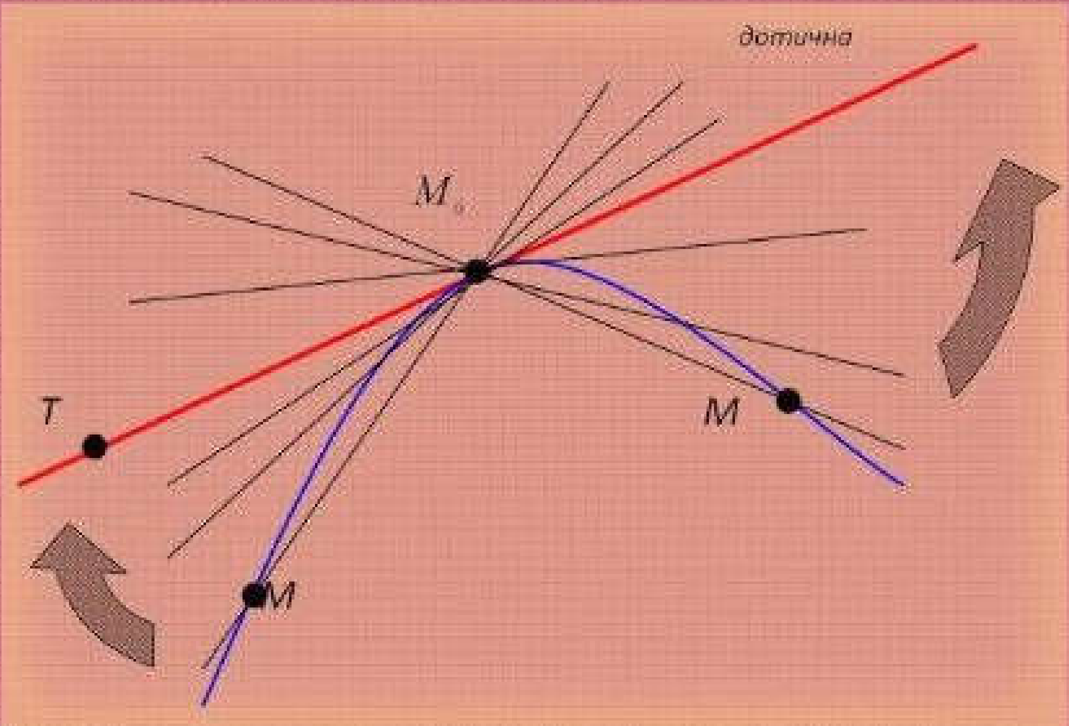
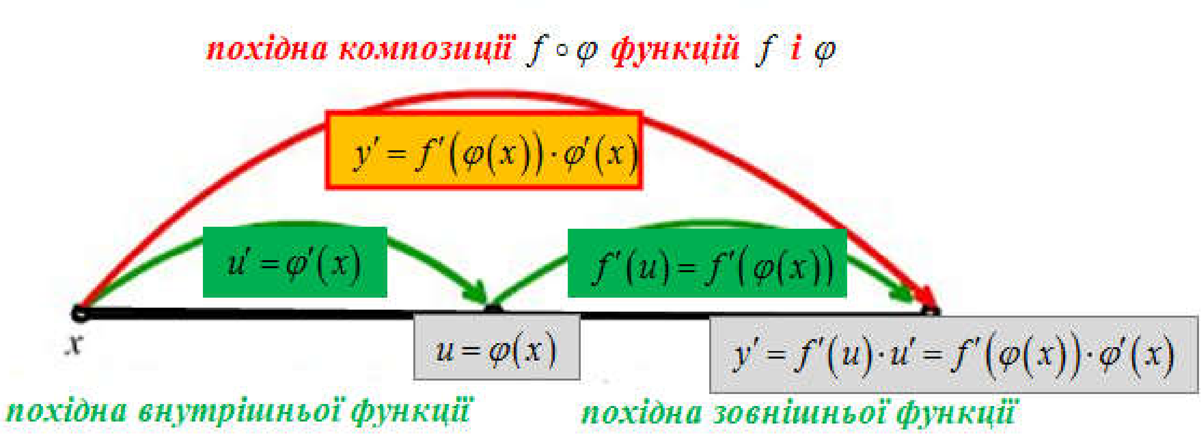
Ковтонюк М. М.
Клімішина А. Я.
Леонова І. М.



ПРАКТИКУМ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

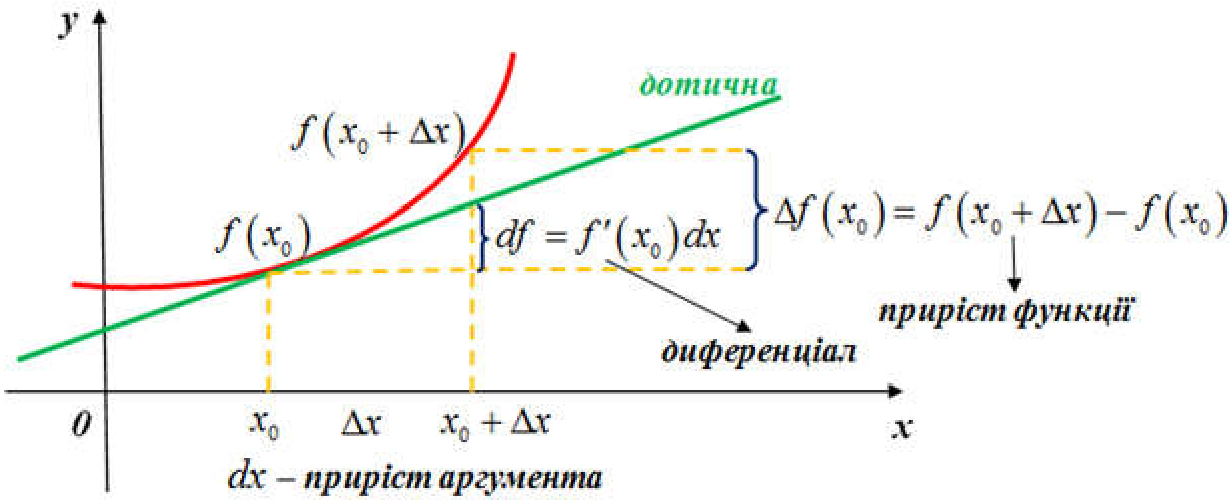
Навчальний посібник для студентів спеціальностей 111 Математика та 014.04 Середня освіта (Математика)

М. М. Ковтонюк, А. Я. Клімішина, І. М. Леонова



Практикум з диференціального числення функції однієї змінної

Навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика)



Вінниця, ВНТУ, 2022

УДК 517.3(075.8)
К 56

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського як навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111Математика та 014.04 Середня освіта (Математика) (протокол № 13 від 18 травня 2022 р.)

Рецензенти:

– доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету **Володимир Маркусович Михалевич**

– кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського **Олександр Захарович Тимошенко**

Ковтонюк, М. М.

К 56 Практикум з диференціального числення функції однієї змінної. Навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика) [Електронний ресурс] / М. М. Ковтонюк, А. Я. Клімішина, І. М. Леонова. – Вінниця : ВНТУ, 2022. – (PDF, 380 с.).

ISBN 978-966-641-916-6 (PDF)

Навчальний посібник написано відповідно до навчальної програми з математичного аналізу. В посібнику є велика кількість розв'язаних типових прикладів і практико-орієнтованих задач з диференціального числення функції однієї змінної, завдань для самостійного опрацювання, завдань для самостійних і контрольних робіт.

Посібник написаний для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика й 014.04 Середня освіта (Математика), в тому числі заочної форми навчання. Може бути корисним вчителям фізико-математичних ліцеїв, викладачам математики та магістрантам.

УДК 517.3(075.8)

ISBN 978-966-641-916-6 (PDF)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Рекомендований «Практикум» має своєю метою надати істотну допомогу студентам в оволодінні технікою диференціювання і розв’язуванні практико-орієнтованих задач з використанням похідної функції однієї змінної.

«Практикум» складається з 15 практичних занять, у кожному з яких наведено короткі теоретичні відомості з диференціального числення функції однієї змінної, тестові завдання та завдання для самостійних і контрольних робіт. Пропонуються математичні проєкти з тем «Похідна та її застосування». Матеріал поділено відповідно до плану практичних занять.

У «Практикумі» велика кількість типових прикладів і задач супроводжується детальним розв’язанням, структурованим за схемою *«Стратегія»* і *«Розв’язання»*. За таким поданням навчального матеріалу коментар не заважає сприйняттю основної ідеї та плану розв’язування завдань певного типу. Це дозволяє студенту, який уже засвоїв спосіб розв’язування, за допомогою наведеного прикладу згадати, як розв’язувати завдання, а студенту, якому потрібна консультація, одержати її. Для більш складних завдань рубрики «Стратегія» і «Розв’язання» не розділяються.

Під час складання «Практикуму» автори використовували різні підручники, навчальні посібники і збірники задач з математичного аналізу.

Посібник написаний для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика й 014.04 Середня освіта (Математика), в тому числі заочної форми навчання на основі робочої програми з математичного аналізу, яка передбачає 3,5 кредити (105 годин) на вивчення розділу «Похідна та її застосування».

Робоча програма з диференціального числення функції однієї змінної

Нижче наводимо фрагмент робочої програми з диференціального числення функції однієї змінної.

1. Опис навчальної дисципліни «Математичний аналіз»

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, додаткова спеціалізація/ спеціальність, освітня програма, ступінь вищої освіти</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td colspan="2">денна форма навчання</td></tr>
<tr><td>Загальна кількість кредитів – 21
Кількість кредитів у 2 семестрі – 3,5</td><td>Галузь знань
11 «Математика та статистика»</td><td colspan="2">Обов’язкова</td></tr>
<tr><td>Модулів – 1+1=2</td><td rowspan="5">Спеціальність
111 «Математика»
Додаткова предметна спеціальність
014.04 Середня освіта (Математика)
Освітня програма – Комп’ютерна математика</td><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Загальна кількість годин – 630
Загальна кількість годин у 2 семестрі з даної теми – 105</td><td colspan="2">1-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>2-й</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 2,625
самостійної роботи студента – 3,0</td><td rowspan="7">Ступінь вищої освіти:
Бакалавр</td><td>28 год.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні</td></tr>
<tr><td>28 год.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>49 год.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю:</td></tr>
<tr><td>екзамен</td><td></td></tr>
</table>

Примітка. Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить: % для денної форми навчання – 53% : 47% .

2. Мета, завдання, компетентності та програмні результати навчання

2.1. **Мета дисципліни**: ознайомлення та оволодіння сучасними методами та положеннями математичного аналізу, набуття студентами вмінь та навичок щодо використання їх у навчальній, науково-дослідній роботі та професійній діяльності.

2.2. **Завдання**:

– розкрити зміст і значення науки про функції, методи їх дослідження та застосування;
– навчити користуватися майбутнього математика, вчителя математикизнаннями та навичками одного з найефективніших методів наукового пізнання, а саме методу подання кількісних відношень реальної дійсності у вигляді певних функціональних залежностей;
– сприяти формуванню справжньої математичної культури.

2.3. Компетентності.

2.3.1. Загальні компетентності.

*ЗК.1.*Здатністьучитися, здобуватиновізнання, уміння, у тому числі в галузях, відміннихвід математики.

ЗК.2. Знання та розуміння предметної області та професійної діяльності.

ЗК.4. Здатність використовувати стандартні прийоми та методи математичних досліджень, проявляти творчий підхід, ініціативу.

ЗК.7. Здатність вирішувати проблеми в професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу, синтезу і прогнозу.

ЗК.10. Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.

ЗК.13. Здатність відповідально приймати рішення з урахуванням соціальних і етичних цінностей та правових норм.

2.3.2. Фахові компетентності.

ФК.4. Спроможність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних.

ФК.5. Спроможність виражати терміни специфічної предметної області мовою математики.

ФК.6. Здатність до кількісного мислення.

ФК.7. Спроможність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси.

ФК.10. Спроможність перевіряти математичну модель на адекватність емпіричним даним.

ФК.11. Здатність проводити обчислення в рамках основних математичних моделей та застосовувати необхідні математичні методи.

ФК.13. Спроможність одержувати якісну інформацію на основі кількісних даних.

ФК.15. Здатність пояснювати в математичних термінах результати, одержані під час розрахунків.

2.4. Програмні результати навчання.

Здобувач вищої освіти після успішного завершення освітньо-професійної програми має продемонструвати заплановані знання, уміння, здатності:

ПРН-З-3. Знати аксіоми різних складових частин математики, принципи modusponens (правило виведення логічних висловлювань) та modustollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень у різних складових частинах математики.

ПРН-З-4. Відтворювати базові знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії.

ПРН-З-6. Володіти основами математичних дисциплін, у яких вивчаються моделі природничих та соціальних процесів, основами математичних теорій, що використовуються при математичному моделюванні.

ПРН-У-2. Усно й письмово спілкуватися рідною мовою з професійних питань, читати спеціальну літературу іноземною мовою, знаходити, аналізувати та використовувати інформацію з різних довідкових джерел.

ПРН-У-4. Бути наполегливим у досягненні мети під час розв'язування поставленої математичної проблеми.

ПРН-У-5. Розв'язувати задачі з математичною строгістю та математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, переносити умови та твердження на нові класи об’єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й існуючими моделями.

ПРН-У-6. Розв’язувати конкретні математичні задачі, сформульовані в термінах даної предметної області, здійснювати базові перетворення математичних моделей з метою розв’язування математичних та/або прикладних задач.

ПРН-У-7. Використовувати раціональні способи пошуку та використання науково-технічної інформації, включаючи засоби електронних інформаційних мереж, використовувати інформаційні ресурси, в тому числі електронні, для пошуку існуючих математичних моделей.

ПРН-У-8. Застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних.

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема 1. Похідна та диференціал. Означення диференційовної функції, її неперервність. Похідна і диференціал. Односторонні похідні. Нескінченні похідні.

Тема 2. Геометричний і механічний зміст похідної і диференціала.

Тема 3. Техніка диференціювання. Похідна і диференціал суми, добутку і частки функцій. Похідна і диференціал складеної функції. Похідна оберненої функції. Функції, задані параметрично. Диференціювання функцій, заданих параметрично.

Тема 4. Похідні та диференціали вищих порядків. Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца. Диференціали вищих порядків. Диференціали вищих порядків складеної функції.

Тема 5. Основні теореми диференціального числення. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коші.

Тема 6. Формула Тейлора. Вивід формули Тейлора. Многочлен Тейлора як многочлен найкращого наближення функції в околі заданої точки. Залишковий член формули Тейлора.

Тема 7. Наближені обчислення значень функції з допомогою формули Тейлора. Задача обчислення значень функцій з допомогою формули Тейлора і оцінка точності наближення. Задача обчислення значень функції з наперед заданою точністю.

Змістовий модуль 4. Застосування диференціального числення під час дослідження функцій

Тема 8. Застосування похідної під час знаходження границь функцій у точці. Розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$ (перше правило Лопіталя). Розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$ (друге правило Лопіталя). Розкриття невизначеностей $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty, 0^0$, ∞^0, 1^∞. Обчислення границь функцій у точці з допомогою формули Тейлора.

Тема 9. Дослідження функцій на сталість і монотонність. Умови сталості функції. Умови монотонності функції. Застосування диференціального числення до доведення тотожностей, розв'язування рівнянь і нерівностей.

Тема 10. Дослідження функцій на екстремум. Точки екстремуму функції. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму. Знаходження найменшого і найбільшого значення функції, диференційовної на відрізку.

Тема 11. Дослідження функції на опуклість донизу і опуклість догори. Функція строго опукла донизу. Достатні умови строгої опуклості донизу. Функція строго опукла догори. Достатні умови строгої опуклості догори. Точки перегину. Достатні умови наявності точок перегину.

Тема 12. Похилі і вертикальні асимптоти. Повне дослідження функції і побудова графіка функції, заданої явно, параметрично і в полярній системі координат. Загальна схема дослідження функції. Побудова функцій, заданих формулою $y = f(x)$. Побудова функцій, заданих формулою $x = x(t)$, $y = y(t)$; $\rho = \rho(t)$.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	лк	пз	лз	інд	с.р.
Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функції однієї змінної.						
Тема 1. Похідна та диференціал.	7,5	2	2			3,5
Тема 2. Геометричний і механічний зміст похідної і	7,5	2	2			3,5

диференціала.						
Тема 3. Техніка диференціювання.	7,5	2	2			3,5
Тема 4. Похідні та диференціали вищих порядків.	7,5	2	2			3,5
Тема 5. Основні теореми диференціального числення.	7,5	2	2			3,5
Тема 6. Формула Тейлора.Залишковий член формули Тейлора.	7,5	2	2			3,5
Тема 7. Наближені обчислення значень функції з допомогою формули Тейлора.	7,5	2	2			3,5
Разом за змістовим модулем 3	52,5	14	14			24,5
Змістовий модуль 4. Застосування диференціального числення під час дослідження функцій						
Тема 8. Застосування похідної під час знаходження границь функцій у точці.	7,5	2	2			3,5
Тема 9. Дослідження функцій на сталість і монотонність.	7,5	2	2			3,5
Тема 10. Дослідження функцій на екстремум.	7,5	2	2			3,5
Тема 11. Дослідження функцій на глобальний екстремум.	7,5	2	2			3,5
Тема 12. Дослідження функції на опуклість донизу і опуклість догори.	7,5	2	2			3,5
Тема 13. Похилі і вертикальні асимптоти.	7,5	2	2			3,5
Тема 14. Повне дослідження функції і побудова графіка функції	7,5	2	2			3,5
Разом за змістовим модулем 4	52,5	14	14			24,5
Усього годин	**105**	**28**	**28**			**49**

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Приріст функції. Означення похідної. Таблиця похідних.	2
2.	Техніка диференціювання. Похідна складеної і оберненої функції, логарифмічне диференціювання.	2
3.	Похідна функції заданої параметрично. Похідна неявно заданої функції.	2
4.	Геометричний і механічний зміст похідної.	2
5.	Диференціал першого порядку. Наближені обчислення за допомогою диференціалу.	2
6.	Похідні і диференціали вищих порядків.	2
7.	Основні теореми диференціального числення.	2
8.	Формула Тейлора.	2
9.	Розкриття невизначеностей. Правила Лопіталя.	2
10.	Дослідження функцій на сталість, монотонність і екстремум.	2
11.	Прикладні задачі.	2
12.	Дослідження функції на вгнутість, опуклість та точки перегину.	2
13.	Асимптоти. Повне дослідження функції і побудова її графіка.	2
14.	Повне дослідження функції.	2
	Разом:	**28**

6. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Геометричний і механічний зміст похідної і диференціала. Похідна і диференціал суми, добутку і частки функцій. Похідна і диференціал складеної функції.	4
2.	Диференціювання функцій, заданих параметрично.	4
3.	Диференціали вищих порядків складеної функції.	4
4.	Основні теореми диференціального числення.	4
5.	Формула Тейлора-Маклорена.	4
6.	Застосування Формули Тейлора-Маклорена.	5
7.	Правила Лопіталя.	4
8.	Застосування диференціального числення до доведення тотожностей, розв’язування рівнянь і нерівностей.	5
9.	Нерівність Ієнсена.	5
10.	Дослідження функцій, заданих неявно, в параметричній формі, в полярній системі координат.	4
11.	Застосування похідної до прикладних задач.	6
	Разом:	**49**

7. Методи та технології навчання

Пояснювально-ілюстративний, репродуктивний, метод проблемного викладу, частково-пошуковий або евристичний, дослідницький методи, наочні методи, робота з навчально-методичною літературою, науковими джерелами і електронними ресурсами; методи організації самостійної роботи (розв’язування завдань, виконання проектів, індивідуальних і творчих завдань тощо).

Під час викладання навчальної дисципліни використовуються різноманітні *технології навчання* – як традиційні, так і сучасні (особистісно-орієнтовані, інформаційно-комунікаційні тощо). При цьому навчання є студентоцентрованим та здійснюється через активну практичну діяльність.Студентоцентроване навчання й викладання: повага й увага до особистості студентів та їхніх потреб, гнучкі навчальні траєкторії; застосування різних способів подачі матеріалу; гнучке використання педагогічних методів; регулярне оцінювання й коригування способів подачі матеріалу та педагогічних методів; заохочення почуття незалежності водночас із забезпеченням належного наставництва й підтримки з боку викладача; розвиток взаємоповаги у стосунках студента і викладача; наявність належних процедур реагування на студентські скарги.

Студентоцентроване навчання, викладання та оцінювання: обізнаність викладача з наявними методами екзаменування та контролю знань, розвиток навичок у цій сфері; відповідність критеріїв та методів оцінювання, а також критеріїв виставлення оцінок; критерії виставлення оцінок оприлюднюються заздалегідь; добір методик оцінювання, що дозволяють студентам продемонструвати, наскільки вони досягли запланованих навчальних результатів; одержання студентами зворотного зв’язку; оцінювання здійснюється послідовно й справедливо застосовується до всіх студентів та проводиться відповідно до встановлених процедур; подання апеляцій з боку студентів здійснюється за допомогою формальної процедури.

8. Критерії та методи оцінювання

У процесі оцінювання навчальних досягнень студентів застосовуються методи:

- *методи усного контролю:* індивідуальне опитування, бліц-опитування, фронтальне опитування; співбесіда, доповіді;
- *методи письмового контролю:* модульне письмове тестування, реферат, конспекти статей, занять; практичні заняття; бліц-контроль, експрес-контроль;
- *комп'ютерного контролю:* презентації доповідей та індивідуальних навчально-дослідницьких завдань;
- *методи самоконтролю:* уміння самостійно оцінювати свої знання, самоаналіз.

Оцінка навчальних досягнень виконується за допомогою процедур об'єктивного контролю – критеріально-орієнтованого тестування та комплексних контрольно-кваліфікаційних завдань; оцінювання виконується з використанням таких професійних засобів діяльності: практичні заняття; колоквіуми; тести; самостійні і контрольні роботи, залік.

Результат освітньої діяльності здобувача вищої освіти оцінюється згідно з Критеріями оцінювання знань і вмінь студентів Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського за такими рівнями і критеріями:

Оцінка за шкалами ECTS, стобаловою, розширеною	**Критерії оцінювання**
A 90-100 балів ВІДМІННО	Студент володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на поглибленому рівні; комплексом знань та вмінь, який характеризується системністю. Застосування знань здійснюється на основі самостійного цілеутворення, побудови власних програм діяльності. Студент проявляє нешаблонність мислення у виборі і використанні елементів комплексу знань, здатний самостійно і творчо використовувати набуті

	уміння відповідно до варіативних ситуацій навчання. Студент спроможний самостійно формулювати узагальнення та висновки, нові задачі, розв'язувати нестандартні задачі, ситуації. Навчально-пізнавальна активність обумовлена пізнавальними інтересами, мотивами саморозвитку і професійного становлення. Студент проявляє інтерес до актуальних проблем відповідного освітнього компонента, може під керівництвом викладача вибрати предмет наукового дослідження, проводити самостійну науково-дослідну роботу.
B 80-89 балів ДУЖЕ ДОБРЕ	Студент володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на поглибленому рівні.Студент володіє комплексом знань та вмінь, який є частково-впорядкованим. У процесі застосування знань студент спроможний вибрати необхідний елемент комплексу знань та вмінь.Застосування знань та вмінь здійснюється як у стандартних ситуаціях, так і при незначних варіаціях умов на основі використання загальних рекомендацій. Відбувається перенесення сформованих умінь або їх комплексів на розв'язування незнайомих задач, ситуацій.Навчально-пізнавальна активність стимулюється пізнавальними інтересами, продукт діяльності оцінюється як професійно значущий.
C 75-79 балів ДОБРЕ	Студент володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на підвищеному рівні, може усвідомлено застосовувати знання та вміння для висвітлення суті питання. Комплекс знань частково-структурований. Знання застосовуються переважно у знайомих ситуаціях. Студент усвідомлює особливості навчальних задач, ситуацій тощо. Пошук способів їх розв'язання здійснюється за зразком. Студент спроможний аргументувати застосування певної методичної дії під час розв'язування задач, ситуацій тощо. Навчально-пізнавальна активність стимулюється мотивами професійного становлення і пізнавальними інтересами.
D 60-74 балів ЗАДОВІЛЬНО	Студент володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на середньому рівні, може проілюструвати власними прикладами відповідь на питання, частково усвідомлює специфіку навчальних та прикладних задач, ситуацій тощо, має знання про способи розв'язування типових задач, ситуацій тощо. Однак процес самостійного розв'язування задач, ситуацій тощо

	потребує опори на зразок. Навчально-пізнавальна активність студентів є ситуативно-евристичною. Домінують мотиви обов'язку та особистого успіху. Використання засобів саморозвитку та самопізнання відбувається не усвідомлено.
E 50-59 балів ДОСТАТНЬО	Студент володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компоненту на середньому рівні. Має уявлення про специфіку навчальних та прикладних задач, ситуацій тощо. Виконання дій під час роз'яснення задач, ситуацій частково усвідомлюється, здійснюється частково правильно.
FX 35-49 балів НЕЗАДОВІЛЬНО	Студент володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на елементарному рівні, має уявлення про зміст основних розділів. Виконання окремих дій відбувається не усвідомлено, однак переважно правильно, навчально–пізнавальна активність мотивується ситуативно-прагматичним інтересом.
F 1-34 балів НЕПРИЙНЯТНО	Студент має значні прогалини в основних поняттях і методах, володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на елементарному рівні, має уявлення про зміст окремих розділів. Виконання окремих методичних дій відбувається несвідомо, у більшості випадків неправильно, навчально-пізнавальна активність проявляється лише в ситуаціях зовнішнього примусу.

9. Розподіл балів, які одержують студенти

Розподіл рейтингових балів за видами діяльності 2 семестр

№ з/п	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Творче завдання	20	1	20
2.	Домашні завдання	0,5	20	10
3.	Самостійні роботи	10	1	10
4.	Контрольна робота	10	2	20
5.	Колоквіум	10	2	20
Всього за 2-й семестр:				**80 (80%)**
Екзамен				**20 (20%)**
Підсумковий рейтинговий бал				**100 (100%)**

§ 1. Приріст функції. Означення похідної. Задачі, які приводять до поняття похідної

!!! Попередньо вивчіть лекцію17 [11, с. 206-215].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Сформулювати означення приросту аргументу та приросту функції в точці. Як вони позначаються?

Приріст аргументу – це різниця між новим і фіксованим значенням аргументу (різниця між тим, що стало і що було): $\Delta x := x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$;

Приріст функції – це різниця між значенням функції у новій точці і значенням функції у фіксованій точці (різниця між тим, що стало і що було):

$$\Delta f(x_0) = \Delta y := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x) \text{ (рис. 1.1).}$$

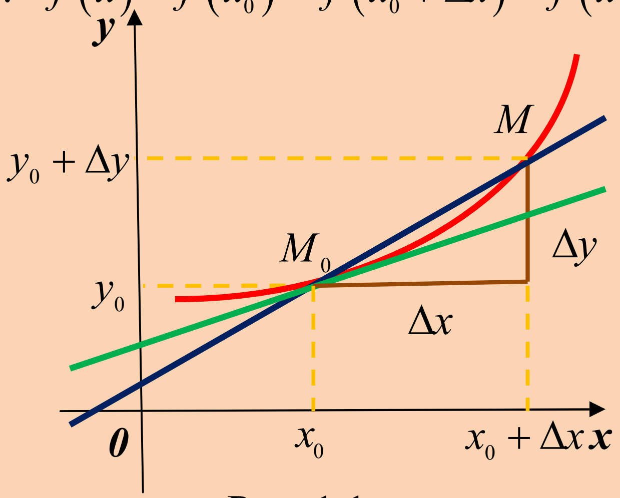


Рис. 1.1

2. Сформулювати означення диференційовної функції.

Нехай функція $y = f(x)$ *визначена у деякому околі точки* x_0 *і нехай* $x \in O(x_0)$. *Якщо існує скінченна границя відношення приросту функції* $f(x)$ *до приросту аргумента, коли останній прямує до нуля, то вона називається* ***похідною функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0*, а сама функція називається* ***диференційовною у цій точці****:*

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}.$$

3. Сформулювати алгоритм знаходження похідної.

З означення похідної випливає алгоритм знаходження похідної:

1) надаємо аргументу x_0 *деякого приросту* Δx*, тобто вводимо у розгляд точку* $x_0 + \Delta x$ *і обчислюємо приріст функції:*

$$\Delta f(x_0) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) знаходимо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

3) знаходимо границю цього відношення:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

4) якщо дана границя існує і скінченна, то вона й дорівнює похідній $f'(x_0)$. *Отже похідна функції в точці – це число. Однак якщо в кожній точці деякого проміжку* X *існує похідна, то можна говорити про похідну як про функцію від змінної* $x \in X$.

кожній точці $x_0 \in X \xrightarrow{\text{функція } f'(x)}$ одне число $f'(x_0)$.

4. Користуючись означенням похідної і правилами диференціювання, вивести формули, скласти і вивчити таблицю похідних основних елементарних функцій.

1) $C'=0$; 2) $(kx+b)'=k$; 3) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$; $n\in Z$;

4) $(a^x)'=a^x\ln a$; 5) $(e^x)'=e^x$;

6) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$; 7) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

8) $(\sin x)'=\cos x$; 9) $(\cos x)'=-\sin x$;

10) $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 11) $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

12) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 13) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$; 15) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

5. Який фізичний зміст похідної функції $f(x)$ в точці x_0?

Похідна $f'(x_0)$ – це швидкість зміни функції $y=f(x)$ у точці x_0, або швидкість зміни залежної змінної y відносно зміни незалежної змінної x в точці x_0. Зокрема, якщо t – час, $x=S(t)$ – координата точки в момент часу t, яка рухається прямолінійно, то $S'(t_0)=v(t_0)$ – миттєва швидкість точки в момент часу t_0.

Основні поняття, що стосуються теми «Приріст функції. Означення похідної. Задачі, які приводять до поняття похідної» узагальнено та подано у вигляді інтелект-карти (ментальної карти) (рис. 1.2).

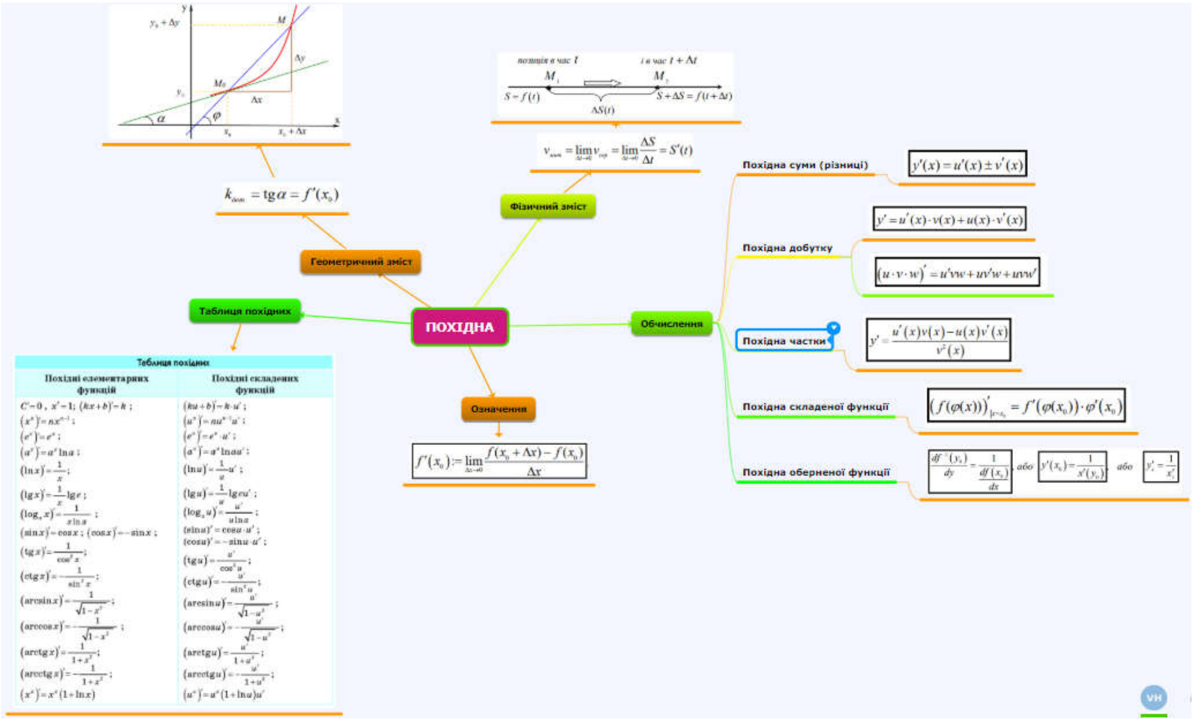


Рис. 1.2

Приклади розв'язування вправ

Задача 1.1. *Знайти приріст функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0*:*

1) $f(x) = 2x^3;\ x_0 = 1;$ $\Delta x = 0{,}2;\ \Delta x = 0{,}5;$

2) $f(x) = 2^x;\ x_0 = 3;$ $\Delta x = -1;\ \Delta x = 0{,}5.$

Розв'язання. Використаємо означення приросту функції в точці, маємо:

1) $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^3 - 2x_0^3 =$

$= 2\Delta x\left((x_0 + \Delta x)^2 + x_0(x_0 + \Delta x) + x_0^2\right)$

Якщо $x_0 = 1$, а $\Delta x = 0{,}2$, то приріст функції в заданій точці дорівнює:

$$\Delta f(1) = 2 \cdot 0{,}2 \cdot \left(1{,}2^2 + 1 \cdot 1{,}2 + 1^2\right) = 1{,}456.$$

Якщо $x_0 = 1$, а $\Delta x = 0{,}5$, то:

$$\Delta f(1) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \left(1{,}5^2 + 1 \cdot 1{,}5 + 1^2\right) = 4{,}75. \ ■$$

2) $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2^{x_0 + \Delta x} - 2^{x_0} = 2^{x_0}\left(2^{\Delta x} - 1\right).$

Якщо $x_0 = 3$, а $\Delta x = -1$, то приріст функції в заданій точці дорівнює:

$$\Delta f(3) = 2^3\left(2^{-1} - 1\right) = -4.$$

Якщо $x_0 = 3$, а $\Delta x = 0,5$, то

$$\Delta f(3) = 2^3\left(2^{0,5} - 1\right) \approx 3,3137. \blacksquare$$

Задача 1.2. *Користуючись означенням похідної, обчислити похідні таких функцій:*

1) $y = 3x^2 - 4x$; *3)* $y = \cos 3x$;

2) $y = \dfrac{1}{x^2+2}$; *4)* $y = \sqrt{x+3}$.

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом знаходження похідної за означенням. Нехай x_0 і $x_0 + \Delta x$ – довільні точки області визначення функції $y = f(x)$.

1. Обчислення похідної функції $y = 3x^2 - 4x$.

1. Обчислюємо приріст функції:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 4(x_0 + \Delta x) - \left(3x_0^2 - 4x_0\right) =$$

$$= 3\left(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2\right) - 4x_0 - 4\Delta x - 3x_0^2 + 4x_0 =$$

$$= 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 4\Delta x = \Delta x\left(6x_0 + 3\Delta x - 4\right).$$

2. Знаходимо границю відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(6x_0 + 3\Delta x - 4\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(6x_0 + 3\Delta x - 4\right) = \lim_{\Delta x\to 0} 6x_0 + \lim_{\Delta x\to 0} 3\Delta x - \lim_{\Delta x\to 0} 4 = 6x_0 - 4.$$

3. Отже, похідна функції $y = 3x^2 - 4x$ в довільній точці області визначення дорівнює $y' = 6x - 4$. $\blacksquare$

2. Обчислення похідної функції $y = \dfrac{1}{x^2+2}$.

1. Обчислюємо приріст функції:

$$\Delta f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\frac{1}{\left(x_0+\Delta x\right)^2+2}-\frac{1}{x_0^2+2}=$$

$$=\frac{x_0^2+2-\left(\left(x_0+\Delta x\right)^2+2\right)}{\left(\left(x_0+\Delta x\right)^2+2\right)\left(x_0^2+2\right)}=\frac{x_0^2+2-\left(x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2\right)-2}{\left(\left(x_0+\Delta x\right)^2+2\right)\left(x_0^2+2\right)}=$$

$$=\frac{x_0^2+2-x_0^2-2x_0\Delta x-\Delta x^2-2}{\left(\left(x_0+\Delta x\right)^2+2\right)\left(x_0^2+2\right)}=\frac{-2x_0\Delta x-\Delta x^2}{\left(\left(x_0+\Delta x\right)^2+2\right)\left(x_0^2+2\right)}=$$

$$=\frac{\Delta x\left(-2x_0-\Delta x\right)}{\left(\left(x_0+\Delta x\right)^2+2\right)\left(x_0^2+2\right)}.$$

2. Знаходимо границю відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\left(-2x_0-\Delta x\right)}{\left(\left(x_0+\Delta x\right)^2+2\right)\left(x_0^2+2\right)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x_0-\Delta x}{\left(\left(x_0+\Delta x\right)^2+2\right)\left(x_0^2+2\right)}=\frac{-2x_0-0}{\left(\left(x_0+0\right)^2+2\right)\left(x_0^2+2\right)}=\frac{-2x_0}{\left(x_0^2+2\right)^2}.$$

3. Отже, похідна функції $y=\dfrac{1}{x^2+2}$ у довільній точці області визначення дорівнює $y'=\dfrac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}$. ■

3. Обчислення похідної функції $y=\cos 3x$.

1. Знаходимо приріст функції:

$$\Delta f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\cos 3\left(x_0+\Delta x\right)-\cos 3x_0=$$

$$=\cos\left(3x_0+3\Delta x\right)-\cos 3x_0=-2\sin\frac{3\left(2x_0+\Delta x\right)}{2}\sin\frac{3\Delta x}{2}.$$

2. Обчислюємо границю відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{3(2x_0+\Delta x)}{2}\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=-3\sin\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(2x_0+\Delta x)}{2}\right)=-3\sin 3x_0.$$

Стратегія

У цьому випадку використаємо відому формулу з тригонометрії перетворення різниці косинусів у добуток: $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, *і при обчисленні границі можна застосувати «першу» чудову границю* $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ *або еквівалентні функції* $\sin t$ *еквівалентно* t, *якщо* $t\to 0$. *У нашому випадку* $\frac{3}{2}\Delta x\to 0$.

Отже, похідна функції $y=\cos 3x$ в довільній точці області визначення дорівнює $y'=-3\sin 3x$. ■

4. Обчислення похідної функції $y=\sqrt{x+3}$.

1. Обчислюємо приріст функції:

Вказівка

Щоб одержати множник Δx, *необхідно помножити вираз* $\sqrt{x_0+\Delta x+3}-\sqrt{x_0+3}$ *на спряжений йому* $\sqrt{x_0+\Delta x+3}+\sqrt{x_0+3}$, *та одразу на нього поділити.*

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sqrt{x_0+\Delta x+3}-\sqrt{x_0+3}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x+3}-\sqrt{x_0+3}\right)\left(\sqrt{x_0+\Delta x+3}+\sqrt{x_0+3}\right)}{\sqrt{x_0+\Delta x+3}+\sqrt{x_0+3}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x_0+3}\right)^2}{\sqrt{x_0+\Delta x+3}+\sqrt{x_0+3}}=\frac{x_0+\Delta x+3-(x_0+3)}{\sqrt{x_0+\Delta x+3}+\sqrt{x_0+3}}=$$

$$=\frac{x_0+\Delta x+3-x_0-3}{\sqrt{x_0+\Delta x+3}+\sqrt{x_0+3}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x+3}+\sqrt{x_0+3}}.$$

2. Знаходимо границю відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x+3}+\sqrt{x_0+3}}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x+3}+\sqrt{x_0+3}}=\frac{1}{\sqrt{x_0+0+3}+\sqrt{x_0+3}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0+3}}.$$

Отже, похідна функції $y=\sqrt{x+3}$ дорівнює $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$. ■

Задача 1.3. *Довести, користуючись означенням, що функція* $y=\sqrt[4]{x^3}$ (рис. 1.3) *не є диференційовною у точці* $x_0=0$.

Доведення.

1. Обчислимо приріст функції:

$\Delta y(0)=y(0+\Delta x)-y(0)=\sqrt[4]{\Delta x^3}-0=\sqrt[4]{\Delta x^3}$.

2. Знаходимо границю відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[4]{\Delta x^3}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[4]{\Delta x}}=\infty.$$

Оскільки границя відношення приросту функції до приросту аргументу $(\Delta x\to 0)$ дорівнює нескінченності, то робимо висновок, що похідної функції $y=\sqrt[4]{x^3}$ у точці $x_0=0$ не існує. ■

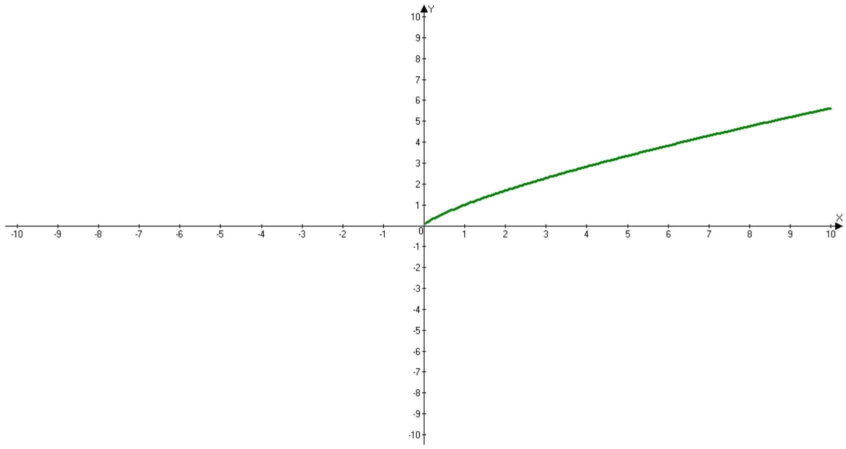


Рис. 1.3

Задача 1.4. Задача про миттєву швидкість. *Нехай задана матеріальна точка* M *, яка падає у середовищі без опору. Відраховуватимемо час* t *від початку падіння. Тоді закон такого руху виражається формулою* $S=\frac{qt^2}{2}$.

Поставимо задачу: обчислити швидкість руху точки у момент часу t*, якщо точка знаходиться у положенні* M .

Розв'язання.

t – час, коли точка знаходиться у положенні M .

$t+\Delta t$ $(\Delta t>0)$ – час, коли точка знаходиться у положенні M_1.

Тоді за час Δt точка пройде шлях ΔS, який називається приростом шляху:

$$\Delta S=\frac{q(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{qt^2}{2}=\frac{2qt\Delta t+q\Delta t^2}{2}=qt\Delta t+\frac{1}{2}q\Delta t^2,$$

а середню швидкість знайдемо як відношення пройденого шляху ΔS за час Δt:

$$v_{сер}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{qt\Delta t+\frac{1}{2}q\Delta t^2}{\Delta t}=qt+\frac{1}{2}q\Delta t.$$

Отже, середня швидкість в даному випадку не є сталою. Вона залежить при фіксованому моменті часу t від приросту часу Δt.

При різних значеннях Δt середня швидкість $v_{сер}$ набуває різних значень.

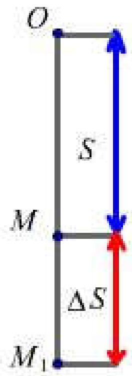


Рис. 1.4

Проте, чим менший проміжок часу Δt після моменту часу t, тим точніше середня швидкість буде характеризувати швидкість точки в момент t.

Тому природно за швидкість точки в момент часу t (так звана миттєва швидкість) прийняти границю $v_{сер}$ при $\Delta t \to 0$:

$$v_{мит} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t), \ \boxed{v_{мит} = S'(t)} \qquad \blacksquare$$

Задача 1.5. *Кількість продукції, виготовленої робітником від початку роботи до моменту часу* $t = T$*, дорівнює* $f(t) = 10t - 3t^2$*.*

Знайти:

1) *середню продуктивність праці робітника на проміжку часу від 0 до T;*

2) *кількість продукції, яку виготовив робітник за проміжок часу між* t_0 *і* $t_0 + \Delta t$ *;*

3) *середню продуктивність праці робітника за проміжок часу між* t_0 *і* $t_0 + \Delta t$*;*

4) *продуктивність праці робітника в момент часу* t_0*.*

Розв'язання. Середня продуктивність праці робітника дорівнює продукції, яку виготовляє робітник за певний проміжок часу:

$\Delta f(t_0) = f(t_0+\Delta t) - f(t_0)$ – продукція;

$z_{сер.} = \dfrac{\Delta f(t_0)}{\Delta t}$ – середня продуктивність;

$z(t_0) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} z_{сер.} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)$ – продуктивність праці в момент t_0.

Таким чином, продуктивність праці є похідною від обсягу виробленої продукції по часу.

1) знайдемо:

$$\Delta f(t_0) = f(t_0+\Delta t) - f(t_0) = 10(t_0+\Delta t) - 3(t_0+\Delta t)^2 - 10t_0 + 3t_0^2 =$$
$$= \Delta t(10 - 6t_0 - 3\Delta t).$$

2) якщо $t_0 = 0,\ t_0 + \Delta t = T$ або $\Delta t = T$, то середня продуктивність праці:

$$z_{сер.} = \frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta f(0)}{T} = \frac{T(10 - 6\cdot 0 - 3\cdot T)}{T} = 10 - 3T \text{ (прод/за час T).}$$

3) середня продуктивність праці за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$ дорівнює:

$$z_{сер.} = \frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta t(10 - 6t_0 - 3\Delta t)}{\Delta t} = 10 - 6t_0 - 3\Delta t \text{ (прод/за час } \Delta t\text{).}$$

4) продуктивність праці в момент часу t_0 дорівнює:

$$z(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} z_{сер} = \lim_{\Delta t\to 0}(10 - 6t_0 - 3\Delta t) = 10 - 6t_0.$$

Зверніть увагу, що:

$$z(t_0) = f'(t)\big|_{t=t_0} = \left(10t - 3t^2\right)'\big|_{t=t_0} = 10 - 6t_0. \quad ■$$

Задача 1.6. [4] *Визначити середню швидкість руху тіла за проміжок часу* $2 \le t \le 2 + \Delta t$, *якщо закон руху задано формулою* $s = t^2 - 2t + 3$, *де* t *– час (в секундах),* s *– відстань (в метрах). Знайти миттєву швидкість точки в момент часу* $t_0 = 2$.

Обчислити середню швидкість для:

1) $\Delta t = 0{,}1$. ***2)*** $\Delta t = 0{,}01$. ***3)*** $\Delta t = 0{,}001$. ***4)*** $\Delta t = 0{,}0001$.

Розв'язання. Відомо, що середня швидкість v_{cep} руху матеріальної точки дорівнює шляху ΔS, поділеному на час Δt, протягом якого тіло рухається:

$$v_{cep} = \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t},$$

$$\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t_0) = (t_0 + \Delta t)^2 - 2(t_0 + \Delta t) + 3 - t_0^2 + 2t_0 - 3 =$$

$$= 2t_0\Delta t + \Delta t^2 - 2\Delta t.$$

Якщо $t_0 = 2$, то $\Delta S(2) = 2 \cdot 2\Delta t + \Delta t^2 - 2\Delta t = \Delta t(2 + \Delta t)$;

$$v_{cep}(t_0) = \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta t(2 + \Delta t)}{\Delta t} = 2 + \Delta t \text{ (м/с).}$$

$$v_{мит} = v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cep} = \lim_{\Delta t \to 0}(2 + \Delta t) = 2 \text{ (м/с).}$$

Знайдемо v_{cep} при різних значеннях приросту часу і порівняємо з миттєвою швидкістю:

$t_0\,(сек)$	$\Delta t\,(сек)$	$v_{мит}\,(м/с)$	$v_{cep}\,(м/с)$
2	0,1	2	2,1
2	0,01	2	2,01
2	0,001	2	2,001
2	0,0001	2	2,0001

Робимо висновок, що зі зменшенням приросту часу $(\Delta t \to 0)$ середня швидкість v_{cep} більш точно описує миттєву швидкість $v_{мит}(t_0)$. ■

Задача 1.7. [4] *Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом* $x = 15\sin 3t$. *Знайти миттєву швидкість точки в момент часу* t_0.

Розв'язання. Аналогічно до задачі 1.6 маємо:

$$t = t_0,\ x_0 = x(t_0) = 15\sin 3t_0;$$

$$\Delta x(t_0) = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = 15\sin 3(t_0 + \Delta t) - 15\sin 3t_0 =$$

$$= 15\left(\sin 3(t_0 + \Delta t) - \sin 3t_0\right) = 30\sin\frac{3(t_0 + \Delta t - t_0)}{2}\cos\frac{3(t_0 + \Delta t - t_0)}{2} =$$

$$= 30\sin\frac{3\Delta t}{2}\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right).$$

$$v_{сер} = \frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t} = \frac{30\sin\frac{3\Delta t}{2}\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}.$$

$$v_{мит} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} 30\frac{\sin\frac{3\Delta t}{2}\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = \left|\begin{array}{l}\sin\alpha \sim \alpha \\ \alpha \to 0\end{array}\right| =$$

$$= 30\lim_{\Delta t \to 0}\frac{3\Delta t\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)}{2\Delta t} = 45\cos 3t_0.$$

В останньому переході ми врахували неперервність функції $\cos 3t$. ■

Завдання для самостійного розв'язування

✍***1.*** *Користуючись означенням похідної, обчислити похідні таких функцій:*

1) $y = 3x^2 - 4x$; ***2)*** $y = \frac{1}{x}$; ***3)*** $y = \sqrt{x}$;

4) $y=\cos 3x$; *5)* $y=\dfrac{1}{x^2+2}$.

✍**2**. **[13]** *Дослідити на диференційовність функції:*

1) $f(x)=|x|$. *2)* $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\ge 0,\\ x^2, & x<0.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\ge 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ *4)* $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\le 1,\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$

✍**3.** *Знайти похідну функції:*

1) $y=3x+2$; *2)* $y=\dfrac{2-4x}{5}$; *3)* $y=x^5$;

4) $y=x^{21}$; *5)* $y=x^{-12}$; *6)* $y=x^{-7,3}$;

7) $y=\dfrac{1}{x^9}$; *8)* $y=x^{\frac{3}{4}}$; *9)* $y=x^{\frac{12}{11}}$;

10) $y=\sqrt[4]{x}$; *11)* $y=\sqrt[9]{x^8}$; *12)* $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

13) $y=\dfrac{1}{\sqrt[8]{x^3}}$; *14)* $y=\sqrt[6]{x^5}$; *15)* $y=\dfrac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

✍**4.** *Обчислити значення похідної функції* $y=f\left(x\right)$ *в точці* x_0.

1) $y=\sin x,\ x_0=\dfrac{\pi}{3}$; *2)* $y=\cos x,\ x_0=-\dfrac{\pi}{6}$;

3) $y=\operatorname{tg} x,\ x_0=-\dfrac{\pi}{3}$; *4)* $y=\arcsin x,\ x_0=\dfrac{1}{2}$;

5) $y=\operatorname{arctg} x,\ x_0=1$; *6)* $y=5^x,\ x_0=0$;

7) $y=x^3\sqrt[4]{x},\ x_0=1$; *8)* $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[6]{x}},\ x_0=64$.

✍**5.** *Вибрати значення параметрів* α *і* β *так, щоб функція* $f(x)$ *була неперервною на* R; *диференційовною на* R:

1) $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, & x\le 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$ ***2)*** $f(x)=\begin{cases}(x+\alpha)e^{-\beta x}, & x<0,\\ \alpha x^2+\beta x+1, & x\ge 0.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}5x+1, & x\le 0,\\ \alpha x^2+x+\beta, & x\in(0;1),\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$ ***4)*** $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le x_0,\\ \alpha x+\beta, & x>x_0.\end{cases}$

✍***6. [4]*** *Маса радіоактивної речовини в момент часу* t *виражається формулою* $m=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$*, де* T *– період півроздаду, а* m_0 *– початкова маса речовини (в момент часу* $t=0$*). Знайти миттєву швидкість розпаду речовини в момент часу* t_0*.*

✍*7.* ***[4]*** *Відомо, що силою постійного струму* I *в провіднику називають фізичну величину, яка чисельно дорівнює заряду, що проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:* $I=\frac{q}{t}$*. Дайте означення миттєвої сили змінного струму, тобто у випадку, коли заряд, який проходить через поперечний переріз провідника, змінюється з часом нерівномірно може змінюватись з часом нерівномірно (тобто не обов'язково лінійно). Вивести формулу для миттєвої сили змінного струму.*

✍***8. [4]*** *Довжина вертикально поставленої драбини рівна 5 м. Нижній кінець драбини починає відсуватися від стіни зі сталою швидкістю* 2 *м/с. З якою швидкістю опускається в момент часу* t *верхній кінець драбини? Чому дорівнює його прискорення в цей момент часу?*

✍***9. [4]*** *Резервуар, що має форму півкулі, заповнюється водою. Вважаючи, що радіус кулі рівний* R_0*, а швидкість його заповнення* v_0*, визначити швидкість підняття рівня води в резервуарі.*

§ 2. Техніка диференціювання. Похідна складеної функції

Попередньо вивчіть лекцію 18 [11, с. 222-242].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. **Вивести формули для похідних суми, різниці, добутку і частки двох функцій.**

Теорема 2.1. *Якщо функції* $u(x)$ *і* $v(x)$ *диференційовні в точці* x_0, *то їх алгебраїчна сума також диференційовна у цій точці, причому має місце рівність:* $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$.

Правило. *Похідна суми дорівнює сумі похідних, якщо ці функції диференційовні.*

Наслідок. *Теорема 2.1 має місце для довільної* <u>*скінченної*</u> *алгебраїчної суми диференційовних функцій.*

Теорема 2.2. *Якщо функції* $u(x)$ *і* $v(x)$ *диференційовні у точці* x_0, *то їх добуток також диференційовна у точці* x_0 *функція, причому має місце рівність:*

$$\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) .$$

Правило. *Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на незмінну другу і похідної другої функції на незмінну першу, якщо ці функції диференційовні.*

Наслідок 1. *Сталий множник можна винести за знак* *похідної:* $\left(Cu\left(x\right)\right)' = Cu'\left(x\right)$.

Наслідок 2. *Теорема 2.2 має місце для добутку трьох і більшого числа диференційовних функцій:*

$$\left(u\left(x\right)v\left(x\right)w\left(x\right)\right)' = u'\left(x\right)v\left(x\right)w\left(x\right) + u\left(x\right)v'\left(x\right)w\left(x\right) + u\left(x\right)v\left(x\right)w'\left(x\right)$$

Теорема 2.3. *Якщо функції* $u\left(x\right)$ *і* $v\left(x\right)$ *диференційовні у точці* x_0, *причому* $v(x_0) \neq 0$, *то частка цих функцій* $\frac{u(x)}{v(x)}$ *також диференційовна у точці* x_0, *причому має місце рівність:*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, v \neq 0.$$

Правило. *Похідна частки двох функцій дорівнює різниці добутків похідної чисельника на незмінний знаменник і похідної знаменника на незмінний чисельник, поділеної на квадрат знаменника, якщо ці функції диференційовні і знаменник не дорівнює нулю.*

2. Вивести похідну складеної функції.

Похідна складеної функції $f(\varphi(x))$ *дорівнює добутку похідної зовнішньої функції* ***від свого аргумента*** *і похідної внутрішньої функції* ***від свого аргумента****:* $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ *(рис. 2.1).*

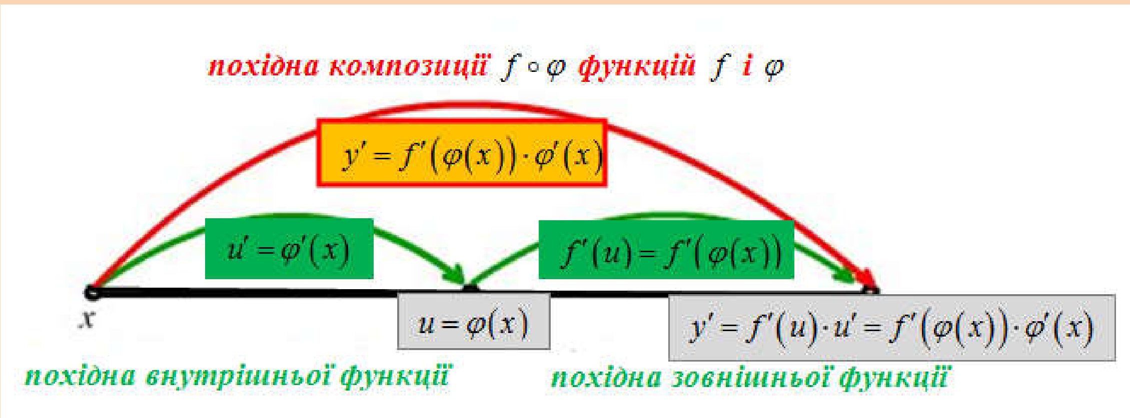


Рис. 2.1

3. Сформулювати теорему про похідну оберненої функції. Вивести формули для похідних обернених тригонометричних й логарифмічної функції.

Теорема 2.4. *Нехай функція* $y=f(x)$ *– неперервна і строго монотонна у деякому околі точки* x_0, *причому в точці* x_0 *існує похідна* $\dfrac{df(x_0)}{dx}\neq 0$, *тоді обернена функція* $x=f^{-1}(y)$ *у точці* y_0 $\left(y_0=f(x_0)\right)$ *також має похідну і*

$\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}$	$y'(x_0)=\dfrac{1}{x'(y_0)}$	$y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$

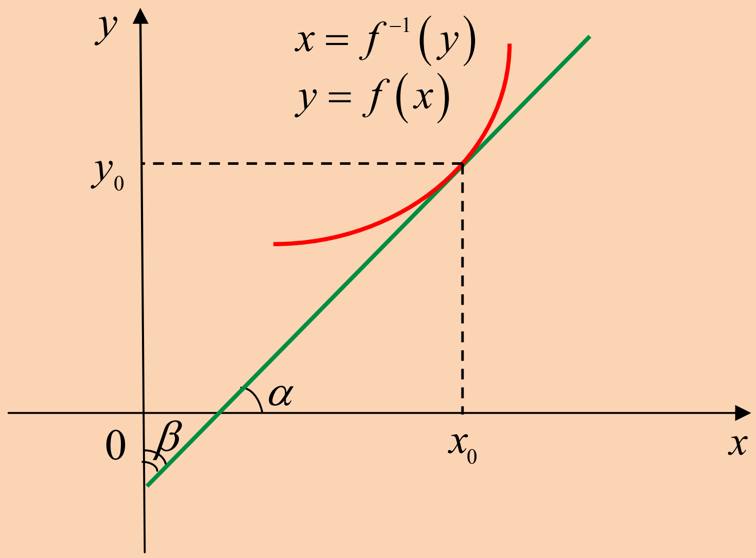


Рис. 2.2

Правило. *Похідна оберненої функції дорівнює оберненій величині похідної прямої функції.*

Ця теорема допускає наочну геометричну інтерпретацію.

$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\operatorname{tg}\beta$, *де* β *– величина кута, утвореного тією ж дотичною з віссю* Oy, $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$, *тому*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 2.1. *Знайти похідну функції* $y = f(x)$:

1) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}$; *2)* $f(x) = 2^x + \operatorname{tg} x + 1$;

3) $y = 5x^3 + 2^x - \ln x$; *4)* $y = 2\arcsin x + 3\arccos x$.

Розв'язання. Скористаємося правилом знаходження похідної суми і наслідком, який дозволяє сталий множник виносити за знак похідної.

1. Обчислення похідної функції $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}$.

$$y' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' + \left(\frac{x}{4}\right)' = \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}. \blacksquare$$

2. Обчислення похідної функції $f(x) = 2^x + \operatorname{tg} x + 1$.

$$f'(x) = \left(2^x + \operatorname{tg} x + 1\right)' = \left(2^x\right)' + \left(\operatorname{tg} x\right)' + (1)' = 2^x \ln 2 - \frac{1}{\cos^2 x}. \blacksquare$$

3. Обчислення похідної функції $y = 5x^3 + 2^x - \ln x$.

$$f'(x) = \left(5x^3 + 2^x - \ln x\right)' = \left(5x^3\right)' + \left(2^x\right)' - (\ln x)' = 15x^2 + 2^x \ln 2 - \frac{1}{x}. \blacksquare$$

4. Обчислення похідної функції $y = 2\arcsin x + 3\arccos x$.

$$y' = 2(\arcsin x)' + 3(\arccos x)' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \blacksquare$$

Задача 2.2. *Знайти похідну функції* $y = f(x)$:

1) $f(x) = \sqrt{x} \cdot 2^x$; *2)* $f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \sin x$.

Розв'язання. Скористаємося правилом знаходження похідної добутку.

1. Обчислення похідної функції $f(x)=\sqrt{x}\cdot 2^x$.

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\cdot 2^x\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'2^x+\sqrt{x}\left(2^x\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2^x+\sqrt{x}\cdot 2^x\ln 2=\frac{2^x}{2\sqrt{x}}(1+2x\ln 2).\ \blacksquare$$

2. Обчислення похідної функції $f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\sin x$.

Маємо добуток трьох функцій:

$$f'(x)=\left(x^2\cdot e^x\cdot\sin x\right)'=\left(x^2\right)'e^x\sin x+x^2\left(e^x\right)'\sin x+x^2e^x\left(\sin x\right)'=$$

$$=2xe^x\sin x+x^2e^x\sin x+x^2e^x\cos x=xe^x\left(2\sin x+x\sin x+x\cos x\right).\ \blacksquare$$

Задача 2.3. *Знайти похідну функції* $y=f(x)$:

1) $y=\dfrac{2x^2}{5-6x}$; *2)* $y=\dfrac{\log_3 x}{3^x}$ *у точці* $x_0=e$.

Розв'язання. Скористаємося правилом знаходження похідної частки і наслідком, який дозволяє сталий множник виносити за знак похідної.

1. Обчислення похідної функції $y=\dfrac{2x^2}{5-6x}$.

$$y'=\left(\frac{2x^2}{5-6x}\right)'=2\frac{\left(x^2\right)'(5-6x)-x^2(5-6x)'}{(5-6x)^2}=$$

$$=2\frac{2x(5-6x)-x^2(-6)}{(5-6x)^2}=\frac{4x(5-3x)}{(6-5x)^2}.\ \blacksquare$$

2. Обчислення похідної функції $y=\dfrac{\log_3 x}{3^x}$ *у точці* $x_0=e$.

$$f'(x)=\left(\frac{\log_3 x}{3^x}\right)'=\frac{\left(\log_3 x\right)'3^x-\log_3 x\left(3^x\right)'}{\left(3^x\right)^2}=\frac{\dfrac{3^x}{x\cdot\ln 3}-\log_3 x\cdot 3^x\cdot\ln 3}{3^{2x}}=$$

$$=\frac{1-x\cdot\ln^2 3\cdot\log_3 x}{x\cdot 3^x\cdot\ln 3};\quad f'(x_0)=f'(e)=\frac{1-e\cdot\ln 3}{e\cdot 3^e\cdot\ln 3}.\ \blacksquare$$

Задача 2.4. *Знайти похідну функції* $y = f(x)$:

1) $y = (x^3 - 2x^2 + 5)^8$; *2)* $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}}$;

3) $y = \sin\cos^2 x \cdot \cos\sin^2 x$; *4)* $y = 3^{\operatorname{arctg}(x+\pi)}$.

Розв'язання. Скористаємося правилом знаходження похідної складеної функції.

1. Обчислення похідної функції $y = (x^3 - 2x^2 + 5)^8$.

Маємо складену функцію $y = F(u)$, де зовнішня функція $F(u) = u^8$ є степеневою, а внутрішня функція $u = x^3 - 2x^2 + 5$ є многочленом. Отож спочатку знаходимо похідну зовнішньої функції $(u^n)' = n \cdot u^{n-1}$, а потім похідну внутрішньої функції, використовуючи вже відомі правила похідної суми, добутку та наслідків з них.

$$y' = \left(\left(x^3 - 2x^2 + 5\right)^8\right)' = 8\left(x^3 - 2x^2 + 5\right)^7 \left(x^3 - 2x^2 + 5\right)' =$$

$$= 8\left(x^3 - 2x^2 + 5\right)^7 \left(3x^2 - 4x\right). \blacksquare$$

2. Обчислення похідної функції $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}}$.

1 спосіб. Спочатку знаходимо похідну зовнішньої функції $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}$ і множимо на u', де $u = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}}$. Беремо похідну від $\left(\sqrt[4]{t}\right)' = \left(t^{\frac{1}{4}}\right)' = \dfrac{1}{4} \cdot t^{-\frac{3}{4}}$ і множимо її на похідну внутрішньої функції, використавши правило знаходження похідної частки.

$$y'=\left(\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}}\right)'=\sqrt[4]{\frac{x^2-x-1}{x^2+x+1}}\cdot\frac{1}{4}\sqrt[4]{\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x+1}\right)^3}\times$$

$$\times\frac{(2x+1)(x^2-x-1)-(2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x-1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x-1}\right).$$

2 спосіб. Спростимо саму функцію

$$y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}=\frac{1}{4}\left(\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x-1)\right).$$

Далі використовуємо похідну різниці, логарифмічної функції $(\ln t)'=\frac{1}{t}$, і множимо на похідну внутрішньої функції $t'(x)$.

$$y'=\frac{1}{4}\left(\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}-\frac{(x^2-x-1)'}{x^2-x-1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x-1}\right).\ \blacksquare$$

3. Обчислення похідної функції $y=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x.$

Спочатку знаходимо похідну добутку, потім для кожного з множників використовуємо похідну складеної функції $(\sin u(x))'=\cos u\cdot u'(x)$ і $(\cos v(x))'=-\sin v\cdot v'(x)$.

$$y'=\left(\sin\cos^2 x\right)'\cdot\cos\sin^2 x+\sin\cos^2 x\cdot\left(\cos\sin^2 x\right)'=$$

$$=\cos\cos^2 x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\cos\sin^2 x+$$

$$+\sin\cos^2 x\cdot\left(-\sin\sin^2 x\right)\cdot 2\sin x\cdot\cos x=$$

$$=-2\sin 2x\cdot(\cos\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x+\sin\cos^2 x\cdot\sin\sin^2 x)=$$

$$=-2\sin 2x\cdot\cos(\cos^2 x-\sin^2 x)=-2\sin 2x\cos(\cos 2x).\ \blacksquare$$

4. Обчислення похідної функції $y=3^{\operatorname{arctg}(x+\pi)}$.

Маємо складену функцію, спочатку знаходимо похідну зовнішньої функції $\left(a^t\right)'=a^t\cdot\ln a$ і множимо на похідну внутрішньої $t=\operatorname{arctg}(x+\pi)$. Оскільки внутрішня функціє також є складеною, то знаходимо похідну $(\operatorname{arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$ і множимо на $z' = (x+\pi)'$.

$$y' = \left(3^{\operatorname{arctg}(x+\pi)}\right)' = 3^{\operatorname{arctg}(x+\pi)} \cdot \ln 3 \cdot \left(\operatorname{arctg}(x+\pi)\right)' =$$

$$= 3^{\operatorname{arctg}(x+\pi)} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1+(x+\pi)^2} \cdot (x+\pi)' = 3^{\operatorname{arctg}(x+\pi)} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1+(x+\pi)^2}. \ \blacksquare$$

Задача 2.5. *Знайти похідну функції* $y = f(x)$:

1) $y = \left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{x}\right)^{20}$;

2) $y = \cos(3\arccos x)$;

3) $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$, $x_0 = \dfrac{1}{\pi}$;

4) $y = \sin^4 3x - \sin 6x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

1. Обчислення похідної функції $y = \left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{x}\right)^{20}$.

$$y' = \left(\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^{20}\right)' = 20\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^{19} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}\right). \ \blacksquare$$

2. Обчислення похідної функції $y = \cos(3\arccos x)$.

$$y' = \left(\cos(3\arccos x)\right)' = -\sin(3\arccos x) \cdot \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}. \ \blacksquare$$

3. Обчислення похідної функції $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$, $x_0 = \dfrac{1}{\pi}$.

$$y' = \left(2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\right)' = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \ln 2}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}};$$

$$y'\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\frac{2^{\operatorname{tg}\pi} \cdot \ln 2}{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \cos^2 \pi} = -\pi^2 \ln 2. \ \blacksquare$$

4. Обчислення похідної функції $y = \sin^4 3x - \sin 6x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$y' = \left(\sin^4 3x - \sin 6x\right)' = 4\sin^3 3x \cos 3x \cdot 3 - 6\cos 6x =$$

$$= 12\sin^3 3x \cos 3x - 6\cos 6x;$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\sin^3 \frac{3\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{2} - 6\cos 6\pi = 6. \ ■$$

Задача 2.6. *Знайти похідну функції* $y = f(x)$ *у вказаній точці:*

1) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$,
$x_0 = 0, x_0 = 2$;

2) $y = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$,
$x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

1. Обчислення похідної функції $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2},\ x_0 = 0, x_0 = 2$.

$$y' = \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2 - 4x^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{\left(1+x^2\right)^2 - 4x^2}};$$

$$y'(0) = 2; \quad y'(2) = \frac{2-8}{5\sqrt{25-16}} = -\frac{6}{15}. \ ■$$

2. Обчислення похідної функції $y = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$y' = \left(3\sin x \cos^2 x\right)' - \left(\sin^3 x\right)' =$$

$$= 3\left(\cos x \cos^2 x - 2\cos x \sin x \sin x\right) - 3\sin^2 x \cos x =$$

$$= 3\cos^3 x - 6\cos x \sin^2 x - 3\sin^2 x \cos x = 3\cos^3 x - 9\cos x \sin^2 x.$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cos^3\frac{\pi}{2}-9\cos\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi}{2}=0. \blacksquare$$

Задача 2.7. *Знайти похідну показниково-степеневої функції* $y=\left(u(x)\right)^{v(x)}$.

Розв'язання. Подамо функцію у вигляді $y=e^{v\ln u}$ і знайдемо похідну:

$$y'(x)=\left(e^{v\ln u}\right)'=e^{v\ln u}(v\ln u)'_x=u^v\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right)=\left(u^v\ln u\right)v'+\left(vu^{v-1}\right)u'.$$

Похідна функції $y=u^v$ дорівнює сумі двох доданків, з яких перший $\left(u^v\ln u\right)v'$ співпадає з похідною u^v в припущенні, що u - стала, а другий $\left(v\cdot u^{v-1}\right)u'$ - з похідною u^v в припущенні, що v - стала: $\left(u(x)^{v(x)}\right)'=u^v v'\ln u+vu^{v-1}u'$.

Зокрема для функції $y=x^x$ похідна дорівнює:

$$y'_x=x^x\cdot 1\cdot\ln x+x\cdot x^{x-1}\cdot 1=x^x\ln x+x^x=x^x\left(\ln x+1\right)=x^x\ln ex.$$

Якщо ви не знаєте формулу знаходження похідної показниково-степеневої функції, то похідну такої функції можна знайти **способом логарифмічного диференціювання**. Продемонструємо цей спосіб на прикладі функції $y=x^{\arcsin x}$, $0<x\le 1$. Спочатку прологарифмуємо останню рівність:

$$\ln y=\ln x^{\arcsin x}\ \Leftrightarrow\ \ln y=\arcsin x\cdot\ln x.$$

Знайдемо похідну лівої і правої частини останньої рівності, вважаючи, що $y=y(x)$:

$$\frac{y'}{y}=\left(\arcsin x\right)'\ln x+\arcsin x\left(\ln x\right)', \text{ або}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\ \Leftrightarrow\ y'=x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right). \blacksquare$$

Задача 2.8. *Знайти похідну функції* $y = f(x)$:

1) $y = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\dfrac{x-a}{x+a}, \qquad |x| > a$;

2) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$;

3) $y = \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg} 7x - \ln\left(7x + \sqrt{49x^2 + 1}\right)$;

4) $y = \sin^3 \cos 2 - \dfrac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}$.

Розв'язання.

1. Обчислення похідної функції $y = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\dfrac{x-a}{x+a}, \qquad |x| > a$.

Маємо похідну складеної функції:

$$y' = \frac{1}{2a} \cdot \left(\ln\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x-a}{x+a} \cdot \frac{1 \cdot (x+a) - 1 \cdot (x-a)}{(x+a)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{2a}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2 - a^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2a} \cdot \left(\ln\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{1}{x^2 - a^2}} \qquad \blacksquare$$

Увага! Поповніть таблицю похідних!

2. Обчислення похідної функції $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$.

Маємо похідну складеної функції:

$$y' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + a}}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

$$\boxed{\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}} \qquad \blacksquare$$

Увага! Поповніть таблицю похідних!

3. Обчислення похідної функції

$$y=\sqrt{49x^2+1}\cdot\operatorname{arctg}7x-\ln\left(7x+\sqrt{49x^2+1}\right).$$

Маємо похідну складеної функції:

$$y'=\frac{98x}{2\sqrt{49x^2+1}}\cdot\operatorname{arctg}7x+\sqrt{49x^2+1}\cdot\frac{7}{1+49x^2}-$$

$$-\frac{1}{7x+\sqrt{49x^2+1}}\cdot\left(7+\frac{98x}{2\sqrt{49x^2+1}}\right)=\frac{49x\cdot\operatorname{arctg}7x}{\sqrt{49x^2+1}}+$$

$$+\frac{7}{\sqrt{49x^2+1}}-\frac{1}{7x+\sqrt{49x^2+1}}\cdot\frac{7\left(7x+\sqrt{49x^2+1}\right)}{\sqrt{49x^2+1}}=\frac{49x\cdot\operatorname{arctg}7x}{\sqrt{49x^2+1}}.\ \blacksquare$$

4. Обчислення похідної функції $y=\sin^3\cos 2-\dfrac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$.

Перед тим, як знаходити похідну, звернемо увагу на два моменти. Перший доданок $\sin^3\cos 2$ є стала величина, хоч і записана незвично. Тому її похідна дорівнює нулеві. Другий доданок перетворимо, використовуючи формулу подвійного кута $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$:

$$\frac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}=\frac{\cos^2 30x}{120\sin 30x\cdot\cos 30x}=\frac{1}{120}\cdot\operatorname{ctg}30x$$

Остаточно знаходимо похідну:

$$y'=\left(\sin^3\cos 2\right)'-\frac{1}{120}\cdot\left(\operatorname{ctg}30x\right)'=0+\frac{1}{120}\cdot\frac{30}{\sin^2 30x}=\frac{1}{4\sin^2 30x}.\ \blacksquare$$

Задача 2.9. *Знайти похідну функції*

$$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

і дослідити на неперервність похідну вказаної функції у точці $x=0$.

Розв'язання.

Якщо $x \neq 0$, то $y = x^2 \sin\frac{1}{x}$, а її похідну знайдемо за правилом диференціювання складеної функції:

$$y' = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2} \cdot \cos\frac{1}{x} = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Для того, щоб знайти похідну функції $y(x)$ у точці $x_0 = 0$, використаємо означення похідної:

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

як добуток нескінченно малої і обмеженої функції. Таким чином, робимо висновок, що похідна вказаної функції існує для всіх x:

$$y' = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Щоб дослідити похідну на неперервність, достатньо це зробити лише у точці $x_0 = 0$, оскільки у всіх інших точках функція $y'(x)$ неперервна:

$$\lim_{x \to 0} y'(x) = \lim_{x \to 0} \left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \right).$$

Тут границя першого доданку існує і дорівнює 0, а от границя другого не існує. Отже функція $y'(x)$ у точці $x_0 = 0$ має розрив II роду. ■

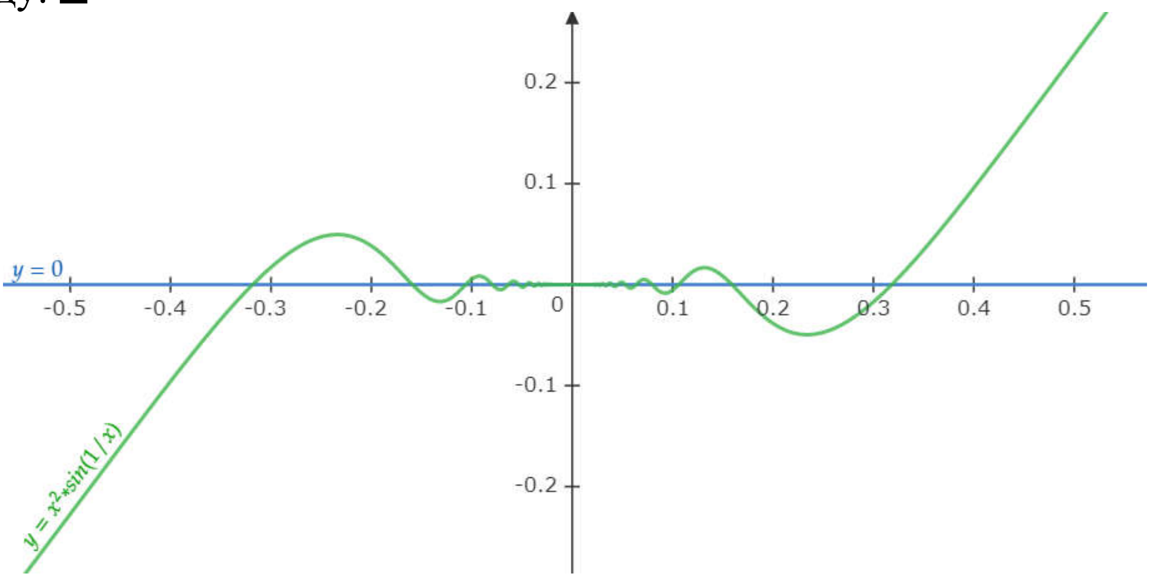


Рис. 2.3

Задача 2.10. *За допомогою похідної обчислити суми:*

1) $1\cdot 2+2\cdot 3x+\ldots+n(n+1)x^{n-1}$;

2) $1+3x^2+5x^4+\ldots+(2n-1)x^{2n-2}$;

3) $1-5x^4+9x^8+\ldots+(-1)^{n-1}(4n-3)x^{4n-4}$;

4) $1^2+3^2x^2+5^2x^4+\ldots+(2n-1)^2x^{2n-2}$.

Розв'язання.

1. Розглянемо суму геометричної прогресії

$$S_n(x)=x^2+x^3+x^4+\ldots+x^{n+1}=\left|\begin{matrix}(b_n), & b_1=x^2\\ q=x, & S_n=\dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^2\left(1-x^n\right)}{1-x}=\frac{x^{n+2}-x^2}{x-1}.$$

Знайдемо похідну функції:

$$S_n'(x)=2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n=$$

$$=\frac{\left((n+2)x^{n+1}-2x\right)(x-1)-\left(x^{n+2}-x^2\right)}{(x-1)^2}=\frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}-x^2+2x}{(x-1)^2}.$$

Знайдемо ще раз похідну від знайденої похідної, тобто другої похідної:

$$f(x)=\left(S_n'(x)\right)'=2\cdot 1+3\cdot 2x+4\cdot 3x^2+\ldots+(n+1)nx^{n-1}=$$

$$=\left(\frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}-x^2+2x}{(x-1)^2}\right)'=$$

$$=\frac{n(n+1)x^{n+2}-2n(n+2)x^{n+1}+(n+1)(n+2)x^n-2}{(x-1)^3}. \blacksquare$$

Решту завдань розв'яжіть самостійно,

використавши даний метод!!!

Задача 2.11. *За допомогою похідної обчислити суми:*

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cos kx$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\sin kx$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3\cos kx$; 4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4\sin kx$.

Стратегія. Очевидно, що у першому випадку сума є результатом знаходження похідної від суми $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$. Тому у цих прикладах важливо суму $S_n(x)$ записати через одну функцію.

Помічаємо, що аргументи утворюють арифметичну прогресію $x, 2x, 3x, ..., nx$ з різницею $d=x$.

Домножимо обидві частини рівності на $2\sin\frac{d}{2}=2\sin\frac{x}{2}$ і скористаємося відомою формулою з тригонометрії перетворення добутку функцій у суму: $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$.

Розв'язання.

1. $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...+\sin nx \,|\cdot 2\sin\frac{x}{2}$

$$2S_n(x)\cdot\sin\frac{x}{2}=2\sin x\sin\frac{x}{2}+2\sin 2x\sin\frac{x}{2}+2\sin 3x\sin\frac{x}{2}+...+$$

$$+2\sin nx\sin\frac{x}{2};$$

$$2S_n(x)\cdot\sin\frac{x}{2}=\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+$$

$$+\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{7x}{2}\right)+...+\left(\cos\frac{(2n-1)x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}\right);$$

$$S_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{-2\sin\frac{x+(2n+1)x}{4}\sin\frac{x-(2n+1)x}{4}}{2\sin\frac{x}{2}};$$

$$S_n(x)=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\qquad(*)$$

Знайдемо похідну лівої і правої частини:

$$(\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx)'=\left(\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)'$$

або

$$\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\ldots+n\cos nx=\left(\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)'=$$

$$=\frac{n\sin\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.\ \blacksquare$$

Решту завдань розв'яжіть самостійно,

використавши даний метод!!!

Задача 2.12. *За допомогою похідної обчислити суми:*

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\sin kx$; *2)* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\cos kx$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3\sin kx$; *4)* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4\cos kx$.

Стратегія. Очевидно, що у першому випадку сума є результатом знаходження похідної від суми $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ зі знаком «мінус». Тому знову, як і в попередньому прикладі, виразимо суму $S_n(x)$ через одну функцію:

$$S_n(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx \,|\cdot 2\sin\frac{d}{2}=2\sin\frac{x}{2}$$

$$2S_n(x)\cdot\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos x+2\sin\frac{x}{2}\cos 2x+2\sin\frac{x}{2}\cos 3x+\ldots+2\sin\frac{x}{2}\cos nx;$$

$$2S_n(x)\cdot\sin\frac{x}{2}=\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)+$$

$$+\left(\sin\frac{7x}{2}-\sin\frac{5x}{2}\right)+\ldots+\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{(3n-1)x}{2}\right);$$

$$2S_n(x)\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2};$$

$$S_n(x)=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Таким чином маємо:

$$\sum_{k=1}^{n}k\sin kx=-\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)'=-S_n'(x)=\left(\frac{\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right)'$$

або

$$\sum_{k=1}^{n}k\sin kx=\left(\frac{\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right)'=\frac{\sin x-2n\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}.\ \blacksquare$$

Решту завдань розв'яжіть самостійно, використавши даний метод!!!

Задача 2.13. *За допомогою похідної обчислити суми:*

1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}$; *2)* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{2k}\cos^2\frac{x}{2^k}}$.

Стратегія. Тут ми використаємо неочевидну залежність, як це було у двох попередніх випадках. Розглянемо добуток

$$P_n(x)=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}.$$

Аргументи тут утворюють геометричну прогресію із знаменником $q=2$. Домножимо ліву і праву частини останньої рівності на $2\sin\frac{x}{2^n}$ і скористаємося формулою для синуса подвійного кута.

$$2\sin\frac{x}{2^n}\cdot P_n(x)=2\sin\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2}=$$

$$=\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-2}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\ldots=$$

$$=\frac{1}{2^{n-3}}\sin\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2^{n-1}}\sin x;$$

$$P_n(x)=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.\qquad(**)$$

Розв'язання.

1. Прологарифмуємо рівність $(**)$:

$$\ln P_n(x)=\ln\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)=\ln\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}};$$

$$\ln\cos\frac{x}{2}+\ln\cos\frac{x}{2^2}+\ldots+\ln\cos\frac{x}{2^n}=\ln\sin x-\ln 2^n-\ln\sin\frac{x}{2^n}.$$

Тепер знайдемо похідну лівої і правої частини рівності:

$$\left(\ln\cos\frac{x}{2}+\ln\cos\frac{x}{2^2}+\ldots+\ln\cos\frac{x}{2^n}\right)'=\left(\ln\sin x-\ln 2^n-\ln\sin\frac{x}{2^n}\right)';$$

$$\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{-\frac{1}{2^2}\sin\frac{x}{2^2}}{\cos\frac{x}{2^2}}+\ldots+\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^n}}{\cos\frac{x}{2^n}}=\frac{\cos x}{\sin x}-0-\frac{\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\quad\Big|\cdot(-1)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x. \blacksquare$$

Решту завдань розв'яжіть самостійно,

використавши даний метод!!!

Завдання для самостійного розв'язування

✍***1.*** *Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:*

1) $y=-x^2+3;$ ***2)*** $y=x^2+x+8;$

3) $s=5t^3-3t^5;$ ***4)*** $w=3z^7-7z^3+21z^2;$

5) $y=\frac{4x^3}{3}-x+2e^x;$ ***6)*** $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4};$

7) $w=3z^{-2}-\frac{1}{z};$ ***8)*** $s=-2t^{-1}+\frac{4}{t^2};$

9) $y=6x^2-10x-5x^{-2};$ ***10)*** $y=4-2x-x^{-3};$

11) $r=\frac{1}{3s^2}-\frac{5}{2s};$ ***12)*** $r=\frac{12}{\theta}-\frac{4}{\theta^3}+\frac{1}{\theta^4};$

13) $y=\frac{2}{3}x^3-6x^2+7x-8;$ ***14)*** $y=\operatorname{arctg}x+x+\operatorname{arcctg}x;$

15) $y=\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5};$ ***16)*** $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}.$

✍**2.** *Використовуючи правило добутку та за допомогою дії множення, знайти похідні від таких функцій:*

1) $y=\left(3-x^2\right)\left(x^3-x+1\right)$; ***2)*** $y=(2x+3)\left(5x^2-4x\right)$;

3) $y=\left(x^2+1\right)\left(x+5+\dfrac{1}{x}\right)$; ***4)*** $y=\left(1+x^2\right)\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-3}\right)$***;***

5) $y=\left(3x^2-7x+2\right)\left(1-2x-6x^3\right)$***;*** ***6)*** $y=\log_2 x\cdot\ln x\cdot\log_3 x$ ***;***

7) $y=2x\cos x$***;*** ***8)*** $y=x^2\operatorname{arctg} x$.

✍**3.** *Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:*

1) $f(x)=2x\cos x$***;*** ***2)*** $f(x)=e^x\left(x^2-4x+10\right)$***;***

3) $f(x)=x^2\operatorname{ctg} x$***;*** ***4)*** $f(x)=x^2\cos x$***;***

5) $f(x)=x^8\operatorname{ctg} x$***;*** ***6)*** $f(x)=\sqrt[3]{x}\log_3 x$***;***

7) $f(x)=12x^2\cdot\sqrt[3]{x^7}\cdot\ln x$***;*** ***8)*** $f(x)=x^7\cdot\operatorname{ctg} x\cdot 2^x$***;***

9) $f(x)=(x-1)\left(x^2+5\right)\sin x$***;*** ***10)*** $f(x)=x^3\sin x\cdot\ln x$.

✍**4.** ***Знайти*** *похідні від таких функцій:*

1) $y=\dfrac{2x+5}{3x-2}$*;* ***2)*** $z=\dfrac{4-3x}{3x^2+x}$*;*

3) $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+0,5}$*;* ***4)*** $f(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+t-2}$*;*

5) $v=(1-t)\left(1+t^2\right)^{-1}$*;* ***6)*** $w=(2x-7)^{-1}(x+5)$*;*

7) $y=\dfrac{2x^2-5}{x+5}$*;* ***8)*** $y=\dfrac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}$***;***

9) $y=\dfrac{1-x^3}{1-x^5}$***;*** ***10)*** $y=\dfrac{2}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^4\right)}$***;***

11) $y=\dfrac{8-3\sqrt{x^3}+2x}{1+6x\sqrt{x}-3x^2}$***;*** ***12)*** $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\arcsin x}$.

✍**5.** ***Знайти похідні від таких функцій:***

1) $y=x^{e^{\operatorname{arctg}x}}$**;** **2)** $y=\left(x^8+1\right)^{\operatorname{th}x}$**;**

3) $y=x^{29^x}\cdot 29^x$**;** **4)** $y=\left(\cos 2x\right)^{\frac{\ln\cos 2x}{4}}$

✍**6.** ***Знайти похідні від таких функцій:***

1) $y=\sqrt[7]{\operatorname{tg}\cos 2}+\dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$***;*** ***2)*** $y=\sin\sqrt[3]{tg2}-\dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$***;***

3) $y=\cos^2\sin 3+\dfrac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$***;*** ***4)*** $y=\sin^3\cos 2-\dfrac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$**.**

✍**7.** ***Знайти похідні від таких функцій:***

1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}$*;*

2) $y=\dfrac{x}{4}\left(10-x^2\right)\sqrt{4-x^2}+6\arcsin\dfrac{x}{2}$*;*

3) $y=\arcsin\dfrac{1}{2x+3}+2\sqrt{x^2+3x+2},\qquad 2x+3>0$*;*

4) $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

✍**8.** ***Обчислити значення похідної в заданій точці:***

1) $y=\dfrac{5-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1},\ x_0=1$***;*** ***2)*** $y=\dfrac{2^x}{\sin x},\ x_0=5$***;***

3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\operatorname{tg}x},\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$***;*** ***4)*** $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt[5]{x^2}},\ x_0=7$***;***

5) $y=\dfrac{\log_4 x}{x^2},\ x_0=4$***;*** ***6)*** $y=\dfrac{6x^5}{\log_2 x},\ x_0=2$***;***

7) $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1},\ x_0=2$***;*** ***8)*** $y=\dfrac{x}{\arcsin x},\ x_0=-\dfrac{1}{2}$***;***

9) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x},\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

✍***9.*** *Знайти похідні функцій (логарифмічне диференціювання):*

1) $y=\left(x^2+1\right)^{2x}$***;***

2) $y=x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$***;***

3) $y=a^{a^a}+a^{a^x}+a^{x^a}+x^{a^a}+a^{x^x}+x^{x^x}$***;***

4) $y=\left(\arcsin^2 x\right)^{\operatorname{arctg} x}$***;***

5) $y=\left(\operatorname{ch} x\right)^{e^x}$***;***

6) $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}.$

§ 3. Похідна функції, заданої неявно, параметрично, в полярній системі координат

!!! *Попередньо вивчіть лекцію 19 [11, с. 243–249].*

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Що означає параметрично задана функція? Які умови для існування параметрично заданої функції? Вивести формулу для знаходження похідної параметрично заданої функції.

Нехай функції $x=\varphi(t)$ *і* $y=\psi(t)$ *визначені у деякому околі точки* t_0, *причому функція* $x=\varphi(t)$ *строго монотонна і неперервна в цьому околі. Тоді за теоремою про обернену функцію для даної функції існує обернена функція* $t=\varphi^{-1}(x)$, *яка також неперервна і строго монотонна в околі точки* $x_0=\varphi(t_0)$.

Значить, в околі точки x_0 *задана складена функція* $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, *яка є композицією функцій* $y=\psi(t)$ *і* $t=\varphi^{-1}(x)$. *Ця функція змінної* y *від змінної* x *називається* ***параметрично заданою функцією***.

