МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Вінницький державний технічний університет

Н. Р. Кондратенко

Дискретна математика. Мінімізація логічних функцій у класі ДНФ

Вінниця ВДТУ 2000

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Н. Р. Кондратенко

Дискретна математика. Мінімізація логічних функцій у класі ДНФ

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів бакалаврського напрямку "Комп'ютерна інженерія" та "Комп'ютерні науки". Протокол №5 від 30 грудня 1999р.

Вінниця ВДТУ 2000

УДК 512.53/.55

Н.Р. Кондратенко. Дискретна математика. Мінімізація логічних функцій у класі ДНФ. *Навчальний посібник* /-В.: ВДТУ, 2000 –108с. Укр. мовою/

Навчальний посібник стане в нагоді студентам спеціальносте з комп'ютерної інженерії та комп'ютерних наук денної та заочної форм навчання.

Бібліогр. 14 найм. Іл. 6 Табл.18

Рецензенти: В.П. Тарасенко, д.т.н.
А.М. Петух, д.т.н.
С.М. Білан, к.т.н.

Зміст

1. Основні поняття теорії елементарних функцій алгебри логіки

При проектуванні ЕОМ для формального опису логічних схем використовують математичний апарат алгебри логіки, об'єктом дослідження якого є функції, які набувають, як і їх аргументи, тільки два значення – 0 та 1. Функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка приймає тільки значення 0 або 1, як і її аргументи, прийнято називати логічною функцією або функцією перемикання.

Оскільки аргументи логічних функцій можуть набувати лише двох значень, область визначення будь-якої логічної функції скінчена. Тому будь-яка функція перемикання може бути задана таблицею її значень в залежності від значень аргументів.

В табл.1.1 задані дві логічні функції трьох аргументів $f(x_1, x_2, x_3)$ і $\varphi(x_1, x_2, x_3)$

Таблиця 1.1

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	1	0	1	0	0	0	1
$\varphi(x_1, x_2, x_3)$	1	0	0	1	0	1	1	0

Сукупність значень аргументів називається набором функцій. Функції f і φ, задані в табл.1.1, визначені на восьми наборах. Функція $f(x_1, x_2, x_3)$ приймає значення рівні одиниці на наборах (0,0,1), (0,1,1) і (1,1,1), а на решті–рівна нулю. Функція $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ рівна одиниці на чотирьох наборах (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), а на решті - рівна нулю. До основних властивостей логічних функцій відносяться такі:

а) будь-яка логічна функція n аргументів визначена на 2^n наборах.

Відомо, що кількість різних n-розрядних чисел рівна 2^n, якщо кожному набору аргументів можна поставити у відповідність двійкове n-розрядне число. Так, наприклад, представлені в табл.1.1 логічні функції визначені на 8 наборах: (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1);

б) число різних логічних функцій n аргументів скінченне і рівне 2^{2n}.

Оскільки, логічна функція n аргументів визначена на 2^n наборах, то можна поставити у відповідність кожній логічній функції двійкове число, що містить 2^n розрядів. При цьому кількість різних двійкових 2^n-розрядних чисел рівна 2^{2n}, таким чином і кількість різних логічних функцій рівна 2^{2n}.

в) кількість логічних функцій n аргументів різко зростає зі збільшенням n (табл.1.2).

Таблиця 1.2

Кількість аргументів	1	2	3	4	5
Число перемикаючих функцій	4	16	256	65536	$4{,}3 \cdot 10^9$

Логічна функція одного аргументу представлена в табл.1.3.

Таблиця 1.3

x	0	1	Умовне позначення	Найменування функції
$f_0(x)$	0	0	0	Константа нуля
$f_1(x)$	0	1	x	Змінна
$f_2(x)$	1	0	$\bar{x}$	Інверсія
$f_3(x)$	1	1	1	Константа одиниці

Логічні функції двох аргументів представлені в табл.1.4.

Таблиця 1.4

Функція	0 0	0 1	1 0	1 1	Назва функції	Позначення	Функція, що виконується
$f_0(x,y)$	0	0	0	0	константа нуль	0	
$f_1(x,y)$	0	0	0	1	добуток (кон'юнкція)	$x \wedge y$	$x \cdot y \times \& y$
$f_2(x,y)$	0	0	1	0	f заборона по у	$x \Delta y$	$x\bar{y}$
$f_3(x,y)$	0	0	1	1	змінна х	x	x
$f_4(x,y)$	0	1	0	0	f заборона по х	$y \Delta x$	$\bar{x}y$
$f_5(x,y)$	0	1	0	1	змінна у	y	y
$f_6(x,y)$	0	1	1	0	сума за модулем 2	$x \oplus y$	$\bar{x}y + \bar{y}x$
$f_7(x,y)$	0	1	1	1	диз'юнкція	$x \vee y$	$x \vee y$
$f_8(x,y)$	1	0	0	0	операція Пірса	$x \downarrow y$	$\overline{x \vee y}$
$f_9(x,y)$	1	0	0	1	логічна рівнозначність	$x \sim y$	$x \equiv y$
$f_{10}(x,y)$	1	0	1	0	інверсія у	$\bar{y}$	$\bar{y}$
$f_{11}(x,y)$	1	0	1	1	імплікація від у до х	$y \to x$	$x \vee y$
$f_{12}(x,y)$	1	1	0	0	інверсія х	$\bar{x}$	$\bar{x}$
$f_{13}(x,y)$	1	1	0	1	імплікація від х до у	$x \to y$	$\bar{x} \vee y$
$f_{14}(x,y)$	1	1	1	0	операція Шеффера (штрих Шеффера)	x / y	$\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{xy}$
$f_{15}(x,y)$	1	1	1	1	константа одиниці	1	

Існує 16 різних логічних функцій двох аргументів (x і y), кожна з яких визначена на 4-х наборах.

З 16-ти функцій, які представлені в табл.1.4 6 функцій

$f_0(x,y)=0$; $f_5(x,y)=y$; $f_{12}(x,y)=\overline{x}$;

$f_3(x,y)=x$; $f_{10}(x,y)=\overline{y}$; $f_{15}(x,y)=1$.

є константами або функціями одного аргументу. Решті десять функцій залежать від двох аргументів і мають свої загальноприйняті позначення і назви.

Функція $f_1(x,y)$ – називається кон'юнкцією, логічним множенням або логічним "І". Для її позначення використовуються: знак множення "·" - $x \cdot y$; знак кон'юнкції "∧" - $x \wedge y$; знак логічного "і" "&" - $x \& y$.

Функція $f_7(x,y)$ носить назву диз'юнкції, логічного додаваня, функції ділення, логічного "АБО". Для позначення використовується знак "∨" $f_7(x,y)=x \vee y$.

Функція $f_6(x,y)$ називається функцією нерівнозначності або сумою за модулем 2:

$$f_6(x,y)=x \oplus y.$$

Функція $f_9(x,y)$ називається функцією рівнозначності або еквівалентності:

$$f_9(x,y)=x \equiv y.$$

Функція $f_{14}(x,y)$ називається штрихом Шеффера або запереченням кон'юкції:

$$f_{14}(x,y)=x / y \text{ або}$$

$$f_{14}(x,y)=\overline{xy}$$

Останнє позначення показує, що функція може бути отримана шляхом суперпозиції і кон'юнкції.

Функція $f_8(x,y)$ називається запереченням диз'юнкції, функцією Пірса або стрілкою Пірса:

$$f_8(x,y) = x \downarrow y \text{ або}$$

$$f_8(x,y) = \overline{x \vee y}.$$

Функції $f_{11}(x,y)$ і $f_{13}(x,y)$ називаються імплікацією:

$$f_{11}(x,y) = y \to x; \text{ або } f_{13}(x,y) = x \to y$$

$$f_{11}(x,y) = x \vee \overline{y}; \qquad f_{13}(x,y) = \overline{x} \vee y$$

Функція $f_2(x,y)$ і $f_4(x,y)$ називається функцією заборони або заперечення імплікації:

$$f_2(x,y) = x\overline{y}; \qquad f_4(x,y) = \overline{x}y.$$

1.1. Основні аксіоми булевої алгебри

Вперше логічні функції були використані в алгебрі логіки, початок якій покладено працями англійського математика Дж. Буля, її також називають булевою алгеброю або алгеброю висловлень.

Під висловленням розуміється будь-яке твердження, яке може бути істинним або хибним.

Істинному висловленню приписується 1, хибному – 0. Висловлення можуть бути простими і складними. Складні висловлення складаються з простих.

Для об'єднання простих висловлень в складні використовуються логічні зв'язки, що відповідають логічним функціям, аргументами яких є прості висловлення.

Логічний зв'язок "І" (кон'юнкція). Кон'юнкцією називають складне висловлення, що містить 2 або більше простих висловлень і яке є істинним тоді і лише тоді, коли істинними є прості висловлення, і хибним, якщо хоч одне з простих висловлень хибне.

Кон'юнкція являє собою логічний зв'язок "І" (див. табл.1.5).

З'єднання двох висловлень читається як x і y. Позначається xy або $x \wedge y$.

Таблиця 1.5

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \cdot y = x \wedge y$	0	0	0	1

Логічний зв'язок "АБО" (диз'юнкція). Диз'юнкцією називають складне висловлення, що містить декілька простих висловлень і яке є істинним тоді, коли істинним буде хоч одне з простих висловлень, які входять в це складне висловлення, і хибним, якщо всі прості висловлення хибні.

Диз'юнкція являє собою логічний зв'язок "АБО" (табл.1.6) і позначається $x \vee y$. Читається "x або y".

Таблиця 1.6

x	y	$x \vee y =$ "x або y"
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логічний зв'язок "НІ" (заперечення). Логічний зв'язок "НІ" означає заперечення висловлення і читається: "НЕ x", позначається $\bar{x}$ або $\neg x$ (табл.1.7)

Таблиця 1.7

x	0	1
$\overline{x}$	1	0

Запереченням висловлення x називають складне висловлення “НЕ x”, яке є істинним, коли x хибне, і хибним, коли x істинне.

Булевою алгеброю називається множина M, що складається не менше ніж з двох елементів, на якій визначені три операції диз'юнкції $(x \vee y)$, кон'юнкції (xy), заперечення $(\overline{x})$ для будь-яких елементів $x, y, z \in M$, які задовольняють такі аксіоми:

1. $x \vee y = y \vee x$
   $x \cdot y = y \cdot x$
   - властивість комутативності

2. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
   $(xy)z = x(yz)$
   - властивість асоціативності

3. $x(y \vee z) = xy \vee xz$
   $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$
   - властивість дистрибутивності

4. $x \vee x \vee x = x$
   $x \cdot x \cdot x = x$
   - властивість ідемпотентності

5. $x \vee 0 = x$ - логічне додавання до нуля

6. $x\vee 1=1$ - логічне додавання до одиниці

7. $x\cdot 0=0$ - логічне множення на 0

8. $x\cdot 1=x$ - логічне множення на 1

9. $x\cdot\overline{x}=0$ - закон протиріччя

10. $x\vee\overline{x}=1$ - закон виключеного третього

З цих аксіом випливають тотожності:

1. $\overline{\overline{x}}=x$ - закон подвійного заперечення

2. $x\vee xy=x$
$(x\vee y)x=x$ - закон поглинання (х поглинає у)

3. $\overline{x\vee y}=\overline{x}\,\overline{y};\ \overline{xy}=\overline{x}\vee\overline{y}$ - закон де Моргана
$\overline{x\vee y}=\overline{x}\wedge\overline{y};\ \overline{xy}=\overline{x}\vee\overline{y}$

Для доведення цих тотожностей необхідно замість аргументів підставляти відповідно значення 0 або 1.

