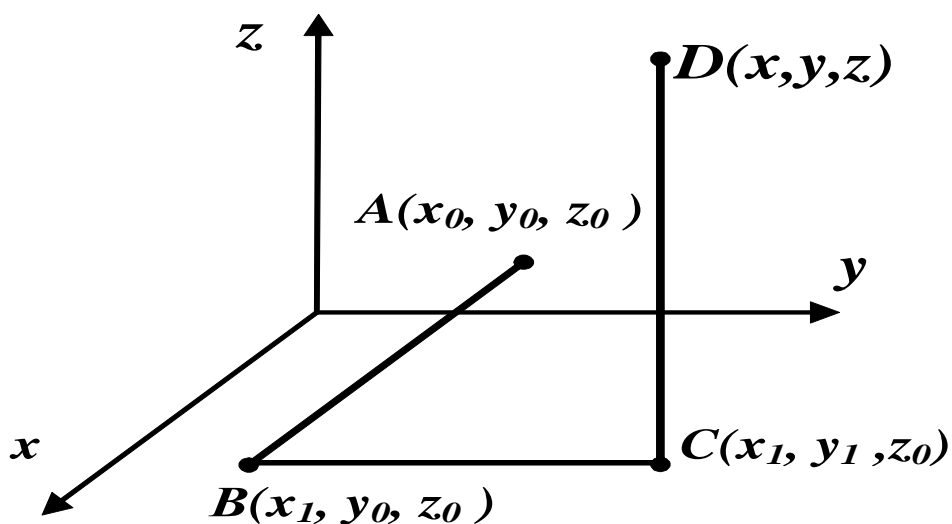


Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Основні поняття, формули та алгоритми
для самостійної роботи студентів



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

**Основні поняття, формули та алгоритми
для самостійної роботи студентів**

Електронний навчально-методичний посібник
комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2022

УДК 612.623
С22

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 3 від 27.10.2022 р.)

Рецензенти:

Хом'юк І. В., доктор педагогічних наук, професор
Джеджула О. М., доктор педагогічних наук, професор
Михайленко Л. Ф., доктор педагогічних наук, доцент

Сачанюк-Кавецька, Н. В.

Елементи теорії векторного поля. Основні поняття, формули та алгоритми для самостійної роботи студентів : електронний навчально – методичний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2022. – 88 с.

В посібнику розглянуто поняття скалярного та векторного полів, їх основні характеристики; спеціальні типи полів. Наведено достатню кількість прикладів та задач, зокрема і прикладного характеру. Розглянуті приклади вдало доповнюють текстовий матеріал, зрозумілі і легко сприймаються.

До кожної теми розроблено питання для самоперевірки.

Посібник розрахований на студентів інженерних спеціальностей, аспірантів.

УДК 612.623

ЗМІСТ

Передмова	4
Навчальна програма вивчення курсу «Теорія поля» для студентів інженерних спеціальностей	6
Методичні особливості вивчення змістового модуля «Теорія поля» .	11
Науковий тезаурус змістового модуля «Теорія поля»	13
Розробка лекцій для змістового модуля	14
Лекція 1	
Скалярне поле та його характеристики. Поняття векторного поля.	
Поверхневі інтеграли	15
1.1 Поняття скалярного та векторного полів	15
1.2 Локальні характеристики скалярного поля.....	20
1.3 Просторові інтеграли.....	27
Питання для самоперевірки.....	30
Лекція 2	
Поняття потоку векторного поля	31
2.1 Потік векторного поля.....	32
2.2 Поверхневі інтеграли другого роду. Обчислення потоку векторного поля.....	35
2.3 Алгоритм обчислення потоку векторного поля	40
2.4 Формула Остроградського-Гаусса	45
Питання для самоперевірки	47
Лекція 3	
Характеристики векторного поля.....	48
3.1 Дивергенція (розбіжність) векторного поля. Обчислення дивергенції векторного поля в декартовій системі координат	49
3.2 Циркуляція векторного поля та її обчислення	52
3.3 Проекція ротора векторного поля на вектор нормалі та ротор векторного поля.....	56
3.4 Формула Стокса	59
3.5 Оператор Гамільтона	61
3.6 Диференціальні операції другого порядку	63
Питання для самоперевірки.....	68
Лекція 4	
Спеціальні типи полів.....	70
4.1 Потенціальні векторні поля	71
4.2 Соленоїдні (трубчасті) поля.....	77
4.3 Гармонічне поле.....	81
4.4 Рівняння Максвелла.....	83
Питання для самоперевірки	84
Короткий довідник	85

Передмова

Сучасне суспільство висуває вимоги до вищої школи щодо підготовки фахівця, який володіє новим типом мислення, спроможний здобувати знання протягом всього життя та вміє творчо й якісно вирішувати професійні та життєві завдання і проблеми. Процеси глобалізації у розвитку науки висувають відмінні від традиційних вимоги до підготовки інженерів, що мають підвищений рівень фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної спрямованості.

Сучасні тенденції організації навчального процесу вищої школи передбачають впровадження кредитно-модульної системи навчання. Традиційно має місце гонитва за кількістю балів та відсутнє розуміння суті методологічного принципу такого підходу, який передбачає переорієнтацію організації навчального процесу з суто лекційно-інформаційно-практичної форми на індивідуально-диференційовану та особистісно-орієнтовану. Ідеологія освіти нинішнього етапу спрямована на суспільство знань і потребує готовності молоді до щоденної організації самоосвіти. Розроблені останнім часом державні стандарти вищої освіти передбачають в основу навчання покласти самостійну, творчу роботу студентів. У самій структурі навчання студента індивідуальна робота розглядається як один із основних чинників добування знань і має займати близько половини його навчального навантаження. Тому актуальною є необхідність створення навчальних посібників, що забезпечують підготовку самодостатніх фахівців.

Першим математизував фізичні знання І. Ньютон у «Математичних початках натуральної філософії». Такий підхід не втратив своєї актуальності і нині. Тому фахова підготовка майбутніх інженерів має забезпечити формування у майбутніх фахівців математичних компетенцій.

Формування математичних компетенцій дослідження природних явищ у студентів технічного вузу відбувається під час вивчення курсу вищої математики. Зокрема таких розділів як диференціальні рівняння, теорія поля, рівняння математичної фізики і ін. Теорія поля є теоретичною основою таких фундаментальних курсів як «Теоретичні основи електротехніки», «Теоретичні основи радіотехніки», «Рівняння математичної фізики» й ін.

У навчально-методичному посібнику розглянуто рекомендації щодо вивчення змістового модуля «Теорія поля» з курсу «Вища математика».

В посібнику систематизовано теоретичний матеріал у вигляді розробки планів-конспектів лекцій та подано короткий довідник змістового модуля. Це не тільки навчальний посібник, який допоможе студентам оволодіти необхідними теоретичними знаннями, але й коротке керівництво для викладачів та аспірантів. Основи теорії, які викладено в навчальному посі-

бнику, супроводжуються великою кількістю задач (зокрема і фізичного змісту), які наводяться з розв'язуванням. Також містяться питання для самоперевірки в кінці кожної лекції. Теоретичний матеріал подано в розгорнутій формі.

Цей посібник може бути використаний викладачами, аспірантами та студентами як денної, так і заочної форм навчання.

Навчальна програма вивчення курсу «Теорія поля» для студентів технічних спеціальностей

I. Загальні відомості

Змістовий модуль «Теорія поля» є одним з основних розділів циклу фундаментальної підготовки студентів.

II. Перелік дисциплін, знання яких необхідне для вивчення змістового модуля

Для оволодіння змістовим модулем студент має опанувати зміст розділів диференціального і інтегрального числення, лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

III. Мета і завдання вивчення змістового модуля

Основна мета вивчення змістового модуля:

- оволодіння студентами основними поняттями, методами теорії теорії поля, диференціального та інтегрального числення та технікою розв'язання прикладних задач;
- розгляд основ теорії поля під кутом їхнього практичного застосування;
- формування і розвиток у студентів логічного й алгоритмічного мислення, необхідного для розв'язання теоретичних та практичних задач за фахом.

Головна задача вивчення змістового модуля:

- опанувати сучасними математичними методами диференціальних рівнянь і інтегрального числення, які дозволяють розв'язувати теоретичні та практичні задачі;
- навчити формалізувати прикладну задачу і зводити її до типових сучасних задач теорії поля.

Після вивчення курсу:

– студент має **знати**:

поняття: скалярне поле, поверхні рівня, лінії рівня, похідна за напрямом, градієнт, векторне поле градієнта, векторне поле, векторні лінії,

потік векторного поля через замкнену поверхню, ротор векторного поля, циркуляція вектора по замкненому контуру, вихор вектора навколо певного напрямку в заданій точці, циркуляція векторного поля, дивергенція, ротор векторного поля, оператор Гамільтона, оператор Лапласа, диференціальні операції другого порядку;

формули: Остроградського-Гаусса, Гріна, Стокса, обчислення поверхневих інтегралів, визначення потоку за допомогою поверхневого інтеграла, знаходження дивергенції, ротора, градієнта та похідної за напрямом;

– студент має **вміти** застосовувати теоретичний матеріал до розв'язання задач і прикладів, які пропонуються як у змістовому модулі, так і в процесі подальшого навчання;

– *задавати* аналітично скалярне поле;

– *знаходити:* похідну скалярного поля за напрямом, градієнт, оператор «набла», дивергенцію векторного поля, ротор;

– *обчислювати:* потік векторного поля безпосередньо та за формулою Остроградського-Гаусса, циркуляцію векторного поля уздовж замкненого контуру безпосередньо та за формулою Стокса;

– *визначати:* джерела, стоки, типи полів.

IV. Методи навчання та інформаційно-методичне забезпечення

Основними методами навчання є лекції та практичні заняття, на яких закріплюються та відпрацьовуються основні теоретичні положення та вміння їх застосовувати до розв'язання практичних та прикладних задач.

V. Форми оцінювання

Контрольна тестова робота, розрахунково-графічна робота.

VI. Змістове наповнення змістового модуля «Теорії поля»

Згідно з робочою навчальною програмою з «Вищої математики» структура модуля «Теорія поля» така:

Таблиця 1

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						Заочна форма					
	усьо- го	зокрема					усьо- го	зокрема				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Модуль 5												
Змістовий модуль 9. Теорія поля												
Тема 44. Скалярне поле та його характеристики. Векторне поле. Орієнтовані та неорієнтовані поверхні. Поняття поверхневого інтеграла.	7	1	-			6	7	1	-			6
Тема 45. Потік векторного поля через орієнтовану поверхню, його властивості, фізичний зміст та обчислення.	10	2	2			6	7	0,5	0,5			6
Тема 46. Дивергенція векторного поля. Формула Остроградського-Гаусса.	9	1	1			7	7	0,5	0,5			6
Тема 47. Робота силового поля. Циркуляція векторного поля. Криволінійні інтеграли та їх обчислення. Теорема Стокса. Проекція ротора на напрямок нормалі, ротор векторного поля, його властивості та обчислення в декартових координатах.	9	3	3			7	7	0,5	0,5			6
Тема 48. Диференціальні операції другого порядку. Спеціальні типи полів.	9	1	1			3	7	0,5	0,5			6
Разом	44	8	7			29	35	3	2			30

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить близько 66% для денної форми навчання і 86% для заочної форми.

Для забезпечення в повному обсязі самостійної роботи студентів з теоретичним матеріалом ми пропонуємо вивчати теорію поля за розробленою нами програмою (табл. 2).

Таблиця 2

Модуль 5 Змістовий модуль 9. Теорія поля (№, назва теми, зміст матеріалу)
Тема 44. <i>Скалярне поле і моделі фізичних систем.</i> Скалярне поле. Лінії рівня. Похідна скалярного поля за напрямком. Градієнт скалярного поля. Векторне поле градієнта. Аналітичне означення вектора. Орієнтовані та неорієнтовані поверхні. Поняття поверхневого інтеграла.
Тема 45. <i>Векторне поле.</i> Потік векторного поля через орієнтовану поверхню, його властивості, фізичний зміст та обчислення. <i>Приклади фізичних задач:</i> знаходження густини середовища, стаціонарне поле швидкостей.
Тема 46. <i>Характеристики векторного поля.</i> Дивергенція векторного поля. Фізичний зміст дивергенції векторного поля. Оператор набла. Приклади розрахунку дивергенції. Формула Остроградського-Гаусса.
Тема 47. <i>Характеристики векторного поля.</i> Робота силового поля. Циркуляція векторного поля. Криволінійні інтеграли та їх обчислення Теорема Стокса. Проекція ротора на напрямок нормалі, ротор векторного поля, його властивості та обчислення в декартових координатах.
Тема 48. <i>Диференціальні операції другого порядку.</i> Оператор Гамільтона, оператор Лапласа. Диференціальні операції другого порядку. <i>Спеціальні типи полів.</i> потенціальні, соленоїдні та гармонічні поля.

Практичні вміння та навички студентів формуються під час виконання індивідуальних завдань з «Теорії поля», що мають на меті перевірити вміння студента самостійно розв'язувати різноманітні задачі (як математичні, так і фізичні, технічні), аналогічні до тих, що були розглянуті під час практичних занять.

Підготовка до практичних занять буде ефективною, коли студенти самостійно перевіряють свої знання за допомогою серії запитань для самоконтролю або розгляду переліку тестових запитань. За результатами вивчення цього розділу студенти мають оволодіти цінною математичною базою до вивчення природних явищ.

VII. Література до змістового модуля

1. Васильченко І. П., Данилов В. Я., Лобанов А. І., Тарах Є. Ю. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі. Навч. посібник. Кн. 2 – друге вид., зі змінами. Київ: Либідь, 1994. 280 с.
2. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. К.: Ігнатекс-Україна, 2011. 648 с.
3. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михайлін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі. Посібник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
4. Кривуца В. Г., Барковський В. Г., Барковська Н. В. Вища математика. Практикум. К.: ЦУЛ, 2003. 536 с.
5. Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 1: навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2019. 103 с.
6. Сачанюк-Кавецька Н. В., Краєвський В. О., Ковальчук М. Б. Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Функції багатьох змінних, кратні інтеграли. Навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2014. 135 с.
7. Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І. Елементи теорії поля. Навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2006. 100 с.
8. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. 2-е изд. Москва : Наука, 1986. 368 с.
9. Хом'юк І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Хом'юк В. В., Ковальчук М. Б. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 1: навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2017. 198 с.
10. Хом'юк І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Хом'юк В. В., Ковальчук М. Б. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою). Частина 2: навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2017. 148 с.
11. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика. Київ: Вища школа, 1986. 521 с.
12. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія: Навчальний посібник. Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. 296 с.

Методичні особливості вивчення змістового модуля «Теорія поля»

Основна мета вивчення змістового модуля:

- оволодіння студентами основними поняттями, методами теорії теорії поля, диференціального та інтегрального числення та технікою розв'язання прикладних задач;
- розгляд основ теорії поля під кутом їхнього практичного застосування;
- формування і розвиток у студентів логічного й алгоритмічного мислення, яке необхідне для розв'язання теоретичних та практичних задач за фахом.

Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи в межах змістового модуля

Лекція 1. Скалярне поле та його характеристики. Поняття векторного поля. Поверхневі інтеграли.

Скалярне поле і моделі фізичних систем. Скалярне поле. Лінії рівня. Похідна скалярного поля за напрямком. Градієнт скалярного поля. Векторне поле градієнта. Аналітичне означення вектора. Орієнтовані та неорієнтовані поверхні. Поняття поверхневого інтеграла.

Практичне заняття: обчислення похідної за напрямком; обчислення напрямку і максимальної швидкості зміни функції; обчислення поверхневих інтегралів.

Завдання для самостійної роботи: знаходження силових та векторних ліній.

Література: [1–11]

Лекція 2. Поняття потоку векторного поля

Векторне поле. Потік векторного поля через орієнтовану поверхню, його властивості, фізичний зміст та обчислення. *Приклади фізичних задач:* знаходження густини середовища, стаціонарне поле швидкостей.

Практичне заняття: обчислення потоку векторного поля через поверхню піраміди за означенням та за формулою Остроградського-Гаусса.

Завдання для самостійної роботи: обчислення повного теплового потоку через задану поверхню.

Література: [1–11]

Лекція 3. Характеристики векторного поля

Характеристики векторного поля. Дивергенція векторного поля. Фізичний зміст дивергенції векторного поля. Оператор набла. Приклади розрахунку дивергенції. Формула Остроградського-Гаусса. Робота силового поля. Циркуляція векторного поля. Криволінійні інтеграли та їх обчислення Теорема Стокса. Проекція ротора на напрямок нормалі, ротор векторного поля, його властивості та обчислення в декартових координатах.

Практичне заняття: обчислення дивергенції; обчислення циркуляції безпосередньо та за формулою Стокса вздовж деякого контура; дослідження векторного поля на стоки та джерела; обчислення густини циркуляції векторного поля.

Завдання для самостійної роботи: обчислення напруженості поля точкового електричного заряду; оператор Лапласа у диференціальних операціях другого порядку; обчислення характеристик векторного поля в циліндричних та сферичних координатах.

Література: [1-11]

Лекція 4. Спеціальні типи полів

Характеристики векторного поля. Робота силового поля. Циркуляція векторного поля. Криволінійні інтеграли та їх обчислення Теорема Стокса. Проекція ротора на напрямок нормалі, ротор векторного поля, його властивості та обчислення в декартових координатах.

Практичне заняття: визначення типу векторного поля (потенціальне, соленоїдне, гармонічне) і знаходження потенціалу.

Завдання для самостійної роботи: векторна форма рівнянь Максвелла; диполь векторного поля.

Література: [1–13]

Науковий тезаурус змістового модуля «Теорія поля»

Скалярне поле

поверхня рівня; лінії рівня; інваріантність щодо системи координат; похідна за напрямом; градієнт; напрямні косинуси; вектор нормалі

Векторне поле

векторні лінії, силові лінії, векторна трубка, потік векторного поля, дивергенція, джерела, стоки, циркуляція, ротор, потенціал, диполь

Просторові інтеграли

гладка поверхня, кусково-гладка поверхня, одностороння поверхня, двостороння поверхня, орієнтована поверхня, поверхневі інтеграли

Розробка лекцій для змістового модуля

Лекція 1

Тема: «Скалярне поле та його характеристики. Поняття векторного поля. Поверхневі інтеграли»

Мета:

актуалізація опорних понять (скаляр, вектор);
вивчення основних положень та означень теорії скалярного та векторного поля;

поглиблення, розширення знань, отриманих раніше під час вивчення розділів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального і інтегрального числення;

розвиток наукового мислення та пам'яті;

виховання культури математичного запису і мовлення.

