М. В. Працьовитий, М. Б. Ковальчук,
Н. В. Сачанюк-Кавецька

Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів
Частина 2

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**М. В. Працьовитий, М. Б. Ковальчук,
Н. В. Сачанюк-Кавецька**

Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів
Частина 2

**Електронний навчальний посібник
комбінованого (локального та мережного) використання**

Вінниця
ВНТУ
2023

УДК 51(075.8)
П70

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 29.12.2022 р.)

Рецензенти:
Хом'юк І. В., доктор педагогічних наук, професор
Кондур О. С., доктор педагогічних наук, професор
Михайленко Л. Ф., доктор педагогічних наук, професор

Працьовитий, М. В.
П70 Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 2 : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. – Вінниця : ВНТУ, 2023. – 102 с.

Метою цього посібника, який складається з двох частин, є формування у студентів вміння одержувати, шукати, фіксувати, подавати і застосовувати інформацію.

В другій частині систематизовано у вигляді схем і таблиць основний матеріал курсу вищої математики для студентів технічних спеціальностей, що містить такі теми: диференціальні рівняння; операційне числення; ряди; елементи дискретної математики; кратні інтеграли; криволінійні інтеграли.

Істотною особливістю цього посібника є систематизація та алгоритмізація теоретичного матеріалу. Така форма подання теоретичного матеріалу дозволяє студентам визначати структуру матеріалу, встановлювати зв'язок між його компонентами, сприяє формуванню вмінь працювати з навчальною літературою і застосовувати теоретичні знання на практиці.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей, аспірантів, викладачів та осіб, які займаються самоосвітою.

УДК 51 (075.8)

ЗМІСТ

Передмова **5**
Змістовий модуль «Диференціальні рівняння та їх системи» **7**
Понятійний апарат модуля 7
Логічна структура вивчення змістового модуля «Диференціальні рівняння та їх системи» 8
Опорний конспект 9
Диференціальні рівняння першого порядку 10
Диференціальні рівняння вищих порядків 18
Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку 20
Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n-го* порядку 21
Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами 23
Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами 24
Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь 26
Семантичний конспект до змістового модуля «Диференціальні рівняння та їх системи» 27
Змістовий модуль «Операційне числення» **32**
Основні властивості перетворень Лапласа 33
Функції-оригінали. Дії над оригіналами 34
Функції-зображення. Дії над зображеннями 35
Теореми розкладання 36
Таблиця оригіналів та відповідних зображень 37
Семантичний конспект до змістового модуля «Операційне числення» ... 40
Змістовий модуль «Ряди» **41**
Числові ряди 41
Додатні ряди. Ознаки збіжності 42
Знакозмінні ряди 44
Функціональні ряди 46
Основні розвинення функцій в ряд Маклорена 48
Ряди Фур'є 49
Семантичний конспект до змістового модуля «Ряди» 52
Змістовий модуль «Елементи дискретної математики» **57**
Множини. Операції над множинами 57
Властивості операцій над множинами 58
Логічні обчислення. Логіка висловлень 59
Закони алгебри висловлень 60
Графи 61
Способи задання графів 63

Семантичний конспект до змістового модуля «Елементи дискретної математики» 64
Змістовий модуль «Кратні інтеграли» 71
Подвійні інтеграли 71
Обчислення подвійних інтегралів 73
Деякі застосування подвійних інтегралів 75
Потрійні інтеграли 77
Обчислення потрійних інтегралів 79
Застосування потрійних інтегралів 83
Семантичний конспект до змістового модуля «Кратні інтеграли» 84
Змістовий модуль «Криволінійні інтеграли» 87
Обчислення криволінійних інтегралів 88
Застосування криволінійних інтегралів 89
Семантичний конспект до змістового модуля «Криволінійні інтеграли» 90
Перевір себе 92
Кросворд № 1 92
Кросворд № 2 94
Кросворд № 3 96
Деякі формули з елементарної математики 98
Список джерел 101

ПЕРЕДМОВА

Сучасне суспільство висуває до вищої школи вимоги щодо підготовки фахівця з новим типом мислення, спроможного здобувати знання протягом всього життя та вмінням творчо й якісно вирішувати професійні та життєві завдання та проблеми. Процеси глобалізації у розвитку науки висувають відмінні від традиційних вимоги до підготовки інженерів, що мають підвищений рівень фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної спрямованості.

Тому з кожним днем в інженерній діяльності все важливіше місце займають інноваційні технології, які висувають високі вимоги не тільки до спеціальної, але й фундаментальної підготовки інженера, а тому необхідно, щоб навчання одночасно забезпечувало високу якість фундаментальних знань і готовність випускника до професійної діяльності. Для студентів інженерних спеціальностей математика постає не стільки навчальною дисципліною, скільки професійним інструментом аналізу, організації, управління технологічними процесами. Математика є основою інженерної освіти, мовою інженерних досліджень і в діяльності інженера має допомагати вирішувати професійні задачі.

Тому уміння працювати з інформацією є актуальним і одним із найпотрібніших вмінь майбутнього інженера.

В умовах сучасної вищої технічної школи спостерігається тенденція до загострення проблеми інтелектуальної активності студентів.

Подання теоретичних знань у вигляді опорних схем, алгоритмів, узагальнювальних таблиць дає студентам можливість побачити правило в повному обсязі, краще осмислити викладений матеріал, усвідомити логічні взаємозв’язки, систематизувати та впорядкувати знання.

Використання опор та алгоритмів передбачає управління пізнавальною діяльністю студентів, розвиток у них умінь самостійної роботи. Навчання із застосуванням опорних схем та алгоритмів розвиває пам’ять, логічне мислення, індивідуальні здібності студентів і служить засобом графічного узагальнення досліджуваного матеріалу.

Істотною особливістю даного посібника є узагальнення та систематизація теоретичного матеріалу через алгоритмічні форми його подання.

Навчальний посібник складається з передмови, опорних схем, таблиць і основних алгоритмів, які об’єднані за темами, списку джерел, додатків і ключів до кросвордів, які запропоновані в додатках.

Змістовність, логічність і доступність подання теоретичного матеріалу робить можливим його використання не тільки студентами при підготовці до практичних занять, виконанні розрахункових завдань, але й викладачами при укладанні лекцій з курсу вищої математики та інших предметів математичного циклу у закладах вищої освіти.

Запропоновані кросворди є органічним доповненням до основної частини посібника; Вони спонукають читача до самоаналізу в аспекті набутих емпіричних знань.

Нестандартна, оригінальна подача теоретичного матеріалу, на нашу думку, полегшує його сприймання й розуміння читачем із будь-яким рівнем методичної підготовки.

В другій частині посібника систематизовано, у вигляді схем і таблиць, основний матеріал з таких розділів:

- диференціальні рівняння;
- операційне числення;
- ряди;
- елементи дискретної математики;
- кратні інтеграли;
- криволінійні інтеграли.

Даний посібник дозволить студентам заочної форми навчання самостійно опанувати потрібний інженеру обсяг математичних знань. Також він може бути корисним при вибірковому вивченні окремих тем або розділів студентами як заочної, так і денної форм навчання. Велика кількість завдань і детальний розгляд прикладів розв’язування типових завдань дозволяє використовувати даний навчальний посібник як на практичних заняттях з дисципліни «Вища математика», так і для самоосвіти.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ
«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ»

Понятійний апарат модуля (науковий тезаурус)

Диференціальне рівняння

звичайне диференціальне рівняння, диференціальне рівняння у частинних похідних, порядок диференціального рівняння, загальний розв'язок диференціального рівняння, інтеграл диференціального рівняння, інтегрування диференціального рівняння, початкова умова, умова Коші.

Диференціальне рівняння першого порядку

рівняння з відокремлюваними змінними, однорідне диференціальне рівняння, однорідна функція, порядок однорідності, лінійне диференціальне рівняння, рівняння Бернуллі, метод Бернуллі, метод Лагранжа, диференціальні рівняння в повних диференціалах, інтегрувальний множник.

Диференціальне рівняння другого порядку

частинний розв'язок, загальний розв'язок, вронскіан (визначник Вронського), однорідне диференціальне рівняння другого порядку, характеристичне рівняння, неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, варіація довільної сталої, метод невизначених коефіцієнтів

Логічна структура вивчення змістового модуля «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВИДИ

За кількістю змінних, що входять у рівняння

- Звичайне диференціальне рівняння — Якщо в ДР входить лише одна незалежна змінна
- Диференціальне рівняння в частинних похідних — Якщо в ДР входить декілька незалежних змінних

За порядком похідної

- Першого порядку — Якщо в ДР входить лише похідна першого порядку
- n-ого порядку — Якщо в ДР входить похідна з найвищим порядком n

<u>РОЗВ'ЯЗАТИ</u> диференціальне рівняння – це означає знайти ВСІ функції y, які задовольняють це рівняння в області визначення всіх незалежних змінних.

<u>Загальний розв'язок</u> (загальний інтеграл) – це функція, яка задовольняє диференціальне рівняння в області визначення всіх незалежних змінних.

<u>Частинний розв'язок</u> – розв'язок, який отриманий із загального при певному значенні постійних інтегрування

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Означення → *Рівняння*, в яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називаються диференціальними рівняннями

Види →

- *Звичайне* – якщо в рівнянні невідома функція є функцією однієї незалежної змінної
- *У частинних похідних* – якщо невідома функція, яка входить у рівняння, є функцією двох і більшого числа незалежних змінних

Порядок → *Максимальний порядок* похідної (або диференціала), яка входить у рівняння

Розв'язок → n разів диференційована функція $y = f(x)$ на проміжку (a, b), яка, після підстановки в це рівняння, перетворює його в тотожність $F(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(k)}(x)) \equiv 0$

Розв'язати ДР → Означає знайти всі його розв'язки

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Означення

Це диференціальне рівняння першого порядку, яке має вигляд $F(x,y,y')=0$

Існування і єдиність розв'язку

Якщо в рівнянні $y'=f(x,y)$ функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в деякій області D на площині $0xy$, яка містить деяку точку (x_0, y_0), то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y=\varphi(x)$, який задовольняє умову $y=y_0$ при $x=x_0$

Розв'язок

Загальний роз'язок – функція $y=\varphi(x,C)$, яка задовольняє диференціальне рівняння в області визначення всіх незалежних змінних

Частинний розв'язок – розв'язок, який отриманий з загального при певному значенні постійних

Особливий розв'язок – розв'язок, у всіх точках якого умова одиничності не виконується, тобто в будь-якому околі кожної точки *(x, y)* особливого розв'язку існують принаймні дві інтегральні криві, які проходять через цю точку.

Види

Рівняння з *відокремленими змінними* – це рівняння типу $M(x)dx+N(y)dy=0$. Називають так тому, що в цьому рівнянні змінні відокремлені, тобто при dx знаходиться тільки функція від x, а при dy – тільки функція від y.

Диференціальні рівняння з *відокремлюваними* змінними – це рівняння, у яких змінні можна розділити за допомогою множення або ділення обох частин рівняння на один і той самий вираз, тобто це рівняння вигляду: $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$

Класифікація диференціальних рівнянь першого порядку

- **Найпростіше** → $y'=f(x)$
- **Рівняння з відокремлюваними змінними** → $y'=f(x)\cdot g(y)$ або $f_1(x)g_1(y)dy+f_2(x)g_2(y)dx=0$
- **Однорідне**
  - → $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ Права частина – однорідна функція нульового порядку
  - → $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, де $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – однорідні функції однакового порядку
  - → Рівняння, які зводяться до однорідних, $y'=\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$
- **Рівняння в повних диференціалах** → $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, якщо $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$
- **Лінійне рівняння**
  - → $y'+P(x)y=Q(x)$ – лінійне відносно змінної y
  - → $x'+P(y)x=Q(y)$ – лінійне відносно змінної x
- **Рівняння Бернуллі**
  - → $y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^{\alpha}$ – відносно змінної y
  - → $x'+P(y)x=Q(y)\cdot x^{\alpha}$ – відносно змінної x

Рівняння з відокремлюваними змінними

$$y'=f(x)\cdot g(y)$$

або

$$f_1(x)g_1(y)dy+f_2(x)g_2(y)dx=0$$

- **Алгоритм розв'язування рівняння з відокремлюваними змінними типу**

$$y'=f\ (x)\cdot g\ (y)$$

1. Оскільки $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то подаємо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx}=f\ (x)\cdot g\ (y)$
2. Множимо обидві частини рівності $\dfrac{dy}{dx}=f\ (x)\cdot g\ (y)$ на вираз $\dfrac{dx}{g(y)}$ (припускаємо, що $g(y)\neq 0$.
3. Отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними $\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$. У лівій частині рівності маємо диференціал деякої функції за змінною *y*, а у правій – за змінною *x*.
4. Інтегруємо рівняння $\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$ і одержимо $\int\dfrac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$
5. Отримаємо загальний інтеграл рівняння $G(y)=F(x)+C$

- **Алгоритм розв'язування рівняння з відокремлюваними змінними типу**

$$f_1(x)g_1(y)dy+f_2(x)g_2(y)dx=0$$

1. Поділимо ліву і праву частини рівняння на добуток функцій $f_1(x)\cdot g_2(x)\neq 0$
2. Перенесемо вираз, який містить диференціал *d* , вправо $\dfrac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=-\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}dx$
3. Інтегруючи ліву частину за змінною ***y***, а праву – за змінною ***x***, одержимо загальний інтеграл диференціального рівняння: $\int\dfrac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=-\int\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}dx+C$
4. Отримаємо загальний інтеграл рівняння $G(y)=-F(x)+C$

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

ОДНОРІДНІ

ФУНКЦІЇ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією *n-го* порядку щодо змінних x і y, якщо при будь-якому t справедлива тотожність $f(t\,x,\,t\,y) = t^n f(x,\,y)$

Рівняння вигляду $M(x,\,y)dx + N(x,\,y)dy = 0$ називається *однорідним*, якщо функції при dx і dy є однорідними однакового порядку

- **Алгоритм розв'язування однорідного диренціального рівняння**

1. У диференціальному рівнянні $y' = f(x,\,y)$ перевіряємо чи є функція $f(x,\,y)$ однорідною функцією нульового виміру, тобто для будь-якого $t > 0$ виконується рівність $f(t\,x,\,t\,y) = f(x,\,y)$.
2. Якщо виконується пункт 1), то подаємо рівняння $y' = f(x,\,y)$ у вигляді $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
3. Вводимо допоміжну невідому функцію $u = u(x)$, поклавши $\frac{y}{x} = u$ або $y = u \cdot x$, звідки $y' = u' \cdot x + u$.
4. Одержимо рівняння $u + xu' = g(u)$ або $x\frac{du}{dx} = g(x)\text{-}u$.
5. Відокремлюємо змінні $\frac{du}{g(u)\text{-}u} = \frac{dx}{x}$.
6. Інтегруємо рівняння з пункту 5) і одержимо $\int \frac{du}{g(u)\text{-}u} = ln|x| + C$.
7. Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння $G(u) = F(x) + C$ або $G\left(\frac{y}{x}\right) = F(x) + C$.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

$y' + P(x)y = Q(x)$ лінійне відносно змінної y	$x' + P(y)x = Q(y)$ лінійне відносно змінної x

Загальний розв'язок

$y = u(x)\cdot v(x)$	$x = u(y)\cdot v(y)$

Методи розв'язування

Підстановка Бернуллі $y = u(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$ Метод Лагранжа $y = Ce^{-\int P(x)dx}$	Підстановка Бернуллі $x = u(y)\cdot e^{-\int P(y)dy}$ Метод Лагранжа $x = Ce^{-\int P(y)dy}$

- **Алгоритм розв'язування рівняння** $y'+P(x)y=Q(x)$ **методом Бернуллі**

1. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = u\cdot v$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції
2. Знаходимо $y' = u'\cdot v + v'\cdot u$
3. Підставляємо y і y' у рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$. Одержимо $u'\cdot v + v'\cdot u + P(x)u\cdot v = Q(x)$
4. Групуємо в лівій частині доданки відносно u: $(u'\cdot v + u\cdot\underline{(v' + P(x)\cdot v)} = Q(x))$.
5. Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю: $\begin{cases} v' + P(x)\cdot v = 0 \\ u'\cdot v = Q(x). \end{cases}$
6. Знаходимо v з першого рівняння системи, яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними: $\frac{dv}{dx} = -P(x)v$, $\frac{dv}{v} = -P(x)dx$, $ln|v| = -\int P(x)dx$, $v=e^{-\int P(x)dx}$.
7. Знаючи v, знаходимо u з другого рівняння системи пункту 5): $v\frac{du}{dx}=Q(x)$, $\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$, $du = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx$, $u = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + C$
8. Підставляємо знайдені функції u та v в $y = u\cdot v$ (загальний розв'язок) і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння: $y = v\cdot u=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

Диференціальні рівняння в повних диференціалах

Рівняння вигляду
$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$
є

рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина – повний диференціал деякої функції $U(x,y)$, тобто, $P(x,y)dy + Q(x,y)dx = du(x,y)$

рівнянням, яке можна звести до рівняння в повних диференціалах за допомогою інтегрувального множника μ

Загальний розв’язок
$u(x,y) = c$

Алгоритм розв’язування

1. Звести дане рівняння до вигляду $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$
2. Перевіряємо чи є дане рівняння рівнянням в повних диференціалах за допомогою рівняння $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
3. Прирівнюємо частинні похідні до функцій P і Q.
4. Інтегруємо одержане рівняння.
5. Диференціюємо u за y і прирівнюємо до Q .
6. Інтегруємо отримане рівняння.
7. Записуємо загальний розв’язок.

Алгоритм розв’язування

1. Припустимо, що рівняння має інтегрувальний множник, залежний тільки від x: $\mu = \mu(x)$
2. Перевіряємо чи виконується для отриманої функції умова
$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)} = \frac{d \ln \mu}{dx}$$
3. Якщо виконується, то застосовуємо алгоритм зліва пункти 3–7.
4. Якщо не виконується, то припускаємо, що рівняння має інтегрувальний множник, залежний тільки від y: $\mu = \mu(y)$.
5. Застосовуємо алгоритм зліва пункти 2–7.

Диференціальні рівняння першого порядку. Узагальнення

Тип рівнян-ня	Стандартна форма запису	Особливості	Метод розв'язування
З відокремлюваними змінними	$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0$	При диференціалах – похідна функції, яка залежить одна від *x*, інша – від *y*.	Розділяємо змінні $\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + C$
	$y' = f(x) \cdot g(y)$	Права частина – добуток функцій, які залежать одна від *x*, інша – від *y*.	Розділяємо змінні $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$
Однорідні	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Права частина – однорідна функція нульового порядку	Підстановка $\frac{y}{x} = u(x)$
	$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$	$P(x,y)$ і $Q(x,y$ - однорідні функції однакового порядку	Підстановка $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$
Рівняння, які зводяться до однорідних	$y' = \left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$	$c_1 = c = 0$, $y' = \left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right)$	Підстановка $\frac{y}{x} = u(x)$, $y'=u' \cdot x+u$
	$y' = \left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$	$c_1 \neq c \neq 0$, $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$	Підстановка $x = x_1 + h$, $dx = dx_1$ $y = y_1 + k$, $dy = dy_1$
	$y' = \left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$	$c_1 \neq c \neq 0$, $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, $a_1 = a \cdot \lambda$, $b_1 = b \cdot \lambda$	Підстановка $dz = ax + by$

Диференціальні рівняння першого порядку. Узагальнення

Тип рівнян-ня	Стандартна форма запису	Особливості	Метод розв'язування
В повних диференціалах	$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$	$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$	$\int_x^x P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^y Q(x,y)dy=C$ $\int_x^x P(x,y)dx+\int_{y_0}^y Q(x_0,y)dy=C$
Лінійне	$y'+P(x)y=Q(x)$	Першого степеня відносно y та y'_x Функції $P(x)$ і $Q(x)$ неперервні на деякому проміжку (a,b)	Підстановка $y=u(x)\cdot v(x)$ $y'=u'\cdot v+v'\cdot u$
	$x'+P(y)x=Q(y)$	Першого степеня відносно x та x'_y Функції $P(y)$ і $Q(y)$ неперервні на деякому проміжку (a,b)	Підстановка $x=u(y)\cdot v(y)$ $y'=u'\cdot v+v'\cdot u$
Бернуллі	$y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n$	Відрізняється від лінійного правою частиною	Підстановка $y^{-n+1}=z$, $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

Зауваження!!! Зручно звести диференціальне рівняння першого порядку до вигляду $y'=f(x,y)$, а потім за даною класифікацією визначити тип рівняння і тільки після цього розв'язувати його відповідним методом.

