І. В. Абрамчук, А. А. Барковська, В. Д. Дереч

Методи розв'язування типових задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Методи розв’язування типових задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Електронний навчальний посібник
комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2023

УДК 512.8
А16

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 04.05.2023 р.)

Рецензенти:
О. В. Бісікало, доктор технічних наук, професор
О. Б. Панасенко, кандидат фізико-математичних наук, ст. викладач
Ю. В. Баришев, кандидат технічних наук, доцент

Абрамчук, І. В.

А16 Методи розв'язування типових задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс].] / І. В. Абрамчук, А. А. Барковська, В. Д. Деречь. – Вінниця : ВНТУ, 2023. – 103 с.

Основна мета навчального посібника – познайомити студентів технічного ЗВО з деякими методами розв'язування типових задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Для цього в кожному розділі ми подаємо (на рівні основних означень і формулювань потрібних теорем) необхідний теоретичний матеріал. Далі, (з граничною деталізацією) показуємо на прикладах розв'язання типових задач. В склад навчального посібника внесено два індивідуальних домашніх завдання для самостійної роботи студентів (по 50 варіантів кожне ІДЗ).

Посібник призначений для студентів спеціальностей 124 «Системний аналіз» і 126 «Інформаційні системи та технології».

УДК 512.8

ЗМІСТ

ВСТУП

Лінійна алгебра – це одна з фундаментальних галузей математики. Її понятійний апарат і методи застосовуються в усіх галузях природничих і технічних наук. Без перебільшення – це один з основних математичних апаратів більшості ІТ спеціальностей. В технічних закладах вищої освіти елементи лінійної алгебри зазвичай викладають в курсі «Вища математика». Проте обмежена кількість годин не дозволяє розтлумачити студентові той факт, що матриця це не просто таблиця чисел, яку зручно використовувати для компактного запису системи лінійних рівнянь, а головне її призначення – це ефективний метод подати в математичній формі такі важливі (інтуїтивно зрозумілі) перетворення, до яких належать перетворення повороту на довільний кут навколо прямої або точки, проєктування на площину або пряму, симетрія відносно площини або прямої і т. д. Крім того зрозуміти і пояснити, що таке лінійне рівняння можна лише в термінах векторного простору і лінійного оператора. Тільки оволодівши загальним означенням лінійного рівняння студентові стає зрозумілим чому, скажімо, диференціальне рівняння $y'' - 2y' + y = \cos x$ в лінійному просторі диференційованих функцій і різницеве рівняння $x_{n+2} = -x_{n+1} + 2x_n$ в класі числових послідовностей належать до лінійних і, отже, при їх розв'язанні використовуються аналогічні уніфіковані методи.

Пропонований навчальний посібник в першу чергу призначений для студентів спеціальностей 124 і 126, які вивчають лінійну алгебру і аналітичну геометрію в обов'язковій навчальній дисципліні «Алгебра та Геометрія». Матеріал, щонайменше 40%, посібника (операції над матрицями, визначники, обернена матриця, системи лінійних рівнянь і таке інше) можуть використовувати студенти всіх спеціальностей.

Структура навчального посібника така: в першій половині кожного підрозділу ми подаємо необхідний теоретичний матеріал. В другій частині з граничною деталізацією ми наводимо приклади розв'язування типових задач. До складу посібника входить два індивідуальних домашніх завдання (ІДЗ) для самостійної роботи студентів (по 50 варіантів кожне ІДЗ). Перше ІДЗ складається з восьми завдань, причому ці завдання є типовими для дисципліни «Вища математика». Ключовими словами другого ІДЗ є такі слова: векторний простір, лінійний оператор, матриця лінійного оператора в заданому базисі, власні значення і власні вектори лінійного оператора, діагоналізація квадратної матриці, діагоналізація симетричної матриці, Евклідів простір, алгоритм Грама-Шмідта, білінійні і квадратичні функції, зведення квадратичної функції до канонічної форми. Завдання ІДЗ № 2 розраховані на студентів спеціальностей 124 і 126, а також студентів, які вивчають спецкурс з лінійної алгебри.

1 МАТРИЧНА АЛГЕБРА

1.1 Матриці. Види матриць. Дії над матрицями

Прямокутна таблиця, що складається з m рядків та n стовпців і елементами якої є дійсні або комплексні числа, називається ***матрицею*** розмірності $m \times n$. Наприклад, $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1{,}6 \end{pmatrix}$ – це матриця розмірності 2×2, а матриця $\left(1, \frac{1}{5}, -7, \frac{3}{8}\right)$ має розмірність 1×4. Елемент матриці, який знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця, позначають через a_{ij}. Зазвичай матриці позначають великими літерами $A, B, C, \ldots$ Інколи матрицю A зручно записувати у формі $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, де $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – відповідно, 1-й, 2-й і т. д. n-ий стовпець матриці A.

Матриця називається ***квадратною,*** якщо кількість її рядків дорівнює кількості стовпців. Матрицю розмірності $1 \times n$ називають ***матрицею-рядком*** або просто рядком. Матрицю розмірності $m \times 1$ називають ***матрицею-стовпцем*** або просто стовпцем. Якщо A – квадратна матриця розмірності $n \times n$, то її елементи $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ утворюють ***головну діагональ*** а елементи $\{a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}\}$ – побічну діагональ. Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо всі її елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця називається ***скалярною***, якщо всі її елементи, що лежать на головній діагоналі, однакові. Скалярна матриця називається ***одиничною***, якщо її головна діагональ складається з одиниць. Одиничну матрицю будемо позначати через E. Матриця називається ***нульовою***, якщо всі її елементи є нулі. Нульову матрицю позначають через O. Квадратна матриця, в якій усі елементи, що лежать вище (нижче) головної діагоналі, є нульовими, називається ***нижньою (верхньою) трикутною матрицею.*** Наприклад, матриця $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ є верхньою трикутною.

До основних операцій над матрицями належать такі: додавання і віднімання двох матриць, множення двох матриць, множення числа на матрицю і транспонування матриці. Операції ***додавання*** і ***віднімання*** визначені лише для двох матриць однакової розмірності. Якщо A і B матриці однакової розмірності, то (за означенням) елементи c_{ij} матриці $A+B$ знаходяться за правилом: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, де a_{ij} і b_{ij} – відповідні елементи матриць A та B. Аналогічно визначають віднімання двох матриць.

Нехай A – матриця розмірності $m\times k$, а B – матриця розмірності $r\times n$. Операція множення матриці A на матрицю B визначена у випадку коли $k=r$, тобто, кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, і елементи c_{ij} матриці добутку $A\cdot B$ обчислюються за правилом: $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ik}b_{kj}$, де $\left(a_{i1},a_{i2},...,a_{ik}\right)$ – i-й рядок матриці A, а $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$ – j-ий стовпець матриці B. Зазначимо, що у випадку коли $k=r$, розмірність матриці $A\cdot B$ дорівнює $m\times n$.

Вищенаведені операції є бінарними (бі – це два), тобто, для їх виконання треба задіяти дві матриці. Тепер розглянемо дві унарні (уно – це один) операції, а саме: операцію множення числа на матрицю і операцію транспонування матриці.

Нехай A – довільна матриця розмірності $m\times n$, а λ – довільне число. Добуток числа λ на матрицю A – це матриця розмірності $m\times n$, яка позначається через $\lambda\cdot A$ і елементи якої c_{ij} обчислюються за правилом: $c_{ij}=\lambda a_{ij}$, де a_{ij} – елементи матриці A.

Нехай A – довільна матриця розмірності $m\times n$. ***Транспонована*** матриця позначається через A^T і утворюється з матриці A шляхом заміни кожного i-го рядка матриці A на i-й стовпець матриці A^T. Розмірність матриці A^T дорівнює $n\times m$. У матрицях A і A^T елементи a_{ij} і a'_{ij} пов'язані рівністю $a'_{ij}=a_{ji}$ для всіх $i=1,2,...,n$ і $j=1,2,...,m$.

Отже, якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Обчислити: 1) $\left(A+B\right)^2$; 2) $A^2+2A\cdot B+B^2$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо 1).

1-й крок.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1 & 0+2 & (-1)+1\\ 2+3 & 1+1 & 3+0\\ (-1)+1 & 4-1 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

2-й крок.

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 2+2\cdot 5+0\cdot 0 & 2\cdot 2+2\cdot 2+0\cdot 3 & 2\cdot 0+2\cdot 3+0\cdot 4\\ 5\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 0 & 5\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 3 & 5\cdot 0+2\cdot 3+3\cdot 4\\ 0\cdot 2+3\cdot 5+4\cdot 0 & 0\cdot 2+3\cdot 2+4\cdot 3 & 0\cdot 0+3\cdot 3+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 8 & 6\\ 20 & 23 & 18\\ 15 & 18 & 25\end{pmatrix}.$$

Тепер обчислимо 2).

1-й крок.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 2+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot 4 & 1\cdot(-1)+0\cdot 3+(-1)\cdot 0\\ 2\cdot 1+1\cdot 2+3\cdot(-1) & 2\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 4 & 2\cdot(-1)+1\cdot 3+3\cdot 0\\ (-1)\cdot 1+4\cdot 2+0\cdot(-1) & (-1)\cdot 0+4\cdot 1+0\cdot 4 & (-1)\cdot(-1)+4\cdot 3+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4 & -1\\ 1 & 13 & 1\\ 7 & 4 & 13\end{pmatrix}.$$

2-й крок.

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot 0+1\cdot 4\\ 3\cdot 1+1\cdot 3+0\cdot 1 & 3\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot(-1) & 3\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 4\\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 3+4\cdot 1 & 1\cdot 2+(-1)\cdot 1+4\cdot(-1) & 1\cdot 1+(-1)\cdot 0+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3 & 5\\ 6 & 7 & 3\\ 2 & -3 & 17\end{pmatrix}.$$

3-й крок.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 2+0\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 1+0\cdot 0+(-1)\cdot 4 \\ 2\cdot 1+1\cdot 3+3\cdot 1 & 2\cdot 2+1\cdot 1+3\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 0+3\cdot 4 \\ (-1)\cdot 1+4\cdot 3+0\cdot 1 & (-1)\cdot 2+4\cdot 1+0\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+4\cdot 0+0\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 8 & 2 & 14 \\ 11 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4-й крок. $2A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 16 & 4 & 28 \\ 22 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$

5-й крок.

$$A^2+2A\cdot B+B^2=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 13 & 1 \\ 7 & 4 & 13 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 16 & 4 & 28 \\ 22 & 4 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \\ 2 & -3 & 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 \\ 23 & 24 & 32 \\ 31 & 5 & 28 \end{pmatrix}.$$

Отже, $(A+B)^2\neq A^2+2A\cdot B+B^2$. Зазначимо, що для квадратних матриць X і Y однакової розмірності рівність $(X+Y)^2=X^2+2X\cdot Y+Y^2$ має місце тоді і лише тоді, коли $X\cdot Y=Y\cdot X$.

1.2 Детермінант матриці другого порядку

Детермінант (або визначник) – це основна числова характеристика квадратної матриці. До визначення детермінанта матриці n-го порядку підійдемо поступово. Спочатку дамо означення детермінантів матриці другого та третього порядків і перелічимо їх властивості.

Отже, нехай $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. ***Детермінант*** матриці A, за означенням, – це число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Його позначають через $\det A$ або $|A|$. Перелічимо основні властивості детермінанта матриці другого порядку.

1. Детермінант транспонованої матриці дорівнює детермінанту даної матриці. Тобто, $\det A=\det A^T$.
2. Якщо в матриці поміняти місцями будь-які два рядки або стовпці, то детермінант матриці змінює знак на протилежний.
3. Якщо в матриці є нульовий рядок (він складається лише з нулів) або нульовий стовпець, то детермінант такої матриці дорівнює нулю.
4. Якщо матриця містить пропорційні рядки або стовпці, то детермінант такої матриці дорівнює нулю.
5. Спільний множник елементів будь-якого рядка або стовпця можна винести за знак детермінанта. Наприклад, $\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

6. Якщо в матриці A елементи деякого фіксованого рядка подаються у вигляді суми двох доданків (наприклад, $a_{11} = a'_{11} + a''_{11}$, $a_{12} = a'_{12} + a''_{12}$), то $\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Аналогічна властивість має місце і для стовпців.
7. Якщо i-й рядок помножити на деяке число, додати до j-го рядка $(i \neq j)$ і результат записати замість j-го рядка, то одержуємо матрицю, детермінант якої дорівнює детермінанту даної матриці. Аналогічна властивість має місце і для стовпців.
8. Детермінант трикутної матриці (верхньої або нижньої) дорівнює добутку діагональних елементів.
9. Якщо A і B – матриці другого порядку, то $det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Всі перелічені властивості детермінанта матриці другого порядку легко перевіряються прямим підрахунком.

1.3 Детермінант матриці третього порядку

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця третього порядку. Детермінантом матриці A називають число, яке обчислюється за таким правилом

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Щоб легше було запам'ятати формулу для обчислення детермінанта матриці третього порядку використовують такі схеми:

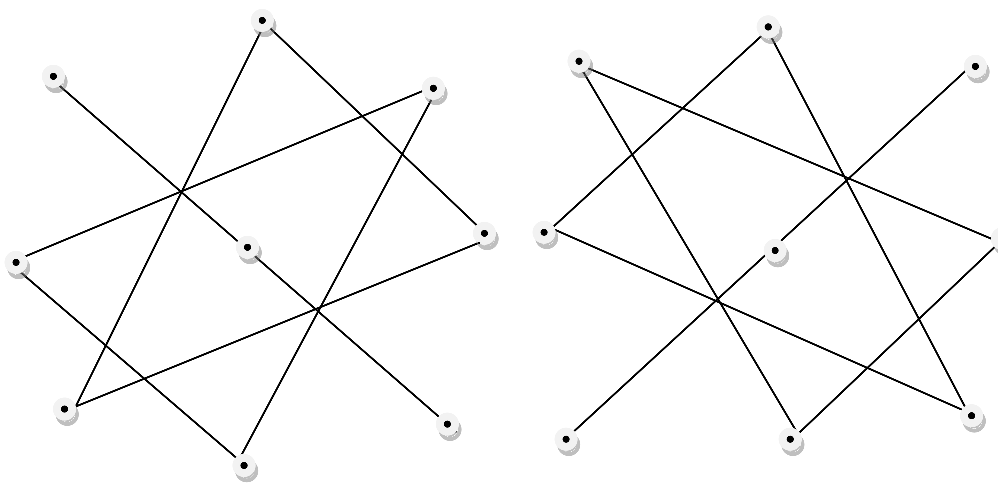

Рисунок 1

Обчислення доданків зі знаком «+» здійснюють за схемою, що зліва на рисунку 1. Тут чорними кружечками позначені елементи матриці, що розташовані по головній діагоналі і у вершинах двох трикутників. Обчислення доданків зі знаком «$-$» здійснюють за схемою, що справа на рисунку 1. Тут чорними кружечками позначені елементи матриці, що розташовані на побічній діагоналі і у вершинах двох трикутників. Таке правило обчислення детермінанта матриці третього порядку називають ***«правилом трикутників»***.

Зазначимо, що властивості детермінанта матриці третього порядку точно такі, як і детермінанта матриці другого порядку.

За допомогою властивості 7 (див. властивості детермінанта матриці другого порядку) будь-яку матрицю (не змінюючи її детермінанта) можна звести до трикутного виду. Згідно з властивістю 8 детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, що лежать на головній діагоналі.

Приклад 1. Детермінант матриці $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ обчислити методом зведення матриці до трикутного виду.

Розв'язання.

1-й крок. Перший рядок даної матриці множимо на 4, додаємо до другого рядка і результат записуємо замість другого рядка. Отримуємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

2-й крок. Другий рядок даної матриці множимо на (-3), додаємо до третього рядка і результат записуємо замість третього рядка. Отримуємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -21 \end{vmatrix} = 21.$$

1.4 Мінор і алгебраїчне доповнення. Теорема про розкладання детермінанта матриці за елементами рядка. Теорема анулювання

Нехай a_{ij} – довільний елемент матриці третього порядку $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Викреслюємо i-й рядок і j-й стовпець, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}. Одержуємо матрицю другого порядку. Детермінант цієї матриці позначають через M_{ij} і називають ***мінором елемента*** a_{ij}. Число $\left(-1\right)^{i+j} \cdot M_{ij}$ позначають через A_{ij} і називають ***алгебраїчним доповненням*** елемента a_{ij}.

Теорема 1 (про розкладання детермінанта). Детермінант матриці дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Для матриці третього порядку в символічній формі теорема записується так:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \quad (i = 1,2,3)$$

$$\text{або } \det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \quad (j = 1,2,3).$$

Теорема 2 (анулювання). Сума добутків елементів довільного рядка (або стовпця) матриці на відповідні алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (або стовпця) дорівнює нулю.

Для матриці третього порядку в символічній формі теорема анулювання записується так:

Якщо $i \neq k,$ то $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0 \quad (i,k = 1,2,3)$ або $a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + a_{3i}A_{3k} = 0.$

1.5 Поняття про детермінант довільної матриці

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$

Детермінантом матриці n-го порядку називається число, що дорівнює сумі добутків усіх елементів **першого рядка** на їх алгебраїчні доповнення.

За цим означенням обчислення детермінанта матриці n-го порядку фактично зводиться (з урахуванням знака) до обчислення n детермінантів n-1 порядку. Важливо зазначити, що усі властивості детермінантів матриці 2-го і третього порядків (ці властивості перелічені у підрозділі 1.2) мають місце і для детермінанта довільної квадратної матриці. Зауважимо також, що теореми розкладання і анулювання теж виконуються.

Техніка обчислення детермінантів ґрунтується на властивості 7 (див. підр. 1.2). Зокрема завдяки цій властивості ми можемо робити такі перетворення матриці (не змінюючи її детермінант), щоб врешті одержати трикутну матрицю, детермінант якої дорівнює добутку діагональних елементів.

Приклад 1. Детермінант матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ обчислити трьома способами: а) за означенням; в) методом розкладання за елементами рядка (або стовпця); с) звівши матрицю до трикутного вигляду.

Розв'язання. Спочатку детермінант матриці A обчислимо *за означенням*

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot1+3\cdot1\cdot2+(-2)\cdot0\cdot1-(-2)\cdot4\cdot2-1\cdot1\cdot1-3\cdot0\cdot1=25.$$

Тепер обчислимо детермінант даної матриці методом *розкладання за елементами рядка (або стовпця)*. Нам вигідно вибрати перший стовпець.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=1\cdot3-0+2\cdot11=25.$$

Нарешті обчислимо детермінант, *звівши дану матрицю до трикутного вигляду:*

1-й крок. Перший рядок матриці A множимо на (-2), додаємо до третього рядка і результат записуємо замість третього рядка. Отримуємо $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & -5 & 5\end{vmatrix}$.

2-й крок. Другий рядок множимо на $\frac{5}{4}$, додаємо до третього рядка і результат записуємо замість третього рядка. Маємо $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & \frac{25}{4}\end{vmatrix}$. Ми одержали детермінант трикутної матриці. Нагадаємо, що детермінант трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів.

Отже,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{25}{4} \end{vmatrix} = 25.$$

1.6 Обернена матриця

Будемо розглядати квадратні матриці розмірності $n \times n$.

Матриця B називається ***оберненою*** до матриці A, якщо

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

Легко показати, що не кожна матриця має обернену. Наприклад, для матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ оберненої не існує. Якщо матриця має обернену, чи буде вона єдиною? Відповідь дає нижченаведена теорема.

Теорема 3. Якщо матриця A має обернену, то вона єдина.

Матриця називається ***невиродженою***, якщо її детермінант не дорівнює нулю.

Теорема 4. Якщо матриця A має обернену, то вона невироджена.

Справедлива і обернена теорема. Сформулюємо її для матриці третього порядку.

Але спочатку дамо означення приєднаної матриці. Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – довільна квадратна матриця. Транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці A, тобто, матриця

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$ називається ***приєднаною*** (*adjugate*) матрицею для матриці A.

Теорема 5. Якщо матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ є невиродженою, то вона має обернену, причому $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Наведемо алгоритм знаходження оберненої матриці в загальній формі. Отже, нехай дано квадратну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1-й крок. Обчислюємо $\det A$. Якщо $\det A = 0$, то матриця A не має оберненої. Якщо $\det A \neq 0$, то переходимо до кроку 2.

2-й крок. Обчислюємо алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці A та утворюємо приєднану матрицю

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3-й крок. Приєднану матрицю множимо на $\dfrac{1}{\det A}$ і одержуємо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наслідок. Нехай матриця B така, що $A \cdot B = E$. Тоді $B = A^{-1}$.

Приклад 1. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ знайти обернену і виконати перевірку.

Розв'язання. Будемо діяти за вищенаведеним алгоритмом.

1-й крок. Обчислюємо детермінант матриці A. $\det A = -8$. Отже, матриця A має обернену.

2-й крок. Обчислюємо алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4. \; A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1. \; A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2. \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4. \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1. \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

Утворюємо приєднану матрицю: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -14 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

3-й крок. Приєднану матрицю множимо на $\frac{1}{\det A}$ і одержуємо обернену матрицю $A^{-1} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -14 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Виконаємо перевірку

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що обернена матриця до матриці A знайдена правильно.

2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Матричні рівняння. Матричний метод розв’язування системи лінійних рівнянь

Розглянемо матричне рівняння $A \cdot X = B,$ де A і $B-$ відомі матриці, розмірності яких, відповідно, $m \times m$ і $m \times n,$ а X – невідома матриця розмірності $m \times n.$

Теорема 1. Якщо матриця A є невиродженою, то матричне рівняння $A \cdot X = B$ має, причому єдиний, розв’язок $X = A^{-1} \cdot B.$

Далі, рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, де $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b-$ відомі числа і $x_1, x_2, x_3, ..., x_n -$ невідомі, називається ***лінійним рівнянням з n невідомими.*** В загальній формі система m лінійних рівнянь з n невідомими записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (*)$$

В багатьох випадках систему лінійних рівнянь (*) вигідно записувати у матричній формі. Позначимо через A матрицю коефіцієнтів при невідомих, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далі, через X і B позначимо відповідно матриці-стовпці $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Тоді СЛР (*) можна записати у компактній матричній формі $A \cdot X = B.$

Якщо система лінійних рівнянь (*) є квадратною, тобто кількість її рівнянь дорівнює кількості невідомих і крім того квадратна матриця A є невиродженою, то, застосувавши теорему 1, СЛР можна розв’язувати матричним методом.

Приклад 1. Систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$ розв'язати матричним методом.

Розв'язання. Спочатку дану СЛР запишемо в матричній формі

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Щоб розв'язати одержане матричне рівняння нам треба знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Реалізуємо відповідний алгоритм. Спочатку обчислюємо детермінант матриці A. $\det A = -10.$ Оскільки $\det A \neq 0,$ то матриця A має обернену. Далі шукаємо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6. \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7. \; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2. \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1. \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3.$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0. \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5. \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Тепер ми вже готові записати A^{-1}. А саме: $A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ -7 & 1 & -5 \\ 11 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$

Завершуємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ -7 & 1 & -5 \\ 11 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2.$

2.2 Правило Крамера

Правило Крамера для розв’язування СЛР застосовується за тих же умов, що і матричний метод, тобто, кількість невідомих має дорівнювати кількості рівнянь системи, і матриця коефіцієнтів при невідомих має бути невиродженою.

Отже, нехай ми маємо СЛР, яка задовольняє вищенаведені умови

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (**)$$

Введемо позначення: через A будемо позначати квадратну матрицю коефіцієнтів при невідомих СЛР. Далі, через Δ_k позначимо детермінант матриці, яку ми одержуємо з матриці A, замінивши її k-й стовпець стовпцем вільних членів.

Теорема (правило Крамера). Якщо система лінійних рівнянь є квадратною і матриця коефіцієнтів при невідомих є невиродженою, то така СЛР має єдиний розв’язок: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\det A}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\det A}$, ..., $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\det A}$.

Приклад 1. Систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$ розв’язати методом Крамера.

Розв’язання. Згідно з правилом Крамера, нам треба обчислити чотири детермінанти, а саме: $\det A, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -6,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -12,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -6,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 18.$$

Звідси одержуємо відповідь:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = \frac{-12}{-6} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = \frac{-6}{-6} = 1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = \frac{18}{-6} = -3.$$

2.3 Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь. Східчаста форма СЛР. Метод Гаусса

Знов систему m лінійних рівнянь з n невідомими $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ (*) запишемо в загальній формі.