Доведення правила де Моргана

$$\overline{x\vee y}=\overline{x}\,\overline{y}$$

приведені в табл.1.8

Таблиця 1.8

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}\,\bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

З таблиці 1.8 видно, що при різних значеннях x і y права і ліва частини рівні.

Аналогічним чином доводяться інші тотожності.

За допомогою розглянутих співвідношень можна виконувати різні тотожні перетворення булевих виразів.

При цьому порядок виконання дій такий:

При відсутності дужок виконуються операції заперечення, потім кон'юнкції, останніми – диз'юнкції.

2. Форми подання функції алгебри логіки

Подання функції у вигляді логічних виразів

Розглянемо функцію, яка подана у вигляді суперпозицій булевої алгебри

$$f(x,y,z) = x(\overline{y \vee \bar{x} z}) \vee \bar{x} y$$

Застосовуючи наведені вище тотожності, перетворимо цю функцію

$$f(x,y,z) = x(\overline{y \vee \bar{x} z}) \vee \bar{x} y = x(\bar{y}(\overline{\bar{x} z})) \vee \bar{x} y = x\bar{y}(x \vee \bar{z}) \vee \bar{x} y =$$

$$= x\bar{y} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy = x\bar{y}(1 \vee z) \vee \bar{x} y = x\bar{y} \vee \bar{x} y$$

Таким чином, одна і та ж функція може бути подана різними формулами. В зв'язку з цим виникає задача знаходження такої форми запису функцій, при якій кожній функції відповідає одна і лише одна формула, а формулі відповідає одна і лише одна функція.

Такі форми запису називають канонічними.

Канонічні форми запису називаються також досконалими диз'юнктивними нормальними формами (ДДНФ) або досконалими кон'юнктивними нормальними формами (ДКНФ).

2.1. Досконала диз'юнктивна нормальна форма

Елементарними добутками в алгебрі логіки називають вирази у вигляді $x, x_1, \overline{x_3}, x_5, \bar{x}\,\bar{z}, xyz$, тобто заперечення ставиться тільки над кожною окремою змінною. Диз'юнкція добутків називається диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).

Окрім нормальних диз'юнктивних форм можуть бути і інші диз'юнктивні форми. Наприклад, $\overline{xy} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee xyz$ не можна називати ДНФ, оскільки $\overline{xy}$ не є елементарним добутком.

Нехай дано набір змінних $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Добуток всіх змінних, взятих з запереченнями або без них, називають конституентами одиниці. Будь-яка конституента дорівнює одиниці лише на одному наборі змінних.

Щоб записати конституенту одиниці n змінних, яка дорівнює одиниці на m-му наборі, потрібно число m подати у вигляді n-розрядного двійкового числа і в добутку взяти з запереченнями ті змінні, яким в двійковому числі відповідають нулі.

Наприклад, конституента одиниці змінних x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 яка дорівнює одиниці на 25-му наборі, має вигляд:

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = 25_{10} = 11001.$$

Диз'юнкція конституент одиниці називається досконалою диз'юнктивною нормальною формою.

Будь-яку логічну функцію (окрім константи нуля) можна подати в досконалій диз'юнктивній нормальній формі, яка є єдиною для цієї функції.

На наступному прикладі розглянемо порядок визначення ДДНФ.

Приклад. Подати в ДДНФ логічну функцію п'яти аргументів $f(x_1,x_2,...,x_5)$, яка дорівнює 1 на наборах з номерами 4, 10, 15, 20 і нулю на решті наборів.

Для знаходження ДДНФ виконаємо такі операції:

1. Номери наборів, які приймають значення 1, записуються в двійковому коді, потім подаються у вигляді добутку змінних, в якому над аргументами, які рівні нулю, ставиться знак заперечення.

4	00100	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}$
10	01010	$\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5}$
15	01111	$\overline{x_1}\,x_2 x_3 x_4 x_5$
20	10100	$x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}$.

2. Набори добутків об'єднуються знаком диз'юнкції

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\overline{x_1}\,x_2x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2x_3x_4x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5.$$

2.2. Досконала кон'юнктивна нормальна форма

Якщо задано, що логічна функція дорівнює одиниці на більшості наборів аргументів, то представлення функції в ДДНФ – громіздке. В таких випадках зручніше використовувати досконалу кон'юктивну нормальну форму.

В алгебрі логіки конституентою нуля називають логічну функцію n аргументів, яка приймає значення, рівне нулю, лише на одному наборі.

Оскільки наборів аргументів 2^n, то і конституент нуля - 2^n.

Конституенти нуля можна виразити у вигляді диз'юнкцій всіх аргументів, частина з яких береться з запереченнями.

Заперечення ставляться так, щоб обернути в нуль диз'юнкцію в потрібному наборі.

Наприклад, конституенту нуля двох аргументів отримаємо

$f_1(x,y)=x\vee y$ при $x=0;\ y=0$

$f_2(x,y)=x\vee \bar{y}$ при $x=0;\ y=1$

$f_3(x,y)=\bar{x}\vee y$ при $x=1;\ y=0$

$f_4(x,y)=\bar{x}\vee \bar{y}$ при $x=1;\ y=1$

Приклад. Записати конституенту нуля на одинадцятому наборі; число аргументів дорівнює шести:

$$\begin{array}{l} 11 \quad 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1 \\ \qquad x_1\vee x_2\vee x_3\vee x_4\vee x_5\vee x_6 \end{array}$$

Заперечення вказується над аргументами рівними одиниці

$$f_{11}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=x_1\vee x_2\vee \bar{x}_3\vee x_4\vee \bar{x}_5\vee \bar{x}_6\,.$$

Означення: добуток конституент нуля, які рівні нулю на тих самих наборах, що і задана функція, називається досконалою кон'юктивною нормальною формою.

Будь-яка логічна функція має єдину досконалу кон'юктивну нормальну форму.

Отримання ДКНФ розглянемо на наступному прикладі.

Наобхідно представити в ДКНФ функцію трьох аргументів, яка дорівнює нулю на наборах 1, 3, 6.

Для подання функції виконуються дії:

записують диз'юнкцію всіх аргументів, на яких функція перетворюється в нуль, і над аргументами, які рівні одиниці, вказують знак заперечення

1	0 0 1	$x \vee y \vee \overline{z}$
3	0 1 1	$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$
6	1 1 0	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$

Записують функцію у вигляді:

$$f(x,y,z) = (x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z).$$

2.3. Способи переходу від нормальної до досконалої форми логічної функції

Перехід від нормальної до досконалої форми логічної функції здійснюється аналітично або графічно.

Аналітичний спосіб. Досконала нормальна форма на відміну від нормальної завжди містить диз'юнкції (ДДНФ) або кон'юнкції (ДКНФ) лише максимального рангу r. Це дає можливість проводити перехід за такими правилами.

Для переходу від довільної ДНФ *до* ДДНФ *r-го рангу* необхідно кон'юнкції, які входять до ДНФ, *k*-го ($k<r$) рангу послідовно множити на

логічний вираз $(Y_i \vee \overline{Y_i})$, де $Y_i = X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ — одна із змінних, яка не входить в дану кон'юнкцію. Число таких перетворень для кожної кон'юнкції повинно бути (r-k).

П р и к л а д 1. Перетворити в ДДНФ логічну функцію, задану в ДНФ: $f_{\text{ДНФ}}(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 \vee X_3$.

1. Використовуючи закони: $X_1 \vee X_2 = X_2 \vee X_1$, $X_1 X_2 = X_2 X_1$, $(X_1 \vee X_2) X_3 = X_1 X_3 \vee X_2 X_3$ і тотожність $X_1 \vee \overline{X_1} = 1$; $X_1 \cdot \overline{X_1} = 0$; алгебри логіки, перетворимо кон'юнкції заданої функції в мінтерми 3-го рангу:

$$X_1 X_2 (X_3 \vee \overline{X_3}) = X_1 X_2 X_3 \vee X_1 X_2 \overline{X_3};$$
$$X_3 = X_3 (X_1 \vee \overline{X_1}) = (X_1 X_3 \vee \overline{X_1} X_3)(X_2 \vee \overline{X_2}) =$$
$$= X_1 X_2 X_3 \vee \overline{X_1} X_2 X_3 \vee X_1 \overline{X_2} X_3 \vee \overline{X_1} \overline{X_2} X_3.$$

2. В результаті перетворень отримані мінтерми з'єднаємо символом диз'юнкції і, використовуючи тотожність $X_1 \vee X_1 = X_1$; $X_1 \cdot X_1 = X_1$, отримаємо

$$f_{\text{ДДНФ}}(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 X_3 \vee X_1 X_2 \overline{X_3} \vee X_1 \overline{X_2} X_3 \vee \overline{X_1} X_2 X_3 \vee \overline{X_1} \overline{X_2} X_3.$$

Для переходу від довільної КНФ до ДКНФ *r-го рангу* необхідно диз'юнкції, які входять в КНФ, k-го (k-r) рангу послідовно додавати з логічним виразом $Y_i \overline{Y_i}$, де $Y_i = X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ — одна із змінних, яка не входить в дану диз'юнкцію. Число таких перетворень для кожної диз'юнкції повинно бути (r-k).

П р и к л а д 2. Перетворити в ДДНФ логічну функцію, задану в КНФ: $f_{\text{КНФ}}(X_1, X_2, X_3) = X_1 (X_2 \vee \overline{X_3})$.

1. Використовуючи закони $(X_1 \vee X_2) \vee X_3 = X_1 \vee (X_2 \vee X_3)$, $(X_1 X_2) \vee X_3 = (X_1 \vee X_3)(X_2 \vee X_3)$ і тотожність $X_1 \vee 0 = X_1$, $X_1 \cdot 1 = X_1$ алгебри логіки, перетворимо диз'юнкції заданої функції в макстерми 3-го рангу:

$$X_1 = X_1 \vee X_2\overline{X_2} = (X_1 \vee X_2)(X_1 \vee \overline{X_2}) = (X_1 \vee X_2 \vee X_3\overline{X_3})\bullet$$

$$\bullet(X_1 \vee \overline{X_2} \vee X_3 \bullet \overline{X_3}) =$$

$$= (X_1 \vee X_2 \vee X_3)(X_1 \vee X_2 \vee \overline{X_3})(X_1 \vee \overline{X_2} \vee X_3)(X_1 \vee \overline{X_2} \vee \overline{X_3});$$

$$X_2 \vee \overline{X_3} = X_2 \vee \overline{X_3} \vee X_1\overline{X_1} = (X_1 \vee X_2 \vee \overline{X_3})(\overline{X_1} \vee X_2 \vee \overline{X_3}).$$

1. В результаті перетворень отримані макстерми з'єднаємо символом кон'юнкції і, використовуючи тотожність, $X_1 \vee X_1 = X_1$; $X_1 \cdot X_1 = X_1$, отримаємо

$$f_{ДКНФ}(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \vee X_2 \vee X_3)(X_1 \vee X_2 \vee \overline{X_3})(X_1 \vee \overline{X_2} \vee X_3)\cdot$$

$$\cdot(X_1 \vee \overline{X_2} \vee \overline{X_3})(\overline{X_1} \vee X_2 \vee \overline{X_3}).$$

Графічний спосіб. Найбільш наочним і простим графічним способом перетворення логічної функції з нормальної форми в досконалу є карти Карно-Вейча.

