

В. А. Огородніков, М. І. Побережний, О. В. Грушко

**ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ
З ДИСЦИПЛІНИ “ОПР МАТЕРІАЛІВ”
Частина 2**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. А. Огородніков, М. І. Побережний, О. В. Грушко

**ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ
З ДИСЦИПЛІНИ “ОПР МАТЕРІАЛІВ”
Частина 2**

Лабораторний практикум

Вінниця
ВНТУ
2014

УДК 620.1(075)
ББК 30.121
О 39

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 3 від 28.10.2010 р.)

Рецензенти:

О. В. Нахайчук, доктор технічних наук, професор

А. П. Поляков, доктор технічних наук, професор

І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор

Огородніков, В. А.

О 39 **Лабораторний практикум з дисципліни “Опір матеріалів”.**
Частина 2 : Лабораторний практикум / В. А. Огородніков,
М. І. Побережний, О. В. Грушко. – Вінниця : ВНТУ, 2014. – 90 с.

В лабораторний практикумі наведено теоретичні положення та лабораторні роботи до другої частини курсу “Опір матеріалів”, розглянуто експериментальну перевірку теоретичних висновків та розрахункових формул, описано конструкцію та роботу випробувальних машин та приладів.

УДК 620.1(075)

ББК 30.121

© В. Огородніков, М. Побережний, О. Грушко, 2014

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Лабораторна робота № 1. Визначення прогину балки при косому згині	5
Лабораторна робота № 2. Визначення положення центра згину балки тонкостінного профілю	16
Лабораторна робота № 3. Визначення напруження при позацентровому розтязі стержня	23
Лабораторна робота №4. Експериментальна перевірка теорем про взаємність робіт і переміщень	27
Лабораторна робота № 5. Визначення переміщення перерізу рами . . .	31
Лабораторна робота № 6. Визначення опорного моменту один раз статично невизначуваної балки	42
Лабораторна робота № 7. Визначення опорної реакції один раз статично невизначуваної рами.	51
Лабораторна робота № 8. Визначення критичної сили стиснутого стержня	56
Лабораторна робота № 9. Визначення прогину балки при ударному навантаженні	61
Лабораторна робота № 10. Дослідження критичної швидкості обертання вала.	66
Лабораторна робота № 11. Дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності	72
Лабораторна робота № 12. Дослідження деформацій кругового кільця	76
ДОДАТОК А	84
ГЛОСАРІЙ	88
ЛІТЕРАТУРА	89

ВСТУП

Сучасні конструкції та їх деталі настільки складні, що розрахувати їх на міцність, жорсткість і стійкість є досить проблематично, тому задача лабораторного практикуму полягає в наочному експериментальному підтвердженні теоретичних передумов курсу опору матеріалів, в ознайомленні з деякими методами вивчення складного напружено-деформованого стану та методиками проведення найпростіших експериментів з опору матеріалів.

Студент повинен вміти поставити експеримент і обробити отримані дані.

Основні вимоги при постановці експерименту:

- 1) продуманий вибір машин чи створення необхідної установки;
- 2) організація реєстрації показів приладів (машинний запис, осцилографування, фотографування, призначення спостерігача для запису і т. д.);
- 3) заходи, які виключають можливі помилки у показах приладів, неточності установавання зразків, приладів і т. д.;
- 4) ведення журналу запису показів.

Після проведення експерименту студенти складають звіт про роботу, до якого входять: назва і мета роботи, ескіз установки, таблиця показників приладів, теоретичне обчислення обумовлених величин, відносна похибка проведення дослідження і висновки.

При проведенні експерименту необхідно дотримуватися таких правил техніки безпеки:

- 1) до роботи на випробувальних машинах допускаються особи, які пройшли інструктаж з техніки безпеки;
- 2) випробування повинні проводитися на справному устаткуванні;
- 3) перед початком випробувань необхідно перевірити:
 - надійність заземлення устаткування;
 - справність електропроводки, кінцевих вимикачів і кнопки "Стоп".

На рухомих частинах машини не повинно бути важких предметів, які не використовуються при виконанні роботи.

Забороняється:

- працювати на незаземленій машині;
- експлуатувати машину з відкритим приводом і відкритими дверима шафи;
- працювати без обмеження зони випробування;
- самовільно усувати будь-які несправності в електричній частині машини.

Після закінчення робіт необхідно відключити випробувальні машини і прилади від мережі електричного струму, упорядкувати робочі місця.

Лабораторна робота №1 Визначення прогину балки при косому згині

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально значення повного прогину балки при косому згині.

Теоретичні відомості

Якщо навантаження на балку, яке спричиняє згин, діє в одній площині, що не збігається ні з однією з головних площин, то згин називають косим. В цьому випадку задача з визначення прогинів базується на принципі незалежності дії сил і зводиться до визначення прогинів при плоскому згині в двох головних площинах балки з подальшим їх складанням, як векторних величин. Для цього зовнішнє навантаження розкладають на складові частини в двох головних площинах балки і, використовуючи будь-який з відомих методів обчислення прогинів (метод початкових параметрів або метод Мора), визначають прогини певного перерізу балки в кожній площині.

Значення повного прогину при косому згині f_T (рис. 1.1) можна визначити теоретично:

$$f_T = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}, \quad (1.1)$$

де f_z і f_y – складові повного прогину у напрямках головних осей інерції.

Між кутами β і ϕ існує залежність

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \phi, \quad (1.2)$$

де ϕ – кут між головною віссю перерізу Y і напрямком навантаження;

β – кут між головною віссю перерізу Y і напрямком повного прогину;

I_z і I_y – моменти інерції перерізу.

З рис. 1.1 видно, що повний прогин f_0 можна розкласти не тільки по головних осях Z і Y (складові f_z і f_y), але й по горизонтальному й вертикальному напрямках ($f_{\bar{a}}$ і $f_{\bar{a}}$):

$$f_{\bar{a}} = f_0 \sin(\beta - \phi); \quad (1.3)$$

Опис установки

Загальний вигляд установки для визначення повних прогинів балки і їх напрямків при косому згині показано на рис. 1.2.

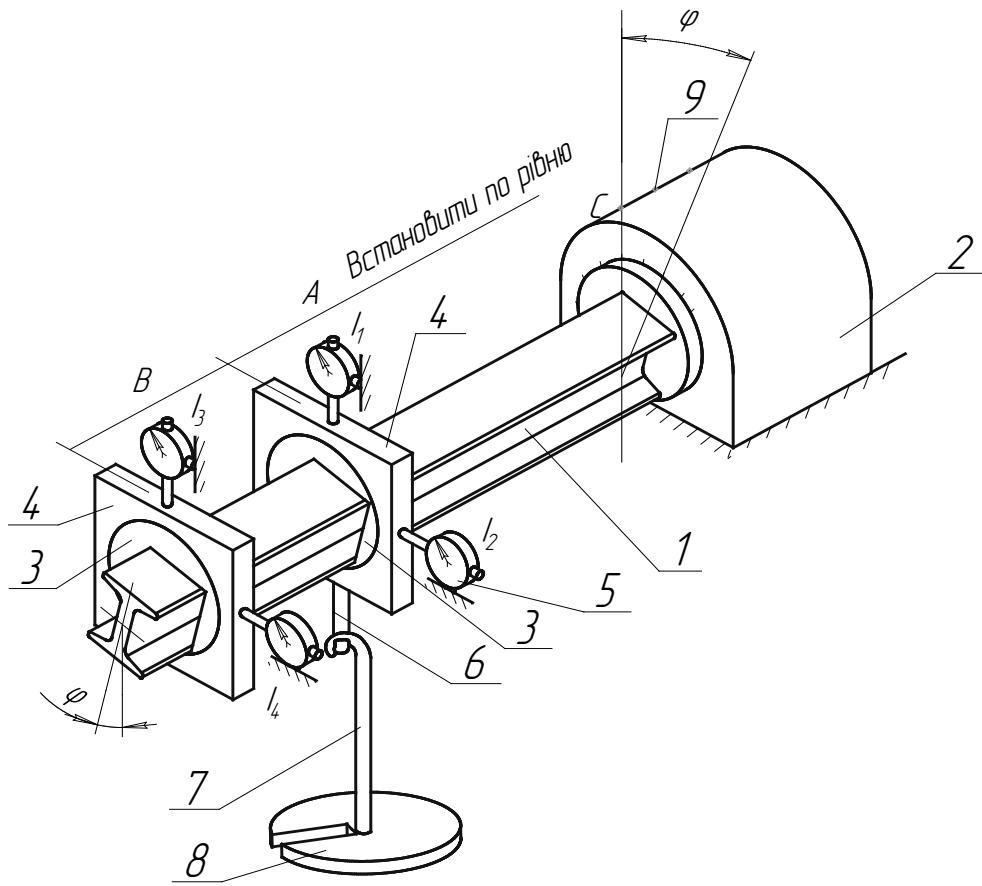


Рисунок 1.2 – Установка для визначення повних прогинів балки

Випробовується балка 1 (рис. 1.3, а і б) складного перерізу, яка одним кінцем зацемлена в опорі 2 гвинтом 9. По довжині балки в довільному перерізі може бути прикладена зосереджена сила P під будь-яким кутом φ до однієї з головних осей інерції перерізу. Різне положення навантаження по довжині балки досягається за допомогою навантажувального пристрою.

Навантажувальний пристрій складається з кільця 3, що ковзає вздовж балки 1 і фіксується гвинтом 5, поворотного квадрата 4, до взаємно перпендикулярних граней якого підводяться рухомі ніжки індикаторів годинникового типу, гака 6, підвісу 7 і гир 8.

Опора 1 (рис. 1.4) має на торці кутову шкалу з ціною поділки 15° . Конструкція опори дозволяє повертати балку 4 відносно вісі x і фіксувати її положення за допомогою гвинта 3 під різними кутами відносно головних осей інерції перерізу балки. Мітка 3 повинна перебувати навпроти відповідної поділки на шкалі.



a

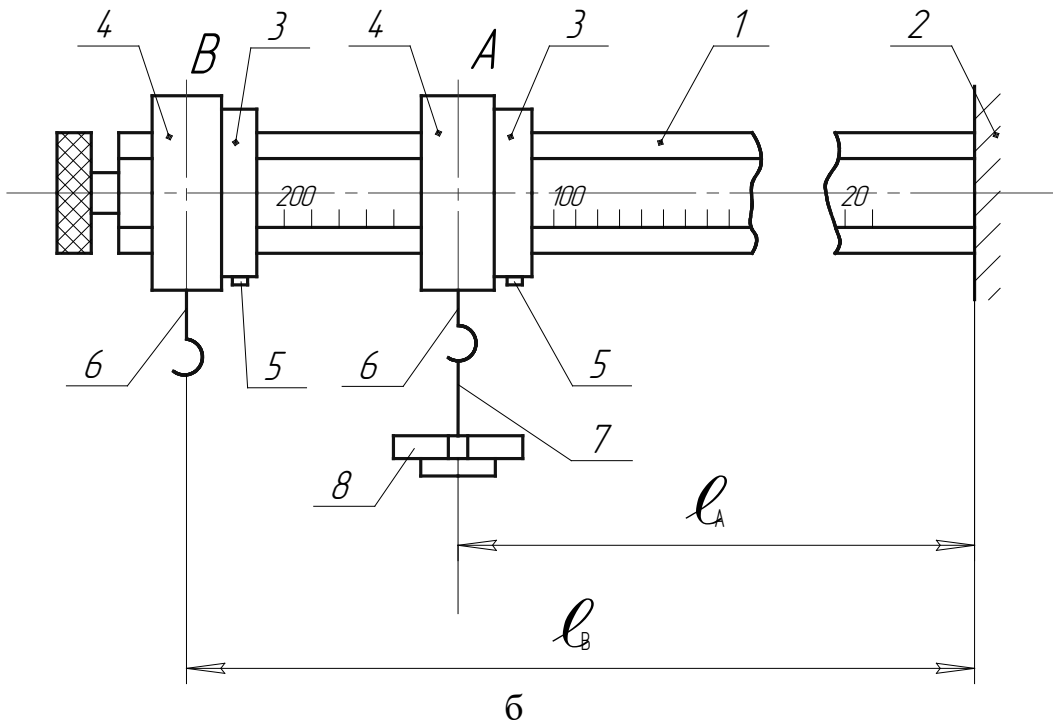


Рисунок 1.3 – Схема установки для визначення повних прогинів балки

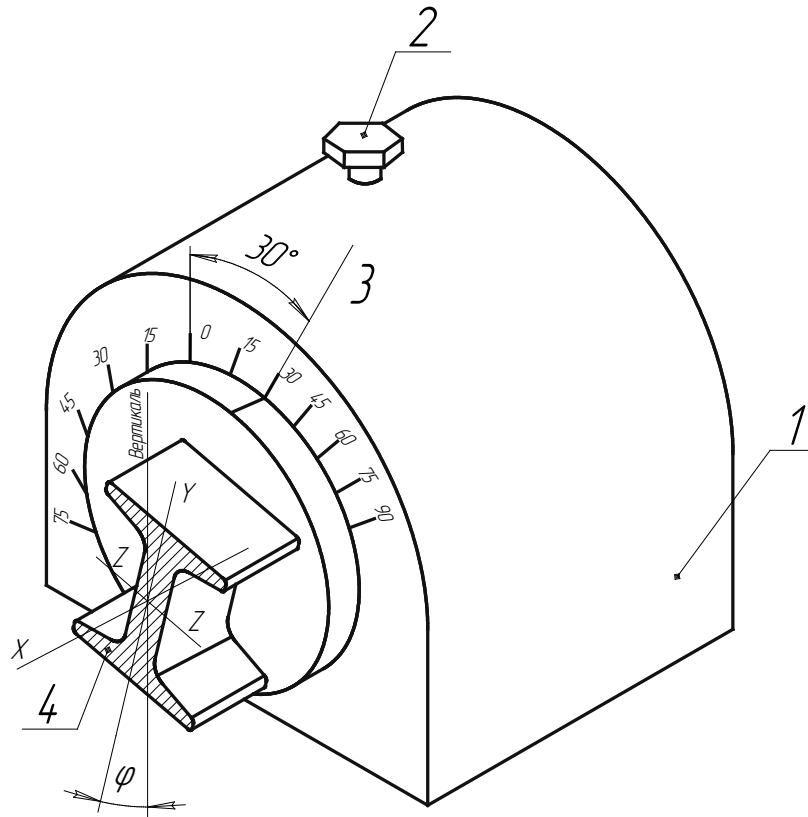


Рисунок 1.4 – Схема кріплення балки

Порядок виконання роботи

1. Встановити відповідно до варіанта (табл. 1.1) балку з відповідним поперечним перерізом (рис. 1.5) у опорі так, щоб головна вісь Y балки була нахилена до вертикалі під кутом φ . Мітка 3 повинна перебувати навпроти відповідної поділки на шкалі опори (див. рис. 1.4).

Таблиця 1.1

№ варіанта			P , Н	l_A , см	l_B , см	φ , град
Поперечний переріз балки						
I	II	III				
1	9	17	20	60	90	30
2	10	18	30	65	100	30
3	11	19	20	70	110	45
4	12	20	30	75	120	45
5	13	21	20	80	100	60
6	14	22	30	85	110	60
7	15	23	20	70	120	30
8	16	24	30	75	130	30

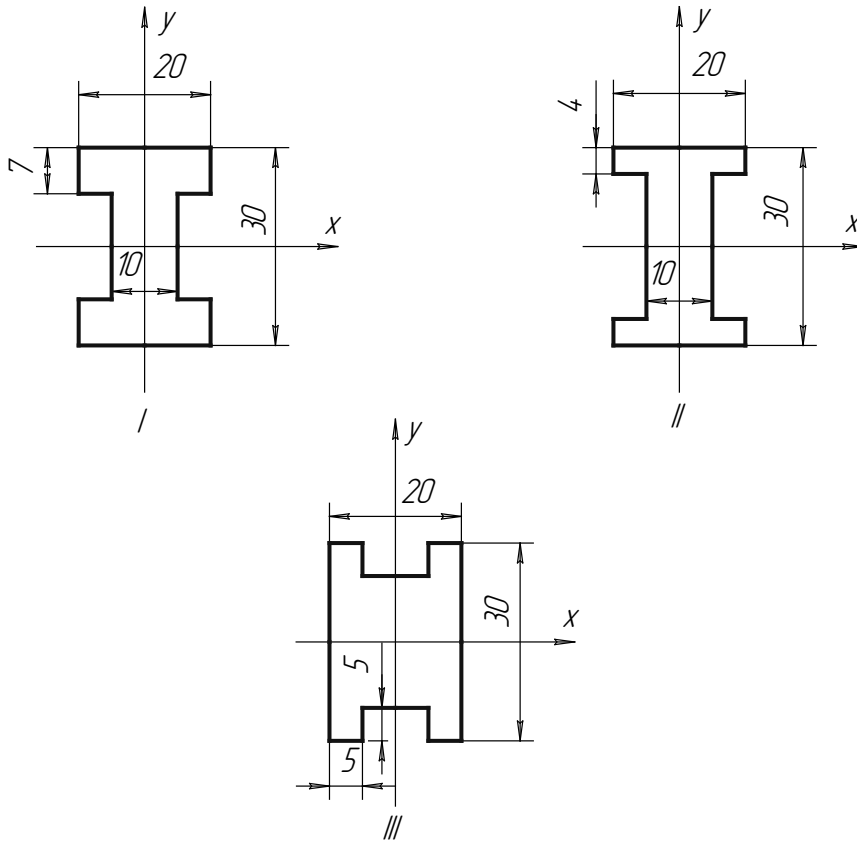


Рисунок 1.5 – Поперечний переріз балки (I, II, III – номери схем балок)

2. Встановити навантажувальні пристрої в перерізі A і B на відповідних відстанях l_A і l_B .

3. Закріпити квадрат 4 на кільці 3 так, щоб його верхня грань була строго горизонтальною.

4. Закріпити у центрі вертикальної й горизонтальної граней квадрата 4 стрілочні індикатори I_1 і I_2 в перерізі A та I_3 і I_4 в перерізі B (див. рис.

1.2) для виміру переміщень у вертикальному (f_a^A і f_a^B) і горизонтальному (f_a^A і f_a^B) напрямках.

5. Встановити стрілки всіх індикаторів на нуль.

6. Завантажити без поштовхів підвіску навантажувального пристрою в перерізі A гирями на задану величину P .

7. Занести покази індикаторів I_1, I_2, I_3 і I_4 ($u_1; u_2; u_3; u_4$) у табл.

1.2.

Таблиця 1.2

№ варіанта	$I_z, \text{см}^4$	$I_y, \text{см}^4$	Покази індикаторів, мм								Переміщення, мм			
			u_1	u'_1	u_2	u'_2	u_3	u'_3	u_4	u'_4	f_E^A	f_O^A	f_E^B	f_T^B

8. Зняти навантаження і повторно завантажити без поштовхів підвіску навантажувального пристрою в перерізі A гирями на задану величину P .

9. Занести покази індикаторів I_1, I_2, I_3 і I_4 ($u'_1; u'_2; u'_3; u'_4$) у табл. 1.2.

10. Обчислити переміщення у вертикальному і горизонтальному напрямках:

$$f_{\hat{a}}^A = \frac{u_1 + u'_1}{2}, f_{\hat{a}}^B = \frac{u_3 + u'_3}{2},$$
$$f_{\hat{a}}^A = \frac{u_2 + u'_2}{2}, f_{\hat{a}}^B = \frac{u_4 + u'_4}{2}.$$

11. Обчислити і занести в таблицю 1.2 експериментальні значення повних переміщень перерізів A і B за співвідношеннями:

$$f_E^A = \sqrt{(f_{\hat{a}}^A)^2 + (f_{\hat{a}}^A)^2};$$
$$f_A^B = \sqrt{(f_{\hat{a}}^B)^2 + (f_{\hat{a}}^B)^2}.$$

12. Обчислити і занести в таблицю 1.2 значення моментів інерції перерізів I_z і I_y .

13. Обчислити теоретичні значення переміщень перерізів A і B в напрямку осі Z (f_z^A і f_z^B) напрямку осі Y (f_y^A і f_y^B).

Приклад. Визначимо переміщення в перерізах A та B при косому згині за методом Мора.

Вихідні дані: переріз балки №II (див. рис. 1.5); $P = 30 \text{ Н}$; $l_A = 0,8 \text{ м}$; $l_B = 1,0 \text{ м}$; $\varphi = 30^\circ$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

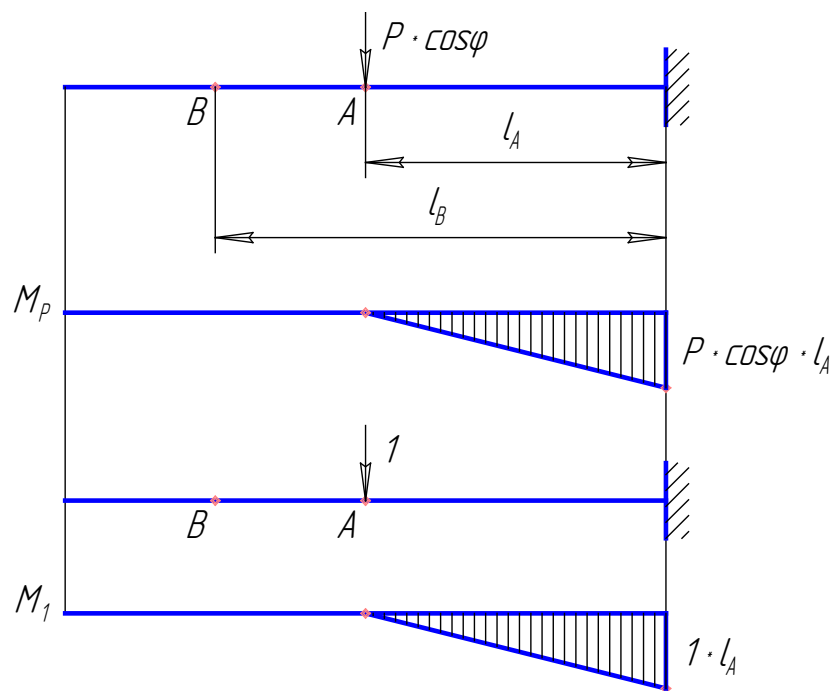
Визначимо моменти інерції перерізу балки:

$$I_Z = \frac{20 \cdot 30^3}{12} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 22^3}{12} = 3,61 \cdot 10^4 \text{ (і і}^4\text{)} = 3,61 \cdot 10^{-8} \text{ (і}^4\text{)};$$

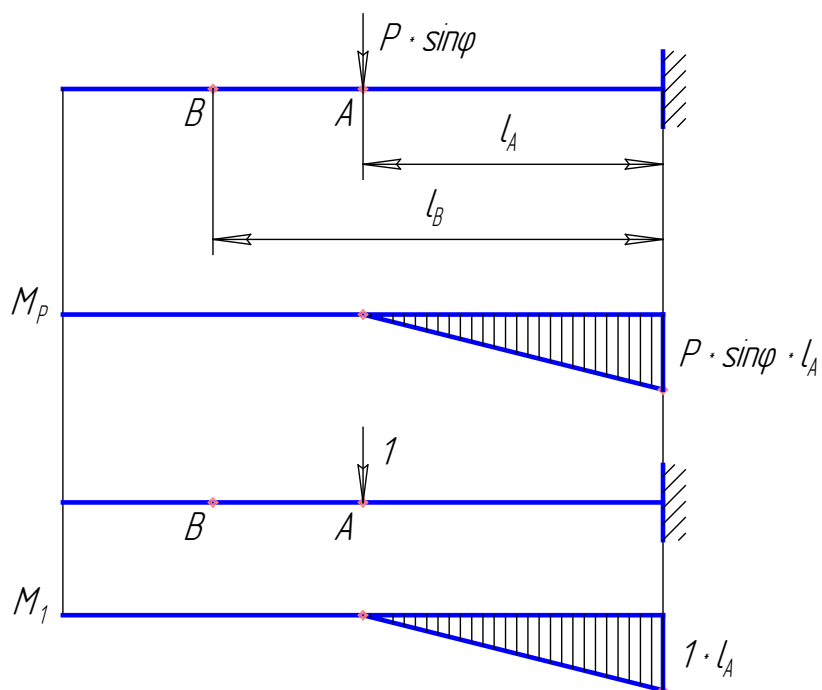
$$I_Y = \frac{22 \cdot 10^3}{12} + 2 \cdot \frac{4 \cdot 20^3}{12} = 7,16 \cdot 10^3 \text{ (і і}^4\text{)} = 0,72 \cdot 10^{-8} \text{ (і}^4\text{)}.$$

Визначимо теоретичні значення переміщень в перерізі A у напрямку осей Z та Y . Для цього побудуємо епюри від дії зовнішнього навантаження

та одиничної сили в напрямку вісі Z (рис. 1.6, а) та напрямку вісі Y (рис. 1.6, б).