Під час вивчення теми студенти мають:

знати: означення скалярного поля та основні поняття, які його стосуються (інваріантність щодо системи координат, поверхні та лінії рівня, похідна функції за напрямом); означення векторного поля та основні поняття, які його стосуються (векторні лінії, силові лінії); означення поверхневого інтеграла 1-го роду;

уміти: знаходити силові лінії векторного поля та локальні характеристики скалярного поля (похідна за напрямом, градієнт); обчислювати поверхневі інтеграли;

бути здатні: знаходити похідні та невизначений інтеграл.

Основні поняття: скалярне поле, векторне поле, поверхня рівня, лінія рівня, векторна лінія, силові лінії, похідна за напрямом, градієнт, поверхневий інтеграл.

План лекції

1. Поняття скалярного та векторного полів.
2. Локальні характеристики скалярного поля: похідна за напрямом; градієнт. Приклади обчислення локальних характеристик.
3. Просторві інтеграли: поверхневі інтеграли 1-го роду. Приклади обчислення.
4. Питання для самоперевірки.

Література [1–11]

Текст лекції

1.1 Поняття скалярного та векторного полів

Для розгляду цієї теми нагадаємо деякі необхідні поняття. По-перше, *скаляр*. Досить часто цей термін помилково ототожнюють з числом. Однак, скаляр – це величина, кожне значення якої може бути виражено лише одним числом. У фізиці прикладів безліч: довжина, ширина, площа, об'єм, густина, температура, маса і ін. Все це скалярні величини. По-друге, *вектор*. З погляду алгебри векторний простір – набір елементів (векторів), для яких визначено операції додавання і множення на число. Типовий вектор виражається двома або більшою кількістю чисел (своїми координатами). І навіть для одновимірного вектора лише одного числа мало з тієї причини, що у вектора є ще напрямок. І точка прикладання, якщо вектор не вільний. Чому вільний? Тому що в процесі вирішення завдань ви можете «прилаштувати» той чи інший вектор в будь-яку, потрібну вам, точку площини або простору. Отже, вільний вектор – це безліч однаково напрямлених відрізків. Шкільне означення вектора: «Вектором називається напрямлений відрізок» має на увазі *конкретний* напрямлений відрізок, взятий з заданої множини, який прив'язаний до певної точки площини або простору. Потрібно зазначити, що з погляду фізики поняття вільного вектора в загальному випадку некоректне, і точка прикладання вектора має значення. (Дійсно, прямий удар однакової сили по носі або по лобі спричинює різні наслідки). Далі, якщо не обумовлюється інше, мова піде тільки про вільні вектори. Векторами характеризують силові фізичні поля, швидкість і багато інших величин.

Якщо в кожній точці плоскої або просторової області задано функцію координат точки, то цю функцію називають *скалярним полем* і позначають символом

$$f(M) = f(x, y) \text{ або } f(M) = f(x, y, z). \quad (1.1)$$

Приклад 1.1. Розглянемо перпендикулярний промінь світла, що виходить із землі. Які скалярні поля можна задати на цьому промені?

- 1) Поле висоти – коли кожній точці променя поставлена у відповідність його висота над рівнем землі.
- 2) Поле атмосферного тиску – кожній точці променя відповідає числове значення атмосферного тиску в цій точці.

Приклад 1.2. Підійдемо до озера і подумки проведемо над його поверхнею площину. Які скалярні поля можна задати на цій поверхні? Найпростіша відповідь дає два варіанти. 1) Поле, яке кожній точці «водного»

фрагменту площини ставить у відповідність глибину озера.
2) Поле температури поверхні води в кожній точці озера.

Найважливішою властивістю скалярного поля є його *інваріантність* щодо системи координат. Зрозуміло, з якого б боку ми на промінь/озеро не подивилися – скалярне поле (висота, глибина, температура і т. д.) від цього не зміниться. Більше того, скалярне поле, скажімо, глибини, можна задати і на іншій поверхні, наприклад, на півсфері, або безпосередньо на самій водній поверхні.

Важливою характеристикою скалярного поля, що дає загальне уявлення про характер зміни поля, є *поверхні* або *лінії рівня*.

Поверхня, в кожній точці якої поле зберігає одне і те саме значення, називається *поверхнею рівня*. Згідно з означенням рівняння поверхні рівня таке:

$$f(x, y, z) = \text{const} . \quad (1.2)$$

У випадку, коли поле задано на площині, поверхні рівня вироджуються в *лінії рівня*:

$$f(x, y) = \text{const} . \quad (1.3)$$

Прикладом ліній рівня є лінії постійної висоти гір або постійної глибини морів на географічних картах.

Потрібно зауважити, що числа і функції задають скалярні поля далеко не завжди! Наприклад, розглянемо геометричний вектор площини в деякій афінній системі координат. Що станеться, якщо перейти до нового базису? У загальному випадку цей вектор змінить координати. Координати вектора – це числа, але скалярними величинами вони не є, оскільки скаляри не залежать від системи координат. Більше того, координати векторів можна задати і функціями – і ці функції не будуть породжувати скалярне поле!

Якщо в кожній точці простору задано вектор

$$\bar{a}(a_x(M), a_y(M), a_z(M)),$$

де $a_x(M), a_y(M), a_z(M)$ є функції точки M , то кажуть, що задано *векторне поле* $\bar{a}(M)$.

Зрозуміло, що елементи векторного поля «не вільні», а «прив'язані» до точок. Наприклад, якщо провести відомий зі школи дослід з магнітом на столі: чим ближче до магніту піднести залізяку, тим сильніше вона притягується. І ця сила в тій чи іншій точці поверхні столу якраз характеризується вектором напруженості магнітного поля. Чим сильніше тяжіння, тим

довший вектор і його вістря вказує напрям дії сили. Але набагато частіше векторні поля розглядають в тривимірному просторі. Наприклад гравітаційне поле Землі. Чим далі від поверхні, тим менша сила тяжіння і тим коротші відповідні силові вектори, спрямовані до центра нашої планети.

Велику групу векторних полів утворюють так звані *поля швидкостей*. Подивіться на поле (яке з травичкою) і подумки окресліть над ним довільну просторову область. Уявіть, що над полем дме вітер – невеликий такий ураганчик для більшої наочності. Тепер зафіксуємо деякий момент часу і кожній точці побудованої області поставимо у відповідність «зв'язаний» вектор, який характеризує:

а) напрямок руху вітру в цій точці;

б) швидкість його руху в цій точці – чим вища швидкість, тим довший вектор. Якщо в якійсь точці штиль, то їй відповідає нульовий вектор.

Безліч цих векторів і утворює *векторне поле швидкості вітру* в заданий момент часу.

Аналогічно влаштовано поле швидкостей течії рідини. Так, наприклад, кожній точці річки в певний момент часу можна поставити у відповідність вектор, який вказує напрямок і швидкість течії в цій точці.

Зрозуміло, що скалярні і векторні поля можна визначити в усьому просторі. Однак з відповідними фізичними прикладами не все однозначно, оскільки таких понять, як *температура*, *гравітація* (або інших) *десь* може і зовсім не існувати. Наприклад, всередині каменів вітер, як правило, не дме.

Потрібно зазначити, що деякі векторні поля (ті ж поля швидкостей) з плином часу швидко змінюються, і тому в багатьох фізичних моделях розглядають додаткову незалежну змінну t . Те саме стосується і скалярних полів – температура ж, справді, теж не «застигла» в часі. Однак в рамках математики ми обмежимося трійкою x, y, z і будемо мати на увазі деякий фіксований момент часу або час, за який поле не встигло змінитися.

Одними з важливих характеристик векторного поля є *векторні лінії*.

Векторною називається лінія, в кожній точці якої дотична до неї паралельна вектору поля. Позначимо через $\vec{\tau}(dx, dy, dz)$ вектор дотичної. Тоді рівняння векторної лінії таке

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \quad (1.4)$$

Напевно багато хто пам'ятає цей шкільний дослід. Під аркуш паперу кладуть магніт, а на папір висипають металеві ошурки, які розташовуються вздовж ліній поля: кожна точка векторної лінії є початком вектора поля, який лежить на дотичній в цій точці (рис. 1.1).

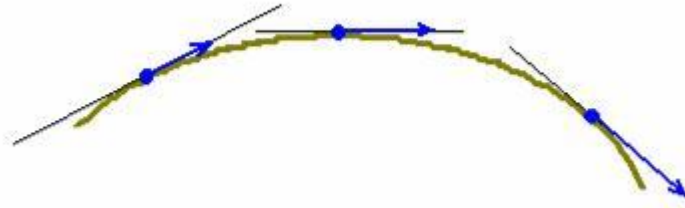


Рисунок 1.1

Зрозуміло, вектори в загальному випадку мають різну довжину. Так, на рис. 1.1, за переміщення зліва направо їх довжина зростає (тут можна припустити, що ми наближаємося, наприклад, до магніту). У силових фізичних полях векторні лінії так і називають – *силовими лініями*. Інший, більш простий приклад – це гравітаційне поле Землі: його силові лінії являють собою промені з початком у центрі планети, причому вектори сили тяжіння розташовані на самих променях.

Якщо векторне поле задано ненульовою функцією $\vec{a} = a_x(x, y)\vec{i} + a_y(x, y)\vec{j}$, то його силові лінії можна знайти за диференціальним рівнянням $a_y(x, y)dx = a_x(x, y)dy$. Розв'язок $a(x, y) = C$ цього рівняння задає сімейство векторних ліній на площині XOY .

Для простого векторного поля $\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$ силові лінії визначаються співвідношеннями $\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$. Тут потрібно розв'язати

систему двох диференціальних рівнянь і отримати два сімейства $a_1(x, y, z) = C_1$, $a_2(x, y, z) = C_2$ просторових поверхонь. Лінії перетину цих сімейств і будуть просторовими векторними лініями. Якщо всі компоненти векторного поля відмінні від нуля, то існує кілька технічних способів розв'язання. Розглянемо випадки, коли одна з компонент векторного поля дорівнює нулю.

1. Якщо $a_x(x, y, z) = 0$, то потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} dx = 0 \\ \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)} \end{cases}.$$

2. Якщо $a_y(x, y, z) = 0$, то потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} dy = 0 \\ \frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)} \end{cases}.$$

3. Якщо $a_z(x, y, z) = 0$, то потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} dz = 0 \\ \frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} \end{cases}.$$

Приклад 1.3. Знайти силові лінії поля $\vec{a} = x\vec{i} + 2z\vec{k}$.

Розв'язування. В цій задачі $a_y(x, y, z) = 0$, то формуємо і розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} dy = 0 \\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{2z} \end{cases}.$$

Звідки $\int dy = C_1$, ($C_1 = \text{const}$), $y = C_1$ – сімейство площин, паралельних координатній площині XOZ .

З другого рівняння маємо:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{2z} \Rightarrow 2 \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln|z| = 2 \ln|x| + \ln|C_2| \Rightarrow \ln|z| = \ln|C_2 x^2| \\ \Rightarrow z = C_2 x^2, (C_2 = \text{const}) - \text{сімейство параболічних циліндрів, паралельних осі } OY.$$

Таким чином, силовими лініями є: $\begin{cases} y = C_1 \\ z = C_2 x^2 \end{cases}$.

Увага! Спробуйте самостійно знайти силові лінії поля $\vec{a} = 4y\vec{i} - 9x\vec{j}$.

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} z = C_1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = C_2 \end{cases}.$$

1.2 Локальні характеристики скалярного поля

Похідна за напрямом

Нехай задано скалярне поле $f(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $M(x, y, z)$ і проведемо з цієї точки вектор \vec{s} , напрямні косинуси якого $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ (косинуси кутів, які вектор утворює з координатними осями) (рис. 1.2).

На векторі \vec{s} на відстані Δs від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Тоді $\Delta s = MM_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

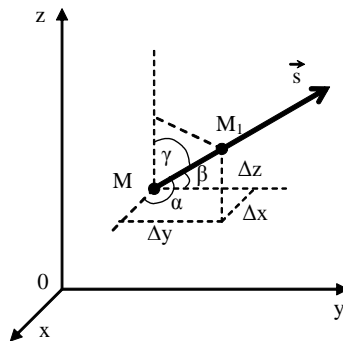


Рисунок 1.2

Обчислимо тепер приріст $\Delta_s f$ функції $f(x, y, z)$ за переходу від точки M до точки M_1 в напрямі вектора \vec{s} :

$$\Delta_s f = f(M_1) - f(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_s f}{\Delta s}$ за $\Delta s \rightarrow 0$, то цю границю називають *похідною функції $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора \vec{s}* і позначають $\frac{\partial f}{\partial s}$, тобто

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta_s f}{\Delta s}. \quad (1.5)$$

Формула для обчислення похідної за напрямом така:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma. \quad (1.6)$$

З формули (1.6) випливає, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, якщо \vec{s} збігається з одним із ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то похідна за напрямом \vec{s} збігається з відповідною частинною похідною. Наприклад, якщо $\vec{s} = \vec{i}$, то $\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, тому

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Подібно до того, як частинні похідні характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна $\frac{\partial f}{\partial s}$ показує швидкість зміни скалярного поля $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора \vec{s} .

Абсолютна величина похідної $\left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|$ відповідає значенню швидкості, а знак похідної визначає характер зміни функції $f(x, y, z)$ в напрямі \vec{s} (зростання чи спадання).

Очевидно, що похідна за напрямом, протилежним напрямку \vec{s} , дорівнює похідній за цим напрямом, взятій з протилежним знаком.

Фізичний зміст цього результату такий: зміна напрямку на протилежний не впливає на значення швидкості зміни поля, а тільки на характер цієї зміни.

Приклад 1.4. Знайти похідну скалярного поля $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} + 3z$ в точці $M_1(1, 0, 1)$ в напрямі точки $M_2(3, 2, 2)$.

Розв'язування. Похідну скалярного поля $f(x, y, z)$ в точці M_1 обчислимо за формулою (1.6).

Для цього знайдемо частинні похідні скалярного поля за кожною змінною та обчислимо значення цих похідних в точці M_1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial x} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3y^2 = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3, \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial z} = 3.$$

Обчислимо напрямні косинуси вектора $\vec{s} = \overline{M_1M_2} (2,2,1)$. Нагадаємо, якщо маємо деякий вектор $\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$, то його напрямні косинуси обчислюємо за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|}, \quad \cos \beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|}, \quad \cos \gamma = \frac{s_z}{|\vec{s}|}, \quad |\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}. \quad (1.7)$$

Оскільки $|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$, то $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$.

Отже, $\frac{\partial f(M_1)}{\partial s} = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$, тобто $\frac{\partial f(M_1)}{\partial s} = \frac{5}{3}$.

Градiєнт

Нехай задано поле $f(x, y, z)$ і точку $M(x, y, z)$. У якому напрямі похідна $\frac{\partial f}{\partial s}$ має найбільше значення? Відповідь на це запитання має важливе практичне значення і дається на основі поняття *градієнта поля*.

Вектор, координати якого є значення частинних похідних функції $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають $\text{grad } f$. Отже,

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.8)$$

Зв'язок між градiєнтом та похідною в цій точці за довільним напрямом показує така теорема.

Теорема. Похідна функції $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора \vec{s} дорівнює проєкції градiєнта функції в цій точці на вектор \vec{s} , тобто

$$\frac{\partial f}{\partial s} = n p_s \text{ grad } f. \quad (1.9)$$

Зазначимо деякі **властивості градiєнта**.

I. Похідна в заданій точці за напрямом вектора має найбільше значення, якщо напрям цього вектора збігається з напрямом градiєнта, причому

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{\max} = |\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}. \quad (1.10)$$

Таким чином, швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта. Зрозуміло, що у напрямі, протилежному напрямку градієнта, поле найшвидше зменшуватиметься.

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю. Іншими словами, скалярне поле залишається сталим у напрямі, перпендикулярному до градієнта.

3. Вектор-градієнт у кожній точці поля $f(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

4. Справедливі рівності:

$$\begin{aligned} \text{grad } (u + v) &= \text{grad } u + \text{grad } v; \\ \text{grad } (cu) &= c \text{ grad } u; \quad c = \text{const}; \\ \text{grad } (uv) &= v \text{ grad } u + u \text{ grad } v; \\ \text{grad } \frac{u}{v} &= \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2}; \\ \text{grad } f(u) &= \frac{\partial f}{\partial u} \text{ grad } u. \end{aligned}$$

Знаходження *векторної функції* градієнтів – популярний і поширений спосіб отримати з скалярного поля – векторне.

Наприклад, якщо функція $f(x, y)$ задає скалярне поле глибини озера, то відповідна векторна функція $\text{grad } f(x, y)$ визначає безліч зв'язаних векторів, кожен з яких вказує напрямом найшвидшого підйому дна в тій чи іншій точці і швидкість цього підйому. Якщо $f(x, y, z)$ задає скалярне поле температури деякої області простору, то відповідне векторне поле $\text{grad } f(x, y, z)$ характеризує напрямом найшвидшого прогрівання в кожній точці цієї області.

Приклад 1.5. Дано скалярне поле $f = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$ і точка $M_0(-1, 1, 1)$

потрібно:

а) скласти градієнтну функцію скалярного поля;

б) знайти градієнт поля в точці M_0 і обчислити його довжину;

в) обчислити похідну за напрямом нормального вектора до поверхні $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$ в точці M_0 , що утворює з додатним напрямом осі OZ тупий кут.

Зауваження! 1) Нагадаємо, що нормаль до поверхні в точці – це пряма, що проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної площині.

2) Дотична площина до поверхні в точці – це площина, яка містить дотичні до всіх кривих, що належать цій поверхні і проходять через задану точку.

Розв'язування.

а) Знаходимо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} \right)_x = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{x} \right) = \frac{1}{y} \cdot 1 + 0 - z \cdot \left(\frac{z}{x} \right) = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} \right)_y = x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{x} \right) = -\frac{1}{y^2} \cdot x + \frac{1}{z} \cdot 1 - 0 = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} \right)_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{x} \right) = 0 - \frac{1}{z^2} \cdot y - \frac{1}{x} \cdot 1 = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}.$$

Складемо функцію, яка визначає векторне поле градієнтів:

$$\mathit{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} = \left(\frac{1}{y} + \frac{z}{x^2} \right) \bar{i} + \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} \right) \bar{j} - \left(-\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x} \right) \bar{k}.$$

Отримана векторна функція кожній точці області визначення скалярного поля ставить у відповідність вектор $\mathit{grad} f$, який вказує напрямок і максимальну швидкість зміни функції $f = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$ в цій точці.

