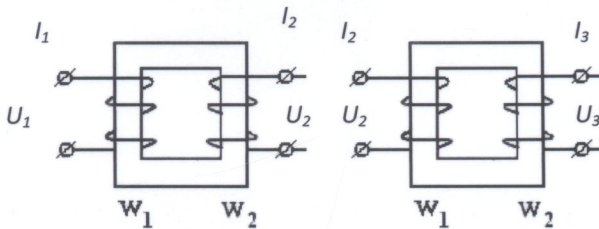


ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЗБІРНИК ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ



$$\begin{cases} U_1 = \alpha_{11}U_2 + \alpha_{12}I_2, \\ I_1 = \alpha_{21}U_2 + \alpha_{22}I_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_2 = \beta_{11}U_3 + \beta_{12}I_3, \\ I_2 = \beta_{21}U_3 + \beta_{22}I_3. \end{cases}$$

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. І. КЛОЧКО, А. А. КОЛОМІЄЦЬ

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ЗБІРНИК ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ**

Збірник задач

Вінниця
ВНТУ
2021

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 2 від 30.09.2021 р.)

Рецензенти:

Кичак В. М., доктор технічних наук,

Матяш О. І., доктор педагогічних наук,

Лисий М. В., кандидат фіз.-мат. наук

Клочко, В. І.

K50

Вища математика. Збірник прикладних задач : збірник задач / В. І. Клочко, А. А. Коломієць. – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 105 с.

ISBN 978-966-641-888-6

У збірнику задач наведено мінімум теоретичного матеріалу та задачі, зміст яких у багатьох випадках орієнтований на фахові дисципліни, розв'язки з наперед заданою точністю, які називають наближеними методами інтегрування рівнянь. Наведені приклади не обмежують можливих варіантів задач, викладач може самостійно урізноманітнити зміст та збільшити кількість вправ.

Структура кожної теми спрямована на розвиток та поглиблення мислення студентів і практичної компоненти математичної компетентності майбутнього фахівця. Збірник задач може бути використаний під час вивчення курсу вищої математики ЗВО, а також для навчально-дослідницької роботи майбутніх бакалаврів та магістрів технічних спеціальностей.

Збірник призначено для викладачів та студентів усіх технічних спеціальностей.

УДК 519.2 (075)

ISBN 978-966-641-888-6

© ВНТУ, 2021

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Лінійна алгебра.....	5
2 Теорія функції однієї змінної. Графіки функцій.....	11
2.1 Лінії другого порядку.....	16
2.2 Функції Уолша.....	18
3 Вступ до математичного аналізу.....	22
3.1 Теорія границь.....	22
3.2 Диференціальне числення функції однієї змінної.....	24
4 Інтегральне числення функції однієї змінної.....	29
5 Диференціальні рівняння.....	37
5.1 Нелінійні диференціальні рівняння.....	49
6 Операційне числення.....	53
7 Ряди.....	63
8 Інтегральне числення функції багатьох змінних.....	70
9 Елементи теорії поля.....	71
10 Застосування функції комплексної змінної та перетворення Лапласа... 82	
11 Теорія ймовірностей.....	84
Література.....	104

Вступ

Наведені у рукописі практичні вправи і приклади описують конкретні явища, фізичні процеси і факти щодо стану, розвитку і впровадження математичних моделей у виробничій діяльності, що обумовлює формування у студентів бажання і вміння самому взяти участь у їхньому вирішенні.

Багато завдань, які запропоновано у збірнику задач, підсилені ілюстраціями, що покращує його методологічну складову.

Завдання, запропоновані у збірнику задач, розраховані на формування у студентів вміння пошуку відповідного теоретичного матеріалу для розв'язання завдань, вміння конструювати алгоритми та розв'язки задач.

Задачі у збірнику підібрано різнопланові, від таких, що вимагають лише репродуктивної діяльності, до таких, які при розв'язуванні складуть значні труднощі для студентів технічного вузу.

Упровадження збірника задач в освітній процес сприятиме формуванню у студентів розуміння зв'язків між фундаментальними дисциплінами, такими як вища математика та спеціальними дисциплінами. А це насамперед підсилить їхню мотивацію до навчання і розуміння цілісності освітнього процесу.

1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Приклад 1. На рисунку схематично зображено два трансформатори.

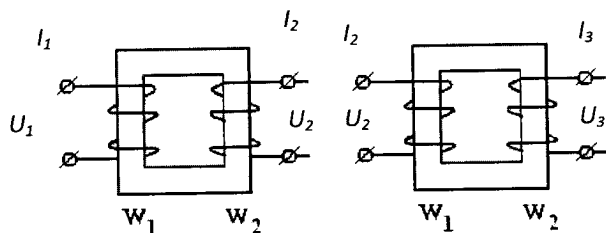


Рисунок 1.1 Схематичне зображення трансформаторів

Нехай на вході першого трансформатора подається напруга U_1 , сила струму I_1 , отримують з першого трансформатора напругу U_2 силу струму I_2 . Тоді рівняння, що описують цей процес, можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_{11}U_2 + \alpha_{12}I_2, \\ I_1 = \alpha_{21}U_2 + \alpha_{22}I_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} U_2 = \beta_{11}U_3 + \beta_{12}I_3, \\ I_2 = \beta_{21}U_3 + \beta_{22}I_3. \end{cases} \quad (1.2)$$

Системи рівнянь (1.1) і (1.2) описують процеси, що відбуваються в електричних схемах (рис. 1.1). Підставимо вирази для напруги U_2 та сили струму I_2 з системи (1.2) в систему (1.1).

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_{11}(\beta_{11}U_3 + \beta_{12}I_3) + \alpha_{12}(\beta_{21}U_3 + \beta_{22}I_3), \\ I_1 = \alpha_{21}(\beta_{11}U_3 + \beta_{12}I_3) + \alpha_{22}(\beta_{21}U_3 + \beta_{22}I_3). \end{cases} \quad (1.3)$$

Відкриємо дужки в останній рівності, отримаємо:

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_{11}\beta_{11}U_3 + \alpha_{11}\beta_{12}I_3 + \alpha_{12}\beta_{21}U_3 + \alpha_{12}\beta_{22}I_3, \\ I_1 = \alpha_{21}\beta_{11}U_3 + \alpha_{21}\beta_{12}I_3 + \alpha_{22}\beta_{21}U_3 + \alpha_{22}\beta_{22}I_3. \end{cases} \quad (1.4)$$

Згрупуємо коефіцієнти біля значень напруги U_3 та сили струму I_3

$$\begin{cases} U_1 = (\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21})U_3 + (\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22})I_3, \\ I_1 = (\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21})U_3 + (\alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22})I_3. \end{cases} \quad (1.5)$$

Систему (5) перепишемо у такому вигляді

$$\begin{cases} U_1 = \gamma_{11}U_3 + \gamma_{12}I_3 \\ I_1 = \gamma_{21}U_3 + \gamma_{22}I_3 \end{cases}, \quad (1.6)$$

де коефіцієнти системи утворюють матрицю $C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$.

Перепишемо (1.6) у вигляді $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$.

З іншого боку, якщо системам (1.1) і (1.2) поставити у відповідність

матриці $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$, то елементи матриці $C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$ є

результатом множення матриці A на матрицю B і обчислюються так

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21}, \\ \gamma_{12} &= \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22}, \\ \gamma_{21} &= \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21}, \\ \gamma_{22} &= \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Матриця C системи (1.6) $C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$, утворена на основі матриць A і B за допомогою певного правила формування її елементів. Так, наприклад, $\gamma_{11} = \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21}$ утворено шляхом додавання добутків елементів першого рядка матриці A і першого стовпця елементів матриці B . Якщо прослідкувати утворення решти елементів матриці C , то ми відмітимо аналогічну побудову шляхом додавання добутків відповідних елементів рядків матриці A (першого множника) і відповідного елемента стовпця матриці B (другого множника).

Систему (1.1) запишемо у вигляді $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$, а систему (1.2) у вигляді $\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$

і, виконавши підстановку, отримаємо

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Порівнявши формули (1.7) та (1.8), з урахуванням вищенаведених міркувань, робимо висновок, що $C=AB$. У системі (1.5) в дужках біля коефіцієнтів напруги U_3 та сили струму I_3 ми отримали формули, за якими обчислюються добуток двох матриць. Отже, множення матриць можна здійснити за описаним правилом.

Нагадаємо алгоритм пошуку добутку двох матриць.

1. Перевіряємо, чи можна перемножити відповідні матриці. Перший множник повинен мати стільки стовпців, скільки рядків у другого.
2. Визначаємо розмірність результуючої матриці. Кількість рядків матриці-добутку дорівнює кількості рядків першого множника, а кількість стовпців дорівнює кількості стовпців другого множника, тобто розмірність результуючої матриці визначається за формулою $(m \times n) \cdot (n \times r) = (m \times r)$.
3. Обчислюємо кожний елемент матриці-добутку за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

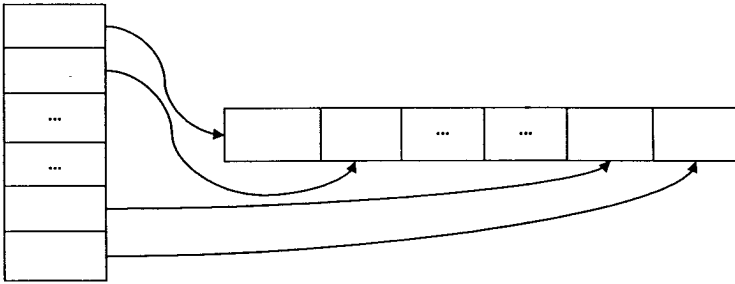


Рисунок 1.2 - Схема утворення елемента матриці-добутку

Задача 1.1

Підприємство виготовляє три види продукції P_1, P_2, P_3 , використовуючи три види сировини C_1, C_2, C_3 . Необхідні характеристики виробництва наведено у таблиці. Знайти обсяг випуску продукції кожного виду при заданих запасах сировини.

Таблиця 1.1 – Необхідні характеристики виробництва продукції

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	P_1	P_2	P_3	
C_1	3	5	4	2700
C_2	1	2	1	800
C_3	2	3	2	1600
Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	P_1	P_2	P_3	
C_1	3	2	4	1100
C_2	1	3	5	1200
C_3	4	2	1	900

Приклад. На рисунку схематично зображено трансформатор.

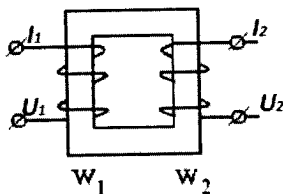


Рисунок 1.3 - Схематичне зображення трансформатора

Нехай на вході трансформатора подається напруга U_1 , сила струму I_1 , і отримують з трансформатора напругу U_2 силу струму I_2 . Тоді рівняння, що

описують цей процес можна записати у вигляді:
$$\begin{cases} U_1 = \alpha_{11}U_2 + \alpha_{12}I_2, \\ I_1 = \alpha_{21}U_2 + \alpha_{22}I_2. \end{cases}$$

Тоді отримані співвідношення можна розглядати як лінійне відображення множини $\{U_2, I_2\}$ на множини $\{U_1, I_1\}$. Система (1.1.) повністю визначається сукупністю коефіцієнтів, які можна записати у формі матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

Варто зауважити, що коли визначник матриці не дорівнює нулеві

$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, тобто існує розв'язок системи (1), то можна розглядати обернене

лінійне відображення множини $\{U_1, I_1\}$ на множини $\{U_2, I_2\}$.

Приклад. З деякого листового матеріалу необхідно викроїти 200 заготовок типу A , 260 – типу B і 290 – типу C . При цьому можна застосовувати три способи розкроювання. Кількість заготовок, одержуваних з кожного листа при кожному способі розкроювання, наведена в таблиці:

Таблиця 1.2 – Способи розкроювання заготовок

Тип заготовки	Спосіб розкроювання		
	1	2	3
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Записати математичну модель у формі системи лінійних алгебраїчних рівнянь. За умови прикладу встановити, скільки листів буде потрібно для викроювання означеної кількості заготовок. Для розв'язання системи використати один із методів.

Відповідь: {40; 30; 20}.

2 ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ

Приклад. W -функція Ламберта – $W(x)$ (Рисунок 2.1) визначається як розв'язок функціонального рівняння $W(x)e^{W(x)} = x$. (2.1)

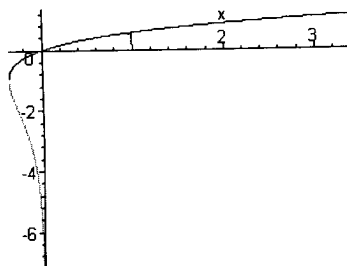


Рисунок 2.1 - Графічне зображення функції Ламберта

Хоча функція була відома за часів Ейлера, досить успішно використана і набула відповідної назви лише у 1980 роках. $W(x)$ – багатозначна функція, оскільки рівняння (2.1) має безліч розв'язків, більшість з яких комплексні. Функція Ламберта не є ні парною, ні непарною, визначена в інтервалі $(-1/e; \infty)$, де приймає значення від $-\infty$ до $+\infty$, причому для від'ємних значень x функція двозначна. Зазвичай $W(x)$ застосовують, коли розв'язок є дійсним числом. Тобто якщо x – дійсне число, то серед множини розв'язків рівняння (2.1) можуть знаходитися два дійсних розв'язки $W_0(x)$ і $W_{-1}(x)$ (або лише один, або ні одного). На рисунку 2.1 наведено графік двох дійсних віток W -функції Ламберта.

Виявилось, що властивості цієї функції можуть бути корисними при розв'язанні деяких видів диференціальних рівнянь.

Приклад. Розв'язок диференціального рівняння $(4y^2 + x^2)y' = xy$, одержано у неявній формі відносно шуканої функції $\ln|y| = \frac{x^2}{8y^2} + C$. Скориставшись функцією Ламберта, записати загальний розв'язок:

$$y = \exp\left(\frac{1}{2}W\left(\frac{x^2}{4}\exp(-2C)\right) + C\right).$$

Розв'язання

Розглянемо основні кроки перетворення неявної форми розв'язку:

$$2\ln|y| = \frac{x^2}{4y^2} + 2C, \quad y^2(\ln y^2 - 2C) = \frac{x^2}{4}, \quad e^{(\ln y^2 - 2C)}(\ln y^2 - 2C) = \frac{x^2}{4}e^{-2C},$$

[за означенням $W(x)e^{W(x)} = x$, якщо $fe^f = h$, то $f = W(h)$], тому

$$\ln y^2 - 2C = W\left(\frac{x^2}{4}e^{-2C}\right) \quad y = \exp\left(\frac{1}{2}W\left(\frac{x^2}{4}e^{-2C}\right) + C\right).$$

Задача 2.1

Загальний інтеграл $3y^2 + x \ln(xy) = Cx$ диференціального рівняння $(6xy^2 + x^2)y' - (3y^2 - x)y = 0$, записати у вигляді загального розв'язку

$$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{xW\left(\frac{C}{x^3}\right)}$$

Задача 2.2

Розв'язати рівняння $\ln x + x + 2 = 0$

$$\ln x = -x - 2, \quad \ln x = \ln e^{-x-2}, \quad x = e^{-x-2}, \quad xe^x = e^{-2}, \quad x = \text{Lambert}W(e^{-2})$$

$$x = 0.1200282390, \quad e^{-2} = 0.1353352832$$

Задача 2.3

Швидкість точки визначається вектором $\vec{V} = 2t\vec{i} + 3\vec{j}$. Визначити кут в градусах між вектором швидкості і віссю Ox в момент часу $t = 4$ с.

Відповідь: 20.6°.

Приклад. Довести, що неявно задану функцію $y = f(x)$: $\ln|y| = \frac{x^2}{8y^2} + C$, за допомогою функції $W(x)$ можна подати у явному вигляді

$$y = \exp\left(\frac{1}{2}W\left(\frac{x^2}{4}\exp(-2C)\right) + C\right).$$

Розв'язання

Розглянемо основні кроки перетворення неявної форми функції:

$$2\ln|y| = \frac{x^2}{4y^2} + 2C, y^2(\ln y^2 - 2C) = \frac{x^2}{4}, e^{\ln(y^2)}(\ln y^2 - 2C) = \frac{x^2}{4}, e^{\ln y^2 - 2C}(\ln y^2 - 2C) = \frac{x^2}{4}e^{-2C}$$

[за означенням $W(x)e^{W(x)} = x$, якщо $fe^f = h$, то $f = W(h)$], тому

$$\ln y^2 - 2C = W\left(\frac{x^2}{4}e^{-2C}\right)$$

$$2\ln y = W\left(\frac{x^2}{4}e^{-2C}\right) + 2C$$

$$\ln y = \frac{1}{2}W\left(\frac{x^2}{4}e^{-2C}\right) + C$$

$$y = \exp\left(\frac{1}{2}W\left(\frac{x^2}{4}e^{-2C}\right) + C\right).$$

Завдання

- 1) Довести, що неявно задану функцію $2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{xy} = C$, за допомогою функції $W(x)$ можна подати у явному вигляді

$$y = -\frac{1}{2x}\left(W\left(\frac{2}{x^2}\right)\right)^{-1}.$$

- 2) Довести, що неявно задану функцію $x\ln(xy) + 3y^2 = Cx$, за допомогою функції $W(x)$ можна подати у явному вигляді

Рисунок
$$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{xW\left(\frac{C}{x^3}\right)}.$$

- 3) Довести, що неявно задану функцію $x^2 = y - \frac{1}{2} + Ce^{-2y}$, за допомогою функції $W(x)$ можна подати у явному вигляді

$$y = \frac{1}{2}W\left(C\exp(-2x^2) + x^2 + \frac{1}{2}\right).$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний багаточлен $P(x)$, що збігається з функцією $f(x) = 2^x (-2 \leq x \leq 2)$ в точках $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 2$.

Розв'язання. Вважаємо, що багаточлен $P(x)$ є квадратним тричленом

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Коефіцієнти a_0, a_1, a_2 знаходимо із системи рівнянь, яку одержуємо за результатами підстановки у багаточлен координат заданих точок

$$a_0 - 2a_1 + 4a_2 = \frac{1}{4},$$

$$a_0 + 1,$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 4$$

Отже, $a_0 + 1, a_1 = \frac{15}{16}, a_2 = \frac{9}{32}$, а функцію $f(x) = 2^x$ лише на відрізку $(-2 \leq x \leq 2)$

можна наближено подати

$$2^x \approx 1 + \frac{15}{16}x + \frac{9}{32}x^2 \dots$$

Обчислимо $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{15}{32} + \frac{9}{128} \approx 1.54 \dots$

Задача 2.4

Форма поперечного перерізу магнітопроводу силового трансформатора за умовами технологічності виготовлення повинен мати вигляд наведений на рисунку. З метою зменшення загальних розмірів трансформатора необхідно як найбільше заповнити середину залізним осереддям. Знайти x і y , якщо радіус поперечного перерізу магнітопроводу дорівнює a .

Задача 2.5

Знайти опір електричної лампи розжарювання з вольфрамовою ниткою при значеннях сили струму 0.2, 0.4, 0.6, 0.7, 0.75 А, якщо характеристику задано такими значеннями:

U, В	0	80	160	240	320	400
I, А	0	0,35	0,55	0,67	0,72	0,75

Відповідь: 200 Ом; 250 Ом; 308 Ом; 388 Ом; 533 Ом.