Диференціальні рівняння вищих порядків

Основні поняття: системи диференціальних рівнянь першого порядку; лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР), ЛОДР зі сталими коефіцієнтами; розв'язок ЛОРД; загальний розв'язок ЛОРД; частинний розв''язок ЛОРД, задача Коші.

Загальний вигляд

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

Загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$$

Початкові умови

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,$$

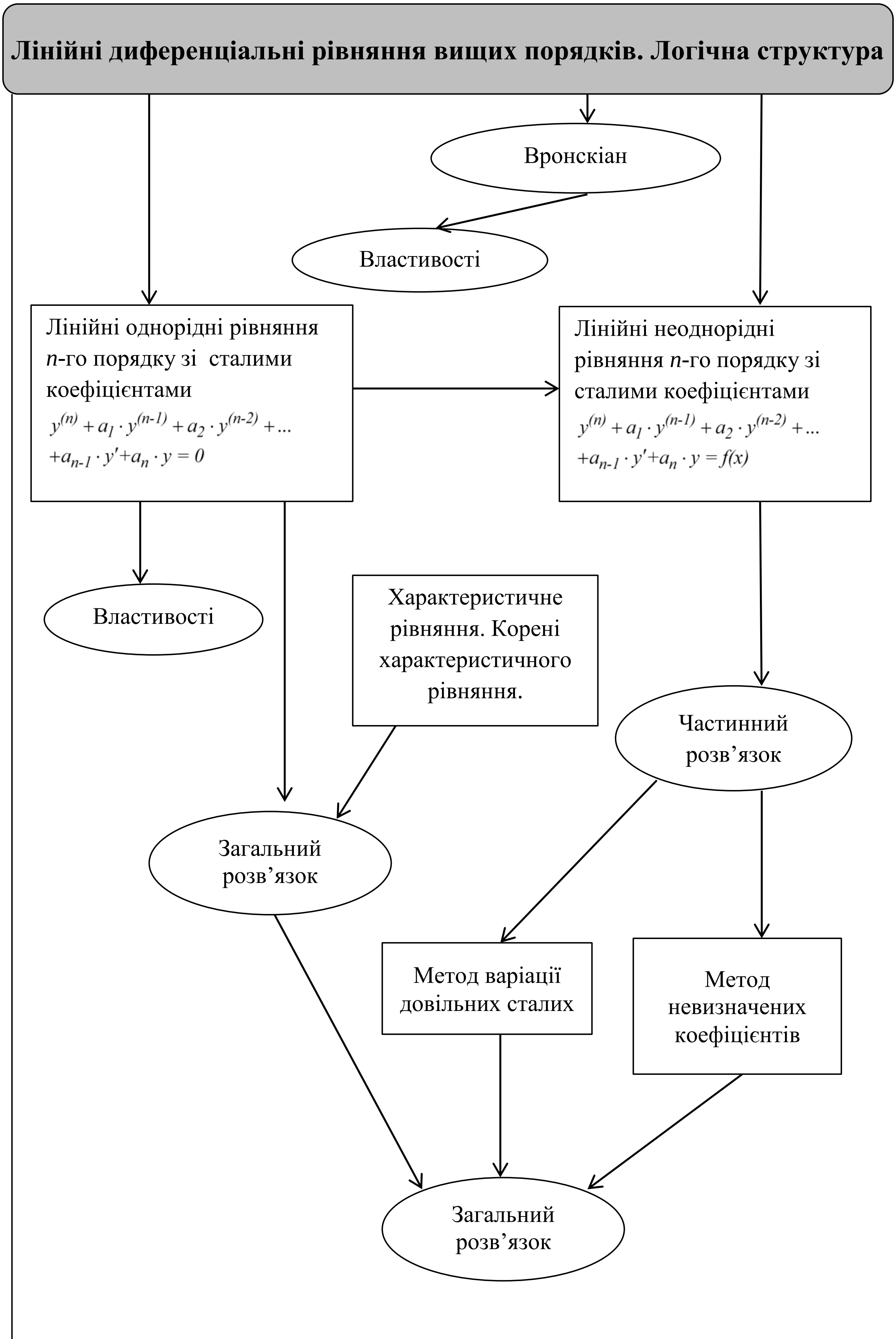
$$y'\big|_{x=x_0} = y'_0,$$

$$y''\big|_{x=x_0} = y''_0,$$

$$y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

Частинний розв'язок

$$y = \varphi^*(x)$$


Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Логічна структура
Вронскіан
Властивості
Лінійні однорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами
$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0$
Лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами
$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x)$
Властивості
Характеристичне рівняння. Корені характеристичного рівняння.
Частинний розв'язок
Загальний розв'язок
Метод варіації довільних сталих
Метод невизначених коефіцієнтів
Загальний розв'язок

Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

Тип рівняння	Особливості рівняння	Розв'язок
$y^{(n)} = f(x)$	Розв'язок рівняння шукаємо шляхом послідовного n-кратного інтегрування	$y = \int dx \int dx \int dx ... \int f(x)dx +$ $+P_{n-1}(x)$ де $P_{n-1}(x) = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... +$ $+c_{n-1}x + c_n$ Після n-кратного інтегрування одержуємо загальний розв'язок $y = \varphi_n(x) + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... +$ $+c_{n-1}x + c_n$
$F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0$	Заміна $y^{(k)} = p(x)$ знижує порядок рівняння на k одиниць: $F(x, p(x), ..., p^{(n-k)}) = 0$	Із загального розв'язку $p(x) = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$ шукана функція $y(x)$ одержується шляхом k- кратного інтегрування функції $\varphi(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$
$F(y, y', y'') = 0$	Рівняння не містить незалежної змінної	Позначаємо $y' = p(y)$, де $p(y) = \dfrac{dy}{dx}$ Розв'язуємо рівняння $F(y, p(y), p'(y)) = 0$, де $y = y(x)$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку

Властивості лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + a_2(x)\cdot y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = 0$$

y_1 та y_2 – два частинних розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку → $y_1 + y_2$ – також розв'язок цього рівняння

y_1 є розв'язком рівняння і c є константа → $c\,y_1$ також є розв'язком рівняння

$y_1, y_2, ..., y_n$ є частинними розв'язками рівняння → лінійна комбінація $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ є також розв'язком даного рівняння

Вронскіан →

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Властивості вронскіана

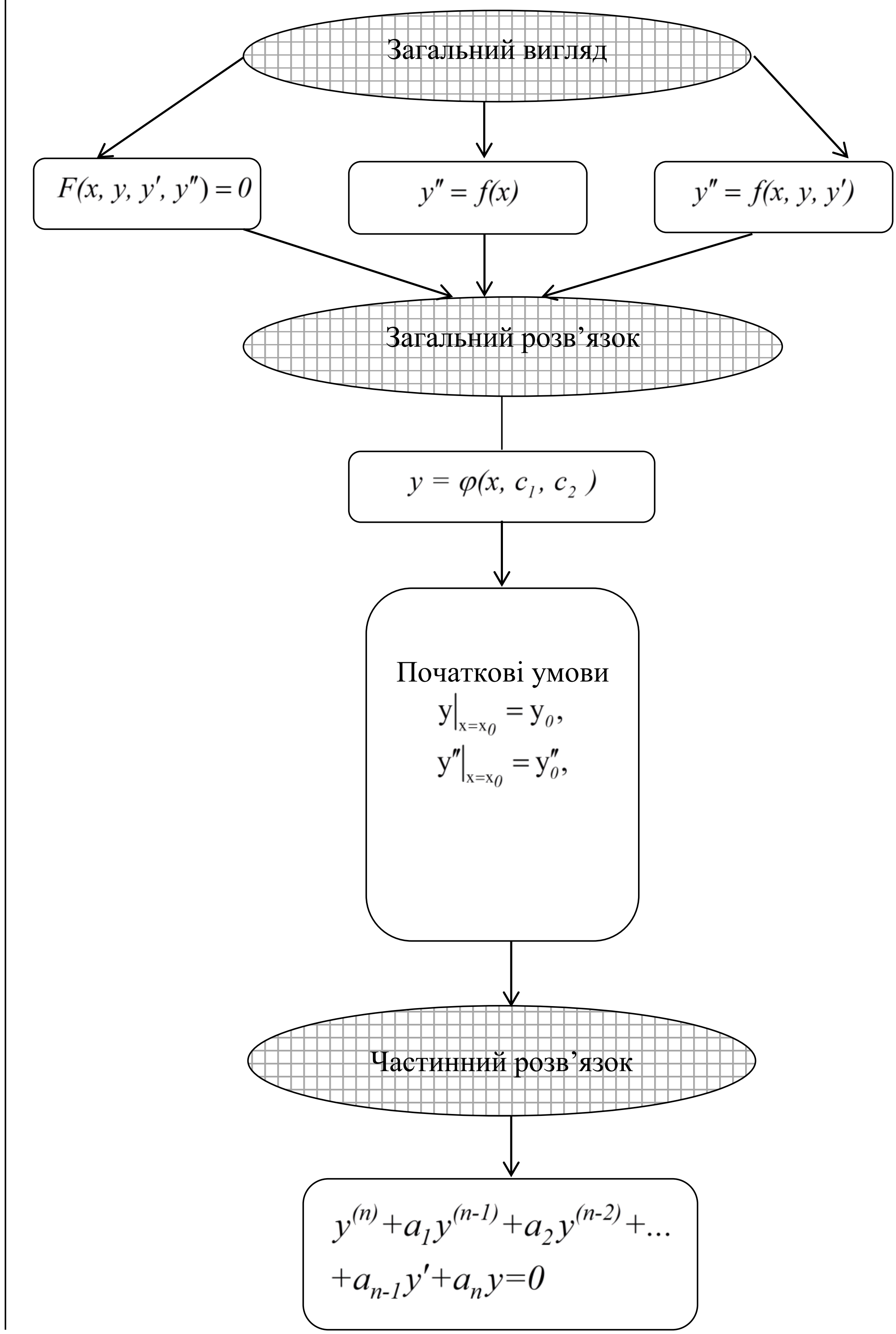
функції $y_1,\ y_2, ..., y_n$ лінійно залежні → Вронскіан цієї системи дорівнює нулю

Вронскіан $W(y_1,\ y_2, ..., y_n) \neq 0$ для деякого $x = x_0$ на проміжку $[a, b]$ → Вронскіан не дорівнює нулю в жодній точці на цьому проміжку

розв'язки y_1, y_2 лінійного однорідного рівняння $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$ лінійно незалежні на проміжку $[a,b]$ → Вронскіан не дорівнює нулю в жодній точці на цьому проміжку

$y_1,\ y_2, ..., y_n$ є фундаментальною системою розв'язків лінійного → лінійна комбінація $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ є загальним розв'язком рівняння, де $c_1, c_2, ..., c_n$ – довільні константи

Диференціальні рівняння другого порядку



Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне рівняння
$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$

Характеристичне рівняння
$k^2 + pk + q = 0$

Загальний розв'язок
$y_{зо} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$,
де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ частинні розв'язки

k_1 і k_2 – корені характеристичного рівняння

Корені характеристичного рівняння		**Загальний рзв'язок – лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами**
Корені дійсні і різні	$k_1 \neq k_2; k_1, k_2 \in R$ $D=p^2-4q>0$	$y_{зо}=c_1 \cdot e^{k_1 x} + c_2 \cdot e^{k_2 x}$
Корені дійсні і рівні	$k_1=k_2; k_1, k_2 \in R$ $D=p^2-4q>0$	$y_{зо}=c_1 \cdot e^{k_1 x} + c_2\ x\, e^{k_2 x}$
Корені комплексні	$k_1, k_2 \in C$ $D=p^2-4q<0$ $k_1 = \alpha + i\beta$ $k_2 = \alpha - i\beta$, де $i=\sqrt{-1}$	$y_{зо}=c_1 \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x$

- **Алгоритм розв'язування лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами**

1. Переходимо від лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі стали кефіцієнтами $y''+p \cdot y'+q \cdot y=0$ до квадратного рівняння $k^2+pk+q=0$ (характеристичне рівняння).
2. Розв'язуємо характеристичне рівняння $k^2+pk+q=0$, де k_1 і k_2 його корені.
3. Формуємо загальний розв'язок ($y_{зо}$) лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне рівняння
$y'' + p\cdot y' + q\cdot y = f(x)$

Загальний розв'язок
$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}$

$y_{зо}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння

$y_{зо} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

$y_{чн}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$y_{чн}$ – знаходиться в залежності від функції $f(x)$

Ч.ч.		**Вигляд правої частини** $f(x)$	**Корені характеристичного рівняння**	**Структура частинного розв'язку**
1	*a*	$f(x) = P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$, $\alpha = 0$ $P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m$	Число 0 не є коренем характеристичного рівняння	$y_{чн} = U_m(x)$
	b		Число 0 є коренем характеристичного рівняння кратності r	$y_{чн} = x^r \cdot U_m(x)$
2	*a*	$f(x) = P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$, $\alpha \neq 0$ $P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m$	Число α не є коренем характеристичного рівняння	$y_{чн} = U_m(x)\cdot e^{\alpha x}$
	b		Число α є коренем характеристичного рівняння кратності r	$y_{чн} = x^r \cdot U_m(x)\cdot e^{\alpha x}$
3	*a*	$f(x) = P_m(x)\cdot \cos\beta x + Q_n(x)\cdot \sin\beta x$	Число $i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння	$y_{чн} = M_k(x)\cdot \cos\beta x + N_k(x)\cdot \sin\beta x$
	b		Число $i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r	$y_{чн} = x^r \cdot (M_k(x)\cdot \cos\beta x + N_k(x)\cdot \sin\beta x)$
4	*a*	$f(x) = P_m(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot \cos\beta x + Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot \sin\beta x$	Число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння	$y_{чн} = e^{\alpha x}\cdot (M_k(x)\cdot \cos\beta x + N_k(x)\cdot \sin\beta x)$
	b		Число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r	$y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x}\cdot (M_k(x)\cdot \cos\beta x + N_k(x)\cdot \sin\beta x)$

➢ **Алгоритм розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)**

Знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння. Покладаємо, що $c_1(x), c_2(x)$ – деякі функції, що залежать від x і записуємо розв'язок однорідного рівняння у вигляді $y = c_1(x)\cdot y_1 + c_2(x)\cdot y_2$

↓

Приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

↓

Розв'язавши систему, ми знайдемо

$c_1'(x),\ c_2'(x)$: $c_1'(x) = \varphi_1(x),\ c_2'(x) = \varphi_2(x)$

↓

Інтегруючи $c_1'(x)$ та $c_2'(x)$, ми отримаємо

$c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + A_1,\ c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + A_2,$

де A_1 і A_2 – константи інтегрування

↓

Записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + A_1 y_1 + A_2 y_2$$

↓

Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

Сукупність рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y \end{cases}$,

де коефіцієнти a_{ij} – сталі, t – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається системою двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Задача Коші для системи полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$

➢ Алгоритм розв'язування системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

1. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12} \neq 0$, виразимо в ньому y через x:
   $y = \dfrac{1}{a_{12}} \cdot \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}} x$
2. Продиференціюємо цю рівність за t $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{a_{12}} \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}} \cdot \dfrac{dx}{dt}$
3. Підставляємо y і $\dfrac{dy}{dt}$ в друге рівняння системи, одержимо:
   $\dfrac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{12})\dfrac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$ – лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду
   $x''(t) + a_1 \cdot x'(t) + a_2 \cdot x(t) = 0$ з незалежною змінною t і невідомою функцією $x(t)$.
4. Знайдену $x(t)$ підставляємо в пункт 1) і знаходимо $y(t)$
5. Формуємо розв'язок системи $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

   Зауваження. Якщо в першому рівнянні системи коефіцієнт $a_{12} = 0$, то це рівняння матиме вигляд $\dfrac{dx}{dt} = a_{11}x$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, підставимо знайдену функцію $x(t)$ в друге рівняння системи $\dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$ і отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y(t)$. Розв'язуємо його і записуємо остаточну відповідь.

Семантичний конспект до змістового модуля «Диференціальні рівняння та їх системи»

- ✓ рівняння, в яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називаються диференціальними рівняннями;
- ✓ якщо в диференціальному рівнянні невідома функція є функцією однієї незалежної змінної, то таке диференціальне рівняння називається звичайним: $F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0$;
- ✓ якщо невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, є функцією двох і більшого числа незалежних змінних, то таке диференціальне рівняння називається рівнянням у частинних похідних;
- ✓ порядком диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної (або диференціала), що входить у нього;
- ✓ розв'язком диференціального рівняння в інтервалі (a, b) називається n разів диференційована функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює рівняння в тотожність $F(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(k)}(x)) = 0$;
- ✓ розв'язати диференціальне рівняння – означає знайти всі його розв'язки;
- ✓ операція знаходження розв'язків диференціального рівняння називається інтегруванням цього рівняння;
- ✓ задача інтегрування диференціального рівняння вважається розв'язаною, якщо цю задачу звести до простішої і вже вивченої в курсі інтегрального числення задачі обчислення невизначених інтегралів.

Диференціальні рівняння першого порядку

- ✓ диференціальне рівняння першого порядку має вигляд $F(x, y, y') = 0$;
- ✓ якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в деякій області D на площині $0xy$, яка містить деяку точку (x_0, y_0), то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє умову $y = y_0$ при $x = x_0$;
- ✓ умова, що при $x = x_0$ функція y має дорівнювати заданому числу y_0, називається початковою умовою, або умовою Коші: $y(x)\big|_{x=x_0} = y_0$ або $y(x_0) = y_0$;
- ✓ задача, у якій потрібно знайти частинний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, називається задачею Коші;
- ✓ загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x,C)$;

- ✓ рівність вигляду $\Phi(x, y, C) = 0$, яка неявно задає загальний розв'язок, називається загальним інтегралом диференціального рівняння;
- ✓ частинним розв'язком називається будь-яка функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється з загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$, якщо в останньому довільній сталій C надати певне значення $C = C_0$;
- ✓ рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називається в цьому випадку частинним інтегралом рівняння;
- ✓ розв'язати або проінтегрувати диференціальне рівняння – значить:
- ✓ а) знайти його загальний розв'язок або загальний інтеграл (якщо початкові умови не задані) або б) знайти той частинний розв'язок рівняння, який задовольняє задані початкові умови (якщо такі є);
- ✓ особливим розв'язком називається такий розв'язок, у всіх точках якого умова одиничності не виконується, тобто, в будь-якому околі кожної точки (x, y) особливого розв'язку існують принаймні дві інтегральні криві, які проходять через цю точку.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

- ✓ диференціальне рівняння типу $M(x)dx + N(y)dy = 0$ називають рівнянням із відокремлюваними змінними, в цьому рівнянні змінні відокремлені, тобто, при dx знаходиться тільки функція від x, а при dy – тільки функція від y;
- ✓ диференціальні рівняння, у яких змінні можна розділити за допомогою множення або ділення обох частин рівняння на один і той самий вираз, називаються диференціальними рівняннями зі змінними, які відокремлюються, $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$.

Однорідні рівняння першого порядку

- ✓ функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n-го порядку щодо змінних x і y, якщо при будь-якому t справедлива тотожність $f(t\,x, t\,y) = t^n f(x,y)$;
- ✓ рівняння вигляду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ називається однорідним, якщо функції при dx і dy є однорідними однакового порядку.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

- ✓ лінійним рівнянням першого порядку називається рівняння, що має вигляд $y' + P(x)y = Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – задані неперервні функції від x (або сталі);
- ✓ якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння називається лінійним однорідним;
- ✓ якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння називається лінійним неоднорідним;

- ✓ рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду $y' + P(x) = Q(x) \cdot y^m$ або $x' + P(y)x = Q(y)$;
- ✓ суть методу Лагранжа полягає в тому, що спочатку знаходимо загальний розв'язок $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$ відповідного лінійного однорідного рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$. Потім, вважаючи в цьому розв'язку сталу C функцією від x, шукаємо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$.

Диференціальні рівняння в повних диференціалах

✓ рівняння $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ називається рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина – повний диференціал деякої функції $u(x, y)$, тобто, $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$;

✓ необхідною і достатньою умовою повного диференціала є рівність частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$;

✓ загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах має вигляд u $u(x, y) = c$;

✓ щоб функція $\mu(x)$, неперервна в однозв'язній області D разом зі своїми частинними похідними μ'_x і μ'_y, була інтегрувальним множником диференціального рівняння, необхідно і достатньо, щоб для всіх точок $(x, y) \in D$ виконувалась рівність $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$.

Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної

- ✓ Рівняння вигляду $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, в якому шукана функція, її похідна і аргумент є, в свою чергу, аргументами функції F, називається рівнянням, нерозв'язним відносно похідної;
- ✓ Ці рівняння мають алгоритм розв'язання, лише в окремих випадках;
- ✓ Рівняння вигляду $F(y', x) = 0$ не містить шуканої функції і його можна розв'язати відносно x;
- ✓ Рівняння вигляду $F(y, y') = 0$ не містить аргумент x і його можна розв'язати відносно y;
- ✓ Існують особливі типи рівнянь, що не розв'язуються відносно похідної, в які y та x входять лінійно, а коефіцієнт є функцією від похідної: рівняння Лагранжа $y = x \cdot \varphi(y) + \phi(y);$ рівняння Клеро $y = x \cdot y' + \phi(y')$

Лінійні диференціальні рівнянням *n*-го порядку

✓ Лінійним диференціальним рівнянням *n*-го порядку називається рівняння вигляду $y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+a_2(x)\cdot y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=f(x)$. Воно лінійне відносно шуканої функції y і її похідних $y', y'', ..., y^{(n)}$.

✓ Якщо $f(x)\neq 0$, то рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням *n*-го порядку. Якщо ж $f(x)=0,$ то рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням *n*-го порядку.

Основні властивості лінійних однорідних рівнянь

✓ Рівняння вигляду $y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$, де p і q – дійсні числа, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

✓ Квадратне рівняння $k^2+pk+q=0$ називається відповідним характеристичним рівнянням

✓ Теорема 1. Якщо y_1 та y_2 – два частинних розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку $y''+a_1\cdot y'+a_2\cdot y=0$ тоді y_1+y_2 є також розв'язком цього рівняння.

✓ Теорема 2. Якщо y_1 є розв'язком рівняння $y''+a_1\cdot y'+a_2\cdot y=0$ і $C=const$, то Cy_1 також є розв'язком рівняння $y''+a_1\cdot y'+a_2\cdot y=0$.

✓ Теорема 3. Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ є частинними розв'язками рівняння $y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+a_2(x)\cdot y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=0$, то їх лінійна комбінація $y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$ також є розв'язком даного рівняння.

✓ Система рівнянь є лінійно залежною на інтервалі $[a,b]$, якщо існує таке n число $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n$, які не дорівнють нулю, і лінійна комбінація розв'язків системи дорівнює нулю $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+....+\lambda_ny_n=0$.

✓ Система функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ є лінійно залежною, якщо принаймні одна з цих функцій є лінійною комбінацією інших.

✓ Система функцій називається лінійно незалежною, якщо існують такі коефіцієнти $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n$, що виконується умова $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+....+\lambda_ny_n=0$.

✓ Якщо система функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ диференційована $(n\text{-}1)$ разів, тоді визначник вигляду

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

називається вронскіаном даних функцій.

Властивості вронскіана

1. Якщо функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно залежні, то вронскіан цієї системи дорівнює нулю.

2. Якщо вронскіан $W(y_1, y_2)$, який складається з розв'язків лінійного однорідного рівняння $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$, не дорівнює нулю для деякого $x = x_0$ на відрізку $[a, b]$ і всі коефіцієнти є неперервними на цьому відрізку, то він не перетворюється в нуль в жодній з точок x на цьому відрізку.

3. Якщо розв'язки y_1, y_2 лінійного однорідного рівняння $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$ лінійно незалежні на відрізку $[a, b]$, то вронскіан $W(x)$, який складений з цих розв'язків, не перетворюється в нуль в жодній точці даного відрізку.

✓ Система частинних розв'язків $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійного однорідного рівняння n-го порядку називається фундаментальною, якщо вона складається з n лінійно незалежних функцій.

✓ Теорема. Якщо $y_1, y_2, \dots, y_n$ є фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння $y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0$, то їх лінійна комбінація $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні константи, є загальним розв'язком цього рівняння.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ «ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Операційне числення. Перетворення Лапласа

Функція-оригінал *f(t)*

Функція-зображення *F(p)*

Відповідність між оригіналом *f(t)* і зображенням $F(p)$

$f(t) \div F(p)$ або $F(p) \div f(t)$ або

$F(p) \to f(t)$

Функція-оригінал – *f(t)*, $f(t)$ – комплексна функція дійсної змінної t

$f(t)$ задовольняє умови:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.
2. $f(t)$ – кусково-неперервна при $t \geq 0$, тобто вона неперервна або має точки розриву I роду, причому на кожному скінченному відрізку осі t таких точок лише скінченне число.

Існують такі числа $M > 0$ та $s_0 \geq 0$, що для всіх t виконується нерівність $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$, тобто при зростанні t функція $f(t)$ може зростати не швидше деякої показникової функції. Число s_0 називається ***показником*** зростання $f(t)$.

$$f(t) = \begin{cases} f(t) \cdot \eta(t), \text{при } t > 0 \\ 0, \text{при } t < 0 \end{cases},$$

де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда

Функція-зображення *F(p)*

F(p) – функція комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається нтегралом

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

$F(p) \to f(t)$

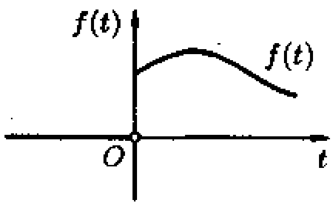
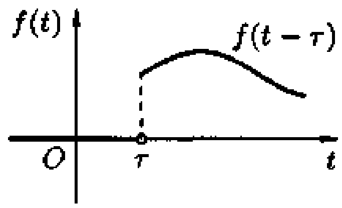
$$\lim_{p \to \infty} F(p) = 0$$

$F(p) \to f_1(t)$,

$F(p) \to f_2(t)$

$$f_1(t) = f_2(t)$$

Основні властивості перетворень Лапласа

<table>
<tr><th>Класифікація властивостей</th><th>Умови</th><th>Висновки</th></tr>
<tr><td>Властивість однорідності</td><td>$f(t) \to F(p)$
a – комплексне число</td><td>$a \cdot f(t) \to a \cdot F(p)$</td></tr>
<tr><td>Властивість додавання</td><td>$f_1(t) \to F_1(p)$
$f_2(t) \to F_2(p)$</td><td>$f_1(t) + f_2(t) \to F_1(p) + F_2(p)$</td></tr>
<tr><td>Властивість лінійності</td><td>$f_1(t) \to F_1(p)$
$f_2(t) \to F_2(p)$
– – – – – – –
$f_n(t) \to F_n(p)$
$c_1, c_2, ..., c_n$ – комплексні числа</td><td>$\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(t) \to \sum\limits_{i=1}^{n} c_i F_i(p)$</td></tr>
<tr><td>Теорема подібності</td><td>$f(t) \to F(p)$
α – комплексне число</td><td>$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \alpha > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Теорема зміщення в аргументі оригіналу</td><td>$f(t) \to F(p),\ t_0 > 0$</td><td>$f(t-t_0) \to e^{-t_0 p} \cdot F(p)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Графіки функції $f(t)$ і $f(t-\tau)$ мають однаковий вигляд, але графік функції $f(t-\tau)$ зміщений на τ одиниць вправо. Функції $f(t)$ і $f(t-\tau)$ описують той самий процес, але процес функції $f(t-\tau)$ починається з запізненням на час τ.</td></tr>
<tr><td>Теорема зміщення в аргументі зображення</td><td>$f(t) \to F(p)$
p_0 – комплексне число</td><td>$e^{p_0 t} \cdot f(t) \to F(p-p_0)$</td></tr>
<tr><td>Теорема випередження</td><td>$f(t) \to F(p)$,
$t_0 > 0$</td><td>$f(t+t_0) \to e^{t_0 p} \cdot F(p) \times$
$\times \left[F(p) - \int\limits_0^{t_0} e^{-pt} \cdot f(t) dt \right]$</td></tr>
</table>

Функції-оригінали. Дії над оригіналами.

Функція-оригінал

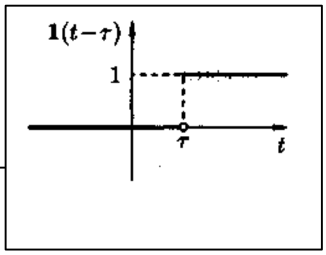
$$f(t)=\begin{cases} f(t)\cdot\eta(t), \text{при } t>0; \\ 0, \text{ при } t<0 \end{cases}$$

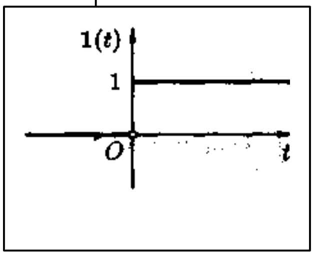
Одинична функція Хевісайда

$$\eta(t)=\begin{cases} 1, \text{при } t\ge 0; \\ 0, \text{ при } t<0 \end{cases}$$

Узагальнена одинична функція Хевісайда

$$\eta(t-\tau)=\begin{cases} 1 \text{ при } t\ge\tau \\ 0 \text{ при } t<\tau \end{cases}$$





Класифікація властивостей	Умови	Висновки
Диференціювання оригіналів	$f(t)\to F(p)$ $f(0)=\lim\limits_{t\to 0+0} f(t)$ …………………… $f^{(n-1)}(0)=\lim\limits_{t\to 0+0} f^{(n-1)}(t)$	$f'(t)\to pF(p)-f(0)$, $f''(t)\to p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$ ………………………………… $f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-p^{(n-1)}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
Інтегрування оригіналів	$f(t)\to F(p)$	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$
	інтегрування оригіналу від 0 до t відповідає діленню його зображення на p	
Диференціювання за параметром	$f(t,\lambda)\to F(p,\lambda)$ похідна $\dfrac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda)$ існує	$\dfrac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda)\to\dfrac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda)$
Інтегрування за параметром	$f(t,\lambda)\to F(p,\lambda)$, інтеграли $\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f(t,\lambda)d\lambda$ і $\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} F(p,\lambda)d\lambda$ існують	$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f(t,\lambda)d\lambda\to\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} F(p,\lambda)d\lambda$
Множення оригіналів	$f_1(t)\to F_1(p)$ і $f_2(t)\to F_2(p)$	$f_1(t)\cdot f_2(t)\div\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} F_1(z)\cdot F_2(p-z)dz$
Зображення періодичного оригіналу	$f(t)=f(t+T)$ і $f(t)\to F(p)$	$F(p)=\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int\limits_0^T e^{-pt}\cdot f(t)dt$

Функції-зображення. Дії над зображеннями

Функція-зображення

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt, \text{ де } p=s+i\sigma$$

<table>
<tr><th>Класифікація властивостей</th><th>Умови</th><th>Висновки</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Диференціювання зображення</td><td>$f(t)\rightarrow F(p)$</td><td>$F'(p)\div -t\cdot f(t)$,
$F''(p)\div(-1)^2\cdot t^2\cdot f(t)$,
....
$F^{(n)}(p)\div(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$,
$(n=1,2,......)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">диференціюванню зображення відповідає множення його оригіналу на $(-t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Інтегрування зображень</td><td>$f(t)\rightarrow F(p)$
$\int_p^{\infty} F(p)dp$ є збіжним інтегралом</td><td>$\int_p^{\infty} F(p)dp\rightarrow \frac{f(t)}{t}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">інтегрування зображення від p до ∞ відповідає діленню його оригіналу на t.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Множення зображень</td><td>$f_1(t)\rightarrow F_1(p)$,
$f_2(t)\rightarrow F_2(p)$</td><td>$F_1(p)\cdot F_2(p)\div\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau=$
$=\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Множення оригіналів рівносильне їхньому згортанню, тобто $F_1(p)\cdot F_2(p)\div f_1(t)*f_2(t)$</td></tr>
<tr><td>Формула Дюамеля</td><td>$f_1(t)\rightarrow F_1(p)$,
$f_2(t)\rightarrow F_2(p)$
$F_1(p)F_2(p)\rightarrow f_1*f_2$</td><td>$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\rightarrow\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2'(t-\tau)d\tau+$
$+f_1(t)\cdot f_2(0)$
або
$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\rightarrow\int_0^t f_2(\tau)\cdot f_1'(t-\tau)d\tau+$
$+f_2(t)\cdot f_1(0)$</td></tr>
</table>

Теореми розкладання

Класифікація властивостей	**Умови**	**Висновки**
Теорема: Нехай $f(t)\to F(p)$, де p_k – особливі точки функції $F(p)$ і $\dfrac{A(p)}{B(p)}$ – правильний дріб, тоді:		
Випадок простих полюсів	$f(t)\to \dfrac{A(p)}{B(p)}=F(p)$, p_k – прості полюси функції $F(p)$, $(k=1,2,...,n)$ $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}=\dfrac{c_1}{p-p_1}+\dfrac{c_2}{p-p_2}+...+$ $+\dfrac{c_n}{p-p_n}$	$f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)}\cdot e^{p_k t}$
Випадок кратних полюсів	$f(t)=\dfrac{A(p)}{B(p)}=F(p)$ p_k – полюси $F(p)$ m_k – кратність полюса	$f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(m_k-1)!}\times$ $\times\lim\limits_{p\to p_k}\dfrac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left[(p-p_k)^{m_k}\dfrac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right]$
Випадок нескінченної кількості полюсів	p_k – полюси $F(p)$ в площині $\operatorname{Re} p < s_0$ $(k = 1,2,...)$	$f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} Res\left[e^{pt}F(p), p = p_k\right]$

Теореми розкладання

Класифікація властивостей	Умови	Висновки
Обчислення лишків		
$p=a$ простий полюс функції $F(p)$	$\lim\limits_{p\to a} F(p) = \infty$ – для полюса функції	$Res\left[F(p), p = a\right] = \lim\limits_{p\to a}(p - a)\cdot F(p)$ або $Res\left[F(p), p = a\right] = \dfrac{f_1(a)}{f_2'(a)}$
$p = a$ полюс кратності $n(n > 1)$ функції $F(p)$	$\lim\limits_{p\to a} F(p) = \infty$ – для полюса функції	$Res\left[F(p), p = a\right] = \dfrac{1}{(n - 1)!}\lim\limits_{p\to a}\dfrac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left[(p - a)^n F(p)\right]$

Зауваження. Якщо $p_k = \alpha + i\beta$ і $\overline{p_k} = \alpha - i\beta$ – комплексно-спряжені полюси функції $F(p)$, то суму лишків у цих полюсах зручно обчислювати за формулою

$$Res\left[F(p), p = p_k\right] + Res\left[F(p), p = \overline{p_k}\right] = 2ReRes\left[F(p), p = p_k\right]$$

Таблиця оригіналів та відповідних зображень

Ч.ч.	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
1	1 або $\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$
2	e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$

Таблиця оригіналів і відповідних зображень

3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{w}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$sh\omega t$	$\frac{w}{p^2-\omega^2}$
7	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{at}\cdot\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot sh\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11	$e^{at}\cdot ch\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n (n - ціле)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at}\cdot t^n$	$\frac{n!}{\{p-a)^{n+1}}$
14	$t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cdot\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cdot sh\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$

Формули перетворень Лапласа

17	$t \cdot ch\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$e^{at} \cdot t \cdot \sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(p-a)}{((p^2-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$e^{at} \cdot t \cdot \cos\omega t$	$\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{\left((p^2-a)^2+\omega^2\right)^2}$
20	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\omega t ch\omega t - sh\omega t)$	$\dfrac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$
22	$\sin(\omega t \pm \gamma)$	$\dfrac{\omega\cos\gamma \pm p\sin\gamma}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t \pm \gamma)$	$\dfrac{p\cos\gamma \pm \omega\sin\gamma}{p^2+\omega^2}$

Семантичний конспект до змістового модуля «Операційне числення»

✓ Функція $f(t)$ називається *оригіналом*, якщо вона задовольняє умови:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

2. $f(t)$ – кусково-неперервна при $t \geq 0$, тобто вона неперервна або має точки розриву І роду, причому на кожному інтервалі скінченної довжини осі t таких точок лише скінченне число.

3. Існують такі числа $M > 0$ та $s_0 \geq 0$, що для всіх t виконується нерівність $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$, тобто, при зростанні t функція $f(t)$ може зростати не швидше деякої показникової функції. Число s_0 називається *показником* зростання $f(t)$. Умови 1–3 виконуються для більшості функцій, що описують різні фізичні процеси.

✓ *Зображенням оригіналу* $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається інтегралом $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$.

✓ Операцію переходу від оригіналу $f(t)$ до зображення $F(p)$ називають *перетворенням Лапласа*.

✓ Відповідність між оригіналами і зображеннями буде мати такі властивості: 1. Ця відповідність є взаємно однозначною, тобто будь-якому оригіналу відповідатиме єдине зображення і навпаки. 2. Довільній лінійній комбінації скінченної множини оригіналів відповідає як зображення єдина лінійна комбінація їхніх відповідних зображень.

✓ Функція $\eta(\mathrm{t})$, яка визначається формулою $\eta(t) = \begin{cases} 1, \text{при } t \geq 0; \\ 0, \text{при } t < 0 \end{cases}$ називається *одиничною функцією Хевісайда*.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ «РЯДИ»

Числові ряди

Числовий ряд

$a_1+a_2+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
де числа a_1, a_2, ... – члени ряду,
a_n – загальний член ряду.

n-а – **частинна сума ряду**

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Сума ряду

$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...,$,
тобто, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

Збіжність ряду

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$

$\begin{cases} S = const, \text{ ряд збіжний} \\ S = \infty \text{ або } S = \varnothing, \text{ ряд розбіжний} \end{cases}$

Найпростіші властивості збіжних рядів

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму S → ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ також збігається і має суму cS

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ розбіжний → ряд $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n$ (при $c \neq 0$) також розбіжний

ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ збіжні і мають, відповідно, суми S і σ → ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ збігається і має суму $S + \sigma$

Додатні ряди. Ознаки збіжності

Додатні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$

Необхідна ознака збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

(якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд є збіжним або розбіжним (дослідити далі)

Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний

Достатні ознаки збіжності додатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$

Ознаки порівняння		**Ознака Д'Аламбера**	**Радикальна ознака Коші**
Перша ознака	**Друга ознака (гранична форма)**		
Якщо для додатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $a_n \le b_n$ для всіх n, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.	Якщо для додатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ існує скінченна додатна границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то ці ряди збіжні або розбіжні одночасно.	Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \ge 0$, то при $l < 1$ даний ряд збіжний, при $l > 1$ – розбіжний, при $l = 1$ ознака відповіді не дає.	Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l < 1$ даний ряд збіжний, а при $l > 1$ – розбіжний, при $l = 1$ ознака відповіді не дає.

Інтегральна ознака Коші – Маклорена

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можуть бути подані як числові значення деякої неперервної монотонно спадної на $[1;+\infty]$ функції $f(x)$ так, що $a_1 = f(1)$, …, $a_n = f(n)$, то невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ одночасно або обидва збіжні або обидва розбіжні.

Додатні ряди. Ознаки збіжності

<table>
<tr><th colspan="4">Застосування достатніх ознак збіжності</th></tr>
<tr><th>Ознака</th><th>a_n містить:</th><th>Приклад</th><th>Ряди-еталони для порівняння</th></tr>
<tr><td>Ознака порівняння</td><td>а) многочлени (степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника);
б) радикали;
в) тригонометричні і обернені тригонометричні вирази.</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3+3n}{n^3+1}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$</td><td rowspan="4">1.Гармонічний ряд
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$

2. Узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхле)
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}-\begin{cases}\alpha>1, \textit{ряд збіжний}\\ \alpha\le 1, \textit{ряд розбіжний}\end{cases}$

3. Геометричний ряд
$\sum_{n=1}^{\infty}a\cdot q^{n-1}-\begin{cases}\lvert q\rvert<1, \textit{ряд збіжний і } S=\frac{a}{1-q}\\ \lvert q\rvert\ge 1, \textit{ряд розбіжний}\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Ознака Д’Аламбера</td><td>А) факторіал;
Б) показникові функції</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n+1}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5n+1}$</td></tr>
<tr><td>Радикальна ознака Коші</td><td>Вирази вигляду n^n</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{5n}\right)^{2n}$</td></tr>
<tr><td>Інтегральна ознака Коші</td><td>Застосовується в решті випадків</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^4(n+3)}$</td></tr>
</table>

Знакозмінні ряди

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно збіжний — *якщо* — Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збіжний

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ умовно збіжний — *якщо* — $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний

Знакозмінний ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ збіжний — *якщо* — $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $|a_1| > |a_2| > \ldots > |a_n|$

Властивості абсолютно збіжних рядів

Ряд збіжний абсолютно. — Ряд, одержаний з нього будь-якою перестановкою членів, також абсолютно збіжний і має ту саму суму.

Ряд збіжний умовно. — В результаті перестановки його членів можна одержати ряд, який має наперед задану суму і є також розбіжним.