б) Обчислимо значення частинних похідних в точці $M_0(-1, 1, 1)$. Для цього підставимо значення координат заданої точки у знайдені в пп. а) похідні:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \frac{1}{1} + \frac{1}{(-1)^2} = 2;$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = -\frac{-1}{1^2} + \frac{1}{1} = 2;$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = -\frac{1}{1^2} - \frac{1}{-1} = 0.$$

Таким чином $\text{grad } f(M_0) = 2\bar{i} + 2\bar{j}$. Цей вектор виходить з точки M_0 , і переміщувати його нікуди не можна, оскільки він характеризує напрямок найшвидшого зростання скалярного поля саме в цій точці. Мірилом цієї максимальної швидкості є довжина градієнта:
 $|\text{grad } f(M_0)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$.

в) Переконаємося, що точка $M_0(-1, 1, 1)$ належить поверхні $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$: $(-1)^2 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 1 \Rightarrow 1 = 1$. Нас не цікавить, що це за поверхня, нам важливий її нормальний вектор, який утворює з додатним напрямом осі OZ тупий кут.

Якщо поверхню задано рівнянням $\varphi(x, y, z) = 0$, то її вектор нормалі

$$\bar{n} = \{\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z\}, \quad (1.11)$$

а одиничний вектор нормалі:

$$\bar{n}^0 = \pm \frac{\varphi'_x \bar{i} + \varphi'_y \bar{j} + \varphi'_z \bar{k}}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}}, \quad (1.12)$$

В нашому випадку $\varphi = x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 1$,

$$\varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_x(M_0) = 2(-1) = -2$$

$$\varphi'_y = -4y, \quad \varphi'_y(M_0) = -4 \cdot 1 = -4$$

$$\varphi'_z = 4z, \quad \varphi'_z(M_0) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\bar{n}(-2; -4; 4).$$

Для того, щоб з'ясувати кут, який знайдений вектор утворює з додатним напрямом осі OZ , обчислимо скалярний добуток вектора нормалі до заданої поверхні з напрямним вектором додатного напрямку цієї осі $\bar{k}(0, 0, 1)$: $\bar{n} \cdot \bar{k} = -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4 > 0$. Отже кут між цими векторами гострий, що нас не влаштовує. Тому потрібно брати протилежно спрямований нормальний вектор $-\bar{n}(2; 4; -4)$.

Зауваження! Нормальні вектори на відміну від градієнтів – вільні, їх завдання лише вказати напрямок.

Обчислимо напрямні косинуси цього напрямку. Оскільки за формулою (1.12) одиничний вектор нормалі

$$\vec{n}^0 = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}, \text{ то}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Зауваження! Правильність знаходження напрямних косинусів перевіряють виконанням рівності $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Таким чином, шукана похідна за напрямом:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 2, \text{ що характеризує швидкість зростання}$$

скалярного поля в точці $M_0(-1, 1, 1)$ в напрямі вектора $\vec{n}(-2; -4; 4)$. Це число не може перевищувати $|\text{grad } f(M_0)| = 2\sqrt{2}$ (максимальної швидкості зміни в цій точці).

Увага! Спробуйте самостійно знайти кут між градієнтами скалярних полів $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ та $u = \frac{yz^2}{x^2}$ в точці $M_0\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

Приклад 1.6. Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля $f(M) = \arctg \frac{3y}{x} + 2z^2$ в точці $M_0(1, 0, 1)$.

Розв'язування. Градієнт скалярного поля обчислимо за формулою (1.9). Для цього знайдемо частинні похідні скалярного поля за кожною змінною:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{9y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{3y}{x^2}\right) = \frac{-3y}{x^2 + 9y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{9y^2}{x^2}} \cdot \frac{3}{x} = \frac{3x}{x^2 + 9y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4z.$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці $M_0(1, 0, 1)$, дістанемо:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 4.$$

Отже,

$$\text{grad } f(M_0) = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k},$$

або

$$\text{grad } f(M_0) = 3\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Обчислимо величину градієнта скалярного поля за формулою (1.11), маємо:

$$|\text{grad } f(M_0)| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Таким чином, найбільша швидкість зростання скалярного поля $f(M)$ в точці M_0 досягається у напрямі вектора $\text{grad } f(M_0) = 3\bar{j} + 4\bar{k}$ і дорівнює $|\text{grad } f(M_0)| = 5$.

1.3 Просторові інтеграли

Поверхня $\sigma: \varphi(x, y, z) = 0$ називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина, положення якої неперервно змінюється разом із точкою дотику. Гладкими є, наприклад, площина, сфера, еліпсоїд, параболоїди. Поверхня називається *кусково-гладкою*, якщо вона складається зі скінченної кількості гладких частин, що примикають одна до одної по кусково-гладких або просто гладких лініях. Найпростіший приклад кусково-гладкої поверхні – поверхня будь-якого многогранника.

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна на гладкій обмеженій поверхні σ . Розіб'ємо вказану поверхню на n частин $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, площі яких відповідно позначимо через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. На кожній частині $\sigma_i, i = \overline{1, n}$ довільно виберемо по одній точці $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і складемо інтегральну суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i. \quad (1.13)$$

Поверхневим інтегралом I роду від функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ називається границя інтегральних сум (1.13) за умови, що найбільший з діаметрів $d(\sigma_i)$ елементарної частини прямує до нуля, тобто

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\max d(\sigma_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\sigma_i. \quad (1.14)$$

Ця границя не залежить ні від способу розбиття поверхні на частини, ні від вибору точок у кожній з них. В цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається інтегрованою по поверхні σ , а саму поверхню – областю інтегрування.

Основні властивості поверхневого інтеграла першого роду, по суті, повторюють властивості подвійного інтеграла. Тому обчислення поверхне-

вого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла. Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$ (будь-яка пряма, паралельна осі OZ , перетинає поверхню не більше ніж в одній точці) і нехай проекцією поверхні σ на площину XOY є область D_{xy} . Якщо функція $z(x, y)$ і її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ неперервні в області D_{xy} , то елемент площі поверхні визначається формулою

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (1.15)$$

і поверхневий інтеграл I роду перетворюється на подвійний інтеграл

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (1.16)$$

Аналогічно записуються формули, що виражають за відповідних умов інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли за її проекціями на інші координатні площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $y = y(x, z)$ і проектується на площину XOZ в область D_{xz}

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz. \quad (1.17)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $x = x(y, z)$ і проектується на площину YOZ в область D_{yz}

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz. \quad (1.18)$$

Приклад 1.7. Обчислити інтеграл $\iint_S xyz dS$, де S – частина площини $z = 2 - 2x$, яка обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$.

Розв'язування. Застосуємо формулу (1.16). Для цього, спочатку, побудуємо поверхню (рис. 1.3, а) та її проекцію на площину XOY (рис. 1.3, б).

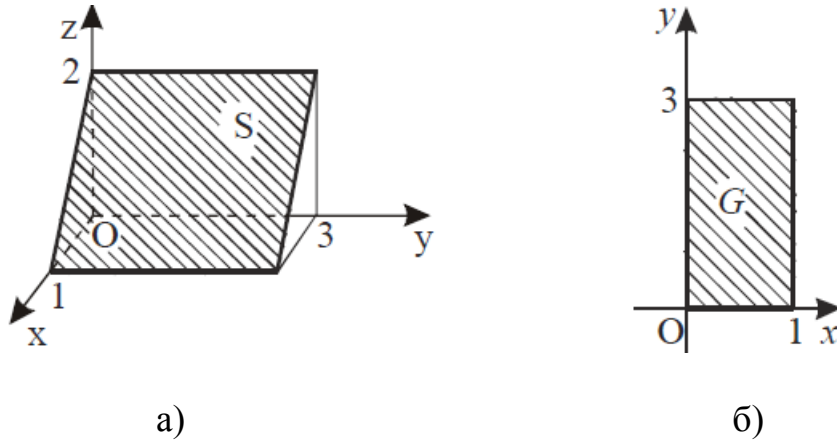


Рисунок 1.3

Використовуючи рівняння поверхні S , знаходимо потрібні нам частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad dS = \sqrt{1 + (-2)^2 + 0^2} dx dy = \sqrt{5} dx dy.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \iint_S xyz dS &= \iint_G xy(2-2x)\sqrt{5} dx dy = 2\sqrt{5} \iint_G xy(1-x) dx dy = \\ &= 2\sqrt{5} \int_0^1 dx \int_0^3 xy(1-x) dy = 2\sqrt{5} \int_0^1 \left(x(1-x) \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 \right) dx = 9\sqrt{5} \int_0^1 (x-x^2) dx = \frac{3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 1.8. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) d\sigma$, де σ – частина площини $6x + 4y + 3z = 12$, що лежить в I октанті.

Розв'язування. Проекцією цієї поверхні на площину XOY є прямокутний трикутник з катетами, що дорівнюють 2 та 3.

Перетворимо рівняння поверхні σ до вигляду $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$ і знайдемо частинні похідні цієї функції: $\frac{\partial z}{\partial x} = -2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{3}$.

Тепер обчислимо елемент площі поверхні $d\sigma$ за формулою (1.15):

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4 + \frac{16}{9}} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy .$$

Тоді:

$$\iint_{\sigma} \left(\left(4 - 2x - \frac{4}{3}y \right) + 2x + \frac{4}{3}y \right) \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 4\sqrt{61}$$

Питання для самоперевірки

1. Що називають скалярним полем?
2. Наведіть приклади скалярних полів.
3. Дайте означення похідної за напрямом.
4. Виведіть формулу для похідної за напрямом.
5. У чому полягає фізичний зміст похідної за напрямом?
6. Дайте означення градієнта скалярного поля.
7. Доведіть теорему про зв'язок градієнта і похідної за напрямом.
8. Сформулюйте і доведіть властивості градієнта.
9. У чому полягає фізичний зміст градієнта?
10. Як визначають напрямні косинуси вектора?
11. Дайте означення поверхонь та ліній рівня.
12. Дайте визначення скалярного добутку векторів та сформулюйте його властивості.
13. Яка поверхня називається гладкою?
14. Що називають поверхневим інтегралом першого роду?
15. Як обчислюють поверхневі інтеграли?
16. Що називають векторним полем?
17. Наведіть приклади векторних полів.
18. Що називають векторними лініями?
19. Що таке силові лінії векторного поля?
20. Як знайти силові лінії?

Лекція 2

Тема: «Поняття потоку векторного поля»

Мета:

актуалізація опорних понять (замкнений контур, нормаль до поверхні, внутрішня і зовнішня нормалі, кратні інтеграли, нормальний косинус, скалярний добуток, векторний добуток, орт);

вивчення основних положень та означень теорії скалярного та векторного поля;

поглиблення, розширення знань, отриманих раніше під час вивчення розділів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального і інтегрального числення;

розвиток наукового мислення та пам'яті;

виховання культури математичного запису і мовлення.

Під час вивчення теми студенти мають:

знати:

означення векторного поля, векторної лінії, потоку векторного поля, двосторонньої та односторонньої поверхні, орієнтовної поверхні, поверхневого інтеграла;

уміти:

обчислювати поверхневі інтеграли 1-го та 2-го роду, обчислювати потік безпосередньо і за формулою Остроградського – Гаусса.

Основні поняття: потік векторного поля, орієнтована поверхня, двостороння поверхня, одностороння поверхня, поверхневий інтеграл.

План лекції

1. Потік векторного поля.
2. Поверхневі інтеграли другого роду. Обчислення потоку векторного поля.
3. Алгоритм обчислення потоку векторного поля.
4. Формула Остроградського-Гаусса.
5. Питання для самоперевірки.

Література [1-11]

Текст лекції

Однією із особливих характеристик векторного поля є *потік векторного поля*.

2.1 Потік векторного поля

Нехай $\vec{a}(M)$ – поле швидкостей рухомої рідини, а σ – деяка гладка.

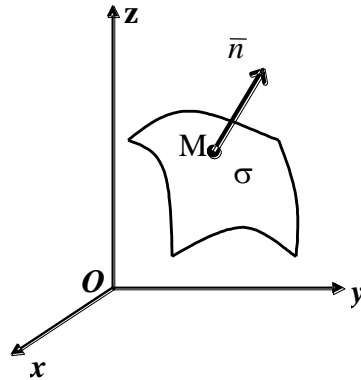


Рисунок 2.1

Введемо поняття сторони поверхні. Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку M , проведемо в цій точці нормаль до поверхні \vec{n} певного напрямку і розглянемо на цій поверхні довільний замкнений контур, який виходить з точки M і повертається в цю саму точку, не перетинаючи межі поверхні σ . Переміщатимемо точку по замкненому контуру разом з вектором \vec{n} так, щоб цей вектор весь час залишався нормальним до цієї поверхні. Під час обходу заданого контуру ми можемо повернутися в точку з тим самим або протилежним напрямком нормалі. Якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контуру, розміщеного на цій поверхні, який не перетинає її межі, ми повертаємось з початковим напрямком нормалі \vec{n} , то таку поверхню називають *двосторонньою*. Прикладами таких поверхонь є площина та сфера. Якщо під час обходу деякого контуру поверхні σ напрям нормалі змінюється на протилежний, то таку поверхню називають *односторонньою*. Прикладом односторонньої поверхні є так званий *лист (петля) Мебіуса*. Модель цієї поверхні можна дістати, якщо прямокутну смужку паперу $ABCD$, перекрутивши один раз склеїти так, щоб точка A збігалась з точкою C , а точка B – з D . Двосторонню поверхню називають *орієнтованою*, а вибір певної її сторони *орієнтацією поверхні*. Спрямувавши в кожній точці замкненої поверхні нормаль всередину об'єму, обмеженого поверхнею, дістанемо внутрішню сторону поверхні, а спрямувавши нормаль зовні поверхні – зовнішню її сторону.

Надалі розглядатимемо двосторонні поверхні. Односторонні поверхні неорієнтовані.

Поставимо задачу обчислення кількості рідини, що протікає через поверхню σ за одиницю часу. Якщо вектор $\vec{a}(a_x(M), a_y(M), a_z(M))$ в кожній точці поверхні σ має однаковий напрям та модуль, то кількість рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу, визначається за формулою:

$$P = |\vec{a}| \cdot S_\sigma \cdot \cos \alpha, \quad (2.1)$$

де S_σ – площа поверхні σ ,

α – кут між вектором \vec{a} і нормаллю до поверхні σ .

Формулу (2.1) можна подати у вигляді:

$$P = n p_n \vec{a} \cdot S_\sigma, \quad (2.2)$$

де $n p_n \vec{a}$ – проекція вектора \vec{a} на напрям нормалі до поверхні σ .

У випадку криволінійної поверхні та змінного вектора \vec{a} обчислити кількість рідини, що протікає через поверхню σ за одиницю часу, за формулами (2.1) або (2.2) неможливо.

Для обчислення кількості рідини, що протікає через поверхню σ за одиницю часу, розіб'ємо цю поверхню неперервними кривими на n досить малих частин так, щоб зміною вектора \vec{a} та напрямку нормалі усередині кожної частини можна було б знехтувати.

Позначимо через ΔS_i площу i -ої частини $\Delta \sigma_i$, яку вважаємо частиною площини з напрямом нормалі $\vec{n}(M)$. Виберемо усередині цієї частини довільну точку M_i та будемо вважати, що в усіх точках цієї частини вектор \vec{a} дорівнює $\vec{a}(M_i)$. Тоді кількість рідини, що протікає через i -у частину за одиницю часу, можна обчислити за наближеною формулою:

$$\Delta P_i \approx n p_{n(M_i)} \vec{a}(M_i) \cdot \Delta S_i,$$

а кількість рідини, що протікає через всю поверхню σ за одиницю часу, дорівнює:

$$P \approx \sum_{i=1}^n \Delta P_i.$$

Тоді одержуємо наближену формулу

$$P \approx \sum_{i=1}^n n p_{n(M_i)}^- \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2.3)$$

Похибка цієї наближеної формули прямує до нуля за необмеженого зменшення діаметрів усіх частин, на які розбита поверхня σ . Позначивши через λ максимальний діаметр ΔS_i , перейдемо в рівності (2.3) до границі за умови $\lambda \rightarrow 0$. Тоді маємо:

$$P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n n p_{n(M_i)}^- \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2.4)$$

Якщо границя (2.4) існує і не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини, ні від способу вибору точок M_i , то її називають *поверхневим інтегралом* і позначають символом:

$$\iint_{\sigma} n p_n^- \bar{a}(M) d\sigma,$$

тобто

$$\iint_{\sigma} n p_n^- \bar{a}(M) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n n p_{n(M_i)}^- \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2.5)$$

Якщо підінтегральна функція у формулі (2.5) є проекцією вектора \bar{a} на напрям нормалі до поверхні σ , то такий поверхневий інтеграл *називається потоком векторного поля \bar{a} через поверхню σ* , причому

$$P = \iint_{\sigma} n p_n^- \bar{a}(M) d\sigma. \quad (2.6)$$

Підінтегральний вираз у формулі (2.5) може бути записаний у векторній формі. Введемо вектор \overline{ds} , напрям якого збігається з напрямом нормалі, а модуль дорівнює елементарній площі поверхні ds , тоді

$$n p_n^- \bar{a}(M) d\sigma = \bar{a} \cdot \overline{ds},$$

тому потік

$$P = \iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \overline{ds}. \quad (2.7)$$

Відмітимо основні *властивості потоку* векторного поля.

1. Якщо $np_{\bar{n}} \bar{a} = c = const$, то

$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = c \cdot S_{\sigma},$$

де S_{σ} – площа поверхні σ .

2. У разі зміни напрямку нормалі потік змінює лише знак.

$$3. \iint_{\sigma} (\bar{a} + \bar{b}) \bar{ds} = \iint_{\sigma} \bar{a} \bar{ds} + \iint_{\sigma} \bar{b} \bar{ds}.$$

$$4. \iint_{\sigma} c \bar{a} \cdot \bar{ds} = c \cdot \iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds}, \text{ де } c = const.$$

5. Якщо поверхня σ розбита деякою кривою на дві частини σ_1 та σ_2 , то

$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{\sigma_1} \bar{a} \cdot \bar{ds} + \iint_{\sigma_2} \bar{a} \cdot \bar{ds}.$$

2.2 Поверхневі інтеграли другого роду. Обчислення потоку векторного поля

Зрозуміло, що $\bar{ds} = \{ \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) d\sigma, \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) d\sigma, \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma \}$, де \bar{n}^0 – одиничний вектор нормалі до поверхні σ .

Оскільки $\cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma = dxdy$, $\cos(\bar{n}^0, \bar{i}) d\sigma = dydz$, $\cos(\bar{n}^0, \bar{j}) d\sigma = dxdz$, то

$$\Pi = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) + a_y \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) + a_z \cos(\bar{n}^0, \bar{k})) d\sigma = \iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy,$$

де $\iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy$ – поверхневий інтеграл II – го роду.

