

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

В. А. КАЛІОН

**ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ГІДРОМЕХАНІКА
МОДЕЛЬНІ ЗАДАЧІ**

Навчальний посібник



УДК 532+(075.8)
ББК 22.253я73
К17

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. Є. О. Гаєв,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В. С. Мадерич

*Рекомендовано до друку
вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол № 5 від 18 січня 2010 року)*

Каліон, В. А.

К17 Обчислювальна гідромеханіка. Модельні задачі : навчальний посібник / В. А. Каліон . – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 175 с.

ISBN 978-966-439-402-1

Подано основні положення обчислювальної гідромеханіки для бакалаврів і магістрів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. До кожного розділу додано характерні задачі та вправи для виконання на лабораторних практикумах, а також для самостійної роботи.

Розглянуто класичні розділи: диференціальні рівняння у частинних похідних і їх математична класифікація, основні методи розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь, основи методу сіток для диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного, параболічного і гіперболічного типів, а також застосування методу сіток і методів прямих для розв'язання лінійних і нелінійних модельних диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Для студентів механіко-математичного факультету. Може використовуватись як довідник для всіх, хто цікавиться чисельними методами розв'язання задач гідромеханіки.

**УДК 532+(075.8)
ББК 22.253я73**

ISBN 978-966-439-402-1

**© Каліон В. М., 2011
© Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2011**

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\underline{A} = \{a_{jk}\}$	Матриця з елементами a_{jk}
\underline{A}^{-1}	Матриця, обернена до матриці \underline{A}
\underline{A}^T	Матриця, транспонована до матриці \underline{A} (рядки замінено стовпцями)
$\{\underline{A}^k\}$	Послідовність матриць
$\sum_{i=1}^N a_{jk}$	Сума елементів a_{jk} для i від $i = 1$ до $i = N$
$\sum_{i \neq j} a_{jk}$	Сума елементів a_{jk} для всіх $i \neq j$
α	Коефіцієнт термічної дифузії [$\text{м}^2/\text{с}$]
ADI	Неявна схема змінних напрямків (Alternating-Direction-Implicit scheme)
CTI	Центрована за часом неявна схема (Central Time Implicit scheme)
CG	Метод спряжених градієнтів (Conjugate Gradients method)
$\det\{\underline{A}\}, \underline{A} $	Детермінант (визначник) матриці \underline{A}
D	Область обчислень
\overline{D}	Область обчислень D , що включає границю Γ
D_h	Дискретна область обчислень (множина вузлів)
D_h^0	Внутрішні вузли (множина внутрішніх вузлів на перетині ліній сітки)
$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$	Звичайні похідні за x та y , відповідно
$\Delta x, \Delta y$	Приріст за координатами x та y , відповідно
$\Delta x \rightarrow 0$	Δx прямує до нуля
\underline{E}	Одинична матриця (одиниці на головній діагоналі й нулі скрізь, окрім головної діагоналі)
$\vec{f} = \{f_i\}$	Вектор з елементами f_i
$f(x,y), u(x,y)$	Функції двох змінних x, y
$f _a^b$	$f(b) - f(a)$

$\int_a^b f(x) dx$	Інтеграл від $f(x)$ на відрізьку від a до b
$\varphi(M)$	Значення функції φ у точці M області обчислень
FI	Чисто неявна схема (Fully Implicit scheme)
FTCS	Явна схема вперед за часом, центральна за простором (Forward in Time, Central in Space scheme)
FVM	Метод скінченних об'ємів (Finite Volume Method)
G2LS	Узагальнена двошарова схема (Generalized 2-Layer Scheme)
G3LS	Узагальнена тришарова схема (Generalized 3-Layer Scheme)
G_j^n (ГЧП)	Головна частина послідовності
Γ	Границя області обчислень
Γ_h	Множина граничних вузлів сітки
HS	Явна схема "класики" (HopScotch scheme)
\underline{I}_A	Матриця-індикатор ненульових елементів матриці \underline{A}
$J_{ij}^{(k)}$	Якобіан (матриця Якобі) на k -му кроці
i, j	Індекси (цілі: 0, 1, 2, 3, ...)
$(i-1), i, (i+1)$	Три послідовні вузли сітки в напрямку i
$(\)_{ij}$	Значення функції у вузлі (i, j) сітки
LAEA	Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) або (Linear Algebraic Equation Array)
$L(u)$	Лінійний диференціальний оператор на функції u
LF	Явна схема "чехарда" (LeapFrog scheme)
$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=1}^n a_k b_k$	Скалярний добуток векторів $\vec{a} = \{a_k\}$, $\vec{b} = \{b_k\}$
$\underline{L} \cdot \underline{V}$	Скалярний добуток матриць \underline{L} та \underline{V}
λ_k	Власні числа матриці
$\underline{\Lambda} = \{ \lambda_{kj} \}$	Матриця, де $\lambda_{kk} = \lambda_k$, $\lambda_{k, k+1} = 1 \vee 0$; $\lambda_{kj} = 0$, $j < k, j > j + 1$ (права канонічна форма Жордана)
M	Число Маха (Mach' number)
MFS	Метод дробових кроків (Method of Fractional Steps)
μ	Динамічний коефіцієнт в'язкості [Па с]
\vec{n}	Вектор нормалі
$N \times M$	Розмірність матриці (N рядків і M стовпців)

NX, NY	Кількість вузлів сітки в напрямку X та Y , відповідно
∇^2	Оператор Лапласа
ODE	Звичайне диференціальне рівняння (ЗДР) (Ordinary Differential Equation)
$O, O(\Delta x)^2$	Порядок величини, порядку $(\Delta x)^2$, відповідно
p	Тиск [Па]
PDE	Рівняння у частинних похідних (РЧП) або (Partial Differential Equation)
R, φ	Осі полярної системи координат
Re	Число Рейнольдса (Reynold's number)
R _{cell}	Сіткове число Рейнольдса (Reynold's net number)
ρ	Густина [кг/м ³]
SOR	Метод послідовної верхньої релаксації (Successive Over Relaxation method)
σ	Тензор напруг [Н/м]
T	Температура [К]
t	Час [с]
TDMA	Метод прогонки (Tri-Diagonal-Matrix Algorithm)
$\text{tr}(\underline{A})$	Слід матриці \underline{A} (сума діагональних елементів)
T. E.	Помилка округлення (Truncation error)
$[u]_\Gamma$	Значення функції u на границі Γ
u_x, u_y	Похідні першого порядку за x та y , відповідно
u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}	Похідні другого порядку за x та y , відповідно
$u_x^y, u_{x+\Delta x}^y$	Значення функції u у вузлах (x,y) і $(x + \Delta x,y)$
v_{jk}^n	Функція v у вузлі (j,k) просторової сітки й у вузлі n за часом
$\underline{V} \cdot \vec{v}$	Матриця V , помножена праворуч на вектор \vec{v}
(x,y)	Точка на площині з координатами x та y (двовимірний випадок)
X, Y	Осі декартової системи координат
(x_i, y_j)	Точка з координатами x_i та y_j , що належить дискретній області обчислень D_h
(x_0, y_0)	Координати початку відліку ліній сітки (точка $O \in D$)
$x \rightarrow i, y \rightarrow j$	Замінити x на i та y на j , відповідно
$\angle(\vec{n}, Ox)$	Кут між вектором \vec{n} і віссю координат Ox
$ \cdot _n, \cdot _n$	Скалярна та векторна норми в n -вимірному просторі, відповідно

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник містить основні положення обчислювальної гідромеханіки, що входять до лекційного курсу на вибір дисципліни "Асимптотичні та чисельні методи в механіці суцільних середовищ" для бакалаврів-механіків 4 курсу та спекурсів "Сучасні моделі турбулентності та обчислювальна гідромеханіка" й "Сучасні проблеми обчислювальної гідромеханіки" для магістрів-механіків 5 і 6 курсів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. До кожного розділу підібрано характерні задачі та вправи для виконання їх на комп'ютері, що призначені як для лабораторних занять, які передбачені навчальним планом, так і для самостійної роботи студентів. Виконання задач і вправ сприяє закріпленню матеріалу, що вивчається, його глибшому розумінню, розвиває здатність застосовувати одержані знання на практиці.

Посібник є першою частиною загального курсу обчислювальної гідромеханіки (модельні задачі) і включає класичні розділи:

- диференціальні рівняння в частинних похідних і їх математична класифікація;
- основні методи розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь (прямі методи розв'язку лінійних систем, ітераційні методи розв'язку лінійних та нелінійних систем, багатосіткові методи);
- основи методу сіток для диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу (дискретизація, методи розв'язання стаціонарних задач гідромеханіки, у тому числі псевдонестаціонарний метод і методи, що використовують ряди Фур'є, і стратегічні прийоми розв'язання стаціонарних задач);
- основи методу сіток для диференціальних рівнянь у частинних похідних параболічного типу (одновимірне і багатовимірне рівняння дифузії);
- використання методу сіток для розв'язання лінійних модельних диференціальних рівнянь у частинних похідних (одновимірне рівняння переносу, стаціонарне та нестаціонарне рів-

няння з конвекцією та дифузією, рівняння Бюргерса), а також методи прямих.

Матеріал посібника частково був уже опублікований українською мовою в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка [7] та англійською мовою у Стокгольмському Королівському технологічному інституті (Швеція) [23]. Для нового видання посібника матеріал ґрунтовно перероблено та доповнено. Додано нові вправи й задачі.

Автор висловлює щиро подяку завідувачу кафедри механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Лимарченку Олегу Степановичу, перекладачу видання англійською мовою Візит-професору Стокгольмського Королівського технологічного інституту Казачкову Івану Васильовичу, а також Ірині Борисівні Кіфоренко, без допомоги яких цей лекційний курс ніколи б не з'явився.

Автор висловлює також подяку рецензентам: професору Національного авіаційного університету, провідному науковому співробітнику ІГМ НАН України, доктору технічних наук Гаєву Євгену Олександровичу та завідувачу відділу математичного моделювання морських та річкових систем ІПММС НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Мадеричу Володимирі Станіславовичу.

ВСТУП

Визначимо місце числових методів у системі знань. Математика як наука виникла через необхідність розв'язання практичних задач: вимірювань на місцевості, будівництва, торгівлі, навігації. Унаслідок цього в давнину математика була тільки числовою, адже її метою було одержання розв'язку у вигляді числа. Тепер "чистий" математик лише ставить задачу й доводить, що її розв'язок існує, що він є єдиним, хоча з практичного погляду значно важливіше (і дорожче) одержання цього розв'язку.

Числовий розв'язок задач завжди цікавив математиків. Видатні дослідники минулого об'єднували у своїх дослідженнях вивчення явищ природи, одержання їх математичної моделі та її дослідження. Аналіз цих моделей вимагав створення спеціальних, звичайно, числових або аналітико-числових методів розв'язку. Назви цих методів – метод Ньютона, метод Ейлера, метод Лобачевського, метод Гаусса, метод Ерміта – свідчать про те, що їх розробкою займалися найвидатніші вчені свого часу.

Сьогодні значно розширено застосування математики, що в першу чергу, пов'язано зі створенням і розвитком засобів обчислювальної техніки. Причому прогрес у розвитку комп'ютерів (ЕОМ) не порівнянний із розвитком жодної галузі у сучасній історії техніки. Якщо, наприклад, спроектувати розвиток комп'ютерів на автомобілебудування, то наразі автомобілі мали б їздити зі швидкістю світла та витратити на тисячу кілометрів міліграми пального.

Сказане вище ілюструє взятий із [18] графік (рис. 1), де похилою лінією зображено тенденцію зміни вартості розрахунку обтікання крилового профілю турбулентним потоком в'язкої рідини на основі рівнянь Рейнольдса. На час побудови цього графіка (1984) розрахунок на ЕОМ NASF тривав близько 1 хв і коштував 100 дол. На IBM-704 вартість становила б приблизно 10 млн дол., а час підрахунку – близько 30 років. Із рис. 1 видно, що вартість розрахунку зменшується в 10 разів приблизно кожні 8 років.

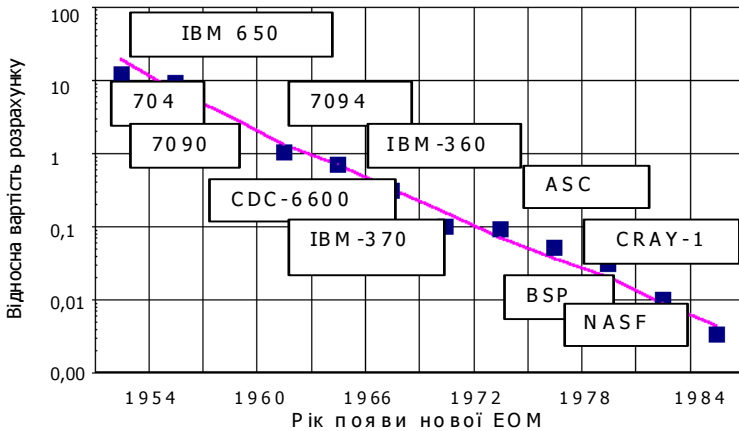


Рис. 1. Тенденція щодо зменшення вартості числових розрахунків

Сьогодні вказана тенденція в цілому збереглася. Важливо, що частка власне обчислювальних методів при цьому становить близько 40 %. Наведемо приклад, що ілюструє цю тенденцію.

Розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), у кожному рядку якої 3–10 ненульових елементів. До виникнення комп'ютерів такі системи розв'язували для 10–100 невідомих, тепер використовують для 10^9 – 10^{10} невідомих. Водночас при застосуванні старих методів максимум досягнув би 10^6 – 10^7 невідомих (за тих самих витрат машинного часу).

Математика виникла й розвивається як частина природознавства, і довгий час її розвиток суттєво визначався потребами фізики та механіки. Вимога математизації нових розділів науки приводить до зворотного впливу цих розділів на розвиток математики й має суттєво змінити саме обличчя математики. За реальної роботи в області прикладної математики виникає велика кількість різного характеру ускладнень, які здебільшого не пов'язані з математикою. Звернемо увагу на низку питань загального характеру, що важливі для спеціалістів в області прикладної математики й механіки.

Першочергове значення має **правильний вибір напрямку досліджень**. Свобода вибору тут незначна, оскільки основні контури напрямку досліджень задаються "ззовні". При виборі, у межах можливостей, напрямку досліджень корисно пам'ятати правило "трьох частин", згідно з яким задачі поділяють так:

- I – легкі;
- II – складні;
- III – дуже складні.

Здається, що подібний поділ схожий на жарт, проте потрібно пам'ятати, що розв'язувати треба тільки задачі, які можна віднести до частини II. Задачами I займатися не варто, адже вони будуть розв'язані у процесі роботи без вашого втручання, а задачі III навряд чи вам вдасться розв'язати.

Дослідник, який **уміє правильно сформулювати (поставити) нову задачу**, оцінюється вище, у тому числі й матеріально, ніж дослідник, який уміє лише розв'язувати задачі, поставлені іншими. Початківці часто скаржаться на труднощі контактів із замовниками – представниками інших наук і ділових кіл, які не вміють "навіть" поставити задачу. Вірно поставити задачу – це наукова проблема не менш важка, ніж її подальший розв'язок, і не варто плекати надію, що хтось виконає цю роботу за вас. При постановці задачі першочергово потрібно звернути увагу на мету дослідження, оскільки прийнята математична модель не є чимось однозначним і непохитним, що назавжди пов'язане із явищем. Математична модель залежить від мети досліджень. Перед тим, як записати диференціальні рівняння, вибрати метод їх розв'язування та звертатися до комп'ютера, варто подумати про можливу безглуздість отриманих розв'язків. Водночас потрібно сприймати як належне, що більшу частину результатів обчислень потрібно викинути до кошика одразу після їх отримання. Мета дослідження та постановка задачі мають уточнюватися під час контактів замовників і виконавців.

Успіх в області прикладної математики й механіки потребує **широкої математичної підготовки**, яка може забезпечити здатність пристосовуватися до задач, що безперервно змінюються, але які необхідно розв'язувати.

Не слід думати, що довершене знання математики, числових методів і комп'ютера дозволяють одразу розв'язати будь-яку задачу. У багатьох випадках **необхідне "доведення" існуючих методів**, пристосування їх до конкретної задачі. Тут стає важливим і "чисте" абстрактне створення нових методів, але з обов'язковим їх тестуванням, тобто перевіркою на відомих результатах.

Після завершення розрахунків настає етап **використання результатів обчислень, тобто впровадження результатів**. Особливо важливим у роботі із замовником-початківцем є **наочність і доступність** проміжних і кінцевих результатів. Тут є широке поле діяльності для тих, хто вміє додати до своєї роботи відповідну оболонку, що дозволяє динамічно вводити-виводити інформацію у графічному або, ще краще, мультимедійному вигляді. Тоді наприкінці процесу взаємних контактів замовник-початківець починає розуміти, що комп'ютер і математика можуть дати йому не все, але дещо важливе, а математик-початківець доходить до розуміння того, що він не дарма отримує гроші, хоч і не надає всіх даних, що потрібні для реального розв'язання задачі.

Суттєвим моментом усієї роботи в області прикладної математики є **необхідність одержання результатів у встановлений термін**. Замовник, для якого виконуються дослідження і розрахунки, часто обмежений терміном завершення досліджень і прийняття рішення на їх основі. Якщо дослідження не будуть виконані вчасно, то рішення все одно прийметься, але на основі іншого підходу. Змарновану в такому разі довіру з боку замовника часто вже неможливо надолужити. Тому для вчасного виконання задачі іноді необхідно жертвувати точнішим, але трудомістким розв'язком, а також навіть детальнішою моделлю.

Колективність роботи в галузі прикладної математики приводить до необхідності виконання завдань таким чином, щоб результати не доводилося ще довго потім стикувати. Можна навести безліч реальних прикладів невдач за гуртової розробки програмного забезпечення, коли розподіл обов'язків між паралельно працюючими виконавцями не був достатньо формалізований, тобто не вдалося однозначно описати необхідний кінцевий результат для кожного виконавця. Левова частка часу в такому гурті виконавців витрачається на безперервне стикування

вже працюючих частин програми, що безпосередньо затримує виконання всієї задачі або навіть веде до неможливості розв'язання її у встановлений термін.

Наведені міркування деякою мірою ілюструють специфіку роботи в галузі прикладної математики та механіки і доводять, що загалом складність цієї роботи переважає складність робіт у галузі "чистої" математики, оскільки крім безпосереднього знання математики потребує від вченого інших важливих рис інтелекту та характеру.

Розділ 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ І ЇХ МАТЕМАТИЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ

Науковий процес пізнання можна подати у вигляді схеми (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Схема процесу наукового пізнання

Зрозуміло, що абсолютна більшість фізичних проблем, у тому числі й гідромеханіки, зводиться до розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних, тому попередній розгляд процедури класифікації таких рівнянь є важливим.

У цьому розділі наведено процедури класифікації диференціальних рівнянь у частинних похідних, тобто віднесення їх до еліптичного, параболічного або гіперболічного типу. Кожен із цих типів рівнянь розглядатиметься як із математичного, так і з механічного погляду з метою демонстрації їх найважливіших характеристик і тих різновидів течій, для яких властивий той або інший тип диференціальних рівнянь. У подальшому для кожного з розглянутих типів диференціальних рівнянь у частинних похідних буде наведено відповідні методи їх розв'язання.

1.1. Природа коректно поставленої задачі. Критерії Адамара

Перед початком вивчення формальної класифікації диференціальних рівнянь у частинних похідних має сенс і формулювання задачі, і побудову алгоритму розглянути з погляду природи коректно поставленої задачі. Задача для рівнянь у частинних похідних називається **коректно поставленою**, якщо виконуються всі **критерії Адамара**:

- розв'язок задачі існує;
- розв'язок єдиний;
- розв'язок неперервно залежить від допоміжних даних (початкових і граничних умов).

Питання про існування розв'язку для гідромеханіки зазвичай не викликає труднощів. Виняток становить, наприклад, відсутність розв'язку рівняння Лапласа поблизу центра джерела. Уникнути цієї відсутності розв'язку вдається перенесенням джерела за межі області обчислення.

Причина неєдиності розв'язку зазвичай пов'язана з недовизначенням диференціальних рівнянь у частинних похідних початковими або граничними умовами. Водночас можна вказати, наприклад, на деякі проблеми обтікання тіл в'язкою рідиною, особливо при переході від ламінарної форми течії до турбулентної, коли неєдиність має суто фізичну природу. І вірний єдиний розв'язок тут можна знайти лише знаючи фізичну суть процесу, що розглядається.

Зауваження. Перевизначення приводить до нефізичних розв'язків.

Третій критерій потребує, щоб малі зміни у початкових або граничних умовах викликали лише незначні зміни розв'язку. Адамар побудував простий приклад, який показує, що розв'язок не завжди неперервно залежить від початкових умов.

Приклад 1. Розв'язати рівняння Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y \geq 0, \quad (1.1)$$

за таких граничних умов при $y = 0$:

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = (1/n) \sin(nx), \quad n > 0. \quad (1.2)$$

Розв'язок крайової задачі (1.1)–(1.2) легко отримати, використовуючи метод розділення змінних

$$u = (1/n^2) \sin(nx) \operatorname{sh}(ny). \quad (1.3)$$

Якщо задача коректно поставлена, розв'язок має неперервно залежати від граничних умов. Із другої граничної умови в (1.2) випливає, що при $n \rightarrow \infty$ величина u_y мала. Розв'язок (1.3) при $n \rightarrow \infty$ прямує до e^{ny}/n^2 , тобто необмежено зростає навіть за малих y , що порушує першу граничну умову в (1.2). Тобто неперервна залежність від граничних умов відсутня та, згідно із третім критерієм Адамара, задачу поставлено некоректно.

Невиконання третього критерію Адамара особливо шкодить за числових обчислень і пов'язане із тією обставиною, що початкові та граничні умови безпосередньо входять до числового алгоритму. Тому, якщо цей критерій не виконується, помилки, що були введені за наближеного зображення початкових і граничних умов, поширюватимуться на всю область розв'язку. Останнє приводить до суттєвих відхилень числового розв'язку від істинного.

1.2. Математична класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Диференціальне рівняння в частинних похідних (ДРЧП) другого порядку, записане в загальному вигляді, зазвичай використовують для пояснення математичної класифікації рівнянь у частинних похідних. Розглянемо рівняння в частинних похідних

$$L(u) \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + gu = f(x, y), \quad (1.4)$$

де a, b, c, d, e, g – функції лише $(x, y) \in \bar{D} = D + \Gamma$. Для спрощення розглядається лише лінійне рівняння, але для наступного аналізу це не важливо. Часто досліджуються квазілінійні рівняння, тобто ті, які лінійні лише відносно старших похідних. У цьому випадку коефіцієнти a, b, c, d, e, g, f у (1.4) можуть залежати також від u, u_x, u_y .

Відомо, що у вигляді (1.4) можна записати рівняння трьох різних типів: еліптичного, параболічного та гіперболічного. Така класифікація ДРЧП другого порядку проводиться аналогічно із класифікацією кривих другого порядку в аналітичній геометрії. Тип рівняння в частинних похідних, як і тип канонічного перерізу кривої другого порядку, визначається знаком детермінанта $\delta(x, y) = b^2 - a \cdot c$. Якщо на всьому просторі \bar{D} $\delta < 0$, то маємо еліптичний тип, канонічна форма для якого має вигляд

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = h_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta). \quad (1.5)$$

Якщо на всьому просторі \bar{D} $\delta = 0$, то маємо параболічний тип, канонічна форма для якого має вигляд

$$u_{\xi\xi} = h_2(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta). \quad (1.6)$$

Якщо на всьому просторі \bar{D} $\delta > 0$, то маємо гіперболічний тип, який існує у двох канонічних формах. Перша канонічна форма для гіперболічного типу, або як її називають у вітчизняній літературі – характеристична форма – має вигляд

$$u_{\xi\eta} = h_3(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta). \quad (1.7)$$

Друга канонічна форма для гіперболічного типу має вигляд

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = h_4(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta). \quad (1.8)$$

Зауваження. Тип ДРЧП на \bar{D} не обов'язково сталий. Маємо такі приклади.

1. Рівняння трансзвуку має вигляд

$$(1 - \mathbf{M}^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} = 0,$$

де \mathbf{M} – місцеве число Маха. Для $\mathbf{M} < 1$, $\mathbf{M} = 1$, $\mathbf{M} > 1$ маємо три різні типи ДРЧП.

2. Усередині стаціонарного примежового шару рівняння, що його описують, мають параболічний тип, а зовні – еліптичний.

Різні типи ДРЧП можуть асоціюватися з різноманітними типами гідромеханічних задач. Наприклад задачі, які містять залежність від часу, зводяться або до параболічних, або до гіперболічних рівнянь. **Параболічними ДРЧП** визначаються течії, що мають дисипацію. Це, наприклад течії, для яких істотною є в'язкість або теплопровідність. Тоді розв'язок буде гладким, і, якщо

тільки граничні умови не залежать від часу, градієнти із плином часу зменшуватимуться. Якщо ж дисипаційні механізми відсутні, для лінійних ДРЧП розв'язок зберігає сталу амплітуду, а для нелінійних ДРЧП амплітуда розв'язку може навіть зростати. Таким розв'язком характеризуються **гіперболічні ДРЧП**. **Еліптичні ДРЧП** звичайно визначають задачі, які описують зрівноважений або сталий стан течії. Однак деякі сталі процеси також описуються параболічними ДРЧП (примежовий шар), або гіперболічними (нев'язка надзвукова течія).

Твердження. Класифікація ДРЧП залишається незмінною при афінних, ортогональних та довільних узагальнених невіроджених криволінійних перетвореннях вихідного ДРЧП.

Довести твердження пропонується читачу самостійно.

Якщо кількість вимірів простору \bar{D} , $N \geq 3$, зручно класифікувати деяке узагальнене рівняння другого порядку

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + H = 0, \quad (1.9)$$

де a_{jk} – функції $(x_1, x_2, \dots) \in \bar{D} = D + \Gamma$, а $H = H(u_{x_j}, u, \dots)$.

Розглянемо тепер матрицю $\underline{A} = \{a_{jk}\}$. Вважатимемо, що

- якщо будь-яке із власних значень матриці \underline{A} $\lambda_k = 0$, то рівняння (1.9) належить до **параболічного типу**;
- якщо всі $\lambda_k \neq 0$ та мають однакові знаки, то рівняння (1.9) належить до **еліптичного типу**;
- якщо всі $\lambda_k \neq 0$ та всі крім одного мають однакові знаки, то рівняння (1.9) належить до **гіперболічного типу**.

1.3. Математична класифікація систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

Як показують практичні дослідження задач гідромеханіки, останні практично ніколи не зводяться до одного ДРЧП. Але навіть у тих випадках, коли фізичний або механічний процес

описується одним ДРЧП високого порядку, його завжди можна замінити системою рівнянь першого порядку. Тому розглянемо спочатку систему лінійних ДРЧП першого порядку:

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial y} = f_1, \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial y} = f_2. \end{cases} \quad (1.10)$$

Перепишемо (1.10) у векторному вигляді

$$\underline{A} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \underline{B} \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} = \vec{F}, \quad (1.11)$$

де $\underline{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{Bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{Bmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{Bmatrix}$, $|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & b_{11} \\ a_{22} & b_{21} \end{vmatrix}$, і нехай

$D = |C|^2 - 4|\underline{A}||\underline{B}|$, тут $|\underline{A}|$ – визначник матриці \underline{A} .

Згідно з [1] вважатимемо систему (1.10):

- **гіперболічною** при $D > 0$,
- **еліптичною** при $D < 0$,
- **параболічною** при $D = 0$.

Класифікувати систему (1.10) можна й виходячи з інших міркувань. Наприклад, у [18] пропонується підхід, пов'язаний із побудовою характеристик. Класифікація системи залежить від характеру розв'язків характеристичного рівняння

$$\det \langle \underline{A} d y - \underline{B} d x \rangle = 0, \quad (1.12)$$

Розкриваючи визначник у (1.12), приходимо до характеристичного рівняння у вигляді

$$(a_{11} b_{21} - a_{21} b_{11})(d y / d x)^2 - (a_{11} b_{22} - a_{21} b_{12} + a_{12} b_{21} - a_{22} b_{11}) d y / d x + (a_{12} b_{22} - a_{22} b_{12}) = 0. \quad (1.13)$$

Рівняння (1.13) має два розв'язки, характер яких залежить від дискримінанта

$$D_1 = (a_{11} b_{22} - a_{21} b_{12} + b_{21} a_{12} - b_{11} a_{22})^2 - 4(a_{11} b_{21} - a_{21} b_{11})(a_{12} b_{22} - a_{22} b_{12}). \quad (1.14)$$

Відповідно до запропонованої класифікації вважатимемо систему (1.7):

- **гіперболічною** при $D_1 > 0$;
- **параболічною** при $D_1 = 0$;
- **еліптичною** при $D_1 < 0$.

Використаємо вищеведену класифікацію, розглянувши приклад визначення типу системи двох лінійних рівнянь для двовимірної потенційної течії стисливої рідини у змінних u, v .

Приклад 2

$$\begin{cases} \left(\frac{u^2}{a^2} - 1 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{uv}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{uv}{a^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Система рівнянь має вигляд (1.10). Підставляючи $a_{ij}, b_{ij}, i, j = 1, 2$, за Флетчером [18] дістаємо

$$D_1 = 4(\mathbf{M}^2 - 1), \quad \text{де } \mathbf{M}^2 = (u^2 + v^2) / a^2,$$

тобто при $\mathbf{M} > 1$ для (1.14) маємо гіперболічний тип, що й потрібно було довести.

Побудову, яку використано для отримання (1.12), можна узагальнити для системи з n рівнянь першого порядку від двох незалежних змінних x та y , лише (1.9) замінюється рівнянням

$$\det \left[\underline{A} \left(\frac{dy}{dx} \right)^{(k)} - \underline{B} \right] = 0, \quad k = 3, \dots, n, \quad (1.15)$$

де відповідні матриці вже мають вигляд $\underline{A} = \{a_{ij}\}, \underline{B} = \{b_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n$.

Властивості системи залежать від розв'язку рівняння (1.15):

- якщо маємо n дійсних коренів – система **гіперболічна**;
- якщо маємо ν дійсних коренів: $1 \leq \nu \leq n - 1$, а комплексні корені відсутні – система **параболічна**;
- якщо всі корені комплексні – система **еліптична**.

Зауваження. Остання класифікація має місце й для систем рівнянь другого порядку, оскільки введенням допоміжних змінних систему рівнянь другого порядку завжди можна звести до системи рівнянь першого порядку.

Для систем, де кількість незалежних змінних $N > 2$, рівняння (1.10) також можна узагальнити. Нехай маємо систему

$$\underline{A} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \underline{B} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \underline{C} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \underline{F}, \quad (1.16)$$

де $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{F}$ – матриці, $\vec{q} = \{u_k\}$, $k = \overline{1, n}$ – залежні змінні. Перетворюючи (1.16), одержимо характеристичний поліном порядку n

$$\det \left[\underline{A} \lambda_x + \underline{B} \lambda_y + \underline{C} \lambda_z \right] = 0, \quad (1.17)$$

де $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ визначають напрямок нормалі \vec{n} до поверхні у точці (x, y, z) . Рівняння (1.17) є узагальненням (1.12) і дає умову існування характеристичних поверхонь: коли характеристична поверхня дійсна, то (1.17) має дійсні корені. Якщо їх n – система **гіперболічна**.

Але цікавішим є питання про характер ДРЧП за визначеними напрямками. Наприклад, поклавши $\lambda_x = \lambda_y = 1$ та розв'язуючи рівняння відносно λ_z , установлюємо, що (1.17) є **еліптичним** у напрямку y , якщо при цьому з'являються уявні корені. Причому кожен напрямок можна дослідити почергово.

Наведемо простий приклад знаходження типу рівняння за визначеними напрямками для системи рівнянь Нав'є–Стокса.

Приклад 3

$$\begin{aligned} u_x + v_y &= 0, \\ u u_x + v u_y + p_x - \frac{1}{\text{Re}} (u_{xx} + u_{yy}) &= 0, \\ u v_x + v v_y + p_y - \frac{1}{\text{Re}} (v_{xx} + v_{yy}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Уводячи допоміжні змінні $R = v_x, S = v_y, T = u_y$, зводимо (1.18) до системи рівнянь першого порядку.

$$\begin{aligned} u_y = T, \quad u_x + v_y &= 0, \\ -R_y + S_x &= 0, \quad S_y + T_x = 0, \\ \frac{S_x}{\text{Re}} - \frac{T_y}{\text{Re}} + P_x &= uS - vT, \\ -\frac{R_x}{\text{Re}} - \frac{S_y}{\text{Re}} + P_y &= uR - vS. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Характеристичне рівняння для системи (1.19) визначається, якщо замінити $\partial/\partial x \rightarrow \lambda_x$ та $\partial/\partial y \rightarrow \lambda_y$ і прирівняти до нуля визначник одержаної алгебраїчної системи

$$\det \langle \underline{A} \rangle = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \lambda_y^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^2 = 0. \quad (1.20)$$

Поклавши $\lambda_y = 1$, маємо, що λ_x – уявний корінь. Якщо $\lambda_x = 1$, λ_y – уявний корінь також, тобто система (1.18) **еліптична**.

Ознайомлення із загальною проблемою класифікації ДРЧП можна продовжити, звернувшись до [1, 18].

Задачі

1. Довести твердження: класифікація ДРЧП залишається незмінною при афінних, ортогональних і довільних узагальнених невиворонених криволінійних перетвореннях вихідного ДРЧП.

2. Довести еквівалентність першої і другої канонічних форм для рівняння гіперболічного типу.

3. Покажіть, що записане у канонічному вигляді рівняння (1.6) дійсно параболічне.

4. Визначити тип рівняння:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-kt}$; б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 4$.

5. Визначити тип системи рівнянь за (t, x) і (t, y) :

а) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$; б) $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

6. Визначити тип рівняння:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - e^{xy} = 1$;

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} - 8 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Розділ 2

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАІЧНИХ РІВНЯНЬ

Відомо, що розв'язання будь-якої крайової задачі із використанням наближених методів, у тому числі й одним із методів сіток, зводиться до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\underline{A}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{b} \quad (2.1)$$

або системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\underline{A} \cdot \vec{v} = \vec{b}, \quad (2.2)$$

де вектор $\vec{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T$ містить дискретні значення невідомих, а компоненти матриці \underline{A} для (2.2) і вектора \vec{b} вважаються відомими¹. Розглянемо основні методи, що використовуються для розв'язання систем (2.1) і (2.2).

2.1. Метод Ньютона

Перепишемо матричне рівняння (2.1) у вигляді

$$\vec{R} = \underline{A}(\vec{v})\vec{v} - \vec{b} = 0, \quad (2.3)$$

де \vec{R} – вектор нев'язки. Тоді основне формулювання алгоритму методу Ньютона має вигляд

$$\vec{v}^{(n+1)} = \vec{v}^{(n)} - \left(\underline{J}^{(n)}\right)^{-1} \vec{R}^{(n)}, \quad (2.4)$$

де n – номер ітерації; $J_{jk}^{(n)} = \partial R_j^{(n)} / \partial v_k^{(n)}$ – якобіан. Уведемо вектор різниці $\Delta \vec{v}^{(n+1)} = \vec{v}^{(n+1)} - \vec{v}^{(n)}$ і перепишемо (2.4) у вигляді

$$\underline{J}^{(n)} \Delta \vec{v}^{(n+1)} = -\vec{R}^{(n)}. \quad (2.5)$$

Векторне рівняння (2.5) на кожній ітерації є системою лінійних рівнянь відносно вектора поправки $\Delta \vec{v}^{(n+1)}$. Остаточного розв'язок на новій ітерації має вигляд

¹ Літера T тут і далі вказує на процедуру транспонування.

$$v^{(n+1)} = v^{(n)} + \omega \Delta v^{(n+1)}, \quad (2.6)$$

де додатково введено параметр нижньої релаксації $0 < \omega \leq 1$.

Позитивною властивістю методу Ньютона є його квадратична збіжність, тобто

$$\|\bar{v}^{(n+1)} - \bar{v}_c\| \approx \|\bar{v}^{(n)} - \bar{v}_c\|^2, \quad (2.7)$$

тут \bar{v}_c – точний розв'язок (2.1). Блок-схему методу Ньютона подано на рис. 2.1.

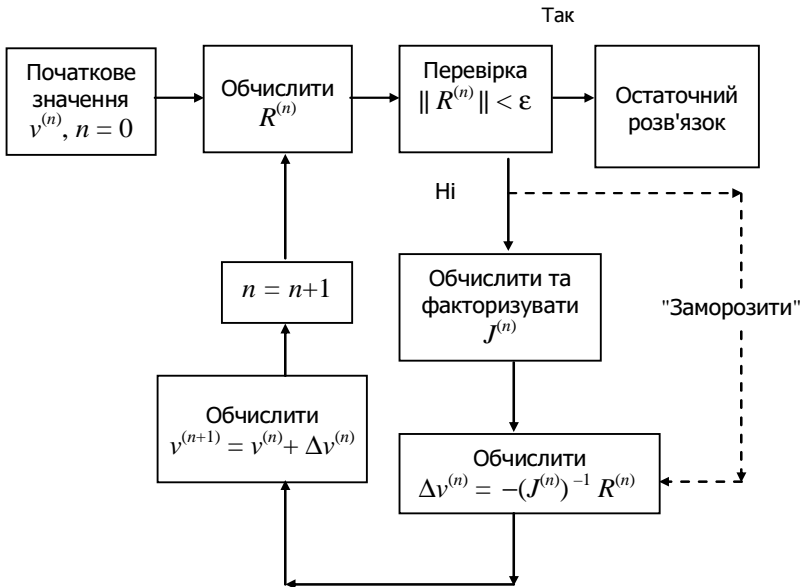


Рис. 2.1. Блок-схема методу Ньютона

Критерій збіжності методу Ньютона можна отримати, виходячи з таких міркувань.

1. Якщо матриця, обернена до матриці $\underline{J}^{(0)}$, має норму, яка обмежена величиною a , тобто

$$\|(\underline{J}^{(0)})^{-1}\| \leq a.$$

2. Якщо перший вектор різниці $\Delta \bar{v}^{(1)}$ має норму, що обмежена величиною b , тобто

$$\|\Delta \bar{v}^{(1)}\| = -\|-(\underline{J}^{(0)})^{-1} \bar{R}^{(0)}\| \leq b.$$

3. Якщо, крім того, вектор нев'язки \bar{R} має неперервні другі похідні, які задовольняють нерівність

$$\sum_{j,k=1}^N \left| \frac{\partial^2 R_m}{\partial v_j \partial v_k} \right| \leq \frac{c}{N} \quad \text{для } \forall \bar{v} : \|\Delta \bar{v}^{(1)}\| < 2b.$$

4. Нарешті, якщо визначені вище константи задовольняють співвідношення $abc < 0,5$, то розв'язок за методом Ньютона $\bar{v}^{(n)}$ збігатиметься до точного розв'язку \bar{v}_c : $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{v}^{(n)} = \bar{v}_c$, причому

$$\bar{R}(\bar{v}_c) = 0, \quad \left\| \bar{v}^{(n)} - \bar{v}_c \right\| \leq b/2^{n-1}.$$

Зауваження

• У вищенаведених виразах використовуються, відповідно, норми:

$$\|\bar{v}\| = \max_j |v_j| \quad \text{– векторна та } \|\underline{J}\| = \max_j \left(\sum_{k=1}^N |J_{jk}| \right) \quad \text{– матрична.}$$

- Перевірка виконання критерію збіжності методу Ньютона пов'язана за трудомісткістю з роботою, що сумірна із розв'язанням самого рівняння (2.1).
- Основна складність використання методу Ньютона полягає у тому, що при зростанні кількості рівнянь (N) радіус збіжності зменшується, тобто значення $\bar{v}^{(0)}$ для початкової ітерації має вибиратися дуже близьким до точного розв'язку \bar{v}_c .
- Найбільший час у методі Ньютона витрачається на обчислення і факторизацію матриці $\underline{J}^{(n)}$. Цей час можна зменшити "заморожуючи" $\underline{J}^{(n)}$ протягом кількох ітерацій або всього циклу обчислень. Однак в останньому випадку збіжність буде вже не квадратична, а лінійна.
- Другого зауваження можна уникнути, якщо зробити кілька початкових ітерацій за методом Зейделя або взяти у (2.6) у процедурі нижньої релаксації $\omega < 0,5$. Однак в останньому випадку швидкість збіжності методу також суттєво зменшується.
- Ефективність методу Ньютона виявляється найбільшою при розв'язанні невеликих систем сильно нелінійних алгебраїчних рівнянь, до яких належать повні рівняння Нав'є–Стокса, рівняння Рейнольдса або рівняння Бюргерса.

2.2. Квазіньютонівські методи

Негативні сторони методу Ньютона (малий радіус збіжності, великий час, потрібний для знаходження якобіана $\underline{J}^{(n)}$, і необхідність розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожній ітерації (факторизація $\underline{J}^{(n)}$)) легко подолати, якщо матриця $\underline{J}^{(n)}$ має деякі додаткові властивості, наприклад, **додатну визначеність**. У цьому випадку (2.4) замінюють співвідношенням

$$\bar{\underline{v}}^{(n+1)} = \bar{\underline{v}}^{(n)} - w^{(n)} \underline{H}^{(n)} \bar{\underline{R}}^{(n)}, \quad (2.8)$$

де матриця $\underline{H}^{(n)}$ є апроксимацією величини $(\underline{J}^{(n)})^{-1}$ і систематично модифікується на кожній ітерації так, що гранично прямує до $(\underline{J}^{(n)})^{-1}$. Важливо, що модифікація $\underline{H}^{(n)}$ виявляється істотно більш економічним процесом, ніж факторизація $\underline{J}^{(n)}$.

Перепишемо (2.8) у вигляді

$$\bar{\underline{v}}^{(n+1)} = \bar{\underline{v}}^{(n)} - w^{(n)} \bar{\underline{\xi}}^{(n)}. \quad (2.9)$$

Тут вектор $\bar{\underline{\xi}}^{(n)}$ можна розглядати як такий, що визначає напрям пошуку. Скаляр $w^{(n)}$ обирають таким чином, щоб норма $\|\bar{\underline{R}}^{(n+1)}\|$ була мінімальною в напрямку пошуку $\bar{\underline{\xi}}^{(n)}$. Остання умова за великих N дає істотно більший радіус збіжності, ніж метод Ньютона. Крім того, квазіньютонівські методи дають можливість працювати з погано зумовленими матрицями Якобі.

Зауважимо: оскільки ефективність квазіньютонівських методів визначається додатковими особливостями (напр., додатна визначеність), використання цих методів для розв'язання задач обчислювальної гідромеханіки має розглядатися для кожного випадку окремо. Крім того, більшість літературних джерел, де розглядаються квазіньютонівські методи [2, 5, 7, 18], пов'язує їх ефективність із використанням тільки разом із процедурою безумовної мінімізації. Повну бібліографію книг і статей, у яких детально розглядається використання квазіньютонівських методів для спеціальних задач, наведено в [18]. Тут, а також у [2, 5, 7] наведено й алгоритми деяких інших методів, що можуть використовуватися при розв'язанні нелінійних задач механіки суцільних середовищ².

² У [2] описано також ньютонівські та квазіньютонівські методи з математичної бібліотеки IMSL.

2.3. Прямі методи розв'язання лінійних систем

Розглянемо розширену систему лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді (2.2). Методи розв'язання системи (2.2) поділяють на три категорії, залежно від вигляду матриці \underline{A} :

I. \underline{A} – щільна;

II. \underline{A} – розріджена;

III. \underline{A} – стрічкова.

До першої категорії методів належать: метод виключення Гаусса, методи факторизації, які є узагальненням методу Гаусса [11]. За факторизації матриця \underline{A} , усі головні діагональні мінори якої відмінні від нуля, перетворюється на матрицю вигляду

$$\underline{A} = \underline{L} \cdot \underline{U}, \quad (2.10)$$

де \underline{L} – нижньотрикутна матриця, \underline{U} – верхньотрикутна матриця з одиницями на головній діагоналі. Після цього замість (2.2) розв'язують матрично-векторне рівняння

$$\underline{U} \vec{v} = \underline{L}^{-1} \vec{b}. \quad (2.11)$$

Після визначення вигляду правої частини, тобто виконання множення $\underline{L}^{-1} \vec{b}$, унаслідок структури матриці \underline{U} , розв'язання (2.11) зводиться до послідовних підстановок.

Зауваження

- Матриці зі щільною структурою маємо при дискретизації за спектральним або панельним методом, а також за методом дискретних особливостей.
- Матриці з розрідженою структурою також розв'язують за методом Гаусса, однак, часто замість збереження всієї матриці \underline{A} зберігають тільки її ненульові елементи та їх положення в матриці \underline{A} (індикаторний масив \underline{IA}). Основна складність тут: у процесі виключення стають відмінними від нуля ті елементи матриці \underline{A} , які спочатку дорівнювали нулю. Тому для розріджених матриць, що не мають стрічкової структури, найкращими є методи Гівенса й Хаусхолдера та QR-алгоритм, які не додають нові ненульові елементи до матриці \underline{A} [3, 7, 18].