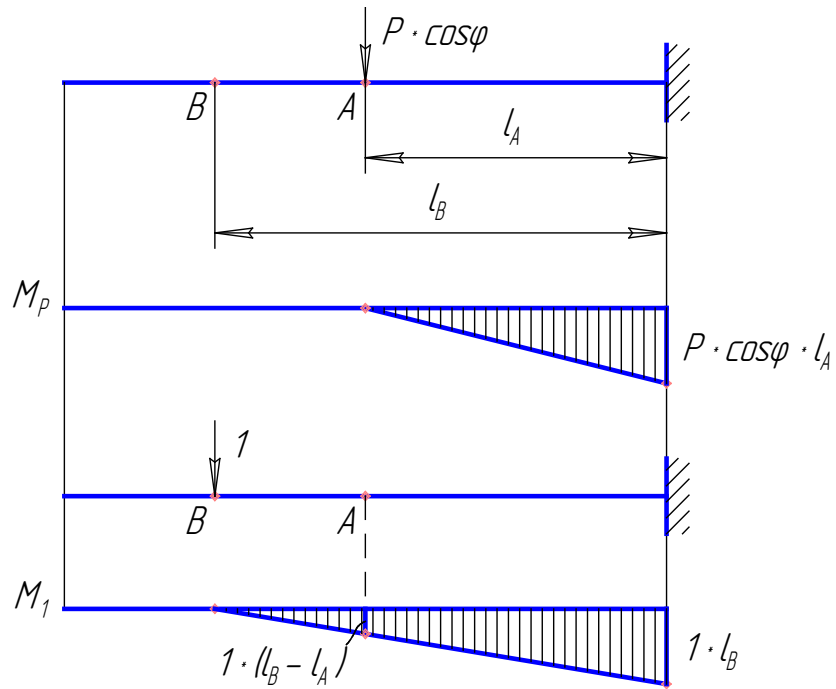
а



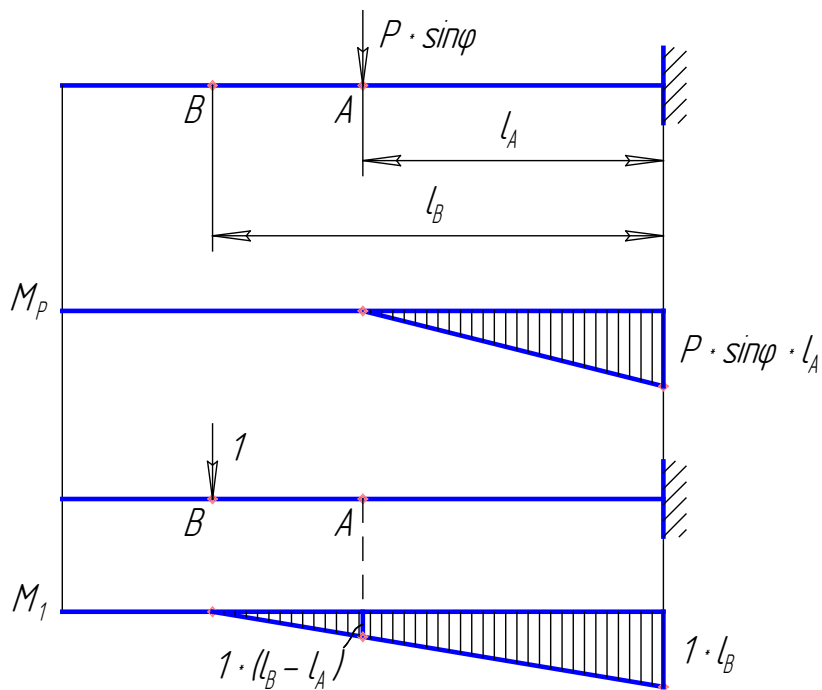
б

Рисунок 1.6 – Епюри для визначення переміщень в перерізі A

Визначимо теоретичні значення переміщень в перерізі B у напрямку осей Z та Y . Для цього побудуємо епюри від дії зовнішнього навантаження та одиничної сили в напрямку вісі Z (рис. 2, а) та вісі Y (рис. 2, б).



а



б

Рисунок 1.7 – Епюри для визначення переміщень в перерізі B

Теоретичне значення переміщення перерізу A в напрямку вісі Y :

$$f_Y^{\dot{O}} = \frac{1}{EI_Z} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot P \cos \phi \cdot l_A \cdot l_A \cdot \frac{2}{3} \cdot l_A \right];$$

$$f_Y^{\dot{O}} = \frac{P \cos \phi \cdot l_A^3}{3EI_Z};$$

$$f_Y^{\dot{O}} = \frac{30 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,8^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3,61 \cdot 10^{-8}} = 0,58 \cdot 10^{-3} (i) = 0,58 (i i).$$

Теоретичне значення переміщення перерізу A в напрямку вісі Z :

$$f_Z^{\dot{O}} = \frac{1}{EI_Y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot P \sin \phi \cdot l_A \cdot l_A \cdot \frac{2}{3} \cdot l_A \right];$$

$$f_Z^{\dot{O}} = \frac{P \sin \phi \cdot l_A^3}{3EI_Y};$$

$$f_Z^{\dot{O}} = \frac{30 \cdot \sin 30^\circ \cdot 0,8^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,72 \cdot 10^{-8}} = 1,70 \cdot 10^{-3} (i) = 1,70 (i i).$$

Теоретичне значення переміщення перерізу B в напрямку вісі Y :

$$f_Y^{\dot{O}} = \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{l_A}{6} \left[0 + 2 \cdot P \cos \phi \cdot l_A \cdot 1 \cdot l_B + 0 + P \cos \phi \cdot l_A \cdot 1 \cdot (l_B - l_A) \right];$$

$$f_Y^{\dot{O}} = \frac{P \cos \phi \cdot l_A^2}{6EI_Z} \cdot (3l_B - l_A);$$

$$f_Y^{\dot{O}} = \frac{30 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,8^2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3,61 \cdot 10^{-8}} \cdot (3 \cdot 1 - 0,8) = 0,80 \cdot 10^{-3} (i) = 0,8 (i i).$$

Теоретичне значення переміщення перерізу B в напрямку вісі Z :

$$f_Z^{\dot{O}} = \frac{1}{EI_Y} \cdot \frac{l_A}{6} \left[0 + 2 \cdot P \sin \phi \cdot l_A \cdot 1 \cdot l_B + 0 + P \sin \phi \cdot l_A \cdot 1 \cdot (l_B - l_A) \right];$$

$$f_Z^{\dot{O}} = \frac{P \sin \phi \cdot l_A^2}{6EI_Y} \cdot (3l_B - l_A);$$

$$f_Z^{\dot{O}} = \frac{30 \cdot \sin 30^\circ \cdot 0,8^2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,72 \cdot 10^{-8}} \cdot (3 \cdot 1 - 0,8) = 2,32 \cdot 10^{-3} \text{ (i)} = 2,32 \text{ (i i)}.$$

1. Обчислити і занести в табл. 1.2 теоретичні значення переміщень перерізів A і B (f_O^A і f_O^B) за (1.1):

$$f_O^A = \sqrt{(f_z^A)^2 + (f_y^A)^2};$$

$$f_O^B = \sqrt{(f_z^B)^2 + (f_y^B)^2}.$$

2. Визначити відносну похибку теоретичних обрахунків:

$$\Delta_A = \frac{|f_T^A - f_E^A|}{f_A^A} 100\%;$$

$$\Delta_{\dot{A}} = \frac{|f_T^{\dot{A}} - f_E^{\dot{A}}|}{f_{\dot{A}}^{\dot{A}}} 100\%.$$

3. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Дати означення косо́го згину, привести приклади.
2. Нормальні напруження при косому згині.
3. Як визначити нейтральну лінію при косому згині?
4. Взаємне розташування в поперечному перерізі нейтральної й силової ліній.
5. Як визначити повне переміщення при косому згині?
6. Побудувати епюри нормальних напружень при косому згині.
7. Записати умову міцності при косому згині.

Лабораторна робота №2

Визначення положення центра згину балки тонкостінного профілю

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально положення центра згину балки тонкостінного профілю.

Теоретичні відомості

Система сил, яка лежить в площині перерізу балки тонкостінного профілю, відповідно до законів механіки може бути приведена до будь-якої точки у вигляді рівнодіючої сили і моменту.

Точка C , відносно якої момент дотичних сил в перерізі при поперечному згині дорівнює нулю, називається центром згину. Через центр згину проходить поперечна сила Q , що є рівнодієюю дотичних зусиль.

Розглянемо балку тонкостінного профілю (рис. 2.1), яка в перерізі має вигляд кругового незамкнутого кільця постійної товщини, і визначимо для нього положення центра згину

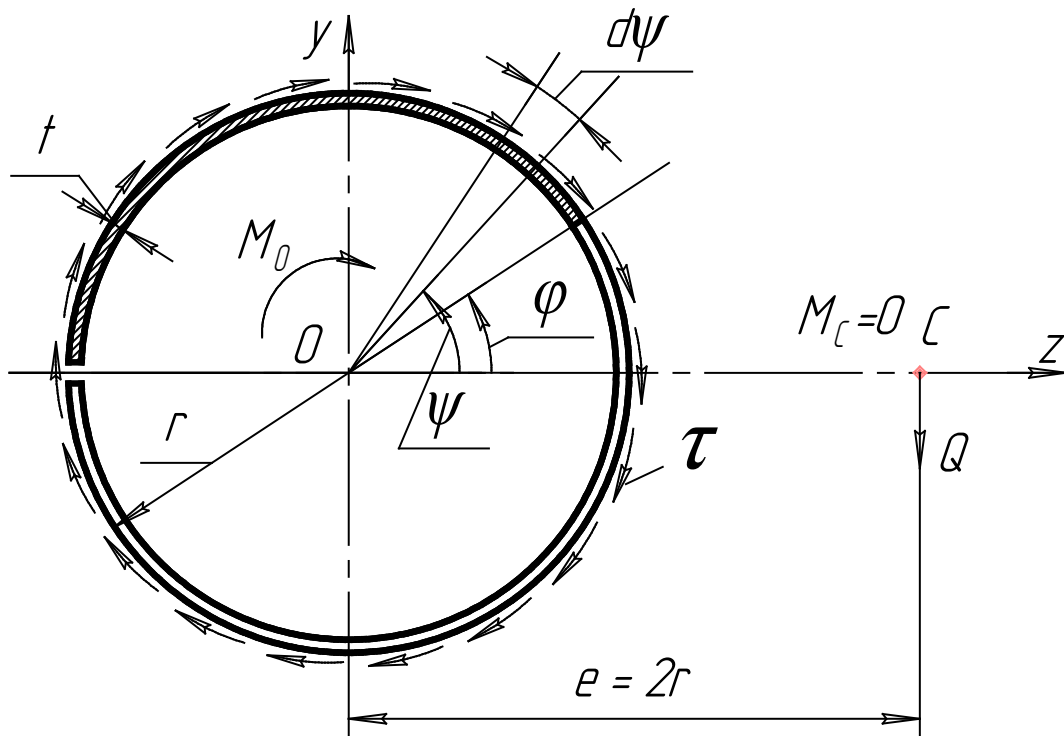


Рисунок 2.1 – Переріз балки тонкостінного профілю

Рівнодійна дотичних зусиль T по вісі y визначається інтегралом:

$$T = \int_F \tau \cos \phi dF. \quad (2.1)$$

де τ – дотичне напруження;
 dF – елементарна площа перерізу.

Формула для визначення дотичних напружень при згині має вигляд

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z t}, \quad (2.2)$$

де Q – поперечна сила;

S_z^* – статичний момент частини площі перерізу відносно вісі z ;

I_z – момент інерції перерізу відносно вісі z ;

t – товщина стінки кільця.

Статичний момент заштрихованої частини перерізу (див. рис. 2.1) визначається інтегралом

$$S_z^* = t \int_{\psi}^{\pi} r^2 \sin \psi \, d\psi = tr^2(1 + \cos \psi); \quad (2.3)$$

де ψ – центральний кут.

Момент інерції перерізу відносно вісі z визначається за формулою

$$I_z = \pi r^3 t, \quad (2.4)$$

де r – відстань від центра кільця до середини стінки профілю (див. рис. 2.1).

Відстань від центра кільця до середини стінки можна визначити за формулою

$$r = \frac{d_z + d_a}{2}, \quad (2.5)$$

де d_z – зовнішній діаметр кільця; d_a – внутрішній діаметр кільця.

Підставимо (2.3) та (2.4) у формулу (2.2) і отримаємо

$$\tau = \frac{Q}{\pi tr} (1 + \cos \psi). \quad (2.6)$$

Користуючись виразом (2.6), проінтегруємо (2.1) і визначимо рівнодійну дотичних зусиль

$$T = \int_F \frac{Q}{\pi r t} (1 - \cos \psi) \cos \psi \, dF = \frac{Q}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos \psi) \cos \psi \, d\psi = Q.$$

Таким чином отримали, що поперечна сила Q є рівнодієюною дотичних зусиль T .

Момент дотичних зусиль відносно центра кільця

$$M_T = \int_F \tau r dF = \frac{Qr}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos \psi) d\psi = 2Qr. \quad (2.6)$$

Центр згину профілю знайдемо, виходячи з того, що момент рівнодіючої сили відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів складових сил відносно тієї точки.

Отже, відносно центра кільця

$$eQ = M_T,$$

де e – відстань від центра кільця до центра згину.

З урахуванням (2.6) отримуємо

$$e = 2r, \quad (2.7)$$

тобто для кругового незамкненого кільця постійної товщини (рис. 2.1) центр згину C знаходиться на відстані, рівній $2r$ і віддалений від центра перерізу по вісі симетрії.

Визначимо положення центра згину для швелера постійної товщини (рис. 2.2).

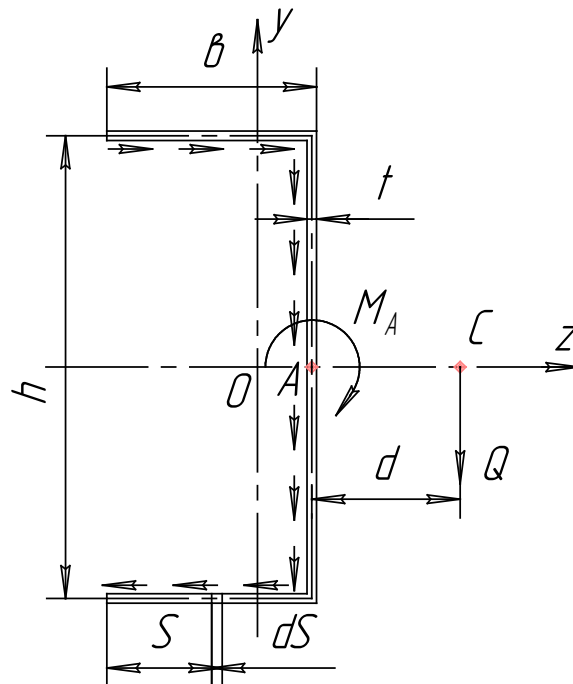


Рисунок 2.2 – Переріз швелера

Для швелера (див. рис. 2.2) момент дотичних зусиль відносно точки A , яка знаходиться посередині стінки, дорівнює

$$M_A = 2 \frac{h^b}{2} \int_0^b \tau t ds, \quad (2.8)$$

де h – відстань між середніми лініями полиць;

τ – дотичні напруження;

t – товщина стінки швелера;

b – довжина полки.

Відстань між середніми лініями полиць можна визначити за формулою

$$h = H - t. \quad (2.9)$$

Момент інерції перерізу відносно вісі z

$$I_z = \frac{h^2 b}{12} (h + 6b). \quad (2.10)$$

Статичний момент для ділянки полиці довжиною s дорівнює

$$S_z^* = \frac{h}{2} ts. \quad (2.11)$$

З урахуванням виразів (2.10) і (2.11) для полиці згідно (2.2) отримаємо

$$\tau = \frac{Q}{\pi t r^2} (1 + \cos \psi). \quad (2.12)$$

Підставимо (2.12) у (2.8) і після інтегрування дістанемо

$$M_A = Q \frac{3b^2}{h + 6b}.$$

Звідки випливає, що у швелера постійної товщини (рис. 2.2) центр згину віддалений від середньої лінії стінки на відстані

$$d = \frac{3b^2}{h + 6b}. \quad (2.13)$$

Опис установки

Загальний вигляд установки для визначення положення центра згину балки тонкостінного профілю, яка в перерізі має вигляд кругового незамкнутого кільця постійної товщини, наведено на рис. 2.3. Балка з одного кінця жорстко затиснена з допомогою двох болтів і має вигляд консолі (рис. 2.4).



Рисунок 2.3 – Установка для визначення положення центра згину балки тонкостінного профілю

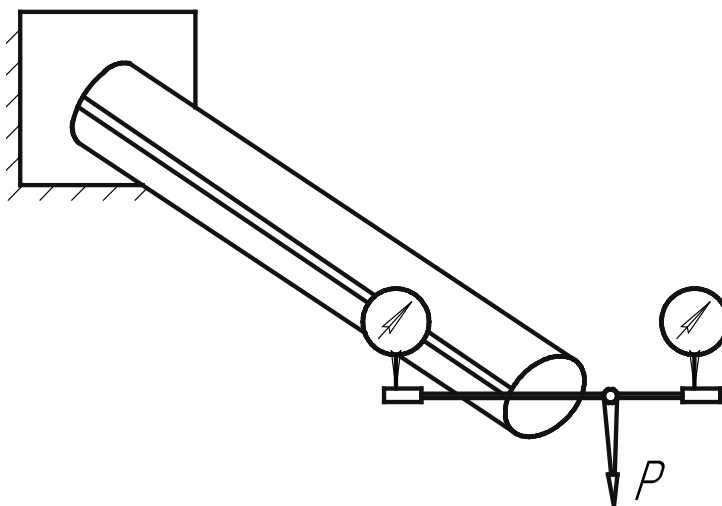


Рисунок 2.4 – Схема установки для визначення положення центра згину балки тонкостінного профілю

Загальний вигляд установки для визначення центра згину балки тонкостінного профілю, яка в перерізі має вигляд швелера постійної товщини, наведено на рис. 2.5. Балка також з одного кінця жорстко затиснена за допомогою двох болтів і має вигляд консолі (рис. 2.6).



Рисунок 2.5 – Установка для визначення положення центра згину швелера

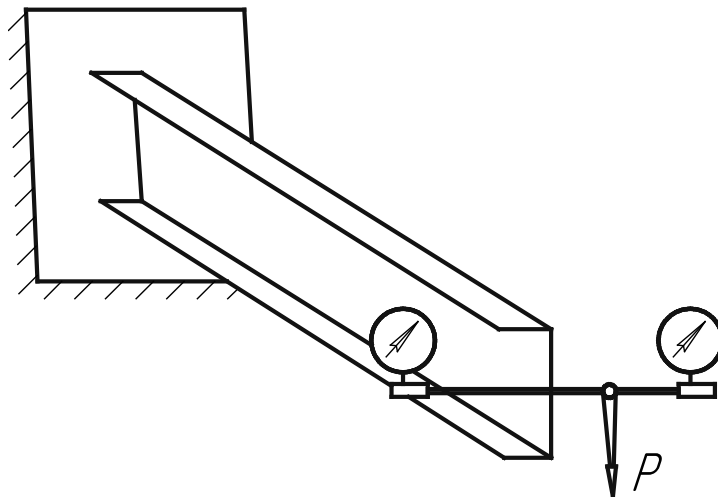


Рисунок 2.6 – Схема установки для визначення положення центра згину швелера

На вільному торці тонкостінної балки, розміщена рейка, по якій може переміщуватись повзун з гирьовим підвісом (див. рис. 2.3 і 2.5). Відлік переміщення повзуна по рейці проводиться за шкалою. На кінцях рейки встановлені дві п'ятки, в які впираються ніжки індикаторів. Дослідна перевірка положення центра згину проводиться за допомогою двох індикаторів годинникового типу.

Порядок виконання роботи

1. Заміряти розміри поперечного перерізу тонкостінної балки і визначити:

– для кругового незамкненого кільця постійної товщини значення r ;

– для швелера постійної товщини значення b і h .
Отримані значення занести у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Кругове незамкнене кільце постійної товщини			Швелер постійної товщини			
r	e_T	e_E	b	h	d_T	d_E

2. Обчислити теоретичне значення центру згину:

– для кругового незамкненого кільця постійної товщини за формулою (2.7);

– для швелер постійної товщини за формулою (2.13).

Отримані значення занести у табл. 2.1.

2. Встановити повзун в центрі ваги перерізу (положення центра ваги перерізу відповідає поділці "10" шкали).

3. Встановити стрілки індикаторів на нуль.

4. Навантажити гирьовий підвіс вантажем 15 Н.

5. Провести відлік за шкалою індикаторів.

6. Перемістити повзун по рейці і добитися такого його положення, коли покази індикаторів стануть однаковими за значенням.

7. Визначити експериментально положення центру згину: e_E і d_E .

Отримані значення занести у табл. 2.1.

8. Порівняти експериментальні і теоретичні значення положень центра згину. Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta_e = \frac{|e_T - e_E|}{e_T} 100\%;$$

$$\Delta_d = \frac{|d_T - d_E|}{d_T} 100\%.$$

8. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Визначення секторальної площі.
2. Секторальні характеристики перерізу і їх визначення.
3. Визначення дотичних напружень в тонкостінних стержнях.
4. Визначення центра згину кругового незамкнутому профілю.
5. Визначення центра згину швелера постійної товщини.

Лабораторна робота №3

Визначення напруження при позацентровому розтязі стержня

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально напруження на поверхні позацентрово розтягнутого стержня прямокутного перерізу.

Теоретичні відомості

Позацентровий розтяг чи стиск виникає в тому випадку, коли лінія дії зовнішнього навантаження, яке сприймає стержень, паралельна його повздовжній вісі. При цьому в поперечному перерізі стержня спостерігаються повздовжні сили і згинаючі моменти. Нормальна сила рівна зовнішньому навантаженню, а значення згинаючих моментів залежать від того, наскільки зміщений полюс (тобто точка прикладання зовнішньої сили) від центра. Якщо полюс розміщений не на одній з головних центральних осей перерізу, згин такого стержня буде проходити в двох головних його площинах.

Якщо полюс розміщений на одній із головних центральних осей, то згин його проходить в одній площині і значення згинаючого моменту M (рис. 3.1) визначається за формулою

$$M = Pe, \quad (3.1)$$

де P – прикладена сила;

e – ексцентриситет прикладання зовнішнього навантаження.

Як нормальні сили, так і згинаючі моменти в точках поперечного перерізу викликають нормальне напруження, яке знаходять за формулами:

$$\sigma_N = \frac{P}{F}; \quad \sigma_M = \frac{M}{I_z} y,$$

де P – нормальна сила;

F – площа поперечного перерізу стержня;

I_z – момент інерції перерізу;

y – координати точки, для якої обчислюється напруження (відстань від точки перерізу, що досліджується, до вісі Z).

Момент інерції прямокутника

$$I_z = \frac{bh^3}{12},$$

де b і h розміри перерізу стержня.

Повне напруження, використовуючи принцип незалежності дій сил:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{P}{F} + \frac{M}{I_z} y. \quad (3.2)$$

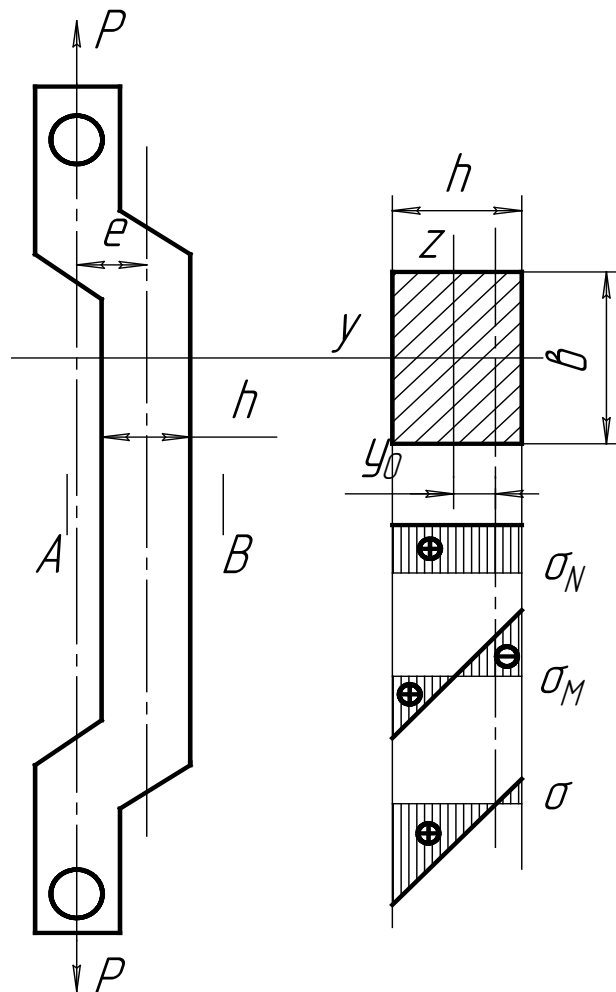


Рисунок 3.1 – Схема навантаження стержня

Рівняння нейтральної лінії, при $\sigma = 0$, тобто

$$\frac{P}{F} + \frac{M}{I_z} y_0 = 0.$$

Таким чином, нейтральна лінія віддалена від головної центральної вісі Z на відстань y_0 (див. рис. 3.1)

$$y_0 = -\frac{NI_z}{FM} = -\frac{Pbh^3}{bh12Pe} = -\frac{h^2}{12e}.$$

При $e > -h/6$ нейтральна лінія знаходиться в межах перерізу, при $e = \frac{h}{6}$ – дотикається до нього, а при $e < -\frac{h}{6}$ – знаходиться за його межами.

Відповідно цьому волокна на поверхні B (див. рис. 3.1) будуть стиснуті, або недеформовані, або розтягнуті. Волокна на поверхні A будуть розтягнуті. Напруження в точках перерізу пропорційні їх відстані до нейтральної лінії.

Опис установки

Для експериментальних досліджень використовують зразок, виготовлений зі сталі. Зразок (див. рис. 3.1) має розміри перерізу $b \times h = 49 \times 19 \text{ мм}$ і $e = 19,5 \text{ мм}$. Навантаження зразка проводять на випробувальній машині Р-10 чи Р-20. Деформацію волокон на поверхнях A і B вимірюють з допомогою тензодатчиків, наклеєних на цих волокнах, і вимірювача деформації цифрового ИДЦ-1. Значення деформації визначаються за формулою

$$\varepsilon = \gamma \Delta T_{\tilde{n}\delta}, \quad (3.3)$$

де ε – деформація;

γ – коефіцієнт тензочутливості;

ΔT_{cp} – приріст показників тензодатчика при збільшенні навантаження на ΔP .

