і розвитку ідеї Фарадея. Вирішальну роль для підтвердження теорії Максвелла зіграли досліди Герца (1888), які довели, що електричні та магнітні поля дійсно поширюються у вигляді хвиль, властивості яких повністю описуються рівняннями Максвелла. В інтегральній формі рівняння Максвелла мають вигляд

$$\oint_L E dl = - \oint_S \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_n dS; \quad (4.52)$$

$$\oint_S E dS = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \oint_V \rho dV; \quad (4.53)$$

$$\oint_L H dl = \oint_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right)_n dS; \quad (4.54)$$

$$\oint_S B dS = 0. \quad (4.55)$$

З цих рівнянь можна зробити кілька важливих висновків:

– змінне магнітне поле $\frac{\partial B}{\partial t}$ в (4.52) є причиною виникнення в просторі вихрового електричного поля;

– причиною виникнення статичного електричного поля в (4.53) є наявність у просторі статичних електричних зарядів $\oint_V \rho dV$;

– струм провідності $j dS$ і струм зміщення $\frac{\partial D}{\partial t} dS$ в (4.54) є причиною виникнення у просторі вихрового магнітного поля;

– магнітних зарядів у природі (4.55) не існує.

Джерелом електромагнітних хвиль може бути будь-який електричний коливальний контур або провідник, по якому тече змінний електричний струм, оскільки для утворення електромагнітних хвиль потрібно створити в просторі змінне електричне поле (струм зміщення) (4.54), або, відповідно, змінне магнітне поле (4.52). Випромінювальна здатність джерела електромагнітних хвиль визначається його формою, розмірами і частотою коливань. Щоб випромінювання було помітним, потрібно збільшити об'єм простору, у якому створюється змінне електро-магнітне поле. Тому для одержання електромагнітних хвиль непридатні закриті коливальні контури, оскільки в них електричне поле зосереджене між обкладками конденсатора, а магнітне – усередині котушки індуктивності.

Герц у своїх дослідах, зменшуючи число витків котушки і площу пластин конденсатора, а також «розсовуючи» їх (рис. 34, а, б), здійснив перехід від закритого коливального контуру до відкритого коливального контуру (вібратора Герца), який складається з двох стрижнів, розділених іскровим проміжком (рис. 34, в). Якщо в закритому коливальному контурі змінне електричне поле зосереджене всередині конденсатора (рис. 34, а), то у відкритому воно заповнює навколишній простір (рис. 34, в), що істотно підвищує інтенсивність електромагнітного випромінювання.

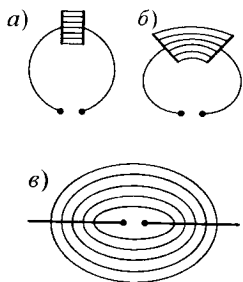


Рисунок 34

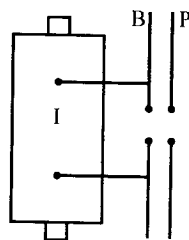


Рисунок 35

Коливання в такій системі підтримуються за рахунок джерела е.р.с., увімкненого до обкладок конденсатора, а іскровий проміжок застосовується для того, щоб збільшити різницю потенціалів, до якої в початковий момент часу заряджаються обкладки конденсатора.

Для утворення електромагнітних хвиль вібратор Герца B під'єднували до індуктора I (рис. 35). Коли напруга на іскровому проміжку досягала пробивного значення, виникала іскра, яка замикала обидві половини вібратора, і у вібраторі виникали вільні згасальні коливання. При зникненні іскри контур розмикався і коливання припинялися. Потім індуктор знову заряджав конденсатор, виникала іскра, у контурі знову спостерігалися коливання і т. д. Для реєстрації електромагнітних хвиль Герц використовував інший вібратор, який був названий резонатором P , що мав таку ж частоту власних коливань, як і випромінювальний вібратор. Коли електромагнітні хвилі досягали резонатора, то в його зазорі виникала електрична іскра.

Для одержання незгасальних коливань потрібно створити автоколивальну систему, яка б забезпечувала подачу енергії з частотою, рівною частоті власних коливань контуру. Тому в 20-х роках минулого сторіччя перейшли до генерування електромагнітних хвиль за допомогою електронних ламп. Лампові генератори дозволяють одержувати коливання заданої (практично будь-якої) потужності і синусоїдальної форми.

Електромагнітні хвилі, які мають досить широкий діапазон частот (або довжин хвиль $\lambda = c/v$, де c – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі), відрізняються одна від одної за способам їх генерації і реєстрації, а також за своїми властивостями. Тому електромагнітні хвилі поділяються на кілька видів: радіохвилі, світлові хвилі, рентгенівське і γ -випромінювання (табл. 1). Потрібно зазначити, що межі між різними видами електромагнітних хвиль досить умовні.

Таблиця 1

Вид випромінювання	Довжина хвилі, м	Частота, Гц	Джерело випромінювання
Радіохвилі	103–10 ⁴	3·10 ⁵ –3·10 ¹²	Колівальний контур Вібратор Герца Ламповий генератор
Світлові хвилі: - інфрачервоне випромінювання - видиме світло - ультрафіолетове випромінювання	5·10 ⁻⁴ –8·10 ⁻⁷ 8·10 ⁻⁷ –4·10 ⁻⁷	6·10 ¹¹ –3,7·10 ¹⁴ 3,7·10 ¹⁴ –7,5·10 ¹⁴	Лампи Нагріті тіла Лазери
Рентгенівське випромінювання	4·10 ⁻⁷ –10 ⁻⁹	7,5·10 ¹⁴ –3·10 ¹⁷	
Гамма-випромінювання	2·10 ⁻⁹ –6·10 ⁻¹² <6·10 ⁻¹²	1,5·10 ¹⁷ –5·10 ¹⁹ >5·10 ¹⁹	Рентгенівські трубки Радіоактивність Космічне випромінювання

Наслідком теорії Максвелла є поперечний характер електромагнітних хвиль: вектори \mathbf{E} і \mathbf{H} напруженостей електричного і магнітного полів хвилі взаємно перпендикулярні (рис. 36) і лежать у площині, яка є перпендикулярною до вектора \mathbf{v} швидкості поширення хвилі, причому вектори \mathbf{E} , \mathbf{H} і \mathbf{v} утворюють правоґвинтову систему.

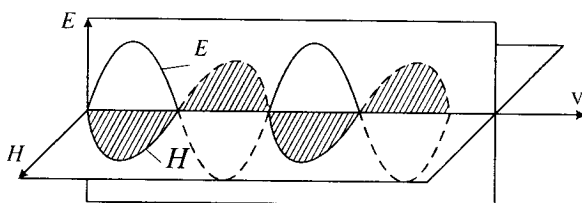


Рисунок 36

З рівнянь Максвелла випливає також те, що в електромагнітній хвилі вектори \mathbf{E} і \mathbf{H} завжди коливаються в однакових фазах (рис. 36), причому миттєві значення E і H у будь-якій точці пов'язані співвідношенням

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H. \quad (4.56)$$

Рівняння коливань векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} , які є плоскими монохроматичними електромагнітними хвилями (рис. 36), мають вигляд

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \cos(\omega t - \kappa x), \\ H_y &= H_0 \cos(\omega t - \kappa x), \end{aligned} \quad (4.57)$$

де E_0 і H_0 – відповідні амплітуди електричного і магнітного полів хвилі;
 ω – колова, або циклічна частота;
 κ – хвильове число ($\kappa = \omega/v$).

4.6 Хвильові рівняння електромагнітних хвиль

Для одержання хвильових рівнянь електромагнітних хвиль, розв'язком яких є рівняння (4.57), скористаємось рівняннями Максвелла.

Розглянемо замкнутий контур в системі координат E_z, ox , сторони якого відповідно дорівнюють ℓ і Δx . Запишемо для цього замкнутого контуру рівняння Максвелла (4.52)

$$\oint_L \mathbf{E} d\ell = E_{(z,t)x} \cdot \ell - E_{(z,t)(x+\Delta x)} \ell,$$

$$-\oint_S \frac{\partial B_{y,t}}{\partial t} dS = -\frac{\partial B_{y,t}}{\partial t} \cdot \Delta x \ell. \quad (4.58)$$

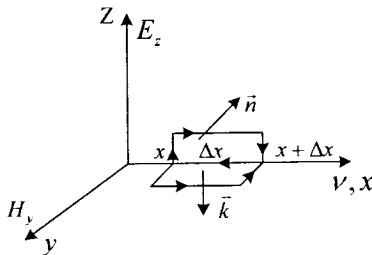


Рисунок 37

Оскільки ліві сторони рівнянь (4.58) відповідають рівнянню Максвелла (4.52), то праві сторони цих рівнянь можна порівняти. Після незначних спрощень одержуємо

$$\frac{E_{(z,t)x} - E_{(z,t)(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{\partial B_{y,t}}{\partial t}. \quad (4.59)$$

В граничному випадку, коли $\Delta x \rightarrow 0$, рівняння (4.59) набуде вигляду

$$\frac{\partial E_{z,t}}{\partial x} = -\frac{\partial B_{y,t}}{\partial t},$$

де $B_{y,t} = \mu\mu_0 H_{y,t}$ – зв'язок індукції магнітного поля з напруженістю цього поля.

З урахуванням цього зауваження формула (4.59) набуде вигляду

$$\frac{\partial E_{z,t}}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{y,t}}{\partial t}. \quad (4.60)$$

Рівняння Максвелла (4.54) застосуємо до замкнутого контуру в координатній площині $H_{y,0,x}$ (див. рис. 37), вважаючи що вільні електричні заряди відсутні, а тому струм провідності $j dS = 0$.

$$\begin{aligned} \oint_L H_{y,t} dl &= H_{(y,t)x} \cdot \ell - H_{(y,t)(x+\Delta x)} \cdot \ell, \\ -\oint_S \frac{dD_{z,t}}{dt} dS &= -\frac{\partial D_{z,t}}{\partial t} \cdot \ell \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Оскільки ліві сторони рівнянь (4.61) однакові, то й праві сторони однакові. Прирівняємо праві сторони цих рівнянь, одержимо

$$\frac{H_{(y,t)x} - H_{(y,t)(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{\partial D_{z,t}}{\partial t}.$$

В граничному випадку, коли $\Delta x \rightarrow 0$, одержимо

$$\frac{\partial H_{y,t}}{\partial x} = -\frac{\partial D_{z,t}}{\partial t}. \quad (4.62)$$

Оскільки $D_{x,t} = \varepsilon\varepsilon_0 E_{x,t}$, то рівняння (4.62) набуде вигляду

$$\frac{\partial H_{y,t}}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{z,t}}{\partial t}. \quad (4.63)$$

Продиференціюємо рівняння (4.63) за координатою x , одержимо

$$\frac{\partial^2 H_{y,t}}{\partial x^2} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{z,t}}{\partial x} \right). \quad (4.64)$$

Замість виразу в дужках правої сторони рівняння (4.64) підставимо його значення з рівняння (4.60), одержимо

$$\frac{\partial^2 H_{y,t}}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_{y,t}}{\partial t^2}. \quad (4.65)$$

Продиференціюємо рівняння (4.60) за координатою x , одержимо

$$\frac{\partial^2 E_{z,t}}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_{y,t}}{\partial x} \right). \quad (4.66)$$

Похідну в дужках правої сторони рівняння (4.66) замінимо на відповідну похідну з рівняння (4.63), одержимо

$$\frac{\partial^2 E_{z,t}}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_{z,t}}{\partial t^2}. \quad (4.67)$$

З рівнянь (4.65) і (4.67) шляхом незначних перетворень одержуємо хвильові рівняння електромагнітних хвиль

$$\frac{\partial^2 E_{z,t}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 E_{z,t}}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 H_{y,t}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 H_{y,t}}{\partial x^2}.$$
(4.68)

Аналогічні (4.68) хвильові рівняння можна одержати, якщо кожне з рівнянь (4.57) двічі диференціювати за часом і координатою і вилучити з них функцію косинуса, тобто

$$\frac{\partial^2 E_{z,t}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - \kappa x),$$

$$\frac{\partial^2 E_{z,t}}{\partial x^2} = -\kappa^2 E_0 \cos(\omega t - \kappa x).$$

Звідки, врахувавши що $\frac{\omega^2}{\kappa^2} = v^2$, одержуємо

$$\frac{\partial^2 E_{z,t}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_{z,t}}{\partial x^2}.$$
(4.69)

Аналогічно диференціюємо друге рівняння (4.57) й після незначних спрощень одержуємо

$$\frac{\partial^2 H_{y,t}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 H_{y,t}}{\partial x^2}.$$
(4.70)

Зіставлення рівнянь (4.69) і (4.70) з рівняннями (4.68) дає можливість визначити швидкість поширення електромагнітних хвиль

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}.$$
(4.71)

Якщо врахувати, що для вакууму $\varepsilon = 1$ і $\mu = 1$, то швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі буде дорівнювати

$$c = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$
(4.72)

Одержане значення швидкості поширення електромагнітних хвиль у вакуумі добре збігається зі швидкістю поширення світла. В діелектричному середовищі (крім феромагнетиків) швидкість поширення електромагнітних хвиль менша на $\sqrt{\varepsilon}$, тобто

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (4.73)$$

Для світлових хвиль, які можуть поширюватись в прозорих діелектричних середовищах, величину $\sqrt{\varepsilon}$ називають показником заломлення і позначають через n , тому

$$v = \frac{c}{n}. \quad (4.74)$$

4.7 Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Пойнтінга

Можливість виявлення електромагнітних хвиль указує на те, що вони переносять енергію. Об'ємна густина w енергії електромагнітної хвилі складається з об'ємних густин $w_{ел.}$ і $w_{маг.}$ електричного і магнітного полів

$$w = w_{ел.} + w_{маг.} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (4.75)$$

В рівняння (4.60), яке дорівнює $\frac{\partial E_{z,t}}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{y,t}}{\partial t}$ підставимо необхідні похідні рівнянь (4.57), тобто, $\frac{\partial E_{z,t}}{\partial x} = E_0 \kappa \sin(\omega t - \kappa x)$, $\frac{\partial H_{y,t}}{\partial t} = -H_0 \omega \sin(\omega t - \kappa x)$, одержимо

$$E_0 \kappa \sin(\omega t - \kappa x) = \mu\mu_0 H_0 \omega \sin(\omega t - \kappa x). \quad (4.76)$$

Після необхідних спрощень одержимо

$$E_0 = \mu\mu_0 \frac{\omega}{\kappa} H_0. \quad (4.77)$$

Оскільки $\frac{\omega}{k} = v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$, то вираз (4.77) переписеться

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu\mu_0} H_0. \quad (4.78)$$

Рівність (4.78) справедлива не лише для амплітудних значень напруженостей електричного й магнітного полів, а й для будь-яких їх значень, тобто,

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H. \quad (4.79)$$

Вираз (4.75) густини енергії електромагнітних хвиль перепишемо в такому вигляді

$$w = \frac{\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E \cdot \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E}{2} + \frac{\sqrt{\mu\mu_0} H \cdot \sqrt{\mu\mu_0} H}{2},$$

або, з урахуванням (4.79), одержимо

$$w = \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} E \cdot H = \frac{1}{v} E \cdot H. \quad (4.80)$$

Нехай електромагнітна хвиля поширюється зі швидкістю v в напрямі осі x . Виділимо прямокутний паралелепіпед з площею торця S і стороною $v\Delta t$, як це показано на рис. 38.