- Для симетричних додатно визначених матриць \underline{A} створено методи, які дозволяють отримати їх розвинення у вигляді добутку матриць за процедурою швидшою, ніж при методі факторизації, який базується, фактично, на методі виключення Гауса. До таких методів "прискореної" факторизації належить, наприклад, метод квадратного кореня³, який удвічі швидший, ніж метод звичайної факторизації. У результаті розвинення маємо $\underline{A} = \underline{L} \cdot \underline{L}^T$. Тут матриця \underline{L} має назву матриці Халецького.

2.3.1. Методи прогонки

Використання триточкових різницевих схем або скінченних елементів із лінійною інтерполяцією після розщеплення приводить до СЛАР із матрицею, що має тридіагональну стрічкову структуру. Розглянемо матричне рівняння

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & & a_i & b_i & c_i \\ & & & & \vdots & \\ 0 & & & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & & & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Найпопулярнішим для розв'язання систем вигляду (2.12) є алгоритм прогонки (TDMA)⁴. Метод TDMA складається із двох кроків (рис. 2.3).

Спочатку на першому кроці виконується прогонка вперед за формулами

$$c'_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad d'_1 = \frac{d_1}{b_1}, \quad c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}} \quad (i = \overline{2, N}). \quad (2.13)$$

³ У літературних джерелах західних авторів, у тому числі в бібліотеці IMSL [2], цей метод має назву методу Халецького (*R^TR Cholesky method*).

⁴ Є спрощеним варіантом методу Гауса.

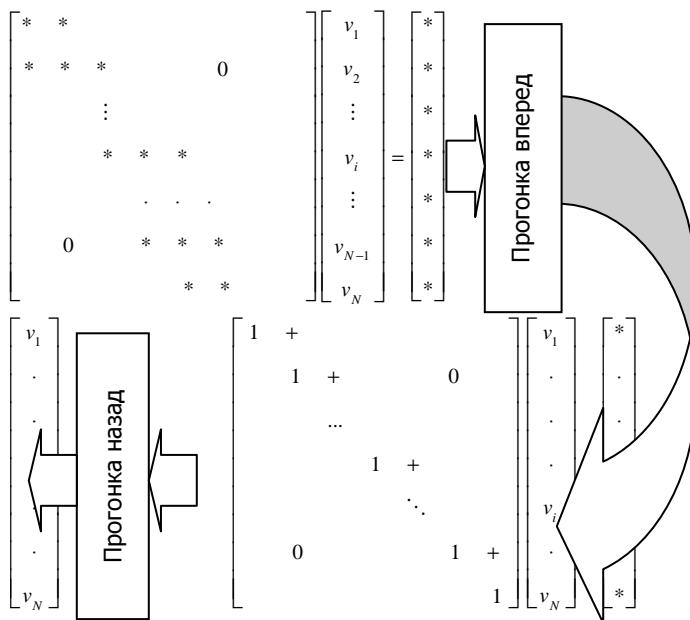


Рис. 2.3. Схема алгоритму прогонки TDMA

Система рівнянь (2.12) перетворюється на систему вигляду

$$\begin{bmatrix} 1 & c'_1 & & & & & \\ & 1 & c'_2 & & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & 1 & c'_i & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & c'_{N-1} \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d'_i \\ \cdot \\ \cdot \\ d'_N \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Прогонка назад реалізується за формулами

$$v_N = d'_N, \quad v_i = d'_i - v_{i+1}c'_i \quad (i = N-1, 1). \quad (2.15)$$

Алгоритм прогонки (TDMA) економічно вигідний, адже потребує лише $(5N - 4)$ операцій (множення та ділення).

Використання скінченнорізницевої схеми або скінченних елементів більш високого порядку приводить до стрічкової структури в \underline{A} , коли ширина стрічки > 3 .

тут $i = 2, 3, \dots, N$. На третьому етапі розв'язок системи знаходять прогонкою назад:

$$v_i = d_i'' - c_i'' v_{i+1} - f_i'' v_{i+2}. \quad (2.20)$$

Зауваження

- Для запобігання поганій зумовленості матриці \underline{A} необхідно виконання умови діагональної переваги, тобто

$$|b_i| > |a_i| + |c_i| \quad (2.21)$$

для звичайного алгоритму прогонки (TDMA) або

$$|b_i| > |a_i| + |c_i| + |e_i| + |f_i| \quad (2.22)$$

для модифікованого алгоритму прогонки.

- Різні етапи модифікованого алгоритму прогонки можна інтерпретувати як серію операцій (прямих прогонок), які необхідні для зведення матриці \underline{A} до верхньотрикутного вигляду, після чого за допомогою звичайної зворотної підстановки можна знайти вектор \vec{v} . Зрозуміло, що за цим алгоритмом можна розв'язати систему із ширшою стрічкою, проте при цьому переваги методу прогонки порівняно, наприклад із методом Гаусса, суттєво зменшуються.

Алгоритм TDMA можна використовувати й для складніших випадків, ніж розв'язання СЛАР зі стрічковими матрицями. До таких належить алгоритм розв'язання СЛАР із блочними тридіагональними матрицями (2.23), де $\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i$ – субматриці розміру $M \times M$, а \vec{v}_i, \vec{d}_i – M -компонентні субвектори [18]. Число M пов'язане із кількістю рівнянь, записаних у кожному вузлі сітки. Наприклад, для тривимірної течії в'язкої стисливої рідини $M = 5$. Таким чином, \vec{v}_i – субвектор розв'язку, що пов'язаний із конкретним вузлом сітки, а матричне рівняння (2.23) відповідає системі, яка складається з N блоків рівнянь, причому кожний блок, пов'язаний із конкретним вузлом сітки, несе у собі M рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 & \underline{c}_1 & & & & & & & & & \\ \underline{a}_2 & \underline{b}_2 & \underline{c}_2 & & & & & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & & & & \\ & & & & \underline{a}_i & \underline{b}_i & \underline{c}_i & & & & & \\ & & & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & & & \underline{a}_{N-1} & \underline{b}_{N-1} & \underline{c}_{N-1} & & \\ & 0 & & & & & & & \underline{a}_N & \underline{b}_N & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_{N-1} \\ \vec{v}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \\ \vdots \\ \vec{d}_i \\ \vdots \\ \vec{d}_{N-1} \\ \vec{d}_N \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Розв'язання (2.23) виконується за процедурою, що максимально наближена до процедури методу TDMA. Спочатку тридіагональна матриця блоків із (2.23) перетворюється на верхньотрикутну форму за рахунок виключення субматриць \underline{a}_i . За аналогією із першим рядком виразу (2.13) перший блок рівнянь дає

$$\underline{c}'_1 = (\underline{b}_1)^{-1} \underline{c}_1, \quad \bar{d}'_1 = (\underline{b}_1)^{-1} \bar{d}_1, \quad (2.24)$$

тоді як для блоку загального вигляду маємо

$$\begin{aligned} \underline{b}'_i &= \underline{b}_i - \underline{a}_i \underline{c}'_{i-1}, \quad \underline{c}'_i = (\underline{b}'_i)^{-1} \underline{c}_i, \\ \bar{d}'_i &= (\underline{b}'_i)^{-1} \{ \bar{d}_i - \underline{a}_i \bar{d}'_{i-1} \}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

До (2.24) та (2.25) входять явні вирази для обернених матриць. На практиці економічно вигідніше не знаходити обернені матриці, а шукати окремі розв'язки M -компонентних субсистем. Таким чином, наприклад, матричне рівняння

$$\underline{b}'_i \underline{c}'_i = \underline{c}_i \quad (2.26)$$

розв'язують відносно \underline{c}'_i . Після виконання операцій (2.24) і (2.25) система (2.23) перетворюється на верхньотрикутну заміною $\underline{c}_i, \bar{d}_i$, відповідно, на $\underline{c}'_i, \bar{d}'_i$, а субматриць \underline{b}_i – на одиничні матриці E .

Другий етап проводять аналогічно використанню виразів (2.15). Він потребує зворотних підстановок за формулами

$$\bar{v}_i = \bar{d}'_i - \underline{c}'_i \bar{v}_{i+1}. \quad (2.27)$$

Зауваження. Для реалізації блочного алгоритму прогонки потрібно близько $5NM^3/3$ операцій, що значно менше ніж $(NM)^3/3$ операцій, які необхідні для реалізації процедури виключення за Гауссом.

2.3.2. Методи ортогоналізації

До методів ортогоналізації належать метод обертань Якобі, який спочатку використовували для знаходження власних чисел симетричних матриць, і подібні йому, але придатні для довільних матриць, методи Гівенса, Хаусхолдера та QR-алгоритм [2, 3, 5, 9].

Усі розглядувані далі методи також засновані на ідеї одержання нульових елементів поза діагоналлю, але тепер для цього мат-

рицю \underline{A} множать на ортогональні матриці \underline{U} (тобто на такі, для яких $\underline{U}^T \equiv \underline{U}^{-1}$). Ціна істотно зростаючої при цьому обчислювальної стійкості – більш висока арифметична вартість. Як зазначалося, методи ортогоналізації спочатку розроблялися для визначення власних векторів і власних значень матриці \underline{A} . Можливість використання їх для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.2) дістала нове визнання для випадку, коли \underline{A} – **розріджена матриця**. Особливо це стосується наведених далі методу обертань Гівенса та методу Хаусхолдера, які, незважаючи на більш високу, ніж у методу Гаусса, арифметичну вартість (для щільної \underline{A}), мають незамінні переваги:

- локальний характер обчислень;
- придатність для паралельних обчислень.

Для початку розглянемо розв'язання з використанням методу обертань повної проблеми власних чисел для дійсних симетричних матриць (придатний також для довільних ермітових матриць).

Визначимо міру близькості матриці \underline{A} до діагонального вигляду. Нехай

$$\sigma_i(\underline{A}) = \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}|^2 \quad (i = \overline{1, N}). \quad (2.28)$$

$$\text{Уведемо } t(\underline{A}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_N = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2.$$

Визначення. Процедура побудови матричної послідовності $\{\underline{A}^k\}$, $\underline{A}^0 \equiv \underline{A}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) буде **монотонною**, якщо

$$t(\underline{A}^k) < t(\underline{A}^{k-1}). \quad (2.29)$$

Відомо, що довільну дійсну симетричну матрицю \underline{A} можна звести до діагонального вигляду за процедурою

$$\underline{A} = \underline{U}^{-1} \cdot \underline{D} \cdot \underline{U}, \quad (2.30)$$

де \underline{U} – ортогональна матриця: $\underline{U} \cdot \underline{U}^{-1} = \underline{E}$ (тут \underline{E} – одинична матриця); \underline{D} – діагональна матриця, на діагоналі якої знаходяться власні числа $\lambda_i, i = \overline{1, N}$ матриці \underline{A} . Оскільки \underline{U} – ортогональна матриця, для дійсної симетричної матриці \underline{A} замість рівняння (2.30) маємо еквівалентне рівняння

$$\begin{aligned} b_{ni}^k &= a_{ni}^k \cos \varphi^k + a_{nj}^k \sin \varphi^k, \\ b_{nj}^k &= -a_{ni}^k \sin \varphi^k + a_{nj}^k \cos \varphi^k \quad (n = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Аналогічно всі рядки матриці \underline{A}^{k+1} , крім (i) та (j) , збігаються з відповідними рядками матриці \underline{B}^k . Елементи рядків із номерами (i) та (j) обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} a_{in}^{k+1} &= b_{in}^k \cos \varphi^k + b_{jn}^k \sin \varphi^k, \\ a_{jn}^{k+1} &= -b_{in}^k \sin \varphi^k + b_{jn}^k \cos \varphi^k \quad (n = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Із (2.35) і (2.36) одержимо

$$\begin{aligned} a_{ij}^{k+1} &= b_{ij}^k \cos \varphi^k + b_{jj}^k \sin \varphi^k = (-a_{ii}^k \sin \varphi^k + a_{ij}^k \cos \varphi^k) \times \\ &\times \cos \varphi^k + (-a_{ji}^k \sin \varphi^k + a_{jj}^k \cos \varphi^k) \sin \varphi^k. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Оскільки $a_{ij}^k \equiv a_{ji}^k$, спростуємо вираз (2.37)

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k \cos 2\varphi^k + \frac{1}{2}(a_{jj}^k - a_{ii}^k) \sin 2\varphi^k. \quad (2.38)$$

Вибираємо φ^k таким, що $a_{ij}^{k+1} \equiv 0$, тоді

$$\operatorname{tg} 2\varphi^k = \frac{2a_{ij}^k}{a_{ii}^k - a_{jj}^k}. \quad (2.39)$$

Зауваження

- Можна побудувати нескінченно багато подібних (2.32) процедур, які задовольняють умову (2.29).
- Для зведення матриці до діагонального вигляду за методом Якобі потрібна нескінченно велика кількість кроків, оскільки під час ітерацій на місці нульових елементів можуть знову з'являтися ненульові елементи, хоч і менші за числовим значенням.
- Основна відмінність методу Гівенса від методу Якобі полягає у побудові його алгоритму, згідно з яким одержані на попередніх кроках ітерації нульові елементи зберігаються у подальшому. Однак за методом Гівенса симетрична матриця може бути перетворена лише на тридіагональну, а несиметрична – на матрицю Гесенберга. Остання є верхньо- або нижньотрикутною матрицею, у якій нижче (вище) головної діагоналі є додаткова ненульова діагональ. А перевага методу Гівенса, порівняно з методом Якобі, полягає у тому, що всі перетворення тут відбуваються за скінченну кількість кроків.

Метод Хаусхолдера⁵ [2, 3, 11] у випадку симетричних матриць дозволяє звести матрицю до тридіагонального вигляду, використовуючи майже вдвічі меншу кількість операцій, ніж за методами Якобі або Гівенса. Це зумовлено тим, що при його виконанні на нульові перетворюються всі елементи рядків і стовпців, які не належать до трьох головних діагоналей матриці. Особливо яскраво перевага цього методу виявляється в дуже великих матрицях розрідженої структури. При використанні методу Хаусхолдера на $N - 2$ основних кроках виконуються перетворення

$$\underline{A}^{k+1} = \left[\underline{P}_{ij}^k \right]^T \underline{A}^k \underline{P}_{ij}^k. \quad (2.40)$$

Тут кожна матриця відображень має вигляд

$$\underline{P}^k = \underline{E} - \frac{\underline{X}^k \left[\underline{X}^k \right]^T}{2K_k^2}, \quad (2.41)$$

де

$$\begin{cases} x_{ik} = 0, & i=1, 2, \dots, k; \\ x_{ik} = a_{ki}, & i=k+2, \dots, N; \\ x_{k+1,k} = a_{k,k+1} \mp S_k, \end{cases} \quad (2.42 \text{ а})$$

а

$$S_k = \left[\sum_{i=k+1}^N a_{ki}^2 \right]^{1/2}, \quad 2K_k^2 = S_k^2 \mp a_{k,k+1} S_k. \quad (2.42 \text{ б})$$

У (2.42 а) і (2.42 б) знак береться відповідно до знака елемента $a_{k,k+1}$, що дозволяє зробити значення $x_{k+1,k}$ максимальним.

Розглянемо тепер розв'язання повної проблеми власних чисел для довільної дійсної невивродженої квадратної матриці \underline{A} за допомогою QR-алгоритму.

Лема. Довільна дійсна невивроджена квадратна матриця може бути представлена у вигляді добутку ортогональної і правої трикутної матриць.

Як наслідок лема подамо матрицю \underline{A} у вигляді

⁵ У вітчизняній літературі – метод відображень.

$$\underline{A} = \underline{Q}_1 \cdot \underline{R}_1, \quad (2.43)$$

де \underline{Q}_1 – ортогональна, $\underline{R}_1 \equiv \underline{A}^{k-1}$ – права трикутна матриця для матриці \underline{A} . Помноживши (2.43) ліворуч на \underline{Q}_1^{-1} , маємо

$$\underline{R}_1 = \underline{Q}_1^{-1} \cdot \underline{A}. \quad (2.44)$$

Тому матриця

$$\underline{A}^1 = \underline{R}_1 \cdot \underline{Q}_1 = \underline{Q}_1^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q}_1 \quad (2.45)$$

подібна матриці \underline{A} .

Побудуємо тепер послідовність матриць $\{\underline{A}^k\}$ за правилом

$$\underline{A}^{k+1} = \underline{Q}_{k+1}^{-1} \cdot \underline{A}^k \cdot \underline{Q}_{k+1}. \quad (2.46)$$

Можна довести, що процедура типу (2.46) приводить вихідну матрицю $\underline{A} \equiv \underline{A}^0$ до вигляду, наведеному в [3],

$$\underline{A} = \underline{Q} \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{Q}^{-1}, \quad (2.47)$$

де $\underline{Q} = \underline{Q}_1 \underline{Q}_2 \dots \underline{Q}_N$; $\underline{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}$ – права канонічна форма Жордана, тобто $\lambda_{ij} \equiv 0$ при $j < i$ та $j > i + 1$; $\lambda_{ii} \equiv \lambda_i$ – власні числа матриці \underline{A} , $\lambda_{i,i+1}$ дорівнюють 0 або 1.

У [3] розглядається кілька можливих алгоритмів побудови послідовності ортогональних матриць $\{\underline{Q}_k\}$, які приводять до бажаного результату, але мають різну арифметичну вартість. Найчастіше використовують послідовність матриць обертань (2.33) або матриць відображень (2.41).

Зауваження

- Незважаючи на те, що для методу Хаусхолдера замість матриць плоских обертань (2.33) використовують складніші ермітові ортогональні матриці відображень (2.41), результат маємо однаковий і для проблеми власних чисел, і при розв'язанні СЛАР із розрідженою матрицею.
- При використанні методів Гівенса та Хаусхолдера для розв'язання СЛАР із розрідженою симетричною матрицею зведена до тридіагонального вигляду матриця СЛАР у подальшому розв'язується за допомогою QR-алгоритму або прогонкою за методом TDMA.
- За методами Гівенса та Хаусхолдера при розв'язанні задачі власних чисел для несиметричної матриці зведена до вигляду Гесенберга матриця у подальшому перетворюється за QR-алгоритмом.

- При використанні QR-алгоритму для розв'язання СЛАР із розрідженою матрицею на першому кроці пропонується метод Гівенса або метод Хаусхолдера, які перетворюють довільну матрицю на матрицю Гесенберга. Для матриці Гесенберга пошук QR-розвинення істотно спрощується.
- QR-розвинення для довільної невинродженої матриці \underline{A} можна використати для розв'язання СЛАР подібно до LU-розвинення:

$$\underline{R} \cdot \vec{v} = \underline{Q}^T \cdot \vec{b}. \quad (2.48)$$

2.4. Ітераційні методи

2.4.1. Загальна структура ітераційних методів

Прямі методи розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь не можна застосовувати за дуже великих N (велика кількість рівнянь) через зростаючі похибки закруглень, що пов'язано з великою кількістю арифметичних операцій. Ліквідувати ці ускладнення допомагають ітераційні методи. За їх допомогою можна одержати, починаючи з вектора $\vec{v}^{(0)}$, послідовність векторів $\{\vec{v}^{(m)}\}$, що збігаються до розв'язання системи

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{v}^{(m)} = \vec{v}_c. \quad (2.49)$$

Метод є збіжним, якщо (2.49) справедливе для довільного $\vec{v}^{(0)}$.

Для всіх методів, що розглядаються далі, матриця \underline{A} подається як різниця матриць

$$\underline{A} = \underline{M} - \underline{N}, \quad (2.50)$$

де для матриці \underline{M} виконується $\|\underline{M}\| \approx \|\underline{A}\|$, але \underline{M} легко піддається факторизації. Наприклад, матриця \underline{M} може бути тридіагональною. Векторне рівняння (2.2) при цьому зводиться до вигляду

$$\underline{M} \cdot \vec{v}^{(m+1)} = \underline{N} \cdot \vec{v}^{(m)} + \vec{b}. \quad (2.51)$$

Формальним розв'язком для (2.51) є вираз

$$\vec{v}^{(m+1)} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{N} \cdot \vec{v}^{(m)} + \underline{M}^{-1} \cdot \vec{b} \quad (2.52 \text{ а})$$

або
$$\vec{v}^{(m+1)} = \vec{v}^{(m+)} - \underline{M}^{-1} \cdot \underline{R}^{(m)}, \quad (2.52 \text{ б})$$

де введено вектор нев'язки

$$\vec{R}^{(m)} = \underline{A} \cdot \vec{v}^{(m)} - \vec{b}. \quad (2.53)$$

Відомо, що схеми (2.51) або (2.52 а, б) забезпечують збіжність до точного розв'язку, якщо спектральний радіус (тобто модуль максимального власного числа) для матриці $\underline{M}^{-1} \cdot \underline{N}$ буде менше одиниці. Останнє забезпечується вибором матриць \underline{M} та \underline{N} .

Зауваження. Розв'язання СЛАР ітераційними методами спрощується ще й тому, що на кожному кроці розв'язується система з одними й тими самими матрицями.

Звернемося до найпоширенішого алгоритму Гаусса–Зейделя та розглянемо його варіанти. Нехай матрицю \underline{A} подано у вигляді

$$\underline{A} = \underline{D} - \underline{G} - \underline{F}, \quad (2.54)$$

тобто нехай \underline{A} є сумою діагональної матриці

$$d_{ii} \equiv a_{ii}, \quad d_{ij} \equiv 0 \quad (i \neq j);$$

нижньотрикутної матриці

$$\underline{G} = \{g_{ij}\}; \quad g_{ij} \equiv -a_{ij} \quad (i > j), \quad g_{ij} \equiv 0 \quad (i \leq j);$$

верхньотрикутної матриці

$$\underline{F} = \{f_{ij}\}; \quad f_{ij} \equiv -a_{ij} \quad (i < j), \quad f_{ij} \equiv 0 \quad (i \geq j).$$

Нехай також на діагоналі відсутні нульові елементи, тобто $a_{ii} \neq 0$. Маємо три класичні ітераційні методи:

- метод Якобі: $\underline{M} = \underline{D}$, $\underline{N} = \underline{G} + \underline{F}$,

$$\underline{D} \cdot \vec{v}^{(m+1)} = \vec{b} + (\underline{G} + \underline{F}) \cdot \vec{v}^{(m)}; \quad (2.55)$$

- метод Гаусса–Зейделя: $\underline{M} = \underline{D} - \underline{G}$ та $\underline{N} = \underline{F}$,

$$(\underline{D} - \underline{G}) \vec{v}^{(m+1)} = \vec{b} + \underline{F} \cdot \vec{v}^{(m)}; \quad (2.56)$$

- метод послідовної верхньої релаксації (SOR):

$$\underline{M} = \frac{1}{w} \underline{D} - \underline{G}, \quad \underline{N} = \left(\frac{1}{w} - 1 \right) \underline{D} + \underline{F},$$

$$(\underline{D} - w\underline{G}) \cdot \vec{v}^{(m+1)} = w\vec{b} + (1-w)\underline{D} \cdot \vec{v}^{(m)} + w\underline{F} \cdot \vec{v}^{(m)}, \quad (2.57)$$

тут w – параметр релаксації.

Метод Якобі потребує найменшої кількості обчислень, оскільки на кожному кроці розв'язується СЛАР із діагональною матрицею. Для методу Гаусса–Зейделя на кожному кроці

розв'язується СЛАР із трикутною матрицею. Однак пам'яті ЕОМ для методу Якобі потрібно вдвічі більше, ніж для методу Гаусса–Зейделя. Метод послідовної верхньої релаксації є модифікацією методу Гаусса–Зейделя з метою прискорення збіжності останнього.

2.4.2. Збіжність ітераційних методів

Запишемо умови збіжності ітераційних методів:

- якщо матриця \underline{A} симетрична й додатно визначена, то збігаються методи Гаусса–Зейделя та SOR при $0 < w < 2$;

- якщо матриця \underline{A} має діагональну перевагу, тобто

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad (2.58)$$

то збігаються методи Якобі та Гаусса–Зейделя.

Зауваження

- Методи Якобі та Гаусса–Зейделя мають лінійну збіжність. Якщо $w = w_{opt}$, то збіжність методу SOR наближається до квадратичної. Однак визначення w_{opt} потребує кількості операцій, яку можна порівняти із розв'язком системи, оскільки

$$w_{opt} = 2 / \left(1 + (1 - \mu^2)^{1/2} \right), \quad (2.59)$$

де μ – найбільше власне число комплексу $\underline{E} - \underline{D}^{-1} \cdot \underline{A}$ (\underline{E} – одинична матриця). Якщо μ можна попередньо оцінити, то можливою стратегією є використання процедури, яка уточнює w_{opt} із виразу (2.59) у процесі ітерацій. Така процедура носить назву адаптивної.

- Методи ітерацій також припускають використання адаптивних процедур прискорення за методом Чебишова або за методом спряжених градієнтів (CG). На відміну від схеми послідовної верхньої релаксації (SOR) тут уже немає параметрів, які необхідно підбирати емпірично.

Розглянемо послідовність кроків при застосуванні традиційного методу спряжених градієнтів [18, 23]:

- 1) $\vec{v}^{(m+1)} = \vec{v}^{(m)} + \lambda^{(m)} \vec{P}^{(m)}$,
- 2) $\vec{R}^{(m+1)} = \vec{R}^{(m)} - \lambda^{(m)} \vec{U}^{(m)}$,
- 3) $\rho^{(m+1)} = \left(\vec{R}^{(m+1)}, \vec{R}^{(m+1)} \right)$,

$$\begin{aligned}
4) \quad \alpha^{(m+1)} &= \frac{\rho^{(m+1)}}{\rho^{(m)}}, \\
5) \quad \vec{P}^{(m+1)} &= \vec{R}^{(m+1)} + \alpha^{(m+1)} \vec{P}^{(n)}, \\
6) \quad \vec{U}^{(m+1)} &= \underline{A} \cdot \vec{P}^{(m+1)}, \\
7) \quad \lambda^{(m+1)} &= \frac{\rho^{(m+1)}}{(\vec{P}^{(m+1)}, \vec{U}^{(m+1)})}.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Алгоритм (2.60) досить економний, адже потребує лише однієї дії матрично-векторного множення на шостому кроці. Вектор $\vec{P}^{(m)}$ визначає напрямок пошуку, причому тут $\vec{P}^{(0)} = \vec{R}^{(0)}$, $\vec{v}^{(0)}$ – довільне початкове наближення. Важливо також зазначити, що вектор нев'язки $\vec{R}^{(m)}$ обчислюється рекурсивно, а не за визначенням (2.53). Можливі подальші уточнення методу спряжених градієнтів із метою прискорення його збіжності наводяться в [18, 23].

2.4.3. Особливості розв'язання систем нелінійних рівнянь

Систему рівнянь (2.1) подамо у вигляді

$$\vec{v} = f(\vec{v}) \tag{2.61}$$

або
$$v_i = f_i(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.62}$$

Для розв'язання цієї системи використаємо метод простої ітерації Якобі, аналогічний відповідному методу для системи лінійних рівнянь. Значення невідомих на k -й ітерації знайдемо, використовуючи вже обчислені їхні значення на попередній ітерації: $v_1^{(k-1)}, v_2^{(k-1)}, \dots, v_n^{(k-1)}$ у вигляді

$$v_i^{(k)} = f_i(v_1^{(k-1)}, v_2^{(k-1)}, \dots, v_n^{(k-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.63}$$

Систему (2.61) можна розв'язати й методом Зейделя, що нагадує метод Гаусса–Зейделя для розв'язання систем лінійних рівнянь. Значення $v_i^{(k)}$ знаходять з i -го рівняння системи (2.62) із використанням уже обчислених на поточній ітерації значень невідомих. Таким чином, значення невідомих на k -тій ітерації знаходитимуться не за схемою (2.63), а з виразу

$$v_i^{(k)} = f_i \left(v_1^{(k)}, \dots, v_{i-1}^{(k)}, v_i^{(k-1)}, \dots, v_n^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.64)$$

Ітераційний процес в обох методах триває, доки зміни всіх невідомих у двох послідовних ітераціях не стануть малими.

Зауваження

- Умови збіжності розглянутих методів збігаються з такими для систем лінійних рівнянь. Тільки перевіряти ці умови потрібно на кожній ітерації.
- При використанні методу простої ітерації або методу Гаусса–Зейделя для розв'язання системи нелінійних рівнянь успіх багато в чому визначається вдалим вибором початкових наближень невідомих: вони мають бути досить близькими до точного розв'язання. У протилежному випадку ітераційний процес може не збігатися.

2.4.4. Багатосіткові методи

Багатосіткові методи (БМ) застосовні як до лінійних систем (2.2), так і до нелінійних (2.1). Типовий варіант багатосіткового методу спочатку використовуємо для розв'язання СЛАР, а далі опишемо його поширення на систему нелінійних рівнянь.

Багатосіткові методи пов'язані з послідовністю вкладених сіток, $m = 1, \dots, M$, при відношенні розмірів клітинок сітки $\Delta_{m+1} / \Delta_m = 0,5$. Лінійна система, розв'язання якої потрібно побудувати на найдрібнішій сітці, записують у вигляді

$$\underline{A}^M \bar{v}^M = \bar{b}^M. \quad (2.65)$$

Наближене подання \bar{v}^M відповідає розв'язанню на сітці, що є найближчою у послідовності за ступенем грубості, тобто \bar{v}^{M-1} . Подібним чином розв'язання \bar{v}^M , побудоване на сітці проміжного розміру, є добрим наближенням до розв'язання на дрібнішій сітці, що є найближчою у послідовності до \bar{v}^M , тобто до \bar{v}^{M+1} .

Якщо наближений варіант розв'язання рівняння $\underline{A}^{m+1} \bar{v}^{m+1} = \bar{b}^{m+1}$ позначити символом $\bar{v}^{m+1,a}$ так, що

$$\bar{v}^{m+1} = \bar{v}^{m+1,a} + \bar{w}^{m+1}, \quad (2.66)$$

то
$$\underline{A}^{m+1} \bar{w}^{m+1} = \bar{b}^{m+1} - \underline{A}^{m+1} \bar{v}^{m+1,a} = \bar{R}^{m+1}. \quad (2.67)$$

Поправка \bar{w}^{m+1} і нев'язка (або дефект) \bar{R}^{m+1} добре апроксимуються поправкою та нев'язкою на найближчій у послідовності

грубішій сітці, тобто величинами \bar{w}^m і \bar{R}^m , якщо тільки останні мають достатню гладкість, тобто якщо амплітуди їх високочастотних складових достатньо малі⁶.

Релаксаційні ітераційні процедури, подібні до процедур Якобі, Гаусса–Зайделя та SOR (описані раніше в п. 2.4.1), за кілька ітерацій видаляють високочастотні компоненти. Водночас видалення низькочастотних компонент помилки, а отже й нев'язки, було причиною слабкої збіжності ітераційних методів на фіксованій сітці.

Однак низькочастотний компонент на дрібній сітці стає високочастотним компонентом на грубій сітці. Виходячи з цього застосовують багатосіткові методи, прагнучи у такий спосіб скористатися високочастотним згладжуванням, яке властиве ітераційним методам.

При заданій $(m + 1)$ -сітці для згладжування високочастотних компонент поправки і нев'язки виконується кілька (v^1) ітераційних кроків (релаксація). На підставі (2.67) це можна символічно записати у вигляді процедури

$$\begin{aligned}\bar{w}^{m+1, v^1} &= \text{RELAX}(\bar{w}^{m+1}, \underline{A}^{m+1}, \bar{R}^{m+1}), \\ \bar{R}^{m+1, v^1} &= \bar{R}^{m+1} - \underline{A}^{m+1} \bar{w}^{m+1, v^1}.\end{aligned}\quad (2.68)$$

Зауваження. У випадку лінійної системи рівнянь ітерації можуть застосовуватись як до початкового рівняння (2.2), так і до рівняння (2.67) із нев'язками і поправками. У разі нелінійних систем рівнянь ітерації застосовують лише до вихідного рівняння (2.1).

Розподіл нев'язок \bar{R}^m на m -тій сітці обчислюється з \bar{R}^{m+1, v^1} за допомогою обмежувального оператора I_{m+1}^m . Ця процедура символічно записується у вигляді

$$\bar{R}^m = I_{m+1}^m \bar{R}^{m+1, v^1}.\quad (2.69)$$

Деякі варіанти обмежувального оператора буде наведено пізніше. Процес ітерацій та обмеження продовжується, доки не буде досягнуто найгрубішої сітки, тобто $m = 1$.

⁶ Найвища частота, що піддається представленню на дискретній сітці з клітинкою Δ_m , дорівнює $2\Delta_m$ [18].

На найгрубішій сітці з погляду обчислень доцільно продовжувати ітерації, доки не буде отримано поправку \bar{w}^1 , що збігається. Як альтернатива рівняння $\underline{A}^1 \bar{w}^1 = \bar{R}^1$ або рівняння (2.2) можуть розв'язуватись із використанням прямих методів (див. 2.3). Зазначимо, що в загальному випадку, якщо нев'язка \bar{R}^1 відмінна від нуля, то і поправка \bar{w}^1 відмінна від нуля.

Поправку \bar{w}^2 можна отримати із \bar{w}^1 пролонгацією (інтерполяцією) за формулою $\bar{w}^2 = I_1^2 \bar{w}^1$, або в більш загальному вигляді

$$\bar{w}^{m+1} = I_m^{m+1} \bar{w}^m. \quad (2.70)$$

Деякі форми оператора пролонгації I_m^{m+1} буде наведено пізніше. Потім на більш дрібній сітці при $m + 1$ виконується ще кілька ітераційних кроків (V^2):

$$\bar{w}^{m+1, v^2} = \text{RELAX}^{v^2}(\bar{w}^{m+1}, \underline{A}^{m+1}, \bar{R}^{m+1}). \quad (2.71)$$

Один багатосітковий цикл, що бере початок із найдрібнішої сітки, тобто при $m = M$, складається із серії повторних застосувань формул (2.68) і (2.69), доки не буде досягнуто найгрубішої сітки, після чого будеється точний або повний ітераційний розв'язок рівняння $\underline{A}^1 \bar{w}^1 = \bar{R}^1$ і проводиться серія повторних застосувань формул (2.70) і (2.71) аж до наступного досягнення найдрібнішої сітки при $m = M$. Ця процедура має назву V -циклу (рис. 2.5).

Цикл повторюється, доки не буде досягнуто задовільну збіжність на найдрібнішій сітці. Якщо як рівняння (2.2) взяти рівняння Пуассона на рівномірній сітці, то десяти V -циклів достатньо для того, щоб різниця між розв'язками для двох послідовних циклів мала значення порядку 10^{-5} . При проведенні першого циклу величина \bar{w}^m береться рівною передбачуваному розв'язку на дрібній сітці \bar{v}^M, a .

Обмежувальний оператор I_{m+1}^m , що фігурує у (2.65), дозволяє побудувати розподіл нев'язок на грубішій сітці \bar{R}^m за відомим розподілом нев'язок на дрібнішій сітці \bar{R}^{m+1} . На фізичній сітці для індексів (j, k) , що відповідають положенню вузлової точки на грубій сітці у напрямках x та y , відповідно, найпростішим вибором для обмежувального оператора є безпосереднє заміщення $\bar{R}_{jk}^m = \bar{R}_{jk}^{m+1}$. Такий процес є стійким та ефективним при розв'язанні істотно еліптичних задач, наприклад, для рівняння Лапласа.

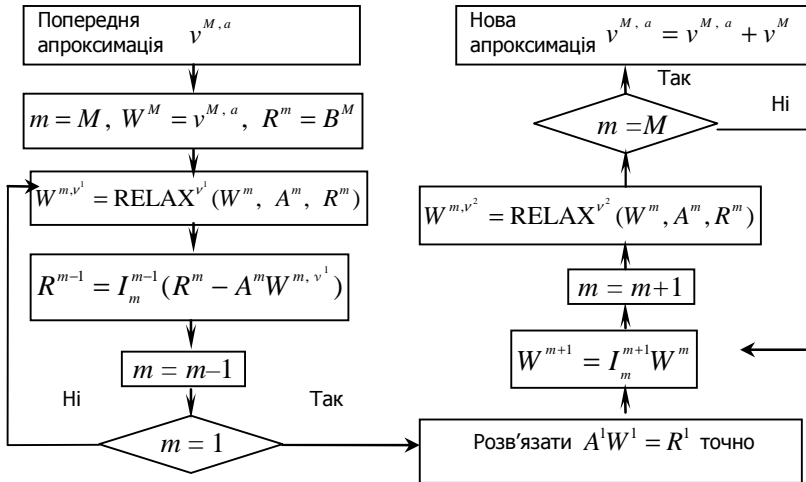


Рис. 2.5. Блок-схема для багатосіткового V-циклу

Однак для нелінійних задач зі слабкою еліптичністю, наприклад про течію в'язкої рідини з великими числами Рейнольдса (\mathbf{Re}), стійкішим є вибір обмежувального оператора з використанням п'яти- або дев'ятиточкового операторів у вигляді

$$I_{m+1}^m = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Оператор пролонгації (інтерполяції) із (2.70) звичайно базується на білінійній інтерполяції у двох вимірах. Наприклад, якщо індекси (j, k) належать до грубішої сітки m , то

$$\begin{aligned} w_{jk}^{m+1} &= w_{jk}^m, \\ w_{j\pm 1/2, k}^{m+1} &= 0,5(w_{jk}^m + w_{j\pm 1, k}^m), \\ w_{j+1/2, k+1/2}^{m+1} &= 0,25(w_{jk}^m + w_{j+1, k}^m + w_{j, k+1}^m + w_{j+1, k+1}^m). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Значення \bar{w}^{m+1} у точках $(j, k \pm 1/2)$ визначаються так само, як у другому рядку (2.73). Слід зазначити, що вузлові точки (j, k) на грубішій сітці будуть перепозначені індексами $(2j + 1, 2k + 1)$ на дрібнішій сітці.

При розв'язанні нелінійних задач багатосітковий метод можна об'єднати з методом Ньютона (див. 2.1). На кожному кроці ньютонівської ітерації лінійна система (2.5) розв'язується щодо

поправки до розв'язку. Отже, багатосітковий алгоритм, що відповідає рис. 2.5, може застосовуватися у процесі ітерацій при розв'язанні системи (2.5).

Однак багатосітковий метод може використовуватися й безпосередньо для розв'язання нелінійної системи (2.1), без звертання до методу Ньютонa. При цьому істотна відмінність від алгоритму, поданого на рис. 2.5, полягає в тому, що на етапі обмеження за (2.69) потрібно обмежувати (перекиданням на грубішу сітку m) не тільки нев'язку \bar{K}^{m+1, v^1} , а й наближений розв'язок $\bar{v}^{m+1, a}$. Тому на m -му шарі замість розв'язання (2.67) шукається розв'язання рівняння $A^m \bar{v}^{m, a} = \bar{K}^m + A^m I_{m+1}^m \bar{v}^{m+1, a}$. (2.74)

На практиці розв'язання $\bar{v}^{m, a}$ будується шляхом релаксації з наступним перекиданням на грубішу сітку точного розв'язання на найгрубішій сітці, а потім релаксацією й пролонгацією на все дрібніші сітки, згідно зі схемою рис. 2.5.

Одразу після отримання розв'язку $\bar{v}^{m, a}$ розрахуємо поправку $\bar{w}^m = \bar{v}^{m, a} - I_{m+1}^m \bar{v}^{m+1, a}$, (2.75) яку потім пролонгуємо на $(m+1)$ -сітку. Підправлений розв'язок $-\bar{v}^{m+1, a} + I_m^{m+1} \bar{w}^m$, релаксуємо (в основному так само, як і в лінійному випадку), щоб одержати \bar{v}^{m+1, v^2} .

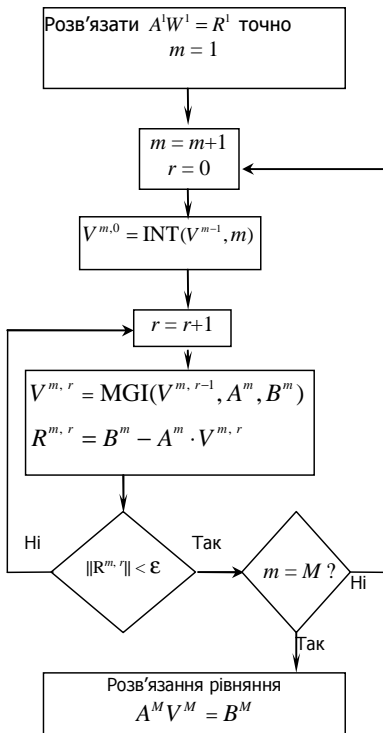


Рис. 2.6. Блок-схема для повного багатосіткового методу (ПБС)

Схему розв'язання нелінійної задачі називають методом повної апроксимаційної пам'яті (ПАП) [18], на відміну від методу поправочної пам'яті (ПП), який подано на рис. 2.5. Якщо врахувати, що метод ПАП перекидає на грубіші сітки і розв'язок, і

нев'язку, то його економічні показники трохи нижчі (на 5-10 %), ніж у схеми ПП. У загальному випадку метод ПАП не рекомендують застосовувати для розв'язання лінійних задач. Як і для методу ПП, ефективність ПАП залежить від можливості згладжування поправки до розв'язку \vec{w} і нев'язки \vec{R} .

Алгоритм для методів ПП і ПАП починався з апроксимації розв'язку на найдрібнішій сітці, $m = M$, проходив через V -цикл аж до найгрубішої сітки та повертався назад, щоб поліпшити початковий розв'язок. Така стратегія є цілком придатною, якщо в нашому розпорядженні є добре наближення до розв'язку \vec{v}^M .

Якщо жодної попередньої інформації про розв'язок немає, то краще починати з розв'язання на найгрубішій сітці та отримати його або безпосередньо, або за допомогою звичайних ітерацій. Щоб поліпшити розв'язок для переходу на наступний рівень дрібнішої сітки використовується інтерполяція високого порядку, а потім виконується r багатосіткових V -циклів. Процес інтерполяції високого порядку у поєднанні із r багатосітковими V -циклами повторюється на послідовності все більш дрібних сіток аж до $m = M$. Останній багатосітковий V -цикл повторюється до досягнення збіжності.

Описаний вище алгоритм – основа повного багатосіткового методу (ПБС), який є узагальненням методів ПАП і ПП. Схему методу ПБС подано на рис. 2.6 для випадку лінійної системи рівнянь. Функція $\text{INT}(\vec{v}^m, m)$ символізує кубічну інтерполяцію \vec{v}^m спочатку в напрямку x , а потім для всіх вузлових значень $x^{(m+1)}$ у напрямку y . Функція $\text{MGI}(\vec{v}^{m.r-1}, \underline{A}^m, \vec{b}^m)$ відповідає одному багатосітковому V -циклу, який подано на рис. 2.5.

Зауваження

- Багатосітковий підхід можна розглядати як процедуру прискорення, що подібна до процедури прискорення для методу спряжених градієнтів та застосовна до основної ітераційної схеми.
- Інший варіант інтерпретації полягає у тому, що основна ітераційна схема розглядається як метод згладжування для багатосіткового методу. Так само вона розглядалася як попередній крок у методі спряжених градієнтів.
- Як і у випадку прискорення за методом спряжених градієнтів, для багатосіткового методу визначено, що використання неповної (наближеної) лінійної факторизації матриці \underline{A} , яка при цьому пере-

творюється на добуток матриць $\underline{L} \cdot \underline{U}$, є досить ефективним процесом, що згладжує результати співвідношень (2.64) і (2.67). Останнє особливо важливо для випадку, коли матриця \underline{A} сильно асиметрична, що має місце, наприклад для задач із переважним впливом конвекції.

Задачі

1. Аналізуючи роботу сонячного колектора у вигляді плоскої пласти (рис. 3-1), потрібно встановити енергетичний баланс

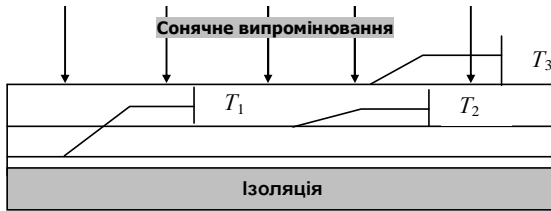


Рис. 3-1

$$R_1 = (T_1^4 + 0,06823T_1) - (T_2^4 + 0,05848T_2) - 0,01509 = 0,$$

$$R_2 = (T_1^4 + 0,05848T_1) - (2T_2^4 + 0,11696T_2) + (T_3^4 + 0,5848T_3) = 0, \quad (3-1)$$

$$R_3 = (T_1^4 + 0,05848T_2) - (2,05T_3^4 + 0,2534T_3) + 0,06698 = 0,$$

для поглинача та двох скляних кришок. Це потребує розв'язання системи нелінійних рівнянь, які зв'язують температуру поглинача T_1 із температурами двох скляних кришок T_2 і T_3 ($T_i = T_i \text{ K}/1000$). Розв'язок системи (3-1) знайти методом Ньютона. Порівняти час, потрібний для обчислення за звичайним методом Ньютона, із часом, потрібним за часткового "заморожування" факторизації.

