Д. В. Степанов, Н. Д. Степанова

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ ТЕПЛОЕНЕРГЕТИЧНОГО ОБЛАДНАННЯ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Д. В. Степанов, Н. Д. Степанова

Математичні методи і моделі теплоенергетичного обладнання

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 621.1.016.001
ББК 31:3
С79

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 25.12.2014 р.)

Рецензенти:
С. Й. Ткаченко, доктор технічних наук, професор
І. І. Пуховий, доктор технічних наук, професор
І. В. Коц, кандидат технічних наук, професор

Степанов, Д. В.
С79 Математичні методи і моделі теплоенергетичного обладнання : навчальний посібник / Д. В. Степанов, Н. Д. Степанова. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 81 с.

В посібнику розглянуто методи розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь, диференціальних рівнянь, методи інтерполяції та апроксимації даних, загальні характеристики та основи математичного моделювання робочих процесів в теплоенергетичному обладнанні, методи оптимізації та елементи теорії похибок. В посібнику наведені завдання для самостійної роботи студентів, вказівки до виконання розділу математичного моделювання в рамках підготовки бакалаврської дипломної роботи, завдання до контрольної роботи студентам заочної форми навчання.

УДК 621.1.016.001
ББК 31:3

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Даний навчальний посібник призначений для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 144 – "Теплоенергетика". Посібник підготовлений відповідно до навчальної програми дисципліни "Математичні методи і моделі".

В публікаціях технічної україномовної навчальної літератури питанням моделювання теплогідродинамічних процесів у елементах обладнання не приділяється достатньої уваги. Тому, на думку авторів, даний посібник буде корисним як для підготовки студентів-теплоенергетиків, так і для інших суміжних спеціальностей.

Викладений матеріал дозволить готуватись до лекційних занять, лабораторних робіт, поточного та підсумкового контролю знань, виконувати розділи курсового та дипломного проектування.

Значна кількість прикладів із розв'язанням та завдань дозволить якісно організувати самостійну роботу студентів.

Значна увага приділена рекомендаціям по підготовці розділу з математичного моделювання в рамках підготовки бакалаврської дипломної роботи.

Авторами розглянуті методи розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь, диференціальних рівнянь, методи інтерполяції та апроксимації даних, елементи теорії похибок.

В тексті посібника наведені завдання на контрольну роботу студентам заочної форми навчання за спеціальністю 144 – "Теплоенергетика".

Автори вдячні рецензентам за корисні поради і зауваження в процесі рецензування і підготовки рукопису.

Автори

1 ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Історичний розвиток моделювання

У століття Інтернету і космічних технологій важко уявити інженера-розробника без комп'ютера. Сучасні дослідження настільки наукоємні, що просто фізично неможливо обійтися без допомоги обчислювальної машини. Колосальні обсяги інформації вимагається аналізувати під час дослідження процесів в різних областях науки і техніки.

В теплоенергетиці досліджуються всілякі процеси горіння палива в різних моделях топок, процеси течії парорідинних сумішей в проточних частинах турбогенераторів (розрахунок нагріву металу і його розширення за різних граничних умов ґрунтується на розв'язанні рівнянь теплопровідності) і розплавлених металів, що є теплоносієм першого контуру в парогенераторах атомних електричних станцій, досліджується вплив струменів пари на поверхню лопаток турбіни, що необхідно для запобігання їх корозійного зносу, так само досліджуються процеси протікання ядерних реакцій в тепловидільних елементах (ТВЕЛах) тощо. Насправді більшість процесів в теплоенергетиці вже давно вивчено. Дослідження проходять по оптимізації цих процесів і вивченню глибинної суті явищ для досягнення максимального ефекту при розробці енергетичного устаткування. Тут і потрібна математична модель.

Взагалі елементи математичного моделювання використовувалися з самого початку появи точних наук, і не випадково, що деякі методи обчислень носять імена таких корифеїв науки, як Ньютон і Ейлер, а слово "алгоритм" походить від імені середньовічного арабського вченого Аль-Хорезмі.

Друге "народження" цієї методології припало на кінець 40-х початок 50-х років XX століття і було обумовлене принаймні двома причинами. Перша з них – поява ЕОМ (комп'ютерів), хоча і скромних за нинішніми мірками, які позбавили вчених величезної за об'ємом рутинної обчислювальної роботи. Друга – безпрецедентне соціальне замовлення – виконання національних програм СРСР і США по створенню ракетно-ядерного щита, які не могли бути реалізовані традиційними методами. Математичне моделювання справилося з цією задачею: ядерні вибухи і польоти ракет і супутників були заздалегідь "здійснені" в надрах ЕОМ за допомогою математичних моделей і лише потім втілені на практиці. Цей успіх багато в чому визначив подальші досягнення методології, без застосування якої в розвинутих країнах жоден великомасштабний технологічний, екологічний або економічний проект тепер всерйоз не розглядається (сказане справедливо і по відношенню до деяких соціально-політичних проектів).

Зараз математичне моделювання вступає в третій принципово важливий етап свого розвитку, "вбудовуючись" в структури так званого інформаційного суспільства. Вражаючий прогрес засобів переробки, передавання і зберігання інформації відповідає світовим тенденціям до ускладнення і взаємного проникнення різних сфер людської діяльності. Без володіння інформаційними "ресурсами" не можна і думати про вирішення все більш масштабних і все більш різноманітних проблем, що стоять перед світовою спільнотою.

Проте, інформація як така часто мало що дає для аналізу і прогнозу, для прийняття рішень і контролю за їх виконанням. Потрібні надійні способи переробки інформаційної "сировини" в готовий "продукт", тобто в точне знання. Історія методології математичного моделювання переконує: вона може і повинна бути інтелектуальним ядром інформаційних технологій, всього процесу інформатизації суспільства. Технічні, екологічні, економічні та інші системи, що вивчаються сучасною наукою, більше не піддаються дослідженню (в потрібній повноті і точності) звичайними теоретичними методами. Прямий натурний експеримент над ними довгий, дорогий, часто або небезпечний, або просто неможливий, оскільки більшість цих систем існує в "єдиному екземплярі". Ціна помилок і прорахунків в роботі з ними неприпустимо висока.

Тому математичне (ширше – інформаційне) моделювання є невід'ємною складовою науково-технічного прогресу.

1.2 Класифікація методів наукового пізнання

Методи наукового пізнання прийнято підрозділяти за ступенем їх спільності, тобто, за широтою застосовності в процесі наукового дослідження (рис. 1.1) на загальні, загальнонаукові і частковонаукові.

Із загальних методів в історії пізнання відомі два: діалектичний і метафізичний. Це загально-філософські методи.

При метафізичному підході об'єкти і явища навколишнього світу розглядаються ізольовано один від одного, без урахування їх взаємних зв'язків і як би в застиглому, фіксованому, незмінному стані.

Діалектичний підхід, навпаки, припускає вивчення об'єктів, явищ зі всім багатством їх взаємозв'язків, з урахуванням реальних процесів їх зміни, розвитку. З середини XIX століття, в період третьої наукової революції метафізичний метод почав все більше і більше витіснятися з природознавства діалектичним методом.

Загальнонаукові методи використовуються в різних областях науки, тобто мають вельми широкий міждисциплінарний спектр застосування. Класифікація цих методів тісно пов'язана з поняттям рівнів наукового пізнання.

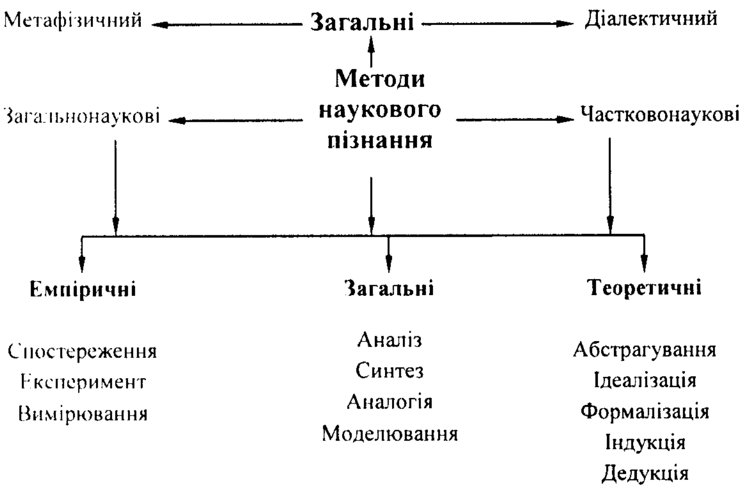


Рисунок 1.1 – Методи наукового пізнання

1.3 Рівні наукового пізнання

Розрізняють два рівні наукового пізнання: емпіричний і теоретичний.

Одні загальнонаукові методи застосовуються тільки на емпіричному рівні (спостереження, експеримент, вимірювання), інші – тільки на теоретичному (ідеалізація, формалізація), але є і такі (наприклад, моделювання), які використовуються як на теоретичному так і на емпіричному рівні.

Емпіричний рівень наукового пізнання характеризується безпосереднім дослідженням реально існуючих, чуттєво сприйманих об'єктів. На цьому рівні шляхом проведення спостережень, виконання різноманітних вимірювань, постановки експериментів здійснюється процес накопичення інформації про досліджувані об'єкти, явища, проводиться первинна систематизація одержуваних фактичних даних у вигляді таблиць, схем, графіків тощо. Крім того, на емпіричному рівні наукового пізнання – як наслідок узагальнення наукових фактів – можливе формулювання деяких емпіричних закономірностей.

Теоретичний рівень наукового пізнання властивий раціональній (логічній) ступені пізнання. На даному рівні відбувається розкриття найглибших істотних сторін, зв'язків, закономірностей, що належать до об'єктів, які вивчаються, явищ. Теоретичний рівень – більш високий ступінь в науковому пізнанні. Результатами теоретичного пізнання стають гіпотези, теорії, закони.

Виділяючи в науковому дослідженні два різні рівні – емпіричний і теоретичний, не потрібно, проте, відривати їх один від одного і протиставляти, оскільки вони тісно взаємопов'язані. Емпіричний рівень виступає як основа, фундамент теоретичного осмислення наукових фактів і одержуваних статистичних даних. В той же час теоретичне мислення спирається на наочні образи (у тому числі схеми, графіки тощо), з якими має справу емпіричний рівень дослідження. У свою чергу емпіричний рівень наукового пізнання не може існувати без досягнень теоретичного рівня. Емпіричне дослідження, зазвичай, спирається на певну теоретичну конструкцію, яка визначає напрям цього дослідження, обумовлює і обґрунтовує вживані при цьому методи.

До групи частково-наукових методів наукового пізнання належать методи, що використовуються тільки в рамках досліджень якої-небудь конкретної науки або якого-небудь конкретного явища. Кожна окрема наука (біологія, хімія, геологія тощо) має свої специфічні методи дослідження. Як правило, частково-наукові методи містять в різних поєднаннях ті або інші загальнонаукові методи пізнання, базуються на них і можуть включати спостереження, вимірювання, індуктивні або дедуктивні висновки тощо.

Характер поєднання різних методів і їх використання залежить від умов дослідження, природи об'єктів, що вивчаються. Таким чином, частково-наукові методи не відірвані від загальнонаукових, навпаки, тісно пов'язані з ними, а також із загальним діалектичним методом, який як би переламується через них. Наприклад, загальний діалектичний принцип розвитку виявився в біології у вигляді відкритого Ч. Дарвіном природноісторичного закону еволюції тварин і рослин.

До сказаного залишається додати, що будь-який метод сам по собі ще не зумовлює успіху в пізнанні тих або інших сторін матеріальної дійсності. Важливо ще уміти правильно використовувати його в процесі пізнання.

Отже, моделювання – метод пізнання навколишнього світу, який можна віднести до загальнонаукових методів, вживаних як на емпіричному, так і на теоретичному рівні пізнання.

1.4 Основні поняття та визначення моделювання

Моделювання – метод пізнання навколишнього світу, який можна віднести до загальнонаукових методів, вживаних як на емпіричному, так і на теоретичному рівні пізнання.

Об'єкт моделювання – будь-який реальний процес, явище або ефект, що існує поза нашої свідомістю і є предметом теоретичного вивчення або практичної діяльності. Таким чином під об'єктом або оригіналом розуміють окремий елемент або сукупність елементів предметної області, поведінка яких досліджується з метою встановлення основних закономірностей або особливостей їх функціонування.

Предметна область моделювання – частина або фрагмент реальної дійсності, що містить цікавий для нас об'єкт, поведінка якого повинна бути досліджена. Цим визначенням закріплюється, що моделювання якого-небудь реально існуючого об'єкта не може виконуватися окремо, без встановлення його зв'язків з іншими об'єктами даної предметної області. Ця вимога має важливе методологічне значення для будь-якого виду моделювання, у тому числі математичного.

Модель – штучно створений матеріальний або теоретичний образ реального об'єкта, що відображає його найбільш важливі і принципові властивості і дозволяє передбачати його поведінку на основі експерименту з моделлю.

Матеріальна модель відтворює в більш простому або зменшеному вигляді структуру і основні риси, взаємозв'язки та відносини між елементами досліджуваного об'єкта.

Найчастіше термін "*модель*" використовують для позначення:

– моделі як пристрою, що відтворює будову чи дію якого-небудь пристрою (зменшену, збільшену або в натуральну величину);

– моделі як аналога (креслення, графіка, плану, схеми, опису тощо) якого-небудь явища, процесу або предмета;

– моделі як зразка майбутнього виробу.

До процесу моделювання висувають такі вимоги:

- дослідження на моделі повинно бути економічніше, простіше, безпечніше, ніж на оригіналі;

- повинно бути відоме правило розрахунку характеристик оригіналу на основі даних, отриманих на моделі.

1.5 Різновиди моделювання

Прийнято розрізняти три види моделювання: фізичне; аналогове; математичне.

Фізичне моделювання дозволяє поглибити знання про явища, оцінити їх кількісно, полегшити математичний опис об'єкта. Результати є більш наочними. Недоліком фізичного моделювання є необхідність створювати нову модель для нового процесу. Важче із моделями ланцюга процесів. Доводиться пов'язувати моделі процесів, створювати систему управління моделями, а це буває складніше, ніж створити систему управління реальним об'єктом.

Під час фізичного моделювання в теплоенергетиці використовується теорія подібності [1]. Подібні явища описуються однаковими рівняннями: рух ньютонівських рідин – рівнянням Нав'є-Стокса і нерозривності, теплові процеси – рівняннями Фур'є-Кірхгофа, Нав'є-Стокса та нерозривності тощо. При моделюванні необхідно задати умови однозначності. Тобто для подібних процесів геометрична форма, наприклад, повинна бути однакова, а розміри пропорційні. При фізичному моделюванні неможливо дотримуватись подібності за всіма критеріями подібності. Якщо однакові критерії Фруда ($v^2/(g\cdot l)$), то не можуть бути однакові критерії Рейнольдса $Re=(w\cdot l/v)$.

Аналогове моделювання (analogus – схожий) побудоване на тому, що різні процеси можуть описуватись однаковими або якісно аналогічними рівняннями.

Аналогічними рівняннями називають такі, в яких величини відрізняються, але всі оператори однакові і розміщені в однаковому порядку. Величини в аналогічних рівняннях називають аналогами.

Метод вивчення процесів за допомогою аналогів називають аналоговим моделюванням. Наприклад, рух потоку в каналі, розповсюдження теплової енергії та електричний струм – різні процеси, але вони описуються аналогічними рівняннями. Основні величини, що характеризують ці процеси – різні, але між ними є аналогія:

– гідравлічний напір – температура – напруга;

– термічний опір – гідравлічний опір – електричний опір;

– теплоємність – поперечний переріз посудини – ємність конденсатора.

Може скластися враження, що процес моделюється "без математики", але математична аналогія вже наперед доведена.

Математичне моделювання – це теоретично-експериментальний метод пізнавальної діяльності, це метод визначення і пояснення явищ, процесів і систем (об'єктів-оригіналів) на основі створення нових об'єктів – математичних моделей. Інше визначення – "Дослідження технологічного або іншого процесу із використанням сукупності математичних співвідношень (рівностей, нерівностей, логічних умов тощо), що описують процес".

Математична модель – це формальна система, що є кінцевою сукупністю символів і досить суворих правил, визначених цими символами для певного об'єкта із деякими власними відношеннями, символами або константами. Або "Сукупність математичних виразів, що визначають кінцеві характеристики (параметри стану, показники ефективності) процесу в залежності від початкового стану, зміни зовнішніх умов та часу". Нарешті, найлаконічніше визначення математичної моделі: "Рівняння, яке виражає ідею".

Математична модель, як правило, враховує лише ті властивості (атрибути) об'єкта-оригіналу, які відображають, визначають і є цікавими з точки зору цілей і задач конкретного дослідження. Будь-який об'єкт є невичерпним в своїх властивостях і співвідношеннях, тому не можна вивчати одразу все нескінченне багатство змісту об'єкта.

Відповідно, в залежності від цілей моделювання, при розгляді одного і того ж об'єкта-оригіналу з різних точок зору і в різних аспектах останній може мати різні математичні описи і, як наслідок, бути поданим різними математичними моделями.

Контрольні питання

1. Дайте характеристику історичного розвитку моделювання.
2. Наведіть класифікацію методів пізнання.
3. Поясніть відмінність метафізичного та діалектичного методів пізнання. Наведіть приклади.
4. Поясніть відмінність емпіричного та теоретичного рівнів пізнання. Наведіть приклади.
5. Поясніть взаємозв'язок методів пізнання. Наведіть приклади поєднання різних методів пізнання.
6. Дайте визначення поняття "моделювання".
7. Поясніть відмінність предмета та об'єкта моделювання. Наведіть приклади.
8. Поясніть поняття "модель". Наведіть різні тлумачення цього терміну.
9. Дайте характеристику фізичного моделювання.
10. Дайте характеристику аналогового моделювання.
11. Дайте характеристику математичного моделювання.

2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (СЛАР)

2.1 Основні визначення

Система n лінійних рівнянь з невідомими має такий вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

При цьому через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позначені невідомі, які потрібно визначити.

Величини $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$, що називаються *коефіцієнтами системи*, і величини $b_1, b_2, \ldots, b_n$, що називаються *вільними членами*, є відомими.

Система називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю. Якщо хоча б один з вільних членів не дорівнює нулю, то система називається *неоднорідною*. Система називається *квадратною*, якщо кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.

Рішенням системи називається така сукупність n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, яка при підстановці в систему на місце невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перетворює всі рівняння цієї системи в тотожність.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо у неї не існує жодного розв'язку.

Сумісна система може мати більше одного розв'язку. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок. Сумісна система називається *невизначеною*, якщо у неї існує по крайній мірі два різних розв'язки.

Лінійну систему зручно записувати в матричній формі $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

2.2 Класифікація методів розв'язання СЛАР

Методи розв'язання СЛАР поділяють на точні та наближені (ітераційні) (рис. 2.1).

Рисунок 2.1 – Класифікація методів розв'язання СЛАР

2.3 Точні методи розв'язання СЛАР

Метод Гауса (метод послідовного виключення елементів)

Ідея методу полягає у такому. Дана система лінійних рівнянь з n невідомими. Застосовуючи лінійні перетворення рівнянь, систему приводимо до еквівалентної трикутної системи такого вигляду

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & +a_{12}^{(1)}x_2 & +a_{13}^{(1)}x_3 & + & \ldots+a_{1n}^{(1)}x_n & =b_1^{(1)} \\
 & x_2 & +a_{23}^{(1)}x_3 & + & \ldots+a_{2n}^{(1)}x_n & =b_2^{(1)} \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & x_{n-1} & +a_{n-1,n}^{(1)}x_n & =b_{n-1}^{(1)} \\
 & & & & x_n & =b_n^{(1)}
\end{array}
$$

В цій системі спочатку з останнього рівняння визначається величина, а потім послідовною підстановкою визначаються величини решти невідомих.

Для виключення x_1 до кожного рівняння, крім першого, додаємо перше рівняння домножене на $(-a_{j1}/a_{11})$, де j – номер рядка. Аналогічно виключаємо другу невідому. Домножуємо друге рівняння на $(-a_{j2}/a_{22})$.

Метод головних елементів

Цей метод використовують тоді, коли коефіцієнтами в рівняннях є дробові числа або числа з дуже великим абсолютним значенням. Тоді обчислення ускладнюються. Щоб спростити обчислення і контролювати їх використовують видозмінений метод Гауса.

Цей метод полягає в такому. У системі рівнянь вибираємо спочатку рівняння із найбільшим коефіцієнтом і ділимо всі складові на цей коефіцієнт. Так само виключаємо цю невідому з усіх інших рівнянь. Потім шукаємо новий "головний елемент" і ділимо нове рівняння на цей коефіцієнт і т. д.

Метод Гауса-Жордана

Метод полягає у такому. Вибираємо розв'язувальний елемент. Всі елементи розв'язувального рядка ділимо на розв'язувальний елемент. Всі елементи розв'язувального стовпця обнуляємо. Решту елементів розраховуємо за формулою прямокутника.

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix},
$$

де $a'_{22}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$, $a'_{23}=a_{11}\cdot a_{23}-a_{21}\cdot a_{13}$, $a'_{32}=a_{11}\cdot a_{32}-a_{31}\cdot a_{12}$, інші коефіцієнти нової системи визначаються за аналогічними формулами.

Метод Крамера

Метод зручний для використання в матричному вигляді. Для виявлення коренів системи використовують поняття визначника матриці.

Знаходять визначник матриці коефіцієнтів A – det A. Перший стовпчик матриці A замінюють на стовпчик вільних членів і для такої нової матриці знаходять визначник det A_1, аналогічно замінюють інші стовпчики і отримують det A_2, ..., det A_n. Тоді корені системи визначаються $x_1 = \det A_1 / \det A$, $x_2 = \det A_2 / \det A$, ..., $x_n = \det A_n / \det A$.