Задача 2.6

Побудувати графіки таких періодичних функцій:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 2k\pi < t < (2k+1)\pi, \\ 0, & (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi, \end{cases}$$

$$f(t) = \arccos(\cos t).$$

Задача 2.7

Записати в аналітичній формі функції, задані графічно: (Рис 2.2 в, г)

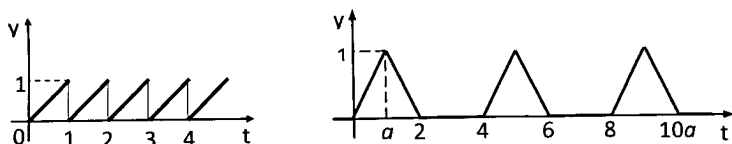


Рисунок 2.2 (а,б)

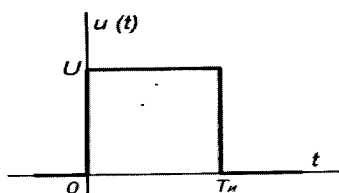


Рисунок 2.2 (в)

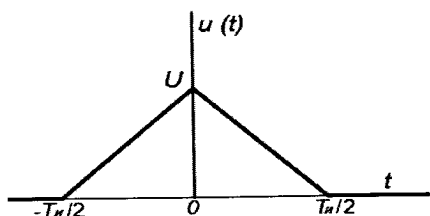


Рисунок 2.2 (г)

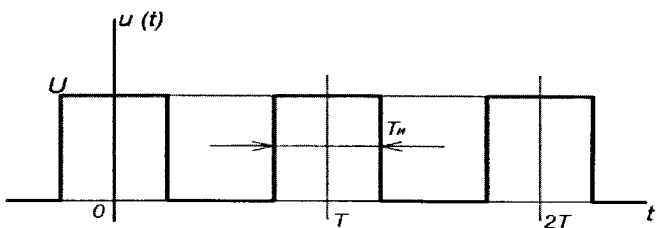


Рисунок 2.2 (д)

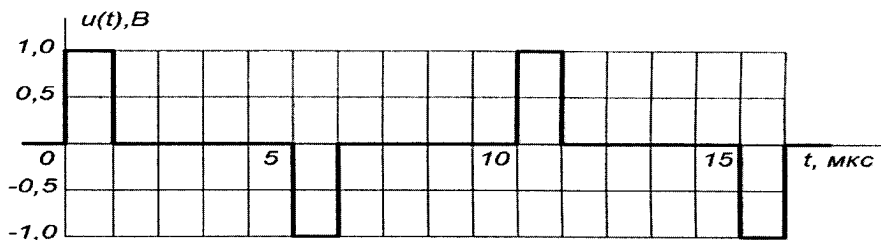


Рисунок 2.2 (е)

Рисунок 2.2 - Графічне задання функцій

Задача 2.8

Побудувати графіки функцій:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi - 2t}{\pi} & (0 < t < \pi), \\ \frac{2t - 3\pi}{\pi} & (\pi < t < 2\pi). \end{cases}$$

$$f(t) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)$$

2.1 Лінії другого порядку

Приклад. Студентам, що цікавляться комп'ютерною графікою, доцільно, виконати завдання: записати у матричній формі загальне рівняння кривої

другого порядку. Наприклад, рівняння $x^2 - 6xy + 9y^2 - 8x + 24y = 0$ студенти записують так:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -3 & 9 & 12 \\ -4 & 12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^T = 0$$

MathCAD виводиться рівняння загального вигляду. Отримане рівняння може бути як привід для розвитку прийомів спостереження, узагальнення, а далі – поглиблення навичок абстрагування. Так, графік, побудований за допомогою СКМ, дає можливість з'ясувати, що лінія, задана рівнянням

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x + 5y - 1 = 0,$$

є параболою, і в той же час, подібне рівняння

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 8x + 24y = 0$$

визначає дві прямі $x - 3y - 8 = 0$ і $x - 3y = 0$.

Завдання

Записати у матричній формі, наведені вище, загальні рівняння кривих другого порядку. За допомогою СКМ побудувати їх графіки.

Задача 2.9

Положення лінійки AB визначається кутом $\varphi = 0,5t$ (рисунок 2,3)

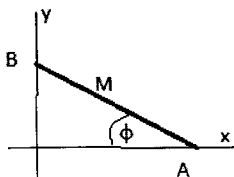


Рисунок 2.3

Визначити в $см/с$ проекцію швидкості точки M на вісь Ox в момент часу $t = 2$ с., якщо відстань $BM = 0,2$ м.

Відповідь: $-8,41$ $см/с$.

2.2 Функції Уолша

Важливу роль в дослідженні різноманітних сигналів відіграє система ортонормованих функцій Уолша $Wal(k,t)$. На рис. 2.4 наведено графіки перших чотирьох функцій: $w_0(x)=1$, $w_1(x)=\text{sign}(\sin(2\pi x))$, $w_2(x)=\text{sign}(\sin(4\pi x))$, $w_3(x)=w_1(x)*w_2(x)$, $w_4(x)=\text{sign}(\sin(8\pi x))$, $w_5(x)=w_0(x)*w_2(x)$, $w_6(x)=w_2(x)*w_1(x)$, $w_7(x)=w_2(x)*w_1(x)*w_0(x)$, $w_8(x)=\text{sign}(\sin(16\pi x))$.

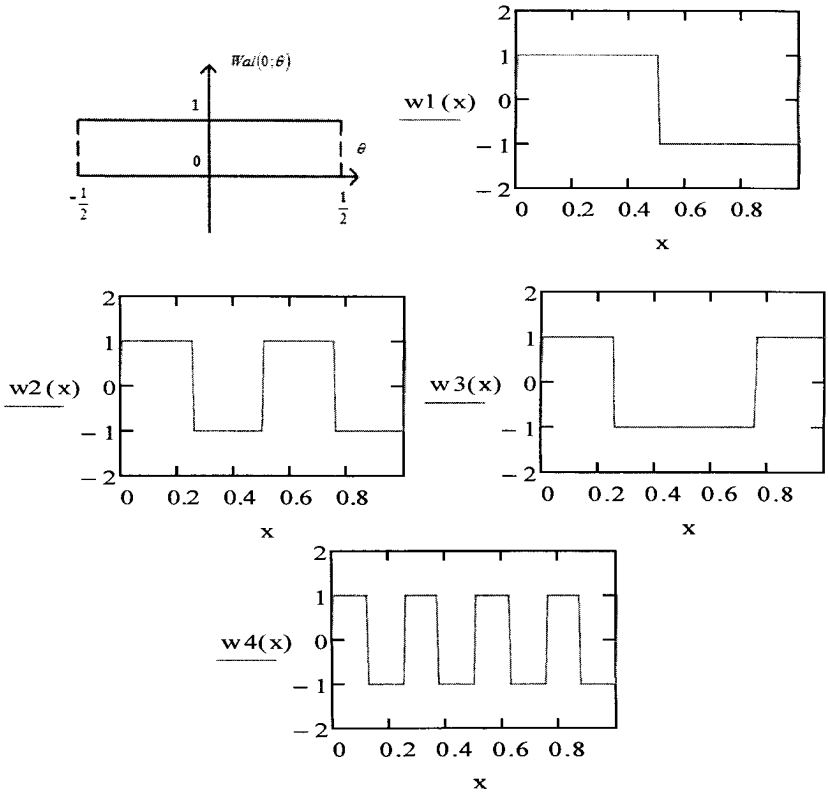


Рисунок 2.4 – Графіки функцій Уолша $Wal(0,t)$, $Wal(1,t)$, $Wal(2,t)$, $Wal(3,t)$

$$\|Wal(k;0)\|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Wal^2(k;\theta) d\theta = 1 \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Wal(i,\theta)Wal(k,\theta) d\theta = 0, \quad i \neq k$$

Довести, скориставшись графіками функцій Уолша $Wal(1, \theta)$, $Wal(3, \theta)$, що вони ортогональні: $\int_{-1/2}^{1/2} Wal(1, \theta)Wal(3, \theta)d\theta = 0$

$$Wal(2n + p, \theta) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor + p}$$

$$\left\{ Wal\left(n, 2\theta + \frac{1}{2}\right) + (-1)^{n+p} Wal\left(n, 2\theta - \frac{1}{2}\right) \right\} n = 0, 1, 2,$$

Чи доводити для довільних К?

$P = 0$ або 1

Приклад. Знайти перших два коефіцієнти у розкладі імпульсу трикутної форми за системою функцій Уолша (рис 2.5)

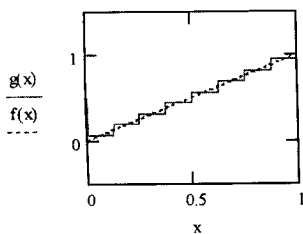


Рисунок 2.5 - Імпульс трикутної форми

Розв'язання

Запишемо аналітичну форму імпульсу :

$$S(t) = \frac{U}{T}t + \frac{U}{T} = U\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{2}\right) \quad y = ax + b$$

$$y = ax + b$$

$$0 = -\frac{aT}{2} + b \quad U = \frac{aT}{2} + b \quad b = \frac{U}{2} \quad -aT + 2b = 0$$

$$a = \frac{U}{T} T = 1$$

$$S(t) = C_0Wal(0; t) + C_1Wal(1; t) + C_2W(2; t)$$

$$C_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(t) \text{Wal}(0; \theta) dt = U \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta}{T} + \frac{1}{2} \right) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U \left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta}{2} \right) = U \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{U}{2}$$

$$C_1 = \frac{U}{4} \quad S\left(-\frac{T}{2}\right) = \frac{U}{4} \quad S(0) = \frac{U}{4}$$

$$S\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{3U}{4} \quad \theta = at + b \quad -\frac{1}{2} = a\left(-\frac{T}{2}\right) + b \quad \frac{1}{2} = a \cdot \frac{T}{2} + b \quad b = 0 \quad a = \frac{1}{T} \quad \theta = \frac{1}{T}t$$

$$C_2 = U \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \left(t + \frac{1}{2} \right) (-1) dt \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{4}}^0 \left(t + \frac{1}{2} \right) 1 dt + \int_0^{\frac{1}{4}} \left(t + \frac{1}{2} \right) 1 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(t + \frac{1}{2} \right) (-1) dt \right)$$

$$= U \left(-\frac{1}{32} + \frac{3}{32} + \frac{5}{32} - \frac{7}{32} \right) = 0$$

$$S(t) \approx \frac{U}{4} [2 \cdot \text{Wal}(0; t) + \text{Wal}(1; t) + 0 \cdot \text{Wal}(2; t)]$$

$$S\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{U}{4}; \quad S_w\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}U; \quad S_2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{U}{6}$$

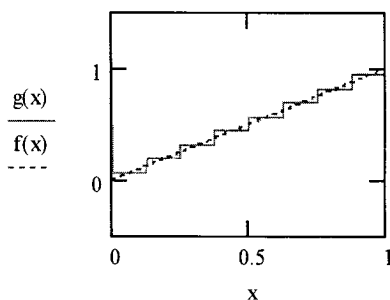


Рисунок 2.6

$$w_0(x) := 1 \quad w_1(x) := \text{sign}(\sin(2 \cdot \pi \cdot x)) \quad r(i, x) := \text{sign}(\sin(2^i \cdot \pi \cdot x))$$

$$w_2(x) := r(1, x) \cdot r(2, x) \quad w_3(x) := r(2, x) \quad w_4(x) := r(3, x) \cdot r(2, x)$$

$$w_5(x) := r(1, x) \cdot r(2, x) \cdot r(3, x) \quad w_6(x) := r(1, x) \cdot r(3, x) \quad w_7(x) := r(3, x)$$

$$f(x) := x \quad c_0 := \int_0^1 f(x) \cdot w_0(x) dx \rightarrow \quad c_1 := -0.25 \quad c_2 := 0 \quad c_3 := -0.125 \quad c_4 := 0$$

$$\int_1^1 \mathbf{1} \, dt \quad c_5 := 0 \quad c_6 := 0 \quad c_7 := -0.063 \quad c_8 := 0.5$$

$$g(x) := c_0 \cdot w_0(x) + c_1 \cdot w_1(x) + c_2 \cdot w_2(x) + c_3 \cdot w_3(x) + c_4 \cdot w_4(x) + c_5 \cdot w_5(x) + c_6 \cdot w_6(x) + c_7 \cdot w_7(x)$$

$$c_2 := \int_0^{0.25} f(x) \cdot w_1(x) dx - \int_{0.25}^{0.5} f(x) \cdot w_1(x) dx - \left(\int_{0.5}^{0.75} f(x) \cdot w_1(x) dx - \int_{0.75}^1 f(x) \cdot w_1(x) dx \right) \rightarrow$$

$$h(x) := \sin(x) \quad c_0 := \int_0^{1.0} h(x) \cdot w_0(x) dx \rightarrow$$

$$c_1 := \int_0^{0.5} h(x) \cdot w_1(x) dx - \int_{0.5}^{1.0} h(x) \cdot w_1(x) dx \rightarrow$$

$$c_2 := \int_0^{0.25} h(x) \cdot w_2(x) dx - \int_{0.25}^{0.5} h(x) \cdot w_2(x) dx - \left(\int_{0.5}^{0.75} h(x) \cdot w_2(x) dx - \int_{0.75}^{1.0} h(x) \cdot w_2(x) dx \right) \rightarrow$$

$$c_3 := \int_0^{0.25} h(x) \cdot w_3(x) dx - \int_{0.25}^{0.5} h(x) \cdot w_3(x) dx + \left(\int_{0.5}^{0.75} h(x) \cdot w_3(x) dx - \int_{0.75}^{1.0} h(x) \cdot w_3(x) dx \right) \rightarrow$$

$$h_1(x) := c_0 \cdot w_0(x) + c_1 \cdot w_1(x) + c_2 \cdot w_2(x) + c_3 \cdot w_3(x)$$

Задача 2.10

Знайти перших два коефіцієнти у розкладі сигналів $s_1 = e^{\sin t}$ і $s_2 = te^{-t} \cos t$ за системою функцій Уолша. Побудувати амплітудні спектри даних двох сигналів і третього $s_3 = \sin t$, порівняти спектри отриманих часткових сум рядів Уолша.

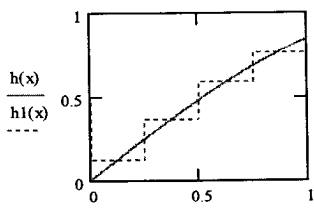


Рисунок 2.7

3 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

3.1 Теорія границь

Завдання. Матеріальна точка коливається по колу біля свого середнього положення за законом $x = A \cdot e^{-kt} \cdot \sin \omega \cdot t$, де $(A, k, \omega > 0)$. Знайдіть $\lim_{t \rightarrow \infty} x$.

Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Знайдіть границю функції $\lim_{t \rightarrow \infty} A \cdot e^{-kt} \sin \omega \cdot t$ за допомогою СКМ.

Відповідь: $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$ – коливання згасають.

Завдання. Розрахунок робочого колеса турбіни зводиться до рівняння $\ln y = -k^2 \cdot x^2 + \ln y_0$, де y – товщина колеса на відстані x від осі обертання, y_0 – значення y при $x = 0$. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{y_0}$. (з якою метою)

Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Скористайтесь основною логарифмічною тотожністю та властивостями степеня для вираження відношення $\frac{y}{y_0}$: $y = e^{-k^2 \cdot x^2 + \ln y_0} = e^{-k^2 \cdot x^2} \cdot e^{\ln y_0} = e^{-k^2 \cdot x^2} \cdot y_0$.

Границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-k^2 \cdot x^2}$ знайдіть за допомогою СКМ.

Відповідь: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{y_0} = 1$.

Завдання. Висота частини вертикального струменя фонтану наближено виражається формулою $h = \frac{H}{1 + \varphi \cdot H}$, де H – величина напору води в насадках (у метрах водяного стовпа), φ – коефіцієнт, що визначається діаметром d (мм) вихідного перерізу насадки.

Побудуйте графіки залежності $h(H)$ при різних значення φ : $\varphi = 0,023$, $\varphi = 0,009$, $\varphi = 0,004$; дослідіть та порівняйте поведінку відповідних функцій.

Переформулюйте задачу математичною мовою, тобто знайдіть $\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{H}{1 + \varphi \cdot H}$ за допомогою СКМ.

Значення цієї границі $\frac{1}{\varphi}$ вказує на існування горизонтальної асимптоти

$h = \frac{1}{\varphi}$ ($\varphi = 0,23$, $h = 43,48$, тобто необхідно побудувати лінію $y(x) = 43,48$). Для

інтерпретації результатів порівняння отриманих залежностей побудуйте за допомогою СКМ графіки залежностей при різних значеннях φ , з урахуванням того, що за змістом задачі h обмежено відрізком $[0; H]$.

Відповідь: при збільшенні φ висота струменя зменшується, причому зміна величини напору при збільшенні φ майже не впливає на висоту струменя; при зменшенні φ $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{H}{1 + \varphi \cdot H} = H$, тобто висота струменя прямує до H .

Завдання. Динамічна самоіндукція антени при постійному подовженні хвилі на одиницю довжини виражається формулою

$$L = L_0 \frac{\operatorname{tg}(\pi l / \lambda)}{2\pi l / \lambda}, \text{ де } L - \text{динамічна самоіндукція; } L_0 - \text{статична}$$

самоіндукція; l - діюча довжина антени; λ - довжина хвилі антени. Знайти

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L.$$

Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Знайдіть границю послідовності $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_0 \frac{\operatorname{tg}(\pi \cdot l / \lambda)}{2 \cdot \pi \cdot l / \lambda}$ за допомогою СКМ.

Відповідь: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L = L_0 \cdot \sqrt{2}$.

Завдання. У топографії виникає необхідність знайти границю відношення стріли $f = DB$ (висота сегмента) дуги ABC кола радіуса r до стріли $f_1 = D_1B_1$ половини AB_1B цієї дуги, якщо центральний кут $AOB = \varphi$ малий ($\varphi \rightarrow 0$). Відношення має вигляд:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}$$

3.2 Диференціальне числення функції однієї змінної

Приклад. Функція $f(x)$ неперервна і диференційовна на відрізку $[2, 10]$. Відомо, що $f(2) = 8$ і похідна на даному проміжку задовольняє умову $f'(x) \leq 4$ для всіх $x \in (2, 10)$. Знайти максимально можливе значення функції при $x=10$.

Розв'язання.

Для оцінювання значення $f(10)$ ввикористаємо формулу Лагранжа, яка записується так $f(10) - f(2) = f'(\xi)(10-2)$, де ξ – деяка точка, що лежить в інтервалі $(2, 10)$. Перепишемо цю формулу у такому вигляді $f(10) = f(2) + 8f'(\xi)$. Максимально можливе значення похідної на цьому інтервалі нює $f'(x) = 4$. Отже, $f(10) \leq f(2) + 8 \cdot 4 = 4 + 32 = 40$. Таким чином, максимально можливе значення функції на правій границі інтервалу дорівнює 40.

Задача 3.1

Два тіла почали рух в один і той же момент по прямій з однієї тієї ж точки в одному напрямі. Одне тіло рухається зі швидкістю $v = 5t^2 + 2t$, інше – зі швидкістю $v = 2t$. Через скільки секунд відстань між ними дорівнюватиме 135 м.

Задача 3.2

Протягом 7 с величина струму у провіднику змінювалась за законом $I = 3t^2 + 2t$ ампер. Яка кількість електрики пройшла за цей час через провідник.

Задача 3.3

Точка рухається за заданою траєкторією зі швидкістю $V = 5$ м/с. Визначити криволінійну координату s точки в момент часу $t = 18$ с, якщо при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 26$ м.

Відповідь: 116 м.

Задача 3.4

Точка рухається за кривою зі швидкістю $s = 0,5t$. Визначити її координату в момент часу $t = 10$ с якщо при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 0$.

Відповідь: 25 м.

Задача 3.5

Швидкість точки задана рівнянням $V = 0,2t$. Визначити криволінійну координату s точки в момент часу $t = 10\text{с}$ якщо при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 0$.

Відповідь: 10 м.

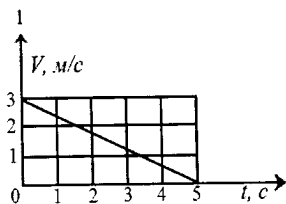


Рисунок 3.1. – Графічне зображення руху точки

Задача 3.6. Заданий закон руху точки в прямокутній системі координат: $x = 3t^2$, $y = 4t^2$. Визначити момент часу t , коли криволінійна координата точки $s = 100\text{м}$, якщо при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$ і точка рухається в позитивному напрямку координати s . *Відповідь: 4,69 с.*

Задача 3.7. Заданий графік швидкості руху точки $V = f(t)$. Визначити пройдений точкою шлях в момент часу $t = 5\text{с}$.

Відповідь: 7,5 м.

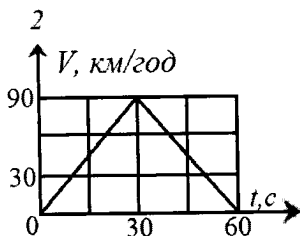


Рисунок 3.2 - Графік швидкості

Задача 3.8

Заданий графік швидкості точки $V = f(t)$. Визначити пройдений точкою шлях в момент часу $t = 60\text{с}$.

Відповідь: 750 м.

Задача 3.9. Задані рівняння руху точки $\vec{r} = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}$. Визначити модуль швидкості точки в момент часу $t = 2\text{с}$.

Відповідь: 4,47 м/с.

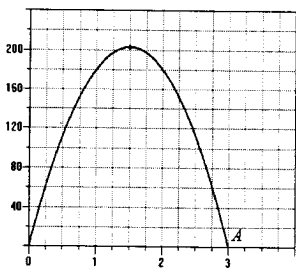


Рисунок 3.3 - Графік залежності швидкості фотосинтезу

Задача 3.10. Дано графік залежності швидкості v фотосинтезу в певних рослинах від інтенсивності i світла. При інтенсивності світла $i = 1,5$ од. швидкість фотосинтезу максимальна і дорівнює 202,5 од. Фотосинтез не відбувається, якщо $i > 3$ од. рівнює 202,5 од. Виведіть формулу такої залежності, вважаючи, що її графік має форму параболи. При якій інтенсивності i світла швидкість фотосинтезу $v = 112,5$ од.? З якою швидкістю v відбувається фотосинтез у рослинах при інтенсивності світла $i = 2$ од.?

