А. А. Барковська, В. Д. Дереч

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ВЕКТОРНІ ТА ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

А. А. Барковська, В. Д. Дереч

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ВЕКТОРНІ ТА ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2016

УДК 517.1(075)
ББК 22.161я73
Б25

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 25.12.2014 р.)

Рецензенти:
В. А. Лужецький, доктор технічних наук, професор
В. Х. Касіяненко, доктор фізико-математичних наук, професор
В. С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Барковська, А. А.
Б25 Лінійна алгебра. Векторні та евклідові простори. Лінійні оператори : навчальний посібник / А. А. Барковська, В. Д. Дереч. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 120 с.

Навчальний посібник знайомить студентів технічних спеціальностей з основними поняттями та типовими алгоритмами лінійної алгебри. Особливу роль приділено вивченню лінійних операторів у векторному і евклідовому просторі. Лінійні рівняння розглянуті в найбільш загальній формі, що дає змогу студентові поглянути на різні типи лінійних рівнянь з єдиної точки зору. В кінці навчального посібника запропоновано 25 варіантів (кожний варіант складається з 6 завдань) для індивідуального домашнього завдання.

Призначений для студентів спеціальності 122 – «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» і спеціальності 124 – «Системний аналіз».

УДК 517.1(075)
ББК 22.161я73

ЗМІСТ

ВСТУП

Лінійна алгебра – одна з фундаментальних галузей математики. Її понятійний апарат (вектори, матриці, визначники, лінійне відображення, векторний простір, лінійне рівняння, власні значення і власні вектори, квадратичні форми і інше) використовуються в усіх галузях математики. Прикладний аспект лінійної алгебри важко переоцінити. Ми можемо лише перелічити ті галузі знань, де вона широко використовується – це фізика і інженерні науки, економіка і комп'ютерна анімація, природничі і комп'ютерні науки і таке інше. Оскільки лінійна алгебра є досить глибоко розвинутою галуззю математики, то її апарат використовують для лінійної апроксимації нелінійних процесів.

В технічних університетах елементи лінійної алгебри зазвичай викладають в курсі «Вища Математика». Однак обмежена кількість годин дозволяє лише торкнутися деяких найпростіших понять лінійної алгебри. В результаті в голові студента виникає тверде (але хибне) уявлення про те, що, скажімо, матриця – це таблиця чисел, яку можна використовувати хіба що для економного запису системи лінійних рівнянь. Погляд на матрицю як на перетворення яке, зокрема, може описувати поворот навколо осі або симетрію відносно прямої і який пояснює чому множення матриць визначають саме так а не інакше – геть відсутній. Аналогічно при такій обмеженій кількості годин лінійної алгебри в курсі «Вищої Математики» студентові зовсім невтямки чому, наприклад, рівняння $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ в класі числових послідовностей і рівняння $y'' + xy' + y = \sin x$ у класі диференційованих функцій відносять до лінійних, а, отже, при їх розв'язанні застосовуються аналогічні підходи.

Той чи інший рівень навчання студента визначається трьома питаннями: Чому? Як? Навіщо? Якщо студент зі своїх суб'єктивних уявлень вважає, що дана навчальна дисципліна – це непотріб, який вивчається виключно з метою «пудрення» мізків і, яка в подальшій його роботі не знадобиться, то у студента залишається тільки один стимул «гризти граніт науки» – заради одержання стипендії і омріяного диплома. Добре, якщо студент задається питанням – ЯК? Йому цікаво оволодівати тими чи іншими алгоритмами, розв'язувати типові задачі і одержувати правильні відповіді. Такі студенти складають, так би мовити, «середній клас» студентства, на якому тримається весь навчальний процес. Що треба робити студенту для того, щоб закріпитися у середньому класі? Для цього потрібно щонайменше оволодівати понятійним апаратом (в даному випадку – лінійної алгебри) і засвоювати техніку для реалізації різноманітних алгоритмів.

Найбільш якісне навчання відбувається під питанням – ЧОМУ? Таким (рідкісним) студентам недостатньо просто оволодіти тим чи іншим алгоритмом. Вони прагнуть більшого – обґрунтування алгоритму. А для цього треба заглиблюватися у теорію, що є зовсім непростою задачею особливо з огляду на недостатню кількість навчальних годин.

Пропонований навчальний посібник написаний для студентів спеціальності 122 – «Комп'ютерні науки та інформативні технології» і спеціальності 124 – «Системний аналіз» для вивчення курсу «Алгебра та геометрія». Зрозуміло, що будь-який навчальний посібник (або підручник) з того чи іншого розділу математики не може бути просто збірником алгоритмів для розв'язування типових задач. Вкраплення теорії у вигляді доведень є цілком доцільним хоча б для того, щоб задовольнити високі інтелектуальні вимоги найкращих студентів. Звісно, що доведення важких теорем, які потребують обґрунтування низки попередніх тверджень і саме доведення яких є доволі об'ємним, в даному посібнику відсутні. Що ж стосується тих тверджень, які супроводжуються доведеннями, то автори інколи користуються таким прийомом – теорема доводиться не в загальній формі, а для частинного випадку, при цьому не втрачаючи загальної ідеї доведення.

1 МАТРИЦІ. ДЕТЕРМІНАНТ МАТРИЦІ

1.1 Основні означення. Види матриць

Прямокутна таблиця, що складається з m рядків та n стовпців і елементами якої є дійсні або комплексні числа, називається ***матрицею*** (*matrix*) розмірності $m \times n$. Наприклад, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1{,}2 \end{pmatrix}$ – це матриця розмірності 2×2, а матриця $\left(1, \frac{2}{3}, -7, \frac{4}{3}\right)$ має розмірність 1×4. Елемент матриці, який знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця, позначають через a_{ij}. Зазвичай матриці позначають великими літерами $A, B, C, \ldots$ Інколи матрицю A зручно записувати у формі $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, де $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – відповідно 1-й, 2-й і т. д. n-ий стовпець матриці A.

Матриця називається ***квадратною*** (*square matrix*), якщо кількість її рядків дорівнює кількості стовпців. Матрицю розмірності $1 \times n$ називають ***матрицею – рядком*** (*row vector*) або просто рядком. Матрицю розмірності $m \times 1$ називають ***матрицею-стовпцем*** (*column vector*) або просто стовпцем. Якщо A – квадратна матриця розмірності $n \times n$, то її елементи $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ утворюють ***головну діагональ матриці*** (*main diagonal of matrix*), а елементи $\{a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}\}$ – побічну діагональ. Квадратна матриця називається ***діагональною*** (*diagonal matrix*), якщо всі її елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця називається ***скалярною*** (*scalar matrix*), якщо всі її елементи, що лежать на головній діагоналі, – однакові. Скалярна матриця називається ***одиничною*** (*identity matrix*), якщо її головна діагональ складається з одиниць. Одиничну матрицю будемо позначати через E. Матриця називається ***нульовою*** (*zero matrix*), якщо всі її елементи є нулі. Нульову матрицю позначають через O. Квадратна матриця, в якій усі елементи, що лежать вище (нижче) головної діагоналі є нульовими, називається ***нижньою (верхньою) трикутною матрицею*** (*lower triangular (upper triangular) matrix*). Наприклад, матриця

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

є верхньою трикутною.

1.2 Операції над матрицями. Основні властивості матричної алгебри

До основних операцій над матрицями належать такі: додавання і віднімання двох матриць, множення двох матриць, множення числа на матрицю і транспонування матриці. Операції ***додавання і віднімання*** *(addition and subtraction)* визначені лише для двох матриць однакової розмірності. Якщо A і B – матриці однакової розмірності, то (за означенням) елементи c_{ij} матриці $A+B$ знаходяться за правилом: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, де a_{ij} і b_{ij} – відповідні елементи матриць A та B. Аналогічно визначають віднімання двох матриць.

Приклад 1.1. Знайти $A+B$ і $A-B$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 6\\ 3 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 8\end{pmatrix}$.

Розв'язання. $A+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 6\\ 3 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & 10\\ 4 & 2 & 0 & 13\end{pmatrix}$.

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 6\\ 3 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & -4 & 2\\ 2 & 0 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Нехай A – матриця розмірності $m\times k$, а B – матриця розмірності $r\times n$. Операція множення матриці A на матрицю B визначена у випадку, коли $k=r$, тобто кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, і елементи c_{ij} матриці добутку $A\cdot B$ обчислюються за правилом: $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ik}b_{kj}$, де $(a_{i1},a_{i2},...,a_{ik})$ – i-й рядок матриці A, а $\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{kj}\end{pmatrix}$ – j-ий стовпець матриці B. Зазначимо, що у випадку коли $k=r$, розмірність матриці $A\cdot B$ дорівнює $m\times n$.

Приклад 1.2. Знайти $A\cdot B$ і $B\cdot A$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Насамперед зазначимо, що операції $A\cdot B$ і $B\cdot A$ визначені.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot(-1)+3\cdot 5\\ (-2)\cdot 0+4\cdot 2 & (-2)\cdot(-1)+4\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 14\\ 8 & 22\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&-1\\2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+(-1)\cdot(-2)&0\cdot3+(-1)\cdot4\\2\cdot1+5\cdot(-2)&2\cdot3+5\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\-8&26\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $A\cdot B\neq B\cdot A$, тому переставний закон для матричного множення не виконується.

Вищенаведені операції є бінарними (бі – це два), тобто для їх виконання треба задіяти дві матриці. Тепер розглянемо дві унарні (уно – це один) операції. А саме: операцію множення числа на матрицю і операцію транспонування матриці.

Нехай A – довільна матриця розмірності $m\times n$, а λ – довільне число. Добуток числа λ на матрицю A – це матриця розмірності $m\times n$, яка позначається через $\lambda\cdot A$ і елементи якої c_{ij} обчислюються за правилом: $c_{ij}=\lambda a_{ij}$, де a_{ij} – елементи матриці A.

Нехай A – довільна матриця розмірності $m\times n$. ***Транспонована*** (*transpose*) матриця позначається через A^T і утворюється з матриці A шляхом заміни кожного i-го рядка матриці A на i-й стовпець матриці A^T. Розмірність матриці A^T дорівнює $n\times m$. У матрицях A і A^T елементи a_{ij} і a'_{ij} пов'язані рівністю $a'_{ij}=a_{ji}$ для всіх $i=1,2,...,n$ і $j=1,2,...,m$.

Отже, якщо

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix},\text{ то } A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\dots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\dots&a_{m2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{1n}&a_{2n}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1&0\\-5&7\\0&9\\4&1\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}1&-5&0&4\\0&7&9&1\end{pmatrix}$.

Позначимо через M_n множину усіх квадратних матриць розмірності $n\times n\ (n\geq 2)$. На цій множині визначені усі вищенаведені операції. Отже, можна говорити про матричну алгебру на множині M_n. Перелічимо основні її властивості.

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$.
2. $A+B=B+A$.
3. $A+O=O+A=A$.
4. Матричне рівняння $A+X=B$ має єдиний розв'язок для будь-яких матриць A і B.
5. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

6. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
7. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
8. Існують матриці A і B такі, що $A \cdot B \neq B \cdot A$.
9. $A \cdot E = E \cdot A = A$ для довільної матриці A.
10. $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$ для будь-якого числа λ.
11. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ для довільного числа λ.
12. $\lambda \cdot (\beta \cdot A) = (\lambda\beta) \cdot A$ для довільних чисел λ і β.
13. $(\lambda + \beta) \cdot A = \lambda \cdot A + \beta \cdot A$ для будь-яких чисел λ і β.
14. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
15. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$ для довільного числа λ.
16. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
17. $\left(A^T\right)^T = A$.

Якщо на множині M_n обмежитися лише бінарними операціями, то можна констатувати деяку аналогію з числовою алгеброю. Однак є і суттєві відмінності: по-перше операція множення матриць не є комутативною (див. властивість 8), крім того (на відміну від числової алгебри) з умови
$A \cdot B = O$ не випливає, що $A = O$ або $B = O$.

1.3 Детермінант матриці другого порядку

Детермінант (або визначник) – це основна числова характеристика квадратної матриці. До визначення детермінанта матриці n-го порядку підійдемо поступово. Спочатку дамо означення детермінантів матриці другого та третього порядків і вивчимо їх властивості.

Отже, нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. ***Детермінант (determinant)*** матриці A за означенням це число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Його позначають через $\det A$ або $|A|$. Перелічимо основні властивості детермінанта матриці другого порядку.

1. Детермінант транспонованої матриці дорівнює детермінанту даної матриці. Тобто $\det A = \det A^T$.
2. Якщо в матриці поміняти місцями будь-які два рядки або стовпці, то детермінант матриці міняє знак на протилежний.
3. Якщо в матриці є нульовий рядок (він складається лише з нулів) або нульовий стовпець, то детермінант такої матриці дорівнює нулю.
4. Якщо матриця містить пропорційні рядки або стовпці, то детермінант такої матриці дорівнює нулю.

5. Спільний множник елементів будь-якого рядка або стовпця можна винести за знак детермінанта. Наприклад, $\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.
6. Якщо в матриці A елементи деякого фіксованого рядка подаються у вигляді суми двох доданків (наприклад, $a_{11} = a'_{11} + a''_{11}$, $a_{12} = a'_{12} + a''_{12}$), то $\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Аналогічна властивість має місце і для стовпців.
7. Якщо i-й рядок помножити на деяке число, додати до j-го рядка $(i \neq j)$ і результат записати замість j-го рядка, то одержуємо матрицю детермінант якої дорівнює детермінанту даної матриці. Аналогічна властивість має місце і для стовпців.
8. Детермінант трикутної матриці (верхньої або нижньої) дорівнює добутку діагональних елементів.
9. Якщо A і B – матриці другого порядку, то $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Перелічені властивості детермінанта 2-го порядку легко перевіряються.

1.4 Детермінант матриці третього порядку

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця третього порядку. Детермінантом матриці A називають число, яке обчислюється за таким правилом:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Щоб легше було запам'ятати формулу для обчислення детермінанта матриці третього порядку використовують такі схеми:

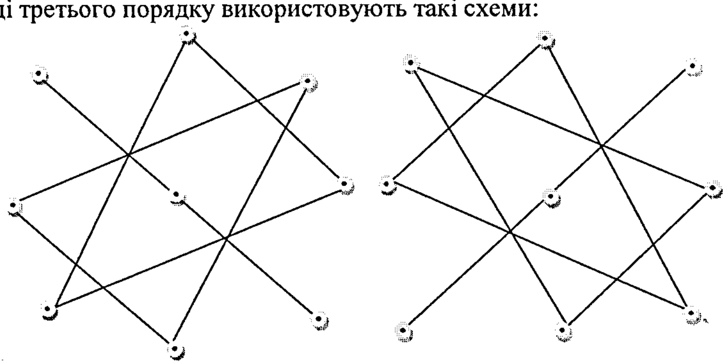

Рисунок 1

Обчислення доданків зі знаком «+» здійснюють за схемою, що зліва на рисунку 1. Тут чорними кружечками позначені елементи матриці, що розташовані по головній діагоналі і у вершинах двох трикутників. Обчислення доданків зі знаком «–» здійснюють за схемою, що справа на рисунку 1. Тут чорними кружечками позначені елементи матриці, що розташовані на побічній діагоналі і у вершинах двох трикутників. Таке правило обчислення детермінанта матриці третього порядку називають ***«правилом трикутників»***.

Приклад 1.3 Обчислити $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot 6 + 0\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 4\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot 0 - (-1)\cdot 1\cdot 3 - 0\cdot 4\cdot 6 = 21.$$

Зазначимо, що властивості детермінанта матриці третього порядку точно такі, як і детермінанта матриці другого порядку.

За допомогою властивості 7 (див. властивості детермінанта матриці другого порядку) будь-яку матрицю не змінюючи її детермінанта можна звести до трикутного виду. Згідно із властивістю 8, детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, що лежать на головній діагоналі.

Обчислимо методом зведення матриці до трикутного виду детермінант попереднього прикладу.

1-й крок. Перший рядок матриці множимо на 4, додаємо до другого рядка і результат записуємо замість другого рядка. Одержуємо:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

2-й крок. Другий рядок одержаної матриці множимо на (–3), додаємо до третього рядка і результат записуємо замість третього рядка. Отримуємо:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -21 \end{vmatrix} = 21.$$

1.5 Мінор і алгебраїчне доповнення. Теорема про розкладання детермінанта матриці за елементами рядка. Теорема анулювання

Нехай a_{ij} – довільний елемент матриці третього порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Викреслюємо i-й рядок і j-й стовпець, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}. Одержуємо матрицю другого порядку. Детермінант цієї матриці позначають через M_{ij} і називають ***мінором елемента ((i,j) minor)*** a_{ij}.

Число $(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ позначають через A_{ij} і називають ***алгебраїчним доповненням*** елемента a_{ij}.

Приклад 1.4. Дано матрицю $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Обчислити алгебраїчні доповнення A_{21} і A_{33}.

Розв'язання. A_{21} – це алгебраїчне доповнення елемента $a_{21}=1$. Викреслюємо другий рядок і перший стовпець даної матриці. Одержуємо матрицю $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-6$. A_{33} – це алгебраїчне доповнення елемента $a_{33}=-3$. Викреслюємо третій рядок і третій стовпець матриці A. Отримуємо матрицю $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=-13$.

Теорема 1.1 (про розкладання детермінанта). Детермінант матриці дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Для матриці третього порядку в символічній формі теорема записується так:

$$\det A = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}\ \ (i=1,2,3)\ \text{або}$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}\ \ (j=1,2,3).$$

Доведення. Для прикладу перевіримо справедливість теореми для $i=1$.

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}=\det A.$$

Теорема 1.2 (анулювання). Сума добутків елементів довільного рядка (або стовпця) матриці на відповідні алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (або стовпця) дорівнює нулю.

Для матриці третього порядку в символічній формі теорема анулювання записується так:

якщо $i \neq k$, то $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0 \quad (i,k = 1,2,3)$ або

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + a_{3i}A_{3k} = 0.$$

Доведення. Для прикладу перевіримо справедливість теореми анулювання для $i = 1,\ k = 3$.

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right) - a_{12}\left(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}\right) + a_{13}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) =$$

$$= a_{11}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{13}a_{22} - a_{12}a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21} + a_{13}a_{11}a_{22} - a_{13}a_{12}a_{21} = 0.$$

1.6 Поняття про детермінант довільної матриці

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Детермінантом матриці n-го порядку називається число, що дорівнює сумі добутків усіх елементів **першого рядка** на їх алгебраїчні доповнення.

За цим означенням обчислення детермінанта матриці n-го порядку фактично зводиться (з урахуванням знаку) до обчислення n детермінантів n-1-порядку. Важливо зазначити, що усі властивості детермінантів матриці 2-го і третього порядків (ці властивості перелічені у п. 1.3) мають місце і для детермінанта довільної квадратної матриці. Зауважимо також, що теореми розкладання і анулювання теж виконуються.

Техніка обчислення детермінантів ґрунтується на властивості 7 (див. п. 1.3). Зокрема, завдяки цій властивості ми можемо робити такі перетворення матриці (не змінюючи її детермінант), щоб врешті одержати трикутну матрицю, детермінант якої дорівнює добутку діагональних елементів.

Приклад 1.5. Обчислити детермінант $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. 1-й крок. Додаємо перший і третій рядок. Суму записуємо замість третього рядка. Одержуємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2-й крок. Від четвертого рядка віднімаємо перший і результат записуємо замість четвертого. Маємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

3-й крок. Другий рядок множимо на (–3), додаємо до третього рядка і результат записуємо замість третього рядка. Одержуємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

4-й крок. Від четвертого рядка віднімаємо другий і результат записуємо замість четвертого рядка. Отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

5-й крок. Третій рядок множимо на (–2), додаємо до четвертого і результат записуємо замість четвертого рядка. Маємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3.$$

1.7 Обернена матриця

Будемо розглядати квадратні матриці розмірності $n \times n$. Матриця B називається ***оберненою (inverse)*** до матриці A, якщо

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

Легко показати, що не кожна матриця має обернену. Наприклад, для матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

оберненої не існує. Якщо матриця має обернену, чи буде вона єдиною? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 1.3. Якщо матриця A має обернену, то вона єдина.

Доведення. Нехай матриці B і C – обернені до матриці A. Покажемо, що $B=C$. Оскільки матриці B і C є оберненими до матриці A, то виконуються рівності:

$$A \cdot B = B \cdot A = E \tag{1.1}$$

$$A \cdot C = C \cdot A = E \tag{1.2}$$

Першу рівність справа помножимо на матрицю C, а другу рівність зліва помножимо на матрицю B. Одержимо:

$$(A \cdot B) \cdot C = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = C \tag{1.3}$$

$$B \cdot (A \cdot C) = B \cdot (C \cdot A) = B \cdot E = B \tag{1.4}$$

Оскільки $(B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C)$, то з рівностей (1.3) і (1.4) випливає $B=C$. Єдину обернену матрицю до матриці A позначають через A^{-1}.

Матриця називається ***невиродженою (nonsingular)***, якщо її детермінант не дорівнює нулю.

Теорема 1.4. Якщо матриця A має обернену, то вона невироджена.

Доведення. З рівності $A \cdot A^{-1} = E$ випливає (див. властивість 9) рівність $\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Звідси $\det A \neq 0$, тобто матриця A є невиродженою.

Виконується і обернена теорема. Сформулюємо її для матриці третього порядку. Але спочатку дамо означення приєднаної матриці. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

довільна квадратна матриця. Транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці A, тобто матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

називається ***приєднаною*** (*adjugate*) матрицею для матриці A.

Теорема 1.5. Якщо матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ є невиродженою, то вона має обернену, причому

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Розглянемо добуток $A\cdot\tilde{A}$. Елементи матриці $A\cdot\tilde{A}$ позначимо через c_{ij}. Тоді $c_{ii}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\det A$ (див. теорему 1). Якщо $i\neq j$, то за теоремою анулювання $c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0$. Отже,

$$A\cdot\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Аналогічно можна довести, що $\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}\cdot A=E$, тобто матриця

$$\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

є оберненою до матриці A.

Зазначимо, що доведена теорема виконується для невироджених матриць довільної розмірності. Наведемо алгоритм знаходження оберненої матриці в загальній формі.

Отже, нехай дано квадратну матрицю:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1-й крок. Обчислюємо $\det A$. Якщо $\det A=0$, то матриця A не має оберненої. Якщо $\det A\neq 0$, то переходимо до кроку 2.

2-й крок. Обчислюємо алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці A і утворюємо приєднану матрицю

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3-й крок. Приєднану матрицю множимо на $\dfrac{1}{\det A}$ і одержуємо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наслідок. Нехай матриця B така, що $A\cdot B=E$. Тоді $B=A^{-1}$.

Доведення. Оскільки $A\cdot B=E$, то $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B=\det E=1$. Звідси $\det A\neq 0$. Отже, матриця A є невиродженою тому, згідно з теоремою 5 вона має обернену A^{-1}. Рівність $A\cdot B=E$ зліва помножимо на A^{-1}. Одержимо: $A^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot E=A^{-1}$. Оскільки $A^{-1}\cdot A=E$, то $E\cdot B=B=A^{-1}$.

Приклад 1.6. Знайти обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. 1-й крок. Обчислюємо детермінант матриці A.

$$\det A=2\cdot(-2)\cdot 4+0\cdot 4\cdot 1+1\cdot 3\cdot 1-0\cdot(-2)\cdot 1-2\cdot 3\cdot 1-1\cdot 4\cdot 4=-35.$$

Оскільки $\det A\neq 0$, то матриця A має обернену.

2-й крок. Обчислюємо алгебраїчні доповнення усіх елементів даної матриці:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-11,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-13,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=6,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-4,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=8,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=3,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-6,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-8.$$

Приєднана матриця має вигляд:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} -11 & -4 & 3 \\ -13 & 8 & -6 \\ 6 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Тоді $A^{-1} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -11 & -4 & 3 \\ -13 & 8 & -6 \\ 6 & -1 & -8 \end{pmatrix}$. Перевірка:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -11 & -4 & 3 \\ -13 & 8 & -6 \\ 6 & -1 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що обернена матриця знайдена правильно.

1.8 Шифрування повідомлень за допомогою матриць

Основні ідеї шифрування досить прості. Кожній букві алфавіту реальної мови (наприклад, української) ставимо у взаємно однозначну відповідність деякі символи або послідовності символів (це можуть бути послідовності крапок і тире як в азбуці Морзе або літери іншої мови, або цифри записані в тій чи іншій системі числення і таке інше). Таким чином процес шифрування – це задання взаємно однозначної функції на алфавіті реальної мови, а дешифрування полягає у застосуванні оберненої функції, коли абракадабра символів перетворюється в зрозумілий текст. Покажемо як можуть бути застосовані матриці для шифрування і дешифрування.

Кожній літері українського алфавіту (їх тридцять три) поставимо у відповідність її номер в алфавіті: $А \mapsto 1, Б \mapsto 2, В \mapsto 3, \ldots, Я \mapsto 33$. Для прикладу візьмемо українське слово АБЕТКА. Цьому слову відповідає послідовність цифр: 1, 2, 7, 23, 15, 1. Запишемо цю послідовність (по стовпцях) у вигляді квадратної матриці (у випадку, коли не вистачає чисел для формування квадратної матриці, наприкінці «вакантні місця» заповнюють нулями):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 23 & 0 \\ 2 & 15 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обираємо будь-яку невироджену квадратну матрицю, наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множимо матрицю A на P. Одержуємо матрицю

$$C = A \cdot P = \begin{pmatrix} -3 & 60 & 0 \\ 34 & 49 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, зашифроване повідомлення має вигляд: $-3, 34, 7, 60, 49, 1$. Для дешифрування одержаного повідомлення знаходимо матрицю обернену до матриці A:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Множимо матрицю A^{-1} (зліва) на матрицю $C = A \cdot P$ дістаємо матрицю повідомлення:

$$P = A^{-1} \cdot A \cdot P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 60 & 0 \\ 34 & 49 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 23 & 0 \\ 2 & 15 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає послідовність $1, 2, 7, 23, 15, 1$ і її літерний оригінал:

АБЕТКА

Отже, в процесі шифрування і дешифрування ми застосували матриці, множення матриць і алгоритм знаходження оберненої матриці.

2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Матричне рівняння. Матричний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь

Розглянемо матричне рівняння $A \cdot X = B$, де A і B – відомі матриці, розмірності яких відповідно $m \times m$ і $m \times n$, а X – невідома матриця розмірності $m \times n$.

Теорема 2.1. Якщо матриця A є невиродженою, то матричне рівняння $A \cdot X = B$ має причому єдиний розв'язок $X = A^{-1} \cdot B$.

Доведення. В ліву частину рівняння $A \cdot X = B$ замість X підставимо $A^{-1} \cdot B$. Одержимо $A \cdot A^{-1} \cdot B = E \cdot B = B$. Отже, матриця $A^{-1} \cdot B$ є розв'язком матричного рівняння $A \cdot X = B$. Покажемо, що це єдиний розв'язок. Дійсно, нехай матриця C розмірності $m \times n$ є розв'язком даного рівняння, тоді має місце рівність $A \cdot C = B$. Обидві частини останньої рівності зліва помножимо на A^{-1}. Одержимо: $A^{-1} \cdot A \cdot C = A^{-1} \cdot B$. Звідси $C = A^{-1} \cdot B$. Тобто матричне рівняння $A \cdot X = B$ має єдиний розв'язок.

Далі, рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, де $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b$ – відомі числа і $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ – невідомі, називається ***лінійним рівнянням з***

n невідомими. В загальній формі система m лінійних рівнянь з n невідомими записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (*)$$

У багатьох випадках систему лінійних рівнянь (*) зручно записувати у матричній формі. Позначимо через A матрицю коефіцієнтів при невідомих, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далі, через X і B позначимо відповідно матриці-стовпці $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Тоді СЛР (*) можна записати у компактній матричній формі $A \cdot X = B$.

Якщо система лінійних рівнянь (*) є квадратною, тобто кількість її рівнянь дорівнює кількості невідомих і, крім того квадратна матриця A є невиродженою, то, застосувавши теорему 2.1, СЛР можна розв'язувати матричним методом.

Приклад 2.1. Систему лінійних рівнянь розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4, \\ 2x + 3y - 3z = 2, \\ 3x + y + z = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо дану СЛР у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Будемо шукати матрицю, обернену до матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо детермінант і алгебраїчні доповнення усіх елементів:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{11} = 6,\ A_{12} = -11,\ A_{13} = -7,\ A_{21} = 3,\ A_{22} = -5,\ A_{23} = -4,$$

$A_{31} = -3,\ A_{32} = 7,\ A_{33} = 5.$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -11 & -5 & 7 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Згідно із загальною формулою:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -11 & -5 & 7 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 4,\ y = -4,\ z = -2$.

2.2 Правило Крамера

Правило Крамера для розв'язування СЛР застосовується за тих же умов, що і матричний метод, тобто кількість невідомих має дорівнювати кількості рівнянь системи і матриця коефіцієнтів при невідомих має бути невиродженою.