В пакетах прикладних математичних програм та в середовищі Excel є стандартний оператор для визначення визначника матриці, наприклад, в середовищі Excel це МОПРЕД(границі матриці).

2.4 Наближені методи розв'язання СЛАР

Метод простих ітерацій

Запишемо систему рівнянь в матричному вигляді $A \cdot x = b$,

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Уявимо, що діагональні елементи $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, виразимо x_1 через перше рівняння системи, x_2 – через друге рівняння і т. д. В результаті отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \dots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \dots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \dots - \dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{cases}$$

Позначимо $b_i/a_{ii} = \beta_i$, $-a_{ij}/a_{ii} = \alpha_{ij}$, де $i = 1, 2 \dots n$, $j = 1, 2 \dots n$.

$$\text{Тоді система запишеться } \begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \dots + \alpha_{1n} x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21} x_1 + \alpha_{23} x_3 + \dots + \alpha_{2n} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \dots + \alpha_{n\,n-1} x_{n-1} \end{cases}$$

Така система рівнянь називається системою, *приведеною до нормального вигляду*, або *системою ітераційного вигляду*.

Введемо позначення $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Тоді система ітераційного вигляду в матричній формі запишеться

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо таку систему методом послідовних наближень (ітерацій).

За нульове наближення візьмемо стовпець вільних членів $\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Тоді перше наближення – $\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$,

друге – $\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \dots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$ і т. д.

Умова збіжності ітераційного процесу

Ітераційний процес – процес послідовних наближень. Швидкість процесу пошуку розв'язку і кількість ітерацій залежить від початкових наближень, але є системи, для яких ітераційний процес незбіжний взагалі. Процес ітерацій збігається до єдиного правильного розв'язку, якщо сума модулів коефіцієнтів в рядку або в стовбці матриці нормованого вигляду менше одиниці $\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1$ або $\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1$.

Метод Зейделя

Цей метод є модифікацією методу простих ітерацій. Тут при обчисленні кожного наступного невідомого використовують результати, щойно отримані для попередніх невідомих.

Так для матриці $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ в першій ітерації при визначенні x_1 використовується рівняння

$$x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \alpha_{13}x_3^{(0)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(0)},$$

а для x_2 можна використати щойно отримане уточнене значення x_1 $x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{23}x_3^{(0)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(0)}$, для змінної x_3 з врахуванням отриманих x_1 і x_2 маємо рівняння $x_3^{(1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(1)} + \alpha_{32}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{3n}x_n^{(0)}$ і т. д.

Контрольні питання

1. Дайте визначення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною, яка – неоднорідною?
3. Сумісна і несумісна, визначена і невизначена системи рівнянь.
4. Поясніть класифікацію методів розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
5. Поясніть метод Крамера для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
6. Поясніть метод Гауса та метод головних елементів для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
7. Поясніть метод Гауса-Жордана для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
8. Поясніть метод простих ітерацій для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
9. Поясніть метод Зейделя для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
10. Поясніть умови збіжності ітераційного процесу.

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1. В результаті складання теплових та матеріальних балансів для теплової схеми парової котельні утворилася система лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язати систему методом Гауса

$$\begin{cases} D_0 = D_д + D_{сп} + 15 \\ 1{,}05 \cdot D_0 = 0{,}7 \cdot D_{сп} + D_д + 16 \\ D_0 \cdot 436 = D_д \cdot 2800 + 0{,}7 \cdot D_{сп} \cdot 300 + 16 \cdot 84 \end{cases}$$

Розв'язання

Перетворимо систему рівнянь до звичайного вигляду. Позначимо D_0 – x_1, $D_{сп}$ – x_2, $D_д$ – x_3. Отримаємо

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 15 \\ 1{,}05x_1 - 0{,}7x_2 - x_3 = 16 \\ 436x_1 - 210x_2 - 2800x_3 = 1344 \end{cases}.$$

Для розв'язку за методом Гауса до другого рівняння додаємо перше рівняння помножене на (–1,05/1), а до третього – перше рівняння множене на (–436/1), отримаємо

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 15 \\ 1{,}05x_1 - 0{,}7x_2 - x_3 + \dfrac{-1{,}05}{1}x_1 - \dfrac{-1{,}05}{1}x_2 - \dfrac{-1{,}05}{1}x_3 = 16 + \dfrac{-1{,}05}{1}15 \\ 436x_1 - 210x_2 - 2800x_3 + \dfrac{-436}{1}x_1 - \dfrac{-436}{1}x_2 - \dfrac{-436}{1}x_3 = 1344 + \dfrac{-436}{1}15 \end{cases}$$

$$\text{або} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 15 \\ 0{,}35x_2 + 0{,}05x_3 = 0{,}25 \\ 226x_2 - 2364x_3 = -5196 \end{cases}$$

Далі друге рівняння множимо на (–226/0,35) і додаємо до третього, отримаємо

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 15 \\ 0{,}35x_2 + 0{,}05x_3 = 0{,}25 \\ 226x_2 - 2364x_3 + \dfrac{-226}{0{,}35}0{,}35x_2 + \dfrac{-226}{0{,}35}0{,}05x_2 = -5196 + \dfrac{-226}{0{,}35}0{,}25 \end{cases}$$

з третього рівняння $-2396{,}3x_3 = -5357{,}4$, звідки $x_3 = 2{,}236$, тоді після підстановки отриманого x_3 в друге рівняння маємо $x_2 = 0{,}395$, а після підстановки отриманих x_2 та x_3 в перше рівняння визначаємо, що $x_1 = 17{,}63$.

Приклад 2.2. Методом Гауса-Жордана розв'язати систему рівнянь з попереднього прикладу.

Розв'язання

Подаємо систему рівнянь у вигляді матриці $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1{,}05 & -0{,}7 & -1 \\ 436 & -210 & -2800 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 1344 \end{pmatrix}.$$

Лівий верхній коефіцієнт системи обираємо розв'язувальним елементом, тому перший рядок ділимо на 1, весь стовпчик під розв'язувальним елементом обнуляємо, і розраховуємо решту коефіцієнтів за правилом прямокутника

$$A = \begin{pmatrix} 1/1 & -1/1 & -1/1 \\ 0 & 1\cdot(-0{,}7)-1{,}05\cdot(-1) & 1\cdot(-1)-1{,}05\cdot(-1) \\ 0 & 1\cdot(-210)-436\cdot(-1) & 1\cdot(-2800)-436\cdot(-1) \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 15/1 \\ 1\cdot 16-1{,}05\cdot 15 \\ 1\cdot 1344-436\cdot 15 \end{pmatrix}$$

звідки $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0{,}35 & 0{,}05 \\ 0 & 226 & -2364 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 15 \\ 0{,}25 \\ -5196 \end{pmatrix}$, виконаємо аналогічну процедуру із другим та третім рядком

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0{,}35/0{,}35 & 0{,}05/0{,}35 \\ 0 & 0 & 0{,}35\cdot(-2364)-226\cdot 0{,}05 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 15 \\ 0{,}25/0{,}35 \\ 0{,}35\cdot(-5196)-226\cdot 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0{,}143 \\ 0 & 0 & -838{,}7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 15 \\ 0{,}714 \\ -1875{,}1 \end{pmatrix}.$

З третього рівняння $x_3 = 2{,}236$, після підстановки отриманих результатів в друге та перше рівняння отримаємо $x_2 = 0{,}395$, $x_1 = 17{,}63$.

Приклад 2.3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом простих ітерацій та методом Зейделя з сумарною похибкою до 3%.

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16 \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 24 \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 1 \end{cases}$$

Для розв'язку приведемо систему до нормованого вигляду, отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}33 - 0{,}333x_2 - 0{,}25x_3 \\ x_2 = 3 - 0{,}25x_1 + 0{,}375x_3 \\ x_3 = -0{,}111 + 0{,}222x_1 + 0{,}556x_2 \end{cases}$$

Перевіримо таку систему на збіжність. Бачимо, що сума модулів коефіцієнтів при x_1, x_2 і x_3 в рядках та стовпцях не перевищує 1, отже процес буде збіжним.

Розв'яжемо систему *методом простих ітерацій.*

Для нульового наближення приймемо $x_1^{(0)} = 1{,}33$, $x_2^{(0)} = 3$, $x_3^{(0)} = -0{,}111$.

Тоді перша ітерація $x_1^{(1)} = 1{,}33 - 0{,}333 \cdot 3 - 0{,}25 \cdot (-0{,}111) = 0{,}361$, $x_2^{(1)} = 3 - 0{,}25 \cdot 1{,}33 + 0{,}375 \cdot (-0{,}111) = 2{,}63$, $x_3^{(1)} = 1{,}85$.

Друга ітерація дає $x_1^{(2)} = 1{,}33 - 0{,}333 \cdot 2{,}63 - 0{,}25 \cdot 1{,}85 = -0{,}00463$, аналогічно $x_2^{(2)} = 3{,}604$, $x_3^{(2)} = 1{,}43$.

Сумарна зміна результатів в порівнянні з попередньою ітерацією значна, тому виконуємо наступну ітерацію.

Третя ітерація дає $x_1^{(3)} = -0{,}225$, $x_2^{(3)} = 3{,}54$, $x_3^{(2)} = 1{,}89$. Сумарна розбіжність з попередньою ітерацією значна.

На восьмій ітерації $x_1^{(8)} = -0{,}416$, $x_2^{(8)} = 3{,}82$, $x_3^{(8)} = 1{,}91$.

Розбіжність результатів в порівнянні з попередньою ітерацією становить 1,93%.

Ту ж систему рівнянь розв'яжемо *методом Зейделя.*

Перша ітерація $x_1^{(1)} = 0{,}361$ – аналогічна попередньому розв'язку, а $x_2^{(1)} = 3 - 0{,}25 \cdot 0{,}361 + 0{,}375 \cdot (-0{,}111) = 2{,}87$, $x_3^{(1)} = -0{,}111 + 0{,}222 \cdot 0{,}361 + 0{,}556 \cdot 2{,}87 = 1{,}56$.

Друга ітерація $x_1^{(2)} = -0{,}0133$, $x_2^{(2)} = 3{,}59$, $x_3^{(2)} = 1{,}88$.

Після п'ятої ітерації $x_1^{(5)} = -0{,}421$, $x_2^{(8)} = 3{,}83$, $x_3^{(8)} = 1{,}92$.

Розбіжність результатів в порівнянні з попередньою ітерацією становить 2,92%.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса, Гауса-Жордана, методом простих ітерацій, методом Зейделя.

Варіант 1	$1{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}35x_3 = 0$ $0{,}22x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}33x_3 = 1$ $0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 1{,}22x_3 = 0$	Варіант 2	$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ $x_1 - 4x_2 - x_3 = -2$ $3x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 9$
Варіант 3	$2x_1 + x_2 = 1$ $3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5$ $x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$	Варіант 4	$12x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 111$ $2x_1 + 6x_2 - x_3 = 16$ $2x_1 - 3x_2 + 14x_3 = 155$
Варіант 5	$8x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12$ $2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 25$ $2x_1 - 4x_2 + 27x_3 = -5$	Варіант 6	$2{,}15x_1 + 1{,}75x_2 - 0{,}15x_3 = 4$ $0{,}75x_1 - 2{,}5x_2 + 1{,}1x_3 = 0{,}9$ $3x_1 - 1{,}1x_2 + 14x_3 = 215$
Варіант 7	$5x_1 + 0{,}5x_2 = 2$ $3x_1 - 4{,}5x_2 + 1{,}1x_3 = -2{,}5$ $2x_1 + 0{,}25x_2 - 15x_3 = 10{,}5$	Варіант 8	$150x_1 + 25x_2 + 50x_3 = 800$ $125x_1 + 400x_2 - 250x_3 = 50$ $200x_1 - 20x_2 - 500x_3 = 100$

3 НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ

3.1 Постановка задачі

Нехай задане рівняння з однією змінною

$$f(x) = 0. \tag{3.1}$$

Знайти точні значення коренів даного рівняння можна лише для найпростіших функцій: алгебраїчних многочленів не вище четвертого степеня, деяких многочленів степеня $n \geq 5$ і деяких трансцендентних функцій.

Універсальних методів для знаходження точних значень коренів алгебраїчних рівнянь степеня $n \geq 5$ і трансцендентних рівнянь не існує. Крім того, розв'язуючи практичні задачі, часто отримують рівняння з коефіцієнтами, які є наближеними числами. Тоді постановка задачі знаходження точних коренів немає сенсу. Отже, важливого значення набувають наближені методи знаходження коренів рівняння з достатньою для практики точністю. Задача знаходження коренів рівняння (3.1) вважається розв'язаною, якщо корені обчислені із наперед заданою точністю.

Нехай x^* – точний корінь, а $\bar{x}$ – його наближене значення. Кажуть, що корінь $\bar{x}$ обчислено з наперед заданою точністю ε, якщо $|x^* - \bar{x}| \leq \varepsilon$.

Нехай, $x^* \in [a, b]$ і $b - a \leq \varepsilon$, тоді a і b – наближені значення кореня x^* відповідно з недостачею і надлишком з точністю ε. При цьому за наближене значення $\bar{x}$ з точністю ε можна взяти будь-яке число з відрізка $[a, b]$.

Знаходження наближених коренів рівняння (3.1) складається з двох етапів:

1) відокремлення коренів, тобто знаходження досить малих відрізків, на кожному з яких міститься тільки один корінь рівняння;

2) обчислення коренів з наперед заданою точністю.

Зазначимо, що корені рівняння (3.1) можуть бути дійсними і комплексними. Далі розглянемо обчислення лише дійсних коренів рівняння (3.1).

3.2 Класифікація нелінійних рівнянь

Класифікація нелінійних рівнянь наведена на рис. 3.1. Розглянемо означення та приклади різних типів нелінійних рівнянь.

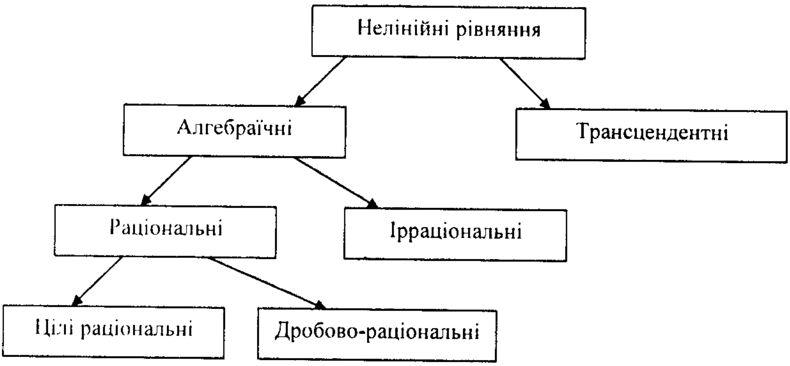


Рисунок 3.1 – Класифікація нелінійних рівнянь

Функція є *алгебраїчною*, якщо для отримання значення функції потрібно виконати арифметичні операції і операції піднесення до степеня з раціональним показником.

Алгебраїчна функція є *раціональною* відносно змінної x, якщо над нею не виконується ніяких інших дій, крім додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до цілого степеня.

Наприклад: $f(x)=5x^2+12x+23$ або $f(x)=5x^2+\dfrac{16x^2+5}{4x-12}$.

Якщо у раціональну функцію змінна x не входить як дільник або не входить у вираз, який є дільником – функція є *цілою раціональною*. Вона визначена на всій числовій осі.

Так, функції типу $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ (де n – натуральне число або нуль, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – будь-які дійсні числа, причому $a_0 \neq 0$) є цілими раціональними.

Якщо в раціональній функції хоча б один раз зустрічається ділення на змінну x або змінна x входить у вираз, який є дільником, то така функція є *дробово-раціональною.*

Так, наприклад, функція $y = \dfrac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}$, (де m – натуральне число або нуль; n – натуральне число; $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ – будь-яке дійсне число $(a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$ – є дробово-раціональною функцією, що визначена на всій числовій осі, за винятком тих точок, в яких знаменник перетворюється на нуль.

Функція є *ірраціональною*, якщо для отримання значення функції за даним значенням x необхідно виконати, крім чотирьох арифметичних дій (всіх або деяких), ще й обчислення кореня, при цьому x знаходиться під знаком радикала.

Другий великий клас функцій – *трансцендентні* функції. До них належать всі неалгебраїчні функції: показникова a^x, логарифмічна $\log_a x$, тригонометричні sin x, cos x, tg x, ctg x, зворотні тригонометричні arctg x, arcsin x, тощо.

3.3 Визначення кількості дійсних коренів алгебраїчного рівняння

Кількість дійсних додатних коренів алгебраїчного рівняння можна визначити приблизно за таким правилом: якщо рівняння повне, то кількість його додатних коренів дорівнює числу змін знака в послідовності коефіцієнтів або на парне число менша, а кількість від'ємних коренів – кількості сталості знака або на парне число менша.

3.4 Методи відокремлення коренів алгебраїчного рівняння

Для знаходження області існування коренів та визначення кількості коренів нелінійного рівняння використовують методи та теореми вищої математики.

Правило кільця

Нехай дано алгебраїчне рівняння

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – дійсні коефіцієнти і нехай $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, $B = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$.

Тоді корені рівняння розташовані в круговому кільці, $r < |x| < R$, де

$$r = \frac{1}{1 + B/|a_n|}; \; R = 1 + \frac{A}{|a_0|}.$$

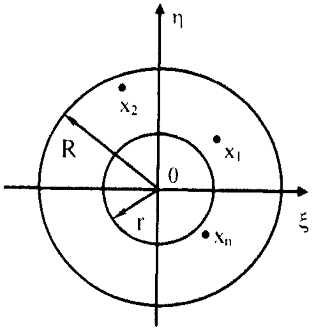


Рисунок 3.2 – Графічне зображення методу відокремлення коренів за “правилом кільця”

При цьому r – нижня, а R – верхня границя додатних коренів алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ і $-R, -r$ – відповідно нижня і верхня границя від’ємних коренів (рис. 3.2).

Метод Ньютона

Якщо при $x = c$ многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$ і його похідні $P_n'(x), P_n''(x), \ldots$ приймають додатні значення, то c є верхньою границею додатних коренів рівняння $P_n(x)=0$.

3.5 Методи розв’язання нелінійних рівнянь

Метод бісекції (половинного ділення)

В результаті відокремлення коренів нелінійного рівняння стає відомим відрізок [a, b], на якому знаходиться тільки один корінь рівняння f (x) = 0, причому на цьому відрізку функція неперервна і значення функції на кінцях відрізка мають різні знаки.

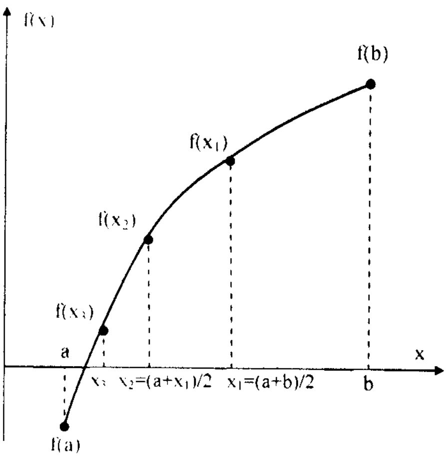


Рисунок 3.3 – Графічне зображення методу бісекції

Метод бісекції полягає у тому, що в кожному наступному наближенні за корінь приймають значення x в середині відрізка (рис. 3.3).

Після першої ітерації (розділення відрізка навпіл) визначають, на якій з частин відрізка змінюється знак функції. Саме цю частину вибирають для подальших уточнень.

Ітерації проводять до тих пір, поки відстань між кінцями відрізка не стає меншою за задану абсолютну похибку.

Метод бісекції є повільним, однак збіжність його гарантована.

Метод хорд

Для пошуку кореня на відрізку $x \in [a,b]$, за умов описаних вище, кожним наступним наближенням кореня є точка перетину лінії, що з'єднує значення функції на кінцях відрізка (перша ітерації – f(a) і f(b)), – хорди, з віссю x (рис. 3.4). Причому кожен раз значення функції на кінцях відрізка повинні мати різний знак. Ітерації проводять до тих пір, поки відстань між кінцями відрізка не стане меншою за задану похибку.

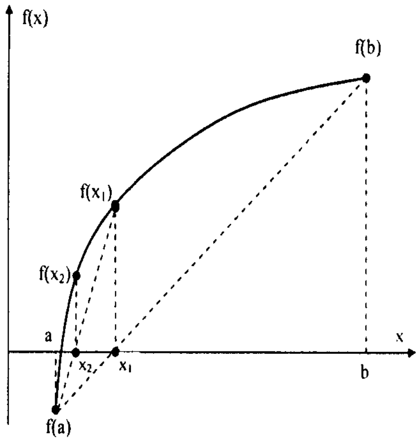


Рисунок 3.4 – Графічне зображення методу хорд

Значення x для кожної наступної ітерації визначають з рівняння хорди $x_i = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$, де a і b – кінці відрізка на кожній ітерації.

Метод дотичних (метод Ньютона)

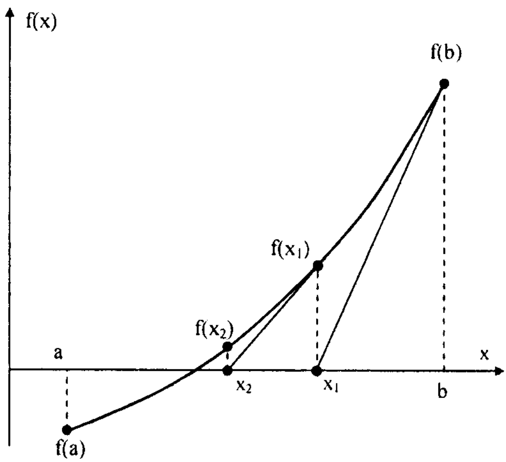


Рисунок 3.5 – Графічне зображення методу дотичних

Даний метод полягає у заміні функції f(x) = 0 її дотичною в кінці відрізка [a,b], отриманого за умов описаних вище.