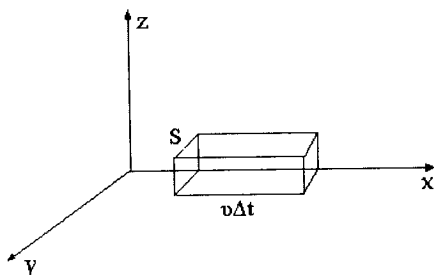


Рисунок 38

Повна енергія, яка буде перенесена через площу S за час Δt буде дорівнювати

$$W = wSv\Delta t. \quad (4.81)$$

Із цієї формули знайдемо вектор потоку енергії, яка переноситься через площу S в напрямі осі x із швидкістю v , тобто

$$\vec{R} = \frac{W}{S\Delta t} = \frac{wSv\Delta t}{S\Delta t} = w\vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{H}. \quad (4.82)$$

Оскільки вектори E і H взаємно перпендикулярні й утворюють з напрямком поширення хвилі правогвинтову систему, то напрямком вектора $[E \cdot H]$ збігається з напрямком перенесення енергії, а модуль цього вектора дорівнює $E \cdot H$. Отже, вектор густини потоку електромагнітної енергії називається вектором Пойнтінга.

Якщо електромагнітні хвилі поглинаються або відбиваються тілами, то, відповідно до теорії Максвелла, вони мають здійснювати на тіла деякий тиск. Тиск електромагнітних хвиль пояснюється тим, що під дією електричного поля хвилі заряджені частинки речовини починають упорядковано рухатися і, крім того, зі сторони магнітного поля хвилі на частинку діє сила Лоренца. Однак величина цього тиску досить мізерна. Можна оцінити, що при середній потужності сонячного випромінювання на Землю діє тиск, який не перевершує 5 мкПа. Вперше тиск електромагнітного випромінювання вдалось виміряти російському фізику Лебедєву. Поле електромагнітних хвиль має певний імпульс, величину якого можна оцінити через енергію так

$$p = \frac{W}{c}, \quad (4.83)$$

де W – енергія електромагнітної хвилі;

c – швидкість поширення електромагнітних хвиль.

У РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЬ

5.1 Механічні гармонічні коливання. Основні формули

1. Зміщення, швидкість і прискорення матеріальної точки при гармонічних коливаннях визначаються рівняннями:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$v = -A \omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$a = -A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x,$$

де A – амплітуда коливань;

ω – циклічна частота;

φ_0 – початкова фаза коливань.

2. Зв'язок циклічної частоти ω з періодом коливань T і частотою ν :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

3. Сила, яка діє на тіло при вільних гармонічних коливаннях (квазіпружна сила),

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx,$$

де $k = m\omega^2$ – коефіцієнт квазіпружної сили, який вимірюється силою, що викликає зміщення $x = l$.

4. Кінетична, потенціальна і повна енергії гармонічних коливань матеріальної точки

$$\hat{E} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$W = K + \Pi = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

5. Диференціальні рівняння малих коливань:

а) математичний маятник

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \text{ звідки } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

б) пружинний маятник:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\kappa}{m} x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{\kappa}{m}, \text{ звідки } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}};$$

в) фізичний маятник:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mgl}{I} x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{mgl}{I}, \text{ звідки } T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

де I – момент інерції маятника відносно осі коливань;

l – відстань від осі коливань до центра мас маятника;

$\frac{I}{ml} = L$ – зведена довжина.

При відсутності опору середовища циклічна частота коливань ω називається власною циклічною частотою і позначається через ω_0 .

6. При додаванні двох однаково направлених гармонічних коливань однакового періоду одержуємо гармонічне коливання того ж періоду, амплітуда якого A і початкова фаза φ_0 визначаються рівняннями :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2},$$

де A_1 і A_2 – амплітуди коливань, що складаються;

φ_1 і φ_2 – початкові фази цих коливань.

7. При додаванні двох однаково направлених гармонічних коливань однакової амплітуди і близьких частот ($\omega_1 \approx \omega_2$) одержуємо биття, яке описується рівнянням

$$x = \left| 2A \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t,$$

де $\left| 2A \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|$ – амплітуда биття.

Періодичність зміни амплітуди визначається періодичністю зміни модуля косинуса, тому період биття дорівнює:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T_{\delta} = \pi, \text{ звідки } T_{\delta} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}.$$

8. При додаванні двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань з однаковою частотою в напрямі координатних осей x і y матимемо рівняння траєкторії підсумкового руху матеріальної точки

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 \cdot A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1),$$

де A_1 і A_2 – амплітуди коливань, що додаються;

$\varphi_2 - \varphi_1$ – різниця фаз цих коливань.

9. Диференціальне рівняння згасальних коливань

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0,$$

або

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

де $\beta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт згасання;

r – коефіцієнт опору середовища;

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – квадрат власної циклічної частоти коливань.

10. Загальний розв'язок диференціального рівняння для згасальних коливань має вигляд

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

де $A_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасальних коливань;

ω – циклічна частота згасальних коливань.

11. Швидкість зменшення амплітуди згасальних коливань характеризують логарифмічним декрементом згасання

$$\delta = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T,$$

де δ – логарифмічний декремент згасання;

β – коефіцієнт згасання;

T – період згасальних коливань.

12. Циклічна частота згасальних коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \text{або} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}.$$

13. Період згасальних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{або} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}.$$

14. Добротність коливальних систем:

$$\theta = 2\pi \frac{W_t}{\Delta W_{(t=T)}} \quad \text{або} \quad \theta = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta\Gamma} = \frac{\omega_0}{2\beta},$$

де W_t – повна енергія, яку має коливальна система на момент часу t ;

$\Delta W_{(t=T)}$ – втрати енергії коливальної системи за один період;

δ – логарифмічний декремент згасання;

β – коефіцієнт згасання;

ω_0 – власна циклічна частота коливань;

T – період згасаючих коливань (при малих згасаннях $T \approx T_0$).

15. Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

або

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

де F_0 – змушувальна сила;

ω – циклічна частота вимушених коливань.

16. Загальний розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань, які протягом певного часу встановлюються під дією змушувальної сили, має вигляд

$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

де A – амплітуда вимушених коливань;

α – зсув за фазою вимушених коливань і змушувальної сили.

17. Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

$$\text{де } f_0 = \frac{F_0}{m};$$

ω_0 – власна частота коливань системи;

ω – циклічна частота змушувальної сили.

18. Зсув фази вимушених коливань

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

19. Резонансна частота і резонансна амплітуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2};$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

5.2 Механічні хвилі. Основні формули

1. Рівняння плоскої хвилі

$$U_{x,t} = A \cos(\omega t - kx),$$

де $U_{x,t}$ – зміщення точок пружного середовища від положення рівноваги на відстані x від джерела;

A – амплітудне зміщення цих точок;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число;

λ – довжина хвилі;

ω – циклічна частота коливань.

2. Рівняння сферичної хвилі

$$U_{x,t} = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr),$$

де r – радіус-вектор пружного середовища.

3. Зв'язок довжини хвилі з періодом коливань і частотою

$$\lambda = \nu T = \frac{\nu}{\nu},$$

де ν – швидкість поширення хвиль в пружному середовищі;

T – період коливань;

ν – частота коливань.

4. Швидкість поширення хвиль (фазова швидкість хвильового руху):

а) поздовжня хвиля в твердому середовищі

$$\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де E – модуль Юнга;

ρ – густина твердого середовища.

б) поперечна хвиля в твердому середовищі

$$\nu = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

де G – модуль зсуву;

ρ – густина твердого середовища.

в) поздовжня хвиля в рідкому середовищі

$$\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де E – модуль об'ємної пружності рідини;

ρ – густина рідини.

г) поздовжня хвиля в газоподібному середовищі

$$\nu = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

5. Енергія пружних хвиль:

а) кінетична енергія

$$K = \frac{m\nu^2}{2} = \frac{\rho S \Delta x \omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t - kx),$$

де $m = \rho S \Delta x$ – маса виділеного елемента пружного середовища;

$\nu = \frac{\partial U_{x,t}}{\partial t}$ – швидкість хвильового руху точок середовища;

б) потенціальна енергія

$$\Pi = \frac{k\Delta u_{x,t}^2}{2} = \frac{\rho S \Delta x \omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t - kx);$$

в) повна енергія хвиль

$$W = K + \dot{I} = \rho S \Delta \delta \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx);$$

г) середні значення повної енергії і густини енергії за час в один період

$$\bar{W} = \frac{\rho S \Delta x \omega^2 A^2}{2}, \quad \bar{w} = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2}.$$

6. Потік енергії пружних хвиль

$$R = \frac{\bar{W}}{S \Delta t},$$

де \bar{W} – середнє значення повної енергії хвиль.

7. Вектор потоку енергії пружних хвиль

$$\vec{R} = \bar{w} \vec{v},$$

де \bar{w} – середня густина енергії пружних хвиль;

\vec{v} – вектор швидкості поширення хвиль в пружному середовищі.

8. Ефект Допплера для звукових хвиль

$$v' = \frac{c \pm v}{c \mp u} \cdot v,$$

де v' – частота звуку яка сприймається приймачем;

v – частота звуку джерела;

c – швидкість поширення звукових хвиль в пружному середовищі;

v – швидкість руху приймача звуку;

u – швидкість руху джерела звуку (нижній знак – джерело і приймач розходяться; верхній знак – джерело і приймач сходяться).

9. Інтерференція когерентних хвиль:

а) максимуми інтерференції спостерігаються, коли

$$\Delta \varphi = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \pm 2n \pi,$$

де $x_2 - x_1$ – різниця ходу двох хвиль;

$\Delta\varphi$ – різниця фаз хвиль;

λ – довжина хвилі;

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – порядок максимуму,

або $\Delta x = (x_2 - x_1) = n \cdot \lambda$;

б) мінімуми інтерференції спостерігаються, коли

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \pm(2n + 1)\pi.$$

або

$$\Delta x = (x_2 - x_1) = \pm (2n + 1) \lambda/2.$$

10. Рівняння стоячої хвилі

$$u_{x,t} = |A \cos kx| \cos \omega t,$$

де $u_{x,t}$ – зміщення точок середовища від положення рівноваги на відстані x від джерела коливань;

A – амплітуда зміщення;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число;

ω – циклічна частота коливань;

$|A \cos kx|$ – амплітуда стоячої хвилі.

а) координати вузлів стоячої хвилі

$$kx = \pm(2n + 1)\pi/2 \quad \text{або} \quad x = \pm(2n + 1)\lambda/4,$$

де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$;

x – координати вузлів стоячої хвилі.

б) координати пучностей стоячої хвилі

$$kx = \pm n\pi \quad \text{або} \quad x = \pm n \lambda,$$

де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

5.3 Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Матеріальна точка масою $m = 5$ кг здійснює гармонічні коливання, рівняння руху яких має вигляд $x(t) = 0,02\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Визначити усі характеристики гармонічних коливань для моменту часу $t = 1$ с. Чому дорівнює період T та частота ν гармонічного коливання? Визначити також максимальну силу \vec{F}_{max} , що діє на точку. Фізичні величини подані в системі SI.

Дано:

$$m = 5 \text{ кг}$$

$$x(t) = 0,02\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$t = 1 \text{ с}$$

$$\varphi - ?, \varphi_0 - ?, \omega - ?, T - ?, \nu - ?$$

$$x(t) - ?, v(t) - ?, a(t) - ?,$$

$$E_{кін.} - ?, E_{пот.} - ?, E_{повн.} - ?,$$

$$\vec{F}_{max} - ?$$

Розв'язування

З рівняння гармонічних коливань $x(t) = 0,02\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ випливає, що фаза коливань φ даного коливання для моменту часу $t = 1$ с обчислюється за формулою $\varphi = \left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{3}\pi = 420^\circ$.

$$\text{Початкова фаза даного коливання } \varphi_0 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

$$\text{Циклічна частота } \omega = 2\pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

$$\text{Період коливань } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ (с)}.$$

$$\text{Частота коливань } \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (Гц)}.$$

Зміщення гармонічного коливання для моменту часу $t = 1$ с визначається з рівняння гармонічного коливання

$$x(1) = 0,02\cos\left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = 0,02 \cos 420^\circ = 0,02 \cdot 0,5 = 0,01 \text{ м}.$$

Швидкість матеріальної точки для моменту часу $t = 1$ с визначається як похідна від координати $x(t)$ за часом t

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -0,02 \cdot 2\pi \cdot \sin\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right);$$
$$v(1) = \frac{dx}{dt} = -0,02 \cdot 2\pi \cdot \sin\left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = -0,108 \text{ м/с.}$$

Прискорення матеріальної точки для моменту часу $t = 1$ с визначається як похідна від швидкості $v(t)$ за часом t

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0,02 \cdot (2\pi)^2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right);$$
$$a(1) = \frac{dv}{dt} = -0,02 \cdot (2\pi)^2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = 0,394 \text{ м/с}^2.$$

Кінетична енергія матеріальної точки для моменту часу $t = 1$ с визначається за формулою

$$E_{\text{кін.}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{5 \cdot (-0,108)^2}{2} = 0,029 \text{ Дж.}$$

Повна енергія матеріальної точки обчислюється за формулою

$$E_{\text{повн.}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}, \quad v_{\text{max}} = A \cdot \omega.$$
$$E_{\text{повн.}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \frac{m(A \cdot \omega)^2}{2} = \frac{5 \cdot (0,02 \cdot 2\pi)^2}{2} = 0,039 \text{ Дж.}$$

Потенціальна енергія обчислюється з закону збереження енергії

$$E_{\text{повн.}} = E_{\text{кін.}} + E_{\text{пот.}}$$

звідси $E_{\text{пот.}} = E_{\text{повн.}} - E_{\text{кін.}} = 0,039 - 0,029 = 0,01 \text{ Дж.}$