Отже, нехай ми маємо СЛР, яка задовольняє вищенаведені умови:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (**)$$

Введемо позначення: через A будемо позначати квадратну матрицю коефіцієнтів при невідомих СЛР. Через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ позначимо відповідно перший, другий і так далі n-ий стовпець матриці A, а через B – матрицю-стовпець ***вільних*** членів. Тоді СЛР (**) можна записати у формі:

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \ldots + x_n \cdot A_n = B.$$

Далі, через Δ_k позначимо детермінант матриці, яку ми одержуємо з матриці A, замінивши її k-й стовпець стовпцем вільних членів.

Теорема (правило Крамера). Якщо система лінійних рівнянь є квадратною і матриця коефіцієнтів при невідомих є невиродженою, то така СЛР має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\det A}.$$

Доведення. З теореми 2.1 випливає, що дана система лінійних рівнянь має причому єдиний розв'язок. Нам залишається обґрунтувати правило

обчислення невідомих. Нехай $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ – розв'язок СЛР, тоді виконується рівність $x_1^* \cdot A_1 + x_2^* \cdot A_2 + ... + x_n^* \cdot A_n = B$. Обчислимо Δ_1. Маємо: $\Delta_1 = \det(B, A_2, A_3, ..., A_n) = \det\left(x_1^* \cdot A_1 + x_2^* \cdot A_2 + ... + x_n^* \cdot A_n, A_2, A_3, ..., A_n\right) =$
$= x_1^* \det(A_1, A_2, A_3, ..., A_n) + x_2^* \det(A_2, A_2, A_3, ..., A_n) + x_3^* \det(A_3, A_2, A_3, ..., A_n) +$
$... + x_n^* \det(A_n, A_2, A_3, ..., A_n)$. Нагадаємо, що детермінант матриці, в якій є два рівні стовпці дорівнює нулю. Отже, в останній сумі усі доданки, крім першого, дорівнюють нулю. Таким чином,

$$\Delta_1 = x_1^* \det(A_1, A_2, A_3, ..., A_n) = x_1^* \det(A).$$

Звідси $x_1^* = \dfrac{\Delta_1}{\det A}$. Аналогічно, $x_2^* = \dfrac{\Delta_2}{\det A}, ..., x_n^* = \dfrac{\Delta_n}{\det A}$.

2.3 Основні означення щодо системи лінійних рівнянь

Одним з основних понять лінійної алгебри є поняття лінійного рівняння. Це поняття формується поступово. В початковій школі розглядають найпростіше лінійне рівняння, а саме: $ax = b$. Згодом в шкільному курсі математики вивчають лінійні рівняння з двома і трьома невідомими, а також системи таких рівнянь. Загальне означення лінійного рівняння можна дати лише в курсі лінійної алгебри в термінах лінійного (векторного) простору і лінійного оператора. Якщо студент оволодів загальним означенням лінійного рівняння, то для нього стає цілком зрозумілим чому, скажімо, диференціальне рівняння $y' + xy = \sin x$ класифікується як лінійне або рівняння $a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2}$, що задається на множині усіх послідовностей дійсних чисел, теж належить до лінійних. Зрозуміло, що не існує загального методу розв'язування лінійних рівнянь тобто методу, який спрацьовує, скажімо, і у випадку лінійного диференціального рівняння і у випадку системи звичайних лінійних рівнянь. Однак загальні теореми про структуру загального розв'язку лінійного однорідного і лінійного неоднорідного рівняння дають нам чіткі орієнтири як нам треба діяти в конкретному випадку.

Ми почнемо зі звичайного лінійного рівняння з n невідомими. Рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ (*), де $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b$ – відомі числа і $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ – невідомі, називається ***лінійним рівнянням з n невідомим*** *(linear equation in n unknowns)*. Число b називають вільним членом, а числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ – коефіцієнтами при невідомих. Лінійне рівняння (*) називають ***однорідним*** *(homogeneous)*, якщо $b = 0$. В протилежному випадку рівняння (*) називають ***неоднорідним*** *(inhomogeneous)*.

Створення математичних моделей в будь-якій природничій науці часто приводить до розгляду системи лінійних рівнянь (СЛР). СЛР зустрічаються в усій математиці і так званні лінійні методи, кінцевим продуктом яких часто є розв'язки лінійних систем, утворюють її найбільш розвинуту частину. В загальній формі система m лінійних рівнянь з n невідомими записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (**)$$

СЛР (**) називають ***однорідною***, якщо всі рівняння цієї системи є однорідними. Впорядкований набір чисел $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ називається ***розв'язком*** *(solution)* СЛР (**), якщо при підстановці $x_k \mapsto x_k^*$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ в усі рівняння системи ми одержуємо m тотожностей. СЛР називається ***сумісною*** (*consistent)*, якщо вона має хоча б один розв'язок. В протилежному випадку вона називається ***несумісною*** (*inconsistent*). Сумісна СЛР називається ***визначеною***, якщо вона має точно один розв'язок. Дві системи лінійних рівнянь (A) і (B) називаються ***еквівалентними*** (*equivalent*), якщо кожний розв'язок системи (A) є розв'язком системи (B) і навпаки. Іншими словами СЛР (A) і (B) еквівалентні, якщо множини їх розв'язків рівні між собою. Той факт, що СЛР (A) і (B) є еквівалентними позначають символом $(A) \sim (B)$. Бінарне відношення $\sim$ має такі властивості:

1. $(A) \sim (A)$;
2. Якщо $(A) \sim (B)$, то $(B) \sim (A)$;
3. Якщо $(A) \sim (B)$ і $(B) \sim (C)$, то $(A) \sim (C)$.

2.4 Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь. Східчаста форма СЛР. Метод Гауса

До елементарних перетворень СЛР (**) належать такі:

1. Перестановка будь-яких двох рівнянь системи.
2. Множення будь-якого рівняння системи на число відмінне від нуля.
3. Додавання будь-яких двох рівнянь системи.

Зауваження. Звісно, коли ми множимо рівняння на число, відмінне від нуля, то треба на це число множити і ліву, і праву частину рівняння. Коли ж ми додаємо два рівняння системи, то суму цих рівнянь ми записуємо замість одного з цих рівнянь. Також цілком зрозуміло, якщо в результаті елементарних перетворень, ми одержуємо рівняння вигляду $0 = 0$, то його слід просто відкинути.

Має місце простий, але фундаментальний факт.

Теорема 2.2. В результаті елементарних перетворень над СЛР (**) ми одержуємо СЛР, яка еквівалентна даній системі.

Ця теорема добре відома ще зі школи.

Фундаментальну роль також відіграє наступна теорема.

Теорема 2.3. Будь-яку СЛР (**) в результаті елементарних перетворень можна звести до східчастої форми. А саме:

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1, \\ \quad \overline{a}_{2k}x_k + \ldots\ldots\ldots\ldots + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2, \\ \quad\quad a_{3l}x_l + \ldots\ldots\ldots + \overline{a}_{3n}x_n = \overline{b}_3, \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad \overline{a}_{rs}x_s + \ldots + \overline{a}_{rn}x_n = \overline{b}_r, \\ \quad\quad\quad\quad 0 = \overline{b}_{r+1}, \\ \quad\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad 0 = \overline{b}_m. \end{cases} \qquad (***)$$

де $\overline{a}_{11}\overline{a}_{2k}\overline{a}_{3l}...\overline{a}_{rs} \neq 0,\ 1 < k < l < ... < s.$

Доведення цієї теореми просте, але дещо об'ємне. Тут найголовніше практично вміти зводити СЛР до східчастого виду.

Невідомі $x_1, x_k, x_l, ..., x_s$ називаються ***головними*** (*dependent*). Всі інші невідомі називаються ***вільними*** (*free or independent*). Слід зазначити, що поняття «вільна невідома» чи «головна невідома» є відносними. Наприклад, у рівнянні $2x + 4y - 3z = 1$ ми можемо «призначити» головною невідомою y, тоді вільні невідомі – це $\{x, z\}$. Або в цьому ж рівнянні ми можемо взяти за головну невідому x, тоді $\{y, z\}$ – це вільні невідомі. Зазначимо також, що незалежно від того яким шляхом ми зводимо СЛР до східчастої форми – кількість вільних невідомих буде одна і таж. В цьому випадку говорять, що число вільних невідомих є ***інваріантом*** (*invariant*) при елементарних перетвореннях СЛР.

Приклад 2.2. СЛР звести до східчастої форми та встановити кількість вільних невідомих:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння помножимо на (–2), додамо до другого і результат запишемо замість другого рівняння (при цьому перше рівняння залишаємо без змін). Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - \ x_3 + \ 5x_4 = 7, \\ \quad -5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = -14. \end{cases}$$

Легко переконатися, що остання СЛР має східчасту форму. Тут $\{x_1, x_2\}$ – головні невідомі, а $\{x_3, x_4\}$ – вільні невідомі. Число вільних невідомих дорівнює 2.

Приклад 2.3. СЛР звести до східчастої форми та встановити кількість вільних невідомих:

$$\begin{cases} x+3y-z=7, \\ 3x-y+4z=1, \\ -2x+y+2z=0. \end{cases}$$

Розв'язання. 1-ий крок. Перше рівняння помножимо на (–3), додамо до другого і результат запишемо замість другого рівняння (при цьому, перше і третє рівняння залишаємо без змін). Одержуємо:

$$\begin{cases} x+3y-z=7, \\ \quad -10y+7z=-20, \\ -2x+y+2z=0. \end{cases}$$

2-й крок. Перше рівняння помножимо на 2, додамо до третього рівняння і результат запишемо замість третього рівняння (при цьому перше і друге рівняння залишається без змін). Отримаємо:

$$\begin{cases} x+3y-z=7, \\ \quad -10y+7z=-20, \\ \qquad 7y+0z=14. \end{cases}$$

Останню СЛР перепишемо так:

$$\begin{cases} x-z+\ \ 3y=7, \\ \quad 7z-10y=-20, \\ \qquad\qquad 7y=14. \end{cases}$$

Форма останньої СЛР є східчастою. Вільні невідомі відсутні. Всі невідомі є головними.

Виникає питання: для чого СЛР зводити до вищезгаданої форми? Відповідь проста – СЛР, яка записана в східчастій формі легко досліджувати. Питання сумісності вирішується дуже просто:

СЛР (***) несумісна тоді і тільки тоді, коли вона містить рівняння вигляду $0=\overline{b}_t$, *де* $\overline{b}_t \neq 0$.

Відповідно, СЛР (***) сумісна тоді і тільки тоді, коли в ній відсутні рівняння вигляду $0=\overline{b}_t$, *де* $\overline{b}_t \neq 0$.

Сформулюємо ще кілька важливих тверджень.

Теорема 2.4. Сумісна СЛР є визначеною тоді і лише тоді, коли одержана з неї (в результаті елементарних перетворень) східчаста СЛР не містить вільних невідомих.

Теорема 2.5. Якщо східчаста сумісна СЛР містить вільні невідомі, то така система має безліч розв'язків. Надаючи вільним невідомим усіх можливих довільних значень і однозначно виразивши головні невідомі через надані значення вільних невідомих, ми одержуємо множину усіх розв'язків СЛР.

Теорема 2.6. Якщо в однорідній СЛР кількість невідомих більша за кількість рівнянь, то така система має ненульовий розв'язок.

Викладений нами метод розв'язування СЛР називають методом Гауса або методом послідовного виключення невідомих. Для СЛР невеликої розмірності цей метод легко реалізується на комп'ютері. Однак на практиці з тих чи інших причин часом перевагу віддають наближеним ітераційним методам (див. [2]). Слід також зазначити, що для теоретичних потреб важливу роль відіграють також інші методи розв'язування СЛР, а саме – матричний метод і метод Крамера (див. п. 2.1 і п. 2.2).

Приклад 2.4. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок СЛР:

$$\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z==-2. \end{cases}$$

Розв'язання. 1-й крок. Перше рівняння помножимо на (–2), додамо до другого рівняння і результат запишемо замість другого рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ -3y+3z=-3, \\ x-y-z==-2. \end{cases}$$

2-й крок. Перше рівняння останньої СЛР множимо на (–1), додаємо до третього рівняння і результат записуємо замість третього рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ -3y+3z=-3, \\ -3y+3z=-3. \end{cases}$$

3-й крок. Друге рівняння останньої СЛР множимо на (–1), додаємо до третього рівняння і результат записуємо замість третього рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ -3y+3z=-3 \\ 0=0. \end{cases}$$

4-й крок. В останній СЛР відкидаємо рівняння $0=0$. Одержуємо СЛР в східчастій формі:

$$\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ -3y+3z=-3. \end{cases}$$

Як бачимо, СЛР є сумісною. Невідома z є вільною, а невідомі $\{x,y\}$ – головні. Надаємо вільній невідомій значення c, тоді (з другого рівняння) $y=c+1$, а (з першого рівняння) $x=2c-1$. Відповідь запишемо у вигляді матриці-стовпця

$$\begin{pmatrix} 2c-1 \\ c+1 \\ c \end{pmatrix}.$$

Можна сказати, що матриця-стовпець

$$\begin{pmatrix} 2c-1 \\ c+1 \\ c \end{pmatrix}$$

є, так би мовити, генератором усіх розв'язків – надаючи числу c довільних конкретних значень ми одержуємо конкретні розв'язки. Наприклад, покладемо $c=0$. Цьому значенню відповідає розв'язок $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Якщо ж, скажімо, $c=1$, то відповідний розв'язок $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 2.5. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок СЛР:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

Розв'язання. 1-й крок. Перше рівняння помножимо на (–3), додамо до другого рівняння і результат запишемо замість другого рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ -4x_2 + 12x_3 + 8x_4 = -16, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

2-й крок. Спростимо друге рівняння, поділивши його на (–4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

3-й крок. Перше рівняння останньої СЛР множимо на (–2), додаємо до третього рівнянням і результат записуємо замість третього рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ \quad x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ \quad x_2 + 21x_3 + 10x_4 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

4-й крок. Перше рівняння останньої СЛР множимо на (–3), додаємо до четвертого рівнянням і результат записуємо замість четвертого рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ \quad x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ \quad x_2 + 21x_3 + 10x_4 = -6, \\ \quad -x_2 + 21x_3 + 20x_4 = -25. \end{cases}$$

Доки СЛР не набула східчастої форми, діємо далі.

5-й крок. Друге рівняння останньої СЛР множимо на (–1), додаємо до третього рівнянням і результат записуємо замість третього рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ \quad x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ \quad 24x_3 + 12x_4 = -10, \\ \quad -x_2 + 21x_3 + 20x_4 = -25. \end{cases}$$

6-й крок. Додаємо друге і четверте рівняння і результат записуємо замість четвертого рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ \quad x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ \quad 24x_3 + 12x_4 = -10, \\ \quad 18x_3 + 18x_4 = -21. \end{cases}$$

7-й крок. Третє рівняння ділимо на 24, а четверте – на 18. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ \quad x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ \quad x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{5}{12}, \\ \quad x_3 + \quad x_4 = -\frac{7}{6}. \end{cases}$$

8-й крок. Третє рівняння множимо на (–1), додаємо до четвертого рівняння і записуємо результат замість четвертого рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ \quad x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ \quad\quad x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{5}{12}, \\ \quad\quad\quad \frac{1}{2}x_4 = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Остання СЛР має східчасту форму. Оскільки в ній відсутні рівняння типу $0=b$, де $b \neq 0$, то вона сумісна. Оскільки дана система не містить вільних невідомих, то згідно з теоремою 2.4, вона визначена, тобто має лише один розв'язок. Далі будемо рухатися знизу вверх. З четвертого рівняння знаходимо $x_4 = -\frac{3}{2}$. Підставляємо одержане значення x_4 в третє рівняння. Отримуємо $x_3 = \frac{1}{3}$. Підставляємо значення x_3 і x_4 в друге рівняння і обчислюємо $x_2 = 2$. Нарешті, підставляючи знайдені значення x_2, x_3, x_4 в перше рівняння, отримуємо $x_1 = 0$.

Відповідь: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{3}{2}$.

Приклад 2.6. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок СЛР:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. 1-й крок. Перше рівняння ділимо на 3. Решту рівнянь залишаємо без змін. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = \frac{2}{3}, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

2-й крок. Перше рівняння множимо на (–7), додаємо до другого рівняння і результат записуємо замість другого рівняння. Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = \frac{2}{3}, \\ \quad \frac{23}{3}x_2 - \frac{11}{3}x_3 - \frac{19}{3}x_4 = \frac{1}{3}, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

3-й крок. Перше рівняння множимо на (–5), додаємо до третього рівняння і результат записуємо замість третього рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{5}{3}x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 + \dfrac{4}{3}x_4 = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{23}{3}x_2 - \dfrac{11}{3}x_3 - \dfrac{19}{3}x_4 = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{46}{3}x_2 - \dfrac{22}{3}x_3 - \dfrac{38}{3}x_4 = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

4-й крок. Друге рівняння множимо на (–2), додаємо до третього рівняння і результат записуємо замість третього рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{5}{3}x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 + \dfrac{4}{3}x_4 = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{23}{3}x_2 - \dfrac{11}{3}x_3 - \dfrac{19}{3}x_4 = \dfrac{1}{3}, \\ 0 = -1. \end{cases}$$

Отже, дана СЛР несумісна.

3 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

3.1 Основні означення

У фізиці існує чимало важливих величин для характеристики яких недостатньо лише одного числа. Цілком зрозуміло, що наприклад сила визначається не тільки величиною, але і напрямом. Аналогічне твердження має місце і для швидкості, прискорення, кутового моменту, імпульсу, напруженості електричного і магнітного полів. Для зображення таких величин застосовують стрілки. Отже, напрямлений відрізок у просторі називають **вектором** (vector). Якщо точка A – початок вектора, а точка B – кінець, то такий вектор позначають через $\overline{AB}$. Інші позначення вектора – $\overline{a}$ і $\vec{a}$. Довжина відрізка AB – це і є довжина вектора $\overline{AB}$. Вона позначається через $\left|\overline{AB}\right|$. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***ортом***. Вектор, початок і кінець якого збігаються, позначають через $\overline{0}$ і називають ***нульовим*** вектором. Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать або на одній прямій або розташовані на паралельних прямих.

Два колінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ можуть бути або ***однаково напрямлені*** або ***протилежно напрямлені***. На рисунку 2 вектори однаково напрямлені, а на рисунку 3 – протилежно напрямлені.

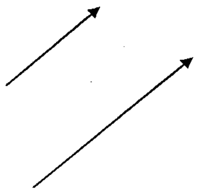

Рисунок 2

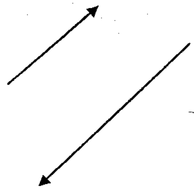

Рисунок 3

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ вважаються рівними, якщо $|\overline{a}|=|\overline{b}|$ і вони однаково напрямлені.

3.2 Лінійні операції над векторами

До лінійних операцій над векторами належать операція додавання і операція множення вектора на число. Якщо вектор розглядати як силу, то ці дві операції мають переконливу практичну інтерпретацію. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ додаються за відомим правилом паралелограма або правилом трикутника.

Нехай λ – довільне дійсне число і $\overline{a}$ – довільний ненульовий вектор. Добутком числа λ на вектор $\overline{a}$ називають вектор (його позначають через $\lambda \cdot \overline{a}$), довжина якого $|\lambda \cdot \overline{a}|$ дорівнює числу $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$. Якщо $\lambda > 0$, то вектори $\overline{a}$ і $\lambda \cdot \overline{a}$ однаково напрямлені. Якщо ж $\lambda < 0$, то вектори $\overline{a}$ і $\lambda \cdot \overline{a}$ протилежно напрямлені. Зазначимо також, що $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$ і $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$ для будь-якого вектора $\overline{a}$.

Перелічимо основні властивості лінійних операцій над векторами:

1. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ має місце рівність: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (*комутативність* додавання векторів);
2. Для довільних векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ виконується рівність: $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$ (*асоціативність* додавання);
3. Існує вектор $\overline{0}$ такий, що для довільного вектора $\overline{a}$ має місце рівність: $\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}$ (існування *нульового* вектора);
4. Для кожного вектора $\overline{u}$ існує вектор $\overline{x}$ такий, що $\overline{u}+\overline{x}=\overline{x}+\overline{u}=\overline{0}$ (існування *протилежного* вектора);
5. Для будь-яких дійсних чисел α, β і вектора $\overline{u}$ виконується рівність: $\alpha \cdot (\beta \cdot \overline{u}) = (\alpha\beta) \cdot \overline{u}$ (*асоціативність* множення на число);
6. Для довільного вектора $\overline{u}$ має місце рівність $1 \cdot \overline{u} = \overline{u}$ (*унарність* множення на числа); крім того виконуються два дистрибутивні закони:

7. Для будь-яких чисел α і β та вектора $\overline{u}$ маємо:
   $(\alpha+\beta)\cdot\overline{u}=\alpha\cdot\overline{u}+\beta\cdot\overline{u}$;
8. Для довільного числа α та векторів $\overline{u}$ і $\overline{v}$ маємо:
   $\alpha\cdot(\overline{u}+\overline{v})=\alpha\cdot\overline{u}+\alpha\cdot\overline{v}$.

3.3 Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис. Координати вектора в даному базисі

Система векторів $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\}$ називається ***лінійно залежною*** (*linearly dependent*), якщо існують числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ (не всі рівні нулю) такі, що виконується рівність $\lambda_1\cdot\overline{u}_1+\lambda_2\cdot\overline{u}_2+...+\lambda_n\cdot\overline{u}_n=\overline{0}$.

Система векторів $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\}$ називається ***лінійно незалежною*** (*linearly independent*), якщо з рівності $c_1\cdot\overline{u}_1+c_2\cdot\overline{u}_2+...+c_n\cdot\overline{u}_n=\overline{0}$ випливає $c_1=c_2=...=c_n=0$.

Сформулюємо деякі твердження, що стосуються лінійної залежності і незалежності сукупності векторів.

Твердження 3.1. Система векторів, що містить нуль-вектор є лінійно залежною.

Твердження 3.2. Якщо підсистема системи векторів є лінійно залежною, то лінійно залежною є і вся система.

Твердження 3.3. Якщо система векторів є лінійно незалежною, то і будь-яка підсистема є лінійно незалежною.

Твердження 3.4. Для того, щоб два ненульові вектори були лінійно залежні, необхідно і достатньо, щоб вони були колінеарні.

Твердження 3.5. Для того, щоб три ненульові вектори були лінійно залежні, необхідно і достатньо, щоб вони були компланарні.

Кажуть, що впорядкована трійка векторів $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ утворює ***базис (basis)*** у просторі, якщо виконуються такі умови:

1) вектори $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ є лінійно незалежними;
2) для будь-якого вектора $\overline{p}$ існують числа x,y,z такі, що виконується рівність $\overline{p}=x\cdot\overline{a}+y\cdot\overline{b}+z\cdot\overline{c}$, тобто вектор $\overline{p}$ є лінійною комбінацією векторів $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$.

Впорядкований набір чисел (x,y,z) називають ***координатами вектора*** $\overline{p}$ в базисі $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.

Твердження 3.6. Координати вектора в даному базисі визначаються однозначно.

Твердження 3.7. Будь-які три некомпланарні вектори у просторі утворюють базис.

Далі, числовою віссю називають пряму лінію, на якій визначено напрям, фіксовано початкову точку і задано масштаб.

Нехай у просторі задано числову вісь l і вектор $\overline{AB}$. Позначимо через A' і B' відповідно проекції точок A і B на числову вісь l. Нехай x_1 і x_2 – координати відповідно точок A' та B'.

Число $x_2 - x_1$ називають ***проекцією вектора*** (*vector projection*) $\overline{AB}$ на вісь l і позначають через $np_l\overline{AB}$. Якщо φ – кут між вектором $\overline{a}$ і віссю l, то $np_l\,\overline{a} = |\overline{a}|\cdot\cos\varphi$. Проекція вектора на вісь має такі властивості:

1. $np_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = np_l\,\overline{a} + np_l\,\overline{b}$.

2. $np_l\,\lambda\cdot\overline{a} = \lambda np_l\,\overline{a}$ для будь-якого числа λ.

Аналогічно визначають проекцію вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$. А саме: ***проекцією вектора*** $\overline{a}$ ***на вектор*** $\overline{b}$ називають число $|\overline{a}|\cdot\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Проекцію $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ позначають через $np_{\overline{b}}\overline{a}$.

Вище ми вже зазначали, що у тривимірному просторі будь-які три некомпланарні вектори утворюють базис. Серед безлічі базисів простору окремо виділяють ***декартів базис***. Зафіксуємо у просторі декартову систему координат. Визначимо базисні вектори $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ таким чином: початки цих векторів збігаються з початком координат, вектор $\overline{i}$ лежить на осі OX і однаково напрямлений з цією віссю, вектор $\overline{j}$ лежить на осі OY і однаково напрямлений з віссю OY, вектор $\overline{k}$ лежить на осі OZ і однаково напрямлений з віссю OZ. Крім того, $|\overline{i}|=|\overline{j}|=|\overline{k}|=1$. Базис $\left(\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right)$ називають ***декартовим базисом***. Координати (x,y,z) вектора $\overline{a}$ в базисі $\left(\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right)$ називають ***декартовими координатами*** вектора $\overline{a}$.

Твердження 3.8. Якщо (x,y,z) декартові координати вектора $\overline{a}$, то $x = np_{OX}\,\overline{a}$, $y = np_{OY}\,\overline{a}$, $z = np_{OZ}\,\overline{a}$.

Надалі (якщо не оговорено протилежне) під координатами вектора на площині або у просторі за замовчуванням будемо вважати декартові координати. Нехай точка $A(x_1;y_1;z_1)$ – початок, а точка $B(x_2;y_2;z_2)$ – кінець вектора $\overline{AB}$, то, згідно з твердженням 8, $(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ – це координати вектора $\overline{AB}$. Якщо вектор $\overline{a}$ має координати (x,y,z), то, застосовуючи теорему Піфагора, одержуємо:

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Позначимо через α,β,γ кути, що утворює вектор $\overline{q}$ відповідно з осями OX, OY, OZ. Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – це ***напрямні косинуси*** вектора $\overline{q}$.

Якщо $|\overline{a}|=1$, то $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – координати вектора $\overline{a}$, для яких виконується співвідношення: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3.4 Поділ відрізка у заданому відношенні

Нехай $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ – довільні точки у просторі. Наша задача на відрізку M_1M_2 знайти точку M, яка ділить відрізок M_1M_2 у заданому відношенні $\lambda=\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$.

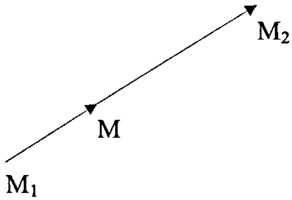

Рисунок 4

Позначимо через $(x;y;z)$ координати шуканої точки M. Очевидно, що для векторів $\overline{M_1M}$ і $\overline{MM_2}$ має місце рівність $\overline{M_1M}=\lambda\cdot\overline{MM_2}$. Останню рівність запишемо в координатній формі:

$$(x-x_1;y-y_1;z-z_1)=\lambda\cdot(x_2-x;y_2-y;z_2-z).$$

Прирівнявши відповідні координати обох сторін останньої рівності отримуємо:

$$x=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda\cdot z_2}{1+\lambda}.$$

Зокрема, координати середини відрізка M_1M_2 знаходять за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

3.5 Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком (*dot product or scalar product*) двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають число

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi,$$

де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Оскільки $np_{\overline{b}}\overline{a}=|\overline{a}|\cos\varphi$ і $np_{\overline{a}}\overline{b}=|\overline{b}|\cos\varphi$, то маємо

$$\overline{a}\bullet\overline{b}=|\overline{a}|np_{\overline{a}}\overline{b}=|\overline{b}|np_{\overline{b}}\overline{a}.$$

З фізики відомо, що робота A сили $\overline{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\overline{S}$ дорівнює

$$A=|\overline{F}||\overline{S}|\cos\varphi,$$

де φ – кут між вектором сили $\overline{F}$ і вектором переміщення $|\overline{S}|$. Тобто

$$A=\overline{F}\bullet\overline{S}.$$

Перелічимо ***основні властивості скалярного добутку.***

1. $\overline{a}\bullet\overline{b}=\overline{b}\bullet\overline{a}$.
2. $\lambda\cdot(\overline{a}\bullet\overline{b})=(\lambda\cdot\overline{a})\bullet\overline{b}$ для довільного дійсного числа λ.
3. $\overline{a}\bullet(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\bullet\overline{b}+\overline{a}\bullet\overline{c}$.
4. Якщо $\overline{a}\neq\overline{0}$, то $\overline{a}\bullet\overline{a}>0$.
5. $\overline{a}\bullet\overline{a}=|\overline{a}||\overline{a}|$, звідки $|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}\bullet\overline{a}}$.