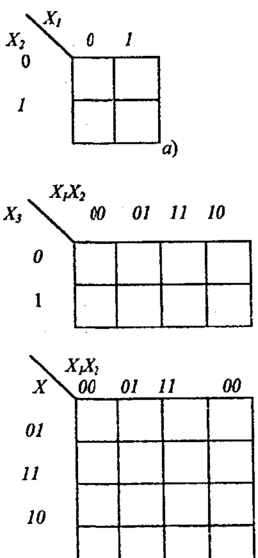


Рис. 2.1. Зображення карт Карно на двох (*а*), трьох (*б*) і чотирьох (*в*) змінних

Карта Карно – графічне представлення всіх мінтермів (2^n) для даного числа змінних (n). Кожний мінтерм зображується у вигляді клітинки, розміщеної так, що мінтерми, які знаходяться у сусідніх клітинках, відрізняються лише однією змінною. На рис.2.1 представлені зображення карт Карно для функцій двох, трьох і чотирьох змінних. Змінні написані по обидві сторони діагональної риски в лівому кутку карти. Значення змінних позначаються на зовнішньому боці карти за допомогою двійкових цифр: 0 –відповідає інверсному значенню змінної, а 1 – прямому. Така умова дає можливість легко уявити для кожної клітинки карти Карно відповідний їй мінтерм.

У картах Карно сусідніми також вважаються граничні клітинки кожного стовпчика або рядка, так як розташовані в них мінтерми відрізняються значенням однієї змінної.

Алгоритм перетворення логічної функції з ДНФ в ДДНФ за допомогою карти Карно полягає в наступному:

1. Для заданої логічної функції зобразити карту Карно.

2. Поставити в клітинках карти Карно одиницю для тих мінтермів, в склад яких входять кон'юнкції заданої функції.

3. Відмічені одиницею мінтерми з'єднати символами диз'юнкції – це і буде ДДНФ заданої логічної функції.

П р и к л а д 3. За допомогою карти Карно перетворити логічну функцію $f(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 \vee X_3$ з ДНФ в ДДНФ.

Розв'язок. 1. Для заданої логічної функції будуємо карту Карно (рис. 2.2.), на якій одиницею відмічені мінтерми, в склад яких входять кон'юнкція X_1X_2 і змінна X_3.

2. Запишемо значення логічної функції в ДДНФ, з'єднавши відмічені мінтерми символами диз'юнкції:

$$f_{\text{ДДНФ}}(X_1, X_2, X_3) = \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3 \vee \overline{X_1}X_2X_3 \vee X_1\overline{X_2}X_3 \vee X_1X_2\overline{X_3} \vee X_1X_2X_3.$$

Перехід від КНФ логічної функції до ДКНФ може бути також здійснений за допомогою карти Карно. Пояснимо це на прикладі.

П р и к л а д 4. Перетворити в ДКНФ логічну функцію, задану в КНФ: $f_{\text{КНФ}}(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1 \vee X_2 \vee X_3)(X_1 \vee \overline{X_2} \vee X_4)$.

Розв'язок. 1. Від заданої функції в КНФ отримаємо її інверсне значення:

$$\overline{f_{КНФ}(X_1, X_2, X_3, X_4)} = \overline{X_1}\,\overline{X_2}\,\overline{X_3} \vee \overline{X_1}X_2\overline{X_4}.$$

2. Для отриманої логічної функції будуємо карту Карно (рис. 2.3), на якій одиницею відмічаємо мінтерми, що включають в себе логічні змінні $\overline{X_1}\,\overline{X_2}\,\overline{X_3}$ і $\overline{X_1}X_2\overline{X_4}$.

X_3 \ X_1X_2	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Рис. 2.2. Карта Карно для логічної функції $f(X_1,X_2,X_3) = X_1X_2 \vee X_3$

X_3X_4 \ X_1X_2	00	01	11	10
00	1	1		
01	1			
11				
10		1		

Рис.2. 3. Карти Карно для логічної функції $f_{КНФ}(X_1,X_2,X_3,X_4) = \overline{X_1 X_2 X_3} \vee \overline{X_1} X_2 \overline{X_3}$

3. Користуючись картою Карно (рис. 2.3), запишемо інверсне значення логічної функції в ДКНФ:

$$\overline{f_{ДКНФ}(X_1,X_2,X_3,X_4)} = \overline{X_1X_2X_3X_4} \vee \overline{X_1X_2X_3}X_4 \vee \overline{X_1}X_2\overline{X_3}\,\overline{X_4} \vee \overline{X_1}X_2X_3\overline{X_4}.$$

4. На основі тотожності $\overline{X} = X$ інверсне значення для цієї функції має вигляд

$$f_{ДКНФ}(X_1,X_2,X_3,X_4) = (X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4)(X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \overline{X_4})\cdot$$
$$\cdot(X_1 \vee \overline{X_2} \vee X_3 \vee X_4)(X_1 \vee \overline{X_2} \vee \overline{X_3} \vee X_4) \quad .$$

і буде являти задану логічну функцію в ДКНФ.

2.4. Практичне заняття № 1

План заняття

1. Вивчення основних теоретичних відомостей з алгебри логіки та методів переходу від довільних форм подання логічних функцій до нормальних.

2. Виконання практичних завдань.

Завдання 1. Проаналізувати логічні функції, а також дати відповіді на такі питання:

в якій формі подана логічна функція: в ДНФ або в КНФ,

якщо будь-яка з функцій не є ДНФ або КНФ, то необхідно її привести до ДНФ (КНФ).

Варіанти завдань:

1. $f(xyzw) = \overline{x\bar{w} \vee x(\bar{w} \vee zy)} \vee yw \vee xz\bar{w}$

2. $f(abce) = (a\bar{b}\,\bar{c} \vee \overline{b\,\bar{c}(a \vee e)}) \vee \bar{b}\,c\,\bar{e}$

3. $f(abcd) = a\bar{b} \vee \bar{a}\,c \vee b(\overline{cd \vee \bar{a}\,b})$

4. $f(abdf) = (ab \vee \bar{a}\,\overline{bd} \vee \bar{a}\,df \vee ab\bar{f}\,d)$

5. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \bar{c}\,d \vee acd}$

$6. f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \bar{x}_1 x_2}$

$7. f(abcdx) = ab\overline{(c \vee x)} \vee cdx\overline{(a \vee \bar{x})} \vee d\,\bar{x} \vee bcd$

$8. f(abcd) = \overline{a\,\bar{b}\,c \vee \bar{a}(b \vee c \vee d)} \vee \overline{abcd}$

$9. f(abcd) = \bar{a}\,b\,\bar{c} \vee ab\bar{d} \vee \overline{ab(ac \vee d)}$

$10. f(x_1x_2x_3) = x_1\,\bar{x}_2 \vee x_1\,\bar{x}_2\,x_3 \vee \overline{x_2x_3}$

$11. f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \bar{x}_1\,x_2}$

$12. f(abcd) = (\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee b \vee c)(c \vee \bar{d})$

$13. f(abc) = (ab \vee c)\,\bar{a} \vee ab\,\overline{a \vee b\,\bar{c}}$

$14. f(abc) = \overline{a(b \vee c)\overline{(a \vee bc)}}$

$15. f(abc) = \bar{a}(\bar{b} \vee \bar{c}) \vee a\,\overline{\bar{b} \vee a(b \vee \bar{c})}$

$16. f(abce) = \bar{a}\,\bar{b}\,\overline{ce} \vee \bar{a}\,c\,\bar{e} \vee ab\,\bar{c} \vee a\,\bar{b}$

$17. f(abc) = (ab \vee c)\,\bar{a} \vee ab\overline{(a \vee b\,\bar{c})}$

18. $f(abc)=\overline{a(b\vee c)\overline{(a\vee b\vee c)}}$

19. $f(ab)=\overline{\bar{a}b\vee b(a\vee\bar{b})}$

20. $f(ade)=\overline{a\bar{d}\vee a(d\vee\bar{e})}\vee\bar{a}\bar{d}e$

21. $f(xyz)=x\bar{y}\vee xy\bar{z}\vee\overline{xy}z$

22. $f(xyz)=\overline{x\bar{z}\vee yx\vee\overline{\overline{xy}z\vee xz\bar{y}}}$

23. $f(xyw)=x\bar{y}\vee xyw\vee\overline{xw}\vee y\bar{w}$

24. $f(abc)=(ab\vee c)\bar{a}\vee ab\overline{(a\vee b\bar{c})}$

25. $f(abc)=\overline{a(b\vee c)\overline{(a\vee bc)}}$

26. $f(abce)=a\bar{b}\bar{e}\vee\overline{b\bar{c}(a\vee e)}\vee\bar{b}c\bar{e}$

27. $f(abcd)=a\bar{b}\vee\bar{a}c\vee b\overline{(cd\vee\bar{a}d)}$

28. $f(abcd)=\overline{a\vee b\vee c\bar{c}d\vee acd}$

29. $f(abc)=\bar{a}(\bar{b}\vee\bar{c})\vee\overline{a\bar{b}\vee a(b\vee\bar{c})}$

$$30.\ f(abcd)=\overline{a\vee b\vee c\vee \bar c\, da\vee cd}$$

$$31.\ f(abcd)=\overline{a\vee b\vee c\vee \bar c\, da\vee cd}$$

$$32.\ f(abcf)=\bar a(\bar a\vee \bar b)\vee \overline{b\,\bar c\, f\vee \bar a\, cf}$$

$$33.\ f(abcd)=\overline{a\,\bar d\vee a(\bar d\vee cb)}\vee ad\vee ac\,\bar d$$

$$34.\ f(abc)=\overline{a\,\bar b\vee abc}\vee \bar a\,\bar b(a\vee \bar b\,\bar c)$$

$$35.\ f(abc)=\bar a(\bar b\vee \bar c)\vee \overline{a\,\bar b\vee a(b\vee \bar c)}$$

$$36.\ f(abcd)=\bar a\,\bar b\,\bar c\,\bar d\vee \bar a\, c\,\bar d\vee \overline{ab\,\bar c\vee a\,\bar b}$$

$$37.\ f(abc)=\overline{a(b\vee c)(\overline{a\vee bc})}$$

$$38.\ f(xyzw)=\overline{xw\vee x(\bar w\vee zy)}\vee yw\vee xz\,\bar w$$

$$39.\ f(x_1x_2x_3)=\overline{x_1\,\overline{x_2}\vee x_1x_2\,\overline{x_3}}\vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_1\vee \overline{x_2}\,\overline{x_3})$$

$$40.\ f(abc)=(ab\vee c)\,\bar a\vee ab\,\overline{a\vee b\,\bar c}$$

$$41.\ f(abcd)=a\,\bar b\vee \bar a\, c\vee b(\overline{cd\vee \bar a\, b)}$$

42. $f(abce) = a\bar b\,\bar c \vee \overline{b\bar c(a \vee e)} \vee \bar b\, c\, \bar e$

43. $f(xyz) = \overline{x\,\bar z \vee yx \vee \overline{\overline{xy}\,zxz\,\bar y}}$