Теорема 3.1. *Нехай функції* $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, *визначені у деякому околі точки* t_0, *диференційовні у точці* t_0, *причому* $\varphi'(t_0)\neq 0$. *Тоді параметрично задана функція* $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ *диференційовна у точці* $x_0=\varphi(t_0)$, *причому:* $y'_x(x_0)=\dfrac{\psi'_t(t_0)}{\varphi'_t(t_0)}$. (3.1)

2. Як знайти похідну функції, заданої в полярній системі координат?

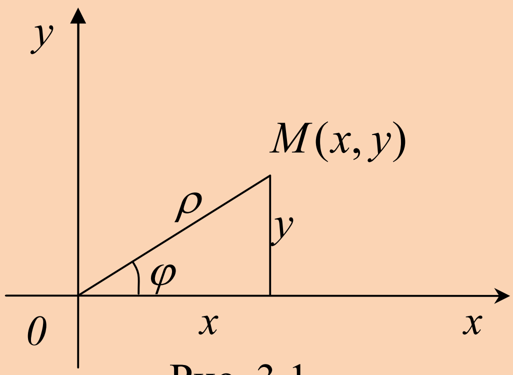


Рис. 3.1

Положення точки M *у полярній системі координат визначається заданням двох чисел:* $\rho = OM$ *– відстань від точки до полюса,* φ *– кут, на який потрібно повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб вони співпала з променем OM (рис. 3.1). Функція у полярній системі координат задається рівнянням* $\rho = \rho(\varphi)$. *Врахувавши зв'язок прямокутної декартової і полярної систем координат, можемо функцію подати у параметричній формі:* $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, *де параметром є кут повороту. Отже, похідну такої функції знаходимо за формулою (3.1):*

$$y'(x_0) = \frac{y'_\varphi(\varphi_0)}{x'_\varphi(\varphi_0)}.$$

3. Вивести похідну неявно заданої функції.

Якщо y *є неявна функція від* x, *тобто задана рівнянням* $F(x;y) = 0$, *не розв'язаним відносно* y, *то для знаходження похідної* $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ *потрібно продиференціювати обидві частини рівняння за змінною* x, *пам'ятаючи, що* $y = y(x)$, *а потім розв'язати одержану рівність відносно шуканої похідної.*

Зауваження! *Прийом знаходження похідної функції, заданої неявно, полягає у тому, що обидві частини рівняння* $F(x;y) = 0$ *диференціюються за змінною x з урахуванням, що y є функція від x.*

Приклади розв'язування вправ

Задача 3.1. *Знайти похідну функції, заданої параметрично:*

1) $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\, y=\sqrt{1-\sqrt{t}},\ t_0=\frac{1}{64};$

2) $x=\ln\sin\frac{t}{2},\, y=\ln\sin t,\ 0<t<\pi;$

3) $x=t^3-3\pi,\, y=t^3-6\,\mathrm{arctg}\,t,\ t_0=1;$

4) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ -\infty<t<0.$

Розв'язання. Маємо параметрично задані функції. Для знаходження похідних використаємо формулу (3.1), за якою спочатку обчислюємо похідні функцій $x=\varphi(t)$ і $y=\psi(t)$ у точці t_0:

1. $x'=\varphi'(t)=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}\,'=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}\cdot 3\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{t}\right)^2}}=-\dfrac{1}{6\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{t}\right)^2}};$

$$y'=\psi'(t)=\sqrt{1-\sqrt{t}}\,'=-\frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{t}}\cdot 2\sqrt{t}}=-\frac{1}{4\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-\sqrt{t}}},$$

Якщо $t_0=\frac{1}{64}$, то $x_0=\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{1}{64}}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$. Остаточно маємо:

$$y'(x)=\frac{6\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{t}\right)^2}}{4\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-\sqrt{t}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1-\sqrt{t}}};$$

$$y'_x\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)=\frac{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{8}\right)^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{8}}}=\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{6}}.\ \blacksquare$$

2. $x'(t)=\dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2},\quad y'(t)=\dfrac{1}{\sin t}\cdot\cos t=\operatorname{ctg}t,$

$$y'(x)=\frac{2\operatorname{ctg}t}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}=1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}.\ \blacksquare$$

3. $x'(t)=\left(t^3-3\pi\right)'=3t^2,$

$y'(t)=\left(t^3-6\operatorname{arctg}t\right)'=3t^2-\dfrac{6}{1+t^2}=\dfrac{3\left(t^2+2\right)\left(t^2-1\right)}{1+t^2}$. Якщо $t_0=1$, то $x_0=1-3\pi$. Остаточно маємо:

$$y'(1-3\pi)=\frac{(1+2)(1-1)}{1\cdot(1+1)}=\frac{0}{2}=0.\ \blacksquare$$

4. $x'(t)=a(1-\cos t),\ y'(t)=a\cdot\sin t,$

$$y'(x)=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.\ \blacksquare$$

Задача 3.2. *Знайти похідну функції, заданої в полярних координатах:*

1) $\rho=a\varphi,\ \dfrac{4\pi}{3}<\varphi<2\pi;$ **2)** $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}.$

Розв'язання. Переходимо до параметричного задання функції $x(\varphi)=\rho(\varphi)\cos\varphi,\quad y(\varphi)=\rho(\varphi)\sin\varphi$ і знаходимо похідну параметрично заданої функції за формулою (3.1):

1. $x(\varphi)=\rho(\varphi)\cos\varphi=a\varphi\cdot\cos\varphi;\quad y(\varphi)=\rho(\varphi)\sin\varphi=a\varphi\cdot\sin\varphi;$

$$x'(\varphi)=a\cos\varphi-a\varphi\sin\varphi,\quad y'(\varphi)=a\sin\varphi+a\varphi\cos\varphi;$$

$$y'(x)=\frac{a(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)}{a(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)}=\frac{\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}.\ \blacksquare$$

2. $x(\varphi)=\rho(\varphi)\cos\varphi=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi;$

$y(\varphi)=\rho(\varphi)\sin\varphi=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi.$

На відрізку $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ функція $x(\varphi)=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi$ визначена, додатна, неперервна і спадна з множиною значень $[0;a]$. Отже ці рівняння задають функцію $y=y(x)$, визначену на відрізку $[0;a]$. На інтервалі $(0;a)$ знаходимо похідну зазначеної функції, знову ж таки, використавши формулу (3.1):

$$x'(\varphi)=-a\left(\frac{\sin 2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}+\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\right)=-a\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$$y'(\varphi)=a\left(-\frac{\sin 2\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}+\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\right)=a\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$$y'(x)=\frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)}=\frac{a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}:\frac{-a\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=-\operatorname{ctg}3\varphi.\ \blacksquare$$

Задача 3.3. *Знайти похідну функції, заданої неявно рівнянням:*

1) $y^5+y^3+y-x=0;$

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, y>0;$

3) $x-y=\arcsin x-\arcsin y, M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);$

4) $2y\ln y=x,\ M_0(2e;e).$

Розв'язання.

1. Похідну функції $y^5+y^3+y-x=0$, заданої неявно, шукатимемо з рівняння $\frac{d}{dx}F(x;y)=0$. Використовуємо похідну суми:

$$\frac{d}{dx}(y^5+y^3+y-x)=0,$$

$$5y^4\cdot y'+3y^2\cdot y'+y'-1=0,$$

$$y'(5y^4+3y^2+1)-1=0,\ \ y'=\frac{1}{5y^4+3y^2+1}.\ \blacksquare$$

2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$, $\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\cdot y'=0$, $y'=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$. $\blacksquare$

3. $\frac{d}{dx}\left(x-y-\arcsin x+\arcsin y\right)=0;$

$$1-y'-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot y'=0,\qquad y'\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}-1\right)+1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

$$y'=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}-1},\qquad y'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\left(1/2\right)^2}}-1}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(1/2\right)^2}}-1}=1.\ \blacksquare$$

4. Оскільки y є функцією від x, то ліву частину рівності $2y\ln y=x$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^+$ розглядатимемо як складену функцію від x. Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо:

$$\left(2y\ln y\right)'_x=\left(x\right)'_x,\quad 2\left(y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'\right)=1,$$

$$y'\left(\ln y+1\right)=\frac{1}{2},\qquad y'=\frac{1}{2\left(\ln y+1\right)},\qquad y'\left(2e\right)=\frac{1}{2\left(\ln e+1\right)}=\frac{1}{4}.\ \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1.** ***[14] Знайти похідну функції, заданої параметрично:***

1) $x=\sin^2 t,\ y=\cos^2 t,\ t_0=\dfrac{\pi}{4};\ M_0\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right);$

2) $x=a\cdot\operatorname{ch}t,\ y=b\cdot\operatorname{sh}t,\ t_0=\ln 2;\ M_0\left(a\cdot\operatorname{ch}1;\ b\cdot\operatorname{sh}1\right);$

3) $x=\ln\sin\dfrac{t}{2},\ y=\ln\sin t,\ 0<t<\pi;$

4) $x=t\cdot\ln t,\ y=\dfrac{\ln t}{t},\ t_0=1;$

5) $x=a\left(\operatorname{sh}t-t\right),\ y=a\left(\operatorname{ch}t-1\right),\ t_0=0.$

✍**2.** ***[13] Знайти похідну функції:***

1) $\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg}t, \\ y=1/\sin^2 t. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2\ln t}{1-t^2}+\ln\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t+\ln\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=e^{\sec^2 t}, \\ y=\operatorname{tg}t\ln\cos t+\operatorname{tg}t-t. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t+\ln\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

✍**3**. *Знайти похідну параметрично заданої функції:*

1) $x=5\cos t,\quad y=5\sin t;$

2) $x=a(1-t),\quad y=at;$

3) $x=t^3+2;\quad y=0{,}5t^2;$

4) $x=2t;\quad y=3t^2-5t;$

5) $x=\dfrac{1}{t+1};\quad y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2,\quad t\neq -1;$

6) $x = 1 - t^2, \quad y = t - t^3;$

7) $x = \dfrac{t+1}{t}, \quad y = \dfrac{t-1}{t};$

8) $x = \varphi(1 - \sin\varphi), \quad y = \varphi\cos\varphi;$

9) $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \quad y = \dfrac{t}{t^2-1};$

10) $x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t.$

✍**4.** *Знайти похідну параметрично заданої функції:*

1) $x = \ln(1+t^2), \quad y = t - \operatorname{arctg} t;$

2) $x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^2};$

3) $x = \operatorname{tg t}, \quad y = \dfrac{1}{\cos^2 t};$

4) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t, \quad t_0 = \ln 2, \quad M_0\left(a \operatorname{ch} 1; b \operatorname{sh} 1\right);$

5) $x = a\sin^3 t, \quad y = b\cos^2 t, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{3}, \quad M_0\left(\dfrac{a}{8}; \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}\right);$

6) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}, \quad M_0(a\pi; 2a);$

7) $x = \ln\left(1+t^2\right), \quad y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t \in (0; +\infty);$

8) $x = 3\log_2 \operatorname{ctg t}, \quad y = \operatorname{tg t} + \operatorname{ctg t}, \quad t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right);$

9) $x = \arcsin(t^2 - 1), \quad y = \arccos 2t, \quad t \in (0; \sqrt{2});$

10) $x = \dfrac{3t}{t^3+1}, \quad y = \dfrac{3t^2}{t^3+1}, \quad t_0 = \sqrt[3]{2}, \quad M_0(0;0);$

11) $x = 2^{\sin^2 t}, \quad y = 2^{\cos^2 t}, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}, \quad M_0(1;2).$

✍**5.** ***[22]*** *Знайти похідну функції, заданої в полярній системі координат:*

1) $\rho = a\varphi, \dfrac{4\pi}{3} < \varphi < 2\pi,\ x_0 = 0$;

2) $\rho = e^{\varphi}, -\dfrac{\pi}{6} < \varphi < \dfrac{\pi}{6},\ x_0 = 1$;

3) $\rho^2 = a^2\varphi,\ x_0 = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y_0 = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$;

4) $\rho^2\varphi = a^2,\ x_0 = a\sqrt{\dfrac{2}{\pi}},\ y_0 = a\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$;

5) $\rho = a\sin\dfrac{\varphi}{2},\ x_0 = \dfrac{a}{4}$.

✍**6.** *Знайти похідну функції, заданої неявно рівнянням:*

1) $y^5 + y^3 + y - x = 0$;

2) $y^2 = 2px,\ y > 0$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ y > 0$;

4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ y > 0$;

5) $e^y = \ln y + e,\ M(2;1)$;

6) $x - y = \arcsin x - \arcsin y,\ M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$;

7) $e^{x-y} = x + y - 1,\ M(1;1)$;

8) $x^3y + \arcsin(x-y) = 1,\ M(1;1)$.

✍*7.**[23]** Знайти похідну функції, заданої неявно рівнянням:*

1) $x^2y + xy^2 = 6$; *2)* $x^3 + y^3 = 18xy$;

3) $2xy + y^2 = x + y$; *4)* $x^3 - xy + y^3 = 1$;

5) $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$; *6)* $(3xy+7)^2 = 6y$;

7) $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$;

8) $x^3 = \dfrac{2x-y}{x+3y}$;

9) $x = \tan y$;

10) $xy = \cot(xy)$;

11) $x + \tan(xy) = 0$;

12) $x^4 + \sin y = x^3 y^2$;

13) $y \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$;

14) $x\cos(2x+3y) = y\sin x$;

15) $e^{2x} = \sin(x+3y)$;

16) $e^{x^2 y} = 2x + 2y$.

✍**8.** *Знайти похідну* y'_x *від неявно заданих функцій:*

1) $x^3 - x^2 y^2 + \ln y - 4 = 0$;

2) $y^2 - x^3 y^4 + \sin x - \cos y - 10 = 0$;

3) $x\sin y + y\sin x = 0$;

4) $y^2 - 2xy + b = 0$;

5) $x^3 + ax^2 y + bxy^2 + y^3 = 0$;

6) $y = \cos(x+y)$;

7) $y\sin x - \cos(x-y) = 0$;

8) $y = x + \operatorname{arctg} y$;

9) $\cos(xy) = x$.

✍**9.** *Знайти похідну* y'_x *від неявно заданих функцій:*

1) $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0$;

2) $x^{y^2} + y^2 \cdot \ln x - 4 = 0$;

3) $y = 1 + xe^y$;

4) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \sqrt{\dfrac{1-K}{1+K}}\,tg\,\dfrac{x}{2}$.

Відповіді

3. 1) $-\operatorname{ctg} t$; **2)** -1; **6)** $\dfrac{3t^2-1}{2t}$; **7)** -1; **8)** $\dfrac{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}{1-\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}$;

9) $\dfrac{1+t^2}{t\left(2+3t-t^3\right)}$; **10)** $\dfrac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}$. **4. 1)** $\dfrac{t}{2}$; **2)** $\dfrac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}$; **3)** $2\operatorname{tg} t$.

8. 1) $y'=\dfrac{3x^2-2xy^2}{2x^2y-\dfrac{1}{y}}$; **2)** $y'=\dfrac{3x^2y^4-\cos x}{2y-4x^3y^3+\sin y}$;

3) $y'=-\dfrac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$; **4)** $y'=\dfrac{y}{y-x}$; **5)** $y'=-\dfrac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$;

6) $y'=-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$; **7)** $y'=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$; **8)** $y'=\dfrac{1+y^2}{y^2}$;

9) $y'=-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$. **9. 1)** $y'=-\dfrac{y}{x}$; **2)** $y'=-\dfrac{y}{2x\ln x}$; **3)** $y'=\dfrac{e^y}{2-y}$;

4) $y'=\dfrac{\sqrt{1-K^2}}{1+K\cos x}$.

§ 4. Геометричний і механічний зміст похідної

!!! *Попередньо вивчіть лекцію 18 [11, с. 222–227].*

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Який геометричний зміст похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0?

Похідна функції f у точці x_0 чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці x_0, або тангенсу кута нахилу дотичної додатного напрямку осі абсцис (рис. 4.1):

$$\boxed{f'(x_0) = k_{дот} = \operatorname{tg}\alpha}$$

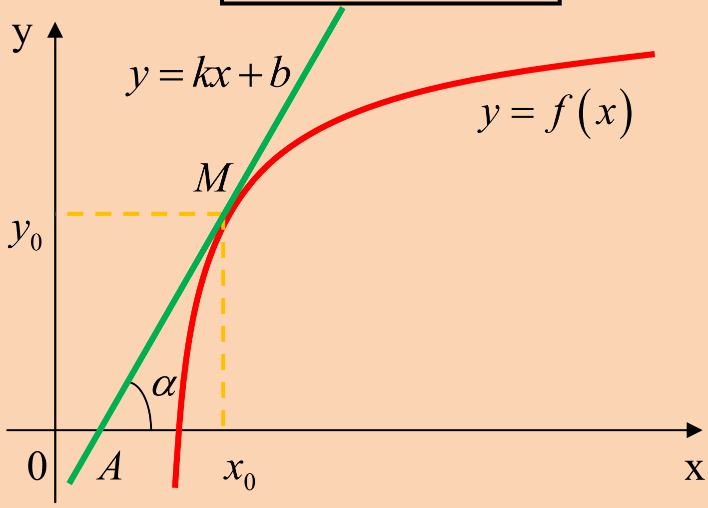


Рис. 4.1.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці x_0 знаходимо за таким алгоритмом (схемою):

1) записуємо рівняння дотичної $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (*);

2) знаходимо значення функції $f(x_0)$ у заданій точці x_0;

3) знаходимо значення похідної $f'(x)$ у точці x_0 : $f'(x_0)$;

4) підставляємо значення x_0, $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ у рівняння (*).

3. Записати рівняння нормалі до графіка функції:

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 4.1. *Знайти рівняння дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0:*

1) $f(x) = x^2 - x + 1$, $x_0 = -1$;

2) $f(x_0) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \ln x + x$, $x_0 = 3$.

Розв'язання.

1. Використаємо алгоритм знаходження рівняння дотичної до графіка функції:

1) записуємо рівняння дотичної (*) до графіка функції: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

2) знаходимо $f(x_0)$, підставляючи точку x_0 в задану функцію $f(-1) = 1 + 1 + 1 = 3$.

3) знаходимо похідну функцію:

$f'(x)=\left(x^2-x+1\right)'=2x-1$, підставляємо в знайдену похідну точку $x_0=-1$: $f'(-1)=-2-1=-3$.

4) підставляємо в рівняння дотичної значення $f(x_0)$, $f'(x_0)$, x_0.

Будемо мати $y-3=-3(x+1)$, $y=-3x$. ■

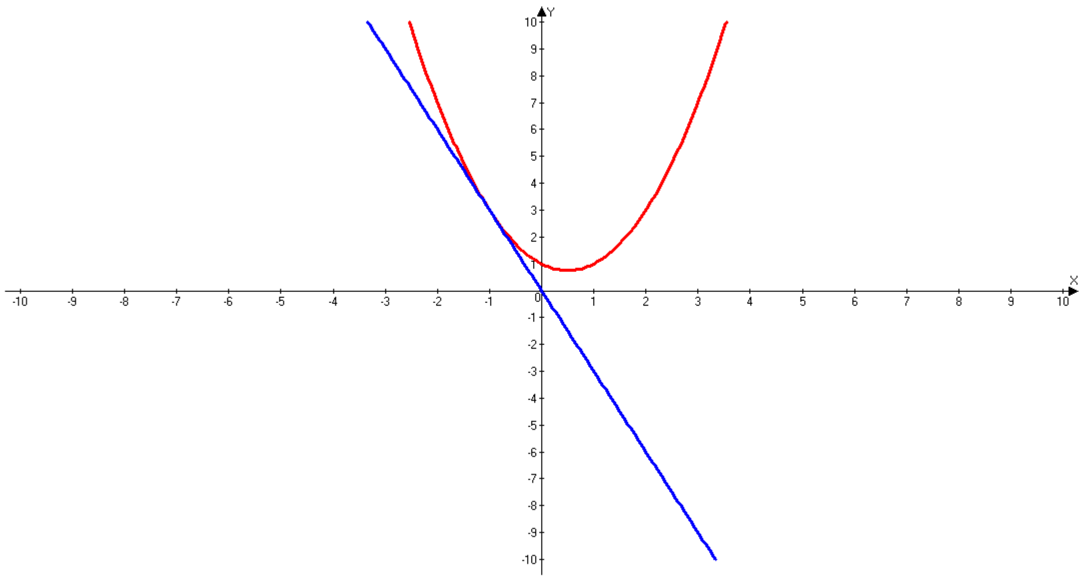


Рис. 4.2

2. Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції $f(x_0)=\sqrt{x^2+1}$, $x_0=2$ за алгоритмом:

1) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

2) $f(2)=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$,

3) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f'(2)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

4) $y-\sqrt{5}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}(x-2)$ або $y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}(x-2)+\sqrt{5}$ або $2x-\sqrt{5}y+1=0$. ■

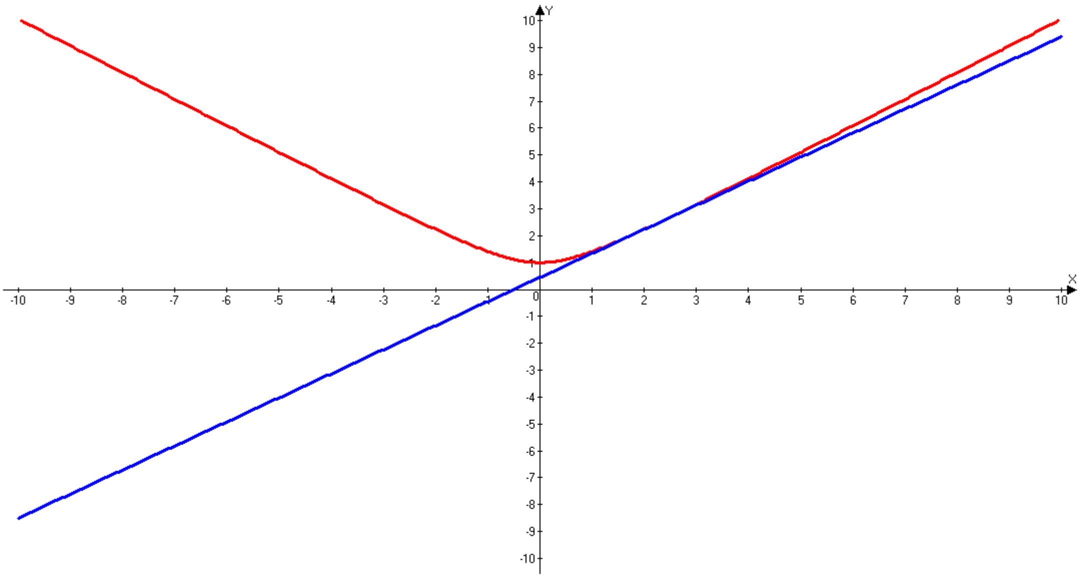


Рис. 4.3

3. Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=\ln x+x$, $x_0=3$ за алгоритмом:

1) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

2) $f(3)=\ln 3+3$,

3) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$, $f'(3)=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$,

4) $y-\ln 3-3=\dfrac{4}{3}(x-3)$, $y=\dfrac{4}{3}x-4+3+\ln 3$, $y=\dfrac{4}{3}x+\ln 3-1$. ■

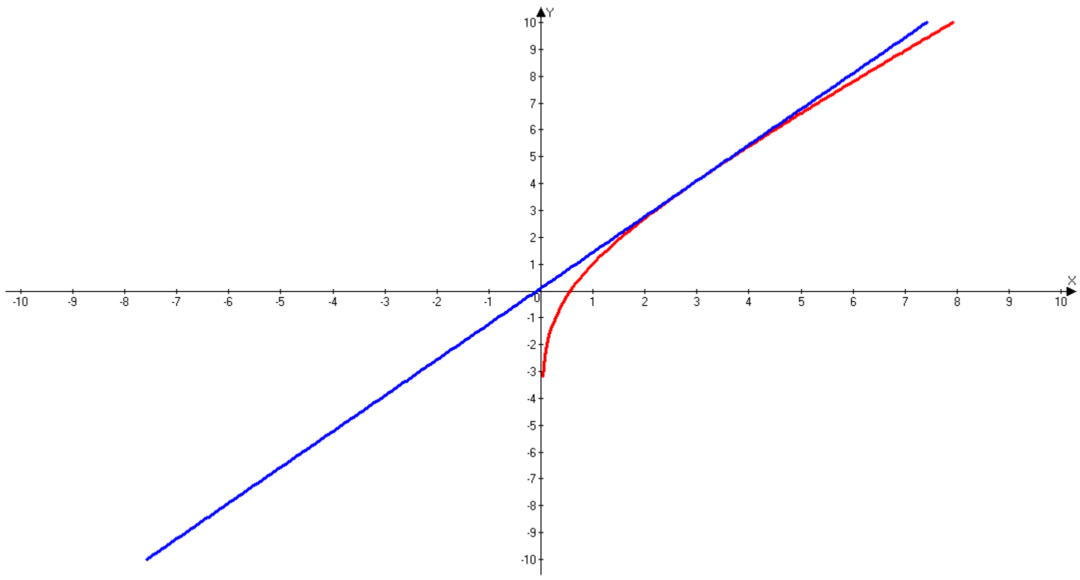


Рис. 4.4

Задача 4.2. *Знайти рівняння нормалі до графіка функції в точці з абсцисою* x_0*:*

1) $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$, $x_0 = -2$;

2) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2}$, $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$.

Розв'язання.

1. Знайдемо рівняння нормалі до графіка функції $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$, $x_0 = -2$ за алгоритмом:

1) запишемо рівняння нормалі до графіка функції: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

2) знайдемо $f(x_0)$, підставивши точку $x_0 = -2$ у початкову функцію $f(x)$. Одержимо: $f(-2) = 2 - 4(-2) - 3(-2)^2 = -2$.

3) знайдемо похідну функцію $f'(x)$ від функції $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$. Матимемо $f'(x) = (2 - 4x - 3x^2)' = -4 - 6x$. Знайдемо $f'(x_0)$, де $x_0 = -2$.

$$f'(-2) = -4 - 6(-2) = -4 + 12 = 8.$$

4) підставимо в рівняння нормалі $y + 2 = -\dfrac{1}{8}(x + 2)$,

$y = -\dfrac{1}{8}x - \dfrac{9}{4}$. ■

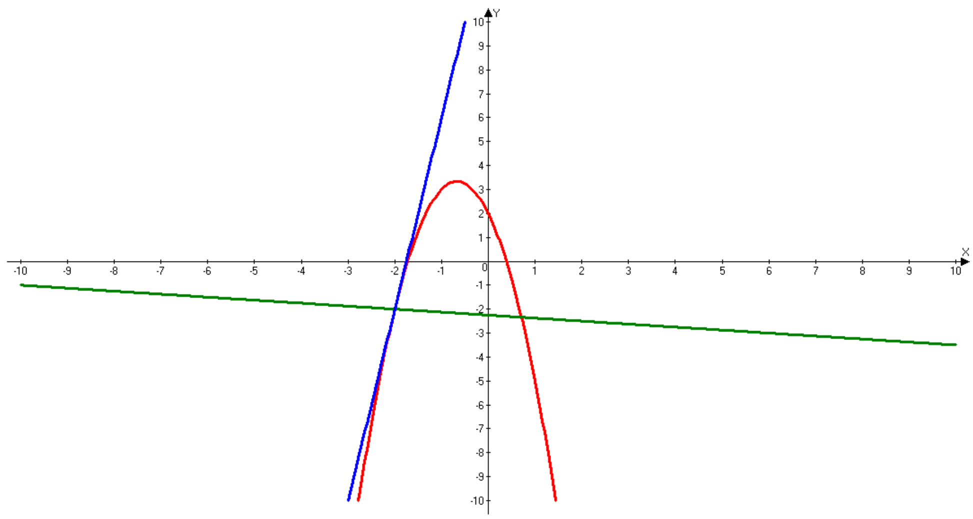


Рис. 4.5

2. Знайдемо рівняння нормалі до графіка функції $f(x)=2\cos\frac{x}{2}$, $x_0=\frac{3\pi}{2}$ за алгоритмом:

1) $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$,

2) $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=2\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}}{2}=2\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}$,

3) $f'(x)=-2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)'=-2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=-\sin\dfrac{x}{2}$,

$f'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\sin\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

4) $y+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}\left(\dfrac{3\pi}{2}+1\right)$. ■

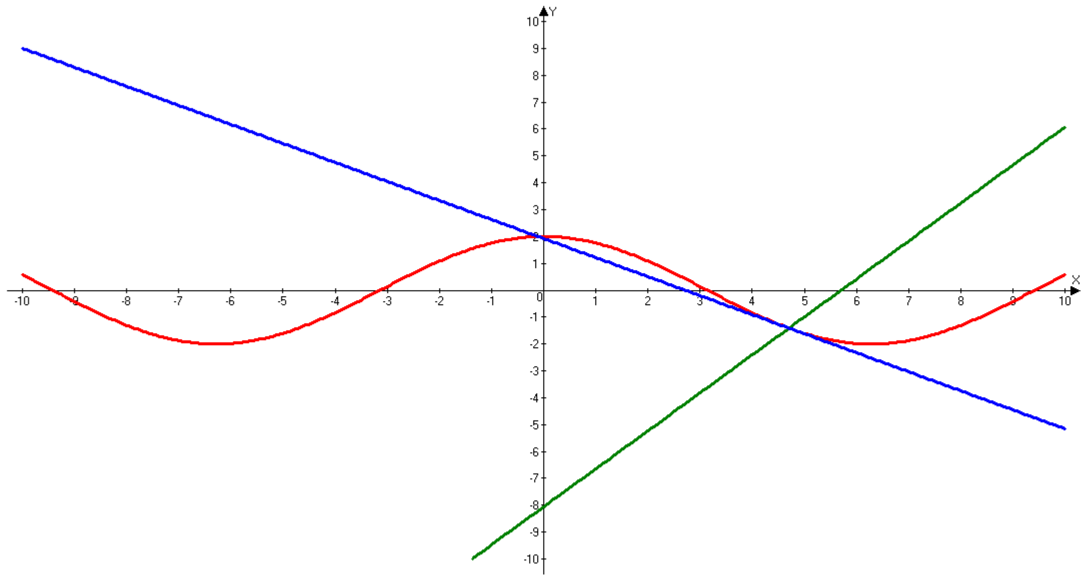


Рис. 4.6

Задача 4.3. *Який кут з віссю абсцис утворює дотична до графіка функції* $f(x)=\dfrac{x}{x-x^2-1}$ *в точці* $\left(2;-\dfrac{2}{3}\right)$*?*

Розв'язання. Використаємо геометричний зміст похідної $k_{дот}=\operatorname{tg}\alpha=f'(2)$, звідси знаходимо кут α.

$$f'(x)=\frac{x-x^2-1-x-2x^2}{(x-x^2-1)^2}=\frac{x^2-1}{(x-x^2-1)^2},\ \operatorname{tg}\alpha=f'(2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},$$

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. ■

Задача 4.4. *Знайти рівняння дотичної до графіка функції* $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$*, якщо ця дотична паралельна прямій* $y=-2x+4$.

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x)=\frac{(x+4)'(x-4)-(x-4)'(x+4)}{(x-4)^2}=\frac{(x-4)-(x+4)}{(x-4)^2}=-\frac{8}{(x-4)^2}.$$

Якщо дотична паралельна прямій $y=-2x+4$, то її кутовий коефіцієнт k дорівнює -2.

Оскільки $f'(x_0)=k$, де x_0 – абсциса точки дотику шуканої прямої та графіка функції f, то $f'(x_0)=-2$, тобто $-\dfrac{8}{(x_0-4)^2}=-2$.

Звідси:

$$(x_0-4)^2=4\ \Rightarrow;\left[\begin{array}{l}x_0-4=2,\\ x_0-4=-2;\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}x_0=6,\\ x_0=2.\end{array}\right.$$

Отже, на графіку функції $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$ існують дві точки, у яких дотичні до нього паралельні даній прямій.

При $x_0=6$ маємо: $f(x_0)=5$. Тоді рівняння дотичної має вигляд: $y=-2(x-6)+5;\ y=-2x+17.$

При $x_0=2$ одержуємо: $f(x_0)=-3$. Тоді рівняння дотичної має вигляд: $y=-2(x-2)-3;\ y=-2x+1.$ ■

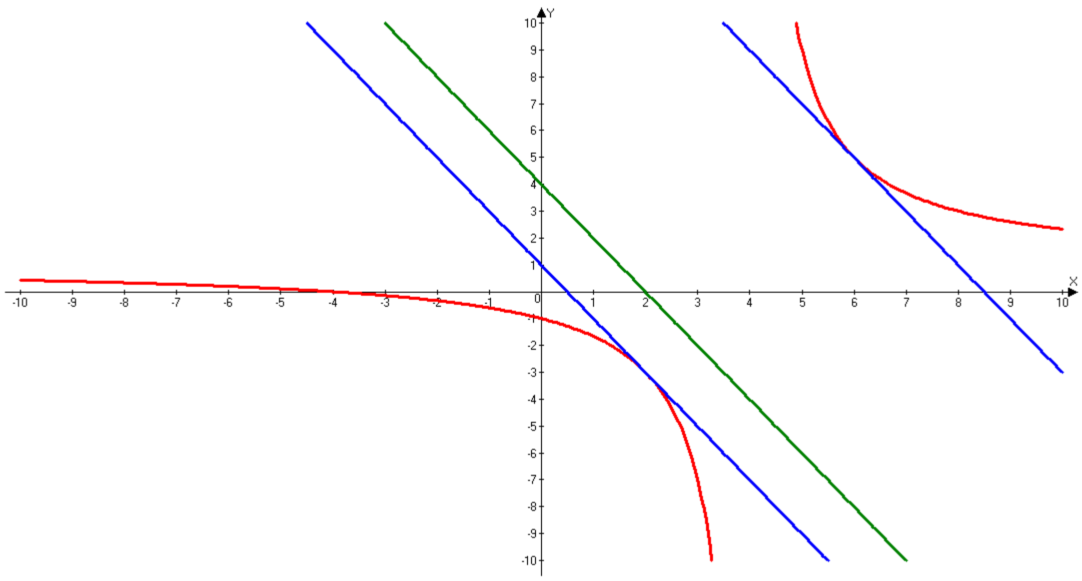


Рис. 4.7

Задача 4.5. *Скласти рівняння дотичної до графіка функції* $f(x) = -x^2 - 5x - 6$*, яка проходить через точку* $M(-1;-1)$.

Розв'язання. Зауважимо, що $f(-1) \neq -1$. Із цього випливає, що точка $M(-1;-1)$ не належить графіку функції f.

Нехай $A(x_0; f(x_0))$– точка дотику шуканої прямої до графіка функції f. Оскільки $f(x_0) = -x_0^2 - 5x_0 - 6$ і $f'(x_0) = -2x_0 - 5$, то рівняння дотичної має вигляд:

$$y = (-2x_0 - 5)(x - x_0) + (-x_0^2 - 5x_0 - 6).$$

Ураховуючи, що координати точки $M(-1;-1)$ задовольняють одержане рівняння, маємо:

$$-1 = (-2x_0 - 5)(-1 - x_0) + (-x_0^2 - 5x_0 - 6).$$

Звідси, розкривши дужки та розв'язавши квадратне рівняння, одержимо: $x_0 = 0$ або $x_0 = -2$. Таким чином, через точку M проходять дві дотичні до графіка функції $f: y = -5x - 6$ і $y = -x - 2$. ■

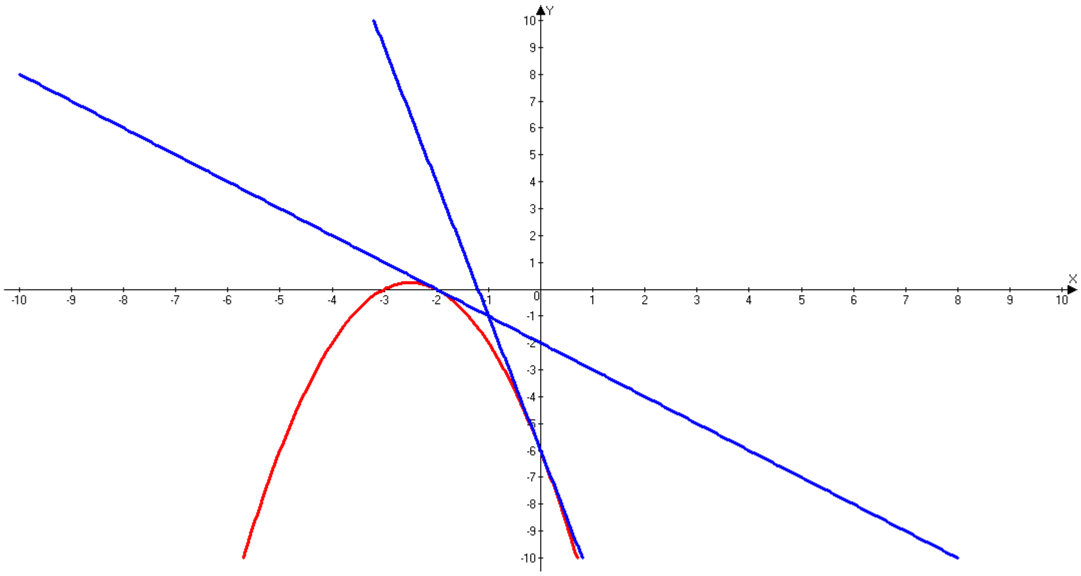


Рис. 4.8

Задача 4.6. *Знайти довжину відрізка дотичної, проведеної до графіка функції* $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$ *в точці х абсцисою* $x_0=2$ *, який розміщений між координатними осями.*

Розв'язання. Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції:

$$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+3\cdot 2+2=8-12+6+2=4,$$

$$f'(x)=(x^3-3x^2+3x+2)'=3x^2-6x+3,$$

$$f'(2)=3\cdot 2^2-6\cdot 2+3=12-12+3=3.$$

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y-4=3(x-2) \text{ або } y=3x-2.$$

Знайдемо точки перетину прямої з координатними осями:

$$Ox:\begin{cases} y=0, \\ 3x-2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=\dfrac{3}{2}, \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2},0\right),$$

$$Oy:\begin{cases} x=0, \\ y=3\cdot 0-2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=-2, \end{cases} \Rightarrow B(0,-2).$$

Знайдемо довжину відрізка AB:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-0\right)^2+\left(0+2\right)^2}=\sqrt{\frac{40}{9}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}. \blacksquare$$

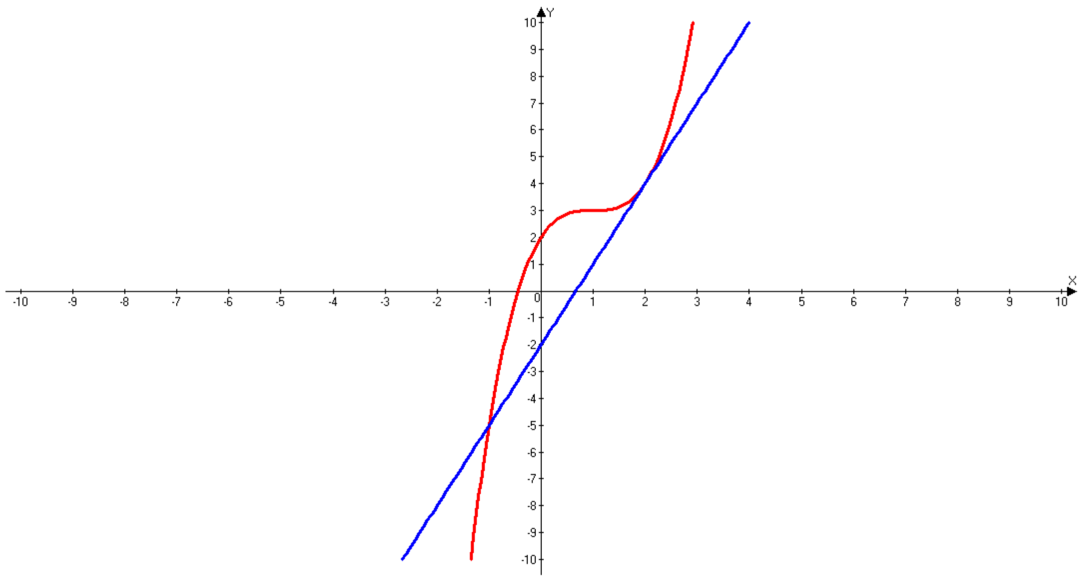


Рис. 4.9

Задача 4.7. *Скільки розв'язків має система* $\begin{cases} y=x^3, \\ y=ax+a-5 \end{cases}$ *залежно від значень параметра* a.

Розв'язання.

І спосіб. Графічно розв'язати систему рівнянь – означає знайти точки перетину графіків $y=x^3$ (кубічна парабола) і $y=ax+\left(a-5\right)$ (пряма). Тому варто розглянути розташування прямої в системі координат залежно від значень кутового коефіцієнта.

1) якщо $a<0$, то кут нахилу прямої до додатного напряму осі OX тупий, а функція $y=x^3$ зростає від $-\infty$ до $+\infty$. Тому ці графіки перетинаються одній точці (рис. 4.10).

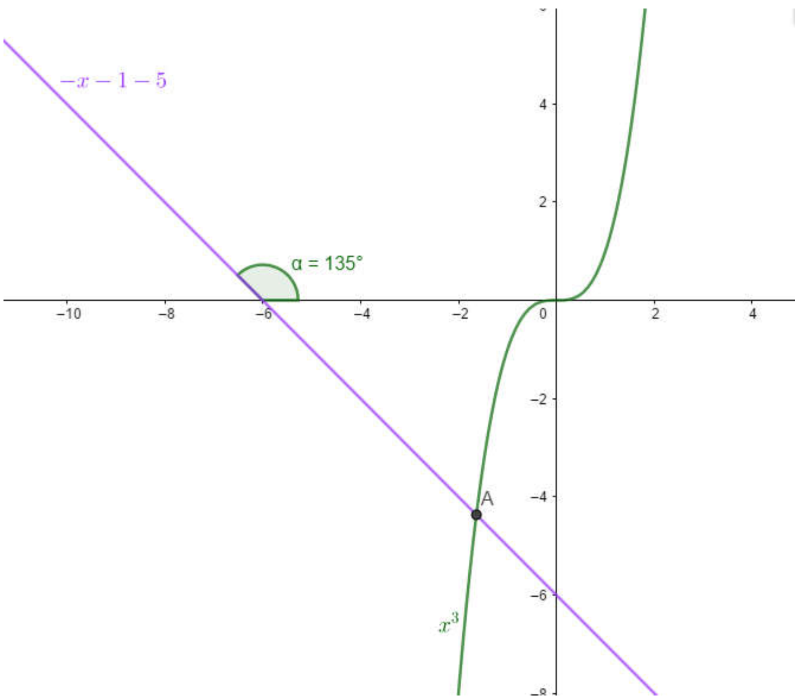


Рис. 4.10

2) якщо $a = 0$, то пряма $y = -5$ і парабола $y = x^3$ також перетинаються в одній точці (рис. 4.11).

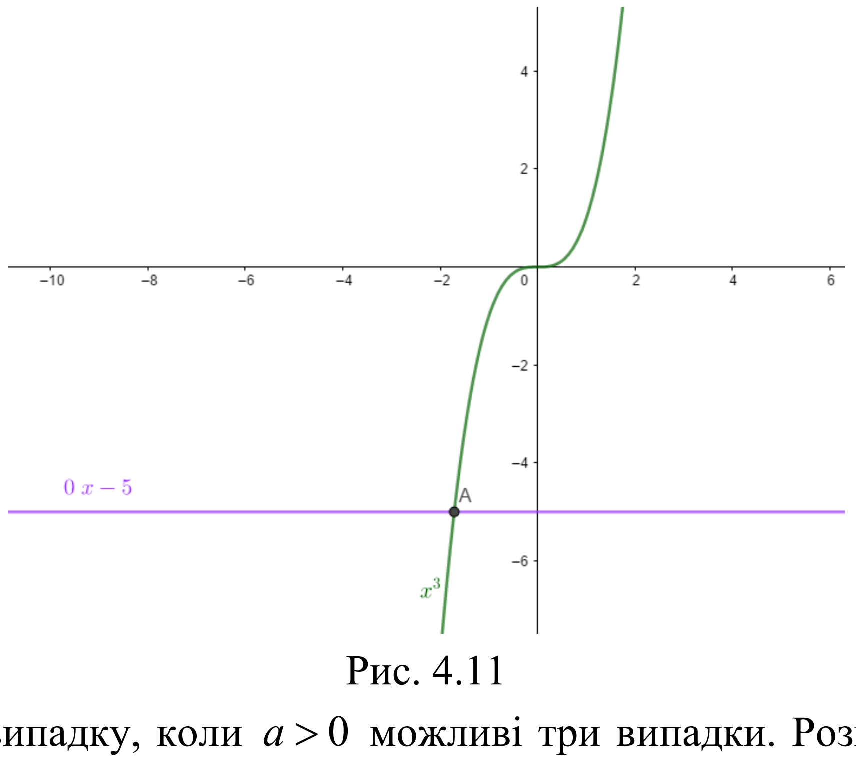


Рис. 4.11

3) у випадку, коли $a > 0$ можливі три випадки. Розглянемо їх детальніше. Маємо, що $k_{дот} = f'(x) \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2$.

Рівняння дотичної: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, $y_0 = f(x_0) = x_0^3$.

$y - x_0^3 = 3x_0^2(x - x_0) \Rightarrow y = 3x_0^2 x - 3x_0^3 + x_0^3 \Rightarrow \boxed{y = 3x_0^2 x - 2x_0^3}$.

Цією дотичною є наша пряма $y = ax + a - 5$ з умови задачі.

$$\begin{cases} 3x_0^2 = a, \\ -2x_0^3 = a - 5. \end{cases} \Rightarrow 3x_0^2 = -2x_0^3 + 5, \quad \Rightarrow \quad 2x_0^3 + 3x_0^2 - 5 = 0.$$

Очевидно, що $x_0 = 1$ корінь, тому останнє рівняння рівносильне:

$$(x_0 - 1)(2x_0^2 + 5x_0 + 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 + 5x + 5 = 0, \\ x_0 = 1. \end{array} \right.$$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 25 - 40 < 0$, отже інших коренів немає.

Таким чином, абсциса точки дотику $x_0 = 1$, $y_0 = 1^3 = 1$; сама дотична має вигляд: $y = 3x - 2$. При $a = 3$ $\left(a = 3x_0^2 = 3 \cdot 1 = 3\right)$ дотична і парабола перетинаються у двох точках (рис. 4.12).

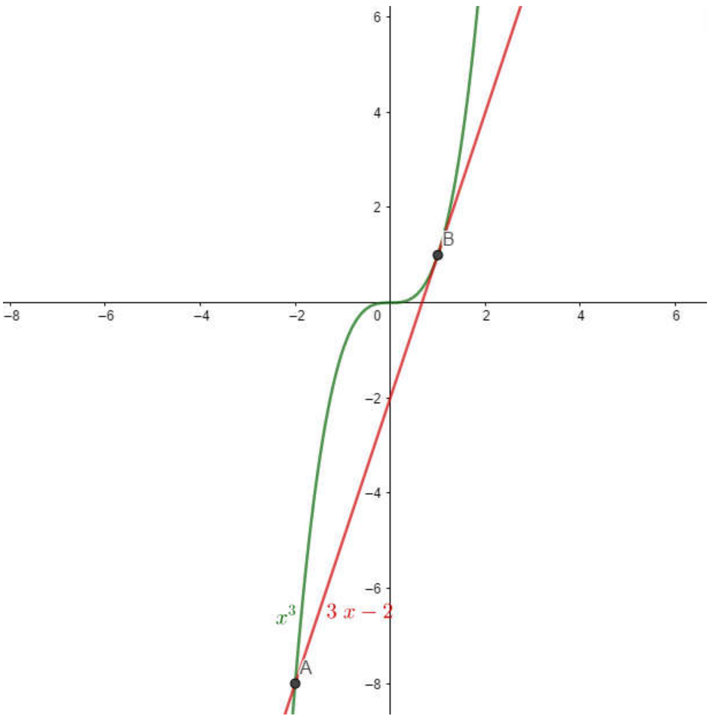


Рис. 4.12

Отже, робимо висновок, що у випадку:

1) $a = 3$ пряма і парабола перетинаються в двох точках;

2) $0 < a < 3$ пряма і парабола перетинаються в одній точці;

3) $a > 3$ пряма і парабола перетинаються в трьох точках. ■

II спосіб. Розв'яжемо дану задачу у вільно розповсюдженому пакеті комп'ютерної математики GeoGebra. Для цього потрібно у «*Рядку введення*» задати наші функції: $f(x) = x^3$, $g(x) = ax + a - 5$, а також створити повзунок a (межі обираємо будь-які, у нашому випадку – це діапазон цілих чисел від $[-10;10]$ з кроком 1) (рис. 4.13) .

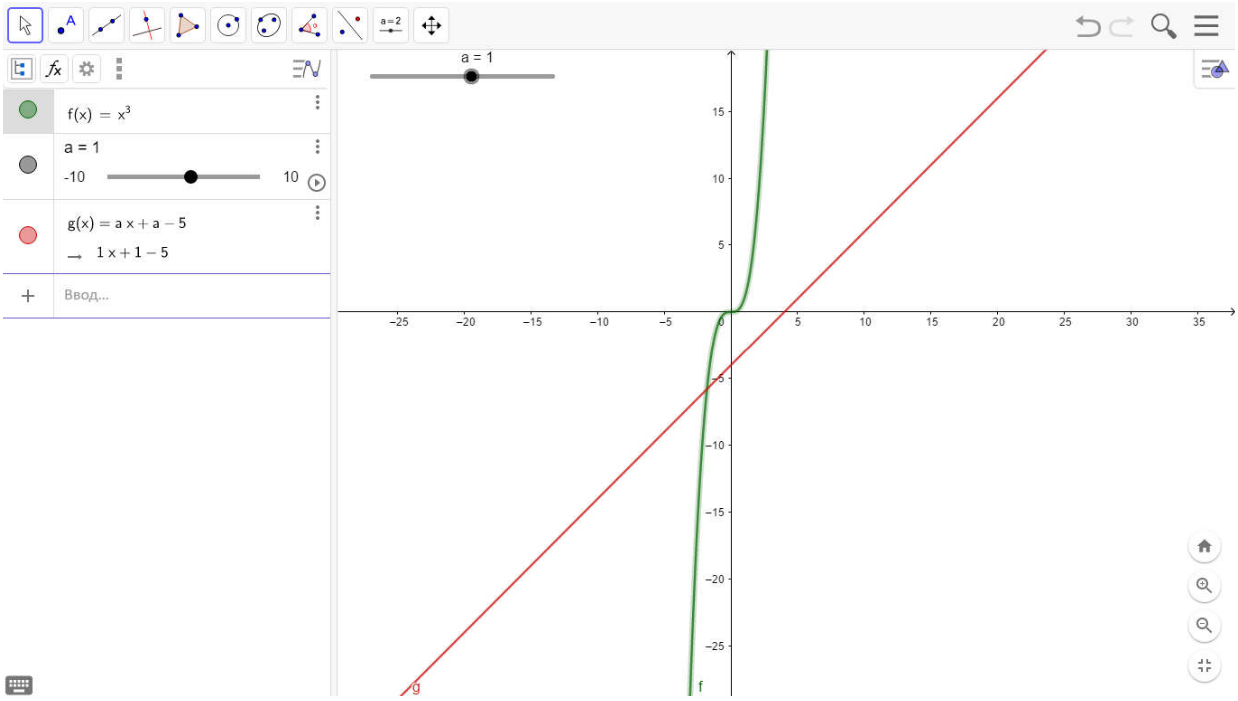


Рис. 4.13

Змінюючи параметр a, ми можемо побачити як змінюється графік функції $g(x)$. Таким чином, рухаючи повзунок, ми легко бачимо, скільки розв'язків має система:

1) якщо $a \le 0$, то графіки перетинаються в одній точці A (автоматично ми можемо побачити координати точки), тобто система має один розв'язок (рис. 4.14-4.16).

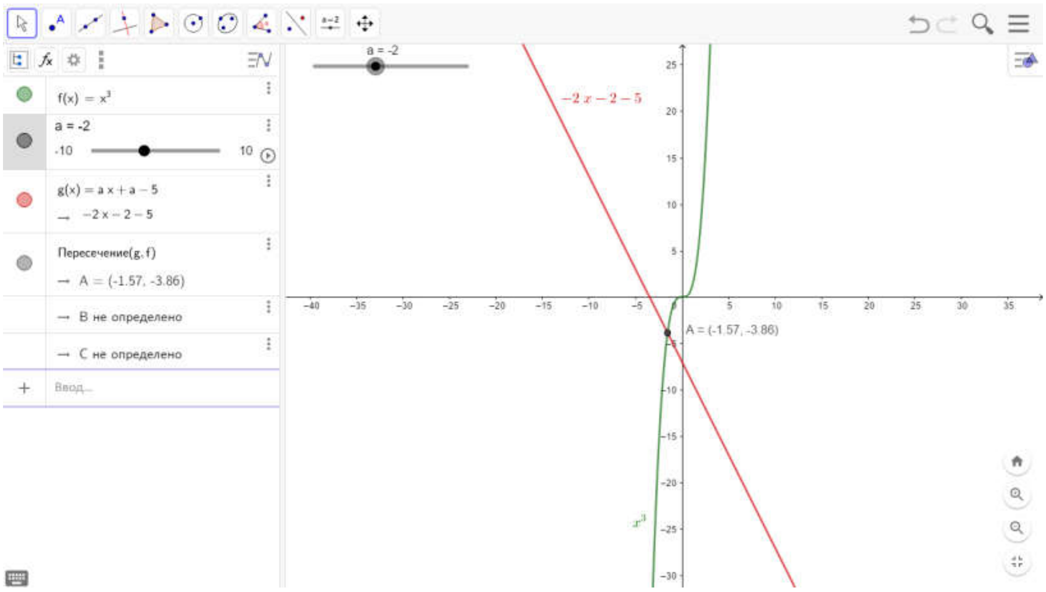


Рис. 4.14

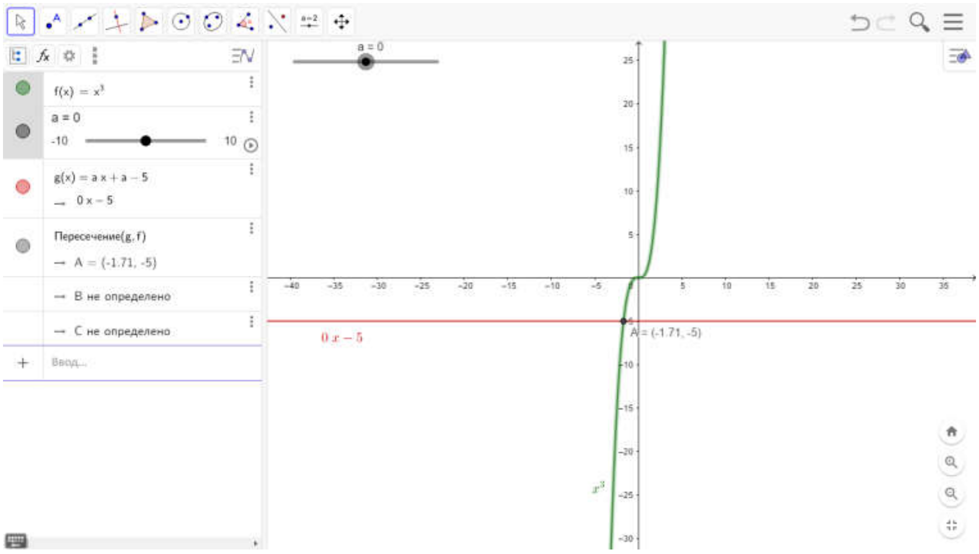


Рис. 4.15

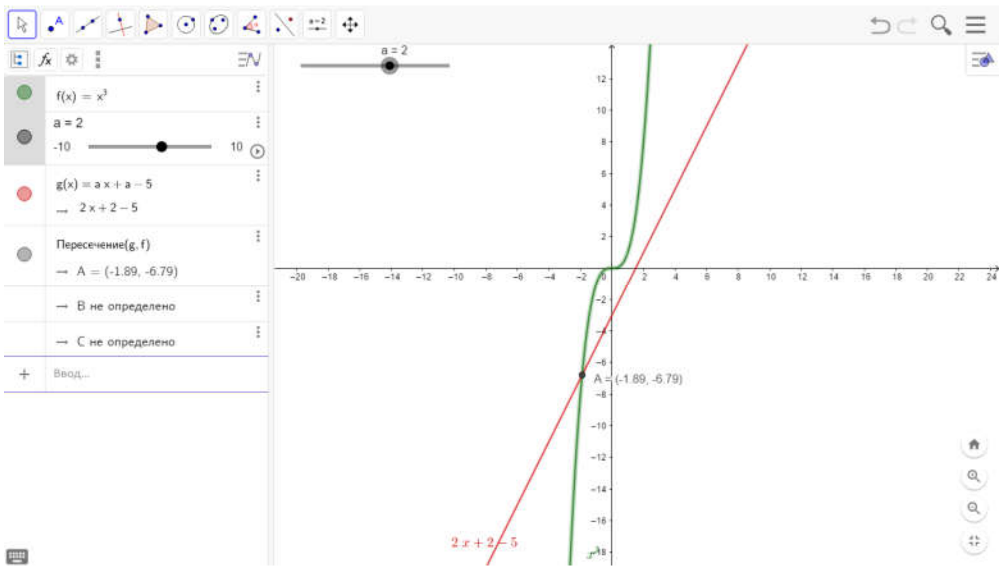


Рис. 4.16

2) якщо $a = 3$, то графіки перетинаються в двох точках A та B, тобто система має два розв'язки (рис. 4.17).

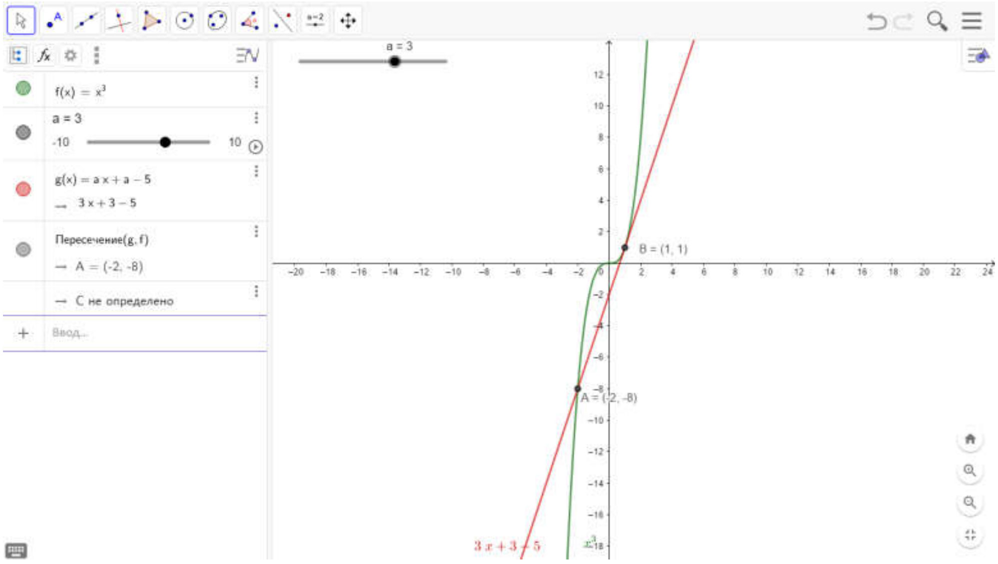


Рис. 4.17

3) якщо $a > 3$, то графіки перетинаються в трьох точках A, B, C, тобто система має три розв'язки (рис. 4.18). ■

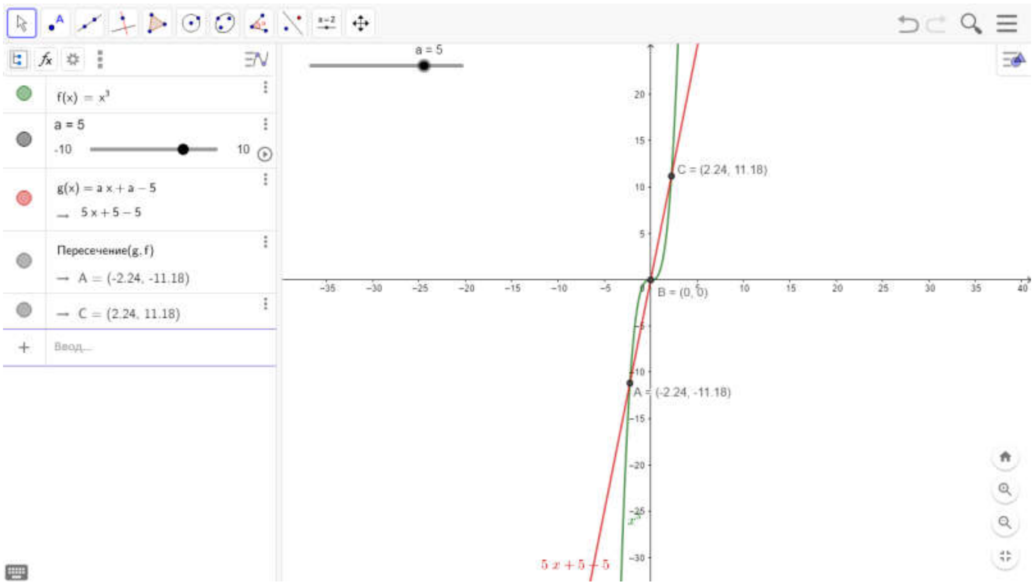


Рис. 4.18

Задача 4.8. *При яких значеннях параметра* a *рівняння* $|\ln x| - ax = 0$ *має три корені ?*

Розв'язання. Перепишемо рівняння $|\ln x| - ax = 0$ у вигляді $|\ln x| = ax$. Розглянемо функції $f(x) = |\ln x|$, $D(f) = (0; +\infty)$ і $g_a(x) = ax$ та побудуємо їх графіки (рис. 4.19).

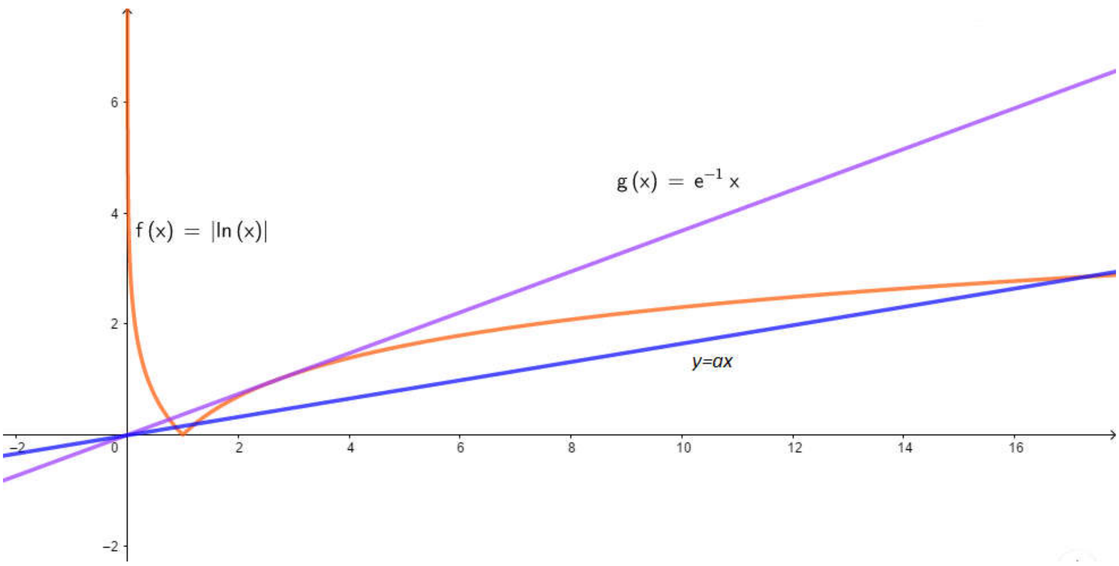


Рис. 4.19

Графіком функції $g_a(x)$ є функція, яка проходить через початок координат і утворює з додатнім напрямком осі абсцис кут, який визначається параметром a.

Якщо $a<0$, то пряма $y=ax$ не перетинає графік функції $f(x)$, оскільки $ax<0$, $|\ln x|\geq 0, x\in \mathbb{R}^+$. Тому рівняння $|\ln x|=ax$, а отже, і рівняння $|\ln x|-ax=0$, розв’язків не має.

Якщо $a=0$, то рівняння $|\ln x|=ax \Leftrightarrow |\ln x|=0 \Leftrightarrow x=1$ має єдиний корінь.

Якщо $a>0$, то тут може бути три випадки.

1) знайдемо, при якому значенні a пряма $y=ax$ дотикається до кривої. Нехай $A(x_0;y_0)$ – точка дотику. Тоді шукане значення a знаходимо із системи $\begin{cases} f(x_0)=g_a(x_0), \\ f'(x_0)=g_a(x_0) \end{cases}$ або $\begin{cases} \ln x_0 = ax_0, \\ \dfrac{1}{x_0}=a, \end{cases}$ або $x_0=\dfrac{1}{a}$,

$\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=1$ або $a=e^{-1}$, $x_0=e>1$.

2) якщо $0<a<\frac{1}{e}$, рівняння $|\ln x|-ax=0$ має три корені. Це пояснюється тим, що при $0<a<\frac{1}{e}$ пряма перетинає графік функції $f(x)$ у трьох точках: в одній точці – вітку кривої на проміжку $(0;1)$ і в інших точках – на проміжку $(1;+\infty)$. Абсциси цих точок і будуть коренями рівняння $|\ln x|=ax$.

3) на перший погляд здається, що при малих додатних a пряма $y=ax$ перетинає вітку графіка функції $f(x)$ на промені $(1;+\infty)$ тільки в одній точці, абсциса якої близька до одиниці. Відомо, що степенева функція при зростанні x зростає скоріше за логарифмічну, тому при довільному $a>0$ і як завгодно малому по абсолютній величині пряма $y=ax$ двічі перетинає вітку $f(x)$, що відповідає проміжку $(1;+\infty)$. ■

Задача 4.9. [4] *Криволінійна трапеція обмежена графіком функції* $f(x)=x^2+1$ *і прямими* $y=0,\ x=1,\ x=2$. *У якій точці графіка функції* $f(x)=x^2+1,\ x\in[1;2]$ *треба провести дотичну, щоб вона відтинала від криволінійної трапеції звичайну трапецію найбільшої площі?*

Розв'язання. Проведемо дотичну до графіка функції $f(x)=x^2+1$ в точці $A(t;t^2+1)$, де параметр t беремо з відрізка $[1;2]$, її рівняння має вигляд: $y-(t^2+1)=2t(x-t)$ або $y=2tx-t^2+1$ (рис. 4.20).

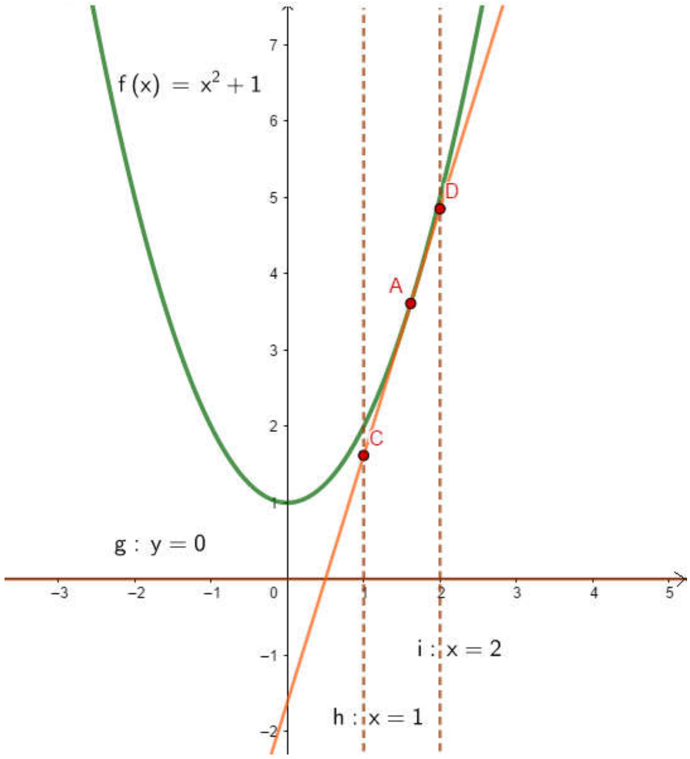


Рис. 4.20

Дотична перетинає прямі $x=1,\ x=2$ в точках $C\left(1;\, y_1\right)$ і $D\left(2;\, y_2\right)$ відповідно. Ординати цих точок $y_1 = 2t - t^2 + 1$, $y_2 = 4t - t^2 + 1$ є основами прямокутної трапеції, а її висота дорівнює 1. Площа трапеції $S(t) = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2\right) = 3t - t^2 + 1$ залежить від параметра t і є квадратичною функцією з від'ємним коефіцієнтом при t^2. Тому така функція набирає найбільшого значення у вершині параболи: $t = \frac{3}{2}$, $S_{\max} = S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4}$. Якщо $t = \frac{3}{2}$, то відповідна координата графіка функції $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4}$. Отже, дотична до графіка функції $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [1;\, 2]$ в точці $A\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$ відтинає від криволінійної трапеції звичайну трапецію найбільшої площі. ■

Задача 4.10. [7] *При яких значеннях k дотична до графіка функції $y = kx^2$ утворює з віссю Ox кут $\frac{\pi}{3}$ і відтинає від IV чверті трикутник з площею, яка дорівнює $\frac{8\sqrt{3}}{3}$?*

Розв'язання. Зазначимо насамперед, що $k > 0$, бо дотична до графіка функції $y = kx^2$ утворює з додатним напрямком осі абсцис гострий кут, що дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Нехай $(x_0; y_0)$, де $y_0 = kx_0^2$, є точкою дотику дотичної до графіка функції $y = kx^2$, похідна якої в цій точці $f'(x_0) = 2kx_0$. Але значення похідної в точці дотику дорівнює тангенсу кута φ між дотичною і додатним напрямом осі абсцис. Тому $2kx_0 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, звідки $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2k}$. Тоді $y_0 = \frac{k \cdot 3}{4k^2} = \frac{3}{4k}$, а рівняння дотичної до графіка функції $y = kx^2$ в точці $(x_0; y_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2k}; \frac{3}{4k}\right)$ набирає вигляду: $y = \frac{3}{4k} + \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2k}\right)$, або $y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4k}$. Ця дотична перетинає вісь Ox в точці $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{4k}$, а вісь Oy в точці $y = -\frac{3}{4k}$, відтинаючи від 4-ї чверті прямокутний ΔAOB, катети якого $OA = x_0 = \frac{\sqrt{3}}{4k}$ і $OB = y_0 = \frac{3}{4k}$. Його площа, яка за умовою дорівнює $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, дорівнює півдобутку катетів, тобто $\frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4k} \cdot \frac{3}{4k}$. Звідси знаходимо, що $k = \frac{3}{16}$. ■

Задача 4.11. [3] *Знайти геометричне місце вершин прямих кутів, дві сторони яких є дотичними до графіка функції $y = \frac{1}{4}x^2$.*

Розв'язання. Нехай $(a;b)$ – вершина шуканого прямого кута, а x_1 і x_2 – абсциси точок дотикання сторін даного кута до графіка функції $y=\frac{1}{4}x^2$.

Відмітимо, що

1) дотична до графіка функції $y=\frac{1}{4}x^2$ у точці $\left(x_1;\frac{1}{4}x_1^2\right)$ повинна проходити через точку $(a;b)$;

2) дотична до графіка функції $y=\frac{1}{4}x^2$ у точці $\left(x_2;\frac{1}{4}x_2^2\right)$ повинна проходити через точку $(a;b)$;

3) ці дотичні повинні бути взаємно перпендикулярними.

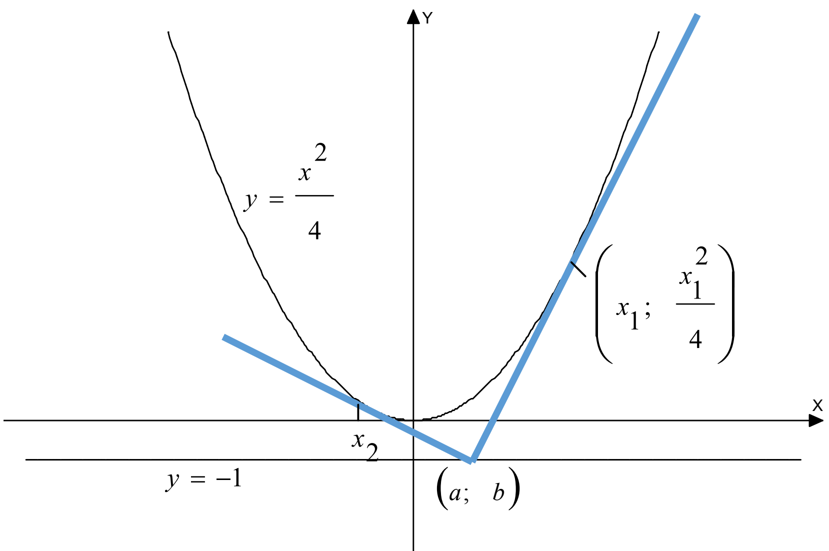


Рис. 4.21

Рівняння дотичних до графіка функції $y=\frac{1}{4}x^2$, які проходять через точки $\left(x_1;\frac{1}{4}x_1^2\right)$ і $\left(x_2;\frac{1}{4}x_2^2\right)$, матимуть такий вигляд:

$y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2$, $\quad y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$. З умов *1-3* одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} b=\frac{1}{2}x_1a-\frac{1}{4}x_1^2, \\ b=\frac{1}{2}x_2a-\frac{1}{4}x_2^2, \\ \frac{1}{2}x_1\cdot\frac{1}{2}x_2=-1. \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння системи друге, знаходимо, що:

$0=\frac{a}{2}(x_1-x_2)-\frac{1}{4}(x_1-x_2)(x_1+x_2)$, тобто $(x_1-x_2)(2a-(x_1+x_2))=0$.

Таким чином, $x_1+x_2=2a$. Далі додаємо перші два рівняння системи:

$2b=\frac{a}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)$, тобто

$2b=\frac{a}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{4}((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)$.

Звідси, враховуючи, що $x_1x_2=-4$, $x_1+x_2=2a$ маємо:

$2b=\frac{a}{2}\cdot 2a-\frac{1}{4}(4a^2+8)$, тобто, $b=-1$. Оскільки $b=-1$, то вершина кута, що задовольняє умову задачі, може лежати тільки на прямій $y=-1$. За допомогою перевірки переконуємося, що точка $(a;-1)$, де a – будь-яке дійсне число, задовольняє умову задачі. ■

Задача 4.12. [22] *Знайти найменшу величину кута, під яким видно параболу* $y=x^2-2x+2$ *з точки* $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Розв'язання. Таким кутом буде кут, утворений двома дотичними до параболи, що проходять через задану точку

$A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Позначимо шуканий кут через α, а кути, що утворюють дотичні до осі Ox, через α_1, α_2. Тоді $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, і $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, де k_1, k_2 означають кутові коефіцієнти дотичних. Для їх знаходження необхідно знайти абсциси точок дотику. Позначимо точку дотику через $A(x_0; y_0)$, тобто $A(x_0;\ x_0^2 - 2x_0 + 2)$, і запишемо рівняння дотичної $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, $y = x_0^2 - 2x_0 + 2 + (2x_0 - 2)(x - x_0)$. Оскільки ця пряма проходить через точку $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, то її координати задовольняють дане рівняння. Тоді:

$$-\frac{1}{2} = x_0^2 - 2x_0 + 2 + (2x_0 - 2)\left(\frac{1}{2} - x_0\right),$$

$$-\frac{1}{2} = x_0^2 - 2x_0 + 2 + x_0 - 2x_0^2 - 1 + 2x_0,$$

$$-\frac{1}{2} = -x_0^2 + x_0 + 1,\ x_0^2 - x_0 - \frac{3}{2} = 0,\ (x_0)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Отже,

$$k_1 = y'\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) = 2\frac{1+\sqrt{7}}{2} - 2 = \sqrt{7} - 1,$$

$$k_2 = y'\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) = 2\frac{1-\sqrt{7}}{2} - 2 = -\sqrt{7} - 1$$

Тоді $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{7} - 1 - \sqrt{7} + 1}{1 - (\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)} = \frac{2}{5}\sqrt{7}$, $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}4\sqrt{7} \approx 47^0$. ■

***Задача 4.13.** [7] Знайти відстань між найближчими точками графіків функцій* $y = (x-1)^3$ *і* $y = 3x - 25$.

Розв'язання. Задачу буде розв'язано, якщо на графіку функції $y = (x-1)^3$ знайдемо, можливо не одну, точку $A(x_0; y_0)$, де

$y_0 = (x_0 - 1)^3$, таку, що дотична до графіка функцій $y = (x-1)^3$ у цій точці паралельна прямій $y = 3x - 25$ (рис. 4.22).

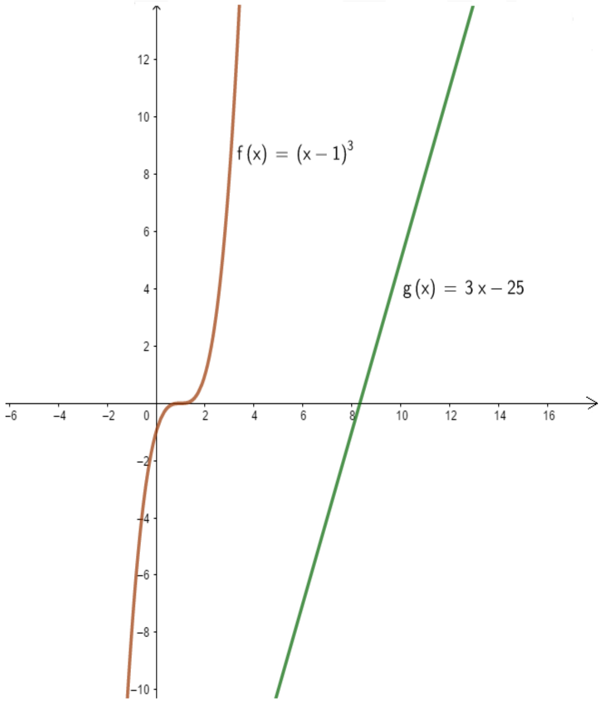


Рис. 4.22

Абсцису x_0 точки A знайдемо з умови, що кутові коефіцієнти дотичної до графіка функції $y = (x-1)^3$ і прямої $y = 3x - 25$ рівні між собою. Але кутовий коефіцієнт прямої $k_{пр.} = 3$, а дотичної у точці x_0 $k_{дот.} = y'(x_0) = 3(x_0 - 1)^2$, тому $3 = 3(x_0 - 1)^2$; $(x_0 - 1)^2 = 1$, що рівносильне сукупності рівнянь: $\left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = 1 \\ x_0 - 1 = -1, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0. \end{array}\right.$ Отже, на графіку функції $y = (x-1)^3$ є дві точки $A_1(0;-1)$, $A_2(2;1)$, такі, що дотичні до графіка функції в цих точках паралельні прямій $y = 3x - 25$. Знайдемо відстані між кожною точкою A_1, A_2 та прямою $y = 3x - 25$. Для цього через точки A_1, A_2 проведемо нормалі до графіка функції $y = (x-1)^3$. Нормаль у точці A_1: $y + 1 = -\frac{1}{3}x$, або $y = -\frac{1}{3}x - 1$.

Нормаль у точці A_2: $y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$, або $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Залишається знайти координати точок, в яких ці нормалі перетинають пряму $y=3x-25$. Для цього розв'яжемо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-1 \\ y=3x-25; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \\ y=3x-25. \end{cases} \quad (2)$$

Із системи (1) дістанемо: $3x-25=-\frac{1}{3}x-1$, тобто $x=7{,}2$. Підставляючи це значення x, наприклад, у рівняння прямої $y=3x-25$, знаходимо відповідне значення $y=-3{,}4$. Отже, нормаль $y=-\frac{1}{3}x-1$ перетне пряму $y=3x-25$ в точці $B_1(7{,}2;-3{,}4)$, відстань: $A_1B_1=\sqrt{(7{,}2-0)^2+(-3{,}4+1)^2}=\sqrt{57{,}6}$.

Із системи (2) знаходимо: $3x-25=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$, або $x=8$. Цьому значенню x відповідає значення $y=-1$. Отже, нормаль $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ перетинає пряму $y=3x-25$ у точці $B_2(8;-1)$, а відстань $A_2B_2=\sqrt{(8-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{40}$.

З двох відстаней A_1B_1 і A_2B_2 меншою буде $A_2B_2=\sqrt{40}$.

Отже, найменша відстань між графіками функцій $y=(x-1)^3$ і дорівнює $\sqrt{40}$. ■

Завдання для самостійного розв’язування

✍**1.** *Знайти рівняння дотичної до графіка функції* $y = f(x)$ *в точці з абсцисою* x_0*:*

1) $f(x) = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = 5$;

2) $f(x) = \sqrt{4x-3}$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

4) $f(x) = \ln(x-4)$, $x_0 = 6$;

5) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

6) $f(x) = e^{2x+1} - 2$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

✍**2.** *Знайти рівняння нормалі до графіка функції* $y = f(x)$ *в точці, абсциса якої дорівнює* x_0.

1) $f(x) = 1 + 3x - x^2$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \sqrt{1-5x}$, $x_0 = -3$;

4) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$, $x_0 = 1$;

5) $f(x) = \operatorname{arcctg} x^2$, $x_0 = 1$;

6) $f(x) = 2\sin x + \sin^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

✍**3.** *Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці* x_0*:*

1) $y = x^3$, $x_0 = -1$;

2) $y = -\dfrac{2}{x}$, $x_0 = 1$;

3) $y = x^3 - 3x$, $x_0 = 2$;

4) [2] $y = 2 - 4x - 3x^2$, $x_0 = -2$;

5) $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $x_0 = 2$;

6) [2] $y = xe^{-x}$, $x_0 = 0$;

7) $y = 2\cos\dfrac{x}{2}$, $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$;

8) $y = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 1$;

9) $y = \sqrt{2x - 1}$, $x_0 = 5$;

10) $y = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$;

11) $y = \mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

12) $y = \sqrt{4x - 3 - x^2}$, $x_0 = \dfrac{3}{2}$;

13) $y = \dfrac{3x - 4}{\sqrt[3]{x + 4}}$, $x_0 = 1$;

14) $y = \cos^5 x$, $x_0 = \pi$;

15) $y = \sqrt[3]{\mathrm{ctg}\, x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

16) $y = \cos(1 - 3x)$, $x_0 = \dfrac{1}{3}$;

17) $y = \sin(1 - 2x)$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$;

18) $y = \sin^2 3x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$;

19) $y = \mathrm{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$;

20) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, $x_0 = -2$;

21) $y = (3x - 7)^3$, $x_0 = 3$;

22) $y = 0{,}5x^2 - 0{,}5x + 1$, $x_0 = 8$;

23) $y = x^3 - x^2$, $x_0 = -1$;

24) $y = 0{,}5x^2 - 3x$, $x_0 = -2$;

25) $y = 2x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$, $x_0 = -3$;

26) $y = x^2 - 4$, $x_0 = 2$;

27) $y = x^3 + x^2$, $x_0 = 1$;

28) $y = -0{,}5x^2 + 2x$, $x_0 = -2$;

29) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2$, $x_0 = 3$.

✍***4.*** *Який кут з віссю абсцис утворює дотична до графіка функції* $y = f(x)$ *в точці з абсцисою* x_0.

1) $f(x) = x - x^2$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x_0 = 2$;

3) $f(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$, $x_0=3$;

4) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-4x^2-x+5$, $x_0=-1$;

5) $f(x)=2^{4x+3}+2x+3$, $x_0=-\frac{3}{4}$;

6) $f(x)=tgx+3x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

✍**5.** *Знайти довжину дотичної до графіка функції* $y=f(x)$*, абсциса якої дорівнює* x_0.

1) $f(x)=x^2+5x+4$, $x_0=2$;

2) $f(x)=x^3+3x^2+3x-4$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\sqrt{5x+1}$, $x_0=3$;

4) $f(x)=\frac{1}{x^6}$, $x_0=-1$;

5) $f(x)=e^{2x+3}$, $x_0=-2$;

6) $f(x)=\log_2(3x+2)$, $x_0=2$.

✍**6**. ***[8]*** *Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції:*

1) $y=2-4x-3x^2$, $x_0=-2$;

2) $y=2\cos\frac{x}{2}$, $x_0=\frac{3\pi}{2}$;

3) $y=\sqrt{x^2+1}$, $x_0=2$;

4) $y=xe^{-x}$, $x_0=0$;

5) $y=2\cos\frac{x}{2}$, $x_0=\frac{3\pi}{2}$;

6) $y=x^2e^{-x}$, $x_0=1$;

7) $y=\sqrt{2x-1}$, $x_0=5$;

8) $y=2x^3-3x$, $x_0=1$;

9) $y=\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

10) $y=\frac{3x-4}{\sqrt[3]{x}+4}$, $x_0=1$.

11) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ в точках перетину з віссю Ox;

12) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

✍***7.*** *Знайти абсцису точки, в якій дотична до графіка функції* $y = 5x^5 - 3x^3 + x + 1$ *паралельна прямій* $y = x$*.*

✍***8. [16]*** *Скласти рівняння дотичної до графіка функції:*

1) $f(x) = x^2 - 5x$*, якщо ця дотична паралельна прямій* $y = -x$*;*

2) $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$*, якщо ця дотична паралельна прямій* $y = 3x$*;*

3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$*, якщо ця дотична паралельна прямій* $y = 2x + 1$.

✍***9.*** *Знайти рівняння дотичної до графіка функції* $y = \dfrac{x+4}{x-4}$*, яка паралельна прямій, що проходить через точки* $A(0;\,4)$ *і* $B(2;\,0)$.

✍***10.*** *В якій точці графіка функції* $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x^3 - 4x\right)$ *дотична нахилена до осі абсцис під кутом* $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$?

✍***11. [16]*** *Записати рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:*

1) $f(x) = x^2 - 3x - 3$; ***2)*** $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$;

3) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$; ***4)*** $f(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

✍***12. [16]*** *Скласти рівняння дотичної до графіка функції* f *в точці його перетину з віссю абсцис:*

1) $f(x) = 8x^3 - 1$; ***2)*** $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; ***4)*** $f(x) = 3x - x^2$.

✍**13. [16]** *Знайти таку точку графіка функції* f, *що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут* α, *якщо:*

1) $f\left(x\right)=x^2-7x+3,\quad \alpha=45^\circ$;

2) $f\left(x\right)=-3x^2+2\sqrt{3}x-2,\quad \alpha=60^\circ$;

3) $f\left(x\right)=\sqrt{3x+2},\quad \alpha=45^\circ$;

4) $f\left(x\right)=\dfrac{x+7}{x-2},\quad \alpha=135^\circ$.

✍**14. [8; 12]** *Знайти кути, під якими перетинаються лінії:*

1) $x+y-4=0$ і $2y=8-x^2$; ***2)*** $x^2+4y^2=4$ і $4y=4-5x^2$;

3) $y=\sin x$ і $y=\cos x$; ***4)*** $y=x^2$ і $x=y^2$;

5) $y=\dfrac{2}{3}x^5-\dfrac{1}{9}x^3$ і $x=1$; ***6)*** $y=e^{x/2}$ і $x=2$;

7) $x^2+y^2=5$ і $y^2=4x$; ***8)*** $y^2=2x^3$ і $64x-48y-11=0$.

✍**15.** *В яких точках кривої* $x=t-1,\ y=t^3-12t+1$ *дотична паралельна: 1) осі Ox; 2) прямій* $9x+y+3=0$?

✍**16. [2]** *Довести, що сума відрізків на координатних осях, утворених дотичною до параболи* $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, *для всіх її точок дорівнює* a.

✍**17. [2]** *Показати, що відрізок дотичної до астроїди* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, *розміщений між координатними осями, має сталу довжину, рівну* a.

✍**18. [2]** *Довести, що відрізок дотичної до трактриси*

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2},$$

розміщений між віссю ординат і точкою дотику, має сталу довжину.

✍**19. [2]** *Показати, що для будь-якої точки* $M(x_0; y_0)$ *рівнобічної гіперболи* $x^2 - y^2 = a^2$ *відрізок нормалі від точки* M *до точки перетину з віссю абсцис дорівнює полярному радіусу точки* M.

✍**20. [2]** *Показати, що відрізок, який відтинається на осі абсцис дотичною в довільній точці кривої* $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1$, *пропорційний кубу абсциси точки дотику.*

✍**21. [2]** *Довести, що ордината будь-якої точки лінії* $2x^2y^2 - x^4 = c$ *є середня пропорційна між абсцисою і сумою абсциси і під нормалі, проведеної до лінії в тій же точці.*

✍**22. [2]** *Довести, що в еліпсів* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *у яких вісь* $2a$ *– спільна, а осі* $2b$ *різні (рис. 4.23), дотичні, проведені в точках з однаковими абсцисами, перетинаються в одній точці, яка лежить на осі абсцис. Скориставшись цим, вказати простий прийом побудови дотичної до еліпса.*

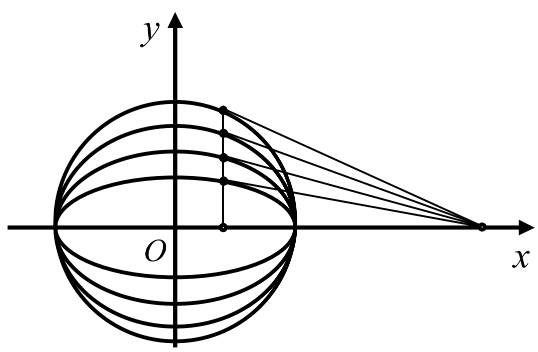


Рис. 4.23

✍**23. [2]** *Показати, що лінія* $y = e^{kx}\sin mx$ *дотикається до кожної з ліній* $y = e^{kx}$, $y = -e^{kx}$ *в усіх спільних з ними точках.*

✍**24. [2]** *Для побудови дотичної до ланцюгової лінії* $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ *використовується наступний спосіб: на ординаті* MN *точки* M*, як на діаметрі, будується півколо (рис. 4.24) і відкладається хорда* $NP=a$*; пряма* MP *буде шуканою дотичною. Довести це.*

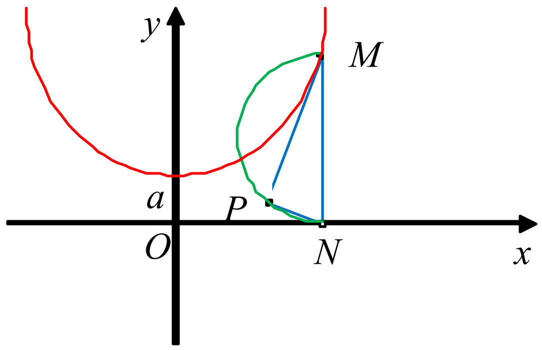


Рис. 4.24

✍**25. [23]** *Переконатися, що задана точка знаходиться на кривій, і знайти прямі, які є дотичними і нормальними до кривої в заданій точці:*

1) $x^2+xy-y^2=1,\quad (2;3)$;

2) $x^2+y^2=25,\quad (3;-4)$;

3) $x^2y^2=9,\quad (-1;3)$;

4) $y^2-2x-4y-1=0,\quad (-2;1)$;

5) $6x^2+3xy+2y^2+17y-6=0,\quad (-1;0)$;

6) $x^2-\sqrt{3}xy+2y^2=5,\quad (\sqrt{3};2)$;

7) $2xy+\pi\sin y=2\pi,\quad \left(1;\frac{\pi}{2}\right)$;

8) $x\sin 2y=y\cos 2x,\quad \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$;

9) $y=2\sin(\pi x-y),\quad (1;0)$;

10) $x^2\cos^2 y-\sin y=0,\quad (0;\pi)$.

