

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ШЕВЧЕНКА

В. А. КАЛІОН

**ОБЧИСЛЮВАЛЬНА
ГІДРОМЕХАНІКА
ПРИМЕЖОВИЙ ШАР
та нев'язкі течії**

Навчальний посібник

Київ 2013

УДК 532+(075.8)
ББК 22.253я73
К17

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. Є. О. Гаєв,
д-р техн. наук, доц. Є. О. Шквар

*Рекомендовано до друку
вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол № 2 від 17 вересня 2012 року)*

Каліон В. А.

К17 Обчислювальна гідромеханіка. Примежовий шар та не-в'язкі течії : навчальний посібник / В. А. Каліон . – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2013. – 210 с.

ISBN 978-966-439-402-1

Подано основні положення обчислювальної гідромеханіки для магістрів механіків механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. До кожного розділу підбрано характерні задачі для виконання на лабораторних практикумах, а також для самостійної роботи.

Розглянуто використання числових методів для розв'язання крайових задач для системи рівнянь Ейлера та системи рівнянь примежового шару, зокрема методу сіток та панельних методів. А також розглянуті методи числового перетворення диференціальних рівнянь в частинних похідних й числові методи побудови сіток. В Додатку подано основні моделі, що описують турбулентний рух рідини. Посібник є продовженням книги "Обчислювальна гідромеханіка. Модельні задачі".

Для студентів механіко-математичного факультету. Може використовуватись як довідник для всіх, хто цікавиться обчислювальними методами для розв'язання задач гідромеханіки.

**УДК 532+(075.8)
ББК 22.253я73**

ISBN 978-966-439-402-1

**© Каліон В. А., 2013
© Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2013**

Основні позначення

| | |
|------------------------------|---|
| $\underline{A} = \{a_{jk}\}$ | Матриця з елементами a_{jk} |
| \underline{A}^{-1} | Матриця, що обернена матриці \underline{A} |
| \underline{A}^T | Матриця, що транспонована матриці \underline{A} (рядки замінено стовпцями) |
| $\{\underline{A}^k\}$ | Послідовність матриць |
| $ \underline{A} $ | Детермінант (визначник) матриці \underline{A} |
| $\sum_{i=1}^N a_i$ | Сума елементів a_i для i від $i = 1$ до $i = N$ |
| $\sum_{j \neq k} a_{jk}$ | Сума елементів a_{jk} для всіх $j \neq k$ |
| $\angle(\vec{n}, Ox)$ | Кут між вектором \vec{n} і віссю координат Ox |
| α | Коефіцієнт дифузії [m^2/c] |
| ADI | Неявна схема змінних напрямків (Alternating-Direction-Implicit scheme) |
| CTI | Центрована за часом неявна схема (Central Time Implicit) |
| CG | Метод спряжених градієнтів (Conjugate Gradients Method) |
| D | Область обчислень |
| \bar{D} | Область обчислень D , що включає межу Γ |

| | |
|---------------------------------|---|
| D_h | Дискретна область обчислень (множина вузлів на перетині ліній сітки) |
| D_h^0 | Множина внутрішніх вузлів сітки |
| det | Визначник |
| d/ds , | Звичайні похідні за $s = \{x, y, \dots\}$ |
| $\Delta x, \Delta y$ | Приріст за координатами x та y , відповідно |
| $\Delta x \rightarrow 0$ | Δx прямує до нуля |
| \underline{I} | Одинична матриця (одиниці на головній діагоналі й нулі скрізь, окрім головної діагоналі) |
| $\vec{f} = \{f_i\}$ | Вектор з елементами f_i |
| $f(x,y), u(x,y)$ | Функції двох змінних x, y |
| $f _a^b$ | $f(b) - f(a)$ |
| $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ | Інтеграл від $f(x)$ на відрізку від α до β |
| FI | Чисто неявна схема (Fully Implicit scheme) |
| FTCS | Схема вперед за часом, центральна за простором (Forward in Time, Central in Space scheme) |
| FS | Схема “класики” (Frog Step scheme) |
| FVM | Метод скінченних об’ємів (Finite Volume Method) |
| $\varphi(M)$ | Значення функції φ у точці M області обчислень |
| G2LS | Узагальнена двошарова схема (Generalized 2-Layer Scheme) |

| | |
|---|--|
| G3LS | Узагальнена тришарова схема (Generalized 3-Layer Scheme) |
| Γ | Межа області обчислень |
| Γ_h | Множина межових вузлів сітки |
| G_j^n (ГЧП) | Головна частина послідовності |
| $\underline{J}^{(k)}$ | Якобіан (матриця Якобі) на k -му кроці |
| i, j | Індекси (цілі: 0, 1, 2, 3, ...) |
| $(\)_{ij}$ | Значення функції у вузлі (i, j) сітки |
| ∇^2 | Оператор Лапласа |
| LAEA | Система лінійних алгебраїчних рівнянь (Linear Algebraic Equation Array) |
| $L(u)$ | Лінійний диференціальний оператор на функції u |
| $(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ | Скалярний добуток векторів $\vec{a} = \{a_k\}$, $\vec{b} = \{b_k\}$ |
| $\underline{L} \cdot \underline{V}$ | Скалярний добуток матриць \underline{L} та \underline{V} |
| λ_k | Власні числа матриці |
| $\underline{\Delta} = \{\lambda_{kj}\}$ | Матриця, де $\lambda_{kk} = \lambda_k$, $\lambda_{k, k+1} = 1 \vee 0$; $\lambda_{kj} = 0$, $j < k$, $j > j + 1$ (права канонічна форма Жордана (Jordan)) |
| M | Число Маха (Mach' number) |
| MFS | Метод дробових кроків (Method of Fractional Steps) |
| μ | Динамічний коефіцієнт в'язкості [Па с] |

| | |
|--------------------------|---|
| \vec{n} | Вектор нормалі |
| $N \times M$ | Розмірність матриці (N рядків M стовпців) |
| NX, NY | Кількість вузлів сітки у напрямку X та Y , відповідно |
| ODE | Звичайне диференціальне рівняння (Ordinary Differential Equation) |
| $O, O(\Delta x)^2$ | Порядок малості величини, величина порядку $(\Delta x)^2$, відповідно |
| PDE | Рівняння в частинних похідних (Partial Differential Equation) |
| p | Тиск [Па] |
| Pr | Число Прандтля (Prandtl number) |
| R, φ | Осі полярної системи координат |
| Re | Число Рейнольдса (Reynolds number) |
| R _{cell} | Сіткове число Рейнольдса (Cell Reynolds number) |
| ρ | Густина [кг/м ³] |
| sin, cos, tg | Синус, косинус та тангенс, відповідно |
| sh, ch | Гіперболічні синус та косинус, відповідно |
| SOR | Метод послідовної верхньої релаксації (Successive Over Relaxation Method) |
| τ | Напруження [Па] |
| T | Температура [K] |
| t | Час [с] |
| TDMA | Метод прогонки (Tri-Diagonal-Matrix Algorithm) |

| | |
|------------------------------------|--|
| $\text{tr}(\underline{A})$ | Слід матриці \underline{A} (сума діагональних елементів) |
| T. E. | Помилка округлення (Truncation error) |
| $[u]_{\Gamma}$ | Значення функції u на межі області Γ |
| u_x, u_y | Частинні похідні першого порядку за x та y , відповідно |
| u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} | Частинні похідні другого порядку за x та y , відповідно |
| u_{jk}^n | Функція u у вузлі (j,k) просторової сітки й у вузлі n за часом |
| $\underline{V} \cdot \vec{v}$ | Матриця V помножена на вектор \vec{v} |
| (x,y) | Точка на площині з координатами x та y (двовимірний випадок) |
| X, Y | Осі декартової системи координат |
| (x_i, y_j) | Точка з координатами x_i та y_j , що належить дискретній області обчислень D_n |
| (x_0, y_0) | Координати початку відліку ліній сітки (точка $O \in D$) |
| $x \rightarrow i, y \rightarrow j$ | Замінити x на i та y на j , відповідно |
| $\ \cdot \ _n$ | Скалярна та векторна норми в n -вимірному просторі, відповідно |

Передмова

Ця книга написана на основі лекцій, які читає автор для магістрів-механіків механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка протягом останніх десяти років. Книга містить основні теоретичні положення обчислювальної гідромеханіки. До кожного розділу книги дібрано характерні задачі й вправи для практичних занять та практикумів на комп'ютері, які передбачені навчальним планом. Ці задачі й вправи також рекомендуються для самостійного розв'язання студентам, що спеціалізуються з комп'ютерної механіки. Автор сподівається, що виконання запропонованих задач й вправ буде сприяти закріпленню матеріалу та його більш глибокому розумінню, а також сприятиме практичному застосуванню отриманих знань. Знати – значить вміти.

Книга умовно поділена на три частини. Перша частина вже вийшла у світ окремим виданням [7]. Вона містить класичні розділи: диференціальні рівняння в частинних похідних та їх математична класифікація, основи методу сіток для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу (методи дискретизації рівнянь й побудови сіток); методи розв'язання стаціонарних задач механіки суцільних середовищ (прямі методи розв'язання лінійних систем рівнянь, ітераційні методи розв'язання лінійних та нелінійних систем рівнянь, псевдонестаціонарний метод; стратегічні прийоми розв'язання стаціонарних задач), основи методу сіток для розв'язання задачі Коші й крайової задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних параболічного типу (одновимірне рівняння дифузії, особливості розв'язання крайових задач для багатовимірного рівняння дифузії), використання методу сіток для розв'язання крайових задач для модельних лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних (одновимірне хвильове рівняння, стаціонарне рівняння з конвекцією та дифузією та одновимірне рівняння переносу), використання методу сіток для розв'язання крайових задач для модельних нелінійних диференціальних рівнянь у частинних

похідних (одновимірне рівняння Бюргерса для нев'язкої й в'язкої течії, багатовимірне рівняння Бюргерса для в'язкої течії). Тут також розглядається метод прямих для розв'язання крайових задач для еліптичних, параболічних та гіперболічних рівнянь у частинних похідних.

Друга частина, яку читач зараз тримає у руках, містить матеріал, що дозволить йому самостійно будувати алгоритми розв'язання складних дво- й тривимірних крайових задач комп'ютерної механіки, у тому числі: методи розв'язання дво- й тривимірних крайових задач для рівнянь Ейлера (панельний метод, надзвуків нев'язкі течії, розрахунок сильних стрибків ущільнення, одновимірний несталий рух нев'язкої стисливої рідини), методи сіток для розв'язання дво- й тривимірних крайових задач для системи рівнянь типу рівнянь примежового шару, а також числові методи перетворення основних рівнянь й побудови розрахункових сіток. В додатку наведені основні моделі турбулентності, які можуть бути використані при числових розрахунках примежового шару.

Книга призначена для студентів механіко-математичних факультетів університетів, а також буде корисна усім, хто цікавиться використанням обчислювальних методів у задачах механіки.

Автор висловлює щире подяку завідувачу кафедри механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка професору Лимарченку Олегу Степановичу за підтримку, а також завідувачу відділом ІГМ НАНУ Геннадію Олександровичу Воропаєву й науковому співробітнику ІГМ НАНУ Олені Сірош за допомогу при підготовці книги.

Автор висловлює також подяку рецензентам: провідному науковому співробітнику ІГМ НАНУ, доктору технічних наук, професору Гаєву Євгенію Олександровичу та професору Національного авіаційного університету, доктору технічних наук, доценту Шквару Євгенію Олексійовичу.

Київ, вересень 2012 року

В.Каліон

Вступ

Течії в примежовому шарі традиційно виділяють в окрему категорію течій. При числових розрахунках примежовий шар зручно визначити як течію, для якої дифузія, що пов'язана з в'язкістю, істотна лише в напрямку, нормальному до обтічної поверхні, а тиск, навпроти, може змінюватися лише вздовж напрямку формування течії, залишаючись незмінним при $x = const$ (див. Рис. 1) [36]. Останнє спрощення дає змогу виключити з подальшого розгляду рівняння для нормальної складової імпульсу. Якщо розподіл тиску відомо з розв'язку зовнішньої задачі (див. розділ 1), то рівняння, які описують подібні течії, мають вже параболічний тип, що дозволяє використати досить ефективні маршові алгоритми (у напрямку Ox на рис. 1) для їх розв'язання.

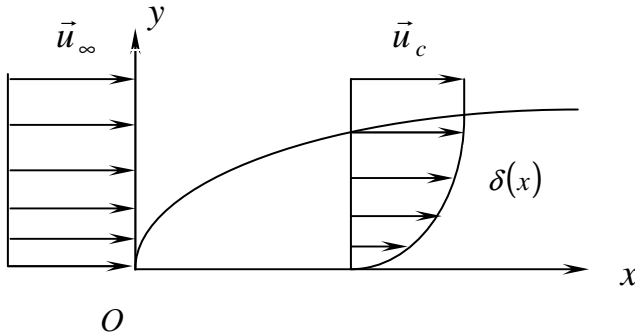


Рис. 1. Схема розвитку примежового шару на плоскій пластині.

У примежових шарах більші градієнти швидкості мають місце в нормальному до поверхні напрямку. Тому перед основними розрахунками бажано виконати перетворення координат таким чином, щоб в новій системі координат ці градієнти стали б менші. Найбільш ефективні аналітичні й числові перетворення координат описано в розділі 4. Крім того, для одержання достатньої роздільної здатності бажано використовувати сітки з досить дрібним кроком поблизу обтічної поверхні у нормальному до неї напрямку, а також

забезпечувати умову ортогональності ліній сіток у пристінних вузлах. Побудова подібних сіток описана в розділі 5.

Рівняння, що описують рух у тривимірному примежовому шарі, являються гіперболічними в площинах, що нормальні до поверхні, вздовж якої розвивається примежовий шар. При цьому в цих площинах формуються області залежності й впливу. Останнє ускладнює розв'язання задачі, оскільки область впливу в явних маршових алгоритмах визначає можливу величину кроку (див. Розділ 3).

При розрахунках турбулентних примежових шарів використовуються ті ж самі обчислювальні алгоритми, що й для ламінарних. Однак збільшення градієнта нормальної складової швидкості поблизу поверхні для турбулентної течії може привести до необхідності введення більш сильного згущення сітки в напрямку нормалі. Ця проблема може бути також розв'язана шляхом введення пристінних функцій, які дозволяють одержати поблизу стінки локально аналітичні профілі швидкості та визначальних характеристик турбулентного руху. Основні моделі турбулентності, які можуть бути використані при розрахунках турбулентного примежового шару наведені в Додатку А.

Якщо не враховувати дифузією в напрямку потоку й відкинути рівняння для нормальної складової імпульсу, наближення примежового шару може бути з успіхом використане при розрахунках струменів, течії у сліді й трубах. Подібні течії з тонкими зсувними шарами ефективно розраховуються з використанням алгоритмів, які застосовуються при розрахунках течії у примежовому шарі.

Найбільш зручна форма запису рівнянь примежового шару залежить від задачі, що розглядається. Найчастіше використовують таку систему рівнянь:

Рівняння руху у напрямку осі Ox :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_c u_c \frac{\partial u_c}{\partial x} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^m (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \quad (I)$$

Рівняння енергії:

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial y} + \rho \tilde{v} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^m \left\{ \left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} + \frac{\mu_T}{\mathbf{Pr}_T} \right) \frac{\partial H}{\partial y} + \left[\mu \left(1 - \frac{1}{\mathbf{Pr}} \right) + \mu_T \left(1 - \frac{1}{\mathbf{Pr}_T} \right) \right] u \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \right); \quad (\text{II})$$

Рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^m \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (r^m \rho \tilde{v}) = 0; \quad (\text{III})$$

Рівняння стану:

$$\rho = \rho(T, p). \quad (\text{IV})$$

Крім того задають коефіцієнти μ, k, c_p як функції температури T (або ентальпії H). Тут узагальнена компонента швидкості впоперек потоку має вигляд $\tilde{v} = (\bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho'v'}) / \rho^1$.

Система (I)-(IV) описує рух двовимірного ($m=0$) (або осесиметричного ($m=1$)) стаціонарного стисливого примежового шару із врахуванням турбулентності. Причому турбулентність вводиться, як правило, через гіпотезу Бусинеска (див. Додаток А), де напруження Рейндольдса та турбулентний тепловий потік виражаються через коефіцієнт турбулентної в'язкості μ_T й число Прандтля \mathbf{Pr}_T :

$$-\overline{\rho u'v'} = \mu_T \frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\overline{\rho c_p v'T'} = \frac{c_p \mu_T}{\mathbf{Pr}_T} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}.$$

У рівнянні енергії в якості шуканого невідомого обираємо повну ентальпію $H = c_p T + u^2/2 + \underline{\underline{v^2/2}}$, причому підкреслений член у наближенні примежового шару прямує до нуля.

Основною невідомою в рівнянні (I) є повздовжня компонента швидкості u , тому зручно розглядати це рівняння як рівняння переносу, що містить члени, які описують конвекцію та дифузію

¹ Тут й надалі ризикою зверху позначені члени, що осереднені за часом.

u , а також джерельний член¹. Рівняння енергії також можна розглядати як рівняння переносу ентальпії H . Подібну інтерпретацію можна розповсюдити, як це буде показано далі, й на рівняння руху та енергії у нестационарному випадку.

Звичайно (I) та (II) можна переписати у вигляді:

$$\rho u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^m \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S, \quad (\text{V})$$

де Φ – узагальнена змінна (або u , або H); λ – узагальнений коефіцієнт дифузії. Підкреслені однією рискою члени описують конвекцію Φ , двома рисками – дифузію, S – джерельний член.

Зауваження:

- Більшість із відомих моделей турбулентності, що описуються диференціальними рівняннями, також мають вигляд (V).
- Найпростіший підхід до розв'язання (V), який приводить до непоганих результатів, полягає у сумісному маршовому розв'язанні рівнянь (I)–(III) за маршовою координатою x . Після кожного кроку за x коефіцієнти усіх рівнянь обчислюються заново, тому фактично розв'язки цих рівнянь взаємопов'язані, а незалежно розв'язуються (розщеплюються) лише алгебраїчні рівняння на кожному кроці за маршовою координатою. Іноді всі рівняння покладаються взаємопов'язаними, тоді на кожному кроці за x доводиться розв'язувати набагато більшу систему лінійних алгебраїчних рівнянь для одночасного визначення u , H та \tilde{v} .

¹ Джерельними у рівняннях із частинними похідними називають члени, які не містять похідних від невідомої.

Розділ 1

**МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ
РІВНЯНЬ ЕЙЛЕРА**

Повні рівняння Нав'є–Стокса адекватно описують течію рідини й газу в задачах як внутрішньої, так і зовнішньої аерогідродинаміки [36]. Однак числове розв'язання рівнянь Нав'є–Стокса часто неможливе або ж не представляє практичного інтересу, бо в багатьох задачах у ньому просто немає необхідності. Результати, що отримані із розв'язання більш простих рівнянь Ейлера [36], які являють собою нев'язке наближення для рівнянь Нав'є–Стокса, мають практичну значимість на стадії попереднього проектування, коли потрібне знання лише розподілу тиску. У задачах, де потрібен розрахунок тертя і теплопередачі, адекватні результати дає числове розв'язання рівнянь примежового шару, яке буде розглянуто у наступному розділі. Однак на першому етапі аналізу із використанням рівнянь примежового шару потрібно знайти крайові умови на зовнішній границі знов-таки із розв'язання рівнянь Ейлера.

Розв'язання рівнянь Ейлера представляє й самостійний інтерес, оскільки ці рівняння містять основні елементи динаміки рідини. Наприклад, при течії рідини часто виникають внутрішні розриви, такі, як ударні хвилі або контактні розриви. Відомі співвідношення Гюгоніо–Ренкіна зв'язують кінцеві параметри газу з обох сторін від ударної хвилі. Ці співвідношення також знаходять із розв'язання рівнянь Ейлера.

Рівняння Ейлера описують течію нев'язкого нетеплопровідного газу і мають різний тип при різних режимах течії. Якщо в них збережені залежні від часу члени, то ці нестационарні рівняння мають параболічний тип для будь-яких чисел Маха і вони можуть бути розв'язані з використанням маршових за часом процедур. Зовсім інша ситуація має місце при розрахунках стаціонарних течій. У цьому випадку тип рівнянь Ейлера є еліптичним на дозвукових режимах течії та гіперболічним на надзвукових.

Для розрахунку течій нев'язкої рідини використовуються й спрощені версії рівнянь Ейлера. Наприклад, для випадку нестисливих рідин часто використовують допущення про безвихровий характер течії. При цьому необхідну інформацію забезпечує розв'язання рівняння Лапласа для потенціалу швидкості. Зв'язана з рівняннями Ейлера і система рівнянь для малих збурень, яка дає гарне лінійне наближення першого порядку для потенціалу у випадку дозвукових і надзвукових течій. Відзначимо, що для трансзвукових течій рівняння малих збурень залишається нелінійним.

Для розв'язання рівнянь Ейлера або будь-яких їх спрощених версій використовують різні обчислювальні методи. Основна мета цього розділу — представити методи, які одержали найбільше поширення при розв'язанні задач течії нев'язкої рідини. Лінеаризовані рівняння потенціалу для дозвукових течій досить ефективно розв'язуються панельними методами, які з цієї причини також будуть коротко розглянуті в даному розділі. Будуть розглянуті й різні сіткові методи. Причому вибір методів буде пов'язаний із їх подальшим використанням для розв'язання вкорочених й повних рівнянь Нав'є–Стокса. У той же час багато інших методів, які інтенсивно застосовуються останнім часом, у тому числі методи скінченних елементів, розглядатися не будуть.

1.1. Панельний метод

Значну частину реальних течій можна вважати безвихровими, нев'язкими й нестисливими. При цьому рівняння, що описують такі течії, зводяться до рівняння Лапласа для потенціалу швидкостей [36]

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.1)$$

с крайовими умовами, які визначають значення Φ або $\partial\Phi/\partial n$. Для практики найбільший інтерес представляє розподіл тиску на поверхні тіла. Визначення тиску дозволяє безпосередньо розраховувати піднімальну силу, що діє на тіло, й визначити

крайові умови для тиску (або для швидкості течії) у рівняннях, які описують течію у примезовому шарі (див. розділ 2).

Рівняння (1.1) може бути розв'язано скінченно-різницевиими методами, методом скінченних елементів або спектральними методами. Однак, користуючись тим, що рівняння (1.1) є лінійним, більш ефективними виявляються методи, що засновані на суперпозиції простих точних розв'язків рівняння (1.1), і які точно задовольняють крайовим умовам. Додатковою перевагою такого підходу є та обставина, що до розрахункової області при цьому відноситься практично лише поверхня тіла, а не вся область, що лежить поза поверхнею, як це має місце при використанні скінченно-різницевих або скінченно-елементних методів. Останнє дозволяє побудувати економічний алгоритм і порівняно просто розрахувати обтікання тіл складної форми.

В авіаційній промисловості такі методи носять назву *панельних методів*, хоча, як відзначається у монографії Флетчера [17], ці методи можна трактувати і як методи граничних елементів. Спочатку розглянемо використання панельного методу для розрахунку течії навколо гарнообтічних тіл без піднімальної сили.

1.1.1. Нев'язкі нестисливі течії

Назва методу “панельний” пов'язана з поділом поверхні тіла на декілька панелей, що дотикаються одна до одної (див. Рис. 1.1). До кожної панелі прив'язується джерело, щільність інтенсивності якого σ_j визначається на проміжній стадії розв'язання. Панельне джерело густини σ створює на кожній стороні панелі швидкість 0.5σ , що спрямована по нормалі до панелі.

Панельні джерела, які поміщено в однорідний потік, що рухається зі швидкістю U_∞ паралельно осі x (Рис. 1.1), створюють потенціал $\Phi(x_k, y_k)$, який визначається виразом

$$\Phi(x_k, y_k) = U_\infty x_k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sigma_j \int \ln r_{kj} ds_j, \quad (1.2)$$

де

$$r_{kj} = [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2]^{1/2} \quad (1.3)$$

й $\sigma_j \int ds_j$ — інтенсивність j -го панельного джерела. Рівняння (1.2), (1.3) задовольняють (1.1). Густини інтенсивності джерела σ_j обирають таким чином, щоб задовольнити крайову умову непротікання потоку через поверхню тіла.

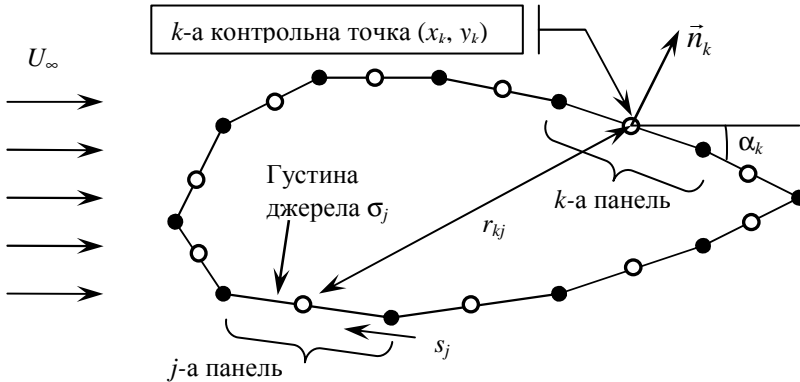


Рис. 1.1. Панельне представлення поверхні тіла.

Компоненти швидкості визначаються через градієнт потенціалу $\nabla\Phi$. Зокрема, крайова умова для нормальної складової швидкості на поверхні тіла, для k -ї панелі має вигляд

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\partial\Phi}{\partial n_k}(x_k, y_k) = \\ &= -U_\infty \sin \alpha_k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sigma_j \int \frac{\partial}{\partial n_k} (\ln r_{kj}) ds_j = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тут α_k — нахил поверхні тіла в k -й контрольній точці (звичайно в середині k -ї панелі, рис. 1.1). Таким чином, після обчислення інтегралів рівняння (1.4) представляє собою лінійний функціонал відносно невідомих густин джерел σ_j . В окремому випадку при $k = j$ інтеграли можуть бути обчислені аналітично, а саме

$$\int \frac{\partial}{\partial n_k} (\ln r_{kk}) ds_k = \pi. \quad (1.5)$$

При $j \neq k$ інтеграли представляють собою функції вузлових точок $(x_k, y_k; x_j, y_j)$. Конкретні формули для їх визначення будуть наведені нижче. Якщо записати рівняння (1.4) в кожній контрольній точці k , маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих густин джерел σ_k

$$\underline{A}\vec{\sigma} = \vec{R}, \quad (1.6)$$

де компоненти матриці \underline{A} й вектора \vec{R} рівні, відповідно

$$A_{kj} = 0.5\delta_{kj} + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial n_k} (\ln r_{kj}) ds_j, \quad (1.7)$$

$$R_k = U_\infty \sin \alpha_k. \quad (1.8)$$

При розв'язанні системи лінійних рівнянь (1.6) користуються як прямими, так й ітераційними методами.

Після визначення розподілу густин джерел компоненти швидкості, що обумовлені внесенням тіла в потік, можуть бути отримані із формул

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sigma_j \int \frac{x - x_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j; \quad (1.9)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sigma_j \int \frac{y - y_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j. \quad (1.10)$$

а повне поле швидкостей визначається вектором $\vec{q} = \{U_\infty + u, v\}$.

Якщо компоненти швидкості визначаються в контрольних точках на поверхні тіла, розподіл тиску біля поверхні тіла визначається безпосередньо із рівняння Бернуллі

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{0.5\rho U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{q}{U_\infty} \right)^2. \quad (1.11)$$

Отримані результати добре відповідають відомим експериментальним даними. Ця відповідність може бути навіть поліпшена, якщо перерозподілити панелі таким чином, щоб їх число збільшувалося в носовій частині профілю й зменшувалося в центральній.

Для багатьох задач розв'язок (швидкість або тиск) необхідно визначити лише у контрольних точках. У цьому випадку розрахунок (1.4) багато в чому повторює розрахунок (1.9) й (1.10). Тому тут можна порекомендувати наступну більш ефективну процедуру. Згідно цієї нової процедури, спочатку обчислюються вектори $\vec{v}_{kj} = (u_{kj}, v_{kj})$, що представляють собою внески в компоненти швидкостей (1.9) й (1.10) в контрольній точці (x_k, y_k) , що обумовлені джерелом одиничної густини на j -й панелі. Рівняння (1.9) й (1.10) тоді набувають вигляду

$$u(x_k, y_k) = \sum_{j=1}^N u_{kj} \sigma_j, \quad v(x_k, y_k) = \sum_{j=1}^N v_{kj} \sigma_j. \quad (1.12)$$

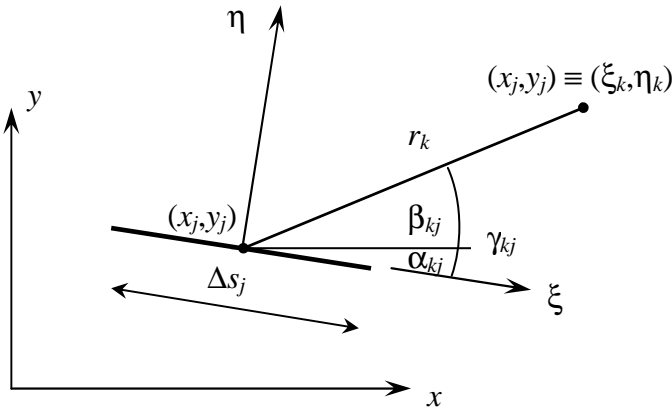


Рис. 1.2. Зв'язана з панеллю система координат.

Компоненти u_{kj} й v_{kj} можуть бути обчислені аналітично :

$$u_{kj} = q_{kj}^t \cos \alpha_j - q_{kj}^n \sin \alpha_j, \quad v_{kj} = q_{kj}^n \cos \alpha_j + q_{kj}^t \sin \alpha_j, \quad (1.13)$$

де

$$q_{kj}^t = \ln \left(\frac{(\xi_k + 0.5\Delta s_j)^2 + \eta_k^2}{(\xi_k - 0.5\Delta s_j)^2 + \eta_k^2} \right), \quad (1.14)$$

$$q_{kj}^n = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta_k \Delta s_j}{(\xi_k^2 + \eta_k^2 - (0.5\Delta s_j)^2)} \right).$$

Тут Δs_j — довжина j -ї панелі, а (ξ, η) — локальна система координат, що прив'язана до j -ї панелі (Рис. 1.2).

Якщо точка (x_k, y_k) розташована далеко від точки (x_j, y_j) , можна одержати більш просту наближену формулу. Використання цієї наближеної формули практично не впливає на загальну точність розв'язку. У виразах (1.14) q_{kj}^n й q_{kj}^r представляють собою компоненти швидкості, які створює в контрольній точці (x_k, y_k) джерело одиничної густини, що знаходиться на j -й панелі. Вони направлені по нормалі й по дотичній до j -ї панелі, відповідно. Якщо \vec{n}_k — одинична нормаль до k -ї панелі, коефіцієнти матриці A_{kj} у (1.7) обчислюється таким чином :

$$A_{kj} = \vec{n}_k \cdot \vec{v}_{kj} \quad (1.15)$$

Отже, після розв'язання системи (1.6), обчислення виразів (1.9) й (1.10) у контрольних точках заміняється на обчислення (1.12). Таким чином, порівняно трудомістка операція обчислення векторів \vec{v}_{kj} проводиться лише один раз. Іншою трудомісткою частиною розглянутої процедури є розв'язання системи (1.6).

Зауваження:

- *Діагональні елементи в системі (1.6) великі, але ця система не має діагонального переважання.*
- *При малому числі елементів більш ефективними виявляються прямі методи. В той же час, коли число елементів перевищує 1000, більш ефективними стають ітераційні методи.*
- *Оскільки матриця \underline{A} повна, час розв'язання системи (1.6) буде зростати як $O(N^3)$. Тому при великих N ця частина розрахунків займає найбільше часу.*
- *При заданому часі розрахунку панельний метод дає значно точніший розв'язок, ніж скінченно-різницеві методи або метод скінченних елементів, які реалізовано на відповідній сітці, що оточує тіло.*

- Узагальнення панельного методу на тривимірні течії здійснюється безпосередньо. А саме, рівняння (1.2) замінюється рівнянням

$$\Phi(x_k, y_k, z_k) = U_\infty x_k + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \sigma_j \int \frac{1}{r_{kj}} ds_j, \quad (1.16)$$

де j -а панель тепер є площиною, а не відрізком. Відповідним чином змінюється і рівняння (1.4). Основні труднощі в тривимірному випадку пов'язані з визначенням геометрії панелей й розв'язанням системи (1.6) при великих значеннях N . Як вже відмічалось раніше, при $N > 1000$ розв'язання тут проводиться ітераційними методами.

1.1.2. Обтікання профілю з піднімальною силою

Розглянемо розрахунок течії рідини біля тіл, що утворюють піднімальну силу. Це, наприклад, аеродинамічні профілі, що розташовані під кутом атаки. У цьому випадку, для забезпечення однозначності піднімальної сили, розв'язок, описаний у п.1.1.1, потрібно модифікувати. Піднімальна сила пов'язана з циркуляцією Γ по будь-якому замкненому контуру, що містить тіло, співвідношенням

$$L = \rho U_\infty \Gamma. \quad (1.17)$$

Тут $\Gamma = \int \vec{v} \cdot d\vec{c}$. Для тіла, що зображене на рис.1.1, контуром, що придатний для визначення Γ , є сама поверхня цього тіла.

Для обчислення циркуляції додатково вводиться розподіл поверхневих дуплетів (або диполів) $\mu(s)$. Рівняння (1.2) набуває вигляду

$$\Phi(x_k, y_k) = U_\infty x_k + \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma(s) (\ln r_{kj}) ds - \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(s) \frac{\partial}{\partial n(s)} (\ln r_{kj}) ds. \quad (1.18)$$

Розподіл диполів $\mu(s)$ можна пов'язати із вихровою завісою. Відомо, що панельний диполь, величина якого лінійно змінюється, еквівалентний вихровій завісі постійної

інтенсивності. На практиці $\mu(s)$ вибирають таким чином, щоб відповідна величина Γ задовольняла умові Жуковського-Кутти.

Оскільки система (1.1) – лінійна, то можлива суперпозиція розв’язків. Для профілю під кутом атаки застосування звичайного методу поверхневих джерел (п. 1.1.1) дає розв’язок, що зображений на рис. 1.3a. Даний розв’язок не відповідає реально існуючій течії, оскільки з нього випливає нескінченно велике значення швидкості на задній кромці профілю й відсутня піднімальна сила.

Умова Жуковського-Кутти полягає в тому, що швидкість повинна бути скінченна на задній кромці, і використовується для визначення з (1.17) величини Γ , а, отже, піднімальної сили. Циркуляція Γ визначається із обчислювальної процедури, шляхом введення поверхневого розподілу диполів, що лінійно змінюються. Останнє приводить до чисто циркуляційної течії, яка зображена на рис. 1.3b. Вибираючи інтенсивності диполів таким чином, щоб задовольнити умову Жуковського-Кутти, й додаючи отриманий розв’язок до вихідного розв’язку від поверхневих джерел без циркуляції, маємо в результаті фізично правильний розв’язок, який показано на рис. 1.3c. Умову Жуковського-Кутти можна задовольнити, якщо, наприклад, вимагати рівність дотичних складових швидкості в контрольних точках, що прилягають до задньої кромки профілю (Рис. 1.4).

Кругова течія, що зображена на рис. 1.3b, будується шляхом приєднання до кожної контрольної точки вихору одиничної інтенсивності. Далі з розв’язку системи (1.6), визначаємо розподіл джерел, що створює це поле течії.

Оскільки \vec{v}_{kj} є вектором компонентів швидкості в k -й контрольній точці, обумовлений дією одиничного джерела в j -й контрольній точці, то, розвернувши \vec{v}_{kj} на 90° , маємо компоненти вектора швидкості в k -й контрольній точці, що обумовлені дією вихору в j -й контрольній точці. Новий вектор має компоненти $(v_{kj}, -u_{kj})$.

Таким чином, сумарний компонент нормальної складової швидкості в k -й контрольній точці, обумовлений розподілом

вихорів одиничної інтенсивності в j -й контрольній точці, задається виразом

$$v_n = \sum_j (v_{kj} \sin \alpha_k + u_{kj} \cos \alpha_k), \quad (1.19)$$

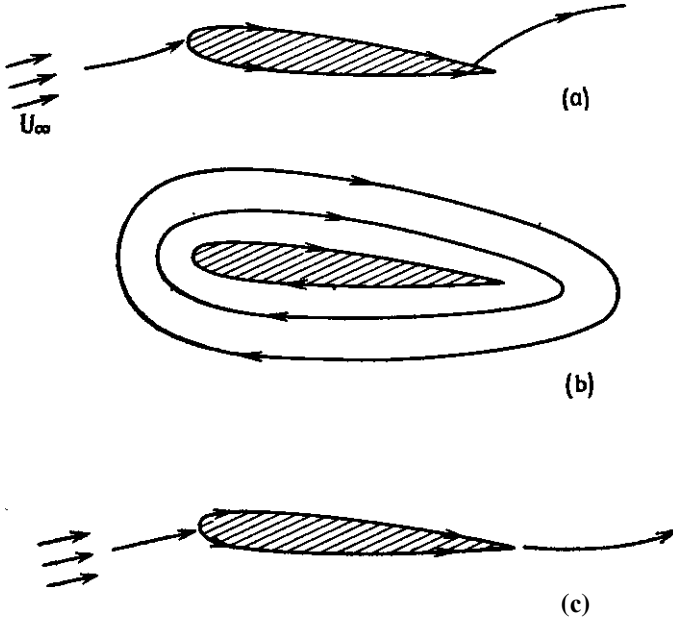


Рис. 1.3. Суперпозиція розв'язків: (а) течія без піднімальної сили; (б) циркуляційна течія; (с) комбінована течія з піднімальною силою.

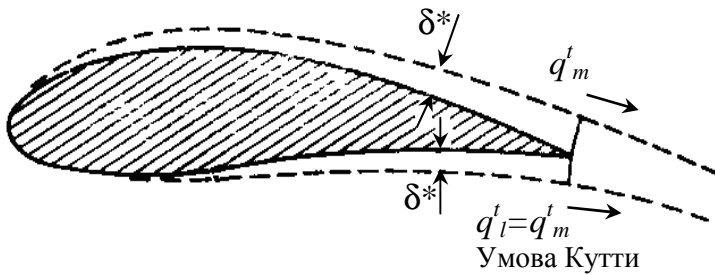


Рис. 1.4. Ефекти товщини витиснення й умова Жуковського-Кутти.

а відповідний розподіл інтенсивностей джерел, що створює чисто циркуляційну течію, є розв'язком системи

$$\underline{A}\vec{\sigma}^c = -\sum_j (v_{kj} \sin \alpha_k + u_{kj} \cos \alpha_k). \quad (1.20)$$

Зауваження:

- Якщо система (1.6) уже розв'язана прямим методом для однорідного потоку, що набігає, для одержання розв'язку (1.20) досить помножити факторизовану форму матриці \underline{A} на праву частину (1.20). Це — порівняно ошадлива процедура, що вимагає лише $O(N^2)$ операцій.

Щоб забезпечити виконання умови Жуковського-Кутти, з рівняння

$$\begin{aligned} & \sum_j (u_{ij} \cos \alpha_l - v_{ij} \cos \alpha_l)(\sigma_j + \tau \sigma_j^c) + U_\infty \cos \alpha_l = \\ & = -\sum_j (u_{mj} \cos \alpha_m - v_{mj} \cos \alpha_m)(\sigma_j + \tau \sigma_j^c) - U_\infty \cos \alpha_m \end{aligned} \quad (1.21)$$

знаходять значення τ . Помноживши на цю величину розв'язок системи (1.20), що пов'язаний із чисто циркуляційною течією, маємо рівність дотичних складових швидкості в контрольних точках $k = l$ та $k = m$, які розташовані за годинниковою стрілкою безпосередньо перед задньою кромкою й за нею.

Щоб одержати більш точний розподіл тиску, що особливо важливо для профілів (або лопаток турбіни), які створюють піднімальну силу, бажано врахувати вплив товщини примежового шару. Це робиться в такий спосіб. За заданим поверхневим розподілом тиску, який отримано з розв'язку задачі про профіль з піднімальною силою (Рис. 1.3с), знаходимо розв'язок задачі про течію у примежовому шарі. Після цього визначаємо товщину витиснення $\delta^*(x)$ за формулою

$$\delta^*(x) = \int_0^{\delta(x)} \left[1 - \frac{u}{U_e} \right] dy. \quad (1.22)$$

Тут $\delta(x)$ — товщина примежового шару, $u(x,y)$ — повздовжня компонента швидкості в примежовому шарі, U_e — повздовжня компонента швидкості в зовнішній потенційній течії. Величина

$\delta^*(x)$ додається до вихідної форми профілю $\delta_{\text{new}}(x) = \delta_{\text{old}}(x) + \delta^*(x)$ (див. Рис. 1.4), й вже для збільшеної фігури знаходимо новий розподіл тиску. Весь процес необхідно повторити чотири або п'ять разів, доки не буде отримана збіжність. Інші способи виконання умови Жуковського-Кутти, що враховують товщину витиснення, розглянуті у монографії Флетчера [17].

1.1.3. Нев'язкі стисливі течії рідини

У даній категорії течій доцільно виділити такі течії, для яких справедливе рівняння

$$(1 - \mathbf{M}_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.23)$$

де Φ – збурення потенціалу швидкості, $\Phi = U_\infty x + \phi$.

Дозвукові й надзвукові течії біля тонких тіл досить добре описуються рівнянням (1.23), крайовими умовами для якого буде обертання на нуль нормальної складової швидкості на поверхні тіла і обертання ϕ на нуль при віддаленні від тіла. Для надзвукових течій виникають додаткові обмеження, наприклад, вимога слабкості ударних хвиль.

Зауваження:

- *Умова слабкості ударних хвиль тут є необхідною оскільки рівняння (1.23) виводиться у припущенні ізентронійності потоку, а при переході через стрибок ентропія не зберігається.*

Для дозвукових течій можна побудувати еквівалентну нестисливу течію із використанням перетворення Прандтля-Глауерта. Незалежні змінні еквівалентної течії мають вигляд

$$x_i = x, \quad y_i = y\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}, \quad z_i = z\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}. \quad (1.24)$$

А залежна змінна тут $\Phi_i = \Phi(1 - \mathbf{M}_\infty^2)$. Для опису такої еквівалентної течії безпосередньо можна застосувати панельний метод (п. 1.1.1).

Зауваження:

- *Для надзвукових течій перетворення Прандтля-Глауерта не має місця. А, отже, панельний метод застосовується безпосередньо до рівняння (1.23), а на поверхні тіла використовується крайова умова обертання на нуль нормальної складової потоку маси.*

1.2. Метод сіток

Надзвукові течії, що пов'язані з рухом снарядів й літаків, течією газу в повітрязбірниках реактивних двигунів й ракетних соплах, часто стаціонарні. Згадаємо, що фізичний характер стаціонарної нев'язкої течії є “еліптичним” у дозвуковій області та “гіперболічним” у надзвуковій. Для стаціонарних надзвукових течій, що не містять дозвукових областей, можна побудувати у гіперболічному напрямку маршеві схеми розрахунку. При цьому гіперболічний напрямок, як правило, збігається з напрямком течії. Таким чином, маршовий напрямок грає тут ту ж саму роль, що і час у нестационарних задачах. Подібні маршові алгоритми виявляються досить ефективними. Але, оскільки, ці алгоритми по суті подібні нестационарним алгоритмам, то окремо вони розглядатися не будуть.

Для розв'язання чисто гіперболічних задач широко застосовуються явні схеми і, очевидно, ми їх будемо застосовувати і надалі в тих задачах, де крок дискретизації по часу або координаті, що виконує роль часу, обмежений не умовою стійкості, а необхідністю одержання потрібної точності. Для багатьох явних схем розрахунку одновимірних нестационарних надзвукових нев'язких течій умовою стійкості є узагальнена умова Куранта–Фрідрікса–Леві (КФЛ) :

$$(|u| + a) \Delta t / \Delta x \leq 1.0, \quad (1.25)$$

де a — локальна швидкість звуку.

Явні маршеві схеми надзвичайно ефективні для розрахунку нев'язких надзвукових течій, а особливо для стаціонарних течій. І в першу чергу це стосується схеми предиктор-коректор Мак-Кормака й подібної їй двокрокової схеми Лакса–Вендроффа [7].

Якщо всередині течії існують дозвукові області, як, наприклад, в задачі про обтікання затупленого тіла, для одержання стаціонарного розв'язку необхідно використовувати псевдонестаціонарний підхід (інша назва — метод встановлення), тобто проводити інтегрування за часом доти, поки розв'язок не перестане змінюватися. Подібні алгоритми більш дорогі з обчислювальної точки зору, але краще справляються з нестійкістю, що пов'язана з присутністю в розрахунковій області границь між до- й надзвуковими областями течії (тобто звукових ліній та ударних хвиль). Оскільки час тут грає роль ітераційного параметра, щоб уникнути пов'язаних з явними схемами обмежень на крок за часом, часто при розв'язанні подібних задач використовуються неявні схеми. Ці неявні алгоритми, як правило, засновані на схемах розщеплення або схемах наближеної факторизації.

Якщо записати в консервативній формі систему рівнянь, що описує надзвуковий рух газу, й використати дискретні перетворення, які задовольняють умовам збереження маси й т.і., то числовий розв'язок отриманої системи буде автоматично задовольняти умовам Ренкіна–Гюгоніо на будь-якому стрибку ущільнення у потоці [17]. Ударні хвилі є найбільш поширеним типом таких розривів. Отже, розв'язання дискретних рівнянь автоматично відслідковує поведження ударних хвиль, у тому числі їх інтенсивність й швидкість поширення в нестаціонарному випадку. Основні труднощі використання тут маршових алгоритмів полягає в появі різко осцилюючих профілів невідомих функцій при переході через стрибок (маємо дуже суттєву дисперсію), що потребує використання спеціальних процедур відслідковування стрибків й неминуче зменшує економічність методу в цілому.

1.2.1. Одновимірний несталий рух нев'язкої стисливої рідини

У цьому розділі буде розглянуте застосування явних схем Мак-Кормака, двокрокової Лакса–Вендроффа та неявної схеми

Кранка–Нікольсона для розрахунку поширення ударної хвилі в нестационарному одновимірному потоці. Для того, щоб результуючий профіль ударної хвилі був достатньо гладкий, використовується штучна в'язкість й методи виділення стрибка.

Рух ударної хвилі в одномірному нев'язкому потоці описується системою рівнянь

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(e + 0.5u^2)] + \frac{\partial}{\partial x} \{u[\rho(e + 0.5u^2) + p]\} = 0. \quad (1.28)$$

Наведені рівняння представляють консервативну форму рівняння нерозривності, x -компоненти імпульсу та енергії. Для ідеального газу, наприклад, повітря, питома внутрішня енергія може бути представлена у вигляді

$$e = c_v T = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (1.29)$$

де γ — відношення питомих теплоємностей. Якщо врахувати (1.29), то очевидно, що рівняння (1.26)-(1.28) містять три залежні змінні: p , ρ , u — тиск, густина та швидкість газу, відповідно.

Для задачі про рухому ударну хвилю необхідно визначити крайові умови Дірихле для u , ρ та p перед хвилею та за нею. Ці крайові умови мають вигляд

$$u = u_1, \quad \rho = \rho_1, \quad p = p_1 \quad \text{при } x = x_1; \quad (1.30a)$$

$$u = u_2 = 0, \quad \rho = \rho_2, \quad p = p_2 \quad \text{при } x = x_2. \quad (1.30b)$$

Нехай при $t = 0$ ударна хвиля розташована в точці $x = x_0$. Отже відповідні початкові умови будуть мати вигляд

$$u(x, 0) = u_1, \quad \rho(x, 0) = \rho_1, \quad p(x, 0) = p_1 \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_0; \quad (1.31)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_2, \quad p(x, 0) = p_2 \quad \text{при } x_0 < x \leq x_2. \quad (1.32)$$

Тут точка $x = x_1$ розташована далеко вгору за течією від стрибка, а точка $x = x_2$ — далеко вниз.