44. $f(xyw) = x\,\bar y \vee xyw \vee \overline{xw} \vee y\,\bar w$

45. $f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \bar x_1\, x_2}$

46. $f(abcdx) = ab\overline{(c \vee x)} \vee cdx\overline{(a \vee \bar x)} \vee d\,\bar x \vee bcd$

47. $f(abce) = a\bar b\,\bar e \vee \overline{b\bar c(a \vee e)} \vee \bar b\, c\, \bar e$

48. $f(abcd) = a\bar b \vee \bar a\, c \vee b\overline{(cd \vee \bar a\, d)}$

49. $f(abcdx) = ab\overline{(c \vee x)} \vee cdx((a \vee \bar x) \vee d\,\bar x \vee bcd)$

50. $f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \bar x_1\, x_2}$

51. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c\,\bar c\, d \vee acd}$

52. $f(xyz) = \overline{x\,\bar z \vee yx \vee \overline{\overline{xy}\, z \vee xz\,\bar y}}$

53. $f(xyz) = \overline{xz \vee yx \vee \overline{\overline{xy}z \vee xz\,\bar y}}$

54. $f(xyz) = \overline{x\bar{z} \vee yx \vee \overline{\overline{xy}z \vee xz\bar{y}}}$

55. $f(xyzw) = \overline{xw \vee x(\bar{w} \vee zy)} \vee yw \vee xz\bar{w}$

56. $f(x_1x_2x_3) = \overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2\bar{x}_3} \vee \bar{x}_1\bar{x}_2(x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)$

57. $f(abc) = \bar{a}(\bar{b} \vee \bar{c}) \vee \overline{a\bar{b} \vee a(b \vee \bar{c})}$

58. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \bar{c}da \vee cd}$

59. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \bar{c}d \vee acd}$

60. $f(abcd) = \overline{a\bar{b}c \vee \bar{a}(b \vee c \vee d)} \vee \overline{abcd}$

Завдання 2. Записати конституенту нуля та одиниці функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ на N наборі відповідного варіанта

№	N	№	N
1	24	31	17
2	48	32	42
3	53	33	37
4	57	34	48
5	38	35	25
6	18	36	29
7	22	37	35
8	22	38	12
9	36	39	44
10	34	40	32
11	57	41	19
12	59	42	51
13	55	43	55
14	35	44	57
15	16	45	49
16	29	46	31
17	11	47	26
18	63	48	38
19	41	49	15
20	27	50	19
21	53	51	26
22	59	52	14
23	15	53	18
24	49	54	43
25	45	55	52
26	38	56	36
27	59	57	24
28	60	58	48
29	21	59	17
30	19	60	25

Завдання 3. Перейти від ДНФ (КНФ) до ДДНФ (ДКНФ).

1.$y = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3$

2.$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2 \vee \overline{x_3}})$

3.$y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3}$

4.$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

5.$y = x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3} \vee \overline{x_2}$

6.$f = (\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_3)$

7.$y = \overline{x_1 x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1 x_2} x_3$

8.$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})(x_2 \vee x_3)$

9.$y = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3$

10.$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2 \vee \overline{x_3}})$

11.$y = \overline{x_1 x_2} x_3 \vee x_2 \overline{x_3 \vee \overline{x_1 x_3}}$

12.$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

13.$y = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3$

14.$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

15.$y = x_1 \overline{x_2} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_3}$

16.$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 x_3)$

17.$y = \overline{x_1 x_2} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_3}$

18.$f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2 x_3})(\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_2 \vee x_3})$

19.$y = x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3} \vee x_2$

20.$f = (\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)$

21.$y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3}$

22.$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

23.$y = x_1 \overline{x_2} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_3}$

24.$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 x_3)$

25.$y = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$

26.$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$

27. $y = x_1\overline{x_2} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_3}$

28. $f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$

29. $y = \overline{x_1x_2}x_3 \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1x_3}$

30. $f = (\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

31. $y = x_1\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3}$

32. $f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_3})$

33. $y = \overline{x_1x_2}x_3 \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1x_3}$

34. $f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

35. $y = \overline{x_1} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_3$

36. $f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

37. $y = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2} \vee x_2\overline{x_3}$

38. $f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

39. $y = \overline{x_1x_2} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_3}$

40. $f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

41. $y = x_1\overline{x_2} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_3}$

42. $f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$

43. $y = \overline{x_1x_2}x_3 \vee x_2\overline{x_3 \vee \overline{x_1x_3}}$

44. $f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

45. $y = \overline{x_1x_2x_3} \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1x_3}$

46. $f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$

47. $y = \overline{x_1} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_3$

48. $f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2 \vee \overline{x_3}})$

49. $y = x_1\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3}$

50. $f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_3})$

51. $y = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_3}$

52. $f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

53. $y = \overline{x_1x_2x_3} \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1x_3}$

54. $f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$

55. $y = \overline{x_1 x_2} x_3 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$

56. $f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

57. $y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3}$

58. $f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

59. $y = \overline{x_1 x_2} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_3}$

60. $f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

3. Методи мінімізації логічних функцій

3.1. Основні поняття

Розглянемо основні методи мінімізації логічних функцій в класі диз'юнктивних нормальних форм [1]. При цьому під мінімальними будемо розуміти диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ), які містять найменшу сумарну кількість змінних (букв) в усіх диз'юнктивних членах.

Нагадаємо деякі поняття.

Елементарним добутком (кон'юнкцією) будемо називати кон'юнкцію декількох розрізнюваних змінних, що взяті із запереченнями або без них. Наприклад $x, xy, \bar{x}\,y, \bar{x}\,yz$ і тому подібні.

Функція $\varphi(x_n)$ називається імплікантою функції $f(x_n)$, якщо на будь-якому наборі значень змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ виконується умова

$$\varphi(x_n) \leq f(x_n)$$

Простими імплікантами логічної функції називають такі елементарні добутки, які самі входять до даної функції (тобто є імплікантами функції f), але ніяка власна частина цих добутків не входить до функції f.

Прості імпліканти являють собою найкоротші елементарні добутки, що входять до даної логічної функції. Звідси випливає, що логічна функція f дорівнює диз'юнкції всіх простих імплікант.

Будь-яка логічна функція має нескінченну множину простих імплікант, кількість яких менша або рівна кількості конституент одиниці в досконалій диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ).

Диз'юнкція всіх простих імплікант називається скороченою диз'юнктивною нормальною формою логічної функції.

З цього визначення випливає, що будь-яка логічна функція має скорочену ДНФ.

Метод Квайна

Розглянемо метод отримання скороченої ДНФ, який називається методом Квайна. Цей метод базується на перетвореннях досконалої диз'юнктивної нормальної форми за допомогою операції неповного склеювання та поглинання.

Операція (повного) склеювання визначається співвідношенням:

$$xy \vee x\bar{y} = x \tag{3.1}$$

Справедливість даного виразу випливає з такого перетворення:

$$xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x \cdot 1 = x$$

Операція поглинання визначається співвідношенням:

$$x \vee xy = x \tag{3.2}$$

Кажуть, що член xy поглинається членом x. Справедливість сказаного випливає з перетворень:

$$x \vee xy = x(1 \vee y) = x \cdot 1 = x$$

Операція неповного склеювання, що застосована в методі Квайна, визначається формулою:

$$xy \vee x\bar{y} = x \vee xy \vee x\bar{y}$$

яка може бути отримана з формул (3.1) і (3.2)

$$x = x \vee x = x \vee xy \vee xy \vee xy \vee x\bar{y} = x \vee xy \vee x\bar{y}.$$

Теорема Квайна

Якщо в досконалій диз'юнктивній нормальній формі логічної функції провести всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання, то вийде скорочена диз'юнктивна нормальна форма цієї функції, тобто диз'юнкція всіх її простих імплікант [1,2].

З теореми Квайна випливає: якщо функція задана у довільній формі, то її слід перетворити в досконалу ДНФ, застосувати функцію розгортання, і лише після цього проводити операції склеювання і поглинання.

Алгоритм Квайна

1. В досконалій диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ) функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ виконати всі можливі операції склеювання конституент 1. Для цього конституента одиниці порівнюється з рештою конституент. Якщо конституента А відрізняється від конституенти В тим, що до А входить змінна x_1, а до В $\overline{x_1}$ (її заперечення), то виписується їх спільна частина. В результаті отримуємо ряд добутків, що містять (n-1) змінних.

2. Кожен член нової групи порівнюється з рештою. Якщо два будь-які члени містять дві однакові змінні та один з них (членів) відрізняється наявністю заперечення в одній із змінних, то до цих двох членів застосовуються операції склеювання, тобто виписується їх загальна частина, після чого отримують наступну групу добутків, що складаються з (n-2) змінних.

3. Пункт 2 повторюється до тих пір, поки неможливо буде застосувати операцію склеювання до будь-яких двох членів нової групи добутків.

Таким чином при мінімізації за методом Квайна припускається, що вихідна функція задана в досконалій диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ). Задача мінімізації за методом Квайна полягає в попарному порівнянні всіх імплікант, що входять до ДДНФ, з метою виявлення можливості поглинання будь-якої змінної:

$$f \cdot x_i \vee f \cdot \overline{x_i} = f$$

Ця процедура знижує ранг термів та продовжується до тих пір, поки не залишиться жодного члена, який допускає поглинання з будь-яким іншим термом [1,2]. Терми, які піддалися поглинанню, відмічаються. Невідмічені терми являють собою первинні імпліканти.

Отриманий логічний вираз не завжди виявляється мінімальним, тому досліджується можливість подальшого спрощення. Для цього складається таблиця, в рядках якої записуються знайдені первинні імпліканти, а в стовпцях вказуються терми вихідного рівняння. Клітинки цієї таблиці відмічаються у випадку, коли первинна імпліканта входить до складу будь-якого терма. Після цього задача спрощення зводиться до того, щоб знайти таку мінімальну кількість первинних імплікант, які покривають всі стовпці.

Розглянемо мінімізацію логічної функції, яка задана у вигляді:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=V_1(3,4,5,7,9,11,12,13)=$$

$$=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4+\bar{x}_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4+\bar{x}_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4+\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4+$$

$$+x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4+x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4+x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4+x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4$$

Задачу мінімізації функції відповідно до алгоритму Квайна розв'язуємо в декілька етапів.

Етап 1. Знаходження первинних імплікант.

Складаємо таблицю 3.1 і знаходимо імпліканти четвертого і третього рангу, тобто знижуємо ранг термів, які входять до ДДНФ. Потім складаємо іншу таблицю (таблицю 3.2), яка містить всі терми, що не піддалися поглинанню, а також первинні імпліканти третього рангу. Складання таблиць продовжується до тих пір, поки буде неможливо застосувати правило поглинання. В нашому завданні можна дійти до первинної імпліканти другого рангу (табл. 3.2).

Таким чином первинні імпліканти найменшого рангу – $x_2\,\bar{x}_3$.

Етап 2. Встановлення міток.

Складаємо таблицю, кількість рядків якої дорівнює кількості отриманих первинних імплікант, а кількість стовпців збігається з кількістю мінтермів ДДНФ. Якщо в деякий мінтерм ДДНФ входить будь-яка з первинних імплікант, то на перетині відповідного стовпця і рядка ставиться мітка (таблиця 3.3).

Етап 3. Знаходження суттєвих імплікант.