До елементарних перетворень СЛР (*) належать такі:

1. Перестановка будь-яких двох рівнянь системи;
2. Множення будь-якого рівняння системи на число, відмінне від нуля;
3. Додавання будь-яких двох рівнянь системи.

Зауваження. Звісно, коли ми множимо рівняння на число, відмінне від нуля, то треба на це число множини і ліву і праву частини рівняння. Коли ж ми додаємо два рівняння системи, то суму цих рівнянь ми записуємо замість одного з цих рівнянь. Також цілком зрозуміло – якщо в результаті елементарних перетворень ми одержуємо рівняння вигляду 0 = 0, то його потрібно просто вилучити з СЛР.

Має місце простий, але фундаментальний факт.

Теорема 2. В результаті елементарних перетворень над СЛР (*) ми одержуємо СЛР, яка еквівалентна даній системі.

Ця теорема добре відома ще зі школи.

Фундаментальну роль також відіграє нижчевказана теорема.

Теорема 3. Будь-яку СЛР (*) в результаті елементарних перетворень можна звести до східчастої форми а саме:

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + ... + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ \qquad \bar{a}_{2k}x_k + ... + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ \qquad\qquad \bar{a}_{3l}x_l + ... + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3, \\ \qquad\qquad .... \\ \qquad\qquad\qquad \bar{a}_{rs}x_s + ... + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .... \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_m. \end{cases} \qquad (***)$$

де $\bar{a}_{11}\bar{a}_{2k}\bar{a}_{3l}...\bar{a}_{rs} \neq 0,\ 1 < k < l < ... < s.$

Невідомі $x_1, x_k, x_l, ..., x_s$ називаються ***головними***. Всі інші невідомі називаються ***вільними***. Потрібно зазначити, що поняття «вільна невідома» чи «головна невідома» є відносними. Наприклад, у рівнянні $2x+4y-3z=1$ ми можемо «призначити» головною невідомою y, тоді вільні невідомі – це $\{x,z\}$. Або в цьому ж рівнянні ми можемо взяти за головну невідому x, тоді $\{y,z\}$ – це вільні невідомі.

Зазначимо також, що, незалежно від того яким шляхом ми зводимо СЛР до східчастої форми, кількість вільних невідомих буде одна і та ж. В цьому випадку говорять, що число вільних невідомих є ***інваріантом*** при елементарних перетвореннях СЛР.

Виникає питання: для чого СЛР зводити до вищезгаданої форми? Відповідь проста – СЛР, яка подана в східчастій формі, легко досліджувати. Скажімо питання сумісності вирішується дуже просто:

СЛР (***) несумісна тоді і тільки тоді, коли вона містить рівняння вигляду $0=\overline{b}_t$, *де* $\overline{b}_t \neq 0$.

Відповідно, СЛР (***) сумісна тоді і тільки тоді, коли в ній відсутні рівняння вигляду $0=\overline{b}_t$, *де* $\overline{b}_t \neq 0$.

Сформулюємо ще кілька важливих тверджень.

Теорема 4. Сумісна СЛР є визначеною тоді і лише тоді, коли одержана з неї (в результаті елементарних перетворень) східчаста СЛР не містить вільних невідомих.

Теорема 5. Якщо східчаста сумісна СЛР містить вільні невідомі, то така система має безліч розв'язків. Надаючи вільним невідомим всіх можливих довільних значень і однозначно виразивши головні невідомі через надані значення вільних невідомих, ми одержуємо множину усіх розв'язків СЛР.

Теорема 6. Якщо в однорідній СЛР кількість невідомих більша за кількість рівнянь, то така система має ненульовий розв'язок.

Викладений нами метод розв'язування СЛР називають методом Гауса або методом послідовного виключення невідомих.

Приклад 3. Систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2-x_3=0, \\ x_1+4x_2-3x_3=-4. \end{cases}$ розв'язати методом Гаусса.

Розв'язання. Зведемо дану СЛР до східчастої форми.

1-й крок. Перше рівняння множимо на (-2), додаємо до другого рівняння і результат записуємо замість другого рівняння

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ \quad 5x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

2-й крок. Перше рівняння множимо на (-1), додаємо до третього рівняння і результат записуємо замість третього рівняння

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ \quad 5x_2 - 3x_3 = -4, \\ \quad 6x_2 - 4x_3 = -6. \end{cases}$$

3-й крок. Друге рівняння множимо на $\left(-\frac{6}{5}\right)$, додаємо до третього рівняння і результат записуємо замість третього рівняння

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ \quad 5x_2 - 3x_3 = -4, \\ \quad -\frac{2}{5}x_3 = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$

Остання СЛР має східчасту форму. Вона сумісна і не містить вільних невідомих. Отже, ця СЛР має один єдиний розв'язок. Рухаючись знизу вверх одержуємо: $x_3 = 3,\ x_2 = 1,\ x_1 = 1.$

3 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

У фізиці існує чимало важливих величин, для характеристики яких недостатньо лише одного числа. Цілком зрозуміло, що, наприклад, сила визначається не тільки величиною, але і напрямом. Аналогічне твердження має місце і для швидкості, прискорення, кутового моменту, імпульсу, напруженості електричного та магнітного полів. Для зображення таких величин застосовують стрілки. Отже, напрямлений відрізок у просторі називають **вектором**. Якщо точка $A-$ початок вектора, а точка $B-$ кінець, то такий вектор позначають через $\overline{AB}.$ Інші позначення вектора – $\overline{a}$ і $\vec{a}$. Довжина відрізка $AB-$ це і є довжина вектора $\overline{AB}.$ Вона позначається через $\left|\overline{AB}\right|.$ Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***ортом***. Вектор, початок і кінець якого збігаються, позначають через $\overline{0}$ і називають

нульовим вектором. Два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать або на одній прямій або розташовані на паралельних прямих.

Два колінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ можуть бути або ***однаково напрямлені*** або ***протилежно напрямлені***. На рисунку 1 вектори однаково напрямлені, а на рисунку 2 – протилежно напрямлені.

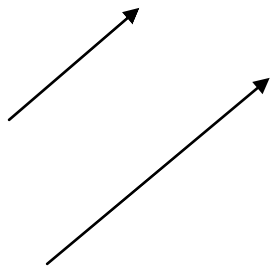

Рисунок 2

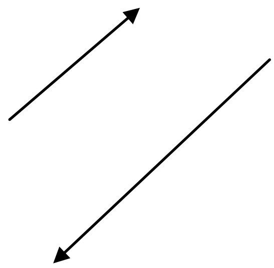

Рисунок 3

Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ вважаються рівними, якщо $|\bar{a}|=|\bar{b}|$ і вони однаково напрямлені.

3.1 Лінійні операції над векторами

До лінійних операцій над векторами належать: операція додавання і операція множення вектора на число. Якщо вектор розглядати як силу, то ці дві операції мають переконливу практичну інтерпретацію. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ додаються за відомим правилом паралелограма або правилом трикутника.

Приклад додавання векторів

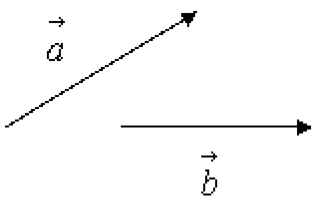

Рисунок 4

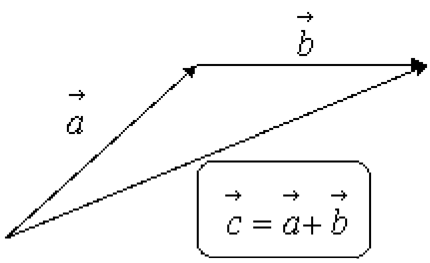

Рисунок 5

Нехай λ – довільне дійсне число і $\bar{a}$ – довільний ненульовий вектор.

Добутком числа λ на вектор $\bar{a}$ називають вектор (його позначають через $\lambda\cdot\bar{a}$), довжина якого $|\lambda\cdot\bar{a}|$ дорівнює числу $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$. Якщо $\lambda>0,$ то вектори $\bar{a}$ і $\lambda\cdot\bar{a}$ однаково напрямлені. Якщо ж $\lambda<0,$ то вектори $\bar{a}$ і $\lambda\cdot\bar{a}$ протилежно напрямлені. Зазначимо також, що $\lambda\cdot\bar{0}=\bar{0}$ і $0\cdot\bar{a}=\bar{0}$ для будь-якого вектора $\bar{a}$.

Перелічимо основні властивості лінійних операцій над векторами:

(1) для будь-яких векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має місце рівність: $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ (*комутативність* додавання векторів);

(2) для довільних векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ виконується рівність: $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}=\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)$ (*асоціативність* додавання);

(3) існує вектор $\bar{0}$ такий, що для довільного вектора $\bar{a}$ має місце рівність $\bar{a}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}$ (існування *нульового* вектора);

(4) для кожного вектора $\bar{u}$ існує вектор $\bar{x}$ такий, що $\bar{u}+\bar{x}=\bar{x}+\bar{u}=\bar{0}$ (існування *протилежного* вектора);

(5) для будь-яких дійсних чисел α,β і вектора $\bar{u}$ виконується рівність: $\alpha\cdot\left(\beta\cdot\bar{u}\right)=\left(\alpha\beta\right)\cdot\bar{u}$ (*асоціативність* множення на число);

(6) для довільного вектора $\bar{u}$ має місце рівність $1\cdot\bar{u}=\bar{u}$ (*унарність* множення на числа);

крім того виконуються *два дистрибутивні закони*:

(7) для будь-яких чисел α і β та вектора $\bar{u}$ маємо $\left(\alpha+\beta\right)\cdot\bar{u}=\alpha\cdot\bar{u}+\beta\cdot\bar{u}$;

(8) для довільного числа α та векторів $\bar{u}$ і $\bar{v}$ маємо: $\alpha\cdot\left(\bar{u}+\bar{v}\right)=\alpha\cdot\bar{u}+\alpha\cdot\bar{v}$.

3.2 Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис. Координати вектора в даному базисі. Декартів базис

Система векторів $\left\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n\right\}$ називається ***лінійно залежною***, якщо існують числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ (не всі рівні нулю) такі, що виконується рівність $\lambda_1\cdot\bar{u}_1+\lambda_2\cdot\bar{u}_2+...+\lambda_n\cdot\bar{u}_n=\bar{0}$.

Система векторів $\left\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n\right\}$ називається ***лінійно незалежною,*** якщо з рівності $c_1\cdot\bar{u}_1+c_2\cdot\bar{u}_2+...+c_n\cdot\bar{u}_n=\bar{0}$ випливає $c_1=c_2=...=c_n=0$.

Сформулюємо деякі твердження, що стосуються лінійної залежності і незалежності сукупності векторів.

Твердження 1. Система векторів, що містить нуль-вектор, є лінійно залежною.

Твердження 2. Якщо підсистема системи векторів є лінійно залежною, то лінійно залежною є і вся система.

Твердження 3. Якщо система векторів є лінійно незалежною, то і будь-яка підсистема є лінійно незалежною.

Твердження 4. Для того, щоб два ненульові вектори були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб вони були колінеарні.

Твердження 5. Для того, щоб три ненульові вектори були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб вони були компланарні.

Кажуть, що впорядкована трійка векторів $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$ утворює ***базис*** у просторі, якщо виконуються такі умови:

1) Вектори $\left\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right\}$ є лінійно незалежними;
2) Для будь-якого вектора $\overline{p}$ існують числа x, y, z такі, що виконується рівність $\overline{p} = x\cdot\overline{a} + y\cdot\overline{b} + z\cdot\overline{c}$, тобто, вектор $\overline{p}$ є лінійною комбінацією векторів $\left\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right\}$.

Впорядкований набір чисел (x, y, z) називають ***координатами вектора*** $\overline{p}$ в базисі $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$.

Твердження 6. Координати вектора в даному базисі визначаються однозначно.

Твердження 7. Будь-які три некомпланарні вектори у просторі утворюють базис.

Далі, числовою віссю називають пряму лінію, на якій визначено напрям, зафіксовано початкову точку і задано масштаб.

Нехай у просторі задано числову вісь l і вектор $\overline{AB}$. Позначимо через A' і B', відповідно, проєкції точок A і B на числову вісь l. Нехай x_1 і x_2 – координати, відповідно, точок A' та B'.

Число $x_2 - x_1$ називають ***проєкцією вектора*** $\overline{AB}$ на вісь l і позначають через $np_l\,\overline{AB}$. Якщо $\varphi -$ кут між вектором $\overline{a}$ і віссю l, то $np_l\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi$. Проєкція вектора на вісь має такі властивості:

1. $np_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = np_l\,\overline{a} + np_l\,\overline{b}$.
2. $np_l\,\lambda\cdot\overline{a} = \lambda np_l\,\overline{a}$ для будь-якого числа λ.

Аналогічно визначають проекцію вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$, а саме: ***проєкцією вектора*** $\overline{a}$ ***на вектор*** $\overline{b}$ називають число $\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi$, де $\varphi -$кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Проєкцію $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ позначають через $np_{\overline{b}}\overline{a}$.

Вище ми вже зазначали, що у тривимірному просторі будь-які три некомпланарні вектори утворюють базис. Серед безлічі базисів простору окремо виділяють *декартів базис*. Зафіксуємо у просторі декартову систему координат. Визначимо базисні вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ таким чином: початки цих векторів збігаються з початком координат, вектор $\overline{i}$ лежить на осі OX і однаково напрямлений з цією віссю, вектор $\overline{j}$ лежить на осі OY і однаково напрямлений з віссю OY, вектор $\overline{k}$ лежить на осі OZ і однаково напрямлений з віссю OZ. Крім того $\left|\overline{i}\right| = \left|\overline{j}\right| = \left|\overline{k}\right| = 1$. Базис $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$ називають ***декартовим базисом***. Координати (x, y, z) вектора $\overline{a}$ в базисі $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$ називають ***декартовими координатами*** вектора $\overline{a}$.

Твердження 8. Якщо (x, y, z) декартові координати вектора $\overline{a}$, то $x = np_{OX}\,\overline{a}$, $y = np_{OY}\,\overline{a}$, $z = np_{OZ}\,\overline{a}$.

Надалі (якщо не оговорено протилежне) під координатами вектора на площині або у просторі за замовчуванням будемо вважати декартові координати. Нехай точка $A(x_1; y_1; z_1)$ – початок, а точка $B(x_2; y_2; z_2)$ – кінець вектора $\overline{AB}$, то, згідно з твердженням 8, $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ – це координати вектора $\overline{AB}$. Якщо вектор $\overline{a}$ має координати (x, y, z), то, застосовуючи теорему Піфагора, одержуємо $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Позначимо через α, β, γ кути, що їх утворює вектор $\overline{q}$, відповідно, з осями OX, OY, OZ. Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – це *напрямні косинуси* вектора $\overline{q}$. Якщо $|\overline{a}| = 1$, то $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – координати вектора $\overline{a}$, для яких виконується співвідношення $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

3.3 Поділ відрізка у заданому відношенні

Нехай $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – довільні точки у просторі. Наша задача на відрізку M_1M_2 знайти точку M, яка ділить відрізок M_1M_2 у заданому відношенні $\lambda = \dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$.

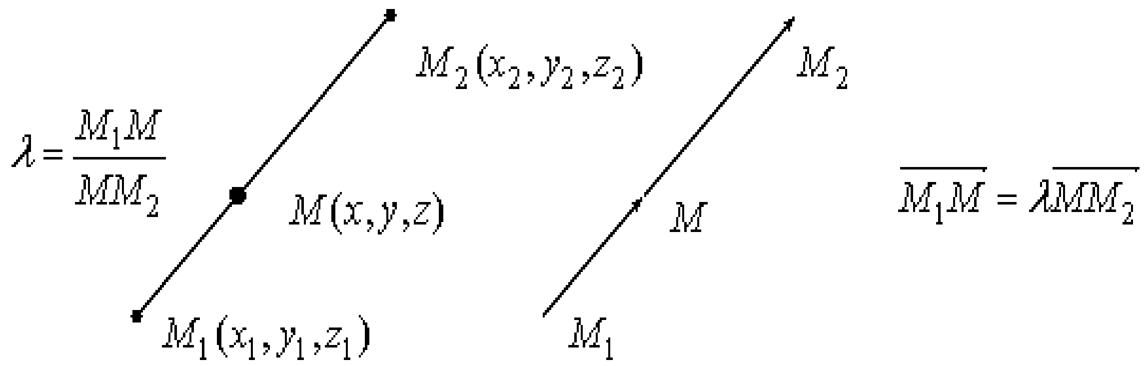

Рисунок 6

Позначимо через $(x; y; z)$ координати шуканої точки M. Очевидно, що для векторів $\overline{M_1M}$ і $\overline{MM_2}$ має місце рівність $\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$.

Останню рівність запишемо в координатній формі

$$(x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1) = \lambda \cdot (x_2 - x;\ y_2 - y;\ z_2 - z).$$

Прирівнявши відповідні координати обох сторін останньої рівності отримуємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}, \ z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1+\lambda}.$$

Зокрема, координати середини відрізка M_1M_2 знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3.4 Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають число

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi,$$

де $\varphi -$ кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Оскільки $пр_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$ і $пр_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\cos\varphi,$ то маємо

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\cos\varphi = |\overline{b}|\cos\varphi.$$

Перелічимо ***основні властивості скалярного добутку***.

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}.$
2. $\lambda \cdot \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = \left(\lambda \cdot \overline{a}\right) \cdot \overline{b}$ для довільного дійсного числа λ.
3. $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}.$
4. Якщо $\overline{a} \neq \overline{0},$ то $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0.$
5. $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}|,$ звідки $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}.$

3.5 Знаходження скалярного добутку через декартові кординати співмножників. Кут між векторами

Нехай $\left(a_x; a_y; a_z\right) -$ координати вектора $\overline{a}$ і $\left(b_x; b_y; b_z\right) -$ координати вектора $\overline{b}$. Тоді $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$ Останню формулу зручно використовувати для знаходження модуля (довжини) вектора і кута між векторами. Нехай $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right),$ то $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}.$

Якщо $\varphi -$ кут між векторами $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ і $\overline{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right),$ то

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}}.$$

Необхідна і достатня умова перпендикулярності двох ненульових векторів $\bar{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ і $\bar{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right)$ виражається рівністю

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

3.6 Векторний добуток двох векторів. Координати векторного добутку

Векторним добутком вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який задовольняє такі три умови:

1 вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$;

2 модуль вектора $\bar{c}$ дорівнює $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi,$ де $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$;

3 якщо дивитися з кінця вектора $\bar{c}$, то найкоротший поворот від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ відбувається проти ходу годинникової стрілки.

Векторний добуток вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ позначають символом $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}.$

Перелічимо основні властивості векторного добутку.

1. Антикомутативність множення

   $\bar{a} \times \bar{b} = -\left(\bar{b} \times \bar{a}\right).$

2. Дистрибутивність відносно додавання векторів

$$\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} \text{ і } \left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

3. Асоціативність відносно скалярного множника λ:

$$\lambda \cdot \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \lambda \cdot \bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \lambda \cdot \bar{b}.$$

4. Для довільного числа λ і довільного вектора $\bar{a}$ виконується рівність

$$\lambda \cdot \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}.$$

5. Якщо вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ звести до спільного початку, то модуль векторного добутку $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Нехай $\bar{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ і $\bar{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$. Тоді

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k}\right)\times\left(b_x\cdot\bar{i}+b_y\cdot\bar{j}+b_z\cdot\bar{k}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot\bar{k}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Тобто, $\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)-$ це координати вектора $\bar{a}\times\bar{b}$.

Приклад 1. Обчислити площу трикутника ABC, заданого координатами вершин: $A(2;1;-3)$, $B(0;1;1)$, $C(3;2;1)$.

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Оскільки $\overline{AB}=(-2;0;4)$ і $\overline{AC}=(1;1;4)$, то $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-4\cdot\bar{i}+12\cdot\bar{j}-2\cdot\bar{k}$.

Отже, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+12^2+(-2)^2}=\frac{\sqrt{164}}{2}=\sqrt{41}\approx 6,4.$

3.7 Мішаний добуток трьох векторів

Нехай дано три вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. Число $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$ називають ***мішаним добутком трьох векторів*** $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. Якщо $\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\left(b_x;b_y;b_z\right)$, $\left(c_x;c_y;c_z\right)$ – відповідно, координати векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, то

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Перелічимо основні властивості мішаного добутку.

1. При циклічній перестановці векторів мішаний добуток не змінюється

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{a}=\left(\bar{c}\times\bar{a}\right)\cdot\bar{b}.$$

2. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right).$$

3. Модуль мішаного добутку $\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right|$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.

4. Три ненульових вектори компланарні тоді і лише тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Приклад 1. Знайти об’єм трикутної піраміди, яка задана координатами своїх вершин.

Розв’язання. Об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, дорівнює $\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|$, а об’єм трикутної піраміди $ABCD$ дорівнює $\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|$. Знайдемо координати векторів $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$\overline{AB}=\left(1;0;2\right), \overline{AC}=\left(2;2;7\right), \overline{AD}=\left(-4;-1;3\right)$.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 7\\ -4 & -1 & 3\end{vmatrix}=\frac{25}{6}\approx 4{,}167.$$

4 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

4.1 Основні означення і формули

Під лінійною аналітичною геометрією ми будемо розуміти ту її частину, вивчення якої ґрунтується на векторній алгебрі. Грубо кажучи – це дослідження властивостей прямих і площин (взагалі кажучи, в n-вимірному просторі) методами векторної алгебри (лінійні операції над векторами, скалярний і векторний добутки двох векторів, мішаний добуток трьох векторів і т. д.). Як відомо, саме лінійна частина аналітичної геометрії є математичним апаратом для такої важливої галузі теорії оптимізації, якою є лінійне програмування. Для того, щоб розв’язувати типові задачі на цю тему, нагадаємо основні форми рівнянь прямої на координатній площині та у тривимірному просторі а також деякі формули (відстань від точки до прямої на площині і в просторі, відстань від точки до площини, кути між прямими і площинами в просторі і таке інше).

Нехай в просторі задано точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і вектор $\bar{q}(m;n;p)$. Цілком зрозуміло, що через точку M_0 проходить одна і тільки одна пряма, яка паралельна вектору $\bar{q}$. Запишемо канонічне рівняння цієї прямої

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Останнє рівняння можна переписати в параметричній формі

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t.$$

Зазначимо, що будь-який вектор, паралельний прямій L, називають напрямним вектором прямої L.

Якщо в просторі задано дві різні точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Аналогічне рівняння на площині $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Нехай в декартовій площині задано точку $M_0(x_0;y_0)$ і вектор $\bar{N}(A;B)$. Очевидно, що на площині через точку M_0 проходить одна і тільки одна пряма, яка перпендикулярна до вектора $\bar{N}$. Рівняння цієї прямої має вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Загальне рівняння прямої на площині $Ax+By+C=0$.

Зазначимо важливий факт – вектор $\bar{N}(A;B)$ перпендикулярний до прямої $Ax+By+C=0$.

Щодо кутів між прямими. Якщо ми маємо дві прямі на декартовій площині $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ і $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, то кут φ між цими прямими обчислюється за формулою

$$cos\,\varphi=\left|\frac{\bar{N}_1\cdot\bar{N}_2}{|\bar{N}_1|\cdot|\bar{N}_2|}\right|,$$

де $\bar{N}_1(A_1;B_1)$ і $\bar{N}_2(A_2;B_2)$.

Якщо прямі L_1 і L_2 задані в просторі відповідно рівняннями $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ і $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, то кут між цими прямими обчислюється за формулою

$$cos\varphi = \left|\frac{\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|}\right|,$$

де $\bar{q}_1(m_1; n_1; p_1)$ і $\bar{q}_2(m_2; n_2; p_2)$ – напрямні вектори відповідно прямих L_1 і L_2.

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $l: Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою

$$d(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Переходимо до площин. Нехай в просторі задано точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і вектор $\bar{N}(A; B; C)$. Цілком зрозуміло, що через точку M_0 проходить одна і тільки одна площина, яка перпендикулярна до вектора $\bar{N}$. Рівняння цієї площини має вигляд $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$

Загальне рівняння площини у просторі має форму $Ax + By + Cz + D = 0.$

Зазначимо, що вектор $\bar{N}(A; B; C)$ перпендикулярний до площини $Ax + By + Cz + D = 0.$ Кут φ між площинами $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ обчислюється за формулою $cos\varphi = \left|\frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|}\right|,$

де $\bar{N}_1(A_1; B_1; C_1)$ і $\bar{N}_2(A_2; B_2; C_2)$ – вектори, які перпендикулярні, відповідно, до площин P_1 і P_2.

