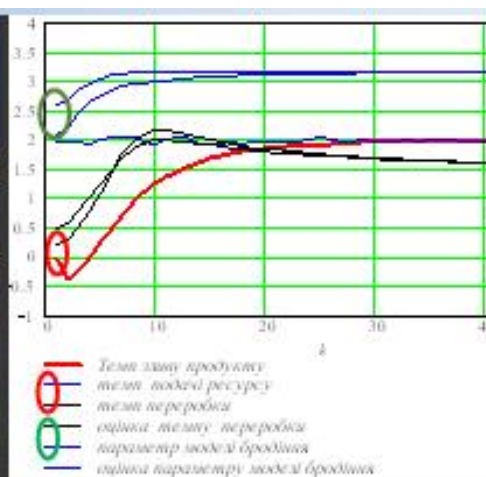


# ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ.

## ЧАСТИНА 1. АНАЛІЗ І ДОСЛІДЖЕННЯ САУ



Автоматика: запуск, контроль, регулювання,

Інтерфейс мікроконтролерної системи



Виконавчі елементи: насоси субстрату, електроклапани, терморегулювання; лічильник газу



Вимірювачі: температура, рівень, тиск, вологість, кислотність, склад і стан процесів бродіння

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

# **ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ.**

## **ЧАСТИНА 1. АНАЛІЗ І ДОСЛІДЖЕННЯ САУ**

Навчальний посібник

Вінниця  
ВНТУ  
2017

УДК [681.51+681.3.066] (086)  
ББК 32.965 я 73  
Т33

Автори:  
**Т. М. Боровська, П. В. Северілов, В. А. Северілов, А. С. Васюра, М. С. Юхимчук**

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 26.06.2014 р.)

Рецензенти:

В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор  
Р. Н. Кветний, доктор технічних наук, професор  
В. А. Лужецький, доктор технічних наук, професор

**Теорія** автоматичного управління. Частина 1. Аналіз та дослідження САУ : навчальний посібник / [Т. М. Боровська, П. В. Северілов, В. А. Северілов та ін.]. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 144 с.

В посібнику розглянуто ряд задач, що становлять основу першої частини стандартного курсу теорії управління. Посібник має дві форми – електронна книга, що виконана в середовищі математичного пакета і звичайний «паперовий» посібник. Це дає багато переваг, зокрема, дозволяє інтенсифікувати навчання і відкриває простір для самостійних досліджень. Посібник є частиною комплексу методичного забезпечення, що повністю охоплює весь стандартний курс теорії автоматичного управління. Матеріали посібника – авторські. В останньому розділі подано нові задачі моделювання, аналізу і синтезу мікропроцесорних систем. Посібник призначено для широкого кола інженерних спеціальностей.

УДК [681.51+681.3.066] (086)  
ББК 32.965 я 73

© ВНТУ, 2017

## ЗМІСТ

<b>Передмова</b> .....	4
<b>1 Дослідження часових характеристик САУ</b> .....	5
1.1 Дослідження часових характеристик САУ. Одержання та дослідження еквівалентних математичних моделей динаміки неперервних лінійних САУ .....	6
1.2 Дослідження реакції САУ на заданий сигнал .....	15
1.3 Дослідження часових характеристик САУ при варіації параметрів .....	27
1.4 Розробка та дослідження системи самонастроювання САУ... ..	33
1.5 Знаходження аналітичних розв'язань для лінійних неперервних та імпульсних систем .....	42
<b>2 Дослідження частотних характеристик САУ</b> .....	48
2.1 Одержання та дослідження частотних характеристик .....	49
2.2 Ідентифікація САУ по логарифмічних частотних характеристиках .....	55
<b>3 Аналіз стійкості САУ</b> .....	62
3.1 Дослідження стійкості САУ альтернативними методами .....	63
3.2 Дослідження усталених помилок САУ .....	72
3.3 Дослідження стійкості САУ. Стійкість САУ із запізненням... ..	79
<b>4 Оцінювання якості регулювання по перехідних процесах. Альтернативні критерії</b> .....	87
4.1 Критерії та методи оцінювання якості регулювання за перехідними процесами. Постановка задачі оцінювання якості.....	88
4.2 Отримання базової математичної моделі САУ.....	89
4.3 Обчислення показників якості перехідного процесу.....	90
4.4 Вибір варіанта САУ за комплексним критерієм.....	93
<b>5 Приклади синтезу і дослідження сучасних САУ</b> .....	95
5.1 Розробка цифрового ПІД-регулятора .....	96
5.2 Моделювання мікроконтролерної системи управління з імпульсною модуляцією вхідних і вихідних сигналів .....	107
5.3 Аналіз і синтез неперервної САУ зі спостерігачем.....	115
5.4 Аналіз і синтез САУ з нелінійним спостерігачем для нелінійного об'єкта .....	129
<b>Література</b> .....	141

## Передмова

Зміст посібника повністю відповідає програмі першої частини стандартного курсу теорії автоматичного управління – «Аналіз САУ» для широкого кола інженерних спеціальностей, зокрема в галузі 15 – Автоматизація та приладобудування за спеціальністю 151 – «Автоматизація і комп'ютерно-інтегровані технології» та за спеціалізацією «Комп'ютерно-інтегровані виробництва та бізнес-процеси». Посібник повністю виконано в середовищі математичного пакета. Сьогодні це необхідна умова формування теоретичних знань і практичних навичок, потрібних для спеціаліста сучасних «цифрових фабрик», де інтегровано виробництво ефективної продукції і засобів цього виробництва в умовах постійних змін виробів, засобів і технологій виробництва, орієнтованого на спектр потреб усіх категорій користувачів.

Ефективність сучасних виробів і виробництва суттєво залежить від десятків і тисяч систем автоматичного управління найрізноманітніших рівнів від зрозумілих терморегуляторів в мультиварках, прасках, кавоварках і систем управління верстатами, печами, хімічними реакторами, до важко зрозумілих автопілотів транспортних літаків, що ведуть літак від зльоту до посадки і систем регулювання індивідуально-масових виробництв автомобілів, де кожна машина на конвеєрі складається за індивідуальним замовленням. Сьогодні ведуться роботи із створення систем управління такими об'єктами, як безпечний рух ситуативних утворень з десятків і сотень автомобілів на дорогах, регулювання виробництва в системах виробників певних галузей.

Ці задачі управління не мають задовільного управління в рамках існуючих наук. В роботах «Індустріальна динаміка», «Динаміка міста» Дж. Форрестер показав, що управління виробничими системами – задача управління нелінійними, нестационарними, стохастичними динамічними системами. Роботи Форрестера були виконані в середовищі пакета для моделювання.

Ще п'ятнадцять років тому мікропроцесорні системи управління розроблялися відповідними корпораціями без можливостей доступу користувачів до кодів. Сьогодні програму управління певним об'єктом можна робити на звичайному ПК і навіть під час роботи систем автоматичного управління (САУ), якщо це безпечно. В інших випадках – досліджувати САУ на імітаційних моделях.

Критичний фактор таких інформаційних технологій – наявність у спеціаліста фундаментальних теоретичних знань і глибоке розуміння того, як працюють комп'ютерні системи. Саме на таке освоєння ТАУ орієнтований посібник. Сьогодні галузь застосування лінійних моделей і методів обмежена. Однак вони повноцінно подані в посібнику – це фундамент для нових моделей і методів аналізу і синтезу сучасних систем управління, необхідний для виходу за рамки класичних моделей і методів. Тому в останньому розділі як підсумок подано нові задачі управління і нові методи їх вирішення, зокрема подано задачі синтезу САУ зі спостерігачем стану для лінійного об'єкта управління і для нелінійного та нестационарного об'єктів з нелінійним спостерігачем стану і параметрів. Всі матеріали посібника – авторські.

# 1

## Дослідження часових характеристик САУ

У цьому розділі розглядаються:

- ✓ Побудова неперервних та еквівалентних дискретних математичних моделей лінійних динамічних систем.
- ✓ Дослідження реакції САУ на заданий сигнал.
- ✓ Дослідження часових характеристик САУ при варіації параметрів.
- ✓ Розробка та дослідження системи самонастроювання САУ.
- ✓ Знаходження аналітичних розв'язань для неперервної та імпульсної динамічних систем.

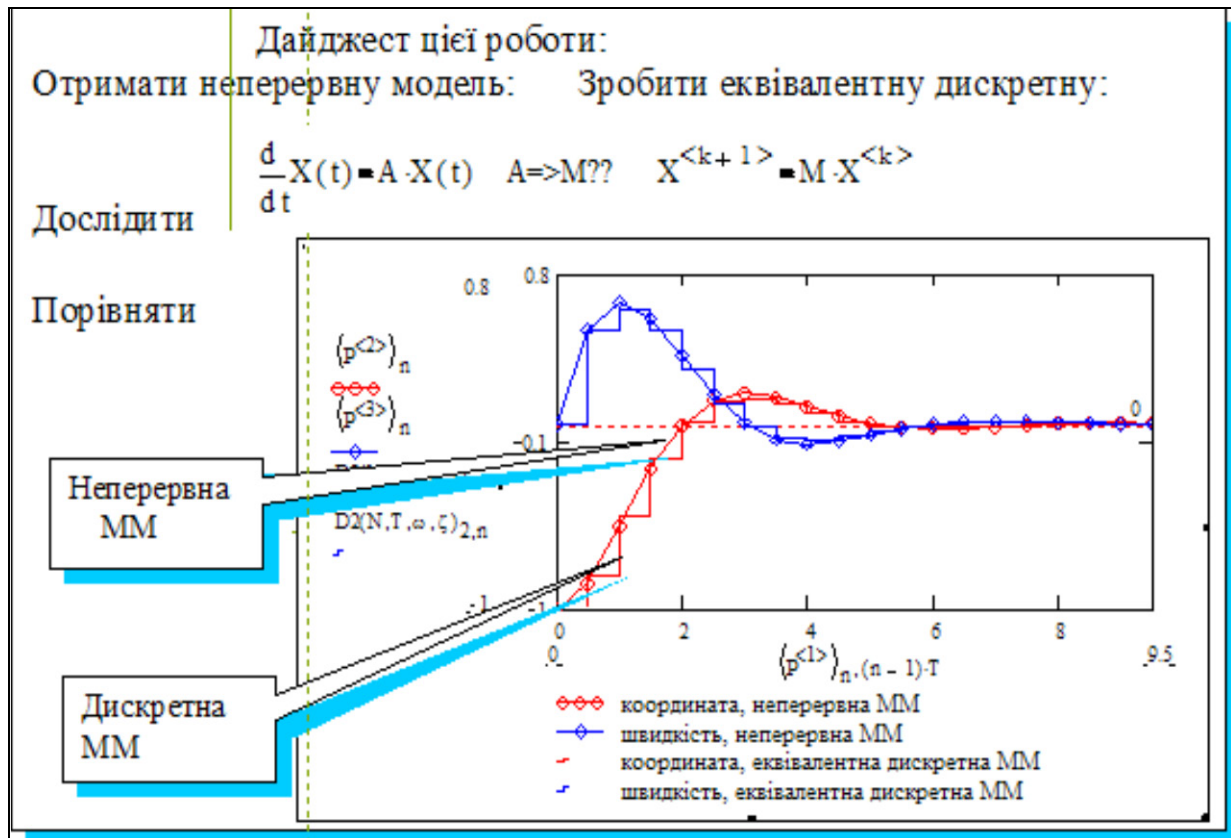
Після вивчення цього розділу ви **зможете**:

1. Звести систему диференціальних рівнянь САУ до канонічної форми Коші. Записати розв'язання диференціального рівняння в формі Коші.
2. Отримати систему еквівалентних різницевого рівнянь САУ різного ступеня наближення.
3. Знаходити розв'язання диференціальних та різницевого рівнянь альтернативними методами.
4. Знаходити реакції САУ на довільні вхідні сигнали альтернативними методами.
5. Експериментально підбирати (= налаштувати) параметри регулятора так, щоб перехідний процес задовольняв задані вимоги.
6. Будувати системи самонастроювання регулятора і оцінити проблеми, що виникають при цьому.
7. Освіжити і узагальнити знання з методів знаходження і властивостей розв'язань диференціальних та різницевого рівнянь – альтернативних моделей лінійних динамічних систем.
8. Дати означення термінів:

1. Динамічна система.	5. Перехідна функція стану.
2. Лінійне/нелінійне дифрівняння.	6. Перехідний процес.
3. Еквівалентне різницево рівняння.	7. Імпульсна перехідна функція.
4. Форма Коші подання системи диференціальних рівнянь.	8. Форма Коші подання розв'язання системи диференціальних рівнянь.

# 1.1 Дослідження часових характеристик САУ. Одержання та дослідження еквівалентних математичних моделей динаміки неперервних лінійних САУ

**Ціль даної роботи** – отримання та дослідження часових характеристик, набуття навичок у розробці і реалізації у середовищі математичного пакета еквівалентних математичних моделей динаміки неперервних систем. Робота довга, тому корисно при виконанні її постійно тримати (у свідомості) «суть справи в трьох словах». Саме це і подано нижче.



## Вступ

З багатьох причин цифрова обчислювальна машина (ЦОМ) – найбільш зручний і потужний інструмент для дослідження неперервних динамічних систем. Ця зручність зростає занадто швидко: продуктивність праці дослідника і проєктанта зростає, але виникає можливість деградації спеціалістів: розв'язує диференціальні рівняння, оптимізує, виконує алгебраїчні перетворення, розкладає в ряди ЦОМ, точніше відповідний САД-пакет (Computer Aided Design, наш еквівалент – САПР), а що залишається спеціалісту? – ввести-вивести дані? Фундаментом оптимізму тут є той факт, що в країнах з повальною автомобілізацією людина тільки дещо поширшала в талії, але ходити не розучилася. Сьогоднішні системи управління реалізуються мікропроцесорними і мікроконтролерними системами. Об'єкти і процеси управління, звичайно, є неперервними. Для аналізу і синтезу таких систем необхідно замінити неперервну математичну модель (ММ) – **систему диференціальних рівнянь еквівалентною дискретною ММ – системою різницьових рівнянь**, що будуть досить точно наближувати розв'язання системи диференціальних рівнянь.

Щоб зробити цю процедуру узагальненою і уніфікованою потрібно спочатку звести задану систему диференціальних рівнянь до форми Коші:

$$dx/dt = A \cdot x + B \cdot u + D \cdot v, \quad (1)$$

де  $x$ ,  $u$ ,  $v$  – вектори стану, управління, збурень, відповідно;  $A$ ,  $B$ ,  $D$  – матриці відповідної розмірності. Розв'язання цього рівняння у формі Коші (= розв'язання без урахування збурень) має вигляд [1–4]:

$$x[(k+1) \cdot T] = F(T) \cdot x[k \cdot T] + G(T) \cdot B \cdot u[k \cdot T], \quad (2)$$

де  $T$  – крок обчислень,  $k$  – номер кроку; функції  $F(T)$  і  $G(T)$  – нескінченні ряди:

$$F(T) = I + A \cdot T + (A \cdot T)^2/2! + (A \cdot T)^3/3! + \dots; \quad (3)$$

$$G(T) = I \cdot T + A \cdot T^2/2! + A^2 \cdot T^3/3! + \dots$$

Рівняння (2) фактично є різницеvim, в ньому значення вектора стану  $x$  у поточний момент часу  $(k+1) \cdot T$  визначається через значення вектора стану  $x$  та вектора управління  $u$  у попередній момент часу  $k \cdot T$ .

Проблема тільки в тому, що для того, щоб розв'язок рівняння (2) точно збігався з розв'язком рівняння (1), треба взяти нескінченне число членів рядів у виразах (3). На практиці беруть скінченне число членів рядів, так щоб забезпечити потрібну точність. Можемо бачити, що, чим менший крок обчислень  $T$ , тим швидше збігаються ряди (3), тобто, потрібну точність дискретної моделі можна забезпечувати як зменшенням  $T$ , так і збільшенням кількості членів рядів. Розглянемо САУ, що описується диференціальним 3-го порядку:

$$d^3x(t)/dt^3 + a_2 \cdot d^2x(t)/dt^2 + a_1 \cdot dx(t)/dt + a_0 \cdot x = f(t),$$

де  $x(t)$  – регульована змінна (тиск, напруга, відстань, температура, ...);

$f(t)$  – зовнішня дія на САУ;

$a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$  – параметри математичної моделі, значення яких беруться згідно з варіантом.

### Завдання

- |  |      |
|--|------|
| 1. Отримати еквівалентні дискретні моделі різного рівня точності (1–3-го порядків).                                  | 6 б  |
| 2. Отримати еталонні розв'язання диференціального рівняння – аналітичні і числові (за допомогою вбудованих функцій). | 14 б |
| 3. Дослідити залежність точності ММ від кроку квантування $T$ .  | 8 б  |
| 4. Дослідити залежність точності ММ від порядку моделі.  | 12 б |
| 5. Знайти кроки квантування для еквівалентних за точністю ММ 1–3-го порядків.  | 10 б |

### Варіанти значень параметрів

(	Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	a2	3.	3	2	2	2.	1.0	1.75	2.5	3.0	2.0	1.0	2.0	2.5	3.5	3.5	3.14	2.73
	a1	3	3	1	1.5	2	2	2.15	3	3.5	1.7	3	2.5	2	3	2.5	2.73	3.14
	a0	1	2	1	1	1	2	1	1	1.5	1	1	1	1.2	1	1.2	1.1	1.1



## Зразок виконання

### 1. Отримання еквівалентних дискретних моделей 1-3-го порядків.

Вводимо параметри об'єкта згідно з варіантом, задаємо поки довільний крок обчислень  $T$ :  $a_2 := 1$ ;  $a_1 := 3$ ;  $a_0 := 1$ ;  $T := .4$ ; **ORIGIN** := 1.

Зводимо задане дифрівняння до форми Коші. Для цього вводимо нові змінні:

$x_1 = x$ ;  $x_2 = dx/dt$ ;  $x_3 = d^2x/dt^2$ . Отримуємо систему дифрівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -a_0 \cdot x_1 - a_1 \cdot x_2 - a_2 \cdot x_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подаємо отриману систему у матрично-векторному вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \quad \text{де} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Згідно з (3) запишемо перші три наближення для перехідної функції стану (ПФС) і виводимо їх значення. Виходячи з очевидних міркувань, подаємо ПФС як функцію кроку квантування  $T$ . Для конкретного значення:  $T = 0.4$  виводимо ПФС 1-го, 2-го і 3-го порядків.

$$\begin{aligned} \text{MM1} \quad F_1(T) &:= I + A \cdot T & F_1(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0.4 \\ -0.4 & -1.2 & 0.6 \end{pmatrix} \\ \text{MM2} \quad F_2(T) &:= I + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!} \\ \text{MM3} \quad F_3(T) &:= I + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!} + \frac{A^3 \cdot T^3}{3!} & F_2(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.08 \\ -0.08 & 0.76 & 0.32 \\ -0.32 & -1.04 & 0.44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Бачимо, що при кроці  $T = 0.2$  різниця між елементами матриць  $F_2$  і  $F_3$  менша відсотка

$$F_3(.2) - F_2(.2) = \begin{pmatrix} -0.133 & -0.4 & -0.133 \\ 0.133 & 0.267 & -0.267 \\ 0.267 & 0.933 & 0.533 \end{pmatrix} \% \quad F_3(T) = \begin{pmatrix} 0.989 & 0.368 & 0.069 \\ -0.069 & 0.781 & 0.299 \\ -0.299 & -0.965 & 0.483 \end{pmatrix} .$$

Задаємо період моделювання, крок обчислень (квантування), початкові значення вектора стану в альтернативних формах:

$$\text{Period} := 8 \quad T_0 := .1 \quad K_h := \frac{\text{Period}}{T} \quad K_h = 20 \quad k := 1..K_h \quad \begin{pmatrix} x_{31,1} \\ x_{32,1} \\ x_{33,1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

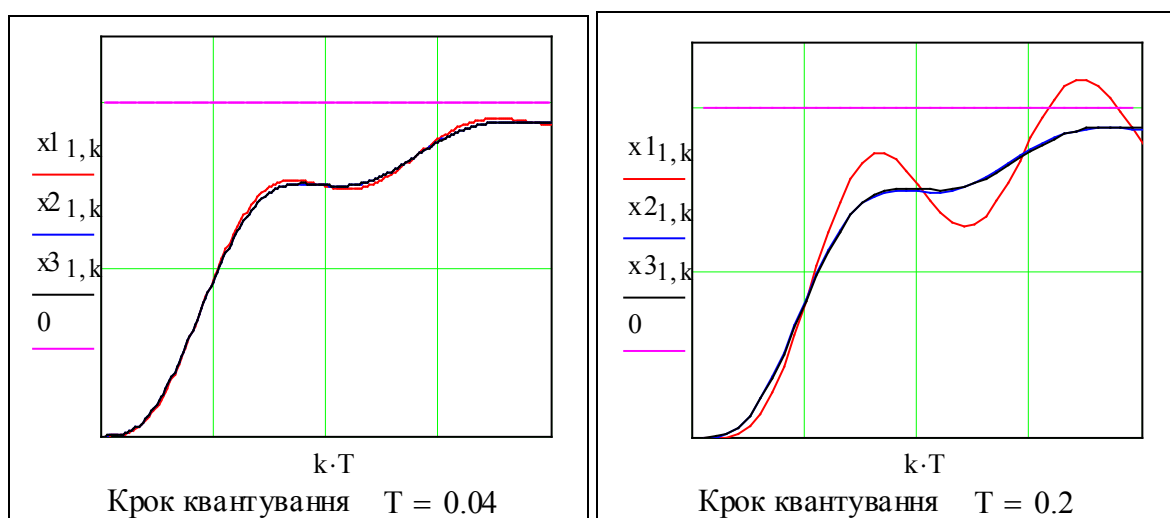
$$x_1^{(1)} := (-1 \ 0 \ 0)^T \quad x_2^{(1)} := x_1^{(1)}$$

Виводимо для контролю вектори стану для першого кроку процесу

$$x_1^T = (-1 \ 0 \ 0); \quad x_2^T = (-1 \ 0 \ 0); \quad x_3^T = (-1 \ 0 \ 0).$$

Записуємо три різницеві рівняння – наближення 1-го, 2-го і 3-го порядків базовою мовою пакета і тестуємо їх – будемо графіки перехідних процесів.

$$x_1^{(k+1)} := F_1(T) \cdot x_1^{(k)} \quad x_2^{(k+1)} := F_2(T) \cdot x_2^{(k)} \quad x_3^{(k+1)} := F_3(T) \cdot x_3^{(k)} \quad (5)$$



Як видно з поданих вище графіків, модель 1-го порядку явно незадовільна для  $T = 0.2$  с. Результати обчислень за моделями 2-го і 3-го порядків збігається при  $T = 0.2$  с. Це дає підстави вважати моделі 2-го і 3-го порядків досить точними для кроків  $T \leq 0.2$  с. Але, щоб остаточно впевнитись в цьому, нам необхідний еталон – точне розв'язання диференціальних і кількісні міри, тобто критерії точності моделей.

Для поставлених цілей зручно визначити перехідний процес в динамічній системі не у вигляді різничевого рівняння (5), а як функцію користувача. Зробимо це на базі засобів написання програм в середовищі пакета.

Визначимо функцію користувача  $P(M, x_0, T)$  через програму. Аргументи цієї функції:

- $M$  – перехідна матриця ЕДМ,
- $x_0$  – початкове значення вектора стану,
- $T$  – крок квантування – скаляр.

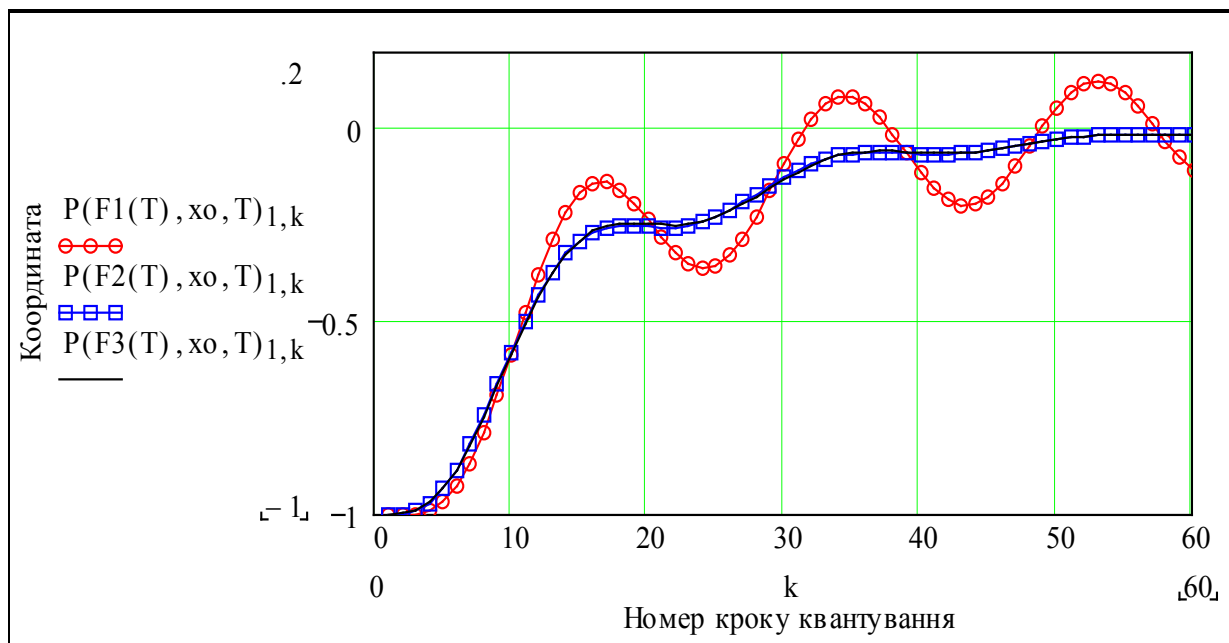
Можна було розширити список аргументів функції за рахунок кількості кроків та ін., але (дослідіть самостійно) швидкодія програми може суттєво зменшитись.

Задаємо вхідні параметри програми  $N := 3 \cdot K_h$ ;  $k := 1..N$ ;  $x_0 := (-1 \ 0 \ 0)^T$ ;  $T := 0.2$

$P(M, x_0, T) :=$	$X^{(1)} \leftarrow x_0$ for $k \in 1..N$ $X^{(k+1)} \leftarrow M \cdot X^{(k)}$ $sto \leftarrow 100$ $X$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- початкові умови</li> <li>- цикл по кроках процесу</li> <li>- центр програми (порівняйте з (5))</li> <li>- рядок для естетизації програми</li> <li>- те, що повертає програма</li> </ul>	(6)
-------------------	---	--	-----

Порівнюємо альтернативні моделі (5) і (6). В (5) для кожного рівня ПФС – свій вираз, свої змінні. В програму (6) замість  $M$  можна підставити  $F1(T)$ ,  $F2(T)$ ,  $F3(T)$ ...

Тестуємо програму – будемо графіки процесів для тих даних, що й при тестуванні (5). Отримуємо ідентичні результати.



## 2. Отримання еталонних розв'язків диференціального рівняння

В цій роботі розглядаються тільки лінійні динамічні системи – такі, що описуються лінійними диференціальними рівняннями. Лінійні диференціальні рівняння мають загальні аналітичні розв'язки:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} + \dots + C_n \cdot e^{s_n \cdot t},$$

де  $C_i$  – сталі, що визначаються з граничних умов,  $s_i$  – корені характеристичного рівняння,  $i = 1, n$ ,  $n$  – порядок динамічної системи.

На практиці об'єкти управління – нелінійні, нестационарні, і не мають аналітичних розв'язків для загальних випадків.

Останні версії пакета мають вбудовані функції числового розв'язання диференціальних рівнянь. Використаємо їх для отримання еталонних розв'язків для лінійних і нелінійних динамічних систем. Для лінійних систем додатково використаємо аналітичні розв'язання. Пакет має декілька вбудованих функцій для числового інтегрування диференціальних рівнянь, уміру зручних. Використаємо два методи. Подаємо формат вбудованих функцій нижче.

Процес = Vulstoer(поч\_умови, to, tk, кільк\_кроків, права\_частина);

Процес = rkfixed(поч\_умови, to, tk, кільк\_кроків, права\_частина);

Підставимо у ці функції дані нашої задачі. Зверніть увагу на те, що функція  $D(t, X)$  – це права частина системи диференціальних рівнянь в формі Коші (4).

$$Av(a) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \quad \frac{dX}{dt} = Av(a) \cdot X \quad Av(a) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ -a_1 \cdot X_1 - a_2 \cdot X_2 - a_3 \cdot X_3 \end{pmatrix}$$

ORIGIN := 1

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -a_0 \cdot X_0 - a_1 \cdot X_1 - a_2 \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

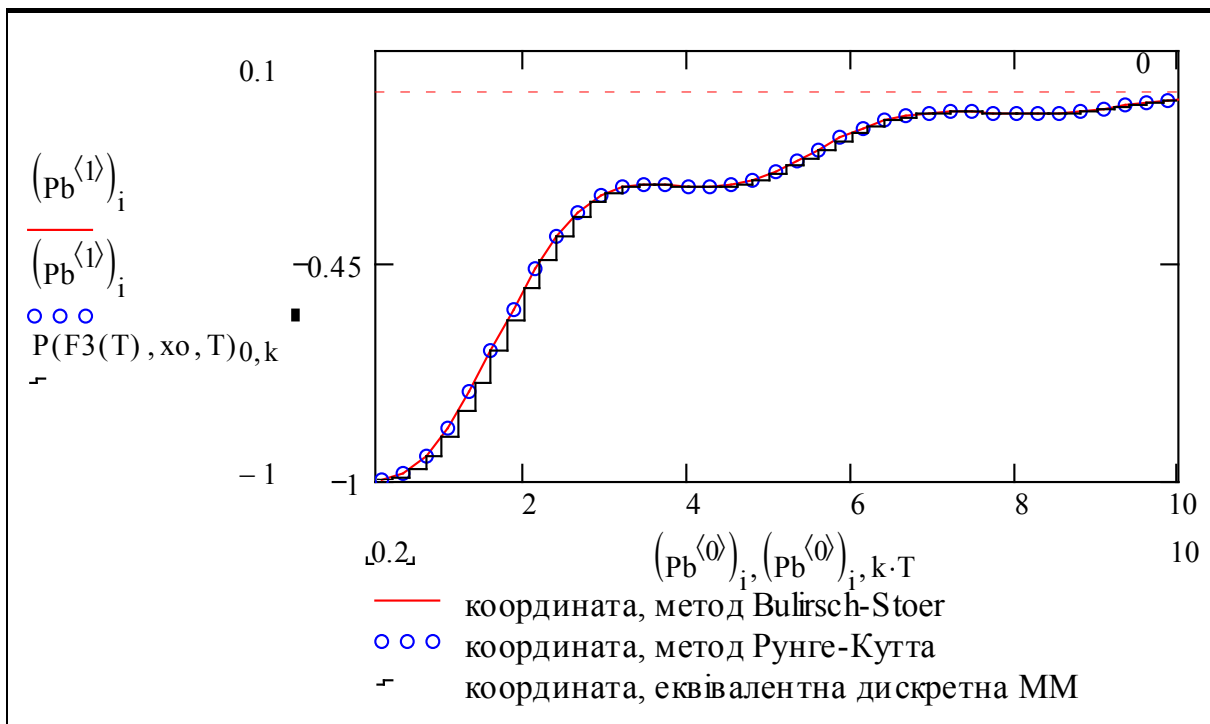
ORIGIN := 0

Kh = 20    Period := 16    Xo := -1

i := 1..N    N = 60

Записуємо рівняння еталонного процесу і будуємо графіки.

$$Pb := Bulstoer \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, \text{Period}, N, D \right] \quad Pr := rkfixed \left[ \begin{pmatrix} Xo \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, \text{Period}, N, D \right] \quad (7)$$



Дивимось на графік і бачимо, що еквівалентна дискретна модель дає досить близькі до еталонної результати.

Виведемо також числові результати, розберемося із структурою вихідних масивів (ми їх транспонували, для зручності). Стовпці – кроки процесу, перший рядок – моменти часу, інші рядки – значення координат вектора стану в ці моменти.

$$Pb^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.267	0.533	0.8	1.067	1.333	1.6	1.867	2.133	2.4
1	-1	-0.997	-0.979	-0.936	-0.866	-0.774	-0.669	-0.561	-0.46	-0.376
2	0	0.032	0.112	0.212	0.307	0.376	0.407	0.397	0.35	0.278
3	0	0.226	0.355	0.381	0.318	0.193	0.038	-0.112	-0.231	-0.3

$$Pr^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.267	0.533	0.8	1.067	1.333	1.6	1.867	2.133	2.4
1	-1	-0.997	-0.979	-0.936	-0.866	-0.774	-0.669	-0.561	-0.461	-0.376
2	0	0.032	0.112	0.212	0.307	0.376	0.407	0.397	0.351	0.279
3	0	0.226	0.355	0.381	0.318	0.193	0.038	-0.112	-0.23	-0.3

Бачимо, що еталонні процеси мають високу збіжність. Переходимо до наступного пункту завдання.

### 3. Дослідження залежності точності ММ від кроку квантування

В завданні не задано критерій оптимальності моделі. Деталізуємо і конкретизуємо поняття оптимальності еквівалентної дискретної моделі. Очевидно, при зменшенні кроку квантування  $T$  точність збільшується, але одночасно збільшуються потрібні для моделювання САУ на заданому інтервалі (періоді) часу: а) пам'ять, б) час обчислень. Тому, інтуїтивно, оптимальність означає певний компроміс між *точністю моделі і витратами обчислювальних ресурсів*. Цей компроміс можна побудувати так: задати як обмеження точність моделі  $K_m$  і знайти максимальний крок обчислення, який ще забезпечує цю точність.

Наступний крок конкретизації задачі – вибір і конструювання числової міри (**критерію**) точності моделі. Розглянемо дві альтернативи – **локальний** критерій – функція тільки від параметрів якогось одного кроку процесу (наприклад, помилка в кінці періоду моделювання) та **інтегральний** критерій – функція від параметрів усіх кроків процесу (наприклад, інтегральна квадратична помилка).

Очевидно інтегральний критерій є повноціннішою мірою тотожності модельованого і істинного процесу – виберемо критерій – інтеграл від модуля помилки (можна було б вибрати інтеграл від квадрата помилки). Природно, в дискретній моделі замість інтеграла беремо суму:

$$K_{\text{рит}} = \left( \frac{1}{N} \right) \cdot \left( \sum_n \left| \frac{x_{e_n} - x_{m_n}}{x_{e_n}} \right| \right), \quad (8)$$

де  $n = 1..N$  – індекс (номер) кроку процесу;  $x_{e_n}$ ,  $x_{m_n}$  – поточні значення вибраної координати вектора стану для «точної» моделі і еквівалентної дискретної моделі динаміки об'єкта.

Виберемо координату  $x_1$  – це власне регульована змінна. «Фізичний смисл» цього критерію – **середня відносна** помилка координати еквівалентної дискретної моделі відносно еталонної (точної).

Усі завдання (пункти 3–5) будуть розв'язані легко і економно, якщо ми зможемо подати критерій (8) як функцію кроку квантування та порядку ЕДМ.

$$d\Gamma := .2 \quad P_m := 8 \quad N := \frac{P_m}{d\Gamma} \quad N = 40 \quad x_0^T = (-1 \ 0 \ 0)$$

Модифікуємо програму (6) – додаємо в список аргументів ще N – число кроків.

$Pe(M, x_0, d\Gamma, N) :=$	$X^{(0)} \leftarrow x_0$ for $k \in 0..N-1$ $X^{(k+1)} \leftarrow M \cdot X^{(k)}$ sto $\leftarrow 100$ $X$
-----------------------------	---

Беремо вираз (7) і підставляємо те, що треба підставити у такому вигляді, щоб інтерпретатор (мови програмування C++) «бачив» явну залежність значення критерію від dΓ:

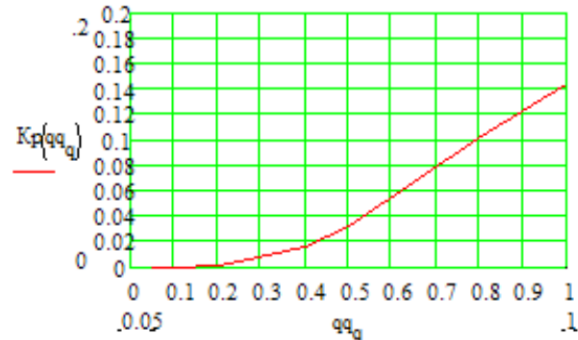
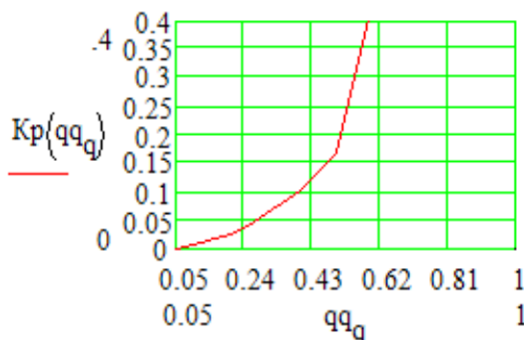
$$Kp(d\Gamma) := \left( \frac{d\Gamma}{P_m} \right) \left[ \sum_{i=0}^{\frac{P_m}{d\Gamma}} \left| \frac{\left( Bulstoer\left(x_0, 0, P_m, \frac{P_m}{d\Gamma}, D\right)^{(1)}\right)_i - Pe\left(F2(d\Gamma), x_0, d\Gamma, \frac{P_m}{d\Gamma}\right)_{0,i}}{\left( Bulstoer\left(x_0, 0, P_m, \frac{P_m}{d\Gamma}, D\right)^{(1)}\right)_i} \right| \right] \quad (9)$$

Те, що записано вище – досить складна конструкція мови програмування: визначення функції користувача  $Kp(d\Gamma)$  через вбудовану функцію  $Bulstoer(.)$  і функцію користувача  $Pe(..)$ . Ця функція є синтаксично коректною, але працює повільно. Для осмислення запишемо її у «псевдокодах»:

$$\text{Критерій(крок\_квант)} = \text{сума} \left( \text{модуль} \left( \frac{\text{коорд\_стал} - \text{коорд\_ЕДМ}}{\text{коорд\_стал}} \right) \right)$$

Задаємо вектор значень кроку квантування dΓ, будемо графіки залежності помилки від кроку квантування для моделі 2-го і 3-го порядків.

$$qq := (.05 \ .1 \ .2 \ .25 \ .4 \ .5 \ .8 \ 1) \quad qq := qq^T \quad q := 0..last(qq) \quad last(qq) = 7$$



Зауважимо, що отримана функція (8) працює неприпустимо повільно. Причини цього – проблеми програмних середовищ і профівня програми.

Як видно з графіків, завжди можна підібрати (зменшуючи) крок квантування так, щоб забезпечити задану точність, наприклад 5%, відносно еталонного процесу.

Знайдемо максимальні кроки квантування, що забезпечують задану точність 5% при використанні ЕДМ 1-го, 2-го, 3-го порядків. Для розв'язання поставленої задачі використовуємо принцип мінімуму зусиль – послідовно підставимо у (9)  $F_1(dT)$ ,  $F_2(dT)$ ,  $F_3(dT)$  і просто підбираємо такі  $dT$ , що дають задану точність. Не забороняється зробити це більш елегантно. Функція (9) має *особливість* – вона працює тільки для кроків, кратних  $R_m$ .

Маємо такі результати

для моделі 1-го порядку:

2-го:

і

3-го:

$$K_p(0.04) = 0.051$$

$$K_p(0.5) = 0.171$$

$$K_p(0.5) = 0.032$$

Бачимо, що у моделі 3-го порядку при однаковій точності допустимий крок обчислень на порядок більший, ніж у моделі 1-го порядку.

**Працювали:** Ф. Грач, М. Артилерист, Л. Козак, Б. Крік 22/02/2022 гр. ЗАУ 09

### Контрольні запитання

1. Запишіть розв'язання звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння через корені характеристичного рівняння.
2. Що таке матрична експонента?
3. Запишіть розв'язання звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння у формі Коші.
4. Подайте звичайне лінійне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку у формі Коші.
5. Що таке «перехідна функція стану»?
6. Запишіть розкладення у ступеневий ряд для матричної експоненти.
7. Що таке «еквівалентне різницеве рівняння»?
8. Які числові методи розв'язання диференціальних рівнянь ви знаєте?
9. Які зміни потрібно зробити в еквівалентній дискретній математичній моделі неперервного об'єкта, щоб при збільшенні кроку обчислень зберегти потрібну точність?
10. Що означають терміни «еквівалентна дискретна модель 1-го порядку», «еквівалентна дискретна модель 3-го порядку»?
11. Чим відрізняється ТАК від ТАУ, а керування від управління?
12. Що таке «динамічна система»?

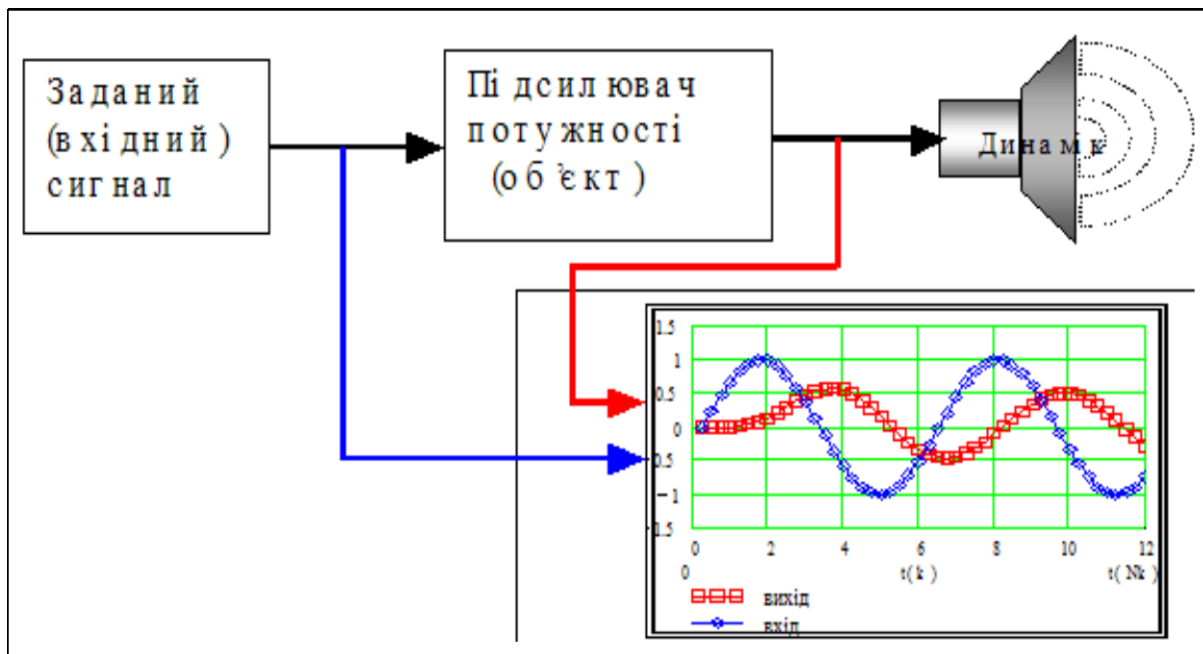
*Зауваження.* Останнє запитання є узагальнюючим, тому що об'єктом ТАУ є саме динамічні системи будь-якої природи. Це питання є одночасно і простим, і складним. Можна визначити динамічну систему мовою теорії множин, можна – мовою якісної теорії диференціальних рівнянь та ін. Спробуйте дати комплексне (системне) визначення цього поняття.

## 1.2 Дослідження реакції САУ на заданий сигнал

**Ціль даної роботи** – набуття навичок у розробці і реалізації у програмному середовищі математичного пакета робочих (тобто програмно виконуваних) моделей динаміки неперервних систем за наявності зовнішніх входів – управляючих або збуджуювальних.

В неформальному плані це, наприклад, така задача – на вхід верстата з ЧПУ подається програма фрезерування прямокутного контуру. Система автоматичного управління відпрацьовує управляючий сигнал неточно – із запізненням, перерегулюванням. Ціль моделювання – точно обчислити помилки, вибрати задовільні параметри і режими обробки.

Другий приклад: – потрібно дослідити, як високоякісний аудіопідсилювач відтворює (амплітудні і фазові відхилення) гармонічний сигнал певної частоти або як він реагує на випадковий сигнал (шум). Нижче подано схему такої задачі:



Як обчислити реакцію на заданий вхідний сигнал? Існує декілька альтернатив визначення реакції САУ на зовнішній (вхідний) сигнал:

- обчислення інтеграла згортки (= інтеграла Дюамеля);
- безпосереднє обчислення за еквівалентним різницеvim рівнянням;
- інші альтернативи (знайдіть самостійно).

**Суть першої альтернативи** в обчисленні інтеграла згортки:

$$X_{vyx}(t) = \int_0^t X_{vx}(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau; \quad g(t) = \frac{d}{dt} h(t); \quad L^{-1}\{W(s)\} = g(t); \quad L^{-1}\{W(s)/s\} = h(t),$$

де  $X_{vyx}(t)$  – вихідний сигнал динамічної системи (об'єкта управління);

$X_{vx}(t)$  – вхідний сигнал;

$g(t)$  – імпульсна перехідна функція (ПІХ) – реакція на одиничну імпульсну функцію  $d(t)$ ;

$h(t)$  – перехідна функція (ПХ) – реакція на одиничну ступінчасту функцію  $1(t)$ ;

$t$  – змінна інтегрування.



Проблема в знаходженні аналітичного виразу для ПХ. Для цього треба або знайти аналітичне розв'язання диференціального рівняння, або обернене перетворення Лапласа від передаточної функції. Але головний недолік цієї альтернативи в тому, що вона «працює» тільки для лінійних систем. В факультативному підрозділі наведено модуль для обчислення реакції системи за інтегралом згортки. Цей модуль базується на символічних обчисленнях.

Обчислення за **другою альтернативою** однаково роботоздатне для лінійних і нелінійних систем, не так швидко ускладнюється при збільшенні порядку системи. Єдиний недолік альтернативи – ми не маємо аналітичного виразу для виходу.

Далі розглядається метод безпосереднього числового інтегрування диференціального рівняння з правою частиною – вхідним сигналом управління  $u(t)$  і (або) збурення  $v(t)$ .

Так само, як і в підрозділі 1.1, починаємо розробку документа (програми) з узагальнених базових моделей, форма яких не залежить від порядку системи і значень параметрів. Щоб зробити цю процедуру узагальненою і уніфікованою, потрібно спочатку звести задану систему диференціальних рівнянь до форми Коші:

$$dx/dt = A \cdot x + B \cdot u + D \cdot v, \quad (1)$$

де  $x$ ,  $u$ ,  $v$  – вектори стану, управління, збурень, відповідно;  $A$ ,  $B$ ,  $D$  – матриці відповідної розмірності. Розв'язок цього рівняння у формі Коші (= розв'язок без урахування збурень) має вигляд:

$$x[(k+1) \cdot T] = F(T) \cdot x[k \cdot T] + G(T) \cdot B \cdot u[k \cdot T], \quad (2)$$

де  $T$  – крок обчислень,  $k$  – номер кроку; функції  $F(T)$  і  $G(T)$  – нескінченні ряди:

$$F(T) = I + A \cdot T + (A \cdot T)^2/2! + (A \cdot T)^3/3! + \dots; \quad (3)$$

$$G(T) = I \cdot T + A \cdot T^2/2! + A^2 \cdot T^3/3! + \dots$$

Розглядаємо САУ, що описується диференціальним 3-го порядку:

$$d^3x(t)/dt^3 + a_2 \cdot d^2x(t)/dt^2 + a_1 \cdot dx(t)/dt + a_0 \cdot x = f(t),$$

де  $x(t)$  – регульована змінна (тиск, напруга, відстань, температура, ...);  $f(t)$  – зовнішня дія на САУ;  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$  – параметри математичної моделі, значення яких беруться згідно з варіантом.

### Завдання

1. Отримати еквівалентні дискретні моделі 3-го порядку.	4 б
2. Побудувати реакції САУ на усі задані вхідні сигнали.	8 б
3. Визначити усталені помилки для всіх вхідних сигналів <i>експериментально</i> .	8 б
4. Визначити усталені помилки для всіх вхідних сигналів <i>аналітично</i> .	15 б
5. Розробити документ для знаходження $X_{vux}(t)$ за допомогою інтеграла згортки.	15 б
6. Розробити документ для знаходження $X_{vux}(t)$ іншими способами.	20 б

### Варіанти значень параметрів

Параметри об'єкта	Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
		a2	3.0	2.0	1.0	1.75	2.5	3.0	2.0	1.0	2.0	2.5	3.5	3.5
		a1	3	2	2	2.15	3	3.5	1	3	2.5	2	3	2.5

## Зразок виконання

### 1. Отримання еквівалентної дискретної моделі

Вводимо параметри об'єкта (згідно з варіантом), задаємо крок обчислень:

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad a_2 := 1.2 \quad a_1 := 3 \quad a_0 := 1 \quad T := .25$$

Зводимо задане дифференціальне рівняння до форми Коші. Для цього вводимо нові змінні:  $x_1=x$ ;  $x_2=dx/dt$ ;  $x_3=d^2x/dt^2$ , і далі просто копіюємо відповідні фрагменти підрозділу 1.1.

Подаємо систему у матрично-векторному вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u ,$$

$$\text{де } A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Згідно з (3) записуємо наближення другого порядку для перехідної функції стану (ПФС) і виводимо їх значення. Виходячи з очевидних міркувань, подаємо ПФС як функцію кроку квантування  $T$ .

$$F_2(T) := I + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!} \quad F_2(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.031 \\ -0.031 & 0.906 & 0.213 \\ -0.213 & -0.669 & 0.651 \end{pmatrix}$$

Записуємо також складову ПФС для зовнішнього входу:

$$G_2(T) := I \cdot T + A \cdot \frac{T^2}{2!} \quad G_2(T) = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.031 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.031 \\ -0.031 & -0.094 & 0.213 \end{pmatrix} .$$

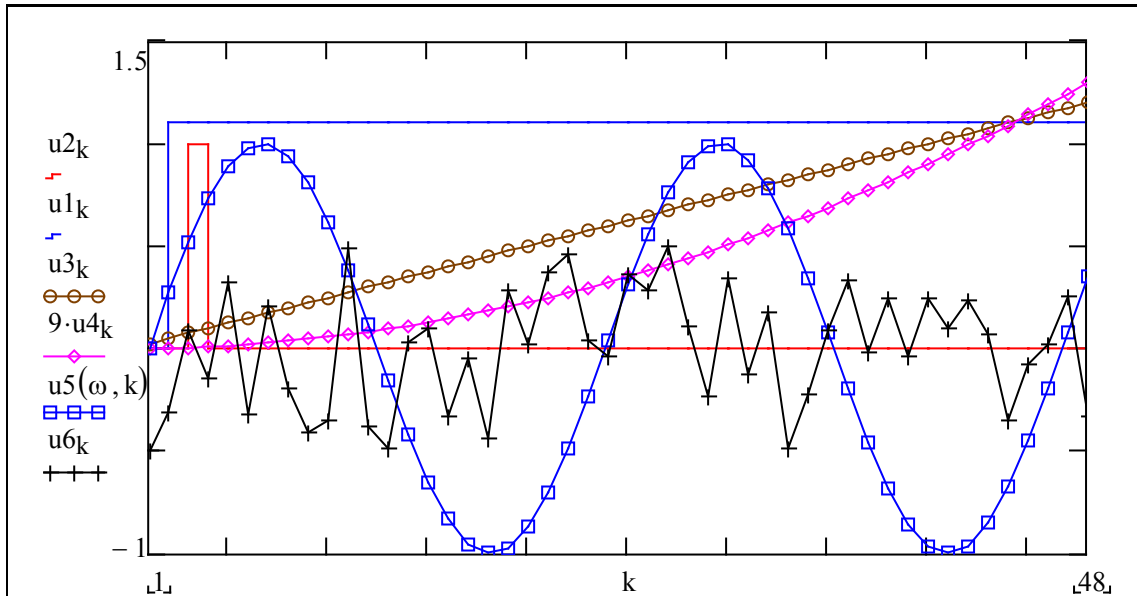
Задаємо період моделювання, крок квантування та кількість кроків

$$\text{Period} := 12 \quad T := .25 \quad N_k := \frac{\text{Period}}{T} \quad N_k = 48 \quad k := 1..N_k$$

### 2. Типові тестові сигнали

Якість системи автоматичного управління оцінюється за тим, як вона відпрацьовує певні тестові сигнали. Звичайно використовуються дельта-функція (імпульс), ступінчастий сигнал, сигнали, що зростають лінійно та квадратично. Ця група тестових сигналів пов'язана між собою операцією інтегрування. Дійсно, інтеграл від дельта-функції – ступінчаста функція, інтеграл від ступінчастої функції – функція, що зростає лінійно. Широко також використовуються гармонічні і випадкові сигнали. Конструємо з програмних ресурсів пакета типові тестові функції для САУ.

Імпульсна	Ступінчаста	Лінійно зростаюча
$u2_k := \Phi(k - 2.2) - \Phi(k - 4)$	$u1_k := \Phi(k - 2) \cdot 1.1$	$u3_k := .1 \cdot (k \cdot T)$
Квадратично зростаюча	Гармонічна	Випадкова.
$u4_k := .001 \cdot (k \cdot T)^2$	$u5(\omega, k) := \sin[\omega \cdot (k - 1) \cdot T]$	$\omega := 1.1$
		$u6_k := (\text{rnd}(1) - .5)$



На цьому графіку подано шість типових тестових сигналів для САУ. Самостійно визначіть, де саме який з них.

### 3. Визначення реакції САУ на типові тестові сигнали

Ми виконали підготовчу роботу – отримали математичну модель реакції динамічної системи на довільний зовнішній сигнал і моделі типових входних сигналів. Тепер неважко визначити реакції на довільні входні сигнали.

При виконанні роботи застосуємо елемент «нових інформаційних технологій», таких звичних, що ми їх вже не помічаємо. Створимо блок з об'єктів: «початкові умови», «вхідний сигнал», «динаміка САУ» та «графіки перехідних процесів». Потім будемо тільки копіювати цей блок і підставляти в нього потрібний вхідний сигнал.

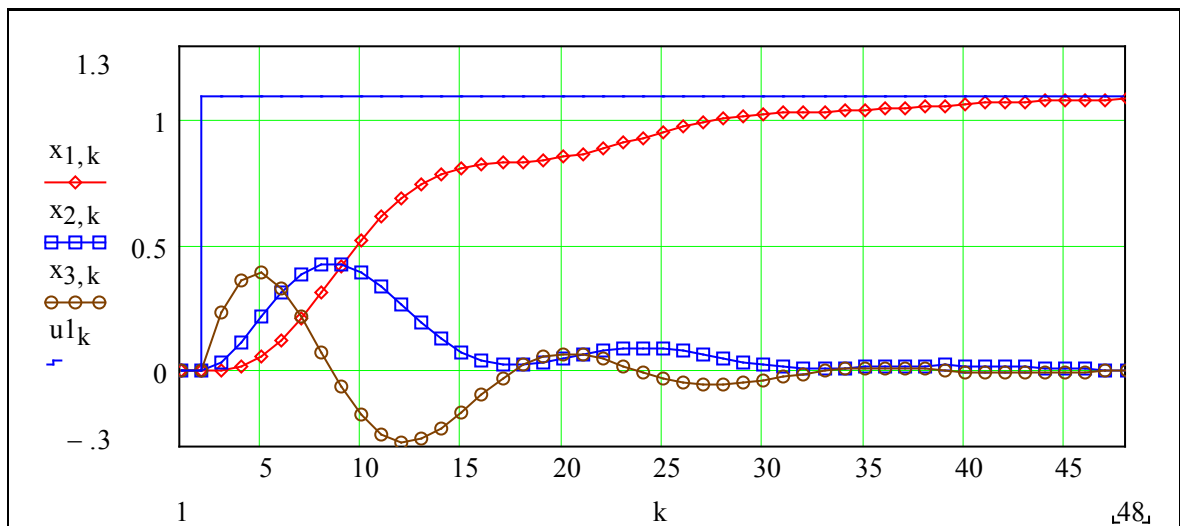
#### Реакція на ступінчастий сигнал

Записуємо початкові умови, вхідний сигнал і робоче рівняння, будемо графіки.

$$x^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u1_k := \Phi(k - 2) \cdot 1.1$$

$$x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot u1_k$$

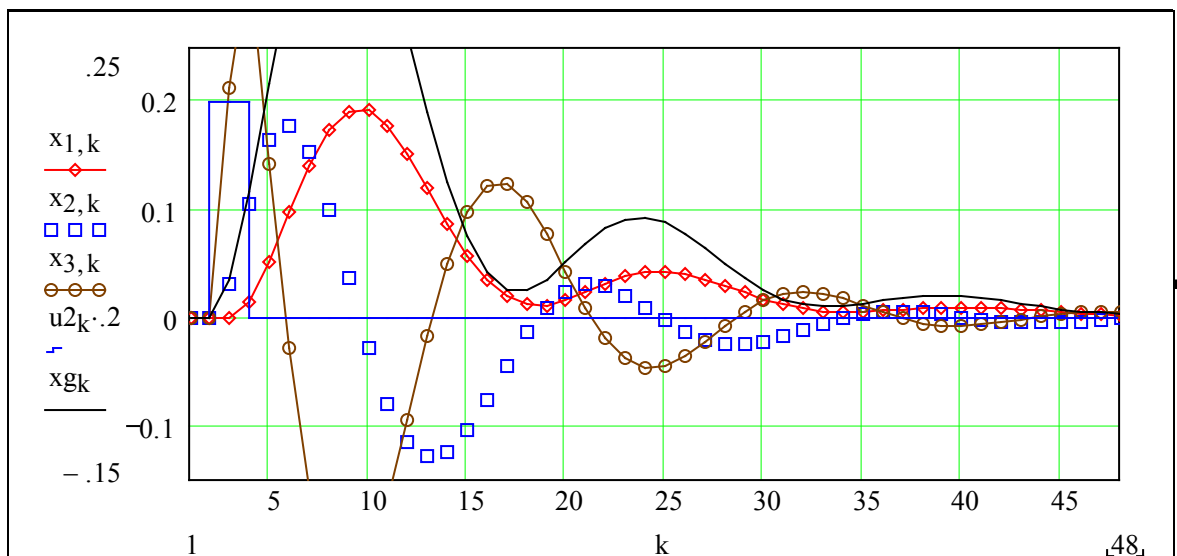


Визначте будь-яким методом усталену помилку координати (тобто  $x_{1k}$  при  $k \rightarrow \infty$ ).

### Реакція на імпульсний сигнал

Копіюємо попередній модуль і в робочому рівнянні замінюємо  $u_{1k}$  на  $u_{2k}$ . Початкові умови – ті ж самі. Для порівняння виводимо також похідну від реакції на ступінчастий сигнал:

$$x_{gk} := x_{2,k}; \quad u_{2k} := \Phi(k-2) - \Phi(k-4); \quad x^{(k+1)} := F_2(T) \cdot x^{(k)} + G_2(T) \cdot B \cdot u_{2k}$$



При яких умовах графіки  $x_{1,k}$  та  $x_{g,k}$  будуть однаковими? Чи можливо це?