Задача 3.11

Задані рівняння руху точки в координатній формі

$$x = 8t - 4t^2, \quad y = 6t - 3t^2.$$

Визначити рівняння траєкторії точки і її швидкість (рис.3.4)

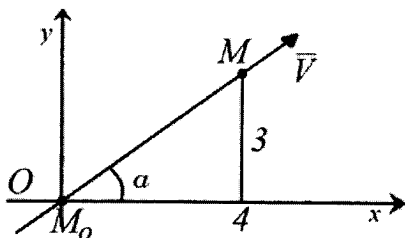


Рисунок 3.4. - Графік руху точки

Розв'язання

Для визначення рівняння траєкторії точки потрібно з рівняння руху вилучити час t . Помноживши обидві частини першого рівняння на 3, а другого – на 4 і додавши їх почленно, отримаємо

$$3x - 4y = 0 \quad \text{або} \quad y = \frac{3}{4}x.$$

Отже, траєкторію точки є пряма лінія, яка проходить через початок координат від куту α до осі Ox , де $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ (рис.3.4).

При $t = 0$, $x = y = 0$.

У початковий момент часу точка M знаходилася в початку координат $-M_0$ (на рис. 3.4).

Оскільки траєкторія – пряма лінія, то швидкість буде спрямована вздовж траєкторії. Швидкість точки

$$V_x = x = 8(1-t), V_y = y = 6(1-t),$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 10(1-t).$$

Проекції швидкості точки при $0 < t < 1$ додатні. Отже, протягом цього проміжку часу від M_0 до M , а потім навпаки.

Задача 3.12

Задані рівняння руху точки $x = t^2$, $y = \sin \pi t$, $z = \cos \pi t$. Визначити модуль швидкості точки в момент часу $t = 1c$.

Відповідь: 3,72 м/с.

Задача 3.13

Точка рухається за заданою траєкторією зі швидкістю $V = 5$ м/с. Визначити криволінійну координату s точки в момент часу $t = 18c$, якщо при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 26$ м. Відповідь: 116 м.

Задача 3.14

Точка рухається за кривою зі швидкістю $s = 0,5t$. Визначити її координату в момент часу $t = 10c$ якщо при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 0$. Відповідь: 25 м.

Задача 3.15

Швидкість точки задана рівнянням $V = 0,2t$. Визначити криволінійну координату s точки в момент часу $t = 10c$, якщо при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 0$.

Відповідь: 10 м.

Задача 3.16

Заданий закон руху точки в прямокутній системі координат: $x = 3t^2$, $y = 4t^2$. Визначити момент часу t , коли криволінійна координата точки $s = 100\text{ м}$, якщо при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$ і точка рухається в позитивному напрямку координати s . Відповідь: $4,69\text{ с}$.

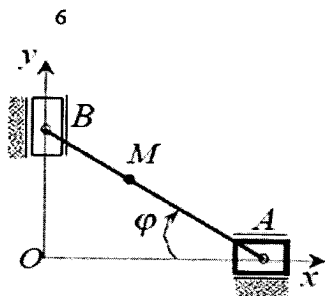


Рисунок 3.5

Задача 3.17 Стан лінійки AB визначається кутом $\varphi = 0,5t$. Визначити в см/с проекцію швидкості точки M на вісь Ox в момент часу $t = 2\text{ с}$, якщо відстань $BM = 0,2\text{ м}$.
Відповідь: $-8,41\text{ см/с}$.

Задача 3.18

Задані рівняння руху точки $\vec{r} = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}$. Визначити модуль швидкості точки в момент часу $t = 2\text{ с}$.

Відповідь: $4,47\text{ м/с}$.

4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Завдання. Скориставшись СКМ, обчислити інтеграли у різних межах інтегрування, скласти програму наближеного їх обчислення за допомогою формули прямокутників і розглянути різну кількість проміжків. Проаналізувати отримані результати на предмет стійкості алгоритму методу прямокутників.

$$\int_0^{100} x e^{-x} dx = 1 \quad \int_0^{10000} x e^{-x} dx = 1$$

$$\int_0^{100000} x e^{-x} dx = 0 \quad \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$$

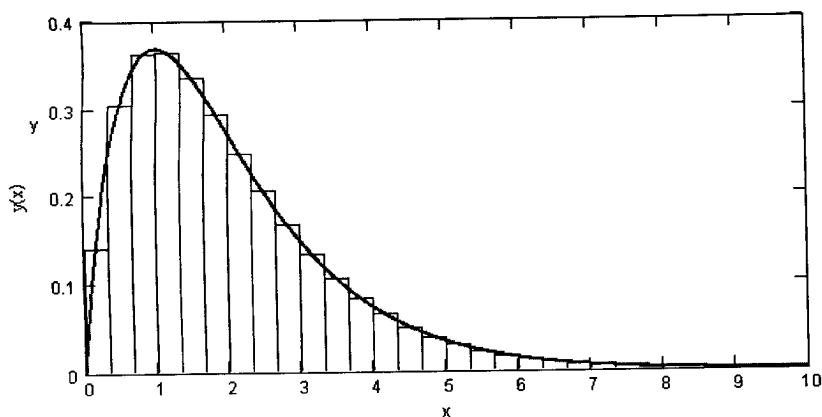


Рисунок 4.1 - Схематичне зображення криволінійної трапеції

$$y(x) = x e^{-x}$$

$$m=30; a=0; b=10; dx=(b-a)/m$$

$$\text{intq} := N \left[dx \sum_{i=0}^{m-1} y(x) [a+i \cdot dx]; \text{intq} \right]$$

$$\int_a^b y(x) dx = 0.999501$$

Результат певною мірою близький до 1. Але тепер збережемо число прямокутників

$m = 30$, а змінимо межу інтегрування b на 100000:

$$\int_a^b y(x) dx = 5.075958897550 \times 10^{-429}$$

Замість очікуваного наближення до 1 ми одержуємо «несподіваний».

Моментом інерції I_0 матеріальної точки масою m і радіусом-вектором \vec{r} відносно початку координат називається число $I_0 = mr^2$, а відносно координатних осей O_x і O_y – числа $I_x = my^2$ $I_y = mx^2$, причому $I_0 = I_x + I_y$.

Статичним моментом матеріальної точки масою m і радіусом-вектором \vec{r} відносно початку координат називається число $M_0 = mr$, а відносно координатних осей O_x і O_y – числа $M_x = my$ $M_y = mx$.

Приклад. Знайти статичний момент однорідного кола (рисунок 4.2)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

відносно центра O .

Розв'язання

Статичний момент матеріальної точки масою m дорівнює $M_0 = md$. Коло уявляємо як множину точок масою $m \approx \rho \cdot dl$ $\rho = \text{const}$, dl – елемент

довжини кола $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$. Отже, $dM_0 \approx \rho \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx$.

Далі отримуємо формулу

$$M_0 = 4\rho \int_0^R R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx$$

Зінтегрувавши, знайдемо статичний момент

$$M_0 = 2\pi\rho R^2$$

У всіх теоремах про середнє фігурує середня точка, точне положення якої невідоме. Проте, це не перешкоджає численним застосуванням теорем про середнє в математичному аналізі. Крім того, при певних умовах, накладених на функцію $f(x)$ та її похідні, положення середньої точки можна визначити з як завгодно високою точністю.

Наступна теорема має надзвичайно важливе значення при введенні поняття первісної.

Теорема. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ всюди в проміжку (a,b) мають похідні, рівні між собою ($f'(x) = g'(x)$), то $f(x) = g(x) + c$.

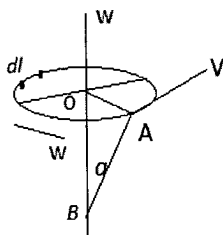


Рисунок 4.2

Перша теорема про середнє в узагальненій формі

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$, до того ж $g(x)$ знакостала на $[a,b]$ і $m \leq f(x) \leq M$. Тоді існує таке число $\mu (m \leq \mu \leq M)$, що

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

Якщо при цьому $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то існує така точка $\xi \in [a, b]$, що

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Друга теорема про середнє

Якщо обмежена функція $f(x)$ монотонно спадає (навіть в широкому розумінні) і невід'ємна на $[a,b]$, то існує така точка $\xi \in [a,b]$, для якої

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

З геометричної точки зору цей факт означає: знайдеться точка $\xi \in [a,b]$, така, що площа прямокутника з висотою $f(\xi)$ і основою $(b-a)$ дорівнюватиме площі криволінійної трапеції.

Теорема про середнє у фізиці

Середнє значення для несинусоїдальних періодичних е.р.с., напруг і струмів

Періодично змінна несинусоїдальна величина $f(\omega t)$ крім гармонічних складових характеризується трьома величинами:

Максимальним значенням за період $a_{\text{макс}}$, середнім квадратичним за період або діючим значенням

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(\omega t) dt}$$

і середнім по модулю значенням

$$A_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(\omega t)| dt.$$

Якщо крива $f(\omega t)$ симетрична відносно осі абсцис і протягом половини періоду функція $f(\omega t)$ ні разу не змінювала знаку, то середнє по модулю значення дорівнює середньому значенню за половину періоду:

$$A'_{\text{cp}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(\omega t) dt,$$

причому в останньому виразі початок відліку часу повинно бути обрано так, щоб $f(0) = 0$. В тих випадках, коли за весь період функція ні разу не міняє знаку. Наприклад, це видно на рисунку 4.3

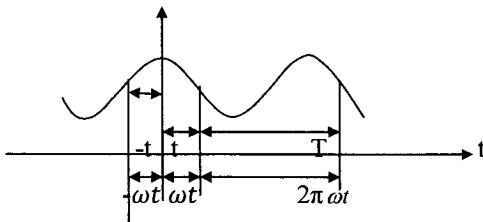


Рисунок 4.3

Середнє по модулю значення дорівнює постійній складовій A_0 .

При несинусоїдальних періодичних процесах, як і при синусоїдальних, зазвичай під значенням е.р.с., струму або напруги розуміють діюче значення.

Якщо крива періодично змінної величини розкладена в тригонометричний ряд, то діюче значення може бути знайдене слідуочим чином:

$$A^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \right]^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2$$

(таке піднесення ряду в квадрат цілком можливе, так як ряд абсолютно збіжний при будь-якому значенні ω).

Кожний з інтегралів в останній сумі рівний нулю, і звідси слідує, що дорівнює нулю середнє за період значення добутку миттєвих величин різних гармонік. Маючи це на увазі, для діючого значення отримаємо:

$$\begin{aligned} A^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt = \\ &= A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{km}^2}{2} = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$A = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2} \quad (4.2)$$

Таким чином, діюче значення періодичної несинусоїдальної величини залежить тільки від діючих значень її гармонік і не залежить від фаз ψ_k .

Якщо, наприклад, напруга u складається з ряду гармонік U_0, u_1, u_2 і т.д., дійсне значення яких U_0, U_1, U_2 і т.д., то діюча напруга

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \quad (4.3)$$

Аналогічно для струму i

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \quad (4.4)$$

Часто середнє по модулю і діюче значення несинусоїдальних величин можуть бути розраховані безпосередньо на основі інтегральних співвідношень. В цих випадках немає необхідності в попередньому розкладанні функції на гармонічні складові.

Приклад. Знайти середнє по модулю і діюче значення функції, зображеної на рисунку 4.4

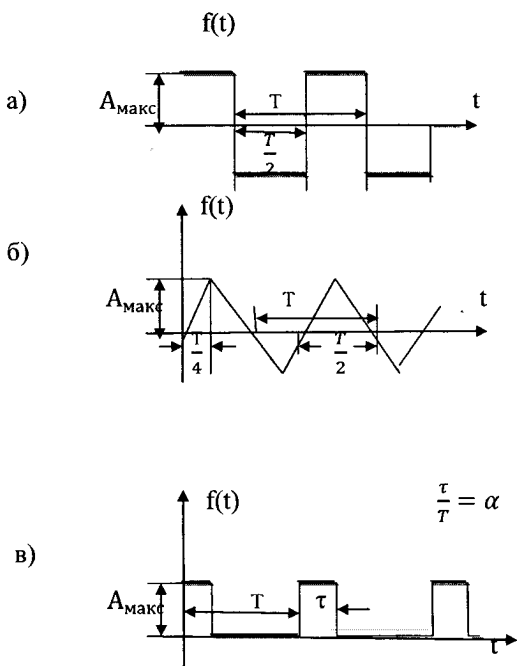


Рисунок 4.4 Графічне представлення функції

У випадку, зображеному на малюнку 4.4 а), безпосередньо з визначення діючого і середнього по модулю значень слідує, що $A = A_{cp} = a_{max}$

У випадку 4.4 б)

$$A = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} (a_{max} \frac{4t}{T})^2 dt} = \frac{a_{max}}{\sqrt{3}}$$

$$A_{cp} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} a_{max} \frac{4t}{T} dt = \frac{a_{max}}{2}$$

у випадку в) за формулою:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\tau} a_{max}^2 dt} = a_{max} \sqrt{\frac{\tau}{T}}$$

і за формулою:

$$A_{cp} = a_{\max} a$$

Результат діючого значення по формулі (4.2) призводить до тих же результатів.

При оцінці несинусоїдальних періодичних кривих в електроенергетиці, де криві переважно симетричні відносно осі абсцис, користуються коефіцієнтом форми кривої k_ϕ , коефіцієнтом амплітуди k_a , коефіцієнтом спотворення k_i

Коефіцієнт форми визначається як відношення діючого до середнього по модулю значення:

$$k_\phi = \frac{A}{A_{cp}}$$

Для синусоїди $k_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$.

Коефіцієнт амплітуди дорівнює відношенню максимального до діючого значення:

$$k_a = \frac{a_{\max}}{A}$$

Для синусоїди $k_a = \sqrt{2} = 1,41$.

Коефіцієнт спотворення визначається як відношення дійсного значення основної гармоніки до діючого значення всієї кривої:

$$k_i = \frac{A_1}{A}$$

Для синусоїди $k_i = 1$.

В електроніці і радіотехніці для оцінки спотворення користуються коефіцієнтом гармонік, який визначається як відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення основної гармоніки:

$$K = \frac{1}{A_1} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}$$

За відсутності постійної сталої

$$k = \frac{1}{k_i \sqrt{1 - k_i^2}}.$$

Для синусоїди $k = 0$.

Задача 3.19

Обчислити інтеграл $\int_a^b \frac{x+3}{x^2+6x+3} dx$, де $a = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b – довжина висоти AK

у трикутнику з вершинами $A(5; -6; 2)$, $B(1; 3; -1)$, $C(1; -1; 2)$.

Задача 3.20

Обчислити інтеграл $\int_a^b \frac{x}{x^2+2} dx$, де $a = z_1 \cdot z_2$, $b = |z_2|$, $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$

5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

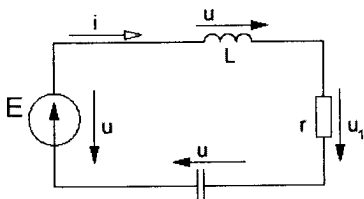


Рисунок 5.1 Схематичне зображення електричного кола

Приклад. Компонентні рівняння двополюсників мають

а) опору $i = \frac{1}{R}U$; $U_R = iR$, $u(t) = e(t)$;

б) ємності $i_c = C \frac{du_c}{dt}$; $u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$;

в) індуктивності $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t) dt$; $u_L = L \frac{di_L}{dt}$.

Згідно з другим законом Кірхгофа

$$U_R + U_C + U_L = U$$

одержимо інтегро-диференціальне рівняння відносно сили струму $I(t)$:

$$R \cdot I(t)_L + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t)_L dt + L \frac{dI(t)_L}{dt} = U(t).$$

відповідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку відносно сили струму:

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{du(t)}{dt}.$$

Якщо $u = const$, то тоді рівняння

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0$$

називається автономним диференціальним рівнянням і можна записати таким чином

$$y'' + \frac{R}{L} y' + \frac{1}{LC} y = 0.$$

Якщо параметри R , L і C – сталі, то одержане диференціальне рівняння належить до лінійних однорідних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Воно описує вільні коливання контуру (системи).

Приклад. Швидкість охолодження тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Температура повітря 20°C , тіло протягом 20 хвилин охолоджується від 100°C до 60°C . Знайти залежність температури від часу, та час, через який температура тіла знизиться до 30°C . Позначимо через T – температуру тіла в момент часу t , а через T_n – температуру повітря ($T_n < T$). Тоді за законом Ньютона $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_n)$, де k – коефіцієнт пропорційності, $k > 0$.

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо: $\frac{dT}{T - T_n} = -k dt$,

$$\int \frac{dT}{T - T_n} = -k \int dt + \ln C.$$

Одержуємо $\ln(T - T_n) - \ln C = -kt$, або $(T - T_n)/C = e^{-kt}$.

Звідси одержуємо залежність температури тіла від часу t : $T = Ce^{-kt} + T_n$. Знайдемо сталу C і коефіцієнт пропорційності k . За умовою задачі, температура повітря $T_n = 20^\circ\text{C}$; коли $t = 0$, то температура тіла $T = 100^\circ\text{C}$, а коли $t = 20$ хв, то $T = 60^\circ\text{C}$.

Використовуючи ці початкові умови, дістанемо: $100 = Ce^0 + 20$, $60 = Ce^{-k/3} + 20$. Отже, стала $C = 80$, а коефіцієнт пропорційності $k = \ln 2 / 20$. Тоді залежність температури тіла від часу буде мати вигляд: $T = 80e^{-(\ln 2)t/20} + 20$.

Знайдемо тепер, через який час температура тіла знизиться до 30°C . Тобто, потрібно знайти t_0 , якщо $T_0 = 30^\circ\text{C}$. Підставимо ці значення в одержану формулу для T , тоді маємо:

$$30 = 80e^{-(\ln 2)t_0/20} + 20, \text{ або } 60 \ln 2 = t_0 \ln 2.$$

Звідси одержуємо $t_0 = 60$ хв.

Відповідь: $T = 80e^{-(\ln 2)t/20} + 20$, $t_0 = 60$ хв. #

Приклад. Визначити криву, що проходить через точку $A(0;1)$ і для якої трикутник, утворений віссю Oy , дотичною до кривої та радіус-вектором точки дотику, є рівнобедреним (причому основою його є відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy) (рис. 5.2).

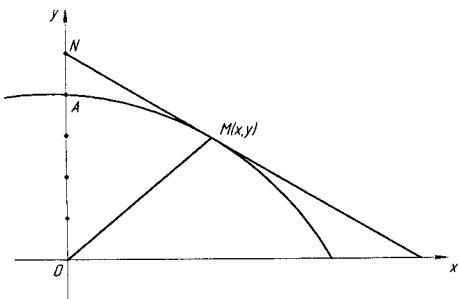


Рисунок 5.2

Нехай рівняння кривої буде $y = f(x)$. Проведемо дотичну MN у довільній точці кривої $M(x, y)$, N – точка перетину дотичної з віссю Oy . За умовою задачі, $|ON| = |OM|$, де

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Із рівняння дотичної $Y - y = y'(X - x)$, поклавши $X = 0$, знаходимо довжину сторони ON : $Y = |ON| = y - xy'$.

Оскільки за умовою $|ON| = |OM|$, то одержуємо диференціальне рівняння, однорідне відносно змінних x і y :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'.$$

Прийнявши $y = Ux$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\sqrt{x^2 + u^2 x^2} = ux - x(u'x + u), \quad \sqrt{1 + u^2} = -u'x.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Звідси: $\ln|u + \sqrt{1 + u^2}| = \ln|C| - \ln|x|.$

Замість U підставимо y/x і отримаємо $x^2 = C(C - 2y)$.

Для знаходження сталої C використаємо початкову умову $y = 1$, якщо $x = 0$. Тоді маємо рівняння $0 = C(C - 2)$. Звідси знаходимо $C_1 = 0$, $C_2 = 2$. Із цих двох значень C умові задачі задовольняє лише $C_2 = 2$ (при $C_1 = 0$ крива збігається з віссю Oy). Таким чином, шукана крива $y = f(x)$ є параболою $y = 1 - 1/4x^2$.

Відповідь: $y = 1 - 1/4x^2$.

Задача 5.1

Крива проходить через точку $(1; 1)$. Відстань будь-якої дотичної до цієї кривої від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику. Скласти рівняння кривої.

Задача 5.2

Визначити криву, яка проходить через точку $A(0,1)$ і для якої трикутник, утворений віссю Oy , дотичною до кривої, та радіусом-вектором точки дотику, є рівнобедреним (причому основою його є відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy).