2. Для задачі 1 використати квазіньютонівський метод при $H_{ii} = 1/J_{ii}$; $H_{ij} = 0$, $i \neq j$. Порівняти загальний час обчислень із аналогічним при використанні звичайного методу Ньютона.

3. Користуючись математичною бібліотекою IMSL [2], розв'язати методом Ньютона систему нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &= x_1 + \exp(x_1 - 1) + (x_2 + x_3)^2 - 27 = 0, \\ f_2(\vec{x}) &= \exp(x_1 - 1)/x_1 + x_3^2 - 10 = 0, \\ f_3(\vec{x}) &= x_3 + \sin(x_2 - 2) + x_2^2 - 7 = 0 \end{aligned} \quad (3-2)$$

із початковим наближенням $(4,0; 4,0; 4,0)$. Розглянути два випадки: а) якобіан задається явно; б) якобіан апроксимується скінченними різницями.

4. Розв'язати задачу 3, використовуючи квазіньютонівський метод січних із математичної бібліотеки IMSL.

5. Користуючись математичною бібліотекою IMSL, розв'язати СЛАР

$$\begin{cases} 33x_1 + 16x_2 + 72x_3 = 129, \\ -24x_1 - 10x_2 - 57x_3 = -96, \\ 18x_1 - 11x_2 + 7x_3 = 8,5 \end{cases} \quad (3-3)$$

методом факторизації без ітеративного уточнення коренів.

6. Розв'язати задачу 5 методом оптимального виключення.

7. Розв'язати методом факторизації Халецького (методом квадратного кореня) СЛАР (2.2) із симетричною додатно визначеною матрицею \underline{A} для різних правих частин \underline{B} :

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{vmatrix} -1 & 3,6 & -8 & -9,4 \\ -3 & -4,2 & 11 & 17,6 \\ -3 & -5,2 & -6 & -23,4 \end{vmatrix}. \quad (3-4)$$

8. Розв'язати СЛАР

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad (3-5)$$

із використанням QR-алгоритму.

9. Розв'язати методом спряжених градієнтів СЛАР $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, де

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & & & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & \\ & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & \\ & & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & \\ & & & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & \\ 0 & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & \end{vmatrix}, \quad (3-6)$$

$$\vec{b} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}^T. \quad (3-7)$$

Система рівнянь отримана за апроксимації на сітці 4×4 крайової задачі для рівняння Пуассона із граничними умовами Дирихле (див.

рис. 3.12 а). Скористатися процедурою PCGRC із бібліотеки IMSL [2]. Як апроксимуючу матрицю використати тридіагональну частину матриці \underline{A} .

10. Розв'язати методом прогонки СЛАР $\underline{A}' \cdot \vec{x} = \vec{b}$, де як матриця \underline{A}' використана тридіагональна частина матриці \underline{A} із задачі 9. Вектор \vec{b} взяти той самий.

11. Розв'язати методом матричної прогонки СЛАР $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, де

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad (3-8)$$

$$\vec{b} = \{9, 10, 20, 24, 15, 14\}^T. \quad (3-9)$$

12. Розв'язати задачу 3, використовуючи методи простої ітерації і Гаусса–Зейделя. Порівняти отримані результати.

Розділ 3

ОСНОВИ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Як відомо з першого розділу, диференціальні рівняння в частинних похідних еліптичного типу описують стаціонарні процеси. Запишемо загальний вигляд лінійного диференціального рівняння в частинних похідних еліптичного типу

$$L(u) \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + gu = f(x, y), \quad (3.1 \text{ а})$$

де a, b, c, d, e, g – функції лише (x, y) , або в канонічному вигляді

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y). \quad (3.1 \text{ б})$$

Тут $(x, y) \in D$: $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Належність (3.1 а) або (3.1 б) до еліптичного типу вимагає скрізь на \bar{D} виконання умови $\delta(x, y) = (b^2 - ac) < 0$.

Граничні умови для (3.1 а) або (3.1 б) мають вигляд ($M \in \Gamma$):

- для задачі Дирихле

$$[u(x, y)]_{\Gamma} = \varphi(M); \quad (3.2 \text{ а})$$

- для задачі Неймана

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma} = \varphi_1(M) \text{ або } \left[\frac{\partial u}{\partial S} \right]_{\Gamma} = \varphi_2(M); \quad (3.2 \text{ б})$$

- для задачі Робіна (мішана крайова задача)

$$\left[\alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x, y) u \right]_{\Gamma} = \varphi_3(M), \quad (3.3)$$
$$\left[\alpha^2 + \beta^2 \right]_{\Gamma} > 0.$$

У цьому розділі розглядатимуться деякі головні обчислювальні процедури, що використовуються для наближеного розв'язання стаціонарних задач гідромеханіки, які можна описати за допомогою крайових задач (3.1 а), (3.2 а); (3.1 а), (3.2 б) або (3.1 а), (3.3).

Процедура побудови розв'язку складається із двох етапів (рис. 3.1).

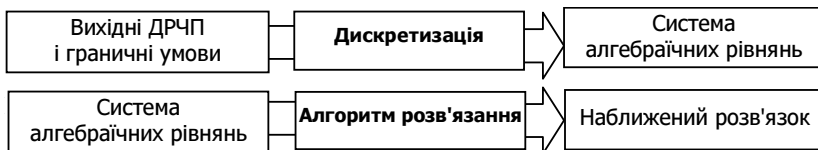


Рис. 3.1. Схема процедури побудови наближеного розв'язку

На першому етапі диференціальні рівняння в частинних похідних, які описують деякий неперервний процес, а також додаткові (граничні та початкові) умови перетворюються на дискретну систему алгебраїчних рівнянь. Перший етап має назву **дискретизації**. Процедура дискретизації досить легко ідентифікується для методу сіток. Однак вона має місце й для методу прямих, і для методу скінченних елементів, і для методу граничних елементів, а також для спектральних методів.

Другий етап процедури знаходження наближеного розв'язку диференціального рівняння в частинних похідних пов'язаний із побудовою **алгоритмів розв'язання** отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

3.1. Дискретизація

Процедура дискретизації складається також із двох етапів: дискретизація області \bar{D} , що для методу сіток означає вибір і побудову відповідної дискретної множини вузлів сітки D_h , а також безпосередньо пов'язану з першим етапом заміну диференціальних операторів різницевиими. Розглянемо послідовно обидва етапи.

3.1.1. Побудова сітки

Уведемо в області $\bar{D} = D \cup \Gamma$ дискретну множину вузлів сітки $D_h : (x_j, y_k) \in D_h, u(x_j, y_k) = u_{jk}$.

Метод сіток дозволяє за значенням невідомої у граничних вузлах сітки і положенням внутрішніх вузлів сітки знайти наближене значення невідомої у внутрішніх вузлах сітки.

Виходячи з визначення, побудова сітки є одним із найважливіших етапів методу сіток. Розглядатимемо методи побудови сіток кожного разу при побудові алгоритму розв'язання тієї чи іншої задачі.

Розглянемо найпростіші прийоми побудови сіток для довільної області \bar{D} . Уведемо декартову систему координат Oxy , і нехай точка $O \in D$.

Прямокутна сітка

Проведемо у площині Oxy ґратку прямих, паралельних координатним осям (рис. 3.2),

$$x = x_0 + j\Delta x, y = y_0 + k\Delta y, \quad (3.4)$$

де (x_0, y_0) координати точки $O \in D$; $\Delta x, \Delta y$ – кроки сітки відповідно за x та y ; $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Точки перетину прямих утворюють на \bar{D} **вузли сітки**. Позначимо внутрішні вузли $\{o\} \in D_h^0$; $\{\otimes\} \in \Gamma$, $\{*\}$ – вузли, що віддалені від границі Γ не більш ніж на Δx (Δy). Нехай $\Gamma_h = \{\otimes\} \cup \{*\}$ – дискретна множина граничних вузлів сітки.

Трикутна сітка

Проведемо у площині Oxy ґратку прямих (рис. 3.3):

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{3}}{2} j\Delta x, & y &= \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} j\Delta x, \\ y &= -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} j\Delta x, & j &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \Delta x > 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Множина внутрішніх вузлів D_h^0 і множина граничних вузлів Γ_h визначаються аналогічно побудові прямокутної сітки.

Звернемо увагу, що розбиття довільної області D на трикутні елементи, порівняно із прямокутною сіткою, тут ближче до оригіналу, що визначає пріоритетне використання трикутних елементів для дискретизації криволінійних областей складної конфігурації [12].

Довільна сітка

За потреби за D_h беруть довільну множину точок, що належить \bar{D} . Розглянемо приклад побудови сітки для області, що є частиною кола (рис. 3.4). Уведемо

$$R = R_0 + j\Delta R, \quad \varphi = \varphi_0 + k\Delta\varphi, \quad (3.6)$$

де (R_0, φ_0) – координати точки $O \in D$; ΔR – крок у напрямку OR ; $\Delta\varphi$ – крок у напрямку $O\varphi$; $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Визначається множина внутрішніх вузлів D_h^0 і множина граничних вузлів Γ_h аналогічно як при побудові прямокутної сітки.

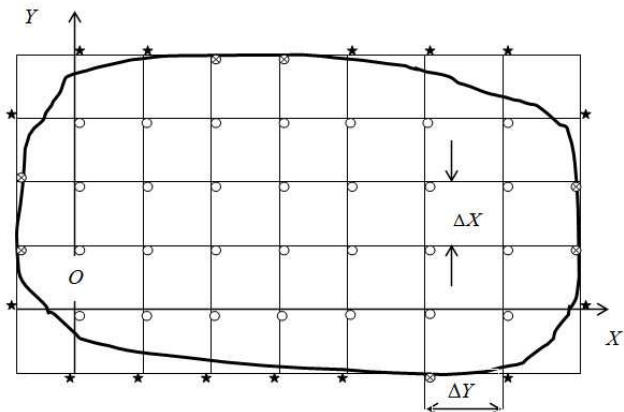


Рис. 3.2. Побудова прямокутної сітки

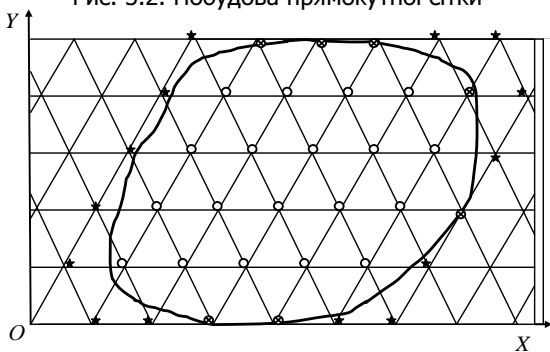


Рис. 3.3. Побудова трикутної сітки

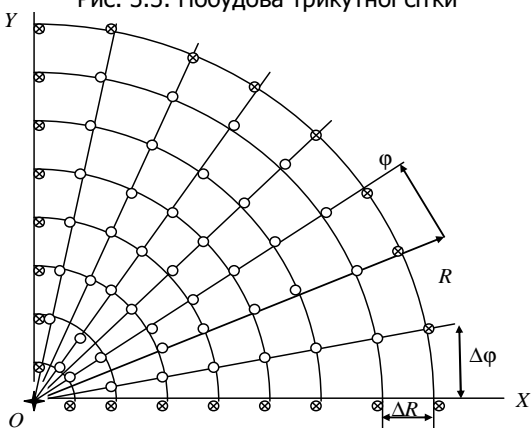


Рис. 3.4. Побудова сітки у полярній системі координат

3.1.2. Побудова скінченнорізницевої апроксимації диференціальних рівнянь у частинних похідних

Скінченнорізницеві аналоги диференціальних рівнянь у частинних похідних отримують на розрахунковому шаблоні, який містить, крім розглядуваної точки, ще кілька сусідніх точок. Частіше користуються найпростішим п'ятиточковим шаблоном типу "хрест" (рис. 3.5 а). При використанні скінченнорізницевого методу диференціальні оператори у внутрішніх точках апроксимуються різницевиими операторами, які, у найпростішому випадку, отримують із розвинення невідомої функції у ряд Тейлора на прийнятому шаблоні. Для шаблону типу "хрест" вважатимемо точку $(x_j, y_k) \in D_h^0$ **внутрішньою**, якщо чотири її сусідні точки:

$(x_{j-1}, y_k), (x_{j+1}, y_k), (x_j, y_{k-1}), (x_j, y_{k+1}) \in \bar{D}$. У напрямку Ox

$$u_{j+1,k} = u_{jk} + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{jk} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{jk} \Delta x^2 + O(\Delta x^2), \quad (3.7)$$

$$u_{j-1,k} = u_{jk} - \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{jk} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{jk} \Delta x^2 + O(\Delta x^2).$$

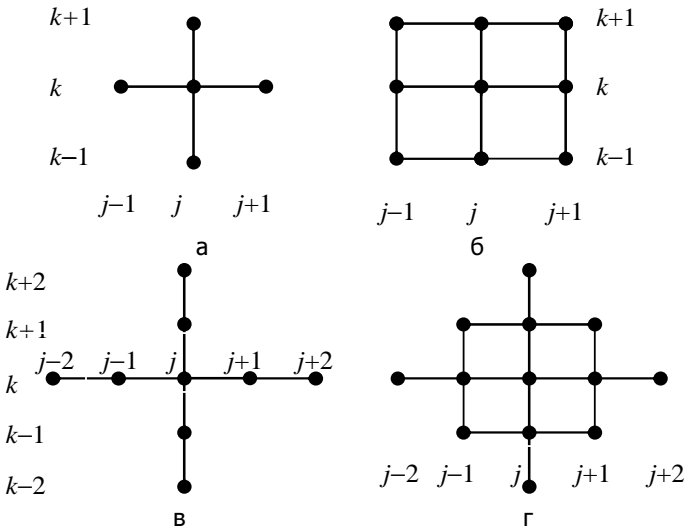


Рис. 3.5. Шаплони для еліптичних рівнянь

Після простих перетворень із (3.7) маємо скінченнорізницеве представлення для першої похідної в напрямку Ox із точністю до малих $\approx O(\Delta x)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{jk} = \frac{u_{j+1,k} - u_{jk}}{\Delta x} + O(\Delta x) \text{ або } = \frac{u_{jk} - u_{j-1,k}}{\Delta x} + O(\Delta x)^7. \quad (3.8)$$

Віднімаючи від першого розвинення в (3.7) друге розвинення, маємо скінченнорізницеве представлення для першої похідної у напрямку Ox із точністю до малих $\approx O(\Delta x^2)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{jk} = \frac{u_{j+1,k} - u_{j-1,k}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.9)$$

Аналогічно в напрямку Oy маємо

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{jk} = \frac{u_{j,k+1} - u_{jk}}{\Delta y} + O(\Delta y) \text{ або } = \frac{u_{jk} - u_{j,k-1}}{\Delta y} + O(\Delta y),$$

$$\text{або} \quad = \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2). \quad (3.10)$$

Другу похідну у скінченнорізницевому вигляді в напрямку Ox знаходимо, додаючи розвинення в (3.7). Отже,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{jk} = \frac{u_{j+1,k} - 2u_{jk} + u_{j-1,k}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (3.11)$$

Аналогічно в напрямку Oy

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{jk} = \frac{u_{j,k+1} - 2u_{jk} + u_{j,k-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2). \quad (3.12)$$

Друга похідна (і похідні більш високого порядку) у напрямку Ox (або Oy) також може бути знайдена і, за визначенням, як похідна від першої похідної у скінченнорізницевому вигляді

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{jk} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{j+1,k} - u_{jk}}{\Delta x} \right) \right]_{jk} = \frac{\frac{u_{j+1,k} - u_{jk}}{\Delta x} - \frac{u_{jk} - u_{j-1,k}}{\Delta x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{u_{j+1,k} - 2u_{jk} + u_{j-1,k}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

⁷ Перший вираз має назву різницевої похідної вперед (або за течією), а другий – різницевої похідної назад (або проти течії).

Мішана похідна може апроксимуватися аналогічно

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{jk} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{jk} = \frac{u_{j+1,k+1} - u_{j-1,k+1} - u_{j+1,k-1} + u_{j-1,k-1}}{4\Delta x \Delta y} + O(\Delta x^2 + \Delta y^2). \quad (3.14)$$

Зауваження

Для заміни мішаної похідної використовуються лише внутрішні точки (позначені {o} на рисунках 3.2–3.4). Указане зауваження потребує додаткових умов вибору D_h^0 , тобто заміни шаблону із п'яти- на дев'яти-точковий типу "компактна молекула" (рис. 3.5 б). Тому при використанні шаблону "хрест" далі вважатимемо, що $b(x,y) \equiv 0$, тобто розглядатимемо випадок, коли мішана похідна відсутня.

Підставляючи вирази (3.8)–(3.12) до (3.1), маємо

$$[L(u)]_{jk} = L_h u_{jk} + O(\Delta x^2 + \Delta y^2) = f_{jk}. \quad (3.15)$$

Скінченнорізницевий оператор тут має вигляд

$$L_h u_{jk} = A_{jk} u_{j+1,k} + B_{jk} u_{j-1,k} + D_{jk} u_{j,k+1} + E_{jk} u_{j,k-1} + F_{jk} u_{jk}, \quad (3.16 \text{ а})$$

$$A_{jk} = \frac{a_{jk}}{\Delta x^2} + \frac{d_{jk}}{\Delta x}; \quad B_{jk} = \frac{a_{jk}}{\Delta x^2} - \frac{d_{jk}}{\Delta x}; \quad D_{jk} = \frac{c_{jk}}{\Delta y^2} + \frac{e_{jk}}{\Delta y};$$

$$E_{jk} = \frac{c_{jk}}{\Delta y^2} - \frac{e_{jk}}{\Delta y}; \quad F_{jk} = -\frac{2a_{jk}}{\Delta x^2} - \frac{2c_{jk}}{\Delta y^2} + g_{jk}. \quad (3.16 \text{ б})$$

Розглянемо тепер випадок, коли до (3.1) входить мішана похідна, тобто $b(x,y) \neq 0$. Замінімо цю похідну на дев'ятиточковому шаблоні типу "компактна молекула" (рис. 3.5 б), згідно із (3.14). Підставляючи (3.8)–(3.12) та (3.14) до (3.1), дістаємо

$$[L(u)]_{jk} = \Lambda_h u_{jk} + O(\Delta x^2 + \Delta y^2) = f_{jk}. \quad (3.17)$$

Скінченнорізницевий оператор уже має вигляд

$$\Lambda_h u_{jk} = L_h u_{jk} + G_{jk} [u_{j+1,k+1} - u_{j-1,k+1} - u_{j+1,k-1} + u_{j-1,k-1}]. \quad (3.18)$$

Тут додатково до (3.16 б) одержуємо $G_{jk} = b_{jk} / (2\Delta x \Delta y)$.

Зауваження

- При побудові виразу (3.15) точність представлення диференціального оператора скінченнорізницеvim (сітковим) оператором зале-

жить від точності представлення окремих похідних і має найнижчий порядок серед них.

- Необхідна точність представлення диференціальних операторів впливає на вигляд шаблону: якщо потрібно мати точність апроксимації диференціальних операторів скінченнорізнцевими $> O(\Delta x^2, \Delta y^2)$, то можливе використання замість п'ятиточкового шаблону "хрест" – дев'ятиточкового (рис. 3.5 в), а замість дев'ятиточкового шаблону типу "компактна молекула" – тринадцятиточкового шаблону (рис. 3.5 г).
- Належність вузлів D_h , до внутрішніх D_h^0 , або граничних Γ_h залежить від вибору шаблону.
- Найкраще точність апроксимації за відповідним шаблоном визначати за допомогою розвинення в ряд Тейлора значень невідомої функції у периферійних вузлах шаблону відносно центрального вузла (j, k) і підстановки отриманих виразів до скінченнорізнцевого наближення вихідного рівняння⁸. Наприклад, для рівняння Лапласа на п'ятиточковому шаблоні модифіковане рівняння має вигляд

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{1}{12} \left(u_{xxxx} (\Delta x)^2 + u_{yyyy} (\Delta y)^2 \right) + \dots, \quad (3.19)$$

що відразу дає точність апроксимації $\approx O(\Delta x^2, \Delta y^2)$.

3.1.3. Побудова скінченнорізнцевих формул за допомогою поліноміальної апроксимації

Інший метод побудови скінченнорізнцевої апроксимації диференціальних рівнянь у частинних похідних засновано на використанні апроксимуючої аналітичної функції із вільними параметрами, яка спочатку будується за вибраним шаблоном, а потім аналітично диференціюється. В ідеалі вигляд апроксимуючої функції визначається наближеним аналітичним розв'язком задачі, однак, найчастіше як апроксимуючу функцію використовують поліноми. Продемонструємо цей метод на прикладі параболічної апроксимації.

Будемо, як і раніше, розглядати рівняння типу (3.1)

$$L(u) = f(x, y) \quad (3.20)$$

⁸ Указана процедура має назву знаходження **диференціального наближення скінченнорізнцевої схеми** (або модифікованого рівняння) та докладніше розглядатиметься у п'ятому розділі посібника.

із граничними умовами одного з типів (3.2 а)–(3.2 в). Вузли сіткової області D_h мають довільний характер, причому частина з них може належати до внутрішніх, а частина – до граничних.

Нехай значення функції f задано у точках $(i-1)$, (i) , $(i+1)$. Проведемо параболічну апроксимацію функції

$$f(x) = a + bx + cx^2, \quad (3.21)$$

причому для зручності за початок координат ($x = 0$) візьмемо точку (i) . Тоді з (3.21), яке записане у точках $(i-1)$, (i) , $(i+1)$, відповідно, маємо

$$f_{i-1} = a - b\Delta x + c\Delta x^2, \quad f_i = a, \quad f_{i+1} = a + b\Delta x + c\Delta x^2. \quad (3.22)$$

Додаючи до першого виразу останній, дістанемо

$$c = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2\Delta x^2}, \quad (3.23)$$

а розв'язуючи їх відносно b , знайдемо

$$b = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x}. \quad (3.24)$$

У точці (i) дістанемо значення першої похідної від (3.21)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j = [b + 2cx]_{x=0} = b, \quad (3.25)$$

а також значення другої похідної

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_j = 2c. \quad (3.26)$$

Формули (3.25) і (3.26), із урахуванням (3.23) і (3.24), точно збігаються з формулами (3.9) та (3.11), що отримані при розвиненні в ряд Тейлора. Якщо взяти як f поліном першого ступеня, отримаємо вирази для першої похідної (3.28). Різницеві формули для похідних вищого порядку дістанемо, якщо використаємо поліноми вищих порядків.

Зауваження. При застосуванні поліноміальної апроксимації помилки апроксимації кожного разу визначаються за допомогою побудови модифікованого рівняння.

3.1.4. Побудова скінченнорізницевих формул інтегральним методом

При побудові скінченнорізницевої апроксимації інтегральним методом потрібно наближено задовольнити основні рівняння, що записані на заданому шаблоні в інтегральній, а не в диференціальній формі. Переваги інтегрального методу, порівняно з методами асимптотичного розвинення в ряд Тейлора або побудовою скінченнорізницевих формул за допомогою поліноміальної апроксимації, найбільш чітко виявляються при використанні нерівномірних кроків сітки та довільних систем координат.

Найближчий до інтегрального методу – метод рідкого об'єму (VOF) та його ранні модифікації (метод частинок у клітинках (PIC) і метод рідини у клітинках (FLIC)), що розвинені в лабораторії Лос-Аламос [1].

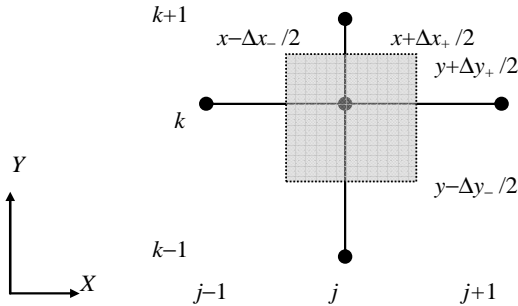


Рис. 3.6. Область інтегрування для інтегрального методу

Для зручності розглянемо рівняння Лапласа

$$L(u) = u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (3.27)$$

Проінтегруємо його за простором за областю (на рис. 3.6 виділена сірим прямокутником)

$$D_h = [x + \Delta x_+ / 2, x - \Delta x_- / 2] \times [y + \Delta y_+ / 2, y - \Delta y_- / 2].$$

Оскільки не важливо, у якому порядку ведеться інтегрування за x та y , виберемо його таким чином, щоб один інтеграл із подвійних можна було б розв'язати точно. Маємо

$$\begin{aligned}
L(u) &= \int_{y-\Delta y_-/2}^{y+\Delta y_+/2} \left[\int_{x-\Delta x_-/2}^{x+\Delta x_+/2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right] dy + \int_{x-\Delta x_-/2}^{x+\Delta x_+/2} \left[\int_{y-\Delta y_-/2}^{y+\Delta y_+/2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right] dx = \\
&= \int_{y-\frac{\Delta y_-}{2}}^{y+\frac{\Delta y_+}{2}} \left[\frac{\partial u\left(x+\frac{\Delta x_+}{2}, y\right)}{\partial x} - \frac{\partial u\left(x-\frac{\Delta x_-}{2}, y\right)}{\partial x} \right] dy + \\
&+ \int_{x-\frac{\Delta x_-}{2}}^{x+\frac{\Delta x_+}{2}} \left[\frac{\partial u\left(x, y+\frac{\Delta y_+}{2}\right)}{\partial y} - \frac{\partial u\left(x, y-\frac{\Delta y_-}{2}\right)}{\partial y} \right] dx.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Інтеграли, що залишилися, визначаються за обчислювальною процедурою. Похідну $\partial u / \partial x$ знаходять із співвідношення

$$u_{x+\Delta x}^y = u_x^y + \int_x^{x+\Delta x} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] dx. \tag{3.29}$$

За теоремою про середнє

$$\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(z) dz \approx f(\bar{z}) \Delta z, \tag{3.30}$$

де $\bar{z} \in [\xi, \xi + \Delta\xi]$. Збіжність гарантується при $\Delta z \rightarrow 0$. Узявши при наближеному обчисленні інтеграла в (3.29) точку $x + \Delta x / 2$ (формула прямокутників), маємо

$$u_{x+\Delta x}^y = u_x^y + \left[\frac{\partial u(x + \Delta x / 2, y)}{\partial x} \right] \Delta x \tag{3.31}$$

або
$$\frac{\partial u(x + \Delta x / 2, y)}{\partial x} = \frac{u_{x+\Delta x}^y - u_x^y}{\Delta x}. \tag{3.32}$$

У результаті з (3.28) маємо

$$\begin{aligned}
L(u) &= \frac{2}{\Delta x_+ + \Delta x_-} \left(\frac{u_{x+\Delta x_+}^y - u_x^y}{\Delta x_+} - \frac{u_x^y - u_{x-\Delta x_-}^y}{\Delta x_-} \right) + \\
&+ \frac{2}{\Delta y_+ + \Delta y_-} \left(\frac{u_x^{y+\Delta y_+} - u_x^y}{\Delta y_+} - \frac{u_x^y - u_x^{y-\Delta y_-}}{\Delta y_-} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Виконавши заміну $x \rightarrow j$, $y \rightarrow k$, $(x+\Delta x) \rightarrow (j+1)$, $(y+\Delta y) \rightarrow (k+1)$, $(x-\Delta x) \rightarrow (j-1)$, $(y-\Delta y) \rightarrow (k-1)$, маємо скінченнорізницьвий аналог рівняння Лапласа на нерівномірній сітці

$$L(u) = \frac{2}{\Delta x_+ + \Delta x_-} \left(\frac{u_{j+1,k} - u_{jk}}{\Delta x_+} - \frac{u_{jk} - u_{j-1,k}}{\Delta x_-} \right) + \frac{2}{\Delta y_+ + \Delta y_-} \left(\frac{u_{j,k+1} - u_{jk}}{\Delta y_+} - \frac{u_{jk} - u_{j,k-1}}{\Delta y_-} \right) = 0. \quad (3.34)$$

Інші підходи до побудови сіткових алгоритмів, у тому числі варіаційні, проєкційні та варіаційно-проєкційні, наведено у [2, 5, 7, 9, 12, 14, 15–17].

3.2. Апроксимація оператора Лапласа на трикутній сітці

Розглянемо апроксимацію рівняння Пуассона (3.1 б) на трикутній сітці (рис. 3.7). Другу похідну від функції $u(x,y)$ у довільному напрямку, що створює кут α з напрямком осі Ox , можна виразити через другі похідні $\partial^2 u / \partial y^2$, $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial x \partial y$.

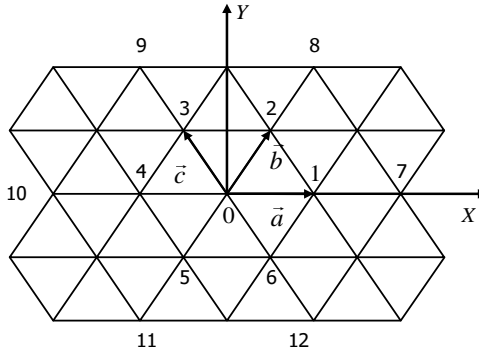


Рис. 3.7. Трикутна сітка для оператора Лапласа

Для цього скористаємося формулами перетворення координат із декартової системи $Ox'y'$ у декартову систему Oxy . Маємо

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.35)$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha, \quad (3.36 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} &= \frac{\partial u}{\partial x'} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha \right)^2 u = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \alpha + 2 \frac{\partial u}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.36 \text{ б})$$

Тепер, послідовно підставляючи у (3.36 б) $\alpha = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Додаючи вирази у (3.37), дістанемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3.38)$$

Нехай сторона трикутної сітки має розмір Δx . Скористаємося виразом для центральних різниць (3.11) і запишемо другі похідні в точці O за відповідними напрямками:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \right)_0 &= \frac{1}{\Delta x^2} (u_4 - 2u_0 + u_1) + O(\Delta x^2), \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} \right)_0 &= \frac{1}{\Delta x^2} (u_5 - 2u_0 + u_2) + O(\Delta x^2), \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} \right)_0 &= \frac{1}{\Delta x^2} (u_6 - 2u_0 + u_3) + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Отже, (3.1 б) на трикутній сітці в точці O має вигляд

$$\nabla_h^2 u_0 \equiv \frac{2}{3\Delta x^2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 - 6u_0) = f_0. \quad (3.40)$$

Тут ліва частина скінченнорізницевого рівняння є оператором Лапласа на трикутній сітці в точці O .

3.3. Заміна граничних умов Дирихле сітковими рівняннями

Розглянемо задачу Дирихле для еліптичного рівняння (1.4). Уведемо прямокутну сітку D_h та оберемо D_h^0 – множину внутрішніх вузлів і Γ_h – множину граничних вузлів. Поставимо задачу замінити граничну умову

$$[u]_\Gamma = \varphi(M) \quad (3.41)$$

деякою сітковою умовою (рис. 3.8).

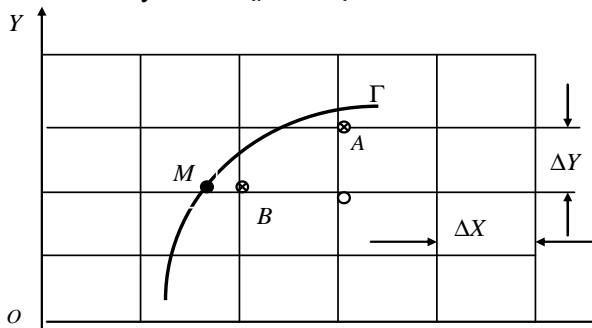


Рис. 3.8. Двоточкова апроксимація граничної умови Дирихле

Найпростіше рішення – вважати

$$u(B) = \varphi(M), \quad (3.42)$$

де B – найближча до M гранична точка. Цей спосіб називають **перенесенням граничних умов** у найближчу точку сітки. Оцінимо похибку, що має місце за цієї операції.

Нехай $M = \{x, y\}$, $B = \{x+\delta, y\}$, тоді за формулою Тейлора

$$u(B) = u(M) + \frac{\delta}{1!} u'_x(\zeta, y) = \varphi(M) + \frac{\delta}{1!} u'_x(\zeta, y).$$

Для збільшення точності заміни (3.41) сітковим значенням скористаємося значенням функції $u(A)$ у внутрішній точці $A = (x + \gamma, \Delta x)$, $\gamma = \delta + \Delta x$. Розглядаючи тепер розвинення в ряд Тейлора у точках A та B , маємо

$$u(B) = \varphi(M) + \frac{\delta}{1!} u'_x(M) + \frac{\delta^2}{2!} u''_{xx}(M) + \dots, \quad (3.43)$$

$$u(A) = \varphi(M) + \frac{\gamma}{1!} u'_x(M) + \frac{\gamma^2}{2!} u''_{xx}(M) + \dots$$

Виключаючи із (3.43) $u'_x(M)$, дістаємо **формулу Колатца**

$$u(B) = \frac{\Delta x \varphi(M) + \delta u(A)}{\Delta x + \delta}. \quad (3.44)$$

Зауважимо, що $u(A)$ – невідоме, тобто (3.44) не формула, а рівняння.

Розглянемо тепер апроксимацію граничних умов у точці O , коли використовуються точки 1, 2, 3, 4 (рис. 3.9). Покладемо за напрямками Ox та Oy кроки однаковими: $\Delta x \equiv \Delta y$.

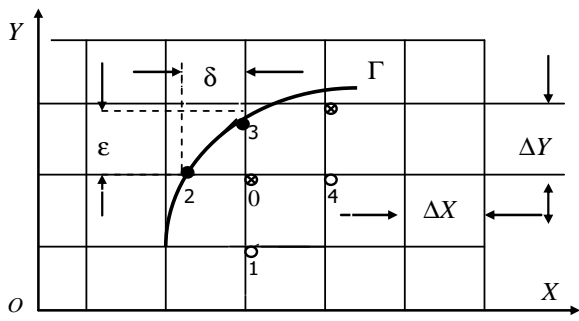


Рис. 3.9. Чотириточкова апроксимація граничної умови Дирихле

Використовуючи формули методу інтерполювання функцій двох аргументів, маємо

$$u_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \delta} \cdot \frac{\Delta x \varphi_2 + \delta u_4}{\Delta x + \delta} + \frac{\delta}{\varepsilon + \delta} \cdot \frac{\Delta x \varphi_3 + \varepsilon u_1}{\Delta x + \varepsilon} - \frac{\delta \varepsilon \Delta x f_0}{2(\varepsilon + \delta)} + O(\Delta x^3), \quad (3.45)$$

де u_i, φ_j, f_0 – значення функцій u, φ, f у відповідних точках.

3.4. Заміна граничних умов Неймана сітковими рівняннями

Нехай точка B – граничний вузол із координатами (x_j, y_k) , M – найближча до точки B точка контуру, A – внутрішній вузол із координатами (x_{j-1}, y_k) , C – граничний вузол із координатами (x_j, y_{k-1}) , \vec{n} – зовнішня нормаль до Γ у точці M (рис. 3.10). Позначимо $\angle(\vec{n}, Ox) = \alpha$, тоді $\angle(\vec{n}, Oy) = 1,5\pi + \alpha$.

Замінімо граничну умову

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right]_{\Gamma} = \varphi(M). \quad (3.46)$$

на різницеву у граничному вузлі B . За визначенням похідної за напрямком, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \left(\frac{3}{2} \pi + \alpha \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha. \quad (3.47)$$

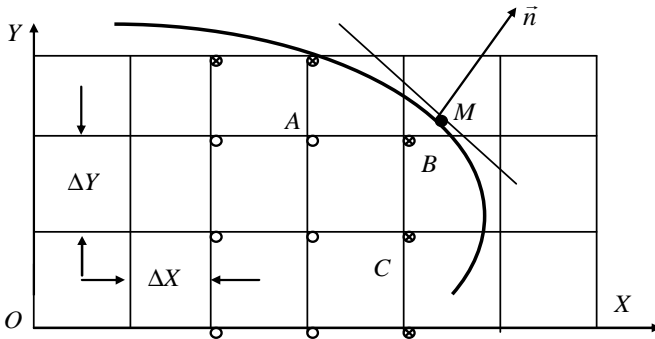


Рис. 3.10. Скінченнорізницева апроксимація граничної умови Неймана

Припустимо тепер, що напрямок \vec{n} у точці B залишається тим самим, що й у точці M . Оскільки відстань $BM \approx O(\Delta x)$, то це припущення вносить похибку не більше ніж $O(\Delta x)$, тобто

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u(B)}{\partial \vec{n}} + O(\Delta x). \quad (3.48)$$

Остаточно

$$\frac{u(x_j, y_k) - u(x_{j-1}, y_k)}{\Delta x} \cos \alpha + \frac{u(x_j, y_k) - u(x_j, y_{k-1})}{\Delta y} \sin \alpha + O(\Delta x + \Delta y) = \varphi(M), \quad (3.49)$$

або

$$\frac{u_{jk} - u_{j-1,k}}{\Delta x} \cos \alpha + \frac{u_{jk} - u_{j,k-1}}{\Delta y} \sin \alpha = \varphi(M), \quad (3.50)$$

причому в (3.50) маємо похибку $\approx O(\Delta x + \Delta y)$.

Зауваження. Скінченнорізницеві вирази типу (3.50) мають бути записані для всіх граничних вузлів $(j, k) \in \Gamma_h^0$, тому для складного контуру Γ процедура заміни граничних умов типу Неймана сітковими рівняннями виявляється досить непростою.

3.5. Теорема про розв'язність системи сіткових рівнянь

Нехай в області $\bar{D} = D \cup \Gamma$ розглядається крайова задача для рівняння

$$L(u) \equiv au_{xx} + cu_{yy} + du_x + eu_y + gu = f(x, y), \quad (3.51)$$

де a, c, d, e, g – функції (x, y) , причому при $a, c > 0$ – рівняння (3.51) має еліптичний тип. Покладемо для визначеності $g \leq 0$.

Нехай також задана гранична умова Дирихле у вигляді

$$u|_{\Gamma} = \varphi(M). \quad (3.52)$$

Твердження. Якщо дискретні області D_h, D_h^0 та Γ_h обрані згідно з вищенаведеними процедурами, причому кроки сітки Δx та Δy достатньо малі, настільки, що для відповідної системи сіткових рівнянь $A_{jk}, B_{jk}, \dots, E_{jk} \geq 0$, тоді система сіткових рівнянь (3.16) для крайової задачі ((3.51), (3.52)) **має розв'язок і він єдиний.**

3.6. Теорема Лакса про еквівалентність

Важливе питання, що виникає при використанні обчислювальних процедур, – якою мірою можна гарантувати, що числовий

розв'язок диференціального рівняння (або системи рівнянь) у частинних похідних буде близьким до точного розв'язку того самого рівняння, а також – за яких умов цей розв'язок збігається із точним. Очевидно, у першу чергу, слід вимагати, щоб наближений (числовий) розв'язок збігався до точного, за мірою того, як розміри елементів сітки Δx і Δy зменшувалися до нуля. Проте збіжність дуже важко встановити безпосередньо, тому використовують деякий обхідний шлях, зазвичай пов'язаний із вимогою, щоб СЛАР, отримана внаслідок процесу дискретизації, була узгоджена із вихідним диференціальним рівнянням (або системою рівнянь) у частинних похідних. Узгодженість тут означає, що за допомогою розвинення в ряд Тейлора у процесі дискретизації має місце обертаність з метою відновлення вихідного рівняння (системи рівнянь). Крім того, алгоритм розв'язання СЛАР, який дозволяє отримати наближений розв'язок, має бути стійким. Сказане можна записати у вигляді псевдорівняння

УЗГОДЖЕНІСТЬ + СТІЙКІСТЬ = ЗБІЖНІСТЬ.

Умови, за яких це псевдорівняння є точним, забезпечуються **теоремию Лакса про еквівалентність** [18].

Якщо є коректно поставлена лінійна задача із початковими умовами та скінченнорізничевою апроксимація цієї задачі, яка задовольняє умову узгодженості, то стійкість є необхідною і достатньою умовою збіжності.

Зауваження

- Незважаючи на те, що теорема Лакса сформульована тільки для скінченнорізничевої апроксимації, вона застосовна й до будь-якої іншої процедури дискретизації, яка приводить до появи вузлових невідомих, наприклад до методу скінченних елементів.
- Більшість "реальних" задач гідромеханіки – нелінійні крайові задачі або ж мішані задачі з граничними й початковими умовами, тому для них теорема Лакса про еквівалентність не завжди застосовна. Отже, для систем нелінійних і систем мішаних рівнянь теорема Лакса про еквівалентність забезпечує лише необхідні, але не завжди достатні умови збіжності.
- Записане вище псевдорівняння еквівалентності Лакса є корисним, якщо необхідно позбутися результатів неузгодженої дискретизації або нестійких алгоритмів.

3.7. Правило Рунге практичного оцінювання похибки апроксимації

Нехай на сітці D_h ($\Delta x / \Delta y = \text{const}$) визначено наближений розв'язок $u_h(x, y)$, і для точного розв'язку $u(x, y)$ відомий порядок похибки відносно Δx :

$$\varepsilon_h(x, y) = u(x, y) - u_h(x, y) = K(x, y) \cdot \Delta x^p + O(\Delta x^{p+m}), \quad (3.53)$$

де $K(x, y) \neq 0$ на \bar{D} ; для сіткових рівнянь $m = 1$. Уведемо

$$\varepsilon_{2h}(x, y) = K(x, y)(2\Delta x)^p = 2^p \cdot \varepsilon_h(x, y). \quad (3.54)$$

Запишемо точний розв'язок для кроку Δx і для кроку $2\Delta x$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_h(x, y) + \varepsilon_h(x, y), \\ u(x, y) &= u_{2h}(x, y) + 2^p \varepsilon_h(x, y). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Віднімаючи у (3.55) від першого рівняння друге, маємо **правило Рунге практичного оцінювання похибки**:

$$\varepsilon_h(x, y) = \frac{u_h(x, y) - u_{2h}(x, y)}{2^p - 1}. \quad (3.56)$$

За правилом Рунге наближений розв'язок можна уточнити

$$\tilde{u}_h(x, y) = u_h(x, y) + \frac{u_h(x, y) - u_{2h}(x, y)}{2^p - 1} + O(\Delta x^{p+m}). \quad (3.57)$$

Вираз (3.57) має назву **формули Річардсона**.

Зауваження

- На практиці підтвердженням справедливості правила Рунге є виконання нерівності

$$2^p \left| u_h - u_{h/2} \right| / \left| u_{2h} - u_h \right| < 0,1, \quad (3.58)$$

яка у свою чергу є підтвердженням умови $K(x, y) \neq 0$ на \bar{D} .

- Правило Рунге також використовується для практичного визначення похибки апроксимації для квадратурних формул і для звичайних диференціальних рівнянь.

3.8. Методи розв'язання стаціонарних задач гідромеханіки

Як зазначено в першому розділі, стаціонарні задачі гідромеханіки часто приводять до еліптичних рівнянь (лінійних або

нелінійних). Після дискретизації диференціальних рівнянь для стаціонарної течії в'язкої рідини звичайно одержуємо систему сіткових рівнянь у вигляді

$$\underline{A}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{b}, \quad (3.59)$$

де вектор \vec{v} складають невідомі вузлові значення. Матриця \underline{A} містить алгебраїчні коефіцієнти, які пов'язані з дискретизацією й також можуть залежати від самого розв'язку \vec{v} . Вектор \vec{b} містить алгебраїчні коефіцієнти, зумовлені дискретизацією правої частини вихідного рівняння й відомими значеннями \vec{v} на Γ_h .

Зауваження. Зазвичай матриця \underline{A} – розріджена, причому її нульові елементи розташовані поблизу головної діагоналі.

Нелінійну систему (3.59) можна розв'язати будь-яким ітеративним методом, наприклад методом Ньютона, методом простої ітерації або методом Зейделя. Зазначимо, що ефективнішим тут може бути введення зовнішньої ітерації, за якої система рівнянь на кожному кроці лінеаризується. Це дозволяє використовувати прямі методи, наприклад метод Гаусса. До останнього типу ітераційних методів належить і метод Ньютона.

Якщо елементи \underline{A} не залежать від \vec{v} , то замість (3.59) маємо систему лінійних (лінеаризованих) алгебраїчних рівнянь

$$\underline{A} \cdot \vec{v} = \vec{b}. \quad (3.60)$$

Тоді, залежно від вигляду матриці \underline{A} (тридіагональна, тридіагональна та п'ятидіагональна поперемінно, розріджена), для розв'язування (3.60) використовуються різноманітні процедури розщеплення (методи прогонки, факторизації тощо). Розмірність матриці \underline{A} – $(N \times N)$, де N – кількість внутрішніх вузлів у області обчислення. Структура матриці залежить від способу формування вектора невідомих \vec{v} . Для типового дев'ятиточкового розрахункового шаблону типу "компактна молекула" (див. рис. 3.5 б), індексом j нумеруються вузли сітки в напрямку осі Ox (від 1 до NX), а індексом k – у напрямку осі Oy (від 1 до NY).