Поверхневі інтеграли II роду також можна обчислювати за допомогою подвійних інтегралів. Нехай функція $a_z(x, y, z)$ неперервна в усіх точках поверхні σ , яка задана рівнянням $z = z(x, y)$. Точки $(x, y) \in D_{xy}$, де область D_{xy} – проекція заданої поверхні на координатну площину Oxy . Виберемо верхню сторону поверхні σ , де нормаль до поверхні утворює з віссю Oz гострий кут. Тоді

$$\iint_{\sigma} a_z dx dy = \iint_{D_{xy}} a_z|_{z=z(x,y)} dx dy. \quad (2.8)$$

При обчисленні $\iint_{D_{xy}} a_z dx dy$ в функції $a_z(x, y, z)$ змінну z необхідно виразити через змінні y та x , використовуючи рівняння поверхні σ . Отже, маємо:

$$\iint_{\sigma} a_z(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (2.9)$$

Формула (2.10) виражає поверхневий інтеграл за змінними y та x через подвійний. Якщо вибрати нижню сторону поверхні (нормаль до поверхні утворює тупий кут з віссю Oz), то одержаний подвійний інтеграл беруть із знаком «мінус», тому

$$\iint_{\sigma} a_z(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (2.10)$$

Аналогічно

$$\iint_{\sigma} a_x(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} a_x(x(y, z), y, z) dy dz; \quad (2.11)$$

$$\iint_{\sigma} a_y(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{yz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz. \quad (2.12)$$

В загальному випадку для обчислення потоку можна скористатися формулою:

$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \pm \iint_{D_{yz}} a_x|_{x=x(y,z)} dy dz \pm \iint_{D_{xz}} a_y|_{y=y(x,z)} dx dz \pm \iint_{D_{xy}} a_z|_{z=z(x,y)} dx dy, \quad (2.13)$$

де D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} – проекції поверхні σ на відповідні координатні площини.

Правильність вибору знаків перед подвійними інтегралами формули (2.13) можна перевірити за допомогою координат одиничного нормального вектора до поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$. Знак перед подвійним інтегралом збігається із знаком відповідного напрямного косинуса нормалі \bar{n} :

$$\cos(\bar{n}, \overline{Ox}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{i}; \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oy}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{j}; \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oz}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{k}. \quad (2.14)$$

Якщо поверхня σ неоднозначно проектується на яку-небудь координатну площину, то цю поверхню розбивають на частини, а інтеграл, який

міститься у лівій частині рівності (2.13) – на суму інтегралів по одержаних частинах поверхні.

Для обчислення потоку векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню σ можна використовувати також одну із формул:

$$P = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\cos(\vec{n}^0, \vec{k})} \right|_{z=z(x,y)} dx dy ,$$

$$P = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\cos(\vec{n}^0, \vec{i})} \right|_{x=x(y,z)} dy dz ,$$

$$P = \iint_{D_{xz}} \left. \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\cos(\vec{n}^0, \vec{j})} \right|_{y=y(x,z)} dx dz .$$

Термін «потік векторного поля» має фізичне походження. Вкажемо приклади фізичних величин, які обчислюються за допомогою формули (2.13):

а) Якщо векторне поле розглядати як поле швидкостей рухомої рідини, то її потік через поверхню σ дорівнює кількості рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу у напрямку зовнішньої нормалі. Якщо потік через замкнену поверхню додатний, то це означає, що з частини простору, обмеженого цією поверхнею, витікає більше рідини, ніж затікає в неї. Такий результат пояснюється тим, що всередині замкненої поверхні існують джерела, що виділяють рідину. Якщо потік від'ємний, то всередину поверхні затікає більше рідини, ніж витікає з неї. Такий результат означає, що всередині поверхні є стоки, які поглинають рідину.

б) Потік тепла має напрям і є векторною величиною. Довжина вектора потоку тепла вимірює кількість тепла, що протікає через одиницю площі за одиницю часу. Повний тепловий потік назовні через поверхню σ також визначається за формулою (2.13).

Приклад 2.1. Обчислити інтеграл

$$I = \iint_{\sigma} (x - y + \frac{3}{2}z) dy dz + x dx dz - z dx dy ,$$

якщо σ – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами (рис. 2.2, а).

Розв’язування. За формулою (2.13) знайдемо проєкції поверхні σ на координатні площини:

$$D_{xy} = \{x - 1 \leq y \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1\} \text{ (рис. 2.2, б);}$$

$$D_{xz} = \{0 \leq z \leq 2 - 2x, \quad 0 \leq x \leq 1\} \text{ (рис. 2.2, в);}$$

$$D_{yz} = \{0 \leq z \leq 2 - 2y, \quad -1 \leq y \leq 0\} \text{ (рис. 2.2, г).}$$

Визначимо нормальний вектор до поверхні σ :

$\varphi(x, y, z) = 2x - 2y + z - 2$; $\varphi'_x = 2$, $\varphi'_y = -2$, $\varphi'_z = 1$, $\bar{n}^0 = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{1}{3}\bar{k}$. Оскільки за формулами (2.14)

$$\cos(\bar{n}, \overline{Ox}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{i} = \frac{2}{3} > 0, \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oy}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{j} = -\frac{2}{3} < 0, \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oz}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{k} = \frac{1}{3} > 0,$$

то перед подвійними інтегралами у формулах (2.10) і (2.11) потрібно брати знак «плюс», а перед подвійним інтегралом у формулі (2.12) – знак «мінус».

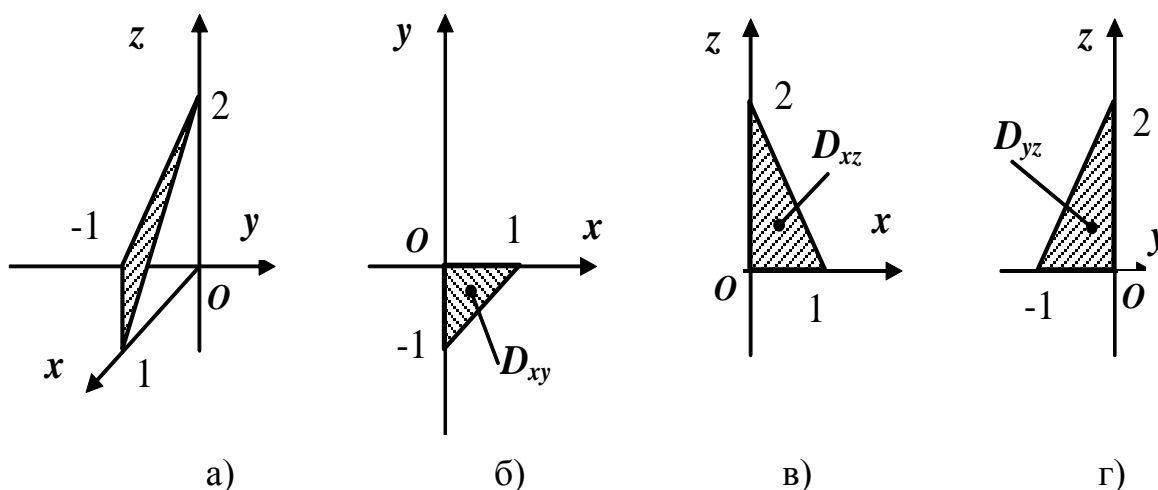


Рисунок 2.2

Отже,

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_0^{2-2y} \left(\frac{1}{2}(2-z+2y) - y + \frac{3z}{2} \right) dz - \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} x dz + \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (2x-2y-2) dy = 7.$$

Приклад 2.2. Обчислити потік вектора $\vec{a}(2x - y + z, 0, 0)$ через поверхню $z = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Розв'язування. В такому випадку $\text{пр}_{\vec{n}} \vec{a}$ не є постійною на усій поверхні, тому для обчислення потоку застосуємо формулу (2.14). Оскільки $a_y = a_z = 0$, то формула (2.14) набуває вигляду:

$$P = \pm \iint_{D_{yz}} a_x|_{x=x(y,z)} dydz = \pm \iint_{D_{yz}} (2x - y + z)|_{x=\sqrt{z}} dydz,$$

де D_{yz} – проекція поверхні $z = x^2$ на координатну площину Oyz .

Побудуємо задану поверхню та її проекцію на площину Oyz (рис. 2.3).

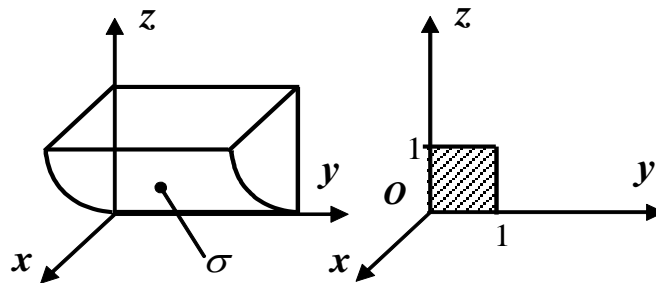


Рисунок 2.3

Визначимо нормальний вектор до поверхні σ :

$$\varphi(x, y, z) = x^2 - z; \quad \varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 0, \quad \varphi'_z = -1, \quad \vec{n}^0 = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \vec{k}.$$

Оскільки за формулами (2.14) $\cos(\vec{n}, \vec{Ox}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{i} = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} > 0$ для всіх

$0 \leq x \leq 1$, то під час обчислення потоку перед подвійним інтегралом ставимо знак «плюс».

Тоді

$$P = \iint_{D_{yz}} (2x - y + z) dydz = \iint_{D_{yz}} (2\sqrt{z} - y + z) dydz = \int_0^1 dy \int_0^1 (2\sqrt{z} - y + z) dz = \frac{4}{3}.$$

2.3 Алгоритм обчислення потоку векторного поля

Нехай потрібно знайти потік векторного поля $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ через повну поверхню піраміди, утвореної площиною $P: Ax + By + Cz + D = 0$ і координатними площинами. Тоді дотримуємося такої послідовності дій.

1. Зображаємо піраміду, утворену площиною P і координатними площинами. Визначаємо координати вершин, які знаходяться на координатних осях: $A\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $B\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$, $C\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$, $O(0, 0, 0)$.
2. Визначаємо зовнішню (внутрішню) сторони піраміди.
3. Потік через повну поверхню піраміди обчислюємо за формулою:

$$P = P_{ABC} + P_{OBC} + P_{OAC} + P_{OAB}$$

де P_{ABC} – потік векторного поля через верхню сторону трикутника ABC ,
 P_{OBC} – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OBC ,
 P_{OAC} – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAC ,
 P_{OAB} – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAB .

4. Для обчислення потоку через верхню сторону трикутника ABC потрібно:

4.а. Визначаємо нормаль до площини $P: \vec{n} = \{A, B, C\}$ і шукаємо її довжину $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

- 4.б. Визначаємо координати одиничного вектора нормалі:

$$\vec{n}^0 = \left\{ \frac{A}{|\vec{n}|}, \frac{B}{|\vec{n}|}, \frac{C}{|\vec{n}|} \right\}.$$

4.в. Шукаємо скалярний добуток векторного поля на одиничний вектор нормалі: $\vec{a} \cdot \vec{n}^0 = a_x \frac{A}{|\vec{n}|} + a_y \frac{B}{|\vec{n}|} + a_z \frac{C}{|\vec{n}|}$.

4.г. Обираємо координатну площину, на яку будемо проектувати трикутник ABC . Наприклад, для простоти, проектуємо на площину XOY .

Тоді $z = -\frac{1}{C}(D + Ax + By)$, $\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{k}) \right| = \frac{C}{|\vec{n}|}$.

- 4.д. Обчислюємо подвійний інтеграл:

$$\Pi = \iint_{D_{xy}} \frac{\overline{a} \cdot \overline{n}^0}{|\overline{n}|} \Big|_{z=-\frac{1}{C}(D+Ax+By)} \quad dx dy = \int_0^{\frac{D}{A}} dx \int_0^{-\frac{1}{B}(D+Ax)} \frac{\overline{a} \cdot \overline{n}^0}{|\overline{n}|} \Big|_{z=-\frac{1}{C}(D+Ax+By)} dy,$$

де D_{xy} – проекція трикутника ABC на площину XOY .

5. Для обчислення потоку через верхню сторону площини трикутника OBC потрібно:

5.а. $\overline{n}_1 = \vec{i} = \{1,0,0\}$ або $\overline{n}_1 = -\vec{i} = \{-1,0,0\}$, оскільки рівняння площини OBC $x=0$.

5.б. $|\cos(\overline{n}^0, \vec{k})| = 1$.

5.в. Шукаємо скалярний добуток векторного поля на вектор нормалі: $\overline{a} \cdot \overline{n}_1 = a_x$ або $\overline{a} \cdot \overline{n}_1 = -a_x$.

5.г. Обчислюємо повторний інтеграл:

$$\Pi = \int_0^{\frac{D}{B}} dx \int_0^{-\frac{1}{C}(D+By)} \frac{\overline{a} \cdot \overline{n}_1}{|\overline{n}|} \Big|_{x=0} dz.$$

6-7. Потоки через верхню сторону площин трикутників AOC та AOB шукаємо аналогічно. Зауважимо, що для площини трикутника AOC : $y=0$, нормаль $\overline{n}_2 = \vec{j} = \{0,1,0\}$ або $\overline{n}_2 = -\vec{j} = \{0,-1,0\}$; а для площини трикутника AOB : $z=0$, нормаль $\overline{n}_3 = \vec{k} = \{0,0,1\}$ або $\overline{n}_3 = -\vec{k} = \{0,0,-1\}$.

8. Формуємо відповідь.

Приклад 2.3. Знайти потік векторного поля $\overline{a} = (2x+y)\vec{i} + (x+3z)\vec{j}$ через повну поверхню піраміди, утвореної площиною $P: x+2y+z=2$ і координатними площинами.

Розв'язування. Зробимо схематичний рисунок (рис. 2.4).

Обчислимо потік векторного поля через верхню сторону трикутника ABC , утвореного за перерізу площини $P: x+2y+z=2$ з координатними площинами (σ).

Оскільки поверхня σ взаємно однозначно проектується на площину xOy в область D_{xy} , то обчислення потоку векторного поля \overline{a} через цю поверхню зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy} за формулою :

$$\Pi_{ABC} = \iint_{\sigma_{ABC}} \overline{ad\sigma} = \iint_{\sigma_{ABC}} \overline{an^0} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\overline{an^0}}{|\cos(\overline{n^0}, \overline{k})|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy. \quad (2.15)$$

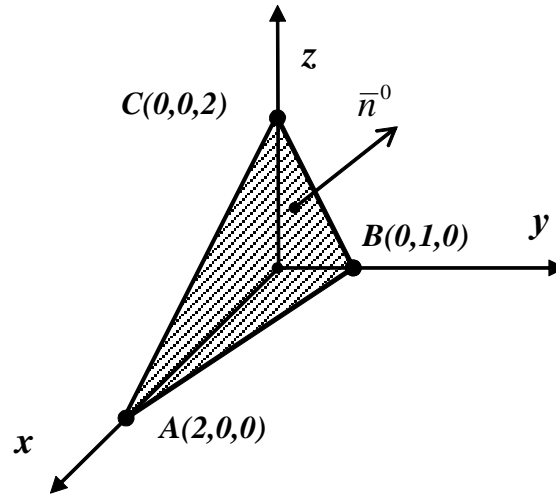


Рисунок 2.4

Знайдемо одиничний вектор нормалі до поверхні $\varphi(x, y, z) = x + 2y + z - 2 = 0$: $\overline{n} = \{1, 2, 1\}$, $|\overline{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, тоді $\overline{n^0} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$.

Обчислимо скалярний добуток векторів \overline{a} та $\overline{n^0}$, заданих своїми декартовими координатами:

$$\overline{an^0} = (2x + y) \frac{1}{\sqrt{6}} + (x + 3z) \frac{2}{\sqrt{6}} + 0 \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4x + y + 6z}{\sqrt{6}},$$

тобто $\overline{an^0} = \frac{4x + y + 6z}{\sqrt{6}}$, водночас $\cos(\overline{n^0}, \overline{k}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Тоді

$$\frac{dx dy}{|\cos(\overline{n^0}, \overline{k})|} = \sqrt{6} dx dy.$$

Спроектуємо цей трикутник на площину XOY (рис. 2.5)

Отже,

$$\iint_{\sigma_{ABC}} \overline{an^0} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{4x + y + 6z}{\sqrt{6}} \right|_{z=2-x-2y} \sqrt{6} dx dy = \iint_{D_{xy}} (4x + y + 12 - 6x - 12y) dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_{xy}} (12 - 2x - 11y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{2-2y} (12 - 2x - 11y) dx = \\
&= \int_0^1 (12(2-2y) - (2-2y)^2 - 11y(2-2y)) dy = 24 \int_0^1 (1-y) dy - 4 \int_0^1 (1-y)^2 dy - \\
&- 22 \int_0^1 (y-y^2) dy = -24 \frac{(1-y)^2}{2} \Big|_0^1 + 4 \frac{(1-y)^3}{3} \Big|_0^1 - 22 \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + 22 \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = 7,
\end{aligned}$$

тобто $\Pi_{ABC} = 7$.

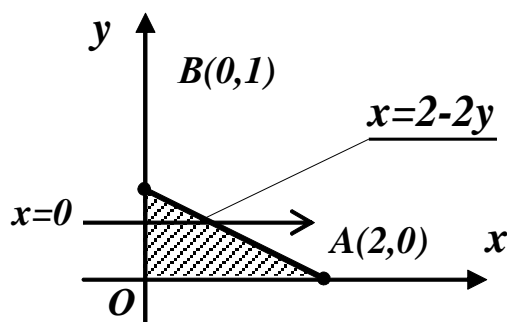


Рисунок 2.5

Обчислимо потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OBC . Рівняння площини OBC : $x=0$, одиничний вектор нормалі $\overline{n_2}$ до цієї площини паралельний осі Ox , але має напрям, протилежний напрямку вектора \overline{i} . Тому за умовою колінеарності векторів $\overline{n_2} = -\overline{i} = \{-1, 0, 0\}$. Тоді

$$\Pi_{OBC} = \iint_{\sigma_{OBC}} \overline{an_2} d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{\overline{an_2}}{|\cos(\overline{n_2}, \overline{i})|} \right|_{x=x(y,z)} dy dz,$$

причому $\cos(\overline{n_2}, \overline{i}) = -1$, $\overline{an_2} = (2x+y) \cdot (-1) + 0 \cdot (x+3z) + 0 \cdot 0 = -2x-y$.