Задача 5.3

Дві рідини X , Y піддають дистилюванню. Відомо, що в будь який момент цього процесу відношення кількостей рідин, які перетворюються в пару, пропорціональне відношенню кількостей, які знаходяться ще в рідинному стані. Визначити залежність між X , Y .

Задача 5.4

Визначити криву, знаючи, що піднормаль будь-якої точки кривої – середнє арифметичне між координатами точки.

Задача 5.5

Знайти криву, що має таку властивість: відстань будь-якої дотичної до початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

Задача 5.6

Знайти форму дзеркала, що відбиває всі промені, які виходять з однієї точки O рівнобіжно даному напрямку.

Задача 5.7

Знайти криві, у яких піддотична дорівнює сумі абсциси та ординати точки дотику.

Приклад. За допомогою математичного пакету Maple знайти розв'язок диференціального рівняння Ньютона.

$$mx'' + kx = a \cos(\omega(t - t_0)),$$

що описує рух тіла під впливом періодичної сили, застосувавши метод перетворення Фур'є.

Вводимо дані мовою математичного пакету Maple.

> restart;

deq:= m*difff(x(t),t,t)+k*x(t)=a*cos(omega*(t-t0));

$$deq := m \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + k x(t) = a \cos(\omega(t - t_0))$$

Застосовуємо вбудовані функції системи Maple для розв'язання диференціального рівняння методом перетворення Фур'є.

1. with(inttrans):F:=fourier(deq,t,ti);

$$F := \text{fourier}(x(t), t, ti) (k - m ti^2) = \frac{1}{2} a (e^{(\omega t_0)} \text{fourier}(e^{-i\omega t}, t, ti) + e^{-i\omega t_0} \text{fourier}(e^{\omega t}, t, ti))$$

Розв'яжемо отримане алгебраїчне рівняння:

2. S:=solve(F,fourier(x(t),t,ti));

$$S := \frac{1}{2} \frac{a (e^{(\omega t_0)} \text{fourier}(e^{-i\omega t}, t, ti) + e^{-i\omega t_0} \text{fourier}(e^{\omega t}, t, ti))}{-k + m ti^2}$$

Спростуємо вираз:

3. assume(omega>0);simplify(S);

$$\frac{\pi a (\text{Dirac}(ti + \omega\sim) + \text{Dirac}(ti - \omega\sim)) e^{(-i\pi t_0)}}{-k + m ti^2}$$

За допомогою оберненого Фур'є-перетворення знайдемо шукану функцію:

> invfourier(% ,ti,t);

$$\frac{a \cos(\omega\sim (t - t_0))}{k - m \omega\sim^2}$$

> simplify(%);

$$-\frac{a \cos(\omega \sim (t - t_0))}{-k + m \omega \sim^2}.$$

Приклад. Коливання в середовищі з опором h , частотою власних коливань системи ω , частотою збурювальної сили ν , коли збурювальна сила періодична і має вигляд $f(x) = h \sin(\nu x)$ описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2h \frac{dy(x)}{dx} + \omega^2 y(x) = f(x).$$

Що можна сказати про амплітуду коливного руху, коли опір h достатньо малий, а частота ν збурювальної сили наближається до частоти ω власних коливань системи?

Проведемо дослідження, використавши математичний пакет MathCAD. Якщо $h = 0.2$, $\omega = 20$, $\nu = 5$, то диференціальне рівняння коливного руху набуває вигляду:

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 0.4 \frac{d}{dx} y(x) + 400 \cdot y(x) = 0.2 \sin(5x) \right|$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

Застосувавши обчислювальний блок Given/Odesolve, побудуємо частинний розв'язок диференціального рівняння (рис. 5.3).

Given

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 0.4 \cdot \frac{d}{dx} y(x) + 400 \cdot y(x) = 0.2 \sin(5x)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$y := \text{Odesolve}(x, 10)$$

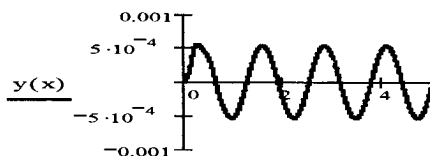


Рисунок 5.3

Якщо частоту ν збудувальної сили наблизити до частоти ω власних коливань системи, тобто прийняти $\nu = 15$, то графік частинного розв'язку змінюється (рис. 5.4):

Given

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + 0.4 \frac{d}{dx} y(x) + 400 y(x) = 0.2 \sin(15 \cdot x)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

F := Odesolve(x, 10)

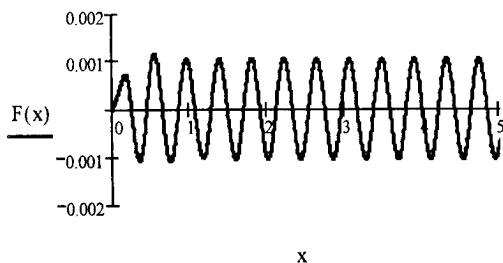


Рисунок 5.4

Наблизимо частоту ν збудувальної сили до частоти ω власних коливань системи, прийнявши $\nu = 19$ (рис. 5.5).

Given

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + 0.4 \frac{d}{dx} y(x) + 400 y(x) = 0.2 \sin(19x)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

F := Odesolve(x, 10)

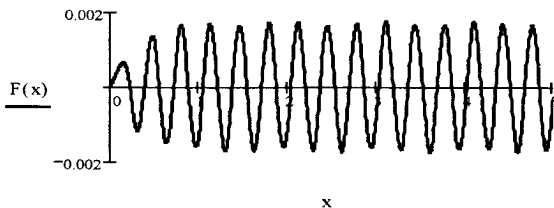


Рисунок 5.5

Проаналізувавши криві частинних розв'язків можна дійти висновку, що при наближенні частоти зовнішньої сили до частоти власних коливань системи, амплітуда коливного руху зростає.

Приклад. Розглядається процес усталеного змінного струму в колі з самоіндукцією. Процес описується відповідним диференціальним рівнянням:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i - \frac{V}{L} = 0, \text{ де } i - \text{ сила струму, } V - \text{ напруга, } R - \text{ опір кола, } L -$$

коефіцієнт самоіндукції. Побудувати графіки напруги $V = A \sin(\omega t)$ і графік сили струму з даною напругою. Порівняти частоти, амплітуди і фази. Чи залежить сила струму з напругою $V = A \sin(\omega t)$ від початкового значення сили струму i_0 через короткий проміжок часу? $R=4, L=2, A=2, \omega=2$.

Графік розв'язку рівняння $\frac{di}{dt} + 2i = \sin(2t)$ будемо, використавши обчислювальний блок Given / Odesolve математичного пакету MathCAD

Given

$$\frac{d}{dt}i(t) + 2i(t) = \sin(2t)$$

$$i(0) = 3$$

$$F := \text{Odesolve}(t, 5\pi)$$

2.883

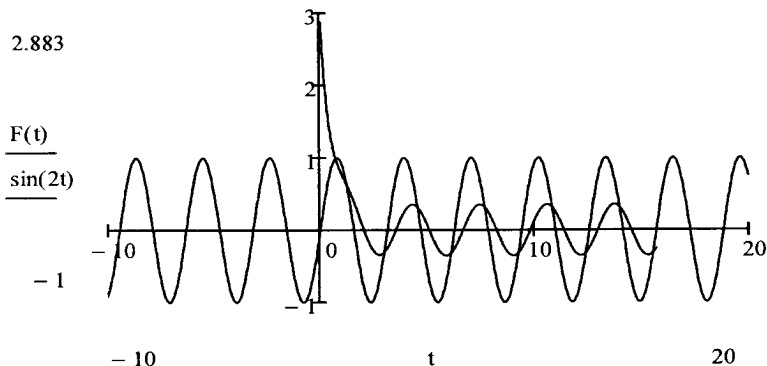


Рисунок 5.6

Аналізуючи криві, можна зробити висновки: а) сила струму з даною напругою і напруга мають однакову частоту, але різні амплітуду і фазу б) процес усталеного змінного струму в колі з самоіндукцією не залежить від початкового значення струму i_0 .

Задача 5.8

Крива $y = y(x)$ проходить через початок координат. Середина відрізка її нормалі, який міститься між будь-якою точкою кривої і віссю абсцис, лежить на параболі $y^2 = ax$. Скласти рівняння цієї кривої.

Задача 5.9

Розглядається процес усталеного змінного струму в колі з самоіндукцією i – сила струму, V – напруга, R – опір кола, L – коефіцієнт самоіндукції. Процес описується відповідним диференціальним рівнянням:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i - \frac{V}{L} = 0$$

- 1) Визначити силу струму в будь-який момент часу, $i(0) = i_0$.
- 2) Визначити силу струму, коли напруга $V = A \sin \omega t$
- 3) За допомогою математичного пакета Mathcad побудувати графіки напруги $V = A \sin \omega t$ і графік сили струму із даною напругою. Порівняти частоти, амплітуди і фази.
- 4) Чи залежить сила струму із напругою $V = A \sin \omega t$ від початкового значення сили струму i_0 через короткий проміжок часу?

№	R	L	V	A	ω
1	4	2	100	1	2
2	6	3	200	2	4
3	10	5	100	3	6
4	5	5	220	4	5
5	2	2	120	1	2
6	4	4	150	2	4
7	10	2	100	3	6
8	6	2	200	4	5
9	5	5	220	1	3
10	3	3	120	2	4
11	4	2	150	3	2
12	10	5	120	4	3
13	10	1	120	4	2
14	6	2	200	1	4
15	5	5	100	2	6

№	R	L	V	A	ω
16	4	4	120	4	5
17	3	3	150	1	2
18	10	2	100	2	4
19	2	2	200	3	6
20	5	5	220	4	5
21	10	5	120	1	3
22	6	2	100	2	4
23	4	2	200	3	2
24	5	5	150	4	3
25	3	3	100	1	2
26	6	2	220	3	6
27	4	4	120	2	4
28	10	5	150	4	3
29	5	5	200	5	2
30	2	2	100	1	1

Приклад. Нехай матеріальна точка масою m рухається по прямій, яку прийемо за вісь Ox , під дією сили, яка залежить від часу t , положення x і швидкості в момент часу t . Тоді на основі другого закону механіки маємо

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \quad \text{або} \quad \ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

де \ddot{x} – прискорення точки в момент часу t , $f = F/m$. Саме рівняння визначає закони руху матеріальної точки. Розв'язки рівняння $x = x(t)$ називають рухом. Задача інтегрування рівняння полягає у знаходженні всіх рухів та вивчення їх властивостей.

1. Знайти закон руху математичного або фізичного маятника, нехтуючи силами опору. Під математичним

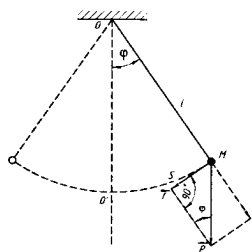


Рисунок 5.7

маятником розуміють матеріальну точку, яка висить на нерозтяжній нитці, закріпленій нерухомо в одній точці.

Нехай математичний маятник (рис. 5.7), довжина якого l і вага $p = mg$, виведений з вертикального положення на деякий кут φ .

Оскільки коливання маятника відбувається в середовищі без опору, то маятник коливається під дією сили, величина якої $f = mg \sin \varphi$.

Нехай за час t точка M пройшла по дузі кола з центром в точці O і радіусом l шлях s .

На основі другого закону механіки, маємо

$$ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0, \text{ або } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Це є нелінійне рівняння руху математичного маятника.

Фізичним маятником називається абсолютно тверде тіло, яке може коливатись (обертатись) під дією сили тяжіння відносно нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через центр його ваги.

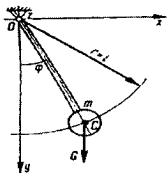


Рисунок 5.8

Умови рівноваги моментів відносно осі обертання маятника можна записати у вигляді :

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I_z} \sin \varphi = 0,$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі Oz (рис. 5.8),

$\varphi(t)$ – кут відхилення ваги від осі Oy в момент часу

t .

Як бачимо з рівнянь, рівняння руху математичного і фізичного маятника одне і те ж

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

лише змінюються власні частоти. Для математичного маятника $\omega^2 = \frac{g}{l}$, а

для фізичного $-\omega^2 = \frac{mgl}{I_z}$

При досить малих коливаннях маятника: $\sin \varphi \approx \varphi$, тобто відповідні рівняння можна лінеаризувати. В результаті чого одержали рівняння гармонічного осцилятора

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

розв'язки якого задаються формулою :

$$\varphi = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Тобто рух математичного (фізичного) маятника при малому відхиленні від положення рівноваги є гармонічним коливанням.

Тобто рух математичного (фізичного) маятника при малому відхиленні від положення рівноваги є гармонічним коливанням.

Задача 5.10

Довести, що рівняння руху маятника $y'' + \sin y = 0$ має розв'язок $y(x)$ такий, що при $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow +\infty$.

Задача 5.11

Обчислити швидкість, з якою впаде на Землю тіло (під дією земного тяжіння), що в початковий момент перебуває на орбіті Місяця (прискорення земного тяжіння обернено пропорційне квадратові відстані тіла від центра Землі). ($R = 6\,370$ км – радіус земної кулі ; $L = 384\,000$ км – відстань Місяця від центра Землі).

Задача 5.12

Обчислити згин балки, один кінець якої непорушно замуруваний у стіні, а на другий діє вертикальна сила P . Довжина балки дорівнює L (вагою балки нехтуємо).

Вказівка. Якщо початок координат помістити в нерухому точку балки, вісь Ox спрямувати вздовж балки, а Oy – вертикально вниз, то згинальний момент у точці (x, y) $M = P(l - x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$, де E – модуль Юнга, I – момент інерції площі поперечного перерізу балки відносно нейтральної лінії.

При цьому $y(0) = y'(0) = 0$. Відповідь: $H = y(l) = \frac{Pe^3}{3EI}$.

Задача 5.13

Автомобіль рухається прямолінійно зі швидкістю $v = 90$ км/ч. В деякий момент часу він починає гальмувати. Сила гальмування дорівнює 0.3 від ваги автомобіля. Протягом якого проміжку часу він буде рухатись від початку гальмування до повної зупинки і який шлях буде пройдений за цей час? Відповідь: $8,5$ с; $106,3$ м.

Приклад. Швидкість охолодження тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Температура повітря 20°C , тіло протягом 20 хвилин охолоджується від 100°C до 60°C . Знайти залежність температури від часу, та час, через який температура тіла знизиться до 30°C .

Позначимо через T – температуру тіла в момент часу t , а через T_n – температуру повітря ($T_n < T$). Тоді за законом Ньютона $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_n)$, де k – коефіцієнт пропорційності, $k > 0$.

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо: $\frac{dT}{T - T_n} = -k dt$,

$$\int \frac{dT}{T - T_n} = -k \int dt + \ln C.$$

Одержуємо $\ln(T - T_n) - \ln C = -kt$, або $(T - T_n)/C = e^{-kt}$.

Звідси одержуємо залежність температури тіла від часу t :

$$T = Ce^{-kt} + T_n.$$

Знайдемо сталу C і коефіцієнт пропорційності k . За умовою задачі, температура повітря $T_n = 20^\circ\text{C}$; коли $t = 0$, то температура тіла $T = 100^\circ\text{C}$, а коли $t = 20$ хв, то $T = 60^\circ\text{C}$.

Використовуючи ці початкові умови, отримаємо: $100 = Ce^0 + 20$, $60 = Ce^{-k/3} + 20$. Отже, стала $C = 80$, а коефіцієнт пропорційності $k = \ln 2 / 20$.

Тоді залежність температури тіла від часу буде мати вигляд:

$$T = 80e^{-(\ln 2)t/20} + 20.$$

Знайдемо тепер, через який час температура тіла знизиться до 30°C . Тобто потрібно знайти t_0 , якщо $T_0 = 30^\circ\text{C}$. Підставимо ці значення в одержану формулу для T , тоді маємо:

$$30 = 80e^{-(\ln 2)t_0/20} + 20, \quad \text{або} \quad 60 \ln 2 = t_0 \ln 2.$$

Звідси одержуємо $t_0 = 60$ хв.

Відповідь: $T = 80e^{-(\ln 2)t/20} + 20$, $t_0 = 60$ хв.

5.1 Нелінійні диференціальні рівняння

Розглянемо деякі основні найбільш універсальні методи наближеного розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь. Обмежимося простими абстрактними прикладами, не пов'язаними з побудовою математичних моделей конкретних фізичних пристроїв.

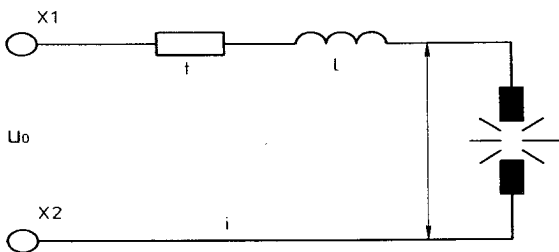


Рисунок 5.8 Схематичне зображення нелінійного електричного кола

На рисунку 5.8 наведено приклад нелінійного електричного ланцюга, якому відповідає нелінійне диференціальне рівняння. У ланцюг включено ділянку із опором r , індуктивну котушку з індуктивністю L та електрична дуга. Нехай стала напруга u_0 , характеристика дуги $u_0 = F(i)$. Тоді рівняння ланцюга має вигляд

$$u_0 = ri + L \frac{di}{dt} + u \quad (5.1)$$

або

$$u_0 = ri + L \frac{di}{dt} + F(i) \quad (5.2)$$

Одним із методів розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь полягає у використанні ряду Тейлора, а точніше, часткової суми ряду

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k$$

Приклад. Розв'язати нелінійне диференціальне рівняння

$$y'(x) = (y + x)^2, \quad y(0) = 0.$$

Розв'язання. Наближений розв'язок рівняння в околі точки $x_0 = 0$ шукаємо у вигляді перших п'яти членів ряду Малорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{y^{(V)}(0)}{5!} x^5.$$

Відомо, що $y(0) = 0$, далі знаходимо решту коефіцієнтів:

$$y'(0) = (y(0) + 0)^2 = 0, \quad y''(x) = 2(y + x)(y' + 1), \quad y''(0) = 0,$$

$$\text{аналогічно знаходимо } y'''(0) = 2, \quad y^{IV}(0) = 0, \quad y^V(0) = 16.$$

Отже, наближений розв'язок має вигляд

$$y(x) \approx \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}, \quad y = \operatorname{tg} x - x$$

Як ми уже бачили, моделі деяких процесів описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Особливо це стосується дослідження систем автоматичного управління, які описуються нелінійними математичними моделями. Тому для одержання характеристик динамічної системи часто перетворюють рівняння. Одним із методів перетворення рівнянь є метод лінеаризації. Він полягає у послідовному перетворенні нелінійного рівняння, в результаті чого одержується лінійне рівняння, яке відповідає заданому нелінійному. Розглядають повну лінеаризацію, коли рівняння зводиться до такого, в якому міститься менша кількість нелінійностей або спрощені нелінійності. Наприклад, коли функція $y = e^x$ замінюється першими членами ряду Тейлора: $1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Приклад. Знайти методом лінеаризації наближений розв'язок системи диференціальних рівнянь, яка є варіантом моделі розвитку популяції

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma y + \delta xy, \end{cases} \quad \text{де} \quad x(t), y(t) - \text{кількість жертв та хижаків}$$

$a > 0, b < 0, g < 0, d > 0$. Початкові умови $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

Замінімо нелінійну задачу лінійною в околі стаціонарної точки, де $dx/dt = 0, dy/dt = 0$. Це точка з координатами $x_s = -\gamma/\delta$ і $y_s = -\alpha/\beta$. Праві частини рівнянь системи подамо у вигляді формули Тейлора в околі стаціонарної точки $M(x_s, y_s)$, обмежившись лінійними членами:

$f(x, y) = f(M) + df/dx(M)(x - x_s) + df/dy(M)(y - y_s) + \dots$ Тоді $\alpha x + \beta xy = \beta x_s(y - y_s), \gamma y + \delta xy = \delta y_s(x - x_s)$, а лінеаризована система набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \beta x_s (y - y_s), \\ \frac{dy}{dt} = \delta y_s (x - x_s). \end{cases}$$

Розв'язок в системі координат XOY одержується в

результаті інтегрування рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{\delta y_s (x - x_s)}{\beta x_s (y - y_s)}$. Його розв'язком є сім'я

еліпсів $\frac{(x - x_s)^2}{2\beta x_s} - \frac{(y - y_s)^2}{2\delta y_s} = C$. На рис. 5.9 наведено фазові портрети заданої

системи та лінеаризованої при $\alpha = 3$, $\beta = -1.8$, $\gamma = -4$, $\delta = 1.2$.

