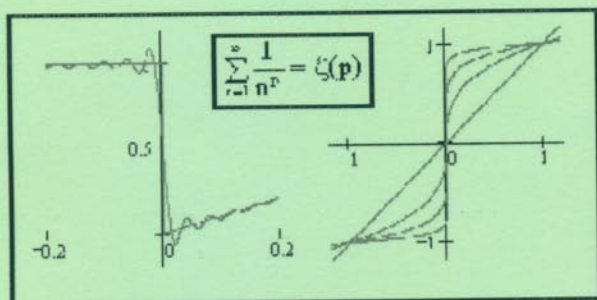


В. І. КЛОЧКО, Н. О. КЛОЧКО, К. І. КОЦЮБІВСЬКА

ВИЩА МАТЕМАТИКА РЯДИ

(з комп'ютерною підтримкою)



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. І. Клочко, Н. О. Клочко, К. І. Коцюбівська

ВИЩА МАТЕМАТИКА РЯДИ

(з комп'ютерною підтримкою)

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2015

УДК 511.176(075)

ББК 22.132 я 73

K50

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 5 від 19.01.2012 р.).

Рецензенти:

О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор

І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор

В. І. Риндюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент

В. О. Федотов, кандидат технічних наук, доцент

Клочко, В. І.

K50 Вища математика. Ряди (з комп'ютерною підтримкою): навчальний посібник / В. І. Клочко, Н. О. Клочко, К. І. Коцюбівська. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 145 с.

В посібнику розглянуто основні поняття і теореми теорії рядів. Наведена достатня кількість прикладів та задач, в тому числі і прикладного характеру, які вдало доповнюють текстовий матеріал, зрозумілі і легко сприймаються. Істотною особливістю даного посібника є детальний розгляд комплексної форми ряду Фур'є, узагальненого ряду Фур'є та інтегралу Фур'є в комплексній формі.

Кожна тема містить завдання для самоконтролю.

Посібник рекомендується для студентів технічних спеціальностей.

УДК 511.176(075)

ББК 22.132 я 73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
1 ЧИСЛОВІ РЯДИ	6
1.1 Основні поняття	6
1.2 Ряд геометричної прогресії	12
1.3 Гармонічний ряд	12
1.4 Лінійні операції над числовими рядами	14
1.5 Необхідна ознака збіжності	14
1.6 Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами	16
1.6.1 Ознака порівняння	16
1.6.2 Ознака Д'Аламбера	23
1.6.3 Радикальна ознака Коші	28
1.6.4 Інтегральна ознака Коші	31
1.6.5 Узагальнена ознака	37
1.7 Знакозмінні ряди	38
1.7.1 Теорема Лейбніца	38
1.7.2 Абсолютна та умовна збіжності	42
1.8 Підсумовування рядів	49
1.9 Поняття узагальненої суми ряду	51
2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ	56
2.1 Основні поняття	56
2.2 Степеневі ряди	61
2.2.1 Основні поняття. Теорема Абеля	61
2.2.2 Знаходження інтервалу збіжності	63
2.3. Властивості степеневих рядів	75
2.4 Ряди Тейлора і Маклорена	77
2.4.1 Основні поняття	77
2.4.2 Приклади розвинення функцій в ряд Тейлора	81
2.4.3 Деякі застосування рядів Тейлора	86
3 РЯДИ ФУР'Є	97
3.1 Періодичні функції	97
3.2 Гармоніки	100
3.2.1 Додавання гармонік з однаковими частотами	101
3.2.2 Додавання гармонік із сумірними частотами	104
3.2.3 Період суми n гармонік	105
3.2.4 Додавання гармонік із несумірними частотами	107
3.2.5 Спектри тригонометричного многочлена	108
3.2.6 Комплексна гармонічна функція	110
3.3 Ортогональні та ортонормовані системи функцій	111
3.4 Розвинення функцій в ряд Фур'є за ортогональними системами функцій	116
3.5 Умови розвинення функції в тригонометричні ряди Фур'є	120

3.6 Розвинення в тригонометричний ряд Фур'є періодичної функції	122
3.7 Розвинення в тригонометричний ряд Фур'є 2Т-періодичних функцій	123
3.8 Комплексна форма запису ряду Фур'є	125
3.9 Інтеграл Фур'є	132
3.10 Дискретне перетворення Фур'є	135
ЛІТЕРАТУРА	144

ПЕРЕДМОВА

Теорія рядів є теоретичною основою таких фундаментальних курсів, як “Теоретичні основи електротехніки”, “Теоретичні основи радіотехніки”, “Рівняння математичної фізики” й ін. Це робить актуальним створення нових навчальних посібників з теорії рядів.

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці розділу теорії рядів для студентів технічних вузів, – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Це не тільки навчальний посібник, але й коротке керівництво до розв’язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач (в тому числі і фізичного змісту), які наводяться з розв’язуванням, та задачами для самостійної роботи. Задачі з Розв’язуванням розглядаються протягом всього викладання навчального матеріалу. Задачі для самостійної роботи розглядаються в кінці кожної теми.

Посібник складається з трьох розділів. В першому розділі розглядаються поняття числового ряду, ознаки його збіжності, властивості числових рядів. В другому розділі розглядаються поняття функціонального ряду, зокрема степеневого, збіжності функціональних рядів, включаючи рівномірну збіжність, властивості абсолютно збіжних рядів. Тут також розглянуто застосування степеневих рядів, а саме, рядів Тейлора до наближених обчислень. В третьому розділі розглядаються ряди Фур’є за ортонормованими системами та їх застосування; введено поняття інтеграла Фур’є та показано його застосування до задач радіотехніки.

Даний посібник може бути використаний студентами як денної, так і заочної форм навчання.

1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1 Основні поняття

Нехай задано нескінченну числову послідовність

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots \quad (1.1)$$

Скористаємось цим поняттям для утворення нового поняття — числового ряду.

Означення. Числовим рядом називають вираз

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1.2)$$

числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ називаються членами ряду, a_n - n -м членом або загальним членом ряду.

Числовий ряд можна задати за допомогою формули n -го члена або рекурентною формулою, яка виражає a_{n+k} -й член ряду через k попередніх членів ряду ($a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+k-1})$), для всіх $n \geq 1$ (k приймає значення $k = 1, 2, \dots$).

Приклад 1.1. Формула $a_n = \frac{(-1)^n}{4^n}$ задає ряд

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \frac{(-1)^n}{4^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}.$$

Побудований ряд називають рядом геометричної прогресії.

Приклад 1.2. Рекурентна формула $q(n) = (q(n-1))^2 - q(n-1) + 1$ при $q(1) = a$ задає числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q(n)}$.

Приклад 1.3. Рекурентна формула $a_{n+2} = a_n + (-1)^n a_{n+1}$ при $a_1 = 2, a_2 = 1$, задає числовий ряд

$$2 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + \dots$$

Як побачимо пізніше (див. п. 4), одержаний ряд і ряд

$$2 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

(вилучено нулі) у певному розумінні різні ряди.

Оскільки дія додавання за своїм безпосереднім змістом пов'язана тільки із скінченною кількістю доданків, то вираз (1.2) ніякого певного числового значення не має. Тому числове значення припишемо йому таким чином. З цією метою введемо поняття часткової суми ряду. Позначимо через S_1 перший член ряду (1.2) a_1 , суму перших двох членів ряду $a_1 + a_2$ через S_2 і т. д., через S_n суму n перших членів ряду $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$.

Тоді запишемо:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= a_1; \\
 S_2 &= a_1 + a_2; \\
 S_3 &= a_1 + a_2 + a_3; \\
 S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n.$$

Отже, n - а часткова сума ряду — це сума перших n членів даного ряду.

Її можна записати також у згорнутому вигляді:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Скориставшись поняттям часткової суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, його можна

подати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$. Якщо відкинути

S_n , тобто n перших членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$

називають n -м залишком ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 1.4. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^2 + pn + q},$$

де A, p, q — цілі числа.

Розв'язування

Сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається границя S послідовності його часткових сум $\{S_n\}$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \tag{1.4}$$

де $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

1. За умовою задачі

$$a_n = \frac{A}{n^2 + pn + q}.$$

Якщо, корені знаменника відрізняються на ціле число, тобто $n^2 + pn + q = (n+a)(n+a+k)$, де k — натуральне число, то члени послідовності частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ легко знайти, оскільки у виразі

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ багато доданків знищується.

2. Подамо загальний елемент ряду у вигляді елементарно дробових виразів:

$$\frac{A}{n^2 + pn + q} = \frac{1}{k} \left(\frac{A}{n+a} - \frac{A}{n+a+k} \right),$$

і записуємо декілька членів ряду, щоб було видно, які доданки знищуються при обчисленні часткових сум ряду.

3. Знаходимо n -у часткову суму ряду:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

скоротивши відповідні доданки.

4. Обчислюємо суму ряду за формулою (1.4)

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

і записуємо відповідь.

Приклад 1.5. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 5n + 4}.$$

Розв'язування

1. Корені знаменника $n = -1$ і $n = -4$ відрізняються на ціле число, тобто $n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4)$. Отже, члени послідовності часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ легко знайти, оскільки у виразі $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ багато доданків знищуються.

2. Розкладемо загальний елемент ряду на елементарні дробі:

$$a_n = \frac{72}{n^2 + 5n + 4} = \frac{24}{n+1} - \frac{24}{n+4}$$

і запишемо декілька членів ряду:

$$a_1 = \frac{24}{2} - \frac{24}{5}, \quad a_2 = \frac{24}{3} - \frac{24}{6}, \quad a_3 = \frac{24}{4} - \frac{24}{7},$$

$$a_4 = \frac{24}{5} - \frac{24}{8}, \quad a_5 = \frac{24}{6} - \frac{24}{9}, \quad a_6 = \frac{24}{7} - \frac{24}{10},$$

$$\dots\dots\dots a_{n-5} \frac{24}{n-4} - \frac{24}{n-1},$$

$$a_{n-4} \frac{24}{n-3} - \frac{24}{n},$$

$$a_{n-3} \frac{24}{n-2} - \frac{24}{n+1},$$

$$a_{n-2} \frac{24}{n-1} - \frac{24}{n+2},$$

$$a_{n-1} \frac{24}{n} - \frac{24}{n+3},$$

$$a_n \frac{24}{n+1} - \frac{24}{n+4}.$$

3. Скорочуємо всі доданки, які можна, знаходимо S_n частинну суму ряду:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{24}{2} + \frac{24}{3} + \frac{24}{4} - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4} =$$

$$= 26 - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4}.$$

4. Знаходимо суму ряду за формулою (1.4):

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(26 - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4} \right) = 26.$$

Відповідь: $S = 26$.

Завдання для самостійної роботи. Знайти суми рядів:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 + 5n + 6}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 - 5n + 6}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{25n^2 + 5n - 6}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2 + 3n}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{4n^2 + 8n - 5}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{16n^2 - 8n - 3}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n(n+1)(n+2)}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$

Відповіді: 1. $S = 2$; 2. $S = 1$; 3. $S = 2$; 4. $S = 2$; 5. $S = 11$; 6. $S = 23$; 7. $S = 1$; 8. $S = 4$; 9. $S = 2$; 10. $S = 1$.

Приклад 1.6. Побудувати ряд, у якого послідовність $\left\{ \frac{(2^n - 1)}{2^n} \right\}$ є послідовністю часткових сум S_n .

Використавши формули (1.3), запишемо

$$a_1 = S_1 = (2 - 1)/2 = 1/2,$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (2^2 - 1)/2^2 - (2 - 1)/2 = 1/4,$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = (2^3 - 1)/2^3 - (2^2 - 1)/2^2 = 1/8,$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1)/2^n - (2^{n-1} - 1)/2^{n-1} = 1/2^n.$$

Одержаний ряд має вигляд $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$

Таким чином, ряд можна задати загальним членом a_n або послідовністю часткових сум S_n . Проте найчастіше ряд задається загальним членом та символом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати ряд, у якого загальний член ряду задано формулою

$$a_n = \frac{(2^n - 1)}{2^n}.$$

2. Записати часткову суму S_n ряду, у якого послідовність $\left\{ \frac{(2^n - 1)}{2^n} \right\}$ є послідовністю a_n .

3. Побудувати ряд, у якого послідовність $\left\{ \frac{(2^n - 1)}{2^n} \right\}$ є послідовністю часткових сум S_n .

Як зазначалось вище, певне числове значення ряду приписується шляхом введення поняття часткової суми ряду. Наступним кроком буде обчислення границі послідовності часткових сум S_n при $n \rightarrow \infty$.

Означення. Якщо послідовність часткових сум S_n має скінченну границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$, то ряд (1.2 називають збіжним, а границю s – його сумою. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує, то ряд називають розбіжним.

На рис. 1.1 відображено поведінку загального члена розбіжного ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{50 + 2k}$, а на рис. 1.2 – розбіжного ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ (суцільна лінія) та збіжного ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ (пунктирна лінія). Якщо на рис. 1.1 загальний член розбіжного ряду не прямує до нуля, то в іншому випадку загальний член розбіжного ряду прямує до нуля і його поведінка, у певному розумінні, подібна до поведінки загального члена збіжного ряду.

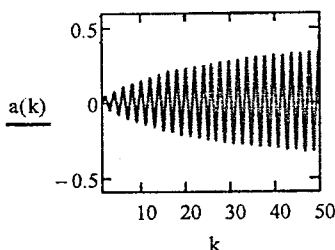


Рисунок 1.1

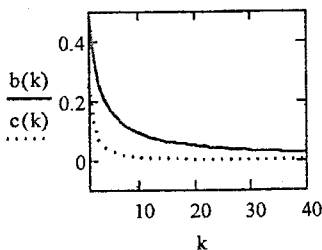


Рисунок 1.2

Щодо поведінки часткових сум наведених рядів слід зазначити, що часткові суми рядів $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{50 + 2k}$ (рис. 1.3) і $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ (рис. 1.4) монотонні і обмежені, отже, існують їхні границі, тобто ряди збігаються. Правда, це припущення потребує обґрунтування. Аналіз поведінки суцільної та

пунктирної кривих на рисунку 1.4 дозволяє зробити припущення, що часткова сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ необмежено зростає, отже ряд розбіжний.

Нижче розглядаються відповідні ознаки дослідження рядів на збіжність та розбіжність.

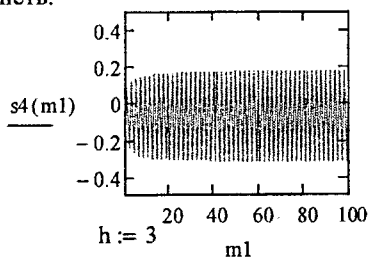


Рисунок 1.3

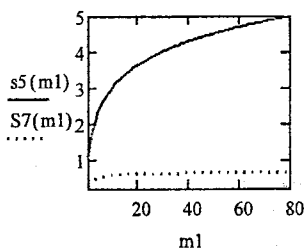


Рисунок 1.4

Однією з головних задач теорії числових рядів є з'ясування збіжності або розбіжності рядів і обчислення суми збіжних рядів. Проте на практиці при застосуванні рядів частіше всього цікавляться сумою ряду.

Завдання для самостійної роботи

1. Застосувавши комп'ютерну математичну систему (КМС) MathCAD або іншу КМС, побудуйте графіки членів ряду і часткових сум як функцій змінної n , нижченаведених рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\ln(n)}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}.$$

2. Переконайтеся в тому, що нижченаведені ряди збігаються, та знайдіть їх суму і залишок після n -го члена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^{n+1}} + \frac{5}{2^{n+2}} \right), n=4; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}, n=59;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 3n}}, n=59.$$

3. Розглянути ряд, наведений у прикладі 1.2. Обчислити за допомогою КМС MathCAD із точністю до збігу 7 цифр після коми суму S ряду при $a = 2; 1.5; 4; 1.2$. Порівняти результати обчислення $S(n)$ при $n = 6; 7; 9; 10$. На основі порівняння наближених значень $S(n)$ та відповідних значень a зробити припущення щодо найпростішої функціональної залежності $S(a)$.

1.2 Ряд геометричної прогресії

Розглянемо ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (a \neq 0), \quad (1.5)$$

утворений із членів геометричної прогресії $a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$, де a – перший член, q – знаменник прогресії, n -а часткова сума ряду має вигляд

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ якщо } q \neq 1. \text{ Ряд (1.5) називають рядом геометричної прогресії.}$$

Дослідимо його на збіжність. Знайдемо границю часткової суми:

1) якщо $|q| < 1$, тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a}{1-q} - a \frac{q^n}{1-q} \right] = \frac{a}{1-q},$$

оскільки границя $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Отже, ряд збігається і його сума дорівнює

$$S = \frac{a}{1-q};$$

2) якщо $|q| > 1$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \pm \infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$, тобто ряд розбігається;

3) якщо $q = 1$, то $S_n = a + a + a + \dots + a = n \cdot a$, і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a = \pm \infty$,

тобто ряд розбігається.

4) якщо $q = -1$, то

$$S_n = \begin{cases} a, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

послідовність $\{S_n\}$ не має границі, тобто ряд розбігається.

Отже, ряд (1.5) збіжний при $|q| < 1$ і розбіжний при $|q| \geq 1$.

1.3 Гармонічний ряд

Гармонічним рядом називають ряд вигляду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad (1.6)$$

Число b називають середнім гармонічним чисел a і c , якщо

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right).$$

Для ряду (1.6) $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right)$. На

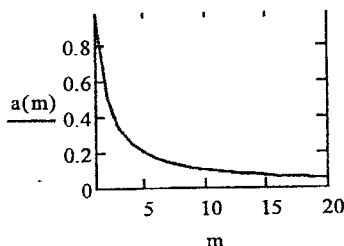


Рисунок 1.5

рис. 1.5 показано змінювання загального члена ряду $1/n$ при $n \rightarrow \infty$. Може скластися враження, що ряд (1.6) збіжний. Проте це не так.

Розглянемо збіжну послідовність $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\} \rightarrow e$. Крім того відомо, що

$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > e$. Після логарифмування лівої та правої частин нерівності маємо

$1 > n \cdot \ln \frac{n+1}{n}$ або $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$. При всіх $n = 1, 2, \dots$ одержуємо $1 > \ln 2$;

$1/2 > (\ln 3 - \ln 2)$; $1/3 > (\ln 4 - \ln 3)$; $\dots$, $1/n > (\ln(n+1) - \ln n)$. Додамо нерівності і одержуємо зліва часткову суму S_n гармонічного ряду, а в правій частині $\ln(n+1)$, тобто, $S_n > \ln(n+1)$. Отже, при $n \rightarrow \infty$ часткова сума $S_n \rightarrow \infty$, оскільки $\ln(n+1) \rightarrow \infty$, тобто гармонічний ряд розбігається.

Для порівняння на рис. 1.6 і рис 1.7 наведено ілюстрацію поведінки часткових сум збіжного ряду геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ і розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (побудову виконано в середовищі КМС MathCAD).

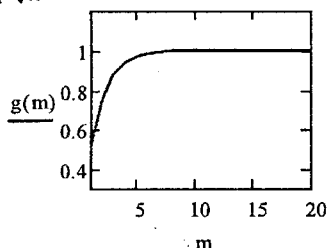


Рисунок 1.6

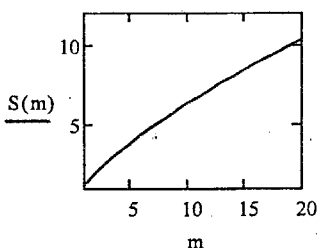


Рисунок 1.7

В наведених прикладах дослідження збіжності ряду здійснювалось безпосередньо за означенням з використанням n -ї часткової суми ряду S_n . Проте цей шлях незручний, оскільки він пов'язаний із згортанням часткової суми ряду S_n та обчисленням границі. На практиці, особливо з появою потужних систем комп'ютерної математики, частіше всього намагаються обчислити суму ряду, а не встановлювати факт збіжності чи розбіжності ряду. Це виправдано у випадку збіжних рядів. Якщо r_n – залишок ряду, тобто $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+k} + \dots$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0$, тому $S \approx S_n$. Похибка обчислень дорівнює r_n і $r_n \rightarrow 0$, якщо $n \rightarrow \infty$. Слід також додати, що коли границя послідовності часткових сум прямує до нескінченності або не існує, то сума ряду не існує відповідно до введеного означення. Далі будуть введені інші означення суми ряду, згідно з якими можливе підсумовування розбіжних рядів.

Поняття ряду фактично впроваджено з метою узагальнення дії додавання на випадок нескінченної кількості доданків. Проте, як це буде

показано нижче, не всі властивості дії додавання можна перенести на випадок довільних збіжних рядів.

1.4 Лінійні операції над числовими рядами

Розглянемо деякі елементарні властивості рядів.

Нехай дано два збіжних ряди:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1.7)$$

з сумою s_1 та

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (1.8)$$

з сумою s_2 .

Властивість 1. Ряд, утворений із добутків усіх членів збіжного ряду (1.7) на одне і те ж саме число c

$$c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n + \dots \quad (1.9)$$

також збігається і сума його дорівнює $c \cdot s_1$.

Властивість 2. Ряд утворений додаванням відповідних членів збіжних рядів (1.7) та (1.8),

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

збігається і його сума дорівнює $s_1 + s_2$.

Доведення цих властивостей проведіть самостійно.

Властивість 3. Відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність.

Тобто, якщо ряд (1.7) збігається (розбігається), то збігається (розбігається) ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$ і, навпаки, із збіжності (розбіжності) останнього ряду слідує збіжність (розбіжність) ряду (1.7).

До цього часу єдиним засобом дослідження ряду була часткова сума ряду. Проте не завжди можливе обчислення її границі. Тому доцільно з'ясування збіжності ряду проводити на основі поведінки (структури) членів ряду, зокрема загального члена ряду. Першою такою ознакою є необхідна ознака.

Властивість 4. Якщо ряд (1.7) збігається, то ряд отриманий в результаті групування членів ряду (1.7), не порушуючи їх розміщення, також збігається і має ту ж суму.

Обернене твердження не має місця.

1.5 Необхідна ознака збіжності

Теорема. Якщо ряд (1.7) збігається, то його загальний член a_n прямує до нуля при нескінченному зростанні n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (1.10)$$

Оскільки ряд (1.7) збігається, то за означенням збіжності ряду виконується рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s.$$

Але при $n \rightarrow \infty$, $n - 1$ також прямує до нескінченності, отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = s$.

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = s - s = 0.$$

що і потрібно було довести.

Приклад 1.7. Ряд

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{2^{n-1} + 1}{2^n} + \dots,$$

оскільки не виконується необхідна ознака, розбігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} + 1}{2^n} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Приклад 1.8. Для збіжного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{n-1}$, ($|q| < 1$)

необхідна ознака, звичайно, виконується: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Наслідок. Якщо необхідна ознака (1.10) не виконується, то ряд розбігається. Доведена ознака є необхідною, а не достатньою.

Приклад 1.9. Гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad (1.11)$$

Як було з'ясовано, ряд (1.11) розбігається, проте необхідна ознака збіжності для нього виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Наведемо приклад програми мовою КМС *MathCAD*, за допомогою якої на основі необхідної ознаки під час дослідження рядів можна зробити певні висновки щодо збіжності ряду.

Введіть загальний член числового ряду: $a(n) := (1 - 1/n)^{(n^2)}$:

$$g := \lim_{n \rightarrow \infty} a(n) \rightarrow 0$$

$$M := \begin{cases} \text{"search"} & \text{if } g = 0 \\ \text{"divergent"} & \text{if } g > 0 \end{cases}$$

Отже, за необхідною ознакою можна встановити лише розбіжність числового ряду. Введемо критерії, які дозволяють встановити збіжність або розбіжність числового ряду на основі структури членів ряду.

1.6 Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Важливим класом числових рядів є ряди з додатними членами, тобто, ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$. Для таких рядів найпростіше розв'язується питання щодо збіжності ряду. Прикладами рядів з додатними членами є ряд геометричної прогресії, якщо $q > 0$, гармонічний ряд.

1.6.1 Ознака порівняння

Теорема. Нехай дано два ряди з невід'ємними членами:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1.12)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (1.13)$$

І нехай кожний член ряду (1.12) не більший за відповідний член ряду (1.13), тобто

$$a_n \leq b_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.14)$$

Тоді: 1) якщо збігається ряд (1.13), то ряд (1.12) також збігається;

2) якщо ряд (1.12) розбігається, то ряд (1.13) також розбігається.

Доведемо спочатку першу частину. Розглянемо часткові суми рядів

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n b_i.$$

За умовою теореми ряд (1.13) збіжний і, оскільки цей ряд додатний, то $\sigma_n < \sigma$, де $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$. Із умови (1.14) випливає, що $s_n \leq \sigma_n < \sigma$.

Обмеженість часткових сум s_n доведено. Оскільки члени ряду (1.12) додатні, то послідовність часткових сум також зростаюча. Із обмеженості та зростання часткових сум слідує існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Таким чином, ряд (1.12) збігається.

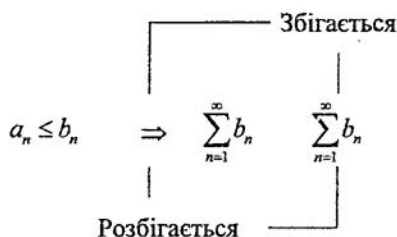
Для доведення другої частини теореми достатньо зауважити, що, оскільки ряд (1.12) розбіжний, його часткові суми нескінченно зростають: $s_n \rightarrow \infty$. Оскільки $\sigma_n \geq s_n$, то $\sigma_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Отже, ряд (1.13) розбігається, що і треба було довести.

Ознаки порівняння застосовують і в тому разі, коли умову (1.14) задовольняють не всі члени ряду, а тільки починаючи з деякого $n = N$.

Зауваження

1. Досить часто припускаються помилок, вважаючи, що із збіжності ряду (1.12) слідує збіжність ряду (1.13), або, що із розбіжності ряду (1.13) слідує розбіжність ряду (1.12).

2. Для кращого запам'ятовування зміст теореми схематично можна показати так:



3. При дослідженні рядів часто зручнішою виявляється інша ознака порівняння у граничній формі.

Теорема. Якщо існує скінченна та відмінна від нуля границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K \neq 0, \quad (1.15)$$

то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

4. Ознаки порівняння застосовують і в тому разі, коли умову (1.14) задовольняють не всі члени ряду, а тільки починають з деякого номера $n = N$.

5. Ознака порівняння може бути сформульована у вигляді, в деяких випадках зручнішому для застосування.

Теорема. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з додатними членами, причому $a_n > 0, b_n > 0$, і виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ при всіх n , то:

1) якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збігається;

2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ також розбігається.

Приклад 1.10. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$ збігається, оскільки його члени менші за відповідні члени збіжного геометричного ряду

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad (q = \frac{1}{3} < 1), \quad \text{тобто, виконується нерівність}$$

$$\frac{1}{3^n + 1} \leq \frac{1}{3^n}, \quad \text{при } n \geq 1.$$

Приклад 1.11. Ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$, розбігається, оскільки його члени, починаючи з другого, більші за відповідні члени гармонічного ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

який, як ми вже відмічали, розбіжний.

Приклад 1.12. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5n^2-1}$ розбігається, оскільки, вибравши для порівняння гармонічний ряд (розбіжний) і застосувавши теорему із зауваження 3, дістанемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2n-1}{5n^2-1} \right) : \frac{1}{n} \right] = \frac{2}{5} \neq 0.$$

Приклад 1.13. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 5}$.

Скористаємось ознакою порівняння у граничній формі та КМС *MathCAD*:

$$a(n) := \frac{1}{2^n} \quad b(n) := \frac{1}{2^n + 5} \quad pr := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)}$$

$$Prn := \begin{cases} \text{"search"} & \text{if } pr = 0 \\ \text{"search"} & \text{if } pr = \infty \\ \text{"converg"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Prn = \text{"converg"}$$

Отже, ряд збігається.

Застосування ознаки порівняння спричинює певні труднощі, пов'язані із можливістю вдалого вибору ряду (еталона) для порівняння. Найчастіше як еталон використовують ряд геометричної прогресії, гармонічний ряд або вже досліджений ряд.

Приклад 1.14. Дослідити на збіжність ряд з додатними елементами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

де $a_n = f(n, u_1(n), u_2(n), \dots)$ та $u_1(n), u_2(n)$ – функції з відомими найменшими та найбільшими значеннями (наприклад, синус, косинус та інші) де функція f монотонно залежить від $u_1, u_2, \dots$

План розв'язування:

1. Перевіримо, чи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний, тому що не виконується необхідна умова збіжності ряду).
2. Оскільки $a_n \geq 0$, застосуємо першу теорему порівняння.

Нехай дані два ряди з додатними елементами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Якщо $a_n \leq b_n$, то із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Якщо $a_n \geq b_n$, то із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає розбіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3. Щоб зробити висновок про збіжність (розбіжність) даного ряду, ми повинні встановити справедливості однієї із двох гіпотез (перевіряємо їх в довільному порядку).

I. Даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається.

II. Даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

I. Перевіряємо першу гіпотезу. Щоб довести, що даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

збігається, треба знайти збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такий, що

$$a_n \leq b_n. \quad (1.16)$$

Як еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ використовуємо один із таких рядів:

а) збіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^p}$ при $p > 1$;

б) збіжний ряд геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} c r^n$ при $0 < q < 1$ (c – деяке додатне число).

Якщо існує збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такий, що виконується нерівність (1.16),

то за першою теоремою порівняння даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. В іншому випадку, перевіряємо другу гіпотезу.

II. Щоб встановити, що даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, треба знайти розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такий, що

$$a_n \geq b_n. \quad (1.17)$$

Як еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ використовуємо один із таких рядів:

а) розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cp^n$ при $p \leq 1$;

б) розбіжний ряд геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} cp^n$ при $p \geq 1$ (c – деяке додатне число).

Якщо існує розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такий, що виконується нерівність (1.17), то за першою теоремою порівняння даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Зауваження. Для оцінювання загального елемента ряду використовуємо нерівності:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos n \leq 1, & \quad -1 \leq \sin n \leq 1, \\ 1 \leq \ln n \leq n^p \ (\forall p > 0), & \quad \frac{\pi}{4} \leq \arctg \leq \frac{\pi}{2} \text{ і т. д.} \end{aligned}$$

Приклад 1.15. Дослідити ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}.$$

Розв'язування

1. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} = 0,$$

тобто, необхідна умова збіжності ряду виконується.

2. Оскільки $-1 \leq \sin n \leq 1$ і $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ при всіх $n \geq 1$ і

$$\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} > 0,$$

то можна застосувати першу теорему порівняння.

3. Щоб зробити висновок про збіжність (розбіжність) даного ряду, ми повинні довести справедливості однієї із двох гіпотез (перевіряємо в довільному порядку).

I. Даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Оскільки $-1 \leq \sin n \leq 1$, маємо $1 \leq (2 + \sin n) \leq 3$, $\sqrt{n^3+3} < 2n^{3/2}$, то

$$\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} \leq \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \frac{2}{n^{1/2}}.$$

Оскільки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1/2}}$$

розбігається як гармонічний з $(p-1/2) < 1$, то гіпотеза про збіжність даного ряду не підтвердилася.

Перевіряємо другу гіпотезу.

II. Даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Оскільки $-1 \leq \sin n \leq 1$, маємо $1 \leq (2 + \sin n) \leq 3$, $\sqrt{n^3 + 1} > n^3$, і відповідно,

$$\frac{\sqrt{n^3}}{n^2(2 + \sin n)} \geq \frac{n^{3/2}}{3n^2} = \frac{1}{3n^{1/2}}. \quad (1.18)$$

Оскільки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^{1/2}}$$

розбігається як гармонічний з $p = 1/2 < 1$, то із нерівності (1.18) за першою теоремою порівняння розбігається і даний ряд.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{n^2(2 + \sin n)}$ розбігається.

Завдання для самостійної роботи. Дослідити ряд на збіжність:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n^3)}{n(n+2)(n+3)}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 2\sin n}{n - \ln n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos n}{n^2 + 3}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{n^3 - 2}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2\cos n}{\sqrt[5]{n^3}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n(n^2 + 3)}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[5]{n^{11} + 1}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}.$$

Відповідь: 1. Ряд збігається. 2. Ряд розбігається. 3. Ряд збігається. 4. Ряд розбігається. 5. Ряд розбігається. 6. Ряд збігається. 7. Ряд збігається. 8. Ряд збігається. 9. Ряд збігається. 10. Ряд розбігається.