Зобразимо проєкцію цього трикутника на площину YOZ (рис. 2.6):

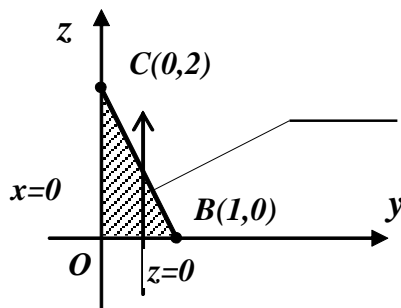


Рисунок 2.6

Маємо:

$$\iint_{\sigma_{ABC}} \overline{an_2} d\sigma = \iint_{D_{yz}} (-2x - y) \Big|_{x=0} dydz = - \iint_{D_{yz}} y dydz = - \int_0^1 y dy \int_0^{2-2y} dz = - \int_0^1 yz \Big|_0^{2-2y} dy =$$

$$= \int_0^1 2y^2 dy - \int_0^1 2y dy = 2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}. \text{ Тобто } \Pi_{OBC} = -\frac{1}{3}.$$

Обчислимо потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAC . Рівняння площини OAC : $y=0$, одиничний вектор нормалі $\overline{n_3}$ до цієї площини паралельний осі Oy , але має напрям, протилежний напрямку вектора \overline{j} , тому $\overline{n_3} = \{0, -1, 0\}$. Тоді

$$\Pi_{OAC} = \iint_{\sigma_{AOC}} \overline{an_3} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \frac{\overline{an_3}}{\left| \cos(\overline{n_3}, \overline{j}) \right|} \Big|_{y=y(x,z)} dx dz,$$

причому $\cos(\overline{n_3}, \overline{j}) = -1$, $\overline{an_3} = (2x+y) \cdot 0 + (-1) \cdot (x+3z) + 0 \cdot 0 = -x-3z$.

Маємо (рис. 2.7):

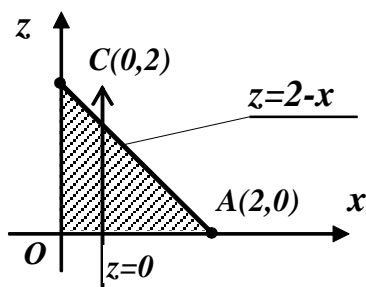


Рисунок 2.7

$$\iint_{\sigma_{AOC}} \overline{an_3} d\sigma = \iint_{D_{xz}} (-x-3z) \Big|_{y=0} dx dz = - \iint_{D_{xz}} (x+3z) dx dz = - \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+3z) dz =$$

$$= - \int_0^2 \left(xz \Big|_0^{2-x} + 3 \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{2-x} \right) dx = \int_0^2 \left(-2x + x^2 - \frac{3}{2} (2-x)^2 \right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(2-x)^3}{3} \Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{4}{3} - 4 = -\frac{16}{3}, \text{ тобто } \Pi_{AOC} = -\frac{16}{3}.$$

Обчислимо потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника OAB . Рівняння цієї площини: $z = 0$, одиничний вектор нормалі \bar{n}_4 до цієї площини паралельний осі Oz , але має напрям, протилежний напрямку вектора \bar{k} , тому $\bar{n}_4 = \{0, 0, -1\}$.

Оскільки $\bar{a}\bar{n}_4 = (2x + y) \cdot 0 + 0 \cdot (x + 3z) + 0 \cdot (-1) = 0$, то

$$P_{AOB} = \iint_{\sigma_{OAB}} \bar{a}\bar{n}_4 d\sigma = 0.$$

Таким чином, $P = 7 - \frac{1}{3} - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$.

2.4 Формула Остроградського–Гаусса

Формула Остроградського–Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею.

Розглянемо деяке векторне поле $\bar{a}(a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$. Нехай в просторі задано правильну область V , обмежену замкнутою поверхнею σ , проекцією якої на координатну площину Oxy є правильна область D (рис. 2.8).

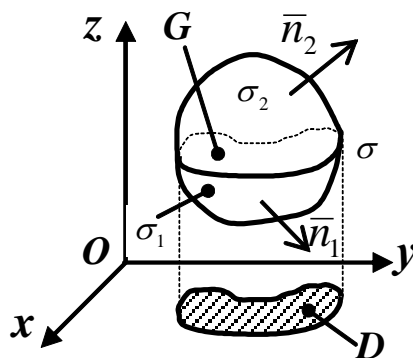


Рисунок 2.8

Поверхня σ може бути розбита на нижню поверхню σ_1 , яка задається рівнянням $z = f_1(x, y)$, верхню поверхню σ_2 , яка задається рівнянням $z = f_2(x, y)$, та бічну циліндричну поверхню σ_3 з твірною, паралельною осі Oz .

Тоді потрійний інтеграл по області V функції $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ дорівнює поверхневому інтегралу векторного поля $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ по поверхні σ . Тобто,

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\vec{n}^0, \vec{i}) + a_y \cos(\vec{n}^0, \vec{j}) + a_z \cos(\vec{n}^0, \vec{k})) d\sigma, \quad (2.16)$$

або

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy. \quad (2.17)$$

Формули (2.16), (2.17) називають формулою *Остроградського–Гаусса*.

Наведемо **алгоритм обчислення потоку векторного поля** $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ через повну поверхню піраміди, утвореної площиною $P: Ax + By + Cz + D = 0$ і координатними площинами **за формулою Остроградського–Гаусса:**

1. Зображаємо піраміду, утворену площиною P і координатними площинами. Визначаємо координати вершин, які знаходяться на координатних осях:

$$A \left(-\frac{D}{A}, 0, 0 \right), B \left(0, -\frac{D}{B}, 0 \right), C \left(0, 0, -\frac{D}{C} \right), O(0, 0, 0).$$

2. Обчислюємо $\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z}$ та значення виразу $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$.

3. Обчислюємо інтеграл:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_0^{-\frac{D}{A}} dx \int_0^{-\frac{D}{B} - \frac{D}{A}x} dy \int_0^{-\frac{1}{C}(D+Ax+By)} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dz.$$

Зауваження! Якщо $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = const$, то потік дорівнює об'єму піраміди, в основі якої лежить прямокутний трикутник.

Приклад 2.4. Обчислити потік з прикладу 2.3 за формулою Остроградського–Гаусса.

Розв’язування. Обчислимо потік векторного поля через повну поверхню піраміди в напрямі її зовнішньої нормалі за формулою Остроградського–Гаусса.

Обчислимо спочатку вираз $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$, маємо:

$$\frac{\partial(2x+y)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial(x+3z)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial 0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2.$$

$$P = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = 2 \iiint_V dx dy dz = 2V_{\text{піраміди}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення односторонньої поверхні.
2. Дайте означення двосторонньої поверхні.
3. Яка поверхня називається орієнтованою?
4. Дайте означення поверхневого інтеграла.
5. Що називають потоком векторного поля?
6. Як обчислюється поверхневий інтеграл?
7. У чому полягає зв’язок між поверхневими та подвійними інтегралами?
8. Сформулюйте властивості потоку векторного поля \vec{a} через поверхню σ .
9. Запишіть та доведіть формулу Остроградського–Гаусса.
10. Як визначити одиничний нормальний вектор до поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$?
11. Як обчислити потік векторного поля \vec{a} через поверхню σ , яка неоднозначно проєктується на будь-яку координатну площину?
12. Дайте означення поверхневого інтегралу II-го роду.
13. Як обчислюють поверхневі інтеграли II-го роду?
14. Що називають векторними лініями?
15. Наведіть приклади векторних полів.
16. Що називають векторним полем?

Лекція 3

Тема: «Характеристики векторного поля»

Мета:

актуалізація опорних понять (базисний вектор, частинна похідна, криволінійний інтеграл, нормальний вектор);

вивчення основних положень та визначень теорії скалярного та векторного поля;

поглиблення, розширення знань, отриманих раніше під час вивчення розділів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального і інтегрального числення;

розвиток наукового мислення та пам'яті;

виховання культури математичного запису і мовлення.

Під час вивчення теми студенти мають:

знати означення: дивергенції, джерела і стоку векторного поля, ротора векторного поля, формулу Стокса,

уміти обчислювати: дивергенцію, циркуляцію, ротор, основою яких є вміння обчислювати частинні похідні, кратні інтеграли, криволінійні інтеграли; застосовувати оператор Гамільтона та Лапласа для диференціальних операцій другого порядку.

Основні поняття: дивергенція, циркуляція, стоки та джерела векторного поля, ротор, оператор Гамільтона, оператор Лапласа, криволінійний інтеграл.

План лекції

1. Дивергенція (розбіжність) векторного поля. Обчислення дивергенції векторного поля в декартовій системі координат.
2. Циркуляція векторного поля та її обчислення.
3. Проекція ротора векторного поля на вектор нормалі та ротор векторного поля.
4. Формула Стокса.
5. Оператор Гамільтона.
6. Диференціальні операції другого порядку.
7. Питання для самоперевірки.

Література [1-11]

Текст лекції

3.1 Дивергенція (розбіжність) векторного поля. Обчислення дивергенції векторного поля в декартовій системі координат

Нехай дано векторне поле $\vec{a}(M)$. Виберемо довільну точку M в просторі та обведемо її деякою гладкою (або кусково-гладкою) замкненою поверхнею σ . Тоді потік векторного поля через цю поверхню у напрямі зовнішньої нормалі дорівнює

$$\oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds}.$$

Позначимо через ΔV об'єм тіла, обмеженого поверхнею σ . Тоді $\frac{\oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds}}{\Delta V}$ характеризує питому продуктивність джерел, що містяться усередині поверхні σ (*питома потужність джерел*).

Будемо стягувати поверхню σ в точку M . Границя, до якої в такому разі прямує середня потужність джерел, називається *дивергенцією векторного поля $\vec{a}(M)$* в точці M і позначається символом $\text{div} \vec{a}(M)$, тобто

$$\text{div} \vec{a}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds}}{\Delta V}. \quad (3.1)$$

Обчислення дивергенції за означенням пов'язане з необхідністю граничного переходу, що ускладнює викладки. Однак потрібно відмітити, що за допомогою цієї формули ми можемо визначити *джерела* та *стоки*: ті точки, в яких дивергенція додатна, називаються джерелами, а ті, в яких вона від'ємна, називаються стоками.

Розглянемо векторне поле $\vec{a}(M)$:

$$\vec{a}(M) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k},$$

де $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ – проекції вектора на координатні осі, неперервні функції.

Тоді

$$\text{div} \vec{a}(M_0) = \frac{\partial a_x(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_0)}{\partial z}. \quad (3.2)$$

Приклад 3.1. Визначити, в яких точках векторне поле $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$ має джерела, а в яких – стоки, якщо $\bar{b} = y\bar{i} + xz\bar{j} - yz\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$, $M_3(-5,1,2)$.

Розв'язування. Знайдемо векторне поле $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$:

$$\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ y & xz & -yz \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-xz + 2yz)\bar{i} - (-y + yz)\bar{j} + (2y - xz)\bar{k}.$$

Тобто

$$\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c} = z(-x + 2y)\bar{i} - y(-1 + z)\bar{j} + (2y - xz)\bar{k}.$$

Знайдемо дивергенцію цього векторного поля. Оскільки

$$a_x = z(2y - x), \quad a_y = -y(z - 1), \quad a_z = 2y - xz,$$

то

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = -z, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = -z, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -x.$$

Таким чином, дивергенція цього векторного поля за формулою (3.2) набуває такого вигляду:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z} = -2z - x.$$

Обчислимо дивергенцію векторного поля в заданих точках, маємо:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_1) = \frac{\partial a_x(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_1)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_1)}{\partial z} = -2 \cdot 1 - 1 = -3;$$

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_2) = \frac{\partial a_x(M_2)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_2)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_2)}{\partial z} = -2 \cdot (-1) - 0 = 2;$$

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_3) = \frac{\partial a_x(M_3)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_3)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_3)}{\partial z} = -2 \cdot 2 - (-5) = 1.$$

Оскільки $\operatorname{div} \bar{a}(M_1) = -3 < 0$, а $\operatorname{div} \bar{a}(M_2) = 2 > 0$ і $\operatorname{div} \bar{a}(M_3) = 1 > 0$, то в точці M_1 векторне поле $\bar{a} = z(-x + 2y)\bar{i} - y(-1 + z)\bar{j} + (2y - xz)\bar{k}$ має стік, а в точках M_2 і M_3 – джерела.

Приклад 3.2. Напруженість \bar{E} поля точкового електричного заряду e на відстані r від цього заряду

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3} \bar{r},$$

де \bar{r} – радіус-вектор, проведений з заряду у довільну точку A . Визначити потік вектора \bar{E} через довільну замкнену поверхню, яка не охоплює заряд e .

Розв’язування. Для обчислення потоку вектора \bar{E} через довільну замкнену поверхню, яка не охоплює заряд e , скористаємось формулою Остроградського–Гаусса, записаною з використанням поняття дивергенції векторного поля. Маємо:

$$\iiint_V \operatorname{div} \bar{a} \, dV = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) + a_y \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) + a_z \cos(\bar{n}^0, \bar{k})) d\sigma.$$

Вважатимемо, що заряд e розміщений у початку координат, а точка A має координати x, y та z . Тоді радіус-вектор $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, а його модуль $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Тому рівність $\bar{E} = \frac{e}{r^3} \bar{r}$ набуває вигляду:

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}),$$

а

$$E_x = \frac{e}{r^3} x, \quad E_y = \frac{e}{r^3} y, \quad E_z = \frac{e}{r^3} z.$$

Знайдемо тепер $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ та $\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e \frac{r^3 - 3r^2 x \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6},$$

але $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$.

Тому

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e \frac{r^3 - 3r^2 x \cdot \frac{x}{r}}{r^6} = e \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6} = e \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = e \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = e \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Таким чином, дивергенція векторного поля \bar{E} така:

$$\operatorname{div} \bar{E} = e \frac{(r^2 - 3x^2) + (r^2 - 3y^2) + (r^2 - 3z^2)}{r^5} = e \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = e \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0.$$

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{E} \, dV = \iiint_V 0 \, dV = 0.$$

3.2 Циркуляція векторного поля та її обчислення

Нехай маємо векторне поле $\bar{a}(M) = \{a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)\}$ і σ – деяка гладка поверхня. Виберемо в просторі деякий плоский замкнений контур L і позначимо через \bar{n} – вектор нормалі до площини, в якій лежить цей контур. Криволінійний інтеграл

$$\oint_L \bar{a} d\bar{l} \tag{3.3}$$

називається *циркуляцією векторного поля $\bar{a}(M)$ уздовж контура L* і позначають його $C(\bar{a})$. Для розуміння фізичної суті поняття циркуляції розглянемо поняття *криволінійного інтеграла* та методи його обчислення.

Нехай точка рухається уздовж деякої лінії L від точки M до точки N . Тоді робота, що її виконує сила $\bar{F} = X(x, y, z)\bar{i} + Y(x, y, z)\bar{j} + Z(x, y, z)\bar{k}$ під час переміщення точки $P(x, y, z)$ уздовж лінії L , називається криволінійним інтегралом і обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} A &= \int_L \bar{F} \, d\bar{l} = \int_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = \\ &= \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Напрямок від точки M до точки N називається напрямком інтегрування.

Зауваження. Для позначення криволінійного інтеграла вздовж замкнутого контура (точка початку збігається з точкою кінця) використовують символ \oint_L , тобто

$$\oint_L \overline{F} \overline{dl} = \oint_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz.$$

Необхідно відмітити, що замкнутий контур вважається додатно орієнтованим, якщо під час його обходу область, обмежена цим контуром, залишається зліва.

Обчислити криволінійні інтеграли можна шляхом зведення їх до визначених інтегралів, вони мають аналогічні властивості.

Нехай крива L (від точки M до точки N) задана параметричним рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, де функції $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$, $y'(t)$ і $z'(t)$. Точці M відповідає значення параметра α , а точці N — β . Тоді

$$\begin{aligned} & \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Приклад 3.3. Обчислити інтеграл $I = \int_L ydx + xdy$, де L — частина кола $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, що знаходиться у першому квадранті.

Розв'язування. Для обчислення цього інтеграла використаємо формулу (3.5). Знайдемо відповідні похідні

$$x'(t) = -r \sin t, \quad y'(t) = r \cos t.$$

Тоді

$$I = \int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \sin t \cdot (-r \sin t) + r \cos t \cdot r \cos t)dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{r^2}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Зокрема, якщо крива L (від точки M до точки N) задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, де функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, то з формули (3.5) дістанемо

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_a^b (X(x, f(x)) + Y(x, f(x))f'(x))dx. \quad (3.6)$$

Приклад 3.4. Обчислити інтеграл $I = \int_L (x + y)dx - y^2 dy$, де L – дуга пара-

боли $y = x^2$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,1)$.

Розв'язування. Оскільки $y' = 2x$, то за формулою (3.6) маємо:

$$I = \int_L (x + y)dx - y^2 dy = \int_0^1 (x + x^2 - x^4 \cdot 2x)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Зауваження. Якщо $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$, то

$$\int_L \bar{F} \bar{dl} = \int_{L_1} \bar{F} \bar{dl} + \int_{L_2} \bar{F} \bar{dl} + \dots + \int_{L_n} \bar{F} \bar{dl}. \quad (3.7)$$

Зв'язок між подвійними та криволінійними інтегралами встановлює *формула Гріна* (виведення формули та її застосування див. у [8]).

Нехай є векторне поле $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$. Необхідно знайти циркуляцію цього поля вздовж контура L , що обмежує трикутник ABC , утворений як результат перерізу площини $P: Ax + By + Cz + D = 0$ з координатними площинами. Наведемо *алгоритм обчислення циркуляції*.

1. Будуємо трикутник ABC : $A\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $B\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$, $C\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ і задаємо додатний напрям обходу. Тоді циркуляцію будемо обчислювати за формулою:

$$\mathcal{C}(\bar{a}) = \oint_{AB} \bar{a} \bar{dl} + \oint_{BC} \bar{a} \bar{dl} + \oint_{CA} \bar{a} \bar{dl}.$$

2. Шукаємо скалярний добуток $\bar{a} \cdot \bar{dl}$, де $\bar{dl} = \{dx, dy, dz\}$:
 $\bar{a} \cdot \bar{dl} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$.

3. Обчислюємо криволінійні інтеграли по кожній прямій. Наприклад, по прямій AB : $z = 0$, $dz = 0$, з рівняння площини P знаходимо

$$y = -\frac{1}{B}(D + Ax), \quad \text{тоді} \quad dy = -\frac{A}{B}dx, \quad x \in \left[-\frac{D}{A}, 0\right]. \quad \text{Одже,}$$

$$\mathcal{C}_{AB} = \int_{-\frac{D}{A}}^0 \left(a_x + a_y \left(-\frac{A}{B} \right) \right) dx.$$

По прямій BC : $x=0$, $dx=0$, з рівняння площини P знаходимо $z = -\frac{1}{C}(D + By)$, тоді $dz = -\frac{B}{C}dy$, $y \in \left[-\frac{D}{B}, 0\right]$. Одже

$$\mathcal{C}_{BC} = \int_{-\frac{D}{B}}^0 \left(a_y + a_z \left(-\frac{B}{C} \right) \right) dy. \quad \text{По прямій } CA \text{ міркування аналогіч-}$$

ні.