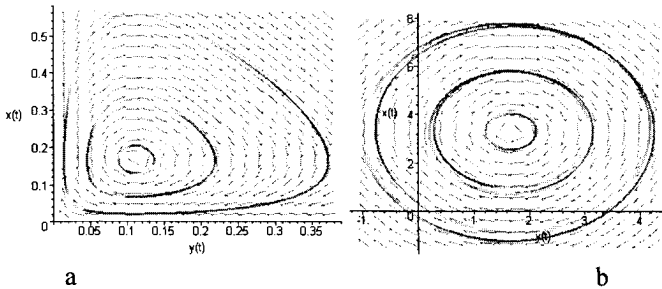


Рисунок 5.9 Фазові портрети заданої системи диференціальних рівнянь та лінеаризованої

Можна зробити висновок про те, що поведінка розв'язку заданої системи у певному розумінні близька до розв'язку лінеаризованої системи диференціальних рівнянь і, що на основі цього можна робити певні висновки та припущення щодо досліджуваного процесу. Наприклад, що фазові траєкторії в околі стаціонарної (особливої) точки є концентричними, що коливання в системі «хижак – жертва» є нестійкими.

6 ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

При розв'язуванні диференціальних рівнянь доцільним є використання інтегрального перетворення Лапласа. Припустимо, що зображення невідомої функції існує

$$i(t) \doteq I(p)$$

Тоді за властивістю зображення похідної маємо

$$\frac{di(t)}{dt} \doteq pI(p) - i(0) = pI(p).$$

Відповідно до властивості зображення інтегралу

$$\int_0^t i(\tau) d\tau \doteq \frac{I(p)}{p}.$$

Зрештою, зображення сталої визначається так

$$U(t) = E \doteq \frac{E(p)}{p}$$

Підстановка знайдених відповідних зображень у рівняння одержуємо зображення диференціального рівняння у такому вигляді:

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp} I(p) = \frac{E}{p} \quad R \cdot I(t)_L + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t)_L dt + L \cdot \frac{dI(t)_L}{dt} = U(t)$$

Одержане рівняння відносно зображення $I(p)$ шуканої функції $i(t)$ є алгебраїчним рівнянням з одним невідомим $I(p)$. Розв'язавши рівняння, отримаємо зображення розв'язку вихідного диференціального рівняння:

$$I(p) = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}$$

Виділимо у знаменнику останнього виразу повний квадрат

$$\begin{aligned} Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} &= L \left(p^2 + 2p \frac{R}{2L} + \left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC} \right) = \\ &= L \left[\left(p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 \right] = L \left[\left(p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \omega^2 \right] \end{aligned}$$

де введено такі позначення:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

$$\tau = \frac{R}{2L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2, \quad \tau = \frac{R}{2L}$$

Виділимо у знаменнику останнього виразу повний квадрат, тоді

$$I(p) = \frac{E}{L\omega} \frac{\omega}{(p + \tau)^2 + \omega^2}$$

Оригінал може бути знайденим за допомогою таблиці зображення та відповідних теорем.

$$i(t) = \frac{E}{L\omega} e^{-t\tau} \sin \omega t.$$

Завдання для самостійного виконання:

Задача 6.1

Побудувати графіки $i(t)$ при $\frac{L}{C} > \frac{R^2}{4}$ та $\frac{L}{C} < \frac{R^2}{4}$, проаналізувати $\frac{L}{C} = \frac{R^2}{4}$.

Зауваження. Класичне операційне числення, побудоване на перетворенні Лапласа, обмежене функціями, до яких воно застосовується

Наприклад, права частина диференціального рівняння

$$x' - x = (2t - 1)e^{t^2}, \quad x(0) = 0$$

не задовольняє умову існування функції-оригінала (існують $M > 0$ і дійсне $s > 0$ такі, що $|f(t)| \leq Me^{st}$ довільного $t > 0$), а тому зображення цієї функції за Лапласом не існує. Тому немає підстав до застосування інтеграла Дюамеля в класі функцій, що не є оригіналами.

Але, якщо забути про умови існування оригінала, а формально застосувати інтеграл Дюамеля, то одержимо розв'язок даного рівняння. Виконуємо дії згідно алгоритму розв'язання. Розглянемо відповідне ДР $x' - x = 1$, $x(0) = 0$ його розв'язком є функція $x_1(t) = e^t - 1$. Далі застосовуємо інтеграл Дюамеля, записавши розв'язок даного рівняння у вигляді

$$x_1(t) = \int_0^t x_1(t-\tau)(2\tau-1)e^{\tau^2} d\tau = \int_0^t e^{(t-\tau)}(2\tau-1)e^{\tau^2} d\tau.$$

Зінтегрувавши одержимо розв'язок задачі Коші

$$x(t) = e^{t^3} - e^t.$$

Приклад. Аналогічно розв'язується задача Коші для диференціальних рівнянь другого порядку

$$x'' - 9x = te^{t^2}, x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

$$x'' - 9x = 1, x(0) = 0, x'(0) = 0$$

$$x_1(t) = \frac{1}{9}(ch3t - 1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{\tau^3} ch(3t - 3\tau) d\tau - \frac{1}{6} ch(3t).$$

$$x'' - 9x = te^{t^2}, x(0) = a_0, x'(0) = a_1.$$

Загалом, поняття згортки, що вводиться у функціональному аналізі

$$f(t) \cdot g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau,$$

належить до ширшого класу функцій, де утворюється математична структура, в якій можна розглядати рівняння у згортках

$$g \cdot x = f$$

де $g(t)$ і $f(t)$ – відомі функції, а $x(t)$ – невідома функція. Варто зауважити, що змістовного сенсу такі рівняння набувають у класі узагальнених функцій.

Приклад. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$x'' + 3x' = f(t), x(0) = 0, x'(0) = 0$$

якщо функція $f(t)$ має вигляд:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 4, & 0 \leq t < 3, \\ 2-t, & t \geq 3 \end{cases}$$

Розв'язання

Побудуємо графічне зображення функції

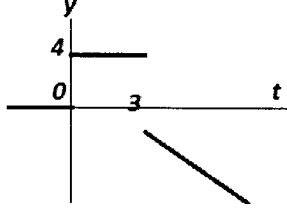


Рисунок 6.1

Функцію $f(t)$ можна подати аналітично за допомогою функції Хевісайда:

$$f(t) = 4(\eta(t) - \eta(t-3)) + (2-t)\eta(t-3),$$

розкривши дужки, отримаємо форму зручну для побудови зображення функції $f(t)$ (отримайте самостійно !):

$$f(t) = 4\eta(t) - (t-3)\eta(t-3) - 5\eta(t-3).$$

Згідно з відповідними теоремами операційного числення запишемо зображення функції $f(t)$:

$$f(t) \rightarrow \frac{4}{p} - \frac{1}{p^2}e^{-3p} - \frac{5}{p}e^{-3p}$$

Запишемо дане диференціальне рівняння у просторі зображень:

$$x(t) \rightarrow X(p), x'(t) \rightarrow pX(p), x''(t) \rightarrow p^2X(p),$$

$$x''(t) + 3x'(t) = f(t) \rightarrow p^2X(p) + 3pX(p) = \frac{1}{4} - \frac{1}{p^2}e^{-3p} - \frac{5}{p}e^{-3p}$$

$$p^2X(p) + 3pX(p) = \frac{1}{4} - \frac{1}{p^2}e^{-3p} - \frac{5}{p}e^{-3p}$$

Звідси зображення розв'язку вихідного диференціального рівняння:

$$X(p) = \frac{4}{p^2(p+3)} - \frac{1}{p^3(p+3)}e^{-3p} - \frac{5}{p^2(p+3)}e^{-3p}.$$

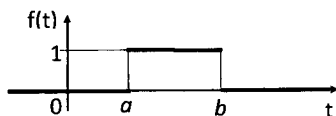
Виконавши перетворення, скориставшись (виконати самостійно) таблицею знайдемо розв'язок диференціального рівняння.

Теорема запізнювання.

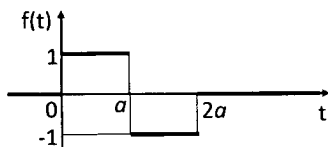
Задача 6.2

Знайти зображення кусково-неперервних функцій:

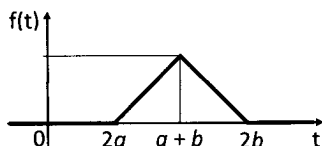
$$1) f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, t > b, \\ 1, & a < t < b. \end{cases}$$



$$2) f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > 2a, \\ 1, & 0 < t < a, \\ -1, & a < t < 2a. \end{cases}$$



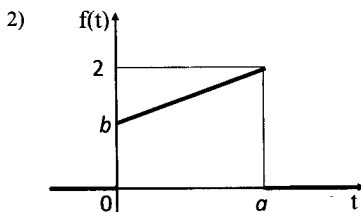
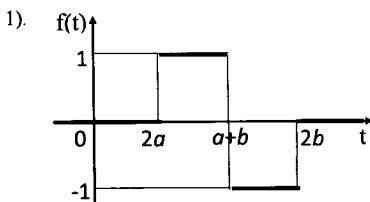
$$3) f(t) = \begin{cases} t-2a, & 2a < t < a+b, \\ 2b-t, & a+b < t < 2b, \\ 0, & t > 2b, t < 2a. \end{cases}$$



$$4) f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a, \\ e^{-b(t-a)}, & t > a. \end{cases}$$

$$5) f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a, \\ 1 - e^{-b(t-a)}, & t > a. \end{cases}$$

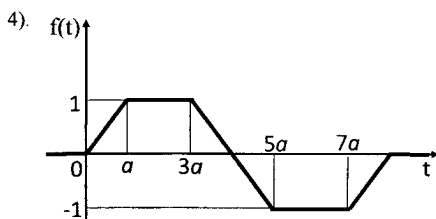
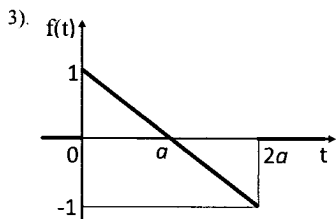
Задача 6.3



Знайти зображення функцій, заданих графічно.

Теореми випередження та зміщення.

Задача 6.4



Знайти зображення функцій:

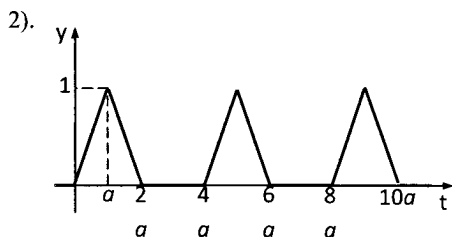
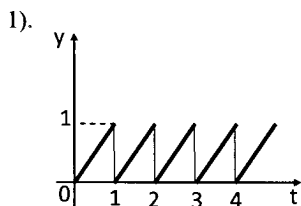
1). $e^{-4t} \sin 3t \cos 2t$. 2) $e^{3t} \cos 3t \cos 4t$. 3) $\text{sh } t \cos 2t \sin 3t$.

4). $\text{ch } 2t \sin t \sin 3t$. 5) $\text{sh } 5t \cos^2 t$. 6). $\text{ch } 3t \sin^2 4t$. 7) $e^{at} \sin bt$.

8). $\frac{1}{2}(\text{ch } at \sin at + \text{sh } at \cos at)$. 9). $\frac{1}{2}(\text{ch } at \sin at - \text{sh } at \cos at)$.

Задача 6.5

Зображення періодичного оригіналу. Знайти зображення таких періодичних функцій:



3). $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 2k\pi < t < (2k+1)\pi, \\ 0, & (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi, \end{cases}$

4). $f(t) = \arccos(\cos t)$

1) $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi - 2t}{\pi} & (0 < t < \pi), \\ \frac{2t - 3\pi}{\pi} & (\pi < t < 2\pi). \end{cases}$

2). $f(t) = \text{arctg}(\text{tg } t)$.

Задача 6.6

Диференціювання оригіналу. Знайти зображення таких функцій:

1). $f(t) = \cos^2 t$.

3) $f(t) = \sin^3 t$.

5). $f(t) = t \sin \omega t$.

$$2). f(t) = t \cos \omega t. \quad 4). f(t) = \cos^4 t. \quad 6). f(t) = te^t.$$

Задача 6.7

Знайти зображення диференціальних виразів з початковими умовами:

$$1). x^{IV}(t) + 4x'''(t) + 3x''(t), \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = -2, \quad x'''(0) = 3.$$

$$2). 2x'''(t) - 3x''(t) + 4, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 2.$$

$$3). 3x^{IV}(t) - x''(t) - x(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 0, \quad x'''(0) = -1.$$

Задача 6.8

Інтегрування оригіналу. Знайти зображення таких функцій:

$$1). f(t) = \int_0^t \cos \tau \, d\tau.$$

$$4). f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \sin \omega \tau \, d\tau.$$

$$2). f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau \, d\tau.$$

$$5). f(t) = \int_0^t \cos^2 \omega \tau \, d\tau.$$

$$3). f(t) = \int_0^t \operatorname{ch} \omega \tau \, d\tau.$$

$$6). f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} \, d\tau.$$

Задача 6.9

Користуючись теоремою інтегрування, знайти оригінали за їх зображеннями:

$$1). F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 6p + 13)}.$$

$$2). F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 2p - 3)}$$

Задача 6.10

Диференціювання зображення. Знайти зображення таких функцій:

$$1). f(t) = t^2 \cos \alpha t.$$

$$2). f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t).$$

$$3). f(t) = (t+1) \sin 2t.$$

$$4). f(t) = t \operatorname{sh} 3t.$$

$$5). f(t) = t \sin \alpha t \operatorname{sh} \alpha t.$$

$$6). f(t) = t \cos \alpha t \operatorname{ch} \alpha t.$$

Задача 6.11

Інтегрування зображення. Знайти зображення функцій:

1). $\frac{e^{-\alpha t} \sin t}{t}$.

4). $\frac{\text{sh}^2 t}{t}$.

7). $\frac{\sin 7t \sin 3t}{t}$.

2). $\frac{\text{ch } a t - \text{ch } b t}{t}$.

5). $\frac{1 - \cos t}{t} e^{-t}$.

8). $\frac{\cos b t - \cos a t}{t}$.

3). $\frac{1 - e^{\alpha t}}{t e^t}$.

6). $\frac{e^{-a t} \sin^2 b t}{t}$.

Задача 6.12

Користуючись теоремою Бореля, знайти оригінали, що відповідають зображенням:

1). $\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$.

2). $\frac{p}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

3). $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

Задача 6.13

Знайти оригінал за заданим зображенням.

1). $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

2). $F(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

3). $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

4). $F(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

5). $F(p) = \frac{3-p}{p(p+1)(p^2+4)}$.

6). $F(p) = \frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

7). $F(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)(p^2+2)(p+3)}$.

8). $F(p) = \frac{3p+2}{(p+1)(p-5)(p^2+4)}$.

9). $F(p) = \frac{3p-2}{(p^2+1)(p+5)(p^2+4)}$.

10). $F(p) = \frac{6p+2}{(p^2+1)(p^2-4)}$.

Задача 6.14

Розв'язати диференціальні рівняння при заданих початкових умовах:

91. $x''+2x'-3x = e^{-t}$,

$x(0) = 0, x'(0) = 1.$

1). $x''+2x' = t \sin t$,

$x(0) = x'(0) = 0.$

- 2). $x'''' - x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
 3). $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
 4). $x'''' + x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
 5). $x'''' + 2x'' + x = t \sin t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.
 6). $x'''' + 3x'' + 3x' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
 7). $x' + 2x + x = e^{-t}(\cos t + t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
 8). $x'(t) + x'(t) = 2t$; $x(1) = 1$, $x'(1) = -1$.
 9). $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2e^{1-t}$; $x(1) = 1$, $x'(1) = -1$.

Приклад. Розв'язати задачу Коші

$$x''' + x' = e^t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = 0$$

Розв'язання. Застосуємо перетворення Лапласа

$$\mathcal{L}\{x''' + x'\} = \mathcal{L}\{e^t\}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p) = X$$

$$\mathcal{L}\{x'''\} = p^3 X - p^2 \cdot 0 - p \cdot 2 - 0 = p^3 X - 2p$$

$$\mathcal{L}\{x'\} = pX - 0 = pX, \quad \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{p-1}$$

Зображенням диференціального рівняння буде операторне рівняння:

$$p^3 X - 2p + pX = \frac{1}{p-1}$$

або

$$p^3 X + pX = \frac{1}{p-1} + 2p.$$

Розв'язуємо операторне рівняння відносно $X(p)$:

$$X(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+1)} + \frac{2p}{p(p^2+1)}$$

Задача 6.15

Знайти частинні розв'язки рівнянь:

- 1). $x'' + 2x' + 5x = 1 - \eta(t-1)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
 2). $x'' + 4x' + 4x = 2e^{-t}(1 - \eta(t-1))$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
 3). $x'' + 4x = (1 - \eta(t-\pi))\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

$$4). x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 2e^{-2t}(1 - \eta(t-3)), \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$5). x'' + x' = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0, t > 2. \end{cases}$$

$$6). x'' + x' = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 1, \\ 4, & t > 1, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Задача 6.17

За допомогою інтеграла Дюамеля знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють ці початкові умови:

$$1). x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1 + e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2). x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$3). x'' - x' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$4) \begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

$$5) \begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

7 РЯДИ

Приклад. У комплексній формі синусоїдальну функцію часу

$$a(t) = A_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} a(t) &= \text{Im}[A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot A_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)] = \\ &= \text{Im}[A_m e^{j(\omega t + \varphi)}] = \text{Im}[A_m e^{j\omega} \cdot e^{j\varphi}] = \text{Im}[A_m \cdot e^{j\omega t}]. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Отже, $a(t) = \text{Im}[A_m \cdot e^{j\omega t}]$ - комплексна форма часу. Число $A_m = A_m e^{j\varphi}$ називається комплексною амплітудою.

Задача 7.1

Записати комплексну амплітуду для синусоїдальної функції $a(t) = 8\sin(\omega t + 20^\circ)$.

Приклад. Комплексну амплітуду $A_m = 25e^{-j30^\circ}$. Записати вираз для синусоїдальної функції часу $a(t)$.

Розв'язання. Оскільки синусоїдальна функція часу $a(t)$ визначається формулою $a(t) = \text{Im}[\tilde{A}_m e^{j\omega t}]$, то її вигляд отримується шляхом перетворення за допомогою відомої комплексної амплітуди:

$$a(t) = \text{Im}[\tilde{A}_m e^{j\omega t}] = \text{Im}[25e^{-j30^\circ} e^{j\omega t}] = \text{Im}[25e^{j(\omega t - 30^\circ)}] = \text{Im}[25(\cos(\omega t - 30^\circ) + j\sin(\omega t - 30^\circ))] = 25\sin(\omega t - 30^\circ).$$

Відповідь. $a(t) = 25\sin(\omega t - 30^\circ)$.

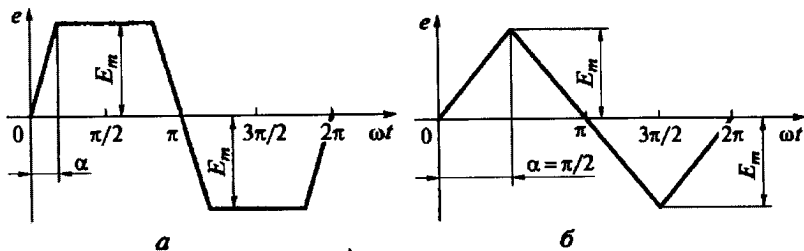


Рисунок 7.1

Задача 7.2

Розвинути у тригонометричний ряд Фур'є періодичну функцію задану графіком на рисунку 7.1 (а).

$$e = \frac{4E_m}{\pi\alpha} \left(\sin \alpha \cdot \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \cdot \sin \omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \cdot \sin 5\omega t + \dots \right)$$

Задача 7.3

Розвинути у тригонометричний ряд Фур'є періодичну несинусоїдальну ЕРС $e(\omega t)$, графік якої має вигляд трикутника (рисунок 7.1. (б), аналітичним методом.

Розв'язання. Задана лінія є частинним випадком розв'язку задачі 7.1, за умови, що $a = \frac{\pi}{2}$. Тому тригонометричний ряд одержуємо підстановкою у формулу (7.1) значення $a = \frac{\pi}{2}$

Відповідь:
$$e = \frac{4E_m}{\pi\alpha} \left(\sin a \cdot \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3a \cdot \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5a \cdot \sin 5\omega t + \dots \right).$$

Задача 7.4

Скориставшись формулою (7.1), записати ряд Фур'є функції, заданої на рис. 7.2

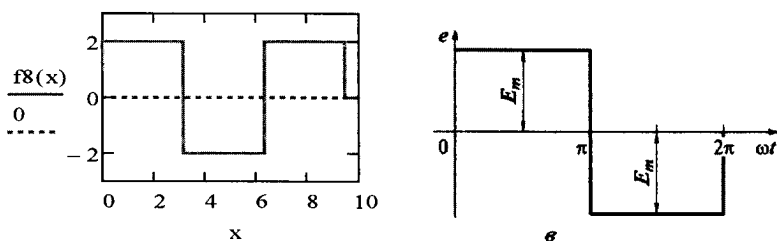


Рисунок 7.2

Відповідь:
$$e = \frac{8E_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right)$$

Нижче наведені формули є повторенням формул, які розглянуто у п.4 **Інтегральне числення функції однієї змінної** з метою поглиблення навичок інтегрування.