Приклад 1.16. Дослідити на збіжність ряд з додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

План розв'язування.

1. Перевіряємо, чи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду).
2. Перевіряємо, чи $a_n > 0$ для всіх $n > 1$.
3. Робимо висновок про збіжність даного ряду, використовуємо другу (граничну) теорему порівняння.

Нехай задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причому існує номер N такий, що при всіх $n > N$ $a_n > 0$ і $b_n > 0$.

Якщо існує скінченна границя, яка не дорівнює нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n},$$

то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ або збігаються, або розбігаються разом.

Як еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ використовуємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^p}$, який збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$, або ряд геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} cq^n$ ($q > 0$), який збігається $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$. Таким чином потрібно знайти послідовність A/n^p (або Bq^n) таку, що $a_n \sim \frac{A}{n^p}$ (або $a_n \sim Bq^n$) при $n \rightarrow \infty$.

Висновок: за другою теоремою порівняння даний ряд збігається, якщо $p > 1$ ($q < 1$), і розбігається, якщо $p \leq 1$ ($q \geq 1$).

Приклад 1.17. Дослідити ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2 + 3)^{5/2}}.$$

Розв'язування

1. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{n}{(n^2 + 3)^{5/2}} = 0.$$

2. Перевіряємо, чи члени даного ряду додатні. Дійсно,

$$\arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}} > 0$$

при всіх $n \geq 1$, оскільки $n/(n^2+3)^{5/2} \in (0, 1)$.

3. Робимо висновок про збіжність або розбіжність даного ряду, використовуючи другу (граничну) теорему порівняння.

Маємо

$$\arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}} \sim \frac{1}{n^4} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

збігається як гармонічний з $p=4 > 1$. Отже, в силу другої (граничної) теореми порівняння даний ряд теж збігається.

Завдання для самостійної роботи. Дослідити ряди на збіжність:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+6}{n^3+5}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n^2} \right).$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2} \arctg \frac{1}{n^4}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n^4+3}{n^4+2}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n+3}{n(n+2)^3}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{7^n + 2n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \arcsin \frac{n^2+1}{n^4-2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (e^{1/2n^3} - 1).$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} n! g^2 \frac{\pi}{n^2}.$$

Відповідь. 1. Ряд збігається; 2. Ряд збігається; 3. Ряд збігається; 4. Ряд розбігається; 5. Ряд збігається; 6. Ряд збігається; 7. Ряд збігається; 8. Ряд розбігається; 9. Ряд розбігається; 10. Ряд збігається.

1.6.2 Ознака Д'Аламбера

Теорема. Якщо для ряду з додатними членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

існує границя відношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \quad (1.19)$$

то

1) при $l < 1$ ряд збігається;

2) при $l > 1$ ряд розбігається;

3) при $l = 1$ ряд може збігатися або розбігатися.

1. Нехай $l < 1$. Виберемо число q , яке задовольняє систему нерівностей $l < q < 1$ (рис. 1.8)

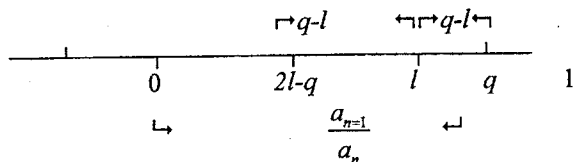


Рисунок 1.8

З виразу (1.19) та означення границі випливає, що для всі значень $n > N$ виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q. \quad (1.20)$$

Записавши нерівність (1.20) для різних значень n , починаючи з номера $N + 1$, дістанемо

$$a_{N+1} < q \cdot a_N,$$

$$a_{N+2} < q \cdot a_{N+1} < q^2 \cdot a_N,$$

$$a_{N+3} < q \cdot a_{N+2} < q^3 \cdot a_N,$$

.....

Звідси випливає, що члени ряду

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots,$$

які є n -м залишком даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, менші за відповідні члени збіжного геометричного ряду із знаменником q , $0 < q < 1$, $q \cdot a_N + q^2 \cdot a_N + q^3 \cdot a_N + \dots$.

Отже, на підставі першої ознаки порівняння N -й залишок збігається і збігається даний ряд.

2. Нехай $l > 1$ зокрема, $l = \infty$. Тоді з рівності (1.19) випливає, що, починаючи з деякого номера N , для всіх $n = N$ виконуватиметься нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, або $a_{n+1} > a_n$ для всіх $n = N$. Але це означає, що члени

ряду зростають, починаючи з номера $N + 1$, і тому загальний член ряду не прямує до нуля, тобто, необхідна ознака збіжності ряду не виконується. Отже, ряд розбігається.

Приклад 1.18. Дослідити на збіжність ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

де $a_n \sim b_n$ і b_n містить добуток багатьох множників (наприклад, факторіали).

План розв'язування. Якщо при обчисленні границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

виникає можливість скорочення багатьох множників в чисельнику і знаменнику дробу b_{n+1}/b_n , то застосовують ознаку Д'Аламбера.

Нехай даний ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \varphi,$$

то при $\varphi < 0$ ряд збігається, а при $\varphi > 0$ розбігається. (якщо $\varphi = 0$, то ознака Д'Аламбера відповіді не дає).

1. Перевіримо чи $a_n > 0$ при всіх $n \geq 1$.

2. Спростуємо, якщо можна, вираз для a_n і будемо проводити дослідження ряду на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такого, що $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, а потім використовуємо другу теорему порівняння.

3. Обчислюємо b_{n+1} .

4. Обчислюємо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \varphi.$$

5. Застосовуємо ознаку Д'Аламбера і другу теорему порівняння.

Якщо $\varphi < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається. Отже, за другою теоремою порівняння збігається і даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Якщо $\varphi > 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігається. Отже, за другою теоремою порівняння розбігається і даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 1.19. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Розв'язування

1. Перевіримо, чи члени ряду додатні. Дійсно,

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}} > 0$$

при всіх $n \geq 1$.

2. Оскільки $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, можна спростити вираз для a_n :

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \sim \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!},$$

тобто, будемо досліджувати на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, де

$$b_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!},$$

а потім скористаємося другою теоремою порівняння.

Оскільки b_n містить добуток множників типу факторіалів, то треба застосувати ознаку Д'Аламбера.

3. Обчислимо b_{n+1} :

$$b_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{2^{n+2} (n+1)!}.$$

4. Обчислимо ϕ

$$\begin{aligned} \phi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{2^{n+2} (n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1} n!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

5. Застосовуємо ознаку Д'Аламбера і другу теорему порівняння. Оскільки $\phi = 3/2 > 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$$

розбігається. За другою теоремою порівняння розбігається і даний ряд.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}}$ розбігається.

Завдання для самостійної роботи. Дослідити ряд на збіжність.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^n (n+1)!}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n!)^3}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{2^n (2n+5)!}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n^5 - 1)}{n!}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n + 2}.$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+2)!}{(3n)!}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Відповідь: 1. Ряд збігається ($\phi=0$); 2. Ряд збігається ($\phi=0$); 3. Ряд розбігається ($\phi=+\infty$); 4. Ряд збігається ($\phi=0$); 5. Ряд збігається ($\phi=0$); 6. Ряд розбігається ($\phi=+\infty$); 7. Ряд збігається ($\phi=4/9$); 8. Ряд збігається ($\phi=0$); 9. Ряд збігається ($\phi=2/e$); 10. Ряд розбігається ($\phi=3/e$).

Приклад 1.20. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера. Запишемо відношення:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Отже, обчисливши границю відношення сусідніх членів ряду, доводимо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

ряд збігається.

Приклад 1.21. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots$$

Відповідно до умови завдання випишемо загальний член ряду та знайдемо границю:

$$a_n = \frac{2^n}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot n}{2^n(n+1)} = \frac{2 \cdot n}{n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n}{n+1} = 2 > 1.$$

Ряд розбігається, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty$.

Приклад 1.22. Дослідити збіжність ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Виконаємо ті ж операції, що і в попередньому прикладі.

$$a_n = \frac{1}{n^3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{(n+1)} \right)^3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(n+1)} \right)^3 = 1.$$

Таким чином, за допомогою ознаки Д'Аламбера не можна одержати відповіді на питання щодо збіжності ряду.

Приклад 1.23. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Скористаємось КМС *MathCAD*:

$$\begin{aligned} a(n) &:= \frac{n!}{n^n} \quad l := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} \rightarrow e^{-1} \\ b &:= \begin{cases} \text{"series converges"} & \text{if } l < 1 \\ \text{"series divergent"} & \text{if } l > 1 \\ \text{"enather kriter"} & \text{if } l = 1 \end{cases} \\ b &= \text{"series converges"} \end{aligned}$$

Відповідь вказує на те, що ряд збігається.

1.6.3 Радикальна ознака Коші

Теорема. Якщо для ряду з додатними членами $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \quad (1.21)$$

то

- 1) при $l < 1$ ряд збігається;
- 2) при $l > 1$ ряд розбігається;
- 3) при $l = 1$ може збігатися або розбігатися.

Приклад 1.24. Дослідити ряд на збіжність з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

де $a_n \sim b_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n}$ існує і легко обчислюється.

Якщо b_n має, наприклад, вигляд $g(n) f(n)^n$, де f і g – раціональні функції n , то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n}$ існує і легко обчислюється. В такому випадку використовують радикальну ознаку Коші.

Нехай даний ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \varphi,$$

то при $\phi < 1$ ряд збігається, при $\phi > 1$ розбігається (якщо $\phi = 1$, то ознака Коші відповіді не дає).

1. Перевіримо, чи $a_n > 0$ при всіх $n \geq 1$.

2. Спростуємо, при необхідності, значення для a_n , тобто будемо досліджувати на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, такий, що $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, а потім застосуємо другу теорему порівняння.

3. Обчислимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \phi.$$

4. Застосовуємо радикальну ознаку Коші і другу теорему порівняння.

Якщо $\phi < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігається. Тоді, за другою теоремою порівняння, збігається і даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Якщо $\phi > 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігається. Тоді, за другою теоремою порівняння, розбігається і даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Зауваження. Корисно знати, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1,$$

де $P(n)$ – многочлен відносно n .

Приклад 1.25. Дослідити ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}.$$

Розв'язування

1. Перевіримо, чи члени ряду додатні.

$$a_n = n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n} > 0$$

при всіх $n \geq 1$.

2. Оскільки $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ спростуємо значення

$$n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n} \sim n^4 \left(\frac{\pi}{4n} \right)^{2n},$$

тобто, будемо досліджувати на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, де

$$b_n = n^4 \left(\frac{\pi}{4n} \right)^{2n},$$

потім застосовуємо другу теорему порівняння.

Очевидно, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n}$ існує і легко обчислюється. В такому випадку застосовуємо радикальну ознаку Коші.

3. Обчислюємо ϕ за формулою, враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^4 \left(\frac{\pi}{4n} \right)^{2n} \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{4/n} \left(\frac{\pi}{4n} \right)^2 = 0 < 1.$$

4. Застосовуємо радикальну ознаку Коші і другу теорему порівняння. Оскільки $\phi = 0 < 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{\pi}{4n} \right)^{2n}$$

збігається. Отже, за другою теоремою порівняння збігається і даний ряд.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}$ збігається.

Завдання для самостійної роботи. Дослідити ряд на збіжність.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1} \right)^{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1} \right)^{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+1} \right)^{n^3}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+3} \right)^{n^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{5n+1} \right)^{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{3n+1}{5n+3} \right)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{9n+1} \right)^{n/2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} e^{-n}$

Відповідь: 1. Ряд розбігається ($\phi = +\infty$); 2. Ряд збігається ($\phi = 0$); 3. Ряд збігається ($\phi = 0$); 4. Ряд збігається ($\phi = 0$); 5. Ряд збігається ($\phi = 0$); 6. Ряд збігається ($\phi = 3/5$); 7. Ряд збігається ($\phi = 1/4$); 8. Ряд збігається ($\phi = 2/3$); 9. Ряд збігається ($\phi = 3/5$); 10. Ряд розбігається ($\phi = 3/e$).

Приклад 1.26. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2 \cdot n + 1} \right)^n + \dots$$

Застосовуємо ознаку Коші

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2 \cdot n + 1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \cdot n + 1} = \frac{1}{2} < 1,$$

Ряд збігається.

Приклад 1.27. Дослідити на збіжність ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Застосуємо ознаку Коші. Для цього спочатку знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{n^3} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n^3} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \ln n}{n} = 0,$$

звідси

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

тобто у цьому випадку ознака Коші, як і ознака Д'Аламбера, не дає відповіді на питання щодо збіжності або розбіжності ряду. Дослідження проведемо за допомогою ознаки, розглянутої у наступному пункті.

Приклад 1.28. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Скористаємось КМС *MathCAD*:

$$a(n) := \frac{n!}{n^n} \quad \text{ch} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a(n)} \rightarrow \exp(-1) \quad \begin{cases} b := \text{"series converges"} & \text{if ch} < 1 \\ \text{"series divergent"} & \text{if ch} > 1 \\ \text{"another kriter"} & \text{if ch} = 1 \end{cases}$$

b = "series converges"

Відповідь вказує на те, що ряд збігається.

Завдання для самостійної роботи

Скориставшись КМС *MathCAD*, дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}, \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot e^n}.$$

1.6.4 Інтегральна ознака Коші

Теорема. Нехай функція $f(x)$ при $x \geq 1$ – неперервна, додатна і спадна, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n = f(n)$, ($n = 1, 2, \dots$), та інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лінією $y = f(x)$, з основою $x \in [1, n]$ (рис. 1.9). Тоді площа трапеції дорівнює інтегралу

$$S_n = \int_1^n f(x) dx.$$

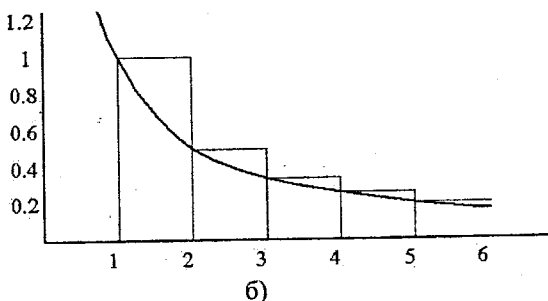
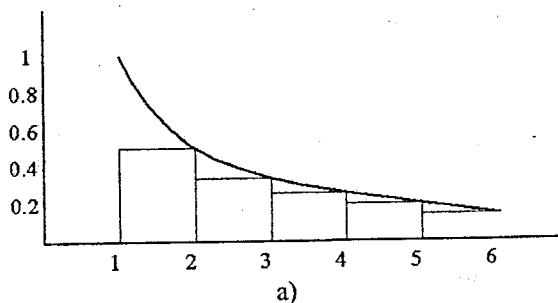


Рисунок 1.9

Позначимо цілі точки основи: $x = 1, 2, \dots, n-1, n$ і розглянемо дві східчасті фігури. Одна з них (вписана) має площу, що дорівнює $f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + \dots + f(n) \cdot 1 = \sigma_n - a_1 \cdot 1$, а друга (описана) має площу, що дорівнює $f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + \dots + f(n-1) \cdot 1 = \sigma_n - a_n \cdot 1$, де $\sigma_n = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1$. Площа першої фігури менша за площу даної криволінійної трапеції, площа другої – більша, тобто має місце нерівність

$$\sigma_n - a_1 < S_n < \sigma_n - a_n$$

Звідси отримуємо дві нерівності:

$$\sigma_n < S_n + a_1, \quad (1.22)$$

$$\sigma_n > S_n + a_n. \quad (1.23)$$

Оскільки функція $f(x)$ додатна, то інтеграл S_n зростає разом з n . При цьому можливі два випадки:

1) невластний інтеграл збігається, тобто границя $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ існує, тоді $S_n < S$ і з нерівності (1.22) при довільному n знаходимо $\sigma_n < S + a_1$.

Отже, послідовність часткових сум σ_n обмежена, а оскільки розглядається ряд з додатними членами, то ця послідовність і монотонно зростає, а тому має границю. Таким чином, ряд збігається.

2) якщо інтеграл розбігається, то $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ і на підставі нерівності (1.23) робимо висновок про те, що часткова сума σ_n також нескінченно зростає, тобто ряд розбіжний.

Приклад 1.29. Дослідити збіжність ряду з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

де, $a_n \sim b_n = f(n)$, якщо первісна функції $f(x)$ легко обчислюється.

Розв'язування

Якщо $b_n = f(n)$ первісна функції $f(x)$ легко обчислюється, то застосовуємо інтегральну ознаку Коші.

Якщо функція $f(x)$, яка приймає в точках $x = n (n \in \mathbb{N})$ значення $f(n) = b_n > 0$, спадає в деякому проміжку $b < x < +\infty (b \geq 1)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ і невластний інтеграл $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ або разом збігаються, або разом розбігаються.

1. Спростуємо, при необхідності, значення для a_n , тобто, будемо досліджувати на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такий, що $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$ і $b_n = f(n)$ вибрані так, щоб функція $f(x)$ мала первісну $F(x)$. Потім застосовуємо другу теорему порівняння.

2. Досліджуємо на збіжність невластний інтеграл за означенням:

$$\int_b^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a).$$

3. Застосовуємо інтегральну ознаку Коші до ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

а потім робимо висновок про збіжність даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, використовуючи другу теорему порівняння.

Зауваження. Інтегральна ознака Коші застосовується і до рядів вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(\ln n)$.

Приклад 1.30. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2 - 2) \ln(2n)}.$$

Розв'язування

1. Спростуємо вираз для a_n

$$\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)} \sim \frac{3}{n\ln n}$$

і будемо досліджувати на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\ln n}$ за допомогою інтегральної ознаки Коші, оскільки функція $f(x) = \frac{3}{x\ln x}$ має первісну

$F(x) = 3\ln\ln x$. Потім використовуємо другу ознаку порівняння.

2. Досліджуємо збіжність невластного інтеграла за означенням:

$$\int_2^{+\infty} \frac{3dx}{x\ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{3dx}{x\ln x} = 3 \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln\ln b - \ln\ln 2] = +\infty.$$

Інтеграл розбігається.

3. Застосовуємо інтегральну ознаку Коші:

Функція $f(x) = \frac{3}{x\ln x}$ неперервна на проміжку $[2, +\infty)$ і спадає на ньому до нуля. Отже, із розбіжності інтеграла випливає розбіжність ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n\ln n}.$$

За другою теоремою порівняння розбігається і даний ряд.

Відповідь: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$ розбігається.

Завдання для самостійної роботи. Дослідити ряд на збіжність.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln(2n)}.$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2 n}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)\sqrt{\ln(2n+1)}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3(n+1)}.$

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{\ln n}}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln^3(3n+1)}}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+3)}}.$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)\ln^2 n}.$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+2)\ln^2 n}.$

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(n^4-2)\ln n}.$

Відповіді: 1. Ряд розбігається. 2. Ряд збігається. 3. Ряд розбігається. 4. Ряд збігається. 5. Ряд розбігається. 6. Ряд збігається. 7. Ряд розбігається. 8. Ряд збігається. 9. Ряд збігається. 10. Ряд розбігається.

Приклад 1.31. Дано ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (1.24)$$

При значеннях параметра $p > 1$ ряд визначає дзета-функцію Рімана $\zeta(p)$.

З'ясуємо, за яких значень параметра p ряд (1.24) збігається.

Очевидно, функція $f(x) = \frac{1}{x^p}$ задовольняє умову інтегральної ознаки.

Розглянемо часткові випадки.

1. Нехай $p = 1$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - \ln 1 = \infty. \text{ Отже, ряд розбігається.}$$

2. Нехай $p > 1$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-p)} x^{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-p)b^{p-1}} - \frac{1}{1-p} = -\frac{1}{1-p}. \quad \text{Ряд}$$

збігається.

3. Нехай $p < 1$. Обчислимо інтеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \infty.$$

Ряд розбігається.

Звідси робимо висновок про те, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} \text{збіжний} & \text{при } p > 1, \\ \text{розбіжний} & \text{при } p \leq 1. \end{cases}$$

Причому у випадку $p > 1$ його сума S дорівнює $S = \frac{1}{p-1}$.

На рис. 1.9 наведено графік часткової суми S_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, для якого виконується необхідна умова збіжності. З того, що сума монотонно зростає і, можливо, обмежена (поведінка графіка на рис. 1.10, взагалі кажучи, не є аргументом), можна зробити припущення щодо того, що ряд збігається. Щоб одержати підтвердження, застосовуються достатні ознаки.

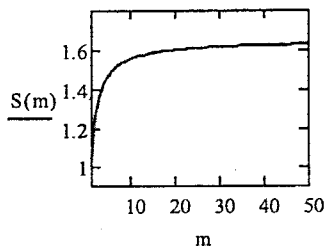


Рисунок 1.10

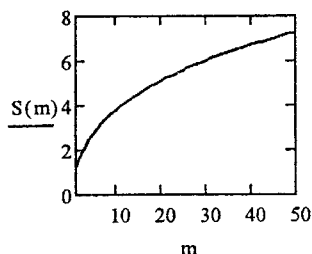


Рисунок 1.11

На рис. 1.11 наведено графік часткової суми S_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, для якого

теж виконується необхідна умова збіжності. З того, що сума монотонно зростає, можна зробити припущення про те, що ряд розбіжний. Для підтвердження припущення, застосовуються достатні ознаки. Якщо застосувати ознаку Д'Аламбера, то в обох випадках нижченаведена програма дасть інформацію про необхідність застосування іншої ознаки.

Отже, треба скористатись ознаками порівняння або інтегральною ознакою.

Наведемо програму, написану мовою комп'ютерної математичної системи (КМС) *MathCAD*, за допомогою якої в деяких випадках можна досліджувати ряди з додатними членами з використанням ознак, розглянутих в посібнику.

$$f(n) := \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$$

$$f(n) := \frac{\ln(n+1)}{(n+1)}$$

$$q4 := \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A f(n) \, dn \rightarrow \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}$$

$$q4 := \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A f(n) \, dn \rightarrow \infty$$

$$h3 := \begin{cases} \text{"converg"} & \text{if } 0 \leq q4 < \infty \\ \text{"diverg"} & \text{if } q4 = \infty \\ \text{"undefined"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h3 = \text{"converg"}$$

$$h3 := \begin{cases} \text{"converg"} & \text{if } 0 \leq q4 < \infty \\ \text{"diverg"} & \text{if } q4 = \infty \\ \text{"undefined"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h3 = \text{"diverg"}$$

Якщо з'являється повідомлення про неможливість дослідити збіжність ряду за даною ознакою, то застосовується така ознака.

Нехай $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $ch = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, $q = \int_b^{\infty} f(x) \, dx$, де $f(n) = a_n$.

```

M := | if g = 0
      | "series converges DL" if dl < 1
      | "series diverges DL" if dl > 1
      | otherwise
      | | "series converges CH" if ch < 1
      | | "series diverges CH" if ch > 1
      | | otherwise
      | | | "converges INT" if 0 ≤ q < ∞
      | | | "diverges INT" otherwise
      | "divergent" if g > 0
      | "indefNEOB" otherwise

```

M

Слід зауважити, що КМС *MathCAD* в багатьох, навіть простих випадках, не може обчислити границю чи інтеграл, а тому під час дослідження рядів на збіжність доцільно поєднувати набуті знання та КМС *MathCAD*.

1.6.5 Узагальнена ознака

Наведемо приклад узагальненої теореми про умови збіжності та розбіжності числового ряду.

Теорема. Нехай задано ряди з додатними членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad (1.25)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad (1.26)$$

крім того $g: N \cup \{0\} \rightarrow N \cup \{0\}$ – довільне відображення, для якого $g(n) \leq n-1$ для всіх $n \geq n_0$, де $n_0 \in N$.

Тоді:

а) якщо ряд (1.26) розбігається і виконується співвідношення

$$\left(\frac{a_n}{a_{g(n)}} \right)^{\frac{1}{n-g(n)}} \leq \left(\frac{b_n}{b_{g(n)}} \frac{\left(\sum_{k=0}^{g(n)} b_k \right)^{\alpha}}{\left(\sum_{k=0}^n b_k \right)} \frac{\left(\sum_{k=0}^{g(n)} b_k \left(\sum_{l=0}^k b_l \right)^{-1} \right)^{\beta}}{\left(\sum_{k=0}^n b_k \left(\sum_{l=0}^k b_l \right)^{-1} \right)} \right)^{\frac{1}{n-g(n)}} \quad (1.27)$$

для всіх $n > 0$, де $\alpha = 1$, $\beta > 1$, то ряд (1.25) збігається;

б) якщо ряд (1.26) розбігається і виконується співвідношення

$$\left(\frac{a_n}{a_{g(n)}} \right)^{\frac{1}{n-g(n)}} \geq \left(\frac{b_n}{b_{g(n)}} \frac{\left(\sum_{k=0}^{g(n)} b_k \right)^{\alpha}}{\left(\sum_{k=0}^n b_k \right)^{\alpha}} \frac{\left(\sum_{k=0}^{g(n)} b_k \left(\sum_{l=0}^k b_l \right)^{-1} \right)^{\beta}}{\left(\sum_{k=0}^n b_k \left(\sum_{l=0}^k b_l \right)^{-1} \right)^{\beta}} \right)^{\frac{1}{n-g(n)}} \quad (1.28)$$

для всіх $n > n_0$, де $\alpha \leq 1$ і $\beta \leq 1$, то ряд (1.25) розбігається;

в) якщо ряд (1.26) збігається і виконується співвідношення (1.27) при $\alpha = \beta = 0$, то ряд (1.25) збігається.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайдіть умови, при яких із загальної теореми (п. 1.6.5) можна отримати ознаки Д'Аламбера та радикальну ознаку Коші.

2. Дослідити на збіжність наведені нижче числові ряди, застосувавши розглянуті ознаки збіжності.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 2},$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 5},$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!},$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n},$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1} \sqrt{10}},$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + 3n + 1},$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \dots \cdot n^2}{3^{n+1}},$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!},$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n^6 + n^2 + 3}},$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n^n \cdot n!},$$

1.7 Знакозмінні ряди

1.7.1 Теорема Лейбніца

Достатні ознаки збіжності розглядалися стосовно рядів з додатними членами. За допомогою ознаки Лейбніца досліджуються ряди, в яких спостерігається чергування знаків членів ряду, тобто досліджуються ряди вигляду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — додатні числа.

Теорема Лейбніца. Якщо в знакозмінному ряді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n, \quad (a_n > 0) \quad (1.29)$$

числа a_n такі, що

$$1) \quad a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \quad (1.30)$$

2) границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad (1.31)$$

то ряд (1.29) збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена.

На рис. 1.12 схематично показано поведінку часткової суми S_n знакозмінного ряду, який задовольняє умови (1.29) та (1.30), а на рис. 1.13 – часткових сум S_{2m} (суцільна лінія) і S_{2m+1} (пунктирна лінія). Можна припустити, що існують границі цих сум:

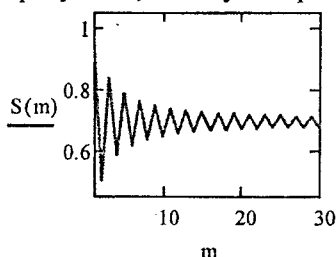


Рисунок 1.12

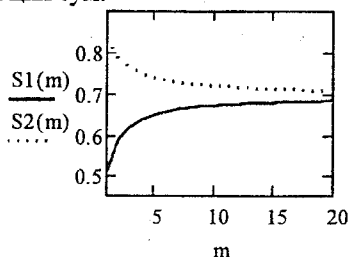


Рисунок 1.13

Для доведення припущення утворимо часткову суму з парною кількістю $n=2m$ перших членів ряду (1.29):

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Із умови (1.30) слідує, що різниця в дужках додатна. Тобто, додатна сума S_{2m} , і є монотонно неспадною послідовністю із зростанням m . Перепишемо тепер цю суму інакше:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \quad (1.32)$$

Оскільки за умовою (1.30) кожна різниця в дужках додатна, то в результаті віднімання цих дужок від a_1 дістанемо число, менше за a_1 тобто $S_{2m} < a_1$.

Отже, встановлено, що сума S_{2m} при зростанні m є неспадною і обмеженою зверху числом a_1 . Звідси слідує, що S_{2m} має границю S , причому вона задовольняє нерівність $0 < S < a_1$. Таким чином, доведена збіжність послідовності парних часткових сум до числа S . Слід довести також, що послідовність непарних часткових сум має своєю границею число S .

З цією метою розглянемо суму $n=2m+1$ перших членів ряду (1.29):

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

Оскільки згідно з умовою (1.31) $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S.$$

Отже, доведено, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ як при парному, так і при непарному n , тобто, ряд (1.29) збігається.

Одержана при доведенні теореми нерівність $0 < S < a_1$ дає можливість оцінити похибку при заміні суми ряду частковою сумою S_n . При такій заміні $S \approx a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_n$, відкидаються всі члени ряду, починаючи з a_{n+1} , тобто вираз, що в свою чергу є знакозмінним рядом $\pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} \dots)$, який називається залишком ряду (1.29). Введемо позначення $R_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} \dots)$. Абсолютна величина R_n за теоремою Лейбніца менша абсолютної величини першого із відкинутих членів цього ряду (тобто менша за a_{n+1}). Отже, похибка, яку матимемо при заміні S на S_n , не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів ряду.

Приклад 1.32. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \dots a_n > 0.$$

Розв'язування

1. Перевіримо, чи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду).

2. Досліджуємо ряд на збіжність, складений із модулів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

використовуємо теорему порівняння і ознаки збіжності для рядів з додатними членами.

Якщо цей ряд збігається, то він збігається абсолютно.

3. Якщо ряд із модулів розбігається, то залишається ще можливість того, що даний ряд збігається умовно.

Щоб дослідити цю можливість застосовуємо ознаку Лейбніца.

Якщо члени знакозмінного ряду спадають за абсолютним значенням і наближаються до нуля при $n \rightarrow \infty$, то ряд збігається (принаймні, умовно).

В даному випадку, якщо умови ознаки Лейбніца виконуються, то даний ряд збігається умовно (оскільки абсолютно він розбігається).

Приклад 1.33. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Розв'язування

1. Перевіримо, чи виконується необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

2. Досліджуємо на збіжність ряд, складений із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Оскільки при $n \rightarrow \infty$

$$1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n},$$

то за другою (граничною) теоремою порівняння ряд із модулів розбігається.

3. Перевіряємо умови ознаки Лейбніца:

а) ряд знакозмінний з $a_n = 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$;

б) члени ряду спадають за абсолютним значенням:

$$1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1;$$

в) члени ряду наближаються до нуля при $n \rightarrow \infty$.

Отже, за ознакою Лейбніца даний ряд збігається.

Відповідь: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ збігається умовно.

Завдання для самостійної роботи. Дослідити ряд на збіжність.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+2)}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^5 + n^2 + 1}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^5 + 3n^2 + 2}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2 \sqrt{n})}{n^2 \sqrt{n}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 - 1}{3n^3}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3}{\sqrt{n^5}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{n^2}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n} \right)^n.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{\pi}{3^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+2}}.$$

Відповідь: 1. Ряд збігається умовно. 2. Ряд збігається абсолютно. 3. Ряд збігається умовно. 4. Ряд збігається абсолютно. 5. Ряд збігається умовно. 6. Ряд збігається умовно. 7. Ряд збігається абсолютно. 8. Ряд розбігається. 9. Ряд збігається абсолютно. 10. Ряд збігається умовно.

Приклад 1.34. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}$ на збіжність.

Скористаємось теоремою Лейбніца. Перевіримо виконання першої умови.

$$\frac{1}{2} < \frac{8}{4} < \frac{27}{8} < \frac{64}{16} < \frac{125}{32} < \frac{216}{64} < \frac{343}{128} < \frac{512}{256} \dots$$

Умова $\frac{n^3}{2^n} > \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ виконується, починаючи з четвертого номера.

Виконується також і друга умова $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$. Отже, ряд збігається. На рис. 1.14 зображено графік часткової суми $S(n)$, $n = 1 \dots 20$, ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}$, який є збіжним.

