І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк

Вища математика
Частина 4

Диференціальні рівняння в прикладах і задачах

Електронний навчальний посібник
комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2023

УДК 51(075)
Х76

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 04.05.2023 р.)

Рецензенти:
В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор
Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор
Л. А. Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Хом'юк, І. В.
Х76 Вища математика. Ч. 4. Диференціальні рівняння в прикладах і задачах : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2023. – 80 с.

У навчальному посібнику на системній основі наводиться теоретичний мінімум із теми курсу вищої математики «Диференціальні рівняння» та основні алгоритми розв'язування відповідних практичних задач, запитання для самоперевірки, вправи для практичних занять та самостійного розв'язування. Наведені приклади завдань для індивідуальної роботи студентів.

Розрахований на студентів технічних ЗВО усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51(075)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вивчаючи різноманітні фізичні процеси та явища, доцільно створювати математичні моделі, за допомогою яких можна досліджувати якісні й кількісні характеристики стану фізичного процесу та передбачати подальший його розвиток без експериментів, які у багатьох випадках є дорогими або неможливими.

В процесі вивчення фізичних явищ досить часто важко встановити залежність між величинами, що описують цей процес математичною формулою, проте є можливість задати залежність між величинами та їхніми похідними. Отже, маємо справу з диференціальними рівняннями.

Саме розв'язання різноманітних практичних та наукових задач наприкінці XVII на початку XVIII ст. привело до появи диференціальних рівнянь. Найпростіші диференціальні рівняння з'явилися у працях Ісаака Ньютона (1643–1727) та Готфріда Лейбніца (1646–1716), якому належить термін «диференціальні рівняння». У XVIII ст. теорія диференціальних рівнянь відокремилась з математичного аналізу в самостійну математичну дисципліну.

Диференціальні рівняння мають велике прикладне значення. Без використання диференціальних рівнянь неможливо нині спроєктувати жодний серйозний агрегатний пристрій, оснащений автономним силовим генератором чи якимись іншими рухомими приводами й механізмами.

Диференціальні рівняння описують різноманітні процеси в таких дисциплінах, як екологія, хімічна кінетика, архітектура, фізика, машинобудування, демографія, механіка, електротехніка, будівництво, медицина, метрологія, економіка і взагалі, якщо існує явище зміни однієї величини відносно іншої, то воно може бути описане диференціальним рівнянням або системою рівнянь. Саме тому особливу роль у математичній підготовці майбутніх фахівців технічного профілю відіграє тема «Диференціальні рівняння» щодо їх застосування у вивченні багатьох спеціальних дисциплін.

У **навчальному посібнику** подано перелік тем з розділу «Диференціальні рівняння». У кожній темі наводиться теоретичний довідник, подаються приклади розв'язування типових задач, а наприкінці пропонуються вправи для самостійного опрацювання. Значна кількість задач розв'язується різними способами, і доцільність цих способів порівнюється. Відповіді до завдань для самостійного розв'язування подаються в кінці вправи. Для допомоги у підготовці до практичних занять, а також для виконання самостійної роботи у посібнику наведено список рекомендованої літератури.

Навчальний посібник призначений для використання студентами різних спеціальностей денної та заочної форм навчання в процесі вивчення даного розділу курсу вищої математики та може бути використаний як під час лекційних і практичних занять, так і для самостійної діяльності.

Тема1. Задачі, що приводять до поняття диференціальних рівнянь. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь

Теоретичний довідник

Рівняння, в яких невідомими є функції та їх похідні, називаються *диференціальними рівняннями (ДР).*

Порядком ДР називається найвищий порядок похідної шуканої функції.

Диференціальне рівняння першого порядку, яке не розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

де $y = y(x)$ – шукана функція, а $y' = \dfrac{dy}{dx}$ – її похідна.

Якщо рівняння (1) розв'язане відносно похідної, то подаємо його у вигляді

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то рівняння (2) набере вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

або

$$dy = f(x, y)dx.$$

Якщо $f(x, y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то ДР 1-го порядку можна записати в *симетричній формі*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{3}$$

Розв'язком ДР (2) називається функція $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, що має похідну $\varphi'(x)$ на $(a;\, b)$ і яка в результаті підстановки в ДР замість шуканої функції перетворює це ДР на тотожність, тобто, $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Графік функції $y = \varphi(x)$ називається *інтегральною кривою*. Процес знаходження розв'язку називається *інтегруванням ДР*.

ДР називається *звичайним,* якщо шукана функція $y = y(x)$ є функцією однієї незалежної змінної.

ДР n-го порядку в загальному випадку можна подати формулою

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

де $x -$ незалежна змінна,

$y -$ шукана функція від x,

$y', y'', ..., y^{(n)} -$ похідні шуканої функції.

Якщо f залежить тільки від x, маємо справу з найпростішим видом диференціального рівняння

$$y'(x) = f(x). \tag{5}$$

Його розв'язок $y(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$ має нескінченну множину розв'язків.

На практиці часто доводиться знаходити розв'язок завдань, які мають поряд з диференціальним рівнянням, яке описує деякий процес, додаткові умови $y(x_0) = y_0$, які характеризують даний процес в означених конкретних умовах.

Задача Коші полягає в тому, щоб із загального розв'язку $y = y(x)$ знайти частинний розв'язок $y = \varphi(x)$ ДР (2), що задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0, \tag{6}$$

яку називають *початковою умовою,* а числа y_0, x_0 – *початковими даними задачі Коші.*

Геометрично задача Коші полягає в тому, щоб знайти інтегральну криву, яка проходить через фіксовану точку (x_0, y_0).

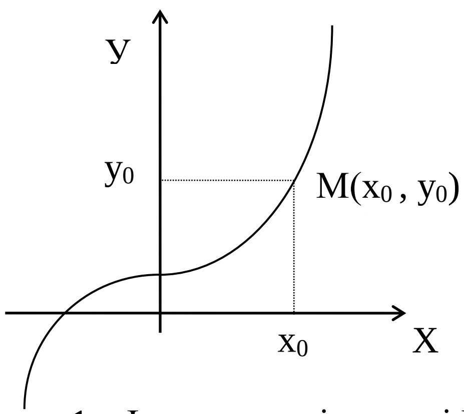


Рисунок 1 – Інтерпретація задачі Коші

Особливими точками називаються точки, в яких порушується єдиність розв'язків ДР. Якщо всі точки розв'язку ДР є особливими, то в цьому випадку розв'язок ДР називається *особливим.*

Загальним розв'язком ДР $y' = f(x, y)$ в області D називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка є розв'язком цього рівняння при будь-яких допустимих значеннях сталої C і для будь-якої початкової умови

$$y(x_0)=y_0((x_0;y_0)\in D)$$

існує єдине значення $C=C_0$, при якому розв'язок $y=\varphi(x,C_0)$ задовольняє початкову умову.

Розв'язок $y=\varphi(x,C_0)$, який отримують із загального розв'язку при конкретному значенні $C=C_0$, називають *частинним розв'язком*.

Якщо довільна стала в загальному розв'язку ДР виражена через початкові значення, то загальний розв'язок називається *розв'язком у формі Коші*.

Теорема Коші. Якщо функція f і її похідна $f_y^{'}$ неперервні в точці $(x_0;y_0)$ області *D*, то розв'язок $y=\varphi(x)$ диференціального рівняння $y^{'}=f(x,y)$ за умови $\varphi(x_0)=y_0$ існує і єдиний, тобто, через точку $(x_0;y_0)$ проходить єдина інтегральна крива даного рівняння.

Оскільки, щоб знайти розв'язок найпростішого ДР $y'=f(x)$, потрібно обчислити інтеграл від *f*(*x*): $y=\int f(x)dx$, то розв'язок ДР ще називають *інтегралом диференціального рівняння*.

Загальний розв'язок ДР, що поданий рівнянням вигляду $\psi(x,y)=C$, яке не розв'язане відносно шуканої функції y, тобто розв'язок поданий неявною функцією, називається *інтегралом ДР*. Якщо загальний розв'язок ДР задається неявним рівнянням вигляду $\psi(x,y,C)=0$, то це рівняння називається *загальним інтегралом ДР*.

Множина кривих, що залежить від параметра, називається *сім'єю кривих*.

Нехай сім'я кривих описується рівнянням $y=\varphi(x,C)$. Якщо вилучимо параметр *C* з системи рівнянь: $y=\varphi(x,C)$, $y'=\varphi_x^{'}(x,C)$, то дістанемо ДР сім'ї кривих.

Задачу інтегрування ДР першого порядку можна розглядати як задачу знаходження рівняння сім'ї кривих $y=\varphi(x,C)$ за їхніми ДР.

Для наближеного знаходження сім'ї інтегральних кривих застосовують графічний метод. ДР першого порядку в кожній точці задає кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої.

Якщо в кожній точці (*x*, *y*) області *D* на площині *xOy* задано напрям деякого вектора, то говорять, що задано *поле напрямів*.

Оскільки ДР задає напрям дотичної, то ДР задає поле напрямів. Ті лінії, на яких дотичні мають однаковий нахил, називаються *ізоклінами*. Для ДР $y^{'}=f(x,y)$ ізокліни мають рівняння $f(x,y)=k=const$, де k –кутовий коефіцієнт дотичної. Побудувавши графіки ізоклін, можна наближено провести інтегральні криві.

Приклади розв'язування типових завдань

Для того, щоб розв'язати фізичну задачі за допомогою диференціальних рівнянь потрібно:

1. Скласти диференціальне рівняння, що описує даний фізичний процес;
2. Знайти розв'язок ДР, тобто функціональну залежність між величинами, які характеризують фізичний процес.

Приклад 1. Нехай з деякої висоти на землю скинуто тіло масою m. Потрібно знайти закон зміни швидкості падіння v від часу t, тобто функцію $v = v(t)$.

Розв'язування

За законом механіки (другий закон Ньютона) $m\dfrac{dv}{dt} = F$, в нашому випадку $F = mg - F_{опору}$.

При аеродинамічній формі і невеликих швидкостях $F_{опору}$ пропорційна швидкості руху тіла

$$F_{опору} = pv.$$

Таким чином:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - pv \rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{p}{m}v ,$$

якщо знайти v на деякому проміжку $[a;\ b]$, то отримаємо $\int dv = \int (g - \dfrac{p}{m}v)dt \Rightarrow \int (g - \dfrac{p}{m}v)dt,$ що і є законом зміни $v(t)$.

Приклад 2. Знайти закон коливального руху вантажу маси m на пружині з жорсткістю k.

Розв'язування

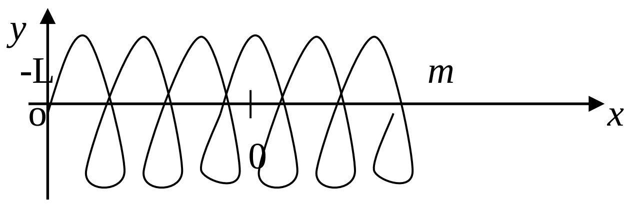


Рисунок 2 – Положення вантажу на прямій

Положення вантажу на прямій лінії характеризується його координатою x, яка змінюється з часом $t \Rightarrow x(t) = x -$ функція (рис. 2).

Початок координат розташуємо в положенні нерозтягненої пружини, довжина якої (L), тоді координата кінця (-L), таким чином, координата вантажу x буде рівна зміні довжини пружини.

Згідно з законом Гука сила розтягу $F = -kx,$ (знак «–», тому що сила направлена проти напрямку розтягу пружини). Оскільки $v = \dfrac{dx}{dt}$, то рівняння $m\dfrac{dv}{dt} = F$ буде мати вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Отже, диференціальні рівняння використовуються для опису неперервних динамічних процесів.

Приклад 3. Визначити півперіод розпаду речовини, якщо експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості.

Розв'язування

Нехай $x(t)$ – кількість радіоактивної речовини в момент часу $t,\ x(0) = x_0$. За умовою задачі $x'(t) = -kx, k > 0$. Тому $\dfrac{dx}{x} = -kdt,\ \ln x = -kt + \ln C,\ x = Ce^{-kt}$. Оскільки $x(0) = x_0$, то закон зміни кількості речовини з часом має вигляд $x(t) = x_0e^{-kt}$.

З рівняння $\dfrac{1}{2}x_0 = x_0e^{-kt}$ можна визначити час T, за який розпадається половина речовини, $T = \dfrac{\ln 2}{k}$. Від початкової кількості речовини знайдений час не залежить.

Приклад 4. Визначити порядок диференціальних рівнянь:

а) $y'x = y$,

б) $y'' + \sin y = 0$,

в) $y'''y - y''x = e^x$.

Розв'язування

Оскільки порядком ДР називається найвищий порядок похідної шуканої функції, то: а) $y'x = y$ – перший порядок ДР;

б) $y'' + \sin y = 0$ – другий порядок ДР;

в) $y'''y - y''x = e^x$ – третій порядок ДР.

Приклад 5. Показати, що ДР $y' = 2y$ має розв'язок $y = e^{2x}$.

Розв'язування

Підставляючи $y' = 2e^{2x} \cdot 2$, $y = e^{2x}$ в умову, дістаємо правильну рівність $e^{2x} \cdot 2 \equiv 2\, e^{2x}$.

Зрозуміло що, ДР має нескінченну множину розв'язків. Так, диференціальне рівняння $y' = 2y$ має розв'язок $y = Ce^{2x}$, де C – довільна стала.

Приклад 6. **Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння** $x' = 5\sin t - \dfrac{2}{1+t^2}$.

Розв'язування

$$x = \int (5\sin t - \frac{2}{1+t^2})dt = -5\cos t - 2arctgt + C.$$

Приклад 7. Знайти розв'язки рівнянь при заданих початкових умовах:

1) $x' = \dfrac{5}{\cos^2 t}$ $\quad x(0) = 3$;

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2}{x^3}$; $\quad y(1) = 2$.

Розв'язування

1) $x = \int \dfrac{5}{\cos^2 t} dt = 5tgt + C$, підставляючи початкові умови, отримаємо $3 = 5tg0 + C \Rightarrow C = 3$.

Таким чином, $x = 5tgt + 3$.

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2}{x^3}$; $\quad dy = \dfrac{x-2}{x^3}dx$, $\quad dy = \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)dx$,

$\int dy = \int \dfrac{dx}{x^2} - \int \dfrac{2dx}{x^3}$; $\quad y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + C$, підставляючи початкові умови, отримаємо: $y(1) = 2 = -\dfrac{1}{1} + 1 + C$; $C = 2$.

Таким чином, $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + 2$.

Приклад 8. Довести, що ДР $2xdx + 2ydy = 0$ має інтеграл $x^2 + y^2 = C$.

Розв'язування

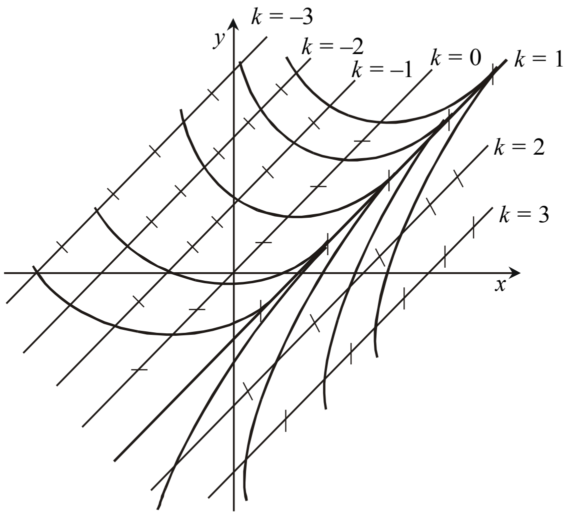
Знайдемо диференціали від лівої та правої частин рівняння

$$x^2 + y^2 = C: \ d(x^2 + y^2) = dC \Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0.$$

Приклад 9. Побудувати графічно сім'ю інтегральних кривих для ДР $y' = x - y$.

Розв'язування

Ізокліни мають рівняння $x - y = k = const$. На цих прямих дотичні до інтегральних кривих мають кутовий коефіцієнт k. Побудуємо графіки ізоклін, а далі проведемо наближено інтегральні криві (рис. 3).



Рисугок 3 – Графіки ізоклін та відповідні їм інтегральні криві

Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = x - 1 + Ce^{-x}$.

Приклад 10. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння $y' = 2\sqrt{y}$.