Періодично змінна несинусоїдальна величина $f(\omega t)$, крім гармонічних складових, характеризується трьома величинами: максимальним значенням за період a_{\max} , середнім квадратичним за період або діючим значенням

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(\omega t) dt}$$

і середнім по модулю значенням

$$A_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(\omega t)| dt.$$

Приклад. Знайти середнє по модулю і діюче значення функції, зображеної на рисунку 7.3.

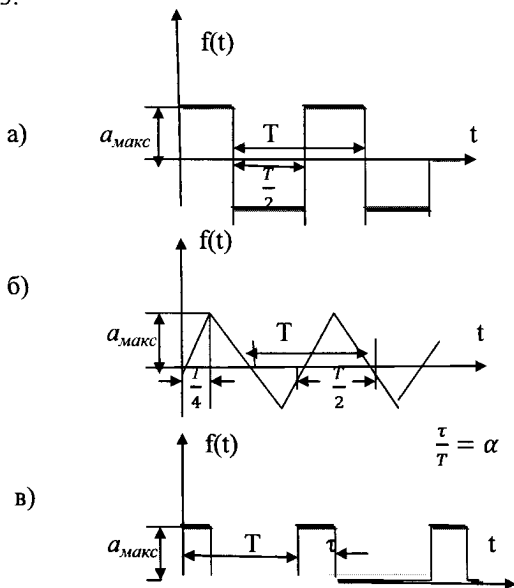


Рисунок 7.3

У випадку, зображеному на рис. 7.3 а), безпосередньо з визначення діючого і середнього по модулю значень слідує, що

$$A = A_{cp} = a_{\text{макс}}$$

У випадку, що зображений на рис 7.3 б) за формулою:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(a_{\text{макс}} \frac{4t}{T} \right)^2 dt} = \frac{a_{\text{макс}}}{\sqrt{3}}$$

отримаємо

$$A_{cp} = \frac{4}{T} \int_0^T a_{\text{макс}} \frac{4t}{T} dt = \frac{a_{\text{макс}}}{2}$$

у випадку, що зображений на рис 7.3 в) за формулою:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a_{\text{макс}}^2 dt} = a_{\text{макс}} \sqrt{a}$$

отримаємо

$$A_{cp} = a_{\text{макс}} a$$

Приклад

Несинусоїдну криву (рис. 7.4) розкласти в ряд Фур'є до п'ятої гармоніки включно та визначити струми у всіх гілках електричного кола (рис. 7.5)

Вихідні дані для розрахунку: $E_m = 100\text{В}$; $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 16 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $L_1 = 35\text{мГн}$, $L_2 = 57,3 \text{ мГн}$, $C_3 = 53\text{мкФ}$, $f = 50\text{Гц}$.

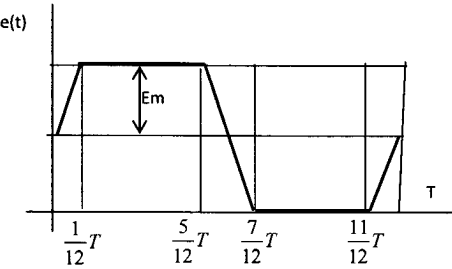


Рисунок 7.4

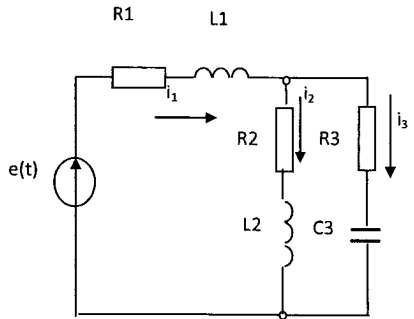


Рисунок 7.5

1. Розкладання в ряд Фур'є заданої функції.

Зображений графік функції

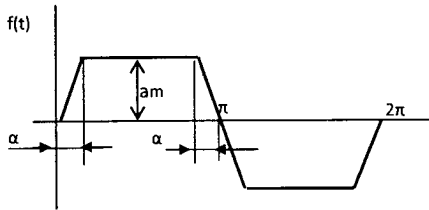


Рисунок 7.6

Розкладання її в ряд Фур'є має вигляд

$$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\alpha\pi} \left(\sin \alpha \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right).$$

Для того щоб привести його до табличного виду варто виділити постійну складову E_0 . $E_0 = E_m = 100$ В. Також порівняння графіків дає, що a_m

$= E_m$, а $\alpha = \frac{1}{12}T = \frac{2\pi}{12} = 30^\circ$. Таким чином, з урахуванням отриманих результа-

тів, розкладання в ряд Фур'є заданої функції має вигляд

$$e(t) = E_0 + \frac{4E_m}{\frac{2\pi}{12}\pi} \left(\sin 30^\circ \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 90^\circ \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 150^\circ \sin 5\omega t \right) =$$

$$= 100 + \frac{400}{1,64} (0,5 \sin \omega t + 0,11 \sin 3\omega t + 0,02 \sin 5\omega t) =$$

$$= 100 + 121,7 \sin \omega t + 26,8 \sin 3\omega t + 4,9 \sin 5\omega t \text{ В.}$$

$$E_u = U^2 \int_0^T \sin^2 \frac{\pi}{T} dt = \frac{U^2 T}{2}, \|u\| \approx 0.707 \sqrt{T}$$

Приклад. Розвинути в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(t) = t$, $t \in [1, 5]$.

Розв'язання. Довжина проміжку, на якому задано функцію, дорівнює 4. Отже, приймаємо $2T = 4$. Функцію $f(t)$ продовжено на всю числову вісь, при

цьому допускається проміжок інтегрування $[-2, 2]$. Функція $\phi(t)$ на цьому проміжку аналітично задається таким чином:

$$\phi(t) = \begin{cases} t + 4, & \text{при } -2 \leq t < 1, \\ t, & \text{при } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \phi(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^1 (t+4) dt + \int_1^2 t dt \right) = \frac{21}{4},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \phi(t) \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^1 (t+4) \cos \frac{n\pi t}{2} dt + \int_1^2 t \cos \frac{n\pi t}{2} dt \right) = \\ &= \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^1 (t+4) \sin \frac{n\pi t}{2} dt + \int_1^2 t \sin \frac{n\pi t}{2} dt \right) = -\frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

Остаточню ряд Фур'є набуває вигляду:

$$f(t) = 3 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k-1)\pi t}{2}}{2k-1} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi t}{k} \quad (7.2)$$

$1 < t < 5$

або

$$s_3(t) := 3 + 4 \left[\sum_{k=1}^n \frac{\sin [0.5 \cdot k \cdot \pi \cdot (1-t)]}{k \cdot \pi} \right]. \quad (7.3)$$

При $t = 1$ і $t = 5$ сума ряду (7.2) дорівнює 3 [згідно з умов Діріхле

$$S(t_0) = 0.5(f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0))].$$

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є за системою функцій $f_1(t) = \cos \frac{n\pi t}{l}$ та

$f_2(t) = \sin \frac{m\pi t}{l}$, ортогональних на відрізку $[-l, l]$, функцію, задану на відрізку

$[-1; 1]$ співвідношенням:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 0, \\ 0.5 & t = 0, \\ t, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислити коефіцієнт a_0 .

$$a_0 = 1.5, \quad a_n = -\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}, \quad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

Відповідь:
$$f(t) = \frac{3}{4} - \sum_n^{\infty} = 1 - \frac{2}{\pi^2(2n-1)^2} \cos(n\pi t) + \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t).$$

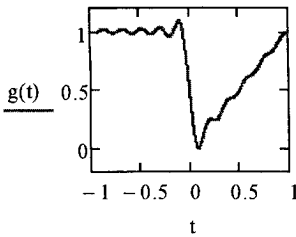


Рисунок 7.7

Записати розвинення цієї функції в тригонометричний ряд Фур'є. На рис.7.7 наведено графіки заданої функції та графік перших п'яти членів ряду Фур'є.

У точці розриву $t=0$ проявляється явище Гіббса. Деякі оцінки відхилення наближених значень часткових сум ряду

Фур'є від значень функції будуть наведені під час розв'язання інших прикладів.

8 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Приклад. Задача. Обчислити момент інерції відносно осі Ox однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями: $y = x^2$, $y = 1$ якщо густина розподілу мас $\rho = 1$.

Розв'язання. Момент інерції відносно осі Ox обчислюється за формулою:

$$J_x = \iint_D p(x, y) y^2 dx dy.$$

$$\text{Тоді } J_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y^2 dy = \int_{-1}^1 \frac{y^3}{3} \Big|_{x^2}^1 dx = \frac{2 \int_{-1}^1 (1-x^6) dx}{3} = \frac{4}{7}.$$

Задача 8.1

Сигнал $S(t) = 0$ при $t < 0$ і змінюється за законом $S(t) = At^2$ при $t > 0$. Знайти динамічне подання зображення сигналу (представлення).

$$S(t) = S_0 \delta(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \eta(t-\tau) d\tau$$

$$S_0 = 0; \quad \frac{ds}{dt} = 2At; \quad S(t) = 2A \int_0^{\infty} \tau(t-\tau) d\tau; \quad S(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Формула динамічного зображення сигналу:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) S(t-\tau) d\tau$$

$$\text{Енергія сигналу } E_s = \|S\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

9 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Приклад. Знайти векторні (силові) лінії магнітного поля, породженого постійним електричним струмом силою J , що тече по нескінченно довгому прямолінійному проводу, розташованому вздовж осі OZ . Векторною функцією є напруженість магнітного поля

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{2J}{\rho^2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$$

де ρ відстань від точки (x, y, z) до вісі OZ .

Розв'язання

Проекції вектора поля на координатні вісі:

$$H_x = -\frac{2J}{\rho^2}y,$$

$$H_y = \frac{2J}{\rho^2}x,$$

$$H_z = 0$$

Опускаючи спільний множник $\frac{2J}{\rho^2}$, отримуємо систему диференціальних рівнянь векторних ліній:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0} \quad (9.1)$$

Система (9.1) розпадається на два рівняння:

$$dz = 0 \Leftrightarrow z = H$$

$$x dx + y dy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

Отже, векторні лінії є перетинами циліндрів $x^2 + y^2 = R^2$ і площин $z = H$ і становлять сім'ю кіл у цих площинах з центрами на вісі OZ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}$$

Завдання. Доведіть, що $\text{rot}\vec{H} = 0$.

Задача 9.1

Задано векторне поле $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^3\vec{j} + zx^2\vec{k}$. Обчислити $\text{div}\vec{a}, \text{rot}\vec{a}$ в точці (2; -1; 5). Перевірити потенціальність і соленоїдальність цього поля.

Задача 9.2

Задано векторне електростатичне поле точкового заряду q ;

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}^0}{r^2}.$$

Обчислити $\text{div}\vec{E}$, або, довести, що поле є соленоїдальним, $\text{div}\vec{E} = 0, r \neq 0$.

Приклад. Знайти ротор вектора \vec{H} напруженості магнітного поля

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{2j}{r^2} (-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

Розв'язання

Підставимо вектор \vec{H} у формулу для обчислення ротора

$$\text{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \frac{2jy}{x^2+y^2} & \frac{2jx}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{2jx}{x^2+y^2} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{2jy}{x^2+y^2} \right) \right] \vec{k} = 2j \left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right] \vec{k} = \vec{0}$$

Таким чином, $\text{rot}\vec{H} = 0$ всюди, окрім вісі $OZ (x^2 + y^2 \neq 0)$ (тобто, поле вектора \vec{H} є безвихровим всюди окрім точок вісі OZ).

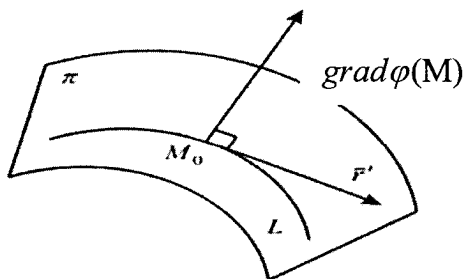


Рисунок 9.1

Задача 9.3

Визначити дивергенцію і ротор векторного поля \vec{A} , яке має в декартовій системі координат єдину складову $A_x = 20 \sin \frac{x}{\pi}$.

Задача 9.4

Визначити дивергенцію і ротор векторного поля \vec{A} , яке характеризується такими складовими в циліндричній системі координат (сферичній системі координат єдину складову):

$$A_r = \frac{10}{r^2}, \quad A_\varphi = 0, \quad A_z = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{10}{r^3}, \quad \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \vec{e}_r$$

Задача 9.5

Визначити дивергенцію і ротор векторного поля \vec{A} , яке характеризується тим, що у сферичній системі координат має єдину складову:

$$A_\varphi = 8r e^{-10r}.$$

$$A_\varphi = 8r e^{-10r}, \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{8 \cos \varphi}{\sin \varphi} e^{-10r} \vec{e}_r + \frac{-16r \sin(\varphi) e^{-10r} + 80r^2 \sin(\varphi) e^{-10r}}{r \sin \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = 8 \operatorname{ctg}(\varphi) e^{-10r} \vec{e}_r + 16(5r - 1) e^{-10r} \vec{e}_\varphi.$$

Задача 9.6

З'ясувати, чи буде векторне поле

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{2J}{\rho^2}(-y\vec{i} + x\vec{j}), \rho^2 = x^2 + y^2, \rho \neq 0$$

потенціальним, і чому.

Задача 9.7

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю ω . Знайти ротор поля лінійних швидкостей обертання $\vec{V} = (\omega\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ цього тіла.

Задача 9.8

Гвинтову лінію задано параметричною системою рівнянь

$$x = R \sin \omega t, \quad y = R \cos \omega t, \quad z = vt \quad (\text{рис 9.2})$$

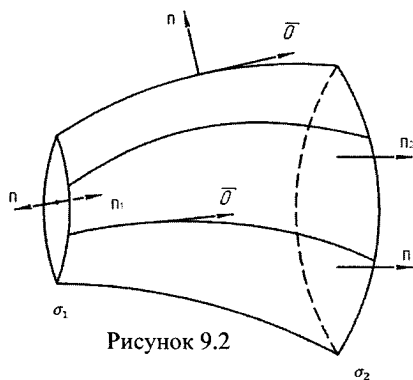


Рисунок 9.2

Знайти кут, який утворює гвинтова лінія з віссю Oz . (зауваження: напрям лінії в довільній точці визначається напрямом дотичної, а дотична — похідною $\frac{d\vec{r}}{dt}$)

$$\text{Відповідь:} \quad \cos \gamma = \frac{v}{\sqrt{R^2 \omega^2 + v^2}}$$

Формула для обчислення похідної за напрямом \vec{l}

$$\frac{du}{dl} = \frac{du}{dx} \cos \alpha + \frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \cos \gamma$$

Вектор, координати якого є значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають $gradu$. Отже,

Отже,

$$\frac{du}{dl} = \frac{du}{dx} \cos \alpha + \frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \cos \gamma.$$

Поняття градієнта використовується у дослідженні різних фізичних полів, наприклад, градієнт концентрації – нарощування або зниження в будь-якому напрямку концентрації розчиненої речовини, температурний градієнт – підвищення або зниження напрямку температури навколишнього середовища, градієнт потенціалу електростатичного поля вказує напрям сили, з якою поле діє на тіло з одиничним електричним зарядом і т.д.

Приклад. Знайти вектор нормалі до поверхні $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ в точці $M(2, -3, 1)$.

Розв'язання. Рівняння поверхні запишемо у вигляді $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 2z = 0$ тоді

$$u = F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 2z.$$

Знайдемо вектор нормалі

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\text{grad}F(x, y, z)}{|\text{grad}F(x, y, z)|} = \pm \frac{\frac{x}{2}\vec{i} + \frac{2y}{9}\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{81} + 4}} = \pm \frac{\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{1 + \frac{4}{9} + 4}} = \pm \left(\frac{3}{7}\vec{j} - \frac{2}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k} \right).$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\oint_L (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy, \quad L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

Для обчислення цього інтегралу потрібно перейти до змінної t . Підінтегральний вираз залежати від степенів $\sin t$ та $\cos t$ і інтегрувати складно. Оскільки відома формула Гріна (інтегрування здійснюється по

колу), то для обчислення використаємо подвійний інтеграл. Обчислимо частинні похідні та їхню різницю.

$$P(x, y) = x^4 + 4xy^3; \quad Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$$

Різниця дорівнює нулеві, а отже, подвійний інтеграл та відповідний криволінійний інтеграл дорівнюють нулеві.

Однією з важливих характеристик векторного поля є *векторні лінії*.

Векторною, називається лінія, в кожній точці якої дотична до неї паралельна вектору поля. Позначимо через $\vec{r}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ вектор дотичної. Тоді рівняння векторної лінії такі

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

Систему диференціальних рівнянь можна переписати у такому вигляді

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \end{cases}$$

Для плоского стаціонарного поля $\vec{a}(M) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ диференціальне рівняння векторної лінії набуває вигляду $\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}$ або еквівалентна форма

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{де} \quad f(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Отже, пошук векторної лінії зводиться до розв'язування диференціального рівняння першого порядку.

Задача 9.9

По нескінченному прямолінійному дроту протікає постійний струм сили I . Напруженість магнітного поля в зовнішніх точках дроту така:

$$H_x = -\frac{2j}{\rho^2}y, H_y = \frac{2j}{\rho^2}x, H_z = 0, \text{ де } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \text{ Знайти векторні лінії цього поля.}$$

$$\vec{dr} \parallel \vec{a}(M) \Rightarrow \vec{dr} \cdot \vec{a}(M) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

Означення. Дивергенцією векторного поля $\vec{a}(M)$ точці M , що позначається $\text{div}\vec{a}(M)$, називається границя відношення потоку векторного поля через замкнену поверхню σ до об'єму V області, обмеженої цією поверхнею, за умови, що область стягується до точки M при $\lambda \rightarrow 0$ (λ – діаметр області):

$$\text{div}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (V \rightarrow M)}} \frac{\oiint_{\sigma} \vec{a}(M) \vec{n}^0 d\sigma}{V}$$

Дивергенція характеризує густину потужності джерел векторного поля. Ця скалярна величина обчислюється за формулою:

$$\text{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Нехай задано векторне поле $\vec{a}(M)$. Виберемо в просторі деякий плоский замкнений контур L і позначимо через \vec{n} – вектор нормалі до площини, в якій лежить цей контур. Криволінійний інтеграл

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l}$$

називається *циркуляцією векторного поля* $\vec{a}(M)$ уздовж контура L .

$$C = \oint P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Задача 9.10

Задано векторне поле лінійних швидкостей \vec{V} точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Oz з постійною кутовою швидкістю ω . Обчислити циркуляцію цього поля вздовж кола

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \\ z = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Вказівка: $\vec{V} = (\omega \vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.

Відповідь: $2\omega\pi R^2$.

Задача 9.11

Задано векторне силове поле кулонівських або ньютонівських сил $\vec{F} = \frac{C}{R^3} \vec{R}, R > 0$. Нехай джерело поля знаходиться в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Знайти дивергенцію поля в довільній точці $M(x, y, z)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля (рис. 9.3)

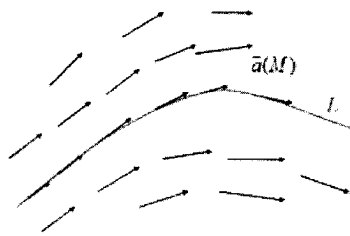
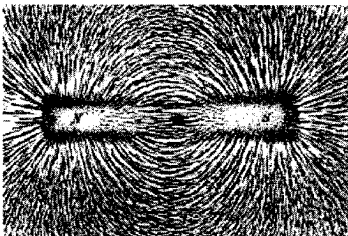


Рисунок 9.3

Розглянемо векторне поле $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ нехай функції $P(x, y, z)Q(x, y, z)R(x, y, z) \in$ неперервними разом із частинними похідними першого порядку у точці M_0 . S – довільна поверхня, що проходить через M_0 . На поверхні побудуємо навколо точки M_0 замкнений контур L . Обчислимо циркуляцію $\mathcal{C} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$, позначимо площу області на поверхні S , що обмежена контуром L через σ . Обчислимо середню густину циркуляції відносно площі області:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \frac{\oint_L Pdx + Qdy + Rdz}{\sigma}$$

Якщо $\vec{a}(M)$ – вектор сили (силове поле), то циркуляція є роботою цієї сили вздовж замкненого контуру L . В цьому полягає фізичний зміст циркуляції.