В кожній наступній ітерації за корінь приймаємо значення абсциси перетину дотичної з віссю x (рис. 3.5). Розрахункова формула, для визначення точки перетину записується $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Ітераційний процес припиняється за умови зменшення відстані між результатами послідовних ітерацій до значення, меншого за задану похибку.

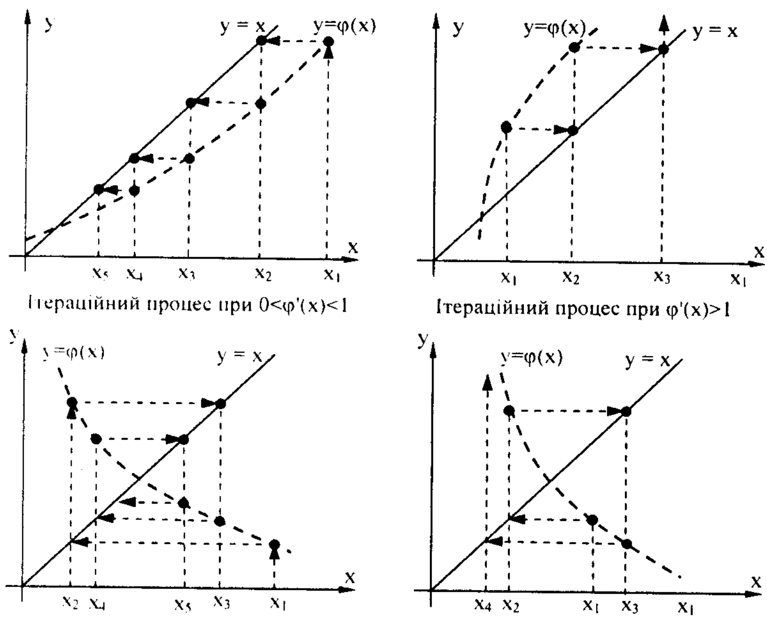
Особливістю такого методу є необхідність визначення похідної функції f(x). Метод дотичних дає результат з достатньою точністю після невеликої кількості ітерацій, але його недоліком є те, що для гарантованої збіжності необхідно вибирати правильне початкове наближення (достатньо близьке). Тому на практиці при розробці програм для ЕОМ поєднують метод дотичних із більш стійкими методами, наприклад, методом бісекції.

Метод простих ітерацій

Для використання такого методу необхідно функцію перетворити до ітераційного вигляду $x = \varphi(x)$.

Кожна наступна ітерація розраховується за формулою $x_i = \varphi(x_{i-1})$. Ітераційний процес припиняється за умови зменшення відстані між результатами послідовних ітерацій до значення, меншого за задану похибку.

Не кожне рівняння можна розв'язати методом простих ітерацій, тому що ітераційний процес може бути збіжним або розбіжним. Збіжність ітераційного процесу залежить від величини похідної ітераційної функції (рис. 3.6). Умовою збіжності ітерацій є $0 < |\varphi'(x)| < 1$.



Ітераційний процес при $0<\varphi'(x)<1$

Ітераційний процес при $\varphi'(x)>1$

Ітераційний процес при $-1<\varphi'(x)<0$

Ітераційний процес при $\varphi'(x)<-1$

Рисунок 3.6 – Графічні залежності збіжних та розбіжних ітераційних функцій

Ітераційні методи стійкі до помилки, допущеної на одній з ітерацій, але за умови використання комп'ютерного розрахунку похибка, якщо вона є, повторюватиметься на всіх ітераціях. При цьому погіршуватиметься якість розв'язання. Зараз широко використовуються комбіновані методи, в яких поєднано швидкі ітераційні методи із надійними методами бісекції і хорд.

3.6 Методи розв'язання систем нелінійних рівнянь

Систему нелінійних рівнянь (СНР) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ...... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

На відміну від систем лінійних рівнянь для СНР не існує точних методів розв'язання. Лише дуже обмежену кількість систем можна вирішити безпосередньо. Наприклад, систему з двох рівнянь можна розв'язати графоаналітичним методом або можна одну невідому виразити через іншу і потім розв'язати відносно однієї невідомої. Але абсолютну більшість систем вирішують ітераційними методами.

Метод простих ітерацій розв'язання СНР

Даний метод є розвитком методу простих ітерацій для нелінійного рівняння. Суть методу полягає у поданні системи рівнянь в ітераційному вигляді

$$\begin{cases} x_1^i = \varphi_1\left(x_1^{i-1}, x_2^{i-1}, ..., x_n^{i-1}\right) \\ x_2^i = \varphi_2\left(x_1^{i-1}, x_2^{i-1}, ..., x_n^{i-1}\right) \\ ...... \\ x_n^i = \varphi_n\left(x_1^{i-1}, x_2^{i-1}, ..., x_n^{i-1}\right) \end{cases} \qquad (3.3)$$

Далі така система нелінійних рівнянь розв'язується послідовними наближеннями. Збіжність системи рівнянь забезпечується за умови, що модулі похідних всіх ітераційних функцій в заданому діапазоні не перевищують 1. Недоліком даного методу є погана збіжність, ускладнення при виборі вигляду ітераційних функцій, велика кількість ітерацій, необхідність достатньо точного задавання початкових наближень.

Метод Ньютона розв'язання СНР

Для системи рівнянь (3.2) є певне наближення розв'язку

$$x_k = \left(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\right). \qquad (3.4)$$

Тоді точне значення розв'язку можна записати

$$x = x_k + \Delta x^k. \qquad (3.5)$$

Рівняння можна записати, розклавши його в ряд Тейлора і заливши тільки члени першого порядку

$$f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \ldots \Delta x_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n}. \qquad (3.6)$$

Далі, використовуючи обернену матрицю Якобі – матрицю кінцевих похідних W, отримаємо кінцевий ітераційний вираз

$$x^{i+1} = x^i + W^{-1}(x^i)\cdot F(x^i). \qquad (3.7)$$

Метод Ньютона має набагато кращу збіжність і меншу кількість ітерацій. Недоліком даного методу є необхідність визначення похідних функцій, що не завжди можна зробити точними методами.

Метод збурення параметрів

Це ітераційний метод, суть якого полягає у такому. Систему нелінійних рівнянь замінюють на таку систему рівнянь, розв'язок якої відомий. Потім, поступово змінюючи вигляд функцій за допомогою кінцевого числа послідовних наближень параметрів, отримуємо шукану систему рівнянь.

Перевагою такого методу є те, що не вимагається достатньо точних перших наближень. Недоліком такого методу є необхідність проведення великої кількості ітераційних розрахунків і, відповідно, використання великої кількості комп'ютерного часу.

3.7 Розв'язання систем нелінійних рівнянь з використанням пакетів прикладних програм

Одним з найзручніших математичних пакетів прикладних програм для розв'язання систем нелінійних рівнянь є Mathcad.

В середовищі Mathcad запрограмоване розв'язання СНР. Для цього використовується мітка **Given**, яка вказує на початок запису системи рівнянь і оператор **Find** (x_1, x_2, ...), який записується нижче системи рівнянь і повертає корені системи рівнянь. Нелінійні рівняння записуються із використанням символьного знака рівності (Ctrl+).

Для коректного розв'язання системи рівнянь в Mathcad спочатку необхідно задати початкові наближення для всіх величин, що використовуються в системі рівнянь.

Далі наведений приклад розв'язання системи з 4 нелінійних рівнянь для гідравлічного розрахунку потоку води в трубопроводі (рис. 3.7).

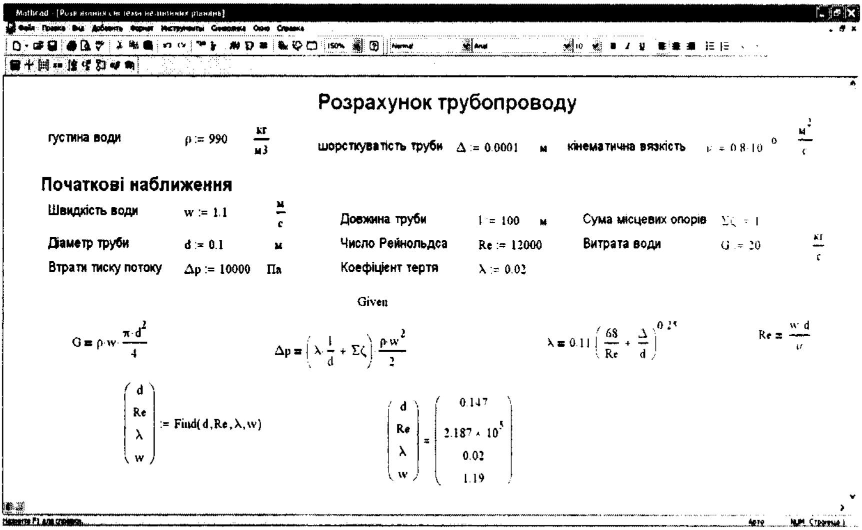


Рисунок 3.7 – Вікно Mathcad із розв'язанням СНР

Контрольні питання

1. Поясніть класифікацію нелінійних рівнянь.
2. Поясніть методи визначення кількості коренів нелінійних рівнянь.
3. Поясніть методи відокремлення коренів нелінійних рівнянь.
4. Поясніть метод бісекції розв'язання нелінійних рівнянь.
5. Поясніть метод хорд розв'язання нелінійних рівнянь.
6. Поясніть метод дотичних (метод Ньютона) розв'язання нелінійних рівнянь.
7. Поясніть метод простих ітерацій розв'язання нелінійних рівнянь.
8. Поясніть умови збіжності ітераційного процесу розв'язання нелінійних рівнянь.
9. Дайте характеристику системи нелінійних рівнянь.
10. Поясніть метод простих ітерацій розв'язання систем нелінійних рівнянь.
11. Поясніть метод Ньютона розв'язання систем нелінійних рівнянь.
12. Поясніть метод збурення параметрів розв'язання систем нелінійних рівнянь.
13. Поясніть особливості розв'язання систем нелінійних рівнянь з використанням пакета прикладних програм Mathcad.

Приклади розв'язання задач

Приклад 3.1. Визначити кількість додатних та від'ємних коренів рівняння $2x^4-6x^3+3x^2+22x-16=0$.

Розв'язання

Згідно з основною теоремою алгебри це рівняння має чотири корені. Рівняння є повним, послідовність знаків коефіцієнтів така: +, – , +, +, – . Знак змінюється два рази. Отже, додатних коренів або 2, або жодного. Кількість сталостей знака дорівнює 1. Отже, дане рівняння має один від'ємний корінь.

Приклад 3.2. Відокремити корені нелінійного рівняння $2x^4-6x^3+3x^2+22x-16=0$ за правилом кільця.

Розв'язання

Для такого рівняння $A=\max\{|-6|,|3|,|22|,|-16|\}=22$,

$B=\max\{|2|,|-6|,|3|,|22|\}=22$. Тоді $r=\dfrac{1}{1+22/|-16|}=0{,}431$, $R=1+\dfrac{22}{2}=12$.

Тобто для цього рівняння корені, якщо вони існують, знаходяться в діапазоні x: дійсні – $x\in[-12;\ 12]$; додатні $x\in[0{,}431;\ 12]$; від'ємні $x\in[-12;-0{,}431]$.

Приклад 3.3. Методом Ньютона визначити верхню границю додатних коренів рівняння $P(x)=2x^4-6x^3+3x^2+22x-16=0$.

Розв'язання

Знаходимо $P'(x)=8x^3-18x^2+6x+22$, $P''(x)=24x^2-36x+6$, $P'''(x)=48x-36$, $P''''(x)=48$.

Перевірці підлягають значення x > 0. При x = 1 маємо $P(1)>0$, $P'(1)>0$, $P''(1)<0$. Отже, проводити далі перевірку для x = 1 не потрібно. Перевіримо значення x = 2. $P(2)>0$, $P'(2)>0$, $P''(2)>0, P'''(2)>0$, $P''''(2)>0$. Таким чином, верхньою границею додатних коренів є число 2, тобто R = 2. За нижню границю можна взяти число, обернене до R, тобто r = 1/2.

Приклад 3.4. В результаті запису рівняння Дарсі для потоку рідини в каналі отримане рівняння залежності втрат тиску від швидкості w потоку $\Delta P=50000\,w^2+10000\,w^{1,75}$. Визначити корінь такого нелінійного рівняння методом бісекції з похибкою не більше 1%, якщо $\Delta P=10000$ Па.

Розв'язання

Спростимо рівняння, запишемо швидкість через x

$$10000=50000\,x^2+10000\,x^{1,75} \text{ або } 5x^2+x^{1,75}-1=0.$$

Використовуючи "правило кільця" отримаємо, що додатній корінь цього рівняння знаходиться в діапазоні $x \in [0,166;\ 1,2]$.

Визначимо функцію на кінцях діапазону $f(0{,}166) = -0{,}819$, $f(1{,}2) = 7{,}576$. Бачимо, що функція змінює знак.

Нульова ітерація x_0 = (0,166+1,2)/2=0,683, $f(0{,}683) = 1{,}845$. Функція змінює знак на частині діапазону $x_1 \in [0,166;\ 0,683]$, тому шукаємо корінь в цьому діапазоні. Наступні ітерації проводимо аналогічно: 1) x_1 = 0,425, $x_2 \in [0,166;\ 0,425]$; 2) x_2 = 0,295, $x_2 \in [0,295;\ 0,425]$ і т. д.

На сьомій і восьмій ітерації x_7 = 0,400, x_8 = 0,397 та похибка $(0{,}400 - 0{,}397)/0{,}397 \cdot 100\% = 0{,}76\%$. Розрахунок завершено.

Приклад 3.5. Визначити корінь нелінійного рівняння з попереднього прикладу методом хорд на відрізка [0,166; 1,2] з похибкою не більше 1%.

Розв'язання

Значення функції на кінцях відрізку f(0,166) = – 0,819, f(1,2) = 7,576.

Перша ітерація $x_1 = 0{,}166 - \dfrac{-0{,}819}{7{,}576 - (-0{,}819)}(1{,}2 - 0{,}166) = 0{,}267$,

$f(0{,}267) = -0{,}545$, $x_2 = 0{,}267 - \dfrac{-0{,}545}{7{,}576 - (-0{,}545)}(1{,}2 - 0{,}267) = 0{,}329$ і т. д.

Після сьомої ітерації x_7 = 0,398, похибка при цьому становить 0,55%.

Приклад 3.6. Визначити корінь нелінійного рівняння з попередніх прикладів методом дотичних на відрізку [0,166; 1,2] з похибкою до 1%.

Розв'язання

Похідна функції $f'(x) = 10x + 1{,}75x^{0,75}$, значення функції f(0,166) = = – 0,819, f(1,2) = 7,576. Починаємо ітераційний процес з x_0 = 1,2, $f'(1{,}2) = 14{,}01$. Перша ітерація $x_1 = 1{,}2 - \dfrac{7{,}576}{14{,}01} = 0{,}659$, x_2 = 0,449, x_3 = = 0,402, x_4 = 0,399. Після четвертої ітерації похибка не перевищує 0,65%.

Приклад 3.7. Визначити корінь нелінійного рівняння з попередніх прикладів методом простих ітерацій на відрізку [0,166; 1,2].

Розв'язання

Перетворимо функцію $5x^2 + x^{1,75} - 1 = 0$ до ітераційного вигляду. Маємо два варіанти перетворення: $\varphi(x) = (1 - 5x^2)^{1/1,75}$ або $\varphi(x) = \left((0{,}2 - 0{,}2x^{1,75})\right)^{0,5}$.

Для виявлення збіжності ітерацій знайдемо похідну обох функцій. Отримаємо відповідно $\varphi'(x) = -5{,}714 \cdot (1 - 5x^2)^{-0,429}$ та $\varphi'(x) = {-0{,}391x^{0,75}} \Big/ \sqrt{1 - x^{1,75}}$.

Похідна ітераційної функції $\varphi(x) = (1 - 5x^2)^{1/1,75}$ при x = 0,166 приймає значення (– 1,01), а при x = 1,2 не може бути розрахована через від'ємний підкореневий вираз. Очевидно, що такий ітераційний процес буде розбіжним.

Похідна ітераційної функції $\varphi(x) = \left((0{,}2 - 0{,}2x^{1,75})\right)^{0,5}$ в діапазоні $x = 0{,}166 \ldots 0{,}85$ має значення $-1 < \varphi'(x) < 0$, а далі різко зростає. Тому в цьому діапазоні значень x ітераційний процес буде збіжним.

Приймаємо $x_0 = 0{,}166$, тоді $x_1 = \left((0{,}2 - 0{,}2 \cdot 0{,}166^{1,75})\right)^{0,5} = 0{,}437$, $x_2 = \left((0{,}2 - 0{,}2 \cdot 0{,}437^{1,75})\right)^{0,5} = 0{,}391$ і т. д.

На четвертій ітерації $x_4 = 0{,}399$ і похибка не перевищує 0,58%.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.1. Визначити кількість та відокремити корені нелінійного рівняння за "правилом кільця"

Варіант 1 $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x - 20 = 0$	Варіант 2 $25x^4 + 12x^3 - 18x^2 + 2x - 3 = 0$
Варіант 3 $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 8 = 0$	Варіант 4 $-3x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$
Варіант 5 $4x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 8x - 5 = 0$	Варіант 6 $x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$
Варіант 7 $-5x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 12 = 0$	Варіант 8 $3x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 2x - 12 = 0$

Завдання 3.2. Визначити корінь нелінійного рівняння методом бісекції, хорд, дотичних та методом простих ітерацій з похибкою до 1%.

Варіант 1 $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x - 20 = 0$	Варіант 2 $25x^4 + 12x^3 - 18x^2 + 2x - 3 = 0$
Варіант 3 $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 8 = 0$	Варіант 4 $-3x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$
Варіант 5 $4x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 8x - 5 = 0$	Варіант 6 $x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$
Варіант 7 $-5x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 12 = 0$	Варіант 8 $3x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 2x - 12 = 0$

Завдання 3.3. Скласти та розв'язати систему нелінійних рівнянь з використанням Mathcad для такого завдання. Дві посудини з'єднані трубопроводом довжиною 50 м. Вода з густиною 990 кг/м^3 перетікає з однієї посудини до іншої з сталими рівнями самопливом. Необхідна витрата води 12 кг/с. Шорсткість труб 0,3 мм. Сума місцевих опорів лінії становить 10. Діаметр труби 100 мм. Середня в'язкість води $0{,}8 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. Визначити необхідну різницю висот між рівнями рідини в посудинах, швидкість води в трубі, коефіцієнт опору тертя, втрати тиску в контурі.

4 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

4.1 Постановка задачі

Рівняння, які містять похідну однієї з змінних, називають диференціальними. Такі рівняння часто використовують для опису будь-якої фізичної величини, яка змінюється по відношенню до іншої змінної.

Диференціальне рівняння (ДР) можна записати в загальному вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{4.1}$$

Розглянемо ДР вигляду $\frac{dy}{dx} = y$. Така функція має розв'язок вигляду $y = a \cdot e^x$. Коефіцієнт a – довільна константа. Таке рівняння є сукупністю кривих. Тому для визначення розв'язку рівняння необхідно задати початкові дані, наприклад, що крива проходить через точку x = 0, y = 1. Таку умову можна записати $y(0) = 1$. Таким чином, отримаємо, що a = 1 і можемо виділити розв'язок $y = e^x$.

Існує багато методів розв'язання ДР через спеціальні або елементарні функції, але в реальних теплотехнічних задачах використовуються диференціальні рівняння набагато складнішої побудови. Використання аналітичних методів або ускладнене, або потребує забагато часу для розв'язання.

Наближені методи розв'язання ДР поділяють на два класи методів.

1. Одноступеневі методи. Це методи в яких використовується інформація про криву, але не виконуються ітерації. Сюди належать метод розкладання в ряд Тейлора, але цей метод незручний для практичних розрахунків, методи Ейлера і Рунге-Кутта, які потребують проведення повторних розрахунків функції для кожного кроку.

2. Багатоступеневі методи. Більшість таких методів називаються методами прогнозу та корекції. Ці методи не потребують проведення повторних розрахунків, але необхідно використовувати ітераційний апарат. Перевагою є можливість оцінювання похибки на кожному кроці.

Найкращим варіантом є сполучення цих різновидів методів розв'язання ДР.

4.2 Метод Ейлера для розв'язання диференціальних рівнянь

Даний метод полягає у такому. Диференціальне рівняння задає нахил кривої в будь-якій точці як функцію від x та від y. На початковому етапі відома тільки одна точка (x_0, y_0). Починаючи з цієї точки, знаючи нахил,

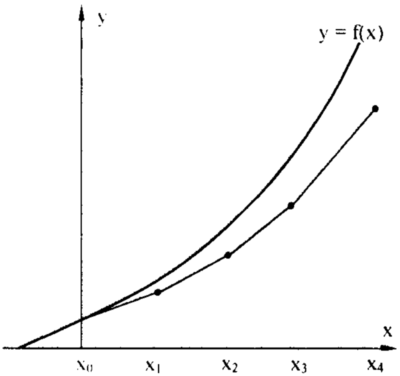


Рисунок 4.1 – Метод Ейлера розв`язання ДР

просуваємося вздовж дотичної на малу відстань $x_1 = x_0 + h$, де h – крок. Таким чином, отримуємо послідовність відрізків, які є наближенням функції.