Напруження на поверхнях A і B

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (3.4)$$

де $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ – модуль пружності матеріалу зразка.

Порядок виконання роботи

1. Закріпити зразок з наклеєними тензодатчиками в захватах машини Р-10 чи Р-20.

2. Увімкнути в мережу вимірювач деформації цифровий ИДЦ-1 і прогріти протягом 5...10 хвилин.

3. Створити попереднє навантаження $P = 40000 \text{ Н}$ на зразок і записати вихідні показники тензодатчиків T_0 у табл. 3.1.

4. Навантажувати зразок ступенями $\Delta P = 2000 \text{ Н}$, записати значення показників тензодатчиків T_i у табл. 3.1.

5. Визначити прирощення $\Delta T_i = T_i - T_{i-1}$ показників тензодатчика при збільшенні навантаження на ΔP і занести у табл. 3.1.

6. Обчислити середнє значення ΔT_{cp} за формулою

$$\Delta T_{\tilde{n}\delta} = \frac{\sum_{i=1}^3 \Delta T_i}{3}$$

і занести у табл. 3.2.

7. Визначити деформації ε_A та ε_B за (3.3) і занести в табл. 3.2.

Таблиця 3.1

Навантаження P, H	Прирощення навантаження $\Delta P, \text{H}$	Поверхня A		Поверхня B	
		T_i	ΔT_i	T_i	ΔT_i
40000	—		—		—
60000	20000				
80000	20000				
100000	20000				

Таблиця 3.2

Поверхня A				Поверхня B			
$1 \Delta T_{cp}$	ε_A	$\sigma_A^T, \text{МПа}$	$\sigma_A^E, \text{МПа}$	ΔT_{cp}	ε_B	$\sigma_B^T, \text{МПа}$	$\sigma_B^E, \text{МПа}$

8. Обчислити експериментальні значення напружень σ_A^E та σ_B^E на поверхнях A і B за формулою (3.4) і занести у табл. 3.2.

9. Обчислити теоретичні значення напружень σ_A^T та σ_B^T на поверхнях A і B , використовуючи формулу (3.2), занести у табл. 3.2.

10. Порівняти експериментальні і теоретичні значення напружень. Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta_{\sigma}^A = \frac{|\sigma_A^T - \sigma_A^E|}{\sigma_A^T} 100\%; \quad \Delta_{\sigma}^B = \frac{|\sigma_B^T - \sigma_B^E|}{\sigma_B^T} 100\%.$$

11. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Що таке позацентровий розтяг (стиск)?
2. Які внутрішні зусилля спостерігаються в поперечних перерізах позацентрово розтягнутого стержня? Як їх визначити?
3. Як обчислити напруження в довільній точці поперечного перерізу позацентрово розтягнутого стержня?
4. Що таке нейтральна лінія і як знайти її положення?
5. Чи зміниться відстань від центра ваги перерізу до нейтральної лінії при збільшенні ексцентриситету навантаження? Якщо зміниться, то як?
6. Викласти методику визначення напружень дослідним шляхом.
7. Навести приклади елементів конструкції і деталей машин, які працюють в умовах позацентровому розтягу (стиску).

Лабораторна робота №4 Експериментальна перевірка теорем про взаємність робіт і переміщень

Мета роботи – перевірити дослідним шляхом теореми про взаємність робіт і переміщень.

Теоретичні відомості

Теорема про взаємність робіт безпосередньо впливає із принципу незалежності дії сил і застосовується до всіх пружних систем, для яких дійсний цей принцип.

Розглянемо консольну балку, схема якої зображена на рис. 4.1, а, до якої прикладена сила P_1 в точці A і сила P_2 в точці B . Визначимо роботу, що роблять сили P_1 і P_2 при прямому й зворотному порядку прикладення.

Прикладаємо спочатку в точці A силу P_1 (рис. 4.1, б). Ця сила виконає роботу $P_1\delta_{A_1}$, де δ_{A_1} – переміщення точки A у напрямку сили P_1 , викликане силою P_1 . У точці B прикладаємо силу P_2 . Ця сила зробить роботу, що буде мати аналогічний вираз $P_2\delta_{B_2}$. Одночасно з P_2 виконає роботу й сила P_1 , оскільки при прикладанні сили P_2 відбудеться й переміщення точки A . Робота сили P_1 буде $P_1\delta_{A_2}$, де δ_{A_2} – переміщення точки A у напрямку сили P_1 під дією сили P_2 , що прикладена в точці B . У підсумку одержимо суму робіт при прямому порядку прикладення сил:

$$P_1\delta_{A_1} + P_2\delta_{B_2} + P_1\delta_{A_2}. \quad (4.1)$$

Спочатку прикладемо силу P_2 (рис. 4.1, в), а потім P_1 . Міркуючи аналогічно, знаходимо

$$P_2\delta_{B_2} + P_1\delta_{A_1} + P_2\delta_{B_1}. \quad (4.2)$$

Прирівнюючи (4.1) і (4.2), знаходимо $P_1\delta_{A_2} = P_2\delta_{B_1}$.

Отриманий результат можна сформулювати таким чином: робота першої сили на переміщенні точки її прикладення під дією другої сили дорівнює роботі другої сили на переміщенні точки її прикладення під дією першої сили. У цьому полягає теорема взаємності робіт (теорема Бетті).

Якщо $P_1 = P_2 = P_0$, то $\delta_{A_2} = \delta_{B_1}$ і теорему взаємності робіт трактують як теорему взаємності переміщень.

Переміщення точки A під дією сили, прикладеної в точці B , дорівнює переміщенню точки B під дією тієї ж сили, але прикладеної в точці A (теорема Максвелла).

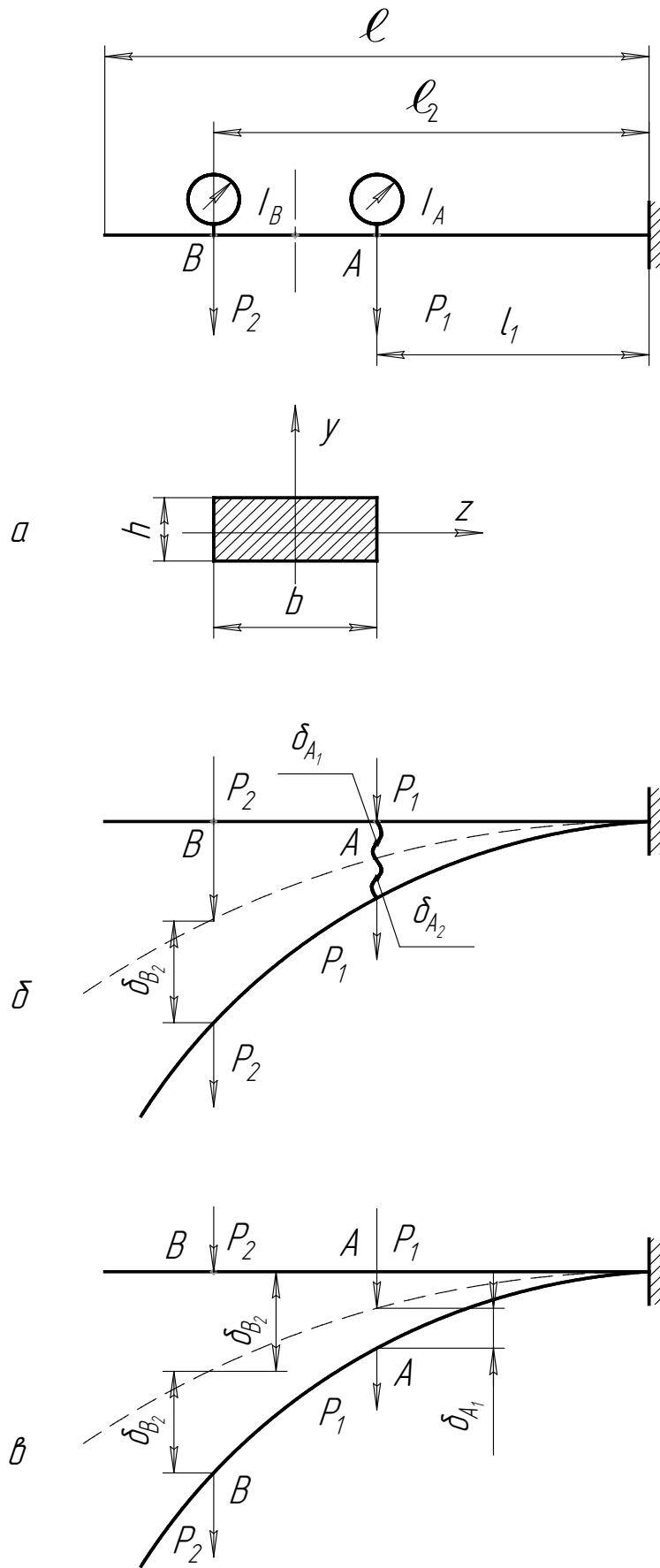


Рисунок 4.1 – Схеми навантаження консольної балки

Опис установки

Роботу виконують на установці, загальний вигляд якої показано на рис. 4.2. Установка складається з консольної балки довжиною l (див. рис. 4.1), затисненої з одного боку, двох індикаторів годинникового типу I_A і I_B , які встановлюють у точках A і B для вимірювання переміщень балки у вертикальному напрямку, і двох підвісів з набором вантажів. Навантаження балки виконується зосередженими силами P_1 і P_2 , що прикладають на відстані l_1 і l_2 від защемлення. Балка має прямокутний поперечний переріз із розмірами сторін $b = 50$ мм, $h = 9$ мм, матеріал балки – сталь Ст. 3.

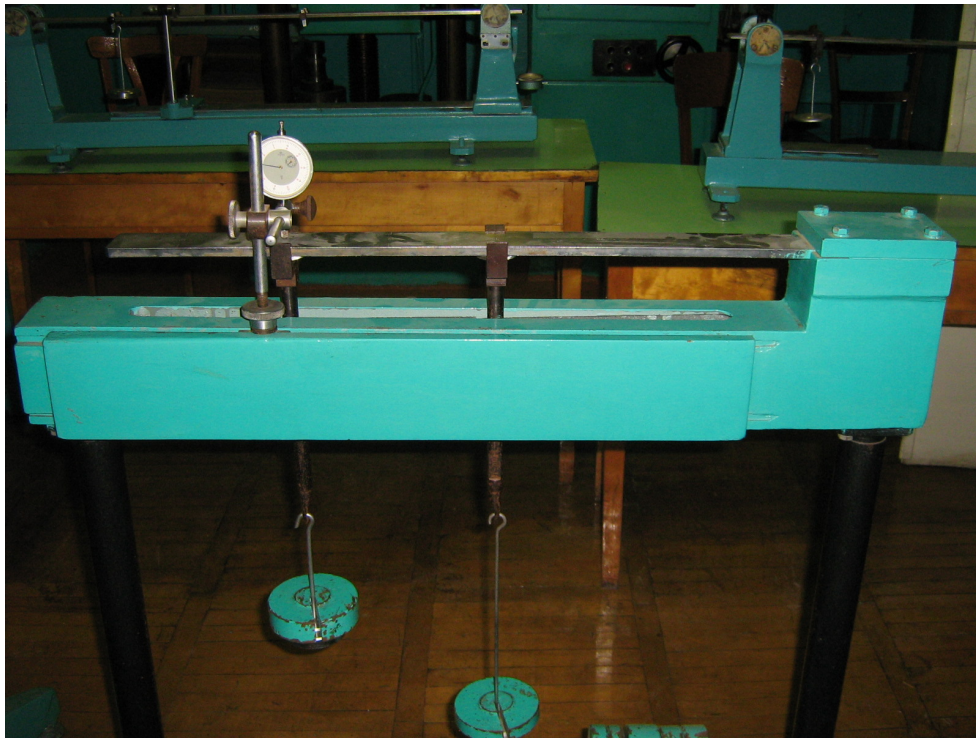


Рисунок 4.2 – Лабораторна установка

Порядок виконання роботи

1. Встановити індикатори I_A і I_B на нуль.
2. Визначити відповідно до варіанта завдання (табл. 4.1) значення P_1 і P_2 .
3. Виконати прямий порядок прикладення сил P_1 і P_2 (рис. 4.1, б), визначити за індикатором I_A переміщення δ_{A_2} і роботу $A' = P_1 \delta_{A_2}$.
4. Виконати зворотний порядок прикладення сил P_1 і P_2 (рис. 4.1, в), визначити за індикатором I_B переміщення δ_{B_1} . Визначити роботу $A'' = P_2 \delta_{B_1}$.

Таблиця 4.1

Номер варіанта	l_1 , см	l_2 , см	P_1 , Н	P_2 , Н	P_0 , Н
1	30	40	40	20	10
2	40	50	30	20	10
3	30	60	40	10	20
4	40	55	30	10	20
5	30	50	40	15	30
6	40	60	30	15	30
7	25	40	40	10	15
8	25	50	30	20	15

5. Порівняти A' і A'' . Зробити висновок про справедливість теореми про взаємність робіт. Обчислити відносну похибку:

$$\Delta_A = \frac{A' - A''}{A_{\tilde{n}\delta}} \cdot 100\%, \quad (4.3)$$

де

$$A_{\tilde{n}\delta} = \frac{A' + A''}{2} \cdot 100\%. \quad (4.4)$$

6. Зняти навантаження P_1 і P_2 , встановити індикатори I_A і I_B на нуль.

7. Навантажити балку силою P_0 в точці A і зняти покази індикатора I_B переміщення балки δ_{B_1} в перерізі B .

8. Навантажити балку тією ж силою P_0 в точці B і зняти покази індикатора I_A переміщення балки δ_{A_2} в точці A .

9. Порівняти результати δ_{B_1} і δ_{A_2} . Зробити висновок про справедливість теореми про взаємність переміщень. Визначити похибку

$$\Delta_\delta = \frac{\delta_{B_1} - \delta_{A_2}}{\delta_{\tilde{n}\delta}} \cdot 100\%, \quad (4.5)$$

$$\delta_{\tilde{n}\delta} = \frac{\delta_{B_1} + \delta_{A_2}}{2}. \quad (4.6)$$

10. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Сформулюйте теорему про взаємність робіт.
2. Для яких систем застосовуються теореми Бетті і Максвелла?
3. Що означають величини δ_{A_2} і δ_{B_1} ?
4. Як формулюється теорема про взаємність переміщень?
5. Де застосовується теорема про взаємність переміщень?

Лабораторна робота №5 Визначення переміщення перерізу рами

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально величину переміщення перерізу рами.

Теоретичні відомості

Найбільш універсальний метод визначення переміщення у балках, рамах і кривих брусів є метод Мора.

Відмітимо послідовність визначення переміщення перерізу плоскої рами.

1. Розглядають спочатку плоску систему (раму), яка навантажена заданими зовнішніми силами. Для даної системи будують епюру від дії зовнішнього навантаження M_p .

2. Будують допоміжну систему, яка навантажена лише однією одиночною силою $\bar{X}=1$, прикладеної в точці, де треба визначити переміщення, в напрямі шуканого переміщення. Будують епюру від дії одиночною силою.

3. Обчислюють переміщення f за допомогою інтеграла Мора по ділянках у межах всієї системи:

$$f = \sum \int_s \frac{M_p M_1}{EI} ds, \quad (5.1)$$

де EI – жорсткість поперечного перерізу;

ds – довжина довільного елемента рами.

О. В. Верещагін запропонував графоаналітичний спосіб визначення інтеграла Мора, який має назву спосіб Верещагіна. Згідно цього способу інтеграл Мора дорівнює добутку площі епюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної епюри від одиночного навантаження, розміщену під центром ваги епюри заданого зовнішнього навантаження (рис. 5.1).

Переміщення за способом Верещагіна виконується по ділянкам за формулою

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \eta_i}{EI}, \quad (5.2)$$

де ω_i – площа першої епюри i -тої ділянки;

η_i – ордината другої епюри i -тої ділянки під центром ваги відповідної площі;

n – кількість ділянок.

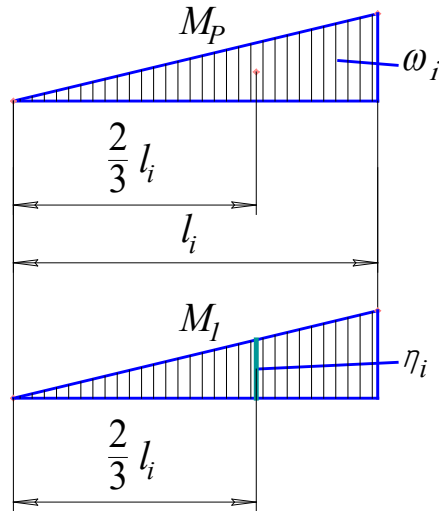


Рисунок 5.1 – Епюри від зовнішнього навантаження і одиночної сили

За способом Верещагіна можна множити площу будь якої з них на ординату іншої під центром ваги першої. Якщо епюри на ділянці від зовнішнього навантаження і одиночної сили протилежні за знаком, то їхній добуток має знак “мінус”.

Обчислення інтегралу Мора істотно спрощується, якщо епюри від зовнішнього навантаження і одиночної сили прямолінійні (мають вигляд трапеції) (рис. 5.2). В цьому випадку, згідно способу Верещагіна–Даркова

$$f = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6} (2a_i c_i + 2b_i d_i + a_i d_i + b_i c_i), \quad (5.3)$$

де a_i , b_i , d_i та c_i – значення моментів з країв ділянок епюри.

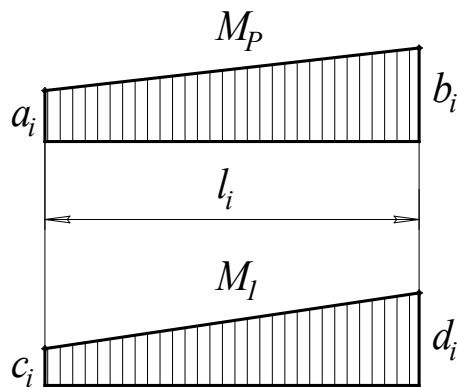


Рисунок 5.2 – Епюри від зовнішнього навантаження і одиночної сили

Якщо, одна з епюр має вигляд “перекрученої” трапеції (рис. 5.3), формула (5.3) набирає вигляду

$$f = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6} (2a_i c_i - 2b_i d_i + a_i d_i - b_i c_i).$$

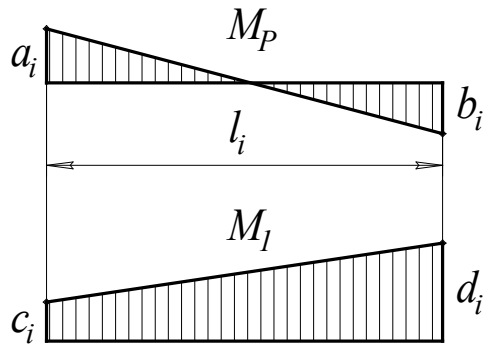


Рисунок 5.3 – Епюри від зовнішнього навантаження і одиночної сили

Опис установки

Загальний вигляд установки СМ-34 для визначення величини прогинів перерізу рами показано на рис. 5.4. Установка (рис. 5.5), складається зі сталевий рами 1 прямокутного поперечного перерізу, яка встановлена на двох шарнірних опорах 2 і 3. Опора 3 – нерухома, опора 2 – шарнірно-рухома.



Рисунок 5.4 – Установки СМ-34 для визначення величини прогинів перерізу рами

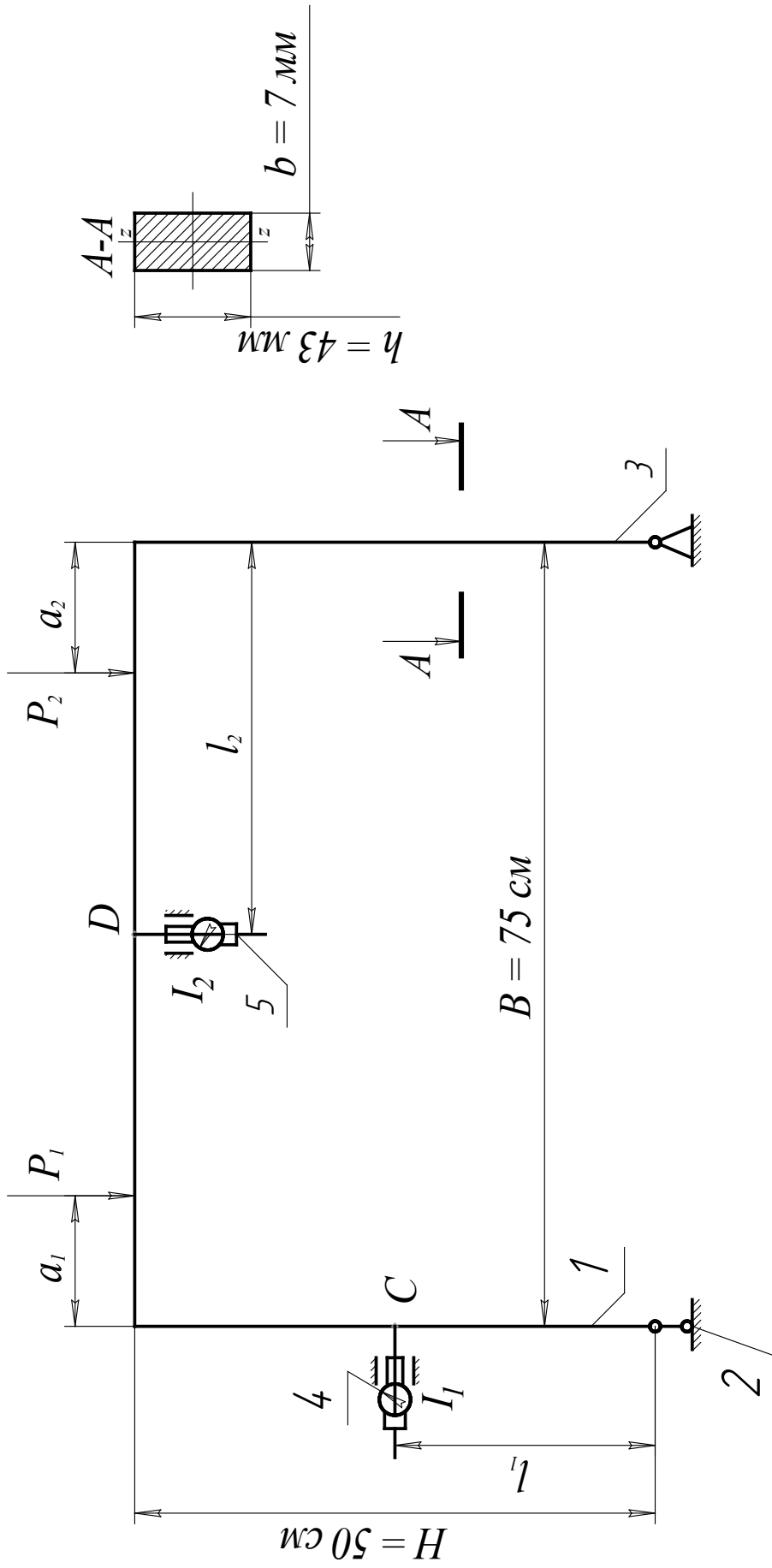


Рисунок 5.5 – Схема установки для визначення величини прогинів перерізу рами

Навантаження здійснюється за допомогою гирьових підвісів P_1 і P_2 , які можуть переміщуватися вздовж ригеля рами. Вимірювання вертикального переміщення здійснюється індикатором годинникового типу 4. Вимірювання горизонтальних переміщення здійснюється індикатором годинникового типу 5. Пристрій закріплення індикаторів дозволяє визначати переміщення в будь-якому перерізі рами. Ціна поділки індикаторів – 0,01 мм.

Порядок виконання роботи

1. Встановити згідно до варіанта (табл. 5.1) підвіси для вантажів P_1 та P_2 на відповідних відстанях a_1 і a_2 .

Таблиця 5.1

Номер варіанта	l_1 , см	l_2 , см	a_1 , см	a_2 , см	P_1 , Н	P_2 , Н
1	15	25	20	10	20	20
2	20	30	10	15	15	20
3	25	35	15	20	10	15
4	30	40	15	25	20	15
5	35	45	20	10	15	10
6	40	30	25	15	10	10
7	15	40	10	20	20	20
8	20	50	15	25	15	20

2. Встановити стійку з індикатором I_1 для визначення переміщення перерізу рами в точці C на відстані l_1 .

3. Встановити стійку з індикатором I_2 для визначення переміщення перерізу рами в точці D на відстані l_2 .

4. Встановити стрілки індикаторів на нуль.

5. Встановити вантажі P_1 та P_2 на відповідні підвіси.

6. Занести покази індикаторів I_1 і I_2 (u_1 ; u_2) у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Покази індикаторів, мм				Переміщення, мм			
I_1		I_2		f_E^C	f_O^C	f_E^D	f_T^D
u_1	u'_1	u_2	u'_2				

7. Зняти навантаження і повторно встановити вантажі P_1 та P_2 на відповідні підвіси.

8. Занести покази індикаторів I_1 і I_2 , I_3 і I_4 (u'_1 ; u'_2) у табл. 5.2.

9. Обчислити і занести в таблицю 5.2 експериментальні значення переміщень перерізу рами в точках C і D :

$$f_E^C = \frac{u_1 + u'_1}{2}; \quad f_E^D = \frac{u_2 + u'_2}{2}.$$

10. Обчислити і занести в табл. 5.2 теоретичні значення переміщень перерізу рами в точках C і D (f_O^C і f_O^D)

Приклад. Визначимо переміщення перерізу рами в точках C і D за методом Мора.