Знакозмінні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \ a_n > 0$$

Дослідити на збіжність

Застосувати ознаку Лейбніца

1. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$; 2. $|a_1| > |a_2| > .... > |a_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ <u>збігається</u>, $(S \le a_1)$ якщо обидві умови ознаки Лейбніца виконуються

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ро<u>збігається</u>, якщо хоча б одна з умов ознаки Лейбніца не виконуються

Дослідити на абсолютну, умовну збіжності

Дослідити ряд із модулів, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} a_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, за однією з достатніх ознак

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} a_n\right|$ розбігається

До ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ застосувати ознаку Лейбніца

Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ збіжний за ознакою Лейбніца, то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ <u>збігається умовно.</u>

Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ розбігається за ознакою Лейбніца, то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ <u>розбігається.</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} a_n\right|$ збігається

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ збігається абсолютно

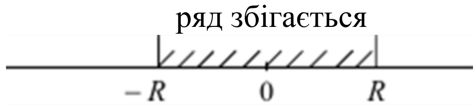
Функціональні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \quad f_n(x)$$ – функції

Степеневий ряд

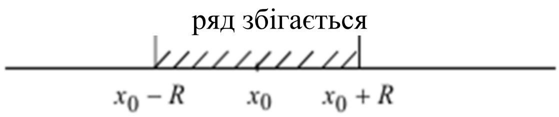
За степенями x,
$x = 0$ – центр ряду

Інтервал збіжності



$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Інтервал збіжності



За степенями $(x - x_0)$,
x_0 – центр ряду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Радіус збіжності: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Ряди Тейлора і Маклорена

Ряд *Тейлора функції* $f(x)$ *в точці* x_0.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

Функція $f(x)$ має похідні будь-яких порядків в деякому околі точки x_0.

Ряд *Маклорена функції* $f(x)$ *в точці* $x_0=0$

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Функція $f(x)$ має похідні будь-яких порядків в деякому околі точки x_0.

✓ **Алгоритм розвинення функції** $f(x)$ **в ряд Тейлора (Маклорена)**

1. Знайти всі послідовні похідні функції
2. Обчислити $f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ldots,\ f^{(n)}(0)$
3. Записати формально ряд Тейлора (Маклорена):

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

4. Знайти інтервал збіжності одержаного ряду Тейлора
5. Знайти множину таких значень *x*, для яких

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad \text{або} \quad \left|f^{(n)}(x)\right|<C$$

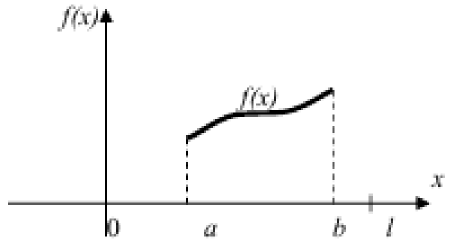
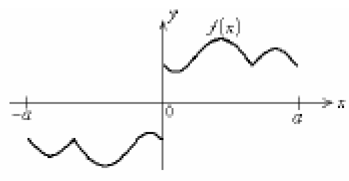
Основні розвинення функцій в ряд Маклорена

Ч.ч.	Функція	Розвинення в ряд Маклорена
1	$f(x)=e^x$	$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad -\infty<x<\infty$
2	$f(x)=sinx$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $-\infty<x<\infty$
3	$f(x)=cosx$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $-\infty<x<\infty$
4	$f(x)=ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $-1<x<1$
5	$f(x)=arctgx$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{2n+1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{2n+1}$ $-1<x<1$
6	$f(x)=(1+x)^{\alpha}$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+1 \quad -1<x<1$
7	$f(x)=\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$, $-1<x<1$
8	$f(x)=\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3+...+x^n+...=\sum_{n=1}^{\infty}x^n$, $-1<x<1$

Ряди Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cosk\omega x + b_k sink\omega x\right),$$

де $\omega = \frac{2\pi}{T} -$ *кругова частота*, $T -$ *період*

Функція $f(x)$ довільна інтегрована на відрізку $[a;\ b]$	
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cosk\omega x + b_k sink\omega x\right)$ - ряд Фур'є $a_0 = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)dx$ $a_k = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)cosk\omega xdx$ $b_k = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\sin k\omega xdx$ $T=b-a,\ \omega = \frac{2\pi}{T}$	
Розвинення функції $f(x)$ за синусами $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sink\omega x$ – ряд Фур'є $b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin k\omega xdx$ $\omega = \frac{\pi}{l}$	Довизначимо функцію $f(x)$ на симетричний відрізок $[-l,0]$ непарним чином і одержану непарну функцію продовжуємо періодично з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь. 

<table>
<tr>
<td>

Розвинення функції *f*(*x*) за косинусами

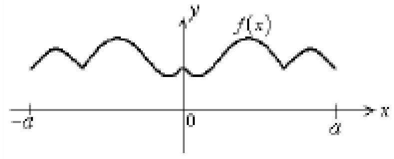
$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k cos k\omega x$ – ряд Фур'є

$a_0=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx$

$a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)cos k\omega x dx$, $\omega=\frac{\pi}{l}$

</td>
<td>

Довизначимо функцію *f*(*x*) на симетричний відрізок $[-l, 0]$ парним чином і одержану парну функцію продовжуємо періодично з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь.



</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Функція *f*(x) – довільна інтегровна на відрізку [- π ; π]

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k coskx+b_k sinkx)$ – ряд Фур'є

$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx$,

$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Функція *f*(x) парна

</td>
<td>

Функція *f*(x) непарна

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k coskx$ – ряд Фур'є

$a_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)coskxdx, \quad k=0,1,2,...,$

$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx=0, \quad k=1,2,..$

</td>
<td>

$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k sinkx$ – ряд Фур'є

$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx=0, \quad k=0,1,2,...,$

$b_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)sinkxdx, \quad k=1,2,...$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Ряд Фур'є для функції *f*(x), яка задана на відрізку $[-l, l]$
з періодом $T = 2l$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k cos\frac{\pi k}{l}x+b_k sin\frac{\pi k}{l}x)$ – ряд Фур'є

$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)cos\frac{\pi kx}{l}dx, \quad k=0,1,2,...$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) sin\frac{\pi kx}{l}dx, \quad k = 0,1,2,...$$</td></tr>
<tr><td>Періодична функція f(x) парна на відрізку $[-l,l]$ з періодом $T = 2l$</td><td>Періодична функція f(x) непарна на відрізку $[-l,l]$ з періодом $T = 2l$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{\pi k}{l}x$ – ряд Фур’є
$$a_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) cos\frac{\pi kx}{l}dx, \quad b_k = 0$$</td><td>$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin\frac{\pi k}{l}x$ – ряд Фур’є
$$b_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) sin\frac{\pi k}{l}dx, \quad a_k = 0$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ряд Фур’є в комплексній формі</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx}$ – ряд Фур’є
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx}dx, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ряд Фур’є в комплексній формі для функції f(x) з періодом $T = 2l$</td></tr>
<tr><td>$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{k\pi}{l}x}$ – ряд Фур’є
$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-j\frac{k\pi}{l}x}dx,$$
$k = (0, \pm1, \pm2, \ldots)$</td><td>Після введення величини $\omega = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{T}$ можна записати у вигляді
$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2k\pi}{T}x}$$
$$c_k = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)e^{-jk\omega x}dx = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)e^{-j\frac{2k\pi}{T}x}dx$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Перехід від комплексної форми ряду Фур’є до дійсної</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c_k = a_k - jb_k$, $c_{-k} = a_k + jb_k$, $e^{jk\omega x} = cosk\omega t + j\, sink\omega t$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k coskx + b_k sinkx)$$</td></tr>
</table>

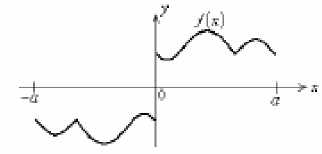
Семантичний конспект до змістового модуля «Ряди»

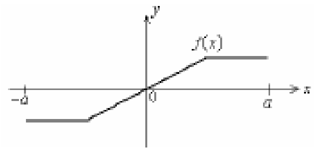
Попередні відомості

✓ Функцію $f(x)$ називають періодичною, якщо існує додатне дійсне число $T > 0$ таке, що $f(x+T) = f(x)$. Найменше серед таких значень T називають періодом функції $f(x)$.

✓ Функцію $f(x)$ називають непарною на інтервалі $[-a; a]$, якщо $f(-x) = -f(x)$ для всіх точок x із цього інтервалу.

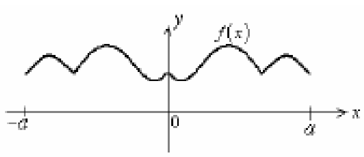
✓ Графіки непарних функцій є симетричними відносно початку координат.

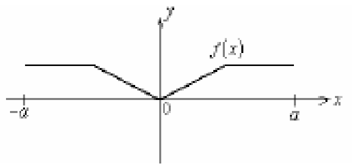




✓ Сума, різниця непарних функцій буде непарною функцією, добуток або частка парної кількості непарних функцій буде парною функцією, а добуток або частка непарної кількості непарних функцій буде функцією непарною.

✓ Функцію $f(x)$ називають парною на інтервалі $[-a; a]$, якщо $f(-x) = f(x)$ для всіх точок x із цього інтервалу.





✓Графіки парних функцій є симетричними відносно осі координат Y0.

✓ Сума, різниця, добуток парних функцій буде парною функцією.

✓ При множенні парної функції на непарну функцію ми отримаємо функцію непарну. Дійсно, нехай $f(x)$ – непарна функція, а $g(x)$ – парна. Тоді $f(-x)\cdot g(-x) = -f(x)\cdot g(x)$ – непарна функція.

✓ Під час роботи і тригонометричними рядами потрібно пам'ятати деякі відомі тригонометричні факти та математичні формули, а саме:

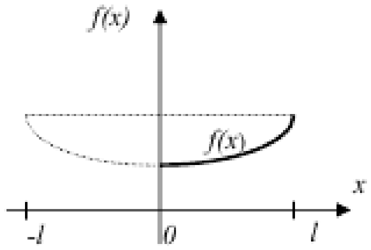
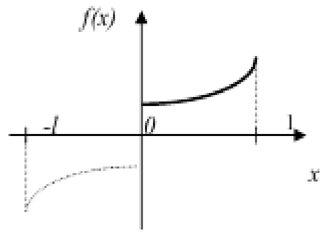
$sin0 = sin\pi,$, $sin\pi n = sin(-\pi n) = 0$ $sin(-\alpha) = -sin\alpha$ $sin(\alpha \pm \pi n) = (-1)^n sin\alpha$

$sin\,\frac{\pi}{2} = 1,$ $sin\,\frac{3\pi}{2} = -1$ $sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n$

$cos0 = 1$, $\cos\pi = -1$ $cos(-\alpha) = cos\,\alpha$ $cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0$ $cos\,\pi n = cos(-\pi n) = (-1)^n$

$cos(\alpha \pm \pi n) = (-1)^n cos\alpha$

✓ Для розвинення функції в ряд Фур'є її графічне зображення на заданому відрізку можна продовжити двома способами:

парним способом за виконання умови *f(-x) = f(x);* в такому випадку отримаємо парну функцію, а її ряд Фур'є буде містити тільки косинуси;	
непарним способом за виконання умови *f(-x) = -f(x)*; при цьому отримаємо непарну функцію, а її ряд Фур'є буде містити тільки синуси	

Числові ряди

✓ Числовим рядом називають вираз $a_l + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

де числа $a_1, a_2, \ldots$ – його члени, a_n – загальний член ряду.

✓ Суму n перших членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *n-ю частинною сумою ряду.*

✓ Якщо існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ послідовності частинних сум $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, то цю границю називають сумою ряду і записують $S = a_l + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$,

✓ Ряд називається *збіжним*, якщо $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (const); якщо границя послідовності частинних сум нескінченна або не існує, ряд називають *розбіжним*.

✓ Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його загальний член прямує до нуля

$(a_n \to 0)$ при $n \to \infty$.

✓ Ряд, складений з членів геометричної прогресії $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, $(a \neq 0)$ збіжний до $\frac{a}{1-q}$ при $|q|<1$ і розбіжний при $|q| \geq 1$

Найпростіші властивості збіжних рядів

✓ Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n$ також збігається і має суму cS.

✓ Якщо ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ збіжні і мають, відповідно, суми S і σ, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ збігається і має суму $S + \sigma$.

✓ Сума збіжного і розбіжного рядів є ряд розбіжний.

Ознаки збіжності додатних рядів

✓ *Ознака порівняння.* Якщо для членів додатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$ виконуються нерівності $a_n \leq b_n$ для всіх n, починаючи з деякого, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

✓ *Гранична ознака порівняння*. Якщо для додатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ існує скінченна додатна границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то ці ряди збіжні або розбіжні одночасно.

✓ *Ознака Д'Аламбера*. Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \geq 0$, то при $l < 1$ цей ряд збіжний, а при $l > 1$ – розбіжний.

✓ *Гранична ознака Коші*. Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l < 1$ даний ряд збіжний, а при $l > 1$ – розбіжний.

✓ *Інтегральна ознака Коші – Маклорена*. Якщо $f(x)$ – невід'ємна і незростаюча функція на відрізку $[1;+\infty]$, то ряд $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невласний інтеграл $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ або обидва збіжні або обидва розбіжні.

Ряди з довільними членами. Знакозмінні ряди

✓ Ряд вигляду $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ називається знакозмінним.

✓ Ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ називають *абсолютно збіжним,* якщо збіжним є відповідний ряд абсолютних значень членів ряду $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

✓ Якщо ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду, збіжний, то збіжним буде і даний ряд.

✓ *Ряд* $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ називають *умовно збіжним*, якщо він збіжний, а відповідний ряд абсолютних величин членів даного ряду $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ – розбіжний.

✓ *Ознака Лейбніца*. Якщо члени знакозмінного ряду $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ прямують до нуля і абсолютні величини їх не зростають, то такий ряд *збіжний*.

✓ Якщо ряд *збіжний абсолютно*, то ряд, одержаний з нього будь-якою перестановкою членів, також *абсолютно збіжний* і має ту саму суму.

✓ Якщо ряд *збіжний умовно*, то в результаті перестановки його членів можна одержати ряд, який має *наперед задану суму*, а також *розбіжний* ряд.

Функціональні ряди

✓ Ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ називається *функціональним рядом.* При цьому функцію $f_n(x)$ називають *загальним членом ряду.*

✓ *Степеневим рядом* називають функціональний ряд вигляду

$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, де $a_0, a_1, .., a_n, ...$ – дійсні числа, або ряд вигляду $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

✓ Радіус збіжності степеневого ряду визначається за формулами $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *або* $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, якщо, починаючи з деякого $n \geq N$, всі $a_n \neq 0$.

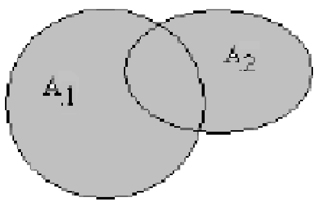
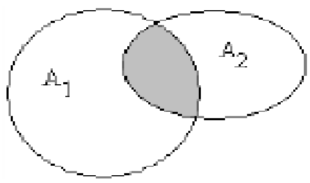
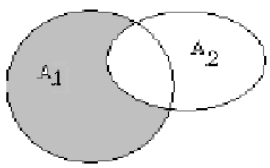
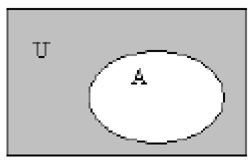
✓ *Рядом Тейлора функції* $f(x)$ *в точці* x_0 називається ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

✓ Ряд Тейлора функції $f(x)$ в точці $x_0 = 0$ називається *рядом Маклорена*

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ
«ЕЛЕМЕНТИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ»

МНОЖИНИ. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ	
Множина – це сукупність різних об’єктів, які об’єднані за певною ознакою чи властивістю, що розглядаються як єдине ціле.	
А є підмножиною (включенням) множини $B\left(A\subseteq B\right)$, якщо кожен елемент множини А є елементом множини В , тобто, якщо $x\in A$, то $x\in B$.	
U – універсальна множина, це така множина, що всі розглянуті множини є її підмножинами.	
ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ	
Означення, позначення операції	Зображення діаграмами Ейлера – Венна
Об’єднання	
Об’єднання множин A_1 і A_2 – це множина В, яка складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній з множин A_1 або A_2. Позначається $B=A_1\bigcup A_2=\left\{\mathrm{b}\,\vert\,\mathrm{b}\in A_1\ \text{або}\ \mathrm{b}\in A_2\right\}$	
Перетин	
Перетин множин A_1 і A_2 – це множина *C*, яка складається з усіх тих елементів, які належать і множині A_1, і множині A_2 Позначається $C=A_1\bigcap A_2=\left\{c\,\vert\,c\in A_1\ \text{і}\ c\in A_2\right\}$	
Різниця	
Різниця множин A_1 і A_2 (відносне доповнення) – це множина *D*, яка складається з усіх елементів множини A_1, яких немає у A_2. Позначається $D=A_1\setminus A_2=\left\{d\,\vert\,d\in A_1\ \text{і}\ d\notin A_2\right\}$	
Доповнення	
Доповнення (абсолютне доповнення) – це множина А, яка складається з усіх елементів універсальної множини U, які не належать А. Позначається $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{U}-\mathrm{A}=\mathrm{U}\setminus\mathrm{A}$	

ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ

	Назва властивості	Символьний запис
1	Комутативність (переставний закон)	$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
2	Асоціативність (сполучний закон)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3	Дистрибутивність (розподільний закон)	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
4	Ідемпотентність	$A \cup A = A$; $A \cap A = A$
5	Закони Де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6	Закони доповнення	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$. $\varnothing$ - порожня множина
7	Інволюція (закон заперечення заперечення)	$\overline{\overline{A}} = A$
8	Закони поглинання	$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$
9	Закони, які описують властивості порожньої та універсальної множин щодо об’єднання та перетину	$\overline{A \cup \varnothing = A}$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup U = U$; $A \cap U = A$

ЛОГІЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ

ЛОГІКА ВИСЛОВЛЕНЬ

Висловлення – це будь-яке твердження, відносно якого має зміст говорити «*істинне*» воно чи «*хибне*». Позначається «*істинність*» – 1, а «*хибність*» – 0

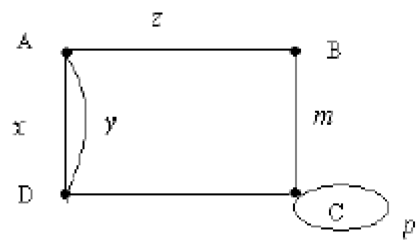
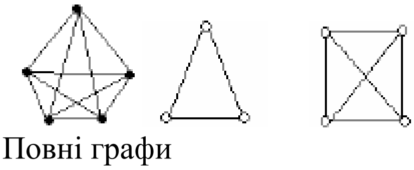
Операції алгебри логіки (логічні операції)

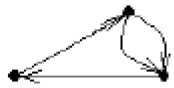
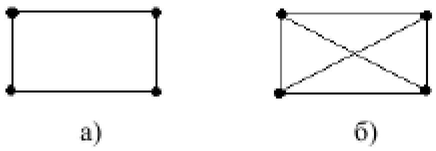
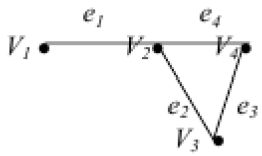
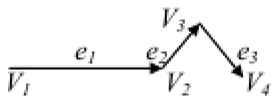
Означення операції	Таблиця істинності
Операція заперечення	
Заперечення (інверсія) висловлення А – це висловлення $\overline{\text{A}}$ (читається «не А»), яке істинне, якщо висловлення А хибне, й хибне, коли А істинне. Позначається: $\bar{A}, \sim A$	A | $\overline{\text{A}}$ 0 | 1 1 | 0
Операція кон'юнкції	
Кон'юнкція висловлень A і B – це висловлення $A \wedge B$ (читається «A і B»), яке утворене об'єднанням двох простих речень за допомогою слова *і*; позначається як $A \wedge B$. Висловлення $A \wedge B$ істинне тоді і тільки тоді, коли істинні обидва висловлення.	A | B | $A \wedge B$ 0 | 0 | 0 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1
Операція диз'юнкції	
Диз'юнкція висловлень A і B – це висловлення $A \vee B$ (читається «A або B»), яке утворене об'єднанням двох простих речень за допомогою слова «або»; позначається як $A \vee B$. Висловлення $A \vee B$ істинне тоді і тільки тоді, коли істинне хоча б одне з цих висловлень.	A | B | $A \vee B$ 0 | 0 | 0 1 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 1 | 1
Операція імплікації	
Імплікація висловлень A і B – це висловлення $A \to B$ (читається «з А випливає В»), яке утворене об'єднанням двох простих речень за допомогою слів «*якщо ..., то*»; позначається як $A \to B$. Висловлення хибне тоді і тільки тоді, коли з істинності випливає хибність.	A | B | $A \to B$ 0 | 0 | 1 1 | 0 | 0 0 | 1 | 1 1 | 1 | 1
Операція еквіваленції	
Еквівалентність висловлень A і B – це висловлення $A \leftrightarrow B$ (читається «A еквівалентне B»), утворене об'єднанням двох простих речень за допомогою слів «*тоді і тільки тоді, коли ...*». Висловлення $A \leftrightarrow B$ істинне тоді і тільки тоді, коли або істинні, або хибні одночасно обидва висловлення.	A | B | $A \leftrightarrow B$ 0 | 0 | 1 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1