4. Формуємо відповідь.

Приклад 3.5. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (2x + y)\vec{i} + (x + 3z)\vec{j}$ вздовж контура L , що обмежує трикутник ABC , утворений як результат перерізу площини P : $x + 2y + z = 2$ з координатними площинами.

Розв'язування. Обчислимо циркуляцію векторного поля безпосередньо (рис. 3.1):

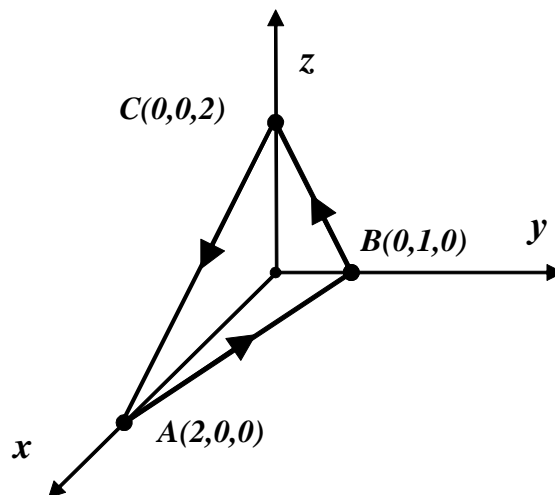


Рисунок 3.1

$$\mathcal{C}(\vec{a}) = \oint_{AB} \vec{a} d\vec{l} + \oint_{BC} \vec{a} d\vec{l} + \oint_{CA} \vec{a} d\vec{l},$$

де $\vec{a} d\vec{l} = (2x + y)dx + (x + 3z)dy$.

На прямій AB $z = 0, dz = 0, y = 1 - \frac{x}{2}, dy = -\frac{1}{2}dx, x \in [0, 2]$. Інтегрування здійснюється від 2 до 0. Тоді

$$\oint_{AB} \bar{a} dl = \int_2^0 \left(2x + 1 - \frac{x}{2} + (x + 3 \cdot 0) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) dx = \int_2^0 (x + 1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_2^0 = -2 - 2 = -4.$$

На прямій BC $x = 0, dx = 0, z = 2 - 2y, dz = -2dy, y \in [0, 1]$. Інтегрування здійснюється від 1 до 0. Тоді

$$\oint_{BC} \bar{a} dl = \int_1^0 3(2 - 2y) dy = (6y - 3y^2) \Big|_1^0 = 3(0 - 2 - 0 + 1) = -3.$$

На прямій CA $y = 0, dy = 0, z = 2 - x, dz = -dx, x \in [0, 2]$. Тоді

$$\oint_{CA} \bar{a} dl = \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4.$$

Таким чином, $\mathcal{C}(\bar{a}) = \oint_{AB} \bar{a} dl + \oint_{BC} \bar{a} dl + \oint_{CA} \bar{a} dl = -4 - 3 + 4 = -3$.

3.3 Проекція ротора векторного поля на вектор нормалі та ротор векторного поля

Візьмемо в руки пір'їнку і акуратно відправимо її в плавання по річці. Для чистоти експерименту будемо вважати, що вона є однорідною і симетричною щодо свого центра. Вісь OZ спрямована вгору. Розглянемо векторне поле швидкості течії, і деяку точку водної поверхні, над якою знаходиться центр пера.

Якщо в цій точці перо обертається проти годинникової стрілки, то поставимо їй у відповідність вихідний вектор, спрямований вгору. Чим швидше обертається перо, тим довший цей вектор. Якщо обертання відбувається за годинниковою стрілкою, то вектор «дивиться» вниз. Якщо ж перо не обертається зовсім, то вектор нульовий. Цей вектор називають *вектором ротора* векторного поля швидкості, він характеризує напрям «завихрення» рідини в заданій точці і кутову швидкість обертання пера (але не напрямом і не швидкість пересування!).

Цілком зрозуміло, що роторний вектор є у всіх точках річки (зокрема і тих, які «під водою»), таким чином, для векторного поля швидкості течії ми визначили нове векторне поле!

Позначимо ΔS площу поверхні, обмеженої контуром L . Виберемо усередині отриманої плоскої фігури довільну точку і шляхом неперервної деформації будемо стягувати контур L в цю точку, не змінюючи напрям нормалі \bar{n} . Тоді

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S} \quad (3.8)$$

називається проекцією ротора векторного поля в точці M у напрямі нормалі \bar{n} і позначається $np_{\bar{n}} \text{rot } \bar{a}(M)$, тобто:

$$np_{\bar{n}} \text{rot } \bar{a}(M) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S}. \quad (3.9)$$

Загалом, $np_{\bar{n}} \text{rot } \bar{a}(M)$ характеризує густину циркуляції векторного поля. У випадку поля швидкостей рухомої рідини проекція ротора векторного поля в точці M у напрямі нормалі характеризує інтенсивність обертального руху. Зокрема, якщо рух ламінарний, то $np_{\bar{n}} \text{rot } \bar{a}(M)$ у кожній точці дорівнює нулю. Вектор, у напрямі якого $np_{\bar{n}} \text{rot } \bar{a}(M)$ досягає максимального значення і модуль якого дорівнює цьому максимальному значенню, називають *ротором (вихором)* векторного поля і позначають $\text{rot } \bar{a}(M)$.

Модуль та напрям ротора в загальному випадку змінюються в процесі переходу від однієї точки простору до іншої. Формула для обчислення ротора в декартових координатах має вигляд:

$$\text{rot } \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (3.10)$$

Приклад 3.6. Обчислити ротор векторного поля $\bar{a} = 3x\bar{i} + yz\bar{j} + y^2\bar{k}$.

Розв'язування.

$$\text{rot } \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & yz & y^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(yz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(yz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial y} \right) \bar{k} =$$

$$= (2y - y)\bar{i} - (0 - 0)\bar{j} + (0 - 0)\bar{k} = y\bar{i}. \text{ Тобто } \text{rot } \bar{a}(M) = \{y, 0, 0\}.$$

Приклад 3.7. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля $\bar{a} = x^2 y^3 \bar{i} - yz^2 \bar{j} - x^2 z \bar{k}$ в точці $M_0(2, 1, 3)$.

Розв'язування. Знайдемо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{a}(M) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^3 & -yz^2 & -x^2 z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(-zx^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-yz^2)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(-x^2 z)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial z} \right) \bar{j} \\ &+ \left(\frac{\partial(-yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial y} \right) \bar{k} = (0 + 2yz)\bar{i} - (-2xz - 0)\bar{j} + (0 - 3x^2 y^2)\bar{k}, \end{aligned}$$

тобто $\text{rot } \bar{a}(M) = \{2yz, 2xz, -3x^2 y^2\}$ і обчислимо його значення в точці $M_0(2, 1, 3)$. Маємо $\text{rot } \bar{a}(M_0) = \{6, 12, -12\}$.

Найбільша густина циркуляції векторного поля $\bar{a} = x^2 y^3 \bar{i} - yz^2 \bar{j} - x^2 z \bar{k}$ в точці $M_0(2, 1, 3)$ досягається в напрямі $\text{rot } \bar{a}(M_0)$ і дорівнює $|\text{rot } \bar{a}(M_0)|$, тобто

$$|\text{rot } \bar{a}(M_0)| = \sqrt{6^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{324} = 18.$$

Наведемо **властивості ротора** векторного поля.

1. Якщо \bar{c} – сталий вектор, то $\text{rot } \bar{c}(M) = 0$.
2. (Властивість лінійності). Якщо \bar{a}_1 і \bar{a}_2 – векторні поля, C_1 і C_2 – числа, то

$$\text{rot}(C_1 \bar{a}_1 + C_2 \bar{a}_2) = C_1 \text{rot } \bar{a}_1 + C_2 \text{rot } \bar{a}_2.$$

3. Для будь-якого векторного поля $\bar{a}(M)$ $\text{div}(\text{rot } \bar{a}) = 0$.

4. Нехай U – скалярне поле, $\bar{a}(M)$ – векторне поле. Побудуємо векторне поле $U \cdot \bar{a}(M)$, тоді $\text{rot}(U \cdot \bar{a}(M)) = U \text{rot } \bar{a}(M) + \text{grad}(U \times \bar{a}(M))$.

Зауваження. Якщо вектор $\bar{a}(M)$ – постійний, то $\text{rot}(U \cdot \bar{a}(M)) = \text{grad}U \times \bar{a}(M)$.

5. Нехай $\bar{a}_1 = \{a_{x_1}(x, y, z), a_{y_1}(x, y, z), a_{z_1}(x, y, z)\}$ і $\bar{a}_2 = \{a_{x_2}(x, y, z), a_{y_2}(x, y, z), a_{z_2}(x, y, z)\}$, тоді $\text{div}(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \bar{a}_2 \text{rot } \bar{a}_1 - \bar{a}_1 \text{rot } \bar{a}_2$.

3.4 Формула Стокса

Нехай координати вектора $\bar{a}(M)$ мають неперервні частинні похідні першого порядку, а L – замкнений, гладкий (або кусково-гладкий) контур. Натягнемо на контур гладку (або кусково-гладку) поверхню σ , яка задається рівнянням $z = z(x, y)$. Виберемо верхню сторону даної поверхні (рис. 3.2).

Тоді буде мати місце таке співвідношення:

$$\mathcal{C}(\bar{a}) = \oint_L \bar{a} d\bar{l} = \iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} d\bar{s}, \quad (3.11)$$

яке називають *формулою Стокса*.

Виведення формули можна розглянути в [6, 8].

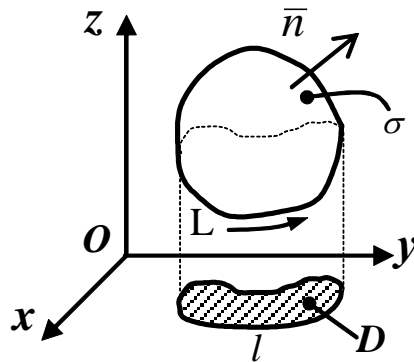


Рисунок 3.2

Нехай є векторне поле $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$. Необхідно знайти циркуляцію цього поля вздовж контура L , що обмежує трикутник ABC , утворений внаслідок перерізання площини $P: Ax + By + Cz + D = 0$ з координатними площинами за формулою Стокса. Наведемо відповідний **алгоритм обчислення циркуляції**.

1. Будуємо трикутник $ABC: A\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right), B\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right), C\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ та знаходимо проєкцію цього трикутника на площину $XOY - D_{xy}$.
2. Обчислюємо ротор векторного поля за формулою (3.10).
3. Визначаємо координати одиничного вектора нормалі до площини P :

$$\bar{n}^0 = \left\{ \frac{A}{|\bar{n}|}, \frac{B}{|\bar{n}|}, \frac{C}{|\bar{n}|} \right\}, \text{ де } |\bar{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

4. Знаходимо скалярний добуток $\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0$.

5. Визначаємо $\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right| = \frac{C}{|\bar{n}|}$.

6. Обчислюємо циркуляцію:

$$\mathcal{C}(\bar{a}) = \int_0^{\frac{-D}{A}} dx \int_0^{\frac{-1}{B}(D+Ax)} \frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\frac{C}{|\bar{n}|}} \Big|_{z = -\frac{1}{C}(D+Ax+By)} dy.$$

Зауваження! Якщо $\frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\frac{C}{|\bar{n}|}} = k = \text{const}$, то

$$\mathcal{C}(\bar{a}) = k \iint_{D_{xy}} dx dy = k S_{D_{xy}} = k \frac{1}{2} \left(-\frac{D}{A} \right) \left(-\frac{D}{B} \right) = \frac{k D^2}{A \cdot B}.$$

Приклад 3.8. Обчислити циркуляцію векторного поля з прикладу 3.5 за формулою Стокса.

Розв'язування. Обчислимо $\text{rot} \bar{a}$:

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y & x+3z & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(x+3z)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(2x+y)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(x+3z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x+y)}{\partial y} \right) \bar{k} = -3\bar{i}. \end{aligned}$$

Контур трикутника ABC має додатну орієнтацію і лежить у площині $P: x+2y+z=2$, $\bar{n}^0 \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ – вектор нормалі до цієї поверхні.

Тоді

$$\Omega(\bar{a}) = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{D_{xy}} \frac{\operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \Bigg|_{z=z(x,y)} dxdy.$$

Оскільки $\operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0 = -\frac{3}{\sqrt{6}}$, $\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$, то

$$\Omega(\bar{a}) = \iint_{D_{xy}} \frac{\operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \Bigg|_{z=z(x,y)} dxdy = -3 \iint_{D_{xy}} dxdy = -3S_{\Delta OAB} = -3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = -3.$$

3.5 Оператор Гамільтона

Векторно-диференціальний оператор $\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$ називають *оператором Гамільтона* і позначають символом $\bar{\nabla}$ (набла), тобто

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}. \quad (3.12)$$

Оператор $\bar{\nabla}$ має властивості як вектора, так і оператора диференціювання. Дія оператора на скалярне поле U та довільний вектор \bar{a} здійснюється так:

$$\bar{\nabla} U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} = \operatorname{grad} U, \quad (3.13)$$

$$\bar{\nabla} \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \bar{k} = \operatorname{div} \bar{a}, \quad (3.14)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \bar{a}. \quad (3.15)$$

У разі застосування оператора $\bar{\nabla}$ потрібно користуватись правилами векторної алгебри та правилами диференціювання. Наприклад,

$$\operatorname{rot}(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{\nabla} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{\nabla} \times \bar{a} + \bar{\nabla} \times \bar{b} = \operatorname{rot} \bar{a} + \operatorname{rot} \bar{b},$$

$$\operatorname{grad}(\lambda U) = \bar{\nabla}(\lambda U) = \lambda \bar{\nabla} U = \lambda \operatorname{grad} U, \quad (\lambda = \text{const}), \quad (3.16)$$

оскільки множення на скаляр та диференціювання мають властивість лінійності. В той самий час у формулі (3.18) не можна вважати, що λ є скалярним полем, оскільки тоді ми винесли змінну величину за знак похідної. В загальному випадку маємо:

$$\operatorname{grad}(UV) = U\bar{\nabla}V + V\bar{\nabla}U = U\operatorname{grad}V + V\operatorname{grad}U.$$

Приклад 3.9. Задано скалярне поле $U = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Визначити ротор і дивергенцію векторного поля $\bar{a} = \operatorname{grad} U$.

Розв'язування. Знайдемо координати вектора $\bar{a} = \operatorname{grad} U$:

$$\begin{aligned} \bar{a} = \operatorname{grad} U &= \frac{\partial(\ln \sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial(\ln \sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial(\ln \sqrt{x^2 + y^2})}{\partial z} \bar{k} = \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} \bar{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \bar{j} + 0\bar{k}. \end{aligned}$$

Обчислимо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{y}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (0-0)\bar{i} - (0-0)\bar{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right) \bar{k} = \\ &= \left(\frac{-y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \bar{k} = 0, \text{ тобто } \operatorname{rot} \bar{a} = 0. \end{aligned}$$

Обчислимо дивергенцію векторного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{a} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) + 0 = \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

3.6 Диференціальні операції другого порядку

Після застосування диференціальних операцій до поля одержуємо нове поле, до якого можна знову застосовувати ці операції. Звичайно, не всі комбінації диференціальних операцій мають сенс. Наприклад, не має сенсу комбінація $\operatorname{div} \operatorname{div} \bar{a}$, оскільки $\operatorname{div} \bar{a}$ утворює скалярне поле, від якого вже не можна взяти дивергенцію. За допомогою комбінації операцій grad , div , rot можна одержати п'ять диференціальних операцій другого порядку:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U, \operatorname{rot} \operatorname{grad} U, \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a}, \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}. \quad (3.17)$$

Почнемо з другої комбінації. Її можна записати у вигляді $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} U)$. Але для вектора та скаляра $\bar{a} \times (\bar{a} U) = 0$. Це означає, якщо замість \bar{a} в ліву частину останньої рівності підставити його розвинення за декартовими осями координат і здійснити обчислення за формальними правилами векторної алгебри, то ми одержимо нуль. Але обчислення комбінації $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} U)$ відбувається за тими ж формальними правилами, тільки замість a_x, a_y, a_z потрібно взяти $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Це означає, що у будь-яких випадках

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0. \quad (3.18)$$

Аналогічно перевіряємо, що завжди

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a} = 0. \quad (3.19)$$

Ця проста властивість має важливий наслідок: для довільного поля \bar{a} поряд із векторними лініями можна розглядати *вихрові лінії*, тобто векторні лінії поля $\operatorname{rot} \bar{a}$. Однак дивергенція будь-якого векторного поля дорівнює густині джерел векторних ліній цього поля. Тому формула (3.19) показує, що вихрові лінії не можуть мати ні джерел, ні стоків, тобто вони не можуть ні починатися, ні закінчуватися.

Першу комбінацію (3.17) можна записати у вигляді $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} U = (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) U = \bar{\nabla}^2 U$, де $\bar{\nabla}^2$ – скалярний диференціальний оператор другого порядку

$$\bar{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

який називається *оператором Лапласа (лапласіаном)* і іноді позначається символом Δ . Тобто

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (3.20)$$

Нарешті, розглянемо останню комбінацію (3.12). Використовуючи формулу для векторно-векторного добутку та розташувавши множники так, щоб набли діяли на поле, одержимо

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} = \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{a}) = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{a}) - (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) \bar{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} - \bar{\nabla}^2 \bar{a}. \quad (3.21)$$

Приклад 3.10. Обчислити $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}$, якщо $\bar{a} = 3x^2 y \bar{i} - 6y^2 z \bar{j} - 2xz^2 \bar{k}$.

Розв'язування.