Зазначимо, що крайні номери вузлів належать до клітинок, які розміщені біля границі області. Позначимо вузли: $(j,k) \rightarrow P$; $(j-1, k) \rightarrow W$; $(j+1, k) \rightarrow E$; $(j, k-1) \rightarrow S$; $(j, k+1) \rightarrow N$; $(j-1, k-1) \rightarrow SW$; $(j-1, k+1) \rightarrow SE$; $(j+1, k-1) \rightarrow NW$; $(j+1, k+1) \rightarrow NE$. Якщо вектор \vec{v}

формується таким чином, що вузли слідують один за одним уздовж осі Ox , а лінії за лінією розміщуються у порядку збільшення індексів k та j , відповідно, то матриця \underline{A} матиме три середні ненульові діагоналі та симетрично їм – по три ненульові бічні діагоналі (рис. 3.11).

Зауваження. На шаблоні "хрест" діагоналі a_{SW} , a_{NW} , a_{SE} , a_{NE} відсутні.

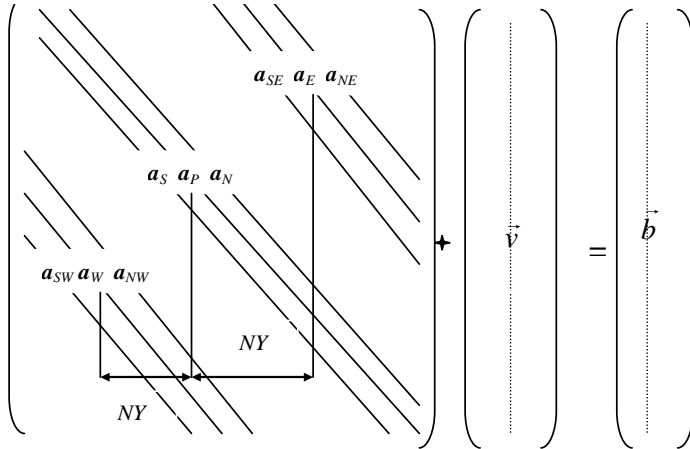


Рис. 3.11. Схематичне представлення рівняння (3.59) або (3.60) для шаблону "компактна молекула"

Для ілюстрації розглянутої методики наведемо приклад дискретизації крайової задачі із граничними умовами Дирихле для рівняння Пуассона в одиничній області (рис. 3.12).

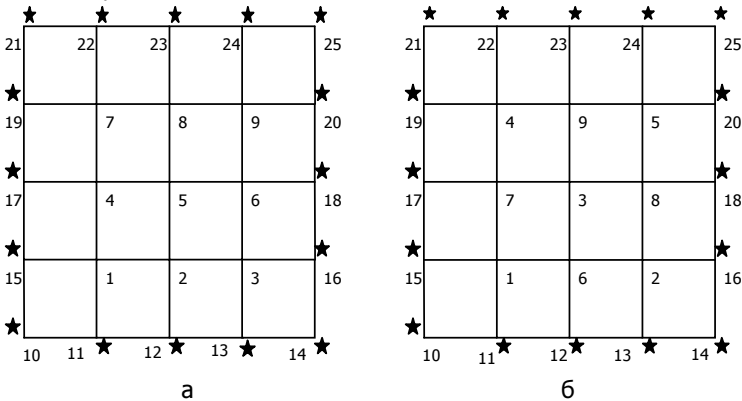


Рис. 3.12. Розбиття області обчислень: а – природне, б – червоно-чорне

При використанні сітки (рис. 3.12 а) (зірочками позначені граничні точки) і шаблону "хрест", скінченнорізницева апроксимація рівняння Пуассона (3.1 б) у точці (j,k) має вигляд

$$u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1} - 4u_{jk} = h^2 f_{jk}, \quad (3.61)$$

де крок сітки $h = \Delta x = \Delta y = 1/4$. Упорядкування невідомих відбувається таким чином. Спочатку, починаючи з лівого нижнього кута, послідовно, рядок за рядком знизу вгору, нумеруються внутрішні точки сітки.

Далі, знову починаючи з лівого нижнього кута проти напрямку руху стрілки годинника, нумеруються граничні точки. При цьому нумерація граничних точок продовжує нумерацію внутрішніх точок. Нехай тепер u_i – невідоме, що відповідає точці сітки з номером i , а всі члени, що відповідають крайовим умовам, перенесені у праву частину. Тоді розв'язок крайової задачі можна знайти зі СЛАР у вигляді (3.60), де вектор вільних членів визначається з виразу

$$\vec{b} = \left(g_{11} + g_{15} - h^2 f_1, g_{12} - h^2 f_2, g_{13} + g_{16} - h^2 f_3, \right. \\ \left. g_{17} - h^2 f_4, -h^2 f_5, g_{18} - h^2 f_6, g_{19} + g_{22} - h^2 f_7, \right. \\ \left. g_{23} - h^2 f_8, g_{20} + g_{24} - h^2 f_9 \right), \quad (3.62)$$

тут g_i ($i = 10 - 25$) – значення невідомих у відповідних граничних точках. А компоненти матриці мають вигляд

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & & \\ & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & \\ & & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & \\ 0 & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & \end{vmatrix} \quad (3.63)$$

Зауваження. Крім зображеного на рис. 3.12 а, розбиття, що має назву природного, часто використовується червоно-чорне розбиття, приклад якого наведено на рис. 3.12 б.

3.9. Псевдонестаціонарний метод

Альтернативою розв'язанню системи алгебраїчних рівнянь, які ми отримуємо при дискретизації деякої стаціонарної задачі, є побудова деякої еквівалентної нестаціонарної задачі та її подальше розв'язання маршовим методом аж до виходу на стаціонарний режим. У таких псевдонестаціонарних процедурах час відіграє роль ітераційного параметра. Розглянемо приклади.

При проведенні дискретизації рівняння Лапласа

$$\nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (3.64)$$

(тут ∇^2 – оператор Лапласа) із використанням центрованих скінченнорізницевих формул за методом Якобі при $\Delta x = \Delta y$, маємо

$$v_{j,k}^{(m+1)} = 0,25 \left(v_{j,k+1}^{(m)} + v_{j,k-1}^{(m)} + v_{j+1,k}^{(m)} + v_{j-1,k}^{(m)} \right). \quad (3.65)$$

Дискретизація еквівалентного нестаціонарного рівняння

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \vec{v} \quad (3.66)$$

при $\Delta x = \Delta y$ приводить до алгоритму

$$v_{j,k}^{n+1} = (1 - 4s)v_{j,k}^n + s \left(v_{j,k+1}^n + v_{j,k-1}^n + v_{j+1,k}^n + v_{j-1,k}^n \right), \quad (3.67)$$

де $s = \alpha \Delta t / \Delta x^2$. Якщо в (3.67) покласти $s = 0,25$, одержимо (3.65). Тобто існує очевидний зв'язок між нестаціонарним формулюванням і методом ітерацій або методом Ньютона. У цьому випадку вибір кроку за часом дозволяє збільшити радіус збіжності при використанні методу Ньютона. Важливою перевагою нестаціонарного формулювання є і можливість розщеплення розв'язку за напрямками Ox та Oy . Безпосередньо процедура розщеплення розглядатиметься далі, під час вивчення багатовимірного рівняння теплопровідності. Зазначимо також, що сам нестаціонарний розв'язок нас не цікавить, тому можна обрати таку послідовність кроків за часом, яка дозволяє мінімізувати час отримання стаціонарного розв'язку.

При розв'язанні задач обтікання часто бачимо приклади, коли на одних ділянках області обчислень розв'язок прямує до стаціонарного стану значно швидше (або повільніше), ніж на інших ділянках. У такому разі, у силу наявності просторових варіацій швидкості збіжності, доцільно модифікувати (3.66) введенням додаткового коефіцієнта перед похідною за часом:

$$c(x, y) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \bar{v}. \quad (3.68)$$

Тут функція $c(x, y)$ добирається таким чином, щоб вирівняти швидкість збіжності в усіх точках області обчислень.

Зауваження

- Позитивні якості псевдонестаціонарного методу – це дуже великий радіус збіжності, економічність кожної ітерації, невеликі потреби у пам'яті ЕОМ, можливість використання у вигляді початкового значення довільного наближеного розв'язку, а також визначення у процесі розв'язку нестационарності задачі, яку неможливо визначити а priori.
- Найгірша негативна якість псевдонестаціонарного методу – це його дуже повільна збіжність, порівняно з ітераційними методами. Останнє особливо стосується ефективних ітераційних алгоритмів із прискоренням за Чебишовим або за методом спряжених градієнтів.

3.10. Метод скінченних об'ємів для розв'язання крайових задач у рівняннях еліптичного типу

Метод скінченних об'ємів⁹ (FVM), що описує течії як нестисливої, так і стисливої рідин, має дві важливі переваги. По-перше, він має добрі консервативні властивості (наприклад, збереження маси). По-друге, він припускає досить просту дискретизацію складних областей обчислень, хоч і не обов'язково в настільки точній формі, як наприклад ізопараметричне скінченно-елементне формулювання або використання узагальнених координат [18].

Розглянемо спочатку застосування методу скінченних об'ємів у розв'язанні крайової задачі для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.69)$$

Перший етап методу скінченних об'ємів пов'язаний із застосуванням методу підобластей до рівняння (3.69) у скінченному об'ємі $ABCD$ (рис. 3.13), що дає

⁹ Метод є узагальненням інтегрального методу, розглянутого у підрозділі 3.1.4.

$$\int_{ABCD} 1 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{ABCD} H \cdot n ds = 0, \quad (3.70)$$

де $H \cdot n ds = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx$.

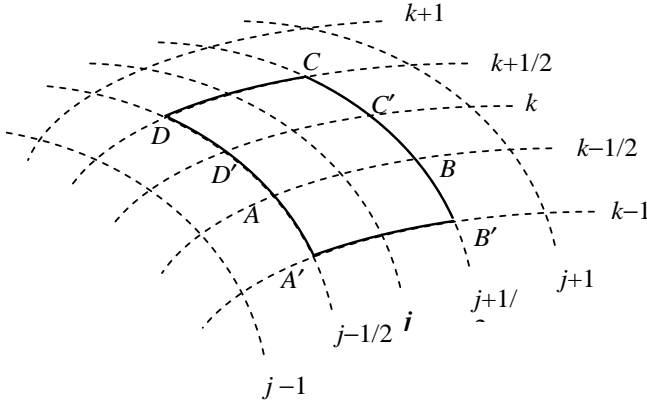


Рис. 3.13. Ескіз деформованої сітки для методу скінченних об'ємів

Згідно із Флетчером [18], рівняння (3.70) запишемо у дискретному вигляді

$$\sum_{AB}^{DA} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta x \right] = 0. \quad (3.71)$$

Тут $\Delta y_{AB} = y_B - y_A$, $\Delta x_{AB} = x_B - x_A$;

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{AB} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{j,k+\frac{1}{2}} = 0,5 \left[\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{j,k+1} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{j,k} \right]; \quad (3.72)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{AB} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{j,k+\frac{1}{2}} = 0,5 \left[\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{j,k+1} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{j,k} \right]; \dots$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{j,k-\frac{1}{2}} \Delta y_{AB} - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{j,k-\frac{1}{2}} \Delta x_{AB} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{j+\frac{1}{2},k} \Delta y_{BC} - \\
& - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{j+\frac{1}{2},k} \Delta x_{BC} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{j,k+\frac{1}{2}} \Delta y_{CD} - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{j,k+\frac{1}{2}} \Delta x_{CD} + \quad (3.73) \\
& + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{j-\frac{1}{2},k} \Delta y_{DA} - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{j-\frac{1}{2},k} \Delta x_{DA} = 0.
\end{aligned}$$

Різні прийоми обчислення похідних типу $[\partial\varphi/\partial x]_{j,k-1/2}$ розглядаються у [18], де величину $[\partial\varphi/\partial x]_{j,k-1/2}$ пропонується обчислювати як середнє значення за площею $B'BC'D'AA'B'$ (див. рис. 3.13). Маємо

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{j,k-1/2} = \left(\frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = \left(\frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \int \varphi dy, \quad (3.74 \text{ а})$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{j,k-1/2} = \left(\frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy = - \left(\frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \int \varphi dx. \quad (3.74 \text{ б})$$

Отже, у результаті дістаємо

$$\int_{A'B'C'D'} \varphi dy = \varphi_{j,k-1} \Delta y_{A'B'} + \varphi_B \Delta y_{B'C'} + \varphi_{jk} \Delta y_{C'D'} + \varphi_A y_{D'A'},$$

а також аналогічний вираз для $\int_{A'B'C'D'} \varphi dx$.

Якщо сітка не дуже деформована, то

$$\Delta y_{A'B'} \approx -\Delta y_{C'D'} \approx \Delta y_{AB}, \quad \Delta y_{B'C'} \approx -\Delta y_{D'A'} \approx \Delta y_{k-1,k},$$

$$S_{AB} = S_{A'B'C'D'} = \Delta x_{AB} \Delta y_{k-1,k} - \Delta y_{AB} \Delta x_{k-1,k}, \quad (3.75 \text{ а})$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{j,k-1/2} = \frac{\Delta y_{AB} (\varphi_{j,k-1} - \varphi_{jk}) + \Delta y_{k-1,k} (\varphi_B - \varphi_A)}{S_{AB}}, \quad (3.75 \text{ б})$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{j,k-1/2} = \frac{-[\Delta x_{AB} (\varphi_{j,k-1} - \varphi_{jk}) + \Delta x_{k-1,k} (\varphi_B - \varphi_A)]}{S_{AB}}. \quad (3.75 \text{ в})$$

Якщо отримати аналогічні вирази для $[\partial\varphi/\partial x]_{j+1/2,k}$ і для інших похідних, то рівняння (3.59) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}
& Q_{AB}(\varphi_{j,k-1} - \varphi_{j,k}) + P_{AB}(\varphi_B - \varphi_A) + Q_{BC}(\varphi_{j+1,k} - \varphi_{j,k}) + \\
& + P_{BC}(\varphi_C - \varphi_D) + Q_{CD}(\varphi_{j+1,k} - \varphi_{j,k}) + P_{CD}(\varphi_D - \varphi_C) + \quad (3.76) \\
& + Q_{DA}(\varphi_{j-1,k} - \varphi_{j,k}) + P_{DA}(\varphi_A - \varphi_D) = 0,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
Q_{AB} &= (\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2) / S_{AB}, \\
P_{AB} &= (\Delta x_{AB} \Delta x_{k-1,k} + \Delta y_{AB} \Delta y_{k-1,k}) / S_{AB}, \\
Q_{BC} &= (\Delta x_{BC}^2 + \Delta y_{BC}^2) / S_{BC}, \\
P_{BC} &= (\Delta x_{BC} \Delta x_{j+1,j} + \Delta y_{BC} \Delta y_{j+1,j}) / S_{BC}, \\
Q_{CD} &= (\Delta x_{CD}^2 + \Delta y_{CD}^2) / S_{CD}, \quad (3.77) \\
P_{CD} &= (\Delta x_{CD} \Delta x_{k+1,k} + \Delta y_{CD} \Delta y_{k+1,k}) / S_{CD}, \\
Q_{DA} &= (\Delta x_{DA}^2 + \Delta y_{DA}^2) / S_{DA}, \\
P_{DA} &= (\Delta x_{DA} \Delta x_{i-1,j} + \Delta y_{DA} \Delta y_{i-1,j}) / S_{DA} \text{ і т. д.}
\end{aligned}$$

Значення φ_A , x_A , y_A , що фігурують у (3.76), обчислюються як середні з чотирьох вузлових значень навколо цієї точки. Наприклад, $\varphi_A = 0,25(\varphi_{j,k} + \varphi_{j-1,k} + \varphi_{j-1,k-1} + \varphi_{j,k-1})$.

Підстановка подібних виразів до (3.76) приводить до дев'яти-точкового дискретного варіанта рівняння (3.69)

$$\begin{aligned}
& 0,25(P_{CD} - P_{DA})\varphi_{j-1,k+1} + [Q_{CD} + 0,25(P_{BC} - P_{DA})]\varphi_{j,k+1} + \\
& + 0,25(P_{BC} - P_{CD})\varphi_{j+1,k+1} + [Q_{DA} + 0,25(P_{CD} - P_{AB})]\varphi_{j-1,k} - \\
& - (Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA})\varphi_{j,k} + [Q_{BC} + 0,25(P_{AB} - P_{CD})] \times \quad (3.78) \\
& \times \varphi_{j+1,k} + 0,25(P_{DA} - P_{AB})\varphi_{j-1,k-1} + [Q_{AB} + 0,25(P_{DA} - P_{BC})] \times \\
& \times \varphi_{j,k-1} + 0,25(P_{AB} - P_{BC})\varphi_{j+1,k-1} = 0.
\end{aligned}$$

Якщо положення вузлових точок сітки визначено, то величини типу Q_{AB} , P_{AB} , що входять до рівняння (3.78), можна обчислити раз і назавжди.

Для розв'язання (3.78) звичайно використовують послідовну верхню релаксацію (SOR). Рівняння (3.78) можна формально розв'язати відносно $\varphi_{j,k}^{n+1}$. Отже, дістаємо

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}^* = & \left\{ 0, 25(P_{CD} - P_{DA})\varphi_{j-1,k+1} + [Q_{CD} + 0, 25(P_{BC} - P_{DA})]\varphi_{j,k+1} + \right. \\ & + 0, 25(P_{BC} - P_{CD})\varphi_{j+1,k+1} + [Q_{DA} + 0, 25(P_{CD} - P_{AB})]\varphi_{j-1,k} + \\ & + [Q_{BC} + 0, 25(P_{AB} - P_{CD})]\varphi_{j+1,k} + 0, 25(P_{DA} - P_{AB})\varphi_{j-1,k-1} + \\ & \left. + [Q_{AB} + 0, 25(P_{DA} - P_{BC})]\varphi_{j,k-1} + 0, 25(P_{AB} - P_{BC})\varphi_{j+1,k-1} \right\}^n / \\ & / (Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}), \end{aligned} \quad (3.79)$$

тоді як скоригований розв'язок має вигляд

$$\varphi_{j,k}^{n+1} = \varphi_{j,k}^n + \lambda \cdot (\varphi_{j,k}^* - \varphi_{j,k}^n), \quad (3.80)$$

де λ – коефіцієнт релаксації.

Цікава особливість методу скінченних об'ємів полягає у тому, що розв'язок крайової задачі з граничними умовами Неймана (для похідних) можна побудувати таким самим чином, як і у випадку граничних умов Дирихле, тобто прямою підстановкою граничних значень до (3.71).

Якщо тепер у правій частині інтегрального виразу (3.70) замість нуля поставити $\int_{ABCD} F(x, y) ds$, де $F(x, y)$ – права частина

рівняння (3.59), то скориговані на цей член вирази (3.71), (3.72) дозволять розв'язати крайову задачу і для рівняння Пуассона.

Таким чином, метод скінченних об'ємів (FVM) також належить до сім'ї методів сіток. Основна відмінність методу FVM від методу скінченних різниць полягає у тому, що за методом FVM виконується дискретизація вихідних рівнянь в інтегральній формі, а за методом скінченних різниць – у диференціальній.

3.11. Приклад використання методу Ньютона і псевдонестаціонарного методу для розв'язання крайової задачі системи двовимірних стаціонарних рівнянь Бюргерса

Розв'язання нестационарних рівнянь Бюргерса наведено далі, у сьомому розділі посібника. Тепер же розглянемо розв'язання крайової задачі для системи двовимірних стаціонарних рівнянь Бюргерса еліптичного типу

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\mathbf{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0, \\
 u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\mathbf{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.81}$$

із граничними умовами Дирихле для u та v ¹⁰. Дискретизувавши (3.81) на шаблоні "хрест", маємо

$$\begin{aligned}
 Ru_{jk} &= u_{jk} L_x u_{jk} + v_{jk} L_x u_{jk} - \frac{1}{\mathbf{Re}} (L_{xx} u_{jk} + L_{yy} u_{jk}) = 0, \\
 Rv_{jk} &= u_{jk} L_x v_{jk} + v_{jk} L_x v_{jk} - \frac{1}{\mathbf{Re}} (L_{xx} v_{jk} + L_{yy} v_{jk}) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.82}$$

де різницеві оператори

$$\begin{aligned}
 L_x &= \left\{ \frac{0,5}{\Delta x}, 0, -\frac{0,5}{\Delta x} \right\}^T, & L_{xx} &= \left\{ \frac{1}{\Delta x^2}, -\frac{2}{\Delta x^2}, \frac{1}{\Delta x^2} \right\}^T; \\
 L_y &= \left\{ \frac{0,5}{\Delta y}, 0, -\frac{0,5}{\Delta y} \right\}^T, & L_{yy} &= \left\{ \frac{1}{\Delta y^2}, -\frac{2}{\Delta y^2}, \frac{1}{\Delta y^2} \right\}^T.
 \end{aligned}$$

Розв'язок шукатимемо на прямокутнику $D = [-1, 1] \times [0, y_{\max}]$. Значення невідомих на границі D візьмемо із точного розв'язку [18]:

$$u = -\frac{2}{\mathbf{Re} \cdot \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{2}{\mathbf{Re} \cdot \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{3.83 а}$$

тут

$$\begin{aligned}
 \varphi &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + \\
 &+ a_5 \left[\exp(\lambda(x - x_0)) + \exp(-\lambda(x - x_0)) \right] \cdot \cos(\lambda y),
 \end{aligned}
 \tag{3.83 б}$$

де a_i ($i = 1-5$); λ , x_0 – відомі константи.

Якщо реалізувати представлення рівнянь у (3.82) в усіх внутрішніх вузлах прямокутника D , то матимемо систему $2(NX - 2)(NY - 2)$ нелінійних рівнянь відносно невідомих u_{ij} та v_{ij} для всіх внутрішніх вузлів сітки.

Розглянемо спочатку розв'язання отриманої системи нелінійних рівнянь методом Ньютона. Маючи алгоритм (2.5), значення

¹⁰ Очевидна подібність системи двовимірних стаціонарних рівнянь Бюргерса й системи двовимірних стаціонарних рівнянь Нав'є–Стокса.

невідомих на новій ітерації знаходимо із (2.6). Компоненти якобіана у (2.5) виглядатимуть як

$$\begin{aligned}
 \partial Ru_{jk} / \partial u_{j-1,k} &= -0,5u_{jk} / \Delta x - 1 / (\Delta x^2 \mathbf{Re}), \\
 \partial Ru_{jk} / \partial u_{jk} &= (2/\mathbf{Re}) \cdot (1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2) + (0,5/\Delta x) \cdot (u_{j+1,k} - u_{j-1,k}), \\
 \partial Ru_{jk} / \partial u_{j+1,k} &= 0,5u_{jk} / \Delta x - 1 / (\Delta x^2 \mathbf{Re}), \\
 \partial Ru_{jk} / \partial v_{j,k-1} &= -0,5v_{jk} / \Delta y - 1 / (\Delta y^2 \mathbf{Re}), \\
 \partial Ru_{jk} / \partial v_{j,k+1} &= 0,5v_{jk} / \Delta y - 1 / (\Delta y^2 \mathbf{Re}), \\
 \partial Ru_{jk} / \partial v_{j,k} &= (0,5/\Delta y) \cdot (u_{j,k+1} - u_{j,k-1}).
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Аналогічні вирази можна записати й для похідних від Rv_{jk} . Отриману в результаті систему нелінійних алгебраїчних рівнянь розв'язують методом Ньютона.

Як альтернативну стратегію розв'язання крайової задачі для системи двовимірних стаціонарних рівнянь Бюргерса розглянемо процедуру, що об'єднує метод Ньютона із псевдонестаціонарним формулюванням. Систему рівнянь (3.81) замінимо еквівалентною нестаціонарною системою

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\mathbf{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \tag{3.85 а}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\mathbf{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0. \tag{3.85 б}$$

Дискретизацію за просторовими змінними залишимо ту саму, а диференціальні похідні за часом замінимо на різницеві похідні вперед за часом. У результаті маємо

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\Delta t} + Ru_{jk}^{n+1} &= 0, \\
 \frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} + Rv_{jk}^{n+1} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

де Ru_{jk}^{n+1} і Rv_{jk}^{n+1} визначаються виразами (3.82). Для Ru_{jk}^{n+1} і Rv_{jk}^{n+1} виконаємо процедуру лінеаризації, подібну тій, що мала місце для звичайного методу Ньютона. Дістанемо

$$\frac{\Delta u_{jk}^{n+1}}{\Delta t} + Ru_{jk}^n + \left(\frac{\partial Ru_{jk}^n}{\partial q_{lm}} \right)^n q_{lm} = 0, \quad (3.87)$$

$$\frac{\Delta v_{jk}^{n+1}}{\Delta t} + Rv_{jk}^n + \left(\frac{\partial Rv_{jk}^n}{\partial q_{lm}} \right)^n q_{lm} = 0.$$

Тут $\Delta u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n$, $\Delta v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n$. Член q набуває значень як u , так і v , а індекси $l = j - 1, j, j + 1$; $m = k - 1, k, k + 1$. Систему рівнянь (3.87) можна об'єднати в одне матрично-векторне рівняння

$$\left(\{ \underline{E} / \Delta t \} + \underline{J} \right)^{(n)} \Delta \vec{q}^{(n+1)} = -\vec{R}^{(n)}. \quad (3.88)$$

Рівняння (3.88) подібне (2.5), але має одну незаперечну перевагу: його радіус збіжності регулюється розміром кроку за часом Δt . Вибір малого Δt суттєво збільшує радіус збіжності, оскільки розширений якобіан $\{ \underline{E} / \Delta t \} + \underline{J}$ у цьому випадку буде завжди з діагональною перевагою. Швидкість збіжності також залежить від Δt . Але тут уже дуже малі значення Δt неприпустимі, оскільки вони збільшують час обчислення.

3.12. Особливості використання швидкого перетворення Фур'є при розв'язанні крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона

Розглянемо використання швидкого перетворення Фур'є при розв'язанні крайових задач для рівнянь Лапласа

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.89)$$

та Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \zeta(x, y), \quad (3.90)$$

розв'язання яких, у свою чергу, є етапами розв'язання бігармонічного рівняння для функції течії ψ ,

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (3.91)$$

за граничних умов різного типу (тут ∇^2 – оператор Лапласа).

Відомо, що у випадку прямокутної сітки (3.89) і (3.90) зводяться до скінченнорізницевого рівняння

$$\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{ij} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{ij} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \zeta_{ij}. \quad (3.92)$$

У методах із використанням рядів Фур'є враховують те, що точний розв'язок скінченнорізницевого рівняння (3.92) можна представити у вигляді розвинення за власними функціями, яке містить скінченну кількість членів. Розглянемо прямокутну область \bar{D} , що має розмір $X \times Y$ і містить $M \times N$ ($N = NX - 2$, $M = NY - 2$) внутрішніх точок. За постійних кроків Δx і Δy та при $\psi = 0$ на всіх границях точний розв'язок (3.92) можна записати у вигляді [15]

$$\Psi_{ij} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{p=1}^N H_{pj} \sin \frac{p\pi x_i}{X}, \quad (3.93)$$

де $x_i = (i-1)\Delta x$, H_{pj} (при $1 \leq p \leq N$) – розв'язок тридіагональної системи різницевих рівнянь

$$\frac{1}{\Delta y^2} (H_{p,j-1} - 2H_{pj} + H_{p,j+1}) + \lambda_p H_{pj} = V_{pj}, \quad (3.94)$$

тут

$$H_{p1} = H_{pN} = 0, \quad (3.95)$$

$$V_{pj} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^N \zeta_{q+1,j+1} \sin \frac{pq\pi \Delta x}{X}, \quad (3.96)$$

$$\lambda_p = \frac{2}{\Delta x^2} \left(\cos \frac{p\pi \Delta x}{X} - 1 \right). \quad (3.97)$$

В алгоритмі загального вигляду, який називається методом Хокні [15], використано наведений вище метод розв'язання у припущенні, що $N = 2^k$ або $N = 3 \times 2^k$, де k – деяке ціле число. Швидкість його суттєво залежить від застосування того або іншого алгоритму швидкого перетворення Фур'є¹¹. Існує також простіший варіант методу Хокні у випадку, коли за одним із напрямків мають місце періодичні граничні умови.

¹¹ Рекомендовано використання процедур із бібліотеки IMSL [2].

Зауваження. Зазначимо, що незважаючи на серйозні обмеження розглянутих методів щодо типу граничних умов, які можуть бути використані, при деякій модифікації їх можна застосовувати й до більш загальних задач.

Розглянемо спочатку випадок прямокутної області з граничною умовою Дирихле $\psi = f(x, y)$, причому скрізь на \bar{D} $f \neq 0$. Уведемо допоміжну функцію ψ^1 , яка визначається із точного розв'язку рівняння $\Delta\psi^1 = \zeta$ із граничними умовами $\psi^1 = 0$ на всій границі. Потім уведемо другу допоміжну функцію ψ^{11} , яка визначається з точного розв'язку скінченнорізницевого рівняння Лапласа $\Delta\psi^{11} = 0$ із граничною умовою $\psi^{11} = f(x, y)$. Зазначимо, що необхідні розвинення за власними функціями для цієї задачі вже відомі із розвинення, що отримане при розв'язанні рівняння Пуассона. Тоді в силу лінійності задачі остаточний розв'язок знаходимо суперпозицією. Оскільки $\Delta\psi^1 = \zeta$ і $\Delta\psi^{11} = 0$, маємо $\Delta(\psi^1 + \psi^{11}) = \zeta$. Причому, позаяк на границях $\psi^1 = 0$ і $\psi^{11} = f(x, y)$, то дістаємо $\psi^1 + \psi^{11} = f(x, y)$. Отже, функція $\psi = \psi^1 + \psi^{11}$ задовольняє рівняння $\Delta\psi = \zeta$ і граничну умову $\psi = f(x, y)$.

Якщо ставляться граничні умови типу Неймана з нульовим градієнтом, то розвинення (3.93) і (3.96) проводяться в ряд за косинусами. Якщо градієнт за нормаллю до границі відмінний від нуля, $\partial\psi / \partial n = g(x, y) \neq 0$, то задача також розв'язується методом суперпозиції. Тепер для допоміжної функції $\psi^1 = 0$ у всіх внутрішніх точках $\psi^1 = +g(x, y) \Delta n$ на границях $i = NX, j = NY$ та $\psi^1 = -g(x, y) \Delta n$ на границях $i = 1, j = 1$. Ця функція ψ^1 є розв'язком допоміжного дискретизованого рівняння Пуассона $\Delta\psi^1 = \zeta^1$ із граничною умовою $\partial\psi^1 / \partial n = g(x, y)$, причому тут $\zeta^1 = 0$ усюди, за винятком точок, що суміжні з границями, де $\zeta^1 = \Delta\psi^1 \neq 0$. Зазначимо, що у вузлі, який знаходиться на віддалі на дві позиції усередину від границі $\Delta\psi^1 = 0$, оскільки $\psi^1 = 0$ у всіх сусідніх точках. Якщо ввести $\psi^{11} = \psi - \psi^1$ і $\zeta^{11} = \zeta - \zeta^1$, то вихідна задача зведеться до знаходження розв'язку скінченнорізницевого рівняння $\Delta\psi^{11} = \zeta^{11}$ із граничною умовою $\partial\psi^{11} / \partial n = 0$, що можна зробити, використовуючи розвинення за косинусами. Шуканий розв'язок має вигляд суперпозиції $\psi = \psi^1 + \psi^{11}$.

Використовуючи аналогічний підхід, можна розв'язати задачу для непрямокутної області \bar{D} , якщо взяти прямокутну сітку D_h , що перекриває цю область \bar{D} . Розглянемо подану на рис. 3.14 а область, що утворена відсіканням від прямокутної області невеликої кутової ділянки.

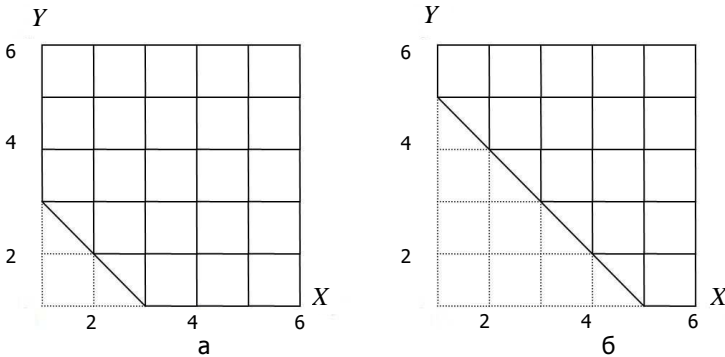


Рис. 3.14. Застосування методу розвинення в ряди Фур'є для непрямокутних областей

Гранична точка (2; 2) не лежить на границі прямокутника, що перекриває область \bar{D} . Нехай $\psi = 0$ на всіх границях області. Перша допоміжна функція ψ^1 визначається розв'язком рівняння $\Delta\psi^1 = \zeta$ на сітці, що перекриває область \bar{D} , при $\zeta_{22} = 0$. Другу допоміжну функцію ψ^{11} шукаємо з розв'язання рівняння $\Delta\psi^{11} = \zeta^{11}$, де ζ^{11} визначається так, що $\zeta_{22}^{11} = 1$, а у всіх інших точках $\zeta_{ij}^{11} = 0$. Потім знаходимо ψ_{22} як лінійну комбінацію ψ_{22}^1 і ψ_{22}^{11} так, що $\psi_{22} = 0$, причому значення ζ у внутрішніх точках не змінюється. Маємо

$$\psi_{22} = 0 = 1 \cdot \psi_{22}^1 + a \cdot \psi_{22}^{11}, \quad (3.98)$$

звідки

$$a = -\psi_{22}^1 / \psi_{22}^{11}. \quad (3.99)$$

Причому тут знаменник завжди відмінний від нуля. Остаточний розв'язок знаходимо суперпозицією

$$\psi = \psi^1 + a \cdot \psi^{11}. \quad (3.100)$$

Незважаючи на те, що значення ζ для такого "сумарного" розв'язку в точці (2; 2) дорівнює $a \times \zeta_{22(\text{точне})}$, воно не впливає на загальний розв'язок, оскільки точка (2; 2) є граничною точкою сумарної задачі.

Якщо прямокутнику, що перекриває область \bar{D} , належать кілька точок, які не належать області \bar{D} (рис. 3.14 б), то для кожної такої точки необхідно розв'язати додаткове рівняння Пуассона. Із рис. 3.14 б видно, що допоміжні розв'язки ψ^{11} , ψ^{111} , ψ^{1111} є, відповідно, розв'язками за умови, що $\zeta = 1$ у точках (2; 4), (3; 3) і (4; 2). За аналогією з рівнянням (3.98) у попередньому випадку, для визначення a , b і c тут має бути розв'язана система лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}\psi_{24} = 0 &= 1 \cdot \psi_{24}^1 + a \cdot \psi_{24}^{11} + b \cdot \psi_{24}^{111} + c \cdot \psi_{24}^{1111}, \\ \psi_{33} = 0 &= 1 \cdot \psi_{33}^1 + a \cdot \psi_{33}^{11} + b \cdot \psi_{33}^{111} + c \cdot \psi_{33}^{1111}, \\ \psi_{42} = 0 &= 1 \cdot \psi_{42}^1 + a \cdot \psi_{42}^{11} + b \cdot \psi_{42}^{111} + c \cdot \psi_{42}^{1111},\end{aligned}\quad (3.101)$$

що дає матрицю коефіцієнтів впливу для нульових граничних значень, яка необхідна для наступного розв'язку з новим ζ . Для w граничних точок має бути розв'язано w допоміжних рівнянь Пуассона. Система лінійних рівнянь порядку w , що аналогічна системі (3.101), розв'язується методом виключення Гаусса. Зазначимо, що при розв'язанні сім'ї задач із різними ζ на одній і тій самій сітці це потрібно зробити тільки для першого розв'язку.

Зауваження

- У такий самий спосіб можна розв'язувати задачі при комбінації ненульових граничних умов Дирихле та Неймана для областей, що відмінні від прямокутних, але, скоріш за все, такий розв'язок буде дуже громіздким.
- До переваг методу з використанням рядів Фур'є належить така: він не обмежений розмірами області, дає майже точний скінченнорізнцевий розв'язок і придатний як для розв'язку тривимірних задач, так і для циліндричної системи координат.

3.13. Деякі стратегічні прийоми розв'язання стаціонарних задач

Основні стаціонарні задачі гідромеханіки, рівняння яких належать до еліптичного типу, розв'язують, використовуючи такі стратегічні прийоми.

- Якщо задача сформульована відносно потенціалу ϕ і функції течії ψ або відносно тиску p , то зазвичай одне з визначальних рівнянь має матрицю із **діагональною перевагою**. Причому найчастіше це рівняння може бути навіть лінійним. У такому випадку доцільно використовувати **ітераційні методи**.

- Якщо роль змінних належить так званим примітивним змінним: компонентам вектора швидкості \vec{v} або компонентам вектора вихору $\vec{\Omega}$, то у визначальних рівняннях очевидно присутні нелінійні члени (конвективна похідна). У такому випадку при дискретизації діагональна перевага спостерігається лише за малих чисел Рейнольдса $Re \ll 1$. Для розв'язків таких рівнянь при $Re \ll 1$ обирають **ньютонівський** або **псевдоньютонівський** (якщо N велике) алгоритм, а також **псевдонестаціонарний** алгоритм.

- За великих чисел Рейнольдса $Re \gg 1$ для примітивних змінних матриця Якобі J стає погано зумовленою, що приводить до розбіжності методу Ньютона, тому тут найчастіше використовується **псевдонестаціонарний** алгоритм або інші підходи, у тому числі **багатосіткові методи**.

Зауваження. Суто історично метод Ньютона частіше використовувався разом із методом скінченних елементів, у той час як псевдонестаціонарний підхід із розщепленням найчастіше застосовувався разом із методами сіток. Оскільки обидва методи взаємопов'язані, то вибір конкретного методу краще пов'язати зі специфікою задачі.

Задачі

1. Навести приклади, коли внутрішня точка за п'ятиточковим шаблоном "хрест" належить до множини граничних точок за дев'ятиточковим шаблоном "компактна молекула".

2. За допомогою модифікованого рівняння визначити похибку апроксимації для рівняння Лапласа на п'ятиточковому шаблоні "хрест" (див. рис. 2.5 а).

3. Побудувати скінченнорізнлицеву апроксимацію рівняння $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$ на дев'ятиточковому шаблоні "компактна молекула" (див. рис. 2.5 б).

4. За допомогою модифікованого рівняння визначити похибку апроксимації для рівняння із задачі 3 на дев'ятиточковому шаблоні "компактна молекула" (див. рис. 2.5 б).

5. Побудувати скінченнорізнлицеву апроксимацію і за допомогою модифікованого рівняння визначити її похибку для рівняння $u_{xx} + u_{yy} = x + y$ на шаблоні "розширений хрест" (див. рис. 2.5 в).

6. Побудувати скінченнорізнлицеву апроксимацію бігармонічного рівняння $\nabla^2 \nabla^2 u = 0$, де ∇^2 – оператор Лапласа на тринадцятиточковому шаблоні (див. рис. 2.5 г).

7. Плоский рух дуже в'язкої рідини у квадратній порожнині розміром 1×1 м виникає через горизонтальний рух площини зі швидкістю $U = 1$ м/с, що закриває цю порожнину (рис. 3-1). Увести сітку 10×10 , використовуючи ітераційний метод Якобі, отримати лінії течії і завихрення для випадку, коли вказаний процес описується бігармонічним рівнянням $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0$, де ∇^2 – оператор Лапласа, ψ – функція течії.

8. Рух крові у капілярі можна моделювати нескінченним ланцюжком плоских квадратних циліндрів нульової плавучості, що рухається зі швидкістю $U = 0,0001$ м/с у щіліні завширшки $0,00001$ м, яка заповнена водою (рис. 3-2). Увести сітку 10×10 , використати метод Гаусса–Зейделя та отримати лінії течії і завихрення для випадку, коли процес описується бігармонічним рівнянням. Вважати, що кров'яні тільця повністю перекривають капіляр, а відстань між ними вдвічі менша, ніж ширина щілини.

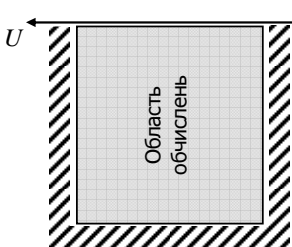


Рис. 3-1

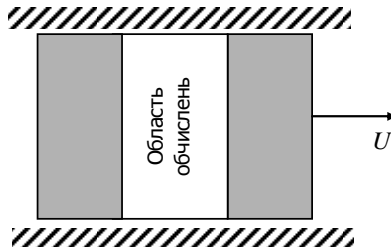


Рис. 3-2

9. Побудувати програму розв'язання крайової задачі для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (3-1')$$

для області, що зображена на рис. 3-3 за граничних умов Дирихле

$$\begin{aligned} \varphi_{WX} = 0, \quad \varphi|_{XY} = \sin \theta / r_{XY}, \\ \varphi_{YZ} = 1/r_{WZ}, \quad \varphi|_{ZW} = \sin \theta / r_{WZ}. \end{aligned} \quad (3-2')$$

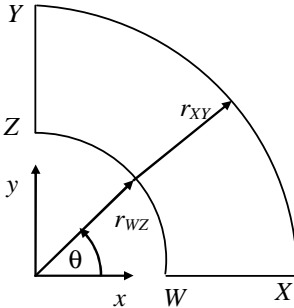


Рис. 3-3

Пропонується ввести полярну систему координат і використати процедуру методу скінченних об'ємів на довільній сітці. Розв'язок СЛАР отримати методом послідовної верхньої релаксації (SOR) для $r_{WZ} = 1,0$; $r_{XY} = 2,0$ та $r_{WZ} = 0,1; 1,0$, а також $r_{XY} = 1,0; 2,0; 3,0$ при $\lambda = 1,5$ на сітці 6×6 , 11×11 , 21×21 і порівняти результати між собою та з точним розв'язком

$$\varphi = \sin \theta / r. \quad (3-3')$$

10. Розв'язати методом Ньютона крайову задачу для системи двовимірних стаціонарних рівнянь Бюргерса на прямокутнику

$$\bar{D} = [-1, 1] \times [0, y_{\max}].$$

Значення невідомих на границі області взяти з точного розв'язку. Порівняти отриманий розв'язок із точним.

11. Розв'язати крайову задачу із завдання 10, використовуючи псевдонестационарний підхід і рівняння (3.88). Порівняти отриманий розв'язок із точним.

12. Розв'язати багатосітковим методом крайову задачу із граничними умовами типу Дирихле для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3-4')$$

на прямокутнику $\bar{D} = [0, \pi/4] \times [0, 1]$. Значення правої частини $f(x, y)$ і невідомої φ на границях узяти із точного розв'язку. Результат порівняти з точним розв'язком.

13. Задачу 12 розв'язати з використанням швидкого перетворення Фур'є.

14. Задачу 12 розв'язати з використанням SOR-алгоритму.

Розділ 4

ОСНОВИ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

4.1. Одновимірне рівняння дифузії

Якщо вести мову про перспективу розвитку обчислювальних методів для диференціальних рівнянь у частинних похідних параболічного типу, то рівняння дифузії має той самий дисипативний механізм, що й рівняння стаціонарного ламінарного або турбулентного руху рідини чи газу в примежовому шарі, а також нестационарні рівняння Нав'є–Стокса та Бюргерса. Водночас і рівняння руху рідини в примежовому шарі, і нестационарні рівняння Нав'є–Стокса та Бюргерса, на відміну від лінійного рівняння дифузії, мають нелінійну природу. Останнє не дозволяє нам розглянути вказані задачі тепер. Ми повернемося до них пізніше, після детального розгляду моделювання процесу нелінійного переносу.

Зважаючи на зазначене, запишемо лінійне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (4.1)$$

що є прикладом параболічного диференціального рівняння у частинних похідних. Величину \bar{T} вважатимемо швидкістю, завихреністю, температурою або концентрацією, залежно від того, що розглядатимемо: дифузію імпульсу, вихору, теплоти або маси. Якщо \bar{T} – температура, то (4.1) визначає потік теплоти у стрижні, який теплоізолюваний уздовж бічної поверхні, але передає теплоту оточуючому середовищу через свої кінці (точки A і B на рис. 4.1).

Зазвичай задають два типи граничних умов.