3.6 Вираження скалярного добутку через координати співмножників. Кут між векторами

Нехай $(a_x;a_y;a_z)$ – координати вектора $\overline{a}$ і $(b_x;b_y;b_z)$ – координати вектора $\overline{b}$. Використовуючи властивості скалярного добутку, отримаємо:

$$\overline{a}\bullet\overline{b}=\left(a_x\cdot\overline{i}+a_y\cdot\overline{j}+a_z\cdot\overline{k}\right)\cdot\left(b_x\cdot\overline{i}+b_y\cdot\overline{j}+b_z\cdot\overline{k}\right)=$$
$$=a_xb_x\cdot\overline{i}\bullet\overline{i}+a_xb_y\cdot\overline{i}\bullet\overline{j}+a_xb_z\cdot\overline{i}\bullet\overline{k}+a_yb_x\cdot\overline{j}\bullet\overline{i}+a_yb_y\cdot\overline{j}\bullet\overline{j}+a_yb_z\cdot\overline{j}\bullet\overline{k}+$$
$$+a_zb_x\cdot\overline{k}\bullet\overline{i}+a_zb_y\cdot\overline{k}\bullet\overline{j}+a_zb_z\cdot\overline{k}\bullet\overline{k}.$$

Оскільки $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ – попарно перпендикулярні вектори одиничної довжини, то $\overline{i}\bullet\overline{j}=\overline{i}\bullet\overline{k}=\overline{j}\bullet\overline{k}=0$ і $\overline{i}\bullet\overline{i}=\overline{j}\bullet\overline{j}=\overline{k}\bullet\overline{k}=1$. Отже,

$$\overline{a}\bullet\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Останню формулу зручно використовувати для знаходження модуля (довжини) вектора і кута між векторами. Нехай $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)$, то

$$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Якщо φ – кут між векторами $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)$ і $\overline{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Необхідна і достатня умова перпендикулярності двох ненульових векторів $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$ виражається рівністю:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

3.7 Векторний добуток двох векторів

Векторним добуток (*cross product or vector product*) вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$. Який задовольняє такі три умови:

1. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;
2. Модуль вектора $\overline{c}$ дорівнює $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\overline{a},\overline{b}})$;
3. Якщо дивитися з кінця вектора $\overline{c}$, то найкоротший поворот від вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ відбувається проти ходу годинникової стрілки (рисунок 5).

Векторний добуток вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ позначають символом $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

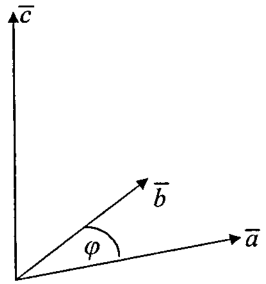

Рисунок 5

Перелічимо ***основні властивості векторного добутку.***

1. Антикомутативність множення:

$$\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a}).$$

2. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c} \text{ і } (\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}.$$

3. Асоціативність відносно скалярного множника λ:

$$\lambda\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=\lambda\cdot\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a}\times\lambda\cdot\overline{b}.$$

4. Для довільного числа λ і довільного вектора $\overline{a}$ виконується рівність:

$$\lambda\cdot\overline{a}\times\overline{a}=\overline{0}.$$

5. Якщо вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ звести до спільного початку, то модуль векторного добутку $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

3.8 Координати векторного добутку

Нехай $\overline{a}=\left(a_x;\,a_y;\,a_z\right)$ і $\overline{b}=\left(b_x;\,b_y;\,b_z\right)$. Знайдемо координати векторного добутку $\overline{a}\times\overline{b}$. Спочатку перемножимо базисні вектори $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$:

$$\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=\overline{0},\ \overline{i}\times\overline{j}=\overline{k},\ \overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j},$$
$$\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k},\ \overline{j}\times\overline{k}=\overline{i},\ \overline{k}\times\overline{i}=\overline{j},\ \overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i}.$$

Використовуючи властивості 1–4, а також табличку множення базисних векторів, одержимо:

$$\begin{aligned}
\overline{a}\times\overline{b}&=\left(a_x\cdot\overline{i}+a_y\cdot\overline{j}+a_z\cdot\overline{k}\right)\times\left(b_x\cdot\overline{i}+b_y\cdot\overline{j}+b_z\cdot\overline{k}\right)=\\
&=a_xb_x\cdot\left(\overline{i}\times\overline{i}\right)+a_xb_y\cdot\left(\overline{i}\times\overline{j}\right)+a_xb_z\cdot\left(\overline{i}\times\overline{k}\right)+\\
&+a_yb_x\cdot\left(\overline{j}\times\overline{i}\right)+a_yb_y\cdot\left(\overline{j}\times\overline{j}\right)+a_yb_z\cdot\left(\overline{j}\times\overline{k}\right)+\\
&+a_zb_x\cdot\left(\overline{k}\times\overline{i}\right)+a_zb_y\cdot\left(\overline{k}\times\overline{j}\right)+a_zb_z\cdot\left(\overline{k}\times\overline{k}\right)=\\
&=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\cdot\overline{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\cdot\overline{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\cdot\overline{k}=\\
&=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\overline{k}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Приклад 3.1. Обчислити площу трикутника, заданого вершинами $A(1;\,2;\,2)$, $B(2;\,2;\,1)$, $C(1;\,3;\,2)$.

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Оскільки $\overline{AB}=(1;0;-1)$ і $\overline{AC}=(0;1;0)$, то $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot\overline{i}+0\cdot\overline{j}+1\cdot\overline{k}$. Отже,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.9 Мішаний добуток трьох векторів. Його основні властивості

Нехай дано три вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Число $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$ називають ***мішаним добутком трьох векторів*** $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Виходячи безпосередньо з означення, ми можемо встановити простий спосіб обчислення мішаного добутку. Нехай $\overline{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right), \overline{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right), \overline{c}=\left(c_x;c_y;c_z\right)$. Тоді (див. попередній пункт)

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\overline{k}.$$

Помноживши вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ скалярно на вектор $\overline{c}$, одержимо:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Перелічимо основні властивості мішаного добутку.

1. При циклічній перестановці векторів мішаний добуток не змінюється:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{a}=\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\cdot\overline{b}.$$

2. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутку можна міняти місцями:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right).$$

3. Модуль мішаного добутку $\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right|$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Обґрунтуємо третю властивість. Візьмемо три некомпланарних вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, які мають спільний початок. На цих векторах побудуємо паралелепіпед (рисунок 6). Об'єм цього паралелепіпеда $V=SH$, де S – площа основи і H – висота паралелепіпеда. Оскільки $S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$ і $H=\left|np_{\overline{a}\times\overline{b}}\overline{c}\right|$, то $V=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|\left|np_{\overline{a}\times\overline{b}}\overline{c}\right|=\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right|$.

З третьої властивості безпосередньо випливає наступна властивість.

4. Три ненульові вектори компланарні тоді і лише тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

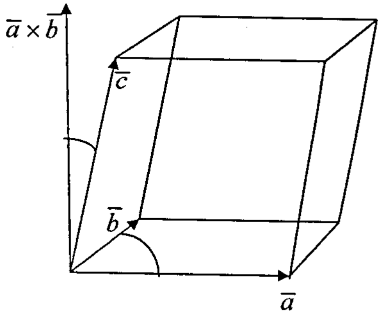

Рисунок 6

Приклад 3.2. Знайти об'єм трикутної піраміди, яка задана координатами своїх вершин $A(1;3;2)$, $B(2;4;2)$, $C(1;3;5)$, $D(3;3;5)$.

Розв'язання. Відомо, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD},$ дорівнює $\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|$, а об'єм трикутної піраміди $ABCD$ дорівнює $\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|$. Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. $\overline{AB}=(1;1;0)$, $\overline{AC}=(0;0;3)$, $\overline{AD}=(2;0;3)$.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&3\\2&0&3\end{vmatrix}=1.$$

Приклад 3.3. Чи утворюють вектори

$$\overline{a}=(2;0;4),\overline{b}=(1;3;-1),\overline{c}=(4;0;1)$$

базис? Якщо «так», то знайти координати вектора $\overline{p}=(1;2;0)$ в цьому базисі.

Розв'язання. Відомо, що у просторі будь-які три некомпланарні вектори утворюють базис. Обчислимо мішаний добуток даних векторів:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}2&0&4\\1&3&-1\\4&0&1\end{vmatrix}=-42\neq 0.$$

Таким чином, вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють базис. Отже, знайдуться числа x,y,z такі, що $\overline{p}=x\cdot\overline{a}+y\cdot\overline{b}+z\cdot\overline{c}$. Або в координатній формі: $(1;2;0)=x\cdot(2;0;4)+y\cdot(1;3;-1)+z\cdot(4;0;1)=(2x;0;4x)+(y;3y;-y)+(4z;0;z)=$ $=(2x+y+4z;3y;4x-y+z)$. Звідси виникає СЛР:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1, \\ 3y = 2, \\ 4x - y + z = 0. \end{cases}$$

Одержуємо: $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 0$.

Відповідь: $\left(\frac{1}{6}; \frac{2}{3}; 0\right)$ – координати вектора $\overline{p}$ в базисі $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$.

4 ВЕКТОРНИЙ (ЛІНІЙНИЙ) ПРОСТІР

4.1 Основні поняття і приклади

Насамперед зазначимо, що векторний простір і лінійний простір – це синоніми. Поняття вектора виникає при спробі знайти математичний образ інтуїтивного поняття фізичної сили. Для нас зрозуміло, що сила характеризується не тільки величиною, а й також напрямом. Отже, силу зручно зображати (на площині або просторі) у вигляді стрілочки. Природним чином виникають дві операції – бінарна операція додавання стрілочок і унарна операція множення числа на стрілочку. Ці операції переконливо інтерпретуються простими фізичними експериментами. Крім того, говорячи про силу не слід виключати і таку, яка дорівнює нулю. Якщо, наприклад, на матеріальну точку діють дві сили однакової величини і протилежні за напрямом, то, очевидно, результуюча цих сил дорівнює нулю. Вона зображується «стрілочкою», початок і кінець якої збігаються. Будемо ототожнювати дві стрілочки, якщо їх можна сумістити за допомогою паралельного переносу. Таким чином, на множині усіх векторів-стрілочок можна задати алгебраїчну структуру з двома вищезгаданими операціями. Позначимо вектор-стрілочку через $\overline{a}$ і перелічимо основні властивості цієї алгебраїчної структури.

Кожній впорядкованій парі векторів $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ однозначно ставлять у відповідність вектор $\overline{a} + \overline{b}$.

1. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ має місце рівність: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (*комутативність* додавання векторів);
2. Для довільних векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ виконується рівність: $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)$ (*асоціативність* додавання);
3. Існує вектор $\overline{0}$ такий, що для довільного вектора $\overline{a}$ має місце рівність: $\overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$ (існування *нульового* вектора);

4. Для кожного вектора $\overline{u}$ існує вектор $\overline{x}$ такий, що $\overline{u}+\overline{x}=\overline{x}+\overline{u}=\overline{0}$ (існування *протилежного* вектора);
довільному числу λ і вектору $\overline{u}$ ставлять у відповідність вектор $\lambda\cdot\overline{u}$.
5. Для будь-яких дійсних чисел α,β і вектора $\overline{u}$ виконується рівність: $\alpha\cdot(\beta\cdot\overline{u})=(\alpha\beta)\cdot\overline{u}$ (*асоціативність* множення на число);
6. Для довільного вектора $\overline{u}$ має місце рівність $1\cdot\overline{u}=\overline{u}$ (*унарність* множення на числа); крім того виконуються два дистрибутивні закони:
7. Для будь-яких чисел α і β та вектора $\overline{u}$ маємо: $(\alpha+\beta)\cdot\overline{u}=\alpha\cdot\overline{u}+\beta\cdot\overline{u}$;
8. Для довільного числа α та векторів $\overline{u}$ і $\overline{v}$ маємо: $\alpha\cdot(\overline{u}+\overline{v})=\alpha\cdot\overline{u}+\alpha\cdot\overline{v}$.

Узагальнення цієї конструкції полягає в тому, що ми будемо розглядати множину V, на якій визначено дві операції: бінарна операція додавання і унарна операція множення на число. Якщо ці операції задовольняють усі 8 умов (які є просто властивостями відповідних операцій над векторами-стрілочками), то таку множину (разом з вищезгаданими операціями) називають ***векторним (або лінійним) простором*** *(vector (or linear) space)*. Елементи векторного простору будемо називати ***векторами.*** Зауважимо також, що під числами ми розуміємо дійсні або комплексні числа.
Наведемо приклади.

Приклад 1. Нехай $M_{m,n}$ – множина усіх матриць розмірності $m\times n$, тобто матриць, які містять m рядків і n стовпців. Як легко перевірити, відносно звичайної операції додавання матриць і операції множення числа на матрицю, ми одержуємо векторний простір. Зокрема, якщо $m=1$, то ми одержуємо векторний простір матриць-рядків розмірності $1\times n$. Зазвичай такий простір позначають через R^n.

Приклад 2. Множина усіх многочленів, степінь яких не перевищує задане натуральне число n. Відносно звичайної операції додавання многочленів і множення многочлена на число ми отримуємо векторний простір, який зазвичай позначають через P_n.

Приклад 3. Легко перевірити, що сума двох довільних розв'язків однорідної СЛР є розв'язком. Аналогічно множення числа на розв'язок є розв'язком однорідної СЛР. Отже, множина усіх розв'язків однорідної СЛР (з операціями додавання і множення на число) є лінійним простором.

Приклад 4. Множина усіх дійсних функцій, визначених на відрізку $[a,b]$. Відносно звичайної операції додавання функцій і множення числа на функцію – це векторний простір, який ми позначимо через $F_{[a,b]}$.

Приклад 5. Множина усіх дійсних і неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Відносно звичайної операції додавання функцій і множення числа на функцію це векторний простір, який стандартно позначається через $C_{[a,b]}$.

Приклад 6. Множина усіх диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій. Ця множина замкнена відносно додавання і множення на число. Іншими словами, сума двох диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій є диференційована функція. Крім того, помноживши число на диференційовану функцію ми знов одержуємо диференційовану функцію. Отже, множина усіх диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій утворює лінійний простір, який позначають через $D_{[a,b]}$.

Перелічимо деякі елементарні властивості лінійного простору:

1. Існує лише один нульовий вектор;
2. Для будь-якого вектора $\overline{a}$ має місце рівність $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$;
3. Для довільного числа λ маємо: $\lambda\cdot\overline{0}=\overline{0}$;
4. Вектор $(-1)\cdot\overline{u}$ – це єдиний протилежний вектор до вектора $\overline{u}$;
5. Виконується закон скоротності, тобто з рівності $\overline{a}+\overline{x}=\overline{b}+\overline{x}$ випливає рівність $\overline{a}=\overline{b}$;
6. Якщо $\lambda\cdot\overline{a}=\overline{0}$ і $\lambda\neq 0$, то $\overline{a}=\overline{0}$;
7. Якщо $\lambda\cdot\overline{a}=\overline{0}$ і $\overline{a}\neq\overline{0}$, то $\lambda\neq 0$.

На довільному векторному просторі крім операції додавання векторів і множення числа на вектор природним чином визначають операцію віднімання векторів. А саме: за означенням $\overline{a}-\overline{b}$ це такий вектор $\overline{c}$, що $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$. Можна перевірити, що $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-1)\cdot\overline{b}$.

Нехай U – непорожня підмножина векторного простору V. Будемо називати U ***підпростором*** (*vector subspace*) векторного простору V, якщо з умови $\overline{u}_1,\overline{u}_2\in U$ випливає, що $\lambda_1\cdot\overline{u}_1+\lambda_2\cdot\overline{u}_2\in U$ для будь-яких $\lambda_1,\lambda_2\in R$. Легко зрозуміти, що підпростір U векторного простору V теж є векторним простором.

Приклад 7. Векторний простір усіх розв'язків однорідної СЛР з n невідомими є підпростором векторного простору R^n (див. приклади 1 і 3).

Приклад 8. Векторний простір $C_{[a,b]}$ є підпростором векторного простору $F_{[a,b]}$ (див. приклади 4 і 5).

Далі, нехай V – довільний векторний простір. Зафіксуємо множину векторів $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\}$. Легко перевірити, що сукупність векторів, кожний з яких можна подати у формі $\lambda_1\cdot\overline{u}_1+\lambda_2\cdot\overline{u}_2+...+\lambda_n\cdot\overline{u}_n$, утворює підпростір векторного простору V. Цей підпростір позначають через $\langle\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\rangle$ і називають ***лінійною оболонкою*** (*linear span*) системи векторів

$\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\}$. Зазначимо, що лінійна оболонка $\langle\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\rangle$ – це найменший (відносно включення) підпростір векторного простору V, що містить вектори $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\}$.

Кажуть, що вектор $\overline{b}$ є ***лінійною комбінацією*** (*linear combinations*) системи векторів $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$, якщо знайдуться числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ такі, що виконується рівність $\overline{b}=\alpha_1\cdot\overline{a}_1+\alpha_2\cdot\overline{a}_2,...,\alpha_n\cdot\overline{a}_n$.

Нехай U і W – підпростори векторного простору V, тоді $U\cap W$ теж підпростір векторного простору V. Далі, позначимо через $U+W$ множину усіх векторів, кожний з яких можна подати у вигляді $\overline{u}+\overline{w}$, де $\overline{u}\in U$ і $\overline{w}\in W$. Легко перевірити, що $U+W$ є підпростором векторного простору V.

4.2 Лінійна залежність і незалежність системи векторів. Базис. Координати вектора в даному базисі

Нехай V – векторний простір. Система векторів $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\}$ називається *лінійно залежною* (*linearly dependent*), якщо існують числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ (не всі рівні нулю) такі, що виконується рівність $\lambda_1\cdot\overline{u}_1+\lambda_2\cdot\overline{u}_2+...+\lambda_n\cdot\overline{u}_n=\overline{0}$.

Система векторів $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\}$ називається ***лінійно незалежною*** (*linearly independent*), якщо з рівності $c_1\cdot\overline{u}_1+c_2\cdot\overline{u}_2+...+c_n\cdot\overline{u}_n=\overline{0}$ випливає $c_1=c_2=...=c_n=0$.

Приклад 4.1. Нехай $M_{3,3}$ – векторний простір усіх квадратних матриць розмірності 3×3. Показати, що матриці $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ є лінійно незалежними.

Розв'язання. Припустимо, що

$$c_1\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+c_3\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix}c_1&0&0\\0&c_1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_2&c_2&c_2\\c_2&0&0\\c_2&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_3&0&2c_3\\0&c_3&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Одержуємо систему рівностей:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_2 = 0, \\ c_2 + 2c_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Тобто три дані матриці є лінійно незалежними.

Приклад 4.2. Показати, що сукупність функцій $\{\sin x, \cos x, \sin 2x\}$ є лінійно незалежною на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

Розв'язання. Нехай числа α, β і χ такі, що виконується тотожність

$$\alpha \cdot \sin x + \beta \cdot \cos x + \chi \cdot \sin 2x = 0.$$

Покладемо $x = 0$. Одержуємо:

$$\alpha \cdot \sin 0 + \beta \cdot \cos 0 + \chi \cdot \sin 0 = 0.$$

Звідси $\beta = 0$. Тепер покладемо $x = \frac{\pi}{2}$, тоді

$$\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \chi \cdot \sin \pi = 0.$$

Звідси, $\alpha = 0$. Поклавши $x = \frac{\pi}{4}$, одержуємо: $\chi \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 0$. Звідси $\chi = 0$. Отже, $\alpha = \beta = \chi = 0$, тобто сукупність функцій $\{\sin x, \cos x, \sin 2x\}$ є лінійно незалежною.

Приклад 4.3. Показати, що сукупність функцій $\{1, e^x, e^{2x}\}$ є лінійно незалежною на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

Доведення. Нехай числа c_0, c_1, c_2 такі, що виконується тотожність

$$c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} = 0.$$

Покладемо $x = 0$, тоді

$$c_0 + c_1 + c_2 = 0.$$

Далі продиференціюємо тотожність. Одержимо:

$$c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{2x} = 0.$$

Покладемо $x = 0$, тоді $c_1 + 2c_2 = 0$. Продиференціюємо тотожність

$$c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{2x} = 0.$$

Отримаємо:

$$c_1 \cdot e^x + 4c_2 \cdot e^{2x} = 0.$$

Покладемо $x = 0$, тоді $c_1 + 4c_2 = 0$. Отже, ми отримуємо СЛР:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + 2c_2 = 0, \\ c_1 + 4c_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок: $c_0 = c_1 = c_2 = 0$. Таким чином, сукупність функцій $\{1, e^x, e^{2x}\}$ є лінійно незалежною.

Сформулюємо деякі твердження, що стосуються лінійної залежності і незалежності сукупності векторів.

Твердження 4.1. Система векторів, що містить нуль-вектор, є лінійно залежною.

Твердження 4.2. Якщо підсистема системи векторів є лінійно залежною, то лінійно залежною є і вся система.

Твердження 4.3. Якщо система векторів є лінійно незалежною, то і будь-яка підсистема є лінійно незалежною.

Твердження 4.4. Якщо система векторів $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ є лінійно незалежною, то помноживши кожний вектор цієї системи на число, відмінне від нуля, ми одержимо лінійно незалежну систему векторів.

Доведення. Нехай кожне з чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – відмінне від нуля. Покажемо, що система векторів $\{\lambda_1 \cdot \overline{u}_1, \lambda_2 \cdot \overline{u}_2, ..., \lambda_n \cdot \overline{u}_n\}$ є лінійно незалежною. Справді, нехай числа β_1, $\beta_2, ..., \beta_n$ такі, що

$$\beta_1 \cdot (\lambda_1 \cdot \overline{u}_1) + \beta_2 \cdot (\lambda_2 \cdot \overline{u}_2) + ... + \beta_n \cdot (\lambda_n \cdot \overline{u}_n) = \overline{0}.$$

Звідси

$$(\beta_1 \lambda_1) \cdot \overline{u}_1 + (\beta_2 \lambda_2) \cdot \overline{u}_2 + ... + (\beta_n \lambda_n) \cdot \overline{u}_n = \overline{0}.$$

Оскільки за умовою система векторів $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ є лінійно незалежною, то

$$\beta_1 \lambda_1 = \beta_2 \lambda_2 = ... = \beta_n \lambda_n = 0.$$

Позаяк кожне з чисел λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_n$ є відмінним від нуля, то

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = 0.$$

Отже, система векторів $\{\lambda_1 \cdot \overline{u}_1, \lambda_2 \cdot \overline{u}_2, ..., \lambda_n \cdot \overline{u}_n\}$ є лінійно незалежною.

Твердження 4.5. Якщо система векторів $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_n\}$ є лінійно незалежною, то додавши будь-які два вектори цієї системи (при цьому, суму цих векторів ми записуємо замість одного з доданків), ми одержуємо лінійно незалежну систему векторів.

Доведення. Не втрачаючи загальність доведення, візьмемо, скажімо, вектори $\overline{u}_1$ і $\overline{u}_2$. Покажемо, що система векторів $\{\overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_n\}$ є лінійно незалежною. Нехай

$$\gamma_1 \cdot (\overline{u}_1 + \overline{u}_2) + \gamma_2 \cdot \overline{u}_2 + \gamma_3 \cdot \overline{u}_3 + ... + \gamma_n \cdot \overline{u}_n = \overline{0},$$

тоді

$$\gamma_1 \cdot \overline{u}_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \overline{u}_2 + \gamma_3 \cdot \overline{u}_3 + ... + \gamma_n \cdot \overline{u}_n = \overline{0}.$$

Позаяк система векторів $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_n\}$ є лінійно незалежною, то

$$\gamma_1 = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 = ... = \gamma_n = 0.$$

З останньої рівності випливає:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = ... = \gamma_n = 0.$$

Тобто система векторів $\{\overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_n\}$ є лінійно незалежною.

Далі, нехай ми маємо векторний простір V. Впорядкована система векторів $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ називається ***базисом векторного простору*** V (*basis of a vector space* V), якщо виконуються такі дві умови:

a) множина векторів $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ є лінійно незалежною;

b) будь-який вектор $\overline{u} \in V$ є лінійною комбінацією векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$. Тобто знайдуться числа $x_1, x_2, ..., x_n$ такі, що

$$\overline{u} = x_1 \cdot \overline{e}_1 + x_2 \cdot \overline{e}_2 + ... + x_n \cdot \overline{e}_n.$$

Впорядкований набір чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***координатами вектора*** $\overline{u}$ ***в базисі*** $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ (*coordinate vector of* $\overline{u}$ *relative to* $B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$).

Зауваження. Ми дали означення скінченного базису. Зауважимо, що не кожний векторний простір містить скінченний базис. Наприклад, векторні простори $F_{[a,b]}$, $C_{[a,b]}$, $D_{[a,b]}$ (див. приклади 4, 5, 6 з розділу 4) не містять скінченного базису. Якщо векторний простір має базис, що складається зі скінченної кількості векторів, то він (векторний простір) називається ***скінченновимірним***. Цілком зрозуміло, що будь-який скінченновимірний простір (над полем дійсних або комплексних чисел) містить нескінченну кількість базисів. Дійсно, якщо $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ – базис векторного простору V, то для довільного ненульового числа λ впорядкована система векторів $(\lambda\overline{e}_1, \lambda\overline{e}_2, ..., \lambda\overline{e}_n)$ теж є базисом.

Твердження 4.6. Координати вектора в даному базисі визначаються однозначно.

Доведення. Нехай впорядковані набори чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $(y_1, y_2, ..., y_n)$ є координатами вектора $\overline{a}$ в базисі $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$. Тоді виконуються такі дві рівності $\overline{a} = x_1 \cdot \overline{e}_1 + x_2 \cdot \overline{e}_2 + ... + x_n \cdot \overline{e}_n$ і $\overline{a} = y_1 \cdot \overline{e}_1 + y_2 \cdot \overline{e}_2 + ... + y_n \cdot \overline{e}_n$. Віднявши від першої рівності другу, одержуємо: $\overline{0} = (x_1 - y_1) \cdot \overline{e}_1 + (x_2 - y_2) \cdot \overline{e}_2 + ... + (x_n - y_n) \cdot \overline{e}_n$. Оскільки система векторів $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ є лінійно незалежною, то $(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = ... = (x_n - y_n) = 0$. Звідки, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$.

Приклад 4.4. Довести, що матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ утворюють базис у векторному просторі $M_{2,2}$ і знайти координати матриці $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ в цьому базисі.

Розв'язання. Нехай числа $\alpha, \beta, \chi, \delta$ такі, що виконується рівність

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \chi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності випливає:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \chi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \chi & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідки $\alpha = \beta = \chi = \delta = 0$. Отже, матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є лінійно незалежними. Тепер покажемо, що будь-яка матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

є лінійною комбінацією матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дійсно,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

утворюють базис у векторному просторі $M_{2,2}$. Тепер вже цілком зрозуміло, що впорядкований набір чисел $(2, 4, 3, 1)$ є координатами матриці $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ у розглянутому базисі.

Приклад 4.5. Довести, що впорядкована система многочленів $\left(1, x, x^2, x^3\right)$утворює базис у векторному просторі P_3 (див. приклад 2).

Розв'язання. Спочатку покажемо, що функції $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ лінійно незалежні на проміжку $(-\infty, +\infty)$. Отже, нехай на проміжку $(-\infty, +\infty)$ має місце тотожність $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 = 0$. Покладемо $x = 0$, тоді $a_0 = 0$. Продиференціюємо тотожність $a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 = 0$. Одержуємо: $a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 = 0$. Покладемо $x = 0$, тоді $a_1 = 0$. Діючи аналогічно, отримуємо $a_2 = a_3 = 0$. Отже, функції $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ є лінійно незалежними на проміжку $(-\infty, +\infty)$. Очевидно, що довільний многочлен у векторному просторі P_3 є лінійною комбінацією многочленів $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$. Таким чином, система многочленів $\left(1, x, x^2, x^3\right)$ утворює базис у векторному просторі P_3.

Обговоримо тепер поняття ***розмірності*** (*dimension*) скінченновимірного векторного простору. Тут важливу роли відіграє така теорема.

Теорема 4.1. Якщо у векторному просторі V існує базис, що складається з n векторів, то будь-які $n+1$ вектори є лінійно залежні.