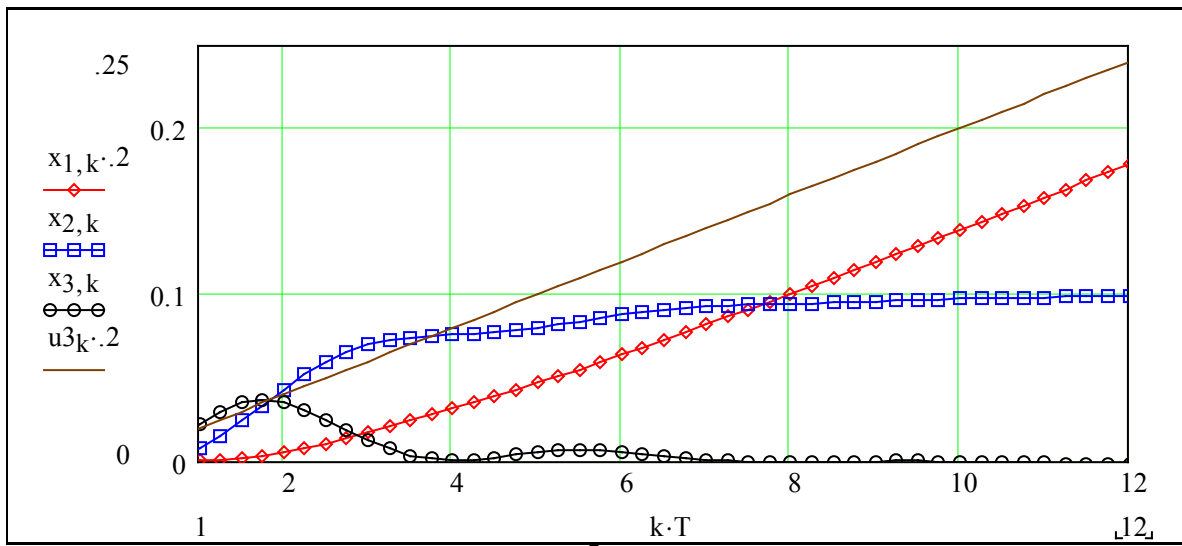
### Реакція на лінійно зростаючий сигнал

Копіюємо попередній модуль і в робочому рівнянні замінюємо  $u_{1k}$  на  $u_{3k}$ .

$$x^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{3k} := .1 \cdot (k \cdot T)$$

$$x^{(k+1)} := F_2(T) \cdot x^{(k)} + G_2(T) \cdot B \cdot u_{3k}$$

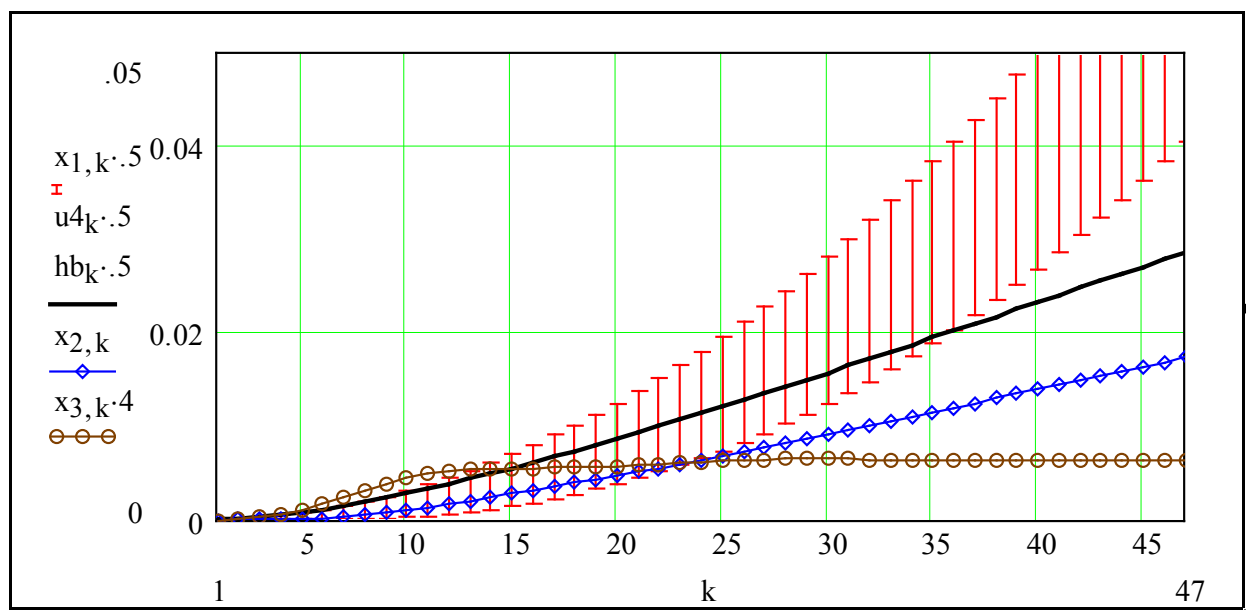


Визначте усталену помилку координати (тобто  $x_{1k}$  при  $k \rightarrow \infty$ ). Чи  $\rightarrow ???$

### Реакція на квадратично зростаючий сигнал

Копіюємо попередній модуль і в робочому рівнянні замінюємо  $u_{1k}$  на  $u_{4k}$ .

$$u_{4k} := .001 \cdot (k \cdot T)^2 \quad x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot u_{4k} \quad hb_k := (u_{4k} - x_{1,k})$$



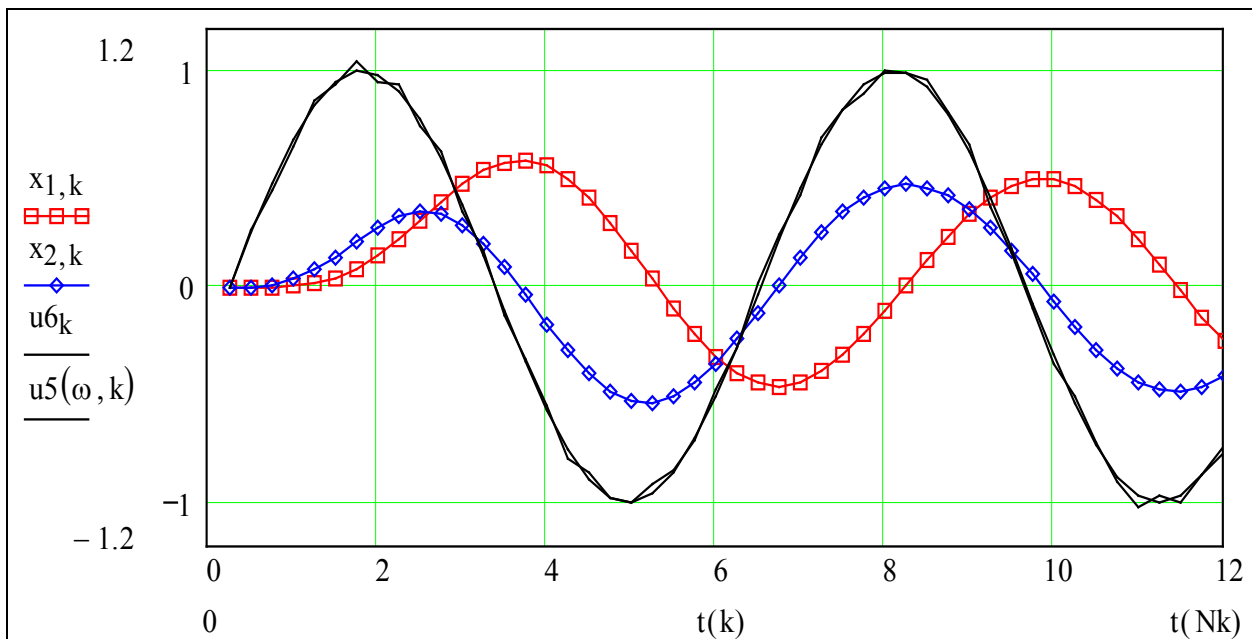
Визначте усталену помилку координати (тобто  $x_{1k}$  при  $k \Rightarrow \infty$ )

### Реакція на гармонічний сигнал + шум

Копіюємо попередній модуль. В робочому рівнянні замінюємо  $u_{1k}$  на  $u_{6k}$ . Формуємо вхідний сигнал як суму періодичного сигналу і шуму. Задаємо значення параметрів: амплітуда шуму  $A_h := .1$ ; частота  $\omega := 1$ ; поточний час  $t(k) := T \cdot k$ .

Задаємо періодичний сигнал  $u_5(\omega, k) := \sin[\omega \cdot (k - 1) \cdot T]$ , шум  $shu(k) := (\text{rnd}(1) - .5) \cdot A_h$ . Записуємо вираз для періодичного сигналу з шумом

$$u_{6k} := u_5(\omega, k) + shu(k); \quad x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot u_{6k}$$



Подивіться на ці графіки. Знайдіть вхідний і вихідний сигнали. Візьміть більший період моделювання, подивіться, до чого сходиться вихідний сигнал. Чи існує в даному випадку усталений режим? Як визначити помилки цього усталеного режиму? Як вимірювати **амплітуду і фазу** вихідного сигналу відносно вхідного? Чи дорівнює частота вихідного сигналу частоті вхідного? Наведіть приклади, коли це не так.

**Працювали:** Макитра М. М., Глечик Г. Г., Горшков П. П., Джек Пот. 13.13.2013

### Контрольні питання

1. Дайте приклади ситуації, коли САУ має відпрацювати деякий змінний програмний сигнал.
2. Який вигляд має вхідний сигнал підсилювача акустичного сигналу?
3. Дайте визначення однорідного і неоднорідного дифференціальних рівнянь.
3. Запишіть систему неоднорідних лінійних різницевих рівнянь у матрично-векторному вигляді.
4. Запишіть перехідну функцію стану для еквівалентного різницевого рівняння з ненульовою правою частиною.
5. Опишіть усталені режими для типових тестових вхідних сигналів.
6. Як визначити реакцію САУ на вхідний сигнал за допомогою згортки.
7. Що таке «інтеграл згортки»?

*Факультатив для осіб з аномальною активністю (ОАА) (бали не начисляються)*

### Визначення реакції САУ на заданий сигнал за допомогою інтеграла згортки

Щоб знайти реакцію САУ на заданий сигнал з використанням інтеграла згортки, спочатку необхідно визначити імпульсну перехідну функцію. Зробимо це, використавши обернене перетворення Лапласа від передаточної функції.

Беремо для прикладу динамічну систему 2-го порядку з дифрівнянням:

$$\frac{d^2}{dt^2}x + a_1 \cdot \frac{d}{dt}x + a_0 \cdot x = u(t).$$

Записуємо передаточну функцію для виходу  $x(t)$  за входом  $u(t)$ :

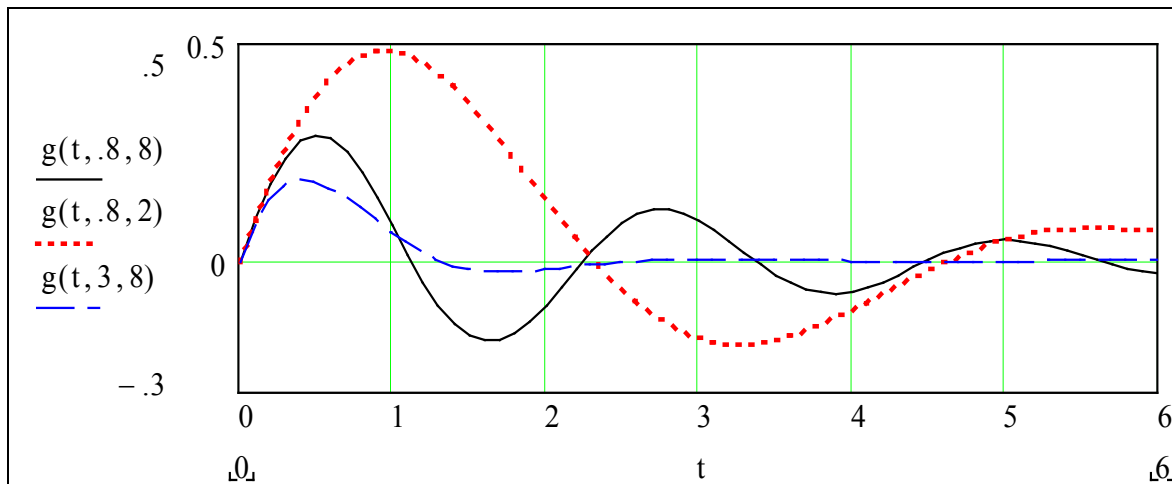
$$W(s, a_1, a_0) = \frac{1}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{x(s)}{u(s)}.$$

Виділяємо вираз для передаточної функції, вказуємо курсором на змінну  $s$  і в меню символічних операцій вибираємо пункт «обернене перетворення Лапласа» і отримуємо вираз для імпульсної перехідної функції (ІПФ):

$$g(t, a_1, a_0) := 2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot a_1 \cdot t\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2} \cdot t\right)}{\sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2}}$$

*Увага! Присвоєння:  $g(t, a_1, a_0) :=$  . потрібно робити **самостійно** в режимі редагування.*

Будуємо для контролю графіки імпульсних перехідних функцій при різних значеннях параметрів. Задаємо діапазон  $t := 0, 0.1 \dots 6$ .



Спробуємо зробити теж саме для системи 3-го порядку і порівняємо результати з обчисленням реакції за допомогою еквівалентного різницевого рівняння. Для цього скопіюємо відповідний модуль:

$$a_2 := 2 \quad a_1 := 3 \quad a_0 = 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \quad x^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u1_k := \Phi(k-2) \quad u5(\omega, k) := \sin[\omega \cdot (k-1) \cdot T]$$

$$F2(T) := I + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!} \quad G2(T) := I \cdot T + A \cdot \frac{T^2}{2!} \quad T = 0.25 \quad x1^{(1)} := x^{(1)}$$

$$x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot u2_k$$

$$x1^{(k+1)} := F2(T) \cdot x1^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot u5(\omega, k)$$

Беремо динамічну систему 3-го порядку з дифрівнянням:

$$\frac{d^3}{dt^3}x + a_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}x + a_1 \cdot \frac{d}{dt}x + a_0 \cdot x = u(t)$$

Записуємо також передаточну функцію для виходу  $x(t)$  за входом  $u(t)$ :

$$W1(s, a_2, a_1, a_0) := \frac{1}{s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$

Символьний процесор вже не може дати вираз для ПФ, аналогічний попередньому, тому що для коренів алгебраїчних рівнянь вище другого степеня немає кінцевих аналітичних виразів. Тому знаходимо корені числовим методом (за допомогою вбудованої функції `polyroots(·)`).

$$\text{polyroots} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2.325 \\ -0.338 + 0.562i \\ -0.338 - 0.562i \end{pmatrix}.$$

Записуємо тепер передаточну функцію у вигляді:

$$\frac{1}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3)} = \frac{1}{(s + 2.325) \cdot (s + 0.338 - 0.562i) \cdot (s + 0.338 + 0.562i)}$$

Але символьний процесор «не знає», що робити з уявними величинами. Робимо ще один крок назустріч (символьному процесору) – перемножуємо вирази зі спряженими комплексними коренями:

$$(s + 0.338 - 0.562 \cdot 1i) \cdot (s + 0.338 + 0.562 \cdot 1i) \left| \begin{array}{l} \text{expand, 1i} \\ \text{float, 2} \end{array} \right. \rightarrow s^2 + .68 \cdot s + .43$$

і отримуємо вираз передаточної функції без комплексних чисел:

$$W1(s) = \frac{1}{(s + 2.325) \cdot (s^2 + .676 \cdot s + .430)}$$

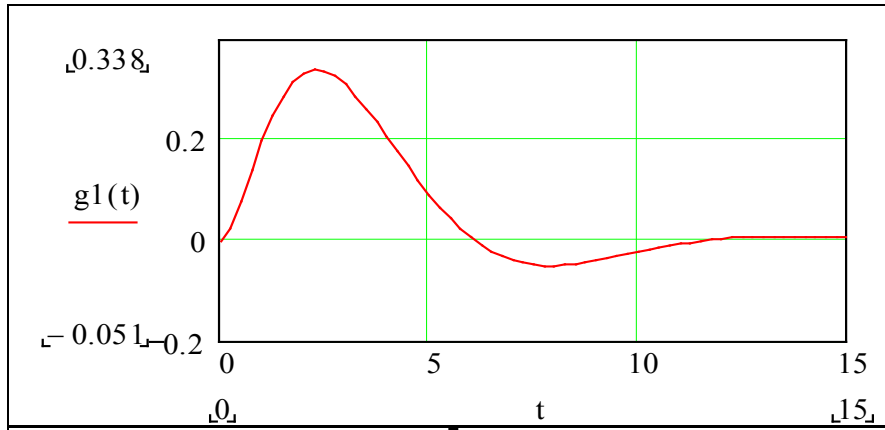
І от, для такого подання передаточної функції, символьний процесор видає обернене перетворення Лапласа, яке є імпульсною перехідною функцією (ПФ). Прокоментуємо те, що подано нижче. Для заданої функції комплексної змінної  $s$  виконується: зворотне перетворення Лапласа (`invlaplace`), спрощення (`simplify`) та виведення виразу з двома знаками після крапки (`float, 2`) у коефіцієнтах.

$\frac{1}{(s + 2.32) \cdot (s^2 + .68 \cdot s + .43)}$	<code>invlaplace</code>
	<code>simplify</code> $\rightarrow .24 \cdot \exp(-2.3 \cdot t) - .24 \cdot \exp(-.34 \cdot t) \cdot \cos(.56 \cdot t) + .83 \cdot \exp(-.34 \cdot t) \cdot \sin(.56 \cdot t)$
	<code>float, 2</code>

$$g1(t) := .2345 \cdot \exp(-2.325 \cdot t) + .8293 \cdot \exp(-.338 \cdot t) \cdot \sin(.562 \cdot t) - .2345 \cdot \exp(-.338 \cdot t) \cdot \cos(.562 \cdot t)$$



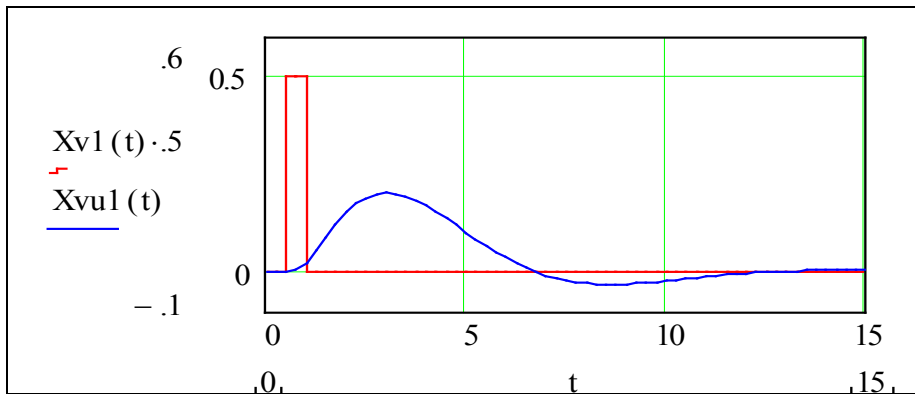
Будуємо для контролю графік отриманої імпульсної перехідної функції для системи 3-го порядку. Задаємо діапазон  $t := 0, 0.25.. 15$ .



Тепер, коли ми отримали ПФ, просто обчислити реакцію на типові входні дії САУ за інтегралом згортки. Зробимо це і порівняємо результати з обчисленими за еквівалентним різницевим рівнянням.

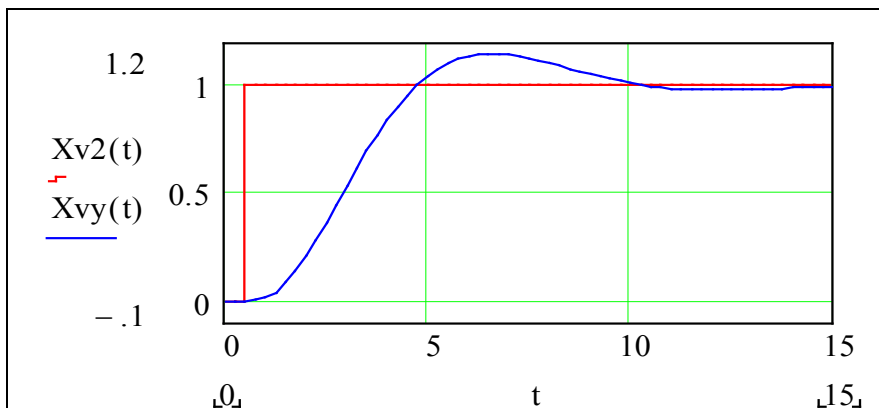
**Реакція на імпульс:**

$$Xv1(t) := \Phi(t - .4) - \Phi(t - 1), \quad Xvu1(t) := \int_0^t Xv1(t - \tau) \cdot g1(\tau) d\tau.$$



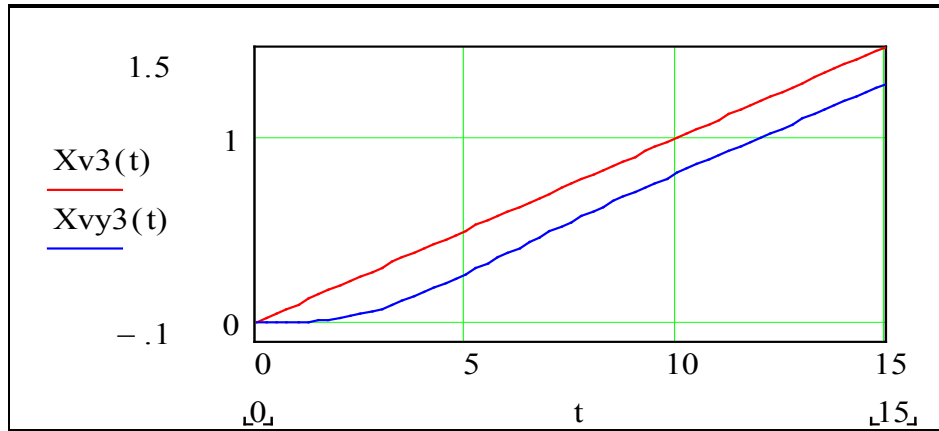
**Реакція на ступінчастий сигнал:**

$$Xv2(t) := \Phi(t - .5), \quad Xvy(t) := \int_0^t Xv2(t - \tau) \cdot g1(\tau) d\tau.$$



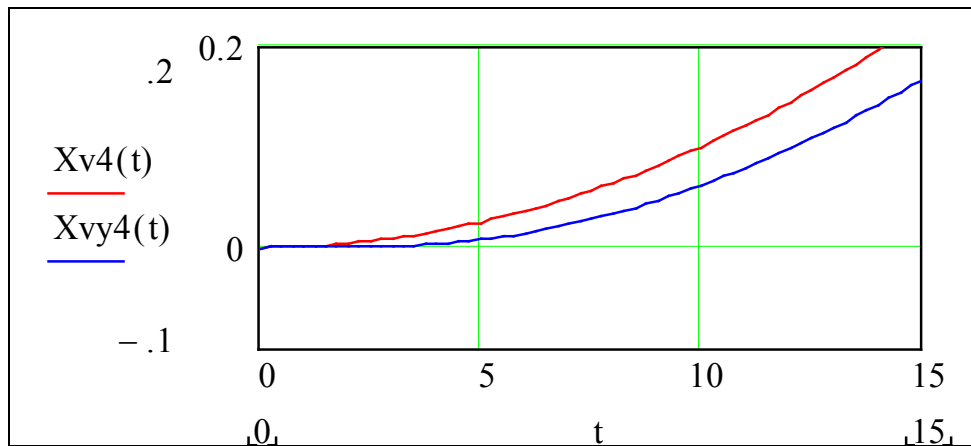
**Реакція на сигнал, що зростає лінійно:**

$$Xv3(t) := .1 \cdot (t), \quad Xvy3(t) := \int_0^t Xv3(t - \tau) \cdot g1(\tau) \, d\tau.$$



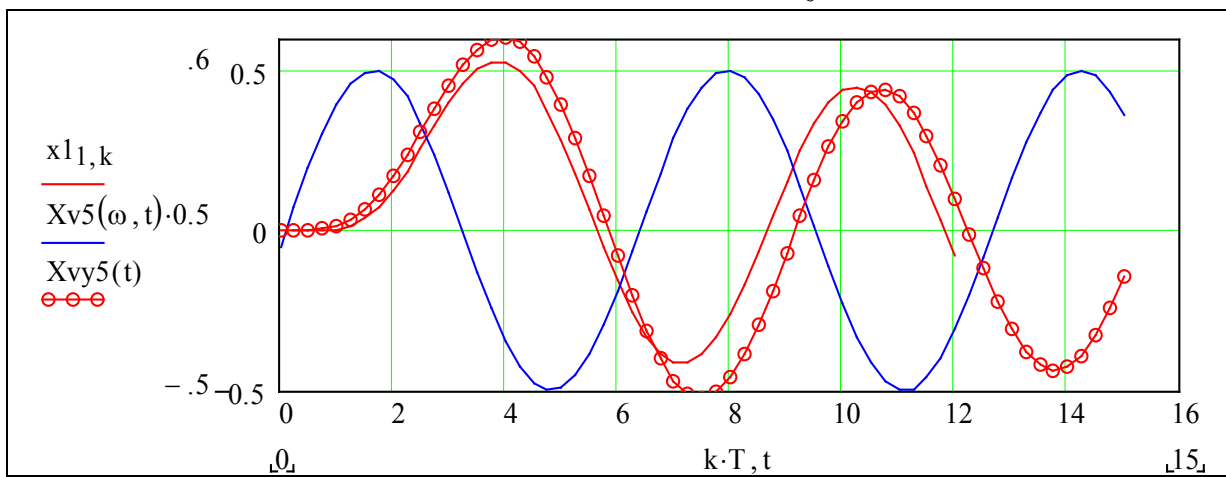
**Реакція на сигнал, що зростає квадратично:**

$$Xv4(t) := .001 \cdot (t)^2, \quad Xvy4(t) := \int_0^t Xv4(\tau) \cdot g1(t - \tau) \, d\tau.$$



**Реакція на гармонічний сигнал:**

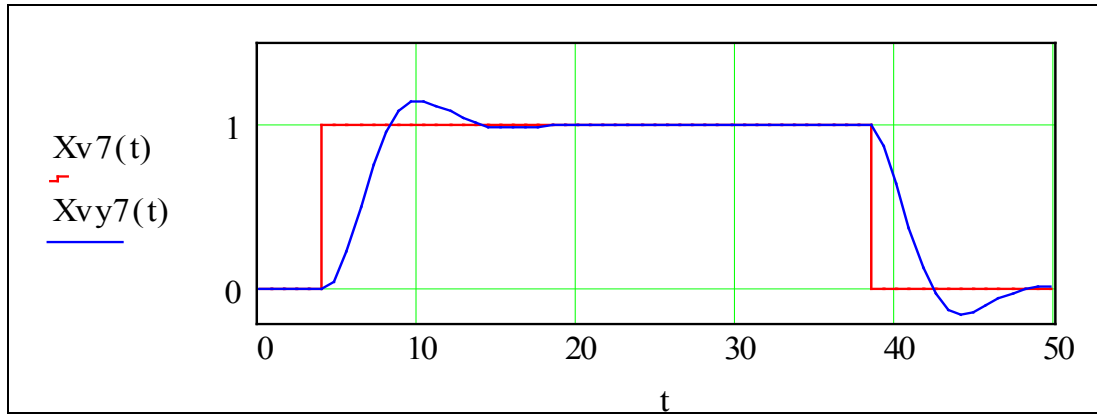
$$Xv5(\omega, t) := \sin[\omega \cdot (t - .1)], \quad \omega := 1, \quad Xvy5(t) := \int_0^t Xv5(\omega, \tau) \cdot g1(t - \tau) \, d\tau.$$



На цьому графіку подано вхідний сигнал  $X_{v5}(\omega, t)$ , вихідний сигнал  $X_{vy5}(t)$  та вихідний інтеграл, розрахований за різницевиими рівняннями. Спробуйте пояснити, чому збіг вихідних сигналів, що розраховані альтернативними методами, є задовільним.

Побудуємо також **реакцію на довгий імпульс**:

$$X_{v7}(t) := \Phi(t - 4) - \Phi(t - 38), \quad t := 0, 0.8..50, \quad X_{vy7}(t) := \int_0^t X_{v7}(t - \tau) \cdot g_1(\tau) \, d\tau.$$



Спробуйте змінювати довжину імпульсу, зробіть висновки.

### Контрольні питання до факультативу

1. Запишіть формулу для інтеграла згортки.
2. Запишіть формулу для перетворення Лапласа від інтеграла згортки.
3. Що таке імпульсна перехідна функція, як вона пов'язана з передаточною функцією?
4. Що таке перехідна функція?

5. Задана імпульсна перехідна функція САУ:  $2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot a_1 \cdot t\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2} \cdot t\right)}{\sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2}}$ .

Чому дорівнює перетворення Лапласа від неї?

6. Чому дорівнює обернене перетворення Лапласа  $L^{-1}\{W(s)\} = ?$  від передаточної функції стійкої САУ?

7. На скільки зміниться інтеграл згортки:  $X_{vu1}(t) := \int_0^t X_{v1}(t - \tau) \cdot g_1(\tau) \, d\tau$ , якщо в ньому

отак змінити множники:  $X_{vu1}(t) := \int_0^t g_1(t - \tau) \cdot X_{v1}(\tau) \, d\tau$ ?

Виберіть відповідь: а) не зміниться, б) зміниться у  $\pi$  ( $\approx 3.14$ ) разів, в) зміниться в 40 разів.

8. Що виконується в цьому виразі:

$$2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot a_1 \cdot t\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2} \cdot t\right)}{\sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2}} \left| \begin{array}{l} \text{laplace, tt} \\ \text{simplify} \\ \text{collect, s} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{(s^2 + s \cdot a_1 + a_0)} ?$$

## 1.3 Дослідження часових характеристик САУ при варіації параметрів

**Ціль даної роботи** – набуття навичок у розробці і реалізації у програмному середовищі математичного пакета робочих (тобто програмно виконуваних) моделей динаміки, орієнтованих на дослідження впливу варіацій параметрів регулятора і об'єкта управління.

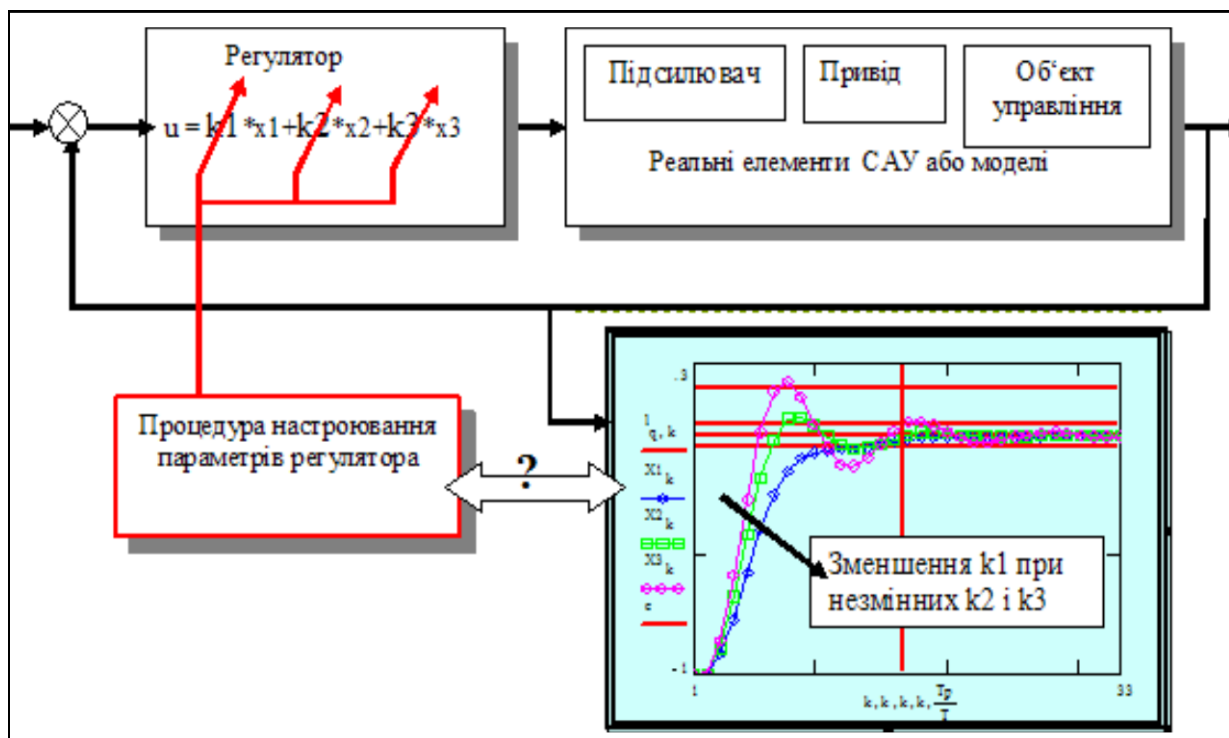
В неформальному плані це, наприклад, така задача – складено реальну САУ (див. схему) – підсилювач, привод (виконавчий елемент), об'єкт управління, вимірювачі параметрів вектора стану (на схемі не показані) і регулятор, що замикає контур.

Об'єкт, привод, підсилювач – нелінійні елементи. На базі їх *лінеаризованих* моделей розраховано параметри регулятора  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Реальна САУ при таких значеннях параметрів може бути незадовільною або, взагалі, нестійкою.

**Задача – настроїти (підібрати) параметри регулятора** так, щоб САУ була задовільною (ще краще – *оптимальною*). Методи цього пошуку найрізноманітніші – від чистого методу випадкових проб і помилок до математично витончених та «інтелектуальних» методів оптимізації і адаптації. Потім для настроєного регулятора знаходяться границі допусків на значення *параметрів*, в межах яких САУ: **1) задовільна, 2) стійка**.

Процедуру настроювання може виконувати: а) спеціаліст з досвідом, б) автоматична система, в) спеціаліст в діалозі із автоматичною системою настроювання.

В цій роботі на повністю контрольованій, прозорій моделі об'єкта імітується заключна процедура створення САУ – **настроювання, випробування, сертифікація**.



Для оцінення якості і функціональної придатності САУ існує більш-менш стандартизований набір показників. В даній роботі використовуються такі показники (відповідні горизонтальні і вертикальні (червоні) лінії на графіку-«осцилограмі», поданому вище):

- **тривалість перехідного процесу (ПП)** – час до входу в допуск помилки –  $T_p$ ;
- **викид (перерегулювання)** – максимальне значення помилки у ПП –  $h_m$  та багато інших.

Сьогодні САУ реалізують мікроконтролерами і мікропроцесорами. Тому вони самоконтролюються, самокалібруються і самонастроюються. **Надзадача** в цій роботі – розробити систему самонастроювання **регулятора**, що приводить показники ПП САУ до заданих значень. (Оптимальні і адаптивні САУ розглядаються в другій частині посібника).

### Завдання

1. Налаштувати регулятор вручну, методом пошуку. 6 б
2. Оцінити якість САУ при заданому розкиді заданого параметра. 8 б
3. Визначити допустимий діапазон зміни заданого параметра, в якому САУ ще залишається стійкою. 8 б
4. Визначити характер зміни ПП при заданому характері зміни всіх параметрів об'єкта управління. 11 б
5. Розробити модулі обчислення залежності показників якості ПП від параметрів САУ і збурень. 67 б

### Варіанти значень параметрів

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a2	3.0	2.0	1.0	1.75	2.5	3.0	2.0	1.0	2.0	2.5	3.5	3.5	3.3	2.8
a1	3	2	2	2.15	3	3.5	1	3	2.5	2	3	2.5	1.5	2.5
щодо досліджувати	a1	a2	a3	a3	a2	a1	a1	a2	a3	a3	a2	k1	k1	k2
жувати	k1	k2	k3	k2	k1	k2	k3	k3	k1	a1	a3	k2	k3	k3

### Зразок виконання

#### 1. Отримання еквівалентної дискретної моделі

Зводимо задане дифрівняння до форми Коші. Для цього вводимо нові змінні:  $x_1=x$ ;  $x_2=dx/dt$ ;  $x_3=d^2x/dt^2$  і далі просто копіюємо відповідні фрагменти з роботи в підрозділі 1.1. Подаємо систему дифрівнянь у матрично-векторному вигляді :

$$\text{об'єкт: } \frac{dx}{dt} = A_0 \cdot x + B \cdot u; \text{ регулятор: } u = K \cdot x, \text{ де ORIGIN:=1;}$$

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{00} & -a_{10} & -a_{20} \end{pmatrix}; I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; K := (k_1 \quad k_2 \quad k_3); x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи (необов'язково, бо вирази прості) символічний процесор, розкриваємо відповідні матрично-векторні вирази:

$$u = K \cdot x \rightarrow u = (k_1 \cdot x \quad k_2 \cdot x \quad k_3 \cdot x); (k_1 \quad k_2 \quad k_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3;$$

$$A_0 \cdot x + B \cdot u = A_0 \cdot x + B \cdot K \cdot x = (A_0 + B \cdot K) \cdot x; A := A_0 + B \cdot K; \frac{dx}{dt} = A \cdot x.$$

Виводимо символні вирази для матриці замкненої системи та її окремих елементів. Для цього досить набрати замість « $\Rightarrow$ » стрілку  $\rightarrow$  (взяти з інструментальної палітри). Ці вирази нам потрібні для розробки робочої матмоделі, орієнтованої на дослідження впливу варіацій параметрів. Можна було їх вивести «вручну». **Але у нас при змінах у матрицях  $A_0$ ,  $B$ ,  $K$  усі вирази зі стрілками будуть переобчислюватись** (символьно).

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 & -a_2 + k_3 \end{pmatrix} \quad A_0 + B \cdot K \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 & -a_2 + k_3 \end{pmatrix}.$$

Нарешті переходимо безпосередньо до побудови робочої моделі (програми). Далі виділено кольорами (highlight) *майже* все те, без чого вона не працюватиме:

параметри об'єкта управління:  $a_{20} := 1$ ;  $a_{10} := 1$ ;  $a_{00} := -2$ ; крок обчислень:  $T := .25$ ;  
кількість кроків:  $N := 37$ ;  $i := 1..N$ ; дискретний час:  $t_i := T \cdot (i - 1)$ .

Параметри замкненої системи записуємо як функції від параметрів об'єкта і регулятора:

$$a_2(k_3) := a_{20} + k_3; \quad a_1(k_2) := a_{10} + k_2; \quad a_0(k_1) := a_{00} + k_1.$$

Записуємо перехідну функцію стану як функцію параметрів регулятора

$$A(k_1, k_2, k_3) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(k_1) & -a_1(k_2) & -a_2(k_3) \end{pmatrix};$$

$$S_2(k_1, k_2, k_3) := I + A(k_1, k_2, k_3) \cdot T + \frac{A(k_1, k_2, k_3)^2 \cdot T^2}{2!}.$$

Задаємо ранжовані змінні та початковий стан САУ

$$l := -1, -0.9..1.5; \quad TT := N \cdot T; \quad tt := T_p, (T_p + T)..TT. \quad x_2^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Підготовча робота виконана. Можемо перейти до наступного пункту завдання.

## 2. Налаштування регулятора на задані: тривалість $T_p$ ; викид $hm$

Цю операцію зручно виконувати, якщо  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  вводяться якомога ближче до графіка ПП, тому **робоча модель САУ**

$$x_2^{(i+1)} := S_2(k_1, k_2, k_3) \cdot x_2^{(i)}$$

зроблена компактною функцією  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Біля графіка вводимо також задані значення викиду  $hm$  і тривалості перехідного процесу  $T_p$  (згідно з варіантом).

**Підбираємо  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , що дають потрібні  $hm$  і  $T_p$ .** Треба власне знайти такі значення  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , щоб координата  $x_1$  ніде не перевищувала значення  $hm$ , а після заданої тривалості ПП  $T_p$  не виходила за межі допуску (дві лінії  $\pm 0.05$  на графіку нижче), бажано також, щоб значення суми  $(k_1 + k_2 + k_3)$  було б мінімальним (це оцінка потрібної потужності управління).

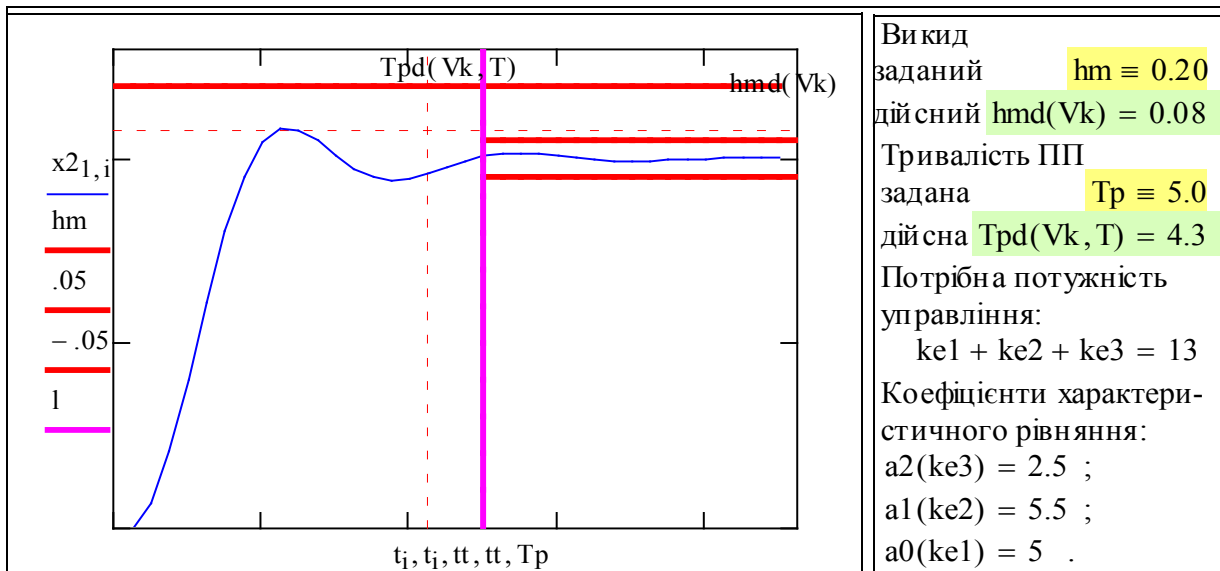
Виводимо те, що обчислила робоча модель САУ:

$$x_2 = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -0.934 & -0.794 & -0.6 & -0.389 & -0.197 & -0.048 & 0.045 & 0.084 \\ 2 & 0 & 0.156 & 0.433 & 0.682 & 0.815 & 0.807 & 0.679 & 0.478 & 0.258 & 0.065 \\ 3 & 0 & 0.859 & 1.03 & 0.736 & 0.224 & -0.293 & -0.671 & -0.846 & -0.822 & -0.65 \end{array}$$

Перший рядок цієї таблиці – послідовність значень регульованої координати. Виділяємо вектор значень координати  $V_k := (x_2^T)^{(1)}$ . На цих даних визначаємо тривалість ПП та викид (*програми для обчислення цих параметрів приховані* – їх треба зробити **самостійно**). Обчислюємо тривалість  $T_{pd}(V_k, T) = 4.25$  і викид  $hmd(V_k) = 8.4\%$ .

Тут вводимо значення параметрів регулятора:

$$ke_1 \equiv 7; \quad ke_2 \equiv 4.5; \quad ke_3 \equiv 1.5$$



На цьому графіку пунктирними лініями (це «маркери») подано дійсні значення викиду і тривалості ПП.

### 3. Визначення області стійкості для заданого параметра ( $k_1$ )

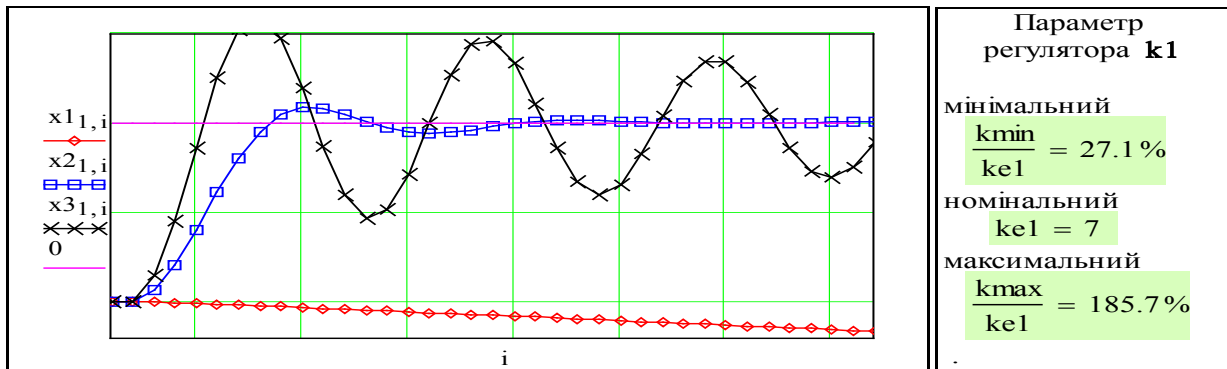
Краще шукати верхню та нижню границі стійкості одночасно, для чого двічі розв'язуємо рівняння динаміки (змінні  $x_1$  і  $x_3$ ) при значеннях  $k_{min} < k_1 < k_{max}$ . **Зменшуємо  $k_{min}$  і збільшуємо  $k_{max}$ , поки САУ не стане нестійкою.**

Початкові умови:  $x_3^{(1)} := x_2^{(1)}$ ;  $x_1^{(1)} := x_2^{(1)}$ .

Тут вводимо значення параметра регулятора:

$$k_{min} := 1.9; \quad ke_1 = 7; \quad k_{max} := 13.$$

$$x_1^{(i+1)} := S_2(k_{min}, ke_2, ke_3) \cdot x_1^{(i)}; \quad x_3^{(i+1)} := S_2(k_{max}, ke_2, ke_3) \cdot x_3^{(i)}.$$



Бачимо, що при знайдених значеннях  $k_{min}$  і  $k_{max}$  САУ аперіодично і коливально нестійка. Діапазон зміни  $k_1$  є досить великим. *Зауваження:* об'єкт може бути стійким і без регулятора, в цьому випадку мінімальне значення  $k_1$  буде від'ємним.

#### 4. Дослідження ПП при пропорційній зміні параметрів САУ

Уявіть собі, що ви, або програма самонастроювання, знайшли параметри  $k_1, k_2, k_3$ , що дають оптимальний за всіма показниками, крім тривалості, перехідний процес.

Як треба змінювати параметри регулятора при настроюванні, щоб змінювалась тільки тривалість, а характер ПП був би незмінним? Така залежність для лінійних систем відома (виведення подано в другій частині посібника – «Синтез САУ»). Ця залежність використовується при моделюванні, синтезі, самонастроюванні САУ.

Копіюємо попередню ММ, але робимо її функцією від параметра  $\omega$ , а не  $k_1, k_2, k_3$ . Параметр  $\omega$  – «власна частота» характеризує тривалість ПП. Для того, щоб характер ПП був незмінним, коефіцієнти слід змінювати так:

$$A_2(\omega) := a_2(k_3) \cdot \omega; \quad A_1(\omega) := a_1(k_2) \cdot \omega^2; \quad A_0(\omega) := a_0(k_1) \cdot \omega^3.$$

Записуємо вирази для перехідної функції стану, виводимо для контролю значення  $A(\omega)$ .

$$A(\omega) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -A_0(\omega) & -A_1(\omega) & -A_2(\omega) \end{pmatrix};$$

$$A(1) = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -5.5 & -2.5 \end{array}; \quad A(10) = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5000 & -550 & -25 \end{array};$$

$$S_3(\omega) := I + A(\omega) \cdot T + \frac{(A(\omega) \cdot T)^2}{2!}; \quad S_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.03 \\ -0.16 & 0.83 & 0.17 \\ -0.86 & -1.1 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

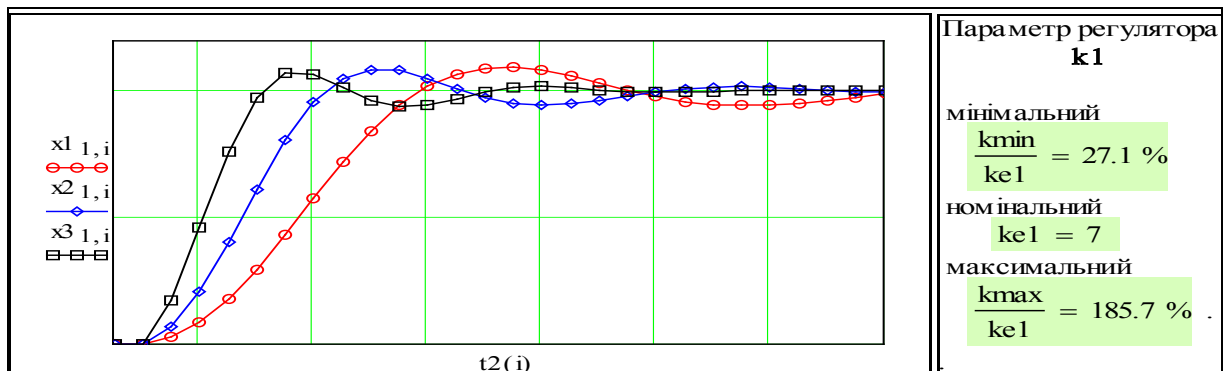
Щоб розібратись у логіці зміни коефіцієнтів системи, запишемо характеристичне рівняння нашої неперервної динамічної системи у такому вигляді:

$$\omega^0 \cdot s^3 + a_2(k_3) \cdot \omega^1 \cdot s^2 + a_1(k_2) \cdot \omega^2 \cdot s^1 + a_0(k_1) \cdot \omega^3 \cdot s^0 = 0.$$

Бачимо, сума степенів змінних  $s$  і  $\omega$  є постійною – 3, а розмірність у них однакова –  $1/c$ .

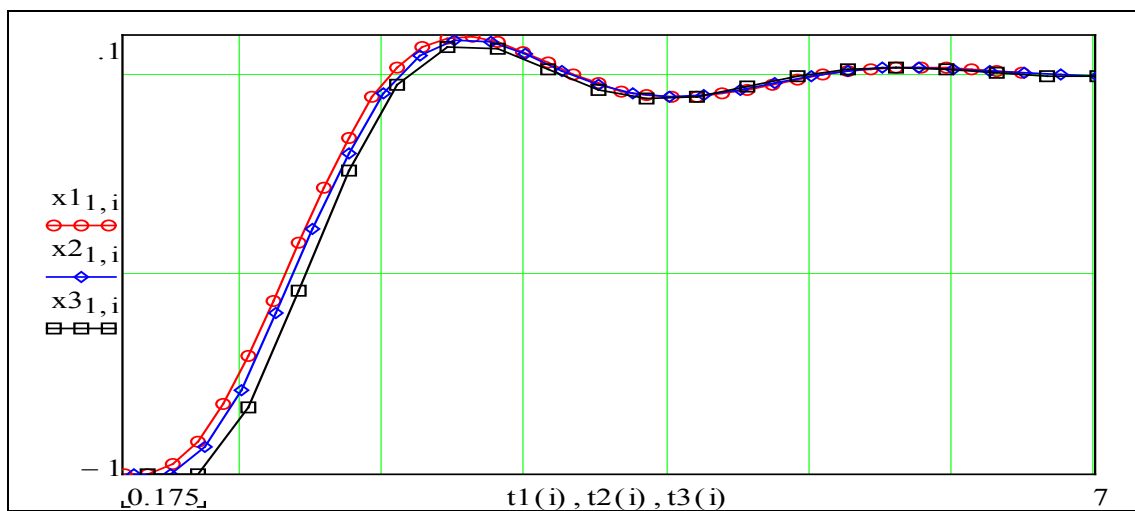
$$t_2(i) := T \cdot i; \quad x_1^{(i+1)} := S_3(\omega_i) \cdot x_1^{(i)}; \quad x_3^{(i+1)} := S_3(\omega_{ma}) \cdot x_3^{(i)}.$$





Перевіримо, що параметр  $\omega$  змінює тільки тривалість перехідного процесу. Змінимо масштаби часу для кожного з перехідних процесів пропорційно значенню параметра  $\omega$ :

$$t_2(k) := T \cdot k; \quad t_1(k) := t_2(k) \cdot \omega_{mi}; \quad t_3(k) := t_2(k) \cdot \omega_{ma}.$$



Практичний висновок очевидний – якщо при настроюванні лінійної динамічної системи ми хочемо змінити тільки тривалість ПП, не змінюючи його форми, слід змінювати параметри замкненої системи згідно з поданими вище залежностями.

**Працювали:** Суховій П., Тетеря П., Безпалій І., Многогрішний Д. 17.17.1663

### Контрольні запитання

1. Назвіть показники якості перехідного процесу.
2. Дайте визначення показника «тривалість перехідного процесу».
3. Наведіть приклади об'єктів управління, для яких перерегулювання є небезпечним.
4. Запишіть диференціальне рівняння для лінійної динамічної системи 3-го порядку з одним входом і одним виходом.
5. Що таке форма Коші для запису системи диференціальних рівнянь?
6. Запишіть матрично-векторне диференціальне рівняння для лінійної динамічної системи 3-го порядку з одним входом і одним виходом.
7. Запишіть еквівалентну дискретну модель – матрично-векторне різницеве рівняння для лінійної динамічної системи 3-го порядку.
8. Чому регулятор доводиться настроювати? Хіба не можна аналітично розрахувати потрібні значення параметрів регулятора?
9. Напишіть документ або програму для обчислення одразу трьох перехідних процесів: при номінальних значеннях параметрів, при  $k_2 = 0,75 \cdot k_2$  і  $k_2 = 1,25 \cdot k_2$ .
10. Запропонуйте алгоритм визначення тривалості ПП.
11. Запропонуйте критерії, що оцінювали б перехідний процес в цілому.

## 1.4 Розробка та дослідження системи самонастроювання САУ

### Вступ

**Ціль даної роботи** – набуття навичок у розробці і реалізації у програмному середовищі математичного пакета робочих моделей динаміки та алгоритмів самонастроювання параметрів регулятора. Це продовження роботи з підрозділу 1.3. Там Ви вручну, дивлячись на перехідний процес, методом проб і помилок підбирали параметри регулятора, що забезпечують стійкість і потрібні показники якості. На рисунку 1 подана схема системи. Об'єкт, привод, підсилювач звичайно є нелінійними. Тільки на базі їх **лінеаризованих** моделей можна розрахувати параметри регулятора  $k_1, k_2, k_3$ . Реальна ж САУ за значень параметрів, розрахованих таким чином, може виявитись незадовільною.

### Постановка задачі

Потрібно: а) **підібрати параметри регулятора** так, щоб САУ була задовільною, б) **розробити і реалізувати алгоритм самонастроювання САУ**. Перша частина завдання – повторення роботи з підрозділу 1.3, з осмисленням властивостей САУ і формалізацією Вашої логіки настроювання регулятора. Друга частина – розробка та дослідження системи самонастроювання регулятора. Звичайно такі системи виконуються на базі пошукових методів. Діапазон тут широкий – від фундаментального методу Вальдеца-Шеклі (об'єкт пошуку обов'язково прийде до суб'єкта пошуку, якщо той буде залишатись на місці протягом  $T_{\text{пошуку}} \rightarrow \infty$ ) до науково обґрунтованого методу випадкових проб і помилок. В середині цього діапазону безліч методів і алгоритмів, наприклад, «нейронні мережі», «генетичні алгоритми», «штучні соціальні системи», «нечітка логіка».

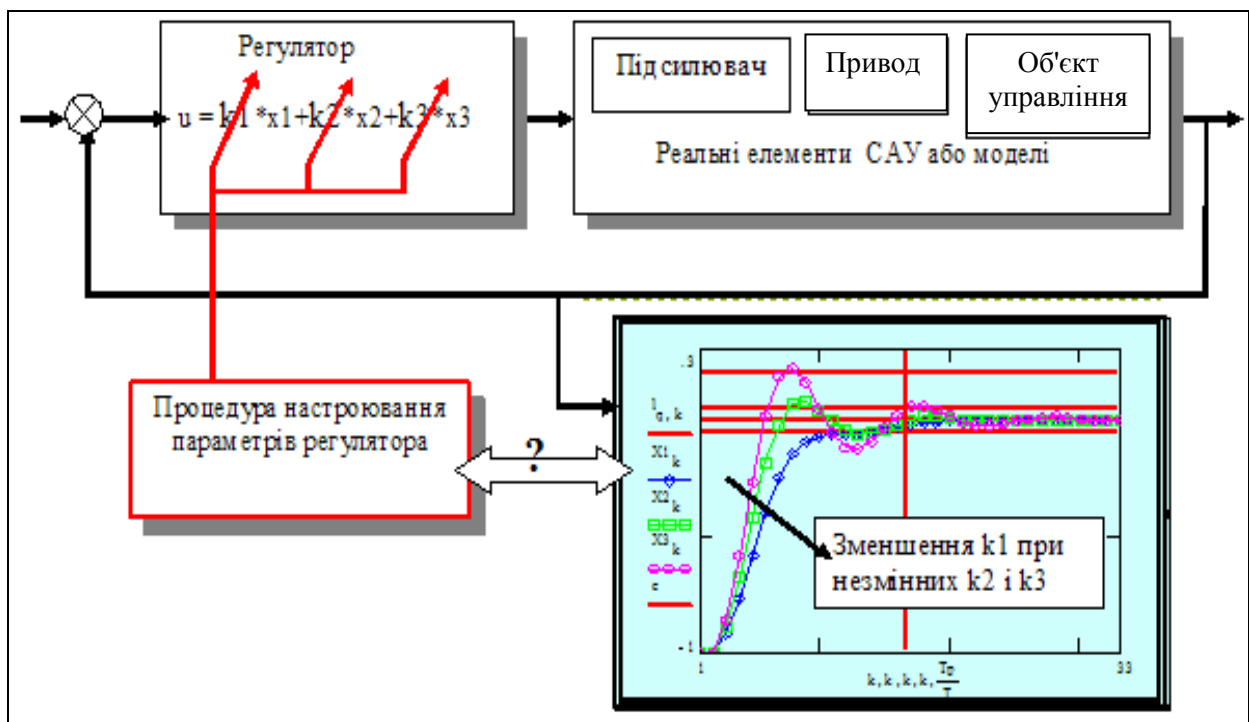


Рисунок 1 – Схема системи

Оптимальні і адаптивні САУ розглядаються в другій частині посібника. Якщо Ви бажаєте вже зараз більш глибоко освоїти цей науковий напрям, рекомендуємо дійсно фундаментальні книги:

Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией [2];

Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах [20].

В цій роботі на відкритій моделі САУ Ви можете експериментально перевірити принцип, що є фундаментом песимізму щодо створення безпечних інтелектуальних систем: **те, що легко робить людина, є важким для комп'ютера, і навпаки.**

Використаємо такі показники якості перехідного процесу:

- **тривалість перехідного процесу (ПП)** – час до входу в допуск помилки –  $T_p$ ;
- **викид (перерегулювання)** – максимальне значення регульованої змінної у перехідному процесі –  $h_m$  та ін.

Сьогодні САУ реалізують мікроконтролерами і мікропроцесорами. Практично не існує апаратних обмежень для реалізації складних алгоритмів самоконтролю, самокалібрування і самонастроювання. Проблема – дефіцит ефективних алгоритмів. Тому **надзадача** в цій роботі – розробити роботоздатну систему самонастроювання **регулятора**, що приводить показники ПП САУ до заданих значень.

### Завдання

- |  |      |
|--|------|
| 1. Налаштувати регулятор вручну, методом пошуку.   | 8 б  |
| 2. Оцінити якість САУ при заданому розкиді заданого параметра.                                 | 2 б  |
| 3. Визначити допустимий діапазон зміни заданого параметра, в якому САУ ще залишається стійкою. | 2 б  |
| 4. Побудувати функції залежності показників якості ПП від настроюваних параметрів.             | 13 б |
| 5. Розробити документ для автоматичного настроювання регулятора.                               | 75 б |

#### Варіанти значень параметрів

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a2	3.0	2.0	1.0	1.75	2.5	3.0	2.0	1.0	2.0	2.5	3.5	3.5	3.3	2.8
a1	3	2	2	2.15	3	3.5	1	3	2.5	2	3	2.5	1.5	2.5
що_дослід	a1	a2	a3	a3	a2	a1	a1	a2	a3	a3	a2	k1	k1	k2
жувати	k1	k2	k3	k2	k1	k2	k3	k3	k1	a1	a3	k2	k3	k3

### Зразок виконання

#### 1. Отримання еквівалентної дискретної моделі

Зводимо задане дифрівняння до форми Коші. Для цього вводимо нові змінні:  $x_1=x$ ;  $x_2=dx/dt$ ;  $x_3=d^2x/dt^2$ , і далі просто копіюємо відповідні фрагменти з роботи в підрозділі 1.3. Подаємо систему дифрівнянь у матрично-векторному вигляді:

$$\text{об'єкт: } \frac{dx}{dt} = A_0 \cdot x + B \cdot u; \text{ регулятор: } u = K \cdot x, \text{ де } \text{ORIGIN} := 1$$

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{00} & -a_{10} & -a_{20} \end{pmatrix}; I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; K := (k_1 \quad k_2 \quad k_3); x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи символний процесор, розкриваємо матрично-векторні вирази:

$$u = K \cdot x \rightarrow u = (k_1 \cdot x \quad k_2 \cdot x \quad k_3 \cdot x); \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3;$$

$$A_0 \cdot x + B \cdot u = A_0 \cdot x + B \cdot K \cdot x = (A_0 + B \cdot K) \cdot x; A := A_0 + B \cdot K; \frac{dx}{dt} = A \cdot x.$$

Виводимо символні вирази для матриці замкненої системи та її окремих елементів. Для цього досить набрати замість « $\Rightarrow$ » стрілку  $\rightarrow$  (взяти з інструментальної палітри). Ці вирази нам потрібні для розробки робочої матмоделі, орієнтованої на дослідження впливу варіацій параметрів. Можна було їх вивести «вручну». Але наші формули «живі» – при змінах у матрицях  $A_0, B, K$  усі вирази зі стрілками будуть переобчислюватись.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 & -a_2 + k_3 \end{pmatrix} A_0 + B \cdot K \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 & -a_2 + k_3 \end{pmatrix}$$

Будуємо робочу модель (програму). Виділяємо кольорами (в електронній версії посібника) ключові об'єкти – зони введення, виведення, головні формули і рівняння. Вводимо параметри об'єкта управління:  $a_{20} := 1$ ;  $a_{10} := 1$ ;  $a_{00} := -2$ ; крок обчислень:  $T := .25$  кількість кроків:  $N := 37$ ;  $i := 1..N$ ; дискретний час:  $t_i := T \cdot (i - 1)$ . Параметри замкненої системи записуємо як функції від параметрів об'єкта і регулятора:

$$a_2(k_3) := a_{20} + k_3; a_1(k_2) := a_{10} + k_2; a_0(k_1) := a_{00} + k_1.$$

Записуємо перехідну функцію стану, як функцію параметрів регулятора

$$A(k_1, k_2, k_3) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(k_1) & -a_1(k_2) & -a_2(k_3) \end{pmatrix};$$

$$S_2(k_1, k_2, k_3) := I + A(k_1, k_2, k_3) \cdot T + \frac{A(k_1, k_2, k_3)^2 \cdot T^2}{2!}.$$

Задаємо ранжовані змінні та початковий стан САУ

$$l := -1, -9..1.5; TT := N \cdot T; tt := T_p, (T_p + T)..TT. x^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 2. Настроювання регулятора на задані: тривалість $T_p$ ; викид $hm$

Цю операцію зручно виконувати, якщо  $K_1, K_2, K_3$  вводяться поряд з графіком ПП, тому **робоча модель САУ**:

$$x^{(i+1)} := S_2(K_1, K_2, K_3) \cdot x^{(i)}$$

зроблена функцією  $K_1, K_2, K_3$ .

Виділяємо з масиву  $x$  вектор значень координати  $V_k := (x^T)^{\langle 1 \rangle}$ . На цих даних визначаємо тривалість ПП та викид. Нагадаємо, що тут подано тільки початок таблиць даних.

$$x^T = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0.188 & 0.375 \\ 3 & -0.941 & 0.366 & 0.445 \\ 4 & -0.836 & 0.508 & 0.36 \\ 5 & -0.698 & 0.6 & 0.207 \end{array}; \quad (x^T)^{\langle 1 \rangle} = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -0.941 \\ 4 & -0.836 \\ 5 & -0.698 \end{array}.$$

Подаємо приклад програми пп (показники перехідного процесу) для визначення викиду і тривалості ПП. Поряд з текстом програми подаємо «розпаковку» її виходу.

<pre> ппп(Vd, dT) := N ← length(Vd) Викид ← -9.81 Твкд ← -3.14 for i ∈ ORIGIN..N   Тррi ←   i if  Vdi  &gt; 0.05            0 otherwise   умова ← Викид &gt; Vdi   Викид ← умова·Викид + ¬умова·Vdi   Твкд ← умова·Твкд + ¬умова·i Тривалість ← max(Трр) dT Випрог ← ( Тривалість            Викид            Твкд·dT ) </pre>	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;"></td><td style="width: 20px; text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">7.25</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">0.25</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3.5</td></tr> </table> <p style="margin-left: 20px;"> Трpd := ппп(Vk, T)1  hmd := ппп(Vk, T)2  Тhm := ппп(Vk, T)3  ППУ :=  K1  +  K2  +  K3  </p>		1	1	7.25	2	0.25	3	3.5
	1								
1	7.25								
2	0.25								
3	3.5								

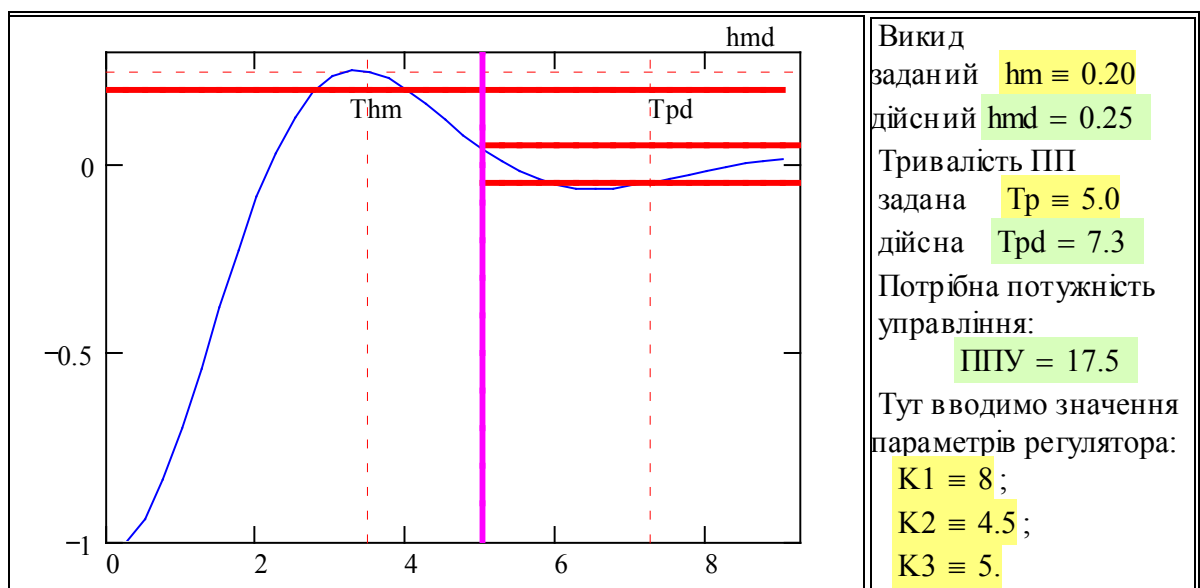


Рисунок 2 – Стенд для настроювання регулятора

**Підбираємо K1, K2, K3, що дають потрібні hm і Tr.** Треба знайти такі значення K1, K2, K3, щоб координата x1 ніде не перевищувала значення hm, а після заданої тривалості процесу Tr не виходила за межі допуску (дві лінії ±0.05 на графіку вище), бажано також, щоб значення суми (|K1| + |K2| + |K3|) було б мінімальним (це оцінка потрібної потужності управління). Подумайте, чому ми беремо суму модулів коефіцієнтів?