По-перше, це граничні умови за просторовими змінними (тут x), тобто залежна змінна вважається відомою функцією часу:

- граничні умови типу Дирихле:

$$\begin{aligned}\bar{T}(0, t) &= \varphi_0(t), \\ \bar{T}(1, t) &= \varphi_1(t); \end{aligned} \quad (4.2)$$

- граничні умови типу Неймана:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\right]_{x=0} &= \psi_0(t), \\ \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\right]_{x=1} &= \psi_1(t); \end{aligned} \quad (4.3)$$

- мішані граничні умови типу Робіна:

$$\begin{aligned}\left[\alpha_0(t)\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\right] + \beta_0(t)\bar{T}\right]_{x=0} &= \chi_0(t), \\ \left[\alpha_1(t)\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\right] + \beta_1(t)\bar{T}\right]_{x=1} &= \chi_1(t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

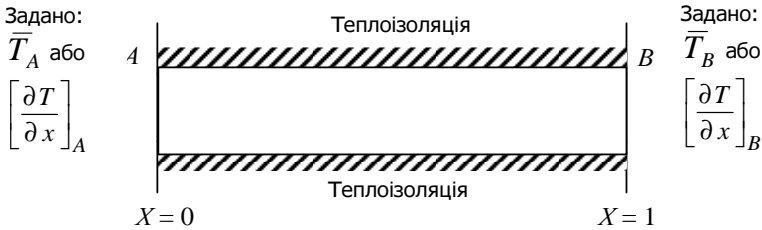


Рис. 4.1. Одновимірний нестационарний процес теплопровідності

По-друге, для одержання єдиного розв'язку задаємо початкову умову

$$\bar{T}(x, 0) = \Theta(x). \quad (4.5)$$

Для одновимірного розв'язання рівняння дифузії розглядаються як задача Коші, так і мішана крайова задача.

4.1.1. Розв'язання задачі Коші. Явні схеми

Задача Коші для (4.1), (4.5) полягає у знаходженні $\bar{T}(x, t)$: $\forall t > 0, -\infty < x < +\infty$, яке задовольняло б (4.1), а на прямій $t = 0$ початкову умову (4.5), де $\Theta(x)$ – відома функція для $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Для отримання наближеного розв'язку (4.1) початкову умову (4.5) дискретизують. Вибір сітки тут досить простий: $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$ ($j = 0, \pm 1, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$), де Δx – крок у напрямку Ox , Δt – крок у напрямку Ot . Вузли (x_j, t_n) вважатимемо **внутрішніми**,

якщо $n \geq 1$. При $n = 1$ ($t = 0$) вузли вважатимемо **граничними**. За такого вибору сітки початкова умова (4.5) набуває вигляду

$$T_{j0} = \theta_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ де } \theta_j = \Theta(x_j). \quad (4.6)$$

Дискретизація диференціального рівняння (4.10) залежить від вибору шаблону. При використанні явних шаблонів єдина невідома, наприклад T_j^{n+1} , фігурує у лівій частині алгебраїчної формули, яку отримали внаслідок дискретизації (рис. 4.2).

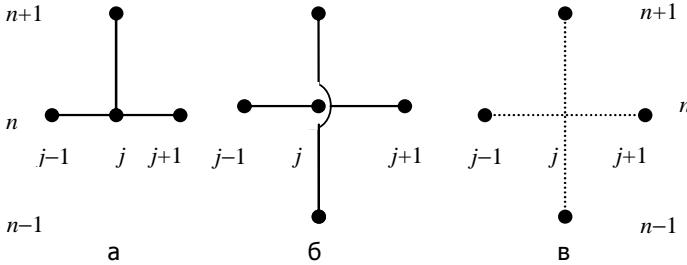


Рис. 4.2. Явні шаблони для рівняння дифузії:
а – FTCS; б – Річардсона; в – Дюфорта–Франкела

Якщо для похідної за часом увести двоточкову різницеву апроксимацію зі зсувом уперед, а для просторової похідної – двоточкову апроксимацію із центральною різницею (шаблон FTCS – уперед за часом, центральна за простором), то диференціальне рівняння (4.1) набуде вигляду

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} - \frac{\alpha(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{\Delta x^2} = 0. \quad (4.7)$$

У (4.7) просторова похідна апроксимується на відомому n -му шарі за часом. Після деяких перетворень скінченнорізницеву апроксимацію (4.7) зведемо до алгоритму, який можна вже використовувати для числових розрахунків:

$$T_j^{n+1} = sT_{j-1}^n + (1 - 2s)T_j^n + sT_{j+1}^n, \quad s = \alpha \cdot \Delta t / \Delta x^2. \quad (4.8)$$

Головні характеристики кожної скінченнорізницевої схеми – це точність апроксимації та умови її стійкості. Для визначення точності апроксимації скінченнорізницевої схеми за шаблоном FTCS підставимо до скінченнорізницевого рівняння (4.7) точний

розв'язок \bar{T} , для чого розвинемо кожний член рівняння (4.7) у ряд Тейлора в околі вузла (j, n) і зведемо подібні члени¹²:

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right]_j^n = \left[\alpha \left(\frac{\Delta x^2}{2} \right) \left(s - \frac{1}{6} \right) \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4} \right]_j^n + O(\Delta t^2, \Delta x^4). \quad (4.9)$$

У (4.9) праворуч – головний член помилки скінченнорізницевої апроксимації (ГЧП) рівняння (4.1) за шаблоном FTCS. Отже, згідно з (4.9), помилка апроксимації тут $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$. Звернемо увагу на те, що для цього випадку помилку апроксимації можна знайти й простіше, виходячи з оцінок апроксимації окремих похідних під час заміни диференціальних операторів скінченнорізницевими (за (2.7)–(2.10)), або використовуючи інші, уже розглянуті в розд. 2 процедури заміни диференціального рівняння сітковим. Водночас використання диференціального наближення скінченнорізницевої схеми дозволяє передбачити деякі суттєві особливості її поведінки. Наприклад, при виборі $s = 1/6$ в (4.9) ГЧП обертається на нуль, і точність апроксимації становить уже $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^4)$. Проведений аналіз стійкості схеми FTCS за Нейманом указує на умовну стійкість схеми при $s \leq 0,5$ [1].

При побудові алгоритму схеми FTCS для апроксимації похідної за часом використано односторонню різницеву формулу, що дає тільки перший порядок точності. Природно, що при використанні центральної різницевої формули для апроксимації похідної за часом для рівняння

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{\Delta x^2} = 0 \quad (4.10)$$

загальна точність апроксимації мала б покращитися. Але заснована на цьому шаблоні схема Річардсона (див. рис. 3.2) при аналізі її стійкості за Нейманом виявляється безумовно нестійкою [1]. Як бачимо, шаблон Річардсона не має практичної цінності.

Схему Річардсона можна модифікувати таким чином, щоб отримати стійкий алгоритм. Це досягається заміною в рівнянні (4.10) T_j^n на $0,5(T_j^{n-1} + T_j^{n+1})$. У результаті

¹² Указана процедура має назву знаходження **диференціального наближення скінченнорізницевої схеми** (або модифікованого рівняння) й докладніше розглядатиметься у п. 5.1.2.

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha(T_{j-1}^n - (T_j^{n-1} + T_j^{n+1}) + T_{j+1}^n)}{\Delta x^2} = 0. \quad (4.11)$$

Вираз (4.11), відомий як схема Дюфорта–Франкела (див. рис. 4.2 в), можна перетворити на явний алгоритм

$$T_j^{n+1} = \left(\frac{2s}{1+2s}\right)(T_{j-1}^n + T_{j+1}^n) + \left(\frac{1-2s}{1+2s}\right)T_j^{n-1}. \quad (4.12)$$

Застосування до (4.12) аналізу стійкості за Нейманом показує, що ця схема є стійкою за довільних значень $s > 0$, тобто абсолютно стійкою [1]. Однак додатковий аналіз за допомогою диференціального наближення скінченнорізницевої схеми

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right]_j^n = -\alpha \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \bar{T}_{tt} - \alpha \Delta x^2 \left(s^2 - \frac{1}{12} \right) \bar{T}_{xxxx} + O(\Delta x^4) = 0 \quad (4.13)$$

дає й додаткову умову стійкості методу: $\Delta t \ll \Delta x$, яка впливає із необхідності виконання умови $\Delta t / \Delta x \rightarrow 0$ за одночасного $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ для підкресленого члена.

Зауваження

- Схема Дюфорта–Франкела (DF) є тришаровою у всіх випадках, крім $s = 0,5$, в останньому випадку вона перетворюється на схему FTCS. При використанні тришарової схеми потрібно зберігати у пам'яті дані на двох шарах за часом, отже, виникає необхідність використання альтернативної двошарової схеми для реалізації першого кроку за часом.
- При виборі $s = \sqrt{1/12}$ збіжність схеми Дюфорта–Франкела оптимальна, оскільки головний член помилки апроксимації G_j^n тут дорівнює нулю. Точність апроксимації при цьому зростає до $\approx O(\Delta x^4)$, крім того, у цьому випадку точність уже не залежить від кроку за часом.
- Із практичного погляду схема DF має серйозні обмеження на величину Δt , навіть незважаючи на ту обставину, що це обмеження пов'язане із потребами точності, а не стійкості, як для схеми FTCS.

4.1.2. Розв'язання задачі Коші. Неявні схеми

При використанні неявних схем для розв'язання задачі Коші (4.1)–(4.5) просторовий член у (4.1) апроксимується, за меншою

мірою частково, на невідомому $(n + 1)$ -му шарі за часом (рис. 4.3). На практиці це спричиняє взаємозв'язок рівнянь для кожного з вузлів на цьому шарі i , як наслідок, необхідність розв'язання на кожному кроці за часом системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

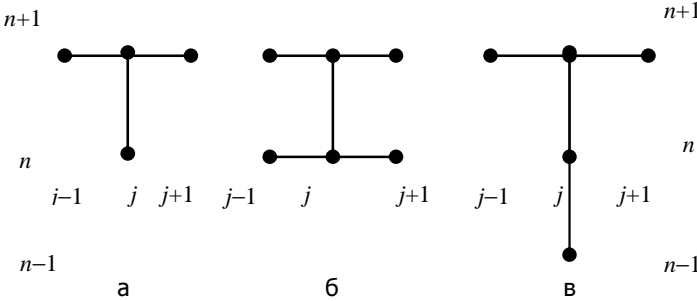


Рис. 4.3. Неявні шаблони для рівняння дифузії:
а – FI; б – Кранка–Нікольсона; в – G3LS

Якщо для похідної за часом увести двоточкову різницеву апроксимацію зі зсувом назад, а для просторової похідної на невідомому шарі – двоточкову апроксимацію із центральною різницею (шаблон FI – чисто неявна схема), диференціальне рівняння (4.1) набуде вигляду

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} - \frac{\alpha(T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1})}{\Delta x^2} = 0. \quad (4.14)$$

Алгоритм FI тут запишемо як

$$-sT_{j-1}^{n+1} + (1 + 2s)T_j^{n+1} - sT_{j+1}^{n+1} = T_j^n, \quad (4.15)$$

де $s = \alpha \cdot \Delta t / \Delta x^2$. Головний член похибки диференціального наближення скінченнорізницевої схеми G_j^n для FI має вигляд

$$G_j^n = -\frac{\Delta t}{2} \left(1 + \frac{1}{6s} \right) \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} \right]_j^n + O(\Delta t^2, \Delta x^4). \quad (4.16)$$

Отриманий вираз для похибки апроксимації у (4.16) має той самий порядок, що й для явної схеми FTCS при $s \neq 1/6$, незважаючи на те, що сталий множник тут дещо більший.

Аналізуючи стійкість за Нейманом, легко побачити, що схема FI **безумовно стійка**. Це виявляє її очевидну перевагу перед умовно стійкими явними схемами [1].

Як було зазначено, для переходу до наступного шару за часом для ГІ потрібно розв'язати методом прогонки (TDMA) систему лінійних алгебраїчних рівнянь (4.15) із тридіагональною стрічковою матрицею. На практиці це потребує вдвічі більше комп'ютерного часу, ніж для розв'язання тієї самої задачі явним методом FTCS. Але крок за часом для неявної схеми може бути суттєво більшим, адже він лімітується тільки потрібною точністю розв'язку.

Альтернативний варіант неявного алгоритму розв'язання рівняння дифузії (4.1) відповідає схемі Кранка–Нікольсона (рис. 4.3):

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} - \alpha \left(0,5 L_{xx} T_j^n + 0,5 L_{xx} T_j^{n+1} \right) = 0, \quad (4.17)$$

де скінченнорізницевий оператор має вигляд

$$L_{xx} T = (T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1}) / \Delta x^2. \quad (4.18)$$

Зауваження. Схема Кранка–Нікольсона (CN) фактично апроксимує просторову похідну на проміжному $(n + 1/2)$ -му шарі за часом. Це дозволяє на порядок збільшити точність апроксимації похідної за часом: із диференціального наближення скінченнорізницевої схеми для шаблону Кранка–Нікольсона маємо помилку апроксимації $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, що значно краще, ніж за чисто неявною схемою.

Аналіз стійкості за Нейманом указує на безумовну стійкість схеми Кранка–Нікольсона [1]. Скінченнорізницеве рівняння (4.17) легко перетворити на алгоритм

$$\begin{aligned} -0,5sT_{j-1}^{n+1} + (1+s)T_j^{n+1} - 0,5sT_{j+1}^{n+1} = \\ = 0,5sT_{j-1}^n + (1-s)T_j^n + 0,5sT_{j+1}^n \quad (j=2, N-1). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Система скінченнорізницевих рівнянь (4.19) розв'язується методом прогонки (TDMA).

Зауваження. Схема Кранка–Нікольсона розташована на межі області безумовно стійкого режиму, тому часто виявляється неприйнятною для розв'язання жорстких і псевдонестаціонарних задач через повільну збіжність і сильні осциляції розв'язку.

Для розв'язання рівняння дифузії найчастіше використовують узагальнену неявну тришарову схему (G3LS), яка є узагальненням схеми Кранка–Нікольсона

$$\frac{(1+\gamma)\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\gamma\Delta T_j^n}{\Delta t} - \alpha \left[(1-\beta)L_{xx}T_j^n + \beta L_{xx}T_j^{n+1} \right] = 0, \quad (4.20)$$

де

$$\Delta T_j^n = T_j^n - T_j^{n-1}, \quad L_{xx}T_j^n = (T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) / \Delta x^2. \quad (4.21)$$

Включення до шаблону додаткового шару за часом (див. рис. 3.3) викликає потребу в додатковій пам'яті ЕОМ для зберігання розв'язку. Необхідно також мати додатковий час на виконання складнішого алгоритму. При виборі $\gamma = 0,5$, $\beta = 1,0$ помилка апроксимації для (4.20) $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. вона не гірша, ніж для схеми Кранка–Нікольсона. Водночас G3LS не має обмежень на розв'язання будь-яких задач, навіть жорстких, які не піддаються розв'язанню за схемою Кранка–Нікольсона.

Аналіз стійкості за Нейманом указує на безумовну стійкість схеми G3LS [1].

4.2. Особливості розв'язання мішаної крайової задачі для одновимірного рівняння дифузії

Мішана крайова задача для (4.1) – це визначення розв'язку $\bar{T}(x, t): \forall t \in D = \{0 \leq x \leq 1, t > 0\}$, що задовольняє початкову

$$\bar{T}(x, 0) = \Theta(x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.22)$$

та граничні умови

$$\begin{aligned} \left[\alpha_0(t) [\partial \bar{T} / \partial x] + \beta_0(t) \bar{T} \right]_{x=0} &= \chi_0(t); \\ \left[\alpha_1(t) [\partial \bar{T} / \partial x] + \beta_1(t) \bar{T} \right]_{x=1} &= \chi_1(t) \end{aligned} \quad \text{при} \quad t \geq 0. \quad (4.23)$$

Припускається, що для $\forall t \quad \alpha_i^2(t) + \beta_i^2(t) > 0 \quad (i = 0, 1)$, а умови (4.22) і (4.23) узгоджені у кутових точках $(0; 0)$ та $(1; 0)$. Уведемо сітку $x_j = j \cdot \Delta x$, $j = 1, N$; $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 0, M$. Якщо $t \in [0, \pi]$, то $\Delta x = 1/N$, $\Delta t = \pi/M$. Маємо множини внутрішніх

$$D_h = \{(x_j, t_n) : 2 \leq j \leq N-1, n \geq 1\}$$

і граничних точок

$$\Gamma_h = \{(x_j, t_n) : n=0, M \text{ при } j=1; N \text{ та } 1 \leq j \leq N \text{ при } n=0\}.$$

Дискретизація рівняння (4.1) відбувається аналогічно дискретизації цього рівняння для задачі Коші. При розв'язанні задачі Коші єдиним джерелом помилок була дискретизація диференціального рівняння (4.1). Для мішаної крайової задачі виникають додаткові труднощі, пов'язані з необхідністю дискретизації граничних і початкових умов. Похідну за простором, яка входить до граничних умов Неймана, можна апроксимувати за допомогою односторонньої скінченно-різницевої похідної із використанням інформації лише із середини області визначення. Результат має вигляд

$$\frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{\Delta x} + O(\Delta x) = \psi_0^{n+1}. \quad (4.24)$$

Тобто помилка апроксимації за простором виявляється навіть більшою, ніж за апроксимації за схемою FTCS. Очевидно, що це неприпустимо, оскільки менша точність апроксимації граничних умов приведе, урешті-решт, до зменшення точності отриманого розв'язку.

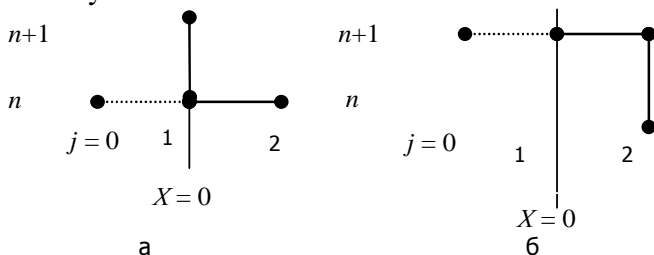


Рис. 4.4. Варіанти апроксимації граничних умов Неймана:
а – явний варіант; б – неявний варіант

Запропоновані на рис. 4.4 варіанти реалізації граничних умов Неймана дають похибку апроксимації $\approx O(\Delta x^2)$. Для цього в явному варіанті вводиться фіктивний вузол $(0, n)$, що лежить за межами області обчислень. Використовуючи центральну різницеву похідну за простором, маємо

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_{x=0}^n = \psi_0(t_n) \rightarrow \frac{T_2^n - T_0^n}{2\Delta x} = \psi_0^n. \quad (4.25)$$

Область обчислень можна умовно розширити так, щоб включити до неї вказану точку. Якщо тепер співвідношення (4.25) об'єднати із записаним для точки $(1, n)$ різницеvim рівнянням для точок внутрішньої області (4.8) та виключити з обох рівнянь T_0^n , то отримаємо

$$T_1^{n+1} = -2s \Delta x \psi_0^n + (1 - 2s)T_1^n + 2sT_2^n. \quad (4.26)$$

Причому для всіх точок області точність апроксимації матиме порядок $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$, тобто збігається із точністю апроксимації для схеми FTCS.

Якщо використовується неявна схема, то замість (4.25) маємо рівняння

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_{x=0}^{n+1} = \psi_0(t_{n+1}) \rightarrow \frac{T_2^{n+1} - T_0^{n+1}}{2\Delta x} = \psi_0^{n+1}, \quad (4.27)$$

яке сумісно з алгоритмом для чисто неявної схеми дає вираз

$$(1 + 2s)T_1^{n+1} - 2sT_2^{n+1} = T_1^n - 2s\Delta x \psi_0^{n+1}, \quad (4.28)$$

який можна розглядати як додаткове перше рівняння для тридіагональної системи, отриманої при дискретизації рівняння дифузії за схемою FI (див. рис. 3.3 а). Цю розширену систему також розв'язують із використанням процедури прогонки (TDMA). Побудова, що застосовувалася для апроксимації умови Неймана при $x = 0$, придатна й для апроксимації умови Неймана при $x = 1$.

Можна очікувати, що використання додаткових формул на межах області приведе до зміни умов стійкості, оскільки аналіз Неймана придатний лише для внутрішніх точок області обчислень [1]. Тому в нашому випадку для розширеної матриці СЛАР необхідно безпосередньо шукати власні числа, які за виконання умови абсолютної стійкості всі мають бути строго меншими від одиниці. Проведений Мітчелом і Гріфітцем [18] матричний аналіз не виявив жодних змін у поведінці розв'язку, отриманому для розглянутих розширених матриць СЛАР. Узагалі ж взаємодія тієї або іншої схеми представлення граничних умов із тією або іншою схемою обчислень – тема окремих досліджень. Докладніше ці питання розглядаються у вже неодноразово згаданих [1, 15, 18].

Зауваження

- Схема Кранка–Нікольсона із граничними умовами Дирихле є абсолютно стійкою. При використанні схеми Кранка–Нікольсона для крайових умов Неймана (Робіна) щодо забезпечення її стійкості необхідно вводити додаткові обмеження на параметри задачі, оскільки власні числа для розширеної матриці СЛАР тут не всі строго < 1 .
- При розгляді **тришарових схем** на першому кроці використовують **двошарову схему** такої самої або більш високої точності.
- Якщо немає можливості використати на першому кроці для тришарових схем двошарову схему досить високої точності, корисна екстраполяція за Річардсоном із використанням правила Рунге (див. 3.7).

4.3. Особливості розв'язання крайових задач для багатовимірного рівняння дифузії

Усі розглянуті далі схеми легко узагальнюються при переході від двох просторових змінних до трьох¹³. Тому для спрощення розглядається двовимірне рівняння дифузії

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha_x \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right) - \alpha_y \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (4.29)$$

Граничні умови Дирихле для зображеної на рис. 4.5 області мають вигляд

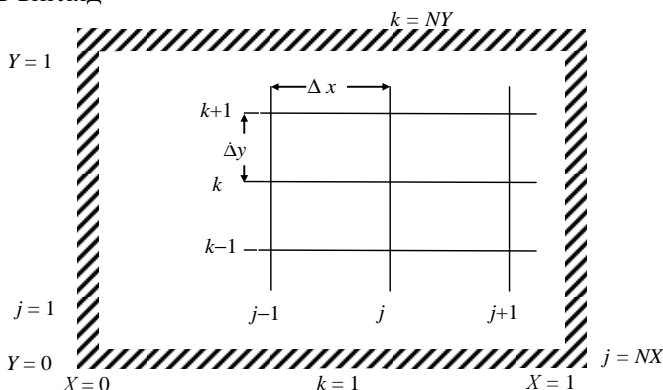


Рис. 4.5. Область обчислень для двовимірного рівняння дифузії

¹³ У протилежному випадку висуваються додаткові вимоги.

$$\begin{aligned}\bar{T}(0, y, t) &= a(y, t), & \bar{T}(1, y, t) &= b(y, t), \\ \bar{T}(x, 0, t) &= c(x, t), & \bar{T}(x, 1, t) &= d(x, t).\end{aligned}\tag{4.30}$$

Початкові умови тут записують як

$$\bar{T}(x, y, 0) = T_0(x, y).\tag{4.31}$$

4.3.1. Найпростіші явні та чисто неявна схеми

Для початку типові явні та неявні схеми, які розглядалися для одновимірного рівняння дифузії, будуть поширені на випадок двох і трьох змінних, щоб безпосередньо виявити їх придатність для розв'язання багатовимірного рівняння дифузії.

Схема FTCS у двох вимірах має алгоритм

$$\begin{aligned}T_{j,k}^{n+1} &= s_x T_{j-1,k}^n + (1 - 2s_x - 2s_y) T_{j,k}^n + s_x T_{j+1,k}^n + \\ &+ s_y T_{j,k-1}^n + s_y T_{j,k+1}^n,\end{aligned}\tag{4.32}$$

де $s_x = \alpha_x \Delta t / \Delta x^2$, $s_y = \alpha_y \Delta t / \Delta y^2$. Похибка апроксимації при цьому $\approx O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$. Схема стійка при $s_x + s_y \leq 0,5$. Звернемо увагу на те, що умова стійкості тут удвічі жорсткіша, ніж для одновимірного випадку, оскільки якщо $s = s_x = s_y$, то умовою стійкості для (4.32) буде $s \leq 0,25$. Для випадку $\alpha = \alpha_x = \alpha_y$ та $\Delta x = \Delta y$ маємо двокрокове узагальнення схеми FTCS:

$$\begin{aligned}T_{j,k}^* &= (1 + \alpha \Delta t L_{yy}) T_{j,k}^n, \\ T_{j,k}^{n+1} &= (1 + \alpha \Delta t L_{xx}) T_{j,k}^*,\end{aligned}\tag{4.33}$$

що стійке при $0 < s \leq 0,5$. Тут маємо просторовий оператор

$$L_{xx} T_{j,k}^n = (T_{j-1,k}^n - 2T_{j,k}^n + T_{j+1,k}^n) / \Delta x^2.\tag{4.34}$$

Зауваження. Тривимірну за простором схему FTCS при $\alpha = \alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$ та $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ краще реалізувати у три кроки, тоді вона залишається стійкою при $0 < s \leq 1/6$.

Цікавішою за FTCS для двовимірного рівняння дифузії є **схема "класики"** (HS), яку можна також розглядати як двокрокову схему FTCS.

1. Спочатку алгоритм (4.32) застосовують до всіх вузлів, для яких $\sum(j + k + n)$ парна.

2. Потім для вузлів, для яких $\sum(j+k+n)$ непарна, розв'язують рівняння

$$(1+2s_x+2s_y)T_{j,k}^{n+1} = T_{j,k}^n + s_x(T_{j-1,k}^{n+1} + T_{j+1,k}^{n+1}) + s_y(T_{j,k-1}^{n+1} + T_{j,k+1}^{n+1}), \quad (4.35)$$

де члени у правій частині, визначені для моменту часу t_{n+1} , відомі з першого кроку. Простий для числової реалізації алгоритм дає похибку $\approx O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$ та є **безумовно стійким** [1].

Діючи аналогічно до розв'язання одновимірної задачі, можна побудувати чисто неявну схему, алгоритм якої має вигляд

$$-s_x T_{j-1,k}^{n+1} + (1+2s_x+2s_y)T_{j,k}^{n+1} - s_x T_{j+1,k}^{n+1} - s_y T_{j,k-1}^{n+1} - s_y T_{j,k+1}^{n+1} = T_{j,k}^n. \quad (4.36)$$

Ця абсолютно стійка схема має похибку апроксимації $\approx O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$.

Рівнянням системи (4.36) можна дати таку нумерацію, щоб три перших члени утворювали три головні діагоналі, а два останні – розміщувалися від них на відстані $(NX-2)$ вузли. Із останнього випливає, що алгоритм TDMA використати тут неможливо. Застосування звичайного методу Гаусса (або навіть спеціальних методів, придатних для розріджених матриць) для знаходження розв'язку на $(n+1)$ -му шарі було б дуже неекономічним. Тому неявні алгоритми у такому вигляді для багатовимірних задач практично не використовуються.

4.3.2. Неявний метод змінних напрямків

Труднощі, із якими ми зустрілися, намагаючись розв'язати двовимірне рівняння дифузії за допомогою неявного алгоритму, можна подолати розщепленням алгоритму розв'язку на два напівкроки, які в результаті дають один крок за часом. На кожному напівкроці неявне формулювання при цьому отримують тільки члени, пов'язані з відповідним координатним напрямком. Таких членів на кожному напівкроці виявляється лише три, причому вони згруповані біля головної діагоналі. У результаті на кожному напівкроці за часом вдається використати ефективний алгоритм прогонки (TDMA).

Найвідомішим варіантом методу розщеплення є неявний метод змінних напрямків (ADI), запропонований Пісменом і Реч-

фордом [18]. Схему ADI для розв'язання рівняння (4.29) записують у вигляді двох напівкроків за часом

$$\begin{cases} \frac{T_{j,k}^* - T_{j,k}^n}{0,5\Delta t} - \alpha_x L_{xx} T_{j,k}^* - \alpha_y L_{yy} T_{j,k}^n = 0; \\ \frac{T_{j,k}^{n+1} - T_{j,k}^*}{0,5\Delta t} - \alpha_x L_{xx} T_{j,k}^* - \alpha_y L_{yy} T_{j,k}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

На першому напівкроці розв'язок T , відомий на шарі t_n , але невідомий на шарі $t_{n+1/2}$ (позначено *). Звернемо увагу на те, що невідомі значення T^* пов'язані лише з рухом за напрямком Ox (k – стала). Перше рівняння системи (4.37) можна записати як алгоритм

$$\begin{aligned} -0,5 s_x T_{j-1,k}^* + (1 + s_x) T_{j,k}^* - 0,5 s_x T_{j+1,k}^* = \\ = 0,5 s_y T_{j,k-1}^n + (1 - s_y) T_{j,k}^n + 0,5 s_y T_{j,k+1}^n. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Тобто, для знаходження T^* необхідно розв'язати систему із тридіагональною матрицею методом прогонки (TDMA).

На другому напівкроці використовується друге рівняння (4.37), переписане у вигляді алгоритму

$$\begin{aligned} -0,5 s_y T_{j,k-1}^{n+1} + (1 + s_y) T_{j,k}^{n+1} - 0,5 s_y T_{j,k+1}^{n+1} = \\ = 0,5 s_x T_{j-1,k}^* + (1 - s_x) T_{j,k}^* + 0,5 s_x T_{j+1,k}^*. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Отже, на другому напівкроці також за алгоритмом TDMA розв'язується система рівнянь із тридіагональною матрицею (4.39) у напрямку Oy (j – стала).

Схема ADI має точність $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$. Перевірка стійкості схеми за Нейманом указує на те, що на повному кроці за часом Δt вона є абсолютно стійкою, хоча за кожною змінною – лише умовно стійкою. Таким чином, для двовимірного випадку схема ADI має всі потрібні властивості: безумовно стійка, має другий порядок точності за всіма змінними й розв'язується з використанням економічно вигідного методу.

Зауваження

- Узагальнення методу ADI на тривимірний випадок при використанні чотирьох шарів за часом ($n, n + 1/3, n + 2/3, n + 1$) дає умовно стійку схему із похибкою $\approx O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$, де $s_x, s_y, s_z \leq 1,5$; $s_z = \alpha_z \Delta t / \Delta z^2$.

• Для досягнення похибки апроксимації $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$ за схемою ADI необхідно для проміжного розв'язку T^* вводити граничні значення таким чином, щоб вони були сумісні з алгоритмами для внутрішніх точок (4.38) та (4.39). Наприклад, для умови Дирихле задання $T_{NX,k}^* = b_k^{n+1/2}$ при $x = 1$ дає похибку $\approx O(\Delta t)$. Щоб похибка мала порядок $\approx O(\Delta t^2)$, задають

$$T_{NX,k}^* = 0,5(b_k^n + b_k^{n+1}) - 0,25 \Delta t L_{yy} (b_k^{n+1} - b_k^n). \quad (4.40)$$

4.3.3. Метод дробових кроків

Метод дробових кроків (MFS) запропоновано Н. Яненком [21]. Загальна стратегія схеми VDI полягала у тому, щоб дискретизувати, а потім модифікувати алгебраїчні рівняння для побудови "одновимірних" алгоритмів типу (4.38)–(4.39). Альтернативна стратегія MFS полягає у розщепленні вихідного рівняння на кілька рівнянь, кожне з яких є одновимірним. При цьому замість рівняння (4.29) вводиться система рівнянь

$$0,5 \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha_y \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} = 0, \quad 0,5 \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0. \quad (4.41)$$

Кожне з рівнянь (4.41) дискретизують і розв'язують, використовуючи вже відомі одновимірні схеми, послідовно на кожному кроці за часом.

Явне представлення (4.41) за методом MFS має вигляд

$$T_{j,k}^{n+1/2} = (1 + \alpha_y \Delta t L_{yy}) T_{j,k}^n, \quad T_{j,k}^{n+1} = (1 + \alpha_x \Delta t L_{xx}) T_{j,k}^{n+1/2}. \quad (4.42)$$

Якщо $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$, то схема (4.42) збігається із двокроковою схемою FTCS (4.33). Явний алгоритм для MFS має похибку $\approx O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$ і для $\Delta x = \Delta y$ стійкий при $s \leq 0,5$.

Неявна апроксимація (4.41) за схемою Кранка–Нікольсона має вигляд

$$\begin{aligned} (1 - 0,5\alpha_y \Delta t L_{yy}) T_{j,k}^{n+1/2} &= (1 + 0,5\alpha_y \Delta t L_{yy}) T_{j,k}^n, \\ (1 - 0,5\alpha_x \Delta t L_{xx}) T_{j,k}^{n+1} &= (1 + 0,5\alpha_x \Delta t L_{xx}) T_{j,k}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Співвідношення (4.43) приводять до систем рівнянь із тридіагональною матрицею вздовж сіткових ліній, що паралельні координатним осям Ox та Oy , відповідно. Таким чином, розв'язок на

кожному напівкроці шукаємо з використанням алгоритму TDMA. Схема має порядок точності апроксимації $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$ і безумовно стійка за належного вибору граничних умов як для двох, так і для трьох вимірів.

Принципова відмінність методів MFS від методу ADI виникає при виконанні граничних умов. Якщо при використанні MFS для області (див. рис. 4.5) задати умову Дирихле на границі $x = 1$

$$T_{NX,k}^{n+1/2} = b_k^{n+1/2}, \quad (4.44)$$

то за аналогічних співвідношень на інших границях це дає зниження загальної точності схеми за часом до $\approx O(\Delta t)$. Коректним наближенням для явного методу MFS (4.42) при $x = 1$ буде

$$T_{NX,k}^{n+1/2} = (1 + \alpha_y \Delta t L_{yy}) b_k^n. \quad (4.45)$$

За аналогією для неявного методу MFS (4.43) при $x = 1$ матимемо

$$(1 - 0,5 \alpha_y \Delta t L_{yy}) T_{NX,k}^{n+1/2} = (1 + 0,5 \alpha_y \Delta t L_{yy}) b_k^n. \quad (4.46)$$

Великий вибір різноманітних задач, що розв'язані методом MFS, наведено в [21].

Зауваження. Метод MFS майже не застосовують для розв'язання еліптичних рівнянь псевдонестационарним методом, оскільки він не дозволяє безпосередньо обчислювати нев'язку

$$RHS = (\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy}) T_{j,k}^n. \quad (4.47)$$

4.3.4. Узагальнені схеми розщеплення

Узагальнюючи ідею розщеплення, запишемо неявну скінченно-різницьку схему загального вигляду для двовимірного рівняння дифузії (4.29)

$$\frac{\Delta T_{j,k}^{n+1}}{\Delta t} - (1 - \beta)(\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy}) T_{j,k}^n - \beta(\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy}) T_{j,k}^{n+1} = 0, \quad (4.48)$$

де $\Delta T_{j,k}^{n+1} = T_{j,k}^{n+1} - T_{j,k}^n$.

Величину $\Delta T_{j,k}^{n+1}$ тут розглядають як поправку до розв'язку на шарі (n), яка потрібна для пересування на шар ($n+1$). Тому корисно розраховувати $\Delta T_{j,k}^{n+1}$ у чистому вигляді. У (4.48) коефіцієнт β задає вагові множники при відповідних членах на шарах (n) і ($n+1$).

Скористаймося формулою Тейлора

$$T_{j,k}^{n+1} = T_{j,k}^n + \Delta t \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_{j,k}^n + 0,5 \Delta t^2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right]_{j,k}^n + \dots,$$

або у скінченнорізницевому вигляді

$$T_{j,k}^{n+1} = T_{j,k}^n + \Delta t \left(\frac{\Delta T_{j,k}^n}{\Delta t} \right) + O(\Delta t^2). \quad (4.49)$$

Підставивши (4.49) до (4.47) і перегрупувавши члени, дістанемо

$$\left[1 - \beta \Delta t (\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy}) \right] \Delta T_{j,k}^{n+1} = \Delta t (\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy}) T_{j,k}^n. \quad (4.50)$$

Для того, щоб скористатися розщепленням, замінимо в рівнянні (4.50) оператор, який стоїть у лівій частині, добутком $(1 - \beta \Delta t \alpha_x L_{xx}) \times (1 - \beta \Delta t \alpha_y L_{yy})$, що відрізняється від вихідного оператора додатковим членом $\beta^2 \Delta t^2 \alpha_x \alpha_y L_{xx} L_{yy} \Delta T_{j,k}^{n+1}$. Із вигляду останнього виразу випливає, що добуток апроксимує оператор у лівій частині рівняння (4.50) із точністю $\approx O(\Delta t^2)$.

Замінивши оператор у лівій частині (4.50) на добуток, на кожному кроці за часом матимемо алгоритм узагальненої неявної двохарової схеми (G2LS):

$$(1 - \beta \Delta t \alpha_x L_{xx})(1 - \beta \Delta t \alpha_y L_{yy}) \Delta T_{j,k}^{n+1} = \Delta t (\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy}) T_{j,k}^n, \quad (4.51)$$

який реалізується у два етапи.

1. Для довільної лінії, паралельної Ox (k – стала), виконати дії:

$$(1 - \alpha \Delta t \alpha_x L_{xx}) \Delta T_{j,k}^* = \Delta t (\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy}) T_{j,k}^n. \quad (4.52)$$

2. Для довільної лінії, паралельної Oy (j – стала) виконати дії:

$$(1 - \beta \Delta t \alpha_y L_{yy}) \Delta T_{j,k}^{n+1} = \Delta T_{j,k}^*. \quad (4.53)$$

Очевидно, що обидва етапи реалізують за допомогою найбільш економного алгоритму прогонки (TDMA). Точність апроксимації за схемою G2LS $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$ при $\beta = 0,5$. Схема є безумовно стійкою за довільних $\beta \geq 0,5$ [18].

Зауваження

- Нев'язку (4.47), потрібну для розв'язання стаціонарних задач псевдонестационарним методом, знаходять при використанні G2LS у процесі розв'язання.

- Перевага G2LS, порівняно зі схемою ADI, виявляється при розв'язанні рівнянь складнішої структури, ніж багатовимірне рівняння дифузії, оскільки тоді основні витрати машинного часу припадають на розрахунок правої частини рівняння, яка для VDI обчислюється двічі, а для G2LS – один раз на першому етапі.
- Схема G2LS без змін узагальнюється на випадок трьох вимірів, хоча на відміну від схеми ADI, є при цьому абсолютно стійкою [18].

Узагальнену тришарову схему (G3LS) для розв'язання двовимірному рівняння дифузії записують у вигляді

$$\frac{(1+\gamma)\Delta T_{j,k}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\gamma\Delta T_{j,k}^n}{\Delta t} = (1-\beta)(\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy})T_{j,k}^n + \beta(\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy})T_{j,k}^{n+1}, \quad (4.54)$$

де $\Delta T_{j,k}^n = T_{j,k}^n - T_{j,k}^{n-1}$. Застосовуючи до виразу (4.54) підхід, який використовувався для одержання алгоритму G2LS (4.51), (4.52), маємо такий двохетапний алгоритм.

1. Для довільної лінії, що паралельна координатній осі Ox (k – стала):

$$\left(1 - \frac{\beta}{(1+\gamma)} \Delta t \alpha_x L_{xx}\right) \Delta T_{j,k}^* = \frac{\Delta t}{(\gamma+1)} (\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy}) T_{j,k}^n. \quad (4.55)$$

2. Для довільної лінії, що паралельна координатній осі Oy (j – стала):

$$\left(1 - \frac{\beta}{(1+\gamma)} \Delta t \alpha_y L_{yy}\right) \Delta T_{j,k}^{n+1} = \Delta T_{j,k}^*. \quad (4.56)$$

При виборі спеціальних значень $\beta = 1, \gamma = 0,5$ двохетапний алгоритм, заданий рівняннями (4.55) і (4.56), апроксимує двовимірне рівняння дифузії (4.29) із помилкою $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$ і є безумовно стійким.

Зауваження

- Під час реалізації G3LS на першому кроці використовуються G2LS.
- Схема G3LS без змін узагальнюється на випадок трьох вимірів, при цьому залишаючись абсолютно стійкою.

Розглянемо тепер відповідні процедури, які дозволяють реалізувати мішані граничні умови Дирихле–Неймана для багатовимірному рівняння дифузії при використанні схем із розщеп-

ленням. Залишимо в (4.30) у початковому вигляді першу й третю граничні умови та замінимо другу та четверту граничні умови

$$\frac{\partial \bar{T}(1, y, t)}{\partial x} = g(y, t), \quad \frac{\partial \bar{T}(x, 1, t)}{\partial y} = h(x, t), \quad (4.57)$$

де $g(y, t)$, $h(x, t)$ – відомі функції. Граничні умови Неймана реалізуються із другим порядком точності при використанні скінченно-різницьових апроксимацій

$$\frac{T_{j+1,k} - T_{j-1,k}}{2\Delta x} = g_k(t), \quad \frac{T_{j,k+1} - T_{j,k-1}}{2\Delta y} = h_j(t). \quad (4.58)$$

Граничні умови (4.58) реалізуватимуться разом із узагальненою двошаровою схемою.

Для точок, які розташовані на границях $x = 1$ та $y = 1$, праву частину виразу (4.52) на першому етапі G2LS можна визначити тільки після того, як за допомогою формул (4.58) буде введено додаткові точки зі значеннями $T_{j+1,k}$ і $T_{j,k+1}$, які лежать за межами області обчислень. Однак оператори у правих частинах виразів (4.52) і (4.53) потребують побудови похибок $\Delta T_{j+1,k}^*$ і $\Delta T_{j,k+1}^{n+1}$, що можна зробити за допомогою виразів (4.57) на послідовних інтервалах за часом

$$\begin{aligned} \Delta T_{j+1,k}^{n+1} &= \Delta T_{j-1,k}^{n+1} + 2\Delta x \Delta g_k^{n+1}, \\ \Delta T_{j,k+1}^{n+1} &= \Delta T_{j,k-1}^{n+1} + 2\Delta y \Delta h_j^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

де $\Delta g_k^{n+1} = g_k^{n+1} - g_k^n$, $\Delta h_j^{n+1} = h_j^{n+1} - h_j^n$. Надалі, щоб виконати розщеплення двовимірних операторів на одновимірні, потрібно модифікувати відповідні компоненти операторів L_{xx} і L_{yy} , використовуючи формули (4.59). Наприклад, при $j = NX$ заміна з використанням першої формули (4.59) приводить до виразу (4.52), який змінює на першому етапі G2LS:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_x \beta \Delta t L_{xx}^m) \Delta T_{j,k}^* &= \Delta t (\alpha_x L_{xx} + \alpha_y L_{yy}) T_{j,k}^n - \\ &- 2\Delta x (1 - \alpha_x \beta \Delta t L_{xx}^m) (1 - \alpha_y \beta \Delta t L_{yy}) \Delta g_k^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

де $L_{xx}^m = \{2; -2, 0\} / \Delta x^2$. На другому етапі вираз (4.53) використовується без модифікації.

При $k = NY$ вираз (4.52) на першому етапі не змінюється. Однак на другому етапі замість (4.53) маємо

$$(1 - \alpha_y \beta \Delta t L_{yy}^m) \Delta T_{j,k}^{n+1} = \Delta T_{j,k}^* - 2 \Delta y (1 - \alpha_y \beta \Delta t L_{yy}^m) \Delta h_j^{n+1}, \quad (4.61)$$

де $L_{yy}^m = \{0; -2, 2\}^T / \Delta y^2$.

Указана процедура дозволяє зберегти точність апроксимації граничних умов, яка досягнута за схемою G2LS у внутрішніх точках.

Задачі

1. Перевірити стійкість СЛАР із тридіагональними матрицями, які необхідно розв'язувати для всіх неявних шаблонів.

2. Нехай теплоізолюваний стрижень (див. рис. 4.1) завдовжки 1 м має температуру 0°C , і в початковий момент часу до його обох кінців приєднуються гарячі резервуари ($T=100^\circ\text{C}$). Використовуючи схему FTCS, визначити температуру стрижня в довільний момент часу, якщо $\alpha = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\Delta x = 0,1 \text{ м}$, $\Delta t = 500 \text{ с}$.

3. Отримайте розв'язок попередньої задачі для $\Delta x = 0,1$; $\Delta x = 0,2$; $\Delta t = 500$ і $s = 0,5$; $s = 0,3$; $s = 0,1$ та $s = 1/6$. Проаналізуйте зміну точності при зміні параметра s і вкажіть, наскільки вона відповідає вашим сподіванням. **Указівка:** потрібно розглянути вираз для похибки апроксимації.

4. Повторити задачу 2, використовуючи схему Дюфорта–Франкела для $2 \leq t \leq 9$; $\Delta x = 0,05$; $\Delta x = 0,1$; $\Delta x = 0,2$ і $s = 0,3$; $s = 0,41$; $s = 1/6$, $s = 1/\sqrt{12}$. Порівняти результати із результатами за схемою FTCS.

5. Розглянемо нескінченну стінку завтовшки $L = 1 \text{ м}$ із початковою температурою $\bar{T}(x) = c \cdot \sin(\pi x / L)$, $0 \leq x \leq 1$. Якщо температура поверхонь стінки при $t > 0$ буде 0°C , то точний розв'язок рівняння (4.1) на $0 \leq x \leq 1$ при $c = 100^\circ\text{C}$:

$$\bar{T}(t, x) = c \cdot \exp(-\alpha \pi^2 t / L^2) \sin(\pi x / L), \quad \alpha = 0,02 \text{ м}^2/\text{год}.$$

Порівняти через 10 год. точний розв'язок і числовий розв'язок цієї задачі за схемою FTCS: а) $\Delta x = 0,1$; $\Delta t = 0,1$; б) $\Delta x = 0,1$; $\Delta t = 0,25$; в) $\Delta x = 0,1$; $\Delta t = 0,3$. Показати: коли розв'язок утрачає стійкість і розбіжний із точним розв'язком.