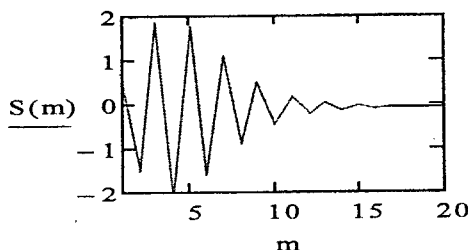


Рисунок 1.14

Приклад 1.35. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ збігається, оскільки

виконуються умови ознаки Лейбніца:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \dots, \text{ і } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, n = 1, 2, \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Сума n перших членів цього ряду

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

відрізняється від суми ряду S на величину, меншу за $\frac{1}{n+1}$. Дійсно,

$$R_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots \right), |R_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots \right| \Rightarrow |R_n| < \frac{1}{n+1}.$$

Це свідчить про досить повільну швидкість збіжності ряду. Так, щоб знайти суму ряду з точністю до 0.001 необхідно взяти суму перших 1000 членів ряду.

1.7.2 Абсолютна та умовна збіжності

Означення. Ряд, що має нескінченне число як додатних, так і від'ємних членів, називається довільним знакозмінним (далі знакозмінним) рядом.

Приклади знакозмінних рядів:

$$\begin{aligned} \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}; & \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\cos(n+1)}{n^2} \right); \\ \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 3}; & \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 n. \end{aligned}$$

Нехай

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (1.33)$$

знакозмінний ряд. Тут числа c_k ($k = 1, 2, \dots$) можуть бути як додатними, так і від'ємними, тобто ряд складеться з нескінченної множини як додатних, так і від'ємних членів.

Для знакозмінного ряду (1.33) наведемо одну важливу ознаку збіжності.

Теорема (достатня ознака збіжності). Якщо ряд

$$|c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| + \dots, \quad (1.34)$$

утворений з абсолютних величин членів знакозмінного ряду (1.33), збігається, то збігається і ряд (1.34).

Наведена ознака дозволяє звести дослідження на збіжність знакозмінного ряду до дослідження відповідного ряду з додатними членами.

Приклад 1.36. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots, \quad (1.35)$$

де α — будь-яке число.

Поряд з даним рядом, розглянемо ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \quad (1.36)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1.37)$$

Ряд (1.37) збігається. Члени ряду (1.36) не більші за відповідні члени ряду (1.37), отже ряд (1.36) також збіжний. Але тоді за теоремою про достатню ознаку збіжності даний знакозмінний ряд також збігається.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду не є необхідною, тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ може збігатися і тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ не збігається. Наприклад, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots, \quad (1.38)$$

збігається, а ряд (гармонічний)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

утворений з абсолютних величин членів ряду (1.37) розбігається.

Означення. Ряд, абсолютні величини членів якого утворюють збіжний ряд, називають **абсолютно збіжним**.

Означення. Якщо знакозмінний ряд збігається, а ряд, утворений з абсолютних величин його членів, розбігається, то даний ряд називають **неабсолютно або умовно збіжним**.

Наприклад, ряд (1.38) є умовно збіжним.

На рис. 1.15 наведено приклад поведінки часткової суми абсолютно збіжного ряду, а на рис. 1.16 – умовно збіжного.

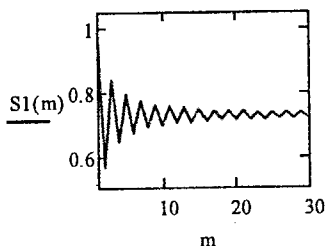


Рисунок 1.15

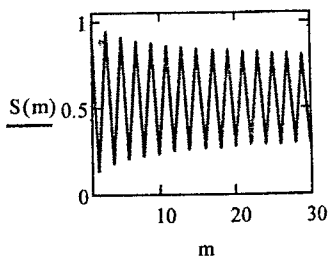


Рисунок 1.16

Відмінності абсолютної та неабсолютної збіжності знакозмінних рядів досить істотні. Властивості абсолютно збіжних рядів в багатьох відношеннях нагадують властивості рядів з додатними членами та властивості скінченних сум. Для умовно збіжних рядів деякі властивості скінченних сум не мають місця. Наприклад, абсолютно збіжні ряди мають, як і звичайні скінченні суми, переставну властивість: при будь-якій зміні

мість членів абсолютно збіжного ряду він залишається абсолютно збіжним із тією ж самою сумою.

Доводиться, що коли ряд умовно збіжний, то яке б не було число S , скінченне або нескінченне, існує перестановка членів даного ряду, в результаті якої утворюється ряд, сума якого дорівнює S . Зокрема, отриманий ряд може виявитися розбіжним.

Мають місце такі теореми.

Теорема Діріхле (перестановна властивість).

Якщо числовий ряд (1.33) абсолютно збіжний, то ряд, утворений довільною перестановкою членів ряду (1.33), є збіжним і має ту ж саму суму, що і ряд (1.33).

Теорема Рімана

Якщо числовий ряд (1.32) умовно збіжний, то, яке б не було число A скінченне або $\pm\infty$, можна в ряду (1.32) переставити його члени таким чином, що новоутворений ряд матиме суму, яка дорівнює A .

Приклад 1.37. Переставимо члени умовно збіжного ряду

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

так, щоб після кожного додатного члена стояли два від'ємних:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots$$

Утворимо часткову суму S_{3m}

$$S_{3m} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2m},$$

$$\text{де } S_{2m} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot n - 1} - \frac{1}{4 \cdot n - 2} - \frac{1}{4 \cdot n} \right) \rightarrow \frac{\ln(2)}{2} = 0,347$$

Отже, $S_{3m} = \frac{1}{2} S_{2m}$. Під час доведення теореми Лейбніца було показано,

що $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$, а тому сума S утвореного ряду дорівнює $\frac{1}{2}$ суми S вихідного ряду. Як буде встановлено пізніше, $S \neq 0$. Отже, $S \neq S$. Таким чином, в результаті перестановки членів умовно збіжного ряду змінилася його сума.

Інша перестановка членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ дає суму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{(2 \cdot n + 2)} + \frac{1}{(4 \cdot n + 1)} + \frac{1}{(4 \cdot n + 3)} \right] \rightarrow \frac{3 \cdot \ln(2)}{2} = 1.0397207708$$

Разом з тим зауважимо, що будь-які перестановки скінченного числа членів допускаються в усяких рядах; вони не позначаються на сумі ряду.

Завдання для самостійної роботи, систематизації та поглиблення знань

1. Шляхом комп'ютерного експерименту оцінити проміжок, на якому міститься сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$, де p – довільне дійсне число і $p > 0$.

2. Дослідити на збіжність ряди:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lg(k)}{k} \right) \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{4} \right) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \right)}{(\ln(k+1))^2} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \left(2 \cdot k \cdot \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \left(k \cdot \frac{\pi}{6} \right)}{\ln(k)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \left(\frac{\pi}{k} \right)}{k}$$

3. Скориставшись комп'ютерним експериментом, висунути припущення щодо абсолютної та умовної збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \left(k + \frac{1}{k} \right)}{\sqrt{k}}$$

Відповідь

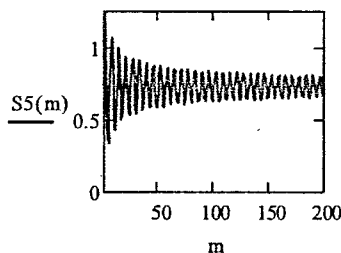


Рисунок 1.17

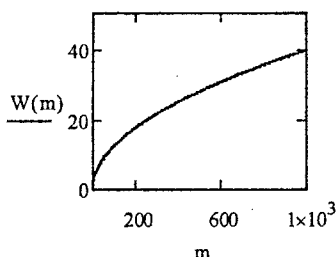


Рисунок 1.18

На рисунках 1.17 і 1.18 зображено графіки часткових сум $S_5(m)$ та $W(m)$ умовно збіжного ряду

$$S_5(m) := \sum_{k=1}^m \frac{\sin\left(k + \frac{1}{k}\right)}{\sqrt{k}}$$

та ряду, складеного із абсолютних величин даного ряду

$$W_5(m) := \sum_{k=1}^m \frac{\left| \sin\left(k + \frac{1}{k}\right) \right|}{\sqrt{k}}$$

4. Якщо ряд збігається (абсолютно або умовно), то має місце сполучна властивість (властивість 4, п. 1.4). Розглянемо ряд

$$(1 - 0,9) + (1 - 0,99) + (1 - 0,999) + \dots$$

Він збігається (геометрична прогресія $0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$) і його сума дорівнює $\frac{1}{9}$.

Якщо ж розкрити дужки, то одержуємо ряд

$$1 - 0,0 + 1 - 0,99 + 1 - 0,999 + \dots \quad (1.39)$$

Границя n -ї часткової суми дорівнює:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{9}, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ \frac{10}{9}, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Отже, ряд (1.39) розбігається. В чому причина, на перший погляд, порушення сполучної властивості ряду?

Наближене обчислення суми ряду

Приклад 1.38. Обчислити суму знакозмінного числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n > 0,$$

із заданою точністю α .

Розв'язування

1. Якщо $a_{n+1} < a_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то для залишку ряду R_n справедлива нерівність.

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

2. Якщо $a_{n+1} < \alpha$, то і $|R_n| < \alpha$ і тому, розв'язуючи нерівність

$$a_{n+1} < \alpha,$$

знаходимо кількість членів ряду, які необхідно взяти для обчислення суми із заданою точністю α .

3. Безпосередньо обчислюємо n -у частинну суму і записуємо відповідь:

$$S \approx S_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n.$$

Приклад 1.39. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(1+n^3)^2}$$

з точністю $\alpha = 0,001$.

Розв'язування

1. Даний ряд знакозмінний і збігається (абсолютно).

Члени ряду спадають за абсолютним значенням:

$$\frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2} < \frac{n}{(1+n^3)^2} \quad \forall n \geq 1.$$

отже, справедлива нерівність

$$|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2}.$$

2. Якщо, $a_{n+1} < \alpha$ то і $|R_n| < \alpha$. Тому, розв'язуючи нерівність

$$\frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2} < \frac{1}{1000},$$

знаходимо кількість членів ряду, які необхідно взяти для обчислення суми ряду із заданою точністю α . Отримуємо $n \geq 3$, тобто, досить взяти перших три члени ряду.

3. Обчислюємо

$$S_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{81} - \frac{3}{28^2} \approx -0,229$$

Відповідь: $S \approx -0,229 \pm 0,001$

Завдання для самостійної роботи. Обчислити суми знакозмінних рядів із заданою точністю α .

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \alpha = 0,01$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}, \quad \alpha = 0,001$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad \alpha = 0,001$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)!}, \quad \alpha = 0,001$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n}, \quad \alpha = 0,0001$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \quad \alpha = 0,001$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 2}, \quad \alpha = 0,01$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^3}, \quad \alpha = 0,01$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \alpha = 0,01$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}, \quad \alpha = 0,01$

Відповіді: 1. $S \cong 0,84$. 2. $S \cong 0,896$. 3. $S \cong -0,275$. 4. $S \cong -0,332$.
 5. $S \cong -0,4796$. 6. $S \cong -0,393$. 7. $S \cong 0,13$. 8. $S \cong -0,45$. 9. $S \cong 0,36$.
 10. $S \cong 0,4$.

1.8 Підсумовування рядів

В попередніх пунктах проводилось дослідження збіжності ряду, користуючись безпосередньо означенням збіжності за формулою n -ї часткової суми ряду та ознак збіжності. Проте дослідження за означенням пов'язано з трудомісткими обчисленнями часткових сум ряду та пошуками границі їхньої послідовності. За допомогою ознак встановлюється лише факт збіжності або розбіжності ряду. Розглянемо підходи до обчислення та оцінювання суми ряду. В п. 1.3 вже частково розглядалося оцінювання суми збіжного ряду. Введемо означення.

Означення. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то різницю між його сумою S та частковою сумою S_n

$$R_n = S - S_n \quad (1.40)$$

називають n -м залишком ряду.

Залишок ряду також є рядом

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Залишок є похибкою, що виникає, коли за наближене значення суми ряду S береться часткова сума S_n : $S \approx S_n$.

Оскільки S є границею послідовності $\{S_n\}$ то, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0.$$

Отже, абсолютна величина залишку R_n може бути як завгодно малою, якщо тільки число n взяте достаньно великим. Проте оцінювання похибки найпростіше можна здійснити лише у випадку знакозмінного ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n, \text{ оцінка має вигляд } |S - S_n| \leq c_{n+1}.$$

В загальному випадку це складна задача. Якщо розробниками математичних систем передбачено підсумовування широкого класу рядів, то, скориставшись ними, можна наближено обчислити суму ряду.

Наприклад, сума ряду $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ ($a \neq 0$), у якого $a = 1, q = \frac{1}{2}$, дорівнює

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Часткові суми та залишки ряду:

$$S_l = 1;$$

$$R_l = S - S_l = 1;$$

$$\begin{array}{ll}
S_2 = 1 + 1/2 = 1,5; & R_2 = 0,5; \\
S_3 = 1 + 1/2 + 1/4 = 1,75; & R_3 = 0,025; \\
S_4 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 1,875; & R_4 = 0,125; \\
\ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \\
S_8 = 1,9921875; & R_8 = 0,0078125
\end{array}$$

і т. д.

Таким чином, завжди є можливість наближено обчислити суму збіжного ряду, взявши деяку кількість перших його членів. При цьому виникає проблема з'ясування величини похибки, що виникає. На окремих прикладах можна побачити, що іноді вдається оцінити величину похибки і тим самим установити, скільки потрібно брати членів ряду, щоб отримати його суму з потрібною точністю.

Отже, основною задачею теорії рядів є дослідження збіжності ряду. Знаходження суми збіжного ряду має другорядне значення, оскільки після того як з'ясовано збіжність ряду, наближена сума його в більшості випадків легко може бути знайдена.

Поняття ряду фактично впроваджено для узагальнення дії додавання на випадок нескінченного числа доданків. Проте не всі властивості дії додавання справедливі для будь-яких збіжних рядів.

Приклад 1.40. Порівняти швидкість збіжності рядів. Під швидкістю збіжності ряду розуміється швидкість прямування до нуля його загального члена, а, отже, прямування до границі часткової суми ряду. Число π можна подати такими рядами

$$\begin{array}{ll}
1) \pi = 4 \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2 - 1} \right), & 2) \pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}, \\
3) \pi^2 = 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}, & 4) \pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \\
5) \pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} & 6) \pi^2 = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.
\end{array}$$

Обмежившись сьомим знаком після коми, порівняємо значення числа $\pi \approx 3,1415927$ та його наближення частковими сумами рядів 1 – 6.

Таблиця 1.1

	m = 10	m = 100	m = 1000	m = 10000	$\delta\%$
1	3,1370777	3,1415432	3,1415922	3,1415926	$3,2 \cdot 10^{-6}$
2	3,0418396	3,1315929	3,1405927	3,1414927	0
3	3,1329772	3,1414981	3,1415917	3,1415926	$3,2 \cdot 10^{-6}$
4	3,0418396	3,1315929	3,1405927	3,1414927	0
5	3,1370777	3,1415432	3,1415922	3,1415926	$3,2 \cdot 10^{-6}$
6	3,1096255	3,1384083	3,1412743	3,1415608	$1,02 \cdot 10^{-3}$

Як слідує із таблиці 1.1, навіть сума 10000 перших членів рядів 2), 4), 6) не забезпечує збігу часткової суми ряду із наближеним значенням числа π .

1.9 Поняття узагальненої суми ряду

В задачах, пов'язаних із теоретичним та практичним застосуванням рядів, виникають потреби у виконанні операцій із рядами, які відповідно до введених означень суми ряду, є розбіжними. Тобто, є необхідність в узагальненні поняття збіжності ряду.

Нехай задано числовий ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.41)$$

і $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ його часткова сума. Тоді, як відомо (п. 1.1), $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ називають сумою ряду (1.41). Означення узагальненого методу підсумовування полягає у формулюванні правила, за яким границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ замінюється деяким іншим виразом, який може набувати змісту і тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує. Цей вираз і називається узагальненою сумою.

Введемо це поняття. Розглянемо послідовність $\{\beta_{nm}\}$, $n = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots, n$. Окрім часткової суми $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ряду (1.41) введемо інші часткові суми

$$S_n^* = \beta_{n1}a_1 + \beta_{n2}a_2 + \dots + \beta_{nn}a_n. \quad (1.42)$$

Означення. Скінченна границя послідовності (1.42), тобто, число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*$ називається узагальненою сумою ряду (1.41).

Розглянемо деякі підходи до узагальнення методів підсумовування рядів. Очевидно, що коли ряд збігається у класичному розумінні (див. означення 2 п. 1.1), то він повинен збігатися при застосуванні узагальнених методів підсумовування, і класичне означення одержується із наведеної схеми, якщо покласти $\beta_{nn} = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) і $\beta_{nm} = 0$ при $n \neq m$. Тоді сума ряду у класичному розумінні збігається з означенням суми ряду в узагальненому розумінні.

Метод Чезаро (метод середніх)

Нехай S_n — часткова сума ряду (1.41).

Означення. Ряд (1.41) називають підсумованим методом Чезаро, якщо існує границя середнього арифметичного часткових сум даного ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}. \quad (1.43)$$

Приклад 1.41. Знайти узагальнену суму ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Як було показано у п. 1.2 ($q = -1$), даний ряд розбігається, знайдемо його суму в узагальненому розумінні. Запишемо середнє арифметичне σ_n часткових сум S_n

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}.$$

Обчислення можна виконати за допомогою однієї з комп'ютерних математичних систем (КМС), наприклад, *MathCAD*:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sigma(m) := \sum_{k=1}^m \frac{S(k)}{m} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m) \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\text{Одержуємо } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}.$$

Отже, для даного ряду в розумінні Чезаро існує сума, яка дорівнює 0.5.

Наведені обчислення засобами КМС *MathCAD* можна реалізувати і таким чином:

$$\sum_{m=1}^n \left[\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \right] \rightarrow \frac{1}{4} \cdot (-1)^{(n+1)} + \frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{4} \cdot (-1)^{(n+1)} + \frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2}.$$

Узагальненням методу Чезаро є метод Рісса.

Метод Рісса

Ряд (1.39) називають підсумованим за Ріссом (*Rr*) із функцією суми λ_n , якщо існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^r \cdot a_n,$$

де λ_n – довільна дійсна функція n , така, що $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Наприклад, $\lambda_n = n^2$.

Приклад 1.42. Знайти узагальнену за Ріссом суму ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Позначимо через $a(n)$ загальний член ряду $a_n = (-1)^{n+1}$. Прийнемо, наприклад, $r=9$ і нехай довільна функція $\lambda(n) = -n^2$. Обчислимо границю

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(1 - \frac{\lambda(n)}{\lambda(k)}\right)^r \cdot a(n) \rightarrow \frac{1}{2},$$

яка збігається з попереднім результатом.

Метод Вороного

Нехай S_n — часткові суми ряду (1.41).

Відповідно до методу Вороного обчислюється границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 P_n + S_2 P_{n-1} + \dots + S_n P_1}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}, \quad (1.44)$$

де $\{P_n\}$ — деяка послідовність.

Якщо границя дорівнює S , то і сума ряду (1.41) за Вороним дорівнює S . Зокрема, якщо $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 1$, то одержується метод Чезаро, а при $P_1 = 1, P_2 = \dots = P_n = 0$ — класичне означення суми ряду за Коші.

Приклад 1.43. Знайти узагальнену, у розумінні Вороного, суму ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Запишемо часткову суму ряду

$$S(n) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}.$$

Розглянемо дві послідовності

$$P_n := (2^n), \quad P_n := (3^n),$$

Обчислимо границі послідовності $P_n := (2^n)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n S(k) \cdot 2^{n-k+1}}{\sum_{k=1}^n 2^k} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{2}{3} \cdot 2^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{(n+1)} - 2 \cdot 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)} + \frac{4}{3} \cdot 2^n \right]}{\left[2^{(n+1)} - 2 \right]}.$$

Як видно, система не може обчислити границю, тому здійснюються незначні спрощення, що дало можливість отримати результат $2/3$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{2}{3} \cdot 2^n \cdot (-1)^{(n+1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2 \cdot 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{4}{3} \cdot 2^n \right]}{\left[2^{(n+1)} - 2 \right]} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

Аналогічно обчислюється границя послідовності (1.44) для випадку $P_n = \{3^n\}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{9}{8} \cdot 3^n \cdot (-1)^{(n+1)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{9}{4} \cdot 3^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{9}{8} \cdot 3^n \right]}{\left[\frac{1}{2} \cdot 3^{(n+1)} - \frac{3}{2} \right]} \rightarrow \frac{3}{4}.$$

Отримано різні границі. Тобто узагальнена сума ряду у розумінні Вороного залежить і від послідовності, яка використовується при побудові узагальненої суми.

Метод Пуассона-Абеля

За даним рядом (1.41) будується степеневий ряд (дивитись п. 2.2) з відповідними коефіцієнтами

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} + \dots \quad (1.45)$$

Нехай ряд збігається при всіх x з інтервалу $0 < x < 1$ і $S(x)$ його сума. Ряд (1.41) має суму у розумінні Пуассона-Абеля, якщо існує одностороння границя $\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x)$ у точці $x = 1$.

Приклад 1.44. За методом Пуассона-Абеля знайти узагальнену суму ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Побудуємо степеневий ряд з коефіцієнтами даного ряду та відшукаємо його суму

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} \rightarrow \frac{1}{(x+1)}.$$

Ряд збігається в інтервалі $0 < x < 1$. Обчислимо односторонню границю

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Отже, узагальнена сума ряду дорівнює 0.5. Результат, отриманий за методом Пуассона-Абеля збігається з результатом, отриманим за методом Чезаро.

Метод Гельдера

Позначимо через $H(0, n) = S_n$. Далі вводяться послідовності $H(l, n)$:

$$H(l, n) := \frac{\left(\sum_{m=1}^n H(l-1, m) \right)}{n}.$$

Якщо існує границя послідовності $\{H(l, n)\}$, то за Гельдером вона є сумою ряду:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(l, n) = S.$$

Приклад 1.45. За методом Гельдера знайти узагальнену суму ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Нехай

$$S(n) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}$$

і $H(l, n) = S(n)$, тоді, обчисливши границю, знаходимо узагальнену суму ряду

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(l, n) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Метод Бореля

Розглядаються часткові суми S_n ряду (1.41). Якщо існує границя S :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \cdot S(k)}{k!} = S, \quad (1.46)$$

то вона і є узагальненою за Борелем сумою ряду (1.41).

Приклад 1.46. За методом Бореля знайти узагальнену суму ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Як і в під час розв'язання цього завдання іншими методами запишемо часткову суму ряду

$$S(n) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}.$$

Обчислимо границю (4.6) за допомогою КМС *MathCAD*:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \cdot S(k)}{k!} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (-1)^{(k+1)} + \frac{1}{2} \right]}{k!}.$$

Проте за допомогою цієї системи границю обчислити не вдається. Тому виконуються необхідні додаткові перетворення:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \cdot (-1)^{k+1}}{k!} \rightarrow -\exp(-x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \rightarrow \exp(x).$$

Після цього обчислюється границя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(-x) \cdot (\exp(-x) + \exp(x))}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Результат збігається з попередніми.

2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1 Основні поняття

Узагальненням числових рядів є ряди, членами яких є функції. Такі ряди використовуються як досить потужний засіб наближеного розв'язання рівнянь, і взагалі, наближених обчислень як для задання функції, так і для означення функції, тобто є засобом введення нових функцій.

Означення. Вираз

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (2.1)$$

члени якого є функціями від x , називають функціональним.

Послідовність функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\dots$, $u_n(x)$, $\dots$ вважається заданою на множині $E \subseteq (-\infty, \infty)$.

Надавши x певних числових значень, дістанемо різні числові ряди, які можуть виявитися збіжними або розбіжними.

Значення $x = x_0$, при якому числовий ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

збігається, називають *точкою збіжності ряду* (2.1). Множину всіх значень $x \in E$, в яких функціональний ряд (2.1) збігається, називають *областю збіжності функціонального ряду*.

В області збіжності ряду його сума є деякою функцією від x . Позначимо її через $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Приклад 2.1. Розглянемо функціональний ряд

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Цей ряд збігається для всіх значень x з інтервалу $(-1; 1)$. Для всіх значень x , що задовольняють умову $|x| < 1$, сума ряду дорівнює $\frac{1}{1-x}$ (сума ряду геометричної прогресії із знаменником x). Таким чином, в інтервалі $(-1; 1)$ даний ряд визначає функцію

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Відомо, що скінченна сума неперервних функцій є функцією неперервною, а інтеграл від скінченної суми інтегрованих функцій дорівнює сумі інтегралів від кожного доданка. Аналогічна властивість справджується при диференціюванні скінченної суми диференційованих функцій. При вивченні функціональних рядів необхідно з'ясувати питання щодо перенесення зазначених властивостей скінченних сум на функціональні ряди.

Покажемо, що для довільних функціональних рядів ці властивості можуть виявитися несправедливими.

Приклад 2.2. Розглянемо ряд

$$x + (x^{\frac{1}{3}} - x) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + \dots + (x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}}) + \dots$$

Часткова сума дорівнює $S_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$. При $x > 0$ та при $n \rightarrow \infty$ часткова сума прямує до 1, $S_n(x) \rightarrow 1$. При $x = 0$ часткова сума $S_n(x) \rightarrow 0$. І нарешті, якщо $x < 0$, то $S_n(x) \rightarrow -1$ при $n \rightarrow \infty$.

Отже, сума ряду дорівнює

$$S(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

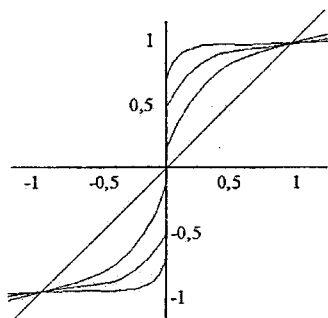


Рисунок 2.1

Таким чином, сума ряду є розривною в точці $x = 0$. На цьому прикладі ми переконались в тому, що властивості скінченних сум функцій справедливі не для всяких рядів. Доведемо, що розглянута властивість має місце у випадку певного характеру збіжності, а саме – для рівномірно збіжних рядів. Це поняття у посібнику розглядається (див. [3]) лише частково.

На рис. 2.1 наведено графіки перших часткових сум ряду. Із зростанням номера часткові суми наближаються до $S(x)$.

Достатня ознака рівномірної збіжності Вейєрштрасса

Теорема. Функціональний ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (2.2)$$

збігається рівномірно на відрізку $[a, b]$, якщо існує такий збіжний числовий ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots \quad (2.3)$$

з додатними членами, що для всіх значень $x \in [a, b]$ виконуються співвідношення

$$|u_1(x)| < \alpha_1, |u_2(x)| < \alpha_2, \dots, |u_n(x)| < \alpha_n, \dots \quad (2.4)$$

Якщо виконуються нерівності (2.4), то ряд (2.2) називають *мажорантним*.

Безпосередньо з означення випливає, що ряд, мажорантний в деякій області, збігається у всіх точках цієї області. Це означає, що сума функціонального ряду (2.2) є функцією $S(x)$, яка визначена на відрізку.

Нехай S – сума числового ряду (2.4), тоді її можна подати у вигляді доданків

$$S = S_n + R_n,$$

де S_n, R_n – відповідно часткова сума та залишок ряду (2.2).

Внаслідок збіжності ряду маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. Візьмемо тепер довільне $\varepsilon > 0$, та знайдемо таке N , що при $n > N$ буде виконуватись нерівність

$$R_n < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Тоді для знайдених номерів n має місце співвідношення і для ряду (2.2):

$$S_n(x) + R_n(x) = S(x),$$

де

$$\begin{aligned} S_n(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x), \\ R_n(x) &= u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Із нерівностей (2.4), (2.5) та рівності (2.6) випливає, що

$$|R_n(x)| < |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| < \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots = R_n < \varepsilon,$$

тобто

$$|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon,$$

при всіх $n > N$ і для всіх x , які належать відрізку $[a, b]$. Це і означає рівномірну збіжність ряду (2.2).

Приклад 2.3. Розглянемо функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)}$$

Його часткова сума $f_1(x) = S_n(x)$ дорівнює:

$$f_1(x) := 1 - \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+k \cdot x}$$

А сума ряду $S(x)$ дорівнює:

$$S(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Проілюструємо на графіках поведінку залишку даного ряду $|R_n(x)|$ на проміжках, наприклад, $[0; 0.0001]$ (рис. 2.2) та $(0.0001; \infty)$ (рис. 2.3).

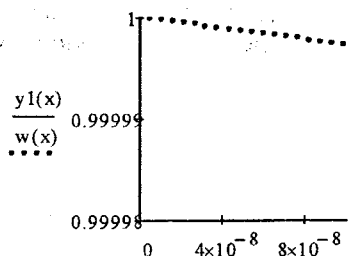


Рисунок 2.2

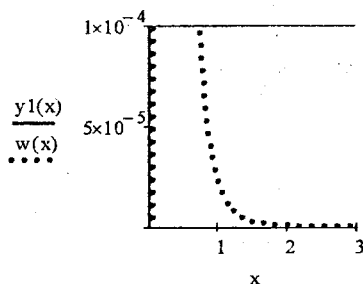


Рисунок 2.3

На рисунках 2.2 і 2.3 позначено $y_1(x) = 0.0001$, $w(x) = S(x) - S_n(x) = R_n(x) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+kx}$. Якщо на проміжку $[0; 0.0001]$ (рис. 2.2) залишок не прямує до нуля, тобто ряд збігається нерівномірно, то на іншому проміжку (рис. 2.3) залишок прямує до нуля $|S(x) - S_n(x)| \rightarrow 0$, і вже при $N=7$ для $\varepsilon=0.0001$ при всіх x виконується нерівність $|R_n(x)| < \varepsilon$, тобто, на проміжку $(0.0001; \infty)$ ряд збігається рівномірно.

Розглянута ознака не є необхідною, тобто, існують немажорантні рівномірно збіжні.

Приклад 2.4. Функціональний ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots, \quad (2.7)$$

рівномірно збігається у будь-якому інтервалі осі OX , оскільки

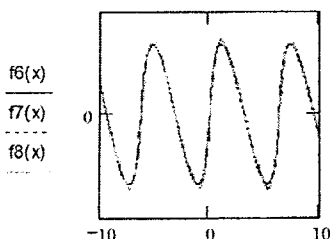


Рисунок 2.4

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

ряд обернених квадратів теж збігається. На рис. 2.4 наведено графіки часткових сум $S_{10}(x)$, $S_{100}(x)$, $S_{1000}(x)$ ряду (2.7). Часткові суми, починаючи вже з $n=10$, майже збігаються.

Сформулюємо три важливі властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Теорема. Сума ряду неперервних функцій, мажорантний на деякому відрізку $[a, b]$, є функцією неперервною на цьому відрізку.

Теорема. Якщо ряд неперервних функцій

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad x \in [a, b] \quad (2.8)$$

мажорантний на відріжку $[a, b]$, то сума цього ряду є функцією інтегрованою на відріжку $[a, b]$ і інтеграл від суми ряду дорівнює сумі ряду, утвореного з інтегралів від цих функцій,

$$\int_{\alpha}^x S(t) dt = \int_{\alpha}^x u_1(t) dt + \int_{\alpha}^x u_2(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(t) dt + \dots, \quad (2.9)$$

де α, x — належать відріжку $[a, b]$.

Зауваження. Верхня межа інтегрування може бути сталою, проте в цьому випадку в результаті інтегрування одержується вже не функціональний, а числовий ряд.

Наведемо приклад використання теореми 2.3 з метою розвинення функцій у степеневий ряд. Далі будуть розглянуті інші приклади.

Приклад 2.5. Функціональний ряд

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \dots$$

мажорантний, а, отже, і рівномірно збіжний при $|x| \leq \alpha < 1$. Сума ряду дорівнює $\frac{1}{1+x^2}$ (сума геометричного ряду із знаменником $-x^2$), тобто інтегруванням вихідного ряду дістанемо

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt$$

або

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (2.10)$$

Зазначимо, що рівномірна збіжність ряду є достатньою, але не необхідною умовою його почленного інтегрування. Ряд, який одержується шляхом почленного інтегрування рівномірно збіжного ряду, також є рівномірно збіжним рядом.