ЗАКОНИ АЛГЕБРИ ВИСЛОВЛЕНЬ

	Назва закону	**Символічний запис**
1	Комутативність	$A \vee B = B \vee A$ $A \wedge B = B \wedge A$
2	Асоціативність	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
3	Дистрибутивність	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
4	Закони Де Моргана	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
5	Закони подвійного заперечення	$\overline{\overline{A}} = A$
6	Закони ідемпотентності	$A \vee A = A$ $A \wedge A = A$
7	Закони, які містять тотожно-істинні і тотожно-хибні висловлення.	$A \vee \overline{A} =$*істина (виключення третього)* $A \vee$ *істина* = *істина* $A \vee$ *хибність* = A $A \wedge \overline{A} =$*хибність (протиріччя)* $A \wedge$ *істина* = A $A \wedge$ *хибність* = *хибність* $\overline{\text{істина}} =$ *хибність*
8	Розкриття імплікації через диз’юнкцію, кон’юнкцію і заперечення.	$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$
9	Розкриття еквіваленції через диз’юнкцію, кон’юнкцію і заперечення.	$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
10	Закони поглинання.	$A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (A \wedge B) = A$

ГРАФИ

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ	
Граф G – це сукупність двох множин: точок (вершин) V і ліній (ребер) E, між якими визначене відношення інцидентності (відповідності), причому кожен елемент $e \in E$ інцидентний рівно двом елементам (вершинам) *u* і *v*. Елементи множини V називаються вершинами, а елементи множини E – ребрами графа. Вершини і ребра графа називаються його елементами, тому пишуть $v \in G$ і $e \in G$. Вершина *v* і ребро *e* інцидентні одне одному, якщо точка *v* – кінець лінії *e*.	
Означення	**Геометричне зображення**
Суміжні вершини графа – це дві вершини, для яких існує інцидентне їм ребро (ребро *e* з'єднує вершини v', v''). *Суміжні ребра* графа – це два ребра, які мають спільну вершину. *Петля* – це ребро, початок і кінець якого збігаються. *Кратні* (паралельні) ребра – це ребра, інцидентні одній і тій же парі вершин (з'єднують одну і ту ж пару вершин). Граф, що містить кратні ребра, називається *мультиграфом*, а граф, що містить кратні ребра і петлі – *псевдографом*. *Степенем* вершини *v* (deg *v*) називається кількість ребер, інцидентних цій вершині (петля дає внесок в 2 одиниці у степінь вершини.)	 A і B – суміжні вершини A і C – несуміжні вершини *x* і *z* – суміжні ребра *x* і *m* – несуміжні ребра *p*(C, C) – петля *x*(A, D) і *y*(A, D) – кратні ребра *deg* (C) = 4, *deg* (B) = 2
Ізольована вершина – це вершина степеня 0. Вершина степеня 1 називається висячою. *Нуль-граф* – це граф, який складається з ізольованих вершин.	 E – ізольована вершина, нуль-граф
Повний граф – це граф без петель і кратних ребер, у якого кожна пара його вершин з'єднана ребром. Повний граф з *n* вершинами позначається K_n .	 Повні графи

ГРАФИ	
Орієнтований граф (орграф) – граф, всі пари вершин якого є упорядкованими, в іншому випадку граф називається *неорієнтованим*.	 Орієнтований граф
Правильний граф – це граф, ребра якого не мають спільних точок, відмінних від вершин графа.	 а) правильний граф; б) неправильний граф
Маршрут – це послідовність ребер неорієнтованого графа, в якій друга вершина попереднього ребра збігається з першою вершиною наступного. В маршруті одне і те ж ребро може зустрічатись декілька разів. *Довжина маршруту* – це кількість ребер маршруту. *Ланцюг* – це маршрут, у якого всі його ребра різні.	 Маршрут $V_1V_2V_3V_2V_4$ не є ланцюгом, а маршрут $V_1V_2V_3V_4$ – ланцюг.
Шлях – впорядкована послідовність ребер орієнтованого графа, в якій кінець попереднього ребра збігається з початком наступного.	 (e_1,e_2,e_3) – шлях із V_1 в V_4

СПОСОБИ ЗАДАННЯ ГРАФІВ

<table>
<tr><th colspan="2">Способи задання відношення інцидентності</th></tr>
<tr><th>Матриця інцидентності</th><th>Матриця суміжності</th></tr>
<tr><td>

Матриця інцидентності $A = \left\| \varepsilon_{ij} \right\|$ – це матриця розміром $n \times m$, де вертикально вказуються вершини $i = \overline{1, n}$, а горизонтально – ребра $j = \overline{1, m}$. На перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпця стоїть елемент ε_{ij} – число, яке визначається рівністю:
а) у випадку неорієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{якщо ребро } \varepsilon_i \textit{ інцидентно вершині } v_j; \\ 0, \textit{якщо ребро } \varepsilon_i \textit{ неінцидентно вершині } v_j; \\ \alpha, \textit{якщо ребро } \varepsilon_i - \textit{петля } (\alpha \neq 0 \textit{ і } \alpha \neq 1). \end{cases}$$

б) у випадку орієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, \textit{якщо } v_i - \textit{початок ребра } e_j; \\ 1, \textit{якщо } v_i - \textit{кінець ребра } e_j; \\ \alpha, \textit{якщо } v_i - \textit{початок ребра } e_j; \\ \alpha, \textit{якщо } e_j - \textit{петля, а } v_i - \textit{інцидентна їй вершина.} \end{cases}$$

</td><td>

Матриця суміжності $\mathrm{M} = \left\| \delta_{ij} \right\|$ – це квадратна матриця розміром $n \times n$, де вертикально й горизонтально вказують вершини графа $i = \overline{1, n}$ і $j = \overline{1, n}$. На перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпця стоїть елемент ε_{ij} – число, яке дорівнює:
а) числу ребер, що з'єднують ці вершини (випадок неорієнтованого графа);
б) числу ребер з початком в *i*-й вершині і кінцем у *j*-й вершині (випадок орієнтованого графа).

</td></tr>
<tr><th colspan="2">Список ребер</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Список ребер графа – це таблиця, що складається з трьох рядків. У першому перераховані всі ребра; у другому і третьому – інцидентні їм вершини: а) у випадку неорієнтованого графа порядок вершин у стовпці довільний; б) у випадку орієнтованого графа першою записується вершина, де починається ребро (другий рядок); а вершина, де закінчується ребро, записується у третій рядок.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Для нумерації вершин і ребер графа використовують різний символьний запис: римські чи арабські цифри, латинські букви і т. п.

</td></tr>
</table>

Семантичний конспект до змістового модуля «Елементи дискретної математики »

Теорія множин

✓ Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*, у протилежному випадку – *нескінченною*. Кількість елементів у скінченній множині А називається її *потужністю* і позначається $|A|$.

✓ Способи задання множин:

перерахуванням, тобто списком усіх своїх елементів (задання скінченних множин);

процедурою, що породжує й описує спосіб одержання елементів множини з уже отриманих елементів або з інших об’єктів;

описом характеристичної властивості, яку мають мати елементи даної множини і тільки вони.

✓ Множина A називається *підмножиною* (включенням) множини $B(A \subseteq B)$, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, тобто, якщо $x \in A$, то $x \in B$.

✓ Якщо $A \subseteq B$ й $A \neq B$, то A називається строгою підмножиною і позначається $A \subset B$.

✓ Дві множини рівні $(A = B)$, якщо всі їх елементи збігаються. Множини A і B рівні, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

✓ Множина, що не містить елементів, називається порожньою і позначається $\varnothing$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

✓ Множина всіх підмножин множини A називається булеаном $P(A)$. Потужність *булеана* $|P(A)| = 2^{|A|}$.

✓ *Симетричною різницею* (кільцевою сумою) множин A і B називається множина, що є об’єднанням усіх елементів, які належать множині A і не містяться у B, та елементів, які належать множині B і не містяться в A. Симетрична різниця множин A і B позначається $A+B$. Це визначення рівносильне такому: $A + B = (A - B) \cup (B - A)$.

✓ Операції, які виконують над однією множиною, називають *унарними*. Операції, які виконують над двома множинами, називають бінарними. Прикладом унарної операції є знаходження доповнення, а бінарних операцій – об’єднання, перетин, різниця, симетрична різниця.

Логіка висловлень

✓ У математичних міркуваннях, як і в повсякденній мові, часто зустрічаються речення, утворені видозміною деякого речення за допомогою слова не, або складені з простих речень за допомогою сполучників *і, або, якщо ..., то, тоді й тільки тоді, коли*, що називаються сентенційними зв'язками.

✓ Висловлення, що не містить сентенційних зв'язок, називається *простим*. Висловлення, що містить зв'язки, називається *складним*.

✓ Символи $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge$ називаються *бінарними зв'язками*, оскільки вони з'єднують два висловлення, а символ $\sim$ – *унарною зв'язкою*, тому що застосовується тільки до одного висловлення.

✓ Розглянемо ще одну бінарну зв'язку – *виключне логічне або (нерівнозначність, кільцева сума, сума за модулем 2)*. Позначається як $P \oplus Q$ і читається «*або P, або Q*». Висловлення $P \oplus Q$ істинне, коли істиннісні значення P і Q не збігаються, і хибне – у протилежному випадку.

✓ *Істиннісна функція* – це функція від n аргументів, кожний з яких може приймати значення 1 або 0, і сама функція може приймати значення 1 або 0.

✓ Позначати істиннісні функції будемо як $f(p_1, p_2, ..., p_n)$, $g(q_1, q_2, ..., q_n)$ і т. д.

✓ Під *істиннісними* функціями будемо розуміти елементи множини θ, що має такі властивості:

а) кожна з функцій $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ – елемент множини θ;

б) якщо функція f – елемент множини θ, то елементом множини θ буде і функція, отримана підстановкою f замість аргументу в кожну з функцій, перелічених вище.

✓ Висловлення називають *логічно еквівалентними*, якщо вони мають різну побудову, але приймають істинне значення в тих же самих випадках, тобто мають однакові таблиці істинності.

✓ Висловлення, істинне при всіх розподілах значень простих компонентів, називається *тотожно істинним* (загальнозначущим або тавтологією). Висловлення, хибне при всіх розподілах значень простих компонентів, називається *тотожно хибним* (*протиріччям*).

✓ Для того, щоб вирішити питання про те, дана формула A є тавтологією чи ні, потрібно розглянути її таблицю істинності. Формула A з n компонентами є тавтологією тоді й тільки тоді, коли її істиннісне значення є 1 при кожному з 2^n наборів значень її простих компонентів.

✓ Основні істиннісні функції задаються формулами: $P \rightarrow Q = (1+P)Q$, $P \wedge Q = P + Q + PQ$, $P \vee Q = PQ$, $P \leftrightarrow Q = P + Q$.

Графи

✓ Напрямлені ребра називають *орієнтованими ребрами* (дугами). Перша по черзі вершина називається початком дуги, а друга – її кінцем.

✓ Граф, що містить напрямлені ребра, називається орієнтованим (орграфом), а граф, що не містить напрямлених ребер – неорієнтованим (*n-графом*).

✓ Ребро, що з'єднує деяку вершину саму з собою, називається *петлею*.

✓ Граф називається *скінченним*, якщо множини його вершин і ребер скінченні.

✓ Множина ребер графа може бути порожньою. Такий граф називається *порожнім* (пустим).

✓ Доповненням графа G називається граф $\overline{G}$, що має ті ж вершини, що і граф G, і тільки ті ребра, які потрібно додати до графа G, щоб він став повним.

✓ Сума степенів усіх вершин графа завжди парна і дорівнює подвоєному числу ребер: $\sum_{v \in G} deg\ v = 2m$, де m – кількість ребер графа.

✓ У будь-якому графі кількість вершин непарного степеня парна.

✓ Для орієнтованого графа визначаються два степеня вершин: півстепінь виходу $deg\, v'$ – кількість ребер, які виходять з вершини v, і півстепінь входу $deg\ v''$ – кількість ребер, які входять у вершину v. Петля дає внесок по 1 в обидва степеня.

✓ В орграфі суми півстепенів усіх вершин $deg\, v'$ і $deg\, v''$ рівні між собою і дорівнюють кількості ребер m цього графа: $\sum_{v \in G} deg\ v' = \sum_{v \in G} deg\ v'' = m$.

✓ Граф G' називається *підграфом* графа G, якщо кожна вершина і кожне ребро графа G' є, відповідно, вершиною і ребром графа G. *Підграф* G' називається *остовом* (каркасом) графа G, якщо містить всі його вершини.

✓ Графи G_1 і G_2 *рівні*, якщо множини їхніх вершин і ребер, визначених через пари інцидентних їм вершин, збігаються.

✓ *Задати граф* – означає описати множини його вершин і ребер, а також відношення інцидентності. Коли граф G скінченний, для його опису досить занумерувати вершини і ребра та задати відношення інцидентності.

✓ Граф G називається *повністю заданим* у точному значенні, якщо нумерація його вершин і ребер зафіксована. Графи, що відрізняються тільки нумерацією, називаються *ізоморфними*.

✓ Графи G_1 і G_2 *ізоморфні*, якщо їхні вершини можна пронумерувати таким чином, що ребро e_j тоді й тільки тоді з'єднує вершини v_i і v_k у графі G_1, коли ребро e'_j з'єднує вершини v'_i і v'_k у графі G_2.

✓ За матрицею інцидентності А число ребер і вершин визначається з її розміру: число ребер $|E|$ графа дорівнює числу стовпців m, а число вершин $|V|$ – числу рядків n матриці.

✓ За матрицею суміжності M число вершин визначається з її розміру.

✓ Матриця суміжності n-графа симетрична щодо головної діагоналі, а кількість ребер визначається верхнім правим трикутником матриці, розташованим над головною діагоналлю, охоплюючи останню. Тобто, число ребер n-графа дорівнює сумі елементів, розташованих у цьому трикутнику, включаючи й головну діагональ.

✓ У матриці суміжності орграфа симетрія відсутня, а число ребер дорівнює сумі всіх елементів матриці суміжності.

✓ Список ребер є скороченим варіантом запису матриці інцидентності. Кількість ребер очевидна, а кількість вершин дорівнює максимальному номеру всіх перерахованих вершин зі списку.

✓ *Початок маршруту* – це вершина v_0, інцидентна ребру e_1 і не інцидентна ребру e_2. *Кінець маршруту* – це вершина v_n, інцидентна ребру e_n і не інцидентна e_{n-1}. Якщо ребра $e_1, e_2, (e_{n-1}, e_n)$ кратні, то потрібно додатково вказувати, яку з двох інцидентних вершин вважати початком (кінцем) маршруту. Всі інші вершини маршруту $(v_1, v_2, ..., v_{n-1})$ називаються *внутрішніми*.

✓ Маршрут довжини k – послідовність, що містить k ребер.

✓ Ланцюг без самоперетину, тобто який не має внутрішніх вершин, що повторюються, називається простим.

✓ Маршрут, в якому збігаються початок і кінець – v_0 і v_n – називається *циклічним* (замкненим). Циклічний маршрут називається циклом, якщо він є ланцюг, і *простим циклом* – якщо це простий ланцюг.

✓ Вершини v' і v'' графа G називаються *зв'язними*, якщо існує маршрут з початком у v' і кінцем у v''.

✓ Кожна вершина вважається зв'язаною сама з собою.

✓ Граф G називається *зв'язним*, якщо будь-які пари його вершин зв'язані між собою.

✓ Якщо існує маршрут з вершини v' у v'' графа G, то існує простий ланцюг, що з'єднує ці вершини v' і v''.

✓ Граф G є зв'язним тоді й тільки тоді, коли між будь-якими двома його вершинами існує простий ланцюг.

✓ Максимальний непустий зв'язний підграф G' графа G називається компонентом графа G.

✓ Незв'язний граф має як мінімум два компоненти.

✓ *При видаленні ребра* з графа G його кінці залишаються в графі. Операція видалення вершини v графа G полягає у видаленні цієї вершини разом з інцидентними їй ребрами.

✓ Вершина v називається точкою *зчленування*, якщо видалення її з графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

✓ Ребро *e* називається *мостом*, якщо видалення його з графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

✓ *Орієнтованим ланцюгом* (орланцюгом) називається шлях, кожна дуга якого зустрічається не більше одного разу. Орланцюг називається *простим*, якщо будь-яка його внутрішня вершина інцидентна не більше, ніж двом його ребрам.

✓ *Контуром* називається шлях, початок v_0 і кінець v_n якого збігаються.

✓ Контур називається *орієнтованим циклом* (орциклом), якщо він є *простим ланцюгом*.

✓ При записі циклу як для орієнтованого, так і для неорієнтованого графа за початок (він же кінець) може бути обрана будь-яка вершина.

✓ Для кожного орієнтованого графа *G* може бути побудований неорієнтований граф ***G′*** такий, що всі вершини цих графів збігаються, а кожна дуга *G* стає неорієнтованим ребром графа ***G′***. Одержаний неорієнтований граф ***G′*** називається *співвіднесеним графом* орієнтованого графа *G*.

✓ Для кожного орієнтованого графа *G* може бути побудований неорієнтований граф G^s такий, що всі вершини цих графів збігаються, а кожна дуга *G* стає неорієнтованим ребром графа G^s. Одержаний неорієнтований граф G^s називається *співвіднесеним графом* орієнтованого графа *G*.

✓ Вершина $v'' \in G$ називається *досяжною* з вершини $v' \in G$, якщо існує шлях з початком у v' і кінцем у v''.

✓ Кожна вершина вважається досяжною з самої себе.

✓ Орієнтований граф *G* називається:

- *Незв'язним*, якщо його співвіднесений граф G^s є незв'язним;
- *слабко зв'язним,* якщо його співвіднесений граф G^s є зв'язним;
- *односторонньо зв'язним*, якщо для будь-якої пари вершин v', v'' існує шлях з v' у v'' чи, навпаки, з v'' у v';
- *сильно зв'язним*, якщо для будь-якої пари вершин v', v'' існує шлях з v' у v''.

✓ Тривіальний орграф, що складається з однієї вершини, є сильно зв'язним.

✓ *Відстанню* $d(v', v'')$, між вершинами v' і v'' графа *G* називається мінімальна довжина простого ланцюга з початком у вершині v′ і кінцем у вершині v″. Якщо вершини v' і v'' незв'язані, тобто належать різним компонентам, то вважається, що $d(v', v'') = +\infty$

✓ У зв'язному графі *G* відстань між вершинами задовольняє такі умовами:

1) $\forall v', v'' \in G, d(v', v'') \geq 0$ і $d(v', v'') = 0$ тоді і тільки тоді, коли $v' = v''$;

2) $\forall v', v'' \in G, d(v', v'') = d(v'', v')$;

3) $\forall v', v'', v''' \in G, d(v', v'') \le d(v', v''') + d(v''', v'')$.

✓ Функція $d(v', v'')$, що задовольняє три перелічені умови, називається *метрикою* графа.

✓ Вершина графа називається *центральною*, якщо для неї максимальна з відстаней до інших вершин є мінімальною на графі. Множина всіх центральних вершин графа називається його *центром*.

✓ Вершина графа називається *периферійною*, якщо для неї максимальна з відстаней до інших вершин є максимальною на графі.

✓ Максимальна відстань від центра графа *G* до його вершин називається *радіусом* графа $r(G)$.

✓ Найкоротший простий ланцюг, що з'єднує дані дві вершини, називається *геодезичним*.

✓ *Відхиленням вершини* $l(v)$ називається найбільша довжина геодезичної, що з неї виходить.

✓ Відхилення центра називається радіусом графа $r(G)$, а відхилення периферійної точки – *діаметром* графа $D(G)$.

Алгоритм побудови матриці інцидентності за списком ребер

Кожен стовпець списку ребер відповідає стовпцю в матриці інцидентності з тим же номером. Для неорієнтованого графа в кожному стовпці списку ребер вказані номери елементів матриці інцидентності, рівні 1 (всі інші елементи – нулі). Для орієнтованого графа першою вказується вершина, що відповідає початку ребра (у матриці інцидентності – елемент -1), а другий – відповідному кінцю ребра (у матриці інцидентності – елемент 1). При збігу елементів у стовпці списку ребер, у відповідному рядку матриці інцидентності записується число, відмінне від -1, 0, 1, наприклад, 2. Така ситуація відповідає наявності в графі петель.

