С. А. Кирилащук, З. В. Бондаренко, В. І. Клочко

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ЧАСТИНА 2.
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

С. А. Кирилащук, З. В. Бондаренко, В. І. Клочко

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЧАСТИНА 2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2022

УДК [512.64(075.8)
К50

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки (протокол № 9 від 28.04.2022 р.).

Рецензенти:
О. Д. Азаров, доктор технічних наук, професор
В. Х. Касіяненко, доктор фізико-математичних наук, професор
О. Б. Панасенко, кандидат фізико-математичних наук (ВДПУ)

Кирилащук, С. А.

К50 Вища математика. Частина 2. Індивідуальні завдання : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / Кирилащук С. А., Бондаренко З. В., Клочко В. І. – Вінниця : ВНТУ, 2022. – 129 с.

В посібнику розглянуто основні поняття теорії функцій, теорії границь і диференціального числення функції однієї змінної. Кожен розділ посібника містить необхідний теоретичний матеріал (визначення, формули, теореми) і велику кількість детально розібраних прикладів, а також задачі для індивідуального опрацювання.

Посібник розраховано на студентів технічних спеціальностей.

УДК [512.64(075.8)

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ПЗ – 1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇЇ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Теоретичні відомості

1. Якщо кожному значенню змінної $x \in X$ поставлено у відповідність за певним законом єдине значення змінної $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задано однозначну функцію y. В такому разі множину $D(x) = X$ називають **областю визначення функції**, x – аргументом або незалежною змінною, множину $E(y) = Y$ – множиною значень заданої функції.

2. Те, що y є функцією від x, символічно записують у вигляді рівності $y = f(x)$. Символ $f(x)$ означає закон відповідності змінних x та y, зокрема, він може означати сукупність операцій, дій, які потрібно виконати над змінною x, щоб отримати відповідне значення y.

3. Значення функції $y = f(x)$ за $x = a$ позначають $f(a)$ або $y(a)$.

4. Графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок площини xOy, координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$ (рис. 1).

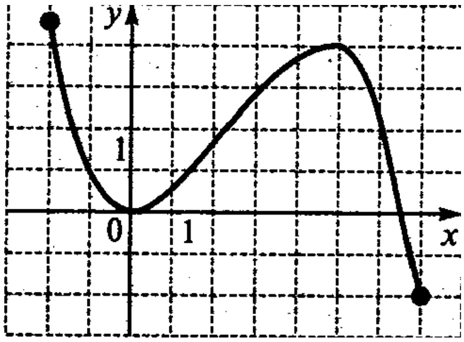


Рисунок 1

5. Функцію $f(x)$ називають **парною**, якщо для будь-якого $x \in D(x)$ виконується умова $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис. 2).

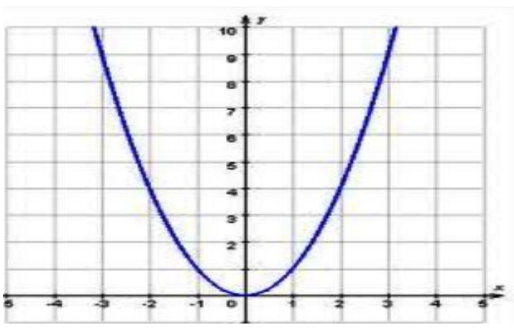


Рисунок 2

6. Функцію $f(x)$ називають **непарною,** якщо для будь-якого $x \in D(x)$ виконується умова $f(-x) = -f(x)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 3).

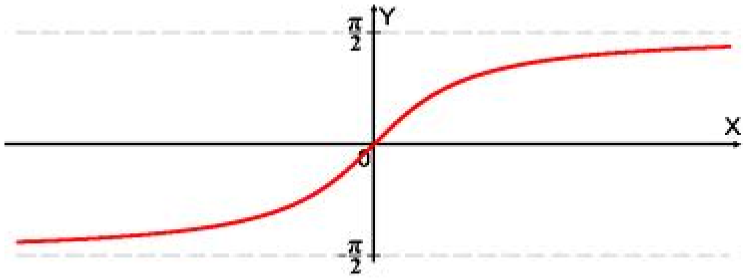


Рисунок 3

7. Якщо функція $f(x)$ не відповідає ознакам ні парної, ні непарної функції, то кажуть, що вона не має властивостей парності.

Приклад 1. Дослідити на парність функції:

а) $y = \frac{5\sin x^2}{\sqrt{x^4 - x^2 + 7}}$;
б) $y = \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+3}}$;
в) $y = 3tg^2(2x - 5)$.

Розв'язання.

а) Підставимо у формулу, яка задає функцію, вираз (-*x*) замість змінної x. Матимемо:

$$y(-x) = \frac{5\sin x^2}{\sqrt{(-x^4) - (-x^2) + 7}} = \frac{5\sin x^2}{\sqrt{x^4 - x^2 + 7}} = y(x).$$

Це означає, що задана функція парна (*див. п. 5*).

б) Аналогічно підставимо вираз (-*x*) замість змінної x. Матимемо:

$$y(-x) = \frac{-x}{\sqrt[4]{(-x)^2 + 3}} = \frac{-x}{\sqrt[4]{x^2 + 3}} = -y(x).$$

Це означає, що задана функція непарна (*див. п. 6*).

в) Діючи аналогічно, отримаємо:

$$y(-x) = 3tg^2(2 \cdot (-x) - 5) = 3tg^2(-2x - 5) = 3tg^2(2x + 5).$$

Легко бачити, що

$$y(-x) \neq y(x) \text{ і } y(-x) \neq -y(x),$$

тому задана функція не має властивостей парності (*див. п. 7*).

8. Якщо для будь-якого $x \epsilon D(x)$ виконується умова

$$f(x-T) = f(x+T) = f(x),$$

то функцію $f(x)$ називають **періодичною**, а число T – її періодом.

Приклад 2. Знайти період функції

$$y = sin\frac{\pi x - 3}{5}.$$

Розв'язання. Як відомо, функція

$$y = \sin x$$

періодична і має період 2π. Тому нам потрібно знайти таке число T, за якого буде виконуватись рівність

$$\frac{\pi \cdot (x+T) - 3}{5} = \frac{\pi x - 3}{5} + 2\pi.$$

Знайдемо T з отриманого рівняння:

$$\pi \cdot (x+T) - 3 = \pi x - 3 + 10\pi,$$
$$\pi x + T\pi - 3 = \pi x - 3 + 10\pi,$$
$$T\pi = 10\pi,$$
$$T = 10.$$

Отже, період заданої функції $T = 10$.

9. Якщо задано дві функції $y_1 = \varphi(x)$ та $y_2 = \psi(x)$, то функцію

$$y = f(x) = \psi(y_1) = \psi(\varphi(x))$$

називають **складеною функцією** аргумента x або композицією функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$. Позначають цей факт так: $f = \varphi \circ \psi$.

10. ***Зауваження.*** *Операція композиції функцій не підлягає переставному закону, тобто рівність* $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ *виконується не завжди.*

Приклад 3. Знайти композицію функцій:

$$\varphi(x) = 4x + 6 \quad \text{та} \quad \psi(x) = \sqrt{x} + 3cos^5\frac{x}{2}$$

у прямому та зворотному порядку.

Розв'язання. За означенням складеної функції маємо:

$$f_1(x) = \psi^\circ\varphi = \psi(\varphi(x)) = \sqrt{\psi(x)} + 3cos^5\frac{\varphi(x)}{2} = \sqrt{4x+6} + 3cos^5\frac{4x+6}{2} = \sqrt{4x+6} + 3cos^5(2x+3);$$

$$f_2(x) = \psi^\circ\varphi = \psi(\varphi(x)) =$$
$$4 \cdot \left(\sqrt{x} + 3cos^5\frac{x}{2}\right) + 6 =$$
$$= 6 + 4 \cdot \sqrt{x} + 12cos^5\frac{x}{2}.$$

Легко бачити, що $\varphi \circ \psi \neq \omega \circ \psi$.

11. Функцію $y = \varphi(x)$ називають **оберненою** до функції $y = f(x)$ на множині X, якщо для будь-яких $x_0 \in X$ та y_0 рівносильні рівності $y_0 = f(x_0)$ та $x_0 = \varphi(y_0)$. Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

Приклад 4. Знайти функцію, обернену до функції $y = 5 + 2^{3x-1}$.

Розв'язання. Виразимо у заданій формулі змінну x через y:

$$2^{3x-1} = y - 5,$$
$$3x - 1 = \log_2(y - 5),$$
$$3x = 1 + \log_2(y - 5),$$
$$3x = \log_2 2 + \log_2(y - 5),$$
$$3x = \log_2(2 \cdot (y - 5)),$$
$$x = \frac{1}{3}\log_2(2y - 10),$$
$$x = \log_2\sqrt[3]{2y - 10}.$$

Замінимо у цьому виразі змінну x на y і змінну y на x:

$$y = \log_2\sqrt[3]{2x - 10}.$$

Отримана формула задає шукану функцію, обернену до даної.

12. Функція, задана рівнянням $F(x, y) = 0$, що не розв'язане відносно залежної змінної y, називається **неявною** функцією (implicit function) (функцією, заданою неявно).

Наприклад, рівняння $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad y > 0$ (частина еліпса з півосями $a = 3$, $b = 2$, що знаходиться над віссю абсцис) визначає y як неявну функцію від x.

13. Кажуть, що змінна y як функція аргументу x задана **параметрично** (parametric function), якщо обидві змінні x та y є функціями третьої змінної t, $t \in [\alpha, \beta]$:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

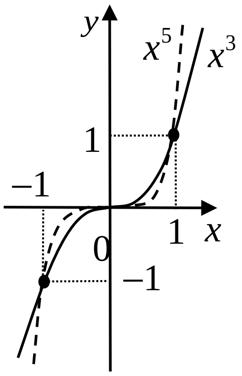
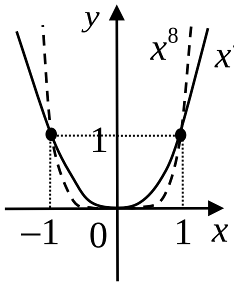
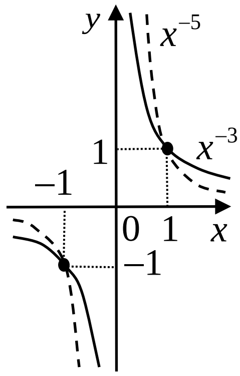
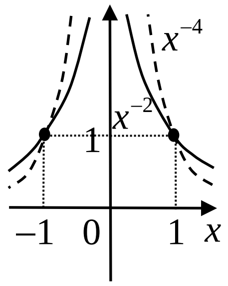
Наприклад, функцію $y = 2\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$ (відповідає частині еліпса з півосями $a = 3$, $b = 2$, що знаходиться над віссю абсцис) можна задати параметрично:

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}, \ 0 \le t \le \pi .$$

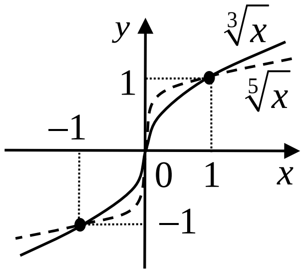
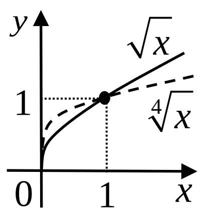
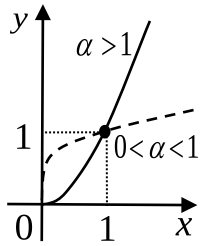
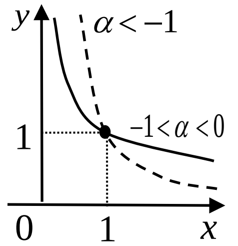
Досить часто параметричний спосіб подання функції використовують, коли її важко (неможливо) подати у вигляді $y = f\left(x\right)$.

14. До **основних елементарних функцій** належать:

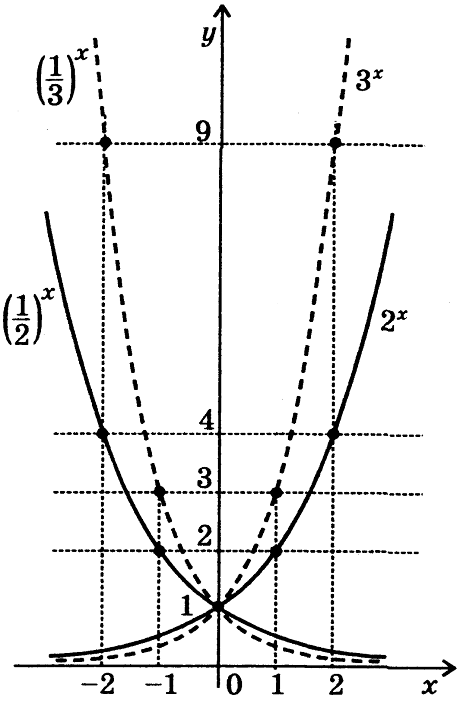
1) лінійна функція $y = kx + b$, де k і b – сталі;

$y = x^n, \quad n \in N$		$y = x^{-n}, \quad n \in N$	
n непарне	n парне	n непарне	n парне
			
$x \in R, y \in R.$	$x \in R, y \ge 0.$	$x \ne 0, y \ne 0.$	$x \ne 0, y > 0.$

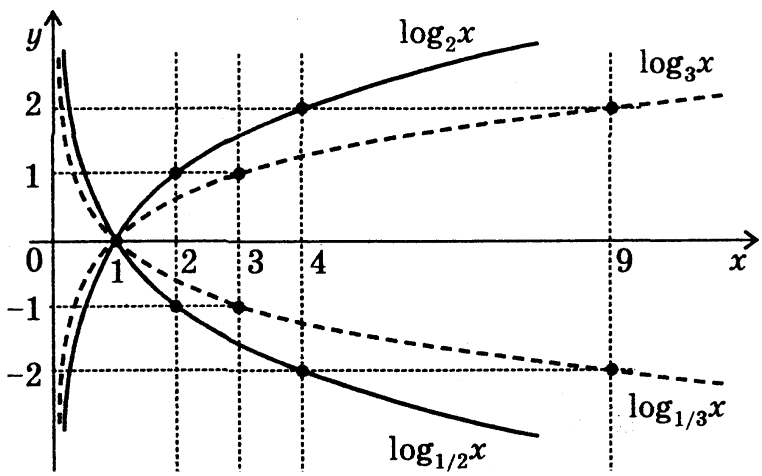
2) степенева функція $y = x^n$, де $n \neq 0$ – стала;

$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N$		$y = x^{\alpha}, \quad \alpha \in R$	
n непарне	n парне	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
			
$x \in R, y \in R.$	$x \in R, y \ge 0.$	$x \ge 0, y \ge 0.$	$x > 0, y > 0.$

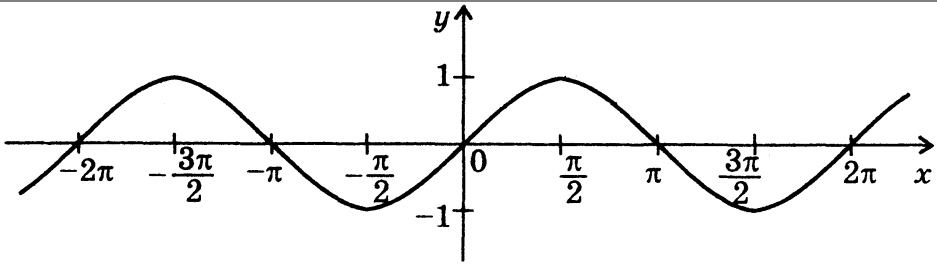
3) показникова функція $y = a^x$, де a – стала, $a > 0$, $a \neq 1$;

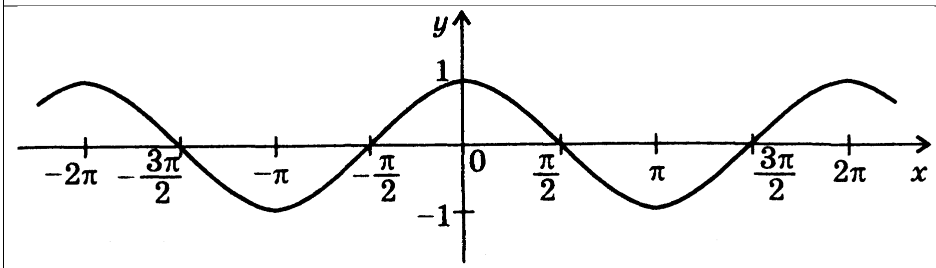
<table>
<tr><td colspan="2">$y = a^x, \quad a > 0$
(за $a = 1$ вироджується в $y = 1$)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1 область визначення $x \in R$;
2 область значень $y > 0$;
3 зростає за $a > 1$;
4 спадає за $0 < a < 1$</td></tr>
</table>

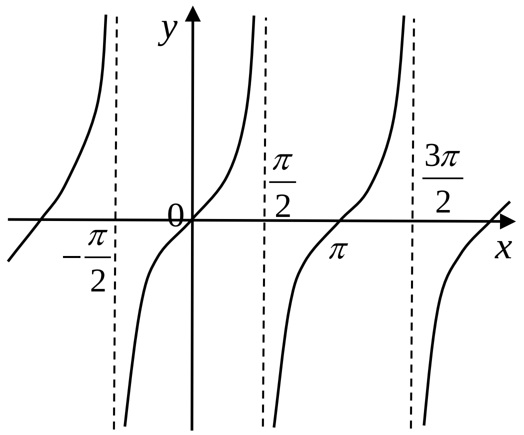
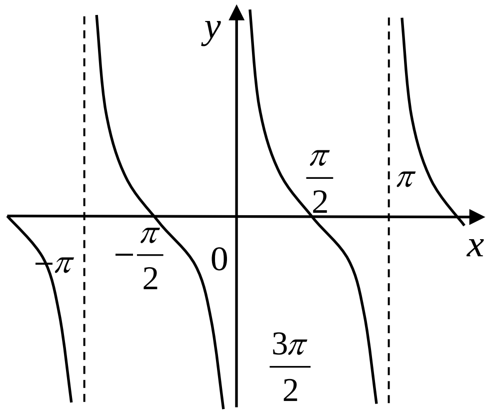
4) логарифмічна функція $y = \log_{2a} x$, де a – стала, $a > 0$, $a \neq 1$;

<table>
<tr><td colspan="2">$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1 обл. визначення $x > 0$;
2 обл. значень $y \in R$;
3 зростає за $a > 1$;
4 спадає за $0 < a < 1$.</td></tr>
</table>

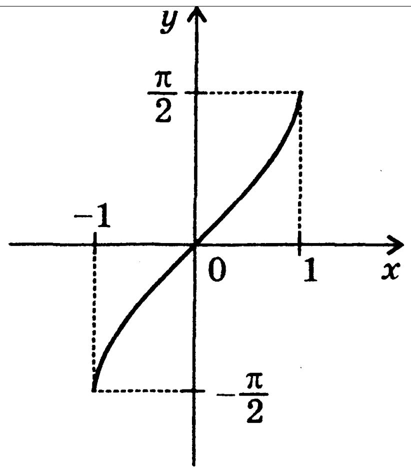
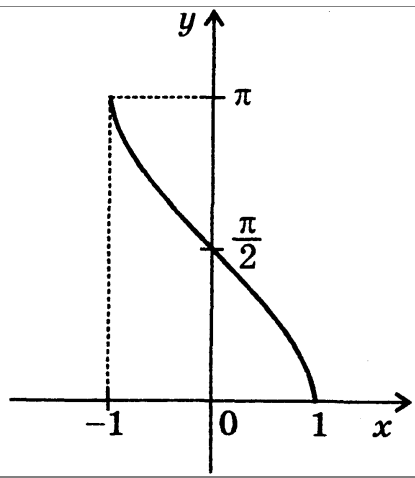
5) тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$;

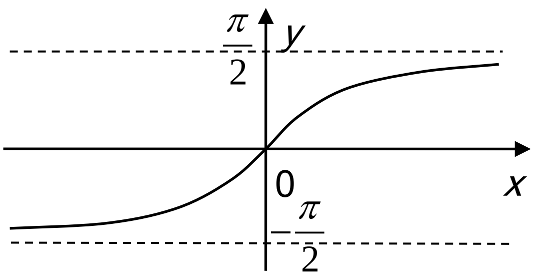
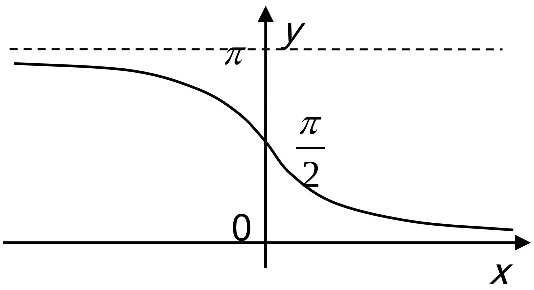
<table>
<tr><td>$y = \sin x$</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>1 область визначення $x \in R$;
2 область значень $y \in [-1;1]$;
3 період $T = 2\pi$;
4 функція є непарною;
5 зростає за $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$;
6 спадає за $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$y = \cos x$</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>1 область визначення $x \in R$;
2 область значень $y \in [-1;1]$;
3 період $T = 2\pi$;
4 функція є парною;
5 зростає за $x \in (-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k), k \in Z$;
6 спадає за $x \in (0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z$.</td></tr>
</table>

$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
	
1 область визначення $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k, \quad k \in Z$; 2 область значень $y \in R$; 3 період $T = \pi$ 4 функція є непарною; 5 зростає при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$.	1 область визначення $x \neq 0 + \pi \cdot k, \quad k \in Z$; 2 область значень $y \in R$; 3 період $T = \pi$; 4 функція є непарною; 5 спадає при $x \in (0 + \pi k; \pi + \pi k), k \in Z$.

6) обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\ x$, $arcctg\ x$.

$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
	
1 область визначення $x \in [-1;1]$; 2 область значень $y \in [-\pi/2; \pi/2]$; 3 функція є непарною; 4 функція є зростаючою.	1 область визначення $x \in [-1;1]$; 2 область значень $y \in [0; \pi]$; 3 функція є спадною.

<table>
<tr><td>$y = \operatorname{arctg} x$</td><td>$y = \operatorname{arcctg} x$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1 область визначення $x \in R$
2 область значень
$y \in [-\pi/2; \pi/2]$;
3 функція є непарною;
4 функція є зростаючою.</td><td>1 область визначення $x \in R$;
2 область значень
$y \in [0; \pi]$;
3 функція є спадною.</td></tr>
</table>

14. ***Зауваження.*** *Властивості і графіки основних елементарних функцій відомі нам з шкільного курсу математики.*

15. Функції, які можна отримати, виконавши скінченну кількість операцій додавання, віднімання, множення, ділення та композиції основних елементарних функцій, утворюють клас елементарних функцій.

16. Методом геометричних перетворень графіка функцій $y = f(x)$ можна побудувати графіки таких функцій (в усіх формулах цього пункту a і k – сталі, $a > 0,\ k > 1$):

1) $y = f(x + a)$ – паралельний перенос графіка $y = f(x)$ вздовж осі Ox на a одиниць ліворуч;

2) $y = f(x - a)$ – паралельний перенос графіка $y = f(x)$ вздовж осі Ox на a одиниць праворуч;

3) $y = f(x) + a$ – паралельний перенос графіка $y = f(x)$ вздовж осі Ox на a одиниць вгору;

4) $y = f(x) - a$ – паралельний перенос графіка $y = f(x)$ вздовж осі Ox на a одиниць вниз;

5) $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ – розтяг графіка $y = f(x)$ від осі Oy в k разів;

6) $y = f(kx)$ – стиск графіка $y = f(x)$ до осі Oy в k разів;

7) $y = -f(x)$ – осьова симетрія графіка $y = f(x)$ відносно осі Ox;

$y = f(-x)$ – осьова симетрія графіка $y = f(x)$ відносно осі Oy ;

8) $y = kf(x)$ – розтяг графіка $y = f(x)$ від осі Ox в k разів;

9) $y = \frac{f(x)}{k}$ – стиск графіка $y = f(x)$ до осі Ox в k разів.

Приклад 5. Виходячи з відомого графіка функції $y = \sin x$, побудувати методом геометричних перетворень графік фунції

$$y = -2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + 5.$$

Розв’язання. Побудуємо шуканий графік (рис. 4), послідновно побудувавши графіки таких функцій:

1) $y = \sin x$;

2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ отримаємо, виконавши паралельний перенос графіка 1) вздовж осі Ox на $\frac{\pi}{4}$ одиниці праворуч (*див. п. 15(2)*);

3) $y = \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ – розтяг графіка 2) вздовж осі Ox в 3 рази (*див. п. 15(5)*);

4) $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ – розтяг графіка 3) вздовж осі Oy в 2 рази (*див. п. 15(8)*);

5) $y = -2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) -$ осьову симетрію графіка 4) відносно осі Ox (*див. п. 15(7)*);

6) $y = -2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + 5 -$ паралельний перенос графіка 5) вздовж осі Oy на 5 одиниць вгору (*див. п. 15(3)*).

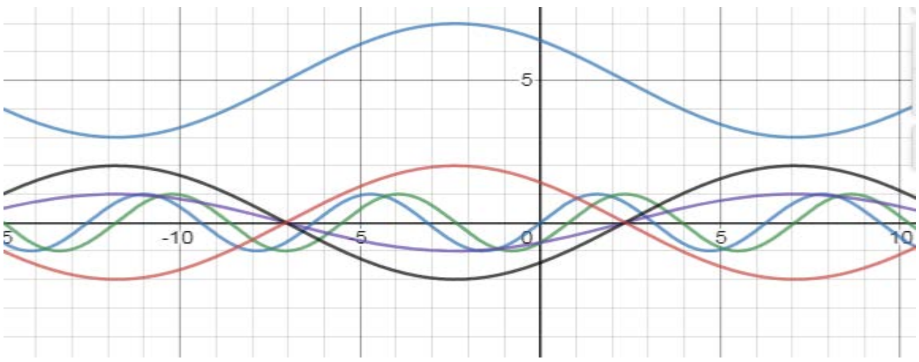


Рисунок 4

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Знайти область визначення функції:

а) $y = \frac{x\ \ 2}{2x\ \ 1}$; б) $y = \sqrt{1 - 2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}$;

в) $y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$; г) $y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;

д) $y = \frac{x-2}{\cos 2x}$; е) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}$;

ж) $y = \frac{\lg x - 5}{\ln(3-2x)}$; и) $y = \sqrt[4]{9 - x^2} + \sqrt{2x - 6}$.

Вказівка: знайти множину таких значень аргумента x, за яких вираз, що задає функцію, має зміст.

Відповідь:

а) $D(x) = (-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5;\ +\infty)$ б) $D(x) = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$;

в) $D(x) = (-1; 1) \cup (1;\ +\infty)$; г) $D(x) = [0; 4]$;

д) $D(x) = R \setminus \frac{\pi}{4} \cdot (2n+1), де\ n \in Z$; е) $D(x) = [0; 2)$;
ж) $D(x) = \emptyset$; и) $D(x) = \{3\}$.

№ 2. Дослідити на парність функції:
а) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x$; б) $y = (2^x + 2^{-x}) \cdot x$;
в) $y = |x| - 5e^{x^2}$; г) $y = \sqrt{x^2 - 5x}$;
д) $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 7$; е) $y = tg\sqrt[5]{2x^4} - x^6$.
Відповідь: а), б) – непарні; в), е) – парні;
г), д) – не мають властивостей парності.

№ 3. Знайти період функції:
а) $y = \sin(2x+3)$; б) $y = 2tg\frac{x}{3}$;
в) $y = x + 2\cos(3x-2)$; г) $y = \left\{\frac{x}{5}\right\}$.
Вказівка: г) *символ* $\{x\}$ *позначає дробову частину числа* x, *тобто різницю числа* x *та його цілої частини (найбільшого цілого числа, яке не перевищує* x*).*
Відповідь: а) $T = \pi$; б) $T = 3\pi$; в) неперіодична ; г) $T = 5$.

№ 4. Знайти композицію заданих функцій у прямому та зворотному порядку:
а) $\varphi(x) = \frac{3}{2x-7}$ та $\psi(x) = x^2 - tg\frac{1}{x}$;
б) $\varphi(x) = \sin\frac{3x^2-4}{2}$ та $\psi(x) = 2(x-1)$;
в) $\varphi(x) = 2x + \sqrt{x} - 5$ та $\psi(x) = \frac{3\ln x}{4x}$.
Відповідь:
а) $\varphi \circ \psi = \frac{3}{2x^2 - 2tg\frac{1}{x} - 7}$, $\varphi \circ \psi = \frac{9}{(2x-7)^2} - tg\frac{2x-7}{3}$;
б) $\varphi \circ \psi = \sin(6x^2 - 12x + 4)$, $\varphi \circ \psi = 2\sin\frac{3x^2-4}{2} - 2$;
в) $\varphi \circ \psi = \frac{3\ln x\sqrt{3\ln x} - 10x}{2x}$, $\varphi \circ \psi = \frac{3\ln(2x+\sqrt{x}-5)}{8x+4\sqrt{x}-20}$.