Максимальна сила \vec{F}_{max} , що діє на точку, визначається за другим законом Ньютона

$$\vec{F}_{\text{max}} = m \cdot \vec{a}_{\text{max}}, \quad a_{\text{max}} = A \cdot \omega^2.$$

Тоді максимальна сила $F_{\text{max}} = m \cdot A \cdot \omega^2 = 5 \cdot 0,02 \cdot (2\pi)^2 = 3,947 \text{ Н.}$

Номер варіанту N:

$$N_{\text{вар}} = 1 \quad t = N \quad (\text{с}) \quad \omega = 2 \cdot \pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$$

$$x(t) = 0.02 \cdot \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \quad x(t) = 0.01 \quad (\text{м}) \quad t = 1$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = -0.109$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -0.395$$

$$\left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) \quad t = 1$$

$$v(t) = -0.02 \cdot \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$v(t) = -0.109$$

$$\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right)$$

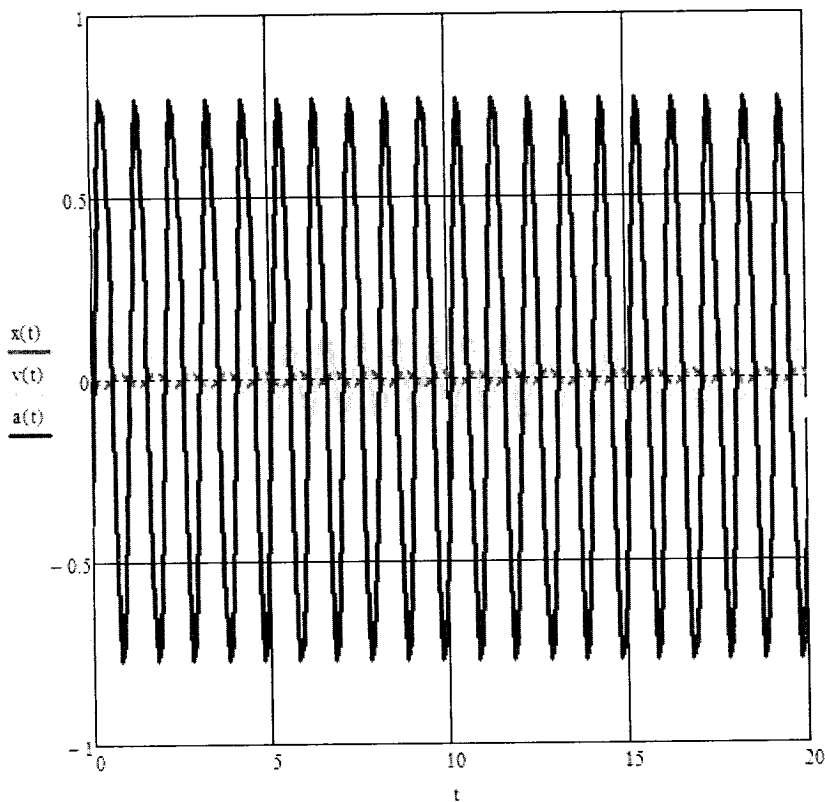
t = 1

$$a(t) = -0.02 \cdot \omega^2 \cdot \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$a(t) = -0.395$$

$$t_{\text{с}} = 0, 0.1 \dots 20$$

Зміщення $x(t)$, м, Швидкість $v(t)$, м/с, Прискорення $a(t)$, м/с²



Тривалість часу t , с

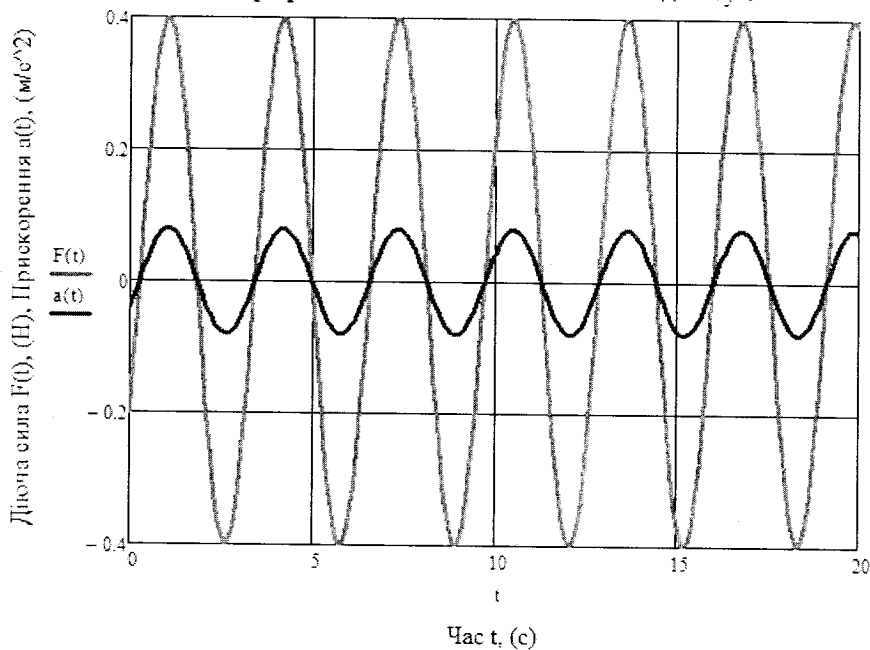
Номер варіанту N: $N = 1$ $t = N$ (с) $\omega = 2$ $\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$ $m = 5$ (кг)

$$a(t) := -0.02 \cdot \omega^2 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad F(t) := m \cdot a(t)$$

$$a(t) = 0.08 \quad \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2}\right) \quad F(t) = 0.598 \quad (\text{Н})$$

$$t_i = 0, 0.1, \dots, 20$$

Графік залежності діючої сили F від часу t



$$F_{\max} = m \cdot (0.02 \cdot \omega^2)$$

$$F_{\max} = 0.4 \quad (\text{Н})$$

Приклад 2

Матеріальна точка масою $m = 5$ кг здійснює згасаючі гармонічні коливання, рівняння руху яких має вигляд $x(t) = 5e^{-0.5t} \cos(2\pi t + 0)$. Визначити всі характеристики згасаючих коливань для моменту часу $t = 1$ с. Чому дорівнює період T та коефіцієнт згасання β згасаючого гармонічного коливання?

Дано:

$$m = 5 \text{ кг}$$

$$x(t) = 5e^{-0,5t} \cos(2\pi t + 0)$$

$$t = 1 \text{ с}$$

$$\varphi(t) - ?, \varphi_0 - ?, \omega - ?, T - ?,$$

$$x(t) - ?, v(t) - ?, a(t) - ?,$$

$$\beta - ?, E_{\text{кін.}} - ?, E_{\text{пот.}} - ?, E_{\text{повн.}} - ?$$

$$F(t) - ?$$

Розв'язування

Загальне рівняння згасаючих гармонічних коливань має вигляд

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

З цього рівняння фаза коливань: $\varphi(t) = (\omega t + \varphi_0)$. Відповідно до умови задачі: $\varphi(t) = (2 \cdot \pi \cdot t + 0)$; $\varphi(1) = 2 \cdot \pi \cdot 1 + 0 = 2 \cdot \pi$ (рад).

Початкова фаза $\varphi_0 = 0$ (рад).

$$\text{Циклічна частота } \omega = 2 \cdot \pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

$$\text{Період } T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ (с)}.$$

$$\text{Коефіцієнт згасання } \beta = 0,5 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

$$\text{Зміщення матеріальної точки } x(t) \quad x(t) = 5e^{-0,5t} \cos(2\pi t + 0).$$

Для моменту часу $t = 1$ с отримаємо

$$x(1) = 5 \cdot e^{-0,5 \cdot 1} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 + 0) = 3,033 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

Швидкість матеріальної точки для моменту часу $t = 1$ с визначається як похідна від координати $x(t)$ за часом t

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 5 \cdot (-0,5) \cdot \cos(2\pi \cdot t) \cdot e^{-0,5 \cdot t} - 5 \cdot 2\pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot e^{-0,5 \cdot t};$$

$$v(1) = \frac{dx}{dt} = -1.516326649281583559 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Прискорення матеріальної точки для моменту часу $t = 1$ с визначається як похідна від швидкості $v(t)$ за часом t

$$a(t) = \frac{dv}{dt} =;$$

$$a(1) = \frac{dv}{dt} = -118,966 \left(\frac{m}{c^2}\right).$$

Кінетична енергія матеріальної точки для моменту часу $t = 1$ с визначається за формулою

$$E_{\text{кін.}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{5 \cdot (-1.516326649281583559)^2}{2} = 5.748 \text{ (Дж)}.$$

Повна енергія матеріальної точки обчислюється за формулою

$$E_{\text{повн.}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \frac{5 \cdot (-1.516326649281583559)^2}{2} = 5.748 \text{ (Дж)}.$$

Потенціальна енергія обчислюється з закону збереження енергії

$$E_{\text{повн.}} = E_{\text{кін.}} + E_{\text{пот.}},$$

звідси

$$E_{\text{пот.}} = E_{\text{повн.}} - E_{\text{кін.}} = \frac{5 \cdot (-1.516326649281583559)^2}{2} = 5.748 - 5.748 = 0 \text{ (Дж)}.$$

Сила $F(t)$, що діє на тіло в момент часу t , визначається за другим законом Ньютона

$$F(t) = m \cdot a(t) = 5 \cdot (-118,966) = -594.831 \text{ (Н)}.$$

Максимальна сила \vec{F}_{max} , що діє на точку, визначається за другим законом Ньютона

$$\vec{F}_{\text{max}} = m \cdot \vec{a}_{\text{max}}, a_{\text{max}} =.$$

Тоді максимальна сила $F_{\text{max}} = m \cdot a_{\text{max}} = 5 \cdot (-200) = -1000 \text{ (Н)}$.

номер варіанту N: $N = 1$

$$\underline{\underline{A}} := N$$

$$\underline{\underline{\beta}} := 0.2$$

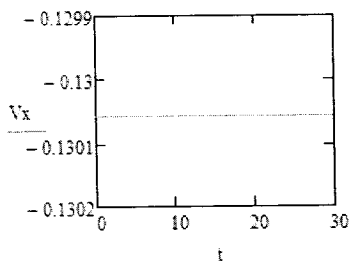
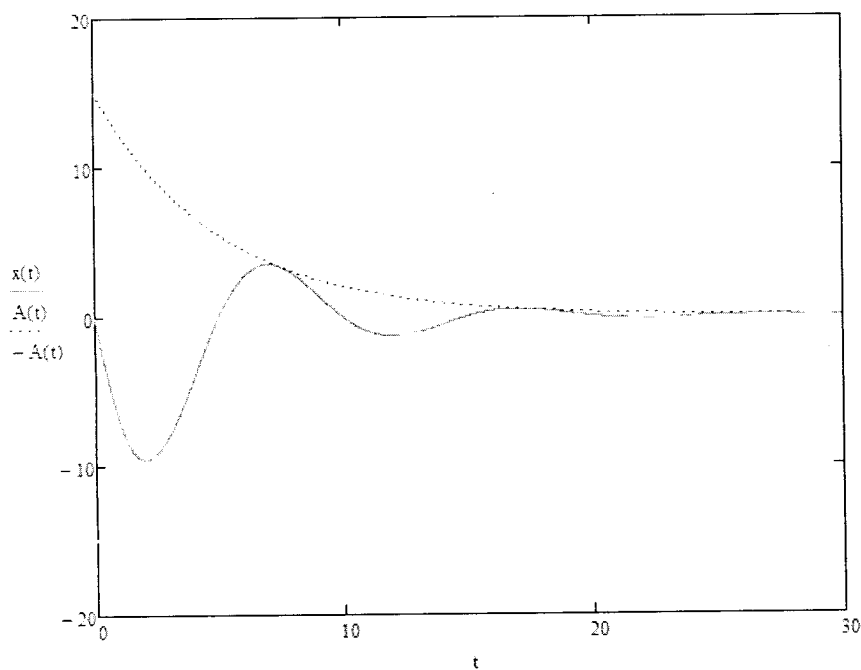
$$\underline{\underline{A}} := 15$$

$$t := 0, 0.01 \dots 30$$

$$\underline{\underline{\omega}} := 0.2 \cdot \pi \quad \varphi := \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{x}}(t) := A \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{\underline{A}}(t) := A \cdot e^{-\beta \cdot t}$$



Приклад 3

Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 7$ мкф та котушки індуктивністю $L = 0,25$ Гн і має опір $R = 4$ Ом. Конденсатор має заряд $q = 5,8 \cdot 10^{-4}$ Кл. Визначити період коливання контуру T , логарифмічний декремент згасання δ , та амплітуду заряду q_0 після $N = 20$ електричних коливань.

Дано:

$$C = 7 \text{ мкф}$$

$$L = 0,25 \text{ Гн}$$

$$R = 4 \text{ Ом}$$

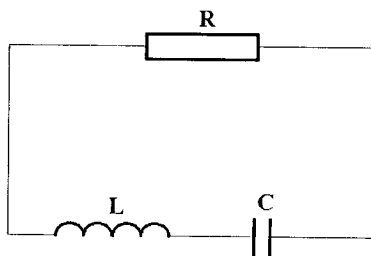
$$q_0 = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$$

$$N = 20$$

$$T - ?$$

$$\delta - ?$$

$$q_N - ?$$



Розв'язування

Оскільки коливальний контур має активний опір R , то в ньому будуть згасаючі електричні коливання.

Період згасаючих електричних коливань визначають за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Після підстановки числових значень у формулу отримаємо

$$T = \frac{2 \cdot 3,14}{\sqrt{\frac{1}{0,25 \cdot 7 \cdot 10^{-6}} - \frac{4^2}{4 \cdot 0,25^2}}} = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ (с)}$$

Швидкість згасання електричних коливань у коливальному контурі характеризують логарифмічним декрементом згасання, який дорівнює

$$\delta = \beta \cdot T,$$

де $\beta = \frac{R}{2L}$ – коефіцієнт згасання;

T – період електричних коливань.

Знайдемо його числове значення

$$\delta = \beta \cdot T = \frac{R}{2L} \cdot T = \frac{4}{2 \cdot 0,25} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3} = 6,64 \cdot 10^{-2}.$$

Величину заряду на обкладках конденсатора для випадку згасаючих електричних коливань описують рівнянням

$$q = q_0 e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

де q_0 – максимальний заряд на обкладці конденсатора;

$q_0 e^{-\beta \cdot t}$ – амплітуда заряду.