Якщо в просторі задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що не лежать на одній прямій, то вони однозначно визначають площину, рівняння якої $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_2 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $P: Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою $d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$

Приклад 1. Знайти проекцію точки M на площину $P: x + 2y - z + 7 = 0.$

Розв'язання. Складемо рівняння прямої L, яка проходить через точку M і перпендикулярна до площини P. Цілком зрозуміло, що перетин прямої L і площини P – це шукана точка. Оскільки вектор $\bar{N}(1; 2; -1)$ перпендикулярний до площини P, то за напрямний вектор прямої L беремо вектор $\bar{N}$. Запишемо параметричне рівняння прямої L:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}=t.$$

Виражаємо x, y, z через параметр t: $x=t+3,\ y=2t+1,\ z=-t.$ Підставляємо значення x, y, z в рівняння площини $P: x+2y-z+7=0.$ Маємо

$$t+3+2(2t+1)+t+7=0.$$

Звідси $t=-2.$ Залишається обчислити координати шуканої точки: $x=t+3=-2+3=1,\ y=2t+1=-4+1=-3,\ z=-t=-(-)2=2.$

Відповідь: $(1;-3;2)-$ це координати проекції точки M на площину $P.$

Приклад 2. Знайти координати точки M', яка симетрична точці $M(-1;3;2)$ відносно прямої $L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}.$

Розв'язання. Спочатку знайдемо проекцію точки M на пряму $L.$ Для цього складемо рівняння площини $P,$ яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої $L.$ Напрямний вектор прямої L -- це вектор $\overline{q}(2;1;3).$ Він має бути перпендикулярним до площини $P.$ До того ж точка M належить площині $P.$ За цими даними складемо рівняння площини $P: 2(x+1)+1(y-3)+3(z-2)=0$ або $2x+y+3z-7=0.$ Далі, запишемо рівняння прямої L в параметричній формі: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}=t$ або $x=2t+1;\ y=t;\ z=3t-2.$ Підставляємо значення x, y, z в рівняння площини $P.$ Маємо $2(2t+1)+t+3(3t-2)-7=0.$ Звідси $t=\dfrac{11}{14}.$ Отже, точка $C\left(\dfrac{18}{7};\dfrac{11}{14};\dfrac{5}{14}\right)-$ це проєкція точки M на пряму $L.$ Позначимо через (x', y', z') координати точки $M'.$ Оскільки точка C є серединою відрізка $MM',$ то $\dfrac{-1+x'}{2}=\dfrac{18}{7};\ \dfrac{3+y'}{2}=\dfrac{11}{14};\ \dfrac{2+z'}{2}=\dfrac{11}{14}.$ Звідси

$$x'=\frac{43}{7};\ y'=\frac{-10}{7};\ z'=\frac{-9}{7}.$$

Приклад 3. Знайдіть проєкцію прямої $L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{4}$ на площину $P: x+3y+2z+3=0.$

Розв'язання. Легко перевірити, що пряма L не паралельна площині $P.$ Це значить, що вона перетинає площину $P.$ Знайдемо координати точки перетину. Для цього спочатку подамо рівняння прямої L в параметричній формі: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{4}=t$ або $x=2t+1,\ y=t+3,\ z=4t.$ Підставляємо значення x,y,z в рівняння площини P. Одержуємо $2t+1+3(t+3)+8t+3=0.$ Звідси $t=-1.$ Отже, точка $A(-1;2;-4)-$ це точка перетину прямої L і площини P. Далі, беремо будь-яку точку на прямій L. Скажімо точку $M(1;3;0)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку M і перпендикулярна до площини P. Цю пряму позначимо через T. Напрямним вектором прямої T є вектор $\overline{q}(1;3;2)$ (дивись на коефіцієнти при $x,\ y,\ z$ в рівнянні площини P). Тепер ми вже можемо записати рівняння прямої T в параметричній формі: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{2}=t$ або $x=t+1,$ $y=3t+3,\ z=2t.$ Далі шукаємо координати $B-$точки перетину прямої T з площиною P. Для цього в рівняння площини P замість $x,\ y,\ z$ підставляємо, відповідно, $t+1,\ 3t+3,\ 2t.$ Одержуємо рівняння: $t+1+3(3t+3)+2\cdot 2t+3=0.$ Звідси $t=-\frac{13}{14}.$ Отже, $\left(\frac{1}{14};\frac{3}{14};-\frac{13}{7}\right)-$ це координати точки B. Цілком зрозуміло, що пряма AB є проєкцією даної прямої L на площину P. За відомими координатами точок A і B складемо рівняння прямої $AB:\ \frac{x+1}{3}=-\frac{y-2}{5}=\frac{z+4}{6}.$

Відповідь: $\frac{x+1}{3}=-\frac{y-2}{5}=\frac{z+4}{6}-$ це рівняння проєкції прямої L на площину P.

5 ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР

5.1 Лінійна залежність і незалежність системи векторів. Базис векторного простору

Нехай $V-$ векторний простір. Система векторів $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_k\}$ називається ***лінійно залежною***, якщо існують числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ (не всі рівні нулю) такі, що виконується рівність: $\lambda_1\overline{u}_1+\lambda_2\overline{u}_2+...+\lambda_k\overline{u}_k=\overline{0}.$

Система векторів $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_k\}$ називається ***лінійно незалежною***, якщо з рівності $c_1\overline{u}_1+c_2\overline{u}_2+...+c_k\overline{u}_k=\overline{0}$ випливає $c_1=c_2=...=c_k=0.$

Далі, нехай ми маємо векторний простір V. Впорядкована система векторів $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$ називається ***базисом векторного простору*** V, якщо виконуються такі дві умови:

а) множина векторів $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\}$ є лінійно незалежною;

b) будь-який вектор $\bar{u} \in V$ є лінійною комбінацією векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$. Тобто, знайдуться числа $x_1, x_2, ..., x_n$ такі, що $\bar{u} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + ... + x_n \cdot \bar{e}_n$.

Впорядкований набір чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***координатами вектора*** $\bar{u}$ ***в базисі*** $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$.

Далі, нехай $V-$ довільний векторний простір. Зафіксуємо множину векторів $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$. Легко перевірити, що сукупність векторів, кожний з яких можна подати у формі $\lambda_1 \cdot \bar{u}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \cdot \bar{u}_n$, утворює підпростір векторного простору V. Цей підпростір позначають через $\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n \rangle$ і називають ***лінійною оболонкою*** системи векторів $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ,..., \bar{u}_n\}$. Зазначимо, що лінійна оболонка $\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n \rangle$ – це найменший (відносно включення) підпростір векторного простору V, що містить вектори $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ,..., \bar{u}_n\}$.

Кажуть, що вектор $\bar{b}$ є ***лінійною комбінацією*** системи векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$, якщо знайдуться числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ такі, що виконується рівність $\bar{b} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + ... + \alpha_n \cdot \bar{a}_n$.

Нехай U і $W-$ підпростори векторного простору V, тоді $U \cap W$ теж підпростір векторного простору V. Далі, позначимо через $U + W$ множину усіх векторів, кожний з яких можна подати у вигляді $\bar{u} + \bar{w}$, де $\bar{u} \in U$ і $\bar{w} \in W$. Легко перевірити, що $U + W$ є підпростором векторного простору V.

Розглянемо векторний простір R^n, елементами якого є матриці розмірності $1 \times n$.

Теорема. Вектори $\bar{u}_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$, $\bar{u}_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$, ... , $\bar{u}_n = (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$ є лінійно незалежними тоді і лише тоді, коли

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Приклад 1. Встановити лінійну залежність (чи лінійну незалежність) системи векторів $\bar{u}_1 = (1;2;-2;0)$, $\bar{u}_2 = (2;1;0;1)$, $\bar{u}_3 = (0;1;3;3)$, $\bar{u}_4 = (-1;0;3;1)$ у векторному просторі R^4.

Розв'язання. Обчислимо детермінант $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ методом зведення відповідної матриці до трикутної форми. Для цього виконаємо такі дії:

1-й крок. Множимо перший рядок на (-2), додаємо до другого рядка і результат записуємо замість другого рядка. Отримуємо $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2-й крок. Додаємо перший і четвертий рядки. Результат записуємо замість четвертого рядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3-й крок. Для подальшої зручності міняємо місцями другий і третій рядки. При цьому знак детермінанта змінюється на протилежний. Отримуємо $-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4-й крок. Другий рядок множимо на 3, додаємо до третього рядка і результат записуємо замість третього рядка $-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5-й крок. Другий рядок множимо на (-2), додаємо до четвертого рядка і результат записуємо замість четвертого рядка. Отримуємо $-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$.

6-й крок. Нарешті третій рядок множимо на $\frac{5}{13}$, додаємо до четвертого рядка і результат записуємо замість четвертого рядка. Отримуємо $-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{13} \end{vmatrix}$.

Ми одержали детермінант трикутної матриці. Відомо, що детермінант трикутної матриці дорівнює добутку чисел, що розташовані на головній діагоналі. Крім того нагадаємо, що всі перетворення, які ми виконували над даною матрицею, залишали незмінним детермінант. Отже,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$$

Відповідь: дані вектори є лінійно незалежними.

Приклад 2. Довести, що многочлени $3, 2x, x^2+3x+4$ є лінійно незалежними на проміжку $(-\infty;+\infty)$ у векторному просторі всіх многочленів, степінь кожного з яких не перевищує 2.

Розв'язання. Припустимо, що на проміжку $(-\infty;+\infty)$ для чисел c_1, c_2, c_3 виконується тотожність $c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 2x + c_3 \cdot (x^2+3x+4) = 0$. Нам треба довести, що $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Значення $x = 0$ підставляємо в тотожність. Отримуємо $3c_1 + 4c_3 = 0$. Знайдемо похідну лівої і правої частин тотожності $c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 2x + c_3 \cdot (x^2+3x+4) = 0$. Одержуємо тотожність $2c_2 + 2c_3 \cdot x + 3c_3 = 0$. Значення $x = 0$ підставляємо в останню тотожність. Маємо $2c_2 + 3c_3 = 0$. Далі знаходимо похідну лівої і правої частин тотожності $2c_2 + 2c_3 \cdot x + 3c_3 = 0$. Отримуємо рівність $2c_3 = 0$. Звідки $c_3 = 0$. Враховуючи, що $3c_1 + 4c_3 = 0$ і $2c_2 + 3c_3 = 0$, одержуємо рівності $c_1 = 0$ і $c_2 = 0$. Отже, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Відповідь: многочлени $3, 2x, x^2+3x+4$ є лінійно незалежними на проміжку $(-\infty;+\infty)$ у векторному просторі всіх многочленів, степінь кожного з яких не перевищує 2.

Приклад 3. Нехай P_2 – векторний простір усіх многочленів, степінь кожного з яких не перевищує 2. Показати, що три многочлени

$(2;\ x+1;\ 3x^2-x+4)$ утворюють базис в P_2, і знайти координати многочлена $4-2x+5x^2$ в цьому базисі.

Розв'язання. Для обґрунтування того факту, що трійка многочленів $(2;\ x+1;\ 3x^2-x+4)$ утворює базис у векторному просторі P_2, нам достатньо встановити лінійну незалежність цих многочленів. Отож нехай для чисел c_0, c_1, c_2 виконується тотожність $c_0\cdot 2+c_1\cdot(x+1)+c_2\cdot(3x^2-x+4)=0.$ Нам треба показати, що $c_0=c_1=c_2=0.$ Покладемо $x=0.$ Одержуємо $c_0\cdot 2+c_1\cdot(0+1)+c_2\cdot(3\cdot 0^2-0+4)=2c_0+c_1+4c_2=0.$ Продиференціюємо тотожність $c_0\cdot 2+c_1\cdot(x+1)+c_2\cdot(3x^2-x+4)=0.$ Одержуємо $c_1+6c_2\cdot x-c_2=0.$ Підставивши $x=0,$ одержуємо рівність $c_1-c_2=0.$ Залишається продиференціювати тотожність $c_1+6c_2\cdot x-c_2=0.$ Одержуємо $6c_2=0.$ Звідси $c_2=c_1=c_0=0.$ Таким чином, трійка многочленів $(2;\ x+1;\ 3x^2-x+4)$ утворює базис у векторному просторі P_2. Тепер знайдемо координати многочлена $4-2x+5x^2$ у цьому базисі. З означення базису випливає, що існують числа k_0, k_1, k_2 такі, що виконується тотожність $k_0\cdot 2+k_1\cdot(x+1)+k_2\cdot(3x^2-x+4)=4-2x+5x^2.$ Останню тотожність перепишемо так: $2k_0+k_1+4k_2+(k_1-k_2)\cdot x+3k_2\cdot x^2=4-2x+5x^2.$ Відомо, що два многочлени тотожно рівні між собою тоді і лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x рівні між собою. Звідси виникає система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими $\begin{cases} 2k_0+k_1+4k_2=4, \\ k_1-k_2=-2, \\ 3k_2=5. \end{cases}$

Розв'язавши останню СЛР, одержуємо координати многочлена $4-2x+5x^2$ в базисі $(2;\ x+1;\ 3x^2-x+4).$ а саме: $k_0=-\frac{7}{6},\ k_1=-\frac{1}{3},\ k_2=\frac{5}{3}.$

5.2 Матриця переходу від одного базису до іншого. Перетворення координат вектора при заміні базису

Нехай $\left(\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n\right)$ і $\left(\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n\right)$ – два довільні базиси лінійного простору V. Тоді знайдуться числа a_{ij} такі, що виконуються рівності:

$$\begin{cases} \bar{u}_1=a_{11}\cdot\bar{e}_1+a_{12}\cdot\bar{e}_2+...+a_{1n}\cdot\bar{e}_n, \\ \bar{u}_2=a_{21}\cdot\bar{e}_1+a_{22}\cdot\bar{e}_2+...+a_{2n}\cdot\bar{e}_n, \\ .... \\ \bar{u}_n=a_{n1}\cdot\bar{e}_1+a_{n2}\cdot\bar{e}_2+...+a_{nn}\cdot\bar{e}_n. \end{cases}$$

Матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається ***матрицею переходу*** від базису $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n)$ до базису $(\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n)$.

Досить часто виникає задача, яку ми сформулюємо так. Нехай у векторному просторі V задано два базиси $E=(e_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n)$ і $U=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n)$. Далі, нехай $(x_1,x_2,...,x_n)$ – координати вектора $\bar{a}$ в базисі E. Як знайти координати вектора $\bar{a}$ в базисі U, якщо відома матриця переходу від базису E до базису U? Позначимо через $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ координати вектора $\bar{a}$ в базисі U, тоді має місце така рівність

$$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(Нагадаємо, що $A-$ це матриця переходу від базису E до базису U.)

Приклад 1. Знайти координати вектора $\bar{x}$ в базисі $U=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)$, якщо відомі його координати в базисі $E=(e_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$.

$$\begin{cases} \bar{u}_1=1\cdot\bar{e}_1+2\cdot\bar{e}_2+0\cdot\bar{e}_3, \\ \bar{u}_2=0\cdot\bar{e}_1-1\cdot\bar{e}_2+3\cdot\bar{e}_3, \quad \bar{x}=(2,4,-2). \\ \bar{u}_3=1\cdot\bar{e}_1+1\cdot\bar{e}_2+1\cdot\bar{e}_3, \end{cases}$$

Розв'язання. Матриця переходу від базису E до базису U має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стандартними методами знаходимо $A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Далі застосовуємо формулу $A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Одержуємо $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $(1,-1,1)-$ це координати даного вектора в базисі U.

5.3 Знаходження базису векторного простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь (ОСЛР). Для знаходження базису векторного простору розв'язків виконаємо такі дії:

1. За допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду;
2. Пронумеруємо вільні невідомі (якщо таких немає, то ОСЛР має точно один (нульовий) розв'язок);
3. Першій вільній невідомій надаємо значення 1, всім іншим вільним невідомим надаємо значення 0. Головні невідомі однозначно виражаємо через надані значення вільних невідомих. Таким чином ми одержуємо перший базисний розв'язок ОСЛР.
4. Для одержання другого базисного розв'язку надаємо другій вільній невідомій значення 1, а всім іншім вільним невідомим – значення 0. Головні невідомі однозначно виражаємо через надані значення вільних невідомих. Таким чином ми одержуємо другий базисний розв'язок ОСЛР.
5. І так далі.

Зазначимо, що кількість базисних розв'язків дорівнює кількості вільних невідомих.

Приклад 1. Знайти базис векторного простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. За допомогою елементарних перетворень зведемо останню систему рівнянь до східчастого вигляду.

1-й крок. Перше рівняння множимо на (-2), додаємо до другого рівняння і результат записуємо замість другого рівняння. Одержуємо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 0; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

2-й крок. Додаємо перше і третє рівняння. Результат записуємо замість третього рівняння $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 0; \\ x_2 + 6x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

3-й крок. Третє рівняння множимо на (-5), додаємо до другого рівняння, і результат записуємо замість третього рівняння

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - \ x_4 + \ \ 3x_5 = 0; \\ \quad\ \ 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 - \ \ 7x_5 = 0; \\ \qquad\quad -36x_3 - 2x_4 - 27x_5 = 0. \end{cases}$$

Остання СЛР має східчастий вигляд. $\{x_4, x_5\}$ – вільні невідомі, $\{x_1, x_2, x_3\}$ – головні невідомі. Для знаходження фундаментальної системи розв’язків реалізуємо вищенаведений алгоритм.

1-й крок. Покладемо $x_4 = 1, x_5 = 0$. Обчислимо відповідні значення головних невідомих: $x_3 = -\frac{1}{18}, x_2 = -\frac{2}{3}, x_1 = -\frac{1}{18}$. Отже, одержуємо перший базисний розв’язок

$$E_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2-й крок. Покладемо $x_4 = 0, x_5 = 1$. Обчислимо відповідні значення головних невідомих: $x_3 = -\frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{7}{4}$. Одержуємо другий базисний розв’язок

$$E_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2$ (де c_1 і c_2 – довільні числа) є загальним розв’язком даної однорідної СЛР.

Приклад 2. Знайти базис векторного простору розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання. За допомогою елементарних перетворень зведемо останню систему рівнянь до східчастого вигляду.

1-й крок. Перше рівняння множимо на (-3), додаємо до другого рівняння, і результат записуємо замість другого рівняння. Одержуємо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ \quad -4x_2 + 10x_3 - 10x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

2-й крок. Перше рівняння множимо на (-5), додаємо до третього рівняння, і результат записуємо замість третього рівняння. Одержуємо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ \quad -4x_2 + 10x_3 - 10x_4 + 5x_5 = 0, \\ -8x_2 + 20x_3 - 20x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що друге і третє рівняння системи є еквівалентними. Отже, одне з них можна відкинути. Одержуємо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ \quad -4x_2 + 10x_3 - 10x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Остання система має східчасту форму. Тут $\{x_1, x_2\}-$ головні невідомі, а $\{x_3, x_4, x_5\}-$ вільні невідомі. Далі шукаємо базис лінійного простору розв'язків даної ОСЛР.

1-й крок. Покладемо $x_3 = 1,\ x_4 = x_5 = 0.$ Тоді $x_2 = \frac{5}{2}$ і $x_1 = -\frac{1}{2}.$ Одержуємо перший базисний розв'язок даної СЛР

$$E_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2-й крок. Покладемо $x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0.$ Тоді $x_2 = -\frac{5}{2}$ і $x_1 = -\frac{1}{2}.$ Одержуємо другий базисний розв'язок даної СЛР

$$E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3-й крок. Покладемо $x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 1.$ Тоді $x_2 = \frac{5}{4}$ і $x_1 = -\frac{1}{4}.$ Одержуємо третій базисний розв'язок даної СЛР

$$E_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок даної СЛР – це (як завжди) лінійна комбінація базисних розв'язків: $c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2 + c_3 \cdot E_3$, де c_1, c_2, c_3 – довільні константи.

6 ЛІНІЙНИЙ ОПЕРАТОР

Нехай V і W – векторні простори, розмірності яких відповідно дорівнюють n та m. ***Оператором*** A, що діє з векторного простору V у векторний простір W, називають відображення $A: V \to W$, яке кожному вектору $\overline{x} \in V$ ставить у відповідність єдиний вектор $\overline{y} \in W$. При цьому використовують позначення $\overline{y} = A(\overline{x})$ або просто $\overline{y} = A\overline{x}$.

Оператор $A: V \to W$ називають ***лінійним***, якщо для будь-яких $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V$ і довільного числа λ виконуються такі дві умови:

1) $A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = A(\overline{x}_1) + A(\overline{x}_2)$;
2) $A(\lambda \cdot \overline{x}) = \lambda \cdot A(\overline{x})$.

Якщо $V = W$, то лінійний оператор $L: V \to V$ називають ***лінійним перетворенням*** векторного простору V.

Якщо $W = R$ (де R – поле дійсних чисел), то лінійний оператор $L: V \to R$ називають ***лінійним функціоналом***.

Лінійний оператор $L: V \to W$ називається ***ізоморфізмом***, якщо виконуються такі умови:

1) якщо $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V$ і $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$, то $L(\overline{x}_1) \neq L(\overline{x}_2)$;
2) $L(V) = W$, тобто для будь-якого $\overline{y} \in W$ існує $\overline{x} \in V$ такий, що $L(\overline{x}) = \overline{y}$.

Якщо для векторних просторів V і W існує ізоморфізм $L: V \to W$, то кажуть, що векторні простори V і W є ***ізоморфними***.

Нехай V і W – векторні простори, розмірності яких, відповідно, n і m. Зафіксуємо базиси $E = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_m)$ і $U = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n)$, що належать, відповідно, векторному простору V і векторному простору W. Якщо L – лінійний оператор з векторного простору V у векторний простір W, то існують числа b_{ij} такі, що виконуються рівності:

$$\begin{cases} L(\bar{e}_1) = b_{11} \cdot \bar{u}_1 + b_{12} \cdot \bar{u}_2 + ... + b_{1n} \cdot \bar{u}_n, \\ L(\bar{e}_2) = b_{21} \cdot \bar{u}_1 + b_{22} \cdot \bar{u}_2 + ... + b_{2n} \cdot \bar{u}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L(\bar{e}_m) = b_{m1} \cdot \bar{u}_1 + b_{m2} \cdot \bar{u}_2 + ... + b_{mn} \cdot \bar{u}_n. \end{cases}$$

Отже, лінійному оператору L природним чином ставиться у ***відповідність матриця*** розмірності $n \times m$: $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & ... & b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$. Зрозуміло, що компоненти цієї матриці залежать від вибору базисів у векторних просторах V і W. Зокрема, якщо ми маємо лінійне перетворення φ векторного простору розмірності n, то, зафіксувавши базис $E = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$, ми одержимо відповідну квадратну матрицю.

Введемо деякі поняття, що пов'язані з лінійним оператором $\varphi : V \to W$.

Множина $Ker(\varphi) = \{\bar{x} \in V \mid \varphi(\bar{x}) = \bar{0}_W\}$ називається ***ядром*** лінійного оператора φ. Зазвичай через $\mathrm{Im}(\varphi)$ позначають множину значень (або образ) лінійного перетворення φ. Тобто, $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(\bar{x}) \mid \bar{x} \in V\}$. Легко перевірити, що $Ker(\varphi)$ і $\mathrm{Im}(\varphi)$ є, відповідно, підпросторами векторного простору V і W.

6.1 Матриця лінійного оператора

Приклад 1. Нехай $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Перевірити, що перетворення $A(\bar{x}) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_3)$ є лінійним і знайти матрицю цього перетворення в базисі $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$.

Розв'язання. Виходячи з означення, нам треба перевірити дві тотожності, а саме:

1. $A(\bar{x} + \bar{y}) = A(\bar{x}) + A(\bar{y})$;
2. $A(\lambda \cdot \bar{x}) = \lambda \cdot A(\bar{x})$,

де λ – довільне число; $\bar{x}$ і $\bar{y}$ – довільні елементи векторного простору R^3.