Розв'язування

При $y > 0$ маємо $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$, $y = (x + C)^2$, $x + C \geq 0$. Отримали загальний розв'язок в області $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$. Але якщо $C = -x$, матимемо розв'язок $y = 0$, який не можна знайти із загального розв'язку при будь-якому значенню C. Таким чином, відповідно до означення, $y(x) \equiv 0$ – особливий розв'язок.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що для довільного значення параметра C заданий вираз є розв'язком відповідного диференціального рівняння:

1) $y = x(C - \ln|x|),\ (x-y)dx + xdy = 0;$

2) $2x + y - 1 = Ce^{2y-x},\ (2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0.$

2. Виділити з даної сім'ї рівняння кривої, що задовольняє початкові умови:

1) $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1,\ y(0) = 1;$

2) $y(1 - Cx) = 1,\ y(1) = 0{,}5;$

3) $y = 2 + C\cos x,\ y(0) = -1.$

Відповіді: 1) $y(\ln|1 - x^2| + 1) = 1;$ 2) $y(1 + x) = 1;$ 3) $y = 2 - 3\cos x.$

3. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих, у яких відрізок довільної нормалі, що знаходиться між осями координат, ділиться навпіл в точці дотику.

Відповідь: $yy' = x$.

4. Побудувати графічно сім'ю інтегральних кривих для ДР:

1) $y' = x + y$;

2) $y' = -\dfrac{y}{x}$.

5. Побудувати за допомогою ізоклін поле напрямів і зобразити схематично інтегральні криві для поданих ДР. Побудувати інтегральну криву, яка проходить через початок координат або точку (1; 1).

1) $y' = y + 1;$ 2) $y' = 1 + y^2;$ 3) $y' = \dfrac{y}{x}$;

4) $y' = \dfrac{x}{y};$ 5) $y' = -\dfrac{x}{y};$ 6) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення диференціального рівняння, порядку ДР.
2. Навести означення ДР першого порядку в загальному вигляді та ДР першого порядку, розв'язуваним відносно похідної.
3. Що називається розв'язком ДР та інтегральною кривою?
4. Сформулювати задачу Коші для ДР першого порядку.
5. Який розв'язок ДР називається особливим та частинним?
6. Які лінії називаються ізоклінами?

Тема2. Диференціальні рівняння першого порядку

Теоретичний довідник

ДР вигляду $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ (1) називається ДР з *відокремленими змінними.*

Загальний розв'язок ДР знаходимо з рівняння

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C, C = const.$$

Розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0, y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = 0.$$

Для того, щоб знайти розв'язок ДР з відокремленими змінними, потрібно обчислити інтеграли від заданих функцій.

ДР з *відокремлюваними змінними* називають рівняння вигляду $P_1(y)Q_1(x)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$ (2), яке зводять до ДР з відокремленими змінними.

Діленням рівняння (2) на добуток $P_1(y)Q_2(x)$ отримаємо ДР з відокремленими змінними

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}dx + \frac{P_2(y)}{P_1(y)}dy = 0,$$

яке має інтеграл

$$\int \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}dx + \int \frac{P_2(y)}{P_1(y)}dy = C, \quad C = const.$$

Аналогічно, ДР вигляду $y' = f(x)g(y)$ (3) є *ДР з відокремлюваними змінними*.

Рівняння (3) можна подати так: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),\ \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, яке також має розв'язок $y = y_k$, де $g(y_k) = 0$.

ДР типу $y' = f(ax + by + c)$ заміною $z = ax + by + c$ зводяться до рівнянь із відокремлюваними змінними.

Многочлен $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$ називають однорідним степеня n, якщо всі члени його мають один порядок n. Тобто, для кожного такого члена $a_{ij}x^i y^j$ маємо $i + j = n$.

Наприклад, $P(x, y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ – многочлен другого степеня.

Функція $P(x,y)$ називається однорідною степеня n, якщо при будь-якому числі n має місце тотожність $P(kx,ky)=k^n P(x,y)$.

Наприклад, $f(x,y)=\sqrt[4]{x^4+y^4}$ є однорідною функціює першого порядку, оскільки $f(nx,ny)=\sqrt[4]{n^4x^4+n^4y^4}=n\sqrt[4]{x^4+y^4}=nf(x,y)$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \tag{4}$$

Однорідним називається диференціальне рівняння першого порядку, якщо коефіцієнти $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ є однорідними функціями однакового порядку.

В загальному випадку рівняння (4) має вигляд $F\left(y',\dfrac{y}{x}\right)=0.$

Диференціальне рівняння, що може бути зведене до вигляду $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, називається *однорідним.*

Для його розв'язування використовують заміну $\dfrac{y}{x}=u, y=ux$. Тоді $y'=u'x+x'u=u'x+u$.

Використання цієї заміни приведе до ДР з відокремлюваними змінними

$$u'x+u=f(u),\ x\frac{du}{dx}=f(u)-u.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

ДР вигляду

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{5}$$

де $p(x)$, $q(x)$ відомі функції, називається *лінійним* ДР. Якщо $q(x)\equiv 0$, то ДР називається *однорідним*. Якщо $q(x)\neq 0$, то ДР називається *неоднорідним*.

Лінійне однорідне ДР завжди інтегрується як ДР з відокремлюваними змінними

$$y'+p(x)y=0,\ \frac{dy}{dx}=-p(x)y,\ \frac{dy}{y}=-p(x)dx,$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx,\ \ln|y|=-\int p(x)dx+\ln C,\ y=Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Теорема 1. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного ДР і загального розв'язку однорідного ДР.

Для знаходження загального розв'язку неоднорідного ДР найчастіше застосовують такі два методи розв'язування.

I. *Метод Бернуллі.* Розв'язок ДР (5) шукаємо у вигляді добутку двох функцій *u* та *v*. Підставляючи $y = uv$ *і* $y' = u'v + v'u$ у ДР, дістаємо рівняння

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x).$$

Дане рівняння зводимо до системи диференціальних рівнянь: $v'u + p(x)uv = 0, \quad u'v = q(x)$.

Першу шукану невідому функцію *v* знаходимо з першого рівняння

$$v' = -p(x)v,\ \frac{dv}{dx} = -p(x)v,\ \frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx,\ \ln|v| = -\int p(x)dx, v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Другу невідому функцію *u* можна знайти з другого рівняння

$$u' = q(x)v^{-1},\ u' = q(x)e^{\int p(x)dx},\ u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Таким чином, розв'язок лінійного неоднорідного ДР подано у вигляді $y = (\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C)e^{-\int p(x)dx}$.

II. *Метод Лагранжа*. Лагранж запропонував загальний метод розв'язування лінійних неоднорідних ДР. Спочатку розв'язується однорідне ДР. До загального розв'язку входить довільна стала. Потім шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді розв'язку однорідного рівняння, де довільну сталу розглядаємо як нову шукану функцію. Цей метод називається також *методом варіації довільних сталих.*

Розглянемо процес знаходження розв'язку лінійного неоднорідного ДР $y' + p(x)y = q(x)$ (5). Для цього спочатку складемо відповідне йому однорідне лінійне ДР $y' + p(x)y = 0$ та знайдемо його розв'язок. Загальний розв'язок ДР має вигляд $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, де C – довільна стала. Шукаємо потім розв'язок неоднорідного ДР у вигляді $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, де $C(x)$ – нова шукана функція. Підставивши *y* у ДР (5), дістанемо рівняння

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

або

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),\ C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1,\ C_1 = \text{const}.$$

Остаточно маємо загальний розв'язок неоднорідного ДР (5)

$$y = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

ДР вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0,\ n \neq 1) \tag{6}$$

називається диференціальним рівнянням *Бернуллі*.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного ДР за допомогою заміни $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, $\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x)$.

Розв'язок ДР можна шукати за методом Бернуллі, беручи $y = uv$.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $x'(t) = xt^2$.

Розв'язування

$$\frac{dx}{dt} = xt^2;\ dx = xt^2 dt;\ \int \frac{dx}{x} = \int t^2 dt;\ \ln|x| = \frac{t^3}{3} + C;\quad x = e^{\frac{t^3}{3}+C}.$$

Приклад 2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.

Розв'язування

Відокремимо змінні у ДР шляхом ділення на вираз $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}$

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

Проінтегруємо почленно $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}$.

Використовуючи підведення функції під знак диференціала, отримамо

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}};\quad C - \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2};\quad \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C.$$

Отримано загальний розв'язок ДР у вигляді неявної функції.

Приклад 3. Знайти розв'язок диференціального рівняння: $y' = 9^{x+y}$.

Розв'язування

Відокремимо змінні: $\dfrac{dy}{dx} = 9^x \cdot 9^y; \quad 9^{-y}dy = 9^x dx.$

Проінтегруємо почленно: $-\dfrac{9^y}{\ln 9} = \dfrac{9^x}{\ln 9} + C$.

Домножимо обидві частини на $\ln 9$ і позначимо сталу інтегрування $C\ln 9$ через C, матимемо $-9^y = 9^x + C$.

Отже, загальним розв'язком диференціального рівняння є неявна функція (що залежить від сталої C) $9^y + 9^x = C$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = 2xy^2$.

Розв'язування

Подамо ДР у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2$, $\dfrac{dy}{y^2} = 2xdx$, $\int \dfrac{dy}{y^2} = \int 2xdx$ і знайдемо загальний розв'язок $-\dfrac{1}{y} = x^2 + C, \; y = \dfrac{-1}{x^2 + C}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0$.

Розв'язування

Відокремимо змінні ДР $\dfrac{y}{1+y^2}dy - \dfrac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$.

Оскільки $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$, то задане рівняння подамо як $\dfrac{y}{1+y^2}dy - \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}\right)dx = 0$.

Отже, $\int \dfrac{y}{1+y^2}dy - \int \dfrac{dx}{x} + \int \dfrac{xdx}{1+x^2} = C$, $\dfrac{1}{2}\ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right] - \ln x = C$,

$$(1+x^2)(1+y^2) = C_1 x^2.$$

Оскільки $x = 0$ є частинним розв'язком рівняння, то його потрібно додати до знайденого загального розв'язку.

Приклад 6. Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

Розв'язування

Відокремимо змінні ДР $\dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Проінтегруємо почленно дану рівність і в результаті отримаємо $arctgy = arctgx + C$.

Знайдений загальний розв'язок подано неявно. Оскільки $arctgC = C$, то $arctgx + arctgC = arctgy$. Тоді $tg(arctgx + arctgC) = y$.

Використовуючи тригонометричну формулу $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$, одержуємо $y = \dfrac{x+C}{1-Cx}$.

Приклад 7. Знайти криву, яка проходить через точку Q(-1,4), таку, що піднормаль її в будь-якій точці має одне значення, яке дорівнює 4.

Розв'язування

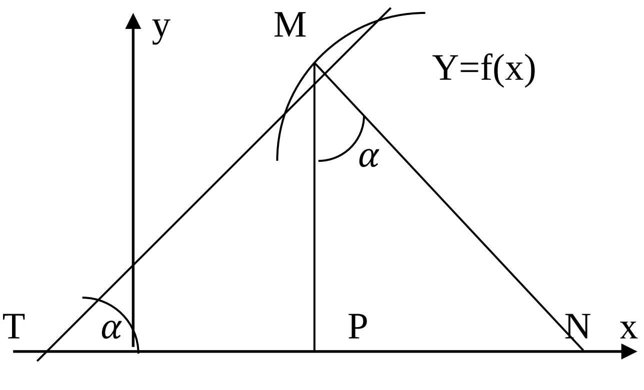


Рисунок 1– Геометрична інтерпретація задачі

Нехай $y = f(x)$ – шукана крива, MT – дотична до цієї кривої в точці M, MN – нормаль, піднормаль – PN (проєкція відрізка нормалі MN на вісь Ox).

PM$= y$ і $\angle NMP = \angle MTP = \alpha$, $PN = ytg\alpha$, $tg\alpha = y' \Rightarrow PN = y \cdot y'$ за умовою

$y \cdot y' = 4 \Rightarrow y\dfrac{dy}{dx} = 4$; $ydy = 4dx$; $\dfrac{y^2}{2} = 4x + C_1$; $y^2 = 8x + C; 16 = -8 + C$;

$C = 24 \Rightarrow y^2 = 8x + 24$ або $y^2 = 8(x+3)$ – парабола; A(-3,0) – вершина параболи.

Приклад 8. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і повітря ($T_{пов} = 20^0$). Відомо, що протягом 20 хв тіло охололо від 100^0 до 60^0. Знайти закон зміни температури тіла від часу.

Розв'язування

Потрібно знайти закон зміни температури тіла від часу, тобто $T(t)$. За умовою задачі $\dfrac{dT}{dt} = K(T - 20^0)$, де K – коефіцієнт пропорційності.

$$\int \frac{dT}{T-20^0} = \int Kdt; \quad \ln\left|T-20^0\right| = Kt + \ln|C|; \quad \frac{T-20^0}{C} = e^{kt} \Rightarrow T - 20^\circ = Ce^{kt}.$$

Отже, $T = Ce^{kt} + 20°$.

Використовуючи початкові умови: $T = 100^0$ при $t = 0$, $T = 60^0$ при $t = 20$, знайдемо K і C.

$$\begin{cases} 100^0 = 20^0 + C; \\ 60^0 = 20^0 + Ce^{20K} \end{cases}.$$

$$C = 80^0; \; e^{20K} = \frac{1}{2}; \; e^K = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$$

Таким чином, $T = 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}t} + 20$.

Приклад 9. В резервуар, який містить 10 кг солі на 100 л суміші, кожну хвилину додається 30 л води і витікає 20 л суміші.

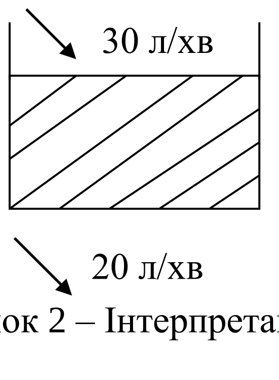


Рисунок 2 – Інтерпретація задачі

Знайти яка кількість солі залишиться в резервуарі через t хвилин, якщо суміш миттєво змішується.

Розв'язування

Нехай x – кількість солі в резервуарі в момент часу t, а $(x + dx)$ – в $(t + dt)$. Оскільки суміш витікає, то кількість солі x зменшуватиметься з часом $\Rightarrow dx < 0$ при $dt > 0$.

Об'єм суміші в резервуарі $V=100+30t-20t=100+10t,$ тому концентрація солі в час t буде $\frac{x}{100+10t}$; зміну кількості солі (dx) за нескінченно малий проміжок $\left[t,t+dt\right]$ ми отримаємо, якщо об'єм суміші, що витекла за цей час $20dt$, помножимо на концентрацію солі

$$\frac{x}{100+dt}\cdot 20dt=-dx \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2}{10+t}dt;\ \ln\left|x\right|=-2\ln\left|10+t\right|+\ln\left|C\right|;$$

$$x=\frac{C}{(10+t)^2};\ t=0;\ 10=\frac{C}{100};\quad C=1000;\ x=\frac{1000}{(10+t)^2}.$$

Цей вираз дає можливість знайти час, який пройшов від початку процесу утворення суміші. За цим принципом обчислюється вік морів та океанів.

Приклад 10. Розв'язати диференціальне рівняння: $(x+y)dx+xdy=0.$

Розв'язування

$P(x,y)=x+y$ та $Q(x,y)=x$ – однорідні функції. Поділимо рівняння на x, отримаємо $\left(1+\frac{y}{x}\right)dx+dy=0.$

Введемо заміну $\frac{y}{x}=z; dy=zdx+xdz;$ $(1+z)dx+zdx+xdz=0$; $(1+z)dx=-xdz;$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(-\frac{dz}{1+2z}\right);\ \ln\left|x\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|1+2z\right|+\ln\left|C\right|.$$

Отже, $\ln\left|x\right|=\ln\frac{C}{\sqrt{1+2z}}$; $x=\frac{C}{\sqrt{1+2z}}=\frac{C}{\sqrt{1+2\frac{y}{x}}}.$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(x^2+xy+y^2)dx-x^2dy=0$.

Розв'язування

Це однорідне рівняння степеня однорідності $m=2$. Зробимо заміну $y=zx, dy=zdx+xdz,\quad (1+z+z^2)dx-(xdz+zdx)=0$,

$$(1+z^2)dx-xdz=0,\ \frac{dx}{x}-\frac{dz}{1+z^2}=0,\ \ln x-arctg\,z=C.$$

Повернемось до заміни $z=\frac{y}{x}.$

Отже, $\ln x-arctg\frac{y}{x}=C$ – загальний розв'язок рівняння.