№ 5. Знайти функцію, обернену до заданої:
а) $y = 3 + \lg(2x-5)$; б) $y = 1 - (3x-2)^3$.
Відповідь: а) $y = \frac{10^{x-3}+5}{2}$; б) $y = \frac{2+\sqrt[2]{1-x}}{3}$.

№ 6. Виходячи з відомого графіка функції $y = \varphi(x)$, за допомогою методу геометричних перетворень побудувати графік функції $y = f(x)$, якщо:
а) $\varphi(x) = \cos x$, $f(x) = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;
б) $\varphi(x) = 2^x$, $f(x) = -3 \cdot \sqrt[3]{2^{1-x}} - 5$;
в) $\varphi(x) = x^2$, $f(x) = \frac{4x^2-20x+33}{-2}$;
г) $\varphi(x) = \ln x$, $f(x) = 2\ln(3-2x)$.

ПЗ – 2. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦЯ ФУНЦІЇ. ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ. ВИЗНАЧНІ ГРАНИЦІ. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ТА НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ФУНКЦІЇ. ПОРІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ

Теоретичні відомості

1. Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність за певним законом єдине дійсне число x_n , то кажуть, що задано **числову послідовність** $\{x_n\}$. Окремі числа послідовності $\{x_n\}$ називають членами послідовності.

2. Число a називають **границею числової послідовності** $\{\boldsymbol{x_n}\}$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке натуральне число n_0, що для будь-якого $n > n_0$ виконується нерівність:

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

3. Якщо a – границя послідовності $\{x_n\}$, то кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ **збіжна** до a, і записують цей факт так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

4. Число A називають **границею функції** $\boldsymbol{f(x)}$ за $x,$ що прямує до a, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, збіжної до a, відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$, збіжна до A. Записують $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

5. Число А називають **границею функції** $\boldsymbol{f(x)}$ **на нескінченності**, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число М, що з нерівності $x > M$ $(x < M)$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записують $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A\right)$.

6. **Теореми про границі.**

Якщо існують $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то:

$$\lim_{x\to a}\big(c\cdot f(x)\big) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x), \ \ (c – \text{стала}); \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x); \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x); \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \quad (\text{при} \lim_{x\to a} g(x) \neq 0) \qquad (4)$$

7. Деякі важливі, часто використовувані границі мають спеціальні назви:

а) **перша визначна границя** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ для виразів з тригонометричними функціями;

б) **друга визначна границя** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Зауваження. За допомогою другої особливої границі можна досліджувати невизначеності

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right];$$

в**) третя визначна границя** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$

г) **четверта визначна границя** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

8. Функцію $f(x)$ називають **нескінченно великою** за x , що прямує до a, якщо для будь-якого як завгодно великого числа $M>0$ знайдеться таке число $\delta>0$, що з нерівності $|x-a|<\delta$ випливає нерівність $|f(x)|>M$. Записують $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

9. Функцію $f(x)$ називають **нескінченно малою** за x прямує до a, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

10. Функція $f(x)$ нескінченно велика за x прямує до a, тоді і тільки тоді, коли функція $\frac{1}{f(x)}$ нескінченно мала за x прямує до a.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}$, якщо:

а) $x_0=4$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$.

Розв'язанн:

а) Скориставшись теоремами про границі (*див. п. 6*), підставимо у функцію замість змінної x її граничне значення $x=4$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}=\frac{2\cdot 4^2+4-6}{4^2+3\cdot 4+2}=\frac{32+4-6}{16+12-2}=\frac{30}{30}=1.$$

б) Безпосередня підстановка граничного значення $x=-2$ приводить нас до невизначеності виду $\langle\frac{0}{0}\rangle$:

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}=\frac{2\cdot(-2)^2-2-6}{(-2)^2+3\cdot(-2)+2}=\frac{8-2-6}{4-6+2}=\langle\frac{0}{0}\rangle.$$

Щоб розкрити цю невизначеність, розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу і скоротимо дріб на множник $(x+2)$ (цей множник обов'язково увійде в розклад на множники многочленів у чисельнику і знаменнику дробу, бо очевидно, що $x=-2$ є коренем обох цих многочленів). Потрібно зауважити, що таке скорочення можливе, оскільки $x+2\neq0$, хоча й $(x+2)\to0$. Після скорочення знову підставимо замість змінної x її граничне значення $x=-2$:

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(2x-3)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to-2}\frac{2x-3}{x+1}=$$

$$=\frac{2\cdot(-2)-3}{-2+1}=\frac{-4-3}{-1}=\frac{-7}{-1}=7.$$

в) За $x\to\infty$ матимемо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Щоб розкрити цю невизначеність, потрібно почленно поділити чисельник і знаменник дробу на x у найвищому степені (в нашому випадку на x^2). Оскільки функції x та x^2 нескінченно великі за $x\to\infty$, то $\frac{1}{x}$ та $\frac{1}{x^2}$ нескінченно малі за $x\to\infty$ (*див. п. 10*), тобто:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad (5)$$

(*див. п. 9*). Скориставшись теоремами про границі (*див. п. 6*), рівностями (5) і наведеними вище міркуваннями, матимемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}=\frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-6\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1+3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{2+0-6\cdot0}{1+3\cdot0+2\cdot0}=\frac{2+0-0}{1+0+0}=\frac{2}{1}=2$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення $x=6$ приводить до невизначеності виду $\langle\frac{0}{0}\rangle$:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}}=\frac{6-6}{\sqrt{6-4}-\sqrt{8-6}}=\frac{0}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\langle\frac{0}{0}\rangle.$$

Щоб розкрити цю невизначеність, домножимимо чисельнк і знаменник дробу на вираз, спряжений до знаменника, тобто на $\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$. Після цього, скориставшись формулою різниці квадратів, спростимо отриманий вираз:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{8-x}\right)^2}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{x-4-(8-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{2x-12}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{2(x-6)}.$$

Скоротимо отриманий дріб на множник $(x-6)$. Потрібно зауважити, що таке скорочення можливе, оскільки $x-6\neq 0$, хоча й $(x-6)\to 0$.

Після скорочення знову підставимо замість змінної x її граничне значення $x=6$:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{2(x-6)}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}}{2}=\frac{\sqrt{6-4}+\sqrt{8-6}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}}=\sqrt{2}.$

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}$ за першою визначною границею.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення $x=0$ приводить нас до невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}=\frac{1-\cos(8\cdot 0)}{0\cdot actg(2\cdot 0)}=\frac{1-\cos 0}{0\cdot actg0}=\frac{1-1}{0}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Щоб розкрити цю невизначеність, скористаємося першою визначною границею (*див. п. 7(а)*). Застосувавши відому з тригонометрії формулу

$$1-\cos 2a = 2sin^2 a,$$

перетворимо заданий вираз:

$$\frac{1-\cos 8x}{x \cdot arctg2x} = \frac{1-\cos(2\cdot 4x)}{x \cdot arctg2x} = \frac{2\sin^2 4x}{x \cdot arctg2x} =$$
$$= \frac{\sin 4x}{x} \cdot \frac{\sin 4x}{1} \cdot \frac{2}{actg2x} = \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4x \cdot \frac{2}{actg2x} =$$
$$= \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{32x}{actg2x}. \qquad (6)$$

За першою визначною границею:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1\ . \qquad (7)$$

Скориставшись рівностями (6) і (7) та теоремами про границі (*див. п. 6*), матимемо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 8x}{x \cdot arctg2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{32x}{actg2x} \right) =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{32x}{actg2x} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{32x}{actg2x} =$$
$$= 32 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{arctg2x}\ . \qquad (8)$$

Зробимо заміну $arctg2x = y$, тоді $2x = tg\ y$, $x = 0{,}5 \cdot tg \cdot y$.

Очевидно, що $y \to 0$ за $x \to 0$. Переходячи в рівності (8) до змінної y і скориставшись теоремами про границі (*див. п. 6*), матимемо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 8x}{x \cdot arctg2x} = 32 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{arctg2x} = \lim_{y\to 0} \frac{0{,}5 \cdot tg\ y}{y} =$$
$$= 32 \cdot 0{,}5 \lim_{y\to 0} \frac{tg\ y}{y} = 16 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{tg\ y}{y}. \qquad (9)$$

За відомою з тригонометрії формулою $tg\ y = \frac{\sin y}{\cos y}$ запишемо

$$\frac{tg\ y}{y} = \frac{\sin y}{y \cdot \cos y} = \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y}. \qquad (10)$$

За першою визначною границею:

$$\lim_{y\to 0} \frac{siny}{y} = 1. \qquad (11)$$

Скориставшись рівностями (9) – (11) і теоремами про границі, матимемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x} = 16\cdot\lim_{y\to 0}\frac{tg\,y}{y} = 16\cdot\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{\cos y}\right) =$$
$$= 16\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = 16\cdot 1\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = 16\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}.$$

Підставимо замість змінної y її граничне значення $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x} = 16\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = 16\cdot\frac{1}{\cos y} = 16\cdot\frac{1}{1} = 16.$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin x/2}{(\pi-x)^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ за першою визначною границею.

Для того щоб скористатися першою визначною границею, потрібно виконати таку заміну змінної x, щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад $\pi - x = y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2} = \left|\begin{array}{l}\pi - x = y\\ x = \pi - y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2} = \frac{1}{8}.$$

Приклад 5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi\cdot x}{2}$ за першою визначною границею.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{l}1-x = y\\ x = 1-y\\ x\to 1\\ y\to 0\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{tg}\frac{\pi y}{2}} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi y}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x+1}{8x+5}\right)^{x-1}$.

Розв'язання. За $x\to\infty$ основа степеня $\left(\frac{8x+1}{8x+5}\right)$ прямує до одиниці. Дійсно (*див. п. 1, в*):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x+1}{8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{1}{x}}{8+\frac{5}{x}}=\frac{8+0}{8+0}=\frac{8}{8}=1\,.$$

За $x\to\infty$ показник степеня $(x-1)$ теж прямує до нескінченності. Отже, за умовою задачі, маємо невизначеність виду $\langle 1^{\infty}\rangle$. Щоб розкрити цю невизначеність, скористаємося другою визначною границею (*див. п. 7(б)*). Для цього подамо основу степеня у вигляді суми одиниці і деякої, нескінченно малої за $x\to\infty$ функції $\alpha(x)$, а показник степеня – у вигляді $\frac{1}{\alpha(x)}$:

$$\left(\frac{8x+1}{8x+5}\right)^{x-1}=\left(\frac{8x+5-4}{8x+5}\right)^{x-1}=\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{x-1}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{\frac{8x+5}{-4}}\right)^{\frac{-4\cdot(x-1)}{8x+5}}=\left(\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{\frac{8x+5}{-4}}\right)^{\frac{-4x+4}{8x+5}}. \qquad (12)$$

За другою визначною границею:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{\frac{8x+5}{-4}}=e, \qquad (13)$$

до того ж (*див. прилад 1(в)*):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{4}{x}}{8+\frac{5}{x}}=\frac{-4+0}{8+0}=\frac{-4}{8}=-0{,}5. \qquad (14)$$

Скориставшись рівностями (12) – (14), матимемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x+1}{8x+5}\right)^{x-1}=\left(\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{\frac{8x+5}{-4}}\right)^{\frac{-4x+4}{8x+5}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-4x+4}{8x+5}}=e^{-0{,}5}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln5-\ln(5-x)}{0{,}1x}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення $x=0$ приводить до невизначеності виду $\langle\frac{0}{0}\rangle$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln5-\ln(5-x)}{0{,}1x}=\frac{\ln5-\ln(5-0)}{0{,}1\cdot0}=\frac{\ln5-\ln5}{0}=\langle\frac{0}{0}\rangle.$$

Щоб розкрити цю невизначеність, скористаємося третьою визначною границею (*див. п.7(в)*). Для цього, застосувавши відому формулу

$$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b},$$

перетворимо заданий вираз:

$$\frac{\ln5-\ln(5-x)}{0{,}1x}=\frac{\ln(5-x)-\ln5}{-0{,}1x}=\frac{\ln\frac{5-x}{x}}{-0{,}1x}=\frac{\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)}{-0{,}1x}=$$
$$=\frac{\ln(1-0{,}2x)}{-0{,}1x}=2\cdot\frac{\ln\left(1+(-0{,}2x)\right)}{2\cdot(-0{,}1x)}=\frac{\ln\left(1+(-0{,}2x)\right)}{-0{,}2x}. \quad (15)$$

За третьою визначною границею:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+(-0{,}2x)\right)}{-0{,}2x}=1 \quad (16)$$

Скориставшись рівностями (15), (16) і теоремами про границі (*див. п. 6*), матимемо:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln5-\ln(5-x)}{0{,}1x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln\left(1+(-0{,}2x)\right)}{-0{,}2x}\right)=$$
$$=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+(-0{,}2x)\right)}{-0{,}2x}=2\cdot1=2.$$

Приклад 8. Знайти границю $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення $x=0$ приводить нас до невизначеності виду $\langle\frac{0}{0}\rangle$:

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\frac{2^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Щоб розкрити цю невизначеність, скористаємося четвертою визначною границею (*див. п. 7(г)*). Врахувавши, що

$$2^x=e^{x\ln2},$$

перетворимо заданий заданий вираз:

$$\frac{2^x-1}{x} = \frac{e^{x\ln 2}-1}{x} = \ln 2 \cdot \frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} \quad . \tag{17}$$

За четвертою визначною границею:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} = 1. \tag{18}$$

Скориставшись рівностями (17), (18) і теоремами про границі (*див. п. 6*), матимемо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = \left(\ln 2 \cdot \frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\right) = \ln 2 \cdot \frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} =$$
$$= \ln 2 \cdot 1 = \ln 2.$$

11. Нехай функції $a(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі при $x \to a$, тоді:

1) $a(x)$ називають **нескінченно малою вищого порядку** відносно $\beta(x)$ і позначають $a(x) = 0\big(\beta(x)\big)$, якщо $\lim\limits_{x\to a} \frac{a(x)}{\beta(x)} = 0$; в такому разі $\beta(x)$ називають **нескінченно малою нижчого порядку** відносно $a(x)$;

2) $a(x)$ і $\beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку**, якщо $\lim\limits_{x\to a} \frac{a(x)}{\beta(x)} = M$, де $M \neq 0$ – деяке скінченне число;

3) $a(x)$ називають **нескінченно малою порядку k** відносно $\beta(x)$ $(k > 0)$, якщо $a(x)$ і $\beta^k(x)$ – нескінченно малі одного порядку;

4) $a(x)$ і $\beta(x)$ називають **еквівалентними нескінченно малими** і позначають $a(x) \sim \beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to a} \frac{a(x)}{\beta(x)} = 1$.

12. Якщо $a(x) \sim \beta(x)$ за умови $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} f\big(a(x)\big) = f\big(\beta(x)\big),$$

де $f\big(a(x)\big)$ – будь-який алгебраїчний вираз, що містить $a(x)$. Це означає, що під знаком границі при $x \to a$ можна будь-яку нескінченно малу змінити на еквівалентну за $x \to a$.

13. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій.

Нехай a і n – сталі, $a > 0$, $a \neq 1$. За умови $x \to 0$:

$x \sim \sin x$; $\quad x \sim \arcsin x$; $\quad x \sim e^x - 1$;

$x \sim tg\, x$; $\quad x \sim arctg\, x$; $\quad x \ln a \sim a^x - 1$;

$\frac{x^2}{x} \sim 1 - \cos x$; $\quad \frac{x}{2} \sim \sqrt{x+1} - 1$; $\quad \frac{x}{\ln a} = \log_a(x+1)$;

$nx \sim (1+x)^2 - 1$; $\quad x \sim \ln(1+x)$.

Приклад 9. Користуючись порівнянням нескінченно малих, знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення x=0 приводить нас до невизначеності виду $\langle\frac{0}{0}\rangle$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}=\frac{1-\cos 0}{0\cdot arctg\ 0}=\frac{1-1}{0\cdot 0}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Щоб розкрити цю невизначеність, скористаємося порівнянням нескінченно малих. За таблицею еквівалентних нескінченно малих за $x\to 0$ (*див. п. 13*) матимемо:

$$(1-cos8x)\sim\frac{8x^2}{2}=\frac{64x^2}{2}=32x^2;$$
$$actg\ 2x\sim 2x.$$

Замінимо нескінченно малі у виразі під знаком границі на еквівалентні функції. Матимемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{32x^2}{x\cdot 2x}=\frac{32}{2}=16.$$

Приклад 10. Визначити порядок нескінченно малої

$$\alpha(x)=\log_2(2x+1)-x\sin x$$

відносно нескінченно малої $\beta(x)=x$.

Розв'язання. За умовою задачі $\beta(x)=x$ – нескінченно мала. Тоді очевидно, що $x\to 0$. За таблицею еквівалентності нескінченно малих функцій при $x\to 0$ (*див. п. 13*) матимемо:

$$\alpha(x)=(\log_2(2x+1)-x\sin x)\sim\left(\frac{2x}{\ln 2}-x\cdot x\right)=\frac{2x}{\ln 2}-x^2\ . \qquad (19)$$

В отриманому виразі найвищий степінь нескінченно малої x дорівнює 2. Перевіримо, чи не буде 2 порядком нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)=x$. Для цього, скориставшись теоремами про границі (*див. п. 6*) та еквівалентністю (19), знайдемо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(2x+1)-x\sin x}{x^2}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{\ln 2} - x^2}{x^2} = \frac{2}{\ln 2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} - 1 = \frac{2}{\ln 2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - 1 =$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Оскільки знайдена границя скінченна і відмінна від нуля, то $\alpha(x)$ і $\beta^2(x)$ – нескінченно малі одного порядку (*див. п. 11(2)*). А це означає (*див. п. 11(3)*), що $\alpha(x)$ – нескінченно мала порядку 2 відносно $\beta(x)$.

Приклади, в яких використовуються різні способи обчислення границь функції

Приклад 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-5x+3}\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Домножимо вираз, що стоїть під знаком границі, на спряжений:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x-1\right)-\left(x^2-5x+3\right)}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-5x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x-4}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-5x+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{2|x|}=\frac{8}{2}=4.$$

Приклад 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-5}\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Домножимо вираз, що стоїть під знаком границі, на спряжений:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3\right)-\left(x^2-5\right)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=8\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=8\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2|x|}=0.$$

Приклад 13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-3}{9x^2-8x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Оскільки за умови $x=1$ многочлени, що стоять в чисельнику і знаменнику, перетворюються на нуль, то за теоремою Безу вони розкладаються на множники, серед яких обов'язково присутній множник $(x-1)$.

В чисельнику виконаємо ділення x^3+x^2+x-3 на $(x-1)$ в стовпчик:

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2+x-3 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2+2x+3 \\ \quad 2x^2+x-3 & \\ \quad \underline{2x^2-2x} & \\ \qquad\quad 3x-3 & \\ \qquad\quad \underline{3x-3} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

, тоді $x^3+x^2+x-3=(x-1)\cdot(x^2+2x+3)$.

Оскільки добуток коренів знаменника $-\frac{1}{9}$, один з них $x=1$, то другий $x=-\frac{1}{9}$. Отже, $9x^2-8x-1$ розкладається на множники:

$$9(x-1)\left(x+\frac{1}{9}\right)=(x-1)(9x+1).$$

Маємо $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{(x-1)(9x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x+3}{9x+1}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Приклад 14. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Оскільки за $x=1$ многочлени, що стоять в чисельнику і знаменнику, перетворюються в нуль, то за теоремою Безу вони розкладаються на множники, серед яких обов'язково присутній множник $(x-1)$.

В чисельнику виконаємо ділення x^3+2x^2-x-2 на $(x-1)$ в стовпчик:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2-x-2 & \underline{x-1} \\
\underline{x^3-x^2} & x^2+3x+2 \\
\quad 3x^2-x-2 & \\
\quad \underline{3x^2-3x} & \\
\qquad\quad 2x-2 & \\
\qquad\quad \underline{2x-2} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

, тоді $x^3+2x^2-x-2=(x-1)\cdot\left(x^2+3x+2\right)$.

Оскільки добуток коренів знаменника -4, один з них $x=1$, то другий $x=-4$ Отже, x^2+3x-4 розкладається на множники: $(x-1)(x+4)$.

Маємо $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x+2}{x+4}=\dfrac{6}{5}$.

Приклад 15. Довести, що за $x\to0$ н. м. $e^{3x}-e^{2x}$ і $\sin2x-\sin x$ будуть еквівалентними.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення цих функцій.

$$
\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin2x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}\left(e^x-1\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to0\\ e^x-1\sim x,\\ \sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2},\\ \cos\dfrac{3x}{2}\to0,\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}\cdot x}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot1}=1.
$$

Отже, за означенням ці величини еквівалентні.

Приклад 16. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\cdot[\ln(x+1)-\ln(x-2)]=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Перейдемо до іншої невизначеності. Для цього використаємо властивості логарифмічної функції:

$$
\lim_{x\to+\infty}(x+3)[\ln(x+1)-\ln(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)\cdot\ln\frac{(x+1)}{(x-2)}\right]=[\infty\cdot0]=
$$

$$
=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\right]=\left|\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\sim\frac{3}{x-2},\ x\to+\infty\right|=
$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)\cdot\frac{3}{x-2}\right] = 3\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{vmatrix} x+3\sim x,\ x\to\infty \\ x-2\sim x,\ x\to\infty \end{vmatrix} = 3\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 3.$$

Приклад 17. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = [0\cdot\infty]$.

Розв'язання. Перетворимо невизначеність $[0\cdot\infty]$ в невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ (це завжди можна зробити), після чого зведемо границю до виду, коли можливе застосування еквівалентних перетворень.

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{1-x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to1}\frac{1-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)} =$$

$$= \left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)\sim\frac{\pi}{2}(1-x), 1-x\to0\right| = \lim_{x\to1}\frac{1-x}{\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi}.$$

Приклад 18. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+4x-5}{\sin 3(x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Оскільки за умови $x=1$ многочлен в чисельнику перетворюється в нуль ($x=1$ – корінь чисельника), то за теоремою Безу він розкладається на множники, один з яких $(x-1)$. За теоремою Вієта другий корінь $x=-5$. Тому $x^2+4x-5=(x-1)(x-(-5))$. Маємо

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)}{\sin 3(x-1)} = |\sin 3(x-1)\sim 3(x-1), x\to1| = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)}{3(x-1)} = \lim_{x\to1}\frac{x+5}{3} = 2.$$

Приклад 19. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)\cdot[\ln(3x-2)-\ln(x+1)] = [\infty\cdot(\infty-\infty)]$.

Розв'язування. Перейдемо до іншої невизначеності. Для цього використаємо властивості логарифмічної функції:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x-5)\cdot\ln\frac{3x-2}{x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[(x-5)\cdot\ln\frac{3(x+1)-5}{x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[(x-5)\cdot\ln\left(3-\frac{5}{x+1}\right)\right].$$

Оскільки $\ln\left(3-\frac{5}{x+1}\right)\to\ln 3$ за $x\to+\infty$, то невизначеності в останній границі немає і

$$\lim_{x\to+\infty}(x-5)\cdot[\ln(3x-2)-\ln(x+1)]=+\infty\cdot\ln 3=+\infty.$$

Приклад 20. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{5-2x}-3}{3x^3+6x^2-5x-10}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\sqrt{5-2x}+3$.

$$\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{5-2x}-3\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{\left(3x^3+6x^2-5x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{(5-2x)^2-3^2}{\left(3x^3+6x^2-5x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{-2x-4}{\left(3x^3+6x^2-5x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Оскільки приза $x=-2$ многочлен $3x^3+6x^2-5x-10$ в знаменнику перетворюється на нуль, то за теоремою Безу знаменник ділиться на різницю $(x-(-2))$ без остачі. Виконаємо ділення $3x^3+6x^2-5x-10$ на $x+2$ в стовпчик:

$$\begin{array}{r|l}
3x^3+6x^2-5x-10 & \underline{x+2} \\
\underline{3x^3+6x^2} & 3x^2-5 \\
-5x-10 & \\
\underline{-5x-10} & \\
0 &
\end{array}$$

, тоді $3x^3+6x^2-5x-10=(x+2)\cdot\left(3x^2-5\right)$.

Отже,

$$\lim_{x\to-2}\frac{-2(x+2)}{(x+2)\left(3x^2-5\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{-2}{\left(3x^2-5\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\frac{-2}{7\cdot(3+3)}=-\frac{1}{21}.$$

Приклад 21. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику та знаменнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})$. Маємо:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3x+7-2x-10)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(4x+13-x-22)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(3x-9)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}}=\frac{1}{3}\frac{5+5}{4+4}=\frac{5}{12}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. $x_n = 2+\frac{1}{n}$ – загальний член послідовності $\{x_n\}$. Використовуючи лише одне означення границі послідовності, довести, що $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 2$.

№ 2. На продовженні відрізка $AB = a$ взято точку M так, що $AM > BM = x$. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{AM}{BM}$.

Вказівка: *підставити в шукану границю* $BM = x$ і $AM = x + a$.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{AM}{BM} = 1$.

№ 3. Довести, що за $n\to\infty$ послідовність $\frac{1}{2}; \frac{5}{3}; \frac{9}{4}; \ldots; \frac{4n-3}{n+1}; \ldots$ збіжна і має границю 4.

№ 4. Знайти вказані границі, не користуючись порівнянням нескінченно малих:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^4-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$;

к) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$; л) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; н) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$;

п) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$; р) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x1\sin x}-1}{x^2}$;

с) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-5^x}{1-e^x}$; т) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$;

у) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$; ф) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$;

х) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$; ц) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

Вказівки: ж) *зробити заміну* $x-\pi=y$ *і скористатися формулами косинуса суми та синуса половинного аргументу;*
и) *скористатися формулами перетворення суми та різниці однойменних тригонометричних функцій у добуток*;
к) *зробити заміну* $x-\frac{\pi}{2}=y$ *і скористатися формулами зведення тригонометричних функцій;*
л) *зробити заміну* $x-\frac{\pi}{4}=y$ *і скористатися формулами зведення тригонометричних функцій та формулами перетворення суми та різниці однойменних тригонометричних функцій в добуток*;
м) зробити заміну $\sqrt[3]{1+x}=y$;
п) зробити заміну $\sqrt[4]{x}=y$;
с) *врахувати, що* $5^x=e^{x\ln 5}$ *і скористатися четвертою визначною границею;*
ц) *дроби в дужках звести до спільного знаменника.*

Відповідь:

а) 0,25;	б) 0;	в) e;	г) 2;
д) 1,25;	е) -2;	ж) 0,5;	и) $-\sin 2$;
к) 0,5;	л) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$;	м) 3;	н) 2;
п) 0,25;	р) 0,5;	с) $\ln 5$;	т) e^2;
у) 5;	ф) 0,5;	х) 2;	ц) $\frac{1}{6}$.

№ 5. Користуючись порівнянням нескінченно малих, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-x\cos x)\cdot\ln(x^2+1)}{(e^x-1)\cdot\sin^3 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 2x}{-1+\cos x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^3 3x}{e^{3x}-e^{3x}\cdot\cos 3x+\cos 3x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2^x}{\log_2(x\_1)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-3\cos 2x}{\sin x\cdot\ln(1+x)}$.

Вказівка: г) *подати знаменник дробу у вигляді добутку нескінченно малих функцій.*
Відповідь: а) 12,5; б) 0; в) -8; г) 2; д) $-\ln^2 2$; е) 6.

№ 6. Визначити порядок вказаних нескінченно малих відносно нескінченно малої $\alpha(x) = x$:

а) $x^3 - 2\sin^2 x$; б) $\sqrt{\sin^2 x + x^4}$;
в) $\sqrt{x^3 + 1} - 1$; г) $x^3 \cdot \ln^2(x + 1)$;
д) $\sqrt{x^2 + 1} - 1$; е) $\sin 2x - 2\sin x$.

Вказівка: е) *скористатися формулою синуса подвійного аргументу.*

Відповідь: а) 3; б) 1; в) 3; г) 5; д) 2; е) 3.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$. *Відповідь.* 9.

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$. *Відповідь.* ∞.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$. *Відповідь.* 0.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. *Відповідь.* 0.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. *Відповідь.* $-\dfrac{2}{5}$.

6. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}$.

7. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. *Відповідь.* 6.

8. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}$.

9. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{6}$.

10. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$. *Відповідь.* –2.

11. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. *Відповідь.* ∞.

12. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$. *Відповідь.* –1.

13. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$. *Відповідь.* ∞.

14. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$. *Відповідь.* 0.

15. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m та n — цілі числа). *Відповідь.* $\frac{m}{n}$.

16. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$. *Відповідь.* 0.

17. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$. *Відповідь.* ∞.

18. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

19. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$. *Відповідь.* –1.

20. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. *Відповідь.* 0.

21. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}$.

22. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$. *Відповідь.* $-\frac{1}{2}$.

23. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+...+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}\right)$. *Відповідь.* 100.

24. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$. *Відповідь.* –1.

25. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$. *Відповідь.* 1.

26. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$. *Відповідь.* ∞.

27. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$. *Відповідь.* 0.

28. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. *Відповідь.* 0.

29. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$. *Відповідь.* ∞.

30. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. *Відповідь.* 4.

31. Знайти $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}$.

32. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. *Відповідь.* 3.

33. Знайти $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, якщо $x > 0$; ∞, якщо $x = 0$.

34. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$. *Відповідь.* –1.

35. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$. *Відповідь.* $\frac{1}{3}$.

36. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$. *Відповідь.* $\frac{2}{3}$.

37. Знайти $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}(a>b)$. *Відповідь.* $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$.

38. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (n та m — цілі числа) *Відповідь.* $\frac{m}{n}$.

39. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$. *Відповідь.* $-\frac{1}{4}$.

40. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

41. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. *Відповідь.* 3.

42. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

43. Знайти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2^x+3}{2^x-3}$. *Відповідь.* $\begin{cases}1, \text{якщо } x\to+\infty\\ -1, \text{якщо } x\to-\infty.\end{cases}$

44. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)$. *Відповідь.* $\frac{a-c}{2}$.

45. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$. *Відповідь.* 0.

46. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$. *Відповідь.* 0.

47. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{4}$.

48. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$. *Відповідь.* $\dfrac{5}{4}$.

49. Знайти $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$. *Відповідь.* – 0,1.

50. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right)$. *Відповідь.* – 2,5.

51. Знайти $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3-10^x}{2+10^{x+1}}$. *Відповідь.* 1,5.

52. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$. *Відповідь.* 0.

53. Знайти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. *Відповідь.* $\begin{cases}0, \text{ якщо } x\to+\infty\\ +\infty, \text{ якщо } x\to-\infty.\end{cases}$

54. Знайти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. *Відповідь.* $\begin{cases}\dfrac{1}{2}, \text{ якщо } x\to+\infty\\ -\infty, \text{ якщо } x\to-\infty.\end{cases}$

55. Знайти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$. *Відповідь.* $\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}, \text{ якщо } x\to+\infty\\ \infty, \text{ якщо } x\to-\infty.\end{cases}$

56. Знайти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$. *Відповідь.* $\pm\dfrac{5}{2}$.

ПЗ-3. ОДНОСТОРОННІ ГРАНИЦІ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ, ТОЧКИ РОЗРИВУ. КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ

Теоретичні відомості

1. ***Односторонні границі функції***

а) Якщо за $x \to a(x < a)$ функція має границю, то ця границя називається ***лівосторонньою границею функції*** *в точці* $x = a$.

б) Якщо за $x \to a\ (x > a)$ функція має границю, то ця границя називається ***правосторонньою границею*** **функції** в точці $x = a.$

Лівостороння та правостороння границі функції в точці є односторонніми границями цієї функції.

2. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$

Звідси випливає, що для неперервності функції в точці мають виконуватися такі умови:

а) точка $x = x_0$ належить області визначення функції $D(f)$, тобто $f(x_0)$ існує;

б) деякий окіл точки $x = x_0$ входить до області визначення функції, наприклад $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D(f)$;

в) границя $f(x)$ за $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в точці $x = x_0$, тобто дорівнює $f(x_0)$.

Позначимо через $\Delta x = x - x_0$ приріст аргументу, а через $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції (рис. 5).

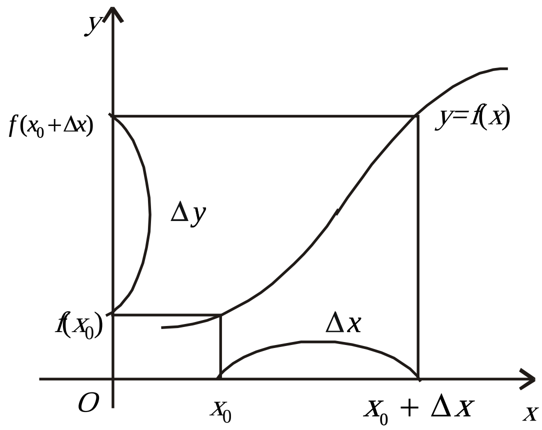


Рисунок 5

3. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{за } x = x_0 \end{pmatrix} :=$$
$$= \left((\Delta x = x - x_0 \to 0) \Rightarrow \right.$$
$$\left. \Rightarrow (\Delta y = f(x) - f(x_0) \to 0) \right).$$

4. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо границя функції дорівнює функції від границі аргументу за $x \to x_0$, тобто

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{— неперервна} \\ \text{за } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x \right) \right).$$

5. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо односторонні границі функції зліва й справа в цій точці існують, однакові між собою і дорівнюють значенню функції у цій точці, тобто:

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{— неперервна} \\ \text{за } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

6. Функція називається ***неперервною на проміжку***, якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Таким чином, поняття неперервності функції у точці задається чотирма, хоч і рівноправними, але різними за формулюванням означеннями. Використання конкретного означення неперервності функції в точці визначається специфікою задачі.

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y = \sin x.$

Розв'язання. Область визначення функції $y = \sin x - D = R.$

Візьмемо довільне $x_0 \in D = R,$ надамо x_0 приросту $\Delta x,$ тоді приріст функції Δy буде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Розглянемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta x \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = 0.$$

Дамо необхідні пояснення: за $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta x$ — нескінченно мала величина; $\dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1;$ $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)$ — величина обмежена $\left(\left| \cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x_0 \right) \right| \le 1 \right),$

отже, добуток $\Delta y = \Delta x \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(\dfrac{\Delta x}{2} + x_0\right)$ є нескінченно мала величина.

Таким чином, з $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0.$

Звідси функція $y = \sin x$ неперервна $\forall x_0 \in R,$ тобто на всій області визначення.

7. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці $x = x_0$, то у цій точці будуть неперервними функції $f(x) \pm g(x),$ $f(x) \cdot g(x),$ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; в останньому випадку за умови, що $g(x_0) \neq 0.$

8. Якщо функція $y = F(u)$ — неперервна для $u \in U,$ а функція $u = \varphi(x)$ — неперервна для $x \in X$ і значення функції $\varphi(x) \in U,$ то складна функція $y = F(\varphi(x))$ — неперервна для $x \in X.$

Приклад 2. Дослідити функції $y = \cos x,$ $y = \text{tg}x,$ $y = \text{ctg}x$ на неперервність.

Розв'язання. Оскільки $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right),$ то функцію $y = \cos x$ можна вважати суперпозицією таких неперервних $\forall x \in R$ функцій: $y = \sin u,$ $u = \dfrac{\pi}{2} - x.$ Отже, функція $y = \cos x$ — неперервна $\forall x \in R.$

Згідно з п. 7 неважко встановити, що функція $y = \text{tg}x$ — неперервна $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),$ а функція $y = \text{ctg}x$ — неперервна $\forall x \in (\pi n, \pi + \pi n) n \in Z,$ як відношення неперервних функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x.$

Зауваження. Всі основні елементарні функції будуть неперервними в кожному з відкритих проміжків своєї області визначення.

9. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на закритому проміжку $[a;\ b]$ і на кінцях проміжку набуває значення різних знаків (наприклад $f(a) > 0,$ $f(b) < 0$), тоді на відкритому проміжку $(a;\ b)$ існує така точка $x = c$, що $f(c) = 0$ (рис. 6).

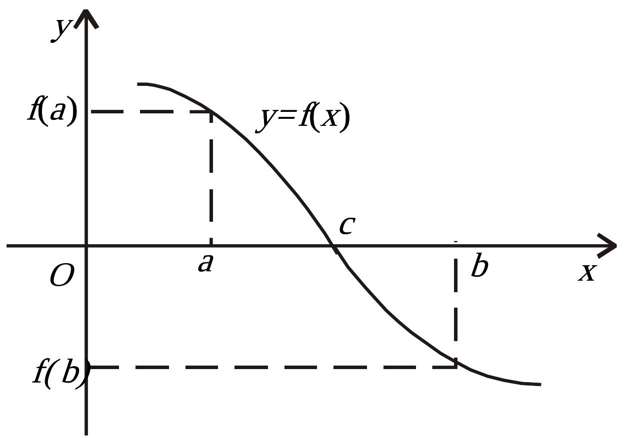


Рисунок 6

10. Якщо функція $\boldsymbol{y=f(x)}$ неперервна на закритому проміжку $\boldsymbol{[a;\ b]}$, то вона набуває на цьому проміжку своїх найбільших й найменших значень (рис. 7).

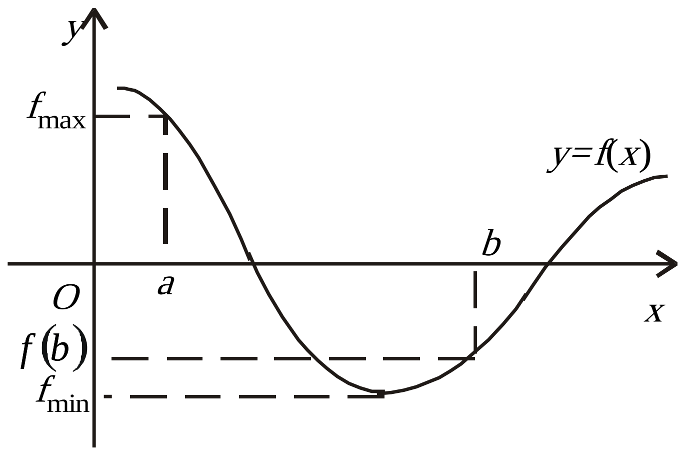


Рисунок 7

11. Функція $y=f(x)$ називається ***розривною в точці*** $x=x_0$, якщо порушується хоча б одна з умов рівності

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Розрізняють точки *розриву 1-го* і *2-го роду*. Розриви 1-го роду бувають усувні й неусувні; розриви 2-го роду –завжди неусувні.

12. Точка $x=x_0$ називається ***точкою розриву 2-го роду*** для функції $y=f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

13. Точка $x=x_0$ називається ***точкою розриву 1-го роду*** **(розрив неусувний)** для функції $y=f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не однакові між собою, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

14. Точка $x = x_0$ називається ***точкою розриву 1-го роду*** **(розрив усувний)** для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, однакові між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$.

Зауваження. Точка $x = x_0$ усувного розриву відзначається тим, що існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, але $f(x_0) \neq A$. Тому на основі функції $f(x)$ можна побудувати функцію

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ за } x \neq x_0 \\ A \text{ за } x = x_0, \end{cases}$$ яка буде неперервною в точці $x = x_0$.

15. Методика дослідження функцій на неперервність.

1. Знайти область визначення функції $D(y)$.

2. Дослідити функцію на неперервність у відкритих проміжках $D(y)$.

3. Визначити скінченні граничні точки (с.г.т.) $D(y)$ і обчислити односторонні границі функції у цих точках.

4. Зробити висновок про характер точок розриву (якщо вони є) і побудувати графік функції поблизу цих точок. Для зручності побудови графіка функції рекомендується записати координати граничних точок графіка функції $P_i(x_0 \pm 0;\ y_0 \pm 0)$. Символічний запис абсциси граничної точки $x_0 \pm 0$ означає, що абсциса довільної точки графіка функції прямує до x_0 зліва ($x_0 - 0$) або справа ($x_0 + 0$); а запис $y_0 \pm 0$ означає, що ордината довільної точки графіка функції в такому разі прямує до y_0 знизу ($y_0 - 0$) або зверху ($y_0 + 0$). Наприклад, для граничних точок $P_1(2-0;\ +0)$ і $P_2(2+0;\ 1-0)$ графік функції підходить до цих точок так, як показано на рис. 8.

До точки P_1 графік підходить зліва і зверху, а до точки P_2 — справа і знизу.

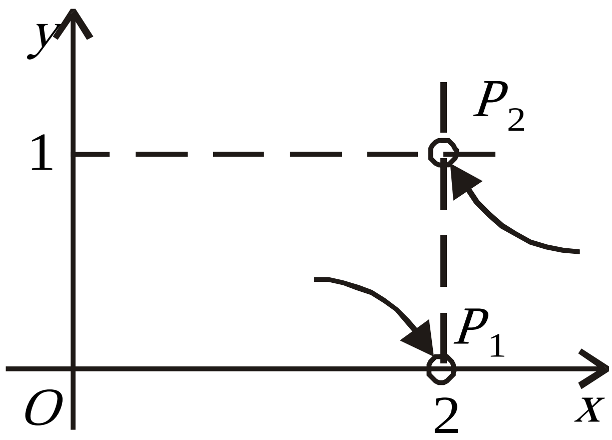


Рисунок 8

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. Область визначення цієї функції $D = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Скінченною граничною точкою D функції буде $x = 1$. Обчислимо такі границі:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1-0 (x<1) \\ x-1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \\ 2^{-\infty} \to \dfrac{1}{2^{+\infty}} \to +0 \end{array} \right| = +0;$$

$$\lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1+0 (x>1) \\ x-1 \to +0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує. Граничні точки графіка функції: $P_1\,(1-0;\,+0)$, $P_2(1+0;\,+\infty)$. Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву показано на рис. 9. Зауважимо, що гранична точка $P_2\,(1+0;\,+\infty)$ лежить на нескінченності.

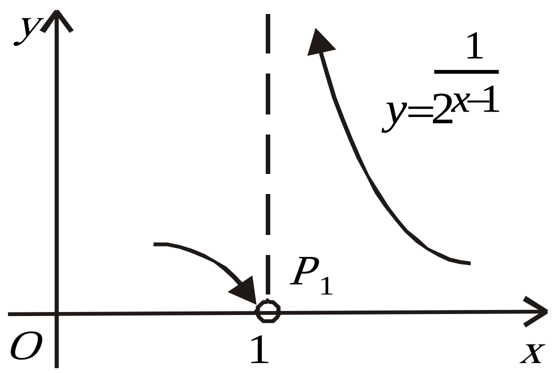


Рисунок 9

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію $y = \sin\frac{1}{x}$.

Розв'язання. Ця функція буде неперервною на кожному з проміжків $(-\infty;\,0)$ і $(0;\,+\infty)$, бо є суперпозицією неперервних елементарних функцій. Границі $\lim\limits_{x \to -0} \sin\frac{1}{x}$ і $\lim\limits_{x \to +0} \sin\frac{1}{x}$ – не існують. Отже, точка $x = 0$ — точка розриву функції 2-го роду.

Записати координати граничних точок графіка функції неможливо, тому і побудувати графік функції $y=\sin\frac{1}{x}$ поблизу самої точки розриву не можна (рис. 10).

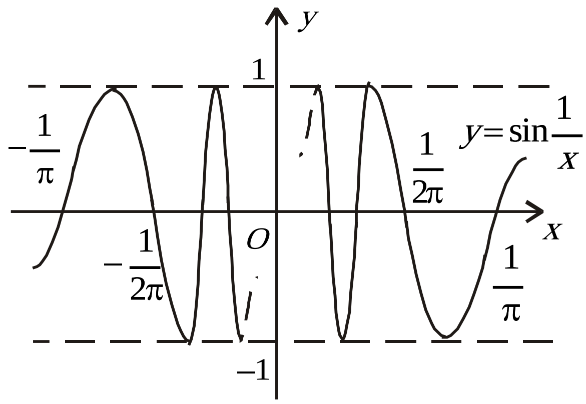


Рисунок 10

Приклад 5. Дослідити на неперервність функцію $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$.

Розв'язання.Скорочений запис розв’язування задачі:

$$D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty).$$

$\left.\begin{matrix} x\in(-\infty;\ 0) \\ x\in(0;\ +\infty) \end{matrix}\right\rangle y$ — неперервна як суперпозиція елементарних функцій.

$x=0$ — с.г.т. $D(y)$.

$$\lim_{x\to-0} y=\lim_{x\to-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}=\left|\begin{matrix} x\to-0 \\ x^2\to+0 \\ \frac{1}{x^2}\to+\infty \end{matrix}\right|=\frac{\pi}{2}-0;$$

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}=\left|\begin{matrix} x\to+0 \\ x^2\to+0 \\ \frac{1}{x^2}\to+\infty \end{matrix}\right|=\frac{\pi}{2}-0.$$

Таким чином, точка $x=0$ є точкою розриву функції 1-го роду (розрив усувний), бо односторонні границі існують і однакові між собою (сама функція за $x=0$ не існує).

Граничні точки графіка функції $P_1\left(-0;\ \frac{\pi}{2}-0\right)$ і $P_2\left(+0;\ \frac{\pi}{2}-0\right)$зливаються в одну точку (рис. 11).

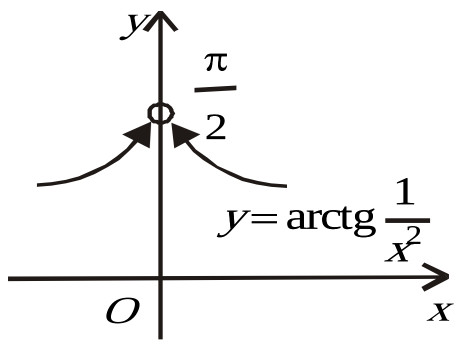


Рисунок 11

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію $y = x - \dfrac{x+2}{|x+2|}$.

Розв'язання. Після розкриття $|x+2|$ функція перепишеться так:

$$y = \begin{cases} x - \dfrac{x+2}{x+2} \ \text{ за } \ x > -2; \\ x + \dfrac{x+2}{x+2} \ \text{ за } \ x < -2 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 \text{ за } \ x > -2; \\ x + 1 \text{ за } \ x < -2. \end{cases}$$

На кожному з інтервалів $(-\infty\,;-2)$ і $(-2;\,+\infty)$ функція неперервна. Розглянемо односторонні границі функції у точці $x = -2$.

$$\lim_{x \to -2-0} y = \left| \begin{array}{c} (x \to -2-0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x < -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x+1 \end{array} \right| = \lim_{x \to -2-0} (x+1) = -1-0;$$

$$\lim_{x \to -2+0} y = \left| \begin{array}{c} (x \to -2+0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x > -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x-1 \end{array} \right| = \lim_{x \to -2+0} (x-1) = -3+0.$$

Отже, точка $x = -2$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний), бо односторонні границі функції у цій точці існують, але не однакові між собою.

Граничні точки графіка функції такі: $P_1(-2-0;\ -1-0)$, $P_2(-2+0;\ -3+0)$ (рис. 12).

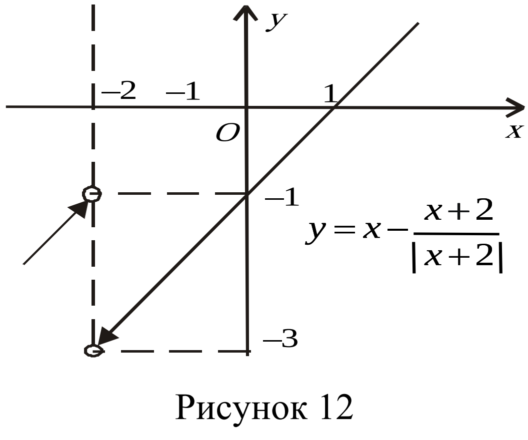


Рисунок 12

Приклад 7. Показати, що за $x = 4$ функція $y = \dfrac{x}{x-4}$ має розрив.

Розв'язання. Знаходимо $\lim\limits_{x\to 4-0} \dfrac{x}{x-4} = -\infty, \lim\limits_{x\to 4+0} \dfrac{x}{x-4} = +\infty.$

Таким чином, функція за $x \to 4$ не має ні правої, ні лівої скінченної границі. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 2-го роду.

Приклад 8. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$ має розрив.

Розв'язання. Якщо $x \to 4-0,$ то $\dfrac{1}{x-4} \to -\infty, \lim\limits_{x\to 4-0} y = -\dfrac{\pi}{2}.$ Якщо $x \to 4+0,$ то $\dfrac{1}{x-4} \to +\infty, \lim\limits_{x\to 4+0} y = \dfrac{\pi}{2}.$ Таким чином, за $x \to 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, причому ці границі різні. Звідси випливає, що $x = 4$ є точкою розриву 1-го роду.

Приклад 9. Показати, що за $x = 5$ функція $y = \dfrac{x^2-25}{x-5}$ має розрив.

Розв'язання. У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. В інших точках дріб скорочується на $x - 5$, оскільки $x - 5 \neq 0.$ Звідси робимо висновок, що за $x \neq 5$ – $y = x + 5.$ Легко показати, що

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 5+0} y = 10.$$

Таким чином, за $x = 5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо домовитися, що за $x = 5$ – $y = 10$.

Звідси можна вважати, що функція $y = \dfrac{x^2-25}{x-5}$ неперервна для всіх значень x, якщо вважати, що рівність $\dfrac{x^2-25}{x-5} = x+5$ справджується для всіх значень x, включно і саму точку $x = 5$. У цьому випадку графіком функції буде пряма лінія $y = x + 5.$

Приклад 10. Дослідити на розрив функцію $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}.$

Розв'язання. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x = 1$ – точка розриву функції.

Обчислимо границі зліва і справа в точці $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}(x+1) = 2,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0}(x+1) = 2.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 2$, то точка $x=1$ є точкою усувного розриву.

Отже маємо: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x+1 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Схематичний графік зображено на рисунку 13.

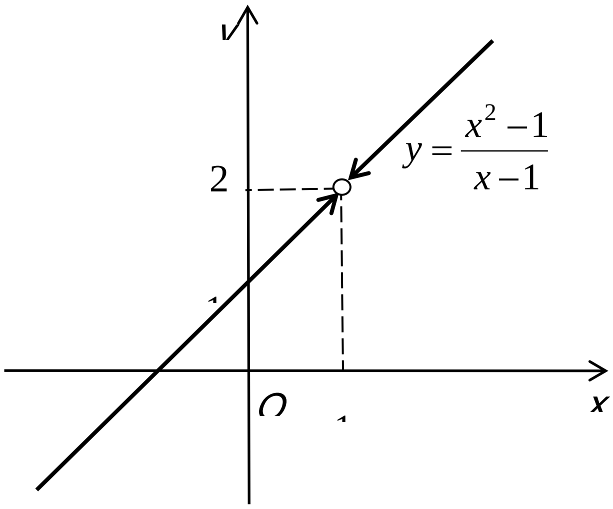


Рисунок 13

Приклад 11. Дослідити функцію $f(x) = \dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ і визначити вид точок розриву, якщо вони є. Зробити схематичний рисунок.

Розв'язання. Задана функція визначена для всіх $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x=1$ – точка розриву функції.

Обчислимо односторонні границі в точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 2, \text{ (т. як } x\to 1-0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to -\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} \to 0\text{);}$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0, \text{ (т. як } \frac{1}{x-1} \to +\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty\text{).}$$

Оскільки границі $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ існують, проте $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, то точка $x=1$ є точкою розриву першого роду.

В точці $x=1$ функція має стрибок, що дорівнює різниці

$$f(1+0) - f(1-0) = 0 - 2 = -2.$$

Для схематичної побудови графіка функції знайдемо її границю за умови $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 1, \text{ (оскільки } x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} \to 1).$$

А це означає, що пряма $y = 1$ є горизонтальною асимптотою.

Схематичний графік цієї функції зображено на рис. 14.

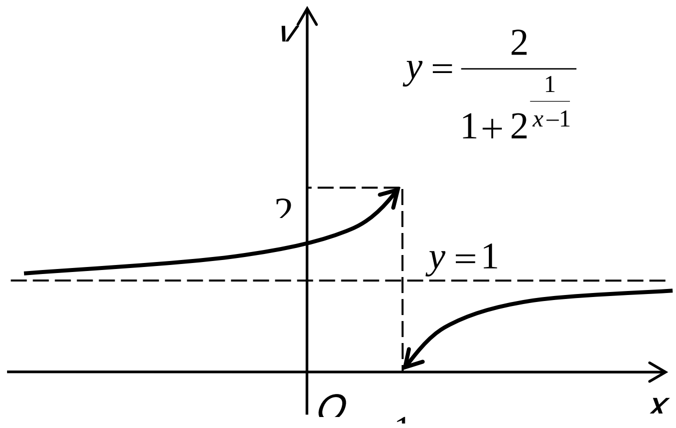


Рисунок 14

Приклад 12. Дослідити задану функцію на неперервність і визначити рід точок розриву, якщо вони є. Зробити схематичний рисунок.

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, & x < -1, \\ 1-x^2, & -1 \le x \le 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо неелементарну функцію, що неперервна на кожному з інтервалів: $(-\infty,-1), [-1,1], (1,+\infty)$. Очевидно, що вона може бути розривною лише в точках $x=-1$, $x=1$, в яких змінюється аналітичний вираз, який задає функцію. Перевіримо умови неперервності в цих точках.

1. Розглянемо точку $x = -1$.

Функція визначена в цій точці і $f(-1) = 1-(-1)^2 = 0$.

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}(-x-2) = -1, \quad \lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}\left(1-x^2\right) = 0.$$

Отже, існують односторонні границі функції в точці $x = -1$, але вони не однакові між собою. А це означає, що ця точка є точкою розриву першого роду.

2. Розглянемо точку $x = 1$.

Функція визначена в цій точці і $f(1)=1-1^2=0$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\left(1-x^2\right)=0,\ \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x-1)=0.$$

Отже, існують односторонні границі функції в точці $x=1$, вони однакові між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$. Це означає, що в цій точці функція неперервна.

Зробимо схематичний рисунок (рис. 15).

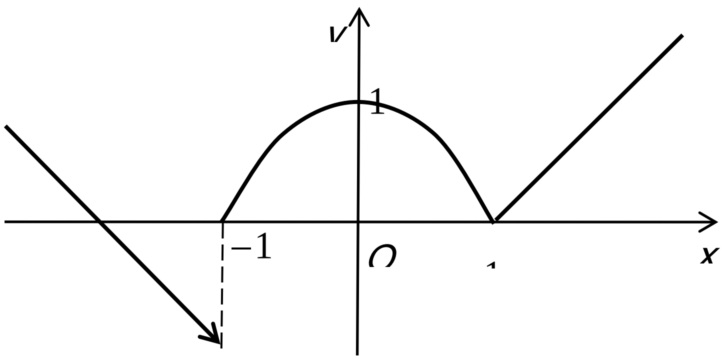


Рисунок 15

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Знайти границі:

$$а)\ \lim_{x\to 0-0}\frac{3}{x^2}\quad б)\ \lim_{x\to 0+0} log_{0,5}\,x\quad в)\ \lim_{x\to 1-0} 0{,}4^{\frac{1}{x-1}}$$

$$г)\ \lim_{x\to 1+0} 0{,}4^{\frac{1}{x-1}}\quad д)\ \lim_{x\to\frac{n}{4}-0} 3^{tg2x}\quad е)\ \lim_{x\to\frac{n}{4}+0} 3^{tg2x}$$

$$ж)\ \lim_{x\to\frac{n}{2}-0}\frac{5}{1+2^{tgx}}\qquad и)\ \lim_{x\to\frac{n}{2}+0}\frac{5}{1+2^{tgx}}$$

Відповідь. *а)* +∞ *б)*+ ∞ *в)* +∞ *г)* 0 *д)* ∞ *е)* 0 *ж)* 0 *и)* 5

№ 2. Знайти і класифікувати точки розриву функцій:

$$а)\ y = arctg\frac{3}{x-3}\quad б)\ y=\frac{1}{1+\sqrt[n]{4}}$$

$$в)\ y=\frac{\frac{5}{x-2}-1}{\frac{5}{x-2}+1}\quad г)\ y=\frac{\sin x}{x}$$

$$д)\ y=\frac{1}{x^{2+x+1}}\quad е)\ y=\frac{x-3}{x^2-7x+12}\quad ж)\ \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$$

Відповідь:
а) у точці $x = 3$ функція має неусувний розрив 1-го роду;
б) $x = 0$ — неусувний розрив 1-го роду;
в) $x = -3$ — розрив 2-го роду,
$x = 2$ — усувний розрив 1-го роду;
г) $x = 0$ — усувний розрив 1-го роду;
д) функція неперервна на всій числовій прямій;
е)$x = 3$ — усувний розрив 1 -го роду,
$x = 4$ розрив 2-го роду;
ж) $x = 1$ та $x = 2$ — усувні розриви 1-го роду.

№ 3. Знайти і класифікувати точки розриву заданих функцій, схематично побудувати графіки функцій

$$a)\ y = \frac{x^2 - 25}{x - 5} \quad б)\ y = \frac{x}{x-2} \quad в)\ y = \frac{2x-3}{x+4} \quad г)\ 2^{\frac{1}{x}}$$

$$д)\begin{cases} 2, & якщо\ x = 0\ або\ |x| = 2 \\ 4 - x^2, & якщо\ 0 < |x| < 2 \\ 4, & якщо\ |x| > 2 \end{cases} \qquad е)\ y = [x] \quad ж)\ y = \{x\}$$

Вказівки: *е*) символом $[x]$ позначають цілу частину числа x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x.
ж) симолом $\{x\}$позначають дробову частину числа x, тобто різницю числа x та його цілої частини $\{x\}=x-[x]$.