В якості параметрів безрозмірювання залежних змінних зручно вибрати їх значення в області, що розташована далеко вниз за течією від стрибка. Оскільки $\rho_2 a_2^2 = \gamma p_2$ система рівняння (1.26)-(1.28) може бути записана в компактному безрозмірному вигляді

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t'} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x'} = 0 \quad (1.33)$$

де вектори

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \rho' \\ \rho' u' \\ \frac{p'}{(\gamma-1)} + 0.5 \rho' (u')^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \rho' u' \\ \rho' (u')^2 + \frac{p'}{\gamma} \\ \left(\frac{p'}{(\gamma-1)\gamma} + 0.5 \rho' (u')^2 \right) u' \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

й

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_2}, \quad u' = \frac{u}{a_2}, \quad p' = \frac{p}{p_2}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad t' = a_2 \frac{t}{L}.$$

Крайові умови (1.40) також запишемо в безрозмірному вигляді

$$\rho'_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad u'_1 = \frac{u_1}{a_2}, \quad p'_1 = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{при } x'_1 = \frac{x_1}{L}; \quad (1.35a)$$

$$\rho'_2 = 1, \quad u'_2 = 0, \quad p'_2 = 1 \quad \text{при } x'_2 = \frac{x_2}{L}. \quad (1.35b)$$

Відношення тисків p_1 / p_2 являється основним параметром цієї задачі й визначає інтенсивність стрибка та швидкість його поширення. При заданому відношенні тисків крайові значення u'_1 й ρ'_1 знаходять із співвідношень Ренкіна-Гюгоніо

¹ Штрихом позначені безрозмірні величини. В подальшому штрихи будуть опущені.

$$u'_1 = \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left\{ 2 \sqrt{ \left[\gamma(\gamma+1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma(\gamma-1) \right] } \right\}^{1/2}, \quad (1.36)$$

$$\rho'_1 = \left(1 + \frac{(\gamma+1) p_2}{(\gamma-1) p_1} \right) / \left(\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} + \frac{p_2}{p_1} \right).$$

Для оцінки точності числового розв'язання системи (1.33–(1.35) необхідно знайти швидкість стрибка, знаючи яку, можна визначити його положення. Безрозмірна швидкість поширення ударної хвилі знаходимо з співвідношень Ренкіна–Гюгоніо

$$u'_{ss} = \frac{u_{ss}}{a_2} = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{p_2}{p_1} \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right)^{1/2}. \quad (1.37)$$

В момент часу t точний розв'язок буде мати вигляд

$$u_{ex}(x,t) = u_1, \quad \rho_{ex}(x,t) = \rho_1 \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_0 + u_{ss}t; \quad (1.38a)$$

$$u_{ex}(x,t) = 0, \quad \rho_{ex}(x,t) = \rho_2 \quad \text{при } x_0 + u_{ss}t < x \leq x_2. \quad (1.38b)$$

Представимо розв'язання рівняння (1.33) у вигляді декількох розрахункових схем :

А) Схема предиктор-коректор Мак-Кормака :

$$\bar{q}_j^* = \bar{q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_j^n) \quad (1.39)$$

$$\bar{q}_j^{n+1} = 0.5(\bar{q}_j^n + \bar{q}_j^*) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_j^* - \bar{F}_{j-1}^*) \quad (1.40)$$

Б) Двокрокова схема Лакса–Вендрофа :

$$\bar{q}_{j+\frac{1}{2}}^* = 0.5(\bar{q}_j^n + \bar{q}_{j+1}^n) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_j^n), \quad (1.41)$$

$$\bar{q}_j^{n+1} = \bar{q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^* - \bar{F}_{j-\frac{1}{2}}^*). \quad (1.42)$$

В) Неявна схема Кранка–Ніколсона:

$$\bar{q}_j^{n+1} - \bar{q}_j^n = -0.25 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_{j-1}^n) + (\bar{F}_{j+1}^{n+1} - \bar{F}_{j-1}^{n+1}) \right]. \quad (1.43)$$

Для перетворення векторного рівняння (1.43) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для $\Delta\bar{q}^{n+1}$ необхідно нелінійні члени розкласти у ряд Тейлора

$$\bar{F}^{n+1} = F^n + \underline{A}\Delta\bar{q}^{n+1} + \dots, \quad (1.44)$$

де $\underline{A} = \left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{q}} \right\}$ матриця 3×3 , що обчислюється за (1.34). Після підстановки (1.44) в (1.43), маємо

$$\begin{aligned} & -0.25 \frac{\Delta t}{\Delta x} \underline{A}_{j-1} \Delta\bar{q}_{j-1}^{n+1} + \underline{E} \Delta\bar{q}_j^{n+1} + 0.25 \frac{\Delta t}{\Delta x} \underline{A}_{j+1} \Delta\bar{q}_{j+1}^{n+1} = \\ & = -0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_{j-1}^n \right). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Векторне рівняння (1.45) являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\Delta\bar{q}^{n+1}$ із блочно-тридіагональною матрицею, що розв'язується модифікованим алгоритмом Томаса. Очевидно, що розв'язання після n -го кроку має вигляд :

$$\bar{q}_j^{n+1} = \bar{q}_j^n + \Delta\bar{q}_j^{n+1}. \quad (1.46)$$

Власними числами матриці \underline{A} для системи рівнянь (1.33)-(1.34) є $\lambda = \{u, u+a, u-a\}$. Отже, умовою стійкості для обох явних схем буде умова (1.25).

Схеми Лакса-Вендроффа й Кранка-Нікольсона дають розв'язок із сильними осциляціями перед й після стрибка. За схемою Мак-Кормака маємо аналогічне поводження розв'язку, але осциляції мають дещо меншу амплітуду. Ці осциляції, в першу чергу, являються наслідком дисперсійного характеру поведінки схем. Як і можна було очікувати, вони підсилюються при збільшенні інтенсивності стрибка p_1 / p_2 .

Шляхом введення штучної в'язкості ці осциляції можуть бути значно зменшені. Бажано тільки, щоб введена в'язкість однаково ефективно працювала й у випадку слабких, й у випадку сильних стрибків. З цією метою замість (1.33) вводиться розширена система рівнянь із додатковою квадратичною формою, а саме :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} - v \Delta x^2 \left[\left[\bar{q}_x \mid \bar{q}_x \right]_x \right] = 0, \quad (1.47)$$

де v — штучна в'язкість, значення якої необхідно визначити. Штучна в'язкість вводиться після того, як попередній розв'язок на часовому шарі $n + 1$ вже знайдено.

Якщо розв'язок, який отримано по формулі (1.40) або (1.42), позначити через q_j^{**} , то корекція за допомогою штучної в'язкості проводиться у такий спосіб :

$$\bar{q}_j^{n+1} = \bar{q}_j^{**} + v \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta \left[\left| \Delta \bar{q}_{j+1}^{**} \right| \Delta \bar{q}_{j+1}^{**} \right], \quad (1.48)$$

де $\Delta q_{j+1}^{**} = q_{j+1}^{**} - q_j^{**}$. Використання штучної в'язкості приводить до більш суворого обмеження на крок за часом, що пов'язано з умовою стійкості методу. Якщо “заморозити” член $|\bar{q}_x|$ в (1.47), умова стійкості набуває вигляду

$$\left(|u| + a \right) \Delta t / \Delta x \leq \left(1 + v^2 \right)^{1/2} - v. \quad (1.49)$$

А, отже, величину v варто вибирати як можна меншою : як з метою одержання більш точного профілю стрибка, так і з метою послаблення умови стійкості.

Для сильних стрибків введення штучної в'язкості дає менший ефект. Це особливо очевидно, якщо порівняти отриманий розв'язок із розв'язком, який отримано із використанням алгоритму відслідковування стрибка FCT (метод корекції потоків), який дозволяє отримати різкий профіль стрибка.

1.2.2. Розрахунок сильних стрибків

У всіх задачах, що пов'язані з поширенням вибухових хвиль (тобто істотно нестационарних), виникають дуже сильні стрибки невідомих. Для числового моделювання таких задач кращими виявляються методи розрахунку, що засновані на фізичній природі явищ, тобто такі, як метод Годунова або метод Гліма [17]. Метод Годунова можна розглядати як метод скінченного об'єму [7], в якому передбачається, що кожна дві сусідні точки сітки (x_j, x_{j+1}) розділяє в точці $x_{j+1/2}$ ударна хвиля або хвиля

розрідження. Це дозволяє використовувати відомі точні розв'язки таких модельних задач для оцінки потоків в рівняннях руху. Але оригінальна схема Годунова має лише перший порядок точності, тому стрибки сильно розмазуються. В той же час зараз є варіант схеми Годунова другого порядку точності, що дозволяє отримати більш круті фронти ударних хвиль. У монографії Флетчера [17] згадується й більш узагальнена схема типу схеми Годунова вищого порядку, що використовує сплайн-інтерполяцію.

У цьому розділі будуть коротко описані схеми корекції потоків, що придатні для розрахунків сильних стрибків. Оскільки такі схеми, як правило, є узагальненнями простих схем типу предиктор-коректор, можна вважати, що нами будуть описані всі найбільш економічні варіанти методу корекції потоків.

Числове розв'язання задач, що пов'язані з виникненням сильних ударних хвиль в нев'язких течіях, вельми непросте. Як вже наголошувалося раніше, введення різниць проти потоку приводить до появи сильної дифузії, що згладжує профіль стрибка. Схема Лакса–Вендроффа приводить до появи дисперсійних помилок, які проявляються у вигляді осциляцій на кожній стороні сходинки профілю стрибка. Розрахунок щільності за такою схемою може привести до появи негативних (фізично нереальних) значень.

Метод корекції потоків був розроблений Борисом і Буком [17] як узагальнення схеми предиктор-коректор. Згідно цього методу на кроці предиктор вноситься сильна дифузія, а на кроці коректор – майже рівна їй антидифузія. При цьому величина антидифузії обмежена таким чином, щоб у розв'язку не виникли нові мінімуми й максимуми, а наявні екстремуми не посилювалися. Вказаний обмежуючий крок є дуже важливим, оскільки він зберігає позитивність розв'язку там, де це необхідно, й дозволяє дифузії, що введена на кроці предиктор, знищити дисперсійні осциляції.

Метод корекції потоків пояснимо на прикладі його застосування до одновимірного рівняння нерозривності :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (1.50)$$

Для простоти швидкість u будемо вважати постійною, тоді рівняння (1.50) збігається із лінійним рівнянням переносу. На кроці предиктор для обчислення ρ_j^* із (1.50) використаємо наступний скінченно-різницевий алгоритм :

$$\rho_j^* = \rho_j^n - 0.5C(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) + (v + 0.5C^2)(\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n) \quad (1.51)$$

Тут $C = u \Delta t / \Delta x$, а v — позитивний дифузійний коефіцієнт. Звичайно $v = 1/8$. Якщо $v = 0$, маємо схему Лакса–Вендроффа.

Антидифузія на кроці коректор для лінійного рівняння переносу може бути введена, наприклад, таким чином :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^* - \mu(\rho_{j+1}^* - 2\rho_j^* + \rho_{j-1}^*), \quad (1.52)$$

де можливий очевидний вибір $\mu = v$. Тут μ – параметр в'язкості антидифузії. Однак, для того щоб забезпечити консервативність схеми й у випадку змінної швидкості, корисно розглянути антидифузійний потік маси

$$f_{j+1/2} = \mu(\rho_{j+1}^* - \rho_j^*), \quad f_{j-1/2} = \mu(\rho_j^* - \rho_{j-1}^*). \quad (1.53)$$

Якщо межі клітинок знаходяться в точках $x_{j-1/2} = 0.5(x_{j-1} + x_j)$ й $x_{j+1/2} = 0.5(x_j + x_{j+1})$, то $f_{j-1/2}$ представляє собою антидифузійний потік маси через межу $x_{j-1/2}$; аналогічно маємо для $f_{j+1/2}$. Суттю схеми корекції потоків є заміна $f_{j+1/2}$ в (1.53) на

$$f_{j+1/2}^c = \text{sign}(\Delta \rho_{j+1/2}) \times \\ \times \max \left\{ 0, \min \left[\Delta \rho_{j-1/2} \text{sign}(\Delta \rho_{j+1/2}), \mu \left| \Delta \rho_{j+1/2} \right|, \right. \right. \\ \left. \left. \Delta \rho_{j+3/2} \text{sign}(\Delta \rho_{j+1/2}) \right] \right\}. \quad (1.54)$$

де $\Delta \rho_{j+1/2} = \rho_{j+1}^* - \rho_j^*$, а $\text{sign}(K) = K/|K|$.

Еквівалентна формула використовується й для заміни $f_{j-1/2}$ в (1.53). Рівняння (1.54) є кількісним виразом неможливості утворення на стадії введення антидифузії нових максимумів або

мінімумів, як це й вимагалось вище. На кінцевій стадії вираз (1.52) замінюється на

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^* - f_{j+1/2}^c + f_{j-1/2}^c. \quad (1.55)$$

Схема методу корекції потоків стійка при виконанні умови

$$C = u (\Delta t / \Delta x) < 0.5 \quad (1.56)$$

Зауваження:

- *Обмеження на крок Δt в (1.56) сильніше, ніж в схемах Мак-Кормака та Лакса–Вендроффа.*
- *Для рівнянь, що описують одновимірні нев'язкі нестисливі течії (1.33)-(1.35) рекомендується використати децю сильнішу умову :*

$$(|u| + a) (\Delta t / \Delta x) < 0.4, \quad (1.57)$$

де a – локальна швидкість звуку. Знайдені при цьому значення $\mu = \nu = 0.125$ близькі до оптимальних, оскільки вони, як правило, забезпечує мінімум дифузійної та дисперсійної помилок.

Згадувані вище Борис і Бук рекомендують вибирати μ й ν таким чином, щоб дисперсійні помилки, що виникають при дискретизації рівнянь, були мінімальними. Конкретні вирази залежать від схеми, до якої застосовується процедура корекції потоків. Для схеми з різницями проти потоку Лакса–Вендроффа й для схеми “чехарда” були розглянуті варіанти явного й неявного введення антидифузійних членів. Для цих схем рекомендуються наступні значення :

$$\nu = (1 + 2C^2) / 6, \quad \mu = (1 - 2C^2) / 6. \quad (1.58)$$

Бібліографію, де описуються узагальнення методу корекції потоків, можна знайти в монографії Флетчера [17].

Але більш цікавим є інший варіант методу корекції потоків (FCT), що був запропонований Залесаком [17]. Його ми й розглянемо більш докладно далі. Перший крок тут здійснюється за схемою низького порядку, що гарантує відсутність осциляцій. Антидифузійні потоки, обчислюються у вигляді різниці між дискретним представленням потоку високого порядку і його же представленням більш низького порядку. Обмеження

антидифузійних потоків, еквівалентне (1.54), у цьому випадку забезпечує розв'язання з апроксимацією потоків високого порядку, за винятком точок, де це привело б до помилкових осциляцій.

Зауваження :

- *Хоча метод корекції потоків досить ефективний при побудові неосцилюючих стрибків, важко дати йому суворе теоретичне обґрунтування.*
- *Для маршових схем наскрізного рахунку із використанням методу корекції потоків можна сформулювати деякі необхідні умови їх роботи. В першу чергу числові схеми для розв'язання скалярних рівнянь збереження повинні зберігати монотонність й збігатися до фізично коректного розв'язку. Наприклад, числові схеми не повинні приводити до появи ударних хвиль розрідження.*
- *Схеми, за якими відбираються коректні фізично розв'язки, допускають розриви лише у вигляді ударних хвиль або контактних розривів, називаються схемами, що задовольняють умові ентропії.*
- *Метод корекції потоків застосовний й у випадку багатьох змінних.*

Концепція збереження монотонності розв'язку тісно пов'язана з ідеєю неможливості появи помилкових максимумів або мінімумів, тобто осциляцій, що розвиваються з часом. Таким чином, якщо початкові дані u_j^0 представляють собою монотонну функцію x_j , розв'язок u_j в подальші моменти часу повинен залишатися монотонною функцією x_j .

Проте не існує монотонних схем з порядком апроксимації по простору вище першого¹. Але монотонні схеми першого порядку мають велику дифузю, профілі ударних хвиль дуже розмазуються й точні розв'язки можуть бути отримані лише на дуже дрібних сітках.

¹ Відповідна теорема Годунова відноситься лише до лінійних різницевих схем. Порядок нелінійних монотонних схем може бути вище першого [17].

Підвищення точності без втрати суворого теоретичного обґрунтування може бути досягнуте шляхом заміни умови збереження монотонності умовою зменшення повної варіації TVD (скорочено від англійського Total Variation Diminishing).

Повна варіація числового розв'язку визначається таким чином :

$$\text{TV}(u^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_{j+1}^n - u_j^n|. \quad (1.59)$$

Отже, обчислювальна схема буде схемою TVD, якщо

$$\text{TV}(u^{n+1}) \leq \text{TV}(u^n). \quad (1.60)$$

Зауваження :

- *Схеми TVD не приводять до утворення нефізичних осциляцій. Використання схем TVD дає можливість отримати другий порядок точності в області гладкої зміни розв'язку.*
- *Для того, щоб схеми TVD задовольняли умові ентропії, потрібно вводити додаткові обмеження.*

Звичайний шлях отримання вищого порядку точності для монотонних схем полягає у введенні “антидифузійних потоків”, які забезпечують виконання умови TVD. Ефективний спосіб обмеження антидифузійних потоків полягає у введенні виразу

$$f_{j+1/2}^c = \varphi(r_j) [0.5C(1-C)] (\rho_{j+1} - \rho_j) \quad (1.61)$$

й аналогічного виразу для $f_{j-1/2}^c$ замість $f_{j+1/2}$ й $f_{j-1/2}$. Зауважимо, що замість функції ρ тут можна підставити будь-яку скалярну функцію. Функція r_j називається *обмежувачем* й дорівнює відношенню прилеглих градієнтів, тобто

$$r_j = (\rho_j - \rho_{j-1}) / (\rho_{j+1} - \rho_j). \quad (1.62)$$

Функцію $\varphi(r_j)$ вибирають таким чином, щоб розрахункова схема з врахуванням (1.61) була схемою TVD. Різні алгоритми відповідають різним варіантам вибору функції $\varphi(r)$. Розглянемо декілька випадків. Нехай запропоновано наступні обмеження для $\varphi(r)$:

$$0 < \varphi(r) \leq \min(2r, 2) \quad \text{при } r > 0; \quad (1.63a)$$

$$\varphi(r) = 0 \quad \text{при } r \leq 0. \quad (1.63б)$$

Цим обмеженням задовольняють схеми TVD першого та другого порядків. Щоб забезпечити другий порядок точності по просторовій змінній скрізь, за винятком точок екстремуму ($r < 0$), необхідно виконання умови $\varphi(1) = 1$. Останній умові задовольняє такий вибір функції обмежувача :

$$\varphi(r) = \begin{cases} \min(2, r), & r > 1; \\ \min(2r, 1), & 0 < r \leq 1, \\ 0, & r \leq 0. \end{cases} \quad (1.64)$$

Зауваження :

- *В протилежність двокроковим алгоритмам типу FCT схема TVD є однокроковою.*
- *Вибір вільних параметрів для алгоритму FCT у випадку алгоритму TVD зведено до вибору обмежувача $\varphi(r)$.*
- *Проста структура функції $\varphi(r)$ й однокрокова структура алгоритмів обмеження потоку забезпечує економічність використання алгоритмів TVD.*
- *Оскільки алгоритми TVD однокрокові, можна розробити ефективні неявні схеми TVD, що виявляються зручними для розрахунків нев'язких й в'язких стаціонарних течій, якщо в останніх виникають ударні хвилі.*

Для розрахунку нестационарних течій найчастіше використовують явні схеми TVD, оскільки лінеаризація, що необхідна для ефективного використання неявних схем з TVD (тоді можливе використання алгоритму прогонки Томаса), приводить до неконсервативності несталих розв'язків.

Як вже наголошувалося вище, при можливості появи розривів розв'язку бажано, щоб дискретне представлення вихідних рівнянь було консервативним. Наприклад, для нев'язкого рівняння Бюргерса є припустимою дискретизація скінченного об'єму у вигляді

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n). \quad (1.65)$$

Приведена схема консервативна в дискретному вигляді, проте бажано, щоб вона була еквівалентна інтегральній або слабкій формі законів збереження. У цьому випадку стрибки

функцій під час переходу через будь-який розрив будуть описуватися більш адекватно. Рівняння (1.65) можна розглядати як дискретний аналог законів збереження, якщо покласти

$$u_j^n = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u^n(x) dx. \quad (1.66)$$

Тобто значення у вузлі сітки u_j вважається рівним середньому значенню на інтервалі $x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}$. Відповідно до такої інтерпретації величина $F_{j+1/2}$ називається *числовим потоком* й представляє собою функцію вузлових величин, тобто $F_{j+1/2} = F(u_{j-k+1}, u_{j+k})$.

Зауваження :

- *Схеми TVD можуть бути узагальнені на нелінійні системи рівнянь, подібні до системи рівнянь Ейлера. Рівняння Ейлера у цьому випадку спочатку приводяться до характеристичного вигляду. Схеми TVD застосовуються тут окремо до кожної скалярної характеристичної складової. Розв'язок рівнянь Ейлера маємо в результаті підсумовування вкладів від кожної із характеристичних компонент. І хоча при цьому не існує теоретично обґрунтованого доказу, що вказана схема буде схемою TVD (як у випадку скалярного рівняння), на практиці профілі стрибків виходять без осциляцій.*

Система (1.33)-(1.34) може бути представлена через характеристичні складові у вигляді :

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m \left(\frac{\partial \bar{e}_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_m \bar{e}_m) \right) = 0, \quad (1.67a)$$

де $\alpha_m = \{0.5 / \gamma, (\gamma-1) / \gamma, 0.5 / \gamma\}$, власні числа $\lambda_m = \{u - a, u, u + a\}$, а відповідні власні вектори

$$\bar{e}_m = \left\{ \begin{bmatrix} \rho \\ \rho(u - a) \\ \rho(H - ua) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ 0.5 \rho u^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho \\ \rho(u + a) \\ \rho(H + ua) \end{bmatrix} \right\}, \quad (1.67b)$$

де $H = (E + p) / \rho$.

У кожному компоненту розв'язку \vec{q} вносять внесок характеристичні складові, тобто $\vec{q} = \sum_{m=1}^3 \alpha_m \vec{e}_m$. Скалярна схема TVD застосовується до кожної характеристичної компоненти в (1.67a). В результаті маємо

$$\vec{e}_{m,j}^{n+1} = \vec{e}_{m,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\vec{F}_{m,j+1/2}^n - \vec{F}_{m,j-1/2}^n \right) \quad (1.68)$$

де $\vec{F}_m = \alpha_m \vec{e}_m$. Тильда над F в (1.68) вказує, що компоненти цього вектора обраховані із використанням алгоритму TVD.

Зауваження:

- *Напрямок проти потоку в кожному із скалярних рівнянь залежить від $\sigma = \text{sign}(\lambda_m)$. Тому більш точний розв'язок має місце, якщо (1.62) замінити виразом*

$$r_j = (\rho_{j+1-\sigma} - \rho_{j-\sigma}) / (\rho_{j+1} - \rho_j). \quad (1.69)$$

- *При розрахунку різних характеристичних складових використовуються значення в різних точках сітки, тому для різних характеристичних складових можна ввести різні обмежувачі $\phi(r)$.*
- *Характеристичне розвинення дозволяє отримувати круті профілі стрибків й вірно рахувати швидкість їх поширення.*

1.2.3. FCT алгоритм розрахунку рухомої ударної хвилі

Розглянемо більш докладно застосування алгоритму FCT, який розглядався в п.1.2.1, до задачі про поширення ударної хвилі. На практиці алгоритм FCT завжди можна вважати додатковим кроком до схем Мак-Кормака або Лакса–Вендроффа, які вже розглядалися у п.1.2.1.

Позначимо через \vec{q}^{**} розв'язок, що його було отримано згідно формул (1.40) або (1.42). Алгоритм FCT складається із наступних шести кроків :

- (1) Обчислення дифузійних потоків

$$\vec{f}_{j+1/2}^d = v_{j+1/2} (\vec{q}_{j+1}^n - \vec{q}_j^n);$$

(2) Обчислення антидифузійних потоків

$$\vec{f}_{j+1/2}^{ad} = \mu_{j+1/2} (\vec{q}_{j+1}^{**} - \vec{q}_j^{**});$$

(3) Дифузія розв'язку

$$\vec{q}_j^{***} = \vec{q}_j^{**} + \vec{f}_{j+1/2}^d - \vec{f}_{j-1/2}^d$$

(4) Розрахунок перших різниць \vec{q}^{***}

$$\Delta \vec{q}_j^{***} = \vec{q}_{j+1}^{***} - \vec{q}_j^{***};$$

(5) Обмеження антидифузійних потоків

$$S = \text{sign}(\vec{f}_{j+1/2}^{ad});$$

$$\vec{f}_{j+1/2}^{cad} = S \max \left[0, \min \left\{ S \Delta \vec{q}_{j-1/2}^{***}, \left| \vec{f}_{j+1/2}^{ad} \right|, S \Delta \vec{q}_{j+3/2}^{***} \right\} \right];$$

(6) Антидифузійний розв'язок

$$\vec{q}_j^{n+1} = \vec{q}_j^{***} - \vec{f}_{j+1/2}^{cad} + \vec{f}_{j-1/2}^{cad}.$$

На кроках (1) і (2) коефіцієнти дифузії ν й антидифузії μ залежать від координати. Це слідує із рівняння (1.52), згідно якому

$$\nu_{j+1/2} = \eta_0 + \eta_1 \left(u_{j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2, \quad \mu_{j+1/2} = \eta_0 + \eta_2 \left(u_{j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2, \quad (1.70)$$

де $u_{j+1/2} = 0.5 (u_j + u_{j+1})$ й, як правило $\eta_0 = 1/6$, $\eta_1 = 1/3$, $\eta_2 = -1/6$.

Зауваження :

- *Кроки (1)-(6) є прямим узагальненням скалярного алгоритму із постійними коефіцієнтами.*

1.3. Метод сіток. Неявні схеми для рівнянь Ейлера

У попередніх розділах розглядалися явні схеми розв'язання рівнянь Ейлера, якщо останні описують течії з сильними стрибками або чисто надзвукові течії. Для таких течій в стаціонарному випадку можна побудувати маршовий по одній із координат алгоритм розрахунку. В цьому розділі будуть розглянуті неявні алгоритми розв'язання рівнянь Ейлера для транзвукових течій.

Для стаціонарних трансзвукових течій доведено, що у випадку, коли можна чекати появи ударних хвиль, ефективні панельні методи (див. п.1.1), які засновані на розв'язанні рівняння для потенціалу, можуть дати неточне положення стрибків. Більш того, у цьому випадку можлива поява декількох розв'язків при тих самих крайових умовах. Отже, коли необхідно знати точне положення й інтенсивність стрибків, наприклад, при розрахунках обтікання профілю з ненульовою піднімальною силою, більш надійними є методи, що засновані на розв'язанні системи рівнянь Ейлера. Причому для стаціонарних трансзвукових течій рівняння Ейлера розв'язуються, як правило, за методом встановлення. Тому основна задача тут полягає у побудові процесу, що досить швидко сходиться. Використовують тут явні схеми типу схеми Мак-Кормака, але дискретизація за простором для них виконується вже не за скінченно-різницеvim методом, а за методом скінченного об'єму [7]. Однак явні схеми, як правило, через обмеження КФЛ на величину кроку за часом вимагають великого числа ітерацій (кроків за часом) для досягнення стаціонарного стану.

Неявні схеми, що засновані на методі розщеплення або на методі наближеної факторизації, дозволяють використовувати набагато більші кроки за часом, й, отже, стаціонарного стану можна досягти за набагато менше число ітерацій. У монографії Флетчера [17] наведено порівняння ефективності явних й неявних методів для течії біля профілю NASA-0012, що розташований під кутом атаки $\alpha = 1.25^\circ$ при $M_\infty = 0.80$. Для явної схеми на сітці 141×21 маємо збіжність після 4900 ітерацій. Якщо використати наближено факторизовану (неявну) схему, то на сітці 161×33 отримуємо розв'язок, досить близький до розв'язку, який було отримано явним методом, але лише за 250 ітерацій.

Зауваження :

- *Явні алгоритми стають більш конкурентоздатними, якщо їх використовувати разом із багатосітковим методом.*

Розглянемо типовий неявний алгоритм інтегрування за часом системи рівнянь Ейлера. У випадку двох просторових змінних рівняння Ейлера в консервативній формі можуть бути представлені у вигляді

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} = 0 \quad (1.71)$$

$$\text{де } \bar{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}. \quad (1.72)$$

Причому, для ідеального газу

$$p = (\gamma - 1) [E - 0.5\rho(u^2 + v^2)]. \quad (1.73)$$

Для даної системи рівнянь можливе представлення

$$\bar{F} = \underline{A}\bar{q}, \quad \bar{G} = \underline{B}\bar{q}, \quad (1.74)$$

де \underline{A} й \underline{B} — матриці Якобі з компонентами

$$A_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial q_j}, \quad B_{ij} \equiv \frac{\partial G_i}{\partial q_j}.$$

Матриці \underline{A} й \underline{B} тут мають вигляд

$$\underline{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}[(\gamma-3)u^2 + (\gamma-1)v^2] & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 \\ u[-\frac{\gamma E}{\rho} + (\gamma-1)(u^2 + v^2)] & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{1}{2}(\gamma-1)(3u^2 + v^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{bmatrix} \quad (1.75a)$$

$$\underline{B} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{1}{2}[(\gamma-1)u^2 + (\gamma-3)v^2] & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & (\gamma-1) \\ v[-\frac{\gamma E}{\rho} + (\gamma-1)(u^2 + v^2)] & -(\gamma-1)uv & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + 3v^2) & \gamma v \end{bmatrix} \quad (1.75б)$$

Для побудови неявної схеми для рівняння (1.71) попередньо запишемо його у вигляді

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{G}}{\partial y},$$

який еквівалентний наступному дискретному виразу

$$(1 + \gamma_0) \frac{\Delta \bar{q}^{n+1}}{\Delta t} - \gamma_0 \frac{\Delta \bar{q}^n}{\Delta t} = -(1 - \beta) (L_x \bar{F}^n + L_y \bar{G}^n) - \beta (L_x \bar{F}^{n+1} + L_y \bar{G}^{n+1}), \quad (1.76)$$

де $\Delta \bar{q}^{n+1} = \bar{q}^{n+1} - \bar{q}^n$, а γ_0 та β — параметри схеми. Раніше оператори L_x та L_y було визначено як центрально-різницеві оператори, наприклад

$$L_x F_{jk} = \left(\frac{1}{2\Delta x} \right) (F_{j+1,k} - F_{j-1,k})$$

Зауваження :

- Використання центрально-різницевих операторів у даному випадку є неоптимальним, оскільки може виявитися, що в надзвуковій області течії краєюю буде інша дискретизація за просторовими змінними.

Передбачається, що розв'язок \bar{q} відомий на n часовому шарі, а розв'язок на $(n+1)$ шарі необхідно визначити із рівняння (1.76).

Щоб визначити $\Delta \bar{q}^{n+1}$, зведемо вихідну нелінійну систему рівнянь (1.76) до лінійної системи рівнянь. Зауважимо, що \bar{F}^{n+1} й \bar{G}^{n+1} — нелінійні функції \bar{q}^{n+1} . Ці члени можна лінеаризувати шляхом розвинення в ряд Тейлора в околі моменту часу n , тобто

$$\bar{F}^{n+1} = \bar{F}^n + \underline{A}^n \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) = \bar{F}^n + \underline{A}^n \Delta \bar{q}^{n+1} + O(\Delta t^2), \quad (1.77)$$

$$\bar{G}^{n+1} = \bar{G}^n + \underline{B}^n \Delta \bar{q}^{n+1} + O(\Delta t^2), \quad (1.78)$$

де \underline{A}^n та \underline{B}^n — матриці Якобі (1.75) в моменту часу n . Підстановка (1.77) й (1.78) в (1.76) приводить до векторно-матричного рівняння

$$\begin{aligned} & \left[\underline{I} + \frac{\beta \Delta t}{1 + \gamma_0} \{L_x \underline{A}^n + L_y \underline{B}^n\} \right] \Delta \bar{q}^{n+1} = \\ & = - \frac{\Delta t}{1 + \gamma_0} \{L_x \bar{F}^n + L_y \bar{G}^n\} + \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0} \Delta \bar{q}^n. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Тут комбінація операторів $L_y \underline{B}^n\} \Delta \bar{q}^{n+1}$ означає $L_y \{ \underline{B}^n \Delta \bar{q}^{n+1} \}$.

Зауваження :

- Якщо необхідно одержати лише стаціонарний розв'язок, то можна покласти $\gamma_0 = 0$, $\beta = 1$ й застосувати розширений метод Ньютона. Єдина відмінність від звичайного методу Ньютона полягає тут у наявності додаткових діагональних членів, що пов'язано з присутністю одичної діагональної матриці \underline{I} .
- При $\Delta t \rightarrow \infty$ маємо звичайний метод Ньютона.

Однак, якщо γ_0 , β та Δt обрано, розв'язувати систему (1.79) тому вигляді, як вона записана, надзвичайно неекономно. У зв'язку із необхідністю використання розвинень (1.77)-(1.78), у кращому випадку рівняння (1.79) має порядок апроксимації лише $O(\Delta t^2)$. А, наприклад, при “ньютонівському” $\gamma_0 = 0$ й $\beta = 1$, порядок апроксимації рівняння (1.79) взагалі лише $O(\Delta t)$.

В той же час точність апроксимації $O(\Delta t^2)$ рівняння (1.79) не зміниться, якщо до його лівої частини додати член

$$\left\{ \frac{\beta \Delta t}{1 + \gamma_0} \right\}^2 L_x \underline{A}^n L_y \underline{B}^n \Delta \bar{q}^{n+1}.$$

При цьому після простих перетворень рівняння (1.79) набуває наближено факторизованої форми

$$\begin{aligned} & \left[\underline{I} + \frac{\beta \Delta t}{1 + \gamma_0} L_x \underline{A}^n \right] \left[\underline{I} + \frac{\beta \Delta t}{1 + \gamma_0} L_y \underline{B}^n \right] \Delta \bar{q}^{n+1} = \\ & = - \frac{\Delta t}{1 + \gamma_0} \{L_x \bar{F}^n + L_y \bar{G}^n\} + \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0} \Delta \bar{q}^n. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Розв'язок рівняння (1.80) здійснюється за наступним двокроковим алгоритмом.

На першому кроці

$$\left[\underline{I} + \frac{\beta \Delta t}{1 + \gamma_0} L_x \underline{A}^n \right] \Delta \vec{q}^* = - \frac{\Delta t}{1 + \gamma_0} \{ L_x \vec{F}^n + L_y \vec{G}^n \} + \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0} \Delta \vec{q}^n; \quad (1.81)$$

На другому кроці

$$\left[\underline{I} + \frac{\beta \Delta t}{1 + \gamma_0} L_y \underline{B}^n \right] \Delta \vec{q}^{n+1} = \Delta \vec{q}^*. \quad (1.82)$$

Рівняння (1.81), записане для кожної x -лінії сітки, утворює (4×4) -блочно-тридіагональну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується за узагальненим алгоритмом Томаса [7]. Той же алгоритм застосовується й до рівняння (1.82). Якщо останнє записати на кожній y -лінії сітки, то також маємо (4×4) -блочно-тридіагональну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Зауваження:

- *Оскільки узагальнений алгоритм Томаса досить непростий, можна спробувати ще спростити розв'язання системи (1.81)-(1.82). Можна провести факторизацію матриць \underline{A} й \underline{B} у такий спосіб :*

$$\underline{A} = \underline{T}_A \underline{\Lambda}_A \underline{T}_A^{-1}, \quad \underline{B} = \underline{T}_B \underline{\Lambda}_B \underline{T}_B^{-1}. \quad (1.83)$$

Тут діагональні матриці $\underline{\Lambda}_A$ й $\underline{\Lambda}_B$ утворені власними числами матриць \underline{A} й \underline{B} , відповідно:

$$\text{diag } \underline{\Lambda}_A \equiv \{u, u, u + a, u - a\}, \quad \text{diag } \underline{\Lambda}_B \equiv \{v, v, v + a, v - a\}, \quad (1.84)$$

де a — локальна швидкість звуку. У монографії Флетчера [17] показано, що використання факторизованих представлень (1.83) дозволяє одну (4×4) -блочно-тридіагональну систему розщепити на чотири скалярні тридіагональні системи, які можуть бути розв'язані послідовно за алгоритмом Томаса. Це приводить до скорочення часу розрахунків приблизно на 30%. Однак ця процедура вносить помилку $O(\Delta t)$ у нестационарний розв'язок, тому її можна використовувати лише для розрахунків стаціонарних задач на встановлення.

Двокрокова процедура (1.81)-(1.82) може бути застосована як до розв'язання стаціонарних, так і до розв'язання

нестационарних задач. Для нестационарних задач при $\gamma_0 = 0$, $\beta = 0.5$ маємо схему Кранка–Нікольсона з порядком точності $O(\Delta t^2)$. Якщо двокрокова процедура (1.81)-(1.82) використовується при розв'язанні стаціонарної задачі методом встановлення, найбільш ефективними будуть наступні варіанти вибору параметрів :

- (1) $\gamma_0 = 0$, $\beta = 1$, розширений метод Ньютона, $O(\Delta t)$;
- (2) $\gamma_0 = 0.5$, $\beta = 1$, тришарова повністю неявна схема, $O(\Delta t^2)$.

Зауваження :

- *Може здатися, що розширений метод Ньютона із великим значенням кроку Δt буде оптимальним при проведенні розрахунків за методом встановлення. Однак введення членів порядку $O(\Delta t^2)$, при виконанні наближеної факторизації, приводить до втрати очікуваної від методу Ньютона квадратичної швидкості збіжності.*
- *З дослідження (лінійного) алгоритму (1.81)-(1.82) методом Неймана випливає його безумовна стійкість. Однак, при розв'язанні системи рівнянь Ейлера тут може виникнути нелінійна нестійкість, особливо у зв'язку із появою сильних стрибків.*
- *Якщо просторові оператори L_x та L_y в (1.81)-(1.82) являються центральньо-різницевиими операторами, то для згладження розв'язку до рівняння звичайно додається штучна в'язкість. Члени із в'язкістю другого або четвертого порядку мализни звичайно додають і до правої, і до лівої частини рівняння (1.81).*
- *Оператори L_x та L_y в надзвуковій області можуть бути також операторами із різницями проти потоку. При цьому використання співвідношень*

$$L_x F_{jk} = \left(\frac{1}{\Delta x} \right) (F_{jk} - F_{j-1,k}), \quad L_y G_{jk} = \left(\frac{1}{\Delta y} \right) (G_{jk} - G_{j,k-1}) \quad (1.85)$$

припускає, що локальна швидкість спрямована в додатніх напрямках осей Ox та Oy . Якщо таке представлення розглядати як дискретизацію другого порядку, то це

приводить до появи дисипативних членів. А, отже, штучну в'язкість вводити немає потреби.

Постановка крайових умов та їх числова реалізація при розв'язанні рівнянь Ейлера є важливою частиною всього алгоритму. На твердих поверхнях для виконання закону збереження маси нормальна складова швидкості повинна дорівнювати нулю. Тиск звичайно отримуємо з рівняння для нормальної складової імпульсу, а густину — із умови збереження повної ентальпії $H = (E + p) / \rho$.

Зовнішні межі області, через які можлива течія рідини, називаються вхідними та вихідними межами (див. Рис.1.5). Для внутрішніх течій ця класифікація не є складною. Але для течій біля ізольованих тіл віддалені межі можуть змінювати тип, перетворюючись в процесі еволюції течії з вхідних у вихідні і навпаки.

Теорія характеристик дозволяє визначити число і вигляд крайових умов [17]. Фізично інформація переноситься уздовж характеристик. А, отже, крайові умови повинні бути визначені на характеристиках, що приходять у розрахункову область.

Власними числами для одновимірних нестационарних рівнянь Ейлера є $\lambda = \{u, u+a, u-a\}^T$. Одновимірні до- й надзвукові вхідні та вихідні межі зображено на рис.1.5.

На дозвуковій вхідній межі потрібно визначати крайові умови для двох змінних, а третя змінна повинна розраховуватися за значеннями на межі всередині області. Але на дозвуковій вихідній межі дві характеристики виходять з розрахункової області, й лише одна входить у розрахункову область. Отже, на дозвуковій вихідній межі повинна бути поставлена лише одна крайова умова.

На надзвуковій вхідній межі всі характеристики входять у розрахункову область, тому крайові умови потрібно ставити для всіх змінних. Навпаки, на надзвуковій вихідній межі всі характеристики виходять з розрахункової області, а, отже, крайові умови тут взагалі непотрібні.

Описаний вище підхід можна розповсюдити й на багатовимірний випадок, якщо швидкість u розглядати як

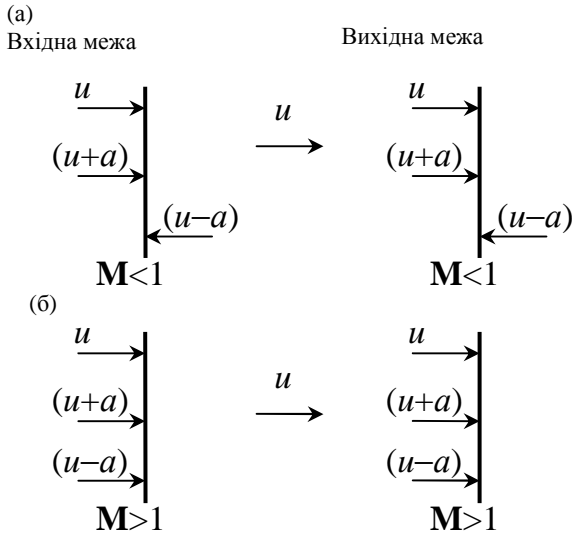


Рис.1.5. Число крайових умов відповідно до теорії характеристик.

нормальну до межі області компоненту швидкості. Це особливо легко зробити в узагальнених криволінійних координатах, оскільки напрямок нормалі до межі звичайно збігається з узагальненою координатою.

Для дозвукових течій існує вибір того, які залежні змінні або їх комбінації повинні бути визначені на віддаленій межі. Звичайно крайові умови на дозвуковій вхідній межі визначають напрямок потоку, ентропію та повну ентальпію. При використанні характеристичної умови сумісності значення густини визначаються із розв'язку всередині області. На дозвуковій вихідній межі, як правило, визначається тиск, значення p_u , p_v й E екстраполюються за значеннями всередині області, а густина ρ визначити із рівняння (1.73).

Зауваження :

- *Крайові умови для неявних методів повинні бути поставлені також неявно, щоб загалом на алгоритм не діяло обмеження КФЛ на крок за часом.*

- *Правильна числова реалізація крайових умов на віддаленій поверхні істотна для досягнення стаціонарного розв'язку за мінімальне число кроків за часом.*
- *Розв'язок в будь-якій проміжній точці (за часом) може бути розділений на стаціонарну й нестаціонарну частини. Алгоритм числового розв'язання, наприклад (1.81)-(1.82), можна розглядати як алгоритм обертання на нуль нестаціонарної частини розв'язку за мінімальне число кроків за часом.*
- *Нестаціонарна частина розв'язку складається з хвиль, що поширюються в розрахунковій області. Тому крайові умови на віддаленій поверхні бажано поставити таким чином, щоб вони дозволяли нестаціонарній частині розв'язку проходити через межі області без відображень.*
- *Ефективним прийомом розв'язання задач із ударними хвилями є лінеаризація рівнянь Ейлера щодо однорідного потоку, тобто $u = U_\infty$, $v = 0$, $p = p_\infty$, й $\rho = \rho_\infty$. Після цього вводяться крайові умови, які задовольняють розв'язку вже лінеаризованих рівнянь.*

Для дозвукової вихідної межі у випадку нестаціонарного потоку, що паралельний осі Ox , рекомендується використання наступної крайової умови :

$$\frac{1}{(a_\infty^2 - U_\infty^2)^{1/2}} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{a_\infty^2 - U_\infty^2} \frac{x}{d} \frac{\partial u}{\partial t} - \rho_\infty \frac{y}{d} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2d} (p - p_\infty) = 0. \quad (1.86)$$

Тут $d^2 = (1 - \mathbf{M}_\infty^2)x^2 + y^2$. Застосування умови (1.86) вимагає знання ρ_∞ , U_∞ й a_∞ . Ці величини можна взяти із розв'язку на попередньому кроці за часом. Очевидно, що у стаціонарному випадку умова (1.86) зводиться до умови $p = p_\infty$, де p_∞ – визначений на зовнішній межі тиск.

Інший можливий вигляд крайової умови на вихідній межі

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho_\infty a_\infty \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha (p - p_\infty) = 0 \quad (1.87)$$

У виразі (1.87) для найбільшої швидкості збіжності алгоритму звичайно покладають $\alpha = 0.3$.

На віддаленій межі, що є твердою стінкою, наприклад на стінці аеродинамічної труби, необхідно визначити тільки одну крайову умову. Якщо стінка паралельна осі Ox , то рекомендується використання наступної крайової умови :

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho_{\infty} a_{\infty} \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (1.88)$$

Для прискорення збіжності розв'язання у внутрішній частині області, вихідна система рівнянь може бути модифікована. Наприклад, рівняння (1.71) зручно представити у вигляді

$$\underline{N}^{-1} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} = 0, \quad (1.89)$$

де \underline{N} — матриця, що прискорює збіжність.

Якщо матриця \underline{N} діагональна, то розв'язання рівняння (1.89) зводиться до вибору різних кроків за часом для кожної точки сітки. Тоді можна використати наступну формулу, яка компенсує зміну кроку сітки по просторовим змінним :

$$\Delta t_{loc} = \Delta t_0 / \left\{ 1 + (\underline{J})^{1/2} \right\} \quad (1.90)$$

де \underline{J} — якобіан.

З іншого боку, Δt_{loc} можна визначити із умови сталості ефективного числа Куранта, тобто

$$\Delta t_{loc} = k (\Delta x \Delta y)^{1/2} / (w + a), \quad (1.91)$$

де $w = (u^2 + v^2)^{1/2}$, а константа k звичайно має порядок $O(10)$.

Зауваження :

- Для течій з сильними стрибками при побудові стаціонарних розв'язків за методом встановлення із використанням наближеної факторизації (наприклад, за алгоритмом (1.81)-(1.82)), можна використовувати неявні схеми із TVD.
- Неявні схеми розв'язання системи рівнянь Ейлера з невеликими модифікаціями також застосовні й для розв'язання системи рівнянь Нав'є-Стокса.

1.4. Багатосіткові методи розв'язання рівнянь Ейлера

При визначенні стаціонарних розв'язків рівнянь Ейлера для прискорення збіжності явних методів часто використовують багатосіткові алгоритми. При багатосітковому підході сильне обмеження на крок за часом, що пов'язане із використанням явної схеми, не настільки істотне, оскільки інтегрування на грубій сітці дозволяє швидко пройти проміжні стадії розв'язання.

Розглянемо алгоритм, що використовує однокрокові різниці за часом за схемою Лакса–Вендрофа другого порядку мализни й дискретизацію за просторовими змінними за методом скінченного об'єму. Алгоритм буде продемонстрований на однорідній декартовій сітці (Рис.1.6). Його узагальнення на випадок неоднорідної сітки – очевидне. Відправною точкою є двовимірні нестаціонарні рівняння Ейлера у вигляді

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{G}}{\partial y}. \quad (1.92)$$

де вектори \vec{q} , \vec{F} , \vec{G} визначаються виразами (1.72).

Застосування методу скінченного об'єму до контрольного об'єму $(j+1/2, n+1/2)$ й дискретизація за часом з першим порядком мализни дозволяють побудувати наступний алгоритм для розрахунку змінної \vec{q} в центрі контрольного об'єму (Рис. 1.6):

$$\begin{aligned} \Delta \vec{q}_{j+1/2, k+1/2} = & -0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\vec{F}_{j+1, k} + \vec{F}_{j+1, k+1} \right) - \left(\vec{F}_{j, k} + \vec{F}_{j, k+1} \right) \right] - \\ & -0.5 \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\left(\vec{G}_{j, k+1} + \vec{G}_{j+1, k+1} \right) - \left(\vec{G}_{j, k} + \vec{G}_{j+1, k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Еквівалентні (1.93) вирази можна записати для усіх чотирьох контрольних об'ємів, що оточують точку сітки (j, k) .