✍**26. [23] Паралельні дотичні.** *Знайти дві точки, в яких крива* $x^2 + xy + y^2 = 7$ *перетинає вісь x, і показати, що дотичні до кривої в цих точках паралельні.*

✍**27. [23] Нормалі, паралельні прямій**. *Знайти нормалі до кривої* $xy + 2x - y = 0$*, які паралельні прямій* $2x + y = 0$.

✍**28. [23] Крива восьми**. *Знайти нахили кривої* $y^4 = y^2 - x^2$ *в двох точках, які вказані на рисунку 4.25.*

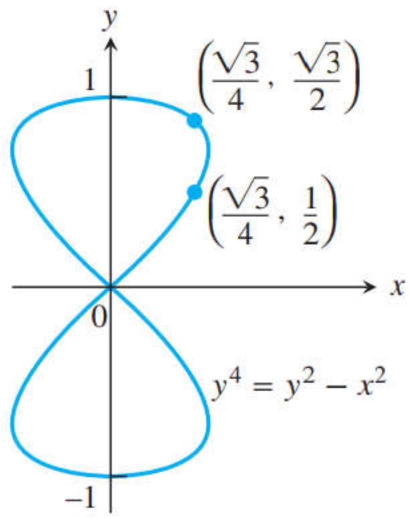


Рис. 4.25

✍**29. [23] Циссоїда Діокла (приблизно 200 р. до н.е.)** *Знайти рівняння дотичної і нормалі до циссоїди Діокла* $y^2(2-x) = x^3$ *в точці* $(1;1)$.

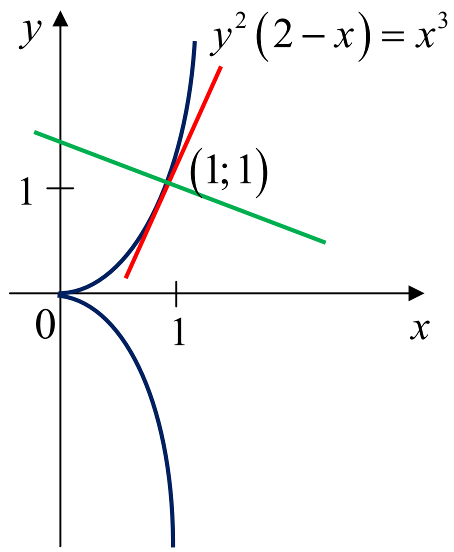


Рис. 4.26

✍**30. [23]** Крива диявола (Габріель Крамер, 1750) *Знайти нахили кривої диявола* $y^4-4y^2=x^4-9x^2$ *в чотирьох зазначених точках.*

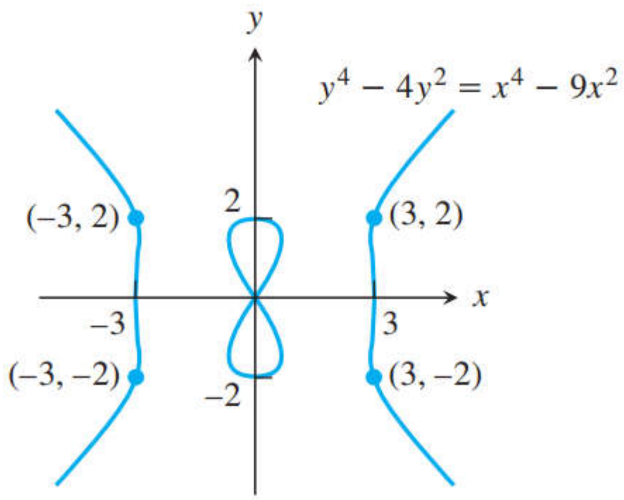


Рис. 4.27

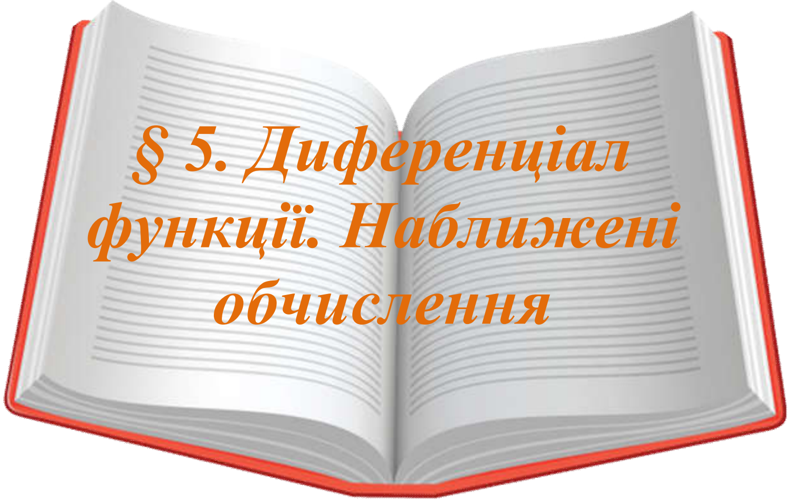
Відповіді

8. 1) $y=-x-4$; **2)** $y=3x-3$; **3)** $y=2x-8,\ y=2x+19$.

11. 1) $y=-3x-3$; **2)** $y=-5x+2$; **3)** $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{1}{2}$; **4)** $y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. 1) $y=6x-3$; **2)** $y=2x-2,\ y=2x+2$; **3)** $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$; **4)** $y=-3x+9,\ y=3x$.

13. 1) $(4;-9)$; **2)** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6};-\dfrac{5}{4}\right)$; **3)** $\left(\dfrac{1}{12};\dfrac{3}{2}\right)$; **4)** $(5;4),(-1;-2)$.



§ 5. Диференціал функції. Наближені обчислення

Попередньо вивчіть лекції 17–18 [11, с. 206–218; 222-231].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Сформулювати два означення диференційовної функції в точці.

Означення 5.1. *Функція* $f(x)$ *називається* ***диференційовною у точці*** x_0, *якщо вона у цій точці має скінченну похідну.*

Означення 5.2. *Функція* $f(x)$ *називається* ***диференційовною у точці*** x, *якщо приріст функції у цій точці можна подати у вигляді:*

$$\Delta f(x) = A(x)\Delta x + \alpha(x;\Delta x)\Delta x, \qquad (5.1)$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x;\Delta x) = 0$ *і число* A *не залежить від приросту аргументу* Δx. Доведено, що $A(x) = f'(x)$.

2. Що таке диференціал функції в точці?

Лінійна відносно Δx *частина приросту диференційовної у точці* x_0 *функції називається* ***диференціалом цієї функції*** *і позначається* $df(x_0)$:

$$df(x_0) := f'(x_0)\cdot \Delta x. \qquad (5.2)$$

3. Що таке диференціал незалежної змінної?

Диференціалом незалежної змінної x *називається приріст цієї незалежної змінної і позначають:*

$$dx := \Delta x.$$

4. Який геометричний зміст диференціала?

Як відомо, коефіцієнт k *у рівнянні прямої дорівнює тангенсу кута нахилу, який утворює дана пряма з додатним напрямом осі* Ox, *тобто*

$\operatorname{tg}\alpha = k = f'(x_0)$ – *кутовий коефіцієнт дотичної,*

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ – *рівняння дотичної до графіка функції,*

$f'(x_0)(x - x_0) = df$ *у точці* x_0 – *диференціал функції.*

$$f'(x_0)\Delta x = df, \quad \Delta x = x - x_0,$$

$\boxed{y - y_0 = df}$ – *рівняння дотичної, записане через диференціал.*

Отже, диференціал функції у заданій точці дорівнює приросту ординати дотичної до відповідної точки графіка функції (рис. 5.1).

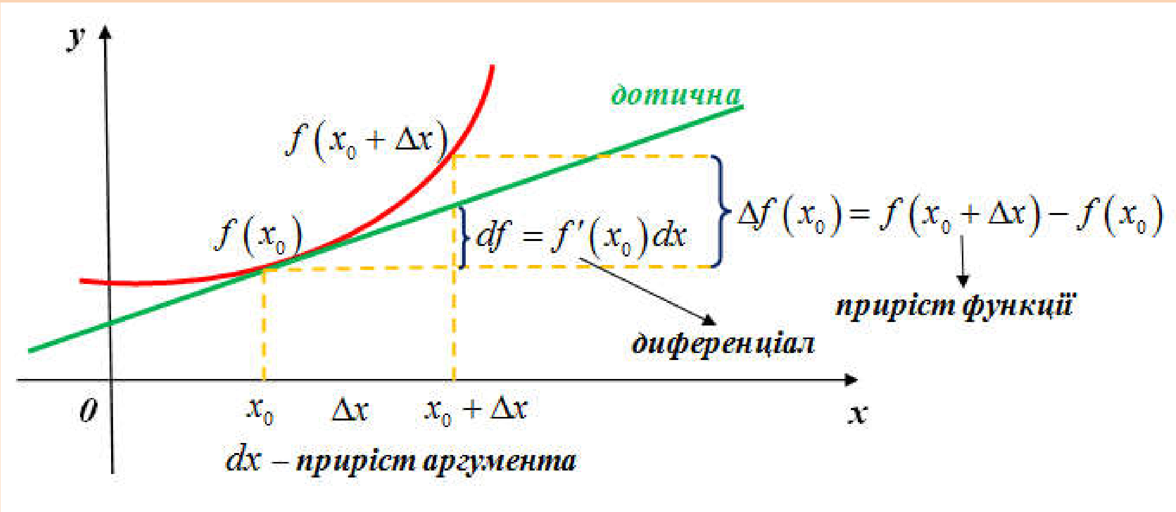


Рис. 5.1

5. Що розуміти під інваріантністю форми першого диференціала?

Якщо x – *незалежна змінна, а* $f(x)$ – *диференційовна функція, то* $df(x) = f'(x)dx$. *Припустимо, що* $x = \varphi(t)$ – *диференційовна функція від* t. *Тоді складена функція* $y = f(\varphi(t))$ *матиме похідну, яка дорівнює* $f'_x(x)\varphi'(t)$. *Диференціал цієї складеної функції запишемо у вигляді:*

$$dy = y_t' dt = f_x'(x)\varphi'(t)dt = f_x'(x)d\varphi(t) = f_x'(x)dx.$$

Отже, незалежно від того, чи буде змінна x незалежною змінною чи деякою диференційовною функцією від t, кожного разу диференціал функції обчислюється за формулою $df(x) = f'(x)dx$, тобто форма диференціала залишається незмінною, сталою, інваріантною.

6. Формула, яка використовується для наближених обчислень.

$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x;\Delta x)\Delta x$, *де* $\alpha(x;\Delta x) = o(\Delta x)$ *при* $\Delta x \to 0$, *тому* $f(x) - f(x_0) \approx f'(x)\cdot(x - x_0)$, *або*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0). \qquad (5.3)$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 5.1. *Знайти приріст і диференціал функції у точці x_0, якщо Δx відомо.*

1) $y = 3x^2 + 5x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;

2) $y = x^3 + 4x^2 + 7x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання.

1. $y = 3x^2 + 5x$. Спочатку знайдемо приріст функції, який визначається за формулою:

$$\Delta y(x_0) = y(x + \Delta x) - y(x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 3x^2 - 5x =$$

$$= 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 5x + 5\Delta x - 3x^2 - 5x =$$

$$= 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 5x + 5\Delta x - 3x^2 - 5x = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 5\Delta x.$$

Тоді підставимо в знайдений приріст функції значення $x_0 = 1$ і $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y(x_0) = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 5\Delta x = 6\cdot 1\cdot 0{,}1 + 3\cdot(0{,}1)^2 + 5\cdot 0{,}1 = 1{,}13.$$

Далі знаходимо диференціал функції, який визначається за формулою:

$$dy = y'(x)dx = (6x + 5)dx = (6x + 5)\Delta x;$$

$$dy(1) = (6x + 5)\Delta x = (6\cdot 1 + 5)\cdot 0{,}1 = 1{,}1. \blacksquare$$

2. $y = x^3 + 4x^2 + 7x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$. Аналогічно до попереднього прикладу маємо:

$$\Delta y(x_0) = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x)^3 + 4(x+\Delta x)^2 + 7(x+\Delta x) -$$
$$-x^3 - 4x^2 - 7x = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 + 7x +$$
$$+7\Delta x - -x^3 - 4x^2 - 7x = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 + 7\Delta x;$$
$$\Delta y(x_0) = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 2\cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + 8\cdot 2\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}1^2 + 7\cdot 0{,}1 = 3{,}601;$$
$$dy = y'(x)dx = \left(3x^2 + 8x + 7\right)dx = \left(3x^2 + 8x + 7\right)\Delta x;$$
$$dy(2) = \left(3x^2 + 8x + 7\right)\Delta x = \left(3\cdot 2^2 + 8\cdot 2 + 7\right)\cdot 0{,}1 = 3{,}5. \blacksquare$$

Задача 5.2. *Знайти диференціал явно заданої функції $f(x)$ на області визначення і в заданій точці:*

1) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $(0;0)$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{x-1}{x}$, $x_0 = -1$.

Розв'язання.

1. $$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1\cdot\sqrt{1-x^2} - x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)}{1-x^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{1-x^2} - \dfrac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\dfrac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3};$$
$$df = \frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}dx;\quad df(0) = \frac{1}{\left(\sqrt{1-0^2}\right)^3}dx = dx. \blacksquare$$

2.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln\frac{x-1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\dfrac{x-1}{x}}\cdot\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3-x+1}{x^2(x-1)}\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)' =$$
$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x-1}\cdot\frac{x-1(x-1)}{x^2} = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x-1)};$$

$$df=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(x-1)}\right)dx;$$

$$df(-1)==\left(-1+\frac{1}{2}\right)dx=-\frac{1}{2}dx.\ \blacksquare$$

Задача 5.3. *Знайти диференціал параметрично заданої функції $f(x)$ на області визначення і в заданій точці:*

1) $x=t^4+1,\ y=t^3+t,\ (2;2);$

2) $x=t\ln t,\ y=\dfrac{\ln t}{t},\ (0;0).$

Розв’язання.

1. Знайдемо диференціал параметрично заданої функції $x=t^4+1,\ y=t^3+t,\ (2;2)$ на області визначення і в заданій точці:

1) шукаємо похідну функції за формулою

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\left(t^3+t\right)'}{\left(t^4+1\right)'}=\frac{3t^2+1}{4t^3};$$

2) далі записуємо диференціал першого порядку: $df=\left(\dfrac{3t^2+1}{4t^3}\right)dx;$

3) для того, щоб обчислити значення диференціала у точці $(x_0;y_0)=(2;2)$, потрібно знайти значення параметра t_0, який відповідає даній точці:

$$\begin{cases}x=t^4+1,\\ y=t^3+t,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=t^4+1,\\ 2=t^3+t,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^4=1,\\ t^3+t=2,\end{cases}\Leftrightarrow t_0=1.$$

4) $df(2)=\dfrac{y'(1)}{x'(1)}=\dfrac{3\cdot 2^2+1}{4\cdot 2^3}dx=\dfrac{13}{32}dx.\ \blacksquare$

2. Знайдемо диференціал параметрично заданої функції $x=t\ln t,\ y=\dfrac{\ln t}{t},\ (0;0)$ на області визначення і в заданій точці:

$$1)\ \frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{\ln t}{t}\right)'}{(t\ln t)'}=\frac{\frac{\frac{1}{t}\cdot t-\ln t}{t^2}}{\ln t+t\cdot\frac{1}{t}}=\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)};$$

$$2)\ df=\left(\frac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}\right)dx;$$

$$3)\ \begin{cases}x=t\ln t,\\ y=\dfrac{\ln t}{t},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=t\ln t,\\ 0=\dfrac{\ln t}{t},\end{cases}\Leftrightarrow t_0=1;$$

$$4)\ df(1)=\frac{1-\ln 1}{1^2(1+\ln 1)}dx=\frac{1}{1}dx=dx.\ \blacksquare$$

Задача 5.4. *Знайти диференціал неявно заданої функції $f(x)$ на області визначення і в заданій точці:*

1) $x^4+x=y^5+y^2,\ (1;1);$

2) $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0,\ (1;3).$

Розв'язання.

1. Знайдемо диференціал неявно заданої функції $x^4+x=y^5+y^2,\ (1;1)$ на області визначення і в заданій точці:

1) похідну функції, заданої неявно, шукатимемо з рівняння:

$$\frac{d}{dx}F(x;y)=0\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dx}\left(x^4+x-y^5-y^2\right)=0;$$

$$\Rightarrow\quad 4x^3+1-5y^4\cdot y'-2y\cdot y'=0;\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{4x^3+1}{5y^4+2y}.$$

2) знаходимо диференціал функції в довільній точці:

$$df(x):=f'(x)\Delta x\quad\Rightarrow\quad df(x)=\left(\frac{4x^3+1}{5y^4+2y}\right)dx;$$

3) тоді знайдемо значення диференціала у заданій точці $(1;1)$:

$$dy(1;1)=\frac{4\cdot 1^3+1}{5\cdot 1^4+2\cdot 1}dx=\frac{5}{7}dx.\ \blacksquare$$

2. Аналогічно до попереднього прикладу обчислюємо диференціал від неявно заданої функції $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0$:

1) $\dfrac{d}{dx}F(x;y)=0 \Rightarrow 4x^3+4y^3\cdot y'-16x-20y\cdot y'=0 \Rightarrow$

$4y^3\cdot y'-20y\cdot y'=-4x^3+16x \Rightarrow y'=\dfrac{16x-4x^3}{4y^3-20y}=\dfrac{4x-x^3}{y^3-5y};$

2) $df(x)=\left(\dfrac{4x-x^3}{y^3-5y}\right)dx;$

3) $dy(1;3)=\dfrac{3}{12}dx=\dfrac{1}{4}dx.$ ■

Задача 5.5. *Знайти приріст і диференціал функції* $y=2x^2-3x$ *у точці* $x_0=1$ *при* $\Delta x=1$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta x=0{,}01$. *Знайти для кожного значення приросту аргументу* Δx *абсолютну похибку* $|\Delta y-dy|$ *та відносну похибку* $\left|\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|$, *які допускаються при заміні приросту функції диференціалом цієї функції.*

Розв'язання. Знайдемо $y(1)$, $y'(x)$, $y'(1)$:

$y(1)=2\cdot1^2-3\cdot1=-1$**;**

$y'(x)=\left(2x^2-3x\right)'=4x-3;\quad y'(1)=4\cdot1-3=1.$

Приріст функції:

$\Delta y(1)=y(1+\Delta x)-y(1)=2(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+1;$

диференціал функції: $dy(1)=y'(1)\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$.

Якщо $\Delta x=1$, то $\Delta y=2\cdot2^2-3\cdot2+1=3$; $dy=1$,

абсолютна похибка $\Delta=|\Delta y-dy|=|3-1|=2$,

відносна похибка $\delta=\left|\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=\dfrac{2}{3}=0,(6)\approx67\%$.

Якщо $\Delta x=0{,}1$, то $\Delta y=2\cdot0{,}01+0{,}1=0{,}12$; $dy=1\cdot0{,}1=0{,}1$,

абсолютна похибка $\Delta=|\Delta y-dy|=0{,}02$,

відносна похибка $\delta=\left|\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=\dfrac{0{,}02}{0{,}12}\approx0{,}17=17\%$.

Якщо $\Delta x=0{,}01$, то $\Delta y=2\cdot0{,}0001+0{,}01=0{,}0102$; $dy=1\cdot0{,}01=0{,}01$, абсолютна похибка $\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}0002$,

відносна похибка $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \dfrac{0{,}0002}{0{,}0102} \approx 0{,}9\%$. ■

Задача 5.6. [4] *Користуючись поняттям диференціала, знайти наближено значення функцій:*

1) $f(x) = \sqrt[7]{3x^3 + 2x - 4}$ при $x = 1{,}001$;

2) $f(x) = (x-3)^2(x-2)^3(x-4)$ при $x = 4{,}001$;

3) $f(x) = x\ln(x-2)$ при $x = 3{,}001$;

4) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6$ при $x = 1{,}001$.

Розв'язання.

1. $x_0 = 1;\ \Delta x = 0{,}001$, $f(1) = \sqrt[7]{3+2-4} = 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{7}\left(3x^3 + 2x - 4\right)^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{\left(3x^3 + 2x - 4\right)^6}};$$

$$f'(1) = \frac{1}{7\sqrt[7]{(3+2-4)^6}} = \frac{1}{7}.$$

$$f(1{,}001) \approx 1 + \frac{1}{7}\cdot 0{,}001 = 1{,}0001429. ■$$

2. $f(x) = (x-3)^2(x-2)^3(x-4)$, $x_0 = 4$; $\Delta x = 0{,}001$,

$f(4) = (4-3)^2\cdot(4-2)^2\cdot(4-4) = 0$.

$f'(x) = 2(x-3)(x-2)^3(x-4) + 3(x-3)^2(x-2)^2(x-4) + (x-3)^2(x-2)^3$

$f'(4) = (4-3)^2(4-2)^3 = 8$, $\quad f(4{,}001) \approx 0 + 8\cdot 0{,}001 = 0{,}008$. ■

3. $f(x) = x\ln(x-2)$, $x_0 = 3;\ \Delta x = 0{,}001$. $f(3) = 3\cdot\ln 1 = 0$.

$f'(x) = \ln(x-2) + \dfrac{x}{x-2}$; $\quad f'(3) = \ln(3-2) + \dfrac{3}{3-2} = 3$.

$f(3{,}001) \approx 0 + 3\cdot 0{,}001 = 0{,}003$. ■

4. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6$, $x_0 = 1;\ \Delta x = 0{,}001$,

$f(1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 6 = 4$.

$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x$; $\quad f'(1) = 5 - 8 + 9 - 8 = -2$.

$f(1{,}001) = 4 - 2\cdot 0{,}001 = 3{,}998$. ■

Задача 5.7. *Замінюючи приріст функції її диференціалом, обчислити наближено:*

1) $\sqrt[4]{17}$;

2) $\operatorname{arctg} 0,98$;

3) $\sin 29^{\circ}$.

Розв'язання. ***1.*** $\sqrt[4]{17}$.

1) для знаходження наближеного значення скористаємося формулою: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. Тут ми використаємо функцію $y = \sqrt[4]{x}$, оскільки $y(17) = \sqrt[4]{17}$ і є те ірраціональне число, наближене значення якого нам потрібно обчислити.

2) виберемо число $x_0 = 16$, оскільки $y(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$.

3) знайдемо похідну функції та обчислимо її значення у точці 16:

$$y'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}; \; y'(x_0) = y'(16) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}.$$

4) одержані значення $y(x_0)$, $y'(x_0)$, x та x_0 підставимо у формулу знаходження наближеного значення:

$$\sqrt[4]{17} \approx 2 + \frac{1}{32}(17 - 16) \approx 2 + \frac{1}{32} \approx 2,03105. \blacksquare$$

2. $\operatorname{arctg} 0,98$.

1) $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$, $y = \operatorname{arctg} x$, $x = 0,98$;

2) $x_0 = 1$, $y(x_0) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $y'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y'(x_0) = y'(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$;

4) $\operatorname{arctg} 0,98 \approx \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}(0,98 - 1) \approx \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}(-0,02) \approx 0,7754.$ $\blacksquare$

3. $\sin 29^{\circ}$.

1) $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$, $y = \sin x$, $x = 29^{\circ} = \dfrac{\pi \cdot 29}{180}$;

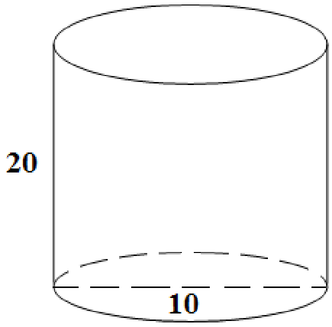
2) $x_0 = 30^{\circ}$, $y(x_0) = \sin 30^{\circ} = \dfrac{1}{2}$;

3) $y'(x) = \cos x$, $y'(x_0) = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\sin 29^\circ \approx \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{29\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right)\approx 0,5-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0,4848.$ ■

Задача 5.8. [4] *Циліндр, діаметр якого 10 см, висота – 20 см, під час шліфування поверхні втратив у масі 2 г. На скільки зменшився його діаметр, якщо густина речовини, з якого виготовлений циліндр, дорівнює 2,5 г/см³?*

Розв'язання.



Об'єм циліндра знаходимо, використовуючи відому формулу: $V=S_{осн}H=\pi r^2 H=\frac{\pi D^2 H}{4}$; маса циліндра дорівнює добутку густини на об'єм: $m=\rho V=\pi r^2 H\rho=\frac{\pi H\rho}{4}D^2$. У нашому випадку початкова маса циліндра дорівнює:

$$m_0\approx\frac{3{,}1415\cdot 20\cdot 2{,}5}{4}\cdot 100=3926{,}875\ \ (г).$$

З останньої формули маси циліндра виразимо діаметр циліндра як функцію маси: $D^2=\frac{4m}{\pi H\rho}$, або $D=\sqrt{\frac{4m}{\pi H\rho}}$.

Початкова маса циліндра обчислена нами: $m_0=3926{,}875$ *г*, а приріст маси згідно з умовою задачі дорівнює $\Delta m=-2$ (*г*).

Для того, щоб дати відповідь на питання: на скільки зменшився діаметр циліндра після шліфування, скористаємося тим, що приріст діаметра наближено дорівнює його диференціалу $\Delta D(m)\approx D'(m)\Delta m$:

$$D'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi H\rho}{4m}}\cdot\frac{4}{\pi H\rho}=\frac{1}{\sqrt{\pi H\rho m}};$$

$$D'(m_0)\approx\frac{1}{\sqrt{3{,}1415\cdot 20\cdot 2{,}5\cdot 3926{,}875}}\approx 0{,}00127.$$

$$\Delta D(m) \approx D'(m)\Delta m \approx 0{,}00127 \cdot (-2) = -0{,}00254 \ (см). \blacksquare$$

***Задача 5.9. [4]** На скільки зменшиться величина степеня 3^4, якщо основу зменшити на 0,0063?*

Розв'язання. Аналогічно до попередньої задачі маємо:

3^4; $(3-0{,}0063)^4$; $\quad y = x^4$; $x_0 = 3$; $\Delta x = -0{,}0063$.

$y(3) = 3^4 = 81$, $\quad y' = 4x^3$; $y'(3) = 4 \cdot 27 = 108$.

$\Delta y \approx -108 \cdot 0{,}0063 = -0{,}6804$. $\blacksquare$

Завдання для самостійного розв'язування

✍***1.** Знайти приріст і диференціал функції в точці x_0, якщо Δx відомо.*

1) $y = 4x^3 + 2x^2 + x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}001$;

2) $y = x^2 + 1$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}1$;

3) $y = 16x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x + 3$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;

4) $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;

5) $y = \ln x + 1$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}001$;

6) $y = x^5 - 4$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}1$.

✍***2.** Знайти диференціал явно заданої функції $f(x)$ на області визначення і в заданій точці:*

1) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

2) $f(x) = \arccos e^x$, $(0;0)$;

3) $f(x) = \dfrac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}}$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{\ln x}{x}$, $x_1 = \dfrac{1}{e}$; $x_2 = e$.

✍**3.** *Знайти диференціал параметрично заданої функції $f(x)$ на області визначення і в заданій точці:*

1) $x=(t-1)^2(t-2)$, $y=(t-1)^2(t-3)$, $(4;0)$;

2) $x=\dfrac{e^t}{t}$, $y=(t-1)^2e^t$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{e}};\dfrac{9}{4\sqrt{e}}\right)$.

✍**4.** *Знайти диференціал неявно заданої функції $f(x)$ на області визначення і в заданій точці:*

1) $xe^{\frac{x}{y^2}-1}-2y=0$, $(4;2)$; **2)** $xy-\sqrt[3]{xy^2+6}=0$, $(2;1)$;

3) $x^4+x^3+5x=y^6+y^3$, $(1;1)$; **4)** $\sin x=\sin y$, $(-\pi;\pi)$;

5) $3^{\sin yx^2}-3x(y-\pi)-1=0$, $(1;\pi)$.

✍**5.** *Замінюючи приріст функції її диференціалом, обчислити наближено:*

1) $\sin 359^\circ$; **2)** $\arcsin 0{,}51$; **3)** $\sqrt[3]{65}$;

4) $\sqrt[3]{200}$; **5)** $\sqrt[4]{90}$; **6)** $\sqrt[4]{15{,}8}$;

7) $2^{9{,}99}$; **8)** $\log_2(15{,}97)$; **9)** $tg\,44^\circ 50'$.

✍**6. [12]** *На скільки наближено збільшиться об'єм кулі, якщо її радіус $R=15$ см збільшити на 0,2 см?*

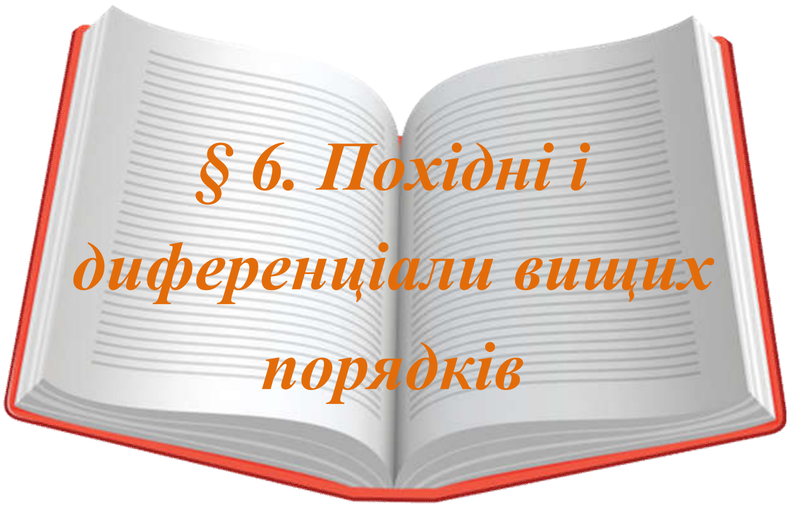
✍**7. [12]** *Знайти наближено відносну похибку під час обчислення поверхні сфери, якщо під час визначення її радіуса відносна похибка становила 1%.*

✍**8. [12]** *На скільки наближено зміниться (у відсотках) сила струму в провіднику, якщо його опір збільшиться на 1%?*

✍**9. [12]** *На скільки наближено слід змінити довжину маятника $l=20$ см, щоб період коливань маятника збільшився на 0,05 с? Період T визначається формулою $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.*

Відповіді

6. $565\,см^3$. **7.** 2%. **8.** Зменшиться на 1%. **9.** Збільшити на 2,23 см.



§ 6. Похідні і диференціали вищих порядків

!!! Попередньо вивчіть лекцію 20 [11, с. 250–259].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Сформулювати означення другої похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0.

Означення 6.1. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена і диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Якщо в точці $x_0 \in (a;b)$ існує похідна функції $f'(x)$, то кажуть, що у цій точці існує* ***друга похідна, або похідна другого порядку:***

$$\boxed{\exists \left(f'(x)\right)'_{|x=x_0} = f''(x_0)} \qquad (6.1)$$

Позначення: $f''(x_0)$, y'', $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $D^2 f(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$.

2. Сформулювати означення n-ої похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Означення 6.2. *Похідну n-го порядку, або n-у похідну означаємо як похідну від похідної $(n-1)$-го порядку:*

$$\boxed{f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{|x=x_0}} \qquad (6.2)$$

3. Сформулювати теорему Лейбніца про знаходження n-ої похідної від суми і добутку двох функцій.

Теорема 6.1. (Лейбніца). *Нехай функції* $y_1 = f_1(x)$ *і* $y_2 = f_2(x)$ *мають похідні до* $n-$*го порядку включно в точці* x_0. *Тоді функції* $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ *і* $y_1 \cdot y_2 = f_1(x) \cdot f_2(x)$ *також мають похідні до* $n-$*го порядку включно і*

$$\boxed{\left(y_1 + y_2\right)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}} \qquad (6.3)$$

$$\boxed{\left(y_1 \cdot y_2\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)},}$$

$$\text{де } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (6.4)$$

4. Вивести і запам'ятати формули для n-их похідних функцій основних елементарних функцій x^{α}, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$.

1) $\left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot x^{\alpha-n},\ \alpha \in \mathbb{R}$;

2) $\left(x^{n}\right)^{(n)} = n!,\ n \in \mathbb{N}$ $\qquad \left(x^{n}\right)^{(n+1)} = 0,\ n \in \mathbb{N}$;

3) $\left(a^{x}\right)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$ $\qquad \left(e^{x}\right)^{(n)} = e^x$;

4) $\left(\log_a x\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$;

5) $\left(\ln x\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; $\qquad \left(\ln(1+x)\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$;

6) $\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$;

7) $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Сформулювати означення диференціала n-го порядку функції $y=f(x)$ у точці x_0.

Означення 6.3. Диференціал $n-$***го порядку функції*** $f(x)$ *означається рекурентним способом як диференціал від диференціала* $(n-1)$ *порядку:*

$$d^n f(x) := d\left(d^{n-1} f(x)\right); \quad d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (6.5)$$

6. Пригадати, як знаходити похідні вищих порядків від складеної функції, оберненої функції, параметрично заданої функції.

Теорема 6.2. *Нехай функція* $y=y(x)$ *має другу похідну у точці* x_0 *і функція* $z=z(y)$ *має другу похідну* z''_{yy} *у точці* $y_0=y(x_0)$*, тоді складена функція* $z(x)=z(y(x))$ *також має другу похідну у точці* x_0*, причому*

$$\boxed{z''_{xx} = z''_{yy}\left(y'_x\right)^2 + z'_y \cdot y''_{xx}} \qquad (6.6)$$

Теорема 6.3. *Нехай функція* $y=y(x)$ *неперервна і строго монотонна в деякому околі точки* x_0 *і нехай у точці* $x=x_0$ *існують похідні* y' *та* y''*, причому* $y'(x_0)\neq 0$*, тоді обернена функція* $x=x(y)$ *також буде мати у точці* y_0 *похідні першого і другого порядку, які можуть бути виражені через* y' *та* y'' *у точці* $x=x_0$*:*

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x};\ x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{{y'_x}^3}} \qquad (6.7)$$

Теорема 6.4. *Якщо функції* $x=\varphi(t)$*,* $y=\psi(t)$ *мають похідні до другого порядку включно* $\varphi''_{tt}(t)$*,* $\psi''_{tt}(t)$ *у точці* t_0*, то параметрично задана функція* $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ *також має похідну другого порядку включно у точці* $x_0=\varphi(t_0)$ *і має місце рівність:*

$$\boxed{y''_{xx}(x_0) = \frac{\psi''_{tt}(t_0)\cdot\varphi'_t(t_0) - \psi'_t(t_0)\cdot\varphi''_{tt}(t_0)}{\varphi_t'^3(t_0)}} \qquad (6.8)$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 6.1. *Для заданої функції* $f(x)$ *знайти похідні:*

1) $f(x)=e^{-x^2}$, $x_0=0$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$;

2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$, $x_0=0$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$.

Розв'язання.

1. $f(x)=e^{-x^2}$. Знайдемо похідні функції $f(x)=e^{-x^2}$, $x_0=0$:

1) знаходимо похідну $f'(x)$ від функції $f(x)$. Оскільки дана функція $f(x)=e^{-x^2}$ складена, тому потрібно знайти похідну зовнішньої функції від свого аргумента і помножити її на похідну внутрішньої функції:

$$f'(x)=e^{-x^2}(-2x)=-2x\cdot e^{-x^2};f'(x_0)=f'(0)=0.$$

2) знаходимо другу похідну $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$ та її значення у точці $x_0=0$:

$$f''(x)=-2\cdot e^{-x^2}+2x\cdot e^{-x^2}\cdot 2x=-2\cdot e^{-x^2}+4x^2\cdot e^{-x^2}=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right);$$

$$f''(x)=f''(0)=2\cdot e^{-0^2}\cdot(-1)=-2.$$

3) знаходимо третю похідну $f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$ та її значення у точці $x_0=0$:

$$f'''(x)=-4xe^{-x^2}\left(2x^2-1\right)+2e^{-x^2}\cdot 4x=4x\left(3-2x^2\right)e^{-x^2};$$

$$f'''(x_0)=f'''(0)=0. \blacksquare$$

2. Аналогічно до попереднього прикладу обчислюємо перші дві похідні функції $f(x)=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$, $x_0=0$:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x+1;$$

$$f'(x_0)=f'(0)=1.$$

$$f''(x)=\left(\frac{-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)'=\frac{-\sqrt{1-x^2}\arcsin x-x-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x}{1-x^2}=$$

$$=-\frac{\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+x}{1-x^2}=-\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}},\ f''(x)=f''(0)=0.\ \blacksquare$$

Задача 6.2. *Для параметрично заданої функції* $y(x)$ *обчислити* y'_x, y''_{x^2} *на* $D(y)$ *і* y'''_{x^3} *у точці* $x_0=x(t_0)$:

1) $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$; $t_0=0$;

2) $x=e^t\cdot\cos t$, $y=e^t\cdot\sin t$; $t_0=0$.

Розв'язання.

1. Оскільки функція задана параметрично, то використаємо формулу (6.8). Знаходимо похідні функцій $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ до другого порядку і проводимо обчислення згідно попередньої формули, враховуючи, що $x_0=x(t_0)=2\cdot 0-0^2=0$:

$$x'(t)=\left(2t-t^2\right)'=2-2t,\ x''(t)=(2-2t)'=-2,\ x'(0)=2,\ x''(0)=-2,$$

$$y'(t)=\left(3t-t^3\right)'=3-3t^2,\ y''(t)=\left(3-3t^2\right)'=-6t,\ y'(0)=3,\ y''(0)=0.$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3(1+t)}{2},\quad y'_x(0)=\frac{3}{2};$$

$$x''_{tt}=(2-2t)'=-2;\quad y''_{tt}=\left(3-3t^2\right)'=-6t;$$

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-y'_tx''_{tt}}{x'^3_t}=\frac{-6t\cdot 2(1-t)+3\left(1-t^2\right)\cdot 2}{2^3(1-t)^3}=$$

$$=\frac{6(1-t)(-2t+1+t)}{8(1-t)^3}=\frac{3}{4(1-t)};$$

$$y''_{xx}(0)=\frac{3}{4}.$$

$$y'''_{x^3}=\left(y''_{xx}\right)'_x=\left(\frac{3}{4(1-t)}\right)'_x=\left(\frac{3}{4(1-t)}\right)'_t\cdot t'_x=\left(\frac{3}{4(1-t)}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}\cdot(2-2t)=\frac{3}{2(1-t)};$$

$$y'''_{x^3}(0)=\frac{3}{2(1-0)}=\frac{3}{2}. \blacksquare$$

2. $x=e^t\cdot\cos t$, $y=e^t\cdot\sin t$; $t_0=0$

Якщо $t_0=0$, то $x_0=e^0\cos 0=1$.

$$x'(t)=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t),$$

$$y'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t),$$

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{e^t\cos t+e^t\sin t}{e^t\cos t-e^t\sin t}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t},$$

$$y'_x(1)=\begin{vmatrix}t_0=0\\x_0=1\end{vmatrix}=\frac{\sin 0+\cos 0}{\cos 0-\sin 0}=1,$$

$$x''(t)=e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)=-2e^t\sin t,$$

$$y''(t)=e^t(\sin t+\cos t)+e^t(\sin t-\cos t)=2e^t\cos t,$$

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-y'_tx''_{tt}}{x'^3_t}=\frac{2e^{2t}\cos t(\cos t-\sin t)+2e^{2t}\sin t(\cos t+\sin t)}{e^{3t}(\cos t-\sin t)^3}=$$

$$=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3};\quad y''_{xx}(1)=\frac{2}{1(1-0)^3}=2. \blacksquare$$

Задача 6.3. *Для функції, заданої в неявному вигляді, знайти* $\frac{d^2y}{dx^2}$*:*

1) $y^3+x^3-3axy=0$;

2) $e^y+xy=e$, $y''(0)$.

Розв'язання.

1. Для функції $y^3+x^3-3axy=0$ знайдемо $\frac{d^2y}{dx^2}$:

1) похідну функції заданої неявно шукатимемо з рівняння:

$$\frac{d}{dx}F(x;y)=0,\ y^3+x^3-3axy=0\Big|_x',\ \ y=y(x),$$

$$3y^2\cdot y'+3x^2-\left((3ax)'\cdot y+3ax\cdot y'\right)=0;$$

$$3y^2\cdot y'+3x^2-(3ay+3ax\cdot y')=0;$$

$$3y^2\cdot y'-3ax\cdot y'=3ay-3x^2;$$

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

2) знайдемо похідну $y''=(y')'$:

$$y''=\frac{(ay'-2x)(y^2-ax)-(ay-x^2)(2y\cdot y'-a)}{(y^2-ax)^2}=$$

$$=\frac{ay'\cdot y^2-a^2xy'-2xy^2+2ax^2-2ay^2\cdot y'+2x^2yy'+a^2y-ax^2}{(y^2-ax)^2}=$$

$$=\frac{-ay^2\cdot y'+ax^2-a^2xy'-2xy^2+2x^2yy'+a^2y}{(y^2-ax)^2}=$$

$$=\frac{-ay^2\left(\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)+ax^2-a^2x\left(\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)-2xy^2-2x^2y\left(\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)+a^2y}{\left(y^2-ax\right)^2}=$$

$$=\frac{2xy\left(3axy-a^3-x^3-y^3\right)}{\left(y^2-ax\right)^2}.\ \blacksquare$$

2. Для функції $e^y+xy=e,\ y''(0)$ знайдемо $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

1) якщо $x=0$, то $e^y+0=e,\ y=1$.

2) $\dfrac{d}{dx}F(x;y)=0,\quad \Rightarrow\quad e^y\cdot y'+y+xy'=0\ \Rightarrow\ y'=-\dfrac{y}{e^y+x}\ \Rightarrow$

$y'(0)=-\dfrac{1}{e^1+0}=\dfrac{1}{e}$.

3) знаходимо другу похідну:

$$y''=(y')'=\frac{-y'\left(e^y+x\right)+y\left(e^y\cdot y'+1\right)}{\left(e^y+x\right)^2}=\frac{\dfrac{y}{e^y+x}\left(e^y+x\right)+y\left(e^y\cdot\left(-\dfrac{y}{e^y+x}\right)+1\right)}{\left(e^y+x\right)^2}=$$

$$=\frac{y\left(2e^y+2-ye^y\right)}{\left(e^y+x\right)^3}=\frac{y\left((2-y)e^y+2x\right)}{\left(e^y+x\right)^3};$$

$$y''(0)=\frac{1\left((2-1)e^1+0\right)}{\left(e^1+0\right)^3}=\frac{e}{e^3}=\frac{1}{e^2}.\ \blacksquare$$

Задача 6.4. *Знайти n-у похідну функції:*

1) $f(x)=2^{3x}$;

2) $f(x)=\ln(ax+b)$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4x-12}$.

Розв'язання.

1. Шукаємо послідовно похідні першого, другого, третього порядку:

$$f'(x)=\left(2^{3x}\right)'=2^{3x}\cdot\ln 2\cdot 3=3\cdot 2^{3x}\cdot\ln 2;$$

$$f''(x)=\left(3\cdot 2^{3x}\cdot\ln 2\right)'=3\ln 2\cdot 3\cdot 2^{3x}\ln 2=3^2\cdot 2^{3x}\ln^2 2;$$

$$f'''(x)=\left(3^2\cdot 2^{3x}\ln^2 2\right)'=3^2\ln^2 2\cdot 3\cdot 2^{3x}\ln 2=3^3\cdot 2^{3x}\ln^3 2.$$

Методом математичної індукції доводимо, що

$$f^{(n)}(x)=3^n\cdot 2^{3x}\ln^n 2.\ \blacksquare$$

2. Працюємо аналогічно до попереднього прикладу і шукаємо похідні до п'ятого порядку включно для того, щоб побачити якусь закономірність: $f'(x)=\left(\ln(ax+b)\right)'=\dfrac{1}{ax+b}\cdot a=a(ax+b)^{-1};$

$$f''(x)=\left(a(ax+b)^{-1}\right)'=-a^2(ax+b)^{-2};$$

$$f'''(x)=\frac{2a^3}{(ax+b)^3}\ f^{IV}(x)=\left(\frac{2a^3}{(ax+b)^3}\right)'=$$

$$=\frac{-2a^3-3(ax+b)^2\cdot a}{(ax+b)^6}=\frac{-2\cdot 3a^4}{(ax+b)^4}$$

$$f^{V}(x)=\frac{2\cdot 3a^4\cdot 4(ax+b)^3\cdot a}{(ax+b)^8}=\frac{2\cdot 3\cdot 4a^5}{(ax+b)^5}\ \ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot a^n}{(ax+b)^n},\ n>1.\ \blacksquare$$

Пропозиція!!! Допишіть цю похідну у таблицю похідних n-го порядку!

3. Спочатку розкладемо знаменник функції $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4x-12}$ на множники. Для цього розв’яжемо квадратне рівняння: $x^2-4x-12=0 \Rightarrow x_1=-2$, $x_2=6$.

Тоді виразимо функцію $f(x)$ через елементарні дроби так званого першого типу $\dfrac{x}{(x-6)(x+2)}=\dfrac{A}{x-6}+\dfrac{B}{x+2}$ (*) і знайдемо поки що невідомі числа методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x}{(x-6)(x+2)}=\frac{A}{x-6}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-6)}{(x-6)(x+2)}.$$

Якщо дроби рівні, знаменники рівні, то рівні і чисельники:

$x=A(x+2)+B(x-6)$ або $x=Ax+2A+Bx-6B$.

Тепер прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x:

$$\begin{array}{c|l} x & \multirow{2}{*}{$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A-6B=0, \end{cases}$} \\ x^0 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ A=3B, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\dfrac{1}{4}, \\ A=\dfrac{3}{4}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{3}{4}\frac{1}{x-6}+\frac{1}{4}\frac{1}{x+2}.$$

Щоб знайти n-у похідну функції $f^{(n)}(x)$, використаємо результати попередньої задачі $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$:

$$y_1^{(n)}=\left(\frac{1}{x-6}\right)^{(n)}=\begin{vmatrix} a=1 \\ b=-6 \end{vmatrix}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-6)^n};$$

$$y_2^{(n)}=\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\begin{vmatrix} a=1 \\ b=2 \end{vmatrix}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}.$$

Отже,

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-6}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-6)^{n+1}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^{n+1}}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{4}\left(\frac{3}{(x-6)^{n}}+\frac{1}{(x+2)^{n}}\right). \blacksquare$$

Задача 6.5. *Знайти* $f^{(n)}(0)$*, якщо:*

1) $f(x)=\operatorname{arctg}x$;

2) $y=x^5e^{\frac{x}{2}}$, $y^{(5)}$.

Розв’язання.

1. Знайдемо похідну $y'(x)$. Для цього використаємо формулу:

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}, \text{ або } y'=\frac{1}{1+x^2}, \text{ або } \left(1+x^2\right)y'=1.$$

Продиференціюємо обидві частини цієї рівності $n-1$ разів, застосувавши до лівої частини формулу Лейбніца $(y_1\cdot y_2)^{(n-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}y_1^{(n-1-k)}y_2^{(k)}$.

$$y_2=x^2+1,\ \ y_2'=2x,\ \ y_2''=2,\ \ y_2'''=\ldots=y_2^{(n-1)}=0,\ n\ge 4;$$

$$y_1=y',\ y_1'=y'',\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}=y^{(n)}.$$

$y_1y_2=\left(1+x^2\right)y'=1$ за умовою $\Rightarrow$

$(y_1y_2)^{(n-1)}=0\ \Rightarrow$

$$C_{n-1}^{0}y_2y_1^{(n-1)}+C_{n-1}^{1}y_2'y_1^{(n-2)}+C_{n-1}^{2}y_2''y_1^{(n-3)}+C_{n-1}^{3}y_2'''y_1^{(n-4)}+\ldots+C_{n-1}^{n-1}y_2^{(n-1)}y_1=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(x^2+1\right)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}2y^{(n-2)}+0=0,$$

$$\left(x^2+1\right)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0.$$

Якщо $x=0$, одержимо:

$f^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)=0$

або $f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$.

Це відношення зв'язує n-у похідну $f^{(n)}(0)$ з похідною $f^{(n-2)}(0)$. Оскільки $f(0)=\operatorname{arctg}0=0$, то маємо: $f''(0)=-1\cdot 0\cdot f(0)=0$, $f^{(4)}(0)=-3\cdot 2\cdot f''(0)=0$ і взагалі $f^{(2k)}(0)=0$.

Оскільки $f'(0)=\dfrac{1}{1+0^2}=1$, то $f'''(0)=-2\cdot 1\cdot f'(0)=-2!$, $f^{(5)}(0)=-4\cdot 3\cdot f'''(0)=4\cdot 3\cdot 2!=4!$

За індукцією одержимо: $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$ ■

2. Нехай $u=x^5$ і $v=e^{\frac{x}{2}}$. Знайдемо: $u'=5x^4$, $u''=20x^3$, $u'''=60x^2$, $u^{(4)}=120x$, $u^{(5)}=120$.

$v'=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $v''=\dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$, $v'''=\dfrac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}$, $v^{(4)}=\dfrac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}$, $v^{(5)}=\dfrac{1}{32}e^{\frac{x}{2}}$.

Підставимо знайдені похідні в формулу Лейбніца при $n=5$ і одержимо п'яту похідну від функції $y=x^5e^{\frac{x}{2}}$:

$$y^{(5)}=120e^{\frac{x}{2}}+5\cdot 120x\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 60x^2\cdot\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 20x^3\cdot\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}+$$

$$+5\cdot 5x^4\cdot\frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}+x^5\frac{1}{32}e^{\frac{x}{2}}=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\left(120+300x+150x^2+25x^3+\frac{25}{16}x^4+\frac{1}{32}x^5\right).$$ ■

Задача 6.6. *Знайти* $y^{(n)}$ *для таких функцій:*

1) $y=\ln\frac{x^2-1}{x^2-4x+4},\ x>2$;   *2)* $y=\frac{1}{x^2(x-1)}$;

3) $y=(3x^2+2x+1)\ln(x+1)$;   *4)* $y=\sin 5x\cos 2x$.

Розв'язання.

1. $y=\ln\frac{x^2-1}{x^2-4x+4}=\ln|x-1|+\ln|x+1|-2\ln|x-2|$.

Якщо розглядати функцію $y(x)$ на проміжку $(2;+\infty)$, то $x-1>0$, $x+1>0$, $x-2>0$, тому $y=\ln(x-1)+\ln(x+1)-2\ln(x-2)$.

$$y'=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-2}=(x-1)^{-1}+(x+1)^{-1}-2(x-2)^{-1};$$

$$y''=-(x-1)^{-2}-(x+1)^{-2}+2(x+2)^{-2};$$

$$y'''=2!(x-1)^{-3}+2!(x+1)^{-3}-2\cdot 2!(x-2)^{-3};$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(x-1)^{-n}+(-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n}-$$

$$-2\cdot(-1)^{n-1}(n-1)!(x-2)^{-n}=$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\left((x-1)^{-n}+(x+1)^{-n}-2(x-2)^{-n}\right)=$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x-1)^n}+\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{2}{(x-2)^n}\right).\ \blacksquare$$

2. Подамо функцію $y(x)$ через прості дроби, використавши метод невизначених коефіцієнтів:

$$y=\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x^2-x)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}.$$

$$\begin{array}{c|}x^2\\x^1\\x^0\end{array}\quad\begin{cases}0=A+C;\\0=-A+B;\\1=-B;\end{cases}\quad\begin{cases}B=-1;\\-A-1=0;\\-1+C=0;\end{cases}\quad\begin{cases}B=-1;\\A=-1;\\C=1.\end{cases}$$

$$y=-x^{-1}-x^{-2}+(x-1)^{-1};$$

$$y'=\frac{1}{-1\cdot(-1)}\cdot x^{-2}+\frac{2}{-1\cdot(-2)}\cdot x^{-3}+\frac{-1}{-1}(x-1)^{-2};$$

$$y''=-2!x^{-3}-3!x^{-4}+2!(x-1)^{-3};$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n+1}n!x^{-(n+1)}+(-1)^{n+1}(n+1)!x^{-(n+2)}+(-1)^{n}n!(x-1)^{-(n+1)}=$$

$$=(-1)^{n+1}n!\left(\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{n+1}{x^{n+2}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \blacksquare$$

3. $y=(3x^2+2x+1)\ln(x+1)$.

$$y'=(6x+2)\ln(x+1)+\frac{3x^2+2x+1}{x+1}=(6x+2)\ln(x+1)+\left(3x-1+\frac{2}{x+1}\right);$$

$$y''=6\ln(x+1)+\frac{6x+2}{x+1}+3-\frac{2}{(x+1)^2}=6\ln(x+1)+6-\frac{4}{x+1}+3-$$

$$-\frac{2}{(x+1)^2}=6\ln(x+1)+9-\frac{4}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2};$$

$$y'''=\frac{6}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{4}{(x+1)^3};$$

$$y^{(4)}=\frac{6\cdot(-1)}{(x+1)^2}+\frac{4\cdot(-2)}{(x+1)^3}+\frac{4\cdot(-3)}{(x+1)^4};$$

$\ldots$

$$y^{(n)}=\frac{6\cdot(-1)^{n-1}(n-3)!}{(x+1)^{n-2}}+\frac{4\cdot(-1)^{n-1}(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}+\frac{4\cdot(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^{n}}=$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^{n-1}(n-3)!}{(x+1)^{n-2}}\cdot\left(3+\frac{2(n-2)}{x+1}+\frac{2(n-2)(n-1)}{(x+1)^2}\right). \blacksquare$$

4. Використавши формулу перетворення добутку тригонометричних функцій в суму, одержимо $y=\sin 5x\cos 2x=\frac{1}{2}(\sin 7x+\sin 3x)$, а далі застосуємо правило для *n*-ої похідної від суми і відомої *n*-ої похідної для функції $y=\sin kx$:

$$y'=k\cos kx=k\sin\left(kx+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''=k^2\sin\left(kx+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad ...,$$

$$y^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$ маємо

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left(7^n\sin\left(7x+\frac{n\pi}{2}\right)+3^n\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)\right).\ \blacksquare$$

Задача 6.7. *Довести, що функція* $y=\sqrt{2x-x^2}$ *задовольняє рівняння* $y^3y''+1=0.$

Доведення. Знайдемо похідну другого порядку для заданої функції:

$$y=\left(2x-x^2\right)^{\frac{1}{2}};\qquad y'=\frac{1}{2}\left(2x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2-2x);$$

$$y''=-\frac{1}{4}\left(2x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2-2x)^2+\frac{1}{2}\left(2x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(2x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2-2x)^2-\left(2x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y^3=\left(2x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Одержане значення підставимо у вихідне рівняння:

$$\left(2x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\left(2x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2-2x)^2-\left(2x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)+1=0;$$

$$-\frac{1}{4}(2-2x)^2-\left(2x-x^2\right)+1=0;$$

$-1+2x-x^2-2x+x^2+1=0$ – правильна рівність для всіх значень незалежної змінної з області визначення рівняння. ■

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1.** *Для заданої функції $f(x)$ знайти похідні $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$:*

1) $f(x)=(x^2+1)^3$, $x_0=1$; ***2)*** $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $x_0=0$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=2$; ***4)*** $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $x_0=1$;

5) $f(x)=x(\sin\ln x+\cos\ln x)$, $x_0=1$;

6) $f(x)=\arccos x+\arcsin x$, $x_0=\dfrac{1}{2}$.

✍**2.** *Знайти похідні другого порядку від функцій:*

1) $y=-\dfrac{22}{x+5}$;

2) $y=\dfrac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$;

3) $y=-\dfrac{1}{9}x\sin 3x-\dfrac{2}{27}\cos 3x$;

4) $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\sqrt{x^2+a^2}$;

5) $y=\dfrac{1}{1+x^3}$;

6) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$;

7) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

8) $y=e^{\sqrt{x}}$.

✍**3.** *Знайти похідні третього порядку від функцій:*

1) $y = ax^2 + bx + c$; ***2)*** $y = \operatorname{tg} x$;

3) $y = \ln \sin x$; ***4)*** $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$;

5) $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$; ***6)*** $y = (2x+3)^3\sqrt{2x+3}$.

✍**4.** *Знайти похідні* n*-го порядку від фуній:*

1) $y = x^n\sqrt{x}$; ***2)*** $y = x^n\sqrt{x}$;

3) $y = 5 - 3\cos^2 x$; ***4)*** $y = 2^x + 2^{-x}$;

5) $y = a^x$; ***6)*** $y = \ln(1+x)$;

7) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; ***8)*** $y = x^{n-1}\ln x$;

9) $y = \sqrt{ax+b}$; ***10)*** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$;

11) $y = \sin^2 x$; ***12)*** $y = \cos^2 x$;

13) $y = \sin^3 x$; ***14)*** $y = \cos^3 x$;

15) $y = \sqrt[5]{x^3}, \quad n = 3$; ***16)*** $y = a^{3x}, \quad n = 3$;

17) $y = \dfrac{x^3}{x-1}, \quad n = 3$; ***18)*** $y = e^x \sin x, n = 4$.

✍**5.** *Для параметрично заданої функції* $y(x)$ *обчислити* y'_x, y''_{x^2} *на* $D(y)$ *і* y'''_{x^3} *в точці* $\left(x(t_0); y(t_0)\right)$:

1) $x = \cos^4 t, \ y = \sin^4 t, \ t_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}, \ y = \dfrac{1}{1+t^2}, \ t_0 = 0$;

3) $x = t\ln t, \ y = \dfrac{\ln t}{t}, \ t_0 = 1$;

4) $x=\dfrac{e^t}{1+t}$, $y=(t-1)e^t$, $t_0=0$;

5) $x=t\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t$, $y=t\operatorname{sh}t-\operatorname{ch}t$, $t_0=0$;

6) $x=\ln\cos t$, $y=\ln\cos 2t$, $t_0=\dfrac{\pi}{6}$;

7) $x=at^2$, $y=bt^3$.

✍**6.** *Знайти похідні n-го порядку від фунцій:*

1) $y=\sin\alpha x\sin\beta x$;

2) $y=\cos\alpha x\cos\beta x$;

3) $y=x\sin ax$;

4) $y=x^2\cos ax$;

5) $y=\ln\dfrac{ax+b}{ax-b}$;

6) $y=x\operatorname{sh}x$;

7) $y=x^2\operatorname{ch}x$;

8) $y=x^2e^{2x}$, $n=50$;

9) $y=\sin x\cos x$, $n=50$;

10) $y=\sin x\cos^2 x$, $n=4$;

11) $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n1}x+a_n$ $(a_i-\textit{числа})$;

12) $y=\left(3x^2+1\right)\left(\dfrac{1}{5}x^3-x^2-3\right)(x-1)^3$, $n=8$;

13) $y=(3x+1)^2\left(2x^2+3\right)(x+7)$, $n=6$;

14) $y=\left(3x+1^2\right)\left(2x^2+3\right)(x+7)^2$, $n=6$.

✍**7.** *Знайти* $f^{(n)}(0)$, *якщо:*

1) $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2-2x+5}$;

2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$;

3) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $f(x)=(\arcsin x)^2$;

5) $f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)$.

✍**8.** *Користуючись формулою Лейбніца, знайти п'яту похідну від функції:*

1) $y = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$; *2)* $y = 2x\cos^2\dfrac{x}{3}$;

3) $y = (x-1)2^{x-1}$; *4)* $y = (x^2+1)\sin x$;

5) $y = x^3\sin ax$; *6)* $y = e^{ax}\cos(bx+c)$.

Відповіді

2. 1) $y'' = -\dfrac{44}{(x+5)^3}$; **2)** $y'' = \ln x$; **3)** $y'' = x\cdot\sin 3x$; **4)** $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$;

5) $y'' = \dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$; **6)** $y'' = \dfrac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$; **7)** $y'' = -\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

8) $y'' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$.

3. 1) $y''' = 0$; **2)** $y''' = 6\sec^4 x - 4\sin^2 x$; **3)** $y''' = 2\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec}^2 x$;

4) $y''' = \dfrac{1}{(x+1)^4}$; **5)** $y''' = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$; **6)** $y''' = 105\sqrt{2x+3}$.

4. 1) $y^{(n)} = \dfrac{3\cdot5\cdot7\ldots\cdot(2n+1)}{2^n}\sqrt{x}$; **2)** $y^{(n)} = \dfrac{3\cdot5\cdot7\ldots\cdot(2n+1)}{2^n}\sqrt{x}$;

3) $y^{(n)} = -\dfrac{3}{2}\cdot2^n\cdot\cos\left(2x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$; **4)** $y^{(n)} = \left(2^x+(-1)^n\cdot2^{-x}\right)\ln^n 2$;

5) ($y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$); **6)** ($y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$);

7) ($y^{(n)} = 2(-1)^n\cdot\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$); **8)** ($y^{(n)} = \dfrac{(n-1)!}{x}$).

§ 7. Основні теореми диференціального числення

Попередньо вивчіть лекцію 21 [11, с. 260–272].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Сформулювати теорему Ферма.

Теорема 7.1 (Ферма). *Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, приймає в цій точці найбільше або найменше значення, тоді якщо в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю:* $\boxed{f'(x_0)=0}$.

Геометрична інтерпретація теореми: якщо похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю, то дотична до графіка функції в цій точці паралельна осі Ox.

Зауважимо, що в умові теореми істотно використовується умова, що точка x_0 є внутрішньою точкою проміжку. Сказати, чому?

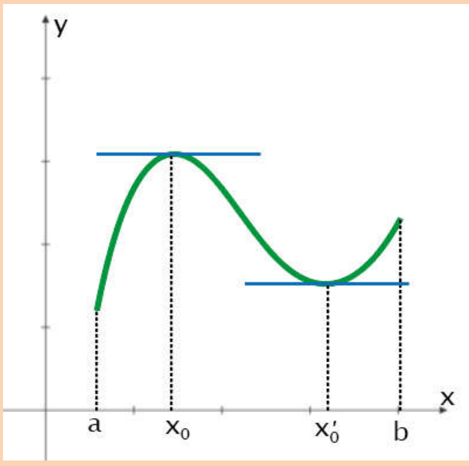


Рис. 7.1

2. Сформулювати теорему Ролля.

Теорема 7.2 (Ролля). *Нехай функція* $f(x)$*:*

1) визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$*;*

2) у кожній точці інтервалу $(a;b)$ *існує скінченна похідна* $f'(x)$*;*

3) на кінцях $[a;b]$ *функція приймає рівні значення:* $f(a)=f(b)$.

Тоді існує принаймні одна точка $\xi \in (a;b)$ *така, що* $f'(\xi)=0$.

3. Чи виконується теорема Ролля, якщо принаймні одна з умов цієї теореми не виконується? Навести відповідні приклади.

У теоремі Ролля всі три умови є суттєвими, щоб вона була правильною. Якщо принаймні одна з цих умов не виконується, то висновок теореми може бути неправильним. Наведемо відповідні приклади.

Приклад 1. *Розглянемо функцію* $y = x-[x]=\{x\},\ x\in[0;1]$.

якщо $x\in(0;1)$, *то* $y\equiv x$ *– диференційовна.*

$y(0)=y(1)=0$.

Однак на графіку функції немає жодної точки, в якій дотична була б паралельною осі Ox. *Це тому, що в точці* $x=1$ *функція не є неперервною (рис. 7.2).*

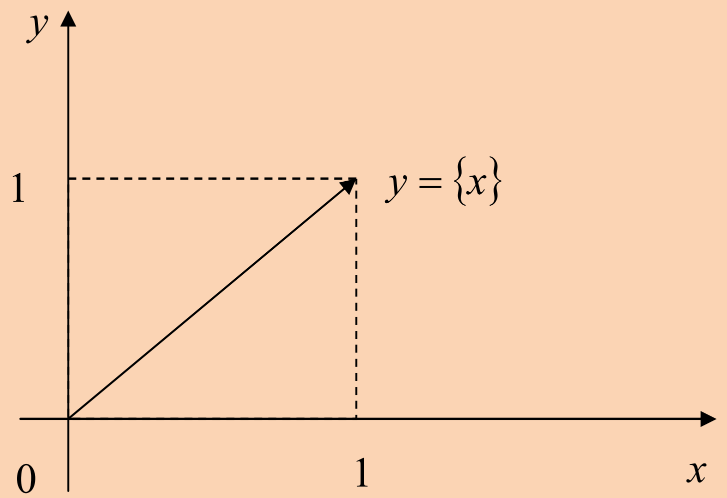


Рис. 7.2

Приклад 2. *Розглянемо функцію* $y = 1 - |x|,\ x \in [-1;1]$.

Функція неперервна на відрізку $[-1;1]$.

На кінцях відрізка приймає рівні значення $f(-1) = f(1) = 0$, *але у внутрішній точці* $x = 0$ *функція не є диференційовною. Тому не існує точки* $\xi \in (-1;1)$, *де б похідна дорівнювала нулю (рис.7.3).*

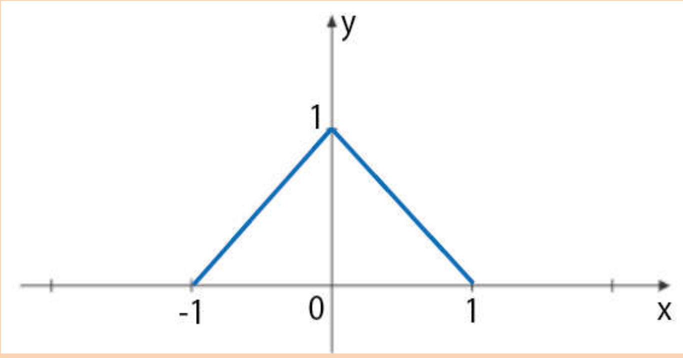


Рис. 7.3

Приклад 3. *Розглянемо функцію* $y = x^2$, $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

Функція $f(x)$ *неперервна на відрізку* $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Функція диференційовна на інтервалі $\left(\frac{1}{2};1\right)$, *однак* $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \neq 1 = y(1)$ *– неоднакові значення на кінцях відрізка. Знову бачимо, що висновок теореми Ролля теж не має місця (рис. 7.4).*

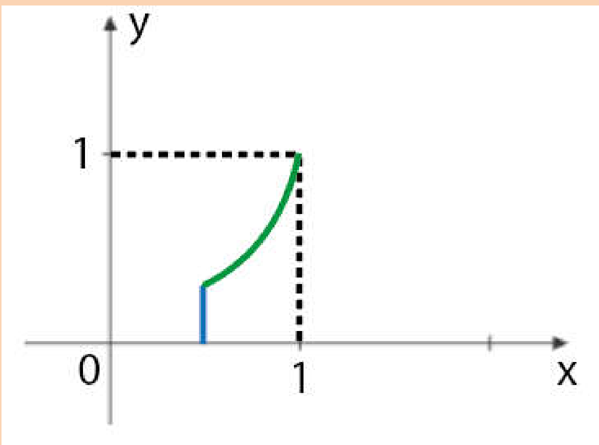


Рис. 7.4

4. Який геометричний зміст теореми Ролля?

1) $f(x) \in C_{[a;b]} \Rightarrow$ *графіком є суцільна лінія;*

2) $\exists \ f'(x) \Rightarrow$ *крива гладка, тобто у кожній її точці можна провести дотичну (рис. 7.4).*

3) на кінцях відрізка функція приймає однакові значення.

Тому існує принаймні одна точка всередині відрізка, у якій дотична буде паралельною осі абсцис (рис. 7.5).

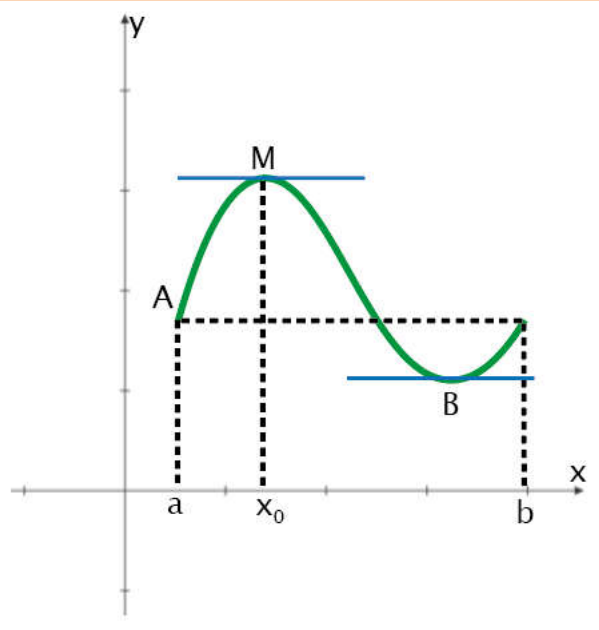


Рис. 7.5

5.Сформулювати теорему Лагранжа.

Теорема 7.3 (Лагранжа). *Нехай функція* $f(x)$*:*

1) визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$*;*

2) існує скінченна похідна $f'(x)$ *у кожній точці інтервалу* $(a;b)$.

Тоді між точками a *і* b *знайдеться така точка* $\xi \in (a;b)$, *що для неї виконується рівність:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \text{ або } f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a). \qquad (7.1)$$

Наслідок 1.

Нехай функція $f(x)$*:*

1) визначена на деякому проміжку (скінченному чи нескінченному)

2) має похідну, яка дорівнює нулю у всіх внутрішніх точках;

3) неперервна на кінцях заданого проміжку.

Тоді функція $f(x)$ *стала на вказаному проміжку:*

$$f(x) \equiv C, \quad x \in X \qquad (7.2)$$

6. Який геометричний зміст теореми Лагранжа? Як ще називають теорему Лагранжа?

Як і теоремі Ролля, теоремі Лагранжа можна надати геометричне тлумачення (рис. 7.6).

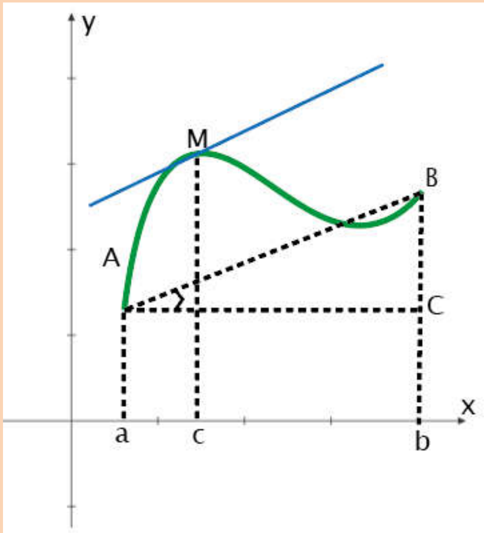


Рис. 7.6

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\angle BAC.$$

Тобто ліва частина рівності $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ *дорівнює кутовому коефіцієнту січної* AB, *а* $f'(\xi)$ *є кутовий коефіцієнт дотичної до кривої* $y = f(x)$ *в точці з абсцисою* $x = \xi$.

На кривій AB *завжди знайдеться принаймні одна точка* M, *в якій дотична паралельна хорді* AB.

Рівність $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ *можна записати в іншому вигляді:*

$$f(b)-f(a)=f'\left(a+\theta(b-a)\right)\cdot(b-a),\ \ 0<\theta<1 \qquad (7.3)$$

Розглянемо тепер відрізок $[x_0;x_0+\Delta x]$, *де точки* $x_0;x_0+\Delta x\in[a;b]$. *На ньому справджуються умови теореми Лагранжа, отже,:*

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,\ \textit{або}$$

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x. \qquad (7.4)$$

Остання формула виражає точне значення приросту функції у точці x_0 *при будь-якому скінченному значенні приросту аргументу* Δx. *Звідси і походить ще одна назва формули (7.4): формули скінченних приростів.*

7.Сформулювати теорему Коші.

Теорема 7.4 (Коші). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$:

1) неперервні на відрізку $[a;b]$;

2) мають похідні в кожній точці інтервалу $(a;b)$;

3) $\varphi'(x)\neq 0$ *в усіх точках інтервалу* $(a;b)$.

Тоді існує така точка $\xi\in(a;b)$, *що:*

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}} \qquad (7.5)$$

Основні поняття, що стосуються теми «Основні теореми диференціального числення» узагальнено та подано у вигляді інтелект-карти (ментальної карти) (рис. 7.7).

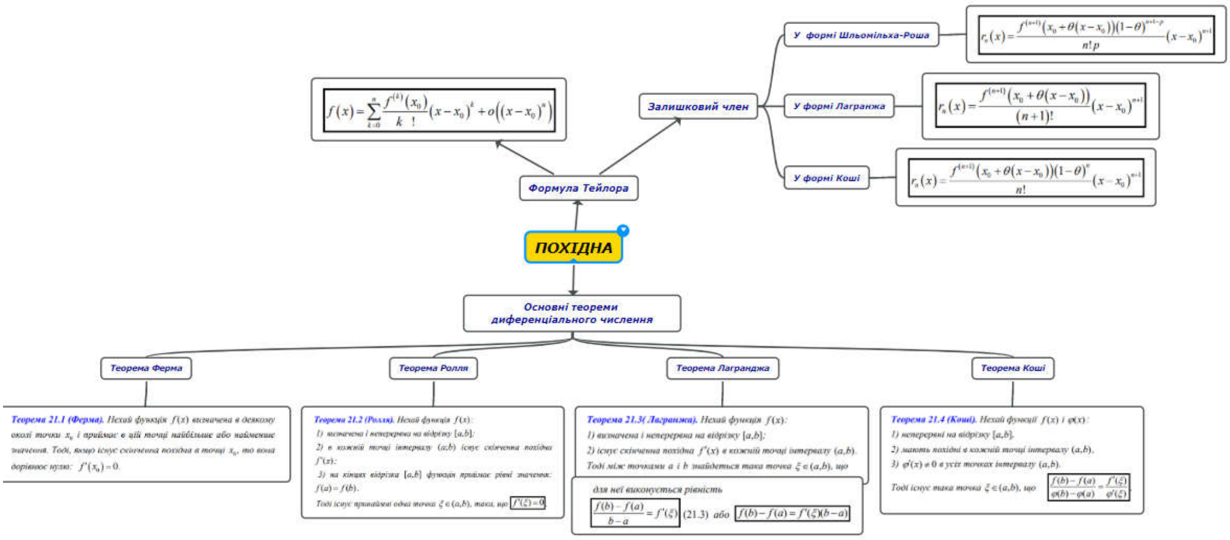


Рис. 7.7

Приклади розв'язування вправ

Задача 7.1. *Перевірити правильність теореми Ролля для функції:* $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, $[-1;2]$.

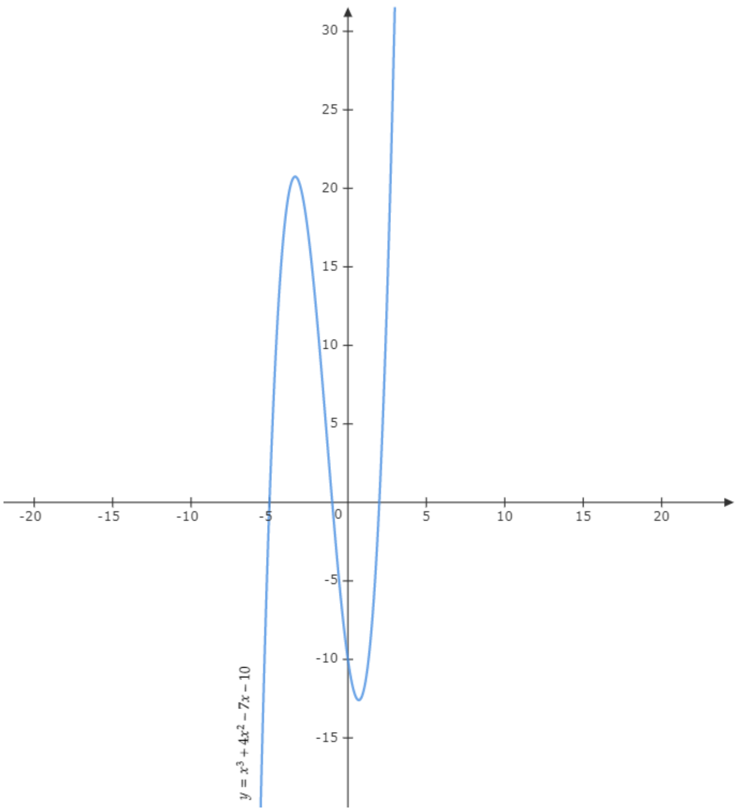


Рис. 7.8

Розв'язання. Перевіримо чи виконуються всі умови теореми Ролля:

1) оскільки областю визначення є всі значення x, які належать множині дійсних чисел, то функція визначена і неперервна на відрізку $[-1;2]$;

2) знайдемо похідну функції: $y' = 3x^2 + 8x - 7$. Отже, при будь-яких значеннях інтервалу $(-1;2)$ похідна скінченна;

3) знайдемо значення функції на кінцях відрізка:
$y(-1) = -1 + 4 + 7 - 10 = 0$; $y(2) = 8 + 16 - 14 - 10 = 0$; $y(-1) = y(2)$.

Бачимо, що значення функції на кінцях відрізка рівні. Тому робимо висновок, що існує точка $\exists \xi \in (-1;2)$:

$y'(\xi) = 0$, або $y'(\xi) = 3\xi^2 + 8\xi - 7 = 0$,

$\xi_1 = \dfrac{-8 - \sqrt{148}}{6} \approx -3{,}36 \notin (-1;2)$; $\xi_2 = \dfrac{-8 + \sqrt{148}}{6} \approx 0{,}69 \in (-1;2)$. ■

Задача 7.2 *Чи можна застосувати теорему Ролля до функції:*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

на відрізку $[0;1]$*? В яких точках* $f'(x) = 0$*?*

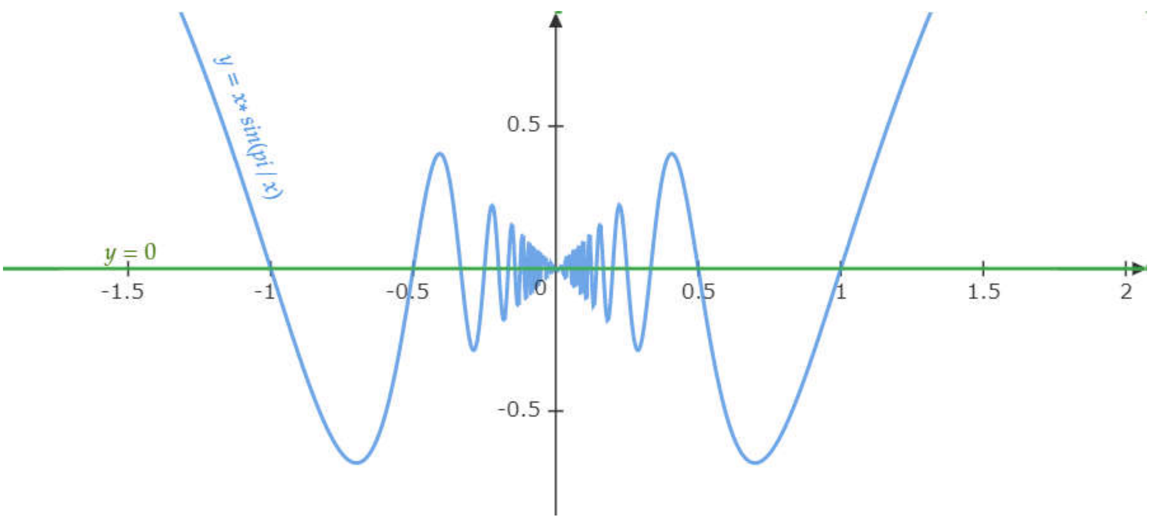


Рис. 7.9

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0+0} x\sin\frac{\pi}{x} = 0 = f(0)$, то функція $f(x)$ неперервна справа у точці $x=0$. Очевидно, що вона неперервна у всіх інших точках відрізка $[0;1]$. Далі, при $x\neq 0$ маємо: $f'(x) = \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$. Тому функція $f(x)$ диференційовна у всіх внутрішніх точках відрізка $[0;1]$ (зауважимо, що вона не диференційовна у точці $x=0$, оскільки границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\pi}{\Delta x}$ не існує. Доведіть це твердження, використавши означення границі функції у точці за Гейне).

Нарешті перевіряємо, що функція приймає однакові значення на кінцях відрізка: $f(0) = f(1) = 0$. Тому теорему Ролля можемо застосувати до функції $f(x)$. Прирівнявши похідну до нуля, отримаємо рівняння:

$$f'(x) = \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x} = 0,$$

$$\sin\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x},$$

$$\text{або інакше } \operatorname{tg}\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x},$$

яке має нескінченно багато розв'язків на відрізку $[0;1]$. ■

Задача 7.3. *Довести, що функція* $f''(x)$, *де* $f(x) = (x-4)^2(x+2)^2$, *має на інтервалі* $(-2;4)$ *два корені.*

Доведення.

1) рівняння $(x-4)^2(x+2)^2 = 0$ рівносильне сукупності двох рівнянь

$$\left[\begin{aligned} &(x-4)^2 = 0, \\ &(x+2)^2 = 0, \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x_1 = 4, \\ &x_2 = -2 \end{aligned}\right.$$

і має два дійсні корені кратності 2. Функція $f(x)=(x-4)^2(x+2)^2$ є неперервною на відрізку $[-2;4]$ і диференційовна на інтервалі $(-2;4)$ як многочлен; $f(-2)=f(4)=0$. Тому за теоремою Ролля існує принаймні одне число $c\in[-2;4]$: $f'(c)=0$, де $f'(x)=4(x-4)(x+2)(x-1)$.

2) розглянемо тепер похідну $f'(x)$ як функцію від змінної x на відрізку $[-2;4]$. Вона є неперервною, диференційовною і $f'(-2)=f'(4)=0$. Але з попереднього пункту ми знаємо ще точку $c\in[-2;4]$: $f'(c)=0$. Отже, для функції $f'(x)$ на відрізках $[-2;c]$ і $[c;4]$ виконуються умови теореми Ролля, тому існують точки c_1 і c_2, $-2<c_1<c$, $c<c_2<4$, такі, що $f''(c_1)=f''(c_2)=0$.

3) Значить, друга похідна $f''(x)=12(x^2-2x-2)$ на відрізку $[-2;4]$ має два дійсні корені, що і потрібно було довести. ■

Задача 7.4. *Показати, що рівняння* $x^3+3x-6=0$ *має тільки один дійсний корінь.*

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=x^3+3x-6$ (рис. 7.10).

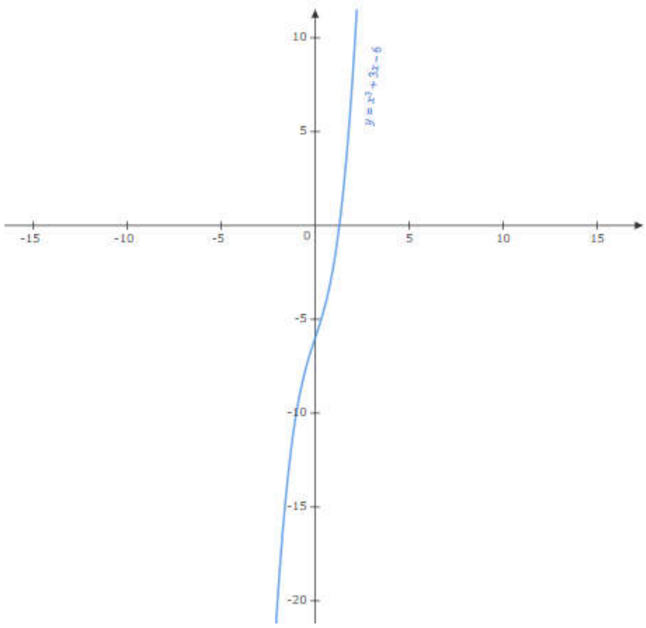


Рис. 7.10

Вона неперервна на $(-\infty;+\infty)$ і має похідну $f'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)$. Легко бачити, що $f'(x)\neq 0$ при будь-яких дійсних значеннях x (у цій задачі $f'(x)>0$, і пізніше ми покажемо, що функція $f(x)$ буде зростаючою на вказаному проміжку). Але тоді наше рівняння може мати не більше одного дійсного кореня, оскільки якщо б воно мало, наприклад, два корені c_1 і c_2: $f(c_1)=f(c_2)=0$, то за теоремою Ролля між точками c_1 і c_2 знайшлась би така точка c, що $f'(c)=0$, а це неможливе.

Існування дійсного кореня випливає з того, що многочлен $f(x)$ непарного степеня. Дійсно, обчислимо значення функції у двох точках $f(1)=-2<0$, $f(2)=8>0$, тому за першою теоремою Больцано-Коші існує точка $x_0\in[1;2]$ така, що $f(x_0)=0$. ■

Задача 7.5. *Довести, що всі корені похідної многочлена* $P(x)=x\cdot(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ *різні.*

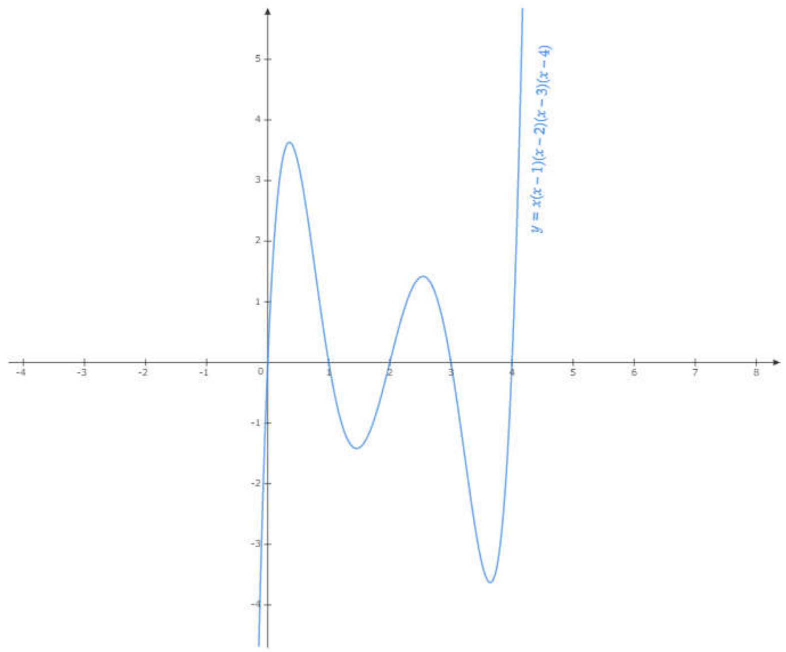


Рис. 7.11

Доведення. Застосуємо теорему Ролля до функції $y=P(x)$ на відрізку $[0;1]$:

1) $P(x)$ неперервна на відрізку $[0;1]$;

2) $P(x)$ диференційовна на інтервалі $(0;1)$;

3) $P(0)=P(1)=0$,

отже існує принаймні одна точка $x_1 \in (0;1)$ така, що $P'(x_1)=0$.

Аналогічно, застосувавши теорему Ролля до функції $y=P(x)$ на відрізках $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, отримаємо точки $x_2 \in (1;2)$, $x_3 \in (2;3)$, $x_4 \in (3;4)$ такі, що $P'(x_2)=P'(x_3)=P'(x_4)=0$.

Оскільки многочлен $P'(x)$ має степінь 4, то він може мати не більше чотирьох різних дійсних коренів. Ми отримали чотири корені x_1, x_2, x_3, x_4, причому $0<x_1<x_2<x_3<x_4<4$, тобто вони різні. ■

Задача 7.6. *Чи можна застосувати теорему Лагранжа до функції* $y=f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$, *якщо:*

1) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ *на* $[-1;1]$;

2) $f(x)=\arcsin(\sin x)$ *на* $[0;1]$.

Розв'язання.

1. $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ на $[-1;1]$.

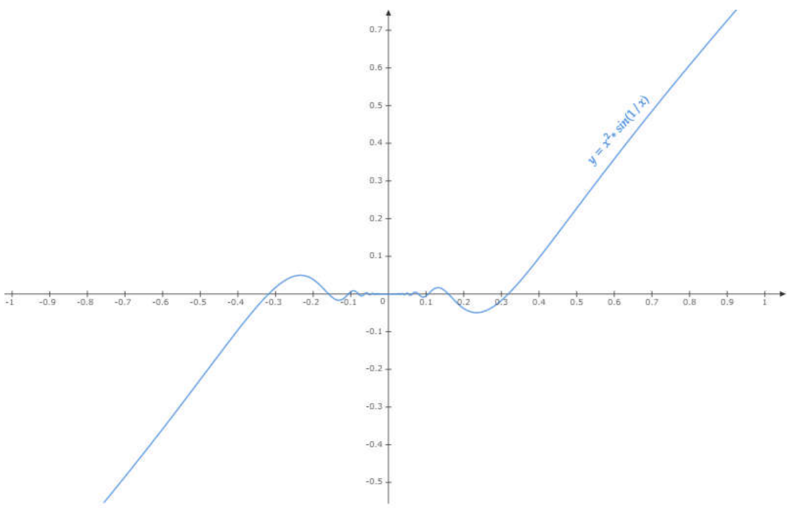


Рис. 7.12

Перевіримо чи виконуються всі умови теореми Лагранжа.

1) оскільки областю визначення є всі значення x, які належать множині дійсних чисел крім $\{0\}$, то дана функція визначена, але не є неперервною на відрізку $[-1;1]$, тобто має розрив.

Отже, перша умова теореми Лагранжа не виконується. А це означає, що теорему Лагранжа не можна застосувати до даної функції на даному відрізку. ■

2. $f(x)=\arcsin(\sin x)$ на $[0;1]$.