Якщо в будь-якому із стовпців таблиці 3.3 є тільки одна мітка, то первинна імпліканта у відповідному рядку є суттєвою, оскільки без неї не буде отримана вся множина заданих мінтермів. В таблиці 3.3 суттєвою імплікантою є терм $x_2 \bar{x}_3$. Стовпці, які відповідають суттєвим імплікантам, з таблиці викреслюються.

Етап 4. Викреслення зайвих стовпців.

Після третього етапу в результаті викреслення стовпців 2,3,7 і 8 одержуємо таблицю 3.4. Якщо в таблиці є два стовпця, в яких є мітки в однакових рядках, то один з них викреслюється. Покриття стовпця, що залишився, буде здійснювати відкинутий мінтерм. В прикладі такого випадку немає.

Етап 5. Викреслення зайвих первинних імплікант.

Якщо після викреслення декількох стовпців на етапі 4 в табл. 3.4 з'являються рядки, в яких немає жодної мітки, то первинні імліканти, які відповідають цим рядкам, виключаються з подальшого розгляду, оскільки вони не покривають мінтерми, що залишилися.

Етап 6. Вибір мінімального покриття.

Вибирається в таблиці 3.4 така сукупність первинних імплікант, яка містить мітки в усіх стовпцях. При декількох можливих варіантах такого вибору віддається перевага варіанту покриття з мінімальним сумарним числом букв в імплікантах, що створюють покриття. Цю вимогу задовольняють первинні імпліканти $\bar{x}_1 x_3 x_4$ і $x_1 \bar{x}_2 x_4$.

Таким чином, мінімальна форма заданої функції буде складатися з суми суттєвих імплікант і первинних імплікант, які покривають мінтерми, що залишились:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot\overline{x}_3+\overline{x}_1x_3x_4+x_1\overline{x}_2x_4$$

Таблиця 3.1

Вихідні	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$	$\overline{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$	$x_1\overline{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$x_1x_2\overline{x}_3x_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$	1			$\overline{x}_1x_3x_4$		$\overline{x}_2x_3x_4$		
$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$				$x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	
$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$		$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	1	$\overline{x}_1x_2x_4$				$x_2\overline{x}_3x_4$
$\overline{x}_1x_2x_3x_4$	$\overline{x}_1x_3x_4$		$\overline{x}_1x_2x_4$	1				
$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$					1	$x_1\overline{x}_2x_4$		$x_1\overline{x}_3x_4$
$x_1\overline{x}_2x_3x_4$	$\overline{x}_2x_3x_4$				$x_1\overline{x}_2x_4$	1		
$x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$		$x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$					1	$x_1x_2\overline{x}_3$
$x_1x_2\overline{x}_3x_4$			$x_2\overline{x}_3x_4$		$x_1\overline{x}_3x_4$		$x_1x_2\overline{x}_3$	1

Таблиця 3.2

Первинна	$\overline{x}_1x_3x_4$	$\overline{x}_2x_3x_4$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	$x_2\overline{x}_3x_4$	$\overline{x}_1x_2x_4$	$x_2\overline{x}_3x_4$	$x_1\overline{x}_2x_4$	$x_1\overline{x}_3x_4$	$x_1x_2\overline{x}_3$
$\overline{x}_1x_3x_4$	1								
$\overline{x}_2x_3x_4$		1							
$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$			1						$x_2\overline{x}_3$
$x_2\overline{x}_3x_4$				1		$x_2\overline{x}_3$			
$\overline{x}_1x_2x_4$					1				
$x_2\overline{x}_3x_4$					$x_2\overline{x}_3$	1			
$x_1\overline{x}_2x_4$							1		
$x_1\overline{x}_3x_4$								1	
$x_1x_2\overline{x}_3$			$x_2\overline{x}_3$						1

Таблиця 3.3

Вихідні терми / Первинні імпліканти	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
$\bar{x}_1x_3x_4$	V			V				
$\bar{x}_2x_3x_4$	V					V		
$\bar{x}_1x_2x_4$			V	V				
$x_1\bar{x}_2x_4$					V	V		
$x_1\bar{x}_3x_4$					V		V	V
$x_2\bar{x}_3$		V	V				V	V

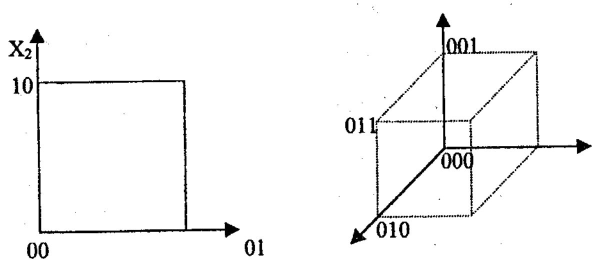
Таблиця 3.4

Первинні імпліканти	Вихідні терми			
	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$
$\bar{x}_1x_3x_4$	V	V		
$\bar{x}_2x_3x_4$	V			V
$\bar{x}_1x_2x_4$		V		
$x_1\bar{x}_2x_4$			V	V
$x_1\bar{x}_3x_4$			V	

3.3. Метод Квайна-Мак-Класкі

В методі Квайна-Мак-Класкі використовується геометричне подання логічних функцій.

Якщо функція містить два аргументи, то їй відповідають набори 00, 01, 10, 11 (рис. 3.1а). в декартових координатах візьмемо дві осі x_1, x_2. В точкі перетину координат $x_1=0$, $x_2=0$ відкладаємо одиничні відрізки на осях x_1 і x_2. На осі x_1-$x_2=1$, $x_2=0$, на осі x_2-$x_1=0$, $x_2=1$.



а б

Рис. 3.1

Перетин координат з точками 01 і 10 дає значення аргументів функції 11;

можна використовувати тривимірний простір (куб) при поданні функції 3-х аргументів (рис. 3.1б).

В загальному випадку функції алгебри логіки, які мають n аргументів, зображуються n-вимірним кубом.

Недоліком методу Квайна є необхідність повного попарного порівняння всіх мінтермів на етапі знаходження первинних імплікант. Із збільшенням кількості мінтермів збільшується кількість попарних порівнянь. Числове подання функції алгебри логіки дозволяє спростити етап знаходження первинних імплікант. Всі мінтерми записуються у вигляді двійкових номерів, а всі номери розбиваються за кількістю одиниць на групи, що не перетинаються, оскільки умовою утворення r-кубу є наявність розбіжності в (r-1) кубах лише за однією координатою (в одному двійковому розряді) та наявність загальних незалежних координат. Тому групи, які відрізняються в двох розрядах або більше, просто немає сенсу порівнювати. При цьому в і-ту групу ввійдуть всі номери (набори), що мають у своєму двійковому записі і одиниць. Попарне порівняння можна проводити лише між сусідніми за номерами групами.

Нехай задана функція:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V_1(3,4,5,7,9,11,13)$

Розглянемо її мінімізацію за методом Квайна-Мак-Класкі:

Спочатку випишемо 0-куби:

K^0={0011,0100,0101,0111,1001,1011,1100,1101}.

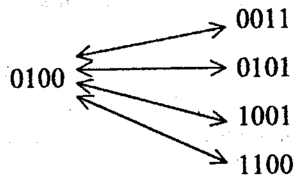
Розіб'ємо 0-куби на чотири групи за кількістю одиниць в кожному двійковому наборі:

$$K^0_1=\{0100\}; \qquad K^0_2=\left\{\begin{matrix}0011\\0101\\1001\\1100\end{matrix}\right\}; \qquad K^0_3=\left\{\begin{matrix}0111\\1011\\1101\end{matrix}\right\}.$$

За методом Квайна-Мак-Класкі мінімізація логічної функції буде складатися з таких етапів:

Етап 1. Знаходження первинних імплікант.

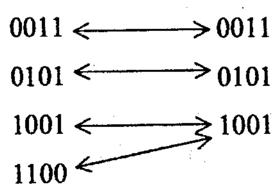
а) порівняння K^0_1 та K^0_2



На основі порівняння будуємо куб K^1_1, в якому поглинену координату замінюємо символом х:

$$K^1_1=\left\{\begin{matrix}010x\\ x100\end{matrix}\right\}$$

б) порівняння K^0_2 та K^0_3:



На основі порівняння будуємо куб K^1_2, в якому поглинену координату замінюємо символом х:

$$K^1_2=\left\{\begin{matrix}0x11\\ x011\\ 01x1\\ 10x1\\ 1x01\\ 110x\\ x101\end{matrix}\right\}$$

Первинних імплікант рангу 4 немає.

в) розіб'ємо всі 1-куби на чотири групи в залежності від положення незалежної координати x:

$$K^1_1=\left\{\begin{matrix}010x\\110x\end{matrix}\right\};\quad K^1_2=\left\{\begin{matrix}01x1\\10x1\end{matrix}\right\};\quad K^1_3=\left\{\begin{matrix}0x11\\1x01\end{matrix}\right\};\quad K^1_4=\left\{\begin{matrix}x100\\x011\\x101\end{matrix}\right\}.$$

г) на основі порівняння K^1_1 та K^1_2, K^1_3 та K^1_4 всередині кожної групи отримаємо результати:

$$\left\{\begin{matrix}010x\\110x\end{matrix}\right\}\quad \left\{\begin{matrix}01x1*\\10x1*\end{matrix}\right\}\quad \left\{\begin{matrix}0x11*\\1x01*\end{matrix}\right\}\quad \left\{\begin{matrix}x100\\x011*\\x101\end{matrix}\right\}$$

{x10x}

Отже символом * відмічені первинні імпліканти рангу 3:

$K^1 = \{ 01x1, 10x1, 0x11, 1x01, x011 \}$.

Відповідно одержуємо первинну імпліканту рангу 2:

$K^2 = \{x10x\}$.

Етап 2. Встановлення міток.

Таблиця 3.5

Первинні імпліканти	0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
01x1				*				
10x1					*	*		
0x11	*			*				
1x01					*		*	*
x011	*							
x10x		*	*				*	*

Етап 3. Знаходження суттєвих імплікант.

Суттєвою імплікантою рангу 2 будемо називати терм

$$\{x10x\} = x_2 \overline{x_3}$$

Етапи 4 і 5. Відсутні.

Етап 6. Вибирається мінімальне покриття термів, що залишилися {10x1} і {0x11} (табл. 3.5)

Таблиця 3.6

Первинні імпліканти	Вихідні терми			
	001	0111	1001	1011
01x1		*		
10x1			*	*
0x11	*	*		
1x01				
x011	*			

Результат:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_3 x_4$$

3.4. Метод карт Карно-Вейча

Одним з способів подання булевих функцій від невеликої кількості змінних є карти Карно [2]. Їх різновид – карти Вейча, які будуються як розгортки кубів на площині. При цьому вершини куба зображуються як клітинки карти, координати яких збігаються з координатами відповідних вершин куба. Карта заповнюється так само, як таблиця істинності: значення 1 вказується в клітинці, що відповідає набору, на якому функція має значення 1. Значення 0 звичайно на картах не відображується.

Карти (діаграми) Вейча

Метод дозволяє швидко одержати мінімальні ДНФ булевої функції f невеликої кількості змінних. В основі методу лежить задання булевих функцій діаграмами деякого спеціального вигляду: їх називають діаграми Вейча. Для булевої функції двох змінних діаграма Вейча має вигляд (табл.3.7). Кожна клітинка діаграми відповідає набору змінних булевої функції в її таблиці істинності. В клітинці діаграми Вейча ставиться одиниця, якщо булева функція набуває одиничного значення на відповідному наборі. Нулеві значення булевої функції в діаграмі Вейча не проставляються. Для булевої функції трьох змінних діаграма Вейча має такий вигляд (табл.3.8), діаграма для функції чотирьох змінних (табл.3.9).