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y}{x}$.

Розв'язування

Введемо заміну $y = ux$, тоді $y' = u'x + u$. Підставимо в дане рівняння $u'x + u = u;\quad u'x = 0 \Rightarrow u = C = const, y = Cx.$

Приклад 13. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

Розв'язування

Введемо заміну $y = ux$, тоді $y' = u'x + u$. Підставимо в дане рівняння

$$u'x + u = u^2,\ x\frac{du}{dx} = u^2 - u,\ \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}\ .$$

Інтегруючи ДР з відокремлюваними змінними, знайдемо загальний розв'язок ДР

$$\int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{dx}{x},\ \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln|x| + \ln C,\ \frac{u-1}{u} = Cx.$$

$$u = \frac{1}{1 - Cx},\ \frac{y}{x} = \frac{1}{1 - Cx},\ y = \frac{x}{1 - Cx}\ .$$

Приклад 14. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Розв'язування

Маємо однорідне ДР $y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$. Введемо заміну $y = ux$, тоді $y' = u'x + u$. Підставимо в дане рівняння $u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u},\ u'x = -\frac{1 + u^2}{2u}$;

$$\frac{2udu}{1 + u^2} = -\frac{dx}{x},\ \int \frac{2udu}{1 + u^2} = -\int \frac{dx}{x},\ \ln(1 + u^2) = -\ln|x| + \ln 2C.$$

Перетворимо інтеграл ДР

$$1 + u^2 = \frac{2c}{x},\ 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{2C}{x},\ x^2 + y^2 = 2Cx,\ (x - C)^2 + y^2 = C^2.$$

Усі інтегральні криві замкнені, є колами, що проходять через початок координат (рис. 3).

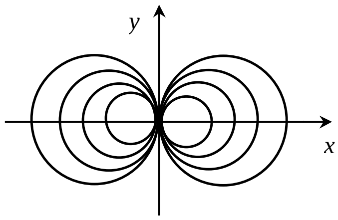


Рисунок 3 – Інтегральні криві

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок ДР $xy' + y = 3x^2$ двома способами: а) методом Бернуллі; б) методом Лагранжа.

Розв'язування

а) Метод Бернуллі.

Введемо заміну $y = uv,$ тоді $y' = u'v + v'u.$ Підставимо в дане рівняння

$y' + \frac{y}{x} = 3x$; $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = 3x$; $u(v' + \frac{v}{x}) + u'v = 3x.$

Спочатку знайдемо змінну v

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0,\ \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},\ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}, \ln v = -\ln x,\ v = \frac{1}{x}.$$

Потім знаходимо змінну u

$$u'\frac{1}{x} = 3x,\ u' = 3x^2,\ u = \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного ДР $y = \left(x^3 + C\right)\frac{1}{x}.$

б) метод Лагранжа.

Спочатку розв'яжемо однорідне ДР $xy' + y = 0$

$$x\frac{dy}{dx} = -y,\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},\ \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x},\ \ln|y| = -\ln|x| + \ln C,\ y = \frac{C}{x}.$$

Розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді $y = \frac{C(x)}{x}.$ Підставляємо y у ДР $x\left(\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}\right) + \frac{C(x)}{x} = 3x^2,\ C'(x) = 3x^2.$

Остаточно знаходимо розв'язок

$$C(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1,\ y = \frac{x^3 + C_1}{x},\ C_1 = \text{const}.$$

Приклад 16. Розв'язати лінійне ДР $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Розв'язування

Розв'язок лінійного однорідного рівняння $y' + 2xy = 0$ має вигляд $y = C \cdot e^{-\int 2xdx} = C \cdot e^{-x^2}$.

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x) \cdot e^{-\int 2xdx} = C(x) \cdot e^{-x^2}$, де $C(x)$ – функція від x.

Знайдемо похідну від цього виразу $y' = C'(x) \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2}$ і підставимо відшукані значення y та y' в початкове рівняння

$$(C'(x) \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2}) + 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2} = 2x \cdot e^{-x^2};$$

$$C'(x) = 2x; \quad C(x) = x^2 + C.$$

Отримуємо загальний розв'язок $y = (x^2 + C) \cdot e^{-x^2}$.

Приклад 17. Розв'язати лінійне ДР першого порядку $2xy' - y = 3x^2$.

Розв'язування

Виразимо y' з рівняння $y' + \left(\dfrac{-1}{2x}\right) \cdot y = \dfrac{3}{2}x$.

Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y' + \left(\dfrac{-1}{2x}\right) \cdot y = 0.$

$y = C \cdot e^{-\int \frac{-dx}{2x}} = Ce^{\frac{1}{2}\ln x} = C(e^{\ln x})^{\frac{1}{2}} = C\sqrt{x}.$

Знаходимо загальний розв'язок початкового рівняння у вигляді $y = C(x) \cdot \sqrt{x}$. Тоді $y' = C'(x) \cdot \sqrt{x} + C(x) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Підставляючи y та y' в рівняння, маємо $2 \cdot x \cdot C'(x) \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot C(x) \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{2} - C(x) \cdot \sqrt{x} = 3x^2$

$$2C'(x)\sqrt{x} = 3x$$

$$2C'(x) = 3x^{1/2}$$

$$2dC(x) = 3x^{1/2}dx$$

$$2C(x) = 2x^{3/2} + C$$

$$C(x) = x\sqrt{x} + C$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y = C(x)\sqrt{x} = x^2 + C\sqrt{x}$.

Приклад 18. Розв’язати диференціальне рівняння: $y' - y = (1+x)y^2$.

Розв’язування

Це є рівняння Бернуллі при $n = 2$. Згідно з алгоритмом

$$-y^{-2}y' + \frac{1}{y} = -(1+x), \quad \frac{1}{y} = z, \quad \frac{dz}{dx} + z = -(1+x).$$

Отже, $\frac{1}{y} = z = e^{-x}\left[\int(-1-x)e^{x}dx + c\right] = ce^{-x} - x$ – загальний розв’язок рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. Вказати типи ДР та методи їх розв’язування:

1) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$;

2) $y'\cos x = \frac{y}{\ln y}$;

3) $y' = \frac{y}{2x\ln y + y - x}$;

4) $(1+e^{2x})y^2dy - e^{x}dx = 0$;

5) $y' = e^{2x} - e^{x}y$;

6) $xy' + y - y^2 = 0$;

7) $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$;

8) $y^2 + x^2y' = xyy'$.

2. Знайти загальний інтеграл ДР:

1) $(xy+y)dx + (xy+x)dy = 0$;

2) $y' + \frac{y}{x} = 1 + 2\ln x$;

3) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

Відповіді: 1) $xye^{x+y} = C$; 2) $y = x\ln x + \frac{C}{x}$; 3) $y = e^{-x^2}(C + \frac{x^2}{2})$.

3. Розв’язати задачу Коші:

1) $2xydx + (y - x^2)dy = 0, \; y(-2) = 4$;

2) $y' = 2y - x + e^{x}, \; y(0) = -1$;

3) $y' + 3y = e^{2x}y^2, \; y(0) = 1$;

4) $y' - \frac{y}{x-3} = \frac{y^2}{x-3}, \; y(1) = -2$.

Відповіді: 1) $x^2 - y\ln(\frac{4e}{y})$; 2) $y = \frac{1}{2}x - e^{x} + \frac{1}{4}(1 - e^{2x})$; 3) $y = e^{2x}$;

4) $y = \frac{x-3}{2-x}$.

Запитання для самоперевірки

1. Які існують типи ДР 1-го порядку?
2. Які існують форми запису диференціального рівняння з відокремлюваними змінними і як вони між собою пов’язані?
3. Яка функція називається однорідною?
4. Навести означення однорідного диференціального рівняння 1-го порядку.
5. Яке рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку?
6. Яке рівняння називається лінійним однорідним, що відповідає даному неоднорідному диференціальному рівнянню 1-го порядку?
7. Суть методу Бернуллі розв’язування лінійних ДР 1-го порядку.
8. Суть методу Лагранжа розв’язування лінійних ДР 1-го порядку.
9. Якою є структура загального розв’язку лінійного диференціального рівняння 1-го порядку?
10. Яке рівняння називається рівнянням Бернуллі?
11. Охарактеризувати метод розв’язання рівняння Бернуллі?
12. Чи можна розв’язувати рівняння Бернуллі безпосередньо методом Бернуллі, не зводячи його до лінійного рівняння?

Індивідуальні творчі завдання до теми «Диференціальні рівняння 1-го порядку»

1. Самостійно підібрати літературу до теми «Диференціальні рівняння першого порядку, їх типи та методи розв’язування» й зробити аналіз підібраних джерел.

2. Розробити особистісну траєкторію вивчення матеріалу з теми (за варіантами).

Номер варіанта	Тема	Номер варіанта	Тема
1.	Теорема Коші – Пеано	6.	Єдиність розв’язку задачі Коші
2.	Початкова умова. Задача Коші	7.	Теорема Пеано
3.	Поле напрямів. Узагальнені інтегральні криві	8.	Звичайні і особливі точки диференціального рівняння
4.	Ізокліни. Ламані Ейлера	9.	Теорема Коші
5.	Знаходження особливих інтегральних кривих диференціального рівняння за його загальним інтегралом	10.	Неперервна залежність розв’язку диференціального рівняння від початкових умов і параметра

3. Скласти теоретичний довідник на тему з варіанта.

Номер варіанта	Тема	Номер варіанта	Тема
1.	Диференціальне рівняння першого порядку, його загальний розв'язок	6.	Рівняння Ріккаті
2.	Рівняння з відокремлюваними змінними	7.	Диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних
3.	Однорідні диференціальні рівняння	8.	Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь
4.	Поняття лінійного рівняння, існування і єдиність розв'язку задачі Коші.	9.	Рівняння Бернуллі
5.	Рівняння в повних диференціалах	10.	Рівняння Міндінг – Дарбу.

4. Розробити алгоритм розв'язування задачі, в якій пропонується знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

Номер варіанта	Умова
1.	$y' = y + yctgx$
2.	$(x^2 y + x^2)dx + (x^3 - 1)(y - 1)dy = 0$
3.	$xdy = y \ln \frac{y}{x} dx$
4.	$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$
5.	$xy' + y = \ln x + 1$
6.	$y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$
7.	$xy' + 2y = x^2$
8.	$x^2 dy = (y^2 - 2x^2)dx$
9.	$xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$
10.	$y' + 2xy = x \sin x e^{-x^2}$

5. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

Номер варіанта	Умова	
1.	$y - y' = y^2 + xy'$	$y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$
2.	$\frac{x}{y}dx = \sqrt{1+x^2}\ln y dy$	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
3.	$x^2y' - 1 = \cos 2y$	$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$
4.	$(1+x^2)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0$	$y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$
5.	$xy'\cos y + \sin y = 0$	$xy' - y = x^2\cos x$
6.	$\sqrt{6+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$	$y' + 2y = x^2 + 2x$
7.	$dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$	$xy' + y = \ln x + 1$
8.	$y'\sin x = y\ln y$	$y' - y = (x-3)e^{2x}$
9.	$y'tgx = y\ln y$	$y' - \frac{y}{x} = 4x$
10.	$y - xy' = 2(1 + x^2y')$	$y' - y = xe^{-2x}$

6. Розв’язати задачу.

Варі-ант	Умова
1.	Знайти лінію, у якої довільна дотична перетинається з віссю абсцис у точці, що однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.
2.	Знайти лінію, яка проходить через точку (0;е), якщо її піддотична дорівнює 3.
3.	Знайти лінію, яка проходить через точку (0;е), якщо її піднормаль дорівнює 5.
4.	Футбольний м’яч масою 0,5 кг підкинутий вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,58 кг при швидкості 1м/с. Знайти час і максимальну висоту підйому м’яча.
5.	Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, яке пропорційне добутку швидкості на квадрат часу. Встановити залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент швидкість руху дорівнювала V_0.
6.	Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю V, яка пропорційна квадрату часу. Встановити залежність між пройденим шляхом S і часом t, якщо в початковий момент часу $t = 0, \quad S = 2$, а в момент часу $t = 1, \quad V = 2$ м/с.
7.	Знайти лінію, яка проходить через точку (2;0) якщо сума довжин відрізків її нормалі і піднормалі дорівнює абсцисі точки дотику.
8.	Відомо, що швидкість охолодження тіла в середовищі пропорційна різниці температур тіла і середовища. Знайти залежність температури тіла T від часу t, якщо за 20 хв температура тіла знизилась від 100 до 60 ºС, а температура середовища була 20 ºС.
9.	Швидкість знецінення обладнання внаслідок його зносу пропорційна в кожний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість дорівнює A_0. Знайти вартість обладнання через 7 років використання.
10.	Знайти лінію, яка проходить через початок координат, якщо середина відрізка її нормалі, що знаходиться між довільною точкою лінії і віссю абсцис, лежить на параболі $y^2 = x$.

Тема 3. Диференціальні рівняння вищих порядків та методи їх розв'язування

Теоретичний довідник

Диференціальним рівнянням n*-го порядку* відносно функції $y(x)$ називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Якщо рівняння (1) вдається розв'язати відносно найвищої похідної тобто,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{2}$$

то його називають *явним диференціальним рівнянням* n*-го порядку.*

Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{3}$$

Загальний розв'язок рівняння (3) $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, де C_1, C_2 – const.

Геометрично це означає, що недостатньо лише точки M, залежної від C_1, потрібно задати ще й напрямок інтегральної кривої. Цей напрямок задається тангенсом кута α, що утворює дотична до кривої в точці M з додатним напрямком осі Ox, тобто $y'|_M = tgx$, таким чином маємо початкові умови:

$$y(x_0) = y_0; \;\; y'(x_0) = y_0'. \tag{4}$$

Розв'язком рівняння (3) за умов (4) є задача Коші.

Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння (3), який задовольняє умови (4), називається задачею Коші для цього рівняння.

Геометрично задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку можна сформулювати так: серед інтегральних ліній даного рівняння знайти ту, яка проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$ і має заданий напрямок дотичної $tg\alpha = y_0'$ (рис. 1).

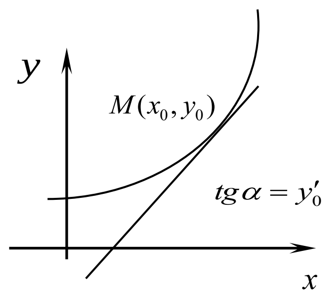


Рисунок 1 – Геометрична інтерпретація задачі Коші

Механічний зміст задачі Коші $x'' = f(x,t,x')$, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = V_0$ (5)
можна трактувати так: визначити траєкторію механічної системи, що відповідає розв'язку ДР (5) і має фіксовані положення x_0 і швидкість V_0 в момент часу t_0.

Такі задачі часто зустрічаються в фізиці. Наприклад, головне рівняння динаміки. Нехай матеріальна точка маси m рухається вздовж Ох під дією змінної сили *F*, *a* – прискорення цієї точки, тоді $ma = F \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\right)$ – диференціальне рівняння, а $x(t_0) = x_0$; $x'(t_0) = V_0$ – початкові умови.

Розглянемо типи рівнянь, що допускають зниження порядку.

1) *Диференціальне рівняння, що розв'язане відносно похідної, тобто має вигляд*

$$y'' = f(x). \tag{6}$$

Метод його розв'язування – послідовне інтегрування

$$y' = \int f(x)dx + C; \quad y' = F(x) + C; \quad y = \int F(x)dx + Cx + C_1; \quad y = \varphi(x) + Cx + C_1;$$

де C, C_1 – const.

2) *Диференціальне рівняння, що не містить шуканої функції y, тобто має вигляд*

$$F(x, y', y'') = 0 \quad \text{або} \quad y'' = f(x, y'). \tag{7}$$

Покладемо $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ і в результаті отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $p(x)$

$$F(x, p, p') = 0. \tag{8}$$

3) *Диференціальне рівняння, що не містить явно аргумента x, тобто має вигляд*

$$F(y, y', y'') = 0 \text{ або } y'' = f(y, y'). \tag{9}$$

Нехай $y' = P(y)$.

Розглянемо P як функцію від y, тоді $y'' = \dfrac{dP}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = P\dfrac{dP}{dy}$.