Доведення. Нехай $E=\left(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\right)$ – базис векторного простору V, що містить n векторів. Якщо $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2,..., \overline{a}_{n+1}\}$ – довільна множина векторів, що складається з $n+1$ – го вектора, то існують числа λ_{ij} такі, що

$$\overline{a}_1=\lambda_{11}\cdot\overline{e}_1+\lambda_{21}\cdot\overline{e}_2+...+\lambda_{n1}\cdot\overline{e}_n,\ \overline{a}_2=\lambda_{12}\cdot\overline{e}_1+\lambda_{22}\cdot\overline{e}_2+...+\lambda_{n2}\cdot\overline{e}_n,...,$$
$$\overline{a}_{n+1}=\lambda_{1n+1}\cdot\overline{e}_1+\lambda_{2n+1}\cdot\overline{e}_2+...+\lambda_{nn+1}\cdot\overline{e}_n.$$

Чи існують числа $x_1, x_2,..., x_{n+1}$ такі, що виконується рівність

$$x_1\cdot\overline{a}_1+x_2\cdot\overline{a}_2+...+x_{n+1}\cdot\overline{a}_{n+1}=\overline{0}\,?$$

Або в розгорнутій формі:

$$x_1\cdot\left(\lambda_{11}\cdot\overline{e}_1+\lambda_{21}\cdot\overline{e}_2+...+\lambda_{n1}\cdot\overline{e}_n\right)+x_2\cdot\left(\lambda_{12}\cdot\overline{e}_1+\lambda_{22}\cdot\overline{e}_2+...+\lambda_{n2}\cdot\overline{e}_n\right)+...$$
$$+x_{n+1}\cdot\left(\lambda_{1n+1}\cdot\overline{e}_1+\lambda_{2n+1}\cdot\overline{e}_2+...+\lambda_{nn+1}\cdot\overline{e}_n\right)=$$
$$=\left(\lambda_{11}\cdot x_1+\lambda_{12}\cdot x_2+...+\lambda_{1n+1}\cdot x_{n+1}\right)\cdot\overline{e}_1+$$
$$+\left(\lambda_{21}\cdot x_1+\lambda_{22}\cdot x_2+...+\lambda_{2n+1}\cdot x_{n+1}\right)\cdot\overline{e}_2+...+$$
$$+\left(\lambda_{n1}\cdot x_1+\lambda_{n2}\cdot x_2+...+\lambda_{nn+1}\cdot x_{n+1}\right)\cdot\overline{e}_n=\overline{0}.$$

Оскільки вектори $\left(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\right)$ є лінійно незалежними, то

$$\begin{cases}\lambda_{11}\cdot x_1+\lambda_{12}\cdot x_2+...+\lambda_{1n+1}\cdot x_{n+1}=0,\\ \lambda_{21}\cdot x_1+\lambda_{22}\cdot x_2+...+\lambda_{2n+1}\cdot x_{n+1}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda_{n1}\cdot x_1+\lambda_{n2}\cdot x_2+...+\lambda_{nn+1}\cdot x_{n+1}=0.\end{cases}$$

В одержаній однорідній системі лінійних рівнянь кількість рівнянь менша за кількість невідомих, тому згідно з теоремою 2.6, існує ненульовий розв'язок $\left(x_1^*, x_2^*,..., x_{n+1}^*\right)$ цієї системи. Звідси маємо:

$$x_1^*\cdot\overline{a}_1+x_2^*\cdot\overline{a}_2+...+x_{n+1}^*\cdot\overline{a}_{n+1}=0,$$

тобто множина векторів $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_{n+1}\}$ є лінійно залежною.

Наслідок. Якщо у векторному просторі V існує базис, що складається з n векторів, то будь-який інший базис також складається з n векторів.

Кількість векторів базису скінченновимірного простору називають ***розмірністю*** векторного простору.

Твердження 4.7. Якщо векторний простір V має розмірність n, то будь-які n лінійно незалежні вектори утворюють базис.

Доведення. Нехай система $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$, що складається з n векторів, є лінійно незалежною. Щоб обґрунтувати, що впорядкований набір векторів $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n)$ утворює базис, достатньо показати, що лінійна оболонка $\langle\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\rangle$ збігається з усім векторним простором V. Припустимо протилежне, тобто $\langle\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\rangle \neq V$, тоді існує ненульовий вектор $\overline{b}$ такий, що $\overline{b} \notin \langle\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\rangle$. Покажемо, що система, яка складається з $n+1$ вектора $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n, \overline{b}\}$, є лінійно незалежною. Дійсно, припустимо, що виконується рівність $\lambda_1 \cdot \overline{u}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{u}_2 + ... + \lambda_n \cdot \overline{u}_n + \beta \cdot \overline{b} = \overline{0}$. Якщо припустити, що $\beta \neq 0$, то $\overline{b} \in \langle\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\rangle$. Суперечність, тобто $\beta = 0$, а, отже, $\lambda_1 \cdot \overline{u}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{u}_2 + ... + \lambda_n \cdot \overline{u}_n = \overline{0}$. Позаяк вектори $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ лінійно незалежні, то $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Таким чином, система $n+1$ векторів $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n, \overline{b}\}$ є лінійно незалежною, що суперечить теоремі 4.1.

4.3 Ранг системи векторів. Ранг матриці

Нехай V – векторний простір розмірності n, $A = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_k\}$ – довільна скінченна підмножина векторного простору V. Підмножина B $(B \subset A)$ лінійно незалежних векторів називається ***максимальною*** в A, якщо з умови $B \subset U \subset A$ випливає, що U – лінійно залежна система векторів. Наступне твердження можна довести за допомогою міркувань, які ми застосували при доведенні теореми 4.1.

Твердження 4.8. Дві максимальні лінійно незалежні підсистеми множини A містять однакову кількість векторів.

Число векторів максимальної лінійно незалежної підсистеми множини A називають ***рангом*** (*rank*) системи векторів A і позначають **через** $rank(A)$.

Далі, до ***елементарних*** перетворень системи векторів $A = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_m\}$ належать такі перетворення.

1. Множення довільного вектора системи A на число, відмінне від нуля.
2. Додавання будь-яких двох векторів системи A (сума записується замість одного з векторів-доданків).
3. Перестановка двох довільних векторів системи A.

Виявляється, що в результаті елементарних перетворень над системою векторів ми одержуємо систему векторів B таку, що $rank(A) = rank(B)$. Для прикладу доведемо це для елементарного перетворення 2. Отже, розглянемо систему векторів $A = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_k, \overline{u}_{k+1}, ..., \overline{u}_m\}$ причому $rank(A) = k$. Це означає, що існує максимальна лінійна незалежна підсистема множини векторів A, яка складається з k векторів. Будемо вважати, що $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_k\}$ є максимальною лінійно незалежною підсистемою системи векторів A. Тепер розглянемо множину векторів $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_k, \overline{u}_{k+1}, ..., \overline{u}_m\}$, яку ми одержали з системи A, замінивши в ній вектор $\overline{u}_2$ на $\overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Нехай $\overline{u}_r \in B$ і $\overline{u}_r \notin \{\overline{u}_1, \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_k\}$, тоді $\overline{u}_r \in A$ і $\overline{u}_r \notin \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_k\}$. Якщо $\overline{u}_r = \overline{0}$, то множина векторів $\{\overline{u}_1, \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_k, \overline{u}_r\}$ є лінійно залежною. Нехай $\overline{u}_r \neq \overline{0}$. Оскільки $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_k\}$ – максимальна лінійно незалежна підмножина множини векторів $A = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_k, \overline{u}_{k+1}, ..., \overline{u}_m\}$, то існують числа $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\}$ (не всі рівні нулю) такі, що $\overline{u}_r = x_1\overline{u}_1 + x_2\overline{u}_2 + x_3\overline{u}_3 + ... + x_k\overline{u}_k$.

1-й випадок. $x_1 \neq x_2$.

Тоді $\overline{u}_r = (x_1 - x_2)\overline{u}_1 + x_2(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) + x_3\overline{u}_3 + ... + x_k\overline{u}_k$. Оскільки $x_1 - x_2 \neq 0$, то множина векторів $\{\overline{u}_1, \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_k, \overline{u}_r\}$ є лінійно залежною.

2-й випадок. $x_1 = x_2 \neq 0$.

Тоді очевидно, що множина векторів $\{\overline{u}_1, \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_k, \overline{u}_r\}$ є лінійно залежною.

2-й випадок. $x_1 = x_2 = 0$.

Тоді принаймні одне з чисел $\{x_3, x_4, ..., x_k\}$ не дорівнює нулю, тобто знов множина векторів $\{\overline{u}_1, \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_k, \overline{u}_r\}$ є лінійно залежною.

Таким чином, $rank(A) = rank(B)$.

Теорема 4.2. Застосовуючи елементарні перетворення до системи векторів $A = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_k\}$, ми одержуємо систему векторів, ранг якої дорівнює $rank(A)$.

Далі, розглянемо матрицю K розмірності $m \times n$, тобто матриця K складається з m рядків і n стовпців. ***Рангом матриці*** K ***за рядками*** (*row rank of* K*)* називають максимальну кількість лінійно незалежних рядків матриці K. Аналогічно ***рангом матриці*** K ***за стовпцями*** *(column rank of* K*)* називають максимальну кількість лінійно незалежних стовпців матриці K.

Має місце такий результат.

Теорема 4.3. Ранг матриці M за рядками дорівнює рангу матриці M за стовпцями.

Ранг матриці M за рядками надалі будемо називати ***рангом матриці*** M і позначати через $rank(M)$. Як реально обчислити ранг матриці? Спочатку дамо означення східчастої (від слова сходинка) матриці. Кажуть, що матриця A має ***східчасту форму***, якщо:

1. Кожний її ненульовий рядок знаходиться вище будь-якого нульового рядка;

2. Ведучий член $(k+1)$ – го ненульового рядка знаходиться правіше ведучого члена k – го ненульового рядка.

Наприклад, матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є східчастою. А матриця

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

не належить до східчастих. Легко обґрунтувати таке твердження.

Твердження 4.9. Ранг східчастої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

Доведення наступної теореми є простим, однак рутинним. Для нас важливе її практичне застосування.

Теорема 4.4. В результаті елементарних перетворень будь-яку матрицю можна звести до східчастого виду.

Крім того, ще раз нагадаємо (див. теорему 4.2), що елементарні перетворення матриці не змінюють рангу цієї матриці.

Приклад 4.6. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. 1-й крок. Перший рядок множимо на 4, додаємо до другого рядка і результат записуємо замість другого рядка. Одержуємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-й крок. Другий рядок ділимо на 5. Одержуємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3-й крок. Перший рядок множимо на (–3), додаємо до третього рядка і результат записуємо замість третього рядка. Одержуємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & 12 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4-й крок. Перший рядок множимо на (–2), додаємо до четвертого рядка і результат записуємо замість четвертого рядка. Одержуємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & 12 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

5-й крок. Третій рядок ділимо на 4, а четвертий – на 3. Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6-й крок. Додаємо другий і третій рядок, а також другий і четвертий. Результати відповідно записуємо в третій і четвертий рядки. Одержуємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця має східчасту форму. Кількість її ненульових рядків дорівнює 2. Згідно з твердженням 4.9, ранг даної матриці дорівнює 2.

Далі, нехай ми маємо векторний простір R^n (цей простір складається з впорядкованих наборів дійсних чисел довжини n і його розмірність дорівнює n). Цілком актуально поставити таке питання: як практично встановити, чи утворюють n векторів простору R^n базис? Для цього треба розглянути квадратну матрицю, рядками якої є задані вектори, і обчислити ранг цієї матриці. Якщо її ранг дорівнює n, то дані вектори утворюють базис. В протилежному випадку дані вектори базису не утворюють.

Приклад 4.7. У векторному просторі R^4 задано чотири вектори:

$$\overline{a}=(1,2,3,4), \overline{b}=(-1,2,1,0), \overline{c}=(0,1,2,1), \overline{d}=(1,0,1,1).$$

Чи утворюють вектори $(\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d})$ базис у R^4? Якщо «так», то знайти координати вектора $\overline{p}=(0,1,0,1)$ у цьому базисі.

Розв'язання. Складемо квадратну матрицю, рядками якої є відповідно вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

За допомогою елементарних перетворень зведемо одержану матрицю до східчастого вигляду.

1-й крок. Додаємо два перші рядки матриці і суму записуємо замість другого рядка. Одержуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-й крок. Від 4-го рядка віднімаємо перший і результат записуємо замість четвертого рядка. Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3-й крок. Другий рядок множимо на $\frac{1}{4}$ і результат записуємо замість другого рядка. Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4-й крок. Віднімаємо від третього рядка другий і результат записуємо замість третього рядка. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5-й крок. Другий рядок множимо на 2 і додаємо до четвертого. Одержуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця має східчасту форму. Її ранг дорівнює кількості ненульових рядків, тобто 4. Отже, ранг даної матриці дорівнює 4. Оскільки ранг даної матриці збігається з розмірністю векторного простору R^4, то впорядкована множина векторів $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}\right)$ утворює базис у векторному просторі R^4.

Тепер знайдемо координати вектора $\overline{p}$. Існує впорядкований набір чисел $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ такий, що $x_1 \cdot \overline{a} + x_2 \cdot \overline{b} + x_3 \cdot \overline{c} + x_4 \cdot \overline{d} = \overline{p}$. Або в розгорнутій формі:

$$x_1 \cdot (1,2,3,4) + x_2 \cdot (-1,2,1,0) + x_3 \cdot (0,1,2,1) + x_4 \cdot (1,0,1,1) = (0,1,0,1).$$

З останньої рівності ми одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гауса.

1-й крок. Перше рівняння множимо на (–2), додаємо до другого рівняння і результат записуємо замість другого рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

2-й крок. Перше рівняння множимо на (–3), додаємо до третього рівняння і результат записуємо замість третього рівняння. Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

3-й крок. Перше рівняння множимо на (–4), додаємо до четвертого і результат записуємо замість четвертого рівняння. Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

4-й крок. Від третього рівняння віднімаємо друге і результат записуємо замість третього, аналогічно від четвертого рівняння віднімаємо друге і результат записуємо замість четвертого. Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_3 = -1, \\ -x_4 = 0. \end{cases}$$

Отже, $x_4 = 0, x_3 = -1, x_2 = x_1 = \dfrac{1}{2}$.

Відповідь: координати вектора $\overline{p}$ в базисі $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}\right)$ дорівнюють $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1,0\right)$.

4.4 Матриця переходу від одного базису до іншого. Перетворення координат вектора при заміні базису

Нехай $\left(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\right)$ і $\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\right)$ два довільні базиси лінійного простору V. Тоді знайдуться числа a_{ij} такі, що виконуються рівності:

$$\begin{cases} \overline{u}_1 = a_{11}\cdot\overline{e}_1 + a_{12}\cdot\overline{e}_2 + ... + a_{1n}\cdot\overline{e}_n, \\ \overline{u}_2 = a_{21}\cdot\overline{e}_1 + a_{22}\cdot\overline{e}_2 + ... + a_{2n}\cdot\overline{e}_n, \\ .... \\ \overline{u}_n = a_{n1}\cdot\overline{e}_1 + a_{n2}\cdot\overline{e}_2 + ... + a_{nn}\cdot\overline{e}_n. \end{cases}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ .... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається ***матрицею переходу*** від базису $\left(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\right)$ до базису $\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n\right)$.

Теорема 4.5. Матриця переходу від одного базису до іншого є невиродженою, тобто має обернену.

Ескіз доведення. Для спрощення (не втрачаючи загальну ідею) візьмемо $n=2$. Отже, нехай $(\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ та $(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$ – два довільні базиси двовимірного векторного простору V. Тоді існують числа a_{ij} і b_{ij} такі, що

$$\begin{cases}\overline{u}_1 = a_{11}\cdot\overline{e}_1 + a_{12}\cdot\overline{e}_2,\\ \overline{u}_2 = a_{21}\cdot\overline{e}_1 + a_{22}\cdot\overline{e}_2.\end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases}\overline{e}_1 = b_{11}\cdot\overline{u}_1 + b_{12}\cdot\overline{u}_2,\\ \overline{e}_2 = b_{21}\cdot\overline{u}_1 + b_{22}\cdot\overline{u}_2.\end{cases}$$

Матрицю

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

позначимо через A, а матрицю

$$\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

через B. Покажемо, що $A\cdot B=E$, тобто $B=A^{-1}$. Підставимо значення $\overline{e}_1$ і $\overline{e}_2$ в першу систему. Одержуємо:

$$\begin{cases}\overline{u}_1 = a_{11}\cdot(b_{11}\cdot\overline{u}_1 + b_{12}\cdot\overline{u}_2) + a_{12}\cdot(b_{21}\cdot\overline{u}_1 + b_{22}\cdot\overline{u}_2),\\ \overline{u}_2 = a_{21}\cdot(b_{11}\cdot\overline{u}_1 + b_{12}\cdot\overline{u}_2) + a_{22}\cdot(b_{21}\cdot\overline{u}_1 + b_{22}\cdot\overline{u}_2).\end{cases}$$

Або

$$\begin{cases}\overline{u}_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})\cdot\overline{u}_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})\cdot\overline{u}_2,\\ \overline{u}_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})\cdot\overline{u}_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})\cdot\overline{u}_2.\end{cases}$$

З лінійної незалежності векторів $\overline{u}_1$ і $\overline{u}_2$ випливає: $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=1$, $a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=0$, $a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=0$, $a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=1$. Отже,

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Звідси $(A\cdot B)^T=E^T=E$ або $B^T\cdot A^T=E$. Тобто матриця A^T має обернену, причому $\left(A^T\right)^{-1}=B^T$. В загальній формі дана теорема доводиться аналогічно.

Досить часто виникає задача, яку ми сформулюємо таким чином: Нехай у векторному просторі V задано два базиси: $E=(e_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n)$ і $U=(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\ldots,\overline{u}_n)$. Далі, нехай $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ координати вектора $\overline{a}$ в базисі E. Як знайти координати вектора $\overline{a}$ в базисі U, якщо відома матриця переходу від базису E до базису U? Щоб уникнути громіздкості викладок (втім, не втрачаючи загальності міркувань) розглянемо тривимірний векторний простір. Отже, нехай $E=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$ і $U=(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3)$, тоді існують числа b_{ij} такі, що виконуються рівності:

$$\begin{cases} \overline{e}_1 = b_{11} \cdot \overline{u}_1 + b_{12} \cdot \overline{u}_2 + b_{13} \cdot \overline{u}_3, \\ \overline{e}_2 = b_{21} \cdot \overline{u}_1 + b_{22} \cdot \overline{u}_2 + b_{23} \cdot \overline{u}_3, \\ \overline{e}_3 = b_{31} \cdot \overline{u}_1 + b_{32} \cdot \overline{u}_2 + b_{33} \cdot \overline{u}_3, \end{cases}$$

де матриця

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

(тут через A ми, як і вище, позначаємо матрицю переходу від базису E до базису U). Нехай вектор $\overline{a}$ в базисі E має координати (x_1, x_2, x_3), а в базисі U координати (y_1, y_2, y_3). Тоді

$$\overline{a} = x_1 \cdot \overline{e}_1 + x_2 \cdot \overline{e}_2 + x_3 \cdot \overline{e}_3 = x_1 \cdot (b_{11} \cdot \overline{u}_1 + b_{12} \cdot \overline{u}_2 + b_{13} \cdot \overline{u}_3) +$$
$$+ x_2 \cdot (b_{21} \cdot \overline{u}_1 + b_{22} \cdot \overline{u}_2 + b_{23} \cdot \overline{u}_3) + x_3 \cdot (b_{31} \cdot \overline{u}_1 + b_{32} \cdot \overline{u}_2 + b_{33} \cdot \overline{u}_3) =$$
$$= (x_1 b_{11} + x_2 b_{21} + x_3 b_{31}) \cdot \overline{u}_1 + (x_1 b_{12} + x_2 b_{22} + x_3 b_{32}) \cdot \overline{u}_2 +$$
$$+ (x_1 b_{13} + x_2 b_{23} + x_3 b_{33}) \cdot \overline{u}_3.$$

Отже,

$$y_1 = x_1 b_{11} + x_2 b_{21} + x_3 b_{31},\ y_2 = x_1 b_{12} + x_2 b_{22} + x_3 b_{32},\ y_3 = x_1 b_{13} + x_2 b_{23} +$$
$$+ x_3 b_{33}.$$

Останні рівності можна записати в компактній матричній формі:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Або

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогічна формула має місце і в загальній формі:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.8. Знайти матрицю переходу від базису $B = (1, x, x^2)$ до базису $C = (2, x+1, x^2+3)$ у векторному просторі P_2. Знайти координати многочлена $4 + x + 5x^2$ в базисі C.

Розв'язання. Легко перевірити справедливість таких рівностей: $2=2\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2$, $x+1=1\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2$, $x^2+1=3\cdot 1+0\cdot x+1\cdot x^2$.

Отже, матриця переходу від базису B до базису C має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тепер будемо шукати координати многочлена $4+x+5x^2$ в базисі C. Для цього знайдемо матрицю A^{-1}. Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A: $A_{11}=1$, $A_{12}=0$, $A_{13}=0$, $A_{21}=-1$, $A_{22}=2$, $A_{23}=0$, $A_{31}=-3$, $A_{32}=0$, $A_{33}=2$. Отже,

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $(4,1,5)$ є координатами многочлена $4+x+5x^2$ в базисі B. За формулою

$$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

знаходимо шукані координати:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ 1\\ 5\end{pmatrix}.$$

5 ЛІНІЙНИЙ ОПЕРАТОР

5.1 Означення лінійного оператора. Типи лінійних операторів

Нехай V і W – векторні простори, розмірності яких відповідно дорівнюють n та m. ***Оператором*** A, що діє з векторного простору V у векторний простір W, називають відображення $A:V\to W$, яке кожному вектору $\overline{x}\in V$ ставить у відповідність єдиний вектор $\overline{y}\in W$. При цьому використовують позначення $\overline{y}=A(\overline{x})$ або просто $\overline{y}=A\overline{x}$.

Оператор $A:V\to W$ називають ***лінійним*** (*linear map*), якщо для будь-яких $\overline{x}_1,\overline{x}_2\in V$ і довільного числа λ виконуються такі дві умови:

1) $A(\overline{x}_1+\overline{x}_2)=A(\overline{x}_1)+A(\overline{x}_2)$;
2) $A(\lambda\cdot\overline{x})=\lambda\cdot A(\overline{x})$.

Якщо $V=W$, то лінійний оператор $L:V\to V$ називають ***лінійним перетворенням*** (*linear transformation*) векторного простору V.

Якщо $W=R$ (де R – поле дійсних чисел), то лінійний оператор $L:V\to R$ називають ***лінійним функціоналом*** (*linear functional*).

Лінійний оператор $L:V\to W$ називається ***ізоморфізмом*** (*isomorphism*), якщо виконуються такі умови:

1) якщо $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in V$ і $\bar{x}_1\neq\bar{x}_2$, то $L(\bar{x}_1)\neq L(\bar{x}_2)$;
2) $L(V)=W$, тобто для будь-якого $\bar{y}\in W$ існує $\bar{x}\in V$ такий, що $L(\bar{x})=\bar{y}$.

Якщо для векторних просторів V і W існує ізоморфізм $L:V\to W$, то кажуть, що векторні простори V і W є ***ізоморфними***.

Зазначимо, що множину усіх лінійних операторів з векторного простору V у векторний простір W часто позначають через $Hom(V,W)$.

Для довільного лінійного оператора $A:V\to W$ виконуються рівності $A(\bar{0}_V)=\bar{0}_W$ і $A(-\bar{x})=-A(\bar{x})$.

Наведемо приклади.

Приклад 1. Нехай V – довільний векторний простір. Перетворення I таке, що для довільного $\bar{x}\in V$ виконується $I(\bar{x})=\bar{x}$, очевидно є лінійним. Його називають ***тотожним*** перетворенням.

Приклад 2. Нехай V – довільний векторний простір. Перетворення O називають ***нульовим*** перетворенням, якщо для будь-якого $\bar{x}\in V$ виконується рівність $O(\bar{x})=\bar{0}$. Легко перевірити, що нульове перетворення є лінійним.

Приклад 3. Розглянемо векторний простір M_{n1}, який складається з усіх матриць-стовпців розмірності $n\times 1$. Далі, нехай

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

фіксована квадратна матриця розмірності $n\times n$. На M_{n1} визначимо перетворення:

$$L_A:\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

де справа від стрілочки стоїть звичайний матричний добуток. Легко перевірити, що L_A – лінійне перетворення векторного простору M_{n1}.

Приклад 4. Розглянемо векторний простір R^3. Визначимо перетворення проектування на площину $z=0$, а саме $L:(x,y,z)\mapsto(x,y,0)$. Легко перевірити, що перетворення L є лінійним.

Приклад 5. Нехай R^n – векторний простір усіх матриць розмірності $1\times n$. Зафіксуємо послідовність чисел $(a_1,a_2,...,a_n)$. Визначимо відображення $F:R^n\mapsto R$, а саме: $F:(x_1,x_2,...,x_n)\mapsto a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$. Легко перевірити, що відображення F є лінійним функціоналом.

Приклад 6. Розглянемо $D_{[a,b]}$ – векторний простір усіх диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій. Через D позначимо перетворення, яке функції $U\in D$ ставить у відповідність її похідну U'. Оскільки $(U+V)'=U'+V'$ і $(\lambda\cdot U)'=\lambda\cdot U'$, то зазначене перетворення є лінійним.

Приклад 7. Нехай $C_{[a,b]}$ – векторний простір усіх неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Функції $f(x)\in C_{[a,b]}$ поставимо у відповідність число $\int\limits_a^b f(x)dx$. Оскільки $\int\limits_a^b(\varphi(x)+\psi(x))dx=\int\limits_a^b\varphi(x)dx+\int\limits_a^b\psi(x)dx$ і, крім того $\int\limits_a^b c\cdot\varphi(x)dx=c\cdot\int\limits_a^b\varphi(x)dx$, то зазначене відображення є лінійним функціоналом.

Приклад 8. Нехай $F_{(-\infty,+\infty)}$ – векторний простір усіх функцій, що визначені на проміжку $(-\infty,+\infty)$. Зафіксуємо число a. Визначимо перетворення $T_a:\varphi(x)\mapsto\varphi(x+a)$. Легко перевірити, що перетворення T_a є лінійним.

Введемо деякі поняття, що пов'язані з лінійним оператором $\varphi:V\to W$. Множину $Ker(\varphi)=\{\overline{x}\in V\mid\varphi(\overline{x})=\overline{0}_W\}$ називають ***ядром*** лінійного оператора φ. Зазвичай через $\operatorname{Im}(\varphi)$ позначають множину значень (або образ) лінійного перетворення φ. Тобто $\operatorname{Im}(\varphi)=\{\varphi(\overline{x})\mid\overline{x}\in V\}$. Легко перевірити, що $Ker(\varphi)$ і $\operatorname{Im}(\varphi)$ є відповідно підпросторами векторного простору V і W.

5.2 Продовження функції, що задана на базисі векторного простору до лінійного оператора

Нехай ψ – довільна функція на довільній множині. Через $D(\psi)$ будемо позначати область визначення функції ψ. Скажемо, що функція ψ^* є продовженням функції ψ, якщо:

1) $D(\psi)\subseteq D(\psi^*)$;

2) якщо $x \in D(\psi)$, то $\psi(x) = \psi^*(x)$.

Теорема 5.1. Нехай V і W – довільні скінченновимірні векторні простори. Будь-яку функцію $\varphi : B \to W$, яка визначена на базисі B векторного простору V, можна, причому єдиним способом, продовжити до лінійного оператора з векторного простору V у векторний простір W.

Ідея доведення. Нехай $B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$. На векторному просторі V визначимо функцію φ^* таким чином: для довільного вектора

$$\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{e}_2 + ... + \alpha_n \cdot \overline{e}_n$$

за означенням

$$\varphi^*(\overline{a}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\overline{e}_1) + \alpha_2 \cdot \varphi(\overline{e})_2 + ... + \alpha_n \cdot \varphi(\overline{e}_n).$$

Далі залишається перевірити, що: а) функція φ^* є лінійним оператором, б) φ^* є продовженням функції φ, в) якщо лінійні оператори збігаються на базисі векторного простору V, то вони рівні між собою.

Теорема 5.2. Векторні простори однакової розмірності є ізоморфними.

Ідея доведення. Нехай V і W – векторні простори однакової розмірності. Зафіксуємо базиси $E = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ і $U = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n)$, що належать відповідно векторному простору V і векторному простору W. Визначимо функцію $\varphi : E \to U$ за правилом $\varphi(\overline{e}_i) = \overline{u}_i \, (i = 1, 2, ..., n)$. За попередньою теоремою функцію φ можна, причому єдиним способом, продовжити до лінійного оператора φ^*. Залишається довести, що φ^* – ізоморфізм, тобто оператор φ^* є взаємно однозначним і $\varphi^*(V) = W$.

5.3 Матриця лінійного оператора. Зв'язок між матрицями лінійного перетворення в різних базисах

Нехай V і W – векторні простори, розмірності яких відповідно m і n. Зафіксуємо базиси $E = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_m)$ і $U = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n)$, що належать відповідно векторному простору V і векторному простору W. Якщо L – лінійний оператор з векторного простору V у векторний простір W, то існують числа b_{ij} такі, що виконуються рівності:

$$\begin{cases} L(\overline{e}_1) = b_{11} \cdot \overline{u}_1 + b_{12} \cdot \overline{u}_2 + ... + b_{1n} \cdot \overline{u}_n, \\ L(\overline{e}_2) = b_{21} \cdot \overline{u}_1 + b_{22} \cdot \overline{u}_2 + ... + b_{2n} \cdot \overline{u}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L(\overline{e}_m) = b_{m1} \cdot \overline{u}_1 + b_{m2} \cdot \overline{u}_2 + ... + b_{mn} \cdot \overline{u}_n. \end{cases}$$

Отже, лінійному оператору L природним чином ставиться у ***відповідність матриця*** розмірності $n \times m$:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що компоненти цієї матриці залежать від вибору базисів у векторних просторах V і W. Зокрема, якщо ми маємо лінійне перетворення φ векторного простору розмірності n, то, зафіксувавши базис $E=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\dots,\overline{e}_n)$, ми одержимо відповідну квадратну матрицю.