1-ий спосіб. Обчислимо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 y & -6y^2 z & -2xz^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(-2xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-6y^2 z)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(-2xz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2 y)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(-6y^2 z)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2 y)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (0 + 6y^2) \bar{i} - (-2z^2 - 0) \bar{j} + (0 - 3x^2) \bar{k} = 6y^2 \bar{i} + 2z^2 \bar{j} - 3x^2 \bar{k}. \end{aligned}$$

Обчислимо $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}$ за формулою:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6y^2 & 2z^2 & -3x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial(-3x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2z^2)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(-3x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(6y^2)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(2z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(6y^2)}{\partial y} \right) \bar{k} =$$

$$= (0 - 4z) \bar{i} - (-6x - 0) \bar{j} + (0 - 12y) \bar{k} = -4z \bar{i} + 6x \bar{j} - 12y \bar{k}.$$

2-ий спосіб. Використаємо формулу (3.16). Для цього знайдемо спочатку $\text{div} \bar{a}$, маємо:

$$\text{div} \bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(-6y^2 z) + \frac{\partial}{\partial z}(-2xz^2) = 6xy - 12yz - 4xz. \text{ Тоді}$$

$$\text{grad div} \bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 12yz - 4xz) \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 12yz - 4xz) \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(6xy - 12yz - 4xz) \bar{k} =$$

$$= (6y - 4z) \bar{i} + (6x - 12z) \bar{j} + (-12y - 4x) \bar{k}.$$

Оскільки $\bar{\nabla}^2 \bar{a} = 6y \bar{i} - 12z \bar{j} - 4x \bar{k}$, маємо:

$$\text{rot rot} \bar{a} = \text{grad div} \bar{a} - \bar{\nabla}^2 \bar{a} = (6y - 4z) \bar{i} + (6x - 12z) \bar{j} + (-12y - 4x) \bar{k} -$$

$$- 6y \bar{i} + 12z \bar{j} + 4x \bar{k} = -4z \bar{i} + 6x \bar{j} - 12y \bar{k}.$$

Приклад 3.11. Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\bar{a} = 2zy \bar{i} + 6(x^2 + 1) \bar{j} + 3xy \bar{k}$$

вздовж замкненого контура L , що є перерізом сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ з площиною $z = 3$ і з координатними площинами у першому октанті (обхід контуру додатний) (рис. 3.3):

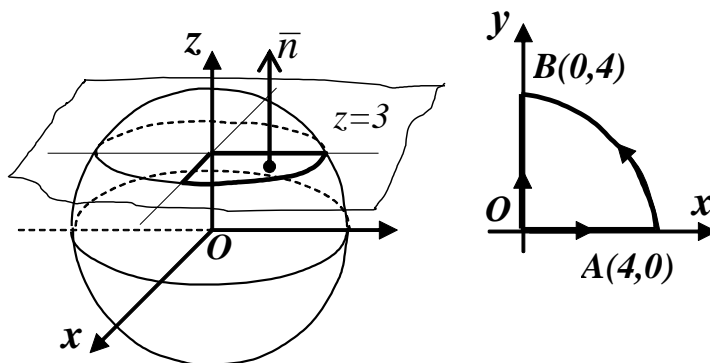


Рисунок 3.3

- безпосередньо;
- за формулою Стокса.

Розв'язування.

а) Обчислимо циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 2zy\vec{i} + 6(x^2 + 1)\vec{j} + 3xy\vec{k}$ безпосередньо:

$$\text{Ц}(\vec{a}) = \int_{OA} \vec{a} d\vec{l} + \int_{AB} \vec{a} d\vec{l} + \int_{BO} \vec{a} d\vec{l}, \text{ де } \vec{a} d\vec{l} = 2yzdx + 6(x^2 + 1)dy + 3xydz.$$

На прямій OA : $y = 0$, $dy = 0$, $z = 3$, $dz = 0$, $x \in [0, 4]$. Тоді

$$\int_{OA} \vec{a} d\vec{l} = \int_0^4 0 dx = 0.$$

На дузі AB : $x^2 + y^2 = 16$. Задамо коло параметрично: $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді $dx = -4\sin t dt$, $dy = 4\cos t dt$, $z = 3$, $dz = 0$.

Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{a} d\vec{l} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cdot 3 \cdot 4\sin t \cdot (-4\sin t) + 6 \cdot (16\cos^2 t + 1) \cdot 4\cos t) dt = \\ &= -96 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt + 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16\cos^3 t + \cos t) dt = -48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt + 384 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos^2 t dt + \\ &+ 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = -48 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 384 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 24 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -48 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + 384 \left(1 - \frac{1}{3} \right) + 24 = -24\pi + 280. \text{ Тобто, } \int_{AB} \vec{a} d\vec{l} = 280 - 24\pi. \end{aligned}$$

На прямій BO : $x = 0$, $dx = 0$, $z = 3$, $dz = 0$, $y \in [0, 4]$. Інтегрування здійснюється за змінною y від 4 до 0. Тоді

$$\int_{BO} \vec{a} d\vec{l} = \int_4^0 6dy = 6y \Big|_4^0 = -24.$$

Таким чином,

$$\Pi(\bar{a}) = \int_{OA} \bar{a} d\bar{l} + \int_{AB} \bar{a} d\bar{l} + \int_{BO} \bar{a} d\bar{l} = 280 - 24\pi - 24 = 256 - 24\pi.$$

б) Обчислимо циркуляцію векторного поля $\bar{a} = 2zy\bar{i} + 6(x^2 + 1)\bar{j} + 3xy\bar{k}$ за формулою Стокса:

$$\Pi(\bar{a}) = \iint_{\sigma} \text{rot } \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\text{rot } \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \right|_{z=z(x,y)} dxdy,$$

де

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & 6(x^2 + 1) & 3xy \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(3xy)}{\partial y} - \frac{\partial(6(x^2 + 1))}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(3xy)}{\partial x} - \frac{\partial(2yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(6(x^2 + 1))}{\partial x} - \frac{\partial(2yz)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= 3x\bar{i} - y\bar{j} + (12x - 2z)\bar{k}. \end{aligned}$$

Поверхня σ – це площина $z = 3$, причому одиничний вектор нормалі \bar{n}^0 колінеарний вектору \bar{k} : $\bar{n}^0 = \{0, 0, 1\}$ та співнаправлений з ним. Тоді

$$\text{rot } \bar{a} \cdot \bar{n}^0 = 3x \cdot 0 + (-y) \cdot 0 + (12x - 2z) \cdot 1 = 12x - 2z, \quad \left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right| = 1,$$

$$\iint_{\sigma} \text{rot } \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\text{rot } \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \right|_{z=z(x,y)} dxdy = \iint_{D_{xy}} (12x - 2z) \Big|_{z=3} dxdy = \iint_{D_{xy}} (12x - 6) dxdy.$$

Перейдемо до полярної системи координат за допомогою перетворення:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \rho = 4, \quad \rho \in [0, 4],$$

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad dxdy = \rho d\rho d\varphi. \text{ Маємо:}$$

$$\iint_{D_{xy}} (12x - 6) dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 (12\rho \cos \varphi - 6) \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(12 \cos \varphi \frac{\rho^3}{3} - 6 \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^4 d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (256 \cos \varphi - 48) d\varphi = (256 \sin \varphi - 48\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 256 - 48\pi.$$

Таким чином, $C(\bar{a}) = 256 - 48\pi$.

Під час конкретного обчислення градієнта, розбіжності та проекції ротора на напрям нормалі доводиться застосовувати ту чи іншу координатну систему. Звичайно, можна постійно використовувати прямокутну декартову систему координат. Однак у багатьох випадках це пов'язано із великими технічними труднощами. Аналогічне положення зустрічається, наприклад, під час обчислення кратних інтегралів. Тому досить часто доцільно використовувати криволінійні координати (наприклад, *циліндричні* чи *сферичні*).

Розгляньте питання обчислення градієнта, дивергенції та ротора векторного поля в криволінійних координатах самостійно [8, 7, 12].

Відмітимо, що *циліндричні координати* використовуються в теоретичній електротехніці в процесах дослідження явищ поверхневого ефекту (відтиснення змінного струму від центра до зовнішньої поверхні) у циліндричних проводах, а *сферичні координати* використовують під час розгляду питання випромінення та поширення електромагнітних хвиль.

Питання для самоперевірки

1. Що називають дивергенцією векторного поля?
2. Охарактеризуйте фізичний зміст дивергенції.
3. Виведіть формулу для обчислення дивергенції в декартових координатах.
4. Як визначити, в яких точках векторне поле має стоки, а в яких – джерела?
5. Що називають проекцією ротора векторного поля на напрямок нормалі?
6. Що називають ротором векторного поля?
7. Вкажіть фізичний зміст проекції ротора векторного поля на напрямок нормалі.
8. Запишіть формулу обчислення ротора векторного поля в декартових координатах.
9. Який оператор називають оператором Гамільтона? Вкажіть властивості цього оператора.
10. Які ви знаєте диференціальні операції другого порядку? Охарактеризуйте їх.
11. Перерахуйте властивості ротора векторного поля.
12. Доведіть, що $rot(f(r) \cdot \bar{c}) = \frac{f'(r)}{r} (\bar{r} \times \bar{c})$, де \bar{c} – сталий вектор.
13. Що називають циркуляцією векторного поля?

14. Що називають криволінійним інтегралом?
15. Як обчислюють криволінійні інтеграли?
16. Запишіть формулу Гріна.
17. Сформулюйте та доведіть умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.
18. Виведіть формулу Стокса.
19. Які координати визначають положення точки M в циліндричній та сферичній системах координат?
20. Як виконуються операції векторного аналізу в криволінійних координатах?
21. Запишіть формули обчислення основних характеристик векторного поля в циліндричних та сферичних координатах.

Лекція 4

Тема: «Спеціальні типи полів»

Мета:

актуалізація опорних понять (магнітне поле, точковий заряд, криволінійний інтеграл);

вивчення основних положень та визначень теорії скалярного та векторного поля;

поглиблення, розширення знань, отриманих раніше в процесі вивчення розділів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального і інтегрального числення;

розвиток наукового мислення та пам'яті;

виховання культури математичного запису і мовлення.

Під час вивчення теми студенти мають:

знати означення: потенціального поля, потенціалу поля, соленоїдного (трубчастого) поля, векторної трубки, інтенсивної трубки, диполя векторного поля, гармонічного поля;

уміти: обчислювати роботу потенціального поля; визначати тип векторного поля; знаходити повний диференціал.

Основні поняття: потенціальне поле, потенціал поля, потенціальна функція, соленоїдне поле, диполь векторного поля, гармонічне поле.

План лекції

1. Потенціальні векторні поля.
2. Соленоїдні (трубчасті) поля.
3. Гармонічне поле.
4. Рівняння Максвелла.
5. Питання для самоперевірки.

Література [1-11]

Текст лекції

4.1 Потенціальні векторні поля

«Потенціальне» ..., на думку тут приходить потенціальна енергія, потенціальні можливості. Так, цеглу, що лежить на підвіконні, потенційно можна скинути вниз, і вм'ятина на землі продемонструє нам ту саму потенціальну енергію. Гравітаційне поле Землі – це один з яскравих прикладів потенціального векторного поля.

Нагадаємо його характерну ознаку, скинувши з підвіконня нашого будинка ... пір'їнку. З точки A до точки B вона може пролетіти по безлічі траєкторій (через вітер, внаслідок опору повітря і т. д.). Але в усіх випадках гравітаційне поле Землі виконає *одну і ту саму роботу* по переміщенню пір'їни між цими точками. Різні траєкторії – це вже «внесок» інших сил, які теж можна описати векторними полями.

Примітка. Можливо, тут у вас виникло питання: «Але вітер же може піднімати перо, і тоді робота має збільшуватися!». Нічого подібного. Фізичне поняття роботи не має на увазі, що хтось або щось «працює». Якщо вітер піднімає перо вгору, то він просто зменшує абсолютну величину роботи сили тяжіння.

Векторне поле $\vec{a}(M) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ називається *потенціальним*, якщо існує така скалярна функція $U(M)$, що скрізь виконується рівність:

$$\vec{a}(M) = \text{grad } U(M).$$

Функцію $U(M)$ називають *потенціалом* поля або потенціальною функцією.

Звертаємо увагу на те, що досить часто потенціал визначається формулою $\vec{a}(M) = -\text{grad } U(M) = \text{grad}(-U(M))$. Іноді, для відокремлення цих двох підходів, застосовують терміни «потенціал» і «потенціальна функція», однак така термінологія не є загальноприйнятною. Тому у разі прочитання роботи, у якій застосовують потенціали, необхідно уточнювати, в якому з цих двох сенсів застосовується це поняття.

Робота потенціального векторного поля із переміщення матеріальної точки з точки A в точку B не залежить від траєкторії руху і знаходиться за таким криволінійним інтегралом:

$$A_{AB} = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = U(B) - U(A).$$

Іншими словами, в потенціальному полі має значення лише початкова і кінцева точки маршруту. І якщо ці точки збігаються, то сумарна робота сил по замкнутому контуру дорівнює нулю.

Дійсно, якщо підніmemo пір'їнку із землі і помістимо її у вихідну точку, то траекторія нашого руху знову довільна. Можна навіть кинути перо і знову його підняти і т. д.

Чому підсумковий результат нульовий? Пір'їна впала з точки A в точку B ? Впала. Сила тяжіння виконала роботу A_{AB} . Пір'їна потрапила назад в точку A ? Потрапила. А це означає, що було виконано точно таку саму роботу $-A_{AB}$ проти сил тяжіння, причому неважливо, з якими «пригодами» і якими силами. Зауважимо, що у фізиці знак «мінус» символізує протилежний зміст. Таким чином, сумарна робота сил дорівнює $A_{AB} - A_{AB} = 0$.

Оскільки градієнт постійного скалярного поля дорівнює нулю, то потенціал довільного поля, якщо він існує, визначений із точністю до постійного доданка. Підбираючи цей доданок, можна пронормувати потенціал, наприклад, зробивши це значення таким, що дорівнює нулю в деякій заданій точці. Найчастіше потенціал нормують умовою рівності нулю на безмежності – якщо там потенціал має скінченне значення.

Прикладами потенціальних полів є:

- 1) магнітне поле, створене рухомим прямолінійним провідником;
- 2) поле тяжіння заданої маси до нерухомого центра (гравітаційне поле);
- 3) електричне поле напруженості точкового заряду.

Відмітимо деякі **властивості потенціальних полів**.

1. $\text{rot } \vec{a}(M) = 0$.

Прикладом потенціального поля є гравітаційне поле. Для ілюстрації цього факту добре підійде будь-який досить важкий і однорідний предмет, наприклад, цеглина. Затисніть її торці руками, підніміть вгору і акуратно відпустіть у вільне падіння. Крутитися вона не буде. А якщо і буде, то це вже ваші «особисті зусилля» або цегла трапилась «неправильна». *Не полігуйтеся і перевірте цей факт! Тільки не кидайте нічого з вікна, це вже не пір'їна.*

2. Циркуляція векторного поля вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю, тобто

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = 0.$$

3. Криволінійний (лінійний) інтеграл векторного поля уздовж лінії AB не залежить від форми лінії, а визначається лише положенням точок A та B .

4. Вираз

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = dU$$

є повним диференціалом потенціала поля $U(x, y, z)$. При цьому $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ – координати вектора $\vec{a}(M)$ (проекції цього вектора на координатні осі).

Приклад 4.1. Показати, що векторне поле $\vec{a}(M) = (3x + yz)\vec{i} + (3y + xz)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k}$ є потенціальним.

Розв'язування. Знайдемо ротор заданого поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x + yz & 3y + xz & 3z + xy \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(3z + xy)}{\partial y} - \frac{\partial(3y + xz)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial(3z + xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3x + yz)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(3y + xz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x + yz)}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= (x - x)\vec{i} - (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Отже, задане поле потенціальне.

Функцію $U = u(x, y, z)$ зазвичай знаходять одним із таких способів.

1-й спосіб

Потенціал векторного поля обчислюють за формулою:

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x(x, y, z) dx + a_y(x, y, z) dy + a_z(x, y, z) dz. \quad (4.1)$$

Криволінійний інтеграл обчислюється вздовж ламаної L , ланки якої паралельні осям координат (рис. 4.1).

За початкову точку беруть точку $A(x_0, y_0, z_0)$, а за кінцеву – точку $D(x, y, z)$.

В цьому випадку

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz + \int_{BC} a_x dx + a_y dy + a_z dz +$$

$$+ \int_{CD} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

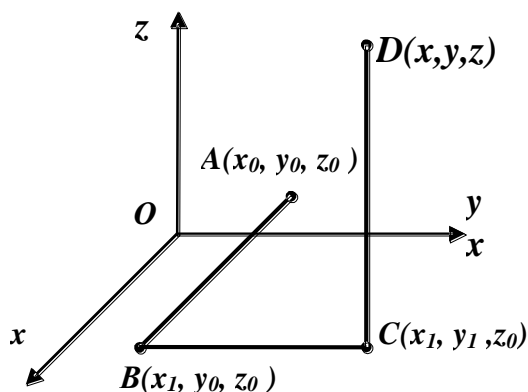


Рисунок 4.1

На відрізку AB , який паралельний осі Ox , $y = y_0$, $z = z_0$, $dy = 0$, $dz = 0$, $x \in [x_0, x]$. Тоді

$$\int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx.$$

На відрізку BC , який паралельний осі Oy , $x = x$, $z = z_0$, $dx = 0$, $dz = 0$, $y \in [y_0, y]$. Тоді

$$\int_{BC} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy.$$

На відрізку CD , який паралельний осі Oz , $x = x$, $y = y_0$, $dx = 0$, $dy = 0$, $z \in [z_0, z]$. Тоді

$$\int_{CD} a_x dx + a_y dy + a_z dz = .$$

Таким чином,

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz. \quad (4.2)$$

Зауваження. Якщо функції $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ неперервні в точці $(0, 0, 0)$, то за початкову точку $A(x_0, y_0, z_0)$ можна взяти початок координат.

Приклад 4.2. Перевірити, чи векторне поле

$$\bar{a} = (3x - yz)\bar{i} + (3y - xz)\bar{j} + (3z - xy)\bar{k}$$

є потенціальним і знайти його потенціал.

Розв'язування. Умовою потенціальності полів є рівність: $\text{rot}\bar{a}(M) = 0$.

Обчислимо ротор векторного поля:

$$\text{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x - yz & 3y - xz & 3z - xy \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial(3z - xy)}{\partial y} - \frac{\partial(3y - xz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(3z - xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3x - yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(3y - xz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x - yz)}{\partial y} \right) \bar{k} =$$

$= (-x + x)\bar{i} - (-y + y)\bar{j} + (-z + z)\bar{k} = 0$. Отже, задане векторне поле є потенціальним.

Знайдемо його потенціал за формулою (4.2). Маємо

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz = \\ &= \int_{x_0}^x (3x - y_0 z_0) dx + \int_{y_0}^y (3y - x z_0) dy + \int_{z_0}^z (3z - xy) dz = \left(\frac{3}{2} x^2 - x y_0 z_0 \right) \Big|_{x_0}^x + \\ &+ \left(\frac{3}{2} y^2 - x y z_0 \right) \Big|_{y_0}^y + \left(\frac{3}{2} z^2 - x y z \right) \Big|_{z_0}^z = \frac{3}{2} x^2 - x y_0 z_0 - \frac{3}{2} x_0^2 + x_0 y_0 z_0 + \\ &+ \frac{3}{2} y^2 - x y z_0 - \frac{3}{2} y_0^2 + x y_0 z_0 + \frac{3}{2} z^2 - x y z - \frac{3}{2} z_0^2 + x y z_0 = \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - x y z - \\ &- \frac{3}{2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) + x_0 y_0 z_0, \end{aligned}$$

тобто

$$U(x, y, z) = \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - x y z + C, \text{ де } C = x_0 y_0 z_0 - \frac{3}{2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

2-ий спосіб

Знаходження потенціалу потенціального векторного поля розглянемо на прикладі.