Теорема. Якщо ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad x \in [a, b], \quad (2.11)$$

утворений із функцій, що мають неперервні похідні на відріжку, збігається на цьому відріжку до суми $S(x)$, і ряд

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots, \quad (2.12)$$

утворений з похідних від його членів, мажорантний на тому самому відріжку, то сума ряду (2.11) є диференційовною функцією на $[a, b]$ і її похідна дорівнює похідній від суми вихідного ряду, тобто

$$S'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots \quad (2.13)$$

Зауваження. Мажорантність ряду (2.11), а також диференційованість його суми не є припущенням, а, як наслідок, випливає з умов теореми.

Приклад 2.6. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Розв'язування

При кожному допустимому значенні x розглядаємо даний ряд як числовий і досліджуємо на збіжність, застосовуючи теореми порівняння, ознаки Коші, Д'Аламбера та інші. Таким чином знаходимо ті значення x , при яких даний ряд збігається. Сукупність таких значень x утворює область збіжності ряду.

При застосуванні ознак Д'Аламбера або Коші поступаємо таким чином.

1. Знаходимо $\phi(x)$ за однією із формул (якщо границі існують)

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \quad \text{або} \quad \phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$$

де $f_n(x)$ — загальний член ряду.

2. Оскільки за ознаками Д'Аламбера або Коші ряд збігається при $\phi < 1$ і розбігається при $\phi > 1$, знаходимо інтервал збіжності, розв'язуючи нерівність $\phi(x) < 1$.

3. Досліджуємо поведінку ряду в граничних точках інтервалу збіжності.

Записуємо відповідь.

2.2 Степеневі ряди

2.2.1 Основні поняття. Теорема Абеля

Степеневі ряди є одним із важливих класів функціональних рядів, які застосовуються як у наближених обчисленнях, так і в аналітичних дослідженнях.

Означення. Степеневим рядом називається функціональний ряд

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots, \quad (2.14)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — сталі дійсні числа, що називаються коефіцієнтами ряду,

x_0 — фіксоване дійсне число.

Зокрема, якщо $x_0 = 0$, отримаємо ряд за степенями x

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2.15)$$

Степеневий ряд вигляду (2.14) підстановкою $t = x - x_0$ можна звести до вигляду (2.15).

Приклади степеневих рядів:

$$1) 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$2) x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Розглянемо важливу теорему, на якій базується теорія степеневих рядів.

Теорема Абеля. 1. Якщо степеневий ряд (2.15) збігається в точці $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається при всякому значенні x , для якого виконується умова $|x| < |x_0|$.

2. Якщо ряд розбігається при деякому значенні x_1 , то він розбігається при всякому x , для якого виконується умова $|x| > |x_1|$.

1. Згідно з припущенням, числовий ряд

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots,$$

збігається, а тому за необхідною умовою його загальний член $a_n x_0^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. А це означає, що послідовність $a_n x_0^n$ обмежена, тобто існує таке число $M > 0$, що при всякому n має місце нерівність

$$|a_n x_0^n| < M \quad (2.16)$$

Запишемо ряд (2.15) у вигляді ($x_0 \neq 0$):

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \dots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \dots$$

і утворимо ряд абсолютних величин членів цього ряду:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_2 x_0^2| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (2.17)$$

Згідно з нерівністю (2.16) кожний член ряду (2.17) менший за відповідний член ряду геометричної прогресії із знаменником $\left| \frac{x}{x_0} \right|$:

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots,$$

який збігається при $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, тобто, при всіх x , що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Звідси слідує, що збігається і ряд (2.16), утворений із абсолютних величин, а це означає, що абсолютно збігається і даний ряд (2.15).

2. Друга частина теореми буде доводитись методом від супротивного.

Припустимо, що в деякій точці x_2 , де $|x_2| > |x_1|$ (рис. 2.5), ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ збігається.

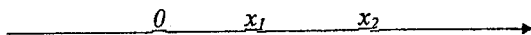


Рисунок 2.5

Але тоді із збіжності степеневому ряду в точці x_2 , згідно з першою частиною теореми, степеневий ряд повинен збігатися і в точці x_1 (бо $|x_1| < |x_2|$), що суперечить умові. Отже, ряд (2.15) розбігається в точці x_2 .

Одним із наслідків теореми Абеля є факт існування для будь-якого степеневому ряду інтервалу збіжності.

Означення. Інтервалом збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ називається такий інтервал $(-R, R)$ з центром в початку координат, що для будь-якої точки з цього інтервалу ряд збігається абсолютно, а для точок x , що лежать поза інтервалом, ряд розбігається (рис. 2.6).

Число R називається радіусом збіжності степеневому ряду.

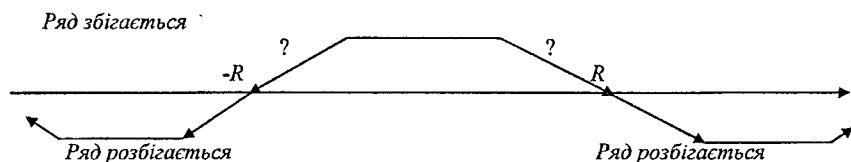


Рисунок 2.6

На кінцях інтервалу (тобто при $x = \pm R$) питання про збіжність даного ряду розв'язуються індивідуально для кожного конкретного ряду.

2.2.2 Знаходження інтервалу збіжності

Інтервал збіжності можна знаходити, застосувавши безпосередньо ознаку Д'Аламбера чи ознаку Коші до ряду, утвореного з абсолютних величин членів вихідного ряду.

Виведемо формулу обчислення радіуса збіжності степеневому ряду.

Нехай маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2.18)$$

Розглянемо ряд, утворений із абсолютних величин його членів:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + |a_3||x|^3 + \dots + |a_n||x|^n + \dots \quad (2.19)$$

Припустимо, що існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, скінченна або нескінченна.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Нехай $L \neq 0$ – скінченне число. За ознакою Д'Аламбера, якщо $L|x| < 1$,

або $|x| < \frac{1}{L}$, $-\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L}$, то ряд (2.18) збігається абсолютно.

Для $L|x| > 1$, або $|x| > \frac{1}{L}$ ряд (2.18) розбігається. Отже, як радіус збіжності степеневому ряду приймемо число $\frac{1}{L}$, тоді формула для обчислення радіуса збіжності степеневому ряду має вигляд

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Якщо $L = 0$, то степеневий ряд збігається при довільному $x \in (-\infty, \infty)$ і $R = +\infty$. Якщо $L = +\infty$, то ряд (2.19), а отже і ряд (2.18) збігається лише в точці $x = 0$ і $R = 0$.

Приклад 2.7. Знайти радіус збіжності, інтервал збіжності наведених нижче рядів та дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot x)^n; \\ \text{в)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}; & \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2^n}. \end{array}$$

а) застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{n+1} n!}{|x|^n \cdot (n+1)!} = \frac{|x|}{n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Отже, ряд збігається при всіх значеннях x , тобто $R = \infty$. Інтервал збіжності ряду $(-\infty, +\infty)$.

Слід зауважити, що за необхідною ознакою збіжності загальний член даного ряду прямує до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

При будь-якому фіксованому x .

б) ряд розбігається при всіх x , крім $x = 0$, бо $(nx)^n \rightarrow \infty$, яке б не було x , відмінне від нуля. Тут $R = 0$.

в) тут

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1} \cdot n}{x(n+1)} \right| = |x| \frac{n}{n+1} \rightarrow |x| \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд збігається, якщо $|x| < 1$, і розбігається, якщо $|x| > 1$. Отже, $R = 1$ і інтервал збіжності буде таким $(-1, 1)$.

На кінцях інтервалу ($x = \pm 1$) дослідження ряду за допомогою ознаки Д'Аламбера неможливе, тому застосуємо інші ознаки.

При $x = 1$ дістанемо гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

який, як відомо (п. 1.3), розбігається.

При $x = -1$ дістанемо знакзмінний ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots,$$

який збігається умовно (п. 1.7.2).

Отже, область збіжності ряду визначається системою нерівностей

$$-1 \leq x < 1.$$

2) застосуємо ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x-3|^{2n}}{2^n}} = \frac{|x-3|^2}{2} < 1$$

або

$$|x-3|, \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} < x-3 < \sqrt{2} \quad 3-\sqrt{2} < x < 3+\sqrt{2}$$

Тут $R = \sqrt{2}$, інтервал збіжності $(3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2})$.

При $x = 3 \pm \sqrt{2}$ маємо ряд $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$, який розбігається. Отже, область збіжності даного ряду $(3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2})$.

Приклад 2.8. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Розв'язування

1. Якщо існують границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{або} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

тоді можна знайти радіус збіжності степеневого ряду за формулою Д'Аламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (2.20)$$

або за формулою Коші

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (2.21)$$

Інтервалом збіжності ряду є $-R < x - x_0 < R$, $x_0 - R < x < x_0 + R$.

Зауваження. Формули (2.20) і (2.21) застосовуються лише тоді, коли всі коефіцієнти степеневого ряду c_n не дорівнюють нулю, в протилежному випадку знаходимо $\phi(x)$ за однією із формул

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \quad \text{або} \quad \phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|},$$

де $f_n(x)$ – загальний член ряду.

За ознаками Д'Аламбера або Коші ряд збігається при $\varphi < 1$ і розбігається при $\varphi > 1$. Отже, знаходимо інтервал збіжності, розв'язуючи нерівність $\varphi(x) < 1$.

2. Досліджуємо поведінку степеневого ряду в граничних точках інтервалу збіжності $x = x_0 \pm R$.

Записуємо відповідь.

Приклад 2.9. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (x+1)^n.$$

Розв'язування

1. В даному випадку $c_n = \frac{(n+1)^5}{2n+1} \neq 0$ при всіх n . Тому можна застосовувати формулу (2.20) або (2.21) для радіуса збіжності степеневого ряду.

За формулою Д'Аламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} \bigg/ \frac{(n+2)^5}{2n+3} = 1.$$

Отже, інтервал збіжності визначається нерівностями $-1 < x+1 < 1$ і має вигляд $(-2, 0)$.

2. Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках інтервалу збіжності. В точці $x = -2$ степеневий ряд приймає вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (-1)^n$$

і в точці $x = 0$ степеневий ряд приймає вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (1)^n$$

Обидва ряди розбігаються оскільки не задовольняють необхідну умову збіжності рядів:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (\pm 1)^n \neq 0.$$

Отже, в цих точках ряд розбігається.

Відповідь. Область збіжності степеневого ряду $(-2, 0)$.

Приклад 2.10. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (x-2)^{2n}.$$

Розв'язування

1. В даному випадку $c_n = 0$ при всіх непарних n . Тому не можна застосовувати формули для радіуса збіжності степеневого ряду.

Використаємо ознаку Коші, обчислюємо:

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|},$$

$$\text{де } f_n = \frac{1}{n+1}(x-2)^{2n}.$$

Знаходимо $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}(x-2)^{2n}} = (x-2)^2.$$

За ознакою Коші, ряд збігається при $\phi < 1$ і розбігається при $\phi > 1$.

Отже, інтервал збіжності знаходиться із нерівності $(x-2)^2 < 1$.

2. Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках інтервалу збіжності.

В точці $x = 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^{2n}$$

розбігається.

В точці $x = 3$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (1)^{2n}$$

розбігається.

Відповідь: Область збіжності степеневому ряду – (1,3).

Завдання для самостійної роботи

Знайти область збіжності степеневих рядів.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n9^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n}}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x+3)^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2 3^n} (x+2)^n$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^n} (x+4)^n$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} (x+2)^{2n+1}$$

Відповіді: 1. $(-7, 11)$. 2. $(2, 4)$. 3. $(-7, -3)$. 4. $[-2, 1)$. 5. $[-1, 5)$. 6. $[1, 5]$. 7. $[-4, -2]$. 8. $[-5, 1)$. 9. $(-6, -2]$. 10. $(-\infty, +\infty)$.

Приклад 2.11. Знайти область збіжності ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2 + \sqrt{n} + 1)^{x+1}}.$$

Розв'язування

1. Для кожного фіксованого x всі члени ряду додатні:

$$a_n = \frac{n^3}{(n^2 + \sqrt{n+1})^{x+1}} > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

2. Використовуємо другу (граничну) теорему порівняння. Масмо

$$\frac{n^3}{(n^2 + \sqrt{n+1})^{x+1}} \approx \frac{1}{n^{2(x+1)-3}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Оскільки при $2(x+1)-3 > 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(x+1)-3}}$$

збігається, а при $2(x+1)-3 \leq 1$ розбігається (як узагальнений гармонічний), то за другою теоремою порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2 + \sqrt{n+1})^{x+1}}$$

збігається при всіх $x > 1$.

Відповідь. Область збіжності ряду $-(1, \infty)$.

Приклад 2.12. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3(x^2 - 4x + 7)^n}.$$

Розв'язування

1. Для того, щоб застосувати ознаку Д'Аламбера, знаходимо $\phi(x)$ за формулою

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}|}{|f_n|} = \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^3 |x^2 - 4x + 7|^{n+1}}}{\frac{4^n}{n^3 |x^2 - 4x + 7|^n}} = \frac{4}{|x^2 - 4x + 7|}.$$

2. Оскільки за ознакою Д'Аламбера ряд збігається при $\phi < 1$ і розбігається при $\phi > 1$, знаходимо інтервал збіжності, розв'язуючи нерівність $\phi(x) < 1$:

$$\frac{4}{|x^2 - 4x + 7|} < 1,$$

отримуємо $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

3. Проведемо дослідження на збіжність ряду в граничних точках: при $x = 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

збігається (як узагальнений гармонічний з $p = 3 > 1$);

при $x=3$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

також збігається.

Відповідь: Область збіжності ряду $-\left(-\infty, 1\right] \cup\left[3, \infty\right)$

Завдання для самостійної роботи

Знайти область збіжності функціональних рядів.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^{x+3}} .$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\left(x^2-6 x+10\right)^n} .$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^{x^2+4 x}+3} .$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\left(x^2-5 x+9\right)^n} .$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{x^2-2}+1} .$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2\left(x^2+3\right)^n} .$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n+\sqrt{n}\right)^x} .$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n\left(x^2-4 x+8\right)^n} .$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^{3+3 x-x^2}} .$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2\left(x^2-2 x+6\right)^n} .$

Відповіді:

1. $(3,+\infty)$. 2. $(-\infty, 2) \cup(4,+\infty)$. 3. $(-\infty, 5) \cup(1,+\infty)$.
4. $(-\infty, 2) \cup(3,+\infty)$. 5. $(-\infty,-2) \cup(2,+\infty)$. 6. $(-\infty,-5) \cup(1,+\infty)$.
7. $(3,+\infty)$. 8. $(-\infty, 1) \cup(3,+\infty)$. 9. $(0,3)$. 10. $(-\infty, 0] \cup[2,+\infty)$.

Обчислення суми ряду почленним інтегруванням

Приклад 2.13. Знайти суму функціонального ряду вигляду

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(x)^n}{n}$$

і вказати область збіжності ряду щодо цієї суми.

Розв'язування

1. Знаходимо область збіжності ряду.

За ознакою Коші інтервал збіжності визначається нерівністю

$$|f(x)|<1 .$$

Якщо $f(x) = 1$, ряд розбігається. Якщо $f(x) = -1$, ряд збігається умовно (за ознакою Лейбніца). Отже, область збіжності визначається нерівностями $-1 \leq f(x) < 1$.

2. Робимо в даному ряді заміну $f(x) = t$, отримуємо степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \quad (2.22)$$

з областю збіжності $[-1, 1)$.

3. Відома формула для обчислення суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії.

$$\sum_{n=k}^{\infty} t^n = \frac{t^k}{1-t}, |t| < 1. \quad (2.23)$$

4. Крім того, маємо очевидну рівність

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=k}^{\infty} \int_0^t u^{n-1} du, \quad t \in (-1, 1).$$

5. Враховуючи, що степеневий ряд можна почленно інтегрувати на будь-якому проміжку $[0, t]$, який належить інтервалу збіжності, і використовуючи формулу (2), отримуємо

$$S(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} u^{n-1} du = \int_0^t \frac{u^{k-1}}{1-u} du, \quad t \in (-1, 1). \quad (2.24)$$

Далі, оскільки ряд (1) збігається в граничній точці $t = -1$, то сума ряду неперервна в цій точці (справа). Отже, $S(-1) = \lim_{t \rightarrow -1+0} S(t)$.

6. Обчислюємо інтеграл, робимо заміну t на $f(x)$ і записуємо відповідь: суму ряду і область його збіжності.

Зауваження. Якщо ряд має вигляд

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(x)^n}{(n+a)(n+b)},$$

то застосовуємо теорему про почленне інтегрування степеневого ряду двічі або розкладаємо дріб на елементарні дробі:

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+b} \right) \frac{1}{b-a},$$

і обчислюємо суму кожного ряду почленним інтегруванням.

Приклад 2.14. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n(x)}{n}$$

і вказати область збіжності ряду до цієї суми.

Розв'язування

1. Знаходимо область збіжності ряду.

За ознакою Коші інтервал збіжності визначається нерівністю $|\sin x| < 1$.

В граничних точках при $x = \pi/2 + 2\pi k$ ряд розбігається, при $x = 3\pi/2 + 2\pi k$ ряд збігається умовно.

Отже, даний ряд збігається при всіх $x \neq \pi/2 + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).

2. Робимо заміну $\sin x = t$. Отримуємо геометричний ряд (1) з областю збіжності $[-1, 1)$.

3. Використовуємо формулу, для обчислення суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії.

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1. \quad (2.25)$$

4. Крім того, маємо очевидну рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t u^{n-1} du, \quad t \in (-1, 1).$$

5. Враховуючи, що степеневий ряд можна почленно інтегрувати на будь-якому проміжку $[0, t]$, який належить інтервалу збіжності, застосовуючи формулу (4), отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} du = \int_0^t \frac{1}{1-u} du = -\ln(1-t), \quad |t| < 1. \quad (2.26)$$

Відмітимо, що оскільки ряд (2.20) збігається в граничній точці $t = -1$, то його сума неперервна в цій точці (справа). Отже, формула (2.26) справедлива при всіх $t \in [-1, 1)$.

6. Заміняємо t на $\sin x$, отримуємо при $x \neq \pi/2 + 2\pi k$

$$S(x) = -\ln(1 - \sin x).$$

Відповідь. $S(x) = -\ln(1 - \sin x)$, $x \neq \pi/2 + 2\pi k$.

Завдання для самостійної роботи. Знайти суми функціональних рядів і знайти області їх збіжності щодо цих сум.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^n}{n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-16x^4)^n}{n+1}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{nx^{n-1}}$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)x^{2n}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)x^n}$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{2n+1}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$$

Відповіді

$$1. S = -\ln(1-6x), \quad x \in [-1/6, 1/6).$$

$$2. S = (x - x^2) \ln(1 - x) + x^2, \quad x \in [-1, 1].$$

$$3. S = -8 \ln \frac{8x^4 - 1}{8x^4}, \quad x \in (-1/\sqrt[4]{8}, 1/\sqrt[4]{8}).$$

$$4. S = -\frac{x}{3} \ln \frac{x-3}{x}, \quad x \in (-\infty, -3] \cup (3, +\infty).$$

$$5. S = -\frac{x^2}{2} \ln \frac{x^2 - 2}{x^2}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

$$6. S = (1 - 2x) \ln(1 - 2x) + 2x, \quad x \in [-1/2, 1/2].$$

$$7. S = \frac{3-x}{3} \ln \frac{3-x}{3} + \frac{x}{3}, \quad x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty).$$

$$8. S = \operatorname{arctg} x, \quad x \in [-1, 1].$$

$$9. S = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2x} - 1, \quad x \in [-1/2, 1/2].$$

$$10. S = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2), \quad x \in [-1, 1].$$

Обчислення суми ряду шляхом почленного диференціювання

Приклад 2.15. Знайти суму функціонального ряду вигляду

$$\sum_{n=k}^{\infty} (n+b) f(x)^n$$

і знайти область збіжності ряду щодо цієї суми.

Розв'язування

1. Знаходимо область збіжності ряду.

За ознакою Коші інтервал збіжності визначається нерівністю

$$|f(x)| < 1.$$

Якщо $f(x) = \pm 1$, ряд розбігається (за наслідком з необхідної умови збіжності рядів (с. 17)). Отже, область збіжності визначається нерівностями $-1 < f(x) < 1$.

2. Зробимо в даному ряді заміну $f(x) = t$ і запишемо його у вигляді суми двох рядів

$$\sum_{n=k}^{\infty} n t^n + b \sum_{n=k}^{\infty} t^n$$

Отже, достатньо знайти суми рядів

$$\sum_{n=k}^{\infty} t^n \quad \text{і} \quad \sum_{n=k}^{\infty} n t^n$$

3. Відома формула для суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\sum_{n=k}^{\infty} t^n = \frac{t^k}{1-t}, \quad |t| < 1. \quad (2.27)$$

4. Крім того, маємо очевидну рівність

$$\sum_{n=k}^{\infty} nt^n = t \sum_{n=k}^{\infty} nt^{n-1} = t \sum_{n=k}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n.$$

5. Враховуючи, що степеневий ряд можна почленно диференціювати в будь-якій точці інтервалу збіжності, і використовуючи формулу (2.27), отримуємо

$$\sum_{n=k}^{\infty} nt^n = t \frac{d}{dt} \sum_{n=k}^{\infty} t^n = t \frac{d}{dt} \frac{t^k}{1-t}, \quad t \in (-1, 1).$$

6. Обчислюємо похідну і робимо заміну t на $f(x)$.

Записуємо відповідь: суму ряду і область його збіжності

Зуваження. Якщо ряд має вигляд

$$\sum_{n=k}^{\infty} (n^2 + bn + c) f(x)^n,$$

тоді обчислюємо суму трьох рядів, причому при обчисленні суми ряду

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^2 f(x)^n$$

застосовуємо теорему про почленне диференціювання степеневого ряду двічі.

Приклад 2.16. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+6)x^{7n}$$

і вказати область збіжності ряду щодо цієї суми.

Розв'язування

1. Знаходимо область збіжності ряду.

За ознакою Коші інтервал збіжності визначається нерівністю $|x^7| < 1$.

Звідси $-1 < x < 1$. В граничних точках $x = \pm 1$ ряд розбігається за наслідком з необхідної умови збіжності рядів (с. 17).

Отже, ряд збігається в інтервалі $(-1, 1)$.

2. Робимо в даному ряді заміну $x^7 = t$ і записуємо його у вигляді суми двох рядів

$$S(t) = 6 \sum_{n=0}^{\infty} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nt^n = 6S_1(t) + S_2(t).$$

Отже, досить знайти суми рядів

$$S_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad S_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n.$$

3. Використовуємо формулу для обчислення суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1. \quad (2.28)$$

Отже, $S_1(t) = \frac{1}{1-t}$ при всіх $t \in (-1, 1)$.

4. Крім того, маємо очевидну рівність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n t^n = t \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n.$$

5. Враховуючи, що степеневий ряд можна почленно диференціювати в будь-якій точці інтервалу збіжності, і використовуючи формулу (2.28), отримуємо:

$$S_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n t^n = t \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} t^n = t \frac{d}{dt} \frac{t}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad t \in (-1, 1).$$

Таким чином,

$$S(t) = 6S_1(t) + S_2(t) = \frac{6}{1-t} + \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{6-5t}{(1-t)^2}, \quad t \in (-1, 1).$$

Замінюючи t на x^7 , отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+6)x^{7n} = \frac{6-5x^7}{(1-x^7)^2}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Відповідь: $S(x) = \frac{6-5x^7}{(1-x^7)^2}, \quad x \in (-1, 1).$

Завдання для самостійної роботи

Знайти суми функціональних рядів і знайти області їх збіжності щодо цієї суми.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^n x^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n+4}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n x^{n-1}}{3^{n-1}}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - 2n + 1)x^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+1)x^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} n(x^3 + 1)^{n-1}$

Відповіді

1. $S = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$

2. $S = \frac{2x}{(1-2x)^2}, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$

$$3. S = \frac{x^4}{(1-x^2)^2}, x \in (-1, 1).$$

$$4. S = \frac{9}{(x+3)^2}, x \in (-3, 3).$$

$$5. S = \frac{16}{(2-x)^3}, x \in (-2, 2).$$

$$6. S = \frac{1+x}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1).$$

$$7. S = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1).$$

$$8. S = \frac{2x}{(1+x)^3}, x \in (-1, 1).$$

$$9. S = \frac{3x - x^2}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1).$$

$$10. S = \frac{1}{x^6}, x \in (-\sqrt[3]{2}, 0).$$

2.3 Властивості степеневих рядів

Теорема. Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.29)$$

мажорантний на будь-якому відрізку $[-\rho, \rho]$, що лежить всередині інтервалу збіжності $(-R, R)$.

Виберемо точку x_0 так, щоб було $\rho < |x| < R$ (рис. 2.7). Точка x_0 належить інтервалу збіжності і за теоремою Абеля числовий ряд

$$|a_0| + |a_1 \cdot x_0| + \dots + |a_n \cdot x_0^n| + \dots$$

збігається. Для будь-якої точки $x \in [-\rho, \rho]$ маємо $|x| < |x_0|$, отже, і $|a_n \cdot x^n| < |a_n \cdot x_0^n|$. Остання нерівність означає, що ряд (2.29) мажорантний на відрізку $[-\rho, \rho]$.

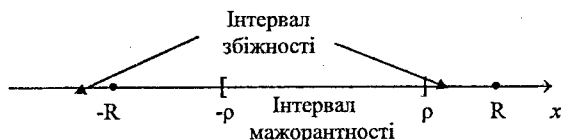


Рисунок 2.7

Як наслідки, із даної теореми випливають такі властивості степеневих рядів:

1) сума степеневому ряду є функцією неперечною в інтервалі збіжності ряду. Зауважимо, що на тому кінці інтервалу, де степеневий ряд збігається, його сума $S(x)$ залишається односторонньою неперечною (із середини інтервалу);

2) степеневий ряд можна почленно інтегрувати всередині інтервалу збіжності.

3) третю важливу властивість степеневих рядів сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \quad (2.30)$$

має інтервал збіжності $(-R, R)$, то ряд

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + n \cdot a_n x^{n-1} + \dots, \quad (2.31)$$

утворений почленно диференціюванням ряду (2.30), має такий самий інтервал збіжності $(-R, R)$, і, при цьому, $\varphi(x) = S'(x)$, якщо $|x| < R$.

Доведемо що ряд (2.31) мажорантний на будь-якому відрізку $[-\rho, \rho]$, що лежить в інтервалі збіжності.

Візьмемо точку x_0 таку, що $\rho < |x_0| < R$. В цій точці ряд (2.31) збігається, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, тому можна вказати таке стале число $M > 0$,

що

$$|a_n x_0^n| < M, \quad (n=1, 2, \dots) \text{ або } |a_n| < \frac{M}{|x_0|^n}.$$

Якщо $|x_0| \leq \rho$, то

$$|n \cdot a_n x^{n-1}| \leq |n \cdot a_n \rho^{n-1}| = n |a_n x_0^{n-1}| \frac{|\rho|^{n-1}}{|x_0|^{n-1}} < n \frac{M}{|x_0|} q^{n-1},$$

$$\text{де } q = \frac{|\rho|}{|x_0|} < 1.$$

Отже, члени ряду (2.31) при $|x| < \rho$ за абсолютною величиною менші членів числового ряду

$$\frac{M}{|x_0|} (1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots).$$

Але останній ряд збігається, у цьому можна переконатися, застосувавши ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot q^{n-1}}{(n-1) \cdot q^{n-2}} = q < 1.$$

Отже, ряд (2.31), мажорантний на відрізку $[-\rho, \rho]$. Згідно з теоремою його сума є похідною від суми даного ряду на відрізку $[-\rho, \rho]$, тобто $\varphi(x) = S'(x)$

Доведемо, що ззовні інтервалу $(-R, R)$ ряд (2.31) розбігається. Припустимо, що ряд (2.31) збігається при $x_1 > R$. Зінтегрувавши його почленно в інтервалі $(0, x_2)$, де $R < x_2 < x_1$, одержимо, що ряд (2.30) збігається в точці x_2 , але це суперечить умовам теореми.

Таким чином, інтервал $(-R, R)$ є інтервалом збіжності ряду (2.31).

Із даної теореми випливає, що степеневий ряд в інтервалі його збіжності можна почленно диференціювати будь-яку кількість разів. При цьому радіуси збіжності степеневих рядів залишаються незмінними.

2.4 Ряди Тейлора і Маклорена

2.4.1 Основні поняття

У п. 2.3 встановлено, що для степеневому ряду його сума $S(x)$ в інтервалі збіжності цього ряду є функцією визначеною (можливо, і в одному або обох кінцях інтервалу), неперервною та нескінченно диференційованою.

Розглянемо обернену задачу: задано функцію $f(x)$, знайти степеневий ряд, сумою якого є задана функція $f(x)$. Таку задачу називають задачею розвинення функції $f(x)$ у степеневий ряд.

Таким чином, завдання полягає в тому, щоб з'ясувати, яку функцію і в якій області можна розвинути у степеневий ряд.

Важливість такого розвинення полягає в тому, що функцію $f(x)$ можна наближено замінити сумою n перших членів степеневому ряду, тобто многочленом, а обчислення значень многочлена потребує виконання лише найпростіших арифметичних операцій. Слід також додати, що з'являється можливість оцінювання точності отриманих наближених значень функції або знаходити значення аргументу за заданими значеннями функції. Заміна функції $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ спрощує як в математиці, так в її застосуваннях, розв'язання задач аналізу, обчислення інтегралів, розв'язання функціональних та диференціальних рівнянь тощо.

Раніше (у диференціальному численні функції однієї змінної) було показано, що функцію $f(x)$, яка має всі похідні до $(n+1)$ -го порядку включно, в околі точки $x = x_0$ можна подати формулою Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (2.32)$$

залишковий член якої $R_n(x)$ у формі Лагранжа має вигляд:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (2.33)$$

де точка ξ лежить між x і x_0 .

Якщо функція $f(x)$ нескінченно диференційована в околі точки $x = x_0$, то у формулі Тейлора n можна брати як завгодно великим. Припустимо, що в околі точки x_0 залишковий член формули Тейлора прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Тоді, перейшовши в формулі (2.32) до границі при $n \rightarrow \infty$, дістанемо в правій частині формули (2.32) ряд, який називають *рядом Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{x-x_0}{1!} + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \dots \quad (2.34)$$

Рівність (2.34) справедлива тільки в тому випадку, коли залишковий член формули Тейлора $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і $x, x_0 \in [a, b]$. Тоді ряд у формулі (2.34) збігається, і його сума дорівнює даній функції $f(x)$. Нехай $S_n(x)$ є частковою сумою ряду у формулі (2.34). Тоді функцію $f(x)$ можна

подати у вигляді суми часткової суми ряду та залишкового члена формули Тейлора

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

$$\text{де } S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ при $x \in (-R+x_0, x_0+R)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \Rightarrow f$ і при $x \in (-R+x_0, x_0+R)$. Отже, функція $f(x)$ є сумою ряду Тейлора.

З викладеного слідує, що функція подається рядом Тейлора (2.34) на відрізьку $[a, b]$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ при $x, x_0 \in [a, b]$. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$, то ряд не збігається до даної функції, хоча він може і збігатися, проте, до іншої функції.

Приклад Коші. Функція

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

в точці $x = 0$ має похідні будь-якого порядку і всі вони дорівнюють нулю.

Дійсно, значенню аргумента $x_0 = 0$ надамо приріст Δx , тоді $x_0 + \Delta x = \Delta x$. Обчислимо приріст функції

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = e^{-\frac{1}{(x_0 + \Delta x)^2}} - f(0) = e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}.$$

Якщо $x \neq 0$, то похідна в цих точках дорівнює

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Якщо $x = 0$, то значення похідної першого порядку обчислимо за означенням, скориставшись правилом Лопітала:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\frac{1}{(\Delta x)^2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \left(-\frac{2}{(\Delta x)^3}\right)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x) \cdot e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{2} = 0.$$

Аналогічно переконуємося в тому, що $f''(0) = f'''(0) = \dots = 0$.

Отже, ряд Тейлора даної функції має вигляд:

$$f(x) \sim 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots + 0 \cdot x^n + \dots$$

Сума ряду збігається із значенням функції $f(x)$ лише в одній точці $x = 0$. В точках $x \neq 0, x \in (-\infty, +\infty)$ сума ряду не збігається із значеннями функції $f(x)$.