Відповідь:
а) в точці $x = 5$ функція має усувний розрив 1-го роду;
б) $x = 2$ – розрив 2-го роду;
в) $x = -4$ – розрив 2-го роду;
г) $x = 0$ – розрив 2-го роду;
д) $x = 0$ – усувний розрив 1-го роду,
$x = \pm 2$ — неусувні розриви 1-го роду;
е) x = n, де $n \in Z$ – неусувні розриви 1-го роду;
ж) $x = n$, де $n \in Z$ – неусувні розриви 1-го роду.

№ 4.Скільки однозначних функцій *y(x)* задано рівнянням:

$$x^2 + y^2 = ?$$

Вказати серед них:

а) дві функції, неперервні на відрізку [-2; 2];

б) функцію *f(x)*, яка визначена на відрізку [-2; 2], від’ємна на відрізку [-1; 1] і невід’ємна для всіх інших значень $x \in D(x)$.

Побудувати графік функції *f(x),* вказати і класифікувати точки її розриву.

Відповідь: Задане рівняння задає нескінченну кількість однозначних функцій.

а) $y = \sqrt{4-x^2}$ *та* $y = -\sqrt{4-x^2}$

б) $f(x) = \begin{cases} y = \sqrt{4-x^2}, & \text{якщо } 1 < |x| \le 2; \\ y = -\sqrt{4-x^2}, & \text{якщо } |x| \le 1. \end{cases}$

У точках x=1 та x=-1 функцяі $f(x)$має неусувні точки розриву 1-го роду.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти точки розриву функції $y = 1/((x-1)(x-5))$.

Відповідь. $x = 1,\ x = 5$ — точки розриву 2-го роду.

2. Який характер розриву функції $y = 1/\left(1-e^{1-x}\right)$ в точці x = 1?

Відповідь. x = 1 — точка розриву 2-го роду.

3. Знайти точки розриву функції

$$y = (\mathrm{tg}x\,\mathrm{arctg}(1/(x-3))/(x(x-5)).$$

Відповідь. x = 3 — точка розриву 1-го роду; x = 5 — точка розриву 2-го роду; x = 0 — точка усувного розриву; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n(0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — точки розриву 2-го роду.

4. Знайти точки розриву функції

$$y = \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)/\left(x^2 - 3x + 2\right).$$

Відповідь. x = 1, x = 2 — точки усувного розриву.

5. Знайти точки розриву функції $y = 1/\left(x^2 + x + 1\right)$.

Відповідь. Функція неперервна на всій числовій прямій $(-\infty, +\infty)$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на сегменті: а) [2, 5]; б) [4, 10]; в) [0, 7].

Відповідь. а) функція неперервна; б) має одну точку розриву 2-го роду; в) має дві точки розриву 2-го роду.

7. Дослідити на неперервність функцію $y = 1/\left(x^4 - 26x^2 + 25\right)$ на сегменті: а) [6, 10]; б) [– 2, 2]; в) [– 6, 6].

Відповідь. а) функція неперервна; б) має дві точки розриву 2-го роду; в) має чотири точки розриву 2-го роду.

8. Знайти точки розриву функції $y=\left(2^{1/(x-2)}-1\right)/\left(2^{1/(x-2)}+1\right)$.
Відповідь. $x = 2$ — точка розриву 1-го роду.

9. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\begin{cases}0{,}5x^2 \text{ за } |x|<2,\\ 2{,}5 \text{ за } |x|=2,\\ 3 \text{ за } |x|>2.\end{cases}$$

Відповідь. $x=\pm 2$ — точки розриву 1-го роду (розрив неусувний).

10. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\frac{1}{(1+2^{\frac{1}{x}})}.$$

Відповідь. $x = 0$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний).

11. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\operatorname{arctg}\frac{a}{x-a}.$$

Відповідь. $x = a$ — точка розриву 1-го роду.

12. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\frac{x^3-x^2}{2|x-1|}.$$

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний).

13. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\begin{cases}x^2+1, \text{ якщо } x>1,\\ x+1, \text{ якщо } x<1,\\ 3, \text{ якщо } x=1.\end{cases}$$

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив усувний).

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1
ІЗ № 1-1

Виходячи з відомого графіка функції $y = \cos x$ побудувати методом геометричних перетворень графік функції

$$y = a \cdot \cos(bx + c) + d\,.$$

Числові значення коефіцієнтів *a, b, c* і *d* для кожного варіанта подано в таблицях:

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	5	0,5	-5	-3	4	-0,5	–4	5	2	-2
b	-2	3	0,5	π	3	2	π	-π	$\frac{1}{3}$	π
c	$-\frac{\pi}{4}$	-2	4	2	$\frac{\pi}{4}$	-1	3	$\frac{\pi}{4}$	-4	2
d	1	-3	1	-3	2	3	- 1	-4	-2	-4
Варіант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	4	2	-4	3	2	–5	4	-2	–2	0,5
b	0,5	-π	$-\frac{1}{3}$	0,25	π	$\frac{1}{3}$	-3	$-\frac{1}{3}$	-0,5	-3
c	$\frac{\pi}{4}$	–2	3	$-\frac{\pi}{4}$	-3	2	$\frac{\pi}{4}$	3	1	$-\frac{\pi}{4}$
d	2	4	-2	4	2	-4	3	-1	-2	2
Варіант	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	-3	4	0,5	5	4	2	3	3	2	0,5
b	π	$-\frac{1}{3}$	–π	$\frac{1}{3}$	0,25	π	$\frac{1}{3}$	-0,5	3	–π
c	4	$\frac{\pi}{4}$	1	2	$-\frac{\pi}{4}$	-1	-3	$\frac{\pi}{4}$	-2	3
d	2	3	-3	-3	-1	3	1	4	-1	1

ІЗ № 1-2

Знайти вказані границі:

а) б), г), д) не користуючись порівнянням нескінченно малих функцій;
в) двома способами:

1) за першою визначною границею;
2) використавши еквівалентність нескінченно малих функцій.

1. $a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+5x+6}{10+3x-x^2}$, *якщо* $1)x_0=3,\ \ 2)x_0=-2\quad 3)x_0=\infty$

   $б)\ \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\sqrt{x+8}-x}$ $\qquad$ $в)\ \lim\limits_{x\to 0}(arcsin9x * ctg3x)$

   $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{3-5x}$ $\qquad$ $д)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{ln(3+x^2)-ln3}$

2. $a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-7x-2}{7x-3x^2-2}$, *якщо* $1)x_0=1,\ \ 2)x_0=2\quad 3)x_0=\infty$

   $б)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2-x}}$ $\qquad$ $в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcctg6x^2}{4x^2}$

   $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{3x-4}$ $\qquad$ $д)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(2-3x)-ln2}{5x}$

3. $a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{4-4x-3x^2}{4x^2+11x+6}$, *якщо* $1)x_0=3,\ \ 2)x_0=-2\quad 3)x_0=\infty$

   $б)\ \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+5-\sqrt{1-x}}}{x+2}$ $\qquad$ $в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 5x}{sin^{24x}}$

   $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-4}\right)^{1-2x}$ $\qquad$ $д)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{ln(3+2\mathrm{x})-ln3}$

4. $a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-3x-9}{5x-x^2-6}$, *якщо* $1)x_0=1,\ \ 2)x_0=3\quad 3)x_0=\infty$

   $б)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}}$ $\qquad$ $в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 4x}{tg^2 5x}$

   $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+4}{4x+3}\right)^{4x-5}$ $\qquad$ $д)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(2-x^2)-ln2}{xln(1+x)}$

5. $a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+7x+12}{9-3x-2x^2}$, *якщо* $1)x_0=-1,\ \ 2)x_0=-3\quad 3)x_0=\infty$

   $б)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{4-x}}{x+2}$ $\qquad$ $в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin^2 8x}{4x^2}$

   $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-5}\right)^{4-x}$ $\qquad$ $д)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x^2)}{ln(2+3x^2)-ln2}$

6. $а)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-15x-4}{11x-2x^2-12}$, *якщо* $1)x_0=-2,\ \ 2)x_0=4\quad 3)x_0=\infty$

$б)\ \lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}$ $\quad в)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 3x}{2x^2}$

$г)\ \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{5x+5}{5x-3})^{x+3}$ $\quad д)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(3-5x)-ln3}{x(2-x)}$

7. $а)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+13x+4}{8-18x-5x^2}$, *якщо* $1)x_0=2,\ \ 2)x_0=-4\quad 3)x_0=\infty$

$б)\ \lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{-4-x}}{x+5}$ $\quad в)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{ctg2x}{ctg8x}$

$г)\ \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{5x-1}{5x-5})^{2-x}$ $\quad д)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{x}-x^2}{ln4-\ln(4+x)}$

8. $а)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-17x+10}{11x-2x^2-5}$, *якщо* $1)x_0=-1,\ \ 2)x_0=5\quad 3)x_0=\infty$

$б)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x-1}$ $\quad в)\ \lim\limits_{x\to 0}(arcctg5x * ctg2x)$

$г)\ \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{5x+4}{5x+3})^{2x-3}$ $\quad д)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln 5-\ln(5-3\mathrm{x})}{x^2+x}$

9. $а)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+16x+5}{15-7x-2x^2}$, *якщо* $1)x_0=1,\ \ 2)x_0=-5\quad 3)x_0=\infty$

$б)\ \lim\limits_{x\to -5}\frac{x+5}{\sqrt{x+8}-\sqrt{-2-x}}$ $\quad в)\ \lim\limits_{x\to 0}(arcsin6x * ctg3x)$

$г)\ \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{5x-2}{5x-1})^{4-3x}$ $\quad д)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{ln4-\ln(x^2+4)}$

10. $а)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-11x-6}{27x-4x^2-18}$, *якщо* $1)x_0=-2,\ \ 2)x_0=6\quad 3)x_0=\infty$

$б)\ \lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{-3-x}}{4+x}$ $\quad в)\ \lim\limits_{x\to 0}(sin12x * ctg4x)$

$г)\ \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{5x+3}{5x+5})^{5+x}$ $\quad д)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln5-\ln(2x+5)}{3x}$

11. $а)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-9x+18}{11x-x^2-30}$, *якщо* $1)x_0=-1,\ \ 2)x_0=6\quad 3)x_0=\infty$

$б)\ \lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{-2-x}}$ $\quad в)\ \lim\limits_{x\to 0}(ctg3x * tg12x)$

$г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{4x-1}$ $\quad д)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{1-3^{2x}}$

12. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$, *якщо* $1)x_0=1,\ \ 2)x_0=-4\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg7x}{5x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{2x+3}\right)^{4x-5}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-4x}-1}{1-2^x}$

13. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+15x+25}{x^2+15x\mp 50}$, *якщо* $1)x_0=5,\ \ 2)x_0=-5\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos4x}{xsin5x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+6}\right)^{2x+3}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2^{-x}-1}$

14. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$, *якщо* $1)x_0=-2,\ \ 2)x_0=1\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{tg2x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{5x+4}\right)^{x+4}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{-3x}-1}{x^2+4x}$

15. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$, *якщо* $1)x_0=-2,\ \ 2)x_0=-1\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin8x}{4x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{5x-1}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{1-3^x}$

16. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$, *якщо* $1)x_0=-1,\ \ 2)x_0=2\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcctg3x}{4x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{x-3}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{\ln(2-5x^2)-ln2}$

17. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{5-4x-x^2}{2x^2+15x+25}$, *якщо* $1)x_0=1,\ \ 2)x_0=-5\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{9-x}}{x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{3x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(5-2x)-ln5}{3x}$

18. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$, *якщо* $1)x_0=2,\ \ 2)x_0=-1\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{-1-x}}{2+x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin2x}{4x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\ln(4+3x)-\ln 4}$

19.а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$, якщо 1)$x_0=-1$, 2)$x_0=3$ 3)$x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}}{x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xsin3x}{cos2x-1}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2x^2+3)-\ln3}{5x\ln(1+2x)}$

20.а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$, якщо 1)$x_0=0$, 2)$x_0=4$ 3)$x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{4-x}}{x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2x}{xsin2x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{\ln(3-x^2)-\ln3}$

21.а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$, якщо 1)$x_0=1$, 2)$x_0=-2$ 3)$x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}{x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^25x}{tg^2x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(4-7x)-ln4}{x*(2+3x)}$

22.а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{10-3x^2-13x}{4x^2+17x-15}$, якщо 1)$x_0=2$, 2)$x_0=-5$ 3)$x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^22x}{\cos8x-1}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-3}\right)^{5x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+3x^2}{\ln7-\ln(7-2x)}$

23.а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{13x-15-2x^2}{5x^2-24x-5}$, якщо 1)$x_0=-1$, 2)$x_0=5$ 3)$x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{-1-x}}{x+5}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin12x}{arcsin4x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-3}{3x+2}\right)^{3x-1}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln7-\ln(7-5x)}{x^2-3x}$

24.а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{12-5x-2x^2}{3x^2+8x-16}$, якщо 1)$x_0=1$, 2)$x_0=-4$ 3)$x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{7-x}}{x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg12x}{arctg3x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+5}\right)^{x+5}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\ln6-\ln(6-x^2)}$

25. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{14x-3x^2-8}{4x^2-19x+12}$, *якщо* $1)x_0=-2,\ \ 2)x_0=4\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x+5}{\sqrt{x+10}-\sqrt{-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos4x}{x^2}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-3}{3x+1}\right)^{3-x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln 7-\ln(7-3x)}{4x}$

26. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+9x+9}{3-5x-2x^2}$, *якщо* $1)x_0=1,\ \ 2)x_0=-3\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{-2-x}}{x+4}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 4x}{1-cos6x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+4}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{5^{-2x}-1}$

27. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-9}{11x-3x^2-6}$, *якщо* $1)x_0=-1,\ \ 2)x_0=3\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{-1-x}}{x+3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{arcsin^2 2x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x-1}\right)^{3x-3}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{5x}}{7^{-3x}-1}$

28. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-4x-12}{22x-3x^2-24}$, *якщо* $1)x_0=-3,\ \ 2)x_0=6\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}(ctg^2 2x * sin^2 6x)$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x-4}\right)^{5-2x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-7^{-x}}$

29. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-19x+20}{15x-25-2x^2}$, *якщо* $1)x_0=-2,\ \ 2)x_0=5\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{8-x}}{x-5}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ctg^2 3x}{ctg^2 6x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4}{2x+3}\right)^{1-5x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-5^{-2x}}{3x^2-x}$

30. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-15x-4}{3x^2-8x-16}$, *якщо* $1)x_0=-1,\ \ 2)x_0=4\quad 3)x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 2x}{sin^2 5x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x-3}\right)^{5x+3}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{5^{-x}-1}$

ІЗ № 1-3

Знайти і класифікувати точки розриву заданої функції, побудувати її схематичний графік.

1. $y = \begin{cases} 2 - x, \ \text{якщо}\ x \le 0; \\ \sin x, \ \text{якщо}\ 0 < x \le \pi; \\ 2x - \pi, \ \text{якщо}\ x > \pi; \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} -x^2, \ \text{якщо}\ |x| < 3; \\ 0, \ \text{якщо}\ |x| = 3; \\ -3x, \ \text{якщо}\ |x| > 3\,; \end{cases}$

3. $y = \begin{cases} 2, \ \text{якщо}\ x \le 0; \\ \sin x, \ \text{якщо}\ 0 < x < 2; \\ 0, \ \text{якщо}\ x = 2\,; \\ \ln(x-2), \ \text{якщо}\ x > 2; \end{cases}$

4. $y = \begin{cases} x + 2, \ \text{якщо}\ x < 0; \\ arccosx, \ \text{якщо}\ 0 \le x \le 1 \\ 2, \ \text{якщо}\ x = 1; \\ 0, \ \text{якщо}\ x > 1; \end{cases};$

5. $y = \begin{cases} x^2, \ \text{якщо}\ |x| < 2; \\ 3, \ \text{якщо}\ |x| = 2; \\ x + 2, \ \text{якщо}\ |x| > 2\,; \end{cases}$

6. $y = \begin{cases} 2, \ \text{якщо}\ x < 1; \\ \ln(3-x), \ \text{якщо}\ 1 \le x < 3; \\ x, \ \text{якщо}\ x \ge 3; \end{cases}$

7. $y = \begin{cases} \dfrac{3x}{x+2}, \ \text{якщо}\ x < -2; \\ 2x^2, \ \text{якщо}\ 2 \le x < 1; \\ -1, \ \text{якщо}\ x \ge 1; \end{cases}$

8. $y = \begin{cases} \dfrac{2}{x}, \ \text{якщо}\ x < 0; \\ \sqrt{x}, \ \text{якщо}\ 0 \le x \le 4; \\ \ln(x-4), \ \text{якщо}\ x > 4\,; \end{cases}$

9. $y = \begin{cases} 2x, \ \text{якщо}\ x < -1; \\ 1 - x, \ \text{якщо} - 1 \le x < 0; \\ cosx, \ \text{якщо}\ x \ge 0; \end{cases}$

10. $y = \begin{cases} (x+2)^2, \ \text{якщо}\ x < -1; \\ 3x + 4, \ \text{якщо}\ |x| \le 1; \\ \ln(2x-1), \ \text{якщо}\ x > 1\,; \end{cases}$

11. $y = \begin{cases} 2x + 1, \ \text{якщо}\ x < 0; \\ 0, \ \text{якщо}\ x = 0; \\ 2^x, \ \text{якщо}\ 0 < x \le 2; \\ \dfrac{1}{x-2}, \ \text{якщо}\ x > 2; \end{cases}$

12. $y = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+2}, \ \text{якщо}\ x < -2; \\ x^2, \ \text{якщо} - 1 \le x < 0; \\ 2, \quad \text{якщо}\ x = 0; \\ \ln(x-4), \ \text{якщо}\ x > 0\,; \end{cases}$

13. $y = \begin{cases} sin\dfrac{x}{2}, \ \text{якщо}\ |x| < \pi; \\ 0, \ \text{якщо}\ |x| = \pi; \\ \dfrac{x}{\pi}, \ \text{якщо}\ |x| > \pi; \end{cases}$

14. $y = \begin{cases} 3, \ \text{якщо}\ x \le -\dfrac{\pi}{2}; \\ tgx, \ \text{якщо} -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0; \\ 2 - \mathrm{x}, \ \text{якщо}\ x > 0\,; \end{cases}$

15. $y = \begin{cases} sinx, \ \text{якщо}\ x \le 0; \\ cosx, \ \text{якщо}\ 0 < x < \pi; \\ \pi, \ \text{якщо}\ x = \pi; \\ -1, \ \text{якщо}\ x > \pi; \end{cases}$

16. $y = \begin{cases} \ln(x+3), \ \text{якщо}\ x < -2; \\ 2, \ \text{якщох} = -2; \\ x + 2, \ \text{якщо} - 2 < x < 0; \\ \mathrm{sinx}, \ \text{якщо}\ x \ge 0\,; \end{cases}$

$$17.\ y=\begin{cases} x+3, & якщо\ x<-1;\\ x^2-2, & якщо\ |x|\le 1;\\ \dfrac{1}{x-1}, & якщо\ x>1; \end{cases}$$

$$18.\ y=\begin{cases} 5, & якщо\ x\le 2;\\ 9-x^2, & якщо\ 2<x\le 4;\\ \dfrac{9-2\mathrm{x}}{\mathrm{x}-4}, & якщо\ x>4\ ; \end{cases}$$

$$19.\ y=\begin{cases} -2x, & якщо\ x<-1;\\ 0, & якщо\ x=-1;\\ x^2+1, & якщо-1<x<2;\\ x-1, & якщо\ x\ge 2; \end{cases}$$

$$20.\ y=\begin{cases} cosx, & якщо\ x\le 0;\\ x^2, & якщо\ 0<x<1;\\ 2, & якщо\ x=1;\\ \sqrt{\mathrm{x}}, & якщо\ x>1\ ; \end{cases}$$

$$21.\ y=\begin{cases} x^2, & якщо\ x<0;\\ cosx, & якщо\ 0\le x<\pi;\\ 0, & якщо\ x=\pi;\\ -1, & якщо\ x>\pi; \end{cases}$$

$$22.\ y=\begin{cases} x+1, & якщо\ x<0;\\ 5, & якщо\ x=0;\\ 2^x, & якщо\ 0<x\le 2;\\ \ln(x-2)\ , & якщо\ x>2\ ; \end{cases}$$

$$23.\ y=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}, & якщо\ x<-1;\\ x^2, & якщо\ |x|\le 1;\\ arctg\ x, & якщо\ x>1; \end{cases}$$

$$25.\ y=\begin{cases} e, & якщо\ x\le \pi;\\ tg\dfrac{x}{2}, & якщо-\pi<x\le 0;\\ log_2\mathrm{x}\ , & якщо\ x>0\ ; \end{cases}$$

$$25.\ y=\begin{cases} x+6, & якщо\ x<-2;\\ 0, & якщо\ x=-2;\\ 0{,}5^x, & якщо\ 2<x\le 0;\\ x^2, & якщо\ x>0; \end{cases}$$

$$26.\ y=\begin{cases} 2x-1, & якщо\ x<0;\\ 3, & якщо\ x=0;\\ x^2-1, & якщо\ 0<x\le 2;\\ \ln(x-2)\ , & якщо\ x>2\ ; \end{cases}$$

$$27.\ y=\begin{cases} -x, & якщо\ x\le -1;\\ \arcsin x\ , & якщо\ |x|<1;\\ x, & якщо\ x\ge 1; \end{cases}$$

$$28.\ y=\begin{cases} arctg\ x, & якщо\ x\le 0;\\ 3^x, & якщо\ 0<x\le 2;\\ 2\mathrm{x}+1, & якщо\ x>2\ ; \end{cases}$$

$$29.\ y=\begin{cases} x^2, & якщо\ x<0;\\ 2, & якщо\ x=0;\\ \sqrt{x}, & якщо\ 0<x<4;\\ 5, & якщо\ x\ge 4; \end{cases}$$

$$30.\ y=\begin{cases} \ln(1-x), & якщо\ x<1;\\ 2x^2, & якщо\ 1\le x<2;\\ 5, & якщо\ x=2\ ;\\ 3\mathrm{x}+2, & якщо\ x>2\ ; \end{cases}$$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 1

ІЗ №1-1

Див. **приклад 5** у теоретичних відомостях до **ПЗ-1**.

ІЗ №1-2

Див. приклади, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-2.

а) Знайти границю $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}$, якщо:

1) $x_0 = 4$; 2) $x_0 = -2$; 3)$x_0 = \infty$.

Розв'язання. 1) Скориставшись теоремами про границі, підставимо у функцію замість змінної x її граничне значення $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2} = \frac{2\cdot 4^2+4-6}{4^2+3\cdot 4+2} = \frac{32+4-6}{16+12-2} = \frac{30}{30} = 1$$

2) Безпосередня підстановка граничного значення $x = -2$ приводить нас до невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2} = \frac{2\cdot(-2)^2-2-6}{(-2)^2+3\cdot(-2)+2} = \frac{8-2-6}{4-6+2} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Щоб розкрити цю невизначеність, розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу і скоротимо дріб на множник $(x+2)$ (цей множник обов'язково увійде в розклад на множники многочленів у чисельнику і знаменнику дробу, бо очевидно, що $x = -2$ є коренем обох цих многочленів). Потрібно зауважити, що таке скорочення можливе, оскільки $x + 2 \neq 0$, хоча й $(x+2) \to 0$. Після скорочення знову підставимо замість змінної x її граничне значення $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(2x-3)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \to -2} \frac{2x-3}{x+1} =$$
$$= \frac{2\cdot(-2)-3}{-2+1} = \frac{-4-3}{-1} = \frac{-7}{-1} = 7.$$

3) За $x \to \infty$ матимемо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Щоб розкрити цю невизначеність, необхідно почленно поділити чисельник і знаменник дробу на x у найвищому степені (в нашому випадку на x^2) Оскільки функції x та x^2 нескінченно великі за $x \to \infty$, то $\frac{1}{x}$ та $\frac{1}{x^2}$ – нескінченно малі

за $x \to \infty$ тобто:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$$

Скориставшись теоремами про границі і наведеними вище міркуваннями, матимемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} =$$

$$= \frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}} = \frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-6\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1+3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{2+0-6\cdot 0}{1+3\cdot 0+2\cdot 0} = \frac{2+0-0}{1+0+0} = \frac{2}{1} = 2$$

б) Знайти границю $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення $x = 6$ приводить до невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}} = \frac{6-6}{\sqrt{6-4}-\sqrt{8-6}} = \frac{0}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Щоб розкрити цю невизначеність, домножимимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до знаменника, тобто на

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}.$$

Після цього, скориставшись формулою різниці квадратів, спростимо отриманий вираз:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}} = \frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{8-x}\right)^2} = \lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{x-4-(8-x)} =$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{2x-12} = \lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}\right)}{2(x-6)}$$

Скоротимо отриманий дріб на множник $(x-6)$. Потрібно зауважити, що таке скорочення можливе, оскільки $x-6 \neq 0$, хоча й $(x-6) \to 0$. Після скорочення знову підставимо замість змінної x її граничне значення $x = 6$:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{2(x-6)}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}}{2}=$$
$$=\frac{\sqrt{6-4}+\sqrt{8-6}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$
Отже, $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}}=\sqrt{2}.$

в) 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}$ за першою визначною границею.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення $x=0$ приводить нас до невизначеності виду $\langle\frac{0}{0}\rangle$:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}=\frac{1-\cos(8\cdot 0)}{0\cdot actg(2\cdot 0)}=\frac{1-\cos 0}{0\cdot actg0}=\frac{1-1}{0}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Щоб розкрити цю невизначеність, скористаємося першою визначною границею. Застосувавши відому з тригонометрії формулу

$$1-\cos 2a=2sin^2a,$$

перетворимо заданий вираз:

$$\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}=\frac{1-\cos(2\cdot 4x)}{x\cdot arctg2x}=\frac{2\sin^2 4x}{x\cdot arctg2x}=$$
$$=\frac{\sin 4x}{x}\cdot\frac{\sin 4x}{1}\cdot\frac{2}{actg2x}=\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x\cdot\frac{2}{actg2x}=$$
$$=\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{32x}{actg2x}$$

За першою визначною границею:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{32x}{actg2x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{32x}{actg2x}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{32x}{actg2x}=$$
$$=32\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{arctg2x}.$$

Зробимо заміну $actg2x=y$, тоді $2x=tg\,y$, $x=0{,}5\cdot tg\cdot y$. Очевидно, що $y\to 0$ за $x\to 0$. Переходячи в рівності $32\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{arctg2x}$ до змінної y і скориставшись теоремами про границі, матимемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x} = 32\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{arctg2x} = \lim_{y\to 0}\frac{0{,}5\cdot tg\,y}{y} =$$
$$= 32\cdot 0{,}5\lim_{y\to 0}\frac{tg\,y}{y} = 16\cdot\lim_{y\to 0}\frac{tg\,y}{y}.$$

За відомою з тригонометрії формулою $tg\,y = \frac{\sin y}{\cos y}$, тому

$$\frac{tg\,y}{y} = \frac{\sin y}{y\cdot\cos y} = \frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{\cos y}.$$

За першою визначною границею:

$$\lim_{y\to 0}\frac{siny}{y} = 1.$$

Матимемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x} = 16\cdot\lim_{y\to 0}\frac{tg\,y}{y} = 16\cdot\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{\cos y}\right) =$$
$$= 16\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = 16\cdot 1\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = 16\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}.$$

Підставимо замість змінної y її граничне значення $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x} = 16\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = 16\cdot\frac{1}{\cos y} = 16\cdot\frac{1}{1} = 16.$$

2. Користуючись порівнянням нескінченно малих, знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x}.$$

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення $x = 0$ приводить нас до невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$.:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x} = \frac{1-\cos 0}{0\cdot arctg\,0} = \frac{1-1}{0\cdot 0} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Щоб розкрити цю невизначеність, скористаємося порівнянням нескінченно малих.

За таблицею еквівалентних нескінченно малих за умови $x\to 0$ (*див. п. 13*) матимемо:

$$(1-cos8x)\sim\frac{(8x)^2}{2} = \frac{64x^2}{2} = 32x^2;$$
$$actg\,2x\sim 2x.$$

Замінимо нескінченно малі у виразі під знаком границі на еквівалентні. Матимемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x\cdot arctg2x} = \lim_{x\to 0}\frac{32x^2}{x\cdot 2x} = \frac{32}{2} = 16.$$

г) Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x+1}{8x+5}\right)^{x-1}$.