Вихідні дані: $P_1 = 10 \text{ Н}$; $P_2 = 20 \text{ Н}$; $a_1 = 0,2 \text{ м}$; $a_2 = 0,3 \text{ м}$; $l_1 = 0,2 \text{ м}$; $l_2 = 0,4 \text{ м}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Визначимо реакції опор (рис. 5.6, а) від дії зовнішнього навантаження із рівнянь статки:

$$\sum M_A = 0; \quad -P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot (B - a_2) + R_B \cdot B = 0;$$

$$R_B = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot (B - a_2)}{B};$$

$$R_B = \frac{10 \cdot 0,2 + 20 \cdot (0,75 - 0,3)}{0,75} = 14,67 \text{ (І)}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad P_1 \cdot (B - a_1) + P_2 \cdot a_2 - R_A \cdot B = 0;$$

$$R_A = \frac{P_1 \cdot (B - a_1) + P_2 \cdot a_2}{B};$$

$$R_A = \frac{10 \cdot (0,75 - 0,2) + 20 \cdot 0,3}{0,75} = 15,33 \text{ (І)}.$$

Визначимо моменти M_1 , M_2 та M_D :

$$M_1 = R_A \cdot a_1 = 15,33 \cdot 0,2 = 3,07 \text{ (І} \cdot \text{і)};$$

$$M_2 = R_B \cdot a_2 = 14,67 \cdot 0,3 = 4,4 \text{ (І} \cdot \text{і)};$$

$$M_D = R_B \cdot l_2 - P_2 \cdot (l_2 - a_2) = 14,67 \cdot 0,4 - 20 \cdot (0,4 - 0,3) = 3,87 \text{ (І} \cdot \text{і)}.$$

Побудуємо епюру M_p від дії зовнішнього навантаження (рис. 5.6, б).

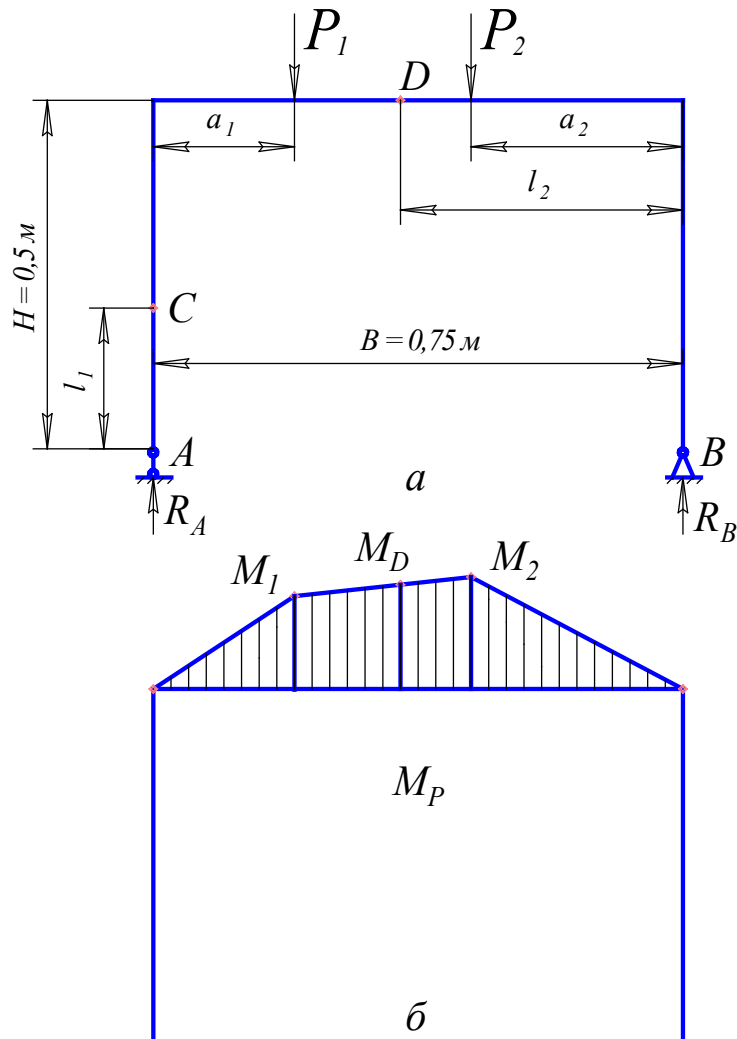


Рисунок 5.6 – Розрахункова схема (а) і епюра від зовнішнього навантаження (б)

Визначимо реакції опор (рис. 5.7, а) від дії одиничної сили, прикладеної в точці С, із рівнянь статички:

$$\sum M_A = 0; \quad -1 \cdot l_1 + V_B^I \cdot B = 0;$$

$$V_B^I = \frac{1 \cdot l_1}{B}; \quad V_B^I = \frac{1 \cdot 0,2}{0,75} = 0,27;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -1 \cdot l_1 + R_A^I \cdot B = 0;$$

$$R_A^I = \frac{1 \cdot l_1}{B}; \quad R_A^I = \frac{1 \cdot 0,2}{0,75} = 0,27;$$

$$\sum X = 0; \quad 1 - H_B^I = 0; \quad H_B^I = 1.$$

Визначимо моменти M_1^I , M_2^I , M_A^I та M_B^I :

$$M_1^I = 1 \cdot (H - l_1) + R_A^I \cdot a_1 = 1 \cdot (0,5 - 0,2) + 0,27 \cdot 0,2 = 0,35 \text{ (і)};$$

$$M_2^I = H_B^I \cdot H + V_B^I \cdot a_2 = 1 \cdot 0,5 - 0,27 \cdot 0,3 = 0,42 \text{ (і)};$$

$$M_A^I = 1 \cdot (H - l_1) = 1 \cdot (0,5 - 0,2) = 0,3 \text{ (і)};$$

$$M_B^I = H_B^I \cdot H = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ (і)}.$$

Побудуємо епюру M_1 від дії одиничної сили (рис. 5.7, б), прикладеної в точці С.

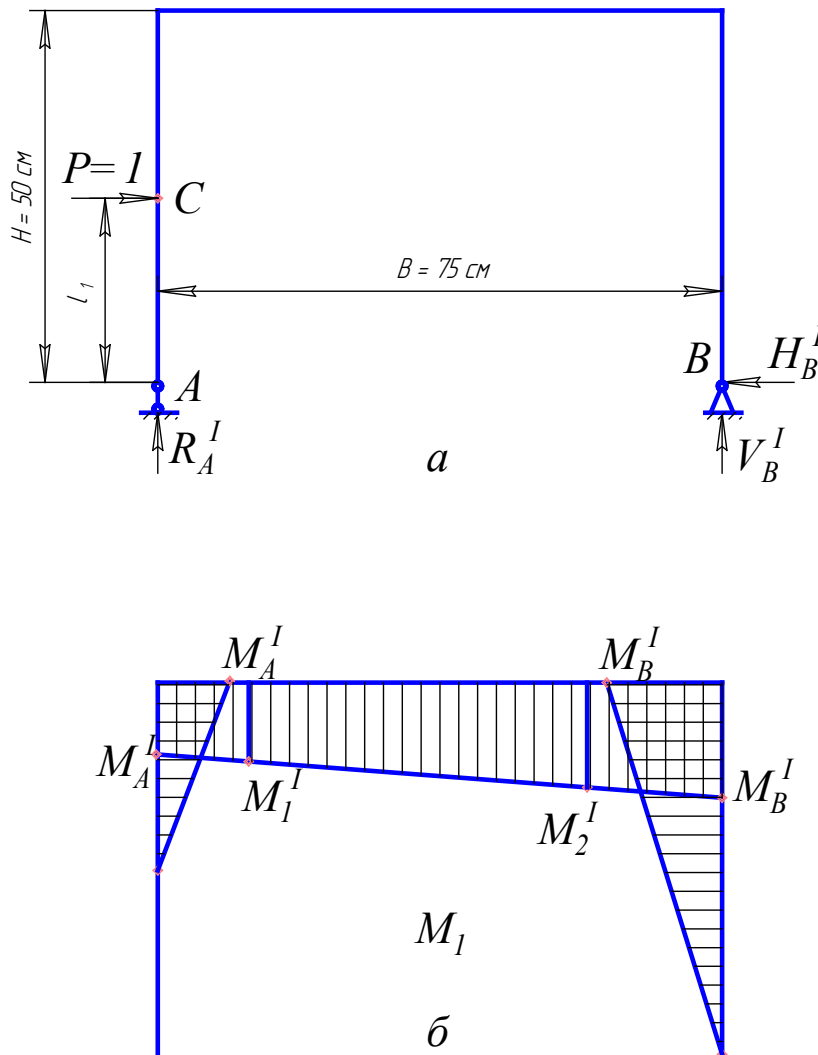


Рисунок 5.7 – Розрахункова схема (а) і епюра від дії одиничної сили, прикладеної в точці С (б)

Визначимо реакції опор (рис. 5.8, а) від дії одиничної сили, прикладеної в точці D , із рівнянь статки:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad -1 \cdot (B - l_2) + R_B^H \cdot B = 0; \\ R_A^H = \frac{1 \cdot (B - l_2)}{B}; \quad R_B^H = \frac{1 \cdot (0,75 - 0,4)}{0,75} = 0,47; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; \quad -1 \cdot l_2 + R_A^H \cdot B = 0; \\ R_A^H = \frac{1 \cdot l_2}{B}; \quad R_A^H = \frac{1 \cdot 0,4}{0,75} = 0,53. \end{aligned}$$

Визначимо моменти M_1^H , M_2^H та M_D^H :

$$M_1^H = R_A^H \cdot a_1 = 0,53 \cdot 0,2 = 0,11 \text{ (і)};$$

$$M_2^H = R_B^H \cdot a_2 = 0,47 \cdot 0,3 = 0,14 \text{ (і)};$$

$$M_D^H = R_B^H \cdot l_2 = 0,47 \cdot 0,4 = 0,19 \text{ (і)}.$$

Побудуємо епюру M_{II} від дії одиничної сили (рис. 5.7, б), прикладеної в точці D .

Визначимо момент інерції для поперечного перерізу рами (див. рис. 5.5):

$$I_Z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_Z = \frac{43 \cdot 7^3}{12} = 1,23 \cdot 10^4 \text{ (і і}^4\text{)} = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ (і}^4\text{)}.$$

Визначимо переміщення в точці C

$$\begin{aligned} f_C = \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_1}{6} \cdot (0 + 2M_1 \cdot M_1^I + M_1 \cdot M_A^I + 0) + \\ + \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{B - a_1 - a_2}{6} \cdot (2M_1 \cdot M_1^I + 2M_2 \cdot M_2^I + M_1 \cdot M_2^I + M_2 \cdot M_1^I) + \\ + \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_2}{6} \cdot (2M_2 \cdot M_2^I + 0 + M_2 \cdot M_B^I + 0); \end{aligned}$$

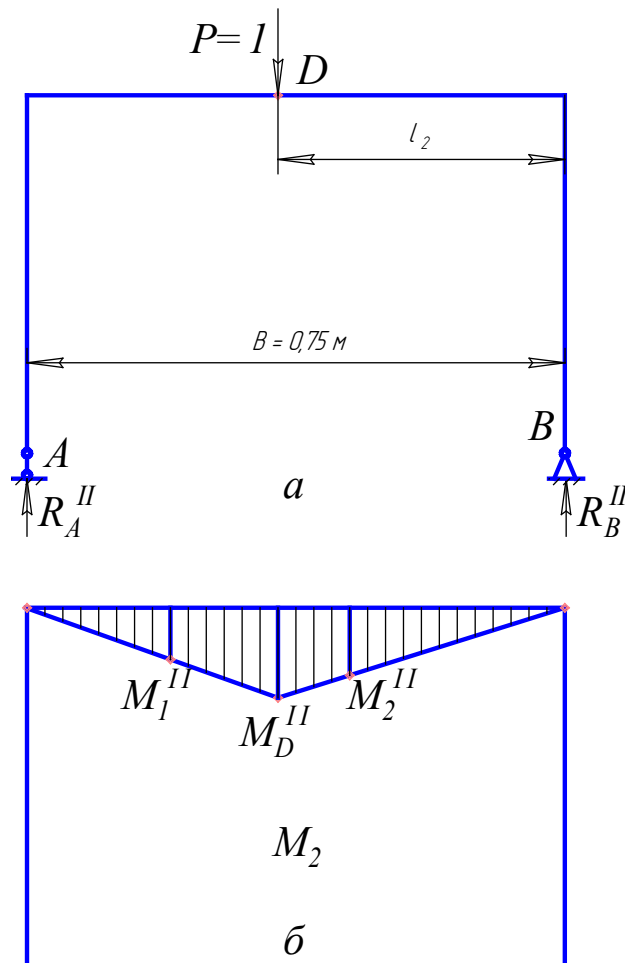


Рисунок 5.8 – Розрахункова схема (а) і епюра від дії одиничної сили, прикладеної в точці D (б)

$$\begin{aligned}
 f_C &= \frac{a_1}{6EI_Z} \cdot (2M_1 \cdot M_1^I + M_1 \cdot M_A^I) + \\
 &+ \frac{B - a_1 - a_2}{6EI_Z} \cdot (2M_1 \cdot M_1^I + 2M_2 \cdot M_2^I + M_1 \cdot M_2^I + M_2 \cdot M_1^I) + \\
 &+ \frac{a_2}{6EI_Z} \cdot (2M_2 \cdot M_2^I + M_2 \cdot M_B^I); \\
 f_C &= \frac{0,2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,23 \cdot 10^{-9}} \cdot (2 \cdot 3,07 \cdot 0,35 + 3,07 \cdot 0,3) + \\
 &+ \frac{0,75 - 0,2 - 0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,23 \cdot 10^{-9}} \cdot (2 \cdot 3,07 \cdot 0,35 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,42 + 3,07 \cdot 0,42 + 4,4 \cdot 0,35) + \\
 &+ \frac{0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,23 \cdot 10^{-9}} \cdot (2 \cdot 4,4 \cdot 0,42 + 4,4 \cdot 0,5) = 0,00294 (i) = 2,94 (i \ i).
 \end{aligned}$$

Визначимо переміщення в точці D :

$$\begin{aligned}
 f_D &= \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_1}{6} \cdot (0 + 2M_1 \cdot M_1'' + 0 + 0) + \\
 &+ \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{B - a_1 - l_2}{6} \cdot (2M_1 \cdot M_1'' + 2M_D \cdot M_D'' + M_1 \cdot M_D'' + M_D \cdot M_1'') + \\
 &+ \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{l_2 - a_2}{6} \cdot (2M_D \cdot M_D'' + 2M_2 \cdot M_2'' + M_D \cdot M_2'' + M_2 \cdot M_D'') + \\
 &+ \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_2}{6} \cdot (2M_2 \cdot M_2'' + 0 + 0 + 0); \\
 f_D &= \frac{0,2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,23 \cdot 10^{-9}} \cdot 2 \cdot 3,07 \cdot 0,11 + \frac{0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1229,08 \cdot 10^{-12}} \cdot 2 \cdot 4,4 \cdot 0,14 + \\
 &+ \frac{0,75 - 0,2 - 0,4}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,23 \cdot 10^{-9}} \cdot (2 \cdot 3,07 \cdot 0,11 + 2 \cdot 3,87 \cdot 0,19 + 3,07 \cdot 0,19 + 3,87 \cdot 0,11) + \\
 &+ \frac{0,4 - 0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,23 \cdot 10^{-9}} \cdot (2 \cdot 3,87 \cdot 0,19 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,14 + 3,87 \cdot 0,14 + 4,4 \cdot 0,19) = \\
 &= 0,00089 \quad (i) = 0,89 (i \ i).
 \end{aligned}$$

11. Визначити відносну похибку теоретичних обрахунків:

$$\Delta_C = \frac{|f_T^C - f_E^C|}{f_A^C} 100\% ; \quad \Delta_D = \frac{|f_T^D - f_E^D|}{f_A^D} 100\%.$$

12. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Алгоритм розв'язання задач на визначення переміщення методом Мора.
2. Формула Мора для визначення переміщення.
3. Спосіб Верещагіна обчислення інтегралів Мора.
4. Визначення вантажного стану.
5. Визначення одиничного стану.

Лабораторна робота №6
Визначення опорного моменту
один раз статично невизначуваної балки

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально величину опорного моменту один раз статично невизначуваної балки.

Теоретичні відомості

Розглянемо балку (рис. 6.1). один кінець якої жорстко защемлений, а інший опирається на шарнірно-рухомому опорі.

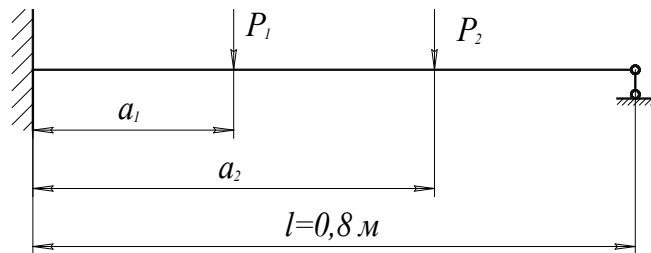


Рисунок 6.1 – Схема експериментальної установки

При дії на балку зовнішнього навантаження затиснення лівого кінця дає три реакції – вертикальну R_A і горизонтальну H_A реакції та опорний момент M_A (рис. 6.2). Шарнірно-рухома опора дає одну реакцію R_B .

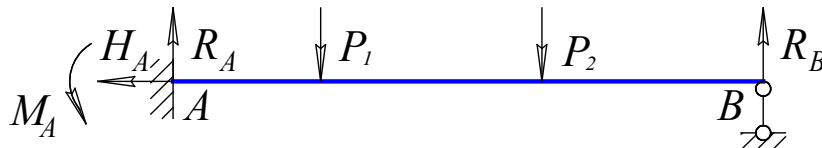


Рисунок 6.2 – Розрахункова схема

Для визначення реакцій можна скласти три умови рівноваги плоскої системи сил. З трьох рівнянь рівноваги чотири реакції (R_A , H_A , M_A , R_B) визначити не можна. Отже, зображена на рис. 6.2 балка один раз статично невизначувана.

Розглянемо етапи розрахунку статично невизначуваної системи.

1. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності, тобто кількість зайвих зв'язків або зайвих зусиль.

2. Усуваємо зайві зв'язки і заміняємо вихідну систему статично визначуваною, яку називають основною системою.

2. Завантажуємо основну систему заданим навантаженням і зайвими невідомими зусиллями, що заміняють дію усунених зв'язків. Така система називається еквівалентною системою.

3. Складаємо рівняння переміщень, що виражають рівність нулю переміщень у напрямках зайвих невідомих. Розв'язуємо рівняння і визначаємо значення зайвих невідомих.

Наведена схема розрахунку має назву „метод сил”, оскільки в якості основних невідомих вибираються зусилля зайвих зв'язків.

Визначимо основну систему для один раз статично невизначуваної системи (див. рис. 6.2). Взявши як зайве зусилля опорний момент M_A , дістанемо основну систему у вигляді шарнірно опертої балки (рис. 6.3).



Рисунок 6.3 – Основна система

Завантажуємо основну систему заданим навантаженням та зайвим невідомим моментом $M_A = X_1$ і отримуємо еквівалентну систему

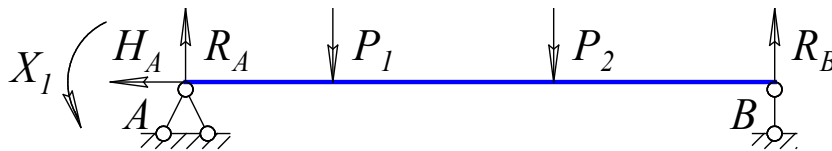


Рисунок 6.4 – Еквівалентна система

Рівняння для визначення невідомого опорного моменту X_1 має вигляд

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (6.1)$$

де δ_{11} – кут повороту перерізу A від моменту $\bar{X}_1 = 1$;

Δ_{1P} – кут повороту від заданого навантаження.

Для визначення Δ_{1P} та δ_{11} будують епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження M_p (рис. 6.5) і одиночного моменту M_1 (рис. 6.6). Значення Δ_{1P} та δ_{11} можливо отримати, використовуючи спосіб Верещагіна або Верещагіна–Даркова.

Значення опорного моменту X_1 з рівняння (6.1)

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (6.2)$$

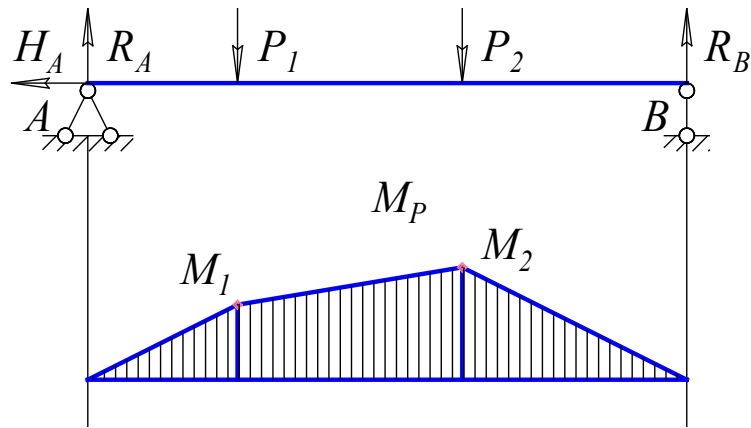


Рисунок 6.5 – Розрахункова схема і епюра від зовнішнього навантаження

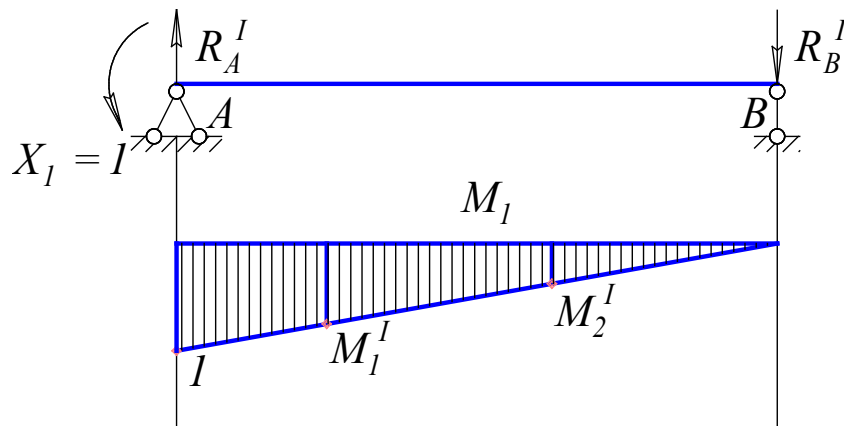


Рисунок 6.6 – Розрахункова схема і епюра від дії одиночного моменту

Опис установки

Загальний вигляд установки для визначення опорного моменту один раз статично невизначуваної балки показано на рис. 6.7.

Установка (рис. 6.8) складається з наступних основних частин: балки 1, основи 2, яка встановлена на чотирьох регульованих гвинтах-ніжках 3, рухомої 4 і нерухомої 5 стійок.

Балка прямокутного перерізу 3×40 мм виконана зі сталі марки Ст. 3. Балка опирається на шарнірні опори A і B , які відповідно розміщені на стійках 4 і 5. На лицьовій стороні балки нанесена шкала для зручності відліку плечей навантаження.

Навантаження зразка здійснюється за допомогою двох підвісок 6 з гирьовими підвісами 7, на які кладуть гирі 8. Підвіски переміщують вздовж балки вручну. При необхідності підвіски можна зафіксувати за допомогою гвинта в будь-якій точці прольоту балки.



Рисунок 6.7 – Установка для визначення опорного моменту один раз статично невизначуваної балки

Рухома стійка 4 може переміщатися по направляючій планці 9, яка прикріплена до основи 2 установки, що дозволяє змінювати довжину прольоту балки в межах від 650 до 800 мм.

Нерухома стійка 5 закріплена гвинтами до основи 2 і обладнана пристроєм, що дозволяє імітувати жорстке защемлення балки. Цей пристрій складається з горизонтально розташованого важеля 10 з противагою 11. Важіль 10 з'єднаний з віссю шарнірної опори *A*. На важелі нанесена шкала.

На вісі шарнірної опори *A* також закріплено стержень 12 для вимірювання кута повороту перерізу балки на опорі. Стержень має в нижній частині п'ятку, в яку впирається ніжка індикатора *I*.

При навантаженні балки її перерізу на опорі повертається на кут, величина якого реєструється за шкалою індикатора годинникового типу з ціною поділки 0,01 мм.

Переміщуючи противагу 11 вздовж важеля 10, можна зрівноважити балку, тобто домогтися такого її стану, при якому кут повороту перерізу балки на опорі *A* буде дорівнювати нулю. Противага 11 має вагу 10 Н.

Отримане таки чином жорстке защемлення опорного кінця балки характеризується опорним моментом, значення якого визначається моментом, що створюється противагою важеля щодо вісі опорного перерізу балки.