Зауваження. Ряд Тейлора функцій, які розглядатимуться нижче, збігається до функції $f(x)$ в області його збіжності.

Якщо у формулі (2.34) покласти $x_0 = 0$, то дістанемо ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad (2.35)$$

який називають *рядом Маклорена*.

Приклад 2.17. Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Тейлора за степенями x ($x_0 = 0$).

Розв'язування

1. Перетворимо функцію $f(x)$ до вигляду, який допускає використання табличних рядів функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$.

2. Знаходимо ряд Тейлора функції, використавши табличний ряд та дії додавання (віднімання) рядів, множення ряду на число.

3. Визначаємо область збіжності отриманого ряду до функції $f(x)$.

Зауваження. Якщо необхідно розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, то спочатку робимо заміну змінної $t = x - x_0$, знаходимо ряд за степенями t і повертаємося до змінної x .

Приклад 2.18. Розвинути функцію

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2}$$

в ряд Тейлора за степенями x ($x_0 = 0$).

Розв'язування

1. Щоб застосувати табличний ряд, розкладаємо дану функцію на елементарні дробі:

$$\frac{3}{2-x-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+2}.$$

2. Використовуємо табличний ряд

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad t \in (-1, 1).$$

отримуємо

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \quad x \in (-2, 2).$$

Таким чином,

$$\frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) x^n.$$

3. Областю збіжності отриманого ряду є перетин вищевказаних областей збіжності, тобто $(-1, 1) \cap (-2, 2) = (-1, 1)$.

Відповідь: $\frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) x^n, \quad \forall x \in (-1, 1).$

Завдання для самостійної роботи

Розвинути функції в ряди Тейлора ($x_0 = 0$).

1. $\frac{5}{6-x-x^2}.$ 2. $\ln(1-x-20x^2).$

3. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$ 4. $\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$

5. $\frac{x}{3+2x}.$ 6. $\sqrt[4]{16+x}.$

7. $xe^{2x^2+1}.$ 8. $\frac{1}{\sqrt[3]{27-x}}.$

9. $\ln(12x^2+7x+1).$ 10. $\cos^2 3x.$

Відповіді

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) x^n, x \in (-2, 2).$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n - 5^n}{n} x^n, x \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty).$

4. $\frac{x}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n! 2^n 3^{2n+1}} x^{2n+1}, x \in (-3, 3).$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}} x^{n+1}, x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$

6. $2 + \frac{x}{32} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-5)}{2^{6n-1} n!} x^n, x \in [-16, 16].$

7. $e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{2n+1}, x \in (-\infty, +\infty).$

8. $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{n! 3^{4n+1}} x^n, x \in [-27, 27].$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^n + 3^n}{n} x^n, x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$

10. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^{2n}}{2(2n)!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty).$

2.4.2 Приклади розвинення функцій в ряд Тейлора

Розвинення в ряд Маклорена функції $f(x)=e^x$

Всі похідні від функції e^x також дорівнюють e^x : $f'(x)=f''(x)=\dots=f^{(n)}(x)=e^x$ ($n=0, 1, 2, \dots$) і в точці $x=0$ вони дорівнюють $f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n)}(0)=1$. За формулою Маклорена (2.35) одержуємо ряд, збіжність якого до функції e^x ще необхідно обґрунтувати:

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2.36)$$

Згідно з формулою Лагранжа (2.33) залишковий член формули Тейлора має вигляд:

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x).$$

Обчислимо границю залишкового члена:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} = e^\xi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Оскільки залишок прямує до нуля при будь-якому скінченному значенні x , то даний ряд збігається і його сума дорівнює e^x при будь-якому x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (-\infty < x < \infty). \quad (2.37)$$

За допомогою функції *series* та символьного оператора $\rightarrow$ у середовищі *MathCAD* можна отримати задану кількість перших членів розвинення функції в ряд Тейлора. Наприклад,

$$\exp(x) \text{ series, } x=1,4 \rightarrow \exp(1) + \exp(1) \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot \exp(1) \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{6} \cdot \exp(1) \cdot (x-1)^3$$

Слід зауважити, що система виконує обчислення із заданою кількістю знаків після коми, якщо константи задаються у формі дійсних чисел. Так, у наведеному вище результаті $\exp(1)$ не обчислювалось, оскільки було задано значення $x=1$ у формі цілого числа. Якщо його задати у формі дійсного числа $x=1.$ (після 1 стоїть крапка), результат буде таким:

$$\exp(x) \text{ series, } x=1.,3 \rightarrow 2.7182818284590452354 \cdot x + 1.3591409142295226177 \cdot (x-1)^2$$

Розвинення функції $f(x)=\sin(x)$ в ряд Маклорена

Знаходимо послідовно похідні від $f(x) = \sin(x)$ та обчислюємо значення функції і її похідних в точці $x=0$. Крім того, визначимо загальний вигляд похідної $f^{(n)}(x)$:

$$f(x) = \sin x,$$

$$f(0) = \sin 0 = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(0) = -\cos 0 = -1,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

Підставивши отримані значення функції та її похідних у формулу (2.35), отримаємо ряд функції $f(x) = \sin(x)$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.38)$$

Доведення того факту, що залишок $\frac{(-1)^n x^{2n+1} \cos \xi x}{(2n+1)!}$ прямує до нуля при будь-якому x , тобто, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$, проводиться аналогічно до попереднього випадку.

Розглянутий спосіб розвинення функції в ряд на основі формули (2.35) є загальним, проте в багатьох, практично важливих випадках, розвинення функцій в ряд Тейлора можна отримати на основі властивості диференціювання степеневого ряду. Розглянемо приклади.

Диференціювання степеневого ряду

Диференціюванням обох частин рівності (2.38) дістанемо розвинення в ряд Маклорена функції $f(x) = \cos(x)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (2.39)$$

Алгебраїчні перетворення

Під час розвинення функцій у степеневий ряд використовують уже відомі розвинення, наприклад, формули (2.36), (2.38), (2.39). Розглянемо випадок використання алгебраїчних перетворень на прикладі розвинення в ряд Маклорена гіперболічних функцій із використання формули (2.36).

$$f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

У розвиненні функції $f(x) = e^x$ (2.36) замінимо x на $(-x)$, тоді

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2.40)$$

Якщо від ряду (2.36) відняти ряд (2.40) та поділити на 2, то отримаємо ряд функції $sh(x)$; якщо ж вказані ряди додати та розділити на 2, то дістанемо ряд функції $ch(x)$:

$$\begin{aligned} shx &= 1 + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ chx &= 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2 \cdot n)!}. \end{aligned} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Біномний ряд

Розвинемо в ряд Маклорена функцію

$$f(x) = (1+x)^m \quad (2.41)$$

де m — довільне дійсне число.

Зауважимо, що функція (2.41) задовольняє диференціальне рівняння

$$(1+x) \cdot f'(x) = m \cdot f(x) \quad (2.42)$$

і початкову умову $f(0) = 1$. Тоді степеневий ряд, сума якого задовольняє рівняння (2.42) і умову $f(0) = 1$, шукаємо у вигляді:

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Оскільки за початковою умовою $S(0) = 1$, то підставивши $x = 0$ у ліву та праву частини, отримаємо $a_0 = 1$, і ряд запишеться у вигляді:

$$S(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2.43)$$

Підставивши у рівняння (2.42) замість $f(x)$ і $f'(x)$ відповідно $S(x)$ і $S'(x)$, дістанемо тотожність

$$\begin{aligned} (1+x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots) = \\ = m(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots). \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в лівій та правій частинах тотожності, знаходимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів

$$\begin{aligned} a_1 &= m, \\ a_1 + 2 \cdot a_2 &= m \cdot a_1, \\ &\dots, \\ n \cdot a_n + (n+1) \cdot a_{n+1} &= m \cdot a_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

Звідси, розв'язавши послідовно систему, отримаємо коефіцієнти ряду

$$a_0 = 1, \quad a_1 = m, \quad a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3},$$

$$a_n = \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

які називаються біномними коефіцієнтами. Підставивши їх у формулу (2.43), дістанемо степеневий ряд:

$$S(x) = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot x^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} \cdot x^n. \quad (2.44)$$

Якщо m — ціле додатне число, то починаючи з члена, в якому міститься x^{m+1} , всі коефіцієнти дорівнюють нулю, степеневий ряд перетворюється в многочлен. Якщо m — дробове число або ціле від'ємне, то отримаємо ряд. Визначимо радіус збіжності ряду (2.44):

$$u_{n+1}(x) = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} \cdot x^n, \quad u_n(x) = \frac{m(m-1) \dots (m-n+2)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)(n-1)!}{m(m-1) \dots (m-n+2)n!} \cdot x \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n+1}{n} \right| = |x|.$$

Таким чином, ряд (2.44) збігається, якщо $|x| < 1$. Можна довести, що ряд збігається до функції $(1+x)^m$ (тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ при $|x| < 1$).

В інтервалі $(-1, 1)$ ряд (2.44) зображає функцію $S(x)$, що задовольняє диференціальне рівняння (2.42) і умову $S(0) = 1$.

Оскільки диференціальне рівняння (2.42) і початкову умову $S(0) = 1$ задовольняє лише єдина функція, то сума ряду (2.44) тотожно дорівнює функції $(1+x)^m$, і тоді біномний ряд має вигляд:

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} \cdot x^n + \dots, \quad |x| < 1. \quad (2.45)$$

Зокрема, при $m = -1$ дістаємо ряд геометричної прогресії, знаменник якої $q = -x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad |x| < 1. \quad (2.46)$$

При $m = 0.5$ біномний ряд має вигляд:

$$\sqrt{1+x} \text{ series, } x=0,5 \rightarrow 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{16} \cdot x^3 - \frac{5}{128} \cdot x^4 + \frac{7}{256} \cdot x^5 - \frac{21}{1024} \cdot x^6, \quad |x| < 1.$$

При $m = -0.5$ біномний ряд набуває вигляду:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \text{ series, } x=0,5 \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{5}{16} \cdot x^3 + \frac{35}{128} \cdot x^4 - \frac{63}{256} \cdot x^5 + \frac{231}{1024} \cdot x^6, \quad |x| < 1. \quad (2.47)$$

Розвинення функції $f(x) = \ln(1+x)$

Оскільки функцію $f(x) = \ln(1+x)$ можна подати у вигляді інтеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^x = \ln(1+x),$$

то застосуємо теорему інтегрування степеневих рядів. З цією метою підставимо замість підінтегральної функції степеневий ряд (2.46) і зінтегруємо ряд в межах від 0 до x ($|x| < 1$). Зінтегрувавши почленно ряд, отримаємо:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1 \quad (2.48)$$

Доведемо, що розвинення (2.48) справедливе в інтервалі $(-1, 1)$.

За допомогою функції *series* у середовищі *MathCAD* можна отримати розвинення в ряд функції $f(x) = \ln(1+x)$ або безпосередньо, або шляхом розвинення інтеграла:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt \text{ series, } x=0,7 \rightarrow x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{5} \cdot x^5 - \frac{1}{6} \cdot x^6.$$

Розвинення функції $f(x) = \arcsin(x)$

Підставимо у формулу (2.47) замість x функцію $-t^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^6 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}$$

Зінтегрувавши обидві частини рівності в межах від 0 до x , де $|x| < 1$, отримаємо

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x dt + \int_0^x \frac{1}{2} t^2 \cdot dt + \int_0^x \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 \cdot dt + \dots + \int_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \cdot dt + \dots$$

або

$$\arcsin t \Big|_0^x = t \Big|_0^x + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{t^5}{5} \Big|_0^x + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x + \dots$$

Оскільки $\arcsin(0) = 0$, то отримаємо ряд:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Можна довести, що це розвинення залишається справедливим і при $x = \pm 1$.

Якщо скористатися функцією *series* у середовищі *MathCAD*, то можна безпосередньо отримати розвинення функції $f(x) = \arcsin x$ в ряд:

$$\arcsin(x) \text{ series}, x = 0, 10 \rightarrow x + \frac{x^3}{6} + \frac{3 \cdot x^5}{40} + \frac{5 \cdot x^7}{112} + \frac{35 \cdot x^9}{1152}.$$

Зокрема при $x = 1$ дістанемо вираз для числа π у вигляді числового ряду, оскільки $\arcsin(1) = \pi/2$.

$$\arcsin 1 = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

$$\pi = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right)$$

2.4.3 Деякі застосування рядів Тейлора

Наближене обчислення значень функцій

Нехай функція $f(x)$ розвинена в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Якщо обчислюється значення функції в точці $x_1 \in (-R, R)$, де R – радіус збіжності ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

то для обчислення значення функції $f(x)$ в точці x_1 використовується часткова сума $S_n(x)$, тобто покладають $f(x_1) \approx S_n(x_1)$ або

$$f(x_1) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x_1 - x_0)^k.$$

Оцінювання похибки зводиться до оцінювання залишкового члена $R_n(x)$ формули Тейлора.

Якщо числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n$$

знакозмінний, типу ряду Лейбніца, то оцінка матиме вигляд:

$$|R_n(x_1)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x_1 - x_0)^{n+1} \right|.$$

Приклад 2.19. Обчислити $\sqrt[3]{28}$ з точністю до 0,00001.

Для обчислення використаємо біномний ряд

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

З цією метою виконаємо перетворення:

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27+1} = 3 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{27}} = 3 \cdot \left(1+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Отже, ряд використовуємо при $x = \frac{1}{27}$, $m = \frac{1}{3}$:

$$\left(1+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}-1\right) \frac{1}{27^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}-1\right) \left(\frac{1}{3}-2\right) \frac{1}{27^3} + \dots$$

$$\sqrt[3]{26} = \sqrt[3]{27-1} = 3 \cdot \sqrt[3]{1-\frac{1}{27}} = 3 \cdot \left(1-\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

При цьому використовується уже не знакозмінний ряд:

$$\sqrt[3]{1-x} \text{ series, } x = 0,5 \rightarrow 1 - \frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{9} \cdot x^2 - \frac{5}{81} \cdot x^3 - \frac{10}{243} \cdot x^4 - \frac{22}{729} \cdot x^5 - \frac{154}{6561} \cdot x^6 - \frac{374}{19683} \cdot x^7$$

А тому точність обчислення оцінюється за допомогою залишкового члена формули Тейлора (2.33) при $n = 3$:

$$r(q) := \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot x^4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{4!} \cdot \frac{1}{(1-q \cdot x)^3}$$

Найменше та найбільше значення залишкового члена такі:

$$r(0) = 2,3230573125 \times 10^{-7} \quad r(1) = 2,6678297865 \times 10^{-7}.$$

Якщо прийняти $n = 2$, то залишковий член формули Тейлора

$$r(q) := \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdot x^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{(1-q \cdot x)^3}$$

приймає відповідні значення

$$r(0) = 3,1361273719 \times 10^{-6} \quad r(1) = 3,4681787225 \times 10^{-6}.$$

На графіку (рис. 2.8) показано залежність значення залишкового члена від можливих значень q .

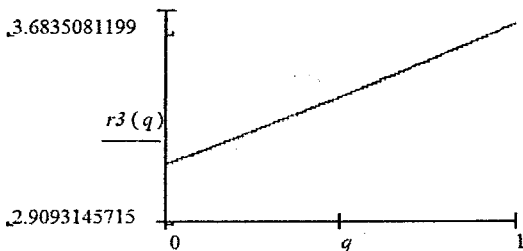


Рисунок 2.8

Обчислюємо суму перших чотирьох членів ряду:

$$3 - 0,037037037 - 0,000457247 - 0,00000940838 - 2,962496307.$$

Отже, $\sqrt[3]{26} \approx 2,96250$. Похибка обчислень складає

$$|2,9624960684 - 2,9624963076| \cdot \frac{100}{2,9624960684} = 8,0742723124 \times 10^{-6},$$

$$\delta = 0,000008\%.$$

Обчислення границь

Приклад 2.20. Знайти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot e^x - 2 - 2 \cdot x - x^2}{x - \sin x},$$

Замінивши функції e^x та $\sin(x)$ відповідними рядами Маклорена, отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot e^x - 2 - 2 \cdot x - x^2}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots} = 2. \end{aligned}$$

Інтегрування функцій

Під час вивчення теорії імовірностей важливу роль відіграє функція Лапласа

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Наведений інтеграл в закінченому вигляді не обчислюється, бо інтеграл $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в ряд. З цією метою у формулу (2.37) підставимо замість x вираз $-t^2/2$:

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{t^6}{2^3 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^n \cdot n!}.$$

Тоді функція $\phi(x)$ буде подана рядом

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \dots \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2 \cdot n + 1) 2^n \cdot n!}.$$

що збігається на всій числовій осі і який можна використати для обчислення значень функції $\phi(x)$.

Приклад 2.21. Обчислити інтеграл

$$\int_0^b f(x) dx$$

з точністю α , де $f(x)$ розвинена в степеневий ряд, який має радіус збіжності $R > b$.

Розв'язування

Практично обчислення зводиться до додавання того чи іншого числового ряду. В даному випадку такий ряд отримується, якщо розвинути підінтегральну функцію у степеневий ряд і зінтегрувати його почленно.

1. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд за степенями x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

і визначаємо його область збіжності.

2. Степеневий ряд можна інтегрувати почленно на будь-якому відрізку, який належить інтервалу збіжності. Тому, зінтегрувавши почленно отриманий ряд і використавши формулу Ньютона–Лейбніца, отримуємо

$$\int_0^b f(x) dx = \int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

3. Обчислимо суму числового ряду з заданою точністю (оцінюючи остачу ряду).

Зауваження. Якщо розвинути підінтегральну функцію в ряд не за степенями x , а за степенями $(x - b/2)$, то ряд буде збігається швидше, тобто для забезпечення заданої точності може знадобитись менше доданків, але, як наслідок, обчислення буде складнішим.

Приклад 2.22. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{0.1} \cos(100x^2) dx$$

з точністю $\alpha = 0,001$.

Розв'язування

1. Розвинути підінтегральну функцію в ряд Тейлора за степенями x

$$\begin{aligned} \cos(100x^2) &= 1 - \frac{(10^2 x^2)^2}{2!} + \frac{(10^2 x^2)^4}{4!} - \frac{(10^2 x^2)^6}{6!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(10^2 x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n} x^{4n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Розвинення справедливе при всіх x .

2. Інтегруємо почленно отриманий ряд:

$$\int_0^{0,1} \cos(10^2 x^2) dx = \int_0^{0,1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n} x^{4n}}{(2n)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n}}{(2n)!} \int_0^{0,1} x^{4n} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n}}{(2n)!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \Big|_0^{0,1} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}.$$

3. Оцінюємо залишок ряду. Оскільки ряд знакозмінний,

$$a_n = \frac{1}{10(4n+1)(2n)!} > a_{n+1} = \frac{1}{10(4n+5)(2n+2)!}$$

і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то справедлива нерівність

$$|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{10(4n+5)(2n+2)!}$$

Для обчислення інтеграла з заданою точністю достатньо взяти два члени ряду, оскільки

$$R_1 \leq \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 4!} < 0,001.$$

4. Виконуючи обчислення, отримуємо

$$\int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx \cong \frac{1}{10} - \frac{1}{10 \cdot 5 \cdot 2!} \cong 0,090.$$

Відповідь. $\int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx \cong 0,090 \pm 0,001$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли з точністю $\alpha = 0,001$.

1. $\int_0^1 e^{-x^2} dx.$

2. $\int_0^1 \sin x^2 dx.$

3. $\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^4} dx.$

4. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx.$

5. $\int_0^{0,5} e^{-x^{2/4}} dx.$

6. $\int_0^{2/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} dx.$

7. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx.$

8. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx.$

9. $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \arctg x dx.$

10. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}} dx.$

Відповіді. 1. $S \cong 0,747.$

2. $S \cong 0,310.$

3. $S \cong 0,494.$

4. $S \cong 0,190.$

5. $S \cong 0,508.$

6. $S \cong 0,490.$

7. $S \cong 0,662.$

8. $S \cong 0,608.$

9. $S \cong 0,012.$

10. $S \cong 0,495.$

Інтегрування диференціальних рівнянь

За допомогою степеневих рядів в деяких випадках можна знаходити й загальні розв'язки диференціальних рівнянь, проте найчастіше вдається знайти тільки розв'язок, що задовольняє початкову умову.

Як правило, розв'язок у вигляді степеневому ряду

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (2.49)$$

відшукується у таких випадках, коли не вдається зінтегрувати диференціальне рівняння в елементарних функціях. Невизначені коефіцієнти a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, знаходяться шляхом підстановки ряду (2.49) в рівняння і порівнянням коефіцієнтів при однакових степенях бінома $x - x_0$ в лівій та правій частинах отриманої рівності. З цим способом ми ознайомились при знаходженні біномного ряду (розд. 2.3.2). Особливо зручно таким методом розв'язувати лінійні диференціальні рівняння.

Можна також шукати розв'язок у вигляді ряду Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

Розглянемо застосування методу невизначених коефіцієнтів до побудови розв'язку задачі Коші у вигляді степеневому ряду. Крім того з'ясуємо, яким чином можуть вводитись нові функції.

Якщо точка $x = 0$ є особливою точкою диференціального рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x),$$

тобто вона є точкою розриву коефіцієнтів $p_1(x)$, $p_2(x)$ і $q(x)$, то розв'язок можливо і не записуватиметься у вигляді суми степеневому ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (2.50)$$

Подамо розв'язок ДР у вигляді узагальненого степеневому ряду

$$y = x^{\alpha} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots),$$

де α – деяке дійсне число.

Якщо $\alpha \geq 0$ і $\alpha = m$, то даний узагальнений степеневий ряд збігається із рядом (2.50). Розглянемо приклад.

Приклад 2.23. Рівняння

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (2.51)$$

або

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (2.52)$$

називається диференціальним рівнянням Бесселя ν -го порядку. Знайти загальний розв'язок рівняння (2.51).

Для побудови загального розв'язку знайдемо лінійно незалежні частинні розв'язки. Спробуємо знайти розв'язок рівняння у вигляді степеневому ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p} \quad (2.53)$$

де p — параметр, який треба буде визначити.

Підставимо (2.53) у (2.52). Для цього знаходимо y' , y'' , вважаючи, що це допустимо. Умови можливості цього сформулюємо пізніше.

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (p+k) x^{k+p-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (p+k)(p+k-1) x^{k+p-2}.$$

Тоді отримаємо рівняння для визначення параметрів ряду (2.53)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (p+k)(p+k-1) x^{k+p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (p+k) x^{k+p} + (x^2 - v^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p} = 0.$$

Перепишемо рівняння у такому вигляді:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k (p+k)(p+k-1) + a_k (p+k) + (x^2 - v^2) a_k] x^{p+k} = 0$$

Отже, прирівнявши до нуля коефіцієнти при x^p , x^{p+1} , ..., утворимо нескінченну систему рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$

$$\begin{aligned} a_0[p(p-1)+p-v^2] &= 0, & a_0[p^2-v^2] &= 0, \\ a_1[p(p+1)+p+1-v^2] &= 0, & a_1[(p+1)^2-v^2] &= 0, \\ a_2[(p+2)(p+1)+p+2-v^2] + a_0 &= 0, & a_2[(p+2)^2-v^2] + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

$$a_k[(p+k)(p+k-1)+p+k-v^2] + a_{k-2} = 0, \quad a_k[(p+k)^2-v^2] + a_{k-2} = 0.$$

Оскільки параметр p довільний, то вважаємо, що $a_0 \neq 0$. Тоді з першого рівняння системи випливає, що $p^2 - v^2 = 0$ або $p = \pm v$. Нехай $v \geq 0$. Із решти рівнянь системи знаходимо $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$

$$\begin{aligned} a_1[(v+1)^2 - v^2] &= 0, & a_1[2v+1] &= 0, & a_1 &= 0, \\ a_2[(v+2)^2 - v^2] + a_0 &= 0, & a_2[4v+4] + a_0 &= 0, & a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(v+1)}, \\ a_3[(v+3)^2 - v^2] + a_1 &= 0, & a_3[6v+9] + a_1 &= 0, & a_3 &= 0, \\ & & & & & \\ a_{2k-1}[(v+2k-1)^2 - v^2] + a_{2k-3} &= 0, & a_{2k-1} &= 0, & & \\ a_{2k}[(v+2k)^2 - v^2] + a_{2k-2} &= 0, & a_{2k} &= \frac{(-1^k) a_0}{2^{2k} k! (v+1)(v+2) \dots (v+k)}. \end{aligned}$$

При цьому повинна виконуватись умова $v+k \neq 0$, $k=1, 2, \dots$

Отже, розв'язок рівняння має вигляд

$$y = a_0 \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k} k! (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}. \quad (2.54)$$

Перетворимо цей вираз за рахунок вибору a_0 . Скористаємося функцією Ейлера $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Відмітимо важливу властивість функції $\Gamma(x)$: при $x > 0$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(0) = 1$, $\Gamma(1) = 1$.

Нехай $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$. Тоді:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+1} k! \Gamma(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}$$

або

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}. \quad (2.55)$$

Скориставшись ознакою Д'Аламбера, доведіть, що ряд (2.55) збігається при довільному x .

Розв'язок рівняння (2.55) у вигляді степеневого ряду (2.55) називають функцією Бесселя першого роду порядку ν , позначають її символом $J_\nu(x)$.

Якщо прийняти $\nu = -\nu$ і вибрати $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)}$, то дістанемо інший розв'язок, функцію Бесселя першого роду порядку $-\nu$:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{k! \Gamma(k+1-\nu)}. \quad (2.56)$$

Якщо $\nu \neq n$, $n = 1, 2, \dots$, то $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ лінійно незалежні і загальний розв'язок рівняння Бесселя можна записати у вигляді

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x). \quad (2.57)$$

Якщо $\nu = n$, то має місце співвідношення $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, тобто, розв'язки $J_{-n}(x)$ і $J_n(x)$ лінійно залежні. Щоб знайти другий лінійно незалежний розв'язок, використаємо формулу (2.48). Нехай $y_1(x) = J_n(x)$,

тоді $y_2(x) = J_n(x) = \int \frac{dx}{x J^2(x)}$. Отже, загальний розв'язок рівняння Бесселя

має вигляд

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_n(x) \int \frac{dx}{x J^2(x)}.$$

Зауваження. Із формули (2.54) при $\nu = -1/2$ одержуємо

$$y = a_0 x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = a_0 x^{\frac{1}{2}} \cos x.$$

Тобто, функція Бесселя при деяких ν виражається через тригонометричні функції $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

Загальний розв'язок деякі КМС повертають у формі, яку наведено вище (2.57)

$$y(x) = _C1 \text{ Bessel}J(k, x) + _C2 \text{ Bessel}Y(k, x).$$

В деяких випадках, якщо в системі не передбачена відповідна спеціальна математична функція, розв'язок може бути записаний у вигляді многочленів, через які визначаються спеціальні функції.

Наведемо приклади розв'язання диференціального рівняння за допомогою степеневому ряду методом невизначених коефіцієнтів з використанням пакета *MathCAD*.

Приклад 2.24. Знайти наближений розв'язок диференціального рівняння

$$w'(t) = tw(t) + \cos(2t), t_0 = 0, w(0) = -2.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді часткової суми ряду

$$w(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Із початкової умови визначаємо $a_0 = -2$. Підставимо $w(t)$ у рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} w(t) - t \cdot w(t) - \cos(2t) \right) \begin{array}{l} \text{substitute, } w(t) = -2 + a \cdot t + b \cdot t^2 + c \cdot t^3 \\ \text{simplify} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow a + 2 \cdot b \cdot t + 3 \cdot c \cdot t^2 + 2 \cdot t - a \cdot t^2 - b \cdot t^3 - c \cdot t^4 - \cos(2t)$$

$$a + 2 \cdot b \cdot t + 3 \cdot c \cdot t^2 + 2 \cdot t - a \cdot t^2 - b \cdot t^3 - c \cdot t^4 - \cos(2t) \text{ series, } t =$$

$$= 0,4 \rightarrow a - 1 + (2 \cdot b + 2) \cdot t + (3 \cdot c - a + 2) \cdot t^2 - b \cdot t^3$$

$$a - 1 + (2 \cdot b + 2) \cdot t + (3 \cdot c - a + 2) \cdot t^2 - b \cdot t^3 \text{ coeffs, } t \rightarrow \begin{pmatrix} a - 1 \\ 2 \cdot b + 2 \\ 3 \cdot c - a + 2 \\ -b \end{pmatrix}$$

$$a - 1 \text{ solve, } a \rightarrow 12 \cdot b + 2 \text{ solve, } b \rightarrow -1 \begin{array}{l} 3 \cdot c - a + 2 \\ \text{solve, } c \\ \text{substitute, } a = 1 \end{array} \rightarrow \frac{-1}{3}$$

$$-2 + a \cdot t + b \cdot t^2 + c \cdot t^3 \begin{array}{l} \text{substitute, } a = 1, b = -1, c = \frac{-1}{3} \\ \text{expand} \end{array} \rightarrow -2 + t - t^2 - \frac{1}{3} \cdot t^3$$

Отже, наближений розв'язок набуває вигляду:

$$w(t) = -2 + t - t^2 - \frac{t^3}{3}.$$

Для порівняння на рис. 2.9 наведено графіки наближеного розв'язку (пунктирна лінія) та точного (суцільна лінія).

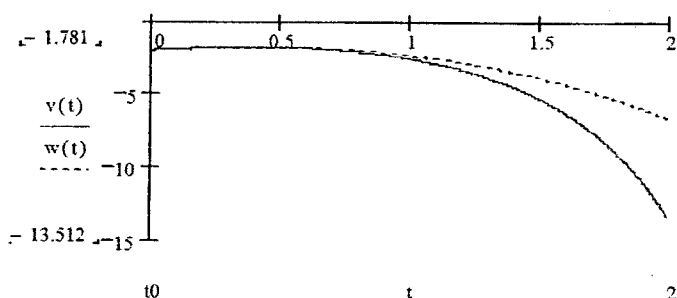


Рисунок 2.9

Приклад 2.25. Знайти наближений розв'язок задачі Коші диференціального рівняння $y''(x) = -x^2 y(x)$, $y(3) = 2$, $y'(3) = -1$.

Наближений розв'язок шукаємо у вигляді суми перших k членів ряду Тейлора, відмінних від нуля. Нехай $k=7$ і точка $x_0=3$.

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(6)}(x_0)}{6!}(x-x_0)^6.$$

Обчислимо значення похідних в точці $x_0 = 3$, скориставшись пакетом MathCAD.

$$y''(3):$$

$$-x^2 \cdot y(x) \text{ substitutex} = x3 \rightarrow -18$$

$$y'''(x), y'''(3):$$

$$-2 \cdot x \cdot y(x) - x^2 \cdot y'(x) \text{ substitutex} = x3 \rightarrow -3$$

$$y^{(4)}(x), y^{(4)}(3):$$

$$-2 \cdot y(x) - 4 \cdot x \cdot y'(x) + x^4 \cdot y(x) \text{ substitutex} = x3 \rightarrow 170$$

$$y^{(5)}(x), y^{(5)}(3):$$

$$-6 \cdot y'(x) - 4 \cdot x \cdot (-x^2 \cdot y(x)) + 4 \cdot x^3 \cdot y(x) + x^4 \cdot y'(x) \text{ substitutex} = x3 \rightarrow 357$$

$$y^{(6)}(x), y^{(6)}(3):$$

$$22 \cdot x^2 \cdot y(x) - 4 \cdot x \cdot (-2 \cdot x \cdot y(x) - x^2 \cdot y'(x)) + 8 \cdot x^3 \cdot y'(x) - x^6 \cdot y(x) \text{ substitutex} = x3 \rightarrow$$

$$\rightarrow -1242$$

Таким чином, наближений розв'язок у вигляді часткової суми ряду Маклорена має вигляд:

$$y(x) := 2 - (x-3) - \frac{18 \cdot (x-3)^2}{2!} - \frac{3}{3!}(x-3)^3 + \frac{170}{4!}(x-3)^4 + \frac{357}{5!}(x-3)^5 - \frac{1242}{6!}(x-3)^6.$$

На рис. 2.10 наведено графіки наближеного розв'язку $y(x)$ (пунктирна лінія) та наближеного розв'язку $v(x)$ (суцільна лінія), одержаного чисельним методом високої точності.