Розв'язання. За $x\to\infty$ основа степеня $\left(\frac{8x+1}{8x+5}\right)$ прямує до одиниці. Дійсно (*див. п. 1, в*):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x+1}{8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{1}{x}}{8+\frac{5}{x}}=\frac{8+0}{8+0}=\frac{8}{8}=1\ .$$

За $x\to\infty$ показник степеня $(x-1)$ прямує до нескінченності. Отже, за умовою задачі, маємо невизначеність виду $[1^{\infty}]$. Щоб розкрити цю невизначеність, скористаємося другою визначною границею. Для цього подамо основу степеня у вигляді суми одиниці і деякої нескінченно малої за $x\to\infty$ функції $a(x)$, а показник степеня – у вигляді $\frac{1}{a(x)}$:

$$\left(\frac{8x+1}{8x+5}\right)^{x-1}=\left(\frac{8x+5-4}{8x+5}\right)^{x-1}=\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{x-1}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{\frac{8x+5}{-4}}\right)^{\frac{-4\cdot(x-1)}{8x+5}}=\left(\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{\frac{8x+5}{-4}}\right)^{\frac{-4x+4}{8x+5}}$$

За другою визначною границею:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{\frac{8x+5}{-4}}=e,$$

до того ж (*див. прилад 1(в)*):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{4}{x}}{8+\frac{5}{x}}=\frac{-4+0}{8+0}=\frac{-4}{8}=-0{,}5.$$

Матимемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x+1}{8x+5}\right)^{x-1}=\left(\left(1+\frac{-4}{8x+5}\right)^{\frac{8x+5}{-4}}\right)^{\frac{-4x+4}{8x+5}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-4x+4}{8x+5}}=e^{0,5}=\frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

д) Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln 5-\ln(5-x)}{0{,}1x}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення $x=0$ приводить до невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln 5-\ln(5-x)}{0{,}1x}=\frac{\ln 5-\ln(5-0)}{0{,}1\cdot 0}=\frac{\ln 5-\ln 5}{0}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Щоб розкрити цю невизначеність, скористаємося третьою визначною границею (*див. п.7,в)*).

Для цього, застосувавши відому формулу

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b},$$

перетворимо заданий вираз:

$$\frac{\ln 5 - \ln(5 - x)}{0{,}1x} = \frac{\ln(5 - x) - \ln 5}{-0{,}1x} = \frac{\ln \frac{5 - x}{5}}{-0{,}1x} = \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{5}\right)}{-0{,}1x} =$$

$$= \frac{\ln(1-0{,}2x)}{-0{,}1x} = 2 \cdot \frac{\ln\big(1+(-0{,}2x)\big)}{2\cdot(-0{,}1x)} = \frac{\ln\big(1+(-0{,}2x)\big)}{-0{,}2x}.$$

За третьою визначною границею:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(1+(-0{,}2x)\big)}{-0{,}2x} = 1.$$

Матимемо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln 5-\ln(5-x)}{0{,}1x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln\big(1+(-0{,}2x)\big)}{-0{,}2x}\right) =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(1+(-0{,}2x)\big)}{-0{,}2x} = 2 \cdot 1 = 2.$$

ІЗ №1-3

Див. **приклад 12** у теоретичних відомостях до **ПЗ-3**.

РОЗДІЛ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ПЗ – 1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ І НОРМАЛІ ДО ПЛОСКОЇ КРИВОЇ. ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Теоретичні відомості

1. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку (a; b). Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі за $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Якщо границя (1) існує і скінченна, вона називається *похідною функції* $y = f(x)$ *за змінною* x і позначається

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Похідною функції $y = f(x)$ *за аргументом* x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій.

Приклад 1. Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Розв'язання. Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад 2. $y = C$, де $C = \mathrm{const}$. Знайти похідну функції.

Розв'язання. Надавши аргументу x приросту Δx, дістанемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Тепер знайдемо границю відношення $\Delta y / \Delta x$ за $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \text{, тобто } C' = 0.$$

Приклад 3. $y = \sin x$. Знайти похідну функції.

Розв'язання. Користуючись відомою з тригонометрії формулою

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2},$$

знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x;$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад 4. $y = e^x$. Знайти похідну функції.

Розв'язання. Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x,$$

тобто $\left(e^x\right)' = e^x$.

2. Геометричний зміст похідної

Дотичною до кривої L у точці M називається граничне положення *MN* січної MM_1 за умови прямування точки M_1 по кривій *L* до точки *M* (рис. 1).

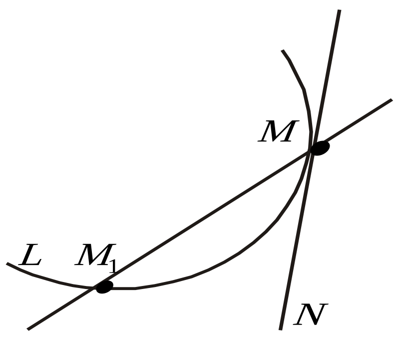


Рисунок 1

Нехай крива, задана рівнянням $y = f(x)$, має дотичну в точці M (x, y). Позначимо (рис. 2) кутовий коефіцієнт дотичної MN: $k = \text{tg}\varphi$. Надамо в точці x приросту Δx, тоді ордината y набуде приросту Δy.

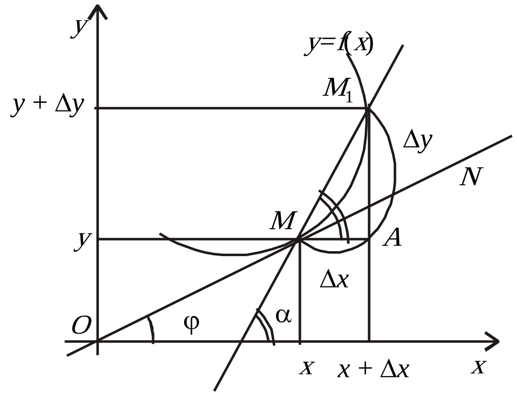


Рисунок 2

З ΔMAM_1 випливає, що $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\alpha$. Коли $\Delta x \to 0$, то $M_1 \to M$, $\alpha \to \varphi$ і січна прямує до положення дотичної MN.

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \text{tg}\alpha = \text{tg}\varphi = k$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то $f'(x) = k$, тобто похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою x. У цьому полягає геометричний зміст похідної.

3. Механічний зміст похідної

Припустимо, що точка M рухається прямолінійно нерівномірно по деякій прямій лінії, яку візьмемо за вісь Ox (рис. 3).

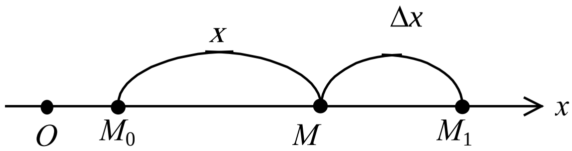


Рисунок 3

Рух точки відбувається за законом $x = f(t)$, де x – шлях; t – час. Знайдемо швидкість точки M у момент часу t (миттєва швидкість).

Нехай точка M у момент t перебувала на відстані x від початкової точки M_0, а в момент часу $t + \Delta t$ точка опинилася на відстані $x + \Delta x$ від початкової точки й зайняла положення M_1. Отже, час t набув приросту Δt, а шлях x – приросту $\Delta x = f(\Delta t + t) - f(t)$. Середня швидкість руху точки M за час Δt описується формулою $V_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Якщо точка M рухається рівномірно, то $V_{ср}$ є величина стала, і її беруть за швидкість точки. Для нерівномірного руху точки очевидно, що для достатньо близьких значень Δt до нуля середня швидкість точки M буде близька до її швидкості у момент часу t. Тому за точне значення швидкості точки M у момент часу t беруть величину

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

яка є швидкістю зміни функції $x = f(t)$ у точці. У цьому полягає механічний зміст похідної.

4. Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої

Нехай функція $y = f(t)$ означена і неперервна на деякому проміжку $[a; b]$. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a;b]$.

Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0; y_0)$ у цьому напрямі (рис. 4):

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{2}$$

де k кутовий коефіцієнт дотичної. Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$.

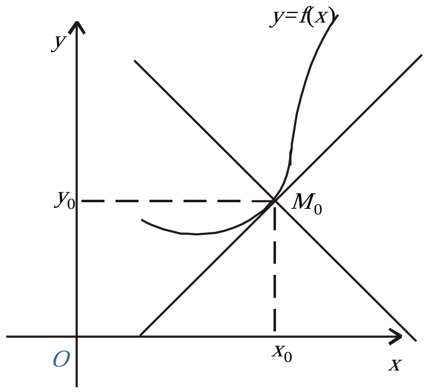


Рисунок 4

Рівняння дотичної. Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то з виразу (2) дістанемо рівняння дотичної у вигляді

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Рівняння нормалі. *Нормаллю* до графіка функції в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці (рис. 4).

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{4}$$

Приклад 5. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

Розв'язання. Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x) = 2x$, звідси $f'(-3) = -6$; $f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Рівняння дотичної (3) і нормалі (4) запишуться так:

$$y - 9 = -6(x+3), \; y - 9 = \frac{1}{6}(x+3)$$

або у загальному вигляді:

$$6x + y + 9 = 0, \; x - 6y + 57 = 0.$$

5. ***Залежність між неперервністю і диференційовністю функції***

Функція $y = f(x)$ є *неперервною в точці* x, якщо у цій точці $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною в точці*, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною на інтервалі* $(a; b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції встановлює теорема.

Якщо функція диференційовна в деякій точці, то у цій точці функція неперервна.

Якщо функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ в кожній точці деякого проміжку має скінченну похідну, то на цьому проміжку вона неперервна.

Зауваження. Неперервність функції в цій точці не є достатньою умовою її диференційованості. Наприклад, функція $\boldsymbol{y = |x|}$ неперервна в точці $\boldsymbol{x = 0}$, але в цій точці вона не диференційована.

Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може не існувати похідної.

Справді, нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x. Запишемо тотожність $\Delta y = \dfrac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} (\Delta x \neq 0)$, звідси

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Таким чином, функція $y = f(x)$ неперервна в точці x.

Наслідок. Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.

Прикладом неперервної функції, що не має похідної в одній точці, є функція $y = |x|$ (рис. 5).

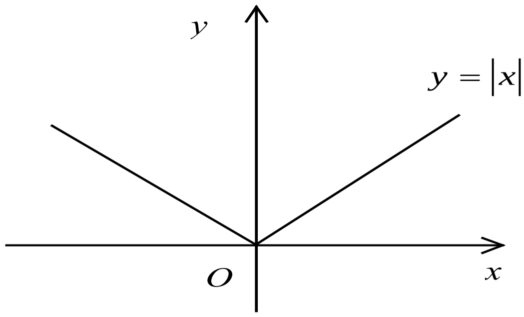


Рисунок 5

Ця функція неперервна за $x = 0$, але не диференційовна для цього значення, оскільки в точці з абсцисою $x = 0$ не існує дотичної до графіка функції.

Таким чином, необхідною умовою диференційовності функції $y = f(x)$ у точці x є її неперервність у цій точці.

6. ***Основні правила диференціювання***

1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де $c = \text{const}$, то $y' = 0$.

2. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

3. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \text{const}.$$

5. Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Зауваження. Похідну від функції $y = \frac{u(x)}{c}$, де $c = \text{const}$, зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини $\frac{1}{c}$ на функцію $u(x)$:

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u(x)\right)' = \frac{1}{c}u'(x).$$

Приклад 6. Обчислити похідну для функції $y = \text{tg}\, x$.
Розв'язання.

$$y' = (\text{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким чином, $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

7. Похідна складної функції. Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається *зовнішньою*, а функція $\varphi(x)$ – *внутрішньою* або *проміжним аргументом*.

Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ – диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

8. Похідна неявної функції. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будем вважати, що ця функція – диференційовна.

Продиференціювавши за x обидві частини рівняння $F(x; y) = 0$, дістанемо рівняння першого степеня відносно y'. З цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявної функції.

Приклад 7. Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.
Розв'язання. Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $(y^2)' = 2y \cdot y'$.

Продиференціювавши за x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\dfrac{x}{y}$.

9. Похідна оберненої функції. Нехай задано дві взаємно обернені диференційовні функції

$$y = f(x) \text{ та } x = \varphi(y)(f(\varphi(y)) = y).$$

Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ за змінною y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x)$: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Приклад 8. Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.

Розв'язання. Задана функція обернена до функції $y = \sin x$.

Можна записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Звідси $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Якщо в останньому виразі замість *y* записати *x*, то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. Похідна параметрично заданої функції. Нехай функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \Psi(t) \end{aligned}\right\} (t_1 \le t \le t_2).$$

Припустимо, що функції $\varphi(t), \Psi(t)$ мають похідні і що функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \Phi(x)$, яка також є диференційовною. Тоді визначену параметричними рівняннями функціональну залежність $y = f(x)$ можна розглядати як складну функцію $y = \Psi(t)$, $t = \Phi(x)$ (*t* – проміжний аргумент).

Маємо:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \Psi'_t(t)\Phi'_x(x), \quad \Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Звідки $y'_x = \dfrac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}$ або $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знайдена формула дає можливість знаходити похідну y'_x від параметрично заданої функції, не знаходячи явної залежності $y = f(x)$.

Приклад 9. Функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\} (0 \le t \le \pi).$$

Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$: а) за будь-якого t; б) за $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. а) $y'_x = \dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{ctg}t;$

б) $\left(y'_x\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1.$

7. Похідні від основних елементарних функцій

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій:

1. $(x)' = 1$;
2. $\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$;
3. $\left(e^x\right)' = e^x$;
4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Продиференціювати подані далі функції.

Приклад 10. $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Розв'язання. Ця функція є алгебраїчною сумою функцій, тому:

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)'.$$

У здобутому виразі перший доданок алгебраїчної суми є добуток сталої величини на степеневу функцію, тому застосуємо до нього формулу (2) таблиці похідних; другий – ірраціональна функція з показником $m = \dfrac{1}{3}$ – застосуємо формулу (2) таблиці похідних; третій – логарифмічна функція з основою e – використаємо формулу (5):

$$y' = 3\cdot 2x - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад 11. $y = 6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}$.

Розв'язання. Задана функція складна: зовнішня – показникова функція з основою 6, внутрішня для неї – обернена тригонометрична. Обернена тригонометрична також є складною, для якої внутрішня функція –

алгебраїчна сума $x^5 - 4$. Для суми аргументом (скінченним) є *x*.

Таким чином, задана функція є суперпозицією трьох функцій.

$$y = \left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'_{\arcsin\left(x^3-4\right)} \left[\arcsin\left(x^5-4\right)\right]'_x =$$

$$= \left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'_{\arcsin\left(x^5-4\right)} \left[\arcsin\left(x^5-4\right)\right]'_{x^5-4} \left[x^5-4\right]'_x .$$

У цьому виразі знизу біля кожної квадратної дужки вказано аргумент, за яким потрібно диференціювати функцію, взяту в дужки.

Тепер послідовно скористаємося формулами (4), (11), (2) таблиці похідних. Отримаємо:

$$y' = 6^{\arcsin\left(x^5-4\right)} \ln 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^5-4\right)^2}} \cdot 5x^4 .$$

Взагалі використані правила та формули не фіксують, а записують кінцевий результат їх застосування.

Приклад 12. $y = \left(\mathrm{tg}3x\right)^{\sin 4x}$.

Розв'язання. Задана функція є степенево-показниковим виразом виду

$$y = \left(u(x)\right)^{v(x)} \text{, де } u(x) = \mathrm{tg}3x, v(x) = \sin 4x . \tag{5}$$

Прологарифмуємо функцію (5) за основою *e*:

$$\ln y = v \ln u . \tag{6}$$

Оскільки $\ln y$ і $\ln u$ – складні функції, після диференціювання обох частин рівності (6) дістанемо:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{1}{u} u' v .$$

Звідси $y' = y\left(v' \ln u + \dfrac{u'}{u} v\right) = u^v \left(v' \ln u + \dfrac{u'}{u} v\right)$.

Таким чином, дістали формулу для знаходження похідної від степенево-показникової функції виду (5).

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v\right). \tag{7}$$

У нашому випадку формула (7) виглядає як

$$y' = (\mathrm{tg}3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4\cos 4x \cdot \ln \mathrm{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\mathrm{tg}3x \cdot \cos^2 3x} \right).$$

8. Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається *похідною третього порядку* і позначається y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3 x}{dx^3}$.

Похідна від похідної (n – 1)-го порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається *похідною n-го порядку* і позначається $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$

Приклад 13. Знайти похідну третього порядку для функції. $y = \sin(5x+4)$.

Розв'язання. $y' = 5\cos(5x+4)$; $y'' = -25\sin(5x+4)$; $y''' = -125\cos(5x+4)$.

Приклади, в яких використовуються різні завдання на знаходження похідної функції

Приклад 14. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

Розв'язання. Надамо x приросту Δx, тоді y набуде приросту Δy:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left(2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) - 4\right) -$$
$$-\left(2x^3 + 5x^2 - 7x - 4\right) = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x.$$

За означенням похідної маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7\right) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Приклад 15. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y=-\mathrm{ctg}x-x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, знаходимо приріст функції:

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=-\mathrm{ctg}(x+\Delta x)-(x+\Delta x)+\mathrm{ctg}x+x=$$
$$=\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}(x+\Delta x)-\Delta x=\frac{\sin\Delta x}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-\Delta x.$$

Звідки

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\cdot\sin(x+\Delta x)}-1\right)=\frac{1}{\sin^2 x}-1.$$

Приклад 16. Який кут утворює з віссю Ox дотична до кривої $y=\dfrac{2}{3}x^5-\dfrac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x=1$?

Розв'язання. Знаходимо похідну $y'=\dfrac{10}{3}x^4-\dfrac{1}{3}x^2$; за $x=1$, $y'=3$, таким чином $\mathrm{tg}\alpha=3$, звідки $\alpha=\mathrm{arctg}3\approx 71^\circ 34'$.

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

Приклад 17. $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$.

Розв'язання.

$$y'=\left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)\right)'=x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{x}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x-2)=$$
$$=3x^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x-3x^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

Приклад 18. $y=\sin(2x+3)$.

Розв'язання. $y'=\cos(2x+3)\cdot(2x+3)'=2\cos(2x+3)$.

Приклад 19. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Розв'язання $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Приклад 20. $y=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

Розв'язання.
$$y'=\mathrm{tg}\sqrt{x}\,\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}\sqrt{x}\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}-1\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}^3\sqrt{x}.$$

Приклад 21. $y=x^{x^2}$.

Розв'язання. Логарифмуючи функцію, дістаємо $\ln y=x^2\ln x$.

Звідки:
$$(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y',$$
$$\frac{y'}{y}=x^2\cdot\frac{1}{x}+2x\ln x,\quad \frac{y'}{y}=x(1+2\ln x),$$
$$y'=xy(1+2\ln x)=xx^{x^2}(1+2\ln x)=x^{x^2+1}(1+2\ln x).$$

Приклад 22. $y=(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

Розв'язання. Маємо: $\ln y=\mathrm{tg}x\ln\sin x,\quad \frac{y'}{y}=\mathrm{tg}x\frac{1}{\sin x}\cos x+$
$$+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x=1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x,$$
$$y'=y\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right)=(\sin x)^{\mathrm{tg}x}\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right).$$

Приклад 23. Знайти похідну y'_x з рівняння $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.

Розв'язання. Продиференціювавши за x обидві частини рівняння, дістанемо $3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^y\cdot y'-2xe^y=0$.

Звідки
$$y'=\frac{\left(2xye^y-3x^2\right)y}{1-x^2ye^y}.$$

Приклад 24. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2+2xy^2+3y^4=6$ у точці M_0 (1, – 1).

Розв'язання. З рівняння кривої знайдемо похідну:

$$2x+2y^2+4xyy'+12y^3y'=0\text{, тобто } y'=-\frac{x^2+y^2}{2xy+6y^3}.$$

Таким чином, $y'(1)=f'(1)=-\frac{1+(-1)^2}{2\cdot1\cdot(-1)+6(-1)^3}=\frac{1}{4}$.

Рівняння дотичної буде
$$y+1=\frac{1}{4}(x-1)\text{, або } x-4y-5=0.$$

Рівняння нормалі $y+1=-4(x-1)$ або $4x+y-3=0$.

Приклад 25. Задано функцію $y=x^5+2x^4-3x^3-x^2-\frac{1}{2}x+7$. Знайти $y', y'', y''', \ldots$.

Розв'язання. Маємо: $y'=5x^4+8x^3-9x^2-2x-\frac{1}{2}$,

$$y''=20x^3+24x^2-18x-2,\quad y'''=60x^2+48x-18,$$
$$y^{(4)}=120x+48,\quad y^{(5)}=120,\quad y^{(6)}=y^{(7)}=\ldots=0.$$

Приклад 26. $y=\ln x$. Знайти $y^{(n)}$.

Розв'язання. Маємо: $y'=\frac{1}{x}=x^{-1},\ y''=-1\cdot x^{-2},\ y'''=1\cdot 2x^{-3},\ y^{(4)}=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}, \ldots,$

$$y^{(n)}=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)(-1)^{n-1}\cdot x^{-n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

Приклад 27. Знайти y'_x, якщо

$$\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=3t^5+5t^3+1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо $x'_t=3t^2+3=3(t^2+1),\ y'_t=15t^2(t^2+1)\Rightarrow y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=$

$=\frac{15t^2(t^2+1)}{3(t^2+1)}=5t^2.$

Приклад 28. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

в довільній точці $t\in[-\pi,\pi]$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт дотичної в кожній точці дорівнює значенню похідної y'_x у цій точці:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right).$$

кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди в кожній точці дорівнює $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)$, де t – значення параметра, який відповідає цій точці.

Оскільки кутовий коефіцієнт дорівнює тангенсу кута φ нахилу дотичної до осі Ox, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

№1. Користуючись лише означенням похідної (не користуючись правилами диференціювання), знайти похідні функцій:

а) $y = 5x^2 + 3,$ *б*) $y = \sqrt{x},$ *в*) $y = \sin x.$

Вказівка: *в) скористатися порівнянням нескінченно малих.*

Відповідь: *а*) $y' = 10x$ *б*) $y' = \frac{1}{2*\sqrt{x}}$ *в*) $y' = \cos x$

№ 2. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^5 - 3x^2 5x - 9$ *б*) $y = \cos(5x - 3)$

в) $y = \sin x^2$ *г*) $y = \sin^2 x$

д) $y = (2x^3 + 5)^4$ *е*) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

ж) $y = x^2 * e^x$ *и*) $y = (x^2 + 2x + 2) * e^{-x}$

к) $y = \sin x * \ln x$ *л*) $y = \ln\ln x * (\ln\ln\ln x - 1)$

м) $y = \log_2 sin^2 x$ *н*) $y = \log_{x^2} 2$

п) $y = \frac{arctg\, x}{x}$ *р*) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

с) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$ *т*) $y = ln\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

у) $y = arcsin\frac{2x^3}{1 + x^6}$ *ф*) $y = arccos\frac{9 - x^2}{9 + x^2}$

х) $y = x^{2^x}$ *ц*) $y = x^{\sqrt{x}}$

Відповідь:

а) $y' = 5x^2 - 6x + 5$ *б*) $y' = 5\sin(3 - 5x)$

в) $y' = 2x * \cos x^2$ *г*) $y' = \sin 2x$

д) $y' = 24x^2 * (2x^3 + 5)^3$ *е*) $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

ж) $y' = (x^2 + 2x) * e^x$ *и*) $y' = -x^2 * e^{-x}$

к) $y' = \cos x * \ln x + \frac{\sin x}{x}$ *л*) $y' = \frac{lnlnln\, x}{x * \ln x}$

м) $y' = \frac{2ctg\, x}{\ln 2}$ *н*) $y' = \frac{-\ln 2}{2x * \ln^2 x}$

п) $y' = \frac{1}{x^3 + x} - \frac{arctg\, x}{x^2}$ *р*) $y' = \frac{2}{1 + sin 2x}$

с) $y' = \frac{8 * (x-1)^3}{(x+1)^5}$ *т*) $y' = \frac{1}{\cos x}$

у) $y' = \frac{6x^2}{1 + x^6}$ *ф*) $y' = \frac{6}{9 + x^2}$

х) $y' = (1 + \ln x * \ln 2^x) * 2^x * x^{2^x - 1}$

ц) $y' = (1 + \ln\sqrt{x}) * x^{\sqrt{x} - 0.5}$

№ 3. Знайти похідні y'_x неявно заданих функцій:

$а)\ x^3 + \ln y = x^2 * e^y \qquad б)\ x^3 + y^3 = 3xy$

$в)\ x^y = y^x \qquad г)\ x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 = 100$

Вказівка: *в) спочатку прологарифмувати заданий вираз за натуральною основою, а вже потім обчислювати похідну.*

Відповідь: $а)\ y'_x = \frac{2xy^2 * e^y - 3yx^2}{1 - yx^2 * e^y} \quad б)\ y'_x = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$

$$в)\ y'_x = \frac{y^2 - xy * \ln y}{x^2 - xy * lnx} \quad г)\ y'_x = \frac{x}{3y}$$

№ 4. Знайти похідні y'_x функцій, заданих параметричними рівняннями:

$$а)\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases} \qquad б)\begin{cases} x = e^{-t} * \sin t \\ y = e^t * \cos t \end{cases}$$

Відповідь: $а)y'_x = 5t^2$ $б)y'_x = e^{2t}$;

№ 5. Знайти y''', якщо:

$$а)\ y = \frac{\ln^2 x}{2} \quad б)\ y = \frac{x}{6x + 6} \quad в)\ y = 2^{-x} + 2^x \quad г)\ y = (2x + 3)^{\frac{7}{2}}$$

Відповідь: $а)\ y''' = \frac{2\ln x - 3}{x^3} \qquad б)\ y''' = \frac{1}{(x+1)^4}$

$$в)y''' = (2^x - 2^{-x}) * \ln^3 2 \qquad г)y''' = 105 * \sqrt{2x + 3}$$

№ 6. Скласти рівняння дотичної l та нормалі *p*, проведених до параболи $y = x^2 — 3x + 5$ у точці М(2; 3). Знайти кут нахилу дотичної l до осі Ох . Виконати рисунок.

Відповідь: $y = x + 1$ – дотична; $y = 5\text{-}x$ – нормаль; $\alpha = 45°$.

№ 7. Скласти рівняння дотичної та нормалі, проведених до кривої

$x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці М(1;-1).

Відповідь: $x - 4y - 5 = 0$ – дотична; $4x + y - 3 = 0$ – нормаль.

№ 8. Знайти кут між заданими кривими у точці їх перетину:

$$а)y = \sqrt{2} * \sin x \text{ та } y = \sqrt{2} * \cos x \qquad б)y = x^2 \text{ та } y = \frac{1}{x^2}$$

Відповідь: $а)\ \alpha = 90°$; $б)\ \alpha = 45°$.

№ 9. Знайти швидкість та прискорення матеріальної точки, яка рухається за законом $s(t) = \sqrt{t}$ (*s* – у метрах, *t* – в секундах), в момент часу $t_0 = 4$ с .

Відповідь: $\vartheta = \frac{1}{8} = 0.125\ м/с. \qquad a = -\frac{1}{32} = -0.03125\ м/с.$

№ 10. Вздовж параболи $y = 8x - x^2$ рухається точка так, що її абсциса змінюється, залежно від часу, за законом $x = t * \sqrt{t}$ (x – в метрах, t – в секундах). Знайти швидкість і прискорення зміни ординати цієї точки в момент, коли вона проходитиме точку М(1; 7).

Відповідь: $v = 9$ м/с, $a = 0$ м/с^2.

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1. $y = \dfrac{1}{x^2}$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{2}{x^3}$.

2. $y = \sqrt[3]{x^2}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

3. $y = 5\sin x + 3\cos x$. *Відповідь.* $y' = 5\cos x - 3\sin x$.

4. $y = 5(\mathrm{tg} x - x)$. *Відповідь.* $y' = 5\mathrm{tg}^2 x$.

5. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

6. $y = 2^{x^2}$. *Відповідь.* $y' = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2$.

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

7. $y = \dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}$. *Відповідь.* $y' = x^2\sqrt{x}\left(1 - x^2\right)^2$.

8. $y = 3x^3 \cdot \ln x - x^3$. *Відповідь.* $y' = 9x^2 \cdot \ln x$.

9. $y = 2^{3x} / 3^{2x}$. *Відповідь.* $y' = \left(\dfrac{8}{9}\right)^x \cdot \ln\dfrac{8}{9}$.

10. $y = x\arccos\dfrac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$. *Відповідь.* $y' = \arccos\dfrac{x}{2}$.

11. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

12. $y = \ln\left(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}\right)$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

13. $y = \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2(\sin x) + \ln\cos(\sin x)$. *Відповідь.* $y' = \mathrm{tg}^3(\sin x) \cdot \cos x$.

14. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

15. $y = 2x \cdot \mathrm{tg}2x + \ln\cos 2x - 2x^2$. *Відповідь.* $y' = 4x \cdot \mathrm{tg}^2 2x$.

16. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{3x - x^2}{1 - 3x^2}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{3}{1 + x^2}$.

17. $y = e^x\sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{2e^{3x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

18. $y = e^x \cdot 2^{5x} / 3^{4x}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}} \cdot \ln\dfrac{32e}{81}$.

19. $y=\frac{x+1}{x}-e^{-\ln\frac{x}{x+1}}$. *Відповідь.* $y'=0$.

20. $y=\frac{x^2\cdot e^{x^2}}{x^2+1}$. *Відповідь.* $y'=2e^{x^2}\cdot x\cdot\frac{x^4+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

21. $y=\frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. *Відповідь.* $y'=\frac{x^2}{x^4-a^4}$.

22. $y=\log_{x^2}2$. *Відповідь.* $y'=-\frac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$.

23. $y=x^{\arcsin x}$. *Відповідь.* $y'=x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right)$.

24. $y=\frac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$. *Відповідь.* $y'=x(\ln x-1)\cdot\frac{x^x}{e^x}\ln x$.

25. $y=\log_{\cos x}\sin x$. *Відповідь.* $y'=\frac{\operatorname{ctg}x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$.

26. $y=\ln\left(e^x\cos x+e^{-x}\sin x\right)$. *Відповідь.* $\frac{(\cos x-\sin x)\left(e^x+e^{-x}\right)}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}$.

27. $y=e^x\sin x\cos^3 x$. *Відповідь.* $e^x\sin x\cos^3 x(1+\operatorname{ctg}x-3\operatorname{tg}x)$.

28. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}$. *Відповідь.* $\left(2x-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$.

29. $y=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. *Відповідь.* $\frac{1}{\cos^5 x}$.

30. $y=\sin^2 3x\cdot f\left(\cos^3 u\right)$, де $f(x)=2^x$, $u=7x$.

Відповідь. $2^{\cos^3 7x}\left(3\sin 6x-\frac{21}{2}\ln 2\sin^2 3x\cos 7x\sin 14x\right)$.

31. $y=\cos\sqrt{x}\cdot f\left(u^{-1}\right)$, де $f(x)=x^2$, $u=7x$.

Відповідь. $-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\operatorname{tg}7x+14\cos\sqrt{x}\cos^{-2}7x\right)/\operatorname{tg}^3 7x$.

32. $y=(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

Відповідь. $(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\frac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x}\frac{\ln\operatorname{tg}2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.

Знайти похідну y'_x від неявно заданих функцій:

33. $x\sin y + y\sin x = 0$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{y\cos x + \sin y}{x\cos y + \sin x}$.

34. $\dfrac{y}{x} + e^{y/x} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0$. *Відповідь.* $y' = y/x$.

35. $x^{y^2} + y^2 \cdot \ln x - 4 = 0$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{y}{2x\ln x}$.

36. $y^2 - 2xy + b = 0$. *Відповідь.* $\dfrac{y}{y-x}$.

37. $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$. *Відповідь.* $-\dfrac{3x^2 + 2axy + by^2}{ax^2 + 2bxy + 3y^2}$.

38. $y = \cos(x+y)$. *Відповідь.* $-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

39. $y = 1 + xe^y$. *Відповідь.* $\dfrac{e^y}{2-y}$.

40. $y\sin x - \cos(x-y) = 0$. *Відповідь.* $\dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$.

41. $\mathrm{tg}\dfrac{y}{2} = \sqrt{\dfrac{1-K}{1+K}}\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$. *Відповідь.* $\dfrac{\sqrt{1-K^2}}{1+K\cos x}$.

42. $y = x + \mathrm{arctg}y$. *Відповідь.* $\dfrac{1+y^2}{y^2}$.

43. $\cos(xy) = x$. *Відповідь.* $-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

Знайти похідну y'_x від параметрично заданих функцій:

44. $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$. *Відповідь.* $(3t^2 - 1)/(2t)$.

45. $x = \dfrac{t+1}{t}$, $y = \dfrac{t-1}{t}$. *Відповідь.* -1.

46. $x = \ln(1+t^2)$, $y = t - \mathrm{arctg}t$. *Відповідь.* $\dfrac{t}{2}$.

47. $x = \varphi(1 - \sin\varphi)$, $y = \varphi\cos\varphi$. *Відповідь.* $\dfrac{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1 - \sin\varphi - \varphi\cos\varphi}$.

48. $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$. *Відповідь.* $\dfrac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$.

49. $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$. *Відповідь.* $\dfrac{1-\mathrm{tg}t}{1+\mathrm{tg}t}$.

50. $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$. *Відповідь.* $\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.

Знайти похідні другого порядку від функцій:

51. $y = -\dfrac{22}{x+5}$. *Відповідь.* $y'' = -\dfrac{44}{(x+5)^3}$.

52. $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$. *Відповідь.* $y'' = \ln x$.

53. $y = -\dfrac{1}{9}x\sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x$. *Відповідь.* $y'' = x \cdot \sin 3x$.

54. $y = x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \sqrt{x^2 + a^2}$. *Відповідь.* $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

55. $y = xe^{x^2}$. *Відповідь.* $2e^{x^2}\left(3x + 2x^3\right)$.

56. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$. *Відповідь.* $\dfrac{6x\left(2x^3 - 1\right)}{\left(x^3 + 1\right)^3}$.

57. $y = \left(1 + x^2\right)\mathrm{arctg}x$. *Відповідь.* $\dfrac{2x}{1+x^2} + 2\mathrm{arctg}x$.

58. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. *Відповідь.* $-\dfrac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

59. $y = \dfrac{1}{a + \sqrt{x}}$. *Відповідь.* $\dfrac{a + 3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\left(a + \sqrt{x}\right)^3}$.

60. $y = e^{\sqrt{x}}$. *Відповідь.* $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{4x\sqrt{x}}$.

Знайти похідні третього порядку від функцій:

61. $y = ax^2 + bx + c$. *Відповідь.* $y''' = 0$.

62. $y = \mathrm{tg}x$. *Відповідь.* $y''' = 6\sec^4 x - 4\sin^2 x$.

63. $y = \ln\sin x$. *Відповідь.* $y''' = 2\mathrm{ctg}x\,\mathrm{cosec}^2 x$.

64. $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$. *Відповідь.* $y''' = \dfrac{1}{(x+1)^4}$.

65. $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$. *Відповідь.* $y''' = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$.

66. $y = (2x+3)^3\sqrt{2x+3}$. *Відповідь.* $y''' = 105\sqrt{2x+3}$.

67. $y = \left(x^2 + a^2\right)\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}$. *Відповідь.* $y''' = \dfrac{4a^3}{\left(a^2 + x^2\right)^2}$.

Знайти похідні n-го порядку від функцій:

68. $y = x^n \cdot \sqrt{x}$. *Відповідь.* $y^{(n)} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}{2^n}\sqrt{x}$.

69. $y=5-3\cos^2 x$. *Відповідь.* $y^{(n)}=-\frac{3}{2}\cdot 2^n\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

70. $y=2^x+2^{-x}$. *Відповідь.* $y^{(n)}=\left(2^x+(-1)^n\cdot 2^{-x}\right)\ln^n 2$.

71. $y=a^x$. *Відповідь.* $y^{(n)}=(\ln a)^n a^x$.

72. $y=\ln(1+x)$. *Відповідь.* $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

73. $y=\frac{1-x}{1+x}$. *Відповідь.* $y^{(n)}=2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

74. $y=xe^x$. *Відповідь.* $y^{(n)}=e^x(x+n)$.

75. $y=x^{n-1}\ln x$. *Відповідь.* $y^{(n)}=\frac{(n-1)!}{x}$.

76. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$, проведеної в точці гіперболи M (– 9, –8).

Відповідь. $x-y+1=0$.

77. Знайти кут між кривою $y=x-x^3$ та прямою $y=5x$.

Відповідь. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{3}$.

78. Знайти кут між кривими $y=x^3$ та $y=\frac{1}{x^2}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

79. Знайти кут між кривими $x^2+y^2=5, y^2=4x$.

Відповідь. $\operatorname{tg}\varphi_1=3, \operatorname{tg}\varphi_2=-3$.

80. Знайти кут між кривими $y=\sqrt{2}\sin x, y=\sqrt{2}\cos x$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

81. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x=\cos t$, $y=\sin t$ в точці $x=-1/2$, $y=\sqrt{3}/2$. Зробити рисунок.

Відповідь. $1/\sqrt{3}$.

82. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ за $t=\pi/4$.

Відповідь. -1.

ПЗ–2. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛІВ У НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕННЯХ. ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛА. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ І ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

1. Означення диференціала функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ існує і дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємозв'язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можемо записати $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)+\alpha$, де α – нескінченно мала величина ($\alpha\to 0$ за $\Delta x\to 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, дістанемо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x\,. \qquad (8)$$

З виразу (8) випливає, що приріст функції Δy складається із суми двох доданків, з яких перший доданок – так звана *головна частина приросту*, лінійна відносно Δx (за умови $\Delta x\to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно мала величина першого порядку відносно Δx). Другий доданок – добуток $\alpha\Delta x$ завжди нескінченно мала величина вищого порядку, ніж Δx.

Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається *диференціалом функції* $y = f(x)$; його позначають символом dy, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x\,. \qquad (9)$$

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y' = (x)' = 1$, отже, $dy = dx = \Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. З огляду на це, формулу для диференціала (9) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx\,. \qquad (10)$$

Приклад 1. Знайти диференціал dy функції $y = x^2$: 1) для довільних значень x та Δx; 2) для $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання. 1) $dy = \left(x^2\right)'\Delta x = 2x\Delta x$;

2) якщо $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $dy = 2\cdot 20\cdot 0{,}1 = 4$.

Приклад 2. Знайти диференціал dy функції $y = x^2\mathrm{tg}(3x+1)$.

Розв'язання. Оскільки $y' = 2x\mathrm{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$, то за формулою (10) отримаємо $dy=\left(2x\text{tg}(3x+1)+\dfrac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}\right)dx$.

2. Застосування деференціалав наближених обчисленнях

Вираз (8) з урахуванням (9) можна записати так:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{11}$$

Якщо $f'(x)\neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з dy.

За малих Δx доданком $\alpha\Delta x$ у виразі (11) нехтують і користуються наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, або в розгорнутому вигляді: $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$, звідки

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \tag{12}$$

Остання наближена рівність тим точніша, чим менше Δx.

Приклад 3. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Розв'язання. Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$$27=25+2=25\left(1+\frac{2}{25}\right),\ \text{звідки}\ \sqrt{27}=\sqrt{25\left(1+\frac{2}{25}\right)}=5\sqrt{1+\frac{2}{25}}. \tag{13}$$

Під час обчислення $\sqrt{1+\frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$, тоді $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула (12) у нашому випадку запишеться так:

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x,\ \text{де}\ x=1, \Delta x=\frac{2}{25}.$$

Інакше

$$\sqrt{1+\frac{2}{25}}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25}=1+\frac{1}{25}=1{,}04. \tag{14}$$

Підставивши (14) у рівність (13), дістанемо

$$\sqrt{27}\approx 5\cdot 1{,}04=5{,}2.$$

3. Правила знаходження диференціала

Застосовуючи формулу (10) та властивості похідних, дістаємо правила знаходження диференціала:

1. $y=c$; $dy=0$; 3. $y=u+v,\ \ dy=du+dv$;

2. $y=uv,\ \ dy=udv+vdu$; 4. $y=\dfrac{u}{v},\ \ dy=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.

Приклад 4. Знайти диференціал функції $y=\text{arctg}x$.

Розв'язання. Маємо: $dy=(\text{arctg}x)'\,dx=\dfrac{dx}{1+x^2}$.

Приклад 5. Знайти диференціал функції $s=e^{t^2}$.

Розв'язання. Маємо: $ds = e^{t^2} \cdot 2t \cdot dt$.

Приклад 6. Обчислити наближено значення $\arcsin 0{,}51$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Візьмемо $x = 0{,}5$; $\Delta x = 0{,}01$ та, застосовуючи формулу $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$, одержимо

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513.$$

4. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Якщо диференційовна на проміжку D функція $y = f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці ξ цього проміжку, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(\xi) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ферма. Геометричний зміст похідної $y' = f'(x)$ являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$. Звідси рівність нулю похідної $f'(\xi)$ геометрично означає, що у відповідній точці цієї кривої дотична паралельна осі *Ox*.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на сегменті $[a; b]$; 2) диференційовна на інтервалі $(a; b)$; 3) на кінцях сегмента набуває однакових значень, тобто $f(a) = f(b)$, то на інтервалі $(a; b)$ існує хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$, для якої $f'(\xi) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ролля. Якщо крайні ординати неперервної кривої $y = f(x)$, яка має в кожній точці дотичну, однакові, то на цій кривій знайдеться принаймні одна точка з абсцисою $\xi (a < \xi < b)$, в якій дотична паралельна осі *Ox* (рис. 6).

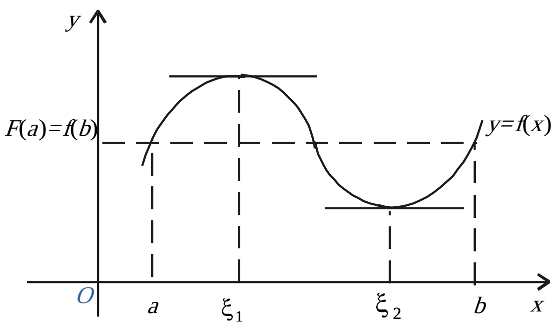


Рисунок 6

Теорема Лагранжа (теорема про скінченні прирости функції).

Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на сегменті $[a; b]$; 2) диференційовна на інтервалі $(a; b)$, то на інтервалі знайдеться хоча б одна точка

$x = \xi(a < \xi < b)$, така що

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi). \qquad (15)$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо формулу (15) у вигляді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi). \qquad (16)$$

З рис. 7 бачимо, що величина $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ є тангенсом кута α нахилу хорди, що проходить через точки *A* і *B* графіка функції $y = f(x)$ з абсцисами *a* і *b*.

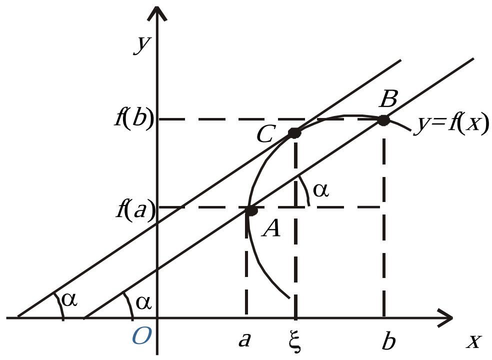


Рисунок 7

Водночас, $f'(\xi)$ — тангенс кута нахилу дотичної до кривої у точці *C* з абсцисою ξ. Таким чином, геометричний зміст рівності (15) або рівносильної для неї рівності (16) можна визначити так: якщо для всіх точок кривої $y = f(x)$ існує дотична, то на цій кривій знайдеться точка з абсцисою ξ, в якій дотична паралельна хорді *AB*, що сполучає точки *A* і *B*.

Теорема Коші. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ дві функції: 1) неперервні на сегменті [*a*; *b*]; 2) диференційовні на інтервалі (*a*; *b*); 3) $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то на інтервалі (*a*; *b*) знайдеться хоча б одна точка $x = \xi(a < \xi < b)$, така що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Приклад 7. Чи буде виконуватися теорема Ролля для функції $f(x) = x^2 - 6x + 100$, якщо $a = 1$, $b = 5$? Для якого значення ξ?

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ неперервна та диференційовна на всій числовій прямій і значення функції $f(x)$ на границях сегмента [1, 5] однакові між собою $f(1) = f(5) = 95$, то теорема Ролля буде виконуватись на інтервалі (1, 5). Значення ξ визначаємо з рівняння $f'(x) = 2x - 6 = 0$, тобто $\xi = 3$.

Приклад 8. Знайти координати точки *M* на дузі *AB* кривої $y = 2x - x^2$, в якій дотична паралельна хорді *AB*, якщо *A* (1; 1) та *B* (3; –3).

Розв'язання. Функція $y = 2x - x^2$ неперервна та диференційовна для всіх значень *x*. За теоремою Лагранжа між двома значеннями $a = 1$ та $b = 3$ існує значення $x = \xi$, яке задовольняє рівність $y(b) - y(a) = (b-a)y'(\xi)$, де $y' = 2 - 2x$. Підставимо дані умови задачі: $y(3) - y(1) = (3-1)y'(\xi)$, тобто $(2\cdot 3 - 3^2) - (2\cdot 1 - 1^2) = (3-1)\cdot(2-2\xi)$. Звідки $\xi = 2, y(2) = 0$. Таким чином, точка *M* має координати (2; 0).

5. Застосування похідної функції

Правило Лопіталя

Розглянемо відношення $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені й диференційовні в деякому околі точки *a*, виключаючи, можливо, саму точку *a*. Може бути, що за $x \to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞, тобто ці функції одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими величинами за умови $x \to a$. Тоді говорять, що в точці *a* функція *f* (*x*) має невизначеність виду

$$\left[\frac{0}{0}\right] \text{або} \left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \tag{17}$$

У цьому випадку, використовуючи похідні $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$, можна сформулювати правило для знаходження границі функції *f* (*x*) за $x \to a$, тобто визначити спосіб для розкриття невизначеностей виду (17).

Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує.

Зауваження. Якщо $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$ за $x \to a$ прямують одночасно до 0 або до ∞ і задовольняють ті умови, які були накладені теоремою на функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то до відношення $\varphi'(x)/\psi'(x)$ знову застосовуємо правило Лопіталя і виводимо формулу

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$$

і т. п.

Зауваження. Якщо похідні *f′(x)* і *g′(x)* задовольняють умови, котрі накладаються в наведеній теоремі на функції *f (x)* і *g (x)*, то правило Лопіталя можна застосувати повторно, тобто

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Правило Лопіталя справджується й тоді, коли $x \to \pm\infty$. Нехай функції *f* *(x)* і *g (x)* визначені в проміжку $[a, +\infty)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0,$, і в проміжку $[a, +\infty)$ існують скінчені похідні $f'(x)$ і $g'(x)$, де $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує й границя $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Розв'язання. Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 7x)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{7 \cos x}{2} = \frac{7}{2} .$$

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 7x + 5}$.

Розв'язання. Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 7x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 3x + 1)'}{(2x^3 + 7x + 5)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{6x^2 + 7} =$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(2x + 3)'}{(6x^2 + 7)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{12x} = \frac{1}{6} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0 .$$

6. Перетворення невизначеностей виду

$[0 \cdot \infty]$; $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty - \infty]$ до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. У випадку розкриття інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $[0 \cdot \infty]$. Нехай $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to a} v(x) = \infty$.

Потрібно знайти

$$\lim_{x\to a}\left(u(x)\cdot v\cdot (x)\right). \tag{18}$$

Це невизначеність типу $[0\cdot\infty]$.

Якщо вираз (18) записати у вигляді

$$\lim_{x\to a} u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{u}{\frac{1}{v}} \text{ або } \lim_{x\to a} u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то за $x\to a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 11. Знайти $\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Невизначеність виду $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$. Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$.

За $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u\to 0,\ v\to 0$ маємо невизначеність виду $[0^0]$;

б) $u\to\infty,\ v\to 0$ дістанемо невизначеність $[\infty^0]$;

в) $u\to 1,\ v\to\infty$ маємо невизначеність виду $[1^\infty]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності виду $[0\cdot\infty]$. Справді, позначимо цю функцію через y, тобто візьмемо $y=u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y=v\ln u(u>0)$.

Легко перевірити, що за $x\to a$ добуток $v\ln u$ буде невизначеністю $[0\cdot\infty]$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $[0\cdot\infty]$, тобто знайдемо границю $\lim_{x\to a}\ln y=k$ (k — скінченне або ∞).

Звідси $\lim_{x\to a} y=\lim_{x\to a}u^v=e^k$.

Приклад 12. Знайти границю $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Розв'язання. Це невизначеність виду $[0^0]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y=(\sin x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма цієї функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x\left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x = e^0 = 1$.

Приклад 13. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. За $x \to 1$ маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}}, \quad \ln y = \frac{\ln x}{x-1}; \quad \lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

Невизначеність $[\infty - \infty]$. Якщо функції $u(x) \to \infty$, $v(x) \to \infty$ за $x \to a$ (a – скінченне або нескінченне), то різниця u-v за $x \to a$ дає невизначеність $[\infty - \infty]$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 14. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $[\infty - \infty]$. Алгебраїчним перетворенням зведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

7. Зростання та спадання функцій

Нагадаємо: функція $f(x)$ називається *зростаючою на проміжку*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_2 > x_1$ то $f(x_2) > f(x_1)$); функція *спадна* на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Теорема 1 **(необхідна умова зростання (спадання) функції):**

1. Якщо диференційовна функція зростає на деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна на цьому проміжку.

2. Якщо диференційовна функція спадає на деякому проміжку, то похідна цієї функції недодатна на цьому проміжку.

Теорема 2 **(достатня умова зростання (спадання) функції):**

1. Якщо похідна диференційовної функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому проміжку.

2. Якщо похідна диференційовної функції від'ємна всередині проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.

Приклад 15. Знайти проміжки зростання та спадання функції $y = 8x - x^2$.

Розв'язання. Область визначення функції – уся числова вісь $-\infty < x < +\infty$. Знайдемо похідну $y' = 8 - 2x$. Функція диференційовна на проміжку $-\infty < x < +\infty$.

Для визначення проміжку зростання функції розв'яжемо нерівність $8 - 2x > 0,\quad x < 4$, тобто функція зростає на проміжку $-\infty < x < 4$.

Внаслідок визначення проміжку спадання функції (рис. 8) маємо $8 - 2x < 0$, тобто $4 < x < +\infty$.

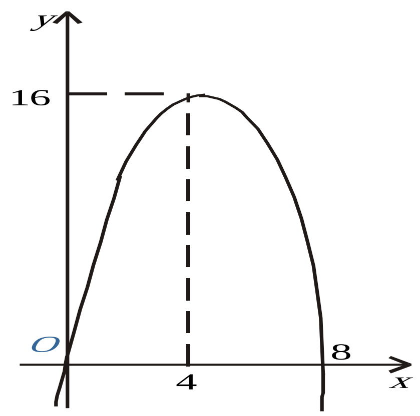


Рисунок 8

За x_1 аргументу x *функція* $f(x)$ *має максимум* $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність (рис. 9) $f(x_1) > f(x)(x \neq x_1)$. Аналогічно: за значення x_2 аргументу x *функція* $f(x)$ *має мінімум* $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 має місце нерівність (рис. 9) $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$.

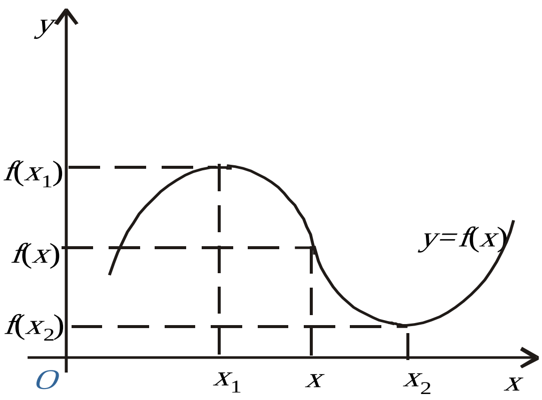


Рисунок 9

Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції, а ті значення аргументу, при яких досягаються екстремуми функції, називаються точками екстремуму функції (відповідно точками максимуму або мінімуму функції).

Екстремум функції, у загальному випадку, має локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно з ближніми її значеннями.

Необхідна умова екстремуму функції. У точці екстремуму диференційовної функції похідна її дорівнює нулю:

$$f'(x_2)=0. \tag{19}$$

Геометрична умова (19) означає, що в точці екстремуму диференційовної функції $y=f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі Ox (рис. 10).

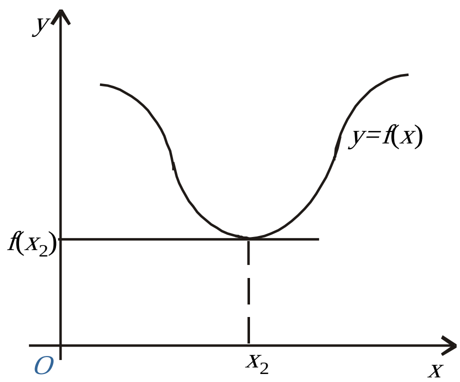


Рисунок 10

Наслідок. Неперервна функція може мати екстремум тільки в тих точках, де похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Справді, якщо в точці x_0 екстремуму функції $f(x)$ існує похідна $f'(x_0)$, то, згідно з цією теоремою, означена похідна дорівнює нулю.

Те, що в точці екстремуму неперервної функції похідна може не існувати, показує приклад функції, графік якої має форму «ламаної» (рис. 11).

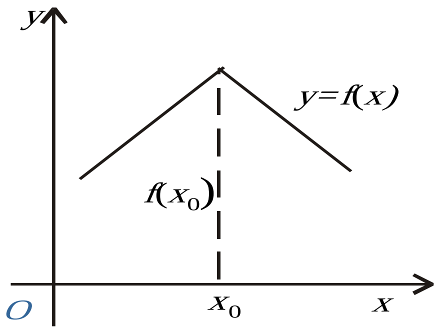


Рисунок 11

Ті значення аргументу *x*, які для заданої функції перетворюють на нуль її похідну $f'(x)$ або для якої похідна $f'(x)$ не існує (наприклад, перетворюється на нескінченність), називаються *критичними значеннями аргументу* (*критичними точками*).

Достатні умови екстремуму функції. Із того, що $f'(x_0)=0$, не випливає, що функція $f(x)$ має екстремум за $x = x_0$.

Наприклад, нехай $f(x)=x^3$. Тоді $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$, однак значення $f(0)=0$ не є екстремумом цієї функції, оскільки різниця $f(x)-f(0)$ змінює знак за зміни знака аргументу *x* (рис. 12).

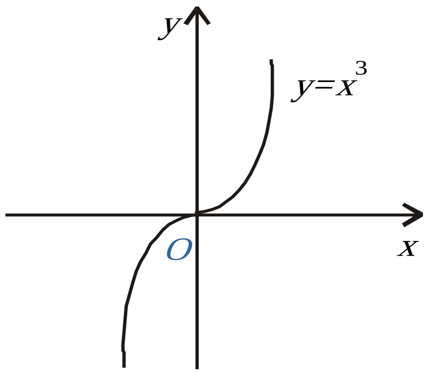


Рисунок 12

Отже, не для будь-якого критичного значення аргументу функції $f(x)$ має місце екстремум цієї функції. Через це поряд з необхідною умовою існують достатні умови існування екстремуму функції.

Теорема 1 (перше правило).

Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо під час переходу зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «–», то за $x = x_0$ функція має максимум;

2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;

3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.

Геометрична ілюстрація теореми 1 (рис. 13). Нехай у точці $x = x_1$ маємо $f'(x_1) = 0$ і для всіх x, достатньо близьких до точки x_1, виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ за } x < x_1; \\ f'(x) < 0 \text{ за } x > x_1. \end{cases}$$

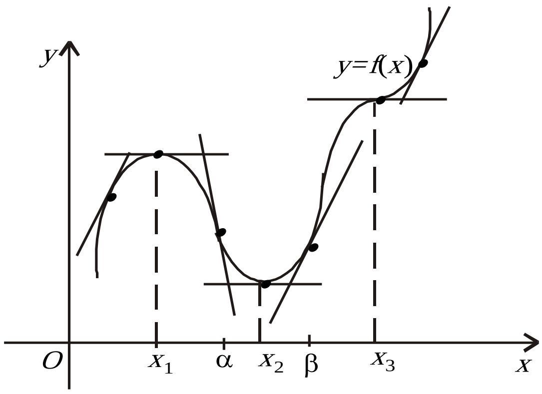


Рисунок 13

Тоді за $x < x_1$ дотична до кривої утворює з віссю Ox гострий кут — функція зростає, а за $x > x_1$ дотична утворює з віссю Ox тупий кут — функція спадає; за $x = x_1$ функція переходить від зростання до спадання, тобто має максимум.

Якщо в точці x_2 маємо $f'(x_2) = 0$ і для всіх значень x, достатньо близьких до точки x_2, виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \quad x > x_2, \\ f'(x) < 0, \quad x < x_2, \end{cases}$$

то за $x < x_2$ дотична до кривої утворює з віссю Ox тупий кут – функція спадає, а за $x > x_2$ дотична до кривої утворює гострий кут – функція зростає. За $x = x_2$ функція переходить від спадання до зростання, тобто має мінімум.

Якщо за $x = x_3$ маємо $f'(x_3) = 0$ і для всіх значень x, достатньо близьких до x_3, виконуються нерівності $f'(x) > 0$ за $x < x_3$; $f'(x) > 0$ за $x > x_3$, то функція зростає як за $x < x_3$, так і за $x > x_3$. Звідси за $x = x_3$ функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

Зауваження. На основі цієї теореми можна сформулювати таке правило для дослідження неперервної функції $y = f(x)$ на максимум і мінімум.