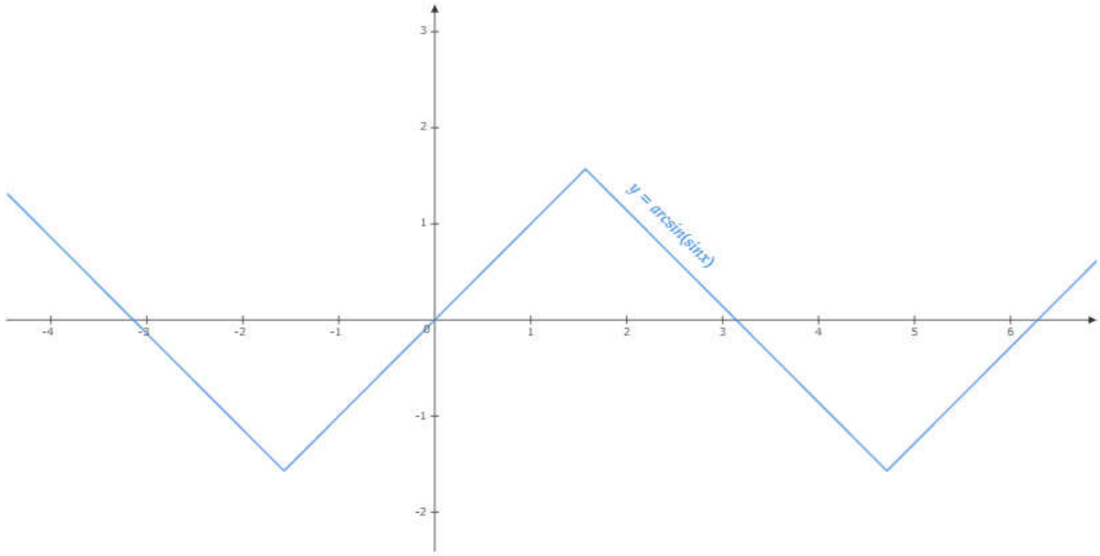


Рис. 7.13

Перевіримо чи виконуються всі умови теореми Лагранжа:

1) знайдемо область визначення функції $f(x)=\arcsin(\sin x)$:

$$-\frac{\pi}{2}<0\le x\le 1<\frac{\pi}{2},$$

функція $y=\sin x$ зростає, тому

$$-1<\sin 0\le \sin x\le \sin 1<1 \quad \text{або} \quad \sin x\in D(\arcsin).$$

Складена функція $f(x)=\arcsin(\sin x)$ неперервна на відрізку $[0;1]$ як композиція двох неперервних функцій.

2) знайдемо похідну:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{\cos x}{|\cos x|}=1,\ x\in[0;1]\subset\left[0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, при будь-яких значеннях інтервалу $(0;1)$ існує скінченна похідна, яка дорівнює одиниці. Умови теореми Лагранжа виконуються, тому існує точка $\xi\in(0;1)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\arcsin(\sin 1)-\arcsin(\sin 0)=1-0=1.$$

Оскільки $f'(x)\equiv 1\ \ \forall x\in(0;1)$, то за точку ξ можна взяти довільну точку інтервалу $(0;1)$. ■

Задача 7.7. *Записати формулу Лагранжа*

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ *і знайти значення* ξ*:*

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $[1;2]$;

2) $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$, $[0;2]$.

Розв'язання.

1. Функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ задовольняє умови теореми Лагранжа на відрізку $[1;2]$, оскільки вона неперервна на цьому відрізку і має скінченну похідну $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$. Тому існує точка $\xi\in(1;2)$:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\ \text{або}\ f(2)-f(1)=f'(\xi)(2-1),$$

$$\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{\xi^2}\ \Rightarrow\ -\frac{1}{2}=-\frac{1}{\xi^2}\ \Rightarrow\ \xi^2=2\ \Rightarrow\ \xi=\pm\sqrt{2}.$$

Значення $\xi=-\sqrt{2}\notin[1;2]$, тому не задовольняє умову задачі. Отже, $\xi=\sqrt{2}\in[1;2]$. ■

2. $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$, $[0;2]$.

Завдання виконуємо аналогічно до попереднього пункту. Функція задовольняє обидві умови теореми Лагранжа як многочлен: вона неперервна і диференційовна $f'(x)=12x^2-10x+1$. Отже існує точка $\xi\in(0;2)$:

$$f(2)-f(0)=f'(\xi)(2-0), \text{ або } f(2)-f(0)=2f'(\xi)\ (*).$$

Знайдемо $f(2)$. Для цього підставимо значення 2 у функцію $f(x)$. Будемо мати $f(2)=12$. Аналогічно шукаємо $f(0)=-2$. Підставимо значення $f(2)$, $f(0)$ і $f'(\xi)$ у формулу (*):

$$12-(-2)=2f'(\xi)\ \Rightarrow\ f'(\xi)=\frac{14}{2}=7\ \Rightarrow\ 12\xi^2-10\xi+1=7\ \Rightarrow$$

$$12\xi^2-10\xi-6=0\ \Rightarrow\ 6\xi^2-5\xi-3=0\ \Rightarrow\ \xi_1=\frac{5-\sqrt{97}}{12}\notin[0;2],$$

$$\xi=\frac{5+\sqrt{97}}{12}\in[0;2].\ \blacksquare$$

Задача 7.8. *Довести, що* $\forall a,b\ (a>0, b>0, b>a)$ *і* $\forall n\geq 2, n\in\mathbb{N}$ *має місце нерівність:* $\boxed{n(b-a)a^{n-1}<b^n-a^n<n(b-a)b^{n-1}}$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x)=x^n$ на відрізку $[a;b]$:

1) $f(x)$ неперервна на $[a;b]$;

2) диференційовна на $(a;b)$,

тому за теоремою Лагранжа існує точка $\xi\in(a;b)$ така, що:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \quad \text{або} \quad \frac{b^n-a^n}{b-a}=n\xi^{n-1}, \quad \text{де } a^{n-1}<\xi^{n-1}<b^{n-1}.$$

Отже,

$$na^{n-1}<\frac{b^n-a^n}{b-a}<nb^{n-1}\ \Rightarrow\ n(b-a)a^{n-1}<b^n-a^n<n(b-a)b^{n-1}.\ \blacksquare$$

Задача 7.9. *Довести, що* $\frac{1}{52}<\ln\frac{52}{51}<\frac{1}{51}$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x)=\ln x$ на відрізку $[51;52]$:

1) $f(x)$ неперервна на [51;52]; 2) диференційовна на (51;52) і $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, тому за теоремою Лагранжа існує точка $c\in(51;52)$ така, що $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow \dfrac{\ln 52-\ln 51}{52-51}=\dfrac{1}{c}\Rightarrow \dfrac{1}{c}=\ln\dfrac{52}{51}$.

Але $51<c<52 \Rightarrow \dfrac{1}{52}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{51} \Rightarrow \dfrac{1}{52}<\ln\dfrac{52}{51}<\dfrac{1}{51}$. ■

Задача 7.10. *Чи можна застосувати теорему Коші до функцій* $f(x)$ *і* $g(x)$, *якщо:* $f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2-1$, $[0;1]$.

Розв'язання. Перевіримо чи виконуються всі умови теореми Коші:

1) оскільки областю визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$ є всі значення x, які належать множині дійсних чисел, то функції визначені і неперервні на відрізку $[0;1]$.

2) знайдемо похідні $f'(x)=3x^2-1$; $g'(x)=2x$, вони є скінченними на даному інтервалі $(0;1)$.

3) перевіримо третю умову: $g'(x)=2x\neq 0$ на інтервалі $(0;1)$.

Отже, теорема Коші можна застосувати до функцій $f(x)$ і $g(x)$ на даному проміжку, тобто існує точка $\xi\in(0;1)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\text{ або }\frac{1-1-0}{1-1-(0-1)}=\frac{3\xi^2-1}{2\xi},\ \xi=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Значення $\xi=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\notin[0;1]$, значить не задовольняє умову задачі, а $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\in[0;1]$. ■

Задача 7.11. *Нехай функції* $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ *неперервні на відрізку* $[a,b]$, *диференційовні на інтервалі* (a,b). *Покладемо*

$$\varphi(x):=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

Довести, що існує точка $\xi\in(a,b)$, для якої $\varphi'(\xi)=0$. Як наслідки, одержати з даного твердження теореми Лагранжа і Коші.

Доведення. Функція

$$\varphi(x)=f(x)\underbrace{\begin{vmatrix} g(a) & h(a) \\ g(b) & h(b) \end{vmatrix}}_{const}-g(x)\underbrace{\begin{vmatrix} f(a) & h(a) \\ f(b) & h(b) \end{vmatrix}}_{const}+h(x)\underbrace{\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}}_{const}$$

задовольняє умовам теореми Ролля (**доведіть!**), зокрема

$$\varphi'(x)=f'(x)\begin{vmatrix} g(a) & h(a) \\ g(b) & h(b) \end{vmatrix}-g'(x)\begin{vmatrix} f(a) & h(a) \\ f(b) & h(b) \end{vmatrix}+h'(x)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}$$

або

$$\varphi'(x):=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

$$\varphi(a):=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}=0,\ \varphi(b):=\begin{vmatrix} f(b) & g(b) & h(b) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}=0.$$

Тому існує точка $\xi\in(a,b)$ така, що $\varphi'(\xi)=0$, або

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}=0,$$ що й треба було довести.

Якщо $h(x)=1$, $h'(x)=0$, то:

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) \\ f(a) & g(a) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)\big(g(b)-g(a)\big) = g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$ – теорема Коші.

Якщо $h(x)=1, h'(x)=0$ і $g(x)=x, g'(x)=1$, то

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow af'(\xi)+f(b)-f(a)-bf'(\xi)=0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)(b-a) = f(b)-f(a) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$ – теорема Лагранжа. ■

Задача 7.12. *Довести тотожність:*

1) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi - 2\operatorname{arctg} x, \quad x \ge 1;$

2) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}, \quad x \ge 1;$

3) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} 2\operatorname{arctg} x, & -1 \le x \le 1, \\ -\pi - 2\operatorname{arctg} x, & x \le -1; \end{cases}$

4) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}, \quad x > -1;$

5) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1.$

Доведення. *1.* Використаємо наслідок з теореми Лагранжа про сталість функції:

$$f'(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv C = const, \quad x \in X.$$

Утворимо функцію $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x, \quad x\ge 1$. Вона є неперервною у всіх внутрішніх точках проміжку, має похідну:

$$f(x)=\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctgx}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{2}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}+\frac{2}{1+x^2};$$

Оскільки $x>1$, то $x^2-1>0$, отже $\left|1-x^2\right|=x^2-1$, і

$$f'(x)=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}+\frac{2}{1+x^2}=-\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+x^2}\equiv 0.$$

Тому $f(x)\equiv C$ для всіх $x\ge 1$, або $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x=C, \quad x\ge 1.$

Покладемо $x=1$:

$$\arcsin\frac{2x}{1+1^2}+2\operatorname{arctg}1=C,\ \frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{4}=C,\ \text{звідки } C=\frac{\pi}{2}.$$

Остаточно маємо: $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}x$. ■

Решту тотожностей доведіть самостійно!!!

Задача 7.13. *Довести нерівність:*

1) $\left|\sin x-\sin y\right|\le\left|x-y\right|$;

2) $py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$, *якщо* $0<y<x$.

Доведення. Використаємо формулу Лагранжа:

1. $f(t)=\sin t, \quad f'(t)=\cos t,$

$\sin x - \sin y = (x-y)\cos\xi$, звідки оцінимо:

$|\sin x - \sin y| = |x-y| \cdot |\cos\xi| \le |x-y|$, що й треба було довести. ■

2. $f(t) = t^p, \quad f'(t) = pt^{p-1}$,

$x^p - y^p = p \cdot \xi^{p-1}(x-1), \quad y < \xi < x$, звідки

$py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y)$, що й треба було довести. ■

Завдання для самостійного розв'язування

✍ **1.** *Перевірити правильність теореми Ролля для функції:*

1) $y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$, $[1;1]$; ***2)*** $y = 3^{\sin x}$, $[0;\pi]$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $[1;1]$; ***4)*** $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$, $[1;2]$;

5) $y = \ln\sin x$, $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

✍ **2.** *Чи застосована теорема Ролля до функції:*

1) $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ *на відрізку* $[-1;1]$*?*

2) $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ якщо } x \le 0, \\ e^x, \text{ якщо } x > 0, \end{cases}$

на відрізку $[-1;1]$*?*

3) $f(x) = \begin{cases} x+3, \text{ якщо } x \le -1, \\ x^4, \text{ якщо } x > -1? \end{cases}$

✍ **3.** *Довести, що всі корені похідної від многочлена* $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$ *дійсні.*

✍ **4.** *Довести за допомогою теореми Ролля, що рівняння* $x^4 - 4x - 1 = 0$ *не може мати більше двох дійсних коренів.*

✍ **5.** *Чи застосовна теорема Лагранжа до функції* $y = f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$*, якщо:*

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},[-1;2]$; *2)* $f(x)=\sqrt[5]{x^4\cdot(x-1)},\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$;

3) $f(x)=4-x^2,[-2;1]$; *4)* $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x},[-1;1]$;

5) $f(x)=\sqrt{\sin x^2},[0;1]$; *6)* $f(x)=x(1-\ln x),[1;e]$;

7) $f(x)=\arcsin 2x,[x_0;x_0+\Delta x]$?

✍ **6.** *Записати формулу Лагранжа* $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ *і знайти значення* c*:*

1) $f(x)=x^2$*;* *2)* $f(x)=5x^3+2x$*;*

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$*;* *4)* $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$*;*

5) $f(x)=x-x^3,\ [-2;1]$*;* *6)* $f(x)=\ln x,\ [1;e]$*;*

7) $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ [a;b]$.

✍ **7.** *Чи застосована теорема Коші до функцій* $f(x)$ *і* $g(x)$*, якщо:*

1) $f(x)=e^x,\ g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2},\ [-2;2]$*;*

2) $f(x)=\sin x,\ g(x)=\sqrt[3]{x^2},\ [-8;8]$*;*

3) $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt[3]{x},\ [a;b],\ a>0$*;*

4) $f(x)=\cos x,\ g(x)=\ln(1+x),\ [a;b],\ a>-1$.

✍ **8.** *Довести нерівність:*

1) $|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|\le|x-y|$;

2) $\dfrac{x-y}{x}<\ln\dfrac{x}{y}<\dfrac{x-y}{y},\quad 0<y<x$;

3) $|x-y|\le\left|x^2\ln x-y^2\ln y\right|\le 3e|x-y|\ \forall\{x,y\}\subset[1;e]$;

4) $\left|x^2\operatorname{arctg}x-y^2\operatorname{arctg}y\right|\le\dfrac{1+\pi}{2}|x-y|,\forall\{x,y\}\subset[0;1]$;

5) $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x,\ x>0$;

6) $e^x > 1+x,\ x>0$;

7) $e^x > ex,\ x>1$;

8) $\dfrac{x-y}{\cos^2 y} \le \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \le \dfrac{x-y}{\cos^2 x},\ 0<y\le x<\dfrac{\pi}{2}$;

9) $x-y < \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y < e^x(x-y),\ 0<y<x$;

10) $x-y < \arcsin x - \arcsin y < 2(x-y),\ -\dfrac{3}{5} < y < x < \dfrac{3}{5}$;

11) $x-y < \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y < 4(x-y),\ -\dfrac{\pi}{3} < y < x < \dfrac{\pi}{3}$;

12) $|\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y| \ge \dfrac{4}{3}(y-x),\ \dfrac{\pi}{6} < x < y < \dfrac{\pi}{3}$;

13) $(x-y)e^y < e^x - e^y < (x-y)e^x,\ y<x$;

14) $(x-y)2^{y-1} < 2^x - 2^y < (x-y)2^x,\ y<x$.

✍ **9.** *На кривій* $y = x^2+3x+1$ *знайти точку, в якій дотична паралельна хорді* AB, $A(-1;-1)$, $B(1;5)$.

✍ **10.** *Чи задовольняє функція*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x<1, \\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1, \end{cases}$$

умовам теореми Лагранжа на відрізку $[0;4]$*?*

✍ **11.** *Чи задовольняє функція*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ e^x, & x>0, \end{cases}$$

умовам теореми Ролля на відрізку $[-1;1]$*?*

✍ ***12.*** *Якщо функція*

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1,\\ 4x-x^2-2, & x>1, \end{cases}$$

задовольняє умовам теореми Лагранжа на відрізку $[0;2]$*, то знайти точку* c*, в якій* $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$*. Намалювати графік на вказаному відрізку та обґрунтувати геометричні результати дослідження.*

§ 8. Формула Тейлора

Попередньо вивчіть лекції 23 і 24 [11, с. 281–296].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Сформулювати задачу про апроксимацію функції $f(x)$ многочленом.

Нехай у деякому околі точки x_0 існують похідні функції $y=f(x)$ до n–го порядку включно. Потрібно встановити, чи існує многочлен $P_n(x)$ степеня не вище n такий, що функцію $f(x)$ можна замінити цим многочленом з точністю до нескінченно малих більш високого порядку, ніж члени многочлена, тобто

$$f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0, \qquad (8.1)$$

і $$P_n(x_0)=f(x_0);\ P_n'(x_0)=f'(x_0);\ \dots;\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0) \qquad (8.2)$$

2. Сформулювати теорему Тейлора з залишковим членом у формі Пеано.

Теорема 8.1. *Нехай функція $f(x)$, яка визначена на інтервалі $(a;b)$ має в точці x_0 цього інтервалу похідні до n-го порядку включно. Тоді при $x\to x_0$ правильна рівність*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right);$$

або

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)} \qquad (8.3)$$

Останню формулу називають ***формулою Тейлора n-го порядку із залишковим членом у формі Пеано. Многочлен*** $P_n(x)$ *називають* ***многочленом Тейлора,*** *а функцію* $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$ *називають* ***залишковим членом n-го порядку формули Тейлора.***

Довільний многочлен $P_n(x)$ завжди можна розкласти за степенями $(x-x_0)$:

$$\boxed{\begin{gathered}P_n(x)=P_n(x_0)+\frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+....+\\+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\end{gathered}} \qquad (8.4)$$

3. Записати залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа.

Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$\boxed{r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}},\ 0<\theta<1 \qquad (8.5)$$

4. Записати залишковий член формули Тейлора у формі Коші.

Формула Тейлора із залишковим членом у формі Коші:

$$\boxed{r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)(1-\theta)^n}{n!}(x-x_0)^{n+1}} \qquad (8.6)$$

5. Записати формулу Шльомільха-Роша.

Формула Шльомільха-Роша:

$$\boxed{r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}\cdot\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p} \qquad (8.7)$$

6. Яку формулу називають формулою Маклорена? Записати формулу Маклорена.

Якщо у формулі (8.3) покласти $x_0 = 0$*, то одержимо частковий випадок формули Тейлора, яку називають* ***формулою Маклорена:***

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)} \qquad (8.8)$$

Таблиця розкладу основних елементарних функцій за формулою Тейлора-Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),\ x \to 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^{n+1}),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),\ |x| < 1.$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 8.1. *Розкласти многочлен* $P_n(x)$ *за степенями двочлена* $(x-x_0)$*:*

1) $P_6(x)=\left(x^2-3x+1\right)^3$, $x_0=0$;

2) $P_4(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$, $x_0=4$;

3) $P_5(x)=x^5-3x^4-2x^3+4x^2-x+2$, $x_0=1$.

Розв'язання. ***1.*** Для того, щоб розкласти многочлен $P_n(x)$ за степенями двочлена $(x-x_0)$, скористаємося формулою (8.3):

А оскільки в нашому прикладі $n=6$ і $x_0=0$, то попередня формула набере такого вигляду:

$$P_6(x)=\sum_{k=0}^{6}\frac{P_6^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k=P_6(0)+P_6'(0)\cdot x+\frac{P_6''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{P_6'''(0)}{3!}\cdot x^3+$$

$$+\frac{P_6^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4+\frac{P_6^{(5)}(0)}{5!}\cdot x^5+\frac{P_6^{(6)}(0)}{6!}\cdot x^6.$$

Далі знаходимо значення $P_6(0)$, підставивши в дану функцію значення $x_0=0$. Після цього шукаємо першу похідну $P_6'(x)$. Тоді знаходимо значення першої похідної в точці $x_0=0$. Далі шукаємо другу похідну. Після цього знаходимо значення другої похідної в точці $x_0=0$.

Аналогічно шукаємо третю, четверту, п'яту і шосту похідну та знаходимо їх значення в точці $x_0=0$.

Далі знайдені значення підставляємо у формулу (8.4).

$P_6(x) = (x^2 - 3x + 1)^3;$ $\qquad$ $P_6(0) = 1;$

$P_6'(x) = 3(x^2 - 3x + 1)^2 \cdot (2x - 3);$ $\qquad$ $P_6'(0) = -9;$

$$P_6''(x) = 6(x^2 - 3x + 1)(2x - 3)^2 + 3(x^2 - 3x + 1)^2 2 =$$

$$= 30(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 2);$$

$$P_6''(0) = 30 \cdot 1 \cdot 2 = 60;$$

$$P_6'''(x) = \left(30(x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 2)\right)' =$$

$$= 30\left((2x - 3)(x^2 - 3x + 2) + (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)\right) =$$

$$= 30(2x - 3)(2x^2 - 6x + 3);$$

$$P_6'''(0) = 30 \cdot (-3) \cdot 3 = -270;$$

$$P_6^{(4)}(x) = \left(30(2x - 3)(2x^2 - 6x + 3)\right)' =$$

$$= 30 \cdot \left(2(2x^2 - 6x + 3) + (2x - 3)(4x - 6)\right) = 360(x^2 - 3x + 2);$$

$$P_6^{(4)}(0) = 360 \cdot 2 = 720;$$

$P_6^{(5)}(x) = 360(2x - 3);$ $\qquad$ $P_6^{(5)}(0) = -1080;$

$$P_6^{(6)}(x) = 360 \cdot 2 = 720.$$

$$P_6(x) = -9x + + \frac{60}{2!} \cdot x^2 + \frac{-270}{3!} \cdot x^3 + \frac{720}{4!} \cdot x^4 + \frac{-1080}{5!} \cdot x^5 + \frac{720}{6!} \cdot x^6 =$$

$$= -9x + 30x^2 - 45x^3 + 30x^4 - 9x^5 + x^6. \blacksquare$$

2. $P_4(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$, $x_0 = 4$.

У нашому прикладі $n = 4$ і $x_0 = 4$, тому попередня формула набере такого вигляду:

$$P_4(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$$+\frac{P^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4;$$

$P(4)=4^4-5\cdot 4^3+16-12+4=256-320+16-12+4=-56;$

$P'(x)=4x^3-15x^2+2x-3;$ $\quad P'(4)=4\cdot 4^3-15\cdot 16+8-3=21;$

$P''(x)=12x^2-30x+2;$ $\quad P''(4)=12\cdot 16-30\cdot 4+2=74;$

$P'''(x)=24x-30;$ $\quad P'''(4)=66;$

$P^{(4)}(x)=24.$

$$P_4(x)=-56+21(x-4)+\frac{74}{2!}\cdot(x-4)^2+\frac{66}{3!}\cdot(x-4)^3+\frac{24}{4!}\cdot(x-4)^4=$$

$$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4.\ \blacksquare$$

3. $P_5(x)=x^5-3x^4-2x^3+4x^2-x+2$**,** $x_0=1$**.**

Оскільки у нашому прикладі $n=5$ і $x_0=1$, то попередня формула набере такого вигляду:

$$P_5(x)=P(x_0)+P'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{P'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3+\frac{P^{(4)}(x_0)}{4!}\cdot(x-x_0)^4+\frac{P^{(5)}(x_0)}{5!}\cdot(x-x_0)^5$$

$P(1)=1-3-2+4-1+2=1;$

$P'(x)=5x^4-12x^3-6x^2+8x-1;$ $\quad P'(1)=5-12-6+8-1=-6;$

$P''(x)=20x^3-36x^2-12x+8;$ $\quad P''(1)=20-36-12+8=-20;$

$P'''(x)=60x^2-72x-12;$ $\quad P'''(1)=60-72-12=-24;$

$P^{(4)}(x)=120x-72;$ $\quad P^{(4)}(1)=120-72=48;$

$P^{(5)}(x)=120;$ $\quad P^{(5)}(1)=120.$

$$P_5(x)=1-6(x-1)+\frac{-20}{2!}\cdot(x-1)^2+\frac{-24}{3!}\cdot(x-1)^3+\frac{48}{4!}\cdot(x-1)^4+$$

$$+\frac{120}{5!}\cdot(x-1)^5=1-6(x-1)-10(x-1)^2-4(x-1)^3+$$

$$+2(x-1)^4+(x-1)^5.\ \blacksquare$$

Задача 8.2. *Розкласти функцію $f(x)$ в околі точки x_0 за формулою Тейлора до n-го порядку включно:*

1) $f(x)=x^3\ln x$, $x_0=1$, $n=4$;

2) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x_0=2$, $n=3$.

Розв'язання. ***1.*** Для розкладу функції $f(x)$ в околі точки x_0 до четвертого порядку включно скористаємося формулою (8.3).

Для цього знаходимо значення функції $f(1)$, першу похідну $f'(x)$, $f'(1)$. Далі шукаємо другу, третю і четверту похідну та їх значення в точці $x_0=1$.

Одержані значення підставляємо у формулу (8.3):

$$f(1)=1\cdot\ln 1=0;$$

$$f'(x)=3x^2\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2=x^2(3\ln x+1);$$

$$f'(1)=3\ln 1+1=1;$$

$$f''(x)=2x(3\ln x+1)+x^2\cdot\frac{3}{x}=2x(3\ln x+1)+3x=x(6\ln x+5);$$

$$f''(1)=5;$$

$$f'''(x)=1\cdot(6\ln x+5)+x\cdot\frac{6}{x}=6\ln x+5+6=6\ln x+11;$$

$$f'''(1)=11;$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{6}{x};\quad f^{(4)}(1)=6.$$

$$x^3\ln x=(x-1)+\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{11}{6}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4+o\left((x-1)^4\right).\ \blacksquare$$

2. Для розкладу функції $f(x)$ в околі точки x_0 до третього порядку включно скористаємося формулою (8.3) і використаємо алгоритм розв'язання попереднього прикладу.

$f(2)=2$; $\qquad a_0=f(2)=2;$

$$f'(x)=\frac{1(x-1)-x}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}; \qquad f'(2)=-1;$$

$$a_1=\frac{f'(2)}{1!}=-1;$$

$$f''(x)=\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{-(-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}; \qquad f''(2)=2;$$

$$a_2=\frac{f''(2)}{2!}=1;$$

$$f'''(x)=\left(\frac{2}{(x-1)^3}\right)'=\frac{-2\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{-6}{(x-1)^4}; \qquad f'''(2)=-6;$$

$$a_3=\frac{f'''(2)}{3!}=-1.$$

$$f(x)=2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+o\left((x-2)^3\right). \blacksquare$$

Задача 8.3. *Функцію* $f(x)$ *подати у вигляді формули Маклорена із залишковим членом у формі Пеано* $o(x^n)$*, якщо:*

1) $f(x)=\ln\dfrac{3+x}{2-x}$;

2) $f(x)=e^x\ln(1+x)$, $n=4$;

3) $f(x)=\ln\dfrac{1+2x}{1-x}$;

4) $f(x)=(x+5)\cdot e^{2x}$;

5) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$.

Розв'язання. *1.* Спочатку зробимо відповідні перетворення функції, скориставшись формулою перетворення логарифма частки різницею логарифмів: $\ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v$.

Одержимо: $\ln\frac{3+x}{2-x}=\ln(3+x)-\ln(2-x)$. Тоді в аргументах логарифмів винесемо з дужок відповідно трійку й двійку, а вирази $\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$ і $\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ уже можна розкласти за формулою з таблиці розкладу основних елементарних функцій:

$$\ln\frac{3+x}{2-x}=\ln(3+x)-\ln(2-x)=\ln 3\left(1+\frac{x}{3}\right)-\ln 2\left(1-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)-\ln 2-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}+\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\ln\frac{3}{2}+\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^k}{k}+o\left(\frac{x}{3}\right)^n\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^k}{k}+o\left(\frac{x}{2}\right)^n\right).$$

Одержали розклад функції $f(x)$ за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано $o(x^n)$.

$$\ln\frac{3+x}{2-x}=\ln\frac{3}{2}+\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{3^k\cdot k}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k+1}\frac{x^k}{2^k\cdot k}\right)+o(x^n)=$$

$$=\ln\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{3^k\cdot k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{2^k\cdot k}+o(x^n)=$$

$$=\ln\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{3^k}+\frac{1}{2^k}\right)\cdot\frac{x^k}{k}+o(x^n).\ \blacksquare$$

2. Скористаємося формулами з таблиці розкладу основних елементарних функцій, які підставимо у функцію і розкриємо дужки, зведемо подібні доданки:

$$e^x \ln(1+x) = \left(\sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^4\right)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^4\right)\right) =$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right) \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} = x + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)x^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)x^4 + o\left(x^4\right) =$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^4\right). \blacksquare$$

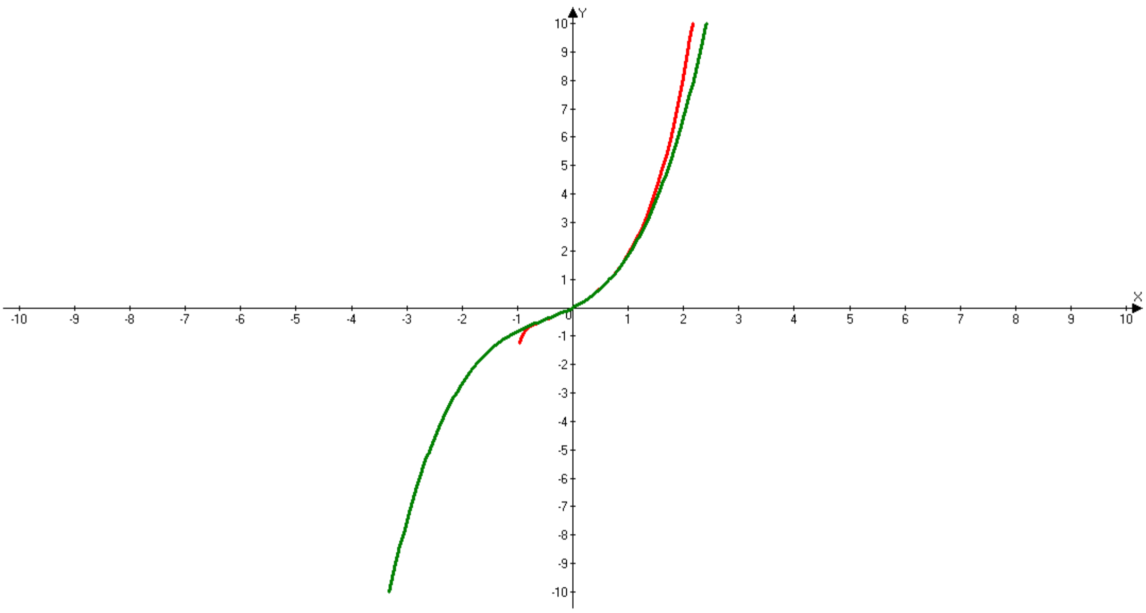


Рис. 8.1

3. $\ln\frac{1+2x}{1-x} = \ln(1+2x) - \ln(1-x) = \ln(1+2x) - \ln(1+(-x)).$

Скористаємося формулою з таблиці:

$$\ln\frac{1+2x}{1-x} = \ln(1+2x) - \ln(1-x) = \ln(1+2x) - \ln(1+(-x)) =$$

$$= 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} - \frac{(4x)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n} + o\left(x^n\right) -$$

$$-\left((-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-\frac{(-x)^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}+o\left(x^n\right)\right)=$$

$$=2x-\frac{2^2x^2}{2}+\frac{2^3x^3}{3}-\frac{2^4x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^nx^n}{n}+o\left(x^n\right)+$$

$$+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)=$$

$$=3x+\frac{\left(1-2^2\right)}{2}x^2+\frac{\left(1+2^3\right)}{3}x^3+\frac{\left(1-2^4\right)}{4}x^4+\ldots+$$

$$+\frac{\left(1+(-1)^{n+1}2^n\right)}{n}x^n+o\left(x^n\right).$$

Одержали, розклад функції $f(x)$ у вигляді формули Маклорена із залишковим членом у формі Пеано $o\left(x^n\right)$.

$$\ln\frac{1+2x}{1-x}=3x+\frac{\left(1-2^2\right)}{2}x^2+\frac{\left(1+2^3\right)}{3}x^3+\frac{\left(1-2^4\right)}{4}x^4+\ldots+$$

$$+\frac{\left(1+(-1)^{n+1}2^n\right)}{n}x^n+o\left(x^n\right).\ \blacksquare$$

4. $f(x)=(x+5)\cdot e^{2x}$.

$$(x+5)e^{2x}=\left|\begin{matrix}e^t\\ t=2x\end{matrix}\right|=(x+5)\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^n}{n!}+o\left(x^n\right)\right)=$$

$$=\left(x+\frac{2x^2}{1!}+\frac{2^2x^3}{2!}+\ldots+\frac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!}+\frac{2^nx^{n+1}}{n!}+o\left(x^{n+1}\right)\right)+\left(5+\frac{5\cdot 2x}{1!}+\frac{5\cdot 2^2x^2}{2!}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{5\cdot 2^nx^n}{n!}+o\left(x^n\right)\right)=5+\left(1+\frac{5\cdot 2}{1!}\right)x+\ldots+$$

$$+\left(\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{5\cdot 2^n}{n!}\right)x^n+o\left(x^n\right).\ \blacksquare$$

5. Функція $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$ є неправильним дробом, оскільки степінь чисельника дорівнює степеню знаменника. Виділимо цілу і дробову частини, поділивши «куточком» чисельник x^2+5 на знаменник x^2+x-12:

$$\begin{array}{r|l} x^2+5 & x^2+x-12 \\ \cline{2-2} x^2+x-12 & 1 \\ \hline -x+17 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+x-12}=1+\frac{-x+17}{x^2+x-12}=1-\frac{x-17}{x^2+x-12}.$$

Далі розкладемо вираз $\dfrac{x-17}{x^2+x-12}$ на елементарні дроби:

$$\frac{x-17}{x^2+x-12}=\frac{x-17}{(x+4)(x-3)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-3},$$

де A і B - поки що невизначені коефіцієнти. Праву частину зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{x-17}{(x+4)(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x+4)}{(x+4)(x-3)}.$$

Оскільки знаменники обох частин однакові, то прирівняємо їх чисельники: $x-17=Ax-3A+Bx+4B$. Після цього знайдемо значення A і B, використавши метод невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{l|l} x & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} A+B=1, \\ -3A+4B=-17, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1-B, \\ -3(1-B)+4B=-17, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1-B, \\ 7B=-14, \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} A=3, \\ B=-2 \end{array}\right.$$

Таким чином, наша функція матиме вигляд $f(x)=1-\dfrac{3}{x+4}+\dfrac{2}{x-3}$ або

$$f(x)=1-\frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-3}=1-\frac{3}{4\left(1+\frac{x}{4}\right)}+\frac{2}{-3\left(1-\frac{x}{3}\right)}=$$

$$=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{4}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}.$$

А далі, використовуючи формулу таблиці, подамо функцію у вигляді формули Маклорена із залишковим членом у формі Пеано $o\left(x^n\right)$:

$$\frac{x^2+5}{x^2+x-12}=1-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{x}{4}\right)^k+o\left(x^n\right)-\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{3}\right)^k+o\left(x^n\right)=$$

$$=1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3x^k}{4^{k+1}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{2x^k}{3^{k+1}}+o\left(x^n\right)=$$

$$=1-\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\frac{3}{4^{k+1}}-\frac{2}{3^{k+1}}\right)x^k+o\left(x^n\right).\ \blacksquare$$

Задача 8.4. *Функцію* $f(x)$ *подати у вигляді формули Маклорена з* $o\left(x^{2n+1}\right)$*, якщо:*

1) $f(x)=\sin^2 x\cos^2 x$;

2) $f(x)=\cos^3 x$.

Розв'язання. *1.* Для того, щоб функцію $f(x)$ подати у вигляді формули Маклорена із залишковим членом у формі Пеано $o\left(x^{2n+1}\right)$, потрібно спочатку зробити відповідні перетворення.

Для цього скористаємося відомими формулами з тригонометрії: формулами подвійного кута, пониження степеня, а також формулою з таблиці, одержимо:

$$\sin^2 x\cos^2 x=\left(\sin x\cos x\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\cos 4x\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(4x)^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{4^{2k}\cdot x^{2k}}{2^3\cdot(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{4k-3}\cdot x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right).\ \blacksquare$$

2. Для того, щоб функцію $f(x)$ подати у вигляді формули Маклорена із залишковим членом у формі Пеано $o\left(x^{2n+1}\right)$, потрібно спочатку зробити відповідні перетворення.

Скористаємося відомою формулою косинуса потрійного кута $\cos^3 x=\dfrac{\cos 3x+3\cos x}{4}$, а далі, використовуючи формулу з таблиці, одержимо:

$$\cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}=\frac{1}{4}\left(\cos 3x+3\cos x\right)=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(3x)^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)+\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^{2k}\cdot x^{2k}}{4\cdot(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3\cdot x^{2k}}{4\cdot(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^{2k}+3}{4\cdot(2k)!}x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right).\ \blacksquare$$

Задача 8.5. *За допомогою формули Тейлора наближено обчислити значення з точністю до* ε*:*

1) $\sqrt[5]{250}$, $\varepsilon=10^{-4}$;

2) $\sin 18^\circ$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язання. *1.* Зробимо спочатку відповідні перетворення виразу: $(250)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243+7} = 3\sqrt[5]{1+\dfrac{7}{243}} = 3\left(1+\dfrac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Далі вираз $\left(1+\dfrac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$ можна розкласти за формулою з таблиці $\left(x = \dfrac{7}{243},\ \alpha = \dfrac{1}{5}\right)$:

$$(250)^{\frac{1}{5}} = 3\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\left(\frac{1}{5}-3\right)\ldots\left(\frac{1}{5}-k+1\right)}{k!}\left(\frac{7}{243}\right)^k + o\left(\left(\frac{7}{243}\right)^n\right)\right) =$$

$$= 3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{243}-\frac{1\cdot 4}{2!5^2}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^2+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(5n-6)}{n!5^n}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^n+o\left(\left(\frac{7}{243}\right)^n\right)\right).$$

Після цього оцінимо кожен доданок в дужках, помножений, звісно, на 3, з точністю до $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$\left|3\cdot\frac{4}{25\cdot 2}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^2\right| \approx 0{,}000199 > 10^{-4},\quad \left|3\cdot\frac{36}{125\cdot 6}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^3\right| < 10^{-4}.$$

Як бачимо, точність забезпечує перших три члени:

$$\sqrt[5]{250} \approx 3+3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{243}-3\cdot\frac{1\cdot 4}{2\cdot 5^2}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^2 \approx 3{,}0170.\ \blacksquare$$

2. Спочатку переведемо градусну міру кута у радіанну: $18^0 = \dfrac{18\pi}{180} = \dfrac{\pi}{10}$. Далі вираз $\sin\dfrac{\pi}{10}$ можна розкласти за формулою з таблиці: $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right),\ x\to 0$:

$$\sin\frac{\pi}{10}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\pi}{10}-\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+2}\right)$$

Після цього наближено обчислюємо значення з точністю до

$\varepsilon=0{,}0001$: $\dfrac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!}\approx 0{,}00517>0{,}0001$, $\dfrac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!}\approx 0{,}000025<0{,}0001$.

$\sin 18^\circ \approx 0{,}314159-0{,}00517=0{,}308989\approx 0{,}3090$. ■

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1.** *Розкласти многочлен $Q_n(x)$ за степенями двочлена $(x-x_0)$:*

1) $Q_3(x)=x^3+3x^2-2x+4$, $x_0=-1$;

2) $Q_{10}(x)=x^{10}-3x^5+1$, $x_0=1$;

3) $Q_6(x)=\left(x^2-3x+1\right)^3$, $x_0=0$;

4) $Q_3(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x_0=2$;

5) $Q_2(x)=\operatorname{tg}x$, $x_0=0$;

6) $Q_3(x)=\arcsin x$, $x_0=0$;

7) $Q_3(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$;

8) $Q_4(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$, $x_0=-1$.

✍**2.** *Розкласти $f(x)$ в околі точки x_0 по формулі Тейлора до n-го порядку включно:*

1) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x},\ x_0=-1,\ n=5;$

2) $f\left(x\right)=\sqrt{x},\ x_0=1,\ n=3;$

3) $f\left(x\right)=x^{80}-x^{40}+x^{20},\ x_0=1,\ n=4;$

4) $f\left(x\right)=x\cdot\operatorname{arctg}x,\ x_0=1,\ n=2;$

5) $f\left(x\right)=\sin\dfrac{\pi x}{2},\ x_0=1,\ n=4;$

6) $f\left(x\right)=\left(\sin x\right)^{\sin x},\ x_0=1,\ n=2.$

✍**3.** *Функцію* $f\left(x\right)$ *подати у вигляді формули Маклорена з* $o\left(x^n\right)$*, якщо:*

1) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}};$

2) $f\left(x\right)=\left(1+x^2\right)\ln\sqrt{1+x};$

3) $f\left(x\right)=\dfrac{2x+5}{x^2+5x+4};$

4) $f\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);$

5) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1};$

6) $f\left(x\right)=x\sin^2 2x;$

7) $f\left(x\right)=\left(1+2x\right)e^{-2x}-\left(1-2x\right)e^{2x}.$

✍**4.** *Функцію* $f\left(x\right)$ *подати у вигляді формули Маклорена з* $o\left(x^{2n+1}\right)$*, якщо:*

1) $f\left(x\right)=\arcsin x;$

2) $f\left(x\right)=\operatorname{arctg}x;$

3) $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{2-x^2-x^4};$

4) $f\left(x\right)=\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}};$

5) $f\left(x\right)=\operatorname{sh}^2 x;$

6) $f\left(x\right)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}3x.$

✍**5.** *За допомогою формули Тейлора наближено обчислити значення з точністю до* ε*:*

1) $\arcsin 0,45,\ \varepsilon=10^{-3};$

2) $\operatorname{arctg}0,8,\ \varepsilon=10^{-3};$

3) $\ln\left(1,1\right),\ \varepsilon=10^{-4};$

4) $\left(1,1\right)^{1,2},\ \varepsilon=10^{-5}.$

✍**6.** *З'ясувати поведінку даних функцій у вказаних точках:*

1) $y = 2x^6 - x^3 + 3$ *у точці* $x = 0$;

2) $y = x^{11} + 3x^6 + 1$ *у точці* $x = 0$;

3) $y = 2\cos x + x^2$ *у точці* $x = 0$;

4) $y = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$ *у точці* $x = 1$;

5) $y = 6\sin x + x^2$ *у точці* $x = 0$;

6) $y = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4 - 20$ *у точці* $x = 0$.

✍**7.** $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$. *Знайти перші три члени розкладу за формулою Тейлора при* $x_0 = 1$. *Обчислити наближено* $f(1{,}03)$.

✍**8.** $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$. *Знайти перші три члени розкладу за формулою Тейлора при* $x_0 = 2$. *Обчислити наближено* $f(2{,}02)$ *і* $f(1{,}97)$.

✍**9.** $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. *Знайти перші три члени розкладу* $f(x)$ *за степенями* $x-1$ *і знайти наближено* $f(1{,}005)$.

✍**10.** $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$. *Знайти перші три члени розкладу* $f(x)$ *за степенями* $x-2$ *і знайти наближено* $f(2{,}1)$.

✍**11.** *Користуючись наближеною формулою* $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, *знайти* $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ *і оцінити похибку.*

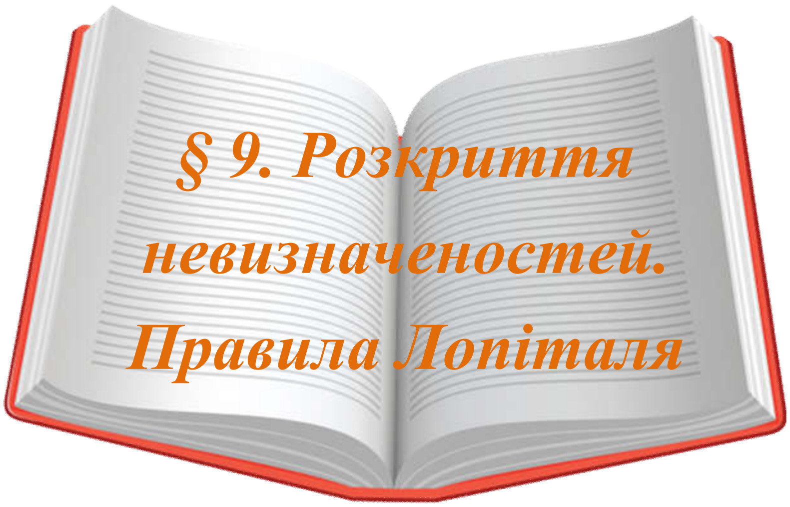
✍**12.** *Користуючись наближеною формулою:*

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$

знайти $\ln 1{,}5$ *і оцінити похибку.*

✍**13.** *Переконатися в тому, що для кутів, менших* 28°, *похибка, яка одержиться, якщо замість* $\sin x$ *взяти вираз* $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, *буде менша* $0{,}000001$. *Користуючись цим, обчислити* $\sin 20^\circ$ *із шістьма правильними цифрами.*

✍**14.** *Знайти* $\cos 10^\circ$ *з точністю до* $0{,}001$. *Переконатися в тому, що для досягнення вказаної точності достатньо взяти відповідну формулу Тейлора 2-го порядку.*



§ 9. Розкриття невизначеностей. Правила Лопіталя

Попередньо вивчіть лекцію 22 [11, с. 273–280].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Пригадати про невизначеності під час знаходження границь функцій.

У багатьох випадках знаходження границі функції в точці, заданої аналітично, яке виконується шляхом формальної підстановки відповідного значення x_0 замість змінної x, приводять до виразів вигляду $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

Вони називаються невизначеностями, оскільки по них не можна зробити висновок про те, існує чи ні вказана границя, не кажучи вже про знаходження її значення, якщо вона існує. У цьому випадку обчислення границі називають також «розкриттям невизначеності».

2. Сформулювати перше правило Лопіталя.

Теорема 9.1 (перше правило Лопіталя). *Нехай для функцій* $f(x)$ *і* $g(x)$ *виконуються умови:функції визначені на півінтервалі*

$(a;b]$ *і* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$*; функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *диференційовні в інтервалі* $(a;b)$*, причому похідна* $g'(x) \neq 0$*; існує (скінченна або нескінченна) границя відношення похідних:* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Тоді існує границя відношення функцій $f(x)$ *і* $g(x)$ *при* $x \to a+0$ *і має місце рівність*

$$\boxed{\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L} \qquad (9.1)$$

(*границя відношення функцій дорівнює границі відношення похідних від цих функцій*).

3. Сформулювати друге правило Лопіталя.

Теорема 9.2 (друге правило Лопіталя)*. Нехай для функцій* $f(x)$ *і* $g(x)$ *виконуються умови: функції визначені на півінтервалі* $(a;b]$ *і при цьому* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = +\infty$*; функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *диференційовні в інтервалі* $(a;b)$*, причому похідна* $g'(x) \neq 0$*; існує (скінченна або нескінченна) границя* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Тоді існує границя відношення функцій, яка дорівнює границі відношення їх похідних (9.1).

Зауважимо, що правила Лопіталя можна застосовувати не лише у випадку односторонніх границь, але й коли $x \to a$, $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$.

4. Зауваження стосовно застосування правил Лопіталя.

Якщо похідні $f'(x)$ *і* $g'(x)$ *задовольняють тим же умовам, що й самі функції* $f(x)$ *і* $g(x)$, *то правила Лопіталя можна застосовувати повторно, тобто з того, що існують границі похідних* $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g'(x) = 0$, *які дорівнюють нулю, й існує границя відношення других похідних* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = L$, *то існує границя відношення функцій, яка дорівнює границі відношення їх других похідних:*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a+0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L.$$

Цей спосіб можна застосовувати до тих пір, поки ми не прийдемо до відношення n*-х похідних заданих функцій, яке має границю при* $x \to a+0$. *Тоді*

$$\boxed{\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to a+0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}}.$$

5. Як розкрити інші невизначеності за допомогою правил Лопіталя?

Невизначеність вигляду $0\cdot\infty$. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *визначені в скінченному або нескінченному інтервалі* $(a;b)$ *і треба знайти границю* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\cdot g(x)$ *при умові, що* $\lim\limits_{a\to+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{a\to+0} g(x) = \infty$, *тобто маємо невизначеність типу* $0\cdot\infty$. *Здійснимо перетворення*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}. \qquad (9.2)$$

Одержуємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$, *до якої вже можна застосувати перше правило Лопіталя.*

Невизначеність вигляду $\infty - \infty$**.** *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *визначені в скінченному або нескінченному інтервалі* $(a;b)$ *і треба знайти границю* $\lim\limits_{x\to a+0}\left(f(x)-g(x)\right)$ *при умові, що* $\lim\limits_{a\to +0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{a\to +0} g(x) = +\infty$; $\left(\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = +\infty\right)$.

Отже, маємо невизначеність типу $\infty - \infty$. *Здійснимо такі перетворення:*

$$f(x) - g(x) = f(x)\cdot g(x)\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}. \quad (9.3)$$

Одержуємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$, *до якої вже можна застосувати перше правило Лопіталя.*

Невизначеності вигляду 1^{∞}, $0^{0}, \infty^{0}$**.** *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *визначені в скінченному або нескінченному інтервалі* $(a;b)$ *і треба знайти границю* $\lim\limits_{x\to a+0}\left(f(x)\right)^{g(x)}$ *при одній з трьох умов:*

1) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$, $f(x) > 0$, $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;\, b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$, $f(x) \neq 1$, $\forall x \in (a;b)$;

3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (a;b)$.

(або аналогічні умови можна записати при $x \to b-0$*). Отже, маємо справу відповідно з невизначеностями виду* 1^{∞}, $0^{0}, \infty^{0}$. *У цих випадках функцію подамо у вигляді* $\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, *а тому тут застосовуємо правило знаходження границі для складеної неперервної функції*

$$\lim_{x\to a-0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a-0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a-0} g(x)\ln f(x)}. \quad (9.4)$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 9.1. *Знайти границю функції:*

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$;

7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x - x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{x^2\cos x}$.

Розв'язання. *1.* Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$, тому скористаємось першим правилом Лопіталя (9.1), де $f(x)=3x^2+4x-7$, $g(x)=2x^2+3x-5$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(3x^2+4x-7\right)'}{\left(2x^2+3x-5\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x+4}{4x+3}=\frac{10}{7}. \blacksquare$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1. \blacksquare$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x}{1}=0. \blacksquare$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}=2. \blacksquare$$

5. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{2\sqrt{x^2+x-2}}{(1+(x-1)^2)\cdot(2x+1)}=0.$ ■

6. Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$, тому скористаємось першим правилом Лопіталя (9.1), де $f(x)=\sin x - x\cos x$, $g(x)=x^3$, і еквівалентною функцією $\sin x \sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin x - x\cos x\right)'}{\left(x^3\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}. \blacksquare$$

7. Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$, тому скористаємось першим правилом Лопіталя (9.1), де $f(x)=x^m-a^m$, $g(x)=x^n-a^n$.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\left(x^m-a^m\right)'}{\left(x^n-a^n\right)'}=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m\cdot a^{m-1}}{n\cdot a^{n-1}}=\frac{m}{n}\cdot a^{m-n}. \blacksquare$$

8. Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$, тому скористаємось першим правилом Лопіталя (9.1). Особливість цієї задачі полягає в тому, що ми декілька разів поспіль використовуватимемо перше правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x - x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}. \blacksquare$$

9. Спочатку перетворимо дріб $\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{x^{2}\cos x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\right)^{2}$.

Знаючи, що границя добутку дорівнює добутку границь, одержимо дві границі. Легко бачити, що границя першого множника дорівнює 1, тому знайдемо границю другого множника. Маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$, тому скористаємось першим правилом Лопіталя (9.1), де $f(x)=e^{x}-e^{-x}$, $g(x)=x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{x^{2}\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\right)^{2}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\right)^{2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{1}\right)^{2}=4.\ \blacksquare$$

Задача 9.2. *Знайти границю функції:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2\ln x}{x}$.

Розв'язання. *1.* Маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, тому скористаємось другим правилом Лопіталя, де $f(x)=\ln x$, $g(x)=x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.\ \blacksquare$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1}=1.\ \blacksquare$$

Задача 9.3. *Знайти границю функції:*

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x)$;

4) $\lim\limits_{x\to +0} x^n\ln x$, $(n>0)$.

Розв'язання.

1. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cdot\cos x+\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x-x\cdot\sin x+\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0. \ \blacksquare$$

2. Маємо невизначеність типу $(\infty-\infty)$, і тут доцільно різницю дробів звести до спільного знаменника, далі можна скористатись першим правилом Лопіталя (9.1):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}. \ \blacksquare$$

3. Маємо невизначеність типу $0\cdot\infty$, тому скористаємось формулою (9.2), що приведе до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$, використаємо друге правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{1-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\dfrac{-1}{1-x}}{\dfrac{1}{(1-x)^2}}=0. \ \blacksquare$$

4. $\lim\limits_{x\to+0} x^n \ln x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^n}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} =$

$$= -\frac{1}{n}\lim_{x\to+0}\frac{x^{n+1}}{x} = -\frac{1}{n}\lim_{x\to+0}x^n = 0. \blacksquare$$

Задача 9.4. *Знайти границю функції:*

1) $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x - x\right)^{\frac{1}{x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

Розв'язання. ***1.*** Маємо невизначеність типу 1^∞, тому скористаємось формулою (9.4): $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$, де $f(x) = e^x - x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, після чого знаходимо границю показника степеня. А у показнику вже маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$, тому скористаємось першим правилом Лопіталя (9.1).

$$\lim_{x\to0}\left(e^x - x\right)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^x - x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(e^x - x)}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x - 1}{e^x - x}} = e^0 = 1. \blacksquare$$

2. Маємо невизначеність типу ∞^0, тому скористаємось формулою (9.4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x} = \left(\infty^0\right) = e^{\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x\ln\frac{1}{x}} = (0\cdot\infty) = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg}x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x} = e^{1\cdot0} = 1. \blacksquare$$

Задача 9.5. *Знайти границю функції за допомогою формули Тейлора:*

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x^2}{2}}{\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\operatorname{sh}\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt[5]{1-\dfrac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x)-e^{\frac{x^2}{2}}}$.

Розв'язання. *1.* Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Використаємо розклади функцій $\sin t$, $\arcsin t$, $\operatorname{tg}t$, $\sqrt{1+t}$: $\sin t=t-\dfrac{t^3}{6}+o(t^3)$, $t\to 0$, $\arcsin t=t+\dfrac{t^3}{6}+o(t^3)$, $t\to 0$, отже, $\arcsin t-\sin t=\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)$, $t\to 0$.

Тому чисельник дробу також потрібно подати за формулою Тейлора-Маклорена з точністю до $o(x^3)$.

$\operatorname{tg}t=t+\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)$, $\sqrt{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}t^2+\dfrac{1}{16}t^3+o(t^3), t\to 0.$

Отже,

$$\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}=1+\frac{1}{2}(2\operatorname{tg}x)-\frac{1}{8}(2\operatorname{tg}x)^2+\frac{1}{16}(2\operatorname{tg}x)^3+o(\operatorname{tg}^3x)=$$

$$=1+\left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3),\qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+x^2+o\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}{\frac{1}{3}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}=\frac{\frac{2}{3}+0}{\frac{1}{3}+0}=2.\ \blacksquare$$

2. Розглянемо знаменник дробу і за формулою Тейлора-Маклорена запишемо:

$$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ \ln\left(1-x\right)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

тоді

$$\ln\frac{1+x}{1-x}-2x=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-2x=$$

$$=\frac{2x^3}{3}+o(x^3).$$

Отже, і чисельник дробу також потрібно подати за формулою Тейлора-Маклорена з точністю до $o(x^3)$.

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ \ x\to0,$$

$$e^{\operatorname{arctg}x}=1+\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\qquad\qquad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3).$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-\left(1+x+x^2+x^3\right)+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)}{\frac{2x^3}{3}+o(x^3)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}-x^3+o(x^3)}{\frac{2x^3}{3}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{2}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{-\frac{7}{6}+0}{\frac{2}{3}+0}=-\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}.\ \blacksquare$$

3. Використаємо формулу Тейлора-Маклорена для функцій $\sin x$ і $\operatorname{ch} t$:

$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to 0,\qquad \operatorname{ch} t=1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+o(t^4), t\to 0$, тоді складену функцію $\operatorname{ch}(\sin x)$ можна записати так:

$$\operatorname{ch}(\sin x)=1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^4+o(\sin^4 x)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{x^4}{24}+o(x^4),\ x\to 0.$$

Експоненціальна функція $e^{\frac{x^2}{2}}$ розкладається за формулою Тейлора-Маклорена: $e^{\frac{x^2}{2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)$, і знаменник набере вигляду:

$$\operatorname{ch}(\sin x)-e^{\frac{x^2}{2}}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^4}{24}-1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)=-\frac{x^4}{4}+o(x^4).$$

Отже, чисельник дробу потрібно розкласти за формулою Тейлора-Маклорена з точністю до $o(x^4)$:

$\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}=\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^3+o(x^4), x\to 0,\quad \cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+o(t^4),\ t\to 0$,

тоді складена функція розкладається так:

$$\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)=1-\left(\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^3+o(x^4)\right)+\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^3+o(x^4)\right)^4+$$

$$+o\left(\operatorname{sh}^4\frac{x}{\sqrt{5}}\right)=1-\frac{x^2}{10}-\frac{x^4}{200}+o(x^4),\ x\to 0,$$

$$\sqrt[5]{1-\frac{x^2}{2}}=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{5}}=\left[\alpha=\frac{1}{5},\quad (1+t)^{\alpha},\quad t=-\frac{x^2}{2}\right]=$$

$$=1+\frac{1}{5}\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt[5]{1-\frac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x)-e^{\frac{x^2}{2}}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{10}-\frac{x^4}{200}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{10}-\frac{x^4}{50}+o(x^4)\right)}{-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{200}+\frac{x^4}{50}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x^4}{200}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}=\frac{\frac{3}{200}}{-\frac{1}{4}}=-\frac{3}{50}.\ \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [12]** *Знайти границю за допомогою формули Тейлора:*

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt[5]{1-\frac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x)-e^{\frac{x^2}{2}}}$; ***4)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x+\frac{x^3}{6}}{x-thx}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$; ***6)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; ***8)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}-2\sqrt[4]{1-x}}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln\left(1-x^2\right)}$; ***10)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\operatorname{ctg} x}{x\sin x}$.

✍***2.*** *Знайти границю функції, використовуючи, де це можливо, правила Лопіталя:*

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$; ***4)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos 3x-e^{-x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{\ln\cos\left(2x^2-x\right)}$; ***6)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$; ***8)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}$; ***10)*** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; ***12)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^2}{\sin^6 2x}$.

✍***3.*** *Знайти границю функції:*

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{1 - \sin x} \right)$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x} \right)$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$;

5) $\lim\limits_{x \to 0+0} \left(x^{x^x} - 1 \right)$;

6) $\lim\limits_{x \to 0+0} x^n \cdot \ln x,\ n \in \mathbb{N}$;

7) $\lim\limits_{x \to 1-0} \ln x \cdot \ln(1 - x)$;

8) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} x \right)^{\operatorname{tg} 2x}$;

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x \right)^{\frac{1}{x}}$;

10) $\lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{6}{1 + 2\ln x}}$;

11) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$;

12) $\lim\limits_{x \to +\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x \right)^{\sin 2x}$;

13) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\ln \left(1 + x \right)^{1+x}}{x^2} - \dfrac{1}{x} \right)$.

✍**4.** ***[14]*** *Знайти границю функції:*

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\operatorname{arctg} 2x - 2\operatorname{arctg} x \right)^x}{e^{x^2} - 1 - \sin^2 x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\operatorname{tg} 3x - 6\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 3x}$;

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{\log_a x - \log_x a},\ a > 1$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^n}}{e^{e^x}},\ n \in \mathbb{N}$;

6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$;

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}{x - 1}$;

8) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2x}{x - 2} + \ln \left(e + xe^{x+1} \right) \right)^{\frac{1}{x^3}}$;

9) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} + \dfrac{x^2}{2} - \sin x \right)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} x}}$.

§ 10. Монотонність та екстремум функції

!!! *Попередньо вивчіть лекції 25 – 26 [11, с. 297–320].*

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Сформулювати ознаку монотонності функції.

Теорема 10.1. (ознака монотонності функції)*. Для того, щоб диференційовна на інтервалі (a,b) функція $f(x)$ була неспадною (незростаючою), необхідно і достатньо, щоб у всіх його точках похідна була невід'ємною: $f'(x)\geq 0$ (недодатною: $f'(x)\leq 0$).*

Якщо ж на інтервалі (a,b) похідна додатна: $f'(x)>0$ (від'ємна: $f'(x)<0$), то функція $f(x)$ строго зростає (строго спадає) на заданому інтервалі (рис. 10.1).

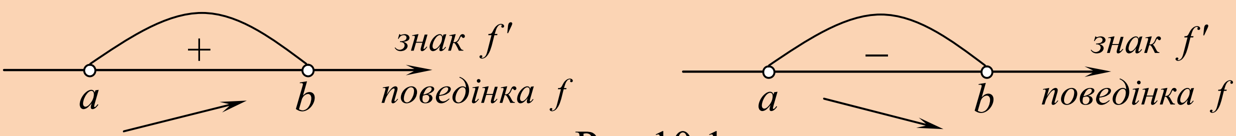


Рис 10.1

Зауваження. *Умови $f'(x)>0\left(f'(x)<0\right)$ є достатніми, але не необхідними для строгого зростання (строгого спадання) функції.*

$$f'(x)>0 \Rightarrow f(x) \text{ зростає} \Rightarrow f'(x)\geq 0,$$
$$f'(x)\geq 0 \Rightarrow f(x) \text{ не спадає} \Rightarrow f'(x)\geq 0,$$
$$f'(x)\equiv 0 \Rightarrow f(x)\equiv \text{const} \Rightarrow f'(x)\equiv 0,$$
$$f'(x)\leq 0 \Rightarrow f(x) \text{ не зростає} \Rightarrow f'(x)\leq 0,$$
$$f'(x)<0 \Rightarrow f(x) \text{ спадає} \Rightarrow f'(x)\leq 0.$$

2. Сформулювати означення точок локального екстремуму функції.

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, але не є на ньому монотонною, то знайдуться такі проміжки $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$, в яких найбільше або найменше значення досягається функцією у внутрішній точці, тобто між α і β. На графіку функції таким проміжкам відповідають характерні горби і впадини.

Означення 10.1. *Якщо існує окіл $O_\delta(x_0)=(x_0-\delta; x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ точки x_0, який міститься у відрізку $[a, b]$, і такий, що для $\forall x\in O_\delta^*(x_0)$ виконується нерівність $f(x)\leq f(x_0)$, то точка x_0 називається* ***точкою локального максимуму функції*** *$f(x)$, а саме число $f(x_0)$ називається* ***максимумом цієї функції*** *(рис. 10.2). Якщо виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$, то точка x_0 називається* ***точкою строгого локального максимуму.***

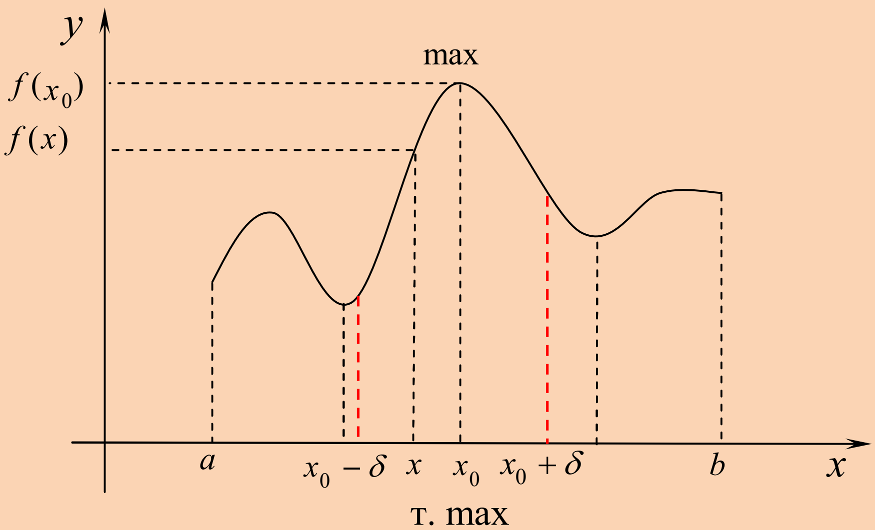


Рис. 10.2

3. Сформулювати необхідні умови екстремуму.

Теорема 10.2. *Нехай* x_0 *є точкою екстремуму функції* $f(x)$, *визначеної в деякому околі* $O(x_0)$. *Тоді, або похідна* $f'(x_0)=0$, *або похідна* $f'(x_0)$ *не існує.*

4. Сформулювати достатні умови екстремуму.

Теорема 10.3. *Нехай функція* $f(x)$ *диференційовна в деякому околі* $O(x_0)$ *точки* x_0, *крім, можливо, самої точки* $x_0 \in (a,b)$, *в якій вона, однак, є неперервною. Якщо похідна* $f'(x)$ *змінює знак при переході через* x_0, *то* x_0 *є точкою строгого екстремуму. При цьому правильні твердження:*

1) $\left(\forall x \in (x_0-\delta; x_0): f'(x)>0\right) \wedge \left(\forall x \in (x_0; x_0+\delta): f'(x)<0\right) \Rightarrow$ *(*x_0 *– точка строгого локального максимуму* $f(x)$*);*

2) $\left(\forall x \in (x_0-\delta; x_0): f'(x)<0\right) \wedge \left(\forall x \in (x_0; x_0+\delta): f'(x)>0\right) \Rightarrow$ *(*x_0 *– точка строгого локального мінімуму* $f(x)$*);*

3) $\left(\forall x \in (x_0-\delta; x_0): f'(x)<0\right) \wedge \left(\forall x \in (x_0; x_0+\delta): f'(x)<0\right) \Rightarrow$ *(*$f(x)$ *в точці* x_0 *екстремуму не має) функція спадає;*

4) $\left(\forall x \in (x_0-\delta; x_0): f'(x)>0\right) \wedge \left(\forall x \in (x_0; x_0+\delta): f'(x)>0\right) \Rightarrow$ *(*$f(x)$ *в точці* x_0 *екстремуму не має) функція зростає.*

5. Які точки називаються стаціонарними? Критичними?

Означення 10.2. *Точки, в яких похідна дорівнює нулю називаються стаціонарними. Стаціонарні точки і точки, в яких похідна не існує, називаються критичними (рис. 10.3).*

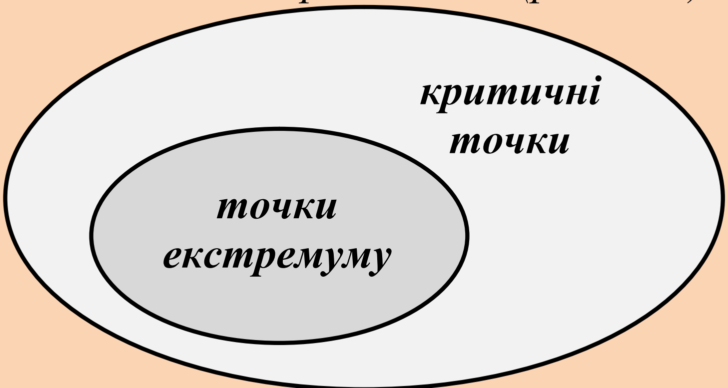


Рис. 10.3

6. Сформулювати алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення на відрізку.

1) знайти критичні точки функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ в критичних точках;

3) обчислити $f(a)$ і $f(b)$;

4) серед знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше (рис. 10.4).

Основні поняття, що стосуються теми «Монотонність та екстремум функції» узагальнено та подано у вигляді інтелект-карти (ментальної карти) (рис. 10.4).

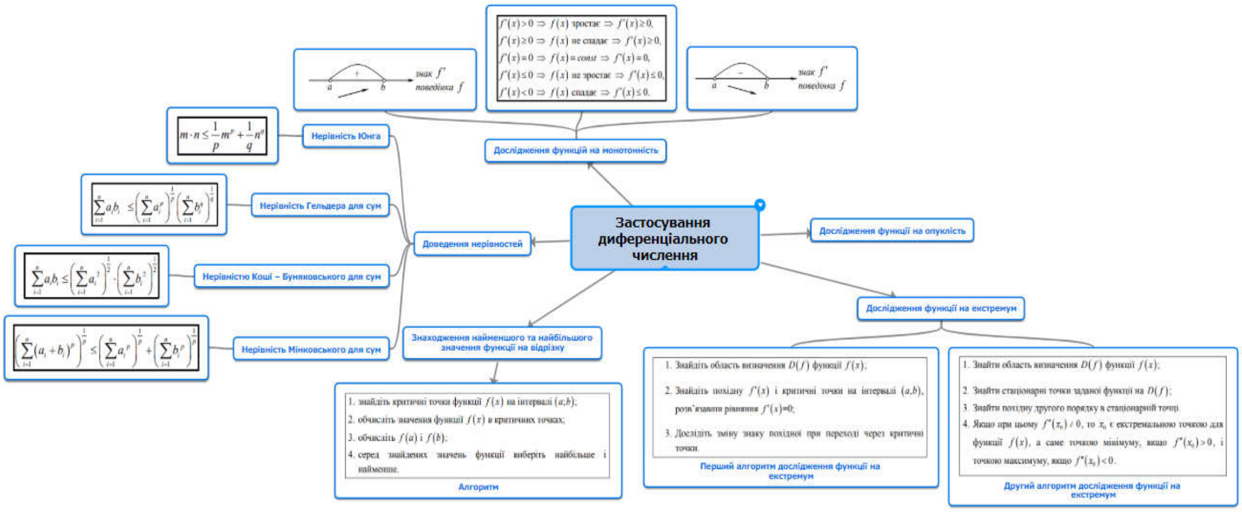


Рис. 10.4

Приклади розв'язування вправ

Задача 10.1. *Дослідити функцію на монотонність:*

1) $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{10}{3}x^3+9x-6$; **2)** $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$;

3) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$.

Розв'язання.

1. $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{10}{3}x^3+9x-6$.

1) функція визначена на множині дійсних чисел: $D(f)=\mathbb{R}$.

2) знайдемо похідну:

$$f'(x)=x^4-10x^2+9=\left(x^2-1\right)\left(x^2-9\right)=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$

3) дослідимо знак похідної $f'(x)$ методом інтервалів (рис. 10.5).

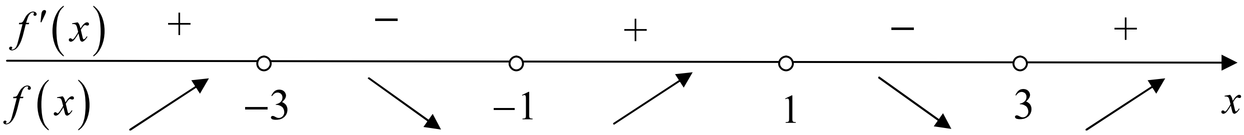


Рис 10.5

Отже, функція $f(x)$ зростає на кожному з проміжків $(-\infty;-3)$, $(-1;1)$, $(3;+\infty)$, спадає на кожному з проміжків $(-3;-1)$, $(1;3)$. ■

2. $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$. Аналогічно до попереднього прикладу дотримуємося алгоритму:

1) $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$;

2) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}\right)'=\dfrac{(2x+4)(x-1)-\left(x^2+4x-1\right)\cdot 1}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$;

3) дослідимо знак похідної $f'(x)$ методом інтервалів (рис. 10.6).

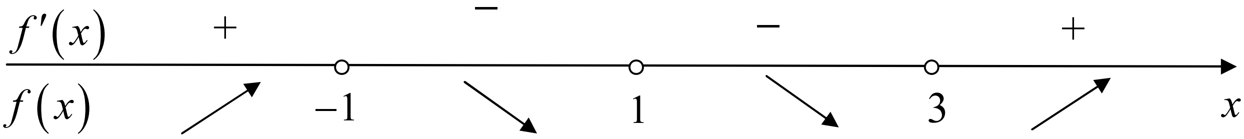


Рис 10.6

Отже, функція $f(x)$ зростає на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$, $(3;+\infty)$, спадає на кожному з проміжків $(-1;1)$, $(1;3)$. ■

3. $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$. Аналогічно до попередніх прикладів:

1) $D(f): x^2+4x\geq 0,\ x(x+4)\geq 0,\ \ D(f)=(-\infty;-4]\cup[0;+\infty)$.

Використаємо метод інтервалів (рис. 10.7):

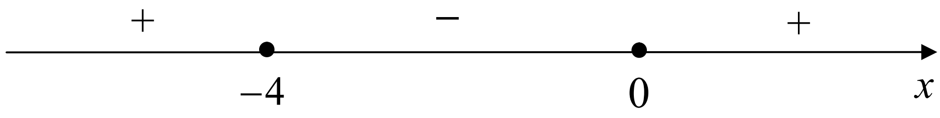


Рис. 10.7

2) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+4x}\right)'=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$.

Функція $f(x)$ у точках $x=0$ і $x=-4$ є недиференційовною, але неперервною.

$$f'(x)>0\Rightarrow\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x+2>0,\\x(x+4)>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

Отже, функція зростає на проміжку $[0;+\infty)$ (рис. 10.8).

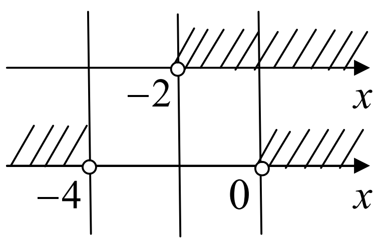


Рис. 10.8

$$f'(x)<0\Rightarrow\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}<0\Leftrightarrow\begin{cases}x+2<0,\\x(x+4)>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

Отже, функція спадає на проміжку $(-\infty;-4]$ (рис. 10.9). ■

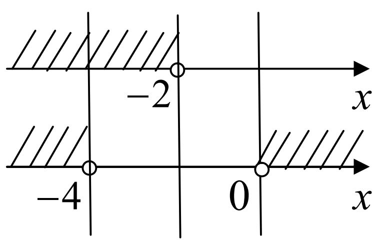


Рис. 10.9

Задача 10.2. *Дослідити функцію на монотонність:*

1) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

2) $f(x) = (2+x)\ln(1+x) - 2x$;

3) $f(x) = x + \sin 2x$.

Розв'язання. Використовуємо алгоритм попередньої задачі.

1. $f(x) = x^2 e^{-x}$.

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) $f'(x) = \left(x^2 e^{-x}\right)' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$.

3) $f'(x) > 0 \Rightarrow xe^{-x}(2-x) > 0 \Rightarrow x(x-2) < 0 \Rightarrow x \in (0;\, 2)$.

$f'(x) < 0 \Rightarrow xe^{-x}(2-x) < 0 \Rightarrow x(x-2) > 0 \Rightarrow$

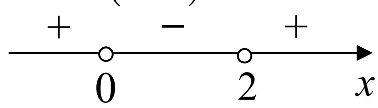


Рис. 10.10

Функція зростає на інтервалі $(0;2)$, спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\, 0)$ і $(2;+\infty)$. ■

2. $f(x) = (2+x)\ln(1+x) - 2x$.

1) $D(f) = (-1; +\infty)$.

2) $f'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{2+x}{1+x} - 2 = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$;

3) $f'(x) > 0 \Rightarrow \ln(1+x) - \dfrac{x}{1-x} > 0$.

Оскільки розв'язати таку нерівність не просто, то саму похідну $f'(x)$ дослідимо на монотонність. Знайдемо її похідну, тобто другу похідну функції $f(x)$:

$$\left(f'(x)\right)' = \left(\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Дослідимо знак другої похідної на області визначення методом інтервалів (рис. 10.11):

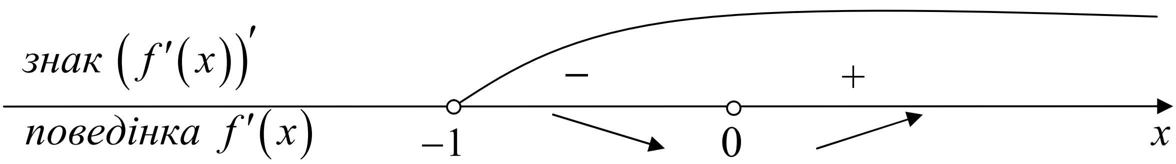


Рис. 10.11

Таким чином, якщо:

$-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x)$ спадає $\Rightarrow f'(x) > f'(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$,

а для $x > 0 \Rightarrow f'(x)$ зростає $\Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.

Одержані результати подамо на рис. 10.12.

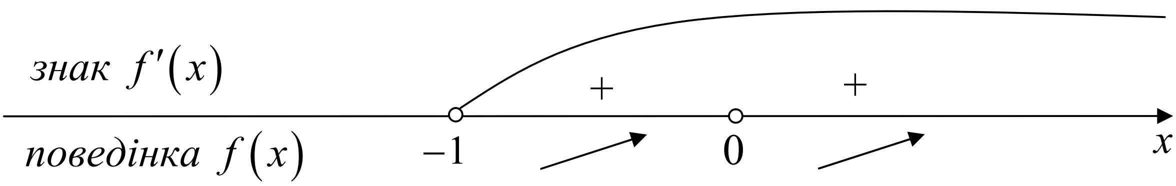


Рис. 10.12

Врахувавши неперервність функції $f(x)$ і рис. 10.12, робимо висновок, що вона зростає на всій області визначення $(-1;+\infty)$ (рис. 10.13). ■

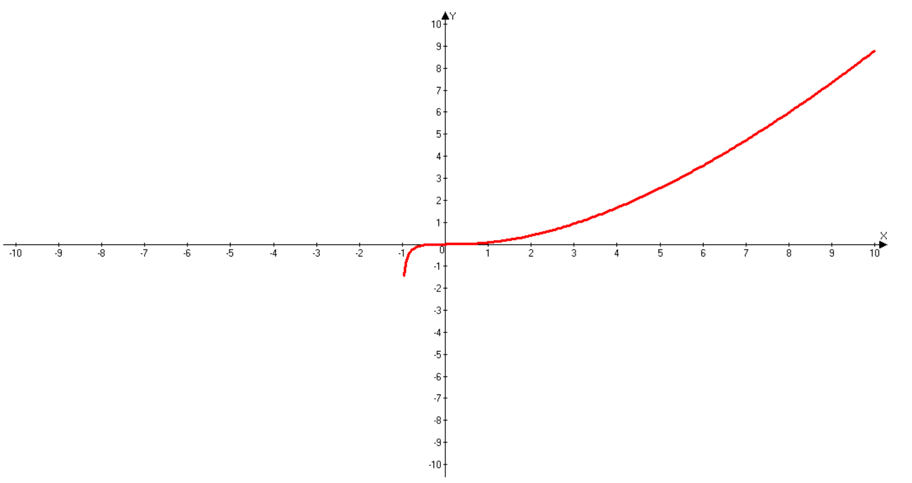


Рис. 10.13

3. $f(x)=x+\sin 2x$.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2) $f'(x)=(x+\sin 2x)'=1+2\cos 2x$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

3) Оскільки похідна функція $f'(x)$ періодична з періодом $T=\pi$, то дослідимо її знак на проміжку $\left(-\frac{\pi}{3};\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ (рис. 10.14).

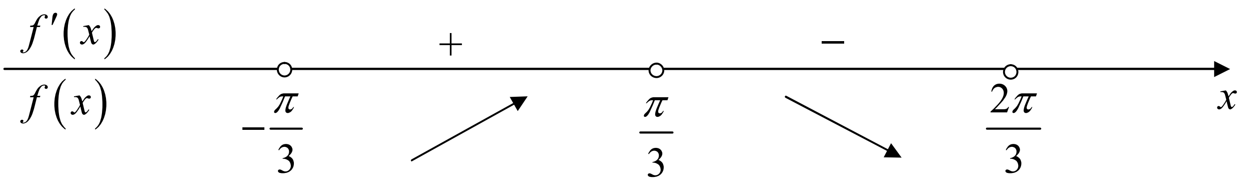


Рис. 10.14

Функція $f(x)$ зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, а спадає на кожному з проміжків $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

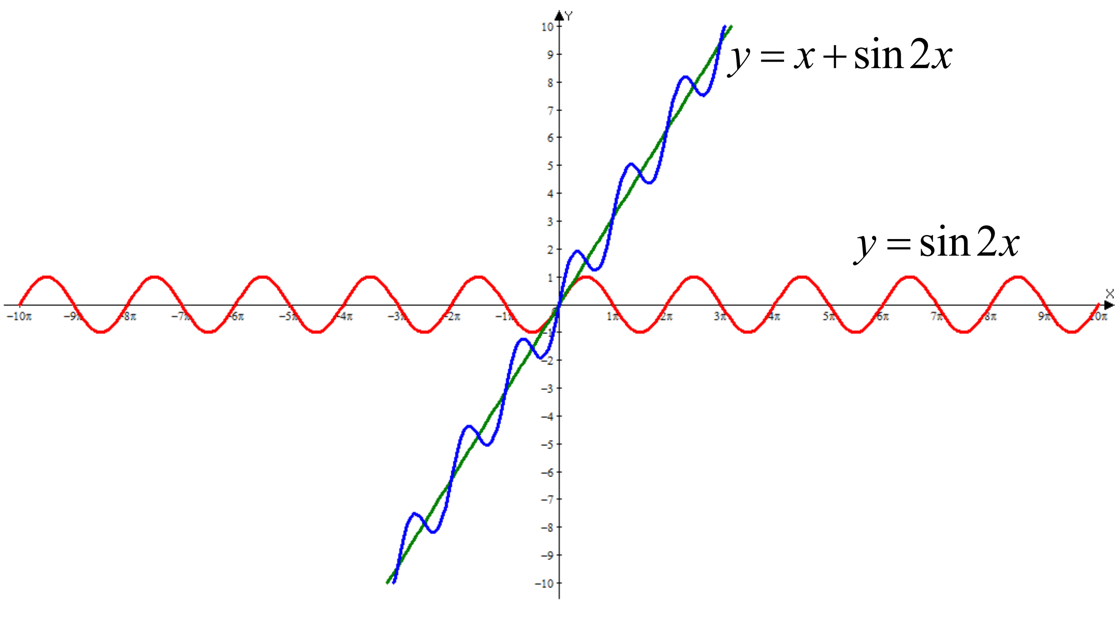


Рис. 10.15

Задача 10.3. *Знайти проміжки монотонності та точки екстремуму функції:*

1) $y=(x+4)^4\cdot(x-3)^3$; *2)* $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$; *3)* $y=(1+\cos x)\sin x$.

Розв'язання. Такі дослідження проводимо за схемою (алгоритмом):

1) знайти область визначення функції $f(x)$;

2) знайти похідну і критичні точки;

3) дослідити зміну знаку похідної через критичні точки.

1. $y=(x+4)^4\cdot(x-3)^3$.

1) $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2) $y'(x)=4(x+4)^3(x-3)^3+3(x+4)^4(x-3)^2=$

$=(x+4)^3(x-3)^2\left(4(x-3)+3(x+4)\right)=7x(x+4)^3(x-3)^2$;

$$y'(x)=0\Leftrightarrow 7x(x+4)^3(x-3)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-4,\\ x_2=3_2,\\ x_3=0.\end{array}\right.$$

3)

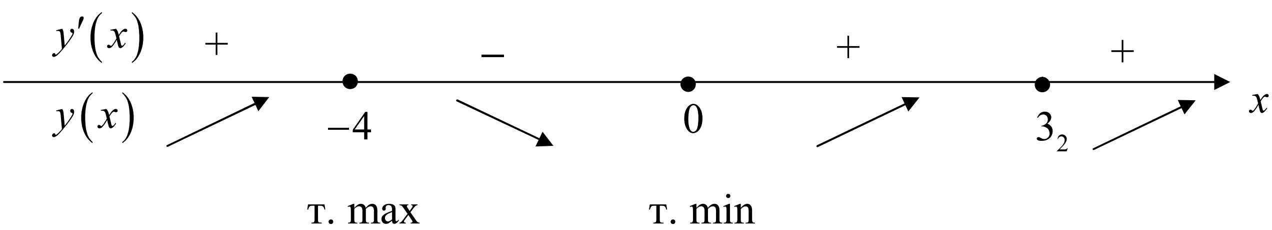


Рис. 10.16

$x=-4$ – т. max, $y_{\max}=y(-4)=(-4+4)^4\cdot(-4-3)^3=0$,

$x=0$ – т. min, $y_{\min}=y(0)=(0+4)^4\cdot(0-3)^3=256\cdot(-27)=-6912$. ■

2. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$.

1) $D(y)=(-\infty;\,2)\cup(2;+\infty)$.

2) $y'=\left(\dfrac{x^2-3}{x-2}\right)'=\dfrac{2x(x-2)-(x^2-3)\cdot 1}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$;

$y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=1 \end{array}\right.$ – стаціонарні точки.

3)

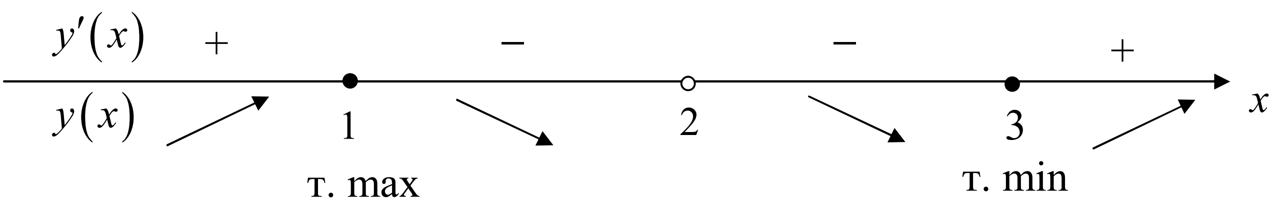


Рис. 10.17

$x=1$ – т. max, $\quad y_{\max}=y(1)=\dfrac{1-3}{1-2}=2$,

$x=3$ – т. min, $\quad y_{\min}=y(3)=\dfrac{9-3}{3-2}=6$. ■

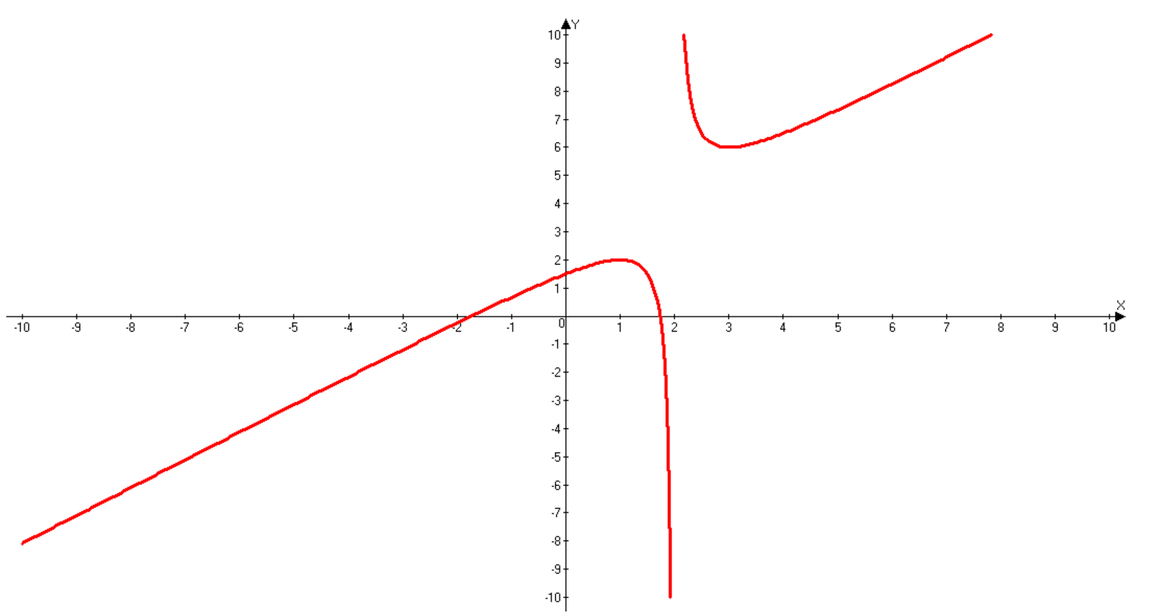


Рис. 10.18

3. $y=(1+\cos x)\sin x$.

1) $D(y)=\mathbb{R}$.

2) $y' = -\sin^2 x + (1+\cos x)\cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1,$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \cos x = t, \qquad 2t^2 + t - 1 = 0,$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = -1, \\ t_2 = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$ або $\left[\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. -$ стаціонарні точки.

Функція $y = (1+\cos x)\sin x$ періодична з періодом $T = 2\pi$, тому під час дослідження функції використаємо проміжок довжиною 2π, наприклад $0 \le x \le 2\pi$.

3)

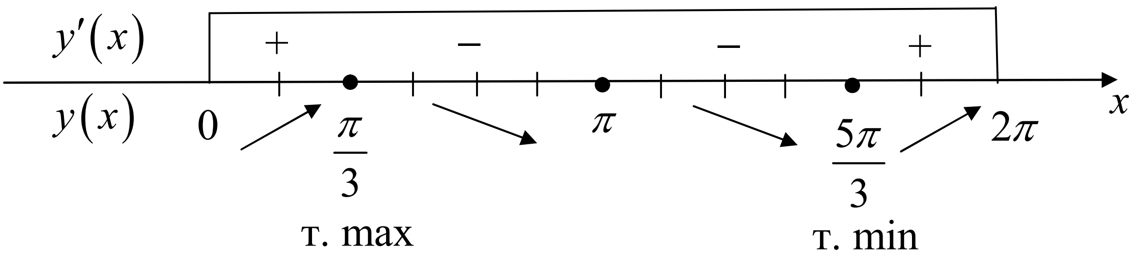


Рис. 10.19

$x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$ – т. max,

$$y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4};$$

$x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n$ – т. min,

$$y_{\min} = y\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right) = \left(1 + \cos\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Точки $x = \pi + 2\pi n$ не є точками екстремуму.