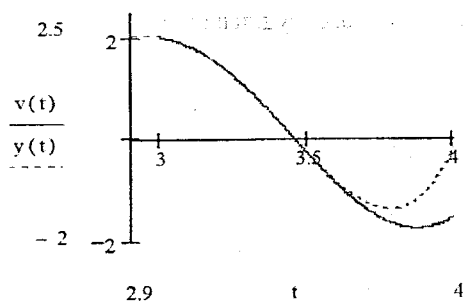


Рисунок 2.10

3 РЯДИ ФУР'Є

Теорія рядів Фур'є суттєво вплинула як на розвиток математичного аналізу, так і на застосування математики до розв'язування багатьох прикладних задач. Розділ "Ряди Фур'є" містить основні поняття, необхідні для засвоєння студентами багатьох інженерних дисциплін.

3.1 Періодичні функції

Означення. Функцію $f(t)$ називають періодичною на множині M , якщо існує таке число $T \neq 0$, що для всякого $t \in M$, $t \pm T \in M$ і $f(t + T) = f(t)$. Число T називають періодом функції $f(t)$.

У застосуваннях множина M частіше всього – множина всіх дійсних чисел.

Із означення періодичності функції випливає, що числа nT , $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ також будуть періодами функції $f(t)$. Наприклад,

$$f(t - 2T) = f((t - 2T) + T) = f(t - T) = f((t - T) + T) = f(t).$$

Далі через T будемо позначати найменший додатний період (якщо такий існує).

Приклади періодичних функцій

1. Найпростішою періодичною функцією є синусоїда лінійної функції, яку називають гармонікою

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.1)$$

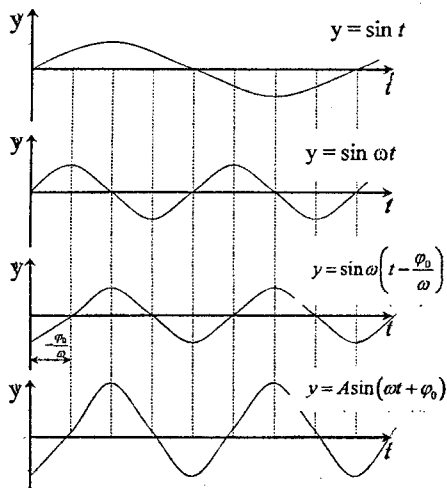


Рисунок 3.1

де A , ω , φ_0 – сталі. Період цієї функції $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Величина A

називається *амплітудою коливань*, аргумент $(\omega t + \varphi_0)$ – *фазою коливань*, де ω – *кругова фаза*; φ_0 – *початкова фаза*.

Величина $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ називається *частотою*, яка показує, скільки разів періодичне явище повторюється за одиницю часу.

Графік гармоніки (3.1) показаний на рис. 3.1. Такий графік отримують шляхом деформації синусоїди $y = \sin t$ в

ω разів в напрямку осі t , паралельним зсувом вздовж осі t на $-\frac{\varphi_0}{\omega}$ одиницю і збільшенням ординат точок графіка в A разів. Гармоніку (3.1) часто подають у вигляді

$$y = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (3.2)$$

де

$$a = A \sin \varphi_0, b = A \cos \varphi_0.$$

2. Періодичною є функція $f(t) = -t - k$, якщо $k - 1 \leq t < k + 1$, $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, $T = 2$. Графік цієї функції має такий вигляд (рис. 3.2):

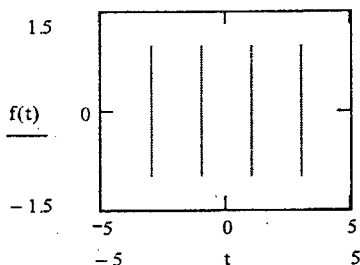


Рисунок 3.2

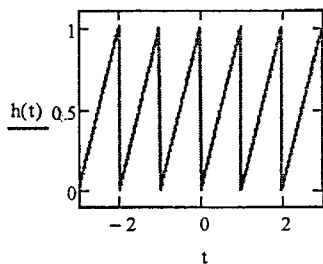


Рисунок 3.3

3. На рисунку 3.3 наведено графік періодичної функції $h(t) = \{t\}$ (де $\{t\}$ — дробова частина t), $T = 1$.

Завдання для самостійного виконання

За даним графіком періодичної функції задишіть один із можливих її аналітичних виразів.

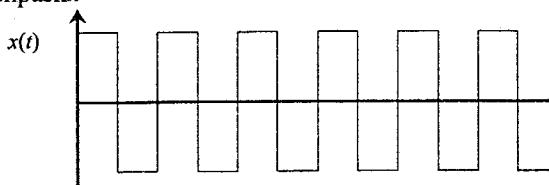


Рисунок 3.4

Властивості періодичних функцій

Властивість 1. Нехай функція $f(t)$ є T -періодичною на множині M і для довільного числа $w \neq 0$, і для довільного $t \in M$, $wt \in M$. Тоді функція $x(t) = f(wt)$ є періодичною на множині M і має період, що дорівнює T/w .

Дійсно, $x(t + T/w) = f(w(t + T/w)) = f(wt + T) = f(wt + T) = f(wt) = x(t)$.

Наприклад, функція $\sin(3t)$ має період, що дорівнює $\frac{2\pi}{3}$; для функції $\sin(\frac{t}{2})$ найменший період дорівнює числу 4π .

Властивість 2. Нехай функція $f_1(t)$ має період T_1 ; функція $f_2(t)$ має період T_2 ; $T_1 : T_2 = p_1 : p_2$, де p_1 і p_2 — цілі числа. Тоді функція $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$, де c_1 і c_2 довільні числа, є періодичною з періодом $T = p_1 T_2 = p_2 T_1$.

Оскільки числа p_1 і p_2 цілі, то число $T = p_1 T_2 = p_2 T_1$ є періодом як функції $f_1(t)$, так і функції $f_2(t)$, а тому:

$$f(t+T) = c_1 f_1(t+T) + c_2 f_2(t+T) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = f(t).$$

Має місце і узагальнене твердження.

Нехай функція $f_1(t)$ має період T_1 ; $f_2(t)$ має період T_2 ; ...; $f_n(t)$ має період T_n ; і $T_1 : T_2 : \dots : T_n = p_1 : p_2 : \dots : p_n$, де $p_1 : p_2 : \dots : p_n$ — цілі числа. Тоді функція $f(t) = c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t)$ є періодичною з періодом, що дорівнює числу $T = (\text{НСК періодів } T_1, T_2, \dots, T_n)$. (НСК — найменше спільне кратне)

Приклад 3.1. Знайти період функції

$$f(t) = \sin^4 t / 3 + 3 \sin^2 t / 5$$

Тут $T_1 = 6\pi$, $T_2 = 10\pi$, $T_3 = 14\pi$. НСК(6π , 10π , 14π) = 210π , це число і буде найменшим періодом функції $f(t)$.

Зауваження. Якщо періоди функцій неспільновимірні, то їх лінійна комбінація вже не буде періодичною функцією. Так, наприклад, функція $f(t) = \sin t + \sin(t\sqrt{2})$ не є періодичною — це приклад функції, які називають майже періодичними функціями.

Властивість 3. Якщо періодична функція $f(t)$ з періодом T інтегрована на будь-якому проміжку $[0, a]$, то вона інтегрована і на проміжку $[T, a+T]$, і виконується рівність

$$\int_0^a f(t) dt = \int_T^{T+a} f(t) dt.$$

Внаслідок періодичності функції $f(t)$

$$\int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(t+T) d(t+T) = \left| \begin{array}{l} t+T=x, \\ t=0, x=T, \\ t=a, x=T+a \end{array} \right| = \int_T^{T+a} f(t) dt.$$

Наслідок

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{T+a} f(t) dt$$

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + \int_a^T f(t) dt = \int_T^{T+a} f(t) dt + \int_a^T f(t) dt = \int_a^{T+a} f(t) dt.$$

Геометрична ілюстрація властивості 3 і наслідку:

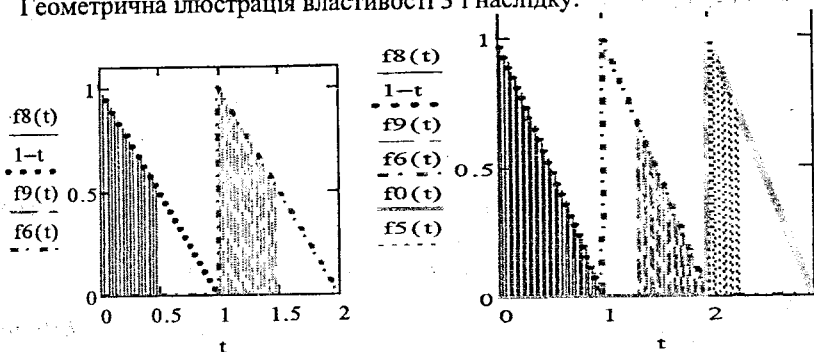


Рисунок 3.5

3.2 Гармоніки

Означення. Функція синуса або косинуса лінійного аргументу називається гармонікою

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad \text{або} \quad f(t) = A \cos(\omega t + \phi_0). \quad (3.3)$$

Зміст параметрів з'ясовано у п. 3.1.

Більшість фізичних процесів, наприклад, вільне коливання математичного маятника, змінний струм в коливальному контурі та інші описуються диференціальним рівнянням.

Приклад 3.2. Знайти характер зміни напруги струму на конденсаторі контуру, зображеного на рис. 3.6.

Запишемо рівняння, яке характеризує зміну напруги в контурі.

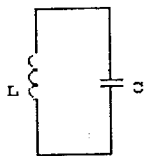


Рисунок 3.6

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + U_c = 0. \quad \text{Розв'язок рівняння має вигляд}$$

$$u_c = A_1 \cos$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} t + A_2 \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t,$$

$$\text{де } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Відповідь можна записати також у вигляді гармоніки $U_c = A \cos(\omega t + \varphi)$. Формули для обчислення A та φ будуть наведені нижче.

Для побудови гармоніки $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ достатньо побудувати її на періоді T . Для цього необхідно:

1. Визначити одну з точок перетину гармоніки з віссю ot : $\cos(\omega t + \varphi) = 0$ звідси, наприклад, $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$ та $t_0 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$. Цю точку вибираємо як початок відрізка довжиною $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. Знайти кінцеву точку цього відрізка

$$t_2 = t_0 + T = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} = \frac{5\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}.$$

3. Визначити середину відрізка $t_1 = \frac{t_2 + t_0}{2} = \frac{3\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$, де гармоніка також перетинає вісь $0t$.

4. На вказаному відрізку $\{t_0, t_2\}$ побудувати графік функції $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

5. Визначити точки $t_1 = \frac{1}{2}(t_1 + t_0)$ та $t_2 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, в яких гармоніка приймає максимальне значення A та мінімальне значення $-A$, тощо.

6. Продовжити отриманий графік на всю числову вісь, отримаємо графік гармоніки $f(t) = A(\cos \omega t + \varphi)$

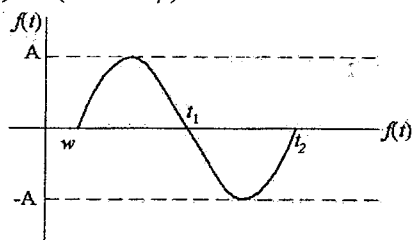


Рисунок 3.7

3.2.1 Додавання гармонік з однаковими частотами

Гармоніки є найбільш простими, але, в той же час, і дуже важливими періодичними функціями. В застосуваннях часто розглядають функції, які зображуються сумами гармонік. Важливо те, що при додаванні гармонік з однаковими частотами отримують гармоніку з тією ж частотою. Спочатку розглянемо додавання найпростіших гармонік.

Теорема. Сума двох найпростіших гармонік є гармонікою вигляду (3.3).

Розглянемо найпростіші гармоніки $a \cos \omega t$ та $b \sin \omega t$.

Тоді $a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t$,

$$\text{де } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{b}{a}. \quad (3.4)$$

Далі у згорнутому вигляді запишемо:

$$A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Приклад 3.3. Додати найпростіші гармоніки $3\cos 7t$ та $4\sin 7t$.

Оскільки сума $3\cos 7t + 4\sin 7t$ є гармонікою, то знаходимо амплітуду A та фазу φ за формулами (3.4)

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{4}, \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{3}{4},$$

тобто

$$3\cos 7t + 4\sin 7t = 5\cos(7t - \operatorname{arctg} \frac{3}{4}) = 5\cos(7t - 0,644).$$

Висновки. При додаванні простих гармоніки з однаковими частотами $f_1(t) = a\cos \omega t$ та $f_2(t) = b\sin \omega t$ необхідно:

1. Знайти амплітуду A гармоніки за формулою $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Знайти початкову фазу φ із рівняння $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{b}{a}$.
3. Записати результат: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Розглянемо додавання гармонік $f_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ та $f_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$.

Теорема. Сума двох гармонік з однаковими частотами є гармонікою тієї ж частоти.

Під час доведення застосовуються формули тригонометрії.

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = \\ &= A_1\cos \omega t \cos \varphi_1 - A_1\sin \omega t \sin \varphi_1 + A_2\cos \omega t \cos \varphi_2 - A_2\sin \omega t \sin \varphi_2 = \\ &= (A_1\cos \varphi_1 + A_2\cos \varphi_2)\cos \omega t - (A_1\sin \varphi_1 + A_2\sin \varphi_2)\sin \omega t = a\cos \omega t - b\sin \omega t = \\ &= A\cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

де позначено $a = A_1\cos \varphi_1 + A_2\cos \varphi_2$, $b = A_1\sin \varphi_1 + A_2\sin \varphi_2$,

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (3.5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a}{b} = -\frac{A_1\cos \varphi_1 + A_2\cos \varphi_2}{A_1\sin \varphi_1 + A_2\sin \varphi_2}. \quad (3.6)$$

Приклад 3.4. Знайти суму гармонік $f_1(t) = 3,2\cos(5t - 2)$ та $f_2(t) = 2,7\cos(5t + \frac{\pi}{3})$.

Відповідно до теореми про суму двох гармонік з однаковими частотами, сума даних гармонік є гармонікою, параметри A та φ якої знаходимо за формулами (3.5), (3.6).

$$A = \sqrt{3,2^2 + 2,7^2 + 2 \cdot 3,2 \cdot 2,7 \cdot \cos(2 + \frac{\pi}{3})} = 0,571777. \quad (3.7)$$

Початкову фазу φ знаходимо з рівняння:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3.2 \cos(-2) + 2.7 \cos \frac{\pi}{3}}{3.2 \sin(-2) + 2.7 \sin \frac{\pi}{3}} = 0.032075 \quad (3.8)$$

$\phi = 0.032064$ тоді $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 0.572 \cos(5t + 0.032)$.

Висновок: При додаванні гармонік з однаковими частотами $f_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ та $f_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ необхідно:

1. Знайти амплітуду A за формулою (3.7);
2. Знайти початкову фазу φ з рівняння (3.8);
3. Записати результат $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

Для відшукування амплітуди і фази сумарної гармоніки існує декілька методів. Аналітичний метод наведено у висновках. Проте він не досить зручний під час додавання великої кількості гармонік, тому в застосуваннях отримали розповсюдження графічний метод і метод комплексних гармонік.

Графічний метод

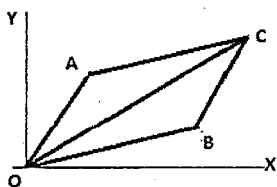


Рисунок 3.8

Кожну гармоніку будемо зображати у вигляді вектора, який обертається навколо початку координат з кутовою швидкістю ω , причому довжина такого вектора нехай дорівнює амплітуді відповідної гармоніки. На рис. 3.8 вектор OA зображає гармоніку $f_1(t)$, а вектор OB — гармоніку $f_2(t)$. Розглянемо вектор $OC = OA + OB$, цей вектор також буде обертатися навколо

початку координат з кутовою швидкістю ω , а оскільки проекції векторів OA і OB на вісь OX в будь-який момент часу дають значення гармонік $f_1(t)$ і $f_2(t)$, то і проекція вектора OC на вісь OX — це значення гармоніки $f_1(t) + f_2(t)$, тобто, сума гармонік. З цього випливає такий спосіб знаходження амплітуди та фази суми гармонік.

Будуємо систему координат і вектори OA і OB , довжини яких дорівнюють амплітудам гармонік $x_1(t)$ та $x_2(t)$, а кути, які утворюють вектори OA і OB з віссю OX , відповідно дорівнюють фазам гармонік.

Знаходимо суму векторів OA і OB , одержуємо вектор OC , тоді довжина цього вектора буде дорівнювати амплітуді гармоніки $f_1(t) + f_2(t)$, а кут, який утворює вектор з віссю OX дорівнює фазі гармоніки $f_1(t) + f_2(t)$.

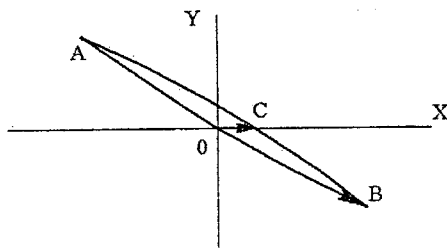


Рисунок 3.9

3.2.2 Додавання гармонік із сумірними частотами

Нехай дано гармоніки з різними частотами ω_1 та ω_2

$$f_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{та} \quad f_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Означення. Частоти ω_1 та ω_2 називаються сумірними, якщо їх відношення є раціональним числом, тобто $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$ де $p, q \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо суму гармонік $f_1(t) + f_2(t)$.

Теорема. Сума гармонік $f_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ та $f_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ частоти ω_1 та ω_2 , яких сумірні, є періодичною функцією, але не є гармонікою.

Розглянемо суму гармонік $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = A_1 \cos \omega_1 t \cos \varphi_1 - \\ &\quad - A_1 \sin \varphi_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \varphi_2 \cos \omega_2 t - A_2 \sin \varphi_2 \sin \omega_2 t \end{aligned}$$

Ця сума є періодичною функцією. Дійсно:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}; \quad \frac{p}{q} = \frac{2\pi T_2}{T_1 2\pi} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{та} \quad T = T_1 p = T_2 q \quad \text{є періодом.}$$

Тоді;

$$\begin{aligned} f(t+T) &= A_1 \cos(\omega_1(t+T) + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2(t+T) + \varphi_2) = \\ &= A_1 \cos(\omega_1 t + \omega_1 T + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \omega_2 T + \varphi_2) = \\ &= A_2 \cos(\omega_1 t + \omega_1 T_1 \cdot p + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \omega_2 T_2 q + \varphi_2) = \\ &= A_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + 2\pi p) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + 2\pi q) = \\ &= A_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = f(t). \end{aligned}$$

Отже, сума є періодичною функцією, проте вона не є гармонікою, оскільки її не можна виразити у вигляді двох доданків, тобто у вигляді $A \cos(\omega t + \varphi)$.

Приклад 3.5. Знайти суму гармонік $f_1(t) = \cos 8t$, $f_2(t) = \cos 6t$.

За формулою додавання косинусів маємо:

$$f(t) = \cos 8t + \cos 6t = 2 \cos t \cos 7t.$$

Ця функція періодична, але не є гармонікою.

На рис. 3.10 наведено графік функції $f(t) = \cos 8t + \cos 6t = 2 \cos t \cos 7t$.

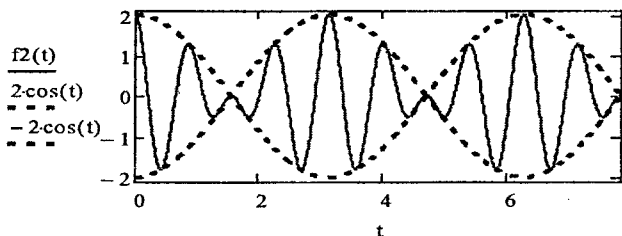


Рисунок 3.10

Функцію $f(t) = 2 \cos t \cos 7t$ можна розглядати формально як гармоніку $\cos 7t$ з частотою $\omega = 7$ та змінною амплітудою $A = 2 \cos t$, яка змінюється за гармонічним законом з періодом $T = 2\pi / (\omega_2 - \omega_1) = 2\pi / (8 - 6) = \pi$. Амплітуда змінюється від значення рівного нулю або деякого мінімального значення до максимального (рис. 3.9 пунктирна лінія). Такі періодичні коливання з періодично змінною амплітудою, які не є гармоніками, називаються биттям. Це – інтерференція гармонічних хвиль з неоднаковими частотами.

3.2.3 Період суми n гармонік

Розглянемо n гармонік $f_k(t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$, де $k=1, 2, \dots, n$.

Означення. Сума вигляду $T_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$ називається тригонометричним багаточленом.

Тригонометричний багаточлен $T_n(t)$ є періодичною функцією, якщо частоти $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ сумірні.

Знайдемо період T тригонометричного багаточлена

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

Для цього:

1. Знайдемо відношення періодів $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$. Наприклад, до періоду T_n :

$$\frac{T_1}{T_n} = \frac{q_1}{\rho_1}, \frac{T_2}{T_n} = \frac{q_2}{\rho_2}, \dots, \frac{T_{n-1}}{T_n} = \frac{q_{n-1}}{\rho_{n-1}}.$$

2. Знаходимо найменше спільне кратне (НСК) чисельників $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$. Нехай

$$r_{n-1} = HCK(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}).$$

3. Тоді період $T = r_{n-1} \cdot T_n$

Приклад 3.6. Знайти період тригонометричного багаточлена:

$$f(t) = 2 \cos\left(\frac{3}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(2t - \frac{\pi}{7}\right) + 2 \cos\left(\frac{3}{5}t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Знайдемо $\omega_1 = \frac{3}{2}$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = \frac{3}{5}$ та відповідно $T_1 = \frac{4\pi}{3}$, $T_2 = \pi$,

$$T_3 = \frac{10\pi}{3}.$$

Розглянемо відношення: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{3}$; $\frac{T_3}{T_2} = \frac{10}{3}$. Знаходимо $HCK(4, 10) = 20$,

тоді $T = 20 \cdot T_2 = 20\pi$. Графік функції наведено на рис. 3.11.

Зауваження: При іншому відношенні результат буде таким же. Наприклад.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{4}, \frac{T_3}{T_1} = \frac{5}{2}, \text{ тоді } HCK(3, 5) = 15 \quad T = 15 T_1 = 15 \cdot \frac{4}{3} \pi = 20\pi.$$

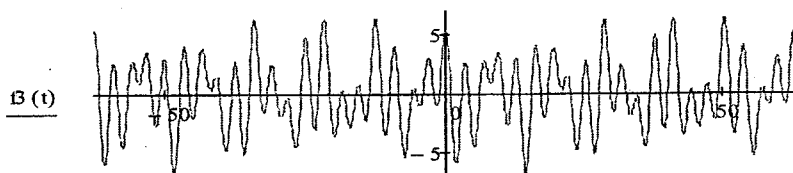


Рисунок 3.11

Приклад 3.7. Знайти період тригонометричного багаточлена

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

Знаходимо $\omega_k = k\omega$, $k=1, \dots, n$ та $T_k = \frac{2\pi}{k\omega}$, $k=1, \dots, n$.

Обчислимо відношення $\frac{T_1}{T_n} = n$, $\frac{T_2}{T_n} = \frac{n}{2}$, ..., $\frac{T_{n-1}}{T_n} = \frac{n}{n-1}$.

$HCK(n, n/2, \dots, n/(n-1)) = n$ і тоді $T = n \cdot \frac{2\pi}{n\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Отже, період тригонометричного багаточлена дорівнює періоду гармоніки з найменшою частотою.

3.2.4 Додавання гармонік із несумірними частотами

Розглянемо гармоніки $f_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ та $f_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$.

Означення. Частоти ω_1 та ω_2 називаються несумірними, якщо їх відношення не є раціональним числом, тобто $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{p}{q}$ де $p, q \in \mathbb{Z}$.

Теорема. Якщо частоти ω_1, ω_2 гармонік $f_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ та $f_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ несумірні, то сума таких гармонік не є періодичною функцією.

Нехай існує таке T , що $f_1(t+T) + f_2(t+T) = f_1(t) + f_2(t)$ тоді

$$\begin{aligned} f_1(t+T) + f_2(t+T) &= A_1 \cos(\omega_1(t+T) + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2(t+T) + \phi_2) = \\ &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1 + \omega_1 T) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2 + \omega_2 T). \end{aligned}$$

Але

$$\omega_1 T \neq p2\pi,$$

$$\omega_2 T \neq q2\pi.$$

Оскільки ω_1 та ω_2 несумірні, то хоча б один з доданків $A_i \cos(\omega_i t + \phi_i + \omega_i T) \neq A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $i=1,2$ не є гармонікою, що доводить теорему.

Приклад 3.8. Функції $f(t) = 2\cos(3t - 4) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{3}t + 2)$ та $g(t) = 1.2\cos(\pi t + 1) + 4\cos(t - 2)$ не є періодичними функціями, оскільки в першому випадку $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \neq \frac{p}{q}$, а в другому випадку $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\pi}{1} \neq \frac{p}{q}$.

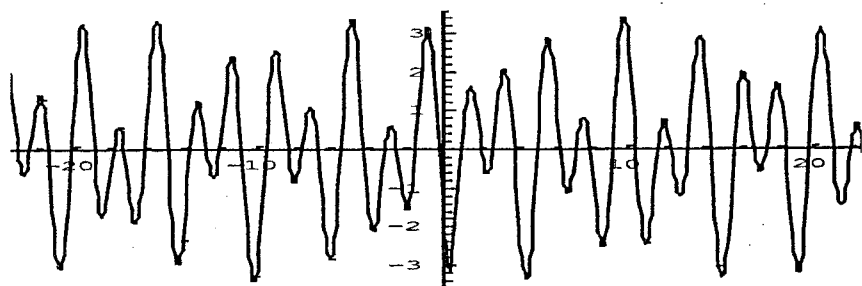


Рисунок 3.12

3.2.5 Спектри тригонометричного багаточлена

Розглянемо функцію $f(t)$, яка називається *тригонометричним багаточленом* і позначається

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \phi_k). \quad (3.9)$$

Для того щоб відтворити сигнал достатньо знати дві характеристики – амплітудний та фазовий спектри (не обов'язково сигнал вигляду $T_n(t)$), або деякі множини чисел, які називаються спектрами. Знання про спектри дають можливість фахівцеві вибирати смуги пропускання передавачів та приймачів, оцінювати взаємні завади при частотному розподілі каналів, а також розв'язувати інші задачі радіотехніки, електротехніки і інших галузей науки і техніки.

Означення. Амплітудним спектром функції $T_n(t)$ називається множина амплітуд $\{A_k\}^n$, відповідних частотам $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$. Фазовим спектром функції $T_n(t)$ називається множина фаз $\{\phi_k\}^n$, відповідних частотам $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$.

Графіками амплітудного та фазового спектрів є множина точок на площині (рис 3.13 та 3.14).

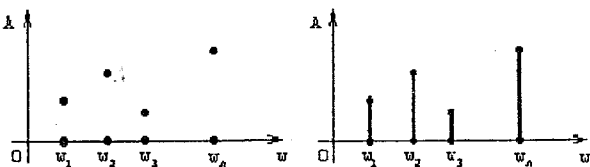


Рисунок 3.13 – Амплітудний спектр

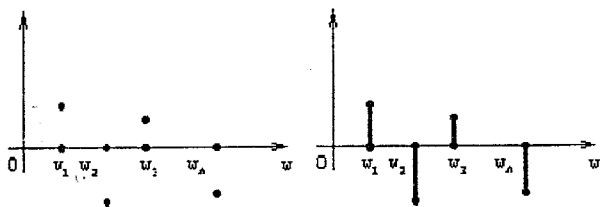


Рисунок 3.14 – Фазовий спектр

Приклад 3.9. Знайти амплітудний та фазовий спектри функції

$$T_3(t) = 2 \cos(3t + 1) + 1.5 \cos(2t + \frac{\pi}{2}) + 0.2 \cos(t - \frac{\pi}{3}).$$

Визначаємо частоти $\omega_1=1, \omega_2=2, \omega_3=3$. Відповідні цим частотам амплітуди $A_1=0.2, A_2=1.5, A_3=2$, а фази дорівнюють $\varphi_1=-\frac{\pi}{3}, \varphi_2=\frac{\pi}{2}, \varphi_3=1$. Таким чином, амплітудно-частотний спектр має вигляд

ω	1	2	3
A	0.2	1.5	2

а фазово-частотний має вигляд

ω	1	2	3
φ	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	1

На рис. 3.13 і 3.14 зображено графіки цих спектрів.

Показник якості системи часто позначають у вигляді інтегрального показника $F(\alpha)$. Якщо $f(t) \in [0, T]$ деякий сигнал, а $y(t, \alpha)$ – його наближення, то показник точності наближення має вигляд:

$$F(\alpha) = \sqrt{\int_0^T (y(t, \alpha) - f(t))^2 dt}.$$

Розглянемо його застосування на прикладі тригонометричного багаточлена.

Приклад 3.10. Для функції $f(t)$, $t \in [0, 3\pi]$ знайти тригонометричний многочлен $T(t) = \alpha + \beta \cos t + \gamma \cos 2t$, $t \in R$, який мінімізує норму $G(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\int_0^{3\pi} (\alpha + \beta \cdot \cos(t) + \gamma \cdot \cos(2 \cdot t) - f(t))^2 dt}.$$

Знайдемо частинні похідні за параметрами α, β, γ . Нижче наведено приклад запису похідної за параметром γ .

$$\frac{d}{d\gamma} \left[\int_0^{3\pi} (\alpha + \beta \cdot \cos(t) + \gamma \cdot \cos(2 \cdot t) - f(t))^2 dt \right]^{0.5}.$$

Прирівнявши похідні до нуля, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно параметрів α, β, γ

$$\left[\int_0^{3\pi} (2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta \cdot \cos(t) + 2 \cdot \gamma \cdot \cos(2 \cdot t) - 2 \cdot f(t)) dt \right] = 0,$$

$$\left[\int_0^{3\pi} 2 \cdot (\alpha + \beta \cdot \cos(t) + \gamma \cdot \cos(2 \cdot t) - f(t)) \cdot \cos(t) dt \right] = 0,$$

$$\left[\int_0^{3\pi} 2 \cdot (\alpha + \beta \cdot \cos(t) + \gamma \cdot \cos(2 \cdot t) - f(t)) \cdot \cos(2 \cdot t) dt \right] = 0.$$

Розв'язок системи має вигляд:

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{\int_0^{3\pi} f(t) dt}{\pi} \quad \beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{\int_0^{3\pi} f(t) \cdot \cos(t) dt}{\pi} \quad \gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{\int_0^{3\pi} f(t) \cdot \cos(2 \cdot t) dt}{\pi}$$

На прикладі функції $f(t) := t$ $t \in [0, 3\pi]$ оцінимо якість наближення тригонометричними багаточленами $f_1(t)$ і $f_2(t)$.

$$f_1(t) := 4.712 + 2 \cdot \sin(t) - \sin(2 \cdot t) + 0.667 \cdot \sin(3 \cdot t) - 0.5 \cdot \sin(4 \cdot t) + 0.4 \cdot \sin(5 \cdot t),$$

$$f_2(t) := 4.712 - 0.424 \cdot \cos(t).$$

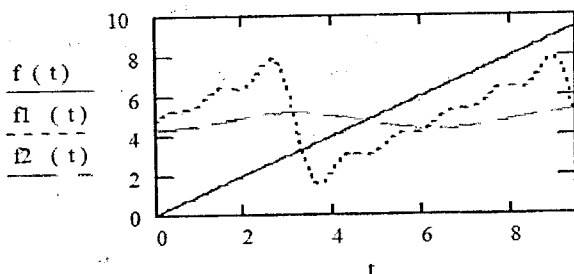


Рисунок 3.15

Значення показника точності наближення, функції $f(t)$ тригонометричними багаточленами $f_1(t)$ і $f_2(t)$ такі: $G(4,712; 2, -1; 0,667 - 0,5; 0,4) = 9,21$, $G(4,712 - 0,424; 0) = 8,302$. Тобто, якість наближення багаточленом $f_2(t)$ вища, ніж багаточленом $f_1(t)$. Графік на рис. 3.15 ілюструє одержані результати обчислень.