Таким чином, рівняння має вигляд $P\dfrac{dP}{dy} = f(y)$ – рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\int PdP = \int f(y)dy; \ \frac{P^2}{2} = \int f(y)dy + \frac{C_1}{2}; \ P = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1} \text{ і}$$

$$P = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1} \ \Rightarrow \ \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = \pm(x + C_1).$$

Отже:

1) $y'' = f(x)$ – послідовне інтегрування.

2) $y'' = f(x, y') \Rightarrow y' = P(x); y'' = P'(x).$

3) $y'' = f(y) \Rightarrow y' = P(y); y'' = P \cdot P'(y).$

Диференціальні рівняння, які містять похідну n-го порядку від шуканої функції і незалежну змінну

а) Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x). \tag{10}$$

Оскільки $\left(y^{(n-1)}\right)' = f(x)$, то $y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1$.

Аналогічно $y^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dxdx + c_1(x - x_0) + c_2$, …..,

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \underset{n\ раз}{\ldots} \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx..dx + c_1\left(\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + c_2\left(\frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \ldots + c_n. \tag{11}$$

Остання формула дає загальний розв’язок в області

$$a < x < b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty, -\infty < y'' < \infty, \ldots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty.$$

Формулу (11) легко використати для знаходження розв’язків задачі Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots. y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{12}$$

б) *Розглянемо диференціальне рівняння*

$$F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{13}$$

в якому є $y^{(k)}$.

Введемо нову змінну $$y^{(k)} = z, \tag{14}$$

отримаємо $$F\left(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0, \tag{15}$$

тобто, ми знизили порядок диференціального рівняння (13) на k одиниць. Припустимо, що ми розв’язали диференціальне рівняння (15) і визначили

$$z = \omega(x, c_1, \ldots, c_{n-k}). \tag{16}$$

Тоді інтегруємо рівняння $y^{(k)} = \omega(x, c_1, \dots, c_{n-k})$ (17)

і отримуємо загальний розв'язок $y = \varphi(x, c_1, ..., c_n).$ (18)

в) Розглянемо *диференціальні рівняння, які не містять незалежної змінної і мають* вигляд

$$F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0 \tag{19}$$

і їх порядок можна знизити на одиницю заміною $y' = z.$.

При цьому y стає незалежною зміною, а z – шуканою функцією. Обчислюємо

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)z,$$

…..

$$y^{(n)} = \omega_n(z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}})$$

і остаточно прийдемо до диференціального рівняння (n-**1**)-го порядку

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}z, \dots, \omega_n(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}})\right) = 0. \tag{20}$$

Якщо $z = \varphi(y, c_1, ..., c_{n-1})$ – розв'язок диференціального рівняння (19), то

$$y' = \varphi(y, c_1, ..., c_{n-1}). \tag{21}$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (21) і знайдемо загальний інтеграл.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' = \frac{(y')^2}{y}$.

Розв'язування

Введемо заміну $y' = P(y)$ тоді $y'' = P \cdot P'(y)$. Підставимо в рівняння $PP' = \frac{P^2}{y}$; $P\left(P' - \frac{P}{y}\right) = 0$;

а) $P=0$; $\frac{dy}{dx} = 0$; $dy=0dx$; $y=C$.

б) $P' - \frac{P}{y} = 0$;

$\frac{dP}{P} = \frac{dy}{y}$; $\ln|P| = \ln|yC_1|$;

$P=yC_1$; $\frac{dy}{dx} = yC_1$; $\ln|y| = C_1x + C_2$

Отже, $y = e^{C_1x+C_2}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $xy'' = 2x - y'$.

Розв'язування

Зробимо підстановку $y' = P(x)$. Підставимо в рівняння

$xP' = 2x - P$,

$\frac{dP}{dx} = 2 - \frac{P}{x}$.

Нехай $\frac{P}{x} = z$; тоді $P' = z + z'x$. Підставимо в рівняння

$z + z'x = 2 - z$;

$z'x + 2z = 2$;

$\frac{dz}{dx}x = 2 - 2z$;

$\frac{dz}{2-2z} = \frac{dx}{x}$; $\frac{1}{2}\ln|1-z| = \ln|xC|$;

$1 - z = (xC)^2$; $z = 1 - (xC)^2$; $\frac{P}{x} = 1 - (xC)^2$; $y = \frac{x^2}{2} - \frac{C^2x^4}{4} + C_1$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння: $y'' = 2\sin x$.

Розв’язування

Послідовно інтегруємо: $\int y' dx = \int 2\sin x dx = -2\cos x + C_1$;
$y = \int (-2\cos x + C_1)dx = -2\cos x + C_1 x + C_2$.

Приклад 4. Знайти особливі розв’язки рівняння $y'' = 2\sqrt{y'}$.

Розв’язування

Вводимо заміну $y' = z$, z – нова змінна.

Маємо: $z' = 2\sqrt{z}$.

Звідки $z = (x + C_1)^2$, $x > -C_1$,

$$y' = (x + C_1)^2,\ x > -C_1,\ y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2,\ x > -C_1.$$

Рівняння $z' = 2\sqrt{z}$ має особливий розв’язок $z = 0$, тобто $y' = 0$. Тому $y = C$ – сім’я особливих розв’язків.

Приклад 5. Розв’язати рівняння $y'' = 6x$.

Розв’язування

Послідовно інтегруючи знаходимо $y' = 3x^2 + C_1$, $y = x^3 + xC_1 + C_2$.

Приклад 6. Розв’язати рівняння $4y''\sqrt{y} = 1$.

Розв’язування

Вводимо змінну $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dy} z$, тоді $4\frac{dz}{dy} z\sqrt{y} = 1$, $z^2 = \sqrt{y} + C_1$.

Звідки $z = \pm\sqrt{\sqrt{y} + c_1}$, отже, $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$,

$x + C_2 = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

Розв'язування

Це диференціальне рівняння є однорідним відносно шуканої функції і її похідних, тому

$$\frac{y'}{y} = z, y' = yz, y'' = y(z^2 + z'), xy^2(z^2 + z') + xy^2z^2 - y^2z = 0.$$

Маємо $xz' + 2xz^2 - z = 0$ – диференціальне рівняння Бернуллі.

Інтегруючи, отримаємо $z = \dfrac{x}{x^2 + C_1}$, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x}{x^2 + C_1}$.

Звідки $y = C_2\sqrt{x^2 + C_1}$. Диференціальне рівняння Бернуллі має розв'язок $y = C$, який не міститься в знайденому загальному інтегралі.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y''' = \dfrac{1}{x^3} - \sin 4x + 3$.

Розв'язування

Оскільки в правій частині даного рівняння немає невідомої функції y та її похідної y', тому для того, щоб отримати розв'язок, потрібно тричі послідовно проінтегрувати обидві його частини

$$y'' = \int\left(\frac{1}{x^3} - \sin 4x + 3\right)dx = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{1}{4}\cos 4x + 3x + C_1,$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{3x^2}{2} + C_1x + C_2\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{64}\cos 4x + \frac{3x^3}{2\cdot 3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння

$$y = -\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{64}\cos 4x + \frac{x^3}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Приклад 9. Розв'язати задачу Коші $y''=\cos^2 2{,}5x, y'(0)=2; y(0)=-\frac{1}{50}$.

Розв'язування

$$y'=\int\cos^2 2{,}5x dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{5}\sin x\right)+C_1,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)+C_1\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{25}\cos 5x\right)+C_1x+C_2.$$

Таким чином $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{50}\cos 5x+C_1x+C_2$ – шуканий розв'язок.

Знаходження частинного розв'язку передбачає знаходження C_1, C_2, використовуючи початкові умови, тобто потрібно розв'язати задачу Коші

$$2=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{5}\sin 0\right)+C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1=2,$$

$$-\frac{1}{50}=\frac{1}{4}\cdot 0^2-\frac{1}{50}\cos 0+C_1\cdot 0+C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2=0.$$

Таким чином, $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{50}\cos 5x+2x-$ частинний розв'язок рівняння.

Приклад 10. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x, \quad y(0)=2; \quad y'(0)=-1.$

Розв'язування

Знайдемо загальний розв'язок інтегруванням

$$y'=\int\left(2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x\right)dx=\int\left(2\cos^2 x\sin x-\sin^2 x\cdot\sin x\right)dx=$$

$$=\int\left(2\cos^2 x-\sin^2 x\right)\sin x dx=\int\left(2\cos^2 x-1+\cos^2 x\right)\sin x dx=$$

$$=\int\left(3\cos^2 x-1\right)\sin x dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t,\\ dt=-\sin x dx,\\ \sin x dx=-dt.\end{array}\right|=-\int\left(3t^2-1\right)dt=-\frac{3t^3}{3}+t+C_1=-\cos^3 x+\cos x+C_1.$$

$$y=\int\left(-\cos^3 x+\cos x+C_1\right)dx=\int\left(-\cos^2 x+1\right)\cos x dx+C_1\int dx=$$

$$=\int\sin^2 x\cos x dx+C_1x=\left|\begin{array}{l}\sin x=t,\\ dt=\cos x dx.\end{array}\right|=\int t^2dt+C_1x=\frac{t^3}{3}+C_1x+C_2=\frac{\sin^3 x}{3}+C_1x+C_2.$$

Для знаходження C_1, C_2 початкові умови підставимо у вирази з y' і y.

$$-1=-\cos^3 0+\cos 0+C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1=-1; \; 2=\frac{\sin^3 0}{3}+C_1\cdot 0+C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2=2.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд $y=\frac{\sin^3 x}{3}-x+2$.

Приклад 11. Розв’язати рівняння $xy'' + y' = \ln x$.

Розв’язування

Використаємо підстановку $y' = P(x)$, $y'' = P'(x)$. Отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку $xP' + P = \ln x$, $\Rightarrow P' + \frac{P}{x} = \frac{\ln x}{x}$.

Використаємо заміну $P = uv$, тоді $P = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\ln x}{x}, \qquad u\left(v' + \frac{v}{x}\right) + u'v = \frac{\ln x}{x},$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

I. $v' = -\frac{v}{x}$, $\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$, $\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$, $\Rightarrow$

$$\ln|v| = -\ln|x|, \quad \Rightarrow \ln nv = \ln \frac{1}{x}, \quad \Rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

II.

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}, \quad \Rightarrow u' = \ln x, \quad \Rightarrow \int du = \int \ln x dx \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\text{За методом інтегрування}} \\ \multicolumn{2}{l}{\text{частинами маємо}} \\ u_1 = \ln x, & du_1 = \dfrac{dx}{x}, \\ dv_1 = dx, & v_1 = x, \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$u = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow u = \ln x \cdot x - \int dx, \quad \Rightarrow u = x\ln x - x + C_1.$$

Маємо $P = (x\ln x - x + C_1) \cdot \frac{1}{x}$ або $P = \ln x - 1 + \frac{C_1}{x}$.

Тоді $y' = P = \ln x - 1 + \frac{C_1}{x}$. Проінтегруємо це рівняння

$$y = \int\left(\ln x - 1 + \frac{C_1}{x}\right)dx = \int \ln x dx + \int\left(-1 + \frac{C_1}{x}\right)dx.$$

Із попереднього $\int \ln x \, dx = x\ln x - x$.

Маємо $y = x\ln x - x - x + C_1\ln(x) + C_2$, або

$y = x\ln x - 2x + C_1\ln(x) + C_2$ – загальний розв’язок.

Приклад 12. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y\cdot y''-\left(y'\right)^2=y^2\ln y,\quad y(0)=1;\quad y'(0)=1..$$

Розв'язування

Підстановкою $y'=P(y),\quad y''=P'\cdot P$ початкове рівняння зводиться до рівняння Бернуллі першого порядку

$$P\cdot y\,P'-P^2=y^2\ln y,\quad \text{або}\quad P'-\frac{P}{y}=\frac{y\ln y}{P}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $P=uv.$ Тоді $P'=u'v+uv'.$

$$u'v+uv'-\frac{uv}{y}=\frac{y\ln y}{uv},\quad\Rightarrow\quad u\left(v'-\frac{v}{y}\right)+u'v=\frac{y\ln y}{uv},$$

$$\begin{cases} I.\ \ v'-\dfrac{v}{y}=0,\\ II.\ u'v=\dfrac{y\ln y}{uv}, \end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} I.\ \ v'=\dfrac{v}{y},\\ II.\ u'=\dfrac{y\ln y}{uv^2}. \end{cases}$$

I. $\dfrac{dv}{dy}=\dfrac{v}{y},\quad\Rightarrow\quad\displaystyle\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dy}{y},\quad\Rightarrow\quad \ln|v|=\ln|y|,\quad\Rightarrow\quad v=y.$

II. $u'=\dfrac{y\ln y}{uy^2},\quad\Rightarrow\quad\dfrac{udu}{dy}=\dfrac{\ln y}{y},\quad\Rightarrow\quad\displaystyle\int u\,du=\int\frac{\ln y\,dy}{y},\quad\Rightarrow\quad\left|\begin{matrix} t=\ln y\\ dt=\dfrac{dy}{y}\end{matrix}\right|,\quad\Rightarrow$

$$\int udu=\int t\,dt,\quad\Rightarrow\quad\frac{u^2}{2}=\frac{t^2}{2}+\frac{C_1}{2},\quad\Rightarrow\quad u^2=t^2+C_1,\quad\Rightarrow\quad u=\sqrt{\ln^2 y+C_1}.$$

Дістанемо $P=y\sqrt{\ln^2 y+C_1}.$

Отже,

$$y'=\sqrt{\ln^2 y+C_1}\cdot y,\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=y\sqrt{\ln^2 y+C_1},\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y+C_1}}=\int dx,\quad\Rightarrow$$

$$\left|\begin{matrix}\ln y=t\\ dt=\dfrac{dy}{y}\end{matrix}\right|,\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+C_1}}=\int dx,\quad\Rightarrow\quad\ln\left|\,t+\sqrt{t^2+C_1}\,\right|=x+C_2.$$

Шуканий розв'язок має вигляд

$$\ln\left|\,\ln y+\sqrt{\ln^2 y+C_1}\,\right|=x+C_2.$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1, C_2

$$y(0)=1, \quad \Rightarrow \qquad y'(0)=1, \quad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \ln\left|\ln 1+\sqrt{\ln^2 1+C_1}\right|=C_2, \\ 1=\sqrt{\ln^2 1+C_1}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2=\ln\sqrt{C_1}, \\ C_1=1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} C_2=0 \\ C_1=1 \end{matrix}.$$

Таким чином, $\ln\left|\ \ln y+\sqrt{\ln^2 y+1}\ \right|=x$ – частинний розв’язок рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв’язок рівняння: $y^{IV}=\dfrac{8}{(x-3)^5}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{3(x-3)}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$.

2. Знайти частинний розв’язок ДР і обчислити значення отриманої функції $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ з точністю до двох знаків після коми:

1) $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}, x_0=\dfrac{\pi}{3}, y(0)=1, y'(0)=\dfrac{3}{5}$;

2) $y'''=\dfrac{6}{x^3}, x_0=2, y(1)=0, y'(1)=5, y''(1)=1$;

3) $y''=arctgx, x_0=1, y(0)=y'(0)=0$.

Відповідь: 1) 2,69; 2) 6,07; 3)0,15.

3. Знайти загальний розв’язок ДР, що допускає зниження порядку,

а) $(1-x^2)y''-xy=2$;

б) $xy''+y'=\ln x$.

Відповідь: а) $y=\arcsin^2 x+C_1\arcsin x+C_2$; б) $y=(x+C_1)\ln x-2x+C_2$.

4. Знайти загальний розв’язок ДР другого порядку:

а) $y''=1+y'^2$ *Відповідь.* $y=-\ln\left|\cos\left(x+C_1\right)\right|+C_2$.

б) $yy''=y'^2$ *Відповідь.* $y=C_1e^{C_2x}$.

в) $\left(y''\right)^2=4y'$ *Відповідь.* $y=\dfrac{1}{3}\left(x+C_1\right)^3+C_2$.

г) $yy''=-\left(y'\right)^3$ *Відповідь.* $y\ln|y|+C_1y=x+C_2$.

д) $2yy'' = -(y')^2 - (y')^4$ *Відповідь.* $2(C_1 y - 1)^{\frac{3}{2}} = 3C_1 x + C_2.$

е) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$ *Відповідь.* $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2.$

є) $y'' + 2xy'^2 = 0$ *Відповідь.* $y = \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{x}{C_1} + C_2.$

5. Розв'язати задачу Коші:
а) $2yy'' = (y')^2, y(0) = 1, y'(0) = 1;$
б) $yy'' + (y')^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$;
в) $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3$.