Увага! Стенд подано в ситуації, коли регулятор ненастроєний. На графіку подано три маркерні лінії (пунктири). Дві лінії задають положення викиду, і ще одна – точку закінчення перехідного процесу.

### 3. Побудова системи автоматичного настроювання регулятора

Серйозні вчені – спеціалісти з теорії управління, теорії систем, програмування застерігали, що інтелект – здібність до навчання, накопичення досвіду для прогнозування в певних умовах може бути шкідливим [2, 20]. Форрестер писав про антиінтуїтивну поведінку складних нелінійних систем, з якими не можна працювати на базі простої «лінійної» логіки. Наводився і такий гіпотетичний приклад: серед нью-йоркських щурів шанс вижити має той, який нікому не вірить і нічому не навчається (щурів спочатку привчають до якісної приманки, потім підкладають отруєну). Але фундаментом для оптимізму (в галузі штучного і природного інтелекту) є факт, що нью-йоркські щури у підозрілих випадках надають право випробування нижчим в ієрархії, тобто **вчаться виключно на чужих помилках**.

Чи має це якесь відношення до самонастроювання систем автоматичного управління? Має, наприклад, є метод навчання на моделі системи в прискореному часі. Критичні варіанти управління, що небезпечні для реальної системи, виконуються на моделі.

Далі подано досить примітивну спробу автоматизувати процес настроювання, що так легко виконується системою з природним інтелектом. Спробуйте розробити щось краще.

**Перший крок** в розробці такої системи – розширення вектора стану – крім координат вектора стану об'єкта – x1, x2, x3 вводимо вектор параметрів регулятора – k1, k2, k3.

**Другий крок** – задаємо не один перехідний процес, а цілу серію – KP, а тривалість кожного беремо рівною потрібній тривалості ПП, тобто N = Tr/T кроків моделювання.

**Третій крок** – розробка алгоритмів зміни параметрів регулятора залежно від спостережуваних показників ПП.

$$Tr = 5; T := .1; Tr := 8; N := \text{ceil}\left(\frac{Tr}{T}\right); KP := 5; M := KP \cdot N; i := 1..M; Nm := N - 4;$$

$$\text{ORIGIN} = 1; Nm := N - 4; N = 80; M = 400.$$

Задаємо початкові значення:

вектор стану:      параметри регулятора:      параметри об'єкта:      задані значення:

$$\begin{pmatrix} x1_1 \\ x2_1 \\ x3_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} k1_1 \\ k2_1 \\ k3_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -2.6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A0 \\ A1 \\ A2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} x1z := 0 \\ x2z := 0 \\ x3z := 0 \end{matrix}$$

```

 $\begin{pmatrix} X \\ K \end{pmatrix} := \begin{array}{l} \text{ORIGIN} \leftarrow 1 \\ x1_1 \leftarrow -1 \\ x2_1 \leftarrow 0 \\ x3_1 \leftarrow 0 \\ k1_1 \leftarrow -7 \\ k2_1 \leftarrow -5 \\ k3_1 \leftarrow -2.6 \\ \text{for } i \in 1..M \\ \quad \left| \begin{array}{l} ym \leftarrow \text{mod}(i, N) = Nm \\ x1_{i+1} \leftarrow (x1_i + x2_i \cdot T) \rightarrow ym + ym \cdot x1_1 \\ x2_{i+1} \leftarrow (x2_i + x3_i \cdot T) \rightarrow ym \\ tmp \leftarrow x3_i + [(k1_i - A0) \cdot x1_i + (k2_i - A1) \cdot x2_i + (k3_i - A2) \cdot x3_i] \cdot T \\ x3_{i+1} \leftarrow tmp \rightarrow ym \\ k1_{i+1} \leftarrow k1_i + [11 \cdot (x1_i - x1_z)] \cdot ym \\ k2_{i+1} \leftarrow k2_i + [4 \cdot (x1_i - x1_z) + (\text{max}(x1) - \text{hm}) \cdot 11] \cdot ym \\ k3_{i+1} \leftarrow k3_i + [5 \cdot (x1_i - x1_z)] \cdot ym \end{array} \right. \\ X1 \leftarrow \text{stack}(x1^T, x2^T, x3^T) \\ K1 \leftarrow \text{stack}(k1^T, k2^T, k3^T) \\ \begin{pmatrix} X1 \\ K1 \end{pmatrix} \end{array}$ 

```

Прокоментуємо програму. Вона має дві «голови» – там де у класичних програм було ім'я, стоїть структура з двох елементів. Давайте «запитаємо», чим вони є (після подвійного імені напишемо «дорівнює»)

$$\begin{pmatrix} X \\ K \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & [3,401] \\ \hline 2 & [3,401] \\ \hline \end{array} \quad -$$

це означає, що виходом програми є два масиви розміром 3×401 елементи кожний. Тепер виведемо окремо X та K:

$$X = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 & -0.995 & -0.982 & -0.959 & -0.925 & -0.881 & -0.828 & -0.766 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0.05 & 0.132 & 0.231 & 0.337 & 0.44 & 0.533 & 0.613 & 0.676 \\ \hline 3 & 0 & 0.5 & 0.82 & 0.995 & 1.055 & 1.027 & 0.935 & 0.797 & 0.631 & 0.45 \\ \hline \end{array}$$

$$K = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ 2 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 3 & -2.6 & -2.6 & -2.6 & -2.6 & -2.6 & -2.6 & -2.6 & -2.6 & -2.6 & -2.6 \end{bmatrix}$$

Ці два масиви – значення координат вектора стану об'єкта управління  $x_1, x_2, x_3$  та значення параметрів регулятора  $k_1, k_2, k_3$ .

Побудуємо графіки процесу самонастроювання. Можна бачити, що система «в принципі» роботоздатна, позитивом цього результату є те, що залишається не використаною маса можливостей для вдосконалення системи самонастроювання.

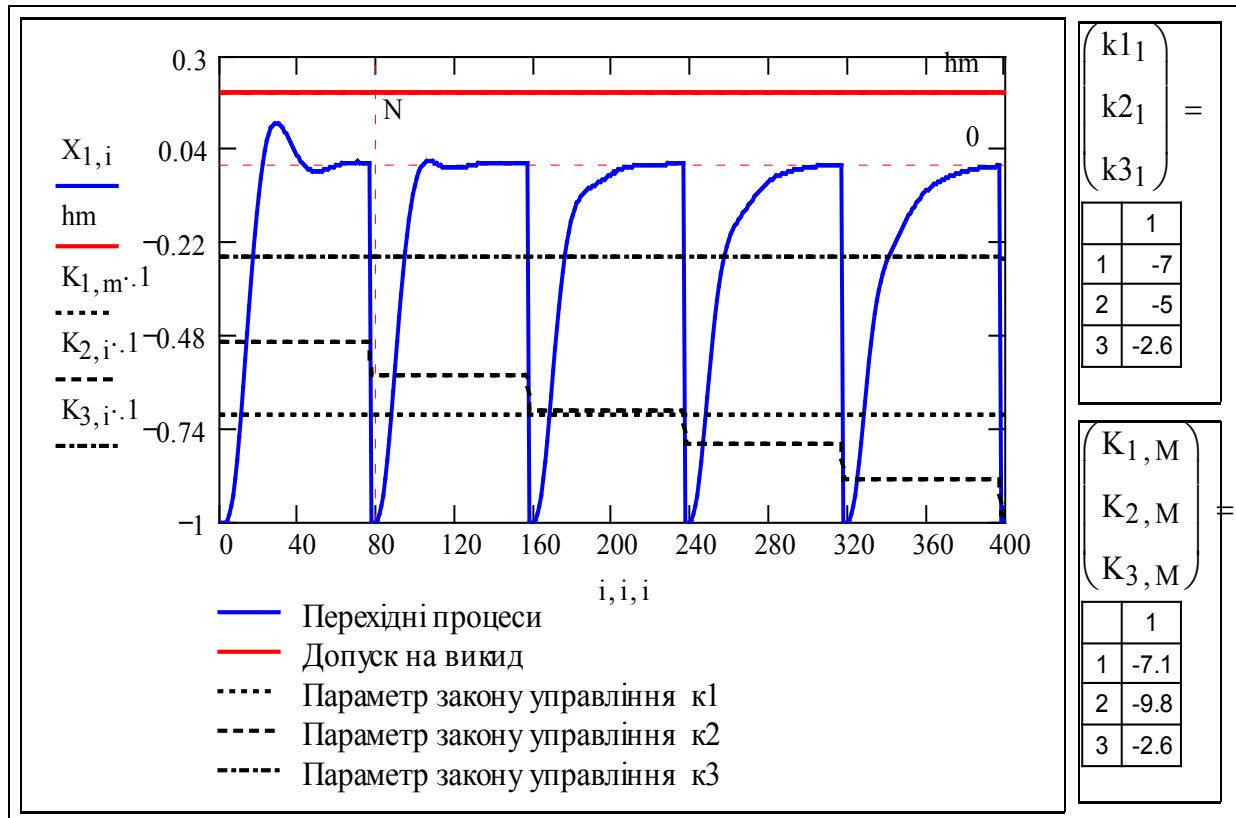


Рисунок 3 – Приклад процесу самонастроювання регулятора (копія екрана)

Перше, що треба завжди пам'ятати – САУ з контуром самонастроювання – нелінійна. Для неї не працюють критерії стійкості лінійних систем, у неї немає звичних частотних характеристик – вони нестаціонарні та залежать від амплітуди. Загальний шлях верифікації таких систем – це проведення обчислювальних експериментів на виявлення областей нероботоздатності системи з самонастроюванням. Нестійкість системи з контуром самонастроювання може бути трьох типів: 1) основний контур – нестійкий, контур самонастроювання – стійкий (0 – 1); 2) основний контур – стійкий, контур самонастроювання – нестійкий (1 – 0); 3) обидва контури є нестійкими (0 – 0).

На рисунку 4 подано приклад з серії випробувань – випадок виникнення нестійкості в основному контурі системи. Цей приклад пояснює, чому на практиці намагаються, якщо можна, не використовувати «інтелектуальні» регулятори.



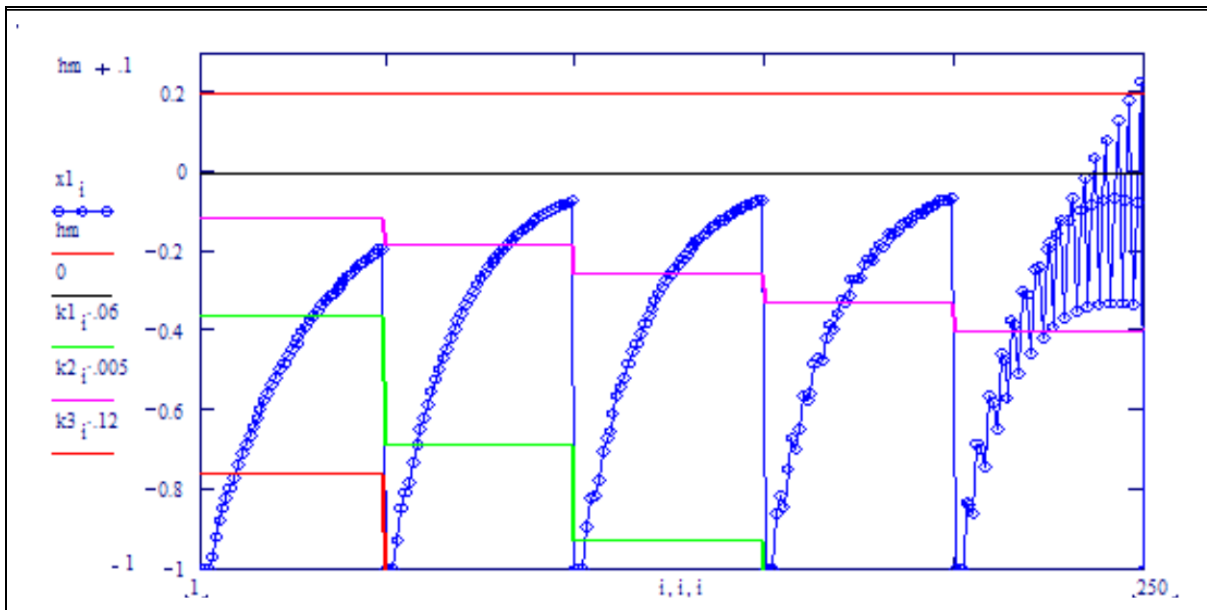


Рисунок 4 – Приклад виникнення нестійкості в процесі самонастроювання

Роботоздатних алгоритмів самонастроювання небагато, ще менше їх у підручниках. Поданий вище алгоритм самонастроювання є незадовільним концептуально: ми чекаємо закінчення перехідного процесу і тільки тоді змінюємо параметри регулятора. Таке самонастроювання буде дуже повільним. Далі подано два приклади «швидких» алгоритмів настроювання – з швидкістю перехідного процесу в основному контурі.

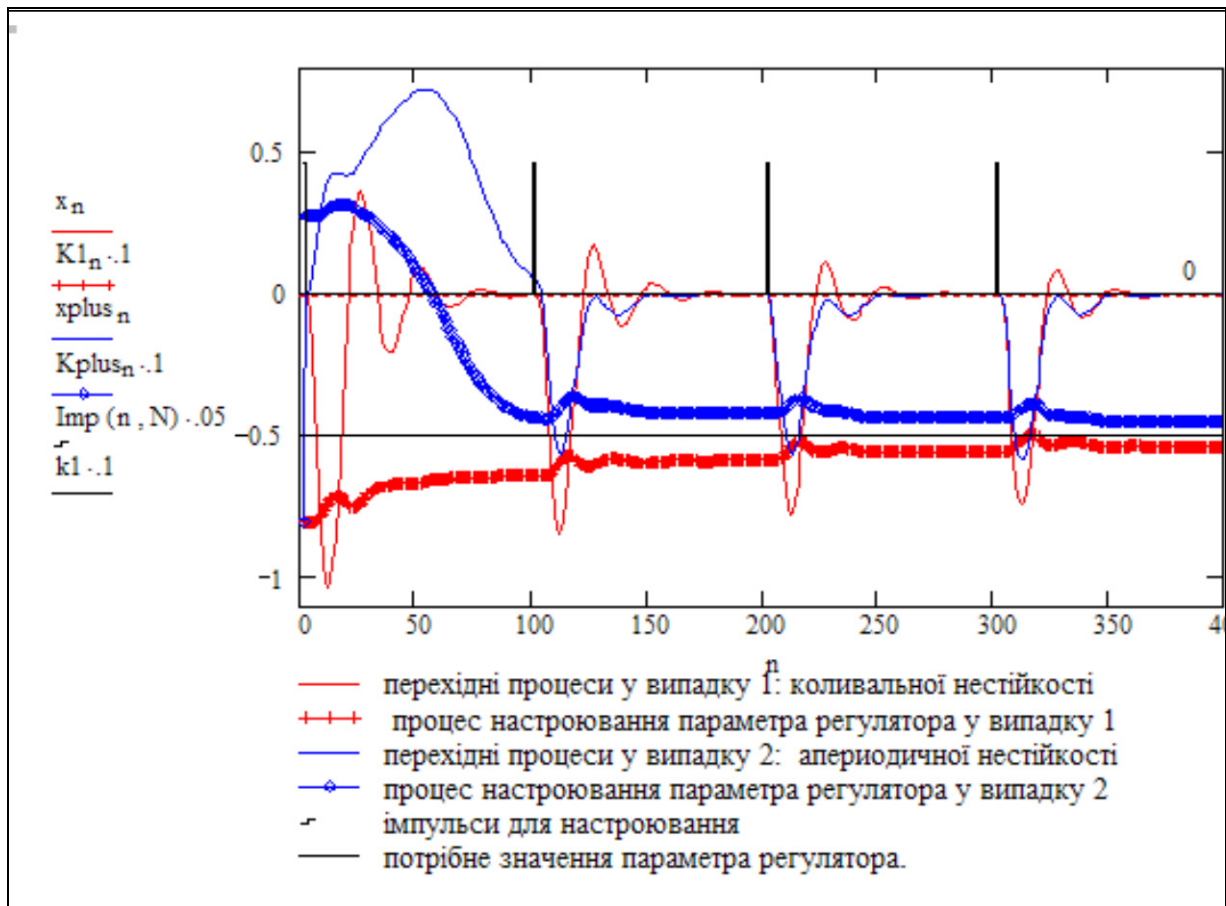


Рисунок 5 – Процеси в САУ з самонастроюванням за власною частотою

На рисунку 5 подано перехідні процеси в САУ з самонастроюванням за власною частотою. Контур самонастроювання працює за дуже простою логікою – якщо частота коливань у перехідному процесі більша за норму – параметр регулятора  $K_1$  зменшується тим швидше, чим більшою є похибка, і навпаки. Можемо бачити, що, навіть коли основний контур спочатку є нестійким, система самонастроювання швидко стабілізує його і не допускає великих відхилень від стану рівноваги.

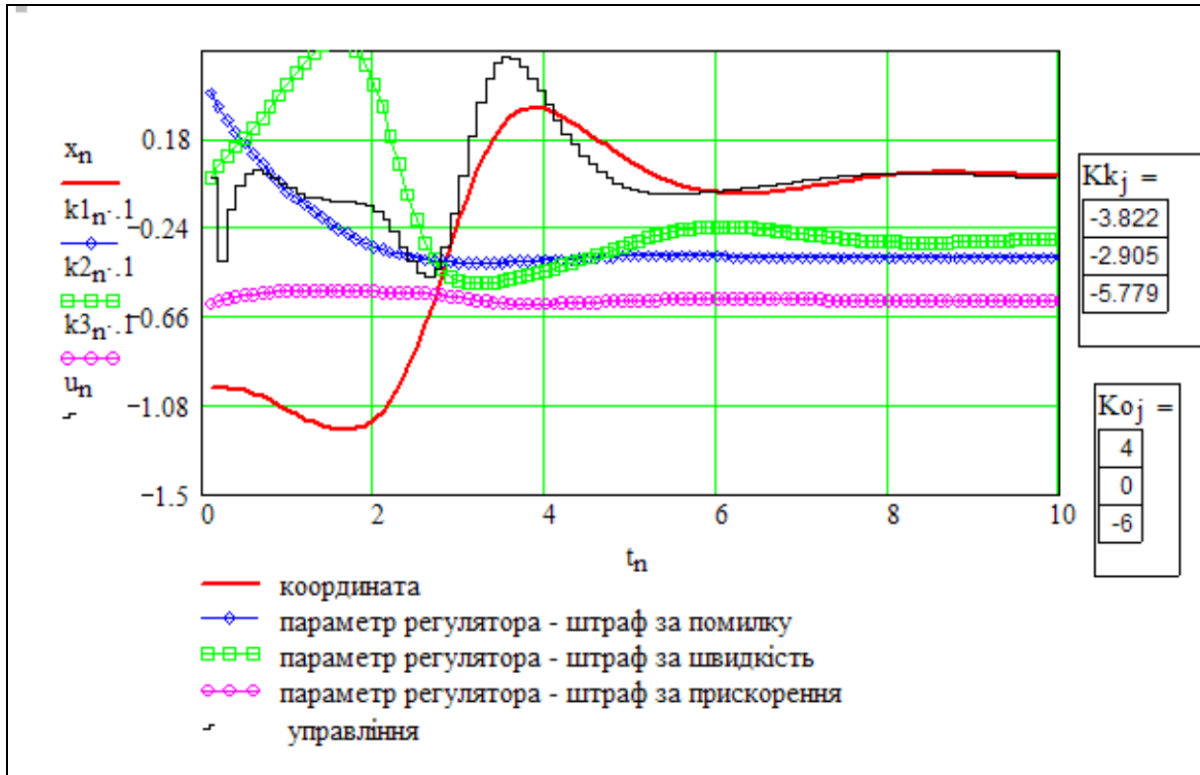


Рисунок 6 – Процеси в САУ з самонастроюванням на базі правил

На рисунку 6 подані перехідні процеси в САУ з самонастроюванням на базі правил. Як можна бачити, система самонастроювання теж встигає зробити основний контур стійким без великих відхилень від стану рівноваги.

### Контрольні запитання

1. Назвіть показники якості перехідного процесу.
2. Дайте визначення показника «тривалість перехідного процесу».
3. Дайте визначення показника «викид».
3. Сформулюйте правила настроювання параметрів регулятора за зразком: «якщо САУ стійка, тривалість ПП більша норми, перерегулювання менше норми, то параметри регулятора потрібно змінювати так:  $k_1$  – збільшити,  $k_2$  – збільшити,  $k_3$  – не змінювати».
4. Чому система з контуром самонастроювання буде обов'язково нелінійною?

## 1.5 Знаходження аналітичних розв'язань для лінійних неперервних та імпульсних систем

**Ціль даної роботи** – набуття твердих навичок у використанні математичного апарату для аналізу і синтезу неперервних та імпульсних динамічних систем.

Математика – найбільш прикладна наука з усіх абстрактних наук, бо прикладається до абсолютно усього. В природі те, що без ужитку, редукується, елімінується. Так і математика 1 – 2-го курсів встигає вивітритись до 4-го курсу, якщо було чому вивітритись.

В цьому розділі подано методи розв'язання лінійних диференціальних та різницевих рівнянь, що номінально вивчалися у відповідних розділах вищої математики.

**Професійне** володіння цими розділами – **необхідна** умова при вивченні ТАК, ТАУ, економічної та екологічної динаміки та ін.

### Завдання

- |   |      |
|---|------|
| 1. Перевірити отримані результати для інших числових даних.   | 6 б  |
| 2. Модифікувати документ для рівнянь третього порядку.  | 29 б |
| 3. Розробити документ для дослідження відповідності між s-коренями дифрівняння та z-коренями еквівалентного різницевого рівняння. | 58 б |
| 4. Відповісти на контрольні питання (по пам'яті).   | 7 б  |

### 1. Отримання характеристичного рівняння лінійного дифрівняння

У дифрівняння  $\frac{d^2}{dt^2}x(t) + a_1 \cdot \frac{d}{dt}x(t) + a_0 \cdot x(t) = 0$  підставляємо:  $s = \frac{d}{dt}x$ ;  $s^2 = \frac{d^2}{dt^2}x$  і

отримуємо:  $s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0$  – характеристичне рівняння (для даного дифрівняння).

Визначаємо (числовим методом або в аналітичному вигляді) корені характеристичного рівняння:

$$s_1(a_1, a_0) := \frac{-1}{2} \cdot a_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_0}; \quad s_2(a_1, a_0) := \frac{-1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_0};$$

$$s_1(0.7, 0.04) = -0.637; \quad s_2(0.7, 0.04) = -0.063$$

З прадавніх книг відомо, що робити щось добре – вміти робити це багатьма способами. В середовищі пакета корені характеристичного рівняння можна знайти так:

*спосіб 1:*

$$\text{root}[(s^2 + a_1 \cdot s + a_0), s] \rightarrow \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot (a_1^2 - 4 \cdot a_0)^{\frac{1}{2}} \end{array} \quad \frac{1}{2} \right],$$

*спосіб 2:*

$$\text{Given } s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0; \quad \text{Find}(s) \rightarrow \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot (a_1^2 - 4 \cdot a_0)^{\frac{1}{2}} \end{array} \quad \frac{1}{2} \right].$$

**Необхідні і достатні умови стійкості** для лінійної неперервної системи мають вигляд (*дійсні частини s-коренів менші нуля*)

$$\operatorname{Re}(s_1(a_1, a_0)) < 0; \quad \operatorname{Re}(s_2(a_1, a_0)) < 0.$$

Дивимся на вирази для коренів і бачимо: для виконання цих умов у випадку диференціального рівняння 2-го порядку необхідно і достатньо, щоб :  $a_1 > 0$ ;  $a_0 > 0$ .

Перевіримо це експериментально:  $\operatorname{Re}(s_1(3, 2)) < 0 = 1$  ;  $\operatorname{Re}(s_2(1, 0)) < 0 = 0$

(ці два незвичних для «чистих» математиків вирази означають: перше логічне висловлювання є істинним, а друге – ні).

## 2. Отримання еквівалентного різницєвого рівняння

(наближення 1-го порядку)

Замінюємо похідні (назвемо їх  $po_1$  і  $po_2$ ) кінцевими різницями (**Ctrl+c** потрібний вираз, а потім **Substitute** його через пункт у меню **Symbolic**):

$$po_2 + a_1 \cdot po_1 + a_0 \cdot po_0 ;$$

$$po_2 = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{x(n \cdot T) - 2 \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T]}{T^2}$$

$$po_1 = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]}{T} \quad po_0 = x(n \cdot T)$$

$$\frac{[x(n \cdot T) - 2 \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T]]}{T^2} + a_1 \cdot \frac{[x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]]}{T} + a_0 \cdot x(n \cdot T)$$

$$x(n \cdot T) - 2 \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T] + a_1 \cdot T \cdot x(n \cdot T) - a_1 \cdot T \cdot x[(n-1) \cdot T] + a_0 \cdot x(n \cdot T) \cdot T^2 = 0$$

Виконуємо алгебраїчні перетворення (групуємо по тактах –  $n$ ,  $(n-1)$ ,  $(n-2)$ )

$$(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2) \cdot x(n \cdot T) + (-a_1 \cdot T - 2) \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T].$$

Виконуємо z-перетворення, множимо праву і ліву частини на  $z^2$ , щоб позбавитись від'ємних степенів.

$$\left[ (a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2) \cdot X(z) + (-a_1 \cdot T - 2) \cdot X(z) \cdot z^{-1} + X(z) \cdot z^{-2} \right] \cdot z^2 = 0 \cdot z^2;$$

$$\left[ (a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2) \cdot z^2 + (-a_1 \cdot T - 2) \cdot z + 1 \right] \cdot X(z) = 0;$$

$$(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2) \cdot z^2 + (-a_1 \cdot T - 2) \cdot z + 1 = 0.$$

**Нарешті** отримуємо Z-характеристичне рівняння

$$z^2 + \frac{-a_1 \cdot T - 2}{(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2)} \cdot z + \frac{1}{(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2)} = 0, \text{ або: } z^2 + A_1 \cdot z + A_0 = 0,$$

$$\text{де } A_1(T, a_1, a_0) := \frac{-a_1 \cdot T - 2}{(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2)}; \quad A_0(T, a_1, a_0) := \frac{1}{(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2)}.$$

Записуємо вирази для коренів характеристичного рівняння (знайдені за допомогою символічного процесора):

$$Z1(T, a1, a0) := \frac{-A1(T, a1, a0) + \sqrt{A1(T, a1, a0)^2 - 4 \cdot A0(T, a1, a0)}}{2},$$

$$Z2(T, a1, a0) := \frac{-A1(T, a1, a0) - \sqrt{A1(T, a1, a0)^2 - 4 \cdot A0(T, a1, a0)}}{2}.$$

Задаємо кілька значень кроку квантування:  $T_e := 0, 1 \dots 6$  і виводимо відповідні значення коренів (це копія екрана!):

$Z1(T_e, 0.7, 0.04)$	=	$Z2(T_e, 0.7, 0.04)$	=	$Z1(T_e, 0.2, 0.3)$	=	$Z2(T_e, 0.2, 0.3)$	=
1		1		1		1	
0.941		0.611		0.733+0.359i		0.733-0.359i	
0.888		0.44		0.462+0.414i		0.462-0.414i	
0.842		0.343		0.302+0.376i		0.302-0.376i	
0.799		0.282		0.212+0.326i		0.212-0.326i	
0.761		0.239		0.158+0.283i		0.158-0.283i	
0.726		0.207		0.123+0.249i		0.123-0.249i	

**Необхідні і достатні умови стійкості** для лінійної дискретної системи мають вигляд (*модулі Z-коренів повинні бути менші одиниці*)

$$|Z1(T, a1, a0)| < 1; \quad |Z2(T, a1, a0)| < 1.$$

Перевіримо це експериментально:

$$|Z1(0.1, 0.1, 1)| = 0.99; \quad |Z2(0.5, -0.1, 1)| = 0.913.$$

### 3. Отримання аналітичних розв'язань диференціального та різницевого рівнянь

Знайдемо точні розв'язання дифрівняння і відповідного різницевого рівняння та побудуємо перехідні процеси.

**Частина I.** Загальновідомо, що загальний розв'язок однорідного дифрівняння має вигляд:

$$x(t) = C1 \cdot e^{s1(a1, a0) \cdot t} + C2 \cdot e^{s2(a1, a0) \cdot t}, \quad (1)$$

а похідна від нього буде:

$$\frac{d}{dt} x(t) = C1 \cdot s1(a1, a0) \cdot e^{s1(a1, a0) \cdot t} + C2 \cdot s2(a1, a0) \cdot e^{s2(a1, a0) \cdot t}. \quad (2)$$

Задаємо граничні умови:  $x(0) = -1$ ;  $\frac{d}{dt} x(0) = 0$ ; ORIGIN := 1. Підставляємо у (1) і

(2):  $t = 0$ , отримуємо два рівняння для визначення сталих  $C1$  і  $C2$ .

$$x(0) = C1 + C2 = -1; \quad \frac{d}{dt} x(t) = C1 \cdot s1(a1, a0) + C2 \cdot s2(a1, a0) = 0.$$

Використовуємо розв'язувальний блок для знаходження C1, C2. Задаємо початкові значення шуканих змінних (вони можуть бути і комплексними): C1 := -1 + i; C2 := 1 - i

Given

$$\left. \begin{aligned} C1 + C2 &= -1 \\ C1 \cdot \left( \frac{-1}{2} \cdot a1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a1^2 - 4 \cdot a0} \right) + C2 \cdot \left( \frac{-1}{2} \cdot a1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a1^2 - 4 \cdot a0} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Розв'язок шукаємо як функцію параметрів a1 та a0:

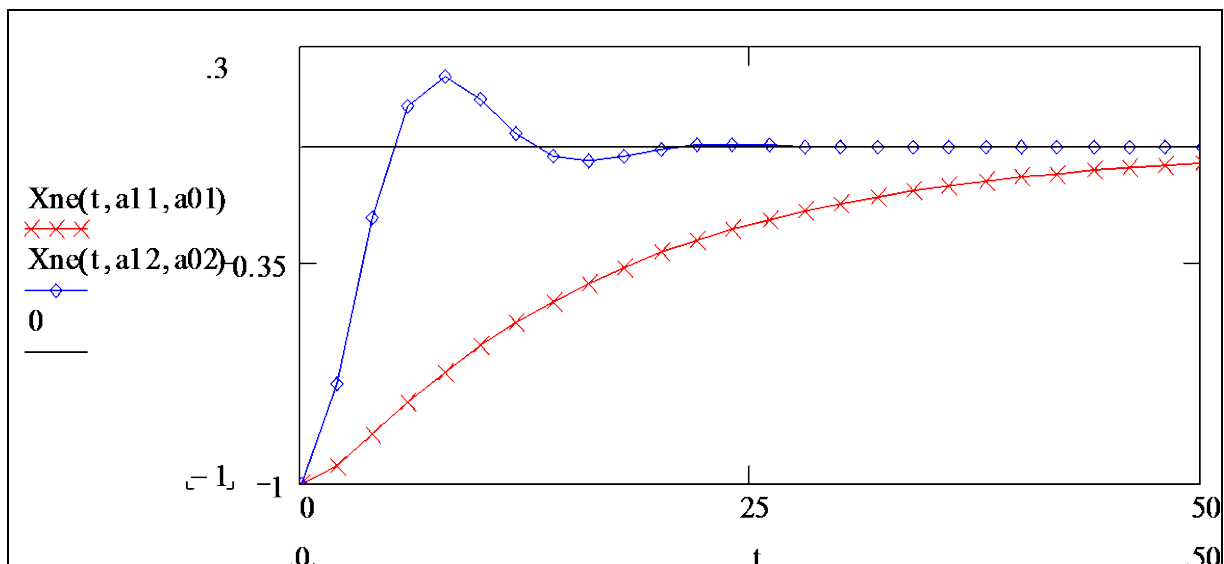
$$Cv(a1, a0) := Find(C1, C2)$$

$$Oc1(a1, a0) := Cv(a1, a0)_1$$

$$Oc2(a1, a0) := Cv(a1, a0)_2$$

Тепер запишемо остаточний вираз для точного розв'язання і будемо графіки

$$Xn(t, a1, a0) := Oc1(a1, a0) \cdot e^{s1(a1, a0) \cdot t} + Oc2(a1, a0) \cdot e^{s2(a1, a0) \cdot t}; t := 0, 2..50$$



На цьому графіку побудовано два перехідних процеси для різних значень параметрів лінійної неперервної динамічної системи, а саме:

$$a11 \equiv 0.7; a01 \equiv 0.04 \text{ та } a12 \equiv 0.4; a02 \equiv 0.2$$

**Завдання для самостійного виконання.** Наведіть вираз для перехідного процесу до такого вигляду  $X(t) = \text{Amp} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$ . Підказка: згадайте формулу Ейлера для синуса та ін.

**Частина 2.** А тепер те ж саме робимо для імпульсної (різницевої) системи. Майже загальновідомо, що загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння

$$z^2 + A1(T, a1, a0) \cdot z + A0(T, a1, a0) = 0$$

має вигляд (див. довідник з математики):

$$X(k, T, a1, a0) = c1 \cdot Z1(T, a1, a0)^k + c2 \cdot Z2(T, a1, a0)^k$$

Для визначення постійних c1 та c2 враховуємо граничні умови  $X(0) = -1; X(1) = -1$ .

Маємо два рівняння з двома невідомими

$$X(0, T, a1, a0) = c1 \cdot Z1(T, a1, a0)^0 + c2 \cdot Z2(T, a1, a0)^0 = c1 + c2 = -1;$$

$$X(1, T, a1, a0) = c1 \cdot Z1(T, a1, a0)^T + c2 \cdot Z2(T, a1, a0)^T = -1.$$

Розв'язуємо їх вбудованим числовим методом. Задаємо початкові значення

$$c1 := -1 + i; c2 := -1 - i.$$

<p><b>Given</b></p> $c1 + c2 = -1$ $c1 \cdot Z1(T, a1, a0)^T + c2 \cdot Z2(T, a1, a0)^T = -1$ $cv(T, a1, a0) := \text{Find}(c1, c2)$	}
--	---

$$cd1(T, a1, a0) := cv(T, a1, a0)_1; cd2(T, a1, a0) := cv(T, a1, a0)_2;$$

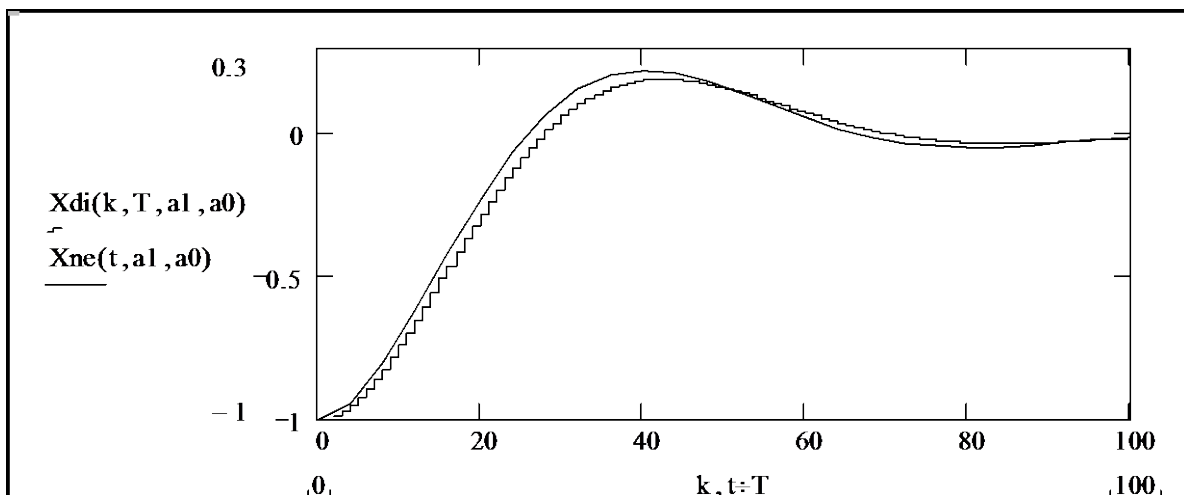
$$cv(0.1, 0.7, 0.4) = \begin{pmatrix} -0.5 + 0.353i \\ -0.5 - 0.353i \end{pmatrix}.$$

Нарешті отримуємо аналітичний розв'язок ЕРР (Еквівалентного Різницевого Рівняння)

$$Xdi(k, T, a1, a0) := cd1(T, a1, a0) \cdot Z1(T, a1, a0)^k + cd2(T, a1, a0) \cdot Z2(T, a1, a0)^k$$

Порівнюємо розв'язки для різницевого і диференціального рівнянь

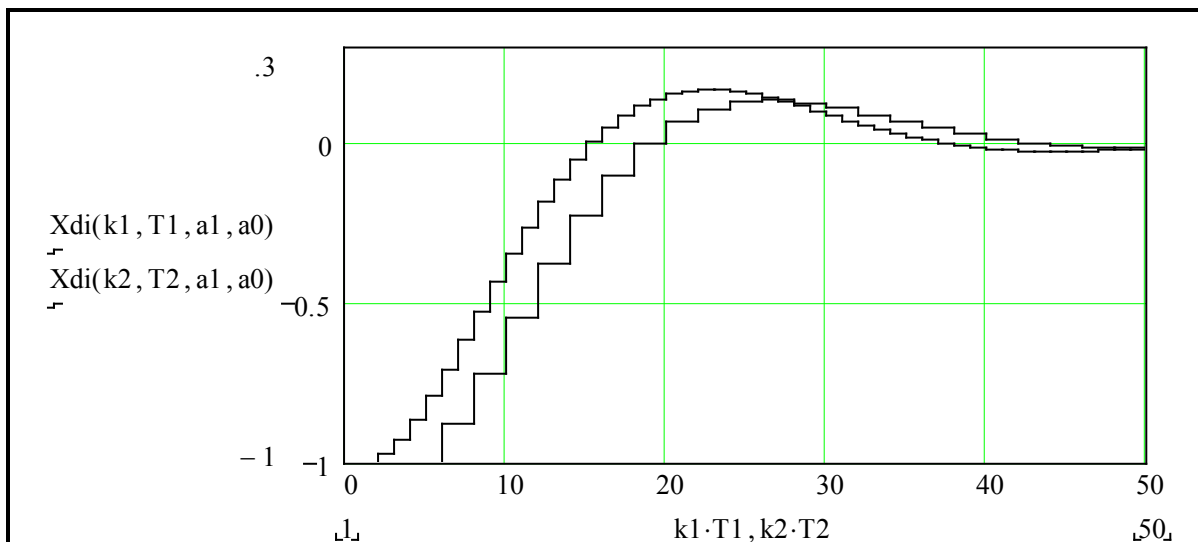
$$Tm := 50; T := 0.5; k := 1..Tm \div T; a1 := 0.15; a0 := 0.03.$$



Бачимо певне запізнення дискретизованого перехідного процесу відносно неперервного. Неважко здогадатись, що це **запізнення на два кроки дискретизації**. Якщо ви працюєте з електронною версією цього посібника, перевірте це експериментально: введіть значення  $T = 0.2$ ;  $T = 1.0$ . Доведіть це, виходячи з виразу для різницевого рівняння.

Порівняємо дискретні процеси при різних кроках обчислень. Задаємо параметри:

$$T1 := 2; T2 := 1; k1 := 1..Tm \div T1; k2 := 1..Tm \div T2.$$



Нагадаємо, що матеріал цього розділу належить до обов'язкового мінімуму знань спеціаліста будь-якої спеціальності – соціолога, економіста, електроніка та ін. Дійсно, усі вони звичайно мають справу з дискретними і неперервними процесами – соціальними, економічними, електромагнітними, тепловими. Але це тільки мінімум, він не замінить фундаментальну математичну літературу і літературу з спеціальності.

### Контрольні запитання

1. Запишіть розв'язання звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння 3-го степеня через корені характеристичного рівняння.
2. Запишіть розв'язання лінійного однорідного різницевого рівняння через корені його характеристичного рівняння.
3. Як отримуються характеристичні рівняння для диференціального і різницевого рівнянь.
4. Необхідні і достатні умови стійкості для неперервних та імпульсних ЛДС.
6. Що таке «еквівалентне різницеве рівняння»?
7. Що і як потрібно змінювати в ЕРР для підвищення еквівалентності (точності)?
8. Прокоментуйте фразу: «корені мають бути лівими».
9. Прокоментуйте фразу: «корені мають лежати всередині одиничного кола».



# 2

## Дослідження частотних характеристик САУ

У цьому розділі розглядаються:

- ✓ Дослідження частотних характеристик. Одержання та аналіз частотних характеристик. Дослідження реакції САУ на заданий сигнал.
- ✓ Дослідження частотних характеристик. Ідентифікація САУ за логарифмічними частотними характеристиками.

Після вивчення цього розділу ви **зможете:**

1. Отримувати вирази для частотних характеристик за передаточними функціями.
2. Переходити від диференціальних рівнянь до передаточних функцій і частотних характеристик і навпаки.
3. Будувати амплітудно-фазові частотні характеристики (годографи).
4. Будувати точні і приблизні (асимптотичні) логарифмічні амплітудні частотні характеристики.
5. Знаходити характерні точки частотних характеристик – власні частоти, частоти спряження асимптот.
6. Визначати запаси стійкості системи за амплітудою і фазою.
7. Виконувати ідентифікацію передаточної функції за логарифмічною амплітудною частотною характеристикою.
8. Мати уяву про отримання частотної характеристики за реакцією динамічної системи на довільний вхідний сигнал.
9. Дати означення термінів:

1. Амплітудна частотна характеристика (АЧХ).	5. Фазова частотна характеристика (ФЧХ).
2. Логарифмічна амплітудна частотна характеристика (ЛАЧХ).	6. Власна частота, частота спряження.
3. Смуга пропускання.	7. Частота зрізу.
4. Запас стійкості по фазі.	8. Запас стійкості по амплітуді.



## 2.1 Одержання та дослідження частотних характеристик

### Вступ

**Ціль даної роботи** – набуття навичок у розробці і реалізації в програмному середовищі математичного пакета, орієнтованих на реалізацію у мікроконтролерах програм обчислення частотних характеристик за різними вхідними даними і різними методами.

В попередній роботі ми оцінювали якість лінійної стаціонарної САУ за її **часовими характеристиками** – перехідними процесами. Існує альтернатива, суть якої в тому, що якість лінійної стаціонарної САУ можна оцінювати за усталеною реакцією на гармонічний сигнал – **частотними характеристиками**.

Між частотними і часовими характеристиками є взаємооднозначні зв'язки. У частотних і часових методів аналізу та синтезу САУ є свої переваги і вади, тому вони використовуються в теорії і практиці, як правило, комплексно. Можна виділити такі альтернативи отримання частотних характеристик (ЧХ) лінійної стаціонарної динамічної системи:

1. Експериментально, вимірюючи **амплітуду**  $A(\omega)$  і **фазу**  $F(\omega)$  усталеного виходу:  $y(t)$ ,  $t \rightarrow \infty$  при гармонічному вході:  $x(t) = \sin(\omega \cdot t)$ ;
2. Математичною обробкою (**перетворення Фур'є**) виходу САУ при будь-якому вхідному:  $W(j \cdot \omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} / \mathcal{F}\{x(t)\}$ , де  $W(j \cdot \omega)$  – «частотна передаточна функція»,  $\mathcal{F}\{.\}$  – перетворення Фур'є;
3. Математичною обробкою (**спектральний аналіз**) виходу САУ при довільному, або випадковому (шум) вхідному сигналі;
4. За передаточною функцією:  $A(\omega) = \text{mod}(W(j \cdot \omega))$ ,  $F(\omega) = \text{arg}(W(j \cdot \omega))$ , для чого, природно, треба мати аналітичний вираз для передаточної функції.

**Частотні характеристики лінійних систем не залежать від амплітуди вхідного сигналу.** Для нелінійних систем ЧХ залежатимуть і від амплітуди, а для нестаціонарних систем – від часу.

### Завдання

Для свого варіанта передаточної функції  $W(s)$ :

1. **Отримати** вручну аналітичні вирази для  $A(\omega)$ ,  $F(\omega)$ ,  $M(\omega) = \text{Re}(W(j \cdot \omega))$ ,  $N(\omega) = \text{Im}(W(j \cdot \omega))$ ;
2. **Побудувати графіки**  $A(\omega)$ ,  $F(\omega)$ ,  $M(\omega)$ ,  $N(\omega)$ ,  $N(M)$  – АФЧХ та логарифмічні характеристики за аналітичними виразами та з допомогою вбудованих функцій Mathcad –  $|s|$ ,  $\text{arg}(s)$ ,  $\text{Im}(s)$ ,  $\text{Re}(s)$  та інших;
3. Дослідити вплив варіацій вибраних ( $\geq 2$ ) параметрів передаточної функції.

### Варіанти передаточних функцій

$$W1(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1}$$

☞ 1    2☞

$$W2(s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1}$$

$$W3(s) = \frac{T2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \lambda \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1} \quad W4(s) = \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s + 1)}$$

$$W5(s) = \frac{T2^2 \cdot s^2 + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1} \quad W6(s) = \frac{T2^2 \cdot s^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot (T3^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T3 \cdot \lambda \cdot s + 1)}$$

$$W7(s) = \frac{T2 \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1} \quad W8(s) = \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1}$$

$$W9(s) = \frac{T2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \lambda \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1} \quad W10(s) = \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s - 1)}$$

### Зразок виконання

#### 1. Отримання частотних характеристик за передаточною функцією

1.1 Виконаємо все спочатку при мінімальних витратах інтелекту (і часу) – використаємо вбудовані функції пакета. Записуємо вираз для уявної одиниці  $\mathbf{j}$  (є вбудована –  $\mathbf{i}$ ), задаємо діапазон частот і значення параметрів передаточної функції.

$$j := \sqrt{-1} \quad \omega := 0, 0.5 .. 40 \quad T1 := .2 \quad T2 := .1 \quad \lambda := .2 \quad T3 := .07$$

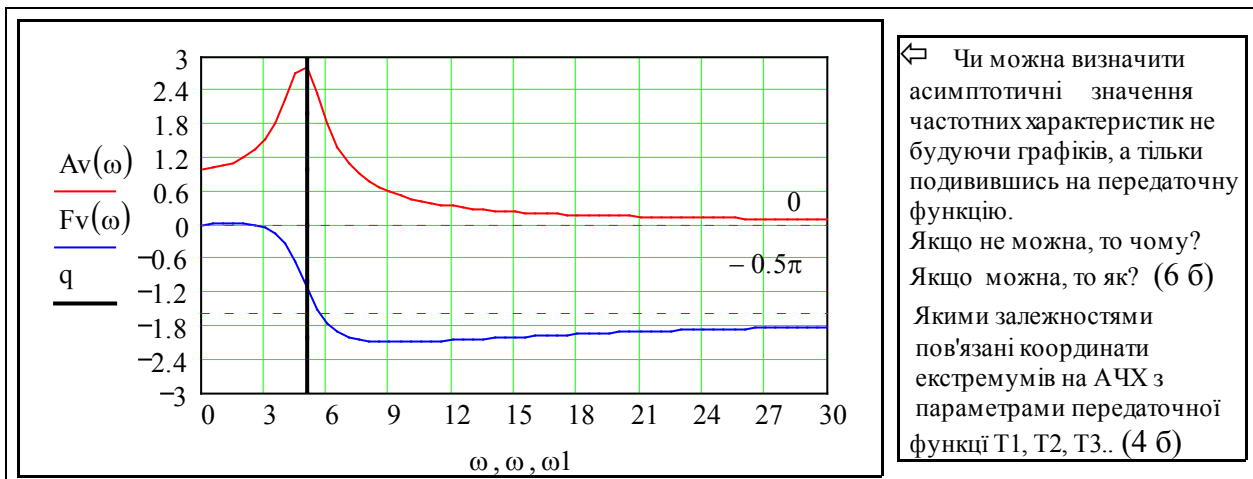
Набираємо або копіюємо звідти передаточну функцію і записуємо, використовуючи вбудовані функції пакета, вирази для амплітудної, фазової, дійсної та уявної ЧХ

$$W1(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1} \quad Av(\omega) := |W1(j \cdot \omega)| \quad Fv(\omega) := \arg(W1(j \cdot \omega))$$

$$\text{Дійсна}(\omega) := \text{Re}(W1(j \cdot \omega)) \quad \text{Уявна}(\omega) := \text{Im}(W1(j \cdot \omega))$$

#### 2. Побудова графіків частотних характеристик

Будуємо графіки АЧХ і ФЧХ, будуємо їх асимптоти та координати характерних точок – максимуми, точки перегину.  $q := -10, -9 .. 10$  ;  $\omega1 := 1 \div T1$  (варіант знака «розділити»).

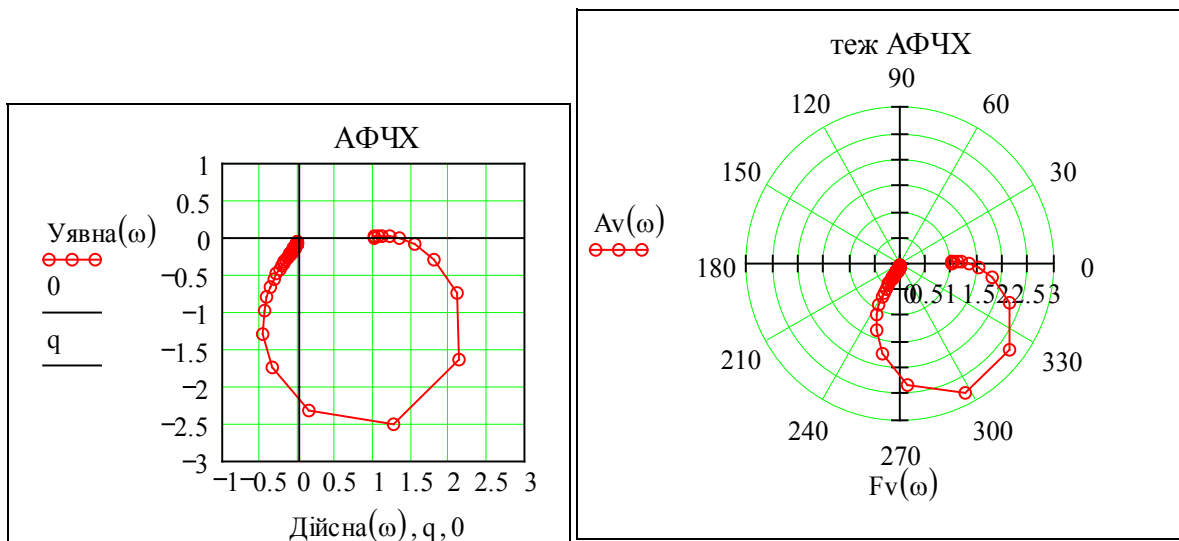


Різні види ЧХ –  $A(\omega)$ ,  $F(\omega)$ ,  $M(\omega)$ ,  $N(\omega)$  пов'язані між собою певними залежностями. Записуємо їх і перевіряємо, чи дійсно воно так:

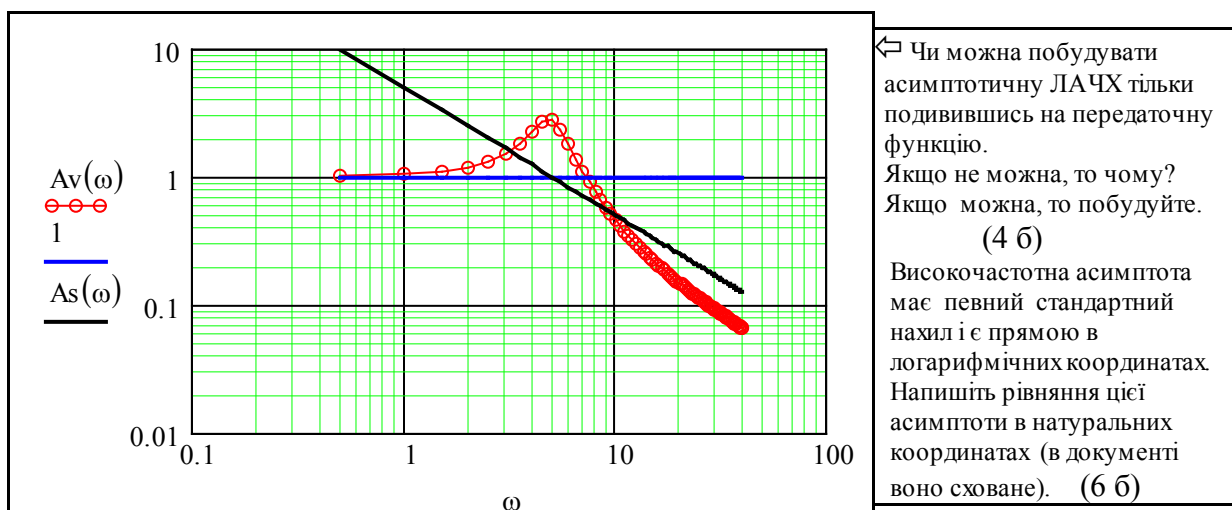
$$A_m(\omega) := \sqrt{\operatorname{Re}(W1(j \cdot \omega))^2 + \operatorname{Im}(W1(j \cdot \omega))^2} \quad F_m(\omega) := \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(W1(j \cdot \omega))}{\operatorname{Re}(W1(j \cdot \omega))}\right)$$

$$\begin{aligned} A_m(0) = A_v(0) = 1 & \quad A_m(7.40) - A_v(7.40) = 0 & \quad F_m(0) = F_v(0) = 1 \\ A_m(9) = A_v(9) = 1 & \quad A_m(13) - A_v(13) = 0 & \quad F_m(10) - F_v(10) = 3.142 \\ & & \quad F_m(10) - \pi = F_v(10) = 1 \end{aligned}$$

Будуємо амплітудно-фазову частотну характеристику, використовуючи альтернативні засоби пакета графіки в декартових і полярних координатах.



Будуємо ЛАЧХ (тобто логарифмічну амплітудно-частотну характеристику) методом форматування графіка (вибираємо логарифмічні масштаби по обох осях). ЛАЧХ має дві асимптоти, які і побудовані на графіку.



↳ Чи можна побудувати асимптотичну ЛАЧХ тільки подивившись на передаточну функцію.  
Якщо не можна, то чому?  
Якщо можна, то побудуйте.  
(4 б)

Високочастотна асимптота має певний стандартний нахил і є прямою в логарифмічних координатах. Напишіть рівняння цієї асимптоти в натуральних координатах (в документі воно сховане). (6 б)

### 3. Дослідження частотних характеристик при варіації заданого параметра

Спочатку, з навчальною метою, знайдіть вручну аналітичні вирази для ЧХ (для зміцнення знань та на випадок відсутності математичного пакета).

Увага! Далі введено спеціальні змінні без значень для виконання символьних обчислень, наприклад  $Tc2$  замість  $T2$ ,  $\lambda c$  замість  $\lambda$ ,  $w$  замість  $\omega$ .

$$\text{Підставляємо } s := i \cdot w \text{ у вираз: } W1c(s) := \frac{Tc2 \cdot s + 1}{Tc1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot Tc1 \cdot \lambda c \cdot s + 1}$$

$$\text{і отримуємо: } W1c(i \cdot w) \rightarrow \frac{(i \cdot Tc2 \cdot w + 1)}{(-Tc1^2 \cdot w^2 + 2 \cdot i \cdot Tc1 \cdot \lambda c \cdot w + 1)}$$

Модуль частотної передаточної функції (АФЧХ) – це амплітудно-частотна характеристика (АЧХ):

$$Aa(w) := |W1c(i \cdot w)|.$$

Розкриваємо її, враховуємо, що  $(i \cdot w)^2 \rightarrow -w^2$ ;  $(i \cdot w)^3 \rightarrow -i \cdot w^3$ ;  $(i \cdot w)^4 \rightarrow w^4$ .

$$Aa(w) \begin{cases} \text{expand, w} \\ \text{simplify} \\ \text{collect, w} \\ \text{float, 2} \end{cases} \rightarrow \left[ \frac{(w^2 \cdot Tc2^2 + 1)}{(Tc1^4 \cdot w^4 - 2 \cdot Tc1^2 \cdot w^2 + 1 + 4 \cdot Tc1^2 \cdot \lambda c^2 \cdot w^2)} \right]^{.50}$$

Відомо, що модуль частки комплексних чисел дорівнює частці модулів. Визначимо АЧХ альтернативним способом. Отримуємо теж саме, але трохи в іншому вигляді.

$$\frac{|Tc2 \cdot i \cdot wc + 1|}{|Tc1^2 \cdot (i \cdot w)^2 + 2 \cdot Tc1 \cdot \lambda c \cdot i \cdot wc + 1|} \rightarrow \frac{(1 + Tc2^2 \cdot wc^2)^{\frac{1}{2}}}{(Tc1^4 \cdot w^4 - 2 \cdot Tc1^2 \cdot w^2 + 1 + 4 \cdot Tc1^2 \cdot \lambda c^2 \cdot wc^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Повертаємось до початкових змінних і записуємо АЧХ у звичній формі

$$Aa(\omega) := \frac{\sqrt{T2^2 \cdot \omega^2 + 1}}{\sqrt{T1^4 \cdot \omega^4 - 2 \cdot T1^2 \cdot \omega^2 + 1 + 4 \cdot T1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \omega^2}}$$

Аналогічно отримуємо вираз для ФЧХ

$$Fa(\omega) = \arg \left[ \frac{(i \cdot T2 \cdot \omega + 1)}{(-T1^2 \cdot \omega^2 + 2i \cdot \lambda \cdot T1 \cdot \omega + 1)} \right] = \text{atan} \left( \frac{T2 \cdot \omega}{1} \right) - \text{atan} \left[ \frac{(2i \cdot \lambda \cdot T1 \cdot \omega)}{(1 - T1^2 \cdot \omega^2)} \right]$$

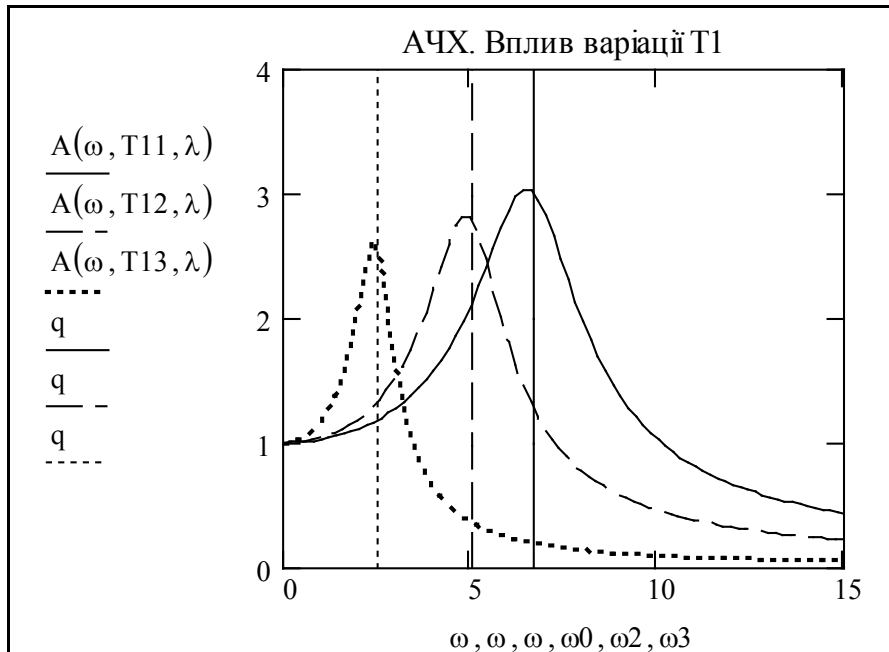
*Зауваження.* Використання символьного процесора – не для нервових: потрібно враховувати такі особливості роботи символьного процесора: 1) підставляти саме «штатну» уявну одиницю  $i$ , а не  $\sqrt{-1}$ ; 2) підставляти  $w$  замість  $\omega$ ,  $Tc2$  замість  $T2$  та ін.

Запишемо робочі вирази для АЧХ і ФЧХ як функції користувача від параметрів, вплив яких досліджуємо.

$$A(\omega, T1, \lambda) := \sqrt{\frac{(1 + \omega^2 \cdot T2^2)}{(T1^4 \cdot \omega^4 - 2 \cdot T1^2 \cdot \omega^2 + 1 + 4 \cdot T1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \omega^2)}}$$

$$F(\omega, T1, \lambda) := \arg\left[\frac{(i \cdot T2 \cdot \omega + 1)}{(-T1^2 \cdot \omega^2 + 2i \cdot \lambda \cdot T1 \cdot \omega + 1)}\right]$$

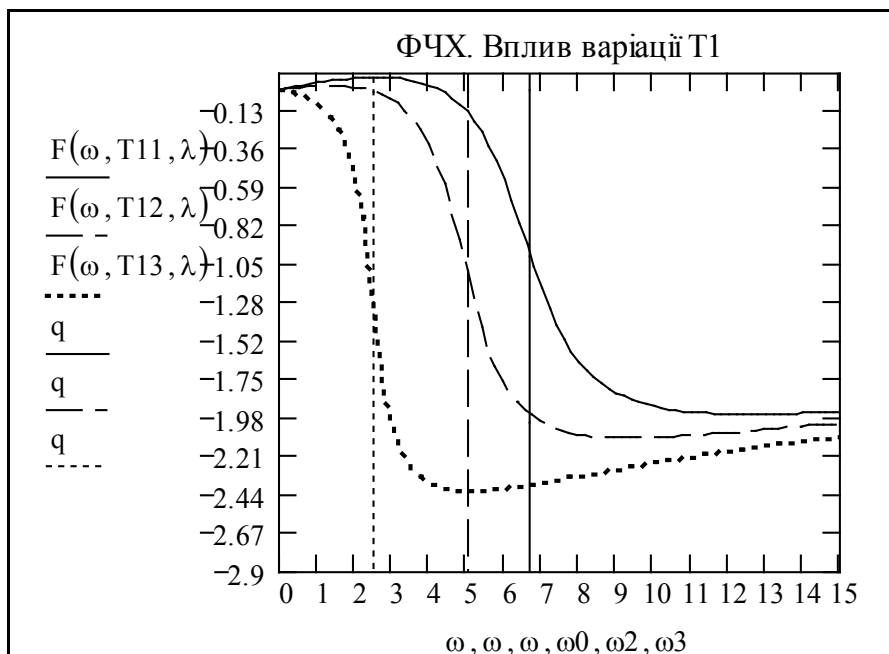
$\omega := 0, 0.2 \dots 20$



Змінюючи значення T11, T12, T13, можемо тут же бачити відповідну зміну АЧХ та ФЧХ.