Таблиця 3.7

	X_1	$\overline{X_1}$
X_2	1 1	0 1
$\overline{X_2}$	1 0	0 0

Таблиця 3.8

	X_1		$\overline{X_1}$	
X_2	1 1 0	0 1 1	0 1 1	0 1 0
$\overline{X_2}$	1 0 0	1 0 1	0 0 1	0 0 0
	$\overline{X_3}$	X_3		$\overline{X_3}$

Таблиця 3.9

	X_2		$\overline{X_2}$		
X_1	1 1 0 0	1 1 0 1	1 0 0 1	1 0 0 0	$\overline{X_3}$
	1 1 0 0	1 1 1 1	1 0 1 1	1 0 1 0	X_3
$\overline{X_1}$	0 1 1 0	0 1 1 1	0 0 1 1	0 0 1 0	
	0 1 0 0	0 1 0 1	0 0 0 1	0 0 0 0	$\overline{X_3}$
	$\overline{X_4}$	X_4		$\overline{X_4}$	

Правила мінімізації такі:

1. Дві сусідні клітинки (два 0-куби) утворюють один 1-куб. При цьому мається на увазі, що клітинки, які знаходяться на межах карти, також є сусідніми по відношенню одна до одної.

2. Чотири вершини можуть об'єднуватися, утворюючи один 2-куб, що містить дві незалежні координати.

3. Вісім вершин можуть об'єднуватися, утворюючи один 3-куб.

4. Шістнадцять вершин, об'єднуючись, утворюють один 4-куб і т.д.

Відмітимо, що сусідніми клітинками є клітинки, які збігаються при суміщенні карт поворотом навколо загального ребра.

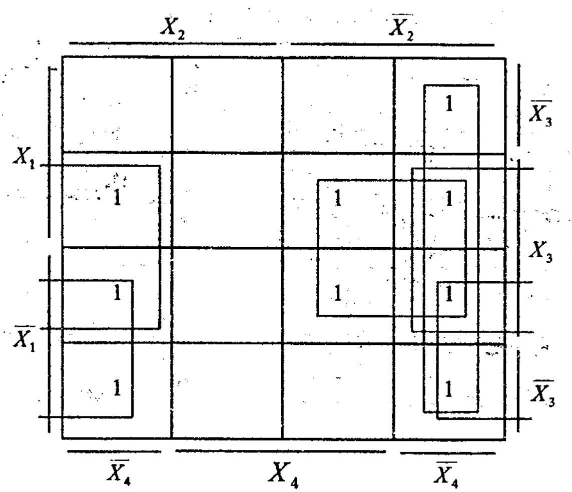
Сукупність прямокутників, які покривають усі одиниці, називається покриттям. Зазначимо, що одна і та ж комірка може покриватися два або декілька разів.

Таким чином, формула, що отримується в результаті мінімізації логічної функції за допомогою діаграм Вейча, містить суму стількох елементарних добутків, скільки прямокутників є в покритті. Чим більше комірок в прямокутнику, тим менше змінних міститься у відповідному йому елементарному добутку.

Нехай задана логічна функція:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=V_1(0,1,3,4,5,7,8,9,13)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3x_4\vee$$
$$\vee\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\vee\overline{x_1}\,x_2x_3x_4\vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\vee x_1x_2\,\overline{x_3}\,x_4$$

Будуємо діаграму Вейча для заданої функції:



Таким чином, мінімальна форма заданої функції має такий вигляд:

$$f(x_1,x_2,x_3x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_3}+\overline{x_2}\,\overline{x_3}+\overline{x_1}\,x_4+\overline{x_3}\,x_4.$$

Карти Карно

Метод мінімізуючих карт Карно знаходить широке застосування для мінімізації логічних функцій.

Основу їх мінімізації за допомогою карти Карно складає: два мінтерма, що знаходяться в сусідніх клітинках карти, можуть бути замінені одією кон'юнкцією, яка містить на дві змінних менше. Якщо сусідніми є дві пари мінтермів, то така група з чотирьох мінтермів може бути замінена кон'юнкцією, яка містить на дві змінних менше. В загальному випадку наявність мінтермів в 2^n сусідніх клітинках дозволяє виключити n змінних. В цьому неважко впевнитися, якщо сусідні пари мінтермів перетворювати методом послідовного виключення змінних, використовуючи при цьому закони

$$(X_1 \vee X_2)X_3 = X_1X_3 \vee X_2X_3; (X_1X_2) \vee X_3 = (X_1 \vee X_3)(X_2 \vee X_3),$$

правила поглинання $X_1 \vee X_1X_2 = X_1$

і склеювання $X_1X_2 \vee X_1\overline{X_2} = X_1; (X_1 \vee X_2)(X_1 \vee \overline{X_2}) = X_1$.

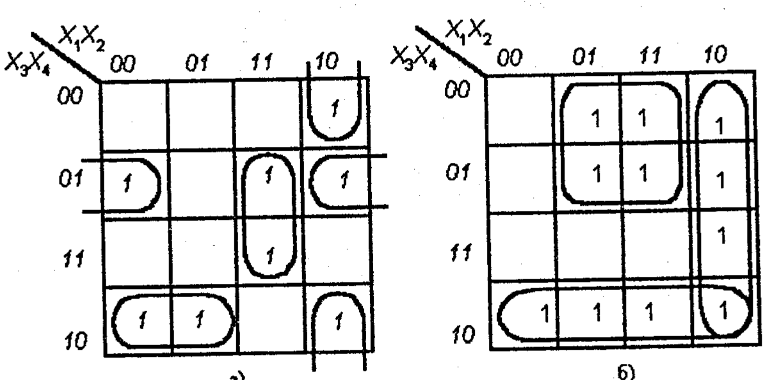


Рис. 3.2. Приклади об'єднання в картах Карно клітинок (макстермів або мінтермів)

При мінімізації необхідно пам'ятати, що сусідніми клітинками є не тільки клітинки, які розміщені близько по горизонталі і вертикалі, але й клітинки на протилежних межах карти Карно;

клітинки можуть об'єднуватися по дві (рис. 3.2,а), чотири (рис 3.2,б) і т.д.;

одна і таж клітинка карти Карно може входити в декілька груп.

Картами Карно можна користуватися для мінімізації логічних функцій, заданих як в ДДНФ, так і в ДКНФ.

П р и к л а д 6. Логічну функцію $X_{ДДНФ} = X_1\overline{X_2}X_3 \vee$ $\vee \overline{X_1X_2}X_3 \vee \overline{X_1X_2X_3} \vee \overline{X_1}X_2\overline{X_3} \vee X_1X_2\overline{X_3} \vee X_1X_2X_3$, задану в ДДНФ, мінімізувати за допомогою карти Карно.

Розв'язок. 1. Зобразимо карту Карно для трьох змінних X_1, X_2, X_3 і відмітимо в ній 1 мінтерми $X_1\overline{X_2}X_3, \overline{X_1X_2}X_3, \overline{X_1X_2X_3}, X_1X_2\overline{X_3}$, $X_1X_2X_3$ і $\overline{X_1}X_2\overline{X_3}$ (рис 3.3, а).

3. В карті Карно (рис. 3.3, а) мінтерми утворюють три групи, кожна з яких містить два мінтерма. Перша складається з $\overline{X_1}X_2\overline{X_3}$ і $\overline{X_1X_2X_3}$. На основі тотожності $X = (X_1 \vee X_2)(\overline{X_2 \vee X_3}) \vee X_1X_2$ змінна X_2 може бути виключена з цієї групи. Друга група складається з

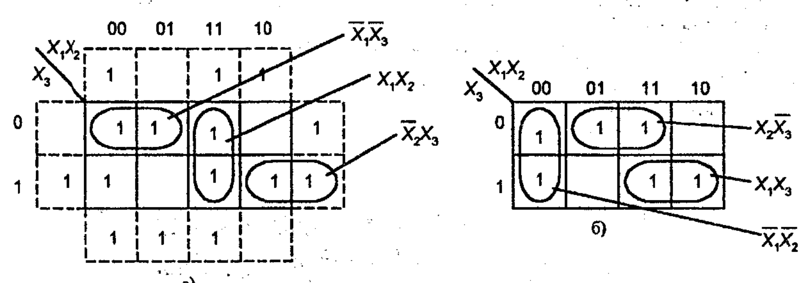


Рис. 3.3. Мінімізація логічної функції за допомогою карт Карно

$X_1X_2X_3$ і $X_1X_2\overline{X_3}$ і з цієї групи може бути виключена змінна X_3. Третя група складається з $X_1\overline{X_2}X_3$ і $\overline{X_1X_2}X_3$, з якої може бути виключена змінна X_1.

3. Записуємо мінімізовану логічну функцію в ДНФ:

$X\min1 = X_1X_2 \vee \overline{X_2}X_3 \vee \overline{X_1X_3}.$

Вибираючи групи мінтермів по-іншому (рис. 12, б), отримуємо другу мінімальну форму логічної функції, заданої рівнянням

$$X_{ДДНФ} = X_1\overline{X_2}X_3 \vee \overline{X_1X_2}X_3 \vee \overline{X_1X_2X_3} \vee \overline{X_1}X_2\overline{X_3} \vee X_1X_2\overline{X_3} \vee$$
$$\vee X_1X_2X_3:$$

$X\min2 = \overline{X_1X_2} \vee X_2\overline{X_3} \vee X_1X_3.$

3.5. Контрольні питання

1. Що таке суттєва імпліканта?
2. Дайте визначення мінімальної форми логічної функції.
3. Наведіть визначення скороченої диз'юнктивної нормаль-ної форми логічної функції.
4. З яких основних етапів складається мінімізація логічної функції за методом Квайна-Мак-Класкі?
5. Як ви розумієте нульові куби в методі Квайна-Мак-Класкі?
6. Наведіть основні аксіоми булевої алгебри.
7. Що таке елементарна кон'юнкція?
8. Що таке елементарна диз'юнкція?