При наближенні до стаціонарного стану права й ліва частини (1.92) прямують до нуля. Тому величина $\Delta \vec{q}_{j+1/2, k+1/2}$ в (1.93) пропорційна стаціонарній різниці, що пов'язана із контрольним об'ємом $(j+1/2, j+1/2)$. Цю відповідність буде використано нижче при побудові багатосіткового алгоритму.

Представимо величину корекції у вузлі $\delta\bar{q}_{jk}$ як середнє величин $\Delta\bar{q}$, розрахованих для чотирьох навколишніх контрольних об'ємів. В результаті маємо дискретизацію другого порядку за простором. Дискретизацію за часом бажано також ввести другого порядку. Це можна зробити, наприклад, за допомогою однокрокової схеми Лакса–Вендроффа, яка для системи (1.92) у точці (j,k) дає

$$\begin{aligned} \delta\bar{q}_{jk} = & -\Delta t \left(\bar{F}_x + \bar{G}_y \right)_{jk} + \\ & + 0.5\Delta t^2 \left\{ \left[\underline{A} \left(\bar{F}_x + \bar{G}_y \right) \right]_x + \left[\underline{B} \left(\bar{F}_x + \bar{G}_y \right) \right]_y \right\}_{jk} \end{aligned} \quad (1.94)$$

Тут \underline{A} та \underline{B} — матриці Якобі; $\bar{F}_x = \partial\bar{F}/\partial x$ й т.і. Перший член у правій частині можна отримати як осереднення по сусідніх контрольних об'ємах. Згідно (1.93), маємо

$$\begin{aligned} -\Delta t \left(\bar{F}_x + \bar{G}_y \right)_{jk} = & 0.25 \left\{ \Delta\bar{q}_{j-1/2,k-1/2} + \Delta\bar{q}_{j-1/2,k+1/2} + \right. \\ & \left. + \Delta\bar{q}_{j+1/2,k-1/2} + \Delta\bar{q}_{j+1/2,k+1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

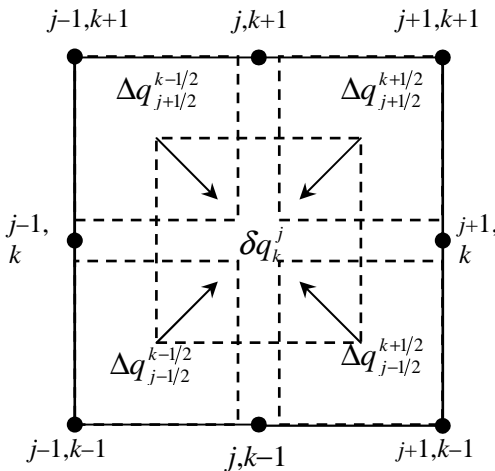


Рис. 1.6. Відповідність між контрольним об'ємом й точками сітки.

Використовуючи (1.92), можна одержати

$$\underline{A}(\vec{F}_x + \vec{G}_y) = -\underline{A}\vec{q}_t, \quad \underline{B}(\vec{F}_x + \vec{G}_y) = -\underline{B}\vec{q}_t.$$

Нехай $\vec{q}_t = \Delta\vec{q}/\Delta t$, тоді

$$\begin{aligned} \Delta t \left[\underline{A}(\vec{F}_x + \vec{G}_y) \right]_x &\approx -(\underline{A}\Delta\vec{q})_x \approx -(\Delta\vec{F})_x, \\ \Delta t \left[\underline{B}(\vec{F}_x + \vec{G}_y) \right]_y &\approx -(\underline{B}\Delta\vec{q})_y \approx -(\Delta\vec{G})_y. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Тут $\Delta\vec{F}$ й $\Delta\vec{G}$ означають зміну \vec{F} й \vec{G} за один крок за часом й відповідають зміні $\Delta\vec{q}$.

Члени $(\Delta\vec{F})_x$, $(\Delta\vec{G})_y$ в точці (j,k) визначаються за методом скінченного об'єму із використанням контрольного об'єму, що обмежений $(j-1/2; k-1/2)$, $(j+1/2, k-1/2)$, $(j+1/2, k+1/2)$ та $(j-1/2, k+1/2)$, як це показано на рис. 1.6. В результаті маємо

$$\begin{aligned} (\Delta\vec{F})_x &\approx [0.5(\Delta\vec{F}_{j+1/2, k+1/2} + \Delta\vec{F}_{j+1/2, k-1/2}) - \\ &- 0.5(\Delta\vec{F}_{j-1/2, k+1/2} + \Delta\vec{F}_{j-1/2, k-1/2})] \frac{1}{\Delta x} \end{aligned} \quad (1.97)$$

й аналогічний вираз для $(\Delta\vec{G})_y$.

Підстановка (1.94)-(1.97) у (1.94) дозволяє побудувати наступний алгоритм розрахунку зміни \vec{q}_{jk} :

$$\begin{aligned} \delta\vec{q}_{jk} = 0.25 \left\{ \left[\Delta\vec{q} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta\vec{F} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta\vec{G} \right]_{j-1/2, k-1/2} + \right. \\ \left. + \left[\Delta\vec{q} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta\vec{F} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta\vec{G} \right]_{j+1/2, k-1/2} + \right. \\ \left. + \left[\Delta\vec{q} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta\vec{F} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta\vec{G} \right]_{j-1/2, k+1/2} + \right. \\ \left. + \left[\Delta\vec{q} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta\vec{F} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta\vec{G} \right]_{j+1/2, k+1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Очевидно, що (1.98) можна трактувати як визначення зміни \vec{q}_{jk} шляхом осереднення змін у прилеглих контрольних об'ємах.

Основний алгоритм складається із рівняння (1.93), яке визначає зміну \bar{q} в контрольному об'ємі, й рівняння (1.98), що визначає зміну \bar{q}_{jk} в точці сітки. Алгоритм має другий порядок точності за часом та простором. Умова стійкості дає наступне обмеження на крок за часом :

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta x}{|u| + a}, \frac{\Delta y}{|v| + a} \right\}. \quad (1.99)$$

Звернемо увагу, що залежні змінні визначаються у вершинах контрольного об'єму, а не в його центрі, як це, наприклад, робить Флетчер [17].

Зауваження :

- Використовується також дискретизація (1.92) за методом скінченного об'єму, коли залежні змінні визначаються у центрах контрольних об'ємів.
- Розташування вершин контрольного об'єму у вузлах сітки має свою перевагу. По-перше, при використанні неоднорідних сіток, як правило, точність вище при розташуванні вершин у вузлах сітки. По-друге, розташування вузлів сітки у центрі об'єму часто приводить до появи осциляцій розв'язку. Якщо не використовувати рознесені сітки, то для гальмування осциляцій тоді необхідно вводити додаткові дисипативні члени.
- Хоча розташування вузлів сітки у вершинах дозволяє позбавитися осциляцій, наявність стрибків також потребує введення додаткових дисипативних членів.
- Найбільша перевага розташування вершин контрольного об'єму у вузлах сітки пов'язана із крайовими умовами. Оскільки у цьому випадку точки сітки збігаються з межею області, крайові умови за простором можуть бути поставлені безпосередньо. Зауважимо, що при розташуванні вузлів сітки в центрі контрольного об'єму, вузли сітки із межею області не співпадають.

На дрібних сітках, які забезпечують необхідну точність, для прискорення збіжності до стаціонарного стану в задачах на

встановлення можна використовувати кроки за часом більші, ніж це допускає умова (1.99). Багатосітковий підхід дозволяє це здійснити шляхом застосування (1.98) на послідовності більш грубих сіток зі збільшеним, відповідно до умови (1.99), значенням Δt_{max} . При цьому непотрібні несталі збурення швидко проходять через розрахункову область й виходять за її межі через віддалені межі. Всередині області залишається лише потрібний стаціонарний розв'язок. На відміну від багатосіткових алгоритмів, які були описані раніше [7], для отримання стаціонарних розв'язків рівнянь Ейлера звичайно використовуються більш прості алгоритми. Нижче буде коротко описаний один із таких алгоритмів.

Згідно цього нового алгоритму на проміжній сітці зміна $\Delta \bar{q}^m$ в контрольному об'ємі розраховується не за формулою (1.93), а утворюється шляхом звуження добавки $\delta \bar{q}^{m+1}$ у вузлі наступної більш дрібної сітки, тобто

$$\Delta \bar{q}^m = I_{m+1}^m \delta \bar{q}^{m+1}, \quad (1.100)$$

де I_{m+1}^m — оператор звуження.

Зауваження :

- *Оператор звуження (або обмежувальний оператор) дозволяє побудувати розподіл приросту $\Delta \bar{q}^m$ за зміною добавки $\delta \bar{q}^{m+1}$. Для лінійних задач найпростішим оператором звуження буде просто оператор з одиначною матрицею \underline{I} . Подібний процес виявляється досить ефективним для розв'язання суттєво еліптичних задач, наприклад, рівняння Лапласа. Однак для нелінійних задач із слабкою еліптичністю, типу задач про течію рідини із великими числами Рейнольдса, більш стійкими є схеми із п'яти- та дев'яточковими операторами*

$$I_{m+1}^m = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.101)$$

Послідовність більш грубих сіток будується шляхом виключення ліній сіток таким чином, щоб центри контрольних об'ємів на більш грубих сітках збігалися з вузлами більш дрібної сітки.

Отримані з (1.100) значення $\Delta \bar{q}^m$ дають можливість обчислити із (1.98) поправки, що відповідають вузлам сітки $\delta \bar{q}^m$. Ці поправки потім або інтерполюються на саму дрібну сітку M , в результаті чого маємо поправку на самій дрібній сітці у вигляді

$$\delta \bar{q}^M = I_m^M \delta \bar{q}^m, \quad (1.102)$$

або використовуються для визначення поправок контрольного об'єму для наступної більш грубої сітки, тобто знову використовується (1.100), але вже при $m \rightarrow m - 1$.

Підцикл багатосіткового алгоритму починається на самій дрібній сітці M , послідовно звужується на більш грубі сітки за допомогою (1.100) й інтегрується за часом поки не буде досягнута сама груба m -та сітка із використанням (1.98). Після цього за допомогою (1.101) розв'язок на m -ій сітці інтерполюється назад на саму дрібну сітку. Кожний такий підцикл, на відміну від класичного багатосіткового V-циклу, має вигляд зубу пилки. Отже, повний багатосітковий цикл складається з розв'язання (1.93) й (1.98) на самій дрібній (M) сітці з наступними циклами типу зубу пилки, поки не буде досягнута найбільш груба сітка ($m = 1$). Розглянутий алгоритм носить назву *алгоритму Ні*.

Порівняємо ефективність алгоритму Ні й класичного явного однокрокового алгоритму Лакса–Вендроффа [17]. Skorистаємося послідовністю із чотирьох сіток ($M = 4$). І нехай сама дрібна сітка складалася із 65×17 вузлів.

При розрахунках трансзвукового обтікання перешкоди в каналі за явною схемою для досягнення стаціонарного стану необхідно було виконати 900 кроків за часом. При цьому вирази (1.93) й (1.98) використовувалися на самій дрібній сітці 65×17 вузлів. При використанні описаного вище багатосіткового алгоритму Ні той же результат було досягнуто за 130

багатосіткових циклів. Час розрахунків при цьому скоротився приблизно в 4 рази.

Зауваження :

- Алгоритм Ні використовувався також й для розрахунку течії біля осесиметричної гондоли та течії біля каскаду лопаток ротора турбіни.
- Існує узагальнення алгоритму Ні на двокрокову явну схему Лакса–Вендроффа [17].
- Можливе застосування розглянутого алгоритму Ні й для розв'язання системи рівнянь Нав'є-Стокса для стисливої рідини.
- Крім алгоритму Ні часто використовують також алгоритм Джеймсона, згідно якому виконується дискретизація за методом контрольного об'єму рівнянь Ейлера з розташуванням вузлів сітки в центрах контрольних об'ємів, а замість описаної вище однокрокової схеми Лакса–Вендроффа використовується чотирикroкова схема Рунге–Кути [7]. Багатосітковий алгоритм Джеймсона в цілому аналогічний алгоритмові Ні, за винятком того, що використовується лише один цикл типу зуба пилки при переході на саму грубу сітку й інтерполяція на саму дрібну сітку проводиться через усі проміжні сітки.
- Швидка збіжність багатосіткового методу дозволяє використовувати його в схемах TVD першого порядку до моменту, коли збіжність вже майже досягнута. Обмеження потоків другого порядку можна вводити лише для остаточного визначення стаціонарного розв'язку.

Задачі

1. Скористуватися панельним методом й розрахувати розподіл тиску біля кругового циліндра при $M_\infty = 0$ для 4, 8, 16 та 32 панелей. Порівняйте отримані результати з точним розподілом тиску.
2. Повторити п.1 для еліпса $x^2 + (y/b)^2 = 1$ при відношенні довжин півосей $b = 0.5$ та $b = 0.2$. Як пояснити підвищення точності при збільшенні числа панелей й зменшенні відношення довжин півосей?
3. Використати панельний метод для розрахунку течії біля профілю *NACA-0012*, що розташований під нульовим кутом атаки. Профілі сімейства *NACA-00't'* визначаються рівнянням

$$y = t (a_1 x^{1/2} + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4), \quad (1.3-1)$$
 де $a_1 = 1.4779155$, $a_2 = -0.624424$, $a_3 = -1.727016$, $a_4 = 1.384087$, $a_5 = -0.489769$, t – товщина аеродинамічного профілю. Одержати розв'язок для 8, 16 й 32 панелей при $M_\infty = 0.4$ та порівняти отриманий розв'язок з відомими експериментальними даними. Для 16 панелей при $M_\infty = 0.4$ одержати розв'язок з більшим числом панелей в області носка та хвоста профілю й меншим у середній частині профілю. Визначити, який розподіл при заданому числі панелей є найкращим для досягнення найбільш високої точності. Як цей “оптимальний” розподіл пов'язано із градієнтами розв'язку?
4. Повторити п.3 для профілів *NACA-0006* та *NACA-0018* й визначити, чи впливає велика кривизна носка більш тонких профілів на “оптимальний” розподіл панелей. Використати розв'язок із 32 панелями в якості “точного” розв'язку.
5. Порівняти розв'язок, який отримано в п.1 із використанням прямого методу й ітераційного методу *SOR*, для 8, 16 та 32 панелей. Вважати, що ітерації *SOR* зійшлися, якщо середньоквадратичне відхилення різниць алгебраїчного рівняння стане менше $1.0e-5$. Вивести з отриманих результатів співвідношення $NITER = k N^p$, де *NITER* — число ітерацій, що необхідні для збіжності, а N — число панелей.

6. Використати схему Мак-Кормака для розв'язання задачі про рухому ударну хвилю, якщо відношенням тисків $p_1/p_2 = 2.5$.
7. Повторити п.6 для схеми Лакса–Вендроффа. Порівняти отримані результати при $NX = 101$.
8. Повторити п.6, використовуючи згладжування розв'язку відповідно до наступної схеми зі штучною в'язкістю

$$\bar{q}_j^{n+1} = \bar{q}_j^{**} + v \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta \left[\left[u_{j+1}^{**} \mid \Delta \bar{q}_{j+1}^{**} \right] \right]. \quad (1.3-2)$$

Використати дану форму штучної в'язкості для розрахунку поширення помірною ($p_1/p_2 = 2.5$) й сильного ($p_1/p_2 = 10$) стрибків. Порівняти отриманий розв'язок з розв'язками інших авторів у випадках :

- (1) Рівняння (1.3-2) використовується при розрахунку всіх компонентів вектора \bar{q} .
 - (2) Рівняння (1.3-2) використовується при розрахунку лише другого та третього компонентів вектора \bar{q} .
9. Течія в ударній трубі, яку з гарною точністю можна вважати одновимірною, описується безрозмірним векторним рівнянням

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t'} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x'} = 0. \quad (1.3-3)$$

Модифікувати програму з п.6 і одержати розв'язок при наступних початкових умовах:

$$\text{при } x < 0.305 \quad u'_1 = 0, \quad \rho'_1 = 8.0, \quad p'_1 = \frac{p_1}{p_2} = 10; \quad (1.3-4a)$$

$$\text{при } x \geq 0.305 \quad u'_2 = 0, \quad \rho'_2 = 1.0, \quad p'_2 = 1 \quad (1.3-4)$$

де p_1/p_2 — відношення тисків. З рівнянь (1.3-4) також впливають крайові умови при $x = 0$ та $x = 1$. Розв'язати задачу при $NX = 101$, $NT = 170$ й $DT = 0.1$ за схемою Лакса–Вендроффа зі штучною в'язкістю (1.3-2).

10. Модифікувати програму з п.6 й одержати розв'язок задачі про поширення помірної ($p_1/p_2 = 2.5$) та сильної ($p_1/p_2 = 10$) ударних хвиль за схемою FCT при наступних значеннях дифузійних й антидифузійних параметрів

$$1) \quad \eta_0 = 0.125, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 0;$$

$$2) \eta_0 = 0.5, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 0;$$

$$3) \eta_0 = 1/3, \quad \eta_1 = 1/3, \quad \eta_2 = -1/6;$$

$$4) \eta_0 = 1/6, \quad \eta_1 = 1/3, \quad \eta_2 = -1/3. \quad (1.3-5)$$

Порівняти профілі ударних хвиль, що отримані для різних варіантів із точним розв'язком.

11. Застосувати схему FCT до розв'язання задачі про ударну трубу з п.9. Порівняти отриманий розв'язок з розв'язком, який знайдено за схемою Лакса–Вендроффа зі штучною в'язкістю. Особливу увагу приділити профілям ударної хвилі й контактного розриву.
12. Модифікувати програму з п.3 таким чином, щоб ця програма могла розраховувати обтікання профілів з піднімальною силою. В якості тесту для модифікованої програми одержати розв'язок для профілю НАСА-0012 при $M_\infty = 0$ й при кутах атаки $\alpha = 0, 2$ та 4° . Для визначення коефіцієнта піднімальної сили ввести в програму інтегрування розподілу тиску. Порівняти отримані дані з теоретичним значенням $C_L = 2 \pi \alpha$.

Розділ 2

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

Як відомо нестационарні й стаціонарні рівняння примежового шару відносяться до параболічного типу, а отже для їх розв'язання можуть бути використані відомі числові алгоритми розв'язання параболічних рівнянь. В той же час рівняння примежового шару мають деякі суттєві особливості, які не дозволяють використовувати ці алгоритми без суттєвих змін. По-перше, рівняння примежового шару нелінійні, а отже умова стійкості за Нейманом не може бути використана безпосередньо. По-друге, примежовий шар розвивається, як правило, на стінці, вплив якої суттєво коригує безпосереднє використання відомих алгоритмів. Особливості поведінки розв'язку для рівнянь примежового шару являються також основним стимулом появи нових методів й алгоритмів.

В цьому розділі при розв'язанні системи рівнянь примежового шару будуть розглянуті, як адаптації відомих алгоритмів (FTCS, FI, Дюффорта–Франкела, Кранка–Нікольсона), так і нові алгоритми (метод Девіса, блочний метод Келлера, модифікований блочний метод Келлера), що максимально враховують особливості поведінки ламінарного й турбулентного примежових шарів.

Також буде розглянута модифікація розглянутих алгоритмів у випадку внутрішніх течій, у тому числі й для течій зі зворотними потоками.

2.1. Простий явний метод

Для розв'язання системи рівнянь примежового шару явним методом FTCS зараз майже не користуються, бо його використання пов'язане із досить жорсткими умовами стійкості.

Тому наведений нижче приклад алгоритму цього методу є скоріше навчальним.

Отже, розглянемо двовимірну нестисливу ламінарну течію без теплообміну на пластині (див. Рис.2.1).

Маємо наступні скінченно-різницеві аналоги рівняння руху вздовж осі Ox (I):

$$u_j^n \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta x} + v_j^n \frac{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta y} = u_c^n \frac{(u_c^{n+1} - u_c^n)}{\Delta x} + \frac{v}{(\Delta y)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + O(\Delta x, \Delta y^2). \quad (2.1)$$

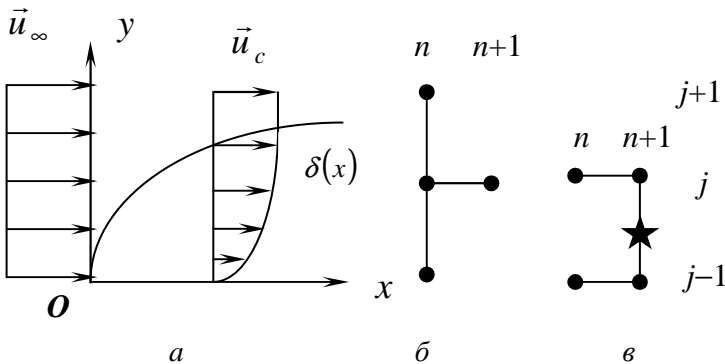


Рис.2.1. Картина течії (а) та шаблони, що апроксимують похідні для рівняння руху (б) й рівняння нерозривності (в).

й рівняння нерозривності (III)

$$\frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - u_j^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x, \Delta y^2) = 0. \quad (2.2)$$

При використанні явної схеми розрахунків починають із передньої кромки пластини, покладаючи на ній $u_j^n = u_\infty$ та $v_j^n = 0$. Визначення v_j^n у явному алгоритмі необхідне, хоча цього й не потребує математична постановка задачі.

Підходящий початковий розподіл v_j^n можна також зайти, якщо скористатися рівнянням нерозривності й виключити du/dx із рівняння руху:

$$-u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_c \frac{\partial u_c}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

А оскільки $-u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -u^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{u} \right)$, остаточно маємо:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \left(u_c \frac{\partial u_c}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Враховуючи тепер, що при $y=0$ $v=0$, після інтегрування отримуємо:

$$v(y) = -u \int_0^y \frac{1}{u^2} \left(u_c \frac{\partial u_c}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy. \quad (2.3)$$

Для розглядуваної задачі обтікання плоскої пластини будемо вважати, що при $x=0$ $u_j^n = u_\infty$ скрізь, крім стінки, де $u_1^n = 0$.

Потрібні значення v_j^n знаходимо інтегруючи праву частину (2.3). Скористаємося асимптотичною крайовою умовою. Тоді розрахунок починаємо біля стінки й рухаємося від стінки назовні доти, поки $u_j^{n+1}/u_c^{n+1} = 1 - \varepsilon \approx 0.9995$. Звернемо увагу, що підчас розрахунку ми одночасно отримуємо й положення зовнішньої межі примежового шару.

Умови стійкості для цього методу мають вигляд:

$$\frac{2v \Delta x}{u_j^n (\Delta y)^2} \leq 1, \quad \frac{(v_j^n)^2 \Delta x}{u_j^n v} \leq 2. \quad (2.4)$$

Зауваження:

- *Припущення, що у початковому розрізі усі $v_j^n \equiv 0$, також приводить до задовільних результатів.*
- *Скінченно-різницеве формулювання рівняння нерозривності та описаний вище метод його розв'язання еквівалентний*

інтегруванню рівняння нерозривності за формулою трапецій.

- Підкреслений у рівнянні (I) другий член може бути апроксимоване іншим чином, а саме

$$v_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta y}, \quad v_j^n > 0; \quad (2.5)$$

$$v_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta y}, \quad v_j^n < 0.$$

Тоді умова стійкості буде більш простою, а саме

$$\Delta x \leq \frac{1}{2\sqrt{\left[u_j^n (\Delta y)^2 \right] + \left[|v_j^n| / (u_j^n \Delta y) \right]}} \quad (2.6)$$

Але при такій апроксимації величини $v \text{ди}/\text{ду}$ похибка апроксимації для всієї схеми погіршується й складає $\approx O(\Delta x, \Delta y)$.

2.2. Метод Дюффорта–Франкела

Метод Дюффорта–Франкела хоча й відноситься до явних методів, тим не менш для розв'язання системи рівнянь примежового шару (I)-(IV) є прийнятним. Скінченно-різницевий аналог рівнянь примежового шару запишемо у вигляді, що дозволяє використовувати нерівномірні сітки. Отже нехай

$$\Delta x_{n+1} = x^{n+1} - x^n, \quad \Delta x_n = x^n - x^{n-1};$$

$$\Delta y_{j+1} = y_{j+1} - y_j, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Скористаймося узагальненим рівнянням переносу (V), пам'ятаючи, що невідома Φ у цьому рівнянні може означати складову швидкості u , параметри моделі турбулентності (k, ε або $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{u'v'}$), а також термодинамічну змінну (T або H). У схемі Дюффорта–Франкела стійкість досягається виключенням із дифузійного члена з Φ_j^n шляхом заміни його

середнім значенням Φ на $(n+1)$ та $(n-1)$ -му шарах. У розглядуваній модифікованій схемі, яка запропонована Денсі та Плетчером [17], замість простого усереднення на нерівномірній сітці проводиться лінійна інтерполяція Φ між $(n+1)$ та $(n-1)$ -м шарами. Отже, маємо

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_j^n u_j^n (\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^{n-1})}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_n} + \frac{\rho_j^n v_j^n (\Phi_{j+1}^n - \Phi_{j-1}^n)}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} = \\ & = \frac{2}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} \left[\frac{\bar{\lambda}_{j+\frac{1}{2}}^n (\Phi_{j+1}^n - \bar{\Phi}_j^n)}{\Delta y_{j+1}} - \frac{\bar{\lambda}_{j-\frac{1}{2}}^n (\bar{\Phi}_j^n - \Phi_{j-1}^n)}{\Delta y_j} \right] + S_j^n \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для визначеності покладемо

$$\bar{\Phi}_j^n = \frac{\Delta x_{n+1} \Phi_j^{n-1} + \Delta x_n \Phi_j^{n+1}}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_n}, \quad (2.8)$$

де й використовується лінійна інтерполяція. Для більшої загальності припустимо також, що $\bar{\lambda} = \lambda_T + \lambda$, де λ_T – коефіцієнт турбулентної дифузії. Джерельний член S_j^n тут може мати один із наступних виглядів:

(I) Для рівняння руху у проекції на вісь Ox джерельним членом є член із градієнтом тиску $\partial p / \partial x$:

$$S_j^n = \frac{p_j^{n+1} - p_j^{n-1}}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_n}. \quad (2.9)$$

(II) Для рівняння енергії, якщо за змінну взяти абсолютну температуру T , джерельним є в'язкий дисипативний член $\bar{\mu}(\partial u / \partial y)^2$:

$$S_j^n = \bar{\mu}_j^n \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} \right)^2. \quad (2.10)$$

(III) Для рівняння кінетичної енергії турбулентності (\bar{k}) джерельним є дисипативний член $c_d \rho (\bar{k})^{3/2} / l$:

$$S_j^n = c_D \rho_j^n \left(\frac{\Delta y_{j+1} (\bar{k})_{j-1}^n + \Delta y_j (\bar{k})_{j+1}^n}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\Delta x_{n+1} (\bar{k})_j^{n-1} + \Delta x_n (\bar{k})_j^{n+1}}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_n} \right) \times \frac{1}{l_j^n}. \quad (2.11)$$

Зауваження:

- Вираз (2.11) записано таким чином, щоб до нього не входило значення \bar{k} у вузлі (n, j) , що необхідно для забезпечення стійкості за схемою Дюффорта–Франкела.
- Головний член у виразі для похибки апроксимації дорівнює $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$. Але оскільки для рівнянь примежового шару похідна $\partial^2 \Phi / \partial x^2$ мала, точність апроксимації при рівномірному кроці для методу Дюффорта–Франкела $\approx O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2, (\Delta x / \Delta y)^2)$.
- Відомо, що при використанні нерівномірного кроку точність апроксимації знижується. Однак, на практиці можна майже завжди знайти спосіб, що відновлює початкову точність за рахунок збільшення числа алгебраїчних операцій. Наприклад, Хонг [1] показав, що для нашого випадку другий порядок апроксимації зберігається й при $\Delta x_{n+1} \neq \Delta x_n$, якщо похідну $\partial \Phi / \partial x$ записати у вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \frac{(\Delta x_n)^2 \Phi_j^{n+1} - (\Delta x_{n+1})^2 \Phi_j^{n-1} + (\Delta x_{n+1}^2 - \Delta x_n^2) \Phi_j^n}{\Delta x_{n+1} \Delta x_n^2 + \Delta x_n \Delta x_{n+1}^2}. \quad (2.12)$$

Відповідною апроксимацією рівняння нерозривності (III) буде

$$\frac{\rho_j^{n+1} v_j^{n+1} - \rho_{j-1}^{n+1} v_{j-1}^{n+1}}{\Delta y_j} + \frac{\rho_j^{n+1} u_j^{n+1} - \rho_j^{n-1} u_j^{n-1} + \rho_{j-1}^{n+1} u_{j-1}^{n+1} - \rho_{j-1}^{n-1} u_{j-1}^{n-1}}{2(\Delta x_{n+1} + \Delta x_n)} = 0. \quad (2.13)$$

Причому похибка апроксимації для рівняння (2.13) складає $\cong O(\Delta x, (\Delta y)^2)$.

Мадні та Плетчер [1] запропонували наступну умову стійкості для методу Дюффорта–Франкела ($\Delta y = \text{const}$):

$$\Delta x_{n+1} \leq \rho_j^n u_j^n \Delta y / \left\{ \rho_j^n v_j^n + \frac{(\bar{\lambda}_{j-1}^n - \bar{\lambda}_{j+1}^n)}{2\Delta y} \right\}. \quad (2.14)$$

Зауваження:

- Умова (2.14) не накладає скільки-небудь помітних обмежень на розмір кроку Δx , бо відношення v/u для примежового шару мале, а другий член у знаменнику пропорційний різниці $(\bar{\lambda}_{j-1}^n - \bar{\lambda}_{j+1}^n)$, а не самим цим коефіцієнтам.
- У зв'язку із попереднім зауваженням умова (2.14) може бути використана й при нерівномірному кроці $\Delta y_{j+1} \neq \Delta y_j$.
- Оскільки схема Дюффорта–Франкела тришарова, значення на другому шарі визначають за двошаровою схемою. Наприклад, за явною схемою FTCS.
- Розв'язання системи, що складається із рівняння руху, рівняння нерозривності та рівняння енергії, починають з рівняння руху. А саме розрахунок починають із обчислення повздовжньої компоненти швидкості u у найближчому до стінки вузлі та рухаються у напрямку до зовнішньої межі примежового шару. Зовнішня межа примежового шару вважається досягнутою, якщо швидкість всередині примежового шару та задана швидкість на зовнішній межі відрізняються не більше ніж на $\varepsilon = 0.005$. Аналогічно визначається термодинамічна невідома із рівняння енергії. Густина визначають із рівняння стану. Останнім розв'язують рівняння нерозривності.

2.3. Метод Кранка–Нікольсона та чисто неявний метод

Характерні особливості більшості неявних методів продемонструємо на наступному прикладі ($\Delta y = const$):

Рівняння руху (I):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left[\theta(\rho_j^{n+1} u_j^{n+1}) + (1-\theta)\rho_j^n u_j^n \right] (u_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta x} + \\
 & + \frac{\theta(\rho_j^{n+1} v_j^{n+1})(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (1-\theta)(\rho_j^n v_j^n)(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta y} = \\
 & = \frac{\left[\theta(\rho_c^{n+1} u_c^{n+1}) + (1-\theta)(\rho_c^n u_c^n) \right] (u_c^{n+1} - u_c^n)}{\Delta x} + \\
 & + \frac{1}{(\Delta y)^2} \left\{ \theta \left[\mu_{j+1/2}^{n+1} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - \mu_{j-1/2}^{n+1} (u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \right] + \right. \\
 & \left. + (1-\theta) \left[\mu_{j+1/2}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - \mu_{j-1/2}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

де θ – ваговий коефіцієнт.

(I) При $\theta = 0$ маємо явний метод FTCS із похибкою апроксимації $\cong O(\Delta x, (\Delta y)^2)$.

(II) При $\theta = 1/2$ маємо неявний метод Кранка–Нікольсона (CN).

Якщо всі коефіцієнти та параметри стану обчислюються у точці $(n + 1/2, j)$, точність цього методу $\cong O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$.

(III) При $\theta = 1$ маємо чисто неявний метод (FI). При обчисленні коефіцієнтів та параметрів стану у точці $(n + 1, j)$, похибка апроксимації методу $\cong O((\Delta x), (\Delta y)^2)$.

Рівняння нерозривності (III) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_j^{n+1} v_j^{n+1} - \rho_{j-1}^{n+1} v_{j-1}^{n+1}}{\Delta y} + \\
 & + \frac{\rho_j^{n+1} u_j^{n+1} - \rho_j^{n-1} u_j^{n-1} + \rho_{j-1}^{n+1} u_{j-1}^{n+1} - \rho_{j-1}^{n-1} u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Зауваження:

- При $\theta = 1/2$ величини ρ та u у першому доданку потрібно розраховувати на шарі $(n + 1/2)$, у зв'язку із чим перший доданок рівняння (2.16) записується аналогічно другому доданку. Тоді похибка апроксимації рівняння нерозривності буде $\cong O(\Delta x^2, \Delta y^2)$.
- Скінченно-різницевий аналог рівняння енергії (II) будується за тією ж схемою, що й для рівняння руху.
- Описані неявні схеми можуть бути узагальнені на випадок нерівномірної сітки за методом, аналогічним наведеному в попередньому розділі.
- При використанні довільного неявного методу ($\theta \neq 0$) скінченно-різницевий аналог рівняння руху є нелінійним, бо до його коефіцієнтів входять значення невідомих на $(n + 1)$ -му шарі.

Виходячи із останнього зауваження, очевидно, що при використанні неявних методів необхідна додаткова лінеаризація скінченно-різницевого аналога рівняння руху одним із наведених нижче методів. Приклад застосування чисто неявного методу для розв'язання системи рівнянь турбулентного примежового шару на довільній поверхні наведено у роботі [5].

2.3.1. Метод запізнілих коефіцієнтів

Найчастіше використовують найбільш простий метод лінеаризації, коли усі коефіцієнти обчислюються на попередньому n -му шарі. При такому підході узгодженість схеми зберігається, так як для довільної функції $\Phi(x, y)$: $\Phi(x_0 + \Delta x, y_0) = \Phi(x_0, y_0) + O(\Delta x)$. Однак точність усього методу при такій апроксимації коефіцієнтів за напрямом Ox складає лише $\cong O(\Delta x)$.

2.3.2. Проста ітераційна заміна коефіцієнтів

Спочатку за обчисленими на n -му шарі коефіцієнтам визначаються значення невідомих u, T, v на нульовій ітерації. Потім знову розраховують u, T, v , використовуючи вже ці обчислені коефіцієнти. Процедура повторюється доти, поки відмінність розв'язків на двох сусідніх ітераціях не виявиться достатньо малою. Розв'язком на $(n + 1)$ -му шарі вважається розв'язок на останній ітерації. Точність цього методу складає (Δ) : $O(\Delta x) < \Delta < O((\Delta x)^2)$. Причому досягнення більш високої точності потребує більшого числа ітерацій (до 19).

2.3.3. Лінеаризація за Ньютоном при ітеративному обчисленні коефіцієнтів

Основна перевага цього методу полягає у прискоренні збіжності. Розглянемо приклад застосування методу:

$$(u_j^{n+1})^2 \approx 2\tilde{u}_j^{n+1}u_j^{n+1} - (\tilde{u}_j^{n+1})^2. \quad (2.17)$$

Тут \tilde{u} позначено значення u на попередній ітерації. Запишемо тепер скінченно-різницеву апроксимацію члена $\rho u \partial u / \partial x$:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\rho \left[2\tilde{u}_j^{n+1}u_j^{n+1} - (\tilde{u}_j^{n+1})^2 - u_j^n u_j^{n+1} \right]}{\Delta x}. \quad (2.18)$$

На першій ітерації покладемо $\tilde{u}_j^{n+1} \equiv u_j^n$.

Зауваження:

- Якщо при апроксимації члена із $\rho u \partial u / \partial x$ використати вираз (2.10), а при апроксимації інших членів скористатися простою ітераційною заміною, то в результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею. Число ітерацій на кожному кроці за напрямом $Ox - 1 \div 2$. Точність методу при цьому буде $\cong O((\Delta x)^2)$.

2.2.4. Екстраполяція коефіцієнтів

Значення коефіцієнтів на $(n+1)$ -му шарі можна одержати екстраполюючи значення, які вже відомі на n попередніх шарах, причому формально ми можемо при цьому забезпечити довільно малу похибку апроксимації. Наприклад, можна записати

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n \Delta x_{n+1} + O\left((\Delta x)^2\right). \quad (2.19)$$

Апроксимуючи похідну $(\partial u / \partial x)_j^n$ лише із першим порядком

точності апроксимації $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta x_n} + O(\Delta x)$, отримуємо

вираз, який формально має похибку $\approx O(\Delta x^2)$:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta x_n} \Delta x_{n+1} + O\left((\Delta x)^2\right). \quad (2.20)$$

Тут $\Delta x_{n+1} = x^{n+1} - x^n$, $\Delta x_n = x^n - x^{n-1}$.

2.2.5. Загальні зауваження відносно стійкості неявних методів

- 1) Згадувана вище умова стійкості ($\theta \geq 1/2$) одержана для лінійних рівнянь. В той же час рівняння примежового шару нелінійні, тому дуже часто (особливо для схеми Кранка–Нікольсона при розрахунках турбулентних течій) дана умова не виконується;
- 2) Якщо кроки Δx та Δu такі, що конвективний перенос більше дифузійного, розв'язок може бути фізично нестійким, хоча метод Неймана тут й не передбачає причин для нестійкості. При цьому можливі такі причини вказаного ускладнення:

- Матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що розв'язується прогонкою, не має діагонального переважання;
- Невірне описання фізичних процесів, що приводять до даних рівнянь.

Для ілюстрації вказаних зауважень розглянемо використання для розрахунку примежового шару чисто неявної скінченно-різницевої схеми. Якщо скористатися методом запізнілих коефіцієнтів, після деяких нескладних перетворень отримуємо наступний алгоритм:

$$B_j u_{j-1}^{n+1} + D_j u_j^{n+1} + A_j u_{j+1}^{n+1} = C_j, \quad (2.21)$$

де

$$B_j = -\frac{v_j^n}{2\Delta y} - \frac{v}{(\Delta y)^2}, \quad D_j = \frac{u_j^n}{\Delta x} + \frac{2v}{(\Delta y)^2}, \quad (2.22)$$

$$A_j = \frac{v_j^n}{2\Delta y} - \frac{v}{(\Delta y)^2}, \quad C_j = \frac{(u_j^n)^2}{\Delta x} + u_c^n \frac{(u_c^{n+1} - u_c^n)}{\Delta x}.$$

Для в'язкої рідини характерною є властивість, згідно якої при зменшенні величини (u_{j+1}^{n+1}) або (u_{j-1}^{n+1}) , швидкість у точці $(n+1, j)$ за рахунок в'язких ефектів також зменшується. Але, якщо один із коефіцієнтів A_j або B_j виявляється при цьому > 0 , то ця властивість розв'язку вже не виконується. Тому додатковою умовою стійкості системи (2.21) буде від'ємність коефіцієнтів $A_j < 0$, $B_j < 0$, тобто

$$\frac{|v_j^n|}{2\Delta y} - \frac{v}{(\Delta y)^2} < 0 \quad \text{або} \quad \mathbf{R}_{cell} = \frac{|v_j^n|}{v} \leq 2 \quad (2.23)$$

Отже, виходячи із фізичних міркувань, потрібно визнати непридатним для розглянутої схеми навіть вільний від числових похибок розв'язок, якщо для нього $\mathbf{R}_{cell} \geq 2$.

Найпростіший засіб позбавитись обмеження (2.23), це замінити при апроксимації члена $v \partial u / \partial y$ центральні різниці на односторонні проти потоку [7]:

$$v \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{v_j^n (u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{\Delta y}, \quad v_j^n > 0,$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{v_j^n (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})}{\Delta y}, \quad v_j^n < 0, \quad (2.24)$$

при цьому виникає схемна в'язкість, яка компенсує вплив \mathbf{R}_{cell} . Хоча, очевидно, що точність розв'язку при цьому зменшується.

Зауваження:

- Андерсон [1] пропонує скрізь, де це можливо при апроксимації похідної $v \partial u / \partial y$ користуватися центральними різницями. Якщо ж підчас розрахунків $\mathbf{R}_{cell} \geq 2$, не відразу переходити на односторонні різниці типу (2.24), а скористатися комбінацією односторонньої різниці з центральною (гібридна схема). При $v_j^n > 0$:

$$v \frac{\partial u}{\partial y} \approx \chi v_j^n \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{2\Delta y} + (1 - \chi) v_j^n \frac{(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{\Delta y}, \quad (2.25)$$

де $\chi = 2/\mathbf{R}_{cell}$, $\mathbf{R}_{cell} = |v_j^n| \Delta y / \nu \geq 2$. Гібридна схема гарантує від'ємність A_j та B_j в рівнянні (2.21) й при цьому максимально використовує переваги центральних різниць.

2.5. Метод Девіса сумісного розв'язання рівняння руху й рівняння нерозривності

2.5.1. Перетворення Леві–Ліза

Нехай наступна система рівнянь описує стаціонарний ламінарний рух стисливої рідини в примежовому шарі :

Рівняння нерозривності

$$\frac{\partial}{\partial x}(r_b^m \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(r_b^m \rho v) = 0, \quad (2.26)$$

рівняння руху у напрямку осі Ox

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.27)$$

рівняння енергії

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu c_p}{\mathbf{Pr}} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (2.28)$$

Тут $m = 0$ для двовимірних течій й $m = 1$ для осесиметричних течій; r_b – радіус тіла; p_e – відомий тиск із-зовні примежового шару. Для стисливої рідини до системи рівнянь (2.26)-(2.28) також необхідно додати рівняння стану й рівняння залежності в'язкості від температури.

Для системи рівнянь (12.26)-(12.28) можна поставити початкові умови

$$u(x_0, y) = u_0(y), \quad T(x_0, y) = T_0(y) \quad (2.29)$$

й крайові умови

$$\begin{aligned} u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \\ T(x, 0) = T_w(x) \quad \vee \quad \partial T(x, 0) / \partial y = -\dot{Q}_w(x), \\ u(x, \delta(x)) = u_e(x), \quad T(x, \delta(x)) = T_e(y). \end{aligned} \quad (2.30)^1$$

Згідно підходу Леві–Ліза [17] введемо дві нові незалежні змінні

$$\begin{aligned} \xi(x) = K \int_0^x (\rho u)_{ref} u_e r_b^{2m} dx', \\ \eta(x, y) = u_e r_b^m (K/2\xi)^{1/2} \int_0^y \rho dy', \end{aligned} \quad (2.31)^2$$

¹ Індeksi w та e вказують, що величини розглядаються на стінці й на зовнішній межі примежового шару, відповідно.

² Індекс ref вказує, що величини знаходяться в незбуреному потоці.

де K – константа, що залежить від типу течії, що розглядається. Нові змінні водяться наступним чином

$$F = u/u_e, \quad \theta = h/h_e = T/T_e, \quad (2.32)$$

$$V = 2\xi \left(F \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\rho \nu r_b^m}{(2\xi K)^{1/2}} \right) / \left\{ K (\rho \mu)_{ref} u_e r_b^{2m} \right\}, \quad (2.33)$$

а система рівнянь (2.26)-(2.28) набуває вигляду

$$2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + F = 0,$$

$$2\xi F \frac{\partial F}{\partial \xi} + V \frac{\partial F}{\partial \eta} + \beta(F^2 - 1) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda \frac{\partial F}{\partial \eta} \right), \quad (2.34)$$

$$2\xi F \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \alpha \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right).$$

Тут

$$\alpha = \frac{u_e^2}{c_p T_e}, \quad \beta = \left(\frac{2\xi}{u_e} \right) \frac{du_e}{d\xi}, \quad \lambda = \frac{\rho \mu}{(\rho \mu)_{ref}}. \quad (2.35)$$

Початкові й крайові умови тоді мають вигляд

$$\begin{aligned} F = F_0, V = V_0, \theta = \theta_0 & \quad \text{при } \xi = \xi_0; \\ F = V = 0, \theta = \theta_w & \quad \text{при } \eta = 0; \\ F = V = 1, \theta = \theta_e & \quad \text{при } \eta = \eta_e. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Перетворення Леві–Ліза має наступні чудові якості:

1. Вплив стисливості стає несуттєвим. Густина ρ не входить до перетворених рівнянь.
2. Осесиметричні течії можна розглядати як еквівалентні двовимірні.
3. Введення автотельної координати η компенсує різке збільшення товщини примежового шару.

2.5.2. Зв'язана схема Девіса

Розглянемо зв'язану схему Девіса (DCS) при розв'язанні системи (2.34) для нестисливого примежового шару. У цьому

випадку $\lambda = 1$, $\theta = 1$ й необхідно розглянути лише перші два рівняння системи (2.34). Перепишемо друге рівняння у вигляді

$$\xi \frac{\partial F^2}{\partial \xi} = RHS = -V \frac{\partial F}{\partial \eta} - \beta(F^2 - 1) + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}. \quad (2.37)$$

Тут RHS – означає праву частину рівняння. Використовуючи тепер різницеву схему Кранка–Нікольсона у вузлі $(n+1/2, j)$, можна побудувати маршовий алгоритм у напрямку осі ξ :

$$0.5(\xi^n + \xi^{n+1}) \frac{\{F^2\}_j^{n+1} - \{F^2\}_j^n}{\Delta \xi} = 0.5(RHS^n + RHS^{n+1}). \quad (2.38)$$

Якщо тепер апроксимувати в (2.38) похідні по η центральними різницями, а нелінійні члени лінеаризувати за Ньютоном

$$\begin{aligned} \{F^2\}^{k+1} &= 2F^k F^{k+1} - \{F^2\}^k, \\ \left\{V \frac{\partial F}{\partial \eta}\right\}^{k+1} &= V^{k+1} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^k + V^k \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^{k+1} - \left\{V \frac{\partial F}{\partial \eta}\right\}^k, \end{aligned} \quad (2.39)$$

із рівняння (2.38) отримаємо лінійну відносно F^{k+1} та V^{k+1} зв'язану систему рівнянь

$$\begin{aligned} a_j^k F_{j-1}^{k+1} + b_j^k F_j^{k+1} + c_j^k F_{j+1}^{k+1} + g_j^k V_j^{k+1} &= d_j^k, \\ j &= 2, 3, \dots, NY - 1. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Тут

$$\begin{aligned} a_j^k &= -0.5(1 + 0.5V_j^k \Delta \eta), \\ b_j^k &= 1 + \Delta \eta^2 \left[\beta^{n+1} + \frac{\xi^n + \xi^{n+1}}{\Delta \xi} \right] F_j^k, \\ c_j^k &= -0.5(1 - 0.5V_j^k \Delta \eta), \\ g_j^k &= 0.25 \Delta \eta (F_{j+1}^k - F_{j-1}^k), \\ d_j^k &= -a_j^n F_{j+1}^k - c_j^n F_{j-1}^k - (1 + 0.5 \Delta \eta^2 \beta^n F_j^n) F_j^n + \\ &\quad + 0.5 \Delta \eta^2 (\beta^n + \beta^{n+1}) + 0.5 \Delta \eta^2 \times \\ &\quad \times \left[(\xi^n + \xi^{n+1}) (\{F^2\}_j^n + \{F^2\}_j^k) \right] / \Delta \xi + \end{aligned}$$

$$+V_j^k \frac{F_{j+1}^k - F_{j-1}^k}{2\Delta\eta} + \beta^k \left\{ F^2 \right\}_j^k \Big]. \quad (2.41)$$

Ітерації по k проводяться на кожному кроці по n . Після досягнення збіжності по k маємо розв'язок на шарі $n+1$. Рівняння нерозривності в різницевій формі можна звести до вигляду

$$V_j^{k+1} = V_{j-1}^{k+1} - s_j (F_{j-1}^{k+1} - F_j^{k+1}) + t_j, \quad j = 2, 3, \dots, NY, \quad (2.42)$$

де

$$s_j = 2\Delta\eta \left(0.25 + \xi^{n+1/2} / \Delta\xi \right), \quad (2.43)$$

$$t_j = -2\Delta\eta \left(0.25 - \xi^{n+1/2} / \Delta\xi \right) \left[F_j^k + F_{j-1}^k \right] - (V_j^k - V_{j-1}^k).$$

Рівняння (2.40) й (2.42) розв'язуються одночасно, використовуючи модифікований алгоритм, що подібний алгоритму Томаса [7]. Перший прохід відбувається від зовнішньої межі прилежого шару у напрямку до стінки. На зовнішній межі прилежого шару покладають $E_{NY} = G_{NY} = 0$, $e_{NY} = 1$. Підчас зворотного ходу прогонки при $j = NY-1, NY-2, \dots, 2$ обчислюються значення коефіцієнтів

$$T = b_j^k + c_j^k E_{j+1} + s_j (c_j^k G_{j+1} + g_j^k),$$

$$E_j = - \left[a_j^k - s_j (c_j^k G_{j+1} + g_j^k) \right] / T,$$

$$G_j = - (c_j^k G_{j+1} + g_j^k) / T,$$

$$e_j = \left[d_j - (c_j^k G_{j+1} + g_j^k) t_j - c_j e_{j+1} \right] / T. \quad (2.44)$$

Потім, покладаючи на стінці $F_1 = V_1 = 0$, підчас прямого ходу прогонки при $j = 2, 3, 4, \dots, NY-1$, обчислюються значення невідомих

$$F_j^{k+1} = E_j F_{j-1}^{k+1} + G_j V_{j-1}^{k+1} + e_j,$$

$$V_j^{k+1} = V_{j-1}^{k+1} - s_j (F_{j-1}^{k+1} - F_j^{k+1}) + t_j. \quad (2.45)$$

На початку ітерацій покладають $F_j^k = F_j^n$ й $V_j^k = V_j^n$, а після досягнення збіжності маємо $F_j^{n+1} = F_j^{k+1}$ й $V_j^{n+1} = V_j^{k+1}$.