6. Повторити задачу 5 на дрібнішій сітці за Δx . Чи погоджується зменшення похибки числового розв'язку із порядком апроксимації за Δx ? Порівняти із числовим розв'язком, отриманим за схемою Дюфорта–Франкела.

7. Повторити задачі 5 і 6, використовуючи явну абсолютно стійку схему змінних напрямів Бараката–Кларка [1], коли маршовим методом одночасно розв'язують рівняння зліва направо

$$\frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{p_{j-1}^{n+1} - p_j^{n+1} - p_j^n + p_{j+1}^n}{\Delta x^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (3-1')$$

і справа наліво

$$\frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{q_{j-1}^n - q_j^n - q_j^{n+1} + q_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2}, \quad j = \overline{N-1, 1}. \quad (3-2')$$

Отримані розв'язки осереднюються для визначення

$$T_j^{n+1} = 0,5(p_j^{n+1} + q_j^{n+1}). \quad (3-3')$$

8. Повторити задачі 5 і 6, використовуючи схему Кранка–Нікольсона.

9. Повторити задачі 5 і 6, використовуючи узагальнену неявну тришарову схему при $\gamma = 1,0$; $\beta = 0,5 + \gamma - 1/(12 s)$ та $\beta = 0,5 + \gamma$. Порівняти отримані результати з результатами задачі 8.

10. Розв'язати крайову задачу для двовимірного рівняння теплопровідності на квадраті $\bar{D} = [0,1] \times [0,1]$ (див. рис. 4.5) неявним методом дробових кроків, коли на кожному напрямку використовується метод Кранка–Нікольсона. Значення невідомих на межах:

$$\begin{aligned} \bar{T}(0, y, t) &= 20 + 80y, \\ \bar{T}(1, y, t) &= 20 + 80 \left[y - \exp(-0,5\alpha\pi^2 t) \cdot \sin(0,5\pi y) \right], \\ \bar{T}(x, 0, t) &= 20, \\ \bar{T}(x, 1, t) &= 20 + 80 \left[y - \exp(-0,5\alpha\pi^2 t) \cdot \sin(0,5\pi y) \right]. \end{aligned} \quad (3-4')$$

Порівняти отриманий розв'язок із точним

$$T(x, y, t) = 20 + 80 \left[y - \exp(-0,5\alpha\pi^2 t) \times \sin(0,5\pi x) \cdot \sin(0,5\pi y) \right]. \quad (3-5')$$

11. Розв'язати задачу 10, використовуючи узагальнену двошарову чисто неявну схему.

12. Розв'язати задачу 10, використовуючи узагальнену тришарову чисто неявну схему.

13. Розв'язати задачу 10 розділу 3, використовуючи псевдонестаціонарний метод і розщеплення за узагальненою неявною двошаровою схемою.

14. Розв'язати задачу 10 розділу 3, використовуючи псевдонестаціонарний метод і розщеплення за узагальненою неявною тришаровою схемою.

Розділ 5

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Розглянемо скінченнорізницеві схеми, за допомогою яких можна розв'язати найпростіші лінійні диференціальні рівняння у частинних похідних гіперболічного типу, у тому числі хвильове рівняння й одновимірне рівняння переносу (або хвильове рівняння першого порядку). За деяких початкових і граничних умов усі ці рівняння мають аналітичні розв'язки, знаючи які, досить легко оцінити й порівняти всі запропоновані скінченнорізницеві методи, які ми надалі використовуватимемо для розв'язання складніших задач. Із усієї кількості існуючих скінченнорізницевих методів розв'язання рівнянь і систем рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу в основному розглянуто методи із властивостями, які характерні для цілого класу аналогічних методів. Деякі із цих властивостей небажані, однак, із навчальною метою ми їх розглядатимемо. Деякі відомі методи не наводимо, оскільки вони аналогічні іншим методам, досліджуваним у цьому розділі.

5.1. Одновимірне хвильове рівняння та одновимірне рівняння переносу

Одновимірним хвильовим рівнянням називається диференціальне рівняння у частинних похідних гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}, \quad (5.1)$$

що описує поширення звукових хвиль в однорідному середовищі зі швидкістю c . Існує рівняння першого порядку, розв'язання якого близькі до (5.1):

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + c \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = 0, \quad c > 0, \quad (5.2 \text{ а})$$

причому рівняння (5.2 а) легко одержати з (5.1), якщо останнє записати у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{T} = 0. \quad (5.2 \text{ б})$$

Рівняння (5.2 а) також є гіперболічним і має назву **одновимірне рівняння переносу**. Рівняння (5.2 а) за початкової умови

$$\bar{T}(x, 0) = F(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (5.3)$$

має точний аналітичний розв'язок у вигляді рухомої хвилі

$$\bar{T}(x, t) = F(x - ct). \quad (5.4)$$

Перейдемо тепер до вивчення скінченнорізницевих схем для розв'язання (5.2 а).

5.2. Найпростіші методи першого і другого порядку точності

5.2.1. Явні методи Ейлера

Ці методи приводять до двох простих явних однокрокових схем Ейлера (рис. 5.1)

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + c \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{\Delta x} = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + c \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (5.6)$$

із похибками $\approx O(\Delta t, \Delta x)$ та $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$, відповідно. На жаль, з аналізу стійкості випливає **абсолютна нестійкість** обидвох схем [1].

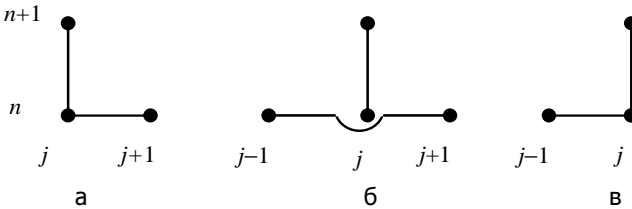


Рис. 5.1 Шаблони методів Ейлера (а, б) і методу різниць проти течії (в)

5.2.2. Найпростіший варіант методу різниць проти течії. Модифіковане рівняння

Схему (5.5) можна зробити стійкою, якщо за апроксимації похідної за простором при $c > 0$ взяти різницю не вперед, а назад [1]

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + c \frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (5.7)$$

При $c < 0$ стійкість схеми забезпечується використанням різниці вперед, як для (5.5).

Із метою отримання оцінки точності методу побудуємо для (5.7) модифіковане рівняння¹⁴. Для цього підставимо до (5.7) замість T_j^{n+1} і T_{j-1}^n їх вирази у вигляді рядів Тейлора

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[T_j^n + \Delta t \bar{T}_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \bar{T}_{tt} + \frac{(\Delta t)^3}{6} \bar{T}_{ttt} + \dots \right] - T_j^n \right\} + \frac{c}{\Delta x} \times \\ & \times \left\{ T_j^n - \left[T_j^n - \Delta x \cdot \bar{T}_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \bar{T}_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \bar{T}_{xxx} + \dots \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Після простого перегрупування членів у (5.8) маємо

$$\bar{T}_t + c \bar{T}_x = -\frac{\Delta t}{2} \bar{T}_{tt} + \frac{c \Delta x}{2} \bar{T}_{xx} - \frac{(\Delta t)^2}{6} \bar{T}_{ttt} - c \frac{(\Delta x)^2}{6} \bar{T}_{xxx} + \dots \quad (5.9)$$

У лівій частині (5.9) записане вихідне хвильове рівняння, у правій – похибка апроксимації, яка очевидно $\neq 0$. Значення членів у правій частині (5.9) краще зрозуміти, якщо замінити похідні за часом на похідні за простором. Диференціюємо (5.9) за t

$$\bar{T}_{tt} + c \bar{T}_{xt} = -\frac{\Delta t}{2} \bar{T}_{ttt} + \frac{c \Delta x}{2} \bar{T}_{xxt} - \frac{(\Delta t)^2}{6} \bar{T}_{ttt} - \frac{c(\Delta x)^2}{6} \bar{T}_{xxx} + \dots \quad (5.10)$$

Представимо тепер другу похідну за часом у (5.10) через похідні за простором. Для цього продиференціюємо (5.10) за x і помножимо потім результат на $(-c)$. Остаточо дістанемо

$$-c \bar{T}_{tx} - c^2 \bar{T}_{xx} = \frac{c \Delta t}{2} \bar{T}_{ttx} - \frac{c^2 \Delta x}{2} \bar{T}_{xxx} + \frac{c(\Delta t)^2}{6} \bar{T}_{tttx} + \frac{c^2 (\Delta x)^2}{6} \bar{T}_{xxx} + \dots \quad (5.11)$$

Додаючи тепер (5.10) до (5.11), отримаємо

¹⁴ Модифіковане рівняння у вітчизняній літературі має назву диференціального наближення скінченнорізницевої схеми.

$$\begin{aligned} \bar{T}_{tt} = c^2 \bar{T}_{xx} + 0,5 \cdot \Delta t (-\bar{T}_{ttt} + c \bar{T}_{txx} + O(\Delta t)) + \\ + 0,5 \cdot c \Delta x (\bar{T}_{xxt} - \bar{T}_{xxx} + O(\Delta x)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Аналогічно маємо

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ttt} = -c^3 \bar{T}_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x); \\ \bar{T}_{txx} = c^2 \bar{T}_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x); \\ \bar{T}_{xxt} = -c \bar{T}_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Підставляючи тепер (5.12) та (5.13) до (5.9), дістанемо

$$\begin{aligned} \bar{T}_t + c \bar{T}_x = \frac{c \Delta x}{2} (1 - \nu) \bar{T}_{xx} - \frac{c (\Delta x)^2}{6} (2\nu^2 - 3\nu + 1) \bar{T}_{xxx} + \\ + O((\Delta x)^3; (\Delta x)^2 \Delta t; \Delta x (\Delta t)^2; (\Delta t)^3), \end{aligned} \quad (5.14)$$

де $\nu = c \Delta t / \Delta x$. Рівняння типу (5.14) і називають **модифікованим**. Звернемо увагу, що саме його ми в дійсності розв'язуємо при заміні рівняння (5.2) його різницевим аналогом. Права частина в (5.14) є похибкою апроксимації, із чого випливає, що член найменшого порядку у правій частині модифікованого рівняння визначає порядок точності методу. Цей член у правій частині модифікованого рівняння називають **головною частиною послідовності** (позначається ГЧП або G_j^n).

Якщо $\nu = 1$, то права частина в (5.14) буде тотожно дорівнювати нулю (ГЧП $\equiv 0$) і розв'язок різницевого рівняння є **точним розв'язком** вихідного диференціального рівняння (5.2). У цьому випадку маємо алгоритм

$$T_j^{n+1} = T_{j-1}^n, \quad (5.15)$$

розв'язок якого збігається із точним розв'язком вихідного рівняння методом характеристик.

При $\nu \neq 1$ головний член у виразі для похибки апроксимації пропорційний другій похідній за простором \bar{T}_{xx} , тобто він аналогічний дисипативному в'язкому члену в одновимірному рівнянні руху рідини. Ця властивість різницевої схеми, обумовлена наявністю у виразі для похибки похідних **парного порядку**, називається **дисипацією** на різницевій сітці. Схемна в'язкість вирівнює розв'язок рівняння, зменшуючи градієнти всіх параметрів. Наприклад, замість уступу, що має місце для точного розв'язку на рис. 5.2 а,

маємо більш похилу конструкцію (рис. 5.2 б). Числовий розв'язок для випадку, коли похибка є в основному дисипативною, характерний для схем першого порядку точності.

Зауваження

- Про скінченнорізницеву схему, яка дозволяє отримати точний розв'язок рівняння, говорять, що вона задовольняє "умову зсуву".
- При $v \neq 1$ схема з різницями проти течії, уводить до вихідного рівняння додаткову **штучну (схемну)** в'язкість, яка називається **неявною** на відміну від явної штучної в'язкості, яка вводиться до рівняння навмисно.

Іншу, близьку до фізичної, властивість скінченнорізницевих схем називають **дисперсією**. Ця властивість пов'язана із непарними похідними в головній частині послідовності. Дисперсія спотворює співвідношення фаз хвиль, як видно з рис. 5.2 в.

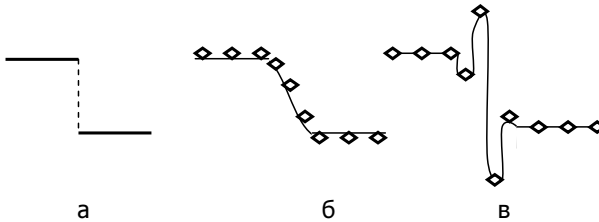


Рис. 5.2. Вплив дисипації (б) і дисперсії (в) на точний розв'язок (а) рівняння переносу

5.2.3. Схема Лакса

Схему (5.6) методу Ейлера можна також зробити стійкою, якщо замінити T_j^n на просторове середнє $(T_{j+1}^n + T_{j-1}^n) / 2$. При цьому одержимо схему Лакса

$$\frac{T_j^{n+1} - (T_{j+1}^n + T_{j-1}^n) / 2}{\Delta t} + c \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (5.16 \text{ а})$$

яка має похибку $\approx O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta x^2/\Delta t)$ та є стійкою при $|v| \leq 1$, згідно з [1].

Модифіковане рівняння для схеми Лакса має вигляд

$$\bar{T}_t + c\bar{T}_x = \frac{c\Delta x}{2} \left(\frac{1}{v} - v \right) \bar{T}_{xx} + \frac{c(\Delta x)^2}{3} (1 - v^2) \bar{T}_{xxx} + \dots \quad (5.16 \text{ б})$$

Із вигляду модифікованого рівняння видно, що схема Лакса при $\nu = 1$ задовольняє "умову зсуву", а при $\nu \neq 1$ відрізняється високим рівнем дисипації.

Зауваження. Метод Лакса досить просто узагальнюється на дво- та тривимірний випадки [14, 15].

5.2.4. Неявний метод Ейлера

Досі ми розглядали лише явні схеми. Дослідимо тепер неявну скінченнорізницеву схему (рис. 5.3 а):

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x} (T_{j+1}^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) = 0, \quad (5.18)$$

яка має похибку апроксимації $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$ та є абсолютно стійкою [1]. Як і для розглянутих вище випадків використання неявних схем, перехід на наступний шар за часом виконується після розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею за допомогою алгоритму прогонки (TDMA)

$$\frac{\nu}{2} T_{j+1}^{n+1} + T_j^{n+1} - \frac{\nu}{2} T_{j-1}^{n+1} = T_j^n. \quad (5.19)$$

Головний член похибки апроксимації для неявної схеми Ейлера має вигляд

$$\text{ГЧП} = \left(\frac{1}{2} c^2 \Delta t \right) \bar{T}_{xx} - \left[\frac{1}{6} c (\Delta x)^2 + \frac{1}{3} c^3 (\Delta t)^2 \right] \bar{T}_{xxx} + \dots,$$

що вказує на дисипативний характер отриманого розв'язку.

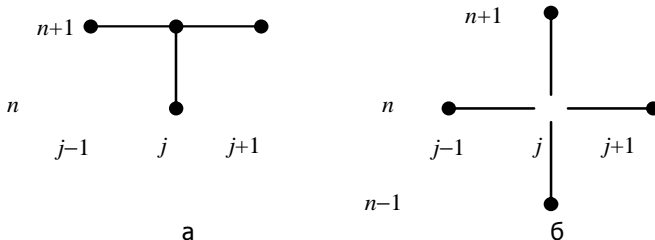


Рис. 5.3. Шаблони неявного методу Ейлера (а) та методу "чехарда" (б)

5.3. Методи підвищеної точності

5.3.1. Метод із переступанням "чехарда"

Метод із переступанням (LF) є найпростішим явним тришаровим методом другого порядку точності (рис. 5.3 б). Скінченно-різницеву апроксимацію цього методу подають у вигляді

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (5.20)$$

Точність методу $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, він є стійким при $|v| \leq 1$ [1].

Головна частина послідовності для "чехарди" має вигляд

$$\text{ГЧП} = \frac{c(\Delta x)^2}{6} (v^2 - 1) \bar{T}_{xxx} - \frac{c(\Delta x)^4}{120} (9v^4 - 10v^2 + 1) \bar{T}_{xxxx} + \dots,$$

на основі якого робимо висновок про те, що схема має в основному **дисперсійні властивості**.

Зауваження

- На першому кроці для методу "чехарда" необхідно використати двокроковий метод.
- "Переступання" приводить до появи двох незалежних розв'язків, тому остаточно розв'язок знаходять усередненням за сусідніми вузлами.
- Скорочення пам'яті, яка зростає для тришарових схем, можна досягти, записуючи замість T_j^{n-1} величину T_j^{n+1} .
- При $v = \pm 1$ схема "чехарда" задовольняє "умову зсуву".

5.3.2. Метод Лакса–Вендрофа

Схема методу Лакса–Вендрофа будується, виходячи з розв'язання в ряд Тейлора

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \Delta t \cdot \bar{T}_t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \bar{T}_{tt} + O((\Delta t)^3). \quad (5.21)$$

Оскільки із хвильового рівняння впливає, що

$$\bar{T}_t = -c \bar{T}_x, \quad \bar{T}_{tt} = c^2 \bar{T}_{xx}, \quad (5.22)$$

то підставляючи (5.22) до (5.21), дістанемо

$$T_j^{n+1} = T_j^n - c\Delta t \bar{T}_x + \frac{1}{2}c^2(\Delta t)^2 \bar{T}_{xx} + O((\Delta t)^3). \quad (5.23)$$

Якщо замінити тепер \bar{T}_x і \bar{T}_{xx} центральними різницями, остаточно отримаємо

$$T_j^{n+1} = T_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (T_{j+1}^n - T_{j-1}^n) + \frac{c^2(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} (T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n). \quad (5.24)$$

Схема має точність $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ і стійка при $|v| \leq 1$ [1]. Головну частину послідовності для схеми Лакса–Вендрофа запишемо у вигляді

$$\text{ГЧП} = -c \frac{(\Delta x)^2}{6} (1-v^2) \bar{T}_{xxx} - \frac{c(\Delta x)^3}{8} v(1-v^2) \bar{T}_{xxxx} + \dots,$$

що вказує на дисперсійний характер похибки апроксимації.

5.3.3. Двокроковий метод Лакса–Вендрофа

Метод є модифікацією попереднього й найчастіше застосовується для розв'язання нелінійних рівнянь.

Крок 1 – це метод Лакса для одержання розв'язку на першому напівкроці за часом:

$$\frac{T_{j+1/2}^{n+1/2} - (T_{j+1}^n + T_j^n)/2}{\Delta t/2} + c \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{\Delta x} = 0. \quad (5.25 \text{ а})$$

Крок 2 – метод із переступанням, застосовний на другому напівкроці:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + c \frac{T_{j+1/2}^{n+1/2} - T_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0. \quad (5.25 \text{ б})$$

Ця схема також має точність апроксимації $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ та є стійкою при $|v| \leq 1$ [1].

5.3.4. Метод Мак–Кормака (предиктор–коректор)

Цей метод є варіантом попереднього двокрокового методу Лакса–Вендрофа, але без обчислень значень функції у точках $j + 1/2$ та $j - 1/2$. Алгоритм методу також складається із двох кроків [10].

Предиктор:

$$\overline{T_j^{n+1}} = T_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (T_{j+1}^n - T_j^n). \quad (5.26 \text{ а})$$

Коректор:

$$T_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[T_j^n + \overline{T_j^{n+1}} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\overline{T_j^{n+1}} - \overline{T_{j-1}^{n+1}}) \right]. \quad (5.26 \text{ б})$$

Умова стійкості та точність методу збігаються із двокроковим методом Лакса–Вендрофа.

Зауваження. У предикторі похідна $\partial \overline{T} / \partial x$ апроксимується різницею вперед, а у коректорі – різницею назад.

5.3.5. Метод різниць проти течії

Запропонований Бімом та Уормінгом [26] метод різниць проти течії є видозміненим методом Мак-Кормака, у якому на кроці предиктор, так і на кроці коректор у похідній $\partial \overline{T} / \partial x$ використовуються різниці назад. Маємо також двокроковий алгоритм.

Предиктор:

$$\overline{T_j^{n+1}} = T_j^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (T_j^n - T_{j-1}^n). \quad (5.27 \text{ а})$$

Коректор:

$$T_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[T_j^n + \overline{T_j^{n+1}} - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (\overline{T_j^{n+1}} - \overline{T_{j-1}^{n+1}}) - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (T_j^n - 2T_{j-1}^n + T_{j-2}^n) \right]. \quad (5.27 \text{ б})$$

Головна частина послідовності для схеми різниць проти течії має вигляд

$$\tilde{A} \times \tilde{I} = \frac{c(\Delta x)^2}{6} (1-\nu)(2-\nu) \overline{T}_{xxx} - \frac{(\Delta x)^4}{8\Delta t} \nu (1-\nu)^2 (2-\nu) \overline{T}_{xxxx} + \dots$$

Схема із загальною точністю $\approx O(\Delta t^2, (\Delta t \Delta x), \Delta x^2)$ і при $\nu = 1$ та $\nu = 2$ задовольняє "умову зсуву", а отже, є точною. Із умови Неймана також випливає, що ця різницева схема стійка при $|\nu| \leq 2$ [1].

Зауваження. При $|\nu| < 1$ двокроковий метод Лакса–Вендрофа та метод різниць проти течії мають суперечливі за фазою похибки, тому дисперсію можна суттєво зменшити, якщо застосувати лінійну комбінацію цих методів, у чому і полягає відомий метод Фрома [1].

5.3.6. Центрована за часом неявна схема

Для побудови центрованої за часом неявної схеми (СТІ) другого порядку точності відніmemo один ряд Тейлора від іншого

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \Delta t (\bar{T}_t)_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} (\bar{T}_{tt})_j^n + \frac{(\Delta t)^3}{6} (\bar{T}_{ttt})_j^n + \dots$$

$$T_j^n = T_j^{n+1} - \Delta t (\bar{T}_t)_j^{n+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} (\bar{T}_{tt})_j^{n+1} - \frac{(\Delta t)^3}{6} (\bar{T}_{ttt})_j^{n+1} + \dots$$

та заміниmo $(\bar{T}_{tt})_j^{n+1}$ на $(\bar{T}_{tt})_j^n + \Delta t (\bar{T}_{ttt})_j^n + \dots$. Остаточno маемо

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left[(\bar{T}_t)_j^n + (\bar{T}_t)_j^{n+1} \right] + O((\Delta t)^3). \quad (5.28)$$

Цей вираз для похідної за часом називається скінченнорізницевою апроксимацією за Кранком–Ніколсоном. Підставляючи $\bar{T}_t = -c\bar{T}_x$, дістаємо

$$T_j^{n+1} = T_j^n - \frac{c\Delta t}{2} \left[(\bar{T}_x)_j^n + (\bar{T}_x)_j^{n+1} \right] + O((\Delta t)^3). \quad (5.29)$$

Якщо тепер апроксимувати \bar{T}_x центральною різницею, то

$$T_j^{n+1} = T_j^n - \frac{V}{4} (T_{j+1}^{n+1} + T_{j+1}^n - T_{j-1}^{n+1} - T_{j-1}^n). \quad (5.30)$$

Схема має точність апроксимації $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ та є безумовно стійкою [1]. Вираз для головної частини послідовності

$$G_j^n = - \left[\frac{c^3 (\Delta t)^2}{12} + \frac{c (\Delta x)^2}{6} \right] \bar{T}_{xxx} - \left[\frac{c (\Delta x)^4}{120} + \frac{c^3 (\Delta t)^2 (\Delta x)^2}{24} + \frac{c^4 (\Delta t)^4}{80} \right] \bar{T}_{xxxx} + \dots \quad (5.31)$$

також указує на дисперсійний, в основному, характер похибки.

Зауваження. До виразу для ГЧП (5.31) не входять похідні парного порядку, тобто неявна штучна в'язкість $\equiv 0$, тому при використанні цієї схеми для запобігання нелінійній нестійкості часто вводять "згладжуючий" член у вигляді явної "штучної" в'язкості.

Для центрованої за часом неявної схеми можна досягти й четвертого порядку апроксимації за простором, якщо для \bar{T}_x використати співвідношення

$$(T_x)_j = \frac{1}{2\Delta x} \cdot \frac{\bar{\delta}_x}{\left(1 + \frac{\bar{\delta}_x^2}{6}\right)} T_j + O\left((\Delta x)^4\right), \quad (5.32)$$

де $\bar{\delta}_x T_j \equiv L_x T_j = T_{j+1} - T_{j-1}$; $\bar{\delta}_x^2 \equiv L_{xx} = \bar{\delta}_x (\bar{\delta}_x T_j) = T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}$.

Позначимо $\bar{T}_x \equiv V$. Тепер представимо (5.32) у вигляді

$$\left(1 + \frac{\bar{\delta}_x^2}{6}\right) V_j = \frac{\bar{\delta}_x T_j}{2\Delta x},$$

що можна переписати, як

$$\frac{1}{6}(V_{j+1} + 4V_j + V_{j-1}) = \frac{\bar{\delta}_x T_j}{2\Delta x}. \quad (5.33)$$

До останнього співвідношення похідна \bar{T}_x , яка нас цікавить, входить неявно, і для того щоб, знаючи T_j , її визначити, треба розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею методом прогонки (TDMA).

5.3.7. Метод Русанова

Досі ми розглядали лише методи першого або другого порядку точності. У літературі опубліковано лише кілька методів третього порядку точності. Найбільш популярним є явний трикроковий метод третього порядку точності, який запропонував В. В. Русанов [15, 18].

Крок 1:

$$T_{j+1/2}^{(1)} = \frac{1}{2}(T_{j+1}^n + T_j^n) - \frac{1}{3}v(T_{j+1}^n - T_j^n). \quad (5.35)$$

Крок 2:

$$T_j^{(2)} = T_j^n - \frac{2}{3}v(T_{j+1/2}^{(1)} - T_{j-1/2}^{(1)}). \quad (5.36)$$

Крок 3:

$$T_j^{n+1} = T_j^n - \frac{1}{24}v(-2T_{j+2}^n + 7T_{j+1}^n - 7T_{j-1}^n + 2T_{j-2}^n) - \frac{3}{8}v(T_{j+1}^{(2)} - T_{j-1}^{(2)}) - \frac{\omega}{24}\bar{\delta}_x^4 T_j^n, \quad (5.37)$$

де $\widehat{\delta}_x^4 T_j^n = T_{j+2}^n - 4T_{j+1}^n + 6T_j^n - 4T_{j-1}^n + T_{j-2}^n$ – різницевий оператор четвертого порядку. Додавання члена $\widehat{\delta}_x^4 T_j^n$ необхідне для виконання умови стійкості

$$|v| \leq 1, \quad (4v^2 - v^4) \leq \omega \leq 3. \quad (5.38)$$

Із умови Неймана випливає: якщо $\omega = 0$, тобто член із $\widehat{\delta}_x^4 T_j^n$ відсутній, схема абсолютно нестійка. Головна частина послідовності для цієї схеми має вигляд

$$G_j^n = -\frac{c(\Delta x)^3}{24} \left(\frac{\omega}{v} - 4v + v^3 \right) \bar{T}_{xxxx} + \frac{c(\Delta x)^4}{120} \times \\ \times \left(-5\omega + 4 + 15v^2 - 4v^4 \right) \bar{T}_{xxxxx} + \dots \quad (5.39)$$

Зауваження

• Із виразу (5.36) випливає, що для зниження дисипативних властивостей схеми можна покласти

$$\omega = 4v^2 - v^4. \quad (5.40)$$

Дисперсійні властивості схеми зменшуються, якщо прирівняти до нуля член при \bar{T}_{xxxxx} , тобто якщо

$$\omega = (4v^2 + 1)(4 - v^2) / 5. \quad (5.41)$$

• При розв'язанні гіперболічних рівнянь явним методам надають перевагу перед неявними, адже у цьому випадку маємо справу з нестационарними розв'язками, і нас зазвичай цікавлять значення величин через малі проміжки часу Δt .

Розділ 6

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

У цьому розділі розглядатимемо скінченнорізницеві схеми, за допомогою яких можна розв'язувати крайові задачі для найпростіших модельних лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, у тому числі для стаціонарного рівняння конвекції–дифузії і нестаціонарного рівняння переносу другого порядку (нестаціонарне рівняння конвекції–дифузії). Ці рівняння називають **модельними**, адже за деяких початкових і граничних умов вони мають аналітичні розв'язки. Знаючи ці розв'язки, досить легко оцінити й зіставити різні скінченнорізницеві схеми, які надалі використовуватимуться і для розв'язання складніших, у тому числі нелінійних, рівнянь у частинних похідних.

6.1. Найпростіші схеми апроксимації стаціонарного рівняння конвекції–дифузії. Поняття сіткового числа Рейнольдса

Для багатьох задач обтікання дисипативні механізми є дієвими лише у вузькому шарі, звичайно біля меж обтікання (примежовий шар). Числові розв'язки, побудовані на сітках, які пристосовані до основного потоку, часто осцилюють у зоні примежового шару. Корисним модельним рівнянням тут є стаціонарне рівняння у вигляді

$$u \frac{d\bar{T}}{dx} - \alpha \frac{d^2\bar{T}}{dx^2} = 0, \quad (6.1)$$

яке відображає стаціонарний баланс між конвекцією та дифузією.

За граничних умов

$$\bar{T}(0) = 0, \bar{T}(1) = 1, \quad (6.2)$$

в інтервалі $0 \leq x \leq 1$ існує точний розв'язок крайової задачі (6.1), (6.2):

$$\bar{T}(x) = \frac{e^{ux/\alpha} - 1}{e^{u/\alpha} - 1}. \quad (6.3)$$

Розв'язок практично сталий на всьому інтервалі $[0,1)$ та різко зростає у вузькому околі $x = 1$ (рис. 6.1).

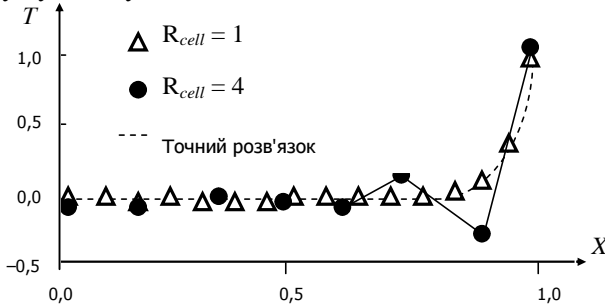


Рис. 6.1. Вплив сіткового числа Рейнольдса на розв'язок рівняння конвекції-дифузії

Скориставшись для апроксимації (6.1) центральними різницями, маємо

$$-(1 + 0,5 \cdot \mathbf{R}_{cell})T_{j-1} + 2T_j - (1 - 0,5 \cdot \mathbf{R}_{cell})T_{j+1} = 0, \quad (6.4)$$

де $\mathbf{R}_{cell} = u\Delta x/\alpha$ – сіткове число Рейнольдса. Точність апроксимації тут $\approx O(\Delta x^2)$. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за граничних умов (6.2) подано на рис. 6.1 для різних \mathbf{R}_{cell} . З умови стійкості розв'язку системи (6.4), яка вимагає діагональної переваги для її матриці, очевидно, що коливань розв'язку не буде, якщо $\mathbf{R}_{cell} \leq 2$, причому остання умова пов'язана також із умовою **дійсності власних чисел матриці** системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Якщо ж для представлення похідної $\partial \bar{T}/\partial x$ у (5.39) скористатися різницями проти течії $(T_j - T_{j-1})/\Delta x$, то осциляції розв'язку не виникають. Алгоритм розв'язання при цьому має вигляд

$$-(1 + \mathbf{R}_{cell})T_{j-1} + 2(1 + 0,5 \cdot \mathbf{R}_{cell})T_j - T_{j+1} = 0. \quad (6.5)$$

Але точність апроксимації для рівняння (6.1) уже буде $\approx O(\Delta x)$. Розв'язок виявляється збіжним за будь-яких умов, адже у цьому випадку матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь має діагональну перевагу й усі дійсні власні значення.

Зауваження

- Розвинення рівняння (6.5) у ряд Тейлора показує, що воно апроксимує із точністю $\approx O(\Delta x^2)$ рівняння

$$u \frac{d\bar{T}}{dx} - \alpha(1 + 0,5 \cdot \mathbf{R}_{cell}) \frac{d^2\bar{T}}{dx^2} = 0, \quad (6.6)$$

тобто використання різниць проти течії приводить до появи штучної дифузії $0,5\mathbf{R}_{cell}$ аналогічно появі штучної дифузії при використанні різниць проти течії для рівняння конвекції. Умова одержання точного розв'язку із (6.6) більш жорстка, ніж для (6.1), а саме: $0,5\mathbf{R}_{cell} \ll 1$.

- Якщо при $x = 1$ замість умови Дирихле поставити граничну умову Неймана, характер розв'язання істотно не зміниться. Проте для більших значень u/α схема із центральними різницями приводить до ще більших осциляцій.

6.2. Схеми з різницями проти течії підвищеного порядку точності

Характер розв'язків, що мали місце вище за апроксимацій рішення (6.1), наводить на думку, що для одержання точного розв'язку необхідно використати чотириточкове представлення для похідної за простором $\partial\bar{T}/\partial x$. Отже, при $u > 0$ маємо

$$L_x^{(4)} T \equiv \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta x} + \frac{q(T_{j-2} - 3T_{j-1} + 3T_j - T_{j+1})}{3\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (6.7)$$

При $u < 0$ відповідно маємо

$$L_x^{(4)} T \equiv \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta x} + \frac{q(T_{j-1} - 3T_j + 3T_{j+1} - T_{j+2})}{3\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (6.8)$$

Розвинення за формулою Тейлора в околі j -го вузла дає

$$T_{j-2} - 3T_{j-1} + 3T_j - T_{j+1} \equiv \left[-\Delta x^3 \bar{T}_{xxx} + 0,5\Delta x^4 \bar{T}_{xxxx} + \dots \right]_j. \quad (6.9)$$

Тобто при $q = 0,5$ у схемі (5.45) виключається член із $\Delta x^2 \bar{T}_{xxx}$ і схема стає $\approx O(\Delta x^3)$. Використання (5.45) для апроксимації рішення (5.39) дає алгоритм

$$\frac{q}{3} \mathbf{R}_{cell} T_{j-2} - [1 + (q + 0,5) \mathbf{R}_{cell}] T_{j-1} + (2 + q \cdot \mathbf{R}_{cell}) T_j -$$

$$-\left[1 + \left(\frac{q}{3} - 0,5\right) \mathbf{R}_{cell}\right] T_{j+1} = 0, \quad (6.10)$$

що приводить до необхідності розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь із чотиридіагональною матрицею за узагальненим алгоритмом прогонки. Еквівалентним диференціальним рівнянням для (5.48) буде

$$\begin{aligned} \bar{T}_x - \frac{\Delta x}{\mathbf{R}_{cell}} \bar{T}_{xx} + (1 - 2q) \frac{\Delta x^2}{6} \bar{T}_{xxx} + \left(2q - \frac{1}{\mathbf{R}_{cell}}\right) \frac{\Delta x^3}{12} \bar{T}_{xxxx} + \\ + (1 - 10q) \frac{\Delta x^4}{120} \bar{T}_{xxxxx} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Зауваження

- Практичні задачі характеризуються малими відношеннями α/u , що звичайно дає $\mathbf{R}_{cell} \approx O(1)$ або $\mathbf{R}_{cell} > O(1)$. Останнє означає, що похибка апроксимації у (6.1) може по-різному впливати на точність апроксимації (6.10). Наприклад, при $q \neq 0,5$ найбільше значення у (6.11) має член із \bar{T}_{xxx} . Отже, для задач із малим коефіцієнтом дифузії конвективний член $u\bar{T}_x$ має апроксимуватися із більшою точністю, ніж дифузійний член $\alpha\bar{T}_{xx}$.
- Із проведеного аналізу випливає, що просторові похідні непарного порядку, які входять до помилки апроксимації, в основному, пов'язані з осциляціями розв'язку, а просторові похідні парного порядку – із дисипацією або необмеженим ростом, залежно від знака множника, який стоїть перед похідною.

6.3. Нестационарне рівняння конвекції–дифузії

Одновимірне нестационарне рівняння конвекції–дифузії має вигляд

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0, \quad (6.12)$$

де \bar{T} – пасивна скалярна величина, доступна конвекції зі сталою швидкістю $u(x, t)$ та дифузії. Нехай спочатку u та α – сталі.

Очевидно, що (6.12) є строго параболічним і потребує, як і рівняння дифузії, граничних умов типу Дирихле

$$\bar{T}(0,t) = a(t), \quad \bar{T}(1,t) = b(t) \quad (6.13 \text{ а})$$

або Неймана

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(0,t) = c(t), \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(1,t) = d(t) \quad (6.13 \text{ б})$$

і початкову умову

$$\bar{T}(x,0) = T_0(x). \quad (6.13 \text{ в})$$

Однак за великих u/α можна очікувати, що в (6.12) переважають перші два члени, що приведе до переважання впливу конвекції, тобто рівняння матиме гіперболічний тип. При цьому необхідно пам'ятати, що точні розв'язки рівняння конвекції зазвичай мають вигляд незатухаючої рухомої хвилі (без зменшення амплітуди). Тому за великих u/α можна очікувати, що розв'язок (6.12) матиме вигляд рухомої хвилі зі слабким затуханням.

На основі попереднього аналізу стаціонарного рівняння з конвекцією та дифузією, яке є граничним випадком рівняння (6.12), можна чекати, що якщо за великих u/α використовуватимуться симетричні триточкові алгебраїчні представлення для конвективного члена, то в наближених розв'язках рівняння (6.12) з'являться просторові хвилі.

Для дослідження труднощів, які вносять до обчислювальних схем **одночасно** дифузія та конвекція, у цьому розділі розглядатимемо для апроксимації (6.12) **спільне** використання скінченно-різницевих схем (FTCS, Дюфорта–Франкела), які були раніше досліджені **окремо** для рівнянь дифузії і для рівнянь конвекції.

6.3.1. Явні схеми

Використання схеми FTCS (вперед за часом, центральна за простором) для апроксимації (6.12) приводить до алгебраїчного рівняння

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + \frac{u(T_{j+1}^n - T_{j-1}^n)}{2\Delta x} - \frac{\alpha(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{\Delta x^2} = 0, \quad (6.14)$$

що, у свою чергу, приводить до алгоритму

$$T_j^{n+1} = (S + 0,5C)T_{j-1}^n + (1 - 2S)T_j^n + (S - 0,5C)T_{j+1}^n, \quad (6.15)$$

де $S = \alpha \Delta t / \Delta x^2$, а число Куранта $C = u \Delta t / \Delta x$.

Із розвинення в ряд Тейлора поблизу вузла (j, n) випливає, що (6.15) апроксимує рівняння (6.12) із похибкою $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$ та із похибкою $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ рівняння

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} = 0, \quad (6.16)$$

де підкреслений член можна інтерпретувати як головний член похибки апроксимації. Виключимо, як і раніше, другу похідну за часом, замінивши її похідними за простором, маємо

$$\begin{aligned} \bar{T}_t + u \bar{T}_x - (\alpha - \alpha') \bar{T}_{xx} - \left(\alpha u \Delta t + u^3 \frac{\Delta t^2}{3} - u \frac{\Delta x^2}{6} \right) \bar{T}_{xxx} + \\ + \left(0,5\alpha^2 \Delta t - \alpha u^2 \Delta t^2 + 0,25u^4 \Delta t^3 - \alpha \frac{\Delta x^2}{12} + u^2 \frac{\Delta t \Delta x^2}{6} \right) \bar{T}_{xxxx} = 0, \end{aligned} \quad (6.17)$$

де $\alpha' = u^2 \Delta t / 2$. Очевидно, що за великих значень u/α член із штучною дифузиею $\alpha' \bar{T}_{xx}$, якщо не обмежити Δt , виявляється порівнянним за величиною із фізичною дифузиею $\alpha \bar{T}_{xx}$. Таким чином, використання різницевої схеми першого порядку точності за часом вносить до рівняння переносу дисипацію та дисперсію першого порядку. Якщо ж величина \bar{T}_{xxxx} не є дуже великою, то останній член у (6.17) за величиною не буде істотним. Таким чином, обмеження на крок за часом Δt дає умови стійкості схеми у вигляді

$$\Delta t \ll 2\alpha/u^2 \quad \text{або} \quad C^2 \ll 2S \quad \text{або} \quad \mathbf{R}_{cell} (\equiv C/S) \ll 2/C. \quad (6.18)$$

Зауваження

- Виходячи з умов (6.18) маємо вагому причину використання для рівняння переносу схем $\approx O(\Delta t^2, \dots)$.
- Схема FTCS умовно стійка для рівняння дифузії і **завжди нестійка** для рівняння конвекції, тому для рівняння переносу маємо також умовну стійкість при

$$0 \leq C^2 \leq 2S \leq 1, \quad (6.19)$$

причому (6.19) припускає існування розв'язку при $\mathbf{R}_{cell} = u \Delta x / \alpha = C/S > 2$. Тобто можна очікувати на появу в цьому випадку осцилюючих розв'язків.

Об'єднавши схеми "чехарда" та Дюфорта–Франкела, для (6.12) маємо

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\alpha \left[T_{j-1}^n - (T_j^{n-1} + T_j^{n+1}) + T_{j+1}^n \right]}{\Delta x^2} = 0. \quad (6.20)$$

Аналіз стійкості показує, що якщо $C = u\Delta t/\Delta x \leq 1$, то не потрібні додаткові обмеження для параметра S [18]. Головний член похибки апроксимації для схеми "чехарда" Дюфорта–Франкела має вигляд

$$\text{ГЧП} = \alpha C^2 \bar{T}_{xx} + (1 - C^2) \left[\frac{u(\Delta x)^2}{6} - \frac{2\alpha^2 C^2}{u} \right] \bar{T}_{xxx} + \dots, \quad (6.21)$$

що вимагає виконання умови $\Delta t \ll \Delta x$, а точніше $C^2 \ll 1$. Виконання останньої умови є дуже строгим обмеженням.

Якщо у схемі FTCS для представлення $\partial \bar{T} / \partial x$ замість центральних різниць використати різниці проти течії, то для $u > 0$ одержимо алгоритм

$$T_j^{n+1} = (S + C)T_{j-1}^n + (1 - 2S - C)T_j^n + ST_{j+1}^n. \quad (6.22)$$

Алгебраїчне рівняння (6.22) апроксимує диференціальне рівняння (6.12) із точністю $\approx O(\Delta t, \Delta x)$, причому з виразу для похибки апроксимації (головні члени)

$$G_j^n = -\frac{u\Delta x}{2}(1 - C)\bar{T}_{xx} - \left[C\alpha\Delta x - \frac{u(\Delta x)^2}{6}(1 - 3C + 2C^2) \right] \bar{T}_{xxx} + \dots \quad (6.23)$$

впливає, що ця схема вносить штучну дифузію із коефіцієнтом $\alpha' = 0,5u\Delta x(1 - C)$. Зауважимо, що такий самий член виникає й у випадку рівняння переносу, тому потрібна точність апроксимації забезпечується тут аналогічними умовами

$$\alpha' \ll \alpha \quad \text{або} \quad \mathbf{R}_{cell} \ll 2/(1 - C). \quad (6.24)$$

Безпосередній аналіз стійкості схеми за Нейманом тут дає умову [18]

$$C + 2S \leq 1, \quad (6.25)$$

з якої впливає обмеження на крок за часом

$$\Delta t \leq 0,5\Delta x^2 / (1 + 0,5 \cdot \mathbf{R}_{cell}), \quad (6.26)$$

яке є набагато строгішим, ніж для рівняння дифузії.

Схема Лакса–Вендрофа утримує другий порядок точності апроксимації вихідного рівняння (4.50) як за часом, так і за простором і має вигляд

$$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + uL_x T_j^n - \alpha^* L_{xx} T_j^n = 0, \quad (6.27)$$

де $\alpha^* = \alpha + 0,5uC \Delta x$; $L_x = \frac{1}{2\Delta x} \{-1, 0, +1\}$;

$$L_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2} \{1, -2, 1\}; \quad \Delta T_j^{n+1} = T_j^{n+1} - T_j^n.$$

Для оцінювання стійкості й точності схеми звернемо увагу на те, що для рівняння переносу схема Лакса–Вендрофа може бути представлена як FTCS із модифікованою дифузцією α^* . Тоді умовою стійкості буде $0 \leq C^2 \leq 2S^* \leq 1$, де $S^* = \alpha^* \Delta t / \Delta x^2$. Необхідна точність апроксимації $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ досягається тут при $\mathbf{R}_{cell} \leq 2$ (щоб запобігти просторовим осциляціям).