Перевіряємо першу тотожність. Нехай $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A((x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)) =$$
$$= (x_1 + y_1 + 2(x_3 + y_3), x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - (x_3 + y_3), x_1 + y_1 - (x_3 + y_3)).$$

Тепер обчислимо $A(\bar{x}) + A(\bar{y})$. Маємо

$$A(\bar{x})+A(\bar{y})=\left(x_1+2x_3,\ x_1+x_2-x_3,\ x_1-x_3\right)+\left(y_1+2y_3,\ y_1+y_2-y_3,\ y_1-y_3\right)=$$
$$=\left(x_1+y_1+2(x_3+y_3),\ x_1+y_1+x_2+y_2-(x_3+y_3),\ x_1+y_1-(x_3+y_3)\right)=$$
$$=A(\bar{x}+\bar{y}).$$

Перевіряємо другу тотожність.

$$A(\lambda\bar{x})=A\big(\lambda(x_1,x_2,x_3)\big)=A\big((\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)\big)=$$
$$=(\lambda x_1+2\lambda x_3,\ \lambda x_1+\lambda x_2-\lambda x_3,\ \lambda x_1-\lambda x_3)=\lambda(x_1+2x_3,\ x_1+x_2-x_3,\ x_1-x_3)=\lambda A(\bar{x}).$$

Отже, A є лінійним перетворенням векторного простору R^3.

Тепер знайдемо матрицю лінійного перетворення A в стандартному (декартовому) базисі $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$. Для цього подіємо перетворенням A на базисні вектори $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$. Маємо: $A(\bar{i})=A\big((1,0,0)\big)=(1,1,1)$. $A(\bar{j})=A\big((0,1,0)\big)=(0,1,0)$. $A(\bar{k})=A\big((0,0,1)\big)=(2,-1,-1)$. Матриця лінійного перетворення A в базисі $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$ має вигляд $M_A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

Приклад 2. Нехай P_3- векторний простір всіх многочленів, степінь кожного з яких не перевищує 3. В базисі $(1;x;x^2;x^3)$ знайти матрицю лінійного оператора диференціювання (позначимо його через D).

Розв'язання. Подіємо оператором на базисні многочлени векторного простору P_3. Одержуємо: $D(1)=0=0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$; $D(x)=1=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$; $D(x^2)=2x=0\cdot 1+2\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$; $D(x^3)=3x^2=0\cdot 1+0\cdot x+3\cdot x^2+0\cdot x^3$. Отже, матриця M_D лінійного оператора D має вигляд

$$M_D=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Приклад 3. В декартовій системі координат задано пряму $L:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$. Довести, що симетрія відносно прямої L є лінійним перетворенням. Знайти матрицю цього перетворення в стандартному базисі а також його ядро і образ.

Розв'язання. Нехай $A(x_0, y_0, z_0)$ – довільна точка в декартовому просторі. Через $A'(x'; y'; z')$ позначимо точку, яка симетрична точці A відносно даної прямої L. Складемо рівняння площини P, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої L. Для цього ми застосуємо такий факт: рівняння площини, яка проходить через точку з координатами (x_0, y_0, z_0) і перпендикулярна до вектора $\overline{N}(A, B, C)$ має вигляд $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(x - z_0) = 0.$ В даному випадку напрямний вектор даної прямої (тобто вектор $\overline{q}(1;2;1)$) перпендикулярний до площини P. Рівняння площини P має вигляд

$$1 \cdot (x - x_0) + 2 \cdot (y - y_0) + 1 \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Запишемо рівняння даної прямої L в параметричній формі: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = t$ або $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = t. \end{cases}$ Значення x, y, z підставимо в (1). Одержуємо: $t - x_0 + 2 \cdot (2t - y_0) + t - z_0 = 0.$ Звідси $t = \frac{x_0 + 2 \cdot y_0 + z_0}{6}$. Отже, перетин прямої L і площини P є точка з координатами $\left(\frac{x_0}{6} + \frac{y_0}{3} + \frac{z_0}{6}; \frac{x_0}{3} + \frac{2 \cdot y_0}{3} + \frac{z_0}{3}; \frac{x_0}{6} + \frac{y_0}{3} + \frac{z_0}{6} \right)$. Очевидно, що ця точка є серединою відрізка AA'. Отже,

$$\frac{x' + x_0}{2} = \frac{x_0}{6} + \frac{y_0}{3} + \frac{z_0}{6}, \quad \frac{y' + y_0}{2} = \frac{x_0}{3} + \frac{2 \cdot y_0}{3} + \frac{z_0}{3}, \quad \frac{z' + z_0}{2} = \frac{x_0}{6} + \frac{y_0}{3} + \frac{z_0}{6}.$$

З останніх трьох рівностей випливає: $x' = -\frac{2 \cdot x_0}{3} + \frac{2 \cdot y_0}{3} + \frac{z_0}{3}$, $y' = \frac{2 \cdot x_0}{3} + \frac{y_0}{3} + \frac{2 \cdot z_0}{3}$, $z' = -\frac{2 \cdot x_0}{3} + \frac{2 \cdot y_0}{3} + \frac{z_0}{3}$. Таким чином, симетрія відносно прямої L задається відображенням

$$F : (x_0; y_0; z_0) \mapsto \left(-\frac{2 \cdot x_0}{3} + \frac{2 \cdot y_0}{3} + \frac{z_0}{3}; \frac{2 \cdot x_0}{3} + \frac{y_0}{3} + \frac{2 \cdot z_0}{3}; -\frac{2 \cdot x_0}{3} + \frac{2 \cdot y_0}{3} + \frac{z_0}{3} \right).$$

Легко перевірити, що відображення F є лінійним перетворенням. Знайдемо матрицю цього перетворення в стандартному базисі $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \right)$. Для цього подіємо перетворенням F на базисні вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Маємо: $F(\overline{i}) = F\left((1;0;0) \right) = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right)$. $F(\overline{j}) = F((0;1;0)) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$. $F(\overline{k}) = F((0;0;1)) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right)$.

Матриця лінійного перетворення F в базисі $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$ має вигляд $M_F=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Тепер знайдемо ядро лінійного перетворення L. Для цього нам треба розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Оскільки $\det\left(M_F\right)\neq 0$, то рівняння має лише нульовий розв'язок. Отже, $Ker\left(L\right)=\{0\}$. Далі, очевидно, що кожна точка простору є образом деякої точки при перетворенні L. Тобто, $\operatorname{Im}(L)=R^3$.

Приклад 4. На площині задано декартову систему координат. Показати, що поворот на 30° навколо початку координат проти ходу годинникової стрілки є лінійним перетворенням. В стандартному базисі знайти матрицю цього перетворення, а також його ядро і образ.

Розв'язання. Нехай $A(x;y)$ – довільна точка на площині. Через $C(x';y')$ позначимо образ точки A при повороті площини на 30° проти ходу годинникової стрілки навколо початку координат.

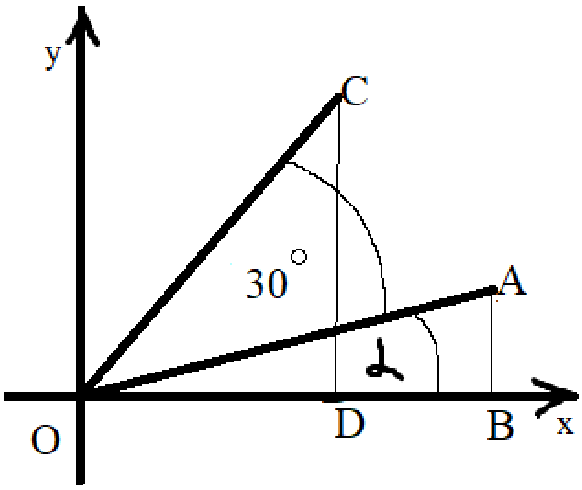

Рисунок 7

Кут $\angle AOB$ позначимо через α, тоді кут $\angle COD$ дорівнює $30^\circ+\alpha$. Наша задача виразити x' і y' через x і y. Очевидно, що $|OA|=|OC|$, $\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Далі, $\frac{|OD|}{|OC|}=\frac{x'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos(30^\circ+\alpha)=$ $=\cos30^\circ\cdot\cos\alpha-\sin30^\circ\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Звідси випливає, що $\frac{x'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Помножимо останню рівність на $\sqrt{x^2+y^2}$. Одержимо: $x'=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot y$.

Далі, $\frac{|CD|}{|OC|}=\frac{y'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin(30^\circ+\alpha)=\sin30^\circ\cdot\cos\alpha+\cos30^\circ\cdot\sin\alpha=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Звідси маємо $\frac{y'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Обидві частини останньої рівності помножимо на $\sqrt{x^2+y^2}$. Одержимо $y'=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y$. Таким чином, поворот площини навколо початку координат на 30° проти ходу годинникової стрілки задається відображенням $R^{30^\circ}:(x;y)\mapsto\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot y;\ \frac{1}{2}\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y\right)$. Якщо діяти так само, як і в прикладі 1, то легко пересвідчитися, що відображення R^{30° є лінійним перетворенням площини xOy. Знайдемо матрицю цього перетворення в стандартному базисі $(\bar{i};\bar{j})$. Для цього подіємо перетворенням R^{30° на базисні вектори $\bar{i},\bar{j}$. Маємо: $R^{30^\circ}(\bar{i})=R^{30^\circ}((1;0))=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$. $R^{30^\circ}(\bar{j})=R^{30^\circ}((0;1))=\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Матриця лінійного перетворення R^{30° має вигляд

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо ядро перетворення $0=\overline{b}_t$. Для цього нам треба розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Оскільки $\det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \neq 0,$ то рівняння має лише нульовий розв'язок. Отже, $Ker(L)=\{0\}$. Далі, очевидно, що кожна точка площини є образом деякої точки при перетворенні R^{30°. Тобто, $\mathrm{Im}(R^{30^\circ}) = R^2$.

6.2 Власні значення і власні вектори лінійного перетворення (матриці)

Розглянемо векторний простір R^n, елементами якого є дійсні матриці розмірності $n\times 1$. Нехай φ − лінійне перетворення векторного простору R^n.

Означення. Ненульовий вектор $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, що належить лінійному простору R^n, називають **власним вектором** лінійного перетворення φ, якщо знайдеться число $\lambda \in R$ таке, що $\varphi(\overline{x}) = \lambda \cdot \overline{x}$. Число λ називають **власним значення** (або **власним числом**) лінійного перетворення φ.

У векторному просторі R^n зафіксуємо деякий базис. В цьому базисі лінійному перетворенню φ відповідає квадратна матриця A розмірності $n\times n$. Переформулюємо означення власного вектора і власного значення мовою матриць.

Означення. Ненульовий вектор $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, що належить лінійному простору R^n, називають **власним вектором** матриці A, якщо існує число

$\lambda \in R$ таке, що $A \cdot \overline{x} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Число λ називають **власним значенням** (або **власним числом**) матриці A. Зауважимо, що $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – це звичайне множення квадратної матриці A розмірності $n \times n$ на матрицю $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ розмірності $n \times 1$. В результаті множення матриць одержуємо матрицю розмірності $n \times 1$.

6.3 Алгоритм знаходження власних значень і власних векторів матриці A

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

1-й крок. Розв’язуємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ $(k \le n)$ – це і є власні значення матриці A.

2-й крок. Для кожного власного значення λ_i шукаємо всі ненульові розв’язки однорідної системи лінійних рівнянь (ОСЛР)

$$\left(A - \lambda_i \cdot E\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Кожний ненульовий розв'язок останньої ОСЛР є власним вектором, що відповідає власному числу λ_i.

Приклад 1. Знайти власні значення і власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

Розв'язання. 1. Шукаємо корені характеристичного рівняння $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0$ або $\lambda^2-\lambda-6=0$. Отже, $\lambda_1=3$ і $\lambda_2=-2$ – це власні значення матриці A.

2. Шукаємо власні вектори матриці A що відповідають власному числу $\lambda_1=3$. Для цього треба знайти всі ненульові розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь $\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ або $\begin{cases}(1-3)x_1+2x_2=0,\\ 3x_1-3x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_1+2x_2=0,\\ 3x_1-3x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow -x_1+x_2=0.$ Отже, всі вектори вигляду $\begin{pmatrix}c\\ c\end{pmatrix}$, де $c\neq 0$, є власними векторами, що відповідають власному числу 3. Зокрема, поклавши $c=1$, одержуємо конкретний власний вектор $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

3. Аналогічно шукаємо власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_2=-2$. Для цього знаходимо всі ненульові розв'язки ОСЛР:

$\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ або $\begin{cases}3x_1+2x_2=0,\\ 3x_1+2x_2=0.\end{cases}$ Отже, всі вектори вигляду $\begin{pmatrix}2c\\ -3c\end{pmatrix}$, де $c\neq 0$, є власними векторами, що відповідають власному значенню $\lambda_2=-2$. Зокрема, поклавши $c=1$, одержуємо конкретний власний вектор $\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$.

Приклад 2. Знайти власні числа і власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. 1. Шукаємо корені характеристичного рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$ Коли ми розгорнемо детермінант, то одержимо кубічне рівняння: $-(1-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda)=0$. Звідси легко знаходимо усі власні значення даної матриці: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$

2. Шукаємо власні вектори матриці A що відповідають власному числу $\lambda_1 = 2.$ Для цього треба знайти всі ненульові розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ або $\begin{cases} -x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ -2x_1 + 0x_2 - 3x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

З першого і третього рівнянь випливає, що $x_1 = x_3 = 0.$ Загальний ненульовий розв'язок останньої СЛР можна записати у формі $\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$, де $c \neq 0.$ Таким чином ми одержали всі власні вектори даної матриці, що відповідають власному значенню $\lambda_1 = 2.$ Зокрема, поклавши $c = 1,$ одержуємо конкретний власний вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3. Тепер шукаємо власні вектори матриці A, що відповідають власному значенню $\lambda_2 = 1.$ Для цього треба знайти всі ненульові розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ або $\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

З третього рівняння випливає, що $x_3 = 0.$ Загальний ненульовий розв'язок останньої системи можна записати у формі $\begin{pmatrix} c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix}$. Таким чином ми одержали всі власні вектори даної матриці, що відповідають власному значенню $\lambda_2 = 1.$ Зокрема, поклавши $c = 1,$ одержуємо конкретний власний вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4. Залишається знайти власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_3 = -1.$ Для цього шукаємо всі ненульові розв'язки ОСЛР:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння випливає, що $x_1 = 0.$ Загальний ненульовий розв'язок останньої системи записуємо у формі $\begin{pmatrix} 0 \\ 2c \\ 3c \end{pmatrix},$ де $c \neq 0.$ Зокрема, поклавши $c = 1,$ одержуємо конкретний власний вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Приклад 3. Знайти власні числа і власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Розв'язання. 1. Шукаємо корені характеристичного рівняння $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda + 2) = 0.$ Отже, $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = -2$ є власними числами даної матриці.

2. Шукаємо власні вектори матриці $A,$ що відповідають власному числу $\lambda_1 = 2.$ Для цього треба знайти всі ненульові розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ або

$$\begin{cases} -2x_1 + 0x_2 + x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ 4x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2x_1 + 0x_2 + x_3 = 0. \; x_1 = \frac{1}{2}. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Остання СЛР містить дві вільні невідомі: x_2 і $x_3.$ Знайдемо два фундаментальні розв'язки нашої СЛР. Для цього спочатку покладемо

$x_2=1$ і $x_3=0$. Очевидно, що в цьому випадку $x_1=0$. Отже, ми одержуємо перший фундаментальний розв'язок СЛР, а саме: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Для одержання другого фундаментального розв'язку покладемо $x_2=0$ і $x_3=1$. Тоді $x_1=\dfrac{1}{2}$. Одержуємо другий фундаментальний розв'язок ОСЛР, а саме: $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.

Помножимо його на 2. Одержуємо фундаментальний розв'язок $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Загальний розв'язок ОСЛР – це лінійна комбінація двох фундаментальних розв'язків:

$$c_1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_2\\0\\2c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_2\\c_1\\2c_2\end{pmatrix},$$

де c_1 і c_2 – довільні числа. Оскільки власний вектор завжди є ненульовим, то нас цікавлять лише ненульові розв'язки ОСЛР, тобто, c_1 і c_2 не можуть одночасно дорівнювати 0.

3. Тепер шукаємо власні вектори матриці A, що відповідають власному значенню $\lambda_2=-2$. Для цього треба знайти всі ненульові розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь $\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\4&0&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ або

$\begin{cases}2x_1+0x_2+x_3=0,\\0x_1+4x_2+0x_3=0,\\4x_1+0x_2+2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1+0x_2+x_3=0,\\0x_1+4x_2+0x_3=0.\end{cases}$ Очевидно, що $x_2=0$.

Загальний ненульовий розв'язок останньої СЛР можна записати у формі $\begin{pmatrix}c\\0\\2c\end{pmatrix}$, де $c\neq 0$. Саме такого вигляду вектори утворюють множину всіх власних векторів даної матриці, що відповідають власному числу $\lambda_2=-2$.

Далі, квадратні матриці B і C розмірності $n \times n$ називаються **подібними**, якщо існує невироджена матриця P така, що $C = P \cdot B \cdot P^{-1}$.

Важливою є нижчевказана теорема.

Теорема 1. Якщо квадратні матриці B і C розмірності $n \times n$ є подібними, то $\det(B - x \cdot E) = \det(C - x \cdot E)$. Іншими словами, характеристичні многочлени подібних матриць однакові.

З цієї теореми безпосередньо випливає, що спектри (тобто множини власних значень) подібних матриць збігаються. Крім того нагадаємо, що квадратні матриці лінійного перетворення φ векторного простору R^n в різних базисах подібні між собою.

6.4 Діагоналізація квадратної матриці

Кажуть, що квадратна матриця A розмірності $n \times n$ **зводиться до діагональної** матриці $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, якщо існує невироджена матриця P така, що $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

(*Зазначимо, що числа, які розташовані на головній діагоналі матриці* D*, можуть повторюватися*).

Теорема 2. Нехай квадратна матриця A розмірності $n \times n$ **зводиться до діагональної** матриці $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$. Тоді стовпці матриці P є власними векторами матриці A. Числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ є відповідними власними значеннями матриці A.

Приклад 1. Довести, що матриця $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ не зводиться до діагональної.

Розв'язання. Знайдемо власні значення матриці A. Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. В даному випадку маємо один корінь (він дорівнює 3) кратності 2. Припустимо, що матриця A зводиться до діагональної матриці. Це означає, що існує невироджена матриця P така, що $A = P \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$. Оскільки $P \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, то одержуємо суперечність. Отже, матриця A не зводиться до діагональної.

Теорема 3. Квадратна матриця розмірності $n \times n$ зводиться до діагональної тоді і лише тоді, коли вона має n лінійно незалежних власних векторів.

6.5 Алгоритм зведення квадратної матриці A до діагонального вигляду

1. Знаходимо усі власні числа матриці A, розмірність якої $n \times n$. Якщо коренів характеристичного рівняння (з урахуванням кратності) менше за n, то матриця A не зводиться до діагональної. Якщо коренів характеристичного рівняння рівно n, то переходимо до наступного кроку.

2. Знаходимо усі лінійно незалежні власні вектори $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_k$, що відповідають знайденим власним значенням. Якщо $k < n$, то матриця не зводиться до діагональної. Якщо $k = n$, то матриця A зводиться до діагональної і ми переходимо до кроку 3.

3. Утворюємо матрицю P, стовпці якої (йдемо зліва направо) – це власні вектори $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_n$, причому власному значенню λ_i має відповідати власний вектор $\overline{p}_i$. З власних значень матриці A формуємо діагональну матрицю, а саме: $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$. Одержуємо $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Приклад 1. Матрицю $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ звести до діагонального вигляду і виконати перевірку.

Розв'язання. Спочатку знаходимо всі власні значення даної матиці. Для цього розв'язуємо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 6 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0.$ Отже, власні значення $\lambda_1 = -1$ і $\lambda_2 = 6.$ Тепер шукаємо відповідні власні вектори. Для власного значення $\lambda_1 = -1$ складаємо однорідну систему лінійних рівнянь $\left(\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 6x_1 + x_2 = 0.$ Беремо довільний ненульовий розв'язок ОСЛР, наприклад, $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Тепер шукаємо власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 6.$ Записуємо відповідну однорідну систему лінійних рівнянь $\left(\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x_1 + x_2 = 0.$ Очевидно, що ненульовий вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ є власним вектором, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 6.$

Відомо, що власні вектори, що відповідають різним власним значенням, є лінійно незалежними. (В даному випадку цей факт легко перевірити і безпосередньо). Отже, згідно з алгоритмом, дана матриця зводиться до діагональної $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 6 & 1\end{pmatrix}^{-1}$.

Виконаємо перевірку. $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 6 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -6 & 6\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -6 & 6\end{pmatrix}$.

Перевірка підтверджує нашу відповідь.

Приклад 2. Матрицю $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 6\\ 4 & -1 & 4\\ 8 & -2 & 9\end{pmatrix}$ звести до діагонального вигляду і виконати перевірку.

Розв'язання. Спочатку шукаємо всі власні значення даної матриці. Для цього розв'язуємо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix}7-\lambda & 2 & 6\\ 4 & -1-\lambda & 4\\ 8 & -2 & 9-\lambda\end{vmatrix}=0.$

Це рівняння запишемо в розгорнутому вигляді $(\lambda-7)\cdot(\lambda+1)\cdot(9-\lambda)+48\cdot(\lambda+1)=0$ або $(\lambda+1)\cdot(\lambda^2-16\lambda+15)=0.$

З останнього рівняння легко знаходимо власні значення: $\lambda_1=15,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=1.$ Оскільки власними значеннями матриці A є три попарно різні числа, то дана матриця зводиться до діагональної. Тепер шукаємо відповідні власні вектори. Для власного значення $\lambda_1=15$ складаємо однорідну систему лінійних рівнянь

$$\left(\begin{pmatrix}7 & 2 & 6\\ 4 & -1 & 4\\ 8 & -2 & 9\end{pmatrix}-15\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-8x_1+2x_2+6x_3=0,\\ 4x_1-16x_2+4x_3=0,\\ 8x_1-2x_2-6x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-4x_2+x_3=0,\\ 4x_1-x_2-3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-4x_2+x_3=0,\\ 15x_2-7x_3=0.\end{cases}$$

Одним з розв'язків останньої ОСЛР є вектор $\begin{pmatrix}13\\ 7\\ 15\end{pmatrix}$, який є власним вектором, що відповідає власному значенню $\lambda_1=15$.

Далі шукаємо власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2 = -1$.

Розв'язуємо ОСЛР $\left(\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 8 & -2 & 9 \end{pmatrix} - (-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 0, \\ 8x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ \quad\quad - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Легко перевірити, що вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ є ненульовим розв'язком останньої СЛР, а, отже, є власним вектором, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = -1$.

Тепер шукаємо власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_3 = 1$.

Для цього розв'язуємо ОСЛР $\left(\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 8 & -2 & 9 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 8x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Одним з ненульових розв'язків останньої системи є вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Цей вектор є власним вектором даної матриці, що відповідає власному числу $\lambda_3 = 1$. Вектори $\begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ відповідають попарно різним власним значенням і є лінійно незалежними. (В даному випадку цей факт легко перевірити і безпосередньо). Отже, згідно з алгоритмом, дана матриця зводиться до діагональної

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 8 & -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Виконаємо перевірку $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 8 & -2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195 & 1 & 1 \\ 105 & -1 & 0 \\ 225 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195 & 1 & 1 \\ 105 & -1 & 0 \\ 225 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Перевірка підтверджує правильність виконаних дій.

Приклад 3. Матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ звести до діагонального вигляду і виконати перевірку.

Розв'язання. Для знаходження власних чисел треба розв'язати характеристичне рівняння

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 4 & 4-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot(1-\lambda) + 24\cdot\lambda - 16 = 9\cdot\lambda^2 - \lambda^3 = 0.$ Отже, дана матриця має два власних значення: $\lambda_1 = 9$ і $\lambda_2 = 0$. Далі шукаємо власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 9$. Для цього знаходимо будь-який ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} - 9\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \quad - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Легко переконатися, що вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ є ненульовим розв'язком останньої СЛР а, отже, він є власним вектором даної матриці, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 9$.

Тепер шукаємо власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_2 = 0$. Система лінійних рівнянь, матриця коефіцієнтів якої дорівнює

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ і має вигляд: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$ Лінійно незалежні вектори $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, очевидно є розв'язками останньої СЛР, а, отже, власними векторами матриці *A*. Таким чином, три лінійно незалежні вектори (їх лінійну незалежність можна легко перевірити) $\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ є власними векторами матриці *A*. Отже, згідно з теоремою 2, дана матриця зводиться до діагональної

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\4&4&4\\4&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\4&0&1\\4&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&-1\\4&0&1\\4&1&0\end{pmatrix}^{-1}.$$

Виконаємо перевірку $\begin{pmatrix}1&1&1\\4&4&4\\4&4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&-1\\4&0&1\\4&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0&0\\36&0&0\\36&0&0\end{pmatrix}\cdot$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\4&0&1\\4&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0&0\\36&0&0\\36&0&0\end{pmatrix}\cdot$$

Перевірка підтверджує правильність виконаних дій.