1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.

2. Обчислюємо критичні значення аргументу x (критичні точки), для цього:

а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x)=0$;

б) знаходимо значення x, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.

3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки. Оскільки знак похідної залишається постійним в інтервалі між двома критичними точками, для дослідження знака похідної ліворуч і праворуч, наприклад від критичної точки x_2 (див. рис. 13), досить визначити знак похідної в точках α і $\beta (x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3)$, де x_1 і x_3 — найближчі критичні точки).

4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.

Таким чином, маємо таке схематичне зображення можливих випадків:

<table>
<tr><td>x (досліджуваний інтервал змінної)</td><td>(x_1, x_2)</td><td>x_2</td><td>(x_2, x_3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f'(x)$ (знак похідної в досліджуваному інтервалі)</td><td>+</td><td rowspan="3">$f(x_2) = 0$ або не існує</td><td>–</td></tr>
<tr><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$f(x)$ (характер поведінки функції)</td><td>+ (–)</td><td>+ (–)</td></tr>
<tr><td>$\nearrow$ Функція зростає</td><td>Точка максимуму</td><td>$\searrow$ Функція спадає</td></tr>
<tr><td>Функція спадає $\searrow$</td><td>Точка мінімуму</td><td>Функція зростає $\nearrow$</td></tr>
<tr><td>Функція зростає (спадає) $\nearrow$ $\searrow$</td><td>Немає ні максимуму, ні мінімуму</td><td>Функція зростає (спадає) $\nearrow$ $\searrow$</td></tr>
</table>

Приклад 16. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

Розв'язання. 1. Знаходимо першу похідну $y'=x^2-4x+3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2-4x+3=0\,(f'(x)=0)$. Звідки $x_1=1,\ x_2=3$.

Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty, +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$.

Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x = 0 \in (-\infty, 1),\ \ y'(0) = 3 > 0\,;$$
$$x = 2 \in (1, 3),\ \ y'(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = -1 < 0\,;$$
$$x = 4 \in (3, +\infty),\ \ y'(4) = 4^2 - 4\cdot 4 + 3 = 11 > 0\,.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу.

З таблиці видно: під час переходу (зліва направо) через значення x = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, за x = 1 функція має максимум:

$$y_{\max}(1) = \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 = \frac{7}{3}\,.$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	$y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$	↘	$y_{\min}(3) = 1$	↗

Під час переходу через значення x = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, за x = 3 функція має мінімум:

$$Y_{\min}(3) = \frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 = 1\,.$$

На інтервалі:

1) $(-\infty, 1)$ – функція зростає;
2) (1, 3) – спадає;
3) $(3, +\infty)$ – зростає.

Крім того,

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1\right) = \pm\infty\,.$$

На основі проведеного дослідження будуємо графік функції (рис. 14).

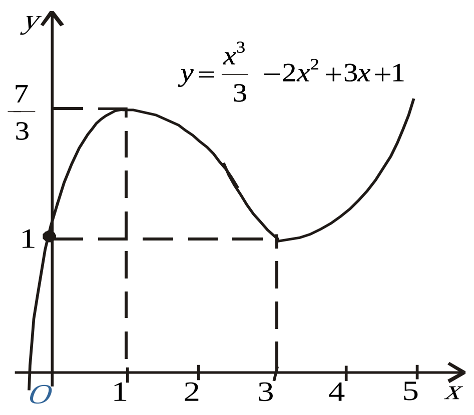


Рисунок 14

Теорема 2 (друге правило).

Якщо для диференційовної функції $f(x)$ у деякій точці x_0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то:

1) якщо друга похідна $f''(x_0)>0$, то в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум;

2) якщо $f''(x_0)<0$ – максимум;

3) якщо $f''(x_0)=0$ – питання залишається відкритим, і для його розв'язання потрібно застосувати перше правило.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовується.

Приклад 17. За допомогою другої похідної дослідити на екстремум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

Розв'язання. Перша похідна цієї функції $y'=x^2-4x+3$ перетворюється на нуль у точках x = 1 і x = 3 (див. попередній приклад).

Друга похідна $y''=2x-4$:

а) за x = 1 $y''(1)=2\cdot 1-4=-2<0$, звідси в точці x = 1 функція має максимум; $y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$,

б) за x = 3 $y''(3)=2\cdot 3-4=2>0$, тобто в точці x = 3 функція має мінімум $Y_{\min}(3)=1$ (див. рис. 14).

9. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку [a; b], то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення.

Найбільше значення функції на проміжку [a; b] називається *абсолютним максимумом*, а найменше – *абсолютним мінімумом*.

Припустимо, що на цьому проміжку функція $f(x)$ має скінченне число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається всередині проміжку [a; b], то очевидно, що це значення буде одним із максимумів функції (якщо існує кілька максимумів), точніше – найбільшим максимумом. Однак можливо, що найбільше значення досягатиметься на одному з кінців проміжку.

Таким чином, функція на відрізку [a, b] досягає свого **найбільшого значення** на одному з кінців цього проміжку або в такій точці його, яка є точкою максимуму.

Аналогічне твердження можна сформулювати й про **найменше значення** функції: воно досягається на одному з кінців цього проміжку або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму.

Правило. Якщо потрібно знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку $[a, b]$, то необхідно:

1) знайти всі максимуми функції на проміжку;

2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити $f(a)$ і $f(b)$;

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше: воно й буде найбільшим значенням функції на проміжку.

Аналогічно потрібно діяти і під час визначення найменшого значення функції на проміжку.

Приклад 18. Визначити на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ найбільше й найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 3$.

Розв'язання. 1. Знаходимо максимуми й мінімуми функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$:

$$y' = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1;$$
$$y'' = 6x, \quad y''(1) = 6 > 0.$$

Таким чином, у точці $x = 1$ маємо мінімум: $y_{\min}(1) = 1$.

Далі, $y''(-1) = -6 < 0$, тобто в точці $x = = -1$ маємо максимум: $y_{\max}(-1) = 5$.

2. Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}, \quad y(-3) = -15.$$

3. Таким чином, найбільше значення заданої функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ є: $y_{\text{найб}} = y_{\max}(-1) = 5$, а найменше – $y_{\text{найм}} = y(-3) = -15$.

Графік функції зображено на рис. 15.

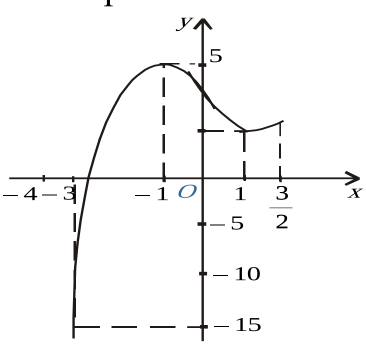


Рисунок 15

10. Опуклість і вгнутість кривої. Точка перегину

Крива на проміжку називається *опуклою* (*угнутою*), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

З графіка функції $y = f(x)$ (рис. 16) бачимо: крива $y = f(x)$ є опуклою на проміжку (a, c) і вгнутою на проміжку (c, b). Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається *точкою перегину*. На рис. 16 точка M – точка перегину.

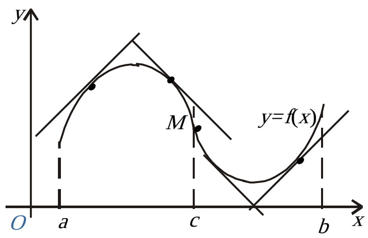


Рисунок 16

Наведемо дві теореми.

Теорема 1. 1) Якщо в усіх точках проміжку (c, b) для функції $y = f(x)$ друга її похідна додатна $\left(f''(x) > 0\right)$, то графік функції вгнутий.

2) Якщо в усіх точках проміжку (a, c) друга похідна від'ємна $\left(f''(x) < 0\right)$, то графік функції опуклий.

Теорема 2. Якщо для функції $y = f(x)$ її друга похідна $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує й під час переходу через цю точку змінює свій знак на протилежний, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але під час переходу через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ не є точкою перегину.

Приклад 19. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання. Маємо $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 4\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється на нуль, коли

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0, \text{ звідки } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Під час переходу через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції (рис. 17).

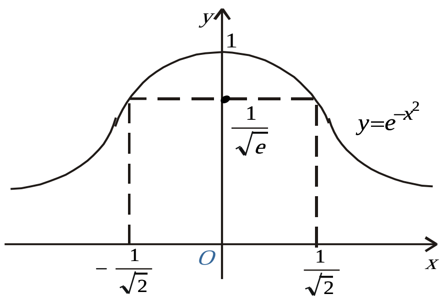


Рисунок 17

Результати дослідження заносимо в таблицю.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – опуклий.

11. Асимптоти. Змінна точка M рухається по кривій у нескінченність, коли відстань від цієї точки до початку координат необмежено зростає.

Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань d від змінної точки M кривої до цієї прямої за прямування точки M у нескінченність прямує до нуля (рис.18).

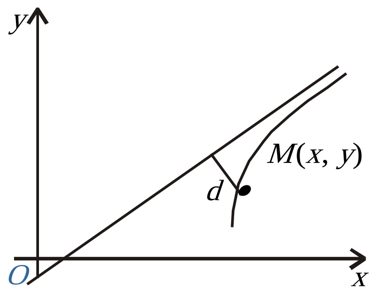


Рисунок 18

Асимптоти бувають *вертикальні* й *похилі*.

Вертикальні асимптоти. Якщо

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty \text{ або } \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty,$$

або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y = f(x)$.

Приклад 20. Знайти вертикальну асимптоту для кривої $y = \dfrac{2}{x-5}$

Розв'язання. Крива $y = \dfrac{2}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x = 5$, оскільки $\lim\limits_{x \to 5 \pm 0} y = \pm\infty$ (рис. 19).

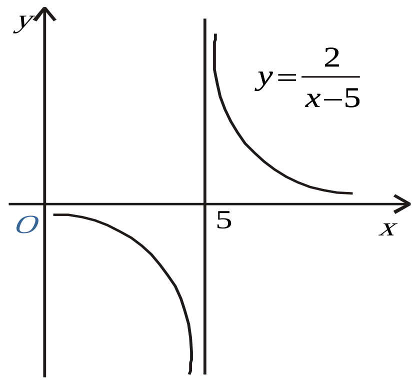


Рисунок 19

Похилі асимптоти. Нехай крива $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) \end{aligned}\right\} . \tag{20}$$

Якщо хоча б одна з границь (20) не існує, то кривої похилих асимптот у відповідній напівплощині не має.

Зауваження. Якщо не існує границя $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, то не існує і границя. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - k \cdot x \right)$ Отже, у цьому випадку графік функції $y = f(x)$ за $x \to +\infty$ асимптот не має. Якщо границя $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ існує і дорівнює k, а границя $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - k \cdot x \right)$ не існує, то у цьому випадку графік функції $y = f(x)$ також асимптот не має.

Із означення асимптоти кривої $y = f(x)$ випливає, що пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою, якщо принаймні одна з границь $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Приклад 21. Визначити асимптоти кривої $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Розв'язання. 1. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm 0} y = \lim_{x\to\pm 0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \lim_{x\to\pm 0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right) = \mp\infty,$$

то пряма $x = 0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y = kx + b$, тоді

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right) = 2.$$

Отже, пряма $y = x + 2$ – похила асимптота для графіка функції (рис. 20).

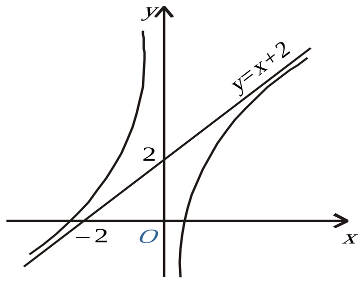


Рисунок 20

12. План дослідження функцій і побудови графіків

Під час дослідження функцій необхідно:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали опуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими як результат дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Приклад 22. Дослідити функцію $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. 1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує для всіх значень x за винятком значення x = 1. Звідси її область визначення $\{-\infty < x < 1;\ 1 < x < +\infty\}$.

2. Точка x = 1 є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2} = +\infty .$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив. Точка $x = 1$ – точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Ox: $y = 0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$, $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю Oy: $x = 0$, $y=\frac{-1}{1}=-1$, $(0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у таблицю:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3};\ y'=0 \Rightarrow$$

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ – критична точка.}$$

За $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

за $x=-1$ $y'=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}<0(-)$;

за $x=\frac{1}{2}$ $y'=\frac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

x	$(-\infty,0)$	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	↘	$y_{\min}$ (–1)	↗	Не існує	↘

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1 .$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. За $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервалі опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4};\ y''=0 \Rightarrow$$

$$2(2x+1)=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2};$$

при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x=-\frac{1}{2}$:

за $x=-1$ $y''=\frac{2(-2+1)}{(-2)^4}=-\frac{1}{8}<0(-)$;

за $x=0$ $y''=\frac{2}{1}=2>0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x=-\frac{1}{2}$, змінює знак, отже точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\frac{8}{9}\approx-0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$ – точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. За $1<x<+\infty$ $y''>0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у таблицю.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y''	–	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на рис. 21: (–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3},3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).

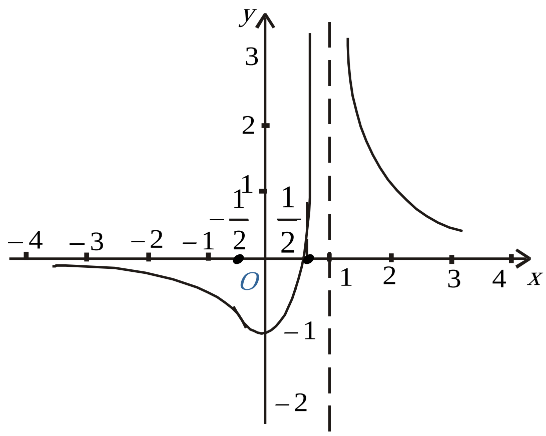


Рисунок 21

Приклади, в яких використовуються різні завдання на обчислення границь за правилом Лопиталя, основних характеристик кривої

Приклад 23. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Розв'язання. Чисельник та знаменник дробу окремо прямують до нуля за умови $x \to 0$ (невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$).

Використовуючи правило Лопіталя, дістаємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln(x)}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}$$

Приклад 24. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Розв'язання. Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x/2}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2}e^{x/2}\left(2+\dfrac{x}{2}\right)}{e^x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{x}{2}}{e^{x/2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/2}{\dfrac{1}{2}e^{x/2}}=0.$$

Приклад 25. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=[0\cdot\infty]$.

Розв'язання. Подамо добуток функцій у вигляді дробу, а потім, діставши невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2x^{-3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0\,.$$

Приклад 26. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Зведемо дроби до спільного знаменника. Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. До неї застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}\,.$$

Приклад 27. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}=\left[\infty^0\right]$.

Розв'язання. Позначимо задану функцію через y: $(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}=y$.

Прологарифмуємо її $\ln y=2\cos x\ln\mathrm{tg}x=\dfrac{2\ln\mathrm{tg}x}{1/\cos x}$.

Обчислимо границю знайденого виразу за допомогою правила Лопіталя (маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\sec x}=2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x\cdot 1/\mathrm{tg}x}{\sec x\cdot\mathrm{tg}x}=2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\mathrm{tg}^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x\,\mathrm{tg}x}{2\mathrm{tg}x\cdot\sec^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0,\quad\text{тобто}\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}y=e^0=1.$$

Приклад 28. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}=\left[1^\infty\right]$.

Розв'язання. Логарифмуючи та застосовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1/\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{-1/\left(x\ln^2 x\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2 x}{x+1}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$.

Приклад 29. Знайти інтервали зростання та спадання функції $y=x\left(1+\sqrt{x}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y'=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}$. Похідна додатна на проміжку $[0,+\infty)$. Таким чином, функція зростає на всій області означення.

Приклад 30. Дослідити на екстремум функцію $y = x \cdot \sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. Функція визначена за $-1 \le x \le 1$. Знайдемо першу похідну $y' = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0$ за $1-2x^2 = 0$; звідси $x_1 = -1/\sqrt{2},\ x_2 = 1/\sqrt{2}$ (стаціонарні точки); y' не існує $(y' = \infty)$ за $x = \pm 1$, тобто на межах області визначення функції.

Знайдемо другу похідну: $y'' = \dfrac{x\left(2x^2-3\right)}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$.

Обчислимо значення другої похідної в стаціонарних точках:

$$y''\left(1/\sqrt{2}\right) = \frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} < 0, \quad y''\left(-1/\sqrt{2}\right) = -\frac{1(1-3)}{\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}}} > 0 .$$

Отже, у точці $x_1 = -1/\sqrt{2}$ функція має максимум

$$y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

у точці $x = 1/\sqrt{2}$ – має мінімум:

$$y_{\min} = -\frac{1}{2}.$$

У критичних точках $x = \pm 1$ екстремуму немає, оскільки за означенням точками екстремуму можуть бути лише внутрішні точки області визначення функції.

Приклад 31. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3x - x^2$ на сегменті $[-2{,}3]$.

Розв'язання. Знайдемо першу похідну $f'(x) = 3 - 3x^2$ та стаціонарні точки: $3 - 3x^2 = 0$, тобто $x = \pm 1$. Визначимо значення функції в стаціонарних точках та на кінцях сегмента: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$; $f(-2) = 2$, $f(3) = -18$.

З одержаних чотирьох значень вибираємо найбільше та найменше: $f_{\text{найб}} = f_{\max}(1) = 2,\ f_{\text{найм}} = f(3) = -18$.

Приклад 32. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{x^3/(x-2)}$.

Розв'язання. Функція визначена на інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(2, +\infty)$. Через те, що $\lim\limits_{x\to 2+0}\sqrt{x^3/(x-2)} = +\infty$, пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою кривої.

Визначимо тепер існування похилих асимптот:

1) $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x/(x-2)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1/\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = 1$,

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=1;$$

2) $$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}=-1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x}+x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}\left(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}\right)}=-1.$$

Таким чином, існують права $y = x + 1$ та ліва $y = -x - 1$ похилі асимптоти кривої.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Знайти асимптоти графіків заданих функцій. Виконати рисунки.

а) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$ *б*) $y=x+2arctg\,x$

в) $y=x^2e^{-x}$ *г*) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

Відповідь: *а*) $x=-2, y=x-4$ *б*) $y=x+\pi$

в) $y=0$ *г*) $y=x+1$ $y=-x-1$

№ 2. Знайти проміжки монотонності функцій:

а) $y=x^3-3x+2$ *б*) $y=xe^{-x}$

в) $y=\sqrt{(x^2-1)^3}$ *г*) $y=(2-x)(x+1)^2$

Відповідь:

а) за $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ зростає, за $x\in(-1;1)$ спадає;

б) за $x\in(-\infty;1)$ зростає, за $x\in(1;+\infty)$ спадає;

в) за $x\in(-\infty;1)$ спадає, за $x\in(1;+\infty)$ зростає;

г) за $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ спадає, за $x\in(-1;1)$ зростає.

№3. Знайти екстремуми функцій:

а) $y=x+\sqrt{3-x}$ *б*) $y=\dfrac{x}{\ln x}$

в) $y=(2x-1)*\sqrt[3]{(x-3)^2}$ *г*) $y=x^4-4x^3+6x^2-4x+6$

Відповідь:

а) y(2,75) =3,25 – максимум;

б) y(e) = e —мінімум;

в) y(3) = 0 – мінімум, y(2) = 3 – максимум;

г) y(1) = 5 —мінімум.

№ 4. Знайти інтервали опуклості, ввігнутості і точки перегину графіків функцій:

$$а)\ y = x^5 + 5x - 6; \qquad б)\ y = xe^x;$$

$$в)\ y = 2 + \sqrt[3]{(x-5)^5}; \qquad г)\ y = 5x + \log_2 x.$$

Відповідь: *а*) опуклий за $x \in (-\infty; 0))$, ввігнутий за $x \in (0; +\infty)$, точка перегину P(0;-6);

б) опуклий за $x \in (-\infty; -2)$; ввігнутий за $x \in (-2; +\infty)$; точка перегину $P(-2;\ -2e^{-2})$;

в) опуклий за $x \in (-\infty; 5)$; ввігнутий за $x \in (5; +\infty)$**,** точка перегину *P*(5; 2);

г) опуклий за $x \in (0; +\infty)$**,** точок перегину немає.

№ 5. Методами диференціального числення дослідити задані функції і побудувати їх графіки:

$$а)\ y = \sqrt[3]{1-x^3} \qquad б)\ y = \frac{x^3+4}{x^2} \qquad в)\ y = ln\frac{x}{x-1}$$

$$г)\ y = 3\sqrt[3]{x} - x \qquad д)\ y = x + e^{-x} \qquad е)\ y = 1 - sin^2 x$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. *Відповідь.* $\frac{3}{5}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. *Відповідь.* 2.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$. *Відповідь.* $\frac{\alpha}{\beta}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$. *Відповідь.* $\frac{1}{3}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$. *Відповідь.* $-\frac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$. *Відповідь.* $\frac{m}{n}a^{m-n}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$. *Відповідь.* –2.

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-в^x}{x\sqrt{1-x^2}}$. *Відповідь.* $\ln\frac{a}{в}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. *Відповідь.* 2.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$. *Відповідь.* 1.

11. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{2}{3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2 - \left(e^x + e^{-x}\right)\cos x}{x^4}$. *Відповідь.* $1/3$.

13. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^x - e^a\right)}$. *Відповідь.* 1.

14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^n e^{-x}\right)$. *Відповідь.* 0.

15. $\lim\limits_{\varphi\to a}\left(a^2 - \varphi^2\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\varphi}{2a}$. *Відповідь.* $\dfrac{4a^2}{\pi}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \operatorname{ctg}\pi x)$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{\pi}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x)$. *Відповідь.* 1.

18. $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$. *Відповідь.* 0.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$. *Відповідь.* 0.

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{(a+x)(в+x)(c+x)} - x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{a+в+c}{3}$.

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right)$. *Відповідь.* 1.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$. *Відповідь.* e^2.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$. *Відповідь.* $-\dfrac{1}{2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^p} - \dfrac{q}{1-x^q}\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{p-q}{2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{2}{3}$.

26. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)^{\cos x}$. *Відповідь.* 1.

27. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$. *Відповідь.* e^{-6}.

28. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x + 2^x\right)^{1/x}$. *Відповідь.* 2.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. *Відповідь.* $e^{1/3}$.

30. Показати, що функція $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ спадає на інтервалі (–2, 1).

31. Показати, що коли функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ зростає на інтервалі (0, 1), то вона спадає на інтервалі (1, 2). Побудувати графік цієї функції.

32. Показати, що функція $y = x^3 + x$ скрізь зростає.

33. Показати, що функція $y = \operatorname{arctg} x - x$ скрізь спадає.

34. Показати, що функція $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ зростає на будь-якому інтервалі, до якого не входить точка $x = 0$.

35. Показати, що функція $y = \dfrac{\sin(x + a)}{\sin(x + в)}$ змінюється монотонно на будь-якому інтервалі, до якого не входять точки розриву функції.

36. Знайти інтервали монотонності функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ та побудувати за точками її графік на інтервалі (–2, 4).

Відповідь. $(-\infty, -1)$ – зростає; $(-1, 3)$ – спадає; $(3, +\infty)$ – зростає.

Знайти інтервали монотонності функцій:

37. $y = x^4 - 2x^2 - 5.$

Відповідь. $(-\infty, -1)$ – спадає; $(-1, 0)$ – зростає; $(0, 1)$ – спадає; $(1, +\infty)$ – зростає.

38. $y = (x - 2)^5 (2x + 1)^4.$

Відповідь. $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ – зростає; $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{11}{18}\right)$ – спадає; $\left(\dfrac{11}{18}, +\infty\right)$ – зростає.

39. $y = 2 - 3x + x^3$.

Відповідь. На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(1, +\infty)$ функція зростає; на інтервалі (– 1, 1) – спадає.

40. $y = \left(x^2 - 1\right)^{3/2}$.

Відповідь. За $x > 1$ – зростає; за $x < -1$ – спадає.

41. $y = xe^{-x}$.

Відповідь. За $x < 1$ – зростає; за $x > 1$ – спадає.

42. $y = (2 - x)(x + 1)^2$.

Відповідь. За $|x| > 1$ – спадає; за $|x| < 1$ – зростає.

43. $y = \sqrt[3]{(2x - a)(a - x)^2}$ $\quad (a > 0)$

Відповідь. $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}a\right)$ – зростає; $\left(\dfrac{2}{3}a, a\right)$ – спадає; $(a, +\infty)$ – зростає.

44. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}.$

Відповідь. $(-\infty, -1)$ – зростає; $(-1, 1)$ – спадає; $(1, +\infty)$ – зростає.

45. $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

Відповідь. $(-\infty,\,0)$ – спадає; $\left(0,\,\dfrac{1}{2}\right)$ – спадає; $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ – зростає; $(1,+\infty)$ – спадає.

46. $y=x-e^x$.

Відповідь. $(-\infty,\,0)$ – зростає; $(0,+\infty)$ – спадає.

47. $y=x^2e^{-x}$.

Відповідь. $(-\infty,\,0)$ – спадає; $(0,\,2)$ – зростає; $(2,+\infty)$ – спадає.

48. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Відповідь. $(0,1)$ – спадає; $(1,\,e)$ – спадає; $(e,+\infty)$ – зростає.

49. $y=2x^2-\ln x$.

Відповідь. $\left(0,\,\dfrac{1}{2}\right)$ – спадає; $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ – зростає.

50. $y=(x-2\sin x)\quad(0\le x\le 2\pi)$.

Відповідь. $\left(0,\,\dfrac{\pi}{3}\right)$ – спадає; $\left(\dfrac{\pi}{3},\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$ – зростає; $\left(\dfrac{5\pi}{3},\,2\pi\right)$ – спадає.

51. $y=2\sin x+\cos 2x\quad(0\le x\le 2\pi)$.

Відповідь. $\left(0,\,\dfrac{\pi}{6}\right)$ – зростає; $\left(\dfrac{\pi}{6},\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ – спадає; $\left(\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ – зростає; $\left(\dfrac{5\pi}{6},\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ – спадає; $\left(\dfrac{3\pi}{2},\,2\pi\right)$ – зростає.

52. $y=x+\cos x$.

Відповідь. монотонно зростає.

53. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Відповідь. монотонно зростає.

54. $y=x\sqrt{ax-x^2}\quad(a>0)$.

Відповідь. $\left(0,\,\dfrac{3}{4}a\right)$ – зростає; $\left(\dfrac{3}{4}a,\,a\right)$ – спадає.

Знайти екстремуми функцій:

55. $y=2x^3-3x^2$. *Відповідь.* $y_{\max}(0)=0,\ y_{\min}(1)=-1$.

56. $y=2x^3-6x^2-18x+7$. *Відповідь.* $y_{\max}(-1)=17,\ y_{\min}(3)=-47$.

57. $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$. *Відповідь.* $y_{\max}(0)=4,\ y_{\min}(-2)=\dfrac{8}{3}$.

58. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$. *Відповідь.* $y_{\max}(0)=2,\ y_{\min}(2)=\sqrt[3]{4}$.

59. $y=x^2\left(1-x\sqrt{x}\right)$. *Відповідь.* $y_{\min}(0)=0,\ y_{\max}\left(2\sqrt[3]{2/49}\right)=\dfrac{12}{49}\sqrt[3]{\dfrac{4}{7}}$.

60. $y = x + \sqrt{3-x}$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{13}{4}$.

61. $y = \ln\left(x^2+1\right)$. *Відповідь.* $y_{\min}(0) = 0$.

62. $y = (2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$. *Відповідь.* $y_{\min}(3) = 0,\ y_{\max}(2) = 3$.

63. $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$. *Відповідь.* $y_{\max}(0) = 0$.

64. $y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$. *Відповідь.* $y_{\max}(0) = 0,\ y_{\min}(1) = -\frac{2}{3}$.

65. $y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$. *Відповідь.* $y_{\min}\left(\frac{2}{3}\right) = 2$.

66. $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{\sqrt{205}}{10}$.

67. $y = \sqrt[3]{\left(x^2-a^2\right)^2}$. *Відповідь.* $y_{\max}(0) = \sqrt[3]{a^4},\ y_{\min}(\pm a) = 0$.

68. $y = x - \ln(1+x)$. *Відповідь.* $y_{\min}(0) = 0$.

69. $y = x - \ln\left(1+x^2\right)$. *Відповідь.* монотонно зростає.

70. $y = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18},\ y_{\min}(-1) = 0,\ y_{\min}(5) = 0$.

71. $y = \left(x^2-2x\right)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.

Відповідь. $y_{\max}(1) = 2{,}5;\ y_{\min}(e) = \frac{e(4-e)}{2} \approx 1{,}76$.