6.3.2. Неявні схеми

Використання неявних схем для розв'язання рівняння дифузії вважається найбільш ефективним, оскільки не потребує додаткових умов стійкості для схеми. Ці схеми тут буде запропоновано також і для розв'язання рівняння переносу. Схема Кранка–Нікольсона дає скінченнорізнцеве представлення для (6.12) у вигляді алгебраїчного рівняння

$$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + \{uL_x - \alpha L_{xx}\} \times \left\{ \frac{T_j^n + T_j^{n+1}}{2} \right\} = 0, \quad (6.28)$$

яке можна переписати як алгоритм

$$\begin{aligned} & -(S + 0,5C)T_{j-1}^{n+1} + 2(1 + S)T_j^{n+1} - (S - 0,5C)T_{j+1}^{n+1} = \\ & = (S + 0,5C)T_{j-1}^n + 2(1 - S)T_j^n + (S - 0,5C)T_{j+1}^n. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Вигляд головної частини послідовності для схеми Кранка–Нікольсона

$$G_j^n = \frac{u(\Delta x)^2}{6} (1 + 0,5C^2) \bar{T}_{xxx} - \frac{\alpha(\Delta x)^2}{12} (1 + 3C^2) \bar{T}_{xxx} + \dots \quad (6.30)$$

указує, що алгебраїчне рівняння (6.29) апроксимує вихідне рівняння (6.12) із похибкою $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, причому проблема штучної дифузії не виникає. Аналіз стійкості алгоритму за Нейманом не дає жодних додаткових обмежень ні на C , ні на S [18]. Але через необхідність усунення осциляцій потрібна точність розв'язку досягається при $\mathbf{R}_{cell} = u \Delta x / \alpha \leq 2$.

Використовується для розв'язання рівняння переносу (6.12) й тришарова чисто неявна схема (G3LS):

$$\frac{3}{2} \frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{\Delta T_j^n}{\Delta t} + \{u L_x - \alpha L_{xx}\} T_j^{n+1} = 0. \quad (6.31)$$

Вигляд головної частини послідовності для схеми G3LS

$$G_j^n = \frac{u(\Delta x)^2}{6} (1 + 2C^2) \bar{T}_{xxx} - \frac{\alpha(\Delta x)^2}{12} (1 + 12C^2) \bar{T}_{xxxx} + \dots \quad (6.32)$$

також указує на те, що алгебраїчне рівняння (6.31) апроксимує вихідне рівняння (6.12) із похибкою $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, причому проблема штучної дифузії не виникає. Аналіз стійкості алгоритму за Нейманом не дає жодних додаткових обмежень ні на C , ні на S [18]. Водночас через необхідність усунення осциляцій потрібна точність розв'язку досягається при $\mathbf{R}_{cell} = u \Delta x / \alpha \leq 2$.

Розглянуті неявні схеми мають задовільну поведінку своїх обчислювальних алгоритмів для рівняння переносу як щодо їх дисипативних, так і щодо дисперсійних властивостей. Побудуємо тепер на основі схеми Кранка–Нікольсона дві нові розрахункові схеми, які мають набагато кращі дисперсійні характеристики. Перша схема є узагальненням схеми Кранка–Нікольсона з масовим оператором. Для одновимірного рівняння конвекції–дифузії вона має вигляд

$$M_x \left(\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} \right) + (u L_x - \alpha L_{xx}) 0,5 (T_j^n + T_j^{n+1}) = 0, \quad (6.33)$$

де масовий оператор $M_x \equiv \{\delta, (1 - 2\delta), \delta\}$, а L_x, L_{xx} – умовні позначення для різницевих операторів. Параметр δ вибирають таким чином, щоб зменшити дисперсійну помилку схеми. Очевидно, що схема (6.33) приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею, яка ефективно розв'язується методом прогонки (TDMA). Аналіз стійкості за Нейманом показує, що ця схема стійка при $\delta \leq 0,25$ [18].

Модифіковане рівняння для довгохвильових характеристик цієї схеми має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + u \Delta x^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{C^2}{12} - \delta \right) \frac{\partial^3 \bar{T}}{\partial x^3} - \\ - \alpha \Delta x^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{C^2}{4} - \alpha \right) \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Формально (6.34) є схемою другого порядку точності. Але очевидно, що вибором $\delta = 1/6 + C^2/12$ можна перетворити на нуль молодший член із дисперсією в помилці апроксимації. Якщо, крім того, $C^2 < 0,5$, то молодший дисипативний член вноситиме позитивну дисипацію до помилки апроксимації. Однак за оптимального вибору δ для стійкості схеми достатньо, щоб $C \leq 1,0$.

Альтернативним засобом для покращання дисперсійних властивостей схеми Кранка–Нікольсона є використання чотири-точкової схеми з різницями проти течії

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + \left(u L_x^{(4)} - \alpha L_{xx} \right) 0,5 \left(T_j^n + T_j^{n+1} \right) = 0, \quad (6.35)$$

де при $u \geq 0$

$$L_x^{(4)} T \equiv \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta x} + \frac{q(T_{j-2} - 3T_{j-1} + 3T_j - T_{j+1})}{3\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (6.36)$$

Вираз (6.36) є чотириточковим конвективним оператором, уведеним раніше при розгляді стаціонарного рівняння з конвекцією та дифузією. Підстановка (6.36) до (6.35) дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь із чотиридіагональною матрицею, яка розв'язується за допомогою узагальненого алгоритму прогонки. Схема (6.35) є стійкою при $q \geq -3/\mathbf{R}_{cell}$. Практично остання умова не є обмеженням, оскільки нас цікавлять лише додатні значення q . Еквівалентним рівнянням для (6.35) буде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + u \Delta x^2 \left(\frac{(1-2q)}{6} + \frac{C^2}{12} \right) \frac{\partial^3 \bar{T}}{\partial x^3} - \\ - u \frac{\Delta x^3}{\mathbf{R}_{cell}} \left(\frac{1-2q\mathbf{R}_{cell}}{12} + \frac{C^2}{4} \right) \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

У (6.37) $u \Delta x^3 / \mathbf{R}_{cell} = \alpha \Delta x^2$. Очевидно, що для потоків із $\mathbf{R}_{cell} \gg 1$ член із дисперсією дає найбільший внесок до помилки апроксимації, що можна усунути, поклавши $q = 1/2 + C^2/4$. За такого вибору q і великих значень \mathbf{R}_{cell} дисипативний член має найменший порядок і вносить додатну дисипацію.

Задачі

1. Отримати модифіковане рівняння для схеми Лакса для одновимірного лінійного рівняння конвекції. Зберегти члени до \bar{u}_{xxx} .

2. Отримати модифіковане рівняння для схеми із переступанням "чехарда" для одновимірного лінійного рівняння конвекції. Зберегти члени до \bar{u}_{xxxx} .

3. Розв'язати за схемою Лакса задачу про поширення зрізаної синусоїдальної хвилі для рівняння $\bar{T}_t + u \bar{T}_x = 0$ за початкової умови

$$\bar{T}(x, 0) = \begin{cases} \sin(10\pi x), & 0 \leq x \leq 0,1, \\ 0, & 0,1 < x \leq 1,0 \end{cases}$$

та граничних умов $\bar{T}(0, t) = 0$, $\bar{T}(1, t) = 0$. Нехай $u = 0,1$, число Куранта $C = 0,8$. Використати сітку, що має 41 точку за простором і зробити 40 кроків за часом. Отриманий результат порівняти із точним розв'язком.

4. Повторити задачу 3, використовуючи явну скінченнорізницеву схему Лакса–Вендрофа другого порядку точності.

5. Повторити задачу 3 із застосуванням явної скінченнорізницевої схеми з переступанням "чехарда" другого порядку точності.

6. Повторити задачу 3, використовуючи явну схему Русанова підвищеного порядку точності.

7. Повторити задачу 3, використовуючи неявну центровану за часом скінченнорізницеву схему другого порядку точності.

8. Розв'язати за схемою FTCS задачу про рух температурного фронту для рівняння $\bar{T}_t + u \bar{T}_x - \alpha \bar{T}_{xx} = 0$, за початкової умови

$$\bar{T}(x, 0) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x \leq 0; \\ 0, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

та граничних умов $\bar{T}(-2, t) = 1$, $\bar{T}(2, t) = 0$. Нехай $u = 0,5$; $S = 0,25$ і число Куранта $C = \{0,25; 0,375; 0,5; 0,75\}$. Використати сітку, що має 21 точку за простором, і зробити 10 кроків за часом. Отримані результати порівняти з точним розв'язком.

9. Повторити задачу 8 для явної схеми Лакса–Вендрофа.
10. Повторити задачу 8 для явної чотириточкової схеми з різницями проти течії.
11. Повторити задачу 8 для неявної схеми Кранка–Нікольсона.
12. Повторити задачу 8 для модифікації неявної схеми Кранка–Нікольсона з масовим оператором (6.33). Параметр δ вибрати таким чином, щоб зменшити дисперсійну помилку схеми. Отриманий результат порівняти з результатами задачі 9.
13. Повторити задачу 8 для чотириточкової схеми Кранка–Нікольсона з різницями проти течії (6.35), (6.36). Використовуючи модифіковане рівняння (6.37), вибрати оптимальне значення для q таким чином, щоб зменшити дисперсійну помилку схеми. Отриманий результат порівняти з результатами задачі 9.

Розділ 7

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

У попередніх розділах ми розглядали використання різних сіткових методів для розв'язання простих лінійних задач. Це дозволило краще зрозуміти ці методи та їхні особливості. На жаль, у гідромеханіці нам частіше доводиться розв'язувати саме нелінійні задачі. Тому корисно спочатку розглянути деяке просте модельне нелінійне рівняння, будова якого аналогічна будові основних рівнянь гідромеханіки. Це рівняння повинно мати члени, що описують ті самі фізичні процеси: конвекцію, дифузю або дисипацію, а також нестационарні процеси.

Просте одновимірне **нелінійне рівняння**¹⁵, яке включає в'язкий і конвективний члени, запропоноване Бюргерсом [15],

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}. \quad (7.1)$$

Якщо в (7.1) в'язкий член у правій частині $\neq 0$, то воно має параболічний тип, якщо в'язкий член у правій частині $\equiv 0$, то таке рівняння має гіперболічний тип:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0. \quad (7.2)$$

7.1. Рівняння Бюргерса для нев'язкої течії

Рівняння Бюргерса для нев'язкої течії (7.2) є **нелінійним рівнянням конвекції**. Наявність нелінійності в рівнянні дозволяє розвиватися неперервним розв'язкам. На рис. 7.1 схематично проілюстровано, як протікає такий процес. Конвекція несе хви-

¹⁵ Тут і далі в цьому розділі ризикою зверху позначено розмірні змінні.

лю зліва направо, на рисунку показано розв'язки для послідовних значень часу $t = \{0, t_1, t_2\}$. Точки на хвилі, де значення швидкості конвекції \bar{u} більші, рухаються швидше й у результаті випереджають ділянки хвилі, що рухаються з меншою швидкістю. У момент $t = t_2$ необхідно постулювати появу ударної хвилі (ab), при переході через яку швидкість конвекції \bar{u} змінюється розривним чином, у противному разі в момент t_2 розв'язок (4.72) стає **не єдиним**. Таким чином, повне рівняння Бюргерса, зокрема рівняння Бюргерса для нев'язкої течії, є модельною задачею для перевірки розрахунків течій, у процесі яких передбачаються дуже великі градієнти швидкості течії або ударні хвилі.

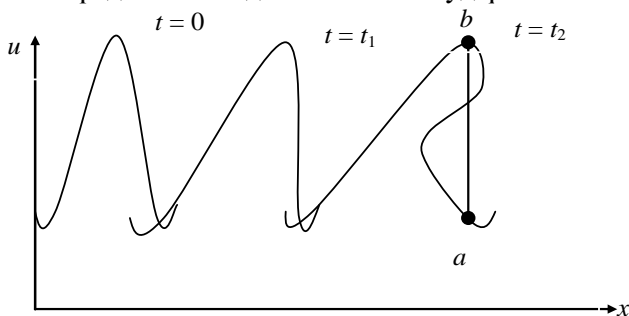


Рис. 7.1. Формування неоднозначного розв'язку нев'язкого рівняння Бюргерса

Згідно зі стандартним підходом обробки нелінійних членів, рівняння (7.1) або (7.2) спочатку переписують у **консервативній**, або **дивергентній**, формі

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{де } \bar{F} = \bar{u}^2 / 2. \quad (7.3)$$

Зауваження

- Групи членів, подібні \bar{F} , природно виникають під час виведення рівнянь, що описують течію стисливої рідини, і нерідко підлягають прямому моделюванню в обчислювальних алгоритмах.
- Наявність нелінійного члена приводить до появи побічного ефекту, що пов'язаний із розширенням спектра довжин хвиль за наступної еволюції розв'язку, який початково розвинений у ряд Фур'є. Наприклад, відомо, що на сітці з розміром клітинки Δx найменша до-

вжина хвилі, яку ще можна розрізнити, дорівнює $2\Delta x$. Побічний ефект тут виникає за рахунок впливу на довші хвилі енергії хвиль, довжина яких менша $2\Delta x$. Це спричиняє спотворення істинного характеру довгохвильових складових розв'язку та може спричинити нестійкість (яку називають **нелінійною**), якщо інтегрування проводиться на дуже великих інтервалах часу. Наприклад, за числової реалізації прогнозу погоди.

- У загальному випадку \bar{u} та $\bar{F}(\bar{u})$ – вектори.

Перепишемо тепер (7.3) у вигляді

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (7.4)$$

де в загальному випадку $\underline{A} = \underline{A}(\bar{u}) = \{a_{ij}\} : a_{ij} = \partial F_i / \partial u_j$ – якобіан. У нашому випадку $\underline{A} = \partial \bar{F} / \partial \bar{u} \rightarrow \bar{u}$, й оскільки рівняння або система рівнянь (7.4) має гіперболічний тип, то всі власні значення матриці \underline{A} – дійсні.

Задача про поширення хвилі розрідження, що описується рівнянням (7.4), має аналітичний розв'язок

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t; \\ 1, & x \geq t. \end{cases} \quad (7.5)$$

Зауваження. Одновимірне невязке рівняння Бюргерса, очевидно, є узагальненням лінійного рівняння переносу. Тому спочатку розглянемо відомі нам методи, придатні для розв'язання рівняння переносу. Наші уявлення про модифіковане рівняння та пов'язану з ним оцінку помилки апроксимації можна поширити й на аналіз нелінійних рівнянь Бюргерса. Навіть аналіз стійкості за Нейманом, за умови тимчасового "заморожування" множника при конвективному члені u_j^n , на практиці залишається достатньо ефективним.

7.1.1. Явні методи

Метод Лакса. Схеми першого порядку точності майже не використовуються для розв'язання нелінійних рівнянь у частинних похідних. Метод Лакса вибрано як типовий метод першого порядку точності з метою показати, що такий метод взагалі при-

датний для розв'язання нелінійних рівнянь у частинних похідних. Але він має дуже велику дисипативну похибку. Отже, запишемо ряд Тейлора для \bar{u} в точці (x, t) :

$$\bar{u}(x, t + \Delta t) = \bar{u}(x, t) + \Delta t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)_{x,t} + \dots \quad (7.6)$$

Використовуючи вихідне рівняння, замінимо похідну за часом похідною за простором:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}. \quad (7.7)$$

Підставляючи (7.7) до (7.6), маємо

$$\bar{u}(x, t + \Delta t) = \bar{u}(x, t) - \Delta t \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)_{x,t} + \dots \quad (7.8)$$

За Лаксом [1] для апроксимації похідної за простором використовуємо центральні різниці, а перший доданок у правій частині (7.8) подамо як середнє арифметичне у двох сусідніх вузлах

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2}. \quad (7.9)$$

Пам'ятаємо, що для рівняння Бюргерса $\bar{F} = \bar{u}^2/2$. Умова стійкості схеми Лакса для нелінійного рівняння (7.4) має вигляд $|C| \leq 1$, $C = \bar{u}_{\max} \Delta t / \Delta x$, де C – ефективне число Куранта, \bar{u}_{\max} – максимальне власне число матриці якобіана \underline{A} .

Зауваження. У [16] С. К. Годунов показав, що схеми, які мають порядок точності, більший за перший, для нев'язкого рівняння Бюргерса немонотонні. Тобто для них завжди має місце осциляція розв'язку.

Метод Лакса–Вендрофа. Для побудови методу другого порядку точності за часом візьмемо в розвиненні (7.6) три члени

$$\bar{u}(x, t + \Delta t) = \bar{u}(x, t) + \Delta t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)_{x,t} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right)_{x,t} + \dots \quad (7.10)$$

Використовуючи вихідне рівняння, замінимо у (7.10) похідні за часом похідними за простором

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}; \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t \partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \right), \quad (7.12 \text{ а})$$

причому оскільки $\bar{F} = \bar{F}(\bar{u})$, маємо

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \underline{A} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\underline{A} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}. \quad (7.12 \text{ б})$$

Отже, підставляючи (7.11), (7.12 а) і (7.12 б) до (7.10), у результаті отримаємо

$$\bar{u}(x, t + \Delta t) = \bar{u}(x, t) - \Delta t \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\underline{A} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right) + \dots \quad (7.13)$$

Для побудови схеми Лакса–Вендрофа тепер достатньо замість похідних підставити їх центрально-різницеві апроксимації

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[A_{j+1/2}^n (F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-1/2}^n (F_j^n - F_{j-1}^n) \right]. \quad (7.14)$$

Обчислимо якобіан

$$A_{j+1/2} = \underline{A} \left(\frac{u_j + u_{j+1}}{2} \right). \quad (7.15)$$

Для рівняння Бюргерса (7.2) $\bar{F} = \bar{u}^2/2$ та $\underline{A} \rightarrow \bar{u}$, тобто маємо

$$A_{j+1/2} = \frac{u_j + u_{j+1}}{2}; \quad A_{j-1/2} = \frac{u_j + u_{j-1}}{2}.$$

Умовою стійкості для методу Лакса–Вендрофа також буде умова $|C| = |\bar{u}_{\max} \Delta t / \Delta x| \leq 1$.

Метод Мак-Кормака [10] є модифікацією методу Лакса–Вендрофа на основі схеми предиктор–коректор. Цей метод простіший за метод Лакса–Вендрофа, оскільки до його скінченно-різницевих рівнянь не входить якобіан.

Схема методу Мак-Кормака для рівняння Бюргерса така.

Предиктор:

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n). \quad (7.16)$$

Коректор:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[u_j^n + \overline{u_j^{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\overline{F_j^{n+1}} - \overline{F_{j-1}^{n+1}}) \right]. \quad (7.17)$$

Зауваження

- Умова стійкості та точність методу Мак-Кормака аналогічні прийнятим у методі Лакса–Вендрофа.

- Одержані за методами Лакса–Вендрофа та Мак-Кормака розв'язки рівняння Бюргера відрізняються, а для лінійних задач вони абсолютно еквівалентні.
- Метод Мак-Кормака найкраще серед усіх схем другого порядку точності описує розриви, особливо, якщо на кроці "предиктор" різниці взяті в напрямку руху розриву.

Метод Русанова. У цьому методі третього порядку точності за часом для апроксимації похідних використовуються центральні різниці. Скінченнорізницева схема методу Русанова [1] для нев'язкого рівняння Бюргера має вигляд (рис. 7.2).

Крок 1:

$$u_{j+1/2}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{1}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n). \quad (7.18 \text{ а})$$

Крок 2:

$$u_j^{(2)} = u_j^n - \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{(1)} - F_{j-1/2}^{(1)}). \quad (7.18 \text{ б})$$

Крок 3:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{24} \frac{\Delta t}{\Delta x} (-2F_{j+2}^n + 7F_{j+1}^n - 7F_{j-1}^n + 2F_{j-2}^n) - \frac{3}{8} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^{(2)} - F_{j-1}^{(2)}) - \frac{\omega}{24} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \quad (7.18 \text{ в})$$

Останній член на третьому кроці у співвідношенні (7.18 в) є апроксимацією $(\Delta x)^4 \partial^4 \bar{u} / \partial x^4$, що додатково вводиться для забезпечення стійкості схеми. Уведення цього члена, очевидно, не зменшує точність схеми третього порядку.

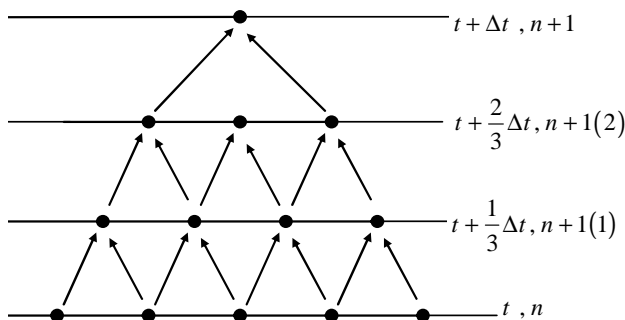


Рис. 7.2. Піраміда вузлів сітки для методу Русанова

Для рівняння Бюргерса схема Русанова стійка за умов

$$|C| \leq 1 \text{ і } 4C^2 - C^4 \leq \omega \leq 3, \quad (7.19)$$

де

$$C = \Delta t \bar{u}_{\max} / \Delta x. \quad (7.20)$$

Самоприсосовний метод третього порядку точності. На третьому кроці в методі Русанова (та у подібному йому методі Уормінга–Катера–Ломакса [1]) з'являється параметр ω . Величина ω тут обмежена лише умовами стійкості схеми й може бути довільною. Перепишемо тепер демпфірувальний член, що вводиться на третьому кроці, у дивергентній формі $\partial/\partial x(\omega \partial^3 \bar{u} / \partial x^3)$. Отже, при розрахунку параметр ω може змінюватися від точки до точки. За такого підходу член із ω у методі Русанова набуває вигляду

$$\frac{-\omega_{j+1/2}^n}{24} (u_{j+1}^n - 3u_{j+1}^n + 3u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\omega_{j-1/2}^n}{24} (u_{j+1}^n - 3u_j^n + 3u_{j-1}^n - u_{j-2}^n), \quad (7.21)$$

де $\omega_{j\pm 1/2}$ залежать лише від "уявного" числа Куранта C . Уормінг [1] запропонував обирати ці параметри таким чином, щоб мінімізувати дисперсійну або дисипативну похибку. Наприклад, для мінімізації дисперсійної похибки необхідно взяти

$$\omega_{j\pm 1/2}^n = \frac{(4C_{j\pm 1/2}^2 + 1)(4 - C_{j\pm 1/2}^2)}{5}. \quad (7.22)$$

Тут $C_{j\pm 1/2}$ обирають як середнє значення числа Куранта у відповідних вузлах сітки. Наприклад, оскільки $\omega_{j\pm 1/2}$ містить значення невідомої у вузлах $j + 2, j + 1, j, j - 1$, то

$$C_{j+1/2} = 1/4 (\lambda_{j+2} + \lambda_{j+1} + \lambda_j + \lambda_{j-1}) \Delta t / \Delta x, \quad (7.23)$$

де λ – локальне власне число, яке для рівняння Бюргерса (7.2) рівне \bar{u} .

Зауваження. Автори [1] не радять тут мінімізувати дисипативну похибку, оскільки дисипативний член із ω додано до рівняння для стабілізації розв'язку, і при зменшенні дисипації можуть з'явитися проблеми зі стійкістю різничевої схеми.

7.1.2. Неявні методи.

Дельта-форма запису скінченнорізницевих рівнянь

Одержані за неявними різницевиими схемами алгоритми розв'язання нев'язкого рівняння Бюргерса звичайно громіздкіші за алгоритми за явними схемами. Наприклад, розглянемо **центрований за часом** неявний метод. Відповідно до підходу, який уже використовувався для лінійного хвильового рівняння, маємо

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left[(\bar{u}_t)^n + (\bar{u}_t)^{n+1} \right]_j + O((\Delta t)^3),$$

що для нев'язкого рівняння Бюргерса, записаного у вигляді $\bar{u}_t = -\bar{F}_x$, дає

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)^n + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)^{n+1} \right]. \quad (7.24)$$

Задача виявляється істотно нелінійною, і для її розв'язання необхідно застосувати або ітераційні методи, або лінеаризацію. Бім та Уормінг [26] запропонували скористатися лінеаризаційним співвідношенням

$$F^{n+1} \approx F^n + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}} \right)^n (u^{n+1} - u^n) = F^n + \underline{A}^n (u^{n+1} - u^n). \quad (7.25)$$

Тоді

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)^n + \frac{\partial}{\partial x} \left[\underline{A} (u_j^{n+1} - u_j^n) \right] \right\}. \quad (7.26)$$

Використовуючи тепер центральні різниці, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t A_{j-1}^n}{4\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} + \frac{\Delta t A_{j+1}^n}{4\Delta x} u_{j+1}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2} - \\ - \frac{\Delta t A_{j-1}^n}{4\Delta x} u_{j-1}^n + u_j^n + \frac{\Delta t A_{j+1}^n}{4\Delta x} u_{j+1}^n. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Зауваження

- Для рівняння Бюргерса матриця \underline{A} складається з одного елемента \bar{u} .
- Очевидно, що (7.27) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею, яку розв'язують методом прогонки (TDMA). Водночас, незважаючи на те, що стійкість неявного мето-

ду не має залежати від кроку за часом Δt , відсутність у модифікованому рівнянні членів із похідними парних порядків (як і для рівняння переносу $\bar{u}_t + c\bar{u}_x = 0$) приводить до сильних осциляцій розв'язку. Останнє вимагає введення до схеми штучної дисипації. Наприклад, у (7.27) додають член, що має вигляд

$$-\frac{\omega}{8} \left(u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n \right).$$

При цьому схема виявляється стійкою, якщо $0 < \omega \leq 1$.

Простіший вигляд описаних у цьому розділі неявних скінченнорізницевих схем отримуємо, якщо наведемо їх у так званій **дельта-формі**, коли різниці рівняння записуються відносно приростів невідомих величин. Переваги такого компактнішого запису особливо суттєво виявляються для багатовимірних задач. Істотною є й та обставина, що стаціонарний розв'язок такої задачі, якщо він існує, не залежить від розміру кроку за часом. Отже, нехай $\Delta u_j = u_j^{n+1} - u_j^n$. Тоді (7.24) можна переписати у вигляді

$$\Delta u_j = -\frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)^n + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)^{n+1} \right]. \quad (7.28)$$

Виконуючи, як і раніше, локальну лінеаризацію, маємо

$$F_j^{n+1} \approx F_j^n + A_j^n \Delta u_j.$$

У результаті різниці (7.27) запишемо як

$$\frac{\Delta t A_{j-1}^n}{4\Delta x} \Delta u_{j-1} + \Delta u_j + \frac{\Delta t A_{j+1}^n}{4\Delta x} \Delta u_{j+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2}. \quad (7.29)$$

7.2. Рівняння Бюргерса для в'язкої течії

Розглянемо тепер повне рівняння Бюргерса у вигляді

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad (7.30)$$

або

$$\bar{u}_t + (a + b\bar{u})\bar{u}_x = \mu \bar{u}_{xx}, \quad (7.31)$$

де a та b – довільні сталі.

Рівняння (7.31) можна переписати у дивергентній формі

$$\bar{u}_t + \bar{F}_x = 0, \quad (7.32)$$

де

$$\bar{F} = a\bar{u} + \frac{b\bar{u}^2}{2} - \mu \bar{u}_x. \quad (7.33)$$

Рівняння (7.31) також можна переписати по-іншому

$$\bar{u}_t + \bar{F}_x = \mu \bar{u}_{xx}, \quad (7.34)$$

де

$$\bar{F} = a\bar{u} + b\bar{u}^2/2. \quad (7.35)$$

Тоді для лінійного випадку ($b \equiv 0$) маємо $\bar{F} \equiv a\bar{u}$.

Якщо тепер уведемо матрицю Якобі $\underline{A} = \{a_{ij}\} = \{\partial \bar{F}_i / \partial \bar{u}_j\}$, то рівняння (7.34) можна переписати у вигляді

$$\bar{u}_t + \underline{A}\bar{u}_x = \mu \bar{u}_{xx}. \quad (7.36)$$

Як і для випадку нев'язкої течії, рівняння Бюргера для в'язкої течії за деяких початкових і граничних умов має точний розв'язок, що звичайно дуже корисно для порівняння з отриманими числовими розв'язками. Точний стаціонарний розв'язок повного рівняння Бюргера у вигляді (7.30), тобто розв'язок при $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(x, t)$, за граничних умов

$$\bar{u}(0, t) = u_0, \quad \bar{u}(L, t) = 0 \quad (7.37)$$

має вигляд

$$\bar{u} = u_0 \tilde{u} \left\{ \frac{1 - \exp[\bar{u} \mathbf{Re}_L (x/L - 1)]}{1 + \exp[\bar{u} \mathbf{Re}_L (x/L - 1)]} \right\}, \quad (7.38)$$

де $\mathbf{Re}_L = u_0 L / \mu$; \tilde{u} – розв'язок рівняння

$$\tilde{u} - 1 / \frac{\tilde{u}}{\tilde{u} + 1} = \exp(-\tilde{u} \mathbf{Re}_L). \quad (7.39)$$

Розглянемо тепер послідовно придатність до розв'язання повного рівняння Бюргера всіма відомими нам різницевиими методами.

7.2.1. Явні методи

FTCS (Уперед за часом, центральна за простором). Розглянемо спочатку лінійний випадок, тобто коли $b \equiv 0$. У цьому разі різницєва схема має вигляд

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (7.40)$$

Випишемо для (7.40) модифіковане рівняння

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + a\bar{u}_x = & \left(\mu - \frac{a^2 \Delta t}{2} \right) \bar{u}_{xx} + \frac{a(\Delta x)^2}{3} \left(3r - C^2 - \frac{1}{2} \right) \bar{u}_{xxx} + \\ & + \frac{a(\Delta x)^3}{12} \left(\frac{r}{C} - \frac{2r^2}{C} - 2C + 10Cr - 3C^2 \right) \bar{u}_{xxxx} + \dots \end{aligned} \quad (7.41)$$

де $r = \mu \Delta t / (\Delta x)^2$, $C = a \Delta t / \Delta x$. Виходячи із (7.41), похибка апроксимації тут $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$.

Зауваження. При $r = 1/2$ та $C = 1$ коефіцієнти при \bar{u}_{xx} та \bar{u}_{xxx} у (8.41) тотожно дорівнюють нулю і різницева схема набуває вигляду

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n, \quad (7.42)$$

тобто різницева схема FTCS тут задовольняє "умову зсуву".

Уведемо сіткове число Рейнольдса

$$\mathbf{R}_{cell} = a \Delta x / \mu = C / r. \quad (7.43)$$

Тоді схема стійка за Нейманом за умови

$$2C \leq \mathbf{R}_{cell} \leq 2 / C. \quad (7.44)$$

При використанні методу FTCS можна позбутися осциляцій, які пов'язані з можливою присутністю комплексних власних чисел матриці, якщо за **апроксимації конвективного члена** замінити центральні різниці різницями проти течії. Отже, при $a > 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (7.45)$$

На жаль, дисипація робить цю різницеву схему практично неприйнятною для розрахунків. Чому це так, ясно з аналізу модифікованого рівняння для (7.45) та порівняння його з модифікованим рівнянням для схеми FTCS. Модифіковане рівняння для (7.45) має вигляд

$$\bar{u}_t + a\bar{u}_x = [\mu(1 + \mathbf{R}_{cell} / 2) - a^2 \Delta t / 2] \bar{u}_{xx} + \dots \quad (7.46)$$

Очевидно, що за рахунок члена $\mu \mathbf{R}_{cell} / 2$ й відбувається надмірна дисипація, бо при $\mathbf{R}_{cell} > 2$ цей член дає більший внесок до дисипації, ніж вихідний член у (7.30).

Зауваження. Щоб не вводити дуже велику додаткову дисипацію (за рахунок штучної в'язкості), Леонард у [1] запропонував апроксимацію **різницями проти течії** третього порядку точності, яка при $a > 0$ дає

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - 3u_j^n + 3u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{6\Delta x} \right) = \quad (7.47)$$

$$= \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2},$$

а при $a < 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - 3u_{j+1}^n + 3u_j^n - u_{j-1}^n}{6\Delta x} \right) = \quad (7.48)$$

$$= \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Метод "чехарда" Дюфорта–Франкела. Скористаємося тією обставиною, що лінеаризоване рівняння Бюргерса є комбінацією хвильового рівняння першого порядку та рівняння теплопровідності, спробуємо скомбінувати алгоритми. Наприклад, розглянемо метод "чехарда" Дюфорта–Франкела, для якого має місце алгоритм

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + A_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \mu \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (7.49)$$

Цей метод має порядок точності апроксимації $\approx O\{(\Delta t / \Delta x)^2, \Delta t^2, \Delta x^2\}$ і для лінійного випадку ($A \rightarrow a$) є стійким за умови $C \leq 1$, незалежно від значення μ . Однак із умови узгодженості випливає, що при $\Delta t \rightarrow 0$ та $\Delta x \rightarrow 0$ необхідно також, щоб $(\Delta t / \Delta x)^2 \rightarrow 0$, а це накладає на метод додаткові жорсткі обмеження.

Зауваження

- У нелінійному випадку при $\mu \equiv 0$ метод "чехарда" Дюфорта–Франкела нестійкий.
- Якщо точність розрахунку за часом неістотна, як, наприклад, при розв'язанні задачі на встановлення, метод "чехарда" Дюфорта–Франкела дає дуже добрі результати.

Метод Брайловської призначений для розв'язання повного рівняння Бюргерса за алгоритмом [1].

Предиктор:

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + r \left(\overline{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n} \right). \quad (7.50 \text{ а})$$

Коректор:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\overline{F_{j+1}^{n+1}} - \overline{F_{j-1}^{n+1}}) + r \left(\overline{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}} \right). \quad (7.50 \text{ б})$$

Метод Брайловської має порядок точності апроксимації $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$ і стійкий за умови

$$\Delta t \leq \min[(\Delta x)^2 / 2\mu, \Delta x / \underline{A}]. \quad (7.51)$$

Зауваження. В'язкий член в алгоритмі методу Брайловської (при константі r) однаковий на обох кроках.

Метод Алена–Чена є модифікацією методу Брайловської. Згідно з цим методом дозволено виключити з умови стійкості обмеження на r . Маємо алгоритм у вигляді [1].

Предиктор:

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + r \left(u_{j+1}^n - \overline{2u_j^{n+1}} - u_{j-1}^n \right). \quad (7.52 \text{ а})$$

Коректор:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\overline{F_{j+1}^{n+1}} - \overline{F_{j-1}^{n+1}}) + r \left(\overline{u_{j+1}^{n+1}} - 2u_j^{n+1} - \overline{u_{j-1}^{n+1}} \right). \quad (7.52 \text{ б})$$

Метод має порядок точності апроксимації $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$ і стійкий за умови $C \leq 1$. Завдяки останньому, за великих μ метод дозволяє використовувати набагато більший крок за часом, ніж метод Брайловської.

Метод Лакса–Вендрофа використовувався для розв'язання повного рівняння Бюргерса [1]. Схема методу має такий вигляд.

Крок 1:

$$u_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + r \left[(u_{j-3/2}^n - 2u_{j-1/2}^n + u_{j+1/2}^n) + (u_{j+3/2}^n - 2u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n) \right]. \quad (7.53 \text{ а})$$

Крок 2:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}) + r (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (7.53 \text{ б})$$

Тут $u_{j\pm 1/2} = 0,5(u_j + u_{j\pm 1})$. Точність методу $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$. Метод

Лакса–Вендрофа стійкий за умови

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(|A|^2 \Delta t + 2\mu \right) \leq 1. \quad (7.54)$$

Метод Мак-Кормака. Для повного рівняння Бюргерса (7.34) за методом Мак-Кормака [10] маємо різницеву схему.

Предиктор:

$$\overline{u}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+1}^n - F_j^n \right) + r \left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n \right). \quad (7.55)$$

Коректор:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\overline{u}_j^{n+1} + u_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\overline{F}_j^{n+1} - \overline{F}_{j-1}^{n+1} \right) \right] + \frac{1}{2} r \left(\overline{u}_{j+1}^{n+1} - 2\overline{u}_j^{n+1} + \overline{u}_{j-1}^{n+1} \right). \quad (7.56)$$

Точність апроксимації для методу Мак-Кормака $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$. Не існує точної умови стійкості методу Мак-Кормака. Звичайно користуються умовою (7.51) або емпіричною формулою Таннехілла

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{|A| \Delta x + 2\mu}. \quad (7.57)$$

Зауваження

- У випадку розв'язування задачі на встановлення, тобто якщо шукають стаціонарний розв'язок задачі Бюргерса, порядок точності схеми за часом несуттєвий.
- Можливий також інший варіант схеми Мак-Кормака, коли для підкреслених у виразах (7.56) і (7.57) апроксимаціях похідної $\partial \overline{F} / \partial x$ поміняти місцями різниці вперед і назад.

Таннехіллом у [1] запропоновано варіант методу Мак-Кормака із застосуванням верхньої релаксації на обох кроках.

Предиктор:

$$\overline{v}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+1}^n - F_j^n \right) + r \left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n \right), \quad (7.58)$$

$$\overline{u}_j^{n+1} = u_j^n + \overline{\omega} \left(\overline{v}_j^{n+1} - u_j^n \right).$$

Коректор:

$$v_j^{n+1} = \overline{u}_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\overline{F}_j^{n+1} - \overline{F}_{j-1}^{n+1} \right) + r \left(\overline{u}_{j+1}^{n+1} - 2\overline{u}_j^{n+1} + \overline{u}_{j-1}^{n+1} \right), \quad (7.59)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \omega \left(v_j^{n+1} - u_j^n \right).$$

Тут v – проміжне, u – кінцеве значення невідомої; $\overline{\omega}$, ω – релаксаційні параметри, \overline{u}_j^n – значення u_j^n на попередньому шарі

за часом. У загальному випадку ця модифікація методу має точність апроксимації $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$. Однак, якщо $\omega\bar{\omega} = |\bar{\omega} - \omega|$, то точність методу стає $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$.

Застосування верхньої релаксації прискорює збіжність методу у Ω разів, де

$$\Omega = \frac{2\bar{\omega}\omega}{1 - (\bar{\omega} - 1)(\omega - 1)}. \quad (7.60)$$

Необхідну умову стійкості методу записують у вигляді

$$|(\bar{\omega} - 1)(\omega - 1)| \leq 1. \quad (7.61)$$

Достатньої умови стійкості цього методу в аналітичному вигляді дістати не вдається, її знаходять з аналізу Фур'є.

7.2.2. Неявний метод Брілі–МакДональда

Неявний метод Брілі–МакДональда [22] засновано також на скінченнорізницевої апроксимації рівняння (7.34)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)_j^{n+1} = \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right)_j^{n+1}. \quad (7.62)$$

Для члена $(\partial \bar{F} / \partial x)_j^{n+1}$ розглянемо розвинення в ряд Тейлора

$$\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)_j^n + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right) \right]_j^n + O((\Delta t)^2). \quad (7.63)$$

Змінюючи порядок диференціювання в (7.63), маємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right). \quad (7.64)$$

Підставляючи (7.63) і (7.64) до (7.62) та апроксимуючи похідні за часом різницями вперед, а похідні за простором – центральними різницями, маємо схему методу Брілі–МакДональда

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{A_{j+1}^n (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)}{2\Delta x} - \\ - \frac{A_{j-1}^n (u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = \mu \delta_x^2 u_j^{n+1} / (\Delta x)^2. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Тут $\widehat{\delta}_x^2 u_j^{n+1} / (\Delta x)^2 \equiv L_{xx} u_j^{n+1} = (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) / (\Delta x)^2$. Точність

апроксимації методу Брілі–МакДональда $\approx O(\Delta t, \Delta x^2)$. Збіжність абсолютна. Точність апроксимації методу за часом можна підвищити, якщо використати центровані за часом різниці

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)_j^n + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)_j^{n+1} \right] = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right)_j^n + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right)_j^{n+1} \right]. \quad (7.66)$$

Далі, якщо апроксимувати похідні за часом різницями вперед, а похідні за простором – центральними різницями, маємо схему другого порядку точності за часом $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{A_{j+1}^n (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)}{4\Delta x} - \\ - \frac{A_{j-1}^n (u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n)}{4\Delta x} = \frac{\mu}{2(\Delta x)^2} \left[\left(\widehat{\delta}_x^2 u \right)_j^n + \left(\widehat{\delta}_x^2 u \right)_j^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (7.67)$$

7.3. Багатовимірне рівняння Бюргерса для в'язкої течії

Як ілюстрацію використання обчислювальних методів, що призначені для розв'язання багатовимірних задач, розглянемо двовимірне рівняння Бюргерса [1, 15, 18]

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right). \quad (7.68)$$

Нехай $\underline{A} \equiv \{a_{ij}\} = \{\partial \bar{F}_i / \partial \bar{u}_j\}$, $\underline{B} \equiv \{b_{ij}\} = \{\partial \bar{G}_i / \partial \bar{u}_j\}$, тоді (7.68) приведемо до вигляду

$$\bar{u}_t + \underline{A} \bar{u}_x + \underline{B} \bar{u}_y = \mu (\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy}). \quad (7.69)$$

Рей у [1] указав **точний стаціонарний розв'язок** двовимірного лінеаризованого рівняння Бюргерса

$$\bar{u}_t + c \bar{u}_x + d \bar{u}_y = \mu (\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy}) \quad (7.70)$$

із граничними умовами $0 \leq t \leq \infty$

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, 0, t) &= \frac{1 - \exp[(x-1)c/\mu]}{1 - \exp[c/\mu]}, \quad \bar{u}(x, 1, t) = 0; \\ \bar{u}(0, y, t) &= \frac{1 - \exp[(y-1)d/\mu]}{1 - \exp[d/\mu]}, \quad \bar{u}(1, y, t) = 0;\end{aligned}\tag{7.71}$$

та початковою умовою

$$\bar{u}(x, y, 0) = 0 \quad (0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1)\tag{7.72}$$

у вигляді

$$\bar{u}(x, y) = \left\{ \frac{1 - \exp[(x-1)c/\mu]}{1 - \exp[c/\mu]} \right\} \times \left\{ \frac{1 - \exp[(y-1)d/\mu][d/\mu]}{1 - \exp[d/\mu]} \right\}.\tag{7.73}$$

Зазначимо, що записаний у такому вигляді розв'язок легко узагальнюється на випадок тривимірного лінеаризованого рівняння Бюргерса.

Зауваження. Усі розглянуті вище методи розв'язання одновимірної рівняння Бюргерса прийнятні й для розв'язання багатовимірних задач. Однак користуються при цьому модифікованими алгоритмами, оскільки умови стійкості для явних схем стають жорсткішими, а за неявних схем застосовується розщеплення за часом.

7.3.1. Явний метод Мак-Кормака із розщепленням за часом

Розщеплення за часом для явного методу Мак-Кормака [10] дозволяє одержати розв'язок у кожному напрямку з максимально допустимим кроком за часом Δt . Особливо помітна перевага розщеплення, якщо Δt_x і Δt_y дуже відрізняються через відмінність між Δx і Δy . Скористаємося одновимірними операторами

$$u_{i,j}^* = L_x(\Delta t_x) u_{i,j}^n,\tag{7.70}$$

де оператор, що записано у вигляді (7.70), еквівалентний двокроковій схемі

$$\begin{aligned}u_{i,j}^* &= u_{i,j}^n - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) + \mu \Delta t_x \delta_x^2 u_{i,j}^n, \\ u_{i,j}^* &= \frac{1}{2} \left[u_{i,j}^n + u_{i,j}^{\bar{*}} - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (F_{i,j}^{\bar{*}} - F_{i-1,j}^{\bar{*}}) + \mu \Delta t_x \delta_x^2 u_{i,j}^{\bar{*}} \right].\end{aligned}\tag{7.71}$$

Тут індекс $*$ означає фіктивний шар за часом. Аналогічно

$$u_{i,j}^* = L_y(\Delta t_y)u_{i,j}^n, \quad (7.72)$$

що еквівалентно двокроковій схемі

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{\bar{*}} &= u_{i,j}^n - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} \left(G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n \right) + \mu \Delta t_y \bar{\delta}_y^2 u_{i,j}^n, \\ u_{i,j}^* &= \frac{1}{2} \left[u_{i,j}^n + u_{i,j}^{\bar{*}} - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} \left(G_{i,j}^{\bar{*}} - G_{i,j-1}^{\bar{*}} \right) + \mu \Delta t_y \bar{\delta}_y^2 u_{i,j}^{\bar{*}} \right]. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Застосовуючи до $u_{i,j}^n$ оператори L_x і L_y , різницеву схему другого порядку точності будемо у вигляді

$$u_{i,j}^{n+1} = L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) L_x(\Delta t) L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u_{i,j}^n. \quad (7.74)$$

Отже, схема (7.74) характеризується такими параметрами:

- **стійка**, якщо для кожного оператора $\Delta t \leq \Delta t_{\max}$;
- **узгоджена**, якщо суми кроків за часом для кожного оператора збігаються;
- має порядок точності $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$, якщо послідовність операторів симетрична.

Зауваження. Умовам (1)–(3) також задовольняють послідовності операторів

$$u_{i,j}^{n+1} = L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) L_x \left(\frac{\Delta t}{2} \right) L_x \left(\frac{\Delta t}{2} \right) L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u_{i,j}^n; \quad (7.75)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = \left[L_y \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) \right]^m L_x(\Delta t) \left[L_y \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) \right]^m u_{i,j}^n, \quad (7.76)$$

де m – ціле. Алгоритм (7.76) особливо корисний у випадку, коли $\Delta x \gg \Delta y$.