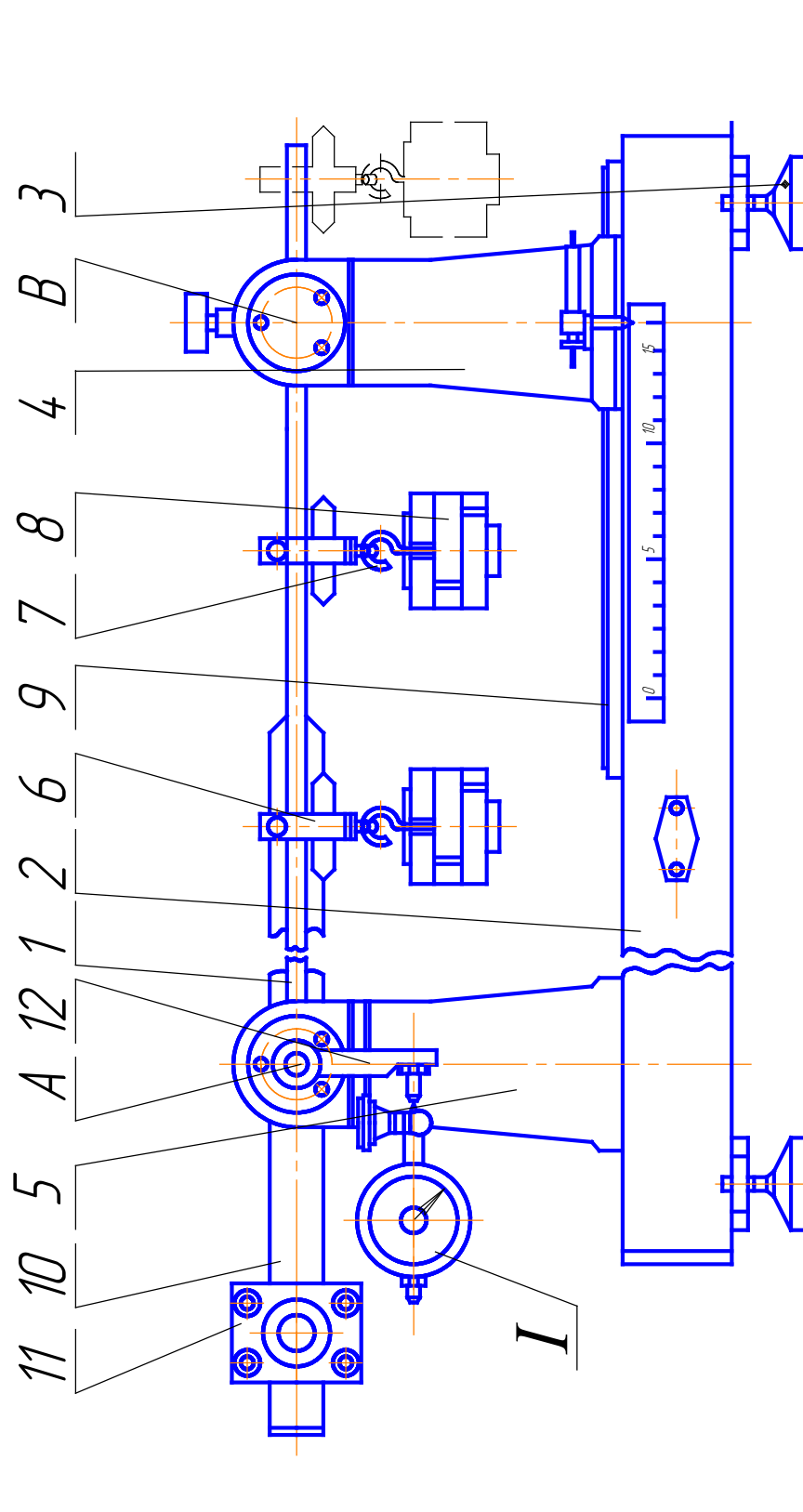


Рисунок 6.8 – Схема установки для визначення опорного моменту один раз статично невизначуваної балки

Порядок виконання роботи

1. Встановити згідно до варіанта (табл. 6.1) підвіси для вантажів P_1 та P_2 на відповідних відстанях a_1 і a_2 (див. рис. 6.1).

Таблиця 14.1

Розрахункові параметри	Номер варіанта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
P_1 , Н	10	15	20	25	10	15	20	25
P_2 , Н	25	20	15	10	20	25	15	10
a_1 , см	20	30	40	20	30	20	30	40
a_2 , см	40	60	60	50	60	40	60	60

2. Змістити протизвагу 11 до шарніру A і встановити стрілку індикатора I на нуль.

3. Навантажити балку відповідно до зазначеного варіанту.

4. Змістити протизвагу відносно вісі опори A вліво на відстань c (рис. 6.9), за якої стрілка індикатора I повернеться у вихідне положення, тобто на нуль. При необхідності на протизвагу можна покласти гирю вагою 5...10 Н.

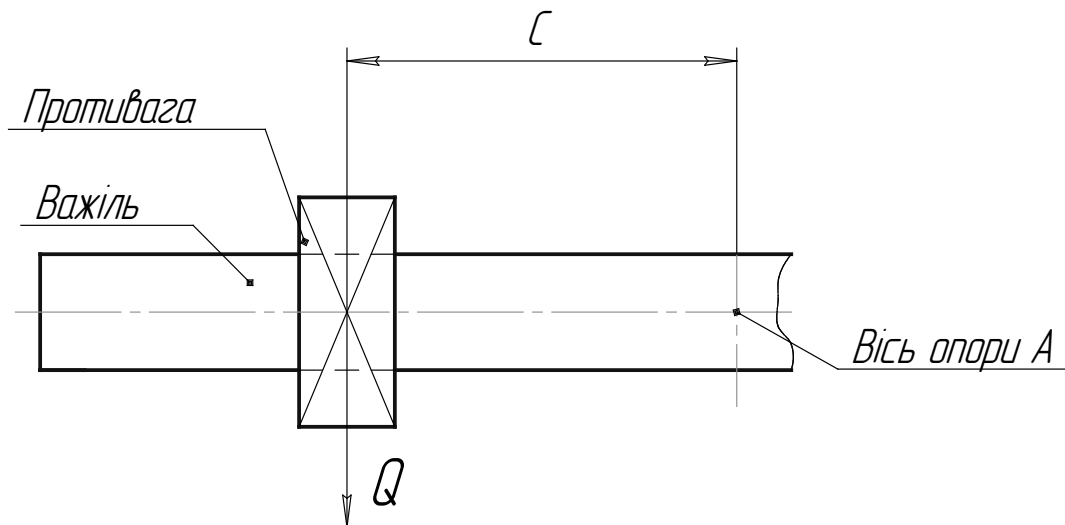


Рисунок 6.9 – Схема визначення опорного моменту

5. Визначити експериментальне значення опорного моменту M_E , який перешкоджає повороту перерізу балки на опорі A ,

$$M_E = Q \cdot c, \quad (6.3)$$

де Q – вага протизваги ($Q = 10 \dots 20$ Н);
 c – відстань від вісі опори A до протизваги Q .

6. Обчислити теоретичні значення опорного моменту M_T .

Приклад. Визначимо опорний момент M_T (рис. 6.10, а).

Вихідні дані: $P_1 = 10 \text{ Н}$; $P_2 = 20 \text{ Н}$; $a_1 = 0,2 \text{ м}$; $a_2 = 0,4 \text{ м}$.

Визначимо реакції опор (рис. 6.10, б) від дії зовнішнього навантаження із рівнянь статки:

$$\sum M_A = 0; \quad -P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + R_B \cdot l = 0;$$

$$R_B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l}; \quad R_B = \frac{10 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,4}{0,8} = 12,5 \text{ (і)}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad -R_A \cdot l + P_1 \cdot (l - a_1) + P_2 \cdot (l - a_2) = 0;$$

$$R_A = \frac{P_1 \cdot (l - a_1) + P_2 \cdot (l - a_2)}{l};$$

$$R_A = \frac{10 \cdot (0,8 - 0,2) + 20 \cdot (0,8 - 0,4)}{0,8} = 17,5 \text{ (і)}.$$

Визначимо реакції опор (рис. 6.10, в) від дії одиничного моменту із рівнянь рівноваги статки:

$$R_B^I = \frac{1}{0,8} = 1,25 \text{ (і)};$$

$$\sum M_B = 0; \quad 1 - R_A^I \cdot l = 0; \quad R_A^I = \frac{1}{l};$$

$$\sum M_A = 0; \quad 1 - R_B^I \cdot l = 0; \quad R_B^I = \frac{1}{l}; \quad R_A^I = \frac{1}{0,8} = 1,25 \text{ (і)}.$$

Визначимо моменти M_1 і M_2 :

$$M_1 = R_A \cdot a_1 = 17,5 \cdot 0,2 = 3,5 \text{ (і} \cdot \text{і)};$$

$$M_2 = R_B \cdot (l - a_1) = 12,5 \cdot (0,8 - 0,4) = 5,0 \text{ (і} \cdot \text{і)}.$$

Визначимо моменти M_1^I і M_2^I :

$$M_1^I = -R_B^I \cdot (l - a_1) = -1,25 \cdot (0,8 - 0,2) = 0,75;$$

$$M_2^I = -R_B^I \cdot (l - a_2) = -1,25 \cdot (0,8 - 0,4) = 0,5.$$

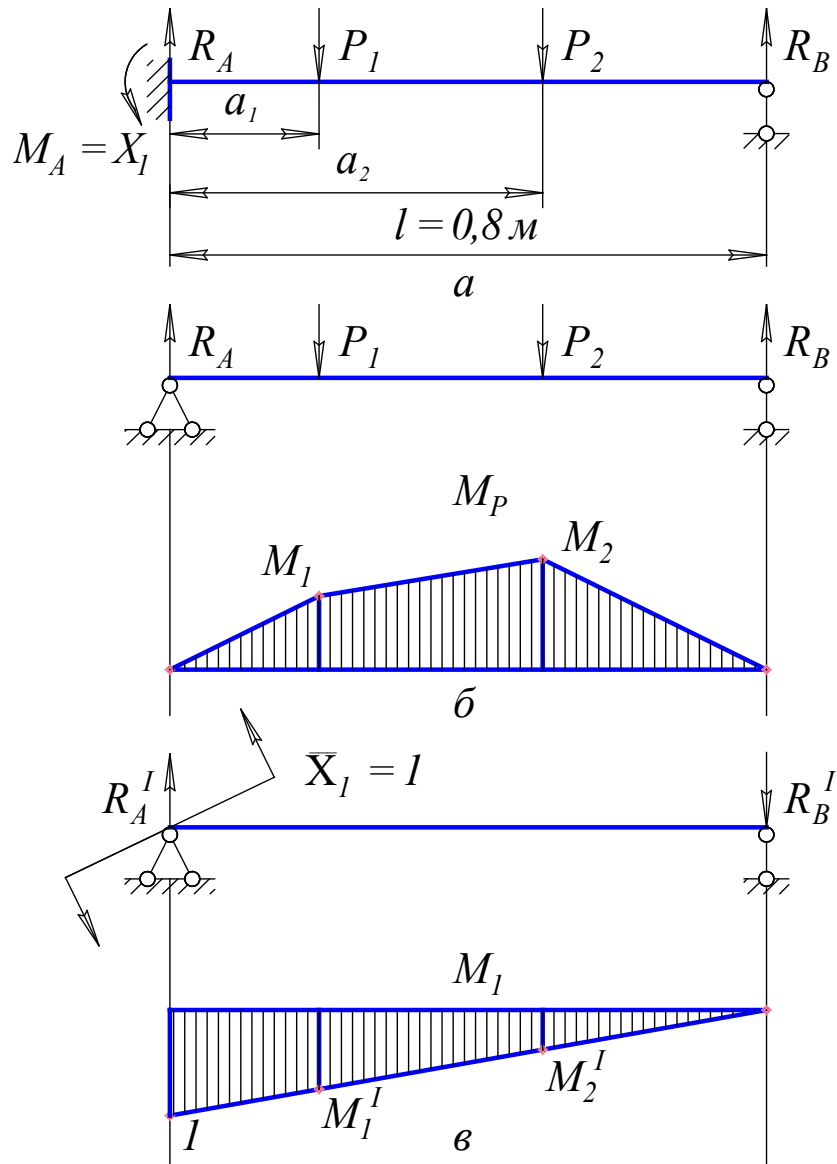


Рисунок 6.10 – Розрахункова схема (а), епюра від зовнішнього навантаження (б) і епюра від дії одиночного моменту (в)

Визначимо кут повороту перерізу A від моменту $\bar{X}_1 = 1$ за способом Верещагіна–Даркова

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{l}{6} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 + 0);$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI_Z};$$

$$\delta_{11} = \frac{0,8}{3EI_Z} \left(\frac{1}{I \cdot i} \right).$$

Визначимо кут повороту від заданого навантаження Δ_{1P} за способом Верещагіна–Даркова:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_1}{6} \cdot (0 + 2M_1 \cdot M_1^I + M_1 \cdot 1 + 0) - \\ & -\frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_2 - a_1}{6} \cdot (2M_1 \cdot M_1^I + 2M_2 \cdot M_2^I + M_1 \cdot M_2^I + M_2 \cdot M_1^I) - \\ & -\frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{l - a_2}{6} \cdot (2M_2 \cdot M_2^I + 0 + 0 + 0); \\ \Delta_{1P} &= -\frac{0,2}{6EI_Z} \cdot (2 \cdot 3,5 \cdot 0,75 + 3,5 \cdot 1) - \\ & -\frac{0,4 - 0,2}{6EI_Z} \cdot (2 \cdot 3,5 \cdot 0,75 + 2 \cdot 5 \cdot 0,5 + 3,5 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,75) - \\ & -\frac{0,8 - 0,4}{6EI_Z} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 0,5 = -\frac{6,9}{6EI_Z}. \end{aligned}$$

Визначимо значення опорного моменту M_T за формулою (6.2):

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}; \\ M_T = X_1 &= -\frac{-6,9 \cdot 3EI_Z}{6EI_Z \cdot 0,8} = 4,31 \text{ (} \dot{I} \cdot i \text{)}. \end{aligned}$$

7. Порівняти експериментальні і теоретичні значення опорного моменту. Визначити відносну похибку теоретичних обрахунків

$$\Delta = \frac{M_T - M_E}{M_E} 100\%.$$

8. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Які системи називаються статично невизначеними?
2. Що розуміється під зайвим невідомим?
3. Дати означення ступіні статичної невизначеності.
4. Навести основні етапи розрахунку статично невизначеної системи.
5. Дати означення основній системі.
6. Дати означення еквівалентній системі.
7. Пояснити спосіб Верещагіна для визначення переміщень точок.
8. Записати канонічні рівняння методу сил.

Лабораторна робота № 7
Визначення опорної реакції
один раз статично невизначуваної рами

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально величину горизонтальної опорної реакції один раз статично невизначуваної рами.

Теоретичні відомості

Розглянемо найпростіший приклад один раз статично невизначуваної рами. На рис. 7.1 зображена рама, яка опирається на шарнірно-нерухомі опори A і B . При дії на раму зовнішнього навантаження в опорі A виникає дві реакції – вертикальна R_A і горизонтальна H_A реакції. В опорі B також виникає дві реакції – вертикальна R_B і горизонтальна H_B . Отже, рама один раз статично невизначувана і має одне зайве зусилля.

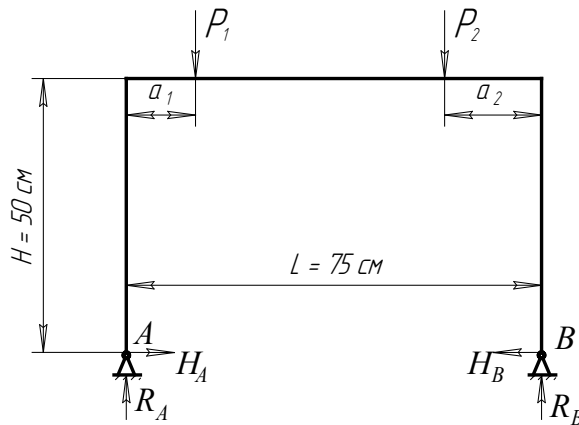


Рисунок 7.1 – Розрахункова схема

Приймаємо горизонтальну опорну реакцію, наприклад, H_A , яку потрібно визначити, зайвою. Усуваючи зайву реакцію, замінюємо вихідну систему статично визначуваною – основною системою OC (рис. 7.2, а).

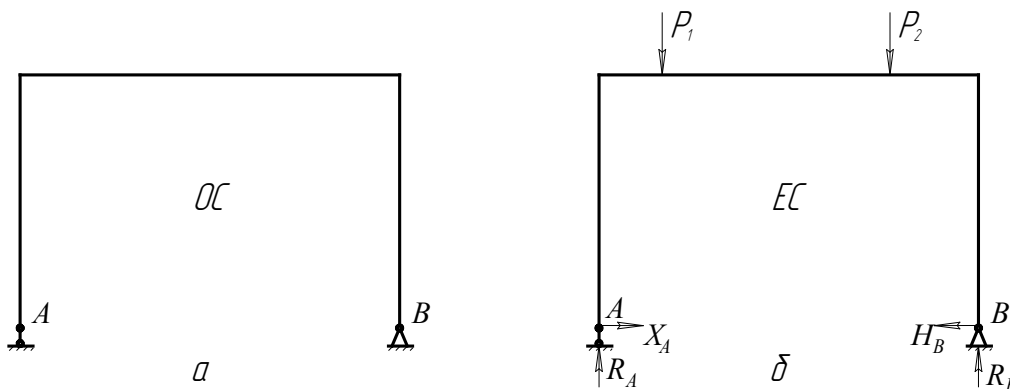


Рисунок 7.2 – Основна (а) і еквівалентна (б) системи

Навантажимо основну систему заданим навантаженням, а замість відкинутої опорної реакції H_A прикладемо невідому реакцію X_1 (рис. 7.2, б). Таким чином отримуємо еквівалентну систему (ЕС).

Повне переміщення точки A основної системи (від заданого навантаження й зайвого невідомого зусилля) у напрямі X_1 , тобто у напрямі усуненого зв'язка, має дорівнювати нулю, оскільки в точці A вихідна система не має прогину. Рівняння переміщення точки A основної системи в напрямі X_1 для один раз статично невизначуваної системи має вигляд

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (7.1)$$

де δ_{11} – переміщення в напрямі X_1 від сили $\bar{X}_1 = 1$;

Δ_{1P} – переміщення від заданого навантаження.

Звідси шукана реакція

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = H_A. \quad (7.2)$$

Для визначення Δ_{1P} і δ_{11} побудуємо епюри M_p (рис. 7.3) і M_1 (рис. 7.4). Значення Δ_{1P} і δ_{11} визначаємо за способом Верещагіна:

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} M_1 a_1 H + \frac{L - a_1 - a_2}{6} (2M_1 H + 2M_2 H + M_1 H + M_2 H) + \frac{1}{2} M_2 a_2 H \right);$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} H H \frac{2}{3} H + H L H + \frac{1}{2} H H \frac{2}{3} H \right).$$

Підставимо значення Δ_{1P} і δ_{11} в (7.2) остаточно знайдемо значення реакції X_1 .

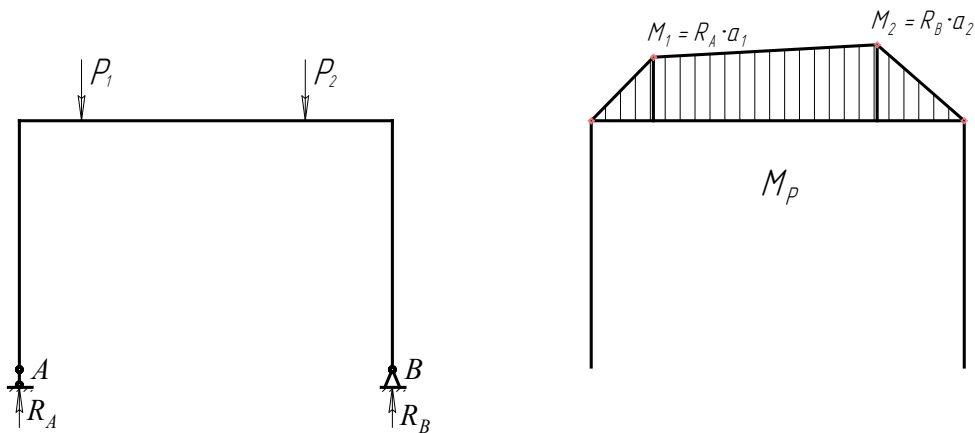


Рисунок 7.3 – Розрахункова схема і епюра від зовнішнього навантаження

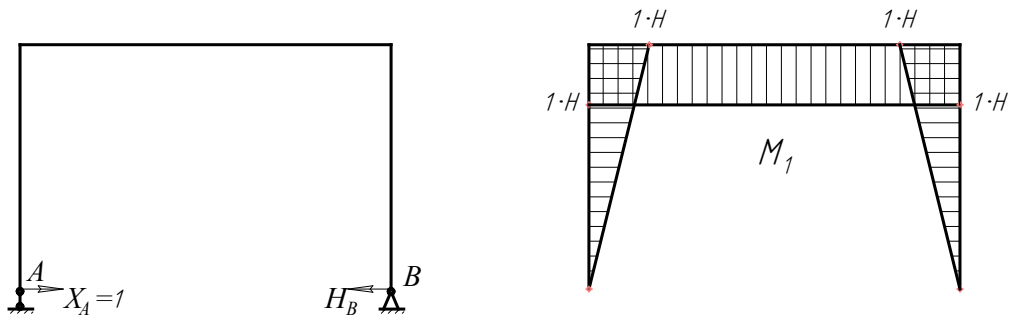


Рисунок 7.4 – Розрахункова схема і епюра від дії одиночного моменту

Опис установки

Загальний вигляд установки для визначення горизонтальної опорної реакції рами показано на рисунку 7.5.

Установка складається з досліджуваної рами 1, яка опирається на шарнірно-рухому опору 2 і шарнірно-нерухому опору 8, стола 5 з двома колонами 6, двох гирьових підвісів 7, набору гир 9, індикатора годинникового типу 3 і пристрою 4, за допомогою якого визначається величини горизонтальної опорної реакції опори 2.

Переріз рами 1 прямокутний з розміром $b=50$ мм і $h=7$ мм. Матеріал рами – сталь Ст. 3. Гирьові підвіси 7 можуть переміщуватися вздовж горизонтальної частини рами, чим можна задати їх положення a_1 і a_2 .

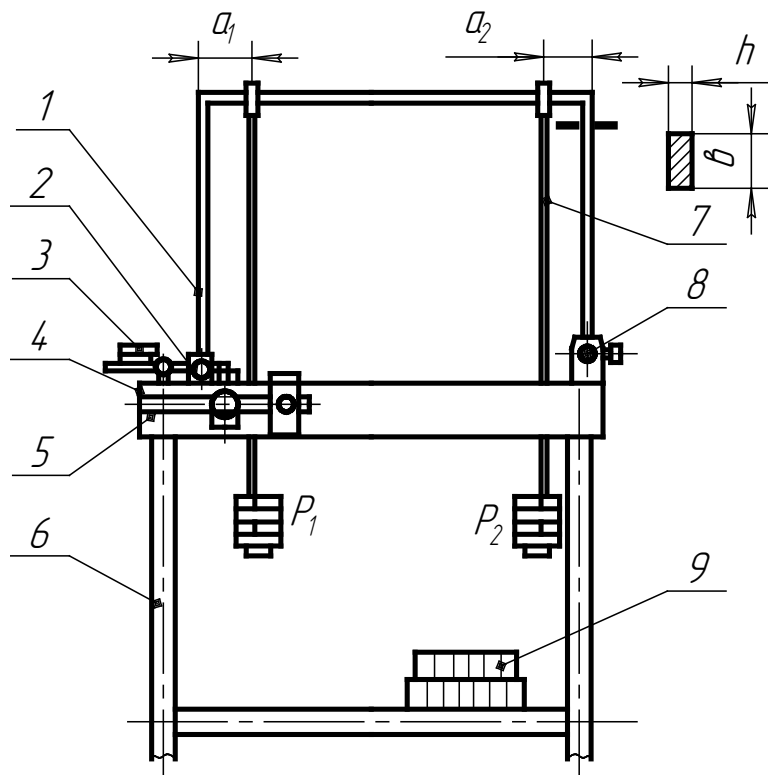


Рисунок 7.5 – Установка для визначення горизонтальної опорної реакції рами

Пристрій 4 (див. рис. 7.5), принципова схема якого зображена на рис. 7.6., складається з вісі 3, яка жорстко з'єднана зі вертикальним важелем 2 і горизонтальним важелем 5, по якому можна переміщувати вантаж 4 вагою $Q = 10$ Н. На лицьовій стороні горизонтального важеля нанесена шкала. Вертикальний важіль 2 з'єднаний зі рухомою опорою 1. Довжина вертикального важеля $l_1 = 60$ мм.

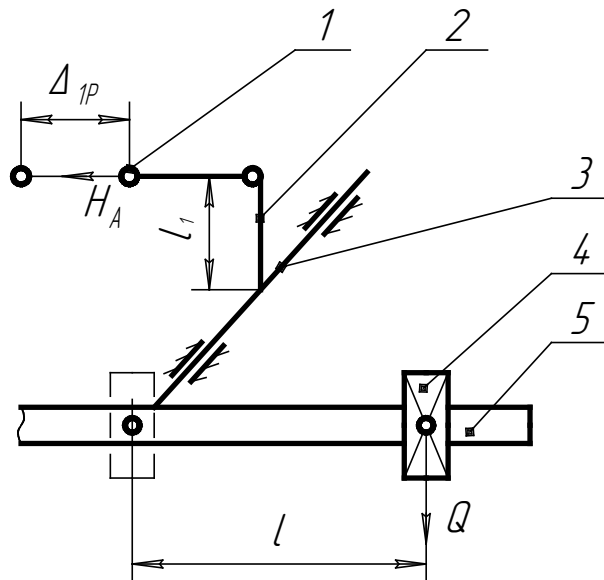


Рисунок 7.6 – Схема пристрою, за допомогою якого визначається величина горизонтальної опорної реакції опори

При навантаженні рами вантажами P_1 і P_2 рухома опора 1 (див. рис. 7.6) отримує горизонтальне переміщення Δ_{1p} . Це зміщення фіксується індикатором 3 (див. рис. 7.5). Переміщуючи вантаж 4 (див. рис. 7.6) вагою $Q = 10$ Н по горизонтальному важелю 5 вправо на відстань l_1 , можна повернути опору 1 в початкове положення, що імітує шарнірно-нерухому опору. Стрілка індикатора повинна повернутися у вихідне положення, тобто на нуль.

Величину горизонтальної опорної реакції H_A можна визначити з умови рівноваги сил відносно вісі 3 (див. рис. 7.6):

$$H_A \cdot l_1 = Q \cdot l, \quad (7.3)$$

звідки

$$H_A = \frac{l_1}{l} Q. \quad (7.4)$$

В момент навантаження рами вантажами P_1 і P_2 противага має бути розташована на вісі коливання (проти нульового поділу шкали, див. рис. 7.6).