3.6 Приклади мінімізації логічних функцій

І. Мінімізація даної функції за допомогою діаграм Вейча і методу Квайна:

1). Використання діаграм Вейча:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=V_1(1,2,4,6,8,9,11,13,15)$$

	x_2	x_2	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	
X_1		1	1	1	$\bar{x}_3$
X_1		1	1		X_3
$\bar{x}_1$	1			1	X_3
$\bar{x}_1$	1		1		$\bar{x}_3$
	$\bar{x}_4$	x_4	x_4	$\bar{x}_4$	

12	13	9	8
14	15	11	10
6	7	3	2
4	5	1	0

Мінімізована функція: $f = x_1x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$

2). Використання методу Квайна:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 +$$
$$+ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

Мінтерми									
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	1					$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$			
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$		1		$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$					
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$			1	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$					
$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$		$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$	1					
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$					1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$			
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$				$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	1	$x_1\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_4$	
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$						$x_1\bar{x}_3x_4$	1		$x_1x_2x_4$
$x_1\bar{x}_2x_3x_4$						$x_1\bar{x}_2x_4$		1	$x_1x_3x_4$
$x_1x_2x_3x_4$							$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	1

Отримаємо скорочену форму функції:

$$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_4+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4$$

Складаємо таблицю вже для нової функції:

	$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_4$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$
$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	1							
$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$		1						
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$			1					
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$				1				
$x_1\bar{x}_3x_4$					1			x_1x_4
$x_1\bar{x}_2x_4$						1	x_1x_4	
$x_1x_2x_4$						x_1x_4	1	
$x_1x_3x_4$					x_1x_4			1

$$f=x_1x_4+\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$
x_1x_4					V	V	V	V	
$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	V				V				
$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$		V							V
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$			V						V
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$				V	V				

$$F_{min}=x_1x_4+\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

II. Мінімізація даної функції за допомогою діаграм Вейча і методу Квайна:

$$y=x_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2x_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$$

Діаграми Вейча

	x_2		$\bar{x}_2$		
x_1		1	1		$\bar{x}_3$
x_1	1	1			x_3
$\bar{x}_1$			1	1	x_3
$\bar{x}_1$		1	1		$\bar{x}_3$
	$\bar{x}_4$	x_4	x_4	$\bar{x}_4$	

Мінімізована функція

$$f = \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$$

Метод Квайна

	Мінтерми							
	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$
$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	1	$x_1 \bar{x}_3 x_4$				$x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 x_4$	
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_3 x_4$	1						$\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$
$x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$			1				$x_1 x_2 x_3$	
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$				1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$			$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4$
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$				$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	1			
$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_2 \bar{x}_3 x_4$					1		$\bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4$
$x_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 x_4$		$x_1 x_2 x_3$				1	
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$		$\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$		$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4$		$\bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4$		1

$$f = x_1 \bar{x}_3 x_4 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4$$

	$x_1\bar{x}_3x_4$	$x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$
$x_1\bar{x}_3x_4$	1							$\bar{x}_3x_4$
$x_2\bar{x}_3x_4$		1			$\bar{x}_3x_4$			
$x_1x_2x_4$			1					
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$				1				
$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$		$\bar{x}_3x_4$			1			
$x_1x_2x_3$						1		
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$							1	
$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_3x_4$							1

$$f = \bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_4$$

Складемо таблицю покриттів:

	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
$\bar{x}_3x_4$	V	V				V		V
$x_1x_2x_4$	V						V	
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$				V	V			
$x_1x_2x_3$			V				V	
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$				V				V

Мінімізована функція: **f=** $\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2x_3$

III. Мінімізація логічної функції за методом діаграм Вейча, Квайна-Мак-Класкі

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = V_1(2, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15)$$

Діаграми Вейча

x_2 — над стовпцями 1–2; x_1 — рядки 1–2; x_3 — рядки 2–3; x_4 — під стовпцями 2–3.

12	13	9	8
14	15	11	10
6	7	3	2
4	5	1	0

	1	1	
	1	1	
	1		1
1	1		

$$f(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 +$$
$$+ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

$$f_{\min}(x_1x_2x_3x_4) = x_1x_4 + x_2x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$$

Метод Квайна-Мак-Класкі

K^0={0010, 0100, 0101, 0111, 1001, 1011, 1101, 1111}

$$K^1_0 = \begin{Bmatrix} 0010 \\ 0100 \end{Bmatrix} \quad K^0_1 = \begin{Bmatrix} 0101 \\ 1001 \end{Bmatrix} \quad K^0_2 = \begin{Bmatrix} 0111 \\ 1011 \\ 1101 \end{Bmatrix} \quad K^0_3 = \begin{Bmatrix} 1111 \end{Bmatrix}$$

1. Знаходження первинних імплікант:

а) Порівняння K_0^0 і K_1^0

0101 0101*

0100* 1001

$K^1_1 = \{010x\}$

б) Порівняння K_1^0 і K_2^0

0101* 0111*

1001* 1011*

1101*

$K^1_2 = \begin{Bmatrix} 01x1 \\ x101 \\ 10x1 \\ 1x01 \end{Bmatrix}$

в) Порівняння K_2^0 і K_3^0

0111*

1011* 1111*

1101*

$K^1_3 = \begin{Bmatrix} x111 \\ 1x11 \\ 11x1 \end{Bmatrix}$

г) Розбиття на групи

$\{010x\}$ $\begin{Bmatrix} 01x1 \\ 10x1 \\ 11x1 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} 1x01 \\ 1x11 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x101 \\ 11x1 \end{Bmatrix}$

д) Порівняння всередині кожної групи

01x1*	1x01*	x101*
10x1	1x11*	x111*
11x1*		
x1x1	1xx1	x1x1

2. Будуємо таблицю покриття:

Вхідні мінтерми								
	0010	0100	0101	0111	1001	1011	1101	1111
010x		v	v					
x1x1			v	v			v	v
1xx1					v	v	v	v

$$f_{\min}(x_1x_2x_3x_4) = x_1x_4 + x_2x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$$

Метод Квайна

$$f(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 +$$

$$+ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

1. Знаходження первинних імплікант

	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	1							
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$		1	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$					
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$		$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	1	$\bar{x}_1x_2x_4$				
$\bar{x}_1x_2x_3x_4$			$\bar{x}_1x_2x_4$	1				$x_2x_3x_4$
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$					1	$x_1\bar{x}_2x_4$		
$x_1\bar{x}_2x_3x_4$					$x_1\bar{x}_2x_4$	1		$x_1x_3x_4$
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$							1	$x_1x_2x_4$
$x_1x_2x_3x_4$				$x_2x_3x_4$		$x_1x_3x_4$	$x_1x_2x_4$	1

2. Знаходження простих імплікант

	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_1x_2x_4$
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	1					
$\bar{x}_1x_2x_4$		1				x_2x_4
$x_2x_3x_4$			1			
$x_1\bar{x}_2x_4$				1		x_1x_4
$x_1x_3x_4$					1	
$x_1x_2x_4$		x_2x_4		x_1x_4		1

3. Будуємо таблицю покриття

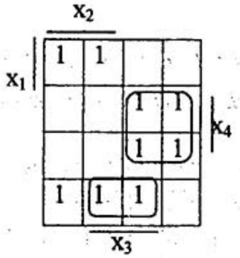
	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$		V	V					
$x_2x_3x_4$								V
$x_1x_3x_4$						V		V
x_2x_4			V	V			V	V
x_1x_4					V	V	V	V

$$f_{\min}(x_1x_2x_3x_4) = x_1x_4 + x_2x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$$

IV. Мінімізація логічних функцій

$f(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = V_1(1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13)$

Діаграми Вейча



$$f(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

$$f_{\min}(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_2x_3 + x_2\bar{x}_3$$

Метод Квайна-Мак-Класкі

K^0={0001,0010,0011,0100,0101,1010,1011,1100,1101}

Знаходження первинних імплікант

$K^0_1 = \{0001, 0010, 0100\}$ $K^0_2 = \{0011, 0101, 1010, 1100\}$ $\{1011, 1101\}$

а) Порівняння K_1^0 і K_2^0

0001*	0011*
0010*	0101*
0100*	1010*
	1100*

$K^1_1 = \{00x1, 0x01, 001x, x010, 010x, x100\}$

б) Порівняння K_2^0 і K_3^0

0011*	1011*
0101*	1101*
1010*	
1100*	

$K^0_2 = \{0011, 0101, 1010, 1100\}$

в) Розбиття на групи

$$\begin{Bmatrix} 001x \\ 010x \\ 101x \\ 110x \end{Bmatrix} \quad \{00x1\} \quad \{0x01\} \quad \begin{Bmatrix} x010 \\ x100 \\ x011 \\ x101 \end{Bmatrix}$$

г) Порівняння всередині групи

001x* x010*
010x* x100*
101x* x011*
110x* x101*

x01x x01x
x10x x10x

Будуємо таблицю покриття

	0001	0010	0011	0100	0101	1010	1011	1100	1101
0x01	V				V				
00x1	V		V						
x01x		V	V			V	V		
x10x				V	V			V	V

$$f_{\min}(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_2 x_3 + x_2 \bar{x}_3$$

Метод Квайна

$$f(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 +$$
$$+ \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

1. Знаходження первинних імплікант

	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	1		$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$		$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$				
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$		1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$			$\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$			
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	1				$\bar{x}_2x_3x_4$		
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$				1	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$			$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$			$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	1				$x_2\bar{x}_3x_4$
$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$		$\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$				1	$x_1\bar{x}_2x_3$		
$x_1\bar{x}_2x_3x_4$			$\bar{x}_2x_3x_4$			$x_1\bar{x}_2x_3$	1		
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$				$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$				1	$x_1x_2\bar{x}_3$
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$					$x_2\bar{x}_3x_4$			$x_1x_2\bar{x}_3$	1

2.Знаходження простих імплікант.

	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$	1									
$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$		1								
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$			1						$x_2\bar{x}_3$	
$\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$				1	$\bar{x}_2x_3$					
$\bar{x}_2x_3x_4$				$\bar{x}_2x_3$	1					
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$						1				$x_2\bar{x}_3$
$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$							1			
$x_2\bar{x}_3x_4$								1		
$x_1\bar{x}_2x_3$			$\bar{x}_2x_3$						1	
$x_1x_2\bar{x}_3$						$x_2\bar{x}_3$				1

3. Будуємо таблицю покриття

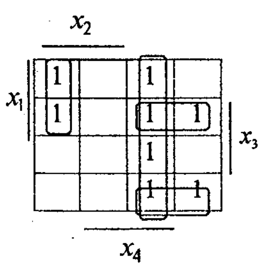
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$	V		V						
$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$	V				V				
$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$				V				V	
$x_2\bar{x}_3x_4$					V				V
$\bar{x}_2x_3$		V	V			V	V		
$x_2\bar{x}_3$				V	V			V	V

$$f_{\min}(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_2x_3 + x_2\bar{x}_3$$

V. Мінімізація логічних функцій.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V_1(0,1,3,9,10,11,12,14)$$

Діарами Вейча



$$f(x_1.x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4} + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4 +$$
$$+ \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4 + x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4 + x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\cdot\overline{x_4} +$$
$$+ x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4 + x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4} + x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$$

$$f_{\min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2}\cdot x_4 + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3} + x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$$

Метод Квайна–Мак-Класкі

K^0={0000, 0001, 0011, 1001, 1010, 1011, 1100, 1110}

$$K_o^o = \{0000\} \quad K_1^o = \{0001\} \quad K_2^o = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad K_3^o = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Знаходження первинних імплікант.

а). Порівняння K_o^o і K_1^o

0000* 0001* $K_1^1 = \{000\times\}$

б). Порівняння K_1^o і K_2^o

$$0001^* \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & * \\ 1 & 0 & 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \end{matrix} \qquad K_2^1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \times & 1 \\ \times & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

в). Порівняння K_2^o ***і*** K_3^o

$$\begin{matrix} 0011^* \\ 1001^* \\ 1010^* \\ 1100^* \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1011^* \\ 1110^* \end{matrix} \qquad K_3^1 = \begin{Bmatrix} \times 011 \\ 10\times 1 \\ 101\times \\ 1\times 10 \\ 11\times 0 \end{Bmatrix}$$

г). Розбиття на групи.

$$\begin{Bmatrix} \times & 0 & 0 & 1 \\ \times & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \quad \{1 \;\; \times \;\; 1 \;\; 0\} \quad \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \times & 1 \\ 1 & 0 & \times & 1 \\ 1 & 1 & \times & 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & \times \\ 1 & 0 & 1 & \times \end{Bmatrix}$$

д). Порівняння всередині кожної групи

$$\begin{array}{cccccccccccc} \times & 0 & 0 & 1 & * & \qquad & 0 & 0 & \times & 1 & * \\ \times & 0 & 1 & 1 & * & & 1 & 0 & \times & 1 & * \\ & & & & & & 1 & 1 & \times & 0 & \\ \times & 0 & \times & 1 & & & \times & 0 & \times & 1 & \end{array}$$

2. Будуємо таблицю покриття.