Якщо криву наближати відрізками, це відразу призводить до ускладнень, таких як це показано на рис. 4.1. Таке відхилення результатів називається стійкістю метода.

Розрахунок за методом Ейлера ведеться, використовуючи формулу

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \tag{4.2}$$

Такий метод дає добре наближення тільки при малому h і тільки на перших кількох кроках. Така низька точність пояснюється тим, що метод Ейлера має перший порядок. Перевагою такого методу є наочність та простота реалізації.

4.3 Метод Рунге-Кутта для розв'язання диференціальних рівнянь

Цей метод побудований на поданні задачі у дискретному вигляді

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \varphi(x_i, y_i, h). \tag{4.3}$$

Функція $\varphi(x_i, y_i, h)$ може бути розкладена в ряд Тейлора

$$y_{i+1} = y_i + y_i' \cdot h + \frac{y_i''}{2!} \cdot h^2 + \ldots + \frac{y_i^{(p)}}{p!} \cdot h^p, \tag{4.4}$$

але не містить похідної. Тобто використовується метод підгонки рядів Тейлора. Як можна побачити метод Рунге-Кутта першого порядку – це метод Ейлера. Найбільш популярним є метод Рунге-Кутта четвертого порядку

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right), \tag{4.5}$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 – значення функцій

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \cdot h; \\
k_2 &= f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \cdot h; \\
k_3 &= f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \cdot h; \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3) \cdot h.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Таким чином, при використанні цього методу на кожному кроці необхідно розраховувати функцію по 4 рази. Недоліком цього методу є складність визначення похибки розрахунку. Для грубого визначення похибки використовують правило Коллатца

$$
\varepsilon \le \frac{|k_2 - k_3|}{|k_1 - k_2|}. \tag{4.7}
$$

Якщо відношення більше кількох сотих, то крок потрібно зменшити.

4.4 Метод прогнозу та корекції розв'язання диференціальних рівнянь

Метод Рунге-Кутта використовує інформацію тільки про попередню точку і для таких початкових даних виконується кілька повторних розрахунків. Це є нераціональним, оскільки якщо ми пройшли вже кілька точок, то маємо додаткову інформацію, для використання якої взагалі непотрібно ніяких функцій.

Особливістю методів прогнозу та корекції є те, що для їх використання необхідно мати попередню точку. Таким чином, розпочати розв'язок за допомогою таких методів неможливо. Для того, аби розпочати розрахунок або змінити крок необхідно використовувати методи типу Рунге-Кутта.

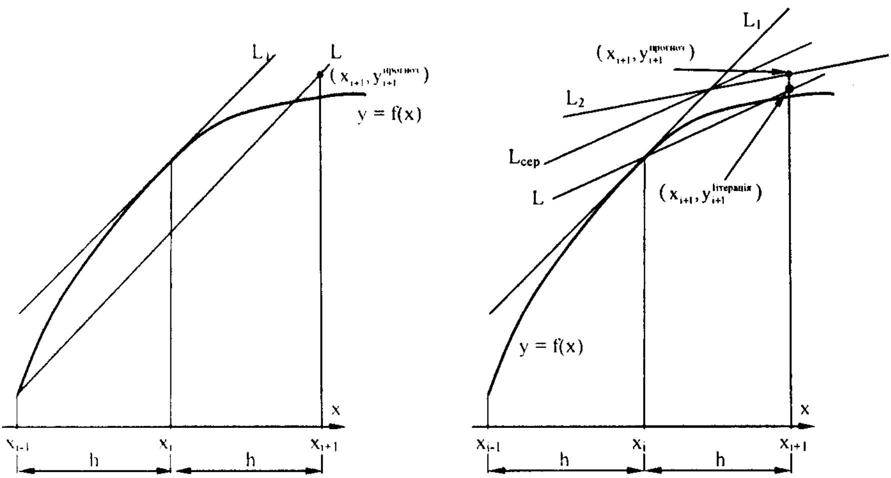
Метод полягає у такому. Спочатку прогнозують значення функції на наступному кроці, а потім коректують його. Для прогнозу можна використати формулу другого порядку

$$
y_{i+1}^{\text{прогноз}} = y_{i-1} + 2 \cdot h \cdot f(x_i, y_i). \tag{4.8}
$$

Використання координат попередньої точки дозволяє зменшити похибку (пряма L ближче, ніж L_1 до кривої при x_{i+1}) (рис. 4.2, а).

Після знаходження прогнозованої нової точки за (4.8) необхідно провести корекцію. Це здійснюють завдяки усередненню тангенсів кутів нахилу функції в точках (x_i, y_i) та (x_{i+1}, y_{i+1}) (рис. 4.2, б). Розрахувати це можна за формулою

$$y_{i+1}^{\text{Ітерація}} = y_i + \frac{h}{2}\cdot\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{\text{прогноз}})\right]. \qquad (4.9)$$



а б

Рисунок 4.2 – Метод прогнозу та корекції

Можна проводити ще коректування, кожен раз підставляючи уточнене прогнозне значення. Оптимальним вважається використання двох ітерацій. Таким чином, при розробці програми потрібно ввести умову, що якщо після двох ітерацій похибка більше допустимої необхідно зменшити крок.

Контрольні питання

1. Дайте характеристику диференціальних рівнянь.
2. Поясніть відмінність одно- та багатоступеневих методів розв'язання диференціальних рівнянь.
3. Поясніть метод Ейлера для розв'язання диференціальних рівнянь.
4. Поясніть метод Рунге-Кутта для розв'язання диференціальних рівнянь.
5. Поясніть метод прогнозу та корекції для розв'язання диференціальних рівнянь.

Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. Визначити зміну температури термічно тонкої циліндричної сталевої заготовки діаметром D = 2R = 0,025 м, що нагрівається конвекцією у печі, якщо густина металу ρ = 8000 кг/м^3, питома теплоємність металу C = 600 Дж/(кг·К), коефіцієнт тепловіддачі конвекцією α = = 30 Вт/(м^2·К), коефіцієнт теплопровідності λ = 30 Вт/(м·К), початкова температура T_0 = 300 К, а температура пічних газів змінюється за законом

$T_g = 1000 + b \cdot \tau$, де $\tau = 0 - 300$ – час нагрівання, с; $b = 1$ К/с. Завдання розв'язати методом Ейлера та Рунге-Кутта 4-го порядку.

Розв'язання

Процес нагрівання конвекцією термічно тонкого тіла описується рівнянням

$$C \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT}{d\tau} = \alpha \cdot \left(T_g - T\right) \cdot F,$$

де V та F – об'єм та площа поверхні нагріву тіла, T – температура тіла.

Виконуючи нескладні арифметичні дії, наведене вище рівняння можна перетворити на таке

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \left(T_g - T\right)}{C \cdot \rho \cdot R}.$$

Розв'яжемо дане рівняння методом Ейлера. Оберемо крок h = 50 с. Час нагрівання позначимо – x, а температуру металу – y. Тоді за залежністю (4.2) для часу $\tau = 50$ с значення температури

$$y_{50} = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 300 + 50 \cdot \frac{2 \cdot 30 \cdot (1000 + 1 \cdot 0 - 300)}{600 \cdot 8000 \cdot 0{,}0125} = 335\,°C.$$

Аналогічно виконаємо розрахунки для інших моментів часу. Отримаємо $y_{100} = 370{,}75$ °C, $y_{150} = 407{,}212$ °C, $y_{200} = 444{,}352$ °C, $y_{250} = 482{,}134$ °C, $y_{300} = 520{,}528$ °C.

Виконаємо розрахунки зміни температури металевої заготовки методом Рунге-Кутта 4-го порядку.

Скористаємось залежностями (4.6) і визначимо функції k_1, k_2, k_3 та k_4 для моменту часу $\tau = 50$ с

$$k_1 = f(x_i, y_i) \cdot h = \frac{2 \cdot 30 \cdot (1000 + 1 \cdot 0 - 300)}{600 \cdot 8000 \cdot 0.0125} \cdot 50 = 35;$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \cdot h = \frac{2 \cdot 30 \cdot \left(1000 + 1 \cdot \left(0 + \frac{50}{2}\right) - \left(300 + \frac{35}{2}\right)\right)}{600 \cdot 8000 \cdot 0{,}0125} \cdot 50 = 35{,}375;$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \cdot h = \frac{2 \cdot 30 \cdot \left(1000 + 1 \cdot \left(0 + \frac{50}{2}\right) - \left(300 + \frac{35{,}375}{2}\right)\right)}{600 \cdot 8000 \cdot 0{,}0125} \cdot 50 = 35{,}366;$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3) \cdot h = \frac{2 \cdot 30 \cdot (1000 + 1 \cdot (0 + 50) - (300 + 35{,}366))}{600 \cdot 8000 \cdot 0{,}0125} \cdot 50 = 35{,}732.$$

Згідно із (4.5) температура заготовки у момент часу $\tau = 0 + h = 50$ с

$$y_{i+1} = T_{\tau=50} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4) = 300 +$$
$$+ \frac{1}{6}\cdot(35 + 2\cdot 35{,}375 + 2\cdot 35{,}366 + 35{,}372) = 335{,}369.$$

Результати розрахунків для інших моментів часу зводимо у таблицю 4.1.

Таблиця 4.1 – Результати розрахунків за методом Рунге-Кутта

x_i	0	50	100	150	200	250	300
k_1		35	35,732	36,53	37,391	38,312	39,29
k_2		35,375	33,588	31,866	30,206	28,604	27,058
k_3		35,366	33,642	31,983	30,386	28,847	27,364
k_4		35,732	34,05	32,43	30,871	29,37	27,922
y_i	300	335,309	369,409	402,185	433,76	464,19	493,533

Завдання для самостійної роботи

Завдання 4.1. Розв'язати завдання за прикладом 4.1 методом Ейлера та методом Рунге-Кутта 4-го порядку в діапазоні, якщо:

Варіант 1	$T_g = 500 + 3\cdot\tau$	Варіант 2	$T_g = 300 + 4\cdot\tau$
Варіант 3	$T_g = 700 + 2\cdot\tau$	Варіант 4	$T_g = 500 + 3\cdot\tau^{0,5}$
Варіант 5	$T_g = 1000 - 1\cdot\tau$	Варіант 6	$T_g = 800 + 200 / \tau$
Варіант 7	$T_g = 1200 - 3\cdot\tau$	Варіант 8	$T_g = 200 + 3\cdot\tau^{0,8}$

5 НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, АПРОКСИМАЦІЯ, ІНТЕРПОЛЯЦІЯ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

5.1 Постановка задачі

В цьому розділі розглядаються найважливіші і найбільш поширені методи наближення – *апроксимації* – функції однієї змінної. Обчислення значення функції $y = f(x)$ – одна з тих задач, з якими постійно на практиці доводиться стикатися. Природно, що при вирішенні на ЕОМ серйозних задач бажано мати швидкі і надійні алгоритми обчислення значень функцій, що використовуються.

Найбільш поширені випадки.

1. Функція f(x) задана таблицею своїх значень, а обчислення виконуються в точках x, що не збігаються з табличними.

2. Безпосереднє обчислення значення $y = f(x)$ пов'язане з проведенням складних розрахунків і призводить до значних витрат машинного часу, які можуть виявитися неприйнятними, якщо функція f(x) обчислюється багато разів.

3. При заданому значенні x значення f(x) може бути знайдене з експерименту.

Проблеми, що виникають, нерідко вдається вирішити завдяки використанню *інтерполяції* – заміни f(x) іншою приблизною функцією g(x), обчислювані значення якої і приймають за наближені значення функції f(x). Така заміна виправдана лише тоді, коли значення g(x) обчислюються швидко і надійно, а погрішність наближення $f(x) - g(x)$ достатньо мала.

Однією з найскладніших задач є правильний вибір класу наближувальної функції g(x).

Якщо необхідно отримати наближення функції f(x) для значення x, яке не належить досліджуваному відрізку, (виконати прогноз поводження функції), то такий метод наближення називають *екстраполяцією*.

5.2 Поліноміальна інтерполяція

Почнемо з розгляду задачі інтерполяції в найпростішому і повністю дослідженому випадку інтерполювання многочленами алгебри. З використанням інтерполяційного многочлена можна записати систему

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + \ldots + a_n \cdot x_0^n = y_0 \\
&a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \ldots + a_n \cdot x_1^n = y_1 \\
&\ldots\ldots \\
&a_0 + a_1 \cdot x_n + a_2 \cdot x_n^2 + \ldots + a_n \cdot x_n^n = y_n
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Ця система однозначно вирішувана, і має єдиний розв'язок.

На практиці система (5.1) ніколи не використовується для обчислення коефіцієнтів інтерполяційного многочлена. Річ у тому, що часто вона є погано обумовленою. Крім того, існують різні зручні явні форми запису інтерполяційного многочлена, які і застосовуються при інтерполяції.

Многочлен Лагранжа. Приведемо одну з форм запису інтерполяційного многочлена – многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot l_{nj}(x), \tag{5.2}$$

де $l_m(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})...(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)...(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})...(x_j - x_n)}$.

В інженерній практиці найчастіше використовують інтерполяцію многочленами першої, другої та третьої степені (лінійна, квадратична, кубічна).

Тоді для інтерполяції першої та другої степені

$$L_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}, \tag{5.3}$$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \tag{5.4}$$

Поліноміальна інтерполяція однією апроксимаційною функцією має недолік – велика кількість розрахунків, чутливість до вхідних даних та ін. Тому на практиці використовують кусково-поліноміальну інтерполяцію, інтерполяцію із рухомим поліномом, інтерполяцію сплайнами тощо.

5.3 Метод найменших квадратів

Задача найменших квадратів виникає в найрізноманітніших областях науки і техніки. Наприклад, до неї приходять при статистичній обробці експериментальних даних за допомогою регресійного аналізу. В інженерній діяльності задача найменших квадратів використовується в таких областях, як оцінювання параметрів і фільтрація.

Лінійна задача найменших квадратів.

Якщо значення y, отримані з експерименту, то помилки носять випадковий характер і часто рівень погрішності ("шуму" таблиці) буває значним (рис. 5.1, а). Припустимо, що для апроксимації функції використовується лінійна модель.

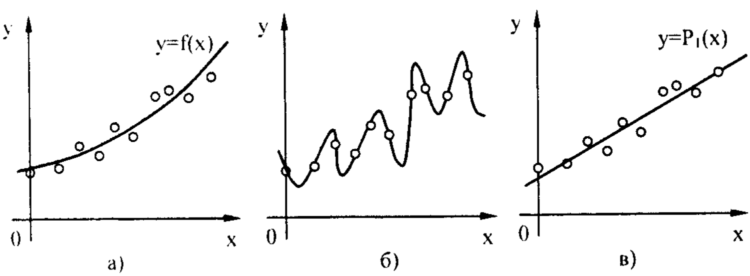


Рисунок 5.1 – До методу найменших квадратів

У разі, коли рівень невизначеності початкових даних високий, неприродно вимагати від моделі виконання умов збігу значень апроксимаційної функції із заданими значеннями y, тобто використовувати інтерполяцію. Адже при інтерполяції (рис. 5.1, б) відбувається повторення помилок спостережень, тоді як при обробці експериментальних даних бажане, навпаки, їх згладжування.

З різних критеріїв, що дозволяють вибрати параметри апроксимаційної функції Φ(x), найчастіше використовується критерій найменших квадратів. Згідно з цим критерієм параметри вибираються так, щоб мінімізувати середньоквадратичне відхилення

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(\Phi(x)-y\right)^2}\,. \qquad (5.5)$$

Дуже часто для наближення за методом найменших квадратів використовуються многочлени алгебри. У разі, коли наближення здійснюється многочленом першої ступені $\Phi(x)=a_0+a_1\cdot x$, система має вигляд

$$\begin{aligned}
&(n+1)\cdot a_0+\left[\sum_{i=0}^{n}x_i\right]a_1=\sum_{i=0}^{n}y_i\\
&\left[\sum_{i=0}^{n}x_i\right]a_0+\left[\sum_{i=0}^{n}x_i^2\right]a_1=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i
\end{aligned} \qquad (5.6)$$

Для многочлена другої степені $\Phi(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2$ система має вигляд

$$\begin{aligned}
&(n+1)\cdot a_0+\left[\sum_{i=0}^{n}x_i\right]a_1+\left[\sum_{i=0}^{n}x_i^2\right]a_2=\sum_{i=0}^{n}y_i\\
&\left[\sum_{i=0}^{n}x_i\right]a_0+\left[\sum_{i=0}^{n}x_i^2\right]a_1+\left[\sum_{i=0}^{n}x_i^3\right]a_2=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i\\
&\left[\sum_{i=0}^{n}x_i^2\right]a_0+\left[\sum_{i=0}^{n}x_i^3\right]a_1+\left[\sum_{i=0}^{n}x_i^4\right]a_2=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i^2
\end{aligned} \qquad (5.7)$$

Контрольні питання

1. Наведіть приклади необхідності використання методів наближення функцій.
2. Поясніть відмінність інтерполяції та екстраполяції функцій.
3. Поясніть метод поліноміальної інтерполяції.
4. Поясніть використання многочлена Лагранжа першої та другої степені для інтерполяції функцій. Поясніть недоліки такого методу.
5. Поясніть метод найменших квадратів апроксимації функцій.

Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1. Виконати лінійну та квадратичну інтерполяцію значення густини води при температурі 90 °C і порівняти із довідковим, використовуючи таблицю значень функції y = f(x).

x	80	100	120
y	971,63	958,13	942,86

Розв'язання

Для лінійної інтерполяції беремо $x_0 = 80$, $x_1 = 100$. За (5.3) визначимо

$$L_1(90) = 971{,}63\frac{(90-100)}{(80-100)} + 958{,}13\frac{(90-80)}{(100-80)} = 964{,}88.$$

Для квадратичної інтерполяції беремо три точки $x_0 = 80$, $x_1 = 100$, $x_2 = 120$

$$L_2(90) = 971{,}63\frac{(90-100)(90-120)}{(80-100)(80-120)} + 958{,}13\frac{(90-80)(90-120)}{(100-80)(100-120)} +$$

$$+ 942{,}86\frac{(90-80)(90-100)}{(120-80)(120-100)} = 965{,}10.$$

Довідкове значення густини води при температурі 90 °C становить 965,16 кг/м^3. Таким чином, похибки інтерполяції становлять

$$\varepsilon_1 = \frac{965{,}16-964{,}88}{965{,}16}\cdot 100\% = 0{,}029\%, \quad \varepsilon_2 = \frac{965{,}16-965{,}10}{965{,}16}\cdot 100\% = 0{,}0062\%.$$

Приклад 5.2. Використовуючи метод найменших квадратів, апроксимувати многочленом першого та другого степенів залежність тиску насичення від температури води і водяної пари.

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	1,227	2,337	4,241	7,375	12,34	19,92	31,16	47,36	70,11	101,3

Розв'язання

Обчислимо коефіцієнти і праві частини систем (5.6) і (5.7):

$$\sum_{i=0}^{9} x_i = 550,\ \sum_{i=0}^{9} x_i^2 = 38500,\ \sum_{i=0}^{9} x_i^3 = 3{,}025\cdot 10^6,\ \sum_{i=0}^{9} x_i^4 = 2{,}533\cdot 10^8,\ \sum_{i=0}^{9} y_i = 297{,}4,$$

$$\sum_{i=0}^{9} y_i x_i = 24705,\ \sum_{i=0}^{9} y_i x_i^2 = 2{,}156\cdot 10^6.$$

Для многочлена першої степені система має вигляд

$$10\cdot a_0 + 550\cdot a_1 = 297{,}4$$

$$550\cdot a_0 + 38500\cdot a_1 = 24705$$

Розв'язавши таку систему рівнянь отримаємо функцію першої степені $\Phi(x) = -25{,}92 + 1{,}012 \cdot x$ (рис. 5.1, в).

Аналогічно для функції другої степені система виглядатиме

$$10 \cdot a_0 + 550 \cdot a_1 + 38500 \cdot a_2 = 297.4$$

$$550 \cdot a_0 + 38500 \cdot a_1 + 3{,}025 \cdot 10^6 \cdot a_2 = 24705$$

$$38500 \cdot a_0 + 3{,}025 \cdot 10^6 \cdot a_1 + 2{,}533 \cdot 10^8 \cdot a_2 = 2{,}156 \cdot 10^6$$

Розв'язання такої системи відносно коефіцієнтів полінома дозволить отримати таку апроксимувальну функцію $\Phi(x) = 12{,}74 - 0{,}921 \cdot x + 0{,}0175 \cdot x^2$ (рис. 5.1, а). Середньоквадратичне відхилення для обох випадків становить

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9}\left(\Phi(x_i) - y_i\right)^2} = 13{,}2, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9}\left(\Phi(x_i) - y_i\right)^2} = 3{,}16.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 5.1. Виконати лінійну та квадратичну інтерполяцію термодинамічної властивості насиченої водяної пари при температурі 205 °С і порівняти із довідковим значенням.

Варіант 1

Температура, °С	180	200	205	220
Ентальпія, кДж/кг	2777,1	2791,4	?	2799,9

Варіант 2

Температура, °С	150	200	205	250
Теплота пароутворення, кДж/кг	2114,1	1939,0	?	1713,7

Варіант 3

Температура, °С	200	205	210	220
Густина, кг/м^3	7,865	?	9,595	11,625

Завдання 5.2. Використовуючи метод найменших квадратів, апроксимувати многочленом першої та другої степені залежність термодинамічної властивості води на лінії насичення від температури.