Зауваження:

- *Основна перевага метода Девіса полягає у жорсткому зв'язку між рівняннями нерозривності та руху. За рахунок цього збіжність другого порядку за ξ досягається вже за одну ітерацію по k . Якщо аналогічна схема реалізується без зв'язку між рівняннями нерозривності та руху, для досягнення другого порядку збіжності по ξ необхідно зробити щонайменше 19 ітерацій [17].*

2.5. Блочний метод Келлера та його модифікації

Блочний метод був запропонований Келлером у 1970 році. В подальшому метод модифікувався Себечі для розрахунку турбулентних примежових шарів [22]. Цей неявний метод другого порядку точності відрізняється від подібних йому методів у першу чергу тим, що кроки сітки із самого початку вважаються довільними. Друга суттєва відмінність методу в тому, що на першому кроці всі другі похідні в рівняннях замінюються першими; для чого вводяться додаткові невідомі (та рівняння).

Спочатку покажемо основні відмінності блочного методу від вже розглянутого вище методу Кранка–Нікольсона на прикладі рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.46)$$

Введемо заміну $v = \partial u / \partial x$, тоді замість рівняння (2.46) маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} v = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (2.47)$$

Використовуючи центральні різниці в (12.49), маємо

$$\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x_j} = v_{j-1/2}^n, \quad (2.48)$$

$$\frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t_n} = \frac{\alpha(v_j^{n-\frac{1}{2}} - v_{j-1}^{n-\frac{1}{2}})}{\Delta x_j}, \quad (2.49)$$

де, за визначенням, сіткові функції з індексом $1/2$ являються середніми значеннями.

Система (2.48)-(2.49) може бути записана у блочній тридіагональній формі із блоками 2×2 й її можна розв'язати, використовуючи блочний метод прогонки Томаса.

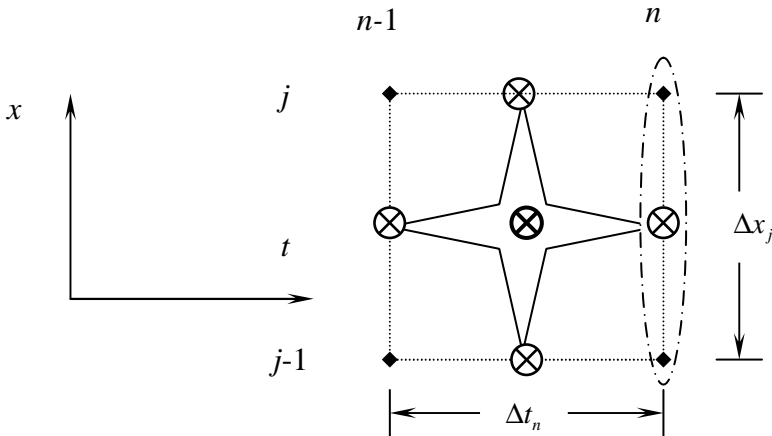


Рис.2.2. Різницева сітка для методу Келлера й шаблони для обчислення рівняння (2.49) (“зірка”) та $v_{j-1/2}^n$ (штрихпунктирний еліпс).

Однак можна зберегти шаблон методу Келлера й таким чином скомбінувати скінченно-різницеві аналоги рівнянь у двох сусідніх вузлах, щоб виключити одну із змінних та одержати систему лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею. В цьому й полягає модифікація методу Келлера, що запропонована Себечі (модифікований метод Келлера) [22].

Знову розглянемо застосування модифікованого методу Келлера на прикладі рівняння теплопровідності (2.46). Будемо шукати розв'язок на $(n+1)$ -му шарі у вигляді

$$\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{2}, \quad (2.50)$$

$$\frac{u_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t_{n+1}} = \alpha \frac{v_j^{n+\frac{1}{2}} - v_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_j} = \alpha \frac{v_j^n + v_j^{n+1} - v_{j-1}^n - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x_j}. \quad (2.51)$$

Перепишемо тепер рівняння (2.51) у вигляді

$$\frac{u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta t_{n+1}} = \alpha \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_j} + \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t_{n+1}} + \alpha \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x_j}. \quad (2.52)$$

Основна ідея модифікації полягає у тому, щоб визначити усі v через u . Величину v_{j-1}^{n+1} виключаємо із (2.52) простою підстановкою із (2.50). Аналогічно виключаємо v_{j-1}^n , записуючи (2.50) на n -му шарі. Остаточно маємо

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta t_{n+1}} &= 2\alpha \frac{v_j^{n+1}}{\Delta x_j} - 2\alpha \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x_j)^2} + \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t_{n+1}} + \\ &+ 2\alpha \frac{v_j^n}{\Delta x_j} - 2\alpha \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{(\Delta x_j)^2}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Для виключення v_j^{n+1} та v_j^n необхідно переписати рівняння (2.50) та (2.52), замінивши j на $j+1$, та додати їх. Остаточно маємо

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_j^{n+1}}{\Delta t_{n+1}} &= \frac{-2\alpha v_j^{n+1}}{\Delta x_{j+1}} + \frac{2\alpha(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})}{\Delta x_{j+1}^2} + \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{\Delta t_{n+1}} + \\ &+ \frac{-2\alpha v_j^n}{\Delta x_{j+1}} + 2\alpha \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x_{j+1}^2} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Тепер помноживши (2.53) на Δx_j , а (2.54) на Δx_{j+1} й додаючи одержані вирази, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді

$$B_j u_{j-1}^{n+1} + D_j u_j^{n+1} + A_j u_{j+1}^{n+1} = C_j, \quad (2.55)$$

де

$$\begin{aligned}
B_j &= \frac{\Delta x_j}{\Delta t_{n+1}} - \frac{2\alpha}{\Delta x_j}; A_j = \frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta t_{n+1}} - \frac{2\alpha}{\Delta x_{j+1}}; D_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta t_{n+1}} + \\
&+ \frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta t_{n+1}} + \frac{2\alpha}{\Delta x_j} + \frac{2\alpha}{\Delta x_{j+1}}; C_j = 2\alpha \frac{u_{j-1}^n - u_j^n}{\Delta x_j} + 2\alpha \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x_{j+1}} + \quad (2.56) \\
&+ (u_j^n + u_{j-1}^n) \frac{\Delta x_j}{\Delta t_{n+1}} + (u_{j+1}^n + u_j^n) \frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta t_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Система рівнянь (12.55) та формули (12.56) й представляють модифікований метод Келлера для рівняння теплопровідності (2.46).

2.6. Приклад розрахунку примежового шару

За даними літератури [1, 17, 22] при розв'язанні рівнянь примежового шару застосування модифікованого блочного методу потребує приблизно у 2 рази менше машинного часу, ніж при використанні стандартного методу Келлера.

Для стискуваних течій рідини загальний вигляд рівняння руху та енергії

$$\rho u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^m \bar{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S. \quad (2.57)$$

Для плоского випадку $m=0$, $r \equiv 1$. Тут $\bar{\lambda} = \lambda_T + \lambda$. Перепишемо рівняння нерозривності у вигляді

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \tilde{v})}{\partial y} = 0. \quad (2.58)$$

Нумерація вузлів сітки та позначення кроків відповідають рис. 2.3.

Позначимо

$$\bar{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = q, \quad D = S + \frac{\partial q}{\partial y} - \rho \tilde{v} \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (2.59)$$

Тоді рівняння (12.57) перепишеться у вигляді

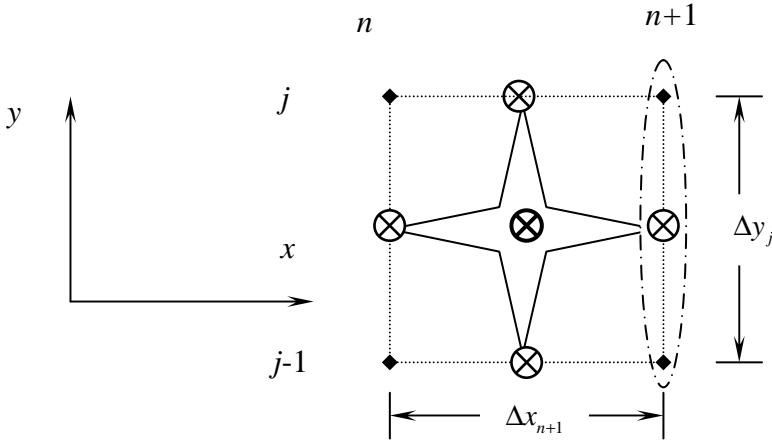


Рис.2.3. Різницєва сітка для модифікованого методу Келлера.

$$\rho u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = D. \quad (2.60)$$

Скінченно-різницєвий аналог рівняння (2.60) запишемо відносно центру “блока” (див. Рис.2.3):

$$\frac{(\rho u)_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + (\rho u)_{j-\frac{1}{2}}^n \cdot \frac{\Phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - \Phi_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_{n+1}}}{2} = S_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{(\rho \tilde{v})_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\Phi_j^{n+\frac{1}{2}} - \Phi_{j-1}^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta y_j} + \frac{q_j^{n+\frac{1}{2}} - q_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y_j}. \quad (2.61)$$

Тепер використовуючи визначення $q_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ із (12.59 а) у вигляді

$$\bar{\lambda}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_j^{n+\frac{1}{2}} - \Phi_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y_j} = \frac{q_j^{n+\frac{1}{2}} + q_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2}, \quad (2.62)$$

ми можемо виключити із (2.60) величину $q_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}$. Записуючи потім скінченно-різницєвий аналог рівняння (2.60) у точці $(n+1/2, j+1/2)$, можна виключити із нього $q_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}$, скориставшись

визначенням $q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ із (2.59a). Одержані два рівняння можна скомбінувати таким чином, щоб виключити $q_j^{n+\frac{1}{2}}$. Тепер після заміни величин, які визначені посередині між вузлами, середніми значеннями, одержимо вираз

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta y_j}{2\Delta x_{n+1}} \left[(\rho u)_j^{n+1} + (\rho u)_{j-1}^{n+1} + (\rho u)_j^n + (\rho u)_{j-1}^n \right] \times \\
& \times \left(\Phi_j^{n+1} + \Phi_{j-1}^{n+1} - \Phi_j^n - \Phi_{j-1}^n \right) + \\
& + \frac{\Delta y_{j+1}}{2\Delta x_{n+1}} \left[(\rho u)_{j+1}^{n+1} + (\rho u)_j^{n+1} + (\rho u)_{j+1}^n + (\rho u)_j^n \right] \times \\
& \times \left(\Phi_{j+1}^{n+1} + \Phi_j^{n+1} - \Phi_{j+1}^n - \Phi_j^n \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left[(\rho \tilde{v})_j^{n+1} + (\rho \tilde{v})_{j-1}^{n+1} + (\rho \tilde{v})_j^n + (\rho \tilde{v})_{j-1}^n \right] \times \\
& \times \left(\Phi_j^{n+1} - \Phi_{j-1}^{n+1} + \Phi_j^n - \Phi_{j-1}^n \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left[(\rho \tilde{v})_{j+1}^{n+1} + (\rho \tilde{v})_j^{n+1} + (\rho \tilde{v})_{j+1}^n + (\rho \tilde{v})_j^n \right] \times \\
& \times \left(\Phi_{j+1}^{n+1} - \Phi_j^{n+1} + \Phi_{j+1}^n - \Phi_j^n \right) = \\
& = \Delta y_j \left(S_j^{n+1} + S_{j-1}^{n+1} + S_j^n + S_{j-1}^n \right) + \tag{2.63} \\
& + \frac{(\bar{\lambda}_{j+1}^{n+1} + \bar{\lambda}_j^{n+1} + \bar{\lambda}_{j+1}^n + \bar{\lambda}_j^n) (\Phi_{j+1}^{n+1} - \Phi_j^{n+1} + \Phi_{j+1}^n - \Phi_j^n)}{\Delta y_{j+1}} - \\
& - \frac{(\bar{\lambda}_j^{n+1} + \bar{\lambda}_{j-1}^{n+1} + \bar{\lambda}_j^n + \bar{\lambda}_{j-1}^n) (\Phi_j^{n+1} - \Phi_{j-1}^{n+1} + \Phi_j^n - \Phi_{j-1}^n)}{\Delta y_j},
\end{aligned}$$

який можна привести до системи лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею відносно Φ . Подробиці вказаної процедури можна знайти у монографії [1]. Тут, як завжди для неявних схем, при використанні методу Келлера й модифікованого методу Келлера необхідно скористатися будь-яким із відомих нам методів подолання алгебраїчної нелінійності. Останнім часом найчастіше використовується

лінеаризація за Ньютоном. В цьому випадку скінченно-різницевий аналог рівняння нерозривності записують у вигляді

$$\frac{(\rho u)_j^{n+1} + (\rho u)_{j-1}^{n+1} - (\rho u)_j^n - (\rho u)_{j-1}^n}{2\Delta x_{n+1}} + \frac{(\rho \tilde{v})_j^{n+1} - (\rho \tilde{v})_{j-1}^{n+1} + (\rho \tilde{v})_j^n - (\rho \tilde{v})_{j-1}^n}{2\Delta y_j} = 0. \quad (2.64)$$

До рівняння руху входять величини $(\rho \tilde{v})_{j+1}^{n+1}, (\rho \tilde{v})_j^{n+1}, (\rho \tilde{v})_{j-1}^{n+1}$. Тепер для того, щоб використати модифіковану прогонку, необхідно записати рівняння (2.64) між шарами із номерами j та $j+1$, а потім виключити $(\rho \tilde{v})_{j+1}^{n+1}$ із рівняння руху.

Рівняння енергії звичайно розв'язується окремо, й всі параметри, які характеризують властивості газу (включаючи μ_T), у відповідності до бажання обчислювача або обмежень, що накладають вимоги до точності розв'язку, змінюються у процесі ітерацій.

Зауваження:

- *Для розв'язання рівнянь примежового шару використовують також явний метод змінних напрямів Барраката-Кларка [7], який за точністю та витратами машинного часу виявився близьким до неявних методів. Застосовуються й схеми більш високого порядку точності, аж до 4-го включно (метод Петухова [17]). Зауважимо, що точність результатів, які одержані за схемами низького порядку точності можна суттєво підвищити, якщо скористатися екстраполяцією за Річардсоном.*

2.7. Особливості розрахунків внутрішніх течій

Важливою властивістю стаціонарних внутрішніх течій у каналах при відсутності вдування або відсмоктування рідини через стінку є постійна витрата рідини через будь-який перетин,

що перпендикулярний осі каналу. Оскільки для параболічних рівнянь початковий розподіл швидкості й температури повинен бути заданий при постановці задачі, то й витрату можна розглядати як задану. При наявності вдування або відсмоктування нормальна складова швидкості на стінці для рівнянь примежового шару повинна бути задана як крайова умова, тому, виходячи з постановки задачі, й у цьому випадку можна теж легко знайти зміну витрати вздовж каналу. Надалі обмежимося випадком течії рідини в каналі з непроникними стінками, хоча всі методи розрахунку легко модифікуються й на випадок вдування або відсмоктування рідини через стінку каналу. Наявна додаткова інформація про величину сумарної витрати через канал дозволяє визначити величину градієнта тиску. Завдання витрати тут грає ту ж саму роль, що й просте співвідношення між $u_e(x)$ та dp/dx , яке у випадку зовнішніх течій впливає із стаціонарних рівнянь Ейлера: $dp/dx = -\rho u_e du_e/dx$. Саме внаслідок цього, повздовжній градієнт тиску при аналізі зовнішніх течій звичайно вважається заданим. Оскільки він або легко обчислюється із відомої швидкості $u_e(x)$, або є заздалегідь відомим. Для розрахунку внутрішніх течій використовуються лише рівняння тонкого (примежового) шару. Тому будь-яка додаткова інформація, що пов'язана із наявністю зовнішнього нев'язкого потоку відсутня, а умови на зовнішній межі визначаються геометрією каналу. Оскільки для внутрішніх течій у загальному випадку в'язкі ефекти можуть виявитися істотними у всій області течії, рівняння Ейлера для визначення градієнта тиску тут не можуть бути використані. Замість цього градієнт тиску знаходиться із умови збереження сумарної витрати рідини через поперечний переріз каналу. Отже, при розрахунках стаціонарних внутрішніх течій градієнт тиску не задається заздалегідь, як у випадку зовнішніх течій, а обчислюється у процесі розв'язання задачі. У цьому є основна відмінність між обчислювальними методами, які призначені для розрахунку внутрішніх й зовнішніх течій.

Для двовимірних внутрішніх течій рівняння енергії, стану й рівняння нерозривності для тонкого в'язкого шару не

відрізняються від відповідних рівнянь (II)-(IV) для зовнішніх течій. Рівняння руху дещо змінює свій вигляд

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^m (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (2.65)$$

Додатково маємо рівняння сумарної витрати газу через канал

$$\dot{m} = \int_A \rho u \, dA = \text{const}. \quad (2.66)$$

В останньому співвідношенні A — поперечний переріз каналу, що перпендикулярний до його осі.

Для опису турбулентності внутрішніх течій користуються тими ж гіпотезами, співвідношеннями й рівняннями, що й для зовнішніх течій.

Крайові умови на стінці залишаються тими ж, що й у випадку зовнішніх течій. Для течії в трубах або плоскопаралельних каналах завжди існує лінія або площина симетрії течії. Тому умови на зовнішній межі тонкого шару тут мають вигляд

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{r=0} = 0. \quad (2.67)$$

У випадку течії в круглій трубі члени рівнянь, що описують в'язкі напруги й теплові потоки, мають особливість при $r = 0$. Правильний вираз для цих членів можна знайти, якщо скористатися правилом Лопітала. В результаті маємо

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu r \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right). \quad (2.68)$$

При розрахунках внутрішніх течій скінченно-різницева апроксимація усіх членів рівнянь, крім члена з градієнтом тиску, проводиться так само, як і для зовнішніх течій. Градієнт тиску у внутрішніх течіях є невідомою величиною. Як уже відзначалося вище, він визначається із умови збереження сумарної витрати (2.66). Це можна зробити декількома способами.

Опишемо спочатку спосіб визначення градієнта тиску, який застосовують для явних різницевих схем. У цьому випадку скінченно-різницевий аналог рівняння руху можна представити у вигляді

$$u_j^{n+1} = Q_j^n + \frac{dp}{dx} R_j^n \quad (2.69)$$

де в Q_j^n й R_j^n входять лише відомі величини. Помножимо тепер рівняння (12.70) на густину $\widehat{\rho}_j^{n+1}$ та проінтегруємо отримані рівняння по поперечному перерізу каналу. Для цього можна скористатися, наприклад, або методом Симпсона, або правилом трапецій. В результаті одержимо

$$\int_A \widehat{\rho}_j^{n+1} u_j^{n+1} dA = \dot{m} = \int_A \widehat{\rho}_j^{n+1} Q_j^n dA + \frac{dp}{dx} \cdot \int_A \widehat{\rho}_j^{n+1} R_j^n dA. \quad (2.70)$$

Доки градієнт тиску не знайдений, густина $\widehat{\rho}_j^{n+1}$ на $(n+1)$ -му шарі невідома. Знак \cap саме й вказує на те, що значення густини тут є попереднім. Просте припущення $\widehat{\rho}_j^{n+1} = \rho_j^n$ дозволяє одержати дуже гарні результати. На практиці найчастіше використовують саме цей підхід. Альтернативним є визначення величини $\widehat{\rho}_j^{n+1}$ шляхом екстраполяції з другим порядком точності по вже відомих значеннях ρ_j^n й ρ_j^{n-1} . Оскільки величина \dot{m} визначена заданими початковими умовами, а під інтегралами в рівнянні (2.70) стоять лише відомі величини, то градієнт тиску dp / dx можна обчислити за формулою

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\dot{m} - \int_A \widehat{\rho}_j^{n+1} Q_j^n dA}{\int_A \widehat{\rho}_j^{n+1} R_j^n dA}. \quad (2.71)$$

Знайшовши градієнт тиску, можна розв'язати скінченно-різницеві аналоги рівнянь руху, нерозривності й енергії тими ж методами, які використовувалися й у випадку зовнішніх течій. Серед явних схем для розрахунку внутрішніх течій найчастіше використовується схема Дюффорта–Франкела, що описана в п.2.2 для рівнянь примежового шару.

За своєю постановкою задача розрахунку внутрішніх течій дуже схожа на зворотну задачу для примежового шару [1, 17]. Найбільш очевидним це стає при використанні неявних методів

розрахунку. У внутрішніх течіях необхідно визначити коректний градієнт тиску, який забезпечує поле швидкості, що задовольняє заданій витраті рідини через канал. Для визначення градієнта тиску при розрахунку внутрішніх течій неявними методами використовувалося декілька різних підходів. Опишемо деякі з них.

1. Метод січних. У кожному перетині каналу можна ітераційно змінювати градієнт тиску доти, поки витрата не стане дорівнювати заданій [17]. Приріст потоку маси в довільному перетині каналу згідно (12.67) можна представити у вигляді

$$\Delta \dot{m}^{n+1} = \rho \iint \Delta u_{jk}^{n+1} dy dz = 0, \quad (2.72)$$

де Δu_{jk}^{n+1} отримуємо із розв'язання рівняння руху (2.65). Однак для довільного p^{n+1} , а, отже, для довільного джерельного члену в рівнянні (2.65), умова (2.72) не буде виконуватися. Покладемо $f(p^{n+1}) = \Delta \dot{m}^{n+1}$ й побудуємо ітераційний алгоритм, в результаті роботи якого отримаємо таке значення $p^{n+1,m}$, що умова (2.72) виконується з потрібною точністю. Наприклад, користуючись методом січних [2, 4], маємо :

$$p^{n+1,m+1} = p^{n+1,m} - \frac{p^{n+1,m} - p^{n+1,0}}{f(p^{n+1,m}) - f(p^{n+1,0})} f(p^{n+1,m}). \quad (2.73)$$

Цей ітераційний процес звичайно збігається максимум за три ітерації. Для кожної ітерації необхідно попередньо визначити нові значення Δu_{jk}^{n+1} .

2. Корекція градієнта тиску із запізненням. Патанкар [40] відзначає, що проводити ітерації на кожному кроці за маршовою координатою не економічно. Він запропонував задавати в кожному перетині градієнт тиску ще до проведення розрахунку в цьому перетині. Помилка у витраті використовується для завдання градієнта тиску в наступному перетині. Такий підхід можна порівняти з процесом керування автомобілем, коректування курсу якого проводиться без повернення назад для поліпшення траєкторії руху. Хоча наявність здорового глузду в приведених міркуваннях заперечити не можна, такий підхід

часто приводить до занадто грубих, за сучасними мірками, результатам, тому користуватися їм не рекомендується.

3. Метод Ньютона. Запропонований раніше метод січних є спрощеним варіантом метода Ньютона й в більшості випадків задовольняє наші потреби. Але, порівнюючи із методом Ньютона, метод січних збігається на третину повільніше й вимагає втричі більше ресурсів комп'ютера. Тому розглянемо реалізацію “повного” метода Ньютона, що її запропоновано Рейсбі й Шнайдером [1]. Метод засновано на припущенні про сталість коефіцієнтів різницевих рівнянь, тобто ці коефіцієнти не повинні мінятися при підборі градієнта тиску, що задовольняє умові збереження витрати. Якщо ж для початкового градієнта тиску dp/dx вже отримано розв'язок різницевих рівнянь, то при заморожених коефіцієнтах залежність швидкості від градієнта тиску – лінійна. А, отже, одна корекція за методом Ньютона дозволяє одержати точне значення градієнта тиску.

Проілюструємо вищесказане. Нехай є деяке початкове наближення градієнта тиску $dp/dx = (dp/dx)_0$. Введемо позначення $S = dp/dx$ й обчислимо попередній розподіл швидкості $(u_j^{n+1})_0$ й витрати \dot{m}_0^{n+1} відповідний початковому градієнту тиску S_0 . Оскільки рівняння руху з замороженими коефіцієнтами лінійне, то при застосуванні методу Ньютона точне значення швидкості в кожній точці визначається із співвідношення

$$u_j^{n+1} = (u_j^{n+1})_0 + \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial S} \cdot \Delta S, \quad (2.74)$$

де ΔS — зміна градієнта тиску, необхідна для задоволення умови збереження витрати. Позначимо $u_{p,j}^{n+1} = \partial u_j^{n+1} / \partial S$. Диференціюючи різницеві рівняння по градієнту тиску S , одержимо систему різницевих рівнянь відносно $u_{p,j}^{n+1}$ з тридіагональною матрицею, яка співпадає з матрицею вихідної системи неявних різницевих рівнянь відносно u_j^{n+1} . З цієї системи рівнянь невідомі $u_{p,j}^{n+1}$ визначаються методом Томаса.

Зауваження :

- Крайові умови для невідомих $u_{p,j}^{n+1}$ повинні бути погоджені з крайовими умовами для швидкості u_j^{n+1} . На тих зовнішніх межах, де швидкість задана, ставиться умова $u_{p,j}^{n+1} = 0$, тоді як на межах із заданим градієнтом швидкості задається умова $du_{p,j}^{n+1}/dn = 0$ (n — нормаль до межі).

Знаючи $u_{p,j}^{n+1}$, можна знайти ΔS , виходячи лише з того, що для виконання умови збереження витрати, швидкість у кожній точці треба підправити на величину $u_{p,j}^{n+1}\Delta S$. Отже, ми можемо записати співвідношення

$$\dot{m} - \dot{m}_0 = \Delta S \int_A \rho u_{p,j}^{n+1} dA. \quad (2.75)$$

Тут інтеграл повинен обчислюватися за числовими алгоритмами. У рівнянні (2.75) \dot{m} — значення витрати, що обумовлена заданими початковими умовами. Потрібне нам значення ΔS знаходиться із рівняння (2.75). Після цього точні значення швидкостей u_j^{n+1} можна обчислити, використовуючи співвідношення (2.74), а невідомі v_j^{n+1} визначити з рівняння нерозривності. Описаний підхід вимагає приблизно такого ж обсягу обчислень, як дві ітерації при використанні методу січних.

4. Градієнт тиску розглядається як додаткова невідома. У всіх описаних вище підходах при розв'язанні рівняння для швидкості градієнт тиску вважається відомою величиною. Тому різницеве рівняння руху можна було розв'язувати звичайною прогонкою за алгоритмом Томаса [7]. Перейдемо до різницевих схем, у яких градієнт тиску входить в систему алгебраїчних рівнянь як додаткова невідома. У цьому випадку матриця коефіцієнтів рівняння вже не є тридіагональною. У ранніх схемах такого типу для розв'язання системи рівнянь використовувався звичайний метод виключення Гаусса. Згодом

з цією метою стали застосовувати більш ефективні методи модифікованої та блокової прогонки [1, 7, 17].

Припустимо, що течія симетрична щодо середньої лінії каналу, яка розташована при $y = H/2$, де y — координата, що відлічується від стінки каналу, а H — його висота. Для опису течії скористаємося рівнянням руху в наближенні Флюгге–Лотца¹:

$$C|u| \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (2.76)$$

Тут додатково введена функція течії

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.77)$$

й $\bar{\mu} = \mu + \mu_T$. Крайові умови на стінці й на зовнішній межі мають вигляд

$$u(x, 0) = \psi(x, 0) = 0, \quad (2.78)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H/2} = 0, \quad \psi(x, \frac{H}{2}) = \frac{\dot{m}}{2\rho}, \quad (2.79)$$

де \dot{m} — витрата рідини на одиницю ширини каналу (у двовимірному випадку). Скінченно-різницеві аналоги вихідних рівнянь після лінеаризації мають вигляд

$$\Psi_{j-1}^{n+1} - \Psi_j^{n+1} + g_j (u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1}) = 0, \quad (2.80)$$

$$b_j u_{j-1}^{n+1} + d_j u_j^{n+1} + a_j u_{j+1}^{n+1} + e_j \Psi_j^{n+1} = h_j \chi^{n+1} + c_j. \quad (2.81)$$

Тут

$$a_j = -\frac{\widehat{\Psi}_j^{n+1} - \Psi_j^n}{\Delta x (\Delta y_{j+1} + \Delta y_j)} - \frac{2\bar{\mu}_{j+1/2}}{\rho \Delta y_{j+1} (\Delta y_{j+1} + \Delta y_j)},$$

¹ В наближенні Флюгге–Лотца конвективний член має вигляд $C|u| \partial u / \partial x$, де коефіцієнт C або рівний нулю, якщо в примезовому шарі має місце зворотна течія, або рівний одиниці в протилежному випадку. У наближенні Ф–Л можуть бути з успіхом розраховані внутрішні течії з відривними зонами, якщо зворотна течія складає не більше 10 % від основної.

$$b_j = \frac{\widehat{\psi}_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta x (\Delta y_{j+1} + \Delta y_j)} - \frac{2\bar{\mu}_{j-1/2}}{\rho \Delta y_j (\Delta y_{j+1} + \Delta y_j)},$$

$$c_j = \frac{C(\widehat{u}_j^{n+1})^2}{\Delta x} - \frac{\widehat{\psi}_j^{n+1} (\widehat{u}_{j+1}^{n+1} - \widehat{u}_{j-1}^{n+1})}{\Delta x (\Delta y_{j+1} + \Delta y_j)},$$

$$d_j = \frac{C(2\widehat{u}_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta x} + \frac{2}{\rho (\Delta y_{j+1} + \Delta y_j)} \cdot \left(\frac{\bar{\mu}_{j+1/2}}{\Delta y_{j+1}} + \frac{\bar{\mu}_{j-1/2}}{\Delta y_j} \right),$$

$$e_j = -\frac{\widehat{u}_{j+1}^{n+1} - \widehat{u}_{j-1}^{n+1}}{\Delta x (\Delta y_{j+1} + \Delta y_j)}, \quad h_j = 1, \quad g_j = \frac{\Delta y_j}{2},$$

де $\chi^{n+1} = (1 / \rho) dp / dx$ — безрозмірний градієнт тиску.

Зауваження :

- На кожному кроці за маршовою координатою розв'язується система $2 NY-2$ рівнянь з $2 NY-2$ невідомими, де NY – число точок впоперек тонкого шару, включаючи точки на зовнішній межі.
- Система (2.80)-(2.81) подібна розглянутій вище (п.2.4.2) системі алгебраїчних рівнянь для метода Девіса, яка розв'язувалася із використанням модифікованої прогонки¹. Але матриця цієї системи блочно-тридіагональна з блоками 2×2 , в той час, як матриця для метода Девіса — блочно-дводіагональна. Тому перед використанням модифікованої прогонки блоки під діагоналю потрібно попередньо виключити.

Прогоночні коефіцієнти визначаються із співвідношень :

$$A'_j = -a_j / R_1, \quad B'_j = A' R_2,$$

$$C'_j = \{c_j - b_j C'_{j-1} - e_j [g_j C'_{j-1} + E'_{j-1}]\} / R_1,$$

¹ Вказана система може бути розв'язана також із використанням метода блочної прогонки [1, 7].

$$H'_j = \left\{ h_j - b_j H'_{j-1} - e_j \left[g_j H'_{j-1} + D'_{j-1} \right] \right\} / R_1, \quad (2.82)$$

$$D'_j = g_j H'_{j-1} + D'_{j-1} + H'_j R_2,$$

$$E'_j = g_j C'_{j-1} + E'_{j-1} + C'_j R_2,$$

де

$$R_1 = d_j + (b_j + e_j g_j) A'_{j-1} + e_j (B'_j + g_j),$$

$$R_2 = g_j (1 + A'_{j-1}) + B'_{j-1}.$$

Оскільки на внутрішній межі $u_1^{n+1} = \psi_1^{n+1} = 0$, отже, $A'_1 = 0$, $B'_1 = C'_1 = D'_1 = E'_1 = H'_1 = 0$. Інші прогоночні коефіцієнти можна обчислити послідовно, просуваючись від $j=2$ до $j=NY$. Невідомі визначаються зворотною прогоною від $j=NY-1$ до $j=2$ із співвідношень :

$$u_j^{n+1} = A'_j u_{j+1}^{n+1} + H'_j \chi^{n+1} + C'_j \quad (2.83)$$

$$\psi_j^{n+1} = B'_j u_{j+1}^{n+1} + D'_j \chi^{n+1} + E'_j. \quad (2.84)$$

Зворотна прогонка може бути виконана, якщо відомі значення u_{NY}^{n+1} й χ^{n+1} . Ці величини визначаються із умов на зовнішній межі. Для апроксимації $\partial u / \partial y \big|_{H/2}$ з другим порядком мализни скористаємося однобічними різницями. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{NJ}^{n+1} \approx \frac{u_{NY}^{n+1}}{2} \left(\frac{4}{\Delta y_{NY}} - \frac{1}{\Delta y_{NY-1}} \right) - \frac{2u_{NY-1}^{n+1}}{\Delta y_{NY}} + \frac{u_{NY-2}^{n+1}}{2\Delta y_{NY-1}} \quad (2.85)$$

де

$$\Delta y_{NY} = y_{NY} - y_{NY-1}, \quad \Delta y_{NY-1} = y_{NY-1} - y_{NY-2}.$$

Тоді умови на зовнішній ці (2.79) запишуться у вигляді

$$u_{NY}^{n+1} = \varphi_1 u_{NY-1}^{n+1} - \varphi_2 u_{NY-2}^{n+1}, \quad (2.86)$$

$$\psi_{NY}^{n+1} = \dot{m}/2\rho, \quad (2.87)$$

де

$$\varphi_1 = 4/(4 - \kappa), \quad \varphi_2 = \kappa/(4 - \kappa), \quad \kappa = \Delta y_{NY} / \Delta y_{NY-1}.$$

Рівняння (2.86) й (2.87) розв'язуються разом із рівняннями (2.80), (2.83) та (2.84), що записані для шару $j = NY-1$:

$$u_{NY-1}^{n+1} = A'_{NY-1} u_{NY}^{n+1} + H'_{NY-1} \chi^{n+1} + C'_{NY-1} \quad (2.88)$$

$$\psi_{NY-1}^{n+1} = B'_{NY-1} u_{NY}^{n+1} + D'_{NY-1} \chi^{n+1} + E'_{NY-1}. \quad (2.89)$$

Однак нам потрібно одержати ще одне додаткове співвідношення, бо для визначення п'яти невідомих $u_{NY}^{n+1}, u_{NY-1}^{n+1}, u_{NY-2}^{n+1}, \psi_{NY-1}^{n+1}, \chi^{n+1}$, у нас є лише чотири незалежних співвідношення (2.86), (2.87), (2.88) й (2.89). Додаткове співвідношення можна знайти, якщо записати рівняння (2.83) для невідомої u_{NY-2}^{n+1} :

$$u_{NY-2}^{n+1} = A'_{NY-2} u_{NY-1}^{n+1} + H'_{NY-2} \chi^{n+1} + C'_{NY-2}. \quad (2.90)$$

З отриманої системи рівнянь визначають χ^{n+1} й u_{NY}^{n+1} :

$$\chi^{n+1} = \frac{\alpha_1 \alpha_6 - \alpha_3 \alpha_4}{\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_5}, \quad u_{NY}^{n+1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \chi^{n+1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \quad (2.91)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - A'_{NY-1} (\varphi_1 - \varphi_2 A'_{NY-2}), \\ \alpha_2 &= (\varphi_1 - \varphi_2 A'_{NY-2}) H'_{NY-1} - \varphi_2 H'_{NY-2}, \\ \alpha_3 &= (\varphi_1 - \varphi_2 A'_{NY-2}) C'_{NY-1} - \varphi_2 C'_{NY-2}, \\ \alpha_4 &= 1 + \frac{2}{\Delta y_{NY}} B'_{NY-1} + A'_{NY-1}, \\ \alpha_5 &= - \left(H'_{NY-1} + \frac{2}{\Delta y_{NY}} D'_{NY-1} \right), \\ \alpha_6 &= \frac{\dot{m}}{\rho \Delta y_{NY}} - \frac{2}{\Delta y_{NY}} E'_{NY-1} - C'_{NY-1}. \end{aligned}$$

Тепер, скориставшись співвідношеннями (2.83)-(2.84) й рухаючись від зовнішньої межі до стінки, можна провести зворотну підстановку й обчислити u_j^{n+1} й ψ_j^{n+1} .

Оскільки використовується лінеаризація за Ньютоном, задачу потрібно розв'язувати ітераційно. На кожному кроці за маршовою координатою ітераційний процес продовжується

доти, поки різниця між невідомими u й ψ на двох послідовних ітераціях не стане менше від малої заданої величини ε . На кожному новому кроці за маршовою координатою ітерації починаються за умови $\hat{u}_j^{n+1} = u_j^n$, $\hat{\psi}_j^{n+1} = \psi_j^n$. За звичай достатньо 2÷3 ітерацій.

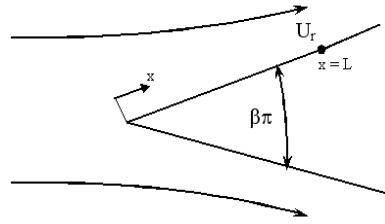
Одним із додаткових плюсів розглянутого методу є можливість розрахунку течії в каналі з раптовим симетричним розширенням, коли вниз за потоком від місця розширення виникає область зворотно-рециркуляційної течії. Звичайно такі течії розраховуються із використанням повних рівнянь Нав'є–Стокса [1, 13, 17]. Але у випадку, коли зворотна течія складає не більше, ніж 10 % від основної й число Рейнольдса, розраховане за висотою приступки більше 20, результати із використанням рівнянь тонкого шару в наближенні Флюгге–Лотца добре співпадають з результатами для повних рівнянь Нав'є–Стокса [1].

2.8. Деякі загальні зауваження

- I. У роботі обчислювача, як і в іншій практичній діяльності, важливо “набити руку”.
- II. При розрахунках двовимірного примежового шару за запропонованими вище скінченно-різницевиими схемами за порядком складності їх програмної реалізації можна вказати таку черговість :
 1. Схема Дюффорта–Франкела.
 2. Повністю неявна схема. ($\cong O(\Delta x)$)
 3. Неявна схема Кранка–Нікольсона. ($\cong O(\Delta x^2)$)
 4. Неявна схема Девіса (при одночасному розв’язанні рівнянь нерозривності та руху).
 5. Модифікована блочна схема Себечі.
 6. Блочна схема Келлера.
 7. Інші схеми.

Задачі.

1. Побудувати програму для розв'язання системи рівнянь нестисливого прилежового шару (3-1), що утворився на клині (Рис. 3-1.).



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (3-1) \quad \text{Рис. 3-1.}$$

Введено нові безрозмірні змінні:

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L} \mathbf{Re}^{1/2}, \quad u = \frac{\bar{u}}{U_r}, \quad v = \frac{\bar{v}}{U_r} \mathbf{Re}^{1/2}, \quad (3-2)$$

де \mathbf{Re} – число Рейнольдса; L й U_r – характерні довжина й швидкість, відповідно. Для даної задачі U_r відповідає значенню u_e при $x=L$. При обтіканні клину безрозмірна швидкість на зовнішній межі

$$u_e = x^{\beta/(2-\beta)}, \quad (3-3)$$

Отримати розв'язок для $\beta = 0.5$ на сітці 21×19 за узагальненою тришаровою схемою, порівняти результат з точним розв'язком Фолкнер–Скен. Порівняти розрахункове значення коефіцієнта поверхневого тертя із його “точним” значенням за формулою Фолкнер–Скен

$$c_f = 1.5151 (\mathbf{Re} x u_e)^{-1/2} \quad \text{при } \beta = 0.5 \quad (3-4)$$

2. Розв'язати задачу 1. для випадку плоскої пластинки $\beta = 0$. Порівняти розрахункове значення коефіцієнта поверхневого тертя із його “точним” значенням, що обчислене за рядом Блазіуса

$$c_f = 0.664 (\mathbf{Re} x)^{-1/2} \quad \text{при } \beta = 0. \quad (3-6)$$

3. Модифікувати запропонований в п.2 алгоритм таким чином, щоб за ним можна було б отримати розв'язок у випадку

одночасного розв'язання рівняння руху й рівняння нерозривності за схемою Девіса. Порівняйте одержаний розв'язок з розв'язком із п.2.

4. Розв'язати задачу з п.1 із використанням явної схеми Дюффорта–Франкела.
5. Розв'язати задачу з п.2 із використанням модифікованої блочної схеми Келлера.
6. Розв'язати задачу з п.1 із використанням чисто неявної схеми.
7. Розв'язати задачу з п.2 із використанням блочної схеми Келлера.
8. Двовимірний нестисливий примежовий шар описується системою рівнянь

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0, \\ \text{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + v_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -P_{cx} + v u_y, \end{cases} \quad (3-5)$$

де v_T – турбулентна в'язкість. Перетворити ці рівняння за допомогою узагальненого перетворення (див. розділ 4) й визначити, чи можна відкинути у наближенні примежового шару отримані додаткові члени у випадку, коли примежовий шар розвивається вздовж поверхні $\eta = \text{const}$? Розв'язати отриману крайову задачу для випадку повздовжнього обтікання видовженого еліпсоїда обертання із використанням явної схеми Дюффорта–Франкела.

9. Розв'язати задачу з п.8 із використанням схеми Кранка–Нікольсона.
10. Розв'язати задачу з п.8 із використанням схеми Девіса.

Розділ 3

ТРИВИМІРНІ ПРИМЕЖОВІ ШАРИ

Більшість течій, які ми зустрічаємо в інженерних застосуваннях, суттєво тривимірні. У цьому розділі ми розглянемо скінченно-різницеві методи розрахунку таких тривимірних течій, які можна вважати “тонкими”. Тобто вони мають великий градієнт швидкості лише в одному напрямку, як правило нормальному до обтічної поверхні. Подібні течії досить часто зустрічаються на практиці. І, як правило, це зовнішні течії. Як приклад можна навести течію, що виникає у в’язкій області потоку на аеродинамічних тілах довільної форми. В той же час, рівняння тривимірного примежового шару не придатні для розрахунку течії поблизу лінії перетину двох поверхонь (наприклад, поблизу лінії перетину крила із фюзеляжем або у двогранному куті), бо у цьому випадку однаково важливу роль грають градієнти в’язких напруг по кожному із двох напрямків, що нормальні до напрямку потоку. Для розрахунку течії у двогранному куті користуються вкороченою (або параболізованою) формою рівнянь Нав’є-Стокса [1, 17].

У цій главі не будуть докладно розглянуті усі питання теорії тривимірних примежових шарів. Наша мета – стратегія числового розв’язання системи рівнянь тривимірного примежового шару. При цьому основна увага буде приділена тим новим моментам, які пов’язані саме із тривимірним характером задачі.

Підчас розрахунків тривимірних примежових шарів виникають деякі додаткові труднощі. По-перше, хоча рівняння, що описують такі течії, переважно параболічні, наявність двох координатних напрямків (поверхня, на якій розвивається примежовий шар), вводить до задачі “гіперболічність”. По-друге, оскільки тривимірні примежові шари утворюються, як правило, на викривлених поверхнях, необхідно вводити систему координат, що пов’язана із цією поверхнею.

Будемо надалі розглядати тільки стаціонарні тривимірні примежові шари. Стаціонарна нестислива ламінарна течія у

тривимірному примезовому шарі на пластині описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial z} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де x та z – декартові координати, локально паралельні тривимірній поверхні, а y – нормальна координата. На поверхні тіла при $y = 0$ необхідно поставити крайові умови прилипання: $u = v = w = 0$. Відомий тиск або відповідні йому швидкості, що визначаються із рівняння Бернуллі $H = 0.5 q^2 + p/\rho + g z = const$, забезпечують крайові умови на зовнішній межі примезового шару.

Початкові умови можуть знадобитися або в одній точці, як при обтіканні тонкого тіла обертання, або на лінії гальмування, що має місце при обтіканні крила скінченного розмаху.

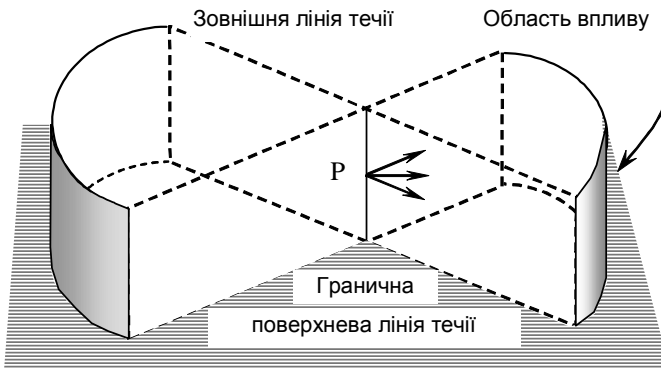


Рис.3.1. Області залежності та впливу.

З системи рівнянь (3.1) випливає, що вздовж напрямків x та z існує лише конвективний перенос; а вздовж напрямку y – конвекція та дифузія.

Оскільки при заданих (x, z) збурення в напрямку y поширюються по всій області, необхідно визначити області залежності й впливу (Рис. 3.1). Збурення в деякій точці P всередині примежового шару будуть впливати на всю область, що розташована вниз за потоком й обмежена площинами, які проходять через нормаль до тіла в точці P . Причому одна площина проходить через лінію течії на твердій поверхні, а інша – через проекцію лінії течії, що розташована на зовнішній межі примежового шару.

Гіперболічність задачі в площині (x, z) істотно обмежує область, де за заданими початковими даними може бути знайдено розв'язок. Якщо початкові дані $u_0(y)$ та $w_0(y)$ визначено на поверхні S_1 , що перпендикулярна до стінки (Рис. 3.2), розв'язок униз за потоком можна отримати лише в обмеженій квазіхарактеристиками S_2 й S_3 області (а також твердою стінкою й зовнішньою межею примежового шару).

Квазіхарактеристичні напрямки S_2 та S_3 визначаються або напрямком ліній течії на стінці, або напрямком ліній течії на зовнішній межі шару. Спроби визначити розв'язок зліва від S_2 або справа від S_3 (якщо дивитися проти потоку) порушують принцип впливу Ретца [55], оскільки локальний розв'язок в цих областях визначається даними, що лежать поза площиною S_1 .

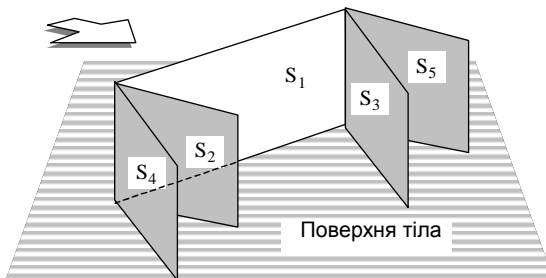


Рис.3.2. Квазіхарактеристики.

Якщо визначити додаткові крайові умови, наприклад, на поверхнях S_4 або S_5 , обумовлений початковими й крайовими умовами розв'язок можна одержати у будь-якій точці в області вниз за потоком.

У подальшому при порівнянні різноманітних схем будемо вважати, що вісь Ox приблизно збігається із напрямком нев'язкої течії, а Oz спрямована впоперек потоку, наприклад, у напрямку розмаху крила. Якщо x розглядати як початковий маршовий напрямок, швидкість u вважається позитивною, а w може мати як позитивну, так і негативну величину.