Амплітуда заряду після N коливань становитиме

$$q_N = q_0 e^{-\beta \cdot t} = q_0 e^{-\beta \cdot T \cdot N} = q_0 e^{-\frac{R}{2L} T \cdot N}.$$

Знайдемо числове значення амплітуди заряду за цією формулою

$$q_N = 5,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\frac{4}{2 \cdot 0,25} 20 \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Відповідь: $T = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}$; $\delta = 6,64 \cdot 10^{-2}$; $q_N = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$.

Приклад 4

Частинка здійснює гармонічні коливання вздовж осі x біля положення рівноваги $x = 0$. Циклічна частота коливань $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$. В момент часу $t = 0$ координати частинки $x_0 = 25,0 \text{ см}$, а її швидкість $v = 100 \text{ см/с}$. Знайти координату x і швидкість v цієї частинки через $t = 2,40 \text{ с}$.

Дано:

$$\omega = 4 \text{ с}^{-1}$$

$$x_0 = 25,0 \text{ см}$$

$$v = 100,0 \text{ см/с}$$

$$t = 2,40 \text{ с}$$

$$x - ? \quad v - ?$$

Розв'язування

Рівняння гармонічних коливань має вигляд\

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Швидкість частинки в довільний момент часу дорівнює

$$v = -A \omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

В початковий момент часу $t = 0$ величини x і v відповідно дорівнюють x_0 і v_0 :

$$x_0 = A \cos \varphi \quad \text{і} \quad v_0 = -A \omega \sin \varphi. \quad (3)$$

Розв'язавши систему рівнянь (3), одержимо значення амплітуди коливань і початкової фази

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2 \cdot \omega^2} = 1, \quad \text{звідки} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}};$$

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A}, \quad \text{звідки} \quad \varphi = \arccos \frac{x_0}{A}.$$

Числові значення амплітуди і початкової фази в одиницях умови задачі

$$A = \sqrt{625 + \frac{10^4}{16}} = 35,5 \text{ см},$$

$$\varphi = \arccos \frac{25}{35,5} = \frac{\pi}{4}.$$

Скориставшись значеннями амплітуди коливань і початкової фази, знаходимо координату x і швидкість v в момент часу t :

$$x = 35,5 \cos(4 \cdot 2,40 + \pi/4) = -20,2 \text{ см},$$

$$v = -35,5 \cdot 4 \sin(4 \cdot 2,40 + \pi/4) = 115,7 \text{ см/с}.$$

Відповідь: $x = -20,2 \text{ см}; v = 115,7 \text{ см/с}.$

Приклад 5

Матеріальна точка бере участь одночасно у двох гармонічних коливальних процесах, які відбуваються в одному напрямку з однаковим періодом $T = 2 \text{ с}$ та з амплітудами $A_1 = 0,03 \text{ м}$ і $A_2 = 0,04 \text{ м}$. Різниця фаз між цими коливаннями дорівнює $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{4}$. Початкова фаза одного з цих коливань дорівнює нулю $\varphi_{01} = 0$. Знайти закон руху $x(t)$ підсумкового процесу.

Дано:

$$T_1 = T_2 = T = 2 \text{ с}$$

$$A_1 = 0,03 \text{ м}$$

$$A_2 = 0,04 \text{ м}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_{01} = 0$$

$$x(t) - ?$$

Розв'язування

Закони руху для кожного з процесів у загальному вигляді можна записати рівняннями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Закон руху точки, яка бере участь у двох коливальних процесах, буде

$$x(t) = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}), \quad (2)$$

де $x(t)$ – зміщення точки від положення рівноваги.

Оскільки обидва коливання гармонічні, мають однакові частоти і напрямки поширення, то підсумкове коливання також буде гармонічним і матиме таку саму частоту. Тому закон руху можна записати у вигляді

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

де A і φ_0 – відповідно, амплітуда і початкова фаза підсумкового коливання.

Їх можна знайти графічно методом векторних діаграм або аналітичним методом.

Скористаємось аналітичним методом. Прирівняємо праві частини рівностей (2) і (3)

$$A \sin(\omega t + \varphi_0) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}). \quad (4)$$

Розкриємо синуси суми двох кутів і згрупуємо окремо члени, до складу яких входять $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$. Одержимо

$$A \sin \omega t \cos \varphi_0 + A \cos \omega t \sin \varphi_0 = (A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}) \sin \omega t + (A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}) \cos \omega t.$$

Цей вираз перетворюється на тотожність за будь-яких значень t , коли коефіцієнти біля $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ у лівій і правій частинах рівняння будуть однаковими, тобто

$$A \cos \varphi_0 = A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}; \quad (5)$$

$$A \sin \varphi_0 = A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}. \quad (6)$$

Поділивши рівняння (6) на рівняння (5), дістанемо

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (7)$$

Піднесемо ліві і праві частини рівнянь (5) і (6) до квадрата, додамо їх і згрупуємо члени. Отримаємо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (8)$$

За формулою (7) знайдемо початкову фазу підсумкового коливання

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{0,03\sin 0 + 0,04\sin\frac{\pi}{4}}{0,03\cos 0 + 0,04\cos\frac{\pi}{4}} = 0,49, \text{ або } \varphi_0 = \operatorname{arctg} 0,49 = 0,45 \text{ рад.}$$

За формулою (8) знайдемо амплітуду підсумкового коливання

$$A = \sqrt{0,03^2 + 0,04^2 + 2 \cdot 0,03 \cdot 0,04 \cdot \cos\frac{\pi}{4}} = 0,06 \text{ м.}$$

Циклічна частота коливання визначається за періодом

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Підставивши значення A , φ_0 і ω в рівняння (3), дістанемо закон руху підсумкового коливання

$$x(t) = 0,06\sin(\pi t + 0,45) \text{ (м).}$$

Відповідь: $x(t) = 0,06\sin(\pi t + 0,45) \text{ м.}$

Приклад 6

Рух матеріальної точки задано рівняннями $x = 25 \sin 4t \text{ см}$; $y = 12 \sin(4t + 1,57) \text{ см}$. Знайти рівняння траєкторії $f(x, y)$ і швидкість $v(t)$ руху точки в момент часу $t = 0,5 \text{ с}$.

Дано:

$$\begin{aligned} x &= 25 \sin 4t \text{ см} \\ y &= 12 \sin(4t + 1,57) \text{ см} \\ t &= 0,5 \text{ с} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &- ? \\ v(t) &- ? \end{aligned}$$

Розв'язування

З рівнянь руху матеріальної точки видно, що точка одночасно здійснює гармонічні коливання з однаковою частотою в напрямку координатних осей OX і OY .

Знайдемо рівняння траєкторії підсумкового руху. Для цього вилучимо з заданих рівнянь час t . Із першого рівняння визначимо $\sin 4t = \frac{x}{25}$, друге перетворимо так:

$$y = 12 \sin \left(4t + \frac{\pi}{2} \right) = 12 \cos 4t.$$

З урахуванням першого рівняння друге запишемо у вигляді

$$\frac{y}{12} = \cos 4t = \sqrt{1 - \sin^2 4t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25^2}}.$$

Піднесемо його до квадрата $\frac{y^2}{12^2} = 1 - \frac{x^2}{25^2}$, звідки $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{144} = 1$.

Це рівняння підсумкового коливання, що є рівнянням еліпса, осі якого зведені до координатних осей OX і OY , з півосьми $a = 25$ см і $b = 12$ см (див. рис. 37).

Знайдемо швидкість точки в момент часу $t = 0,5$ с. Модуль швидкості, як відомо, дорівнює

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$\text{де } v_x = \frac{dx}{dt} = 25 \cdot 4 \cos 4t = 100 \cos 4 \cdot 0,5 = -42 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -12 \cdot 4 \sin 4t = -48 \sin 4 \cdot 0,5 = -44 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right).$$

Тоді модуль швидкості матеріальної точки

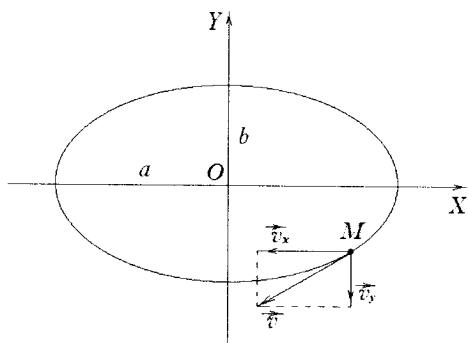
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-42)^2 + (-44)^2} = 61 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right).$$

Визначимо напрямок швидкості точки і, отже, напрямок її руху по еліптичній траєкторії. Для цього знайдемо координати точки в момент часу $t = 0,5$ с, тобто її зміщення в напрямку осей OX і OY

$$x = 25 \sin 4t = 25 \sin 4 \cdot 0,5 = 22,7 \text{ (см);}$$

$$y = 12 \sin \left(4t + \frac{\pi}{2} \right) = 12 \cos 4t = 12 \cos 4 \cdot 0,5 = -5,0 \text{ (см).}$$

Отже, в момент часу $t = 0,5$ с координати точки M становлять $x = 22,7$ (см), $y = -5,0$ (см). У точці $M(22,7; -5,0)$ побудуємо проекції швидкостей v_x і v_y , тоді знайдемо напрямок швидкості \vec{v} .



З рисунка видно, що точка рухається по еліпсу за годинниковою стрілкою.

Відповідь: рівняння траєкторії точки $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{144} = 1$.

Приклад 7

Рух матеріальної точки задано рівняннями $x = 25 \sin 2\pi t$ см; $y = 25 \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$ см. Знайти рівняння траєкторії $f(x, y)$ і швидкість $v(t)$ руху точки в момент часу $t = 0,5$ с.

Дано:

$$x = 25 \sin 2\pi t \text{ см}$$

$$y = 25 \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ см}$$

$$t = 0,5 \text{ с}$$

$$f(x, y) - ?,$$

$$v(t) - ?$$

Розв'язування

З рівнянь руху матеріальної точки видно, що точка одночасно здійснює гармонічні коливання з однаковою частотою в напрямку координатних осей ОХ і ОУ.

Знайдемо рівняння траєкторії підсумкового руху. Для цього вилучимо з заданих рівнянь час t . Із першого рівняння визначимо $\sin 2\pi t = \frac{x}{25}$, друге перетворимо так:

$$y = 25 \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{2} \right) = 25 \cos 2\pi t.$$

З урахуванням першого рівняння друге запишемо у вигляді

$$\frac{y}{25} = \cos 2\pi t = \sqrt{1 - \sin^2 2\pi t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25^2}}.$$

Піднесемо його до квадрата $\frac{y^2}{25^2} = 1 - \frac{x^2}{25^2}$, звідки $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{625} = 1$.

Це рівняння підсумкового коливання, що є рівнянням кола з радіусом $R = 25$ см.

Знайдемо швидкість точки в момент часу $t = 0,5$ с. Модуль швидкості, як відомо, дорівнює

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$\text{де } v_x = \frac{dx}{dt} = 25 \cdot 2\pi \cdot \cos 2\pi t = 25 \cdot 2\pi \cdot \cos 2\pi \cdot 0,5 = -157 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -25 \cdot 2\pi \cdot \sin 2\pi t = -157,07 \sin 2\pi \cdot 0,5 = 0 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

Тоді модуль швидкості матеріальної точки

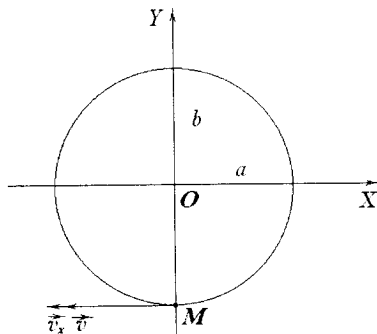
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-157)^2 + (0)^2} = 157 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

Визначимо напрямок швидкості точки і, отже, напрямок її руху по коловій траєкторії. Для цього знайдемо координати точки в момент часу $t = 0,5$ с, тобто її зміщення в напрямку осей OX і OY

$$x = 25 \sin 2\pi t = 25 \sin 2\pi \cdot 0,5 = 0 \text{ (см);}$$

$$y = 25 \sin \left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 25 \cos 2\pi t = 25 \cos 2\pi \cdot 0,5 = -25,0 \text{ (см).}$$

Отже, в момент часу $t = 0,5$ с координати точки M становлять $x = 0$ (см), $y = -25,0$ (см). У точці M (0; -25,0) побудуємо проєкції швидкостей v_x і v_y , тоді знайдемо напрямок швидкості \vec{v} .



З рисунка видно, що точка рухається по колу за годинниковою стрілкою.

Відповідь: рівняння траєкторії точки $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{625} = 1$.

Приклад 8

Рух матеріальної точки задано рівняннями $x = 25 \sin 2\pi t$ см;
 $y = 25 \sin \left(2\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$ см. Знайти рівняння траєкторії $f(x, y)$ і швидкість $v(t)$ руху точки в момент часу $t = 0,5$ с.

Дано:

$$x = 25 \sin 2\pi t \text{ см}$$

$$y = 25 \sin \left(2\pi t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ см}$$

$$t = 0,5 \text{ с}$$

$$f(x, y) - ?$$

$$v(t) - ?$$

Розв'язування

З рівнянь руху матеріальної точки видно, що точка одночасно здійснює гармонічні коливання з однаковою частотою в напрямку координатних осей ОХ і ОУ.

Знайдемо рівняння траєкторії підсумкового руху. Для цього вилучимо з заданих рівнянь час t . Із першого рівняння визначимо $\sin 2\pi t = \frac{x}{25}$, друге перетворимо так

$$y = 25 \sin \left(2\pi t - \frac{\pi}{2} \right) = -25 \cos 2\pi t.$$

З урахуванням першого рівняння друге запишемо у вигляді

$$\frac{y}{25} = -\cos 2\pi t = -\sqrt{1 - \sin^2 2\pi t} = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{25^2}}.$$

Піднесемо його до квадрата $\frac{y^2}{25^2} = 1 - \frac{x^2}{25^2}$, звідки $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{625} = 1$. Це рівняння підсумкового коливання, що є рівнянням кола з радіусом $R = 25$ см (рис. 39).