Відповідь: а) $y = (\frac{x}{2} + 1)^2, y = 1;$ б) $y = \sqrt{2x+1}, y = 1.$

6. Знайти частинний розв'язок ДР при $y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 6,$ $y'''(0) = -6.$

а) $y^{(IV)} = \cos\frac{x}{2}$ *Відповідь.* $y = 16\cos\left(\frac{x}{2}\right) - x^3 + 5x^2 - 16.$

б) $y^{(IV)} = xe^x$ *Відповідь.* $y = (x-4)e^x - \frac{5x^3}{6} + 4x^2 + 3x + 4.$

Запитання для самоперевірки

1. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням n-го порядку?
2. Геометричне тлумачення задачі Коші.
3. Що називається розв'язком диференціального рівняння n-го порядку?
4. Який розв'язок диференціального рівняння n-го порядку називається загальним (частинним)?
5. Назвати типи ДР, що допускають зниження порядку та охарактеризувати методи їх розв'язування.
6. Скільки сталих інтегрування містить загальний розв'язок диференціального рівняння 2-го порядку?

Тема 4. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Вронскіан та його властивості. Розв'язування ЛОДР із сталими коефіцієнтами

Теоретичний довідник

Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

де $P_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $f(x)$ – задані в деякій області неперервні функції, називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку*. Воно лінійне відносно шуканої функції y та її похідних $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку (ЛОДР)*.

Лінійною комбінацією функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ називається функція $Y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$, яка утворюється з заданих функцій за допомогою лінійних операцій над ними.

Теорема1. Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ є частинним розв'язком рівняння (2), тоді їх лінійна комбінація $Y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ є також розв'язком даного рівняння.

Два розв'язки рівняння (2) y_1 та y_2 називаються *лінійно незалежними* на інтервалі, якщо їх частка на цьому відрізку не є константою, тобто $\frac{y_1}{y_2} \neq const.$ Інші розв'язки називаються лінійно залежними. Іншими словами, два розв'язки y_1 та y_2 є лінійно залежними на інтервалі $[a,b]$, якщо існує константа λ така, що $\frac{y_1}{y_2} = \lambda,$ коли $x \in [a,b]$. Тоді $y_1 = \lambda y_2$.

Система рівнянь є лінійно залежною на інтервалі $[a,b]$, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$, які не дорівнюються нулю і лінійна комбінація розв'язків системи дорівнює нулю

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n = 0. \qquad (3)$$

Якщо ми припустимо, що $\lambda_n \neq 0$, тоді рівність (3) матиме вигляд

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}, \tag{4}$$

де $\beta_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Система функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є лінійно залежною, якщо принаймні одна з цих функцій є лінійною комбінацією інших. Якщо ми не можемо вибрати такі коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, щоб задовольнити рівність (3), то система функцій називається лінійно незалежною.

Лінійну залежність або незалежність системи функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, (n-1) разів диференційованих на проміжку (*a*, *b*), можна визначити за допомогою *визначника Вронського* або *вронскіана*:

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Теорема2. Якщо функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійно залежні на (*a*, *b*), то їх визначник Вронського дорівнює нулю на цьому інтервалі.

Теорема 3. Якщо функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння $y^{(n)} + \ldots + P_n(x) y = 0$ з неперервними коефіцієнтами $P_n(x)$, лінійно незалежними на (*a*,*b*), то визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці цього інтервалу.

Будь-яка сукупність n лінійно незалежних на (*a*,*b*) частинних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР) n-го порядку називається *фундаментальною системою розв'язків* цього рівняння.

Теорема 4. Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР n-го порядку з неперервними на (*a*,*b*) коефіцієнтами, то

$$Y(x) = \sum_{1}^{n} C_k y_k, \quad a < x < b$$

де C_k – const, є загальним розв'язком цього рівняння.

Висновок. Якщо треба записати загальний розв'язок рівняння (1), достатньо знати будь-яку його фундаментальну систему розв'язків.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \qquad (6)$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – дійсні числа. Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння, потрібно знайти n лінійно незалежних частинних розв'язків.

Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $y = e^{kx}$. Тоді $y' = ke^{kx}$, $y' = k^2 e^{kx}$, …, $y^{(n)} = k^n e^{kx}$. Підставляючи частинні розв'язки у рівняння (6) та ділячи обидві частини рівняння на e^{kx}, отримаємо рівняння

$$k^{(n)} + p_1 k^{(n-1)} + p_2 k^{(n-2)} + \ldots + p_n = 0, \qquad (7)$$

яке називають *характеристичним рівнянням* для рівняння (6).

Рівняння

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (8)$$

де p і q – дійсні числа, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку). Якщо два частинні розв'язки $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку (8) утворюють на інтервалі (a, b) фундаментальну систему, то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (9)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Функції $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ називаються частинними розв'язками рівняння (8), що не містять в собі C_1, C_2.

Рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (10)$$

називають *характеристичним рівнянням* для рівняння (8).

Випадок 1.

$$D>0;\; y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}; y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

Випадок 2.

$$D=0;\; k_1 = k_2 = -\frac{P}{2}; y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}; y_1 = y_2 \Rightarrow y = (C_1 x + C_2) e^{kx};$$

Випадок 3.

$$D<0;\; k_1 = \alpha + \beta \cdot i; \quad k_2 = \alpha - \beta \cdot i; \quad y_1 = e^{(\alpha + \beta \cdot i)x}; y_2 = e^{(\alpha - \beta \cdot i)x};$$

тоді $y = C_1 e^{(\alpha+\beta\cdot i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta\cdot i)x}$..

Переходячи до тригонометричної форми

$$y = e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x) \ ;$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Отже,

1) *D>0*; $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
2) *D=0*; $y = (C_1x + C_2)e^{kx}$.
3) *D<0*; $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

Для розв'язання однорідних лінійних диференціальних рівнянь залежно від коренів характеристичного рівняння загальний розв'язок має вигляд

Корені характеристичного рівняння	Загальний розв'язок
$k_1 \neq k_2$ – дійсні	$\bar{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
$k_1=k_2=k$ – дійсні	$\bar{y} = e^{kx}\left(C_1 + C_2x\right)$
$k_{1,2}=\alpha \pm \beta \cdot i$ – (комплексні)	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Здійснити дослідження функцій на лінійну залежність:
1) $x+2; x-2$.
2) $1; x; x^2$.

Розв'язування

Складемо визначник Вронського для даних функцій

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} x+2 & x-2 \\ (x+2)' & (x-2)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x+2-(x-2) = 4$$

$$W(x) = 4 \neq 0.$$

Отже, функції лінійно незалежні.

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ (1)' & (x)' & (x^2)' \\ (1)' & (x)'' & (x^2)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 = 2$$

$$W(x) = 2 \neq 0.$$

Отже, функції лінійно незалежні.

Приклад 2. Перевірити лінійну залежність функцій: $y_1(x) = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $y_2(x) = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $y_3(x) = e^x$.

Розв'язування

Функції є лінійно залежними, оскільки $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв'язування

Складаємо характеристичне рівняння даного диференціального рівняння та знаходимо його корені: $k^2 - 5k + 6 = 0,$ $k_1 = 2,$ $k_2 = 3$ – не рівні дійсні корені, тому розв'язок має вигляд $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ – шукана функція.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв'язування

Складаємо характеристичне рівняння даного диференціального рівняння та знаходимо його корені: $k^2 - 6k + 9 = 0,$ $\mathrm{k}_1 = k_2 = 3$ – рівні дійсні корені, тому розв'язок має вигляд $y = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Розв'язування

Складаємо характеристичне рівняння даного диференціального рівняння та знаходимо його корені: $k^2 - 2k + 5 = 0,$ D= -16 $<$ 0, $\mathrm{k}_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$, $\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i,$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$.

Таким чином, $k_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$, $\alpha = 1, \beta = 2$, тому розв'язок має вигляд $y = e^x\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

Розв'язування

Характеристичне рівняння $p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = 0$ має корені: $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3.$ Загальний розв'язок має вигляд $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$.

Визначник Вронського для частинних розв'язків $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ відмінний від нуля $\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$.

Отже, частинні розв'язки лінійно незалежні.

Приклад 7. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Розв'язування

Характеристичне рівняння $p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = 0,\quad (p+1)^3 = 0$ має трикратний корінь $p_0 = -1$. ДР має лінійно незалежні частинні розв'язки $y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}, y_3 = x^2e^{-x}$.

Загальний розв'язок ДР подається виразом

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}.$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

Розв'язування

Характеристичне рівняння $p^4 + 8p^2 + 16 = 0$ має корені $p_1 = p_2 = 2i,$ $p_3 = p_4 = -2i$. ДР має загальний розв'язок

$$y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дослідити функції на лінійну залежність

1) $x^2+2x; 3x^2-1; x+1;$

2) $\sin x; \cos x; \sin 2x;$

3) $6x+8; 8x+12;$

4) $x; e^x; xe^x;$

5) $1; \sin^2 x; \cos 2x;$

6) $x^2-x+3; 2x^2+x; 2x-4$.

2. Розв’язати лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1) $y''+y'=0$;

2) $y''-2y'+5y=0$;

3) $y''-7y'+12y=0$;

4) $y''-12y'+36y=0$;

5) $y''-3y'+2y=0$;

6) $y''+y=0$;

7) $y''+6y'+10y=0$;

8) $y''+5y'=0$;

9) $y''-2y'-3y=0$;

10) $y''+2y'+5y=0$

Відповідь: 1) $y=C_1+C_2e^{-x}$; 2) $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 3) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}$;
4) $y=e^{6x}(C_1+xC_2)$; 5) $y=C_1e^{2x}+C_2e^x$; 6) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)$;
7) $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 8) $y=C_1+C_2e^{-5x}$; 9) $y=C_1+C_2e^{-ax}$;
10) $y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

3. Знайдіть частинний розв’язок рівняння, що задовольняє дані умови.

1) $4y''+16y'+15y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-5,5;$

2) $y''-2y'+10y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=3,2;$

3) $y''+4y'-12y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0;$

4) $y''-y'=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1;$

5) $y''-6y'+9y=0,\ y(0)=\dfrac{4}{3},\ y'(0)=\dfrac{1}{27};$

6) $y''-7y'+6y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0;$

7) $2y''+y'-y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0;$

8) $y''-2y'+2y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=0;$

9) $y''-3y'+2y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1;$

10) $2y''+5y'=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=0;$

4. Розв’язати диференціальні рівняння:

1) $4y^{IV}-3y''-y=0$ *Відповідь.* $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos\dfrac{x}{2}+C_4\sin\dfrac{x}{2}.$

2) $y^{IV}-16y=0$ *Відповідь.* $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$

Запитання для самоперевірки

1. Яке рівняння називають лінійним ДР?
2. Яке рівняння називають лінійним однорідним ДР?
3. Що таке лінійна комбінація функцій?
4. Які функції називають лінійно незалежними (лінійно залежними)?
5. Який визначник називається визначником Вронського?
6. Яким чином умови лінійної незалежності системи функцій пов’язані з визначником Вронського?
7. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
8. Сформулюйте теорему про структуру загального розв’язку лінійного однорідного рівняння 2-го порядку.
9. Яке рівняння називається характеристичним?
10. Як знаходиться розв’язок ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

Тема5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та методи їх розв'язування. Розв'язування систем диференціальних рівнянь

Теоретичний довідник

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

де p,q – дійсні числа, $f(x)$ – деяка функція.

Теорема. Загальний розв'язок рівняння (1) дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$ і частинного розв'язку рівняння (1).

Загальний розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді $y = \overline{y} + y^*$ або $y = y_{зо} + y_{чн}$, де $\overline{y}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння даного лінійного неоднорідного рівняння (1), а y^* – частинний розв'язок рівняння (1), який можна знайти за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

Припустимо, що функція $f(x)$, яка стоїть у правій частині рівняння (1), має вигляд:

<u>*Випадок1.*</u> $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$ – квазімногочлен *m*-го степеня (2)

Теорема1. Якщо права частина лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами (1) має вигляд (2) і α не є коренем відповідного характеристичного рівняння, то $y_{чн} = e^{\alpha x}M(x)$, де $M(x)$ – деякий многочлен n-го степеня; якщо α є коренем характеристичного рівняння кратності k, то

$$y_{чн} = x^k e^{\alpha x} M(x).$$

<u>*Випадок2.*</u> $f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x),$ (3)

де $P_1(x)$ і $P_2(x)$ – многочлени n-го степеня.

Теорема2. Якщо права частина лінійного рівняння (1) має вигляд (3) і $z = \alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то існує частинний розв'язок

$$y_{чн} = e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x),$$

де $M(x), N(x)$ – многочлени степеня n, і якщо $z = \alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності k, то

$$y_{чн} = x^k e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x).$$

Випадок 3. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, дивись випадок 1 та 2.

Теорема 3. Якщо y_1 – частинний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = f_1(x)$, а y_2 – частинний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = f_2(x)$, то $(y_1 + y_2)$ є частинним розв'язком рівняння $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.

Метод Лагранжа (варіації довільної сталої)

Нехай є рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$. Розв'яжемо однорідне рівняння $y'' + py' + qy = 0$. Його розв'язок $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$; припустимо, що $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, тоді

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2. \quad (4)$$

Складемо систему

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0; \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \quad (5)$$

Розв'язавши її, отримаємо $C_1(x)$ та $C_2(x)$, тобто знайдемо розв'язок даного рівняння у вигляді (4).

Системи лінійних диференціальних рівнянь

Системою диференціальних рівнянь називається сукупність диференціальних рівнянь, кожне з яких містить незалежну змінну, шукані функції та їх похідні.

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}, \quad (6)$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі функції від змінної t, називається нормальною системою.

Якщо праві частини цих рівнянь є лінійними функціями відносно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то система (6) називається лінійною.

Порядком нормальної системи диференціальних рівнянь називається число рівнянь, яке дорівнює числу невідомих функцій.

Розв'язком системи лінійних диференціальних рівнянь (ЛДР) називається сукупність n функцій, що задовольняють всі рівняння системи.

Розв'язок нормальної системи диференціальних рівнянь можна шукати за допомогою методу виключення змінних. Методом виключення (n–1) невідомих функцій система диференціальних рівнянь зводиться до диференціального рівняння n -го порядку, яке має одну невідому функцію.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

Розв'язування

Шуканий розв'язок має вигляд $y = y_{зо} + y_{чн}$,

де: $y_{зо}$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$y_{чн}$ – розв'язок, який відповідає правій частині даного рівняння.

1) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

$k^2 - 4k + 4 = 0$; $k_{1,2} = 2$; $y_{зо} = (C_1 x + C_2)e^{2x}$.

2) $y_{чн} = (Ax + B)e^{2x} \cdot x^2$, оскільки $\kappa_1 = \kappa_2 = 2 = \alpha$,

$$y'_{чн} = (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} = (3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2)e^{2x},$$

$$y''_{чн} = (6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx)e^{2x} + (3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2)e^{2x} \cdot 2.$$

Підставимо в рівняння

$$(6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax^2 + 4Bx + 4Ax^3 + 4Bx^2) -$$
$$-(4Ax^2 + 8Bx + 8Ax^3 + 8Bx^2) + 4Ax^3 + 4Bx^2 = x$$

Порівняємо коефіцієнти при змінній

x^3 :	$4A + 4A - 8A = 0$	$0 = 0$
x^2 :	$12A + 4B - 12A - 8B + 4B = 0$	$0 = 0$
x^1 :	$6A + 3A + 8B - 8B = 1$;	$A = \frac{1}{6}$
x^0 :	$2B = 0$	$B = 0$

Отже, $y_{чн} = \frac{1}{6}x^3 e^{2x}$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = (C_1 x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x}, \quad \text{або} \quad y = \left(C_1 x + C_2 + \frac{x^3}{6}\right)e^{2x}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $y'' + 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

Розв'язування

Шуканий розв'язок має вигляд $y = y_{зо} + y_{чн}$,

де $y_{зо}$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$y_{чн}$ – розв'язок, який відповідає правій частині даного рівняння.