Неважко зробити це для дослідження впливу T2 та  $\lambda$ .

T11  $\equiv$  .15  
T12  $\equiv$  .20  
T13  $\equiv$  .40

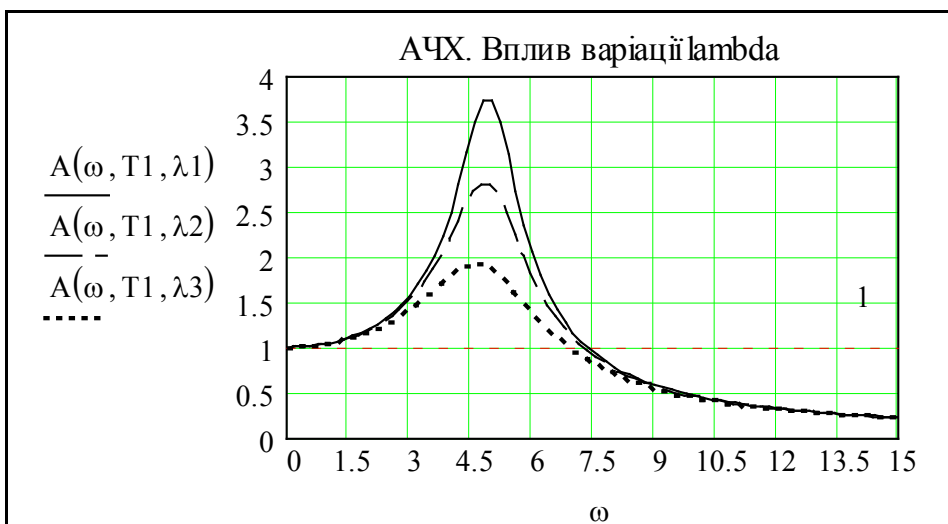


$\omega_0 \equiv \frac{1}{T11} \quad \omega_0 = 6.67$

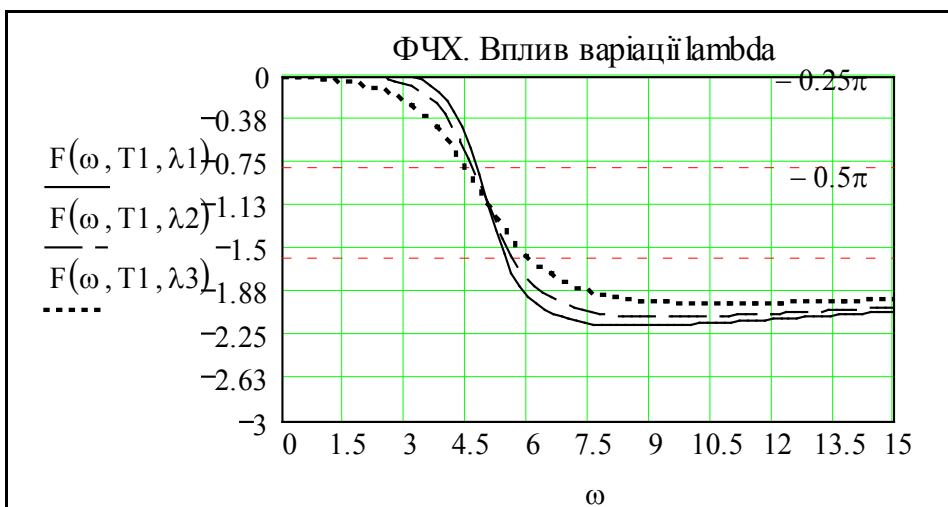
$\omega_2 \equiv \frac{1}{T12} \quad \omega_2 = 5$

$\omega_3 \equiv \frac{1}{T13} \quad \omega_3 = 2.5$

Аналогічно досліджуємо вплив варіації параметра  $\lambda$ . Ці три характеристики звичайно мають таку інтерпретацію: «плюс-характеристика» – при додатних можливих відхиленнях параметрів, «мінус-характеристика» – при від'ємних відхиленнях і номінальна характеристика.



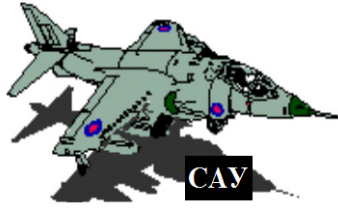
$\lambda = 0.2$   
 $\lambda_1 \equiv .15$   
 $\lambda_2 \equiv .20$   
 $\lambda_3 \equiv .30$



**Працювали:** Верба В., Грушка В., Вишнячок Г. 01.02.33.

### Контрольні запитання

1. Способи отримання ЧХ.
2. Зв'язок між АЧХ, ФЧХ,  $M(\omega)$ ,  $N(\omega)$ .
3. Що таке «власні частоти»?
4. Як будуються асимптотичні ЛАЧХ?
5. Чи можна за ЛАЧХ ідентифікувати передаточну функцію ЛДС?
6. Чому дорівнює натуральний нахил характеристики 20 дБ/декаду?
7. Що таке смуга пропускання?
8. Чи можна за часовою характеристикою визначити частотну і навпаки?
9. Як за реакцією на довільний сигнал визначити частотні характеристики?
10. Як за частотними характеристиками побудувати перехідний процес?
11. Як за частотними характеристиками побудувати реакцію на довільний сигнал?
12. Як за частотними характеристиками отримати передаточну функцію?



## 2.2 Дослідження частотних характеристик. Ідентифікація САУ за логарифмічними частотними характеристиками

### Вступ

**Ціль даної роботи** – набуття навичок у розробці і реалізації у програмному середовищі математичного пакета програм дослідження логарифмічних частотних характеристик, вивчення властивостей цих характеристик і розробки орієнтованих на реалізацію у мікроконтролерах методів ідентифікації передаточної функції об'єкта управління.

Особливість логарифмічних амплітудно-частотних характеристик в тому, що порядок і параметри передаточної функції можна *безпосередньо побачити* на цій характеристиці – як асимптоти, точки перетину асимптот, нахили асимптот.

ЛЧХ стали дуже популярними в епоху логарифмічних лінійок, тому що дозволяли будувати ЛЧХ за передаточною функцією і навпаки взагалі без обчислень. В епоху тотальної комп'ютеризації ЛЧХ зберегли своє значення (*в 1940-1960 роках логарифмічна лінійка була символом професії інженера. Ось тепер все повертається з hand-helded комп'ютерами і «продуктовими лінійками»*). На базі ЛЧХ розроблені широко використовувані методи аналізу і синтезу динамічних систем. Але, є декілька але:

- методи, що базуються на ЛЧХ, – приблизні, правила, за якими робляться висновки – нечіткі (*наприклад, «САУ має задовільний перехідний процес, якщо на частоті зрізу характеристика має приблизно лінійну ділянку довжиною  $(4-10) \cdot \omega_z$  і нахил  $-20$  дБ/дек.»*), а якщо їх (методи і правила) зробити точними, вони втрачають свою ефективність;

- людина легко розпізнає на логарифмічних амплітудно-частотних характеристиках (ЛАЧХ) асимптотичні ділянки і точки стику асимптот, без ускладнень інтерпретує екстремуми, але побудувати машинні програми для автоматичної ідентифікації дуже важко (*майже всім відомо, що напрямок «штучний інтелект» існує завдяки закону психофізики: «те, що легко виконує людина, важко виконати комп'ютеру і навпаки»*). Тому в цій роботі поряд з рутинними завданнями ставиться і неможливе – розробити працюючу систему автоматичної ідентифікації САУ за ЛАЧХ.

### Завдання

1. Побудувати для базового варіанта графік **точної** ЛАЧХ з асимптотами і розміткою власних частот. Побудувати графік **асимптотичної** ЛАЧХ і графік відхилень (помилки) асимптотичної ЛАЧХ відносно натуральної. - 8 б
2. Для свого варіанта передаточної функції  $W(s)$  зробити **те ж саме** для 2-х різних наборів параметрів  $T_1, T_2, T_3, \lambda$ . - 14 б
3. Для свого варіанта передаточної функції побудувати сумісно ЛАЧХ, ЛФЧХ і визначити: (графічно і аналітично) **частоту зрізу, запаси стійкості за амплітудою і фазою**. - 20 б
4. Запропонувати методи автоматичної ідентифікації передаточної функції динамічної системи за ЛАЧХ. - 15 б
5. Розробити програму автоматичної ідентифікації передаточної функції динамічної системи за ЛАЧХ. - 110 б



## Варіанти завдань

$$\begin{array}{ll}
 W1(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot s} & \text{1} \quad \text{2} \\
 W2(s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot s} & \\
 W3(s) := \frac{T2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \lambda \cdot s + 1}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot s} & \text{3} \quad \text{4} \\
 W4(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s + 1) \cdot s} & \\
 W5(s) := \frac{T2^2 \cdot s^2 + 1}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot s} & \text{5} \quad \text{6} \\
 W6(s) := \frac{T2^2 \cdot s^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot (T3^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T3 \cdot \lambda \cdot s + 1)} & \\
 W7(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1) \cdot s} & \text{7} \quad \text{8} \\
 W8(s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1) \cdot s} & \\
 W9(s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1} & \text{9} \quad \text{10} \\
 W10(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s - 1) \cdot s} &
 \end{array}$$

## Зразок виконання

### 1. Побудова ЛАЧХ елементарних ланок

Як базовий приклад візьмемо «зразкову» систему, що складається тільки з елементарних ланок першого порядку – аперіодичних та форсувальних. Параметри передаточної функції – сталі часу цих ланок беремо такими, щоб відстань між точками спряження асимптот дорівнювала одній декаді, тобто  $T2 = 0.1 \cdot T1$ ,  $T3 = 0.1 \cdot T4$  і т. д.

Записуємо передаточні функції для елементарних ланок першого порядку –

аперіодичної:  $W_{ape}(s, T) := \frac{1}{T \cdot s + 1}$ ; форсувальної:  $W_{for}(s, T) := T \cdot s + 1$ ;

інтегровальної  $W_{int}(s, T) := \frac{1}{T \cdot s}$ ; диференціувальної:  $W_{dif}(s, T) := T \cdot s$ .

Задаємо діапазон частот:  $\omega := 0.1, .5.. 100$ . Записуємо вирази для АЧХ цих ланок:

$$A_{ape}(\omega, T) := |W_{ape}(i \cdot \omega, T)|; A_{for}(\omega, T) := |W_{for}(i \cdot \omega, T)|; A_s(\omega) := 10^{11} \cdot \omega^{-1};$$

$$A_{int}(\omega, T) := |W_{int}(i \cdot \omega, T)|; A_{dif}(\omega, T) := |W_{dif}(i \cdot \omega, T)|.$$

Будуємо (в логарифмічних масштабах по обох осях) графіки. Задаємо для кожної ланки різні значення сталої часу  $T$ . Бачимо, що ЛАЧХ інтегровальної та диференціувальної ланок збігаються з своїми асимптотами, а для аперіодичної та форсуючої ланки ділянки з різними нахилами переходять одна в одну досить плавно.

Задаємо значення параметрів  $T_{T1} := 1$ ;  $T_{T2} := 0.16$ ;  $T_{T3} := 2$ ;  $T_{T4} := 0.1$ .

Виводимо власні частоти

$$\frac{1}{T_{\tau 1}} = 1 \quad ; \quad \frac{1}{T_{\tau 2}} = 6.25 \quad ;$$

$$\frac{1}{T_{\tau 3}} = 0.5 \quad ; \quad \frac{1}{T_{\tau 4}} = 10 \quad .$$

та передаточні функції  
елементарних ланок

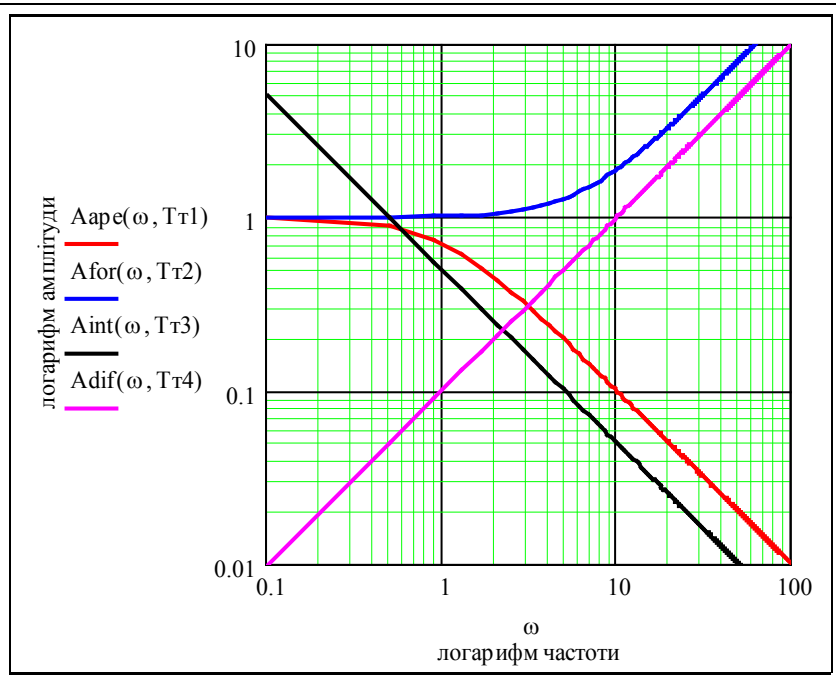
аперіодична  $\frac{1}{T \cdot s + 1}$

форсувальна  $T \cdot s + 1$

інтегровальна  $\frac{1}{T \cdot s}$

диференціальна  $T \cdot s$

Вкажіть графік і  
положення власної  
частоти для кожної з цих  
ланок



## 2. Побудова ЛАЧХ для базового варіанта

Записуємо передаточну функцію базового варіанта і її параметри.

$$T1 := .000001$$

$$T2 := .0001$$

$$T3 := .01$$

$$T4 := .1$$

$$T5 := 1$$

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$W_{\text{raz}}(s) := \frac{(T4 \cdot s + 1) \cdot (T5 \cdot s + 1)}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T2 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s + 1)}$$

Задаємо діапазон частот, кількість кроків і робимо крок таким, щоб у логарифмічному масштабі він був **постійним**. Перевірте це – прологарифмуйте вираз для  $\omega(j)$ .

$$\text{Diap} := 100000000 \quad \text{Kolhag} := 50 \quad j := -1 .. \text{Kolhag} \quad \text{lhag} := \frac{\log(\text{Diap})}{\text{Kolhag}} \quad \omega(j) := 10^{j \cdot \text{lhag}}$$

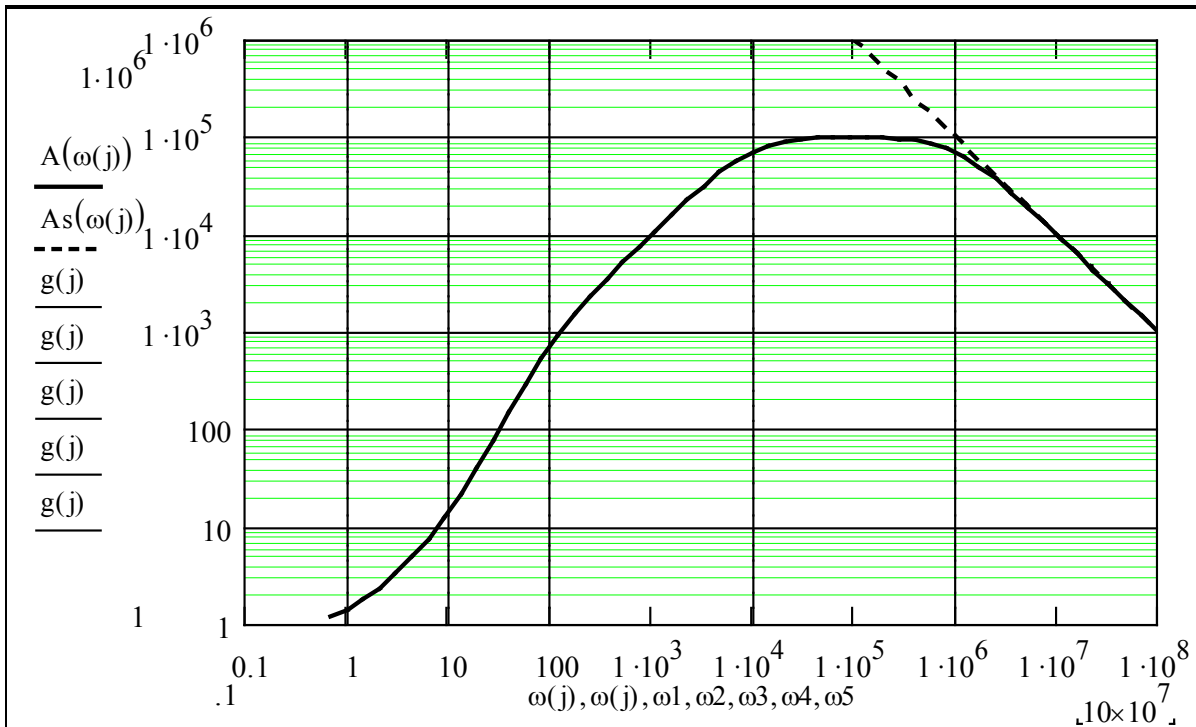
$$\text{Записуємо вираз для АЧХ: } A(\omega) := |W_{\text{raz}}(i \cdot \omega)|$$

Визначаємо так звані «власні частоти» – обернені величини від сталих часу – параметрів системи, вводимо допоміжну змінну  $q(j)$  для побудови вертикальних ліній.

$$\omega_1 := \frac{1}{T1} \quad \omega_2 := \frac{1}{T2} \quad \omega_3 := \frac{1}{T3} \quad \omega_4 := \frac{1}{T4} \quad \omega_5 := \frac{1}{T5} \quad q(j) := 10^{j \cdot \text{lhag}} \quad \text{Diap} = 1 \times 10^8$$

Будуємо графік ЛАЧХ. Бачимо, що власним частотам відповідають злами – зміни нахилу на графіку. Але навіть на цій спеціально сформованій характеристиці (коли сталі часу відрізняються як мінімум на декаду) ідентифікувати границі асимптотичних ділянок не просто.

**Завдання.** На графіку побудована одна асимптота. Напишіть рівняння цієї асимптоти  $A_s(\omega)$ . Використайте розкладання передаточної функції на елементарні ланки.



### 3. Побудова асимптотичної ЛАЧХ

На відміну від попередніх розділів, де ми просто використали опцію «логіарифмічні масштаби», побудуємо «натуральну» логарифмічну характеристику – прологарифмуємо відповідні вирази і побудуємо графіки. Задаємо функції користувача, що відтворюють асимптотичні ЛАЧХ для аперіодичної та форсувальної ланок.

$$\text{lap}(lw, T) := \Phi\left(lw - \log\left(\frac{1}{T}\right)\right) \cdot \left(\log\left(\frac{1}{T}\right) - lw\right) \quad \text{lfo}(lw, T) := \Phi\left(lw - \log\left(\frac{1}{T}\right)\right) \cdot \left(lw - \log\left(\frac{1}{T}\right)\right)$$

$$\Phi(-1) = 0 \quad \Phi(-.00001) = 0 \quad \Phi(0) = 1 \quad \Phi(1) = 1$$

Ці функції визначені за допомогою функції Хевісайда. Може виникнути проблема – як набрати або вибрати з меню цю функцію.

*Phi – Heaviside step function: 1 if x is greater than or equal to 0 and 0 otherwise. To type Phi, press F+Ctrl+G. На українську це перекладається так: є функція Хевісайда, що набрати її треба:*

*або знати, що треба на вільному місці екрану набрати F, потім натиснути Ctrl+G і з'явиться  $\Phi$ , до них треба домалювати і заповнити дужки отак:  $\Phi(x)$ ;*

*або відкрити меню Insert, а в ньому меню Function, а вже в ньому – знати, що треба знайти функцію  $\Phi(0)$ , клацнути по ній мишею і на екрані з'явиться  $\Phi()$ .*

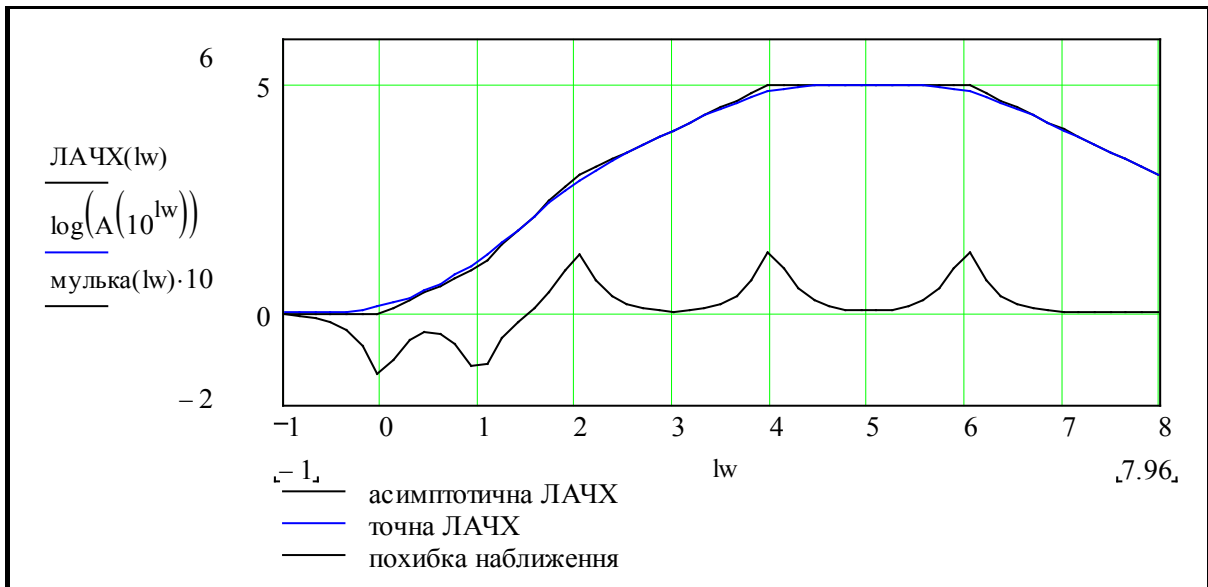
Задаємо ранжовану змінну lw – логарифм частоти, з таким же кроком, як і раніше. Записуємо асимптотичну ЛАЧХ як суму ЛАЧХ елементарних ланок, що складають задану передаточну функцію.

$$lw := -1, lhag - 1 .. \log(\text{Diap})$$

$$\text{ЛАЧХ}(lw) := (\text{lap}(lw, T1) + \text{lap}(lw, T2)) + (\text{lap}(lw, T3) + \text{lfo}(lw, T4) + \text{lfo}(lw, T5))$$

$$\text{Kolhag} = 50 \quad \text{Kolhag} := 50 \quad T1 := .0001 \quad T2 := .001 \quad T3 := .01 \quad T4 := .1 \quad T5 := 1$$

Будуємо разом точну і асимптотичну ЛАЧХ. Важко не помітити, що вони досить повно збігаються.

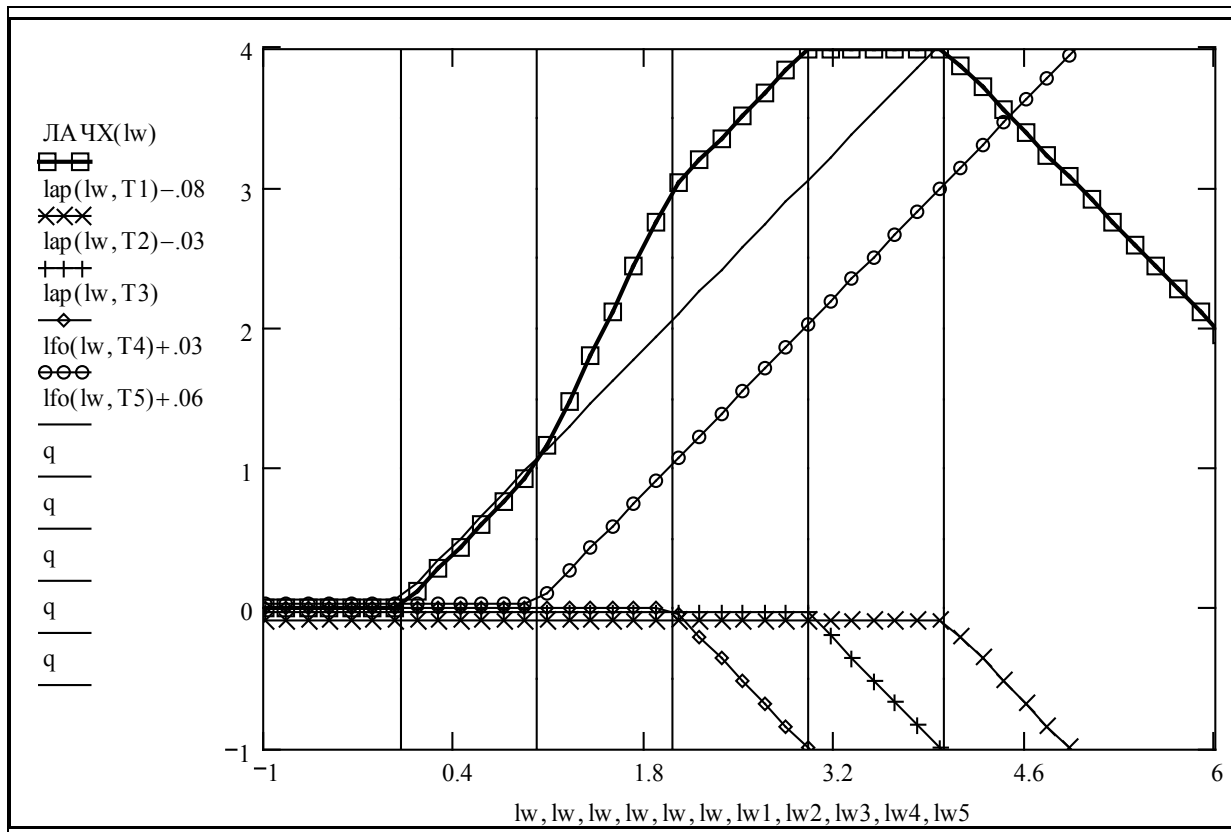


Перевага логарифмічних частотних характеристик в тому, що передаточна функція складної системи розкладається у послідовність елементарних ланок. ЛАЧХ системи знаходиться як сума ЛАЧХ складових цієї системи. Асимптотичні ЛАЧХ можна додавати майже без обчислень – на графіку. Побудуємо ЛАЧХ та її елементарні складові.

$$\text{ЛАЧХ}(lw) := \text{lap}(lw, T1) + \text{lap}(lw, T2) \dots \\ + \text{lap}(lw, T3) + \text{lfo}(lw, T4) + \text{lfo}(lw, T5)$$

$$W_{\text{raz}}(s) := \frac{(T4 \cdot s + 1) \cdot (T5 \cdot s + 1)}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T2 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s + 1)}$$

$$q := -5, -4.5 \dots 10 \quad lw1 := \log\left(\frac{1}{T1}\right) \quad lw2 := \log\left(\frac{1}{T2}\right) \quad lw3 := \log\left(\frac{1}{T3}\right) \quad lw4 := \log\left(\frac{1}{T4}\right) \quad lw5 := \log\left(\frac{1}{T5}\right)$$



## 4. Побудова ЛАЧХ для заданого варіанта

### 1. Побудова точної ЛАЧХ

Копіюємо попередні фрагменти (модулі) документа, замінюємо передаточну функцію, значення її параметрів. Настроюємо діапазон частот, масштаби на графіках.

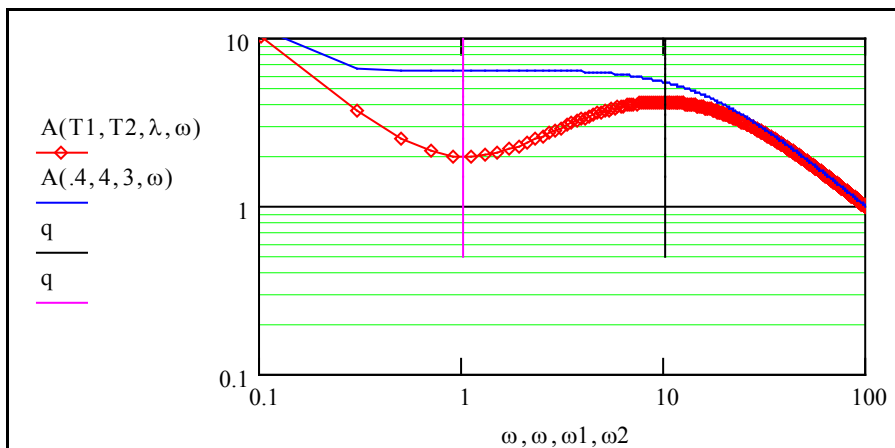
$$T1 := 0.1 \quad T2 := 1 \quad \lambda := .7 \quad \omega1 := \frac{1}{T1} \quad \omega2 := \frac{1}{T2} \quad \omega := 0.1, .3.. 100 \quad q := -5, -4.5.. 10$$

$$q := -5, -4.5.. 10$$

$$W8(T1, T2, \lambda, s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1) \cdot s}$$

Записуємо вираз для АЧХ

$$A(T1, T2, \lambda, \omega) := |W8(T1, T2, \lambda, 1i \cdot \omega)|; \quad T1 = 0.1; \quad T2 = 1.$$



Будуємо графік ЛАЧХ. Бачимо, що при певних значеннях параметрів система має на високих частотах пік підсилення. На частоті зрізу ( 100 рад/с) нахил асимптоти -20дБ/дек.

### 2. Побудова асимптотичної ЛАЧХ

До функцій асимптотичних ЛАЧХ аперіодичої та форсувальної ланок добавимо ще ЛАЧХ інтегрувальної та диференціувальної ланок. Ланки другого порядку будемо відображати як добуток двох відповідних ланок першого порядку ( метод ЛАЧХ – приблизний).

$$\text{lint}(lw, T) := \left( \log\left(\frac{1}{T}\right) - lw \right) \quad \text{ldif}(lw, T) := \left( lw - \log\left(\frac{1}{T}\right) \right) \quad lw := -1, \text{lhag} - 1 .. \log(\text{Diap})$$

Дивлячись на передаточну функцію і враховуючи спрощення, записуємо вираз для асимптотичної ЛАЧХ. Копіюємо те, що потрібно, з попереднього розділу і маємо...

$$\frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1) \cdot s}$$

$$\log(|W8(\omega)|) = 2 \log(|T2 \cdot j \cdot \omega + 1|) - 2 \log(|T1 \cdot j \cdot \omega + 1|) - \log(|j \cdot \omega|)$$

$$\text{ЛАЧХ}(lw) := \text{lap}(lw, T1) + \text{lap}(lw, T1) + \text{lint}(lw, 1) + \text{lfo}(lw, T2) + \text{lfo}(lw, T2)$$

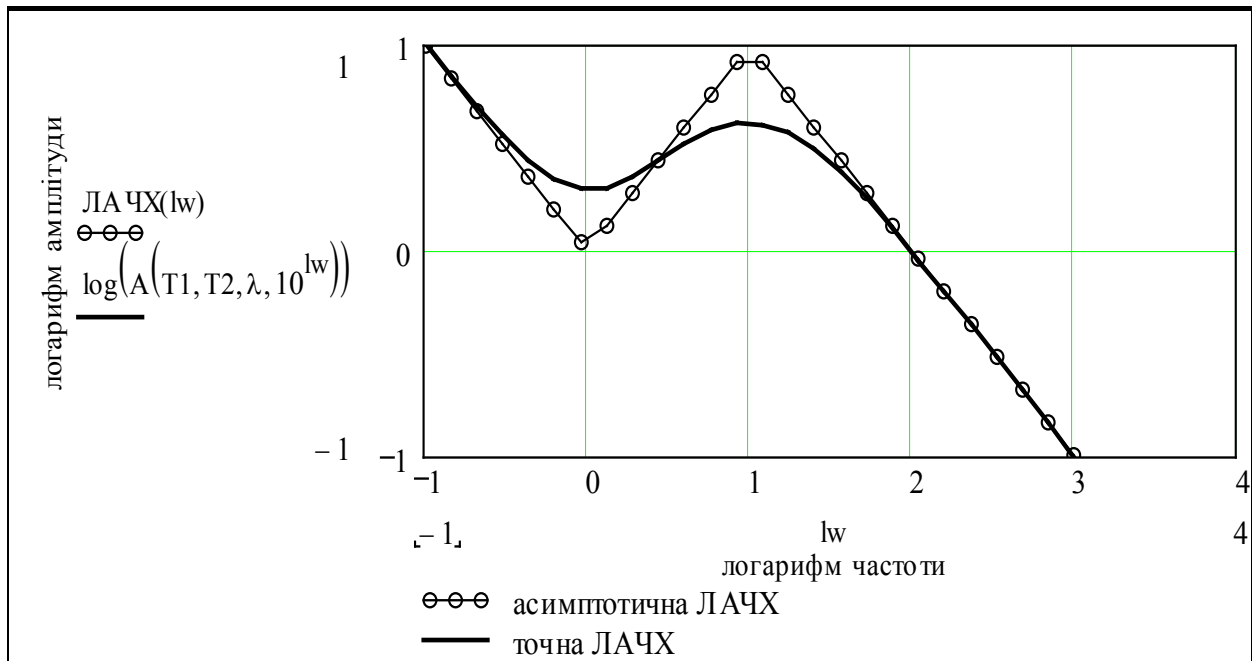
Задаємо значення сталих часу – параметрів передаточної функції

«старі значення»:

«нові значення» (можемо змінити):

$T_1 = 0.1$  ;  $T_2 = 1$  ;  $K_{\text{olhag}} = 50$  ;

$T_1 := .1$ ;  $T_2 := 1$ ;  $K_{\text{olhag}} := 50$ .



Бачимо, що асимптотична ЛАЧХ побудована коректно, збігання з точною – задовільне, але ж це ситуація класу «.не стріляйте в піаніста..» – метод ЛАЧХ є приблизним.

**Працювали:** Ошурко М., Тирса Г., Глухенький П., 09.09.09

### Контрольні запитання

1. Способи отримання ЧХ.
2. Зв'язок між АЧХ, ФЧХ,  $M(\omega)$ ,  $N(\omega)$ .
3. Що таке «власні частоти»?
4. Як будуються асимптотичні ЛАЧХ?
5. Чи можна за ЛАЧХ ідентифікувати передаточну функцію ЛДС?
6. Чому дорівнює нахил характеристики 20 дБ/декаду?
7. Що таке смуга пропускання?
8. Чи можна за часовою характеристикою визначити частотну і навпаки?
9. Якщо при зміні частоти в 10 разів амплітуда зменшується в 10 разів, чому дорівнює нахил ЛАЧХ?
10. Якщо при зміні частоти в 10 разів амплітуда зменшується в 3,33 раза, чому дорівнює нахил ЛАЧХ?
11. «Підсилення дорівнює 40 дб» – перекладіть це з мови спеціалістів на загальну: «маємо підсилення у xixixi разів».



## Аналіз стійкості САУ

У цьому розділі розглядаються:

- ✓ Дослідження стійкості САУ альтернативними методами.
- ✓ Дослідження усталених помилок САУ.
- ✓ Дослідження стійкості САУ. Стійкість САУ із запізненням.

Після вивчення цього розділу ви **зможете:**

1. Перевіряти систему на стійкість за критеріями стійкості: Найквіста, Михайлова, Гурвиця;
2. Безпосередньо перевіряти стійкість системи обчисленням коренів її характеристичного рівняння;
3. Безпосередньо перевіряти стійкість системи обчисленням її перехідного процесу;
4. При будь якій формі опису САУ (диференціальними рівняннями, передаточними функціями, частотними характеристиками) отримувати певним методом необхідні для аналізу стійкості вхідні дані:
  - передаточні функції розімкненої системи,
  - передаточні функції замкненої системи,
  - характеристичне рівняння замкненої системи,
  - диференціальне рівняння системи,
  - систему диференціальних рівнянь в формі Коші;
5. Мати уяву про побудову кореневих годографів – траєкторій коренів характеристичного рівняння при зміні певного параметра системи;
6. Визначати ступінь астатизму САУ;
7. Дати означення термінів:

1. Необхідна і достатня умова стійкості, «ліві корені» ;	5. Передаточна функція розімкненої системи;
2. Необхідна умова стійкості (неперервних лінійних динамічних систем) ;	6. Передаточна функція замкненої системи;
3. Годограф Найквіста;	7. Передаточна функція для помилки;
4. Годограф Михайлова;	8. Усталена помилка, астатизм;
5. Визначник Гурвиця;	9. Запаси стійкості за амплітудою та частотою.



### 3.1 Дослідження стійкості САУ альтернативними методами

#### Вступ

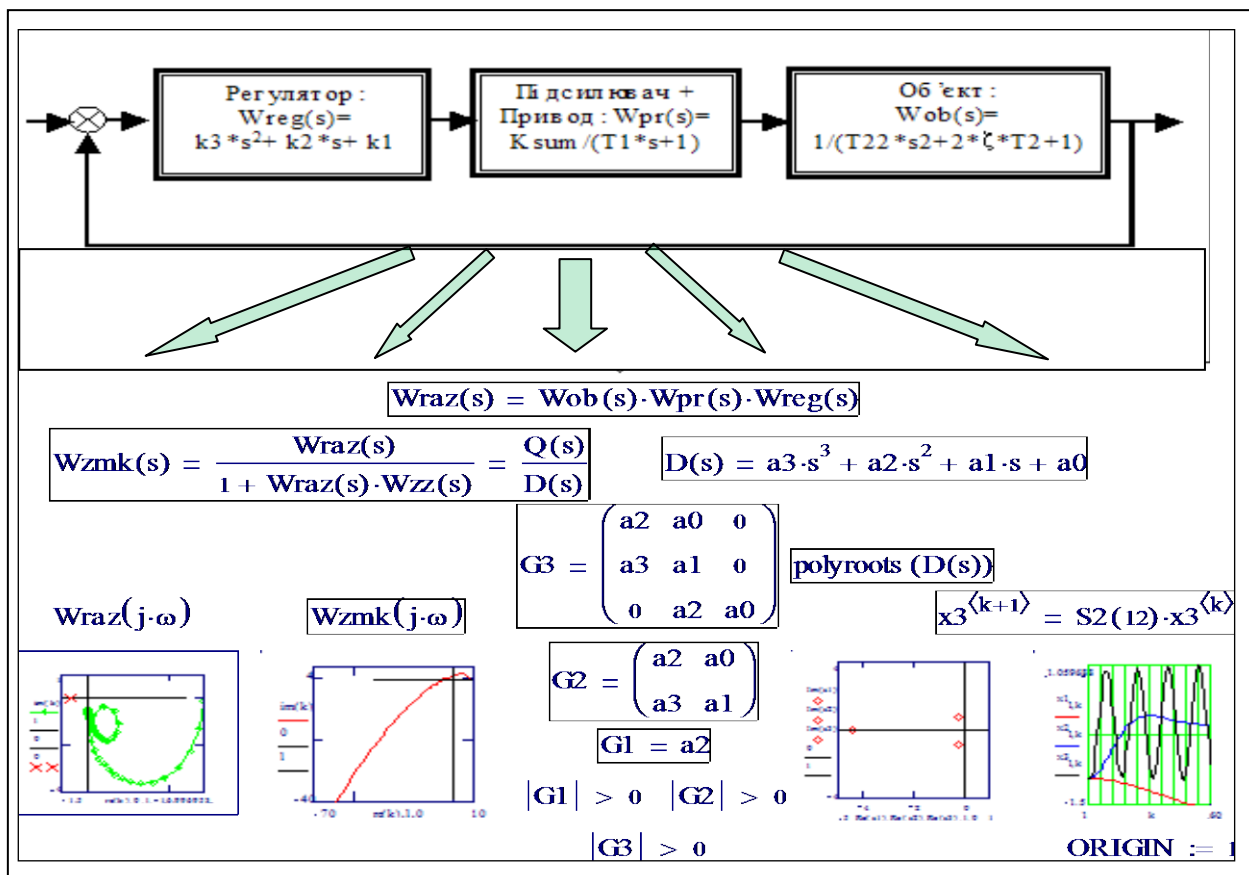
Ціль даної роботи – одержання навичок використання критеріїв стійкості та методів аналізу стійкості, наприклад, перевірки стійкості типової САУ з зворотним зв'язком. Використання альтернативних методів перевірки на стійкість забезпечує надійність результатів – виявлення помилок. Слід враховувати, що в інженерній практиці доводиться перевіряти на стійкість системи, що задані:

- ☞ диференціальними рівняннями; ☞ частотними характеристиками;
- ☞ алгебраїчними рівняннями перехідних процесів; ☞ передаточними функціями.

До виконання цієї роботи необхідно вивчити відповідний розділ і мати чітку уяву про:

- ☞ визначення стійкості за Ляпуновим;
- ☞ необхідні і достатні умови стійкості лінійних динамічних систем;
- ☞ зв'язок між коренями характеристичного рівняння і частотними характеристиками.

Крім конкретних знань і навичок, робота дає відповідь на питання: «Який з методів перевірки на стійкість є оптимальним». Нижче подано структурну схему САУ і дайджест роботи:





Як об'єкт дослідження розглядається слідкувальна САУ (з одиничним зворотним зв'язком).

### Задані:

- передаточна функція регулятора:  $W_{reg}(s) = u(s)/x(s) = k_3 \cdot s^2 + k_2 \cdot s + k_1$ ;
- передаточна функція об'єкта + підсилювача + привода:

$$W_{obj}(s) = x(s)/u(s) = +1/(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot T_2 \cdot s + 1).$$

### Завдання

1. Перевірити САУ на стійкість за критеріями Михайлова, Найквіста, Гурвиця. - 21 б
2. Знайти корені характеристичного рівняння. - 5 б
3. Побудувати перехідні процеси. Експериментально визначити границі стійкості за заданим параметром (згідно з варіантом). - 14 б
4. Визначити запаси стійкості САУ за амплітудою та фазою (самостійно). - 20 б

*Зміною заданого параметра зробіть САУ нестійкою і перевіряйте на стійкість паралельно стійку і нестійку САУ – як у зразку виконання.*

### Варіанти завдання

Варіант – це відповідний стовпець цієї таблиці, його можна відповідно зчитати.

Номер варіанта	$M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 1 & 0.3 & 0.3 & .5 & 0.2 & 1 & 1 & 2 & 0.3 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & .6 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & .2 & .4 & .3 \\ 1 & 1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.2 & 0.3 & .2 & .1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 2 & 0.5 & 0.4 & .4 & .5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 4 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$M1^{(10)} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ .3 \\ .2 \\ .2 \\ .3 \\ .4 \\ 3 \\ 99 \end{pmatrix}$
T1=		
T2=		
ζ=		
k1=		
k2=		
k3=		
Заданий парам.	$\begin{pmatrix} k1 & k2 & k3 & k1 & k2 & T2 & k1 & \zeta & k3 & T1 & T2 & k2 \end{pmatrix}$	

Номер варіанта	$M2 := \begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 2 & 1 & 0.3 & 0.3 & .5 & 0.2 & 1 & 1 & 2 & 0.3 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0.4 & 0.7 & 0.2 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & .2 & .1 & .2 \\ 1 & 1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.2 & 0.3 & .1 & .2 \\ 0.4 & 0.6 & 0.9 & 1.5 & 1.6 & 2 & 1 & 1 & 0.7 & 0.5 & .8 & .66 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 4 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$M1^{(9)} := \begin{pmatrix} Var \\ T1 \\ T2 \\ \zeta \\ k1 \\ k2 \\ k3 \\ Pv \end{pmatrix}$
T1=		
T2=		
ζ=		
k1=		
k2=		
k3=		
Заданий парам.	$\begin{pmatrix} k1 & k2 & k3 & k1 & k2 & k3 & \zeta & k2 & k3 & T1 & T2 & \zeta \end{pmatrix}$	

### Зразок виконання

**Варіант: 13-б. Вводимо (вручну?) значення параметрів САУ згідно з варіантом**

ПАРАМЕТРИ ОБ'ЄКТА УПРАВЛІННЯ	Варіант:	ПАРАМЕТРИ РЕГУЛЯТОРА
T1 = 2	T2 = 0.5	ζ = 0.2
	Var = 9	k3 = 4
		k2 = 0.5
		k1 = 0.2

**Вводимо** ЧИСЛО КРОКІВ ОБЧИСЛЕНЬ

ДІАПАЗОН ЧАСТОТ

$$kilkrok := 100$$

$$n := 1..kilkrok$$

$$\omega_0 := .01$$

$$\omega_k := 8.01$$

КРОК ОБЧИСЛЕНЬ  $krok := \frac{\omega_k - \omega_0}{kilkrok}$ ; СЕРІЯ ЗНАЧЕНЬ ЧАСТОТИ  $\omega_n := \omega_0 + (n - 1) \cdot krok$ .

Записуємо передаточні функції

регулятора  $W_{\text{reg}}(s, k1, k2, k3) := (k1 + k2 \cdot s + k3 \cdot s^2),$

привода  $W_{\text{пр}}(s) := \frac{1}{(T1 \cdot s + 1)},$

об'єкта  $W_{\text{об}}(s) := \frac{1}{(T2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s + 1)}.$

Записуємо передаточну функцію розімкненої системи:

$$W_{\text{раз}}(s, k1, k2, k3) := W_{\text{об}}(s) \cdot W_{\text{пр}}(s) \cdot W_{\text{рег}}(s, k1, k2, k3)$$

### 1. Критерій Найквіста

Для перевірки САУ на стійкість за критерієм Найквіста потрібно побудувати АФЧХ розімкненої САУ, тобто годограф  $W_{\text{раз}}(i \cdot \omega)$ . Якщо розімкнута САУ стійка (а це виконано), то замкнута САУ буде стійкою, якщо годограф не охоплює точку з координатами  $-1, i \cdot 0$  при зміні частоти  $0 < \omega < \infty$  (і навпаки).

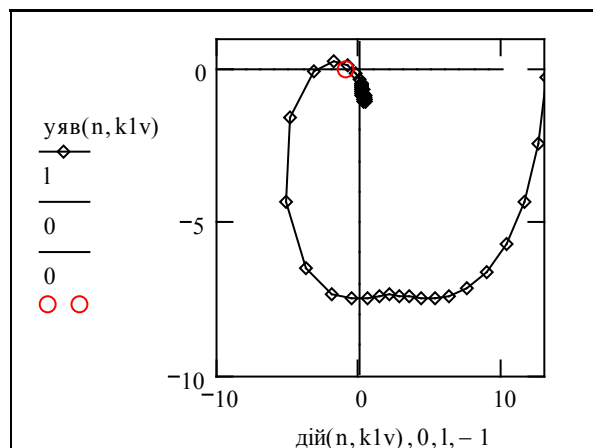
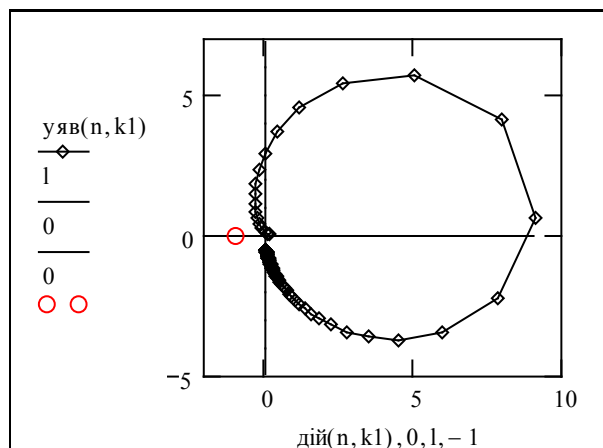
Уявна одиниця  $i$  кодується як  $1i$ , але можна визначити її самостійно:  $j := \sqrt{-1}$ .

Підставляємо  $s = i \cdot \omega$  у  $W_{\text{раз}}(s...)$  і записуємо уявну та дійсну частини

$$\text{уяв}(n, k1) := \text{Im}(W_{\text{раз}}(i \cdot \omega_n, k1, k2, k3)), \quad \text{дій}(n, k1) := \text{Re}(W_{\text{раз}}(i \cdot \omega_n, k1, k2, k3)).$$

**Нагадуємо суть завдання:** на одному графіку подана характеристика САУ при заданих параметрах. САУ може бути і стійкою, і нестійкою. **Наприклад**, вона стійка, тоді так змініть заданий параметр  $-\infty < k1v < \infty$ , щоб САУ стала нестійкою. Результати ваших пошуків відображаються на другому графіку. Бачимо: номінальна САУ – **стійка**, а при зміненому параметрі  $k1v$  – **навпаки**: бачимо, що годограф охоплює точку з координатами  $(-1, 0 \cdot i)$ . Пакет не може поставити стрілки і числа на графіку – **зробіть це Ви, вкажіть**, де  $\omega = 0$ , а де  $\omega = \infty$ . Зробіть таку функцію-індикатор:

САУ( $k1$ ) = «СТІЙКА». При зміні  $k1 = 0.2$  на  $k1v = 13$ : САУ( $k1v$ ) = «НЕСТІЙКА»



*Зауваження.* Повідомлення: САУ( $k1$ )= «СТІЙКА» – результат роботи програми, що розглянута в кінці розділу.

Подаємо  $W_{\text{раз}}(s)$  у явному вигляді і виводимо для контролю параметри.

$$W_{\text{раз}}(s) := \frac{k1 + k2 \cdot s + k3 \cdot s^2}{(T2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s + 1) \cdot (T1 \cdot s + 1)} \quad \begin{matrix} T1 = 2 & T2 = 0.5 & \zeta = 0.2 \\ k3 = 4 & k2 = 0.5 & k1 = 0.2 \end{matrix}$$

## 2. Критерій Михайлова

Для перевірки САУ на стійкість за критерієм Михайлова потрібно побудувати годограф  $D(i\omega)$ ,  $0 < \omega < \infty$ , де  $D(s)$  – **характеристичний поліном** замкнутої САУ. **Якщо САУ стійка, годограф починається на додатній дійсній півосі і ПОСЛІДОВНО проходить, ніде не обертаючись на нуль, N квадрантів. (N – степінь D(s)) в додатному напрямку (І НАВПАКИ...).**

Записуємо передаточну функцію замкненої САУ та виділяємо знаменник  $K(s)$ .

$$W_{zam}(s) := \frac{W_{raz}(s)}{1 + W_{raz}(s)} \quad \begin{matrix} T1 = 2 & T2 = 0.5 & \zeta = 0.2 \\ k3 = 4 & k2 = 0.5 & k1 = 0.2 \end{matrix} \quad K(s) := 1 + W_{raz}(s)$$

Підставляємо у загальний вираз для  $W_{zam}(s)$  вирази для відповідних передаточних функцій. Це можна зробити а) за допомогою символьного процесора, б) вручну. Коментуємо вираз, розміщений нижче. Символічний процесор видає потрібний вираз, але: а) примусово підставляє числові значення змінних, які його мають; б) не завжди за допомогою доступних символічних операцій можна привести вираз до «красивого» вигляду.

$$\frac{W_{raz}(s)}{1 + W_{raz}(s)} \rightarrow \frac{(0.2 + 0.5s + 4s^2)}{(0.5s^2 + 2.0s + 1) \cdot (2s + 1) \cdot \left[ 1 + \frac{(0.2 + 0.5s + 4s^2)}{(0.5s^2 + 2.0s + 1) \cdot (2s + 1)} \right]}$$

$$W_{zam}(s) = \frac{(40. - 3. \cdot s + 5. \cdot k3 \cdot s^2)}{(5. \cdot T2 \cdot s^3 \cdot T1 + 5. \cdot T2 \cdot s^2 + 10. \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s^2 \cdot T1 + 10. \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s + 5. \cdot T1 \cdot s + 45. - 3. \cdot s + 5. \cdot k3 \cdot s^2)}$$

В цьому випадку легше написати вираз вручну:

$$W_{zam}(s) := \frac{(k1 + k2 \cdot s + k3 \cdot s^2)}{(T2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s + 1) \cdot (T1 \cdot s + 1) + (k1 + k2 \cdot s + k3 \cdot s^2)}$$

Знаменник  $W_{zam}(s)$  – це ж  $D(s)$ , тобто **характеристичний поліном**. Виділяємо його, виконуємо алгебраїчні перетворення і отримуємо:

$$(T2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s + 1) \cdot (T1 \cdot s + 1) + (k1 + k2 \cdot s + k3 \cdot s^2)$$

Застосували до цього виразу операцію Expand:

$$T2 \cdot s^3 \cdot T1 + T2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s^2 \cdot T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s + T1 \cdot s + 1 + k1 + k2 \cdot s + k3 \cdot s^2$$

Ставимо курсор на будь-яке  $s$  і застосуємо операцію Collect:

$$T2 \cdot s^3 \cdot T1 + (k3 + T2 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta \cdot T1) \cdot s^2 + (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \cdot s + 1 + k1$$

Нарешті записуємо вираз для характеристичного полінома замкненої системи

$$D(s, k1) := T2 \cdot T1 \cdot s^3 + (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \cdot s^2 + (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \cdot s + (1 + k1)$$

Беремо уявну та дійсну частини  $D(i\omega, k1)$ :

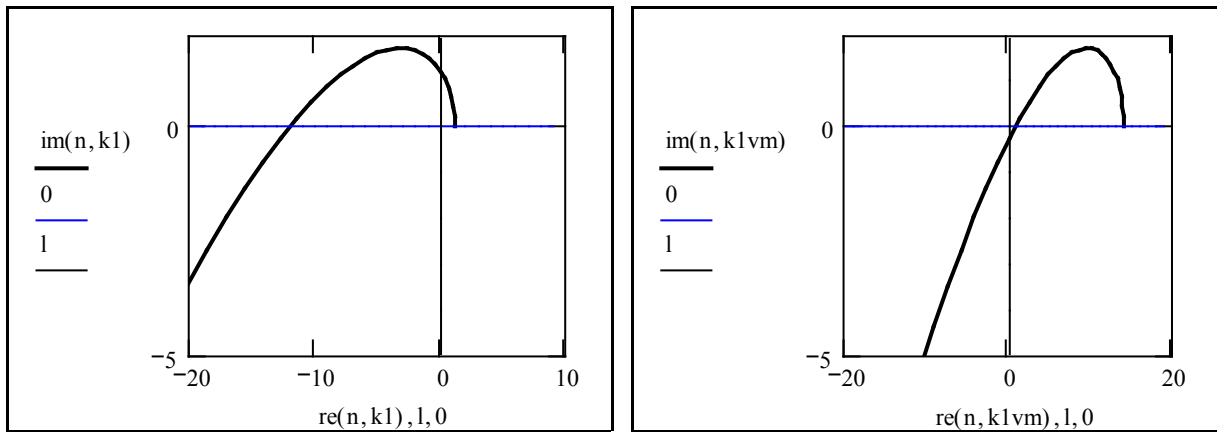
$$\text{im}(k, k1) := \text{Im}(D(i\omega_k, k1)); \text{re}(k, k1) := \text{Re}(D(i\omega_k, k1)); 1 := -40.. 40; k1 = 0.2$$

Будуємо графіки – годографи Михайлова для тих же самих даних, що і в розділі 2 (критерій Найквіста). Знову бачимо – для  $k_1 = 13$  система нестійка (годограф іде через 1–4–3 квадранти); для  $k_1 = 0.2$  – стійка (годограф іде через 1–2–3 квадранти в додатному напрямі). Самостійно поставте стрілки – напрям зростання частоти на годографах.

Номинальна САУ( $k_1$ )= «СТІЙКА».

При зміні  $k_1=0.2$  на  $k_{1vm}:=13$

САУ( $k_{1vm}$ )= «НЕСТІЙКА».



«Пограйтеся» з цим «стендом» – підберіть параметр  $k_{1vm}$  (або інший, згідно з варіантом) так, щоб точніше визначити границю стійкості. Зверніть увагу на лівий графік.

Контроль:  $T_1 = 2$        $T_2 = 0.5$        $\zeta = 0.2$        $k_3 = 4$        $k_2 = 0.5$        $k_1 = 0.2$

### 3. Критерій Гурвиця

Для перевірки САУ на стійкість за критерієм Гурвиця потрібно з коефіцієнтів характеристичного полінома  $D(s) = s^3 + a^2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0$  побудувати визначники (детермінанти) Гурвиця. **Якщо усі детермінанти будуть більшими нуля, САУ стійка, і навпаки.**

Копіюємо з розділу 2 **характеристичне рівняння замкнутої САУ:**

$$D(s, k_1) := T_2 \cdot T_1 \cdot s^3 + (T_2 + 2 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot \zeta + k_3) \cdot s^2 + (T_1 + 2 \cdot T_2 \cdot \zeta + k_2) \cdot s + (1 + k_1).$$

Нагадаємо, що в паперових підручниках детермінант матриці позначається як  $\det(M)$ , або  $\text{mod}(M)$ . В математичному пакеті ці позначення використані для інших функцій і детермінант позначається так:  $|M|$ . Це, між іншим, відповідає концепції поліморфізму в об'єктноорієнтованому програмуванні. Бачимо, що для об'єктів різних класів застосовується одна і та ж функція:

$$|-17| = 17 \dots\dots |-3 + 4 \cdot 1i| = 5 \dots\dots \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| \rightarrow a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Введемо такі означення для коефіцієнтів полінома  $D(s)$ :

$$a_3(k_1) := T_2 \cdot T_1; \quad a_2(k_1) := (T_2 + 2 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot \zeta + k_3); \quad a_1(k_1) := ((T_1 + 2 \cdot T_2 \cdot \zeta + k_2)); \quad a_0(k_1) := (1 + k_1).$$

*Зауваження.* Ми робимо відповідні об'єкти аналізу – частотні характеристики, детермінанти, елементи детермінантів функціями тих параметрів, вплив яких потрібно дослідити. В даному випадку для прикладу вибрано  $k_1$ . Дуже просто замінити цей параметр на інший. Записуємо матриці Гурвиця:

$$G_3(k_1) := \begin{pmatrix} a_2(k_1) & a_0(k_1) & 0 \\ a_3(k_1) & a_1(k_1) & 0 \\ 0 & a_2(k_1) & a_0(k_1) \end{pmatrix} \quad G_2(k_1) := \begin{pmatrix} a_2(k_1) & a_0(k_1) \\ a_3(k_1) & a_1(k_1) \end{pmatrix} \quad G_1(k_1) := a_2(k_1).$$

**Самостійно** (вважається, що ви засвоїли теоретичні основи) **визначте** правила, за якими формується головна матриця  $G3$  і за якими з неї «нарізаються» матриці  $G2$  та  $G1$ . Якщо ви зрозуміли ці правила, то вам не важко буде записати матриці  $G4$ ,  $G3$ ,  $G2$  та  $G1$  для системи 4-го порядку.

**Необхідна і достатня умова стійкості:**  $\text{determinant}(G_i(k1)) > 0$ ,  $i = 1..3$ . Обчислюємо детермінанти для тих самих значень, що і в розділах 1 і 2. Очевидно, в якому випадку САУ нестійка.

$k1 = 0.2$	$ G1(k1)  = 4.9$	$ G2(k1)  = 12.03$	$ G3(k1)  = 14.436$	САУ(k1) = "СТІЙКА"
$k1vg := 13$	$ G1(k1vg)  = 4.9$	$ G2(k1vg)  = -0.77$	$ G3(k1vg)  = -10.78$	САУ(k1vg) = "НЕСТІЙКА"

#### 4. Безпосереднє обчислення коренів характеристичного рівняння

Маючи під рукою комп'ютер можна просто обчислити корені характеристичного рівняння  $D(s)=0$ . Згідно з теоремою Ляпунова про стійкість лінійних систем **необхідна і достатня умова стійкості: усі корені характеристичного рівняння мають бути «лівими»**.

Копіюємо сюди, *просто, щоб це раз подивитись (у електронному посібнику можна поставити гіперпосилання з поверненням назад)*, характеристичне рівняння замкненої САУ:

$$D(s, k1) := T2 \cdot T1 \cdot s^3 + (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \cdot s^2 + (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \cdot s + (1 + k1).$$

Знаходимо для надійності і тренування корені характеристичного рівняння двома альтернативними способами.

**4.1 Використання функції root().** Вбудована функція **root(P(x),x)** відшукує значення найближчого до стартової точки кореня числовим методом. Щоб знайти усі три кореня, можна зробити й так: задаємо початкове (старт) значення кореня:  $s = 1+1i$  і послідовно визначаємо корені (тому, хто знає шкільну алгебру, тут все ясно).

$$s := 1 + i \quad s1 := \text{root}(D(s, k1), s) \quad s2 := \text{root}\left(\frac{D(s, k1)}{s - s1}, s\right) \quad s3 := \text{root}\left[\frac{D(s, k1)}{(s - s1) \cdot (s - s2)}, s\right].$$

Повторюємо (копіюємо, правимо) це для  $k1 = 0.2$  (беремо інші імена для коренів)

$$k1d = 0.2 \quad r1 := \text{root}(D(s, k1d), s) \quad r2 := \text{root}\left(\frac{D(s, k1d)}{s - r1}, s\right) \quad r3 := \text{root}\left[\frac{D(s, k1d)}{(s - r1) \cdot (s - r2)}, s\right].$$

Виводимо корені випадків стійкої і нестійкої САУ. Ще раз переконуємось в коректності попередніх результатів.