З обчислювальної точки зору гіперболічність задачі особливо істотна при побудові явних маршових алгоритмів у напрямку z . Як й для двовимірних примезових шарів, для дискретизації в напрямку u існують практично універсальні неявні схеми.

3.1. Схеми Кранка–Никольсона та зигзаг

Розглянемо узагальнену на тривимірний випадок схему Кранка–Никольсона (Рис. 3.4а). З аналізу областей впливу й залежності випливає, що її можна застосовувати для розрахунку течій лише тоді, коли швидкість вторинної течії не змінює знак. Розташуємо центр різницевого шаблону в точці $(n+1/2, j, k-1/2)$. На рис.3.3 різницевий шаблон зображено таким чином, як його видно зверху потоку (тобто показані лише точки у площині Oxz). Заштрихована область приблизно окреслює максимальний розмір області залежності, що допускається цим шаблоном. Світлим кружком позначена точка, де значення параметрів невідомі, а хрестиком – положення центру шаблону. Якщо швидкість вторинної течії від'ємна, умови, що накладаються принципом впливу, не можуть бути виконані, бо при переході до стовпчика $(n+1, k)$, цей шаблон не допускає передачі збурень у напрямку, що протилежний напрямку осі Oz . З іншого боку, доти $w \geq 0$, принцип впливу не накладає ніяких обмежень на крок Δx , бо при $u > 0$, $w \geq 0$ будь-яка лінія течії лежить всередині шаблону.

Було запропоновано декілька варіантів схеми Кранка–Нікольсона. Найчастіше дифузійний член рівняння $\partial/\partial y(a \partial \phi/\partial y)$ апроксимується за тими ж формулами, що й у двовимірному випадку, але при цьому додатково проводиться усереднення між стовпчиками k та $k-1$ (Рис. 3.4а). Члени рівнянь, що містять похідні $\partial \phi/\partial x$ й $\partial \phi/\partial y$, також апроксимуються за формулами, що використовувалися для двовимірної схеми Кранка–Нікольсона [7], але з додатковим осередненням між стовпчиками k та $k-1$. Похідні у трансверсальному напрямку апроксимуються у такий спосіб :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{j,k-1/2}^{n+1/2} \approx \frac{\phi_{j,k}^{n+1} + \phi_{j,k}^n - \phi_{j,k-1}^{n+1} - \phi_{j,k-1}^n}{2\Delta z}.$$

Якщо обтікається криволінійна поверхня, то параметри кривини відмінні від нуля й необхідно знайти апроксимаційні співвідношення для цих членів рівняння.

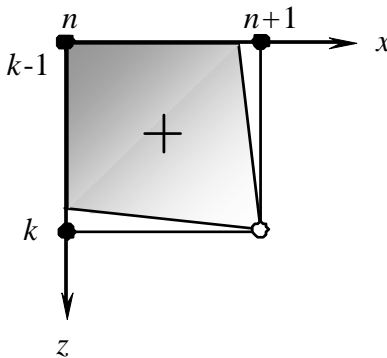


Рис.3.3. Проекція шаблону Кранка–Нікольсона на площину Oxz .

Аналогічні члени з'являються у рівняннях примежового шару й у тому випадку, коли неперетворені рівняння записуються в ортогональній криволінійній системі координат. Ці члени рівнянь не містять похідних від шуканих невідомих й називаються джерельними членами. Скінченно-різницеві аналоги джерельних членів рівняння та конвективних членів необхідно лінеаризувати. Для цього можна скористатися одним

із підходів, який було описано у попередньому розділі: методом Ньютона, екстраполяцією, ітераційною заміною коефіцієнтів або методом запізнілих коефіцієнтів. Хоча останній метод застосовується в тривимірному випадку не часто. Джерельні члени записуються у центрі шаблону в точці $(n+1/2, j, k-1/2)$. Для цього проводиться осереднення в сусідніх вузлах різничевої сітки.

Отже, таким чином, кожне рівняння руху замінюється системою лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих в усіх вузлах стовпчика $(n+1, k)$. Цю систему рівнянь

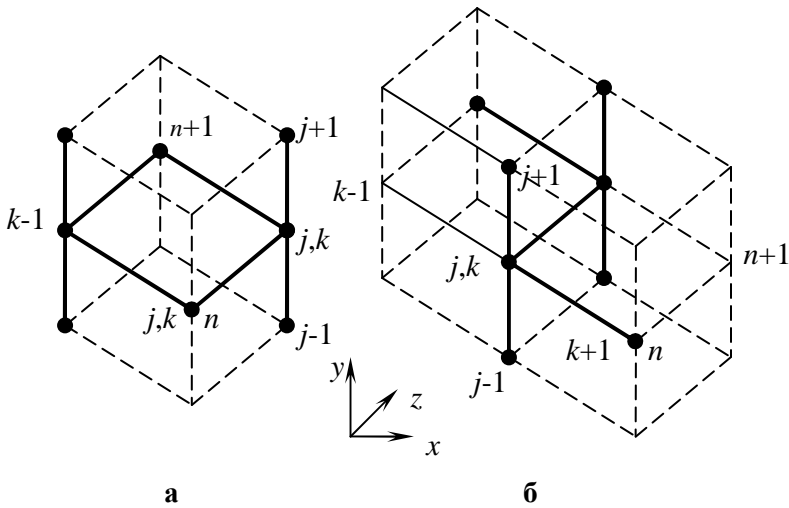


Рис.3.4. Схеми тривимірних алгоритмів: а – Кранк–Нікольсона, б – зигзаг Краузе.

можна розв'язати прогонкою за алгоритмом Томаса [7], бо її матриця коефіцієнтів тридіагональна.

При розрахунках тривимірного примежового шару для визначення невідомих $V_{j,k}^{n+1}$ рівняння нерозривності найчастіше розв'язується вже після того, як знайдено компоненти швидкості із рівнянь руху. Для побудови скінченно-різничевого аналога рівняння нерозривності звичайно вибирають

контрольний об'єм із центром у точці $(n+1/2, j-1/2, k-1/2)$. Середні значення компонент швидкості в центрі кожної грані контрольного об'єму звичайно знаходять як середнє цих величин у чотирьох вершинах цієї грані. При розв'язанні рівнянь руху необхідно знати значення V лише у точках $(n+1/2, j, k-1/2)$. Об'єм обчислень вдається скоротити, якщо покласти значення V , яке визначене із рівняння нерозривності, рівним значенню у центрі проєкції контрольного об'єму на площину Oxz .

Зауваження:

- У пам'яті комп'ютера значенням V , що обчислені у точках $(n+1/2, j, k-1/2)$ фізичного простору, звичайно присвоюють індекс $(n+1, j, k)$.
- З умови Куранта–Фрідрікса–Леві (КФЛ) слідує, що швидкість w повинна бути позитивна й крок Δx обмежений умовою $|w\Delta x / u \Delta z| \leq 1$.
- Схема Кранка–Нікольсона тут формально може мати другий порядок точності (похибка апроксимації $\approx O((\Delta x)^2, (\Delta z)^2)$). Точність цієї схеми суттєво знижується внаслідок лінеаризації рівнянь й застосування нерівномірних сіток.

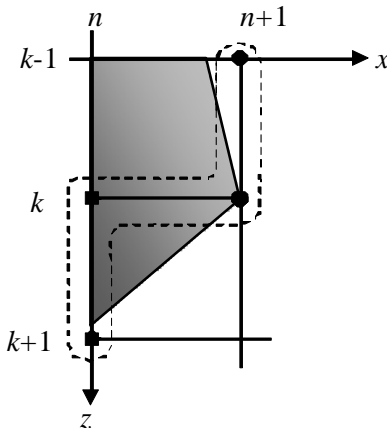


Рис.3.5. Проекція схеми зигзаг Краузе на площину Oxz .

Схема зигзаг Краузе [33,34] звичайно застосовується при розрахунках течій, для яких поперечна складова швидкості змінює знак (див. рис. 3.4б). У цьому випадку використовується різницевий шаблон, центр якого розташовано у точці $(n+1/2, j, k)$. Проекція шаблону на площину Oxz показана на Рис. 3.5. Як і раніше, заштрихована область приблизно окреслює область залежності такого шаблону. Відзначимо, що цей шаблон дозволяє врахувати інформацію про течію в обох напрямках осі Oz від точки $(n+1, j, k)$. Отже, використовуючи шаблон зигзаг, можна розраховувати потоки зі спрямованою у довільну сторону вторинною течією, якщо тільки напрямок потоку залишається в межах зони залежності шаблону. Так само, як у випадку схеми Кранка–Нікольсона, при $u > 0$, $w \geq 0$ обмеження на кроки сітки відсутні. Проте такі обмеження з'являються тоді, коли вторинна течія спрямована у бік, протилежний напрямку осі Oz . Так при $w \geq 0$, обмежень на Δx немає. Якщо ж $w < 0$, то для стійкості схеми крок Δx повинен задовольняти умові КФЛ:

$$|w\Delta x/u\Delta z| \leq 1.$$

Зауваження:

- *Схеми Кранка–Нікольсона та зигзаг Краузе можна вважати напівневяжними, оскільки вони явні у напрямку, що перпендикулярний потоку. Обмеження КФЛ на Δx можна уникнути, якщо у напрямку, що перпендикулярний потоку, використати чисто невяну схему.*
- *Допустимий напрямок потоку можна змінити шляхом зміни відношення кроків сітки $\Delta z/\Delta x$.*
- *Схема зигзаг простіше за схему Кранка–Нікольсона. Це пояснюється побудовою скінченно-різницевих аналогів рівняння, коли усереднення здійснюється лише між шарами n та $n+1$, тоді як між двома шарами по k воно не здійснюється.*

При використанні схеми зигзаг скінченно-різницеві аналоги членів рівнянь типу $\partial/\partial u(ad\phi/\partial u)$ та $\partial\phi/\partial x$ будуються аналогічно двовимірній схемі Кранка–Нікольсона. Похідні в поперечному напрямку, що входять до рівняння руху,

апроксимуються за значеннями невідомих у вузлах, що обведені на рис. 3.5 штриховими лініями. При постійному кроці Δz відповідний скінченно-різницевий аналог похідної має вигляд

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{j,k}^{n+1/2} \approx \left(\varphi_{j,k+1}^n - \varphi_{j,k}^n + \varphi_{j,k}^{n+1} - \varphi_{j,k-1}^{n+1} \right) / 2\Delta z. \quad (3.2)$$

Якщо при послідовному розрахунку у напрямку осі Oz ми переходимо від стовпчика із номером $(n+1, k-1)$ до стовпчика із номером $(n+1, k)$, то єдиною невідомою у співвідношенні (13.2) є $\varphi_{j,k}^{n+1}$. Лінеаризація скінченно-різницевого рівняння здійснюється аналогічно лінеаризації схеми Кранка–Нікольсона. Отримані тут рівняння мають більш компактний вигляд, бо усереднення здійснюється по двох точках, а не по чотирьох. Схема зигзаг також приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею, яка розв'язується прогонкою.

Скінченно-різницевий аналог рівняння нерозривності можна побудувати шляхом розглядання контрольного об'єму із центром у точці $(n+1/2, j-1/2, k)$. Середнє значення u на грані контрольного об'єму, що паралельна площині Oyz , знаходять за допомогою осереднення лише в напрямку осі Oy , бо центр грані збігається із лінією сітки, де k постійне. Середнє значення w на грані, що паралельна площині Oxy , визначається шляхом осереднення за схемою зигзаг (або по діагоналі). Проілюструємо процедуру осереднення на прикладі члена $\partial (aw) / \partial z$, що входить у рівняння нерозривності схеми Краузе. Якщо крок сітки Δz постійний, маємо

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial (aw)}{\partial z} \right|_{j-1/2,k}^{n+1/2} &\approx \left[(aw)_{j,k+1}^n + (aw)_{j-1,k+1}^n + (aw)_{j,k}^{n+1} + (aw)_{j-1,k}^{n+1} \right] / 4\Delta z - \\ &- \left[(aw)_{j,k}^n + (aw)_{j-1,k}^n + (aw)_{j,k-1}^{n+1} + (aw)_{j-1,k-1}^{n+1} \right] / 4\Delta z. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При використанні схеми зигзаг величина V визначається із рівняння нерозривності в центрі верхньої грані контрольного об'єму (ця грань паралельна площині Oxz), тобто у точці $(n+1/2, j, k)$. Але у пам'яті комп'ютера цю величину звичайно розташовують в елементі масиву із номером $(n+1, j, k)$. Схема

зигзаг Краузе має таку ж саму похибку апроксимації, як й схема Кранка–Нікольсона.

Розглянемо також коротко дві модифікації схеми зигзаг, які дозволяють розраховувати потоки, що одночасно мають позитивну й негативну вторинні течії. Для таких течій Вонг [25] запропонував явну тришарову схему другого порядку точності, що не потребує лінеаризації членів рівнянь руху. Як і для будь-якого іншого тришарового методу, у цьому випадку початкові умови повинні бути задані на двох шарах за маршовою координатою. Внаслідок цього один або декілька перших кроків звичайно здійснюють за іншою різницевою схемою. Проекція на площину Oxz шаблону, що використовується для побудови тришарової різницевої схеми Вонга [25], показана на рис.3.6.

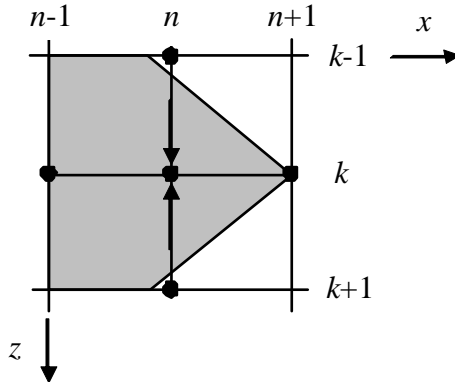


Рис.3.6. Проекція шаблону для модифікованої схеми зигзаг [25].

Штриховкою показано, як і раніше, наближений розмір зони залежності цього шаблону. Для знаходження розв'язку необхідно знати значення величин на n -му та $(n-1)$ -му шарах. Схема ця явна й центрована щодо точки (n, j, k) . Похідні за x та z апроксимуються у точці (n, j, k) центральними різницями. Похідні типу $\partial/\partial y$ ($a \partial \phi/\partial y$) представляються як середнє різницевих похідних у точках $(n+1, j, k)$ та $(n-1, j, k)$. Обмеження на кроки різницевої сітки, що накладаються принципом впливу, мають вигляд

$$u > 0, \left| \frac{w\Delta x}{u\Delta z} \right| \leq 1.$$

При $u > 0$ ніяких інших формальних обмежень на стійкість тут немає.

Кітченс та ін. [54] провели порівняння чотирьох різних різницьових схем для розрахунку тривимірного примежового шару. Показано, що одна із розглянутих схем відрізнялася малим зростом помилки й вдалими умовами стійкості. Крім того, на результати, що отримані за цією схемою, мало впливали порушення умов, які накладаються принципом впливу. На рис. 3.7 показана проекція на площину Oxz шаблону, що використовується при побудові цієї схеми.

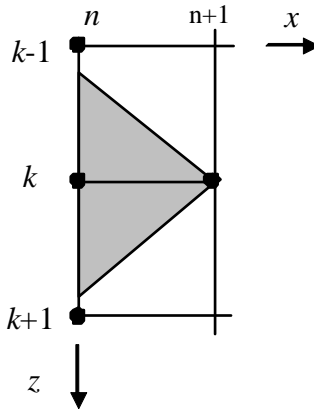


Рис.3.7. Проекція шаблону для модифікованої схеми зигзаг [54].

Наближений розмір області залежності розглянутої схеми показано штриховкою. Цей метод – неявний. Похідні за x апроксимуються у точці $(n+1/2, j, k)$ центральними різницями, але при цьому завдяки спеціальній апроксимації похідних із нестійкої схеми вдається отримати стійку. Тут при апроксимації похідної $\varphi_{j,k}^n$ записується через напівсуму $\varphi_{j,k+1}^n$ й $\varphi_{j,k-1}^n$, що на сітці з рівномірним кроком по x дає

$$\partial\varphi/\partial x \approx \left[\varphi_{j,k}^{n+1} - 0.5(\varphi_{j,k+1}^n + \varphi_{j,k-1}^n) \right] / \Delta x.$$

Похідні у поперечному напрямку z апроксимуються у точці (n, j, k) центральними різницями. Похідні типу $\partial/\partial y$ ($a \partial \phi/\partial y$) замінюються середніми значеннями різницевих похідних у вузлах $(n+1, j, k)$ та (n, j, k) . Похибка апроксимації цієї схеми складає $\sim O(\Delta x, (\Delta z)^2/\Delta x, (\Delta y)^2, (\Delta z)^2)$.

Зауваження:

- У розглянутому випадку обмеження на кроки різницевої сітки, які накладаються принципом впливу, мають той же вигляд, що й для двокрокової схеми.
- Обмеження, що накладаються умовами стійкості й принципом впливу, у даному випадку збігаються.

3.2. Неявна маршова схема із розщепленням

Запишемо рівняння примежового шару у пов'язаній із тілом системі координат $O\xi\eta\zeta$ (Рис. 3.8). Координатні осі введемо таким чином, щоб вісь ξ була спрямована за потоком, ζ – впоперек течії, а η – по нормалі до поверхні.

Перепишемо рівняння (3.1) у консервативному векторному вигляді

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial z} = 0, \quad (3.4)$$

де

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + \frac{P_e}{\rho} \\ uw \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} v \\ uv - \tau'_{yx} \\ vw - \tau'_{yz} \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} w \\ uw \\ w^2 + \frac{P_e}{\rho} \end{bmatrix},$$

$$\tau'_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{\rho} = v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau'_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\rho} = v \frac{\partial w}{\partial y}.$$

У системі координат (ξ, η, ζ) рівняння (3.4) має вигляд

$$\frac{\partial \bar{\bar{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\bar{F}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\bar{G}}}{\partial \zeta} = 0, \quad (3.5)$$

де

$$\bar{\bar{E}} = J^{-1} \begin{bmatrix} U^c \\ uU^c + \xi_{,x} \frac{p_e}{\rho} \\ wU^c + \xi_{,x} \frac{p_e}{\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{F}} = J^{-1} \begin{bmatrix} V^c \\ uV^c - \eta_{,y} \tau'_{yx} \\ wV^c - \eta_{,y} \tau'_{yz} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\bar{G}} = \begin{bmatrix} W^c \\ uW^c + \zeta_{,x} \frac{p_e}{\rho} \\ wW^c + \zeta_{,x} \frac{p_e}{\rho} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

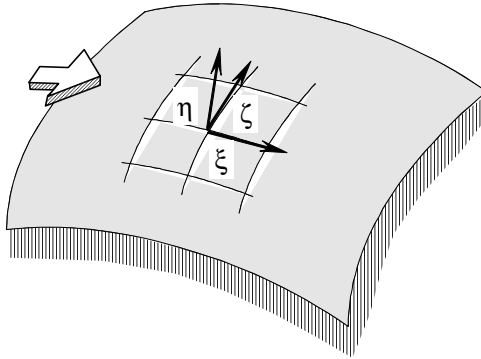


Рис. 3.8. Пов'язана з тілом система координат.

У виразах для $\bar{\bar{E}}$ й т.і. контраваріантні компоненти швидкості U^c , V^c та W^c , що спрямовані відповідно у бік збільшення ξ, η та

ζ , пов'язані з фізичними компонентами швидкості u, v та w співвідношеннями

$$U^c = \xi_x u + \xi_z w, \quad V^c = \eta_y v, \quad W^c = \zeta_x u + \zeta_z w, \quad (3.7a)$$

$$J^1 = y_\eta (x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi). \quad (3.7b)$$

Параметри перетворення, що подібні x_ξ , можуть бути визначені безпосередньо через координати сітки. Похідні за узагальненими координатами визначаються із співвідношень

$$\begin{aligned} \xi_x &= J y_\eta z_\zeta, \quad \xi_z = J y_\eta x_\zeta, \quad \eta_y = 1/y_\eta, \\ \zeta_x &= -J y_\eta z_\xi, \quad \zeta_z = J y_\eta x_\xi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

вигляд яких визначається із умови, що лінії сітки η перпендикулярні поверхні (x, z) . Останнє суттєво спрощує вигляд рівнянь (3.6)-(3.8).

Ефективний маршовий алгоритм можна побудувати, якщо записати рівняння (3.5) у вигляді

$$\begin{aligned} (1 + \gamma) \left[\left\{ \vec{E} \right\}^{n+1} - \left\{ \vec{E} \right\}^n \right] - \gamma \left[\left\{ \vec{E} \right\}^n - \left\{ \vec{E} \right\}^{n-1} \right] = \\ = \Delta \xi \left[\beta \cdot RHS^{n+1} + (1 - \beta) \cdot RHS^n \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

де

$$RHS = - \frac{\partial \vec{F}}{\partial \eta} - \frac{\partial \vec{G}}{\partial \zeta}.$$

При $\gamma = 0$, $\beta = 0.5$ маємо схему Кранка–Нікольсона; при $\gamma = 0.5$, $\beta = 1$ – схему 3LFI (тришарова чисто неявна схема).

Зауваження:

- Для задач, для яких потрібно зробити лише один прохід у напрямку ξ , що відповідає нашій ситуації, необхідність збереження додаткових даних для схеми 3LFI у значній мірі компенсується більшою стабільністю цієї схеми.
- Для ефективного застосування алгоритму (3.9) напрямком ξ повинен приблизно збігатися з напрямком потоку.

Очевидно, що перед застосуванням будь-якої неявної схеми, на шарі $n+1$ систему рівнянь необхідно лінеаризувати. Звичайно

це роблять шляхом відкидання нелінійних членів у розвиненні в ряд Тейлора в околі шару n . Таким чином, маємо

$$\{\bar{E}\}^{n+1} = \{\bar{E}\}^n + \underline{A}\Delta\bar{q}^{n+1},$$

$$\text{де } \underline{A} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{q}} = \begin{bmatrix} \xi_x & 0 & \xi_z \\ 2\xi_x u + \xi_z w & 0 & \xi_z u \\ \xi_x & 0 & \xi_x u + 2\xi_z w \end{bmatrix};$$

Аналогічно

$$\{\bar{F}\}^{n+1} = \{\bar{F}\}^n + \underline{B}\Delta\bar{q}^{n+1},$$

$$\text{де } \underline{B} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{q}} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_y & 0 \\ V^c - v\eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} & \eta_y u & 0 \\ 0 & \eta_y w & V^c - v\eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix};$$

$$\{\bar{G}\}^{n+1} = \{\bar{G}\}^n + \underline{C}\Delta\bar{q}^{n+1},$$

$$\text{де } \underline{C} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{q}} = \begin{bmatrix} \zeta_x & 0 & \zeta_z \\ 2\zeta_x u + \zeta_z w & 0 & \zeta_z u \\ \zeta_x w & 0 & \zeta_x u + 2\zeta_z w \end{bmatrix},$$

$$\bar{q} \equiv \underline{J}^{-1}\{u, v, w\}^T, \Delta\bar{q}^{n+1} = \bar{q}^{n+1} - \bar{q}^n.$$

В результаті підстановки цих виразів у (3.9), маємо лінійну щодо $\Delta\bar{q}^{n+1}$ систему рівнянь:

$$\begin{aligned} & \left[(1 + \gamma)\underline{A} + \beta\Delta\xi \left\{ \frac{\partial \underline{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \underline{C}}{\partial \zeta} \right\} \right] \Delta\bar{q}^{n+1} = \\ & = -\Delta\xi \left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} \right\}^n + \gamma \left[\{\bar{E}\}^n - \{\bar{E}\}^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Якщо тепер для апроксимації похідних $\partial/\partial\eta$ та $\partial/\partial\zeta$ використати центральні різниці, дана схема може бути факторизована із точністю $O(\Delta\xi^2)$. Розв'язок тут одержують у два кроки. На першому кроці

$$\left[\underline{A} + \Delta\xi \left\{ \frac{\beta}{1+\gamma} \right\} L_{\zeta} \underline{C} \right] \Delta\vec{q}^* = - \left\{ \frac{\Delta\xi}{1+\gamma} \right\} \left\{ L_{\eta} \vec{F} + L_{\zeta} \vec{G} \right\} + \left\{ \frac{\gamma}{1+\gamma} \right\} \left[\left\{ \vec{E} \right\}^n - \left\{ \vec{E} \right\}^{n-1} \right] \quad (3.11)$$

й на другому

$$\left[\underline{A} + \Delta\xi \left\{ \frac{\beta}{1+\gamma} \right\} L_{\eta} \underline{B} \right] \Delta\vec{q}^{n+1} = \underline{A} \Delta\vec{q}^* . \quad (3.12)$$

На першому кроці (3.11) являє собою тридіагональну систему рівнянь, що пов'язана із кожною лінією сітки ζ . Для її розв'язання можна використати алгоритм прогонки Томаса [7]. На другому кроці до рівняння неявно входять лише члени, що пов'язані із напрямком η . Оскільки похідні $\partial/\partial\eta$ в \underline{B} апроксимуються центральними різницями, для триточкового різницевого оператора $L_{\eta\eta} \underline{B}$ система (3.12) також тридіагональна й може бути розв'язана методом прогонки.

Задачі.

1. Використовуючи рівняння (3.1б,в), отримати вирази для коефіцієнтів a_j, b_j, c_j, d_j для скінченно-різницевого рівняння

$$a_j F_{j-1,k}^{n+1} + b_j F_{j,k}^{n+1} + c_j F_{j+1,k}^{n+1} = d_j,$$

де $F \equiv u$ або w для схеми Кранка–Нікольсона.

2. Використовуючи рівняння (3.4), отримати вирази для коефіцієнтів a_j, b_j, c_j, d_j для скінченно-різницевого рівняння

$$a_j F_{j-1,k}^{n+1} + b_j F_{j,k}^{n+1} + c_j F_{j+1,k}^{n+1} = d_j,$$

де $F \equiv u$ або w для схеми “зигзаг” Краузе.

3. Використовуючи рівняння (3.1б,в), отримати вирази для коефіцієнтів a, b, c, d на першому

$$a_k \Delta \tilde{q}_{j,k-1}^* + b_k \Delta \tilde{q}_{j,k}^* + c_k \Delta \tilde{q}_{j,k+1}^* = d_k,$$

та другому кроці

$$a_j \Delta \tilde{q}_{j-1,k}^{n+1} + b_j \Delta \tilde{q}_{j,k}^{n+1} + c_j \Delta \tilde{q}_{j+1,k}^{n+1} = d_j$$

де $\tilde{q} \equiv J^{-1}\{u, v, w\}^T$, $\Delta \tilde{q}^{n+1} = \tilde{q}^{n+1} - \tilde{q}^n$, для неявної маршової схеми із розщепленням.

4. Використати схему “зигзаг” Краузе для розрахунку ламінарного примежового шару на платівці, де розміщено круговий циліндр радіуса a із центром у точці $x=x_0, z=0$. Розподіл швидкості для нев’язкої задачі має вигляд

$$\frac{u_e}{U_\infty} = 1 + \left\{ \left(\frac{z}{a} \right)^2 - \left[\frac{x-x_0}{a} \right]^2 \right\} / \left(\frac{r}{a} \right)^4,$$

$$\frac{w_e}{U_\infty} = 2 \left\{ (x-x_0) \frac{z}{a^2} \right\} / \left(\frac{r}{a} \right)^4, \quad r^2 = (x-x_0)^2 + z^2.$$

Зворотного градієнта тиску, що пов’язаний із циліндром, досить для відриву примежового шару перед циліндром. Взявши початкові дані, що відповідають обтіканню плоскої платівки, достатньо далеко вгору за потоком (у точці $z=z_{max}$),

отримати маршовим методом розв'язок до точки $z=0$, яка максимально близька до точки відриву потоку.

5. Розв'язати задачу 4, використовуючи схему Кранка–Нікольсона.
6. Розв'язати задачу 4, використовуючи неявну маршову схему із розщепленням.

Розділ 4

ПЕРЕТВОРЕННЯ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ

Досі основні рівняння записувалися в декартовій системі координат. Але при розв'язанні конкретних інженерних задач, особливо, якщо фізична область має непрямокутну форму, основні рівняння зручніше записувати в довільній ортогональній (або навіть в неортогональній) системі координат. У цьому розділі будуть наведені деякі числові алгоритми перетворення основної системи рівнянь при переході від декартової до довільної ортогональної (або неортогональної) системи координат. Але спочатку будуть запропоновані прості аналітичні (або напіваналітичні) перетворення придатні для згущення вузлів сітки в областях великих градієнтів параметрів потоку й для перетворення непрямокутної розрахункової області у фізичній площині до прямокутної сітки із рівномірним розміщенням вузлів в розрахунковій площині. Всі наведені перетворення будуть пояснені простими прикладами.

4.1. Прості перетворення

Як перший приклад розглянемо простий алгоритм згущення вузлів сітки біля стінки. Подібний алгоритм є абсолютно необхідним, наприклад, для того, щоб розрізнявати деталі течії в примежевому шарі. На рис.4.1а показана сітка для розв'язання задачі про течію рідини на плоскій пластині з однорідним розміщенням вузлів у напрямку Ox та зі згущенням вузлів по мірі наближення до стінки у напрямку Oy . Оскільки крок сітки у напрямку Oy нерівномірний, доцільно перетворити координату у таким чином, щоб вихідні рівняння можна було б розв'язувати на рівномірній сітці у площині (ξ, η) , як це показано на рис.2.1б. Підходящим для такої двовимірної задачі є наступне перетворення :

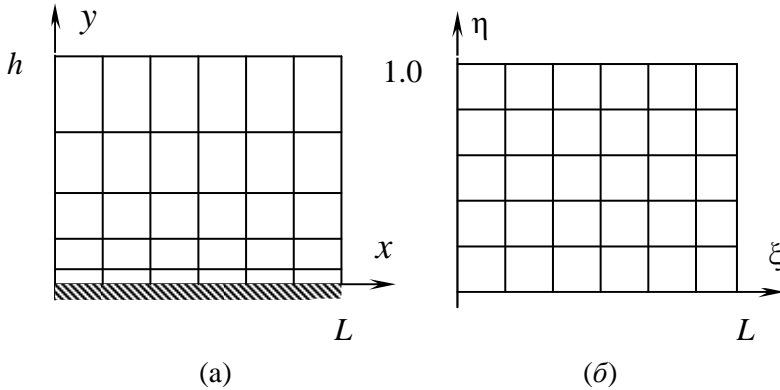


Рис.4.1. Розподіл вузлів сітки в околі стінки на фізичній площині (а) і на розрахунковій площині (б).

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = 1 - \frac{\ln\{(\beta + 1 - (y/h))/(\beta - 1 + (y/h))\}}{\ln[(\beta + 1)/(\beta - 1)]}, \quad 0 < \beta < +\infty \end{cases} \quad (4.1)$$

Це перетворення розтягнення розміщує тим більше число точок поблизу $y = 0$, чим ближче параметр β до 1.

Розглянемо, як перетворюються при цьому рівняння динаміки рідини. Випишемо часткові похідні:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (4.2)$$

де

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{2\beta}{h\{\beta^2 - [1 - (y/h)]^2\} \ln\{(\beta + 1)/(\beta - 1)\}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При підстановці (4.3) у (4.2) маємо

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.4)$$

Наприклад, перетворимо рівняння нерозривності

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.5)$$

Після підстановки у (4.5) виразів (4.4), маємо

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0. \quad (4.6)$$

Тепер рівняння (4.6) можна дискретизувати на рівномірній сітці:

$$\Delta \xi = L/(N_i - 1), \quad \Delta \eta = 1/(N_j - 1). \quad (4.7)$$

Зауважимо, що у вираз для метричного коефіцієнта $\partial \eta / \partial y$ (або $1 / \partial y / \partial \eta$) входить незалежна змінна y , яка у даному випадку є функцією η . Залежності, у яких старі зміни залежать від нових, називається зворотним перетворенням, яке у нашому прикладі легко знаходиться у вигляді :

$$\begin{cases} x = \xi, \\ y = h \frac{(\beta + 1) - (\beta - 1) \{ (\beta + 1) / (\beta - 1) \}^{1-\eta}}{\{ (\beta + 1) / (\beta - 1) \}^{1-\eta} + 1}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Розглянуте перетворення належить до більш загальної родини перетворень розтягнення [1]. Ще одне перетворення із цієї родини подрібнює сітку біля обох стінок каналу (Рис.4.2) :

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \alpha + (1 - \alpha) \frac{\ln \left\{ \frac{\beta + (2\alpha + 1)(y/h) - 2\alpha}{\beta - (2\alpha + 1)(y/h) + 2\alpha} \right\}}{\ln \{ (\beta + 1) / (\beta - 1) \}}. \end{cases} \quad (4.9)$$

При $\alpha = 0$ сітка буде подрібнюватися лише поблизу $y = h$, а при $\alpha = 1/2$ маємо подрібнення як при $y = 0$, так й при $y = h$.

Зауваження:

- Робертс [1] показав зв'язок β із товщиною прилежового шару:

$$\beta = (1 - \delta/h)^{-1/2}, \quad 0 < \delta/h < 1, \quad (4.10)$$

де h – ширина області в напрямку y .

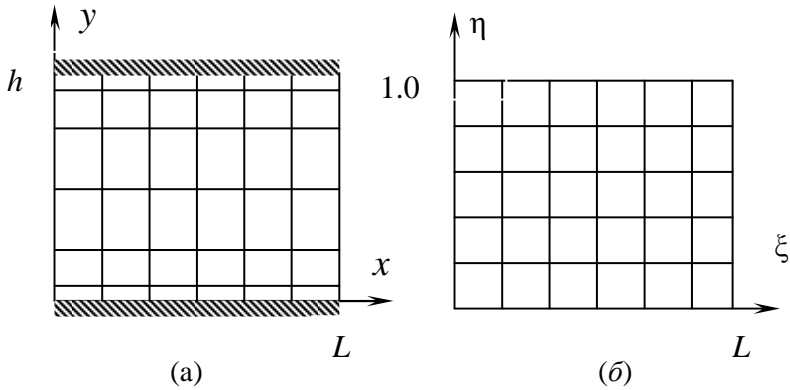


Рис.4.2. Розподіл вузлів сітки в околі стінок каналу на фізичній площині (а) й на розрахунковій площині (б).

Для перетворення (4.9) метрика $\partial\eta/\partial y$ має вигляд:

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{2\beta(1-\alpha)(2\alpha+1)}{h\left\{\beta^2 - [(2\alpha+1)(y/h) - 2\alpha]^2\right\} \ln\left\{(\beta+1)/(\beta-1)\right\}}, \quad (4.11)$$

а зворотним перетворенням буде:

$$\begin{cases} x = \xi, \\ y = h \frac{(\beta+2\alpha)\left\{(\beta+1)/(\beta-1)\right\}^{(\eta-\alpha)/(1-\alpha)} - \beta + 2\alpha}{(2\alpha+1)\left[1 + \left\{(\beta+1)/(\beta-1)\right\}^{(\eta-\alpha)/(1-\alpha)}\right]}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Наступне перетворення корисне у випадку, коли сітку необхідно подрібнити поблизу внутрішньої межі області (див. Рис.4.3):

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = B + \frac{1}{\tau} \operatorname{arcsh} \left[\left\{ (y/y_c) - 1 \right\} \operatorname{sh}(\tau B) \right], \end{cases} \quad (4.13)$$

$$B = \frac{1}{2\tau} \ln \left[\frac{1 + (e^\tau - 1)(y_c/h)}{1 + (e^{-\tau} - 1)(y_c/h)} \right], \quad 0 < \tau < \infty. \quad (4.14)$$

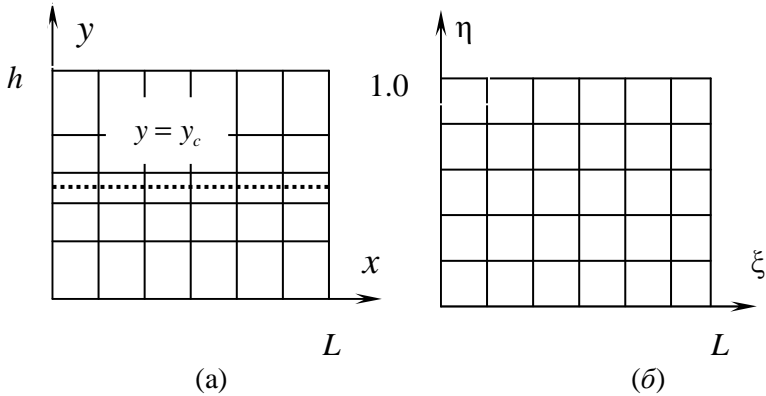


Рис.4.3. Розподіл вузлів сітки в околі внутрішньої межі області $y=y_c$ на фізичній площині (а) й на розрахунковій площині (б).

Тут τ змінюється від нуля (немає розтягнення) до значень, що призводять до подрібнення сітки поблизу $y = y_c$.

Метрика $\partial\eta/\partial y$ та зворотне перетворення для y мають вигляд:

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \text{sh}(\tau B) / \left\{ \tau y_c \sqrt{1 + [(y/y_c) - 1]^2 \text{sh}^2(\tau B)} \right\}, \quad (4.15)$$

$$y = y_c \left\{ 1 + \text{sh}[\tau(\eta - B)] / \text{sh}(\tau B) \right\}. \quad (4.16)$$

В якості останнього приклада розглянемо просте перетворення, що відображає непрямокутну область у фізичній площині на прямокутну область в розрахунковій площині (Рис.4.4):

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \frac{y}{h(x)}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Відстань між нижньою та верхньою межами, що вимірюється вздовж $x = \text{const}$, тут позначена $h(x)$. Необхідні похідні

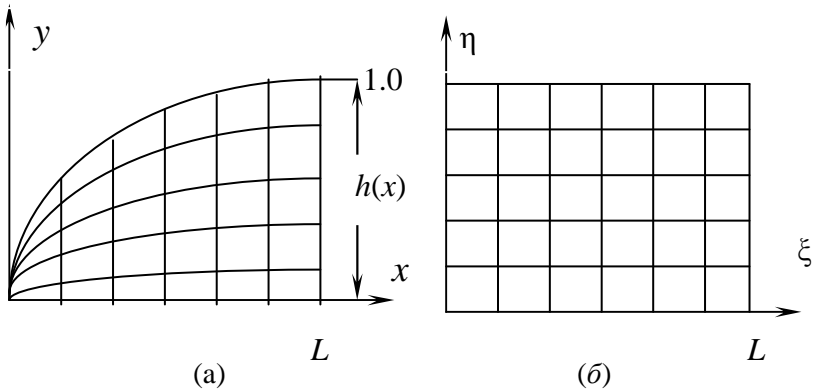


Рис.4.4. Перетворення непрямокутної області на фізичній площині (а) на прямокутну на розрахунковій площині (б).

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{h'(x)}{h(x)} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{h(x)} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

де $h'(x) = dh(x)/dx$.

У нових координатах рівняння нерозривності для нестисливої рідини має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \bar{y} \frac{h'(x)}{h(x)} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{h(x)} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0. \quad (4.19)$$

Зауваження:

- Розглянуті вище прості перетворення можна комбінувати у будь-якій послідовності.
- Ці перетворення також можуть бути використані для побудови сітки у фізичній площині (див. наступний розділ).

4.2. Перетворення загального вигляду

В попередньому параграфі ми розглянули прості перетворення незалежних змінних, які дозволяють розв'язувати обчислювальну задачу на рівномірній прямокутній сітці. Розглянемо тепер перетворення загального вигляду

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z), \quad (4.20)$$

яке відображає фізичний простір (x, y, z) на обчислювальний простір (ξ, η, ζ) . При цьому згідно правила диференціювання складної функції маємо :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Визначимо невідомі метричні коефіцієнти $\xi_x, \eta_x, \zeta_x, \xi_y, \eta_y, \zeta_y, \xi_z, \eta_z, \zeta_z$. Для цього запишемо вирази для диференціалів

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi_x dx + \xi_y dy + \xi_z dz, \\ d\eta &= \eta_x dx + \eta_y dy + \eta_z dz, \\ d\zeta &= \zeta_x dx + \zeta_y dy + \zeta_z dz. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Або в матричній формі

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Аналогічно можна записати

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Таким чином,

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= J \cdot \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & - (x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta) & x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta \\ - (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) & x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi & - (x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi) \\ y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi & - (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Звідки метричні коефіцієнти мають вигляд:

$$\begin{aligned} \xi_x &= J \cdot (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), & \xi_y &= -J \cdot (x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta), \\ \xi_z &= J \cdot (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta), & \eta_x &= -J \cdot (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi), \\ \eta_y &= J \cdot (x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi), & \eta_z &= -J \cdot (x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi), \\ \zeta_x &= J \cdot (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), & \zeta_y &= -J \cdot (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi), \\ \zeta_z &= J \cdot (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi), \end{aligned} \quad (4.26)$$

де J – якобіан перетворення :

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{J^{-1}} = 1 / \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} =$$

$$= \frac{1}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}. \quad (4.27)$$

Метричні коефіцієнти легко знаходяться, якщо зворотне перетворення маємо у явному вигляді

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta). \quad (4.28)$$

Якщо ж сітка будується з використанням числових методів, метричні коефіцієнти (4.26) також обчислюються за числовими методами із використанням центральних різниць в обчислювальному просторі. Подробиці числового обчислення метричних коефіцієнтів також можна знайти в монографії [17].

Запишемо у декартових координатах рівняння Нав'є-Стокса для стисливого газу у випадку відсутності масових сил та підводу тепла із-зовні

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial z} = 0, \quad (4.29)$$

де

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho u w - \tau_{xz} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho v w - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (E_t + p)w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Перший рядок векторного рівняння (4.29) відповідає рівнянню нерозривності; другий, третій та четвертий – рівнянню руху; п'ятий – рівнянню енергії. Тут E_t – повна енергія одиниці об'єму.

Застосуємо загальне перетворення вигляду (4.20) до системи рівнянь(4.29). Маємо

$$\begin{aligned} \vec{U}_t + \xi_x \vec{E}_\xi + \eta_x \vec{E}_\eta + \zeta_x \vec{E}_\zeta + \xi_y \vec{F}_\xi + \eta_y \vec{F}_\eta + \zeta_y \vec{F}_\zeta + \\ + \xi_z \vec{G}_\xi + \eta_z \vec{G}_\eta + \zeta_z \vec{G}_\zeta = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Поділивши рівняння (4.33) на J та перегрупувавши його члени, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\vec{U}}{J} \right)_t + \left(\frac{\vec{E}\xi_x + \vec{F}\xi_y + \vec{G}\xi_z}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\vec{E}\eta_x + \vec{F}\eta_y + \vec{G}\eta_z}{J} \right)_\eta + \\
 & + \left(\frac{\vec{E}\zeta_x + \vec{F}\zeta_y + \vec{G}\zeta_z}{J} \right)_\zeta - \vec{E} \left[\left(\frac{\xi_x}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\eta_x}{J} \right)_\eta + \left(\frac{\zeta_x}{J} \right)_\zeta \right] - \\
 & - \vec{F} \left[\left(\frac{\xi_y}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\eta_y}{J} \right)_\eta + \left(\frac{\zeta_y}{J} \right)_\zeta \right] - \\
 & - \vec{G} \left[\left(\frac{\xi_z}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\eta_z}{J} \right)_\eta + \left(\frac{\zeta_z}{J} \right)_\zeta \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Члени у квадратних дужках $\equiv 0$, що легко перевірити, підставляючи (4.26) у (4.34).

Якщо тепер визначити величини

$$\begin{aligned}
 \vec{U}_1 &= \frac{\vec{U}}{J}, \\
 \vec{E}_1 &= \frac{1}{J} [\vec{E}\xi_x + \vec{F}\xi_y + \vec{G}\xi_z], \\
 \vec{F}_1 &= \frac{1}{J} [\vec{E}\eta_x + \vec{F}\eta_y + \vec{G}\eta_z], \\
 \vec{G}_1 &= \frac{1}{J} [\vec{E}\zeta_x + \vec{F}\zeta_y + \vec{G}\zeta_z]
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

та підставити їх у (4.34), будемо мати наступний вираз для векторного рівняння у суворо дивергентному вигляді:

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{G}_1}{\partial \zeta} = 0. \tag{4.36}$$

Зауваження:

- Необхідно пам'ятати, що вектори \vec{G}_1, \vec{F}_1 та \vec{E}_1 містять частинні похідні у членах із в'язкістю та теплопровідністю, які повинні бути перетворені у відповідності із рівнянням

(4.21). Наприклад, зсувні напруги τ_{xy} будуть перетворені до вигляду

$$\tau_{xy} = \mu \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \quad (4.37)$$

- Суворо дивергентна форма дуже корисна при побудові скінченно-різницевих схем. Але при її використанні не рекомендується користуватися нерівномірним кроком у просторі обчислень.
- Якщо ж у просторі обчислень використання нерівномірного кроку необхідне, то у такому разі при дискретизації метрик необхідно враховувати обмеження, що впливають із геометричного закону збереження [1].

4.3. Числова реалізація перетворення загального вигляду

При практичному використанні перетворення загального вигляду потрібно записати рівняння, які ми розв'язуємо, в узагальнених координатах, визначити метричні коефіцієнти (як правило, із використанням числових алгоритмів), записати рівняння в дискретній формі та розв'язати його. Всі ці етапи, крім останнього, будуть продемонстровані на прикладі розв'язання крайової задачі для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.38)$$

для області, представленої на рис.4.5., із крайовими умовами $\phi|_{wx} = 0$, $\phi|_{xy} = \sin \theta / r_{xy}$, $\phi|_{yz} = 1 / r_{yz}$, $\phi|_{zw} = \sin \theta / r_{zw}$ (4.39)

Крайова задача (4.38)-(4.39) має точний розв'язок

$$\phi = \sin \theta / r, \quad (4.40)$$

який можна використати для оцінки точності числового розв'язку.

Рівняння Лапласа в узагальнених координатах можна отримати із (4.36) у вигляді

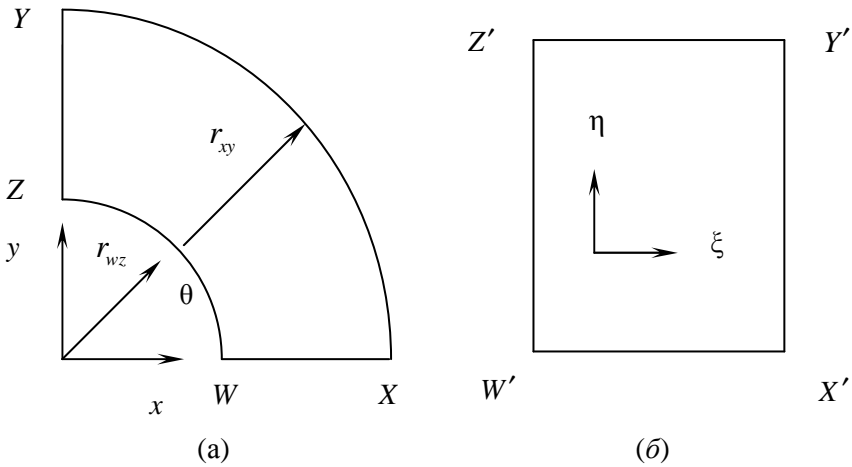


Рис.4.5. Фізична (а) та розрахункова (б) площини для розв'язання крайової задачі (4.38)-(4.39).

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ \left(\frac{\nabla^2 \xi}{J} \right) \varphi \right\}_{\xi} - \left\{ \left(\frac{\nabla^2 \eta}{J} \right) \varphi \right\}_{\eta} - \left\{ \left(\frac{\alpha}{J} \right) \varphi \right\}_{\xi\xi} + \\
 & + \left\{ \left(\frac{\beta}{J} \right) \varphi \right\}_{\xi\eta} + \left\{ \left(\frac{\gamma}{J} \right) \varphi \right\}_{\eta\eta} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

де

$$\alpha = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad \beta = 2(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y), \quad \gamma = \eta_x^2 + \eta_y^2, \tag{4.42}$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x, \quad \nabla^2 \xi = \xi_{xx} + \xi_{yy}, \quad \nabla^2 \eta = \eta_{xx} + \eta_{yy}.$$

Якщо тепер окремі члени в (4.41) визначено у кожній точці сітки, можна досить просто виконати дискретизацію цього рівняння із центральними різницями.