3.2.6 Комплексна гармонічна функція

При дослідженні гармонічних коливань, що описуються функціями $f_1(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, та $f_2(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$, які зсунуті одна відносно одної на чверть періоду, зручно розглядати ці коливання одночасно. Тоді замість двох функцій використовують одну комплекснозначну функцію:

$$f(t) = f_1(t) + j f_2(t) = A_0 [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)] = A_0 e^{j(\omega t + \phi)} = A_0 e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}.$$

Нехай $A_0 e^{j\phi} = A$, тоді функція $f(t)$ може бути подана у такому вигляді

$$f(t) = A e^{j\omega t}. \quad (3.10)$$

Амплітуда A називається комплексною. Амплітуда гармоніки A_0 та початкова фаза φ визначаються із співвідношень:

$$A_0 = |A|, \quad \varphi = \arg A.$$

Коливання, що виражені формулою (3.10) називаються *комплексними коливаннями*.

Гармоніки можна подати, як дійсну і уявну частини комплексного коливання

$$f_1(t) = \operatorname{Re} f(t), \quad f_2(t) = \operatorname{Im} f(t).$$

Комплексна форма запису напруги струму дозволяє спростити розрахунки, що пов'язані з лінійними операціями над вказаними величинами (додавання струмів чи напруг, диференціювання, інтегрування).

Оскільки $f_1(t) = \operatorname{Re} f(t)$, то кожній гармоніці можна однозначно поставити у відповідність комплексну гармоніку і навпаки, за комплексною гармонікою завжди легко відновити дійсну гармоніку. Тому в застосуваннях їх часто отождествлюють і працюють з комплексними гармоніками. Звідси випливає ще один метод додавання гармонік: нехай потрібно додати гармоніки

$$f_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{і} \quad f_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

додамо відповідні комплексні гармоніки $z_1(t) = \tilde{A}_1 e^{i\omega t}$ і $z_2(t) = \tilde{A}_2 e^{i\omega t}$, тоді одержимо $z(t) = (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) e^{i\omega t}$.

$$\text{Звідки } f_1(t) + f_2(t) = \operatorname{Re} z(t).$$

Оскільки комплексні числа можна зображати векторами, то по суті розглянутий метод додавання гармонік рівносильний методу обертових векторів.

3.3 Ортогональні та ортонормовані системи функцій

Розглянемо послідовність функцій

$$f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), \quad (3.11)$$

визначених на відрізку $[a, b]$ і не рівних тотожно нулю на $[a, b]$. Множину функцій (3.11) називають *системою функцій*.

Важливу роль (в подальшому викладі матеріалу, а в математиці, взагалі) відіграє поняття скалярного добутку двох функцій, аналогічне до поняття скалярного добутку двох векторів.

Означення. Скалярним добутком інтегрованих на $[a, b]$ функцій $f(t)$ та $g(t)$ називається інтеграл від добутку цих функцій

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (3.12)$$

Властивості скалярного добутку (3.12) аналогічні властивостям скалярного добутку векторів.

Означення. Нормою (f) функції $f(t) \in [a, b]$ називається

$$\|f\|^{def} = \sqrt{\int_a^b [f(t)]^2 dt}. \quad (3.13)$$

Відповідно до (3.11) маємо $(f) = \sqrt{(f, f)}$. Відмітимо фізичне тлумачення введеного поняття норми. Якщо $S(t)$ – сигнал, то величину $\int_a^b [S(t)]^2 dt$ називають енергією сигналу. В радіотехніці сигнал часто

характеризують сумарним енергетичним ефектом, наприклад, кількістю теплоти, що виділяється в резисторі. Як така характеристика

використовується енергетична норма $(S) = \sqrt{\int_a^b [S(t)]^2 dt}$. Крім того

необхідність такого означення полягає в тому, що ця енергетична норма є “байдужою” до зміни форми сигналу навіть до великих, але таких, що проходять за досить малі відрізки часу. Наприклад, енергії сигналів, що вказані на рис. 3.16, відрізняються незначно

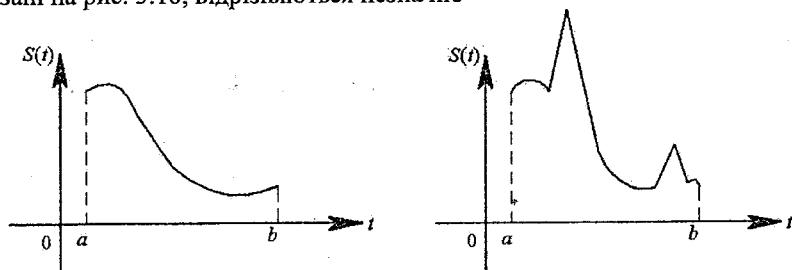


Рисунок 3.16

Означення. Функція $f(t), t \in [a, b]$, називається нормованою на відріжку $[a, b]$, якщо $(f) = 1$

Приклад 3.11. Знайти норми функцій

$$f_1(t) = 1, f_2(t) = \cos \frac{n\pi t}{l}, f_3(t) = \sin \frac{n\pi t}{l}, \text{ при } t \in [-l, l].$$

$$\|f_1\|^2 = \int_{-l}^l 1^2 dt = t \Big|_{-l}^l = 2l, \|f_1\| = \sqrt{2l},$$

$$\|f_2\|^2 = \int_{-l}^l \cos^2 \frac{\pi n t}{l} dt = \int_{-l}^l \frac{1 + \cos \frac{2n\pi t}{l}}{2} dt = l, \|f_2\| = \sqrt{l},$$

$$\|f_3\|^2 = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{\pi n t}{l} dt = \int_{-l}^l \frac{1 - \cos \frac{2n\pi t}{l}}{2} dt = l, \|f_3\| = \sqrt{l}.$$

Приклад 3.12. Пронормувати функції прикладу 3.11.

Щоб нормувати функції $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ потрібно поділити їх на відповідні норми, Отримаємо:

$$g_1(t) = \frac{f_1(t)}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2l}}, g_2(t) = \frac{f_2(t)}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi t}{l},$$

$$g_3(t) = \frac{f_3(t)}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi t}{l}$$

Функції $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ будуть нормованими на відрізку $[-l, l]$.

Означення. Система функцій (10) інтегрованих на відрізку $[a, b]$ називається ортогональною при $t \in [a, b]$, якщо $(f_i, f_j) = \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt = 0$ при $i \neq j$ та $(f_i, f_i) = \int_a^b f_i(t) f_i(t) dt > 0$ при $i = j$.

Означення. Система функцій (10) називається ортонормованою, якщо $(f_i, f_j) = 0$ $i \neq j$ та $(f_i, f_i) = 1$ при $i = j$.

Розглянемо приклади ортогональних та ортонормованих систем функцій.

Зауваження. Розглядають також ортогональні на відрізку $[a, b]$ з вагою $\rho(x)$:

$$\int_a^b \rho(t) f_i(t) f_j(t) dt = 0.$$

Приклад 3.13. Довести, що

а) функції $f_1(t) = \cos \frac{n\pi t}{l}$ та $f_2(t) = \sin \frac{n\pi t}{l}$ ортогональні на відрізку $[-l, l]$,

б) функції $g_1(t) = t$, $g_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}$ ортогональні на відрізку $[-1, 1]$.

а) обчислимо;

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f_1(t) \cdot f_2(t) dt &= \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi t}{l} \sin \frac{m\pi t}{l} dt = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin \frac{\pi(m+n)}{l} t dt + \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin \frac{\pi(m-n)}{l} t dt = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\pi(m+n)} \cos \frac{\pi(m+n)t}{l} \Big|_{-l}^l - \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\pi(m-n)} \cos \frac{\pi(m-n)t}{l} \Big|_{-l}^l = \\ &= -\frac{l}{2\pi(m+n)} [\cos \pi(m+n) - \cos \pi(m+n)] - \\ &= -\frac{l}{2\pi(m-n)} [\cos \pi(m-n) - \cos \pi(m-n)] = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, функції $\cos \frac{n\pi t}{l}$, $\sin \frac{m\pi t}{l}$ ортогональні на відрізку $[-l, l]$.

б) обчислимо:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g_1(t) \cdot g_2(t) dt &= \int_{-1}^1 \frac{t(3t^2-1)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3t^3 - t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} t^4 \Big|_{-1}^1 - \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Таким чином, функції t та $\frac{1}{2}(3t^2-1)$ ортогональні на проміжку $[-1, 1]$.

Приклад 3.14

1. Система функцій

$$1, \cos \frac{\pi t}{T}, \sin \frac{\pi t}{T}, \dots, \cos \frac{k\pi t}{T}, \sin \frac{k\pi t}{T}, \dots \quad (3.14)$$

ортогональна на проміжку $[-T, T]$.

2. Система функцій

$$\sin \frac{\pi t}{T}, \sin \frac{2\pi t}{T}, \dots, \sin \frac{k\pi t}{T}, \dots \quad (3.15)$$

ортогональна при $t \in [0, T]$.

3. Система функцій

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots, \cos(kt), \sin(kt), \dots \quad (3.16)$$

ортогональна при $t \in [-\pi, \pi]$.

4. Система багаточленів Лежандра

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = t, P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \dots, P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n], \dots \quad (3.17)$$

ортогональна при $t \in [-1, 1]$.

5. Система функцій Бесселя $\{J_p(t)\}$, μ_n – n -й додатний корінь функції $J_p(t)$, ортогональна на проміжку $[0, T]$ з вагою t , тобто $\int_0^T t \cdot J_p(\frac{\mu_i t}{T}) J_p(\frac{\mu_j t}{T}) dt = 0$ при $i \neq j$.

6. Система функцій

$$\frac{1}{\sqrt{2T}}, \frac{\cos \frac{\pi t}{T}}{\sqrt{T}}, \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\sqrt{T}}, \dots, \frac{\cos \frac{k\pi t}{T}}{\sqrt{T}}, \frac{\sin \frac{k\pi t}{T}}{\sqrt{T}}, \dots \quad (3.18)$$

є ортонормованою при $t \in [-T, T]$ (див. приклад 3.11).

7. Важливу роль в дослідженні радіотехнічних сигналів відіграє система ортонормованих функцій Уолша $Wal(k, t)$. На рис. 3.17 наведено графіки перших чотирьох функцій: $w0(x) = 1$, $w1(x) = \text{sign}(\sin(2\pi x))$, $w2(x) = \text{sign}(\sin(4\pi x))$, $w3(x) = w1(x) * w2(x)$, $w4(x) = \text{sign}(\sin(8\pi x))$, $w5(x) = w0(x) * w2(x)$, $w6(x) = w2(x) * w1(x)$, $w7(x) = w2(x) * w1(x) * w0(x)$, $w8(x) = \text{sign}(\sin(16\pi x))$.

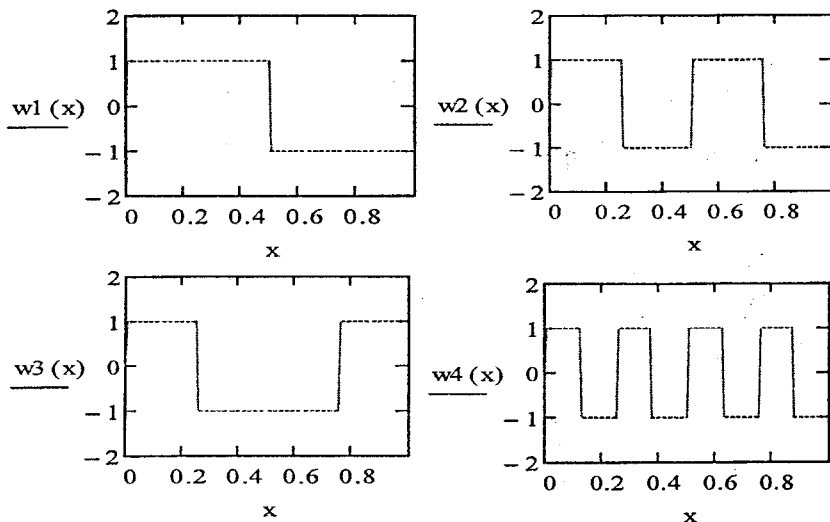


Рисунок 3.17 – Графіки функцій Уолша $Wal(0, t)$, $Wal(1, t)$, $Wal(2, t)$, $Wal(3, t)$

Завдання для самостійної роботи

1. Доведіть ортогональність системи функцій $1, \cos \frac{\pi t}{l}, \cos \frac{2\pi t}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{l}, \dots$ на відрізку $[0, l]$.

2. Задано систему функцій Радемахера

$$\phi_n(t) := \text{sign}(\sin(2^{n+1} \cdot \pi \cdot t)),$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. Доведіть її ортонормованість на $[0; 1]$. На рис. 3.18 наведено приклад графіка функції $\phi_3(t)$.

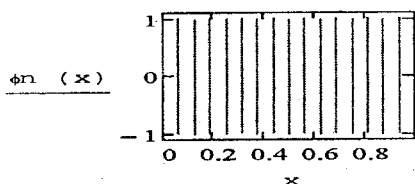


Рисунок 3.18

3.4 Розвинення функцій в ряд Фур'є за ортогональними системами функцій

Нехай на проміжку $[a, b]$ задано ортогональну систему функцій

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots \quad (3.19)$$

Означення. Ряд

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(t), \quad (3.20)$$

де $c_n, n=1, 2, \dots$ — довільні числові коефіцієнти, називається рядом Фур'є за ортогональною системою функцій (3.19).

Побудуємо ряд (3.20) функції $f(t)$, заданої на відрізку $[a, b]$.

Нехай на проміжку $[a, b]$ задано неперервну функцію $f(t)$ і ортогональну систему функцій (3.19). Припустимо, що $f(t)$ може бути подана рядом за системою (3.19), тобто, при $t \in [a, b]$ маємо:

$$f(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) + \dots \quad (3.21)$$

де $c_n, n=1, 2, \dots$ — коефіцієнти.

Визначимо ці коефіцієнти за умови, що ряди

$$f(t)\varphi_k(t) = c_1\varphi_1(t) \cdot \varphi_k(t) + \dots + c_k\varphi_k(t) \cdot \varphi_k(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \cdot \varphi_k(t) + \dots \quad (3.22)$$

для $k = 1, 2, \dots$, можемо почленно інтегрувати при $t \in [a, b]$. Ряд (3.22) одержано із ряду (3.21) множенням на функцію $\varphi_k(t)$. Зінтегруємо ліву та праву частину ряду (3.22)

$$\int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt = c_1 \int_a^b \varphi_1(t) \cdot \varphi_k(t)dt + \dots + c_k \int_a^b [\varphi_k(t)]^2 dt + \dots + c_n \int_a^b \varphi_n(t) \cdot \varphi_k(t)dt + \dots$$

За означенням ортогональності системи функцій (3.19) всі інтеграли, окрім одного, дорівнюють нулю:

$$\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_k(t)dt = 0 \text{ при } k \neq i \text{ та позначимо } \int_a^b [\varphi_k(t)]^2 dt = (\varphi_k)^2.$$

Тоді отримаємо

$$\int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt = c_k (\varphi_k, f).$$

Отже, формули для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є мають вигляд:

$$c_k = \frac{1}{(\varphi_k, \varphi_k)} \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt, k=1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

Таким чином, якщо для заданої функції $f(t)$ будується ряд за системою функцій (3.19) (можливість такого розвинення буде з'ясовано нижче), то коефіцієнти ряду (3.21) визначаються за формулою (3.23).

Означення. Ряд $c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_k \varphi_k(t) + \dots$, коефіцієнти якого визначаються за формулою (3.23) називається рядом Фур'є функції $f(t)$ за ортогональною системою функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$. Коефіцієнти c_k , які обчислюються за формулою (3.23) називаються коефіцієнтами Фур'є.

Зуваження. 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t)$, може і не збігатися до функції $f(t)$, хоча при обчисленні коефіцієнтів c_k за формулами (3.21) використовується функція $f(t)$. Тому до з'ясування умов збіжності ряду до функції $f(t)$ будемо замість знака "=" писати символ "~":

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t).$$

2. Якщо ортогональна система функцій (3.19) нормована, то коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами $((\varphi_k, \varphi_k) = 1)$:

$$c_k = \int_a^b f(t) \phi_k(t) dt, k=1, 2, 3, \dots \quad (3.24)$$

або $c_k = (f, \phi_k)$.

3. Система функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ є аналогом до координат базису при розвиненні вектора за базисом.

4. У подальшому будуть розглядатися ряди Фур'є за системами функцій (3.14)-(3.16), (3.18), тобто, за тригонометричними функціями. Такі ряди називаються *тригонометричними рядами Фур'є*.

Приклад 3.15. Розвинути в ряд Фур'є за системою функцій $f_1(t) = \cos \frac{n\pi t}{l}$ та $f_2(t) = \sin \frac{m\pi t}{l}$, ортогональних на відрізку $[-l, l]$, функцію, задану на відрізку $[-1; 1]$ співвідношенням:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 0,5 & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Обчислити коефіцієнт a_0 .

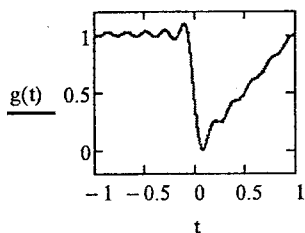
$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^1 x dx = x \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$$

Обчислити коефіцієнт a_n .

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^0 \cos n\pi x dx - \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \\ &= \left[u = x \quad du = dx \right. \\ &\quad \left. dv = \cos n\pi x \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right] = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_{-1}^0 + \\ &+ \left(\frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx \right) = \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = -\frac{2}{\pi^2 (2n-1)^2}; \\ a_n &= -\frac{2}{\pi^2 (2n-1)^2} \end{aligned}$$

Обчислити коефіцієнт b_n .

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^0 \sin n\pi x dx + \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \\ &= \left[u = x; \quad du = dx \right. \\ &\quad \left. dv = \sin n\pi x \Rightarrow v = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right] = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{1}{n\pi} x \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx \right) = \\ &= -\frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) + \left(-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$



$$b_n = -\frac{1}{n\pi}.$$

Записати розвинення даної функції в тригонометричний ряд Фур'є.

Рисунок 3.19

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

На рисунку 3.19 наведено графіки заданої функції та графік перших п'яти членів ряду Фур'є.

У точці розриву проявляється явище Гіббса. Деякі оцінки відхилення наближених значень часткових сум ряду Фур'є від значень функції будуть наведені під час розв'язання інших прикладів.

Приклад 3.16. Розвинути в ряд Фур'є за системою багаточленів Лежандра

$$P_0(t)=1, P_1(t)=t, P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1), \dots, P_n(t)=\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} [(t^2-1)^n], \dots$$

ортогональних при $t \in [-1, 1]$, функцію, задану на відрізку $[-1; 1]$ співвідношенням:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 0.5 & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Багаточлени Лежандра степені n позначимо $\text{Leg}(n, t)$. Скористаємось функціями математичної системи MathCAD. Перші шість членів ряду Фур'є-Лежандра мають вигляд:

$$h(t) := \frac{1.5}{\sqrt{2}} - 0.167 \cdot \frac{\text{Leg}(1, t)}{\sqrt{0.667}} + 0.125 \cdot \left(\frac{\text{Leg}(2, t)}{\sqrt{0.4}} + \frac{\text{Leg}(3, t)}{\sqrt{0.286}} \right) - 0.021 \cdot \frac{\text{Leg}(4, t)}{\sqrt{0.222}} - 0.063 \cdot \frac{\text{Leg}(5, t)}{\sqrt{0.182}}$$

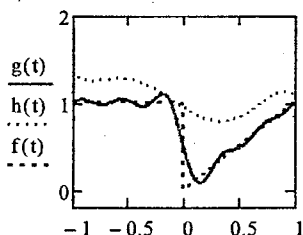


Рисунок 3.20

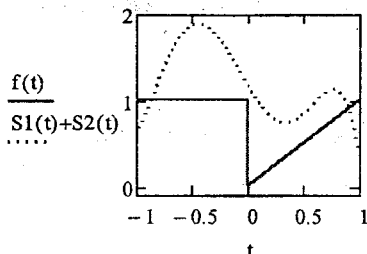


Рисунок 3.21

Зауваження

Скористаємось відповідними функціями математичної системи MathCAD з метою побудови ряду Фур'є-Чебишева за ортогональною на відрізку $[-1, 1]$ системою багаточленів Чебишева $Tcheb(n, t)$. Нижче наведено часткову суму ряду.

$$S(t) := \left[\frac{Tcheb(0, t)}{\sqrt{2}} + (-0.167) \cdot \frac{Tcheb(1, t)}{\sqrt{0.667}} + (-0.333) \cdot \frac{Tcheb(2, t)}{\sqrt{0.933}} + \right. \\ \left. + 0.3 \cdot \frac{Tcheb(3, t)}{\sqrt{0.971}} + (-0.234) \cdot \frac{Tcheb(4, t)}{\sqrt{0.984}} + (-0.215) \cdot \frac{Tcheb(5, t)}{\sqrt{0.99}} \right]$$

Для порівняння на рис. 3.20 наведено графіки функції та часткових сум $S_6(t)$ тригонометричного ряду (лінія із розривами), одержаного у

прикладі 3.15, і ряду Фур'є-Лежандра. Часткові суми з однаковою кількістю членів тригонометричного ряду точніше наближують функцію, ніж відповідні часткові суми ряду, побудованого за системою многочленів Чебишева. Такий же висновок можна зробити, проаналізувавши графіки на рис. 3.21, де наведено графік функції (приклад 3.16) і часткової суми $S_6(t)$ ряду Фур'є-Чебишева.

Завдання для самостійної роботи

За допомогою одного з математичних пакетів з'ясувати ортогональність на відрізку $[-1, 1]$ декількох функцій системи багаточленів Чебишева $\{T_{cheb}(n, t)\}$, знайти норми цих функцій. Наприклад:

$$\int_{-1}^1 T_{cheb}(3, t) \cdot T_{cheb}(8, t) dt = 0.$$

3.5 Умови розвинення функції в тригонометричні ряди Фур'є

Встановимо достатні умови збіжності ряду Фур'є до функції $f(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$. Введемо додаткові означення.

Означення. Функція $f(t)$ називається *кусково-монотонною* на проміжку $[a, b]$, якщо цей проміжок поділяється на скінченну кількість проміжків

$$[a, t_1] [t_1, t_2] [t_2, t_3] \dots [t_n, b], \quad (3.25)$$

на кожному з яких функція $f(t)$ монотонна.

На рис. 3.22 наведено приклад кусково-монотонної функції.

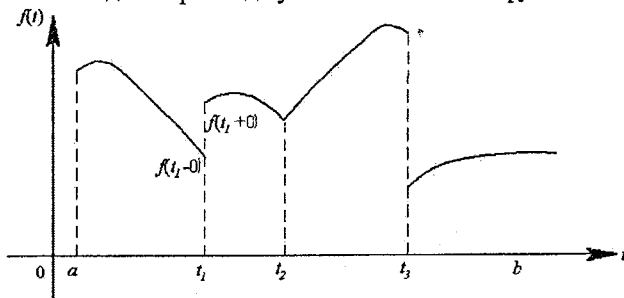


Рисунок 3.22

Означення. Функція $f(t)$ називається *кусково-неперервною* на проміжку $[a, b]$, якщо цей проміжок можна поділити на скінченну кількість проміжків (3.25), на кожному з яких функція $f(t)$ неперервна.

Кусково-монотонна функція $f(t)$ має ту властивість, що в будь-якій точці $t \in [a, b]$ існують односторонні границі.

$$\lim_{t \rightarrow t_i - 0} f(t) = f(t_i - 0),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_i + 0} f(t) = f(t_i + 0).$$

Функція $f(t)$, графік якої наведено на рис. 3.22, кусково-неперервна на проміжках $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, b]$, а кусково-монотонна на проміжках $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, b]$.

Сформулюємо (без доведення) теорему про умови розвинення функції в тригонометричний ряд Фур'є.

Теорема. Якщо функція $f(t)$ задана на проміжку $[-\pi, \pi]$ і є на ньому кусково-неперервною, то її тригонометричний ряд Фур'є збіжний у всіх точках проміжку $[-\pi, \pi]$. Якщо $S(t)$ – сума тригонометричного ряду Фур'є функції $f(t)$, то

$$S(t) = f(t)$$

у всіх точках неперервності функції $f(t)$.

Якщо t_0 – точка розриву першого роду функції $f(t)$, то

$$S(t_0) = \frac{1}{2}[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$$

на кінцях проміжку ряд збігається і

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)].$$

Сформульована теорема називається *теоремою Діріхле*, а умови, що визначаються цією теоремою, – *умовами Діріхле*.

Як було відмічено достатніми умовами розвинення функції $f(t)$ в ряд Тейлора є нескінченна кількість разів диференційованість її в проміжку збіжності. А щоб розвинути функцію $f(t)$ в ряд Фур'є від неї потребується, щоб вона мала більш слабкі властивості, допускаються також розриви (скінченна кількість точок розриву першого роду).

На відміну від рядів Тейлора поведінка рядів Фур'є функції в околі точки відіграє значно меншу роль.

Умови розвинення функції в ряд Фур'є можуть бути також іншими.

Приклади

1. Функція $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ задовольняє умови Діріхле на проміжку $[-\pi, \pi]$. Точка $t = 0$ є точкою розриву першого роду.

2. Функції Уолша $W(k, t)$ також задовольняють умови Діріхле при $t \in [-1, 1]$. Вони мають на вказаному проміжку $k + 2$ точки розриву першого роду.

3. Функція $f(t) = \frac{1}{t-1}$ на проміжку $[-\pi, \pi]$ не задовольняє умови Діріхле, оскільки точка $t = 1$ є точкою розриву другого роду. Ця функція задовольняє умови Діріхле на будь-якому проміжку, що не містить точку $t = 1$.

4. Розглянемо приклад функції, для якої не виконується деякі умови Діріхле, це – функція $f(t) = \sin \frac{1}{t}$ (рис. 3.23)

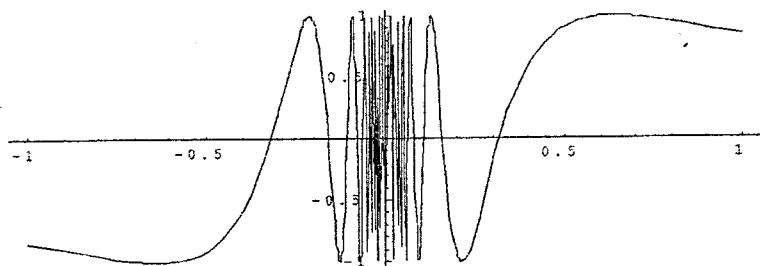


Рисунок 3.23 – Графік функції $f(t) = \sin \frac{1}{t}$

Не дивлячись на те, що функція обмежена, неперервна і монотонна на проміжках, об'єднанням яких є проміжок $[-\pi, \pi]$, вона не задовольняє умови Діріхле, оскільки кількість таких проміжків нескінченна.

3.6 Розвинення в тригонометричний ряд Фур'є періодичної функції

Ряд Фур'є застосовується не лише для розвинення функцій, заданих на проміжку, а й для розвинення періодичних функцій, заданих на всій числовій прямій. Розглянемо ряд Фур'є функції $f(t)$, заданої на проміжку $[-\pi, \pi]$ (за межами відрізка функцію не задано). У цьому випадку ряд будується за ортогональною системою тригонометричних функцій:

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

Відповідні норми цих функцій дорівнюють

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}, \quad \|\cos t\| = \|\sin t\| = \dots = \|\cos nt\| = \|\sin nt\| = \dots = \sqrt{\pi}.$$

Тригонометричний ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad (3.26)$$

а його коефіцієнти обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt. \quad (3.27)$$

Кожний доданок $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ має зміст і поза проміжком $[-\pi, \pi]$ і є 2π -періодичною функцією, оскільки функції $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ є 2π -періодичними при $n = 1, 2, \dots$: $\cos(n(t + 2\pi)) = \cos(nt + 2\pi n) = \cos(nt)$, $\sin(n(t + 2\pi)) = \sin(nt + 2\pi n) = \sin(nt)$. Звідси випливає, що ряд

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$ має період 2π . Такий же період має і сума $S(t)$

цього ряду у випадку його збіжності. Таким чином сума ряду $S(t)$ на проміжку $[-\pi, \pi]$ збігається з функцією $f(t)$ (з урахуванням теореми Діріхле), а зовні цього проміжку $S(t)$, оскільки вона 2π -періодична, продовжує функцію $f(t)$ з проміжку $[-\pi, \pi]$ періодично на всю числову пряму. Аналогічний результат має місце для функції $f(t)$ при $t \in [-l, l]$.

3.7 Розвинення в тригонометричний ряд Фур'є $2T$ -періодичних функцій

Нехай $f(t)$ є $2T$ -періодичною функцією або заданою на проміжку $[-T, T]$, і задовольняє умови Діріхле.

Заміною $x = \frac{\pi}{T}t$, функція $f(t)$ перетворюється в 2π -періодичну (довести самостійно). Далі можна використати результати розвинення в ряд Фур'є функцій 2π -періодичних, або заданих на проміжку $[-\pi, \pi]$.

Розглянемо інший підхід. Як було відмічено в п. 3.3, система функцій (3.14) $1, \cos \frac{\pi t}{T}, \sin \frac{\pi t}{T}, \dots, \cos \frac{k\pi t}{T}, \sin \frac{k\pi t}{T}, \dots$ є ортогональною на проміжку $[-T, T]$. Тому ряд Фур'є за такою системою функцій набуває вигляду:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{n\pi t}{T} \right), \quad (3.28)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt, n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Якщо $f(t)$ – $2T$ -періодична функція, то ряд описує її на всій числовій осі, якщо ж вона задана на проміжку $[-T, T]$, то ряд (3.28) описує її тільки на цьому проміжку.

Якщо $f(t)$ – парна функція, то ряд (3.28) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{T}, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

На випадок непарної функції $f(t)$ ряд (3.28) набуває вигляду:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{T},$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt, n=1,2,\dots$$

Приклад 3.17. Розвинути в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(t) = t, t \in [1, 5]$.

Довжина проміжку, на якому задано функцію, дорівнює 4. Отже, приймаємо $2T = 4$. Функцію $f(t)$ продовжено на всю числову вісь, при цьому допускається проміжок інтегрування $[-2, 2]$. Функція $\phi(t)$ на цьому проміжку аналітично задається таким чином:

$$\phi(t) = \begin{cases} t+4, & \text{при } -2 \leq t < 1, \\ t, & \text{при } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \phi(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^1 (t+4) dt + \int_1^2 t dt \right) = \frac{21}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \phi(t) \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^1 (t+4) \cos \frac{n\pi t}{2} dt + \int_1^2 t \cos \frac{n\pi t}{2} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^1 (t+4) \sin \frac{n\pi t}{2} dt + \int_1^2 t \sin \frac{n\pi t}{2} dt \right) = -\frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

Остаточню ряд Фур'є набуває вигляду:

$$f(t) = 3 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k-1)\pi t}{2}}{2k-1} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi t}{k} \quad (3.30)$$

$$1 < t < 5$$

або

$$s_3(t) := 3 + 4 \left[\sum_{k=1}^n \frac{\sin [0.5 \cdot k \cdot \pi \cdot (1-t)]}{k \cdot \pi} \right]. \quad (3.31)$$

При $t = 1$ і $t = 5$ сума ряду (3.30) дорівнює 3.

Зауваження 1. Розвинення сигналу в ряд за системою тригонометричних функцій (гармонічних коливань) називають спектральним поданням сигналу.

2. Наведемо приклад тригонометричного ряду, що збігається, але не є рядом Фур'є. На рис. 3.24 наведено графік часткової суми перших 50000 членів ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log(n)}.$$

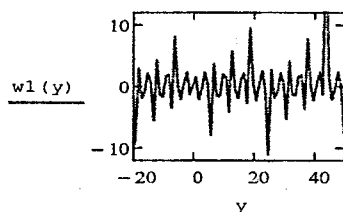


Рисунок 3.24

3.8 Комплексна форма запису ряду Фур'є

Головному поданню періодичного сигналу рядом Фур'є (3.26) можна надати більш компактного вигляду, якщо використати формули Ейлера

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}. \quad (3.32)$$

Тоді використавши (3.32), замінимо $\cos nt$ і $\sin nt$ в ряді (3.26):

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right). \end{aligned}$$

Згрупуємо відносно e^{int} і e^{-int} ,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + b_n i}{2} e^{int} + \frac{a_n - b_n i}{2} e^{-int} \right). \quad (3.33)$$

Введемо нові коефіцієнти

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + b_n i}{2}, c_0 = \frac{a_0}{2}, n=1, 2, \dots$$

Тоді (3.33) перетворюється до вигляду

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \quad (3.34)$$

Ряд (3.34) функції $f(t)$ називається *рядом Фур'є у комплексній формі*.