1) $y'' + 5y' + 6y = 0,$

$k^2 + 5k + 6y = 0, \quad k_1 = -2, k_2 = -3,$

$$y_{зо} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

2) $y_{чн} = A\sin 3x + B\cos 3x,$

$y'_{чн} = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x,$

$y''_{чн} = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x.$

Підставимо в рівняння:

$-9A\sin 3x + -9B\cos 3x + 15A\cos 3x - 15B\sin 3x + 6A\sin 3x + 6B\cos 3x = 13\sin 3x.$

Порівняємо коефіцієнти при $\sin 3x, \cos 3x$:

$\sin 3x: -9A - 15B + 6A = 13,$

$\cos 3x: -9B + 15A + 6B = 0.$

$$\begin{cases} -3A - 15B = 13 \\ -3B + 15A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3B = 15A \\ 3A + 15B = -13 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 5A \\ 3A + 75A = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 5A \\ 78A = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -\dfrac{5}{6} \\ A = -\dfrac{13}{78} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Отже, $y_{чн} = -\dfrac{1}{6}\sin 3x - \dfrac{5}{6}\cos 3x$

Таким чином, загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{5}{6}\cos 3x.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $y'' + 2y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x$.

Розв'язування

Рівняння $y'' + 2y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x$ буде мати загальний розв'язок у вигляді $y = y_{зо} + y_{чн}$.

1) $y'' + 2y = 0$; $k^2 + 2 = 0$; $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$; $\alpha = 0$; $\beta = \sqrt{2}$;

$y_{зо} = e^{0x}(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x)$.

2) $y_{чн} = A\cos x + B\sin x + (Cx^2 + Dx + E)e^x$;

$y'_{чн} = -A\sin x + B\cos x + (2Cx + D)e^x + (Cx^2 + Dx + E)e^x =$

$= -A\sin x + B\cos x + (2Cx + D + Cx^2 + Dx + E)e^x$;

$y''_{чн} = -A\cos x - B\sin x + (2C + 2Cx + D)e^x + (2Cx + D + Cx^2 + Dx + E)e^x =$

$= -A\cos x - B\sin x + (2C + 4Cx + 2D + Cx^2 + Dx + E)e^x$.

Підставимо в рівняння

$-A\cos x - B\sin x + (2C + 4Cx + 2D + Cx^2 + Dx + E)e^x +$

$+2A\cos x + 2B\sin x + (2Cx^2 + 2Dx + 2E)e^x = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x$.

Порівняємо коефіцієнти:

$\cos x$: $A = 4$.

$\sin x$: $B = 0$.

x^2e^x : $C + 2C = 1$; $C = \frac{1}{3}$.

xe^x : $4C + D + 2D = 0$; $3D = -4C$; $D = -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{4}{9}$.

e^x : $2C+2D+E + 2E = 1$; $E = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{8}{9}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{9-6+8}{9} = \frac{11}{27}$.

Отже, $y_{чн} = 4\cos x + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{11}{27}\right)e^x$; таким чином загальний розв'язок рівняння: $y = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x + 4\cos x + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{11}{27}\right)e^x$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' - y' = x^2 + x$.

Розв'язування

Загальний розв'язок рівняння знайдемо у вигляді $y = y_{зо} + y_{чн}$,

де $y_{зо}$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$y_{чн}$ – розв'язок, який відповідає правій частині даного рівняння.

а) $y''' - y' = 0$. Замінюємо дане диференціальне рівняння відповідним характеристичним $k^3 - k = 0 \leftrightarrow k(k-1)(k+1) = 0$. Звідки $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$. Тому $y_{з.о.} = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}$;

б) оскільки $k_1 = 0$ є простим коренем характеристичного рівняння, то

$$y_{ч.н.} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Продиференціюємо одержану функцію тричі

$$y'_{ч.н.} = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$
$$y''_{ч.н.} = 6Ax + 2B;$$
$$y'''_{ч.н.} = 6A$$

та підставимо значення функції і її похідних у вихідне рівняння

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 + x.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів прирівнюємо коефіцієнти біля невідомих в однакових степенях. Маємо:

$$\begin{array}{lll} x^2 : -3A = 1; & & A = -\frac{1}{3}; \\ x : -2B = 1; & \text{Звідки} & B = -\frac{1}{2}; \\ x^0 : 6A - C = 0. & & C = -2. \end{array}$$

Отже, $y_{ч.н.} = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x.$

Таким чином, загальний розв'язок – $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x.$

Приклад 5. Знайти розв'язок диференціального рівняння методом Лагранжа $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

Розв'язування

1) $y'' - y' = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 - k = 0$, звідки $k_1 = 0, k_2 = 1$, то загальний розв'язок рівняння такий: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2$;

2) частинний розв'язок рівняння такий: $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$;

3) Складемо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Таким чином, $\begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' \cdot e^x = 0, \\ C_1' \cdot 0 + C_2' \cdot e^x = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}. \end{cases}$

Із другого рівняння $C_2'(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. Проінтегрувавши, отримаємо $C_2(x)=\int\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\arcsin e^x$. Тоді $C_1'(x)=-C_2'(x)\cdot e^x=-\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. Знову проінтегрувавши маємо: $C_1(x)=-\int\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\sqrt{1-e^{2x}}$.

Таким чином, частинний розв'язок даного рівняння такий: $y^*=C_1(x)\cdot 1+C_2(x)\cdot e^x=\sqrt{1-e^{2x}}+e^x\cdot\arcsin e^x$. Тоді шуканий загальний розв'язок рівняння: $y=\overline{y}+y^*=C_1e^x+C_2+\sqrt{1-e^{2x}}+e^x\cdot\arcsin e^x$.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''+y=tg^2x.$

Розв'язування

$y''+y=0$; $k^2+1=0$; $k=\pm i$;

$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$ Нехай $C_1=C_1(x)$; $C_2=C_2(x)$. Тоді

$\boldsymbol{y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x.}$

Складемо систему, враховуючи $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0;\\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=tg^2x.\end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$$

$$\Delta C_1'=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ tg^2x & \cos x\end{vmatrix}=-\sin x tg^2x;\ \Delta C_2'=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & tg^2x\end{vmatrix}=\cos x tg^2x;$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta C_1'}{\Delta}=-\sin x tg^2x; \qquad C_2'(x)=\frac{\Delta C_2'}{\Delta}=\cos x tg^2x.$$

Проінтегрувавши, знайдемо $C_1(x)$ та $C_2(x)$.

$$C_1(x)=\int(-\sin x)tg^2xdx=-\int\frac{\sin x\cdot\sin^2x}{\cos^2x}dx=-\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\sin xdx=$$

$$=-\frac{1}{\cos x}-\cos x+C_1;$$

$$C_2(x)=\int\cos x tg^2xdx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos x}dx=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\Pi}{4}\right)\right|-\sin x+C_2.$$

Отже, $y = \left(C_1 - \frac{1}{\cos x} - \cos x \right) \cos x + \left(\ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\Pi}{4} \right) \right| - \sin x + C_2 \right) \sin x$ - загальний розв'язок.

Приклад 7. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

Розв'язування

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2x + 3y;$$

З першого рівняння $y = \frac{dx}{dt} - 2x$; $\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 2x + 3\frac{dx}{dt} - 6x$; $\frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} - 4x$;

$k^2 - 5k + 4 = 0$;

$k_1 = 4; k_2 = 1;\ x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^t$;

$y(t) = 4C_1 e^{4t} + C_2 e^t - 2C_1 e^{4t} - 2C_2 e^t = 2C_1 e^{4t} - C_2 e^t$.

Отже, $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^t \\ y(t) = 2C_1 e^{4t} - C_2 e^t \end{cases}$ – загальний розв'язок.

Приклад 8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо запропоновану систему до одного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для цього продиференціюємо перше рівняння системи за t $x'' = -7x' + y'$ і замінимо y', скориставшись для цього другим рівнянням системи та виразимо y з першого рівняння

$$x'' = -7x' - 2x - 5y,\ \ y = x' + 7x.$$

Остаточно $x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x)$ або $x'' + 12x' + 37x = 0$ – однорідне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Складемо характеристичне рівняння: $k^2+12k+37=0$; $k_{1,2}=-6\pm i$. Отже, $x(t)=e^{-6t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)$ – його розв'язок. Оскільки $y=x'+7x$, то $y=-6e^{-6t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)+e^{-6t}\left(-C_1\sin t+C_2\cos t\right)+7e^{-6t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)$;

$$y=e^{-6t}\left(C_1\left(\cos t-\sin t\right)+C_2\left(\cos t+\sin t\right)\right).$$

***Відповідь*:** $x(t)=e^{-6t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)$;

$$y=e^{-6t}\left(C_1\left(\cos t-\sin t\right)+C_2\left(\cos t+\sin t\right)\right).$$

Приклад 9. Знайдемо загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь: $y_1'=3y_1+y_2$, $y_2'=-y_1+y_2$.

Розв'язування

Вилучимо змінну $y_2=y_1'-3y_1$. Підставляючи y_2 у друге ДР, отримаємо рівняння

$$\left(y_1'-3y_1\right)'=-y_1+\left(y_1'-3y_1\right),$$

яке можна записати у вигляді $y_1''-4y_1'+4y_2=0$.

Характеристичне рівняння $p^2-4p+4=0$ має корені $p_1=p_2=2$. Тому ДР має розв'язок $y_1=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

З рівняння $y_2=y_1'-3y_1$ знаходимо $y_2=C_1\left(-e^{2x}\right)+C_2\left(1-x\right)e^{2x}$.

Зрештою, знаходимо загальний розв'язок системи ДР

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & (1-x)e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати диференціальні рівняння:

а) $y''-4y=8x^3$.

Відповідь: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x$.

б) $y''-2y'=x^2-x$.

Відповідь: $y=C_1+C_2e^{2x}-x^3/6$.

в) $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}$.

Відповідь: $y=\dfrac{1}{2}e^{-x}+xe^{-2x}+C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$.

г) $y'''-y''=6x+e^{-x}$.

Відповідь: $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+xe^{-x}+x^3-3x^2$.

д) $y''+4y'+4y=e^{-2x}$.

Відповідь: $y=\left(C_1+C_2x+0{,}5x^2\right)e^{-2x}$.

е) $y'' + y' - 2y = 6x^2$.*

Відповідь: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - 3\left(x^2 + x + 1{,}5\right)$.

є) $4y'' - y = x^3 - 24x$.

Відповідь: $y = C_1 e^{0{,}5x} + C_2 e^{-0{,}5x} - x^3$.

ж) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$.

Відповідь: $y = e^{x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dfrac{x^3}{6}\right)$.

2. Методом Лагранжа знайти розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

Відповідь: $y = \left(C_1 - \dfrac{x}{2}\right)\cos 2x + \left(C_2 + \dfrac{1}{4}\cdot \ln\left|\sin 2x\right|\right)\sin 2x$.

б) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

Відповідь: $y = \left(C_1 + \ln\left|\cos x\right|\right)e^{2x}\cos x + \left(C_2 + x\right)e^{2x}\sin x$.

в) $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^{x}$.

Відповідь: $y = \left(C_1 - \ln\left|x\right| + C_2 x\right)e^{x}$.

г) $y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$.

Відповідь: $y = C_1 + C_2 e^{-x} - \left(1 + e^{-x}\right)\ln\left(1 + e^{x}\right) + x$.

д) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Відповідь: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \dfrac{1}{2\cos x}$.

е) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Відповідь: $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \ln\left|\sin x\right|\cos 2x - \left(x + \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\sin 2x$.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння
2. Охарактеризувати розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.
3. Наведіть алгоритм методу варіації довільних сталих розв'язування лінійних неоднорірних диференціальних рівнянь.
4. Що називається системою диференціальних рівнянь 1-го порядку?
5. Що називається розв'язком системи диференціальних рівнянь 1-го порядку?
6. Методи розвязування систем диференціальних рівнянь.

Індивідуальні домашні завдання

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь

1. а) $\left(x^2-y^2\right)y'=2xy$; б) $2xyy'=y^2-1$; в) $xy'-y=x^2$; г) $xy'+y=3$; д) $y'''x\ln x=y$; е) $y''=\sin x$.

2. а) $xy'=y\ln\left(y/x\right)$; б) $x^3y'+x^2y=1$; в) $ydx-2xdy=2x^2dy$; г) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$; д) $xy'''+y''=1$; е) $y''=\dfrac{1}{x}$.

3. а) $\left(1+x^2\right)y'-2xy=\left(1+x^2\right)^2$; б) $xy'+y=y^2$; в) $y'x\ln x=y$; г) $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$; д) $2xy'''=y''$; е) $y''=y'e^y$.

4. а) $xy'+y=5$; б) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$; в) $y'-y\left(1+x\right)=x$; г) $x(y'-y)=e^x$; д) $xy'''+y''=x+1$; е) $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

5. а) $xy'+xe^{y/x}-y=0$;б) $ydy+dx=e^{xdx}$; в) $\left(1+x^2\right)y'=2xy$; г) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$; д) $x^2y''+xy'=1$; е) $y''=\dfrac{6}{x^3}$.

6. а) $x^2y'-y^2=x^2$; б) $\left(x^2+2x+1\right)y'-\left(x+1\right)y=x+1$; в) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$; г) $y'=x^2+2xy-2y^2$; д) $(\mathrm{tg}\,x)y''-y'+\dfrac{1}{\sin x}=0$; е) $2xy'y''=y'^2-1$.

7. а) $xy'=y\ln\left(y/x\right)$; б) $y'+ytgx=\sin 2x$; в) $\left(1+e^x\right)yy'=e^x$; г) $4x^2-xy+y^2+y'(x^2-xy+4y^2)=0$; д) $y'''\mathrm{ctg}2x+2y''=0$.

8. а) $\left(4+2y\right)dx+xdy=0$; б) $xy'+y+xe^{-x^2}=0$; в) $ydx-2xdy=\left(x+2\right)dy$; г) $xy'-2\sqrt{x^3}y=y$; д) $x^3y'''+x^2y''=1$; е) $y''+y'tgx=\sin 2x$.

9. а) $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$; б) $xy'=\sqrt{y^2-x^2}+y$; в) $2xy'-y=3x^2$; г) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$; д) $\mathrm{tg}\,x\cdot y'''=2y''$; е) $\left(y'\right)^2+2yy''=0$.

10. а) $\left(1-x^2\right)y'=xy$; б) $2x^3y'=y\left(2x^2-y^2\right)$; в) $y'x+y=x+1$; г) $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$; д) $y'''\mathrm{ctg}2x=2y''$; е) $\left(1-x^2\right)y''=xy'$.

11. а) $y'\cos x = (y+1)\sin x$; б) $x(y'-y) = e^x$; в) $y'x - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$;
г) $xy' + 2x^2\sqrt{y} = 4y$; д) $x^4y'' + x^3y' = 1$; е) $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

12. а) $\sin x \cdot y' = y\cos x + 2\cos x$ б) $xy' + y = -xy^2$; в) $y^2 + x^2y' = xyy'$;
г) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$; д) $xy''' + 2y'' = 0$; е) $y'' + y'tgx = \sin 2x$.

13. а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$; б) $2xy\,y' = (y')^2 - 1$; в) $xy' - y = x^2$; г) $xy' + y = 3$;
д) $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$; е) $xy'' + 2y' = x^3$.

14. а) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$; б) $y'x\ln x = y$; в) $xy' + y = y^2$;
г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$; д) $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$; е) $y'' - 2y'tgx = \sin x$.

15. а) $xy' + y = 5$; б) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$; в) $y' - y(1+x) = x$;
г) $x(y'-y) = e^x$; д) $x^5y''' + x^4y'' = 1$; е) $2yy'' + (y')^3 + (y')^4 = 0$.

16. а) $x^2y' - y^2 = x^2$; б) $(x^2 + 2x + 1)y' - (x+1)y = x + 1$; в) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;
г) $y' = x^2 + 2xy - 2y^2$; д) $xy''' + y'' + x = 0$; е) $y'' + (1/x)y' = x^2$.

17. а) $4(x^2y + y)dy + \sqrt{5+y^2}\,dx = 0$; б) $xy' + y\left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right) = 0$;
в) $yxdx - 2xdy = 2xy^2dy$; г) $x^2y' - y^2 = x^2$; д) $\mathrm{th}\,x \cdot y^{IV} = y'''$;
е) $(1+y)y'' - 5(y')^2 = 0$.