Приклад 5.1. Розглянемо векторний простір R^3, який складається з матриць розмірності 1×3. На R^3 визначимо перетворення φ таким чином: нехай $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\overline{x})=(x_1+x_3,2x_2-x_1+x_3,x_1+3x_2)$. Перевірити, що перетворення φ є лінійним і знайти матрицю цього перетворення в стандартному базисі $(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$, де $\overline{i}=(1,0,0)$, $\overline{j}=(0,1,0)$, $\overline{k}=(0,0,1)$.

Розв'язання. Нехай $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$ і $\overline{y}=(y_1,y_2,y_3)$. Нам треба показати, що $\varphi(\overline{x}+\overline{y})=\varphi(\overline{x})+\varphi(\overline{y})$ і $\varphi(\lambda\cdot\overline{x})=\lambda\cdot\varphi(\overline{x})$ для будь-яких векторів $\overline{x}$ і $\overline{y}$ та довільного числа λ. Отже, $\overline{x}+\overline{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$, тоді $\varphi(\overline{x}+\overline{y})=(x_1+y_1+x_3+y_3,2(x_2+y_2)-(x_1+y_1)+x_3+y_3,x_1+y_1+3(x_2+y_2))$, $\varphi(\overline{x})+\varphi(\overline{y})=(x_1+x_3,2x_2-x_1+x_3,x_1+3x_2)+(y_1+y_3,2y_2-y_1+y_3,y_1+3y_2)=$ $=(x_1+y_1+x_3+y_3,2(x_2+y_2)-(x_1+y_1)+x_3+y_3,x_1+y_1+3(x_2+y_2))=$ $=\varphi(\overline{x}+\overline{y})$. Також легко показати, що $\varphi(\lambda\cdot\overline{x})=\lambda\cdot\varphi(\overline{x})$. Отже, перетворення φ є лінійним. Знайдемо тепер матрицю лінійного перетворення φ в базисі $(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$.

$$\varphi(\overline{i})=\varphi((1,0,0))=(1,-1,1)=1\cdot\overline{i}-1\cdot\overline{j}+1\cdot\overline{k};$$
$$\varphi(\overline{j})=\varphi((0,1,0))=(0,2,3)=0\cdot\overline{i}+2\cdot\overline{j}+3\cdot\overline{k};$$
$$\varphi(\overline{k})=\varphi((0,0,1))=(1,1,0)=1\cdot\overline{i}+1\cdot\overline{j}+0\cdot\overline{k}.$$

Таким чином, матриця лінійного перетворення φ в стандартному базисі $(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$ має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.2. Розглянемо P_2 – векторний простір усіх многочленів, степінь кожного з яких не перевищує 2. Знайти матрицю лінійного оператора диференціювання D в базисі $(1,x,x^2)$.

Розв'язання. Подіємо оператором D на базисні многочлени

$$D(1)=1'=0=0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2,$$

$$D(x)=x'=1=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2,\ D\left(x^2\right)=\left(x^2\right)'=2x=0\cdot 1+2\cdot x+0\cdot x^2.$$

Таким чином, матриця лінійного оператора D має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.3. Довести лінійність, знайти матрицю в стандартному базисі, множину значень і ядро оператора проектування на площину $x-z=0$.

Розв'язання. Цілком зрозуміло, що при проектуванні точки з координатами (x,y,z) на площину $x-z=0$ координата y залишається незмінною. Тому для подальших викладок нам достатньо розглянути координатну площину xOz. Нехай проекція точки $M(x,z)$ (рис. 7) на пряму $x-z=0$ є точка K з координатами (x',z'). Зрозуміло, що $x'=z'$. Наша задача – виразити x' через x і z. Скористаємося рисунком 7. Очевидно, що $CK=CM$. Оскільки $CK=z'-z=x'-z$ і $CM=x-x'$, то $x'-z=x-x'$. Звідки $2x'=x+z$. Отже, $x'=z'=\dfrac{x+z}{2}$. Тепер ми вже готові записати оператор проектування

$$P:(x,y,z)\mapsto\left(\frac{x+z}{2},y,\frac{x+z}{2}\right).$$

Діючи так само, як і в прикладі 5.1, легко обґрунтувати лінійність оператора P. Тепер знайдемо матрицю оператора P в стандартному базисі $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$. Для цього подіємо оператором P на базисні вектори. Маємо:

$$P(\bar{i})=P((1,0,0))=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),$$

$$P(\bar{j})=P((0,1,0))=(0,1,0),\ P(\bar{k})=P((0,0,1))=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).$$

Отже, матриця лінійного оператора P в стандартному базисі має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Далі, цілком зрозуміло, що множина значень оператора P – це всі точки площини $x-z=0$. Тепер знайдемо $Ker(P)$. Іншими словами, нам треба знайти такі точки (x,y,z), що $P((x,y,z))=(0,0,0)$ або

$$\left(\frac{x+z}{2},y,\frac{x+z}{2}\right)=(0,0,0).$$

Звідки $z=-x$ і $y=0$. Таким чином, множина точок виду $(x,0,-x)$ є ядром лінійного оператора P.

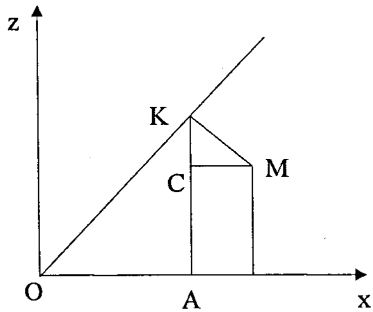

Рисунок 7

Між матрицями лінійних перетворень існує тісний зв'язок. Встановимо його. Отже, нехай V – векторний простір розмірності n. Далі, нехай $E=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$ і $U=(\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n)$ – базиси векторного простору V. Позначимо відповідно через A і B матриці лінійного перетворення $\varphi:V\to V$ в базисах E і U.

Теорема 5.3. Якщо P – матриця переходу від базису E до базису U, то $A=P\cdot B\cdot P^{-1}$.

Доведення. Візьмемо довільний вектор $\overline{x}\in V$. Вектор $\varphi(\overline{x})$ позначимо через $\overline{y}$. Нехай $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ – координати вектора $\overline{x}$ в базисі E і $Y=(y_1,y_2,...,y_n)^T$ – координати вектора $\overline{y}$ в цьому ж базисі. Тоді (це легко перевірити) $A\cdot X=Y$. Аналогічно, якщо $X'=(x_1',x_2',...,x_n')^T$ – координати вектора $\overline{x}$ в базисі U і $Y'=(y_1',y_2',...,y_n')^T$ – координати вектора $\overline{y}$ в базисі U, то $B\cdot X'=Y'$. В пункті 4.4 ми довели, що $X'=P^{-1}\cdot X, Y'=P^{-1}\cdot Y$. Звідси: $A\cdot X=Y=P\cdot Y'=P\cdot B\cdot X'=P\cdot B\cdot P^{-1}\cdot X$. Тобто для будь-якого $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ виконується рівність $A\cdot X=PBP^{-1}X$. Підставляючи в останню тотожність замість X відповідно $(1,0,...,0)^T$, $(0,1,...,0)^T$, ...,

$(0,0,...,1)^T$ ми переконуємося, що матриці A і $P \cdot B \cdot P^{-1}$ складаються з однакових стовпців. Отже, $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$.

5.4 Дії над лінійними операторами. Алгебра лінійних перетворень та її зв'язок з матричною алгеброю

Нехай V і W – векторні простори над полем дійсних (або комплексних) чисел. Позначимо через $Hom(V,W)$ множину усіх лінійних перетворень з векторного простору V у векторний простір W. На множині $Hom(V,W)$ природним чином визначають операцію додавання і множення числа на лінійний оператор. Отже, нехай $\varphi,\psi \in Hom(V,W)$. За означенням $(\varphi+\psi)(\overline{x}) = \varphi(\overline{x}) + \psi(\overline{x})$ і $(\lambda \cdot \varphi)(\overline{x}) = \lambda \cdot \varphi(\overline{x})$. Легко перевірити, що множина $Hom(V,W)$ разом з щойно введеними операціями утворює векторний простір. Важливою також є операція ***композиції*** лінійних операторів. Вона визначається так: нехай $\varphi \in Hom(V,U)$ і $\psi \in Hom(U,W)$, тоді за означенням $\psi \circ \varphi(\overline{x}) = \psi(\varphi(\overline{x}))$. Легко перевірити, що оператор $\psi \circ \varphi : V \to W$ є лінійним.

Тепер будемо розглядати $Hom(V,V)$, де V – скінченновимірний простір розмірності n. Через M_n позначимо векторний простір усіх квадратних матриць розмірності $n \times n$. У векторному просторі V зафіксуємо базис E. Встановимо взаємно однозначну відповідність між векторними просторами $Hom(V,V)$ і M_n. А саме: лінійному перетворенню $\varphi \in Hom(V,V)$ ставимо у відповідність матрицю цього перетворення в базисі E. Цю відповідність позначимо через F, тобто $F(\varphi) = M_\varphi$ (де M_φ – матриця лінійного перетворення φ в базисі E). Рутинна перевірка показує, що відображення $F : \varphi \mapsto M_\varphi$ є ізоморфізмом між векторним простором $Hom(V,V)$ і векторним простором M_n. На неформальній мові це означає, що вищезгадані векторні простори однакові з точністю до позначення елементів. Інколи нам вигідно застосовувати мову перетворень, а інколи – мову матриць. Якщо розмірність векторного простору V дорівнює n, то розмірність векторного простору усіх квадратних матриць M_n (а, отже, і простору $Hom(V,V)$) дорівнює n^2.

Окремо розглянемо питання стосовно композиції лінійних перетворень. Отже, нехай $\varphi,\psi \in Hom(V,V)$. Покажемо, що $M_{\varphi\circ\psi} = M_\varphi \cdot M_\psi$, де справа від знаку рівності записано звичайний добуток матриць. Продемонструємо цей факт для випадку, коли векторний простір V є двовимірним. Зафіксуємо базис $E = (e_1, \overline{e}_2)$ у векторному просторі V. Нехай

$\varphi(\overline{e}_1)=a_{11}\cdot\overline{e}_1+a_{12}\cdot\overline{e}_2$ і $\varphi(\overline{e}_2)=a_{21}\cdot\overline{e}_1+a_{22}\cdot\overline{e}_2$. Тоді $M_\varphi=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Аналогічно, якщо $\psi(\overline{e}_1)=b_{11}\cdot\overline{e}_1+b_{12}\cdot\overline{e}_2$ і $\psi(\overline{e}_2)=b_{21}\cdot\overline{e}_1+b_{22}\cdot\overline{e}_2$, то $M_\psi=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}$. Знайдемо матрицю композиції $\varphi\circ\psi$. Маємо:

$$(\varphi\circ\psi)(\overline{e}_1)=\varphi(\psi(\overline{e}_1))=\varphi(b_{11}\cdot\overline{e}_1+b_{12}\cdot\overline{e}_2)=b_{11}\cdot\varphi(\overline{e}_1)+b_{12}\cdot\varphi(\overline{e}_2)=$$
$$=b_{11}\cdot(a_{11}\cdot\overline{e}_1+a_{12}\cdot\overline{e}_2)+b_{12}\cdot(a_{21}\cdot\overline{e}_1+a_{22}\cdot\overline{e}_2)=$$
$$=(a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12})\cdot\overline{e}_1+(a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12})\cdot\overline{e}_2.$$

Аналогічно,

$$\varphi(\psi(\overline{e}_2))=\varphi(b_{21}\cdot\overline{e}_1+b_{22}\cdot\overline{e}_2)=b_{21}\cdot\varphi(\overline{e}_1)+b_{22}\cdot\varphi(\overline{e}_2)=$$
$$=b_{21}\cdot(a_{11}\cdot\overline{e}_1+a_{12}\cdot\overline{e}_2)+b_{22}\cdot(a_{21}\cdot\overline{e}_1+a_{22}\cdot\overline{e}_2)=$$
$$=(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22})\cdot\overline{e}_1+(a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22})\cdot\overline{e}_2.$$

Отже,

$$M_{\varphi\circ\psi}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12} & a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}=M_\varphi\cdot M_\psi.$$

Приклад 5.4. В стандартному базисі $(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$ знайти матрицю відображення $\xi:R^3\to R^3$, яке спочатку повертає точку навколо осі OY проти ходу годинникової стрілки на $45°$, а потім одержану точку симетрично відображає відносно площини XOZ.

Розв'язання. Позначимо через φ перетворення повороту, а через ψ – симетричне відображення відносно площини XOZ. Зрозуміло, що $\xi=\psi\circ\varphi$.

$$M_\xi=M_{\psi\circ\varphi}=M_\psi\cdot M_\varphi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\\0&-1&0\\\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}.$$

$\xi=\psi\circ\varphi.$ Спочатку будемо шукати формулу для перетворення φ. Очевидно, що при повороті точки (x,y,z) навколо осі OY координата y залишається незмінною, тому для подальших викладок нам достатньо розглянути координатну площину XOZ. Отже, нехай точка A має координати (x,z), а її образ при повороті на $45°$навколо осі OY – це точка B з координатами (x', z') (рисунок 8). Позначимо кут AOD через α, тоді $\frac{BC}{OB} = \sin(\alpha + 45°)$ або $\frac{z'}{\sqrt{x^2+z^2}} = \sin\alpha \cdot \cos 45° + \cos\alpha \cdot \sin 45° =$

$$= \left[\sin\alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}};\ \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

Звідси, $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z$. Далі:

$$\frac{OC}{OB} = \cos(\alpha + 45°) = \frac{x'}{\sqrt{x^2+z^2}} =$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos 45° - \sin\alpha \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

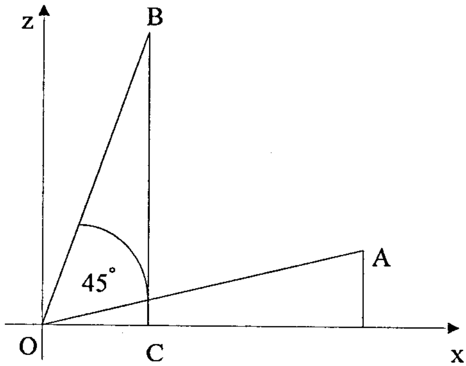

Рисунок 8

Звідки $x' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z$. Отже,

$$\varphi((x,y,z)) = (x', y', z') = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z,\ y,\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z \right).$$

Легко перевірити, що перетворення φ є лінійним. Знайдемо його матрицю в базисі $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. $\varphi(\bar{i}) = \varphi((1,0,0)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \bar{k}$,

$$\varphi(\bar{j}) = \varphi((0,1,0)) = (0,1,0) = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k},$$

$$\varphi(\bar{k}) = \varphi((0,0,1)) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \bar{k}.$$

Отже, матриця лінійного перетворення φ в стандартному базисі $\left(\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right)$ має вигляд:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що для довільної точки (x,y,z) маємо: $\psi\left((x,y,z)\right)=(x,-y,z)$. Знайдемо матрицю лінійного перетворення ψ в базисі $\left(\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right)$.

$$\psi\left(\overline{i}\right)=\psi\left((1,0,0)\right)=(1,0,0)=1\cdot\overline{i}+0\cdot\overline{j}+0\cdot\overline{k},$$
$$\psi\left(\overline{j}\right)=\psi\left((0,1,0)\right)=(0,-1,0)=0\cdot\overline{i}-1\cdot\overline{j}+0\cdot\overline{k},$$
$$\psi\left(\overline{k}\right)=\psi\left((0,01)\right)=(0,0,1)=0\cdot\overline{i}+0\cdot\overline{j}+1\cdot\overline{k}.$$

Отже, матриця лінійного перетворення ψ має вигляд:

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\xi=\psi\circ\varphi$, то

$$M_\xi = M_{\psi\circ\varphi} = M_\psi\cdot M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

5.5 Загальне лінійне рівняння. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння

Нехай V і W – довільні векторні простори і $\xi: V\to W$ – довільний лінійний оператор. Зафіксуємо $\overline{b}\in W$. Рівняння $\xi\left(\overline{x}\right)=\overline{b}$, де $\overline{x}\in V$ є невідомим вектором, називається ***лінійним рівнянням*** (*linear equation*). Рівняння $\xi\left(\overline{x}\right)=\overline{b}$ називається ***однорідним*** (*homogeneous*), якщо $\overline{b}=\overline{0}$. В протилежному випадку воно називається ***неоднорідним*** (*nonhomogeneous*). Конкретний розв'язок рівняння $\xi(\overline{x})=\overline{b}$ інколи називають ***частинним розв'язком*** (*particular solution*). Множину усіх частинних розв'язків рівняння $\xi(\overline{x})=\overline{b}$ називають ***загальним розв'язком*** (*general solution*). Така термінологія є стандартною, зокрема для лінійних диференціальних рівнянь.

Наведемо приклади.

Приклад 9. Будь-яку систему m лінійних рівнянь з n невідомими можна записати в матричній формі: $A \cdot X = B$, де A – матриця розмірності $m \times n$, елементами якої є коефіцієнти при невідомих, X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець відомих вільних членів. Отже, на систему лінійних рівнянь можна дивитися як на матричне лінійне рівняння.

Приклад 10. Диференціальне рівняння $y'' + \alpha(x) \cdot y' + \beta(x) \cdot y = \psi(x)$, (де $\alpha(x), \beta(x), \psi(x)$ – відомі функції, а y – невідома функція) є лінійним рівнянням, оскільки оператор $L: y \mapsto y'' + \alpha(x) \cdot y' + \beta(x) \cdot y$ є лінійним у векторному просторі двічі диференційованих функцій на заданому відрізку.

Детальніше поглянемо на лінійне однорідне рівняння $\xi(\overline{x})=\overline{0}$. Проста перевірка показує, що сума двох частинних розв'язків цього рівняння є частинним розв'язком. Добуток числа на частинний розв'язок є частинним розв'язком цього рівняння. Отже, множина усіх частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння $\xi(\overline{x})=\overline{0}$ утворює векторний простір. Таким чином, для того щоб знайти загальний розв'язок рівняння $\xi(\overline{x})=\overline{0}$ нам треба шукати базис векторного простору частинних розв'язків.

Розглянемо для прикладу однорідну систему лінійних рівнянь (ОСЛР). Для знаходження базису векторного простору розв'язків виконаємо такі дії:

1. За допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого виду;
2. Пронумеруємо вільні невідомі (якщо таких немає, то ОСЛР має точно один нульовий розв'язок);
3. Першій вільній невідомій надаємо значення 1, всім іншим вільним невідомим надаємо значення 0. Головні невідомі однозначно виражаємо через надані значення вільних невідомих. Таким чином, ми одержуємо перший базисний розв'язок ОСЛР;
4. Для одержання другого базисного розв'язку надаємо другій вільній невідомій значення 1, а всім іншим вільним невідомим – значення 0. Головні невідомі однозначно виражаємо через надані значення вільних невідомих. Таким чином ми одержуємо другий базисний розв'язок ОСЛР;
5. І так далі.

Зауважимо, що кількість базисних розв'язків дорівнює кількості вільних невідомих.

Розглянемо тепер загальне лінійне неоднорідне рівняння $L(\overline{x})=\overline{b}$. Рівняння $L(\overline{x})=\overline{0}$ називають відповідним однорідним рівнянням. Позначимо через $X_{зн}$ і $\overline{x}_{чн}$ відповідно загальний і частинний розв'язок рівняння $L(\overline{x})=\overline{b}$, а через $X_{зо}$ – загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння.

Теорема 5.4. (структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння).

$$X_{зн}=\overline{x}_{чн}+X_{зо}.$$

Доведення. Нехай $\overline{x}^* \in X_{зо}$. Позаяк $L(\overline{x}_{чн}+\overline{x}^*)=L(\overline{x}_{чн})+L(\overline{x}^*)=\overline{b}+\overline{0}=\overline{b}$, то

$$\overline{x}_{чн}+X_{зо}\subseteq X_{зн}. \tag{5.1}$$

Нехай тепер $\overline{x}^*_{чн}\in X_{зн}$. Очевидно, що $\overline{x}^*_{чн}=\overline{x}_{чн}+\left(\overline{x}^*_{чн}-\overline{x}_{чн}\right)$. Легко перевірити, що $\overline{x}^*_{чн}-\overline{x}_{чн}\in X_{зо}$. Отже,

$$X_{зн}\subseteq \overline{x}_{чн}+X_{зо}. \tag{5.2}$$

З (5.1) і (5.2) випливає: $X_{зн}=\overline{x}_{чн}+X_{зо}$. Оскільки $X_{зо}=Ker(L)$, то формулювання даної теореми можна переписати у формі $X_{зн}=\overline{x}_{чн}+Ker(L)$.

Щойно доведена теорема відіграє важливу роль в теорії лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад 5.5. Знайти загальний розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3-x_4+3x_5=2; \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4-x_5=0; \\ -x_1+3x_2+x_3+2x_4+x_5=1. \end{cases}$$

Розв'язання. Згідно зі структурною теоремою, будемо спочатку шукати загальний розв'язок відповідної однорідної СЛР. А саме:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3-x_4+3x_5=0; \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4-x_5=0; \\ -x_1+3x_2+x_3+2x_4+x_5=0. \end{cases}$$

За допомогою елементарних перетворень зведемо останню систему рівнянь до східчастого виду.

1-й крок. Перше рівняння множимо на (–2), додаємо до другого рівняння і результат записуємо замість другого рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3-x_4+3x_5=0; \\ 5x_2-6x_3+3x_4-7x_5=0; \\ -x_1+3x_2+x_3+2x_4+x_5=0. \end{cases}$$

2-й крок. Додаємо перше і третє рівняння. Результат записуємо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 0; \\ x_2 + 6x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

3-й крок. Третє рівняння множимо на (–5), додаємо до другого рівняння і результат записуємо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 0; \\ -36x_3 - 2x_4 - 27x_5 = 0. \end{cases}$$

Остання СЛР має східчастий вигляд. $\{x_4, x_5\}$ – вільні невідомі. $\{x_1, x_2, x_3\}$ – головні невідомі. Для знаходження фундаментальної системи розв'язків реалізуємо вищенаведений алгоритм:

1-й крок. Покладемо $x_4 = 1, x_5 = 0$. Обчислимо відповідні значення головних невідомих: $x_3 = -\frac{1}{18}, x_2 = -\frac{2}{3}, x_1 = -\frac{1}{18}$. Отже, одержуємо перший базисний розв'язок:

$$E_1 = \left(-\frac{1}{18}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{18}; 1; 0\right).$$

2-й крок. Покладемо $x_4 = 0, x_5 = 1$. Обчислимо відповідні значення головних невідомих: $x_3 = -\frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{7}{4}$. Одержуємо другий базисний розв'язок:

$$E_2 = \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; 0; 1\right).$$

Отже, $c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2$ (де c_1 і c_2 – довільні числа) є загальним розв'язком відповідної однорідної СЛР.

Залишається знайти будь-який частинний розв'язок даної СЛР. Застосовуючи елементарні перетворення до неоднорідної СЛР, зводимо її до східчастого виду. Цілком зрозуміло, що ліва частина одержаної (східчастої) СЛР має такий самий вигляд, як і ліва частина східчастої форми відповідної однорідної СЛР. Зрозуміло, що права частина зазнає змін:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 2; \\ 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 7x_5 = -4; \\ -36x_3 - 2x_4 - 27x_5 = -19. \end{cases}$$

Покладемо $x_4 = x_5 = 0$. Обчислюємо відповідні значення головних невідомих: $x_1 = -\frac{35}{36}, x_2 = -\frac{1}{6}, x_3 = \frac{19}{36}$. Отже, $\overline{X}_{чн} = \left(-\frac{35}{36}; -\frac{1}{6}; \frac{19}{36}; 0; 0\right)$.

Згідно зі структурною теоремою, отримуємо відповідь:

$$X_{зн} = c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2 + \overline{X}_{чн}.$$

Припустимо, що ми маємо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

В багатьох випадках її доцільно записувати в компактній формі:

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \ldots + x_n \cdot A_n = B,$$

де $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – стовпці матриці коефіцієнтів при невідомих (цю матрицю позначимо через A), а B – стовпець вільних членів.

У пункті 2.4 ми сформулювали простий критерій сумісності СЛР. Тепер ми сформулюємо ще один класичний критерій.

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних рівнянь (*) є сумісною тоді і лише тоді, коли

$$rank(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}) = rank(\{A_1, A_2, \ldots, A_n, B\}).$$

Доведення. Нехай $rank(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}) = r$. Не втрачаючи загальність міркувань, будемо вважати, що $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ – максимальна лінійно незалежна підмножина множини усіх стовпців матриці A. Припустимо, що $rank(\{A_1, A_2, \ldots, A_n, B\}) = r$. Звідси випливає, що множина стовпців $\{A_1, A_2, \ldots, A_r, B\}$ є лінійно залежною. А, отже, (це треба перевірити) стовпець B є лінійною комбінацією стовпців $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$. Іншими словами – знайдуться числа $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*$ такі, що $x_1^* \cdot A_1 + x_2^* \cdot A_2 + \ldots + x_r^* \cdot A_r = B$.

Отже, $x_1^* \cdot A_1 + x_2^* \cdot A_2 + \ldots + x_r^* \cdot A_r + 0 \cdot A_{r+1} + \ldots + 0 \cdot A_n = B$. Тобто система лінійних рівнянь СЛР (*) має розв'язок.

Навпаки. Нехай СЛР (*) є сумісною, тоді знайдуться числа $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такі, що виконується рівність $y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + \ldots + y_n \cdot A_n = B$. Нехай $rank(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}) = r$. Припустимо (не втрачаючи загальність міркувань) що $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ – максимальна лінійно незалежна підмножина множини стовпців матриці A. Тоді кожний стовпець $A_1, A_2, \ldots, A_n$ є лінійною комбінацією стовпців $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$. Враховуючи рівність

$$y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + \ldots + y_n \cdot A_n = B,$$

робимо висновок, що множина стовпців $\{A_1, A_2, ..., A_r, B\}$ є лінійно залежною. Звідси випливає, що в множині стовпців $\{A_1, A_2, ..., A_n, B\}$ будь-які $r+1$ стовпці є лінійно залежні. Таким чином, $rank(\{A_1, A_2, ..., A_n, B\}) = r$. Отже,

$$rank(\{A_1, A_2, ..., A_n\}) = rank(\{A_1, A_2, ..., A_n, B\}).$$

Нагадаємо, що ранг матриці за рядками дорівнює рангу матриці за стовпцями. Число, що дорівнює рангу матриці за рядками, просто називають рангом матриці.

5.6 Власні значення і власні вектори лінійного перетворення

Нехай V – векторний простір розмірності n і L – лінійне перетворення цього простору. Число λ називають ***власним значенням*** (*eigenvalue)* лінійного перетворення L, якщо існує ненульовий вектор $\overline{x}$ такий, що $L(\overline{x}) = \lambda \cdot \overline{x}$. В цьому випадку вектор $\overline{x}$ називають ***власним вектором*** *(eigenvector)* лінійного оператора L, що відповідає власному значенню λ. Сформулюємо деякі твердження щодо власних значень і власних векторів.

Твердження 5.1. Якщо вектор $\overline{x}$ є власним вектором лінійного перетворення φ, то для довільного ненульового числа β вектор $\beta \cdot \overline{x}$ теж є власним вектором перетворення φ.

Перед тим як сформулювати наступне твердження, домовимося про позначення. Якщо φ – лінійне перетворення, то лінійне перетворення $\varphi \circ \varphi \circ ... \circ \varphi$, де φ повторюється множником n раз, коротко позначають через φ^n.

Твердження 5.2. Якщо $\overline{x}$ – власний вектор лінійного перетворення φ, що відповідає власному значенню λ, то $\varphi^n(\overline{x}) = \lambda^n \cdot \overline{x}$.

Твердження 5.3. Нехай V – векторний простір розмірності n. Якщо $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ – базис векторного простору V і кожний вектор цього базису є власним вектором лінійного перетворення φ, то матриця перетворення φ в базисі $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ є діагональною.

Теорема 5.5. Якщо $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_k$ – власні вектори лінійного перетворення φ, що відповідають попарно різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, то множина векторів $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_k\}$ є лінійно незалежною.