7.3.2. Неявні методи змінних напрямків

Одна з найбільш вдалих модифікацій методу змінних напрямків Пісмена–Речфорда, що використовується для розв'язання рівнянь Нав'є–Стокса, запропонована Полежаєвим [13]. Для двовимірного рівняння Бюргера у вигляді (7.69) маємо двокрокову різницеву схему з точністю апроксимації $\approx O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$ у вигляді.

Крок 1:

$$\left[1 + \frac{\Delta t}{2} \left(A_{i,j}^n \frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} - \mu \bar{\delta}_x^2 \right) \right] u_{i,j}^* = \left[1 - \frac{\Delta t}{2} \left(B_{i,j}^n \frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} - \mu \bar{\delta}_y^2 \right) \right] u_{i,j}^n. \quad (7.77 \text{ а})$$

Крок 2:

$$\left[1 + \frac{\Delta t}{2} \left(B_{i,j}^* \frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} - \mu \bar{\delta}_y^2 \right) \right] u_{i,j}^{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta t}{2} \left(A_{i,j}^n \frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} - \mu \bar{\delta}_x^2 \right) \right] u_{i,j}^*, \quad (7.77 \text{ б})$$

де $\bar{\delta}_x u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i-1,j}$, $\bar{\delta}_y u_{i,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j-1}$. У лінійному випадку схема (7.77) є безумовно стійкою.

Алгоритм Дугласа–Гана [1] є модифікацією алгоритму Брілі–МакДональда і також є двокроковим.

Крок 1:

$$\left[1 + \Delta t \left(\frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} A_{i,j}^n - \mu \bar{\delta}_x^2 \right) \right] u_{i,j}^* = \left[1 + \Delta t \left(\frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} B_{i,j}^n - \mu \bar{\delta}_y^2 \right) \right] u_{i,j}^n + \Delta t S_{i,j}^n. \quad (7.78 \text{ а})$$

Крок 2:

$$\left[1 + \Delta t \left(\frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} B_{i,j}^n - \mu \bar{\delta}_y^2 \right) \right] u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} A_{i,j}^n - \mu \bar{\delta}_x^2 \right) u_{i,j}^* + \Delta t S_{i,j}^n, \quad (7.78 \text{ б})$$

де

$$S_{i,j}^n = -\frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} F_{i,j}^n - \frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} G_{i,j}^n + \frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} (A_{i,j}^n u_{i,j}^n) + \frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} (B_{i,j}^n u_{i,j}^n).$$

Точність методу $\approx O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$.

7.3.3. Багатоітераційний метод предиктор–коректор

Рубін і Лін у [1, 18] запропонували багатоітераційний метод предиктор–коректор для розв'язання параболізованих рівнянь Нав'є–Стокса. Метод виключає появу в рівняннях значень функції у вузлових точках уздовж нормального Оу- та поперечного Oz-напрямоків, а для досягнення прийнятної точності використовуються ітерації. Застосуємо цей метод до розв'язання тривимірного лінійного рівняння Бюргерса у вигляді

$$u_x + c u_y + d u_z = \mu (u_{yy} + u_{zz}), \quad (7.79)$$

що є модельним для параболізованих рівнянь Нав'є–Стокса. Маємо алгоритм

$$\begin{aligned}
 u_{i+1,j,k}^{m+1} = & u_{i,j,k} - \frac{c}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} \left(u_{i+1,j+1,k}^{m+1} - u_{i+1,j-1,k}^{m+1} \right) - \frac{d}{2} \frac{\Delta x}{\Delta z} \left(u_{i+1,j,k+1}^m - u_{i+1,j,k-1}^m \right) + \\
 & + \frac{\mu \Delta x}{(\Delta y)^2} \left(u_{i+1,j+1,k}^{m+1} - 2u_{i+1,j,k}^{m+1} + u_{i+1,j-1,k}^{m+1} \right) + \\
 & + \frac{\mu \Delta x}{(\Delta z)^2} \left(u_{i+1,j,k+1}^m - 2u_{i+1,j,k}^{m+1} + u_{i+1,j,k-1}^m \right).
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

Тут m – номер ітерації, $x = i \cdot \Delta x$, $y = j \cdot \Delta y$, $z = k \cdot \Delta z$. На першій ітерації ($m = 0$) відповідні члени рівняння апроксимують, використовуючи або просто лінійну підстановку

$$u_{i+1,j,k}^0 = u_{i,j,k}, \tag{7.81}$$

або розвинення в ряд Тейлора

$$u_{i+1,j,k}^0 = 2u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k} + O((\Delta x)^2). \tag{7.82}$$

Тоді до (7.80) входить лише три невідомі $u_{i+1,j+1,k}^1$; $u_{i+1,j,k}^1$; $u_{i+1,j-1,k}^1$, які знаходять із розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею. Розрахунок у площині $i + 1$ ведеться, починаючи від стовпця з номером $k = 1$.

На наступних ітераціях маємо аналогічно $u_{i+1,j+1,k}^2$; $u_{i+1,j,k}^2$; $u_{i+1,j-1,k}^2$ і т. д. Ітерації тривають, доки розв'язок у площині $i + 1$ не зійдеться, після чого переходять для розрахунків у площину $i + 2$.

При використанні (7.82) точність методу $\approx O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$.

Задачі

1. Використати схему Лакса–Вендрофа для розв'язання нев'язкого рівняння Бюргера на сітці, що має 51 вузол у напрямку осі Ox . Розв'язати рівняння для розриву, що рухається праворуч, якщо $u = 1$ в 11 перших вузлах сітки та $u = 0$ – у вузлах, що залишилися. Повторити розрахунок при числах Куранта, рівних 1,0; 0,6; 0,3. Порівняти числовий розв'язок із аналітичним в одні й ті самі моменти часу.

2. Повторити задачу 1, використовуючи схему предиктор–коректор Мак–Кормака.

3. Повторити задачу 1, використовуючи метод Русанова.

4. Повторити задачу 1, використовуючи метод Кранка–Нікольсона.

5. Знайти розв'язок невязкого рівняння Бюргерса для течії із розрідженням, якщо $u = 0$ в 21 першому вузлі сітки й $u = 1$ – у вузлах, що залишилися. Розглянути обидва варіанти схеми Мак-Кормака із чергуванням на кроках "предиктор" і "коректор" похідних уперед-назад і назад-уперед. Порівняти результати, отримані за різних значень числа Куранта, із точним аналітичним розв'язком.

6. Повторити задачу 5, використовуючи неявний чотириточковий метод Кранка–Нікольсона з різницями проти течії.

7. Повторити задачу 5, використовуючи неявний узагальнений метод Кранка–Нікольсона з додатковою дисипацією.

8. Використати метод FTCS для розв'язання в'язкого повного рівняння Бюргерса із початковою умовою $u(x,0)=0$, $0 \leq x \leq 1$, і граничними умовами $u(0,t)=100$, $u(1,t)=0$ на різницевій сітці, що має 21 вузол.

Знайти стаціонарний розв'язок за значень параметрів:

a) $r=0,50$, $v=0,25$; b) $r=0,50$, $v=1,00$;

c) $r=0,10$, $v=0,40$; d) $r=0,05$, $v=0,50$.

Порівняти результати із точним розв'язком.

9. Повторити задачу 7, використовуючи явну схему "чехарда" Дюфорта–Франкела.

10. Повторити задачу 7, використовуючи неявну схему Кранка–Нікольсона з масовим оператором.

Розділ 8

ОСНОВИ МЕТОДУ ПРЯМИХ

Із множини методів обчислень, які використовують для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних, можна виділити як аналітичні, так й обчислювальні методи. До перших належать: метод розділення змінних, метод Фур'є та інші методи, що вивчаються у курсі математичної фізики. Характерним прикладом обчислювальних методів є метод сіток. Однак є група методів, які використовують прийоми як аналітичних, так і обчислювальних методів. Одним із них є метод прямих, що належить до методів зниження розмірності задач. Основна ідея цих методів полягає у тому, щоб наближено звести розв'язання вихідної задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних до розв'язання диференціальних рівнянь меншої розмірності. Наприклад, розв'язання задачі для диференціального рівняння у частинних похідних на площині методом прямих можна наближено замінити розв'язанням задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь, або, скажімо, розв'язання задачі у просторі може бути зведене до розв'язання задач на площині.

У методі прямих, на відміну від методу сіток, похідні лише за частиною незалежних змінних замінюються наближеними виразами через значення функцій. Тим самим в області, яку ми розглядаємо, вихідне диференціальне рівняння апроксимується також системою диференціальних рівнянь, але з меншою кількістю змінних. Метод прямих іноді зручно розглядати як крайній випадок методу сіток, коли кроки сітки за деякими з незалежних змінних необмежено зменшуються.

Із основними прийомами методу прямих ми ознайомимося на прикладі розв'язання лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку. Цей метод можна використовувати й у випадку нелінійних рівнянь довільного порядку, а також для систем таких рівнянь.

8.1. Метод прямих для рівнянь параболічного типу

Розглянемо на напівсмузі $G = \{(x, t) : x \in [0, 1], t \geq 0\}$ крайову задачу

$$\Lambda(u) \equiv L(u) - u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u - u_t = f(x, t) \quad (8.1)$$

із початковою умовою

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (8.2)$$

та граничними умовами Дирихле

$$u(0, t) = \psi_0(t), \quad u(1, t) = \psi_1(t). \quad (8.3)$$

Нехай при цьому коефіцієнти рівняння $a(x, y) \geq a > 0$, b , c , f , а також φ , ψ_0 , ψ_1 повністю задовольняють умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі (8.1)–(8.3).

Шукатимемо розв'язок у прямокутнику $\Pi = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq T < +\infty\}$. Залежно від того, чи збережемо ми при цьому неперервними змінні x або t , одержимо поперечну або поздовжню схему методу прямих. Розглянемо спочатку поперечну схему методу, запропоновану Е. Роте в 1929 р. [8].

Побудуємо із кроком $\Delta t > 0$ ґратку прямих $t = t_n = n\Delta t$ ($n = \overline{0, N}$; $N = [T/\Delta t]$) і шукатимемо на цих прямих наближені значення $u_n(x) \approx u(x, t_n)$. Для цього замінімо похідну за часом у (8.1) лівосторонньою скінченнорізницевою формулою

$$u_t(x, t_n) \approx \frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\Delta t}. \quad (8.4)$$

Тоді з урахуванням граничної (8.2) одержимо на відрізьку $[0, 1]$ крайову задачу для системи N звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку:

$$u_0(x) = \varphi(x); \quad (8.5)$$

$$\Lambda_n(u_n) \equiv a_n(x)u_n''(x) + b_n(x)u_n'(x) + c_n(x)u_n(x) - \frac{u_n(x) - u_{n-1}(x)}{\Delta t} = f_n(x); \quad (8.6)$$

$$u_n(0) = \psi_0(t_n), \quad u_n(1) = \psi_1(t_n), \quad n = \overline{1, N}. \quad (8.7)$$

Оскільки розв'язок задачі на прямій $t = t_0$ відомий із (8.5), то на прямих $t = t_n, n = \overline{1, N}$ функції $u_n(x)$ шукають, послідовно розв'язуючи для кожного n одне ЗДР другого порядку (8.6) за крайових умов (8.7).

Зауваження

- Оскільки схему методу прямих можна вважати граничним варіантом методу сіток при $\Delta x \rightarrow 0$, то схема (8.5)–(8.7) відповідає неявній схемі методу сіток і стійка за довільного кроку Δt . Водночас, використання замість (8.4) правосторонньої різниці приводить до явної схеми методу сіток, збіжної лише при $\Delta t \leq O(\Delta x^2)$, що при $\Delta x \rightarrow 0$ є малоприматним для реального застосування.
- Побудована обчислювальна схема методу прямих достатньо чітко виявляє геометричний зміст назви методу. Виходячи з геометричного змісту методу, у багатовимірному випадку його часто називають **методом площин** або **методом гіперплощин**.

Метод прямих точніший за метод сіток, оскільки вносить меншу похибку при заміні вихідної задачі апроксимуючою. Щоправда, при цьому апроксимуюча задача потребує більших витрат машинного часу для її розв'язку. Водночас, якщо коефіцієнти рівняння (8.1) не залежать від x , то застосувавши метод прямих, ми приходимо до системи ЗДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, розв'язок якої можна знайти й аналітично.

Похибка схеми Рунге методу прямих легко обчислюється на основі формули Тейлора

$$u(x, t_{n-1}) = u(x, t_n) - \Delta t u_t(x, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x, t_n - \theta_n \tau),$$

$$0 < \theta_n < 1, \quad n = \overline{1, N}.$$

Звідси похибку знаходимо як

$$r_n(x) = u_t(x, t_n) - \frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\Delta t} \approx O(\Delta t). \quad (8.8)$$

Очевидно, що одержати задовільну точність за схемою Рунге не можна. Підвищимо порядок точності апроксимації таким чином: похідну за часом при $t = t_n$ замінимо лівосторонньою скінченною різницею, а при $t = t_{n-1}$ – правосторонньою. Схема методу прямих тоді має вигляд

$$\frac{L(u_n) + L(u_{n-1})}{2} - \frac{u_n(x) - u_{n-1}(x)}{\Delta t} = \frac{f_n(x) + f_{n-1}(x)}{2}, \quad (8.9)$$

$$u_n(0) = \psi_0(t_n), \quad u_n(1) = \psi_1(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Тут оператор $L(u_i) \equiv a_i(x)u_i''(x) + b_i(x)u_i'(x) + c_i(x)u_i(x)$, $i = \overline{0, N}$.
Схема (8.9) точніша за схему Рунге та має нев'язку $\approx O(\Delta t^2)$.

Розглянемо тепер поздовжній варіант методу прямих для крайової задачі (8.1)–(8.3). Побудуємо із кроком $\Delta x > 0$ ґратку прямих $x = x_j = j\Delta x$ ($j = \overline{1, M}$; $M = [1/\Delta x]$) і шукатимемо на цих прямих наближені значення $u_j(t) \approx u(x_j, t)$. Для цього замінімо похідні за простором у (8.1) симетричними скінченнорізницеви-ми формулами

$$u_x(x_j, t) \approx \frac{u(x_{j+1}, t) - u(x_{j-1}, t)}{2\Delta x}, \quad (8.10 \text{ а})$$

$$u_{xx}(x_j, t) \approx \frac{u(x_{j+1}, t) - 2u(x_j, t) + u(x_{j-1}, t)}{\Delta x^2}. \quad (8.10 \text{ б})$$

Схема методу прямих у поздовжньому варіанті має вигляд

$$u_j'(t) = a_j(t) \frac{u(x_{j+1}, t) - 2u(x_j, t) + u(x_{j-1}, t)}{\Delta x^2} + b_j(t) \times \quad (8.11)$$

$$\times \frac{u(x_{j+1}, t) - u(x_{j-1}, t)}{2\Delta x} + c_j(t)u_j(t) + f_j(t), \quad t > 0;$$

$$u_0(t) = \psi_0(t), \quad u_M(t) = \psi_1(t), \quad t \geq 0; \quad (8.12)$$

$$u_j(0) = \varphi(x_j), \quad j = \overline{1, M-1}. \quad (8.13)$$

Таким чином, знаходження наближених значень $u_j(t)$ розв'язку $u(x, t)$ крайової задачі (8.1)–(8.3) на прямих $x = x_j$, $j = \overline{1, M-1}$ зводиться до розв'язання задачі Коші для системи $(M-1)$ лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Похибка апроксимації при цьому $\approx O(\Delta x^2)$.

Зауважимо, що, оскільки для розв'язання задачі Коші (8.11)–(8.13) використовують обчислювальні схеми Рунге–Кута, які мають підвищений порядок точності за часом, то похибка апроксимації за простором $\approx O(\Delta x^2)$ може виявитися досить великою. Подібно тому, як це зроблено у поперечній схемі для підвищення точності апроксимації за часом, для поздовжньої схеми мето-

ду прямих також використовують різні підходи з метою підвищення точності апроксимації за простором. Головні з них розглядаються у [8, 14, 18].

8.2. Метод прямих для рівнянь еліптичного типу

Нехай у прямокутнику $\Pi = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$ існує єдиний розв'язок крайової задачі

$$\Delta(u) \equiv u_{yy} + a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_x + c(x, y)u = f(x, y) \quad (8.14)$$

із граничними умовами Дирихле

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_0(x), & u(x, Y) = \varphi_1(x); \\ u(0, y) = \psi_0(y), & u(X, y) = \psi_1(y). \end{cases} \quad (8.15)$$

Припускається, що скрізь у Π $a(x, y) \geq a > 0$, $c(x, y) \leq -c < 0$. Для еліптичного рівняння зникає принципова різниця між поперечним і поздовжнім варіантами методу прямих. Розіб'ємо Π на N смуг прямими $y = y_n = n\Delta y$, $n = 1, N-1$ із кроком $\Delta y = Y/N$. Якщо на кожній із цих смуг замінимо u_{yy} скінченною різницею, то матимемо таку крайову задачу, що апроксимує вихідну крайову задачу із граничними умовами Дирихле,

$$u_0(x) = \varphi_0(x), \quad u_N(x) = \varphi_1(x); \quad (8.16)$$

$$\Lambda_n(u_n) \equiv \frac{u_{n+1}(x) - 2u_n(x) + u_{n-1}(x)}{\Delta y^2} + a_n(x)u_n''(x) + b_n(x)u_n'(x) + c_n(x)u_n(x) = f_n(x); \quad (8.17)$$

$$u_n(0) = \psi_0(y_n), \quad u_n(X) = \psi_1(y_n), \quad n = 1, N-1. \quad (8.18)$$

Таким чином ми звели розв'язання вихідної крайової задачі (8.14)–(8.15) до розв'язання $(N-1)$ задач Дирихле для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Похибка апроксимації у цьому випадку

$$r_n(x) = \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \approx O(\Delta y^2). \quad (8.19)$$

Очевидно, що можна за потреби підвищити порядок апроксимації, використовуючи підходи, уже розглянуті попередньо, а також підходи, що пропонуються в [8].

8.3. Метод прямих для рівнянь гіперболічного типу

Розглянемо у прямокутнику $\Pi = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq t \leq T < +\infty\}$ крайову задачу для гіперболічного рівняння

$$u_{tt} + g(x,t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \quad (8.20)$$

із початковими умовами за часом

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x) \quad (8.21)$$

та із граничними умовами Дирихле за простором

$$u(0,t) = \psi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_1(t). \quad (8.22)$$

Припускається, що $a(x,y) \geq a > 0$ та існує єдиний розв'язок крайової задачі (8.20)–(8.22). Шукатимемо наближений розв'язок на прямих $t = t_n = n\Delta t$, $n = \overline{1, N}$; $N = [T/\Delta t]$, $\Delta t > 0$. На прямій $t = t_{n+1}$, $n = \overline{1, N-1}$, замінимо другу похідну за часом центральною різницею

$$u_{tt}(x, t_{n+1}) = \frac{u(x, t_{n+1}) - 2u(x, t_n) + u(x, t_{n-1}))}{\Delta t^2} + \Delta t u_{ttt}(x, t_n) + O(\Delta t^2), \quad (8.23)$$

а першу похідну за часом – лівою різницею

$$u_t(x, t_{n+1}) = \frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x, \tau_n). \quad (8.24)$$

Крім того, на прямій $t = 0$ за апроксимації початкової умови використаємо правосторонню різницю

$$u_t(x, 0) \approx [u(x, \Delta t) - u(x, 0)]/\Delta t. \quad (8.25)$$

Остаточно, замінюючи $u_n(x) \approx u(x, t_n)$, $n = \overline{0, N}$, маємо

$$u_0(x) = \varphi_0(x), \quad \frac{u_1(x) - u_0(x)}{\Delta t} = \varphi_1(x); \quad (8.26)$$

$$\frac{u_{n+1}(x) - 2u_n(x) - u_{n-1}(x)}{\Delta t^2} + g_{n+1}(x) \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\Delta t} = \quad (8.27)$$

$$= a_{n+1}(x)u''_{n+1}(x) + b_{n+1}(x)u'_{n+1}(x) + c_{n+1}(x)u_{n+1}(x) + f_{n+1}(x);$$

$$u_{n+1}(0) = \psi_0(t_{n+1}), \quad u_{n+1}(1) = \psi_1(t_{n+1}), \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (8.28)$$

Розв'язання отриманих диференціально-різницевих задач (8.26)–(8.27) розпадається на два етапи:

- За (8.26) обчислюється $u_1(x)$ на прямій $t = t_1$.

• За (8.27)–(8.28) послідовно, з урахуванням граничних умов, знаходять розв'язки $u_2(x), \dots, u_N(x)$.

Загальна точність апроксимації за (8.26)–(8.27) $\approx O(\Delta t)$. Якщо ж узяти формулу другого порядку точності за апроксимації похідної за часом у (8.25) у вигляді

$$u_t(x, t_n) \approx [3u(x, t_{n+1}) - 4u(x, t_n) + u(x, t_{n-1})]/(2\Delta t), \quad (8.29)$$

симетричну формулу за апроксимації граничної умови (8.26) та виключити фіктивне значення із використанням (8.27) при $n = 0$, то загальна точність буде не гірше $\approx O(\Delta t^2)$.

При застосуванні методу прямих для розв'язання гіперболічних рівнянь також може використовуватися поздовжня схема, яка в цьому випадку має вигляд

$$u_j''(t) + g_j(t)u_j'(t) = a_j(t) \frac{u(x_{j+1}, t) - 2u(x_j, t) + u(x_{j-1}, t)}{\Delta x^2} + \quad (8.30)$$

$$+ b_j(t) \frac{u(x_{j+1}, t) - u(x_{j-1}, t)}{2\Delta x} + c_j(t)u_j(t) + f_j(t), \quad t > 0,$$

$$u_0(t) = \psi_0(t), \quad u_M(t) = \psi_1(t), \quad t \geq 0, \quad (8.31)$$

$$u_j(0) = \phi_0(x_j), \quad u_j'(0) = \phi_1(x_j), \quad j = \overline{1, M-1}. \quad (8.32)$$

Таким чином, знаходження наближених значень $u_j(t)$ розв'язку $u(x, t)$ крайової задачі (8.20)–(8.22) на прямих $x = x_j$ ($j = \overline{1, 2, \dots, M-1}$) зводиться до розв'язання задач Коші для системи $(M-1)$ лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Похибка апроксимації при цьому $\approx O(\Delta x^2)$.

8.4. Напівдискретні методи бібліотеки IMSL

У цьому розділі розглянемо можливості стандартної математичної бібліотеки IMSL¹⁶ [2], а саме: стандартну процедуру MOLCH, що призначена для розв'язання крайових задач систем

¹⁶ Бібліотека IMSL розроблена фірмою Visual Numerics, Inc. і є невід'ємною частиною компіляторів професійних версій Fortran PowerStation (FPS) 4.0, Compaq Visual Fortran (CVF) 5.0–6.6c та Intel Fortran 7.0–11.0.

диференціальних рівнянь у частинних похідних параболічного або гіперболічного типу загального вигляду

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = f \left(x, t, u_1, \dots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right); \quad k = \overline{1, m}, \quad (8.33)$$

із початковими

$$u_k(x, t_0) = u_{0k}(x) \quad (8.34)$$

та граничними умовами

$$\alpha_{lk} u_k(t, x_l) + \beta_{lk} \frac{\partial u_k(t, x_l)}{\partial x} = \gamma_{lk}(t), \quad l = 1, n; \quad k = \overline{1, m}. \quad (8.35)$$

Тут $x_1 = a$, та $x_n = b$ визначають крайні межі діапазону інтегрування за x .

Синьковек і Мадсен [24, 25] для переходу до системи звичайних диференціальних рівнянь замість розглянутої вище скінченнорізницевої апроксимації використовують проекційний принцип [11, 16, 18], відповідно до якого розв'язок подається у вигляді лінійної комбінації базисних функцій

$$\hat{u}_k(x, t) = \sum_{i=1}^m (a_{ik}(t) \varphi_i(x) + b_{ik}(t) \psi_i(x)), \quad (8.36)$$

де $\varphi_i(x)$ і $\psi_i(x)$ – стандартні базисні функції для кубічних багаточленів Ерміта з вузлами у точках $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Цей кубічний багаточлен має неперервну першу похідну, тому в точках розриву елементарних кубічних кривих мають виконуватися умови

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_l) &= \delta_{il}, \quad \psi_i(x_l) = 0; \\ \frac{d\varphi_i(x_l)}{dx} &= 0, \quad \frac{d\psi_i(x_l)}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Використовуючи метод колокацій, коефіцієнти апроксимації визначаються з умови, що розв'язок (8.36) задовольняє вихідне диференціальне рівняння на кожному інтервалі (x_{n+1}, x_n) у двох точках (вузлах колокації Гаусса):

$$\begin{aligned} p_{2j-1} &= x_j + \frac{3-\sqrt{3}}{6} (x_{j+1} - x_j); \\ p_{2j} &= x_j + \frac{3+\sqrt{3}}{6} (x_{j+1} + x_j), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Апроксимація вихідного диференціального рівняння у вузлах колокації, що має вигляд

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{da_{ik}}{dx} \varphi_i(p_j) + \frac{db_{ik}}{dx} \psi_i(p_j) \right] = f_k(p_j, t, \hat{u}_1(p_j), \dots, \hat{u}_m(p_j), (\hat{u}_1)_{xx}(p_j), \dots, (\hat{u}_m)_{xx}(p_j)), \quad (8.39)$$

визначає систему із $2m(n-1)$ звичайних диференціальних рівнянь із $2mn$ невідомими коефіцієнтами функцій a_{ik}, b_{ik} . Тут $k = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, 2(n-1)}$.

Перепишемо систему у векторному вигляді

$$\underline{A} \frac{d\bar{c}}{dt} = \bar{F}(t, y). \quad (8.39)$$

Тут \bar{c} – вектор коефіцієнтів розмірності $2mn$; $\bar{c}(t_0) = \bar{c}_0$ – вектор, що містить початкові значення коефіцієнтів. Останні $2m$ рівнянь одержуємо диференціюванням граничних умов:

$$\alpha_{lk} \frac{da_{lk}}{dt} + \beta_{lk} \frac{db_{lk}}{dt} = \frac{d\gamma_{lk}}{dt}, \quad l = 1, n; \quad k = 1, \dots, m. \quad (8.40)$$

Необхідно зважати на те, що початкові значення $\hat{u}_k(x, t_0)$ повинні також задовольняти граничні умови. Причому для того, щоб граничні умови задовольнялися належним чином і при $t > t_0$, функція $\gamma_k(t)$ повинна бути неперервною та мати гладку похідну. Якщо ж $\alpha_{lk} = \beta_{lk} = 0$, то передбачається, що жодних граничних умов для k -ї невідомої немає ні в лівій, ні в правій кінцевих точках. При цьому в кінцевих точках колокації граничні умови виконуються тотожно. Остання обставина є корисною для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, оскільки зводить розв'язок крайової задачі до розв'язку задачі Коші. Наприклад, якщо $m = 1$ і кількість точок розриву $n = 4$, то маємо

$$\bar{c} = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4)^T, \quad (8.41)$$

та

$$\bar{F} = (\gamma'(x_1), f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4), f(p_5), f(p_6), \gamma'(x_4))^T. \quad (8.42)$$

У (8.42)–(8.43) індекс $k = 1$ скрізь опущено.

2. Розв'язати за допомогою поздовжнього методу прямих нелінійне рівняння Бюргерса

$$u_t + v(x)u_x = [D(x)u_x]_x \quad (0 \leq x \leq 1, \quad t \geq t_0),$$

де

$$D(x) = \begin{cases} 5, & 0 \leq x \leq 0,5; \\ 1, & 0,5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} 1000, & 0 \leq x \leq 0,5; \\ 1, & 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

за початкової умови $u(x,0) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

і граничних умов $u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0$.

Вивести графік залежності $u = u(x, t_{end})$.

3. Розв'язати задачу 1. за початкової $u(x,0) = 1 + \cos[(2n-1)\pi x]$, $n > 1$ і граничних умов Неймана $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0$.

4. Розв'язати методом прямих лінійне нормоване гіперболічне рівняння $u_{tt} = u_{xx}$, яке моделює жорстко закріплену струну, що коливається, за початкових умов $u(x,0) = \sin(\pi x)$ і $u_t(x,0) = 0$ і граничних умов $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0$.

5. Розв'язати задачу 2 четвертого розділу, використовуючи поздовжній метод прямих. Отриманий розв'язок порівняти із точним розв'язком.

6. Розв'язати задачу 5 четвертого розділу, використовуючи поздовжній метод прямих. Отриманий розв'язок порівняти із точним розв'язком.

7. Розв'язати задачу 3 шостого розділу, використовуючи поздовжній метод прямих. Отриманий розв'язок порівняти із точним розв'язком.

8. Розв'язати задачу 8 шостого розділу, використовуючи поздовжній метод прямих. Отриманий розв'язок порівняти із точним розв'язком.

9. Розв'язати методом прямих рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = x + y$$

у квадраті 1×1 за крайових умов Дирихле

$$u(0,x) = u(1,x) = x^2 + x; \quad u(y,0) = u(y,1) = y^2 + y.$$

10. Розв'язати задачу 9 за крайових умов Неймана

$$u_x(0,x) = u_x(1,x) = 2x + 1; \quad u_y(y,0) = u_y(y,1) = 2y + 1.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основної

1. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен : в 2 ч. / Д. Андерсон, Дж. Танненхилл, Р. Плетчер. – М. : Мир, 1990.
2. Бартеньев, О. В. ФОРТРАН для профессионалов. Математическая библиотека IMSL : в 3 ч. / О. В. Бартеньев. – М. : Диалог МИФИ, 2000.
3. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987.
4. Белов, И. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости / И. А. Белов, С. А. Исаев, В. А. Коробков. – Л. : Судостроение, 1989.
5. Бурковська, В. Л. Методи обчислень. Практикум на ЕОМ / В. Л. Бурківська, С. О. Войцехівський, І. П. Гаврилюк. – К. : Вища шк., 1995.
6. Волков, Е. А. Численные методы / Е. А. Волков. – М. : Наука, 1987.
7. Каліон, В. А. Чисельні методи розв'язання крайових задач механіки суцільних середовищ / В. А. Каліон. – К. : ВПЦ "Київський університет", 1999.
8. Крылов, В. И. Вычислительные методы : в 2 ч. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М. : Наука, 1977.
9. Ляшко, И. И. Методы вычислений / И. И. Ляшко, В. Л. Макаров, А. А. Скоробогатько. – К. : Вища шк., 1977.
10. Мак-Кормак Р. В. Численный метод решения уравнений вязких течений // Аэрокосмическая техника : в Х т. / Р. В. Мак-Кормак. – 1983. – Т. 1. – № 4. – С. 114–123.
11. Молчанов, И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций / И. Н. Молчанов. – К. : Наук. думка, 1987.
12. Оран, Э. Численное моделирование реагирующих потоков / Э. Оран, Дж. Борис. – М. : Мир, 1990.

13. Пасконов, В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. – М. : Наука, 1984.
14. Пейре, Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Д. Тейлор. – Л. : Гидрометеиздат, 1986.
15. Роуч, П. Дж. Вычислительная гидромеханика / П. Дж. Роуч. – М. : Мир, 1980.
16. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983.
17. Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1987.
18. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей : в 2 ч. – Ч. I-II. – М. : Мир, 1991.
19. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980.
20. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М. : Мир, 1982.
21. Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск : Наука, 1967.
22. Briley, W. R. Analysis and Computation of Viscous Subsonic Primary and Secondary Flows / W. R. Briley, H. McDonald. – Williamsburg; Virginia. – 1979. – AIAA Paper 79–1453.
23. Kazachkov, I. V. Numerical continuum mechanics / I. V. Kazachkov, V. A. Kalion. – Stockholm : Royal Institute of Technology. – 2002. – Vol. 1.
24. Madsen, N. K. Algorithm 540: PDECOL, General collocation software for partial differential equations / N. K. Madsen, R. F. Sincovec. // ACM Transactions on Mathematical Software. – 1979. – Vol. 5. – № 3. – P. 326–351.
25. Sincovec, R. F. Software for nonlinear partial differential equations / R. F. Sincovec, N. K. Madsen // ACM Transactions on Mathematical Software. – 1975. – Vol. 1. – № 3. – P. 232–260.
26. Warming, R. F. On the Construction and Application of Implicit Factored Schemes for Conservation Laws / R. F. Warming, R. M. Beam // SIAM AMS Proceedings. – 1978. – Vol. 11. – P. 159–179.

Додаткової

27. Баяковский, Ю. М. Графор. Графическое расширение Фортрана / Ю. М. Баяковский, В. А. Галактионов, Т. Н. Михайлова. – М. : Наука, 1985.

28. Болдуин, Б. Взаимодействие сильной ударной волны с турбулентным пограничным слоем / Б. Болдуин, Р. Мак-Кормак // Численное решение задач гидромеханики. – М. : Мир, 1977. – С. 174–183.

29. Белоцерковский, С. М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ. – М. : Наука, 1979.

30. Бим, Р. М. Неявная факторизованная разностная схема для уравнения Навье–Стокса сжимаемого газа / Р. М. Бим, Р. Ф. Уорминг // Ракетная техн. и космон., 1978. – Т. 16. – № 4. – С. 145–156.

31. Жаблон, К. Применение ЭВМ для численного моделирования в физике / К. Жаблон, Ж.-К. Симон. – М. : Наука, 1983.

32. Жермен-Лакур, П. Математика и САПР : в 2 кн. / П. Жермен-Лакур, П. Жорж, Ф. Пистр. – М. : Мир, 1989.

33. Краузе Э. Замечания к статье "Решение задачи о трехмерном пограничном слое с отрывом" / Э. Краузе // Ракетная техн. и космон., 1969. – № 3. – С. 222.

34. Краузе, Э. Точные численные решения для трехмерных пограничных слоев / Э Краузе, Э. Г. Хиршель // Численные методы в механике жидкостей. – М. : Мир, 1973. – С. 207–217.

35. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1980.

36. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / под ред. С. М. Белоцерковского. – М. : Наука, 1988.

37. Мюллер, У. Р. Сравнение расчетов трехмерных турбулентных пограничных слоев с экспериментальными данными / У. Р. Мюллер // Трехмерные турбулентные пограничные слои. – М. : Мир, 1985. – С. 300–315.

38. Патанкар, С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах / С. В. Патанкар. – М. : Изд-во МЭИ.
39. Пейре Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Д. Тейлор. – Л. : Гидрометеиздат, 1986.
40. Смит, П. Д. Численный расчет трехмерных пограничных слоев / П. Д. Смит // Трехмерные турбулентные пограничные слои. – М. : Мир, 1985. – С. 259–275.
41. Таннехилл, Дж. К. Численное исследование двумерного вязкого течения, развивающегося при взаимодействии затупленных тел с внешней ударной волной / Дж. К. Таннехилл, Т. Л. Холст, Дж. В. Рэкич // Ракетная техн. и космон., 1976. – Т. 14. – № 2. – С. 94–103.
42. Тэйлор, Т. Д. Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления / Т. Д. Тэйлор, Э. Ндефо // Численные методы в механике жидкостей. – М. : Мир, 1973. – С. 218–229.
43. Шенг, Дж. С. Неявно-явный метод численного решения уравнений Навье–Стокса / Дж. С. Шенг // Ракетная техн. и космон., 1978. – Т. 16. – № 5. – С. 102–109.
44. Шифф, Л. Б. Численный расчет стационарных сверхзвуковых вязких течений / Л. Б. Шифф, Дж. Л. Стегер // Ракетная техн. и космон., 1980. – Т. 18. – № 12. – С. 16–29.
45. Amsden A.A. The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows / A. A. Amsden, F. N. Harlow. – Los Alamos; New Mexico : Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-4370. – 1970.
46. Baldwin, B. S. Thin layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows / B. S. Baldwin, H. Lomax. – Huntsville Alabama. – 1978. – AIAA Paper 78-257.
47. Briley, W. R. A Numerical Study of Laminar Separation Bubbles using the Navier–Stokes Equations / W. R. Briley. – United Aircraft Research Laboratories, East Hartford, Connecticut. – 1970. – Report J110614-1.
48. Cebeci, T. Momentum transfer in boundary layers / T. Cebeci, P. Bradshaw. – 1977. – New-York : McGraw-Hill.

49. Chorin, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems / A. J. Chorin // *J. Comput. Phys.*, 1967. – Vol. 2. – P. 12–26.

50. Cuomo, G. SPH-LES two-phase simulation of wave breaking and wave-structure interaction : Proc. 30-th International Conference on Coastal Engineering (ICCE). / G. Cuomo, Andrea Panizzo, R. Dalrymple. – 2006. – P. 1732.

51. Gosman, A. D. The Prediction of Confined Three-dimensional Boundary Layers / A. D. Gosman, D. B. Spalding. – Salford Symposium on Internal Flows, Inst. Mech. Engrs., London. – 1971. – Paper 19.

52. Jensen, V. G. Viscous Flow Round a Sphere at Low Reynolds Number (≤ 40) / V. G. Jensen // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1959. – Ser. A. – Vol. 249. – P. 346–366.

53. Krause, E. Numerical Treatment of Boundary Layer Problems / E. Krause // AGARD LS-64, Brussels, NATO. – 1973. – P. 4.1–4.21.

54. Li, C. P. Numerical Solution of Viscous Reacting Blunt Body Flows of a Multicomponent Mixture / C. P. Li. – Los Angeles; California. – 1973. – AIAA Paper 77–168.

55. Li, C. P. A Numerical Study Separated Flows Induced by Shock-Wave/Boundary-Layer Interaction / C. P. Li. – Los Angeles; California. – 1977. – AIAA Paper 77–168.

56. Miyakoda, K. Contribution to the Numerical Weather Prediction – Computation with Finite Difference / K. Miyakoda // *Japan J. Geophys.* – 1962. – Vol. 3. – P. 75–190.

57. Rubin, S. G. A Review of Marching Procedures for Parabolized Navie–Stokes Equations : Symposium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows. / S. G. Rubin. – New-York : Springer-Verlag. – 1981. – P. 171–186.

58. Rubin, S. G. Numerical Methods for Two- and Three-dimensional Viscous Flow Problems: Application to Hypersonic Leading Edge Equations / S. G. Rubin, T. C. Lin // Polytechnic Institute of Brooklyn. – 1971. – New-York : Farmingdale. – PIBAL Report 71–8.

59. Steger, J. L. Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Geometries with Application to Airfoils / J. L. Steger. – Albuquerque; New Mexico. – 1977. – AIAA Paper 77–665.

60. Vigneron, Y. C. Calculation of Supersonic Viscous Flow over Delta Wings with Sharp Subsonic Leading Edges / Y. C. Vigneron, J. V. Rakich, J. C. Tannehill. – Seattle; Washington. – 1978. – AIAA Paper 78–1137.

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ _____ 3

ПЕРЕДМОВА _____ 6

ВСТУП _____ 8

Розділ 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ
І ЇХ МАТЕМАТИЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ _____ 13

1.1. Природа коректно поставленої задачі.
Критерії Адамара _____ 14

1.2. Математична класифікація
лінійних диференціальних
рівнянь другого порядку _____ 15

1.3. Математична класифікація систем лінійних
диференціальних рівнянь першого порядку _____ 17

Розділ 2

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ
І НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ _____ 22

2.1. Метод Ньютона _____ 22

2.2. Квазіньютонівські методи _____ 25

2.3. Прямі методи розв'язання лінійних систем _____ 26

2.3.1. Методи прогонки _____ 27

2.3.2. Методи ортогоналізації _____ 31

2.4. Ітераційні методи _____ 37

2.4.1. Загальна структура ітераційних методів _____ 37

2.4.2. Збіжність ітераційних методів _____ 39

2.4.3. Особливості розв'язання систем
нелінійних рівнянь _____ 40

2.4.4. Багатосіткові методи _____ 41

Розділ 3	
ОСНОВИ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ	50
3.1. Дискретизація	51
3.1.1. Побудова сітки	51
3.1.2. Побудова скінченнорізницевої апроксимації диференціальних рівнянь у частинних похідних	54
3.1.3. Побудова скінченнорізницевої формули за допомогою поліноміальної апроксимації	57
3.1.4. Побудова скінченнорізницевої формули інтегральним методом	59
3.2. Апроксимація оператора Лапласа на трикутній сітці	61
3.3. Заміна граничних умов Дирихле сітковими рівняннями	63
3.4. Заміна граничних умов Неймана сітковими рівняннями	65
3.5. Теорема про розв'язність системи сіткових рівнянь	66
3.6. Теорема Лакса про еквівалентність	66
3.7. Правило Рунге практичного оцінювання похибки апроксимації	68
3.8. Методи розв'язання стаціонарних задач гідромеханіки	68
3.9. Псевдонестаціонарний метод	72
3.10. Метод скінченних об'ємів для розв'язання крайових задач у рівняннях еліптичного типу	73
3.11. Приклад використання методу Ньютона і псевдонестаціонарного методу для розв'язання крайової задачі системи двовимірних стаціонарних рівнянь Бюргерса	77

3.12. Особливості використання швидкого перетворення Фур'є при розв'язанні крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона _____	80
3.13. Деякі стратегічні прийоми розв'язання стаціонарних задач _____	85

Розділ 4

ОСНОВИ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ _____	88
--	----

4.1. Одновимірне рівняння дифузії _____	88
4.1.1. Розв'язання задачі Коші. Явні схеми _____	89
4.1.2. Розв'язання задачі Коші. Неявні схеми _____	92
4.2. Особливості розв'язання мішаної крайової задачі для одновимірного рівняння дифузії _____	95
4.3. Особливості розв'язання крайових задач для багатовимірного рівняння дифузії _____	98
4.3.1. Найпростіші явні та чисто неявна схеми _____	99
4.3.2. Неявний метод змінних напрямків _____	100
4.3.3. Метод дробових кроків _____	102
4.3.4. Узагальнені схеми розщеплення _____	103

Розділ 5

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ _____	109
---	-----

5.1. Одновимірне хвильове рівняння та одновимірне рівняння переносу _____	109
5.2. Найпростіші методи першого і другого порядку точності _____	110
5.2.1. Явні методи Ейлера _____	110
5.2.2. Найпростіший варіант методу різниць проти течії. Модифіковане рівняння _____	111

5.2.3. Схема Лакса _____	113
5.2.4. Неявний метод Ейлера _____	114
5.3. Методи підвищеної точності _____	115
5.3.1. Метод із переступанням "чехарда" _____	115
5.3.2. Метод Лакса–Вендрофа _____	115
5.3.3. Двокроковий метод Лакса–Вендрофа _____	116
5.3.4. Метод Мак–Кормака (предиктор–коректор) _____	116
5.3.5. Метод різниць проти течії _____	117
5.3.6. Центрована за часом неявна схема _____	118
5.3.7. Метод Русанова _____	119

Розділ 6

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ _____ 121

6.1. Найпростіші схеми апроксимації стаціонарного рівняння конвекції–дифузії. Поняття сіткового числа Рейнольдса _____	121
6.2. Схеми з різницями проти течії підвищеного порядку точності _____	123
6.3. Нестаціонарне рівняння конвекції–дифузії _____	124
6.3.1. Явні схеми _____	125
6.3.2. Неявні схеми _____	128

Розділ 7

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СІТОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ _____ 133

7.1. Рівняння Бюргерса для нев'язкої течії _____	133
7.1.1. Явні методи _____	135
7.1.2. Неявні методи. Дельта-форма запису скінченнорізницевих рівнянь _____	140
7.2. Рівняння Бюргерса для в'язкої течії _____	141
7.2.1. Явні методи _____	142
7.2.2. Неявний метод Брілі–МакДональда _____	147

7.3. Багатовимірне рівняння Бюргерса	
для в'язкої течії _____	148
7.3.1. Явний метод Мак-Кормака	
із розщепленням за часом _____	149
7.3.2. Неявні методи змінних напрямків _____	150
7.3.3. Багатоітераційний метод предиктор–коректор _	151
Розділ 8	
ОСНОВИ МЕТОДУ ПРЯМИХ _____	154
8.1. Метод прямих для рівнянь параболічного типу __	155
8.1. Метод прямих для рівнянь еліптичного типу _____	158
8.2. Метод прямих для рівнянь гіперболічного типу __	159
8.3. Напівдискретні методи бібліотеки IMSL _____	160
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ _____	165

Навчальне видання

КАЛІОН Віталій Анатолійович

**ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ГІДРОМЕХАНІКА
МОДЕЛЬНІ ЗАДАЧІ**

Навчальний посібник

Редактор *Л. В. Магда*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

"



Підписано до друку 08.07.11. Формат 60x84^{1/16}. Вид. № МЗ.

Гарнітура Times New Roman.

Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 200.

Ум. друк. арк. 10,23. Обл.-вид. арк. 11. Зам. № 211-5730.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"

01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43

☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; факс (38044) 239 31 28

Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02