Знайдемо швидкість точки в момент часу $t = 0,5$ с. Модуль швидкості, як відомо, дорівнює

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$\text{де } v_x = \frac{dx}{dt} = 25 \cdot 2\pi \cdot \cos 2\pi t = 25 \cdot 2\pi \cdot \cos 2\pi \cdot 0,5 = -157 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 25 \cdot 2\pi \cdot \sin 2\pi t = 157,07 \sin 2\pi \cdot 0,5 = 0 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right).$$

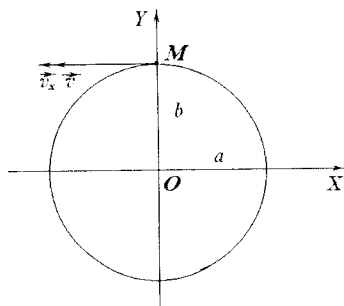
Тоді модуль швидкості матеріальної точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-157)^2 + (0)^2} = 157 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right).$$

Визначимо напрямок швидкості точки і, отже, напрямок її руху по коловій траєкторії. Для цього знайдемо координати точки в момент часу $t = 0,5 \text{ с}$, тобто її зміщення в напрямку осей OX і OY

$$x = 25 \sin 2\pi t = 25 \sin 2\pi \cdot 0,5 = 0 \text{ (см)};$$

$$y = 25 \sin \left(2\pi t - \frac{\pi}{2} \right) = -25 \cos 2\pi t = -25 \cos 2\pi \cdot 0,5 = 25,0 \text{ (см)}.$$



Отже, в момент часу $t = 0,5 \text{ с}$ координати точки M становлять $x = 0 \text{ (см)}$, $y = 25,0 \text{ (см)}$. У точці $M(0; 25,0)$ побудуємо проєкції швидкостей v_x і v_y , тоді знайдемо напрямок швидкості \vec{v} .

З рисунка видно, що точка рухається по колу проти годинникової стрілки.

Відповідь: рівняння траєкторії точки $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{625} = 1$.

Приклад 9

Вантаж масою $m = 500 \text{ г}$ підвішений до пружини з жорсткістю $k = 20 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ здійснює гармонічні коливання в деякому середовищі. Логарифмічний декремент згасання коливань $\theta = 0,004$. Скільки коливань має здійснити вантаж, щоб їх амплітуда зменшилась удвічі? Скільки при цьому коливальна система втратить енергії? За який час t відбудеться це зменшення?

Дано:

$$m = 500 \text{ г} \quad | \quad 0,5 \text{ кг}$$

$$k = 20 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$\theta = 0,004$$

$$\frac{A_1}{A_n} = 2$$

$$n - ?$$

$$\frac{\Delta W}{W_1} - ?$$

$$t - ?$$

Розв'язування

Вантаж зазнає згасаючих коливань. Амплітуда першого коливання $A_1 = A_0 e^{-\beta t}$, а n -го коливання – $A_n = A_0 e^{-\beta(t+nT)}$, де n – кількість коливань; T – період згасаючого коливання; β – коефіцієнт згасання.

Знайдемо відношення амплітуд

$$\frac{A_1}{A_n} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+nT)}} = e^{\beta n T} = e^{n\theta},$$

де $\theta = \beta T$ – логарифмічний декремент згасання коливань.

Визначимо з цієї формули кількість коливань $n \ln \frac{A_1}{A_n} = n\theta \ln e = n\theta$,

$$\text{звідки } n = \frac{\ln \frac{A_1}{A_n}}{\theta} = \frac{\ln 2}{0,004} = 173.$$

Енергія коливального процесу пропорційна квадрату амплітуди. Тому можна записати

$$\frac{W_1}{W_n} = \left(\frac{A_1}{A_n} \right)^2 = 2^2 = 4,$$

де W_1 і W_n – повна енергія коливальної системи відповідно в початковий момент і через n коливань.

З останньої формули знайдемо, що $W_n = \frac{1}{4} W_1$.

Тоді втрата енергії коливальної системи у відсотках

$$\eta = \frac{\Delta W}{W_1} \cdot 100\% = \frac{W_1 - \frac{1}{4} W_1}{W_1} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%.$$

Отже, втрата енергії за $n = 173$ коливань становить 75%.

Час, упродовж якого амплітуда коливань зменшується вдвічі і розсіюється 75% енергії, дорівнює

$$t = nT,$$

де $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ – період згасальних коливань;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклічна частота власних коливань пружинного маятника.

Період згасальних коливань $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\theta}{T})^2}}$, звідки $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 + \theta^2}{\omega_0^2}}$.

Взявши до уваги, що $\theta \ll 4\pi^2$, значенням θ^2 у цій формулі можна знехтувати. Тоді $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Після підстановки, отримаємо остаточну формулу

$$t = nT = n2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 173 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{0,5}{20}} = 171,86 \text{ (с)}.$$

Відповідь: $n = 173$; $\eta = 75\%$; $t = 171,86 \text{ с}$.

Приклад 10

Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання з частотою $\nu = 10 \text{ Гц}$. У момент, узятий за початковий, вона мала максимальне зміщення $x_{\max} = 0,01 \text{ м}$. Написати рівняння коливань точки.

Дано:

$$\nu = 10 \text{ Гц}$$

$$x_{\max} = 0,01 \text{ м}$$

$$x(t) \text{--?}$$

Розв'язування

Рівняння гармонічних коливань матеріальної точки можна записати у вигляді залежності (а) або (б):

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_{01}) \quad (a)$$

або

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_{02}), \quad (б)$$

де A – амплітуда коливань;

ω – циклічна частота;

t – час;

$\varphi_{01}, \varphi_{02}$ – початкові фази, що відповідають виразам (а) або (б).

За означенням, амплітуда коливань дорівнює $A = x_{\max}$.

Циклічну частоту знайдемо за формулою $\omega = 2\pi\nu$.

Початкова фаза залежить від форми запису рівняння гармонічного коливання. Якщо скористатися формулою (а), то початкову фазу можна визначити з умови, що в момент часу $t = 0$ $x_{max} = A \sin \varphi_{01}$, звідки

$$\varphi_{01} = \arcsin \frac{x_{max}}{A} = \arcsin 1,$$

або

$$\varphi_{01} = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{де } m = 0; 1; 2; \dots).$$

Зміна фази на 2π не змінює стану коливального руху, тому можна записати, що

$$\varphi_{01} = \frac{\pi}{2}. \quad (б)$$

Для форми запису (б) отримаємо

$$\varphi_{02} = \arccos \frac{x_{max}}{A} = \arccos 1,$$

або

$$\varphi_{02} = 2m\pi \quad (\text{де } m = 0; 1; 2; \dots).$$

Міркуючи аналогічно, як у першому випадку, знайдемо

$$\varphi_{02} = 0. \quad (в)$$

З урахуванням залежностей (б)–(г) рівняння коливань матимуть вигляд $x = 0,01 \sin \left(20\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$ або $x = 0,01 \cos 2\pi t$.

Відповідь: $x = 0,01 \sin \left(20\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$, або $x = 0,01 \cos 2\pi t$.

Приклад 11

Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання. Період коливань 2 с, амплітуда 0,05 м, початкова фаза дорівнює нулю. Знайти швидкість і прискорення точки в момент часу, коли вона зміститься від положення рівноваги на 0,025 м.

Дано:

$$T = 2 \text{ с}$$

$$A = 0,05 \text{ м}$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$x(t) = 0,025 \text{ м}$$

$$v(t) - ?$$

$$a(t) - ?$$

Розв'язування

Рівняння гармонічних коливань запишемо у вигляді залежності

$$x = A \sin \omega t. \quad (a)$$

Виразимо циклічну частоту ω через період згідно з формулою

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (б)$$

Підставимо вираз (б) в (а) і дістанемо

$$x = A \sin \frac{2\pi}{T} t = 0,05 \sin \frac{2\pi}{2} t = 0,05 \sin \pi t. \quad (в)$$

З рівняння (в) визначимо момент часу, за якого зміщення точки дорівнюватиме 0,025 м:

$$0,025 = 0,05 \sin \pi t, \quad \text{звідки } \sin \pi t = \frac{1}{2}, \quad \text{а } \pi t = \frac{\pi}{6}.$$

Отже, $t = \frac{1}{6}$ с.

Знайдемо рівняння швидкості коливального руху точки як першу похідну від рівняння зміщення за часом, скориставшись виразом (в)

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,05\pi \cos \pi t. \quad (г)$$

Підставимо знайдене значення $t = \frac{1}{6}$ с в цю залежність і дістанемо

$$v = 0,05\pi \cos \frac{\pi}{6} = 0,14 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Визначимо прискорення коливального руху точки як другу похідну від зміщення за часом або як першу похідну від її швидкості (г) за часом

$$a = \frac{dv}{dt} = -0,05\pi^2 \sin \pi t.$$

Підставивши у цей вираз значення $\pi t = \frac{\pi}{6}$, знайдемо прискорення

$$a = -0,05\pi^2 \sin \frac{\pi}{6} = -0,25 \frac{\text{с}}{\text{м}^2}.$$

Відповідь: $v = 0,14 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $a = -0,25 \frac{\text{с}}{\text{м}^2}$.

Приклад 12

Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання. В деякий момент часу t зміщення точки $x = 5$ см, її швидкість $v = 20 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ і прискорення $a = 80 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Знайти циклічну частоту ω , період коливання T , фазу φ коливань у цей момент часу та амплітуду A .

Дано:

$$x = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$$

$$v = 20 \frac{\text{см}}{\text{с}} = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$a = 80 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 0,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\omega - ?, T - ?, \varphi - ?, A - ?$$

Розв'язування

Запишемо рівняння гармонічного коливання, швидкості і прискорення:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0); \quad (a)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0); \quad (б)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (в)$$

Поділивши рівняння (в) на (а) і взявши модуль $\left| -\frac{a}{x} \right| = \omega^2$, знайдемо циклічну частоту $\omega = \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{\frac{0,8}{0,05}} = 4 \text{ (с}^{-1}\text{)}$.

Визначимо період коливання T за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = 1,57 \text{ (с)}.$$

Щоб визначити фазу коливання, поділимо рівняння (а) на (б)

$$\frac{x}{v} = \frac{\text{tg}(\omega t + \varphi_0)}{\omega},$$

звідки $\text{tg}(\omega t + \varphi_0) = \frac{x\omega}{v} = \frac{0,05 \cdot 4}{0,2} = 1$, або $\omega t + \varphi_0 = \varphi = \text{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

За рівнянням (а) обчислимо амплітуду

$$A = \frac{x}{\sin(\omega t + \varphi_0)} = \frac{0,05}{\sin 45^\circ} = 0,071 \text{ (м)}.$$

Відповідь: $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$; $T = 1,57 \text{ с}$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $A = 0,071 \text{ м}$.

Приклад 13

Матеріальна точка масою 100 г здійснює гармонічні коливання згідно з рівнянням $x = 0,3\sin 4\pi t$ м. Знайти вертальну силу F у момент часу $t = 0,2$ с, а також повну, потенціальну та кінетичну енергії точки.

Дано:

$$m = 100 \text{ г} = 0,1 \text{ кг}$$

$$x = 0,3\sin 4\pi t \text{ м}$$

$$t = 0,2 \text{ с}$$

$$F - ? \quad W - ?$$

$$W_{\text{п}} - ? \quad W_{\text{к}} - ?$$

Розв'язування

Вертальну силу знайдемо за другим законом Ньютона

$$F = ma = -m\omega^2 x, \quad (a)$$

де a – прискорення точки за гармонічного коливання,

ω – її циклічна частота,

x – зміщення.

За умовою задачі маса точки та її зміщення відомі.

Визначимо циклічну частоту коливання за рівнянням руху (за зміщенням x)

$$\omega = 4\pi. \quad (б)$$

Підставимо значення зміщення x й отриманої циклічної частоти ω з рівняння (б) у рівняння (а). Воно набуде вигляду

$$F = -m(4\pi)^2 \cdot 0,3\sin 4\pi t = -4,8 \pi^2 m \sin 4\pi t.$$

Обчислимо величину вертальної сили

$$F = -4,8 \cdot 3,14^2 \cdot 0,1 \sin 4\pi 0,2 = -2,78 \text{ (Н)}.$$

Повну, потенціальну та кінетичну енергії точки визначимо відповідно за формулами:

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{0,1 \cdot (4\pi)^2 \cdot 0,3^2}{2} = 0,710 \text{ (Дж)};$$

$$W_n = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = W \sin^2 4\pi t = 0,71 \sin^2 4\pi \cdot 0,2 = 0,245 \text{ (Дж)};$$

$$W_k = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) = W \cos^2 4\pi t = 0,71 \cos^2 4\pi t = 0,465 \text{ (Дж)}.$$

Відповідь: $F = -2,78 \text{ Н}$; $W = 0,710 \text{ Дж}$; $W_n = 0,245 \text{ Дж}$; $W_k = 0,465 \text{ Дж}$.

Приклад 14

Повна енергія тіла, яке здійснює гармонічний коливальний рух, дорівнює $3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$. Максимальна сила, що діє на тіло, становить $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$. Записати рівняння руху цього тіла, якщо період коливань дорівнює 2 с , а початкова фаза 60° .

Дано:

$$W = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$$

$$F_{max} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$$

$$T = 2 \text{ с}$$

$$\varphi_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ рад}$$

$$x - ?$$

Розв'язування

Запишемо рівняння руху тіла у формі рівняння:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (a)$$

в якому нам не відомі амплітуда A і циклічна частота ω . Циклічну частоту знайдемо за формулою

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ (с}^{-1}\text{)}. \quad (б)$$

Щоб визначити амплітуду A , скористаємося виразами для повної енергії гармонічних коливань і максимальної сили, що діє на тіло,

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2; \quad (в)$$

$$F_{max} = ma_{max}, \quad (z)$$

де a_{max} – максимальне прискорення за гармонічного руху, яке знаходимо за залежністю

$$a_{max} = -\omega^2 x_{max} = \omega^2 A. \quad (d)$$

Підставимо отримане значення a_{max} , у вираз (z) і dostанемо

$$F_{max} = -m\omega^2 A. \quad (e)$$

Поділивши рівняння (e) на (e), знайдемо

$$\frac{W}{F_{max}} = -\frac{1}{2}A,$$

$$A = \left| -2 \frac{W}{F_{max}} \right| = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-5}}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 0,04 \text{ (м)}.$$

Підставимо у формулу (a) значення ω з виразу (b) та A , отримаємо шукане рівняння гармонічних коливань

$$x = 0,04 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ (м)}.$$

Відповідь: $x = 0,04 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$ м.

Приклад 15

До пружини підвішене тіло масою 5 кг. Знаючи, що пружина під впливом сили 10 Н розтягується на 0,02 м, визначити період вертикальних коливань підвішеного тіла.