$k1 = 0.2$	$s1 = -0.279 + 0.445i$	$s2 = -0.279 - 0.446i$	$s3 = -4.341 + 0i$
$k1v = 13$	$r1 = 0.014 + 1.685i$	$r2 = 0.014 - 1.685i$	$r3 = -4.929$

**4.2 Використання функції polyroots().** Зробимо те саме за допомогою функції **polyroots (Вектор\_коєф)**, функції якої зрозумілі з назви. Копіюємо сюди, щоб бачити вхідні дані, з якими працюємо, вирази для коефіцієнтів характеристичного рівняння замкненої САУ:

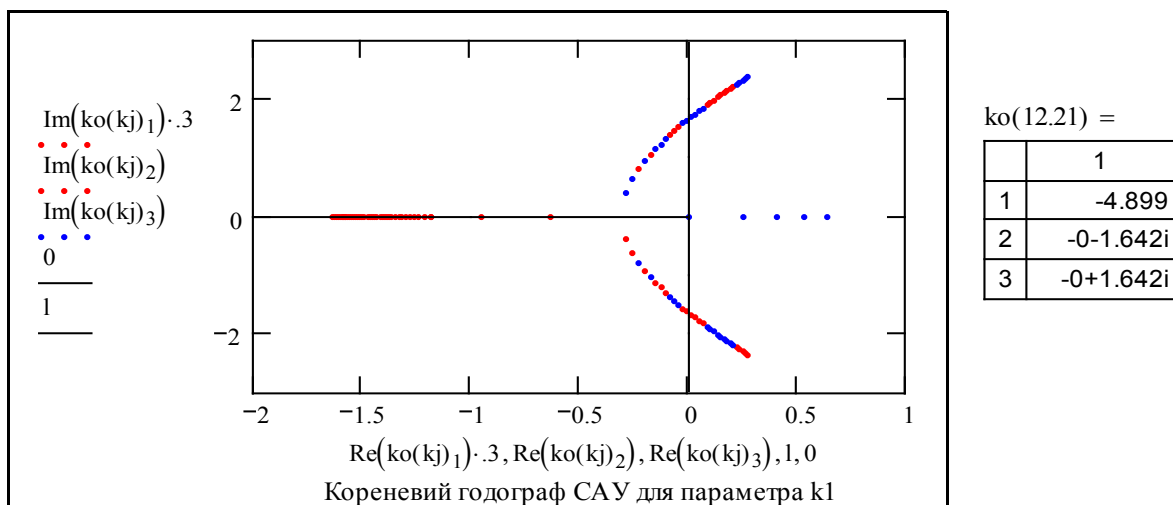
$$a3(k1) := T2 \cdot T1; \quad a2(k1) := (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3); \quad a1(k1) := (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2); \quad a0(k1) := (1 + k1).$$

Формуємо вектор-функцію, що обчислює (=повертає) значення усіх коренів залежно від значення параметра регулятора  $k1$  – «штрафа за помилку координати».

$$\text{vektkoef}(k1) := \begin{bmatrix} (1 + k1) \\ (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \\ (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \\ T2 \cdot T1 \end{bmatrix} \quad \text{ko}(k1) := \text{polyroots} \begin{bmatrix} (1 + k1) \\ (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \\ (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \\ T2 \cdot T1 \end{bmatrix}$$

Тепер ми можемо побудувати на комплексній площині замість якогось одного розподілення коренів, що відповідає певному набору параметрів об'єкта, траєкторії цих коренів при зміні певного параметра – **кореневі годографи**, що є основою одного з колись потужних методів аналізу і синтезу САУ. В докомп'ютерну еру навіть була запатентована логарифмічна лінійка з кутоміром для перемноження векторів (модулів) і додавання кутів (аргументів). Для користування годографом на ньому звичайно подається розбивка за значеннями параметра.

Задаємо діапазон зміни  $k1$ :  $kj := -5, -4.. 30$ , (беремо для ранжованої змінної інше ім'я), будуємо годограф коренів. **Самостійно поставте стрілки – напрям зростання  $k1$  на годографах.**



Прокоментуємо отримані результати. При малих  $k1$  САУ аперіодично нестійка – один корінь – правий. При збільшенні  $k1$  корені зближуються, система стає стійкою, корені стають кратними і після цього система стає коливальною. Швидкодія САУ збільшується, але одночасно зменшується загасання, бо пара комплексних коренів підходить до уявної осі. При певному **критичному значенні  $k1_{\text{крит}}$**  (**ТЕСТ: угадайте  $k1_{\text{крит}}$  з одного разу з точністю до двох знаків після десяткової крапки**) комплексні корені виходять у праву півплощину – САУ стає коливально нестійкою.

## 5. Перевірка стійкості за перехідними процесами

Маючи під рукою комп'ютер можна просто розв'язати числовими методами дифрівняння САУ при відповідних початкових умовах, як це було зроблено в підрозділі 1.1, і дивитись, чи сходиться перехідний процес. Як вхідні дані використовуємо характеристичне рівняння замкненої САУ. Зробимо старший коефіцієнт рівняння одиничним.

$$d := \frac{1}{T1 \cdot T2}; \quad A3 := 1; \quad A1(k1) := ((T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2)) \cdot d;$$

$$A2(k1) := (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \cdot d; \quad A0(k1) := (1 + k1) \cdot d.$$

Характеристичне рівняння, як відомо, – операторна форма запису дифрівняння власного руху системи, тобто, характеристичному рівнянню

$$D(s, k1) := A3 \cdot s^3 + A2(k1) \cdot s^2 + A1(k1) \cdot s + A0(k1) = 0$$

відповідає однорідне дифференціальне рівняння:  $A3 \cdot \frac{d^3}{dt^3} x + A2(k1) \cdot \frac{d^2}{dt^2} x + A1(k1) \cdot \frac{d}{dt} x + A0(k1) \cdot x = 0$ .

Наприклад, згідно з варіантом, потрібно дослідити вплив на стійкість параметра  $k1$ . Робимо відповідні вирази функціями цього параметра. **Робимо ВСЕ згідно з методикою підрозділу 1.1.** Задаємо крок обчислень  $T := .25$  та кількість кроків  $k := 1 \dots 60$ ,  $ORIGIN := 1$ .

Виводимо задане значення  $k1$  і поряд з ним підбираємо мінімальне і максимальне значення, за яких САУ втрачає стійкість:

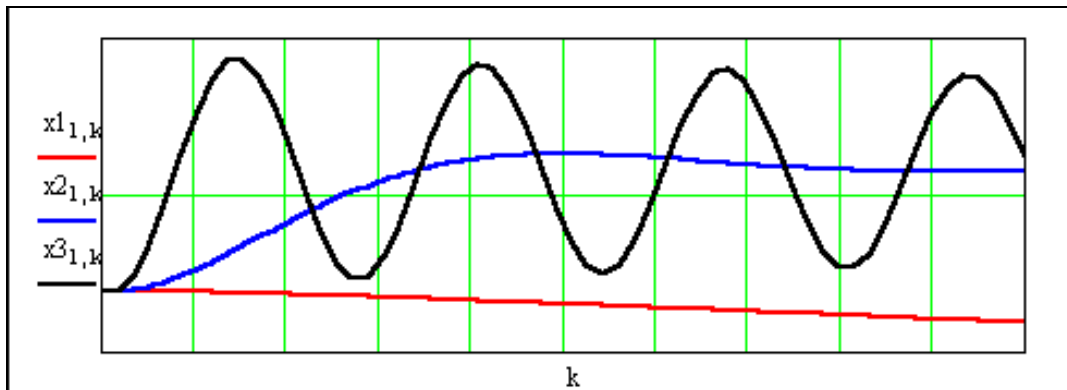
$$k1mi := -1.05 \quad k1 = 0.2 \quad k1ma := 11$$

$$x1^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A(k1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -A0(k1) & -A1(k1) & -A2(k1) \end{pmatrix}$$

$$x2^{(1)} := x1^{(1)} \quad x3^{(1)} := x1^{(1)}$$

$$S2(k1) := I + A(k1) \cdot T + \frac{(A(k1) \cdot T)^2}{2}$$

$$x1^{(k+1)} := S2(k1mi) \cdot x1^{(k)} \quad x2^{(k+1)} := S2(k1) \cdot x2^{(k)} \quad x3^{(k+1)} := S2(k1ma) \cdot x3^{(k)}$$



Працювали: Красноштан В., Білоручка Б., Авторучка А. 01.04.03.

## Висновки

1. *Конкретні.* Проведено комплексне дослідження стійкості САУ. Розроблено документ, що дозволяє при мінімальних модифікаціях вести дослідження цілого класу систем автоматичного управління.

2. *Абстрактні.* З переходом до нового ми не тільки отримуємо нові можливості, але часто щось втрачаємо. Справжня наука певним чином сама себе закреслює. Ви мабуть здогадалися, що критерії Гурвиця, Михайлова сьогодні певним чином непотрібні, як арбалет в епоху автоматів з лазерними прицілами? Доведення критерію Гурвиця займає 5–6 сторінок тексту. Тепер ці витончені, доступні тільки одиницям методи під загрозою вимирання? Сьогодні найбільш цінне в класичних методах – методології.

А все те, що розглянуто вище, можна замінити простою програмою. Далі подано приклад такої програми. Можна зробити більш радикальну версію.

```

САУ(k1) :=
  ORIGIN ← 1
  вирок ← 1
  koreni ← polyroots [
    (1 + k1)
    (T1 + 2·T2·ζ + k2)
    (T2 + 2·T1·T2·ζ + k3)
    T2·T1
  ]
  Ns ← length(koreni)
  for i ∈ 1.. Ns
    вирок ← вирок · (Re(koreni)i < 0)
  повідомляємо ←
    "СТІЙКА" if вирок = 1
    "НЕСТІЙКА" otherwise

```

$$ko(k1) := \text{polyroots} \begin{bmatrix} (1 + k1) \\ (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \\ (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \\ T2 \cdot T1 \end{bmatrix}$$

$$\text{length}(ko(k1)) = 3$$

ko(k1) =

-4.34
-0.28+0.45i
-0.28-0.45i

$$\overrightarrow{\text{Re}(ko(k1))} = \text{Re}(ko(k1)) < 0 :$$

-4.34	1
-0.28	1
-0.28	1

САУ(-1.0) = "НЕСТІЙКА"

САУ(0.2) = "СТІЙКА"

САУ(13) = "НЕСТІЙКА"

Подивіться на програму вгорі – там все очевидно. Поряд з нею – «коментарі»: те, що ми закладаємо в програму, їх слід переглянути і перевірити. Таким чином, ми зробили програму, що для класу лінійних динамічних систем просто обчислює корені і дає відповідь на питання «стійка чи нестійка?».

Годографи, визначники, частотні характеристики тепер ніби і непотрібні? Відповідь очевидна: потрібна постійна ревізія та синтез нового і старого.

Ще одне запитання: «Який з шести розглянутих способів є кращим?» Відповідь очевидна (читайте прадавню фундаментальну літературу): усі способи разом і чим більше, тим краще.

### Контрольні запитання

1. Визначення поняття стійкості за Ляпуновим.
2. Необхідна і достатня умови стійкості ЛДС.
3. Формулювання критерію Найквіста.
4. Формулювання критерію Михайлова.
5. Формулювання критерію Гурвиця.
6. Як можна знайти корені лінійного алгебраїчного рівняння n-ступеня?
7. Що таке «характеристичне рівняння»?
8. Що таке «кореневий годограф» (КГ), як можна по КГ визначити нестійкість САУ?
9. Що таке «запас стійкості за фазою», «запас стійкості за амплітудою»?





## 3.2 Дослідження усталених похибок САУ

### Вступ

Система автоматичного управління (САУ) повинна забезпечувати не тільки стійкість, потрібну швидкодію, але й потрібну точність в усталених станах. Для того, щоб вихідний сигнал в усталеному стані точно дорівнював вхідному, передаточна функція розімкненої САУ повинна мати певну кількість інтеграторів. САУ, що не має усталеної похибки для певного вхідного сигналу, називається астатичною. Якщо САУ без усталеної похибки відпрацьовує постійний сигнал, то кажуть, що вона має астатизм першого порядку, якщо вона відпрацьовує сигнал, що лінійно змінюється – це буде система з астатизмом другого порядку і так далі.

Розв'язання задач забезпечення астатизму потрібного порядку та визначення усталених похибок – обов'язкова, і дуже мала складова підготовки спеціаліста. Задачі аналізу і синтезу сучасних систем управління набагато складніші. **Ціль роботи** – отримати тверді навички з аналізування усталених похибок регулювання.

### Постановка задачі

Розглянемо задачу з програми олімпіади. Задача рутинна і елементарна (за наявності дійсної підготовки), щоб це не було очевидним, вона формулюється так:

*«Визначити максимальне ціле число  $\mu$ , при якому для вхідного сигналу  $q = t^\mu$  усталена похибка стеження  $\varepsilon$  в системі, що подана на рис. 1, буде дорівнювати нулю».* В перекладі на звичайну мову це означає **«визначити порядок астатизму  $(\mu+1)$  заданої САУ»**. Маємо задачу з глибокої класики, від 30-х років. Відомо, що порядок астатизму визначається кількістю інтеграторів у **передаточній функції розімкненої САУ**.

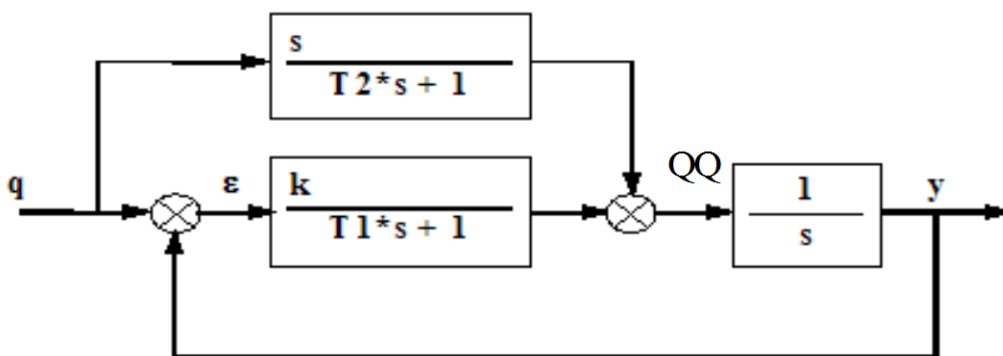


Рисунок 1 – Структурна схема системи

### Зразок виконання завдання

**Визначимо передаточну функцію САУ.** Для цього треба виконати ряд структурних перетворень, щоб привести дану схему до фундаментальної одноконтурної системи із 3.3.

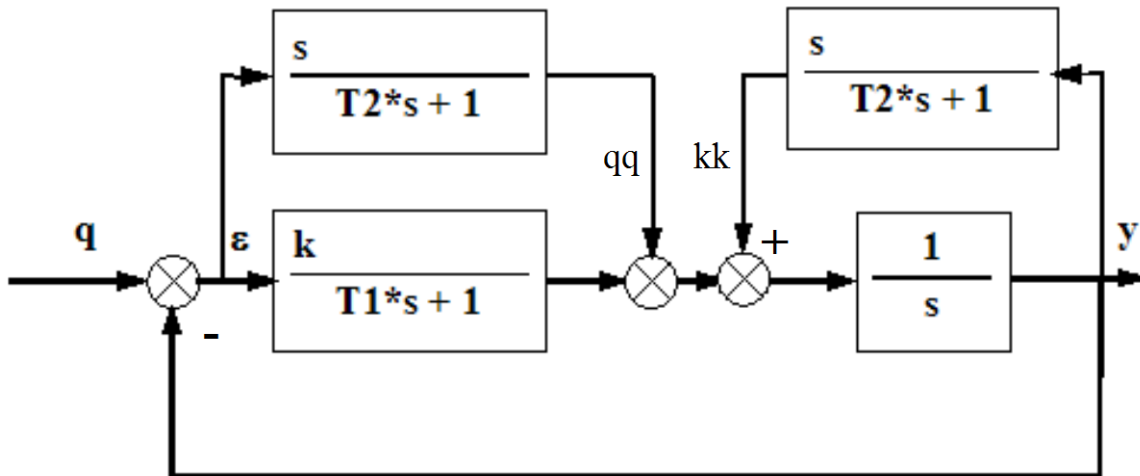


Рисунок 2 – Структурна схема системи після переносу точки розгалуження через суматор

**Перенесемо** точку розгалуження вхідного сигналу через суматор (увага – сигнал Зворотного Зв'язку (ЗЗ (зе-зе), а не ЗЗ (тридцять три)) подається із знаком мінус – це від'ємний ЗЗ). Щоб нічого не змінилось на виході, ми в точку підсумовування сигналів додаємо втрачену при переносі складову. **Дивимось одночасно** на рисунок 1 та рисунок 2 і бачимо, що сума відповідних сигналів у новій структурній схемі  $qq + kk$  дає той самий сигнал, що на схемі рисунку 1, тобто:  $qq + kk = QQ$  тому, що  $\varepsilon = q - y$ .

Тепер **дивимось тільки** на рисунок 2 і бачимо там два стандартних з'єднання ланок – паралельне і «зустрічно паралельне» тобто контур із ЗЗ. Ми можемо замінити ці з'єднання ланками з відповідними передаточними функціями  $W_{para}(s)$ ,  $W_{zvzv}(s)$ . Дивимось вже на рисунок 3 і бачимо: отримано елементарну одноконтурну систему.

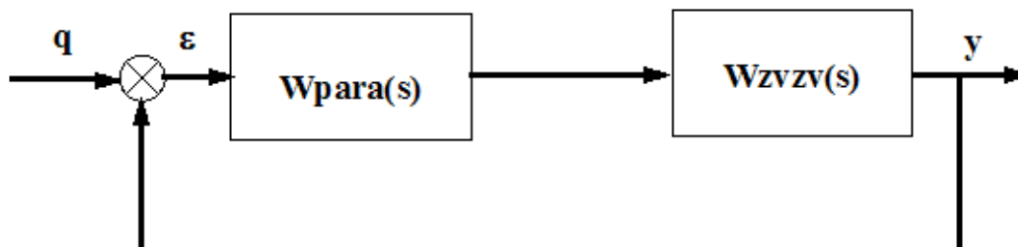


Рисунок 3 – Структурна схема системи після заміни елементарних з'єднань еквівалентними ПП (передаточними функціями)

Тепер виконаємо алгебраїчні перетворення відповідно до перетворень структурної схеми. Введемо означення для передаточних функцій заданої схеми (дивимось на рис. 1).

$$W_1(s) := \frac{k}{T_1 \cdot s + 1} \quad W_2(s) := \frac{s}{T_2 \cdot s + 1} \quad W_3(s) := \frac{1}{s}$$

Знову-таки дивимось одночасно на рис. 1 та рис. 2 і запишемо

$$W_{para}(s) := W_1(s) + W_2(s)$$

$$W_{para}(s) \rightarrow \frac{k}{T_1 \cdot s + 1} + \frac{s}{T_2 \cdot s + 1} \text{ simplify } \rightarrow \frac{k \cdot T_2 \cdot s + k + T_1 \cdot s^2 + s}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$$

$$\frac{(k \cdot T_2 \cdot s + k + T_1 \cdot s^2 + s)}{[(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)]} \text{ collect, s} \rightarrow \frac{T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$$

Отримали першу ланку для еквівалентної схеми на рис. 3 і згадали, що світові стандарти забороняють виконувати алгебраїчні перетворення вручну (помилки коштують дорого).

$$W_{\text{para}}(s) := \frac{[T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}; \quad W_{\text{zvzv}}(s) := \frac{W_3(s)}{1 - W_3(s) \cdot W_2(s)};$$

$$W_{\text{zvzv}}(s) \rightarrow \frac{1}{s \cdot \left(1 - \frac{1}{T_2 \cdot s + 1}\right)} \text{ simplify} \rightarrow \frac{T_2 \cdot s + 1}{s^2 \cdot T_2}; \quad W_{\text{zvzv}}(s) := \frac{(T_2 \cdot s + 1)}{s^2 \cdot T_2}.$$

Знову дивимось, але тільки на рис. 2, і записуємо передаточну функцію  $y(s)$  за  $q(s)$  розімкнутої системи

$$W_{\text{yqRoz}}(s) := W_{\text{para}}(s) \cdot W_{\text{zvzv}}(s); \quad W_{\text{yqRoz}}(s) \rightarrow \frac{[T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot s^2 \cdot T_2}$$

Дивимось, тепер у підручник з ТАУ (частина 1), і записуємо передаточну функцію замкненої системи:

$$W_{\text{yqZam}}(s) := \frac{W_{\text{yqRoz}}(s)}{(1 + W_{\text{yqRoz}}(s))}$$

і передаточну функцію для помилки за вхідним сигналом:

$$W_{\varepsilon q}(s) := \frac{1}{(1 + W_{\text{yqRoz}}(s))};$$

$$W_{\varepsilon q}(s) \left\{ \begin{array}{l} \text{expand, s} \\ \text{simplify} \rightarrow (T_1 \cdot s + 1) \cdot s^2 \cdot \frac{T_2}{[s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]} \\ \text{collect, s} \end{array} \right.;$$

$$W_{\varepsilon q}(s) := \frac{T_2 \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot s^2}{[s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}.$$

А тепер трошки теорії і математики: розкладемо рівняння для похибки в степеневий ряд за змінною  $s$

$$W_{\varepsilon q}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{q(s)}; \quad \varepsilon(s) = W_{\varepsilon q}(s) \cdot q(s); \quad \varepsilon(s) = (C_0 + C_1 \cdot s + C_2 \cdot \frac{s^2}{2} + \dots) \cdot q(s). \quad (1)$$

Загальновідомо, що коефіцієнти степеневого ряду визначаються так:

$$C0 = W_{\varepsilon q}(s); C1 = \frac{d}{ds} W_{\varepsilon q}(s); C2 = \frac{d^2}{ds^2} W_{\varepsilon q}(s); C3 = \dots$$

В цих формулах потрібно підставити  $s = 0$ , що відповідає усталеному стану. Виконаємо цю підстановку за допомогою символного процесора.

$$W_{\varepsilon q}(s) \text{ substitute } s = 0 \rightarrow 0, \text{ тобто отримали } C0 = 0.$$

Іноді символний процесор «гальмує і не доганяє», тому «підкладемо» йому явний вираз

$$(T1 \cdot s + 1) \cdot s^2 \cdot \frac{T2}{[s^3 \cdot T2 \cdot T1 + (T1 + T2) \cdot s^2 + (k \cdot T2 + 1) \cdot s + k]} \text{ substitute } s = 0 \rightarrow 0$$

Тепер ми повинні знайти вирази для похідних, підставити туди  $s = 0$ . Це якщо ми не озброєні символним процесором. Зробимо спочатку так:

$$\frac{d}{ds} W_{\varepsilon q}(s) \text{ simplify} \rightarrow T2 \cdot s \cdot \frac{(T1^2 \cdot s^3 + 2 \cdot T1 \cdot s^2 \cdot k \cdot T2 + 2 \cdot T1 \cdot s^2 + 3 \cdot T1 \cdot s \cdot k + k \cdot T2 \cdot s + s + 2 \cdot k)}{(s^3 \cdot T2 \cdot T1 + T1 \cdot s^2 + s^2 \cdot T2 + k \cdot T2 \cdot s + s + k)^2}$$

Бачимо на власні очі множник  $s$ , який «обнуляє» увесь вираз, але не віримо їм (очам) і записуємо: (похідна, якщо підставити  $s = 0$ , дорівнює нулю)

$$\frac{d}{ds} W_{\varepsilon q}(s) \text{ substitute } s = 0 \rightarrow 0, \text{ таким чином } C1 = 0.$$

Виявляється, що такі можна і не знаходити вирази для похідних, а прямо записувати загальні вирази, а комп'ютер зробить усю рутину роботи:

$$\frac{d^2}{ds^2} W_{\varepsilon q}(s) \text{ substitute } s = 0 \rightarrow 2 \cdot \frac{T2}{k}; \text{ – маємо ненульовий коефіцієнт } C2 = 2 \cdot T2/k.$$

**Так це і є власне розв'язок задачі, який було видно ще спочатку** – подивіться на вираз для передаточної функції розімкнутої системи – бачимо  $s^2$  у знаменнику – система має астатизм другого порядку і відпрацьовує постійні і лінійно зростаючі сигнали без усталених похибок.

$$W_{yqRoz}(s) \rightarrow \frac{[T1 \cdot s^2 + (k \cdot T2 + 1) \cdot s + k]}{(T1 \cdot s + 1) \cdot s^2 \cdot T2}$$

Доведемо задачу до кінця. Виконаємо обернене перетворення Лапласа від розкладення виразу для похибки в степеневий ряд (1)

$$\varepsilon(s) = \left( C0 + C1 \cdot s + C2 \cdot \frac{s^2}{2} \dots + \dots \right) \cdot q(s) \implies \varepsilon(t) = C0 \cdot q(t) + C1 \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{C2}{2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) \dots$$

Для нашої конкретної задачі маємо:  $C_0 = 0$ ;  $C_1 = 0$ ;  $C_2 = 2 \cdot T_2$ , тому:

$$\varepsilon(t) = 0 \cdot q(t) + 0 \cdot \frac{d}{dt} q(t) + 2 \cdot \frac{T_2}{k} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) \dots,$$

тобто «максимальне ціле число  $\mu$ , при якому для вхідного сигналу  $q = t^\mu$  усталена похибка стеження  $\varepsilon$  в системі буде дорівнювати нулю», **дорівнює одиниці –  $\mu = 1$** .

У випадку, коли система нелінійна, то єдиним універсальним засобом визначення астатизму є моделювання. То ж промодельюємо систему.

### Моделювання САУ

Беремо передаточну функцію замкненої системи, виконуємо обернене перетворення Лапласа – отримуємо дифрівняння системи.

$$\text{WyqZam}(s) := \frac{\text{WyqRoz}(s)}{(1 + \text{WyqRoz}(s))};$$

$$\frac{\text{WyqRoz}(s)}{(1 + \text{WyqRoz}(s))} \left\{ \begin{array}{l} \text{expand, s} \\ \text{simplify} \\ \text{collect, s} \end{array} \right. \rightarrow \frac{[T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}{[s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]};$$

$$\text{WyqZam}(s) = \frac{[T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}{[s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}.$$

Обернене перетворення Лапласа:

$$T_2 \cdot T_1 \cdot \frac{d^3}{dt^3} y + (T_1 + T_2) \cdot \frac{d^2}{dt^2} y + (k \cdot T_2 + 1) \cdot \frac{d}{dt} y + k \cdot y = T_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} q + (k \cdot T_2 + 1) \cdot \frac{d}{dt} q + k \cdot y. \quad (2)$$

Дифрівняння системи зводимо до форми Коші – вводим нові змінні:  $x_1 = y$ ;

$$x_2 = \frac{d}{dt} y; \quad x_3 = \frac{d^2}{dt^2} y, \text{ записуємо канонічну систему дифрівнянь: } \frac{d}{dt} x = A \cdot x + B \cdot q,$$

$$\text{де } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-kK}{T_2 \cdot T_1} & \frac{-(kK \cdot T_2 + 1)}{(T_2 \cdot T_1)} & -\left[ \frac{(T_1 + T_2)}{(T_2 \cdot T_1)} \right] \end{bmatrix}; \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad kK = 1.$$

Побудуємо еквівалентну дискретну модель динаміки:

$$x^{(k+1)} = F_2(T) \cdot x^{(k)} + G_2(T) \cdot B \cdot q_k.$$

Записуємо компоненти ПФС (перехідної функції стану) для цієї моделі. Беремо наближення 2-го порядку:

$$F2(T) := \text{identity}(3) + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!}; \quad G2(T) := \text{identity}(3) \cdot T + A \cdot \frac{T^2}{2!}.$$

Задаємо число кроків, крок обчислень, початковий стан

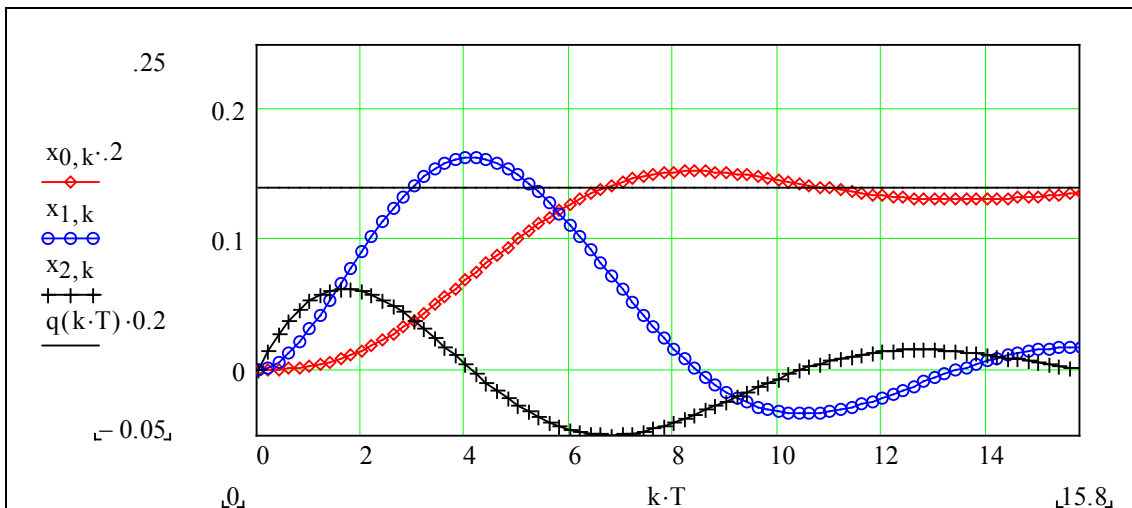
$$\text{ORIGIN} := 0 \quad \text{Kh} := 125 \quad \text{Period} := 25 \quad \text{Xo} := 0 \quad k := 0..Kh-1 \quad T := \frac{\text{Period}}{\text{Kh}}.$$

### Реакція на постійний сигнал

Ретельно записуємо вхідну функцію  $U_{lin}(t)$  – праву частину виразу (2). Створюємо зону введення параметрів  $T1, T2, k$  – це дає можливість експериментувати.

$$x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{q(t) := 0.7} \quad U_{lin}(t) := \frac{Tt1}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) + \frac{(kK \cdot Tt2 + 1)}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{kK}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot q(t)$$

$$Tt1 \equiv 1 \quad Tt2 \equiv 1 \quad kK \equiv 1 \quad x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot U_{lin}(k \cdot T)$$



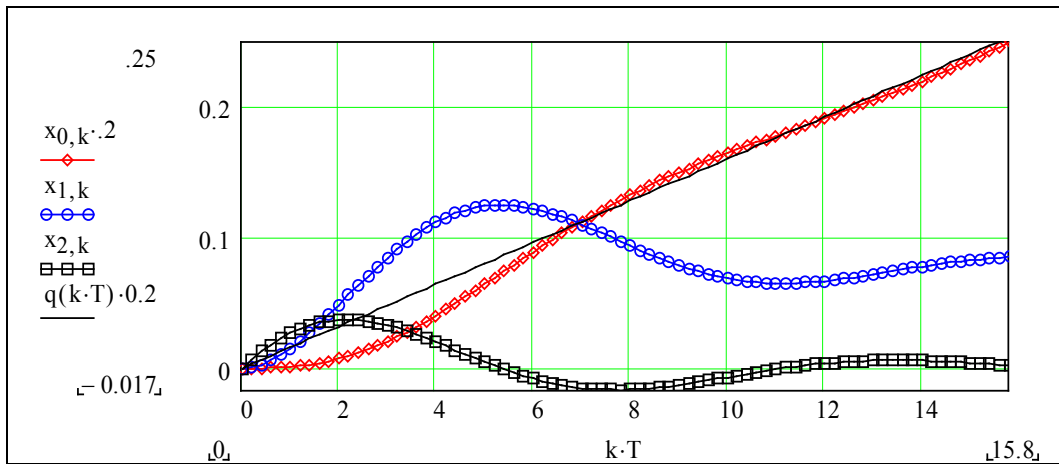
Ми навмисне зробили систему коливальною. Неважко перевірити, що похибка усталеного стану близька до нуля:  $x_{0, Kh} = 0.685$ .

### Реакція на лінійно зростаючий сигнал

Замінюємо вхідний сигнал  $q$  і маємо те, що показано.

$$x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{q(t) := 0.08 \cdot t} \quad U_{lin}(t) := \frac{Tt1}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) + \frac{(kK \cdot Tt2 + 1)}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{kK}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot q(t)$$

$$Tt1 \equiv 3 \quad kK \equiv 1 \quad x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot U_{lin}(k \cdot T)$$



Бачимо, що САУ без усталеної похибки відпрацьовує лінійно зростаючий сигнал.

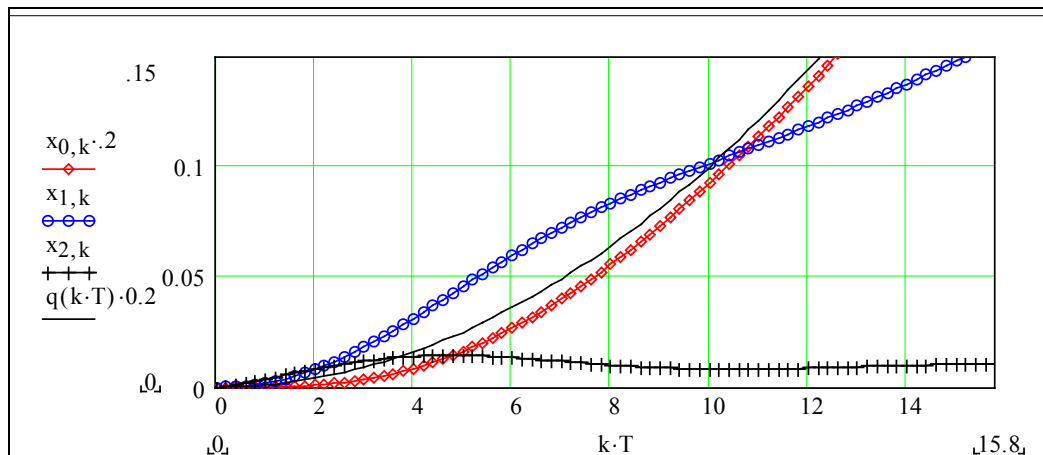
### Реакція на квадратично зростаючий сигнал

Знову підправляємо вхідний сигнал  $q$  і маємо те, що показано.

$$q(t) := 0.005 \cdot t^2$$

$$U_{lin}(t) := \frac{Tt_1}{Tt_2 \cdot Tt_1} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) + \frac{(kK \cdot Tt_2 + 1)}{Tt_2 \cdot Tt_1} \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{kK}{Tt_2 \cdot Tt_1} \cdot q(t)$$

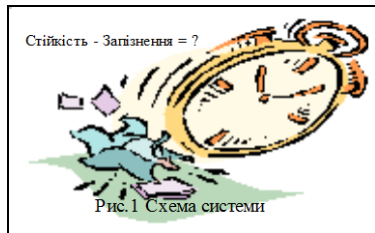
$$Tt_2 \equiv 6 \quad kK \equiv 1 \quad x^{(k+1)} := F_2(T) \cdot x^{(k)} + G_2(T) \cdot B \cdot U_{lin}(k \cdot T)$$



Бачимо, що квадратичний сигнал відпрацьовується з постійної похибкою  $2 \cdot Tt_2$ .

### Контрольні запитання

1. Визначте поняття «астатизм», «порядок астатизму».
2. Як визначити усталену похибку САУ?
3. Запишіть передаточну функцію для похибки за вхідним сигналом.
4. Чи можна за передаточною функцією САУ визначити без складних обчислень усталену похибку при постійному вхідному сигналі?

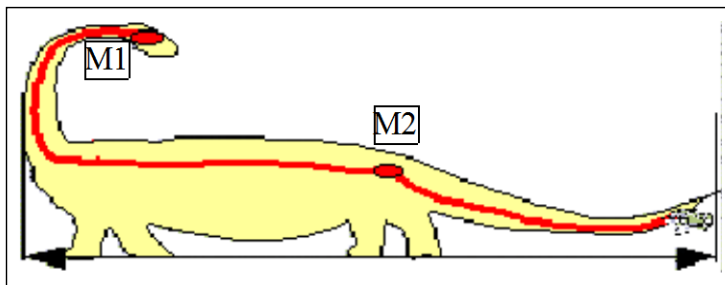


### 3.3 Дослідження стійкості САУ. Стійкість САУ із запізненням

#### Вступ

Ціль № 1 даної роботи – набуття навичок у аналізуванні стійкості систем із запізненням.

Ціль № 2 – освоєння сучасних засобів і технологій автоматизації праці інженера. Сьогодні спеціаліст, коли йому треба розв'язати якусь задачу, знаходить або розробляє зручну діалогову програму для розв'язання **цілого класу задач**. От тому ціль № 3 цієї роботи – розробка саме *зручної діалогової програми* для аналізу стійкості систем із запізненням. А чи актуальна ця тема для народного господарства взагалі і для кожного з нас окремо? Розглянемо відповідний актуальний приклад.

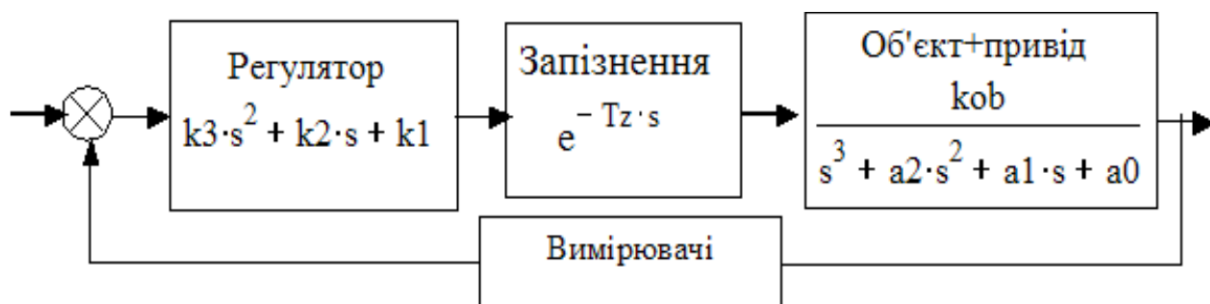


Давні ящери мали довжину до 25 метрів, а швидкість передачі нервових імпульсів, як і в нас, 5 м/с. Відомості про певні події доходили до центра управління (голови) із запізненням 5-10 с. Тому у цих ящерів сформувався додатковий мозок (у відповідному місці) для оперативного управління відповідною частиною тіла. Як відомо, це їм не допомогло вижити.

Запізнення в САУ виникає при передачі сигналів по каналах зв'язку в розподілених системах управління, при транспортуванні матеріалів конвеєрами, енергії та тепла трубопроводами, при обробці даних в ЦОМ, у виробництві (реактори, технологічні установки..) і в багатьох інших випадках. Запізнення змінює поведінку динамічної системи – спричиняє до коливань і, навіть, до втрати стійкості. У цій роботі аналіз стійкості систем із запізненням виконується за допомогою критерію стійкості Найквіста. Нагадуємо, що цей критерій відноситься до групи частотних і використовує характеристику, яку легко отримати експериментально або аналітично – амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ) розімкненої САУ.

Рівняння елемента запізнення має вигляд:  $X_{вих}(t) = X_{вих}(t - Tz)$ .

Передаточна функція елемента запізнення буде:  $W_{zap}(s) = 1e^{-Tz \cdot s}$ , ось чому:  $W_{zap}(j \cdot \omega) = A(\omega) \cdot e^{j \cdot \phi(\omega)}$  тому АЧХ елемента запізнення  $A(\omega) = 1$ ; а ФЧХ  $\phi(\omega) = -Tz \cdot \omega$ . Задано структурну схему САУ та передаточні функції її елементів:





На цій структурній схемі елемент запізнення розташований після регулятора. Це можна інтерпретувати і як запізнення управління, і як запізнення в об'єкті. Виникає питання: «Чи залежать частотні характеристики та стійкість лінійної САУ від положення елемента управління?» В лінійних системах – не залежать.

### Завдання

1. Побудувати для заданого варіанта графіки АФЧХ та ЛЧХ системи із запізненням. 8 б
2. Визначити граничне запізнення і запаси стійкості альтернативними методами. 14 б
3. Побудувати серії АФЧХ та перехідних процесів для ряду запізнень. 20 б
4. Запропонувати методи компенсації впливу запізнень. 20–70 б

### Варіанти параметрів передаточних функцій

vd :=	{	"Варіант:"	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	a0, a1, a2 - параметри об'єкта управління. k1, k2, k3 - параметри регулятора Tz - сумарне запізнення в різних ланках системи.
		"Tz"	1	-2	1	1	0	-1	1	-3	2	0	0	2	1	
		"a1"	1	2	3	2	2	2	2	2	2	0	0	-1	4	
		"a2"	1	-2	3	2	2	2	3	1	2	3	2	1	1	
		"k1"	2	3	0	3	3	2	3	2	1	3	2	3	2	
		"k2"	1	2	0	4	1	2	3	4	5	6	7	8	1	
		"k3"	2	3	2	4	3	1	5	2	2	3	3	4	4	

Параметри a0 := 1 та kob := 1- ОДНАКОВІ ДЛЯ УСІХ ВАРІАНТІВ

**Реєстрація.** Введіть (в лапках, замість зрачка) своє прізвище. **Прб := "Жерстюк В.О."**

**Повідомлення**"Ваше прізвище Жерстюк В.О.? Ви вт"

### Методичні вказівки до виконання роботи

#### 1. Побудова АФЧХ

Дивимось на структурну схему і записуємо вирази для передаточних функцій елементів САУ: регулятора: об'єкта: та запізнення:

$$W_{reg}(s) := k3 \cdot s^2 + k2 \cdot s + k1$$

$$W_{ob}(s) := \frac{kob}{s^3 + a2 \cdot s^2 + a1 \cdot s + a0}$$

$$W_{zap}(s) := e^{-Tz \cdot s}$$

Отримаємо спочатку характеристики САУ без запізнення. Вони будуть для нас базовими, еталонними. Вплив запізнення ми будемо оцінювати порівнянням характеристик САУ із запізненням з цими еталонними.

Передаточна функція розімкненої САУ без запізнення:  $W_{roz}(s) := W_{reg}(s) \cdot W_{ob}(s)$ .

$$W_{roz}(s) \rightarrow \frac{(k3 \cdot s^2 + k2 \cdot s + k1)}{(s^3 + a2 \cdot s^2 + a1 \cdot s + 1)} \quad (1)$$

Передаточна функція розімкненої САУ із запізненням:

$$W_{pz}(s) := W_{reg}(s) \cdot W_{ob}(s) \cdot W_{zap}(s),$$

$$W_{pz}(s) \rightarrow \frac{k_3 \cdot s^2 + k_2 \cdot s + k_1}{s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1} \cdot \exp(-.35 \cdot s). \quad (2)$$

Для аналізу стійкості за критерієм Найквіста потрібно побудувати годограф функції  $W_{roz}(j \cdot \omega)$ . Це можна зробити двома способами:

*Альтернатива 1.* Залежність уявної  $\text{Im}(W_{roz}(j \cdot \omega))$  від дійсної частини  $\text{Re}(W_{roz}(j \cdot \omega))$  – графік в декартових координатах.

*Альтернатива 2.* Залежність модуля  $|W_{roz}(j \cdot \omega)|$  (це АЧХ) від аргумента  $\arg(W_{roz}(j \cdot \omega))$  (це ж ФЧХ) – графік в полярних координатах.

Вводимо згідно з варіантом значення параметрів об'єкта:  $a_2 := 1$ ;  $a_1 := 1.6$ ;  $a_0 := 1$ ;  $kob := 1$ ; параметрів регулятора:  $k_3 := 2$ ;  $k_2 := 3.2$ ;  $k_1 := 6$  і запізнення (ритуально, бо дійсне введення далі, на стенді)  $T_z = 0.35$ .

Тепер, коли задано числові значення, записуємо вирази для передаточних функцій (1) і (2), що були отримані за допомогою символічного процесора. *Нагадуємо, що ми пишемо програми, програмуємо мовою «Сі», але непрямо. За словом «записуємо» стоїть визначення функції користувача, фактично – підпрограми.* Передаточна функція розімкненої САУ без запізнення:

$$W_{roz}(s) := \frac{kob \cdot (k_3 \cdot s^2 + k_2 \cdot s + k_1)}{(s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0)}. \quad (3)$$

Передаточна функція розімкненої САУ із запізненням:  $j := \sqrt{-1}$

$$W_{pz}(s) = W_{roz}(s) \cdot e^{-T_z \cdot s}; \quad W_{pz}(s) := \frac{kob \cdot (k_3 \cdot s^2 + k_2 \cdot s + k_1) \cdot e^{-T_z \cdot s}}{(s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0)}. \quad (4)$$

Записуємо уявні і дійсні частини відповідних передаточних функцій. Тут ми використовуємо вбудовані функції пакета. Наші функції введено в методичних цілях і для скорочення відповідних виразів.

Без запізнення:

$$I(\omega) := \text{Im}(W_{roz}(j \cdot \omega))$$

$$R(\omega) := \text{Re}(W_{roz}(j \cdot \omega))$$

З запізненням:

$$I_z(\omega, T_z) := \text{Im}(W_{roz}(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot T_z})$$

$$R_z(\omega, T_z) := \text{Re}(W_{roz}(j \cdot \omega) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot T_z})$$

**Контроль результатів.** А тепер визначаємо для контролю уявні і дійсні частини альтернативними способами. *Не довіряйте! Не тільки собі, іншим – теж. І в пакетах теж можуть бути помилки і «особливості».*

Амплітудна і фазова частотні характеристики САУ без запізнення

$$A(\omega) := |W_{roz}(j \cdot \omega)|; \quad \phi(\omega) := \arg(W_{roz}(j \cdot \omega)).$$

*Перша альтернатива.* Згадуємо з курсу математики: «модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів множників, аргумент добутку – сумі аргументів множників», тобто:

$$A_1 \cdot e^{j \cdot f_1} \cdot A_2 \cdot e^{j \cdot f_2} \text{ simplify } \rightarrow A_1 \cdot A_2 \cdot \exp[1i \cdot (f_1 + f_2)].$$

Для нашого випадку маємо

$$W_{1roz}(j, \omega) := A(\omega) \cdot e^{j \cdot \phi(\omega)}; \quad W_{1pz}(j, \omega) := A(\omega) \cdot e^{j \cdot (\phi(\omega) - \omega \cdot T_z)}$$

Враховуємо:

$$a \cdot e^{j\omega} = a \cdot \cos(\omega) + a \cdot j \cdot \sin(\omega).$$

Отримуємо:

$$I1z(\omega, Tz) := A(\omega) \cdot \sin(\phi(\omega) - \omega \cdot Tz); \quad R1z(\omega, Tz) := A(\omega) \cdot \cos(\phi(\omega) - \omega \cdot Tz).$$

Друга альтернатива. Вираз  $Wp3z(j \cdot \omega) = Wp03(j \cdot \omega) \cdot e^{-Tz \cdot j \cdot \omega}$  можна подати як добуток комплексних чисел:

$$(a + b \cdot j) \cdot (c + d \cdot j) \text{ expand} \rightarrow a \cdot c + 1i \cdot a \cdot d + 1i \cdot b \cdot c - b \cdot d.$$

Використовуємо символний процесор:

$$a \cdot c + i \cdot a \cdot d + i \cdot b \cdot c - b \cdot d \text{ collect, i} \rightarrow (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i + a \cdot c - b \cdot d.$$

Отримуємо:

$$I2z(\omega, tz) := -R(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot tz) + I(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot tz),$$

$$R2z(\omega, tz) := R(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot tz) + I(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot tz).$$

Перевіряємо, дивимося чи збігаються результати? Багатоверсійні обчислення не є ритуалом – завдяки цьому контролю знайдено загублений мінус у базовому виразі.

**Контроль № 1 – для вас.** Знайдіть і виправте помилку у виразах.

$$Iz(1, .2) = -5.474$$

$$Rz(1, .2) = 3.903$$

$$I1z(1, .2) = -7.593 \quad I2z(1, .2) = -7.593 \quad R1z(1, .2) = 3.903 \quad R2z(1, 0.2) = 3.903.$$

Повідомлення = "Ваше прізвище Жерстюк В.О.? Ви впевнені? "

Результат\_пошуку\_помилки = "завдання не виконано"

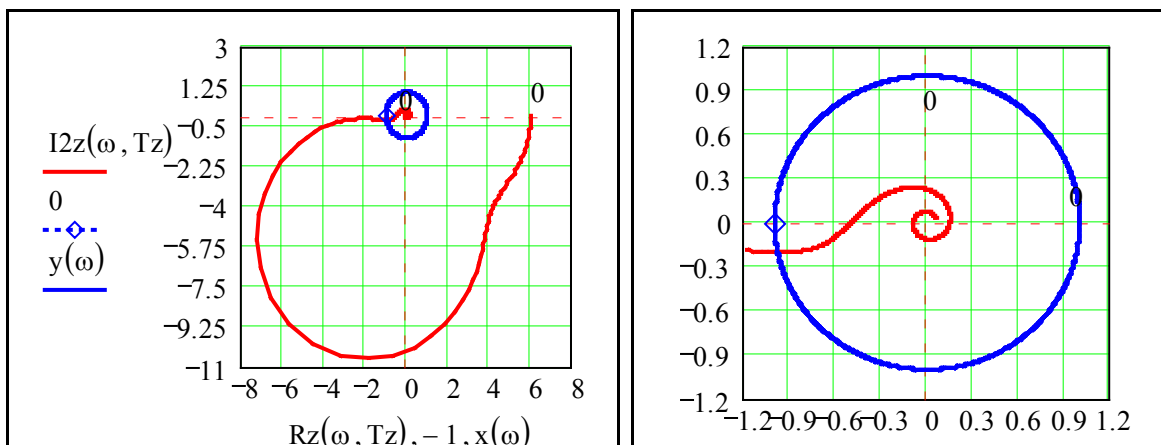
Побудуємо графіки АФЧХ системи із запізненням. Вводимо послідовно: допоміжні змінні для побудови одиничного кола, діапазон частот і, головне, – запізнення

$$y(\omega) := \sin(\omega) \quad x(\omega) := \cos(\omega) \quad \omega := 0, .02..30 \quad \text{ORIGIN} := 1 \quad Tz \equiv .35$$

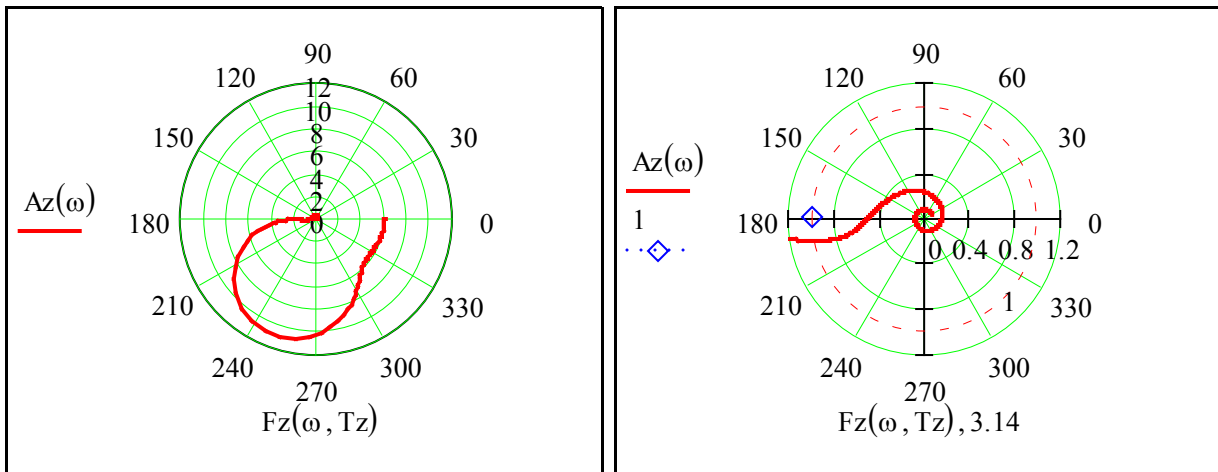
Записуємо робочі формули для частотних характеристик  $A(\omega)$ ,  $F(\omega)$ .

$$A(\omega) := |Wp03(i \cdot \omega)| \quad Az(\omega) := A(\omega) \quad Az(\omega) := |Wraz(i \cdot \omega) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot tz)|$$

$$F(\omega) := \arg(Wp03(i \cdot \omega)) \quad Fz(\omega, Tz) := F(\omega) - Tz \cdot \omega \quad Fz(\omega) := \arg(Wraz(i \cdot \omega) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot tz)).$$



**Контроль № 2 – для вас.** Побудуйте на цих графіках також частотні характеристики без запізнення – для попереднього порівняльного аналізу.



Тут подана альтернативна форма побудови графіків – у полярних координатах.

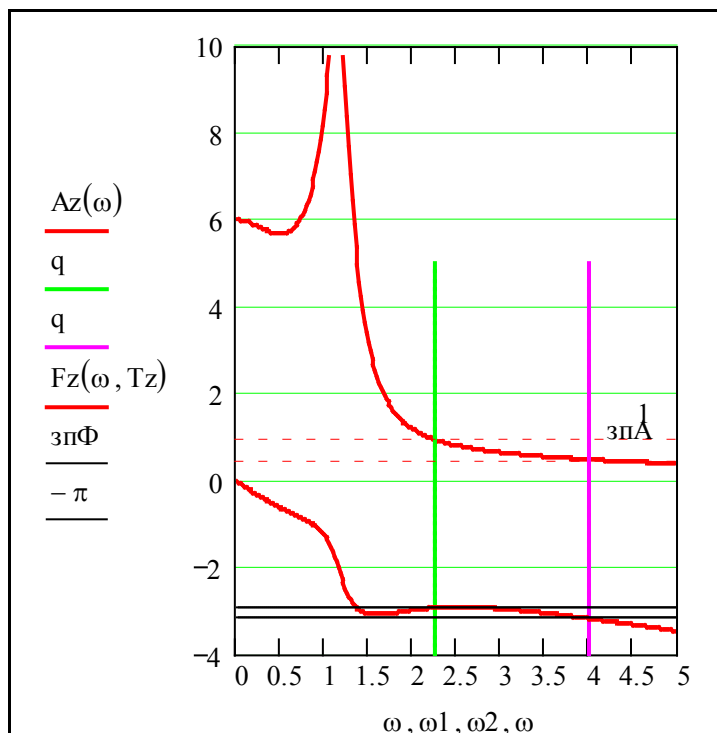
**Контроль № 3 – для вас.** Побудуйте на цих графіках маркери: **mark1 := 33;** **mark2 := 3.14**, що проходять через точки АФЧХ, де  $F(\omega) = -180^\circ$ ,  $A(\omega) = 1$ .

### 2а. Визначення запасів стійкості за амплітудою і фазою

Спочатку, для кращого освоєння та осмислення, визначимо запаси стійкості пошуковим методом (=вручну), а потім – як результат розв'язання певних рівнянь.

$$\omega_1 := 2.25 \quad \omega_2 := 4 \quad \text{зп}\Phi := -2.9 \quad \text{зп}A := 0.51 \quad q := -10, -9.8..5 \quad Tz = 0.35$$

$$\text{запас}\Phi := -(-\pi - \text{зп}\Phi) \quad \text{запас}A := 1 - \text{зп}A \quad \text{запас}\Phi = 0.242 \quad \text{запас}A = 0.49$$



**Контроль №4 - для вас.** У вашому розпорядженні чотири параметри  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , зп $\Phi$ , зп $A$ . Що це, як розшифровуються назви цих змінних (ви повинні знати). Тут же (вище) виводяться запас стійкості за Фазою і запас стійкості за Амплітудою.

**Ваша задача:** змінювати положення вертикальних і горизонтальних прямих (маркерів) так, щоб вони пройшли через певні характерні точки. (Зелену - на одиницю АЧХ, червону - на останнє  $-\pi$  ФЧХ). По координатах цих точок обчислюються запаси стійкості. Їх треба визначити з максимальною точністю. Як це зробити: змінити масштаби на графіках та ін.

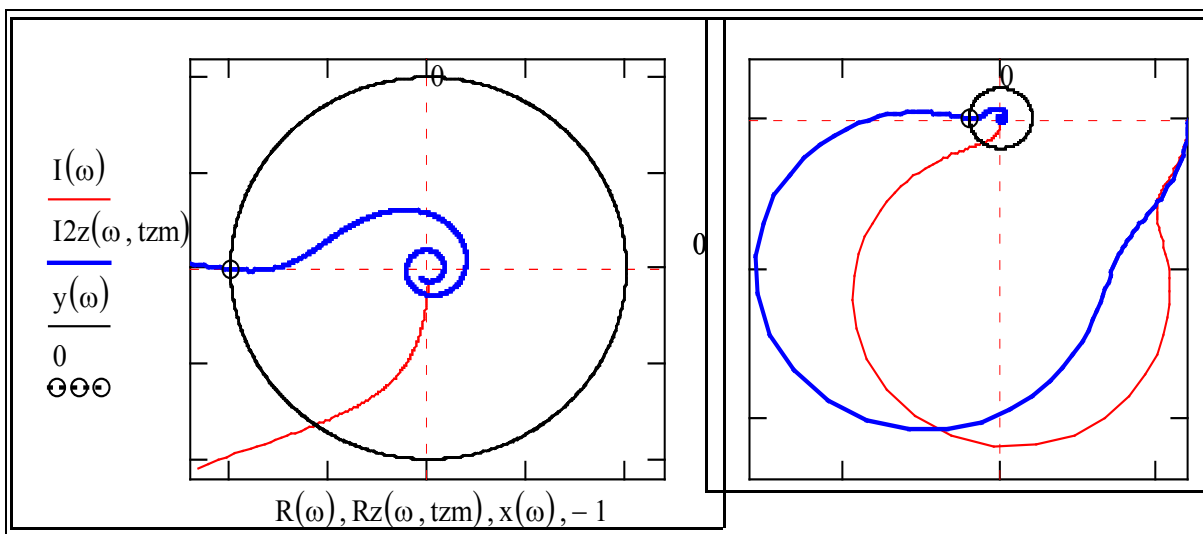
**Ваші проблеми.** Там, далі буде виставлена оцінка за це завдання.

Увага – в електронній книзі, праворуч, за полями, АЧХ, ФЧХ подано на окремих графіках.

## 2б. Визначення максимального запізнення

Типовою задачею аналізу систем автоматичного управління є визначення граничного, тобто максимального, запізнення, при якому система ще стійка (знаходиться на границі стійкості). Для систем невисокого порядку максимальне запізнення можна визначити у вигляді аналітичних виразів – формул, для складніших систем можна знайти його числовими методами. Для будь-яких систем, які можна моделювати на ЦОМ, максимальне запізнення можна визначити експериментально (обчислювальним експериментом).

**Контроль № 5 – для Вас.** У вашому розпорядженні один параметр –  $t_{zm}$  – максимальне запізнення. *Ваша задача* – підібрати значення цієї змінної так, щоб АФЧХ проходила через певну точку (що це за точка і чому через цю точку – ви повинні знати – дивись критерій Найквіста). Значення  $t_{zm}$  треба знайти з максимальною точністю. Там, далі, вам буде виставлена оцінка за це завдання.  $t_{zm} := .44$ ,  $T_z = 0.35$ .



Проаналізуємо те, що отримали. Якщо запізнення має розкид або відоме з певним допуском, то розкид або допуск мають не перевищувати  $(t_{zm} - T_z) \div T_z = 26\%$  – інакше система стає нестійкою (а  $\div$  б – це альтернативна форма операції «розділити»).

## 2в. Визначення максимального запізнення числовим методом

Подивимось на графіки вгорі, згадаємо висновок і формулювання критерію Найквіста та запишемо умови, що виконуються для граничної точки. Словесно це: 1) «уявна складова на критичній частоті і при критичному запізненні дорівнює нулю»; 2) «дійсна складова дорівнює -1». Для розв'язання цієї системи рівнянь використовуємо вбудовану функцію розв'язання систем алгебраїчних рівнянь.

*Зауваження.* Наша система рівнянь має декілька розв'язків. Треба задати початкові значення змінних поближче до розв'язків. Ці значення можна знайти на відповідних графіках (де саме?). Вводимо початкові значення:  $tZ := 0.4$ ;  $w := 3$ .

Дано: система рівнянь Given  $I_{2z}(w, tZ) = 0$ ;  $Rz(w, tZ) = -1$

$$\text{Що шукаємо: } \begin{pmatrix} \omega 1s \\ T1z \end{pmatrix} := \text{Find}(w, tZ). \text{ Відповідь: } \begin{pmatrix} \omega 1s \\ T1z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.176 \\ 0.443 \end{pmatrix} \quad (5)$$

**Контроль № 6 – для Вас.** Далі подано ще дві альтернативи знаходження максимального запізнення (закрито паролем). Напишіть самостійно ці модулі, виходячи з словесних описів рівнянь.

**Контроль обчислень.** Подаємо альтернативне розв'язання на базі іншої системи рівнянь. Записуємо умови для координат тієї ж точки, але в полярних координатах. Ось словесне формулювання: 1) модуль дорівнює одиниці; 2) фаза дорівнює  $-\pi$ .

Записуємо розв'язувальний блок Given  $A(w) = 1; Fz(w, tZ) = -\pi$ .

$$\text{Що шукаємо: } \begin{pmatrix} \omega 2s \\ T2z \end{pmatrix} := \text{Find}(w, tZ); \text{ Відповідь: } \begin{pmatrix} \omega 2s \\ T2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.176 \\ 0.443 \end{pmatrix} \quad (6)$$

**Контроль обчислень.** Подаємо ще одне альтернативне розв'язання на базі вбудованої функції пакета root(вираз(x),x) для знаходження нульового кореня рівняння: вираз(x) = 0. Спочатку знаходимо частоту  $\omega 1r$ , на якій АЧХ дорівнює 1 (АЧХ не залежить від запізнення). Потім записуємо вираз для ФЧХ системи із запізненням (5)  $Fz(\omega, Tz) = F(\omega) - Tz \cdot \omega$ , підставляємо туди знайдену частоту  $\omega 1r$  і визначаємо запізнення  $T2z$ , при якому ФЧХ дорівнює  $-\pi$ . Можна знайти явний вираз за допомогою символного процесора

$Ff(w1) - T2z \cdot w1 = -\pi$  solve,  $w1 \rightarrow$ , але зробимо це за допомогою функцій root(.)

$$\omega 3s := \text{root}[(A(\omega 1) - 1), \omega 1]; T3z := \text{root}[(F(\omega 3s) - Tz \cdot \omega 3s + \pi), Tz]$$

Тепер виводимо результати, отримані альтернативними методами. Збігається? – ОК

$$\omega 1s = 2.611 ; \omega 2s = 2.611 ; \omega 3s = 2.611 ; T1z = 0.49 ; T2z = 0.49 ; T3z = 0.49 .$$

$$\omega 1 = 2.25 \leftarrow \text{Оце знайдено вами} \Rightarrow tzm = 0.44 .$$

Визначаємо частоту, на якій ФЧХ дорівнює  $-\pi$ : і порівнюємо з тим, що визначено пошуком – по графіках  $\omega 2r := \text{root}[(Fz(\omega 1, Tz) + \pi), \omega 1]; \omega 2r = 3.986 ; \omega 2 = 4 .$

Визначаємо запаси стійкості за частотою і амплітудою та порівнюємо з тим, що визначено пошуком

$$zpF := \pi + Fz(\omega 1s, Tz); zpF = 0.366 ; \text{запасФ} = 0.242 .$$

$$zpA := 1 - A(\omega 2r); zpA = 0.458 ; \text{запасА} = 0.49 .$$

**Запитання.** Звідки взяли ці формули? Подивіться на графіки пункту 2а «Визначення запасів стійкості за амплітудою і фазою». Очевидно, що:

**запас за фазою – це скільки ще залишається до зсуву по фазі у  $-\pi$ , коли АЧХ = 1;**

**запас за амплітудою – це скільки ще залишається АЧХ до 1, коли ФЧХ =  $-\pi$ .**

Результат\_пошуку\_помилки = "завдання не виконано"

Тут оцінюються: пошук помилки в документі, точність знаходження значень $\omega 1, tzm, \omega 2, \text{запасФ}, \text{запасА}$ . Оцінка за програмні модулі окремо.	remiz2 =		1	%	Оцінка_за_настроєння = 11 балів
		1	3.4		
		2	0.6		
		3	3.4		
		4	19.8		
		5	1.7		

Додаткові бали можна набрати виконанням факультативних завдань.