Доведення. Доведення проведемо для $k = 3$ (при більших значеннях k доведення аналогічне). Отже, нехай $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ – власні вектори, що відповідають попарно різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Спочатку покажемо, що будь-яка пара з цих трьох векторів є лінійно незалежною. Беремо, скажімо, $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$. Припустимо, що вектори $\overline{e}_1$ і $\overline{e}_2$ – лінійно залежні. Легко показати, що існує ненульове число β, таке, що $\overline{e}_2 = \beta \cdot \overline{e}_1$. Звідси, $\varphi(\overline{e}_2) = \varphi(\beta \cdot \overline{e}_1)$ або $\lambda_2 \cdot \overline{e}_2 = (\lambda_1 \beta) \cdot \overline{e}_1$. Помножимо рівність $\overline{e}_2 = \beta \cdot \overline{e}_1$ зліва на число λ_2. Одержуємо $\lambda_2 \cdot \overline{e}_2 = (\lambda_2 \beta) \cdot \overline{e}_1$. Отже, $(\lambda_1 \beta) \cdot \overline{e}_1 = (\lambda_2 \beta) \cdot \overline{e}_1$. Оскільки $\overline{e}_1 \neq \overline{0}$, то $\lambda_1 \beta = \lambda_2 \beta$. Позаяк $\beta \neq 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2$, що суперечить умові. Отже, будь-які два вектори з множини $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ є лінійно незалежні. Тепер покажемо, що три вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ – теж лінійно незалежні. Припустимо протилежне, тобто вектори $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ є лінійно залежні. Тоді існують числа $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (не всі рівні 0) такі, що $\beta_1 \cdot \overline{e}_1 + \beta_2 \cdot \overline{e}_2 + \beta_3 \cdot \overline{e}_3 = \overline{0}$. Припустимо, для конкретності, що $\beta_1 \neq 0$, тоді (це легко показати) $\beta_2 \neq 0$ і $\beta_3 \neq 0$. Оскільки $\beta_1 \cdot \overline{e}_1 = -\beta_2 \cdot \overline{e}_2 - \beta_3 \cdot \overline{e}_3$, то

$$\overline{e}_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \overline{e}_2 - \frac{\beta_3}{\beta_1} \cdot \overline{e}_3. \tag{5.3}$$

З останньої рівності маємо: $\varphi(\overline{e}_1) = -\frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \varphi(\overline{e}_2) - \frac{\beta_3}{\beta_1} \cdot \varphi(\overline{e}_3)$ або

$$\lambda_1 \cdot \overline{e}_1 = \left(-\frac{\beta_2}{\beta_1} \lambda_2\right) \cdot \overline{e}_2 - \left(-\frac{\beta_3}{\beta_1} \lambda_3\right) \cdot \overline{e}_3. \tag{5.4}$$

Помножимо (5.3) на λ_1. Одержимо:

$$\lambda_1 \cdot \overline{e}_1 = \left(-\frac{\beta_2}{\beta_1} \lambda_1\right) \cdot \overline{e}_2 - \left(-\frac{\beta_3}{\beta_1} \lambda_1\right) \cdot \overline{e}_3. \tag{5.5}$$

Від (5.4) віднімаємо (5.5). Маємо:

$$\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1} \lambda_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \lambda_1\right) \cdot \overline{e}_2 - \left(\frac{\beta_3}{\beta_1} \lambda_3 - \frac{\beta_3}{\beta_1} \lambda_1\right) \cdot \overline{e}_3 = \overline{0}.$$

Оскільки $\overline{e}_2$ і $\overline{e}_3$ лінійно незалежні вектори, то $-\frac{\beta_2}{\beta_1} \lambda_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \lambda_1 = 0$ і $\frac{\beta_3}{\beta_1} \lambda_3 - \frac{\beta_3}{\beta_1} \lambda_1 = 0$. З двох останніх рівностей випливає: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, що суперечить умові. Отже, вектори $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ є лінійно незалежні.

Наслідок. Нехай V – векторний простір розмірності n. Якщо $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ – власні вектори лінійного перетворення φ, що відповідають попарно різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то система векторів $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)$ є базисом векторного простору V. Матриця лінійного оператора φ в базисі $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)$ є діагональною, на головній діагоналі якої стоять власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

5.7 Знаходження власних значень і власних векторів матриці

Будемо розглядати векторний простір матриць-стовпців розмірності $n\times 1$. Нам вже відомо, що квадратна матриця A розмірності $n\times n$ визначає на даному просторі лінійне перетворення. А саме: якщо X – матриця розмірності $n\times 1$, то оператор $F_A : X \mapsto A\cdot X$ є лінійним перетворенням. Задача про знаходження власних значень і власних векторів даної матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

зводиться до розгляду матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Останнє матричне рівняння запишемо в розгорнутій формі у вигляді системи n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Або в дещо іншій формі:

$$(*)\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

За якої умови СЛР (*) має ненульовий розв'язок? Це буде тоді і лише тоді, коли детермінант матриці при невідомих в СЛР (*) дорівнює нулю.

Тобто
$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}=0.$$

Або в компактній формі $\det(A-\lambda E)=0$, де E – одинична матриця. Рівняння $\det(A-\lambda E)=0$ називається ***характеристичним рівнянням*** (*chara-cteristic equation*). Це алгебраїчне рівняння n-го степеня з невідомою λ.

Отже, щоб знайти власні значення і власні вектори матриці A треба:

1. Розв'язати характеристичне рівняння $\det(A-\lambda E)=0$ і знайти усі власні значення $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$.
2. Власне значення $\lambda_i\,(i=1,2,...,k)$ підставити в СЛР (*) і відшукати ненульові розв'язки. Ці ненульові розв'язки і є власними векторами, що відповідають власному значенню λ_i.

Нагадаємо, що матриці A і B називаються ***подібними*** (*similar*), якщо існує невироджена матриця P така, що $B=P^{-1}\cdot A\cdot P$.

Теорема 5.6. Якщо матриці A і B подібні, то множина власних значень матриці A збігається з множиною власних значень матриці B.

Доведення. За умовою матриці A і B подібні. Отже, існує невироджена матриця P така, що

$$B=P^{-1}\cdot A\cdot P.\ \det(B-\lambda E)=\det\left(P^{-1}\cdot A\cdot P-\lambda E\right)=$$
$$=\det\left(P^{-1}\cdot(A-\lambda E)\cdot P\right)=\det\left(P^{-1}\right)\cdot\det(A-\lambda E)\cdot\det(P)=$$
$$=\det\left(P^{-1}\right)\cdot\det(P)\cdot\det(A-\lambda E)=\det\left(P^{-1}\cdot P\right)\cdot\det(A-\lambda E)=$$
$$=\det(E)\cdot\det(A-\lambda E)=\det(A-\lambda E).$$

Твердження 5.4. Якщо невироджена матриця має власне значення λ, то число $\dfrac{1}{\lambda}$ є власним значенням матриці A^{-1}.

Доведення. Насамперед зазначимо, що $\lambda\neq 0$. Дійсно, якщо припустити, що $\lambda=0$, то існує ненульовий власний вектор X матриці A такий, що $A\cdot X=0\cdot X=O$. Оскільки за умовою матриця A є невиродженою, то для неї існує обернена матриця A^{-1}. Помножимо останню рівність зліва на A^{-1}. Одержимо: $A^{-1}\cdot A\cdot X=E\cdot X=X=A^{-1}\cdot O=O$. Суперечність. Далі, нехай Y – власне значення матриці A. Тоді $A\cdot Y=\lambda\cdot Y$. Останню рівність зліва помножимо на A^{-1}. Одержимо: $Y=\lambda\cdot A^{-1}\cdot Y$. Залишається обидві частини останньої рівності поділити на λ. Маємо: $A^{-1}\cdot Y=\dfrac{1}{\lambda}\cdot Y$. Тобто $\dfrac{1}{\lambda}$ є власним значенням матриці A^{-1}.

Твердження 5.5. Числа, що знаходяться на головній діагоналі трикутної матриці A, є власними значеннями матриці A.

Доведення. Ми знаємо, що детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі. З цього факту випливає, що коренями характеристичного рівняння є числа, що стоять на головній діагоналі матриці A.

Приклад 5.6. Знайти власні значення і власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Спочатку розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

або $(3-\lambda)(2-\lambda)-20=0$. Корені цього квадратного рівняння: $\lambda_1=7$ і $\lambda_2=-2$. Власному значенню $\lambda_1=7$ відповідає СЛР:

$$\begin{cases} (3-7)x_1+4x_2=0, \\ 5x_1+(2-7)x_2=0. \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} -4x_1+4x_2=0, \\ 5x_1-5x_2=0. \end{cases}$$

Очевидно, що вектори $\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$, де $c-$ будь-яке число, є власними векторами, що відповідають власному значенню $\lambda_1=7$.

Власному значенню $\lambda_2=-2$ відповідає СЛР

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2=0, \\ 5x_1+4x_2=0. \end{cases}$$

Оскільки $x_2=-\frac{5}{4}x_1$, то $\begin{pmatrix} c_1 \\ -\frac{5}{4}c_1 \end{pmatrix}$ (де c_1 – довільне число) є множиною усіх власних векторів, що відповідає власному значенню $\lambda_2=-2$.

5.8 Діагоналізація матриці

Кажуть, що квадратна матриця M ***зводиться до діагонального виду***, якщо вона подібна до діагональної матриці, тобто існують невироджена матриця P і діагональна матриця D такі, що $M=P\cdot D\cdot P^{-1}$.

Якщо квадратна матриця M розмірності $n\times n$ має n лінійно незалежних власних векторів $E_1,E_2,...,E_n$, що відповідають попарно різним власним значенням $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, то в базисі власних векторів лінійному оператору, що визначається матрицею M, відповідає діагональна матриця

$$D = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Алгоритм зведення квадратної матриці до діагонального виду

Розглянемо лише той випадок, коли квадратна матриця розмірності $n \times n$ має n попарно різних дійсних власних значень.

1-й крок. Знаходимо усі власні значення квадратної матриці A розмірності $n \times n$.

2-й крок. Знаходимо власні вектори матриці A, що відповідають власним значенням.

3-й крок. Утворюємо матрицю P, стовпці якої є власними векторами матриці A, та матрицю $D = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Тоді $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Приклад 5.7. Матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ звести до діагонального виду.

Розв'язання. Спочатку шукаємо власні значення матриці A. Складаємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & -3-\lambda & -1 \\ 3 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Запишемо його в розгорнутому вигляді:
$(1-\lambda)(3+\lambda)(\lambda-1)+9-15+3(3+\lambda)+5(\lambda-1)+9(1-\lambda)=0.$ Або (після спрощення):

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = \lambda^2(\lambda+1) - 4(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda^2-4) = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. Далі шукаємо власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = -1$. Для цього знайдемо ненульовий розв'язок однорідної СЛР:

$$\begin{cases} (1-(-1))x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + (-3-(-1))x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + (1-(-1))x_3 = 0. \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Останню СЛР зведемо до східчастого вигляду. Для цього перше рівняння помножимо на (–3), друге – на 2. Суму одержаних рівнянь записуємо замість другого рівняння. Одержуємо:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad 5x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Далі, перше рівняння помножимо на (–3), третє – на 2. Додаємо отримані рівняння і суму записуємо замість третього рівняння. Отримуємо:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad 5x_2 - 5x_3 = 0, \\ \qquad -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки друге і третє рівняння системи є очевидно еквівалентними, то третє рівняння відкидаємо. Одержуємо:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Остання СЛР має східчасту форму. В ній x_3 є вільною невідомою. Надаємо x_3 значення 1, тоді $x_2 = x_1 = 1$. Отже, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – перший власний (базисний) вектор, що відповідає власному значенню λ_1.

Тепер шукаємо власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 2$. Знаходимо ненульовий розв'язок СЛР

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки два останніх рівняння системи однакові, то третє рівняння відкидаємо:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Зводимо до східчастого виду:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ \quad -14x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Покладемо $x_3 = 7$, тоді $x_2 = 1$ і $x_1 = 4$. Отже, $E_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ – другий власний (базисний) вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 2$.

Нарешті знайдемо власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_3 = -2$. Знаходимо нетривіальний розв'язок СЛР

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Легко зводимо до східчастої форми:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Покладемо $x_3 = 3$, тоді $x_2 = 3$ і $x_1 = 2$. Одержуємо третій власний (базисний) вектор $E_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Таким чином,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}, \text{ де } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.8. Довести, що матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не зводиться до діагональної.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто існує діагональна матриця

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

і невироджена матриця P такі, що виконується рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Звідси,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P$$

і тому

$$\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \det\left(P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P \right) = \det P^{-1} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det P = \det P^{-1} \cdot \det P =$$

$$= \det\left(P^{-1} \cdot P\right) = \det E = 1.$$

Отже, $ab = 1$. Тому

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}.$$

Позаяк

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

то

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P = P \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Або

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності випливає:

$$\begin{pmatrix} x+z & y+u \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & ya^{-1} \\ za & ua^{-1} \end{pmatrix}.$$

Звідси $za = z$ і $u = ua^{-1}$ або $z(a-1) = 0$ і $u(a-1) = 0$. Якщо припустити, що $a = 1$, то з рівності

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

випливає:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Суперечність.

Якщо ж припустити, що $a \neq 1$, то $z = 0$ і $u = 0$. Тобто матриця P має вигляд $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а, отже, є виродженною. Суперечність.

5.9 Піднесення до n-го степеня діагоналізованої матриці

Задача піднесення до n-го степеня квадратної матриці навіть при невеликих значеннях n може виявитися дуже громіздкою. Проте, піднесення до n-го степеня діагональної матриці не становить жодних проблем. Справді, легко перевірити, що

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{11}{}^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22}{}^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}{}^k \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця A розмірності $n \times n$ подібна до діагональної матриці D, то $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, де P – матриця, кожний i-ий стовпець якої ($i = 1,2,...,n$) є власним вектором матриці A. Легко перевірити, що для будь-якого натурального числа k має місце рівність $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$. Покажемо застосування останньої формули на прикладі.

Приклад 5.9. Обчислити A^7, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Власні значення і власні вектори матриці A обчислені у прикладі 1 (див. приклад 5.6). Власному значенню $\lambda_1 = 7$ відповідає власний вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а власному значенню $\lambda_2 = -2$ відповідає власний вектор $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Отже,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ і } D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Щоб скористатися рівністю $A^7 = P \cdot D^7 \cdot P^{-1}$ залишається знайти D^7 і P^{-1}. Оскільки

$$D^7 = \begin{pmatrix} 823543 & 0 \\ 0 & -128 \end{pmatrix} \text{ і } P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 823543 & 0 \\ 0 & -128 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 457467 & 366076 \\ 457595 & 365948 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.10. Обчислити A^m, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо власні значення матриці A. Для цього розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda)+3=0.$$

Його корені $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$. Обчислюємо відповідні власні вектори. Власному значенню $\lambda_1 = 1$ відповідає власний вектор $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а власному значенню $\lambda_2 = -1$ відповідає власний вектор $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Оскільки матриця A має два різні власні значення, то її можна звести до діагональної матриці

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тобто $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, де $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (дивіться попередні викладки і попередній приклад). Зрозуміло, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^m = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \textit{якщо } m - \textit{парне число}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \textit{якщо } m - \textit{непарне число}. \end{cases}$$

Далі застосовуємо рівність $A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}$. Якщо $m -$ парне число, то

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо ж $m -$ непарне число, то

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

5.10 Застосування власних векторів для розв'язування деяких різницевих рівнянь

Розглянемо векторний простір V, елементами якого є послідовності дійсних чисел. Якщо $x_n \in V$, то (як легко перевірити) перетворення $F : x_n \mapsto x_{n+1}$ є лінійним. Зазначимо, що власними векторами цього перетворення є геометричні прогресії. Дійсно, нехай $y_n -$ власний вектор лінійного перетворення F, тоді існує число λ таке, що виконується рівність $F(y_n)=\lambda\cdot y_n$ або $y_{n+1}=\lambda\cdot y_n$. Отже, y_n – геометрична прогресія, знаменник якої дорівнює власному значенню перетворення F. Зазначимо, що $F^2(x_n)=F(F(x_n))=F(x_{n+1})=x_{n+2}$. І взагалі для натурального числа k має місце рівність: $F^k(x_k)=x_{n+k}$. Зрозуміло, що рівняння

$$a_k\cdot F^k(x_n)+a_{k-1}\cdot F^{k-1}(x_n)+...+a_1\cdot F^1(x_n)+a_0\cdot x_n=0,$$

де $a_0,a_1,...,a_k$ – це сталі числа, є однорідним лінійним рівнянням. Його можна записати в іншій формі:

$$a_k\cdot x_{n+k}+a_{k-1}\cdot x_{n+k-1}+...+a_1\cdot x_{n+1}+a_0\cdot x_n=0.$$

Таке рівняння називають ***різницевим рівнянням***. Наприклад, до різницевих рівнянь належить рівняння $x_{n+1}=x_n+2$. Загальний розв'язок цього рівняння – це множина усіх арифметичних прогресій з різницею, що дорівнює 2.

Для прикладу розглянемо різницеве рівняння $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$. Його розв'язки – це послідовності Фібоначчі. Приміром, якщо вимагати $x_0=0$ і $x_1=1$, то частинний розв'язок даного рівняння, що задовольняє задані початкові умови, є конкретна послідовність Фібоначчі: $0,1,1,2,3,5,8,...$ Спробуємо знайти розв'язок цього рівняння в аналітичній формі. Для цього треба шукати фундаментальну систему розв'язків даного лінійного однорідного рівняння. Запишемо рівняння у формі: $F^2(x_n)-F(x_n)-x_n=0$.

Фундаментальний розв'язок будемо шукати серед власних векторів перетворення F. Якщо y_n – власний вектор лінійного перетворення F, то $F(y_n)=\lambda\cdot y_n$ і $F^2(y_n)=\lambda^2\cdot y_n$. Отже, $\lambda^2\cdot y_n-\lambda\cdot y_n-y_n=0$. Оскільки $y_n\neq 0$, то $\lambda^2-\lambda-1=0$. Останнє квадратне рівняння називають характеристичним. Обчислюємо корені: $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ і $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Вище ми вже зазначали, що власним вектором лінійного перетворення F є геометрична прогресія, знаменник якої дорівнює відповідному власному значенню. Отже, власному значенню $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ відповідає розв'язок $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, а власному значенню $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ – розв'язок $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Ці два розв'язки є лінійно незалежними. Більш того, вони утворюють базис у просторі усіх розв'язків даного рівняння. Таким чином, загальний розв'язок різницевого рівняння $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ подається формулою:

$$x_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Тепер скористаємося початковими умовами для конкретизації c_1 і c_2. Оскільки за умовою $x_0 = 0$ і $x_1 = 1$, то

$$c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \text{ і } c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

Після спрощення одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 - c_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Звідси $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ і $c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Таким чином, ми отримуємо знамениту формулу Біне:

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.}$$

Наступний приклад будемо розв'язувати без детальних пояснень, оскільки загальна ідея досить докладно описана вище.

Приклад 5.11. Знайти частинний розв'язок різницевого рівняння $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n$, що задовольняє початкові умови $x_0 = x_1 = 1$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 3$ і $\lambda_2 = -2$. Отже, геометричні прогресії 3^n і $(-2)^n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків даного рівняння. Як завжди в аналогічних випадках, загальний розв'язок – це лінійна комбінація базисних розв'язків: $c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-2)^n$. Тепер конкретизуємо c_1 і c_2 за допомогою початкових умов. Отже,

$$\begin{cases} c_1 \cdot 3^0 + c_2 \cdot (-2)^0 = 1, \\ c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot (-2) = 1. \end{cases} \quad \text{Або} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ 3c_1 - 2c_2 = 1. \end{cases}$$

Звідси $c_1 = \dfrac{3}{5}$ і $c_2 = \dfrac{2}{5}$.

Відповідь: $x_n = \dfrac{3}{5} \cdot 3^n + \dfrac{2}{5} \cdot (-2)^n$.

6 ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР

6.1 Основні означення. Приклади евклідових просторів

Нехай V – векторний простір. Кожній впорядкованій парі векторів $\langle \overline{a},\overline{b} \rangle$ ставимо у відповідність дійсне число, яке ми позначимо через $(\overline{a},\overline{b})$, причому виконуються такі властивості:

1. $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$;
2. $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=(\overline{a}+\overline{c},\overline{b}+\overline{c})$;
3. $\lambda(\overline{a},\overline{b})=(\lambda\cdot\overline{a},\overline{b})=(\overline{a},\lambda\cdot\overline{b})$ для будь-якого числа λ і будь-яких векторів $\overline{a},\overline{b}\in V$;
4. Якщо $\overline{a}\neq 0$, то $(\overline{a},\overline{a})>0$, якщо $\overline{a}=\overline{0}$, то $(\overline{a},\overline{a})=0$.

Якщо на векторному просторі V, крім лінійних операцій (додавання векторів і множення числа на вектор) визначена скалярна операція, що задовольняє умови 1–4, то такий векторний простір називають ***евклідовим простором*** (*Euclidean space*), а операцію $(\overline{a},\overline{b})$ називають ***скалярним добутком***.

Зазначимо такі властивості скалярного добутку:

1. Для будь-якого вектора $\overline{a}$ має місце рівність $(\overline{a},\overline{0})=0$;
2. Якщо для довільного вектора $\overline{x}$ виконується рівність $(\overline{a},\overline{x})=(\overline{b},\overline{x})$, то $\overline{a}=\overline{b}$.

Приклад 1. Розглянемо векторний простір R^n, елементами якого є матриці-рядки розмірності $1\times n$. Введемо бінарну скалярну операцію таким чином: якщо $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ і $\overline{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$, то, за означенням, $(\overline{x},\overline{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$. Легко перевірити, що $(\overline{x},\overline{y})$ є скалярним добутком.

Приклад 2. Нехай $C_{[a,b]}$ – векторний простір неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Якщо функції φ і ψ належать векторному простору $C_{[a,b]}$, то (за означенням) $(\varphi,\psi)=\int\limits_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)dx$. Можна перевірити, що операція (φ,ψ) є скалярним добутком.

6.2 Нерівність Коші-Буняковського. Норма, відстань, ортогональність в евклідовому просторі

Теорема 6.1. Для двох довільних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ довільного евклідового простору має місце нерівність Коші-Буняковського

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)^2 \le \left(\overline{a},\overline{a}\right)\left(\overline{b},\overline{b}\right).$$

Доведення. По-перше зазначимо, що нерівність виконується, якщо $\overline{a}=\overline{0}$. Далі будемо вважати, що $\overline{a}\ne\overline{0}$. Для будь-якого дійсного числа x має місце нерівність

$$\left(\left(x\cdot\overline{a}-\overline{b}\right),\left(x\cdot\overline{a}-\overline{b}\right)\right)\ge 0 \text{ або } \left(\overline{a},\overline{a}\right)x^2-2\left(\overline{a},\overline{b}\right)x+\left(\overline{b},\overline{b}\right)\ge 0.$$

Оскільки $\left(\overline{a},\overline{a}\right)>0$, то дискримінант квадратного тричлена, що знаходиться в лівій частині останньої нерівності, має бути ~~невід'ємним, тобто~~

$$4\left(\overline{a},\overline{b}\right)^2-4\left(\overline{a},\overline{a}\right)\left(\overline{b},\overline{b}\right)\le 0.$$

Звідки отримуємо:

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)^2 \le \left(\overline{a},\overline{a}\right)\left(\overline{b},\overline{b}\right).$$

Для прикладу застосуємо нерівність Коші-Буняковського для стандартного скалярного добутку у векторному просторі R^n. Нехай $\overline{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ і $\overline{y}=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$. Тоді згідно з нерівністю Коші-Буняковського маємо:

$$\left(x_1y_1+x_2y_2+,...,+x_ny_n\right)^2\le\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+,...,+x_n^{\,2}\right)\left(y_1^{\,2}+y_2^{\,2}+,...,+y_n^{\,2}\right).$$

Нехай E – евклідів простір. ***Нормою*** (*norm*) вектора $\overline{a}\in E$ називають число $\|\overline{a}\|=\sqrt{\left(\overline{a},\overline{a}\right)}$. Вектор $\overline{a}$ називають ***нормованим*** (або ***одиничним***), якщо $\|\overline{a}\|=1$. Зазначимо, що будь-який вектор $\overline{x}\in E$ колінеарний до нормованого вектора $\dfrac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}$.

Перелічимо основні властивості норми вектора.

1. Якщо $\overline{a}\ne\overline{0}$, то $\|\overline{a}\|>0$.
2. $\|\lambda\cdot\overline{a}\|=|\lambda|\cdot\|\overline{a}\|$.
3. $\|\overline{a}+\overline{b}\|\le\|\overline{a}\|+\|\overline{b}\|$.

За допомогою норми в евклідовому просторі можна визначити відстань між векторами. А саме: $d\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\|\overline{x}-\overline{y}\|$.

Можна перевірити, що виконуються такі властивості:

1. $d\left(\overline{x},\overline{y}\right)=0\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{y}$;
2. $d\left(\overline{x},\overline{y}\right)=d\left(\overline{y},\overline{x}\right)$;
3. $d\left(\overline{x},\overline{y}\right)+d\left(\overline{y},\overline{z}\right)\ge d\left(\overline{x},\overline{z}\right)$.

Остання нерівність називається нерівністю трикутника.

Нехай E – евклідів простір. Вектори $\overline{a},\overline{b}\in E$ називаються ортогональними, якщо $(\overline{a},\overline{b})=0$.

Теорема 6.2. Якщо в евклідовому просторі E ненульові вектори $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_k$ попарно ортогональні, то множина векторів $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_k\}$ є лінійно незалежною.

Доведення. Нехай $\lambda_1\cdot\overline{e}_1+\lambda_2\cdot\overline{e}_2+,...,+\lambda_i\cdot\overline{e}_i+,...,+\lambda_k\cdot\overline{e}_k=\overline{0}$. Обидві частини останньої рівності справа скалярно помножимо на вектор $\overline{e}_i$. Одержимо:

$$\lambda_1\cdot(\overline{e}_1,\overline{e}_i)+\lambda_2\cdot(\overline{e}_2,\overline{e}_i)+,...,+\lambda_i\cdot(\overline{e}_i,\overline{e}_i)+,...,+\lambda_k\cdot(\overline{e}_k,\overline{e}_i)=(\overline{0},\overline{e}_i)=0.$$

Оскільки за умовою вектори $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_k$ попарно ортогональні, то всі доданки в лівій частині рівності (крім $\lambda_i\cdot(\overline{e}_i,\overline{e}_i)$) дорівнюють нулю. Отже, $\lambda_i\cdot(\overline{e}_i,\overline{e}_i)=0$. Позаяк за умовою $\overline{e}_i\neq\overline{0}$, то $(\overline{e}_i,\overline{e}_i)>0$. Звідси випливає, що $\lambda_i=0$. Тобто, множина векторів $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_k\}$ є лінійно незалежною.

Наслідок. Якщо в n-вимірному евклідовому просторі ненульові вектори $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ попарно ортогональні, то впорядкована множина векторів $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$ утворює базис. Такий базис називають **ортогональним** (*orthogonal basis*).

Якщо вектори $(\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n)$ в евклідовому просторі утворюють базис, то, помноживши кожний базисний вектор на число відмінне від нуля, ми знов одержимо базис.

Базис називають ***ортонормованим*** (*orthonormal basis*), якщо він ортогональний і кожний базисний вектор є нормованим. Якщо ми маємо ортогональний базис $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$, то базис $\left(\frac{\overline{e}_1}{\|\overline{e}_1\|},\frac{\overline{e}_2}{\|\overline{e}_2\|},...,\frac{\overline{e}_n}{\|\overline{e}_n\|}\right)$ є ортонормованим.

Виходячи з конкретного базису $(\overline{u}_1,\overline{u}_2,...,\overline{u}_n)$ евклідового простору E за допомогою алгоритму Грама-Шмідта можна сконструювати ортогональний базис $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$.

Алгоритм Грама-Шмідта

1. $\overline{e}_1=\overline{u}_1,$
2. $\overline{e}_2=\overline{u}_2-\dfrac{(\overline{e}_1,\overline{u}_2)}{(\overline{e}_1,\overline{e}_1)}\cdot\overline{e}_1,$
3. $\overline{e}_3=\overline{u}_3-\dfrac{(\overline{e}_1,\overline{u}_3)}{(\overline{e}_1,\overline{e}_1)}\cdot\overline{e}_1-\dfrac{(\overline{e}_2,\overline{u}_3)}{(\overline{e}_2,\overline{e}_2)}\cdot\overline{e}_2,$

....

n. $\overline{e}_n=\overline{u}_n-\dfrac{(\overline{e}_1,\overline{u}_n)}{(\overline{e}_1,\overline{e}_1)}\cdot\overline{e}_1-...-\dfrac{(\overline{e}_{n-1},\overline{u}_n)}{(\overline{e}_{n-1},\overline{e}_{n-1})}\cdot\overline{e}_{n-1}.$

Приклад 6.1. Сконструювати ортонормований базис в евклідовому просторі усіх многочленів P_2 на відрізку [0,1], виходячи з базису $\left(1,\ x+1,\ 3x^2\right)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що в даному випадку під скалярним добутком многочленів $\varphi,\psi \in P_2$ розуміємо визначений інтеграл $\int_0^1 \varphi(x)\cdot\psi(x)dx$. Спочатку знайдемо ортогональний базис. Застосуємо алгоритм Грама-Шмідта. $\overline{e}_1 = \overline{u}_1 = 1$. Для знаходження $\overline{e}_2$ обчислимо $\left(\overline{e}_1,\overline{e}_1\right)$ і $\left(\overline{e}_1,\overline{u}_2\right)$.