18. а) $y' = e^{x^2}x(1+y^2)$; б) $x'y + x = 4y^3$; в) $y - xy' = x\sec\dfrac{y}{x}$;
г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$; д) $xy''' + y'' = \sqrt{x}$; е) $y''tgy = 2(y')^2$.

19. а) $xy' = y\ln(y/x)$; б) $x^3y' + x^2y = 1$; в) $ydx - 2xdy = 2x^2dy$;
г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; д) $\mathrm{tg}\,x \cdot y''' = y'' + 1$; е) $3yy'' + (y')^2 = 0$.

20. а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$; б) $xy\,y' = (y')^2 - 1$; в) $xy' - y = x^2$; г) $xy' + y = 3$;
д) $\mathrm{tg}\,5x \quad y''' = 5y''$; е) $y'' = \cos 3x$.

21. а) $xy' + y = 5$; б) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$; в) $y' - y(1+x) = x$; г) $x(y'-y) = e^x$;
д) $th7x \cdot y''' = 7y''$; е) $y'' = \dfrac{1}{x+2}$.

22. а) $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$; б) $xy'=\dfrac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}$;
в) $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$; г) $y'+2y=y^2\operatorname{tg}x$; д) $xy'''+x^2y''=\sqrt{x}$;
е) $y''=y'e^y$.

23. а) $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$; б) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; в) $y^2dx+x(y-1)dy=0$;
г) $xy'-2\sqrt{x^3y}=y$; д) $(\operatorname{cth}x)y''\quad y'+\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}=0$; е) $y''=\dfrac{1}{\sin^2x}$.

24. а) $y'+y=-y^2$; б) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$; в) $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$;
г) $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$; д) $(x+1)y'''+y''=x+1$; е) $y''=\dfrac{4}{x^3}$.

25. а) $6xdx-6ydy=2x^2ydy+3y^2xdx$; б) $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{y}{x}+3$;
в) $(\cos2y\cos^2y-x)y'=\sin y\cos y$; г) $x^2y'-y^2=x^2$;
д) $(1+\sin x)y'''=(\cos x)y''$; е) $2xy'y''=y'^2-1$.

26. а) $4(x^2y+y)dy+\sqrt{5+y^2}dx=0$; б) $y'=2xy+x$; в) $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y$;
г) $y'-\dfrac{1}{x+1}y=e^x(x+1)$; д) $xy''+y''=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; е) $y''+y'tgx=\sin2x$.

27. а) $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0$; б) $y'=\dfrac{x+2y}{2x-y}$; в) $3(xy'+y)=y^2\ln x$;
г) $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$; д) $-xy'''+2y''=\dfrac{2}{x^2}$; е) $(y')^2+2yy''=0$.

28. а) $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$; б) $y'=2xy+x$;
в) $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+4$; г) $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}(1-x^3)$; д) $\operatorname{ch}x\cdot y''+y'=\operatorname{ch}x$;
е) $(1-x^2)y''=xy'$.

29. а) $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$; б) $y'+\dfrac{2xy}{1+x^2}=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$; в) $xy'=\dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$
; г) $y'+ytgx=\sin2x$; д) $x^4y''+x^3y'=4$; е) $1+(y')^2+yy''=0$.

30. а) $y(4+e^x)dy-e^xdx=0$; б) $y'=\dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$; в) $y'-\dfrac{2x-5}{x^2}y=5$;
г) $y'=(x^2+2x)2y$; д) $y''+\dfrac{2x}{x^2+1}y'=2x$; е) $1+(y')^2+yy''=0$.

Завдання 2. Знайти розв’язок задачі Коші

1. а) $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1$;

б) $4y^3y'' = y^4 - 1,\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. а) $xy' + y = 2y^2 \ln x,\ y(1) = \dfrac{1}{2}$;

б) $y'' = 128y^3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 8$.

3. а) $2(xy' + y) = xy^2,\ y(1) = 2$; б) $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

4. а) $y' + 4x^3y = 4(x^3+1)e^{-4x}y^2,\ y(0) = 1$;

б) $y''y^3 = -64,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 2$.

5. а) $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x,\ y(1) = 1$;

б) $y'' = 32\sin^3 y \cos y,\ y(1) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(1) = 4$.

6. а) $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 2$;

б) $y'' = 98y^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 7$.

7. а) $3(xy' + y) = y^2 \ln x,\ y(1) = 3$;

б) $y''y^3 + 49 = 0,\ y(3) = -7,\ y'(3) = -1$.

8. а) $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x),\ y(0) = 1$;

б) $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x,\ y(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{\pi}$.

9. а) $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3),\ y(0) = -1$;

б) $y'' = 72y^3,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 6$.

10. а) $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2},\ y(0) = -1$;

б) $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.

11. а) $y''y^3 + 36 = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2$;

б) $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = 5,\ y(2) = 4$.

12. а) $y'' = 18\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \frac{\pi}{2},\ y'(1) = 3;$

б) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x,\ y(1) = e.$

13. а) $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x},\ y(1) = 1;$

б) $4y^3y'' = y^4 - 16,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

14. а) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{8}{x^2},\ y(1) = 4;$ б) $y'' = 50y^3,\ y(3) = 1,\ y'(3) = 5.$

15. а) $y' - y = 2xy^2,\ y(0) = \frac{1}{2};$

б) $y''y^3 + 25 = 9,\ y(2) = -5,\ y'(2) = -1.$

16. а) $y' + \frac{y}{x} = 3x,\ y(1) = 1;$

б) $y'' + 18\sin y\cos^3 x = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

17. а) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,\ y(1) = 3;$

б) $y'' = 8\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \frac{\pi}{2},\ y'(1) = 2.$

18. а) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1,\ y(1) = 1;$ б) $y'' = 32y^3,\ y(4) = 1,\ y'(4) = 1.$

19. а) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x},\ y(1) = 1;$ б) $y''y^3 + 16 = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 2.$

20. а) $y' + 2xy = -2x^3,\ y(1) = e^{-1};$

б) $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

21. а) $y' + xy = -x^3,\ y(0) = 3;$

б) $y'' = 50\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \frac{\pi}{2},\ y'(1) = 5.$

22. а) $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2,\ y(0) = 1;$

б) $y'' = 18y^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3.$

23. а) $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x,\ y(1) = 1;$

б) $y''y^3 + 9 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3$.

24. а) $y' + xy = -x^3,\ y(0) = 3;$

б) $y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5$.

25. а) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ y(1) = \dfrac{1}{2};$

б) $y''y^3 = 4(y^4 - 1),\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$.

26. а) $y' - y\cos x = -\sin 2x,\ y(0) = 3;$

б) $y'' = 8y^3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

27. а) $y' - 4xy = -4x^3,\ y(0) = -\dfrac{1}{2};$

б) $y''y^3 + 4 = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2$.

28. а) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x},\ y(1) = 1;$

б) $y'' = 2\sin^3 y \cdot \cos y,\ y(1) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(1) = 1$.

29. а) $y' - 3x^2 y = \dfrac{x^2(1+x^3)}{3},\ y(0) = 0;$

б) $y''y^3 = y^4 - 16,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$.

30. а) $y' - y\cos x = \sin 2x,\ y(0) = -1;$ б) $y'' = 2y^3,\ y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1$.

Завдання 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

1. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$.
2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.
3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.
4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$.
5. $y'' + 6y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5$.
6. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.
7. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$.
8. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x - 66,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$.
9. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6$.

10. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6$.
11. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = -2$.
12. $y'' + 16y = 32e^{4x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.
13. $y'' + 12y' = 6x^2 + 2x + 1,\ y(0) = y'(0) = 2$.
14. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 7$.
15. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
16. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
17. $y'' - 2y' + 37y = 36e^{x}\cos 6x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6$.
18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
19. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5$.
20. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
21. $y'' - 4y = 8e^{2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = -8$.
22. $y'' - 2y' + y = 4e^{x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
23. $y'' - 2y' = (4x - 4)e^{2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
24. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
25. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.
26. $y'' - 3y' + 2y = (2x + 1)e^{x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
27. $y'' + 4y' - 5y = -3x\sin 2x,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.
28. $y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.
29. $y'' + 7y' + 10y = (3x + 1)\cos x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
30. $y'' - 3y' + 2y = \cos x - \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Завдання 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.
2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.
3. $y''' - y' = x^2 + x$.
4. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$.
5. $y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2$.
6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x)$.
7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x + 1$.
8. $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3$.
9. $y^{IV} + 2y'' + y'' = 4x^2$.
10. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$.

11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$.

12. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$.

13. $7y''' - y'' = 12x$.

14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.

15. $y''' - y'' = 3x^2 - 2x + 1$.

16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$.

17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$.

18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$.

19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$.

20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$.

21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.

22. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$.

23. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$.

24. $y^{IV} + y''' = x$.

25. $y''' - y'' = 6x + 5$.

26. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$.

27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^3$.

28. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.

29. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$.

30. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$.

Завдання 5. Розв’язати систему диференціальних рівнянь

1. $\begin{cases} x' = 5x + y \\ y' = 8x + 3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 3x + 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 7x + 5y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = x + 8y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -3x + 4y \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

Завдання 6. Знайти розв’язок задачі Коші методом Лагранжа

1. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

2. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.

3. $y'' + 4y = 8ctg 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$.

4. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{3x}}$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 6\ln 2$.

5. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

6. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$, $y(\dfrac{1}{2}) = 1$, $y'(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

7. $y'' + \dfrac{1}{\pi^2} y = \dfrac{1}{\pi^2 \cos \dfrac{x}{\pi}}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

8. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.

9. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 4$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 4$.

10. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$.

11. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

12. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$.

13. $y'' + 9y = \dfrac{y}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

14. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.

15. $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$, $y(\frac{\pi}{4}) = 3$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 2$.

16. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 8\ln 2$, $y'(0) = 14\ln 2$.

17. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$, $y(\frac{\pi}{6}) = 3$, $y'(\frac{\pi}{6}) = 2\pi$.

19. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

20. $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$.

21. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = \dfrac{1}{2}$.

22. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 2$, $y'(0) = 5\ln 3$.

23. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

24. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$, $y(\frac{\pi}{4}) = 2$, $y'(\frac{\pi}{4}) = \pi$.

25. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

26. $y'' + y' = \dfrac{e^{x}}{2 + e^{x}}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = 1 - \ln 2$.

27. $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2.$

28. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}},\ y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 3\ln 2.$

29. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1+e^{-x}},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

30. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x},\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

Завдання 7. Знайти розв’язок задачі

1. Знайти криву, кожна дотична до якої відсікає на осях координат такі відрізки, що сума величин, обернених квадратам довжин цих відрізків, дорівнює одиниці.
2. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(0;\ 5)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній у 7 разів.
3. Знайти лінію, знаючи, що площа, яка знаходиться між осями координат, цією кривою і ординатою будь-якої точки на ній, дорівнює кубу цієї ординати.
4. Площа, обмежена кривою, осями координат і ординатою будь-якої точки кривої, дорівнює довжині відповідної дуги кривої. Знайти рівняння цієї лінії, якщо відомо, що вона проходить через точку $M\ (0;\ 1)$.
5. Записати рівняння кривої, що проходить через точку $A(5;2)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в 3 рази більший, ніж кутовий коефіцієнт прямої, що з’єднує точку A з початком координат.
6. Знайти рівняння лінії, у якої відрізок, що відсікається дотичною в будь-якій точці кривої на осі Oy, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.
7. Знайти рівняння лінії, знаючи, що відрізок, що відсікається дотичною від осі ординат дорівнює півсумі координат точки дотику.
8. Знайти рівняння лінії, для якої добуток абсциси будь-якої точки на величину відрізка, що відсікається нормаллю на осі ординат, дорівнює подвоєному квадрату відстані від цієї точки до початку координат.
9. Знайти лінію, для якої трикутник, утворений нормаллю з осями координат, був би рівновеликий трикутнику, утвореному віссю Ox, дотичною і нормаллю.
10. Знайти лінію, що проходить через точку $A(2;\ 3)$ і має таку властивість, що відрізок будь-якої її дотичної, розміщеної між координатними осями, ділиться навпіл в точці дотику.
11. Знайти лінію, для якої довжина відрізка, що відсікається на осі ординат нормаллю, проведеною в якій-небудь точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат.
12. Знайти лінію, що проходить через точку $M(2;\ 0)$ і має властивість,

що відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має постійну довжину, що дорівнює 2.

13. Знайти всі лінії, у яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис ділиться навпіл в точці перетину з віссю ординат.

14. Знайти лінію, у якої квадрат довжини відрізка, що відсікається будь-якою дотичною від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику.

15. Знайти лінії, у яких тангенс кута між дотичною і додатним напрямом осі Ox прямо пропорційний ординаті точки дотику.

16. Знайти лінію, для якої трикутник, утворений віссю Oy, дотичною і радіус-вектором точки дотику, є рівнобедреним.

17. Знайти лінію, у якої відношення відрізка дотичної, що відсікається від осі ординат, до відрізка, який відсікається нормаллю від осі абсцис, є величина постійна, рівна k.

18. Знайти лінію, довільна дотична до якої відтинає на осі ординат відрізок, менший абсциси точки дотику на 3 одиниці.

19. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1;\ 0)$ і має властивість, що відрізок, який відсікається дотичною на осі Oy, дорівнює полярному радіусу точки дотику.

20. Знайти криву, для якої відрізок на осі ординат, що відсікається будь-якою дотичною, дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

21. Знайти лінії, для яких площа трикутника утвореного віссю Ox, дотичною і радіус-вектором точки дотику, постійна і дорівнює a.

22. Знайти криву, кожна дотична до якої утворює з осями координат трикутник постійної площі $S = 2a^2$.

23. Знайти лінію, у якої довжина нормалі пропорційна квадрату ординати. Коефіцієнт пропорційності k.

24. Знайти лінію, у якої площа трапеції, утвореної осями координат, ординатою довільної точки і дотичною в цій точці, дорівнює половині квадрата абсциси.

25. Знайти лінію, для якої площа, яка обмежена віссю абсцис, лінією і двома ординатами, одна з яких постійна, а інша – змінна, дорівнює відношенню куба змінної ординати до змінної абсциси.

26. Знайти лінію, у якої нормаль (її відрізок від точки лінії до осі абсцис) є постійна величина a.

27. Знайти всі лінії, у яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис ділиться навпіл в точці перетину з віссю ординат.

28. Знайти лінію, у якої початкова ордината будь-якої дотичної на дві одиниці менша абсциси точки дотику.

29. Знайти лінію, у якої довжина полярного радіуса будь-якої її точки M дорівнює відстані між точкою перетину дотичної в точці M з віссю ординат і початком координат.

30. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(0;\ 5)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює ординаті цієї точки.

Типи завдань для перевірки знань студентів з теми «Диференціальні рівняння» за рівнями засвоєння

1. ***Низький (початковий рівень)***

Для перевірки знань першого рівня використовуються тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді з метою встановлення рівня теоретичних знань.

Приклади теоретичних завдань

1. Диференціальне рівняння вигляду $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ називається:
а) рівнянням в частинних похідних;
б) звичайним диференціальним рівнянням 1-го порядку;
в) звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку;
г) рівнянням з частинними похідними n-го порядку.

2. Графік розв'язку диференціального рівняння називається:
а) дотичною до рівняння;
б) інтегральною кривою рівняння;
в) нормаллю рівняння;
г) асимптотою рівняння.

2. ***Середній рівень***

Для перевірки знань другого рівня доцільно використовувати як теоретичні завдання (тестові завдання закритого типу), так і практичні.

Приклад теоретичного завдання

Визначити тип диференціального рівняння $y' \cos x = (x+1)y$:
а) однорідне;
б) лінійне;
в) рівняння Бернуллі;
г) рівняння з відокремлюваними змінними.

Для того, щоб правильно виконати завдання такого типу, студент має володіти основними теоретичними знаннями про диференціальні рівняння і вміти виконувати найпростіші операції для приведення рівняння до цього типу.

Приклад практичного завдання

Розв'язати ДР з відокремлюваними змінними $y'y = x$ і обрати правильну відповідь.

Відповіді: 1) $y = x^2 + C$; 2) $y^2 = \dfrac{x^2}{2}$; 3) $y^2 = x^2$; 4) $y^2 = x^2 + C$.

У всіх завданнях закритого типу враховано типові помилки, яких припускаються студенти. В даному випадку це знаходження одного з можливих розв'язків, а не їх сім'ї.

3. ***Достатній рівень***

Для перевірки знань більш високого – достатнього – рівня пропонуються як теоретичні завдання (тестові завдання на відповідність) так і практичні.