# 4

## Оцінювання якості регулювання за перехідними процесами. Альтернативні критерії

У цьому розділі розглядаються:

- ✓ Альтернативні інтегральні критерії оптимальності САУ.
- ✓ Показники якості перехідних процесів – тривалість, викид та ін.
- ✓ Порівняльний аналіз варіантів САУ, оптимальних за різними критеріями.

Після вивчення цього розділу ви **зможете:**

1. Обчислювати показники перехідного процесу: тривалість, перерегулювання (викид), максимальне зусилля (перенавантаження);
2. Обчислювати інтегральні критерії якості перехідного процесу;
3. Вибирати потрібний для конкретної ситуації управління еталонний перехідний процес – з мінімальною тривалістю, з мінімальним викидом, з мінімальним перенавантаженням, з мінімальною інтегральною квадратичною помилкою та ін.;
4. Виконувати порівняльний аналіз альтернативних варіантів САУ за комплексом інтегральних критеріїв і показників якості регулювання;
5. Будувати документи – засоби автоматизації праці розробника систем автоматичного управління – універсальні, зручні з комплексним числовим і графічним поданням вхідної і вихідної інформації;
6. Дати означення термінів:

1. Перехідний процес;	6. Стандартні коефіцієнти;
2. Тривалість перехідного процесу;	7. Стандартний розподіл коренів;
3. Викид (перерегулювання);	8. Розподіл з кратними коренями;
4. Інтегральна квадратична помилка;	9. Розподіл Баттерворта;
5. Інтегральна зважена помилка;	10. Підмножина Парето (недомінованих варіантів).





## 4.1 Критерії та методи оцінювання якості регулювання за перехідними процесами

**Ціль даної роботи** – набуття стійкої природної орієнтації в проблемі оптимізації взагалі і проблемі оптимізації САУ зокрема.

Оцінювання якості регулювання системою автоматичного управління (САУ) за перехідними процесами – один із елементів оцінки САУ при виборі кращого варіанта з множини альтернатив. Під перехідним процесом у даному підрозділі розуміємо реакцію САУ на ступінчастий вхідний сигнал. Оцінка якості САУ залежить від вимог до системи, що залежать від її призначення. Ці вимоги можуть бути подані у вигляді ідеальної або еталонної САУ. Вимоги до САУ можуть бути задані у вигляді **критеріїв оптимальності**, які бажано максимізувати чи мінімізувати. Часто критерії є функціями таких параметрів перехідного процесу (ПП):

- тривалості ПП (=САУ, оптимальні за швидкодією);
- перерегулювання швидкостей, прискорень;
- похибки в усталеному стані (= САУ, астатичні, інваріантні до різних збурень);
- інтегральних квадратичних похибок (= САУ, оптимальні для захисту дисертацій).

Для лінійних САУ за певних критеріїв можна отримати аналітичні розв'язання у вигляді **потрібних значень коефіцієнтів характеристичного рівняння** замкненої САУ. На цьому базуються **методи модального управління**, зокрема, **метод стандартних коефіцієнтів**. Типові критерії відображують якийсь один аспект вимог до САУ.

В цій роботі виконується дещо абсурдистська задача порівняння різних критеріїв оптимальності і вибір «оптимального критерію оптимальності». Але такі ситуації часто зустрічаються у житті. Наприклад, на чемпіонатах з гімнастики спочатку судді судять спортсменів, потім комісія судить суддів – наскільки об'єктивно кожен з них (згідно з власним критерієм) розставив спортсменів по сходах (до слави).

### Розглядаємо чотири альтернативи САУ:

- САУ з мінімальними прискореннями в ПП і мінімальним перерегулюванням;
- САУ з розподіленням Баттерворта, що для усіх мод має однакові власні частоти;
- САУ оптимальна за квадратичним інтегральним критерієм;
- САУ оптимальна за інтегральним зваженим критерієм.

На практиці САУ оцінюють за такими показниками-критеріями:

- тривалість перехідного процесу –  $T_p$ ;
- викид (максимальне перерегулювання) –  $h_m$ ;
- максимальне прискорення –  $u_m$ ;
- інтегральна квадратична похибка –  $I_{qv}$ ;
- інтегральна (від модуля) зважена похибка –  $I_{mz}$ ;
- стійкість перехідного процесу до варіацій параметрів САУ –  $Grb$ .

Обчислимо для кожного варіанта САУ значення усіх цих критеріїв і проведемо порівняльний аналіз і вибір. Спочатку отримаємо еквівалентну дискретну математичну модель САУ, що задана диференціальним рівнянням третього порядку.

## 4.2 Отримання базової математичної моделі САУ

Розглядаємо диференціальне рівняння у безрозмірній формі Вишнеградського. В цій формі і перший, і останній коефіцієнти диференціальних рівнянь – одиничні.

Записуємо задане диференціальне рівняння САУ:  $\frac{d^3}{dt^3}x + a_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}x + a_1 \cdot \frac{d}{dt}x + a_0 \cdot x = 0$ .

Записуємо початкові значення параметрів САУ:  $a_2 := 3$ ;  $a_1 := 3$ ;  $a_0 := 1$ ; і значення кроку квантування  $T := 0.2$ . Подаємо модель САУ у формі Коші, для чого вводимо нові змінні:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = dx/dt$ ,  $x_3 = d^2x/dt^2$ , що утворюють вектор стану  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Тоді рівняння можна подати у матрично-векторній формі:  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ , де

$$\mathbf{A}(a_2, a_1, a_0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}; \mathbf{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо наближення перехідної функції стану 1-го і 2-го порядків.

$$F_1(a_2, a_1, a_0, T) := \mathbf{I} + \mathbf{A}(a_2, a_1, a_0) \cdot T,$$

$$F_2(a_2, a_1, a_0, T) := \mathbf{I} + \mathbf{A}(a_2, a_1, a_0) \cdot T + \frac{\mathbf{A}(a_2, a_1, a_0)^2 \cdot T^2}{2!}.$$

Виводимо для контролю матриці перехідних функцій, порівнюємо.  $\text{ORIGIN} := 1$

$$F_1(a_2, a_1, a_0, T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ -0.2 & -0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \quad F_2(a_2, a_1, a_0, T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.02 \\ -0.02 & 0.94 & 0.14 \\ -0.14 & -0.44 & 0.52 \end{pmatrix}$$

Перехідна функція пов'язує значення векторів стану для двох моментів часу – наприклад,  $t$  і  $t+T$ . Далі записані рівняння для обчислення перехідних процесів альтернативних варіантів САУ. Ці рівняння відрізняються параметрами  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$  – «стандартними коефіцієнтами». Значення стандартних коефіцієнтів взято з літератури [1–5]. Задаємо початкові умови для всіх варіантів, крок обчислень, період моделювання.

$$x_1^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_4^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Period} := 10 \\ T := .25 \\ h := 1..N \end{array} \quad \begin{array}{l} N := \frac{\text{Period}}{T} \\ N = 50 \end{array}$$

Записуємо рівняння чотирьох процесів:

- 1) з кратними коренями (мінімальний (нульовий) викид, мінімальні прискорення в ПП);
- 2) з розподіленням Баттерворта, що дає процес з рівними власними частотами;

- 3) з розподіленням, оптимальним за критерієм  $J_1 = \int_0^{T_k} x(t)^2 dt$ ;

- 4) з розподіленням, оптимальним за критерієм  $J_2 = \int_0^{T_k} |x(t)| \cdot t dt$ .

В цих інтегральних критеріях  $x(t)$  – поточна похибка в ПП.

$$x1^{(h+1)} := F2(3, 3, 1, T) \cdot x1^{(h)}$$

$$x3^{(h+1)} := F2(1, 2, 1, T) \cdot x3^{(h)}$$

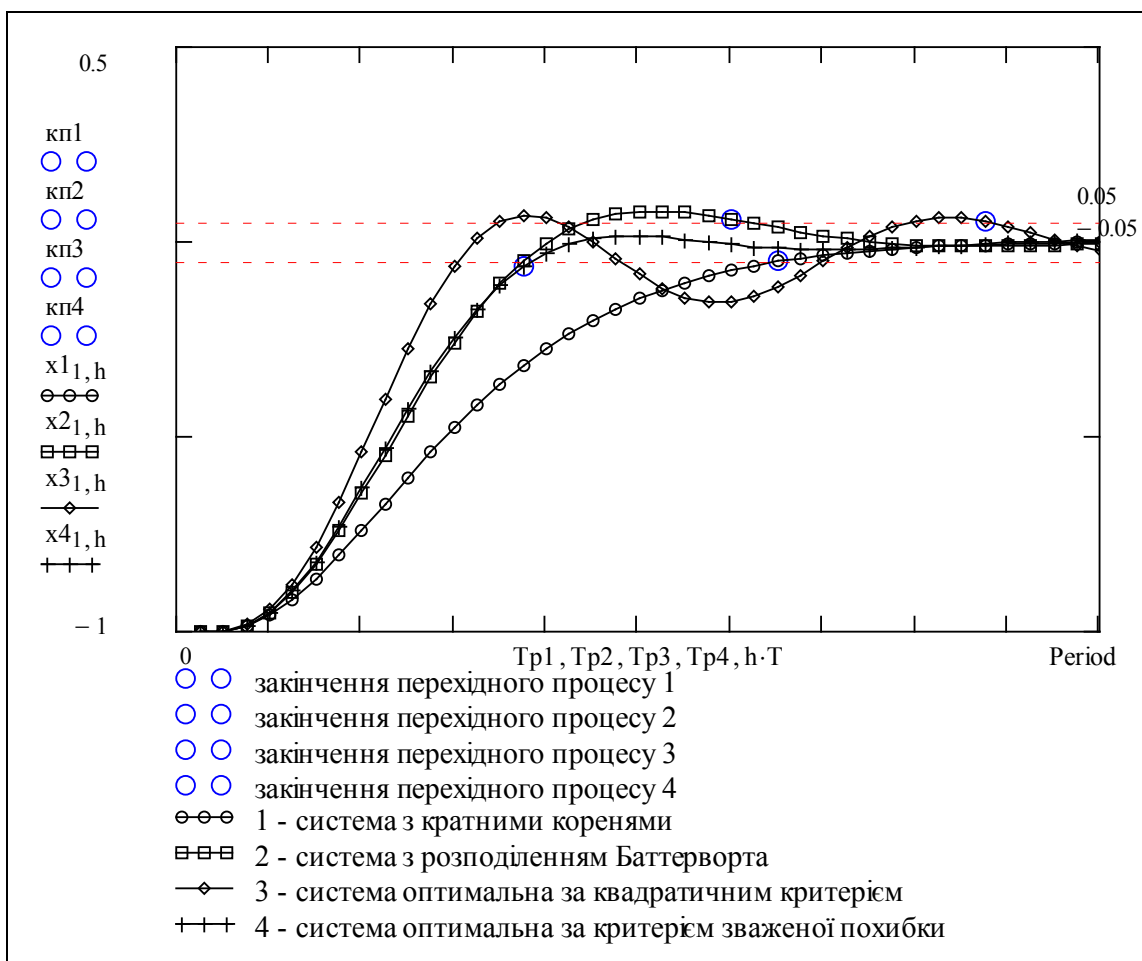
$$x2^{(h+1)} := F2(2, 2, 1, T) \cdot x2^{(h)}$$

$$x4^{(h+1)} := F2(1.75, 2.15, 1, T) \cdot x4^{(h)}$$

### 4.3 Обчислення показників якості перехідного процесу

Конструємо вираз (алгоритм) для обчислення **тривалості перехідного процесу** –  $Trp$ . Виходимо з визначення цього поняття, і можливостей пакета – використовуємо функції  $if(\cdot)$  та  $max(\cdot)$ . **Можливі інші альтернативи.** Вводимо:  $z := 40$ ;  $k := N, N - 1.. 8$ .

$$Trpk := if(|x1_{1,k}| > .05, k \cdot T, 0); Trp1 := max(Trpk); \boxed{kп1 := x1_{1, \text{round}\left(\frac{Trp1}{T}\right)}} .$$



На цьому графіку подані перехідні процеси, оптимальні за альтернативними критеріями.

Нагадаємо, що конкретні програми і формули – тільки засоби для досягнення певної цілі. Наприклад, нам треба визначити тривалість ПП – момент часу, після якого координата вже не виходить з певного допуску, наприклад,  $-5\% < x_r < +5\%$ . Ми беремо досить великий період моделювання, обчислюємо процес. Потім на масиві даних цього процесу знаходимо усі моменти часу, коли модуль похибки перевищує допуск. А потім на множині цих моментів знаходимо максимальний – це і є тривалість ПП.



$$K1qv := \sum_h (x1_{1,h})^2 \quad K3qv := \sum_h (x3_{1,h})^2 \quad K1mz := \sum_h |x1_{1,h}| \cdot h \cdot T \quad K3mz := \sum_h |x3_{1,h}| \cdot h \cdot T$$

$$K2qv := \sum_h (x2_{1,h})^2 \quad K4qv := \sum_h (x4_{1,h})^2 \quad K2mz := \sum_h |x2_{1,h}| \cdot h \cdot T \quad K4mz := \sum_h |x4_{1,h}| \cdot h \cdot T$$

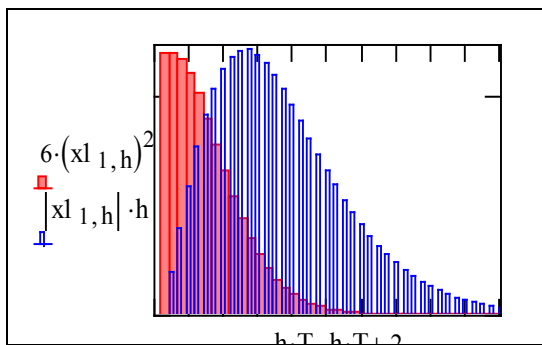
Виводимо значення критеріїв для чотирьох варіантів САУ.

$$K1qv = 8.73 \quad Kqv = \int_0^{tk} (x(t))^2 dt \quad Kmz = \int_0^{tk} |x(t)| \cdot t dt \quad K1mz = 27.16$$

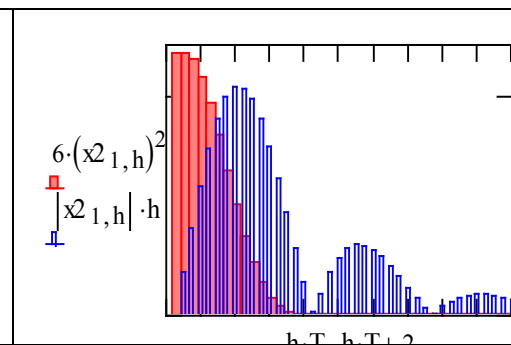
$$K2qv = 7.13 \quad K3qv = 6.46 \quad K4qv = 6.99 \quad K2mz = 17.21 \quad K3mz = 22.81 \quad K4mz = 14.485$$

Щоб побачити суть інтегральних критеріїв, подаємо графіки підінтегральних виразів.

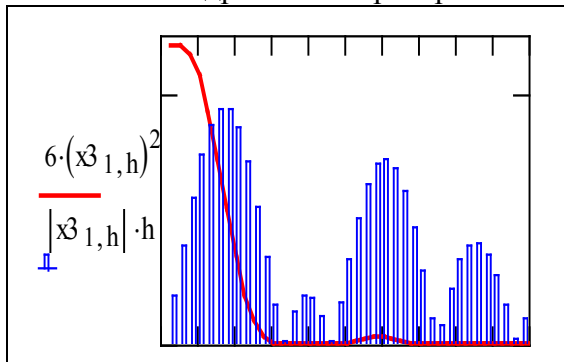
1. Кратні корені



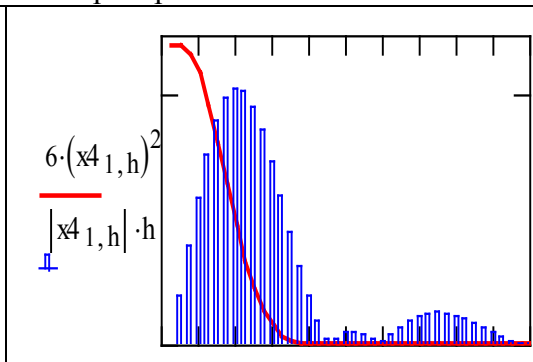
2. Розподіл Баттерворта



3. Квадратичний критерій



4. Критерій зваженої похибки



Тепер, коли обчислені усі критерії для всіх варіантів, сформуємо з них матрицю **K**, кожен рядок якої – значення усіх критеріїв для відповідного варіанта, а стовпець – значення відповідного критерію для усіх варіантів.

$$i := 1..4 \quad j := 1..5 \quad K_{1,1} := Tr1 \quad K_{1,2} := 0 \quad K_{1,3} := um1 \quad K_{1,4} := K1qv \quad K_{1,5} := K1mz$$

$$K_{2,1} := Tr2 \quad K_{2,2} := hm2 \quad K_{2,3} := um2 \quad K_{2,4} := K2qv \quad K_{2,5} := K2mz$$

$$K_{3,1} := Tr3 \quad K_{3,2} := hm3 \quad K_{3,3} := um3 \quad K_{3,4} := K3qv \quad K_{3,5} := K3mz$$

$$K_{4,1} := Tr4 \quad K_{4,2} := hm4 \quad K_{4,3} := um4 \quad K_{4,4} := K4qv \quad K_{4,5} := K4mz$$

$$K = \begin{pmatrix} 6.5 & 0 & 0.209 & 8.731 & 27.162 \\ 6 & 0.076 & 0.304 & 7.134 & 17.208 \\ 8.75 & 0.065 & 0.424 & 6.461 & 22.81 \\ 3.75 & 0.013 & 0.323 & 6.986 & 14.485 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \max(K^{(1)}) = 8.75 & \max(K^{(2)}) = 0.076 \\ \max(K^{(3)}) = 0.424 & \max(K^{(4)}) = 8.731 \end{matrix}$$

Нормуємо значення критеріїв відносно їх максимального значення

$$K_{\text{norm}}^{(j)} := \frac{K^{(j)}}{\max(K^{(j)})} \quad K_{\text{norm}} = \begin{pmatrix} 0.743 & 0 & 0.492 & 1 & 1 \\ 0.686 & 1 & 0.716 & 0.817 & 0.634 \\ 1 & 0.856 & 1 & 0.74 & 0.84 \\ 0.429 & 0.176 & 0.762 & 0.8 & 0.533 \end{pmatrix}$$

#### 4.4 Вибір варіанта САУ за комплексним критерієм

Тепер, коли маємо нормовані значення критеріїв, можна науково відповісти на запитання: «**Яка ж система краща?**» Задаємо коефіцієнти ваги  $a_j$  для кожного з критеріїв, ну, наприклад  $a_j = 1$ . Обчислюємо комплексний критерій і виводимо його значення (пам'ятаємо, що всі критерії є критеріями мінімізації (= чим менше, тим краще)).

Порівнюємо системи, пам'ятаючи, що при інших пріоритетах (інших значеннях  $a_j$ ) результати будуть іншими. Це результат того, що ні один варіант не є **домінуючим** – кращим за всіма критеріями, також ні один варіант не є **домінованим**.

В нашому випадку кожний з варіантів САУ є найкращим хоч за одним з критеріїв. Це означає, що можна так підібрати коефіцієнти  $a_j$ , що комплексно кращим буде який завгодно з варіантів.

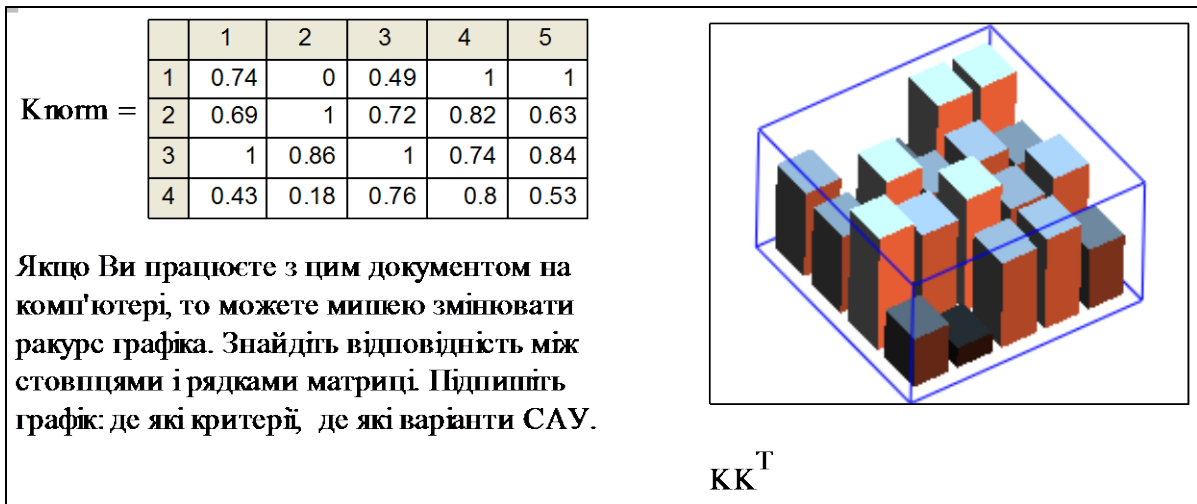
Можна сказати, що такі альтернативи є **множиною Парето** – **ні один з варіантів не є кращим одразу за усіма критеріями**.

Обчислюємо глобальний критерій та матрицю нормованих локальних критеріїв для усіх варіантів САУ

$$a_j := 1 \quad \text{Sum}K_i := \sum_j K_{\text{norm}_{i,j}} \cdot a_j \quad KK := K_{\text{norm}}^T$$

SumK =		Подаємо значення комплексного критерію та ранг для усіх варіантів
	1	
1	3.24	- САУ з кратними коренями <b>2</b> місце
2	3.85	- САУ з розподілом Батлєрворта <b>3</b> місце
3	4.44	- САУ оптимальна за інтегральним квадратичним критерієм <b>4</b> місце
4	2.7	- САУ оптимальна за інтегральним зваженим критерієм <b>1</b> місце

Подаємо також матрицю нормованих критеріїв – у числах та у кольорах (значення критерію відображається інтенсивністю: чим менше, чим темніше – тим краще).



**Висновки.** Проведено комплексну оцінку 4-х альтернатив САУ за 5-ма критеріями – показниками якості перехідного процесу.

**Найгірша САУ – оптимальна за квадратичним критерієм.**

### Контрольні запитання та завдання

1. Дайте словесну формулу тривалості перехідного процесу. 5 б
2. Наведіть приклади об'єктів управління, де обмежується перерегулювання. 7 б
3. Наведіть приклади об'єктів управління, де обмежується прискорення. 8 б
4. Напишіть формули для обчислення всіх використаних критеріїв. 10 б
5. Напишіть документ для оцінки стійкості САУ (=грубості) до варіації параметрів об'єкта  $a_0, a_1, a_2$  та регулятора  $k_1, k_2, k_3$ . 25 б
6. Напишіть документ для дослідження перехідних процесів в САУ 2, 3, 4, 5, 6 порядків для одного з розглянутих класів стандартних коефіцієнтів. 20 б
7. Сконструйте критерій для оцінення грубості САУ. 5–50 б
8. Сконструйте критерій для оцінення енергетичних затрат на управління. 7 б
9. Сконструйте критерій для оцінення складності реалізації регулятора на ЦОМ. 10 б
10. Дайте означення поняття «критерій» для галузей: техніка, економіка. 10 б
11. Проведіть дослідження на тему: «Залежність розглянутих критеріїв від порядку системи» (від 2-го до 6–8-го). 35 б

# 5

## Приклади синтезу і дослідження сучасних САУ

У цьому розділі розглядаються:

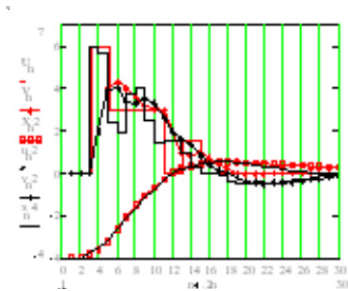
- ✓ Розробка мікропроцесорної системи управління.
- ✓ Розробка цифрового ПД-регулятора.
- ✓ Моделювання мікроконтролерної САУ з імпульсним кодуванням.
- ✓ Аналіз і синтез неперервної САУ зі спостерігачем.
- ✓ Аналіз і синтез нелінійної САУ з нелінійним спостерігачем.

Після вивчення цього розділу ви **зможете:**

1. Виконувати синтез типових цифрових систем – визначати параметри регулятора, що оптимізують певний критерій якості регулювання;
2. Розробляти робочі моделі САУ в середовищах пакетів моделювання і виконувати тестування і дослідження САУ;
3. Виконувати аналіз і синтез типових САУ з імпульсною модуляцією (електроприводи з тиристорним управлінням та ін.) і виконувати дослідження цих систем в середовищах пакетів для моделювання;
4. Виконувати синтез та дослідження стандартних САУ з неперервним регулятором та спостерігачем стану;
5. Ставити і виконувати нестандартні задачі синтезу та дослідження САУ для нелінійного і нестационарного об'єкта (біореактори, хімічні реактори та ін. на базі нових технологій. Розробки САУ на базі моделювання);
6. Дати означення термінів:

1. ПД-закон регулювання;	6. Вектор вимірювань;
2. Частотно-імпульсна модуляція;	7. Вектор параметрів;
3. Широтно-імпульсна модуляція;	8. Регулятор;
4. Спостерігач стану;	9. Синтез регулятора;
5. Вектор стану;	10. Синтез спостерігача.





## 5.1 Розробка цифрового ПІД-регулятора

### Вступ

Цифрові системи управління сьогодні є масовими завдяки низькій вартості, високій надійності і необмеженим функціональним можливостям сучасних мікропроцесорів і мікроконтролерів. Цифрове управління має свої специфічні особливості. Потрібні закони управління реалізуються не схемно і апаратно, а програмно. Апаратні засоби сучасних систем управління стандартизовані і універсальні. Головна задача розробника комп'ютерної системи управління – розробка алгоритмів і програм управління, а потім – моделювання та ретельне дослідження і випробування модельної системи управління на ПЕОМ. Останній етап – перенесення програми в реальну систему зазвичай є автоматизованим. Якщо модель об'єкта була досить реалістичною, то випробування натурної системи звичайно підтверджують результати випробувань на моделі. **Сьогодні в середньому 80% відлагодження та тестування САУ виконується в режимі комп'ютерної симуляції (=імітаційного моделювання), 20% – на реальному об'єкті.**

ПІД-регулятор розроблено більше 100 років тому, в епоху аналогової техніки. На типовому мікроконтролері можна реалізувати дуже складні і ефективні алгоритми управління, але для системи термостабілізації чи електропривода більш складний алгоритм і не потрібен. ПІД-регулятор неважко реалізувати на трьох резисторах і двох конденсаторах. Але: а) МК обійдеться дешевше, б) МК виконує масу інших функцій, наприклад, МК термостата передає МК пожежної та іншої безпеки свої міркування про можливість пожежу чи зламу приміщення (на базі аналізу коливань температури).

Для реалізації ПІД-закону в МК, МП слід отримати **еквівалентну дискретну модель ПІД-регулятора**. На базі цієї моделі розробляється відповідний програмний модуль.

Згідно зі стандартом проектування («несовковим») випробування програмного модуля має починатись вже на початкових стадіях розробки. Вибираємо вид тестових вхідних сигналів для випробування регулятора. Згідно зі стандартами використовуються імпульсний, ступінчастий, гармонічний, випадковий сигнали. Поставимо задачу знаходження реакції системи автоматичного керування (САК) на ступінчастий вхідний сигнал і випадковий за амплітудою та часом сигнал.

Природно, що для випробувань треба задати модель динаміки об'єкта управління. ПІД-регулятори використовуються для об'єктів, що досить точно описуються диференціальними 2–3-го порядків. Реальні об'єкти управління звичайно неперервні, для моделювання об'єкта управління на ЦОМ потрібно отримати його **еквівалентну дискретну модель**. На базі цієї моделі розробляється програмний модуль «модель об'єкта».

Щоб отримати реакцію на певні вхідні сигнали, потрібно сконструювати математичні моделі цих сигналів і написати відповідні програмні модулі.

З цих модулів складається програма для проведення заданих досліджень.

### Завдання

1. Розробити структурну схему і математичні моделі ПД-регулятора: а) неперервну, б) еквівалентну імпульсну, в) імпульсну в прирощеннях.
2. Отримати еквівалентну дискретну модель об'єкта та мікропроцесорної системи в цілому – для моделювання.
3. **Розробити програмні модулі** «регулятор», «об'єкт+привод», «зовнішні сигнали» та програму імітаційного моделювання мікропроцесорної системи управління.
4. **Настроїти регулятор** (визначити параметри регулятора).
5. **Модифікувати програму** для дослідження реакції системи на ДОВІЛЬНІ вхідні сигнали.

### Зміст звіту

1. Ціль роботи, постановка задачі.
2. Структурні схеми регулятора і системи в цілому.
3. Математичні моделі (алгоритми) регулятора і об'єкта.
4. Програма моделювання – текст, коментарі, блок-схема програми.
5. Результати досліджень, висновки.

### Варіанти завдань

	"Варіант:"	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$T1, \zeta$ - параметри об'єкта $T_{пп}$ -тривалість перех. процесу; $t_m$ -перерегулювання
$vd :=$	"T1"	1	1.2	1.5	2	1.8	1.4	1.3	0.9	0.8	0.7	0.7	0.8	1	1.2	
	$\zeta$	0.3	0.2	0.1	0.5	0.7	1	1.2	0.4	0.2	0.3	0.3	0.2	0.4	0.1	
	"T <sub>пп</sub> "	4	5	6	8	5	4	4	3	3	3	4	4	5	5	
	"t <sub>m</sub> "	0	0.1	0.2	0.3	0	0.2	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3	0.2	0.1	

Крок квантування  $T = 0.20$  – однаковий для усіх варіантів.

### Порядок виконання завдання

**1. Розробка блок-схеми.** Починаємо постановку і розв'язання задачі з виділення загального і специфічного. Загальне – система управління складається з об'єкта, привода, датчиків, регулятора та допоміжних пристрій як перетворювачів сигналів і кодів. Специфічне – чим конкретно є об'єкт – колонією мікробів, кондиціонером ..., які приводи і датчики використовуються – з прямим цифровим входом-виходом чи з аналоговим.

Мікропроцесорна система управління повинна бути певною мірою інваріантною до такої специфіки. Робимо припущення, що нам відомий вираз для ПД-закону управління і виходячи з принципів управління із зворотним зв'язком та запізень введення-виведення в МП розробляємо структурну схему. Далі подано приклад структурної схеми типової САУ для випадку, коли динаміка сенсорів не врахована, а об'єкт і привод об'єднані в один елемент, динаміка якого описується дифрівнянням 2-го порядку:

На рис. 1 подана узагальнена структурна схема мікропроцесорної системи управління. На цій схемі ЕЗ – це не Е-три, а Елемент Затримки. За його допомогою формується ерзац-замінник (ез) похідної – перша різниця:

$$X[n \cdot T] - X[(n-1) \cdot T].$$

Елемент з позначкою «Д» – це дискретний інтегратор (=digrator), що є ез (ерзац-замінником) інтеграла. Дискретний інтегратор реалізовує залежність

$$S[n \cdot T] = S[(n-1) \cdot T] + S[n \cdot T].$$

Неважко зрозуміти, що  $X[n \cdot T]$  – поточне значення регульованої змінної,  $n \cdot T$  – дискретний момент часу,  $n$  – номер кроку квантування,  $T$  – крок квантування.

Коефіцієнти  $k_1, k_2, k_3$  при складових ПІД-закону: похибці  $X$ , похідній від похибки, інтегралі від похибки, розраховуються або вибираються, виходячи із забезпечення потрібної якості управління.

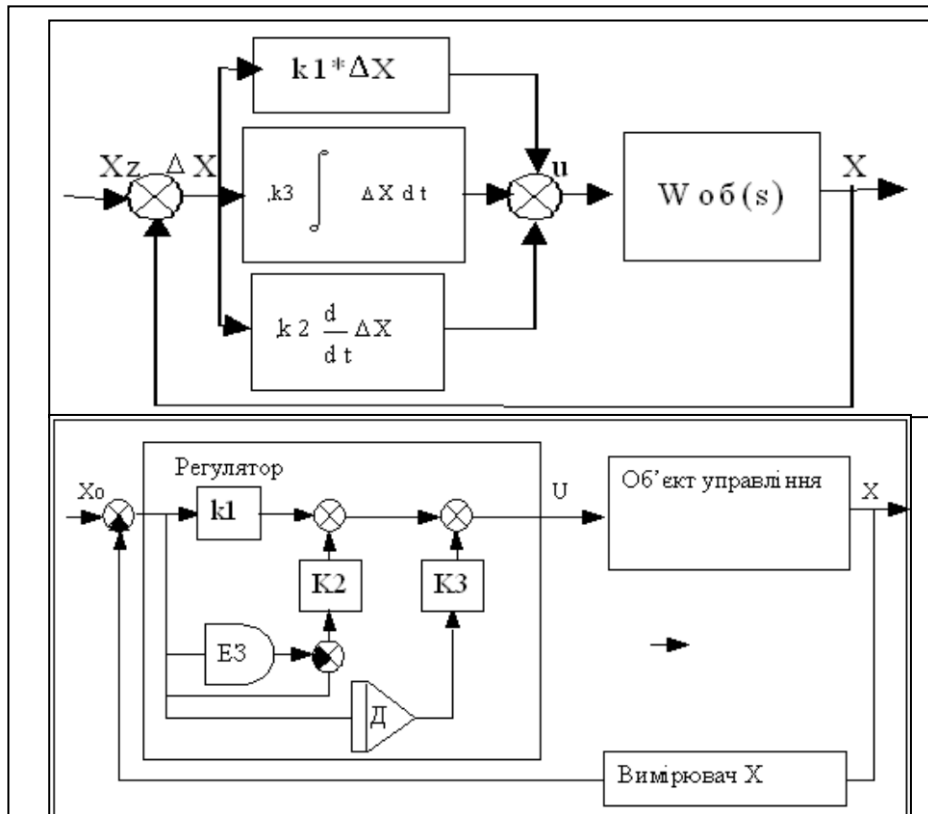


Рисунок 1 – Структурні схеми неперервного і дискретного ПІД-регуляторів

**2. Отримання дискретної форми ПІД-закону управління.** Записуємо ПІД-закон в аналоговій формі (є інші варіанти):

$$u(t) = k_1 \cdot (x(t) - x_0(t)) + k_2 \cdot \frac{d}{dt}(x(t) - x_0(t)) + k_3 \cdot \int_0^t (x(t) - x_0(t)) dt.$$

Припускаючи, що такт квантування досить малий, замінюємо похідну першою різницею, інтеграл – сумою від дискретних сигналів, що надходять на кожному такті квантування

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{[x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]]}{T}; \Delta x(n \cdot T) = x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]; \frac{d}{dt} x(t) = \frac{\Delta x(n \cdot T)}{T};$$

$$s_n = \int_0^t \Delta x(n \cdot T) dt = \sum_{i=0}^n \Delta x(n \cdot T); S(n \cdot T) = S[(n-1) \cdot T] + \Delta x(n \cdot T).$$

Підставляємо ці еквіваленти в закон управління, враховуємо нюанс – орієнтацію наших моделей і програм на роботу в реальному часі, онлайн. Тому виділяємо операцію обчислення інтеграла від похибки. Вибираємо середовище для програмування і моделювання, ну, наприклад, MathCAD, приймаємо його означення для елементів масивів – індексовані змінні.

$$S_0 = 0; S_n = S_{n-1} + x_r;$$

$$u(n, T) := \left[ k1 \cdot (x(n \cdot T) - x(n-1 \cdot T)) + \frac{k2}{T} \cdot [x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]] + k3 \cdot S_n \right]$$

На практиці ПД-закон використовують, з майже очевидних причин, у диференціальній формі. Отримаємо її за допомогою символьного процесора:

$$u(n, T) - u(n-1, T) \rightarrow k \cdot (x(n \cdot T) - x(n-1 \cdot T)) + \frac{k2}{T} \cdot [x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]] + \\ + k3S_n - k \cdot (x[(n-1) \cdot T] - x(n-2 \cdot T)) - \frac{k2}{T} \cdot [x[(n-1) \cdot T] - x[(n-2) \cdot T]] - k3S_{n-1}$$

Копіюємо праву частину виразу:

$$k \cdot (x(n \cdot T) - x(n-1 \cdot T)) + \frac{k2}{T} \cdot [x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]] + \\ + k3S_n - k \cdot (x[(n-1) \cdot T] - x(n-2 \cdot T)) - \frac{k2}{T} \cdot [x[(n-1) \cdot T] - x[(n-2) \cdot T]] - k3S_{n-1}$$

Ставимо курсор на  $x$  і застосовуємо опцію Collect:

$$\frac{k2}{T} \cdot x[(n-2) \cdot T] + \left( k1 + \frac{k2}{T} \right) \cdot x(n \cdot T) + \left( -k1 - 2 \cdot \frac{k2}{T} \right) \cdot x[(n-1) \cdot T] - k3 \cdot S_{n-1} + k3 \cdot S_n$$

Враховуємо залежність для сумарної похибки  $S$ :

$$S_n = S_{n-1} + x_n; \quad S_n - S_{n-1} = x_n$$

**3. Отримання еквівалентної дискретної моделі об'єкта управління.** Звичайно об'єкти управління є неперервними. Для прикладу беремо об'єкт, що описується диференціальним 2-го порядку:

$$T^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2 \cdot \zeta \cdot T \cdot \frac{d}{dt} x(t) + x(t) = u(t) \quad (1)$$

Замінімо похідні в цьому рівнянні на перші різниці (пам'ятаємо – це приблизна рівність, тим точніша, чим менший крок квантування) і після алгебраїчних перетворень отримуємо еквівалентне різницеве рівняння

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]}{T} \quad (2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{[x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]] - [x[(n-1) \cdot T] - x[(n-2) \cdot T]]}{T^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{x(n \cdot T) - 2 \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T]}{T^2} \quad (3)$$

Підставляємо (2, 3) в (1):

$$T^2 \cdot \frac{[x(n \cdot T) - 2 \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T]]}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot T \cdot \frac{x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]}{T} + x(n \cdot T) - u(n \cdot T)$$

Щоб символічний процесор зміг розв'язати цей вираз відносно  $x(n \cdot T)$ , вводимо тимчасові змінні:  $xn$ ,  $xn\_1$ ,  $xn\_2$  замість  $x(n \cdot T)$ ,  $x[(n-1) \cdot T]$ ,  $x[(n-2) \cdot T]$ , відповідно:

$$Tl^2 \cdot \frac{xn - 2 \cdot xn\_1 - xn\_2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot Tl \cdot \frac{xn - xn\_1}{T} + xn - un.$$

Після ряду символічних операцій – «розв'язати відносно змінної.», «спростити», «згрупувати за змінною.» отримуємо такий кінцевий результат – еквівалентне різницеве рівняння об'єкта. Розв'яжемо його відносно поточного значення  $x$ :

$$Tl^2 \cdot \frac{xn - 2 \cdot xn\_1 + xn\_2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot Tl \cdot \frac{xn - xn\_1}{T} + xn - un = 0, \quad (4)$$

$$xn = \frac{-Tl^2}{\left[ T^2 \cdot \left( \frac{Tl^2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \frac{Tl}{T} + 1 \right) \right]} \cdot xn\_2 + \frac{\left( 2 \cdot \frac{Tl^2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \frac{Tl}{T} \right)}{\left( \frac{Tl^2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \frac{Tl}{T} + 1 \right)} \cdot xn\_1 + \frac{un}{\left( \frac{Tl^2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \frac{Tl}{T} + 1 \right)}.$$

Введемо визначення (фактично – визначимо функції користувача):

$$a1(T, Tl, \zeta) := \frac{\left( 2 \cdot \frac{Tl^2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \frac{Tl}{T} \right)}{\left( \frac{Tl^2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \frac{Tl}{T} + 1 \right)}; \quad b(T, Tl, \zeta) := \frac{1}{\left( \frac{Tl^2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \frac{Tl}{T} + 1 \right)};$$

$$a2(T, Tl, \zeta) := \frac{-Tl^2}{\left[ T^2 \cdot \left( \frac{Tl^2}{T^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \frac{Tl}{T} + 1 \right) \right]}.$$

Запишемо різницеве рівняння об'єкта з цими визначеннями коефіцієнтів:

$$x(n \cdot T) = a2(T, Tl, \zeta) \cdot x[(n-2) \cdot T] + a1(T, Tl, \zeta) \cdot x[(n-1) \cdot T] + b(T, Tl, \zeta) \cdot u(n \cdot T) \quad (5)$$

Перепишемо це рівняння в визначеннях програми моделювання, де  $x_n, x_{n-1} \dots$  – відповідні елементи масива (вектора) значень змінної, якою управляємо.

$$x_n = a2(T, Tl, \zeta) \cdot x_{n-2} + a1(T, Tl, \zeta) \cdot x_{n-1} + b(T, Tl, \zeta) \cdot u_n \quad (6)$$

Якщо параметри об'єкта і крок квантування є незмінними, то можна просто обчислити значення коефіцієнтів. **ОТУТ** вводяться параметри варіанта

$$T := 0.20 \quad Tl := 1 \quad \zeta := 0.1 \quad a2k := a2(T, Tl, \zeta) \quad a1k := a1(T, Tl, \zeta) \quad bk := b(T, Tl, \zeta)$$

$$x_n = a2k \cdot x_{n-2} + a1k \cdot x_{n-1} + bk \cdot u_n \quad a2k = -0.93 \quad a1k = 1.89 \quad bk = 0.04$$

**4. Розробка програми моделювання реакції системи на ступінчастий сигнал.** А тепер можемо, нарешті, скласти із отриманих залежностей програму моделювання системи з цифровим управлінням. Концептуальний недолік цієї програми в тому, що в ній не розділені модулі моделювання об'єкта і моделювання регулятора, тобто мікроконтролера. В програмі **ВЕЛИКИМИ** літерами позначені змінні мікроконтролера, малими – змінні моделі об'єкта і зовнішніх дій.  $ORIGIN := 0$ ;  $N := 40$

$Pr(K, zp, N) :=$	<pre> ORIGIN ← 0 x0 ← -1 x1 ← -1 z&lt;0&gt; ← (-1)            (0) z&lt;1&gt; ← (-1)            (0) S2 ← 0 X1 ← 0 X2 ← 0 for zz ∈ 0..zp   стек<sub>zz</sub> ← 0   "next zz" for n ∈ 2..N   U ← K0·X1 + K1·(X1 - X2) + K2·S2   "пустий рядок під друк"   for zz ∈ zp..1     стек<sub>zz</sub> ← стек<sub>zz-1</sub>     "next zz"   стек0 ← U   Uzp ← стек<sub>zp</sub>   xn ← a2k·xn-2 + a1k·xn-1 + bk·Uzp   S1 ← S2   S2 ← S1 + xn   X2 ← X1   X1 ← xn   un ← Uzp   z&lt;n&gt; ← ( xn            un            U ) z </pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- введення початкових значень координати;</li> <li>- введення початкових значень стовпців матриці видачі програми;</li> <li>- введення початкового значення суми, що замінює інтеграл;</li> <li>- введення початкових змінних, що імітують змінні мікроконтролера. Це поточне і попереднє вимірені значення регулюємої змінної;</li> <li>- циклі обнулення стека (імітації затримки у МК);</li> <li>- циклі моделювання системи;</li> <li>- обчислення управління (імітація МК);</li> <li>- імітація запізнення управління;</li> <li>- записуємо у стек обчислене управління і витягуємо зі споду стека поточне управління (імітація МК);</li> <li>- обчислення координати (МОДЕЛЬ динаміки об'єкта);</li> <li>- обчислення інтегралу (імітація роботи програми МК);</li> <li>- імітація запису у пам'ять МК прийнятого з порту поточного значення координати об'єкта, та зсув попереднього;</li> <li>- формування вектору вихідних даних програми z;</li> <li>- те, що повертає програма.</li> </ul>
-------------------	---	--

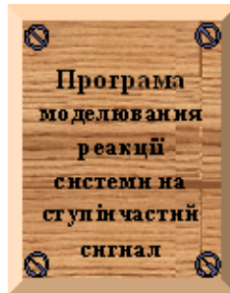


Рисунок 2 – Текст програми моделювання САУ

Тестуємо програму, виводимо таблицю вихідних даних, будемо графіки.

$$Pr(Ko, 3, 9) =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-1	-1	-0.96	-0.89	-0.8	-0.68	-0.41	-0.14	0.12	0.37
1	0	0	0	0	0	0	3.37	0.33	0.29	0.24
2	0	0	0	3.37	0.33	0.29	0.24	-0.24	-0.36	-0.47

**ОТУТ** виконується п. 4 завдання – **настроювання регулятора**, потім знайдені параметри закону управління вводяться у робочу програму МК.

Задаємо два набори параметрів регулятора і значення запізнення  $z_m$  (у кроках квантування).

$Ko \equiv \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$z1 \equiv 1$	$kO \equiv \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\left( \begin{array}{l} \text{пропорційна} \\ \text{диференціальна} \\ \text{інтегральна} \end{array} \right)$	<b>ОТУТ</b> вводяться параметри варіанта : тривалість ПП $T_{шт} := 5$ та викид $hm := .3$
	$z2 := 1$			
$T_{перех} := \frac{T_{шт}}{T}$	$x1_k := Pr(Ko, z1, N)_{0, k}$	$x2_k := Pr(kO, z2, N)_{0, k}$	$u1_k := Pr(Ko, z1, N)_{1, k}$	$u2_k := Pr(kO, z2, N)_{1, k}$

Будуємо перехідні процеси, дивимось і робимо: *Приклад висновків:*

*Оце бачимо: регулятор  $kO$  – незадовільний? а регулятор  $Ko$  – навпаки?*

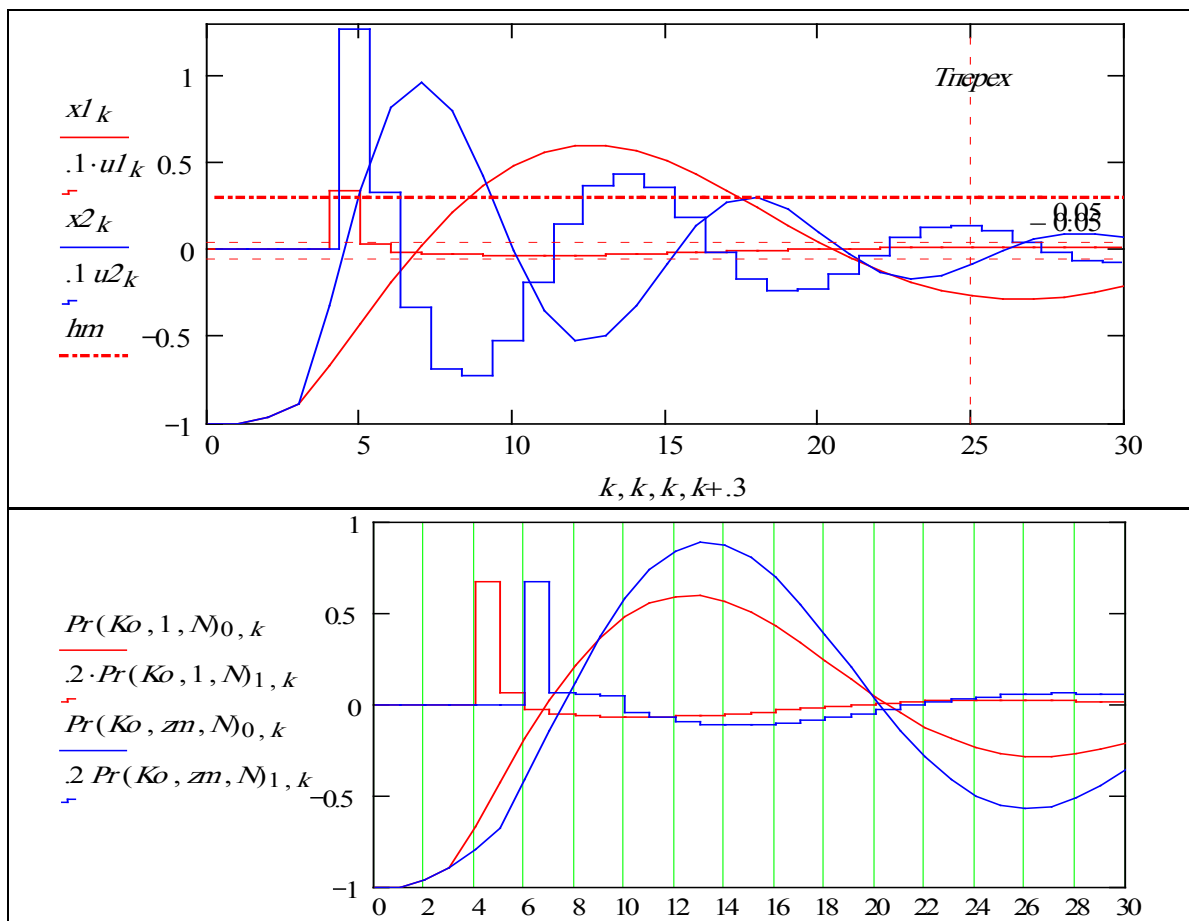


Рисунок 3 – Перехідні процеси при варіації вектора параметрів регулятора і величини запізнення (в кроках квантування)

Бачимо – граничне запізнення –  $z_m := 3$  такти квантування.

**5. Модифікація програми для моделювання реакції САУ на довільні вхідні сигнали.** Природно, для цього треба зробити модель такого сигналу. Але, ще більш природно, виходячи з можливостей сучасних орієнтованих на моделювання програмних платформ і сучасних концепцій проектування систем (= тотальне і всебічне моделювання, тестування, дослідження, пошукова оптимізація), розробити моделі і інших сигналів. Зробимо для прикладу: імпульсний детермінований, гармонічний, імпульсний сигнали з випадковими моментами появи і тривалостями.

$$Xstup(n, nt) \equiv \Phi(n - nt) - \Phi(n - nt - 15); \quad Xga(\omega, n) \equiv 0.6 \cdot \sin[\omega \cdot (n - 2)]; \quad ORIGIN := 1.$$

Розробимо програмний модуль (підпрограму) для імітації різних вхідних сигналів.

$xvr(p, N) \equiv$ <pre> flag ← 1 strt ← 0 for i ∈ 1..N     start ← if(rnd(1) &gt; p, 0, 1) · trunc(rnd(7)) · flag     strt ←   start if strt &lt; 1              strt otherwise     if strt &gt; 0           Xvxj ← 1           strt ← strt - 1           flag ← 0     otherwise           Xvxj ← 0           flag ← 1 Xvx         </pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- початкові значення змінних;</li> <li>- цикл розрахунку вхідного сигналу;</li> <li>- умова початку і тривалість чергового імпульсу;</li> <li>- що у "лічильнику" тривалості імпульсу;</li> <li>- "якщо імпульс триває";</li> <li>- прапор = 0 не дозволяє початись новому імпульсу, поки не "відпрацьовано" черговий імпульс;</li> <li>- "якщо імпульсу нема":</li> <li>- вхід = 0;</li> <li>- прапор встановлено;</li> <li>- що повертає програма.</li> </ul>
--	--

Рисунок 4 – Модуль імітації довільних вхідних сигналів.

На рис. 5 подано текст програми для моделювання процесів в системі з ПІД-регулятором при довільних вхідних сигналах. Програму робимо як функцію користувача від двох параметрів  $K$  – вектор параметрів регулятора і  $N$  – число кроків процесу.

**На базі** отриманої програми будемо ствед для проведення обчислювальних експериментів. Щоб залишити простір для подальших покращень програми, організуємо вибір і зміну сигналу управління найбільш примітивним способом – у відповідному рядку програми замість одного імені функції – інше. Внизу подані ці імена:

ймовірнісний:    ступінчастий:    гармонічний:

$$N = 40 \quad NN \equiv 100 \quad k := 1..NN \quad Vxr_n \quad ймовір \equiv 0.05 \quad Xstup(n, nt) \quad Xga(\omega, n)$$

$$Vxr \equiv xvr(ймовір, NN) \quad nt \equiv 4 \quad \omega \equiv .2$$

$$K1 \equiv \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ -.2 \end{pmatrix}$$

☞ параметри закону регулювання

☞ параметри вхідних сигналів

$$Вхід_k := Pp(K1, NN)_{2, k} \quad Вихід_k := Pp(K1, NN)_{1, k} \quad Керу_k := Pp(K1, NN)_{3, k}$$



$Pp(K,N) :=$ $x_1 \leftarrow 0$ $x_2 \leftarrow 0$ $z^{(1)} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $z^{(2)} \leftarrow z^{(1)}$ $S1 \leftarrow 0$ $S2 \leftarrow 0$ $EX1 \leftarrow 0$ $N\_stor \leftarrow \pi$ $EX2 \leftarrow 0$ $\text{for } n \in 3..N$ $\left  \begin{array}{l} U \leftarrow K_1 \cdot EX1 + K_2 \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + K_3 \cdot S2 \\ x_n \leftarrow a2k \cdot x_{n-2} + a1k \cdot x_{n-1} + bk \cdot U \\ S1 \leftarrow S2 \\ EX2 \leftarrow EX1 \\ X_{\text{задане}} \leftarrow Vxr_n \\ EX1 \leftarrow x_n - X_{\text{задане}} \\ S2 \leftarrow S1 + EX1 \\ z^{(n)} \leftarrow \begin{pmatrix} x_n \\ X_{\text{задане}} \\ U \end{pmatrix} \end{array} \right.$ $z$		<p>Ця програма отримана копіюванням та модифікацією попередньої програми моделювання.</p> <p>Синтаксичні і семантичні аспекти програми майже зрозумілі.</p> <p>Розглянемо програму в прагматичному аспекті (=навіщо, з якою ціллю).</p> <p>Номінально, модифікуючи попередню програму, треба було замінити в законі управління координати X1, X2 на похибки</p> <p><math>EX1 = X_{\text{задане}} - X1 \dots</math></p> <p>бачимо, що в диференціальній складовій замість <math>EX1 - EX2</math> взято <math>x_{n-1} - x_{n-2}</math>. Це зменшує управляючі дії при великих змінах вхідного сигналу <math>X_{\text{задане}}</math>.</p> <p>ось тут підставляємо різні варіанти вхідного сигналу...</p> <p>Розширюємо вихід програми - виводимо не тільки координату і управління, а ще й вхідний сигнал.</p>
---	--	--

Рисунок 5 – Текст програми моделювання системи з ПІД-регулятором

На рис. 6 і 7 подано приклади результатів моделювання

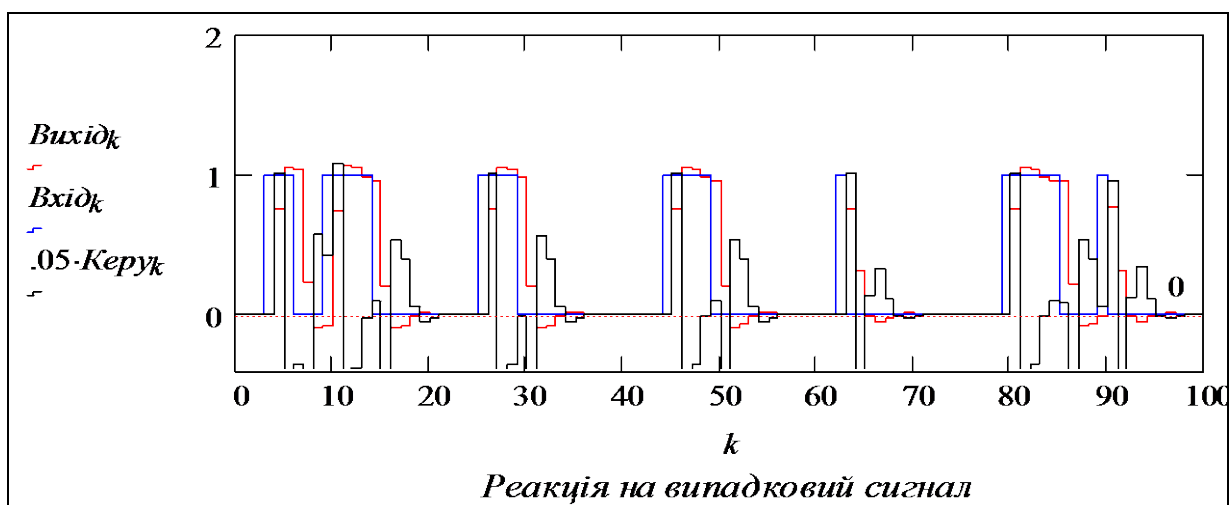


Рисунок 6 – Відпрацювання імпульсів з випадковими: часом виникнення і тривалістю

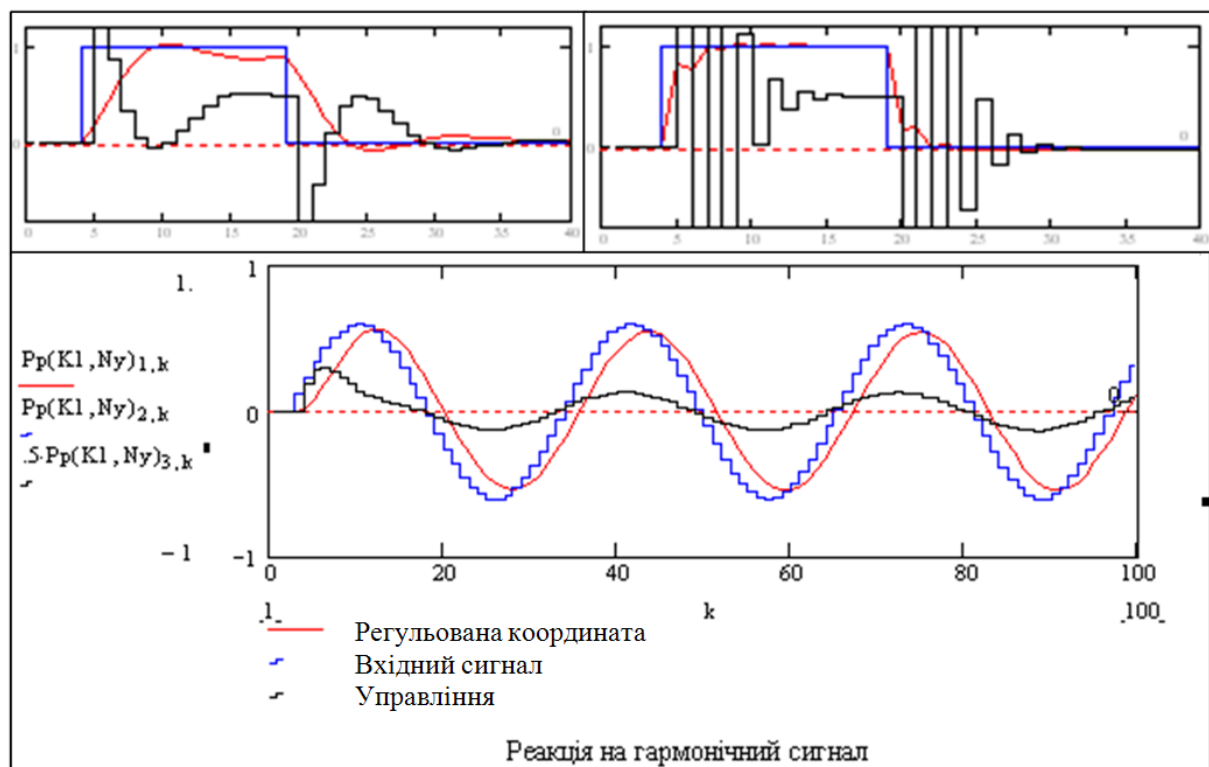


Рисунок 7 – Приклади досліджень процесів відпрацювання довільних входів

Дивимось на два верхніх графіки і бачимо: за збільшення точності відпрацювання вхідних сигналів платимо збільшенням енерговитрат на управління. На нижньому графіку бачимо запізнення у відпрацюванні гармонічного сигналу, обумовлене квантуванням в часі.

### Контрольні запитання

1. Які види регуляторів ви знаєте?
2. Рівняння для неперервного ПД-регулятора
3. Варіанти рівняння дискретного ПД-регулятора.
4. Галузь використання ПД-регулятора.
5. Загальний вид лінійної дискретної матмоделі об'єкта управління.
6. Загальна структура програми моделювання системи.
7. Які методи синтезу регуляторів ви знаєте?
8. Що робити, якщо параметри об'єкта змінюються під час функціонування системи?

### Додаток

Подаємо текст натуральної програми управління електроприводом робота-маніпулятора. Програма написана для мікроконтролера з серії МК196, його рідною мовою, що вже не зовсім є звичною мовою асемблера. Уважно проаналізуйте її! Далі подано також блок-схему цього мікроконтролера. Користуйтеся фірмовою документацією Intel з прикладами розробок. Памятайте, що сьогодні програми для мікропроцесорних регуляторів можна і слід писати мовою ТАУ – мовою математики, але майже необхідно знати, як це транслюється на мову асемблера.

```

VPID: ld vel_err3,vel_err2          ; store velocity errors
      ld vel_err2,vel_err1
      ld vel_err1,vel_err
      sub vel_err,des_velocity,velocity ; calculate velocity error

      sub temp,vel_err1,vel_err2      ; calculate differential error term
      mul temp,#3                      ; diff err = (vel_err - vel_err3 + 3*vel_err1 - 3*vel_err2)
      sub temp,vel_err3
      add temp,vel_err
; Output = prev_output + ((vel_err - vel_err1)*VKp + (Vel_err + Vel_err1)*Vki + diff_err*Vkd))/ ;scaler

OUTPUT: mul temp,Vkd                  ; calculate differential term
        add temp2,vel_err,vel_err1
        mul temp2,Vki                 ; calculate integral term
        add temp,temp2
        sub temp2,vel_err,vel_err1 ; calculate proportional term
        mul temp2,Vkp
        add temp,temp2
        div temp,scaler                ; scale output
        add output,prev_output,temp
        ld prev_output,output
        div Out_scaler                 ; Scale 32 bit output to get 16 bit result
        jbc Out+3,7,forward            ; test output for direction

REVERSE: neg Out+2                     ; negate output
          ldb p2,#07fh                 ; set direction down(p2.040)
          sjmp scaleout

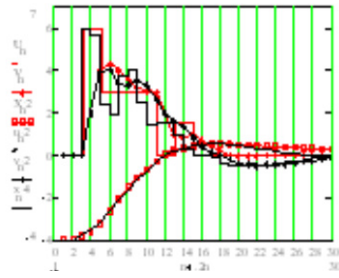
FORWARD: ldb p2,#0FFh                 ; set direction up(P2.041)

SCALEOUT: cmp Out,#0ffh                ; scale output for maximum pwm value
          jgt exit                     ; if Out_1 maximum pwm output
          ld Out,#0ffh                 ; then clamp output to max pwm value

EXIT:    ldb pwm,Out
          ret

```

Figure 27. Position and Velocity PID Assembly Routine



## 5.2 Моделювання мікроконтролерної системи управління з імпульсною модуляцією вхідних і вихідних сигналів

### Вступ. Постановка задачі

Ставиться задача розробити документ-фрейм для розрахунку параметрів системи управління з урахуванням вимог реалізації мікропроцесорною системою. Ці вимоги – урахування допустимого часу на обчислення управління (вимоги режиму реального часу), урахування обмеженості розрядності або квантування за рівнем. Це комплексна задача, де використовуються методи теорії автоматичного управління, об'єктно-орієнтованого програмування і сучасних технологій комп'ютер-орієнтованого моделювання і проектування.