Якщо контур L стягувати до точки M_0 , то $\sigma \rightarrow 0$. За виконання умов до координат вектора отримаємо густину циркуляції

$$\rho_{\mathcal{C}} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_L Pdx + Qdy + Rdz}{\sigma} = \{\text{формула Стокса}\}.$$

Застосувавши теорему про середнє та обчисливши границю отримаємо

$$\rho_{\mathcal{C}} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma.$$

Отриманий вираз для густини циркуляції можна записати як скалярний добуток двох векторів тобто $\rho_{\mathcal{C}} = \vec{X}\vec{n}^0 = |\vec{X}| |\vec{n}^0| \cos \varphi$. Якщо кут $\varphi = 0$, то густина циркуляції максимальна. Вводиться вектор, у напрямі якого густина циркуляції максимальна. Вектор називають ротором $\text{rot} \vec{a}(M)$

$$\text{rot} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Приклад. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = 3x\vec{i} + yz\vec{j} + y^2\vec{k}$.

Розв'язання

$$\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & yz & y^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(yz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(yz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial y} \right) \bar{k} =$$
$$= (2y - y) \bar{i} - (0 - 0) \bar{j} + (0 - 0) \bar{k} = y \bar{i}. \text{ Тобто } \operatorname{rot} \bar{a}(M) = \{y, 0, 0\}.$$

Приклад. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля $\bar{a} = x^2 y^3 \bar{i} - yz^2 \bar{j} - x^2 z \bar{k}$ в точці $M_0(2, 1, 3)$.

Розв'язання

Знайдемо ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^3 & -yz^2 & -x^2 z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(-xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-yz^2)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(-x^2 z)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial z} \right) \bar{j}$$
$$+ \left(\frac{\partial(-yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial y} \right) \bar{k} = (0 + 2yz) \bar{i} - (-2xz - 0) \bar{j} + (0 - 3x^2 y^2) \bar{k},$$

тобто $\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \{2yz, 2xz, -3x^2 y^2\}$ і обчислимо його значення в точці $M_0(2, 1, 3)$. Маємо $\operatorname{rot} \bar{a}(M_0) = \{6, 12, -12\}$.

Найбільша густина циркуляції векторного поля

$\bar{a} = x^2 y^3 \bar{i} - yz^2 \bar{j} - x^2 z \bar{k}$ в точці $M_0(2, 1, 3)$ досягається в напрямі $\operatorname{rot} \bar{a}(M_0)$ і дорівнює $|\operatorname{rot} \bar{a}(M_0)|$, тобто,

$$|\operatorname{rot} \bar{a}(M_0)| = \sqrt{6^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{324} = 18.$$

Приклад. Задано векторне силове поле кулонівських або ньютонівських сил

$\vec{F} = \frac{C}{R^3} \vec{R}, R \neq 0$. Нехай джерело поля знаходиться в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Знайти потік вектора \vec{F} через поверхню кулі, центр якої збігається з джерелом поля.

Розв'язання

Потік векторного поля обчислюється за допомогою поверхневого інтеграла $\Pi = \oint_{\sigma} \vec{a}(M) \vec{n}^0 d\sigma$. Нехай радіус кулі дорівнює R , тоді вектор \vec{R} виразимо через орт до поверхні $\vec{R} = R\vec{n}^0$, або $\vec{R} = R\vec{R}^0$. Обчислимо потік поля

$$\Pi = \oint_{\sigma} \vec{a}(M) \vec{n}^0 d\sigma = \oint_{\sigma} \frac{C}{R^3} \vec{R} \vec{n}^0 d\sigma = \oint_{\sigma} \frac{C}{R^3} R \vec{n}^0 \vec{n}^0 d\sigma = \frac{C}{R^2} \oint_{\sigma} d\sigma = \frac{C}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi C.$$

Приклад. Знайти ротор вектора напруженості електричного і гравітаційного полів $\vec{F} = \frac{C}{R^3} \vec{R} = \frac{C}{R^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

Розв'язання. Використаємо формулу ротора векторного поля

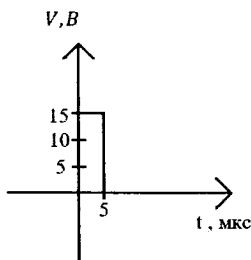
$$\operatorname{rot} \vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \frac{Cx}{R^3} & \frac{Cy}{R^3} & \frac{Cz}{R^3} \end{vmatrix} = \left(-\frac{3Cyz}{R^5} + \frac{3Cyz}{R^5} \right) \vec{i} - \left(-\frac{3Cxz}{R^5} + \frac{3Cxz}{R^5} \right) \vec{j} + \left(-\frac{3Cxy}{R^5} + \frac{3Cxy}{R^5} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

Відповідь: $\operatorname{rot} \vec{F}(M) = \vec{0}$.

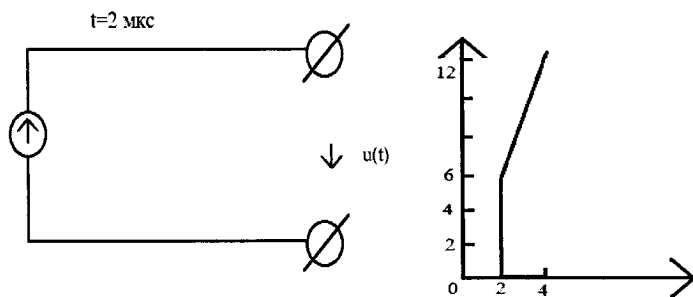
10 ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Задача 10.1

Імпульсний сигнал прямокутної форми довжиною 5 мкс і амплітудою 15 В. Початок відліку часу збігається з фронтом імпульсу. Записати аналітичний вираз цього сигналу. В.



Приклад. Джерело електрорушійної сили, що лінійно змінюється у часі за законом $t_0 = 2 \text{ мкс}$ підключено до зовнішніх ланцюгів ідеальним комутатором, що спрацьовує у момент $t_0 = 2 \text{ мкс}$. Записати математичну модель для напруги на виході цієї системи (напруженість).



Розв'язання

Розв'язання. Якщо $t < 2 \text{ мкс}$ напруга на виході джерела дорівнює нулеві; тому, очевидно, то $U(t) = 3 \cdot 10^6 t(t - 2 \cdot 10^{-6}) \text{ В}$.

Запишемо це інакше: $U(t)$ = імпульс включення, що виникає у момент спрацювання комутатора + лінійно нарощуючий (збільшуючий) імпульс (наростаючий). $n(t) = [6 + 3 \cdot 10^6(t - 2 \cdot 10^{-6})] \cdot n(t - 2 \cdot 10^{-6})B$

Побудувати графіки функцій:

$$s(t) = (t + 3)[\eta(t - 1) - \eta(t - 4)]; \quad f(t) = 5\eta(t + 3) - 5\eta(t - 4);$$

$$g(t) = t^2[\eta(t - 2) - \eta(t - 4)]; \quad h(t) = (t^2 - 2t + 1)\eta(t - 1).$$

11 ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Приклад. Імовірність потрапляння в мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. По мішені стріляють одиночними пострілами до першого потрапляння, після чого стрільбу припиняють. Знайти ймовірність того, що: а) буде зроблено три постріли; б) буде зроблено не більше трьох пострілів.

Розв'язання

а) Нехай випадкова подія A означає, що зроблено три постріли. Це означає, що потрапляння настане при третьому пострілі, а при перших двох пострілах будуть промахи. З метою скласти алгебру цієї події введемо допоміжні прості події A_i – потрапляння в мішень при i -му пострілі, де $i = 1, 2, 3$. Тоді $A = \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$. Зауважимо, що ці події незалежні. Оскільки за умовою задачі $P(A_i) = 0,7$, то $P(\bar{A}_i) = 1 - 0,7 = 0,3$ при $i = 1, 2, 3$, тоді $P(A) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,063$.

б) Нехай випадкова подія B означає, що буде зроблено не більше трьох пострілів. Це означатиме, що потрапляння в мішень відбудеться або при першому пострілі, або при другому пострілі, або при третьому пострілі (при цьому при двох перших пострілах промахи), тоді $B = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$.

Оскільки випадкові події, що є доданками, несумісні, а випадкові події, що є множниками, незалежні, будемо мати

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) + \\ &+ P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = 0,7 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,973. \end{aligned}$$

Вкажемо ще один спосіб розв'язування цієї задачі. Перейдемо до протилежної події \bar{B} , яка буде означати, що при трьох пострілах не буде жодного попадання, тоді $\bar{B} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$. Враховуючи те, що події $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ незалежні, діс-

танемо, що $P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027 =$ тоді
 $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,027 = 0,973$.

Приклад. Прилад може працювати в двох режимах: нормальному і ненормальному. Нормальний режим спостерігається у 80% всіх випадків роботи приладу, а ненормальний – в 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за деякий час T в нормальному режимі дорівнює 0,1, а в ненормальному режимі – 0,7. Знайти ймовірність виходу приладу із ладу за цей час.

Розв'язання

Нехай випадкова подія A означає вихід приладу із ладу. Введемо гіпотези: H_1 – прилад в нормальному режимі, H_2 – прилад працює в ненормальному режимі, ймовірність цих гіпотез легко визначити за класичним означенням, а саме: $P(H_1) = 80/100 = 0,8$, $P(H_2) = 20/100 = 0,2$, при цьому $P(H_1) + P(H_2) = 1$. За умовою задачі відомі умовні ймовірності події A : $P(A/H_1) = 0,1$, $P(A/H_2) = 0,7$. Тоді за формулою повної ймовірності.

Приклад. На пункт складання надходять деталі від трьох заводів: від першого заводу – 30% деталей від загальної кількості, від другого – 25%, від третього – 45%. Ймовірності браку деталі для цих заводів відповідно дорівнюють 0,01, 0,03 і 0,02. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться бракованою.

Розв'язання

Нехай випадкова подія A означає, що взята навмання деталь виявиться бракованою. Ця деталь може належати одному із трьох заводів. Тому введемо такі гіпотези: H_1 – взята деталь виготовлена на першому заводі, H_2 – взята деталь виготовлена на другому заводі, H_3 – взята деталь виготовлена на третьому заводі. Ймовірності цих гіпотез відповідно будуть: $P(H_1) = 30/100 = 0,3$; $P(H_2) = 0,25$; $P(H_3) = 0,45$. Умовні ймовірності події A відомі, а саме: $P(A/H_1) = 0,01$; $P(A/H_2) = 0,03$; $P(A/H_3) = 0,02$. Тоді за формулою повної ймо-

вірності матимемо, що

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P\left(\frac{A}{H_i}\right) = 0,3 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,03 + 0,45 \cdot 0,02 = 0,0195$$

Приклад. В умові попередньої задачі деталь, що взята навмання для складання, виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що ця деталь надійшла від другого заводу.

Розв'язання

Потрібно перерахувати ймовірність гіпотез H_2 , після того, як настала подія A – взята для складання деталей виявилась бракованою, що можна зробити за допомогою формули Байеса. Оскільки $P(A) = 0,0195$, $P(H_2) = 0,25$, а $P(A/H_2) = 0,03$, то умовну ймовірність гіпотези H_2 (після появи події A) визначимо так:

$$P(A/H_2) = (P(H_2) \cdot P(A/H_2)) / P(A)$$

$$P(H_2/A) = (0,25 \cdot 0,03) / 0,0195 = 0,385$$

Як бачимо, умовна ймовірність гіпотези H_2 збільшилась в порівнянні з апіорною ймовірністю.

Приклад. Два рівносильні шахісти грають в шахи. Що ймовірніше виграти: дві партії із чотирьох чи три партії із шести (нічий до уваги не приймаються)?

Розв'язання

Оскільки грають два рівносильні шахісти, то ймовірність виграшу, так само як і ймовірність програшу, дорівнює $1/2$, до того ж ця ймовірність є сталою в кожній партії, тому можна застосувати формулу Бернуллі при визначенні відповідних ймовірностей виграти дві партії з чотирьох результативних та три партії з шести результативних. Щоб з'ясувати, яка із цих ймовірностей більша, знайдемо вказані ймовірності: $P_4(2) = C_4^2 \cdot (1/2)^2 = 6 \cdot 1/4 \cdot 1/4 = 6/16$;

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = 5/16 \quad \text{Оскільки } P_4(2) > P_6(3), \text{ то}$$

ймовірність виграти дві партії з чотирьох більша, ніж три партії з шести.

Приклад. При такому технологічному процесі 85% всієї виготовленої продукції є продукцією вищого гатунку. Знайти найімовірніше число виробів вищого гатунку в партії зі 150 деталей.

Розв'язання

За умовою $n=150$; $p=0,85$; $q=1-0,85=0,15$. Згідно з нерівністю

$$np - q \leq m_0 \leq np + q$$

маємо:

$$150 \cdot 0,85 - 0,15 \leq m_0 \leq 150 \cdot 0,85 + 0,85.$$

$$127,35 \leq m_0 \leq 128,35$$

Найімовірніше число виробів вищого гатунку в партії зі 150 виробів становить 128.

Три автомати виготовляють вироби. Перший дає 20% усієї продукції, другий – 30%, третій 50%. Некондиційна частина виробів у продукції першого автомату становить 5%, другого – 2%, третього – 1%. Яка ймовірність того, що виріб, обраний навмання, буде некондиційним?

Скорочений запис:

I	II	III
20%	30%	50%
5%	2%	1%

Розв'язання

Введемо повну групу попарно несумісних подій:

$$H_1 = \{\text{виріб виготовлено на першому автоматі}\}$$

$$H_2 = \{\text{виріб виготовлено на другому автоматі}\}$$

$$H_3 = \{\text{виріб виготовлено на третьому автоматі}\}.$$

Скористуємося формулою повної ймовірності. Маємо

$$N = 3, P(H_1) = 0,2, P(H_2) = 0,3, P(H_3) = 0,5,$$

$$P(A/H_1) = 0,05; P(A/H_2) = 0,02; P(A/H_3) = 0,01.$$

Одержимо :

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A|H_i) = 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,5 \cdot 0,01 = 0,021.$$

Приклад. Пристрій складається з 2000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу будь-якого елемента протягом деякого часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що протягом цього часу вийдуть з ладу рівно три елементи.

Розв'язання

Оскільки $n = 2000$ є досить велике число, а $p = 0,002$, тобто досить мале число, то шукану ймовірність потрібно знаходити за формулою Пуассона. Визначивши параметр λ за формулою $\lambda = np = 2000 \cdot 0,002$ при $m = 3$ і $\lambda = 4$ будемо мати:

$$P_{2000}(3) = \frac{4^3 \cdot e^{-4}}{3!} = \frac{64 \cdot e^{-4}}{6} \approx 0,195$$

Приклад. На завод прибула партія деталей кількістю 1000 штук. Ймовірність того, що деталь буде бракованою, дорівнює 0,001. Обчислити ймовірності того, що:

- 1) бракованих деталей буде не більше однієї;
- 2) бракованих деталей буде 5.

Розв'язання

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0,001 = 1, \lambda = \frac{N}{60}, \text{ тоді}$$

$$P_{1000}(0) \approx \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} \approx P_{1000}(1) \approx \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} \approx 0,3679;$$

$$P_{1000}(0) \approx \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} \approx P_{1000}(1) \approx \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} \approx 0,3679;$$

$$P_{1000}(5) \approx \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} \approx 0,003; P_{1000}(0) + P_{1000}(1) \approx 0,7358.$$

Приклад. Прилад, що складається з N блоків, виходить з ладу, якщо виходить з ладу принаймні один блок. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. Надійність кожного блоку дорівнює p . Обчислити надійність приладу.

Розв'язання

Позначимо A_i подію « i -й блок працює безвідмовно». Тоді надійність пристрою дорівнює $P(A_1 A_2 \dots A_N)$. З умови незалежності одержуємо $P(A_1 A_2 \dots A_N) = p^N$.

Приклад. Електричне коло зібрано за схемою, поданою на рис. 11.1.

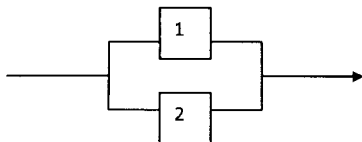


Рисунок 11.1 - Схема електричного кола

Елементи 1 і 2 схеми виходять з ладу незалежно один від одного. Надійність елементів дорівнює p_1, p_2 відповідно. Знайти надійність цієї схеми

Розв'язання

Для того, щоб така система вийшла з ладу, необхідно і достатньо, щоб вийшли з ладу обидва елементи 1 і 2. Ймовірність такої події є $(1 - p_1)(1 - p_2)$. Отже, надійність роботи схеми дорівнює $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

Приклад. Для підвищення надійності приладу він дублюється іншим таким самим приладом; надійність кожного приладу дорівнює p . При виході з ладу першого приладу відбувається миттєве переключення на другий прилад. Знати надійність цієї системи, якщо пристрій для переключення спрацює з імовірністю p_1 . Знайти надійність системи у випадку безвідмовного пристрою для переключення.

Розв'язання

Система вийде з ладу, якщо трапляться дві несумісні події: $A = \{\text{перший прилад вийшов з ладу і перемикач не спрацював}\}$, $B = \{\text{перший прилад вийшов з ладу, перемикач спрацював, другий прилад вийшов з ладу}\}$. З міркувань незалежності $P(A) = (1 - p)(1 - p_1)$, $P(B) = (1 - p)p_1(1 - p) = p_1(1 - p)^2$. Тоді ймовірність виходу з ладу дорівнює $P(A) + P(B) = (1 - p)(1 - p_1)$. Надійність системи дорівнює

$$1 - [P(A) + P(B)] = 1 - (1 - p)(1 - p_1) = p_1 p - p_1 p^2 + p.$$

Розв'язання

Введемо повну групу подій цього експерименту, який полягає у роботі системи на заданому проміжку часу: $H_1 = \{\text{перший прилад вийшов з ладу, перемикач спрацював}\}$, $H_2 = \{\text{перший прилад вийшов з ладу, перемикач не спрацював}\}$, $H_3 = \{\text{перший прилад не виходив з ладу}\}$. Нехай C — подія $\{\text{система не виходить з ладу на даному проміжку часу}\}$. Тоді надійність системи дорівнює (формула повної ймовірності):

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H_1)P(C|H_1) + P(H_2)P(C|H_2) + P(H_3)P(C|H_3) = \\ &= (1 - p) \cdot p_1 \cdot p + (1 - p)p_1 \cdot 0 + p = p_1 p - p_1 p^2 + p. \end{aligned}$$

Випадок безвідмовного пристрою для переключення відповідає рівному 1 значенню p_1 . У цьому разі надійність системи дорівнює

$$(p_1 p - p_1 p^2 + p)|_{p_1=1} = 2p - p^2 = p(2 - p).$$

Зауважимо, що останній вираз можна подати ще й у вигляді $1 - (1 - p)^2$. Який ймовірнісний зміст має цей вираз?

Приклад. Вироби деякого виробництва містять 3% браку. Знайти ймовірність того, що серед 100 навмання відібраних виробів буде рівно 5 бракованих.

Розв'язання

Будемо вважати окремим випробуванням розглядання окремого виробу. Успіхом назвемо виявлення браку. Тоді маємо схему Бернуллі з $n = 100$, $p = 0,03$, $m = 5$. Ймовірність невдачі q дорівнює $1 - 0,03 = 0,97$. Треба знайти $P(B_{5, 100})$. Маємо

$$P(B_{5, 100}) = C_{100}^5 0,03^5 0,97^{95} \cong 0,101.$$

Приклад. Система складається з 30 мікросхем. Мікросхеми виходять з ладу незалежно одна від одної. Надійність роботи кожної мікросхеми дорівнює 0,97. Визначити надійність роботи всієї системи за умови, що система виходить з ладу, якщо вийдуть з ладу хоча б дві мікросхеми.