Порядок виконання роботи

1. Встановити згідно варіанта (табл. 7.1) гирьові підвіси для вантажів P_1 та P_2 на відповідних відстанях a_1 і a_2 .

Таблиця 7.1

Номер варіанта	a_1 , см	a_2 , см	P_1 , Н	P_2 , Н
1	15	20	10	20
2	10	15	15	25
3	20	10	20	1,5
4	15	25	25	1,0
5	10	20	10	1,5
6	20	25	15	2,0
7	10	15	20	25
8	15	10	25	10

2. Встановити противагу на нульову поділку шкали горизонтального важеля і вивести стрілку індикатора на нуль.

3. Встановити задане навантаження P_1 і P_2 на гирьові підвіси.

4. Зафіксувати індикатором значення переміщення Δ_{1p} рухомої опори рами.

5. Перемістити вантаж Q вправо на відстань l_1 , при якій стрілка індикатора повернеться на нуль.

6. Визначити експериментальне значення горизонтальної опорної реакції H_A^E за формулою (7.4).

7. Обчислити теоретичне значення горизонтальної опорної реакції H_A^T за формулою (7.2).

8. Порівняти експериментальні і теоретичні значення горизонтальної опорної реакції. Визначити відносну похибку проведення дослідження

$$\Delta = \frac{H_A^T - H_A^E}{H_A^T} 100\%.$$

9. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Навести порядок розрахунку методом сил.

2. Що таке „основна” і „еквівалентна” системи?

3. Призначення основної та еквівалентної систем.

4. Сутність канонічного рівняння.

5. Сутність складових (членів) канонічного рівняння.

6. Що являє собою дослідна установка для виконання роботи?

Лабораторна робота № 8

Визначення критичної сили стиснутого стержня

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально величину критичної сили стиснутого стержня.

Теоретичні відомості

Для багатьох деталей машин, елементів конструкцій та споруд розрахунків на міцність і жорсткість буває недостатньо для того, щоб отримати повну уяву про їх працездатність. Важливо також з'ясувати, чи є ця конструкція або її частина у стані стійкої рівноваги.

Під стійкістю розуміють властивість системи зберігати вихідний стан пружної рівноваги при дії зовнішніх сил.

В інженерній практиці зустрічаються випадки втрати стійкості при осьовому стиску прямолінійного стержня, довжина якого значно більша за розміри поперечного перерізу. Найменша сила, за якої стержень втрачає рівновагу (згинається), називається критичною силою і позначається $P_{\text{êđ}}$.

Втрату стійкості стиснутого прямолінійного стержня називають повздовжнім згином в силу того, що під дією повздовжніх сил стержень значно викривиться. Поява повздовжнього згину становить небезпеку, оскільки при незначному збільшенні стискальної сили суттєво збільшуються прогини. Відповідно, пружна рівновага прямолінійного гнучкого стержня стійка, якщо стискальна сила P менша за критичну $P_{\text{êđ}}$. Якщо $P = P_{\text{êđ}}$, то рівновага нестійка: одночасно з прямолінійною формою стержня стає можливою і криволінійна форма за незначної зміни сили.

Критичну силу $P_{\text{êđ}}$ для прямолінійного стержня з шарнірним защемленням кінців (рис. 8.1) визначають за формулою Ейлера:

$$P_{\text{êđ}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{l_{\text{çâ}}^2}, \quad (8.1)$$

де

$$l_{\text{çâ}} = \mu \cdot l, \quad (8.2)$$

E – модуль пружності;

I_{min} – найменший момент інерції перерізу;

$l_{\text{çâ}}$ – зведена довжина стержня,

μ – коефіцієнт зведення довжини;

l – фактична довжина стержня.

Критична сила залежить не тільки від розмірів $l_{\text{за}}$, I_{min} і матеріалу E стержня, але і від умов його закріплення. Врахування способу закріплення стержня здійснюється коефіцієнтом зведення довжини μ .

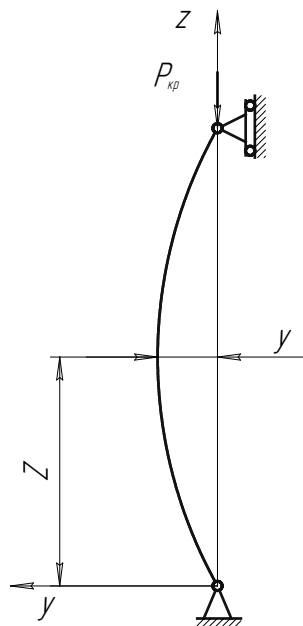


Рисунок 8.1 – Схема прямолінійного стержня з шарнірним зацмленням кінців

На рис. 8.2 показано декілька способів закріплення стержня і вказані відповідні їм значення коефіцієнта μ .

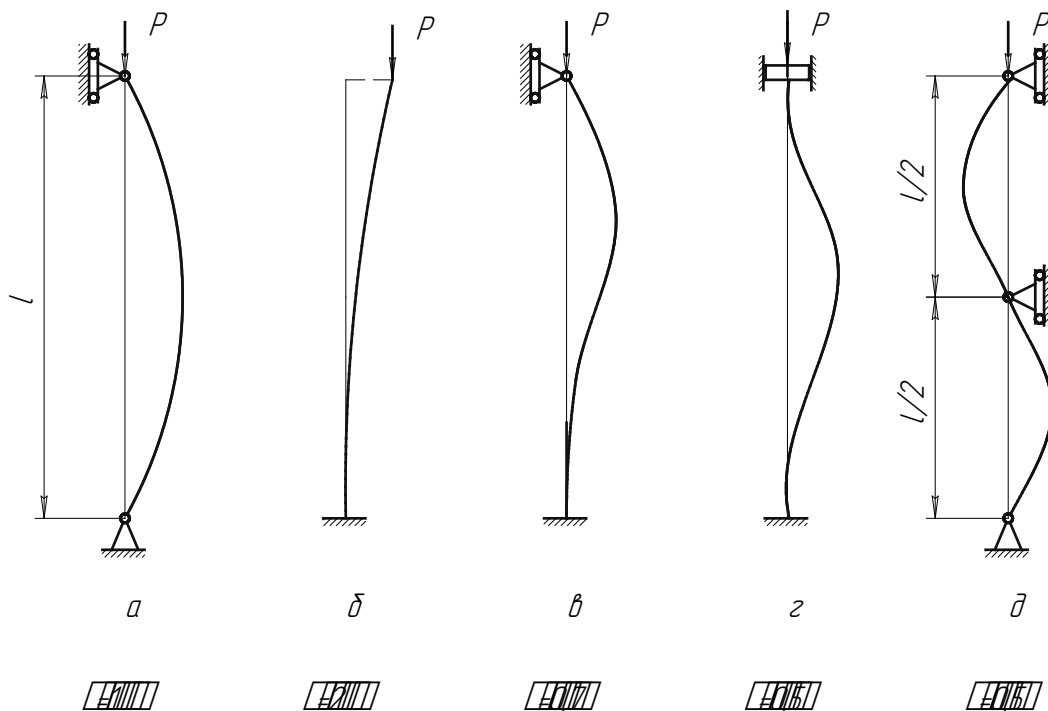


Рисунок 8.2 – Способи закріплення стержня

Формула (8.1) застосовується, якщо гнучкість стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ не

менша за її граничне значення $\lambda_{np} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{r\ddot{o}}}}$, яке залежить від механічних

властивостей матеріалу (тут $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}$ – мінімальний радіус інерції

перерізу стержня; $\sigma_{r\ddot{o}}$ – границя пропорціональності матеріалу). При гнучкості $\lambda < \lambda_{np}$ ця формула не застосовується, оскільки в волокнах стержня при його втраті стійкості напруження перевищуватимуть границю пропорційності – такі стержні можуть втрачати стійкість за наявності пластичних деформацій або одразу руйнуватись без викривлення.

Опис установки

Загальний вигляд експериментальної установки показаний на рис. 8.3. Експериментальна установка складається з корпусу 1 (рис. 8.4), який за допомогою двох гвинтів 7 кріпиться до нижньої плити преса ПМТ-125, при цьому необхідно забезпечити збіг вісі досліджуваного стержня 3 і вісі преса. Верхня частина стержня фіксується за допомогою матриці, прикріпленої до верхньої плити преса 6. На стояку 5 за допомогою стандартного приладу кріпиться індикатор, що дозволяє визначити прогин стержня при стиску.



Рисунок 8.3 – Експериментальна установка

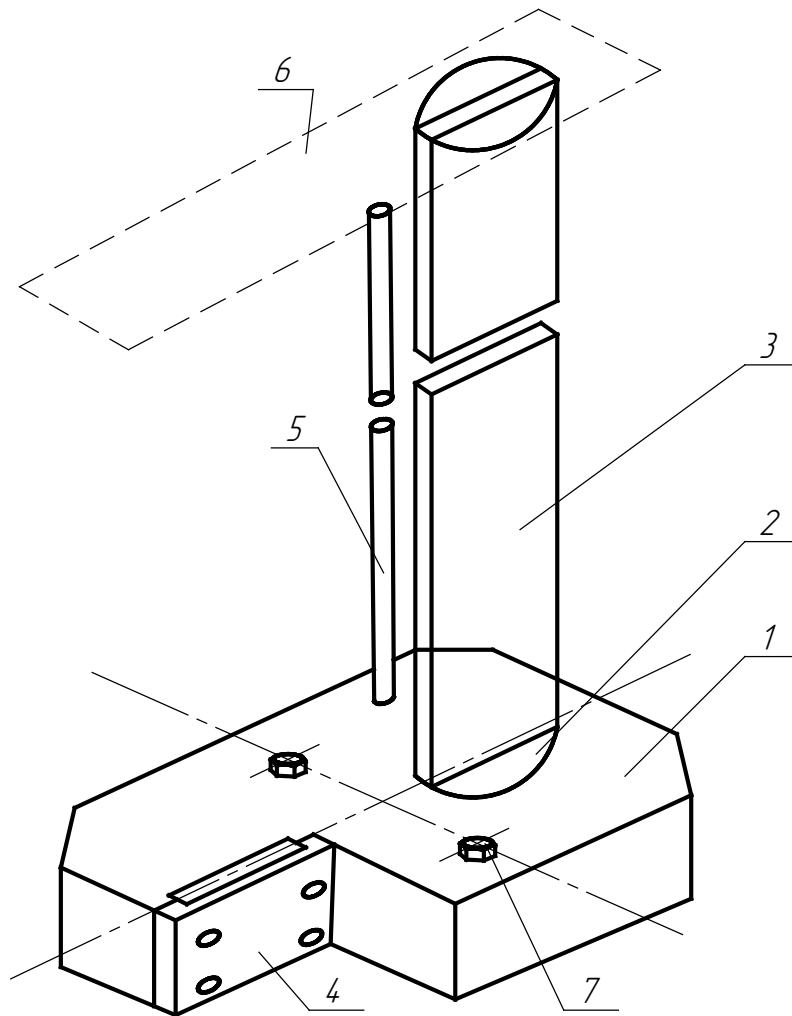


Рисунок 8.4 – Схема експериментальної установки

Порядок виконання роботи

1. Прикріпити корпус 1 (див. рис. 8.4) експериментальної установки за допомогою гвинтів 7 до нижньої плити преса, забезпечити збіг вісі досліджуваного стержня 3 і вісі преса.

2. Закріпити індикатор (див. рис. 8.3) на стійці експериментальної установки на висоті $h \approx 0,4$ м. Ніжка індикатор повинна торкатися стержня.

3. Навантажити стержень. Навантаження виконують повільно і плавно. Безперервно слідкують за зростанням навантаження і показниками індикатора. Навантаження при різкому збільшенні прогину відповідає критичному значенню стисної сили. При досягненні критичної сили навантаження припиняють.

4. Занести результат спостереження, тобто експериментальне значення $P_{\epsilon\delta}^A$, в табл. 8.1.

5. Провести розрахунок значень $F, I_{min}, i_{min}, l_{np}, \lambda, P_{\epsilon\delta}^T$.

6. Занести результати значень $E, l, a \times b, F, I_{min}, i_{min}, \mu, l_{\zeta\hat{a}}, \lambda, P_{\hat{e}\hat{d}}^T$ в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Показники	Результати спостереження і розрахунку
Матеріал	Сталь Ст. 3
Модуль пружності E , Мпа	
Довжина стержня l , см	
Розміри поперечного перерізу стержня $a \times b$, см	
Площа поперечного перерізу стержня F , см ²	
Мінімальний момент інерції перерізу стержня I_{min} , см ⁴	
Радіус інерції перерізу i_{min} , см	
Коефіцієнт зведення довжини μ	
Зведена довжина стержня $l_{\zeta\hat{a}}$, см	
Гнучкість λ	
Значення критичної сили, Н: експериментальне $P_{\hat{e}\hat{d}}^T$ теоретичне $P_{\hat{e}\hat{d}}^E$	

7. Порівняти результати дослідження. Визначити відносну похибку:

$$\Delta = \frac{|P_{\hat{e}\hat{d}}^O - P_{\hat{e}\hat{d}}^A|}{P_{\hat{e}\hat{d}}^O} \cdot 100 \%$$

8. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Що розуміється під стійкістю?
2. У чому полягає явище втрати стійкості?
3. Навести приклади втрати стійкості з інженерної практики.
4. Що називається критичною силою?
5. Як розрахувати критичну силу?
6. Що називається гнучкістю стержня?
7. Що таке зведена довжина стержня, коефіцієнт зведення довжини?
8. За яких умов можливо використання формули Ейлера?

Лабораторна робота № 9

Визначення прогину балки при ударному навантаженні

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально величину прогину балки при ударному навантаженні.

Теоретичні відомості

Розглянемо шарнірно оперту балку з прогоном l , яка зазнає посередині прогону удару від вантажу вагою P , що падає з висоти h . Прогин $\delta_{\dot{A}}$ при ударному навантаженні, з урахуванням маси балки, визначається за формулою

$$\delta_{\dot{A}} = \delta_{\dot{N}} + \sqrt{\delta_C^2 + \frac{2h\delta_{\dot{N}}}{1 + k_{\dot{c}\dot{a}} \frac{Q}{P}}}, \quad (9.1)$$

де δ_C – прогин балки при статичному навантаженні силою, що дорівнює вазі падаючого вантажу;

Q – вага балки;

$k_{\dot{c}\dot{a}}$ – коефіцієнт зведення маси балки до точки удару.

Формулу (9.1) можна представити у вигляді

$$\delta_{\dot{A}} = k_{\dot{A}} \delta_{\dot{N}}, \quad (9.2)$$

де $k_{\dot{A}}$ – коефіцієнт динамічності:

$$k_{\dot{A}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\dot{N}}(1 + k_{\dot{c}\dot{a}} \frac{Q}{P})}}. \quad (9.3)$$

При падінні вантажу на балку посередині прогону $k_{\dot{c}\dot{a}} = \frac{17}{35}$.

Коефіцієнт динамічності без врахуванням зведеної маси балки має вид

$$k_{\dot{A}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\dot{N}}}}.$$

Опис установки

Загальний вигляд експериментальної установки показано на рис. 9.1. Установка (рис. 9.2) складається з наступних основних частин: балки 5, яка

оперта на стійки 3 і 13, основи 2 з регульованими гвинтами-ніжками 1, пульту управління 4, стійки 15 з індикатором годинникового типу 14 та штанги 7 з електромагнітом 10 і мікрометричним гвинтом 6.

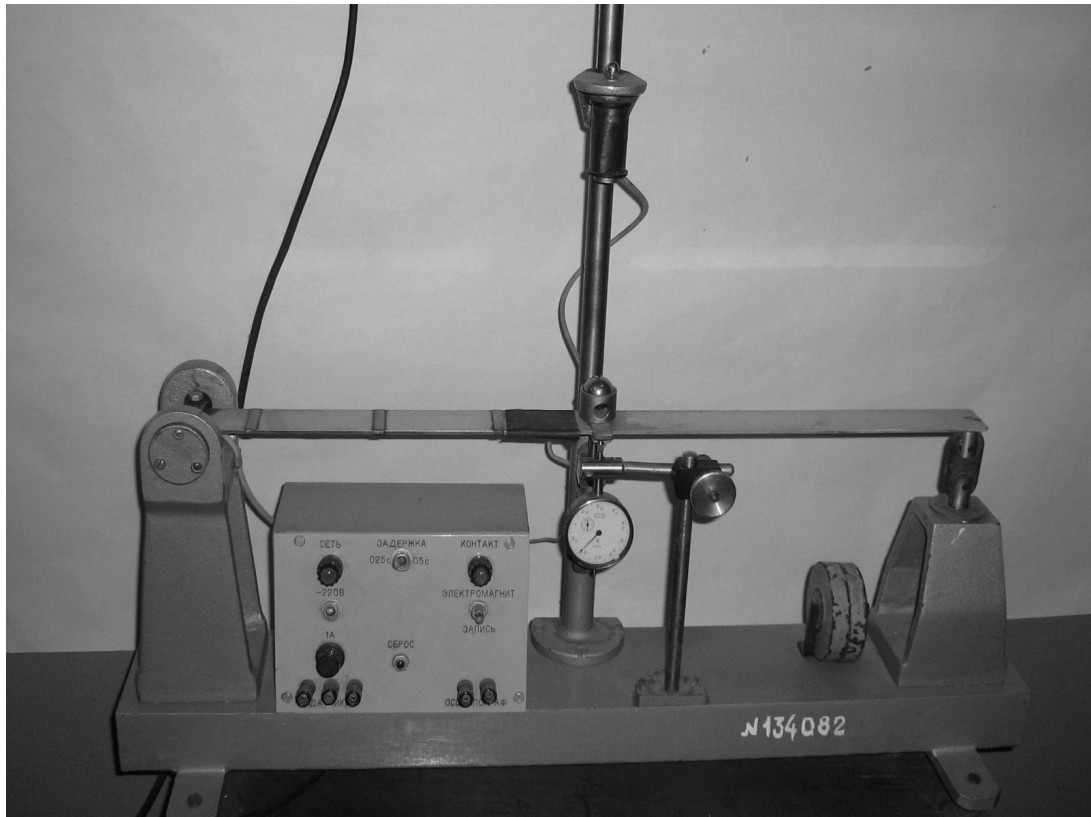


Рисунок 9.1 – Установка для визначення величини прогину балки при ударному навантаженні

Електромагніт 10 призначений для утримання падаючого вантажу 11 на потрібній висоті h . В якості вантажу використовують кульку вагою $P = 0,67$ Н. Електромагніт 10 встановлений на кронштейні 9, який може переміщуватися вздовж штанги 7 з відліком величини переміщення за шкалою. Гвинт 8 призначений для надійної фіксації кронштейна з електромагнітом до штанги 7.

При знеструмленні електромагніта кулька падає на балку. Для попередження можливості відскоку кульки, балка оснащена спеціальним уловлювачем 12, внутрішня поверхня якого виконана конусом, щоб забезпечити заклинювання кульки, що впала.

Прогин балки при статичному навантаженні визначають за допомогою індикатора годинникового типу 15. Прогин балки при динамічному навантаженні визначають за допомогою мікрометричного гвинта 6.

Балка прямокутного перерізу (висота перерізу 3 мм, ширина перерізу 40 мм) виготовлена зі сталі марки 65Г. Вага балки $Q = 70$ Н.

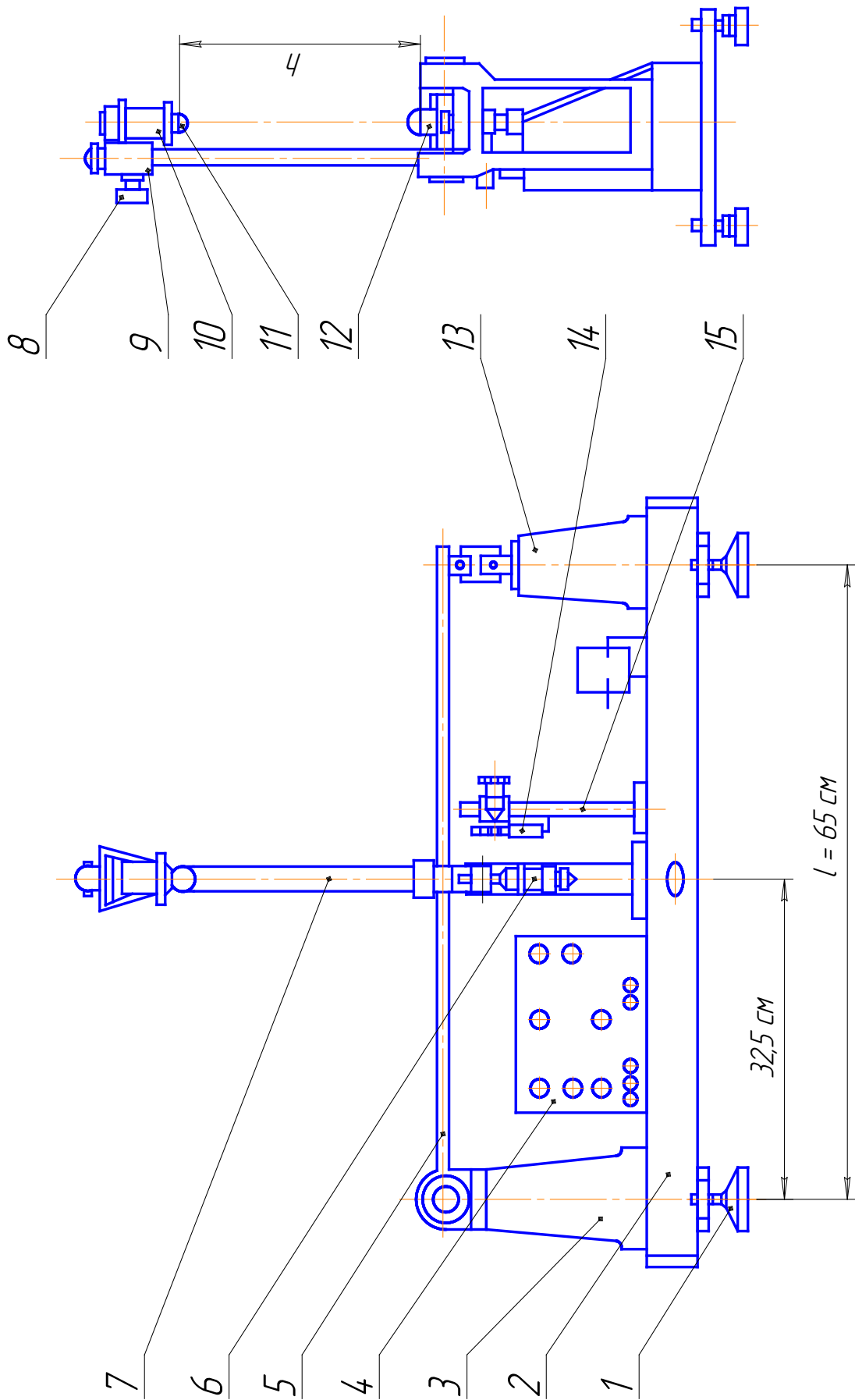


Рисунок 9.2 – Схема установки для визначення величини прогину балки при ударному навантаженні

Порядок виконання роботи

1. Закріпити кронштейн 9 (див. рис. 9.2) з електромагнітом 10 до штанги 7 для забезпечення падіння вантажу з висоти h згідно до варіанта (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

Показник	Номер варіанта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
h , см	12	14	16	18	20	22	24	26

2. Визначити експериментальне значення прогину балки при статичному навантаженні δ_C^E . Для цього встановити на кронштейні 15 з індикатор 14 так, щоб рухома його ніжка торкалась балки знизу. Встановити стрілку індикатора на нуль. Потім обережно покласти кульку 11 в уловлювач 12. Балка під дією вантажу прогнеться. Занести показання індикатору у табл. 9.2.

Таблиця 9.2

Висота h , см	Значення					
	експериментальні			теоретичні		
	δ_C^E , мм	δ_A^A , мм	k_A^A	δ_C^T , см	δ_A^T , см	k_A^T

3. Увімкнути пульт управління в мережу змінного струму напругою 220 В, частотою 50 Гц та включити тумблер „220 В”.

4. Поставити тумблер “Електромагніт – Запис” в положенні “Електромагніт”.

5. Піднести кульку 11 до електромагніту 10 та переконатися, що вона надійно держиться в гнізді сердечника електромагніта.

6. Поставити тумблер „Електромагніт – Запис” в положення „Запис”. Кулька 11 під дією ваги повинна падати в уловлювач 12.

7. Визначити експериментально значення прогину балки при динамічному навантаженні δ_A^A . Прогин при динамічному навантаженні визначається за допомогою мікрометричного гвинта 6 з ціною поділки 0,01 мм по моменту контакту торця гвинта з прогнутою балкою 5 в мить удару кульки. Мікрометричний гвинт потрібно відрегулювати так, щоб при динамічному навантаженні балка не гальмувалась ним. А лише торкнулась, в цьому випадку загориться лампочка „Контакт”, яка дає сигнал моменту контакту балки з мікрометричним гвинтом. Різниця першого і наступного показників (в момент удару) мікрометричного

гвинта дає значення прогину балки при динамічному навантаженні δ_A^A .
Занести значення δ_A^A у табл. 9.2.

8. Обчислити і занести в табл. 9.2 експериментальне значення коефіцієнта динамічності $k_A^A = \frac{\delta_A^A}{\delta_N^A}$.

9. Обчислити і занести в табл. 9.2 теоретичне значення прогину балки при статичному навантаженні δ_C^T :

$$\delta_C^T = \frac{El^3}{48EI_z},$$

де l – довжина балки;

E – модуль пружності матеріалу балки;

I_z – момент інерції площі поперечного перерізу балки.

10. Обчислити за формулою (9.3) і занести в табл. 9.2 теоретичне значення коефіцієнта динамічності k_A^T .