Варіант 1

Температура, °С	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Густина, кг/м^3	958,4	951,0	943,1	934,8	926,1	917,0	907,4	897,3	886,9	876,0

Варіант 2

Температура, °С	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Число Прандтля	1,75	1,6	1,47	1,36	1,26	1,17	1,10	1,05	1,00	0,96

Варіант 3

Температура, °С	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Тиск, бар	1,01	1,43	1,99	2,70	3,62	4,76	6,18	7,92	10,03	12,55

6 КЛАСИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

6.1 Постановка задачі

Формальна класифікація моделей ґрунтується на класифікації математичних засобів, що використовуються. Часто будується у формі дихотомій. Наприклад, один з популярних наборів дихотомій:

- лінійні або нелінійні моделі;
- детерміновані або стохастичні;
- зосереджені або розподілені системи;
- статичні або динамічні;
- структурні та функціональні;
- дискретні або безперервні тощо.

Природно, що можливі і змішані типи: в одному відношенні зосереджені (по частині параметрів), в іншому – розподілені моделі і т. д.

6.2 Класифікація моделей залежно від параметрів моделі

В залежності від основних параметрів математичні моделі можна класифікувати на групи (рис. 6.1).

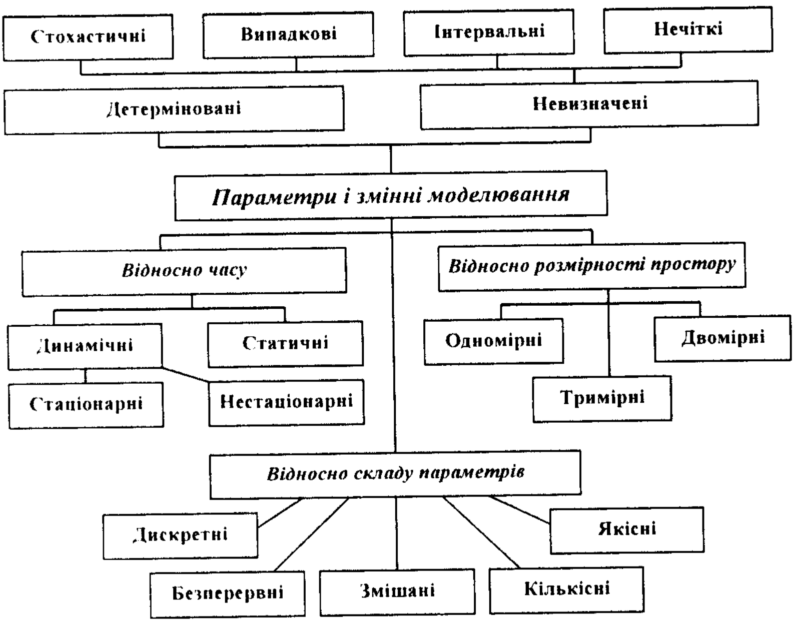


Рисунок 6.1 – Класифікація математичних моделей залежно від параметрів моделювання

6.3 Класифікація моделей за змістовною побудовою

Структурні моделі зображують об'єкт як систему з своєю структурою і механізмом функціонування.

Функціональні моделі не використовують таких уявлень і відображають тільки ззовні сприйману поведінку (функціонування) об'єкта. В їх граничному виразі вони називаються також моделями "*чорної скрині*". В такому випадку описують з відомою точністю зв'язок між входом X і виходом Y системи на основі експериментальних даних без аналізу внутрішньої структури системи, яку можна розглядати як "чорну скриню". Модель відрізняється універсальністю методології збирання експериментальної інформації і будови моделей. До недоліків варто віднести складність різносторонньої інтерпретації параметрів моделей і обмеженість області їх дії з відповідною точністю рамок тих конкретних об'єктів, для яких вони побудовані.

Можливі також комбіновані типи моделей, які іноді називають моделями "*сірої скрині*".

Практично всі автори, що описують процес математичного моделювання, вказують, що спочатку будується особлива ідеальна конструкція – *змістовна модель*. Усталеної термінології тут немає, й інші автори називають цей ідеальний об'єкт концептуальною моделлю, умоглядною моделлю або предмоделлю.

При цьому фінальна математична конструкція називається *формальною моделлю* або просто математичною моделлю, отриманою в результаті формалізації даної змістовної моделі (предмоделі).

Побудова змістовної моделі може проводитися за допомогою набору готових ідеалізацій, як в механіці, де ідеальні пружини, тверді тіла, ідеальні маятники, пружні середовища і т. п. дають готові структурні елементи для змістовного моделювання. Проте в області знань, де не існує повністю завершених формалізованих теорій (передній край фізики, біології, економіки, соціології, психології і більшості інших областей), створення змістовних моделей різко ускладнюється.

Перш за все будують деяку інженерну концептуальну модель, яка виражається на початку словами в термінах даної науки (матеріалознавство, технологія). Ця концептуальна модель описується далі абстрактно-знаково за допомогою диференціальних або алгебраїчних рівнянь, геометричних співвідношень, логічних операцій тощо.

В основі математичної моделі лежить уявлення про те, що поведінка реального об'єкта аналогічна поведінці концептуальної моделі. Перевага моделі полягає у наочності "фізичної" інтерпретації об'єкта. Недолік полягає в тому, що описати математичними символами можна концепцію, яка далека від реальності.

6.4 Класифікація моделей залежно від мети моделювання

Метою *дескриптивних* моделей (від лат. descriptio – опис) є встановлення законів зміни параметрів моделі. Приклад дескриптивної моделі – модель теплової схеми теплоенергетичного чи теплотехнологічного об'єкта. Параметри моделі – теплові потужності, температурні графіки протягом року (вхідні), температури і витрати теплоносіїв в елементах схеми (власні параметри). Кінцевими параметрами будуть потужності генерувального обладнання, витрати палива та коефіцієнт корисної дії установки в довільний момент часу.

Оптимізаційні моделі призначені для визначення оптимальних (якнайкращих) з погляду деякого критерію параметрів модельованого об'єкта або ж для пошуку оптимального (якнайкращого) режиму управління деяким процесом. Як правило, дані моделі будуються з використанням однієї або декількох дескриптивних моделей і включають деякий критерій, що дозволяє порівнювати різні варіанти наборів значень кінцевих параметрів між собою з метою вибору якнайкращого. На область значень вхідних параметрів можуть бути накладені обмеження у вигляді рівностей і нерівностей, пов'язані з особливостями даного об'єкта або процесу.

Прикладом оптимізаційної моделі може слугувати моделювання конструкції теплотехнологічного апарату, наприклад, теплообмінника із мінімальними витратами під час його створення та експлуатації за умов визначеної теплової потужності.

Підмітимо, що для більшості реальних процесів, конструкцій потрібне визначення оптимальних параметрів відразу за кількома критеріями, тобто ми маємо справу з так званими багатокритерійними задачами оптимізації. При цьому частими є ситуації суперечності критеріїв.

Управлінські моделі застосовуються для ухвалення ефективних управлінських рішень в різних областях цілеспрямованої діяльності людини. Проте на практиці під ухваленням рішень, зазвичай, розуміється вибір деяких альтернатив із заданої їх множини. Наприклад, на підприємстві звільнилася посада головного інженера і задача директора полягає у виборі з наявної безлічі кандидатів на цю посаду одного, що відповідає заданим вимогам.

Складність задачі полягає в наявності невизначеності як за початковою інформацією (неповні дані про кандидатів) і характеру дії зовнішніх умов (випадкове: вибраний кандидат захворів або відмовився; ігрове: міністерство проти вибраної кандидатури), так і за метою (суперечливі вимоги до вибираної кандидатури: повинен бути добрим фахівцем і адміністратором, досвідчений, енергійний, молодий та ін.).

6.5 Класифікація математичних моделей залежно від методів реалізації

Метод реалізації моделі належить до *аналітичних*, якщо він дозволяє отримати вихідні параметри у вигляді аналітичних виразів, тобто виразів, в яких використовується не більше ніж рахункова сукупність арифметичних операцій і переходів до межі.

Аналітичні моделі поділяють на алгебраїчні та наближені.

В *алгебраїчних* моделях використовується кінцеве число арифметичних операцій, операцій зведення в цілочисельний ступінь і визначення кореня.

Дуже часто аналітичне рішення для моделі подають в елементарних або спеціальних функціях: показових, логарифмічних, тригонометричних, гіперболічних тощо. Для отримання значень цих функцій при конкретних значеннях вхідних параметрів використовують їх розкладання в ряди (наприклад, Тейлора). Враховуючи різне число членів ряду, можна обчислювати значення функції з різним ступенем точності. Моделі, що використовують подібний прийом, називаються *наближеними.*

Аналітичні методи реалізації моделі є більш цінними в тому плані, що дозволяють з меншими обчислювальними витратами вивчити властивості об'єкта моделювання, застосовуючи традиційні добре розвинуті математичні методи аналізу аналітичних функцій. Істотно, що застосування аналітичних методів можливе без використання ЕОМ (за винятком випадків, коли аналітичне рішення визначається в рядах і для його доведення до числа потрібні трудомісткі обчислення із застосуванням ЕОМ). Крім того знання аналітичного виразу для шуканих параметрів дозволяє досліджувати фундаментальні властивості об'єкта, його якісну поведінку, будувати нові гіпотези про його внутрішню структуру. Потрібно зазначити, що можливості аналітичних методів істотно залежать від рівня розвитку відповідних розділів математики.

На даний час великий сплеск інтересу до аналітичних методів при реалізації моделей пов'язаний з появою пакетів математичних обчислень (Derive, MatLab, Mathcad, Maple, Mathematica, Scientific Workplace та ін.). Застосування подібних програмних засобів не тільки спрощує процедуру отримання аналітичного рішення, але і полегшує подальший аналіз отриманого рішення із застосуванням різного роду візуалізаторів.

На жаль, існуючі на даний час математичні методи дозволяють отримати аналітичні рішення тільки для відносно нескладних математичних моделей у вузькому діапазоні значень параметрів. В більшості випадків при дослідженні моделей доводиться використовувати *алгоритмічні* підходи, що дозволяють отримати лише наближені значення шуканих параметрів.

Алгоритмічні моделі поділяють на чисельні та імітаційні.

При *чисельному* підході сукупність математичних співвідношень моделі замінюється кінцевомірним аналогом. Це частіше за все досягається дискретизацією початкових співвідношень, тобто переходом від функцій безперервного аргументу до функцій дискретного аргументу. Знайдене рішення дискретної задачі ухвалюється за наближене рішення початкової математичної задачі. Основною вимогою до обчислювального алгоритму є необхідність отримання рішення початкової задачі із заданою точністю за кінцеве число кроків.

Якщо при чисельному підході дискретизації піддавалася отримана система математичних співвідношень, то при *імітаційному* підході на окремі елементи розбивається сам об'єкт дослідження. В цьому випадку система математичних співвідношень для об'єкта-системи в цілому не записується, а замінюється деяким алгоритмом, що моделює її поведінку і що враховує взаємодію один з одним моделей окремих елементів системи. Моделі окремих елементів можуть бути як аналітичними, так і алгоритмічними. Безперечною перевагою алгоритмічних моделей є відсутність принципових обмежень на складність моделі, що дозволяє застосовувати їх для дослідження систем довільної складності.

Контрольні питання

1. Поясніть відмінність структурної та функціональної моделі.
2. Поясніть відмінність змістовної та формальної моделі.
3. Поясніть особливості моделей типу "чорної скрині".
4. Дайте класифікацію моделей з невизначеними параметрами і змінними моделювання.
5. Дайте класифікацію моделей за змінністю параметрів в часі.
6. Дайте класифікацію моделей відносно складу параметрів.
7. Поясніть відмінність управлінських, оптимізаційних та дескриптивних моделей.
8. Поясніть відмінність аналітичних та алгоритмічних моделей.

7 ЕТАПИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

7.1 Етапи побудови моделі

Процес створення математичних моделей трудомісткий, довготривалий і пов'язаний з використанням висококваліфікованої праці. Особливістю математичних моделей, створюваних в даний час, є їх комплексність, пов'язана з складністю модельованих об'єктів. Наприклад, при моделюванні процесів деформування різних конструкцій під дією прикладеного навантаження доводиться враховувати не тільки процеси масопереносу, що відбуваються при деформуванні, але і теплоперенос, а також пов'язані з цим процеси. На даний час характерне зображення об'єкта моделювання у вигляді складної системи взаємодіючих елементів.

Все це призводить до ускладнення моделі і необхідності сумісного використання декількох теорій, застосування сучасних обчислювальних методів і обчислювальної техніки. Впровадження обчислювальної техніки у всі сфери діяльності привело до повсюдного використання математичних моделей. Зауважимо, що ЕОМ — це тільки "залізо", а "розумним" і корисним його роблять програми, які, в більшості випадків, є реалізаціями алгоритмів відповідних математичних моделей.

У разі складних об'єктів задовольнити всім вимогам, що пред'являються, в одній моделі зазвичай неможливо. Доводиться створювати цілий спектр моделей одного і того ж об'єкта (в деяких випадках – ієрархічну сукупність "вкладених" одна в іншу моделей). Для зменшення витрат на розроблення моделей та імовірності виникнення помилок розроблений алгоритм створення математичних моделей (рис. 7.1).

7.2 Обстеження об'єкта моделювання

Основним завданням обстеження об'єкта є підготовка змістовної постановки задачі моделювання. *Змістовна постановка задачі* – це перелік сформульованих у змістовній (словесній) формі основних питань, на які повинна відповідати розроблена модель, опис її основних характеристик. В реальних умовах на цьому етапі необхідно зібрати великий об'єм інформації і потім з цього об'єму малоформалізованої різноманітної інформації, з нечітко поставлених та сформульованих побажань виділити такі вимоги, які, з одного боку, задовольняють замовника, з іншого – дозволяють реалізувати модель у визначені терміни і в рамках виділених матеріальних засобів. Для вирішення такого завдання необхідні спеціалісти, що знають можливості та обмеження обчислювальних машин.

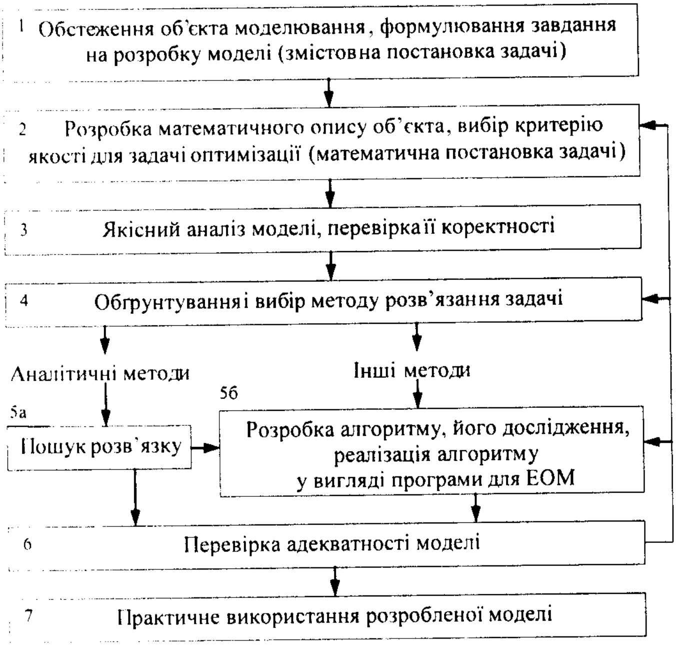


Рисунок 7.1 – Етапи математичного моделювання

Під час обстеження об'єкта виконують такі завдання:

– виявлення основних факторів, механізмів, що впливають на поведінку об'єкта, методів визначення параметрів, що описують об'єкт;

– збір і перевірка наявної експериментальної інформації про об'єкти-аналоги, проведення при необхідності додаткових експериментів;

– аналітичний огляд наявної літературної та іншої інформації, аналіз розроблених раніше моделей даного об'єкта або подібного;

– аналіз та узагальнення всього накопиченого матеріалу, розробка загального плану створення моделі.

З використанням накопиченого матеріалу виконують змістовну постановку задачі. Звичайно в подальшому можуть вноситись доповнення, але вони повинні носити частковий, непринциповий характер.

Змістовна постановка задачі може бути оформлена у вигляді *технічного завдання на розробку моделі*. Етап створення технічного завдання може займати до 30% часу, відпущеного на розробку моделі.

7.3 Математична постановка задачі

На даному етапі виконується спочатку *концептуальна постановка задачі* – сформованих у термінах певної науки (фізики, хімії, біології тощо) перелік основних питань, що повинна вирішувати модель, а також сукупність гіпотез відносно властивостей і поведінки об'єкта моделювання.

Концептуальна модель будується як ідеалізована модель об'єкта. Згідно з прийнятими гіпотезами визначається набір параметрів, що описують стан об'єкта, та перелік законів, що описують поведінку об'єкта, взаємозв'язок між параметрами та об'єкта із навколишнім середовищем.

Важливою складовою концептуальної моделі є вибраний *критерій якості об'єкта.* Призначення критерію – встановлення переважного варіанта виконання об'єкта в задачах оптимізації. Для масових оптимізаційних задач в системах, що знаходяться на нижніх ієрархічних рівнях, в якості критерію оптимальності обирають мінімум зведених витрат. Це показник, що враховує первинні та експлуатаційні витрати в грошових показниках.

Поряд з таким критерієм розглядають і додаткові – екологічні обмеження, перспективність прийнятих рішень з врахуванням технічного прогресу, підвищення продуктивності праці тощо. Чим вищий рівень системи, тим більший вплив мають саме додаткові критерії.

Математична постановка задачі (математичний опис об'єкта) – це сукупність математичних співвідношень, що описують поведінку об'єкта моделювання.

Найбільш простий математичний опис складається з алгебраїчних рівнянь. Але область застосування таких моделей дуже обмежена. Для створення моделей складних систем використовують знання, що сконцентровані у аксіомах, теоремах, законах, що мають чітке математичне формулювання.

Відокремлюють закони, справедливі для всіх типів задач, і співвідношення, що описують поведінку окремих об'єктів. До першого класу належать, наприклад, закони збереження маси, кількості руху і енергії. До другого – співвідношення між параметрами у вигляді рівнянь стану, наприклад, закон Гука, Клапейрона, Стефана-Больцмана та ін. Співвідношення другого класу маловивчені, іноді навіть необхідно розробляти власні замикальні співвідношення, наприклад, щодо інтенсивності тепловіддачі в певних умовах тощо.

В більшості випадків математичний опис об'єкта включає звичайні диференціальні рівняння, особливо для динамічних моделей, диференціальні рівняння у частинних похідних, інтегродиференціальні рівняння тощо.

Обов'язковим елементом математичної постановки задачі є прийняті допущення і спрощення при побудові моделі.

7.4 Якісний аналіз моделі, перевірка коректності

Для контролю правильності складного математичного опису необхідно виконати ряд перевірок:

– контроль розмірностей (прирівнюватись і додаватись можуть лише величини з однаковими розмірностями, в однаковій системі одиниць);

– контроль порядків (при додаванні величин виконується грубе їх порівняння і малозначимими складовими можна знехтувати);

– контроль характеру залежностей і фізичного змісту;

– контроль екстремальних ситуацій (перевірка поводження моделі при досягненні параметрами меж допустимого діапазону (нуль або нескінченність));

– контроль граничних умов;

– контроль математичної замкнутості (перевірка чи має система математичних виразів однозначний розв'язок), тобто перевірка "коректності математичної задачі".

Математична модель називається *коректною*, якщо для неї успішно виконані всі вищенаведені контрольні перевірки.

7.5 Обгрунтування і вибір методу розв'язання задачі

Вибір того чи іншого методу в великій мірі залежить від кваліфікації спеціалістів. *Аналітичні методи* більш зручні для аналізу результатів, але можуть бути застосовані лише для відносно простих моделей. *Алгоритмічні методи* більш трудомісткі, потребують знання обчислювальної математики, програмних комплексів, потужної техніки. Точність таких методів залежить від вибору методу і параметрів, наприклад, кроку інтегрування.

Використання будь-якого аналітичного методу призводить до виникнення похибки: похибки вихідних даних; похибки методу; похибки округлення. Підбір методу повинен забезпечувати ефективність (мінімум часу за достатньої точності), стійкість, точність результатів.

7.6 Реалізація моделі у вигляді програми

Процес розробки програмного продукту на основі розробленої моделі є не менш складним і важливим, ніж попередні етапи.

Процес створення програмного забезпечення складається з етапів:

– складання технічного завдання на розробку пакета програм;
– проектування структури програмного комплексу;
– кодування алгоритму;
– тестування та відлагодження;
– супровід та експлуатація.

Найбільш ефективним варіантом є розбивання програми на окремі модулі. Для кожного модуля складається алгоритм, що дозволяє виконувати відповідні функції. Розробляється система зв'язків між модулями, яка називається схемою потоків даних програмного комплексу.

Більшість програм має три елементи:
– препроцесор – система підготовки і перевірки початкової інформації;
– процесор – розв'язання задачі, реалізація обчислень;
– постпроцесор – відображення отриманих результатів.

Як правило створення моделі та програмного комплексу може займати 3...5 років. Якісні, надійні, із зручним інтерфейсом програми можна створювати лише за умови використання сучасних методів структурного, абстрактного, об'єктно-орієнтованого і візуального програмування.

Розробка бібліотек прикладних програм для розв'язання окремих задач з уніфікованими форматами передавання даних дозволяє значно скоротити час розробки програми.

7.7 Перевірка адекватності моделі

Під адекватністю моделі розуміють ступінь відповідності результатів, отриманих з використанням розробленої моделі, даним експерименту або тестової задачі.

Перевірка адекватності має на меті:

– впевнитись в справедливості прийнятої сукупності гіпотез на етапі концептуальної і математичної моделі;

– встановити, що точність отриманих результатів відповідає точності, вказаної в технічному завданні.

В моделях для виконання оціночних розрахунків задовільною вважається похибка 10...15%. В моделях, що використовуються в керувальних і контролювальних системах допустима похибка 1...2% і менше.