Функція зростає на кожному з інтервалів $\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, спадає на кожному з інтервалів $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

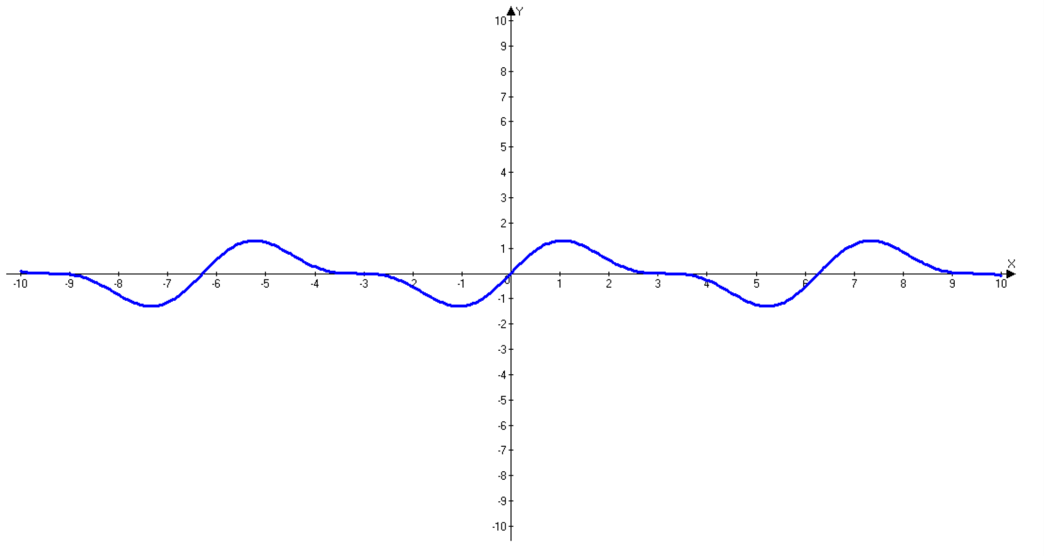


Рис. 10.20

Задача 10.4. *Дослідити на монотонність та екстремум функцію* $x = t^4,\ y = t^2 - t^5$*, задану параметрично.*

Розв'язання.

Дослідимо поведінку функцій $x(t)$ і $y(t)$:

$x = t^4$	$y = t^2 - t^5$
1) $D(x) = (-\infty; +\infty)$;	*1)* $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
2) $x'(t) = 4t^3$;	*2)* $y'(t) = 2t - 5t^4 = t(2 - 5t^3)$,

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^3 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 0, \\ t_2 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}} = \sqrt[3]{0,4} \end{array}\right.$$

3)

$x'(t)$	$-$		$+$	t
$x(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	
		т. min		

Рис. 10.21

$$x_{\min} = x(0) = 0.$$

3)

$y'(t)$	$-$		$+$		$-$	t
$y(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{0,4}$	$\searrow$	
		т. min		т. max		

Рис. 10.22

$$y_{\min} = y(0) = 0,$$

$$y_{\max} = y\left(\sqrt[3]{0,4}\right) \approx 0,3.$$

Знайдемо похідну вихідної функції:

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t\left(2-5t^3\right)}{4t^3}=\frac{1}{4}\left(2-5t^3\right);$$

$$y'(x)=0\Leftrightarrow 2-5t^3=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{0,4}$$ – стаціонарна точка. ■

Дослідимо зміну знаку похідної, використавши таблицю:

t	$(-\infty;0)$	0	$\left(0;\sqrt[3]{0,4}\right)$	$\sqrt[3]{0,4}$	$\left(\sqrt[3]{0,4};+\infty\right)$
x	↘	0	↗	$\approx 0,3$	↗
y	↘	0	↗	$\approx 0,4$	↘
$y'(x)$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$

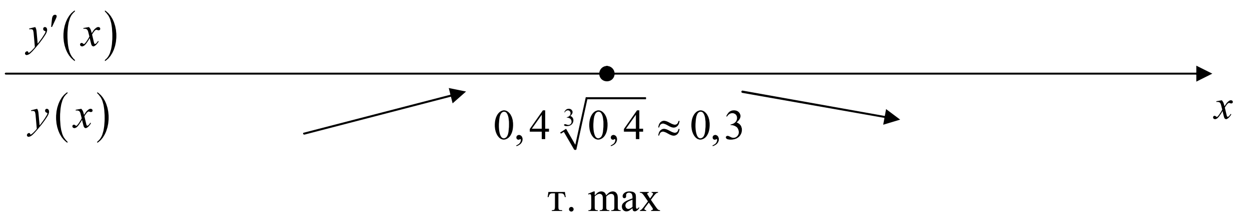


Рис. 10.23

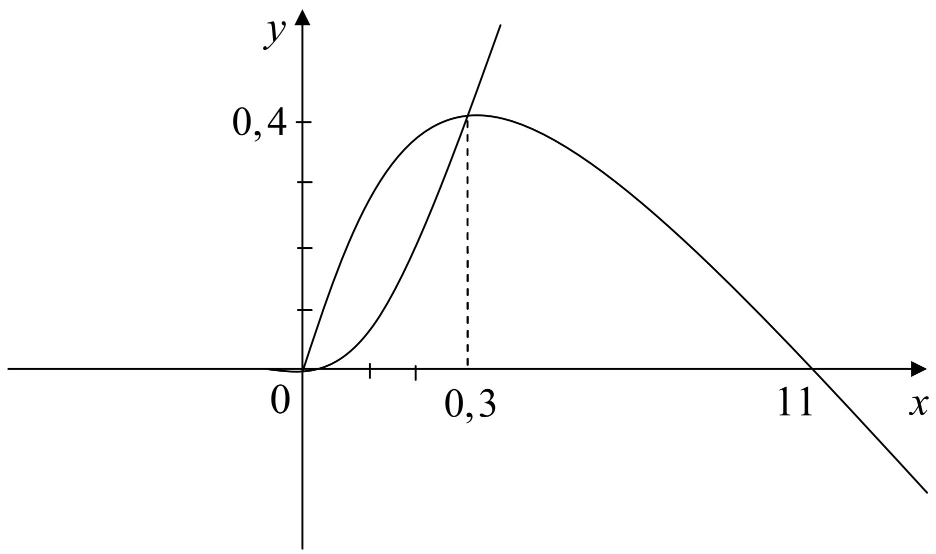


Рис. 10.24

Задача 10.5. *Знайти найменше та найбільше значення функції на вказаних проміжках:*

1) $y=x^4-2x^2+5$, $[-2;2]$; ***2)*** $y=\sqrt{100-x^2}$, $[-6;8]$;

3) $y = \sin 2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; *4)* $y = \frac{1-x}{1+x}$, $[0;4]$.

Розв'язання.

1. $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2;2]$.

1) знаходимо похідну $y' = 4x^3 - 4x$, прирівнюємо до нуля і знаходимо стаціонарні точки.

$4x^3 - 4x = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Всі вони належать заданому відрізку.

2) знаходимо значення функції в стаціонарних точках і на кінцях відрізка.

$y(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 13$,

$y(-1) = 4$, $y(0) = 5$, $y(1) = 4$, $y(-2) = 13$.

3) серед одержаних значень вибираємо найменше і найбільше.

$\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = f(2) = 13$,

$\min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = f(1) = 4$. ■

2. $y = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$.

Аналогічно до попереднього прикладу маємо:

1) $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$;

$\frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} = 0$, $x = 0 \in [-6; 8]$, $x \neq 10 \notin [-6; 8]$,

$x \neq -10 \notin [-6; 8]$.

2) $y(-6) = 8$, $y(0) = 10$, $y(8) = 6$.

3) $\max\limits_{[-6;8]} f(x) = f(0) = 10$, $\min\limits_{[-6;8]} f(x) = f(8) = 6$. ■

3. $y = \sin 2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1) $y' = 2\cos 2x - 1$,

$$2\cos 2x - 1 = 0,\ \ \cos 2x = \frac{1}{2},\quad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\quad x = -\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],$$

$$x = \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

2) $y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6},$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2},$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6};$$

3) $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},\qquad \min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$ ■

4. $y = \frac{1-x}{1+x},\ [0;4].$

1) $1 + x \neq 0,\quad x \neq -1;\quad D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty);$

$y' = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2};\quad \frac{-2}{(1+x)^2} = 0$, розв'язків немає,

$x = -1 \notin [0;4];$

2) $y(0) = 1,\quad y(4) = -\frac{3}{5};$

$\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(0) = 1,\quad \min\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = -\frac{3}{5}.$ ■

Задача 10.6. *Знайти найменше та найбільше значення функції на відрізку:*

1) $y = x + 2\sqrt{x},\ [0;4];$ ***2)*** $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2},\ [0;3].$

Розв'язання.

1. $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0;4]$;

$$y' = 1 + 2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}},\quad y' = 0,\quad \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 0,$$ рівняння коренів не має.

$y(0) = 0, \quad y(4) = 8.$

$\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(0) = 0, \quad \min\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 8.$ ■

2. $y = \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $[0;3]$.

$D(y) = \mathbb{R}$,

$$y' = \left(\left(x^2-2x\right)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\left(x^2-2x\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2x-2) = \frac{4}{3}\left(x^2-2x\right)^{-\frac{1}{3}}(x-1),\quad y' = 0,$$

$$\left(x^2-2x\right)^{-\frac{1}{3}}(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x=0, \\ x-1=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2)=0, \\ x-1=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, x=2, \\ x=1; \end{cases}$$

$y(0) = 0;\quad y'(1) = 1;\quad y'(2) = 0;\quad y'(3) = \sqrt[3]{9}.$

$\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(0) = f(2) = 0, \quad \min\limits_{[0;3]} f(x) = f(3) = \sqrt[3]{9}.$ ■

Завдання для самостійного розв'язування

*✍**1. [12]** Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції $f(x)$ на області визначення. Нарисувати графік функції в одному з графічних редакторів:*

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

2) $f(x) = \left(x^3-10\right)(x+5)^2$;

3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$;

4) $f(x) = x^2(x-12)^2$;

5) $f(x) = x^4(1-x)^3$;

6) $f(x) = (x+2)^2(x-3)^3$;

7) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$;

8) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$;

9) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+4}$; *10)* $f\left(x\right)=x^4e^{-x^2}$;

11) $f\left(x\right)=x+\sqrt{3-x}$; *12)* $f\left(x\right)=\sqrt{x}\ln x$;

13) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\ln\left(x^4+4x^3+30\right)}$; *14)* $f(x)=\dfrac{10}{8x^2-24x+23}$;

15) $f\left(x\right)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$; *16)* $f\left(x\right)=\sin^3 x+\cos^3 x$;

17) $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\cos\pi x-\dfrac{1}{\pi}\sin\pi x$; *18)* $f\left(x\right)=\left(x-1\right)e^{3x}$;

19) $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{4}x^2-x$; *20)* $f\left(x\right)=\left(3-x^2\right)e^x$;

21) $f\left(x\right)=x^3e^{-4x}$; *22)* $f\left(x\right)=x+\sqrt{3-x}$;

23) $f\left(x\right)=x^2-4x-1-\ln\left(x^2-4x+4\right)$;

24) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}$;

25) $f\left(x\right)=\ln\left(x^2-1\right)-2\operatorname{arctg}x$;

26) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{\left(x-2\right)^2\left(x-4\right)^2}$;

27) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{\left(1-x\right)\left(x-2\right)^2}$.

✍**2. [15]** *Дослідити на екстремум функції* $y\left(x\right)$, *задані параметрично або неявно:*

1) $x=\dfrac{1}{t\left(t+1\right)},\ y=\dfrac{\left(t+1\right)^2}{t}$; *2)* $x=t^2+t+1,\ y=t^2-t+1$;

3) $x=t^4,\ y=t^2-t^5$; *4)* $x=\dfrac{t^2}{1+t^2},\ y=\dfrac{t^3}{1+t^2}$;

5) $x=\dfrac{e^t}{1+t},\ y=\dfrac{e^{-t}}{1+t}$; *6)* $x=\dfrac{t^2}{1-2t},\ y=\dfrac{t^3}{1-2t}$;

7) $x^3+y^3=3x^2$; *8)* $x+y=xy\left(y-x\right)$;

9) $x^3 + y^3 + x^2 y + 1 = 0;$ *10)* $x^4 - y^4 + xy = 0.$

✍**3. [15]** *Дослідити функцію* $f(x)$ *на екстремум в області визначення, якщо:*

1) $f(x) = \begin{cases} |x|, \ x \neq 0, \\ 1, \quad x = 0; \end{cases}$ *2)* $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, \ |x| \neq 1, \\ 0, \qquad |x| = 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \max\left\{\operatorname{ch} x + \frac{1}{2};\ 4 - \operatorname{ch} x\right\};$ *4)* $f(x) = \cos^{100} x + \operatorname{ch}^{100} x;$

5) $f(x) = \min\{x+5;\ \ln x;\ 1-x\};$ *6)* $f(x) = |x| e^{-|x-1|}.$

✍**4.** *Знайти всі значення параметра* a, *при кожному з яких функція:*

1) $y = 2x^5 + 2ax^4 + 10x^3$ *є зростаючою;*

2) $y = a\sin 4x - 10x + \sin 7x + 4ax$ *є спадною;*

3) $y = 0{,}5e^{2x} + (1-a)e^x - ax + \sin 2$ *має критичні точки і знайти їх;*

4) $y = \sin 2x - 8(a+1)\sin x + \left(4a^2 + 8a - 14\right)x$ *є зростаючою;*

5) $y = 16(a+1)\sin x - \sin 2x - \left(16a^2 + 32a - 10\right)x$ *є спадною.*

✍**5.** *Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:*

1) $y = x^3 + 3x^2 - 72x + 90,\ [-5;\ 5];$ *2)* $y = x^3 - 6x^2 + 9,\ [-1;\ 2];$

3) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1,\ [-1;\ 2];$ *4)* $y = x + \sqrt{x},\ [0;\ 4];$

5) $y = 1 - 3x^2 - x^3,\ [-1;\ 1];$ *6)* $y = x^3 - 2x|x-2|,\ [0;\ 3];$

7) $y = x + \frac{4}{(x-2)^2},\ [0;\ 5];$ *8)* $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2},\ [0;\ 1];$

9) $y = \sin 2x - x,\ \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right];$ *10)* $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x},\ [0;\ 1];$

11) $y = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x, \left[e^{\frac{3}{4}};\ e^3 \right];$

12) $y = 4\sin 2x - 2\sin 4x, [0;\ \pi];$

13) $y = 4x + \dfrac{9\pi^2}{x} + \sin x, [\pi;\ 2\pi];$

14) $y = \left| x^2 + 2x - 3 \right| + 1{,}5\ln x, [0{,}5;\ 4].$

§ 11. Прикладні задачі

Попередні міркування

Похідну можна застосовувати до розв'язування багатьох прикладних задач – алгебраїчних (доведення тотожностей, нерівностей, знаходження коренів рівняння), геометричних, економічних, фізичних та інших [3; 14; 15; 22; 23].

Приклади розв'язування вправ

Розв'язування рівнянь, знаходження числа коренів

Теорема про проміжне значення (або друга теорема Больцано-Коші) гарантує існування принамні одного розв'язку рівняння $f(x)=a$ для неперервної функції $f(x)$ на проміжку, якщо параметр $a \in E(f)$. Якщо ж функція монотонна, то розв'язок рівняння один. А монотонність функції можна дослідити за допомогою похідної.

Задача 11.1. [3] *Визначити число дійсних коренів рівняння* $12x^4-14x^3-3x^2-5=0$.

Розв'язання. Дослідимо функцію $f(x)=12x^4-14x^3-3x^2-5$ на монотонність і екстремуми:

1) $f'(x)=48x^3-42x^2-6x=48x\left(x+\dfrac{1}{8}\right)(x-1).$

2) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x+8=0, \\ x-1=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-8, \\ x=1. \end{array}\right.$ – стаціонарні точки.

*3)*На проміжках $\left(-\infty;-\frac{1}{8}\right]$ і $[0;1]$ функція $f(x)$ спадає, а на $\left[-\frac{1}{8};0\right]$ і $[1;+\infty)$ зростає, $f_{\min}=f\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{5137}{2\cdot 8^3}\approx -5{,}0166$, $f_{\max}=f(0)=-5$; $f_{\min}=f(1)=-10$; $f\left(-\frac{1}{8}\right)<f(0)$.

Також відмітимо, що $f(-1)=18$ і $f(2)=63$. Якщо функція $f(x)$ зростає на проміжку $[1;+\infty)$ то вона зростає і на відрізку $[1;2]$ Оскільки на кінцях відрізка $[1;2]$ неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків, то за теоремою про проміжне значення неперервної функції маємо, що функція $f(x)$ приймає на проміжку $[1;+\infty)$ значення, рівне нулю в єдиній точці $x=x_1$, $1<x_1<2$ Аналогічно, знаходимо, що існує лише одна точка x_2, $-1<x_2<-\frac{1}{8}$, в якій графік функції $y=f(x)$ перетинає вісь абсцис.

Отже, рівняння $12x^4-14x^3-3x^2-5=0$ має тільки два дійсних корені (рис. 11.1). ■

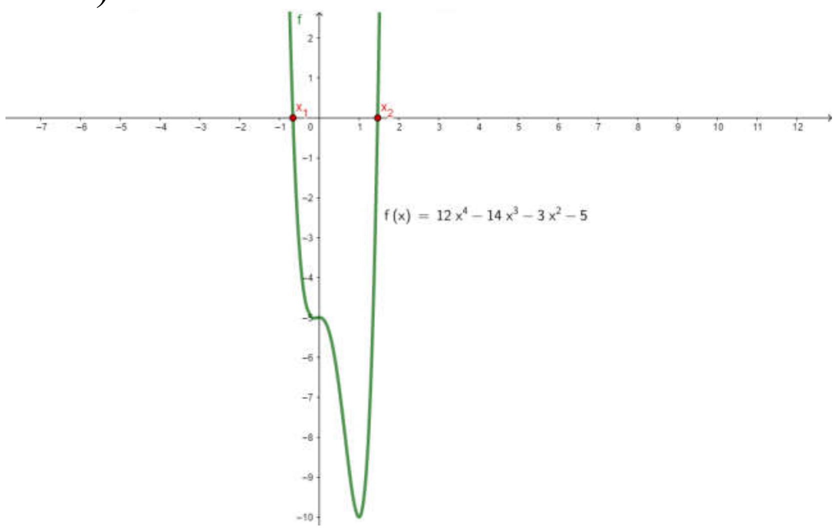


Рис. 11.1

Задача 11.2. [5] *Розв'язати рівняння:*

$$x^2+2x+3=(x^2+x+1)(x^4+x^2+4).$$

Розв'язання. ОДЗ рівняння буде вся числова пряма. Оскільки $x^2+x+1>0$ для будь-якого x, то рівняння можемо переписати в такому вигляді: $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}=x^4+x^2+4$ або $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=x^4+x^2+3$. Найменшим значенням функції $f(x)=x^4+x^2+3$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$ є 3. Знайдемо найбільше значення на проміжку $(-\infty;+\infty)$ функції $g(x)=\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$. З того, що функція $g(x)$ на проміжку $(-\infty;-2)$ є від'ємною, а на $(-2;+\infty)$ –додатна, то найбільше значення функція $g(x)$ може приймати тільки на проміжку $(-2;+\infty)$ Дана функція на проміжку $(-\infty;+\infty)$ має похідну

$g'(x)=\dfrac{x^2+x+1-(x+2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=-\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$, яка переходить в нуль в таких точках: $x_1=-2+\sqrt{3},\ x_2=-2-\sqrt{3}$. Оскільки на проміжку $\left(-2+\sqrt{3};+\infty\right)$ маємо $g(x)<0$, а на проміжку $\left(-2;-2+\sqrt{3}\right)-g'(x)>0$, то, враховуючи неперервність функції $g(x)$, приходимо до висновку, що на проміжку $\left[-2+\sqrt{3};+\infty\right)$ вона спадає, а на проміжку $\left[-2;-2+\sqrt{3}\right]$ – зростає. Звідси, в точці $x_2=-2+\sqrt{3}$ функція $g(x)$ приймає найбільше значення, причому $g(x_2)=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$. Оскільки $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}<3$, то для будь-якого x справедливі нерівності $f(x)\ge 3>\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\ge g(x)$ з яких слідує те, що $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=x^4+x^2+3$ розв'язків не має. Звідси, розв'язків не має і рівносильне йому рівняння $x^2+2x+3=(x^2+x+1)(x^4+x^2+4)$ (рис. 11.2). ■

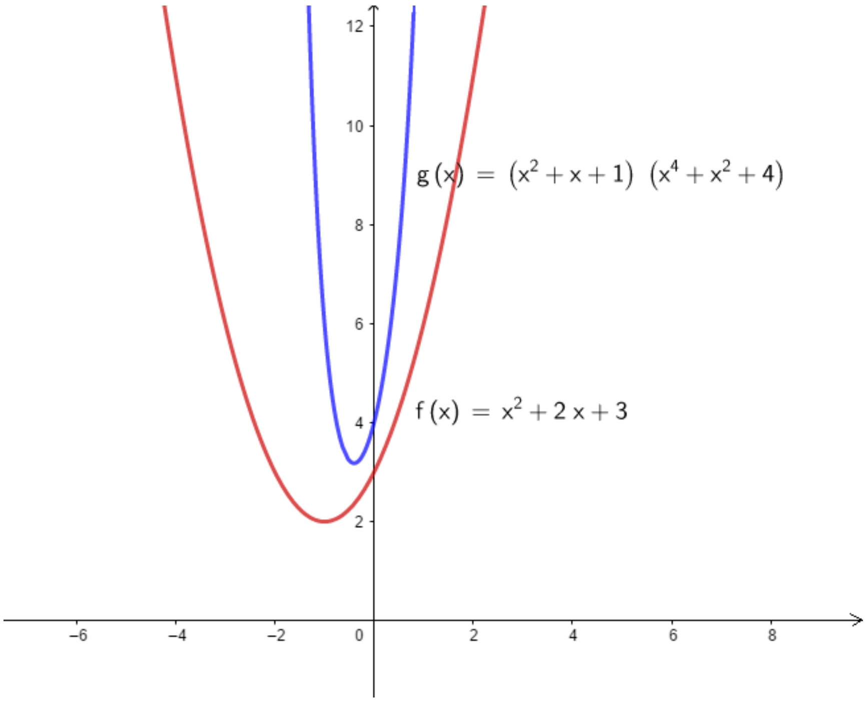


Рис. 11.2

Задача 11.3. *При яких значеннях* a *рівняння* $|\ln x| - ax = 0$ *має три корені?*

Розв'язання. Перепишемо рівняння $|\ln x| - ax = 0$ в такому вигляді: $|\ln x| = ax$. Розглянемо функцію $f(x) = |\ln x|$ і $g_a(x) = ax$ і побудуємо їх графіки (рис. 11.3).

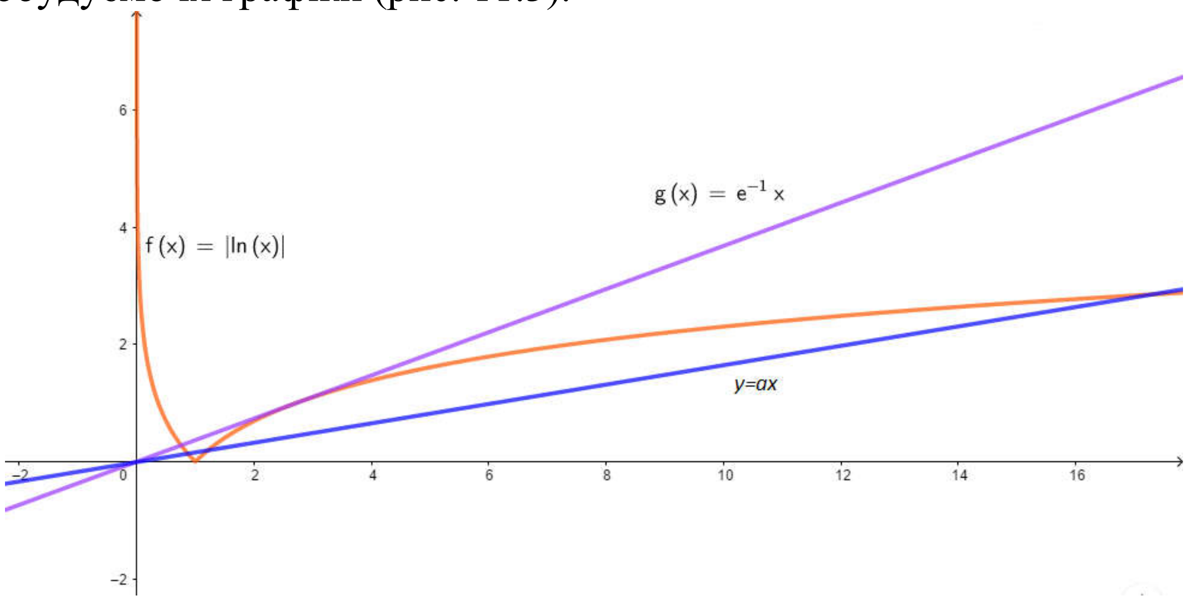


Рис. 11.3

Графіком функції $g_a(x)$ є функція, яка проходить через початок координат і утворює з додатнім напрямком осі абсцис кут, який визначається параметром a.

Зрозуміло, що при $a<0$ пряма $y=ax$ не перетинає графік функції $f(x)$ – рівняння $|\ln x|=ax$, а отже, і рівняння $|\ln x|-ax=0$, розв'язків не має. При $a=0$ рівняння $|\ln x|=ax$ має єдиний корінь: $x=1$. При $a>0$, але не більшому за деяке значення a_m, при якому пряма $y=ax$ дотикається до вітки кривої $f(x)$, яка відповідає проміжку $(1;+\infty)$, тобто при $0<a<a_m$, рівняння $|\ln x|-ax=0$ має три корені. Це пояснюється тим, що при $0<a<a_m$ пряма перетинає графік функції $f(x)$ в трьох точках: в одній точці – вітку кривої на проміжку $(0;1)$ і в інших точках – на проміжку $(1;+\infty)$. Абсциси цих точок і будуть коренями рівняння $|\ln x|=ax$.

На перший погляд здається, що при малих додатних a пряма $y=ax$ перетинає вітку графіка функції $f(x)$ на проміжку $(1;+\infty)$ тільки в одній точці, абсциса якої близька до одиниці. Відомо, що степенева функція при зростанні x зростає скоріше за логарифмічну, тому при будь-якому $a>0$ і як завгодно малому по абсолютній величині пряма $y=ax$ двічі перетинає вітку $f(x)$, що відповідає проміжку $(1;+\infty)$.

Тепер знайдемо, при якому значенні a пряма $y=ax$ дотикається до цієї вітки. Нехай $A(x_0;y_0)$ – точка дотику. Тодішукане значення a знаходимо із системи $\begin{cases} f(x_0)=g_a(x_0), \\ f'(x_0)=g'_a(x_0) \end{cases}$ або

$$\begin{cases} \ln x_0 = ax_0, \\ \dfrac{1}{x_0}=a, \end{cases} \quad \text{звідси } x_0=\frac{1}{a};\ \ln\left(\frac{1}{a}\right)=1 \to a=e^{-1}.$$

Отже, $a_m=e^{-1}$. Звідси при $a\in\left(0;e^{-1}\right)$ рівняння $|\ln x|-ax=0$ має три корені. ■

Задача 11.4. *Скільки коренів має рівняння:*

$$\left(x^2-2x\right)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x=a?$$

Розв'язання. Розглянемо функцію лівої частини заданого рівняння $f(x)=\left(x^2-2x\right)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x$.

Область визначення функції $f(x)$: $x=(0;+\infty)$.

Знайдемо точки екстремуму та проміжки монотонності функції. Для цього знайдемо похідну:

$f'(x)=(2x-2)\ln x+x-2-3x+4=2(x-1)(\ln x-1)$.

Далі визначимо критичні точки, для цього необхідно розв'язати рівняння $f'(x)=0$: $(x-1)(\ln x-1)=0$.

Критичні точки $x_1=1$, $x_2=e$. Тобто одержали три проміжки: $(0;1)$, $(1;e)$, $(e;+\infty)$. Визначимо знак похідної на кожному з трьох проміжків:

1) $0<x<1$, тоді $f'(x)>0$. Отже на цьому проміжку функція $f(x)=\left(x^2-2x\right)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x$ зростає.

2) $1<x<e$, тоді $f'(x)<0$. Отже на цьому проміжку функція $f(x)=\left(x^2-2x\right)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x$ спадає.

3) $x>e$, тоді $f'(x)>0$. Отже на цьому проміжку функція $f(x)=\left(x^2-2x\right)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x$ зростає.

Звідси можна зробити висновок, що точка $x=1$ $x=1$ є точкою максимуму, а точка $x=e$ – точкою мінімуму.

Знайдемо значення максимуму і мінімуму:

$f(1)=2{,}5$; $f(e)=\dfrac{e(4-e)}{2}$.

Крім того,

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(\left(x^2-2x\right)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x\right)=0.$$

Визначимо кількість коренів рівняння, а саме:

1) для $0<a<\dfrac{e(4-e)}{2}$, $a>2{,}5$, один корінь;

2) для $a=2{,}5$, або $a=\dfrac{e(4-e)}{2}$ два корені;

3) для $\dfrac{e(4-e)}{2}<a<2{,}5$ три корені;

4) для $a\le 0$ корені відсутні. ■

Для наочного зображення кожного з випадків побудуємо графік функції в програмі Geogebra (рис. 11.4):

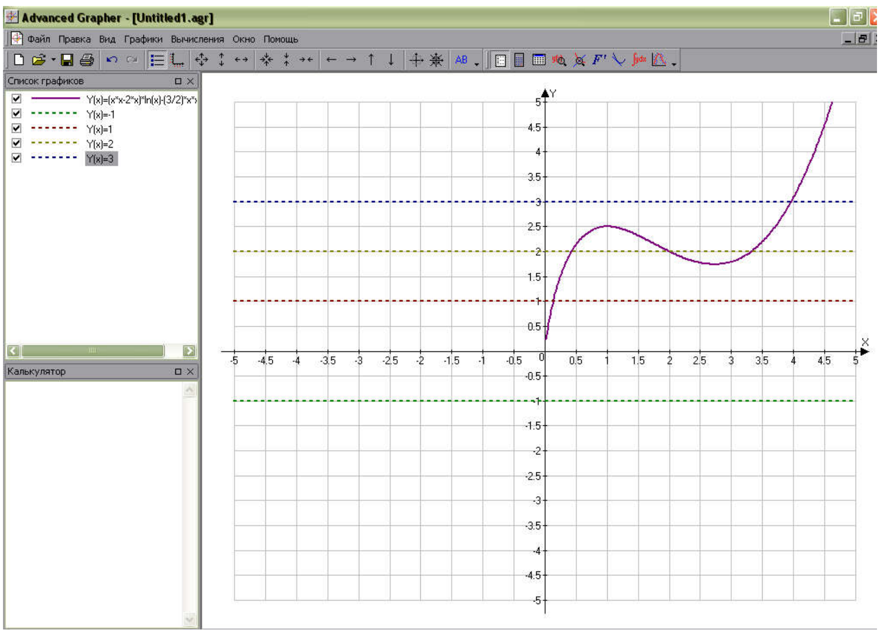


Рис. 11.4

Задача 11.5. *Для яких значень параметрів a і b рівність* $a\cdot 3^x+b=3^{ax+b}$ *є тотожністю на множині дійсних чисел?*

Розв'язання.

Розглянемо функцію $f(x)=a\cdot 3^x+b-3^{ax+b}$.

Знайдемо похідну цієї функції і прирівняємо її до нуля:

$$f'(x)=a\cdot 3^x\ln 3-a\cdot 3^{ax+b}\ln 3=a\cdot 3^x\ln 3\left(1-3^{ax+b-x}\right)=0.$$

Очевидно, це буде тоді, коли $a=0$ або $ax+b-x=0$. Розглянемо кожен з цих випадків:

1) якщо $a=0$, тоді задана рівність набуде вигляду $b=3^b$, що неможливо ні при жодному значенню b.

2) $ax+b-x=0$. Це можливо для будь-якого x у випадку, коли $a=1$, $b=0$. Тоді задана рівність набуде вигляду $3^x=3^x$. Тобто одержали тотожність. ■

Екстремальні задачі

Екстремальні задачі – це задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення певної величини в прикладних задачах. У них під час виконання певних умов потрібно знайти найбільше (найменше) значення геометричної величини (зокрема, периметра, площі, поверхні, об’єму тощо). Цю величину можна зазвичай подати за допомогою тієї чи іншої формули, як функцію однієї з даних величин.

Задача 11.6. [22] *Число 8 розбити на два таких доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.*

Розв’язання

Потрібно записати функцію і дослідити її на мінімум.

Нехай один доданок x, тоді другий $(8-x)$. Отже, потрібно дослідити функцію $y=x^3+(8-x)^3$.

$D(y)=(0;8)$;

Знаходимо критичні точки, досліджуємо в яких точках функція набуває найменшого значення.

$y'=3x^2-3(8-x)^2$;

$3x^2-3(8-x)^2=0$, $x^2-(8-x)^2=0$,

$x^2-(64-16x+x^2)=0$,

$x^2-64+16x-x^2=0$,

$16x-64=0$, $x=4$;

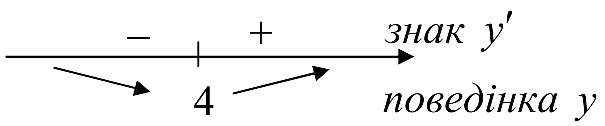


Рис. 11.5

Шукані доданки 4 і 4. ■

Задача 11.7. [22] Яке із десяти чисел $1^{10}, 2^9, 3^8, 4^7, 5^6, 6^5, 7^4, 8^3, 9^2, 10^1$ *найбільше?*

Розв'язання.

Зрозуміло, що це число міститься в середині заданої скінченної послідовності чисел і його можна знайти безпосереднім обчисленням.

Знайдемоце число за допомогою похідної. Для цього розглянемо функцію $f(x) = x^{11-x}$, $x > 0$. Знайдемо її похідну, використавши метод логарифмічного диференціювання:

$$f(x) = e^{(11-x)\ln x},$$

$$f'(x) = e^{(11-x)\ln x}\left(\frac{11-x}{x} - \ln x\right) = x^{11-x}\left(\frac{11-x}{x} - \ln x\right).$$

Знак похідної залежить лише від виразу $g(x) = \frac{11}{x} - \ln x - 1$, що знаходиться в дужках. $g'(x) = -\frac{11}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{11+x}{x^2} < 0$, отже функція $g(x)$ спадає на інтервалі $(0;+\infty)$, причому $g(4) = 1{,}75 - \ln 4 \approx 0{,}36 > 0$, а $g(5) = 1{,}2 - \ln 5 \approx -0{,}41 < 0$, тому існує точка $x_0 \in (4;5)$, у якій $g(x_0) = 0$.

Робимо висновок, що функція $f(x)$ на інтервалі $(0; x_0)$ зростає, а на інтервалі $(x_0;+\infty)$ – спадає. Тоді найбільше число буде $f(4) = 4^7 = 16384$ або $f(5) = 5^6 = 3125$. Безпосереднє обчислення дає відповідь на поставлене в задачі запитання: 4^7 є найбільшим серед десяти даних чисел. ■

Задача 11.8. [3] *Розв'язати рівняння* $\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}=2\left(1+\cos 2\pi x\right)$.

Розв'язання.

Оскільки в нас немає формул, які б дозволяли перетворювати одночасно ірраціональні й тригонометричні вирази, то спробуємо розв'язати задане рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій. Оцінимо області значень функцій: для функції, яка стоїть у правій частині рівняння, це легко зробити без похідної, а для функції, що стоїть у лівій частині рівняння, зручно використовувати похідну.

ОДЗ заданого рівняння: $x>0$. Оцінимо значення лівої і правої частин рівняння. Оскільки $\cos 2\pi x$ набуває всіх значень від -1 до 1, то вираз $1+\cos 2\pi x$ набуває всіх значень від 0 до 2, а функція $g\left(x\right)=2\left(1+\cos 2\pi x\right)$ набуває всіх значень від 0 до 4. Отже, $0\le g\left(x\right)\le 4$.

Функцію $f\left(x\right)=\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}$ дослідимо за допомогою похідної. Область визначення функції $D\left(f\right)=\left(0;+\infty\right)$.

$f'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-\frac{4}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x\sqrt{x}}=\frac{x-4}{2x\sqrt{x}}$ – існує на всій області визначення функції $f\left(x\right)$.

$f'\left(x\right)=0$, $\frac{x-4}{2x\sqrt{x}}=0$, $x=4$ – критична точка. Позначаємокритичну точку на області визначення функції $f\left(x\right)$ і знаходимо знаки похідної в кожному з одержаних проміжків (рис. 11.6).

знак $f'(x)$ $\qquad - \qquad\qquad +$

поведінка $f(x)$ $\quad \searrow \quad 4 \quad \nearrow \quad x$

т. min

Рис. 11.6

Неперервна функція $f(x)$ має на інтервалі $(0;+\infty)$ тільки одну критичну точку, а саме точку мінімуму (у ній похідна змінює знак «$-$» на знак «$+$»).

Тоді в цій точці функція набуває свого найменшогозначення: $f(4)=4$.Отже, $f(x)\geq 4$.

Враховуючи, що $g(x)\leq 4$, задане рівняння $f(x)=g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=4, \\ g(x)=4. \end{cases}$ Але значення 4 функція $f(x)$ набуває тільки при $x=4$, що задовольняє й друге рівняння $\left(g(4)=2(1+\cos 8\pi)=4\right)$.

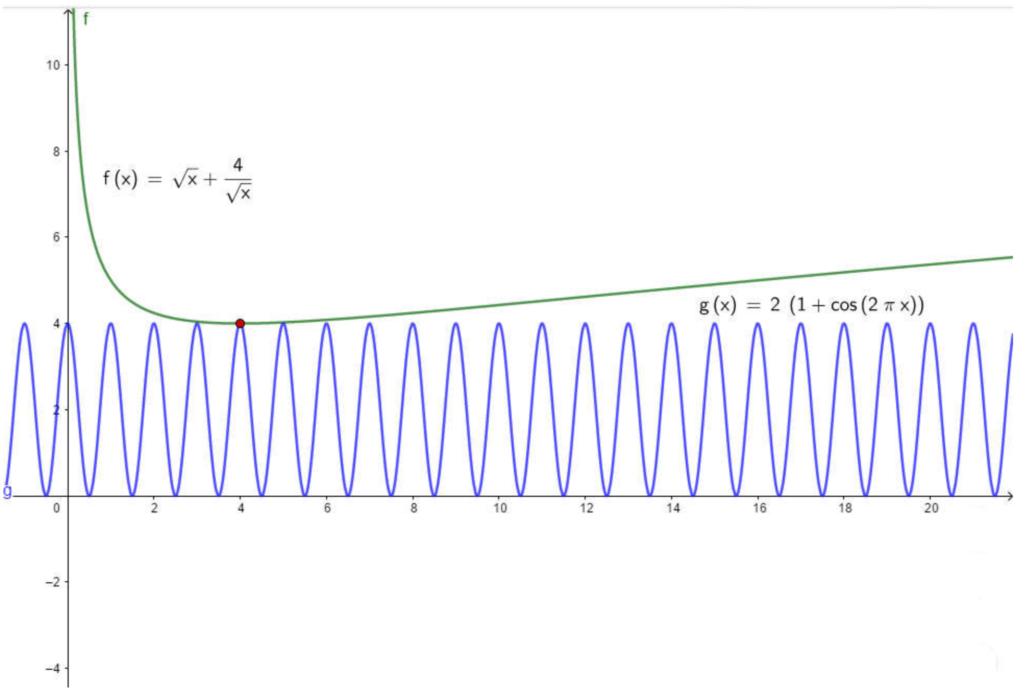


Рис. 11.7

Отже, одержана система (і заданерівняння) має єдиний розв’язок $-\ x=4$. ■

Задача 11.9. *Знайти найбільший член послідовності* $a_n = n^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x \geq 1$ і знайдемо її найбільше значення на проміжку $[1;+\infty)$. З того, що $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, при $x = 1$ маємо $f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln x}(1 - \ln x)$, звідси

$f'(x) = 0$ при $x = e$; $f'(x) > 0$ при $1 < x < e$; $f'(x) < 0$ при $x > e$.

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[1; e]$ і $f'(x) > 0$ на інтервалі $(1; e)$, то функція $f(x)$ зростає на відрізку $[1; e]$; оскільки функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[e;+\infty)$ і $f'(x) < 0$ при $x > e$, то функція $f(x)$ спадає на проміжку $[e;+\infty)$. Звідси, найбільше значення даної функції на проміжку $[1;+\infty)$ буде в точці $x = e$ і дорівнює $e^{\frac{1}{e}}$. Приймаючи до уваги те, що $2 < e < 3$ і доведену вище властивість монотонності функції $f(x)$ для знаходження найбільшого члена послідовності $a_n = n^{\frac{1}{n}}$, нам достатньо лише зрівняти два її члена – другий і третій, тобто числа $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$. Оскільки очевидно, що $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, то шуканим членом послідовності буде $a_3 = \sqrt[3]{3}$. ■

Задача 11.10. *Довести, що з усіх прямокутників, які мають площу* a^2*, квадрат має найменший периметр.*

Доведення.

Відомо, що площа прямокутника обчислюється за формулою $S = a \cdot b$, тому виражаємо сторони даного прямокутника і записуємо периметр як функцію $p(x)$.

Нехай одна сторона прямокутника x, тоді друга $\dfrac{a^2}{x}$, а периметр $p=2\left(\dfrac{a^2}{x}+x\right)$, $p'=2\left(-\dfrac{a^2}{x^2}+1\right)=2\left(\dfrac{x^2-a^2}{x^2}\right)$; $p'=0$,

$$\frac{x^2-a^2}{x^2}=0\Rightarrow\begin{cases}x=a,\\x=-a,\\x\neq 0.\end{cases}$$

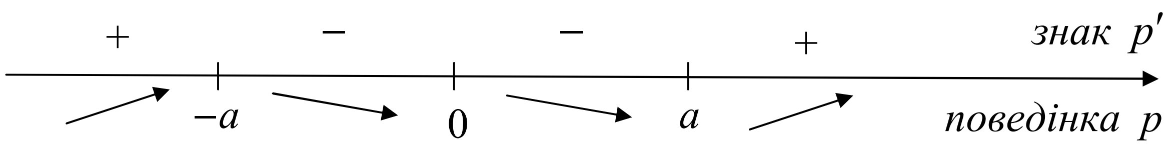


Рис. 11.8

Отже, сторони прямокутника a і a, тому цей прямокутник квадрат. ■

Задача 11.11. *Якими мають бути розміри (радіус основи і висота) відкритого зверху циліндричного бака максимальної місткості, якщо на його виготовлення виділено* $S=27\pi$ *матеріалу?*

Розв'язання.

Місткість бака $V=\pi R^2H$, а на його виготовлення виділили матеріалу площею $S=\pi R^2+2\pi RH$. Звідси визначаємо висоту бака і записуємо місткість бака $V(R)$ як функцію від радіуса.

$$S=\pi R^2+2\pi RH\Rightarrow H=\frac{S-\pi R^2}{2\pi R}.$$

Знаходимо значення R при якому місткість бака буде найбільшою: знаходимо похідну функції; розв'язуємо рівняння $V'=0$ і знаходимо критичні точки; перевіряємо, в яких точках функція буде мати найбільше значення.

$$V=\pi R^2\frac{S-\pi R^2}{2\pi R}=\frac{SR-\pi R^3}{2}=V(R).$$

$$V'=\frac{1}{2}\left(S-3\pi R^2\right),V'=0,$$

$$S-3\pi R^2=0,\ R=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}=\sqrt{\frac{27\pi}{3\pi}}=3.$$

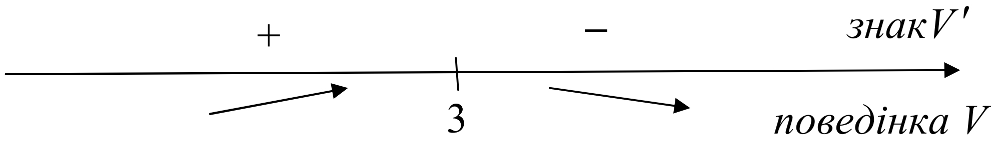


Рис. 11.9

Знаходимо висоту бака з співвідношення $H=\dfrac{S-\pi R^2}{2\pi R}$.

$$H=\frac{S-\pi R^2}{2\pi R}=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}=3.\ \blacksquare$$

Задача 11.12. *Криволінійна трапеція обмежена графіком функції* $f(x)=x^2+1$ *і прямими* $y=0,\ x=1,\ x=2$. *У якій точці графіка функції* $f(x)=x^2+1,\ x\in[1;2]$ *треба провести дотичну, щоб вона відтинала від криволінійної трапеції звичайну трапецію найбільшої площі?*

Розв'язання.

Нехай дотичну до графіка функції $f(x)=x^2+1$ проведено в точці $A(t;t^2+1)$, при $t\in[1;2]$(рис. 11.10).

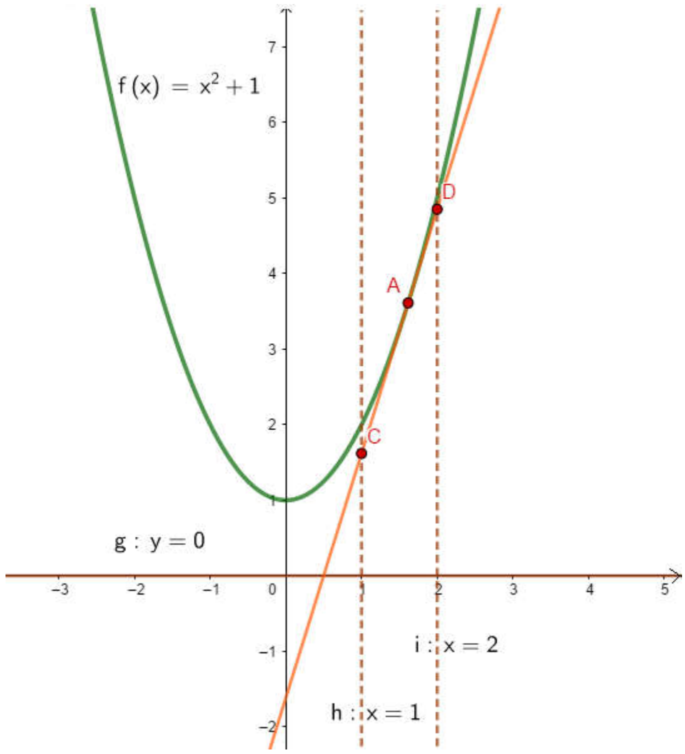


Рис. 11.10

Оскільки $y' = 2x$, то $y'(t) = 2t$. Тому рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 1$ в точці $A(t; t^2 + 1)$ має вигляд: $y - (t^2 + 1) = 2t(x - t)$ або $y = 2tx - t^2 + 1$. Ця дотична перетинає прямі $x = 1, x = 2$ у точках $C(1; y_1)$ і відповідно $D(2; y_2)$, де $y_1 = 2t - t^2 + 1, y_2 = 4t - t^2 + 1$ – основи звичайної трапеції, висота якої дорівнює 1. Тому її площа як функція незалежної змінної t набирає вигляду $S(t) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \cdot 1 = 3t - t^2 + 1$. Це квадратична функція з від'ємним коефіцієнтом при t^2, для якої $t = \frac{3}{2}$ – точка максимуму, причому $S_{\max} = S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4}$. Якщо $t = \frac{3}{2}$, то відповідна координата графіка функції $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4}$. Отже, дотична до графіка функції $f(x) = x^2 + 1,\ x \in [1; 2]$ в точці $A\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$ відтинає від криволінійної трапеції звичайну трапецію найбільшої площі. ■

Задача 11.13 [7] *Визначити кути рівнобедреного трикутника, для якого відношення $\frac{r}{R}$, де r і R – радіуси вписаного в трикутник і відповідно описаного навколо нього кола, є найбільшим.*

Розв'язання.

Нехай ΔABC – рівнобедрений, $AB = AC = y$, $\angle B = \angle C = x$, де $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Тоді $\angle A = \pi - 2x$. Але $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$, $f = \frac{r}{R} = \frac{4S^2}{abcp}$, де S – площа, p – півпериметр, a, b, c – довжини сторін трикутника.

Довжини сторін трикутника $AB = AC = y$, $BC = 2BD = 2y\cos x$ півпериметр $p = y(1 + \cos x)$, а площа трикутника

$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin x = y^2 \sin x \cos x$. Тому відношення $f = \frac{r}{R}$ як функція незалежної змінної x набирає вигляду: $f(x) = \frac{2\cos x \sin^2 x}{1 + \cos x}$, $o < x < \frac{\pi}{2}$.

Оскільки $f'(x) = \frac{2\sin x\left(-\sin^2 x + 2\cos^2 x + 2\cos^3 x\right)}{\left(1 + \cos x\right)^2}$ і $\sin x \neq 0$ для всіх $x \in \left(0; \quad \frac{\pi}{2}\right)$, то критичні точки функції f знайдемо, розв'язавши рівняння $-\sin^2 x + 2\cos^2 x + 2\cos^3 x = 0$. Для цього скористаємось підстановкою $tg\frac{x}{2} = t$. Дістаємо рівняння: $-12t^2 + 4 = 0$. Звідси, оскільки $tg\frac{x}{2} = t > 0$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ дістаємо єдиний додатний корінь $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$. З рівняння $tg\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ знаходимо критичні точки: $x = 2arctg\sqrt{\frac{1}{3}} + 2k\pi$ (k – ціле число); інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ належить лише одна: $2arctg\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{3}$. Якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, то $f'(x) > 0$, а якщо $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $f'(x) < 0$. Для цього достатньо дослідити знак похідної в точках $\frac{\pi}{3} - \varepsilon$ і $\frac{\pi}{3} + \varepsilon$, де ε – як завгодно мала величина і така, що точки $\frac{\pi}{3} - \varepsilon$ і $\frac{\pi}{3} + \varepsilon$ належать інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тому $\frac{\pi}{3}$ – точка максимуму функції, причому $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Оскільки $\frac{\pi}{3}$ – єдина точка максимуму на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то функція $f = \frac{r}{R}$ у цій точці набуває найбільшого значення. Але x – це величина кута при основі рівнобедреного трикутника. Тому і кут A при його вершині дорівнює $\frac{\pi}{3}$. А це означає, що ΔABC - рівносторонній. Отже, з усіх рівнобедрених трикутників відношення $\frac{r}{R}$ буде найбільшим у рівностороннього трикутника. ■

Задача 11.14. *Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса* R.

Розв'язання.

Позначимо через r і h радіус основи і висоту конуса відповідно. Осьовий переріз конуса – рівнобедрений трикутник ABN, вписаний в кулю, діаметр MN, який рівний $2R$, ND – висота конуса, AD – радіус його основи.

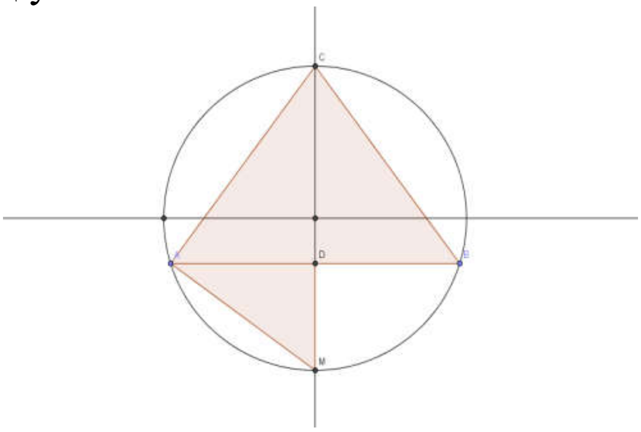


Рис. 11.11

Скористаємося формулою об'єму конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

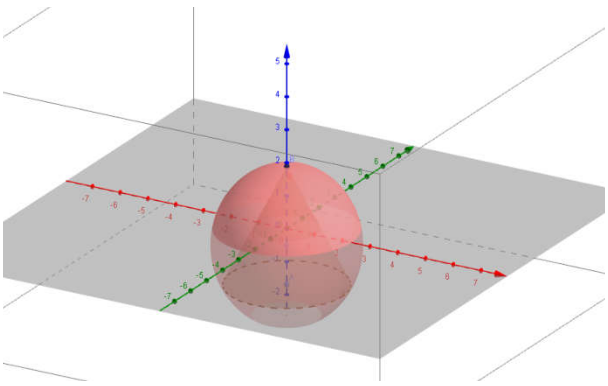


Рис. 11.12

За незалежну змінну зручно прийняти h. Так як $\angle MAN = 90°$, то ΔMAN – прямокутний і за відомою теоремою з планіметрії:

$AD^2 = MD \cdot DN$ або $r^2 = (2R - h) \cdot h$.

Таким чином, об'єм V конуса є функція від змінної h:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(2R-h\right)h^2, 0<h<2R.$$

Найбільше значення функції V можна отримати без використання похідної. Розглянемо добуток:

$$\left(4R-2h\right)\cdot h\cdot h.$$

Сума додатних множників постійна, вона рівна $4R$, тому добуток буде найбільшим при $h=4R-2h$, звідки $h=\frac{4}{3}R$.

Тому, при $h=\frac{4}{3}R$ об'єм конуса є найбільшим $V_{\max}=\frac{32}{27}\pi R^3$. ■

Практичні задачі

Задача 11.15. [18] *Над центром круглого стола, радіус якого R, підвішена електрична лампа. На якій висоті вона має знаходитися, щоб освітленість на краях стола була найбільшою?*

Розв'язання.

Нехай O – центр круглого стола. $OA=R$, $OB\perp OA$. Електрична лампа міститься в точці B, її промені утворюють з площиною стола деякий кут. Уведемо такі позначення: $\angle OAB=\varphi,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2},\ OB=x,\ x>0,$

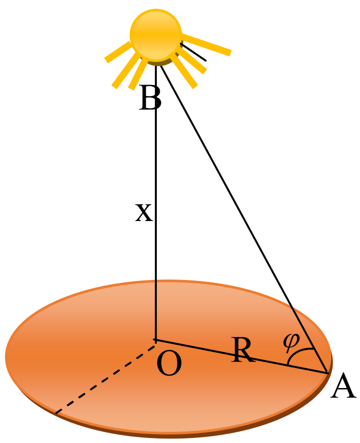


Рис. 11.13

тоді $AB^2=R^2+x^2$. З фізики відомо, що освітленість обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла і прямо пропорційна синусу кута між променями і площиною, на яку вони падають. Отже, освітленість $F = k\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, де k – коефіцієнт пропорційності. Функція F залежить від двох змінних x і φ. Визначимо $\sin\varphi$ через x. З ΔAOB дістаємо: $\sin\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$. Тому освітленість F як функція незалежної змінної x набирає вигляду: $F(x) = \dfrac{kx}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Оскільки $F'(x) = \dfrac{R^2 - 2x^2}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{5}{3}}}$, то, розв'язавши рівняння $R^2 - 2x^2 = 0$, знаходимо єдину критичну точку: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$, яка належить інтервалу $(0;+\infty)$. Знак похідної $F'(x)$ визначається знаком виразу $R^2 - 2x^2 = \left(R - \sqrt{2}x\right)\left(R + \sqrt{2}x\right)$. Тому $F'(x) > 0$, якщо $x \in \left(0;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}R\right)$, і $F'(x) < 0$, якщо $x \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}R;+\infty\right)$. А це означає, що $\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ – точка максимуму функції F на $(0;+\infty)$, причому $F_{\max} = F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}R\right) = \dfrac{2\sqrt{3}k}{9R^2}$. Оскільки $\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ – єдина точка максимуму на $(0;+\infty)$, то в ній функція F набуває найбільшого значення. Отже, освітленість на краях круглого стола, радіус якого R, буде найбільшою тоді, коли лампочка знаходиться над центром стола на висоті $\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$. ■

Задача 11.16. [17] *На стіні висить картина. Її нижній кінець наа, а верхній – наbм вищий від очей глядача. На якій відстаніхвід стіни повинен стати глядач, щоб бачити картину під найбільшим кутом?*

Розв'язання.

Нехай очі глядача містяться в точці O, відстань якої до стіни $OC = x,\ x > 0$. За умовою $AC = a,\ BC = b$, тому $AB = b - a$.

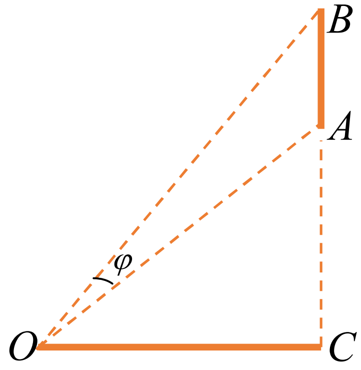


Рис. 11.14

Позначимо $\angle AOB = \varphi,\ \varphi > 0,\ \angle AOC = \alpha,\ \angle BOC = \beta$, тоді $\varphi = \beta - \alpha$. Оскільки $\operatorname{tg} AOC = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{x}$, а $\operatorname{tg} BOC = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{x}$, то тангенс кута φ як функція незалежної змінної x набирає вигляду:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = (b - a)\frac{x}{x^2 + ab}.$$

Дослідимо на екстремум функцію $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + ab}$. Оскільки $f'(x) = \dfrac{ab - x^2}{(x^2 + ab)^2}$, то з рівняння $ab - x^2 = 0$ знаходимо єдину критичну точку $\sqrt{ab} \in (0; +\infty)$. З виразу $f'(x)$ бачимо, що $f'(x) > 0$, якщо $x \in \left(0; \sqrt{ab}\right)$ і $f'(x) < 0$, якщо $x \in \left(\sqrt{ab}; +\infty\right)$. А це означає, що $\sqrt{ab}$ – єдина точка максимуму функції f, причому $f_{\max} = f\left(\sqrt{ab}\right) = \dfrac{\sqrt{ab}}{2ab} = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$. Оскільки $\sqrt{ab}$ – єдина точка максимуму функції f на $(0; +\infty)$, то в ній функція f, а отже, і функція $\operatorname{tg}\varphi$ набуває найбільшого значення. Найбільше значення кута $\varphi_{\max} = \operatorname{arctg}\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$. Отже, глядач бачитиме картину під найбільшим кутом, якщо його відстань від стіни буде середнім пропорційним значенням щодо величин a і b. ■

***Задача 11.17. [7]** З круглої колоди діаметрадвитесали балку прямокутного перерізу з основоюхі висотоюh. При якихxіh міцність балки буде найбільшою?*

Розв'язання.

У теорії опору матеріалів доводять, що міцність прямокутної балки P пропорційна добутку ширини балки на квадрат її висоти.

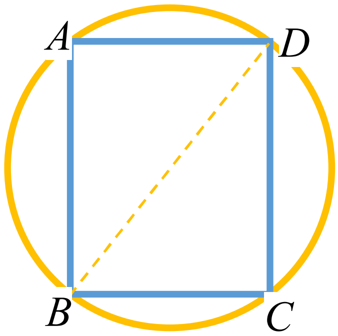


Рис. 11.15

Нехай $BC = x$ – ширина, $CD = y$ – висота балки. Тоді міцність $P = kxy^2$, де $k\ (k > 0)$ – коефіцієнт пропорційності, який залежить від довжини балки, матеріалу, з якого вона зроблена, тощо. Оскільки $BD = d$ – діаметр колоди, то $y^2 = d^2 - x^2$. Тому міцність балки як функція незалежної змінної x визначається формулою: $P(x) = kx(d^2 - x^2)$. Функція P визначена і диференційована для всіх $x \in [0; d]$, тому її похідна $P'(x) = k(d^2 - 3x^2) = k(d + \sqrt{3}x)(d - \sqrt{3}x)$. В області визначення функції P її похідна дорівнює нулю лише в точці $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$. Знак похідної визначається знаком множника $d - \sqrt{3}x$ (множник $k(d + \sqrt{3}x) > 0$). Якщо $x < \dfrac{d}{\sqrt{3}}$, то $P'(x) > 0$ і функція Pзростає, а якщо $x > \dfrac{d}{\sqrt{3}}$, то $P'(x) < 0$ і функція P спадає. А це означає, що $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ – точка максимуму функції P, причому $P_{\max} = P\left(\dfrac{d}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}kd^3$. $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ – єдина точка максимуму функції P на $[0; d]$і $P(0) = P(d) = 0$.

Отже, в точці $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ функція P набуває найбільшого значення. Якщо ширина балки $BC = x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$, то її висота $CD = y = \sqrt{\dfrac{2}{3}}d$, а її відношення $y : x = \sqrt{2} : 1$.■

Задача 11.18. [3] *Від каналу ширноюапід прямим кутом до нього відходить канал шириноюb. Знайти найбільшу довжину колоди, яка при сплаві з одного каналу в інший не застряне на повороті.*

Розв'язання.

На рисунку відрізком AB схематично зображено колоду в одному з можливих положень при сплаві з одного каналу в інший. Зрозуміло, що кінці колоди A і B впираються в берег каналу і сама колода дотикається до точки C – точка зламу берегів каналів при найбільшій довжині колоди.

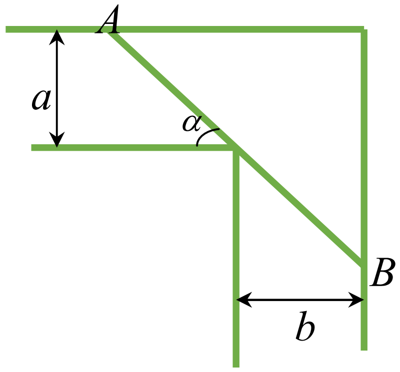


Рис. 11.16

Довжина відрізка AB рівна $d = AB = AC + BC = \dfrac{a}{\sin\alpha} + \dfrac{b}{\cos\alpha}$,

де α – можливий кут нахилу колоди до одного з берегів каналу. Найменше значення величини d буде найбільшою довжиною колоди.

Кут α вимірюється на інтервалі $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Оскільки $d>0$, то найменше значення величини d буде досягатися одночасно з найменшим значенням d^2; маємо

$d^2=\left(\dfrac{a}{\sin\alpha}+\dfrac{b}{\cos\alpha}\right)^2=\left(a+b\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\,\alpha}\right)$. Нехай $\mathrm{tg}\,\alpha=x$, де $0<x<+\infty$. Тоді задача зводиться до пошуку найменшого значення функції

$f(x)=(a+bx)^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ на проміжку $(0;+\infty)$. Маємо

$$f'(x)=\left(\left(a+bx\right)^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)'=2b\left(a+bx\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\left(a+bx\right)^2\left(-\frac{2}{x^3}\right)=$$

$$=2\left(a+bx\right)\left(b\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{a+bx}{x^3}\right)=2\left(a+bx\right)\left(b-\frac{a}{x^3}\right).$$

Звідси знаходимо, що $f'(x)=0$ при $x=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$, $f'(x)>0$ при $x>\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$, $f'(x)<0$ при $0<x<\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$. З того, що $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, то проведений вище аналіз показує, що $\min\limits_{x\in(0;\ +\infty)}f(x)=f\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}\right)$; звідси величина d^2 досягає свого найменшого значення, якщо $tg\alpha_0=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$. Оскільки $\alpha_0\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, то

$\sin\alpha_0=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha_0}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_0}}$, $\cos\alpha_0=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_0}}$, ці значення виразимо через відомі параметри a і b:

$$\sin\alpha_0 = \frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}, \quad \cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}.$$

Отже, позначивши через d_0 найбільшу довжину колоди, маємо:

$$d_0 = \frac{a}{\sin\alpha_0} + \frac{b}{\cos\alpha_0} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}. \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [4]** *Потрібно побудувати прямокутну площадку біля кам'яної стіни так, щоб з трьох сторін вона була загороджена сіткою, а четверта сторона прилягала до стіни. Для цього є а погонних метрів сітки. При якому співвідношенні сторін площадка буде мати найбільшу площу?*

✍**2.** *В дану кулю радіуса R вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею.*

✍**3. [4]** *Човен знаходиться на відстані 3 км від найближчої точки берега А. Швидкість човна – 4 км/год, швидкість руху пасажира по суші – 5 км/год. До якого пункту берега має припливти човен, щоб пасажир досяг села якнайшвидше? Село знаходиться на відстані 5 км від точки А.*

✍**4. [4]** *Від каналу шириною а під прямим кутом до нього відходить канал шириною b. Знайти найбільшу довжину дерева, яке при сплаві з одного каналу в інший не застрягне на повороті.*

✍**5. [4]** *Вікно має форму прямокутника, що закінчується півкругом. Периметр рівний* P. *Які повинні бути розміри вікна, щоб воно пропускало найбільшу кількість світла.*

✍**6. [4]** *Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіуса* R.

✍**7. [4]** *Через дану точку* $M(1;4)$ *провести пряму, яка не проходить через початок координат, так, щоби сума довжин відрізків, які вона відтинає на координатних осях, була найменшою.*

✍**8. [2]** *Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють відповідно 2 і 1 м. Потрібно вирубати з неї балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якого співпадала би з віссю колоди та об'єм якої був би найбільшим. Які повинні бути розміри балки?*

✍**9. [2]** *Навколо даного циліндра описати конус найменшого об'єму (площини основ циліндра і конуса співпадають).*

✍**10. [2]** *На колі задана точка* A. *Провести хорду* BC *паралельно дотичній в точці* A *так, щоб площа трикутника* ΔABC *була найбільшою.*

✍**11. [2]** *На еліпсі* $2x^2+y^2=18$ *задано дві точки* $A(1;4)$ *і* $B(3;0)$. *Знайти на еліпсі третю точку* C *таку, щоб площа трикутника* ΔABC *була найбільшою (найменшою).*

§ 12. Вгнутість, опуклість та точки перегину

Попередньо вивчіть лекцію 27 [11, с. 321–332].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Сформулювати означення вгнутої та опуклої кривої.

Означення 12.1. *Функція* $f(x)$ *називається* ***опуклою вгору (опуклою)*** *на інтервалі* (a, b), *якщо* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *і* $\forall \alpha \in (0, 1)$:

$$\boxed{f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \ge \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)}.$$

Якщо остання нерівність є строгою $\forall x_1, x_2,\ x_1 \ne x_2$ *то функція* $f(x)$ *називається* ***строго опуклою вгору (строго опуклою)*** *на інтервалі* (a, b).

Означення 12.2. *Функція* $f(x)$ *називається* ***опуклою вниз (вгнутою)*** *на інтервалі* (a, b), *якщо* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *і* $\forall \alpha \in (0,1)$:

$$\boxed{f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)}$$

Якщо остання нерівність є строгою $\forall x_1, x_2,\ x_1 \ne x_2$ *то функція* $f(x)$ *називається* ***строго опуклою вниз (строго вгнутою)*** *на інтервалі* (a, b).

Опукла вгору (опукла) функція характеризується тим, що всі точки довільної дуги її графіка лежать над відповідним відрізком AB прямої $l(x)\left(f(x)>l(x)\right)$ *(рис. 12.1). Аналогічно, якщо функція опукла вниз (вгнута), то всі точки довільної дуги її графіка лежать під відповідним відрізком AB прямої* $l(x)\left(f(x)<l(x)\right)$ *(рис. 12.2).*

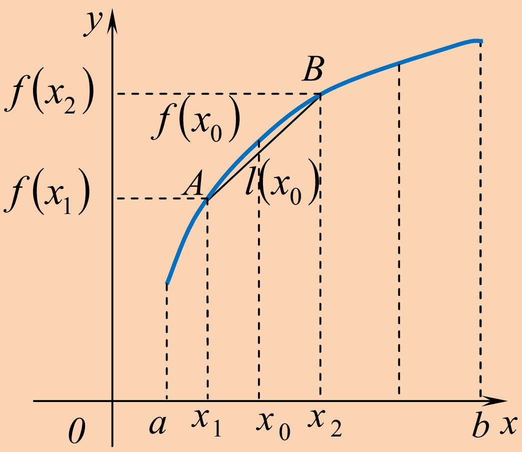


Рис 12.1

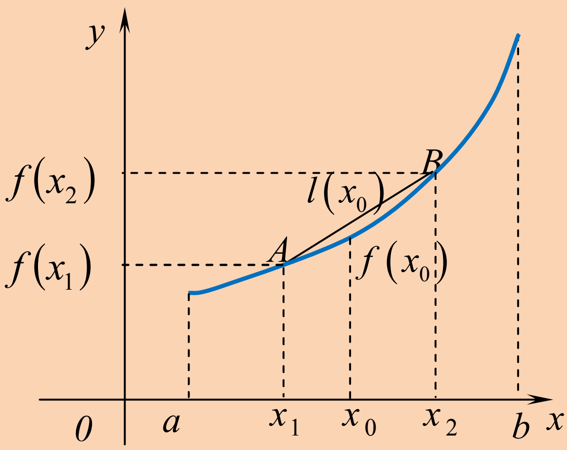


Рис. 12.2

2. Сформулювати достатні умови опуклості графіка функції.

Теорема 12.1. (достатня умова строгої опуклості). *Нехай функція* $f(x)$ *двічі диференційовна на інтервалі* (a,b). *Тоді, якщо* $f''(x)<0$ *на* (a,b), *то функція* $f(x)$ *строго опукла вгору (опукла), а якщо* $f''(x)>0$ *на* (a,b), *то функція* $f(x)$ *строго опукла вниз (вгнута) на цьому інтервалі.*

Теорема 12.2. *Нехай функція* $f(x)$ *має на всьому інтервалі* (a,b) *додатну (від'ємну) другу похідну:* $f''(x)>0$ $\left(f''(x)<0\right)$. *Тоді, для довільної точки* $x_0\in(a,b)$ *всі точки* $\left(x,f(x)\right)$, $x\in(a,b)$, $x\neq x_0$ *графіка функції* $f(x)$ *лежать вище (нижче) дотичної, проведеної до нього у точці* $\left(x,f(x_0)\right)$.

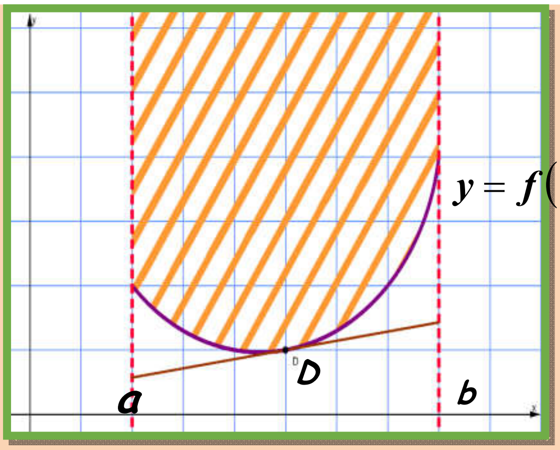


Рис. 12.3

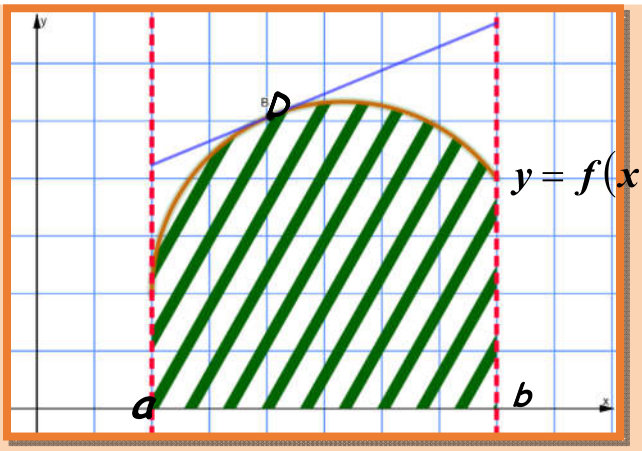


Рис. 12.4

3. Сформулювати означення точки перегину графіка функції.

Означення 12.3. *Нехай функція диференційовна у точці* $x = x_0$ *і нехай* $L(x) = 0$ *– рівняння дотичної до графіка функції* $f(x)$ *у точці* $(x_0, f(x_0))$. *Якщо різниця* $f(x) - L(x)$ *змінює знак при переході через точку* x_0, *то* x_0 *називається* ***точкою перегину функції*** $f(x)$ *(рис. 12.5).*

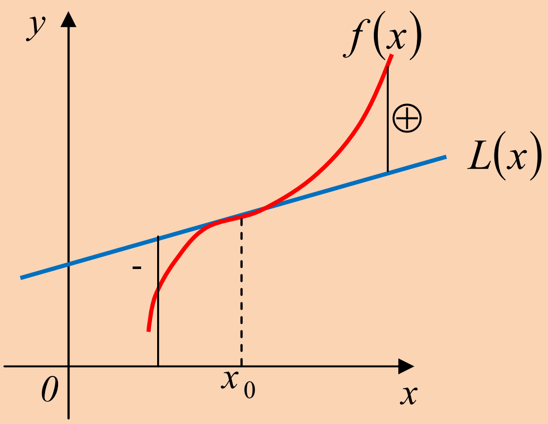


Рис. 12.5

4. Сформулювати необхідну умову перегину графіка функції, показати на прикладі, що ця умова не є достатньою.

Теорема 12.3 (необхідна умова перегину). *Якщо в точці перегину існує друга похідна, то вона дорівнює нулю.*

5. Сформулювати достатню умову перегину графіка функції.

Теорема 12.4 (достатня умова точки перегину). *Якщо функція* $f(x)$ *диференційовна в точці* x_0*, двічі диференційовна в деякому* $O_\delta^*(x_0)$ *і друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак при переході аргумента через* x_0*, то* x_0 *є точкою перегину функції* $f(x)$*.*

6. Сформулювати властивості опуклих (вгнутих) функцій.

Властивість 12.1. *[21] Нехай функція* $y = f(x)$ *опукла на проміжку* (a,b)*, тоді добуток заданої функції на деяку додатну константу теж опукла функція на цьому проміжку:*

$$y = C \cdot f(x).$$

Властивість 12.2. *[21] Нехай функція* $y = f_1(x)$ *опукла на проміжку* (a_1,b_1)*, а функція* $y = f_2(x)$ *опукла на проміжку* (a_2,b_2)*, тоді сума даних функцій* $y = f_1(x) + f_2(x)$ *є опуклою на проміжку* $(a_1,b_1) \cap (a_2,b_2)$*.*

Наслідок. *[21] Якщо функції* $f_i(x), i = 1,2,\dots,n,$ *опуклі на проміжках* (a_i,b_i) *відповідно, то функція* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x),\ C_i \ge 0,$ *опукла на проміжку* $(a_1,b_1) \cap (a_2,b_2) \cap \dots \cap (a_n,b_n)$*.*

Зауваження. *Добуток двох опуклих функцій може виявитися не опуклою функцією. Наприклад, функція* $y = x^{\frac{1}{3}}$ *– опукла, в той час, коли її квадрат –* $y = x^{\frac{2}{3}}$ *виявляється вгнутою функцією (рис. 12.6) [21].*

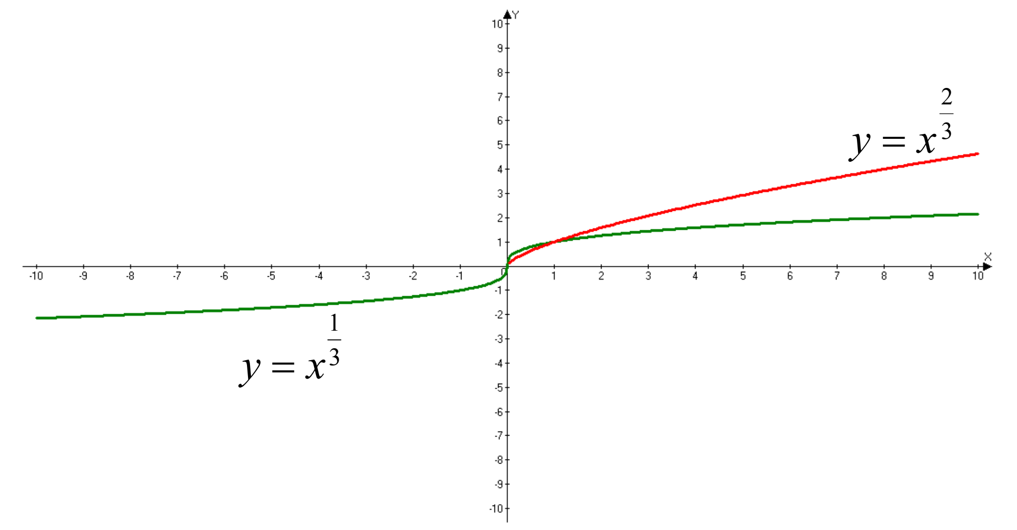


Рис. 12.6

Властивість 12.3. *[21] Якщо $y = f(x)$ і $x = g(y)$ – однозначні взаємно обернені функції на відповідних проміжках, то одночасно:*

$f(x)$	$g(y)$
опукла, зростає	*вгнута, зростає*
опукла, спадає	*опукла, спадає*
вгнута, спадає	*вгнута, спадає*

Властивість 12.4. *[21] Якщо функція $y = f(x)$, яка не є сталою, опукла на проміжку $(a;b)$, то така функція не може досягати найбільшого значення всередині цього проміжку.*

Приклади розв'язування вправ

Задача 12.1. *Знайти інтервали опуклості та точки перегину функцій:*

1) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 1$; **2)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$;

3) $f(x) = x^4(12\ln x - 7)$; **4)** $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$.

Розв'язання. В усіх задачах використаємо схему (алгоритм) дослідження функції на опуклість і точки перегину:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти першу і другу похідну, прирівняти до нуля; знайти можливі точки перегину;

3) дослідити зміну знаку другої похідної.

1. $f(x)=x^4-3x^3+3x^2-x+1.$

1) $D(f)=\mathbb{R}$;

2) $f'(x)=\left(x^4-3x^3+3x^2-x+1\right)'=4x^3-9x^2+6x-1;$

$f''(x)=12x^2-18x+6=6\left(2x^2-3x+1\right);$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

3)

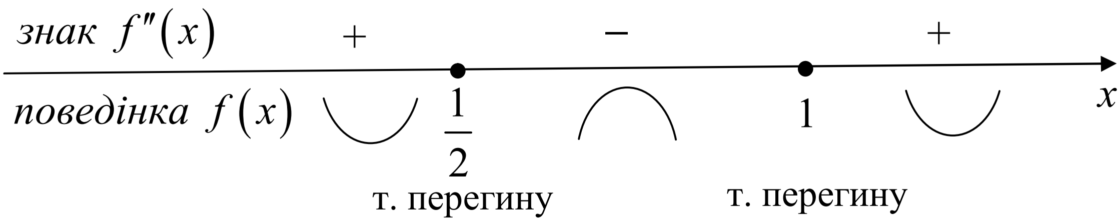


Рис. 12.7

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}-3\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{15}{16}; \qquad f(1)=1-3+3-1+1=1.$$

Таким чином, функція вгнута на кожному з проміжків $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ і $(1;+\infty)$, опукла на інтервалі $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$, точки перегину $x=\dfrac{1}{2}$; $x=1$. ■

2. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}.$

1) $D(f)=\mathbb{R}$;

2) $f'(x)=\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)'=\dfrac{-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$; $f''(x)=\dfrac{2(x-1)\left(x^2+4x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$;

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-1)\left(x^2+4x+1\right)=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=-2\pm\sqrt{3}.$ ■

3)

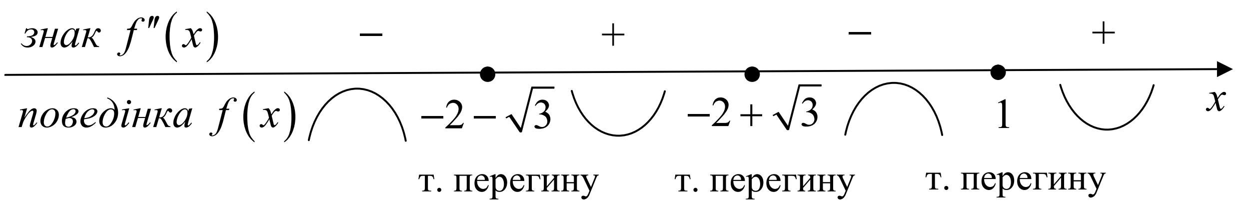


Рис. 12.8

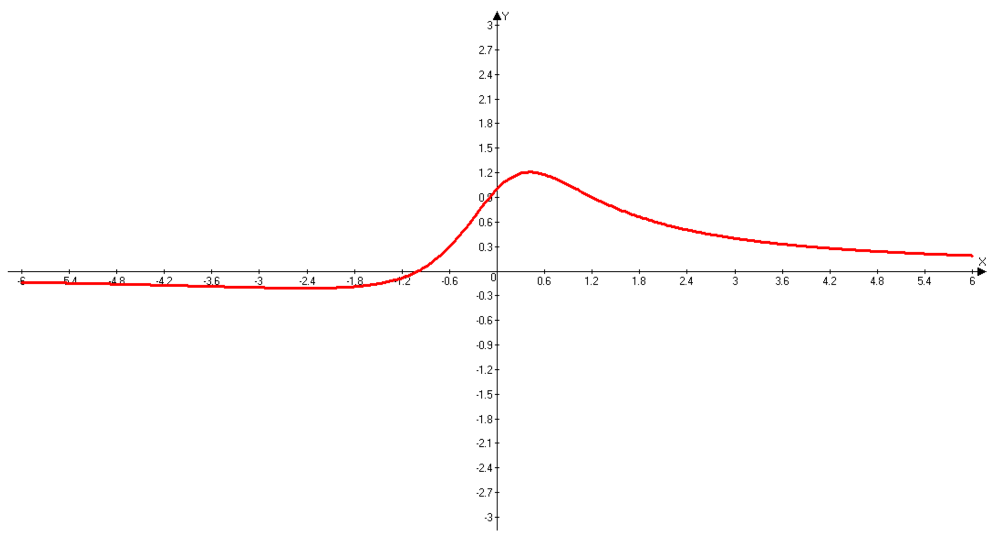


Рис. 12.9

3. $f(x)=x^4(12\ln x-7)$.

1) $D(f)=(0;+\infty)$;

2) $f'(x)=16x^3\cdot(3\ln x-1)$; $f''(x)=144x^2\ln x$;

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 144x^2\ln x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0\notin D(f), \\ x_2=1\in D(f). \end{array}\right.$$ ■

3)

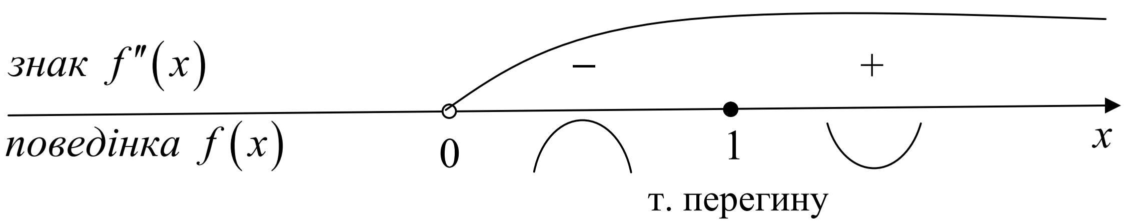


Рис. 12.10

4. $f(x)=e^{\operatorname{arctg} x}$.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$; **2)** $f'(x)=\dfrac{e^{\operatorname{arctgx}}}{1+x^2}$; $f''(x)=e^{\operatorname{arctgx}}\cdot\dfrac{1-2x}{(1+x^2)^2}$;

3) Оскільки $e^{\operatorname{arctgx}}>0$ і $(1+x^2)^2>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, то $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}(1-2x)$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow 1-2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. ■

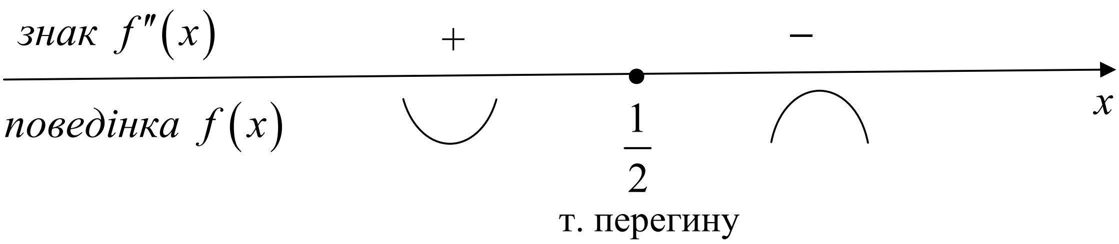


Рис. 12.11

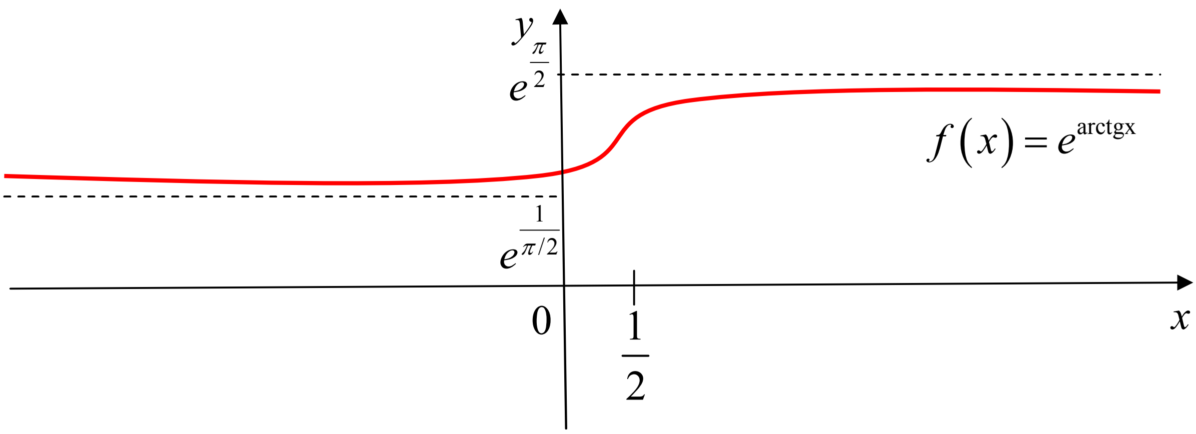


Рис. 12.12

Задача 12.2. [12] *Знайти точки перегину графіка функції* $y=e^{\sqrt[3]{x}}$ *і кутові коефіцієнти дотичних до графіка функції в точках перегину.*

Розв'язання.

Знайдемо точки перегину графіка заданої функції.

1) $D(y)=(-\infty;+\infty)$; *2)* $y'=e^{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)'=e^{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

$$y''=e^{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+e^{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}=e^{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

$y''=0$, отже точки «підозрілі» на точки перегину, це $x_1=0, x_2=8$, $y(0)=e^0=1$; $y(8)=e^2\approx 7{,}29$.

3)

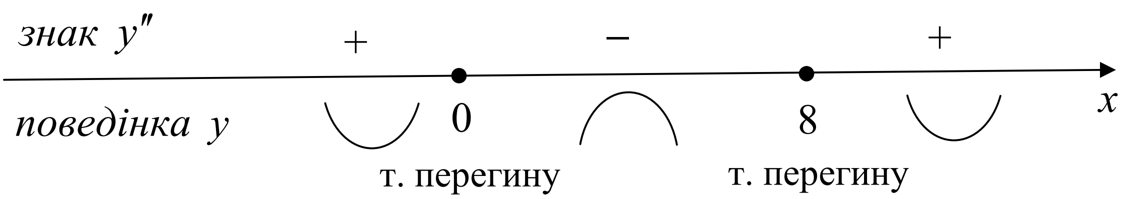


Рис. 12.13

Оскільки $y'(0)=\infty$, то дотична до графіка функції у точці $(0;1)$ вертикальна (це вісь Oy). В іншій точці перегину $(8;e^2)$ кутовий коефіцієнт дорівнює $k_{дот.}=f'(8)=\frac{e^2}{12}$. ■

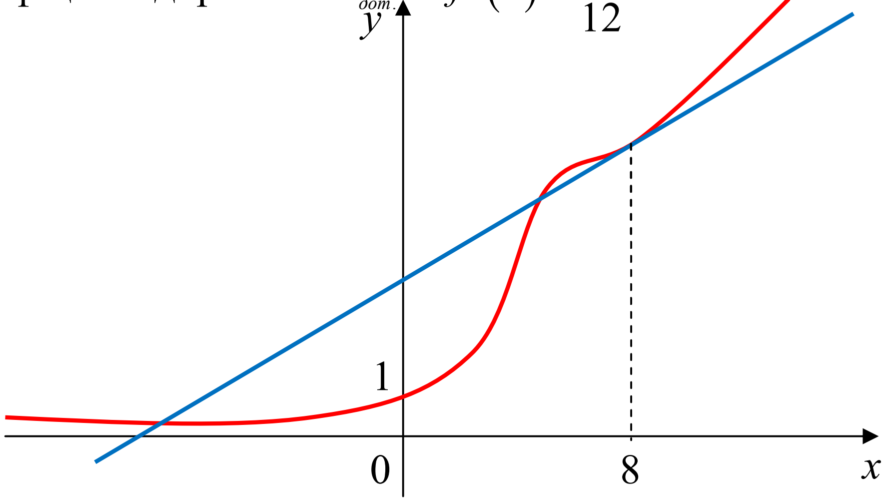


Рис. 12.14

Задача 12.3. *Знайти точки перегину графіка функції* $y(x)$, *заданої параметрично:*

1) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ a > 0$;

2) $x = te^{t},\ y = te^{-t}$

Розв'язання.

1. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ a > 0$.

1) $x'(t) = a(1 - \cos t),\ y'(t) = a\sin t$,

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

$$2)\ y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \left|\begin{array}{l}\textit{Використаємо правило знаходження}\\ \textit{похідної складеної функції і оберненої}\end{array}\right| =$$

$$= \left(y'_x\right)'_t \cdot t'_x = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{-1}{2\sin^2\frac{t}{2}\cdot a(1-\cos t)} =$$

$$= -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}} < 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Розглянемо знак другої похідної в околі точок вигляду $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

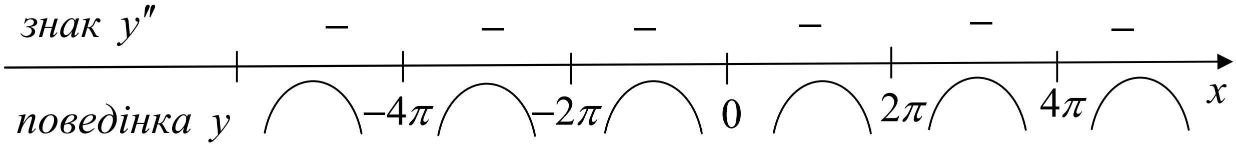


Рис. 12.15

Робимо висновок, що точок перегину немає. ■

2. $x = te^{t},\ y = te^{-t}$.

1) $x'(t) = te^{t} + e^{t} = e^{t}(t+1);\ y'(t) = e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}(1-t)$.

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{e^{-t}(1-t)}{e^t(1+t)} = e^{-2t} \cdot \frac{1-t}{1+t}.$$

$$2)\ y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_t \cdot t'_x = \left(e^{-2t} \cdot \frac{1-t}{1+t}\right)' \cdot \frac{1}{e^t(1+t)} =$$

$$= -2e^{-2t} \cdot \frac{2-t^2}{(1+t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(1+t)} = 2e^{-3t}\frac{t^2-2}{(1+t)^3}.$$

Можливі точки перегину $t_1 = -\sqrt{2}, t_2 = \sqrt{2}, t_3 = -1$.