11. Обчислити за формулою (9.2) і занести в табл. 9.2 теоретичне значення прогину балки при динамічному навантаженні δ_A^T .

12. Порівняти експериментальні і теоретичні значення прогинів балки при статичному та ударному навантаженнях. Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta_C = \frac{|\delta_C^T - \delta_C^E|}{\delta_C^T} 100\%;$$

$$\Delta_A = \frac{|\delta_A^T - \delta_A^E|}{\delta_A^T} 100\%.$$

13. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. В чому полягає явище ударного навантаження?
2. Як визначити коефіцієнт динамічності при ударі?
3. Як визначити напруження при ударному навантаженні?
4. Як визначити переміщення при ударному навантаженні?
5. Розрахунок на удар при осьовій дії навантаження.
6. Як визначити напруження при скручувальному ударі?
7. Удар при згині. Як врахувати власну ваги балки?

Лабораторна робота № 10

Дослідження критичної швидкості обертання вала

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально величину значення критичної частоти обертання вала.

Теоретичні відомості

Для того, щоб те чи інше тіло здатне було здійснювати коливання, воно повинно мати певну масу і пружність. Якщо пружне тіло (навантажена балка, скручений вал або деформована ресора) або пружна система була виведена з положення рівноваги якою-небудь сторонньою причиною (ударом або раптово прикладеною силою), то сила пружності цього тіла в новому положенні вже не зрівноважиться навантаженням і виникнуть коливання.

Колівання пружної системи характеризуються амплітудою A і частотою ω .

Амплітуда A – це максимальне відхилення механічної системи від положення рівноваги.

Частота коливань ω – це число повних коливань, які здійснюються за одиницю часу.

Знаючи частоту коливань, можна знайти період коливань T (час одного повного коливання) за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.1)$$

Величина, що обернена періоду коливань, визначає кількість коливань за одиницю часу (секунду) і має назву секундної частоти

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (10.2)$$

Прикладом пружної системи з одним ступенем вільності може бути горизонтально розміщений вал з одним диском (рис. 10.1). Відомо, що при певній частоті обертання вала, при якій робота вала стає динамічно нестійкою, настає так званий резонанс. При цьому можуть виникати великі поперечні коливання вала. Частота обертання вала, при якій настає резонанс, називається критичною.

Розглянемо обертання горизонтально розміщеного вала з одним диском вагою Q посередині (рис. 10.1). При визначенні критичної швидкості обертання вала його масою порівняно з масою диска знехтуємо.

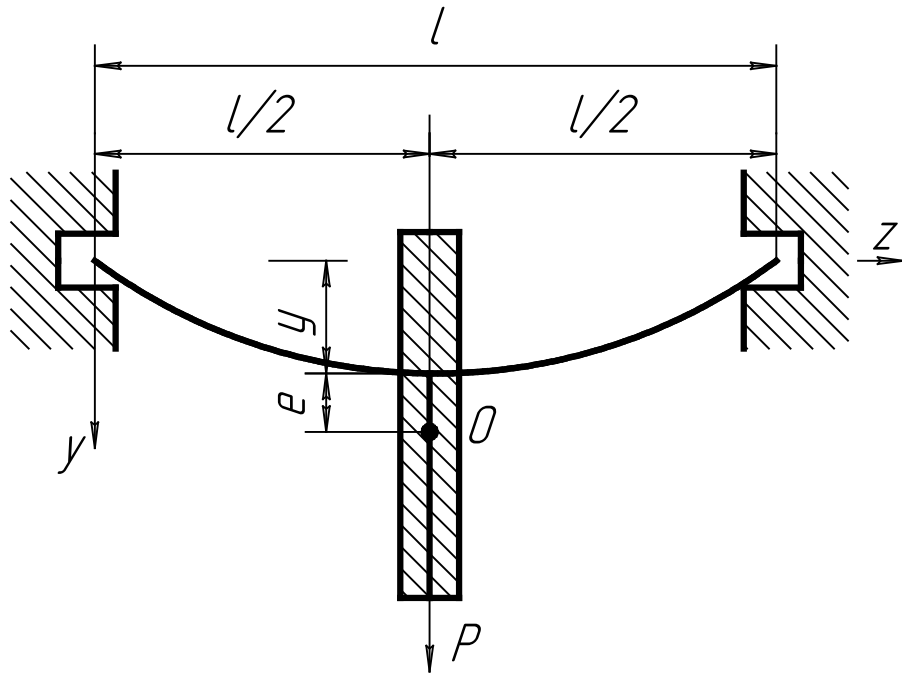


Рисунок 10.1 – Схема пружної системи з одним ступенем вільності

Припустимо, що центр ваги O диска розміщений на відстані e від його вісі. При обертанні такої системи на вал буде діяти відцентрова сила, що спричиняє його згинання:

$$P = \frac{Q}{g} \omega^2 (e + y), \quad (10.3)$$

де Q – вага диска;

g – прискорення вільного падіння;

ω – кутова швидкість обертання вала;

e – ексцентриситет;

y – прогин вала в перерізі, де насаджений диск.

Реакція на опорах вала від дії відцентрової сили:

$$F = cy, \quad (10.4)$$

де c – згинальна жорсткість вала.

З умови рівноваги системи очевидно, що $P = F$. Підставляючи замість P вираз F дістанемо рівняння для визначення прогину y :

$$\frac{Q}{g} \omega^2 (e + y) = cy, \quad (10.5)$$

звідки

$$y = \frac{e}{\frac{cg}{Q\omega^2} - 1}. \quad (10.6)$$

Ураховуючи, що

$$\frac{cg}{Q} = \omega_a^2$$

рівняння (10.6) запишемо так:

$$y = \frac{e}{\frac{\omega_a^2}{\omega^2} - 1}, \quad (10.7)$$

де ω_a – частота власних поперечних коливань системи.

З рівняння (10.7) видно, що прогин вала y швидко зростає при наближенні кутової швидкості обертання вала ω до частоти ω_a власних поперечних коливань вала з диском. Критична кутова швидкість обертання вала

$$\omega_{\text{крит}} = \omega_a = \sqrt{\frac{cg}{Q}}. \quad (10.8)$$

Для вала постійного перерізу при розміщенні диска посередині між опорами (див. рис. 10.2) згинальна жорсткість вала c визначається за формулою

$$c = \frac{48EI_z}{l^3}, \quad (10.9)$$

де E – модуль пружності матеріалу вала;

$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$ – момент інерції вала;

l – довжина вала між опорами (див. рис. 10.1).

Підставляючи (10.9) в (10.8) отримуємо

$$\omega_{\text{крит}} = \omega_a = \sqrt{\frac{48EI_z g}{Ql^3}}, \quad (10.10)$$

звідки

$$\omega_{\dot{\epsilon}\delta} = \omega_{\dot{a}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_C}}, \quad (10.11)$$

де $\delta_C = \frac{Ql^3}{48EI_z}$ – статичний прогин вала в перерізі, де закріплений диск, під дією ваги диска.

Відомо, що кутова швидкість обертання вала ω з частотою обертання вала n зв'язана такою залежністю:

$$\omega = \frac{\pi n}{30},$$

звідки

$$n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Критична частота обертання вала

$$n_{\dot{\epsilon}\delta} = \frac{30\omega_{\dot{\epsilon}\delta}}{\pi}. \quad (10.12)$$

Підставляючи (10.11) в (10.12) отримуємо

$$n_{\dot{\epsilon}\delta} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_C}} \quad (10.13)$$

або

$$n_{\dot{\epsilon}\delta} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{48EI_z g}{Ql^3}}. \quad (10.14)$$

Опис установки

Загальний вигляд установки показано на рис. 10.2. Установка складається з вала 1 (рис. 10.3) діаметром d , який встановлено на двох опорах 4. Відстань між опорами, тобто довжина вала, дорівнює l . На вал по середині насаджено диск 2 вагою Q . Вал з'єднується з валом електродвигуна 7 за допомогою муфти 3. Реостат 5 слугує для

регулювання частоти обертання вала. Тахометр 6, який встановлений на вільному кінці вала 1, служить для контролю частоти обертання вала.

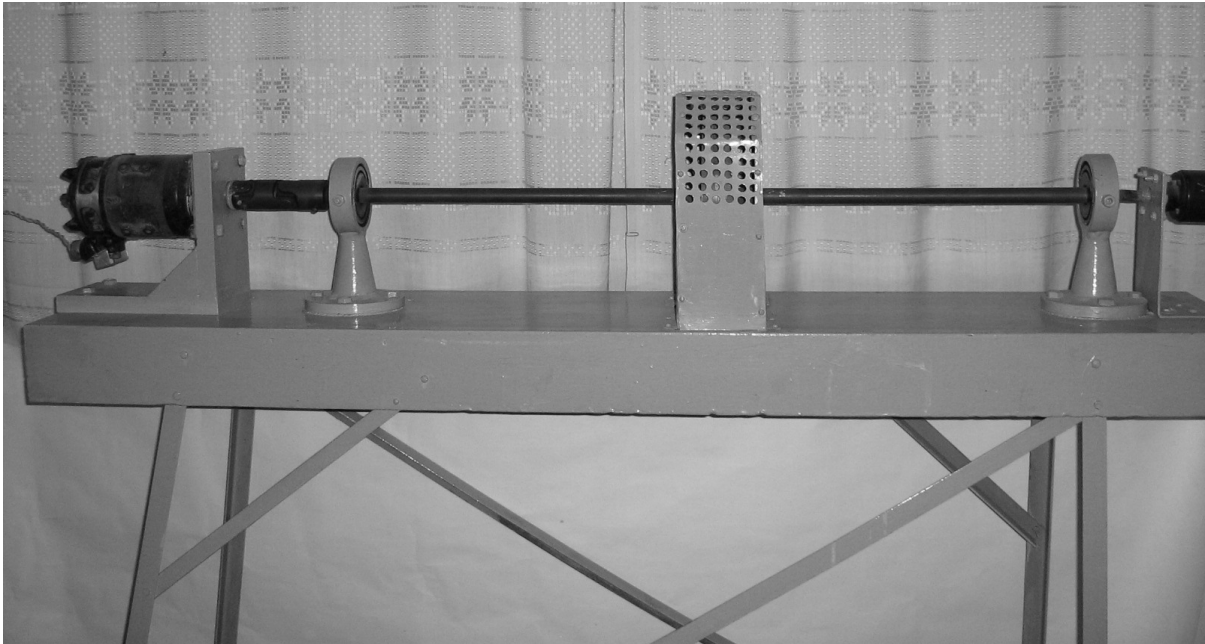


Рисунок 10.2 – Установка для визначення величини значення критичної частоти обертання вала

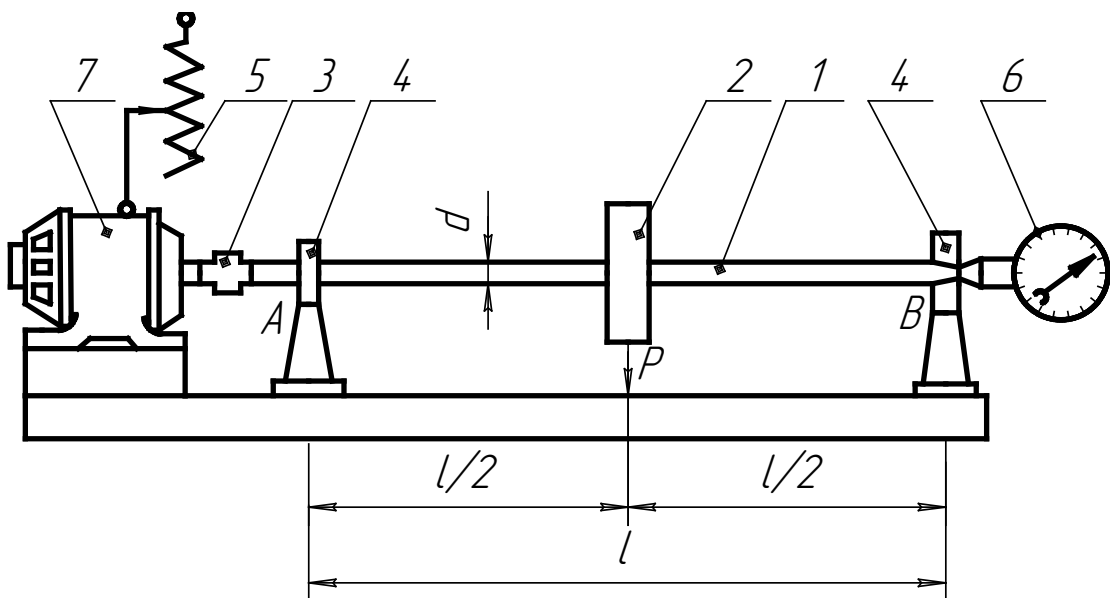


Рисунок 10.3 – Схема установки для визначення величини значення критичної частоти обертання вала

Реостатом 5 (див. рис. 10.3) поступово збільшують частоту обертання вала. При цьому вал, який працює без видимих поперечних коливань, починає коливатися. Коли частота обертання вала стає рівною частоті власних коливань вала з вантажем ($\omega = \omega_a$), амплітуда коливань досягає максимальної величини. З подальшим збільшенням числа обертів n (вище критичного) амплітуда коливань зменшується, і вал знову працює спокійно.

Порядок виконання роботи

1. Виміряти діаметр d і довжину вала l .
2. Обчислити за формулою (10.14) теоретичне значення критичної частоти обертання вала $n_{\dot{\epsilon}\delta}^T$.
3. Увімкнути установку і за допомогою ручки реостата довести частоту обертання вала до критичного $n_{\dot{\epsilon}\delta}^E$.
4. Зафіксувати тахометром при появі резонансу вала значення критичної частоти $n_{\dot{\epsilon}\delta}^E$.
5. Зменшити частоту обертання вала до нуля і виключити установку.
6. Порівняти теоретичне і експериментальне значення критичної частоти обертання вала.

Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta = \frac{|n_{\dot{\epsilon}\delta}^{\dot{O}} - n_{\dot{\epsilon}\delta}^A|}{n_{\dot{\epsilon}\delta}^{\dot{O}}} 100\%.$$

7. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Привести приклад пружної механічної системи.
2. Дати визначення характеристик коливань (амплітуда та частота).
3. Як визначається період коливань?
4. Класи коливальних процесів.
5. Типи можливих коливань.
6. Залежність між частотою і періодом коливань.
7. Частота власних коливань пружної системи.
8. Змушені коливання пружних систем з одним ступенем вільності.
9. Пояснити явище резонансу.

Лабораторна робота № 11

Дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Мета роботи – провести дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності.

Теоретичні відомості

При дії на пружну систему збурювальної сили можливий випадок співпадання частоти власних коливань системи ω_0 з частотою збурювальної сили, в результаті виникає явище резонансу.

Розглянемо пружну систему з однією ступеню вільності. Прикладом такої пружної системи може бути двоопорна балка довжиною l на якій встановлено електродвигун на відстані a від лівої опори (рис. 11.1).

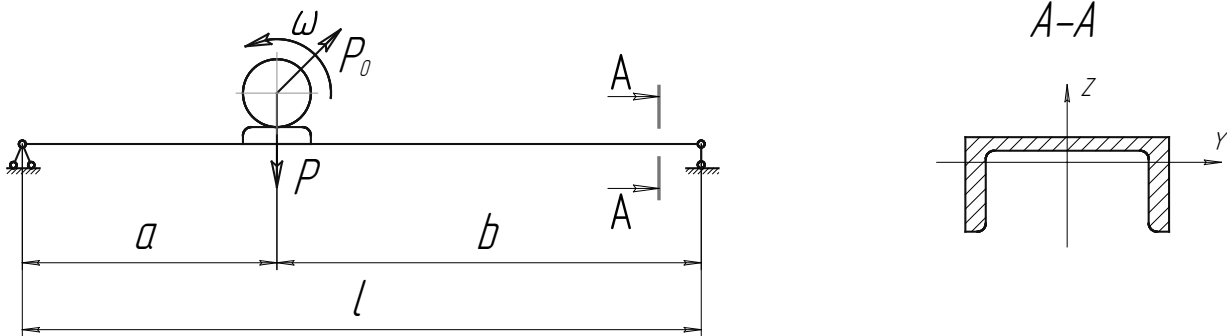


Рисунок 11.1 – Схема установки для дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Частоту власних коливань пружної системи з одним ступенем вільності на яку діє збурювальна сила можна визначити за формулою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_{\zeta\hat{a}}}}, \quad (11.1)$$

де δ_{11} – переміщення в напрямі дії одиночної сили;

$m_{\zeta\hat{a}}$ – зведена маса пружної системи.

Зведена маса пружної системи визначається за формулою

$$m_{\zeta\hat{a}} = \frac{m + km_1}{g}, \quad (11.2)$$

де m – маса електродвигуна;

m_1 – маса балки;

k – коефіцієнт зведення маси балки до точки, де встановлений електродвигун.

Співвідношення (11.2) можна записати у вигляді

$$m_{\zeta\dot{a}} = \frac{D + kQ}{g}, \quad (11.3)$$

де P – вага електродвигуна;

Q – вага балки;

g – прискорення вільного падіння.

Коефіцієнт k для даної пружної системи представлено у табл. 11.1.

Таблиця 11.1

a/l	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	9,273	2,863	1,500	1,012	0,774	0,641	0,564	0,518	0,493	0,486

Для визначення δ_{11} будують епюру згинальних моментів від сили $\bar{P} = 1$ (рис. 11.2), яка прикладена у точці де встановлений електродвигун.

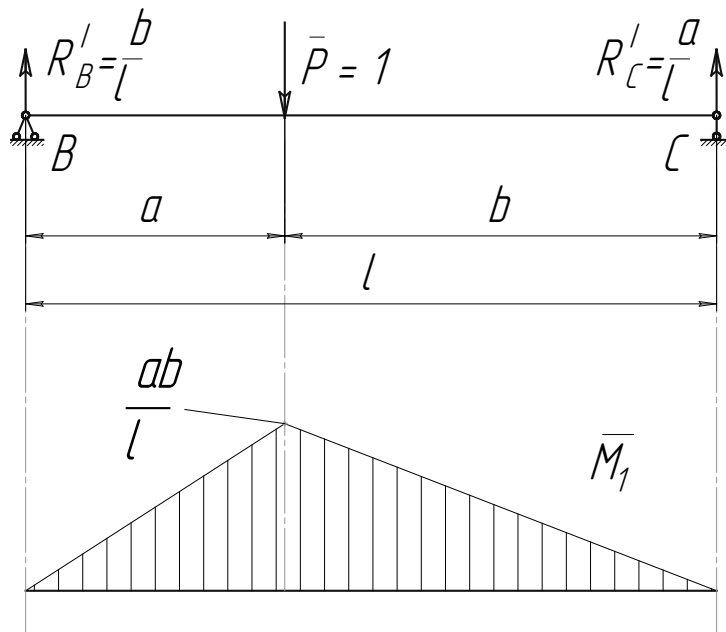


Рисунок 11.2 – Розрахункова схема і епюра від дії одиничної сили

Користуючись способом Верещагіна знайдемо переміщення від одиничного навантаження

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_{\dot{O}}} \left(\frac{1}{2} \frac{ab}{l} a \frac{2}{3} \frac{\dot{a}b}{l} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}b}{l} b \frac{2}{3} \frac{\dot{a}b}{l} \right) = \frac{\dot{a}^2 b^2}{3l\dot{A}^2 \dot{O}}. \quad (11.4)$$

Підставляючи (11.3) і (11.4) в (11.1), дістанемо

$$\omega_0 = \frac{1}{\dot{a}b} \sqrt{\frac{3l\dot{A}^2 \dot{O} g}{P + kQ}}. \quad (11.5)$$

Кутова швидкість обертання вала ω з частотою обертання вала n зв'язана такою залежністю:

$$n = \frac{30\omega}{\pi}. \quad (11.6)$$

Опис установки

Загальний вигляд установки для дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності показано на рис. 11.3. Для проведення дослідження використовують балку (швелер №12) довжиною $l = 2,5$ м, яка лежить на двох опорах, на яких закріплений на відстані a від лівої опори електродвигун з ексцентриком. Електродвигун постійного струму вмикають в мережу через автотрансформатор і випрямляч. Цим обладнанням можливо регулювати швидкість обертання електродвигуна в межах 0...2200 об/хв.

При обертанні ротора електродвигуна з насадженням на вал ексцентриком, напрям збурювальної сили P_0 неперервно змінюється з кутовою частотою ω і, відповідно, її вертикальна складова викликає коливання балки в вертикальній площині. Амплітуда цих коливань значно збільшується в момент настання резонансу.



Рисунок 11.3 – Установка для дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Порядок виконання роботи

1. Встановити електродвигун на заданій відстані a від лівої опори (див. рис 11.1) згідно до варіанта (табл. 11.2).

Таблиця 11.2

Показник	Номер варіанта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a , м	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000	1,125	1,250

2. Увімкнути автотрансформатор в мережу змінного струму напругою 220 В, частотою 50 Гц. Збільшити плавно частоту обертання вала електродвигуна до настання резонансу пружної системи.

3. Зафіксувати значення критичної частоти обертання вала електродвигуна n' . Занести покази тахометра у табл. 11.3

Таблиця 11.3

Частота обертання вала електродвигуна, об/хв			
n'	n''	$n_{e\delta}^A$	$n_{e\delta}^O$

4. Збільшити частоту обертання вала електродвигуна. Збільшення частоти обертання вала електродвигуна приводить до згасання коливань.

5. Зменшити плавно частоту обертання вала електродвигуна для повторного досягнення резонансу пружної системи.

6. Зафіксувати значення критичної частоти обертання вала електродвигуна n'' . Занести покази тахометра у табл. 11.3.

7. Зменшити частоту обертання вала електродвигуна до нуля і виключити автотрансформатор.

8. Обчислити і занести в табл. 11.3 експериментальне значення критичної частоти обертання вала $n_{e\delta}^E$

$$n_{e\delta}^A = \frac{n' + n''}{2}.$$

9. Обчислити за формулою (11.6) з врахуванням (11.5) і занести в табл. 11.3 теоретичне значення критичної частоти обертання вала $n_{e\delta}^T$.

10. Порівняти теоретичне і експериментальне значення критичної частоти обертання вала. Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta = \frac{|n_{e\delta}^O - n_{e\delta}^A|}{n_{e\delta}^O} 100\%.$$

11. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Основні характеристики коливань (амплітуда і частота).
2. Які коливання називають власними?
3. Від яких характеристик пружної системи залежить частота власних коливань?
4. Пояснити явище резонансу.

Лабораторна робота № 12

Дослідження деформацій кругового кільця

Мета роботи – визначити теоретично і експериментально величину деформацій кругового кільця.

Теоретичні відомості

Розглянемо кругове кільце постійного поперечного перерізу, до якого прикладена сила P (рис. 12.1). Середній діаметр кільця $D_{cp} = 318$ мм. Розміри поперечного перерізу кільця: ширина $b = 20$ мм і товщина $h = 3,6$ мм. Матеріал кільця сталь Ст. 3.

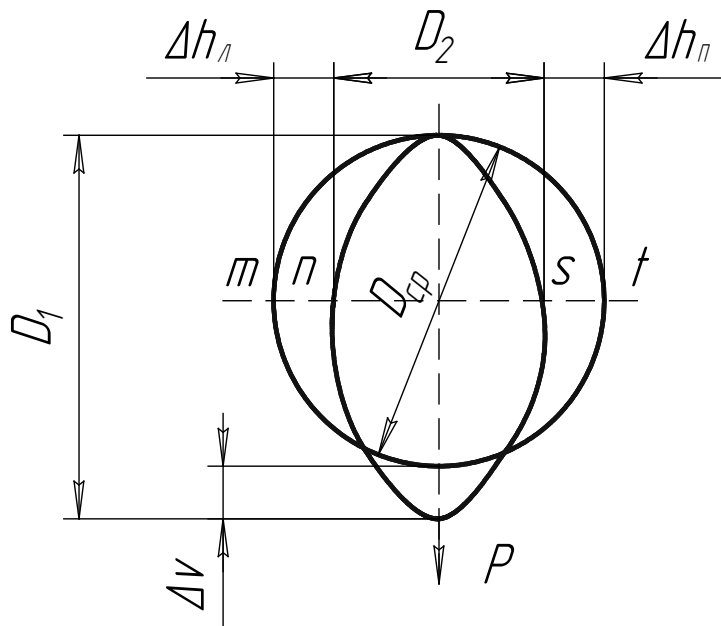


Рисунок 12.1 – Схема навантаження кругового кільця постійного поперечного перерізу

Під дією сили P , яка діє у напрямку вертикального діаметра, кільце прийме овальний обрис. В зв'язку з цим відбудеться збільшення вертикального і зменшення горизонтального діаметрів кільця. Вертикальний діаметр кільця збільшується на величину Δv , горизонтальний діаметр зменшується на величину Δh , $\Delta h = \Delta h_l + \Delta h_n$.

Кільце як замкнена система тричі статично невизначувана. Проте кільце має дві вісі симетрії. Використовуючи умови симетрії деформації кільця щодо вертикальних і горизонтальних осей, можна обмежитись розглядом однієї чверті кільця.

Розрахункова схема для чверті кільця представлена на рис. 12.2. При дії сили P в перерізі $s-t$ виникають поперечна сила Q_C , нормальна сила N_C і згинальний момент M_C . В защемленні виникає вертикальна R_A і горизонтальна H_A реакції й опорний момент M_A .