Приклад 4. Матрицю $A=\begin{pmatrix}-2&6&-6\\-5&11&-10\\-3&6&-5\end{pmatrix}$ звести до діагональної форми і виконати перевірку.

Розв'язання. Спочатку знаходимо власні значення матриці *A*. Для цього розв'язуємо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix}-2-\lambda&6&-6\\-5&11-\lambda&-10\\-3&6&-5-\lambda\end{vmatrix}=0.$ Або в розгорнутій формі $(\lambda+2)(11-\lambda)(\lambda+5)-72\lambda-108=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0.$ Останнє рівняння запишемо в дещо іншій формі: $\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda+\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda(\lambda^2-4\lambda+4)+\lambda-2=0.$ Або $(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0.$ Отже, одержуємо два власних значення матриці *A*. А саме: $\lambda_1=1$ і $\lambda_2=2.$ Далі шукаємо власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_1=1.$ Для цього знайдемо ненульові розв'язки матричного рівняння: $\left(\begin{pmatrix}-2&6&-6\\-5&11&-10\\-3&6&-5\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$ Спростимо останнє рівняння:

$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -6 \\ -5 & 10 & -10 \\ -3 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Одержане рівняння еквівалентне однорідній системі лінійних рівнянь: $\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0, \\ -5x_1 + 10x_2 - 10x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$ Після очевидних спрощень переконуємося, що остання СЛР рівносильна лінійному рівнянню $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0.$ Легко перевірити, що розв'язки цього рівняння $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (які є власними значеннями матриці A) лінійно незалежні.

Тепер знайдемо власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 2$. Для цього знайдемо ненульові розв'язки матричного рівняння

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -5 & 11 & -10 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Або $\begin{pmatrix} -4 & 6 & -6 \\ -5 & 9 & -10 \\ -3 & 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Одержане матричне рівняння рівносильне однорідній системі лінійних рівнянь $\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0, \\ -5x_1 + 9x_2 - 10x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

Останню СЛР зведемо до східчастої форми. Для цього перше рівняння помножимо на (-5), друге рівняння – на 4. Додамо одержані рівняння і результат запишемо замість другого рівняння: $\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0, \\ 6x_2 - 10x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$ Тепер перше рівняння множимо на (-3), третє – на 4, додаємо одержані рівняння і результат записуємо замість третього рівняння: $\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0, \\ 6x_2 - 10x_3 = 0, \\ 6x_2 - 10x_3 = 0. \end{cases}$

Третє рівняння останньої СЛР відкидаємо. Одержуємо $\begin{cases} -4x_1+6x_2-6x_3=0, \\ \qquad 6x_2-10x_3=0. \end{cases}$

Вільній невідомій x_3 надаємо значення $x_3=3$. Звідси $x_2=5$ і $x_1=3$. Отже, $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}-$ це власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2=2$. Тепер ми готові записати матрицю $P=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ і видати остаточний результат:

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -5 & 11 & -10 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Для того, щоб виконати перевірку нам не обов'язково шукати матрицю P^{-1}. Достатньо переконатися, що $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -5 & 11 & -10 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}\cdot P=P\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7 ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР

7.1 Основні означення і приклади евклідових просторів

Нехай $V-$ векторний простір. Кожній впорядкованій парі векторів $\langle \overline{a},\overline{b}\rangle$ ставимо у відповідність дійсне число, яке ми позначимо через $(\overline{a},\overline{b})$, причому виконуються такі властивості:

1. $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$;
2. $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=(\overline{a}+\overline{c},\overline{b}+\overline{c})$;
3. $\lambda(\overline{a},\overline{b})=(\lambda\cdot\overline{a},\overline{b})=(\overline{a},\lambda\cdot\overline{b})$ для будь-якого числа λ і будь-яких векторів $\overline{a},\overline{b}\in V$;
4. Якщо $\overline{a}\neq\overline{0}$, то $(\overline{a},\overline{a})>0$, якщо $\overline{a}=\overline{0}$, то $(\overline{a},\overline{a})=0$.

Якщо на векторному просторі V крім лінійних операцій (додавання векторів і множення числа на вектор) визначена скалярна операція, що задовольняє умови 1-4, то такий векторний простір називають ***евклідовим простором***, а операцію $(\overline{a},\overline{b})$ називають ***скалярним добутком***.

Приклад. Розглянемо векторний простір R^n, елементами якого є матриці-рядки розмірності $1\times n$. Введемо бінарну скалярну операцію таким чином: якщо $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ і $\overline{y}=(\overline{y}_1,\overline{y}_2,...,\overline{y}_n)$, то, за означенням, $(\overline{x},\overline{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$. Легко перевірити, що $(\overline{x},\overline{y})$ є скалярним добутком.

Приклад. Нехай $C_{[a,b]}$ – векторний простір неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Якщо функції $\varphi,\psi\in C_{[a,b]}$, то (за означенням) $(\varphi,\psi)=\int_a^b\varphi(x)\cdot\psi(x)dx$. Можна перевірити, що операція (φ,ψ) є скалярним добутком.

7.2 Нерівність Коші-Буняковського. Норма, відстань, ортогональність векторів в евклідовому просторі

В цьому пункті ми наведемо основні означення щодо евклідового простору і сформулюємо низку теорем, які систематично застосовуються при розв'язуванні різноманітних задач лінійної алгебри.

Нехай E – евклідів простір. ***Нормою (або довжиною)*** вектора $\overline{a}\in E$ називають число $\|\overline{a}\|=\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}$. Вектор $\overline{a}$ називають ***нормованим*** (або ***одиничним***), якщо $\|\overline{a}\|=1$. Зазначимо, що будь-який вектор $\overline{x}\in E$ колінеарний до нормованого вектора $\dfrac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}$.

За допомогою норми в евклідовому просторі можна визначити відстань між векторами, а саме: $d(\overline{x},\overline{y})=\|\overline{x}-\overline{y}\|$.

Вектори $\overline{a},\overline{b}\in E$ називаються **ортогональними**, якщо $(\overline{a},\overline{b})=0$.

Теорема 1. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ довільного евклідового простору має місце нерівність Коші-Буняковського $(\overline{a},\overline{b})^2\le(\overline{a},\overline{a})(\overline{b},\overline{b})$.

Теорема 2. Якщо в евклідовому просторі E ненульові вектори $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_k$ попарно ортогональні, то множина векторів $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_k\}$ є лінійно незалежною.

Наслідок. Якщо в n-вимірному евклідовому просторі ненульові вектори $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ попарно ортогональні, то впорядкована множина векторів $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$ утворює базис. Такий базис називають **ортогональним**.

Базис називають ***ортонормованим***, якщо він ортогональний і кожний базисний вектор є нормованим. Якщо ми маємо ортогональний базис $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n)$, то базис $\left(\frac{\bar{e}_1}{\|\bar{e}_1\|},\frac{\bar{e}_2}{\|\bar{e}_2\|},...,\frac{\bar{e}_n}{\|\bar{e}_n\|}\right)$ є ортонормованим.

7.3 Алгоритм Грама-Шмідта

Виходячи з конкретного базису $(\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n)$ евклідового простору E за допомогою алгоритму Грама-Шмідта можна сконструювати ортогональний базис $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n)$.

Алгоритм Грама-Шмідта

1. $\bar{e}_1=\bar{u}_1,$
2. $\bar{e}_2=\bar{u}_2-\frac{(\bar{e}_1,\bar{u}_2)}{(\bar{e}_1,\bar{e}_1)}\cdot\bar{e}_1,$
3. $\bar{e}_3=\bar{u}_3-\frac{(\bar{e}_1,\bar{u}_3)}{(\bar{e}_1,\bar{e}_1)}\cdot\bar{e}_1-\frac{(\bar{e}_2,\bar{u}_3)}{(\bar{e}_2,\bar{e}_2)}\cdot\bar{e}_2,$

....

n. $\bar{e}_n=\bar{u}_n-\frac{(\bar{e}_1,\bar{u}_n)}{(\bar{e}_1,\bar{e}_1)}\cdot\bar{e}_1-...-\frac{(\bar{e}_{n-1},\bar{u}_n)}{(\bar{e}_{n-1},\bar{e}_{n-1})}\cdot\bar{e}_{n-1}.$

Приклад 1. Сконструювати ортонормований базис в евклідовому просторі усіх многочленів P_2 на відрізку $[0,1]$, виходячи з базису $(1,\ x,\ 4x^2)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що в даному випадку під скалярним добутком многочленів $\varphi,\psi\in P_2$ розуміємо визначений інтеграл $\int_0^1\varphi(x)\cdot\psi(x)dx.$ Спочатку знайдемо ортогональний базис. Застосуємо алгоритм Грама-Шмідта $\bar{e}_1=\bar{u}_1=1$. Для знаходження $\bar{e}_2$ обчислимо $(\bar{e}_1,\bar{e}_1)$ і $(\bar{e}_1,\bar{u}_2)$.

Маємо $(\bar{e}_1,\bar{e}_1)=\int_0^1 1dx=1,$ $(\bar{e}_1,\bar{u}_2)=\int_0^1 1\cdot xdx=\frac{1}{2}.$ Отже, $\bar{e}_2=\bar{u}_2-\frac{(\bar{e}_1,\bar{u}_2)}{(\bar{e}_1,\bar{e}_1)}\cdot\bar{e}_1=x-\frac{1}{2}.$

Для обчислення $\overline{e}_3$ обчислимо $(\overline{e}_1,\overline{u}_3),(\overline{e}_2,\overline{u}_3)$ і $(\overline{e}_2,\overline{e}_2)$. Одержуємо:

$$(\overline{e}_1,\overline{u}_3)=\int_0^1 4x^2dx=\frac{4}{3},\ (\overline{e}_2,\overline{u}_3)=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)4x^2dx=\frac{1}{3},$$

$$(\overline{e}_2,\overline{e}_2)=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{12}.$$

Отже, $\overline{e}_3=\overline{u}_3-\dfrac{(\overline{e}_1,\overline{u}_3)}{(\overline{e}_1,\overline{e}_1)}\cdot\overline{e}_1-\dfrac{(\overline{e}_2,\overline{u}_3)}{(\overline{e}_2,\overline{e}_2)}\cdot\overline{e}_2=4x^2-\dfrac{4}{3}-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=4x^2-4x+\dfrac{2}{3}.$

Таким чином, ми одержали ортогональний базис $\left(1,\ x-\dfrac{1}{2},\ 4x^2-4x+\dfrac{2}{3}\right)$.

Залишається нормалізувати базисні вектори. Оскільки вище ми вже обчислили $(\overline{e}_1,\overline{e}_1)$ і $(\overline{e}_2,\overline{e}_2)$, то $\|\overline{e}_1\|=1$ і $\|\overline{e}_2\|=\dfrac{1}{\sqrt{12}}$. Залишається нормалізувати вектор $\overline{e}_3$. Позаяк $(\overline{e}_3,\overline{e}_3)=\displaystyle\int_0^1\left(4x^2-4x+\frac{2}{3}\right)^2dx=\frac{4}{45}$, то $|\overline{e}_3\|=\dfrac{2}{\sqrt{45}}$. Таким чином, у векторному просторі P_2 ми одержали ортонормований базис $\left(1,\ \sqrt{12}\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\sqrt{45}}{2}\cdot\left(4x^2-4x+\dfrac{2}{3}\right)\right)$.

7.4 Зведення симетричної матриці до діагонального вигляду

Нагадаємо, що матриця A називається симетричною, якщо $A=A^T$ (тут через A^T ми позначаємо матрицю, яка є транспонованою до матриці A). Для нас важливі нижчевказані теореми.

Теорема 1. Будь-яке власне значення симетричної матриці є дійсним числом.

Теорема 2. Якщо матриця A є симетричною, то два власні вектори, що відповідають двом різним власним значенням, є ортогональними.

Остання теорема дозволяє нам спростити процес діагоналізації симетричної матриці A. Розглянемо відповідний алгоритм у випадку, коли власні значення матриці A є попарно різними.

1. Знаходимо власні числа і відповідні власні вектори матриці A.
2. Утворюємо матрицю P, стовпці якої є власними векторами матриці A.
3. Утворюємо матрицю U, стовпці якої це нормалізовані стовпці матриці P. Матриця U є ортогональною, тому (див. [3]) $U^{-1}=U^T$.

4. Записуємо шукану рівність $A = U \cdot D \cdot U^T$, де $D = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

Приклад 1. Матрицю $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ звести до діагонального вигляду і виконати перевірку.

Розв'язання. Шукаємо корені характеристичного рівняння
$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2 \cdot (4-\lambda) - 2(5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0.$$

Отже, дана матриця має три попарно різних власних значення, а саме: $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 3.$ Далі шукаємо власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 6.$ Для цього знаходимо будь-який ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

$$\left(\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_1 - 2 \cdot x_2 + \ x_3 = 0, \Leftrightarrow \\ 0 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ \qquad - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Загальний ненульовий розв'язок останньої СЛР можна записати у формі $\begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$, де $c \neq 0.$ Зокрема $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – це конкретний власний вектор даної матриці, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 6.$

Тепер шукаємо власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 5.$ Для цього знаходимо будь-який ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

$$\left(\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + \ x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 - 0 \cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Множину ненульових розв’язків останньої СЛР можна подати у вигляді $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, де $c \neq 0$. Зокрема, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – це конкретний власний вектор даної матриці, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 5$.

Нарешті знайдемо власний вектор цієї матриці, що відповідає власному значенню $\lambda_3 = 3$. Для цього нам треба знайти довільний ненульовий розв’язок

СЛР $\left(\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_2 + 2 \cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Множину ненульових розв’язків останньої СЛР можна подати у вигляді $\begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$, де $c \neq 0$. Зокрема, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – це конкретний власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 3$. Далі, згідно з пунктом 2 нашого алгоритму, записуємо матрицю P, стовпці якої конкретні власні вектори даної матриці, що відповідають власним значенням $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 3$. А саме: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Для знаходження матриці U (див. відповідний алгоритм) залишається нормалізувати стовпці матриці P. Норма першого стовпця дорівнює $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Норма другого стовпця дорівнює $\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Норма третього стовпця дорівнює $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$. Тепер ми готові записати матрицю

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця U є ортогональною, то

$$U^{-1} = U^{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Залишається записати відповідь

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Перевірка підтверджує правильність відповіді.

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є корені, кратність яких більша за одиницю, то алгоритм зведення дійсної симетричної матриці A до діагонального вигляду дещо ускладнюється:

1. Розв'язуємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t$, кратність яких, відповідно, $k_1, k_2, ..., k_t$. Сума $k_1 + k_2 + ... + k_t$ має дорівнювати порядку матриці A. Тобто, $k_1 + k_2 + ... + k_t = n$.

2. Утворюємо відповідну діагональну матрицю D таким чином. Спочатку (рухаючись зверху вниз по головній діагоналі) записуємо (в кількості k_1) власне число λ_1. Після цього (в кількості k_2) на головній діагоналі записуємо власне число λ_2. І так далі – останні (в кількості k_t) діагональні елементи дорівнюють власному значенню λ_t.

3. Для власного значення λ_1 знаходимо фундаментальну систему розв'язків (ФСР) однорідної СЛР з матрицею $A - \lambda_1 \cdot E$. (Кількість фундаментальних розв'язків має дорівнювати кратності k_1). Якщо одержана ФСР не є ортогональною, то підбором або за допомого алгоритму Грама-Шмідта ортогоналізуємо її. Одержану ортогональну систему векторів нормалізуємо. Отримуємо $\bar{e}_1^1, \bar{e}_2^1, ..., \bar{e}_{k_1}^1$.

4. Те саме пророблюємо для власних чисел $\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_t$. У підсумку одержуємо n нормалізованих попарно ортогональних векторів $\bar{e}_1^1, ..., \bar{e}_{k_1}^1, \bar{e}_1^2, ..., \bar{e}_{k_2}^2, ..., \bar{e}_1^t, ..., \bar{e}_{k_t}^t$.

5. Утворюємо матрицю переходу P. Це матриця, стовпці якої (якщо йти зліва направо) є відповідними векторами $\bar{e}_1^1, ..., \bar{e}_{k_1}^1, \bar{e}_1^2, ..., \bar{e}_{k_2}^2, ..., \bar{e}_1^t, ..., \bar{e}_{k_t}^t$.

6. Записуємо відповідь $A = P \cdot D \cdot P^T$.

Приклад 2. Матрицю $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&4\\0&4&0\end{pmatrix}$ звести до діагонального вигляду і виконати перевірку.

Розв'язання. Спочатку шукаємо корені характеристичного рівняння $\begin{pmatrix}4-\lambda&0&0\\0&0-\lambda&4\\0&4&0-\lambda\end{pmatrix}=(4+\lambda)\cdot(4-\lambda)^2=0.$ Маємо два дійсні корені: $\lambda_1=-4$ (кратності 1) і $\lambda_2=4$ (кратності 2). Запишемо діагональну матрицю $D=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. Далі шукаємо власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1=-4$. Для цього знаходимо будь-який ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

$$\left(\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&4\\0&4&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}8\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0,\\ x_2+x_3=0.\end{cases}$$

Загальний ненульовий розв'язок останньої СЛР можна записати у формі $\begin{pmatrix}0\\-c\\c\end{pmatrix}$ де $c\neq 0$. Зокрема, $\overline{v}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ – це конкретний власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1=-4$.

Далі шукаємо власні вектори $\overline{v}_2$ і $\overline{v}_3$, що відповідають власному значенню $\lambda_2=4$. Для цього знаходимо будь-який ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

$$\left(\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&4\\0&4&0\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0,\\ x_2-x_3=0.\end{cases}$$

Загальний ненульовий розв'язок останньої СЛР можна записати у формі $\begin{pmatrix}k\\c\\c\end{pmatrix}$, де k і c одночасно не дорівнюють нулю.

Подальша наша задача, підібравши відповідні значення k і c, – знайти два конкретні ортогональні власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 4$. В цьому випадку, поклавши спочатку $k = 0$ і $c = 1$, одержуємо $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Далі, поклавши $k = 1$ і $c = 0$, одержуємо $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Легко перевірити, що скалярний добуток векторів $\bar{v}_2$ і $\bar{v}_3$ дорівнює нулю, тобто, ці вектори ортогональні. Теорема 2 нам гарантує, що вектор $\bar{v}_1$ ортогональний і до вектора $\bar{v}_2$ і до вектора $\bar{v}_3$.

(*Зауважимо, що в складніших випадках, для ортогоналізації власних векторів, що відповідають власному числу, яке є коренем характеристичного рівняння кратності більшої за одиницю, ми застосовуємо алгоритм Грама-Шмідта*).

Тепер записуємо матрицю P, стовпці якої конкретні власні вектори даної матриці, що відповідають власним значенням $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

А саме: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Залишається нормалізувати стовпці матриці P.

Норма першого стовпця дорівнює $\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Норма другого стовпця дорівнює $\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Норма третього стовпця дорівнює $\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$. Тепер ми готові записати матрицю $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$. Запишемо відповідь:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевірка підтверджує правильність відповіді.

8 БІЛІНІЙНІ І КВАДРАТИЧНІ ФУНКЦІЇ

8.1 Основні означення

Нехай $V-$ дійсний векторний простір. Функцію двох векторних змінних $\varphi: V\times V \to R,$ де $R-$ дійсні числа, називають ***білінійною функцією (або формою)***, якщо для будь-яких $\overline{x},\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{y},\overline{y}_1,\overline{y}_2 \in V$ і довільного числа $c\in R$ виконуються такі умови:

1. $\varphi(\overline{x}_1+\overline{x}_2,\overline{y})=\varphi(\overline{x}_1,\overline{y})+\varphi(\overline{x}_2,\overline{y})$;
2. $\varphi(\overline{x},\overline{y}_1+\overline{y}_2)=\varphi(\overline{x},\overline{y}_1)+\varphi(\overline{x},\overline{y}_2)$;
3. $\varphi(c\cdot\overline{x},\overline{y})=\varphi(\overline{x},c\cdot\overline{y})=c\varphi(\overline{x},\overline{y})$.

Скалярний добуток є прикладом білінійної функції. Нехай $V-$ скінченновимірний векторний простір розмірності *n.* Зафіксуємо в просторі V базис $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$. Білінійній функції $\varphi,$ що визначена на V, поставимо у відповідність матрицю $[\varphi]=\begin{pmatrix}\varphi(\overline{e}_1,\overline{e}_1) & \varphi(\overline{e}_1,\overline{e}_2) & ..... & \varphi(\overline{e}_1,\overline{e}_n)\\ \varphi(\overline{e}_2,\overline{e}_1) & \varphi(\overline{e}_2,\overline{e}_2) & ..... & \varphi(\overline{e}_2,\overline{e}_n)\\ ..... & ..... & ..... & .....\\ \varphi(\overline{e}_n,\overline{e}_1) & \varphi(\overline{e}_n,\overline{e}_2) & ..... & \varphi(\overline{e}_n,\overline{e}_n)\end{pmatrix}$.

Вона називається матрицею білінійної функції φ в базисі $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$.

Навпаки, якщо задано квадратну матрицю $\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & ..... & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & ..... & b_{2n}\\ ..... & ..... & ..... & .....\\ b_{n1} & b_{n2} & ..... & b_{nn}\end{pmatrix}$, то у фіксованому базисі $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$ їй відповідає білінійна форма $\psi(\overline{x},\overline{y})$. А саме: нехай $\overline{x}=\xi_1\cdot\overline{e}_1+\xi_2\cdot\overline{e}_2+...+\xi_n\cdot\overline{e}_n$ і $\overline{y}=\eta_1\cdot\overline{e}_1+\eta_2\cdot\overline{e}_2+...+\eta_n\cdot\overline{e}_n$.

Тоді $\psi(\overline{x},\overline{y})=\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\eta_j$.

Нижченаведені твердження можна перевірити прямим підрахунком.

Твердження 1. Якщо $A-$ матриця білінійної функції φ у базисі $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$, а $[\overline{x}]$ і $[\overline{y}]-$ координати векторів $\overline{x}$ і $\overline{y}$ у цьому ж базисі, то $\varphi(\overline{x},\overline{y})=[\overline{x}]^T\cdot A\cdot[\overline{y}]$.

Твердження 2. При переході до нового базису у векторному просторі V, матриця A білінійної функції φ перетворюється у матрицю A' за правилом

$$A'=P^T\cdot A\cdot P,$$

де P – матриця переходу до нового базису.

Нехай $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ – білінійна функція на векторному просторі розмірності n. Якщо $\bar{y}$ замінити на $\bar{x}$, то ми одержимо ***квадратичну функцію*** $\varphi(\bar{x},\bar{x})$. Якщо в деякому базисі $(\bar{g}_1,\bar{g}_2,...,\bar{g}_n)$ квадратична функція $\varphi(\bar{x},\bar{x})$ має вигляд $\varphi(\bar{x},\bar{x})=\lambda_1\xi_1^{\ 2}+\lambda_2\xi_2^{\ 2}+...+\lambda_n\xi_n^{\ 2}$, де $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ – координати вектора $\bar{x}$ в базисі $(\bar{g}_1,\bar{g}_2,...,\bar{g}_n)$, то такий вигляд квадратичної функції $\varphi(\bar{x},\bar{x})$ називається ***канонічним***. Коефіцієнти $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ називаються канонічними коефіцієнтами, а базис $(\bar{g}_1,\bar{g}_2,...,\bar{g}_n)$ називають канонічним.

8.2 Зведення квадратичної функції до канонічної форми

Алгоритм зведення квадратичної функції до канонічної форми

1. Складаємо матрицю A квадратичної функції.
2. Далі ми діємо за алгоритмом, що наведений в підрозділі 7.4 і знаходимо ортонормований базис, в якому дана квадратична функція набуває канонічної форми.
3. За допомогою матриці переходу від стандартного базису до одержаного ортонормованого базису записуємо співвідношення між координатами довільного вектора в стандартному базисі і новому ортонормованому базисі.

Приклад 1. Квадратичну функцію $x_1^2+4\cdot x_2^2+x_3^2+6\cdot x_1\cdot x_2+2\cdot x_2\cdot x_3$ звести до канонічної форми.