Неадекватність результатів можлива з трьох причин:

– значення заданих параметрів моделі не відповідають допустимій області цих параметрів;

– прийнята система гіпотез правильна, але константи і параметри у визначальних співвідношеннях не встановлені достатньо точно;

– використана система гіпотез неправильна.

При неадекватності результатів необхідно провести коректування моделі, розглядаючи причини у вищенаведеній послідовності.

7.8 Практичне використання розробленої моделі

Дескриптивні моделі призначені для опису досліджуваних параметрів процесу, а також для дослідження закономірностей зміни цих параметрів. Вони використовуються для:

– вивчення властивостей та особливостей поведінки об'єкта при різних наборах початкових даних і різних режимах;

– як моделювальні блоки в різних САПР та АСУ;

– при побудові оптимізаційних моделей і моделей-імітаторів.

Дослідницькі моделі використовуються тільки під час виконання дослідницьких робіт, вони, переважно, не мають зручного інтерфейсу, але використовують найбільш прогресивні процедури і алгоритми.

Моделі і побудовані на їх основі програмні комплекси повинні мати зручний інтерфейс, потужні пре- і постпроцесори, детальні і якісно складені рекомендації по використанню. Як правило, вони не можуть бути модернізовані і вдосконалені.

Контрольні питання

1. Поясніть алгоритм створення математичної моделі.
2. Охарактеризуйте етап змістовної постановки задачі при розробці математичної моделі.
3. Поясніть відмінність концептуальної і математичної постановки задачі.
4. Поясніть, що таке критерій якості об'єкта, наведіть приклади.
5. Охарактеризуйте різновиди контрольних перевірок моделі.
6. Поясніть вимоги при виборі методу розв'язання задачі.
7. Проаналізуйте етапи створення програмного продукту і його складові.
8. Призначення перевірки адекватності моделі і причини її неадекватності.

8 МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В РАМКАХ ДИПЛОМНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

8.1 Системний підхід до досліджень

Теплоенергетичні об'єкти є складними за своєю структурою та елементною базою. Якісне математичне моделювання таких об'єктів неможливе без системного підходу, який дозволяє спростити одну з найскладніших проблем моделювання – велику розмірність задачі.

Теплоенергетична установка є складовою системи більш високого рівня і, в свою чергу, складається з систем нижчого ієрархічного рівня.

На даному етапі системний підхід не можна розглядати як сукупність чітких правил, використовуючи які можна розв'язувати складні задачі. Але є певні етапи для задачі оптимізації складної системи.

Виділення досліджуваного теплоенергетичного об'єкта з більш загальної системи. Наприклад, котельні з системи теплопостачання міста. Необхідно чітко окреслити межі об'єкта, мету оптимізації та критерій оптимальності.

Виявлення складу елементів об'єкта та взаємозв'язків між ними. Тобто розробити ієрархію елементів об'єкта.

Агрегування реальних елементів і зв'язків об'єкта. Результатом є складання ієрархічної системи окремих елементів об'єкта і їх зв'язків, які є доступними для дослідження.

Формулювання набору задач для кожного елемента, що дозволить вирішити основну задачу оптимізації теплоенергетичного об'єкта.

Формулювання інформаційних зв'язків між елементами об'єкта, за допомогою яких вони обмінюються початковими та проміжними даними, та іншими показниками.

Розробка комплексу моделей елементів об'єкта, за допомогою якого можливо проводити комплексну оптимізацію об'єкта.

Кожен теплоенергетичний об'єкт має зовнішні зв'язки, наприклад, вид палива, його характеристики та умови постачання, забезпеченість системами водопостачання, кліматичні умови, місце розташування, можливості металургії, хімії, машинобудування, стан економіки, наявність трудових ресурсів та ін. З усього вищенаведеного зрозуміла вся складність та різноманітність впливу зовнішніх зв'язків об'єкта.

Зворотна зовнішня інформація може містити такі показники:

– техніко-економічні показники, інвестиції, питомі капіталовкладення тощо;

– технологічні, масогабаритні показники, що впливають на виготовлення, транспортування, монтаж тощо;

– шкідливі викиди та скиди, пов'язані із виготовленням, транспортуванням, монтажем та експлуатацією об'єкта.

Для того, щоб дати уявлення про складність взаємозв'язків теплотехнологічної системи із зовнішніми об'єктами на рис. 8.1 показана класифікація зовнішніх зв'язків системи виробництва енергоносіїв з органічних відходів.

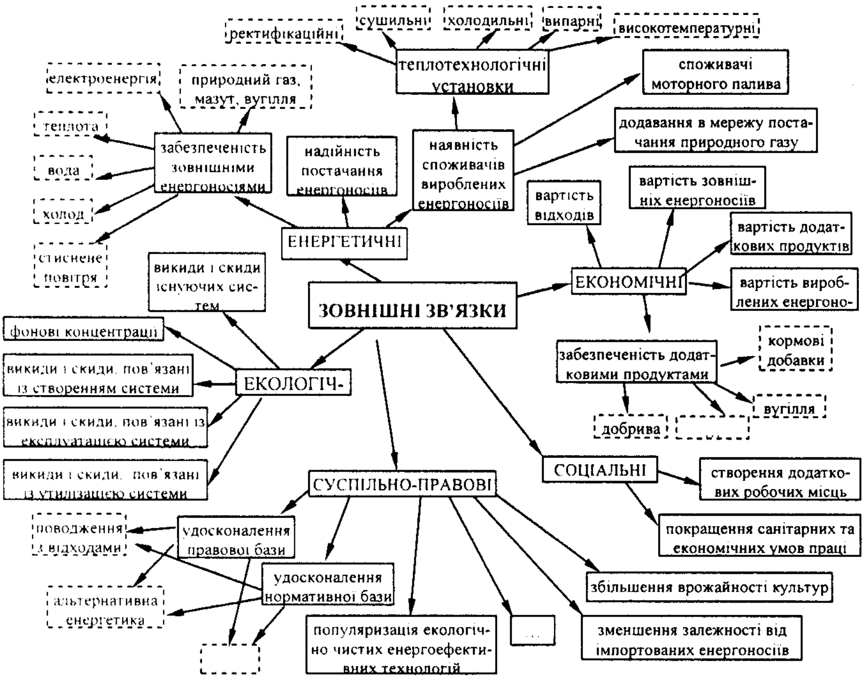


Рисунок 8.1 – Класифікація зовнішніх зв'язків системи

Крім зовнішніх зв'язків значний вплив на набір елементів та схемне оформлення спричиняють внутрішні інформаційні зв'язки: властивості теплоносіїв; закономірності технологічних процесів, конструктивні та схемні характеристики елементів об'єкта тощо.

8.2 Методика побудови математичних моделей

Для складання моделі теплоенергетичний об'єкт розглядається як характерна ланка енергогенерувальної системи з одного боку, і як складний комплекс різнорідних елементів обладнання та споруд, з'єднаних зв'язками. Теплові схеми об'єктів можуть моделюватись за допомогою теорії графів або іншими методами. В теорії графів елементи обладнання є вершинами, які з'єднані дугами – лініями трубопроводів.

Основою математичної моделі теплоенергетичного об'єкта є *система балансових рівнянь* для всієї системи та кожного її елемента:

– рівняння балансу енергії

$$\sum_{j=1}^{n}(\rho\cdot G\cdot h)_j+\sum_{i=1}^{n}P_j=0; \qquad (8.1)$$

– рівняння балансу витрат

$$\sum_{j=1}^{n}G_j=0; \qquad (8.2)$$

– рівняння гідравлічного і аеродинамічного балансів

$$(p'\pm\Delta p-p'')=0; \qquad (8.3)$$

– рівняння зміни ентальпії в елементі теплоенергетичного об'єкта

$$(h'\pm\Delta h-h''')=0. \qquad (8.4)$$

Між параметрами об'єкта та його елементами існують достатньо складні зв'язки. Для зменшення розмірності задачі обирають найважливіші *характеристики елементів*, опис взаємозалежностей між якими дозволяє з достатньою точністю моделювати об'єкт.

Основними характеристиками теплоенергетичного об'єкта є:

– характеристики зміни тиску енергоносіїв;
– характеристики зміни ентальпії енергоносіїв;
– характеристики середньої швидкості енергоносіїв;
– характеристики найбільшої температури стінки елемента тощо.

Будь-яка модель теплоенергетичного об'єкта має ряд *обмежень*. Термодинамічні, витратні, конструктивні та інші параметри не можуть приймати довільні значення. Вони завжди знаходяться в межах фізично можливих і технічно здійснених станів енергоносіїв та обладнання.

Прикладом таких обмежень є товщини стінок елементів, термодинамічні властивості енергоносія, довжина топки (з умови розповсюдження полум'я), при дефіцитності якогось матеріалу обмеженням може бути витрата цього матеріалу тощо.

В якості функції мети – критерію оптимальності – найчастіше використовують показник "приведені витрати".

Обов'язковим правилом порівняння варіантів є приведення їх до однакового енергетичного ефекту, наприклад, однакової потужності.

8.3 Розробка математичного опису теплогідродинамічних процесів у дренажному каналі

Дренажними каналами (ДК), що реалізуються у теплотехнологічних схемах підприємств, є, як правило, довгі канали, що працюють в області невисокого тиску. У більшості дренажних систем ми можемо спостерігати критичні потоки. Найчастіше дренажні канали це досить складні системи, що містять значну кількість місцевих опорів, які можуть не мати між собою ділянок, достатніх для стабілізації потоку.

Під час формування математичної моделі теплогідродинамічних процесів у ДК задача витікання розглядається у одновимірній постановці для встановленого режиму течії. Рідина приймається ньютонівською і однорідною. Параметри її стану на кривій насичення однозначно визначаються величиною тиску вздовж каналу витікання і описуються рівнянням Клапейрона-Клаузіуса. Температура пари вважається рівною температурі насичення при відповідному тиску потоку, а зміна її стану підпорядковується законам реального газу. Модель баротропна, тобто тиски рідини і пари по обидві сторони міжфазної поверхні поділу однакові. Теплофізичні властивості обох фаз встановлюються за довідковими даними. В задачі враховувався теплообмін між фазами, а також між потоком і стінкою каналу, а також втрати енергії на тертя об стінки каналу. Задача розв'язувалась з врахуванням фазового перетворення рідина – пара (випаровування).

Основою вирішення задачі є фундаментальні закони збереження маси і повної енергії для двофазного потоку, а також деякі фізично обґрунтовані замикальні співвідношення.

Зважаючи на особливості процесів, що відбуваються під час течії самозакипаючої рідини у дренажному каналі, математичну модель доцільно розділити на блоки, що описують конкретний процес, а саме:

1) розрахунок гідродинамічних процесів;

2) розрахунок тепломасообмінних процесів;

3) розрахунок параметрів критичної течії.

Набір закономірностей, що містять відповідні блоки залежить від набору початкових параметрів, які визначають режим течії та умови протікання процесів у дренажному каналі.

Блок розрахунку гідродинамічних процесів має містити рівняння для визначення втрат тиску на тертя, в місцевих опорах, на прискорення та нівелірної складової.

Блок розрахунку тепломасообмінних процесів містить відомі залежності теплових і матеріальних балансів та рівняння теплопередавання.

Блок розрахунку параметрів критичної течії містить залежності для визначення швидкості розповсюдження слабких збурень у двофазному потоці та критичного тиску.

Доповнивши вищенаведені блоки залежностями для визначення теплофізичних властивостей води та пари, отримаємо математичну модель руху самозакипаючої рідини у дренажному каналі.

Для побудови математичної моделі ДК розбиваємо на ділянки (b ділянок) зі сталим діаметром (d = const).

Кожна i-та ділянка із b ділянок має в загальному випадку: довжину L_i; n_i місцевих опорів, кожен з яких характеризується умовним коефіцієнтом місцевого опору $\zeta_{M,i,n}$; k_i вертикальних ділянок $k_i = k_i' + k_i''$ (де k_i' – з підйомним рухом середовища, k_i'' – з опускним рухом середовища).

Прийнято, що на і-й ділянці може спостерігатися: на частині ділянки l_i' – рух однофазного середовища, на частині l_i'' – рух двофазного середовища, причому $L_i = l_i' + l_i''$.

Математичний опис теплогідродинамічних процесів у дренажному каналі складається із таких основних рівнянь:

- конфігурація і опір ДКСК

$$\begin{cases} d = f_1(l); \\ Z = f_2(l); \\ \Sigma\zeta_M = f_3(l); \\ L = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i; \end{cases} \qquad d = f_1(l)\left| \begin{array}{ll} l = 0 \ldots l_1 & \to d = d_1; \\ l = l_1 \ldots l_2 & \to d = d_2; \\ \ldots & \ldots \\ l = l_{i-1} \ldots l_i & \to d = d_i; \\ l = l_{b-1} \ldots l_b & \to d = d_b; \end{array} \right. ;$$

$$Z = f_2(l)\left| \begin{array}{ll} l - l_0 \le l_{\Gamma,j} & \to Z(l) = \sum\limits_{i=1}^{j=j-1} l_{B,j}; \\ l - l_0 > l_{\Gamma,j} & \to Z(l) = \sum\limits_{i=1}^{j=j-1} l_{B,j} + \dfrac{l_{B,j}}{|l_{B,j}|} \cdot (l - l_0 - l_{\Gamma,j}); \\ l - l_0 = l_{\Gamma,j} + l_{B,j} & \to Z(l) = \sum\limits_{i=1}^{j=j} l_{B,j}, \end{array} \right.$$

за умов: $L = \sum\limits_{j=1}^{m} (l_\Gamma + l_B)_j = \sum\limits_{j=1}^{m} l_{\Gamma,j} + \sum\limits_{j=1}^{m} l_{B,j}$; $l_{\Gamma,1} \ge 0$; $|l_{B,m}| \ge 0$; $l_0 = \sum\limits_{j=1}^{j=j-1} (l_B + l_\Gamma)_j$;

переріз з координатою l: $\sum\limits_{i=1}^{j=j-1} (l_B + l_\Gamma)_j < l \le \sum\limits_{i=1}^{j=j} (l_B + l_\Gamma)_j$

$$\Sigma\zeta_M^p = f_3(l)\left| l_{M,1}(\zeta_{M,1}^p); l_{M,2}(\zeta_{M,2}^p); \ldots l_{M,n}(\zeta_{M,n}^p) \right|;$$

для однофазного потоку

$$\sum \zeta_{M,of} = \sum_0^{L_{of}} \zeta_{M,i}(l_{M,i});$$

для двофазного потоку

$$\sum \zeta_{M,df} = \sum_0^{L} \zeta_{M,i}(l_{M,i}) - \sum_0^{L_{of}} \zeta_{M,i}(l_{M,i});$$

- рівняння суцільності

$$G_0 = G_{sm,i};$$

$$G_{sm,i} = [\rho_i'' \cdot w_i'' \cdot \varphi_i + \rho_i' \cdot w_i' \cdot (1 - \varphi_i)] \cdot F_i = G_i'(P_0, h_{00}, P_i, G_0) + G_i''(P_0, h_{00}, P_i, G_0);$$

- перепад тиску між початковим перерізом і перерізом закипання

$$\Delta P_{of} = P_0 - P_1(h_{00}) = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{of,i} \cdot L_i}{d_i} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{t_i} \zeta_{of,i,j} \right] \cdot \left(\frac{d_{m+1}}{d_i} \right) + \frac{\lambda_{of,m+1} \cdot l'_{m+1}}{d_{m+1}} + \sum_{j=1}^{t_{m+1,of}} \zeta_{of,m+1,j} \right\} \times$$

$$\times \frac{\overline{\rho'_{of}} \cdot w_{0,(m+1)}^{2}}{2} \pm \rho' \cdot g \cdot \Delta Z_{of};$$

- перепад тиску в ДК

$$\Delta P_{ДССК} = \Delta P_{of} + \Delta P_{df,(m+1)} + \sum_{i=m+2}^{b} \Delta P_{df,i};$$

- рівняння балансу енергії для двофазного потоку

$$\Delta P_{df,m+1} = \int_{Z_{of}}^{Z_{m+1}} \rho_H \cdot g \cdot dZ + \overline{\psi}_{m+1} \cdot \lambda_{of_{m+1}} \cdot \frac{l''_{m+1}}{d_{m+1}} \cdot \frac{\overline{\rho'}_{m+1} \cdot \overline{w}_{0_{m+1}}^{2}}{2} \cdot \left[1 + \overline{x}_{m+1} \cdot \left(\frac{\overline{\rho'}_{m+1}}{\overline{\overline{\rho''}}_{m+1}} - 1 \right) \right] +$$

$$+ \psi' \cdot \zeta_{M,m+1} \frac{\overline{\rho'}_{m+1} \cdot \overline{w}_{0_{m+1}}^{2}}{2} \cdot \left[1 + \overline{x}_{m+1} \cdot \left(\frac{\overline{\rho'}_{m+1}}{\overline{\overline{\rho''}}_{m+1}} - 1 \right) \right] + \left\{ \left(\frac{x_{m+1}^{3}}{\varphi_{m+1}^{2} \cdot (\rho''_{m+1})^2} + \frac{(1 - x_{m+1})^3}{(1 - \varphi_{m+1})^2 \cdot (\rho'_{m+1})^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{x_m^{3}}{\varphi_m^{2} \cdot (\rho''_m)^2} + \frac{(1 - x_m)^3}{(1 - \varphi_m)^2 \cdot (\rho'_m)^2} \right) \right\} \cdot \frac{\left(\overline{\rho'}_{m+1} \cdot \overline{w}_{0_{m+1}} \right)^2}{2} \cdot \rho_H;$$

$$\sum_{i=m+2}^{b} \Delta P_{df,i} = \int_{Z_{m+2}}^{Z_{df}} \rho_H \cdot g \cdot dZ + \sum_{i=m+2}^{b} \psi_i \cdot \lambda_{of_i} \cdot \frac{L_i}{d_i} \cdot \frac{\overline{\rho'}_i \cdot \overline{w}_{0_i}^{2}}{2} \cdot \left[1 + \overline{x}_i \cdot \left(\frac{\overline{\rho'_i}}{\overline{\overline{\rho''_i}}} - 1 \right) \right] +$$

$$+ \psi' \cdot \zeta_{M,i} \frac{\overline{\rho'}_i \cdot \overline{w}_{0_i}^{2}}{2} \cdot \left[1 + \overline{x}_i \cdot \left(\frac{\overline{\rho'_i}}{\overline{\overline{\rho''_i}}} - 1 \right) \right] + \left\{ \left(\frac{x_2^{3}}{\varphi_2^{2} \cdot (\rho''_2)^2} + \frac{(1 - x_2)^3}{(1 - \varphi_2)^2 \cdot (\rho'_2)^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{x_{m+1}^{3}}{\varphi_{m+1}^{2} \cdot (\rho''_{m+1})^2} + \frac{(1 - x_{m+1})^3}{(1 - \varphi_{m+1})^2 \cdot (\rho'_{m+1})^2} \right) \right\} \cdot \frac{\left(\overline{\rho'}_i \cdot \overline{w}_{0_i} \right)^2}{2} \cdot \rho_H;$$

- витратний масовий x_i, об'ємний β_{cp}, дійсний об'ємний φ паровміст, співвідношення $\psi = \lambda_{df} / \lambda_{of}$, $\psi' = \zeta_{df} / \zeta_{of}$

$$x_i = \frac{h_{0i} - h'(P_i)}{r(P_i)}; \qquad \beta_{cp} = f(x_i, P_i, w_{0_i});$$

$$\varphi = f\left(\beta, Fr_{sm}, Re_{sm}, We, \frac{\rho'}{\rho''}, \frac{\mu'}{\mu''}, \alpha \right);$$

$$\psi = f(\beta_{cp}, Fr, Re_0, We), \qquad \psi \approx f(\beta_{cp}); \qquad \psi' \approx \psi;$$

- ентальпія води на початку системи з врахуванням подальшого охолодження

$$h_{00} = h'(P_0) - \Delta h_B - \frac{\sum_{i=1}^{h} K_i \cdot L_i \cdot \Delta t}{G_0};$$

$$K_i = \pi \Bigg/ \left[\frac{1}{\alpha_{1,i} \cdot d_i} + \frac{1}{2 \cdot \lambda_T} \cdot \ln\left(\frac{d_i + 2 \cdot \delta_T}{d_i} \right) + \frac{1}{2 \cdot \lambda_{i3}} \ln\left(\frac{d_i + 2 \cdot \delta_T + 2 \cdot \delta_{i3}}{d_i + 2 \cdot \delta_T} \right) + \frac{1}{\alpha_{2,i}} \right];$$

$$\alpha_{1,i} = \frac{\lambda'}{d_i} \cdot 0{,}021 \cdot Re_i^{0,8} \cdot Pr_ж^{0,43} \cdot (Pr_ж / Pr_{ст})^{0,25};$$

для умов вільної конвекції біля труби

$$\alpha_{2,i} = \frac{\lambda''}{d_i} \cdot 0{,}5 \cdot \left(\frac{g \cdot \beta_t \cdot \Delta t_2 \cdot (d_i + 2 \cdot \delta_T)^3}{(\nu'')^2} \cdot Pr_ж \right)^{0,25} \cdot (Pr_ж / Pr_{ст})^{0,25};$$

для вимушеного омивання труби

$$\alpha_{2,i} = \frac{\lambda''}{d_i} \cdot 0{,}25 \cdot \left(\frac{w_{н.с.} \cdot (d_i + 2 \cdot \delta_T)}{\nu''} \right)^{0,6} \cdot Pr_ж^{0,37} \cdot (Pr_ж / Pr_{ст})^{0,25};$$

- швидкість розповсюдження слабких збурень

$$a_{df} = \upsilon_{sm} \cdot \sqrt{\left(-\frac{\partial P}{\partial \upsilon} \right)_s},$$

де $l_{Г,j}$, $l_{В,j}$ – довжини відповідно горизонтального і вертикального відрізків n-ї ділянки, м; $l_{М,i}$ – матриця, що характеризує розміщення (координату) відносно початку системи та величини місцевих опорів; $\zeta^{р}_{М,i}$ – величини умовних коефіцієнтів місцевих опорів приведених до швидкості на останній ділянці; G_0, $G_{sm,i}$, G_i', G_i'' – витрата води на початку системи та суміші, води і пари у і-му перерізі системи, кг/с; w', w'' – усереднена по перерізу дійсна швидкість води і пари, м/с; φ_i, P_i – дійсний об`ємний паровміст та тиск у кінцевому перерізі і-ї ділянки системи, Па; F_i – площа поперечного перерізу і-ї ділянки системи, м^2; ρ_H – гомогенна густина суміші, кг/м^3; Re_{sm} – критерій Рейнольдса суміші; Δh_B – недогрів води на вході в систему, кДж/кг; K_i – коефіцієнт теплопередавання на і-й ділянці, Вт/(м^2·К); Δt – різниця між температурами рідини та зовнішнім повітрям $t_{н.с.}$, °С; h' – ентальпія води відповідна стану насичення при певному тиску, кДж/кг; r – прихована теплота пароутворення, кДж/кг; δ_T, $\delta_{із}$ – товщина стінки труби та шару ізоляції, м; λ_T, $\lambda_{із}$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки труби та ізоляції, Вт/(м·К); $\alpha_{1,i}$, $\alpha_{2,i}$ – коефіцієнти тепловіддачі від рідини до стінки труби та від стінки труби до навколишнього середовища, Вт/(м^2·К), $\alpha_{1,i} >> \alpha_{2,i}$; λ'', λ' – коефіцієнт теплопровідності води та повітря Вт/(м·К); $Re_i = w_{0,i} \cdot d_i / \nu'$ – критерій Рейнольдса, що відповідає швидкості води на і-й ділянці; ν', $\nu_{н.с}$ – кінематична в'язкість води та повітря, $м^2/с$; $Pr_ж$, $Pr_{ст}$ – число Прандтля середовища при його температурі та при температурі стінки; β_t – коефіцієнт температурного розширення повітря, 1/К; Δt_2 – різниця між температурами зовнішньої поверхні стінки та зовнішнім повітрям $t_{н.с}$, °С; δP – елементарний приріст тиску, Па; $\delta \upsilon$ – приріст питомого об'єму, що відповідає приросту δP, $м^3/кг$; d_{m+1}; L_{m+1}; $\zeta_{of,m+1,j}$ – характеристики ділянки, на якій можливий переріз закипання; $Z_{of,i}$, $Z_{df,i}$ – різниці рівнів між початком і кінцем частини ДК, вздовж якої рухається однофазне та двофазне середовище; $L_{of} = \sum_{i=1}^{m} L_i + l'_{m+1}$, $L_{df} = \sum_{i=m+2}^{b} L_i + l''_{m+1}$ – частини ДК, вздовж яких рухається однофазне та двофазне середовище; перерізи в системі: початковий – 0; закипання – 1; вихідний – 2.