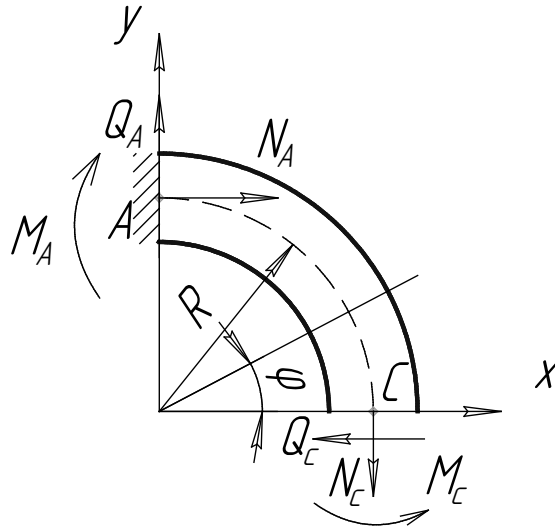


Рисунок 12.2 – Розрахункова схема для чверті кільця

Для даної розрахункової схеми поперечна сил $Q_C = 0$. З рівняння статики $\sum F(x) = 0$:

$$H_A - Q_C = 0; H_A = Q_C = 0.$$

Таким чином, система стає один раз статично невизначеною. Взявши як зайве зусилля згинальний момент $M_C = X_1$, дістанемо еквівалентну систему (рис. 12.3). За умови рівноваги нормальна сила $N_C = P/2$.

Для визначення X_1 складаємо канонічне рівняння, що виражає умову рівності нулю взаємного кута повороту граней розрізу

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (12.1)$$

Коефіцієнти δ_{11} і Δ_{1P} рівняння (12.1) визначають методом Мора, спочатку розглядаючи основну систему під дією навантаження $N_C = P/2$. (рис. 12.3), а потім під дією одиночного моменту $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 12.4):

$$\delta_{11} = \int_0^{\phi} \frac{M_1(\phi) M_1(\phi)}{EI_Z} R d\phi; \quad (12.2)$$

$$\Delta_{11} = \int_0^{\phi} \frac{M_P(\phi) M_1(\phi)}{EI_Z} R d\phi. \quad (12.3)$$

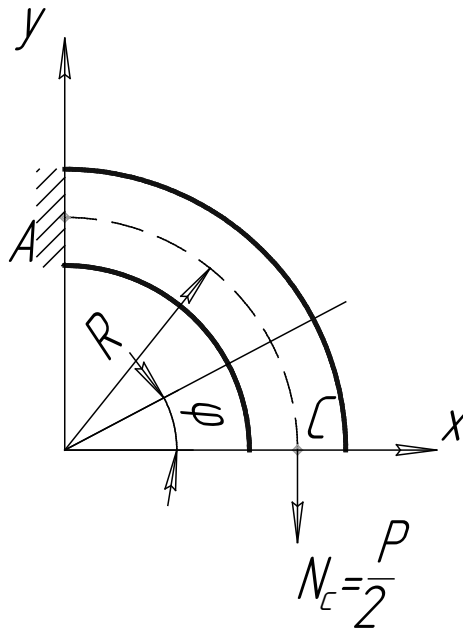


Рисунок 12.3 – Еквівалентна система

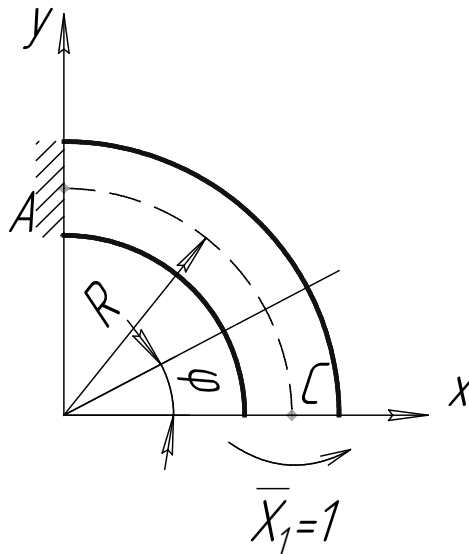


Рисунок. 12.4 – Схема навантаження системи одиночним моментом

Для однієї чверті кільця маємо, $0 \leq \phi \leq \pi / 2$:

$$M_1(\phi) = \bar{X}_1 = -1; \quad (12.4)$$

$$M_p(\phi) = \frac{P}{2} R(1 - \cos \phi). \quad (12.5)$$

Підставляючи (12.4) і (12.5) у (12.2) та (12.3), отримуємо:

$$\delta_{11} = \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)(-1)}{EI_Z} R d\phi = \frac{R}{EI_Z} \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi R}{2EI_Z};$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{PR}{2}(1 - \cos\phi)(-1)}{EI_Z} R d\phi = -\frac{PR^2}{2EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\phi) d\phi = \frac{PR^2}{2EI_Z} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

З рівняння (11.1) знаходимо X_1 :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{PR^2 \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2EI_Z}{2EI_Z \cdot \pi R} = PR \frac{\pi - 2}{2\pi} = 0,182PR.$$

Отже, згинальний момент $M_C = 0,182PR$.

Згинальний момент у довільному перерізі кільця дорівнює

$$M_P(\phi) = \frac{P}{2} R(1 - \cos\phi) - M_C = 0,5PR(1 - \cos\phi) - 0,182PR. \quad (12.6)$$

Згинальний момент в перерізі A , при $\phi = \pi/2$

$$M_A = 0,5PR(1 - \cos\phi) - 0,182PR = 0,318PR.$$

Епюра згинальних моментів для кільця, відповідно до виразу (12.6), представлена на рис. 12.5.

Для визначення Δv треба прикласти до основної системи одиничну силу $\bar{X}_2 = 1$ в точці C (рис. 12.6). Тоді подвоєне значення вертикального переміщення вільного кінця основної системи дасть вираз для визначення Δv

$$\Delta v = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M_P(\phi)M_2(\phi)}{EI_Z} R d\phi, \quad (12.7)$$

де $M_2(\phi)$ – момент від дії одиничної сили $\bar{X}_2 = 1$:

$$M_2(\phi) = 1 \cdot R(1 - \cos\phi). \quad (12.8)$$

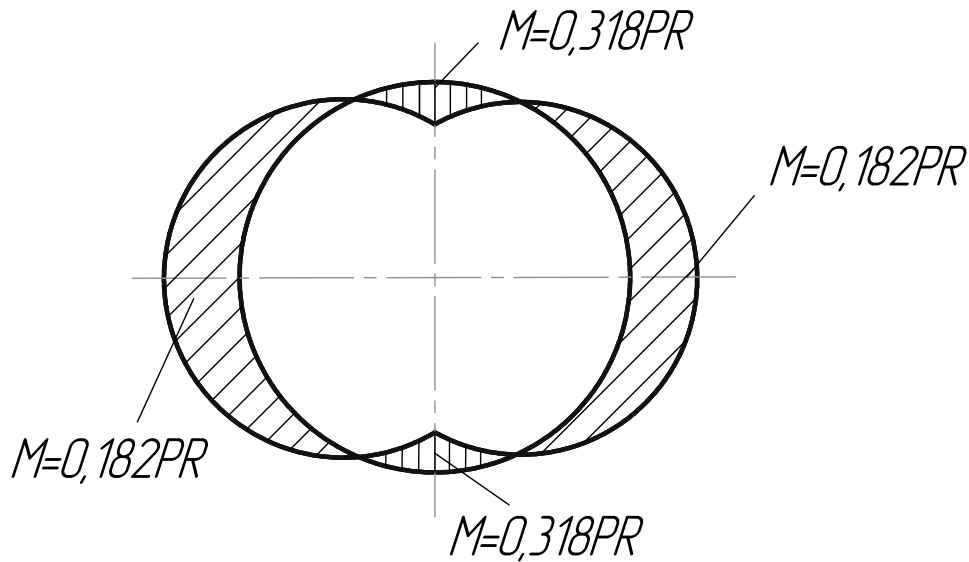


Рисунок 12.5 – Епюра згинальних моментів для кільця

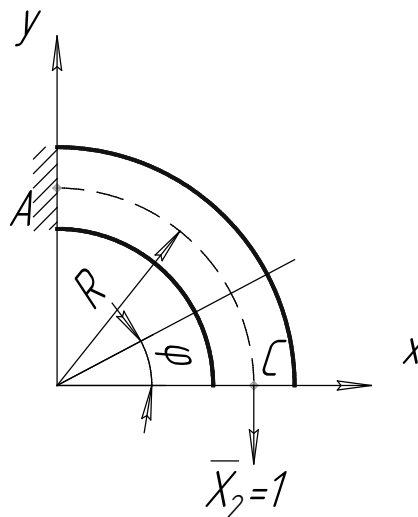


Рисунок 12.6 – Схема навантаження системи
одиначною силою $\bar{X}_2 = 1$

Підставляючи (12.8) у (12.7), отримуємо вираз для визначення збільшення вертикального діаметра кільця Δv

$$\Delta v = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{PR \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos \phi \right) \cdot 1 \cdot R(1 - \cos \phi)}{EI_Z} R d\phi = \frac{PR^3}{EI_Z} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right)$$

або

$$\Delta v = 0,148 \frac{PR^3}{EI_Z}. \quad (12.9)$$

Для визначення Δh треба прикласти до основної системи одиничну силу $\bar{X}_3 = 1$ в точці С (рис. 11.7). Тоді подвоєне значення горизонтального переміщення вільного кінця основної системи дасть вираз для визначення Δh

$$\Delta h = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M_P(\phi)M_3(\phi)}{EI_Z} R d\phi, \quad (12.10)$$

де $M_3(\phi)$ – момент від дії одиничної сили $\bar{X}_3 = 1$:

$$M_3(\phi) = 1 \cdot R \cos \phi. \quad (12.11)$$

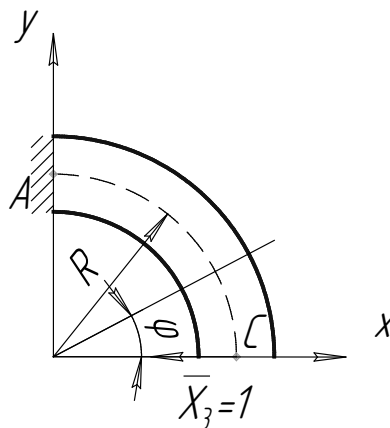


Рисунок 12.7 – Схема навантаження системи одиничною силою $\bar{X}_3 = 1$

Підставляючи (12.11) у (12.10), отримуємо вираз для визначення збільшення горизонтального діаметра кільця Δh

$$\Delta h = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{PR \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos \phi \right) \cdot 1 \cdot R \sin \phi}{EI_Z} R d\phi = \frac{PR^3}{EI_Z} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{4} \right)$$

або

$$\Delta h = 0,387 \frac{PR^3}{EI_Z}. \quad (12.12)$$

Опис установки

Установка для експериментального визначення деформацій кругового кільця при навантаженні його зосередженою силою P складається з наступних основних вузлів (рис. 12.8): пластини 7 з опорою, кругового кільця 6, трьох індикаторів годинникового типу 1, 2 і 2 з ціною

поділки 0,01 мм, основи 4, стійки 10, гирьового підвісу 12, набору вантажів 13. На лицьовій поверхні кільця нанесені риски для фіксації точок, переміщення яких підлягають вимірюванню.

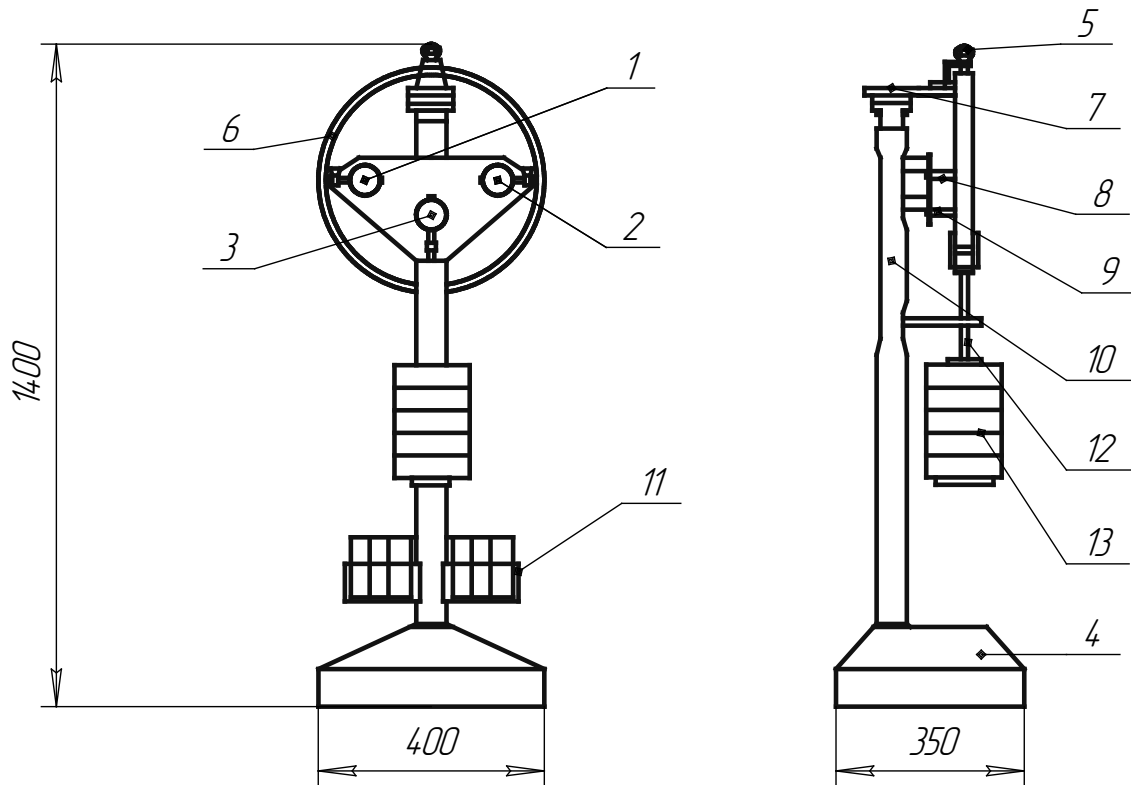


Рисунок 12.6 – Схема установки для визначення деформацій кругового кільця

Для проведення дослідження кільце підвішують на опорі й фіксують до неї стопорним гвинтом 5. Фіксація досліджуваного зразка необхідна для попередження його поворотів в площині поперечного перерізу, які можуть виникнути при навантаженні кільця.

Навантаження кільця здійснюється за допомогою гирьового підвісу 12 й набору вантажів 13. В неробочому положенні вантажі розміщуються на підставці 11, закріпленій на основі установки.

Деформації досліджуваних кільця у вертикальному й горизонтальному напрямках вимірюють індикаторами годинникового типу, закріпленими в державках 8 і 9.

Порядок виконання роботи

1. Установити стрілки індикаторів 1, 2 і 3 (див. рис. 12.6) на нуль.
2. Встановити згідно до варіанта (табл. 12.1) вантаж P на підвіс.
3. Занести покази індикаторів 1 (Δh_l), 2 (Δh_n) і 3 (Δv) у табл. 12.2.
4. Обчислити і занести в табл. 12.2 значення $\Delta h_E = \Delta h_l + \Delta h_n$.

5. Обчислити і занести в табл. 12.1 теоретичне значення величини Δh_T за формулою 12.12.

Таблиця 12.1

Показник	Номер варіанта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$P, Н$	60	70	75	80	85	90	95	100

Таблиця 12.2

Сила $P, Н$	Значення					
	експериментальні				теоретичні	
	$\Delta h_l, мм$	$\Delta h_n, мм$	$\Delta h_E, мм$	$\Delta v_E, мм$	$\Delta h_T, мм$	$\Delta v_T, мм$

6. Обчислити і занести в табл. 12.2 теоретичне значення величини Δv_T за формулою 12.9.

7. Порівняти експериментальні і теоретичні значення величини збільшення вертикального і зменшення горизонтального діаметрів кільця. Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta_v = \frac{|\Delta v_T - \Delta v_E|}{\Delta v_T} 100\%;$$

$$\Delta_h = \frac{|\Delta h_T - \Delta h_E|}{\Delta h_T} 100\%.$$

8. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Як визначити ступінь статичної невизначеності плоскої системи?
2. Як понизити ступінь статичної невизначеності, використовуючи умови симетрії?
3. В чому полягає визначення переміщення методом Мора?
4. Як визначити коефіцієнти канонічних рівнянь методом сил?
5. Визначення переміщень у статично невизначених системах.

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Механічні характеристики вуглецевих конструкційних сталей

Марка сталі	$\sigma_{\hat{a}}$	$\sigma_{\hat{o}}$	$\tau_{\hat{o}}$	Відносне видовження δ , %, при $l=10d$	Ударна в'язкість $\gamma a_k \times 10^{-5}$ (Нм)/м ²	σ_{-1}^e	σ_{-1}^i	τ_{-1}^e
	не менше					<i>МПа</i>		
	<i>МПа</i>							
10	340	210	140	31	24	16...22	12...15	8...12
20	420	250	160	25	–	17...22	12...46	10...13
25	460	280	–	23	9	19...25	–	
30	500	300	170	21	8	20...27	17...21	
35	540	320	190	20	7	22...30	17...22	
40	580	340	–	19	6	23...32	18...24	
45	610	360	220	16	5	25...34	19...25	
50	640	380	–	14	4	27...35	20...26	
55	660	390	–	13	–	–	–	
60	690	410	–	12	–	31...38	22...28	
20Г	460	280	–	24	–	–	–	
30Г	550	320	–	20	8	22...32	–	
50Г	660	400	–	13	4	29...36	–	
20Х	800	650	–	11	6	38	–	
40Х	1000	800	–	10	6	35...38	25	
45Х	1050	850	–	9	5	40...50	–	
30ХМ	950	750	–	11	8	31...41	37	
35ХМ	1000	850	390	12	8	47...51	–	
40ХН	1000	800	–	11	7	40	29	
50ХН	1100	900	–	9	5	55	–	
40ХФА	900	750	–	10	9	38...49	–	
38ХМЮА	1000	850	400	14	9	42...55	–	
12ХН3А	950	700	–	11	9	39...47	27...32	
20ХН3А	950	750	–	12	10	42...45	30...32	
30ХН3А	1000	800	–	10	8	52...70	–	
40ХНМА	1000	950	–	12	10	50...70	–	
30ХГСА	1100	850	–	10	5	51...54	50...54	

Таблиця А.2 – Модулі пружності та коефіцієнти Пуассона

Матеріал	Модуль пружності E , МПа	Модуль пружності G , МПа	Коефіцієнт Пуассона μ
Чавун сірий, білий	$(1,15...1,60) \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23...0,27
Ковкий чавун	$1,55 \cdot 10^5$	–	–
Вуглецеві сталі.	$(2,0...2,1) \cdot 10^5$	$(8,0...8,1) \cdot 10^4$	0,24...0,28
Леговані сталі.	$(2,1...2,2) \cdot 10^5$	$(8,0...8,1) \cdot 10^4$	0,25...0,30
Мідь прокатна.	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31...0,34
Мідь холоднотянута	$1,3 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$	–
Фосфориста бронза катана. .	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	0,32...0,35
Латунь холоднотянута.	$(0,91...0,99) \cdot 10^5$	$(3,5...3,7) \cdot 10^4$	0,32...0,42
Корабельна латунь катана. .	$1,0 \cdot 10^5$	–	0,36
Алюміній катаний.	$0,69 \cdot 10^5$	$(2,6...2,7) \cdot 10^4$	0,32...0,36
Цинк катаний.	$0,84 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	0,27
Свинець.	$0,17 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^4$	0,42
Лід.	$0,1 \cdot 10^5$	$(0,28...0,3) \cdot 10^4$	–
Скло.	$0,56 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^4$	0,25
Граніт.	$0,49 \cdot 10^5$	–	–
Вапняк.	$0,42 \cdot 10^5$	–	–
Мармур.	$0,56 \cdot 10^5$	–	–
Дерево вздовж волокон.	$(0,1...0,12) \cdot 10^5$	$0,055 \cdot 10^4$	–
Дерево поперек волокон.	$(0,05...0,1) \cdot 10^4$	–	–
Каучук.	8	–	0,47
Текстоліт.	$(0,06...0,1) \cdot 10^5$	–	–
Гетинакс.	$(0,1...0,17) \cdot 10^5$	–	–
Бакеліт.	$43 \cdot 10^5$	–	0,36

Таблиця А.3 – Співвідношення між числами твердості за Брінеллем (НВ), Роквелом (HRC) та границею міцності (σ_a) для сталей

Діаметр відбитка, мм	НВ, МПа	HRC	σ_a (МПа) для сталей			
			вуглецевої	хромистої	хромонікелевої	хромомолібденової
2,34	6880	65	2480	–	2340	2270
2,37	6700	64	2410	–	2280	2210
2,39	65,90	63	2370	–	2240	2180
2,42	6430	62	2310	–	2180	2120
2,45	6270	61	2260	2180	2130	2070
2,48	6110	60	2200	2130	2070	2020
2,51	5970	59	2140	2080	2020	1970
2,54	5820	58	2080	2030	1970	1920
2,57	5690	57	2050	2000	1940	1880
2,62	5470	55	1960	1910	1850	1800
2,71	5100	52	1830	1780	1730	1680
2,78	4850	50	1750	1700	1650	1600
2,85	4610	48	1650	1620	1560	1520
2,91	4410	46	1590	1540	1500	1450
2,98	4200	44	1510	1470	1430	1380
3,08	3930	42	1410	1370	1340	1300
3,14	3780	40	1360	1320	1280	1250
3,24	3540	38	1280	1240	1210	1170
3,34	3330	36	1200	1170	1130	1100
3,44	3130	34	1120	1090	1060	1030
3,52	2980	32	1070	1040	1020	980
3,62	2820	30	1020	980	960	930
3,70	2690	28	980	940	920	890
3,80	2550	26	920	890	860	840
3,90	2410	24	870	840	820	800
4,00	2290	22	820	800	780	760
4,10	2170	20	780	760	740	720
4,20	2070	18	740	720	700	680
4,26	2000	–	720	700	680	660
4,37	1900	–	680	670	650	630
4,48	1800	–	650	630	610	590
4,60	1700	–	610	590	580	560
4,74	1600	–	580	560	540	520
4,88	1500	–	540	520	510	500
5,05	1400	–	500	490	480	470
5,21	1300	–	470	450	440	430
5,42	1200	–	430	420	410	400
5,63	1100	–	400	390	380	370
5,83	1020	–	370	360	350	340

Таблиця А.4 – Значення коефіцієнта φ зниження основного допустимого напруження на стиск

Гнучкість $\lambda = \mu \cdot l / i_m$	φ						
	сталі Ст. 3 і Ст. 4	сталь Ст. 5	Бетон		Дюралюмі ній	сірий чавун	деревина
			важк ий	легки й	Д16Т		
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	1,0	1,0	0,999	0,97	0,99
20	0,97	0,96	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,95	0,93	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,85	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,80	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,74	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,67	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,59	0,51	–	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,50	0,45	–	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	–	–	0,142	–	0,25
120	0,45	0,37	–	–	0,119	–	0,22
130	0,40	0,32	–	–	0,101	–	0,18
140	0,36	0,28	–	–	0,087	–	0,16
150	0,32	0,25	–	–	0,076	–	0,14
160	0,29	0,23	–	–	–	–	0,12
170	0,26	0,21	–	–	–	–	0,11
180	0,23	0,19	–	–	–	–	0,10
190	0,21	0,17	–	–	–	–	0,09
200	0,19	0,16	–	–	–	–	0,08

ГЛОСАРІЙ

Амплітуда коливань (**amplitude of vibrations**) – найбільший зсув пружної системи від положення статичної рівноваги.

Гнучкість стержня (**flexibility of a bar**) – здатність стержня зберігати стійкість при поздовжньому згині.

Деформація (**deformation**) – зміна форми і об'єму тіла під дією зовнішніх сил.

Епюра (**epюра**) – схематичне креслення або графік. Епюра показує розподіл величини (зусилля, напруження, деформації) при навантаженні на конструкцію.

Жорсткість (**stiffness**) – здатність тіла або конструкції чинити опір зовнішнім силам щодо деформації.

Косий згин (**slanting bend**) – вид деформації, що характеризується зміною кривизни бруса під дією зовнішніх сил, що проходять через його вісь і не співпадаючих ні з однією з головної плоскості.

Критична сила (**critical force**) – сила, що викликає поздовжній згин стержня.

Напруження (**stress**) – міра внутрішніх сил, що виникають при деформації матеріалу.

Позацентричний розтяг-стиск (**eccentric tension-compression**) – вид деформації, що виникає від дії на стержень двох рівних і протилежно направлених поздовжніх сил, паралельних вісі стержня.

Сила (**force**) – міра механічної дії.

Складний опір (**combined stress**) – деформація стержня, що виникає як результат декількох простих деформацій, що відбуваються одночасно: згин і розтяг, згин і кручення і так далі.

Статично невизначена система (**statically indeterminate system**) – система в якій кількість реакцій зв'язків більше трьох.

Стержень (**bar**) – конструктивний елемент, поперечні розміри якого малі в порівнянні з довжиною.

Ударне навантаження (**impact load**) – навантаження, яке швидко змінюється.

ЛІТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Расчет на прочность деталей машин : справочник / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1993 – 640 с.
2. Дарков А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989 – 624 с.
3. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении / В. А. Огородников. – К. : УМК ВО, 1989. – 152 с.
4. Огородніков В. А. Опір матеріалів з елементами теорії пластичності. Частина 1 / В. А. Огородніков, І. О. Сивак, М. В. Бабак. – Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001 – 100 с.
5. Опір матеріалів: Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка. – К. : Вища шк., 2004. – 655 с.
6. Опір матеріалів. Кн. 2. Опір матеріалів: підручник / ред. Д. В. Чернілевський. – К. : НМК ВО, 1992 – 272 с.
7. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – К. : Наукова думка, 1975 – 704 с.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.

Навчальне видання

Віталій Антонович Огородніков
Михайло Іванович Побережний
Олександр Володимирович Грушко

ОПІР МАТЕРІАЛІВ
ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ
Частина 2

Лабораторний практикум

Оригінал-макет підготовлено Побережним М. І.

Редактор

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7×42 $\frac{1}{4}$
Друк різнографічний
Тираж прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