Алгоритм знаходження відстаней від даної вершини v_0 до інших вершин графа G

1) позначаємо через $A_0 = \{v_0\}$;

2) позначаємо індексом v_0 всі вершини, суміжні з вершиною v_0, виписуємо множину A_1 всіх цих вершин з їхніми позначками; відстань до цих вершин A_1 дорівнює 1;

3) кожну вершину, що не належить множині $A_0 \cup A_1$ і суміжну з вершинами $v', v'', \ldots$ множини A_1, позначаємо відповідним індексом $v', v'', \ldots$; виписуємо

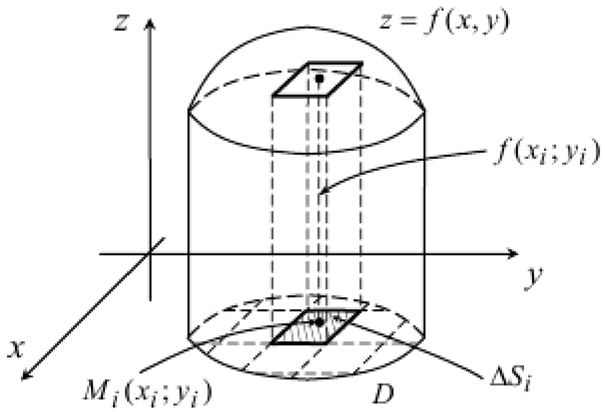
множину A_2 всіх цих вершин з їхніми позначками; відстань до цих вершин A_2 дорівнює 2; ... ;

4) кожну вершину, що не належить множині $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1}$ і суміжну з вершинами $v', v'', ...$ множини A_{n-1}, позначаємо відповідним індексом $v', v'', ...$; виписуємо множину A_n всіх цих вершин з їхніми позначками; відстань до цих вершин A_n дорівнює n; ... ; повторюємо описану процедуру доти, поки множина непозначених вершин не виявиться порожньою.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ «КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ»

ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

<table>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">



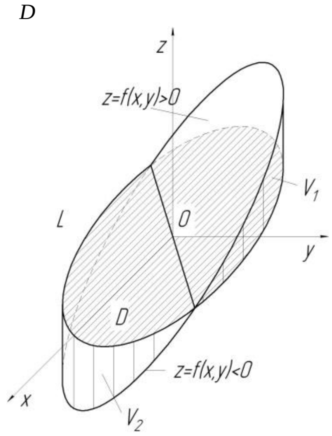
$$\iint\limits_D f(x;y)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i$$

де $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{d_i\}$;

d_i – діаметр елементарної частинки площинки

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Геометричний зміст</td></tr>
<tr><td>Подвійний інтеграл чисельно (кількісно) дорівнює об’єму циліндричного тіла</td><td>$V_{циліндричного\ тіла} = \iint\limits_D f(x;y)dS$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Фізичний зміст</td></tr>
<tr><td>Маса матеріальної пластинки</td><td>$m = \iint\limits_D \mu(x,y)dS$, де
$z = f(x,y) = \mu(x,y)$ – поверхнева густина матеріальної пластинки</td></tr>
<tr><td>Якщо ж функція $f(x,y)$ в області D змінює знак, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює різниці об’ємів циліндричних тіл, які знаходяться над площиною Oxy та під нею.</td><td>

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = V_1 - V_2$$



</td></tr>
</table>

Основні властивості	
Площа області інтегрування D	$\iint\limits_D dS = S_D$
Якщо функції $z = f_i(x,y)$ $(i=\overline{1,k})$ неперервні в області D, то	$\iint\limits_D \left(\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x,y) \right) dS = \sum\limits_{i=1}^{k} \iint\limits_D f_i(x,y)dS$
Сталий множник C підінтегральної функції можна винести за знак подвійного інтеграла:	$\iint\limits_D Cf(x,y)dS = C\iint\limits_D f(x,y)dS$
Властивість лінійності подвійного інтеграла	$\iint\limits_D \left(\sum\limits_{i=1}^{k} C_i f_i(x,y) \right) dS = \sum\limits_{i=1}^{k} C_i \iint\limits_D f_i(x,y)dS$, де $C_i = const$, $i=\overline{1,k}$.
Властивість адитивності. Якщо область D розбити на скінченну кількість областей $D_1, D_2, ..., D_k$, які не мають спільних внутрішніх точок, то інтеграл по області D дорівнює сумі інтегралів по областях D_k	$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS + ...$ $... + \iint\limits_{D_k} f(x,y)dS$
Теорема про середнє. Для неперервної функції $z = f(x,y)$ в області D, площа якої S_D, завжди знайдеться хоча б одна точка $P(x_c, y_c) \in D$, така що:	$\iint\limits_D f(x,y)dS = f(x_c,y_c)S_D$ Число $f(x_c,y_c)$ називається середнім значенням функції $z = f(x,y)$ в області D.
Якщо в області D для неперервних функцій $f(x,y)$, $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ виконуються нерівності $f_1(x,y) \le f(x,y) \le f_2(x,y)$, тоді	$\iint\limits_D f_1(x,y)dS \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le \iint\limits_D f_2(x,y)dS$
Теорема про оцінку подвійного інтеграла.	$mS_D < \iint\limits_D f(x,y)dS < MS_D$, де функція $z = f(x,y) \ne const$ і неперервна в області D, M і m – максимальне та мінімальне значення функції в області D.

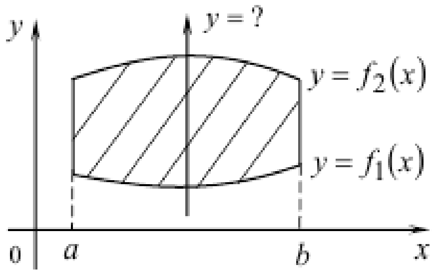
ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

<table>
<tr><td colspan="2">Обчислення подвійних інтегралів в декартових координатах</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Елементарні області S_i, які отримані при розбитті області D, є прямокутниками. Отже, $dS = dxdy$, тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

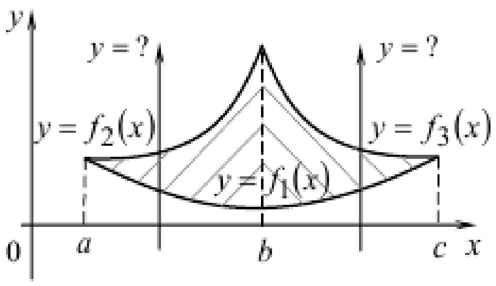
</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f\left(x,y\right)dy$$

</td></tr>
<tr><td>

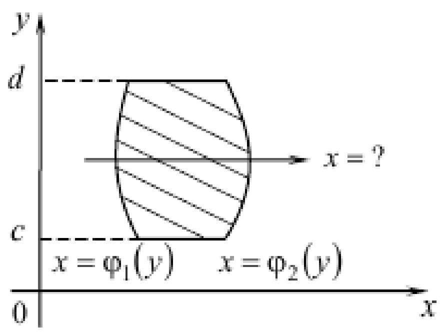


</td><td>

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f\left(x,y\right)dy +$$

$$+\int\limits_b^c dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_3(x)} f\left(x,y\right)dy$$

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f\left(x;y\right)dx$$

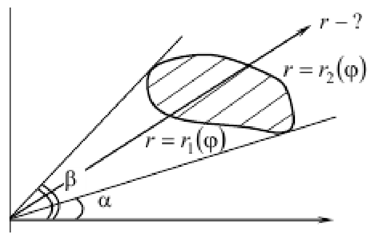
</td></tr>
</table>

Обчислення подвійних інтегралів в полярних координатах

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{D'} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$$

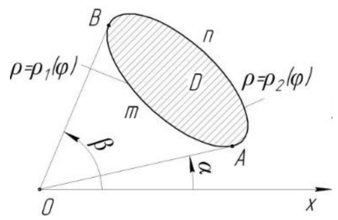
$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi; \\ y = b\rho\sin\varphi; \end{cases}$$

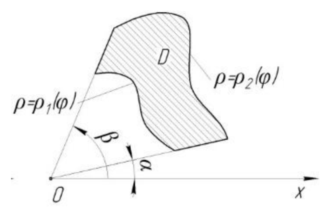
$(\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi).$



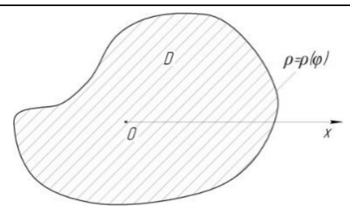
Полюс O полярної системи координат знаходиться поза областю D, що обмежена променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ та лініями AmB, AnB (їх рівняння, відповідно, $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, де $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$ – функції, задані на відрізку $[\alpha, \beta]$)

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$$



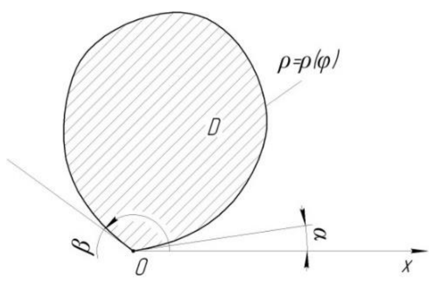


Полюс O знаходиться всередині області D і рівняння границі області D в полярній системі координат має вигляд $\rho = \rho(\varphi)$



$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$$

Полюс O знаходиться на границі області D і рівняння її границі в полярній системі координат має вигляд $\rho = \rho(\varphi)$; значення α та β визначають граничні кути променів, що перетинають область.



$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$$

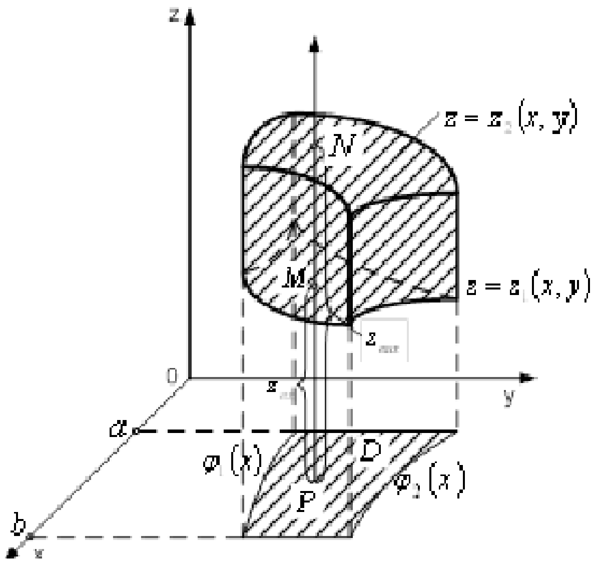
ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Обчислення площ плоских фігур	
Площа плоскої фігури в декартовій системі координат	$S_D = \iint_D dx\,dy$
в полярній системі координат	$S_D = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho$
Обчислення об’ємів тіл	
Об’єм тіла, яке обмежене поверхнею $z = f(x; y)$, в декартовій системі координат	$V = \iint_D f(x; y)dS$
Об’єм тіла в полярній системі координат	$V = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$
Обчислення площ поверхонь	
Поверхня визначається функцією $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D_z$	$Q_z = \iint_{D_z} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$
Поверхня визначається функцією $x = f(y,z)$ (в області D_x)	$Q_x = \iint_{D_x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz$
Поверхня визначається функцією $y = f(x,y)$ (в області D_y)	$Q_y = \iint_{D_y} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz$

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

<table>
<tr><td colspan="2">Обчислення статичних моментів та координат центра мас матеріальної пластинки</td></tr>
<tr><td rowspan="2">На площині Oxy задана матеріальна пластинка D з неперервною поверхневої густиною $\mu(x,y)$</td><td>Координати центра мас
$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}, \\ y_c = \dfrac{\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}. \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Статичні моменти пластинки D відносно осей Ox та Oy
$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy$$
$$M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обчислення моментів інерції матеріальної пластинки</td></tr>
<tr><td>Моменти інерції відносно початку координат і осей координат Ox, Oy матеріальної пластинки D із неперервно розподіленою поверхневою густиною $\mu(x.y)$, яка лежить в площині Oxy.</td><td>$$I_x = \iint\limits_D y^2\mu(x,y)dxdy$$
$$I_y = \iint\limits_D x^2\mu(x,y)dxdy$$
$$I_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)dxdy$$</td></tr>
</table>

ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ



Функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в замкнутій області V, яка обмежена деякою замкненою кусково-гладкою поверхнею S.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i ,$$

d_i - максимальний діаметр сфери, описаної навколо елементарної області V_i.

Область V обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz.

Зауваження! Підінтегральна функція $f(x, y, z)$ неперервна в області V.
Інтеграл існує і не залежить від способу розбиття області V на елементарні області V_i та вибору точок M_i.

Механічний зміст потрійного інтеграла

По тілу V розподілено масу з об'ємною густиною $\delta(x, y, z)$ в точці $(x,y,z) \in V$	$m = \iiint\limits_V \delta(x,y,z)dv$, де m – маса тіла

ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Основні властивості	
В області V $f(x,y,z)\equiv 1$	$\iiint\limits_V dv = v$, де v – об'єм області V
Сталий множник C підінтегральної функції можна винести за знак потрійного інтеграла	$\iiint\limits_V k f(x,y,z)dV = k\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$
Потрійний інтеграл від суми декількох функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів її доданків	$\iiint\limits_V \left[f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)\right]dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV +$ $+\iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dV$
В області інтегрування $f(x,y,z)\geq 0$	$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \geq 0$
В області інтегрування $f(x,y,z)\geq \varphi(x,y,z)$	$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \geq \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dV$
Теорема про середнє значення Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій обмеженій області V, то в цій області існує така точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$ в якій справедлива рівність	$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = f(x_0,y_0,z_0)V$, де V – об'єм області $f(x_0,y_0,z_0) = \dfrac{1}{V}\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ – середнє значення функції $f(x,y,z)$ в області V.
Властивість адитивності Область інтегрування V розбита на k частин $V_1, V_2, ..., V_k$	$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV + ...$ $+\iiint\limits_{V_k} f(x,y,z)dV$
Оцінка потрійного інтеграла	$mV \leq \iiint\limits_V f(x,y,z)dV \leq MV$, де m і M – відповідно, найменше і найбільше значення функції $f(x,y,z)$ в області V.

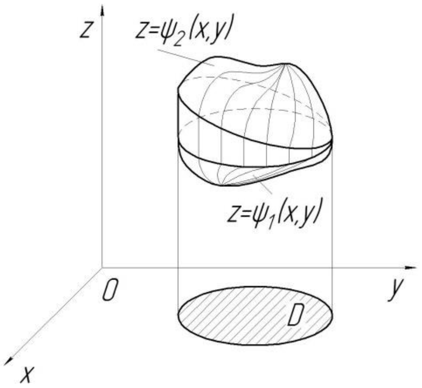
ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

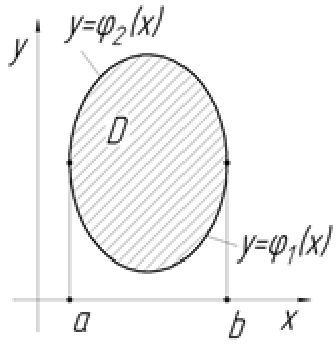
ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

В декартовій системі координат область V зручно розбивати на елементарні області площинами, які паралельні координатним площинам. При цьому елемент об'єму дорівнює $dv = dxdydz$.

<u>Зауваження</u>. Межа області V має бути такою, щоб будь-яка вертикальна пряма перетинала її не більше ніж у двох точках.

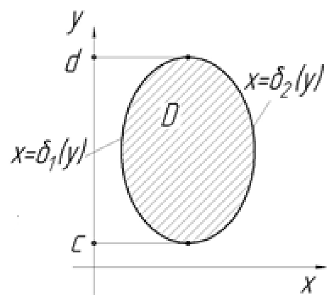
Область V проєктується на площину XOY





$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$



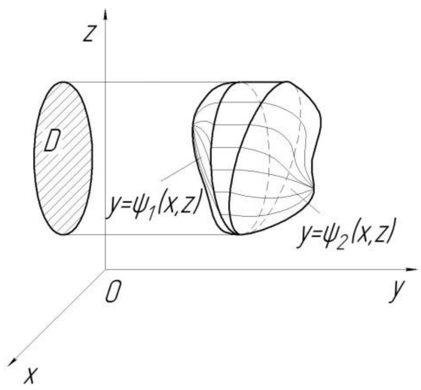
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

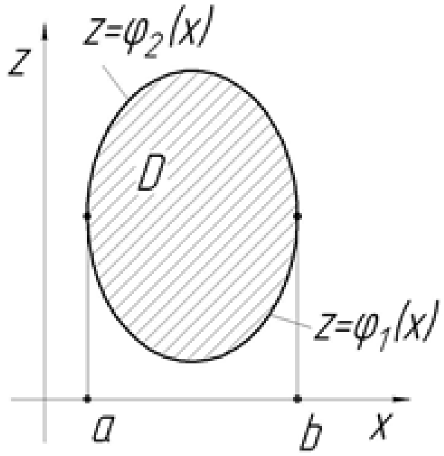
$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{\delta_1(y)}^{\delta_2(y)} dx \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

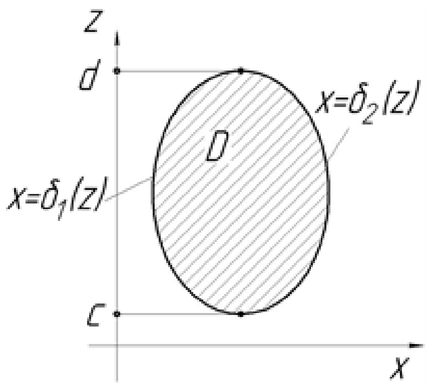
Область V проєктується на площину XOZ





$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dz \int\limits_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)dy$$



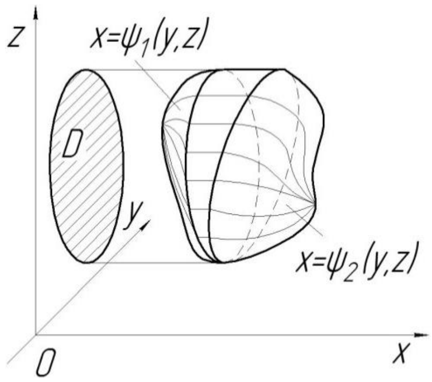
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

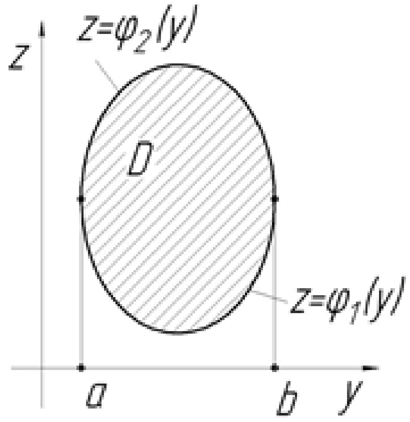
$$= \int\limits_c^d dz \int\limits_{\delta_1(z)}^{\delta_2(z)} dx \int\limits_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)dy$$

ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

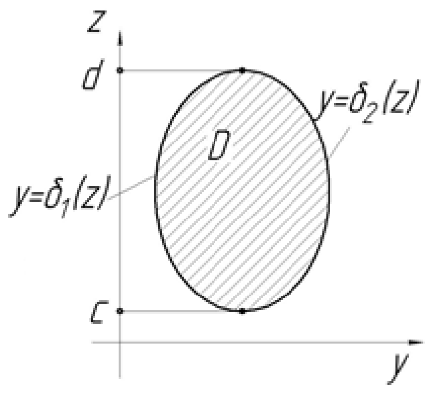
Область V проєктується на площину YOZ





$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_a^b dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dz \int\limits_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$



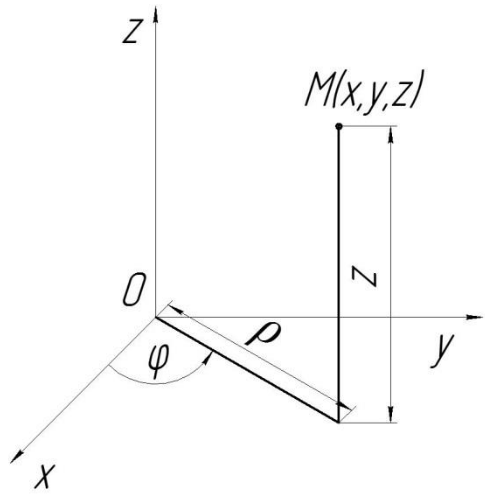
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_c^d dz \int\limits_{\delta_1(z)}^{\delta_2(z)} dy \int\limits_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

ЦИЛІНДРИЧНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

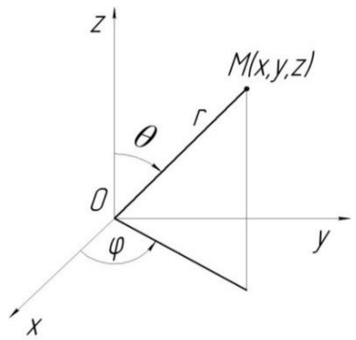


$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho < \infty, -\infty < z < \infty,$$
$$dx\,dy\,dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Зауваження! До циліндричних координат доцільно переходити тоді, коли область інтегрування є круговим циліндром, порожнистим круговим циліндром, сектором кругового або порожнистого циліндра. Якщо при цьому вісь циліндра збігається з віссю Oz, то відповідні області V' є паралелепіпедами, грані яких паралельні координатним площинам в просторі $O\varphi\rho z$.

СФЕРИЧНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$



$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$
$$0 \le r \le \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

В узагальнених сферичних координатах

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi,\ y = br\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = cr\cos\theta,$$
$$0 \le r \le \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$$
$$dx\,dy\,dz = abcr^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

Зауваження! До сферичних координат доцільно переходити в тих випадках, коли областю інтегрування є куля, або сфера, частина кулі, вирізана круговим конусом, вісь якого проходить через діаметр кулі; частина кулі, вирізана площинами, що проходять через діаметр кулі. У тих випадках, коли центр кулі збігається з початком координат, зазначеним площинам відповідають прямокутні паралелепіпеди, гранями яких є паралельні координатні площини в просторі $O\varphi\rho\theta$.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Об'єм тіла	$V=\iiint\limits_T dxdydz$
Маса тіла	$m=\iiint\limits_T \delta(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dxdydz$, де $\delta(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})-$густина тіла
Координати центра мас тіла V	У просторі задано деяке тіло V з неперервно розподіленою об'ємною густиною $\delta=\delta(x,y,z)$ $x_c=\dfrac{\iiint\limits_V x\delta(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)dv}$, $y_c=\dfrac{\iiint\limits_V y\delta(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)dv}$ $z_c=\dfrac{\iiint\limits_V z\delta(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)dv}$
Статичні моменти тіла відносно координатних площин Oyz, Oxz та Oxy відповідно. *Зауваження!* Якщо $\delta(x,y,z)=const,$ то координати центра мас не залежать від щільності тіла V.	$M_x=\iiint\limits_V x\delta(x,y,z)dv$, $M_y=\iiint\limits_V y\delta(x,y,z)dv$ $M_z=\iiint\limits_V z\delta(x,y,z)dv$
Моменти інерції тіл	Момент інерції відносно початку координат тіла V густиною $\delta(x,y,z)$ визначається за формулою $I_0=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\delta(x,y,z)dxdydz$; Моменти інерції відносно координатних осей Ox, Oy, Oz, відповідно: $I_x=\iiint\limits_V \left(y^2+z^2\right)\delta(x,y,z)dxdydz,$ $I_y=\iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)\delta(x,y,z)dxdydz,$ $I_z=\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)dxdydz.$ Моменти інерції відносно координатних площин O_{xy}, O_{yz}, O_{xz}, відповідно: $I_{xy}=\iiint\limits_V z^2\delta(x,y,z)dxdydz,$ $I_{yz}=\iiint\limits_V x^2\delta(x,y,z)dxdydz,\quad I_{xz}=\iiint\limits_V y^2\delta(x,y,z)dxdydz.$

Семантичний конспект до змістового модуля «Кратні інтеграли»

Подвійний інтеграл

✓ Сума $I_n = f(x_1, y_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\Delta S_2 + ... + f(x_n, y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ називається n*-ою інтегральною сумою* для функції $z = f(x, y)$ в області D, де S_i – елементарна ділянка області D.

✓ Діаметром d_i ділянки S_i називається довжина найбільшої з хорд, що з'єднує граничні точки S_i.

✓ Подвійним інтегралом функції $z = f(x, y)$ по області D називається границя, причому єдина, послідовності n-их інтегральних сум ($I_{n_1}, I_{n_2}, ..., I_{n_k}, ...$), коли максимальний діаметр $d_{i\max}$ прямує до 0.

***Зауваження*!** Інтеграл не залежить ні від способу розбиття області D на ділянки S_i, ні від вибору точок P_i: $\iint\limits_D f(x, y)dS = \lim\limits_{d_{i\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

Алгоритм зведення подвійного інтеграла до повторного

1. Будуємо область інтегрування.
2. Визначаємо зовнішню змінну інтегрування.

а) Якщо x – зовнішня змінна інтегрування, то:

3, а. Якщо область інтегрування неправильна відносно Oy, то горизонтальними та вертикальними лініями розбиваємо її на сукупність правильних, відносно Oy, областей. Зауважимо, що інтеграл по неправильній області дорівнює сумі інтегралів по правильних областях, що входять в область інтегрування.

4, а. Визначаємо абсциси кінців відрізка a та b, в який проєктується на вісь Ox правильна, відносно Oy, область інтегрування.

5, а. Проводимо вертикальні лінії $x = a$ та $x = b$ до перетину з областю і визначаємо верхню та нижню межі області й рівняння $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$, якими вони описуються.

6, а. Якщо верхня або нижня межа (або обидві) не визначається однією аналітичною функцією, то розбиваємо вертикальними лініями всю область інтегрування на дві або більшу кількість областей, в кожній з яких і верхня, і нижня межі визначаються однією аналітичною функцією. Зрозуміло, що в даному випадку розглядаємо подвійний інтеграл по складній області інтегрування як суму подвійних інтегралів по отриманих шляхом розбиття областях. Для кожного з одержаних інтегралів виконуємо пункти, починаючи з 4, а.

7, а. Подвійний інтеграл по правильній області з простою верхньою та нижньою межами обчислюється як повторний інтеграл

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

б) Якщо y – зовнішня змінна інтегрування, то:

3, б. Якщо область інтегрування неправильна відносно Ox, то горизонтальними та вертикальними лініями розбиваємо її на сукупність правильних, відносно Ox, областей. Далі інтеграл по неправильній області заміняємо на суму інтегралів по одержаних правильних областях.

4, б. Визначаємо ординати кінців відрізка c та d, в який проєктується (правильна відносно Ox!) область інтегрування на вісь Oy.

5, б. Проводимо горизонтальні лінії $y = c$ та $y = d$ до перетину з областю інтегрування і визначаємо ліву й праву межі області та їх рівняння $x = \psi_1(y)$ та $x = \psi_2(y)$.

6, б. Якщо ліва чи права межа (або обидві) не визначається однією аналітичною функцією, то горизонтальними лініями розбиваємо всю область інтегрування на дві або більшу кількість областей, в кожній з яких і ліва, і права межі визначаються однією аналітичною функцією. Подвійний інтеграл по складній області інтегрування розглядаємо як суму подвійних інтегралів по отриманих шляхом розбиття областях. Для кожного з одержаних інтегралів виконуємо пункти, починаючи з 4, б.

7, б. Подвійний інтеграл по правильній області з простою лівою та правою межами обчислюється як повторний інтеграл

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx .$$

Алгоритм обчислення подвійного інтеграла

1. Знаходимо первісну внутрішнього інтеграла за умови, що зовнішня змінна інтегрування є сталою. Замість внутрішньої змінної за формулою Н'ютона – Лейбніца підставляємо межі інтегрування.
2. Обчислюємо визначений інтеграл від отриманого в попередньому пункті виразу по зовнішній змінній інтегрування.

Потрійний інтеграл

✓ Потрійним інтегралом функції $f(x, y, z)$ по області V називається границя сум $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$, знайдених за умови, що $d_i \to 0$, і позначається $\iiint_V f(x, y, z)dv = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$.

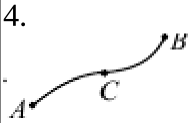
✓ *Зауваження!* Якщо підінтегральна функція $f(x, y, z)$ неперервна в області V, то інтеграл $\iiint_V f(x, y, z)dv$ існує і не залежить від способу розбиття області V на елементарні області V_i та вибору точок M_i.

Правило знаходження потрійного інтеграла

Спочатку інтегрують функцію $f(x, y, z)$ по внутрішній змінній інтегрування за умови, що дві інші є константами, потім результат інтегрують по проміжній змінній при сталій зовнішній змінній. В результаті отримаємо визначений інтеграл, який обчислюємо. Одержане число є шуканим значенням трикратного інтеграла.

Зауваження! Зауважимо, що більш складні (неправильні) області інтегрування розбивають на скінченну кількість правильних областей і, згідно з властивостями адитивності, результати обчислення по цих областях підсумовуються.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ «КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ»

Криволінійний інтеграл 1-го роду (по довжині дуги)	*Криволінійний інтеграл 2-го роду (по координатах)*
$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta l_i$ $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$ AB – шлях інтегрування dl – диференціал довжини дуги	$\int\limits_{L} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i;y_i)\Delta x_i+$ $+Q(x_i;y_i)\Delta y_i$ $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$ L – шлях інтегрування
Властивості	*Властивості*
1. $\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{BA} f(x;y)dl$ 2. $\int\limits_{AB}(f_1\pm f_2)dl=\int\limits_{AB} f_1dl\pm\int\limits_{AB} f_2dl$ 3. $\int\limits_{AB} k\,f(x;y)dl=k\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ 4.  $\int\limits_{AB} f\,dl=\int\limits_{AC} f\,dl+\int\limits_{CB} f\,dl$	1. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int\limits_{BA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 2. $\int\limits_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{L} P(x,y)dx+\int\limits_{L} Q(x,y)dy$ Властивості 2–4 для криволінійного інтеграла 1-го роду, виконуються і для криволінійного інтеграла 2-го роду.
Фізичний зміст	*Фізичний зміст*
$m=\int\limits_{AB}\rho(x;y)\,dl$ – маса дуги AB ρ – густина	$A=\int\limits_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ – робота

ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

<table>
<tr>
<th>Криволінійний інтеграл 1-го роду
(по довжині дуги)</th>
<th>Криволінійний інтеграл 2-го роду
(по координатах)</th>
</tr>
<tr>
<td>
1. $AB:\ y=y(x),\ a\le x\le b$
$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$
$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl=\int\limits_a^b f(x;y(x))\sqrt{1+(y')^2}\,dx$
2. $AB:\ x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\le x\le\beta$
$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$
$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl=\int\limits_\alpha^\beta f(x(t);y(t))\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$
3. $AB:\ \rho=\rho(\varphi),\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$
$x=rcos\varphi, y=rsin\varphi$
$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=$
$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(rcos\varphi, rsin\varphi)\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$
4. $AB:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\ \ t[\alpha,\ \beta]$
$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl=$
$=\int\limits_\alpha^\beta f\,(x(t),y(t)),z(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt$
</td>
<td rowspan="3">
1. $L:\ y=y(x),\ a\le x\le b$
$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_a^b P(x,y(x))\,dx+$
$+Q(x,y(x))\,y'(x)dx$

2. $L:\ x=x(y),\ c\le y\le d$
$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_c^d P(x(y),y)\,x'(y)dy+$
$+Q(x(y),y)\,dy$

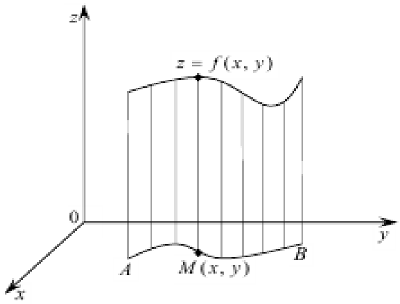
3. $L:\ x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\le t\ \le\beta$
$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_c^d P(x(t),y(t))\,x_t'dt+$
$+\ Q(x(t),y(t))\,y_t'dt$
4. $AB:\ \rho=\rho(\varphi),\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$
$x=rcos\varphi, y=rsin\varphi$
$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$
$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\{P(rcos\varphi, rsin\varphi)(-rsin\varphi)+$
$+Q(rcos\varphi, rsin\varphi)rcos\varphi\}\,d\varphi$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Зв'язок між подвійним і криволінійним інтегралами</td>
</tr>
<tr>
<td>
$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint Pdx+Qdy$
Формула Гріна
</td>
</tr>
<tr>
<th colspan="2">Зв'язок між криволінійними інтегралами першого
та другого роду</th>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Нехай AB – деяка плоска крива з початком A і кінцем B. Позначимо кути, які утворює дотична до AB з осями координат, через α, β. Очевидно, що ці кути є функціями координат у, х точки дотику M . Виділимо з AB елементарну дугу dl і будемо вважати її прямолінійною. Значить, dl є вектор з проекціями dydx, направлений так, як і крива AB. Отже, $dx=cos\alpha dl$, $y=cos\beta dl$. Тоді криволінійний інтеграл другого роду виразиться через криволінійний інтеграл першого роду за формулою: $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{AB}(Pcos\alpha+Qcos\beta)dl$.</td>
</tr>
</table>

ЗАСТОСУВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Геометричне і фізичне застосування криволінійних інтегралів 1-го роду	
Довжина кривої	$l = \int\limits_{l} dl$
Площа циліндричної поверхні: поверхня паралельна осі OZ; крива AB є твірною поверхні; поверхня задається функцією $z = f(x,y)$.	$S = \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$
Маса кривої	$m = \int\limits_{l} \gamma(x,y,z)\,dl$, $\gamma(x,y,z)$ – визначає щільність кожної точки кривої
Статичні моменти кривої	$M_x = \int\limits_{l} y\gamma(x,y,z)\,dl,\ M_y = \int\limits_{l} x\gamma(x,y,z)\,dl$, $x_c = \dfrac{\int\limits_{l} x\gamma(x,y,z)\,dl}{m},\ y_c = \dfrac{\int\limits_{l} y\gamma(x,y,z)\,dl}{m}$ - координати центра тяжіння
Моменти інерції кривої l відносно координатних осей	$I_x = \int\limits_{l} y^2\gamma(x,y)\,dl,\ I_y = \int\limits_{l} x^2\gamma(x,y)\,dl$
Полярний та центробіжний моменти інерції	$I_0 = \int\limits_{l} (x^2 + y^2)\gamma(x,y)\,dl$ $I_{xy} = \int\limits_{l} xy\,\gamma(x,y)\,dl$
Координати центра мас матеріальної кривої l	$x_c = \dfrac{m_y}{m},\ y_c = \dfrac{m_x}{m}$
Геометричне та фізичне застосування криволінійних інтегралів 2-го роду	
Робота сили $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ на криволінійному шляху l.	$A = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$
Площа області D, яка обмежена замкнутим контуром l.	$S = \dfrac{1}{2}\oint xdy - ydx$
Незалежність криволінійного інтеграла 2-го роду від контуру інтегрування	
Необхідною і достатньою умовою незалежності криволінійного інтеграла другого роду $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ від контуру інтегрування є виконання в області D рівності $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$	

СЕМАНТИЧНИЙ КОНСПЕКТ ДО ЗМІСТОВОГО МОДУЛЯ «КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ»

✓ Якщо існує скінченна границя інтегральної суми $\sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k)\Delta l_k$ при $\max \Delta l_k \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття дуги кривої *AB* на елементарні дуги, ні від вибору точок $M(x_k; y_k)$, то вона називається *криволінійним інтегралом першого роду* (по довжині дуги) від функції $f(x; y)$ по дузі кривої *AB* і позначається $\int_{AB} f(x;y)dl = \lim_{\max \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k)\Delta l_k$



✓ *Криволінійний інтеграл першого роду* $\int_{AB} f(x;y)dl$ при $f(x;y) \ge 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, яка складена з перпендикулярів до площини *Oxy*, поставлених в точках $M(x; y)$ дуги кривої *AB* і які мають змінну довжину $f(x;y)$ (геометричний зміст).

✓ *Криволінійним інтегралом другого роду від* функцій $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ по координаті $x(y)$ по кривій *AB* називається границя (якщо вона існує і не залежить від способу розбиття дуги кривої на відрізки й вибору точок $M(x_k, y_k)$ інтегральних сум $\sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k$ і $\sum_{k=1}^{n} Q(x_k, y_k)\Delta y_k$ за умови $\max \Delta x_k \to 0$ і $\max \Delta y_k \to 0$, тобто, $\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k = \int_{AB} P(x, y)dx$, $\lim_{\max \Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(x_k, y_k)\Delta y_k = \int_{AB} Q(x, y)dy$.

✓ *Загальним криволінійним інтегралом по координатах (другого роду)* від функцій $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ по кривій *AB* називають суму інтегралів і позначають $\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy$.

✓ Якщо $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ – проєкції сили $\vec{F}$ на координатні осі, тобто $\vec{F} = P(x; y)\vec{i} + Q(x; y)\vec{j}$, то загальний криволінійний інтеграл другого роду виражає роботу цієї сили на шляху *AB* (фізичний зміст криволінійного інтеграла другого роду), тобто $A = \int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy$.

✓ Якщо крива AB задана в просторі, то криволінійний інтеграл другого роду від трьох функцій $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ визначається аналогічно $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.

✓ Якщо контур інтегрування замкнутий, то будемо вважати, що замкнутий контур обходять в додатному напрямку, при якому область, яка лежить всередині цього контуру, залишається по ліву сторону від точки обходу.

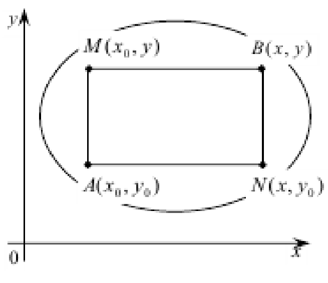
✓ Якщо контур інтегрування замкнутий, то величина криволінійного інтеграла другого роду по цьому контуру не залежить від того, яка точка контуру вибрана за початок інтегрування.

✓ Якщо криволінійний інтеграл другого роду не залежить від контуру інтегрування, то криволінійний інтеграл по замкнутому контуру, який лежить в області D, дорівнює нулю $\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

✓ Якщо криволінійний інтеграл другого роду не залежить від контуру інтегрування, тобто виконується умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то підінтегральний вираз є *повним диференціалом* деякої функції $U(x,y)$, тобто, $dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. В цьому випадку можна записати *узагальнену формулу* Ньютона – Лейбніца

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1)$$

✓ Із узагальненої формули Ньютона – Лейбніца запишемо криволінійний інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування



$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C,$$

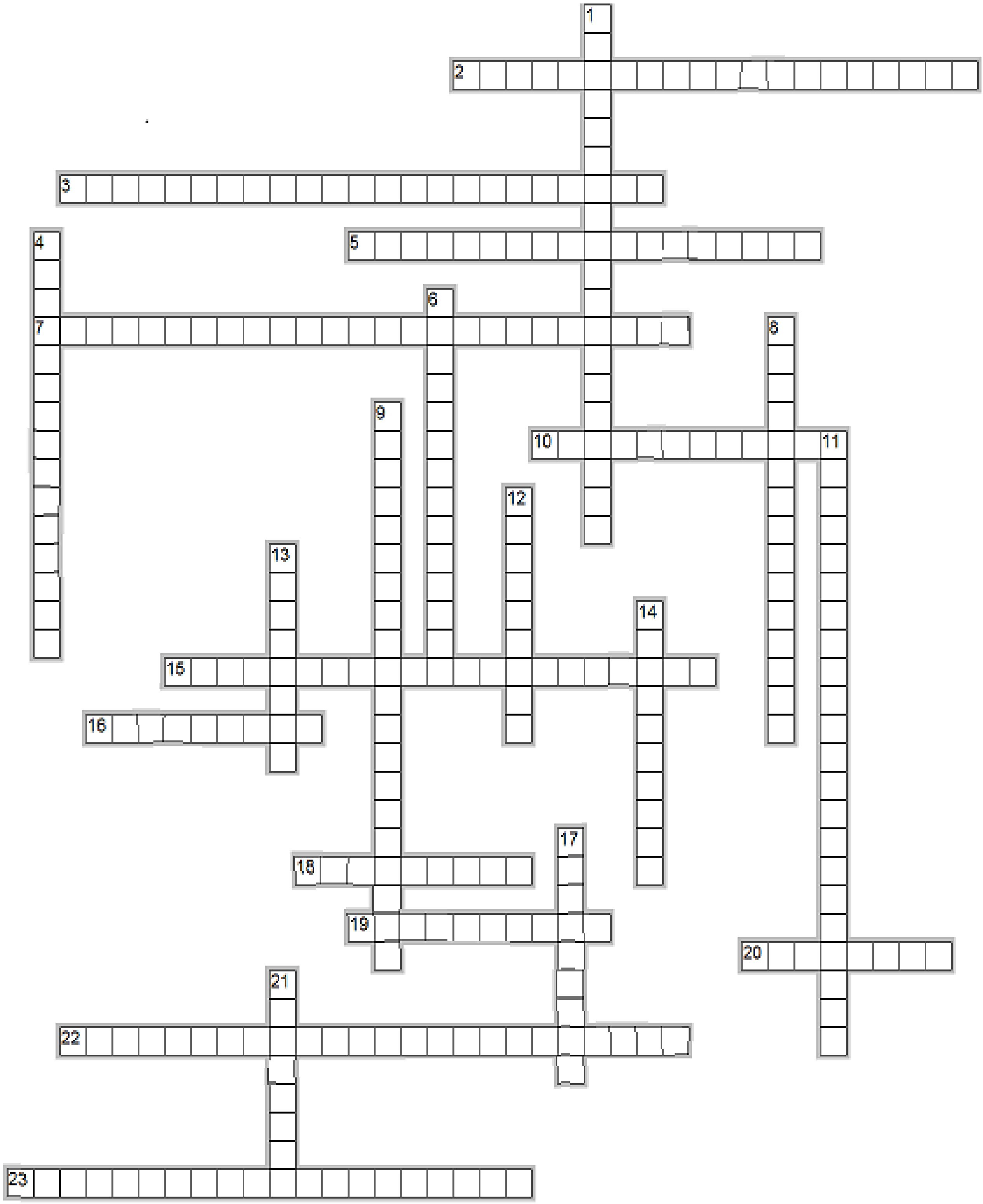
який дає можливість визначити всі функції, які мають підінтегральний вираз своїм повним диференціалом. Оскільки криволінійний інтеграл не залежить від вибору шляху інтегрування, то зручно за шлях інтегрування взяти ламану, ланки якої паралельні осям координат.