Перед усім визначимо члени в (4.41) через $x_{\xi}, x_{\eta}, y_{\xi}, y_{\eta}$, які простіше знаходити у процесі числового розрахунку. Маємо коефіцієнти метричного тензора:

$$g_{TT} = \frac{\alpha}{J} = \frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{J^{-1}}, \quad g_{WT} = \frac{\beta}{J} = \frac{2(x_\eta x_\xi + y_\eta y_\xi)}{J^{-1}}, \quad (4.43)$$

$$g_{WW} = \frac{\gamma}{J} = \frac{x_\xi^2 - y_\xi^2}{J^{-1}},$$

де якобіан оберненого перетворення $J^{-1} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$. Всі члени в (4.43) можна визначити через скінченні різниці :

$$x_\xi \approx \frac{x_{j+1}^k - x_{j-1}^k}{2\Delta\xi}, \quad x_\eta \approx \frac{x_j^{k+1} - x_j^{k-1}}{2\Delta\eta}, \quad (4.44)$$

$$y_\xi \approx \frac{y_{j+1}^k - y_{j-1}^k}{2\Delta\xi}, \quad y_\eta \approx \frac{y_j^{k+1} - y_j^{k-1}}{2\Delta\eta}.$$

Виходячи із двовимірних представлень для перших похідних $\xi_x = y_\eta/J^{-1}$, $\xi_y = -x_\eta/J^{-1}$, $\eta_x = -y_\xi/J^{-1}$, $\eta_y = x_\xi/J^{-1}$, для другої похідної ξ_{xx} , маємо :

$$\xi_{xx} = \frac{\xi_x y_{\xi\eta} + \eta_x y_{\eta\eta}}{J^{-1}} - \frac{\xi_x^2 J_\xi^{-1} + \xi_x \eta_x J_\eta^{-1}}{J^{-1}}. \quad (4.45)$$

Отримавши аналогічний вираз для ξ_{yy} й виконавши деякі перетворення, в результаті отримаємо

$$\delta_\xi = \frac{\nabla^2 \xi}{J} = \frac{g_{TT}(x_\eta y_{\xi\xi} - y_\eta x_{\xi\xi})}{J^{-1}} + \frac{g_{WT}(x_\eta y_{\xi\eta} - y_\eta x_{\xi\eta})}{J^{-1}} + \frac{g_{WW}(x_\eta y_{\eta\eta} - y_\eta x_{\eta\eta})}{J^{-1}}, \quad (4.46)$$

$$\delta_\eta = \frac{\nabla^2 \eta}{J} = \frac{g_{TT}(y_\xi x_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\xi})}{J^{-1}} + \frac{g_{WT}(y_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi y_{\xi\eta})}{J^{-1}} + \frac{g_{WW}(y_\xi x_{\eta\eta} - x_\xi y_{\eta\eta})}{J^{-1}}. \quad (4.47)$$

Всі члени, що стоять в правій частині (4.46)-(4.47), можна визначити через (4.43), (4.44) та похідні

$$x_{\xi\xi} = \frac{x_{j-1}^k - 2x_j^k + x_{j+1}^k}{\Delta\xi^2}, \quad x_{\eta\eta} = \frac{x_j^{k-1} - 2x_j^k + x_j^{k+1}}{\Delta\eta^2}, \quad (4.48)$$

$$x_{\xi\eta} = \frac{x_{j+1}^{k+1} - x_{j-1}^{k+1} - x_{j+1}^{k-1} + x_{j-1}^{k-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta}, \dots$$

Визначивши всі члени рівняння у кожному вузлі сітки й використовуючи триточкові центральні різниці, рівняння (4.41) можна привести до вигляду

$$\begin{aligned} & -0.5 \left[(\delta_\xi \varphi)_{j+1}^k - (\delta_\xi \varphi)_{j-1}^k \right] - 0.5 \left[(\delta_\eta \varphi)_j^{k+1} - (\delta_\eta \varphi)_j^{k-1} \right] + \\ & + \left[(g_{TT} \varphi)_{j-1}^k - 2(g_{TT} \varphi)_j^k + (g_{TT} \varphi)_{j+1}^k \right] + \quad (4.49) \\ & + 0.25 \left[(g_{WT} \varphi)_{j+1}^{k+1} - (g_{WT} \varphi)_{j-1}^{k+1} + (g_{WT} \varphi)_{j-1}^{k-1} - (g_{WT} \varphi)_{j+1}^{k-1} \right] + \\ & + \left[(g_{WW} \varphi)_j^{k-1} - 2(g_{WW} \varphi)_j^k + (g_{WW} \varphi)_j^{k+1} \right] = 0. \end{aligned}$$

В (4.49) вважаємо, що $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. Рівняння (4.49) розв'язується методом верхньої релаксації. При цьому значення φ_{jk}^{n+1} на наступній ітерації знаходять у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_{jk}^* = & \left\{ -0.5 \left[(\delta_\xi \varphi^n)_{j+1}^k - (\delta_\xi \varphi^n)_{j-1}^k \right] - \right. \\ & - 0.5 \left[(\delta_\eta \varphi^n)_j^{k+1} - (\delta_\eta \varphi^n)_j^{k-1} \right] + \\ & + \left[(g_{TT} \varphi^n)_{j-1}^k + (g_{TT} \varphi^n)_{j+1}^k + (g_{WW} \varphi^n)_j^{k-1} + (g_{WW} \varphi^n)_j^{k+1} \right] + \\ & + 0.25 \left[(g_{WT} \varphi^n)_{j+1}^{k+1} - (g_{WT} \varphi^n)_{j-1}^{k+1} + (g_{WT} \varphi^n)_{j-1}^{k-1} + \right. \\ & \left. + (g_{WT} \varphi^n)_{j+1}^{k-1} \right] \times \left\{ 2 \left[(g_{TT})_j^k + (g_{WW})_j^k \right] \right\}^{-1}, \quad (4.50) \end{aligned}$$

$$\varphi_{jk}^{n+1} = \varphi_{jk}^n + \lambda (\varphi_{jk}^* - \varphi_{jk}^n), \quad (4.51)$$

де λ – параметр релаксації.

Результати розв'язання крайової задачі (4.38)-(4.39) та їх порівняння із точним розв'язком (4.40) наведені в монографії

К.Флетчера [17]. Швидкість збіжності на рівномірній сітці 6×6 має майже другий порядок.

Таким чином, використання узагальнених перетворень дозволяє ефективно використовувати скінченно-різницеві методи в розрахункових областях із складними зовнішніми межами. Читачів, які бажають більш ґрунтовно ознайомитися із питаннями використання узагальнених перетворень при числових розрахунках, відсилаємо до відомих монографій [1, 17]. В цитованих монографіях також розглянуті питання використання нерівномірних розрахункових сіток та появи додаткових помилок числового розв'язку, що пов'язані із використанням узагальнених перетворень.

Задачі.

1. Отримати зворотне перетворення до (4.12).
2. Перевірити рівняння (4.15)–(4.16).
3. Виконати перетворення (4.9) для двовимірного рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини.
4. Виконати перетворення (4.17) для двовимірного рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини.
5. Послідовно виконати перетворення (4.17) та (4.1) для двовимірного стаціонарного рівняння енергії нев'язкого газу.
6. Виконати узагальнене перетворення для рівняння переносу завихроності ζ

$$(u\zeta)_x + (v\zeta)_y - \frac{1}{\text{Re}}(\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) = 0.$$

Як спроститься одержане рівняння у випадку ортогональної сітки? конформної сітки?

7. Двовимірний нестисливий примежовий шар описується системою рівнянь

$$u_x + v_y = 0,$$

$$uu_x + vv_y + P_{cx} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + v_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right],$$

де ν_T – турбулентна в'язкість. Перетворити ці рівняння із використанням узагальненого перетворення й визначити, чи можуть бути відкинуті у наближенні примежового шару отримані додаткові члени у випадку, коли примежовий шар розвивається вздовж поверхні $\eta = \text{const}$?

8. Побудувати програму для розв'язання крайової задачі (4.38)-(4.39) для області, що зображена зліва на рис.4.5. Пропонується попередньо перетворити фізичну область до прямокутної розрахункової області. Отримати розв'язок для $r_{WZ} = 0.1$; $r_{XY} = 1.0$; 3.0 ; $\lambda = 1.5$ на сітці 6×6 , 11×11 , 21×21 й порівняти результати між собою та з точним розв'язком (4.40).

Розділ 5

МЕТОДИ ПОБУДОВИ РОЗРАХУНКОВИХ СІТОК

Розв'язання системи диференціальних рівнянь із частинними похідними можна суттєво спростити, якщо використати вдало побудовану розрахункову сітку. Вірно й протилежне: розв'язок на сітці, що не відповідає задачі, може дати незадовільний результат. При цьому у деяких випадках неадекватний вибір положення вузлів розрахункової сітки може привести до нестійкості розв'язку або навіть до його розбіжності. Тому при побудові числового розв'язку диференціальних рівнянь із частинними похідними однією із центральних проблем є побудова відповідної розрахункової сітки.

Перші успіхи, пов'язані із використанням скінченно-різницевих методів, були обмежені задачами, для яких можна було легко підібрати підходящу систему координат, де й шукався розв'язок. По мірі накопичення досвіду розрахунків складних течій почали використовувати перетворення координат загального вигляду для відображення фізичної площини на обчислювальну. Цей шлях вважається досить багатообіцяючим і зараз. Його загальні положення ми вже розглянули в попередньому розділі. Як правило, подібні перетворення застосовуються, коли бажано одержати рівномірну ортогональну сітку в обчислювальній площині, а вузли сітки у фізичній площині розташовуються нерівномірно. Зрозуміло, що у цьому випадку необхідно встановити зв'язок між координатами у фізичній та обчислювальній площинах, тобто визначити метричні коефіцієнти перетворення. Однак часто отримані коефіцієнти перетворення настільки ускладнюють вигляд вихідних рівнянь, що помилки вже будуть нас чатувати на наступному етапі – етапі дискретизації.

Тому більш перспективними вважаються підходи, що дозволяють побудувати у фізичній площині розрахункову сітку із заданими властивостями. Можна назвати деякі із них:

- Лінії сітки повинні бути гладкими, щоб забезпечити неперервність похідних.
- Сітка повинна бути достатньо густою у тих частинах фізичної площини, де можуть виникнути великі обчислювальні похибки.
- Лінії сітки повинні бути ортогональними або близькими до ортогональних. Потрібно обминати надмірну скошеність клітинок сітки, яка може привести до надмірних додаткових помилок апроксимації.
- Локальне відношення сторін клітинки сітки повинно бути близьким до одиниці.

Методи побудови розрахункових сіток грубо можна поділити на три класи:

- 1) Методи теорії функції комплексної змінної.
- 2) Алгебраїчні методи.
- 3) Методи, що засновані на розв'язанні диференціальних рівнянь.

Методи теорії функцій комплексної змінної мають суттєву перевагу, бо перетворення, які в них використовуються, частково або повністю аналітичні. Нажаль ці методи не завжди дозволяють будувати близькі до ортогональних сітки. А отже побудовані сітки не завжди задовольняють третю вимогу. Алгебраїчні методи та методи, що засновані на розв'язанні диференціальних рівнянь, дозволяють для побудованих сіток виконати усі вказані вище вимоги, а також можуть бути використані й для тривимірних задач. Розглянемо всі ці методи докладніше.

5.1. Методи теорії функції комплексної змінної

Як вже відмічалось вище, методи теорії функцій комплексної змінної мають ту перевагу, що перетворення, які вони використовують, повністю або частково аналітичні. Конформні перетворення переводять ортогональну систему координат в ортогональну. Зберігається при конформних перетвореннях й канонічний вигляд рівнянь.

Для конформного перетворення зв'язок між фізичною (x,y) та розрахунковою (ξ,η) областями у двовимірному випадку визначається як

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \cos \alpha & -h \sin \alpha \\ h \sin \alpha & h \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Тут скалярний множник h , пов'язаний із компонентами метричного тензора співвідношенням $h = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{g_{22}}$, й кут α між дотичною до координатної лінії ξ та віссю x – повністю визначають конформне перетворення. При цьому $x_\xi = h \cos \alpha$ та інші коефіцієнти перетворення безпосередньо визначаються із (5.1).

Традиційно найчастіше конформні перетворення використовують для розрахунку потенційних течій навколо тіл складної форми із використанням відомих розв'язків для обтікання тіл простої форми. Таких, наприклад, як одиничне коло. Конформні відображення можна використовувати також для побудови сіток без обмеження на тип течії, якщо вибрати сітку таким чином, щоб вона збігалася із лініями течії еквівалентної задачі потенційного обтікання. Останнє часто поліпшує збіжність обчислювального методу, який використовують для розв'язання більш загальної задачі.

Метод побудови сіток із використанням конформного відображення можна розбити на два етапи:

- 1) Побудова одного чи послідовності відображень, в результаті чого отримуємо відповідність між точками зовнішньої межі у фізичній та розрахунковій площинах;
- 2) Побудова у фізичній площині внутрішніх точок сітки, які визначаються точками зовнішньої межі, що одержані на етапі (1).

Зауваження:

- *Маємо на увазі, що, відповідно до загальної схеми побудови сіток, розрахункова область є простим прямокутником, внутрішні точки якого утворюють рівномірну сітку.*

Існують два підходи до побудови сіток за методом конформних відображень. Перший підхід застосовний до течій навколо добре обтічних тіл, таких як аеродинамічні профілі або лопатки турбін, які шляхом послідовності відображень можуть бути перетворені на одиничний круг або квадрат (перетворення Жуковського, Кармана–Трефтца, Пуятти). Подібні задачі розглядаються у курсі аерогідромеханіки [36]. Другий підхід більш загальний: використовується однокрокове відображення, яке засноване на перетворенні Шварца–Крістофеля многокутника із N сторонами у пряму лінію (див. рис.5.1).

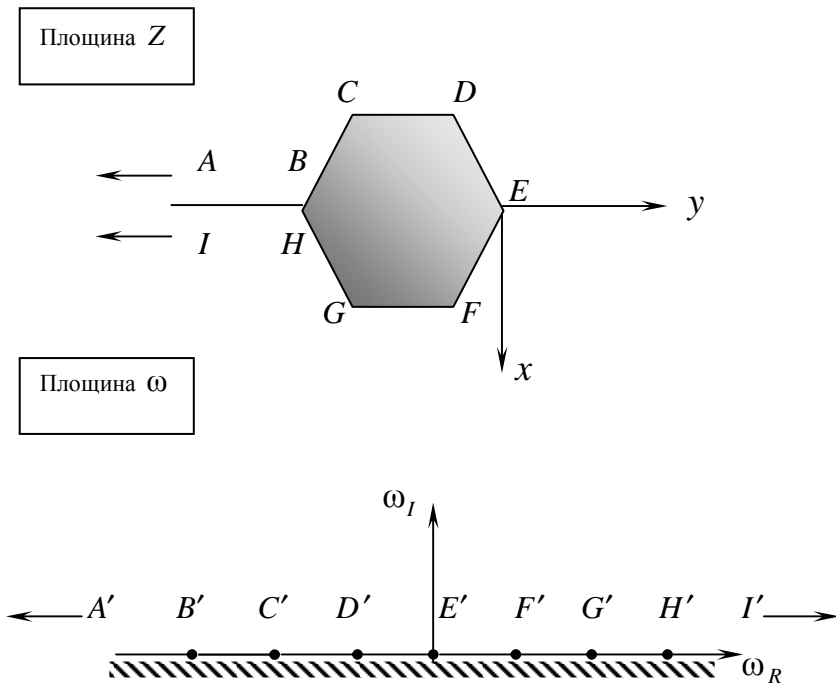


Рис.5.1. Перетворення Шварца–Крістофеля

5.1.1. Однокрокове конформне відображення

У класичній теорії функцій комплексної змінної перетворення Шварца–Крістофеля використовується для побудови однокрокового відображення на верхню напівплощину ω області, що обмежена у фізичній площині Z простим замкнутим багатокутником. Межа багатокутника у розрахунковій площині збігається із матеріальною віссю. Після введення розрізу (Рис.5.1) область між багатокутником та безмежністю у площині Z можна розглядати як обмежену. Тобто, перетворення Шварца–Крістофеля можна використовувати також й для побудови зовнішніх сіток.

Розглянемо застосування перетворення Шварца–Крістофеля для розрахунку внутрішньої течії у плоскому каналі складної конфігурації (див. рис.5.2). При цьому зручно зробити ще одне перетворення, яке переводить верхню напівплощину площини ω у прямий канал, паралельний дійсній осі у новій розрахунковій області ζ .

Перетворення Шварца–Крістофеля для відображення каналу на площині Z на площину ω має вигляд:

$$\frac{dZ}{d\omega} = \frac{M}{\omega} \left(\prod_{j=0}^N (\omega - b_j)^{-\alpha_j/\pi} \right) \omega^{-\alpha_e/\pi}, \quad (5.2)$$

де α_j – кути розвороту j сегменту у площині Z ; b_j – полюси у площині ω , що відповідають кутовим точкам на Z . Величини b_j – зарані невідомі й визначаються шляхом повторного інтегрування рівняння (5.2). Комплексна величина M пов'язана із шириною каналу та його орієнтацією відносно осі Ox й буде визначена пізніше у явному вигляді.

Відображення $\omega \rightarrow \zeta$ визначається співвідношенням

$$\zeta = -\frac{1}{\pi} \ln \omega + i \quad (5.3)$$

Якщо припустити, що канал на ∞ вгору за потоком канал – прямий (що еквівалентно $\omega \rightarrow \infty$), то (5.2) переходить у рівняння

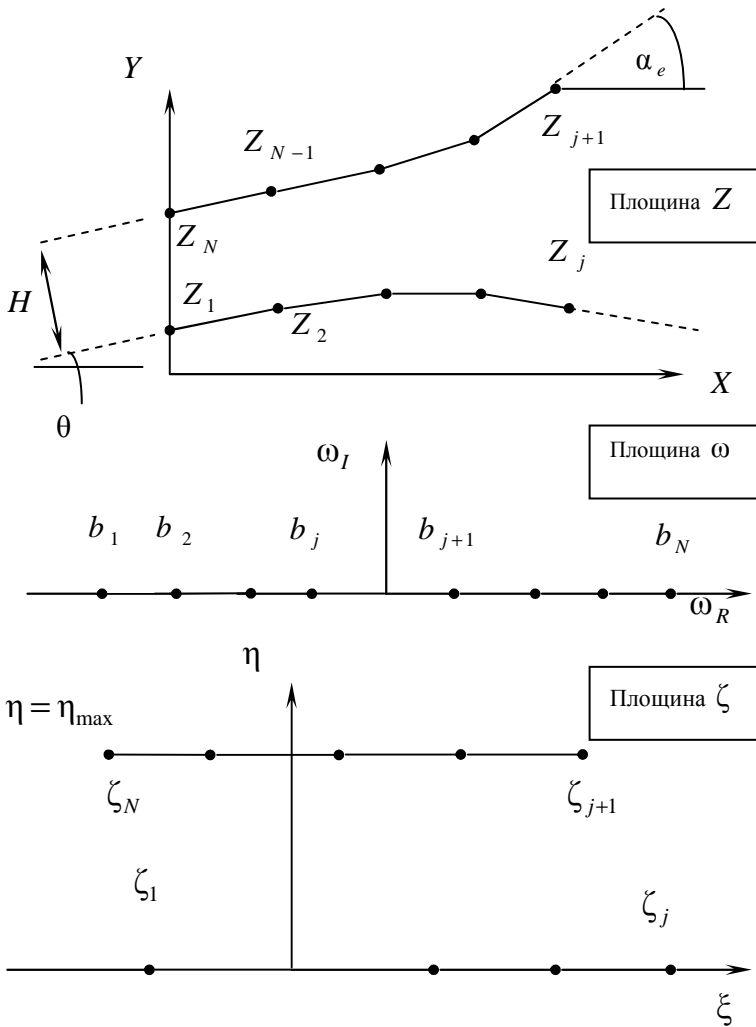


Рис.5.2. Перетворення двовимірного каналу.

$$\frac{dZ}{d\omega} = \frac{M}{\omega}. \quad (5.4)$$

Інтегруючи (5.4) та виконуючи перетворення (5.3), маємо

$$Z = \pi M (i - \zeta) + Z_0. \quad (5.5)$$

Застосовуючи (5.5) для верхньої й нижньої зовнішньої межі каналу, маємо $Z_N - Z_1 = iHe^{i\theta} = -\pi M i$, що дає явний вираз для

$$M = -He^{i\theta}/\pi. \quad (5.6)$$

Як обчислити H та θ очевидно із першого малюнка на рис.5.2. Припустимо, що положення полюсів b_j відоме. Для розв'язання (5.2) пропонується мішана маршова схема другого порядку, для якої у кожному полюсі виконується аналітичне інтегрування

$$\frac{Z_{k+1} - Z_k}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} = \frac{M}{\omega_{k+\frac{1}{2}}^{(1+i\alpha e/\pi)}} \prod_{j=1}^N \frac{(\omega_{k+1} - b_j)^{1-\alpha_j/\pi} - (\omega_k - b_j)^{1-\alpha_j/\pi}}{(\omega_{k+1} - \omega_k)^{1-\alpha_j/\pi}} \quad (5.7)$$

Скінченно-різницеве представлення для (5.3) має вигляд

$$\omega_{k+1} - \omega_k = -\pi \omega_{k+\frac{1}{2}} (\zeta_{k+1} - \zeta_k). \quad (5.8)$$

Співвідношення (5.7)-(5.8) дають прямий зв'язок між фізичною площиною Z та розрахунковою площиною ζ , справедливий для довільного шляху інтегрування в розрахунковій площині.

Оскільки положення полюсів b_k заранні невідоме, в результаті інтегрування рівняння (5.7) маємо лише наближене значення $Z_k^v - Z_{k-1}^v$, v – номер ітерації. Звернемо увагу, що кінцеві значення величин Z_k^c ($k = \overline{1, N}$) у фізичній площині вже відомі. Визначимо нову оцінку для ζ_k^{v+1} :

$$\zeta_k^{v+1} = \zeta_{k-1}^{v+1} + \frac{Z_k^c - Z_{k-1}^c}{Z_k^v - Z_{k-1}^v} \left(\zeta_k^v - \zeta_{k-1}^v \right) \quad (5.9)$$

й нові значення b_k^{v+1} із (5.3)

$$b_k^{v+1} = \exp \left[\pi (i - \zeta_k^{v+1}) \right]. \quad (5.10)$$

Процедуру (5.7)–(5.10) повторюють доти, поки для всіх k величини Z_k^v не стануть достатньо близькими до Z_k^c . Згідно [1, 17] для досягнення точності в п'ять десяткових знаків достатньо 10÷15 ітерацій. При цьому виявляється, що число ітерацій не залежить від кількості сегментів N . Для визначення

точних значень b_k проводиться повторне інтегрування вздовж зовнішніх меж розрахункової області ($\eta=0$ або $\eta=\eta_{\max}$ на Рис.5.2). Це дозволяє встановити відповідність між точками зовнішньої межі у фізичній та розрахунковій площинах (стадія (1)). Після цього, знаючи b_k , шляхом інтегрування (5.2) вздовж ліній постійних значень ξ та η у розрахунковій площині будуюмо сітку у фізичній площині.

Зауваження:

- *Оскільки потенційна течія у каналі визначаються із співвідношення*

$$\varphi + i\psi = \zeta, \quad (5.11)$$

де ψ – функція течії, φ – потенціал швидкості, постійні значення η та ξ будуть лініями течії та лініями постійного значення потенціалу швидкості (еквіпотенційними лініями), відповідно. Отже, відповідні лінії сітки у фізичній площині будуть відповідати лініям течії та еквіпотенційним лініям потенційної течії у каналі. Треба очікувати, що для в'язкої течії лінії сітки все ще будуть вдалим наближенням ліній течії та еквіпотенційних ліній.

- *Вудс [17] узагальнив перетворення Шварца–Крістофеля на тіла із викривленими поверхнями*

$$\frac{dZ}{d\omega} = M \exp \left[\frac{1}{\pi} \int \ln(\omega - b) d\beta \right]. \quad (5.12)$$

Тут b – відрізок матеріальної осі на площині ω , а $d\beta$ відповідає зміні кута нахилу у площині Z . Девіс [17] виконав числову реалізацію перетворення (5.12) й отримав відображення області із-зовні аеродинамічного профіля у фізичній площині на прямокутник у розрахунковій площині.

- *Не дивлячись на те, що конформні перетворення не мають місце у тривимірному випадку, Мореті [17] успішно дослідив тривимірні геометрії за допомогою послідовності двовимірних перетворень при різних значеннях третьої координати.*

- *В задачах динаміки в'язкої рідини розв'язок часто швидко змінюється в околі поверхні, що обтікається. Тому дуже важливо, щоб побудована сітка в околі такої поверхні була близькою до ортогональної. Суворо ортогональні сітки також дозволяють позбавитися додаткових членів у рівняннях руху. Ортогональні сітки можна одержати із неортогональних шляхом побудови ортогональних траєкторій при послідовному одновимірному розтязі сітки вздовж напрямів ξ та η . Основні процедури побудови ортогональних траєкторій будуть розглянуті далі.*
- *Побудовані із використанням конформних відображень сітки за допомогою лише явної одновимірної інтерполяції (див. наступний розділ) можуть бути перетворені на нові сітки, форма яких вже близька до ортогональної, а розмір клітинок сітки плавно змінюється. Тому конформні відображення часто використовують на першому кроці при побудові сіток біля тіл складної конфігурації.*

5.2. Алгебраїчні відображення

При алгебраїчному відображенні розподіл точок вздовж межі області ефективно здійснюється за допомогою нормалізованих одновимірних функцій розтягу, які визначені на відрізках межі області (як правило, на кожній із сторін прямокутника) в розрахунковій площині. Причому розподіл точок сітки всередині області в основному здійснюється за рахунок функцій розтягу на її межах. Межові функції розтягу можуть бути використані й для генерації внутрішніх точок сітки при побудові розрахункової сітки із використанням диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Оскільки побудова внутрішніх точок сітки при алгебраїчному відображенні здійснюється шляхом інтерполяції даних на зовнішніх межах області, то явна інтерполяція може бути проведена як у одновимірному, так й у багатовимірному випадках.

5.2.1. Одновимірні функції розтягу

Одновимірні функції розтягу широко використовують для розподілу точок вздовж межі області з метою точного розділення її окремих ділянок. При побудові внутрішніх точок сітки для досить простої геометрії часто одночасно використовують одновимірні межові функції розтягу й просте перетворення зсуву.

Для одновимірної функції розтягу, що діє на відрітку AD криволінійного чотирикутника ABCD (див.Рис.5.4), відповідною нормалізованою незалежною змінною буде величина

$$\eta^* = (\eta - \eta_A) / (\eta_D - \eta_A), \quad (5.13)$$

тобто $0 \leq \eta^* \leq 1$ при $\eta_A \leq \eta \leq \eta_D$.

Виберемо функцію розтягу у вигляді [17]

$$s = P\eta^* + (1 - P) \left(1 - \text{th} \left[Q(1 - \eta^*) \right] \right) / \text{th} Q, \quad (5.14)$$

де P та Q – параметри, що забезпечують контроль розподілу точок сітки. Тут малі величини Q викликають малі відхилення від лінійної залежності ($s \approx P\eta^*$). Хоча, якщо величина P

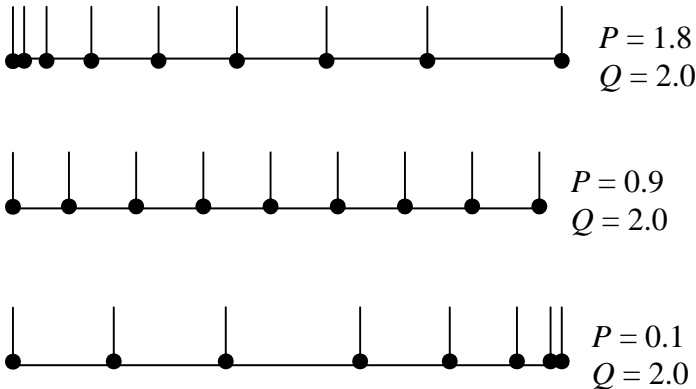


Рис. 5.3. Розподіл точок у відповідності із формулою (5.14).

близька до одиниці, відхилення від лінійної залежності взагалі мале й стає суттєвим лише при значеннях η^* , що близькі до одиниці.

Після того як величина s визначена, її використовують для визначення розподілу x та y :

$$x = x_A + s(x_D - x_A), \quad y = y_A + s(y_D - y_A). \quad (5.15)$$

На рис.5.3 показано типовий розподіл точок на відрізьку DA при різних значеннях P та Q .

Зауваження:

- *Звернемо увагу, що при $P > 1$ можна також одержати згущення точок біля точки D, але для цього краще в (5.14) покласти $\eta^* = (\eta - \eta_D) / (\eta_A - \eta_D)$ й в (5.15) замінити $s \rightarrow (1 - s)$.*

5.2.2. Найпростіші алгебраїчні відображення

Проста процедура побудови сітки за методом алгебраїчних відображень у випадку двох зовнішніх меж області буде продемонстрована на прикладі побудови сітки у двовимірному викривленому каналі (див.Рис.5.4). Вважається, що функції розтягу $s_{AD}(\eta^*)$ та $s_{BC}(\eta^*)$, що контролюють розподіл точок на вхідній та вихідній межах області, вже відомі. Нормалізований параметр $\eta^* = (\eta - \eta_1) / (\eta_2 - \eta_1)$. Для $s_{AD}(\eta^*)$ та $s_{BC}(\eta^*)$ можна використати подібні (5.14) формули.

Для отримання значень s між поверхнями AD та BC рекомендується використати просту лінійну інтерполяцію

$$s = s_{AD} + \xi^* (s_{BC} - s_{AD}), \quad \text{де } \xi^* = (\xi - \xi_1) / (\xi_2 - \xi_1). \quad (5.16)$$

Аналогічно розподіл точок сітки вздовж меж AB та CD визначається одновимірними функціями розтягу $r_{AB}(\xi^*)$ та $r_{DC}(\xi^*)$. Якщо під r_{AB} та r_{DC} розуміти нормалізовані координати, що вимірюються вздовж поверхонь AB та DC, то

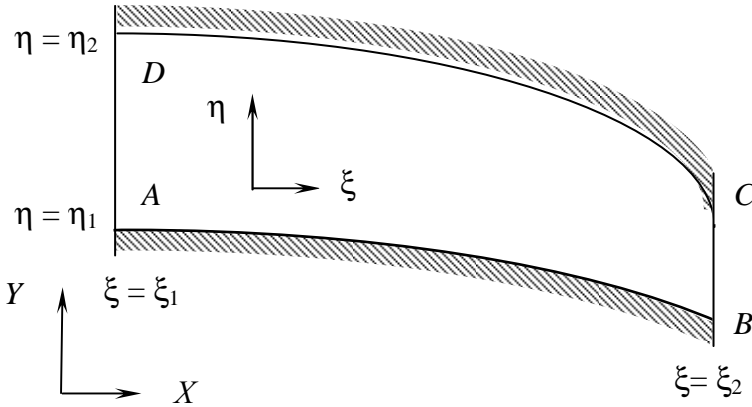


Рис.5.4. Двовимірний викривлений канал.

величини $x_{AB}(r_{AB})$ та $y_{AB}(r_{AB})$ визначаються безпосередньо через них; аналогічно для x_{DC} та y_{DC} .

Метод алгебраїчного відображення полягає тут у проведенні інтерполяції між зовнішніми межами області AB та DC, яка повністю визначає сітку у внутрішній області. Найпростіша інтерполяція може бути проведена за формулами

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (1-s)x_{AB}(r_{AB}) + s x_{DC}(r_{DC}), \\ y(\xi, \eta) &= (1-s)y_{AB}(r_{AB}) + s y_{DC}(r_{DC}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

де s визначається виразом (5.16). За рахунок функцій розтягу $s_{AD}, s_{BC}, r_{AB}, r_{DC}$ досягається суттєвий контроль загушення точок сітки всередині області.

Недоцільно використовувати інтерполяцію типу (5.17) тоді, коли сітка виявляється сильно деформованою в околі поверхні, за рахунок того, що відповідні точки на межі області (x_{AB}, y_{AB}) та (x_{DC}, y_{DC}) лежать на негладкій кривій. Для отримання сітки, що локально ортогональна межам AB та DC, замість (5.17) використовують формули :

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \mu_1(s)x_{AB}(r_{AB}) + \mu_2(s)x_{DC}(r_{DC}) + \\ &+ T_1 \mu_3(s)(dy_{AB}(r_{AB})/dr_{AB}) + T_2 \mu_4(s)(dy_{DC}(r_{DC})/dr_{DC}), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$y(\xi, \eta) = \mu_1(s) y_{AB}(r_{AB}) + \mu_2(s) y_{DC}(r_{DC}) + \\ + T_1 \mu_3(s) (dx_{AB}(r_{AB})/dr_{AB}) + T_2 \mu_4(s) (dx_{DC}(r_{DC})/dr_{DC}), \quad (5.19)$$

де

$$\mu_1(s) = 2s^3 - 3s^2 + 1, \quad \mu_2(s) = -2s^3 + 3s^2, \\ \mu_3(s) = s^3 - 2s^2 + s, \quad \mu_4(s) = s^3 - s^2. \quad (5.20)$$

Параметри T_1 й T_2 в (5.18)–(5.19) тут необхідні для контролю, наскільки глибоко в середину області необхідно поширити ортогональність. Зауважимо, що вибір дуже великих T_1 й T_2 може привести до неоднозначності відображення внутрішніх точок сітки.

5.2.3. Метод багатьох поверхонь

Додатковий контроль за розподілом внутрішніх точок сітки може бути введено шляхом розміщення між поверхнями АВ та DC проміжних поверхонь, на яких визначено залежності $x_i(r_j)$ та $y_i(r_j)$. Якщо тепер з'єднати відповідні точки (із однаковими значеннями r_j) сусідніх поверхонь, то тим самим ми визначимо деяку послідовність напрямів. Згідно методу багатьох поверхонь Ейземана [17] цю послідовність напрямів шляхом інтерполювання можна зробити такою, що побудована сітка буде відповідати заданим властивостям. При цьому ми маємо дві явні переваги:

- 1) Встановивши відповідність між точками сітки зовнішньої межевої поверхні, наприклад АВ, й найближчої проміжної поверхні, досить легко добитися локальної ортогональності сітки на межі області;
- 2) Розподіл сітки у напрямі s ми отримуємо в результаті інтегрування інтерполяції послідовності напрямів. Останнє забезпечує гладкий розподіл точок у напрямі s .

До того ж ми не вимагаємо, щоб сітка інтерполювала ці проміжні поверхні. І хоча число проміжних поверхонь не лімітується, на практиці достатній контроль можна отримати, використовуючи всього дві проміжні поверхні.

У двовимірному випадку розподіл точок на i -й поверхні задається у вигляді однієї векторної функції $\vec{Z}_i(r)$ із компонентами $x_i(r_j)$ та $y_i(r_j)$. Послідовність поверхонь зображена на рис.5.5. В загальному випадку розглядається $N-2$ проміжні поверхні. Параметр r визначає положення усіх точок поверхні. Однак різний вибір $\vec{Z}_i(r)$ дозволяє для кожного конкретного значення r визначити відносну орієнтацію точок (x_i, y_i) на кожній поверхні. Вважається, що точки (x_i, y_i) на різних поверхнях, що відповідають значенню $r = r_j$, з'єднуються відрізками прямих. Дотичні до відрізків прямих, що з'єднують поверхні, визначають родину векторних функцій $\vec{V}_i(r)$ при $i = 1, \dots, N-1$.

Дотичні вектор-функції $\vec{V}_i(r)$ пов'язані із поверхневими вектор-функціями $\vec{Z}_i(r)$ співвідношеннями

$$\vec{V}_i(r) = A_i [\vec{Z}_{i+1}(r) - \vec{Z}_i(r)], \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (9.21)$$

Параметри A_i у подальшому будуть визначені таким чином, щоб скінченно-різницеві інтерполяційні формули для сітки відповідали інтервалу $0 \leq s \leq 1$. Інтерполяція напівдискретної

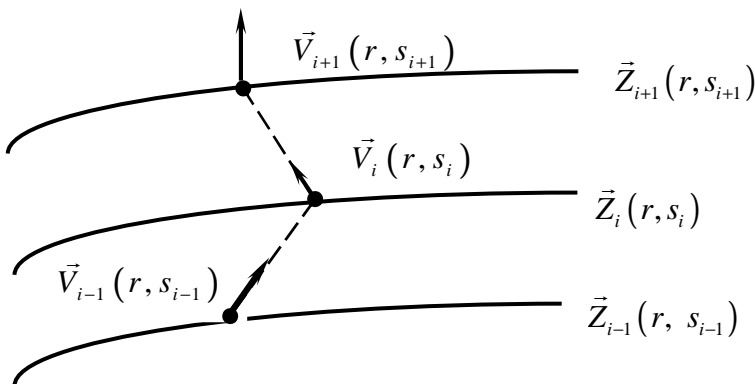


Рис. 5.5. Проміжні поверхні $\vec{Z}_i(r)$ та дотичні вектори $\vec{V}_i(r)$.

множини дотичних вектор-функцій $\vec{V}_i(r)$ визначає дотичну вектор-функцію $\vec{V}(r, s)$, що неперервна, як по r , так й по s :

$$\vec{V}(r, s) = \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i(s) \vec{V}_i(r) . \quad (5.22)$$

Тут $\psi_i(s)$ – інтерполяційні функції : $\psi_i(s_k) = 1, i = k$ та $\psi_i(s_k) = 0, i \neq k$. Крім того із побудови $\vec{V}_i(r)$ слідує

$$\frac{\partial \vec{Z}(r, s)}{\partial s} = \vec{V}(r, s) = \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i(s) \vec{V}_i(r) , \quad (5.23)$$

де $\vec{Z}(r, s)$ – неперервна вектор-функція, що дозволяє за заданими значеннями r та s (або ξ та η) побудувати сітку у фізичній площині. Отже, вектор-функцію $\vec{Z}(r, s)$ ми можемо отримати із (5.23) шляхом інтегрування на відріжку $0 \leq s \leq 1$, який відповідає на рис.5.4 інтервалу $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$. Таким чином, враховуючи (5.21), маємо

$$\vec{Z}(r, s) = \vec{Z}_1(r) + \sum_{i=1}^{N-1} A_i G_i(s) [\vec{Z}_{i+1}(r) - \vec{Z}_i(r)] , \quad (5.24)$$

де

$$G_i(s) = \int_0^s \psi_i(s') ds' . \quad (5.25)$$

Параметри A_i виберемо так, щоб $A_i G_i(1) = 1$. Тоді з (5.24) слідує $\vec{Z}(r, 1) = \vec{Z}_N(r)$, що й потрібно було довести. Остаточню маємо

$$\vec{Z}(r, s) = \vec{Z}_1(r) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{G_i(s)}{G_i(1)} [\vec{Z}_{i+1}(r) - \vec{Z}_i(r)] . \quad (5.26)$$

Останній вираз й представляє собою алгоритм методу багатьох поверхонь у загальному вигляді.

Тоді у найпростішому випадку при $N=2$ вираз (5.26) набуває вигляду

$$\vec{Z}(r, s) = \vec{Z}_1(r) + s [\vec{Z}_2(r) - \vec{Z}_1(r)] . \quad (5.27)$$

Очевидно, що у даному випадку проміжні поверхні відсутні й побудоване відображення еквівалентне найпростішій лінійній формулі (5.17) для методу двох поверхонь.

При $N=3$ вводиться одна проміжна поверхня й вираз (5.26), із врахуванням (5.29), набуває вигляду

$$\vec{Z}(r, s) = (1 - s^2) \vec{Z}_1(r) + 2s(1 - s) \vec{Z}_2(r) + s^2 \vec{Z}_3(r) . \quad (5.28)$$

Використання N поверхонь (враховуючи зовнішні межові поверхні) дає N ступенів свободи. Дві із цих ступенів свободи використовуються для відображення у напрямі η межових поверхонь, які визначені функціями $\vec{Z}_1(r)$ та $\vec{Z}_N(r)$. Ступені свободи, що залишилися, можуть бути використані для контролю поведінки внутрішніх точок сітки. Наприклад, у випадку однієї проміжної поверхні ($N=3$) можна побудувати сітку, яка буде локально ортогональна до однієї із зовнішніх межових поверхонь. Якщо ж проміжних поверхонь буде дві ($N=4$), можна побудувати сітку, що буде локально ортогональна до обох зовнішніх межових поверхонь.

Зауваження:

- *Інтерполяційні функції $\psi_i(s)$ в (5.25) повинні бути неперервно диференційовані до порядку на одиницю меншого, ніж потрібний порядок гладкості ліній сітки (неперервності похідних). Потрібні функції можуть бути представлені, наприклад, виразами*

$$\psi_i(s) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} (s - s_j) . \quad (5.29)$$

- *Внутрішні поверхні вводяться лише для контролю розподілу внутрішніх точок та форми координатних ліній. Дані поверхні не обов'язково повинні співпадати із лініями побудованої сітки.*
- *У тривимірному випадку крацій контроль розподілу внутрішніх точок сітки досягається, якщо інтерполяційні функції $\psi_i(s)$ мають глобальну, а не локальну природу. Тоді межові поверхні $\vec{Z}_1(r, t)$ та $\vec{Z}_N(r, t)$ – не обов'язково*

повинні бути площинами. Поверхня $\bar{Z}_1(r,t)$ може, наприклад, співпадати із поверхнею автомобіля. Останнє потребує вже існування неперервних других похідних, що, в свою чергу, потребує щоб $\psi_i \in C^1$.

5.2.4. Трансфінітна інтерполяція

Як у методі двох поверхонь, так й у методі багатьох поверхонь інтерполяція проводиться за одним напрямом (s або η). При цьому вважається, що за іншим напрямом (r або ξ) має місце неперервне відображення межових поверхонь $\eta = \eta_1$ та $\eta = \eta_2$.

За допомогою трансфінітної інтерполяції можна визначити неперервне відображення $\bar{Z}_{AB}(\xi, \eta_1)$ на AB , $\bar{Z}_{DC}(\xi, \eta_2)$ на DC й, крім того, $\bar{Z}_{AD}(\xi_1, \eta)$ на AD й $\bar{Z}_{BC}(\xi_2, \eta)$ на BC (Рис.5.4). При цьому всередині області вводиться інтерполяція, як по ξ (або r), так й по η (або s).

За методом трансфінітної інтерполяції для побудови сітки у фізичній площині, тобто для побудови перетворення $\bar{Z}(\xi, \eta)$, як й для методів двох та багатьох поверхонь, на першому кроці також вводяться параметричні координати (r, s) :

$$0 \leq r \leq 1 \text{ при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; \quad 0 \leq s \leq 1 \text{ при } \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2. \quad (5.30)$$

Введемо наступні інтерполяційні функції:

$$\varphi_j(r) = \delta_{jr}, \quad j = 0, 1; \quad \psi_k(s) = \delta_{ks}, \quad k = 0, 1. \quad (5.31)$$

Тут

$$\delta_{jr} = \begin{cases} 1, & j = r; \\ 0, & j \neq r; \end{cases} \quad \delta_{ks} = \begin{cases} 1, & k = s; \\ 0, & k \neq s. \end{cases} \quad (5.32)$$

Таким чином, $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = 0$ на AD ; $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1$ на BC ; $\psi_0 = 1, \psi_1 = 0$ на AB ; $\psi_0 = 0, \psi_1 = 1$ на CD .

Інтерполяція в напрямку r визначається виразом

$$\bar{Z}_r(r, s) = \varphi_0(r) \bar{Z}_{AD}(0, s) + \varphi_1(r) \bar{Z}_{BC}(1, s). \quad (5.33)$$

Тут $\vec{Z}_{AD}, \vec{Z}_{BC}$ – неперервні відображення між площинами (ξ, η) та (x, y) на межах $\xi = \xi_1, \xi = \xi_2$; $\vec{Z}_r(r, s)$ – неперервне відображення, що одержане в результаті інтерполяції між \vec{Z}_{AD} та \vec{Z}_{BC} для проміжних значень r . Аналогічно

$$\vec{Z}_s(r, s) = \psi_0(s)\vec{Z}_{AB}(r, 0) + \psi_1(s)\vec{Z}_{CD}(r, 1). \quad (5.34)$$

Тут \vec{Z}_r та \vec{Z}_s – відображення, що еквівалентні відповідним відображенням для методу багатьох поверхонь при $N=2$.

Для одержання двовимірної інтерполяції по аналогії із методом скінченних елементів введемо добуток інтерполяцій

$$\vec{Z}_{rs}(r, s) = \vec{Z}_r(r, s) * \vec{Z}_s(r, s). \quad (5.35)$$

Зауважимо, що введений таким чином добуток інтерполяцій узгоджується із межовими функціями $\vec{Z}_{AB}, \vec{Z}_{CD}$ та іншими тільки в чотирьох кутах $(0,0), (0,1), (1,0)$ та $(1,1)$. Для того щоб отримати функцію відображення, яка б була справедливою на усіх межах двовимірної області, необхідно побудувати інтерполяційні суми

$$\vec{Z}(r, s) = \vec{Z}_r(r, s) + \vec{Z}_s(r, s) - \vec{Z}_{rs}(r, s). \quad (5.36)$$

На практиці побудова виразу (5.36) здійснюється у два етапи. На першому етапі за формулою (5.33) будується $\vec{Z}_r(r, s)$. На другому етапі будується вже

$$\vec{Z}(r, s) = \vec{Z}_r(r, s) + \sum_{k=0}^1 [\vec{Z}_b(r, k) - \vec{Z}_r(r, k)] \psi_k(s), \quad (5.37)$$

де b визначає відповідну зовнішню межу області, AD або BC. Інтерполяційні функції φ_j та ψ_k для (5.37) вибираються по аналогії із методом багатьох поверхонь. Вибір

$$\varphi_0(r) = 1 - r, \varphi_1(r) = r, \psi_0(s) = 1 - s, \psi_1(s) = s \quad (5.38)$$

визначає білінійну трансфінітну інтерполяцію. У цьому випадку трансфінітна інтерполяція має ті ж самі переваги та недоліки, що й метод двох поверхонь, бо перетворення за формулами (5.33), (5.37) не можуть забезпечити локальну ортогональність сітки до зовнішніх межових поверхонь.

Зауваження:

- Наступним очевидним кроком, що суттєво покращує отриману в результаті трансфінітної інтерполяції сітку, по аналогії із методом багатьох поверхонь буде введення проміжних поверхонь. Але у цьому випадку необхідною умовою є вже неперервність параметричних похідних $\partial^n \bar{Z} / \partial s^n$ хоча б до $n=3$.
- Метод трансфінітної інтерполяції природним чином узагальнюється на випадок трьох змінних. При цьому до початкового алгоритму (5.33), (5.37) додається третій етап

$$\bar{Z}(r, s, t) = \bar{Z}_2(r, s, t) + \sum_{i=0}^1 [\bar{Z}_b(r, s, i) - \bar{Z}_2(r, s, t)] \omega_i(t), \quad (5.39)$$
 де $\bar{Z}_2(r, s, t)$ еквівалентна $\bar{Z}(r, s)$ в (5.37), а $\omega_i(t)$ – інтерполяційна функція, що аналогічна φ_j та ψ_k .
- Трансфінітна інтерполяція дозволяє використовувати за різними параметричними напрямками r, s, t інтерполяції різного порядку.

5.3. Методи, що засновані на розв'язанні диференціальних рівнянь

Методи побудови сіток, що засновані на розв'язанні диференціальних рівнянь, відносяться до числа самих розвинутих. При використанні диференціального рівняння для побудови сітки можна врахувати властивості розв'язку цього рівняння. Для побудови сіток найчастіше користуються рівняннями Лапласа або Пуассона.

Причину вибору рівняння Лапласа краще зрозуміти, якщо згадати крайову задачу про двовимірну стаціонарну теплопровідність із крайовими умовами Дірихле. Розв'язок цієї задачі дає гладкі (існують неперервні другі похідні) ізотерми, що не пересікаються. Число ізотерм в даній області можна збільшити, якщо додати у рівняння член із джерелом, тобто розглянути рівняння Пуассона. Якщо тепер брати ізотерми за

лінії сітки, останні будуть гладкими та неперервними. Змінюючи величину джерела можна керувати їх згущенням у потрібному місці.