З використанням розробленого математичного опису можна провести дослідження пропускної здатності ДК, тиску у визначеній точці ДК та загальних втрат тиску, пошук точки закипання потоку, визначення дійсних та витратних характеристик двофазного потоку.

8.4 Загальна характеристика математичної моделі теплоенергетичного або теплотехнологічного об'єкта

Загальна характеристика математичної моделі повинна містити такі складові.

1. Об'єкт моделювання.
2. Різновид математичної моделі:
   - 2.1 лінійна, нелінійна;
   - 2.2 статична, динамічна;
   - 2.3 структурна, функціональна;
   - 2.4 дескриптивна, оптимізаційна тощо;
   - 2.5 …
3. Характеристика математичного опису моделі, з яких рівнянь складається (рівняння теплових та матеріальних балансів, емпіричні залежності для визначення інтенсивності теплообміну, рівняння для визначення витрат палива, ККД тощо, можна навести рівняння, які мають найбільшу цінність, і які не є загальновідомими). Вказати зі скількох рівнянь складається модель.
4. Метод розв'язання системи рівнянь (аналітичний, алгоритмічний).
5. Величини, що є початковими даними для даної моделі, діапазони їх зміни.
6. Величини, що є кінцевими результатами моделювання.
7. Допущення та спрощення прийняті при створенні математичної моделі.
8. В якому середовищі реалізована математична модель (якою мовою програмування написаний програмний продукт). Рекомендації по використанню даного програмного продукту.

9. Дослідження, які проведені із використанням даної математичної моделі.

10. Результати використання математичної моделі. Прийняті початкові дані, отримані результати (таблиці, графіки), аналіз отриманих результатів, висновки і рекомендації.

8.5 Подання отриманих результатів числових експериментів із використанням розроблених математичних моделей, аналіз результатів

Результати числових експериментів можуть бути подані, наприклад, у вигляді таблиць або графіків. Оформлення графічного матеріалу повинно відповідати правилам оформлення наукової документації. Осі повинні бути підписані, вказані розмірності величин. Кожен отриманий і наведений результат повинен бути проаналізований. Результати досліджень на дескриптивних моделях дозволяють визначити як зміняться показники об'єкта при зміні одного з початкових параметрів. Оптимізаційні моделі обов'язково містять критерій оптимізації. З використанням таких моделей можна визначати оптимальні значення початкових параметрів.

Приклади оформлення результатів числових досліджень

Таблиця 8.1 – Доцільність використання конденсаційного теплообмінника в водогрійному котлі малої потужності

Найменування	Котел з водяним теплообмінником	Котел з повітряним і водяним теплообмінником	Котел з повітряним теплообмінником
Необхідна кількість труб, шт.	35	80	830
Загальна довжина труб в конденсаційній частині, м	31,9	72,9	757
Загальна ціна конденсаційної частини, грн	5809	13275	137852
Економія біогазу, тис.$м^3$/рік	28,93	28,93	28,93
Еквівалентна економія газу, тис. $м^3$/рік	20,85	20,85	20,85
Річна економія коштів, грн	46704	46704	46704
Термін окупності, років	0,124	0,284	2,9

Згідно з результатами, які наведені в табл. 8.1, можна зробити висновок, що найкращі економічні показники має варіант водогрійного котла із водяним конденсаційним теплообмінником.

Аналіз результатів, наведених на рис. 8.2, дозволяє зробити висновок про оптимальну частку потужності теплохолодильної машини в складі системи, що забезпечує мінімум грошових витрат протягом терміну роботи обладнання.

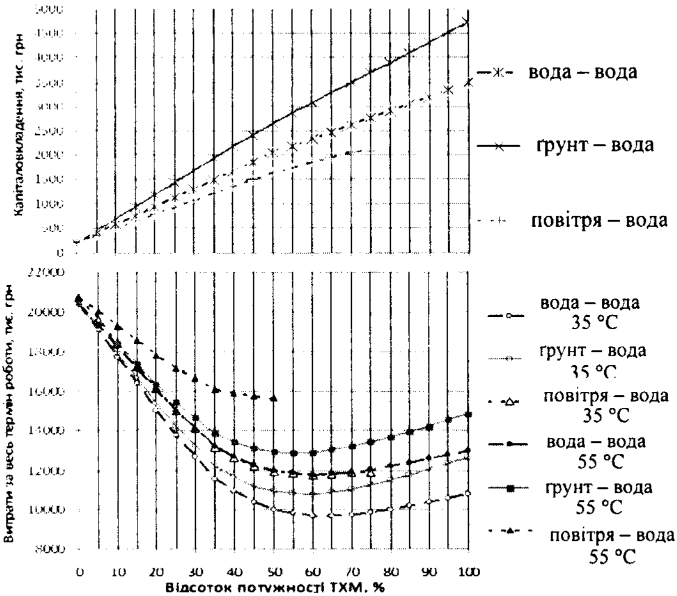


Рисунок 8.2 – Економічні показники суміщення теплохолодильних машин різного виду та електронагрівника в схемі джерела теплохолодопостачання

Контрольні питання

1. Охарактеризуйте основні етапи створення моделі теплоенергетичного об'єкта з врахуванням системного підходу.
2. Наведіть приклади впливу зовнішніх зв'язків системи на її основні характеристики та показники.
3. Охарактеризуйте основні рівняння математичного опису теплоенергетичного об'єкта.
4. Поясніть обмеження та спрощення, які можуть використовуватись при побудові математичних моделей теплоенергетичних об'єктів.
5. Наведіть основні складові загальної характеристики математичної моделі.
6. Поясніть, як потрібно висвітлювати характеристику математичного опису моделі.
7. Поясніть, яким чином потрібно подавати отримані результати числових досліджень.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 8.1. Скласти математичний опис для моделі, що розробляється в рамках дипломного проектування. Навести загальну характеристику розроблюваної математичної моделі.

9 ОПТИМІЗАЦІЯ В ТЕПЛОЕНЕРГЕТИЧНИХ ЗАДАЧАХ

9.1 Критерії оптимізації теплоенергетичних об'єктів

Критерієм оптимізації об'єкта є показник, екстремум якого (максимум або мінімум) відповідає найвищому рівню оптимальності об'єкта. Виділяють часткові та узагальнені критерії оптимізації. Існують також багатокритеріальні методи оптимізації.

Част кові крит ерії не дозволяють в повній мірі оцінити оптимальність варіанта. Наприклад, частковим критерієм оптимізації теплообмінника можна назвати компактність або питому масу. Як бачимо ці показники не характеризують інші важливі особливості теплообмінника, як вартість, складність технології виготовлення тощо.

Існують розробки (в тому числі, з використанням нечіткої логіки), коли узагальнений критерій подають як суму часткових критеріїв, помножених на коефіцієнт ваги критерію. Найскладнішим в цих методах є визначити вагу кожного критерію, тому для цього переважно використовують експертну інформацію.

Одним з найуживаніших *узагальнених крит еріїв* оптимізації на даний момент є мінімум приведених витрат. Цей показник економічного методу виражається в грошових одиницях. Інший вид такого показника – термін окупності капіталовкладень. Такий критерій оптимізації використовується для вирішення задач в різних галузях економіки. В задачах теплоенергетики до останнього часу він був достатньо ефективним, але на сучасному етапі розвитку суспільства, при теперішньому стані навколишнього середовища він має суттєвий недолік – недостатнє врахування впливу об'єкта на навколишнє середовище.

Використання методів оцінювання життєвого циклу в екологічних показниках, наприклад, методу Eco-indicator, дозволяє перевести різні витрати, в тому числі енергетичні і матеріальні, на протязі життєвого циклу, починаючи з видобування корисних копалин для створення об'єкта, закінчуючи етапом його утилізації, в єдині показники – Pt (ecopoint). Варіант з мінімальним техногенним навантаженням на навколишнє середовище є оптимальним.

9.2 Методи пошуку екстремуму

Існує багато методів пошуку екстремуму (мінімуму або максимуму) функції в певному діапазоні значень.

Метод пасивного пошуку екстремуму

Метод вирішення поставленого завдання, в якому задається правило обчислення або відомі значення функції відразу для всіх точок x_1, x_2, ..., x_n, називається методом пасивного пошуку. За x_{extr} приймається така точка x_i, для якої $f(x_i) = \min(f(x_i))$ або $f(x_i) = \max(f(x_i))$. Цей метод полягає у почерговому перебиранні аргументів і використанні нерівностей $f(x_i) > f(x_{i-1})$ або $f(x_i) < f(x_{i-1})$. Тоді x_{extr} буде належати діапазону $[x_{i-1}; x_{i+1}]$. Похибка визначення екстремуму дорівнюватиме $\Delta_{x_{extr}} = \max(|x_i - x_{i-1}|;|x_{i+1} - x_i|)$.

Метод золотого перерізу

Реалізація цього методу для пошуку екстремуму заснована на використанні принципу послідовного скорочення відрізка локалізації. При цьому враховується таке припущення: якщо функція унімодальна на відрізку [a,b], то вона унімодальна на будь-якому відрізку $[c,d] \in [a,b]$.

Кожне наступне наближення можна зробити, обчисливши додатково значення функції лише в одній новій точці.

Золотим перерізом відрізка називається таке розбиття відрізка на дві нерівні частини, при якому відношення довжини всього відрізка до довжини його великої частини дорівнює відношенню довжини більшої частини до довжини меншої частини відрізка.

Співвідношення, за допомогою яких визначаються значення точок розбиття відрізка відповідно до правила золотого перетину: $x_1 = 0{,}618 \cdot a + 0{,}382 \cdot b$, $x_2 = 0{,}382 \cdot a + 0{,}618 \cdot b$.

Потім проводять обчислення значень функції в знайдених точках $f(x_1)$ і $f(x_2)$. Якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то вибирають для подальшого поділу відрізок $[a, x_2]$, якщо ж $f(x_1) > f(x_2)$, то вибирають $[x_1, b]$. У першому випадку однією з двох точок розбиття вибраного відрізка буде x_1, у другому x_2. Це випливає з властивостей золотого перерізу (рис. 9.1).

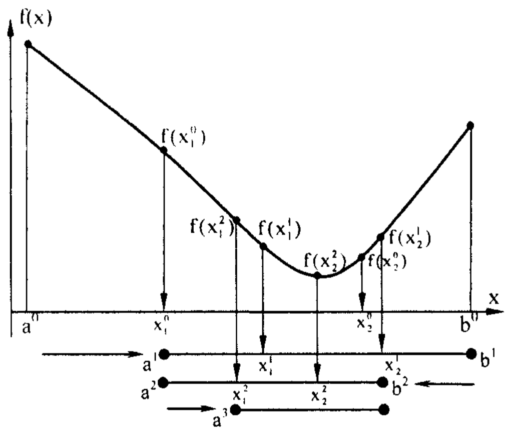


Рисунок 9.1 – Пошук екстремуму методом золотого перерізу

Ітеративні наближення продовжують здійснювати до тих пір, поки $\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \le \varepsilon$, де ε – похибка обчислень (задана точність).

Метод покоординатного спуску і градієнтний метод

Більшість ітераційних методів, що застосовуються для вирішення задачі безумовної оптимізації функції багатьох змінних, належать до класу методів спуску, тобто таких методів, для яких кожна ітерація (крок) призводить до зменшення значення цільової функції: $f(x_{i+1}) < f(x_i)$, для всіх i, що не дорівнюють 0. Кожен наступний крок виглядає так.

1. Знаходять нульовий вектор p_i – напрям спуску. Цей вектор повинен бути таким, щоб при всіх досить малих кроках спуску α_i виконувалася нерівність: $f(x_i + \alpha_i \cdot p_i) < f(x_i)$.

2. Обчислюють позитивне число α_i (крок спуску), для якого виконується вищенаведена нерівність.

3. За чергове наближення до точки мінімуму беруть $x_{i+1}=x_i + \alpha_i \cdot p_i$.

4. Перевіряють виконання критерію ітерацій. Якщо зміна параметрів менше заданої похибки, то ітерації припиняють і вважають $x_{extr} = x_{i+1}$. В іншому випадку ітерації продовжують далі.

У методі покоординатного спуску в якості чергового напрямку спуску обирають напрямок однієї з координатних осей (рис. 9.2).

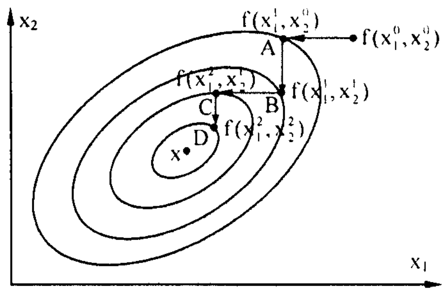


Рисунок 9.2 – Оптимізація методом покоординатного спуску

Найбільш відомим є метод циклічного покоординатного спуску. Алгоритм координатного спуску полягає у зведенні багатовимірної задачі до послідовних одновимірних завдань, які, у свою чергу, вирішуються методами мінімізації функції однієї змінної, наприклад, методом золотого перерізу.

Градієнтний метод відрізняється тим, що спочатку визначається напрям найшвидшого зменшення функції – градієнт p^i. З початкової точки продовжується спуск вздовж градієнта до тих пір, поки не буде знайдене найменше значення функції. Далі будується перпендикулярний градієнт і відбувається наступний спуск.

Метод випадкового пошуку

Цей метод полягає в наступному. Спочатку вибирають довільну точку з області аргументів (x_1^0, x_2^0) і в ній обчислюють значення функції y^0.

Потім в області деякого радіуса навколо початкової точки випадковим чином беремо кілька інших точок. Якщо в якійсь із них значення функції менше, ніж у вихідній, то її беруть за центр нового кола (рис. 9.3).

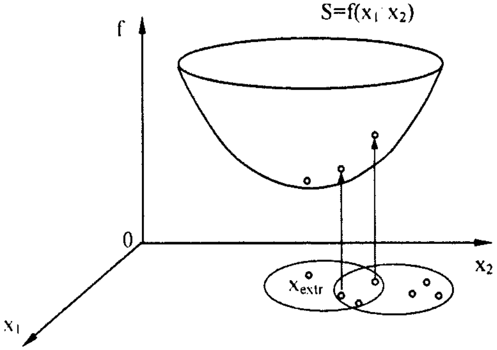


Рисунок 9.3 – Знаходження екстремуму методом випадкового пошуку

Якщо такої точки не знаходиться, то звужують радіус області для уточнення координат мінімуму. Метод небездоганний, оскільки потребує великого об'єму обчислень, що збільшує час розрахунку.

Контрольні питання

1. Дайте визначення та класифікацію методів оптимізації.
2. Охарактеризуйте часткові критерії оптимізації об'єктів, наведіть приклади.
3. Охарактеризуйте відомі узагальнені критерії оптимізації.
4. Поясніть метод пасивного пошуку оптимуму.
5. Поясніть метод золотого перерізу оптимізації об'єктів.
6. Поясніть відмінність методу покоординатного спуску та градієнтного методу пошуку оптимуму.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 9.1. Розробити оптимізаційну модель теплообмінника, вибрати метод та критерій оптимізації, провести дослідження з пошуку екстремуму при зміні швидкості теплоносія та при зміні поперечного перерізу каналів.

Завдання 9.2. Розробити оптимізаційну модель теплової мережі, вибрати метод та критерій оптимізації, провести дослідження з пошуку екстремуму при зміні швидкості теплоносія та при зміні товщини теплоізоляції теплопроводу.

10 КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ДЖЕРЕЛА ПОХИБОК. ПОХИБКИ РОЗРАХУНКОВИХ ВЕЛИЧИН

10.1 Класифікація похибок за джерелами виникнення

Важливо вміти оцінити точність розв'язку задачі, який здебільшого ми отримуємо з похибками. Похибки результатів зумовлюються такими причинами.

1. Математична модель лише наближено відображає реальні явища.

2. Вхідні дані, як правило, – це числа неточні (дані для обчислень часто отримують з експерименту, а кожний експеримент може дати результат лише з обмеженою точністю).

3. Метод розв'язування задачі часто є наближеним. У багатьох задачах точний результат можна дістати лише після нескінченної або досить великої кількості арифметичних операцій, які практично здійснити неможливо. Тому замість точного розв'язку здебільшого доводиться знаходити наближений (наприклад, замість суми ряду беруть суму скінченної кількості його членів, нескінченний ітераційний процес зупиняють після скінченного числа ітерацій, інтеграл замінюють скінченною сумою тощо).

4. Округлення при обчисленнях. Усі обчислення (вручну і на ЕОМ) можна виконувати лише з обмеженою кількістю значущих цифр. Тому при виконанні арифметичних дій потрібно вдаватися до округлень, які зумовлюють похибки, що нагромаджуються в процесі обчислень.

Похибки, що породжуються вищезгаданими причинами, відповідно називаються:

1) похибка математичної моделі;

2) неусувна похибка (вона не залежить від обчислювача);

3) похибка методу;

4) похибка округлень.

Повна похибка результату дорівнює сумі всіх перерахованих похибок. Зауважимо, що похибок, пов'язаних з особливостями будови математичної моделі, не розглядатимемо. Похибки методів досліджуються для кожного окремого методу. На сучасних ЕОМ числа записуються також з достатньою кількістю значущих цифр, тому похибкою окремого округлення здебільшого можна знехтувати на противагу похибці методу і неусувній похибці. У процесі виконання великої кількості операцій похибка округлень збільшується. До значного нагромадження таких похибок може призвести віднімання близьких за величиною чисел, знаходження коренів многочленів високих степенів тощо.

10.2 Похибки наближених чисел

Часто на практиці з тих чи інших причин доводиться замість точного числа $\tilde{a}$ брати його наближене значення а. При цьому виникає похибка

$$\Delta a = \tilde{a} - a . \qquad (10.1)$$

Абсолютною похибкою Δ наближеного числа а називають величину

$$\Delta = |\tilde{a} - a| . \qquad (10.2)$$

Граничною абсолютною похибкою вважають будь-яке число Δ_a, що задовольняє умову

$$\Delta \le \Delta_a . \qquad (10.3)$$

Це означає, що $-\Delta_a \le \tilde{a} - a \le \Delta_a$.

Надалі ці нерівності скорочено записуватимемо $\tilde{a} = a \pm \Delta_a$.

Зауважимо, що найчастіше точне значення $\tilde{a}$ буває невідомим, а тому невідома й похибка Δ наближеного числа а.