Розв'язання. Матриця A квадратичної функції утворюється так: компонента a_{ii} матриці A дорівнює коефіцієнту при x_i^2. Компонента a_{ij} дорівнює a_{ji} і дорівнює половині коефіцієнта при $x_i\cdot x_j$. (*Зазначимо, що матриця квадратичної функціє завжди є симетричною*). В даному випадку $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\3&4&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

Шукаємо власні значення матриці A. Для цього розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&3&0\\3&4-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\lambda)^2\cdot(4-\lambda)-10\cdot(1-\lambda)=0\Leftrightarrow(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-5\cdot\lambda-6)=0.$$

Отримуємо три власні значення матриці A. А саме: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=-1,\lambda_3=1$. Тепер шукаємо відповідні власні вектори. Для власного значення $\lambda_1 = 6$ власний вектор шукаємо серед ненульових розв'язків СЛР

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 - 5 \cdot x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ -x_2 + 5 \cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Загальний ненульовий розв'язок останньої СЛР можна записати у формі $\begin{pmatrix} 3c \\ 5c \\ c \end{pmatrix}$, де $c \neq 0$. Поклавши $c = 1$, одержуємо конкретний власний вектор $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 6$. Для власного значення $\lambda_2 = -1$ власний вектор шукаємо серед ненульових розв'язків СЛР

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_2 + 2 \cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Загальний ненульовий розв'язок останньої СЛР можна записати у формі $\begin{pmatrix} 3c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$, де $c \neq 0$. Поклавши $c = 1$, одержуємо конкретний власний вектор $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, що відповідає власному числу $\lambda_2 = -1$.

Аналогічно, для власного значення $\lambda_2 = 1$ власний вектор шукаємо серед ненульових розв'язків СЛР

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}0\cdot x_1+3\cdot x_2+0\cdot x_3=0,\\ 3\cdot x_1+3\cdot x_2+x_3=0,\\ 0\cdot x_1+x_2+0\cdot x_3=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3\cdot x_1+3\cdot x_2+x_3=0,\\ x_2=0.\end{cases}$ Загальний ненульовий розв’язок останньої СЛР можна записати у формі $\begin{pmatrix}c\\ 0\\ -3c\end{pmatrix}$, де $c\neq 0$. Поклавши $c=1$, одержуємо конкретний власний вектор $\bar{v}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\end{pmatrix}$, що відповідає власному числу $\lambda_3=1$.

Отже, $(\bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \bar{v}_3)-$ ортогональний базис. Нормалізуємо його. Одержуємо: $\bar{u}_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{35}}\\ \frac{5}{\sqrt{35}}\\ \frac{1}{\sqrt{35}}\end{pmatrix}$, $\bar{u}_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}\\ -\frac{2}{\sqrt{14}}\\ \frac{1}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$, $\bar{u}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\ 0\\ -\frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$. Матриця переходу від стандартного базису до базису $(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{5}{\sqrt{35}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}.$$

Відповідь: дана квадратична функція в базисі $(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3)$ має канонічну форму $6\cdot x_1'^2-x_2'^2+x_3'^2$. Відповідне перетворення координат

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{35}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}$$

Або, в розгорнутій формі,

$$\begin{cases} x_1' &= \dfrac{3}{\sqrt{35}}\cdot x_1+\dfrac{5}{\sqrt{35}}\cdot x_2+\dfrac{1}{\sqrt{35}}\cdot x_3, \\ x_2' &= \dfrac{3}{\sqrt{14}}\cdot x_1-\dfrac{2}{\sqrt{14}}\cdot x_2+\dfrac{1}{\sqrt{14}}\cdot x_3, \\ x_3' &= \dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot x_1+0\cdot x_2-\dfrac{3}{\sqrt{10}}x_3. \end{cases}$$

Індивідуальне домашнє завдання № 1

Завдання 1. Для даних матриць A і B: 1) знайти $3A-2B+E$, $A\cdot B$ і $B\cdot A$; 2) Обчислити $\det A$, $\det B$ і переконатися, що $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$.

1.1 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -4\\ 1 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$. **1.2** $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 1 & -4 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 7 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

1.3 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 8\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. **1.4** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\ 0 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

1.5 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$. **1.6** $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 4 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ -5 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

1.7 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$. **1.8** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1.9 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$. **1.10** $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

1.11 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. **1.12** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1.13 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$. **1.14** $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

1.15 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&0&3\\2&-2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&3&2\\1&2&1\\0&-3&4\end{pmatrix}$. **1.16** $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&1&1\\0&6&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&4\\2&3&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.

1.17 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\5&1&3\\1&-3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\1&1&1\\2&-1&4\end{pmatrix}$. **1.18** $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&1&3\\1&7&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&5\\3&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}$.

1.19 $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\4&2&1\\2&-2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&1&1\\6&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$. **1.20** $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&6&1\\2&5&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&-3\\2&3&4\\0&2&2\end{pmatrix}$.

1.21 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&2\\4&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&2\\-5&2&4\\2&1&1\end{pmatrix}$. **1.22** $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&4&-1\\1&3&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&3\\4&2&1\\1&4&5\end{pmatrix}$.

1.23 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&4\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2&5\\-4&1&0\\1&1&3\end{pmatrix}$. **1.24** $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&4&1\\4&1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&1&2\\1&3&1\\2&3&3\end{pmatrix}$.

1.25 $A=\begin{pmatrix}3&1&4\\-1&3&2\\1&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&4\\4&-1&5\\2&2&1\end{pmatrix}$. **1.26** $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&3&-1\\5&1&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&2\\-1&1&6\\2&2&1\end{pmatrix}$.

1.27 $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\1&-1&3\\1&1&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-2&5\\1&1&1\\6&1&0\end{pmatrix}$. **1.28** $A=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&1&1\\3&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&7\\3&-1&1\end{pmatrix}$.

1.29 $A=\begin{pmatrix}2&1&6\\1&1&-2\\3&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&4\\4&1&2\\2&3&3\end{pmatrix}$. **1.30** $A=\begin{pmatrix}2&3&3\\2&-1&3\\1&4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&4\\3&3&5\\2&1&0\end{pmatrix}$.

1.31 $A=\begin{pmatrix}1&1&4\\2&1&2\\3&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&1&-4\\3&3&2\\2&1&0\end{pmatrix}$. **1.32** $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&1\\1&1&4\end{pmatrix}$.

1.31 $A=\begin{pmatrix}1&1&4\\2&1&2\\3&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&1&-4\\3&3&2\\2&1&0\end{pmatrix}$. **1.32** $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&1\\1&1&4\end{pmatrix}$.

1.33 $A=\begin{pmatrix}0&1&6\\2&-1&3\\4&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\1&2&5\\0&1&1\end{pmatrix}$. **1.34** $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&2\\3&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}$.

1.35 $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5&1&4\\1&2&2\\0&1&2\end{pmatrix}$. **1.36** $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&3\\-1&3&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\5&0&1\\1&2&3\end{pmatrix}$.

1.37 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\\2&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&1&4\\0&2&2\\1&3&1\end{pmatrix}$. **1.38** $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&1&3\\0&4&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}$.

1.39 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\2&3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8&1&-1\\1&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}$. **1.40** $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&3\\2&1&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&1&1\\1&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

1.41 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\1&4&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&1&-1\\2&3&1\\1&2&1\end{pmatrix}$. **1.42** $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&2\\1&1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&2\\2&1&1\end{pmatrix}$.

1.43 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&4\\2&5&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&0\\1&1&4\end{pmatrix}$. **1.44** $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\2&5&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&5\\2&3&2\\1&2&2\end{pmatrix}$.

1.45 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\2&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&1\\2&3&1\end{pmatrix}$. **1.46** $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&2\\2&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

1.47 $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&5\\4&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&1&2\\1&4&1\\2&2&0\end{pmatrix}$. **1.48** $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\5&2&1\\4&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&1&1\\1&2&2\\4&-1&3\end{pmatrix}$.

1.49 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&1\\2&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&1&4\\3&1&1\\1&5&2\end{pmatrix}$. **1.50** $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\5&1&2\\-1&3&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\3&0&5\end{pmatrix}$.

Завдання 2. Детермінант матриці обчислити трьома способами: а) за означенням; в) застосовуючи теорему про розкладання детермінанта матриці за елементами деякого рядка (або стовпця); с) звівши матрицю до трикутного вигляду. Для даної матриці знайти обернену і виконати перевірку.

2.1 $\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&4&0\\2&2&5\end{pmatrix}$. **2.2** $\begin{pmatrix}1&4&1\\3&2&1\\-1&2&4\end{pmatrix}$. **2.3** $\begin{pmatrix}3&1&2\\1&4&6\\1&3&1\end{pmatrix}$. **2.4** $\begin{pmatrix}3&1&2\\1&4&6\\1&3&1\end{pmatrix}$.

2.5 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. **2.6** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. **2.7** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. **2.8** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2.9 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **2.10** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. **2.11** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. **2.12** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.13 $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **2.14** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **2.15** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **2.16** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.17 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. **2.18** $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.19** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **2.20** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.21 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.22** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. **2.23** $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **2.24** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.25 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **2.26** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. **2.27** $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **2.28** $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.29 $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.30** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **2.31** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. **2.32** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.33 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **2.34** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **2.35** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.36** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.37 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **2.38** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.39** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.40** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.41 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. **2.42** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **2.43** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.44** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.45 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.46** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **2.47** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. **2.48** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.49 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.50** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Систему лінійних рівнянь розв'язати трьома методами: а) за правилом Крамера; в) матричним методом (тобто за допомогою оберненої матриці; с) методом Гаусса.

3.1 $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=3, \\ 3x_1-4x_2-2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2-2x_3=4. \end{cases}$ **3.2** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-4, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$ **3.3** $\begin{cases} -3x_1+4x_2-x_3=4, \\ x_1+2x_2-7x_3=-2, \\ 2x_1-3x_2+5x_3=1. \end{cases}$

3.4 $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-2, \\ x_1+2x_2+2x_3=1, \\ x_1-4x_2+x_3=-9. \end{cases}$ **3.5** $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=-6, \\ 2x_1+x_2+3x_3=3, \\ 4x_1+3x_2+3x_3=1. \end{cases}$ **3.6** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1-x_2-4x_3=2, \\ x_1-2x_2-x_3=5. \end{cases}$

3.7 $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=1, \\ 4x_1+x_2-6x_3=-1, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=3. \end{cases}$ **3.8** $\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3=4, \\ 3x_1-3x_2-2x_3=-2, \\ 4x_1+x_2-4x_3=1. \end{cases}$ **3.9** $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2-3x_3=-2, \\ x_1+x_2+2x_3=2. \end{cases}$

3.10 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-4, \\ 4x_1+2x_2-3x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=3. \end{cases}$ **3.11** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=2, \\ -4x_1+x_2+3x_3=1, \\ -2x_1+3x_2-2x_3=2. \end{cases}$ **3.12** $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=3, \\ x_1+2x_2-3x_3=-4, \\ 4x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$

3.13 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1, \\ x_1-3x_2+4x_3=-3, \\ 2x_1+x_2-3x_3=4. \end{cases}$ **3.14** $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=-4, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=3, \\ 5x_1+x_2-2x_3=5. \end{cases}$ **3.15** $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3=-2, \\ x_1-3x_2+2x_3=6, \\ 3x_1+x_2+3x_3=5. \end{cases}$

3.16 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_1-4x_2-5x_3=-3. \end{cases}$ **3.17** $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2, \\ x_1+2x_2-4x_3=0, \\ -3x_1+5x_2+2x_3=1. \end{cases}$ **3.18** $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=5, \\ 3x_1-x_2-2x_3=6, \\ -2x_1+3x_2+x_3=-1. \end{cases}$

3.19 $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=4, \\ x_1-x_2+4x_3=8, \\ 2x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$ **3.20** $\begin{cases} 4x_1-x_2-3x_3=4, \\ x_1+2x_2-x_3=3, \\ 3x_1-x_2-4x_3=1. \end{cases}$ **3.21** $\begin{cases} 2x_1+5x_2-3x_3=1, \\ x_1-7x_2+2x_3=-2, \\ 3x_1+x_2-4x_3=-4. \end{cases}$

3.22 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -5. \end{cases}$ **3.23** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$ **3.24** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

3.25 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ **3.26** $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ **3.27** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

3.28 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ **3.29** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$ **3.30** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

3.31 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ **3.32** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ **3.33** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

3.34 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$ **3.35** $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **3.36** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 = 2. \end{cases}$

3.37 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ **3.38** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **3.39** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

3.40 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ **3.41** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$ **3.42** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.43 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **3.44** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ **3.45** $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

3.46 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ **3.47** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$ **3.48** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

3.49 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ **3.50** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Завдання 4. За даними векторами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ знайти: $\bar{a}\cdot\bar{b}$, $\bar{c}\times\bar{b}$, $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$, $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}$, кут між векторами $\bar{b}$ і $\bar{c}$.

4.1 $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-5\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{c}=3\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}$.

4.2 $\bar{a}=3\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+6\bar{k}$; $\bar{c}=2\bar{i}-\bar{j}-3\bar{k}$.

4.3 $\bar{a}=\bar{i}+5\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{b}=2\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$; $\bar{c}=\bar{i}-4\bar{j}-2\bar{k}$.

4.4 $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+8\bar{k}$; $\bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}$; $\bar{c}=4\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}$.

4.5 $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+4\bar{j}-\bar{k}$; $\bar{c}=6\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$.

4.6 $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+6\bar{k}$; $\bar{b}=4\bar{i}+7\bar{j}-2\bar{k}$; $\bar{c}=5\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

4.7 $\bar{a}=4\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$; $\bar{b}=2\bar{i}+5\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{c}=6\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$.

4.8 $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$; $\bar{b}=6\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{c}=8\bar{i}-4\bar{j}+3\bar{k}$.

4.9 $\bar{a}=-\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{b}=2\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{c}=7\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$.

4.10 $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+3\bar{j}-3\bar{k}$; $\bar{c}=5\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$.

4.11 $\bar{a}=2\bar{i}-4\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$; $\bar{c}=4\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$.

4.12 $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+5\bar{j}-\bar{k}$; $\bar{c}=4\bar{i}+\bar{j}+5\bar{k}$.

4.13 $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{c}=3\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$.

4.14 $\bar{a}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+4\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{c}=2\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}$.

4.15 $\bar{a}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+4\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{c}=2\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}$.

4.16 $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{c}=6\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$.

4.17 $\bar{a}=-\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{c}=3\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$.

4.18 $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$; $\bar{c}=2\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$.

4.19 $\bar{a}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{c}=\bar{i}+6\bar{j}+\bar{k}$.

4.20 $\bar{a}=6\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}-4\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{c}=\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$.

4.21 $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{c}=4\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k}$.

4.22 $\bar{a}=4\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}-4\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{c}=\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$.

4.23 $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+6\bar{k}$; $\bar{c}=3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$.

4.24 $\bar{a}=4\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+4\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{c}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$.

4.25 $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+5\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$; $\bar{c}=\bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}$.

4.26 $\bar{a}=\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$; $\bar{c}=3\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$.

4.27 $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}-5\bar{k}$; $\bar{c}=4\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$.

4.28 $\bar{a}=4\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{c}=6\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.

4.29 $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{b}=3\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$; $\bar{c}=2\bar{i}+8\bar{j}-\bar{k}$.

4.30 $\bar{a}=\bar{i}+4\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{b}=2\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{c}=3\bar{i}+6\bar{j}-2\bar{k}$.

4.31 $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}+5\overline{j}-3\overline{k}$.

4.32 $\overline{a}=5\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}$; $\overline{c}=3\overline{i}+4\overline{j}-5\overline{k}$.

4.33 $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}$; $\overline{b}=3\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{c}=2\overline{i}+5\overline{j}+5\overline{k}$.

4.34 $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$; $\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}+5\overline{j}-\overline{k}$.

4.35 $\overline{a}=4\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}-4\overline{j}+3\overline{k}$.

4.36 $\overline{a}=4\overline{i}+\overline{j}-6\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}+3\overline{j}+2\overline{k}$.

4.37 $\overline{a}=\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$; $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{c}=2\overline{i}+3\overline{j}+3\overline{k}$.

4.38 $\overline{a}=4\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k}$.

4.39 $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-2\overline{k}$; $\overline{b}=3\overline{i}-5\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{c}=2\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k}$.

4.40 $\overline{a}=4\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$; $\overline{c}=-\overline{i}+3\overline{j}+5\overline{k}$.

4.41 $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}+4\overline{j}+6\overline{k}$.

4.42 $\overline{a}=3\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{b}=-\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{c}=2\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$.

4.43 $\overline{a}=4\overline{i}+\overline{j}+6\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$; $\overline{c}=-2\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}$.

4.44 $\overline{a}=\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{b}=-\overline{i}+\overline{j}+5\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}+\overline{j}-4\overline{k}$.

4.45 $\overline{a}=3\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}+6\overline{k}$; $\overline{c}=4\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k}$.

4.46 $\overline{a}=\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{b}=5\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{c}=-\overline{i}+3\overline{j}+2\overline{k}$.

4.47 $\overline{a}=-2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{b}=4\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}$.

4.48 $\overline{a}=\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$; $\overline{c}=-\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$.

4.49 $\overline{a}=4\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$; $\overline{c}=-2\overline{i}+3\overline{j}+5\overline{k}$.

4.50 $\overline{a}=\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$; $\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{c}=-3\overline{i}+\overline{j}-4\overline{k}$.

Завдання 5. Знайти: 1) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах, якщо відомий кут φ між векторами $\overline{m}$ і $\overline{n}$; 2) довжину основи паралелограма, що збігається з вектором $\overline{a}$.

5.1 $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}-3\overline{n}$, $|\overline{m}|=1$, $|\overline{n}|=3$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

5.2 $\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}-\overline{n}$, $|\overline{m}|=2$, $|\overline{n}|=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

5.3 $\overline{a}=\overline{m}+4\overline{n}$, $\overline{b}=2\overline{m}+3\overline{n}$, $|\overline{m}|=3$, $|\overline{n}|=4$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

5.4 $\overline{a}=5\overline{m}+\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}+3\overline{n}$, $|\overline{m}|=4$, $|\overline{n}|=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

5.5 $\overline{a}=\overline{m}-2\overline{n}$, $\overline{b}=4\overline{m}+3\overline{n}$, $|\overline{m}|=6$, $|\overline{n}|=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

5.6 $\bar{a} = \bar{m} - \bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} + 4\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 1, \quad |\bar{n}| = 5, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$

5.7 $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}, \quad \bar{b} = 5\bar{m} + \bar{n}, \quad |\bar{m}| = 2, \quad |\bar{n}| = 3, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$

5.8 $\bar{a} = 4\bar{m} + \bar{n}, \quad \bar{b} = 5\bar{m} - \bar{n}, \quad |\bar{m}| = 1, \quad |\bar{n}| = 6, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

5.9 $\bar{a} = \bar{m} - 5\bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} + 3\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 4, \quad |\bar{n}| = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$

5.10 $\bar{a} = \bar{m} - \bar{n}, \quad \bar{b} = 4\bar{m} + \bar{n}, \quad |\bar{m}| = 3, \quad |\bar{n}| = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$

5.11 $\bar{a} = 3\bar{m} + 2\bar{n}, \quad \bar{b} = 5\bar{m} - \bar{n}, \quad |\bar{m}| = 6, \quad |\bar{n}| = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

5.12 $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 5, \quad |\bar{n}| = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$

5.13 $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}, \quad \bar{b} = 4\bar{m} + 3\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 1, \quad |\bar{n}| = 7, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$

5.14 $\bar{a} = 2\bar{m} + 2\bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} + 5\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 2, \quad |\bar{n}| = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

5.15 $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} - 5\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 4, \quad |\bar{n}| = 3, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$

5.16 $\bar{a} = \bar{m} + 4\bar{n}, \quad \bar{b} = 3\bar{m} + \bar{n}, \quad |\bar{m}| = 5, \quad |\bar{n}| = 4, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$

5.17 $\bar{a} = 3\bar{m} + 3\bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 6, \quad |\bar{n}| = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

5.18 $\bar{a} = 3\bar{m} - 4\bar{n}, \quad \bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n}, \quad |\bar{m}| = 8, \quad |\bar{n}| = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$

5.19 $\bar{a} = 5\bar{m} + 3\bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} + 3\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 7, \quad |\bar{n}| = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$

5.20 $\bar{a} = \bar{m} + 3\bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} - 5\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 1, \quad |\bar{n}| = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

5.21 $\bar{a} = \bar{m} + 4\bar{n}, \quad \bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}, \quad |\bar{m}| = 1, \quad |\bar{n}| = 7, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$

5.22 $\bar{a} = \bar{m} + 5\bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} - \bar{n}, \quad |\bar{m}| = 2, \quad |\bar{n}| = 6, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$

5.23 $\bar{a} = 3\bar{m} + \bar{n}, \quad \bar{b} = \bar{m} + 8\bar{n}, \quad |\bar{m}| = 1, \quad |\bar{n}| = 5, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

5.24 $\bar{a} = -\bar{m} + \bar{n}, \quad \bar{b} = 5\bar{m} + \bar{n}, \quad |\bar{m}| = 4, \quad |\bar{n}| = 4, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$

5.25 $\bar{a} = 6\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = 3\bar{m} + 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 7$, $|\bar{n}| = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

5.26 $\bar{a} = 5\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{b} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

5.27 $\bar{a} = 2\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

5.28 $\bar{a} = 2\bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 5$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

5.29 $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 7\bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

5.30 $\bar{a} = 5\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 6\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

5.31 $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 6\bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 5$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

5.32 $\bar{a} = 2\bar{m} - 5\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 6$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

5.33 $\bar{a} = \bar{m} - \bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 4$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

5.34 $\bar{a} = \bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 5$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

5.35 $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

5.36 $\bar{a} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $\bar{b} = 4\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

5.37 $\bar{a} = 4\bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} + 5\bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

5.38 $\bar{a} = \bar{m} + 4\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 7\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 4$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

5.39 $\bar{a} = \bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 6$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

5.40 $\bar{a} = \bar{m} - 2\bar{n}$, $\bar{b} = 3\bar{m} + 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 5$, $|\bar{n}| = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

5.41 $\bar{a} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = -\bar{m} + 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

5.42 $\bar{a} = 2\bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{b} = -3\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 4$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

5.43 $\bar{a} = 4\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{b} = 5\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 6$, $|\bar{n}| = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

5.44 $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 5\bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 5$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

5.45 $\bar{a} = \bar{m} - 7\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 5$, $|\bar{n}| = 4$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

5.46 $\bar{a} = 3\bar{m} - 3\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

5.47 $\bar{a} = \bar{m} - 5\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

5.48 $\bar{a} = 2\bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{b} = 4\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

5.49 $\bar{a} = \bar{m} - 7\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 5$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

5.50 $\bar{a} = \bar{m} + 4\bar{n}$, $\bar{b} = 3\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Завдання 6. Задані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: 1) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4; 2) площу грані $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди; 4) рівняння прямої, що збігається з ребром A_1A_3; 5) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 6) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 7) кут між ребром A_2A_4 і гранню $A_1A_2A_3$; 8) довжину висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ (двома способами: за формулою об’єму піраміди і за формулою відстані від точки до площини).

6.1 $A_1(1;2;0)$, $A_2(-2;2;3)$, $A_3(4;1;4)$, $A_4(3;2;1)$.
6.2 $A_1(1;1;4)$, $A_2(2;1;3)$, $A_3(4;2;5)$, $A_4(-1;2;4)$.
6.3 $A_1(0;1;3)$, $A_2(1;2;3)$, $A_3(2;-2;4)$, $A_4(1;5;4)$.
6.4 $A_1(2;2;5)$, $A_2(2;3;-1)$, $A_3(1;2;6)$, $A_4(2;5;-3)$.
6.5 $A_1(2;1;3)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;2;4)$, $A_4(2;4;3)$.
6.6 $A_1(2;3;2)$, $A_2(3;1;1)$, $A_3(2;2;4)$, $A_4(4;5;3)$.
6.7 $A_1(2;4;1)$, $A_2(-3;1;2)$, $A_3(1;2;3)$, $A_4(4;-4;3)$.
6.8 $A_1(5;4;6)$, $A_2(3;1;-2)$, $A_3(2;2;4)$, $A_4(3;4;3)$.
6.9 $A_1(1;4;1)$, $A_2(2;4;2)$, $A_3(3;-5;1)$, $A_4(3;6;-1)$.
6.10 $A_1(1;3;2)$, $A_2(1;4;4)$, $A_3(2;5;1)$, $A_4(3;5;1)$.
6.11 $A_1(3;1;3)$, $A_2(3;2;5)$, $A_3(-3;5;4)$, $A_4(4;1;-1)$.
6.12 $A_1(1;3;7)$, $A_2(1;5;-2)$, $A_3(2;5;2)$, $A_4(4;4;1)$.
6.13 $A_1(1;1;4)$, $A_2(3;5;-2)$, $A_3(1;-4;2)$, $A_4(5;6;1)$.
6.14 $A_1(2;4;3)$, $A_2(2;-1;3)$, $A_3(4;5;1)$, $A_4(1;7;1)$.
6.15 $A_1(1;-2;3)$, $A_2(1;2;3)$, $A_3(2;5;4)$, $A_4(2;5;1)$.