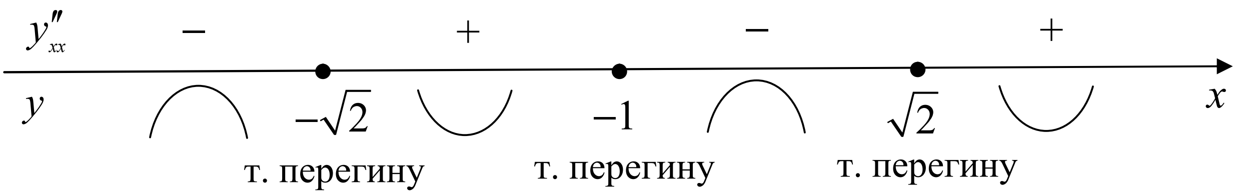


Рис. 12.16

$$\begin{cases} x\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} \approx -0{,}34, \\ y\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \approx -5{,}82, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(-1) = -\dfrac{1}{e} \approx -0{,}37, \\ y(-1) = -e \approx -2{,}72, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \approx 5{,}82, \\ y\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} \approx 0{,}34. \end{cases} \blacksquare$$

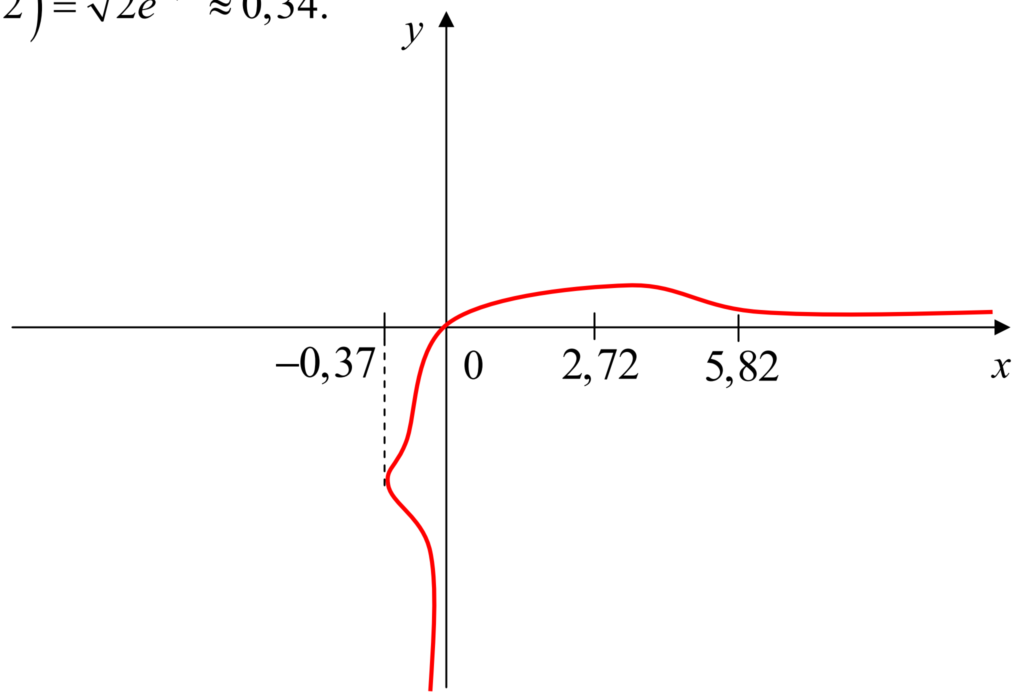


Рис. 12.17

Задача 12.4. [4] Вибрати параметри α і β так, щоб крива $x^2y+\alpha x+\beta y=0$ (*) мала точку $A(2;\,2{,}5)$ точкою перегину. Які ще точки перегину вона буде мати?

Розв'язання.

Функція $y=y(x)$ задана неявно. Для того, щоб точка $A(2;\,2{,}5)$ була точкою перегину, мають виконуватися умови: точка A лежить на кривій (*), тобто $4\cdot 2{,}5+2\alpha+2{,}5\beta=0$ *(1)* і $y''_{xx}(2)=0$.

Знайдемо другу похідну:

$x^2y+\alpha x+\beta y=0\Big|_x'$, $2xy+x^2y'+\alpha+\beta y'=0$, звідки $y_x'=-\dfrac{2xy+\alpha}{x^2+\beta}$.

$$y''_{xx}=-\frac{(2y+2xy')(x^2+\beta)-(2xy+\alpha)\cdot 2x}{(x^2+\beta)^2}=2\frac{3x^2y+2\alpha x-\beta y}{(x^2+\beta)^2};$$

$$y''_{xx}=0\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2y+2\alpha x-\beta y=0,\\ x^2+\beta\neq 0.\end{cases}$$

Підставимо в останню систему координати точки $A(2;\,2{,}5)$:

$$\begin{cases}30+4\alpha-2{,}5\beta=0,\\ 4+\beta\neq 0,\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}4\alpha-2{,}5\beta=-30,\\ \beta\neq -4.\end{cases}$$

Врахувавши рівність *(1)*, знайдемо параметри:

$$\begin{cases}2\alpha+2{,}5\beta=-10,\\ 4\alpha-2{,}5\beta=-30,\\ \beta\neq -4.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha=-40,\\ 2\alpha+2{,}5\beta=-10,\\ \beta\neq -4.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{20}{3},\\ \beta=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

Отже, $x^2y-\dfrac{20}{3}x+\dfrac{4}{3}y=0$, або $3x^2y-20x+4y=0$ **(2)**,

$$y''_{xx}=2\cdot\frac{3x^2y-\frac{40}{3}x-\frac{4}{3}y}{\left(x^2+\frac{4}{3}\right)^2}=2\cdot\frac{9x^2y-40x-4y}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)^2}.$$

З рівності *(2)* можемо виразити $y(x)$ як явну функцію від x:

$y = \dfrac{20x}{3x^2+4}$ і підставимо в другу похідну:

$$y''_{xx} = 2\cdot\frac{9x^2\cdot\dfrac{20x}{3x^2+4} - 40x - 4\cdot\dfrac{20x}{3x^2+4}}{3\left(x^2+\dfrac{4}{3}\right)^2} = 360\frac{x(x-2)(x+2)}{(3x^2+4)^3};$$

$$y''_{xx} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2.$$

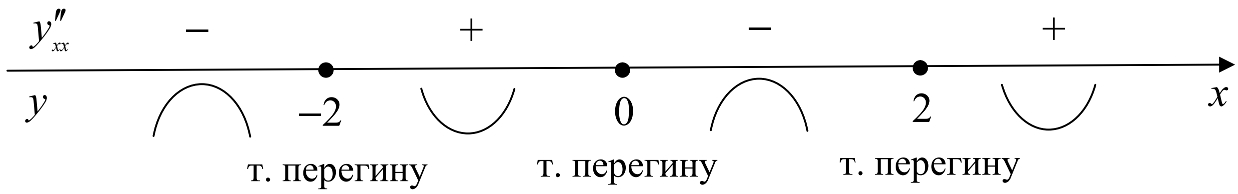


Рис. 12.18

$y(0)=0$, $y(-2)=-2{,}5$, $y(2)=2{,}5$.

Таким чином, крива має три точки перегину: $A(2; 2{,}5)$, $B(0;0)$, $C(-2;-2{,}5)$. ■

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [12]** *Знайти інтервали опуклості та точки перегину функції:*

1) $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$; ***2)*** $y = x^5 - 10x^2 + 3x$;

3) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$; ***4)*** $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;

5) $y = (x+2)^6 + 2x + 2$; ***6)*** $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

7) $y = \dfrac{x^3}{12+x^2}$; ***8)*** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

9) $y = \dfrac{x^3}{x^2+3a^2}$, $a>0$; ***10)*** $y = \sqrt[3]{x+3}$;

11) $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$; ***12)*** $y = \ln(1+x^2)$;

13) $y = x\,\mathrm{arctg}\,x$; ***14)*** $y = (x+1)^4 + e^x$;

15) $y = x^4(12\ln x - 7)$; ***16)*** $y = e^{\mathrm{arctg}\,x}$.

✍***2. [16]*** *Знайти точки перегину функції:*

1) $y = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 12x + 3$*;*

2) $y = 3x^5 + 10x^4 + 10x^3 - 5x - 4$.

✍***3. [16]*** *Довести, що функція:*

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 11x - 7$ *є опуклою вниз на* $\mathbb{R}$.

✍***4. [16]*** *На рисунку 12.19 зображено графік другої похідної функції* f. *Відомо, що* $f'(x_0) = 0$. *З'ясувати, чи є* x_0 *точкою екстремуму функції* f*, якщо: 1)* $x_0 = -1{,}5$*; 2)* $x_0 = 0$*; 3)* $x_0 = 1$.

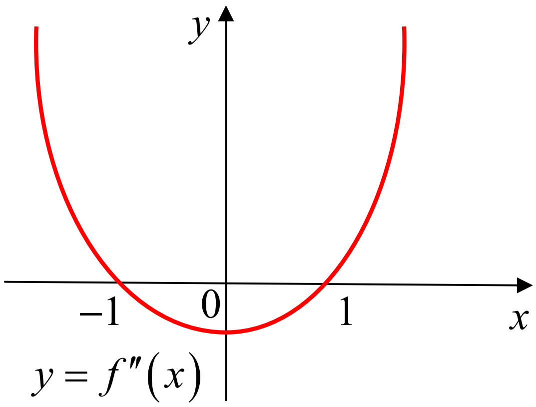


Рис. 12.19

✍***5. [16]*** *На рисунку 12.20 зображено графік функції* $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$. *Знайти знаки чисел* a, b *і* c.

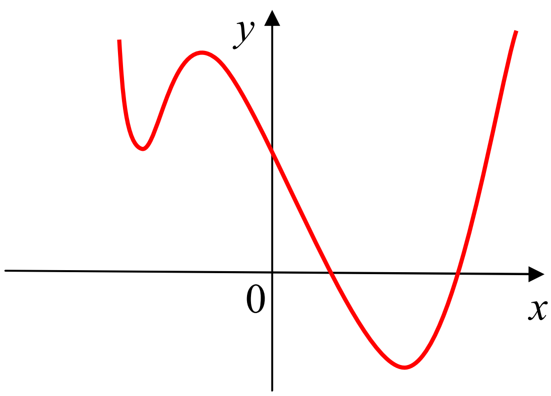


Рис. 12.20

✍**6. [16]** *На рисунку 12.21 зображено графік функції* $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. *Знайти знаки чисел* a, b *і* c.

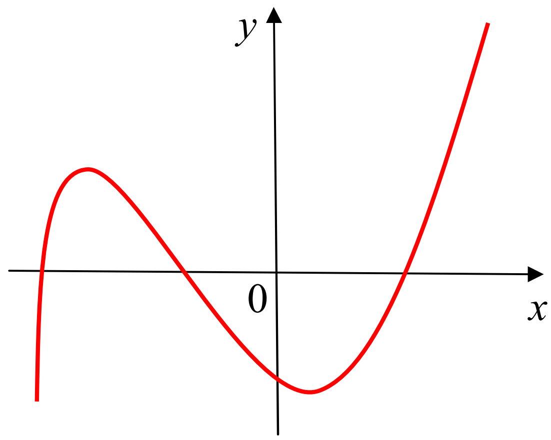


Рис. 12.21

✍**7.** *Дослідити на точки перегину многочлени:*

1) $P_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$;

2) $P_4(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $a\neq 0$.

✍**8.** *Довести, що графік функції* $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ *має три точки перегину, що лежать на одній прямій.*

✍**9. [2]** *Показати, що точки перегину лінії* $y=x\sin x$ *лежать на лінії* $y^2\left(4+x^2\right)=4x^2$.

✍**10. [2]** *При яких значеннях* a *і* b *точка* $(1;3)$ *є точкою перегину лінії* $y=ax^3+bx^2$?

✍**11. [2]** *Вибрати* a *і* b *так, щоб лінія* $x^2y+ax+by=0$ *мала точку* $A(2;\,2{,}5)$ *точкою перегину. Які ще точки перегину вона буде мати?*

✍**12. [12]** *Знайти точки перегину графіка функції* $y=f(x)$, *яка задана параметрично:*

1) $x=te^t$, $y=te^{-t}$, $t>0$;

2) $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t^3}{t-1}$, $t>2$;

3) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a>0$;

4) $x=(t+1)^2$, $y=(t-1)^2$;

5) $x=e^t$, $y=\sin t$;

6) $x = \operatorname{sh} t - t,\ y = \operatorname{ch} t - 1.$

✍**13.** ***[2]*** *За графіком функції з'ясувати вигляд графіка її першої і другої похідної:*

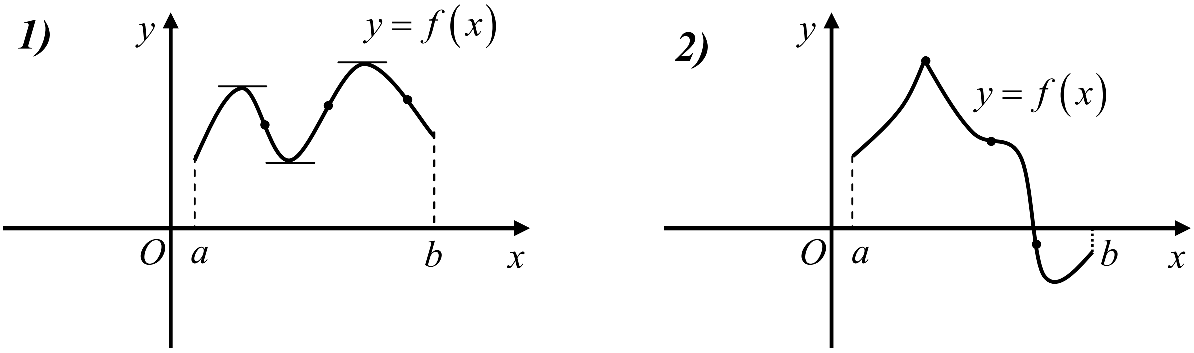


Рис. 12.22

✍**14.** ***[15]*** *Довести нерівності:*

1) $\dfrac{x^n + y^n}{2} \ge \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n,\ x > 0,\ y > 0,\ n \in \mathbb{N};$

2) $\dfrac{e^x + e^y}{2} \ge e^{\frac{x+y}{2}};$

3) $x \ln x + y \ln y \ge (x+y) \ln \dfrac{x+y}{2},\ x > 0,\ y > 0;$

4) $\sqrt{\sin x \sin y} \le \sin \dfrac{x+y}{2},\ x,\ y \in (0;\ \pi);$

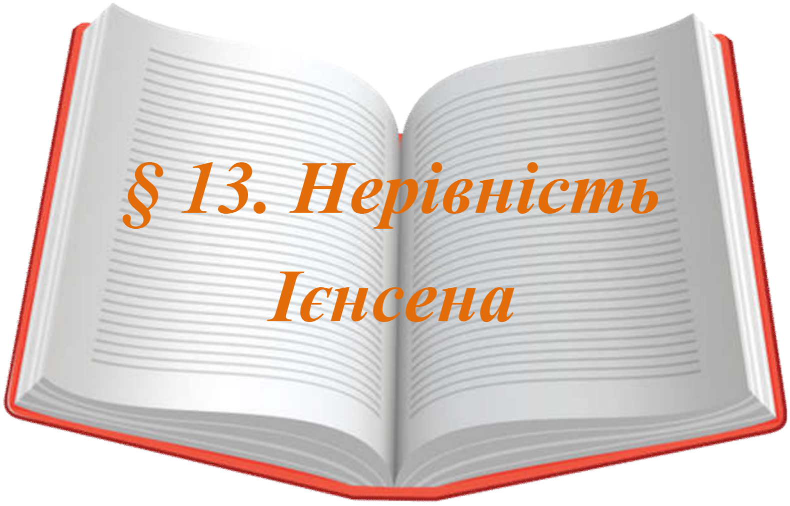
5) $e^{\frac{x+y}{2}} + 2 \le \sqrt{\left(e^x + 2\right)\left(e^y + 2\right)};$

6) $\dfrac{2(x+y)}{2-(x+y)} \ge \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{y}{1-y},\ x > 1,\ y > 1;$

7) $\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \ge \dfrac{1}{2}\left(\cos x^2 + \cos y^2\right),\ x,\ y \in \left[0;\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right].$

Відповіді

10. $a = -\dfrac{3}{2};\ b = \dfrac{9}{2}.$ **11.** $a = -\dfrac{20}{3};\ b = \dfrac{4}{3};\ B(-2;\ -2{,}5),\ O(0;\ 0).$



§ 13. Нерівність Ієнсена

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Записати нерівність Ієнсена.

***Теорема (нерівність Ієнсена)**. Нехай $f(x)$ – опукла вниз (вгнута) на (a,b) функція. Тоді $\forall n \geq 2$ і* $\forall \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset (a,b) і \forall \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subset (0,1) : \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)}$$

2. Пригадати нерівність Коші.

$$\boxed{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}}$$

3. Пригадати нерівності Гельдера, Коші-Буняковського та Мінковського для сум.

***Нерівність Гельдера.** Якщо* $a_i \geq 0,\ b_i \geq 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1,$ *то:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

***Нерівність Коші-Буняковського.** Якщо* $p = 2$, *то:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Нерівність Мінковського. *Якщо* $a_i \ge 0,\ b_i \ge 0,\quad p > 1$, *то:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 13.1. *Довести нерівності:*

1) $\dfrac{e^x + e^y}{2} \ge e^{\frac{x+y}{2}}$;

2) $\dfrac{x^n + y^n + z^n}{3} > \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$;

3) $\left(\dfrac{x+2y+3z}{6}\right)^4 \le \dfrac{x^4 + 2y^4 + 3z^4}{6}$;

4) $\sqrt{\sin x \cdot \sin y} \le \sin\dfrac{x+y}{2},\ x,\ y \in (0;\pi)$.

Доведення. *1.* $\dfrac{e^x + e^y}{2} \ge e^{\frac{x+y}{2}}$. Функція $f(t) = e^t$ опукла вниз (вгнута) на області визначення, тому для будь-яких t_1, t_2 і чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in (0;1)$ таких, що $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, виконується нерівність Ієнсена: $e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2} \le \alpha_1 e^{t_1} + \alpha_2 e^{t_2}$.

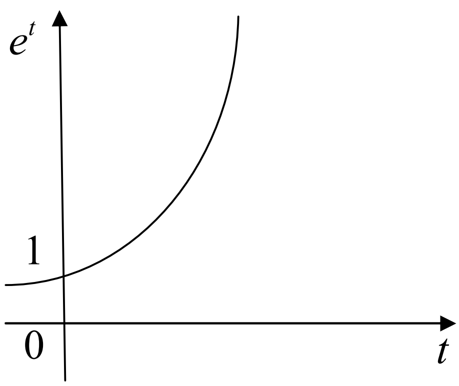


Рис. 13.1

Покладемо $t_1 = x$, $t_2 = y$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, маємо: $e^{\frac{x+y}{2}} \le \dfrac{e^x + e^y}{2}$, що й потрібно було довести. ■

2. $\dfrac{x^n+y^n+z^n}{3}>\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n$, $x>0,\ y>0,\ z>0$.

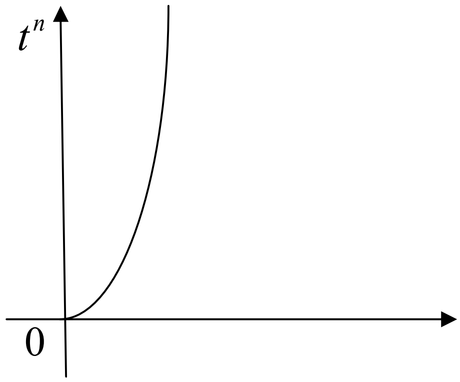


Рис. 13.2

Степенева функція $f(t)=t^n, t>0$ строго вгнута $\forall t\in[0;+\infty)$, тому $\forall t_1,t_2,t_3\in(0;+\infty)$ і $\forall \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in(0;1):\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ виконується нерівність Ієнсена: $(\alpha_1t_1+\alpha_2t_2+\alpha_3t_3)^n<\alpha_1t_1{}^n+\alpha_2t_2{}^n+\alpha_3t_3{}^n$

Покладемо $t_1=x$, $t_2=y$, $t_3=z$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\dfrac{1}{3}$, маємо:

$\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n<\dfrac{x^n+y^n+z^n}{3}$, що й потрібно було довести. ■

3. $\left(\dfrac{x+2y+3z}{6}\right)^4\le\dfrac{x^4+2y^4+3z^4}{6}$. Аналогічно до попередніх прикладів візьмемо функцію $f(t)=t^4$:

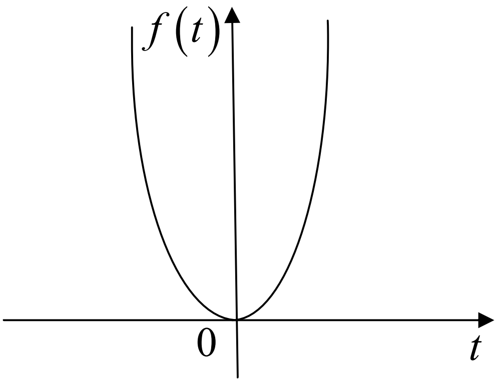


Рис. 13.3

$(\alpha_1t_1+\alpha_2t_2+\alpha_3t_3)^4\le\alpha_1t_1{}^4+\alpha_2t_2{}^4+\alpha_3t_3{}^4$.

Покладемо $t_1=x$, $t_2=y$, $t_3=z$,

$\alpha_1=\dfrac{1}{6}, \alpha_2=\dfrac{2}{6}, \alpha_3=\dfrac{3}{6}$, маємо:

$\left(\dfrac{x+2y+3z}{6}\right)^4\le\dfrac{x^4+2y^4+3z^4}{6}$, що й потрібно було довести. ■

4. $\sqrt{\sin x\cdot\sin y}\le\sin\dfrac{x+y}{2}$, $x,\ y\in(0;\pi)$.

Функція $f(t)=\sin t, t\in(0;\pi)$ опукла вгору (опукла) на інтервалі $(0;\pi)$, тому $\forall t_1,t_2\in(0;\pi)$ і $\forall \alpha_1,\alpha_2\in(0;1),\alpha_1+\alpha_2=1$ виконується нерівність Ієнсена:

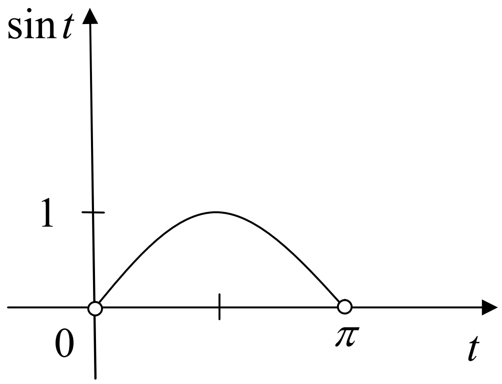


Рис. 13.4

$$f(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)\ge \alpha_1 f(t_1)+\alpha_2 f(t_2),$$

або

$$\sin(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)\ge \alpha_1\sin t_1+\alpha_2\sin t_2.$$

Покладемо $t_1=x$, $t_2=y$, $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$, маємо:

$$\sin\frac{x+y}{2}\ge\frac{\sin x+\sin y}{2}.$$

Якщо до правої частини застосувати нерівність Коші-Буняковського (середнє арифметичне невід'ємних чисел більше або дорівнює їх середньому геометричному), то одержимо:

$\sin\frac{x+y}{2}\ge\frac{\sin x+\sin y}{2}\ge\sqrt{\sin x\cdot\sin y}$, що й потрібно було довести. ■

Задача 13.2. [9] Довести нерівність:

$$\prod a_i^{a_i}\ge\left(\sum\frac{1}{n}a_i\right)^{\sum a_i}\qquad (a_i>0).$$

Доведення.

Прологарифмуємо обидві частини нерівності та поділимо на n, одержимо: $\ln\left(\prod a_i^{a_i}\right)\ge\ln\left(\sum\frac{1}{n}a_i\right)^{\sum a_i}$,

$$\sum\ln a_i^{a_i}\ge\left(\sum a_i\right)\cdot\ln\left(\sum\frac{1}{n}a_i\right),$$

$$\sum a_i\ln a_i\ge\left(\sum a_i\right)\cdot\ln\left(\sum\frac{1}{n}a_i\right)\Bigg|:n$$

$$\sum\frac{1}{n}a_i\ln a_i\ge\left(\sum\frac{1}{n}a_i\right)\cdot\ln\left(\sum\frac{1}{n}a_i\right).$$

Проаналізувавши цю нерівність, можемо впевнитися, що одержана нерівність є нерівністю Ієнсена для опуклої функції $y = x\ln x$, чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0;+\infty)$ і $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$. ■

***Задача 13.3. [9]** Довести нерівність:*

$$\sqrt{\left(\sum a_i\right)^2 + \left(\sum b_i\right)^2} \le \sum \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \qquad \left(a_i^2, b_i^2\right) > 0.$$

Доведення.

Запишемо нерівність Ієнсена для опуклої вниз (вгнутої) функції $y = \sqrt{1+x^2}$: $\sqrt{1+\left(\sum \alpha_i x_i\right)^2} \le \sum \alpha_i \sqrt{1+x_i^2}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$.

Покладемо $\alpha_i = \dfrac{m_i}{\sum m_i}$, тоді сума таких чисел дорівнює 1, маємо:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right)^2} \le \frac{\sum m_i \sqrt{1+x_i^2}}{\sum m_i}.$$

Якщо обидві частини нерівності помножити на $\sum m_i$, то можна одержати:

$$\sqrt{\left(\sum m_i\right)^2 + \left(\sum m_i x_i\right)^2} \le \sum m_i \sqrt{1+x_i^2} = \sum \sqrt{m_i^2 + \left(m_i x_i\right)^2}.$$

Залишається покласти $m_i = a_i,\ x_i = \dfrac{b_i}{a_i}$ і нерівність доведено. ■

***Задача 13.4. [6]** Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – додатні числа, тоді*

$$\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{p_1+p_2+\ldots+p_n} \ge x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$$

– це узагальнення нерівності Коші. Довести.

Доведення.

Спершу доведемо, що якщо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ –додатні числа, причому $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – додатні числа, серед яких є такі, що відрізняються, то справджується нерівність:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n > x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Для цього розглянемо функцію $f(x) = \ln x$, $x > 0$, яка є строго опуклою вгору (опуклою), тому, застосовуючи до неї нерівність Ієнсена, дістанемо:

$\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) > \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \ldots + \alpha_n \ln x_n$, або

$\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) > \ln(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n})$, звідки:

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n > x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$. (*)

Покладемо в останній нерівності (*)

$$\alpha_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}, \quad \alpha_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}, \ldots, \alpha_n = \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n},$$

причому $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Тоді дістанемо:

$$\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \geq \left(x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}},$$

звідки $\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \geq x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$, причому рівність виконується тільки при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Вихідну нерівність доведено. ■

Задача 13.5. [10] *Нехай функція $y = f(x)$ опукла вниз (вгнута) на відрізку $[a,b]$ і $a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < b$.*

Довести, що $\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \leq \frac{f(x_2) - f(x_4)}{x_2 - x_4}$.

Доведення.

Згідно з означенням вгнутої функції, маємо:

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3); \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = 1,$$

$$f(x_3) \leq \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_2} f(x_2) + \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2} f(x_4), \quad \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2} = 1.$$

Додавши почленно останні дві нерівності, дістанемо:

$$f(x_2)+f(x_3)\le\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_4-x_3}{x_4-x_2}f(x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)+\frac{x_3-x_2}{x_4-x_2}f(x_4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_3-x_2}{x_4-x_2}f(x_2)+\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_3)\le\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_3-x_2}{x_4-x_2}f(x_4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2}\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}\le\frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4},$$

що й треба було довести. У випадку опуклої вгору (опуклої) функції буде справджуватися протилежна нерівність. ■

Задача 13.6. [10] *Відомо, що* $0<a<b<c$. *Довести, що* $a^c b^a c^b < a^b b^c c^a$.

Доведення. Поклавши $x_2 = x_3$ в нерівності:

$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}\le\frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4}$ задачі 13.5, маємо:

$$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}\le\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}. \qquad (*)$$

Функція $y=\log_{0.1}x,\ x\in(0;+\infty)$ є опуклою донизу (вгнутою). Отже, згідно з нерівністю (*), дістанемо:

$$\frac{\log_{0.1}\frac{x_3}{x_1}}{x_3-x_1}\le\frac{\log_{0.1}\frac{x_4}{x_3}}{x_4-x_3}\Leftrightarrow\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{x_4-x_3}\ge\left(\frac{x_4}{x_3}\right)^{x_3-x_4}.$$

Поклавши в останній нерівності $x_1=a;\ x_3=b;\ x_4=c$,

матимемо: $\left(\frac{b}{a}\right)^{c-b}>\left(\frac{c}{b}\right)^{b-a}\Leftrightarrow\frac{b^c a^b}{b^b a^c}>\frac{c^b b^a}{b^b c^a}\Leftrightarrow a^b b^c c^a>a^c b^a c^b$.

Нерівність доведено. ■

Задача 13.7. [20] *Довести нерівність:*

$$\sin a_1\sin a_2\ldots\sin a_n\le\sin^n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right),\ \text{де}\ a_i\in(0,\pi).$$

Доведення.

Розглянемо функцію $f(x)=\ln\sin x$, $x\in(0,\,\pi)$.

$f'(x)=\operatorname{ctg}x,\ f''(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\le 0$ при $x\in(0,\,\pi)$. Отже, крива опукла вгору (опукла). Згідно нерівності Ієнсена з умовою, що $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$, маємо:

$$\frac{1}{n}\left(\ln\sin a_1+\ln\sin a_2+\ldots+\ln\sin a_n\right)\le\ln\sin\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)\Bigg|\cdot n$$

звідки $\ln\sin a_1+\ln\sin a_2+\ldots+\ln\sin a_n\le\ln\sin^n\left(\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)$

або $\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n\le\sin^n\left(\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)$.

Рівність досягається лише при $a_1=a_2=\ldots=a_n$. ■

Задача 13.8. [6] *Довести, що буде виконуватись нерівність при додатних* a,b,c:

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\ge\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{(a+b+c)^2}\qquad(*)$$

Доведення.

Покладаючи в нерівності $x=a+b,\ y=b+c,\quad z=a+c$, дістанемо $a+b+c=\dfrac{x+y+z}{2}$, отже нерівність (*) буде рівносильна простішій нерівності:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ge\frac{27}{(x+y+z)^2},\qquad(**)$$

де x,y,z – додатні числа.

Функція $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$ строго опукла вниз (вгнута), оскільки

$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, спадає при $x > 0$. Тому для трьох значень аргумента x, y, z і $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$ нерівність Ієнсена можна записати у вигляді: $\frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z) \geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ або $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq \frac{1}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2}$, звідси й випливає нерівність (**).

Враховуючи заміну, яку було введено на початку, нерівність (*) доведено. ■

Геометричні нерівності

Опуклість також тісно пов'язана з геометричними фігурами. Розглянемо нерівності, які пов'язані з тригонометричними функціями кутів трикутника. Нехай *A,B,C* – величини кутів трикутника. $A > 0,\ B > 0,\ C > 0,\ A + B + C = \pi$.

Задача 13.9. [20] *Нехай маємо опуклу вгору (опуклу) функцію* $f(x) = \sin x, 0 < x < \pi$.

За нерівністю Ієнсена:

$\lambda_1 \sin A + \lambda_2 \sin B + \lambda_3 \sin C \leq \sin(\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C)$, де

$\lambda_i \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Покладемо, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, тоді:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sin\frac{A+B+C}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Рівність досягається тільки при $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Таким чином, $\max(\sin A + \sin B + \sin C) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Максимум досягається тільки тоді, коли ΔABC рівносторонній. ■

Леми, необхідні під час доведення геометричних нерівностей:

Лема 13.1. *[20]* Для будь-якого трикутника ABC виконується нерівність:

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{C+A}{2}.$$

Лема 13.2. *[20]* Для будь-якого трикутника ABC виконується нерівність:

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\ge\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B+C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C+A}{2}.$$

Задача 13.10. [3] *Довести, що для будь-якого* ΔABC, *довжини сторін якого рівні* a,b,c *і радіуси вписаного і описаного кола рівні* r, R *відповідно має місце нерівність* $6\sqrt{3}\,r\le a+b+c\le 3\sqrt{3}\,R$.

Доведення.

Відомо, що $a=r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=2R\sin A$;

$b=r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=2R\sin B$; $c=r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)=2R\sin C$.

Тоді $a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)\le 3\sqrt{3}$, оскільки

$$\sin A+\sin B+\sin C\le 3\sin\frac{A+B+C}{3}=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Але $a+b+c\le 2r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\ge 6\sqrt{3}r$, оскільки

$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$. Отже, $6\sqrt{3}\,r\le a+b+c\le 3\sqrt{3}\,R$. ■

Задача 13.11. [20] *Довести, що в будь-якому трикутнику виконується нерівність* $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\ge\sqrt{3}$.

Доведення.

Функція $f(x)=\operatorname{ctg}x$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, опукла вниз (вгнута), тому для неї виконується нерівність $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\le\dfrac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$, або

$$\operatorname{ctg}\frac{x_1+x_2}{2}\le\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}x_1+\operatorname{ctg}x_2\right);\quad \frac{\cos\frac{x_1+x_2}{2}}{\sin\frac{x_1+x_2}{2}}\le\frac{\sin(x_1+x_2)}{2\sin x_1\sin x_2};$$

$$\frac{\cos\frac{x_1+x_2}{2}}{\sin\frac{x_1+x_2}{2}}\le\frac{2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos\frac{x_1+x_2}{2}}{2\sin x_1\sin x_2};\text{ або }\sin x_1\sin x_2\le\sin^2\frac{x_1+x_2}{2},$$

$\dfrac{1}{2}\left(\cos(x_1-x_2)-\cos(x_1+x_2)\right)\le\dfrac{1}{2}\left(1-\cos(x_1+x_2)\right)$; $\cos(x_1-x_2)\le 1$, що є очевидним.

Якщо *A, B,C* – кути не тупокутного трикутника, то згідно з нерівністю Ієнсена:

$$\frac{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C}{3}\ge\operatorname{ctg}\left(\frac{A+B+C}{3}\right),\text{ або }\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\ge\sqrt{3}.$$

Рівність досягається лише при $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$. Якщо трикутник *ABC* тупокутний, це доведення не має сили, бо функція $f(x)=\operatorname{ctg}x,\ x\in(0;\pi)$, не є вгнутою.

Дійсно, $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B\ge 2\operatorname{ctg}\dfrac{A+B}{2}$, *(1)*

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}\ge\frac{2\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}};\sin^2\frac{A+B}{2}\ge\sin A\sin B;$$

$\dfrac{1}{2}\left(1-\cos(A+B)\right)\ge\dfrac{1}{2}\left(\cos(A-B)-\cos(A+B)\right)$, $1\ge\cos(A-B)$, що очевидно.

Ми скористалися тим, що коли *A* і *B* – кути трикутника, то числа $\sin A,\sin B,\ \sin(A+B)$ додатні. Аналогічно доведемо, що

$$\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C \geq 2 \operatorname{ctg} \frac{B+C}{2}; \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} A \geq 2 \operatorname{ctg} \frac{C+A}{2}, \qquad (3)$$

Додавши нерівності *(1) – (3)*, дістанемо нерівність із леми 13.2.

Якщо *A, B, C* – кути деякого трикутника, то $\frac{A+B}{2}, \frac{B+C}{2}, \frac{C+A}{2}$ – кути деякого гострокутного трикутника,

оскільки $0<\frac{A+B}{2}<\frac{\pi}{2}, 0<\frac{B+C}{2}<\frac{\pi}{2}, 0<\frac{C+A}{2}<\frac{\pi}{2}$

і $\frac{A+B}{2}+\frac{B+C}{2}+\frac{C+A}{2}=\pi$.

Отже, $\operatorname{ctg} \frac{A+B}{2}+\operatorname{ctg} \frac{B+C}{2}+\operatorname{ctg} \frac{C+A}{2}=\sqrt{3}$.

Тепер за лемою 13.2: $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C \geq \sqrt{3}$. ■

Задача 13.12. [10] *Центр O кола, вписаного в ΔABC, сполучено з вершинами трикутника. Через точки перетину цих відрізків з вписаним колом проведено дотичні до кола. В результаті утворився $\Delta A_1B_1C_1$. Довести, що периметр $\Delta A_1B_1C_1$ не перевищує периметр ΔABC.*

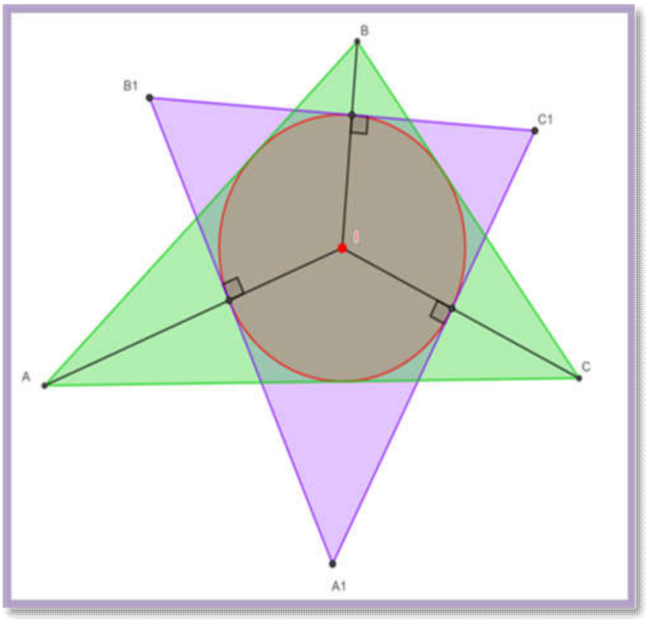


Рис. 13.5

Доведення.

На рис. 13.5 показано конструкцію задачі. Центр O вписаного кола лежить на перетині бісектрис трикутника. Отже, $\angle AOB = 180° - \left(\frac{A+B}{2}\right) = 90° + \frac{C}{2}$; $\angle A_1C_1B_1 = 180° - \angle AOB = \frac{A+B}{2}$.

Аналогічно знайдемо, що $\angle B_1A_1C_1 = \frac{B+C}{2}$, $\angle A_1B_1C_1 = \frac{A+C}{2}$.

Нехай P, P_1 – відповідно периметри трикутників ABC та $A_1B_1C_1$.

$$P = 2r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right);$$

$$P_1 = 2r\left(\operatorname{ctg}\frac{A_1}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B_1}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C_1}{2}\right) =$$
$$= 2r\left(\operatorname{ctg}\frac{B+C}{4} + \operatorname{ctg}\frac{A+C}{4} + \operatorname{ctg}\frac{A+B}{4}\right).$$

Нерівність $P \ge P_1$ рівносильна такій нерівності для будь-якого трикутника:

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \ge \operatorname{ctg}\frac{B+C}{4} + \operatorname{ctg}\frac{A+C}{4} + \operatorname{ctg}\frac{A+B}{4}.$$

Функція $f(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $x \in (0, \pi)$, опукла вниз (вгнута).

Тому виконуються нерівності:

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \ge 2\operatorname{ctg}\frac{A+B}{4}; \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \ge 2\operatorname{ctg}\frac{B+C}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \ge 2\operatorname{ctg}\frac{C+A}{4}.$$

Додавши останні три нерівності, знайдемо потрібну нерівність. ■

Задача 13.13. [20] *Продовження висот гострокутного* ΔABC *перетинають описане коло у точках* A_1, B_1, C_1 *відповідно. Довести, що периметр* ΔABC *не менший за периметр* $\Delta A_1B_1C_1$.

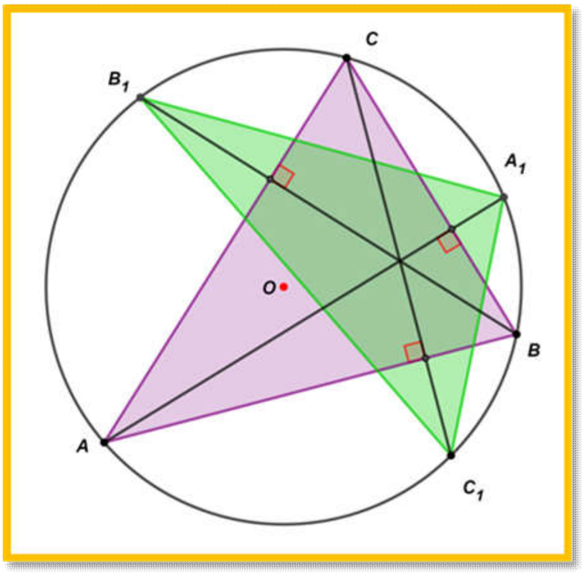


Рис. 13.6

Доведення.

Нехай P, P_1 – відповідно периметри трикутників ABC та $A_1B_1C_1$. За допомогою теореми синусів встановлюємо, що $P = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$. Помічаємо, що:

$\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1 = 90° - \angle A$; $\angle AA_1C_1 = \angle ACC_1 = 90° - \angle A$;

Отже, $\angle B_1A_1C_1 = \angle AA_1B_1 + \angle AA_1C_1 = 90° - \angle A + 90° - \angle A = 180° - 2\angle A$.

Аналогічно знаходимо, що:

$\angle B_1 = 180° - 2\angle B$; $\angle C_1 = 180° - 2\angle C$.

Отже, $P_1 = 2R(\sin 2\angle A + \sin 2\angle B + \sin 2\angle C)$. Нам треба довести, що $P \geq P_1$, тобто те, що в будь-якому гострокутному трикутнику ABC виконується нерівність:

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.$$

Функція $f(x) = \sin 2x$, $\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ опукла вгору (опукла).

Отже, $\frac{1}{2}(\sin 2\angle A + \sin 2\angle B) \leq \sin(\angle A + \angle B) = \sin \angle C$.

Аналогічно маємо:

$$\frac{1}{2}(\sin 2\angle B+\sin 2\angle C)\le \sin\angle A\,;\frac{1}{2}(\sin 2\angle C+\sin 2\angle A)\le \sin\angle B.$$

Додавши останні три нерівності, дістаємо потрібний результат. ■

Задача 13.14. [20] *Довести, що з усіх n-кутників, описаних навколо даного кола, найменший периметр має правильний n-кутник.*

Доведення.

Нехай P та r – відповідно периметр та радіус вписаного кола n-кутника $A_1, A_2, ..., A_n$. $P=2r\left(\operatorname{ctg}\frac{A_1}{2}+\operatorname{ctg}\frac{A_2}{2}+...+\operatorname{ctg}\frac{A_n}{2}\right)$.

Зрозуміло, що $A_i\in(0,\pi)\,(i=1,2,...,n)$.

Функція $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2},\ x\in(0,\pi)$, опукла вниз (вгнута). Згідно з нерівністю Ієнсена.

$$\operatorname{ctg}\frac{A_1}{2}+\operatorname{ctg}\frac{A_2}{2}+...+\operatorname{ctg}\frac{A_n}{2}\ge n\operatorname{ctg}\frac{A_1+A_2+...+A_n}{2n}=n\operatorname{ctg}\frac{\pi(n-2)}{2n}$$

Рівність досягається лише при $A_1=A_2=...=A_n$, тобто у правильному n-кутнику. ■

Задача 13.15. [10] *Довести, що для будь-якого трикутника виконується нерівність:*

$$\sin\angle A\cdot\sin\angle B\cdot\sin\angle C\le\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}.$$

Доведення.

Розглянемо функцію $f(x)=\ln\sin x,\ x\in(0;\pi)$. Маємо: $f'(x)=\operatorname{ctg}x;\quad f''(x)=--\frac{1}{\sin^2 x}<0$ при $x\in(0;\pi)$. Отже, функція f опукла вгору (опукла).

Тоді дістанемо:

$$\ln\sin\angle A + \ln\sin\angle B \le 2\ln\sin\frac{\angle A + \angle B}{2} \Leftrightarrow \sin\angle A\sin\angle B \le \cos^2\frac{\angle C}{2}.$$

Аналогічно $\sin\angle B\sin\angle C \le \cos^2\dfrac{\angle A}{2}$ та $\sin\angle C\sin\angle A \le \cos^2\dfrac{\angle B}{2}$.

Перемноживши почленно останні три нерівності, матимемо нерівність, яку потрібно було довести. ■

Задача 13.16. [10] *Серед усіх n-кутників, вписаних у дане коло, знайти n-кутник з найбільшим периметром.*

Лема 13. 3. *[10]* Якщо центр описаного кола лежить поза n-кутником, то останній не може мати найбільшого периметра.

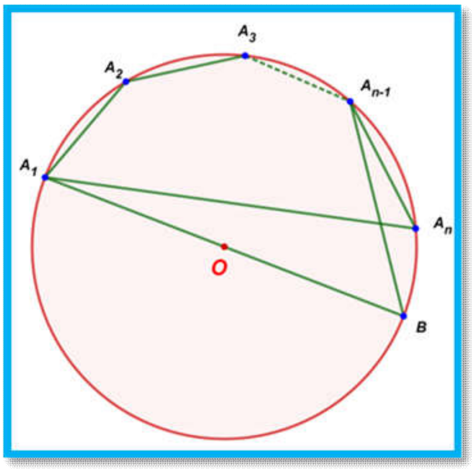


Рис. 13.7

Доведення.

Нехай O – центр описаного кола (рис. 13.7) за умовою лежить поза n-кутником $A_1, A_2, ..., A_n$. Проведемо діаметр A_1B і сполучимо точки A_{n-1} та B. Очевидно, $|A_1A_n| < |A_1B|$ і $|A_{n-1}A_n| < |A_{n-1}B|$. Отже, за лемою 13.3, шуканий n-кутник належить множині многокутників, які містять центр описаного кола всередині або на одній із сторін.

Нехай α_i – величина центрального кута, що відповідає стороні A_iA_{i+1} вписаного n-кутника.

$(i = 1, 2, ..., n;\ A_{n+1} = A_1)$. $\quad |A_iA_{i+1}| = 2R\sin\dfrac{1}{2}\alpha_i$.

Коли P_n – периметр вписаного n-кутника, то $P_n = 2R\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1}{2}\alpha_i$, де $\alpha_1 \in [0;\pi]$ ($\alpha_i = \pi$ саме в тому випадку, коли центр кола лежить на одній із сторін n-кутника).

Функція $y = \sin\frac{x}{2}$, $x \in [0;\pi]$ опукла вгору (опукла), отже, згідно з нерівністю Ієнсена, маємо: $\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1}{2}\alpha_i \le n\sin\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

У випадку, коли центр кола лежить всередині або на одній із сторін n-кутника, то $\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1}{2}\alpha_i = 2\pi$, тоді з останньої нерівності дістанемо: $\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1}{2}\alpha_i = n\sin\frac{\pi}{n}$. Рівність досягається лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$, тобто у випадку правильного n-кутника. Тому з усіх n-кутників, вписаних в дане коло, правильний n-кутник має найбільший периметр. ■

Задача 13.17. [20] *В n-кутник $A_1, A_2, ..., A_n$ вписано коло з центром О. У точках перетину цього кола з променями $OA_1, OA_2, ..., OA_n$ проведено дотичні до кола, які утворюють n-кутник $B_1, B_2, ..., B_n$. Довести, що периметр n-кутника $B_1, B_2, ..., B_n$ не перевищує периметра $A_1, A_2, ..., A_n$.*

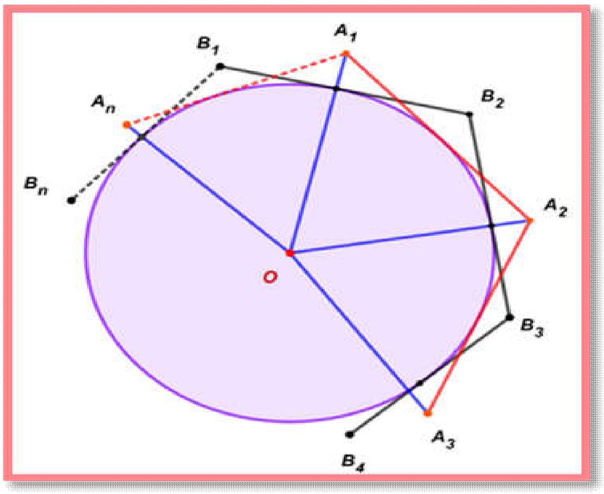


Рис. 13.8

Доведення.

Нехай P, P_1 – відповідно периметри n-кутників $A_1A_2...A_n$ та $B_1B_2...B_n$. Тоді $P = 2r\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{A_i}{2}$, $P_1 = 2r\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{B_i}{2}$. $P_1 \le P$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{B_i}{2} \le \sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{A_i}{2}$.

Оскільки $OA_1 \perp B_nB_1$ і $OA_2 \perp B_1B_2$ (рис. 13.8), то:

$$B_1 = \pi - \angle A_1OA_2 = \pi - \left(\pi - \left(\frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2}\right)\right) = \frac{A_1 + A_2}{2}.$$

Аналогічно $B_2 = \frac{A_2 + A_3}{2}$, …, $B_n = \frac{A_n + A_1}{2}$ $(0 < B_i < \pi)$. Функція $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $0 < x < \pi$, опукла вниз (вгнута).

Отже, $\operatorname{ctg}\frac{A_1}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A_2}{2} \ge 2\operatorname{ctg}\frac{A_1 + A_2}{2} = 2\operatorname{ctg}\frac{B_1}{2}$,

$\operatorname{ctg}\frac{A_2}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A_3}{2} \ge 2\operatorname{ctg}\frac{B_2}{2}$,

…………………………

$\operatorname{ctg}\frac{A_n}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A_1}{2} \ge 2\operatorname{ctg}\frac{B_n}{2}$.

Додавши почленно ці нерівності, матимемо:

$\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{A_i}{2} \ge \sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{B_i}{2}$, що й треба було довести.

Рівність досягається тільки тоді, коли $A_1 = A_2 = ... = A_n$, тобто коли n-кутник правильний. ■

§ 14. Асимптоти. Дослідження функції і побудова графіка

Попередньо вивчіть лекцію 28 [11, с. 333–341].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Сформулювати означення похилої асимптоти, вказати формули для її знаходження.

Означення 14.1. *Нехай функція* $f(x)$ *визначена* $\forall x > a\ (x < a)$. *Якщо існують такі числа* k *і* l, *що* $\lim\limits_{x \to +\infty}\big(f(x) - (kx + l)\big) = 0$ $\quad (x \to -\infty)$, *то пряма* $y = kx + l$ *називається* ***похилою асимптотою*** *графіка функції* $f(x)$ *при* $x \to +\infty\ (x \to -\infty)$ *(рис. 14.1).*

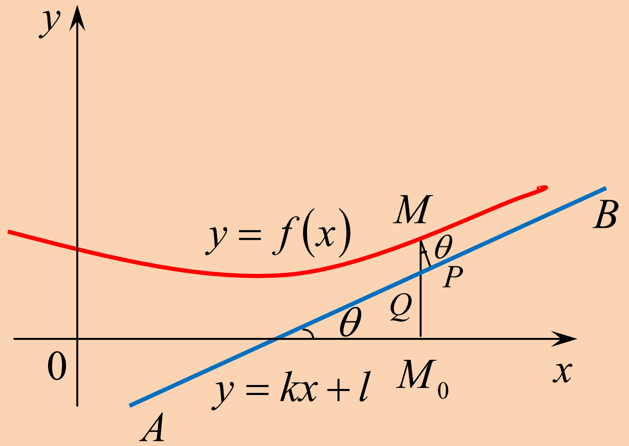


Рис.14.1

Існування асимптоти графіка означає, що при $x \to +\infty (x \to -\infty)$ функція веде себе «майже як лінійна функція», тобто відрізняється від лінійної функції на нескінченно малу величину.

Нехай $y = kx + l$ похила асимптота графіка функції $f(x)$ при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, то:

$$\boxed{k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - kx\right)}.$$

2. Сформулювати означення вертикальної асимптоти.

***Означення 14.2**. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому $O^*(x_0)$ і нехай виконується принаймні одна з умов: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty(-\infty)$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty(-\infty)$. Тоді пряма $x = x_0$ називається **вертикальною асимптотою** графіка функції $f(x)$ (рис.14.2).*

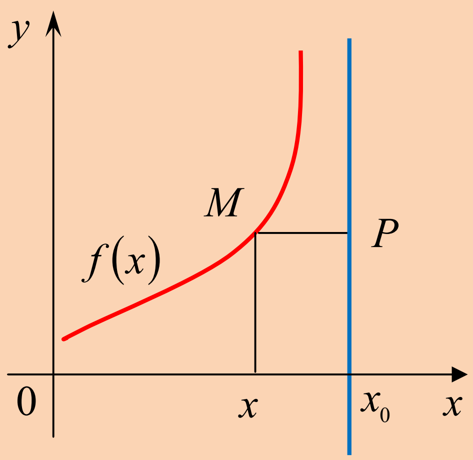


Рис.14.2

У цьому випадку якщо відстань $MP = |x - x_0|$ між точкою $M(x, f(x))$ графіка функції і прямою $x = x_0$ прямує до нуля, то точка M вздовж графіка функції прямує в нескінченність.

3. Пригадати схему (алгоритм) повного дослідження функції.

Під час дослідження функції і побудові її графіка варто дотримуватись такої схеми:

Перший етап (використання вигляду заданої функції).

1. Знайти область визначення функції, область неперервності і точки розриву.

2. Знайти асимптоти.

3. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

4. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

Другий етап (використання похідної першого порядку).

5. Дослідити функцію на монотонність і точки екстремуму.

Третій етап (використання похідної другого порядку).

6. Дослідити функцію на вгнутість, опуклість, точки перегину.

Четвертий етап.

7. Наносимо одержані характерні точки, асимптоти на координатну площину, будуємо графік функції.

Приклади розв'язування вправ

Задача 14.1. *Знайти асимптоти графіка функції* $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання.

1) функція $y = 2^{\frac{1}{x}}$ визначена $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) розглянемо поведінку функції в околі точки $x = 0$:

$$\text{якщо } x \to +0,\ \text{то } \frac{1}{x} \to +\infty,\ \text{то } 2^{\frac{1}{x}} \to +\infty:\ \lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

тому пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою справа.

Якщо $x \to -0$, то $\frac{1}{x} \to -\infty$, то $2^{\frac{1}{x}} \to 0$: $\lim\limits_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$, тому пряма

$x=0$ не є вертикальною асимптотою зліва.

3) перевіримо існування похилих асимптот $y=kx+l$ на нескінченності, використавши формули для коефіцієнтів k і l:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot 2^{\frac{1}{x}}=0\cdot 1=0;$$

$$l=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}-0\right)=1.$$

Робимо висновок, що пряма $y=0\cdot x+1$, або $y=1$ є горизонтальною асимптотою на $+\infty$. Аналогічно перевіряємо наявність похилих асимптот на $-\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot 2^{\frac{1}{x}}=0\cdot 1=0; \qquad l=\lim_{x\to-\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}-0\cdot x\right)=1.$$

Отже, пряма $y=1$ також є горизонтальною асимптотою на $-\infty$.

Графік функції $y=2^{\frac{1}{x}}$ зображено на рис. 14.3. ■

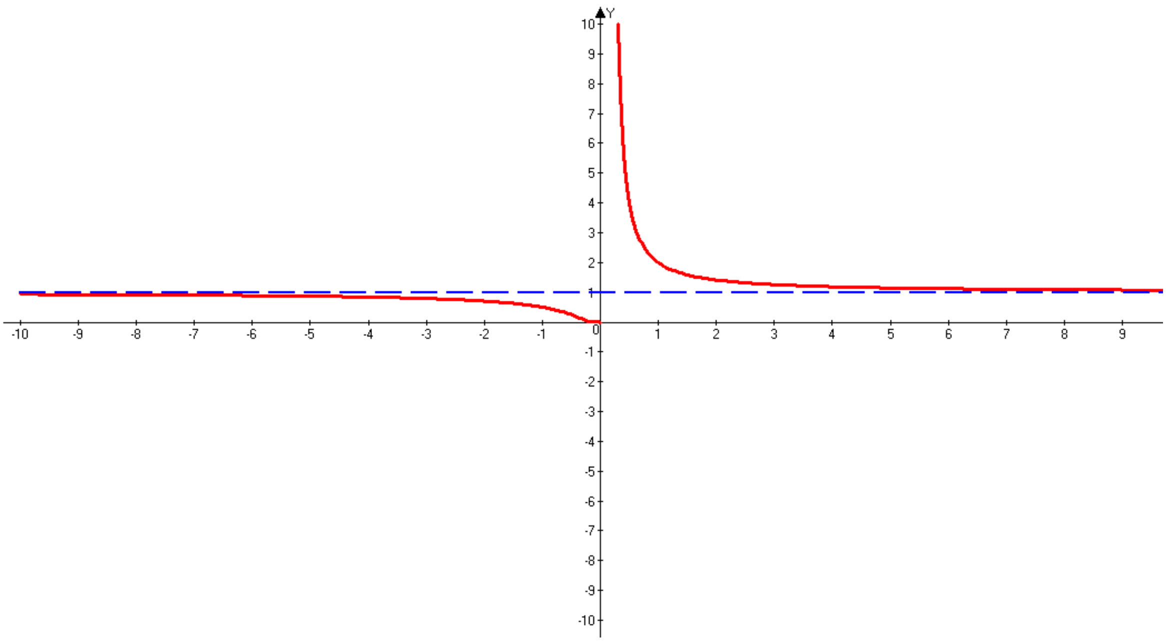


Рис. 14.3

Задача 14.2. *Знайти асимптоти графіка функції:*

$$y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + x\right).$$

Розв'язання.

1) знайдемо область визначення функції:

$x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x\left(x+1\right) > 0 \Leftrightarrow$

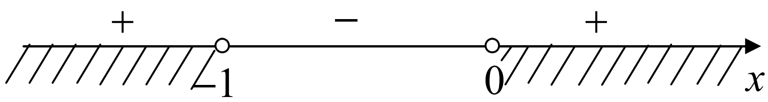


Рис. 14.4

$D\left(y\right) = \left(-\infty; -1\right) \cup \left(0; +\infty\right).$

2) перевіримо існування вертикальних асимптот. Ними можуть бути прямі $x = -1,\ x = 0$.

Якщо $x \to -1-0$, то $x\left(x+1\right) \to +0$, то $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + x\right) \to +\infty$.

Отже, пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою.

Аналогічно $x = 0$ також є вертикальною асимптотою.

3) перевіримо існування похилих асимптот $y = kx + l$.

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + x\right) = -\infty$. Тому похилих асимптот графік не має. ■

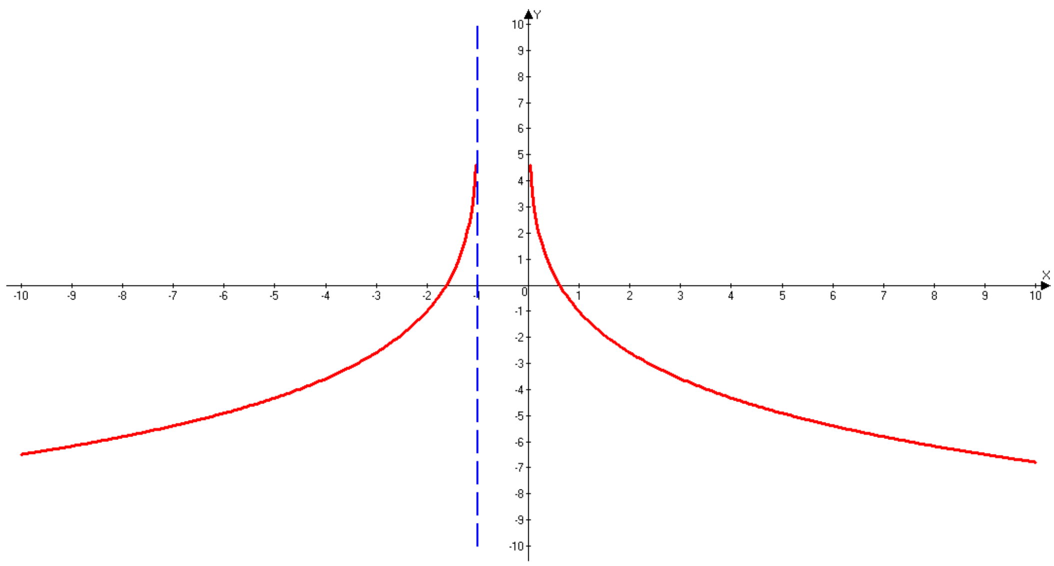


Рис. 14.5

Задача 14.3. *Знайти асимптоти графіка функції:*

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}.$$

Розв'язання.

Аналогічно до попередніх задач застосуємо схему дослідження:

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) $\lim\limits_{x \to 0}\left(x + \frac{\sin x}{x}\right) = 0 + 1 = 1$. Отже, пряма $x = 0$ не є вертикальною асимптотою.

3) $y = kx + l$, $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x + \frac{\sin x}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2} \cdot \sin x\right) = 1$;

$l = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(x + \frac{\sin x}{x} - 1 \cdot x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\frac{1}{x} \cdot \sin x\right) = 0$ як добуток нескінченно малої і обмеженої функцій. Тому пряма $y = x$ є похилою асимптотою на $+\infty$ і $-\infty$.

Графік функції перетинає свою асимптоту нескінченно багато разів. ■

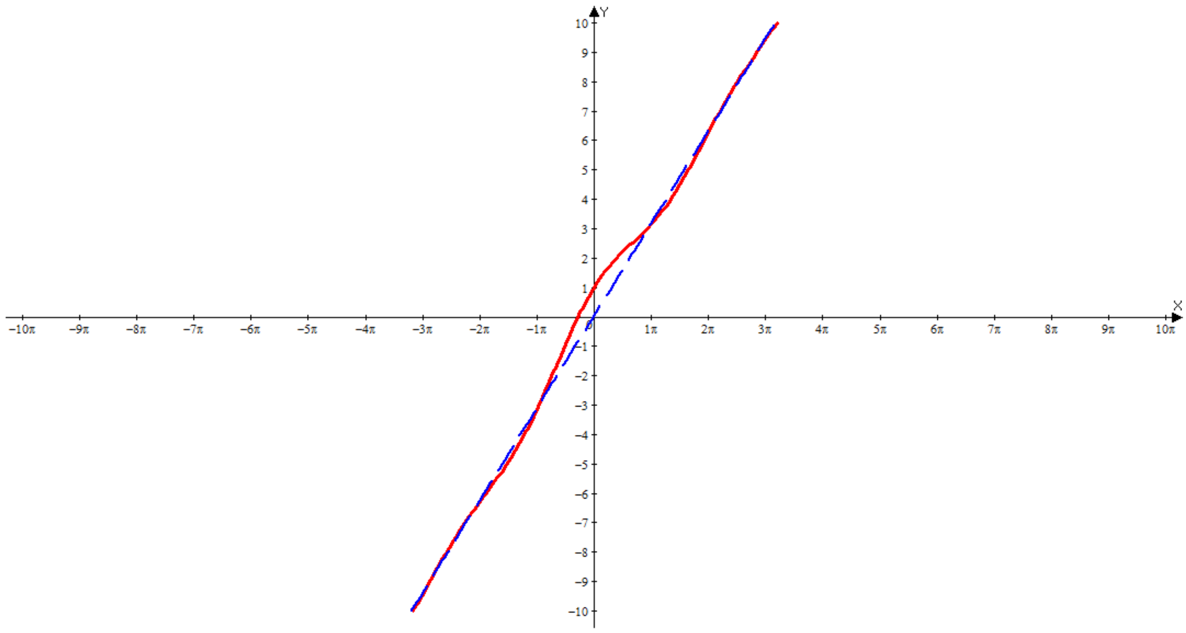


Рис. 14.6

Задача 14.4. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = x^4 e^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Під час дослідження функції дотримуємося запропонованої схеми:

Перший етап (використання вигляду заданої функції).

1) знаходимо область визначення функції, область неперервності і точки розриву: $D(y) = (-\infty;\, 0) \cup (0;+\infty)$.

2) знаходимо асимптоти.

Застосувавши правило Лопіталя, знаходимо границю функції в точці 0:

$$\lim_{x\to 0} x^4 e^{\frac{1}{x^2}} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^4}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{\frac{-4x^3}{x^8}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Отже, вісь ординат служить для графіка функції вертикальною асимптотою. Похилих асимптот $y = kx + l$ немає, оскільки

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4 e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 e^{\frac{1}{x^2}} = \infty.$$

3) досліджуємо функцію на парність, непарність, періодичність.

Функція – парна, бо $(-x)^4 e^{\frac{1}{(-x)^2}} = x^4 e^{\frac{1}{x^2}}$, тому графік симетричний відносно осі ординат, функція неперіодична.

4) знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат.

$Ox: \begin{cases} y = 0, \\ x^4 e^{\frac{1}{x^2}} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 0 \notin D(y) \end{cases}$, тому вісь Ох графік не перетинає.

Аналогічно вісь Оу графік не перетинає.

Другий етап (використання похідної першого порядку).

5) досліджуємо функцію на монотонність і точки екстремуму:

$$f'(x)=4x^3e^{\frac{1}{x^2}}-2xe^{\frac{1}{x^2}}=2x\left(2x^2-1\right)e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Критичні точки $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

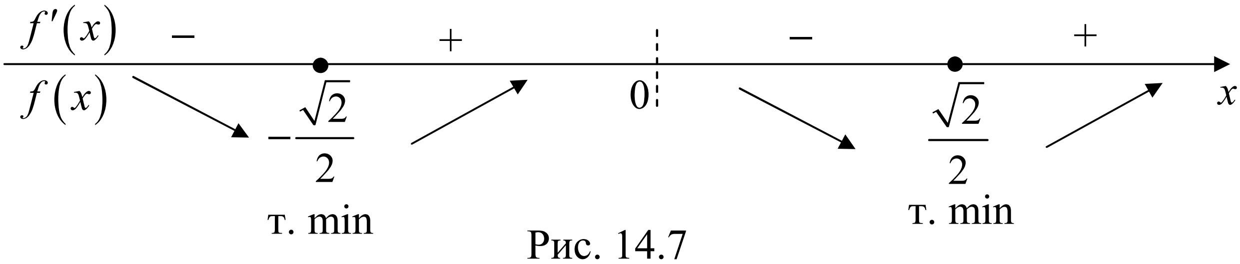


Рис. 14.7

На проміжках $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ функція спадає, а на проміжках $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ функція зростає. Оскільки при переході через точки $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, то у цих точках маємо локальний мінімум, який дорівнює $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}e^2$.

Третій етап (використання похідної другого порядку).

6) досліджуємо функцію на вгнутість, опуклість, точки перегину.

$$f''(x)=\left(12x^2-2\right)e^{\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x^3}\left(4x^3-2x\right)e^{\frac{1}{x^2}}=2e^{\frac{1}{x^2}}\frac{6x^4-5x^2+2}{x^2}.$$

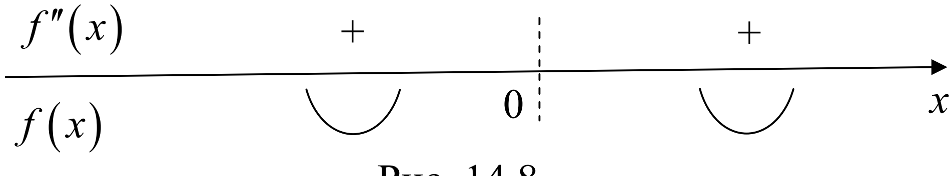


Рис. 14.8

Звідси випливає, що $f''(x)>0$ для $\forall x\in\mathbb{R}$. Отже, на обох проміжках графік функції вгнутий. Точки перегину відсутні.

Четвертий етап.

7) наносимо одержані характерні точки, асимптоти на координатну площину, будуємо графік функції.

Графік функції $y = x^4 e^{\frac{1}{x^2}}$ побудований у програмі Mathway (рис. 14.9).

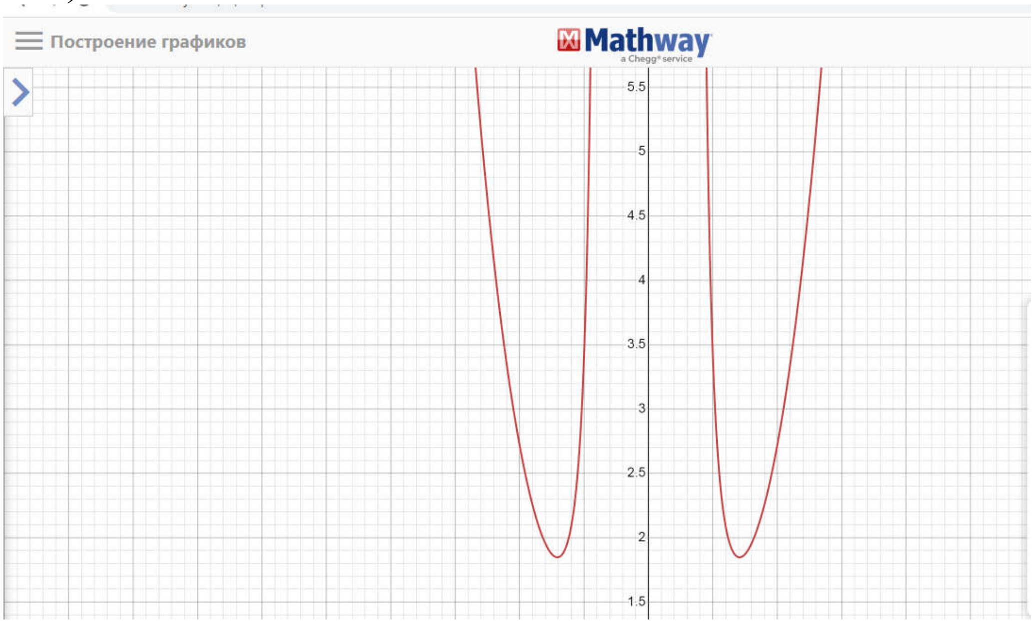


Рис. 14.9

Також у цій програмі є функції для знаходження похідної, точок перетину з осями координат, побудова дотичної та нормалі до графіка функції.

Похідна функції $y = x^4 e^{\frac{1}{x^2}}$ в програмі Mathway (рис. 14.10). ■

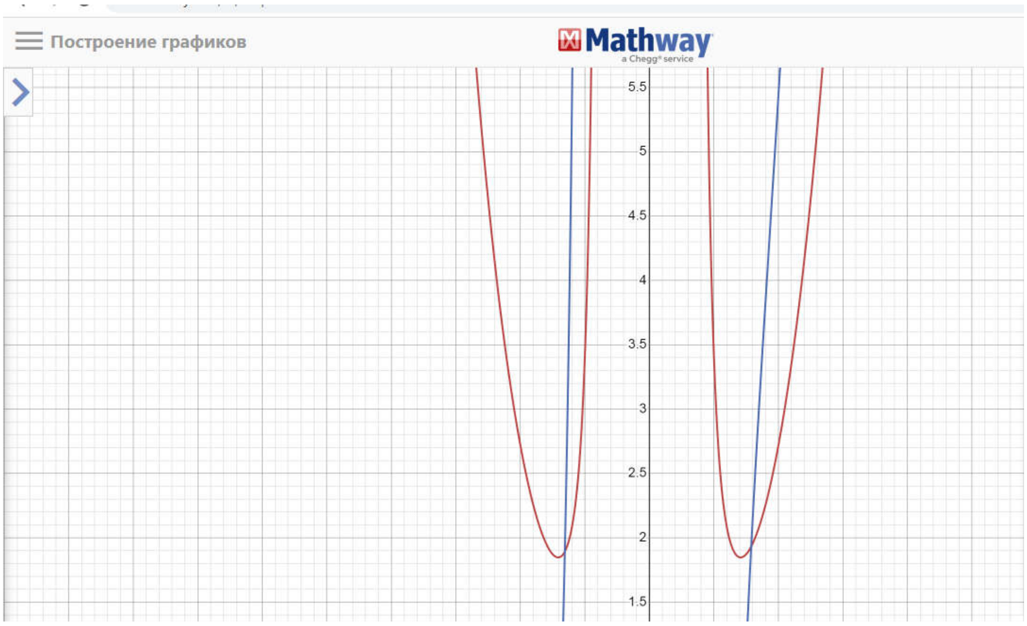


Рис. 14.10

Задача 14.5. Дослідити функцію $f(x)=\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1) $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$, $x=-2$ – точка розриву.

2) графік функції має вертикальну асимптоту $x=-2$.

$y=kx+l$, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2=1$, отже, графік функції має горизонтальну асимптоту $y=1$.

3) $f(-x)=\left(\dfrac{-x-2}{-x+2}\right)^2=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$, тому функція ні парна, ні непарна, її графік не симетричний ні відносно осі Оу, ні відносно початку координат.

Не періодична.

4) координати точок перетину з осями координат: Ox: $y=0$, тоді $x=2$, $A(2;0)$; Oy: $x=0$, тоді $y=1$, $B(0;1)$.

5) $f'(x)=2\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)\cdot\dfrac{x+2-x+2}{(x+2)^2}=\dfrac{8(x-2)}{(x+2)^3}$.

Знайдемо критичні точки функції: $f'(x)=0$, $x=2$.

Визначимо знак похідної функції на області визначення функції.

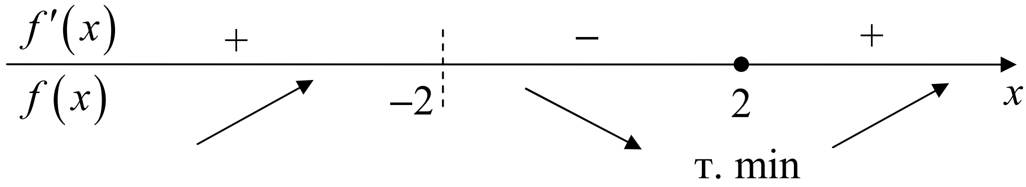


Рис. 14.11

Функція $f(x)=\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2$ зростає при $x\in(-\infty;-2)$ і $x\in(2;+\infty)$; спадає при $x\in(-2;\,2)$; $y_{\min}=y(2)=0$.

6) $f''(x)=8\cdot\dfrac{(x+2)^3-(x-2)\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6}=-16\dfrac{x-4}{(x+2)^4}$;

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=4$.

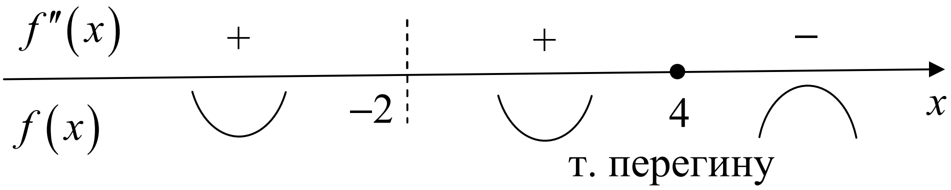


Рис. 14.12

$$f(4)=\left(\frac{4-2}{4+2}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

7) наносимо одержані характерні точки, асимптоти на координатну площину, будуємо графік функції.

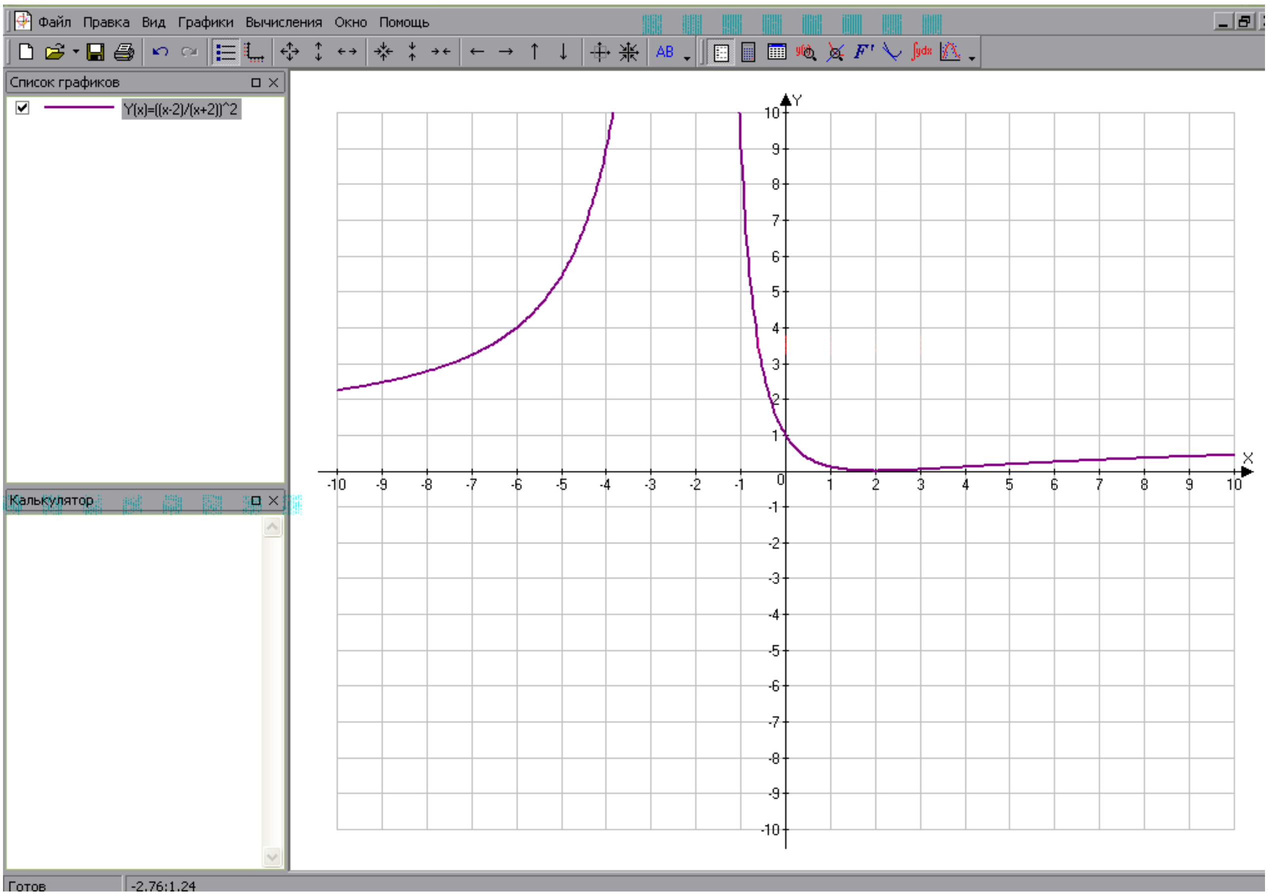


Рис. 14.13

Використання програмних засобів дає користувачеві не тільки можливість виконувати на комп'ютері побудови але й спостерігати, як змінюється рисунок під час переміщення базових точок мишею.

Після завершення побудови можна переміщувати вихідні точки мишею, і весь малюнок буде динамічно змінюватися, зберігаючи залежності між елементами побудови. ■

Задача 14.6. *Дослідити функцію* $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ *і побудувати її графік.*

Розв'язання.

1) $D(y)=\mathbb{R}$.

2) вертикальних і похилих асимптот немає, оскільки функція визначена на множині всіх дійсних чисел, а

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-5)\sqrt[3]{x^2}}{x}=\infty,\ \lim_{x\to+\infty}y(x)=+\infty, \lim_{x\to-\infty}y(x)=-\infty .$$

3) $y(-x)=(-x-5)\sqrt[3]{(-x)^2}=-(x+5)\sqrt[3]{x^2}\neq y(x);$

$y(-x)=(-x-5)\sqrt[3]{(-x)^2}=-(x+5)\sqrt[3]{x^2}\neq -y(x)$, функція ні парна, ні непарна.

4) $$Ox:\begin{cases}y=0,\\(x-5)\sqrt[3]{x^2}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0,\\\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=5,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow A(0;0), B(5;0).$$

$$Oy:\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}\Leftrightarrow A(0;0).$$

5) $$y'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3}(x-5)\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$y'(x)=0\Leftrightarrow\frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=0,\end{array}\right.$$ – критичні точки.

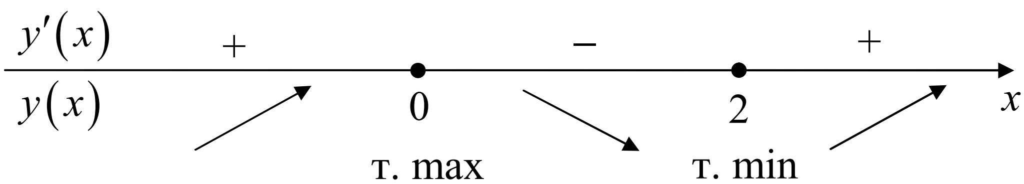


Рис. 14.14

$y_{\max} = y(0) = 0,\ y_{\min} = y(2) = (2-5)\sqrt[3]{4} \approx -4{,}8.$

6) $y''(x) = \dfrac{5}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x} - (x-2)\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{10}{9}\dfrac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^4}}.$

$y''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=0, \end{array}\right.$ – точки, «підозрілі» на точки перегину.

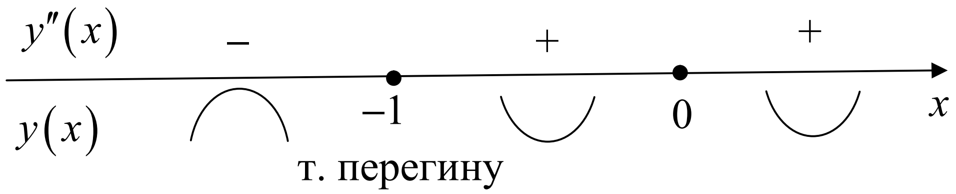


Рис. 14.15

$y(-1) = -6\sqrt[3]{1} = -6,\ C(-1;-6).$

7) наносимо одержані характерні точки, асимптоти на координатну площину, будуємо графік функції.

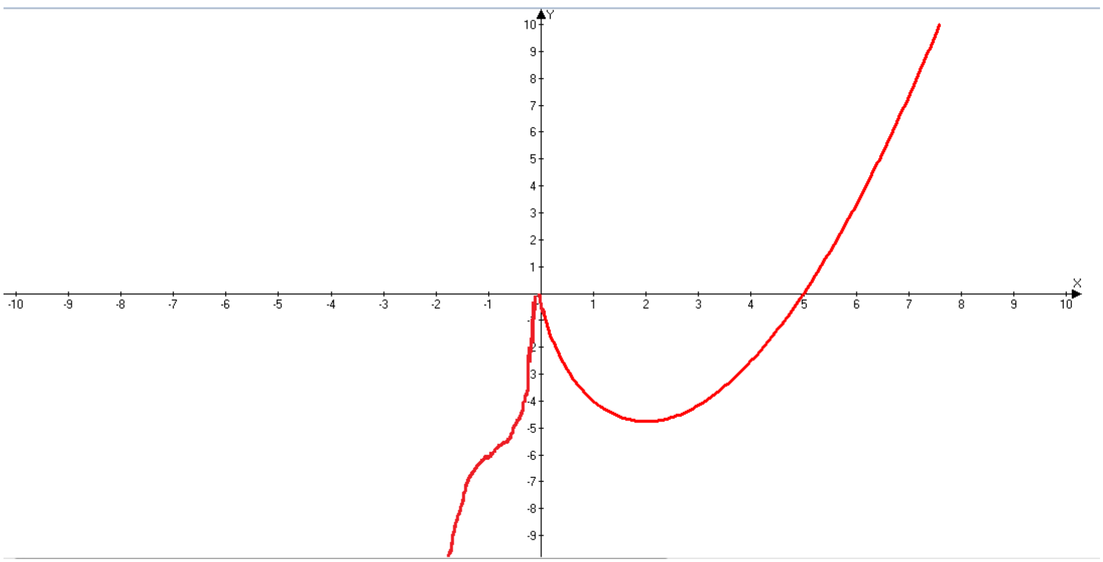


Рис. 14.16

Отже, функція $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ визначена на всій числовій прямій. Її графік перетинає вісь Ох у точках $x=0$ і $x=5$. Асимптот немає. На проміжках $-\infty < x < 0$ і $2 < x < +\infty$ функція зростає, на проміжку $0 < x < 2$ – спадає, у точці $(0;0)$ має локальний максимум, у точці $\left(2;-\sqrt[3]{4}\right)$ – локальний мінімум. На проміжку $-1<x<0$ і $0<x<+\infty$ функція вгнута, на проміжку $-\infty<x<-1$ – опукла. Точка $(-1;-6)$ – точка перегину. Оскільки $f(x)$ неперервна в нулі і

$$\lim_{x\to 0+}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-5}{\sqrt[3]{x}}=-\infty,\ \lim_{x\to 0-}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x-5}{\sqrt[3]{x}}=+\infty,$$

то пряма $x=0$, $y\le 0$ є і лівою і правою півдотичною до графіка функції у точці $(0;0)$. ■

Задача 14.7. *Побудувати графік функції* $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання.

1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) $y=kx+b$, $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\arccos\frac{1}{x}}{x}=0$; $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arccos\dfrac{1}{x}=0$; $y=0$ – похила асимптота;

$x=0$ – вертикальна асимптота;

$x\to+0$, то $\dfrac{1}{x}\to+\infty$, то $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\to\dfrac{\pi}{2}$, $x\to-0$, то $\dfrac{1}{x}\to-\infty$, то $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\to-\dfrac{\pi}{2}$.

3) $y(-x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(-x)}=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=y(x)$ – функція непарна, тому графік симетричний відносно початку координат.

4) $Ox:\begin{cases}y=0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=0\end{cases}$ $\begin{cases}y=0\\ \dfrac{1}{x}\ne 0\end{cases}$ – вісь Ox графік функції не перетинає;

$x = 0 \notin D(y)$, отже вісь Oy графік функції також не перетинає;

5) $y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-\cancel{x^2}}{1+x^2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x^2}} = \dfrac{-1}{1+x^2} < 0$, тобто функція спадає на кожному з проміжків області визначення;

6) $y'' = \left(\dfrac{-1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

$y''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

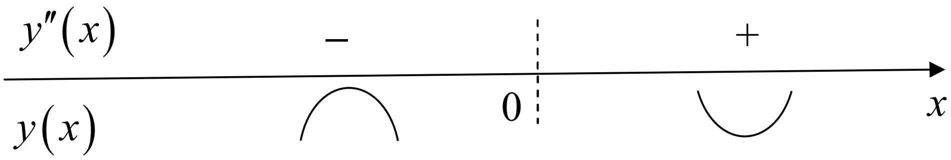


Рис. 14.17

7) наносимо одержані характерні точки, асимптоти на координатну площину, будуємо графік функції. ■

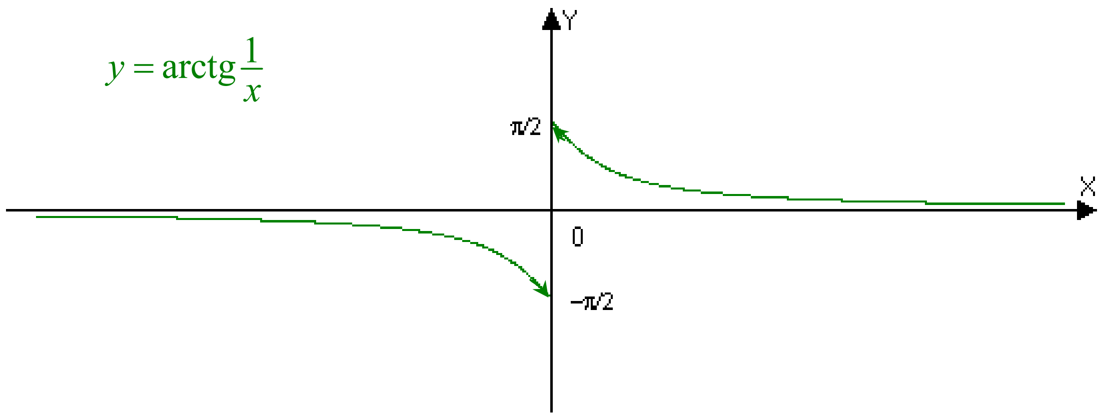


Рис. 14.18

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [8; 12]** *Знайти асимптоти кривих:*

1) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$; **2)** $y=xe^x$; **3)** $y=x+\dfrac{\sin x}{x}$;

4) $y=x\operatorname{arctg} x$; **5)** $y=\ln\left(4-x^2\right)$; **6)** $y=\dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$;

7) $y=3\sqrt{\dfrac{x^2}{4}-1}$; **8)** $y=\dfrac{2x^2-9}{x+2}$; **9)** $y=\dfrac{x^5}{x^4-1}$;

10) $y=xe^{-x}$; **11)** $y=x\operatorname{arcctg} x$; **12)** $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

✍**2.** *Дослідити функцію та побудувати її графік:*

1) $y=x^3-3x^2+4$; **2)** $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-x^2$;

3) $y=3x^2-x^3$; **4)** $y=\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$;

5) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; **6)** $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$;

7) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; **8)** $y=\dfrac{x^3+x+2}{x}$;

9) $y=x\sqrt[3]{(x+1)^2}$; **10)** $y=x\sqrt{4-x^2}$;

11) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; **12)** $y=xe^{-x}$;

13) $y=x+e^{-x}$; **14)** $y=\dfrac{e^x}{1+x}$;

15) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$;

16) $y=\ln\left(4-x^2\right)$;

17) $y=x^2e^{-x}$;

18) $y=x-\ln\left(x+1\right)$.

✍***3. [23]*** *Побудувати графік функції:*

1) $y=x^2-4x+3$;

2) $y=6-2x-x^2$;

3) $y=x^3-3x+3$;

4) $y=x\left(6-2x\right)^2$;

5) $y=\left(x-2\right)^3+1$;

6) $y=1-\left(x+1\right)^3$;

7) $y=\cos x+\sqrt{3}\sin x,\ 0\le x\le 2\pi$;

8) $y=x+\sin x,\ 0\le x\le 2\pi$;

9) $y=\sqrt{3}x-2\cos x,\ 0\le x\le 2\pi$;

10) $y=e^x-2e^{-x}-3x$;

11) $y=x\left(\dfrac{x}{2}-5\right)^4$;

12) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}$;

13) $y=5\sqrt[5]{x^2}-2x$;

14) $y=x\sqrt{8-x^2}$;

15) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$;

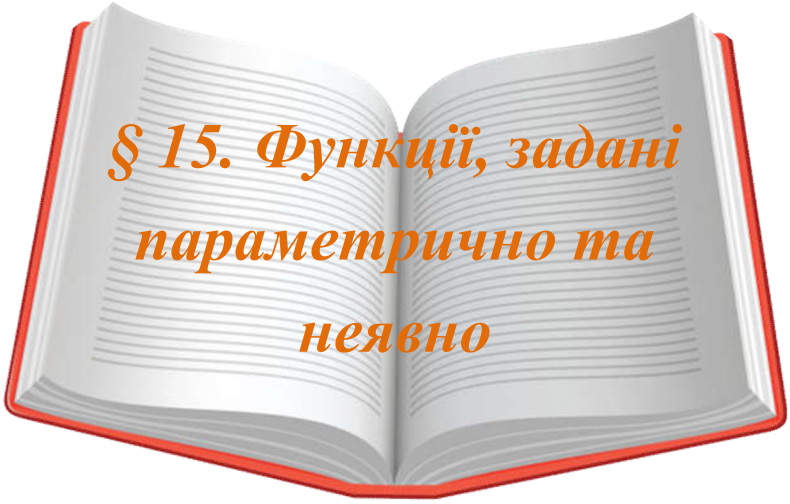
16) $y=\dfrac{8x}{x^2+4}$;

17) $y=\left|x^2-2x\right|$;

18) $y=\ln\left(3-x^2\right)$;

19) $y=\dfrac{4}{3}x-\operatorname{tg}x,\ -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$;

20) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.