По ламаній ANB: $u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$

По ламаній AMB: $u(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + C$

ПЕРЕВІР СЕБЕ

КРОСВОРД № 1. Диференціальні рівняння



КРОСВОРД № 1. Диференціальні рівняння

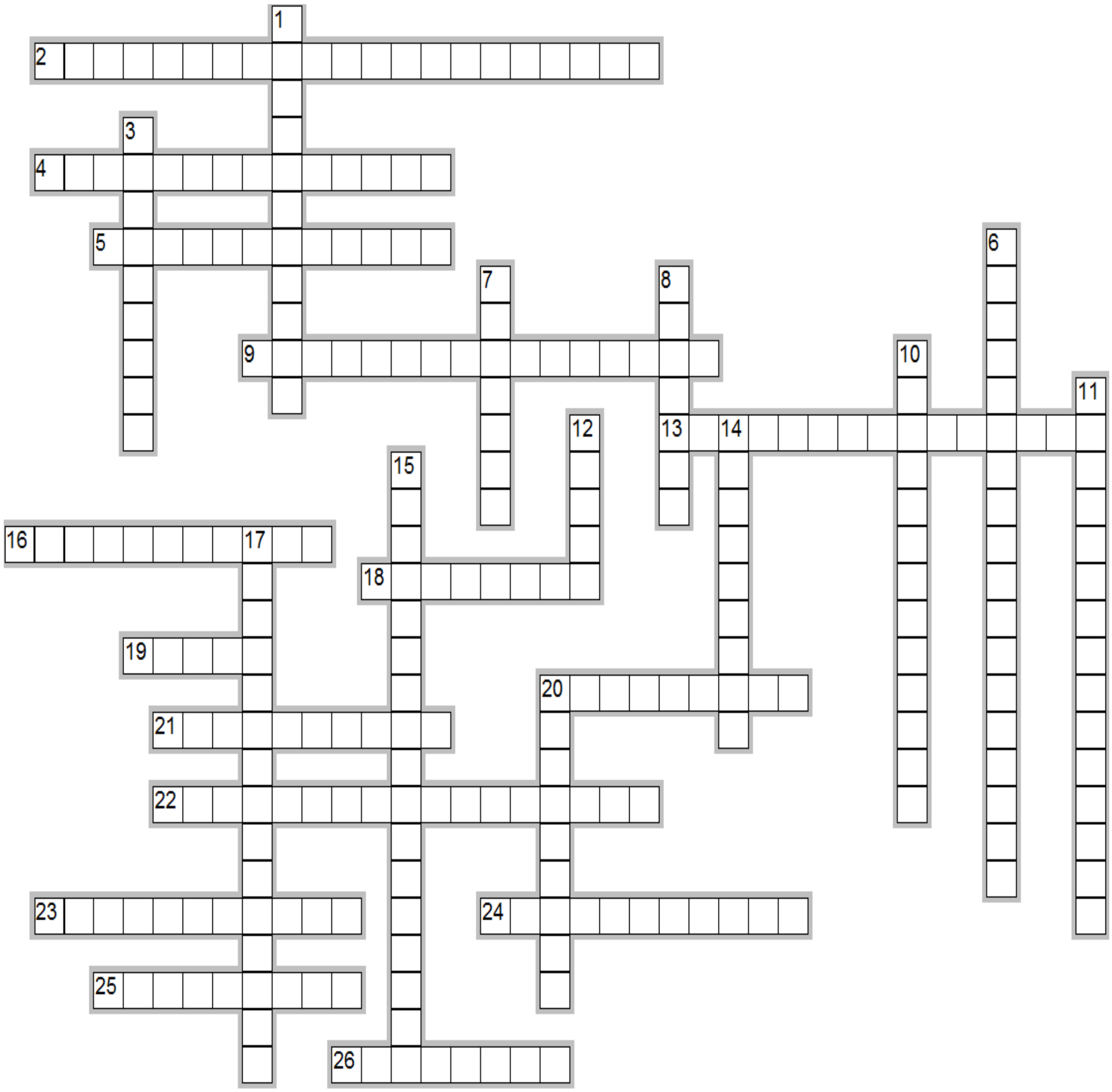
По горизонталі

2. Співвідношення $Ф(x, y, C0) = 0$ називають ...
3. Рівняння вигляду $M(x)dx + N(y)dy = 0$ називають диференціальним рівнянням з ...
5. Диференціальне рівняння, в якому шукана функція є функцією багатьох змінних
7. Диференціальні рівняння, у яких змінні можна розділити за допомогою множення або ділення обох частин рівняння на один і той самий вираз, називають диференціальним рівняння з ...
10. Знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння називають ...
15. Рівняння вигляду $y`` + py` + qy = f(x)$ називають ... диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами
16. Розв'язок, що отриманий з загального при певному значенні постійних, називають ... розв'язком
18. Якщо $y(x)$ та $g(x)$ два частинних розв'язки диференціального рівняння, то $ky(x) + ng(x)$ ... розв'язок даного рівняння
19. Функція, що при підстановці в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність
20. Максимальний порядок похідної (або диференціала), що входить у рівняння, називають ... диференціального рівняння
22. Якщо в лінійному однорідному диференціальному рівнянні зі сталими коефіцієнтами замінити всі похідні та шукану функцію у відповідному степені, то одержимо ...
23. Якщо похідна функції $P(x, y)$, яка стоїть біля dx, за змінною у дорівнює частинній похідній функції $Q(x, y)$, що стоїть біля dy, за змінною x, то диференціальне рівняння називають рівнянням в ...

По вертикалі

1. Рівняння виду $y``+py`+ qy = 0$ називають ... диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами
4. Знайти всі розв'язки диференціального рівняння означає ...
6. Рівняння, що містить шукану функцію та її похідні до n-го порядку включно
8. Рівняння, що містить незалежну змінну, шукану функцію та її похідну називають диференціальним рівнянням...
9. Функція $Ф(x, y, C) = 0$, яка неявно задає загальний розв'язок, називають ...
11. Операцію знаходження розв'язків диференціального рівняння називають ...
12. Функцію, що задовольняє диференціальне рівняння в області визначення всіх незалежних змінних? називають ... розв'язком
13. Рівняння вигляду $y` + p(x)y = q(x)$ називають ...
14. Якщо при підстановці у функцію $f(x, y)$ замість $x \sim tx$, замість $y \sim ty$ можна винести за загальну дужку параметр t в степені n, то дану функцію називають ... функцією n-го порядку
17. Диференціальне рівняння першого порядку $y` = f(x, y)$, права частина якого містить однорідну функцію нульового порядку
21. Диференціальне рівняння, в якому шукана функція є функцією однієї змінної

КРОСВОРД № 2. Елементи теорії рядів



КРОСВОРД № 2. Елементи теорії рядів

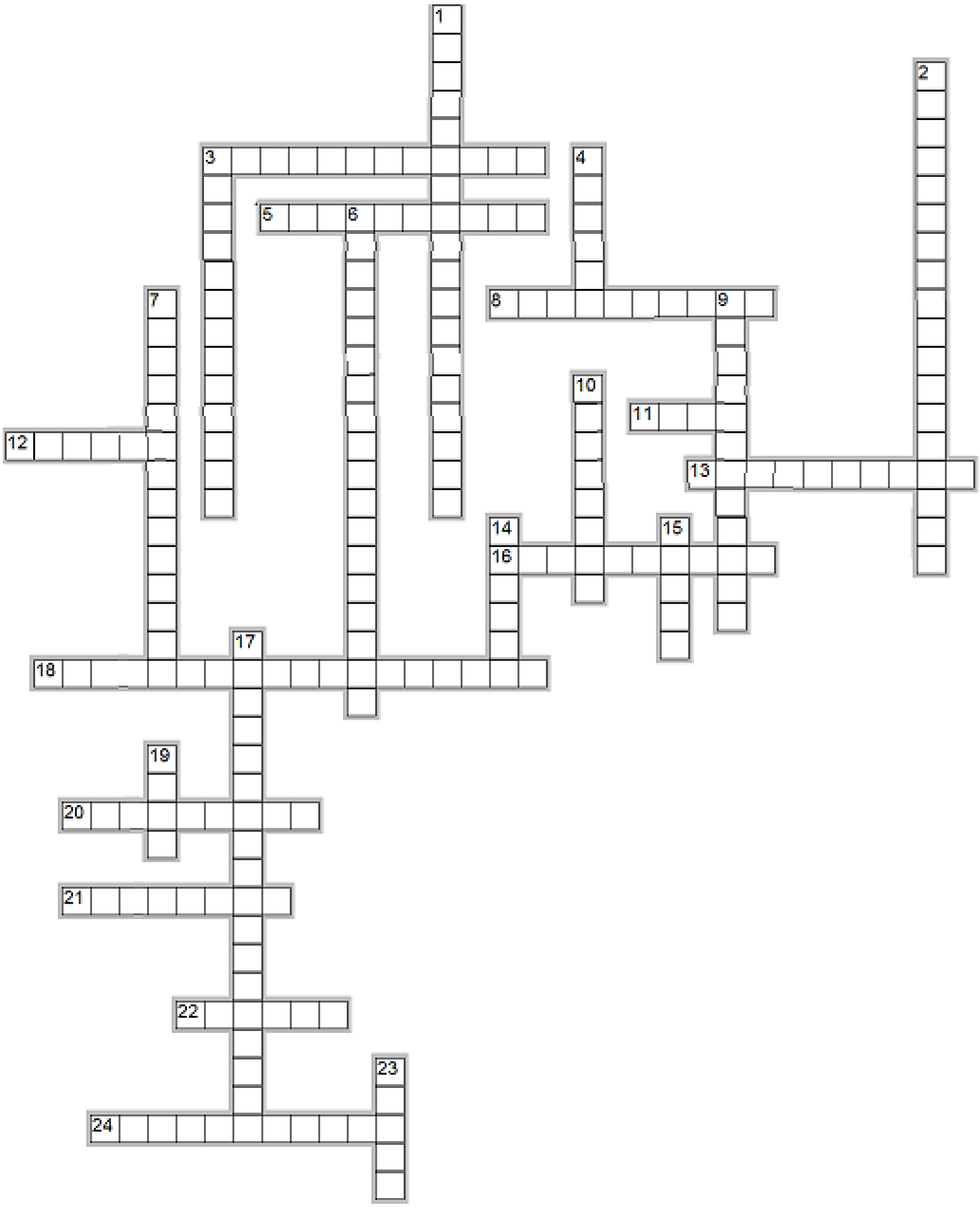
По горизонталі

2. Ознака, в якій використовується невластивий інтеграл
4. Степеневий ряд можна почленно ... у внутрішніх точках його інтервалу збіжності
5. Якщо в довільному ряді дописати, відкинути або змінити скінченне число членів, то збіжність чи розбіжність від цього ...
9. Поняття «інтервал збіжності» стосується ...
13. ... збіжності ряду формулюється так: якщо ряд збігається, то його загальний член прямує до нуля
16. Розвинення в який ряд використовує похідну функції?
18. Ряд, всі члени якого є невід'ємні числа, називають ... рядом
19. Ряд, складений з членів геометричної прогресії, збіжний, якщо значення модуля знаменника ... одиниці
20. Якщо границя послідовності частинних сум нескінченна або не існує, то ряд називають ...
21. Сума степеневого ряду всередині інтервалу збіжності є функція ...
22. Ознака, за якою збіжність ряду з'ясовується шляхом визначення границі відношення наступного члена ряду до попереднього
23. Степеневий ряд можна почленно ... на кожному відрізку $[a, b]$, що належить інтервалу збіжності $(-R, R)$
24. Ознака, за якою збіжність ряду з'ясовується шляхом обчислення границі кореня n-го степеня з загального члена
25. Границя послідовності n-их частинних сум, при n, що прямує до нескінченності
26. Яка ознака формулюється так: якщо члени знакозмінного ряду прямують до нуля і абсолютні величини їх не зростають, то такий ряд збіжний

По вертикалі

1. Необхідна умова збіжності використовується тільки для встановлення ... ряду
3. Ряд, складений з членів геометричної прогресії, розбіжний, якщо значення модуля знаменника ... одиницю
6. Степеневий ряд ... на кожному відрізку, що належить інтервалу збіжності
7. За ознакою Д`Аламбера ряд збіжний, якщо значення границі менше ...
8. Ряд, який має суму, називають...
10. Ряди, знаки членів в яких чергуються називають ... рядами
11. Суму перших n членів ряду називають n-ою ... ряду
12. Нескінченну суму членів числової послідовності називають...
14. Якщо для додатних рядів існує скінченна границя відношення загальних членів, то ці ряди збіжні або розбіжні ...
15. Ряд, у якого збіжним є відповідний ряд абсолютних значень членів ряду
17. Для того, щоб додатний ряд збігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність частинних сум цього ряду була ...
20. Сума збіжного і розбіжного рядів є ряд ...

КРОСВОРД № 3. Кратні інтеграли



КРОСВОРД № 3. Кратні інтеграли

По горизонталі

3. В полярній системі координат положення точки визначає ... та полярний радіус
5. Подвійний інтеграл існує для довільної функції $f(x, y)$, яка ... в обмеженій замкненій області
8. Координати ... визначають як відношення відповідних статичних моментів тіла відносно координатних площин до маси тіла
11. Якщо в подвійному інтегралі підінтегральна функція є поверхневою густиною матеріальної пластини, яка займає область D, то цей інтеграл визначає ... пластини
12. Об'єм циліндричного тіла обчислюється, як подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ по області D, якщо поверхня $z = f(x, y)$ обмежує тіло ...
13. Подвійним інтегралом від функції $z = f(x, y)$ по області D називають границю, до якої прямує послідовність інтегральних сум, коли прямує до нуля ... діаметр елементарних областей
16. Операція переходу від подвійного до повторного інтеграла передбачає ... подвійного інтеграла
18. Границя послідовності інтегральних сум для функції $f(x, y)$ в області D, коли максимальний діаметр прямує до нуля за умови, що дана границя не залежить ні від способу розбиття області D, ні від способу вибору точок P
20. ... елементарної ділянки S називають довжину найбільшої з хорд, що з'єднує граничні точки області
21. Система координат, в якій положення точки визначають відстанню від початку координат до заданої точки P, зенітним та азимутальним кутами
22. Вираз виду $dxdydz$ визначає елемент ...
24. Для обчислення потрійного інтеграла потрібно звести його до ... інтеграла

По вертикалі

1. Вираз $dxdy$ – це елемент ...
2. Співвідношеннями $x = rcosz, y = rsinz$ задають перехід від ... до декартових
3. В полярній системі вираз $rdrdz$ є елементом ...
4. Кут між напрямом відліку на вибраній площині та променем, що проходить через точку початку координат до проекції точки на площині
6. В циліндричній системі координат положення точки визначають: ..., азимут та висота
7. Якщо в області V підінтегральна функція дорівнює 1, то потрійний інтеграл чисельно дорівнює ...
9. Кут між віссю Ox і проекцією відрізка, що з'єднує початок координат з точкою P на площині XOY
10. Кут між віссю Oz і відрізком, що з'єднує початок системи координат і точку P
14. Подання подвійних інтегралів у вигляді повторних в полярній системі координат залежить від положення ... відносно області інтегрування
15. Напрямок вертикального підйому над довільно вибраним пунктом
17. Подвійний інтеграл по області D чисельно дорівнює об'єму ...
19. Якщо область D розбити на скінченну кількість областей $D1, D2,..., Dk$, які не мають спільних внутрішніх точок, то інтеграл по області D дорівнює ... інтегралів по областях Dk
23. Подвійний інтеграл по області D від функції $f(x,y)=1$ дорівнює ... цієї області

ДЕЯКІ ФОРМУЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Формули скороченого множення

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$; $\quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

Тригонометрія

Основні відношення

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $\quad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\quad \mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$;

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $\quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$;

Основні значення тригонометричних функцій

	0 0^0	$\pi/6$ 30^0	$\pi/4$ 45^0	$\pi/3$ 60^0	$\pi/2$ 90^0	π 180^0	$3/2\pi$ 270^0	2π 360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Формули додавання

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$; $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$;

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta};\qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta};\qquad \mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha};$$

Формули подвійних кутів

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{2\,\mathrm{ctg}\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha};$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha};\qquad \mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\alpha};$$

Формули половинних кутів

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\qquad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};\qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

Формули зведення

	$-\varphi$	$\frac{\pi}{2}\pm\varphi$	$\pi\pm\varphi$	$\frac{3}{2}\pi\pm\varphi$	$2\pi\pm\varphi$
sin	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$
cos	$\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$	$\cos\varphi$
tg	$-\mathrm{tg}\,\varphi$	$\pm\mathrm{ctg}\,\varphi$	$\pm\mathrm{tg}\,\varphi$	$\pm\mathrm{ctg}\,\varphi$	$\pm\mathrm{tg}\,\varphi$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\varphi$	$\pm\mathrm{tg}\,\varphi$	$\pm\mathrm{ctg}\,\varphi$	$\pm\mathrm{tg}\,\varphi$	$\pm\mathrm{ctg}\,\varphi$

Формули суми і різниці тригонометричних функцій

$$\sin\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = A\sin(a+\varphi), \qquad \text{где } A=\sqrt{a^2+b^2}, \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Формули добутку тригонометричних функцій

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right); \quad \cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Кочеткова І. Б., Сушко Л. Ф. Вища математика в формула та таблицях. Ч. 1 : навч. пос.-довідник. Дніпропетровськ : НМетАУ, 2013. 49 с.
2. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Ч. 2 : навч. пос. / Хом’юк І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Хом’юк В. В., Ковальчук М. Б. Вінниця : ВНТУ, 2017. 198 с.
3. Ліхоузова Т. А. Дискретна математика. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посібник для студ. спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення», 126 «Інформаційні системи та технології». Електронні текстові дані (1 файл: 2,7 Мбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 62 с.
4. Мартиненко М. А., Юрик І. І. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Київ : Видавничий дом «Слово», 2007. 296 с.
5. Легеза В. П., Олещенко Л. М. Операційне числення: практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», спеціалізації «Програмне забезпечення комп’ютерних та інформаційно-пошукових систем». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 70 с.
6. Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б. Збірник тестових завдань для систематизації та узагальнення знань з вищої математики. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. пос. Вінниця : ВНТУ, 2014,137 с.
7. Сачанюк-Кавецька Н. В., Краєвський В. О., Ковальчук М. Б. Вища математика з комп’ютерною підтримкою. Функції багатьох змінних, кратні інтеграли : навч. пос. Вінниця : ВНТУ, 2014. 135 с.
8. Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б. Вища математика. Елементи теорії поля. Основні поняття, формули та алгоритми для самостійної роботи студентів. Вінниця : ВНТУ, 2019. 140 с.
9. Пастушенко С. М., Підченко Ю. П. Вища математика: Довідник для студентів вищих навчальних закладів : навч. пос. Вид. 3-є. К. : Діал, 2004. 464 с.
10. Schwartz Laurent, Mathematics for the Physical Sciences, Dover Books on Mathematics, New York : Dover Publications, 2008, PP. 215–241

Навчальне електронне видання
комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Працьовитий Микола Вікторович
Ковальчук Майя Борисівна
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна

Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 2

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *М. Ковальчук*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет виготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 15.02.2023 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2023-015.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
Email: irvc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.