За методом Томпсона [17] для побудови відображення сітки із розрахункової площини у фізичну площину користуються рівнянням Пуассона. Якщо задати початковий розподіл точок сітки (x, y) на межі області у фізичній площині, тоді розподіл внутрішніх вузлів сітки знаходиться як розв'язок системи

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta), \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta). \quad (5.40)$$

Тут ξ, η – координати в розрахунковій площині. Відомі функції P, Q використовують для керування розміщенням вузлів у середині області D . Отримати розв'язок (5.40) простіше, якщо в якості незалежних змінних взяти ξ, η . Вказані перетворення приводять в решті решт до системи двох еліптичних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2 (Px_{\xi} + Qx_{\eta}), \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2 (Py_{\xi} + Qy_{\eta}), \end{aligned} \quad (5.41)$$

де

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \quad \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \quad \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2,$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}.$$

Тепер, щоб отримати координати кожного вузла сітки у фізичній площині (x, y) , необхідно розв'язати систему (5.41) на рівномірній сітці в розрахунковій площині (ξ, η) . Для простих зв'язаних областей для системи (5.41) у всіх точках зовнішньої межі області можна задати крайові умови Дірихле. Такий метод побудови сітки має багато переваг. Сітка виходить гладенькою, перетворення однозначними, а межі складної форми легко обробляються. Звичайно метод має й свої недоліки. Головними з яких є труднощі із вибором P та Q . Крім того межі області можуть змінюватися з часом, а це вимагає після кожного кроку за часом перебудови сітки. Останнє може привести до дуже великих витрат комп'ютерного часу.

Розглянемо простий приклад використання методу Томпсона. Нехай кільце між двома концентричними колами відображається на прямокутник у розрахунковій площині. Внутрішнє коло нехай має радіус r_0 , а зовнішнє – r_1 . Розріжемо кільце вздовж радіуса $\theta = 0$ й відобразимо його внутрішність на прямокутник $[1, \xi_{\max}] \otimes [1, \eta_{\max}]$. Для побудови відображення спочатку скористаємося системою рівнянь Лапласа

$$\nabla^2 \xi = 0, \quad \nabla^2 \eta = 0, \quad (5.42)$$

тобто будемо вважати спочатку, що $P \equiv 0, Q \equiv 0$. Крайовими умовами для (5.42) будуть

$$\begin{aligned} r = r_0, \quad \eta = 1; \quad \theta = 0, \quad \xi = 1; \\ r = r_1, \quad \eta = \eta_{\max}; \quad \theta = 2\pi, \quad \xi = \xi_{\max}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Розв'язок крайової задачі (5.42)–(5.43) відомий й має вигляд

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad (5.44)$$

де

$$R = r_0 (r_1/r_0)^{(\eta-1)/(\eta_{\max}-1)}, \quad \varphi = 2\pi(\xi-1)/(\xi_{\max}-1). \quad (5.45)$$

Зауважимо, що у цьому випадку розв'язок не дає рівномірної сітки у фізичній площині. Щоб розмістити концентричні кола у фізичній площині на рівних відстанях потрібно задати $P \equiv 0, Q = 1/\eta$.

Як вже відмічалось раніше, головні труднощі використання методу Томпсона полягають у виборі правих частин рівняння (5.40), тобто виразів P, Q . Розглянемо метод завдання P та Q , що був запропонований Мідлкофом й Томасом [17]. Нехай потрібно розв'язати рівняння (5.40) із крайовими умовами Діріхле. Виберемо наступну форму запису P й Q :

$$\begin{aligned} P &= \varphi(\xi, \eta) (\xi_x^2 + \xi_y^2), \\ Q &= \psi(\xi, \eta) (\eta_x^2 + \eta_y^2), \end{aligned} \quad (5.46)$$

де функції φ, ψ будуть визначені нижче із крайових умов. Із врахуванням (5.46) вихідну систему рівнянь (5.41) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha(x_{\xi\xi} + \varphi x_{\xi}) - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma(x_{\eta\eta} + \psi x_{\eta}) &= 0, \\ \alpha(y_{\xi\xi} + \varphi y_{\xi}) - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma(y_{\eta\eta} + \psi y_{\eta}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Прирівнюючи вирази, що стоять у дужках, нулю на зовнішній межі області, визначимо функції φ та ψ . Таким чином, вздовж межі $\xi = \text{const}$ повинні виконуватися умови

$$\begin{aligned} x_{\eta\eta} + \psi x_{\eta} &= 0, \\ y_{\eta\eta} + \psi y_{\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

а вздовж межі $\eta = \text{const}$ – умови

$$\begin{aligned} x_{\xi\xi} + \varphi x_{\xi} &= 0, \\ y_{\xi\xi} + \varphi y_{\xi} &= 0, \end{aligned} \quad (5.49)$$

Оскільки функції x та y відомі у всіх точках зовнішньої межі області, то при центрально-різницевій апроксимації для усіх похідних, що входять до рівнянь (5.48) та (5.49), функції φ та ψ також можуть бути визначені. Необхідно відмітити, що φ та ψ визначаються із одного рівняння кожної пари (5.48) або (5.49). Як правило, якщо функцію φ знаходять з одного рівняння (5.49), то друге рівняння при цьому відмінне від нуля. Те ж саме справедливе й для функції ψ , яку визначають із одного з рівнянь системи (5.48). Використовуючи такий підхід, знаходять значення функцій φ та ψ на межі області. Тоді всередині області значення цих функцій можна одержати простою екстраполяцією. У монографії [17] є посилання на роботи, де розглядаються також інші методи контролю розподілу вузлів сітки.

Ортогональність координатних ліній побудованої сітки визначається співвідношенням $\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0$, що еквівалентне

$$\beta = x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} \equiv 0. \quad (5.50)$$

Очевидно, що у загальному випадку система (5.41) не забезпечує ортогональність координатних ліній. Виконання умови (5.50), очевидно, обмежує й вигляд функцій P та Q . Можна показати, що із (5.41) в ортогональній системі координат при довільній функції Q

$$P = J^{-1}(\alpha/J)_{\xi} ; \quad (5.51)$$

а при довільній функції P

$$Q = J^{-1}(\gamma/J)_{\eta} . \quad (5.52)$$

Таким чином, для забезпечення ортогональності одна із функцій повинна забезпечувати умову (5.51) або (5.52), а інша функція при цьому може вибиратися довільно. Таким чином, друга довільна функція може бути використана для керування розподілом вузлів сітки всередині області. В монографії [5] показано, як вибір керуючої функції може впливати на відносний розподіл вузлів сітки біля межі тіла. При цьому положення вузлів сітки на самих межах також визначаються у процесі розв'язку. Але вибір керуючих функцій при такому підході не є очевидним, бо не має чіткого геометричного змісту.

Більш продуктивним вважається запропонований авторами [5] підхід, за яким керуюча функція безпосередньо пов'язана із яким-небудь характерним параметром системи координат. Наприклад, виберемо в якості керуючої функції:

$$h(\xi, \eta) = \sqrt{\alpha/\gamma} = H_1/H_2 . \quad (5.53)$$

Тут H_i $i=1,2$ – коефіцієнти Ляме. А отже функція $h(\xi, \eta)$ характеризує відносне видовження клітинок сітки. Однак, у такому випадку ніяка із функцій P або Q не може бути довільною й умови (5.51) та (5.52) повинні виконуватися одночасно. Використовуючи співвідношення (5.51)-(5.53), систему (5.41) можна перетворити до вигляду

$$h x_{\xi\xi} - 2 \frac{\beta}{H} x_{\xi\eta} + h^{-1} x_{\eta\eta} = - \left(\frac{J}{H} \right)^2 \left(h_{\xi} x_{\xi} + (h^{-1})_{\eta} x_{\eta} \right), \quad (5.54)$$

$$h y_{\xi\xi} - 2 \frac{\beta}{H} y_{\xi\eta} + h^{-1} y_{\eta\eta} = - \left(\frac{J}{H} \right)^2 \left(h_{\xi} y_{\xi} + (h^{-1})_{\eta} y_{\eta} \right).$$

Тут $H=H_1H_2$. Зауважимо, що рівняння системи (5.54) включають доданки, які повинні зникати в ортогональних координатах. Іноді ці доданки залишають в якості демпфуючих членів, які не дозволяють зростати збуренням при грубому завданні початкового наближення. Однак, найчастіше використовується наступна більш компактна форма цих рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h^{-1} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h^{-1} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Розв'язання системи (5.55) у розрахунковій площині дає координати вузлів ортогональної сітки на фізичній площині.

Розглянемо реалізацію побудови ортогональної системи координат, що запропонована у роботі [5]. При побудові ортогональної системи координат із довільним розподілом вузлів на межі області необхідно задати правило знаходження керуючої функції h у всій області. При цьому функція h повинна бути погоджена із розподілом вузлових точок на межі області. Таким чином, знаходження керуючої функції h включається до ітераційного процесу знаходження внутрішніх вузлів сітки. Для забезпечення найбільшої гладкості розподілу функції h всередині області, поставимо для неї задачу Дірихле для рівняння Лапласа. Крайові умови для керуючої функції будуть визначатися у процесі розв'язання задачі із ітераційних значень координат та співвідношень, що забезпечують ортогональність координатних ліній на межі області:

$$h = y_{\eta} / x_{\xi} = -x_{\xi} / y_{\eta}. \quad (5.56)$$

Зауважимо, що співвідношення (5.56) витікають із рівняння (5.55) й вони майже тотожні тут умовам Коші–Рімана (повна тотожність досягається при $h \equiv 1$).

Але оскільки є тільки одна керуюча функція, неможливо здійснювати контроль за розподілом координатних ліній одночасно в обох напрямках. Крім того, при розрахунках течій поблизу стінки, необхідно враховувати поведінку параметрів течії в області, що знаходиться безпосередньо біля стінки. Тобто потрібне значне згущення вузлів сітки в таких областях. При цьому видовження клітинки розрахункової сітки може досягати величини $\sim 10^4$, а коефіцієнти рівняння (5.55) за оцінками авторів роботи [5] можуть відрізнятись у 10^8 разів. Очевидно, що розв'язання системи (5.55) у таких умовах не є раціональним. Альтернативою цьому є побудова сітки при величинах

коефіцієнтів одного порядку із наступним додаванням нових координатних ліній в районі стінки із використанням алгебраїчної інтерполяції потрібного порядку точності.

Враховуючи розглянуті вище зауваження, рівняння (5.55) розв'язують методом послідовної верхньої релаксації. Маємо наступну консервативну різницеву схему

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta \xi^2} \left[h_{i+1/2,j} x_{i+1,j} - (h_{i+1/2,j} + h_{i-1/2,j}) x_{ij} + h_{i-1/2,j} x_{i-1,j} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta \eta^2} \left[h_{i,j+1/2} x_{i,j+1} - (h_{i,j+1/2} + h_{i,j-1/2}) x_{ij} + h_{i,j-1/2} x_{i,j-1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Значення координати на k -й ітерації обчислюється за формулою

$$x_{ij}^k = x_{ij}^{k-1} - \omega (\widehat{x}_{ij}^k - x_{ij}^{k-1}).$$

де значення \widehat{x}_{ij}^k визначається із (5.57); ω – параметр релаксації, $1 \leq \omega \leq 2$. Аналогічно обчислюється друга координата у.

Різницєва апроксимація для рівняння Лапласа відносно керуючої функції записується на шаблоні “хрест”:

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{ij} + h_{i-1,j}}{\Delta \xi^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{ij} + h_{i,j-1}}{\Delta \eta^2} = 0.$$

Після перетворення й введення коефіцієнта релаксації ω значення керуючої функції на k -й ітерації обчислюється за формулою

$$h_{ij}^k = \frac{\omega}{2(1+b^2)} \left[h_{i+1,j}^{k-1} + h_{i-1,j}^{k-1} + b^2 (h_{i,j+1}^{k-1} + h_{i,j-1}^{k-1}) \right] + (1-\omega) h_{ij}^{k-1}, \quad (5.58)$$

де $b = \Delta \xi / \Delta \eta$. Крайові умови (5.56) для h також представляються в різницевій формі із використанням односторонніх та центральних різниць другого порядку точності.

Кожна ітерація за координатами супроводжується однією або декількома (для прискорення збіжності) ітераціями для керуючої функції. Ортогональність перевіряється не за абсолютним значенням коефіцієнта β , а за величиною кута схрещення координатних ліній $\varphi = \arctg(J/\beta)$.

В розглянутих авторами монографії [5] конкретних задачах ітераційний процес закінчувався, коли середнє за ансамблем вузлових точок відхилення від ортогональності становило менше ніж $0.2 \pm 0.5^\circ$. Для цього в усіх розглянутих випадках достатньо було сітки 40×40 , а максимальне локальне відхилення від ортогональності не перевищувало (в різницевому представленні) $1 \pm 2^\circ$.

Методи, що пов'язані із розв'язанням системи еліптичних рівнянь звичайно використовуються у випадку, коли необхідно побудувати сітку для внутрішньої задачі, або у випадку, коли для зовнішньої задачі відомі крайові умови далеко від тіла (примежовий шар). Якщо ж зовнішня межа області зарані не відома, використовують гіперболічні рівняння. Найбільш відомим тут є метод об'ємів, запропонований Стегером й Соренсоном [1]. За методом об'ємів поверхня тіла є внутрішньою межею області інтегрування, й система гіперболічних рівнянь розв'язується маршовим методом у напрямку від тіла, що не потребує завдання зовнішньої межі.

Відомо, що у двовимірному просторі якобіан перетворень є відношенням площ клітинок сітки у фізичній та розрахунковій площинах. Якщо вважати, що лінійні розміри клітинки сітки в розрахунковій площині тотожно дорівнюють одиниці ($\Delta\xi = \Delta\eta = 1$), то її площа також дорівнює одиниці. Тоді величина

$$x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta = J \quad (5.59)$$

буде площею клітинки у фізичній площині. Якщо тепер J вважати функцією координат (ξ, η) , то (5.59) буде одним із рівнянь контролю сітки у фізичній площині. Друге рівняння отримуємо із умови ортогональності ліній сітки до межі області у фізичній площині

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0 \quad (5.60)$$

Нелінійна система рівнянь (5.59), (5.60) лінеаризується розвиненням у ряд в околі деякого відомого стану (\tilde{x}, \tilde{y}) .
Приклад лінеаризації

$$\begin{aligned}
 x_{\xi} y_{\eta} &= (x + \tilde{x} - \tilde{x})_{\xi} (y + \tilde{y} - \tilde{y})_{\eta} = \\
 &= \tilde{y}_{\eta} x_{\xi} + \tilde{x}_{\xi} y_{\eta} - \tilde{x}_{\xi} \tilde{y}_{\eta} + O(\Delta^2)
 \end{aligned}
 \tag{5.61}$$

Якщо інші члени лінеаризувати аналогічно, маємо систему

$$\underline{A} \vec{w}_{\xi} + \underline{B} \vec{w}_{\eta} = \vec{f},
 \tag{5.62}$$

де

$$\begin{aligned}
 \underline{A} &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\eta} & \tilde{y}_{\eta} \\ \tilde{y}_{\eta} - \tilde{x}_{\eta} & \tilde{x}_{\eta} \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\xi} & \tilde{y}_{\xi} \\ -\tilde{y}_{\xi} & \tilde{x}_{\xi} \end{bmatrix}, \\
 \vec{f} &= \begin{bmatrix} 0 \\ J + \tilde{J} \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{5.63}$$

Система (5.62) гіперболічна у напрямку η , отже власні числа матриці $\underline{B}^{-1} \underline{A}$ повинні бути дійсними. Безпосередньо підраховуємо

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\tilde{x}_{\eta}^2 + \tilde{y}_{\eta}^2}{\tilde{x}_{\xi}^2 + \tilde{y}_{\xi}^2}},
 \tag{5.64}$$

що й доводить гіперболічність системи рівнянь (5.62) за координатою η . Отже систему (5.62) можна розв'язувати маршовим методом у напрямі η , поки $\tilde{x}_{\xi}^2 + \tilde{y}_{\xi}^2 \neq 0$.

Процедура побудови сітки буде наступною. Нехай поверхня $\eta = 0$ співпадає із поверхнею тіла й вздовж неї задається розподіл вузлів сітки. Далі визначається J з рівняння (5.56). Для цього в розрахунковій площині будують пряму, довжина якої дорівнює довжині тіла вздовж фізичної поверхні L , й зносять на цю пряму розподіл вузлів, який задано на поверхні тіла в фізичній площині. Потім проводять наступну лінію $\eta = \text{const}$, паралельно першій, й проводять перпендикулярно лінії сітки до перетину із нею. Величину J тепер легко визначити із площі клітинки сітки в розрахунковій площині. Далі систему (5.59)–(5.60) (або (5.62)) розв'язують одним із методів, що їх використовують для розв'язання систем гіперболічних рівнянь.

Зауваження:

- *Перевага розглянутого методу об'ємів в тому, що побудова сітки відбувається швидко й сітка завжди є ортогональною.*
- *Оскільки для методу об'ємів ми задаємо величину J , то гладеньку сітку вдається побудувати тільки при її вдалому підборі. І навпаки, невдалий вибір J може привести до зламів або до розповсюдження по сітці інформації про положення вузлів на межі області із перекрученням.*
- *Всі розриви даних, що мають місце на поверхні тіла, передаються углуб сітки.*

5.4. Адаптивні сітки

В попередніх розділах при розгляді методів побудови розрахункових сіток підкреслювалося, що сама процедура побудови сітки передуює числовому розв'язанню системи рівнянь в частинних похідних. При цьому вузли сітки розміщуються на фізичній площині до того, як стануть відомими подробиці розв'язку. Внаслідок цього сітка може виявитися для даної конкретної задачі побудованою не “найкращим чином”.

Термін “найкращим чином” тут потрібно пояснити. Для багатьох задач може бути цікавою побудова рухомої сітки, що адаптується до зміни форми області. Прикладом такої задачі може бути задача про надзвукове обтікання затупленого тіла. Як правило, в цій задачі стрибок виділяється як межа, що змінює з часом своє положення як для нестационарної задачі, так й для задачі на встановлення. У такому випадку для цих й багатьох подібних задач прийнятним вважається, що рух вузлів всередині області можна масштабувати згідно з рухом вузлів на межі області. В інших задачах виникає необхідність зміни положення вузлів сітки із метою одержання адекватного розділення поля течії як при рухомій, так і при нерухомій межі області. Це особливо вигідно тоді, коли можна заздалегідь згущувати вузли сітки в областях, де мають місце великі градієнти параметрів потоку. Причому у випадку, коли заздалегідь про розв'язок ми нічого не знаємо.

Але найкраще адаптувати сітку таким чином, щоб у результаті зменшувалася похибка числового розв'язку. Керуючись цією настановою, можна змінювати положення деяких вузлів сітки із метою отримання “найкращого” розв'язку, якщо при цьому відомо спосіб оцінки його похибки. Звичайно це знімає й питання про розділення сітки, бо там, де виникають помилки при використанні нерухомої сітки, й потребується краще розділення. Тому розглянемо приклади використання схем із адаптивними сітками, що використовуються для покращання розділення сітки й зменшення похибки розв'язку.

Звернемося знову до розв'язання простого одновимірного хвильового рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5.65)$$

Якщо перетворення координат задати наступним чином

$$\tau = t, \quad \xi = \xi(t, x), \quad (5.66)$$

в розрахунковій площині (τ, ξ) рівняння (5.65) буде мати вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (\xi_t + c \xi_x) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (5.67)$$

Звернемо увагу, що в рівнянні (5.67) коефіцієнти ξ_t, ξ_x задають зв'язок між фізичною й розрахунковою площинами. Якщо розв'язати (5.66) відносно x_t, x_ξ , маємо

$$x_\xi = 1/\xi_x, \quad x_t = -\xi_t/\xi_x. \quad (5.68)$$

Величини x_t, x_ξ – це, відповідно, швидкість руху вузлів сітки та відстань між вузлами у фізичному просторі.

Перший метод побудови адаптивних сіток полягає у тому, що задається положення вузлів після кожного кроку інтегрування за часом або після виконання декількох таких кроків. У відповідності із цим значення x або координати вузлів у фізичному просторі задаються там, де це потрібно, виходячи із критерію розділення сітки або будь-якого іншого. Оскільки відстань x_ξ тоді відома, то відома й величина ξ_x , а x_t знаходять через центральні різниці. Після чого знаходять ξ_t й,

таким чином, все потрібне для інтегрування рівняння (5.67), нам відоме. У цьому випадку швидкість руху вузлів сітки розраховується із запізненням.

Другий метод побудови адаптивних сіток полягає у попередньому визначенні закону, що задає швидкість руху вузлів сітки. Основним критерієм тут буде розділення сітки, похибка розв'язку або щось інше. Як правило ξ_t задають в розрахунковій площині. Якщо ж в довільний момент часу величина ξ_t відома, то швидкість руху вузлів сітки у фізичному просторі x_t знаходять із рівняння (5.68). Знаючи x_t , рівняння (5.68) можна інтегрувати сумісно із визначальним рівнянням, що дає нове положення вузлів сітки. Перевага другого методу в тому, що обчислення положення вузлів сітки та їх швидкості руху співпадають за часом.

5.4.1. Варіаційний метод

Ідея методу побудови адаптивних сіток із використанням варіаційного підходу належить Брекбілу та Зальцману [1]. За допомогою варіаційних принципів тут мінімізується функція, що включає міри гладкості, ортогональності та об'єму. При цьому за міру гладкості перетворення приймається інтеграл

$$I_s = \iint_D \left[(\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2 \right] dV. \quad (5.69)$$

Міра ортогональності визначається інтегралом

$$I_0 = \iint_D (\nabla \xi \cdot \nabla \eta)^2 J^3 dV, \quad (5.70)$$

а міра об'єму елементарної клітинки сітки визначається інтегралом

$$I_v = \iint_D \omega J dV, \quad (5.71)$$

де ω – деяка відома вагова функція.

Перетворення, що зв'яже область D на фізичній площині із областю CD на розрахунковій площині, визначається при

мінімізації лінійної комбінації вказаних вище інтегралів. Таку лінійну комбінацію із множниками λ_v, λ_0 можна записати у вигляді

$$I = I_s + \lambda_v I_v + \lambda_0 I_0 . \quad (5.72)$$

Тепер, для того щоб мінімізувати (5.72), необхідно скласти рівняння Ейлера–Лагранжа. Наприклад, при використанні у якості незалежних змінних координат у розрахунковій площині, для міри гладкості можна записати

$$I_s = \iint \left(\frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} \right) d\xi d\eta . \quad (5.73)$$

Система рівнянь Ейлера-Лагранжа для I_s має вигляд

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x_\xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x_\eta} \right) \left(\frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} \right) = 0, \quad (5.74)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y_\xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y_\eta} \right) \left(\frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} \right) = 0.$$

Після диференціювання система (5.74) набуває вигляду

$$A(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) - B(\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) = 0, \quad (5.75)$$

$$-B(\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) + C(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) = 0.$$

Тут $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ – відомі функції метричних коефіцієнтів.

Якщо $B^2 - AC \neq 0$, то розв’язком для (5.75) буде

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0, \quad (5.76)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0.$$

Зауважимо, що рівняння (5.76) також визначають деяке відображення, але при їх побудові була використана тільки міра гладкості (5.73). Якщо ж мінімізувати загальний функціонал (5.72), то кожний із інтегралів I_v, I_0 також дасть свій внесок у рівняння Ейлера-Лагранжа, тому отримане відображення буде мати набагато більш складну структуру ніж (5.76).

Зауваження:

- *Варіаційний підхід надає процедури побудови адаптивної сітки надійний математичний фундамент, але приводить до необхідності додаткового розв'язання великої системи рівнянь у частинних похідних..*
- *Якщо оптимізується лінійна комбінація інтегралів типу (5.72), необхідно також добирати й коефіцієнти λ .*

5.4.2. Метод еквірозподілу

У багатьох випадках використання адаптивних сіток потрібно рухати вузли сітки в одному напрямі. Розглянемо мінімізацію функціонала I_v , який для одновимірного випадку визначається рівнянням

$$I_v = \int_D \omega x_\xi dx. \quad (5.77)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа для цього функціоналу буде мати вигляд

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial \xi_x} \right) \left[\frac{\omega(x)}{\xi_x} \right] = 0. \quad (5.78)$$

Інтегралом для (5.78) буде

$$\omega x_\xi^2 = C \quad \text{або} \quad \sqrt{\omega} x_\xi = \omega_1 x_\xi = C_1. \quad (5.79)$$

Із (5.79) зрозуміло, чому назва методу – метод еквірозподілу: вздовж ліній сітки добуток кроку сітки й вагової функції постійний. Нехай $x=0$ при $\xi=0$ й $x=x_{\max}$ при $\xi=\xi_{\max}$. Інтегруючи рівняння (5.79), можна отримати або координату в розрахунковій площині

$$\xi = \xi_{\max} \int_0^x \omega_1 dx \Big/ \int_0^{x_{\max}} \omega_1 dx, \quad (5.80)$$

або координату у фізичній площині

$$x = x_{\max} \int_0^\xi (1/\omega_1) d\xi \Big/ \int_0^{\xi_{\max}} (1/\omega_1) d\xi. \quad (5.81)$$

Рівняння (5.80) використовують в якості закону побудови адаптивної сітки в задачах горіння й тепло- та масообміну. Вагову функцію тут вибирають у вигляді лінійної комбінації похідних деякої залежної змінної. Наприклад, якщо залежна змінна – це температура, маємо

$$\omega_1 = 1 + a \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right| + b \left| \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|, \quad (5.82)$$

й положення вузлів сітки у фізичній площині визначається із рівняння (5.81). Вибір вагової функції у вигляді

$$\omega_1 = 1 + a |\chi|, \quad (5.83)$$

де χ – кривина поверхні розв'язку відносно залежної змінної, яка нас цікавить, забезпечує автоматичне згущення вузлів сітки в областях великих градієнтів. Густиною згущення вузлів в областях великих кривин керують змінюючи константу a .

5.4.3. Методи із завданням швидкості вузлів сітки

Хайндман та Спенсер [1], опираючись на ідею еквірозподілу, запропонували новий метод побудови сітки із завданням швидкості руху її вузлів. Для цього із рівняння (5.79) повторним диференціюванням по ξ отримують диференціальне рівняння другого порядку

$$x_{\xi\xi\xi} + \frac{(\omega_1)_\xi x_\xi}{\omega_1} = 0, \quad (5.84)$$

якому задовольняє закон побудови сітки. Щоб визначити розподіл вузлів сітки, це стаціонарне рівняння необхідно розв'язати на деякому шарі за часом. Згідно запропонованого підходу диференціюють за часом рівняння (5.84) й одержаний вираз розв'язують відносно швидкості руху вузлів сітки x_τ . У нашому прикладі x_τ знаходиться із рівняння

$$(x_\tau)_{\xi\xi\xi} + \frac{(\omega_1)_\xi}{\omega_1} (x_\tau)_\xi = -\frac{x_\xi}{\omega_1} \left((\omega_1)_{\xi\tau} - \frac{(\omega_1)_\xi (\omega_1)_\tau}{\omega_1} \right). \quad (5.85)$$

Один із методів побудови сітки на наступному шарі за часом – просте інтегрування швидкості руху її вузлів. У цьому випадку стаціонарне рівняння (5.84) використовують лише для отримання рівняння (5.85). Однак процес побудови адаптивної сітки, який засновано на такому алгоритмі, починає релаксувати. Тому краще розв’язок (5.85) використати в якості початкового наближення положень вузлів сітки при розв’язанні стаціонарного рівняння (5.84). Вказана процедура забезпечує коректність значень швидкостей вузлів сітки. І в той же час стаціонарне рівняння, що задає закон побудови сітки, буде теж задоволене коректно. Головна складність полягає тут у підходящих оцінках похідної за часом від вагової функції $(\omega_1)_\tau$.

І найпростіше це зробити за допомогою числового алгоритму.

Рай та Андерсон [1] запропонували інший метод, згідно якого швидкість руху вузлів сітки регулюється шляхом обчислення локальної помилки у числовому розв’язку. Ідея методу також полягає у згущенні вузлів сітки в областях із великими похибками й, навпаки, в розрідженні їх в областях, де похибки числового розв’язку малі. Автори вважають, що чим більша відстань між двома точками, тим менше їх розв’язки впливають один на одного. Запропоноване рівняння для швидкості руху вузлів сітки в одновимірному випадку має вигляд

$$(\xi_r)_i = k \left(\sum_{j=i+1}^n \frac{|e|_j - |e|_{av}}{r_{ij}^n} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|e|_j - |e|_{av}}{r_{ij}^n} \right), \quad (5.86)$$

$$(x_\tau)_i = -(\xi_r)_i / (\xi_x)_i,$$

де e – деяка міра локальної похибки, r_{ij}^n – відстань між вузлами i та j , піднесена до n -го ступеня, а нижній індекс av означає осереднення по всім вузлам сітки. Константа k в цьому рівнянні довільна, бо не існує фізичного закону, що зв’язував би швидкість руху вузлів й похибку. Головна складність тут полягає у визначенні міри локальної похибки. Автори пропонують за міру похибки взяти головний член похибки апроксимації у диференціальному наближенні скінченно-

різницевої схеми. Причому, для того щоб мати краще розділення, пропонується замість локальної похибки використовувати її градієнт. Виходячи із останнього можна вважати, що рівняння (5.86) задає метод рівномірного розподілу похибки вздовж сітки. При цьому обчислену швидкість вузлів сітки можна інтерпретувати як головний член числового розв'язання на сітці, що задовольняє деякому закону еквірозподілу.

Метод побудови розрахункової сітки шляхом завдання швидкості руху вузлів легко поширити на випадок двох вимірів. Якщо для ξ_t використати (5.86), а для η_t – аналогічний вираз, причому похідна η_t буде залежати тільки від похідних залежних змінних за напрямом η , то для перетворення координат у вигляді

$$t = \tau, \quad \xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t)$$

маємо

$$\begin{aligned} x_\tau &= (\xi_y \eta_t - \eta_y \xi_t) / J, \quad y_\tau = (\eta_x \xi_t - \xi_x \eta_t) / J, \\ J &= \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Рівняння (5.87) дозволяють обчислювати швидкість руху вузлів сітки у фізичній площині.

В цьому розділі ми розглянули побудову сіток, що адаптовані до розв'язання задачі механіки суцільних середовищ. Числове розв'язання рівнянь в частинних похідних на адаптованих сітках приводить до суттєвого покращення точності. Крім запропонованих методів використовують й інші підходи. Ті ідеї, що їх використовують при побудові схем із адаптивними сітками, обмежені лише можливостями людської уяви, й будь-яка схема, що приводить до покращення точності результатів, є прийнятною.

5.5. Числова реалізація алгебраїчного відображення

Для області, що зображена на рис.5.5, зовнішніми межовими поверхнями є продовжена вниз за потоком поверхня тонкого

осесиметричного тіла ABC та віддалена межа FED. Між цими двома межами конформним відображенням можна побудувати половину С-сітки (очевидно, що повна С-сітка будується дзеркальним відображенням відносно осі Ox) [17].

Розглянемо побудову локально ортогональної сітки за методом багатьох поверхонь. Як вже відмічалось вище, процедура побудови сітки поділяється на два етапи. На першому етапі визначається положення точок на усіх межах області. Для контролю розподілу точок на межах використовуються одновимірні функції розтягу типу (5.14).

На другому етапі безпосередньо за методом багатьох поверхонь будуються внутрішні точки сітки. Вводяться дві проміжні поверхні Z_2 та Z_3 , по одній біля кожної із межових поверхонь ABC та FED. Параметричну відповідність між точками поверхонь Z_2 та Z_3 й точками сусідніх межових поверхонь встановлюють таким чином, щоб лінії сітки пересікали межові поверхні під прямим кутом, для чого використовується розглянута у роботі [17] процедура побудови ортогональних проєкцій.

Зображена на рис. 5.5 поверхня AB є аеродинамічним профілем сімейства $NACA-00't'$. Тут t – двозначне число, що визначає товщину профілю в процентах. Профілі сімейства $NACA-00't'$ задаються рівнянням

$$y = t(a_1 x^{1/2} + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4), \quad (5.88)$$

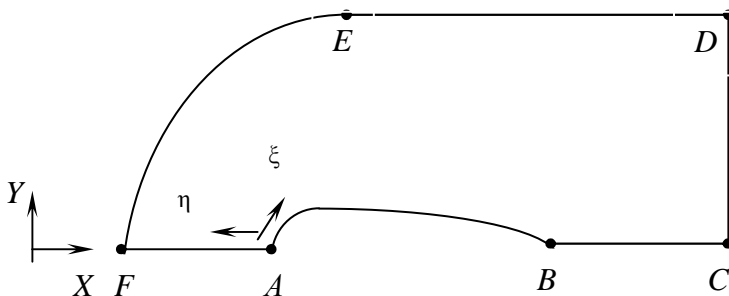


Рис.5.5. Розрахункова область при алгебраїчному відображенні.

де

$$a_1 = 1.4779155, a_2 = -0.624424, a_3 = -1.727016,$$

$$a_4 = 1.384087, a_5 = -0.489769.$$

Вважається, що $0 \leq \xi \leq 1$ на фізичній площині ABC й збільшенню j на одиницю відповідає збільшення ξ на $\Delta\xi$.

Щоб зв'язати фізичні координати (x, y) поверхні ABC із розрахунковою координатою ξ , необхідно ввести міру поверхні r . На поверхні AB міра поверхні r_{AB} визначається рівнянням

$$r_{AB} = \int_0^{x_A} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx, \quad (5.89)$$

де dy/dx визначається із рівняння (5.88). Рівняння (5.89) розв'язується за числовим алгоритмом, в результаті чого знаходять набір значень r_{AB} як функцію x_A , де x_A – локальна координата профілю, $0 \leq x_A \leq 1$. Повна довжина поверхні між точками A та C визначається, як $r_{AC, \max} = r_{AB} + x_C - x_B$. Функція розтягу (5.14) дає нормалізований параметр r_{AC}^n у вигляді:

$$0 \leq r_{AC}^n \leq 1 \text{ при } 0 \leq \xi \leq 1. \quad (5.90)$$

Таким чином, фізична поверхнева координата $r_{AC, D}$ обчислюється за формулою

$$r_{AC, D} = r_{AC}^n \cdot r_{AC, \max}. \quad (5.91)$$

При $r_{AC, D} < r_{AB}$ фізичні координати $\{x(j), y(j)\}$ сегменту межі області AB визначаються інтерполяцією r_{AB} та x_A із використанням (5.88) для визначення відповідних значень y . При $r_{AC, D} > r_{AB}$ координати поверхні отримують шляхом лінійної інтерполяції $x_B \leq x \leq x_C$. Фізичні координати поверхні ABC позначимо через XS(1,j) та YS(1,j), бо це компоненти x та y поверхні Z_1 .

Аналогічно при інтерполяції нормалізованої поверхневої координати r_{FD}^n отримуємо значення поверхневої координати $r_{FD, D}$ й фізичні координати XS(4,j) та YS(4,j) примежової

поверхні FED. Поверхнева координата $r_{FD,D}$ тут відраховується вздовж дуги кола FE й прямої лінії ED.

Положення точок на AF та CD (Рис.5.5) залежить від параметрів розтягу s_{AF} та s_{CD} . В той же час фізичні значення координат точок сітки на AF та CD визначаються в процесі виконання алгоритму методу багатьох поверхонь.

В розглянутому випадку в методі багатьох поверхонь використовують чотири поверхні. Прімежовим поверхням ABC та FED відповідають поверхні Z_1 та Z_4 . Вихідні проміжні поверхні Z_2 та Z_3 отримуємо шляхом лінійної інтерполяції між Z_1 та Z_4 за формулами

$$Z_2^i = Z_1 + s_2(Z_4 - Z_1), \quad Z_3^i = Z_1 + s_3(Z_4 - Z_1). \quad (5.92)$$

На цьому етапі поверхні Z_2 та Z_3 вірно розташовані у фізичному просторі, однак коректної відповідності точок за координатою r ще немає. Якщо алгоритм багатьох поверхонь (5.93) використати із проміжними поверхнями Z_2^i та Z_3^i , то η -лінії отриманої сітки будуть просто прямими, які з'єднують точки із однаковими значеннями індексу j на ABC та FED. А, отже, залежність Z_2 та Z_3 від r повинна бути замінена таким чином, щоб лінії, що з'єднують точки на Z_2 й відповідні точки на Z_1 (точки із тими ж значеннями r), були б ортогональними до Z_1 . А лінії, що з'єднують точки на Z_3 й відповідні точки на Z_4 , були б ортогональними до Z_4 . Оскільки функція $Z_1(r)$ відома, достатньо провести через кожную точку сітки XS(1,j) та YS(1,j) пряму лінію, що ортогональна до Z_1 , до перетину із Z_2 . Точками перетину будуть XS(2,j) та YS(2,j). Причому, оскільки фіксація вузла j визначає r на Z_1 , точки XS(2,j) та YS(2,j) мають ті ж самі значення r й ортогональні до Z_1 в точках XS(1,j) та YS(1,j). Точки сітки XS(3,j) та YS(3,j) будуються таким чином, щоб вони були ортогональними до поверхні Z_4 в точках XS(4,j) та YS(4,j).

При заданих координатах на поверхнях від Z_1 до Z_4 алгоритм багатьох поверхонь у випадку чотирьох поверхонь записується у вигляді

$$x(j,k) = \sum_{L=1}^4 \Theta(L) XS(L,j), \quad y(j,k) = \sum_{L=1}^4 \Theta(L) YS(L,j), \quad (5.93)$$

де

$$\begin{aligned}\Theta(1) &= (1-s)^2(1-a_1s), \quad \Theta(2) = s(1-s)^2(a_1+2), \\ \Theta(3) &= s^2(1-s)^2(a_2+2), \quad \Theta(4) = s^2(1-a_2[1-s]), \quad (5.94) \\ a_1 &= 2/(3a_w-1), \quad a_2 = 2/(2-3a_w), \quad a_w = 0.5 \div 0.6\end{aligned}$$

У формулах (5.93) та (5.94) s – нормалізований параметр у напрямі η . Для кращого контролю можна провести лінійну інтерполяцію s у напрямку ξ :

$$s = s_{AF}(k) + \xi(j)[s_{CD}(k) - s_{AF}(k)]. \quad (5.95)$$

Зауваження:

- Для контролю ортогональності сітки поблизу меж області рекомендують вибрати $s_2=0.100$, $s_3=0.900$.
- Значення параметру a_w , приведені в (5.94), як правило використовуються при $P_{AC}=P_{FD}=P_{AF}=P_{CD}=1.0$.

Задачі.

1. Складіть програму за запропонованим алгоритмом методу багатьох поверхонь.
2. Модифікуйте запропонований алгоритм методу багатьох поверхонь таким чином, щоб за ним можна було б отримати розв'язок у випадку двох ($N=2$) й трьох ($N=3$) поверхонь. У випадку $N=3$ потрібно забезпечити ортогональність сітки тільки до поверхні ABC. Порівняйте одержані сітки з сіткою із п.1.
3. Введіть у програму із п.1 трансфінітну інтерполяцію на всіх поверхнях.
4. Нехай фізична площа визначається на інтервалі $0 \leq x \leq 1$, а верхня й нижня межі області задаються рівняннями $y_{up} = 1 + 0.2 \sin \pi x$, $y_{low} = 0.1 \cos \pi x$, відповідно. Отримайте перетворення, яке приводить до рівномірного розподілу вузлів сітки між верхньою та нижньою межами області.

5. Нехай в задачі 4. інтервал зміни x задається двома лініями $x = \text{const}$. Якщо ліва й права межі $y_L = 10x$, $y_R = (x-1)$, відповідно, а верхня та нижня межі залишаються тими ж, знайти у цьому випадку нормалізуюче перетворення, що приводить до рівномірної сітки у фізичній площині.
6. Модифікуйте програму із п.1 для побудови сітки між еліпсоїдом та прямокутником із округленими кутами (див.Рис.3-1).

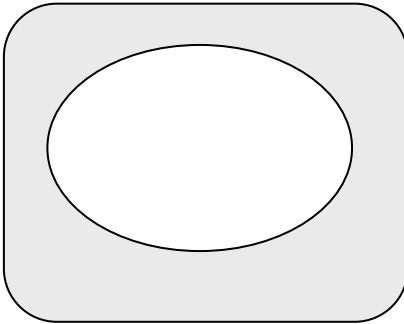


Рис.3-1.

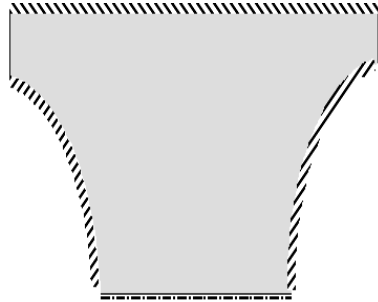


Рис.3-2.

7. Модифікуйте програму із п.1 для побудови сітки між сусідніми тільцями у капілярі (див.Рис.3-2).
8. Використовуючи алгоритм (5.55)-(5.58), побудувати сітку для плоского каналу, що має закруглене коліно під кутом 60° , 90° або 120° .

Додаток А

МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

Перед тим як перейти до розгляду безпосередньо моделей турбулентності познайомимося з основними властивостями турбулентного руху рідини. Розглянуті вище приклади рухів в'язкої рідини в основному відносилися до числа ламінарих рухів. Траєкторії часток, лінії течії, поля швидкостей й тисків у цих рухах мали цілком визначений, “регулярний” характер. Виявлялася “регулярність” у тому, що загальна картина ламинарих рухів та їх деталі досить добре описувалися рівняннями Нав'є-Стокса при відповідних, також “регулярних”, початкових і крайових умовах. Прикладом такого руху є пуазейлевий рух рідини у трубі, теоретично розраховані характеристики якого (парабола швидкості, формули витрати й опору), блискуче відповідають дослідними даним. До подібних задач можна віднести також рух мастила у вузькій щілині між валом і цапфою підшипника, рух рідини у ламинарному примежовому шарі й т.і. Наявність у реальних умовах різноманітних, найчастіше малих збурень випадкового характеру може або незначно змінити розглянутий рух рідини, що говорить про його стійкість стосовно малих збурень, або повністю спотворити рух, що говорить про його нестійкість.

При стійкому русі виниклі випадково або введені навмисно у потік малі збурення не розвиваються із часом, а, навпаки, загасають, не впливаючи помітно на процеси, що відбуваються в потоці рідини. На противагу цьому, при нестійкому русі малі спочатку збурення ростуть, істотно змінюють характер первісного руху й сприяють його перехід або до нового стійкого руху, якщо такий розв'язок є серед можливих розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса, або до деякого хаотичного руху, що утворений рідкими масами, які нерегулярно рухаються й взаємодіють між собою. Остання форма руху широко розповсюджена в природі й технічних пристроях й носить назву турбулентного руху.

Турбулентним є рух повітря у атмосфері, рух води в морях, океанах, а також у ріках, каналах й технічних пристроях.

Цікавість до таких течій пов'язана, у першу чергу, з суттєво більшими гідродинамічними втратами при турбулентній течії, порівнюючи із гідродинамічними втратами при ламінарній течії для добре обтічних тіл, і, навпаки, зменшенням гідродинамічного опору при турбулентній течії в околі тіл, що обтікається з відривом струменя від поверхні тіла за рахунок зменшення зони відриву [36]. Але практична направленість досліджень турбулентних рухів рідини пов'язана не тільки із конкретними технічними процесами, але із необхідністю пізнання глобальних фізичних процесів, які мають місце при русі величезних мас в атмосфері та глибинах океанів, що приводить до змін погоди і клімату на земній кулі.

Історично перші наукові спостереження турбулентного руху води у круглій трубі відносяться до 1883 року. Це досліди О. Рейнольдса [61]. При підвищенні швидкості руху води ним було помічено, що на спочатку прямолінійну за формою підфарбовану й добре видиму струмину, починають накладатися хвилеподібні збурення. При подальшому збільшенні швидкості руху число таких хвиль та їх амплітуда зростає доти, поки, нарешті, струмина не розіб'ється на більш дрібні струмки, рух яких вже має нерегулярний хаотичний характер. Описана картина дозволяє говорити про перехід за рахунок втрати стійкості від ламінарної на початку форми руху до турбулентної його форми.

О. Рейнольдс вперше виявив, що перехід ламінарного руху до турбулентного обумовлюється досягненням критичного значення деяким безрозмірним критерієм $\mathbf{Re} = U_{сер} L / \nu$, що носить тепер його ім'я: $\mathbf{Re}_{кр}^- \leq \mathbf{Re} \leq \mathbf{Re}_{кр}^+$, де $\mathbf{Re}_{кр}^+ \approx 1,3 \cdot 10^4$, $\mathbf{Re}_{кр}^- \approx 2000$. Вище $\mathbf{Re}_{кр}^+$ течія завжди турбулентна. Нижче $\mathbf{Re}_{кр}^-$ течія стійка до будь-яких збурень і залишається ламінарною. Верхнє критичне число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр}^+$ дуже залежить від геометрії течії (зростає у конфузорах й зменшується у дифузорах).

Математична теорія стійкості ламінарних течій у наш час досить розроблена. Подобиці бажаючи можуть знайти, наприклад, в монографії Хінце [45].

А-1. Рівняння Рейнольдса

Для опису турбулентного руху О. Рейнольдс [61] запропонував представити компоненти швидкостей й тиску у вигляді суми осереднених за часом значень та їх пульсацій

$$u = \bar{u} + u', v = \bar{v} + v', w = \bar{w} + w, p = \bar{p} + p' \quad (\text{A-1})$$

Під осередненим значенням $\bar{\varphi}$ розуміють звичайне інтегральне середнє за часом t за проміжок часу, що називають періодом осереднення T :

$$\bar{\varphi}(x, y, z; t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi(x, y, z; \tau) d\tau \quad (\text{A-2})$$

При цьому передбачається, що завжди існує період T , що досить великий у порівнянні з періодом турбулентних пульсацій, але малий у порівнянні з характерним для осередненого руху інтервалом часу (період коливального процесу, час проходження тілом своєї довжини й т.і.). При цьому повторне осереднення не приводить до будь-яких помітних змін, тобто

$$\overline{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi} \quad (\text{A-3})$$

Визначення. Якщо в результаті осереднення (А-2), що проведене в даній точці в різні моменти часу, будемо мати ті ж самі $\bar{\varphi}$, то такий осереднений рух називається стаціонарним, а сам турбулентний рух – квазістаціонарним.

Припущення (А-3) рівносильне

$$\bar{\varphi}' = \bar{\varphi} - \overline{\bar{\varphi}} = 0. \quad (\text{A-4})$$

Необхідно пам'ятати наступні прості правила осереднення :

$$\overline{\bar{\varphi}\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi} \quad (\text{A-5})$$

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \quad (\text{A-6})$$

Визначення. Величина $\overline{\phi'\psi'}$, що отримана в результаті осереднення ϕ' й ψ' , називається одноточковою (у знак того, що значення ϕ' та ψ' беруться в одній і тій же точці) подвійною кореляцією, а коефіцієнт

$$R = \frac{\overline{\phi'\psi'}}{\sqrt{\overline{\phi'^2}}\sqrt{\overline{\psi'^2}}} \quad (\text{A-7})$$

– коефіцієнтом одноточної кореляції. Якщо $R = \pm 1$ маємо повний, детермінований зв'язок явищ, що описують ϕ' та ψ' , причому знак “–” говорить про протилежні фази коливань. Значення $R \equiv 0$ відповідає статистичній незалежності явищ.

Скористаємося тензорним записом системи рівнянь Нав'є-Стокса

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (\text{A-8})$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{A-9})$$

де по j є підсумовування.

Підставляючи у (A-8) та (A-9) замість актуальних швидкостей та тисків суму осереднених й пульсаційних :

$$v_i = U_i + v'_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad p = \bar{p} + p', \quad (\text{A-10})$$

маємо після осереднення

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{-\rho v'_i v'_j} \right), \quad (\text{A-11})$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{A-12})$$

З виразу (A-12) також слідує, що

$$\frac{\partial v'_j}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{A-13})$$

Рівняння (A-11) є рівняннями переносу перших моментів із загальної нескінченної системи рівнянь переносу моментів характеристик потоку Фрідмана-Келлера, яка по суті є

аналітичним записом теорії турбулентності [45]. Причому у своєму складі система (А-11) містить “моменти другого порядку” $\overline{v_i' v_j'}$, які роблять її незамкненою.

Проблема замикання рівнянь переносу є дотепер самою складною, оскільки рівняння переносу турбулентних характеристик другого порядку містить у своєму складі “моменти третього порядку” $\overline{v_i' v_j' v_k'}$, $\overline{p' v_i' v_j'}$ й т.і.