Маємо:

$$\left(\overline{e}_1,\overline{e}_1\right) = \int_0^1 1dx = 1,\ \left(\overline{e}_1,\overline{u}_2\right) = \int_0^1 1\cdot(x+1)dx = \frac{3}{2}.$$

Отже,

$$\overline{e}_2 = \overline{u}_2 - \frac{\left(\overline{e}_1,\overline{u}_2\right)}{\left(\overline{e}_1,\overline{e}_1\right)}\cdot\overline{e}_1 = x+1-\frac{3}{2} = x-\frac{1}{2}.$$

Щоб знайти $\overline{e}_3$ обчислимо $\left(\overline{e}_1,\overline{u}_3\right),\left(\overline{e}_2,\overline{u}_3\right)$ і $\left(\overline{e}_2,\overline{e}_2\right)$. Одержуємо:

$$\left(\overline{e}_1,\overline{u}_3\right) = \int_0^1 3x^2dx = 1,\ \left(\overline{e}_2,\overline{u}_3\right) = \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)3x^2dx = \frac{1}{4},$$

$$\left(\overline{e}_2,\overline{e}_2\right) = \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx = \frac{1}{12}.$$

Отже,

$$\overline{e}_3 = \overline{u}_3 - \frac{\left(\overline{e}_1,\overline{u}_3\right)}{\left(\overline{e}_1,\overline{e}_1\right)}\cdot\overline{e}_1 - \frac{\left(\overline{e}_2,\overline{u}_3\right)}{\left(\overline{e}_2,\overline{e}_2\right)}\cdot\overline{e}_2 = 3x^2-1-3\left(x-\frac{1}{2}\right) = 3x^2-3x+\frac{1}{2}.$$

Таким чином, ми одержали ортогональний базис

$$\left(1,\ x-\frac{1}{2},\ 3x^2-3x+\frac{1}{2}\right).$$

Залишається нормалізувати базисні вектори. Оскільки вище ми вже знайшли $\left(\overline{e}_1,\overline{e}_1\right)$ і $\left(\overline{e}_2,\overline{e}_2\right)$, то $\|\overline{e}_1\| = 1$ і $\|\overline{e}_2\| = \frac{1}{\sqrt{12}}$. Нормалізуємо вектор $\overline{e}_3$. Позаяк

$$\left(\overline{e}_3,\overline{e}_3\right) = \int_0^1\left(3x^2-3x+\frac{1}{2}\right)^2dx = \frac{1}{20},\ \text{то}\ \|\overline{e}_3\| = \frac{1}{\sqrt{20}}.$$

Таким чином, у векторному просторі P_2 ми одержали ортонормований базис

$$\left(1,\ \sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right),\ \sqrt{20}\left(3x^2-3x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Зазначимо, що серед усіх базисів евклідового простору найбільш зручним є саме ортонормований базис. Дійсно, нехай евклідів простір V має розмірність n і $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ – його ортонормований базис відносно скалярного добутку $(\ , \ )$. Якщо в цьому базисі вектори $\overline{x}$ і $\overline{y}$ мають відповідно координати $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n)$, то, як легко перевірити, $(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$.

6.3 Ортогональні матриці

Нехай $M_{n,1}$ – векторний простір, елементами якого є матриці-стовпці розмірності $n \times 1$. В цьому просторі розглянемо звичайний скалярний добуток, а саме: якщо $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ і $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n)^T$, то

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Матрицю A розмірності $n \times n$ назвемо ***ортогональною***, якщо для будь-яких $\overline{x}, \overline{y} \in M_{n,1}$ має місце рівність $(A \cdot \overline{x}, A \cdot \overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$, тобто матриця ортогональна тоді і лише тоді, коли вона зберігає скалярний добуток.

Теорема 6.3. Матриця A розмірності $n \times n$ є ортогональною тоді і тільки тоді, коли кожний її стовпець нормований і будь-які два її стовпці ортогональні.

Доведення. Нехай матриця A є ортогональною. Позначимо через $\overline{e}_i$ матрицю-стовпець розмірності $n \times 1$, у якої на i-му місці (якщо рахувати зверху) стоїть одиниця 1, а на всіх інших місцях стоять нулі. Легко перевірити, що $A \cdot \overline{e}_i$ – це i-й стовпець матриці A. Якщо $i \neq k$, то $(\overline{e}_i, \overline{e}_k) = 0$. Отже, $(A \cdot \overline{e}_i, A \cdot \overline{e}_k) = (\overline{e}_i, \overline{e}_k) = 0$. Тобто будь-які два стовпці матриці A є ортогональними. Далі, для будь-якого i-го стовпця має місце рівність $(A \cdot \overline{e}_i, A \cdot \overline{e}_i) = (\overline{e}_i, \overline{e}_i) = 1$. Або в розгорнутій формі: $a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + ... + a_{ni}^2 = 1$. Тобто кожний стовпець матриці A є нормованим.

Тепер припустимо, що в матриці A кожний стовпець нормований і будь-які два її стовпці ортогональні. Прямий підрахунок показує, що така матриця є ортогональною. (Для тренування це можна проробити для матриці 2-го і 3-го порядків).

Теорема 6.4. Матриця A розмірності $n \times n$ є ортогональною тоді і лише тоді, коли $A^T \cdot A = E$, де E – одинична матриця.

Доведення. Нехай матриця A є ортогональною. Будемо позначати через c_{ik} елементи матриці $A^T \cdot A$. Тоді для довільного $i \ (i = 1, 2, ..., n)$ маємо: $c_{ii} = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + ... + a_{ni}^2$. Згідно з теоремою 6.3 кожний стовпець матриці A є нормованим, отже, $c_{ii} = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + ... + a_{ni}^2 = 1$. Якщо $i \neq k$, то $c_{ik} = a_{1i} a_{1k} + a_{2i} a_{2k} + ... + a_{ni} a_{nk}$. Оскільки за теоремою 6.3 будь-які два різні стовпці матриці A ортогональні, то $c_{ik}=a_{1i}a_{1k}+a_{2i}a_{2k}+\ldots+a_{ni}a_{nk}=0$. Звідси випливає, що $A^T\cdot A=E$.

Нехай тепер матриця A така, що $A^T\cdot A=E$. Тоді використовуючи означення добутку матриць, ми доходимо висновку, що кожний стовпець матриці A є нормованим і її стовпці попарно ортогональні. Отже, згідно з теоремою 6.3, матриця A є ортогональною.

Наслідок 1. Оберненою до ортогональної матриці A є транспонована матриця A^T.

Наслідок 2. Якщо матриця $A-$ ортогональна, то $\det(A)=1$ або $\det(A)=-1$.

Доведення. Зрозуміло, що $\det(E)=1$. Крім того, відомо (див. п. 1.3), що $\det\left(A^T\right)=\det(A)$. Також нагадаємо: детермінант добутку двох матриць дорівнює добутку детермінантів. Оскільки $A^T\cdot A=E$, то $\left(\det(A)\right)^2=1$. Звідси $\det(A)=1$ або $\det(A)=-1$.

Наслідок 3. Якщо матриця $A-$ ортогональна, то матриця A^T теж ортогональна.

Доведення. $\left(A^T\right)^T\cdot A^T=A\cdot A^T=A^T\cdot A=E$.

Наслідок 4. Якщо матриця $A-$ ортогональна, то A^{-1} теж ортогональна.

Теорема 6.5. Матриця переходу від одного ортонормованого базису до іншого ортонормованого базису є ортогональною.

Доведення. Обґрунтуємо твердження для евклідового простору розмірності 2. (Для більших розмірностей доведення цілком аналогічне). Отже, нехай векторний простір V має розмірність 2. Припустимо $E=(\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ і $U=(\overline{u}_1,\overline{u}_2)-$ його ортонормовані базиси. Нехай

$$\begin{cases}\overline{u}_1=a_{11}\cdot\overline{e}_1+a_{12}\cdot\overline{e}_2,\\ \overline{u}_2=a_{21}\cdot\overline{e}_1+a_{22}\cdot\overline{e}_2\end{cases}\text{ і }\begin{cases}\overline{e}_1=b_{11}\cdot\overline{u}_1+b_{12}\cdot\overline{u}_2,\\ \overline{e}_2=b_{21}\cdot\overline{u}_1+b_{22}\cdot\overline{u}_2.\end{cases}$$

Першу рівність першої системи скалярно множимо на вектор $\overline{e}_1$. Враховуючи, що базис $E-$ ортонормований, то $(\overline{u}_1,\overline{e}_1)=a_{11}$. Аналогічно, якщо першу і другу рівність першої системи будемо скалярно множити на вектори $\overline{e}_1$ і $\overline{e}_2$, то одержимо рівності $(\overline{u}_2,\overline{e}_1)=a_{21}$, $(\overline{u}_1,\overline{e}_2)=a_{12}$, $(\overline{u}_2,\overline{e}_2)=a_{22}$. Подібні операції виконаємо з другою системою рівностей. Одержимо: $(\overline{e}_1,\overline{u}_1)=b_{11},(\overline{e}_1,\overline{u}_2)=b_{12},(\overline{e}_2,\overline{u}_1)=b_{21},(\overline{e}_2,\overline{u}_2)=b_{22}$. Оскільки операція скалярного добутку комутативна, то $a_{ij}=b_{ji}\,(i,j=1,2)$. Матриця

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$$

є матрицею переходу від базису E до базису U, а матриця

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

– це матриця переходу від базису U до базису E. Згідно з теоремою 4.5 $A\cdot B=B\cdot A=E$. Враховуючи, що $a_{ij}=b_{ji}\,(i,j=1,2)$, одержуємо:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}^{\,2}+a_{21}^{\,2} & a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21} & a_{12}^{\,2}+a_{22}^{\,2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідки $a_{11}^{\,2}+a_{21}^{\,2}=a_{12}^{\,2}+a_{22}^{\,2}=1$. Тобто рядки матриці A нормовані. Крім того, $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$. Отже, два рядки матриці A є ортогональними. В силу наслідка 3 (див. теорему 6.4) матриця A – ортогональна.

Далі, нехай E – евклідів простір. Лінійне перетворення φ називається ***ізометрією*** (*isometry*), якщо воно зберігає відстань між векторами, тобто, $\|\overline{x}-\overline{y}\|=\|\varphi(\overline{x})-\varphi(\overline{y})\|$.

Нехай $M_{n,1}$ – векторний простір, елементами якого є матриці-стовпці розмірності $n\times 1$. В цьому просторі розглянемо звичайний скалярний добуток, а саме: якщо $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ і $\overline{y}=(\overline{y}_1,\overline{y}_2,...,\overline{y}_n)^T$, то

$$(\overline{x},\overline{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n.$$

Поставимо питання: для яких матриць A розмірності $n\times n$ лінійне перетворення $F_A:\overline{x}\mapsto A\cdot\overline{x}$ є ізометрією? Відповідь знаходимо у наступній теоремі.

Теорема 6.6. Для матриці A нижченаведені умови є рівносильними:

1. Для будь-якого $\overline{x}\in M_{n1}$ має місце рівність $|A\cdot\overline{x}\|=\|\overline{x}\|$;
2. Матриця A – ортогональна;
3. Перетворення $F_A:\overline{x}\mapsto A\cdot\overline{x}$ є ізометрією евклідового простору M_{n1}.

Доведення. Спочатку доведемо справедливість імплікації $2\Rightarrow 1$. Оскільки матриця A є ортогональною, то для будь-яких $\overline{x},\overline{y}\in M_{n1}$ виконується рівність $(A\cdot\overline{x},A\cdot\overline{y})=(\overline{x},\overline{y})$. Замінюємо $\overline{y}$ на $\overline{x}$. Одержуємо $(A\cdot\overline{x},A\cdot\overline{x})=(\overline{x},\overline{x})$. Остання рівність і означає, що $\|A\cdot\overline{x}\|=\|\overline{x}\|$.

Перед тим як довести обернену імплікацію зазначимо рівність, яка має місце у будь-якому евклідовому просторі. А саме:

$$(\overline{x},\overline{y})=\frac{1}{4}\left(\left(\|\overline{x}+\overline{y}\|^2-\|\overline{x}-\overline{y}\|^2\right)\right).$$

Ця тотожність легко перевіряється прямим підрахунком.

Тепер обґрунтуємо справедливість імплікації $1\Rightarrow 2$.

$$\left(A\cdot\overline{x},A\cdot\overline{y}\right)=\frac{1}{4}\left(\|A\cdot\overline{x}+A\cdot\overline{y}\|^2-\|A\cdot\overline{x}-A\cdot\overline{y}\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(\|A\cdot\left(\overline{x}+\overline{y}\right)\|^2-\|A\cdot\left(\overline{x}-\overline{y}\right)\|^2\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\left(\|\left(\overline{x}+\overline{y}\right)\|^2-\|\left(\overline{x}-\overline{y}\right)\|^2\right)\right)=\left(\overline{x},\overline{y}\right).$$

Тобто ми довели справедливість еквівалентності $1\Leftrightarrow 2$.

Обґрунтуємо імплікацію $1\Rightarrow 3$. $\|A\cdot\overline{x}-A\cdot\overline{y}\|=\|A\cdot\left(\overline{x}-\overline{y}\right)\|=\|\overline{x}-\overline{y}\|$. Отже, перетворення $F_A:\overline{x}\mapsto A\cdot\overline{x}$ є ізометрією евклідового простору M_{n1}. Обґрунтуємо імплікацію $3\Rightarrow 1$. Оскільки рівність $\|A\cdot\overline{x}-A\cdot\overline{y}\|=\|\overline{x}-\overline{y}\|$ виконується для будь-яких $\overline{x},\overline{y}\in M_{n1}$, то покладемо $\overline{y}=\overline{0}$. Отримаємо: $\|A\cdot\overline{x}\|=\|\overline{x}\|$. Отже, мають місце еквівалентності $1\Leftrightarrow 2$ і $1\Leftrightarrow 3$. Звідки випливає $2\Leftrightarrow 3$.

Якщо в просторі зафіксована декартова система координат, то цілком очевидно, що повороти навколо координатних осей на деякий кут та симетрії відносно координатних площин або координатних осей є лінійними ізометріями.

Приклад 6.2. В стандартному базисі $\left(\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right)$ знайти матрицю відображення $\xi:R^3\to R^3$, яке повертає точку навколо осі OY проти ходу годинникової стрілки на кут α.

Розв'язання. Очевидно, що при повороті точки (x,y,z) навколо осі OY координата y залишається незмінною, тому для подальших викладок нам достатньо розглянути координатну площину XOZ.

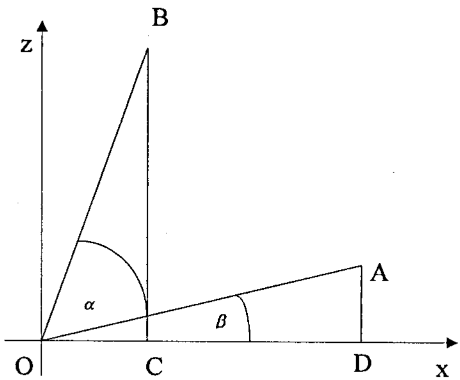

Рисунок 9

Отже, нехай точка A має координати (x, z), а її образ при повороті на кут α навколо осі OY – це точка B з координатами $\left(x',y'\right)$ (рисунок 9). Позначимо кут AOD через β, тоді

$$\frac{x'}{\sqrt{x^2+z^2}}=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=$$

$$=\cos\alpha\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}-\sin\alpha\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

Звідки $x'=x\cdot\cos\alpha-z\cdot\sin\alpha$. Аналогічно,

$$\frac{z'}{\sqrt{x^2+z^2}}=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha=$$

$$=\sin\alpha\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}+\cos\alpha\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

Звідки $z'=x\cdot\sin\alpha+z\cdot\cos\alpha$. Отже, поворот навколо осі OY проти ходу годинникової стрілки на кут α задається відображенням

$$R_\alpha:(x,y,z)\mapsto(x\cdot\cos\alpha-z\cdot\sin\alpha,y,x\cdot\sin\alpha+z\cdot\cos\alpha).$$

Легко перевірити, що перетворення R_α є лінійним. Знайдемо матрицю цього перетворення у стандартному базисі. Подіємо перетворенням R_α на базисні вектори $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$. Маємо:

$$R_\alpha(\overline{i})=R_\alpha((1,0,0))=(\cos\alpha,0,\sin\alpha),\ R_\alpha(\overline{j})=R_\alpha((0,1,0))=(0,1,0),$$

$$R_\alpha(\overline{k})=R_\alpha((0,0,1))=(-\sin\alpha,0,\cos\alpha).$$

Отже, матриця лінійного перетворення R_α в стандартному базисі $(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$ має вигляд:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Як легко переконатися, одержана матриця є ортогональною.

6.4 Ортогональні матриці розмірності 2×2

Нехай матриця $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & k\end{pmatrix}$ є ортогональною. Відомо, що $\det A=\pm1$. Відповідно розглянемо два випадки.

1-й випадок. $\det A=1$. Тоді мають місце такі рівності: $ak-bc=1,\ a^2+c^2=1,\ b^2+k^2=1,\ ab+ck=0$. Знайдемо A^{-1} за допомогою приєднаної матриці. Обчислюємо алгебраїчні доповнення усіх елементів даної матриці: $A_{11}=k,\ A_{12}=-c,\ A_{21}=-b,\ A_{22}=a$. Тоді $A^{-1}=\begin{pmatrix}k & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Відомо, що для ортогональної матриці $A^{-1}=A^T$. Отже, $\begin{pmatrix}k & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & k.\end{pmatrix}$.

Звідси, $a = k, b = -c$. Таким чином, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Оскільки $a^2 + b^2 = 1$, то знайдеться число $\varphi\,(0 \le \varphi \le 2\pi)$ таке, що $a = \cos\varphi$, тоді $b = \sin\varphi$ або $b = -\sin\varphi$. Отже, матрицю A можна подати у формі $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Повторюючи майже слово в слово викладки прикладу 6.2, можна показати, що матриця $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ в координатній площині XOY реалізує поворот на кут φ проти ходу годинникової стрілки навколо початку координат. Зрозуміло, що поворот на кут φ за ходом годинникової стрілки реалізується матрицею оберненою до $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, тобто матрицею $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

2-й випадок. $\det A = -1$. В цьому випадку, обчислюючи обернену матрицю до матриці A методом приєднаної матриці, одержимо:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -k & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$A^{-1} = A^T, \text{ то } \begin{pmatrix} -k & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Звідси, $a = -k, b = c$. Таким чином, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Позаяк $a^2 + b^2 = 1$, то знайдеться число $\varphi\,(0 \le \varphi \le 2\pi)$ таке, що $a = \cos\varphi$. Тоді $b = \sin\varphi$ або $b = -\sin\varphi$. Отже, матрицю A можна подати у формі

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \text{або} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси можна припустити, що матриця A реалізує симетрію відносно прямої, що проходить через початок координат. Користуючись геометричними міркуваннями (рисунок 10) покажемо, що так воно і є. Отже, нехай число $\varphi \ne \pi$. Обґрунтуємо, що матриця

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

здійснює симетричне відображення відносно прямої $y = tg\frac{\varphi}{2} \cdot x$. На рисунку 10 пряма $y = tg\frac{\varphi}{2} \cdot x$ зображується як OF.

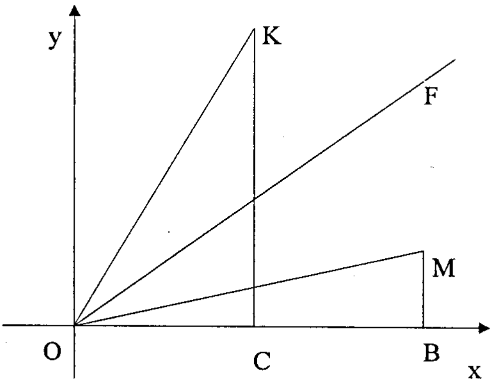

Рисунок 10

Точка K симетрична точці M відносно прямої OF. Кут FOB дорівнює $\frac{\varphi}{2}$, а кут MOB позначимо через β. Нехай точка M має координати (x, y), а симетрична їй точка K координати (x', y'). Наше завдання виразити x' і y' через x і y. Зрозуміло, що кути KOF і MOF рівні між собою і обидва дорівнюють $\frac{\varphi}{2} - \beta$. Тоді кут COK дорівнює $\varphi - \beta$. З трикутника COK маємо: $\frac{OC}{OK} = \cos(\varphi - \beta)$. Зрозуміло, що $OC = x'$ і $OK = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. Звідси,

$$x' = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\varphi - \beta) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (\cos\varphi \cdot \cos\beta + \sin\varphi \cdot \sin\beta) =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\cos\varphi \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sin\varphi \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y.$$

Далі $y' = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(\varphi - \beta) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (\sin\varphi \cdot \cos\beta - \cos\varphi \cdot \sin\beta) =$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\sin\varphi \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos\varphi \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \sin\varphi \cdot x - \cos\varphi \cdot y.$$

Отже, перетворення симетрії відносно прямої $y = tg\frac{\varphi}{2} \cdot x$ має вигляд:

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y, \\ y' = \sin\varphi \cdot x - \cos\varphi \cdot y. \end{cases}$$

Матриця цього перетворення

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Окремо розглянемо перетворення, що задається матрицею

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко зрозуміти, що це симетрія відносно осі OY.

Отже, ортогональна матриця A розмірності 2×2 на координатній площині у випадку коли $\det A = 1$ визначає поворот навколо початку координат. Якщо ж $\det A = -1$, то матриця A визначає симетрію відносно прямої, що проходить через початок координат. Зазначимо, що композиція двох симетрій є поворотом. Дійсно, нехай матриці B і C є осьовими симетріями, тоді $\det(B) = \det(C) = -1$. Звідси $\det(B \cdot C) = 1$. Це означає, що матриця $B \cdot C$ визначає поворот. Такими ж простими викладками можна показати, що композиція повороту на осьову симетрію є осьовою симетрією.

6.5 Зведення симетричної матриці до діагонального виду

Нагадаємо, що матриця A називається симетричною, якщо $A = A^T$. Розглянемо для прикладу симетричну матрицю $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$. Утворимо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ c & b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2 = 0$. Оскільки дискримінант $(a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$, то будь-яке власне значення даної матриці є дійсним числом. Цей факт не є випадковим – власні значення будь-якої симетричної дійсної матриці є дійсними числами. Для доведення нам доведеться скористатися деякими фактами щодо комплексних чисел. Комплексні числа $x + iy$ та $x - iy$ називають спряженими. Якщо z – комплексне число, то через z^* позначимо спряжене до нього (це позначення спряженого не є стандартним, однак, щоб уникнути деякої плутанини в подальших викладках, ми застосовуємо саме його). Якщо B – матриця, елементами якої є комплексні числа, то через B^* позначимо матрицю, яку ми одержуємо з матриці B, замінивши кожний її елемент на спряжене число. Легко перевірити, що $(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$. Зрозуміло, що для дійсної матриці A (всі її компоненти є дійсними числами) $A^* = A$.

Як і вище ми будемо розглядати векторний простір усіх матриць розмірності $n \times 1$.

Теорема 6.7. Будь-яке власне значення дійсної симетричної матриці A є дійсним числом.

Доведення. Нехай λ – власне значення матриці A, тоді існує ненульова матриця-стовпець $\overline{x}$, така, що $A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x}$. З останньої рівності випливає:

$$A^* \cdot \overline{x}^* = \lambda^* \cdot \overline{x}^* \text{ або } A \cdot \overline{x}^* = \lambda^* \cdot \overline{x}^* \qquad (6.1)$$

Транспонуємо обидві частини рівності (6.1):

$$\left(\overline{x}^*\right)^T \cdot A^T = \lambda^* \cdot \left(\overline{x}^*\right)^T \text{ або } \left(\overline{x}^*\right)^T \cdot A = \lambda^* \cdot \left(\overline{x}^*\right)^T \qquad (6.2)$$

Другу рівність справа помножимо на $\overline{x}$. Одержимо:

$$\left(\overline{x}^*\right)^T \cdot A \cdot \overline{x} = \lambda^* \cdot \left(\overline{x}^*\right)^T \cdot \overline{x} \qquad (6.3)$$

Рівність $A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x}$ зліва помножимо на $\left(\overline{x}^*\right)^T$. Отримуємо:

$$\left(\overline{x}^*\right)^T \cdot A \cdot \overline{x} = \left(\overline{x}^*\right)^T \cdot \lambda \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \left(\overline{x}^*\right)^T \cdot \overline{x} \qquad (6.4)$$

Ліві частини рівностей (6.3) і (6.4) однакові, тому рівні між собою і праві частини: $\lambda \cdot \left(\overline{x}^*\right)^T \cdot \overline{x} = \lambda^* \cdot \left(\overline{x}^*\right)^T \cdot \overline{x}$. Оскільки число (а точніше матриця розмірності 1×1) відмінне від нуля, то $\lambda = \lambda^*$. Звідси випливає, що λ – дійсне число.

Теорема 6.8. Якщо матриця A є симетричною, то два її власні вектори, що відповідають двом різним власним значенням, є ортогональними.

Доведення. Нехай λ і ξ – два різні власні значення матриці A. Тоді існують власні вектори $\overline{x}$ і $\overline{y}$ такі, що

$$A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x} \qquad (6.5)$$

і

$$A \cdot \overline{y} = \xi \cdot \overline{y}. \qquad (6.6)$$

Першу рівність зліва множимо на $\overline{y}^T$. Отримуємо:

$$\overline{y}^T \cdot A \cdot \overline{x} = \overline{y}^T \cdot \lambda \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{y}^T \cdot \overline{x}. \qquad (6.7)$$

Другу рівність транспонуємо. Маємо:

$$\overline{y}^T \cdot A = \xi \cdot \overline{y}^T. \qquad (6.8)$$

Рівність (6.8) справа множимо на $\overline{x}$. Одержуємо:

$$\overline{y}^T \cdot A \cdot \overline{x} = \xi \cdot \overline{y}^T \cdot \overline{x}. \tag{6.9}$$

З рівностей (6.7) і (6.9) випливає: $\lambda \cdot \overline{y}^T \cdot \overline{x} = \xi \cdot \overline{y}^T \cdot \overline{x}$. Оскільки за умовою $\lambda \neq \xi$, то $\overline{y}^T \cdot \overline{x} = 0$. Позаяк число $\overline{y}^T \cdot \overline{x}$ є скалярним добутком векторів $\overline{x}$ і $\overline{y}$, то вектори $\overline{x}$ та $\overline{y}$ – ортогональні.

Остання теорема дозволяє нам спростити процес діагоналізації симетричної матриці A. Розглянемо відповідний алгоритм у випадку, коли власні значення матриці A є попарно різними.

1. Знаходимо власні числа і відповідні власні вектори матриці A.
2. Утворюємо матрицю P, стовпці якої є власними векторами матриці A.
3. Утворюємо матрицю U, стовпці якої – це нормалізовані стовпці матриці P. Матриця U є ортогональною, тому за теоремою 6.4 $U^{-1} = U^T$.
4. Записуємо шукану рівність: $A = U \cdot D \cdot U^T$, де $D = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

Приклад 6.3. Матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ звести до діагонального виду.

Розв'язання. Спочатку складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0.$$

Розв'язуємо його. Власні значення $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2 = 2$. Власному значенню $\lambda_1 = 0$ відповідає однорідна СЛР

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо будь-який ненульовий розв'язок останньої СЛР. Наприклад, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Власному значенню $\lambda_2 = 2$ відповідає однорідна СЛР

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Шукаємо довільний ненульовий розв'язок цієї СЛР. Наприклад, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Утворюємо матрицю $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, стовпці якої відповідно $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ і $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Далі нормалізуємо стовпці матриці P і утворюємо матрицю

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

Приклад 6.4. Матрицю $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ звести до діагонального виду.

Розв'язування. Розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Шукаємо відповідні власні значення. Власному значенню $\lambda_1 = 1$ відповідає однорідна СЛР:

$$\begin{cases} -x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_1 + \ 0 \cdot x_2 - \ x_3 = 0. \end{cases}$$

Один з нетривіальних розв'язків цієї СЛР $E_1 = (1,0,1)^T$.

Власному значенню $\lambda_2 = -1$ відповідає однорідна СЛР:

$$\begin{cases} x_1 + \ 0 \cdot x_2 + \ x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_1 + \ 0 \cdot x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо будь-який нетривіальний розв'язок цієї СЛР. Наприклад, $E_2 = (1,0,-1)^T$.