Розв'язання

Роботу кожної мікросхеми розглянемо як окреме випробування, а роботу всієї системи – як схему Бернуллі з 30 незалежних випробувань. Успіхом зручніше назвати вихід мікросхеми з ладу. Тоді $p = 0,03$, $q = 0,97$. У термінах позначень треба знайти величину $b_{\leq}(2, n, p)$. Маємо $b_{\leq}(2, n, p) = b(0, n, p) + b(1, n, p)$. Підставляючи сюди дані значення n і p , одержуємо, що надійність системи дорівнює

$$\begin{aligned} b(0, 30, 0,03) + b(1, 30, 0,03) &= 1 \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^{30} + 30 \cdot 0,03^1 \cdot 0,97^{29} \cong \\ &\cong 0,4010 + 0,3721 = 0,7731. \end{aligned}$$

Задача 11.1

Електричне коло зібрано за схемою, поданою на рис. 11.2:

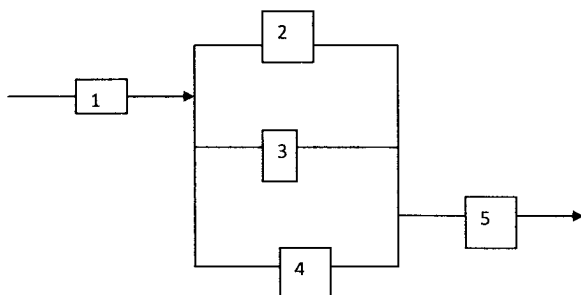


Рисунок 11.2

Різні елементи схеми виходять з ладу незалежно один від одного. Надійність елементів дорівнює p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 відповідно. Знайти надійність цієї схеми.

Задача 11.2

Робітник обслуговує 12 однотипних станків. Імовірність того, що станок вимагає уваги робітника на протязі одиничного проміжку часу, дорівнює $1/3$. Чому дорівнює ймовірність того, що

- а) за одиничний проміжок часу 4 станки вимагатимуть уваги робітника;
- б) за той же проміжок часу від 3 до 6 станків (включно) вимагатимуть обслуговування?

Задача 11.3

Вироби деякого технологічного процесу містять 5% браку. Знайти ймовірність того, що серед десяти випадково відібраних виробів: а) немає дефектних; б) два дефектних; в) не менше двох дефектних.

Задача 11.4

Для прядіння змішали порівну білий і окрашений хлопок. Яка ймовірність серед 15 випадково вибраних волокон суміші виявити менше трьох окрашених?

Задача 11.5

За даними технічного контролю 2% виготовлених автоматичних станків потребує додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що з шести виготовлених станків чотири потребують додаткового регулювання.

Задача 11.6

Імовірність того, що покупцеві буде потрібне взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з п'яти перших покупців взуття цього розміру знадобиться: а) одному; б) принаймні одному.

Задача 11.7

Технічна система складається з N блоків, надійність кожного з яких дорівнює p . Вихід з ладу принаймні одного блоку призводить до виходу з ладу всієї системи. Для підвищення надійності система дублюється N такими самими блоками. Який спосіб дублювання дає більш високу надійність: а) дублювання кожного блоку (рис. 11.3, а); б) дублювання всієї системи (рис. 11.3, б)?

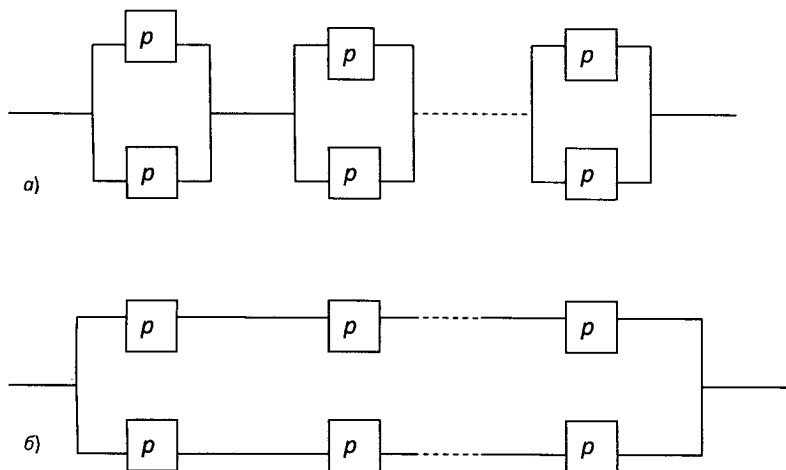


Рисунок 11.3

Задача 11.8

Студент прийшов на іспит, підготувавши лише 20 з 25 питань програми; викладач задав йому три запитання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі три запитання.

Відповідь: $P(A) \approx 0.496$.

Задача 11.9

Ймовірність того, що стрілець влучає у мішень при одному пострілі 0,8.

Стрільцю видають патрони поки він не промахнеться. Нехай ξ випадкова величина кількості виданих патронів. Знайти розподіл ξ . Чому дорівнює $P(\xi = 3)$?

Задача 11.10

Розв'язати попередню задачу, якщо маємо тальки три патрони (тобто навіть якщо стрілець попадає три рази, патронів більше не видається).

Задача 11.11

Кількість дзвінків на телефонній станції за зміну описується законом Пуассона з параметром $\lambda = 3$. Яка імовірність того, що за зміну буде не більше двох дзвоників? Яка імовірність того, що за зміну буде не менше двох дзвоників? Скільки дзвоників у середньому за зміну?

Задача 11.12

Ймовірність появи події у кожному з 1200 незалежних випробувань дорівнює 0,90. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) рівно 1050 раз; б) не менше 1050 і не більше 1100 раз.

Задача 11.13

Пристрій складається із трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,10. Скласти закон розподілу випадкової величини X -числа елементів, що відмовили в одному досліді. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Приклад. Задано ряд розподілу ймовірностей випадкової величини x (табл. 11.1).

Таблиця 11.1

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Побудувати функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$.

Нанесемо на координатну площину xOy точки (x_i, P_i) , а саме $(1, \frac{1}{4})$, $(2, \frac{1}{2})$, $(3, \frac{1}{4})$ (рис. 11.4).

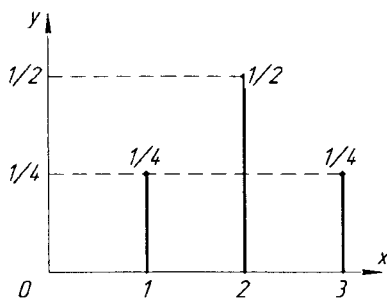


Рисунок 11.4

Виходячи з означення функції розподілу ймовірностей, дістанемо, що для будь-якої точки x , що належить інтервалу $(-\infty, 1]$,

$$F_X(x) = 0,$$

оскільки для $x \in (-\infty, 1]$

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = \sum_{x_i \in (-\infty, x)} P_X(\{x_i\}) = 0,$$

(до суми не входить жоден відмінний від нуля доданок).

Для довільної точки $x \in (1, 2]$

$$F_X(x) = \frac{1}{4},$$

оскільки для таких x

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = \sum_{x_i \in (-\infty, x)} P_X(\{x_i\}) = P_X(\{1\}) = \frac{1}{4},$$

Якщо точка x належить інтервалу $(2, 3]$, то $F_X(x) = \frac{3}{4}$, оскільки для та-

ких x

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = \sum_{x_i \in (-\infty, x)} P_X(\{x_i\}) = P_X(\{1\}) + P_X(\{2\}) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$$

Аналогічно для будь-якого x з інтервалу $(3, \infty)$

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = P_X(\{1\}) + P_X(\{2\}) + P_X(\{3\}) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Таким чином,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 1; \\ 1/4, & \text{якщо } 1 < x \leq 2; \\ 3/4, & \text{якщо } 2 < x \leq 3; \\ 1, & \text{якщо } 3 < x. \end{cases}$$

Графік функції $F_X(x)$ зображено на рис. 11.5.

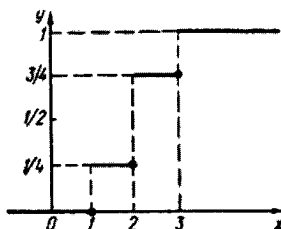


Рисунок 11.5

Якщо функція розподілу ймовірностей має розриви першого роду, але множина її значень не є дискретною, то відповідний розподіл ймовірностей називається *мішаним*.

У механічній інтерпретації це означає, що частина одиничної маси розподілена вздовж осі Ox на деякому проміжку неперервно, а решта поділена на частинки, які містяться в окремих точках. Наприклад, $\frac{1}{2}$

одиничної маси розподілена рівномірно на відрізьку $[0,1]$ зі щільністю розподілу $f_1(x) = \frac{1}{2}$ і дає першу частину функції розподілу

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq 0; \\ (1/2)x, & \text{коли } 0 < x \leq 1; \\ 1/2, & \text{коли } x > 1; \end{cases}$$

а $\frac{1}{2}$ міститься в точці $x = \frac{1}{2}$ і дає другу частину функції розподілу

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & \text{коли } x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{рис. 11.6, а}).$$

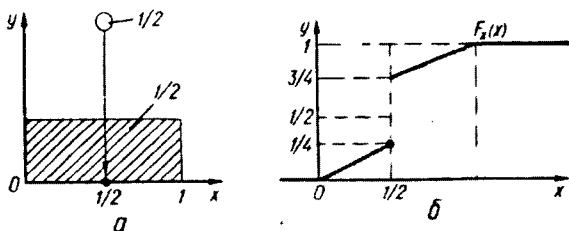


Рисунок 11.6

Графік функції розподілу ймовірностей $F_X(x) = F_1(x) + F_2(x)$ при цьому матиме вигляд, поданий на рис. 11.6, б.

Одним з прикладів, коли виникає необхідність розглядати мішаний розподіл імовірностей, може бути такий. Прилад випробується протягом часу t_0 , $t_0 > 0$. При цьому припускається, що прилад досить надійний і ймовірність його виходу з ладу в момент часу $\tau \in [0, t_0]$ невелика (середній час безвідмовної роботи приладу значно більший, ніж t_0). Випадкова величина τ – момент виходу з ладу приладу або час його безвідмовної роботи. Функція $F_\tau(t)$ розподілу ймовірностей випадкової величини τ має вигляд

$$F_\tau(t) = P_\tau((-\infty, t))$$

де $P_\tau((-\infty, t))$ ймовірність того, що відмови не трапиться в момент $\tau \in [t, +\infty)$, або, що те саме, відмова трапиться в момент $\tau \in (-\infty, t)$. Очевидно $F_\tau(t)$

неперервна скрізь, крім точки t_0 , оскільки момент виходу з ладу не може наступити пізніше, ніж у момент t_0 , а тому при $t > t_0$

$$F_T(t) = P_T((-\infty, t)) = 1.$$

Для неперервної випадкової величини X ймовірність будь-якого окремого значення a дорівнює нулю:

$$P_X(\{a\}) = 0.$$

Справді,

$$P_X(\{a\}) = \lim_{b \rightarrow a} P_X([a, b]) = \lim_{b \rightarrow a} (F_X(b) - F_X(a)) = 0,$$

оскільки $F_X(x)$ неперервна функція.

Проте для неперервної випадкової величини рівність $P_X(\{a\}) = 0$ не означає, що подія $\{a\}$ є неможливою. Така ситуація виникає й при геометричному заданні ймовірностей. Влучення в будь-яку окрему точку мішені не є неможливою подією, але «площа» (міра Лебега) окремої точки дорівнює нулю.

Якщо випадкова величина X неперервна, то очевидно, що ймовірності $P_X([a, b])$, $P_X((a, b))$, $P_X((a, b])$, $P_X([a, b))$ рівні між собою.

Приклад. Розподіл ймовірностей випадкової величини X визначається функцією розподілу ймовірностей

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 1; \\ 1/4, & \text{якщо } 1 < x \leq 2; \\ 3/4, & \text{якщо } 2 < x \leq 3; \\ 1, & \text{якщо } 3 < x. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належатиме інтервалу $[1,5; 3,5)$.

За формулою

$$P_X([a,b]) = F_X(b) - F_X(a) \tag{11.1}$$

одержимо

$$P_X([1,5; 3,5]) = F_X(3,5) - F_X(1,5) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Цей результат впливає також з того, що в розглядуваному випадку подія $[1,5; 3,5)$ відбувається, якщо відбувається принаймні одна з двох подій $(\{2\})$ або $(\{3\})$, оскільки $\{2\} \cup \{3\} \subset [1,5; 3,5)$

Приклад. Знайти аналітичний вираз для щільності розподілу ймовірностей, графік якої подано на рис. 11.7. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини x із заданим розподілом імовірностей належатимуть відрізьку $[0,5; 1,5]$.

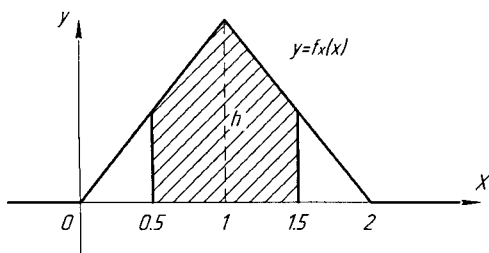


Рисунок 11.7

Виходячи з геометричного тлумачення властивостей щільності розподілу ймовірності, можна зробити висновок, що $h=1$. Тому

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{якщо } 2 \leq x, \end{cases}$$

оскільки кутівий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $(0, 0)$ і $(1, 1)$, дорівнює $+1$, а кутівий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $(1, 1)$ і $(2, 0)$, дорівнює -1 . За заданих умов імовірність попадання на відрізок $[0,5; 1,5]$ дорівнює

$$\int_{0,5}^{1,5} f_X(x) dx = \frac{3}{4}.$$

1. Знайти константу c , для якої задана функція $f(x)$ є щільністю рівномірного неперервного розподілу ймовірностей.

2. Побудувати графік заданої щільності розподілу.

3. Знайти відповідну функцію розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

4. Визначити ймовірність попадання точки x в інтервал (α, β) .

$$1) f(x) = \begin{cases} c, & x \in [-2; 1], \\ 0, & x \notin [-2; 1], \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} c, & x \in [-4; 4], \\ 0, & x \notin [-4; 4], \end{cases}$$

$$(\alpha, \beta) = (-1, 1); \quad (\alpha, \beta) = (1, 3);$$

Задача 11.14

Мішень складається з трьох частин, що попарно не мають спільних точок. Стрелець робить постріл у мішень. Ймовірність влучення у першу частину мішені дорівнює 0,4, у другу – 0,45, у третю – 0,1. Знайти ймовірність того, що стрілець: 1) влучить в першу або у другу частини; 2) не влучить у мішень; 3) не влучить у першу або у третю частини.

Приклад. Ймовірність того, що протягом доби вийде з ладу k -й блок радіопристрою, дорівнює p_k , $k=1, 2, \dots, 10$. Знайти ймовірність того, що протягом доби радіопристрій вийде з ладу (тобто вийде з ладу принаймні один блок), якщо кожен блок виходить з ладу незалежно від інших.

Позначимо через A_k , $k=1, 2, \dots, 10$, подію, яка полягає в тому, що виходить з ладу k -й блок, через B позначимо подію, яка полягає в тому, що виходить з ладу радіопристрій. Тоді

$$\begin{aligned} B &= A_1 + A_2 + \dots + A_{10}, \\ P(B) &= P(A_1 + A_2 + \dots + A_{10}) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + \dots + A_{10}}) = \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \dots \overline{A_{10}}) = 1 - P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_{10}}) = \\ &= 1 - (1 - p_1) (1 - p_2) \dots (1 - p_{10}) . \end{aligned}$$

Приклад. Відомо, що ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,515 . Знайти ймовірність того, що після 10000 пострілів кількість влучень буде більшою за кількість промахів.

Подія A полягає у тому, що при наведенні вибраному пострілі буде влучення. При кожному з 10000 випробувань подія A відбувається з ймовірністю $P(A) = 0,515$. Тому кількість μ відбувань події A у 1000 випробуваннях має біноміальний розподіл. Враховуючи інтегральну асимптотичну теорему Муавра-Лапласа, можна вважати, що

$$\tilde{P}(\mu \leq 10000 - \mu) = P(0 \leq \mu \leq 5000) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt ,$$

де

$$x = \frac{5000 - 10000 \cdot 0,515}{\sqrt{10000 \cdot 0,515 \cdot 0,485}} \approx -3,0012 .$$

Отже, скориставшись таблицями чи програмним засобом GRAN1, отримаємо

$$P(\mu \leq 5000) \approx \frac{1}{2} + \Phi(-3,0012) = 0,001 .$$

Приклад. Імовірність того, що наведення взята деталь якісна, дорівнює 0,8. Скільки треба переглянути деталей, щоб з імовірністю не меншою від 0,9 виявити відсоток якісних деталей, не допустивши при цьому похибку, більшу за 1%.

Позначимо через x_i кількість якісних деталей при i -му випробуванні. Тоді розподіл імовірності для випадкової величини x_i матиме вигляд, поданий в табл. 11.2.

Таблиця 11.2

0	1
0,2	0,8

$$M[X_i] = 0,2 \cdot 0 + 0,8 \cdot 1 = 0,8; D[X_i] = (0 - 0,8)^2 \cdot 0,2 + (1 - 0,8)^2 \cdot 0,8 = 0,16.$$

Статистична ймовірність появи якісних деталей серед n переглянутих є

випадкова величина $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Використовуючи нерівність Чебишова, отрима-

ємо

$$\tilde{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 0,8\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{0,16}{n(0,01)^2}.$$

Щоб ймовірність $\tilde{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 0,8\right| < 0,01\right)$ була не меншою від 0,9, треба,

щоб виконувалась нерівність

$$\frac{0,16}{n \cdot (0,01)^2} < 0,1,$$

тобто

$$n > \frac{0,16}{0,1 \cdot 0,0001} = 1600.$$

Приклад. Ймовірність p того, що виріб не пройде перевірку ВТК, а отже, вважатиметься бракованим, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 навмання відібраних вважатимуться бракованими від 70 до 100 виробів.

З умови випливає:

$$n = 400; m_1 = 70; m_2 = 100; p = 0,2; q = 0,8;$$

$$np = 400 \cdot 0,2 = 80; npq = 64; \sqrt{npq} = 8;$$

$$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 80}{8} = 2,5; \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 80}{8} = -1,25.$$

Таким чином, за даних умов ймовірність того, що серед 400 виробів вивляться неперевіреними від 70 до 100 виробів, наближено дорівнює

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1,25}^{2,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,8882$$

Ймовірність того, що при кожному з 3-х незалежних вимірювань фізичної величини було допущено «припустиму» помилку, дорівнює $p = 0,1$. Знайти ймовірність того, що: 1) тільки при одному вимірюванні допущено неприпустиму помилку; 2) не більше, ніж при одному вимірюванні допущено неприпустиму помилку; 3) не менше, ніж при одному вимірюванні допущено неприпустиму помилку.

Задача 11.15

Ймовірність того, що добові витрати електроенергії певним підприємством перевищують норму, дорівнює $p = 0,2$. Знайти ймовірність того, що за 25 діб будуть зафіксовані 5 випадків перевитрат електроенергії.

Задача 11.16

Перевірити, чи є дана ламана многокутником розподілу ймовірностей.

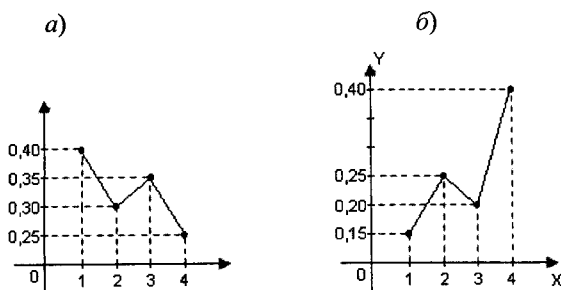


Рисунок 11.8

- І якщо так, то: 1) побудувати відповідний ряд розподілу ймовірностей; 2) знайти функцію розподілу ймовірностей і побудувати її графік; 3) обчислити ймовірність події $A = \{2, 3\}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андре Анго. Математика для радіоінженерів / Андре Анго. – М. ; 1965. – 780 с.
2. Буйвол В. М. Диференціальне числення функції однієї змінної / Буйвол В. М. – К., НАУ, 200. – 168 с.
3. Власенко К. В. Вища математика для майбутніх інженерів : навчальний посібник / К. В. Власенко ; за заг ред. проф. О. І. Скафи. – Донецьк : «Ноулідж», 2010. – 429 с.
4. Гриньов Б. В. Векторна алгебра: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / Б. В. Гриньов, І. К. Кириченко / За ред. О. М. Литвина. – Харків : Гімназія, 2008. – 164 с.
5. Дубовик В. П. Вища математика : навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А. С. К, 2001. – 648 с.
6. Клочко В. І. Теорія ймовірностей. Частина 2. Індивідуальна та самостійна робота студентів : навчальний посібник / В. І. Клочко, А. А. Коломієць. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 72 с.
7. Клочко В. І. Курс вищої математики з комп'ютерною підтримкою. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / В. І. Клочко, З. В. Бондаренко. – Вінниця : ВНТУ, 2004.

Навчальне видання

**Ключко Віталій Іванович
Коломієць Альона Анатоліївна**

Вища математика. Збірник прикладних задач

Збірник задач

Рукопис оформила *А. Коломієць*

Редактор *О. Ткачук*

Оригінал-макет виготовлено *О. Дубовик*

Підписано до друку 12.10.2021.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 6,3.
Наклад 50 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2021-135.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
Email: irvc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.