Дано:

$$m = 5 \text{ кг}$$

$$F = 10 \text{ Н}$$

$$\Delta l = 0,02 \text{ м}$$

$$T - ?$$

Розв'язування

Якщо тіло, підвішене на пружині, вивести зі стану рівноваги, воно здійснюватиме гармонічні коливання за законом $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Період коливання цього тіла визначимо за формулою

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (a)$$

де k – коефіцієнт пружності пружини, який чисельно дорівнює силі пружності, під дією якої вона розтягується або стискується, на одиницю довжини, тобто

$$k = \frac{F}{\Delta l}. \quad (б)$$

Підставивши це значення k з виразу (б) у вираз (а), знайдемо період коливання тіла, про який йдеться в задачі

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\Delta l}{F}};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5 \cdot 0,02}{10}} = 0,1 \text{ (с)}.$$

Відповідь: $T = 0,1$ с.

5.4 Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Тіло масою 5 кг робить коливання, що описується рівнянням $x = 0,1 \sin \frac{\pi}{2} \left(t + \frac{1}{3} \right)$. Знайти значення кінетичної і потенціальної енергій тіла через 20 с від моменту часу $t = 0$. Чому дорівнює повна енергія тіла?

1.2. Визначити масу тіла, що робить гармонічні коливання з амплітудою 0,10 м, частотою 2,0 Гц і початковою фазою 30° , якщо повна енергія коливань 7,7 мДж. Через скільки секунд від початку відліку часу кінетична енергія буде дорівнювати потенціальній?

1.3. Визначити амплітуду гармонічних коливань матеріальної точки, якщо її повна коливальна енергія 40 мДж, а сила, що діє на неї при зміщенні, дорівнює половині амплітуди, 2,0 Н.

1.4. У скільки разів зменшиться повна енергія коливань секундного маятника за 5 хв, якщо логарифмічний декремент згасання 0,031?

1.5. Амплітуда коливань камертона за 15 с зменшилася в 100 разів. Знайти коефіцієнт згасання коливань β .

1.6. Амплітуда коливань згасання маятника за час $t_1 = 5$ хв зменшилась в два рази. За який час t_2 від початкового моменту амплітуда зменшиться у 10 разів?

1.7. За час $t = 8$ хв амплітуда коливань згасання маятника зменшилась в 3 рази. Визначити коефіцієнт згасання β .

1.8. Побудувати графік згасального гармонічного коливання, частота 10 Гц, початкова амплітуда 6 см і логарифмічний декремент 0,01.

1.9. Амплітуда коливань маятника довжиною $l = 1$ м за час $t = 10$ хв зменшилась в два рази. Визначити логарифмічний декремент згасання Θ .

1.10. Логарифмічний декремент згасання маятника 0,003. Визначити число N повних коливань, які потрібно зробити маятнику, щоб амплітуда зменшилась у два рази.

1.11. Знайти число N повних коливань системи, під час яких енергія системи зменшилась в $n = 2$ рази. Логарифмічний декремент згасання $\Theta = 0,01$.

1.12. Визначити період T коливань згасання, якщо період T_0 власних коливань системи дорівнює 1 с і логарифмічний декремент згасання $\Theta = 0,01$.

1.13. Амплітуди вимушених гармонічних коливань при частоті $\nu_1 = 400$ Гц і $\nu_2 = 600$ Гц рівні між собою. Визначити резонансну частоту $\nu_{рез}$. Згасанням знехтувати.

1.14. Як зміниться хід маятникового годинника при піднятті його на висоту 20 км над поверхнею Землі?

1.15. Математичний маятник підвішений до стелі вагона електропоїзда. У скільки разів зміниться його період коливань, якщо вагону надати горизонтальне прискорення a ?

1.16. Кулька масою $m = 200$ г, підвішена на пружині, коливається з частотою $\nu = 5,0$ Гц. Визначити коефіцієнт пружності пружини.

1.17. Визначити період коливань вантажу на пружинних вагах, якщо в стані рівноваги він зміщує стрілку ваг на $\Delta x = 2,0$ см від нульової поділки, що відповідає ненавантаженій пружині.

1.18. Визначити мінімальну частоту коливань похилої площини (у поздовжньому напрямі), при якій тіло, що знаходиться на ній, почне сковзати. Кут нахилу площини $\alpha = 10^\circ$, амплітуда коливань $A = 10$ см, коефіцієнт тертя тіла об похилу площину $\mu = 0,4$.

1.19. Склянка масою $m_1 = 20$ г і площею поперечного перерізу $S = 5$ см² містить ртуть масою $m_2 = 80$ г і плаває на поверхні води. Під дією вертикальної сили склянка виводиться з положення рівноваги і відпускається. Визначити період коливань системи.

1.20. Знайти частоту коливань вантажу масою $m = 0,20$ кг, підвішеного на пружині і поміщеного в олію, якщо коефіцієнт тертя в олії $\gamma = 0,50$ кг/с, а жорсткість пружини $k = 50$ Н/м.

1.21. Стрижень довжиною $l = 50$ см робить коливання біля горизонтальної осі, що проходить через точку, яка розташована на відстані $d = 12,5$ см від кінця стрижня. Визначити частоту коливань стрижня.

1.22. На кінцях стрижня, маса якого $m = 60$ кг і довжина $l = 49$ см, укріплені дві кульки масами $m_1 = 70$ г і $m_2 = 90$ г, а стрижень підвішений так, що може робити коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через його середину. Визначити період малих коливань стрижня.

1.23. До стелі ліфта підвішений стрижень за один кінець так, що може утворювати коливання. Довжина стрижня 50 см. Визначити період коливань стрижня, якщо ліфт рухається з прискоренням 12 м/с^2 , спрямованим вгору.

1.24. Однорідний диск радіусом $R = 0,10$ м робить коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через точку, розташовану на відстані $R/2$ від центра диска, і перпендикулярну до площини диска. Визначити частоту коливань диска.

1.25. Визначити період крутильних коливань залізної кулі радіусом $R = 0,1$ м, підвішеної на сталевому дроті радіусом $r = 1$ мм і довжиною $l = 1$ м. Модуль зсуву сталі прийняти рівним $G = 80$ ГПа.

1.26. Визначити амплітуду вимушених коливань вантажу масою $0,2$ кг, підвішеного на пружині жорсткістю 20 Н/м, якщо діє примусова сила, з амплітудою 2 Н і частотою в 2 рази більшою власної частоти коливань вантажу, а коефіцієнт згасання $0,5 \text{ с}^{-1}$.

1.27. Дві кульки масами m_1 і m_2 скріплені між собою пружиною, жорсткість якої k , лежать на горизонтальній площині. Пружина розтягується і відпускається. Визначити період виниклих коливань кульок. Тертя не враховувати.

1.28. Як визначити невідому масу тіла m_1 , маючи секундомір, пружину й інше тіло відомої маси m ?

1.29. Два однаково направлених гармонічних коливання однакової частоти з амплітудами $A_1 = 5$ см та $A_2 = 3$ см зводяться в одне коливання з амплітудою $A = 7$ см. Визначити різницю фаз $\Delta\varphi$ складових коливань.

1.30. Два гармонічних коливання однакового напрямку, що мають однакові амплітуди та частоти, утворюють одне коливання тієї ж амплітуди. Визначити різницю фаз $\Delta\varphi$ цих коливань.

1.31. Визначити амплітуду A і початкову фазу φ підсумкового коливання, що утворюється при додаванні двох однаково направлених коливань з однаковим періодом $x_1 = A_1 \sin \omega t$ і $x_2 = A_2 \sin \omega(t + \tau)$, якщо $A_1 = A_2 = 5$ см; $\omega = \pi \text{ c}^{-1}$; $\tau = 0,5$ с. Знайти рівняння підсумкового коливання.

1.32. Точка бере участь у двох однаково направлених коливаннях $x_1 = A_1 \sin \omega t$, $x_2 = A_2 \cos \omega t$ де $A_1 = 5$ см, $A_2 = 10$ см, $\omega = 3 \text{ c}^{-1}$. Визначити амплітуду підсумкового коливання, його частоту ν і початкову фазу φ . Записати рівняння цього руху.

1.33. Точка бере участь у двох однаково направлених гармонічних коливаннях з однаковими частотами $\omega_1 = \omega_2 = \pi \text{ c}^{-1}$ та амплітудами $A_1 = A_2 = 10$ см. Початкові фази коливань $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ і $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Визначити амплітуду підсумкового коливання і початкову фазу φ . Записати рівняння цього руху. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд.

1.34. Додаються три гармонічних коливання однакового напрямку з однаковими періодами $T_1 = T_2 = T_3 = 5$ с та амплітудами $A_1 = A_2 = A_3 = 10$ см. Початкові фази коливань $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд. Визначити амплітуду A та початкову фазу φ підсумкового коливання.

1.35. Додаються два взаємно перпендикулярних коливання, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \sin \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$, де $A_1 = 5$ см; $A_2 = 10$ см; $\omega = \pi \text{ c}^{-1}$; $\tau = 2$ с. Визначити рівняння траєкторії та побудувати її.

1.36. Додаються два взаємно перпендикулярних коливання, що виражаються рівняннями $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$, де $A_1 = 6$ см; $A_2 = 12$ см; $\omega = \pi \text{ c}^{-1}$; $\tau = 2$ с. Визначити рівняння траєкторії та побудувати її.

1.37. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = A_2 \sin \omega t$, де $A_1 = 4$ см; $A_2 = 3$ см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрям руху точки.

1.38. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями $x = A_1 \sin \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega t$, де $A_1 = 3$ см; $A_2 = 5$ см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрям руху точки.

1.39. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = -A_2 \cos 2\omega t$, де $A_1 = 7$ см, $A_2 = 6$ см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрямок руху точки.

1.40. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = A_2 \sin \frac{1}{2}\omega t$, де $A_1 = 9$ см, $A_2 = 10$ см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрям руху точки.

1.41. Знайти швидкість поширення звукових коливань у повітрі, довжина хвилі яких 1,0 м, а частота коливань 340 Гц. Чому дорівнює максимальна швидкість зсуву часток повітря, якщо амплітуда коливань 0,2 мм?

1.42. На якій відстані від джерела коливань, що відбуваються за законом синуса, у момент часу $t = T/2$ зміщення точки від положення рівноваги дорівнює половині амплітуди. Швидкість поширення коливань 340 м/с. Період коливань 10^{-3} с.

1.43. Визначити швидкість поширення хвиль в озері, якщо період хитання човна, що знаходиться на поверхні води, 0,4 с, а відстань між найближчими гребенями хвиль 6,0 м.

1.44. У скільки разів змінюється довжина ультразвукової хвилі при переході хвилі зі сталі в мідь, якщо швидкості поширення ультразвуку в міді і сталі, відповідно, 3600 і 5500 м/с?

1.45. Знайти швидкість поширення ультразвуку в залізі, якщо модуль Юнга для заліза 20 ГПа, а щільність 7800 кг/м^3 .

1.46. Визначити швидкість поширення поперечних звукових хвиль у міді. Модуль зсуву для міді 12,0 ГПа, щільність міді 8900 кг/м^3 .

1.47. Визначити швидкість звуку у воді, якщо відомо, що модуль усебічного стиску води 1,98 ГПа.

1.48. Чому дорівнює коефіцієнт усебічного стиску води, якщо посланий з корабля ультразвуковий сигнал, відбившись на глибині $h = 1,5$ км, повернувся через $t = 2,1$ с?

1.49. Визначити натяг сталевий струни довжиною 0,50 м і діаметром 0,20 мм, якщо відомо, що вона налаштована в унісон з камертоном, частота якого 430 Гц.

1.50. Знайти швидкість поширення поперечних звукових хвиль у сталевій струні діаметром 1,0 мм, натягнутій із силою 100 Н.

1.51. Чому дорівнює швидкість поширення звукової хвилі в мідному дроті довжиною 10 м, що натягнутий силою 200 Н? Маса дроту 50 г.

1.52. Скільки биттів у секунду дає натягнута сталева струна з камертоном, частота коливаль якого 430 Гц, якщо натяг струни 100 Н, її довжина 0,5 м, а діаметр 0,3 мм?

1.53. Визначити частоту основного тону відкритої труби довжиною 1,0 м, що заповнена повітрям.

1.54. Чому дорівнює частота основного тону закритої з одного кінця труби довжиною 1,5 м, якщо вона заповнена водою? Швидкість поширення звуку у воді прийняти рівною 1,5 км/с.

1.55. Рівень гучності шуму літака на відстані 5 м дорівнює 120 дБ, а тихої розмови на тій же відстані – 40 дБ. Визначити відношення інтенсивностей і абсолютні значення інтенсивностей цих звуків.

1.56. На скільки децибелів відрізняються звуки, що відповідають порогові чутності ($I_0 = 10^{-2}$ Вт/м²) і порогові болючих відчуттів ($I = 10^2$ Вт/м²)?

1.57. Підводний човен, що рухається зі швидкістю $\vec{v} = 10$ м/с, посилає ультразвуковий сигнал частотою $\nu = 30$ кГц, що, відбившись від перешкоди, повертається назад. Визначити різницю між частотами сигналу, що посилається, та прийнятого сигналу.

1.58. Два катери рухаються назустріч один одному з однаковою швидкістю, що дорівнює $\vec{v} = 10,0$ м/с. З першого катера посилається ультразвуковий сигнал частотою $\nu = 50,0$ кГц, що відбивається від другого катера і приймається на першому. Визначити частоту прийнятого сигналу.

1.59. Два електропоїзди йдуть назустріч один одному зі швидкостями $\vec{v}_1 = 30,0$ м/с і $\vec{v}_2 = 10,0$ м/с. Перший потяг дає свисток, висота тону якого відповідає частоті $\nu = 500$ Гц. Визначити частоту, яка сприймається пасажиром другого електропоїзда перед зустріччю і після зустрічі потягів. Чому були б рівні відповідні частоти, якби пасажир знаходився на першому електропоїзді, а сигнал давав другий?

1.60. Човен, занурюючись вертикально, випромінює короткі звукові імпульси сигналу гідролокатора тривалістю τ_0 в напрямі дна. Тривалість відбитих сигналів, виміряних гідроакустиком на човні, дорівнює τ . Яка швидкість занурення човна? Швидкість звуку у воді \vec{v} , дно горизонтальне.

5.5 Електромагнітні коливання. Основні формули

1. При вільних коливаннях в контурі, який складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю C , котушки з індуктивністю L і резистора з омичним опором R , заряд на обкладках конденсатора змінюється за законом

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де $q_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда коливань згасання;

β – коефіцієнт згасання;

ω – циклічна частота коливань згасання;

q_0 і φ_0 – початкові значення амплітуди заряду і фази коливань.