§ 15. Функції, задані параметрично та неявно

Попередньо вивчіть лекцію 28 [11, с. 333–341].

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

1. Криві, задані параметрично

Кривою, заданою параметрично, *називається множина точок площини XOY, координати яких визначаються із співвідношень:*

$L := \{(x, y) \mid x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T\},$

де T деякий проміжок. Якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні на проміжку T, то образом цього проміжку при відображенні $x = x(t),\ y = y(t)$ може бути множина у площині XOY, яка зовсім несхожа на інтуїтивне уявлення про криву. Наприклад, можна задати таке відображення, що образом буде внутрішність квадрата. Тому вводимо додаткове обмеження: вважаємо, що проміжок T зміни параметра t розбивається на скінченне число проміжків, на кожному з яких функція $x(t)$ строго монотонна. Отже, для неї існує обернена функція $t = t(x)$ і $y(x) = y(t(x))$. Таким чином, кожному проміжку строгої монотонності $x(t)$

відповідає однозначна функція $y(x)$, *графік якої називається гілкою даної кривої. Кількість гілок визначається кількістю проміжків строгої монотонності функції* $x(t)$. *Якщо точка* $\left(x(t_0), y\left(t_0\right)\right)$ *не є спільною для декількох гілок даної кривої, то в околі цієї точки можна визначити функцію* $y(x)$, *задану параметрично, графік якої проходить через цю точку.*

Для побудови графіка кривої, заданої параметрично, необхідно окремо розглядати проміжки монотонності $x(t)$, *а потім проводити міркування, аналогічні тим, які проводяться при розгляді складеної функції. Нехай* t *зростає, тоді якщо* $x(t)$ *і* $y(t)$ *зростають, то рух по кривій відбувається вправо вгору; якщо* $x(t)$ *спадає, а* $y(t)$ *зростає, то рух по кривій відбувається вліво вгору і т.д.*

Асимптоти.

Вертикальна асимптота:

$$t \to t_0 \;\Rightarrow \begin{cases} x \to a, \\ y \to +\infty, \end{cases} \Rightarrow\; x = a - \textit{вертикальна асимптота.}$$

Горизонтальна асимптота:

$$t \to t_0 \;\Rightarrow \begin{cases} x \to \infty, \\ y \to b, \end{cases} \Rightarrow\; y = b - \textit{горизонтальна асимптота.}$$

Похила асимптота може бути тільки тоді, коли при $t \to t_0$ *функції* $x(t)$ *і* $y(t)$ *одночасно прямують до нескінченності. Коефіцієнти асимптоти* $y = kx + b$ *обчислюються із заміною умови* $x \to \infty$ *(*$x \to +\infty$, $x \to -\infty$*) на умову* $t \to t_0$ *(*$t \to t_0 + 0$, $t \to t_0 - 0$*).*

Отже для побудови графіка кривої, заданої параметрично, важливе точне визначення проміжків монотонності, принаймні функції $x(t)$.

2. Полярна система координат і рівняння кривих у цій системі.

Полярна система координат визначається заданням деякої точки O, яку називають ***полюсом****, променя OP, що виходить з цієї точки, який називають* ***полярною віссю****, масштабу для вимірювання довжини і напряму відліку кутів.*

***Полярними координатами** r **і** φ **точки M**, яка не співпадає з полюсом, називаються: відстань r від точки M до полюса O і кут φ від полярної осі до променя OM. Для полюса O вважається, що $r=0$, а кут φ — не визначений.*

Якщо полюс O прийняти за початок декартової прямокутної системи координат, напрям полярної осі за додатний напрям осі OX, а за вісь OY прийняти таку вісь, що кут від додатного напряму осі OX до додатного напряму осі OY дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то між декартовими координатами x, y точки M і її полярними координатами r і φ мають місце співвідношення:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

і навпаки, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\frac{x}{r}, \sin\varphi=\frac{y}{r}$.

Якщо $x\neq 0$, $y\neq 0$, то кут φ можна знайти з умови $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$, причому за головне значення φ узяти кут з $\left[0;2\pi\right)$ такий, що знак $\sin\varphi$ дорівнює знаку y.

3. Функції, задані неявно.

Нехай задане рівняння $F\left(x,y\right)=0$. Якщо множина точок площини XOY, координати яких задовольняють цьому рівнянню, складається із скінченного числа неперервних кривих, кожна з яких – графік однозначної функції $y=y\left(x\right)$, то говорять, що це *рівняння неявно визначає відповідне сімейство функцій* $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots\ y_k(x)$. *Якщо точка* (x_0, y_0) *лежить тільки на одній з цих кривих, то умова* $y(x_0) = y_0$ *дозволяє однозначно вибрати цю криву зі всього сімейства, тобто рівняння* $F(x, y) = 0$ *і умова* $y(x_0) = y_0$ *визначають (або задають) однозначну* ***неявну*** *неперервну функцію в околі точки* (x_0, y_0) *таку, що* $F(x, y(x)) \equiv 0$, $y(x_0) = y_0$.

Найпростішим рівнянням вигляду $F(x, y) = 0$ *є рівняння* $x - f(y) = 0$, *яке визначає функцію, обернену до* f : $y = f^{-1}(x)$. *Вісь OY міняється місцями з віссю OX при симетричному відображенні площини XOY щодо бісектриси першого координатного кута. Таким чином, крива* $y = f(x)$ *симетрична кривій* $x = f(y)$ *або* $y = f^{-1}(x)$ *щодо цієї бісектриси. При цьому відображенні, згідно з теоремою про обернену функцію, неперервна монотонна функція перейде у неперервну монотонну функцію з тим же характером монотонності, що і пряма функція. Якщо ж неперервна функція* $x = f(y)$ *не монотонна, то крива, яка визначається рівнянням* $x - f(y) = 0$, *вже не буде графіком функції* $y = y(x)$, *оскільки немає однозначної залежності функції від аргументу.*

Якщо рівняння $F(x, y) = 0$ *можна розв'язати щодо однієї із змінних, то побудова множини точок* (x, y), *для яких це рівняння правильне, випливає з попередніх міркувань. Іноді можна ввести параметр* t *так, що рівняння* $F(x, y) = 0$ *буде рівносильне співвідношенню* $\{x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T\}$ *(або декільком таким співвідношенням).*

Приклади розв'язування вправ

Задача 15.1. *Побудувати графік параметрично заданої кривої* $x=\dfrac{t}{1+t^3},\ y=\dfrac{t^2}{1+t^3}$ *(лист Декарта).*

Розв'язання. Спочатку дослідимо функції $x=\dfrac{t}{1+t^3},\ y=\dfrac{t^2}{1+t^3}$ та побудуємо їх графіки, використовуючи раніше вказану схему дослідження.

$x=\dfrac{t}{1+t^3}$.

1) $D(x)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

2) не парна і не непарна.

3) $x_t'=\dfrac{t^3+1-3t^3}{(t^3+1)^2}=\dfrac{1-2t^3}{(t^3+1)^2}$, $\quad x_t'=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

$$x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{3}{\sqrt[3]{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}6.$$

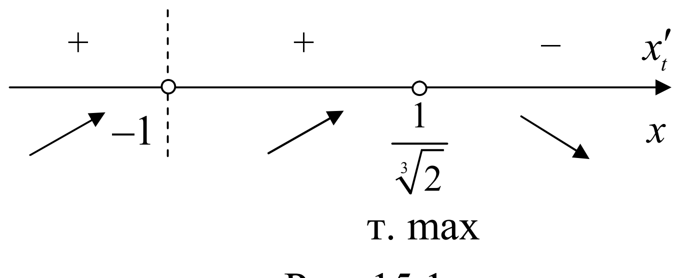


Рис. 15.1

4) $x_{tt}''=\dfrac{6t^2\left(t^3-2\right)}{(t^3+1)^3}$; $\quad x_{tt}''=0 \Rightarrow t_1=0,\ t_2=-1,\ t_3=\sqrt[3]{2}$,

$$x\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{3\sqrt[3]{2}}{1+2}=\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26.$$

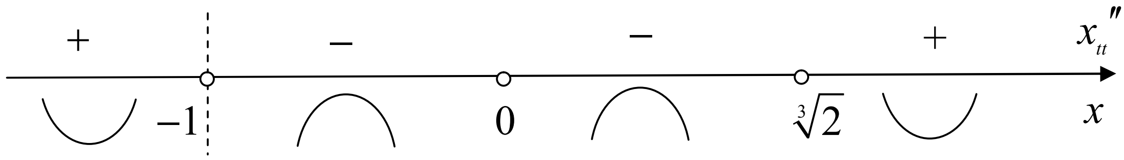


Рис. 15.2

5) асимптоти: $t=-1$ – вертикальна;

$x=kt+b;\qquad k=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{x(t)}{t}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{3}{1+t^3}=0;\quad b=\lim\limits_{t\to\pm\infty}x(t)=0;\quad x=0$ – горизонтальна асимптота;

6)

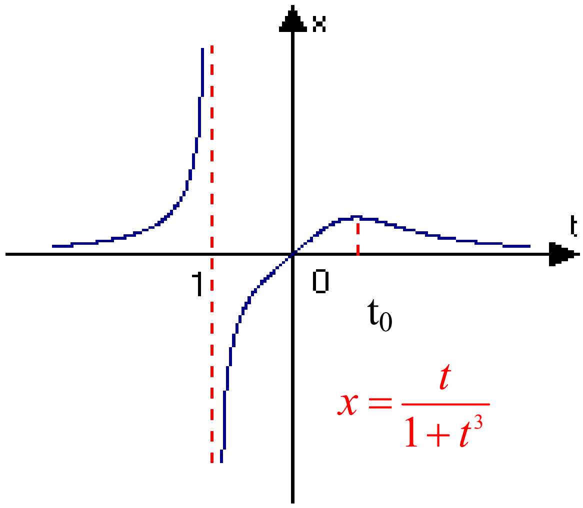


Рис. 15.3

$$y=\frac{t^2}{1+t^3}.$$

1) $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

2) ні парна, ні непарна.

3) $y'_t=\dfrac{2t\left(t^3+1\right)-3t^4}{(t^3+1)^2}=\dfrac{t\left(2-t^3\right)}{(t^3+1)^2}$.

$$y\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{1+2}=\sqrt[3]{4}\approx 1,6;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=\frac{3}{2}=1,5.$$

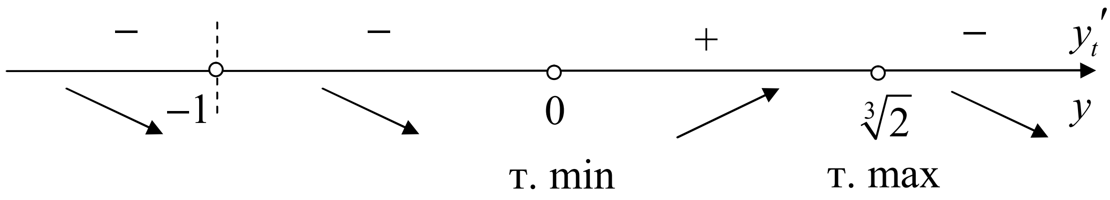


Рис. 15.4

4) $y''_{tt}=\dfrac{2\left(t^6-7t^3+1\right)}{(t^3+1)^3}$; $\quad t^6-7t^3+1=0;\quad t_1^3=\dfrac{7-\sqrt{45}}{2}\approx 0{,}15$;

$t\approx 0{,}53$; або $t_2^3=\dfrac{7+\sqrt{45}}{2}\approx 6{,}85$, $t\approx 1{,}9$;

$$y\left(\sqrt[3]{\frac{7-\sqrt{45}}{2}}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{45}}{2}}\right)^2}{3-\sqrt{5}}\approx 0{,}36;$$

$$y\left(\sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{45}}{2}}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{7+\sqrt{45}}{2}}\right)^2}{3+\sqrt{5}}\approx 0{,}69.$$

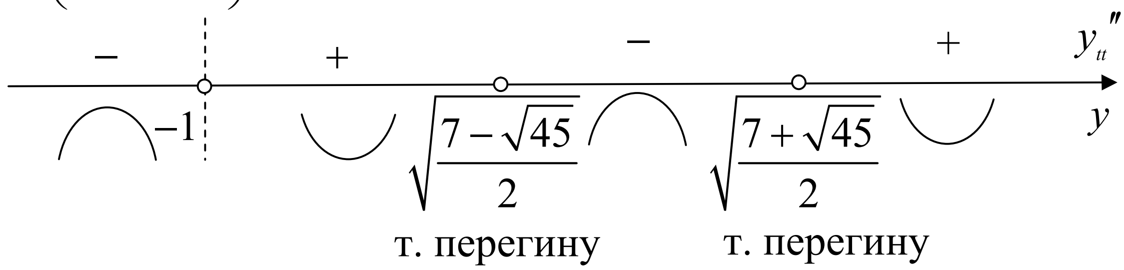


Рис. 15.5

5) асимптоти:

$t=-1$ – вертикальна; $y=kt+b$; $\quad y=0$ – горизонтальна;

6)

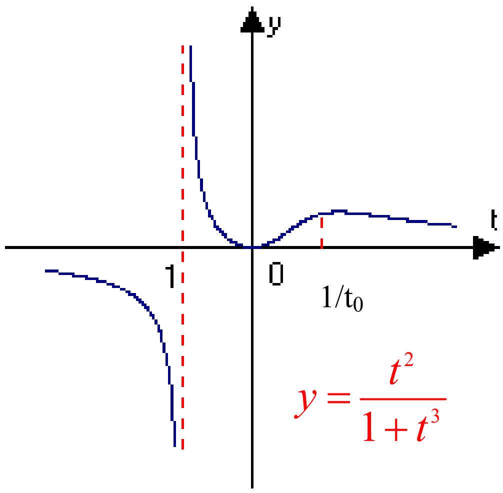


Рис. 15.6

Дослідження функцій $x(t)$ і $y(t)$ зведемо в таблицю.

t	$x(t)$	$y(t)$
$t\to-\infty$	$x\to 0$	$y\to 0$
$(-\infty;-1)$	+, зростає від 0 до $+\infty$	–, спадає від 0 до $-\infty$, опукла
-1	∞	∞
$(-1;0)$	–, зростає від $-\infty$ до 0	+, спадає від $+\infty$ до 0, вгнута
0	0	0
$\left(0;\sqrt[3]{7-\sqrt{45}}\right)$	+, зростає від 0 до $\approx 0,51$	+, зростає від 0 до $\approx 0,36$, вгнута
$\sqrt[3]{7-\sqrt{45}}$	$\approx 0,51$	$\approx 0,36$, т. перегину
$\left(\sqrt[3]{7-\sqrt{45}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	+, зростає від $\approx 0,51$ до $\approx 0,53$	+, зростає від $\approx 0,36$ до $\approx 0,42$, опукла ?
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\approx 0,53$	$\frac{2}{3\sqrt[3]{4}}\approx 0,42$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\sqrt[3]{2}\right)$	+, спадає від $\approx 0,53$ до $\approx 0,42$	+, зростає від $\approx 0,42$ до $\approx 1,59$, опукла
$\sqrt[3]{2}$	$\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\approx 0,42$	$\sqrt[3]{4}\approx 1,59$, т.max
$\left(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{7+\sqrt{45}}\right)$	+, спадає від $\approx 0,42$ до $\approx 0,16$	+, спадає від $\approx 1,59$ до $\approx 0,3$, опукла
$\sqrt[3]{7+\sqrt{45}}$	$\approx 0,16$	$\approx 0,3$
$\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{45}};+\infty\right)$	+, спадає від $\approx 0,16$ до 0	+, спадає від $\approx 0,3$ до 0, вгнута

Здобуту інформацію використаємо для дослідження поведінки кривої. Знайдемо ще першу і другу похідні y'_x, y''_{xx} :

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3},\quad y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}=\frac{2\left(t^3+1\right)^4}{\left(1-2t^3\right)^3}.$$

Перевіримо, чи має крива похилу асимптоту. Якщо $t \to -1,$ то $x \to \infty, \quad y \to \infty$ і $k = \lim\limits_{t \to -1} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t \to -1} \dfrac{t^2}{t} = -1;$

$$\lim_{t \to -1}\left(y(x) - kx\right) = \lim_{t \to -1}\left(y + x\right) = \lim_{t \to -1} \frac{t^3 + t}{1 + t^3} = \lim_{t \to -1} \frac{t(t+1)}{(t+1)(t^2 - t + 1)} = \frac{-1}{3},$$

то пряма $y = -x - \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x + y = \dfrac{1}{3}$ є похила асимптота.

Пряма $y = -x - \dfrac{1}{3}$ є похила асимптота досліджуваної кривої. Таким чином, крива проходить через початок координат: $x(0) = 0,$ $y(0) = 0$. Коли t зростає від 0 до t_0, значення функцій $x(t)$, $y(t)$ зростають, рух по кривій відбувається вправо вгору до точки $\left(x(t_0); y(t_0)\right)$. Коли t зменшується від 0 до –1, рух по кривій відбувається вліво вгору, асимптотично наближаючись до прямої $y = -x - \dfrac{1}{3}$. У точці $\left(x(t_0); y(t_0)\right)$ починається друга гілка кривої, яка відповідає змінній t на проміжку $(t_0; +\infty)$. Із зростанням t функція $x(t)$ спадає і рух по кривій відбувається вліво, спочатку вгору до точки $\left(x\left(\dfrac{1}{t}\right); y\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$, а потім вниз; при $t \to +\infty$ маємо x(t)→0, y(t)→0. Нарешті, при зростанні t на проміжку (–∞, –1) функція *x(t)* зростає, *y(t)* спадає. При t→-∞ одержуємо, що x(t)→0, y(t)→0, при t→1 рух по кривій відбувається вправо вниз, асимптотично наближаючись до прямої $y = -x - \dfrac{1}{3}$. Крива симетрична при заміні *t* на $\dfrac{1}{t}$, тому можна обмежитися розглядом *t* на проміжку $(-1;1)$, а частину, що залишилася, відобразити симетрично відносно прямої $y = x$. ■

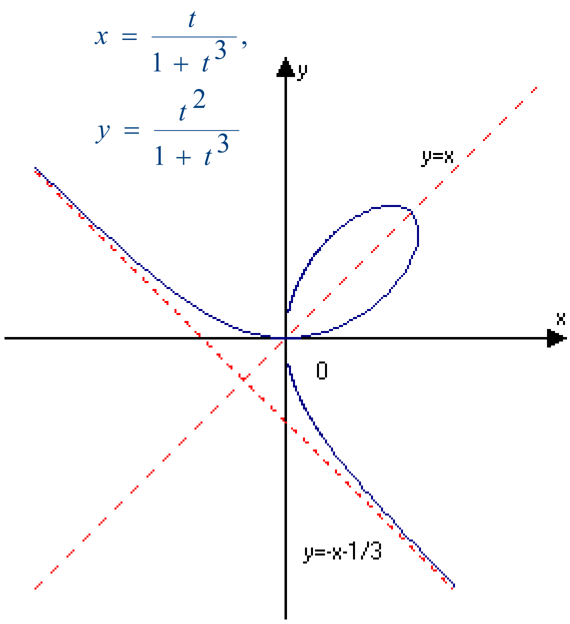


Рис. 15.7

Задача 15.2. *Побудувати графік кривої* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$ *(астроїда).*

Оскільки точка $\left(x\left(t_0 + 2\pi\right), y\left(t_0 + 2\pi\right)\right)$ співпадає з точкою $\left(x\left(t_0\right), y\left(t_0\right)\right)$, то достатньо розглядати параметр t на проміжку (0, 2π).

$$x\left(t\right) = a\cos^3 t;$$

$$x'\left(t\right) = -3a\cos^2 t\sin t;\ x'\left(t\right) = 0 \Rightarrow t = 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}.$$

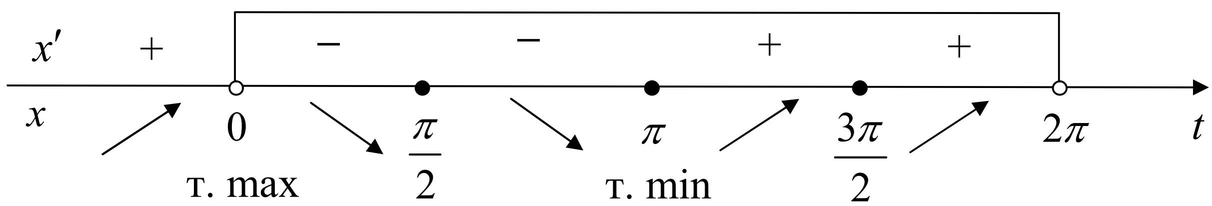


Рис. 15.8

$$x_{\max} = x\left(0\right) = a;\ x_{\min} = x\left(\pi\right) = -a.$$

$$y = a\sin^3 t;$$

$$y'\left(t\right) = 3a^2\sin^2 t\cos t;\ y'\left(t\right) = 0 \Rightarrow 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}.$$

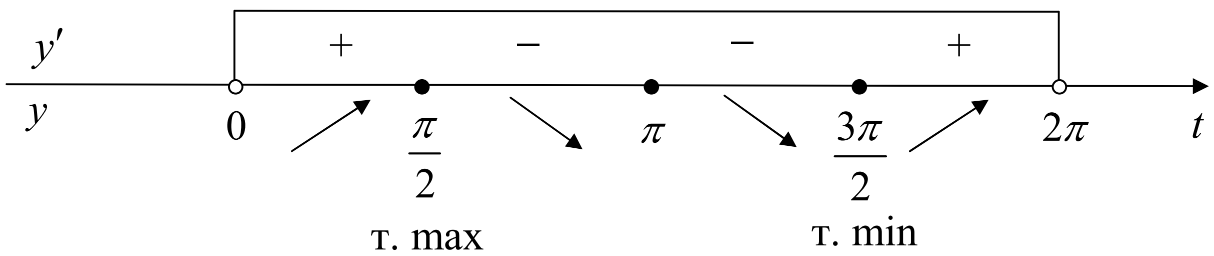


Рис. 15.9

$$y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=a;\ y_{\min}=y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-a.$$

Побудуємо графіки функцій $x(t)$ і $y(t)$.

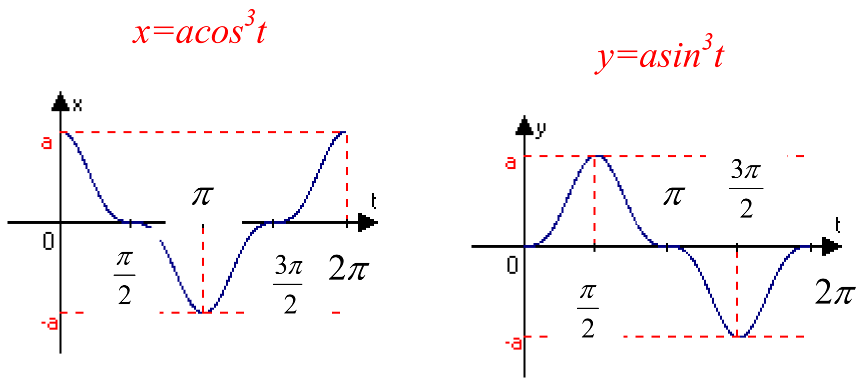


Рис. 15.10

Проміжками монотонності $x(t)$ є (0, π) і (π, 2π). Коли t зростає від 0 до $\frac{\pi}{2}$, рух по кривій відбувається вліво вгору від точки (a,0)=(x(0),y(0)) до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right);y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=(0;a)$; коли t зростає від $\frac{\pi}{2}$ до π, рух по кривій відбувається вліво вниз до точки $\left(x(\pi);y(\pi)\right)=(-a;0)$. У цій точці починається друга гілка кривої. Коли t зростає від π до $\frac{3\pi}{2}$, рух по кривій відбувається вправо вниз до точки $\left(x\left(\frac{3\pi}{2}\right);y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=(0;a)$. Коли t зростає від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, рух по кривій відбувається вправо вгору до точки $\left(x(2\pi); y(2\pi)\right) = (a; 0)$.

Оскільки
$$x(2\pi - t_0) = x(t_0),\ y(2\pi - t_0) = -y(t_0),\ x(\pi - t_0) =$$
$$= -x(t_0),\ y(\pi - t_0) = y(t_0),$$
то разом з точкою $(x_0; y_0)$ на кривій лежать точки $(-x_0; y_0)$ і $(x_0; -y_0)$, тобто вона симетрична відносно обох координатних осей. Нехай t змінюється на проміжку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Відповідні точки кривої лежать у першій чверті. Оскільки при будь-якому t: $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, $a\cos^3 t < a$, $a\sin^3 t < a$, то досліджувана крива лежить нижче відрізка прямої $x + y = a$ у першій чверті. ■

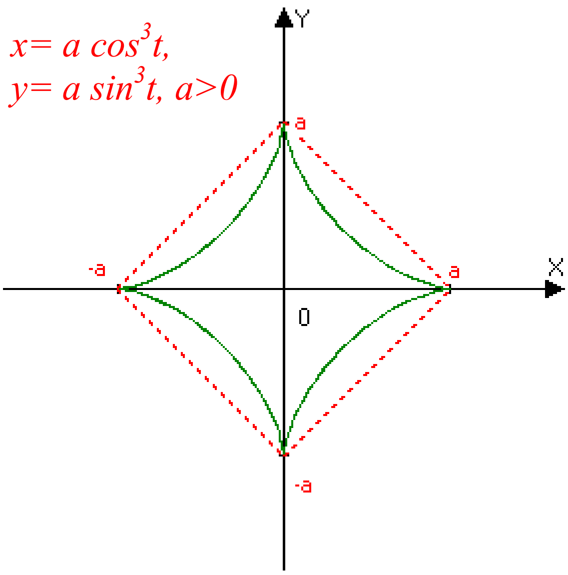


Рис. 15.11

Задача 15.3. *Намалювати криву, задану в полярній системі координат рівнянням $r = \cos 3\varphi$ (трилисник).*

Розв'язання.

1) область визначення:

$$\cos 3\varphi > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 3\varphi < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} < \varphi < \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$$

Якщо $n = 0$, то $-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$;

$n = 1$, то $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{5\pi}{6}$;

$n = 2$, то $\frac{7\pi}{6} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

При $n > 2$ і $n \le -1$ графіки будуть співпадати з раніше побудованими ($n = 0$, або $n = 1$, або $n = 2$).

2) оскільки $r(-\varphi) = \cos(-3\varphi) = \cos 3\varphi = r(\varphi)$, то кожна вітка графіка симетрична відносно своєї осі:

для $n = 0$ вісь симетрії $\varphi = 0$,

$n = 1$ вісь симетрії $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ (період $T = \frac{2\pi}{3}$),

$n = 2$ вісь симетрії $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.

Тому достатньо побудувати першу вітку графіка для $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ $(n = 0)$, потім симетрично відобразити відносно полярної осі.

Інші дві вітки графіка одержуємо поворотом першої вітки на кут $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$, враховуючи періодичність функції $r = \cos 3\varphi$.

3) $r' = (\cos 3\varphi)' = -3\sin 3\varphi, -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$,

$$r' = 0 \Leftrightarrow -3\sin 3\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi n}{3},\ n \in Z\,.$$

$$\varphi = 0 \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right].$$

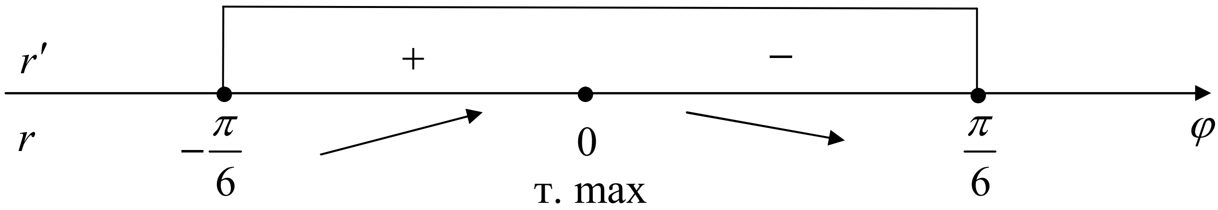


Рис. 15.12

$$r(0) = \cos 0 = 1\,.$$

4) $r'' = \left(-3\sin 3\varphi\right)' = -9\cos 3\varphi$;

$$r'' = 0 \Leftrightarrow -9\cos 3\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right].$$

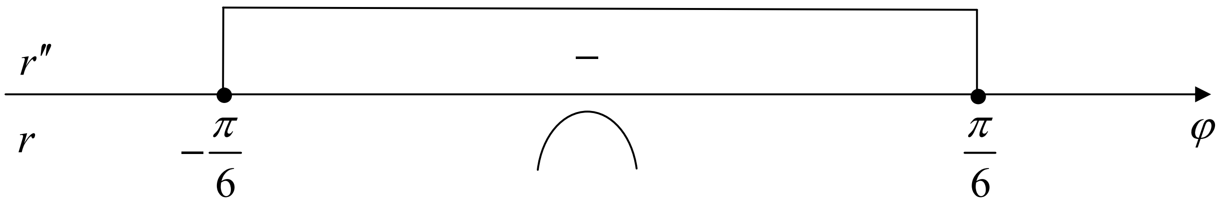


Рис. 15.13

Точок перегину немає, $r\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

5) будуємо графік функції $r = \cos 3\varphi$ на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$. Тут крива монотонно зростає від 0 до 1, опукла. Потім одержаний графік симетрично відображаємо відносно осі симетрії (в даному випадку це полярна вісь), одержуємо першу вітку трилистника.

Інші дві вітки рисуємо поворотом першої вітки відносно полюса на кути $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$. ■

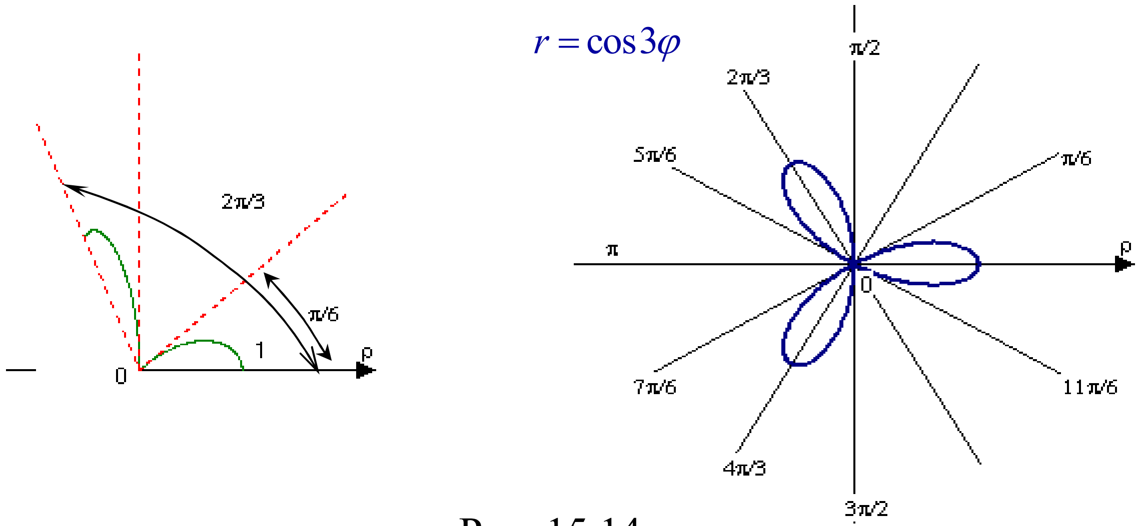


Рис. 15.14

Задача 15.4. *Намалювати в системі XOY криву, задану рівнянням* $x = y\cos y$.

Розв'язання. Функція $x(y)$ – непарна; для $y \geq 0$,

$$|x| \leq y,\ x\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=0,\ x(2\pi k)=2\pi k,\ x((2k+1)\pi)=-(2k+1)\pi.$$

Намалюємо графік кривої $x(y)$ в системі YOX і графік кривої *y(x)*, яка визначається рівнянням $x = y\cos y$ – в системі *XOY*. ■

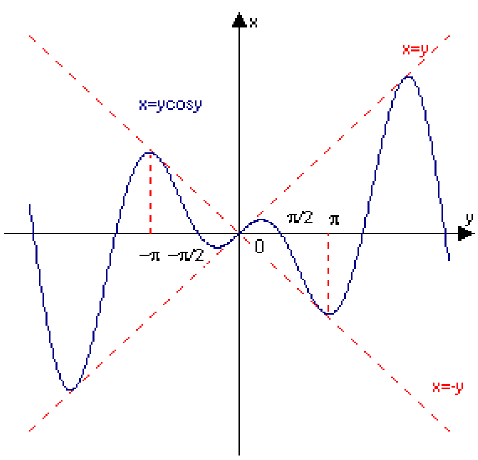


Рис. 15.15

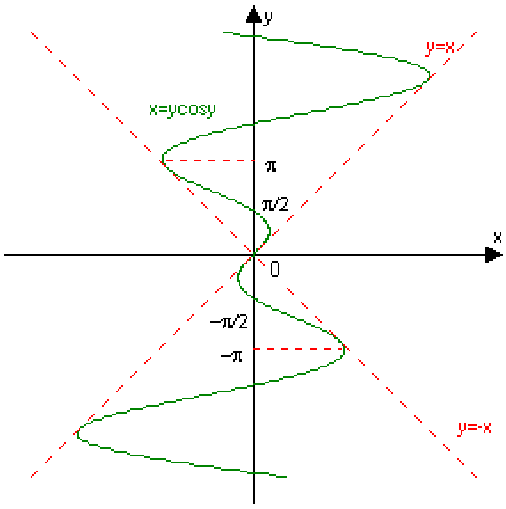


Рис. 15.16

Задача 15.5. [22] *Побудувати криву, задану рівнянням* $xy(x-y)+x+y=0$.

Розв'язання. Крива задана неявно рівнянням:
$xy(x-y)+x+y=0$ (*) або $xy^2-(x^2+1)y-x=0$.

Одержали квадратне рівняння відносно y:

$$D=(x^2+1)^2+4\cdot x^2=x^4+6x^2+1>0;$$

$$y_1=\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+6x^2+1}}{2x} \text{ або } y_2=\frac{x^2+1-\sqrt{x^4+6x^2+1}}{2x},\ x\neq 0.$$

Точка $(0;0)$ задовольняє вихідне рівняння (*), тому шукана крива проходить через початок координат.

Знайдемо границю функції $y_2(x)$ у точці $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-\sqrt{x^4+6x^2+1}}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}\textit{Перше правило}\\ \textit{Лопіталя}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1-\sqrt{x^4+6x^2+1}\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{x^3+3x}{\sqrt{x^4+6x^2+1}}\right)=0.$$

Робимо висновок, що для того, щоб побудувати графік шуканої кривої, потрібно побудувати графіки двох функцій:

$$y_1(x)=\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+6x^2+1}}{2x} \text{ і } y_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1-\sqrt{x^4+6x^2+1}}{2x}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$$

$$y_1(x)=\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+6x^2+1}}{2x}.$$

1) $D(y_1)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) непарна: $y_1(-x)=-y_1(x)$.

3) $\lim\limits_{x\to 0+0} y_1(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -0} y_1(x)=-\infty$, тому пряма $x=0$ є вертикальною асимптотою.

Похила асимптота $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y_1(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+6x^2+1}}{x^2}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y_1(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+6x^2+1}}{2x}-x\right)=0.$$

$y=x$ – похила асимптота на $\pm\infty$.

4) $y_1'(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2}\left(1+\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^4+6x^2+1}}\right)$,

$y_1'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

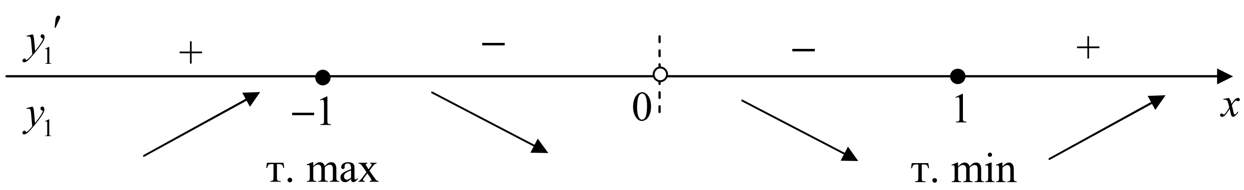


Рис. 15.17

$y_{\min}=y(1)=1+\sqrt{2}$; $y_{\max}=y(-1)=-1-\sqrt{2}$.

5) $$y''(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^4+6x^2+1}}+\frac{2\left(x^2-1\right)^2}{\sqrt{\left(x^4+6x^2+1\right)^3}}\right).$$

Рівняння $y''=0$ коренів не має, тому

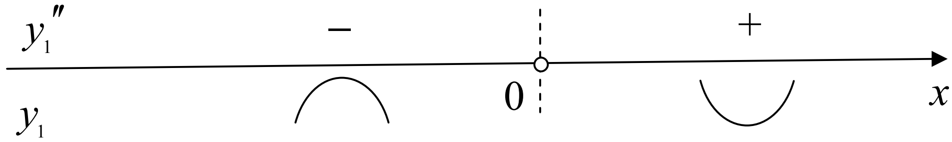


Рис. 15.18

$$y_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1-\sqrt{x^4+6x^2+1}}{2x}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$$

1) $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2) непарна: $y_2(-x)=-y_2(x)$.

3) асимптоти.

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} y_2(x)=0$, то пряма $x=0$ є горизонтальна асимптота.

4) $y_2'(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2}\left(1-\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^4+6x^2+1}}\right),$

$y_2'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$.

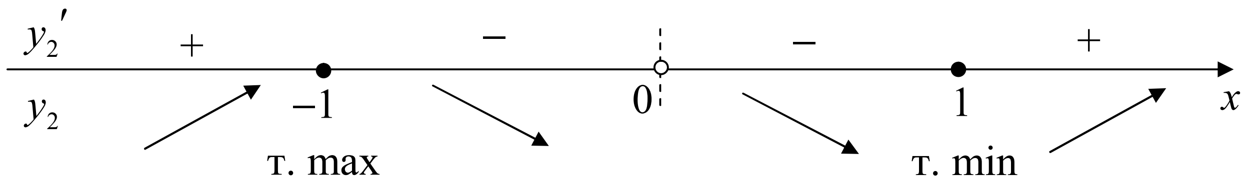


Рис. 15.19

$y_{\min}=y_2(1)=1-\sqrt{2}$; $y_{\max}=y_2(-1)=\sqrt{2}-1$.

5) $y_2''(x)=\dfrac{1}{x^3}\left(1-\dfrac{3x^6+3x^4+9x^2+1}{\sqrt{(x^4+6x^2+1)}}\right);$

$y_2''(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x^4+6x^2+1)^3}-(3x^6+3x^4+9x^2+1)=0 \Leftrightarrow$

$x^4(x^8-6x^4-24x^2-3)=0,$

$x = 0$ або $x^8 - 6x^4 - 24x^2 - 3 = 0,\ x^2 = t$,

$$t^4 - 6t^2 - 24t - 3 = 0,$$

$$\left(t^2 + 3\right)^2 - 12\left(t + 1\right)^2 = 0,$$

$$\left(t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 - 2\sqrt{3}\right)\left(t^2 + 2\sqrt{3}t + 3 + 2\sqrt{3}\right) = 0,$$

$t_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}$ або $t_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}$.

$x^2 = \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}$ або $x^2 = 3 - \sqrt{2\sqrt{3}}$.

$$x = \pm\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}} \approx \pm 1{,}9,\ \varnothing .$$

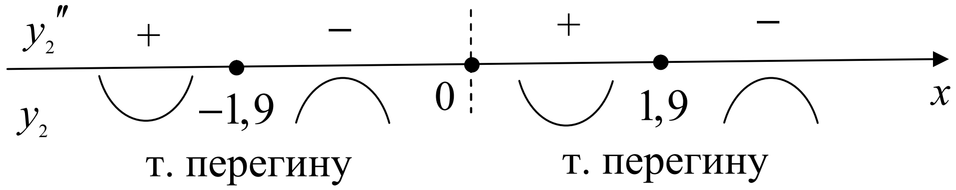


Рис. 15.20

Графіки функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ зображено на рис. 15.21. ■

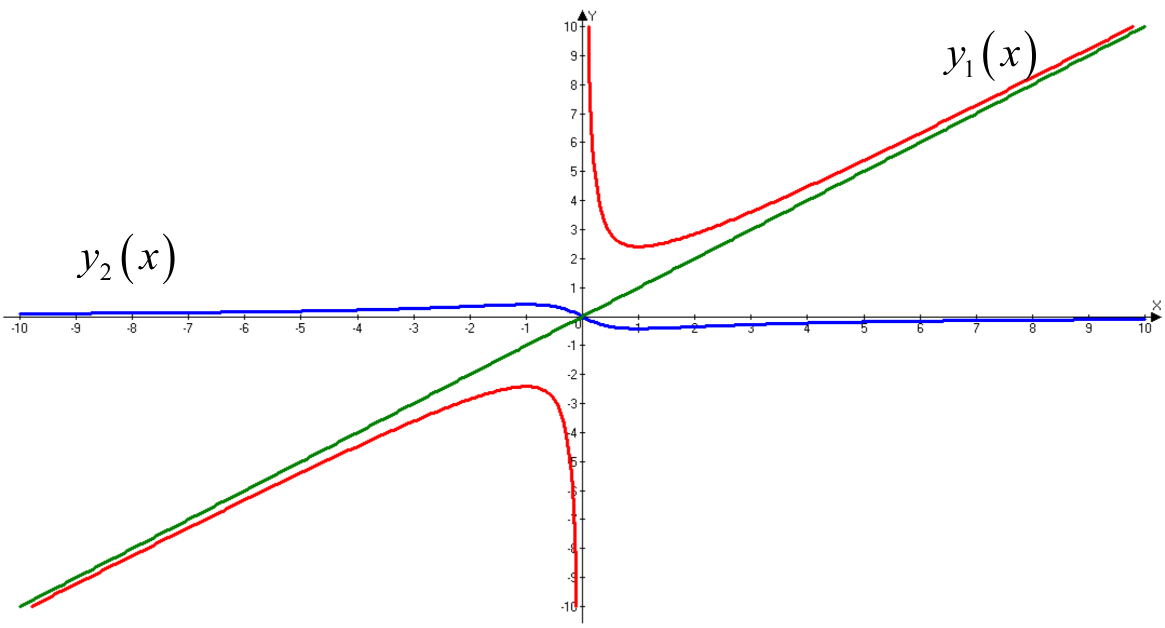


Рис. 15.21

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1.** *Дослідити функцію і побудувати графік:*

1) $x = te^t,\ y = te^{-t}$;

2) $x = -5t^2 + 2t^5,\ y = -3t^2 + 2t^3$;

3) $x = 2t - t^2,\ y = 3t - t^3$;

4) $x = t^3 + 3t,\ y = t^3 - 3t + 1$;

5) $x = t^3 - 3\pi,\ y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t$.

6) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ (циклоїда);

7) $x = \cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2},\ y = \sin t$ (трактриса);

8) $x = t + e^{-t},\ y = 2t + e^{-2t}$;

9) $x = a(\operatorname{sh} t - t),\ y = a(\operatorname{ch} t - 1),\ a > 0$;

10) $x = a\cos 2t,\ y = a\cos 3t,\ a > 0$.

✍**2. [15]** *Дослідити функцію і побудувати графік:*

1) $x = \dfrac{(t+1)^2}{4},\ y = \dfrac{(t-1)^2}{4}$;

2) $x = \dfrac{t^2}{t-1},\ y = \dfrac{t}{t^2-1}$;

3) $x = \dfrac{(t^2+2)^2}{t+1},\ y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}$;

4) $x = \dfrac{t-t^2}{1+t^2},\ y = \dfrac{t^2-t^3}{1+t^2}$;

5) $x = \dfrac{1}{t(t-1)},\ y = \dfrac{t}{t-1}$;

6) $x = \dfrac{t^2+1}{t},\ y = \dfrac{t^2+3}{t-1}$;

7) $x = \dfrac{1}{t(t-2)},\ y = -\dfrac{1}{t(t+2)}$;

8) $x = \dfrac{t^2-3t}{t+1},\ y = \dfrac{t^2+2t}{t+1}$.

✍**3.** *Побудувати графік функції в полярних координатах:*

1) $\rho = \operatorname{tg} 2\varphi$;

2) $\rho = 2 + \cos\varphi$;

3) $\rho = 1 + \cos\varphi$;

4) $\rho = 1 + 2\cos\varphi$;

5) $\rho = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$; ***6)*** $\rho = \sin 2\varphi$ (дволисник);

7) $\rho = \cos 4\varphi$ (чотирилисник).

✍***4. [15]*** *Побудувати графіки функцій* $y(x)$, *заданих неявно (параметр a додатне число):*

1) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4a^2x^2y^2$; ***2)*** $x\left(x^2 + y^2\right) = a^2y$;

3) $x^4 + y^4 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$; ***4)*** $x^y = y^x,\ x,\ y > 0$;

5) $x^2y^2 = x^3 - y^3$; ***6)*** $x^3 + y^3 = 3axy$;

7) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy$; ***8)*** $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4a^2xy\left(x^2 - y^2\right)$;

9) $a\left(x^3 + y^3\right) = x^2 + y^2$; ***10)*** $\left(x + y\right)^3 = a\left(x - y\right)$;

11) $x^4 + y^4 = 2xy$; ***12)*** $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2\left(x^4 + y^4\right)$.

§ 16. Тестові завдання

Модуль 1
Тест № 1.1
на тему: «Похідна функції однієї змінної»

1. *Приростом функції $f(x)$ в точці x_0 називають:*

А. $\Delta f(x_0) = f(x_0) - f(x)$	В. $\Delta x = x - x_0$
Б. $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$	Г. $\Delta x = x_0 - x$

2. *Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають:*

А. $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right)$	**В.** $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Б. $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$	Г. $f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

3. *Рівняння дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$ має вигляд:*

А. $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	В. $y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$
Б. $y = kx + b$	Г. $y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$

4. *Якщо функція $y = f(x)$ визначена в околі точки x_0 і при $\Delta x \to 0$ відношення $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ має нескінченну границю, то кажуть, що …*

А. функція $f(x)$ в точці x_0 має лише ліву похідну	В. функція $f(x)$ в точці x_0 не має похідної
Б. функція $f(x)$ в точці має лише праву похідну	**Г.** функція $f(x)$ в точці x_0 має нескінченну похідну

5. *Знайти значення похідної функції* $y = \ln(2x-3)$ *в точці* $x_0 = 1$.

А. -2	В. 2
Б. -1	Г. 5

6. *В яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи* $y = x^3$ *дорівнює 3?*

А. $(1;1), (1;-1)$	В. $(1;-1), (-1;1)$
Б. $(1;1), (-1;-1)$	Г. $(-1;-1), (1;-1)$

7. *Знайти значення похідної функції, заданої параметрично* $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ *в точці* $t_0 = 0$.

А. $\frac{2}{9}$	**В.** $\frac{9}{2}$
Б. $\frac{3}{9}$	Г. $\frac{3}{2}$

8. *Тіло масою* $m = 1{,}5$ *рухається прямолінійно за законом* $s(t) = t^2 + t + 1$. *Знайти кінетичну енергію тіла* $\left(W = \frac{mv^2}{2}\right)$ *через 5 с після початку руху (маса* m *задана в кілограмах, шлях* s *– в метрах).*

А. 8,25 Дж	**В.** 90,75 Дж
Б. 18,75 Дж	Г. 720,75 Дж

9. *Знайти значення похідної функції* $y = (2^x + x^2)^2$ *в точці* $x_0 = 0$.

А. 0	В. 2
Б. $\ln 2$	**Г.** $2\ln 2$

10. *Записати рівняння нормалі до кривої* $y = 2x^3 - 3x$ *в точці* $x_0 = 1$.

А. $y = -\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$	В. $y = -\frac{1}{3}x - 4$
Б. $y = 3x - 4$	Г. $y = -3x - 4$

11. *Знайти похідну функції, заданої неявно рівнянням* $y^5 + y^3 + y - x = 0$ *в точці* $x_0 = 1$.

А. $\frac{1}{9}$	В. 7
Б. 0	Г. 9

12. *Обчислити наближено* $\sqrt[4]{17}$.

А. 2	В. 1,96875
Б. 2,03125	Г. 2,00013

Модуль 1
Тест № 1.2
на тему: «Похідна функції однієї змінної»

1. *Фізичний зміст похідної функції* $f(x)$ *в точці* x_0 *полягає в тому, що:*

А. $S = f'(x_0)$	**В.** $V = f'(x_0)$
Б. $S = f(x_0)$	Г. $V = f''(x_0)$

2. *Якщо* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *дорівнює* ∞, *або* $+\infty$, *або* $-\infty$, *то кажуть, що функція* $f(x)$ *в точці* x_0 *має:*

А. скінченну похідну	**В.** нескінченну похідну
Б. праву похідну	Г. ліву похідну

3. *Приростом шляху* ΔS *за час* Δt *називають:*

А. $\Delta S = qt + \frac{1}{2}q\Delta t$	В. $\Delta S = (S - S_0)\Delta t$
Б. $\Delta S = qt\Delta t + \frac{1}{2}q\Delta t^2$	Г. $\Delta S = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

4. *Похідною функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 *називають:*

А. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0))$	**В.** $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Б. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$	Г. $f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

5. *Знайти значення похідної функції* $y = (x^2 - x)\cos x$ *в точці* $x_0 = 0$.

А. 2	В. 0
Б. 1	Г. -1

6. *В якій точці дотична до параболи* $y = x^2$ *паралельна осі Ох?*

А. $(0;1)$	**В.** $(0;0)$
Б. в будь-якій точці	Г. $(1;0)$

7. *Знайти значення похідної функції* $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ *в точці* $t_0 = 1$.

А. -1	В. $\frac{3}{4}$
Б. $\frac{1}{2}$	Г. 1

8. *Кут* θ *на який обертається колесо через* t *с, дорівнює* $\theta = at^2 - bt + c$, *де a, b, c – додатні сталі. В який момент часу кутова швидкість буде рівна нулю?*

А. $2at-b$	В. $2at$
Б. $\frac{a-b}{2}$	**Г.** $\frac{b}{2a}$

9. *Знайти значення похідної функції* $y=\sqrt{5x^2-2x}$ *в точці* $x_0=2$.

А. $\frac{1}{6\sqrt{2}}$	В. 4,5
Б. 2,25	Г. 18

10. *Записати рівняння нормалі до кривої* $y=3tg2x+1$ *в точці* $x_0=\frac{\pi}{2}$.

А. $y=6x-3\pi+1$	В. $y=\frac{1}{6}x-\frac{\pi}{12}+1$
Б. $y=-\frac{1}{6}x+\frac{\pi}{12}+1$	Г. $y=-\frac{1}{6}-3\pi+1$

11. *Знайти похідну функції заданої неявно рівнянням* $x-y=\arcsin x-\arcsin y$, *в точці* $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

А. 1	В. $\frac{1}{2}$
Б. $\frac{1}{4}$	Г. 0

12. *Обчислити наближено* $arctg0{,}98$.

А. 0,785	**В.** 0,77
Б. 0,5	Г. 1

Модуль 1
Тест № 2.1
на тему: «Похідна функції однієї змінної»

1. *Диференціалом функції* $f(x)$ *в точці* x *називається:*

А. $df(x)=dx$	В. $df(x)=df'(x)x$
Б. $df(x)=f'(x)\Delta x$	Г. $df(x)=df'(x)$

2. *Якщо функції* $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ *мають похідні до другого порядку включно* $\varphi'_{tt}(t_0), \psi'_{tt}(t_0)$ *в точці* t_0, *то параметрично задана функція* $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ *також має похідну другого порядку включно в точці* $x_0=\varphi(t_0)$ *і має місце рівність:*

А. $y_{xx}''(x_0)=\dfrac{\psi_{tt}''(t_0)\cdot\varphi_t'(t_0)-\psi_t'(t_0)\cdot\varphi_{tt}''(t_0)}{\varphi_t'^2(t_0)}$
Б. $y_{xx}''(x_0)=\psi_{tt}''(t_0)\cdot\varphi_{tt}''(t_0)$
В. $y_{xx}''(x_0)=\dfrac{\psi_{tt}''(t_0)\cdot\varphi_t'(t_0)-\psi_t'(t_0)\cdot\varphi_{tt}''(t_0)}{\varphi_t'^3(t_0)}$
Г. $y_{xx}''(x_0)=\psi_{tt}''(t_0)\cdot\varphi_t'(t_0)+\psi_t'(t_0)\cdot\varphi_{tt}''(t_0)$

3. *Якщо функція* $f(x)$ *визначена в деякому околі точки* x_0 *і приймає в цій точці найбільше або найменше значення, тоді похідна в точці* x_0 ...

А. одностороння	В. не існує
Б. існує	**Г.** дорівнює нулю

4. *Для розкриття невизначеності* 1^{∞} *використовуємо формулу:*

А. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)\cdot f(x)}}$
Б. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} e^{g(x)}\cdot\ln f(x)=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$

В. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, $g'(x)\neq 0$
Г. $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

5. *Для функції* $y=\sin 2x$ *і аргументу* $x_0=\pi$ *обчислити* $y'''(x_0)$.

А. -8	В. 2
Б. 0	Г. 8

6. *Записати формулу похідної* n*-го порядку для функції* $y=2^x$.

А. $x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)\cdot 2^{x-n}$	**В.** $2^x\ln^n 2$
Б. $2^x\ln 2$	Г. $(x-n)!\cdot 2^{x-n}$

7. *Знайти* y'' *для функції заданої параметрично* $\begin{cases}x=3t^4-t^2,\\ y=t^3-5.\end{cases}$

А. $-\frac{6t^2+1}{6t^2-1}$	**В.** $-\frac{3}{4}\frac{6t^2+1}{6t^2-1}$
Б. $-\frac{3}{4}\frac{6t^2-1}{6t^2+1}$	Г. $-\frac{3}{4}\frac{6t^2+1}{6t^2-1}$

8. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{tg^2 2x}$ *використовуючи правило Лопіталя.*

А. $-\frac{1}{8}$	**В.** $\frac{1}{8}$
Б. 0	Г. 1

9. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-x\right)^{\frac{1}{x}}$ *використовуючи правило Лопіталя.*

А. -1	В. $\frac{1}{2}$
Б. 0	**Г.** 1

10. *За допомогою формули тейлора наближено обчислити* $\sin 18^0$.

А. 0,309017	В. 0,4
Б. 0,399999	Г. 0,5

11. *Записати формулу Лагранжа для функції* $y = \sin 3x$ *на відрізку* $[x_1, x_2]$.

А. $\dfrac{(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$	В. $\dfrac{(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)}}$
Б. $\dfrac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$	Г. $\dfrac{a\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$

12. *Яке з співвідношень задовольняється функцією* $y = e^{4x} + 2e^{-x}$.

А. $y''' - 3y' - 12y = 0$	В. $y''' - 3y' - 2y = 0$
Б. $y''' - 13y' - 2y = 0$	**Г.** $y''' - 13y' - 12y = 0$

Модуль 1
Тест № 2.2
на тему: «Похідна функції однієї змінної»

1. *Диференціалом функції* $f(x)$ *в точці* x *називається:*

А. $df(x) = dx$	В. $df(x) = df'(x)x$
Б. $df(x) = f'(x)\Delta x$	Г. $df(x) = df'(x)$

2. *Нехай функція* $y = y(x)$ *має другу похідну в точці* x_0 *і функція* $z = z(y)$ *має другу похідну* z''_{yy} *в точці* $y_0 = y(x_0)$, *тоді складена функція* $z(x) = z(y(x))$ *також має другу похідну в точці* x_0, *причому має місце рівність:*

А. $z''_{xx} = z''_{yy} \cdot y''_{xx}$	В. $z''_{xx} = z''_{yy} \cdot y'_{x} + z'_{y} \cdot y''_{xx}$
Б. $z''_{xx} = z''_{yy}\left(y'_{x}\right)^{2} + z'_{y} \cdot y''_{xx}$	Г. $z''_{xx} = z''_{yy}\left(y'_{x}\right)^{2}$

3. *Для того, щоб диференційовна на проміжку функція $f(x)$ була сталою, необхідно і достатньо, щоб похідна…*

А. була одностороння	В. не існувала
Б. дорівнювала нулю	Г. існувала

4. *Для розкриття невизначеності $\infty - \infty$ використовуємо формулу:*

А. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)\cdot f(x)}}$
Б. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)} \cdot \ln f(x) = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)}$
В. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)},\ g'(x) \neq 0$
Г. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$

5. *Для функції $y = \sin^2 x$ і аргументу $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ обчислити $y'''(x_0)$.*

А. -2	В. 1
Б. 0	Г. 3

6. *Записати формулу похідної n-го порядку для функції $y = \ln(3 + x)$.*

А. $(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(3+x)^n}$	В. $(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(3+x)^n}$
Б. $\dfrac{n-1}{(3+x)^n}$	**Г.** $-\dfrac{n-1}{(3+x)^{n!}}$

7. *Знайти* y'' *для функції заданої параметрично* $\begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2, \end{cases}$ *при* $t_0 = 0$.

А. -1	В. $-\frac{2}{3}$
Б. $-\frac{3}{8}$	Г. $\frac{3}{8}$

8. *Знайти границю* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt[3]{3x-1}}$, *використовуючи правило Лопіталя.*

А. $-\frac{1}{8}$	В. $\frac{1}{8}$
Б. 0	Г. 1

9. *Знайти границю* $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$, *використовуючи правило Лопіталя.*

А. -1	**В.** $\frac{1}{2}$
Б. 0	Г. 1

10. *За допомогою формули Тейлора наближено обчислити* $arctg\,0{,}8$.

А. 38,6594	В. 45
Б. 39,00909	Г. 43,9199

11. *Записати формулу Лагранжа для функції* $y = arc\sin 2x$ *на відрізку* $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

А. $a^n e^a$	**В.** $a^n e^{ax}$
Б. $a^{n+1} e^{ax}$	Г. ae^{ax}

12. *Яке з співвідношень задовольняється функцією* $y = \cos e^x + \sin e^x$.

А. $y'' + y' + ye^{2x} = 0$	В. $y'' - y' - ye^{2x} = 0$
Б. $y'' - y' + ye^{2x} = 0$	Г. $y'' - y' - ye^{2x} = 0$

Модуль 2
Тест № 3.1
на тему: «Похідна функції однієї змінної»

1. *Для того, щоб диференційовна на інтервалі (a,b) функція $f(x)$ була неспадною на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб у всіх його точках похідна була …*

А. невід'ємною	В. від'ємною
Б. недодатною	Г. додатною

2. *Якщо x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$, визначеної в деякому околі $O(x_0)$, тоді похідна в цій точці …*

А. не існує	**В.** рівна нулю
Б. додатна.	Г. недодатна

3. *Функція $f(x)$ називається опуклою вгору на інтервалі $(a;b)$, якщо $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ і $\forall \alpha \in (0;1)$ справедлива буде формула:*

А. $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
Б. $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
В. $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge f(x_1) + f(x_2)$
Г. $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le f(x_1) + f(x_2)$

4. *Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Тоді, якщо $f''(x) < 0$ на $(a;b)$, то функція $f(x)$ …*

А. спадна	В. зростаюча
Б. строго вгнута	**Г.** строго опукла

5. *Точка x_0 називається точкою перегину, якщо…*

А. $f''(x_0) = 0$	В. $f''(x_0) < 0$
Б. $f''(x_0)$ не існує	Г. $f''(x_0) > 0$

6. *Знайти інтервали вгнутості функції $y = (x+2)^6 + 2x + 2$.*

А. $(-\infty;+\infty)$	В. $(-2;+\infty)$
Б. $(-\infty;-2)$	Г. графік опуклий

7. *Знайти проміжки зростання функції* $y = x + \cos x$.

А. $\left(-\infty;\dfrac{3\pi}{2}\right)$	В. $\left(\dfrac{3\pi}{2};+\infty\right)$
Б. монотонно спадає;	**Г.** монотонно спадає

8. *Знайти максимальне значення функції* $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

А. $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$	В. $\dfrac{4}{3}$
Б. 0	Г. 2

9. *Знайти проміжки вгнутості функції* $y = x^4(12\ln x - 7)$.

А. $(1;+\infty)$	В. $(0;1)$
Б. $(-\infty;1)$	Г. $(0;+\infty)$

10. *Знайти найбільше значення функції* $y = x^4 - 2x^2 + 5$ *на відрізку* $[-2;2]$.

А. 1	**В.** 13
Б. 4	Г. 15

11. *Знайти висоту прямого круглого конуса найменшого об'єму, описаного навколо кулі радіуса* R.

А. $2R$	**В.** $4R$
Б. $\dfrac{2}{3}R$	Г. $\dfrac{3}{4}R$

12. *Знайти асимптоти лінії* $y^3 = a^3 - x^3$.

А. $x = 0$	В. $y = x$
Б. $y = -x$	Г. $y = 0$

Модуль 2
Тест № 3.2
на тему: «Похідна функції однієї змінної»

1. *Для того, щоб диференційовна на інтервалі (a,b) функція $f(x)$ була незростаючою на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб у всіх його точках похідна була ...*

А. невід'ємною	В. від'ємною
Б. недодатною	Г. додатною

2. *Точка x_0 називається стаціонарною точкою функції $f(x)$, якщо похідна в цій точці ...*

А. не існує	**В.** рівна нулю
Б. додатна	Г. недодатна

3. *Функція $f(x)$ називається опуклою вниз на інтервалі (a,b), якщо $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ і $\forall \alpha \in (0;1)$ справедлива буде формула:*

А. $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
Б. $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
В. $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge f(x_1) + f(x_2)$
Г. $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le f(x_1) + f(x_2)$

4. *Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі (a,b). Тоді, якщо $f''(x) < 0$ на (a,b), то функція $f(x)$ ...*

А. спадна	В. зростаюча
Б. строго вгнута	Г. строго опукла

5. *Нехай функція $f(x)$ визначена $\forall x > a (x < a)$. Пряма $y = kx + l$ називається похилою асимптотою графіка функції $f(x)$ при $x \to +\infty (x \to -\infty)$, якщо існують числа k і l, такі що...*

А. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx) = 0$	**В.** $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - (kx + l)) = 0$
Б. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (kx + l) = 0$	Г. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (l + \alpha((x)) = 0$

6. *Знайти інтервали вгнутості функції* $y=\ln(1+x^2)$.

А. $(1;+\infty)$	**В.** $(-1;1)$
Б. $(-\infty;-1)$	Г. $(-1;+\infty)$

7. *Знайти проміжки спадання функції* $y=x-e^x$.

А. $(0;+\infty)$	В. $(-\infty;+\infty)$
Б. $(-\infty;0)$	Г. $(1;e)$

8. *Знайти максимальне значення функції* $y=(x^2-2x)\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+4x.$

А. 1	В. e
Б. 2,5	Г. $-\dfrac{1}{2}e^2+2e$

9. *Знайти інтервали опуклості функції* $y=\dfrac{a}{x}\ln\dfrac{x}{a}$, $(a>0)$.

А. $\left(0;\,ae^{\frac{3}{2}}\right)$	В. $\left(ae^{\frac{3}{2}};+\infty\right)$
Б. $(0;+\infty)$	Г. $(-\infty;0)$

10. *Знайти найбільше значення функції* $y=x^3-3x^2+6x-2$ *на відрізку* $[-1;1]$.

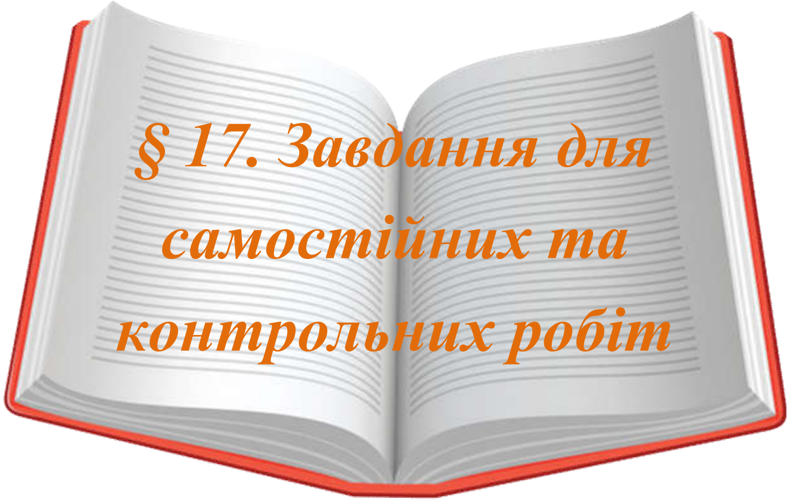
А. -12	**В.** 2
Б. 0	Г. 5

11. *Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса* R.

А. $2R$	В. $4R$
Б. $\dfrac{2}{3}R$	**Г.** $\dfrac{3}{4}R$

12. *Знайти асимптоти лінії* $y^3=6x^2+x^3$.

А. $x=0$	**В.** $y=x+2$
Б. $y=-x+2$	Г. $y=0$



§ 17. Завдання для самостійних та контрольних робіт

Самостійна робота № 1
на тему: «Похідна функції однієї змінної»

✍***Завдання № 1.*** *Знайти похідну функції однієї змінної:*

1) $y=\sin\sqrt{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$;

2) $y=\operatorname{tg}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$;

3) $y=\frac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$;

4) $y=\frac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$;

5) $y=\operatorname{ctg}\cos 2+\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$;

6) $y=8\sin\operatorname{ctg} 3+\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$;

7) $y=\frac{\cos\operatorname{tg}\frac{1}{3}\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$;

8) $y=\frac{\operatorname{tg}\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$;

9) $y=\sqrt[7]{\operatorname{tg}\cos 2}+\frac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$;

10) $y=\cos^2\sin 3+\frac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$;

11) $y=\operatorname{tg}\sqrt{\cos\frac{1}{3}}+\frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}$;

12) $y=\frac{\cos\operatorname{ctg} 3\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$;

13) $y=\sin\ln\frac{1}{2}+\frac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$;

14) $y=\ln\sin\frac{1}{3}-\frac{1}{24}\frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$;

15) $y=\frac{\sqrt[5]{ctg 2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$;

16) $y=\operatorname{ctg}\cos 5-\frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{40\sin 40x}$;

17) $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\frac{1}{52}\frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$; ***18)*** $y=\sin\sqrt{tg2}-\frac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$;

19) $y=\cos\ln 2-\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos^2 3x}{\sin 3x}$; ***20)*** $y=\mathrm{ctg}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$;

21) $y=\frac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$; ***22)*** $y=\cos\mathrm{ctg}\,2-\frac{1}{16}\cdot\frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$;

23) $y=\mathrm{tg}\sin 3+\frac{1}{6}\cdot\frac{\cos^2 6x}{\sin 12x}$; ***24)*** $y=\mathrm{tg}\lg 16+\frac{1}{9}\mathrm{tg}^4 2x-\mathrm{ctg}\,3x$;

25) $y=\frac{\mathrm{ctg}\sin\frac{1}{3}\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$; ***26)*** $y=\sqrt{\mathrm{tg}\,4}+\frac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$;

27) $y=\ln\cos\frac{1}{3}+\frac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$; ***28)*** $y=\cos\ln 13-\frac{1}{44}\frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$;

29) $y=\mathrm{ctg}\sin\frac{1}{13}-\frac{1}{48}\frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$; ***30)*** $y=\sin^3\cos 3-\frac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$.

✍***Завдання № 2.*** *Знайти похідну функції однієї змінної:*

1. ***1)*** $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\frac{4}{(x-2)^5}$; ***2)*** $y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$; ***3)*** $y=\mathrm{arcctg}^2 5x\cdot\ln(x-4)$; ***4)*** $y=\mathrm{tg}^4 3x\cdot\arcsin 2x^3$; ***5)*** $y=\frac{e^{\arccos^4 x}}{\sqrt{x+5}}$; ***6)*** $y=\frac{\log_5(3x-7)}{\mathrm{ctg}\,7x^3}$; ***7)*** $y=\frac{9\,\mathrm{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$; ***8)*** $y=\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}\log_2\left(x-3x^2\right)$.
2. ***1)*** $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\frac{3}{2x^3-3x+1}$; ***2)*** $y=\cos^5 3x\cdot tg(4x+1)^3$; ***3)*** $y=\mathrm{arctg}^3 2x\cdot\ln(x+5)$; ***4)*** $y=(x-2)^4\arcsin 5x^4$; ***5)*** $y=\frac{(x-4)^2}{e^{\mathrm{arctg}\,x}}$; ***6)*** $y=\frac{\ln(5x-3)}{4\,\mathrm{tg}\,3x^4}$;

7) $y=\dfrac{8\,\text{arctg}(2x+3)}{(x+1)^2}$; *8)* $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x-5}{2x+3}}\lg(4x+7)$.
3. *1)* $y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$; *2)* $y=\text{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$;   *3)* $y=\arccos^4 x\cdot\ln(x^2+x-1)$; *4)* $y=2^{-x^3}\,\text{arctg}\,7x^4$;   *5)* $y=\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$; *6)* $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{5\cos 4x}$;   *7)* $y=\dfrac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$; *8)* $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}}\ln(5x^2-2x+1)$.
4. *1)* $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$; *2)* $y=\arcsin^3 2x\cdot\text{ctg}\,7x^4$;   *3)* $y=\sqrt{\arccos 2x}\cdot 3^{-x}$; *4)* $y=(x+6)^5\,\text{arcctg}\,3x^5$;   *5)* $y=\dfrac{e^{-\text{ctg}\,5x}}{3x^2-4x+2}$; *6)* $y=\dfrac{\text{tg}^3 2x}{\text{tg}(5x+1)}$;   *7)* $y=\dfrac{6\arcsin(x+5)}{(x-2)^5}$; *8)* $y=\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}\log_3(x^2+x+4)$.
5. *1)* $y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$; *2)* $y=\text{ctg}\,3x\cdot\arccos 3x^2$;   *3)* $y=\text{tg}^4 3x\cdot\text{arctg}\,7x^2$; *4)* $y=3^{\cos x}\ln(x^2-3x+7)$;   *5)* $y=\dfrac{\sqrt{7x^{3-5x+2}}}{e^{\cos x}}$; *6)* $y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$;   *7)* $y=\dfrac{3\,\text{arcctg}(2x-5)}{(x+1)^4}$; *8)* $y=\sqrt[6]{\dfrac{7x-4}{7x+4}}\log_5(3x^2+2x)$.
6. *1)* $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$; *2)* $y=\arccos^2 4x\cdot\ln(x-3)$;

3) $y=5^{-x^2}\arcsin 3x^3$;	***4)*** $y=\log_2(x-7)\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;
5) $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$;	***6)*** $y=\dfrac{\cos^2 3x}{\lg(3x-4)}$;
7) $y=\dfrac{2\operatorname{arctg}(3x+2)}{(x-3)^2}$;	***8)*** $y=\sqrt[7]{\dfrac{2x-3}{2x+1}}\lg(7x-10)$.
7. ***1)*** $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$;	***2)*** $y=\ln^5 x\cdot\operatorname{arctg}7x^4$;
3) $y=\operatorname{arctg}^5 x\cdot\log_2(x-3)$;	***4)*** $y=\arccos^3 5x\cdot\operatorname{tg}x^4$;
5) $y=\dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$;	***6)*** $y=\dfrac{\log_3(4x+5)}{2\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$;
7) $y=\dfrac{4\arccos 3x}{(x+2)^5}$;	***8)*** $y=\sqrt[8]{\dfrac{5x+1}{5x-1}}\ln(3x-x^2)$.
8. ***1)*** $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{3}{2x^2-3x+7}$;	***2)*** $y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$;
3) $y=\log_3(x+5)\cdot\arccos 3x$;	***4)*** $y=(x-5)^7\operatorname{arcctg}3x^5$;
5) $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$;	***6)*** $y=\dfrac{\ln(7x-3)}{3\operatorname{tg}^2 4x}$;
7) $y=\dfrac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$;	***8)*** $y=\sqrt[9]{\dfrac{x+3}{x-3}}\log_5(2x-3)$.
9. ***1)*** $y=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$;	***2)*** $y=2^{\cos x}\cdot\operatorname{arcctg}5x^3$;
3) $y=e^{-x}\cdot\arcsin^2 5x$;	***4)*** $y=\arccos x^2\cdot\operatorname{ctg}7x^3$;
5) $y=\dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^2}}$;	***6)*** $y=\dfrac{\lg(11x+3)}{\cos^2 5x}$;
7) $y=\dfrac{7\operatorname{arctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$;	***8)*** $y=\sqrt{\dfrac{6x+5}{6x-5}}\lg(4x+7)$.

10. *1)* $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$;	*2)* $y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$;
3) $y=\log_4(x-1)\cdot\arcsin^4 x$;	*4)* $y=5^{-x^2}\arccos 5x^4$;
5) $y=\dfrac{e^{\operatorname{ctg}5x}}{(x+4)^3}$;	*6)* $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$;
7) $y=\dfrac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$;	*8)* $y=\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{4x+1}}\ln\left(2x^3-3\right)$.
11. *1)* $y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$;	*2)* $y=3^{\operatorname{tg}x}\cdot\arcsin 7x^4$;
3) $y=(x-4)^5\cdot\operatorname{arcctg}3x^2$;	*4)* $y=\operatorname{arctg}^4 x\cdot\cos 7x^4$;
5) $y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$;	*6)* $y=\dfrac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{\lg(x+3)}$;
7) $y=\dfrac{2\lg(4x+5)}{(x+6)^4}$;	*8)* $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+6}{x-6}}\sin\left(3x^2+1\right)$.
12. *1)* $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\dfrac{4}{(x-4)^4}$;	*2)* $y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$;
3) $y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\operatorname{arctg}2x^3$;	*4)* $y=4(x-7)^6\arcsin 3x^5$;
5) $y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$;	*6)* $y=\dfrac{\sin^3(5x+1)}{\lg(3x-2)}$;
7) $y=\dfrac{5\ln(5x+7)}{(x-7)^2}$;	*8)* $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-7}{x+7}}\cos\left(2x^3+x\right)$.
13. *1)* $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\dfrac{8}{(x-5)^2}$;	*2)* $y=\sin^4 3x\cdot\operatorname{arctg}2x^3$;
3) $y=e^{-\cos x}\operatorname{arctg}7x^5$;	*4)* $y=(x+5)^2\arccos^3 2x$;

5) $y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$;	***6)*** $y=\dfrac{\cos^4(7x-1)}{\lg(x+5)}$;
7) $y=\dfrac{4\log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$;	***8)*** $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-9}{x+9}}\,\mathrm{tg}\left(3x^2-4x+1\right)$.
14. ***1)*** $y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$;	***2)*** $y=\cos^3 4x\cdot\mathrm{arcctg}\sqrt{x}$;
3) $y=(x+1)\arccos 3x^4$;	***4)*** $y=2^{-\sin x}\arcsin^3 2x$;
5) $y=\dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$;	***6)*** $y=\dfrac{\sin^3(4x+3)}{\ln(7x+1)}$;
7) $y=\dfrac{7\log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$;	***8)*** $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-4}{x+4}}\,\mathrm{ctg}(2x+5)$.
15. ***1)*** $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$;	***2)*** $y=\mathrm{tg}^3 2x\cdot\arcsin x^5$;
3) $y=2^{\sin x}\,\mathrm{arcctg}\,x^4$;	***4)*** $y=(x+2)^7\arccos\sqrt{x}$;
5) $y=\dfrac{(2x+5)^3}{e^{\mathrm{tg}\,x}}$;	***6)*** $y=\dfrac{\mathrm{ctg}^3(2x-3)}{\log_3(x+2)}$;
7) $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$;	***8)*** $y=\sqrt[8]{\dfrac{x-2}{x+2}}\,\sin\left(4x^2-7x+2\right)$.
16. ***1)*** $y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$;	***2)*** $y=\mathrm{ctg}^7 x\cdot\arccos 2x^3$;
3) $y=3^{-x^3}\,\mathrm{arctg}\,2x^5$;	***4)*** $y=(x-7)^5\arcsin 7x^4$;
5) $y=\dfrac{e^{-\mathrm{tg}\,3x}}{4x^2-3x+5}$;	***6)*** $y=\dfrac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$;
7) $y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x+1)^7}$;	***8)*** $y=\sqrt[9]{\dfrac{x-3}{x+3}}\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

17. *1)* $y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$;	*2)* $y=e^{-\sin x}\cdot \operatorname{tg}7x^6$;
3) $y=3^{\cos x}\arcsin^2 3x$;	*4)* $y=\ln(x-3)\cdot\arccos 3x^4$;
5) $y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$;	*6)* $y=\dfrac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$;
7) $y=\dfrac{5\log_2\left(x^2+1\right)}{(x-3)^4}$;	*8)* $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{3x+2}}\operatorname{tg}\left(2x^2-9\right)$.
18. *1)* $y=\dfrac{2}{(x-1)^3}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$;	*2)* $y=e^{\cos x}\cdot\operatorname{ctg}8x^3$;
3) $y=\ln(x-10)\cdot\arccos^2 4x$;	*4)* $y=\log_2(x-4)\cdot\operatorname{arctg}^3 4x$;
5) $y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$;	*6)* $y=\dfrac{\log_2(7x-5)}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$;
7) $y=\dfrac{6\log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$;	*8)* $y=\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-3}}\operatorname{ctg}\left(3x^2+5\right)$.
19. *1)* $y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\dfrac{3}{(x-3)^4}$;	*2)* $y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$;
3) $y=\lg(x-2)\cdot\arcsin^5 x$;	*4)* $y=(x-7)^4\operatorname{arcctg}^2 7x$;
5) $y=\dfrac{e^{-x}}{\left(2x^2-x+4\right)^2}$;	*6)* $y=\dfrac{\log_3(4x-2)}{\operatorname{ctg}2x}$;
7) $y=\dfrac{3\log_2(5x-4)}{(x-3)^5}$;	*8)* $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+5}{x-5}}\sin\left(3x^2-x+4\right)$.
20. *1)* $y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\dfrac{5}{(x+1)^3}$;	*2)* $y=\sin^3 7x\cdot\operatorname{arcctg}5x^2$;
3) $y=\log_3(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^5 7x$;	*4)* $y=\sqrt[3]{x-3}\arccos^4 2x$;

5) $y=\dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$; *6)* $y=\dfrac{\ln^3(x-5)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$;

7) $y=\dfrac{7\log_5(x^2+x)}{(x+3)^2}$; *8)* $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-6}{x+6}}\cos(7x+2)$.

21. *1)* $y=\sqrt[4]{5x^2-4x+1}-\dfrac{7}{(x-5)^2}$; *2)* $y=\sin^2 3x\cdot\mathrm{arcctg}\,3x^5$;

3) $y=\ln(x+9)\cdot\mathrm{arcctg}^3\,2x$; *4)* $y=\sqrt[3]{x-4}\arcsin^4 5x$;

5) $y=\dfrac{e^{\mathrm{ctg}\,5x}}{(3x-5)^4}$; *6)* $y=\dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$;

7) $y=\dfrac{\log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$; *8)* $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-7}{x+7}}\arcsin(2x+3)$.

22. *1)* $y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\dfrac{4}{(x-7)^5}$; *2)* $y=\cos\sqrt[5]{x}\cdot\mathrm{arctg}\,x^4$,

3) $y=\lg(x+2)\cdot\arcsin^2 3x$; *4)* $y=(x-3)^2\arccos 3x^6$;

5) $y=\dfrac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}$; *6)* $y=\dfrac{\mathrm{tg}^3\,7x}{\ln(3x+2)}$;

7) $y=\dfrac{2\ln(3x-10)}{(x+5)^7}$; *8)* $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-8}{x+8}}\arccos(3x-5)$.

23. *1)* $y=\sqrt{(x-3)^7}+\dfrac{9}{7x^2-5x-8}$; *2)* $y=\mathrm{tg}^6\,2x\cdot\cos 7x^2$;

3) $y=4^{-\sin x}\,\mathrm{arctg}\,3x$; *4)* $y=\sqrt{(x+3)^5\arcsin 2x^3}$;

5) $y=\dfrac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$; *6)* $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$;

7) $y=\dfrac{8\lg(4x+5)}{(x-1)^5}$; *8)* $y=\sqrt[8]{\dfrac{x-4}{x+4}}\,\mathrm{arctg}(5x+1)$.

24. *1)* $y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\dfrac{2}{1+3x-4x^2}$; *2)* $y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\arcsin\sqrt{x}$;

3) $y=2^{\cos x}\operatorname{arcctg}^3 x$; *4)* $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}\arccos 3x$;

5) $y=\dfrac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$; *6)* $y=\dfrac{\operatorname{tg}(3x+7)}{\ln^2(x+3)}$;

7) $y=\dfrac{2\log_3(4x-7)}{(x+3)^4}$; *8)* $y=\sqrt[9]{\dfrac{x-1}{x+1}}\operatorname{arcctg}(7x+2)$.

25. *1)* $y=\dfrac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$; *2)* $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}\cdot\arccos x^4$;

3) $y=\lg(x-3)\cdot\arcsin^2 5x$; *4)* $y=\operatorname{tg}^3 x\cdot\operatorname{arcctg}3x$;

5) $y=\dfrac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$; *6)* $y=\dfrac{\cos^2 x}{\lg(x^2-2x+1)}$;

7) $y=\dfrac{3\log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$; *8)* $y=\sqrt{\dfrac{7x+4}{7x-4}}\arcsin(x^2+1)$.

26. *1)* $y=\dfrac{3}{x-4}+\sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}$; *2)* $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\operatorname{arcctg}3x^5$;

3) $y=\log_2(x+3)\cdot\arccos^2 x$; *4)* $y=\sqrt{(x-2)^3}\operatorname{arctg}(7x-1)$;

5) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$; *6)* $y=\dfrac{\log_2(3x+7)}{\operatorname{tg}3x}$;

7) $y=\dfrac{\lg(x^2+2x)}{(x+8)^4}$; *8)*

$y=\sqrt[3]{\dfrac{8x-3}{8x+3}}\arccos(x^2-5)$.

27. *1)* $y=\dfrac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$; *2)* $y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arccos 2x^3$;

3) $y=2^{-x}\operatorname{arctg}^3 4x$; *4)* $y=\sqrt[5]{(x+4)^2}\arcsin 7x^2$;

5) $y=\dfrac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$; ***6)*** $y=\dfrac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x-3)}$; ***7)*** $y=\dfrac{3\ln(x^2+5)}{(x-7)^3}$; ***8)*** $y=\sqrt[4]{\dfrac{2x-5}{2x+5}}\operatorname{arctg}(3x+2)$.
28. ***1)*** $y=\sqrt{(x-4)^7}-\dfrac{10}{(3x^2-5x+1)}$; ***2)*** $y=2^{\operatorname{tg} x}\cdot\operatorname{arctg}^5 3x$; ***3)*** $y=\ln(x-4)\cdot\operatorname{arcctg}^4 3x$; ***4)*** $y=\arcsin^3 4x\cdot\operatorname{ctg}3x$; ***5)*** $y=\dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$; ***6)*** $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 5x}{\ln(x+7)}$; ***7)*** $y=\dfrac{4\log_2(3x-5)}{(x-2)^2}$; ***8)*** $y=\sqrt[5]{\dfrac{3x-4}{3x+4}}\operatorname{arcctg}(2x+5)$.
29. ***1)*** $y=\dfrac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$; ***2)*** $y=\sin^5 3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; ***3)*** $y=\lg(x+3)\cdot\operatorname{arcctg}^2 5x$; ***4)*** $y=e^{-\cos x}\arcsin 2x$; ***5)*** $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-7}}{e^{-x^4}}$; ***6)*** $y=\dfrac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$; ***7)*** $y=\dfrac{2\ln(2x^2+3)}{(x-7)^4}$; ***8)*** $y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}\arcsin 2x$.
30. ***1)*** $y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\dfrac{5}{2x^2-4x+7}$; ***2)*** $y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2$; ***3)*** $y=\log_5(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^2 x^3$; ***4)*** $y=\sqrt{(x+5)^3}\arccos^4 x$; ***5)*** $y=\dfrac{e^{-\operatorname{tg} x}}{4x^2+7x-5}$; ***6)*** $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 2x}{\lg(x^2-x+4)}$; ***7)*** $y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x-5)^3}$; ***8)*** $y=\sqrt[7]{\dfrac{x^2+3}{x^2-3}}\arccos 4x$.

✍***Завдання № 3.*** *Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці* x_0*:*

1) $y = x^3,\ x_0 = -1;$

2) $y = 2 - 4x - 3x^2,\ x_0 = -2;$

3) $y = 2\cos\frac{x}{2},\ x_0 = \frac{3\pi}{2};$

4) $y = 2x^3 - 3x,\ x_0 = 1;$

5) $y = \frac{3x-4}{\sqrt[3]{x}+4},\ x_0 = 1;$

6) $y = \cos(1-3x),\ x_0 = \frac{1}{3};$

7) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ x_0 = -\frac{\pi}{2};$

8) $y = 0{,}5x^2 - 0{,}5x + 1,\ x_0 = 8;$

9) $y = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3,\ x_0 = -3;$

10) $y = -0{,}5x^2 + 2x,\ x_0 = -2;$

11) $y = -\frac{2}{x},\qquad x_0 = 1;$

12) $y = \sqrt{x^2+1},\ x_0 = 2;$

13) $y = x^2 e^{-x},\ x_0 = 1;$

14) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),\ x_0 = \frac{\pi}{2};$

15) $y = \cos^5 x,\ x_0 = \pi;$

16) $y = \sin(1-2x),\ x_0 = \frac{1}{2};$

17) $y = \frac{x^2-1}{x},\ x_0 = -2;$

18) $y = x^3 - x^2,\ x_0 = -1;$

19) $y = x^2 - 4,\ x_0 = 2;$

20) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2,\ x_0 = 3;$

21) $y = x^3 - 3x,\ x_0 = 2;$

22) $y = xe^{-x},\ x_0 = 0;$

23) $y = \sqrt{2x-1},\ x_0 = 5;$

24) $y = \sqrt{4x-3-x^2},\ x_0 = \frac{3}{2};$

25) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x},\ x_0 = \frac{\pi}{4};$

26) $y = \sin^2 3x,\ x_0 = \frac{\pi}{12};$

27) $y = (3x-7)^3,\ x_0 = 3;$

28) $y = 0{,}5x^2 - 3x,\ x_0 = -2;$

29) $y = x^3 + x^2,\ x_0 = 1;$

30) $y = \cos^5 x,\ x_0 = \pi.$

✍***Завдання № 4.*** *Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці, яка відповідає значенню параметра* $t = t_0$*:*

1) $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{3};$ ***2)*** $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{3};$

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{3};$ ***4)*** $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^2, \end{cases} t_0 = 1;$

5) $\begin{cases} x = (2t + t^2)/(1 + t^3), \\ y = (2t - t^2)/(1 + t^2), \end{cases} t_0 = 1;$ ***6)*** $\begin{cases} x = \arcsin\left(t/\sqrt{1+t^2}\right), \\ y = \arccos\left(1/\sqrt{1+t^2}\right), \end{cases} t_0 = -1;$

7) $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t), \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{4};$ ***8)*** $\begin{cases} x = 3at/(1+t^2), \\ y = 3at^2/(1+t^2), \end{cases} t_0 = 2;$

9) $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{4};$ ***10)*** $\begin{cases} x = (1/2)t^2 - (1/4)t^4, \\ y = (1/2)t^2 + (1/3)t^3, \end{cases} t_0 = 0;$

11) $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{2};$ ***12)*** $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{6};$

13) $\begin{cases} x = \arcsin\left(t/\sqrt{1+t^2}\right), \\ y = \arccos\left(1/\sqrt{1+t^2}\right), \end{cases} t_0 = 1;$ ***14)*** $\begin{cases} x = (1 + \ln t)/t^2, \\ y = (3 + 2\ln t)/t, \end{cases} t_0 = 1;$

15) $\begin{cases} x = (1+t)/t^2, \\ y = 3/(2t^2) + 2/t, \end{cases} t_0 = 2;$ ***16)*** $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{6};$

17) $\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{4};$ ***18)*** $\begin{cases} x = (t+1)/t, \\ y = (t-1)/t, \end{cases} t_0 = -1;$

19) $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} t_0 = 2;$ ***20)*** $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \end{cases} t_0 = 1;$

21) $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t\cos t, \end{cases} t_0 = 0;$ ***22)*** $\begin{cases} x = (1+t^3)/(t^2-1), \\ y = t/(t^2-1), \end{cases} t_0 = 2;$

23) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{4};$ **24)** $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t - t^3, \end{cases} t_0 = 1;$

25) $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases} t_0 = 1;$ **26)** $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t_0 = -\dfrac{\pi}{3};$

27) $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{tg}\,t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{4};$ **28)** $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases} t_0 = -2;$

29) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \end{cases} t_0 = 0;$ **30)** $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

✍***Завдання № 5.*** *Показати, що функція* y *задовольняє вказане рівняння:*

1) $y = xe^{-x^2/2},\ xy' = \left(1 - x^2\right)y;$

2) $y = \dfrac{\sin x}{x},\ xy' + y = \cos x;$

3) $y = 5e^{-2x} + \dfrac{e^x}{3},\ y' + 2y = e^x;$

4) $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2},\ \left(1 - x^2\right)y' + xy = 2x;$

5) $y = x\sqrt{1 - x^2},\ yy' = x - 2x^3;$

6) $y = \dfrac{c}{\cos x},\ y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 0;$

7) $y = -1/\left(3x + c\right),\ y' = 3y^2;$

8) $y = \ln\left(c + e^x\right),\ y' = e^{x-y};$

9) $y = \sqrt{x^2 - cx},\ \left(x^2 + y^2\right)dx - 2xydy = 0;$

10) $y = x\left(c - \ln x\right),\ \left(x - y\right)dx + xdy;$

11) $y = e^{\mathrm{tg}(x/2)},\ y'\sin x = y\ln y;$

12) $y = \left(1 + x\right)/\left(1 - x\right),\ y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2};$

13) $y = \left(b + x\right)/\left(1 + bx\right),\ y - xy' = b\left(1 + x^2 y'\right);$

14) $y=\sqrt[3]{2+3x-3x^2},\ yy'=(1-2x)/y;$

15) $y=\sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)+1},\ \left(1+e^x\right)yy'=e^x;$

16) $y=\operatorname{tg}\ln x,\ \left(1+y^2\right)dx=xdy;$

17) $y=-\sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2+1},\ \left(1+e^x\right)yy'=e^x;$

18) $y=\sqrt[3]{x-\ln x-1},\ \ln x+y^3-3xy^2y'=0;$

19) $y=a+7x/(ax+1),\ y-xy'=a\left(1+x^2y'\right);$

20) $y=a\operatorname{tg}\sqrt{\frac{a}{x}-1},\ a^2+y^2+2x\sqrt{ax-x^2}\,y'=0;$

21) $y=\sqrt[4]{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}},\ 8xy'-y=\frac{-1}{y^3\sqrt{x+1}};$

22) $y=\left(x^2+1\right)e^{x^2},\ y'-2xy=2xe^{x^2};$

23) $y=\frac{2x}{x^3+1}+\frac{1}{x},\ x\left(x^3+1\right)y'+\left(2x^3-1\right)y=\frac{x^3-2}{x};$

24) $y=e^{x+x^2}+2e^x,\ y'-y=2xe^{x+x^2};$

25) $y=-x\cos x+3x,\ xy'=y+x^2\sin x;$

26) $y=1/\sqrt{\sin x+x},\ 2y'\sin x+y\cos x=y^3\left(x\cos x-\sin x\right);$

27) $y=x/(x-1)+x^2,\ x(x-1)y'+y=x^2(2x-1);$

28) $y=x/\cos x,\ y'-y\operatorname{tg}x=\sec x;$

29) $y=(x+1)^n\left(e^x-1\right),\ y'-\frac{ny}{x+1}=e^x(1+x)^n;$

30) $y=2\frac{\sin x}{x}+\cos x,\ xy'\sin x+y(\sin x-x\cos x)=\sin x\cos x-x.$

Контрольна робота № 1

на тему: «Диференціальне числення функцій однієї змінної»

✍***Завдання № 1.*** *За допомогою диференціала наближено обчислити величини та оцінити допущену відносну похибку (з точністю до двох знаків після коми):*

1) $\sqrt[5]{34}$; ***2)*** $\sqrt[3]{26,19}$; ***3)*** $\sqrt[4]{16,64}$;

4) $\sqrt{8,76}$; ***5)*** $\sqrt[5]{31}$; ***6)*** $\sqrt[3]{70}$;

7) $(2,01)^3+(2,01)^2$; ***8)*** $\sqrt[3]{65}$; ***9)*** $2,9/\sqrt{(2,9)^2+16}$;

10) $\sqrt{\dfrac{4-3,02}{1+3,02}}$; ***11)*** $\sqrt[4]{15,8}$; ***12)*** $\sqrt[3]{10}$;

13) $\sqrt[5]{200}$; ***14)*** $(3,03)^5$; ***15)*** $\sqrt{\dfrac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$;

16) $\sqrt[7]{130}$; ***17)*** $\sqrt[3]{27,5}$; ***18)*** $\sqrt{17}$;

19) $\sqrt{640}$; ***20)*** $\sqrt{1,2}$; ***21)*** $\sqrt[10]{1025}$;

22) $(3,02)^4+(3,02)^3$; ***23)*** $(5,07)^3$; ***24)*** $(4,01)^{1,5}$;

25) $\sqrt[3]{1,02}$; ***26)*** $\cos 151^\circ$; ***27)*** $\operatorname{arctg} 1,05$;

28) $\cos 61^\circ$; ***29)*** $tg\,44^\circ$; ***30)*** $\operatorname{arctg} 0,98$.