Задано блок-схему системи і структуру регулятора (рис. 3). Розглянемо стисло, що стоїть за цією структурною схемою. На рис. 1 подано схему мікропроцесорного управління електроприводом. Система управління базується на МК 80196KB. З оптичного первинного вимірювача дані подаються на відповідні входи МК. Спеціальна програма обробки первинних даних формує значення поточного відхилення та швидкості відхилення якоря електродвигуна. За цими даними згідно з ПД-алгоритмом розраховується управління. З відповідних виходів МК управління подається на систему модуляції та підсилення. На спеціальний модуль подаються сигнали обмеження (наприклад, коли відхилення досягає граничної величини). Підсилений і модульований сигнал подається на обмотку якоря реверсивного електродвигуна.

Як виконавчий елемент використовується електродвигун з тиристорним управлінням і широтно-імпульсною модуляцією сигналу, що подається на обмотку якоря.

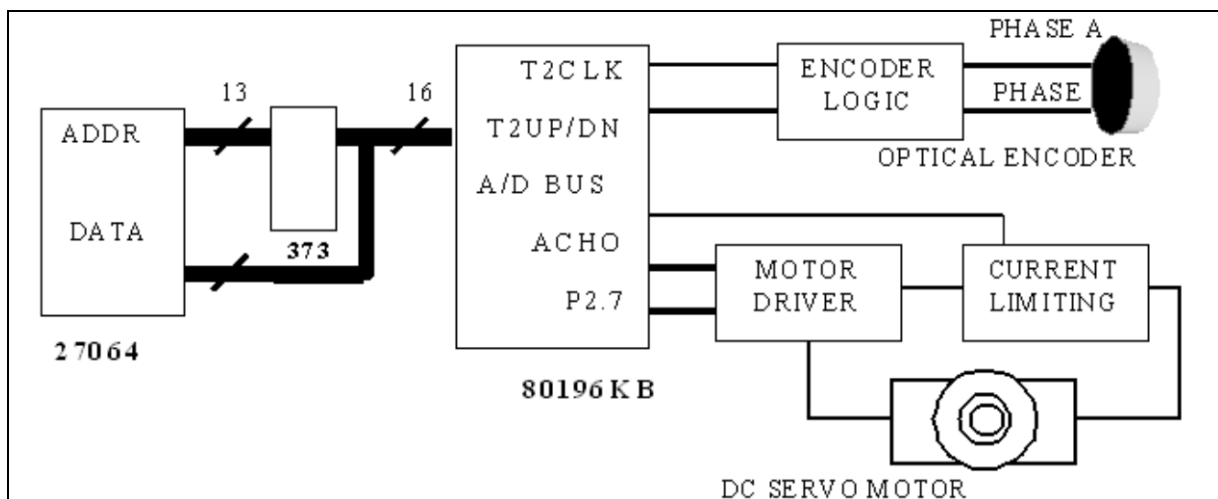


Рисунок 1 – Схема мікропроцесорного управління електроприводом

На рис. 2 подано схему електричну принципову тиристорного реверсивного управління електроприводом. Вихід схеми – обмотка якоря, входи – рівень (потужність) і напрям зусилля на приводі. *Зауваження.* Ці схеми скопійовано з документації Інтел – вони відповідають стандартам США, Intel і світовим стандартам.

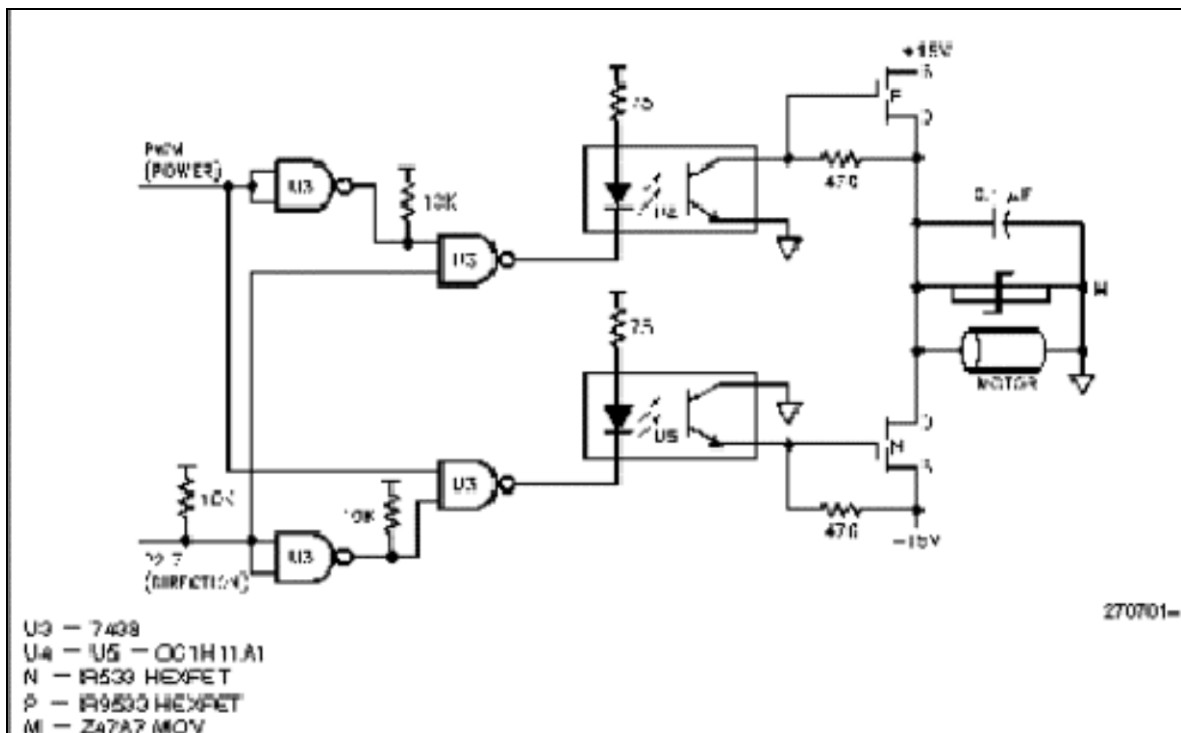


Рисунок 2 – Схема модулятора та підсилювача електропривода

#### Завдання

1. Розробити структурну схему і математичні моделі САУ з імпульсною модуляцією.
2. Отримати (в дискретній формі) рівняння регулятора, привода, об'єкта.
3. **Розробити програмні модулі** «регулятор», «об'єкт+привод», «зовнішні сигнали» та програму імітаційного моделювання мікропроцесорної системи управління.
4. **Настроїти регулятор** – вибрати параметри закону управління (вибрати частоту модуляції).
5. Виконати дослідження реакції системи на зовнішні сигнали.

#### Зміст звіту

1. Ціль роботи, постановка задачі.
2. Структурні схеми регулятора і системи в цілому.
3. Математичні моделі (алгоритми) регулятора і об'єкта.
4. Програма моделювання – текст, коментарі, блок-схема програми.
5. Результати досліджень, висновки.

#### Варіанти завдань

$vd :=$	"Варіант:"	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	To - послідня часу об'єкта, Tr - послідня часу привода, Tпш - тривалість ПП, hm - перерегу- лювання.
	"To"	1	1.1	0.5	.6	.8	.4	1.	0.9	0.8	0.7	0.6	0.8	1	1.1	
	Tr	.3	0.2	0.1	0.4	0.3	.2	.3	0.4	0.3	0.2	0.3	0.4	.4	0.3	
	"Tпш"	4	5	6	8	5	4	4	3	3	3	4	4	5	5	
	"hm"	.2	0.3	0.2	0.3	0.3	0.2	0.3	0.2	0.1	0.3	0.2	0.3	.2	0.1	

## 1. Розробка блок-схеми

Починаємо постановку і розв'язання задачі з виділення загального і специфічного. Загальне – система управління складається з об'єкта, привода, датчиків, регулятора та допоміжних пристроїв як перетворювачів сигналів і кодів. Специфічне – чим конкретно є об'єкт – колонією мікробів, кондиціонером., які приводи і сенсори використовуються – з прямим цифровим входом–виходом чи з аналоговим. Мікропроцесорна система управління має бути певною мірою інваріантною до такої специфіки. Виходячи з принципів управління із зворотним зв'язком та запізньень введення – виведення в МП розробляємо структурну схему (вимірювачі не показані) типової САУ:

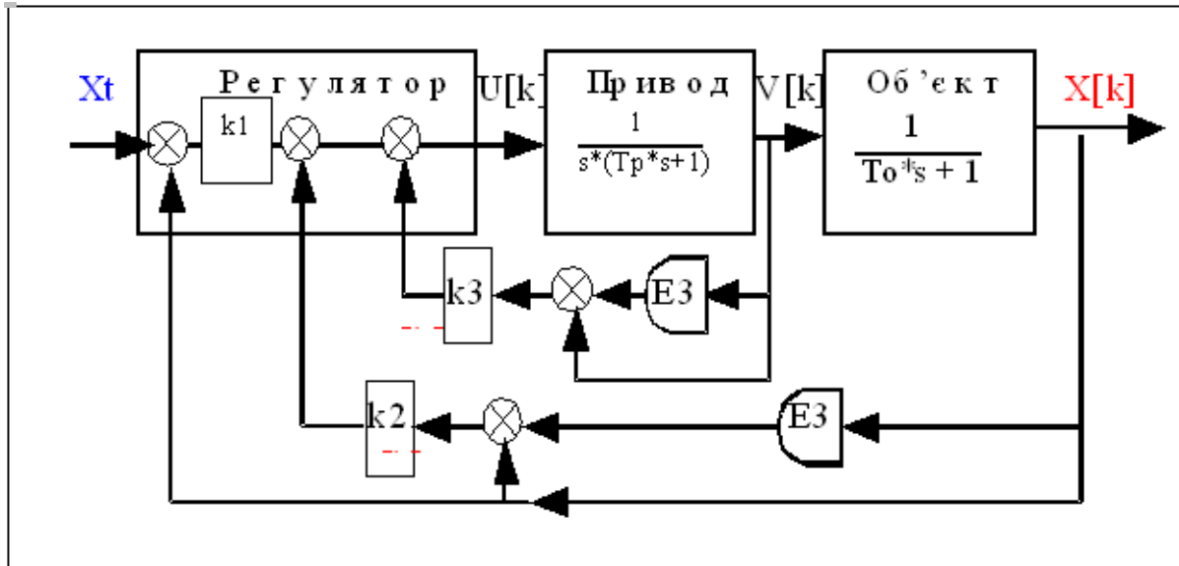


Рисунок 3 – Структурна схема мікропроцесорної системи управління

На цій схемі ЕЗ – це не ЕЗ (Е-три), а Елемент Затримки. А затримки і суматори зображують отримання перших різниць, якими замінюють похідні від швидкості і координати.

Згідно з цією схемою закон управління буде:

$$U(n \cdot T) = k1 \cdot (X(n \cdot T) - X_t) + k2 \cdot [X(n \cdot T) - X[(n-1) \cdot T]] + k3 \cdot [V[(n-1) \cdot T] - V[(n-2) \cdot T]] \quad (1)$$

Тепер ми можемо конкретизувати постановку задачі: знайти параметри  $k1$  – штраф за помилку,  $k2$  – штраф за швидкість,  $k3$  – штраф за помилку в приводі і реалізувати алгоритм (1) в МП-системі.

## 2. Розробка математичної моделі системи

Запишемо рівняння динаміки привода: замінюємо похідну на першу різницю:

$$T_p \cdot \frac{d^2 V(t)}{dt^2} + \frac{d V(t)}{dt} = U(t); \quad \frac{d V(t)}{dt} = \frac{[V(n \cdot T) - V[(n-1) \cdot T]]}{T}$$

Замінімо похідні в рівнянні динаміки привода на перші різниці і після алгебраїчних перетворень отримуємо еквівалентне різницеве рівняння

$$T_p \cdot \frac{V(n \cdot T) - 2 \cdot V[(n-1) \cdot T] + V[(n-2) \cdot T]}{T^2} + \frac{[V(n \cdot T) - V[(n-1) \cdot T]]}{T} = U(n \cdot T)$$

Спростуємо його і розв'язуємо відносно поточного значення  $V(n \cdot T)$ .

$$\begin{aligned}
Tp \cdot \frac{Vn - 2 \cdot Vn\_1 + Vn\_2}{T^2} + \frac{Vn - Vn\_1}{T} - Un &= 0; \\
Vn &= \frac{(2 \cdot Tp \cdot Vn\_1 - Tp \cdot Vn\_2 + Vn\_1 \cdot T + Un \cdot T^2)}{(Tp + T)}; \\
Vn &= \frac{-Tp}{(Tp + T)} \cdot Vn\_2 + \frac{(2 \cdot Tp + T)}{(Tp + T)} \cdot Vn\_1 + \frac{T^2}{(Tp + T)} \cdot Un.
\end{aligned} \tag{2}$$

Теж саме робимо і для об'єкта, замінюємо похідну різницею і ...:

$$\begin{aligned}
To \cdot \frac{d}{dt} X(t) + X(t) &= V(t); \quad \frac{d}{dt} X(t) = \frac{[X(n \cdot T) - X[(n-1) \cdot T]]}{T}; \\
To \cdot \frac{Xn - Xn\_1}{T} + Xn\_1 &= Vn; \quad Xn = \frac{(To - T)}{To} \cdot Xn\_1 + \frac{T}{To} \cdot Vn.
\end{aligned} \tag{3}$$

Збираємо рівняння регулятора, привода і об'єкта у замкнену систему рівнянь.

$$\left. \begin{aligned}
U_n &= k1 \cdot (X_n - X_t) + k2 \cdot (X_n - X_{n-1}) + k3 \cdot (V_{n-1} - V_{n-2}); \\
V_n &= \frac{-Tp}{(Tp + T)} \cdot V_{n-2} + \frac{(2 \cdot Tp + T)}{(Tp + T)} \cdot V_{n-1} + \frac{T^2}{(Tp + T)} \cdot U_n; \\
X_n &= \frac{(To - T)}{To} \cdot X_{n-1} + \frac{T}{To} \cdot V_n,
\end{aligned} \right\} \tag{4}$$

де  $Un, Vn, Xn$  – індексовані імена відповідних змінних (див. вище),  $n, T$  – номер та величина кроку квантування,  $Tp, To$  – сталі часу привода та об'єкта.

### 3. Розробка програми для моделювання широтно-імпульсної модуляції

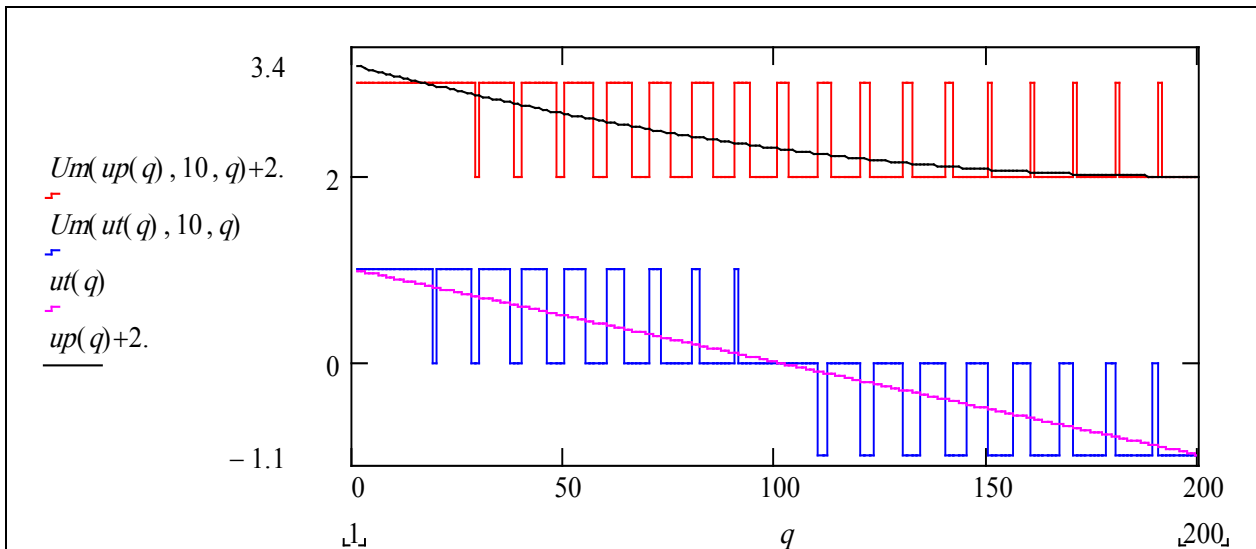
Для наближення імітаційної моделі цифрової системи до реальності слід врахувати методи кодування – декодування при введенні в МК вимірюваних параметрів – координат, швидкостей ... і виведенні управляючих дій.

Розглянемо типовий метод управління типовим приводом – електродвигуном з тиристорним управлінням через обмотку якоря. В такому випадку на двигун подаються імпульси постійної амплітуди (напруги) – (наприклад,  $\pm 15V$ ), а ширина імпульсів пропорційна сигналу управління. Розробляємо і тестуємо функцію для моделювання імпульсного управління.

$$Um(u, Ni, i) := \begin{cases} sto \leftarrow 101 \\ Xvxi \leftarrow (mod(i, Ni) + 1 \leq ceil(|u| \cdot Ni)) \cdot sign(u) \\ Xvxi \end{cases}$$

Тестуємо програмний модуль модуляції, задаємо тестові вхідні сигнали

$$QQ := 200; \quad q := 1..QQ; \quad ut(q) := 1 - \frac{2q}{QQ}; \quad up(q) := 0.3(ut(q) + 1)^2.$$



### Тест № 1.

1. **Напишіть альтернативну версію** програми для моделювання ШІМ з використанням for..., while..., if... (Відповідь1 – Ваша програма).

2. **Що підставляється** як параметри у функцію  $Um(u, Ni, i)$ ? Варіанти відповіді: 1) (число, число, число), 2) (число, масив, число), 3) (функція, число, число), 4) (матриця, матриця, матриця), 5) (функція, функція, дата). **Відповідь2 := 4.**

3. **Що повертає** підпрограма (функція)  $Um(u, Ni, i)$ ? Варіанти відповіді; 1) число, 2) масив 6×9, 3) число, 4) масив QQ×1, 5) функцію, 6) не знаю. **Відповідь3 := 6.**

4. **Яку семантику** мають параметри функції  $Um(u, Ni, i)$ ?

Варіанти відповіді: 1) (вхідний сигнал, максимальна ширина імпульсу, поточний такт), 2) (управління, період квантування, номер кроку), 3) (управління, період квантування, частота квантування), 4) (вхідний сигнал, що кодується у ШІМ-сигнал, період квантування, дискретний час). Вкажи коректні/некоректні відповіді **Відповідь4 := (0 0 0 1)**.

### 4. Розробка програми для моделювання системи

Складаємо тепер з отриманих математичних моделей елементів програму для моделювання системи з цифровим управлінням. Для імітації тих операцій, що виконуються в мікроконтролері відповідно будуюмо фрагменти програми, що відображають ці операції. Крім того, для змінних мікроконтролера використовуємо ВЕЛИКІ ЛІТЕРИ, для змінних матмоделей об'єкта, привода та зовнішніх дій – малі. Вводимо також змінну  $EX = X_n - X_t$  – похибку регулювання.

ОТУТ (згідно з логічною послідовністю, але нам зручно ввести їх там, на стенді, в абсолютному присвоєнні) вводяться параметри варіанта: сталі часу привода  $Trp = 0.2$ , об'єкта  $To = 0.8$ ; вибираються (на стенді) крок квантування  $T = 0.05$  та період ШІМ  $Ni = 10$ ,  $n := 1..30$ . Перепишемо рівняння системи (4) у компактному вигляді:

$$a1(To, T) := \frac{(To - T)}{To}; \quad b(To, T) := \frac{T}{To}; \quad \boxed{x_n = a1(To, T) \cdot x_{n-1} + b(To, T) \cdot v_n};$$

$$c2(Trp, T) := \frac{-Trp}{(Trp + T)}; \quad c1(Trp, T) := \frac{(2 \cdot Trp + T)}{(Trp + T)}; \quad d(Trp, T) := \frac{T^2}{(Trp + T)}$$

$$\boxed{V_n = c2(Trp) \cdot V_{n-2} + c1(Trp) \cdot V_{n-1} + d(Trp) \cdot U_n}$$



Задаємо варіанти функцій – вхідних сигналів та початкові умови:

$$Xstup(n, nt) \equiv \Phi(n - nt) - \Phi(n - nt - 30); \quad Xga(\omega, n) \equiv 0.6 \cdot \sin[\omega \cdot (n - 2)]; \quad pusto := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Pp(K, N) :=$ $x \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V1 \leftarrow 0$ $V2 \leftarrow 0$ $z^{(1)} \leftarrow pusto$ $z^{(2)} \leftarrow z^{(1)}$ $EX1 \leftarrow 0$ $X \leftarrow 0$ $X1 \leftarrow 0$ $U1 \leftarrow 0$ $\text{for } n \in 3.. Ny$ <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;"> <math display="block">U \leftarrow K_1 \cdot EX1 + K_2 \cdot (X - X1) + K_3 \cdot (V1 - V2)</math> <math display="block">Uim \leftarrow Kuc \cdot Um(U, Ni, n)</math> <math display="block">v_n \leftarrow c2(Tp, T) \cdot v_{n-2} + c1(Tp, T) \cdot v_{n-1} + d(Tp, T) \cdot Uim</math> <math display="block">x_n \leftarrow a1(To, T) \cdot x_{n-1} + b(To, T) \cdot v_n</math> <math display="block">Xзадане \leftarrow Xstup(n, nt)</math> <math display="block">EX1 \leftarrow x_n - Xзадане</math> <math display="block">X1 \leftarrow X</math> <math display="block">X \leftarrow x_n</math> <math display="block">V2 \leftarrow V1</math> <math display="block">V1 \leftarrow v_n</math> <math display="block">z^{(n)} \leftarrow \begin{pmatrix} x_n \\ Xзадане \\ v_n \\ Uim \end{pmatrix}</math> </div> $z$	<p>Ця програма отримана копіюванням та модифікацією програми моделювання з попередньої роботи (див. розділ 5.1) Синтаксичні і семантичні аспекти програми майже зрозумілі. Розглянемо програму в прагматичному аспекті (=навіщо, з якою ціллю).</p> <p>Номінально, модифікуючи попередню програму, треба було замінити в законі управління координати X1, X2 на похибки EX1=X1задане - X1...</p> <p>☞ бачимо, що в диференціальній складовій замість EX1-EX2 взято <math>x_{n-1} - x_{n-2}</math>. Це зменшує управляючі дії при великих змінах вхідного сигналу Xзадане.</p> <p>☞ ось тут підставляємо різні варіанти вхідного сигналу.</p> <p>Розширюємо вихід програми - виводимо не тільки координату і управління, а ще й вхідний сигнал.</p>
---	--

Рисунок 4 – Текст програми моделювання САУ

$$\text{вихід\_САУ}_k := Pp(K1, Ny)_{1, k}; \quad \text{вхід\_САУ}_k := Pp(K1, Ny)_{2, k};$$

$$\text{вих\_двиг}_k := Pp(K1, Ny)_{3, k}; \quad \text{вхід\_двиг}_k := Pp(K1, Ny)_{4, k}.$$

Тепер на базі отриманої програми будемо ств. для проведення обчислювальних експериментів. Щоб залишити простір для подальших покращень програми, організуємо вибір і зміну управляючого сигналу найбільш примітивним способом – у відповідному рядку програми замість одного імені функції підставляємо інше (можна зробити це більш радикально, але ...)

вхідні сигнали:           ступінчастий:           гармонічний:  
 $N_y \equiv 50$ ;  $k \equiv 1..N_y$ ;  $X_{stup}(n, nt)$ ;  $nt \equiv 4$ ;  $X_{ga}(\omega, n)$ ;  $\omega \equiv .2$ .

параметри регулятора  $K1 \equiv \begin{pmatrix} -25 \\ -80 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{"штраф за похибку"} \\ \text{"штраф за швидкість"} \\ \text{"штраф ...?"} \end{pmatrix}$

параметри об'єкта  $Tp \equiv .2$ ;  $To \equiv .8$  загальне підсилення  $K_{ус} \equiv 60$ ;  
 крок квантування  $T \equiv 0.05$ ; період модуляції  $Ni \equiv 10$

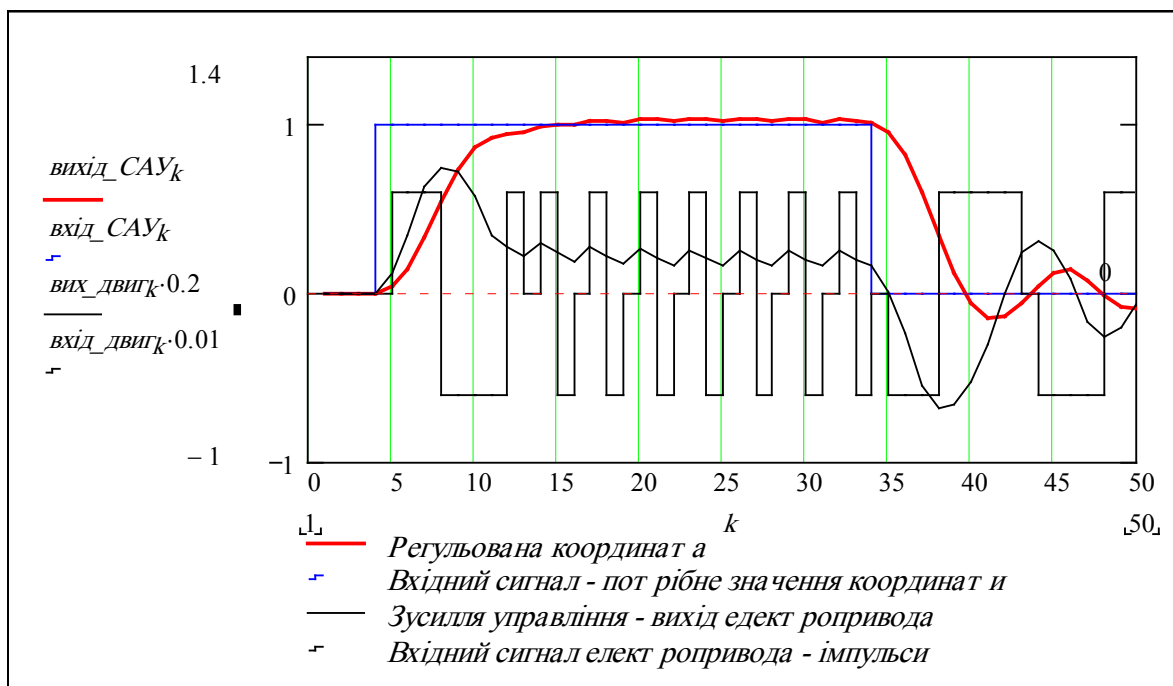


Рисунок 5 – Реакція САУ на ступінчастий вхідний сигнал

Те, що бачимо вище, – головний результат роботи: інструмент для оптимізації та випробування мікропроцесорної САУ. Тільки після отримання задовільних результатів на такому стенді можна переносити все в хардвер, тобто «залізо», остаточно випробувати і тиражувати... Між іншим, на цьому стенді підібрати та випробувати і привод – треба тільки мати досить точну його матмодель. Даний стенд не має модулів оцінювання якості регулювання – зробіть це самостійно. Стенд можна доповнити програмними модулями автоматизації експерименту і пошукової оптимізації...

Тепер ваша ЦІЛЬ – ШВИДКО і ЯКІСНО настроїти мікропроцесорну систему управління – використовуючи знання, інтуїцію, визначити параметри  $k1, k2, k3, K_{ус}, Ni$ , що забезпечують задовільну якість регулювання.

### Як користуватись стендом

1. На початковому етапі зробіть менше кроків моделювання  $N_y = 25 - 50$ .
2. Можете змінювати все, крім кроку квантування  $T = 0.05$  (параметри закону регулювання суттєво залежать від кроку квантування, їх треба змінювати одночасно з  $T$  – це для професіоналів).
3. Ви можете: а) необмежено змінювати параметри регулятора, б) обережно – загальний коефіцієнт підсилення  $K_{ус}$  (це ж потужність привода) та період модуляції  $Ni$  (у тактах квантування).





## 5.3 Аналіз і синтез неперервної САУ зі спостерігачем

### Вступ

**Ціль даної роботи** – набуття навичок у розробці і реалізації в програмному середовищі математичних пакетів робочих моделей для аналізу і синтезу стандартної САУ зі спостерігачем. Робоча модель – математична модель, реалізована в певній програмній платформі, орієнтована на проведення досліджень САУ і просте перенесення її в середовище реальної «цифрової САУ».

Про актуальність концепції «спостерігач стану» свідчить наявність синонімів: «асимптотичний ідентифікатор», «динамічний компенсатор», «модель об'єкта в зворотному зв'язку» та ін. Функції спостерігача – отримання оцінок компонент вектора стану, що безпосередньо не вимірюються в реальній САУ – взагалі, внаслідок часткової або повної відмови вимірювачів.

На відміну від «фізичних» вимірювачів координат, швидкостей, температур, тисків, концентрації ..., спостерігач – це програмно реалізована модель об'єкта управління з системи управління. Зрозуміло, що ефективність спостерігача залежить від того, наскільки точно він відтворює реальний об'єкт.

В цій роботі крок за кроком виконується **синтез регулятора** реального об'єкта і синтез «спостерігача», тобто системи управління моделлю об'єкта. Так само, точно крок за кроком будуються програми для моделювання динаміки об'єкта, спостерігача і системи «об'єкт + спостерігач».

Теорія спостерігачів іноді вважається занадто складною для пересічного спеціаліста з управління. Однак, це необхідна умова для освоєння сучасної теорії і практики управління сучасними об'єктами.

Детальне вивчення теорії систем зі спостерігачами – в другій частині курсу. Однак освоєння на рівні практичних навичок бажано починати раніше.

Завдання по розділу змінюються постійно. Наводимо приклад

### Завдання № 13

**Дано:** динаміка об'єкта  $\frac{d}{dt}x = A \cdot x + B \cdot u$ ; параметри об'єкта  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  
матриця вимірювань  $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Вимоги до перехідного процесу в основному контурі: тривалість ПП  $T_p := 1$ ; викид ПП  $hmz := 0.06$ . Параметри спостерігача **вибираються** згідно з методикою синтезу.

**Знайти:** параметри регулятора основного контура та параметри контура спостерігача. Довідкові дані – стандартні коефіцієнти – в зразку виконання.

**Завдання.** Для свого варіанта даних:

1. Побудувати структурну схему і блок-схему САУ зі спостерігачем (в зразку);
2. Обґрунтувати вибір методу синтезу і критерію оптимальності САУ (в зразку);
3. **Визначити параметри регулятора за вектором стану**  $k_1, k_2$ ;
4. **Визначити параметри спостерігача вектора стану**  $l_1, l_2$ ;

5. Отримати еквівалентну дискретну модель САУ і **розробити програму** моделювання САУ для випадків: а) САУ зі спостерігачем, б) САУ без спостерігача, *факультатив*: в) за наявності випадкових помилок у вимірювачі швидкості;

6. **Провести дослідження перехідних процесів**, *факультатив*: дослідити змішане управління з використанням вимірювача і спостерігача стану. Розробити модуль обчислення показників якості регулювання.

### 1. Побудова структурної схеми і блок-схеми САУ зі спостерігачем

На рис. 1 подана структурна схема САУ зі спостерігачем стану.

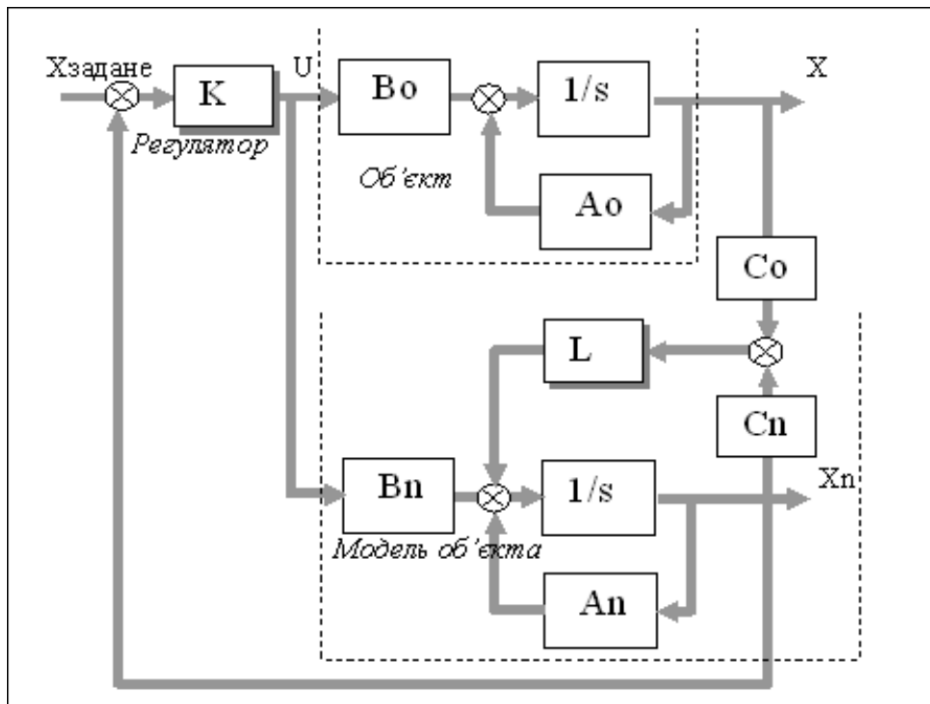


Рисунок 1 – Структурна схема САУ зі спостерігачем

Бачимо, що спостерігач – модель об'єкта в контурі зворотного зв'язку. Через лінію з підсиленням  $L$  на вхід моделі подається «штраф» за різницю між (вимірними) виходами об'єкта і моделі:

$$\Delta Y = Y_n - Y = C_n \cdot X_n - C_o \cdot X = C \cdot (X_n - X).$$

Далі буде доведено, що при виконанні певних умов вихід спостерігача сходиться до виходу об'єкта.

### 2. Обґрунтування вибору методу синтезу і критерію оптимальності САУ

Виконаємо теоретичне обґрунтування методу синтезу САУ зі спостерігачем. Запишемо в канонічних означеннях задачу синтезу САУ зі спостерігачем вектора стану.

Дано: об'єкт  $\frac{d}{dt}X = A \cdot X + B \cdot U$  та вимірювачі  $Y = C \cdot X$ ; спостерігач = модель об'єкта

$\frac{d}{dt}X_n = A \cdot X_n + B \cdot U + L \cdot (Y_n - Y)$  та модель вимірювачів  $Y_n = C \cdot X_n$ ; регулятор

$U = K \cdot X_n$ . Зверніть увагу – для управління використовується оцінка.

Вимоги до якості регулювання на початковому етапі задаються як вимоги до параметрів перехідних процесів (ПП) у ОСНОВНОМУ КОНТУРІ і КОНТУРІ СПОСТЕРІГАЧА,

наприклад:  $T_{pp}$ ,  $h_{mp}$ ,  $T_{pn}$ ,  $h_{mn}$  – тривалості ПП і викиди для цих контурів, відповідно. Звичайно тривалість ПП у спостерігача повинна бути  $T_{pn} = (0.1 - 0.25) \cdot T_{pp}$ .

На другому етапі підбираються, вибираються або знаходяться як розв'язання оптимізаційної задачі **потрібні значення коефіцієнтів характеристичних рівнянь** контуру регулятора і спостерігача.

Потім коефіцієнти характеристичних рівнянь контуру регулятора і спостерігача прирівнюються до їх потрібних значень – отримуємо по  $N$  рівнянь для кожного контуру. До цих рівнянь додаються інші умови – так отримуємо систему нелінійних рівнянь, з яких знаходимо параметри регулятора – матрицю  $K$  та параметри спостерігача – матрицю  $L$ . Перекладемо слова на мову математики.

$$\frac{d}{dt}X = A \cdot X + B \cdot U \Leftrightarrow U = K \cdot X_n \Leftrightarrow \frac{d}{dt}X = A \cdot X + B \cdot K \cdot X_n \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}X_n = A \cdot X_n + B \cdot U + L \cdot (Y_n - Y)} \Leftrightarrow \begin{matrix} \boxed{U = K \cdot X_n} \\ \boxed{Y = C \cdot X} \end{matrix} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}X_n = (A + B \cdot K) \cdot X_n + L \cdot C \cdot (X_n - X)} \dots (2)$$

Для синтезу і аналізу стійкості нам потрібні характеристичні рівняння САУ без спостерігача і спостерігача, як слідкуючої системи. Нагадаємо процедуру: беремо відповідну однородну (зовнішні входи =0) систему дифрівнянь і виконуємо перетворення Лапласа. Потім, виходячи з умови отримання нетривіальних розв'язків прирівнюємо детермінант відповідної матриці до нуля. Розкриваємо його – отримуємо алгебраїчне рівняння степеня  $N$  відносно змінної  $s$ . Навіщо воно нам? Якщо всі параметри САУ відомі – відомі будуть і коефіцієнти цього рівняння – можемо знайти корені – визначити стійкість САУ, побудувати перехідний процес (ПП). Можемо, навпаки, задати значення коефіцієнтів, що забезпечують потрібний ПП і знайти відповідні параметри регулятора.

$$\frac{d}{dt}X = A \cdot X + B \cdot K \cdot X \quad \begin{matrix} L\{\cdot\} \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad s \cdot X(s) = (A + B \cdot K) \cdot X(s) \Leftrightarrow [I \cdot s - (A + B \cdot K)] \cdot X(s) = 0.$$

Отримуємо характеристичне рівняння основного контуру:

$$\boxed{\det[I \cdot s - (A + B \cdot K)] = 0}. \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}X_n = A \cdot X_n + L \cdot C \cdot X_n \quad \begin{matrix} L\{\cdot\} \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad s \cdot X_n(s) = (A + L \cdot C) \cdot X_n(s) \Leftrightarrow [I \cdot s - (A + L \cdot C)] \cdot X_n(s) = 0.$$

Отримуємо характеристичне рівняння спостерігача:

$$\boxed{\det[I \cdot s - (A + L \cdot C)] = 0}. \quad (4)$$

**Зауваження.** З рівняння спостерігача виключено складові  $B \cdot U$  та  $-L \cdot C \cdot X$ , як зовнішні входи.

$$\frac{d}{dt}X_n = A \cdot X_n + B \cdot U + L \cdot C \cdot (X_n - X) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}X_n = A \cdot X_n + L \cdot C \cdot X_n.$$

**Зауваження.** Для зрозумілості в (3) і (4) написано  $\det(\cdot)$ , але у пакеті Mathcad детермінант позначається так  $|I \cdot s - (A + L \cdot C)|$ . Звикайте і пам'ятайте.

Доведемо одну важливу властивість САУ зі спостерігачем стану. Ця властивість використовується при синтезі САУ зі спостерігачем та аналізі стійкості.

$$X_n = X + \Delta X \Rightarrow \frac{d}{dt} X = A \cdot X + B \cdot K \cdot X_n \Rightarrow \frac{d}{dt} X = (A + B \cdot K) \cdot X + B \cdot K \cdot \Delta X; \quad (5)$$

$$X_n - X = \Delta X \Rightarrow \frac{d}{dt} X_n = \frac{d}{dt} X + \frac{d}{dt} \Delta X \Rightarrow \frac{d}{dt} X_n = (A + B \cdot K) \cdot X_n + L \cdot C \cdot (X_n - X);$$

$$\frac{d}{dt} X + \frac{d}{dt} \Delta X = (A + B \cdot K) \cdot X + (A + B \cdot K) \cdot \Delta X + L \cdot C \cdot \Delta X; \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta X = (A + L \cdot C) \cdot \Delta X \quad (7)$$

Все це ніби зрозуміло, але прокоментуємо. Ввели нову змінну – похибку оцінювання  $\Delta X$ . Виключили  $X_n$  з (1) – отримали (5); виключили з (2) – отримали (6). З рівняння (6) відняли (5) – отримали (7). Тепер об'єднали рівняння (5) і (7) в одне матрично-векторне диференціальне рівняння.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} X = (A + B \cdot K) \cdot X + B \cdot K \cdot \Delta X \\ \frac{d}{dt} \Delta X = 0 \cdot X + (A + L \cdot C) \cdot \Delta X \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} X \\ \frac{d}{dt} \Delta X \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B \cdot K) & B \cdot K \\ 0 & (A + L \cdot C) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ \Delta X \end{pmatrix} \dots (8)$$

Отримали систему диференціальних рівнянь порядку  $2 \cdot N$ . Запишемо її в компактному вигляді

$$\frac{d}{dt} Z = M \cdot Z,$$

де  $Z = \begin{pmatrix} X \\ \Delta X \end{pmatrix}$ ;  $M = \begin{bmatrix} (A + B \cdot K) & B \cdot K \\ 0 & (A + L \cdot C) \end{bmatrix}$ . Проаналізуємо цю систему. Запишемо її характеристичне рівняння:  $\det(Is - M) = 0$ , розкриємо

$$\det \left[ \begin{bmatrix} I \cdot s - (A + B \cdot K) & B \cdot K \\ 0 & I \cdot s - (A + L \cdot C) \end{bmatrix} \right] = \text{продов}$$

$$\text{жусмо} = \det [I \cdot s - (A + B \cdot K)] \cdot \det [I \cdot s - (A + L \cdot C)]$$

Бачимо, що характеристичне рівняння її розпадається (згідно з властивостями блочних матриць) на два окремих рівняння, одне з котрих – характеристичне рівняння САУ без спостерігача, друге – характеристичне рівняння спостерігача. Це означає, що **параметри регулятора  $K$  та параметри спостерігача стану  $L$  можна розраховувати незалежно.**

**Постановка задачі синтезу спостерігача.** Парадоксально, але головна складність у синтезі управління за вектором стану – це зведення до канонічного вигляду вхідних даних. Елементи системи можуть бути задані передаточними функціями, частотними характеристиками, їх параметри можуть мати різні розмірності. Розглянемо таку досить просту, конкретну задачу.

Для роботи прибиральника великих виробничих приміщень треба розробити підсистему управління положенням робота відносно лінії розмітки проходів. Особливість підсистеми в тому, що параметри моделі динаміки залежать від швидкості руху, а швидкість руху задається іншою підсистемою залежно від умов руху. Вимірюється відхилення ( $Y$ ) робота від лінії розмітки, швидкість –  $dY/dt$  не вимірюється або

вимірюється зі значними завадами і похибками. Для прецизійного управління необхідно досить точно знати вектор стану ( $Y, dY/dt$ ).

**Необхідно розрахувати і дослідити регулятор за вектором стану зі спостерігачем** (ідентифікатором), що формує для регулятора на базі виміряного відхилення  $Y$  оцінку швидкості  $dY/dt$ .

Далі подано схему об'єкта та блок-схему системи (в стандартних позначеннях).

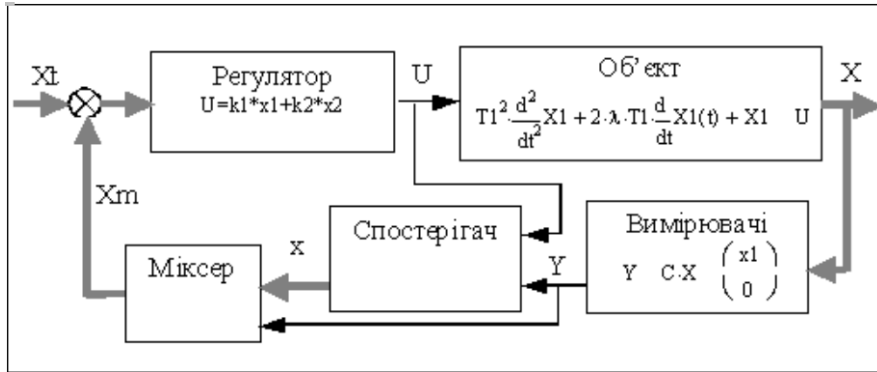


Рисунок 2 – Блок-схема САУ зі спостерігачем стану

Означення:  $X = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix}$  – вектор стану;  $x = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$  – оцінка вектора стану;

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  – матриця вимірювань;  $Y = C \cdot X = \begin{pmatrix} X1 \\ 0 \end{pmatrix}$  – вектор вимірювань;

$U = k1 \cdot x1 + k2 \cdot x2 = (k1 \ k2) \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = K \cdot x$  – вектор управління (скаляр у даному випадку).

**Обґрунтування вибору методу синтезу.** Сьогодні для синтезу використовуються такі методи синтезу – метод ЛАЧХ – зручний для безмашинного визначення параметрів регулятора, але приблизний і незручний для багатовимірних САУ; метод кореневих годографів – теж приблизний, графоаналітичний, зручний для оціночних розрахунків; група аналітичних методів конструювання регуляторів, до яких належить метод стандартних коефіцієнтів. Цей метод зручний для формалізації і алгоритмізації, його суттєва перевага в тому, що процедуру синтезу можна повністю віддати ЦОМ, зробити онлайнною – параметри регулятора періодично обчислюються під час функціонування САУ. Недоліки методу – чутливість до розмірності об'єкта. Для поставлених цілей переваги має цей метод.

**Зведення математичної моделі САУ до канонічного вигляду.**  $ORIGIN := 1$ . Задано передаточні функції об'єкта та регулятора (рис. 2). Нам потрібно отримати систему диференціальних рівнянь у формі Коші. Перейдемо від передаточних функцій до функцій часу.

$$\frac{X(s)}{U(s)} = W(s) = \frac{k_0}{T_1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \lambda \cdot T_1 \cdot s + 1} \Leftrightarrow T_1^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} X1 + 2 \cdot \lambda \cdot T_1 \cdot \frac{d}{dt} X1(t) + X1 = U; \quad (9)$$

$$\frac{U(s)}{X1(s)} = W_r(s) = k_1 + k_2 \cdot s \Leftrightarrow k_1 \cdot \frac{d}{dt} X1(t) + k_2 \cdot X1(t) = U(t). \quad (10)$$

Записуємо згідно з рис. 2 вирази для векторів стану, рівняння регулятора та вимірювачів.

$$\dot{X}_2 = \frac{d}{dt} X_1; \quad X := \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix}; \quad K := (k1 \ k2); \quad U = k1 \cdot x1 + k2 \cdot x2 = (k1 \ k2) \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = K \cdot x.$$



Задаємо структуру матриці L (якщо взяти чотири ненульових елементи, то треба задати ще два рівняння).

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; Y := C \cdot X; Y \rightarrow \begin{pmatrix} X1 \\ 0 \end{pmatrix}; x := \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}; L := \begin{pmatrix} l1 & 0 \\ l2 & 0 \end{pmatrix}; L \cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} l1 & 0 \\ l2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записуємо системи дифрівнянь для САУ без спостерігача та спостерігача, виходячи з рівнянь (1), (2), (9) і схем на рис. 1 і 2. Використовуємо дещо інші означення, ніж в теоретичній частині. В цих рівняннях прийнято позначення: X1 – координата, x1 – оцінка координати. Підставимо у (9) рівняння регулятора (10)

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \frac{d}{dt} X1 &= X2; \\ 2) \quad \frac{d}{dt} X2 &= -\frac{1}{T1^2} \cdot X1 - 2 \cdot \frac{\lambda}{T1} \cdot X2 + \frac{ko}{T1^2} \cdot U; \\ 3) \quad \frac{d}{dt} x1 &= x2 + l1 \cdot (x1 - X1); \\ 4) \quad \frac{d}{dt} x2 &= -\frac{1}{T1^2} \cdot x1 - 2 \cdot \frac{\lambda}{T1} \cdot x2 + \frac{ko}{T1^2} \cdot U + l2 \cdot (x1 - X1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

Уважно дивимосся на рівняння (11) і бачимо в них добутки відповідних матриць на відповідні вектори. Записуємо матрично-векторні рівняння для САУ без спостерігача і для спостерігача.

$$\frac{d}{dt} X = A \cdot X + B \cdot U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T1^2} & -\left(2 \cdot \frac{\lambda}{T1}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ko}{T1^2} \end{pmatrix} \cdot U;$$

$$\frac{d}{dt} Xn = A \cdot Xn + B \cdot U + L \cdot (Yn - Y) = \text{продов}$$

$$\text{жусмо} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ l2 \cdot -\frac{1}{T1^2} & -\left(2 \cdot \frac{\lambda}{T1}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ko}{T1^2} \end{pmatrix} \cdot U + \begin{pmatrix} l1 & 0 \\ l2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 - X1 \\ x2 - X2 \end{pmatrix}$$

Підводимо підсумки етапу – записуємо вирази для матриць A, B, K, L, C.

$$\left. \begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T1^2} & -2 \cdot \frac{\lambda}{T1} \end{pmatrix}; & B &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ko}{T1^2} \end{pmatrix}; & I &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ C &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; & L &:= \begin{pmatrix} l1 & 0 \\ l2 & 0 \end{pmatrix}; & K &:= (k1 \ k2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

### 3. Визначення параметрів регулятора і спостерігача

Синтез САУ зі спостерігачем – це знаходження для заданого об'єкта управління параметрів k1, k2, l1, l2, при яких управління відповідає заданим вимогам. Серед відомих типових критеріїв вибираємо критерій «інтеграла від зваженого модуля похибки». Суть методу в тому, що для поширених критеріїв знайдено значення потрібних коефіцієнтів хара-

ктеристичного рівняння замкненої САУ. Ці коефіцієнти обчислені для нормалізованих характеристикних рівнянь (форма Вишнеградського з безрозмірним часом). Для конкретної САУ треба відповідно перерахувати ці коефіцієнти. Потім, прирівнюючи ці коефіцієнти (потрібні для забезпечення заданого ПП) до виразів для коефіцієнтів характеристичного рівняння замкненої САУ, знаходимо значення параметрів регулятора. Виконаємо це крок за кроком.

**К1. Отримання характеристикних рівнянь.** Беремо вирази для характеристикних рівнянь (3) та (4), підставляємо в них конкретні вирази для матриць А, В, С, К, L (12).

$$\boxed{\det[I \cdot s - (A + BK)] \rightarrow \frac{s^2 \cdot Tl^2 + 2 \cdot s \cdot \lambda \cdot Tl - s \cdot ko \cdot k2 + 1 - ko \cdot k1}{Tl^2}}, \quad (13)$$

$$\boxed{\det[I \cdot s - (A + L \cdot C)] \rightarrow \frac{s^2 \cdot Tl^2 + 2 \cdot s \cdot \lambda \cdot Tl - Il \cdot s \cdot Tl^2 - 2 \cdot Tl \cdot Il \cdot \lambda + 1 - l2 \cdot Tl^2}{Tl^2}}.$$

Все так просто – поставили стрілку – отримали результат. Щоб оцінити складність роботи, що виконав за нас символічний процесор, подаємо послідовність етапів отримання характеристичного рівняння (виконаного вручну!).

$$|I \cdot s - A - BK| = \left| \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{1 - k1}{Tl^2} & s - \frac{k2 - 2 \cdot \lambda \cdot Tl}{Tl^2} \end{pmatrix} \right| = s^2 + \frac{(2 \cdot \lambda \cdot Tl - k2)}{Tl^2} \cdot s + \frac{(-k1 + 1)}{Tl^2} = 0,$$

$$|I \cdot s - A - L \cdot C| = \left| \begin{pmatrix} s - Il & -1 \\ \frac{1}{Tl^2} - l2 & s + \frac{2 \cdot \lambda}{Tl} \end{pmatrix} \right| = s^2 + \left( -Il + \frac{2}{Tl} \cdot \lambda \right) \cdot s + \left( \frac{1}{Tl^2} - l2 - \frac{2}{Tl} \cdot Il \cdot \lambda \right).$$

Ми бажаємо отримати аналітичні вирази для параметрів регулятора, тому *поки* не вибираємо конкретний еталонний перехідний процес і конкретні значення коефіцієнтів еталонного перехідного процесу та характеристикні рівняння.

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях відповідних характеристикних рівнянь (вважаємо, що в (13)  $ko := 1$ ).

Основний контур:

Контур спостерігача:

$$s^2 + \frac{(2 \cdot \lambda \cdot Tl - k2)}{Tl^2} \cdot s + \frac{1 - k1}{Tl^2} = 0 ; \quad s^2 + \left( -Il + \frac{2}{Tl} \cdot \lambda \right) \cdot s + \left( \frac{1}{Tl^2} - l2 - \frac{2}{Tl} \cdot Il \cdot \lambda \right).$$

$$s^2 + a1b \cdot \omega 0 \cdot s + a0b \cdot \omega 0^2 = 0 ; \quad s^2 + A1b \cdot \omega n \cdot s + A0b \cdot \omega n^2 = 0 . \quad (14)$$

Для еталонних рівнянь прийнято такі позначення  $a1b, a0b, A1b, A0b$  – безрозмірні коефіцієнти для регулятора і спостерігача,  $\omega 0, \omega n$  – відповідні власні частоти.

**К2. Розв'язання систем рівнянь для визначення  $k1, k2, Il, l2$ .** Дивлячись (уважно) на (14), записуємо системи рівнянь для визначення  $k1, k2, Il, l2$ . В загальному випадку ці рівняння нелінійні. Розв'язуємо їх у символічному вигляді. Для цього потрібно: 1) щоб усі параметри і змінні не мали числових значень; 2) після функції Find(·) ставимо не «=» а «→».

**Визначення параметрів регулятора**

$$\begin{aligned} \text{Given} \quad & \frac{2 \cdot \lambda \cdot T1 - k2}{T1^2} = a1b \cdot \omega0 ; \quad \frac{1 - k1}{T1^2} = a0b \cdot \omega0^2 ; \\ \text{Find}(k1, k2) \rightarrow & \left( \begin{array}{c} 1 - a0b \cdot \omega0^2 \cdot T1^2 \\ 2 \cdot \lambda \cdot T1 - a1b \cdot \omega0 \cdot T1^2 \end{array} \right) . \end{aligned} \quad (15)$$

**Визначення параметрів спостерігача**

$$\begin{aligned} \text{Given} \quad & 2 \cdot \frac{\lambda}{T1} - l1 = A1b \cdot \omega n ; \quad -2 \cdot \lambda \cdot \frac{l1}{T1} + \frac{1}{T1^2} - l2 = A0b \cdot \omega n^2 ; \\ \text{Find}(l1, l2) \rightarrow & \left( \begin{array}{c} \frac{2 \cdot \lambda - A1b \cdot \omega n \cdot T1}{T1} \\ \frac{-4 \cdot \lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot A1b \cdot \omega n \cdot T1 + 1 - A0b \cdot \omega n^2 \cdot T1^2}{T1^2} \end{array} \right) . \end{aligned} \quad (16)$$

Означимо:

$$MUmu := \frac{(-4 \cdot \lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot A1b \cdot \omega n \cdot T1 + 1 - A0b \cdot \omega n^2 \cdot T1^2)}{T1^2}$$

і групуємо:

$$MUmu \left| \begin{array}{l} \text{expand}, T1 \\ \text{collect}, \frac{1}{T1} \end{array} \right. \rightarrow -A0b \cdot \omega n^2 + \frac{2}{T1} \cdot \lambda \cdot A1b \cdot \omega n + \frac{-4 \cdot \lambda^2 + 1}{T1^2}.$$

Дивлячись (уважно) на (15) і (16), записуємо вирази для коефіцієнтів регулятора і спостерігача

$$\left. \begin{array}{l} k1 = 1 - a0b \cdot \omega0^2 \cdot T1^2 ; \quad k2 = 2 \cdot \lambda \cdot T1 - a1b \cdot \omega0 \cdot T1^2 ; \\ l1 = 2 \cdot \frac{\lambda}{T1} - A1b \cdot \omega n ; \quad l2 = \frac{-(4 \cdot \lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot A1b \cdot \omega n \cdot T1 - 1 + A0b \cdot \omega n^2 \cdot T1^2)}{T1^2} \end{array} \right\} . \quad (17)$$

**К3. Вибір стандартних коефіцієнтів та визначення власних частот  $\omega0$ ,  $\omega n$ .** Звичайно еталонний перехідний процес і його параметри вибираються з таблиць (стандартних коефіцієнтів). Ці коефіцієнти обчислені для процесів, що є оптимальними відносно певних критеріїв. Далі подано такі довідкові дані для систем другого порядку.

Ви повинні САМОСТІЙНО **вибрати тип процесу**, виходячи з вимог до перехідного процесу – згідно з варіантом. Власна частота для основного контуру визначається за формулою  $\omega0 = \text{Trb}/\text{Tr}$ , де  $\text{Trb}$  – безрозмірна тривалість перехідного процесу (ПП) для вибраного розподілення коренів (береться з таблиць),  $\text{Tr}$  – задана тривалість ПП. Для спостерігача тривалість ПП береться в «менш = 3–10» разів меншою:  $\text{Trn} = \text{Tr} \cdot \text{менш}$ .

Беремо (наприклад) з електронного довідника для критерія «інтеграл зваженого модуля похибки».

**Довідкові дані:** безрозмірні коефіцієнти характеристичних рівнянь; параметри ПП – безрозмірна тривалість –  $\tau_p$ ; перерегулювання –  $hm$ .

"Назва розподілення коренів"	a2	a1	a0	$\tau_p$	hm
"Кратні корені"	1	2	1	4.7	0
"Розподілення Баттерворта"	1	1.4	1	3	0.05
Опт_за_Ік1 = $\int_0^{\tau_k} \Delta x(t)^2 dt$	1	1	1	5.4	0.16
Опт_за_Ік2 = $\int_0^{\tau_k}  \Delta x(t)  \cdot t dt$	1	1.4	1	3	0.05

В цій таблиці подано значення стандартних коефіцієнтів та безрозмірної тривалості ПП для чотирьох процесів. Зверніть увагу на те, що оптимальний за базовим для масової науки інтегральним квадратичним критерієм процес є найгіршим. Квадратичний критерій тут не відображає дійсних вимог до ПП – він є неприродним. От останній процес є природним – завдяки штрафу (множник  $t$ ) за пізні помилки. Але він не дає аналітичних розв'язань. (Для систем другого порядку він тотожний процесу Баттерворта).

ВВОДИМО ЗАДАНУ (згідно з варіантом) тривалість ПП в основному контурі  **$T_p := 9$**  с.

ВИБИРАЄМО потрібну тривалість ПП спостерігача: менше := 0.2;  $T_{pn} :=$  менше  $\cdot T_p$ , тобто:  **$T_{pn}=0.18$**  с.

ВИБИРАЄМО еталонний процес для **основного** контуру: **кратні корені** і вводимо (див. вище) його параметри  $a1b := 2$ ;  **$a0b := 1$** ;  $T_{pb} := 6$ .

ВИБИРАЄМО еталонний процес для контуру **спостерігача**: **Баттерворта** і вводимо (див. вище) його параметри  **$a1bn := 1.4$** ;  $a0bn := 1$ ;  **$T_{pbn} := 3.5$** .

Визначаємо власні частоти основного контуру:  $\omega_o := \frac{T_{pb}}{T_p}$  і контуру спостерігача:  $\omega_n := \frac{T_{pbn}}{T_{pn}}$ . Маємо:  **$\omega_o = 0.667$**  1/с;  **$\omega_n = 1.944$**  1/с.

#### 4. Отримання еквівалентної дискретної моделі САУ і розробка програми моделювання

Розглянемо дві альтернативи еквівалентної дискретної моделі. Задамо (собі) питання – для чого вона нам потрібна? І виберемо ту, що відповідає поставленим задачам моделювання.

**Альтернатива 1.** Побудуємо еквівалентну дискретну модель (ЕДМ) на базі рівняння повної системи – САУ зі спостерігачем (8):

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} X \\ \frac{d}{dt} \Delta X \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B \cdot K) & B \cdot K \\ 0 & (A + L \cdot C) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ \Delta X \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} Z = M(A, B, C, K, L) \cdot Z$$

$$\Delta x_1 = x_1 - X_1 \quad \Delta x_2 = x_2 - X_2$$

Використаємо для отримання такої моделі відому форму подання розв'язання диференціального рівняння у формі Коші. Подаємо цю процедуру такою схемою:

$$\frac{d}{dt} X(t) = M \cdot X(t) \Leftrightarrow X(t_2) = e^{M \cdot (t_2 - t_1)} \cdot X(t_1) \Leftrightarrow X[(k+1) \cdot T] = e^{M \cdot T} \cdot X(k \cdot T).$$

Розкладаючи матричну експоненту в ступеневий ряд Тейлора і обмежуючись кінцевою кількістю членів ряду, можемо отримати більш-менш еквівалентні дискретні моделі. Обмежимося наближенням другого порядку для **перехідної функції стану САУ**. Для проведення досліджень треба зробити перехідну функцію функцією тих параметрів, вплив яких досліджується, наприклад (беремо наближення другого порядку):

$$F(k_1, k_2, l_1, l_2, dT) = I + Ml(k_1, k_2, l_1, l_2) \cdot dT + \frac{(Ml(k_1, k_2, l_1, l_2) \cdot dT)^2}{2}.$$

Недолік цієї моделі – вона неструктурований «чорний ящик». В ній неможливо змінити структуру регулятора, вимірювачів.

**Альтернатива 2.** Розробимо природно структуровану програму – так, щоб в ній були відображені «регулятор», «вимірювачі», «об'єкт», «спостерігач» – і от тоді легко буде виконати завдання 5 і 6. Побудуємо програму на базі рівнянь (1) і (2) (копіюємо їх сюди).