Приклад теоретичного завдання

Встановити відповідність між диференціальними рівняннями і їх типами:

1) $y' = f(x)q(y)$;	1) Бернуллі;
2) $y' + p(x)y = q(x)$;	2) з відокремлюваними змінними;
3) $y' + p(x)y = y^2q(x)$;	3) лінійне.

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1;
в) 1-1, 2-3, 3-2; г) -3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

Приклад практичного завдання

Яка функція є загальним розв'язком ДР зі сталими коефіцієнтами $y'' - 5y' = 0$?

1) $y = C_1x + C_2e^{5x}$; 2) $y = C_1 + C_2e^{5x}$; 3) $y = C_2e^{5x}$; 4) $y = C_1 + C_2e^{-5x}$.

Для розв'язування такого завдання студент має вміти складати характеристичне рівняння, виконувати алгебраїчні операції, а також знати структуру розв'язку такого типу диференціальних рівнянь.

4. Високий рівень

З метою перевірки знань високого рівня засвоєння навчального матеріалу використовуються комплексні завдання, які можуть містити завдання не тільки за матеріалом цього розділу, а й такі, що поєднані з попередньо вивченими розділами вищої математики та інших дисциплін математичної спрямованості.

Приклад завдання. Кількість світла, яка поглинається під час проходження через тонкий шар води, пропорційна кількості світла, яка падає, і товщині шару. Якщо під час проходження шару води завтовшки 3 м поглинається половина початкової кількості світла, то яка частина цього світла дійде до глибини 30 м?

Тестові завдання для перевірки знань

1. Рівняння, що пов’язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідні називається …
а) квадратним; б) диференціальним; в) інтегральним; г) логарифмічним.
2. Порядок найвищої похідної, що входить до диференціального рівняння визначає...
а) перевірку рівняння; б) степінь рівняння; в) порядок рівняння; г) розв’язок рівняння.
3. Функція, яка разом із своїми похідними перетворює диференціальне рівняння в тотожність за x на інтервалі (a;b) називається ...
а) інтегральною кривою диференціального рівняння; б) степенем диференціального рівняння; в) порядком диференціального рівняння; г) розв’язком диференціального рівняння.
4. Диференціальне рівняння може мати ...
а) загальний розв’язок; б) частинний розв’язок; в) загальний інтеграл; г) частинний інтеграл.
5. Графік розв’язку диференціального рівняння називається ...
а) дотичною до рівняння; б) інтегральною кривою рівняння; в) нормаллю рівняння; г) асимптотою рівняння.
6. Якщо за допомогою початкових умов потрібно знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, то кажуть, що треба ...
а) записати формулу Коші; б) зробити перетворення Коші; в) розв’язати задачу Коші; г) розв’язати інтеграл Коші.
7. Розв`язок, який можна отримати з загального розв’язку диференціального рівняння за допомогою початкових умов називається ...
а) стандартним розв’язком рівняння; б) загальним розв’язком рівняння; в) індивідуальним розв’язком рівняння; г) частинним розв’язком рівняння.
8. Якщо загальний розв’язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді,то такий розв`язок називають ...
а) загальним інтегралом диференціального рівняння; б) загальною похідною диференціального рівняння; в) загальною первісною диференціального рівняння; г) загальною кривою диференціального рівняння.
9. Порядком диференціального рівняння називається …
а) найвищий степінь невідомої функції; б) найвищий порядок похідної невідомої функції; в) найвищий степінь вільної змінної; г) найнижчий порядок похідної невідомої функції; д) інша відповідь.
10. Які з наведених нижче рівнянь є рівняннями з відокремлюваними змінними?
1) $y' + p(x)y = y^2q(x)$; 2) $y' = f(x)q(y)$; 3) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$;
4) $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$
а) 1 і 4; б) 2 і 3; в) 2 і 4; г) 3 і 4; д) інша відповідь.

11. Які з наведених нижче рівнянь не є рівняннями з відокремлюваними змінними?

1. $y' + p(x)y = y^2 q(x)$; 2. $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$

3. $y' = f(x)q(y)$; 4. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

а) 1 і 4; б) 2 і 3; в) 2 і 4; г) 3 і 4; д) інша відповідь.

12. Для рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ початкова умова має вигляд:

а) $y'(x_0) = y_0'$;

б) $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$;

в) $(x_0) \cdot y'(x_0) = y_0$;

г) $y(x_0) = y_0$; д) інша відповідь.

13. Рівняння $y' = f(x,y)$ є однорідним, якщо функція $f(x, y)$ задовольняє умову:

а) $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$;

б) $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$;

в) $f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{1}{\lambda} f(x, y) f(\lambda x, \lambda y)$;

г) $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$;

д) інша відповідь.

14. Однорідне рівняння $y' = f(\frac{y}{x})$ інтегрується за допомогою заміни:

а) $xy = u$; б) $\dfrac{x^2}{y} = u$; в) $\dfrac{y}{x} = u$; 4) $\dfrac{y^2}{x} = u$.

15. Вставити пропущений термін. Рівняння вигляду $y' + p(x)y = q(x)$ називається рівнянням ….

а) Бернуллі; б) однорідним; в) лінійним;

г) в повних диференціалах; д) інша відповідь.

16. Яка з замін використовується при розв’язуванні лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' + p(x)y = q(x)$?

а) $y = u + v$; б) $y = u \cdot v$;

в) $y = u \cdot p(x)$; г) $\dfrac{y}{x} = u$;

д) інша відповідь.

17. Рівняння $y' + p(x)y = q(x)y^n$ є рівнянням Бернуллі тільки у випадку, коли …

а) $n \neq 0$; б) $n \neq 1$; в) $n \neq -1$;

г) $n \neq 0$ і $n \neq 1$; д) інша відповідь.

18. Рівняння Бернуллі $y' + p(x)y = q(x)y^n$ зводиться до лінійного заміною …

а) $z = y^{-n-1}$;

б) $z = y^{n-1}$;

в) $z = y^{-n+1}$;

г) $z = y^{n-1}$;

д) інша відповідь.

19. Встановити відповідність між диференціальними рівняннями і їх типами.

1) $y' = f(x)q(y)$;	1) Бернуллі;
2) $y' + p(x)y = q(x)$;	2) з відокремлюваними змінними;
3) $y' + p(x)y = y^2 q(x)$;	3) лінійне.

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1;
в) 1-1, 2-3, 3-2; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

20. Для рівняння $y'' = f(x, y, y')$ початкові умови мають вигляд:

а) $y(x_0) = y_0,\ y''(x_0) = y_0''$;

б) $y(x_0) \cdot y'(x_0) = y_0'$;

в) $y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y_0''$;

г) $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$;

5) інша відповідь.

21. Загальний розв’язок рівняння $y'' = f(x, y, y')$ – це функція вигляду:

а) $y = \phi(x, C)$; б) $y = \phi(x, C_1, C_2)$;

в) $y = \phi(x, C_1, C_2, C_3)$;

г) $y = \phi(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$;

д) інша відповідь.

22. Загальний розв’язок рівняння $y''' = f(x)$має вид має вигляд:

а) $y = \int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx + C_1 + C_2 + C_3$;

б) $y = \int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx + C_1x + C_2 + C_3$;

в) $y = \int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx + \dfrac{C_1}{2!}x^2 + \dfrac{C_2}{1!}x + C_3$;

г) $y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2$;

д) інша відповідь.

23. Порядок рівняння $y'' = f(x, y')$ знижується за допомогою заміни:

а) $y' = p(y)$; б) $y'' = p(x)$; в) $\frac{y}{x} = p(x)$; г) $y' = p(x)$; д)інша відповідь.

24. Рівняння $y''' = f(x, y'')$ зводиться до рівняння першого порядку заміною...

а) $y'' = p(x)$; б) $y' = p(x)$; в) $y''' = p(x)$; г) інша відповідь.

25. Порядок рівняння $y'' = f(y, y')$ понижується за допомогою заміни …

а) $y' = p(y)$; б) $y' = p(x)$; в) $y'' = p(y)$; г) $\frac{y}{x} = p(x)$; д) інша відповідь.

26. Якщо система функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_m(x)$ лінійно залежна на інтервалі $(a; b)$, то вронскіан $W(y_1, y_2, ..., y_m)$ …

а) дорівнює нулю в одній точці $(a; b)$;

б) відмінний від нуля в одній точці $(a; b)$;

в) тотожно дорівнює нулю на $(a; b)$;

г) не дорівнює нулю ні в одній точці $(a; b)$;

д) дорівнює будь-якому числу.

27. Нехай дано лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + py' + qy = 0$. Встановити відповідність між величиною дискримінанта $D = p^2 - 4q$ і виглядом загального розв’язку.

1) $D > 0$;	1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;
2) $D = 0$;	2) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;
3) $D < 0$;	3) $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{kx}$.

а) 1-3,2-1, 3-2;

б) 1-1, 2-2, 3-3;

в) 1-2, 2-3, 3-1;

г) 1-1, 2-3, 3-2;

д) інша відповідь.

28. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв’язок y^* рівняння $y'' - 2y' - 3y = 3x^2 - 1$?

а) $Ax^2 + Bx + C$; б) $Ax^2 + B$; в) $x(Ax^2 + Bx + C)$;

г) $x(Ax + B)$;

д) інша відповідь.

29. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв’язок y^* рівняння $y'' - 5y' = 5x^2 - x$?

а) $x(Ax^2 + Bx)$; б) $x(Ax^2 + Bx + C)$; в) $Ax^2 + Bx + C$; г) $x^2(Ax^2 + Bx + C)$;

д) інша відповідь.

30. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' - 3y' + 2y = e^x\left(3x^2 + 2\right)$?

а) $xe^x(Ax^2 + B)$; б) $xe^x(Ax^2 + Bx + C)$; в) $e^x(Ax^2 + Bx + C)$; г) $e^x(Ax^2 + B)$; д) інша відповідь.

31. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' + 2y' - 8y = 3e^{-2x}x\sin 3x$?

а) $e^{-2x}\left(A\cos 3x + Bx\sin 3x\right)$; б) $e^{-2x}\left(Ax + B\right)\sin 3x$;

в) $e^{-2x}\left(\left(Ax + B\right)\cos 3x + \left(Cx + D\right)\sin 3x\right)$;

г) $Ae^{-2x}x\sin 3x$; д) інша відповідь.

32. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 5x$?

а) $x^2(Ax^2 + Bx)$; б) $Ax^2 + Bx$; в) $Ax^2 + Bx + C$; г) $x(Ax^2 + Bx + C)$; д) інша відповідь.

33. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' + 6y' + 9y = e^{5x}(x^2 + 1)$?

а) $e^{5x}(Ax^2 + B)$; б) $xe^{5x}(Ax^2 + Bx + C)$; в) $xe^{5x}(Ax + B)$; г) $e^{5x}(Ax^2 + Bx + C)$;
5) інша відповідь.

34. Яке рівняння називається характеристичним для лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$ зі сталими коефіцієнтами?

а) $k^3 + pk^2 + qk + 1 = 0$; б) $k^2 + pk + q = 0$; в) $k^2 - pk + q = 0$.

35. Як формується загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) другого порядку?

а) Загальний розв'язок ЛНДР дорівнює $y = \overline{y} + y_*$, де $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; y_* – довільний частинний розв'язок ЛНДР;

б) Загальний розв'язок ЛНДР збігається з загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння $y = \overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$;

в) Загальний розв'язок ЛНДР збігається з деяким частинним розв'язком цього рівняння $y = y_*$.

36. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}(3x+1)$?

а) $x^2 e^{-2x}(Ax+B)$;

б) $e^{-2x}(Ax+B)$;

в) $xe^{-2x}(Ax+B)$;

г) $e^{-2x}Ax$;

д) інша відп овідь.

37. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^*рівняння $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(3x+2)\sin 2x$?

а) $e^{3x}(Ax+B)\sin 2x$; б) $e^{3x}\left(A\cos 2x + (Bx+C)\sin 2x\right)$;

в) $xe^{3x}\left((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x\right)$;

г) $e^{3x}\left((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x\right)$; д) інша відповідь.

38. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' - 8y' + 16y = 7x\sin 4x$?

а) $(Ax+B)\sin 4x$; б) $(Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x$;

в) $A\cos 4x + (Bx+C)\sin 4x$;

г) $A\cos 4x + Bx\sin 4x$;

д) інша відповідь.

39. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}(4x\cos 4x - 3\sin 4x$?

а) $e^{3x}\left((Ax+B)\cos 4x + C\sin 4x\right)$; б) $e^{3x}(Ax\cos 4x + B\sin 4x)$;

в) $e^{3x}\left((Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x\right)$; г) $xe^{3x}\left((Ax+B)\cos 4x + (Cx+)\sin 4x\right)$;

д) інша відповідь.

40. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' - 4y = e^{2x}(2x^2+3)$?

а) $e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$; б) $xe^{2x}(Ax^2+Bx+C)$; в) $xe^{2x}(Ax^2+B)$;

г) $x^2e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$.

41. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' + 4y = 7 - 3x^2$?

а) $Ax^2 + Bx + C$; б) $Ax^2 + B$; в) $x\left(Ax^2 + B\right)$; г) $x\left(Ax + B\right)$;

д) інша відповідь.

42. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' - 4y' + 13y = 2e^{2x}\cos 3x$?

а) $Axe^{2x}\cos 3x$;

б) $e^{2x}\left(Ax\cos 3x + B\sin 3x\right)$;

в) $e^{2x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)$; г) $xe^{2x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)$; д) інша відповідь.

43. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' + 4y' - 12y = 3e^{2x}(2x - 5)$?

а) $Axe^{2x} + Bx + C$; б) $Ae^{2x} + Bx + C$; в) $Axe^{2x} + Bx$;

г) $x\left(Ae^{2x} + Bx + C\right)$; д) інша відповідь.

44. В якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок y^* рівняння $y'' - 6y' + 9y = -4e^{3x} + 5\sin 3x$?

а) $Axe^{3x} + B\cos 3x + C\sin 3x$; б) $Ax^2e^{3x} + B\sin 3x$;

в) $Ax^2e^{3x} + B\cos 3x + C\sin 3x$; г) $Ae^{3x} + B\cos 3x + C\sin 3x$;

д) інша відповідь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навч. посіб. К. : Книги України ЛТД, 2013. 470 с.
2. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна меїханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. І. М. Копась. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 126 с.
3. Диференціальні рівняння: методи та застосування : навч. посіб. / Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Настасієв П. П., Дрінь І. І. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. 288 с.
4. Демчишин О. І., Шелестовський Б. Г. Вища математика : навч. посіб. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010. 592 с.
5. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі : посібник. К. : Академія, 2002. 624 с.
6. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика : практикум. К. : ЦУЛ, 2013. 536 с.
7. Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., абат О. Є. Практикум з вищої математики : навч. посіб. Львів : «Магнолія – 2006», 2007. 285 с.
8. Міхайленко В. М., Федоренко Н. Д. Збірник прикладних задач з вищої математики : навч. посіб. К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2004. 121 с.
9. Моторіна В. Г., Михайленко І. В. Методичне забезпечення навчання диференціальних рівнянь майбутніх інженерів-механіків : навчальний посібник для викладачів та магістрантів ВТНЗ. Х. : ХНПУ імені Г. С. Сковороди, 2016, 76 с.
10. Моторіна В. Г., Пуди А. Ю., Прокопенко А. І., Стогній Н. П. .Диференціальні рівняння : навч.-метод. посібник для студ. природ.-мат. спец. пед. ВНЗ. Харків : ХНПУ ім. Г. С. Сковороди, 2017. 210 с.
11. Огурцов А. П., Наконечна О. В., Нікулін О. В. Вища математика для підготовки бакалаврів з інженерії : навч. посіб. у 3 ч. / за ред. А. П. Огурцова. Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2010. Ч. 1. 428 с.; Ч. 2. 340 с.; Ч. 3. 320 с.
12. Пастушенко С. М., Підченко Ю. П. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв’язування задач : навч. посібник. К. : Діал, 2000. 160 с.

Електронне навчальне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Хом'юк Ірина Володимирівна
Хом'юк Віктор Вікторович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Рукопис оформлено *І. Хом'юк*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет виготовлено *Старічек Т. О.*

Підписано до видання 29.06.2023 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2023-071.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
Email: irvc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК No 3516 від 01.07.2009 р.