Звернемо увагу, що реологічний закон для турбулентних течій, який має вигляд

$$\tau_{ij} = -\rho \delta_{ij} + 2\mu_0 d_{ij} + \left(-\overline{\rho v_i' v_j'} \right), \quad (\text{A-14})$$

відрізняється від відповідного йому реологічного закону Ньютона наявністю додаткового тензора турбулентних напруг

$$\Pi \approx \begin{pmatrix} -\overline{\rho v_1'^2} & -\overline{\rho v_1' v_2'} & -\overline{\rho v_1' v_3'} \\ -\overline{\rho v_2' v_1'} & -\overline{\rho v_2'^2} & -\overline{\rho v_2' v_3'} \\ -\overline{\rho v_3' v_1'} & -\overline{\rho v_3' v_2'} & -\overline{\rho v_3'^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A-15})$$

Той же прийом осереднення, що й при виводі системи рівнянь (А-11), але застосований до рівняння переносу тепла при ламінарному русі, дозволяє одержати рівняння поширення тепла при турбулентному русі :

$$-\rho c_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho c_p \overline{v_j' T} \right) \quad (\text{A-16})$$

Тут актуальна температура $T = \bar{T} + T'$. Фізичні константи ρ , c_p , λ вважаються постійними.

Трохи більш складним є вивід системи рівнянь для “моментів другого порядку” або одноточкових кореляцій пульсаційних компонент швидкості. Звернемося до рівнянь Рейнольдса в тензорному записі (А-8) й підставимо знову замість актуальних швидкостей суму осереднених й пульсаційних. Після групування членів маємо :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho v'_i v'_j} \right)}_{\equiv 0 \text{ (рівняння Рейнольдса)}} + \quad (\text{A-16a})$$

$$\begin{aligned} &+ \rho \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i v'_j + U_j v'_i) + \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho v'_i v'_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho v'_i v'_j}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-16б})$$

Замінімо у (16б) вільний індекс $i \rightarrow n$:

$$\begin{aligned} &+ \rho \frac{\partial v'_n}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (U_n v'_j + U_j v'_n) + \frac{\partial p'}{\partial x_n} - \mu \frac{\partial^2 v'_n}{\partial x_j \partial x_j} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho v'_n v'_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho v'_n v'_j}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-16в})$$

Помножимо (16б) на v'_n , а (16в) на v'_i й додамо, беручи до уваги, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_i v'_n U_j) &= U_j \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_i v'_n), \\ v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_n v'_j) + v'_n \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_i v'_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_i v'_n v'_j). \end{aligned}$$

Якщо тепер розділити отриманий вираз на ρ , в результаті маємо :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (v'_i v'_n) + U_j \frac{\partial (v'_i v'_n)}{\partial x_j} &= - \left(v'_i v'_j \frac{\partial U_n}{\partial x_j} + v'_n v'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \\ - 2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_n}{\partial x_j} + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial v'_n}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_n} \right) &- \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_i v'_n v'_j) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (v'_n) - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_n} (v'_i p') + \nu \frac{\partial^2 (v'_i v'_n)}{\partial x_j \partial x_j} + v'_n \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i v'_j}) &+ v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_n v'_j}). \end{aligned} \quad (\text{A-16г})$$

Після проведення осереднення в рівняннях (A-16г) й очевидних заміні

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{v'_n p'}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij} \overline{v'_n p'}), \quad \frac{\partial}{\partial x_n}(\overline{v'_i p'}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij} \overline{v'_i p'}),$$

отримаємо рівняння для других моментів у вигляді :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v'_i v'_n}) + U_j \frac{\partial(\overline{v'_i v'_n})}{\partial x_j} = & - \underbrace{\left(\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial U_n}{\partial x_j} + \overline{v'_n v'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)}_{(I)} - \\ & - 2\nu \underbrace{\frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v'_n}}{\partial x_j}}_{(II)} + \underbrace{\frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{v'_n}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_n} \right)}_{(III)} - \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left(\overline{v'_i v'_n v'_j} \right)}_{(IV)} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left(\frac{\delta_{ij}}{\rho} \overline{v'_n p'} + \frac{\delta_{nj}}{\rho} \overline{v'_i p'} \right)}_{(IV)} - \nu \underbrace{\frac{\partial^2(\overline{v'_i v'_n})}{\partial x_j \partial x_j}}_{(IV)}. \end{aligned} \quad (A-17)$$

Ліворуч маємо локальну похідну за часом й перенос осередненим потоком (адвекція у сумі). Праворуч : (I) – породження; (II) – швидкість дисипації; (III) – кореляція тензора швидкостей деформації для пульсаційних швидкостей з пульсаціями тиску; (IV) – дифузія.

Введемо кінетичну енергію пульсаційного руху

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}. \quad (A-18)$$

Покладемо в (A-17) $n = i$, звідки

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = & - 2 \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - 2\nu \left(\frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} \right)^2 - \\ & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v'_i v'_i v'_j} \right) - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v'_j p'} \right)}_{(IV)} + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} \\ & = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v'_j \left(\frac{v'_i v'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (A-19)$$

В результаті маємо вже без двійок :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - v \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v'_j \left(\frac{v'_i v'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) \right] + v \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{A-20})$$

Очевидно, що вирази (А-17) (або (А-20)) мають згадуваний вище недолік: крім шуканих, вони містять ще й додаткові характеристики турбулентності (потрійні кореляції пульсацій швидкості, кореляції пульсацій швидкості з пульсаціями тиску й т.і.). Всі подальші пояснення зводяться до виразу складних кореляцій, що входять до рівняння переносу, через більш прості, щодо яких легше висовувати додаткові припущення, що замикають задачу.

А-2. Деякі відомості про внутрішню структуру турбулентних потоків

Турбулентний потік має складну вихрову структуру, що містить різні за формою й розмірами вихрові утворення: дрібномасштабні (ДМ) та великомасштабні (ВМ) вихрові системи.

У процесі переносу кількості руху й кінетичної енергії пульсацій рейнольдсових напруг та ін. характеристик турбулентності беруть участь вихори різних масштабів. Особливе місце займає ВМ або “великі” вихори. Вивченню їх взаємодії присвячено новий розділ теорії турбулентності – теорія когерентних структур (КС). КС утворюються в турбулентних струменях, “слідах” за тілами, що обтікаються потоком рідини або газу, в “пристінних” областях примезових шарів, а також у природі (торнадо, смерчі, циклони).

До числа основних етапів у житті вихорів відносять генерацію (породження), конvekцію (адвекцію), дифузію й, в останній стадії виродження, дисипацію (перехід у тепло). З основними етапами життя життя вихорів й пов’язані назви окремих членів системи рівнянь (А-17).

У процесі турбулентної дифузії відбувається розпад більших вихорів на дрібніші, для яких, однак, інерційні ефекти ще переважають над в'язкими. Ті вихори, що перебувають в “інерційному” масштабі, беруть участь у конвекції й турбулентній дифузії, але на них ефекти в'язкості ще не діють. Загальний процес деградації вихорів приводить, в кінці кінців, до дрібних вихорів малого масштабу, на які вже діє в'язка дифузія, за якою слідує в'язка дисипація кінетичної енергії цих вихорів у тепло. Наведена “каскадна схема” дещо примітивно, але досить вірно описує загальні тенденції розвитку й загасання турбулентних структур. За сучасними поглядами “каскадна схема” на платівці має вигляд :

В'язкі напруги \rightarrow *Полоси + вихори* + $\rho v_1'v_2' \rightarrow$
 \rightarrow *Вибухи + підковоподібні вихори* + $\rho v_1'v_2' \rightarrow$ *Сміття* \rightarrow
 \rightarrow *Великі вихори* \rightarrow *Дисипація за Колмогоровим* \rightarrow *Тепло*

Звернемо увагу, що “ефекти пам'яті” у турбулентних потоках можливі лише завдяки вихорам великого й частково “інерційного” масштабів, вихори малого масштабу, що швидко вгасають, не здатні скільки-небудь довго зберігати й переносити вниз за потоком інформацію про збурення, які виникли в областях потоку, розташованих вище за течією.

Кінетична енергія великих вихорів має порядок питомої енергії місцевого осередненого руху. Потім, зі зменшенням масштабу вихорів, зменшується їх енергія, яка стає дуже малою у дрібних вихорів.

Кількісне визначення “масштабу турбулентності” тісно пов'язане зі статистичною зв'язаністю пульсацій швидкості. Мірою цього зв'язку слугує коефіцієнт кореляції (КК) між пульсаціями швидкості (А-7). Визначивши просторовий розподіл КК, ми маємо можливість оцінити просторову структуру турбулентних збурень й можемо знайти на кожному етапі руйнування вихору його масштаб.

Експерименти з виявлення внутрішньої структури турбулентних потоків : фото-кінозйомка, теплова анемометрія, лазерна доплерівська анемометрія, акустичні вимірювання, – дозволяють безпосередньо реєструвати середньоквадратичні

значення пульсацій швидкості, середні значення їх добутоків в одній (одноточкова кореляція) або в різних точках потоку (двоточкова кореляція).

А-3. Перенос імпульсу, тепла й домішок у турбулентних потоках

А-3.1. Гіпотеза Бусинеска

Запропоноване Рейнольдсом виділення осередненої частини із загального турбулентного руху не виключає подальшого розгляду процесів, які дійсно мають там місце. Лінії течії осередненого руху непроникні для нього, але проникні для пульсаційного руху, який переносить із шару в шар крізь лінії течії осередненого руху кількість руху (імпульс), тепло, речовину й т.і. Цей перенос аналогічний молекулярному переносу, який має місце у випадку ламінарних течій, і, отже, за аналогією з ламінарним тертям, визначає турбулентне тертя між шарами в осередненому русі, тепло-масоперенос між ними та інші явища турбулентного переносу. Основна відмінність турбулентного переносу від ламінарного (молекулярного) в тому, що носіями у турбулентному переносі виступають не окремі молекули, але скінченні об'єми рідини (“молі”). Відповідно, сам процес турбулентного переносу називають “молярним”.

З погляду молярного переносу процес виділення осередненого руху можна уявити собі у такий спосіб: осереднений турбулентний рух, з хаотичними лініями течії й траєкторіями, замінюється деяким упорядкованим шаруватим рухом. Цей рух вже має стратифіковану природу¹, причому стратифікація може проводитися також за густиною, за температурою, а також за іншими характеристиками потоків. Розглянемо сталий осереднений турбулентний рух у плоскій трубі (див. Рис. А-1). Лінії течії цього руху паралельні осі труби, тобто маємо стратифікацію за швидкістю. При сталому русі у

¹ Термін узято із метеорології.

кожному перетині труби маємо однаковий профіль осередненої швидкості $U_1(x_2)$. Лінії течії пульсаційного руху перетинають лінії течії осередненого руху, проникають з одного шару в інший, перемішуючи при цьому рідину, крізь площадки, що розташовані уздовж ліній течії осередненого руху. Таке перемішування супроводжується переносом через межу шарів імпульсу, енергії й ін. параметрів руху, а також домішок (диму, пилу або крапельок води у повітрі, мулу або піску у воді), що знаходяться у рідині.

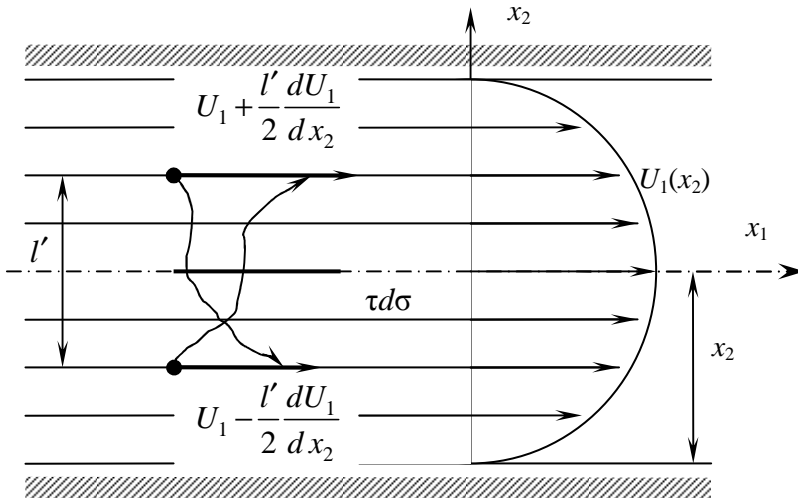


Рис.А-1. Схема турбулентної течії у трубі.

Перенос імпульсу є причиною турбулентного тертя між шарами, перенос тепла обумовлює теплопровідність, перенос домішок – турбулентну дифузію домішок. Механізми цих переносів однакові.

В 1877 р. Бусинеск, опираючись на аналогію між ламінаричним рухом в'язкої рідини та її турбулентним осередненим рухом, запропонував для дотичного напруження між шарами осередненого руху формулу, що подібна формулі Ньютона для ламинарного руху [51]

$$\tau_t = A \frac{dU_1}{dx_2}. \quad (\text{A-20})$$

Тут A – коефіцієнт турбулентного перемішування.

Відмітимо, однак, що незважаючи на те, що коефіцієнт турбулентного перемішування A збігається за розмірністю з коефіцієнтом динамічної в'язкості μ , за величиною він суттєво більший. Відомий історичний курйоз, коли Річардсон порівняв коефіцієнт A для повітря із коефіцієнтом μ для цукрового сиропу. Пояснення для цього дав Лоренц, який вказав, що турбулентна в'язкість, на відміну від звичайної молекулярної в'язкості, обумовлена не переносом крізь рухомі шари окремих молекул рідини, але скінченних об'ємів (“молей”) цієї рідини.

Виведемо загальну формулу для турбулентного тертя (див. Рис. А-1). Розглянемо елементарну площинку $d\sigma = dx_1 \cdot 1$, що розташована паралельно лінії течії осередненого руху на відстані x_2 від стінки. Через цю площинку пульсаційний рух переносить зі швидкістю переносу v'_2 (поперечна складова) імпульси суміжних шарів, які розташовані на відстані $l'/2$ від неї. Позначимо дотичну турбулентну напругу $\tau_t = \pi_{12} = \pi_{21}$ й визначимо її як середню за часом проекцію на вісь Ox_1 віднесеного до одиниці площі осередненого турбулентного руху через площинку, що розташована вздовж лінії течії.

Оскільки $\tau_t d\sigma$ – це сила тертя, що прикладена у напрямку від верхнього шару, де осереднені швидкості більше, до нижнього, вважаємо кількість руху, що прийшла з верхнього шару до нижнього позитивним (“+”), і, навпаки, негативним (“-”), кількість руху, що перейшла з нижнього шару у верхній. Згідно Рис. А-1, після осереднення за часом, маємо

$$\tau_t d\sigma = \rho v'_2 \left[U_1 \left(x_2 + \frac{l'}{2} \right) - U_1 \left(x_2 - \frac{l'}{2} \right) \right] d\sigma \quad (\text{A-21})$$

Замінюючи згідно формули Тейлора $U_1 \left(x_2 \pm \frac{l'}{2} \right) \Rightarrow U_1 \pm \frac{l'}{2} \frac{dU_1}{dx_2}$,

після очевидних скорочень отримуємо

$$\tau_t \equiv -\rho \overline{v_1' v_2'} = \rho \overline{v_2' l'} \frac{dU_1}{dx_2}. \quad (\text{A-22})$$

Порівнюючи (A-22) з (A-20), маємо :

$$A = \rho \overline{v_2' l'} \quad (\text{A-23})$$

Введемо припущення про локальну ізотропію механізму турбулентного перемішування. Тоді A – скалярна величина.

Припустимо також, що подібно до ламінарного випадку

$$\underline{\underline{\Pi}} = a \underline{\underline{\tilde{S}}} + b \underline{\underline{E}}, \quad (\text{A-24})$$

де a, b – скаляри, що залежать від структури турбулентного руху.

Порівнюючи (A-24) з (A-20), маємо

$$a = 2A. \quad (\text{A-25})$$

Прирівнюючи перші (лінійні) інваріанти тензорів ліворуч й праворуч в (A-24), маємо

$$-\rho (\overline{v_1'^2} + \overline{v_2'^2} + \overline{v_3'^2}) = a \cdot \underbrace{\text{div } \vec{U}}_{=0} + 3b.$$

Звідки

$$b = -\frac{1}{3} \rho (\overline{v_1'^2} + \overline{v_2'^2} + \overline{v_3'^2}) = -\frac{2}{3} \rho k, \quad (\text{A-26})$$

де $k = \frac{1}{2} \overline{v_i' v_i'}$. Покладемо $A = \mu_t$, $\frac{A}{\rho} = \nu_t$. Тоді узагальнена

гіпотеза Бусинеска має вигляд [36]:

$$\underline{\underline{\Pi}} = 2\mu_t \underline{\underline{\tilde{S}}} - \frac{2}{3} \rho k \underline{\underline{E}}. \quad (\text{A-27})$$

Або у прямокутній декартовій системі координат

$$\pi_{ij} = -\rho \overline{v_i' v_j'} = 2\mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \rho (\overline{v_m' v_m'}) \delta_{ij}. \quad (\text{A-28})$$

Формула Бусинеска у своєму початковому вигляді (A-20), а також й в узагальненій формі (A-27) або (A-28) набула широкого застосування в гідромеханіці, метеорології, океанології й ін. областях. Причому, як відмічав ще сам Бусинеск [51], на відміну від ламінарного режиму течії, де

$\mu_t \equiv \text{const}$, величина A змінюється у нормальному перетині до потоку.

Формула Бусинеска історично була першим великим кроком на шляху пошуку гіпотез замикання рівнянь Рейнольдса, яка дозволила виразити шість невідомих компонент тензора Рейнольдса через одну невідому μ_t . У той же час вона заслуговує низку критичних зауважень. По-перше, формула Бусинеска, як і формула Ньютона, є локальною у тому розумінні, що вона визначає значення рейнольдсових напруг у даній точці потоку в залежності від значення осереднених швидкостей деформації в околі цієї ж точки, тобто не містить інформації про вплив на визначальні співвідношення областей потоку, що не належать безпосередньому околу цієї точки. Така обмеженість позбавляє формулу Бусинеска важливих застосувань у несиметричних потоках (стінки різної шорсткості) й у процесах з “спадкоємним” зв’язком (слід за тілом). У цих випадках формула Бусинеска відображає лише загальну тенденцію процесів, але малоприматна для їх кількісного опису.

А-3.2. Теорія “шляху змішування” Прандтля

Теорія переносу імпульсу, тепла й речовини була створена Л. Прандтлем в 1925 році [60]. Виходячи з аналогії між переносом скінченних за об’ємом вихрових мас у турбулентному русі й переносом молекул у ламінарному русі, Прандтль запропонував просту й наочну модель переносу субстанції між шарами осередненого турбулентного руху :

- *Вихрова маса, що виділена в даному “початковому” шарі як деякий індивідуальний об’єм рідини, переміщується в процесі обміну в нормальному до осередненого потоку напрямку й рухається в цьому напрямку доти, поки не змішається з деяким суміжним шаром, втративши при цьому свою індивідуальність – відмінність у поздовжній осередненій швидкості або в імпульсі (останнє при постійній швидкості тотожне).*

На перший погляд відмінності від гіпотези Бусинеска незначні. Нове в моделі Прандтля в тому, що вихрова маса в процесі переміщення з початкового шару в кінцевий зберігає свою відмінність в імпульсі й тільки в момент змішування відразу втрачає свою індивідуальність, викликаючи тим самим у цьому кінцевому шарі збурення осередненої швидкості. Це збурення приймається пропорційним $\sim l'$ – відстані між початковим й кінцевим шарами й градієнту осередненої швидкості у напрямку, що перпендикулярний цим шарам, $\Delta \bar{v}_1 \sim l' dU_1/dx_2$. За Прандтлем дане збурення є причиною виникнення пульсаційної швидкості із проєкціями v'_1, v'_2 , так що

$$v'_1 \sim l' \frac{dU_1}{dx_2}, \quad v'_2 \sim l' \frac{dU_1}{dx_2}. \quad (\text{A-29})$$

Із формули Прандтля для найпростішої зсувної течії отримуємо

$$\tau_t = -\rho \overline{v'_1 v'_2} = -\rho \bar{l}^2 \left(\frac{dU_1}{dx_2} \right)^2 \quad (\text{A-30})$$

Якщо ввести осереднену довжину $l^2 \equiv \bar{l}^2$, то остаточно маємо

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{dU_1}{dx_2} \right)^2. \quad (\text{A-31})$$

Тут вважається, що τ_t прикладене до верхньої межі шару з боку більших швидкостей ($\tau_t > 0$). Величину l Прандтль назвав “шляхом змішування”. Щоб не робити застережень про знак τ_t , формулу (A-31) звичайно записується у вигляді

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{dU_1}{dx_2} \right| \cdot \frac{dU_1}{dx_2}. \quad (\text{A-32})$$

Зауваження:

- *Теорія “шляху змішування” непридатна в областях, де $dU_1/dx_2 \equiv 0$, тобто при наближенні до осі труби або до області зовнішнього потоку для примежового шару, тому ще Л. Прандтль запропонував замінити в (A-32) першу похідну більше старшою похідною, що, однак, не мало досі практичного розвитку.*

А-3.3. “Вільна” турбулентність

Переходячи до безпосереднього застосування напівемпіричних методів розрахунку турбулентних потоків, виділимо два особливі класи течій :

- 1) вільні, що розвиваються вдалині від твердих поверхонь й підкоряються закономірностям вільної турбулентності;
- 2) пристінні, що розвиваються поблизу твердих поверхонь й описуються законами пристінної турбулентності.

Особливістю вільної турбулентності є відсутність у течіях цього класу взаємодії між молекулярними й молярними процесами. При цьому маємо справу із чисто турбулентними течіями з лише молярними процесами переносу, що значно спрощує розрахунки.

До задач першого класу відносять усі можливі випадки поширення турбулентних струменів у нерухомій рідині, а також у супутніх потоках, при утворенні сліду за тілом й т.і. Більшість задач, що відносяться до “вільної” турбулентності, допускають “автомодельний” розв’язок, тобто зводяться до звичайних диференціальних рівнянь.

А-3.4. Плоскі турбулентні примежові шари. Моделі першого порядку

Проблема розрахунку турбулентних примежових шарів є однією з найбільш складних у сучасній гідромеханіці. Причому справа тут не лише в об’ємі обчислень – при сучасному рівні розвитку комп’ютерів це вже не є перешкодою, – скільки в принципових труднощах постановки самої задачі. Відсутність дотепер повної ясності з механізмом турбулентності, що проявляється в незамкненості системи рівнянь Рейнольдса, а також у недостатній обґрунтованості існуючих додаткових співвідношень, які призначені для замикання цих рівнянь переносу. В той же час найбільш розвинутою зараз є саме теорія турбулентності для примежового шару. Теорія турбулентності

для прилежового шару, а також задач, які до неї зводяться, й будуть в подальшому розглядатися.

Для вже розглянутої нами системи рівнянь (А-11)–(А-12) відносно моментів першого порядку умови замикання будуються на основі теорії шляху змішування Прандтля з виправленням Ван-Дрїста [42], який ввів додаткове демпфування у внутрішній підобласті турбулентного прилежового шару, й гіпотезою Клаузера – для зовнішньої підобласті турбулентного прилежового шару [36].

Запишемо систему рівнянь Рейнольдса для моментів 1-го порядку у наближенні прилежового шару

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{v_1'v_2'} \right), \quad (\text{А-33})$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0. \quad (\text{А-34})$$

Тут згідно гіпотези Прандтля

$$-\overline{v_1'v_2'} = \nu_t \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \quad (\text{А-35})$$

де

$$\nu_t = \begin{cases} \kappa^2 x_2^2 D(x_2) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \text{при } 0 < U_1/U_0 < 0.7, \\ kU_0 \delta^* \gamma & \text{при } 0.7 \leq U_1/U_0 \leq 1, \end{cases} \quad (\text{А-36})$$

$$D(x_2) = \left[1 - \exp(-y^+/A^+) \right] \quad (\text{А-37})$$

– формула Ван-Дрїста; $y^+ = x_2 v_*/\nu$, $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, $A^+ = 26$ – константа Ван-Дрїста; k – множник у формулі Клаузера ($k \approx 0,0168$), $\kappa = 0,4$ – константа Кармана; U_0 – швидкість на зовнішній межі прилежового шару;

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U_1}{U_0} \right) dx_2 \quad (\text{А-38})$$

– товщина витіснення;

$$\gamma = \left[1 + 5,5(x_2/\delta)^b \right]^{-1}, \quad b \approx 6. \quad (\text{А-39})$$

Розглянута двошарова модель турбулентного примежового шару (А-35)–(А-39) має суттєвий недолік: розрахована за цією моделлю крива залежності $v_f(x_2)$ містить злам в точці, де $U_1 / U_0 = 0.7$. Остання обставина може виявитися важливою при числовому розв'язанні системи рівнянь турбулентного примежового шару. Особливо при використанні неявної схеми з її подальшим розв'язанням методом прогонки Томаса.

Тому при реальних розрахунках бажано користуватися одношаровими моделями турбулентного примежового шару [1]. Отже, нехай згідно гіпотези Прандтля

$$v_T = \left(\ell / \delta_{0,995} \right)^2 \left| \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right|, \quad (\text{A-40})$$

де безрозмірний “шлях змішування” Прандтля

$$\frac{\ell}{\delta_{0,995}} = \begin{cases} \kappa D(x_2) \left(x_2 / \delta_{0,995} \right), & x_2 / \delta_{0,995} < 0,1; \\ \kappa D(x_2) \left(x_2 / \delta_{0,995} \right) - \\ -1,53506 \left(x_2 / \delta_{0,995} - 0,1 \right)^2 + \\ +2,75625 \left(x_2 / \delta_{0,995} - 0,1 \right)^3 - \\ -1,88425 \left(x_2 / \delta_{0,995} - 0,1 \right)^4, & 0,1 \leq x_2 / \delta_{0,995} \leq 0,6; \\ 0,089, & x_2 / \delta_{0,995} > 0,6. \end{cases} \quad (\text{A-41})$$

Тут $\delta_{0,995} \equiv \delta(x_1)$ – товщина примежового шару. Інші параметри й константи співпадають із такими для двошарової моделі. Відзначимо, що використання одношарової моделі примежового шару дозволяє не піклуватися ні про зшивку окремих виразів в (А-41), ні про гладкість кривої $v_f(x_2)$.

Зауваження:

- При числовому розв'язанні рівнянь турбулентного примежового шару для коректного розділення профілю швидкості необхідно першу точку по вертикалі помістити у в'язкій підшарок. Останнє означає, що для нестисливої

рідини перша точка повинна знаходитися від стінки на відстані $y^+ < 5$, а для стисливої рідини $-y^+ < 2$.

A-3.5. Тривимірні турбулентні примежові шари. Моделі першого порядку

Методи числового розв'язання системи рівнянь для тривимірних турбулентних примежових шарів необхідні при аеродинамічному проектуванні. І, в першу чергу, при проектуванні стріловидних крил та оптимізації їх аеродинамічних характеристик. В той же час розуміння механізму турбулентного переносу імпульсу для тривимірних течій суттєво гірше ніж для двовимірних. Тому найчастіше для моделювання турбулентних течій у тривимірному випадку використовують моделі турбулентності, які вже розроблені для двовимірних течій, але із використанням додаткових гіпотез.

Розглянемо рівняння тривимірного турбулентного примежового шару в декартовій системі координат :

Рівняння руху вздовж основного напрямку потоку

$$U_j \frac{\partial U_1}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{v_1'v_2'} \right); \quad (\text{A-42})$$

Рівняння вторинного руху впоперек основного напрямку потоку

$$U_j \frac{\partial U_3}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \overline{v_2'v_3'} \right); \quad (\text{A-43})$$

Рівняння руху перпендикулярно стінці й напрямку основного потоку

$$\partial p / \partial x_2 = 0; \quad (\text{A-44})$$

Рівняння нерозривності

$$\partial U_j / \partial x_j = 0. \quad (\text{A-45})$$

Тут по індексу $j=1,2,3$ має місце підсумування. Недіагональні компоненти тензора Рейнольдса мають вигляд

$$-\overline{v'_1 v'_2} = v_x \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, -\overline{v'_2 v'_3} = v_z \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, v_x = v_t, v_z = \Theta v_t, \quad (\text{A-46})$$

$$v_T = (\ell/\delta_{0,995})^2 \left\{ (\partial U_1/\partial x_2)^2 + \Theta \cdot (\partial U_3/\partial x_2)^2 \right\}^{1/2}. \quad (\text{A-47})$$

Тут безрозмірний “шлях змішування” Прандтля $\ell/\delta_{0,995}$ визначається із виразу (A-41), а Θ – це відношення коефіцієнтів турбулентної в’язкості для вторинної й основної течії, яке характеризує ступінь анізотропії потоку ($\Theta \leq 1$). Інші позначення ті ж самі, що й для двовимірного випадку. Тільки напруження на стінці визначається із виразу :

$$\tau_w = (\mu + \rho v_t) \left\{ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{A-48})$$

Згідно деяким експериментальним даним [39] найменше значення відношення коефіцієнтів турбулентної в’язкості ($\Theta \approx 0.5$) досягається у початковій зоні прилежового шару із найменшими вторинними течіями, а далі підвищується до $\Theta \approx 0.7$. В той же час відомі вдалі числові розрахунки тривимірних турбулентних течій в прилежовому шарі [39], коли в початковому перерізі відношення коефіцієнтів турбулентної в’язкості покладалося рівним одиниці, а згодом зменшувалося до $\Theta \approx 0.7$.

З розрахунками тривимірних турбулентних прилежових шарів можна ознайомитися в роботах Арналя та Кустея [27] Болдуїна [31, 49], Краузе [34, 35], Сміта [42], Госмана [53] та інших авторів.

A-3.6. Моделі другого порядку для плоских турбулентних прилежових шарів

A-3.6.1. “ $k-L$ ” - модель турбулентності

Скористаємося рівнянням переносу енергії пульсаційного руху $k = 0.5 \overline{v'_i v'_i}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - v \left(\overline{\frac{\partial v'_j}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v'_j \left(\frac{v'_i v'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right] + v \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (\text{A-49})$$

До рівняння (A-47) додамо систему рівнянь Рейнольдса для осередненої швидкості

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i v'_j}). \quad (\text{A-50})$$

Система рівнянь (A-47)-(A-48) містить занадто багато невідомих, а, отже, для її розв'язання необхідні додаткові замикаючі гіпотези. Для двовимірних течій найбільш плідними виявилися наступні співвідношення :

- Гіпотеза Прандтля про “шлях змішування”

$$-\overline{v'_1 v'_2} = v_t \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \quad (\text{A-51})$$

- Гіпотеза локально ізотропної турбулентності Колмогорова

$$v_t = c_\mu^* k^{1/2} L, \quad (\text{A-52})$$

- а також деякі додаткові співвідношення, що їх звичайно приписують Вірку [49]

$$\varepsilon \equiv v \left(\overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} \right) = \frac{c_D^* k^{3/2}}{L}, \quad (\text{A-53})$$

$$-\left[\overline{v'_j \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{v_i'^2}{2} \right)} \right] = \frac{v_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_i}. \quad (\text{A-54})$$

Тут L – характерний лінійний масштаб турбулентності, в якості якого може бути прийнятий, наприклад, лінійний масштаб Нікурадзе для труб радіуса R :

$$L = x_2 \left[1 - 1,1(x_2/R) + 0,6(x_2/R)^2 + 0,15(x_2/R)^3 \right]. \quad (\text{A-55})$$

Зараз замість виразів (А-49)–(А-53) звичайно використовують модель Вольфштейна [35], у якій константи c_μ^* і c_D^* залежать від турбулентного числа Рейнольдса

$$R_k = \frac{k^{3/2}L}{\nu}. \quad (\text{А-56})$$

Згідно моделі Вольфштейна c_μ^* і c_D^* в околі стінки описуються із використанням коефіцієнтів згасання, подібних запропонованим Ван-Дрістом [35]:

$$\nu_t = c_\mu k^{1/2}L \left[1 - \exp(-A_\mu R_k) \right], \quad (\text{А-57})$$

$$\varepsilon = \frac{c_D k^{3/2}}{L(1 - \exp(-A_D R_k))}. \quad (\text{А-58})$$

Константи в моделі Вольфштейна мають значення:

$$c_D = 0,416; c_\mu = 0,22; A_D = 0,23; A_\mu = 0,016; \sigma_k = 1,53. \quad (\text{А-59})$$

Звернемо увагу, що вирази (А-52) та (А-54) записано для великих чисел Рейнольдса. Якщо їх узагальнити на випадок менших чисел Рейнольдса, коли дисипація пропорційна енергії вихору, для довільного R_k маємо наступний вираз:

$$\varepsilon = \frac{c_D k^{3/2}}{L} + \frac{2\nu k}{L^2}. \quad (\text{А-60})$$

Додатковий член в (А-60) мало впливає на кількісні результати. Більше того, більшість експериментальних даних досить добре описуються першим членом у виразі (А-60). Блейк [49] пояснює присутність другого члена у виразі (А-60) необхідністю врахування не тільки первинних, але й вторинних пульсацій поблизу стінки, а Ламлі [35] – необхідністю врахування існування частково занурених у в'язкий підшарок великих вихорів (когерентних структур). І хоча характеристики цих когерентних структур визначаються осередненим рухом, їх дисипація не описується співвідношенням (А-51). Ламлі також припускає, що ця частина турбулентної енергії відповідає пульсації градієнта швидкості поблизу стінки (швидкості її дисипації).

Згідно міркувань Блейка [49], якщо розділити турбулентні пульсації поблизу стінки на дві частини

$$v'_i = v''_i + \tilde{v}_i, \quad (\text{A-61})$$

де \tilde{v}_i – наслідок пульсацій градієнта швидкості, що не вносять вклад у рейнольдсові напруги, а v''_i – турбулентні пульсації, що грають активну роль в утворенні турбулентних напруг. Припускаючи, що v''_i й \tilde{v}_i незалежні й не корелюють між собою, маємо

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \varepsilon'' = v \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \right)^2 + v \left(\frac{\partial v''_i}{\partial x_j} \right)^2. \quad (\text{A-62})$$

Якщо перший доданок в (A-62) апроксимувати виразом $2vk/L^2$, а другий пропорційний $k^{3/2}/L$, то загальний вираз для ε можна записати у вигляді :

$$\varepsilon = v \frac{2k}{L^2} + \frac{c_D k^{3/2}}{L} (1 - \exp(-A_\mu R_k)). \quad (\text{A-63})$$

Вираз (A-63) задовольняє вимозі, згідно якої дисипація поблизу стінки врівноважується в'язкою дифузією. Для моделі (A-63) $\sigma_k \equiv 1$, а $A_\mu = 0,012$. Інші константи збігаються з (A-59).

В сучасних роботах при розрахунках параметрів турбулентності за “ k - L ” моделлю замість виразу для характерного масштабу турбулентності L типу (A-55) часто використовують диференціальне рівняння для визначення L [35]. В цьому випадку запропонована модель вже не так щільно прив'язана до конкретної геометрії потоку, але тоді вона вже не має ніякої переваги перед “ k - ε ” – моделлю турбулентності.

A-3.6.2. “ k - ε ” – модель турбулентності

До найбільш вдалих двопараметричних моделей турбулентності належить “ k - ε ” модель, що заснована на

модельних рівняннях для енергії турбулентності (k) та її дисипації (ε). При використанні цієї моделі поряд із рівняннями для компонент осередненої швидкості (А-50) й рівнянням для енергії турбулентності (А-49) розглядається ще рівняння для швидкості дисипації енергії турбулентності на одиницю маси ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v'_j}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial v'_\alpha}{\partial x_j} \right) - 2\nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_\alpha} \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha}} - \\ & - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v'_j \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha} \right)^2} - 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v'_j}{\partial x_\alpha}} - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v'_j}{\partial x_\alpha}} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (\text{A-64})$$

Відповідно до зауважень деяких авторів [5, 56] вирази в доданку, що відповідає за породження, можна апроксимувати таким чином :

$$2\nu \left(\overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v'_j}{\partial x_\alpha}} + \overline{\frac{\partial v'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial v'_\alpha}{\partial x_j}} \right) = c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'_i v'_j}. \quad (\text{A-65})$$

Дисипативний член апроксимується, як :

$$2\nu \left(\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_\alpha} \right) = c_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (\text{A-66})$$

а потоковий член – у вигляді :

$$-\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha}} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right). \quad (\text{A-67})$$

Остаточно, модельне рівняння для швидкості дисипації кінетичної енергії пульсацій має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'_j v'_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) - c_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (\text{A-68})$$

Перепишемо рівняння (А-49) й (А-68) у наближенні плоского прибережного шару:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(v + v_t) \frac{\partial k}{\partial x_2} \right] - \overline{v_1' v_2'} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \varepsilon - 2v \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_2} \right)^2, \quad (\text{A-69})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right] - c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v_1' v_2'} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \\ - c_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \left[1 - 0,3 \exp(-R_k^2) \right] + 2v v_t \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A-70})$$

$$-\overline{v_1' v_2'} = v_t \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = c_m \frac{k^2}{\varepsilon} \exp \left[\frac{-A_m}{1 + A_r R_k} \right] \frac{\partial U_1}{\partial x_2}. \quad (\text{A-71})$$

де $R_k = \frac{k^2}{\varepsilon v}$; $c_{\varepsilon_1} = 1,42$; $c_{\varepsilon_2} = 2$; $c_m = 0,09$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$; $A_r = 0,01$. Також

для ньютонівської рідини $A_m = 0,0015$.

Рівняння (A-69) й (A-70) дещо відрізняються від рівнянь (A-49) й (A-68): нелінійний член $2v \left(\partial k^{1/2} / \partial x_2 \right)^2$ замінено на подібний за масштабом член $2vk/x_2^2$; також опущено останній член у рівнянні (A-70). До того ж у рівнянні (A-70) додано член, подібний останньому члену у рівнянні (A-69). Вважається, що подібна структура рівнянь (A-69) й (A-70) більше відповідає характеру дисипації енергії поблизу стінки: величина турбулентної в'язкості v_t поблизу стінки виявляється пропорційною величині $y^+ = x_2 U^+ / v$, де $U^+ = U_1 / v_*$, v_* – динамічна швидкість. Для замикання системи також використана гіпотеза Колмогорова у вигляді $v_t = c_v k^2 / \varepsilon$, $c_v = 0,09$.

Зауваження:

- Основним недоліком „ k - ε ” моделі є використання гіпотези Бусинеска (A-28). Позбутися гіпотези Бусинеска можна лише при використанні моделі переносу напруг Рейнольдса, яка, в свою чергу, потребує додаткових гіпотез для замикання й визначення додаткових емпіричних констант.

А-3.7. Моделі другого порядку для тривимірних турбулентних прилежових шарів

Звернемо увагу, що основні диференціальні рівняння для визначення енергії турбулентності (А-49) й дисипації енергії турбулентності (А-68) вже записані для тривимірного випадку. Але гіпотези, які дозволяють їх замкнути, є суто двовимірними.

У тривимірному випадку в наближенні прилежового шару основні рівняння „k-ε” моделі мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & -\overline{v'_1 v'_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{v'_1 v'_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \varepsilon + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_3} \right], \end{aligned} \quad (\text{A-72})$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & -C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{v'_1 v'_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{v'_1 v'_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right] - \\ & - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} \right], \end{aligned} \quad (\text{A-73})$$

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Тут $C_{\varepsilon_2} = 2$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_2} - 0.41^2 / (\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu})$.

Зауваження:

- Розглянуті вище рівняння (А-72) та (А-73) придатні лише для опису областей із розвинутою турбулентною течією.
- Вплив стінки на турбулентну в'язкість в (А-72), як правило, описується за допомогою “тривимірного” аналогу демпфуючого множника Ван-Дрїста (А-37). При великих турбулентних числах Рейнольдса, коли $D(x_2) \rightarrow 1$ ($D(x_2) \geq 0.99$), додатковими “пристінними” крайовими умовами будуть :

$$k = \left[\frac{\overline{v_1'v_2'}^2 + \overline{v_1'v_3'}^2}{C_\mu} \right]^{1/2}_{D(x_2)=0.99}, \quad (\text{A-75})$$

$$\varepsilon = \left[-\overline{v_1'v_2'} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{v_1'v_3'} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right]_{D(x_2)=0.99}. \quad (\text{A-76})$$

- У той же час для випадку двогранного кута або для подібної течії, що має необмежені зовнішні межі, на цих межах використовують умови “непротікання”

$$\frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = 0, \quad j = 2, 3; \quad (\text{A-77})$$

що більш характерні саме для жорстких зовнішніх меж.

Для спрощених геометрій у тривимірному випадку непогано працює й більш проста “ $k-L$ ” – модель турбулентності.

Скористаємося гіпотезами Колмогорова

$$v_t = c_\mu^* k^{1/2} L, \quad (\text{A-78})$$

й Вірка

$$\varepsilon \equiv v \left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} \right) = \frac{c_D^* k^{3/2}}{L} \quad (\text{A-79})$$

й підставимо вирази (A-78) й (A-79) в рівняння для енергії турбулентності (A-72). Маємо :

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & -\overline{v_1'v_2'} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{v_1'v_3'} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{c_D^* k^{3/2}}{L} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-80})$$

Скористуємося підходящим виразом для характерної довжини (L), наприклад, для течії на початку прямокутного каналу

$$L = 0.1075 + 0.0143 \cdot \arctg \left(\frac{x_1}{2a} - 50 \right). \quad (\text{A-81})$$

Отже, в результаті маємо лише одне диференціальне рівняння для знаходження енергії турбулентності. А дисипацію турбулентної енергії можна знайти потім із виразу (А-79).

Знаючи вирази для турбулентної в'язкості, енергії турбулентності й дисипації енергії турбулентності, можна знайти усі компоненти тензора Рейнольдса для випадку ізотропної турбулентності :

$$\overline{v'_i v'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right], \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A-82})$$

Нагадуємо, що згідно попереднього зауваження для тривимірного випадку має місце асиметрія недиагональних членів тензора Рейнольдса. Для асиметричного випадку маємо :

$$-\overline{v'_1 v'_2} = \nu_x \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \quad -\overline{v'_1 v'_3} = \nu_y \frac{\partial U_1}{\partial x_3}, \quad \nu_x = \nu_t, \quad \nu_y = \Theta \nu_t, \quad (\text{A-83})$$

$$\overline{v'_1 v'_3} = \frac{2}{C_1} \frac{(4C_2 - 1) k}{11 \varepsilon} \left[\overline{v'_1 v'_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \overline{v'_1 v'_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right]. \quad (\text{A-84})$$

Можна знайти також різницю діагональних членів :

$$\overline{v'_2 v'_2} - \overline{v'_3 v'_3} = \frac{4}{C_1} \frac{(4C_2 - 1) k}{11 \varepsilon} \left[\overline{v'_1 v'_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{v'_1 v'_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right]. \quad (\text{A-85})$$

Звернемо увагу, що у виразах (А-83)–(А-85) турбулентна енергія й дисипація турбулентної енергії мають ізотропний характер. Також ці вирази містять дві константи C_1 й C_2 . Згідно теоретичним розробкам Лаундера [56] $1 \leq C_1 \leq 2$. Звичайно вважають $C_1 = 1.5$. Зауважимо, що при $C_2 = 0.25$ генерація вторинних вихорів у потоці взагалі відсутня. При $C_2 = 0.2$ напрям обертання вихорів протилежний тому, що має місце у експерименті. І тільки при $C_2 = 0.3$ маємо задовільні результати, що добре відповідають експериментальним.

Зауваження:

- *Більш громіздка модель переносу напруг Рейнольдса для тривимірного випадку зараз майже не використовується.*

Зміст

| | |
|--|----|
| Основні позначення | 3 |
| Передмова | 8 |
| Вступ | 10 |
| 1. Методи розв’язання системи рівнянь Ейлера | 14 |
| 1.1. Панельний метод | 15 |
| 1.1.1. Нев’язкі нестисливі течії | 16 |
| 1.1.2. Обтікання профілю з піднімальною силою | 21 |
| 1.1.3. Нев’язкі стисливі течії рідини | 25 |
| 1.2. Метод сіток | 26 |
| 1.2.1. Одновимірний несталий рух невязкої стисливої рідини | 27 |
| 1.2.2. Розрахунок сильних стрибків | 32 |
| 1.2.3. FCT алгоритм розрахунку рухомої ударної хвилі | 40 |
| 1.3. Метод сіток. Неявні схеми для рівнянь Ейлера | 41 |
| 1.4. Багатосіткові методи розв’язання рівнянь Ейлера | 52 |
| Задачі | 59 |
| 2. Методи розв’язання системи рівнянь примежового шару | 62 |
| 2.1. Простий явний метод | 62 |
| 2.2. Метод Дюффорта–Франкела | 65 |
| 2.3. Метод Кранка–Нікольсона та чисто неявний метод | 69 |
| 2.3.1. Метод запізнілих коефіцієнтів | 70 |
| 2.3.2. Проста ітераційна заміна коефіцієнтів | 71 |
| 2.3.3. Лінеаризація за Ньютоном при ітеративному обчисленні коефіцієнтів | 71 |
| 2.3.4. Екстраполяція коефіцієнтів | 72 |
| 2.3.5. Загальні зауваження відносно стійкості неявних методів | 72 |
| 2.4. Метод Девіса | 74 |
| 2.4.1. Перетворення Леві–Ліза | 74 |
| 2.4.2. Зв’язана схема Девіса | 77 |

| | | |
|-----------|---|-----|
| 2.5. | Блочний метод Келлера та його модифікації | 79 |
| 2.6. | Приклад розрахунку примежового шару | 82 |
| 2.7. | Особливості розрахунків внутрішніх течій | 85 |
| 2.8. | Деякі загальні зауваження | 96 |
| | Задачі | 97 |
| 3. | Тривимірні примежові шари | 99 |
| 3.1. | Схеми Кранка–Никольсона та зигзаг | 102 |
| 3.2. | Неявна маршова схема із розщепленням | 110 |
| | Задачі | 115 |
| 4. | Перетворення основних рівнянь | 117 |
| 4.1. | Прості перетворення | 117 |
| 4.2. | Перетворення загального вигляду | 123 |
| 4.3. | Числова реалізація перетворення загального вигляду | 127 |
| | Задачі | 131 |
| 5. | Методи побудови розрахункових сіток | 133 |
| 5.1. | Методи теорії функції комплексної змінної | 134 |
| 5.1.1. | Однокрокове конформне відображення | 137 |
| 5.2. | Алгебраїчні відображення | 141 |
| 5.2.1. | Одновимірні функції розтягу | 142 |
| 5.2.2. | Найпростіші алгебраїчні відображення | 143 |
| 5.2.3. | Метод багатьох поверхонь | 145 |
| 5.2.4. | Трансфінитна інтерполяція | 149 |
| 5.3. | Методи, що засновані на розв'язанні диференціальних рівнянь | 151 |
| 5.4. | Адаптивні сітки | 160 |
| 5.4.1. | Варіаційний метод | 162 |
| 5.4.2. | Метод еківирозподілу | 164 |
| 5.4.3. | Методи із завданням швидкості вузлів сітки | 165 |
| 5.5. | Числова реалізація алгебраїчного відображення | 167 |
| | Задачі | 171 |
| | Додаток А. Моделі турбулентності | 173 |
| A-1. | Рівняння Рейнольдса | 175 |
| A-2. | Деякі відомості про внутрішню структуру | |

| | |
|---|------------|
| турбулентних потоків | 180 |
| A-3. Перенос імпульсу, тепла й домішок у турбулентних потоках | 182 |
| A-3.1. Гіпотеза Бусинеска | 182 |
| A-3.2. Теорія “шляху змішування” Прандтля | 186 |
| A-3.3. “Вільна” турбулентність | 188 |
| A-3.4. Плоскі турбулентні примежові шари. Моделі першого порядку | 188 |
| A-3.5. Тривимірні турбулентні примежові шари. Моделі першого порядку | 191 |
| A-3.6. Моделі другого порядку для плоских турбулентних примежових шарів | 192 |
| A-3.6.1. “ $k-L$ ” – модель турбулентності | 192 |
| A-3.6.2. “ $k-\epsilon$ ” – модель турбулентності | 195 |
| A-3.7. Моделі другого порядку для тривимірних турбулентних примежових шарів | 198 |
| Список використаної та рекомендованої літератури | 201 |