72. $y = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{2}$.

Відповідь. $y_{\max}(0) = \frac{1}{2};\ y_{\min}(1) = \frac{\pi}{8}$.

73. $y = \frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{12}x^2$.

Відповідь. $y_{\max}(0) = 0,\ y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}-2\pi}{48}$.

74. $y = \frac{x}{2} - \sin^2 x$.

Відповідь. $y_{\max} = \frac{\pi-12+6\sqrt{3}}{24},\ y_{\min} = \frac{5\pi-12-6\sqrt{3}}{24}$.

75. $y = x\sin x + \cos x - \frac{1}{4}x^2\ \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь. $y_{\max}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6\pi\sqrt{3}-\pi^2+18}{36}\approx 1{,}13;\ y_{\min}(0)=1.$

76. $y=\left(\frac{1}{2}-x\right)\cos x+\sin x-\frac{x^2-x}{4}\quad\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right).$

Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{1}{2}+\frac{1}{16},\ \ y_{\min}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{36\sqrt{3}-12\pi\sqrt{3}+72-\pi^2+6\pi}{144}.$

Знайти найменше та найбільше значення функції на зазначеному інтервалі:

77. $y=x^4-2x^3+3;\ [-3,\ 2].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=2,\ y_{\text{найб}}=66.$

78. $y=x^4-2x^2+5;\ [-2,\ 2].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=4,\ y_{\text{найб}}=13.$

79. $y=x+2\sqrt{x};\ [0,\ 4].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=0,\ y_{\text{найб}}=8.$

80. $y=x^5-5x^4+5x^3+1;\ [-1,\ 2].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-10,\ y_{\text{найб}}=2.$

81. $y=x^3-3x^2+6x-2;\ [-1,\ 1].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-12,\ y_{\text{найб}}=2.$

82. $y=\sqrt{100-x^2};\ [-6,\ 8].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=6,\ y_{\text{найб}}=10.$

83. $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2};\ [0,1].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=\frac{3}{5},\ y_{\text{найб}}=1.$

84. $y=\frac{x-1}{x+1};\ [0,\ 4].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-1,\ y_{\text{найб}}=\frac{3}{5}.$

85. $y=\sin 2x-x;\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-\frac{\pi}{2},\ y_{\text{найб}}=\frac{\pi}{2}.$

86. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2};\ [0,\ 3].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=0,\ y_{\text{найб}}=\sqrt[3]{9}.$

87. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x},\ [0,1].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=0,\ y_{\text{найб}}=\frac{\pi}{4}.$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

ІЗ № 2-1

Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

1. $а)\ y=\left(\frac{x^8}{4}+16x*\sqrt[8]{x^3}-1\right)\quad б)\ y=\ln\sqrt[4]{\frac{4x-1}{x^4+1}}$

в) $y = arctg\sqrt{x-1} + x^2$ *г)* $y = \dfrac{\sqrt{x}}{tg\,3x} - 2^{x^2}$

д) $y^5 + e^{xy} = y + \sin x$ *е)* $y = (tg\,x)^x$

2. *а)* $y = \left(5x^4 - \frac{2}{x*\sqrt{x}} + 3\right)^4$ *б)* $y = \ln\sqrt[4]{\frac{1-8x}{x^8+1}}$

в) $y = arccos\sqrt{1-x} + 2x^5$ *г)* $y = 3^{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$

д) $\ln x^y + \sin x = x + y^4$ *е)* $y = (\log_2 x)^x$

3. *а)* $y = \left(3x^8 + 5 * \sqrt[5]{x^2} - 3\right)^5$ *б)* $y = \ln\sqrt[5]{\left(\frac{5x+3}{x^5+1}\right)^2}$

в) $y = arctg\,\dfrac{2}{x-3} + 3x^3$ *г)* $y = x^2 tg\,2x - 5^{\sqrt{x}}$

д) $x^5 + x^7 - \sqrt{xy} = 3$ *е)* $y = (\ln x)^x$

4. *а)* $y = \left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} + 2\right)^5$ *б)* $y = \ln\sqrt[5]{\left(\frac{1-5x}{1+5x}\right)^3}$

в) $y = \sqrt{1-4x^2} + \arccos 2x$ *г)* $y = 2^{tg\,x} + x\sin 2x$

д) $\dfrac{x}{\sin y} + x^3 = 2y^5$ *е)* $y = (\sin x)^x$

5. *а)* $y = \left(3x^{10} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} - 5\right)^7$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{2x^2+1}}$

в) $y = \ln arctg\,\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x} + x^2$ *г)* $y = 2^{arctg\sqrt{x-1}} + x\,\mathrm{tg}\,x$

д) $xy = \ln x + \cos y$ *е)* $y = (2x-1)^{\log_2 x}$

6. *а)* $y = \left(4x^3 + \frac{3}{x*\sqrt[3]{x}} - 2\right)^5$ *б)* $y = \ln\sqrt[6]{\left(\frac{x^6-1}{6x+5}\right)^7}$

в) $y = arcctg\sqrt{x-1} + 3x^4$ *г)* $y = 2^{x^2+1} - x * \sin 4x$

д) $\log_2 y + tg\,x = x^2 + y$ *е)* $y = (\arcsin x)^{2x}$

7. *а)* $y = \left(10x^3 + \frac{7}{\sqrt[7]{x^5}} - 4\right)^5$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\frac{2x^3+3x}{x^3-3x}}$

в) $y = \ln arctg\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ *г)* $y = 2^{\sin x^3} + x\sin^3 x$

д) $y^2 - tg\,xy = 5 + x^7$ *е)* $y = (3x+1)^{\sin(2x+1)}$

8. *а)* $y = \left(7x^5 - 3x * \sqrt[3]{x^2} - 6\right)^4$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^4}$

в) $y = \arcsin 3x - \sqrt{1-9x^2}$ *г)* $y = e^{tg\,x} - \sqrt{x}\cos 2x$

д) $3\,x^2 + 2y^5 = ctg\,xy$ *е)* $y = (\arccos x)^x$

9. *а)* $y = \left(5x^{11} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - 3\right)^5$ *б)* $y = \ln\sqrt[4]{\frac{3x^2+1}{3-x^2}}$

в) $y = 5x^2 + \ln arcctg\sqrt{2x-1}$ *г)* $y = 3^{arctg\sqrt{x}} + x\,\mathrm{tg}\,x$

д) $\sqrt[5]{yx^2} = 2x + y - 1$ *е)* $y = (x+2)^{lgx}$

10. *а)* $y = \left(3x^4 + 8\sqrt[4]{x^5} - 2\right)^3$ *б)* $y = \ln\sqrt[6]{\frac{4x^3-1}{4x^3+1}}$

в) $y = \arccos\sqrt{1-9x^2} + 3x^2$ *г)* $y = 4^{tg\sqrt{x-1}} + x\sqrt{x-1}$

д) $2^{xy} = \dfrac{x}{y} + tg\, y$ *е)* $y = (x)^{sinx}$

11. *а)* $y = \left(11x^5 + \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\right)^4$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{x^3-9x}{x^3+x}\right)^7}$

в) $y = arccos\dfrac{1}{2x} + \sqrt[3]{x^2}$ *г)* $y = 2^{\frac{1}{\sqrt{3x}}} + x^2\log_2 x$

д) $3^x + 2^y = \arcsin xy$ *е)* $y = (2x+1)^{\ln x}$

12. *а)* $y = \left(3x^4 - \frac{9}{x^2 * \sqrt[3]{x}} + 2\right)^3$ *б)* $y = \ln\sqrt[4]{\frac{2x^2+1}{2x^2+3x}}$

в) $y = \ln tg(3x-1)^2 + x^2$ *г)* $y = 5^{\arccos 3x} + x\sin x$

д) $\dfrac{x}{y+1} - \sin\dfrac{x}{y} = 2y$ *е)* $y = x^{\arcsin x}$

13. *а)* $y = \left(\frac{x^8}{8} - 3\sqrt[4]{x^7} - 1\right)^8$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\frac{3-4x}{x^2+8x-6}}$

в) $y = \arcsin 3^{x^2} + \sqrt[5]{x^4}$ *г)* $y = 5^{tg^2 x} - x\cos(x+1)$

д) $tg\, xy = \dfrac{3x+4}{2y-3}$ *е)* $y = x^x$

14. *а)* $y = \left(8x^3 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + 6\right)^2$ *б)* $y = \ln\sqrt[4]{\frac{1-x^2}{x^3-3x}}$

в) $y = \ln\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{x}} + x^3$ *г)* $y = 7^{arcctg\, 2x} + x\ln 2x$

д) $3^{\sin x} + xy = x^2$ *е)* $y = x^{\arccos x}$

15. *а)* $y = \left(\frac{x^{10}}{5} + 4\sqrt[8]{x^5} + 2\right)^9$ *б)* $y = \ln\sqrt[4]{\frac{3x-1}{x^2-6x+2}}$

в) $y = \ln arcctg\,\dfrac{2}{x} + \sqrt[5]{x^3}$ *г)* $y = 4^{tg\frac{x}{3}} + x * ctg\,\dfrac{x}{3}$

д) $\ln(x+y) = y^3 + \sin x$ *е)* $y = x^{ctg\frac{1}{2x}}$

16. *а)* $y = \left(4x^3 - 6x\sqrt[3]{x^2} - 3\right)^5$ *б)* $y = \ln\sqrt{\frac{3-x^2}{x^3-9x}}$

в) $y = \arcsin\sqrt{1-4x^2} + 2x^3$ *г)* $y = 3^{tg\frac{x}{2}} + x^2\sin x$

д) $x + tg\, y = y^3 + e^{xy}$ *е)* $y = x^{\ln x}$

17. *а)* $y = \left(8x^3 + 2x\sqrt[4]{x} - 1\right)^8$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\frac{8-3x^2}{x^3-8x}}$

в) $y = \arccos\sqrt{1-x^4} + \sqrt[5]{x^2}$ *г)* $y = 7^{arcctg\, 2x} + x^5\ln^2 x$

д) $x - ln\, y^x = y^7 + \sqrt{x}$ *е)* $y = x^{tg\frac{1}{x}}$

18. *а)* $y = \left(7x^5 - \frac{4}{x*\sqrt[4]{x}} + 3\right)^4$ *б)* $y = \ln\sqrt[5]{\frac{3x^2+1}{x^3+x}}$

в) $y = 2\arcsin\sqrt{1-x^2} + 5x^2$ *г)* $y = 2^{tarctg\,2x} - x^6 ctg\,3x$

д) $2 + 3\arcsin xy = x^4 + 4y$ *е)* $y = x^{\log_2 x}$

19. *а)* $y = \left(4x^5 - \frac{5x}{\sqrt[5]{x^2}} + 2\right)^7$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{1+2x^2}{2x^3+3x}\right)^2}$

в) $y = \ln tg\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^3}$ *г)* $y = 3^{\arcsin x} + x\sqrt{1-x}$

д) $\frac{\cos y}{\sin x} - 3y^7 = x - 5$ *е)* $y = x^{\cos\frac{1}{x}}$

20. *а)* $y = \left(3x^7 - \frac{2}{3x*\sqrt{x}} + 1\right)^7$ *б)* $y = \ln\sqrt[4]{\left(\frac{2x^3-3}{2x^3+3}\right)^3}$

в) $y = \ln\arccos\sqrt{1-4x^2} + 7x^2$ *г)* $y = 2^{cos\frac{x}{3}} + x * \sin\frac{x}{3}$

д) $tg\,x + ctg\,y = \frac{y}{x}$ *е)* $y = x^{\lg x}$

21. *а)* $y = \left(3x^4 + \frac{2}{\sqrt{x}} + 3\right)^6$ *б)* $y = \ln\sqrt[5]{\left(\frac{7-x^5}{x^5-35x}\right)^2}$

в) $y = \ln\arccos\frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt[3]{x^2}$ *г)* $y = 2^{sin^2 x} + x * \cos 2x$

д) $\frac{y}{x} - \sin y = \log_3 x$ *е)* $y = x^{\arcsin\frac{1}{x}}$

22. *а)* $y = \left(5x^4 + \frac{3}{2x*\sqrt[3]{x}} - 3\right)^9$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{3x^2+4}{3x^2-4}\right)^5}$

в) $y = \ln\cos 3^{x^2} + 3x^2$ *г)* $y = 5^{\sin 2x} - x * \cos 2x$

д) $7 + arctg\,xy = x + \ln y$ *е)* $y = x^{\mathrm{ctg}\,x}$

23. *а)* $y = \left(4x^5 - \frac{2x}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)^5$ *б)* $y = \ln\sqrt[5]{\left(\frac{2+3x^2}{x^3+2x}\right)^7}$

в) $y = arcctg\,\sqrt{2x-1} - xcos^2 x$ *г)* $y = 3^{ctg\,5x} + x\sin 5x$

д) $\log_5(x-y) = \cos x + \sin y$ *е)* $y = x^{2\sin(5x+3)}$

24. *а)* $y = \left(\frac{3x^8}{8} - 6x\sqrt[3]{x} - 6\right)^7$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{3x^2+7}{3x^2-7}\right)^4}$

в) $y = \ln\cos e^{-4x} + 5x^3$ *г)* $y = 6^{ctg\,x} - x\log_6 x$

д) $3x^3 + 2y^3 = \sqrt[7]{x^3y^4}$ *е)* $y = x^{\mathrm{tg}\,x}$

25. *а)* $y = \left(5x^9 + 2x\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^4$ *б)* $y = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{1-4x^2}{4x^3-3x}\right)^2}$

в) $y = arctg\,\frac{2\sqrt{x}}{1-x} + \sqrt[3]{x}$ *г)* $y = 4^{cos2x} - x * cos^2\mathrm{x}$

д) $7^{\frac{x}{y}} + 3^{xy} = 2 + \sin x$ *е)* $y = x^{\mathrm{arctg}\,x}$

26. *а)* $y=\left(\frac{3x^5}{5}+10\sqrt[5]{x^2}+6\right)^3$ *б)* $y=\ln\sqrt[5]{\left(\frac{x^5-3}{x^5+3}\right)^8}$

в) $y=arctg\,\dfrac{2x-1}{2x+1}+2x^3$ *г)* $y=4^{\sin 2x}+x*\cos 2x$

д) $5x^7-7y^5=\cos\dfrac{x}{y}$ *е)* $y=(\lg x)^x$

27. *а)* $y=\left(3x^3-\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x}}+1\right)^5$ *б)* $y=\ln\sqrt[4]{\left(\frac{x^2-4}{x^3-12x}\right)^9}$

в) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{2x}+4x^5$ *г)* $y=3^{tg\,2x}-x*\sin 2x$

д) $\dfrac{2x-y}{3x+y}=\log_3(x+y)$ *е)* $y=x^{arcctg\,x}$

28. *а)* $y=\left(3x^4+\frac{4x}{\sqrt[4]{x}}-3\right)^5$ *б)* $y=\ln\sqrt[3]{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}$

в) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x-1}+4x^3$ *г)* $y=xtg\,3x+2^{x-2}$

д) $\dfrac{y}{x-3}+\cos y=\ln x$ *е)* $y=(arctg\,x)^x$

29. *а)* $y=\left(8x^3-\frac{9}{x^2*\sqrt[3]{x}}+6\right)^3$ *б)* $y=\ln\sqrt[7]{\left(\frac{7x-4}{x^7-2}\right)^3}$

в) $y=arcsin\sqrt{1-x}+2x^6$ *г)* $y=3^{\sin x}-\sqrt[3]{x}tg\,3x$

д) $5^{tg\,y}=y^2+\sqrt{xy}$ *е)* $y=(arcctg\,x)^x$

30. *а)* $y=\left(5x^2+4x\sqrt[8]{x^3}-4\right)^4$ *б)* $y=\ln\sqrt[8]{\left(\frac{3x^4-2}{3x^4+2}\right)^3}$

в) $y=\ln arctg\,\sqrt{2x+1}+10x^{10}$ *г)* $y=4^{cos^2 2x}-x\sin 2x$

д) $\log_4(y-x)=y^5-tg\,x$ *е)* $y=x^{\cos x}$

ІЗ № 2-2

Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

1. $y=\dfrac{x+6}{x^2+13};\ [-5;5]$
2. $y=\dfrac{x}{2}+\cos x;\ [0;\pi]$
3. $y=\dfrac{x-3}{x^2+16};\ [-5;10]$
4. $y=\dfrac{x+3}{x^2+7};\ [-3;7]$

5. $y=\frac{x}{2}-\sin x;\ \left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

6. $y=\frac{x}{x^2+16};\ [-3;7]$

7. $y=\frac{x}{\sqrt{2}}-\cos x;\ [-\pi;\pi]$

8. $y=\frac{x-4}{x^2+6};\ [-4;6]$

9. $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\cos x;\ [-\pi;\pi]$

10. $y=\cos x-\frac{x}{\sqrt{2}};\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

11. $y=3x+x^3-1-3x^2;\ [-1;2]$

12. $y=x^2e^{-x}+\sqrt{3};\ [-1;4]$

13. $y=\frac{1}{2}+x^5-\frac{5}{3}x^3;\ [0;2]$

14. $y=\frac{x^2}{1+x}-\sqrt{2};[-\frac{1}{2};4]$

15. $y=2x^2-\ln x+\frac{1}{2};\ [\frac{1}{4};1]$

16. $y=1-2x^2+x^4;\ [-2;0]$

17. $y=\sin 2x-x-2;\ [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

18. $y=x^3-3x^2-9x+3;[-2;3]$

19. $y=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2};[0;2]$

20. $y=3x^4+16x^3+9;[-3;1]$

21. $y=x+\frac{1}{x^2};\ [1;20]$

22. $y=\sin 2x-x;\ [0;\pi]$

23. $y=\frac{x-1}{x^2+3};\ [-3;3]$

24. $y=\sqrt{3}x-2\sin x;\ [0;\pi]$

25. $y=\sin x-\frac{x}{2};\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

26. $y=\frac{1-x}{1+x};\ [-1;1]$

27. $y=\frac{x+4}{x^2-3};\ [2;4]$

28. $y=2\cos x+\sqrt{3}x;\ [0;\pi]$

29. $y=\cos x+\frac{\sqrt{3}x}{2};\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

30. $y=\frac{x}{2}-\sin x;\ [-\pi;\pi]$

ІЗ № 2-3

Методами диференціального числення дослідити задану функцію і побудувати графік:

1. $y=\frac{x}{(x-1)^2}$ **2.** $y=\frac{x^3+16}{x}$ **3.** $y=\frac{x^3-1}{4x^2}$ **4.** $y=\frac{x-1}{x^2-2x}$

5. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ **6.** $y=\frac{x^2+1}{x}$ **7.** $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ **8.** $y=\frac{4x^2}{x^3-1}$

9. $y=\frac{x}{3+x^2}$ **10.** $y=\frac{2x}{1+x^2}$ **11.** $y=\frac{x^3+3}{x}$ **12.** $y=\frac{x^2+4}{x}$

13. $y=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ **14.** $y=\frac{x}{x^2+5}$ **15.** $y=\frac{2x-8}{(x-3)^3}$ **16.** $y=\frac{2x}{(x-2)^2}$

17. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$ **18.** $y=\frac{x+3}{2(x+2)^2}$ **19.** $y=\frac{2x}{x^2+1}$ **20.** $y=\frac{16x^2}{x-4}$

21. $y=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$ **22.** $y=\frac{x}{3-x^2}$ **23.** $y=\frac{x}{x^2+2}$ **24.** $y=\frac{x^3}{3-x}$

25. $y=\frac{x}{3+x^2}$ **26.** $y=\frac{2x^3}{x-2}$ **27.** $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ **28.** $y=\frac{x-1}{x^2+2}$

29. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ **30.** $y=\frac{x^2-2}{x^2+3}$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ
ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 2

ІЗ № 2-1

Див. **приклади 17–23** в теоретичних відомостях Розділу 2, ПЗ-1.

ІЗ № 2-2

Див. **Приклад 31** в теоретичних відомостях Розділу 2, ПЗ-2.

ІЗ № 2-3

Дослідити функцію $y = \frac{x^2+x-5}{x-2}$ методами диференціального числення і побудувати її графік.

Розв'язання

Будемо діяти за загальною схемою дослідження функції і побудови її графіка.

1) Функція існує за будь-якого значення x (за $x = 2$ знаменник дробу перетворюється на нуль). Отже,

$$D(x) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty).$$

2) Очевидно, що задана функція неперіодична.

Перевіримо її на парність. Для цього знайдемо:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2+(-x)-5}{-x-2} = \frac{x^2-x-5}{-x-2}.$$

Легко бачити, що $y(-x) \neq y(x)$ і $y(-x) \neq -y(x)$. Отже, задана функція не має властивостей парності.

В точці $x = 2$ функція має розрив, за всіх інших значень аргумента вона неперервна.

3) Користуючись правилами знаходження границь, знайдемо границі функції на нескінченності та односторонні границі функції у точці розриву $x = 2$ (див. Розділ 5, ПЗ-3, пп. 1–3):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-5}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-5}{x-2} = +\infty \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2+x-5}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+x-5}{x-2} = +\infty \qquad (2)$$

З рівностей (2) випливає, що для заданої функції $x = 2$ є точкою розриву другого роду.

4) Границя функції на нескінченності не існує (рівності (1)) тому графік цієї функції горизонтальних асимптот не має.

Оскільки $\lim_{x\to 2} y = \infty${рівності (2)), то $x = 2$ – вертикальна асимптота графіка заданої функції .

Похилі асимптоти будемо шукати у вигляді $y = kx + b$, де:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-5}{x*(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-5}{x^2-2x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}(y-x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-5}{x-2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-5-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-5}{x-2} = 3.$$

Отже, $kx+b\ =\ 1\text{-}\ x\ +\ 3 = x\ +\ 3$ і пряма $y = x\ +\ 3$ є похилою асимптотою графіка заданої функції.

5) Користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних, знайдемо похідну заданої функції. Матимемо:

$$y' = \left(\frac{x^2+x-5}{x-2}\right) ='= \frac{\left(x^2+x-5\right)' * (x-2)-(x-2)'\left(x^2+x-5\right)}{(x-2)^2} ==$$

$$\frac{(2x+1)(x-2)-1(x^2+x-5)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x}.$$

Очевидно, що знайдена похідна існує на всій числовій прямій, крім точки $x\ =\ 2$, в якій знаменник дробу перетворюється на нуль. Але в точці $x = 2$ функція не визначена, тому ця точка не є критичною точкою заданої функції.

Прирівняємо похідну до нуля і, розв'язавши за теоремою Віетта отримане рівняння, знайдемо критичні точки функції:

$$\frac{x^2 - 4x\ +\ 3}{(x-2)^2} = 0$$

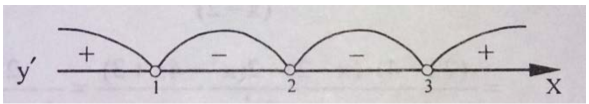
$$\begin{cases} x^2 - 4x\ +\ 3 = 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = 1\ \ x_2\ =\ 3.$$

Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивають область визначення функції знайдені критичні точки $x_1 = 1\ \ x_2\ =\ 3.$

x	$(-\infty; 1)$	1	(1, 2)	2	$(2;\ 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	+	0	–	Не існує	–	0	+
y	↗	y_{max} (1)	↘	Не існує	↘	y_{min} (3)	↗



Звідси випливає:

а) якщо $x\ \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, то $y' > 0$ і функція зростає;

б) якщо $x\ \in\ (1;\ 2)\ u\ (2;\ 3)$, то $y' < 0$ і функція спадає;

в) під час переходу через критичну точку $x_1 = 1$ похідна y' змінює свій знак з «+» на «–», тому $x_1 = 1$ є точкою максимуму заданої функції;

г) під час переходу через критичну точку $x_2 = 3$ похідна y' змінює свій знак з «–» на «+», тому $x_2 = 3$ є точкою мінімуму заданої функції;

д) задана функція не має інших критичних точок, тому вона не має й інших точок екстремуму.

Таким чином, ми встановили всі точки екстремумів заданої функції. Знайдемо екстремуми цієї функції:

а) $y(x_1) = y(1) = \frac{1^2+1-5}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3$ – локальний максимум заданої функці, який досягається у точці А(1;3);

б) $y(x_2) = y(3) = \frac{3^2+3-5}{3-2} = \frac{7}{1} = 7$ – локальний мінімум заданої функції, який досягається у точці В(3; 7).

6) Користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних, знайдемо другу похідну заданої функції Матимемо:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right) =' $$

$$= \frac{(x^2-4x+3)' * (x-2)^2 - ((x-2)^2)' * (x^2-4x+3)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2 * (x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x+3)}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

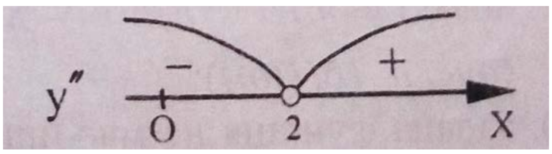
Знайдена похідна існує на всій числовій прямій, крім точки $x = 2$, в якій знаменник дробу перетворюється на нуль. Але в точці $x = 2$ функція не визначена, тому ця точка не є критичною точкою другого порядку.

Очевидно, що $y'' \neq 0$ за будь-якого значення x.

Таким чином, ми встановили, що задана функція не має критичних точок другого порядку, а тому її графік не має точок перегину.

Визначимо знак другої похідної на області визначення функції:

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y''	–	Не існує	+
y	$\cap$	Не існує	$\cup$



Звідси випливає:

а) якщо $x \in (-\infty; 2)$ то $y'' < 0$ і графік заданої функції опуклий;

б) якщо $x \in (2; +\infty)$ то $y'' > 0$ і графік заданої функції ввігнутий.

7) Підставивши у функцію значення аргументу $x = 0$, знайдемо координати точки перетину графіка функції з віссю Оy:

$$y(0) = \frac{0^2+0-5}{0-2} = \frac{-5}{-2} = 2{,}5$$

Отже, графік функції перетинає вісь Оу у точці С(0; 2,5).

Прирівнявши функцію до нуля і розв'язавши отримане рівняння, знайдемо точки перетину графіка функції з віссю Ох:

$$\frac{x^2+x-5}{x-2}=0$$

$$\begin{cases} x^2+x-5=0 \\ x-2\neq 0 \end{cases}$$

$$D=b^2-4ac=$$
$$=1-4\cdot 1\cdot(-5)=21$$
$$x_{1.2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}=$$
$$-0{,}5\pm 0{,}5\cdot\sqrt{21}$$

Отже, графік заданої функції перетинає вісь Ох у двох точках: $D\left(-0{,}5-0{,}5\cdot\sqrt{21};\ 0\right)$ і $E(-0{,}5+0{,}5\cdot\sqrt{21};\ 0)$.

8) Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції (рис. 22).

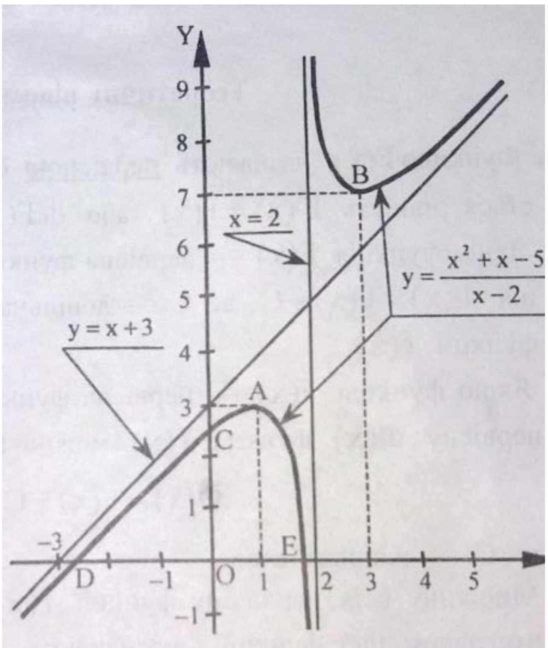


Рисунок 22

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В. П Дубовик., І. І. Юрик. – 4-те вид. – К. : Ігнатекс-Україна., 2013. – 648 с.
2. Овчинников П. П. Вища математика. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення : підручник / Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. – К. : Техніка, 2003. – 600 с.
3. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навчальний посібник для студ. технічних і технологічних спец. вищих навч. закладів / Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. – К. : Книги України ЛТД, 2009. – 577 с.
4. Кравченко В. В. Вища математика : навч. посібник. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія / Кравченко В. В., Лубенська Т. В., Олешко Т. І.; за заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 144 с.
5. Математичний аналіз у задачах і прикладах : навч. посібник / Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Лященко М. Я. – К. : Вища школа, 2003. – 462 с.

Електронне навчальне видання
комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Кирилащук Світлана Анатоліївна
Бондаренко Злата Василівна
Клочко Віталій Іванович

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ЧАСТИНА 2.
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *З. Бондаренко*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 04.08.2022 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2022-061.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: irvc.ed.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.