Регулятор      вимірювач      об'єкт      спостерігач

$$U = K \cdot X_n; \quad Y = C \cdot X; \quad \frac{d}{dt} X = A \cdot X + B \cdot U; \quad \frac{d}{dt} X_n = (A + B \cdot K) \cdot X_n + L \cdot (Y_n - Y). \quad (18)$$

Побудуємо відповідні ЕДМ для цих функціональних субмоделей повної моделі системи. Це просто зробити для перших двох рівнянь системи (18).

$$U^{(k)} = K \cdot X_n^{(k)}; \quad Y^{(k)} = C \cdot X^{(k)}.$$

Еквівалентна Дискретна Модель для об'єкта має вигляд (u – управління, v – збурення):

$$X_o^{(k+1)} = F(T) \cdot X_o^{(k)} + G(T) \cdot B \cdot u^{(k)} + G(T) \cdot B \cdot v^{(k)}; \quad y_n = C \cdot x_n; \quad y_o = C \cdot x_o.$$

Еквівалентна Дискретна Модель контуру спостерігача:

$$X_n^{(k+1)} = F(T) \cdot X_n^{(k)} + G(T) \cdot B \cdot u^{(k)} + G(T) \cdot L \cdot C \cdot \Delta y^{(k)}; \quad \Delta y = y_n - y_o.$$

Записуємо перше і друге наближення для відповідних перехідних функцій

$$F1(A, T) := I + \frac{A \cdot T}{1!}; \quad F2(A, T) := I + \frac{A \cdot T}{1!} + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!}.$$

Контроль:

$$G1(A, T) := I \cdot T; \quad G2(A, T) := I \cdot T + \frac{A \cdot T^2}{2!}; \quad F1(A, dT) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & dT \\ \frac{-1}{T^2} \cdot dT & 1 - 2 \cdot \frac{\lambda}{T} \cdot dT \end{pmatrix}.$$

Тепер маємо необхідні компоненти для написання програми моделювання. Нагадаємо, що в пакеті Mathcad програма в документі є підпрограмою для цього документа. Подаємо правила взаємодії програми з документом, в якому вона записана:

- ☞ в документ передається тільки те, що записано в останньому рядку програми;
- ☞ можна визначити функцію користувача у вигляді програми.

Ми розробляємо «зручну відкриту систему для обчислювальних експериментів», тому треба визначитись, які модулі локалізувати у документі (main), а які – в програмі. Тут не-

має готових рішень – хочемо зробити більш автономну, переносну програму – слід мінімізувати вхідні дані, хочемо максимум входів розташувати на стенді, біля виходів – графіків і таблиць ... Згідно зі стандартами програмування слід спочатку написати програму у псевдокодах.

$xs(K, L) =$	"Ввод початкових значень " "розширеного вектора стану" <i>for</i> $k \in 1.. \text{Кількість\_кроків}$   "Обчислення поточного управління = регулятор"   "Обчислення вектора вимірювання = вимірювач"   "Обчислення оцінки вектора вимірювання"   "Обчислення помилки оцінки вектора вимірювання"   "Обчислення вектора стану об'єкта = об'єкт"   "Обчислення оцінки вектора стану = спостерігач"   "Формування розширеного вектора стану" "Виведення таблиці - послідовності векторів стану"
--------------	---

**Блок синтезу.** Запишемо, за змоги, без коментарів, робочі рівняння підсистеми моделювання. Спочатку подаємо вхідні залежності для програми.

Тривалість ПП в основному контурі  $T_{pv} = 8$ . Тривалість ПП спостерігача  $T_{pvn} := \text{менш} \cdot T_{pv}$ ;  $T_{pvn} = 2$  с. **Власні частоти:** основного контуру:  $\omega_o := \frac{T_{pbm}}{T_{pv}}$  і контуру спостерігача:  $\omega_n := \frac{T_{pbnm}}{T_{pvn}}$ . Маємо:  $\omega_o = 0.75$  1/с;  $\omega_n = 1.5$  1/с.

Параметр об'єкта  $k_o = 1$ . Подаємо аналітичні вирази для параметрів регулятора і спостерігача. Копіюємо їх з формули (17):

$$k_{1m} := 1 - a_{0bm} \cdot \omega_o^2 \cdot T_{1v}^2; \quad k_{2m} := 2 \cdot \lambda_v \cdot T_{1v} - a_{1bm} \cdot \omega_o \cdot T_{1v}^2;$$

$$l_{1m} := 2 \cdot \frac{\lambda_v}{T_{1v}} - A_{1bm} \cdot \omega_n; \quad l_{2m} := \frac{-(4 \cdot \lambda_v^2 - 2 \cdot \lambda_v \cdot A_{1bm} \cdot \omega_n \cdot T_{1v} - 1 + A_{0bm} \cdot \omega_n^2 \cdot T_{1v}^2)}{T_{1v}^2}.$$

Ось, нарешті, те, що бере програма моделювання.

$$A_m := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_{1v}^2} & -2 \cdot \frac{\lambda_v}{T_{1v}} \end{pmatrix}; \quad B_m := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_o}{T_{1v}^2} \end{pmatrix}; \quad C_m := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_m := \begin{pmatrix} l_{1m} & 0 \\ l_{2m} & 0 \end{pmatrix};$$

$$K_m := (k_{1m} \quad k_{2m}); \quad K_t := K_m^T.$$

Програму робимо функцією параметрів регулятора і спостерігача.

$xs(Kt, Lm) :=$	$Xo^{(1)} \leftarrow xoo$ $Xn^{(1)} \leftarrow xno$ for $k \in 1.. Tm$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td> <math>uk \leftarrow Kt_1 \cdot Xn_{1,k} + Kt_2 \cdot Xn_{2,k}</math>  <math>Yo^{(k)} \leftarrow Cm \cdot Xo^{(k)} + (rnd(шум) - .5 \cdot шум)</math>  <math>Yn^{(k)} \leftarrow Cm \cdot Xn^{(k)}</math>  <math>Xo^{(k+1)} \leftarrow F1(Am, dTm) \cdot Xo^{(k)} + G1(Am, dTm) \cdot Bm \cdot uk</math>  <math>\Delta y^{(k)} \leftarrow Yn^{(k)} - Yo^{(k)}</math>  <math>vxod \leftarrow G1(Am, dTm) \cdot Bm \cdot uk + G1(Am, dTm) \cdot Lm \cdot \Delta y^{(k)}</math>  <math>Xn^{(k+1)} \leftarrow F1(Am, dTm) \cdot Xn^{(k)} + vxod</math>  <math>XX^{(k)} \leftarrow stack(Xo^{(k)}, Xn^{(k)})</math> </td> </tr> </table> $XX$	$uk \leftarrow Kt_1 \cdot Xn_{1,k} + Kt_2 \cdot Xn_{2,k}$ $Yo^{(k)} \leftarrow Cm \cdot Xo^{(k)} + (rnd(шум) - .5 \cdot шум)$ $Yn^{(k)} \leftarrow Cm \cdot Xn^{(k)}$ $Xo^{(k+1)} \leftarrow F1(Am, dTm) \cdot Xo^{(k)} + G1(Am, dTm) \cdot Bm \cdot uk$ $\Delta y^{(k)} \leftarrow Yn^{(k)} - Yo^{(k)}$ $vxod \leftarrow G1(Am, dTm) \cdot Bm \cdot uk + G1(Am, dTm) \cdot Lm \cdot \Delta y^{(k)}$ $Xn^{(k+1)} \leftarrow F1(Am, dTm) \cdot Xn^{(k)} + vxod$ $XX^{(k)} \leftarrow stack(Xo^{(k)}, Xn^{(k)})$
$uk \leftarrow Kt_1 \cdot Xn_{1,k} + Kt_2 \cdot Xn_{2,k}$ $Yo^{(k)} \leftarrow Cm \cdot Xo^{(k)} + (rnd(шум) - .5 \cdot шум)$ $Yn^{(k)} \leftarrow Cm \cdot Xn^{(k)}$ $Xo^{(k+1)} \leftarrow F1(Am, dTm) \cdot Xo^{(k)} + G1(Am, dTm) \cdot Bm \cdot uk$ $\Delta y^{(k)} \leftarrow Yn^{(k)} - Yo^{(k)}$ $vxod \leftarrow G1(Am, dTm) \cdot Bm \cdot uk + G1(Am, dTm) \cdot Lm \cdot \Delta y^{(k)}$ $Xn^{(k+1)} \leftarrow F1(Am, dTm) \cdot Xn^{(k)} + vxod$ $XX^{(k)} \leftarrow stack(Xo^{(k)}, Xn^{(k)})$		

Рисунок 3 – Текст програми моделювання

$k := 1.. Tm$ ;  $Xo_k := xs(Kt, Lm)_{1,k}$ ;  $Vo_k := xs(Kt, Lm)_{2,k}$ ;

$Xn_k := xs(Kt, Lm)_{3,k}$ ;  $Vn_k := xs(Kt, Lm)_{4,k}$ .

Нарешті ми прийшли до кінцевих результатів – моделювання САУ 2-го порядку зі спостерігачем. Зробимо блок для введення довільних параметрів і вимог до якості управління.

На рисунках 4 і 5 подано приклади процесів в САУ зі спостерігачем.

Початкові значення вектора стану  $xoo \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  і його оцінки  $xno \equiv \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Тривалість ПП спостерігача:  $\boxed{\text{менш} \equiv 0.25}$ . Кількість кроків  $Tm \equiv 50$  крок.;  $\boxed{dTm \equiv 0.25}$ .

Параметри об'єкта  $T1v \equiv 1$ ;  $\lambda v \equiv .2$ ; вимоги до ПП: тривалість  $\boxed{Tpv \equiv 8}$ ; викид  $\boxed{hmv \equiv 0}$

ВИБИРАЄМО еталонний процес для **основного** контуру: **кратні корені** і вводимо (див. вище) його параметри  $\boxed{a1bm \equiv 1.4}$ ;  $\boxed{a0bm \equiv 1}$ ;  $\boxed{Tpbm \equiv 6}$ .

ВИБИРАЄМО еталонний процес для контуру **спостерігача**: **Баттерворта** і вводимо (див. вище) його параметри  $\boxed{A1bm \equiv 1.4}$ ;  $\boxed{A0bm \equiv 1}$ ;  $\boxed{Tpbnm \equiv 3}$ .

Для самостійного виконання п. 5, 6: шум  $\equiv 0.01$ ; фільтр  $\equiv шум \cdot .5$ ; тотожність  $\equiv 0.9$ ;

$dTm = 0.25$  ;  $TзОб := Tpbm \div dTm$ ;  $TзНаб := \frac{Tpbnm}{dTm}$ ;  $TзОб = 24$  .

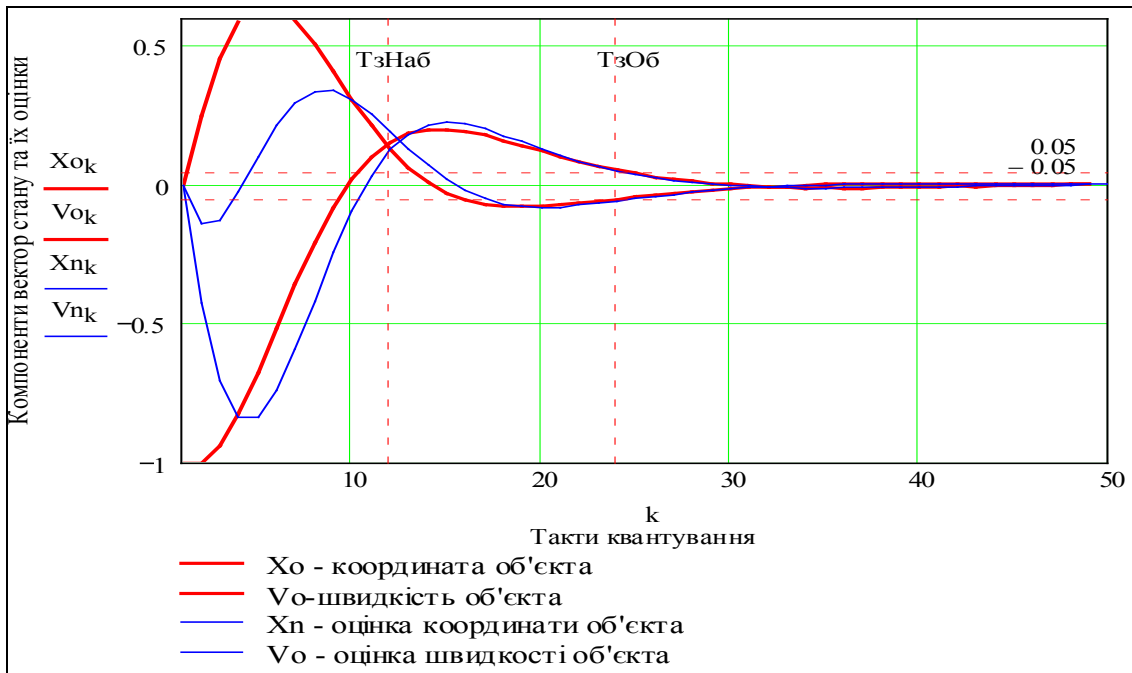


Рисунок 4 – Перехідні процеси в САУ зі спостерігачем

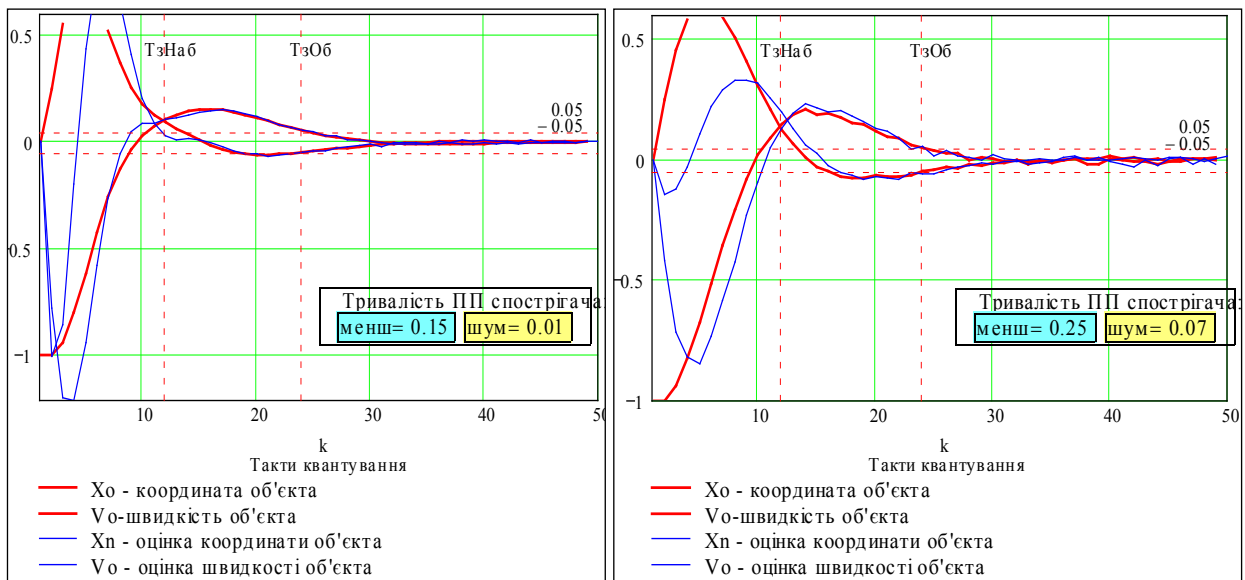


Рисунок 5 – Аналіз впливу шумів вимірювання

Цей графік бажано доповнити виведенням заданих та дійсних тривалостей перехідних процесів, значень інтегральних критеріїв та ін. Зробіть це (за відповідні бали).

Модифікація програми моделювання САУ для випадків: – САУ без спостерігача (пункт завдання 5, б); – за наявності шумів у вимірювачах (пункт завдання 5, в) та оцінка можливості змішаного управління з використанням вимірювача і спостерігача стану (пункт завдання б) – **самостійно**.

### Висновки

Мікропроцесорні системи дозволяють реалізувати алгоритми управління будь-якої складності. Це дозволяє реалізовувати САУ, які ще недавно вважалися неможливими.

Одночасно з'ясувалось, що існує великий дефіцит ідей, теоретичних концепцій, математичних моделей. Теорія спостерігачів одна з небагатьох фундаментальних моделей, що дає продуктивні результати для практики.



Теорія спостерігачів для лінійних динамічних систем повністю формалізована і тому, хоч математичні моделі спостерігачів і синтезу параметрів регулятора та спостерігача є складними, вони легко реалізуються в комп'ютерах. Задача синтезу САУ з спостерігачем сьогодні може виконуватись в цифровій САУ в онлайні. Це дозволяє легко зробити САУ адаптивною.

Отримані в цій роботі математичні моделі для розрахунку параметрів регулятора і спостерігача не є «іграшковими», «навчальними» – вони придатні для використання в реальній САУ.

В роботі розроблено також програму моделювання САУ, на якій проведено тестування синтезованих регулятора і спостерігача.

Неважко перенести ці програми в реальну САУ. Ми отримуємо такі ж перехідні процеси, якщо математична модель об'єкта є досить точною.

### **Контрольні запитання**

1. Стандартна форма запису системи диференціальних рівнянь САУ у векторно-матричній формі.
2. Стандартна форма запису системи різницевих рівнянь САУ у векторно-матричній формі.
3. Визначення «вектора стану», «вектора управління», «вектора вимірювань».
4. Для чого потрібен спостерігач в САУ?
5. Що спостерігач спостерігає і що видає (вихід спостерігача)?
6. Система матрично-векторних рівнянь для САУ зі спостерігачем.
7. Характеристичне рівняння для розімкненої САУ, заданої диференціальними у матрично-векторній формі.
8. Характеристичне рівняння для замкненої САУ, заданої диференціальними у матрично-векторній формі.
9. Характеристичне рівняння для спостерігача СТАНУ, заданого диференціальними у матрично-векторній формі.
10. Властивості спостерігача стану.



## 5.4 Аналіз і синтез САУ з нелінійним спостерігачем для нелінійного об'єкта

### Вступ. Постановка задачі

Спостерігачі стану і параметрів в сучасних САУ для лінеаризованих об'єктів підвищують точність і надійність. Однак існує велика кількість суттєво нелінійних і нестационарних об'єктів, зокрема біореактори для переробки відходів, що дозволяють утворювати екологічно замкнені системи виробництва. Розглядається задача побудови мікропроцесорної системи управління такими об'єктами з використанням спостерігачів. Існуючі методи синтезу регуляторів створені для лінійних і лінеаризованих систем. Для нелінійних поки не існує загальних методів синтезу.

В цьому підрозділі запропоновано методику синтезу на базі декомпозиційного підходу. Основа методики – отримання еквівалентних одновимірних об'єктів управління за рахунок оптимального агрегування або декомпозиції об'єкта на елементи першого порядку.

На рисунку 1 подано схему САУ з нелінійними об'єктом і спостерігачем. Структурно схема не відрізняється від схеми для лінійної САУ. Відмінності – в методах синтезу регулятора і спостерігача, які виконуються пошуковими методами в маловимірному просторі змінних – параметрів регулятора і спостерігача. Модулі синтезу вбудовані в модулі «регулятор» і «спостерігач».

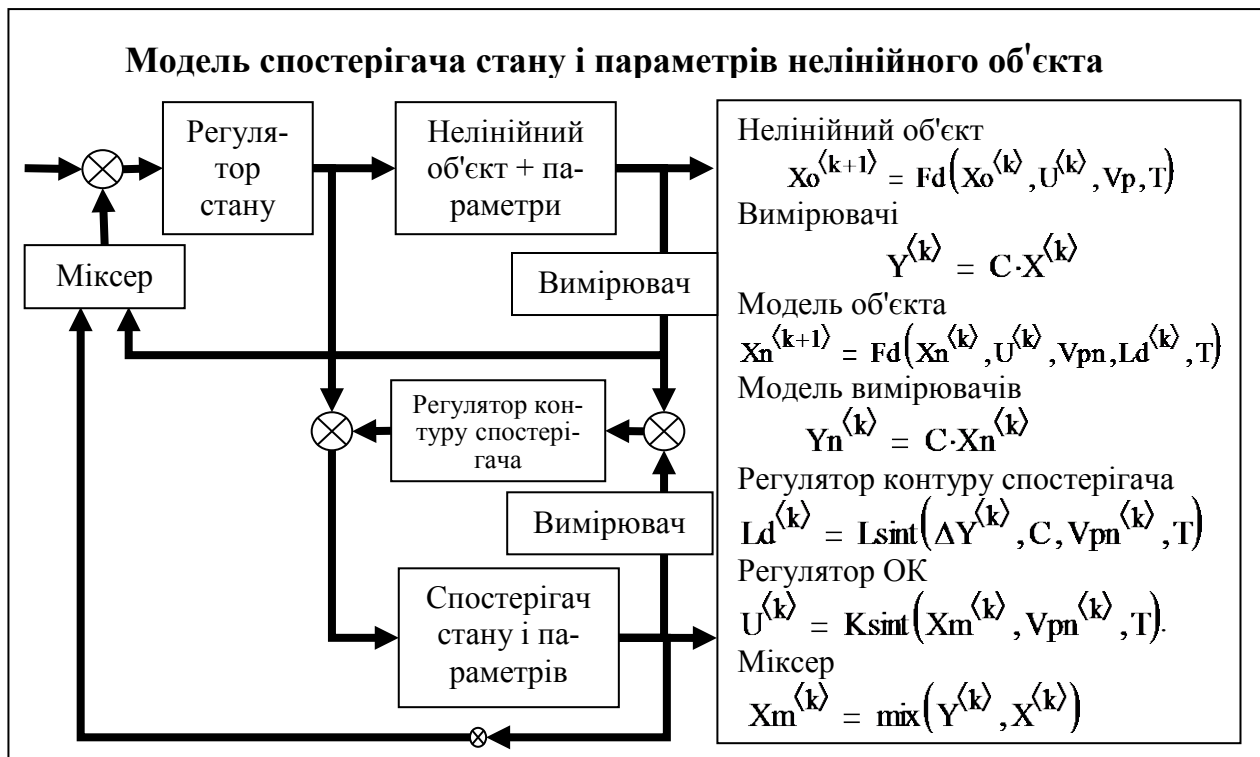


Рисунок 1 – Структурна схема нелінійного об'єкта управління з нелінійним спостерігачем

В правій частині схеми подано рівняння для елементів схеми. В математичному аспекті ми маємо певні алгебраїчні структури – стани об'єкта і спостерігача та параметризовані оператори перетворення цих станів. Маємо також два оператори синтезу – регулятора і спостерігача. Відомо (з попередньої роботи), що для лінійних систем задачі синтезу – складні оптимізаційні задачі.

Вивчення літератури по двох напрямках – біореактори як об'єкти управління і нелінійні системи з нелінійними спостерігачами покаже малу кількість робіт в цьому напрямку і відсутність системних підходів до побудови комплексних систем управління в існуючих роботах. Це стосується і систем управління для відносно нових об'єктів управління – біореакторів для переробки різноманітних органічних речовин.

## 1. Перехід до нелінійних математичних моделей САУ зі спостерігачем

Загальна задача розробки – деталізувати модель, подану на рисунку 1, а потім побудувати її конкретну інтерпретацію, тобто, реалізувати на прикладі біореактора. Згідно з технологією розробки нових моделей для нових задач розбиваємо загальну задачу на ряд контрольованих окремих задач. Для кожного етапу розробки вибираємо надійний прототип і буквально паралельно схемам і рівнянням прототипа записуємо своє нове. Це нове може бути принципово іншим, але виконувати ту ж задачу, мати такий же вхід – вихід. Ми вибрали і ретельно опрацювали в підрозділі 5.3 лінійні системи зі спостерігачами.

Тепер вибираємо лінійні системи як прототип.

Постановка задачі. Задано об'єкт управління

$$X^{(k+1)} = F(T) \cdot X^{(k)} + G(T) \cdot B \cdot u_k,$$

де  $T = 0.8$  – крок квантування,  $k$  – номер кроку квантування

$$F(T) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad G(T) = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рівняння регулятора:  $u_k = X_{1,k} \cdot K_1 + X_{2,k} \cdot K_2$ , де  $K_1, K_2$  – параметри регулятора. Компонент вектора стану  $X_2$  не вимірюється, а вектор стану оцінюється за допомогою асимптотичного ідентифікатора.

Рівняння вимірювачів:  $Y_k = C \cdot X_k$ ; рівняння моделі вимірювачів:  $Y_k = C \cdot X_k$ ,

де  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  – матриця вимірювання;  $X_k = \begin{pmatrix} X_{k1} \\ X_{k2} \end{pmatrix}$  – оцінка вектора стану (вихід).

Порядок синтезу системи зі спостерігачем.

1. Складаємо систему рівнянь для повної системи (згідно з рисунком 1).
  2. Знаходимо такі параметри імпульсного закону управління («швидкий регулятор»), та спостерігача («швидкий спостерігач»), що забезпечують повній системі перехідний процес з довільного початкового стану заданої тривалості.
  3. Робимо програму моделювання динаміки керованої системи.
  4. Будуємо і досліджуємо графіки перехідних процесів.
- Записуємо систему рівнянь для повної системи (згідно з рисунком 1).

Неперервна система: об'єкт  $\frac{d}{dt} X = A \cdot X + B \cdot U$ ; вимірювачі  $Y = C \cdot X$ ;

спостерігач = модель об'єкта:  $\frac{d}{dt} X_n = A \cdot X_n + B \cdot U + L \cdot (Y_n - Y)$ ;

модель вимірювачів  $Y_n = C \cdot X_n$ ; регулятор  $U = K \cdot X_n$ .

Для управління використовується оцінка вектора стану  $X_n$ .

Дискретна (імпульсна) система: об'єкт  $X_o^{(k+1)} = F(T) \cdot X_o^{(k)} + G(T) \cdot B \cdot u^{(k)}$ ;

вимірювачі  $Y^{(k)} = C \cdot X^{(k)}$ ; модель вимірювачів  $Y_n^{(k)} = C \cdot X_n^{(k)}$ ;  $\Delta X = (X_n - X)$ ;

спостерігач = модель об'єкта:  $X_n^{(k+1)} = F(T) \cdot X_n^{(k)} + G(T) \cdot B \cdot u^{(k)} + G(T) \cdot L \cdot C \cdot \Delta X^{(k)}$ ;

регулятор  $u^{(k)} = K \cdot X_n^{(k-1)}$ .

Для управління використовується оцінка вектора стану  $X_n$ .

Тепер запишемо аналогічну систему рівнянь для нелінійної системи.

Неперервна система: об'єкт  $\frac{d}{dt} X = F_o(X, U, V_p)$ ; вимірювачі  $Y = C \cdot X$ ;

спостерігач (модель об'єкта):  $\frac{d}{dt} X_n = F_o(X_n, U, V_{pn}) + L_o(C, \Delta Y)$ ;  $\Delta Y = (Y_n - Y)$ ;

модель вимірювачів  $Y_n = C \cdot X_n$ ; регулятор  $U = K_{sint}(X_n, V_{pn})$ .

Для управління береться оцінка вектора стану  $X_n$ .

Дискретна (імпульсна) система: об'єкт  $X_o^{(k+1)} = F_d(X_o^{(k)}, U^{(k)}, V_p, T)$ ;

вимірювачі  $Y^{(k)} = C \cdot X^{(k)}$ ;

спостерігач = модель об'єкта:  $X_n^{(k+1)} = F_d(X_n^{(k)}, U^{(k)}, V_{pn}, L_d^{(k)}, T)$ ;

модель вимірювачів  $Y_n^{(k)} = C \cdot X_n^{(k)}$ ;  $\Delta X = (X_n - X)$ ;

регулятор  $U^{(k)} = K_{sint}(X_m^{(k)}, V_{pn}^{(k)}, T)$ ;

спостерігач  $L_d^{(k)} = L_{sint}(\Delta Y^{(k)}, C, V_{pn}^{(k)}, T)$ .

Для управління береться оцінка вектора стану  $X_n$ .

Міксер  $X_m^{(k)} = \text{mix}(Y^{(k)}, X^{(k)})$ .

Розглянемо конкретний приклад нелінійного спостерігача для об'єкта класу «біореактор». Задамо динаміку об'єкта

– спочатку функцію правої частини диференціального рівняння об'єкта

$$Fo(u, Pf) := 10 \cdot Pf_1 \cdot \left(1 - e^{-Pf_2 \cdot u}\right)^{Pf_3}$$

$$\text{Задамо стартові параметри } Pf^{\langle 1 \rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.05 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{"амплітуда"} \\ \text{"частота"} \\ \text{"увігнутість"} \end{pmatrix} \quad xx := 1..100 \text{ і}$$

запишемо різницеве рівняння об'єкту

$$\text{krok } det := 0.1; k := 1..100; x_1 := 100;$$

$$x_{k+1} := x_k + 10 \cdot Pf_1 \cdot \left(1 - e^{-Pf_2 \cdot u}\right)^{Pf_3}; Pf^{\langle k+1 \rangle} := Pf^{\langle k \rangle}$$

Запишемо послідовно модулі «об'єкт», «регулятор» і «спостерігач»

$$X^{\langle k+1 \rangle} = Fo(X^{\langle k \rangle}, U^{\langle k \rangle}, Pf^{\langle k \rangle}) - \text{об'єкт};$$

$$Pf^{\langle k+1 \rangle} = Fp(X^{\langle k \rangle}, U^{\langle k \rangle}, Pf^{\langle k \rangle}) - \text{параметри об'єкта};$$

$$U^{\langle k \rangle} = Reg(Xo^{\langle k \rangle}, Pfo^{\langle k \rangle}) - \text{регулятор};$$

$$Xo^{\langle k+1 \rangle} = Foo(Xo^{\langle k \rangle}, U^{\langle k \rangle}, Pfo^{\langle k \rangle}) + U^{\langle k \rangle} + Uo^{\langle k \rangle} - \text{спостерігач};$$

$$Uo^{\langle k \rangle} = Rgn(Xo^{\langle k \rangle}, Pfo^{\langle k \rangle}, Y^{\langle k \rangle}) - \text{регулятор спостерігача};$$

$$Y^{\langle k \rangle} = C \cdot X^{\langle k \rangle} - \text{вимірювачі.}$$

Узагальнення: введемо розширений вектор стану, що складається з цільового стану – того, що цікавить користувача, і значень параметрів моделі

$$Z^{\langle k \rangle} = \begin{pmatrix} X^{\langle k \rangle} \\ Pf^{\langle k \rangle} \end{pmatrix}; Z^{\langle k+1 \rangle} = Fz(Z^{\langle k \rangle}, U^{\langle k \rangle}); U^{\langle k \rangle} = Rgz(Zm^{\langle k \rangle}).$$

Введемо формальну конструкцію

$$Zm^{\langle k \rangle} = ZY^{\langle k \rangle} \alpha + Zo^{\langle k \rangle} \cdot (1 - \alpha).$$

Це зважена, нормована сума вимірюваного і оціненого спостерігачем векторів стану.

Введемо  $ZY$  – формальний вектор вимірювання – невимірювані компоненти замінені відповідними з вектора оцінки стану спостерігачем;  $Zc$  – оцінка розширеного вектора стану. Регулятор стану «годуємо» міксом, пропорція якого може змінюватися залежно від ситуацій вимірювання. Сучасний підхід до отримання необхідної інформації – опортуністичні системи, які з інформації від довільного числа ситуативних джерел формують оптимальні оцінки стану.

Отримуємо спостерігач узагальненого об'єкта:  $Zo^{\langle k+1 \rangle} = Fz(Zo^{\langle k \rangle}, U^{\langle k \rangle}, Uo^{\langle k \rangle})$ ;

$$Uo^{\langle k \rangle} = Rgn(Zo^{\langle k \rangle}, Y^{\langle k \rangle}) - \text{регулятор спостерігача};$$

$$Y^{\langle k \rangle} = C \cdot X^{\langle k \rangle} - \text{вимірювачі.}$$

Для даної задачі не знайдено прототипів і ми вимушені створювати модель без близьких прототипів. Робимо модель першого наближення для тестування і вибору структури управління. На моделях першого наближення отримуємо відсутні знання для побудови моделі.

**Модель біореакторної системи. Версія 1.** Деталізація для задачі управління розвитком виробничої системи. Модель розвитку

$$x_{k+1} = x_k + 10 \cdot Aa_k \cdot \left(1 - e^{-ww \cdot u_k}\right)^{ss} \cdot Dt.$$

Особливість цієї моделі — неадитивне управління, різні рівняння для випуску продукції і розвитку виробництва

$$\left. \begin{aligned} Aa_{k+1} &= Aa_k + Km_{ob}(xm - x_k) \cdot Dt, \\ Foo(Xo^{<k>}, U^{<k>}, Pfo^{<k>}) + Uo^{<k>}, \\ xo_{k+1} &= xo_k + 10 \cdot Aa_{ok} \cdot \left(1 - e^{-ww \cdot u_{ok}}\right)^{ss} \cdot Dt. \end{aligned} \right\}$$

Вимірюється тільки  $x$  – темп виробництва, з шумами;  $Foo$  не вимірюється.

Згідно з завданням, як приклад коректності і користності потрібно розглянути управління біореакторної системи. У біореакторної і звичайної виробничої систем є спільні властивості. Однак, достатньо досліджена модель розвитку виробництва не відображає всі суттєві особливості біореакторної системи, тому беремо за віддалений прототип моделі з математичної екології і на їхній базі робимо другу версію моделі.

За наявності ресурсів – розробників і часу – слід вести паралельні розробки версій, до моменту, коли на моделях чи макетах буде продемонстровано повну перевагу чи повну непридатність певної альтернативи.

**Модель біореакторної системи зі спостерігачем. Версія 2.** Робимо приклад для нелінійної САУ з нелінійним спостерігачем. Коротко, з посиланням на літературні джерела, охарактеризуємо суть необхідного підходу до конструювання моделей взагалі і моделей біосистеми зокрема.

«Модель повинна адекватно відображати істотні для дослідника властивості об'єкта моделювання» (М. Пешель).

**Опис моделі динаміки об'єкта.** Вхід об'єкта – сировина нормалізована (за вологістю, подрібненням, температурою – гній КРС, відходи м'ясокомбінатів, гілля, стебла ...), вихід – біогаз і біодобриво рідке. Вихідні продукти нормалізуються і очищаються.

У першому наближенні вважаємо, що вирішено такі задачі управління: «підтримка температури на оптимальному рівні» (35 град. для першої фази бродіння і 45 град. – для другої фази).

Зробимо модель системи управління зі спостерігачем для задачі: «підтримка заданого темпу подачі сировини і стабілізація рівня заповнення біореактора». Призначення цієї моделі – бути базою для побудови моделі оптимального управління темпом подачі сировини.

Змістовно це можна описати так: з погляду виробничих витрат бажано, щоб сировина перероблялася за мінімальний час, з погляду повноти переробки – бажано, щоб бродіння тривало довше.

Оптимальний рівень подачі сировини – це компроміс між вимогами якості і виробничих витрат. Наприклад, птахокомбінат «виробляє» 20 тонн відходів, їх можна переробля-

ти якісно, поставивши два біореактори, а можна менш якісно, але одним біореактором. Менш якісний продукт вже можна вносити до ґрунту.

Таким чином, ми виділили дві задачі екстремального адаптивного управління температурою і темпом подачі сировини.

Проблема біореакторів – фахівці з управління не знають специфіки біопроцесів, фахівці – мікробіологи, ветеринари – непрофесіонали в управлінні.

Проблема для управління – складність вимірювання потрібних параметрів і змінних – кислотності, вмісту, різних з'єднань у вхідному субстраті і вихідному продукті.

Тому основне завдання: розробити моделі методів аналізу і синтезу регулятора та спостерігача для деякого класу нелінійних, нестационарних і стохастичних об'єктів.

Модель першого наближення має бути простою, відображати фундаментальні породжуючі механізми (закони хімії, термодинаміки, біології й екології) і бути придатною для подальшого розвитку – настроювання на конкретні об'єкти, уточнення та деталізації.

## 2. Розробка математичної моделі біореактора

Запишемо рівняння для базової моделі, що є об'єктом новизни роботи. Об'єкт – біореактор (біотехнологічний процес переробки)

$$\frac{d}{dt}x(t) = kI(t) \cdot k\theta \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{k2}{kI(t)} \cdot x(t)^{\alpha 1}\right) - VyI(t),$$

де рівняння – екологічна модель класу «зростання з обмеженням»;

$x(t)$  – вихід кінцевого «продукту», безпосередньо не вимірюється, достовірна оцінка – вихід біогазу;

$kI(t)$  – параметр, який характеризує об'єм ресурсу для переробки мікробами, пропорційний об'єму реактора і змісту непереробленої органіки в поточному вмісті реактора;

$k\theta$  – параметр, що характеризує вплив температури на швидкість переробки;

$\alpha 1$  – параметр моделі, в першому наближенні;

$VyI(t)$  – управління, темп зливу з біореактора.

Параметр моделі – коефіцієнт об'єму ресурсу для переробки, дві апроксимації (дисбаланс подачі і зливу – змінює концентрацію):

$$\frac{d}{de}kI(t) = ksu \cdot (Vnl(t) - VyI(t)); \quad \frac{d}{de}kI(t) = ksu \cdot F4(Vnl(t) - VyI(t)),$$

де  $F4$  – функція класу «увігнуто-опукла» (S-функція) з бібліотеки типових технологічних функцій – в двох формах подання параметрів, в другій формі параметри зібрані у вектор.

$$F4(y, A, \alpha, s) := 10 \cdot A \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot y})^s, \quad Fv4(y, Pf) := 10 \cdot Pf_1 \cdot (1 - e^{-Pf_2 \cdot y})^{Pf_3}.$$

На першому рівні система повинна стабілізувати рівень заповнення реактора  $Kz$  за рахунок управління темпом зливу переробленого субстрата.

Регулятор:

$$VyI = Kreg1 \cdot (Vnl(t) - VyI(t)) + Kreg2 \cdot \left[ Kz - \int_0^t (Vnl(t) - VyI(t)) dt \right].$$

Управління – темп зливу субстрата з реактора – пропорційне дисбалансу «вхід – вихід» і виразу в дужках – відхиленню рівня від номінального (вимірюється безпосередньо системою управління).

Запишемо еквівалентну дискретну модель біореактора. Для мінімізації помилок потрібно або автоматизувати цей процес, або виписати рівняння неперервної моделі і записати під ними еквівалентні дискретні рівняння.

$$\frac{d}{dt}x(t) = k1(t) \cdot k\theta \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{k2}{k1(t)} \cdot x(t)^{\alpha 1}\right) - Vyl(t) \text{ – неперервна модель;}$$

$$x_{k+1} = x_k + \left[ k1_k \cdot k\theta \cdot x_k \cdot \left[1 - \frac{k2}{k1_k} \cdot (x_k)^{\alpha 1}\right] - Vyl_k \right] \cdot Dt \text{ – дискретна модель;}$$

$$\frac{d}{de}k1(t) = ksu \cdot F4(Vnl(t) - Vyl(t));$$

$$k1_{k+1} = k1_k + (ksu \cdot F4(Vnl_k - Vyl_k));$$

$$Vyl = Kreg1 \cdot (Vnl(t) - Vyl(t)) + Kreg2 \cdot \left[ Kz - \int_0^t (Vnl(t) - Vyl(t)) dt \right];$$

$$Vyl_k = Kreg1 \cdot (Vnl_k - Vyl_k) + Kreg2 \cdot \left[ Kz - \sum_{q=1}^k (Vnl_k - Vyl_k) \right].$$

У дискретних рівняннях прийняті позначення:  $k$  – номер кроку обчислення (моделювання),  $Dt$  – крок обчислень,  $x_k = x(k \cdot Dt)$  – дискретизована змінна (решітчаста функція).

Пам'ятаємо, що такі дискретні моделі еквівалентні безперервним при достатньо малому кроці обчислень. Тепер зберемо ці рівняння в програмний модуль, задамо значення параметрів, початкові умови, необхідні функції і проведемо дослідження системи без спостерігача за умови, що всі компоненти розширеного вектора стану вимірювані. Тільки потім введемо в систему управління нелінійний спостерігач.

Подаємо блок введення даних, стартовий варіант, особливість якого – досить детальні описи змінних і параметрів – це страхування від помилок. Після тестування, переробки і настроювання робочої моделі може бути розроблений більш компактний інтерфейс не для розробника, а для користувача.

Вводимо:  $Dt := 0.2$  – крок моделювання;  $x0 := 0.1$  – початковий вихід продукту (газу, добрива);  $k10 := 3.6$  – початковий вміст ресурсу переробки (об'єм×відсоток);  $Kreg1 := 0.2$  – штраф за дисбаланс «наливаємо – відбираємо»;  $Kreg2 := 0.1$  – штраф за відхилення рівня субстрату в реакторі;  $Kz := 2$  – заданий рівень  $k\theta := 1$  – коефіцієнт впливу температури на швидкість бродіння;  $Vnl_k = 2 + \text{тренд} + \text{случай}$  – заданий темп подачі



сировини;  $Vyl0 := 0$  – початковий темп зливу продукту з реактора;  $ksu := 1$ ;  $\alpha1 := 1$ ;

$Pf := \begin{pmatrix} 5 \\ 0.3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ; параметр моделі бродіння  $k2 := 1.2$ ; кількість кроків  $Kk := 100$ .

Збираємо рівняння дискретної моделі в програмний модуль (рисунок 2)

```

Obj :=
  Vint1 ← Kz
  kI1 ← kI0
  x1 ← x0
  Vyl1 ← 0
  for k ∈ 1..Kk
    Vnlk ← 2 + (0.0·sin(0.3·k))
    ΔVVk ← -(Vnlk - Vylk)
    Vintk+1 ← Vintk + ΔVVk
    Vylk+1 ← Kreg1·ΔVVk + Kreg2·(Kz - Vintk)
    xk+1 ← xk + [kIk·kθ·xk·[1 - (k2/kIk)·(xk)α1] - Vylk]·Dt
    kIk+1 ← kIk + [Fv4[(ksu·Vnlk - Vylk), Pf]]·Dt
  Vest ← (
    Vyl
    x
    kI
    Vnl)
  
```

Рисунок 2 – Програма моделювання нелінійного об'єкта класу «біореактор»

Повертаємось до початкових позначень змінних  $x := Obj_2$ ;  $kI := Obj_3$ ;  $Vnl := Obj_4$ . Створюємо змінну для побудови графіків  $k := 1..Kk$ . Будуємо графіки процесів в реакторі (рисунок 3, 4).

На рисунку 3 подано процеси в біореакторі за відсутності збурень. Бачимо, що темп зливання продуктів біоферментної переробки зростає і досягає балансу з темпом подачі сировини. Подано окремо графік динаміки дисбалансу. Подано також графік темпу переробки сировини: обсяг мікроорганізмів та їх структура змінюються, з часом біореактор виходить на стаціонарний режим. Специфіка змінної  $x$  в тому, що обсяг і структура мікроорганізмів безпосередньо не вимірюються. Використовуються індикатори: вихід газу, що є пропорційний обсягу і «якості мікроорганізмів» та ін.

На графіку подано той безпосередньо невимірюваний параметр моделі процесу біопереробки – обсяг доступних для мікробів ресурсів. Значення цього параметра залежить від інтенсивності перемішування субстрату.

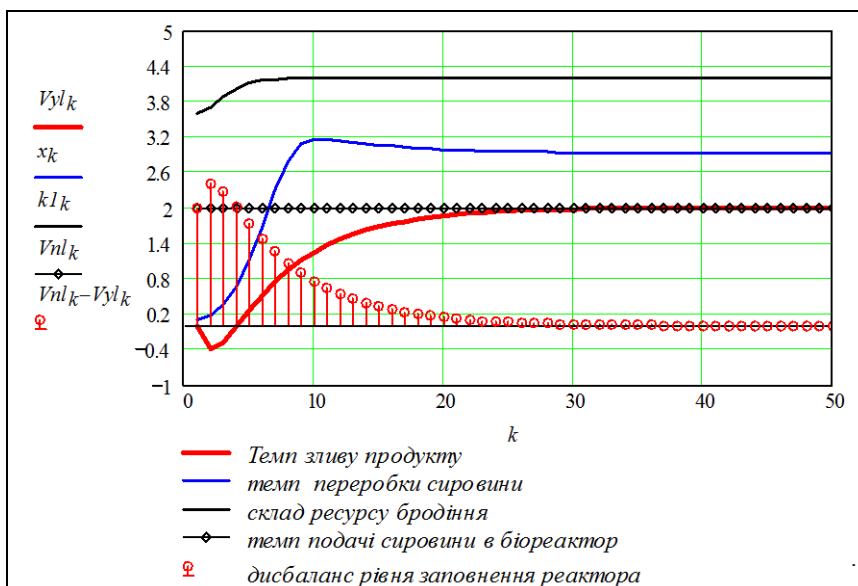


Рисунок 3 – Процеси в біореакторі за відсутності збурень

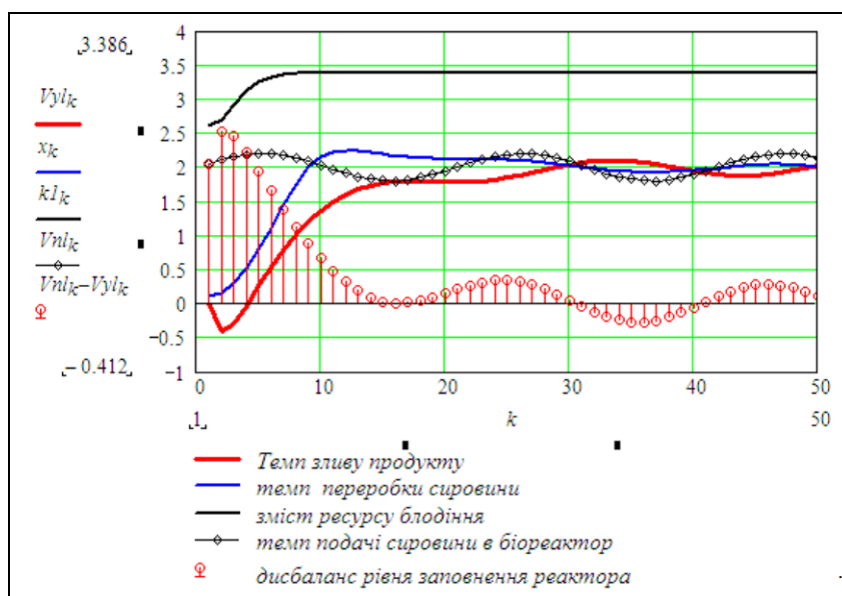


Рисунок 4 – Процеси в біореакторі за наявності періодичного тренду подачі сировини

Бачимо, що при коливаннях подачі в системі порушується баланс. Формально усунути цей недолік можна збільшенням підсилення в регуляторі. Однак мікроби при швидких змінах зменшують продуктивність.

### 3. Розробка моделі системи зі спостерігачем для біореактора

Ця розробка є інноваційною, прямого прототипу для неї не знайдено. Однак є реальні об'єкти – біореактори малої і середньої потужності, спроектовані і реалізовані П. Северіловим. Критерій і ціль оптимізації цих проектних розробок – мінімізація сумарних витрат при обмеженнях нижнього рівня надійності, відмовостійкості і ефективності переробки. Останнє означає повноту переробки – продукт без шкідливих сполук і мікробів.

Відповідні вимоги висуваються і до розробки моделей біореакторної системи – мінімум складності при забезпеченні потрібного рівня адекватності у відображеннях суттєвих властивостей реального об'єкта. Модель об'єкта, що задовольняє ці вимоги, побудована і

випробувана в розділі 2. Головна перевага моделі – можливість уточнення і розширення. Тепер, спираючись на загальні теоретичні моделі, робимо і вбудовуємо в програму моделювання модель спостерігача стану і параметрів. Наводимо загальну модель системи зі спостерігачем – це складова технології конструювання моделей.

Модель нелінійного нестационарного об'єкта.

Динаміка власне об'єкта:

$$\text{динаміка параметрів об'єкта } Pf^{(k+1)} = Fp(X^{(k)}, U^{(k)}, Pf^{(k)});$$

$$\text{регулятор об'єкта } U^{(k)} = Reg(Xo^{(k)}, Pfo^{(k)});$$

$$\text{динаміка спостерігача } Xo^{(k+1)} = Foo(Xo^{(k)}, U^{(k)}, Pfo^{(k)}) + U^{(k)} + Uo^{(k)};$$

$$\text{регулятор спостерігача } Uo^{(k)} = Rgn(Xo^{(k)}, Pfo^{(k)}, Y^{(k)});$$

$$\text{рівняння вимірювачів } Y^{(k)} = C \cdot X^{(k)}.$$

Виконуємо узагальнення моделей об'єкта і спостерігача. Вводимо: розширений вектор стану: цільовий стан + параметри моделі:

$$\text{розширений вектор стану } Z^{(k)} = \begin{pmatrix} X^{(k)} \\ Pf^{(k)} \end{pmatrix};$$

$$\text{розширена модель об'єкта } Z^{(k+1)} = Fz(Z^{(k)}, U^{(k)});$$

$$\text{регулятор об'єкта } U^{(k)} = Rgz(Zm^{(k)});$$

формальна конструкція «міксер»  $Zm^{(k)} = ZY^{(k)} \alpha + Zo^{(k)} \cdot (1 - \alpha)$  – це зважена нормована сума вимірюваного і оціненого спостерігачем векторів стану,  $ZY$  – формальний вектор вимірювання – невимірювані компоненти замінені відповідними з вектора оцінки стану спостерігачем;  $Zc$  – оцінка розширеного вектора стану. Регулятор стану «кормимо» міксом, пропорція складових якого може змінюватись залежно від ситуацій вимірювання. Це малий крок до сучасного підходу – опортуністичні мережі та опортуністичний комп'ютинг.

$$\text{Спостерігач розширеного об'єкта } Zo^{(k+1)} = Fz(Zo^{(k)}, U^{(k)}, Uo^{(k)});$$

$$\text{– регулятор спостерігача } Uo^{(k)} = Rgn(Zo^{(k)}, Y^{(k)});$$

$$\text{– вимірювачі } Ye^{(k)} = Ce \cdot Z^{(k)}.$$

Відповідно до цієї узагальненої моделі дописуємо відповідні робочі вирази в програмі моделювання системи. Модифікуємо блок введення даних для програми моделювання. Задаємо значення параметрів і початкові значення змінних:

$x0 := 0.2$  – початковий вихід продукту (газу, добрив);  $k10 := 2.6$  – початковий обсяг ресурсу для переробки (об'єм × відсоток);  $Kreg1 := 0.2$  – штраф за дисбаланс «налив – злив»;  $Kreg2 := 0.1$  – штраф за відхилення рівня субстрату в реакторі;  $Kz := 2$  – заданий рівень;  $k\theta := 1$  – коефіцієнт впливу температури на швидкість бродіння;  $Vnl_k = 2 + t \text{ ренд} + \text{случай}$  – заданий темп подачі субстрату;  $Vyl0 := 0$  – початковий темп зливу продукту переробки з реактора;  $ksu := 1$  – параметр моделі динаміки зміни параметра «вільний ресурс»;  $\alpha 1 := 1$  – параметр моделі процесу бродіння;  $\pi\pi := (5 \ .3 \ 6)$ ,  $Pf := \pi\pi^T$  – параметри нелінійної функції «прирощення темпу бродіння (прирощення ресурсу)»;  $k2 := 1.2$  – параметр моделі процесу бродіння;  $kro1 := 0.3$ ;  $kro2 := 0.65$ ,  $Kk := 100$  – кількість кроків моделювання;  $Dt := 0.2$  – крок моделювання;  $k := 1 .. Kk$  – ранжована змінна.

<i>ObjNab :=</i>	<pre> Vint<sub>1</sub> ← Kz k1<sub>1</sub> ← k10 k1o<sub>1</sub> ← 0.9·k10 x<sub>1</sub> ← x0 xo<sub>1</sub> ← 0.9·x0 Vy<sub>1</sub> ← 0 "введення початкових умов" for k ∈ 1 .. Kk     Vnl<sub>k</sub> ← 2 + (0.0·sin(0.3·k))     "тестова функція подачі сировини"     ΔVv<sub>k</sub> ← -(Vnl<sub>k</sub> - Vy<sub>k</sub>)     "дисбаланс подачі і зливу"     Vint<sub>k+1</sub> ← Vint<sub>k</sub> + ΔVv<sub>k</sub>     "інтеграл від дисбалансу"     Vy<sub>k+1</sub> ← Kreg1·ΔVv<sub>k</sub> + Kreg2·(Kz - Vint<sub>k</sub>)     "закон управління за темпом подачі і рівнем маси в біореакторі"     x<sub>k+1</sub> ← x<sub>k</sub> + [k1<sub>k</sub>·kθ·x<sub>k</sub>·[1 - <math>\frac{k2}{k1k}</math>·(x<sub>k</sub>)<sup>α1</sup>] - Vy<sub>k</sub>]·Dt     "динаміка біопереробки в об'єкті"     k1<sub>k+1</sub> ← k1<sub>k</sub> + [Fv4[(ksu·Vnl<sub>k</sub> - Vy<sub>k</sub>), Pf]]·Dt     "динаміка параметра k1 в об'єкті"     Uox<sub>k+1</sub> ← kro1·(xo<sub>k</sub> - x<sub>k</sub>)     "управління в спостерігачі для змінної x"     Uok1<sub>k+1</sub> ← kro2·(k1o<sub>k</sub> - k1<sub>k</sub>)     "управління в спостерігачі для параметра k1"     xo<sub>k+1</sub> ← xo<sub>k</sub> + [k1o<sub>k</sub>·kθ·x<sub>k</sub>·[1 - <math>\frac{k2}{k1ok}</math>·(xo<sub>k</sub>)<sup>α1</sup>] - Vy<sub>k</sub> + Uox<sub>k+1</sub>]·Dt     "динаміка біопереробки в спостерігачі"     k1o<sub>k+1</sub> ← k1o<sub>k</sub> + [Fv4[(ksu·Vnl<sub>k</sub> - Vy<sub>k</sub>), Pf] + Uok1<sub>k+1</sub>]·Dt     "динаміка параметра k1 в спостерігачі" Vest ← (Vy<sub>1</sub> Vnl<sub>1</sub> x<sub>1</sub> k1<sub>1</sub> xo<sub>1</sub> k1o<sub>1</sub>) "формування виходу програми" Vest ← Vest<sup>T</sup> </pre>
------------------	--

Рисунок 5 – Текст програми моделювання САУ з спостерігачем

Виводимо результати моделювання, вводимо означення змінних ті ж самі, що і в теоретичних моделях.

$$ObjNab^T = (\{101,1\} \{100,1\} \{101,1\} \{101,1\} \{101,1\} \{101,1\}) ;$$

$$Vyl := ObjNab_1; Vnl := ObjNab_2; x := ObjNab_3;$$

$$k1 := ObjNab_4; xo := ObjNab_5; k1o := ObjNab_6.$$

Будуємо графіки – приклади тестування моделі і програми (рисунки 6, 7)

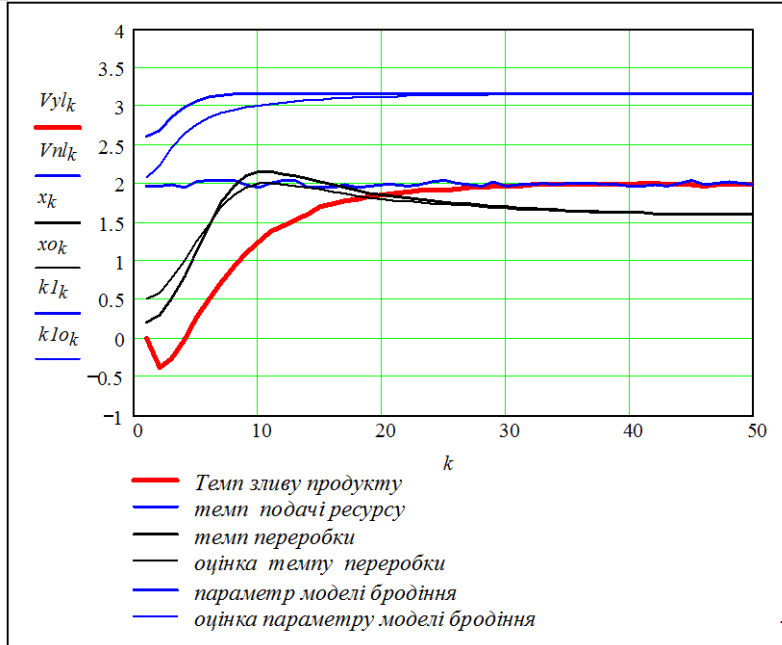


Рисунок 6 – Процеси в біореакторній САУ зі спостережачем за наявністю випадкових збурень подачі сировини

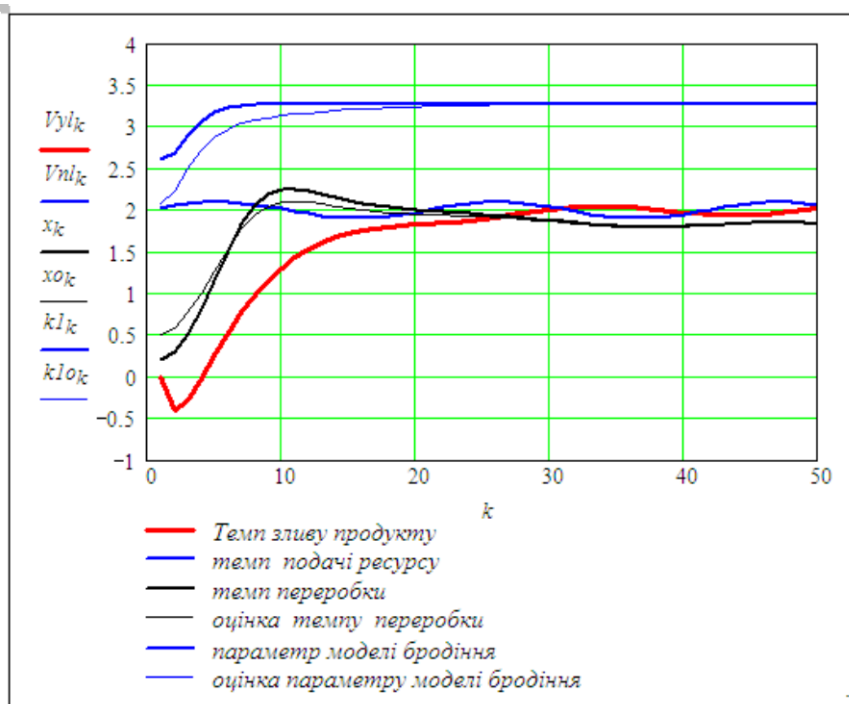


Рисунок 7 – Процеси в біореакторній САУ зі спостережачем за наявністю періодичного тренду в подачі сировини

Як можна бачити на рисунках 6, 7, за допустимих збурень і початкових похибок стабілізується рівень завантаження реактора та баланс подачі і зливу. За допущених спостерігачем відхилень оцінок параметрів і змінних від істинних значень, ці помилки сходяться до нуля. В підсумку отримали базову модель, придатну для досліджень і подальшого уточнення і розширення.

### **Висновки**

Подано приклад роботи спеціаліста з автоматичного управління: розробити для нового нелінійного об'єкта систему управління зі спостерігачем стану і параметрів.

Поставлено задачу управління нелінійними системами з використанням спостерігача стану і параметрів. Ця задача доведена до коректних і працюючих робочих моделей. Це є базовий, але не кінцевий результат.

Головний результат (див. рис. 5) – відкрита, зручна для модифікацій роботоздатна програма (див. рис. 6, 7). Не всі зв'язки і фактори враховані в моделі, однак це досить проста модифікація моделі і програми.

### **Контрольні запитання**

1. Різницеві рівняння нелінійного об'єкта в векторно-матричній формі.
2. Різницеві рівняння нелінійного спостерігача в векторно-матричній формі.
3. Рівняння динаміки нелінійного об'єкта.
4. Для чого потрібен спостерігач в САУ біореактора?
5. Що таке «спостерігач стану і параметрів»?
6. Який параметр спостерігає нелінійний спостерігач?
7. Властивість нелінійного спостерігача стану.

## Література

1. Воронов А. А. Теория автоматического управления : в 2-х частях / Воронов А. А. – М. : Энергия, 1986.
2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Куо Б. – М. : Машиностроение, 1986.
3. Изерман Р. Цифровые системы управления / Изерман Р. – М. : Мир, 1984.
4. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией / Беллман Р. – М. : Наука, 1964. – 317 с.
5. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории управления / Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. – М. : Издат-во Иностран. Литер., 1962. – 233 с.
6. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления / Болтянский В. Г. – М. : Наука, 1966. – 307 с.
7. Боровська Т. М. Проблеми розробки адаптивних САУ для масових об'єктів / Боровська Т. М., Северілов В. А., Васюра А. С. // Вісник ВДТУ. – 1998. – № 6. – С. 12 – 17.
8. Боровська Т. М. Декомпозиційні структури для прикладних програм синтезу регуляторів / Боровська Т. М. // Вісник ВДТУ. – 2000. – № 1. – С. 17–22.
9. Боровська Т. М. Теорія автоматичного управління. Частина 1. Аналіз САУ: навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл. / Боровська Т. М., Северілов В. А., Васюра А. С. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 97 с.
10. Боровська Т. М. Моделювання та оптимізація систем автоматичного управління : навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл. / Боровська Т. М., Васюра А. С., Северілов В. А. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 132 с.
11. Боровська Т. М. Основи теорії управління та дослідження операцій : навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл. / Боровська Т. М., Колесник І. С., Северілов В. А. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 242 с.
12. Боровська Т. М. Спеціальні розділи вищої математики : навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл. / Боровська Т. М., Колесник І. С., Северілов В. А. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 182 с.
13. Боровська Т. М. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з курсу «Теорія автоматичного управління» : електронне видання / Т. М. Боровська, П. В. Северілов. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 75 с.
14. Боровська Т. М. Теорія автоматичного управління : дистанційний курс / Боровська Т. М., Северілов В. А., Васюра А. С. – Вінниця : ВНТУ, 2010.
15. Боровська Т. М. Моделі ефективності і живучості технічних систем / Т. М. Боровська, Е. П. Хомин, П. В. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2011. – № 1. – С. 89–95.
16. Моделювання задач управління інвестиціями : [навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл.] / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, С. П. Бадьора, І. С. Колесник. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 178 с.

17. Моделювання та оптимізація у менеджменті : [навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл.] / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, С. П. Бадьора, І. С. Колесник. – Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2009. – 145 с.
18. Северилов В. А. Живучесть САУ / В. А. Северилов, Т. Н. Боровская / : Винница : ВПИ, 1989.
19. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления / Первозванский А. А. – М. : «Наука», 1986. – 615 с.
20. Пузырёв В. А. Управление технологическими процессами производства микроэлектронных приборов / Пузырёв В. А. – М. : «Радио и связь», 1984.
21. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах / Цыпкин Я. З. – М. : «Наука», 1968.
22. Borovska T. N. Modeling and optimization of agrarian systems with waste recycling in bioreactors / P. V. Severilov, T. N. Borovska, Yu. N. Dmytryk, E. P. Khomyn // Nauka i studia (Poland). – 2014. – № 16 (126). – P. 42–50.



*Навчальне видання*

**Боровська Таїса Миколаївна  
Северілов Віктор Андрійович  
Северілов Павло Вікторович  
Васюра Анатолій Степанович  
Юхимчук Марія Сергіївна**

**ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ.  
ЧАСТИНА 1. АНАЛІЗ і дослідження САУ**

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено Т. Боровською

Підписано до друку 18.08.2017 р.  
Формат 29,7×42<sup>1</sup>/<sub>2</sub> . Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Ум. друк. арк. 16,63.  
Наклад 50 (1-й запуск 1–20) пр. Зам. № 2017-319.

Видавець та виготовлювач  
інформаційний редакційно-видавничий центр.  
ВНТУ, ГНК, к. 114, Хмельницьке шосе, 95,  
м. Вінниця, 21021.  
Тел. (0432) 59-85-32, 59-87-38.  
**press.vntu.edu.ua;**  
*E-mail:* kivc.vntu@gmail.com.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.