Абсолютна похибка не завжди характеризує точність. В таких випадках використовують *відносну похибку* наближеного числа а

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} (a \ne 0) . \qquad (10.4)$$

Гранична відносна похибка визначається δ_a

$$\delta \le \delta_a . \qquad (10.5)$$

Додатне число а можна записати у вигляді скінченного десяткового ряду $a = \alpha_1 10^m + \alpha_2 10^{m-1} + \dots + \alpha_n 10^{m-n+1}$.

Для наближеного числа а k-та цифра називається *правильною*, якщо абсолютна похибка Δ цього числа не перевищує половини одиниці k-го розряду, тобто

$$\Delta = |\tilde{a} - a| \le \frac{1}{2} 10^{m-k+1} . \qquad (10.6)$$

В іншому випадку цифру k-го розряду називають *сумнівною.*

Значущими цифрами наближеного числа а називатимемо всі його правильні цифри, починаючи з першої зліва, що не дорівнює нулю (її десятковий розряд позначається m), до першої сумнівної цифри включно. Усі інші цифри називатимемо *незначущими.*

Записуючи остаточні результати наближених обчислень, незначущі цифри числа відкидатимемо. Якщо з наближеними числами виконуватимуться обчислення, то в них, крім значущих, потрібно зберігати ще одну або дві сумнівні цифри.

Якщо додатне наближене число a має n правильних значущих цифр, то його відносна похибка δ задовольняє співвідношення

$$\delta \le \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}. \qquad (10.7)$$

10.3 Похибки розрахункових величин

Нехай потрібно обчислити значення функції $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots \tilde{x}_n)$ при заданих значеннях незалежних змінних. Якщо при цьому замість точних значень $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots \tilde{x}_n$, які нам невідомі, підставляються їх наближені значення $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots \tilde{x}_n$ (причому $\tilde{x}_i = x_i + \Delta x_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$), то при обчисленні значення функції виникає похибка

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n). \qquad (10.8)$$

Припустивши, що функція $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ диференційована (достатню кількість разів), Δy можна подати у вигляді

$$\Delta y = \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_n}\Delta x_n \qquad (10.9)$$

плюс члени другого і вищих порядків відносно Δx_i.

Якщо похибки Δx_i за абсолютною величиною досить малі, то членами другого і вищих порядків у виразі (10.9) можна знехтувати. Тоді для абсолютної похибки наближеного значення матимемо

$$|\Delta y| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i. \qquad (10.10)$$

Для граничної відносної похибки δ_y маємо

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i}{|y|} = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\frac{\partial f}{f x_i}}{f}\right|\Delta x_i \text{ або } \delta_y = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right|\Delta x_i. \qquad (10.11)$$

З формули (10.11) випливає, що гранична абсолютна похибка суми наближених чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ дорівнює сумі їх граничних абсолютних похибок. Для різниці двох чисел $a = a_1 - a_2$ маємо: $\Delta_a = \Delta_{a_1} - \Delta_{a_2}$.

При цьому відносна похибка різниці $\delta_a = \dfrac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}}{|a|}$ може виявитись досить великою, якщо числа a_1 та a_2 між собою мало відрізняються і їх різниця близька до нуля. У цьому випадку для забезпечення потрібної точності треба мати в зменшуваному і від'ємнику достатню кількість цифр, щоб гранична абсолютна похибка різниці а була меншою від самої різниці. Тому, по можливості, потрібно уникати віднімання близьких чисел.

Для похибки добутку додатних чисел $a = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$ з (10.11) маємо

$$\delta_a = \frac{\Delta_{a_1}}{a_1} + \frac{\Delta_{a_2}}{a_2} + \cdots + \frac{\Delta_{a_n}}{a_n}, \tag{10.12}$$

тобто гранична відносна похибка добутку кількох наближених додатних чисел, що відрізняються від нуля, дорівнює сумі граничних відносних похибок цих чисел.

Легко переконатись, що гранична відносна похибка частки дорівнює сумі граничних відносних похибок діленого і дільника.

Можна переконатися також, що відносна похибка k-го степеня числа а у k разів більша, ніж відносна похибка числа а. Аналогічно, відносна похибка кореня k-го порядку з числа а у k разів менша, ніж відносна похибка числа а.

10.4 Поняття про імовірну оцінку похибки

Наближене число а може відхилятися від точного числа $\tilde{a}$ в той чи інший бік на певну величину. Тому наближене число можна розглядати як випадкову величину з математичним сподіванням $M[a] = \tilde{a}$. Сама похибка $\Delta a = \tilde{a} - a$ також є випадковою величиною з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, $M[\Delta_a] = 0$.

Розглянемо суму наближених чисел $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Гранична абсолютна похибка суми $\Delta_a = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \cdots + \Delta_{a_n}$.

Вважатимемо, що випадкові величини $\Delta_{a_1}, \Delta_{a_2}, \cdots, \Delta_{a_n}$ мають один і той самий нормальний розподіл ймовірностей з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, і середнім квадратичним відхиленням σ. Тоді, як відомо з курсу теорії ймовірностей, математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто

$D[\Delta_a] = D[\Delta_{a_1}] + D[\Delta_{a_2}] + \cdots + D[\Delta_{a_n}] = n\sigma^2$ (нагадаємо, що за означенням середнє квадратичне відхилення $\sigma[X]$ випадкової величини X дорівнює $\sqrt{D[X]}$, де $D[X]$ – дисперсія випадкової величини X, а тому $\sigma[\Delta_a] = \sigma\sqrt{n}$.

Таким чином, абсолютна похибка суми наближених чисел $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ пропорційна числу $\sqrt{n}$, а не числу n, як це випливало з формули (10.10). Це пояснюється тим, що практично похибки різних чисел можуть частково «гасити» одна одну, в той час як формула (10.10) передбачає, так би мовити, крайній випадок.

Аналогічно приходимо до висновку, що й відносна похибка добутку наближених чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ зростає пропорційно числу $\sqrt{n}$, а не числу n.

10.5 Обчислення без точного врахування похибок

Точний підрахунок похибок результатів обчислень наближених чисел досить великий. Тому здебільшого на практиці точно не враховують похибок, а користуються правилами підрахунку цифр за В. М. Брадісом.

1. При додаванні і відніманні наближених чисел менший збережений розряд результату має бути найбільшим серед розрядів, що виражаються останніми значущими цифрами вихідних даних.
2. При множенні і діленні наближених чисел у результаті потрібно зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має наближене дане з найменшою кількістю значущих цифр.
3. При піднесенні до квадрата або до куба в результаті потрібно зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має число, яке підносять до степеня.
4. При добуванні кореня в результаті потрібно брати стільки значущих цифр, скільки їх у підкореневому виразі.
5. При обчисленні проміжних результатів потрібно брати на одну-дві цифри більше, ніж рекомендують попередні правила.
6. Якщо дані можна брати з довільною точністю, то, щоб знайти результат з k правильними цифрами, дані потрібно брати з такою кількістю цифр, яка забезпечує $k+1$ правильну цифру в результаті відповідно до правил 1 – 4.

Зауважимо, що в основу цих правил покладено принцип академіка О. М. Крилова – основний принцип звичайних обчислень, тобто обчислень без строгого врахування похибок: наближене число потрібно писати так, щоб у ньому всі цифри, крім останньої, були правильними і лише остання була сумнівною, притому не більше як на одну одиницю.

Контрольні питання

1. Поясніть причини виникнення похибок.
2. Охарактеризуйте різновиди похибок.
3. Поясніть відмінність між абсолютною похибкою та граничною абсолютною похибкою.
4. Поясніть як визначається чи є цифра наближеного числа правильною.
5. Які цифри наближеного числа є значущими і які – незначущими?
6. Поясніть як розраховуються абсолютні похибки суми та різниці наближених чисел.
7. Поясніть як розраховуються відносні похибки суми та різниці наближених чисел.
8. Поясніть як розраховуються відносні похибки добутку, ділення, піднесення до степеня та добування кореню наближених чисел.
9. Поясніть особливості визначення імовірних похибок розрахункових величин.
10. Наведіть правила обчислення величин без точного врахування похибок.

Приклади розв'язання задач

Приклад 10.1. Записати число ln(16), якщо відносна похибка становить 0,01%.

Розв'язання

Наближено ln(16) = 2,772588. Знайдемо абсолютну похибку числа $\Delta = \left(\frac{0{,}01}{100}\right) \cdot 2{,}772588 = 2{,}772588 \cdot 10^{-4}$.

Якщо розкласти в ряд число, отримаємо $2{,}772588 = 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + \ldots$. Тоді $m = 0$.

Перевіримо п'яту зліва цифру "5" з використанням (10.6) $2{,}772588 \cdot 10^{-4} \le \frac{1}{2} 10^{0-5+1}$ або $2{,}772588 \cdot 10^{-4} \le 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ – не виконується, тобто п'ята цифра – сумнівна.

Перевіримо четверту зліва цифру "2" з використанням (10.6) $2{,}772588 \cdot 10^{-4} \le \frac{1}{2} 10^{0-4+1}$ або $2{,}772588 \cdot 10^{-4} \le 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ – виконується, тобто четверта цифра – правильна.

Всі цифри лівіше – теж правильні. Оскільки записують всі правильні цифри і одну сумнівну, то ln(16) = 2,7726.

Приклад 10.2. Число 54321 має граничну відносну похибку $\delta_a = 0{,}001$. Визначити скільки у цьому числі правильних цифр.

Розв'язання

Число 54321 можна записати $5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$. Тоді $\alpha_1 = 5$. Далі з формули (10.7) визначимо кількість правильних цифр $0{,}001 \le \frac{1}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, тоді $0{,}005 \le 10^{1-n}$, звідси n = 3. Отже за такої відносної похибки дане число має 3 правильні цифри. Решта – сумнівні.

Приклад 10.3. Знайти граничну відносну похибку, значення та кількість правильних цифр у величині питомого теплового потоку, якщо всі цифри повного теплового потоку і площі поверхні теплообміну правильні. Тепловий потік 25,343 кВт, площа поверхні теплообміну 34,97 м^2.

Розв'язання

Частка дорівнює $25{,}343 \div 34{,}97 \approx 0{,}724706$ кВт/м^2.

Якщо всі цифри діленого і дільника правильні, то граничні відносні похибки цих чисел

$$\delta_{25,343} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{5-1} = 0{,}5 \cdot 10^{-4},\ \delta_{34,97} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^{4-1} = 0{,}333 \cdot 10^{-3}.$$

Гранична відносна похибка частки

$$\delta_{0,724706} = \delta_{25,343} + \delta_{34,97} = 0{,}5 \cdot 10^{-4} + 0{,}333 \cdot 10^{-3} = 0{,}383 \cdot 10^{-3}.$$

Кількість правильних цифр в частці з формули (10.7) $0{,}000383 \le \frac{1}{7}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, тоді $0{,}002681 \le 10^{1-n}$, звідси n = 3. Таким чином, питомий тепловий потік становить 0,724 Вт/м^2.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 10.1. Число 519,43267 має відносну похибку 0,001%. Скільки в ньому правильних цифр?

Завдання 10.2. Знайти граничну відносну похибку частки, частку і кількість правильних цифр у частці, якщо всі цифри діленого і дільника правильні: $1536{,}384 \div 64{,}982$.

Завдання 10.3. Знайти граничну відносну похибку, якщо замість точного числа ln(100) взято наближене число 4,605.

11 ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Завдання 1

Розв'язати систему лінійних рівнянь

Варіант 1 методом простих ітерацій $1{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}35x_3 = 0$ $0{,}22x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}33x_3 = 1$ $0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 1{,}22x_3 = 0$	Варіант 2 методом Гауса-Жордана $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ $x_2 - x_2 - x_3 = -2$ $3x_1 + 3x_2 = 9$
Варіант 3 методом Гауса $2x_1 + x_2 = 1$ $3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5$ $x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$	Варіант 4 методом Зейделя $2x_1 + x_2 = 1$ $3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5$ $x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$
Варіант 5 методом простих ітерацій $8x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 115$ $7x_1 + 9x_2 = -11$ $6x_1 + x_2 + 12x_3 = -55$	Варіант 6 методом Гауса-Жордана $51x_1 + 20x_3 = 11$ $12x_1 + 20x_2 - 7x_3 = 22$ $-3x_1 + 20x_2 + 35x_3 = 12$
Варіант 7 методом Гауса $x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 = 1$ $x_1 + 2x_2 + 0{,}3x_3 = 2$ $x_1 + 0{,}2x_2 + 3x_3 = 3$	Варіант 8 методом Зейделя $2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 = 20$ $5x_1 + 10x_2 + 0{,}3x_3 = 30$ $10x_1 + 0{,}2x_2 + 20x_3 = 50$

Завдання 2

Знайти корінь нелінійного рівняння з похибкою до 1% в діапазоні [0;1]

Варіант 1. $10x^4 + 2x^2 + x - 3 = 0$ методом бісекції	Варіант 2. $10x^4 + 2x^2 + x - 3 = 0$ методом хорд
Варіант 3. $3x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 1 = 0$ методом дотичних	Варіант 4. $5x^3 + 3x - 2 = 0$ методом простих ітерацій
Варіант 5. $5x^3 + 3x - 2 = 0$ методом бісекції	Варіант 6. $x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ методом хорд
Варіант 7. $3x^4 - 2x^3 - 2 = 0$ методом дотичних	Варіант 8. $x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ методом простих ітерацій

Завдання 3

Знайти значення функції $y = f(x)$ за допомогою лінійної та квадратичної інтерполяції

Варіант 1. $x = 11$, $y(8) = 97{,}0059$, $y(10) = 158{,}4893$, $y(13) = 282{,}2769$	Варіант 2. $x = 7{,}2$, $y(5) = 5{,}8731$, $y(7) = 8{,}5037$, $y(9) = 11{,}2116$
Варіант 3. $x = 2{,}48$, $y(2{,}2) = 5{,}6667$, $y(2{,}4) = 6{,}8622$, $y(2{,}6) = 8{,}1835$	Варіант 4. $x = 4{,}8$, $y(4{,}2) = 2{,}6367$, $y(4{,}6) = 3{,}8644$, $y(5{,}0) = 5{,}2835$

Продовження завдання 3

Знайти апроксимувальну функцію другого степеня для таких даних методом найменших квадратів та середньоквадратичне відхилення

Варіант 5. $y(0) = 0$, $y(0{,}4) = 1$, $y(0{,}8) = 2{,}5$, $y(1{,}5) = 10$	Варіант 6. $y(0) = 0$, $y(0{,}6) = 1{,}5$, $y(0{,}9) = 3{,}5$, $y(1{,}5) = 8$
Варіант 7. $y(0) = 0{,}5$, $y(0{,}2) = 1{,}5$, $y(0{,}4) = 3{,}5$, $y(0{,}6) = 6{,}2$	Варіант 8. $y(1) = 10$, $y(2) = 12$, $y(3) = 15{,}5$, $y(4) = 20$

Завдання 4

Розв'язати диференціальне рівняння в діапазоні $x \in [0; 0{,}5]$ методом Ейлера. Крок прийняти 0,1.

Варіант 1. $y' - y = 3x$, $y(0) = -1$	Варіант 2. $y' - y^2 = x^2$, $y(0) = 1$
Варіант 3. $y' \cdot y = x^2 - y$, $y(0) = 1$	Варіант 4. $y' = x + \sin(y/3)$, $y(0) = 1$

Розв'язати диференціальне рівняння в діапазоні $x \in [0; 0{,}2]$ методом Рунге-Кутта. Крок прийняти 0,1.

Варіант 5. $y' + y = 2x$, $y(0) = 2$	Варіант 6. $y' - y^2 = x$, $y(0) = 1$
Варіант 7. $y' \cdot y = x^2 - y$, $y(0) = 1$	Варіант 8. $y' = x + \sin(y/3)$, $y(0) = 1$

Завдання 5

Знайти граничну відносну похибку частки (добутку, степеня), частку (добуток, степінь) і кількість правильних цифр у частці (добутку, степеня), якщо всі цифри діленого і дільника (множників, основи та степені) правильні

Варіант 1. частки $121{,}2 \div 2{,}354$	Варіант 2. добутку $21{,}66 \cdot 13{,}5$
Варіант 3. степеня $(8{,}15243)^3$	Варіант 4. степеня $(14{,}14356)^{0,5}$

Скільки правильних цифр потрібно взяти в наближенні числа, щоб відносна похибка не перевищувала 0,01% ?

Варіант 5. $\sqrt[4]{100}$	Варіант 6. $\sqrt[5]{1568}$

Знайти граничну абсолютну та граничну відносну похибки, якщо замість точного числа x взяте наближене число y

Варіант 7 $x = \sqrt{5}$; $y = 2{,}236$	Варіант 8 $x = \ln(100)$; $y = 4{,}605$

Завдання 6

Наведіть характеристику математичної моделі, розробленої в рамках Вашої бакалаврської дипломної роботи, та аналіз результатів числових експериментів, проведених з використанням даної моделі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Попырин Л. С. Математическое моделирование и оптимизация теплоэнергетических установок /Попырин Л. С. – М. : Энергия, 1978. – 416 с.
2. Белик В. Г. Справочник по математическому моделированию и оптимизации теплообменного оборудования сахарной промышленности /В. Г. Белик, И. И. Костанжи. – М. :Агропромиздат, 1986. – 356 с.
3. Арсенюк І. Р. Математичні методи дослідження об'єктів та систем. Частина 1. /Арсенюк І. Р., Роїк О. М., Месюра В. І. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 96с.
4. Арсенюк І. Р. Математичні методи дослідження об'єктів та систем. Частина 2. /Арсенюк І. Р., Роїк О. М., Месюра В. І.– Вінниця : ВНТУ, 2005. – 128 с.
5. Риндюк В. І. Математичні методи розв'язання інженерних задач у будівництві: навч. пос. /В. І. Риндюк, І. В. Коц. – Вінниця : ВНТУ. – 2006. – 118 с.
6. Ткаченко С. Й. Самозакипаючі потоки в дренажних каналах теплотехнологічних систем : моногр. /С. Й. Ткаченко, Н. Д. Степанова. – Вінниця : – УНІВЕРСУМ – Вінниця. – 2008. – 161 с.
7. Краскевич В. В. Численные методы в инженерных исследованиях /Краскевич В. В., Зеленский К. Х., Гречко В. И. – К. : Вища школа, 1986. – 263 с.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы /Бахвалов Н. С., Житков Н. П., Кобельков Г. М. – М. : Наука, 1987. – 598 с.
9. Радченко С. Г. Математичне моделювання і оптимізація технологічних систем /Радченко С. Г. – К. : Наукова школа, 2001. – 276 с.
10. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособ./ Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. – М. : Высш. шк., 1994. – 544 с.

ГЛОСАРІЙ

Алгоритмічна модель – Algorithmic model

Аналіз результатів досліджень – Analysis of the research result

Аналітична модель – Analytical model

Аналогове моделювання – Analog modeling

Апроксимація – Approximation

Бакалаврська дипломна робота – Bachelor diploma thesis

Відокремлення коренів – Separation of roots

Втрати тиску – Loss of pressure

Двофазний потік – Two-phase flow

Дескриптивна модель – Descriptive model

Джерела похибок – Sources of error

Диференціальне рівняння – Differential Equations

Дійсні корені рівняння – Real roots of the equation

Екстраполяція – Extrapolation

Етапи моделювання – Stages of modeling

Загальна характеристика моделі – General description of the model

Закон збереження енергії – The law of energy saving

Збіжність ітераційного процесу – The convergence of the iterative process

Значущі цифри – Significant digit

Зовнішні зв'язки системи – External relations of system

Імовірна похибка – Probable error

Інтерполяція – Interpolation

Класифікація моделей – Classification of models

Коефіцієнт теплопровідності – Thermal conductivity

Коефіцієнт тепловіддачі – The heat transfer coefficient

Критерій оптимізації – Criterion of optimization

Математична модель – Mathematical model

Математичне моделювання – Mathematical modeling

Математичний опис – Mathematical description

Матеріальний баланс – Material balance

Матриця коефіцієнтів – The matrix of coefficients

Метод збурення параметрів – The method of perturbation parameters

Метод найменших квадратів – The method of least squares

Метод прогнозу та корекції – The method of prediction and correction

Метод простих ітерацій – The method of simple iteration

Метод розв'язання – The method of solution

Метод хорд – Secant method

Метод похідних – Method of derivatives

Наближене число – Approximate number

Наближення функції – Approximation of functions

Наукове пізнання – Scientific knowledge

Нелінійне рівняння – Nonlinear Equations

Перевірка адекватності моделі – Checking the adequacy of the model

Похибки розрахункових величин – Errors calculated values

Пошук екстремуму – Search of extremum

Програмний продукт – Software

Розробка моделі – Developing of model

Самостійна робота студентів – Independent work of students

Середньоквадратичне відхилення – Standard deviation

Система лінійних алгебраїчних рівнянь – The system of linear algebraic equations

Система нелінійних рівнянь – The system of nonlinear equations

Системний підхід – Systems approach

Структурна модель – Structural model

Температура – Temperature

Теплова схема котельні – Thermal schema of boiler room

Тепловий баланс – Thermal balance

Теплогідродинамічні процеси – Heathydrodynamic processes

Теплоенергетика – Heat Power engineering

Теплоенергетичне обладнання – Heat power equipment

Оптимізація – Optimization

Числовий експеримент – Numerical experiment

Швидкість потоку – Speed of flow

Управлінська модель – The management model

Навчальне видання

Степанов Дмитро Вікторович

Степанова Наталія Дмитрівна

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ ТЕПЛОЕНЕРГЕТИЧНОГО ОБЛАДНАННЯ

Навчальний посібник

Редактор Є. Плетньова

Оригінал-макет підготовлено Д. Степановим

Підписано до друку 18.07.2017 р.
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 4,66.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2017-303.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 59-85-32, 59-87-38.
press.vntu.edu.ua; *e-mail:* kivc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.