2. Циклічна частота коливань згасання:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

3. Власна циклічна частота коливального контуру

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

4. Добротність коливального контуру

$$\theta = \frac{L}{C} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

або для малих значень R (наближена формула):

$$\theta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

5. Якщо в коливальному контурі, який складається з конденсатора ємністю C , котушки резистора з омичним опором R , з'єднаних послідовно, діє періодично е.р.с. $\xi = \xi_0 \cos \omega t$, то в такому колі виникнуть вимушені коливання струму з частотою ω

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

При цьому величини I_0 і φ виражаються формулами:

$$I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

6. Амплітуда струму I_0 досягне найбільшого значення (явище резонансу), якщо частота ω вимушених коливань збіжиться з частотою ω_0 власних коливань

$$\omega_p = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

7. Швидкість поширення електромагнітних хвиль в прозорих середовищах

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}},$$

де ε і μ – діелектрична і магнітна проникності середовища;
 ε_0 і μ_0 – електрична і магнітна сталі.

8. Швидкість поширення електромагнітних хвиль в вакуумі

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

9. Показник заломлення середовища

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

10. Рівняння електромагнітних хвиль

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - kx);$$

$$H_y = H_0 \cos(\omega t - kx),$$

де E_0 і H_0 – амплітуди значень векторів напруженості електричного і магнітного полів в електромагнітній хвилі;

$k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

11. Густина енергії електромагнітних хвиль

$$w = w_e + w_m = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} E H = \frac{1}{v} E H,$$

де w_e і w_m – густина енергії, відповідно, електричного і магнітного полів електромагнітної хвилі.

12. Вектор густини потоку енергії електромагнітних хвиль, вектор Пойнтінга

$$\vec{R} = w \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{H},$$

де w – густина енергії поля;

\vec{v} – вектор швидкості електромагнітних хвиль;

\vec{E} і \vec{H} – вектори напруженості електричного і магнітного полів електромагнітної хвилі.

5.6 Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Сила струму в коливальному контурі змінюється за законом $I = -0,2 \sin 400 \pi t$ А. Індуктивність котушки контуру $L = 1$ Гн, опором провідників знехтувати. Визначити: 1) період коливань T ; 2) ємність контуру C ; 3) максимальне значення різниці потенціалів між обкладками конденсатора; 4) максимальне значення енергії магнітного поля; 5) максимальне значення енергії електричного поля; 6) повний максимальний магнітний потік.

Дано:

$$I = -0,2 \sin 400 \pi t \text{ А}$$

$$L = 1 \text{ Гн}$$

$$T - ? \quad C - ? \quad U_{\max} - ?$$

$$W_{m \max} - ?$$

$$W_e \max - ?$$

$$\Phi_{\max} - ?$$

Розв'язування

Оскільки контур складається з ємності та індуктивності, то в ньому відбуватимуться незгасальні електричні коливання.

Період власних коливань контуру визначимо за формулою Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Із заданого рівняння сили струму в контурі видно, що циклічна частота власних коливань виглядатиме так: $\omega_0 = 400 \pi$.

Між періодом T і циклічною частотою власних коливань ω_0 існує зв'язок $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{400\pi} = 5 \cdot 10^{-3}$ с.

1. Електросємність контуру знайдемо за формулою циклічної частоти власних коливань $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, звідки $C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$.

Підставивши числові значення, обчислимо

$$C = \frac{1}{(400 \pi)^2 \cdot 1} = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ (Ф)}.$$

2. Зв'язок різниці потенціалів між обкладками конденсатора і зарядом на обкладці описує формула $U = \frac{q}{C}$.

Закон зміни заряду на обкладках конденсатора знайдемо з закону зміни сили струму $dq = Idt = -0,02 \sin 400 \pi t$.

Проінтегруємо рівняння за часом t

$$q = \int -0,02 \sin 400 \pi t dt = \frac{0,02}{400 \pi} \cos 400 \pi t.$$

Звідси випливає, що максимальне значення заряду на обкладці конденсатора

$$q_{\max} = \frac{0,02}{400 \pi} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ (Кл)}.$$

Підставимо це значення у формулу для напруги й одержимо

$$U_{\max} = \frac{q_{\max}}{C} = \frac{1,6 \cdot 10^{-5}}{6,3 \cdot 10^{-7}} = 25,4 \text{ (В)}.$$

Максимальне значення енергії магнітного поля коливального контуру буде при максимальній силі струму в контурі $W_{m \max} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$.

З рівняння сили струму бачимо, що $I_{\max} = 0,02 \text{ А}$, отже,

$$W_{m \max} = \frac{1 \cdot 0,02^2}{2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

Максимальне значення енергії електричного поля дорівнює енергії, яку має заряджений конденсатор, коли заряд на його обкладці максимальний,

$$W_{e \max} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot 6,3 \cdot 10^{-7}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

Отже, для випадку вільних незгасальних електричних коливань максимальне значення енергії електричного поля дорівнює максимальному значенню енергії магнітного поля, що й випливає з закону збереження енергії. Повна енергія контуру залишається незмінною. Під час електричних коливань відбувається лише безперервний перехід електричної енергії, зосередженої в електричному полі конденсатора, в магнітну, зосереджену в магнітному полі котушки, і навпаки. Це є наслідком того, що в контурі відбувається безперервний процес перетворення електричного поля на магнітне і навпаки.

3. Повний максимальний магнітний потік спостерігається тоді, коли в контурі буде максимальна сила струму

$$\Phi_{\text{повн.маx}} = L \cdot I_{\text{маx}} = 1 \cdot 0,02 = 0,02 \text{ Вб.}$$

Відповідь: $T = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}; C = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}; U_{\text{маx}} = 25,4 \text{ В};$
 $W_{\text{т маx}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}; W_{\text{е маx}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}; \Phi_{\text{повн.маx}} = 0,02 \text{ Вб.}$

Приклад 2

Коливальний контур має індуктивність $1,6 \text{ мГн}$, електричну ємність $0,04 \text{ мкФ}$ і максимальну напругу $U_{\text{маx}}$ на клеммах, рівну 200 В . Визначити максимальну силу струму в контурі. Опором контуру знехтувати.

Дано:

$$L = 1,6 \text{ мГн}$$

$$C = 0,04 \text{ мкФ}$$

$$U_{\text{маx}} = 200 \text{ В}$$

$$I_{\text{маx}} - ?$$

Розв'язування

Згідно з законом збереження енергії, максимальна енергія електричного поля конденсатора дорівнює максимальній енергії магнітного поля котушки індуктивності. Тому $\frac{CU_{\text{маx}}^2}{2} = \frac{LI_{\text{маx}}^2}{2}$, звідки

$$I_{\text{маx}} = U_{\text{маx}} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Підставимо числові значення

$$I_{\text{маx}} = 200 \cdot \sqrt{\frac{0,04 \cdot 10^{-6}}{1,6 \cdot 10^{-3}}} = 1 \text{ А.}$$

Відповідь: $I_{\text{маx}} = 1 \text{ А.}$

Приклад 3

Індуктивність коливального контуру дорівнює $0,5 \text{ мГн}$. Контур резонує на довжину хвилі 300 м . Визначити електроємність такого контуру. Опором контуру знехтувати.

Дано:

$$L = 0,5 \text{ мГн}$$

$$\lambda = 300 \text{ м}$$

$$C - ?$$

Розв'язування

Виразимо довжину електромагнітної хвилі через швидкість поширення і період коливань контуру

$$\lambda = c T,$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі.

Період коливань контуру дорівнює $T = 2\pi \sqrt{LC}$, тому $\lambda = 2\pi c \sqrt{LC}$.

Звідки знаходимо ємність конденсатора $C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L}$.

Підставимо числові значення:

$$C = \frac{9 \cdot 10^4}{4 \cdot \pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}} = 5,1 \cdot 10^{-11} \text{ Ф.}$$

Відповідь: $C = 51 \text{ пФ}$.

Приклад 4

Випромінювання антени міської радіостанції має потужність $P = 100$ кВт. Обчислити на відстанях від радіостанції $R_1 = 1$ км і $R_2 = 100$ км: 1) величину вектора Пойнтінга; 2) напруженість електричного поля; 3) порядок напруги, яка виникає в антені радіоприймача; 4) тиск електромагнітних хвиль.

Дано:

$$P = 100 \text{ кВт}$$

$$R_1 = 1 \text{ км}$$

$$R_2 = 100 \text{ км}$$

$$P_1 - ? \quad P_2 - ?$$

$$E_1 - ? \quad E_2 - ?$$

$$U_1 - ? \quad U_2 - ?$$

$$P_1 - ? \quad P_2 - ?$$

Розв'язування

Вектор Пойнтінга дорівнює потоку електромагнітної енергії крізь одиницю поверхні, тобто потужності випромінювання через одиницю поверхні. Вважатимемо, що антена радіостанції випромінює рівномірно в усіх напрямках.

Числове значення вектора Пойнтінга в точці розміщення антени радіоприймача дорівнюватиме

$$P_1 = \frac{P}{4\pi R_1^2} = \frac{10^5}{4\pi(10^3)^2} = 8 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right),$$

$$P_2 = \frac{P}{4\pi R_2^2} = \frac{10^5}{4\pi(10^5)^2} = 8 \cdot 10^{-7} \left(\text{Вт}/\text{м}^2 \right).$$

Величину напруженості електричного поля знайдемо за виразом

$$P = v\omega,$$

де v – швидкість електромагнітних хвиль, яка дорівнює $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}}$ (оскільки радіохвилі поширюються в повітрі, то можна вважати, $\epsilon = \mu = 1$, тоді $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$;

ω – об'ємна густина енергії, яка дорівнює $\omega = \epsilon_0 E^2$. Тоді $P = c\epsilon_0 E^2$, звідки $E = \sqrt{\frac{P}{c\epsilon_0}}$.

Обчислимо напруженості електричного поля за цією формулою

$$E_1 = \sqrt{\frac{P_1}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 1,74 \text{ В}/\text{м};$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{P_2}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ В}/\text{м}.$$

Визначимо, яка напруга (різниця потенціалів) виникає в приймальній антені завдовжки 1 м

$$U_1 = E_1 l = 1,74 \cdot 1 = 1,74 \text{ (В)};$$

$$U_2 = E_2 l = 1,74 \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ (В)}.$$

Тиск електромагнітних хвиль на поверхню знайдемо за формулою

$$P_1 = \frac{P_1}{c} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8} = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ (Па)};$$

$$P_2 = \frac{P_2}{c} = \frac{8 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8} = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ (Па)}.$$

Відповідь: $P_1 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ (Вт}/\text{м}^2)$; $P_2 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ (Вт}/\text{м}^2)$; $E_1 = 1,74 \text{ В}/\text{м}$;
 $E_2 = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ В}/\text{м}$; $U_1 = 1,74 \text{ (В)}$; $U_2 = 1,74 \cdot 10^{-2}$; $P_1 = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ (Па)}$;
 $P_2 = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ (Па)}$.

5.7 Задачі для самостійного розв'язування

2.1. Котушка індуктивністю $L = 1 \text{ мГн}$ і повітряний конденсатор, що складається з двох круглих пластин діаметром $D = 20 \text{ см}$, з'єднані паралельно. Відстань d між пластинами дорівнює 1 см . Визначити період T коливального контуру.

2.2. Конденсатор електроємністю $C = 500 \text{ нФ}$ з'єднаний паралельно з котушкою довжиною $l = 40 \text{ см}$ і площею перерізу $S = 5 \text{ см}^2$. Котушка має $N = 1000$ витків. Сердечник немагнітний. Знайти період T коливального контуру.

2.3. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L = 20 \text{ мкГн}$ і конденсатора $C = 80 \text{ нФ}$. Величина ємності може відхилятися від указанного значення на 2%. Визначити, в яких межах може змінюватися довжина хвилі, на яку резонує контур.

2.4. Коливальний контур має індуктивність $L = 1,6 \text{ мГн}$, електроємність $C = 0,004 \text{ мкФ}$, а максимальна напруга U_{max} на затискачах дорівнює 200 В . Визначити максимальну силу струму I_{max} в контурі. Опір контуру дуже малий.

2.5. Коливальний контур має конденсатор електроємністю $C = 8 \text{ нФ}$ і котушку індуктивністю $L = 0,5 \text{ мГн}$. Яка максимальна напруга U_{max} на обкладках конденсатора, якщо максимальна сила струму $I_{\text{max}} = 40 \text{ мА}$?

2.6. Котушка (без сердечника) довжиною $L = 50 \text{ см}$ та площею перерізу $S_1 = 3 \text{ см}^2$ має $N = 1000$ витків та з'єднана паралельно з конденсатором. Конденсатор складається з двох пластин площею $S_2 = 75 \text{ см}^2$ кожна. Відстань d між пластинами дорівнює 5 мм . Діелектрик – повітря. Визначити період T коливань контуру.

2.7. Коливальний контур складається з паралельно з'єднаних конденсатора електроємністю $C = 1 \text{ мкФ}$ і котушки індуктивністю $L = 1 \text{ мГн}$. Опір контуру дуже малий. Знайти частоту ν коливань.

2.8. Індуктивність L коливального контуру дорівнює $0,5 \text{ мГн}$. Яка має бути електроємність C контуру, щоб він резонував на довжину хвилі $\lambda = 300 \text{ м}$?

2.9. На яку довжину хвилі λ буде резонувати контур, що складається з котушки індуктивністю $L = 4 \text{ мкГн}$ і конденсатора електроємністю $C = 1,11 \text{ нФ}$.

2.10. Для демонстрації дослідів Герца з заломлення електромагнітних хвиль беруть велику призму, що виготовлена з парафіну. Визначити показник заломлення парафіну, якщо його діелектрична проникність $\epsilon = 2$ і магнітна проникність $\mu = 1$.

VI ТЕСТИ

1. Два тіла однакової маси, які підвішені на пружинах, здійснюють вертикальні коливання. Жорсткість однієї пружини в n раз більша за жорсткість другої. Максимальні швидкості тіл під час коливань однакові. Чому дорівнює відношення амплітуд коливань цих тіл?

1) n ; 2) \sqrt{n} ; 3) $\sqrt{\frac{1}{n}}$

2. На двох пружинах підвісили вантажі з однаковими масами. Видовження першої пружини виявилось більшим, ніж другої. Який вантаж коливатиметься з більшим періодом?

1) Перший; 2) другий; 3) період коливань обох вантажів однаковий.

3. Гармонічні коливання матеріальної точки описуються рівнянням $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Який з наведених далі виразів визначає швидкість цієї точки в довільний момент часу?