6.16 $A_1(1;2;4)$, $A_2(1;4;-2)$, $A_3(2;4;3)$, $A_4(3;5;1)$.

6.17 $A_1(2;3;1)$, $A_2(2;5;-2)$, $A_3(4;4;2)$, $A_4(2;5;-4)$.

6.18 $A_1(2;2;3)$, $A_2(3;1;4)$, $A_3(-3;4;1)$, $A_4(2;-5;5)$.

6.19 $A_1(2;1;1)$, $A_2(3;-4;2)$, $A_3(6;4;2)$, $A_4(5;5;1)$.

6.20 $A_1(2;4;4)$, $A_2(2;5;6)$, $A_3(1;5;6)$, $A_4(2;5;1)$.

6.21 $A_1(1;0;2)$, $A_2(1;3;3)$, $A_3(2;4;4)$, $A_4(5;6;7)$.

6.22 $A_1(0;3;2)$, $A_2(2;3;6)$, $A_3(2;5;5)$, $A_4(3;5;8)$.

6.23 $A_1(3;2;1)$, $A_2(3;5;2)$, $A_3(5;2;3)$, $A_4(2;6;3)$.

6.24 $A_1(1;2;4)$, $A_2(1;4;4)$, $A_3(3;6;5)$, $A_4(-1;3;1)$.

6.25 $A_1(1;3;3)$, $A_2(1;4;5)$, $A_3(-2;6;2)$, $A_4(4;4;1)$.

6.26 $A_1(0;4;3)$, $A_2(1;3;3)$, $A_3(2;4;2)$, $A_4(3;4;5)$.

6.27 $A_1(1;1;5)$, $A_2(1;3;6)$, $A_3(4;5;2)$, $A_4(2;3;1)$.

6.28 $A_1(1;-1;3)$, $A_2(1;2;4)$, $A_3(3;5;4)$, $A_4(3;5;-2)$.

6.29 $A_1(1;1;1)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(1;5;4)$, $A_4(5;5;7)$.

6.30 $A_1(1;2;5)$, $A_2(-2;2;6)$, $A_3(4;3;1)$, $A_4(5;7;1)$.

6.31 $A_1(0;3;1)$, $A_2(1;5;1)$, $A_3(-3;4;2)$, $A_4(3;1;2)$.

6.32 $A_1(1;1;2)$, $A_2(1;3;-1)$, $A_3(3;5;5)$, $A_4(2;4;4)$.

6.33 $A_1(1;3;2)$, $A_2(1;4;3)$, $A_3(0;5;4)$, $A_4(3;5;6)$.

6.34 $A_1(2;1;-1)$, $A_2(3;2;1)$, $A_3(4;4;6)$, $A_4(1;4;5)$.

6.35 $A_1(3;1;0)$, $A_2(5;1;1)$, $A_3(2;5;4)$, $A_4(1;3;6)$.

6.36 $A_1(1;0;4)$, $A_2(1;2;3)$, $A_3(2;-1;4)$, $A_4(3;5;7)$.

6.37 $A_1(1;4;2)$, $A_2(2;-1;1)$, $A_3(5;2;2)$, $A_4(1;4;5)$.

6.38 $A_1(0;1;-1)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(3;4;6)$, $A_4(1;4;5)$.

6.39 $A_1(-1;1;3)$, $A_2(0;4;1)$, $A_3(2;5;3)$, $A_4(-1;5;4)$.

6.40 $A_1(1;1;3)$, $A_2(2;2;3)$, $A_3(4;5;6)$, $A_4(2;3;5)$.

6.41 $A_1(3;2;2)$, $A_2(4;-1;1)$, $A_3(2;3;6)$, $A_4(3;1;-4)$.

6.42 $A_1(1;4;3)$, $A_2(2;5;1)$, $A_3(3;-3;6)$, $A_4(3;4;3)$.

6.43 $A_1(1;3;2)$, $A_2(1;4;1)$, $A_3(2;4;5)$, $A_4(-2;4;3)$.

6.44 $A_1(0;1;4)$, $A_2(2;3;3)$, $A_3(4;5;7)$, $A_4(3;4;2)$.

6.45 $A_1(1;1;4)$, $A_2(2;3;6)$, $A_3(3;7;2)$, $A_4(1;4;6)$.

6.46 $A_1(1;2;-1)$, $A_2(1;4;-1)$, $A_3(2;6;5)$, $A_4(3;3;7)$.

6.47 $A_1(1;3;1)$, $A_2(3;3;1)$, $A_3(4;6;5)$, $A_4(1;4;-1)$.

6.48 $A_1(1;4;1)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(4;5;7)$, $A_4(-2;5;4)$.

6.49 $A_1(1;0;4)$, $A_2(4;3;1)$, $A_3(-2;3;5)$, $A_4(1;4;2)$.

6.50 $A_1(0;4;2)$, $A_2(1;3;1)$, $A_3(2;5;8)$, $A_4(3;4;5)$.

Завдання 7. Задані координати вершин трикутника ABC: 1) скласти рівняння його сторін; 2) скласти рівняння медіани, проведеної із вершини B; 3) визначити кут B; 4) знайти точку перетину висоти, опущеної з вершини C, і медіани, проведеної із вершини B; 5) обчислити довжину висоти, опущеної з вершини A; 6) знайти точку перетину медіан трикутника.

7.1 $A(1;2), B(2;5), C(4;1).$

7.2 $A(1;1), B(3;5), C(5;2).$

7.3 $A(1;3), B(5;5), C(4;2).$

7.4 $A(3;1), B(4;6), C(5;-3).$

7.5 $A(2;2), B(4;7), C(8;-2).$

7.6 $A(2;1), B(-5;5), C(0;3).$

7.7 $A(3;2), B(1;5), C(-4;0).$

7.8 $A(3;1), B(4;7), C(-5;4).$

7.9 $A(2;2), B(4;6), C(8;0).$

7.10 $A(3;2), B(5;5), C(7;-2).$

7.11 $A(7;2), B(2;-3), C(4;8).$

7.12 $A(4;2), B(7;4), C(2;9).$

7.13 $A(1;4), B(3;5), C(6;1).$

7.14 $A(3;3), B(5;5), C(9;0).$

7.15 $A(1;2), B(-5;5), C(-2;0).$

7.16 $A(3;5), B(7;9), C(1;8).$

7.17 $A(1;3), B(-8;5), C(-2;1).$

7.18 $A(2;2), B(-2;5), C(-3;0).$

7.19 $A(4;2), B(6;5), C(8;1).$

7.20 $A(3;3), B(6;8), C(10;0).$

7.21 $A(2;1), B(3;7), C(-4;4).$

7.22 $A(1;4), B(-8;8), C(4;1).$

7.23 $A(2;3), B(4;6), C(9;2).$

7.24 $A(2;4), B(4;0), C(6;6).$

7.25 $A(1;3), B(-2;6), C(-3;1).$

7.26 $A(1;4), B(3;7), C(7;2).$

7.27 $A(1;2), B(2;5), C(4;1).$

7.28 $A(1;1), B(3;5), C(5;2).$

7.29 $A(2;5), B(0;0), C(-4;3).$

7.30 $A(3;3), B(-6;5), C(-2;-1).$

7.31 $A(1;4), B(4;6), C(5;0).$

7.32 $A(3;4), B(-1;6), C(-3;-1).$

7.33 $A(1;5), B(3;1), C(6;3).$

7.34 $A(2;4), B(4;1), C(7;3).$

7.35 $A(0;5), B(-2;3), C(4;1).$

7.36 $A(-1;1), B(1;6), C(6;3).$

7.37 $A(0;-1), B(2;4), C(5;0).$

7.38 $A(1;1), B(3;7), C(6;5).$

7.39 $A(1;4), B(4;6), C(5;0).$

7.40 $A(-3;0), B(0;5), C(2;2).$

7.41 $A(-1;-1), B(2;3), C(6;1).$

7.42 $A(1;1), B(3;6), C(-2;4).$

7.43 $A(-1;6), B(0;0), C(4;2).$

7.44 $A(1;2), B(3;7), C(5;4).$

7.45 $A(1;-2), B(3;3), C(6;0).$

7.46 $A(1;2), B(3;5), C(4;4).$

7.47 $A(4;1), B(0;6), C(-1;-1).$

7.48 $A(1;3), B(5;2), C(7;6).$

7.49 $A(2;2), B(4;5), C(7;0).$

7.50 $A(1;2), B(-1;4), C(-3;0).$

Завдання 8. Знайти проекцію точки M на задану площину або пряму.

8.1 $M(1;3;0), \quad 2x-y+z+3=0.$

8.2 $M(1;1;4), \quad \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{1}.$

8.3 $M(2;2;1), \quad x-3y+z+1=0.$

8.4 $M(1;2;-3), \quad \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{1}.$

8.5 $M(0;1;1)$, $4x-y+2z+1=0$.

8.6 $M(3;0;1)$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$.

8.7 $M(4;1;0)$, $x+2y+2z-1=0$.

8.8 $M(1;0;3)$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

8.9 $M(-1;1;1)$, $x+y+2z+4=0$.

8.10 $M(1;1;2)$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1}$.

8.11 $M(1;3;1)$, $x-y+z+2=0$.

8.12 $M(0;1;-3)$, $\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$.

8.13 $M(-2;1;1)$, $3x-y+2z+1=0$.

8.14 $M(4;1;3)$, $\frac{x}{3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}$.

8.15 $M(2;-3;0)$, $x+4y+z+2=0$.

8.16 $M(1;1;4)$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{4}$.

8.17 $M(2;2;1)$, $x+y-4z+1=0$.

8.18 $M(1;-3;2)$, $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}$.

8.19 $M(1;0;1)$, $x+3y-2z+2=0$.

8.20 $M(1;2;4)$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$.

8.21 $M(1;2;-3)$, $2x+y+2z-4=0$.

8.22 $M(2;1;3)$, $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$.

8.23 $M(1;1;2)$, $x+3y-2z+2=0$.

8.24 $M(2;2;-1)$, $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{1}$.

8.25 $M(1;3;0)$, $x+2y+2z-1=0$.

8.26 $M(4;0;1)$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$.

8.27 $M(1;0;4)$, $2x+y-z+3=0$.

8.28 $M(0;3;1)$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z}{1}$.

8.29 $M(-1;1;3)$, $x+2y-z+4=0$.

8.30 $M(0;3;1)$, $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{2}$.

8.31 $M(1;0;1)$, $x+y-z+4=0$.

8.32 $M(2;1;1)$, $\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{3}$.

8.33 $M(1;3;1)$, $2x+y-z+5=0$.

8.34 $M(4;1;-1)$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{3}$.

8.35 $M(1;2;4)$, $x+3y+z-4=0$.

8.36 $M(3;1;-1)$, $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{1}$.

8.37 $M(1;5;1)$, $3x+y-z+2=0$.

8.38 $M(-1;4;1)$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{1}$.

8.39 $M(2;2;1)$, $-x+3y+z-1=0$.

8.40 $M(3;1;-2)$, $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$.

8.41 $M(1;0;5)$, $x+3y+4z+1=0$.

8.42 $M(3;1;2)$, $\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$.

8.43 $M(0;0;6)$, $x+3y+z-4=0$.

8.44 $M(3;1;2)$, $\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{1}$.

8.45 $M(4;1;1)$, $2x+y+z-3=0$.

8.46 $M(2;1;3)$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{1}$.

8.47 $M(3;0;4)$, $2x-y+z+5=0$.

8.48 $M(2;4;-1)$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{4}$.

8.49 $M(1;1;4)$, $3x+y+z-1=0$.

8.50 $M(2;2;3)$, $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+4}{-1}$.

Індивідуальне домашнє завдання № 2 з лінійної алгебри

Задача 1. Дослідити на лінійну залежність систему векторів.

1.1 $\bar{a}=(1,1,-4,2)$, $\bar{b}=(0,-2,1,1)$, $\bar{c}=(3,-4,2,2)$, $\bar{d}=(1,-1,2,4)$.

1.2 $\sin x$, $\cos x$, tgx на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

1.3 $\bar{a}=(0;1;-2;6)$, $\bar{b}=(1;1;4;1)$, $\bar{c}=(3;2;0;1)$, $\bar{d}=(1;5;4;3)$.

1.4 2, $\sin x$, $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.5 $\bar{a}=(1,4,2,3)$, $\bar{b}=(-2,1,1,5)$, $\bar{c}=(0,4,-4,1)$, $\bar{d}=(-1,2,2,-3)$.

1.6 1, x, $\sin x$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.7 $\bar{a}=(-1,3,1,0)$, $\bar{b}=(2,1,-1,1)$, $\bar{c}=(1,2,-4,3)$, $\bar{d}=(1,-2,4,1)$.

1.8 e^x, e^{2x}, e^{3x} на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.9 $\bar{a}=(3,1,1,1)$, $\bar{b}=(2,1,4,-1)$, $\bar{c}=(1,0,3,3)$, $\bar{d}=(-1,2,1,-1)$.

1.10 x, x^2, $(1+x)^2$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.11 $\bar{a}=(1,3,2,2)$, $\bar{b}=(-1,3,0,5)$, $\bar{c}=(2,1,3,4)$, $\bar{d}=(-1,2,3,4)$.

1.12 1, $x+1$, x^2, x^3 на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.13 $\bar{a}=(1,3,2,2)$, $\bar{b}=(-1,3,0,5)$, $\bar{c}=(2,1,3,4)$, $\bar{d}=(-1,2,3,4)$.

1.14 $\cos x$, $\sin x$, $\sin 2x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

1.15 $\bar{a}=(2,3,1,1)$, $\bar{b}=(1,2,0,2)$, $\bar{c}=(3,1,1,0)$, $\bar{d}=(1,5,2,1)$.

1.16 e^x, e^{-x}, e^{2x} на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.17 $\bar{a}=(1,2,1,5)$, $\bar{b}=(2,1,0,1)$, $\bar{c}=(-1,3,1,1)$, $\bar{d}=(2,-1,2,3)$.

1.18 2^x, 2^{2x}, 2^{3x} на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.19 $\bar{a}=(1,3,1,-1)$, $\bar{b}=(3,1,5,-1)$, $\bar{c}=(1,4,2,1)$, $\bar{d}=(1,1,3,4)$.

1.20 3, $x+1$, x^2, x^3+2 на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.21 $\bar{a}=(2,4,-1,1),\ \bar{b}=(1,1,2,1),\ \bar{c}=(3,4,1,0),\ \bar{d}=(0,1,-1,6).$

1.22 $\frac{1}{x},\ x,1$ на проміжку $(0,1).$

1.23 $\bar{a}=(2,4,0,1),\ \bar{b}=(2,1,-1,1),\ \bar{c}=(1,2,1,5),\ \bar{d}=(-1,3,1,2).$

1.24 $1,\ tgx,\ ctgx$ на проміжку $\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$

1.25 $\bar{a}=(-1,2,4,1),\ \bar{b}=(1,1,4,1),\ \bar{c}=(3,2,1,2),\ \bar{d}=(1,-4,1,3).$

1.26 $1,\ x,\ 3x^2-4x+7$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.27 $\bar{a}=(-1,2,3,0),\ \bar{b}=(2,1,-4,1),\ \bar{c}=(2,1,1,2),\ \bar{d}=(1,4,1,-3).$

1.28 $1,\ x,\ x^2+2x-1,\ x^3$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.29 $\bar{a}=(1,0,2,0),\ \bar{b}=(-2,2,-1,3),\ \bar{c}=(2,-1,3,2),\ \bar{d}=(3,-1,2,3).$

1.30 $2,\ x-1,\ x^2+x+4,\ x^3+2$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.31 $\bar{a}=(1,0,1,3),\ \bar{b}=(-1,2,1,4),\ \bar{c}=(2,1,3,0),\ \bar{d}=(4,-1,2,1).$

1.32 $1,\ x,\ x^2+3x,\ x^3+2x^2$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.33 $\bar{a}=(1,4,1,2),\ \bar{b}=(1,5,1,-4),\ \bar{c}=(3,1,3,2),\ \bar{d}=(5,1,1,1).$

1.34 $4,\ x-1,\ 3x^2+3x,\ 2x^3+x^2$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.35 $\bar{a}=(3,4,0,2),\ \bar{b}=(3,1,1,4),\ \bar{c}=(1,1,4,2),\ \bar{d}=(2,1,1,1).$

1.36 $5,\ 3x+1,\ x^2+4x-1,\ x^3-x^2$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.37 $\bar{a}=(1,6,1,3),\ \bar{b}=(2,1,1,4),\ \bar{c}=(2,1,4,-1),\ \bar{d}=(3,1,4,1).$

1.38 $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.39 $\bar{a}=(0,1,1,3),\ \bar{b}=(1,4,-1,4),\ \bar{c}=(2,1,5,1),\ \bar{d}=(2,1,1,0).$

1.40 $1,\ 3x+2,\ x^2+2x+5,\ x^3+4x^2-1$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.41 $\bar{a}=(1,2,-1,3),\ \bar{b}=(2,1,3,4),\ \bar{c}=(2,2,4,0),\ \bar{d}=(2,1,0,4).$

1.42 $1,\ 3x,\ 4x^2+x+3,\ x^3+x^2-4x$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.43 $\bar{a}=(1,0,3,2),\ \bar{b}=(2,1,1,4),\ \bar{c}=(2,1,5,-2),\ \bar{d}=(0,1,4,3).$

1.44 $\sin x,\ \cos x,\ \sin 3x,\ \cos 3x$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.45 $\bar{a}=(1,4,1,2),\ \bar{b}=(1,5,1,-4),\ \bar{c}=(3,1,3,2),\ \bar{d}=(5,1,1,1).$

1.46 $3,\ 2x,\ 4x^2+x,\ 3x^3+x^2-x$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.47 $\bar{a}=(0,1,1,3),\ \bar{b}=(2,1,1,4),\ \bar{c}=(1,1,4,1),\ \bar{d}=(1,2,1,-1).$

1.48 $2,\ 3x,\ x^2+2x+2,\ x^3+4x^2$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

1.49 $\bar{a}=(3,-1,1,1),\ \bar{b}=(1,2,1,3),\ \bar{c}=(1,4,3,-1),\ \bar{d}=(2,0,1,0).$

1.50 $2,\ 2x+1,\ x^2-4x,\ x^3+x^2+5$ на проміжку $(-\infty,+\infty).$

Задача 2. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

2.1 $\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3+x_4-4x_5=0, \\ x_1+5x_2+x_3+x_4-5x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.2 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ x_1-x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4-2x_5=0. \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3+x_4-4x_5=0, \\ x_1+5x_2+x_3+x_4-5x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} x_1-4x_2-x_3+x_4-5x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2+5x_3+2x_4-6x_5=0. \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} 5x_1+x_2+4x_3+x_4+5x_5=0, \\ x_1+2x_2+7x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+3x_3-4x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.6 $\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-7x_3+3x_4+x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3+3x_4+2x_5=0. \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+6x_4+2x_5=0, \\ -x_1+x_2+4x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4+3x_5=0. \end{cases}$

2.8 $\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3+x_4+6x_5=0, \\ x_1+2x_2+4x_3+3x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2+4x_3+x_4-2x_5=0. \end{cases}$

2.9 $\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3+x_4+4x_5=0, \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0. \end{cases}$

2.10 $\begin{cases} 2x_1+2x_2+6x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3-2x_4+5x_5=0, \\ x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0. \end{cases}$

2.11 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4+7x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+3x_3-5x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.12 $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3-x_4+6x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-2x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3+6x_4+2x_5=0. \end{cases}$

2.13 $\begin{cases} 6x_1+x_2+2x_3+x_4+4x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3-3x_4+2x_5=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+6x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.14 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-x_4+8x_5=0, \\ x_1+4x_2+x_3-3x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3+7x_4+5x_5=0. \end{cases}$

2.15 $\begin{cases} 4x_1-x_2+5x_3+x_4+3x_5=0, \\ 4x_1+x_2-x_3+8x_4+x_5=0, \\ x_1+4x_2+3x_3-2x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.16 $\begin{cases} x_1-x_2+7x_3+2x_4+x_5=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+3x_2-3x_3+4x_4-x_5=0. \end{cases}$

2.17 $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3-x_4+4x_5=0, \\ x_1+5x_2-4x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+x_2-3x_3+2x_4-x_5=0. \end{cases}$

2.18 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+3x_4-5x_5=0, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3-4x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.19 $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3-x_4+5x_5=0, \\ x_1-x_2+6x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+x_2+4x_3-2x_4-4x_5=0. \end{cases}$

2.20 $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3-x_4+5x_5=0, \\ x_1-x_2+6x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+x_2+4x_3-2x_4-4x_5=0. \end{cases}$

2.21 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.22 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.23 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.24 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.25 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.26 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.27 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2.28 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

2.29 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.30 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.31 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.32 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

2.33 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

2.34 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

2.35 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

2.36 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.37 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.38 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2.39 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.40 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2.41 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

2.42 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.43 $\begin{cases} x_1+4x_2+x_3-x_4+4x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4+2x_5=0, \\ -x_1+x_2+5x_3+3x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.44 $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+4x_3-x_4+3x_5=0. \end{cases}$

2.45 $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+x_4+4x_5=0, \\ x_1+x_2+4x_3+x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4+3x_5=0. \end{cases}$

2.46 $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3+6x_4+x_5=0, \\ x_1+4x_2+x_3-x_4+4x_5=0. \end{cases}$

2.47 $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+3x_4+2x_5=0, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+5x_4+3x_5=0. \end{cases}$

2.48 $\begin{cases} 4x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4+4x_5=0, \\ -x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.49 $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3+x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1-x_2+4x_3+5x_4+6x_5=0. \end{cases}$

2.50 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4+3x_5=0, \\ 4x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5=0, \\ x_1+4x_2+x_3+x_4+5x_5=0. \end{cases}$

Задача 3. Переконатись, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис в просторі і розкласти вектор $\bar{d}$ за цим базисом.

3.1 $\bar{a}=(3;1;0)$ $\bar{b}=(1;1;4)$ $\bar{c}=(-1;3;1)$ $\bar{d}=(0;1;0)$.

3.2 $\bar{a}=(2;1;1)$ $\bar{b}=(1;3;-4)$ $\bar{c}=(1;3;2)$ $\bar{d}=(1;1;0)$.

3.3 $\bar{a}=(4;2;1)$ $\bar{b}=(1;3;0)$ $\bar{c}=(1;3;5)$ $\bar{d}=(1;1;2)$.

3.4 $\bar{a}=(-1;1;1)$ $\bar{b}=(1;2;-1)$ $\bar{c}=(1;4;1)$ $\bar{d}=(2;1;1)$.

3.5 $\bar{a}=(1;1;2)$ $\bar{b}=(2;1;5)$ $\bar{c}=(1;2;2)$ $\bar{d}=(1;1;5)$.

3.6 $\bar{a}=(2;0;2)$ $\bar{b}=(3;1;-1)$ $\bar{c}=(2;3;4)$ $\bar{d}=(1;1;6)$.

3.7 $\bar{a}=(2;1;5)$ $\bar{b}=(1;0;3)$ $\bar{c}=(4;3;0)$ $\bar{d}=(3;1;1)$.

3.8 $\bar{a}=(1;1;1)$ $\bar{b}=(2;1;3)$ $\bar{c}=(1;4;-1)$ $\bar{d}=(2;2;1)$.

3.9 $\bar{a}=(1;1;5)$ $\bar{b}=(3;1;1)$ $\bar{c}=(5;0;1)$ $\bar{d}=(3;1;4)$.

3.10 $\bar{a}=(1;1;6)$ $\bar{b}=(2;-1;2)$ $\bar{c}=(1;3;3)$ $\bar{d}=(2;1;4)$.

3.11 $\bar{a}=(2;1;2)$ $\bar{b}=(3;1;-3)$ $\bar{c}=(2;3;0)$ $\bar{d}=(4;1;0)$.

3.12 $\bar{a}=(0;1;1)$ $\bar{b}=(2;1;5)$ $\bar{c}=(1;4;2)$ $\bar{d}=(5;1;1)$.