Власному значенню $\lambda_3 = 2$ відповідає однорідна СЛР:

$$\begin{cases} -2x_1 + \ 0 \cdot x_2 + \ x_3 = 0, \\ \ x_1 + \ 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Один з ненульових її розв'язків $E_3 = (0,1,0)^T$. Утворюємо матрицю

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

стовпці якої відповідно $E_1=(1,0,1)^T$, $E_2=(1,0,-1)^T$, $E_3=(0,1,0)^T$. Далі нормалізуємо стовпці матриці P і утворюємо матрицю

$$U=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є корені, кратність яких більша за одиницю, то алгоритм зведення дійсної симетричної матриці A до діагонального виду дещо ускладнюється.

1. Розв'язуємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_t$, кратність яких відповідно $k_1,k_2,...,k_t$. Сума $k_1+k_2+...+k_t$ має дорівнювати порядку матриці A. Тобто, $k_1+k_2+...+k_t=n$.
2. Утворюємо відповідну діагональну матрицю D таким чином. Спочатку (рухаючись зверху вниз по головній діагоналі) записуємо (в кількості k_1) власне число λ_1. Після цього (в кількості k_2) на головній діагоналі записуємо власне число λ_2. І так далі – останні (в кількості k_t) діагональні елементи дорівнюють власному значенню λ_t.
3. Для власного значення λ_1 знаходимо фундаментальну систему розв'язків (ФСР) однорідної СЛР з матрицею $A-\lambda_1\cdot E$. (Кількість фундаментальних розв'язків має дорівнювати кратності k_1). Якщо одержана ФСР не є ортогональною, то підбором або за допомого алгоритму Грама-Шмідта ортогоналізуємо її. Одержану ортогональну систему векторів нормалізуємо. Отримуємо: $\overline{e}_1^1, \overline{e}_2^1,...,\overline{e}_{k_1}^1$.
4. Те саме проробляємо для власних чисел $\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_t$. У підсумку одержуємо n нормалізованих попарно ортогональних векторів $\overline{e}_1^1,...,\overline{e}_{k_1}^1,\overline{e}_1^2,...,\overline{e}_{k_2}^2,...,\overline{e}_1^t,...,\overline{e}_{k_t}^t$.

5. Утворюємо матрицю переходу P. Це матриця, стовпці якої (якщо йти зліва направо) відповідно вектори $\overline{e}_1^1,...,\overline{e}_{k_1}^1,\overline{e}_1^2,...,\overline{e}_{k_2}^2,...,\overline{e}_1^t,...,\overline{e}_{k_t}^t$.
6. Записуємо відповідь $A = P \cdot D \cdot P^T$.

Приклад 6.5. Матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ звести до діагонального виду.

Розв'язання. Спочатку шукаємо корені характеристичного рівняння

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(3-\lambda) = 0.$$

Маємо два дійсні корені: $\lambda_1 = 0$ (кратності 2) і $\lambda_2 = 3$ (кратності 1). Запишемо діагональну матрицю

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для кореня $\lambda_1 = 0$ шукаємо фундаментальну систему розв'язків СЛР:

$$\begin{cases} (1-0)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1-0)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-0)x_3 = 0. \end{cases}$$

Або

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

В даному випадку легко підібрати ФСР, яка є ортогональною. А саме:

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ і } \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Нормалізуємо ФСР. Одержуємо:

$$\overline{e}_1^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ і } \overline{e}_2^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Для кореня $\lambda_2 = 3$ шукаємо фундаментальну систему розв'язків СЛР:

$$\begin{cases}(1-3)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1-3)x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+(1-3)x_3=0.\end{cases}$$

Або

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

Зводимо її до східчастого виду:

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0,\\ x_2-x_3=0.\end{cases}$$

Беремо довільний ненульовий розв'язок останньої СЛР, наприклад $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Нормалізуємо його:

$$\overline{e}_1^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Утворюємо матрицю переходу:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$

6.6 Білінійні і квадратичні функції

Нехай V – дійсний векторний простір. Функцію двох векторних змінних $\varphi: V \times V \to R$, де R – дійсні числа, називають ***білінійною функцією*** (*bilinear function*), якщо для будь-яких $\overline{x}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{y}, \overline{y}_1, \overline{y}_2 \in V$ і довільного числа $c \in R$ виконуються такі умови:

1. $\varphi(\overline{x}_1 + \overline{x}_2, \overline{y}) = \varphi(\overline{x}_1, \overline{y}) + \varphi(\overline{x}_2, \overline{y})$;
2. $\varphi(\overline{x}, \overline{y}_1 + \overline{y}_2) = \varphi(\overline{x}, \overline{y}_1) + \varphi(\overline{x}, \overline{y}_2)$;
3. $\varphi(c \cdot \overline{x}, \overline{y}) = \varphi(\overline{x}, c \cdot \overline{y}) = c\varphi(\overline{x}, \overline{y})$.

Скалярний добуток є прикладом білінійної функції. Нехай V – скінченно-вимірний векторний простір розмірності n. Зафіксуємо в просторі V базис $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$. Білінійній функції φ, що визначена на V, поставимо у відповідність матрицю $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} \varphi(\overline{e}_1, \overline{e}_1) & \varphi(\overline{e}_1, \overline{e}_2) & ..... & \varphi(\overline{e}_1, \overline{e}_n) \\ \varphi(\overline{e}_2, \overline{e}_1) & \varphi(\overline{e}_2, \overline{e}_2) & ..... & \varphi(\overline{e}_2, \overline{e}_n) \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ \varphi(\overline{e}_n, \overline{e}_1) & \varphi(\overline{e}_n, \overline{e}_2) & ..... & \varphi(\overline{e}_n, \overline{e}_n) \end{pmatrix}.$$

Вона називається матрицею білінійної функції φ в базисі $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$. Навпаки, якщо задано квадратну матрицю

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ..... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ..... & b_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ b_{n1} & b_{n2} & ..... & b_{nn} \end{pmatrix},$$

то у фіксованому базисі $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ їй відповідає білінійна форма $\psi(\overline{x}, \overline{y})$. А саме: нехай $\overline{x} = \xi_1 \cdot \overline{e}_1 + \xi_2 \cdot \overline{e}_2 + ... + \xi_n \cdot \overline{e}_n$ і $\overline{y} = \eta_1 \cdot \overline{e}_1 + \eta_2 \cdot \overline{e}_2 + ... + \eta_n \cdot \overline{e}_n$. Тоді $\psi(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \xi_i \eta_j$.

Наступні твердження можна перевірити прямим підрахунком.

Твердження 6.1. Якщо A – матриця білінійної функції φ у базисі $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$, а $[\overline{x}]$ і $[\overline{y}]$ – координати (записані у вигляді стовпців) векторів $\overline{x}$ і $\overline{y}$ у цьому ж базисі, то

$$\varphi(\overline{x}, \overline{y}) = [\overline{x}]^T \cdot A \cdot [\overline{y}].$$

Твердження 6.2. При переході до нового базису у векторному просторі V, матриця A білінійної функції φ перетворюється у матрицю A' за правилом:

$$A' = P^T \cdot A \cdot P,$$

де P – матриця переходу до нового базису.

Приклад 6.6. Матриця білінійної функція ψ у просторі R^3 в стандартному базисі має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Обчисліть $\psi(\bar{x},\bar{y})$, якщо $\bar{x}=(1,0,3)$ і $\bar{y}=(-1,2,-4)$.

Розв'язання. Застосуємо формулу $\varphi(\bar{x},\bar{y})=[\bar{x}]^T\cdot A\cdot[\bar{y}]$. Маємо:

$$\psi(\bar{x},\bar{y})=(1,0,3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}=-43.$$

Нехай $\varphi(\bar{x},\bar{y})-$ білінійна функція на векторному просторі розмірності n. Якщо $\bar{y}$ замінити на $\bar{x}$, то ми одержимо ***квадратичну функцію*** (*quadratic function*) $\varphi(\bar{x},\bar{x})$. Якщо в деякому базисі $(\bar{g}_1,\bar{g}_2,...,\bar{g}_n)$ квадратична функція $\varphi(\bar{x},\bar{x})$ має форму: $\varphi(\bar{x},\bar{x})=\lambda_1\xi_1{}^2+\lambda_2\xi_2{}^2+...+\lambda_n\xi_n{}^2$, де $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)-$ координати вектора $\bar{x}$ в базисі $(\bar{g}_1,\bar{g}_2,...,\bar{g}_n)$, то такий вид квадратичної функції $\varphi(\bar{x},\bar{x})$ називається ***канонічним***. Коефіцієнти $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ називаються канонічними коефіцієнтами, а базис $(\bar{g}_1,\bar{g}_2,...,\bar{g}_n)$ називають канонічним базисом.

Якщо матриця D квадратичної функції $\varphi(\bar{x},\bar{x})$в деякому базисі є діагональною, то, використовуючи формулу $\varphi(\bar{x},\bar{y})=[\bar{x}]^T\cdot D\cdot[\bar{y}]$ і підставивши $[\bar{x}]$ замість $[\bar{y}]$, ми переконуємося, що в цьому базисі квадратична функція набуває канонічної форми. Оскільки матриця A квадратичної функції є симетричною (позаяк будь-які дві її змінні комутують), то існує ортонормований базис (що складається з нормованих власних векторів матриці A) в якому квадратична функція $\varphi(\bar{x},\bar{x})$ має канонічну форму.

Зауважимо, що вихідна матриця A квадратичної форми у просторі R^n завжди задається у стандартному базисі. Якщо позначити через D відповідну діагональну матрицю, то матриця переходу від A до Dє ортогональна матриця P, для якої $P^{-1}=P^T$ (див. п. 6.3).

Алгоритм зведення квадратичної функції до канонічного вигляду

1. Складаємо матрицю A квадратичної функції.
2. Далі ми діємо за алгоритмом, що наведений у пункті 6.5 і знаходимо ортонормований базис, в якому дана квадратична функція набуває канонічного виду.

3. За допомогою матриці переходу від стандартного базису до одержаного ортонормованого базису записуємо співвідношення між координатами довільного вектора в стандартному базисі і новому ортонормованому базисі.

Приклад 6.7. Квадратичну функцію

$$2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$$

звести до канонічного вигляду.

Розв'язання. Матриця даної квадратичної функції в стандартному базисі має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 4\\ 4 & 2 & -4\\ 4 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

Шукаємо власні значення матриці A. Для цього розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 4 & 4\\ 4 & 2-\lambda & -4\\ 4 & -4 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(6-\lambda)\left(\lambda^2-36\right)=0.$$

$\lambda_1=6$ (кратності 2) і $\lambda_2=-6$ (кратності 1) – власні значення матриці A.

Шукаємо власні вектори, що відповідають одержаним власним значенням. Для власного значення $\lambda_1=6$ відповідна однорідна СЛР має вигляд:

$$\begin{cases}-4x_1+4x_2+4x_3=0,\\ 4x_1-4x_2-4x_3=0,\\ 4x_1-4x_2-4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow x_1-x_2-x_3=0.$$

Знаходимо будь-які два ненульові розв'язки останньої СЛР. Наприклад,

$$\overline{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ і } \overline{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

За допомогою алгоритму Грама-Шмідта шукаємо два ортогональні розв'язки останньої СЛР. Одержуємо:

$$\overline{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ і } \overline{e}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Для власного значення $\lambda_2=-6$ відповідна однорідна СЛР має вигляд:

$$\begin{cases}8x_1+4x_2+4x_3=0,\\ 4x_1+8x_2-4x_3=0,\\ 4x_1-4x_2+8x_3=0.\end{cases}$$

Шукаємо довільний ненульовий розв'язок останньої СЛР. Скажімо,

$$\overline{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ – ортогональний базис. Нормалізуємо його. Одержуємо:

$$\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \overline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від стандартного базису до базису $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$ має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: дана квадратична функція в базисі $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$ має канонічну форму $6x_1'^2 + 6x_2'^2 - 6x_3'^2$. Відповідне перетворення координат:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

або в розгорнутій формі

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 + 0x_3, \\ x_2' = -\frac{1}{\sqrt{6}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} x_2 - \frac{2}{\sqrt{6}} x_3, \\ x_3' = -\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_3. \end{cases}$$

Алгоритм зведення квадратичної функції до канонічного вигляду застосовують в геометрії. Покажемо це на прикладах.

Приклад 6.8. Звести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку і визначити тип цієї кривої: $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2=21$.

Розв'язання. Матриця квадратичної функція $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2$ має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\det\begin{pmatrix} 6-\lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-8\lambda+7=0.$$

Одержуємо: $\lambda_1=1$ і $\lambda_2=7$. Власному значенню $\lambda_1=1$ відповідає власний вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$, а власному значенню $\lambda_2=7$ – власний вектор $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормалізуємо ці вектори. Одержуємо:

$$\bar{e}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ і } \bar{e}_2=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

В ортонормованому базисі $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ рівняння даної кривої набуває канонічного виду: $(x')^2+7(y')^2=21$ або $\frac{(x')^2}{21}+\frac{(y')^2}{3}=1$. Це рівняння еліпса.

Індивідуальне домашнє завдання з лінійної алгебри

Задача 1. Дослідити на лінійну залежність систему векторів.

1.1. $\overline{a}=(1,1,-4,2), \overline{b}=(0,-2,1,1), \overline{c}=(3,-4,2,2), \overline{d}=(1,-1,2,4)$.

1.2. $\sin x, \cos x, tgx$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

1.3. $\overline{a}=(1,3,4,1), \overline{b}=(2,-1,1,0), \overline{c}=(3,4,4,1), \overline{d}=(1,1,2,-4)$.

1.4. $2, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.5. $\overline{a}=(1,4,2,3), \overline{b}=(-2,1,1,5), \overline{c}=(0,4,-4,1), \overline{d}=(-1,2,2,-3)$.

1.6. $1, x, \sin x$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.7. $\overline{a}=(-1,3,1,0), \overline{b}=(2,1,-1,1), \overline{c}=(1,2,-4,3), \overline{d}=(1,-2,4,1)$.

1.8. e^x, e^{2x}, e^{3x} на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.9. $\overline{a}=(3,1,1,1), \overline{b}=(2,1,4,-1), \overline{c}=(1,0,3,3), \overline{d}=(-1,2,1,-1)$.

1.10. $x, x^2, (1+x)^2$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.11. $\overline{a}=(1,3,2,2), \overline{b}=(-1,3,0,5), \overline{c}=(2,1,3,4), \overline{d}=(-1,2,3,4)$.

1.12. $1, x+1, x^2, x^3$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.13. $\overline{a}=(1,3,2,2), \overline{b}=(-1,3,0,5), \overline{c}=(2,1,3,4), \overline{d}=(-1,2,3,4)$.

1.14. $\cos x, \sin x, \sin 2x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

1.15. $\overline{a}=(2,3,1,1), \overline{b}=(1,2,0,2), \overline{c}=(3,1,1,0), \overline{d}=(1,5,2,1)$.

1.16. e^x, e^{-x}, e^{2x} на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.17. $\overline{a}=(1,2,1,5), \overline{b}=(2,1,0,1), \overline{c}=(-1,3,1,1), \overline{d}=(2,-1,2,3)$.

1.18. $2^x, 2^{2x}, 2^{3x}$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.19. $\overline{a}=(1,3,1,-1), \overline{b}=(3,1,5,-1), \overline{c}=(1,4,2,1), \overline{d}=(1,1,3,4)$.

1.20. $3, x+1, x^2, x^3+2$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

1.21. $\overline{a}=(2,4,-1,1), \overline{b}=(1,1,2,1), \overline{c}=(3,4,1,0), \overline{d}=(0,1,-1,6)$.

1.22. $\frac{1}{x}, x, 1$ на проміжку $(0,1)$.

1.23. $\overline{a}=(2,4,0,1), \overline{b}=(2,1,-1,1), \overline{c}=(1,2,1,5), \overline{d}=(-1,3,1,2)$.

1.24. $1, tgx, ctgx$ на проміжку $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

1.25. $\overline{a}=(-1,2,4,1), \overline{b}=(1,1,4,1), \overline{c}=(3,2,1,2), \overline{d}=(1,-4,1,3)$.

Задача 2. Знайти будь-який базис і визначити розмірність лінійного простору розв'язків системи лінійних рівнянь.

2.1. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3+x_4-4x_5=0, \\ x_1+5x_2+x_3+x_4-5x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ x_1-x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4-2x_5=0. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3+x_4-4x_5=0, \\ x_1+5x_2+x_3+x_4-5x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x_1-4x_2-x_3+x_4-5x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2+5x_3+2x_4-6x_5=0. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 5x_1+x_2+4x_3+x_4+5x_5=0, \\ x_1+2x_2+7x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+3x_3-4x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-7x_3+3x_4+x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3+3x_4+2x_5=0. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+6x_4+2x_5=0, \\ -x_1+x_2+4x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4+3x_5=0. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3+x_4+6x_5=0, \\ x_1+2x_2+4x_3+3x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2+4x_3+x_4-2x_5=0. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3+x_4+4x_5=0, \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+6x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3-2x_4+5x_5=0, \\ x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4+7x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+3x_3-5x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3-x_4+6x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-2x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3+6x_4+2x_5=0. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 6x_1+x_2+2x_3+x_4+4x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3-3x_4+2x_5=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+6x_4+x_5=0. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-x_4+8x_5=0, \\ x_1+4x_2+x_3-3x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3+7x_4+5x_5=0. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Задача 3. Нехай $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Перевірити, що перетворення $A\overline{x}$ є лінійним і знайти матрицю цього перетворення в базисі $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$.

3.1. $A\overline{x} = (x_2 - 2x_3, 3x_1 + x_2 + x_3, x_1 - 2x_2)$.

3.2. $A\overline{x} = (x_1 + 3x_3, x_1 + 3x_2, x_1 - 2x_2 + x_3)$.

3.3. $A\overline{x} = (x_2 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$.

3.4. $A\overline{x} = (x_2 + 4x_3, 3x_2 - x_3, x_1 + 5x_2 + 2x_3)$.

3.5. $A\overline{x} = (x_1 - 3x_2 + x_3, x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3)$.

3.6. $A\overline{x} = (x_1 - x_2 + 4x_3, x_2 - 4x_3, 3x_1 + x_3)$.

3.7. $A\overline{x} = (2x_1 - 3x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + 4x_3)$.

3.8. $A\overline{x}=(x_1-3x_2,3x_1+x_2+2x_3,3x_1+x_3)$.

3.9. $A\overline{x}=(2x_1+x_2,x_1+x_2+x_3,x_1+4x_3)$.

3.10. $A\overline{x}=(x_1+x_2,x_1+4x_2+2x_3,5x_1+x_3)$.

3.11. $A\overline{x}=(x_1+x_2-x_3,x_1+x_2+5x_3,3x_1+x_2-x_3)$.

3.12. $A\overline{x}=(x_2-2x_3,3x_1+x_2-x_3,x_1+4x_2-x_3)$.

3.13. $A\overline{x}=(x_2+x_3,3x_1+4x_2-x_3,x_1+x_2+5x_3)$.

3.14. $A\overline{x}=(x_1-x_2+2x_3,x_1+2x_2-x_3,x_1-4x_2+x_3)$.

3.15. $A\overline{x}=(x_1+4x_2+x_3,x_1+x_2-3x_3,x_1+x_3)$.

3.16. $A\overline{x}=(x_1-x_2+2x_3,x_1+x_2-3x_3,x_1+x_2-5x_3)$.

3.17. $A\overline{x}=(x_1-3x_2+x_3,4x_1+x_2,x_1+2x_2-x_3)$.

3.18. $A\overline{x}=(3x_2+2x_3,x_1+x_2-x_3,x_1+5x_2)$.

3.19. $A\overline{x}=(x_2+6x_3,2x_1+x_2+5x_3,2x_1-x_2)$.

3.20. $A\overline{x}=(x_1+x_3,x_1+x_2-x_3,x_1+5x_2-x_3)$.

3.21. $A\overline{x}=(x_1+4x_3,x_1+3x_2+x_3,2x_1+6x_2)$.

3.22. $A\overline{x}=(x_1+x_3,2x_1+x_2-x_3,x_1+2x_2)$.

3.23. $A\overline{x}=(x_1+x_2-5x_3,x_1+x_2+3x_3,x_1+4x_2-x_3)$.

3.24. $A\overline{x}=(x_2-5x_3,x_1+3x_2-x_3,4x_1+2x_2-x_3)$.

3.25. $A\overline{x}=(x_2+2x_3,x_1+x_2+5x_3,x_1-x_2+4x_3)$.

Задача 4. Довести лінійність, знайти матрицю, ядро та область значень оператора.

4.1. Проектування на вісь OX.

4.2. Проектування на площину $z=0$.

4.3. Проектування на вісь OZ.

4.4. Дзеркальне відображення відносно площини OYZ.

4.5. Проектування на вісь OY.

4.6. Проектування на площину $y=0$.

4.7. Дзеркальне відображення відносно площини $x-y=0$.

4.8. Дзеркальне відображення відносно площини $y+z=0$.

4.9. Проектування на площину $y-z=0$.

4.10. Проектування на площину $y=\sqrt{3}\cdot x$.

4.11. Проектування на площину OYZ.

4.12. Дзеркальне відображення відносно площини $x-z=0$.

4.13. Дзеркальне відображення відносно площини OXY.

4.14. Поворот навколо осі OX на кут $\frac{\pi}{2}$ в додатному напрямі.

4.15. Проектування на площину $x-y=0$.

4.16. Проектування на площину $y+z=0$.

4.17. Дзеркальне відображення відносно площини $x+y=0$.

4.18. Дзеркальне відображення відносно площини $y-z=0$.

4.19. Проектування на площину $x+y=0$.

4.20. Проектування на площину $x-z=0$.

4.21. Дзеркальне відображення відносно площини $x+z=0$.

4.22. Поворот навколо осі OZ на кут $60°$ в додатному напрямі.

4.23. Проектування на площину $\sqrt{3}\cdot y+z=0$.

4.24. Дзеркальне відображення відносно площини OXZ.

4.25. Поворот навколо осі OY на кут $30°$ в додатному напрямі.

Задача 5. Знайти власні значення і власні вектори матриці.

5.1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

5.5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5.6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5.7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5.9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

5.10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

5.11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5.13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5.15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5.16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 5.17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 5.18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5.19. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 5.20. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 5.21. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.22. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 5.23. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 5.24. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5.25. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Дану матрицю звести до діагональної і виконати перевірку.

6.1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. 6.2. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. 6.3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. 6.4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. 6.5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

6.6. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. 6.7. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. 6.8. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 6.9. $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. 6.10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6.11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. 6.12. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. 6.13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. 6.14. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. 6.15. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.16. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. 6.17. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. 6.18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 6.19. $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. 6.20. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6.21. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. 6.22. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. 6.23. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. 6.24. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. 6.25. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Квадратичну форму звести до канонічного вигляду.

7.1. $x^2-4xy+y^2$. 7.2. $3x^2-xy+y^2$. 7.3. $x^2+6xy+y^2$.

7.4. $x^2-2xy+3y^2$. 7.5. $2x^2-xy+4y^2$. 7.6. $3x^2+4xy+4y^2$.

7.7. $x^2 - 2xy + 6y^2$.

7.8. $x^2 + xy + 3y^2$.

7.9. $x^2 + 3xy + 4y^2$.

7.10. $x^2 - 4xy + 5y^2$.

7.11. $x^2 + 5xy - y^2$.

7.12. $3x^2 + 3xy + y^2$.

7.13. $x^2 + 4xy + y^2$.

7.14. $x^2 - 2xy - y^2$.

7.15. $3x^2 + xy + 5y^2$.

7.16. $-x^2 + 4xy + 3y^2$.

7.17. $x^2 - 2xy + 7y^2$.

7.18. $x^2 + xy - 3y^2$.

7.19. $x^2 + 6xy - 2y^2$.

7.20. $5x^2 - 4xy + y^2$.

7.21. $4x^2 - xy - y^2$.

7.22. $5x^2 + xy - y^2$.

7.23. $x^2 + 4xy + 3y^2$.

7.24. $x^2 - 5xy + y^2$.

7.25. $x^2 + 8xy + 2y^2$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре / Гельфанд И. М. – [5-е изд., исправл.]. – М. : Добросвет, МЦНМО, 1998. – 320 с.

2. Ильин В. А. Линейная алгебра : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – [4-е изд.]. – М. : Наука, Физматлит, 1999. – 296 с.

3. Чарін В. С. Лінійна алгебра / Чарін В. С. – К. : Техніка, 2004. – 416 с.

4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник / [В. В. Булдигін, І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей та ін] ; за ред. проф. В. В. Булдигіна. – К. : ТВіМС, 2009. – 224 с.

5. Панасенко О. Б. Лекції з лінійної алгебри : навчальний посібник / Панасенко О. Б. – Вінниця, 2012. – 215 с.

6. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения / Стренг Г. – М. : Мир, 1980. – 454 с.

ГЛОСАРІЙ

Матриця – *matrix* (С. 7)
Квадратна матриця – *square matrix* (С. 7)
Матриця-рядок – *row vector* (С. 7)
Матриця-стовпець – *column vector* (С. 7)
Головна діагональ матриці – *main diagonal of matrix* (С. 7)
Діагональна матриця – *diagonal matrix* (С. 7)
Скалярна матриця – *scalar matrix* (С. 7)
Одинична матриця – *identity matrix* (С. 7)
Нульова матриця – *zero matrix* (С. 7)
Нижня трикутна матриця – *lower triangular matrix* (С. 7)
Верхня трикутна матриця – *upper triangular matrix* (С. 7)
Додавання і віднімання – *addition and subtraction* (С. 8)
Детермінант матриці – *the determinant of the matrix* (С. 10)
Мінор елемента a_{ij} – *((i,j) mino)* (С. 13)
Обернена матриця – *(inverse matrix)* (С. 15)
Невироджена матриця – *nonsingular matrix* (С. 16)
Приєднана матриця – *adjugate matrix* (С. 16)
Лінійне рівнянням з n невідомими – *linear equation in n unknowns* (С. 23)
Однорідне рівняння – *homogeneous equation* (С. 23)
Неоднорідне рівняння – *inhomogeneous equation* (С. 23)
Розв'язок – *solution* (С. 25)
Сумісна система лінійних рівнянь – *consistent linear system* (С. 25)
Несумісна система лінійних рівнянь – *inconsistent linear system* (С. 25)
Еквівалентні системи лінійних рівнянь – *equivalent linear systems* (С. 25)
Головна невідома – *dependent unknown* (С. 25)
Вільна невідома – *free (or independent) unknown* (С. 25)
Інваріант – *invariant* (С. 25)
Вектор – *vector* (С. 31)
Лінійно залежна – *linearly dependent* (С. 33)
Лінійно незалежна – *linearly independent* (С. 33)
Базис – *basis* (С. 33)
Проекція вектора – *vector projection* (С. 34)
Скалярний добуток – *dot product* (С. 35)
Векторний добуток – *cross product* (С. 37)
Векторний (лінійний) простір – *vector (or linear) space* (С. 42)
Підпростір векторного простору – *vector subspace* (С. 43)
Лінійна оболонка – *linear span* (С. 43)
Лінійна комбінація (*linear combinations*) (С. 44)
Базис векторного простору V – *basis of a vector space* V (С. 47)
Координати вектора $\overline{u}$ в базисі $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$ – *coordinate vector of* $\overline{u}$ *relative to* $B=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n))$ (С. 47)

Розмірність векторного простору – *dimension of vector space* (С. 49)
Ранг – *rank* (С. 50)
Ранг матриці K за рядками – *row rank of* K (С. 51)
Ранг матриці K за стовпцями – *column rank of* K (С. 51)
Лінійне відображення – *linear map* (С. 59)
Лінійне перетворення – *linear transformation* (С. 60)
Лінійний функціонал – *linear functional* (С. 60)
Ізоморфізм – *isomorphism* (С. 60)
Частинний розв'язок – *particular solution* (С. 70)
Загальний розв'язок – *general solution* (С. 70)
Власне значення – *eigenvalue* (С. 74)
Власний вектор – *eigenvector* (С. 74)
Характеристичне рівняння – *characteristic equation* (С. 77)
Подібні матриці – *similar matrixs* (С. 77)
Евклідів простір – *Euclidean space* (С. 87)
Норма вектора – *norm of vector* (С. 88)
Ортогональний базис – *orthogonal basis* (С. 89)
Ортонормований базис – *orthonormal basis* (С. 89)
Білінійна функція – *bilinear function* (С. 105)
Квадратична функція – *quadratic function* (С. 106)

Навчальне видання

Барковська Алла Андріївна

Дереч Володимир Дмитрович

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ВЕКТОРНІ ТА ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Навчальний посібник

Редактор І. Городенська

Оригінал-макет підготовлено В. Деречем

Підписано до друку 19.10.2016 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 7,7.
Наклад 50 пр. Зам. № 2016-211.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.