- 1) $-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$;
2) $A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$;
3) $A\omega_0^2 \cos \varphi$;
4) $A\omega_0^2 \sin \varphi$.

4. Рівняння коливань матеріальної точки задано у вигляді $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Назвати вираз для кінетичної енергії цієї точки.

- 1) $\frac{m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$;
2) $\frac{m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$;
3) $A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$;
4) $A\omega_0^2 \sin \varphi$.

5. В який момент часу, заданий через період коливань T , повна енергія тіла, що здійснює гармонічні коливання, дорівнюватиме потенціальній енергії?

1) $\frac{1}{2}T$; 2) $\frac{1}{4}T$; 3) T ; 4) $\frac{3}{4}T$.

6. Як поводиться повна енергія гармонічних коливань?

- 1) Здійснює коливання з часом; 2) зростає з часом; 3) спадає з часом;
4) залишається незмінною.

7. Як зміниться повна механічна енергія математичного маятника, що коливається, коли зменшити його довжину втричі та збільшити амплітуду вдвічі?

- 1) Збільшиться в 12 разів;
2) зменшиться в 12 разів;
3) збільшиться в 6 разів;
4) зменшиться в 6 разів.

8. Додаються два гармонічні коливання з однаковими частотами, що відбуваються вздовж однієї і тієї самої прямої. Якою має бути різниця фаз коливань, що додаються, щоб амплітуда підсумкового коливання була: 1) максимальною; 2) мінімальною?

- 1) а) 0; б) 3π ; в) π ; г) 2π .
2) а) 3π ; б) 2π ; в) 0; г) π .

9. По якій траєкторії рухається матеріальна точка, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти, якщо різниця фаз коливань, що додаються, дорівнює: 1) $\pm \frac{\pi}{2}$; 2) 0?

- 1) а) Пряма лінія; б) коло; в) еліпс.
2) а) Коло; б) пряма лінія; в) еліпс.

10. По якій траєкторії не може рухатися матеріальна точка, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти?

- 1) Прямій лінії; 2) колу; 3) параболі; 4) еліпсу.

11. Додаються два гармонічні взаємно перпендикулярні коливання однакової частоти з амплітудами A_1 і A_2 . Якою має бути різниця фаз коливань, які додаються, щоб амплітуда підсумкового коливання визначалася за формулою $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$?

- 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) π ; 4) $\frac{3}{2}\pi$.

12. За яких умов при додаванні двох однаково напрямлених коливань виникають биття?

- 1) Періоди однакові; 2) періоди близькі за значенням; 3) періоди суттєво відрізняються за значенням.

13. Як потрібно змінити частоту зовнішньої сили для здійснення резонансу у разі, коли пружинний маятник вміщено в середовище з коефіцієнтом згасання β_2 , меншим за β_1 ?

- 1) Збільшити; 2) зменшити; 3) не змінювати.

14. Як зміниться амплітуда вимушених коливань пружинного маятника при резонансі, якщо амплітуду зовнішньої сили і масу маятника збільшити удвічі?

- 1) Збільшиться удвічі; 2) збільшиться у 4 рази; 3) зменшиться удвічі;
4) не зміниться.

Змінний струм

15. Який з наведених далі виразів відповідає закону Ома для змінного струму в електричному колі, що складається з L , C і R ?

- 1) $I_m = \frac{U_m}{\omega}$; 2) $I_m = \frac{U_m}{R}$; 3) $I_m = U_m \omega C$; 4) $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$.

16. Які з наведених далі виразів, що визначають різницю фаз між струмом і напругою, відповідають індуктивному характеру кола, що складається з L , C і R ?

1) $tg\varphi > 0$; 2) $tg\varphi < 0$; 3) $tg\varphi = 0$, де $tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.

17. В яких із перелічених середовищ поширюється поперечна хвиля?

1) Газ; 2) рідина; 3) тверде тіло.

18. Визначити амплітуду стоячої хвилі, що описується рівнянням $s = 2A_0 \cos(kx) \cos \omega t$.

1) $2A_0$; 2) $2A_0 \cos(kx)$; 3) A_0 ; 4) $A_0 \cos(kx)$

19. Який з наведених далі виразів відповідає відстані між сусідніми пучностями стоячої хвилі?

1) $0,25\lambda$; 2) $0,5\lambda$; 3) $0,75\lambda$; 4) λ .

20. Який з наведених далі виразів відповідає відстані між сусіднім вузлом і пучністю?

1) $0,25\lambda$; 2) $0,5\lambda$; 3) $0,75\lambda$; 4) λ .

21. Який з поданих далі виразів визначає групову швидкість хвилі?

1) $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$; 2) $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$; 3) $\frac{\omega}{k}$; 4) $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$.

22. В якому випадку групова і фазова швидкості хвилі однакові?

1) $\frac{dv}{d\lambda} > 0$; 2) $\frac{dv}{d\lambda} < 0$; 3) $\frac{dv}{d\lambda} = 0$.

23. Звукові коливання частотою ν мають у першому середовищі довжину хвилі λ_1 , а у другому – λ_2 . Як зміниться швидкість поширення цих коливань при переході з першого середовища в друге, якщо $\lambda_1 = 2\lambda_2$.

1) Збільшиться у 2 рази; 2) зменшиться у 2 рази; 3) не зміниться.

Електромагнітні хвилі

24. Що потрібно зробити для переходу до прийому коротших хвиль (зблизити чи розсунути обкладки плоского конденсатора, увімкненого в коливальний контур приймача)?

1) Зблизити; 2) розсунути.

25. Як зміниться частота електромагнітної хвилі, якщо індуктивність відкритого коливального контуру збільшити у 4 рази?

1) Збільшиться вдвічі; 2) зменшиться вдвічі; 3) збільшиться у 4 рази; 4) зменшиться у 4 рази.

26. У скільки разів зміниться довжина хвилі, яку випромінює коливальний контур, якщо відстань між обкладками конденсатора збільшити вдвічі?

- 1) Зменшиться у $\sqrt{2}$ разів; 2) збільшиться у $\sqrt{2}$ разів;
3) зменшиться вдвічі; 4) збільшиться вдвічі.

27. Які з наведених рівнянь описують власні коливання, що виникають у коливальному контурі, який складається L, C і R ?

- 1) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$; 2) $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$; 3) $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$;
4) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t = f_0 \cos \omega t$.

28. Який вираз визначає частоту власних коливань у контурі з параметрами L, C і R ?

1) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; 2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$; 3) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$.

29. За якої умови в контурі, що складається з L, C і R , коливальний процес перетворюється на аперіодичний процес?

1) $R = 0$; 2) $\frac{R}{2L} < \sqrt{\frac{1}{LC}}$; 3) $\frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$; 4) $\frac{R}{2L} > \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

30. Назвати вираз, що задає частоту вимушених коливань у контурі, який складається з L, C і R , якщо зовнішня ЕРС змінюється за законом $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$.

1) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; 2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$; 3) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$; 4) $\omega_0 = \omega$.

31. Який з наведених далі виразів визначає частоту ω зовнішньої ЕРС, яка є резонансною для контуру з L, C і R ?

1) $\omega = \sqrt{LC}$; 2) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; 3) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$; 4) $\omega = 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Воловик П. М. Фізика. Підручник для університетів. К. : Ірпінь: Перун, 2005. 864 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики : учеб. пос. В 3-х т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. М. : Наука, 1986. 432 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики : учеб. пос. В 3-х т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. М. : Наука, 1988. 496 с.
4. Савельев И. В. Курс общей физики : учеб. пос. В 3-х т. Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика атомного ядра и элементарных частиц. М. : Наука, 1987. 320 с.
5. Чертов А. Г., Воробьев А.А. Задачник по физике : учеб. пос. М. : Высш. шк., 1981. 496 с.
6. Зузяк П. М., Слободяник А. Д. Задачі з фізики. Програма курсу, контрольні завдання та методичні поради до розв'язування окремих задач : навч. пос. Вінниця : ВНТУ, 2003. 172 с.
7. Потапова М. В., Шахматова В. В. Факторы, влияющие на качество усвоения знаний и умений выпускников. *Физика в школе*. 2008. № 1.
8. Педагогика / под ред. Бабанского Ю. К. М., 1998.
9. Снычѐва Л. В. Физика : учеб. пос для иностр. учащихся подготов. отд-ния. Ч. 1 (со словарем). Симферополь : Изд. центр КГМУ, 2000. 173 с.
10. Физика : учеб. пос. для студентов-иностранцев подготов. ф-тов вузов / Корочкина Л. Н., Каурова А. С., Шутенко Л. Д., Стасюк Б. П. М. : Высш. шк., 1983. 392 с.
11. Вердеревская Н. Н., Егорова С. П. Сборник задач и вопросов по физике : учеб. пос. Изд. 2-е, доп. и перераб. М. : Высш. шк., 1980. 216 с.
12. Методические указания к самостоятельной работе по физике для студентов-иностранцев подготовительного факультета / Сост. Е. И. Агеева, Г. И. Прокопова и др. Харьков : НТУ «ХПИ», 1992. 82 с.
13. Бондарь А. М., Чекарѐв М. А., Троицкая В. В. Физика : метод. указания для студентов-иностранцев подготов. фак. Харьков : Межвузовое полиграф, предприятие, 1990. 126 с.
14. Гайдучок Г. М., Лободюк В. А., Рябошапка К. П. Довідник з фізики для учнів. К. : Рад.школа, 1981. 240 с.
15. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. М. : Наука, 1985.
16. Гончаренко С. У. Методика навчання фізики в середній школі. Механіка. К. : Рад. шк., 1984. 208 с.
17. Бендриков Г. О., Буховцев Б. Б., Мякишев Г. Я. Задачі з фізики для вступників до вузів. Київ : Вища школа, 1981. 368 с.

VII Додатки

ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ СТАЛІ

Нормальне прискорення вільного падіння	$g = 9.81 \text{ м/с}^2$
Гравітаційна стала	$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Стала Авогадро	$N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярна газова стала	$R = 8.31 (\text{Дж} / \text{моль} \cdot \text{К})$
Молярний об'єм газів при н.у.	$V_{0m} = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}$
Стала Больцмана	$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К}$
Стала Фарадея	$F = 9.65 \cdot 10^7 \text{ Кл} / \text{моль}$
Елементарний заряд	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Маса електрона	$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Питомий заряд електрона	$e / m = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ Кл} / \text{кг}$
Швидкість світла у вакуумі	$3.00 \cdot 10^8 \text{ м} / \text{с}$
Стала Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Стала закону зміщення Віна	$b = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Стала Планка	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала Рідберга	$R = 2.07 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ $R^1 = 1.10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Борівський радіус	$a = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\lambda_C = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	$\mu_B = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ Дж} / \text{Тл}$
Енергія іонізації атома водню	$E_i = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$
Атомна одиниця маси	$1 \text{ а.о.м.} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Ядерний магнетон	$\mu_N = 5.05 \cdot 10^{-27} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Електрична стала	$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}$
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} / \text{м}$

Таблиці фізичних величин

Густина ρ твердих тіл і рідин (Мг/м³, або г/см³)

Тверді тіла

Алюміній.....	2,70
Вісмут.....	9,80
Вольфрам.....	19,3
Залізо (чавун, сталь).....	7,87
Золото.....	19,3
Кам'яна сіль.....	2,20
Латунь.....	8,55
Марганець.....	7,40
Мідь.....	8,93
Нікель.....	8,80
Платина.....	21,4
Свинець.....	11,3
Срібло.....	10,5
Уран.....	18,7

Рідини (при 15 °С)

Вода (дистильована при 4 °С).....	1,00
Гліцерин.....	1,26
Гас.....	0,8
Масло.....	0,9
Олія рицинова.....	0,96
Ртуть.....	13,6
Сірковуглець.....	1,26
Спирт.....	0,8
Ефір.....	0,7

Густина газів при нормальних умовах (кг/м³)

Азот	1,25
Аргон.....	1,78
Водень.....	0,09
Повітря.....	1,29
Гелій	0,18
Кисень	1,43

Діелектрична проникність ϵ

Вода	81
Масло (трансформаторне).....	2,2
Парафін	2,0
Слюда.....	7,0
Скло.....	7,0
Фарфор.....	5,0
Ебоніт.....	3,0

Показник заломлення n

Алмаз.....	2,42
Вода.....	1,63
Сірковуглець	1,33
Скло.....	1,50

Додаток А ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ФОРМУЛИ

1. Формули з алгебри та тригонометрії

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = a + ib$$

$$Z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$Z = \rho e^{i\varphi}$$

$$|Z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$Z^* = a - ib$$

$$Z^* = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$Z^* = \rho e^{-i\varphi}$$

$$ZZ^* = |Z|^2$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} \cos(a - b)x - \frac{1}{2} \cos(a + b)x$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} \sin(a + b)x + \frac{1}{2} \sin(a - b)x$$

2. Формули диференціального й інтегрального числень

$$\frac{d(uv)}{dx} = v \frac{d(u)}{dx} + u \frac{d(v)}{dx}$$

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d(\operatorname{ctgx})}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \quad \text{при } m \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{d(u)}{dx} - u \frac{d(v)}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(\operatorname{tgx})}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-ax} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2}$$

$$\int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} a^{-5/2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}a^{-2}$$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} a^{-5/2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2,405$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0,225$$

$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0,225$$

*Тут і далі стала інтегрування опускається.

3. Формули для наближених обчислень

Якщо $a \ll 1$, то в першому наближенні можна прийняти:

$$\frac{1}{1 \pm a} = 1 \mp a;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm a}} = 1 \mp \frac{1}{2}a;$$

$$(1 \pm a)^2 = 1 \pm 2a;$$

$$e^a = 1 + a;$$

$$\sqrt{1 \pm a} = 1 \pm \frac{1}{2}a;$$

$$\ln(1+a) = a.$$

Якщо кут α малий ($\alpha < 5^\circ$ або $\alpha < 0,1$ рад) і виражений в радіанах, то в першому наближенні можна прийняти:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \alpha, \quad \cos \alpha = 1.$$

Навчальне видання

**Слободяник Анатолій Дмитрович
Тужанський Станіслав Євгенович
Сайчук Віктор Михайлович**

ФІЗИКА
Теорія коливань та хвиль

Навчальний посібник

Рукопис оформив *А. Слободяник*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет підготувала *Т. Криклива*

Підписано до друку 05.11.2021.

Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman.

Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 8,52.

Наклад 50 (1-й запуск 1-21) пр. Зам. № 2021-115.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

Тел. (0432) 65-18-06.

press.vntu.edu.ua;

E-mail: kivc.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.