3.13 $\bar{a}=(1;1;-1)$ $\bar{b}=(2;1;0)$ $\bar{c}=(5;1;1)$ $\bar{d}=(3;1;4)$.

3.14 $\bar{a}=(1;6;1)$ $\bar{b}=(2;1;0)$ $\bar{c}=(1;3;5)$ $\bar{d}=(3;3;0)$.

3.15 $\bar{a}=(4;0;1)$ $\bar{b}=(2;1;1)$ $\bar{c}=(1;3;5)$ $\bar{d}=(1;1;-3)$.

3.16 $\bar{a}=(0;1;1)$ $\bar{b}=(4;1;-3)$ $\bar{c}=(1;1;1)$ $\bar{d}=(5;1;-1)$.

3.17 $\bar{a}=(-1;1;4)$ $\bar{b}=(0;1;2)$ $\bar{c}=(1;4;5)$ $\bar{d}=(2;1;-3)$.

3.18 $\bar{a}=(1;6;1)$ $\bar{b}=(2;0;-4)$ $\bar{c}=(1;5;3)$ $\bar{d}=(-1;0;0)$.

3.19 $\bar{a}=(1;2;-5)$ $\bar{b}=(3;1;3)$ $\bar{c}=(-2;1;1)$ $\bar{d}=(3;3;1)$.

3.20 $\bar{a}=(1;3;2)$ $\bar{b}=(4;3;3)$ $\bar{c}=(1;2;1)$ $\bar{d}=(1;1;6)$.

3.21 $\bar{a}=(1;1;6)$ $\bar{b}=(3;1;-1)$ $\bar{c}=(2;3;1)$ $\bar{d}=(0;4;0)$.

3.22 $\bar{a}=(1;1;0)$ $\bar{b}=(4;1;3)$ $\bar{c}=(1;3;-1)$ $\bar{d}=(-1;1;-1)$.

3.23 $\bar{a}=(2;1;1)$ $\bar{b}=(1;1;2)$ $\bar{c}=(1;1;5)$ $\bar{d}=(4;1;4)$.

3.24 $\bar{a}=(1;1;1)$ $\bar{b}=(2;1;6)$ $\bar{c}=(1;3;2)$ $\bar{d}=(1;4;-1)$.

3.25 $\bar{a}=(1;8;0)$ $\bar{b}=(3;1;-1)$ $\bar{c}=(1;2;1)$ $\bar{d}=(1;1;6)$.

3.26 $\bar{a}=(2;1;4)$ $\bar{b}=(2;3;0)$ $\bar{c}=(1;2;1)$ $\bar{d}=(5;0;0)$.

3.27 $\bar{a}=(1;1;4)$ $\bar{b}=(3;2;-1)$ $\bar{c}=(0;3;1)$ $\bar{d}=(1;1;5)$.

3.28 $\bar{a}=(1;1;4)$ $\bar{b}=(-1;2;2)$ $\bar{c}=(0;2;1)$ $\bar{d}=(1;1;6)$.

3.29 $\bar{a}=(0;1;1)$ $\bar{b}=(3;1;-1)$ $\bar{c}=(1;4;1)$ $\bar{d}=(3;4;1)$.

3.30 $\bar{a}=(1;1;2)$ $\bar{b}=(4;1;2)$ $\bar{c}=(1;0;2)$ $\bar{d}=(3;1;5)$.

3.31 $\bar{a}=(1;1;-1)$ $\bar{b}=(2;1;1)$ $\bar{c}=(1;5;1)$ $\bar{d}=(1;1;4)$.

3.32 $\bar{a}=(3;3;5)$ $\bar{b}=(2;1;-1)$ $\bar{c}=(0;2;1)$ $\bar{d}=(-1;6;2)$.

3.33 $\bar{a}=(2;3;0)$ $\bar{b}=(4;3;1)$ $\bar{c}=(0;5;2)$ $\bar{d}=(0;1;1)$.

3.34 $\bar{a}=(1;3;1)$ $\bar{b}=(4;1;5)$ $\bar{c}=(1;0;1)$ $\bar{d}=(1;2;2)$.

3.35 $\bar{a}=(3;3;1)$ $\bar{b}=(3;1;2)$ $\bar{c}=(2;1;4)$ $\bar{d}=(1;-1;2)$.

3.36 $\bar{a}=(3;0;4)$ $\bar{b}=(2;3;1)$ $\bar{c}=(3;2;0)$ $\bar{d}=(1;1;0)$.

3.37 $\bar{a}=(3;1;2)$ $\bar{b}=(0;1;1)$ $\bar{c}=(4;4;1)$ $\bar{d}=(1;5;0)$.

3.38 $\bar{a}=(1;2;0)$ $\bar{b}=(2;1;-3)$ $\bar{c}=(1;2;3)$ $\bar{d}=(1;0;0)$.

3.39 $\bar{a}=(3;4;1)$ $\bar{b}=(4;1;1)$ $\bar{c}=(2;2;3)$ $\bar{d}=(1;1;2)$.

3.40 $\bar{a}=(1;1;3)$ $\bar{b}=(2;1;4)$ $\bar{c}=(1;2;0)$ $\bar{d}=(-1;0;0)$.

3.41 $\bar{a}=(1;3;4)$ $\bar{b}=(1;3;1)$ $\bar{c}=(0;4;-1)$ $\bar{d}=(1;3;2)$.

3.42 $\bar{a}=(1;0;-2)$ $\bar{b}=(3;1;1)$ $\bar{c}=(0;4;2)$ $\bar{d}=(1;4;1)$.

3.43 $\bar{a}=(1;1;-2)$ $\bar{b}=(3;1;0)$ $\bar{c}=(4;1;1)$ $\bar{d}=(1;0;-2)$.

3.44 $\bar{a}=(2;3;1)$ $\bar{b}=(4;6;1)$ $\bar{c}=(0;1;1)$ $\bar{d}=(1;-2;0)$.

3.45 $\bar{a}=(3;0;4)$ $\bar{b}=(4;3;0)$ $\bar{c}=(3;2;4)$ $\bar{d}=(1;0;-3)$.

3.46 $\bar{a}=(1;1;2)$ $\bar{b}=(3;1;4)$ $\bar{c}=(0;3;1)$ $\bar{d}=(1;-1;0)$.

3.47 $\bar{a}=(1;1;3)$ $\bar{b}=(1;4;-2)$ $\bar{c}=(0;1;5)$ $\bar{d}=(1;2;-3)$.

3.48 $\bar{a}=(2;1;4)$ $\bar{b}=(3;1;1)$ $\bar{c}=(2;0;5)$ $\bar{d}=(0;-4;3)$.

3.49 $\bar{a}=(1;3;3)$ $\bar{b}=(4;1;-2)$ $\bar{c}=(0;0;1)$ $\bar{d}=(1;2;-5)$.

3.50 $\bar{a}=(1;3;0)$ $\bar{b}=(2;2;1)$ $\bar{c}=(0;3;4)$ $\bar{d}=(1;4;0)$.

Задача 4. Нехай $\bar{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)$. Перевірити, що перетворення $A\bar{x}$ є лінійним і знайти матрицю цього перетворення в базисі $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$.

4.1 $A\bar{x}=\left(x_2-2x_3,\ 3x_1+x_2+x_3,\ x_1-2x_2\right)$.
4.2 $A\bar{x}=\left(x_1+3x_3,\ x_1+3x_2,\ x_1-2x_2+x_3\right)$.
4.3 $A\bar{x}=\left(x_2-x_3, 3x_1+x_2-x_3, x_1-x_2+x_3\right)$.
4.4 $A\bar{x}=\left(x_2+4x_3,\ 3x_2-x_3,\ x_1+5x_2+2x_3\right)$.
4.5 $A\bar{x}=\left(x_1-3x_2+x_3,\ x_2+2x_3,\ 3x_1-x_2+2x_3\right)$.
4.6 $A\bar{x}=\left(x_1-x_2+4x_3,\ x_2-4x_3,\ 3x_1+x_3\right)$.
4.7 $A\bar{x}=\left(2x_1-3x_2+x_3,\ x_2+x_3,\ x_1+4x_3\right)$.
4.8 $A\bar{x}=\left(x_1-3x_2,\ 3x_1+x_2+2x_3,\ 3x_1+x_3\right)$.
4.9 $A\bar{x}=\left(2x_1+x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1+4x_3\right)$.
4.10 $A\bar{x}=\left(x_1+x_2,\ x_1+4x_2+2x_3,\ 5x_1+x_3\right)$.
4.11 $A\bar{x}=\left(x_1+x_2-x_3,\ x_1+x_2+5x_3,\ 3x_1+x_2-x_3\right)$.
4.12 $A\bar{x}=\left(x_2-2x_3,\ 3x_1+x_2-x_3,\ x_1+4x_2-x_3\right)$.
4.13 $A\bar{x}=\left(x_2+x_3,\ 3x_1+4x_2-x_3,\ x_1+x_2+5x_3\right)$.
4.14 $A\bar{x}=\left(x_1-x_2+2x_3,\ x_1+2x_2-x_3,\ x_1-4x_2+x_3\right)$.
4.15 $A\bar{x}=\left(x_1+4x_2+x_3,\ x_1+x_2-3x_3,\ x_1+x_3\right)$.
4.16 $A\bar{x}=\left(x_1-x_2+2x_3,\ x_1+x_2-3x_3,\ x_1+x_2-5x_3\right)$.
4.17 $A\bar{x}=\left(x_1-3x_2+x_3,\ 4x_1+x_2,\ x_1+2x_2-x_3\right)$.
4.18 $A\bar{x}=\left(3x_2+2x_3,\ x_1+x_2-x_3,\ x_1+5x_2\right)$.
4.19 $A\bar{x}=\left(x_2+6x_3,\ 2x_1+x_2+5x_3,\ 2x_1-x_2\right)$.
4.20 $A\bar{x}=\left(x_1+x_3,\ x_1+x_2-x_3,\ x_1+5x_2-x_3\right)$.
4.21 $A\bar{x}=\left(x_1+4x_3,\ x_1+3x_2+x_3,\ 2x_1+6x_2\right)$.
4.22 $A\bar{x}=\left(x_1+x_3,\ 2x_1+x_2-x_3,\ x_1+2x_2\right)$.
4.23 $A\bar{x}=\left(x_1+x_2-5x_3,\ x_1+x_2+3x_3,\ x_1+4x_2-x_3\right)$.
4.24 $A\bar{x}=\left(x_2-5x_3,\ x_1+3x_2-x_3,\ 4x_1+2x_2-x_3\right)$.
4.25 $A\bar{x}=\left(x_2+2x_3,\ x_1+x_2+5x_3,\ x_1-x_2+4x_3\right)$.
4.26 $A\bar{x}=\left(x_2+x_3,\ x_1+2x_2+5x_3,\ 3x_1-x_2+x_3\right)$.
4.27 $A\bar{x}=\left(x_1+x_3,\ 4x_1+2x_2+x_3,\ x_1-4x_2+x_3\right)$.
4.28 $A\bar{x}=\left(x_1+3x_2,\ 2x_1+x_2-x_3,\ 2x_1-x_2+2x_3\right)$.

4.29 $A\overline{x} = (x_1 - 3x_3,\ x_1 + 4x_2 - x_3,\ x_1 - 3x_2)$.

4.30 $A\overline{x} = (2x_1 - x_2,\ x_1 + 3x_2 - 2x_3,\ x_1 - x_2 - x_3)$.

4.31 $A\overline{x} = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2 - 2x_3,\ x_1 - 2x_3)$.

4.32 $A\overline{x} = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + 3x_2 + x_3,\ x_1 - x_3)$.

4.33 $A\overline{x} = (x_1 + x_2,\ 2x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + 3x_3)$.

4.34 $A\overline{x} = (3x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 + 4x_3,\ x_1 + x_3)$.

4.35 $A\overline{x} = (x_1 + x_3,\ x_1 - 4x_2 + 2x_3,\ x_2 - x_3)$.

4.36 $A\overline{x} = (x_1 + x_2 - 5x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_2)$.

4.37 $A\overline{x} = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ 5x_1 + x_2,\ x_1 + x_2)$.

4.38 $A\overline{x} = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 4x_1 + x_2 + x_3,\ x_2 - x_3)$.

4.39 $A\overline{x} = (x_1 - 3x_2,\ 5x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + 7x_3)$.

4.40 $A\overline{x} = (3x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2 + 6x_3,\ x_2 - x_3)$.

4.41 $A\overline{x} = (8x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 4x_3,\ x_1 + x_2)$.

4.42 $A\overline{x} = (x_1 + 2x_3,\ x_1 - 4x_2 + x_3,\ x_2 + 5x_3)$.

4.43 $A\overline{x} = (x_2 + 4x_3,\ x_1 + 5x_2,\ x_1 - x_2 + 5x_3)$.

4.44 $A\overline{x} = (x_1 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ 4x_1 + x_3)$.

4.45 $A\overline{x} = (x_1 + 6x_2 + x_3,\ 3x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2 + 4x_3)$.

4.46 $A\overline{x} = (4x_1 + x_2,\ 3x_1 - 3x_2,\ x_1 - x_2 + 5x_3)$.

4.47 $A\overline{x} = (x_1 - x_2,\ x_1 + 7x_2 + 2x_3,\ x_1 + 4x_2 - x_3)$.

4.48 $A\overline{x} = (2x_1 + x_2 + x_3,\ 4x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + 5x_2)$.

4.49 $A\overline{x} = (4x_1 + x_2,\ x_1 - x_2 + 5x_3,\ x_1 + 3x_2 + x_3)$.

4.50 $A\overline{x} = (x_1 + 5x_2,\ 3x_1 + x_2 - 4x_3,\ x_2 - 4x_3)$.

Задача 5. Довести лінійність, знайти матрицю, ядро та область значень оператора.

5.1 Проєктування на вісь OX.
5.2 Проєктування на площину $z = 0$.
5.3 Проєктування на вісь OZ.
5.4 Дзеркальне відображення відносно площини OYZ.
5.5 Проєктування на вісь OY.
5.6 Проєктування на площину $y = 0$.
5.7 Дзеркальне відображення відносно площини $x - y = 0$.
5.8 Дзеркальне відображення відносно площини $y + z = 0$.
5.9 Проєктування на площину $y - z = 0$.

5.10 Проєктування на площину $y = \sqrt{3} \cdot x$.

5.11 Проєктування на площину OYZ.

5.12 Дзеркальне відображення відносно площини $x - z = 0$.

5.13 Дзеркальне відображення відносно площини OXY.

5.14 Поворот навколо осі OX на кут $\dfrac{\pi}{2}$ в додатному напрямі.

5.15 Проєктування на площину $x - y = 0$.

5.16 Проєктування на площину $y + z = 0$.

5.17 Дзеркальне відображення відносно площини $x + y = 0$.

5.18 Дзеркальне відображення відносно площини $y - z = 0$.

5.19 Проєктування на площину $x + y = 0$.

5.20 Проєктування на площину $x - z = 0$.

5.21 Дзеркальне відображення відносно площини $x + z = 0$.

5.22 Поворот навколо осі OZ на кут $60°$ в додатному напрямі.

5.23 Проєктування на площину $\sqrt{3} \cdot y + z = 0$.

5.24 Дзеркальне відображення відносно площини XOZ.

5.25 Поворот навколо осі OY на кут $30°$ в додатному напрямі.

5.26 Проєктування на пряму $y = 3x$ на площині XOY.

5.27 Проєктування на пряму $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{3}$.

5.28 Проєктування на площину $2x - y + z = 0$.

5.29 Симетрія відносно прямої $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$.

5.30 Симетрія відносно площини $2x - y + 4z = 0$.

5.31 Проєктування на пряму $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{3}$.

5.32 Симетрія відносно площини $4x - y + z = 0$.

5.33 Проєктування на пряму $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{4}$.

5.34 Проєктування на площину $3x - y + z = 0$.

5.35 Симетрія відносно прямої $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{1}$.

5.36 Симетрія відносно площини $x + 4y - z = 0$.

5.37 Проєктування на пряму $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

5.38 Симетрія відносно площини $2x + 4y + z = 0$.

5.39 Проєктування на пряму $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{3}$.

5.40 Проєктування на площину $x-2y+2z=0$.

5.41 Симетрія відносно прямої $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$.

5.42 Симетрія відносно площини $4x+y+2z=0$.

5.43 Проєктування на пряму $\frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

5.44 Симетрія відносно площини $x-y+4z=0$.

5.45 Проєктування на пряму $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$.

5.46 Проєктування на площину $x+3y-z=0$.

5.47 Симетрія відносно прямої $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$.

5.48 Симетрія відносно площини $x+y+5z=0$.

5.49 Проєктування на пряму $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$.

5.50 Симетрія відносно площини $x+3y+2z=0$.

Задача 6. Знайти власні значення і власні вектори матриці.

6.1 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.	**6.2** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.	**6.3** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
6.4 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.	**6.5** $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.	**6.6** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
6.7 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.	**6.8** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.	**6.9** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
6.10 $\begin{pmatrix} 12 & 10 & -16 \\ -4 & -3 & 6 \\ 7 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.	**6.11** $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.	**6.12** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
6.13 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.	**6.14** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.	**6.15** $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6.16 $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.	**6.17** $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.	**6.18** $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
6.19 $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.	**6.20** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	**6.21** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
6.22 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.	**6.23** $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.	**6.24** $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.
6.25 $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	**6.26** $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -10 \\ -7 & -4 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.	**6.27** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6.28 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	**6.29** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.	**6.30** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
6.31 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	**6.32** $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	**6.33** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6.34 $\begin{pmatrix} 16 & 8 & -20 \\ -14 & -8 & 18 \\ -22 & -16 & 30 \end{pmatrix}$.	**6.35** $\begin{pmatrix} -36 & -28 & 52 \\ 22 & 18 & -30 \\ -16 & -12 & 24 \end{pmatrix}$.	**6.36** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
6.37 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	**6.38** $\begin{pmatrix} 19 & 14 & -26 \\ -11 & -8 & 15 \\ 8 & 6 & -11 \end{pmatrix}$.	**6.39** $\begin{pmatrix} 19 & -6 & -28 \\ 15 & -4 & -24 \\ 9 & -3 & -13 \end{pmatrix}$.
6.40 $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -6 \\ 1 & -5 & 8 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.	**6.41** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.	**6.42** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
6.43 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.	**6.44** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	**6.45** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.46 $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.	**6.47** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.	**6.48** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6.49 $\begin{pmatrix} -28 & -22 & 40 \\ 16 & 13 & -22 \\ -13 & -10 & 19 \end{pmatrix}$.	**6.50** $\begin{pmatrix} -15 & -10 & 22 \\ 13 & 10 & -17 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.	

Задача 7. Дану матрицю звести до діагональної і виконати перевірку.

7.1 $\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.	**7.2** $\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 30 & -10 \end{pmatrix}$.	**7.3** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.	**7.4** $\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -12 & 14 \end{pmatrix}$.
7.5 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.	**7.6** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.	**7.7** $\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -28 & 15 \end{pmatrix}$.	**7.8** $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
7.9 $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.	**7.10** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.	**7.11** $\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -30 & 13 \end{pmatrix}$.	**7.12** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.
7.13 $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.	**7.14** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.	**7.15** $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.	**7.16** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
7.17 $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.	**7.18** $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.	**7.19** $\begin{pmatrix} -21 & 18 \\ -36 & 30 \end{pmatrix}$.	**7.20** $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
7.21 $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.	**7.22** $\begin{pmatrix} -41 & 60 \\ -30 & 44 \end{pmatrix}$.	**7.23** $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.	**7.24** $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.
7.25 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.	**7.26** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.	**7.27** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.	**7.28** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
7.29 $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.	**7.30** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.	**7.31** $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.	**7.32** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
7.33 $\begin{pmatrix} -12 & 10 \\ -21 & 17 \end{pmatrix}$.	**7.34** $\begin{pmatrix} 25 & -42 \\ 12 & -20 \end{pmatrix}$.	**7.35** $\begin{pmatrix} -7 & 14 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.	**7.36** $\begin{pmatrix} -25 & 56 \\ -16 & 35 \end{pmatrix}$.
7.37 $\begin{pmatrix} -6 & 14 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$.	**7.38** $\begin{pmatrix} 13 & -20 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$.	**7.39** $\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.	**7.40** $\begin{pmatrix} -19 & 40 \\ -12 & 25 \end{pmatrix}$.
7.41 $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$.	**7.42** $\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.	**7.43** $\begin{pmatrix} 14 & -20 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$.	**7.44** $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$.

7.4 $\begin{pmatrix} 31 & -50 \\ 15 & -24 \end{pmatrix}$.	**7.46** $\begin{pmatrix} -11 & 24 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$.	**7.47** $\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -12 & 10 \end{pmatrix}$.	**7.48** $\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$.
7.49 $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.	**7.50** $\begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.		

Задача 8. Квадратичну функцію звести до канонічної форми.

8.1 $x^2-4xy+y^2$.	**8.2** $5x^2+4xy+2y^2$.	**8.3** $x^2+6xy+y^2$.
8.4 $4x^2+4xy+y^2$.	**8.5** $5x^2+4xy+2y^2$.	**8.6** $-3x^2+4xy$.
8.7 $x^2-2xy-y^2$.	**8.8** $9x^2+6xy+y^2$.	**8.9** $-x^2+12xy+4y^2$.
8.10 $x^2-4xy+4y^2$.	**8.11** $-2x^2+4xy+y^2$.	**8.12** $x^2+2xy-y^2$.
8.13 $x^2+4xy+y^2$.	**8.14** $x^2-2xy-y^2$.	**8.15** $4x^2+12xy+9y^2$.
8.16 $-x^2+2xy-y^2$.	**8.17** $6x^2-2xy+6y^2$.	**8.18** $-3x^2+12xy+6y^2$.
8.19 $x^2+6xy-7y^2$.	**8.20** $5x^2+4xy+5y^2$.	**8.21** $3x^2+2xy+3y^2$.
8.22 $-2x^2+4xy+y^2$.	**8.23** $6x^2+6xy-2y^2$.	**8.24** $-2x^2+6xy-10y^2$.
8.25 $10x^2+4xy+7y^2$.	**8.26** $4x^2+4xy+y^2$.	**8.27** $7x^2+2xy+7y^2$.
8.28 $4x^2+4xy+7y^2$.	**8.29** $2x^2+4xy-y^2$.	**8.30** $5x^2+2xy+5y^2$.
8.31 $x^2+12xy+6y^2$.	**8.32** $4x^2+12xy-y^2$.	**8.33** $x^2+4xy+4y^2$.
8.34 $3x^2+2xy+3y^2$.	**8.35** $4x^2+4xy+y^2$.	**8.36** $-5x^2+20xy+10y^2$.
8.37 $6x^2+2xy+6y^2$.	**8.38** $2x^2+8xy+2y^2$.	**8.39** $11x^2+12xy+6y^2$.
8.40 $5x^2+2xy+5y^2$.	**8.41** $-2x^2+8xy+4y^2$.	**8.42** $11x^2+6xy+3y^2$.
8.43 $-x^2+4xy+2y^2$.	**8.44** $4x^2+2xy+4y^2$.	**8.45** $20x^2+16xy+8y^2$.
8.46 $10x^2+8xy+4y^2$.	**8.47** $9x^2+4xy+9y^2$.	**8.48** $7x^2+2xy+7y^2$.
8.49 $5x^2+6xy+5y^2$.	**8.50** $4x^2+6xy+4y^2$.	

ЛІТЕРАТУРА

1. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Дискант В. І., Береза Л. Р., Грижук О. П., Захаренко Л. М. К. : Вища шк., 2001. – 303 с. : іл.

2. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. / В. В. Булдигін та ін.; за ред. проф. В. В. Булдигіна. К. : ТВіМС, 2009. 224 с.

3. Чарін В. С. Лінійна алгебра К. : Техніка, 2004. 416 с.

4. Панасенко О. Б. Лекції з лінійної алгебри : навч. посіб. Вінниця, 2015. 220 с.

5. Lay D. C., Lay S. R., McDonald J. J. Linear Algebra and its Applications, fifth ed. Boston, 2016. 579 p.

6. Poole D. Linear Algebra: A Modern Introduction, third edition. Brooks / Cole, 2006. 803 p.

Навчальне електронне видання
комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Ігор Васильович Абрамчук,
Алла Андріївна Барковська,
Володимир Дмитрович Дереч

Методи розв'язування типових задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *В. Деречем*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет підготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 22.08.2023 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2023-095.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: irvc.ed.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.