Приклад 4.3. Знайти потенціал векторного поля з прикладу 4.1.

Розв'язування. З формули (4.1) випливає, що $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x + yz$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 3y + xz$,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 3z + xy.$$

Подальший алгоритм нагадує розв'язування диференціального рівняння в повних диференціалах, тільки з більшою кількістю кроків.

З рівності $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x + yz$ випливає, що

$$U = \int (3x + yz)dx = \frac{3}{2}x^2 + xyz + f(y, z),$$

де $f(y, z)$ – невідома функція. Диференціюючи отриманий результат за y , маємо:

$$U'_y = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + f(y, z) \right)'_y = 0 + xz + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y}. \quad \text{Але з іншого боку,}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3y + xz. \quad \text{Тому}$$

$$xz + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 3y + xz \rightarrow \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 3y \rightarrow f(y, z) = 3 \int y dy = \frac{3}{2}y^2 + h(z) \rightarrow$$

$$U = \frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + h(z).$$

Диференціюємо одержаний результат за змінною z :

$$U'_z = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + h(z) \right)'_z = xy + \frac{dh}{dz}. \quad \text{Оскільки} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 3z + xy,$$

$$\text{то маємо: } xy + \frac{dh}{dz} = xy + 3z \rightarrow \frac{dh}{dz} = 3z \rightarrow h(z) = 3 \int z dz = \frac{3}{2}z^2 + C, \quad \text{де } C = \text{const}.$$

Остаточно маємо: $U = \frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C$ – шукана потенціальна функція.

Для перевірки знайдемо частинні похідні першого порядку одержаної функції за кожною змінною:

$$U'_x = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C \right)'_x = 3x + yz,$$

$$U'_y = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C \right)'_y = 3y + xz,$$

$$U'_z = \left(\frac{3}{2}x^2 + xyz + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C \right)'_z = 3z + xy,$$

які збіглися з відповідними компонентами вихідного поля $\bar{a}(M) = (3x + yz)\bar{i} + (3y + xz)\bar{j} + (3z + xy)\bar{k}$.

4.2 Соленоїдні (трубчасті) поля

Векторне поле $\bar{a}(M)$ називається *соленоїдним*, якщо існує таке поле $\bar{b}(M)$, що

$$\bar{a}(M) = \text{rot} \bar{b}(M).$$

Вектор $\bar{b}(M)$ називають *векторним потенціалом* поля $\bar{a}(M)$.

Прикладами соленоїдних полів є:

- 1) поле швидкостей твердого тіла, що обертається навколо деякої осі;
- 2) магнітне поле, створене прямолінійним провідником, вздовж якого тече електричний струм.

Відмітимо деякі **властивості соленоїдних полів**.

1. $\text{div} \bar{a}(M) = 0$.

2. Розглянемо в області D , в якій задано векторне поле \bar{a} , довільну площадку σ . Тоді *векторною трубкою* буде сукупність векторних ліній, що проходять через межу цієї площадки. В соленоїдному полі потік вектора \bar{a}

через довільний переріз векторної трубки зберігає сталі значення, яке називається *інтенсивністю трубки*.

3. Потік вектора $\vec{a}(M)$ через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

4. Векторні лінії соленоїдного поля замкнені.

5. Соленоїдне поле не має ні джерел, ні стоків.

Розглянемо центрально-симетричне поле в просторі, визначене формулою

$$\vec{a} = f(r) \cdot \vec{r}^0 = \frac{f(r)}{r} \cdot \vec{r}, \quad (4.3)$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}$.

З означення дивергенції легко знайти, що $\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 \cdot f(r))$. Зокрема, такі поля без джерел поза початком координат характеризуються тим, що $r^2 \cdot f(r) = C = \text{const}$, звідки $f(r) = \frac{C}{r^2}$, $\vec{a} = \frac{C}{r^3} \vec{r}$.

Це так званий закон Кулона, який застосовується в теорії електричних та магнітних взаємодій. Потік такого поля через довільну сферу з центром в початку координат дорівнює $\frac{C}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi C$, тобто, не залежить від \vec{r} .

Іншими словами, в початку координат у цьому випадку починаються $4\pi C$ векторних ліній, що йдуть у безмежність.

Однак точкове джерело $Q = 4\pi C$ має густину $Q\delta(r) = Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$, тобто ми одержуємо важливу формулу

$$\text{div} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \vec{r}^0 \right) = Q \cdot \delta(r).$$

Аналогічний розгляд плоского центрально-симетричного поля виду (4.3) з $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ дає, що якщо в початку координат немає джерел, то

$$f(r) = \frac{C}{r}, \quad Q = 2\pi C, \quad \text{div} \left(\frac{Q}{2\pi r^2} \vec{r}^0 \right) = Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y).$$

Як результат ми одержуємо картину, яку можна тлумачити як точкове джерело векторних ліній Q на площині або як джерело, поширене у просторі вздовж осі Oz з густиною Q на одиницю довжини.

Диполь одержується накладанням джерела і стоку однакової густини, розташованих у нескінченній близькості один від одного. Однак якщо в такому випадку густина джерела та стоку залишаються скінченними, то їх поля взаємно знищуються. Тому вказані густини мають бути настільки великими, щоб добуток густини джерела на відстань між джерелом та стоком (цей добуток називається моментом диполя) залишався скінченним. Потрібно відмітити, що диполь має вісь, яка проходить через джерело та стік у напрямі від останнього до першого.

Розглянемо векторне поле для випадку диполя (рис. 4.2), де l – вісь диполя.

За умови достатньо малого h в будь-якій точці M будемо мати

$$\vec{a} = \frac{Q}{4\pi r^3} \vec{r}_1 - \frac{Q}{4\pi r^3} \vec{r} = Qh \cdot \frac{\vec{r}_1}{4\pi r^3} - \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} = m \frac{d}{dl} \left(\frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \right), \quad (4.4)$$

де m – момент диполя.

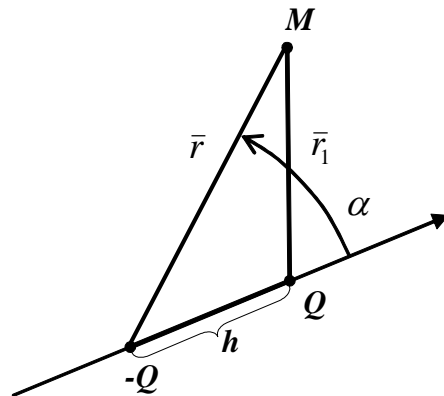


Рисунок 4.2

Спрощуючи праву частину (4.4) отримуємо

$$\vec{a} = \frac{m}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \cdot \frac{dr}{dl} - \frac{3\vec{r}}{r^4} \cdot \frac{dr}{dl} \right) = \frac{m}{4\pi r^3} \left(3 \frac{\vec{r}}{r} \cos \alpha - \vec{l}^0 \right).$$

Аналогічно, розгляд диполя плоского поля дає результат

$$\vec{a} = \frac{m}{2\pi r^2} \left(2 \frac{\vec{r}}{r} \cos \alpha - \vec{l}^0 \right).$$

Якщо для простоти вважати, що вісь l збігається з віссю Ox , то поле в декартових координатах набуває вигляду

$$\bar{a} = \frac{m}{2\pi(x^2 + y^2)} \left(2 \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{x^2 + y^2} x - \bar{i} \right).$$

Інтегрування рівняння $\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y}$ для векторних ліній дає $x^2 + y^2 = Cy$ (рис. 4.3).

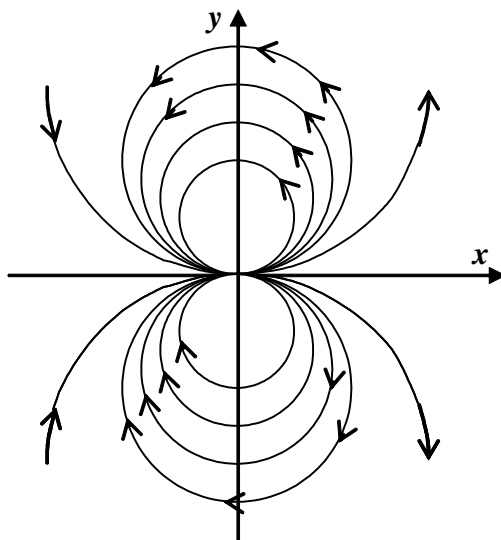


Рисунок 4.3

Приклад 4.4 Перевірити, чи векторне поле $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$, де $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$, є соленоїдним.

Розв'язування. Умовою соленоїдності векторного поля є рівність: $\text{div} \bar{a}(M) = 0$. Знайдемо координати вектора $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$.

Маємо

$$\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r}) = r \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = r((-2z + 2y)\bar{i} - (z + 2x)\bar{j} + (y + 2x)\bar{k}), \text{ де}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Обчислимо дивергенцію векторного поля $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$:

$$\text{div} \bar{a} = \frac{\partial(r(2y - 2z))}{\partial x} + \frac{\partial(r(-2x - z))}{\partial y} + \frac{\partial(r(y + 2x))}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}(2y - 2z) + r \frac{\partial(2y - 2z)}{\partial x} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial r}{\partial y}(-2x-z) + r \frac{\partial(-2x-z)}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}(y+2x) + r \frac{\partial(y+2x)}{\partial z} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(2y-2z) + \\
& + 0 \cdot r + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(-2x-z) + 0 \cdot r + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(y+2x) + 0 \cdot r = \\
& = \frac{1}{r}(2xy - 2xz - 2xy - yz + yz + 2xz) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Отже, векторне поле $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$ є соленоїдним.

4.3 Гармонічне поле

Векторне поле $\bar{a}(M)$, яке є одночасно потенціальним (безвихровим) і соленоїдним (трубчастим), називається *гармонічним*. Оскільки поле потенціальне, то його можна записати у вигляді:

$$\bar{a}(M) = \text{grad } U(M),$$

де $U = U(x, y, z)$ – потенціал векторного поля.

Умова соленоїдності означає, що

$$\text{div} \bar{a}(M) = 0.$$

Таким чином, $\text{div} \bar{a}(M) = \text{div grad } U(M) = 0$, але

$$\begin{aligned}
\text{div grad } U(M) &= \bar{\nabla}(\bar{\nabla}U) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U.
\end{aligned}$$

Функція $U = U(x, y, z)$, яка задовольняє умову

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (4.5)$$

називається *гармонічною*.

Прикладами гармонічних полів є :

- 1) електричне поле точкового заряду;
- 2) поле лінійних швидкостей стаціонарного безвихрового потоку рідини за відсутності в ньому джерел і стоків.

Приклад 4.5 Перевірити, чи задане векторне поле

$$\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k} \text{ є:}$$

- а) потенціальним,
- б) соленоїдним.

У випадку потенціальності поля знайти його потенціал.

Розв'язування. Знайдемо $\text{rot}\bar{a}(M)$:

$$\begin{aligned} \text{rot}\bar{a}(M) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (x-x)\bar{i} - (y-y)\bar{j} + (z-z)\bar{k} = 0. \end{aligned}$$

Отже, векторне поле є потенціальним. Знайдемо $\text{div}\bar{a}(M)$:

$$\text{div}\bar{a}(M) = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0.$$

Отже, векторне поле є соленоїдним. Знайдемо потенціал векторного поля:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz = \\ &= \int_{x_0}^x y_0 z_0 dx + \int_{y_0}^y x z_0 dy + \int_{z_0}^z xy dz = (y_0 z_0 x) \Big|_{x_0}^x + (y z_0 x) \Big|_{y_0}^y + (yzx) \Big|_{z_0}^z = \\ &= y_0 z_0 x - y_0 z_0 x_0 + y z_0 x - y_0 z_0 x + yzx - yz_0 x = xyz - y_0 z_0 x_0 = xyz + C, \end{aligned}$$

де $C = -y_0 z_0 x_0$.

4.4 Рівняння Максвелла

Нехай в деякій частині простору створено електричне поле, що характеризується векторами електричної і магнітної напруженості \vec{E} та \vec{H} . В загальному випадку ці вектори залежать не тільки від заданої точки, а і від часу, тобто є функціями $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$, $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$. Середовище, в якому відбуваються електричні і пов'язані з ними магнітні явища, характеризуються величинами γ – провідність, ε – діелектрична проникність та μ – проникність. В однорідному середовищі ці величини будуть сталими, але в загальному випадку вони також будуть функціями координат точки та часу. Нехай \vec{i} – вектор густини електричного струму, чисельно дорівнює кількості електрики, що протікає за одиницю часу крізь одиничну площадку (тобто, дорівнює похідній від кількості електрики за часом), що перпендикулярна до напрямку руху електрики. Причому вектор \vec{i} направлений в бік цього руху. Вектор густини складається зі струму провідності $\gamma\vec{E}$ (закон Ома) і току зміщення, що виникає внаслідок індукції в діелектриках, він дорівнює $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t}$.

Таким чином,

$$\vec{i} = \gamma\vec{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Розглянемо довільну замкнену криву L , що обмежує поверхню σ . Закон електромагнітної індукції Фарадея свідчить: циркуляція електричного вектора \vec{E} (електрорушійна сила) вздовж L дорівнює похідній за часом вектора магнітної індукції $\mu\vec{H}$ через поверхню σ , взятій із знаком «мінус»

$$\oint_L \vec{E} d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} \mu\vec{H} d\vec{\sigma} \rightarrow \oint_L \vec{E} d\vec{r} = -\iint_{\sigma} \frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t} d\vec{\sigma}.$$

За теоремою Стокса:

$$\iint_{\sigma} \text{rot} \vec{E} d\vec{\sigma} = -\iint_{\sigma} \frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t} d\vec{\sigma}. \quad (4.7)$$

Формула (4.7) справедлива до довільної поверхні σ . А це можливо лише тоді, коли підінтегральні функції збігаються:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) – друге рівняння Максвелла у векторній формі. Перше рівняння Максвелла у векторній формі спробуйте вивести самостійно [6, 10].

Щоб мати можливість вимірювати величини, пов'язані з електричними або магнітними полями, в абсолютних електростатичних і електромагнітних одиницях, в праві частини рівнянь Максвелла доводиться вводити множник $\frac{1}{c}$, де $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с – швидкість світла у вакуумі. Тоді рівняння Максвелла набувають вигляду

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\gamma \bar{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\varepsilon \bar{E})}{\partial t} \right), \quad (4.9)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu \bar{H})}{\partial t}. \quad (4.10)$$

До цих двох рівнянь додають ще два додаткових:

$$\operatorname{div} \varepsilon \bar{E} = 4\pi \rho, \quad \operatorname{div} \mu \bar{H} = 0. \quad (4.11)$$

Питання для самоперевірки

1. Яке векторне поле називається потенціальним?
2. Що називають потенціалом поля?
3. Поясніть відмінність термінів «потенціал» та «потенціальна функція».
4. Вкажіть властивості потенціальних полів.
5. Наведіть приклади потенціальних полів.
6. Виведіть формулу знаходження потенціалу поля.
7. Яке поле називають соленоїдним?
8. Що таке векторний потенціал поля?
9. Вкажіть властивості соленоїдних полів.
10. Що таке диполь?
11. Проаналізуйте центрально-симетричне поле $\bar{a} = f(r) \cdot \bar{r}^0 = \frac{f(r)}{r} \cdot \bar{r}$, де $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$, $\bar{r}^0 = \frac{\bar{r}}{r}$.
12. Яке поле називається гармонічним?
13. Запишіть умову гармонічності поля.
14. Перевірте, чи векторне поле $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$, де $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$, є соленоїдним.
15. Перевірте, чи векторне поле $\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$ є гармонічним, знайдіть його потенціал.

Короткий довідник

➤ **Рівняння векторної лінії:**

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$

➤ **Силові лінії:**

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

➤ **Похідна за напрямом:**

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

де

$$\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}, \quad \cos \alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|}, \quad \cos \beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|}, \quad \cos \gamma = \frac{s_z}{|\vec{s}|}, \quad |\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}.$$

➤ **Гradient функції $f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$:**

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

➤ **Найбільше значення похідної в заданій точці за напрямом вектора:**

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{\max} = |\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}.$$

➤ **Поверхневий інтеграл 1-го роду:** $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$

Якщо σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

(область D_{xy} є проекцією поверхні σ на площину XOY)

Якщо σ задана рівнянням $y = y(x, z)$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2} dx dz$$

(область D_{xz} є проекцією поверхні σ на площину XOZ)

Якщо σ задана рівнянням $x = x(y, z)$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz$$

(область D_{yz} є проекцією поверхні σ на площину YOZ)

➤ **Потік векторного поля \vec{a} через поверхню σ :**

$$P = \iint_{\sigma} n p_n \vec{a}(M) d\sigma,$$

$$P = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds}, \text{ де } n p_n \vec{a}(M) d\sigma = \vec{a} \cdot \vec{ds}$$

або

$$P = \iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy, \text{ де}$$

$$\iint_{\sigma} a_z(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy$$

$$\iint_{\sigma} a_x(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} a_x(x(y, z), y, z) dy dz;$$

$$\iint_{\sigma} a_y(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{yz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz.$$

В загальному випадку для обчислення потоку можна скористатися формулою:

$$\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \pm \iint_{D_{yz}} a_x|_{x=x(y,z)} dy dz \pm \iint_{D_{xz}} a_y|_{y=y(x,z)} dx dz \pm \iint_{D_{xy}} a_z|_{z=z(x,y)} dx dy,$$

де D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} – проекції поверхні σ на відповідні координатні площини.

➤ **Формула Остроградського–Гаусса:**

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy$$

➤ **Дивергенція:**

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{\partial a_x(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_0)}{\partial z}.$$

➤ **Ротор:**

$$\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k}$$

➤ **Формула Стокса:**

$$\mathcal{C}(\bar{a}) = \oint_L \bar{a} d\bar{l} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \bar{a} d\bar{s}$$

➤ **Оператор Гамильтона:**

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$$

➤ **Оператор Лапласа:**

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

*Навчальне електронне видання
комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах*

**Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Ковальчук Майя Борисівна**

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

**Основні поняття, формули та алгоритми для самостійної роботи
студентів**

Навчально-методичний посібник

Рукопис оформили *Сачанюк-Кавецька Н. В.,
Ковальчук М. Б.*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет підготувала *Т. Старічек*

Підписано до видання 12.12.2022 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № P2022-093.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: irvc.ed.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.