✍***Завдання № 2.*** *Знайти похідну вказаного порядку:*

1) $y=\left(2x^2-7\right)\ln(x-1),\ y^{(5)}=?$ ***2)*** $y=\left(3-x^2\right)\ln^2 x,\ y'''=?$

3) $y=x\cos x^2,\ y'''=?$ ***4)*** $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}},\ y'''=?$

5) $y=\dfrac{\log_2 x}{x^3},\ y'''=?$ ***6)*** $y=\left(4x^3+5\right)e^{2x+1},\ y^{(5)}=?$

7) $y=x^2\sin(5x-3),\ y'''=?$ ***8)*** $y=\dfrac{\ln x}{x^2},\ y^{(4)}=?$

9) $y=(2x+3)\ln^2 x,\ y'''=?$ ***10)*** $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x,\ y'''=?$

11) $y=\dfrac{\ln x}{x^3},\ y^{IV}=?$ ***12)*** $y=(4x+3)2^{-x},\ y^{(5)}=?$

13) $y = e^{1-2x}\sin(2+3x),\ y^{IV} = ?$ **14)** $y = \dfrac{\ln(3+x)}{3+x},\ y''' = ?$

15) $y = (2x^3+1)\cos x,\ y^{V} = ?$ **16)** $y = (x^2+3)\ln(x-3),\ y^{(4)} = ?$

17) $y = (1-x-x^2)e^{(x-1)/2},\ y^{(4)} = ?$ **18)** $y = \dfrac{\sin 2x}{x},\ y''' = ?$

19) $y = (x+7)\ln(x+4),\ y^{(5)} = ?$ **20)** $y = (3x-7)3^{-x},\ y^{(4)} = ?$

21) $y = \dfrac{\ln(2x+5)}{2x+5},\ y''' = ?$ **22)** $y = e^{\frac{x}{2}}\sin 2x,\ y^{(4)} = ?$

23) $y = \dfrac{\ln x}{x^5},\ y''' = ?$ **24)** $y = x\ln(1-3x),\ y^{(4)} = ?$

25) $y = (x^2+3x+1)e^{3x+2},\ y^{(5)} = ?$ **26)** $y = (5x-8)2^{-x},\ y^{(4)} = ?$

27) $y = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2},\ y^{(5)} = ?$ **28)** $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x),\ y^{(4)} = ?$

29) $y = (5x-1)\ln^2 x,\ y''' = ?$ **30)** $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2},\ y^{(4)} = ?$

✍***Завдання № 3.*** *Записати формулу для похідної n-го порядку вказаної функції:*

1) $y = \ln x$; **2)** $y = 2^x$; **3)** $y = \sin x$;

4) $y = e^{-2x}$; **5)** $y = \sqrt{x}$; **6)** $y = \dfrac{1}{x-3}$;

7) $y = e^{4x}$; **8)** $y = 5^x$; **9)** $y = \ln(4+x)$;

10) $y = 10^x$; **11)** $y = \cos 3x$; **12)** $y = \dfrac{x}{x+5}$;

13) $y = \sqrt{x+7}$; **14)** $y = \dfrac{4}{x+3}$; **15)** $y = \dfrac{1}{1+x}$;

16) $y = \dfrac{1}{x}$; **17)** $y = \cos x$; **18)** $y = \dfrac{1}{x+5}$;

19) $y = \ln(3+x)$; **20)** $y = xe^{3x}$; **21)** $y = \ln(5+x^2)$;

22) $y = \dfrac{1}{x-7}$; **23)** $y = e^{-5x}$; **24)** $y = \dfrac{1}{x-6}$;

25) $y = 7^x$; ***26)*** $y = \ln(3x - 5)$; ***27)*** $y = \ln\dfrac{1}{4 - x}$;

28) $y = xe^{6x}$; ***29)*** $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}$; ***30)*** $y = \ln\left(5x - 1\right)$.

✍***Завдання № 4.*** *Знайти границі, використовуючи правила Лопіталя:*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\ln x} - x}{x - 1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; ***4)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1 - 4\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}{1 - x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x - a}{a}\cdot ctg(x - a)$; ***6)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\pi - 2\operatorname{arctg} x\right)\ln x$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)x$; ***8)*** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}$; ***10)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{2\sin x + x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\operatorname{arctg} x^2 - \pi}$; ***12)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$; ***14)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;

15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1 - x}{1 - \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$; ***16)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$; ***18)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{\operatorname{ctg}\left(\pi x/2\right)}$;

19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 2\operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$; ***20)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$;

21) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}5x}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x$;

23) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$;

24) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}$;

25) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

27) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\left({\pi x}/{2}\right)}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{4x-\sin x}$;

29) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$;

30) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$.

✍***Завдання № 5.*** *Знайти границі, використовуючи правила Лопіталя:*

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x-\dfrac{x^2}{2}-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-1}{\operatorname{tg}x-x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\left({\pi x}/{2}\right)}{\operatorname{ctg}\pi x}$;

7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln(1-x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos e^{x^2}-1}{\cos x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$;

11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{6x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$;

14) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$;

18) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}x\right)^{\operatorname{tg}2x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$;

20) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

22) $\lim\limits_{x\to \infty}x^2e^{-0{,}01x}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+xe^x\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$;

24) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\log_2 x}$;

25) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{\frac{4}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$;

26) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\ln 2x\cdot\ln(2x-1)$;

27) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{1}{\ln 3x}\right)$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{tg}x$;

29) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x^3e^{-x}\right)$;

30) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{x-1}$.

✍***Завдання № 6.*** *Знайти похідну другого порядку y''_{xx} функції, заданої параметрично:*

1) $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=2\sec^2 t. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=1/t. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=t+\sin t. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=\operatorname{sh}^2 t, \\ y=1/\operatorname{ch}^2 t. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=1/t, \\ y=1/\left(1+t^2\right). \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = 1/\sqrt{1-t}. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin 2t. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = t/\sqrt{t-1}. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = \cos t/(1+2\cos t), \\ y = \sin t/(1+2\cos t). \end{cases}$

13) $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = 1/\sqrt{t}. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

21) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

23) $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

24) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4(t/2). \end{cases}$

25) $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$

26) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2/2. \end{cases}$

27) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$

28) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

29) $\begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/(t^2+1). \end{cases}$

30) $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

Домашня контрольна робота № 1
на тему: «Диференціальне числення функцій однієї змінної»

✍***Завдання № 1.*** *Знайти точки, в яких функція*

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \; x\in\mathbb{Q}, \\ 0, \; x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

має похідну.

✍***Завдання № 2.*** *Для яких значень параметра α функція*

$$f(x)=\begin{cases} |x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

має похідну в точці $x_0=0$?

✍***Завдання № 3.*** *Нехай функція f має похідну в точці x_0, а послідовності (x_n) та (z_n) такі, що*

$$\forall\, n\in\mathbb{N}: x_n\neq x_0,\, z_n\neq x_0;\; x_n\to x_0,\, z_n\to x_0,\, n\to\infty.$$

Чи існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}$? Навести відповідні приклади.

✍***Завдання № 4.*** *Нехай функція f має похідну в точці x_0 і число $k\in\mathbb{N}$ фіксоване. Знайти границю*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)+f\left(x_0+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(x_0+\frac{k}{n}\right)-kf(x_0)\right).$$

✍***Завдання № 5.*** *Нехай $f\in C^1_{[a;b]}$, $x_0\in(a;b)$. Довести, що для довільних послідовностей (x_n) та (z_n) таких, що*

$$\forall\, n\in\mathbb{N}: x_n\neq x_0,\, z_n\neq x_0;\; x_n\to x_0,\, z_n\to x_0,\, n\to\infty,$$

правильно, що

$$\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}\to f'(x_0),\; x\to x_0.$$

Чи можна відмовитися від умови неперервності похідної?

✍***Завдання № 6. [14]*** *Перевірити правильність тверджень:*

1) якщо $f_{ij}(x)\left(i=\overline{1,\,n},\ j=\overline{1,\,n}\right)$ – диференційовні, то

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix};$$

2) якщо f диференційовна на проміжку $(a;\,+\infty)$, то:

1) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty;$

2) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty \Rightarrow \exists \overline{\lim\limits_{x\to a}} f'(x)=\infty;$

3) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f'(x)=\infty \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty;$

4) $\exists \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)\in\mathbb{R};$

5) $\exists \lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\in\mathbb{R};$

3) якщо f диференційовна і парна (непарна) на $\mathbb{R}$, то f' – непарна (парна) на $\mathbb{R}$;

4) якщо f диференційовна на $\mathbb{R}$ і T – періодична, то f' теж T–періодична;

5) правильні твердження, обернені до сформульованих в пунктах 3) і 4);

6) якщо f диференційовна на $[a;\,b]$, то функції $\varphi(x)=\max\limits_{t\in[a;\,x]} f(t)$ і $\psi(x)=\min\limits_{t\in[x;\,b]} f(t)$ також диференційовні на $[a;\,b]$;

7) якщо $f,\,g$ – диференційовні на $(a;\,b)$, то:

1) із умови $\forall x\in(a;\,b)\ f(x)<g(x)$ випливає $\forall x\in(a;\,b)$ $f'(x)<g'(x);$

2) із умови $\forall x \in (a; b)$ $f'(x) < g'(x)$ випливає $\forall x \in (a; b)$ $f(x) \le g(x)$;

3) із умови $\forall x \in (a; b)$ $f'(x) < g'(x)$ і $f(a) = g(a)$ випливає $\forall x \in (a; b)$ $f(x) < g(x)$;

8) для монотонності диференційовної функції f на $(a; b)$ необхідно і достатньо, щоб функція f' була монотонною на $(a; b)$;

9) f має похідну в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right)$;

10) якщо f диференційовна в точці $x_0 = 0$ і $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ то $f(\varphi(x))$ має нульову похідну в точці x_0.

✍***Завдання № 7.*** *Навести приклади функцій* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, для яких виконуються умови:*

1) $f'(x_0)$ і $(f^2)'(x)$ не існують, а $(f^3)'(x)$ існує;

2) f' не існує в жодній точці з $\mathbb{R}$, а $(f^2)'$ існує всюди на $\mathbb{R}$;

3) f – неперервна в точці x_0, але не має в ній ні лівої ні правої похідної;

4) f – диференційовна у всіх точках множини M і розривна у всіх інших точках $\mathbb{R}$, де:

1) $M = \{0, 1, 2\}$;

2) $M = \left\{ \pm n, \pm\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

3) $M=\left\{0,\pm n,\pm\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$;

5) для послідовності $\alpha_n=o(1)$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n}=0,$$

але f не диференційовна в точці x_0.

✍***Завдання № 8.*** *За допомогою похідної обчислити суми:*

1) $\sum\limits_{k=1}^{n}kx^{k-1}$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n}k\sin kx$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos kx$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n}k\,\mathrm{ch}\,kx$;

6) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\cos(2k-1)x$.

Самостійна робота № 2

на тему: «Застосування похідної функції однієї змінної»

✍***Завдання № 1.*** *Розкласти за формулою Маклорена функцію* $f(x)$*:*

1) $f(x)=\dfrac{9}{20-x-x^2}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$;

3) $f(x)=2x\cos^2\dfrac{x}{2}-x$;

4) $f(x)=(x-1)\sin 5x$;

5) $f(x)=\dfrac{\mathrm{sh}\,2x}{x}-3$;

6) $f(x)=\dfrac{7}{12-x-x^2}$;

7) $f(x)=\ln\left(1-x-6x^2\right)$;

8) $f(x)=\ln\left(1+x-6x^2\right)$;

9) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$;

10) $f(x)=\dfrac{\mathrm{ch}\,3x-1}{x^2}$;

11) $f(x)=\dfrac{6}{8+2x-x^2}$;

12) $f(x)=\ln\left(1-x-20x^2\right)$;

13) $f(x)=\ln\left(1+x-12x^2\right)$;

14) $f(x)=\left(3+e^{-x}\right)^2$;

15) $f(x)=x^{-1}\arcsin x-x$;

16) $f(x)=\dfrac{7}{12-x-x^2}$;

17) $f(x)=x^2\sqrt{4-3x}$;

18) $f(x)=\ln\left(1+2x-8x^2\right)$;

19) $f(x)=2x\sin^2\dfrac{x}{3}-x$;

20) $f(x)=(x-1)\operatorname{sh}x$;

21) $f(x)=x\sqrt[3]{27-2x}$;

22) $f(x)=\dfrac{5}{6+x-x^2}$;

23) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x}$;

24) $f(x)=\dfrac{5}{6-x-x^2}$;

25) $f(x)=\ln\left(1-3x-10x^2\right)$;

26) $f(x)=x^{-1}\sin 3x-\cos 3x$;

27) $f(x)=\sqrt[4]{16-5x}$;

28) $f(x)=\left(3-e^{2x}\right)^2$;

29) $f(x)=\left(\sqrt[4]{16-3x}\right)^{-1}$;

30) $f(x)=(x-3)\operatorname{ch}3x.$

✍***Завдання № 2.*** *Знайти найменше і найбільше значення функції на заданому проміжку:*

1) $y=-2x+\sqrt{\left(x^2-10x+25\right)\left(x^2-4x+4\right)},\ \ x\in\left[\dfrac{9}{4};\,6\right]$;

2) $y=x+\sqrt{\left(x^2+6x+9\right)\left(x^2+2x+1\right)},\ \ x\in\left[-4;\,-\dfrac{5}{4}\right]$;

3) $y=(x-3)^2e^{|x|},\ \ x\in[-1;\,4]$;

4) $y=(x-3)e^{|x+1|},\ \ x\in[-2;\,4]$;

5) $y=-\dfrac{3}{2}\ln x-\left|x^2-2x-3\right|,\ \ x\in\left[\dfrac{1}{2};\,4\right]$;

6) $y=\left|x^2+x-2\right|-\ln\dfrac{1}{x},\ \ x\in\left[\dfrac{1}{2};\,2\right]$;

7) $y = 2x\ln x = x\ln 49,\ \ x\in[1;\,7];$

8) $y = \dfrac{1}{2}x\ln x - x\ln 2,\ \ x\in[1;\,4];$

9) $y = \cos^2\dfrac{x}{2}\sin x,\ \ x\in[0;\,\pi];$

10) $y = -\left|2x^3 + 15x^2 + 36x - 30\right|,\ \ x\in[-3;\,2];$

11) $y = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x - \sqrt{3},\ \ x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\,\dfrac{\pi}{3}\right];$

12) $y = -x^3 + 3x|x-3|,\ \ x\in[0;\,4];$

13) $y = x^3 - 2x|x-2|,\ \ x\in[0;\,3];$

14) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}},\ \ x\in\left[\dfrac{3}{4};\,2\right];$

15) $y = \left|\log_2^2 2x - \log_2 8x\right|,\ \ x\in\left[\dfrac{1}{2};\,2\sqrt{2}\right];$

16) $y = 2\sin 2x + \cos 4x,\ \ x\in\left[0;\,\dfrac{\pi}{3}\right];$

17) $y = 2\cdot 2^{3x} - 9\cdot 2^{2x} + 12\cdot 2^{x},\ \ x\in[-1;\,1];$

18) $y = e^{2x-1} + 2e^{1-2x} + 7x - 3,\ \ x\in[0{,}14;\,1];$

19) $y = 9\sin x - \sin 3x + 3,\ \ x\in[-\pi;\,0];$

20) $y = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x,\ \ x\in\left[e^{\frac{3}{4}};\,e^3\right];$

21) $y = 2\cdot 3^{3x} - 4\cdot 3^{2x} + 2\cdot 3^{x},\ \ x\in[-1;\,1];$

22) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1,\ \ x\in[0;\,2];$

23) $y = 4\sin 2x - 2\sin 4x,\ \ x\in[0;\,\pi];$

24) $y = x|x-1| - 5x^3,\ \ x\in[0;\,2];$

25) $y = (x-1)^2\sqrt{x^2 - 2x + 3},\ \ x\in[0;\,3];$

26) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right];$

27) $y = \sqrt{1 - 2x + x^2} + \sqrt{1 + 2x + x^2}, \quad x \in [-2; 0];$

28) $y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100, \quad x \in [-4; 5];$

29) $y = 4x^3 - x|x - 2|, \quad x \in [0; 3];$

30) $y = 2e^{-\frac{x}{3}} \sin\frac{x}{3}, \quad x \in [0; 3\pi].$

✍***Завдання № 3.*** *Дослідити функцію та побудувати її графік:*

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9;$

2) $y = 2 - 3x^2 - x^3;$

3) $y = 2x - x^3;$

4) $y = (x+1)^2(x-1)^2;$

5) $y = x^2(x-2)^2;$

6) $y = 2x^3 - 3x^2 - 4;$

7) $y = \frac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2\right) + 6x - 9;$

8) $y = 3x^2 - 2 - x^3;$

9) $y = (x-1)^2(x-3)^2;$

10) $y = \frac{27}{4}\left(x^3 + x^2\right) - 5;$

11) $y = \frac{1}{4}\left(x^3 + 3x^2\right) - 5;$

12) $y = \frac{1}{8}\left(16 - 6x^2 - x^3\right);$

13) $y = 6x - 8x^3;$

14) $y = -\frac{1}{16}\left(x^2 - 4\right)^2;$

15) $y = 16x^2(x-1)^2;$

16) $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9;$

17) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5;$

18) $y = \frac{1}{8}\left(6x^2 - x^3 - 16\right);$

19) $y = 2 - 12x^2 - 8x^3;$

20) $y = -\frac{1}{16}(x-2)^2(x-6)^2;$

21) $y = (2x+1)^2(2x-1)^2;$

22) $y = 16x^3 - 12x^2 - 4;$

23) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x;$

24) $y = \frac{1}{8}\left(11 + 9x - 3x^2 - x^3\right);$

25) $y = 12x^2 - 8x^3 - 2;$

26) $y = -\frac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2;$

27) $y=(2x-1)^2(2x-3)^2$;

28) $y=\frac{27}{4}\left(x^3-x^2\right)-4$;

29) $y=\frac{x}{8}\left(12-x^2\right)$.

✍***Завдання № 4.*** *Дослідити функцію та побудувати її графік:*

1) $y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$;

2) $y=\frac{x^4}{x^3+1}$;

3) $y=\frac{x^2}{x^3-1}$;

4) $y=\frac{x^3}{x^2-3}$;

5) $y=\frac{x^3}{x^3+1}$;

6) $y=\frac{x^4}{x^3-1}$;

7) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

8) $y=\frac{-x^2}{(x-2)^2}$;

9) $y=\frac{16}{x^2(x-4)}$;

10) $y=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$;

11) $y=\frac{x^2+4}{x^2}$;

12) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$;

13) $y=\frac{4x^2}{x^2+3}$;

14) $y=\frac{12x}{9+x^2}$;

15) $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$;

16) $y=\frac{2x^2+1}{x^2}$;

17) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$;

18) $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$;

19) $y=(1+\frac{1}{x})^2$;

20) $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$;

21) $y=\frac{x^3-4}{x^2}$;

22) $y=\frac{x^3-27x+54}{x^3}$;

23) $y=\frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$;

24) $y=\frac{3x-2}{x^3}$;

25) $y=\dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$;

26) $y=\dfrac{x^3-32}{x^3}$;

27) $y=\dfrac{1}{x^4-1}$;

28) $y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$;

29) $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$;

30) $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$.

Контрольна робота № 2
на тему: «Застосування диференціального числення функцій однієї змінної»

✍***Завдання № 1.*** *Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки:*

1) $x(t)=\dfrac{t}{t^2-1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$;

2) $x(t)=\dfrac{4-t^2}{t^3+1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t^2+1}$;

3) $x(t)=\dfrac{t^3}{t^3+1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t^3+1}$;

4) $x(t)=t^2,\ y(t)=\dfrac{t^3+2t^2+t}{t+2}$;

5) $x(t)=\dfrac{t^2-1}{t(t+2)},\ y(t)=\dfrac{t^2}{(t+2)(t+1)}$;

6) $x(t)=\dfrac{t^2+1}{4(t-1)},\ y(t)=\dfrac{t}{t+1}$;

7) $x(t)=\dfrac{t}{1-t^2},\ y(t)=\dfrac{t\left(1-4t^2\right)}{1-t^2}$;

8) $x(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1},\ y(t)=\dfrac{t^2+1}{t+2}$;

9) $x(t)=\operatorname{arctg}t,\ y(t)=t^3-t$;

10) $x(t)=e^t\sin t,\ y(t)=e^t\cos t$;

11) $x(t)=\sin 2t,\ y(t)=\sin 4t$;

12) $x(t)=\sin 4t,\ y(t)=\cos t$;

13) $x(t)=\cos 4t,\ y(t)=\cos 3t$;

14) $x(t)=t^2-t+1,\ y(t)=t^2+t+1$;

15) $x(t)=t^3+3t+1,\ y(t)=t^3-3t+1$;

16) $x(t)=\dfrac{a}{\sqrt{t^2+1}},\ y(t)=\dfrac{at}{\sqrt{t^2+1}}$;

17) $x(t)=3^t+3^{-t},\ y(t)=3^t-3^{-t}$;

18) $x(t)=a\ln t,\ y(t)=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right);$ **19)** $x(t)=\dfrac{1}{t(t+1)},\ y(t)=\dfrac{(t+1)^2}{t};$

20) $x(t)=\dfrac{e^t}{t},\ y(t)=e^t(t-1)^2;$ **21)** $x(t)=2\cos 2t,\ y(t)=2\cos 3t;$

22) $x(t)=5\cos^2 t,\ y(t)=3\sin^2 t;$ **23)** $x(t)=1+\dfrac{1}{t},\ y(t)=t+\dfrac{1}{t^2};$

24) $x(t)=2(t-\sin t),\ y(t)=2(1-\cos t).$

✍***Завдання № 2.*** *Побудова графіків функцій, заданих в полярних координатах.*

1) $r=4\cos 3\varphi,\ \ r=2\ \ (r\ge 2);$	**2)** $r=\cos 2\varphi;$
3) $r=\sqrt{3}\cos\varphi,\ \ r=\sin\varphi$	**4)** $r=4\sin 3\varphi,\ \ r=2;$
5) $r=2\cos\varphi,\ \ r=2\sqrt{3}\sin\varphi$;	**6)** $r=\sin 3\varphi;$
7) $r=6\sin 3\varphi,\ \ r=3;$	**8)** $r=\cos 3\varphi;$
9) $r=\cos\varphi,\ \ r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right);$	**10)** $r=\sin\varphi,\ \ r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right);$
11) $r=6\cos 3\varphi,\ \ r=3\ \ (r\ge 3);$	**12)** $r=\dfrac{1}{2}+\sin\varphi;$
13) $r=\cos\varphi,\ \ r=\sin\varphi$;	**14)** $r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right),$ $r=\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right);$
15) $r=\cos\varphi,\ \ r=2\cos\varphi;$	
17) $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi;$	
19) $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi;$	**16)** $r=\sin\varphi,\ \ r=2\sin\varphi;$
21) $r=\dfrac{3}{2}\cos\varphi,\ \ r=\dfrac{5}{2}\cos\varphi;$	**18)** $r=\dfrac{1}{2}+\cos\varphi;$
23) $r=\sin 6\varphi;$	**20)** $r=\dfrac{5}{2}\sin\varphi,\ \ r=\dfrac{3}{2}\sin\varphi;$
25) $r=\cos\varphi+\sin\varphi;$	**22)** $r=4\cos 4\varphi;$
27) $r=2\cos 6\varphi;$	**24)** $r=3\cos\varphi,\ \ r=2\cos\varphi;$
29) $r=3\sin\varphi,\ \ r=5\sin\varphi;$	**26)** $r=2\sin 4\varphi;$

	28) $r=\cos\varphi-\sin\varphi;$ ***30)*** $r=2\sin\varphi,\ \ r=4\sin\varphi.$

✍***Завдання № 3.*** *Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:*

1) $y=(2x+3)e^{-2(x+1)};$

2) $y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)};$

3) $y=3\ln\dfrac{x}{x-3}-1;$

4) $y=(3-x)e^{x-2};$

5) $y=\dfrac{e^{2-x}}{2-x};$

6) $y=\ln\dfrac{x}{x+2}+1;$

7) $y=(x-2)e^{3-x};$

8) $y=\dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)};$

9) $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4};$

10) $y=-(2x+1)e^{2(x+1)};$

11) $y=\dfrac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)};$

12) $y=\ln\dfrac{x}{x-2}-2;$

13) $y=(2x+5)e^{-2(x+2)};$

14) $y=\dfrac{e^{3-x}}{3-x};$

15) $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1;$

16) $y=(4-x)e^{x-3};$

17) $y=-\dfrac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)};$

18) $y=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3;$

19) $y=(2x-1)e^{2(1-x)};$

20) $y=-\dfrac{e^{-(x+2)}}{x+2};$

21) $y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3;$

22) $y=-(x+1)e^{x+2};$

23) $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3};$

24) $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1;$

25) $y=-(2x+3)e^{2(x+2)};$

26) $y=-\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)};$

27) $y = \ln \dfrac{x-5}{x} + 2$;   ***28)*** $y = (x+4)e^{-x-3}$;

29) $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$;   ***30)*** $y = \ln \dfrac{x+6}{x} - 1$.

✍***Завдання № 4.*** *Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки:*

1) $y = e^{\sin x + \cos x}$;   ***2)*** $y = \operatorname{arctg}\left((\sin x + \cos x)/\sqrt{2}\right)$;

3) $y = \ln(\cos x + \sin x)$;   ***4)*** $y = 1/(\sin x + \cos x)$;

5) $y = e^{\sqrt{2}\sin x}$;   ***6)*** $y = \operatorname{arctg}\sin x$;

7) $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin x\right)$;   ***8)*** $y = 1/(\sin x - \cos x)$;

9) $y = e^{\sin x - \cos x}$;   ***10)*** $y = \operatorname{arctg}\left((\sin x - \cos x)/\sqrt{2}\right)$;

11) $y = \ln(\sin x - \cos x)$;   ***12)*** $y = 1/(\sin x + \cos x)^2$;

13) $y = e^{-\sqrt{2}\cos x}$;   ***14)*** $y = -\operatorname{arctg}\cos x$;

15) $y = \ln\left(-\sqrt{2}\cos x\right)$;   ***16)*** $y = 1/(\sin x - \cos x)^2$;

17) $y = e^{-\sin x - \cos x}$;   ***18)*** $y = \sqrt[3]{\sin x}$;

19) $y = \ln(-\sin x - \cos x)$;   ***20)*** $y = \sqrt{(\sin x - \cos x)/\sqrt{2}}$;

21) $y = e^{-\sqrt{2}\sin x}$;   ***22)*** $y = \sqrt[3]{\cos x}$;

23) $y = \ln\left(-\sqrt{2}\sin x\right)$;   ***24)*** $y = \sqrt{\cos x}$;

25) $y = e^{\cos x - \sin x}$;   ***26)*** $y = \sqrt[3]{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}$;

27) $y = \ln(\cos x - \sin x)$;   ***28)*** $y = \sqrt{\sin x}$;

29) $y = e^{\sqrt{2}\cos x}$;   ***30)*** $y = \sqrt{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}$.

§ 18. Математичні проєкти

План міжпредметного навчального проєкту «Похідна та її застосування»

Мета проєкту *– показати, як використовуючи похідну, можна розв'язувати задачі з фізики, алгебри, геометрії, економіки. За тривалістю виконання – проєкт середньої тривалості (на виконання проєкту відводиться місяць).*

Основне завдання проєкту: *створення бази задач на застосування похідної до розв'язування задач фізичного, геометричного змісту, задач з економіки, алгебри, а також створення в програмних засобах (Geogebra, DG, Gran 1, Gran 2 і інших) моделей до цих задач.*

Основна частина роботи *над міжпредметним проєктом складається з декількох* ***етапів:***

1. *Підготовка проєкту.*

2. *Планування проєкту.*

3. *Виконання запланованих завдань.*

4. *Оформлення результатів виконання проєкту.*

5. *Представлення, захист проєкту.*

6. *Аналіз результатів, корекція, оцінювання проєкту.*

На ***першому етапі*** *студенти об'єднуються в групи, визначають задачі, над якими будуть працювати.*

Наступний етап *– планування проєкту, включає:*

– визначення джерел інформації (необхідно представити список літератури, де можна знайти основні теоретичні положення, але також потрібно врахувати, що в студентів має виникнути проблема нестачі інформації, що сприятиме самостійному пошуку необхідних матеріалів).

– визначення способу представлення результатів (результати проєкту мають бути оформлені студентами у вигляді портфоліо − збірки документів, виконаних у Word з розв'язками задач та моделями до задач, виконаними в програмних засобах, таких як Geogebra, DG, Gran 2D, Gran 3D, а також презентації).

– розподіл обов'язків серед учасників групи, обговорення можливих методів дослідження, пошук інформації, творчих рішень.

На третьому та четвертому етапах *студентам необхідно виконати всі завдання проєкту та представити одержані результати, тобто розв'язати, оформити та створити моделі до задач фізичного, геометричного та економічного змісту. Розробити моделі до задач геометричного змісту в програмах Geogebra, Advanced Grapher, DG або Gran 2D. Створити малюнки або анімації в програмі Power Point для задач фізичного та економічного змісту, створити презентації.*

На етапі захисту проєкту*, студенти демонструють результати виконання проєкту, обговорюють результати свого дослідження, формулюють висновки.*

Проєкт «Похідна та її застосування» складається з восьми частин:

1) *«Історична довідка»;*

2) *«Застосування похідної в планіметрії»;*

***3)** «Застосування похідної в стереометрії»;*

***4)** «Застосування похідної в фізиці»;*

***5)** «Застосування похідної до розв'язування рівнянь»;*

***6)** «Застосування похідної до доведення нерівностей»;*

***7)** «Застосування похідної до задач економічного, біологічного або хімічного змісту»;*

***8)** «Застосування похідної до доведення тотожностей».*

Розглянемо методику розв'язування задач на застосування похідної. Розв'язуючи задачі на застосування похідної, необхідно дотримуватись такої послідовності дій:

***1)** вибір незалежної змінної і визначення множини її значень;*

***2)** побудова функції, яка описує ту геометричну величину, оптимальне значення якої треба знайти в задачі;*

***3)** відшукання критичних точок цієї функції і розгляд тих, які належать області визначення функції;*

***4)** з'ясування характеру екстремуму функції в цих точках;*

***5)** обчислення значень функції в цих точках і на кінцях відрізка, що є областю її визначення, і вибір найбільшого або найменшого з них.*

Наведемо приклади, вимоги, оформлення задач з кожної частини проєкту.

1. Історична довідка

У пункті «Історична довідка» студентам необхідно зібрати, проаналізувати та презентувати інформацію про видатних учених-математиків, які досліджували поняття «похідна» (О. Коші, І. Ньютон, Г. Лейбніц, Л. Лагранж, Ф. Лопіталь, Я. Бернуллі та ін.) та їхні основні праці. Доповідь необхідно оформити в паперовому варіанті, а також у вигляді презентації в програмі Power Point (або іншій програмі для створення презентацій).

Під час оцінювання презентацій враховується: вільне володіння студентами поданим матеріалом, максимальне залучення уваги аудиторії та донесення до неї важливості повідомлення, відповіді на поставлені запитання.

2. Задача з планіметрії

Задача. *Знайти найменшу площу прямокутного трикутника, описаного навколо прямокутника з основою a й висотою b так, що катети трикутника і основа та висота прямокутника лежать відповідно на одних і тих самих прямих.*

Розв'язання. Нехай маємо прямокутний трикутник *ACB*, описаний навколо прямокутника *CMND* (рис.18.1).

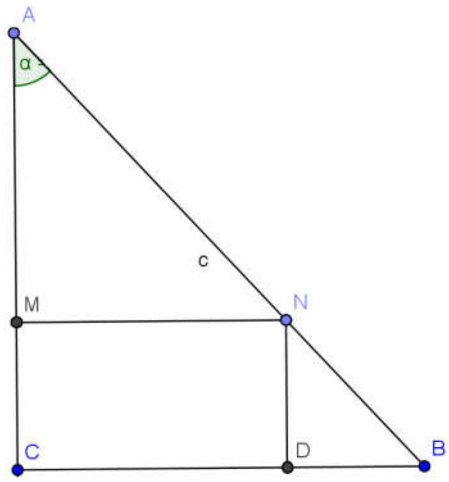


Рис. 18.1.

Позначимо $AM = x$, $BD = y$. Тоді $AC = b + x$, а $CB = a + y$. Площа трикутника запишеться в такому вигляді: $S = \frac{1}{2}(a+y)(b+x)$. Виразимо y через *x*. Трикутники *ACB і DNB* подібні. Складемо відношення: $\frac{AC}{CB} = \frac{ND}{BD}$.

Тоді $\frac{b+x}{a+y} = \frac{b}{y}, b + x = \frac{ab+by}{y}, y = \frac{ab}{x}$.

Отже, площу трикутника запишемо у такому вигляді:

$$S=\frac{1}{2}\left(a+\frac{ab}{x}\right)\left(b+x\right)=\frac{1}{2}\left(ab+\frac{ab^2}{x}+ax+ab\right)=\frac{1}{2}\left(2ab+\frac{ab^2}{x}+ax\right).$$

Розглянемо функцію $S\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(2ab+\frac{ab^2}{x}+ax\right)$, $x>0$.

Знайдемо її похідну: $S'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{ab^2}{x^2}+a\right)=\frac{a}{2}\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right).$

Оскільки за умовою задачі $b>0$, то функція $S\left(x\right)$ має лише одну критичну точку $x=b$, яка для неї буде точкою мінімуму, бо зліва від точки b $S'\left(x\right)<0$, а справа – $S'\left(x\right)>0$. Підставляючи значення $x=b$ у формулу площі трикутника, дістанемо: $S\left(b\right)=\frac{1}{2}\left(2ab+ab+ab\right)=2ab$.

Відповідь: $S=2ab$.

На рис. 18.2 представлено модель до задачі з планіметрії, створену в програмі DG.

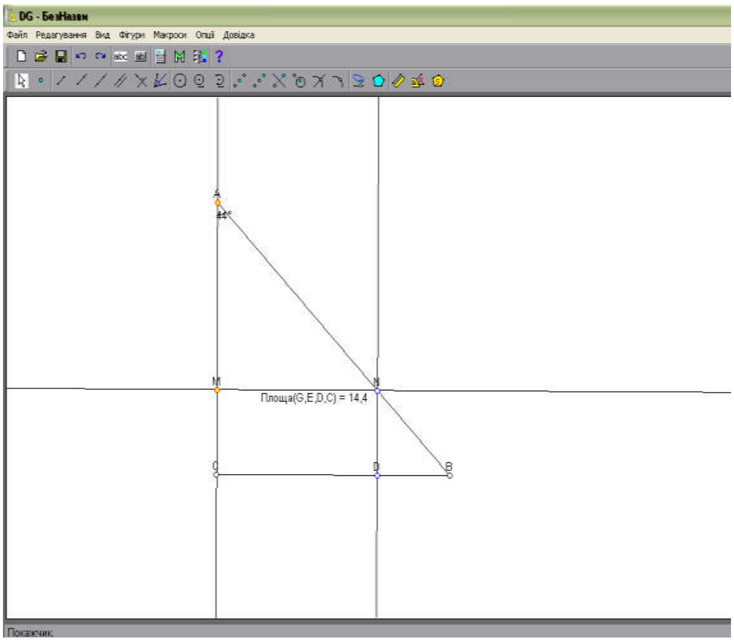


Рис. 18.2.

На рис. 18.3 представлено модель до задачі з планіметрії, створену в програмі Gran-2D.

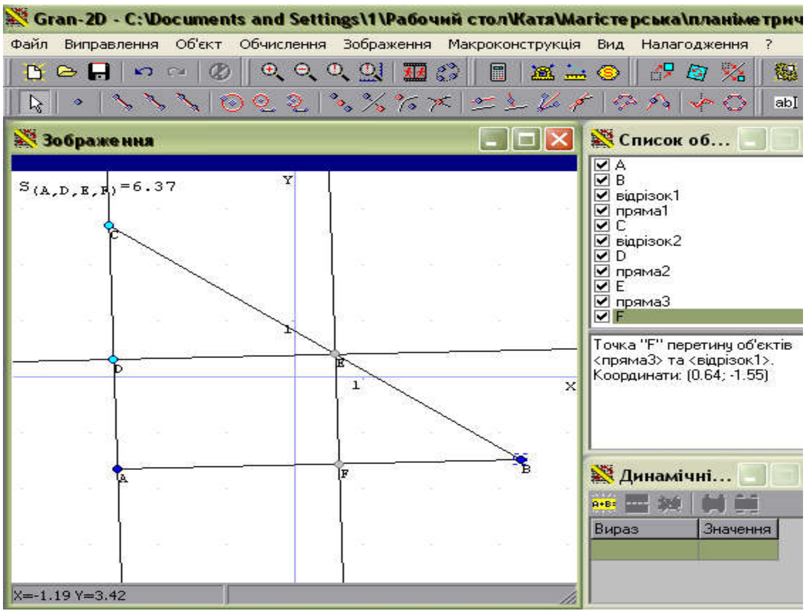


Рис.18.3

3. Стереометрична задача

Задача. *Серед усіх правильних трикутних пірамід, описаних навколо кругового циліндра висоти* h *і радіуса основи* r *так, що нижня основа циліндра і основа піраміди лежать в одній площині, коло верхньої основи циліндра має по одній спільній точці з кожною бічною гранню піраміди, а висота піраміди і вісь циліндра лежать на одній прямій, знайти ту, яка має найменший об'єм.*

Розв'язання. Нехай маємо правильну трикутну піраміду $SABC$, яка описана навколо циліндра висоти h і радіуса основи r (рис.18.4).

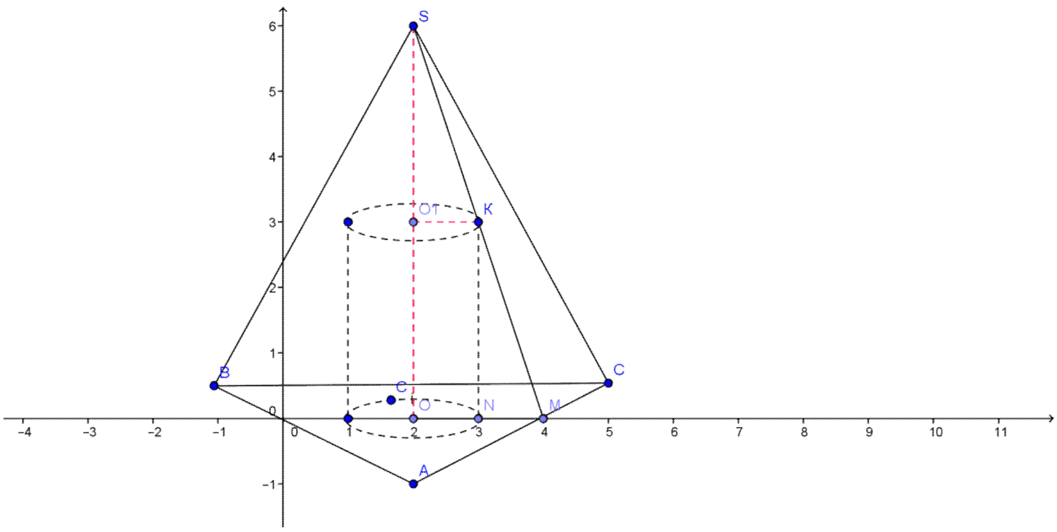


Рис. 18.4.

Об’єм піраміди знаходимо за формулою: $V = \frac{1}{3} S_{осн.} H$, де $S_{осн.}$ – площа основи піраміди, а H – її висота.

Оскільки в основі лежить правильний трикутник, то $S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Тоді $V = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 H$. Виразимо тепер H через a, розглянувши подібні трикутники OSM і MKN: $\frac{OS}{OM} = \frac{KN}{MN}$. Позначимо SO через H, OM – це є третина висоти правильного трикутника, тому $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, KN = h, MN = \frac{a\sqrt{3}}{6} - r$.

Отже, $\frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{h}{\frac{a\sqrt{3}}{6} - r}$. Звідси $H = \frac{ah\sqrt{3}}{a\sqrt{3} - 6r}$.

Тоді $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ah\sqrt{3}}{a\sqrt{3} - 6r} = \frac{h}{4} \cdot \frac{a^3}{a\sqrt{3} - 6r}$.

Розглянемо функцію $V(a) = \frac{h}{4} \cdot \frac{a^3}{a\sqrt{3} - 6r}$. Знайдемо похідну:

$$V'(a) = \frac{h}{4} \cdot \frac{3a^2\left(a\sqrt{3} - 6r\right) - a^3\sqrt{3}}{\left(a\sqrt{3} - 6r\right)^2} = \frac{h}{2} \cdot \frac{a^2\left(a\sqrt{3} - 9r\right)}{\left(a\sqrt{3} - 6r\right)^2}.$$

Оскільки за умовою задачі $a > 0$, то функція $V(a)$ має лише одну критичну точку $a = 3\sqrt{3}r$.

Знайдемо тепер H: $H = \frac{3\sqrt{3} \cdot r \cdot \sqrt{3}h}{3\sqrt{3} \cdot r\sqrt{3} - 6r} = 3h$. Отже, основа піраміди $a = 3\sqrt{3}r$, а висота $H = 3h$. Тоді $V = \frac{27\sqrt{3}}{4} r^2 h$.

Кроки побудови моделі до стереометричної задачі в програмі GeoGebra (рис.18.5):

1) побудова основи правильної трикутної піраміди – правильного трикутника *ABC;*

2) побудова проекції висоти піраміди на площину основи (оскільки вісь циліндра співпадає з висотою піраміди, то висота проектується в центр кола нижньої основи циліндра – центр кола вписаного в трикутник *ABC*, який лежить на перетині бісектрис кутів *ABC, BCA, CAB*);

3) побудова висоти піраміди (перпендикуляр до площини трикутника ABC, що проходить через проєкцію висоти, побудовану в попередньому пункті);

4) побудова вершини піраміди;

5) побудова вписаного циліндра.

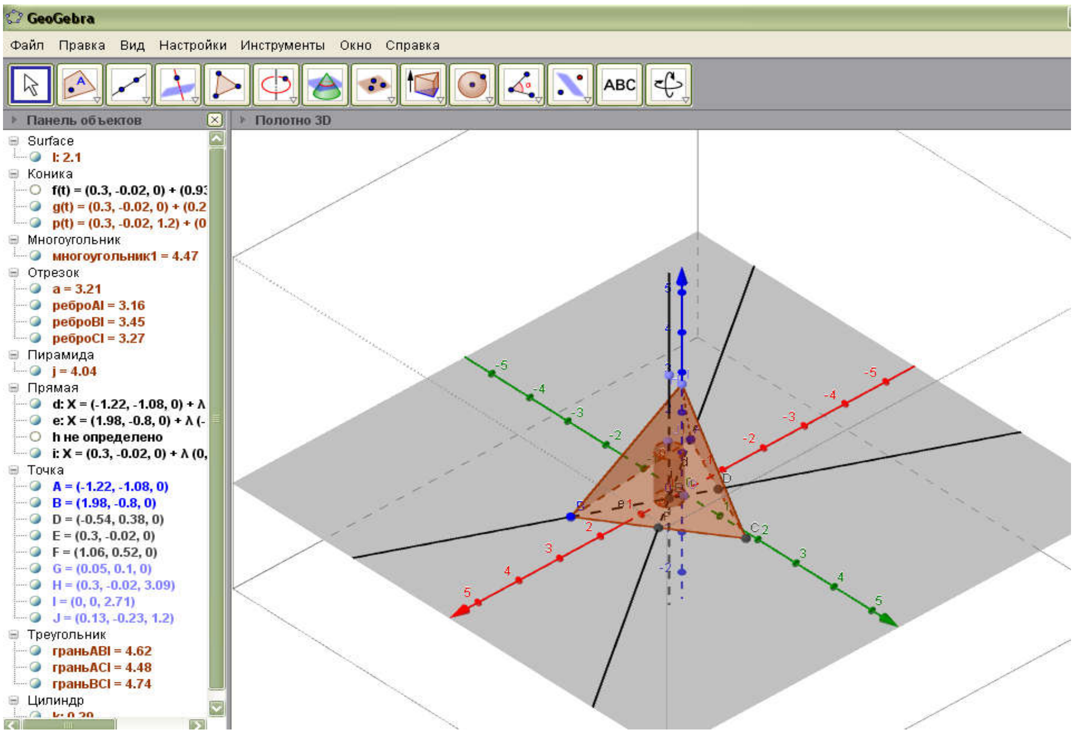


Рис.18.5

4. Розв'язування рівняння

Задача. *Розв'язати рівняння:* $4^x + 4^{x^2} = 2^x + 6^{x^2}$.

Розв'язання. Помічаємо, що $x = 0, x = 1$ є коренями даного рівняння. Залишається знайти інші корені або довести їх відсутність.

Оскільки для $x<0: 4^x<2^x, 4^{x^2}<6^{x^2}$, то $4^x+4^{x^2}<2^x+6^{x^2}$ і тому рівняння від'ємних коренів не має.

Розглянемо функцію $f(t)=(t+2)^x-t^x$ для $0<x<1$. Знайдемо її похідну по t, зафіксувавши x:

$$f'(t)=x(t+2)^{x-1}-xt^{x-1}=x\left((t+2)^{x-1}-t^{x-1}\right)<0.$$

Тоді для $0<x<1$ функція спадає.

Тому $f(4)=6^x-4^x<f(2)=4^x-2^x$. Оскільки

$$6^x-6^{x^2}=6^{x^2}\left(6^{x-x^2}-1\right)>4^{x^2}\left(4^{x-x^2}-1\right)=4^x-4^{x^2},$$

то $4^x-2^x>6^x-4^x>6^{x^2}-4^{x^2}$. Звідси $4^x+4^{x^2}>2^x+6^{x^2}$. Отже, на інтервалі $(0;1)$ коренів немає. Нехай $x>1$, тоді $f'(t)>0$ і тому функція зростає. Отже, $f(2)<f(4)$. Тоді $4^x-2^x<6^x-4^x<6^{x^2}-4^{x^2}$. Звідси $4^x+4^{x^2}<2^x+6^{x^2}$. Отже, на проміжку $(1;+\infty)$ коренів також немає.

Розв'яжемо дане рівняння графічно. Для цього потрібно побудувати в програмі Advanced Grapher графіки функцій лівої і правої частини рівняння і визначити точки їх перетину (рис. 18.6, 18.7).

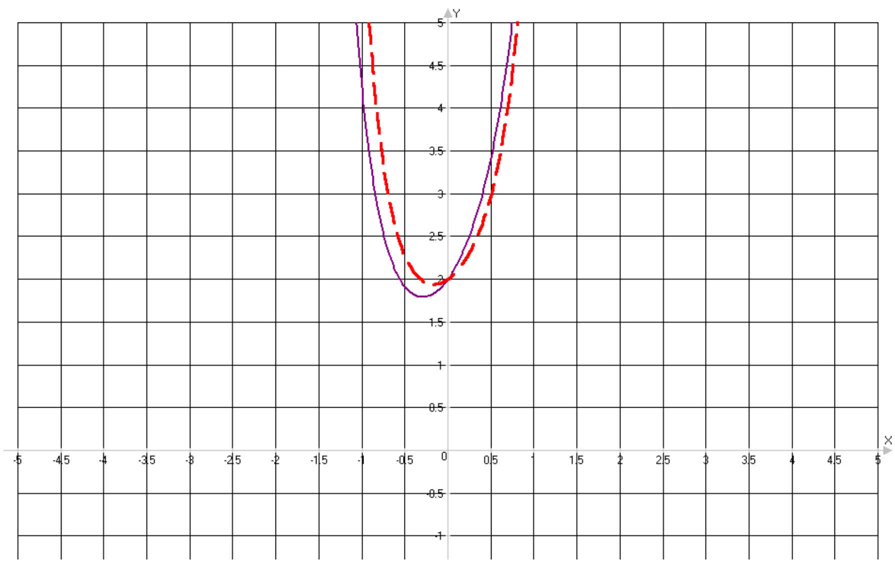


Рис. 18.6

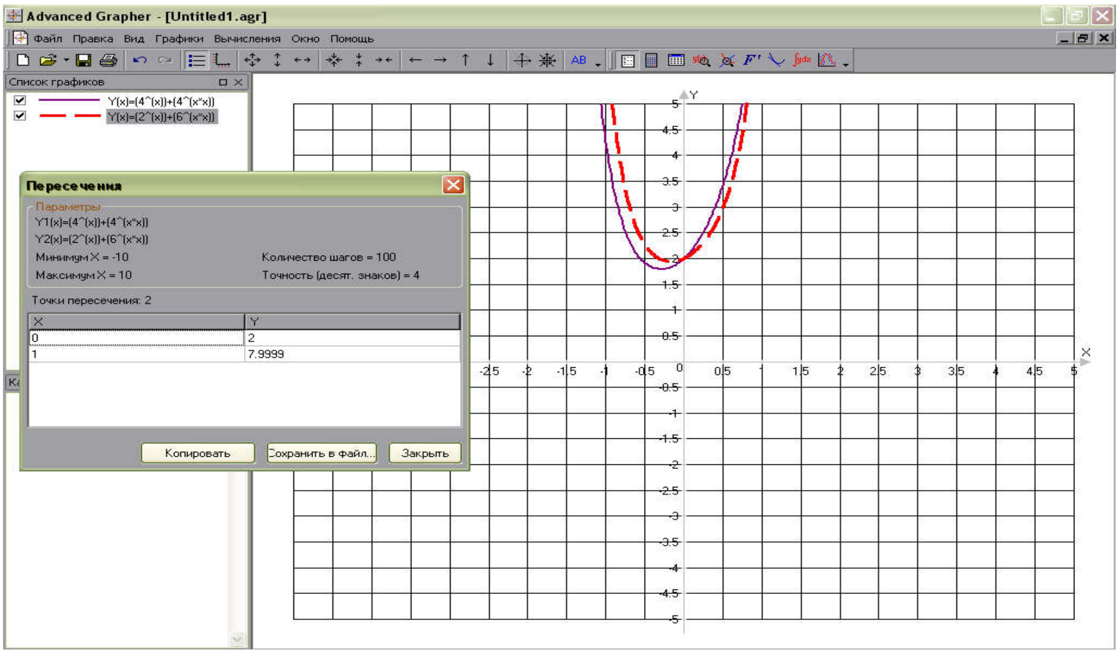


Рис. 18.7

5. Доведення нерівності

Задача. *Довести нерівність:* $2^n > 2n+1$ *для* $n \geq 3$.

Доведення. Розглянемо нерівність $2^x > 2x+1$ і покажемо що вона виконується для будь-якого $x \geq 3$.

Замінимо її рівносильною $2^x - 2x - 1 > 0$ і розглянемо функцію $\varphi(x) = 2^x - 2x - 1$.

Знайдемо її похідну $\varphi'(x) = 2^x \ln 2 - 2 = 2\left(2^{x-1}\ln 2 - 1\right) > 0$ для всіх $x \geq 3$.

Отже, функція $\varphi(x) = 2^x - 2x - 1$ зростає на проміжку $[3;+\infty)$. Знайдемо $\varphi(3) = 2^3 - 2 \cdot 3 - 1 = 1 > 0$. Тому на проміжку $[3;+\infty)$ виконується нерівність $2^x > 2x+1$. А тоді зрозуміло, що для будь-якого натурального $n \geq 3$ буде виконуватися нерівність $2^n > 2n+1$.

На рис. 18.8 представлено модель до задачі, створену в програмі Master Function.

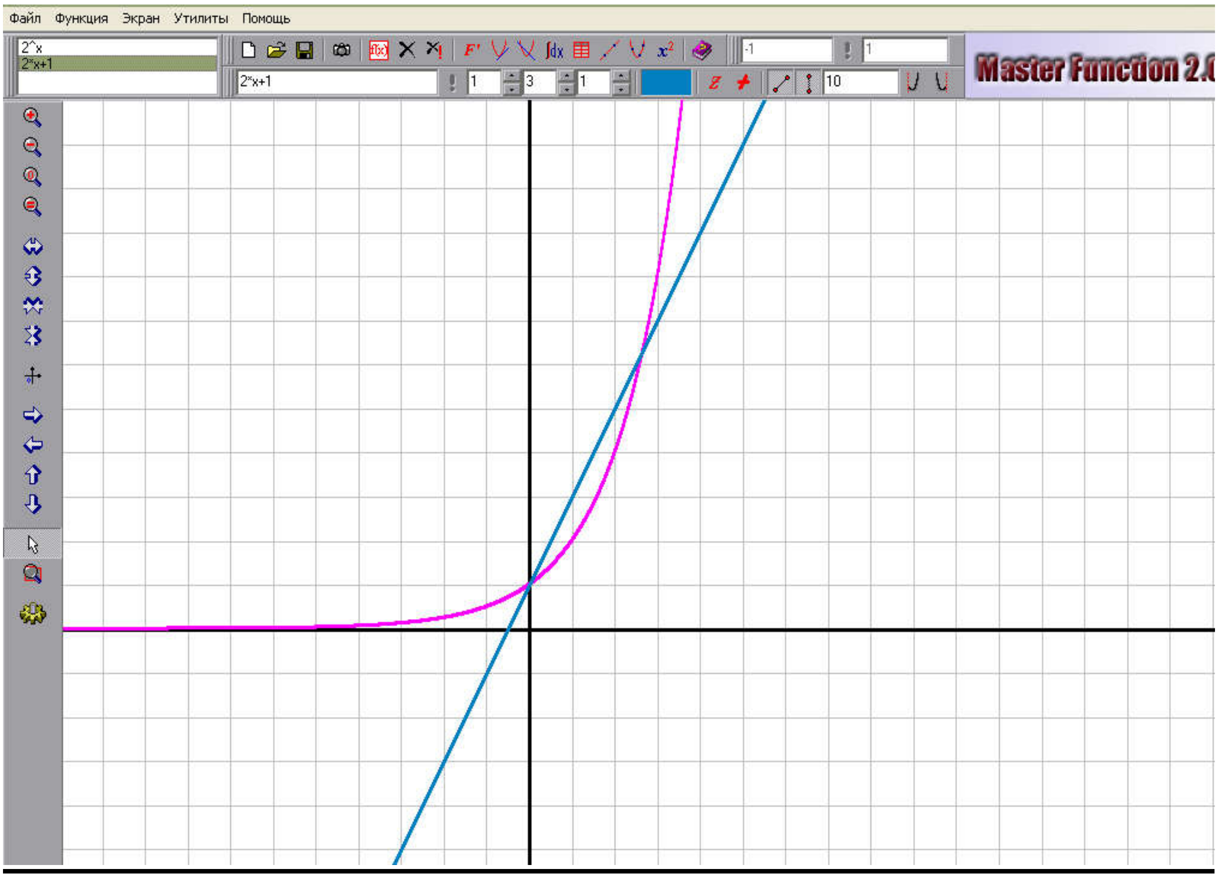


Рис. 18.8

6. Задача з фізики

Задача. *Посудина з вертикальною стінкою і висотою h стоїть на горизонтальній площині. На якій глибині треба розмісти отвір, щоб дальність вильоту води з отвору була найбільшою (швидкість рідини, що витікає, за законом Торрічеллі дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x –глибина розміщення отвору, g – прискорення вільного падіння)?*

Розв'язання. Позначимо через H відстань отвору в посудині від горизонтальної площини, а через L – відстань точки A від стінки посудини. Тоді $L = vt$, де t – час польоту води від отвору до площини (в точку A) (рис. 18.9).

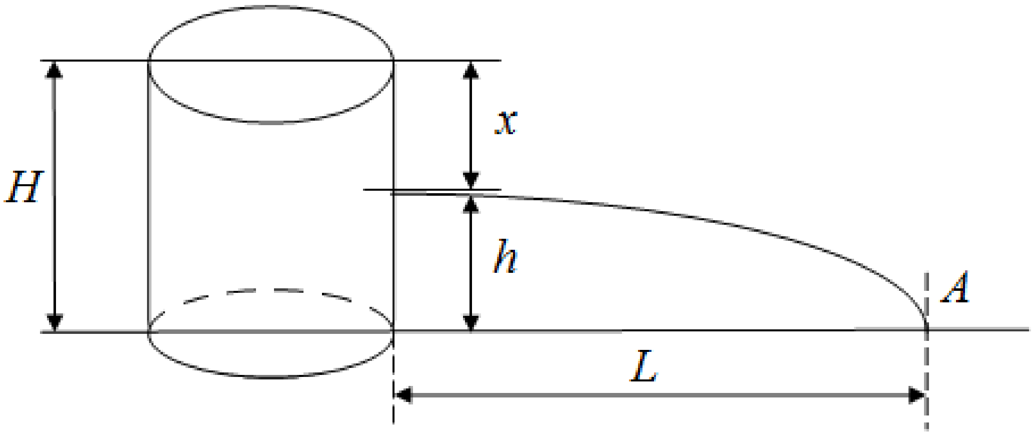


Рис. 18.9

З курсу фізики відомо, що $t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$, або $t=\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$. Тоді $L(x)=\sqrt{2gx}\cdot\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}=2\sqrt{x(h-x)}$, $0<x<h$. Знайдемо похідну: $L'(x)=\frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}$. Розв'язуючи рівняння $\frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}=0$, знаходимо стаціонарну точку $x=\frac{h}{2}$. Оскільки це єдина стаціонарна точка, то вона й буде шуканою.

На рис. 18.10 представлено модель до фізичної задачі, створену в програмі Microsoft Office PowerPoint.

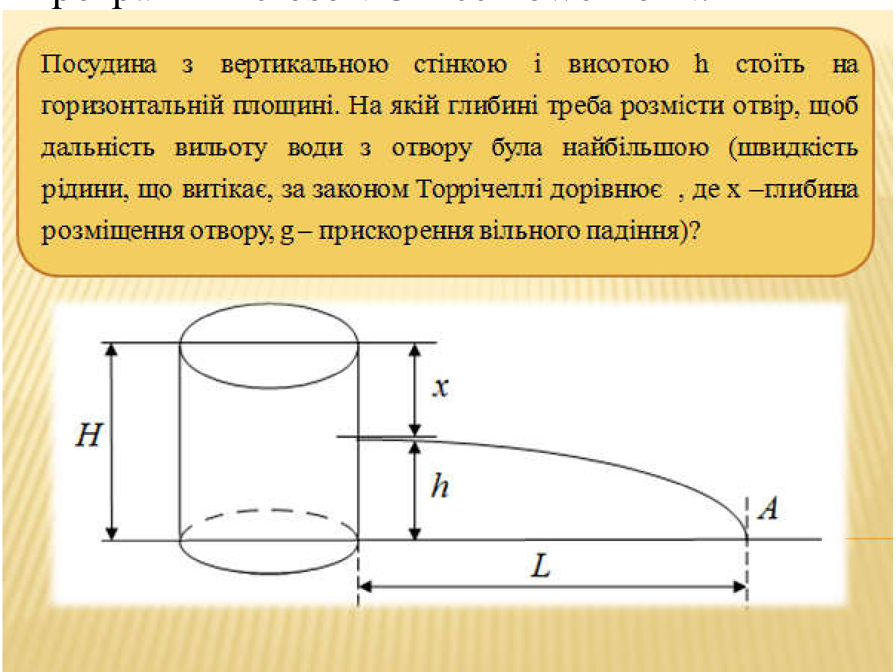


Рис.18.10

7. Доведення тотожності

Задача. *Довести тотожність:* $\operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}x$.

Доведення. Позначимо $f(x) = \operatorname{arctg}x,\ g(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}x$.

Обидві функції диференційовні. Знайдемо їх похідні:

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g'(x) = -\frac{-1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$. Отже, $f'(x) = g'(x)$.

Візьмемо тепер будь-яке дійсне число, наприклад, $x = 0$ і знайдемо значення обох функцій у цій точці: $f(0) = 0,\ g(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$.

Отже, $\forall x \in R$ виконується тотожність: $\operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}x$.

Графіки функцій $f(x) = \operatorname{arctg}x,\ g(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}x$ співпадають.

На рис. 18.11 представлено модель до завдання 7, створену в програмі Gran1.

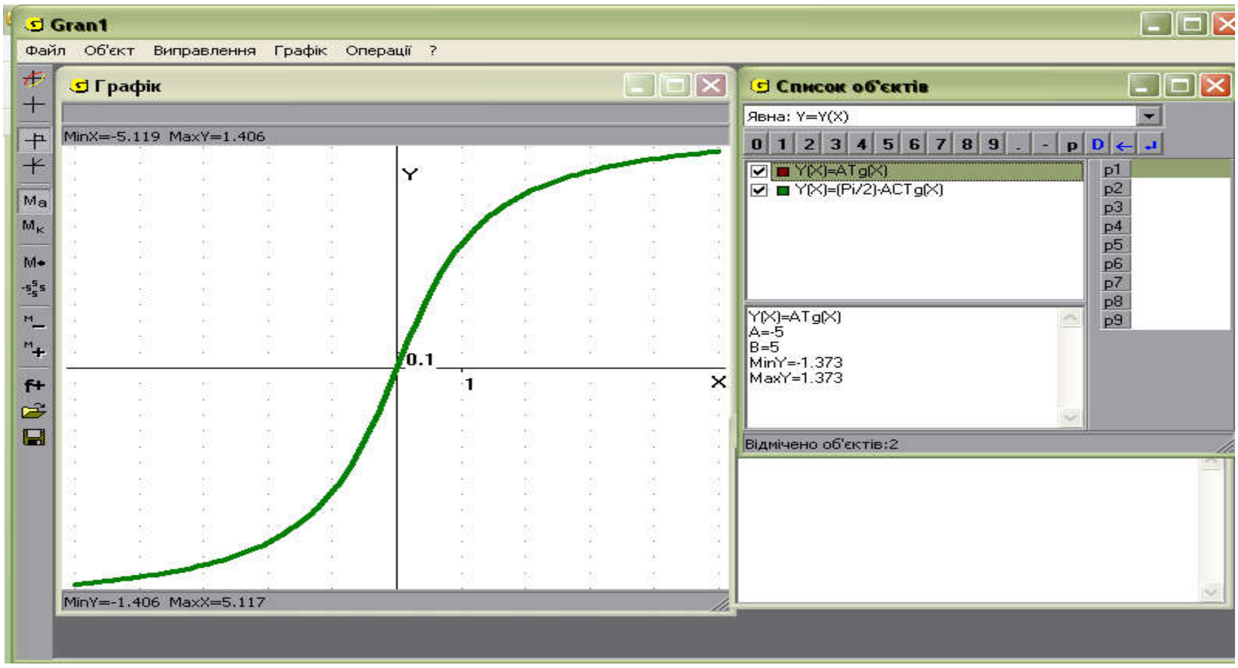


Рис. 18.11

8. Застосування похідної до розв'язування задачі з економіки (біології або хімії)

Завдання студентів полягає в наступному:

1) опрацювати літературу з теорії застосування похідної в природничих науках та оформити її у вигляді презентації в програмі Power Point.

2) оформити та представити одну задачу на застосування похідної до розв'язування задач з біології, економіки чи хімії (створити малюнок, анімацію, графік до задачі в графічному редакторі (на власний вибір)).

Творче завдання

Задачі з планіметрії

1. У рівнобедрений трикутник з основою a та кутом при основі α вписати паралелограм найбільшої площі так, щоби одна із його сторін лежала на основі, а інша на бічній стороні трикутника. Знайти довжини сторін паралелограма.

2. Дротом, довжина якого l м, необхідно обгородити клумбу, яка має форму кругового сектора. Яким має бути радіус круга, щоби площа клумби була найбільшою?

3. З корабля, який стоїть на якорі в 9 км від берега, потрібно послати гінця в табір, розміщений в 15 км від найближчої до корабля точки берега. Швидкість посильного під час руху пішки – 5 км/год, а на човні – 4 км/год. В якому місці він повинен пристати до берега, щоб потрапити в табір у найкоротший час?

4. Вартість залізничного перевезення вантажу на 1 км (AB) рівна k_1 грн., а автомобільного (PC) – k_2 грн. $(k_1 < k_2)$. В якому місці P потрібно почати будівництво шосе, щоби було можливо найдешевше доставляти вантаж із пункту A в пункт C? ($CB \perp AP$, P знаходиться між A і B), $\left|AB\right| = a$, $\left|BC\right| = b$.

5. Людині потрібно дістатися із пункту A, що знаходиться на одному березі річки, в пункт B на другому її березі. Знаючи, що швидкість руху по берегу в k разів більша за швидкість руху по воді, визначити під яким кутом людина повинна перетнути річку, щоби досягнути пункту B у найкоротший час. Ширина річки h, відстань між пунктами A і B (вздовж берега) дорівнює a.

6. Пункт B знаходиться на відстані 60 км від залізничної дороги. Відстань по залізниці від пункту A до найближчої до пункту B точки C дорівнює 285 км. На якій відстані від точки C потрібно побудувати станцію, від якої прокладуть шосе до пункту B, щоби затрачати найменший час на рух між пунктами A і B, якщо швидкість руху по залізниці становить 52 км/год, а швидкість руху по шосе – 20 км/год?

7. На сторінці книги друкований текст займає площу S; ширина верхнього та нижнього полів дорівнює a, а правого та лівого – b. При якому відношенні ширини до висоти тексту площа всієї сторінки буде найменшою?

8. Ділянку, площею $2400\ м^2$, потрібно розбити на дві ділянки прямокутної форми так, щою довжина огорожі була найменшою. Знайти розміри ділянок.

9. Статуя висотою 2 м стоїть на постаменті висотою 3 м. На якій відстані від основи постаменту повинен стояти спостерігач (його зріст до рівня очей становить 1,6 м), щоб бачити статую під найбільшим кутом?

10. Човен знаходиться на озері на відстані 3 км від найближчої точки A берега. Пасажир човна має намір досягти села B, що розташоване на березі на відстані 5 км від A (ділянка AB берега вважається прямолінійною). Човен рухається зі швидкістю 4 км/год, а пасажир, вийшовши з човна, може за годину пройти 5 км. До якої точки берега має дістатися човен, щоби пасажир досяг села у найкоротший термін?

11. Людина, яка гуляє в лісі, знаходиться в 5 км від прямолінійної дороги і в 13 км від будинку, що стоїть біля дороги. Швидкість його пересування в лісі 3 км/год, а по дорозі – 5 км/год. Знайти найменший час, за який він зможе прийти додому.

12. З усіх прямокутних трикутників із заданою гіпотенузою C знайти той, у якого найбільша площа.

13. З усіх прямокутних трикутників із заданою висотою h знайти той, що має найменшу площу.

14. З усіх трикутників із заданою площею S і заданою основою C знайти той, що має найменший периметр.

15. З усіх трикутників із заданими основою C і кутом γ при вершині знайти той, що має найбільшу бісектрису.

16. З усіх трикутників із заданими основою a і протилежним кутом α знайти той, що має найбільшу площу.

17. З усіх трикутників із заданими основою a і протилежним кутом α знайти той, що має найбільший периметр.

18. З усіх прямокутних трикутників, гіпотенузи яких дорівнюють 20 см, знайти той, що має найбільшу площу.

19. Яким повинен бути кут при вершині рівнобедреного трикутника, вписаного в дане коло, щоб його периметр був найбільшим?

20. Який із чотирикутників, вписаних в коло радіуса R, має найбільшу площу?

21. Із всіх прямокутників, що мають площу S, знайти той, у якого найменший периметр.

22. Знайти найменше значення суми трьох сторін прямокутника, площа якого дорівнює S.

23. У коло радіуса R вписано рівнобічну трапецію так, що центр кола лежить усередині трапеції. Одна з основ трапеції дорівнює $R\sqrt{3}$. Знайти бічну сторону трапеції так, щоб площа трапеції була найбільшою.

24. Сума довжин гіпотенузи і одного з катетів дорівнює l. Довести, що площа трикутника буде найбільшою, якщо довжина цього катета дорівнює половині довжини гіпотенузи.

25. Дві сторони паралелограма лежать на сторонах даного трикутника, а одна з його вершин належить трерій стороні. При яких умовах площа паралелограма буде найбільшою?

26. Бічні сторони і менша основа трапеції мають однакову довжину – 50 см. Знайти розмір її більшої основи, при якому площа трапеції була б найбільшою.

27. Знайти довжини сторін прямокутника найбільшої площі, вписаного в прямокутний трикутник зі сторонами 18 см, 24 см і 30 см (прямий кут – спільний для прямокутника і прямокутного трикутника).

28. У фігуру, обмежену лініями $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 6$ вписаний паралелограм найбільшої площі так, що дві його вершини лежать на прямій $x = 6$, а дві інші на параболах $y = x^2$ і $y = 2x^2$. Знайти цю площу.

29. Сума двох сторін трикутника дорівнює a, а кут між ними $30°$. Якими мають бути довжини сторін цього трикутника, щоб його площа була найбільшою?

30. В рівнобічній трапеції менша основа і бічна сторона дорівнюють a. Знайти більшу основу, щоб площа трапеції була найбільшою.

Задачі з стереометрії

1. Туристична палатка об’єму V має форму прямого конуса. Яким має бути відношення висоти конуса до радіуса його основи, щоб на палатку було витрачено найменшу кількість полотна?

2. Потрібно зробити конічний отвір з твірною, рівною 20 см. Якою має бути висота отвору, щоб її об’єм був найменшим?

3. Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють відповідно 2 м і 1 м. Потрібно вирубати з неї балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якого співпадала би з віссю колоди та об’єм якої був би найбільшим? Які мають бути розміри балки?

4. Із паперового круга вирізано сектор, а із залишеної частини склеєно конус. Який кут повинен мати вирізаний сектор, щоби об’єм конуса був найбільшим?

5. Рівнобедрений трикутник, вписаний в коло радіуса R, обертається навколо прямої, яка проходить через його вершину паралельно до основи. Якою має бути висота цього трикутника, щоб тіло, одержане в результаті його обертання, мало найбільший об’єм?

6. Потрібно виготовити відкритий циліндричний жолоб об’єму V. Вартість $1\,м^2$ матеріалу, із якого виготовляється дно жолобу, складає P_1 грн., а вартість $1\,м^2$ матеріалу, із якого виготовляються стінки жолобу, складає P_2 грн. При якому відношенні радіуса дна до висоти жолоба витрати на матеріал будуть мінімальними?

7. Із круглої колоди, діаметр якої d, потрібно вирізати балку прямокутного поперечного перерізу. Якими мають бути ширина та висота цього перерізу, щоб балка мала найбільший опір на прогин? Опір балки на прогин Q пропорційний добутку ширини x її поперечного перерізу та квадрату його висоти y, тобто $Q = kxy^2$, $k = \mathrm{const}$.

8. З прямокутного аркуша картону із сторонами 80 см та 50 см потрібно зробити коробку прямокутної форми, вирізавши по краях квадрати і загнувши утворені краї. Якої висоти має бути коробка, щоб її об’єм був найбільшим?

9. Діагональ бічної грані правильної чотирикутної призми дорівнює d. Знайти довжину ребра, при якій об’єм буде найбільшим.

10. З квадратного листа металу із стороною a потрібно виготовити відкриту зверху коробку, вирізавши по кутах квадрати і загнувши утворені краї. Якою має бути сторона основи коробки, щоб її об’єм був максимальним?

11. Знайти розміри відкритого бассейну з квадратним дном об’ємом $256\,м^3$ такого, щоб на облицювання його стін і дна було витрачено найменшу кількість матеріалу.

12. З усіх правильних паралелепіпедів, у яких сума довжин сторони основи і висоти дорівнює l, знайти той, у якого об’єм найбільший.

13. Якою має бути сторона основи правильної шестикутної призми заданного об’єму V, щоб її повна поверхня була найменшою?

14. Периметр рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює $2p$. Якої довжини мають бути його сторони, щоб об’єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо гіпотенузи, був найбільшим.

15. Бічна грань правильної трикутної піраміди має площу b^2 і з площиною основи утворює кут x. При якому значенні x об’єм піраміди буде найбільшим?

16. Площа бічної поверхні правильної трикутної піраміди дорівнює S. Знайти найбільший об’єм цієї піраміди.

17. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює l. Яким повинен бути кут її нахилу до основи, щоб піраміда мала найбільший об'єм?

18. Прямокутник, периметр якого дорівнює l, обертається навколо однієї із сторін. Якими мають бути розміри тіла обертання, щоб його об'єм був найбільшим?

19. Знайти радіус основи і висоту циліндра так, щоб його об'єм був найбільшим, якщо периметр осьового перерізу дорівнює l.

20. Площа поверхні кулі дорівнює 27π. Яка висота циліндра найбільшого об'єму, вписаного в цю кулю?

21. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, вписаного в кулю радіуса R.

22. У конус вписана трикутна піраміда, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник. Яким має бути кут при вершині цього трикутника, щоб об'єм піраміди був найбільшим, за умови, що об'єм конуса дорівнює V?

23. У кулю радіуса R вписано конус, що має найбільшу повну поверхню. Знайти кут між твірними осьового перерізу конуса.

24. Бічне ребро правильної трикутної піраміди має сталу довжину і утворює з площиною основи кут α. Знайти значення α, при якому об'єм піраміди буде найбільшим.

25. Довжина апофеми правильної шестикутної піраміди дорівнює l. Кут нахилу бічних граней до основи дорівнює x. При якому значенні x об'єм піраміди буде найбільшим?

26. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює p. Якими мають бути довжини його сторін, щоб об'єм фігури, одержаної обертанням трикутника навколо основи був найбільшим?

27. Конус описано навколо куба так, що чотири вершини куба лежать в площині основи конуса, а чотири інші вершини лежать на його бічній поверхні. Який найменший об’єм може мати такий конус, якщо ребро куба дорівнює a?

28. Прямокутна трапеція обертається навколо більшої основи. Менша основа дорівнює 5 см, більша бічна сторона дорівнює 15 см. Який найбільший об’єм може мати тіло обертання і при якій довжині більшої основи трапеції?

29. Трикутник, дві сторонни якого дорівнюють відповідно $\sqrt{21}$ і 4, обертається навколо третьої сторони. При якій довжині цієї сторони об’єм тіла обертання буде найбільшим?

30. Рівнобічна трапеція обертається навколо більшої основи. Менша основа трапеції дорівнює 2, бічна сторона дорівнює 3. При якій довжині більшої основи об’єм одержанного тіла обертання буде найбільшим?

Задачі з фізики

1. Посудина у формі півкулі радіуса R (см) наповнюється водою зі сталою швидкістю a (л/с). Визначити швидкість підвищення рівня води на висоті h (см) і показати, що вона обернено пропорційна площі вільної поверхні води.

2. Залежність барометричного тиску p від висоти задається функцією $\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \mathrm{ch}$, де p_0 – нормальний (на рівні моря) тиск. На рівні 5540 м тиск досягає половини нормального. Знайти швидкість зміни барометричного тиску в залежності від висоти.

3. Обчислити наближено збільшення об’єму циліндричної колони висотою $H = 4\ м$ і радіусом основи $R = 20\ см$ при накладанні на неї штукатурки товщиною 1 см.

4. Проектується канал, поперечний перетин якого є рівнобічна трапеція. Ширина каналу по дну дорівнює $2a$, а глибина води – h. Яким має бути кут нахилу α відкосів каналу, щоб його змочений периметр був найменшим?

5. Проектується канал зрошувальної системи з прямокутним перетином площі $4{,}5\ м^2$. Якими мають бути розміри перетину, щоб на облицювання стінок і дна пішла найменша кількість матеріалу? Яку найменшу кількість матеріалу потрібно витратити для облицювання 1 км каналу? Порівняти площу S облицювальної поверхні каналу такої ж довжини і такого ж поперечного перерізу при глибині каналу $x = 2{,}25$ м і ширині $y = 2$ м.

6. Переріз каналу, який підводить воду до турбіни, має форму прямокутника, змочений периметр якого дорівнює 12 м. Довжина каналу 250 м. Якими мають бути розміри перерізу, щоб об'ємводи в каналі при повному його заповненні був найбільшим? Яке найбільше значення об'єму води в каналі? Порівняти об'єм V води в каналі такої ж глибини і такого ж поперечного перерізу при глибині каналу $x = 4$ м і ширині $y = 4$ м.

7. Для того, щоб зменшити тертя рідини в стінки каналу, площа перерізу, який змочується водою, має бути вдвічі менша. Показати, що кращою формою відкритого прямокутного каналу з заданою площею поперечного перерізу є така, при якій ширина каналу вдвічі більша за висоту.

8. Опір на прогин балки прямокутного поперечного перерізу пропорційна добутку ширини цього перерізу на квадрат його висоти. Якими мають бути розміри перерізу балки, вирізаної з круглої колоди діаметром d, щоб її опір на згин був найбільшим, тобто щоб балка мала найбільшу міцність?

9. Балка прямокутного перерізу (x, y – розміри перерізу) з вільно спертими кінцями рівномірно навантажена по всій довжині. Стріла її прогину обернено пропорційна моменту інерції $l = \dfrac{xy^3}{12}$ перерізу балки. Визначити розміри перерізу балки при найменшій стрілі прогину (балка найбільшої жорсткості), якщо вона вирізана з круглої колоди діаметром d.

10. Колода довжиною 10 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють 50 см і 30 см. Потрібно вирізати з колоди балку з прямокутним перерізом, вісь якої співпадала б з віссю колоди і об'єм якої був би найбільшим. Якими мають бути розміри поперечного перерізу балки?

11. Яким має бути кут нахилу похилої площини до основи, щоб час зісковзування тіла по ній був найменшим, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu = 0,2$, а довжина основи стала?

12. Один моль ідеального газу перевели зі стану з тиском $p_1 = 100$ кПа та об'ємом $V_1 = 20$ л у стан із тиском $p_2 = 200$ кПа й об'ємом $V_2 = 5$ л. Визначити максимальну температуру газу в цьому процесі, якщо відомо, що його графіком у координатах $\left(p;V\right)$ є пряма лінія.

13. До джерела електричної енергії з ЕРС Е і внутрішнім опором r приєднаний резистор. При якому значенні його опору R потужність, що виділяється на ньому, буде максимальною?

14. Користуючись принципом Ферма (світло поширюється між двома точками шляхом, на подолання якого потрібно найменше часу), вивести другий закон заломлення.

15. Знайти мінімальну відстань між предметом та його дійсним зображенням у тонкій лінзі, фокусна відстань якої дорівнює F.

16. З точки, яка міститься на висоті H, кидають зі швидкістю V_0 камінь під деяким кутом до горизонту. Знайти максимально можливу дальність польоту каменя.

17. Циліндр заввишки 100 см наповнений водою. Де потрібно зробити отвір у стінці циліндра, щоб дальність польоту струменя води булла найбільшою?

18. Під час рівномірного переміщення тіла масою m горизонтальною поверхнею з коефіцієнтом тертя μ сила тяги напрямлена під кутом α до горизонту. При якому значенні кута сила тяги буде найменшою та чому вона дорівнює?

19. Одна частинка масою m стикається з іншою, нерухомою частинкою масою M. Яку частину механічної енергії перша частинка передає другій? При якому співвідношенні їхніх масс ця частина енергії буде максимальною? Систему частинок вважати замкненою, удар – центральним і абсолютно пружним.

20. У центрі квадратної кімнати площею $25\,м^2$ висить електролампочка. Вважаючи її точковим джерелом світла, визначити, на якій висоті над підлогою має бути електролампочка, щоб освітленість у кутках кімнати булла найбільшою?

21. Радіус зовнішньої обкладки сферичного конденсатора $R = 4$ см, а радіус внутрішньої обкладки r підбирають так, щоб конденсатор не пробивався при можливо більшій різниці потенціалів. Визначити цю максимальну різницю потенціалів, якщо напруга пробою повітря $U_0 = 3 \cdot 10^4$ В/см.

22. Драбина завдовжки 5 м приставлена до стіни таким чином, що верхній її кінець знаходиться на висоті 4 м. У деякий момент часу драбина починає падати, при цьому верхній кінець наближається до поверхні землі з постійним прискоренням 2 м/с. З якою швидкістю віддаляється від стіни нижній кінець драбини в той момент, коли верхній кінець знаходиться на висоті 2 м?

23. Дощова крапля падає під дією сили тяжіння, рівномірно випаровуючись так, що її маса m змінюється згідно із законом $m(t) = 1 - \frac{2}{3}t$. Через скільки часу після початку падіння кінетична енергія краплі буде найбільшою?

Доведення тотожностей

1) $3\left(\sin^4\beta+\cos^4\beta\right)-2\left(\sin^6\beta+\cos^6\beta\right)=1$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$;

3) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\frac{1}{8}(5+3\cos4\alpha)$;

4) $4\sin^3\alpha\cos3\alpha+4\cos^3\alpha\sin3\alpha=3\sin4\alpha$;

5) $\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2 2\alpha\sin^2\alpha=\sin\alpha\sin3\alpha$;

6) $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha$;

7) $\sin\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

8) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$;

9) $\arcsin x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$;

10) $\arccos x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ 0<x<1$;

11) $\arccos x=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ -1<x<0$;

12) $2\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2},\ -1<x<1$;

13) $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi,\ x\ge1$;

14) $2\arccos x=\arccos\left(2x^2-1\right),\ 0\le x\le1$;

15) $\sin^6x+\cos^6x=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(\cos^2x-\sin^2x\right)^2$;

16) $\cos^4x-\frac{1}{8}\cos4x=2\cos^2x-\frac{1}{2}\cos2x-\frac{5}{8}$.

Розв'язування рівнянь

1) $\ln x + x^2 + 2x = 3$;

2) $e^x + \frac{3}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 + 4x - 1 = 0$;

3) $\operatorname{arctg} x + \arcsin x = \frac{3}{4}\arccos(x-1)$;

4) $\sqrt{2x+2} + \sqrt{3x+1} + \sqrt{6x+3} = 7$;

5) $e^x + e^{-x} = 2$;

6) $\arcsin x + \operatorname{arctg} x - \arccos x = \frac{3}{4}\pi$;

7) $\ln x + \ln x^3 + e^x = e$;

8) $x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1} - x$;

9) $\frac{2x}{1+x^2} = x^2 - 2x + 2$;

10) $\ln x - x = -1 + (x-1)^2$;

11) $\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)\left(1 + \sin^2(x-2)\right) = 1 + 7\cos^2\left(x^2 - 4x + 4\right)$;

12) $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x+3}$;

13) $\left(x^3 + 4\right)\left(x^2 - 4x + 5\right) = 3x^2$;

14) $\frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}$;

15) $xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$;

16) $\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} = \sqrt{2x+3}$;

17) $\left(4^x + 2\right)(2 - x) = 6$;

18) $x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3$;

19) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$;

20) $2x+\cos x=\pi$;

21) $e^x-x=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$;

22) $3^x+3^{2-x}=3\cdot(1+\cos 2\pi x)$;

23) $8\cdot 2^x+2\cdot 4^x-7\cdot 3^x-3=0$;

24) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$;

25) $x^5-x^3+2x-28=0$;

26) $\sin 5x-2\cos x-8x=x^5-2$;

27) $5^{x+2}-12x=25$;

28) $x+\dfrac{1}{x}=2\sin\dfrac{\pi x}{2}$;

29) $3\cdot 2^{x+4}+6\cdot 7^{x+1}=3\cdot 5^{x+2}+15$.

Доведення нерівностей

1) $e^{2x}>2x-1$;

2) $2^x+2^{-x}>\dfrac{1}{2}x^2-1$;

3) $e^x>\dfrac{1}{3}x^2-1$ для $x\geq 0$**;**

4) $\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ для $x>0$;

5) $\sin x>x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}$ для $x>0$;

6) $\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{6}$ для $x>0$;

7) $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ для $x>0$;

8) $\ln(1+x)<\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x$ для $x>0$;

9) $e^{x}+e^{-x}>\frac{1}{12}x^{4}+\frac{1}{2}x^{2}+1$ для будь-якого x;

10) $\operatorname{tg}x<x+\frac{x^{3}}{3}$ для $-\frac{\pi}{2}<x<0$;

11) $2\sqrt{2x+1}>3-\frac{1}{2x+1}$ для $x>0$;

12) $1+2\ln x\le x^{2},\ x\ge 1$;

13) $\operatorname{tg}x<x+\frac{x^{3}}{3}$ для $-\frac{\pi}{2}<x<0$;

14) $e^{x}>1+\ln(1+x)$ для $x>0$;

15) $\sin x>x-\frac{2x^{2}}{\pi},0<x<\frac{\pi}{2}$;

16) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\sin x>x,0<x<\frac{\pi}{2}$;

17) $\sin 2x<\frac{2}{3x-x^{2}},0<x<\frac{\pi}{2}$;

18) $\frac{\sin x}{x}>1-\frac{x^{2}}{4},0<x<\frac{\pi}{2}$;

19) $x+\frac{x^{3}}{3}<\operatorname{tg}x,0<x<\frac{\pi}{2}$;

20) $\ln(1+x)<x,x\ge 0$;

21) $\sin x>x-\frac{2x^{2}}{\pi},x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

22) $x^{5}-2x^{3}+2x>20,x>2$;

23) $a^{3}+4>a^{2}+3a,a\ge 0$;

24) $2\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha>3\alpha$;

25) $\operatorname{tg}x>x+\frac{1}{3}x^{3},x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;

26) $\ln x>1-\frac{1}{x},x\in[1;+\infty)$.

ПРЕДМЕТНО-ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Список використаних джерел

1. Архимед. Сочинения / Перевод и вступ. статья И. Н. Веселовского, перевод арабских текстов Б. А. Розенфельда. М.: Физматгиз, 1962. 640 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.:Гос. изд-во физико-математической литературы. 1958. 436 с.
3. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олейник С. Н, Паниченко П. И. Задачи по математике. Начала анализа. М.: Наука, 1990. 608 с.
4. Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Учеб. пособие для студентов заочн. отделений физ.-мат. фак-тов désormais пединститутов. Ч.1. М.: Просвещение, 1971. 343 с.
5. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Учеб. пособие. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 352 с.
6. Глушков П. М., Шунда Н. М. Диференціальне числення функції однієї змінної. К.: Вища школа, 1991. 270 с.
7. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Лященко М. Я., Михалін Г. О., Шкіль М. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. К.: Вища школа, 2002. 462 с.
8. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966. 460 с.
9. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Иенсена. *Квант.* 2000. № 4. С. 7-10.
10. Коваленко В. Г., Гельфанд М. Б., Ушаков Р. П. Доведення нерівностей. Київ: Вища школа, 1979. 120 с.

11. Ковтонюк М. М. Лекції з математичного аналізу (Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної). Навчальний посібник для студентів вищих навчальних педагогічних закладів. Вінниця: ПП «Едельвейс і К», 2008. 342 с.

12. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.

13. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высшая школа, 1983. 175 с.

14. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Справочное пособие по математическому анализу. Ч.1. К.: Высшая школа, 1991. 696 с.

15. Ляшко С. И., Боярчук А. К., Александрович И. Н., Молодцов А. И., Номировский Д. А., Рублев Б. В. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Часть 1.: М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 432 с.

16. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 класу, проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018, 512 с.

17. Похідна та її застосування. URL: https://vseosvita.ua/library/rozrobka-proektu-pohidna-ta-ii-zastosuvanna-111612.html (дата звернення: 03.01.2022)

18. Путкова М. М. Застосування похідної при розв’язуванні прикладних задач. URL: https://www.slideshare.net/VovaLozik/ss-117730915 (дата звернення: 15.12.2021)

19. Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1. Минск: Вышейшая школа, 1990. 270 с.

20. Ушаков Р. П. Опуклі функції та нерівності. К.: Вища школа, Головне видавництво, 1986. 111 с.

21. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970. 800 с.

22. Шунда Н. М., Томусяк А. А. Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення. К.: Вища школа, 1993. 375 с.

23. Hass J., Weir M., Thomas G. University Calculus. Early transcendentals. Second Edition. Boston, 2012. 1083 p.

Електронне навчальне видання
комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Ковтонюк Мар‘яна Михайлівна
Клімішина Аліна Яківна
Леонова Іванна Миколаївна

Практикум з диференціального числення функції однієї змінної.

Навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр
спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика)

Підписано до видання 12.12.2022 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2022-091

Видавець та виготовлювач-
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114,
Тел.: +380 432 65-18-06
press.vntu.edu.ua
email: irvc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

формула тейлора