Отримаємо формулу для безпосереднього обчислення коефіцієнтів c_n .

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt - i \sin nt) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(-nt) + i \sin(-nt)) dt \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Аналогічно знаходимо вираз для коефіцієнта c_{-n} .

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt + i \sin nt) dt,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{+int} dt \quad (3.36)$$

використавши формули (3.35) та (3.36), дістанемо загальний вигляд для коефіцієнта c_n :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (3.37)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ряду Фур'є в комплексній формі

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}. \quad (3.38)$$

Зауваження. Комплексна форма (3.38) ряду Фур'є містить компоненти на від'ємній півосі. Від'ємна частина має тільки математичний зміст, обумовлений способом поданням комплексних чисел.

Дійсно:

$$c_n e^{int} + c_n e^{-int} = (c_n \cdot e^{i\varphi_n} \cdot e^{int} + c_n \cdot e^{-i\varphi_n} \cdot e^{-int} =$$

$$= 2(c_n (\cos(nt + \varphi_n)).$$

Комплексна форма ряду Фур'є $2T$ -періодичної функції має вигляд:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i n \pi}{T} t}, \quad (3.39)$$

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-\frac{i n \pi}{T} t} dt. \quad (3.40)$$

Ряди (3.39) чи (3.40) надають можливість подати періодичну функцію у вигляді суми простих гармонічних коливань.

Приклад 3.18. Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі функцію $f(t) = e^{\alpha t}, t \in [-\pi, \pi], \alpha \in R, \alpha \neq 0$.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є за формулою (3.37).

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha t} \cdot e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha - in} e^{t(\alpha - in)} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(\alpha - in)} [e^{\pi(\alpha - in)} - e^{-\pi(\alpha - in)}].$$

Перетворимо вираз в дужках, скориставшись формулами Ейлера.

$$\begin{aligned}
 e^{\pi(\alpha-in)} - e^{-\pi(\alpha-in)} &= e^{\pi\alpha} (\cos n\pi - i \sin n\pi) - \\
 &- e^{-\pi\alpha} (\cos n\pi + i \sin n\pi) = e^{\pi\alpha} (-1)^n - e^{-\pi\alpha} (-1)^n = \\
 &= (-1)^n (e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}) = \frac{1}{2} (-1)^n \operatorname{sh} \pi\alpha
 \end{aligned}$$

Тоді

$$c_n = \frac{(-1)^n \operatorname{sh} \pi\alpha}{\pi(\alpha - in)}, \text{ а ряд Фур'є набуде вигляд } e^{\alpha t} = \frac{\operatorname{sh} \pi\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{int}}{\alpha - in}.$$

Завдання для самостійної роботи

Функції, задані графічно, розвинути в тригонометричний ряд Фур'є.

1.

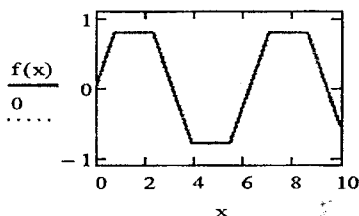


Рисунок 3.25

Відповідь:

$$f(t) = \frac{4a}{\pi\tau} \left(\sin \tau \sin t + \frac{1}{9} \sin 3\tau \sin 3t + \dots + \frac{1}{n^2} \sin n\tau \sin nt + \dots \right).$$

2.

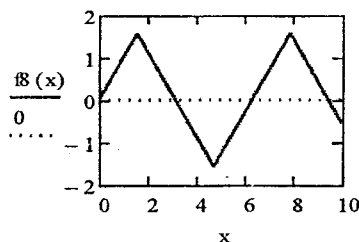


Рисунок 3.26

Відповідь:

$$f(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left(\sin t - \frac{1}{9} \sin 3t + \frac{1}{25} \sin 5t - \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k^2 - 1)^2} \sin(2k - 1)t + \dots \right).$$

3.

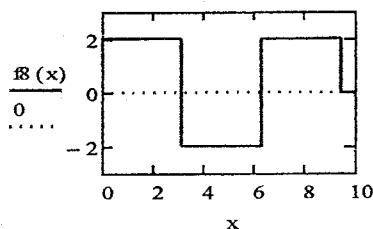


Рисунок 3.27

Відповідь:

$$f(t) = \frac{4a}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots + \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)t + \dots \right).$$

4.

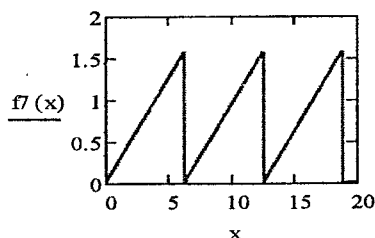


Рисунок 3.28

Відповідь:

$$f(t) = a \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \sin 3t + \dots + \frac{1}{n} \sin nt + \dots \right) \right].$$

5.

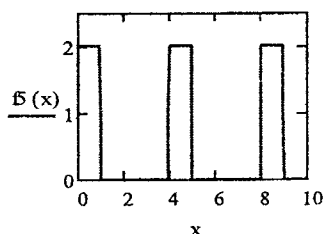


Рисунок 3.29

Відповідь:

$$f(t) = a \left[\tau + \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi \tau \cos t + \frac{1}{2} \sin 2\pi \tau \cos 2t + \frac{1}{3} \sin 3\pi \tau \cos 3t + \dots + \frac{1}{n} \sin n\pi \tau \cos nt + \dots \right) \right].$$

Приклад 3.19. Розвинути в тригонометричний ряд Фур'є періодичну, з періодом $T=2$ функцію, визначену на всій числовій осі і задану на відрізку $[-1; 1]$ співвідношенням:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 0,5 & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Алгоритм розв'язання

1. Дайте відповідь на запитання: "Чи задовольняє задана функція умови теореми Діріхле?"

2. Запишіть необхідні формули для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad l = \frac{T}{2}.$$

Або:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad l = \frac{T}{2}.$$

3. Обчислити коефіцієнт a_0 .

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^1 x dx = x \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$$

$$a_0 = 1,5.$$

4. Обчислити коефіцієнт a_n .

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^0 \cos n\pi x dx + \int_0^1 x \cos n\pi x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos n\pi x dx \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{array} \right| = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_{-1}^0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \\
& = \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = -\frac{2}{\pi^2 (2n-1)^2}; \\
& a_n = -\frac{2}{\pi^2 (2n-1)^2}.
\end{aligned}$$

5. Обчислити коефіцієнт b_n .

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^0 \sin n\pi x dx + \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \sin n\pi x \Rightarrow v = -\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{1}{n\pi} x \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx \right) = \\
&= -\frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) + \left(-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{n\pi}. \\
& b_n = -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}$$

6. Записати тригонометричний ряд Фур'є в загальному вигляді:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

або:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right).$$

7. Записати тригонометричний ряд Фур'є даної функції

$$f(x) = \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2n-1)\pi x}{\pi^2 (2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{\pi n},$$

або

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Приклад 3.20. Розвинути функцію $f(x) = t$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$ в ряд Фур'є в комплексній формі.

Алгоритм розв'язання

1. Перевірте, що дана функція задовольняє умови теореми Діріхле.
2. Записати комплексну форму ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

3. Записати формулу для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є в комплексній формі:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots$$

4. Обчислити коефіцієнти $c_n, n \neq 0$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \left[u = x, \quad du = dx \right. \\ &\quad \left. e^{inx} = dv, v = -\frac{1}{in} e^{-inx} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{x e^{-inx}}{in} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\left(-\frac{x e^{-inx}}{in} - \frac{1}{(in)^2} e^{-inx} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-inx e^{-inx} - e^{-inx}}{(in)^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-inx} (inx + 1)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-in\pi} (in\pi + 1) - e^{-inx} (1 - in\pi)}{n^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi n^2} ((in\pi + 1) \cos n\pi - (1 - in\pi) \cos n\pi) = \\ &= \frac{1}{2\pi n^2} \cos n\pi (in\pi + 1 - 1 + in\pi) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos n\pi}{n^2} in\pi = \frac{(-1)^n}{n}, n \neq 0. \end{aligned}$$

При $n = 0$ дістанемо:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0.$$

5. Записати комплексну форму ряду Фур'є функції $f(t) = t$:

$$x = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx}, n \neq 0.$$

Приклад 3.21. Функцію $f(t) = t^2$ розвинути в ряд Фур'є за синусами в інтервалі $(0, \pi)$.

Алгоритм розв'язання

1. Дайте відповідь на запитання: "Якою повинна бути функція: "парною" чи "непарною"?"

2. Запишіть формулу обчислення коефіцієнта ряду Фур'є для непарної функції, заданої на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

3. Знайдіть чисельне значення коефіцієнта b_n .

3.9 Інтеграл Фур'є

Якщо функція $f(t)$ визначена на всій числовій осі і не є періодичною, то її не можна зобразити рядом Фур'є, проте, існує зображення, аналогічне до зображення функцій за допомогою рядів Фур'є, а саме, має місце теорема.

Теорема. Нехай функція $f(t)$ визначена на проміжку $(-\infty, \infty)$ і задовольняє такі умови:

1) існує $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$,

2) на кожному скінченному проміжку функція $f(t)$ кусово-неперервна і кусово-монотонна.

Тоді в точках неперервності функція $f(t)$ задається інтегралом

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.41)$$

де

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (3.42)$$

В точках розриву

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}. \quad (3.43)$$

Інтеграл в правій частині співвідношення (3.43) називається інтегралом Фур'є функції $f(t)$, а функція $c(\omega)$ називається перетворенням Фур'є функції $f(t)$ або спектральною функцією неперервної функції $f(t)$,

модуль спектральної функції $|c(\omega)|$ називається *спектральною характеристикою* функції $f(t)$.

Для інтеграла і перетворення Фур'є використовують й інші форми запису.

Так, скориставшись формулою Ейлера, перепишемо співвідношення (3.41) у такому вигляді:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right) d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right) d\omega,$$

а оскільки в перших дужках стоїть парна відносно ω , а в інших дужках — непарна, то

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \quad (3.44)$$

Вираз в правій частині співвідношення (3.44) називається подвійним інтегралом Фур'є в дійсній формі.

Перепишемо (3.44) таким чином:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) (\cos \omega t \cos \omega \tau + \sin \omega t \sin \omega \tau) d\tau \quad (3.45)$$

Позначивши

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau = a(\omega), \quad (3.46)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau = b(\omega) \quad (3.47)$$

із (3.45) отримаємо

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (3.48)$$

Інтеграл в правій частині (3.48) називається інтегралом Фур'є функції в дійсній формі, функція $a(\omega)$ називається косинус-перетворенням Фур'є функції $f(t)$, а функція $b(\omega)$ — синус-перетворенням Фур'є функції $f(t)$.

Із формул (3.42), (3.46) і (3.47) випливає, що

$$c(\omega) = \frac{a(\omega) - ib(\omega)}{2}. \quad (3.49)$$

Якщо позначити

$$A(\omega) = \sqrt{(a(\omega))^2 + (b(\omega))^2}, \quad \phi(\omega) = \arctg \frac{a(\omega)}{b(\omega)},$$

то дійсна функція $A(\omega)$, яку також можна записати у вигляді $A(\omega) = |c(\omega)|$, називається *амплітудним спектром*, а функція $\phi(\omega)$, яку можна подати у вигляді $\phi(\omega) = -\arg(c(\omega))$, називається *фазовим спектром неперіодичної функції $f(t)$* .

Амплітудний і фазовий спектри функції, поданої інтегралом Фур'є, утворюють її *неперервний спектр*. Можна довести, що амплітудний спектр для дійсної функції $f(t)$ є

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (3.50)$$

де

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (3.51)$$

для непарних функцій

$$f(t) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (3.52)$$

де

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (3.53)$$

Приклад 3.22. Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |t| < 1, \\ 0, & \text{якщо } |t| > 1, \\ 1/2, & \text{якщо } |t| = 1. \end{cases}$$

Графік цієї функції має вигляд:

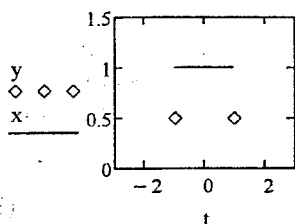


Рисунок 3.30

Оскільки функція парна, то досить знайти її косинус-перетворення. Маємо

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega}$$

тому
$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega \quad (3.54)$$

Звідси, зокрема, отримуємо, поклавши

$t = 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Для періодичних функцій, як відомо, має місце рівність Парсеваля, аналогічна рівність справедлива і в теорії інтеграла Фур'є:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |c(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.55)$$

3.10 Дискретне перетворення Фур'є

У п. 3.9 було розглянуто форму перетворення Фур'є, яка переводить часову функцію $f(t)$ у частотну функцію $F(\omega)$ або $c(\omega)$, формула (3.49). Перетворення Фур'є важливе тим, що воно є проміжним кроком при визначенні передатної функції, інтерполюванні даних, визначенні щільності спектра тощо.

Розглянемо іншу форму перетворення Фур'є, в якій F і f дискретні, а границі підсумовування скінченні.

Нехай вибірккові дані спостерігаються через рівні проміжки часу T . Тоді вибірккові дані $f(j)$ утворюють послідовність відповідних моментів часу jT .

Перетворення функції $f(j)$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) визначається відношенням:

$$F(k) = T \sum_{j=0}^{N-1} f(jT) \exp\left(-\frac{j2\pi ki}{N}\right), \quad (3.56)$$

де $i = \sqrt{-1}$,

яке називається дискретним перетворенням Фур'є.

Відмітимо періодичність функції $F(k)$ (3.56). Якщо намагатися продовжити обчислення при $k > N$, то отримані значення будуть повторювати значення, які вже є $F(k)$, тобто $F(N+k) = F(k)$.

На практиці найчастіше мають справу не з комплексними, а дійсними величинами. Тому формулу визначення дискретного перетворення Фур'є (3.56) можна переписати у вигляді

$$F(k) = T \sum_{j=0}^{N-1} f(jT) \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} jk\right); \quad (3.57)$$

$$\text{де } k = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, & N = 2m, \\ 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, & N = 2m-1. \end{cases}$$

Для N значень функції $f(t)$ отримується вдвічі менше частот. Проте загальна кількість дійсних і уявних значень частотної функції збігається з кількістю спостережень часової функції $f(t)$.

Приклад перетворення Фур'є, у випадку парної кількості точок, наведено на рис. 3.31.

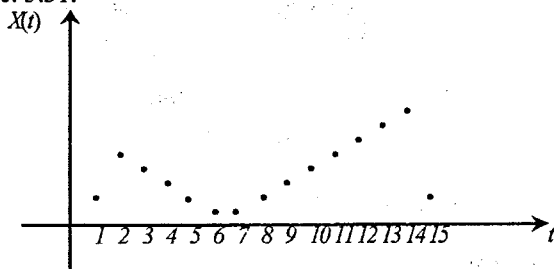


Рисунок 3.31

Приклад

Постановка задачі

Дослідження складної системи потребує побудови математичної моделі у вигляді ДПФ:

$$f(t) = a_0 + \sum_{p=1}^k (a_p \cos \omega_p t + b_p \sin \omega_p t), \quad (3.58)$$

де $k = E\left(\frac{n}{2}\right)$; $\omega_p = \frac{2\pi p}{n}$

або в комплексній формі

$$f(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F_k \exp \left[i \frac{2\pi k t}{n} \right],$$

$$t = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

де $F_k = a_k + b_k i$

Вихідні дані наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Значення параметра виробничого показника

j	f_j	j	f_j	j	f_j	j	f_j
1	-0,039100	9	-0,004400	77	0,036900	25	0,000000
2	-0,030700	10	-0,053700	18	0,002500	26	0,000000
3	-0,029800	11	-0,030400	19	-0,076600	27	0,000000
4	0,065900	12	-0,009700	20	-0,11340	28	0,000000
5	-0,010000	13	0,081300	21	0,000000	29	0,000000
6	-0,016600	14	0,067400	22	0,000000	30	0,000000
7	0,030000	15	0,049200	23	0,000000	31	0,000000
8	0,054600	16	-0,004300	24	0,000000	32	0,000000

Коефіцієнти ДПФ визначають такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j; \\ a_p &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cos \omega_p j \\ b_p &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sin \omega_p j. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Результати обчислень за формулами (3.58) і (3.59) зведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Значення ω_p , a_p , і b_p виробничого показника x .

p	ω_p	a_p	b_p
1	2	3	4
0		-0,0027001	
1	1/32	-0,014322	-0,21972
2	2/32	-0,068465	0,21009
3	3/32	-0,19583	-0,36816
4	4/32	-0,12273	0,41286
5	5/32	0,017431	-0,048860
6	6/32	0,015658	-0,13124
7	7/32	-0,31260	0,24299
8	8/32	0,12230	-0,00400
9	9/32	-0,020273	0,22369
10	10/32	0,069069	-0,083278
11	11/32	-0,073128	0,019190
12	12/32	-0,033069	-0,019141
13	13/32	0,059504	-0,080840
14	14/32	-0,0074615	-0,10715
15	15/32	-0,22500	-0,054954
16	16/32	0,016900	0

Використовуючи дані табл. 3.3 записуємо дискретне перетворення Фур'є (3.22):

$$\begin{aligned} f(t) &= -0,0027001 + \left(-0,014322 \cos \frac{t}{32} - 0,21972 \sin \frac{t}{32} \right) + \\ &+ \left(-0,068465 \cos \frac{2t}{32} - 0,21009 \sin \frac{2t}{32} \right) + \\ &+ \left(-0,19583 \cos \frac{3t}{32} - 0,36816 \sin \frac{3t}{32} \right) + \dots + 0,0169 \cos \frac{16t}{32}; \end{aligned}$$

або в комплексній формі

$$f(t) = -0,0027001 + (-0,014322 - 0,21972i)e^{\frac{n}{32}} +$$

$$+ (-0,028465 - 0,21009i)e^{\frac{2it}{32}} + (-0,19583 - 0,36816i) \cdot$$

$$\cdot e^{\frac{3it}{32}} + \dots + 0,0169e^{\frac{16it}{32}}.$$

На рис. 3.32 наведено графіки даних та суми перших 20 гармонік дискретного перетворення Фур'є. Можна зробити припущення щодо достатньої точності побудованої математичної моделі.

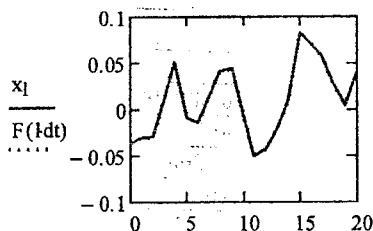


Рисунок 3.32

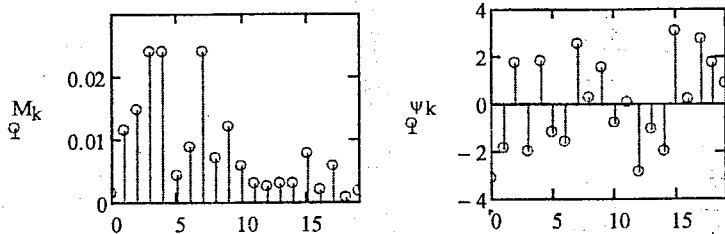


Рисунок 3.33

У зв'язку із розвитком обчислювальних засобів, сформувався новий напрям: цифрова обробка сигналів. Цей напрям має широке застосування і в радіотехніці. Одним із найважливіших математичних знарядь цифрової обробки сигналів є дискретне перетворення Фур'є.

Нехай функція $f(t)$ зображена послідовністю із значень $f(nT)$, $0 \leq n \leq N-1$, де T – так званий інтервал дискретизації у часовій області.

Покладемо

$$\omega = 2\pi / NT.$$

Послідовність

$$F(k\omega) = \sum_{n=1}^{N-1} f(nT)e^{-i\omega nk}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.60)$$

називається дискретним перетворенням Фур'є (скорочено ДПФ) від послідовності $f(nT)$ із N відліків.

Можна перекоонатися в тому, що існує не тільки N різних значень, які можна обчислити за формулою (3.60), а саме, при $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Дійсно, будь-яке натуральне число

$$k = rN + k_0, \text{ де } 0 \leq k_0 \leq N-1, \text{ а } r = (k-k_0)/N,$$

тоді

$$F(k\omega) = \sum_{n=1}^{N-1} f(nT) e^{-i\pi n(rN+k_0)\omega},$$

але оскільки $\omega N T = 2\pi$ і $e^{-2\pi i N r} = 1$, то $F(k\omega) = F(k_0\omega)$, що і потрібно було довести.

Приклад 3.23. Знайти ДПФ функції $f(t) = e^{\alpha T}$.

Маємо $f(nT) = e^{\alpha nT}$, тому

$$F(k\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\alpha nT} * e^{-i\omega T n k} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{(\alpha - ik\omega) T n} = \frac{1 - q^N}{1 - q},$$

де $q = e^{(\alpha - ik\omega) T}$ і α не кратне числу $i\omega$. Якщо ж $\alpha = i m \omega$ і m — ціле, то

$$q = e^{(m - k) i \omega T} = e^{(m - k) i 2\pi / N}$$

звідки

$$F(k\omega) = \begin{cases} N, & \text{якщо } 0 \leq k = m + rN < N, \\ 0, & \text{для інших } k. \end{cases}$$

Приклад 3.24. Знайти ДПФ функції $f(t) = t$, $T = \pi/8$, $N = 16$; в цьому випадку $\omega = 1$ і

$$F(k) = \sum_{n=0}^{15} n \frac{\pi}{8} e^{-ikn\frac{\pi}{8}}, k = 0, 1, \dots, 15.$$

Якщо $k = 0$, то

$$F(0) = \frac{\pi}{8} \sum_{n=0}^{15} n = 15\pi/2.$$

Якщо $k \neq 0$, то, позначивши через $x = e^{\frac{ik\pi}{8}}$, знайдемо

$$\sum_{n=0}^{15} n x^n = x + 2x^2 + \dots + 15x^{15} = x(1 + x + \dots + x^{15})' =$$

$$= x \left(\frac{x^{16} - 1}{x - 1} \right)' = x \frac{16x^{15}(x-1) - (x^{16} - 1)}{(x-1)^2},$$

а оскільки $x^{16} = e^{-2i\kappa\pi}$, то $F(x) = \frac{16 \frac{\pi}{8}}{e^{-i\pi k} - 1}$.

Приклад 3.25. Знайти ДПФ функції $f(t) = \cos t$, $N = 16$, $T = \pi/8$.

Скориставшись результатом прикладу 3.24, отримаємо

$$\text{ДПФ} \{\cos t\} = \frac{1}{2} \text{ДПФ} \{e^{it}\} + \frac{1}{2} \text{ДПФ} \{e^{-it}\} = \{0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, 0\}.$$

Тоді за ДПФ послідовності $f(nT)$, можна відтворити цю послідовність за формулою

$$f(\ell T) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k\omega) e^{iT k \ell \omega}. \quad (3.61)$$

Вираз, який стоїть справа у формулі (3.61), називається оберненим ДПФ.

Для доведення співвідношення (3.61), підставимо його в праву частину (3.60) замість $F(k\omega)$, отримаємо

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{-i\omega T n k} * e^{iT k \ell \omega}.$$

Змінивши порядок підсумовування, отримаємо

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(nN) \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega T (l-n)k} \right),$$

але внутрішня сума дорівнює N , якщо $0 < n = \ell + rN < N$ і нулю у решті випадків. Таким чином, тільки один доданок зовнішньої суми відмінний від нуля, що і доводить (3.61).

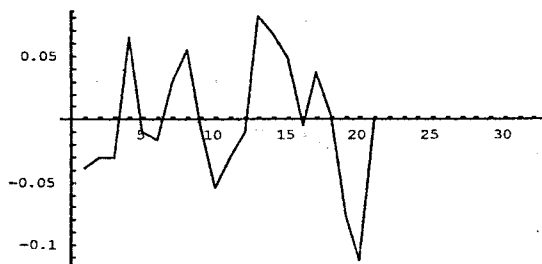


Рисунок 3.34

Нехай функція $f(x)$ задана у вигляді таблиці, тобто відомі її значення

$$W = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & -5 & -4,88554 & -4,47372 & -3,76908 & -2,92406 & -2,15783 & -1,62831 & -1,35048 \end{array}$$

$$W = \begin{array}{c|cccccccc} & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline 1 & -1,21192 & -1,11638 & -1,01903 & -1,02565 & -1,27974 & -1,84857 & -2,64951 & -3,48161 \end{array}$$

$$W = \begin{array}{c|cccccccc} & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ \hline 1 & -1,84857 & -2,64951 & -3,48161 & -4,14109 & -4,53731 & -4,72488 & -4,83123 & -4,93675 \end{array}$$

при значеннях аргументу

$$Y^T = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 1 & 1 & 1,19 & 1,381 & 1,571 & 1,762 & 1,952 & 2,143 & 2,333 & 2,524 & 2,714 & 2,905 \end{array}$$

$$Y^T = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ \hline 1 & 3,095 & 3,286 & 3,476 & 3,667 & 3,857 & 4,048 & 4,238 & 4,429 & 4,619 & 4,81 \end{array}$$

Замінімо функцію $f(x)$ частковою сумою дискретного ряду Фур'є

$$a3_k := \frac{2}{21} \cdot \sum_{i=1}^{21} W_{1,i} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot Y_i\right) \quad b3_k := \frac{2}{21} \cdot \sum_{i=1}^{21} W_{1,i} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot Y_i\right)$$

$$F3(t) := a01 + \sum_{k=1}^6 \left(a3_k \cdot \cos\left(k \cdot t \cdot \frac{\pi}{2}\right) + b3_k \cdot \sin\left(k \cdot t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

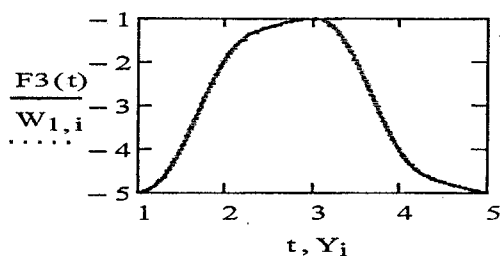


Рисунок 3.35

$$M := \frac{1}{21} \cdot \sum_{i=1}^{21} \left[(W_{1,i})^2 \right] - \left[a01^2 + 0.5 \cdot \sum_{i=1}^6 \left[(a3_i)^2 + (b3_i)^2 \right] \right]$$

$$M = 9.66 \times 10^{-7}$$

$$F4(t) := a04 + \sum_{k=1}^{10} \left(a4_k \cdot \cos\left(k \cdot t \cdot \frac{\pi}{2}\right) + b4_k \cdot \sin\left(k \cdot t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$M4 := \frac{1}{21} \cdot \sum_{i=1}^{21} \left[(Y_i)^2 \right] - \left[a04^2 + 0.5 \cdot \sum_{i=1}^6 \left[(a4_i)^2 + (b4_i)^2 \right] \right]$$

$$M4 = 0.0824$$

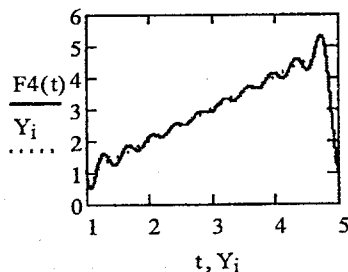


Рисунок 3.36

Порівняємо аналітичний метод та графічний метод обчислення коефіцієнтів

$$i := 0..12 \mid X_i := i \quad Y := (0 \ 1 \ 4 \ 5 \ 4 \ 3 \ 3.5 \ 3.5 \ 3 \ 1 \ 0.5 \ 0.2 \ 0)$$

$$a0 := \sum_{k=0}^{12} Y_{0,k}, \quad a_m := \frac{2}{12} \cdot \sum_{k=0}^{12} Y_{0,k} \cdot \cos\left[m \cdot \left(\frac{\pi}{6} \cdot X_k\right)\right]$$

$$b_m := \frac{2}{12} \cdot \sum_{k=0}^{12} Y_{0,k} \cdot \sin\left[m \cdot \left(\frac{\pi}{6} \cdot X_k\right)\right]$$

$$F(t) := a0 + \sum_{k=1}^3 \left(a_k \cdot \cos\left(k \cdot t \cdot \frac{\pi}{6}\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot t \cdot \frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$FA(t) := 2.391 - 1.584 \cos\left(t \cdot \frac{\pi}{6}\right) + 1.384 \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{6}\right) - 0.625 \cos\left(2 \cdot t \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

$$FA(t) := FA(t) + \left(0.425 \sin\left(2 \cdot t \cdot \frac{\pi}{6}\right) - 0.166 \cos\left(3 \cdot t \cdot \frac{\pi}{6}\right) - 0.616 \sin\left(3 \cdot t \cdot \frac{\pi}{6}\right) \right)$$

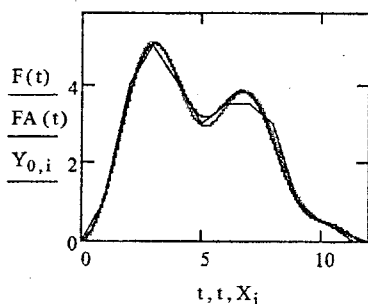


Рисунок 3.37

$$M := \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{12} \left[(Y_{0,i})^2 \right] - \left[a_0^2 + 0.5 \left[\sum_{i=1}^3 \left[(a_i)^2 + (b_i)^2 \right] \right] \right]$$

$$M = 0.028 \quad M1 = 0.064$$

Підсумовування тригонометричних рядів Фур'є

Раніше розглядалось підсумовування числових рядів. Операція була означена з метою підсумовування як збіжних, так і розбіжних рядів. У випадку рядів Фур'є нас також буде цікавити можливість визначення суми ряду незалежно від того, збігається цей ряд чи ні. Слід підкреслити відмінність операцій підсумовування рядів та обчислення суми рядів про які відомо, що вони збіжні.

Застосуємо метод Чезаро (метод середніх арифметичних). Доводиться твердження про те, що ряд Фур'є абсолютно інтегрованої 2π -періодичної функції $f(x)$ підсумовується методом Чезаро до даної функції у кожній точці неперервності функції і до значення $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ у точках розриву першого роду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев – М. : Наука, 1986.
2. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский – М. : Наука, 1988.
3. Барась С. Т. Основи теорії телекомунікаційних систем. Збірник задач, запитань, вправ / Барась С. Т., Костюк О. А., Кравцов Ю. І. – Вінниця : ВНТУ, 2003.
4. Виноградова И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды) / Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. – М. : Факториал, 1996.
5. Воробьев Н. Н. Теория рядов : учеб. пособие для втузов / Воробьев Н. Н. – М. : Наука, 1986.
6. Власова Е. А. Ряды : учеб. для вузов. 2-е изд. / Власова Е. А. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.
7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Демидович Б. П. – М. : Наука, 1990.
8. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учеб. для студентов математических специальностей университетов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин – М. : Наука, 1976.
9. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа / Кудрявцев Л. Д. – М. : Наука, 1989.
10. Методические указания к выполнению типовых расчётов по курсу высшей математики. Часть 6. Ряды / Сост. И. С. Петрунина, В. С. Петрунин, Л. И. Педорченко. – Винница : ВПИ, 1988.
11. Никольский С. М. Курс математического анализа : учеб. для вузов: В 2 т., Т.1 / Никольский С. М. – М. : Наука, 1991.
12. Овчинников П. Ф. Высшая математика / Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. – К. : Выща школа, 1987.
13. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко – К. : Либідь, 1996.
14. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.2 / Пискунов Н. С. – М. : Наука, 1985.
15. Пугачёв В. С. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие для студентов втузов / Пугачёв В. С. – М. : Изд-во МАИ, 1996.
16. Тостов Г. П. Ряды Фурье / Тостов Г. П. – М. : Наука, 1980.
17. Треногин В. А. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов / Треногин В. А. – М. : Наука, 1993.
18. Фролов С. В. Курс высшей математики / С. В. Фролов, Р. Я. Шостак – М. : Высшая школа, 1973.

Навчальне видання

Клочко Віталій Іванович
Клочко Надія Олексіївна
Коцюбівська Катерина Іванівна

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
РЯДИ
(з комп'ютерною підтримкою)**

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна
Коректор З. Поліщук

Оригінал-макет підготовлено К. Коцюбівською

Підписано до друку 02.11.2015 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 9,3.
Наклад 100 пр. Зам. № 2015-026.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.