	Вихідні мінтерми							
	0000	0001	0011	1001	1010	1011	1100	1110
11x0							V	V
1x10					V			V
000x	V	V						
101x					V	V		
X0x1		V	V	V		V		

$$f_{\min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4}$$

Метод Квайна

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 +$$
$$+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$$

1. Знаходження первинних імплікант.

	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	$x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$	$x_1\overline{x_2}x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$x_1x_2x_3\overline{x_4}$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	1	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$						
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	1	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4$	$\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$				
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$		$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4$	1			$\overline{x_2}x_3x_4$		
$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$		$\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$		1		$x_1\overline{x_2}x_4$		
$x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$					1	$x_1\overline{x_2}x_3$		$x_1x_3\overline{x_4}$
$x_1\overline{x_2}x_3x_4$			$\overline{x_2}x_3x_4$	$x_1\overline{x_2}x_4$	$x_1\overline{x_2}x_3$	1		
$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$							1	$x_1x_2\overline{x_4}$
$x_1x_2x_3\overline{x_4}$					$x_1x_3\overline{x_4}$		$x_1x_2\overline{x_4}$	1

2. Знаходження простих імплікант.

	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4$	$\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	$\overline{x_2}x_3x_4$	$x_1\overline{x_2}x_3$	$x_1x_3\overline{x_4}$	$x_1x_2\overline{x_4}$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	1						
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4$		1					
$\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$			1	$\overline{x_2}x_4$			
$\overline{x_2}x_3x_4$			$\overline{x_2}x_4$	1			
$x_1\overline{x_2}x_3$					1		
$x_1x_3\overline{x_4}$						1	
$x_1x_2\overline{x_4}$							1

3. Будуємо таблицю покриття.

	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	$x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$	$x_1\overline{x_2}x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$x_1x_2x_3\overline{x_4}$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	V	V						
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4$		V	V					
$x_1\overline{x_2}x_3$					V	V		
$x_1x_3\overline{x_4}$					V			V
$x_1x_2\overline{x_4}$							V	V
$\overline{x_2}x_4$		V	V	V		V		

$$f_{\min}(x1, x2, x3, x4) = \overline{x2} \cdot x4 + \overline{x1} \cdot \overline{x2} \cdot \overline{x3} + x1 \cdot \overline{x2} \cdot x3 + x1 \cdot x2 \cdot \overline{x4}$$

3.7. Практичне заняття № 2

План заняття

1.Вивчення основних теоретичних відомостей з методів мінімізації логічних функцій.

2.Виконання практичних завдань.

Завдання.

Мінімізувати методом Квайна, Квайна-Мак-Класкі та діаграм Вейча логічні функції відповідно до заданого варіанта таблиці. Отримані результати порівняти.

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=$	
1. V_1(0,2,4,5,6,8,11,13)	31. V_1(1,3,7,9,10,12,14,15)
2. V_1(1,2,3,4,5,10,11,12,13)	32. V_1(1,6,7,8,9,11,13,15)
3. V_1(0,1,2,7,8,9,10,11)	33. V_1(3,4,5,6,12,13,14,15)
4. V_1(0,1,2,4,5,7,8,15)	34. V_1(3,6,9,10,11,12,13,14)
5. V_1(1,3,4,7,8,10,13,15)	35. V_1(2,5,6,9,10,12,14)
6. V_1(1,2,4,5,10,11,14)	36. V_1(0,3,6,7,8,9,12,13,15)
7. V_1(0,1,3,6,7,9,10,13,15)	37. V_1(2,4,5,8,9,11,12,13)
8. V_1(1,2,5,6,9,10,11,12)	38. V_1(0,3,4,7,8,13,14,15)
9. V_1(0,1,4,5,7,9,11,13)	39. V_1(2,3,4,6,8,12,13,14,15)
10. V_1(2,5,6,10,12,13,14,15)	40. V_1(0,1,3,4,7,8,9,12,13)
11. V_1(2,5,6,10,12,14,15)	41. V_1(0,1,3,4,5,7,8,9,13)
12. V_1(0,1,3,9,10,11,12,15)	42. V_1(0,1,2,4,5,6,7,8,14)
13. V_1(1,2,3,6,7,9,11,13,15)	43. V_1(0,4,5,8,9,10,12,13,14)
14. V_1(0,1,2,3,6,7,12,14,15)	44. V_1(4,5,8,9,10,11,14,15)
15. V_1(3,6,8,9,11,13,14,15)	45. V_1(0,1,2,3,4,5,7,10,12)
16. V_1(1,2,3,4,5,10,11,12)	46. V_1(0,6,7,8,9,11,13,14,15)
17. V_1(2,5,7,9,11,13,14,15)	47. V_1(0,1,3,4,6,10,11,12,13,14)
18. V_1(2,5,6,0,1,12,13,14,15)	48. V_1(0,1,3,4,7,8,9,11)
19. V_1(1,2,4,6,8,10,13,14)	49. V_1(0,1,3,5,7,9,10,11,12)
20. V_1(0,1,2,3,5,7,10,11,14)	50. V_1(4,6,7,9,10,13,15)
21. V_1(1,2,3,5,10,14,15)	51. V_1(0,4,6,7,8,9,13,14)
22. V_1(0,1,7,11,12,13,15)	52. V_1(2,3,4,5,6,8,9,10,15)
23. V_1(1,3,5,6,8,9,11,15)	53. V_1(0,2,4,7,8,9,10,12,13)
24. V_1(2,4,6,8,10,12,14,15)	54. V_1(0,1,3,5,7,10,11,12,15)
25. V_1(0,1,2,4,7,10,12,13,14)	55. V_1(3,5,6,7,8,9,11,15)
26. V_1(1,2,3,4,7,10,12,15)	56. V_1(0,5,6,8,9,10,11,13,14)
27. V_1(3,4,5,7,10,11,14,15)	57. V_1(0,1,2,6,8,9,10,13,15)
28. V_1(5,7,8,10,11,12,14,15)	58. V_1(0,1,2,3,4,6,8,9,13)
29. V_1(2,5,6,10,12,13,14)	59. V_1(0,1,3,4,7,8,9,11,13,15)
30. V_1(1,2,3,4,6,13,14,15)	60. V_1(0,5,7,8,9,10,11,12)

4. Мінімізація не повністю визначених функцій алгебри логіки

Не повністю визначена логічна функція n змінних – це функція, задана на числі наборів, менших 2^n, тобто це логічні функції f_i, які задані не на всіх 2^n наборах аргументів $x_1, x_2, \dots, x_n$

Приклад:

x_1	0	0	0	0	0	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1x_2x_3)$	-	0	1	-	1	-	-	1

Вихідна функція f_0: $f_0(x_1x_2x_3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$

Довизначимо функцію f_0 одиницями і запишемо функцію f_1:

$$f(x_1x_2x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2\bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

Методом Квайна приведемо f_1 до скороченої форми:

$$f(x_1x_2x_3) = \bar{x}_3 + x_2 + x_1$$

Імплікантна таблиця

Імпліканти функції f_1	Члени ДДНФ f_0		
	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	$x_1 x_2 x_3$
$\bar{x}_3$	x	x	
x_2	x		x
x_1		x	x

Мінімальна форма може бути отримана шляхом вилучення будь-якої з 3-х простих імплікант.

$$f(x_1 x_2 x_3) = \begin{cases} \bar{x}_3 \vee x_2 \\ x_2 \vee x_1 \\ \bar{x}_3 \vee x_1 \end{cases}$$

Розглянемо мінімізацію тієї ж функції діаграмою Вейча.

	x_2	x_2	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$
x_1	•	1	•	1
	1	•	0	•
		x_3	x_3	

• - заборонений набір

Необхідно на заборонених наборах аргументів надавати функціям такі значення, при яких клітинки із значенням 1 охоплюються мінімальною кількістю областей з максимальною кількістю клітинок в кожній з областей. У цьому випадку довизначення функції може бути виконано 3-ма різними способами:

	x_2	x_2	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$
x_1	•	1	•	1
	1	•	0	•
		x_3	x_3	

	x_2	x_2	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$
x_1	1	1	1	1
	1	•	•	1
		x_3	x_3	

Дві області по 4 одиниці $x_1 + x_3$

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	1	1	1	1
	1	1	0	0
		x_3		

Дві області по 4 одиниці $x_1 + x_2$

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	1	1	0	1
	1	1	0	1
		x_3		

Дві області по 4 одиниці $x_3 + x_2$

4.1. Контрольні завдання

Мінімізувати методом Квайна, Квайна-Мак-Класкі та діаграм Вейча логічні функції відповідно до заданого варіанта таблиці. Отримані результати порівняти.

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=$	
1. V_1(0,2,4*,5,6*,8,11,13)	31. V_1(1,3,7*,9,10*,12,14,15)
2. V_1(1,2,3*,4,5*,10,11,12,13)	32. V_1(1,6*,7,8,9*,11,13,15)
3. V_1(0,1*,2,7*,8,9*,10,11)	33. V_1(3,4*,5,6*,12,13,14,15)
4. V_1(0,1,2*,4,5*,7,8*,15)	34. V_1(3,6,9*,10,11*,12,13,14)
5. V_1(1,3,4*,7,8,10*,13,15)	35. V_1(2,5*,6,9,10*,12,14)
6. V_1(1,2,4,5*,10,11*,14)	36. V_1(0,3,6*,7,8*,9,12,13,15)
7. V_1(0,1*,3,6,7*,9,10,13,15)	37. V_1(2,4,5*,8,9,11*,12,13)
8. V_1(1,2,5,6*,9,10,11*,12)	38. V_1(0,3,4,7,8*,13,14*,15)
9. V_1(0,1,4*,5,7*,9,11,13)	39. V_1(2,3,4,6,8,12*,13,14,15*)
10. V_1(2*,5,6,10,12,13,14,15*)	40. V_1(0,1,3*,4,7*,8,9,12,13)
11. V_1(2,5,6*,10,12*,14,15)	41. V_1(0,1,3*,4,5*,7,8,9,13)
12. V_1(0,1*,3,9*,10*,11,12,15)	42. V_1(0,1*,2,4,5,6,7*,8,14)
13. V_1(1,2*,3*,6,7,9*,11,13,15)	43. V_1(0,4,5,8,9*,10,12*,13,14)
14. V_1(0,1,2,3,6*,7,12,14*,15)	44. V_1(4,5,8*,9,10,11,14*,15)
15. V_1(3,6,8,9,11*,13,14,15*)	45. V_1(0,1*,2,3,4,5*,7,10,12)
16. V_1(1,2,3,4*,5,10*,11,12)	46. V_1(0,6,7*,8,9,11*,13,14,15)
17. V_1(2,5,7,9*,11,13*,14,15)	47. V_1(0,1,3*,4,6,10*,11,12,13,14)
18. V_1(2,5,6,0,1*,12,13*,14,15)	48. V_1(0,1,3*,4,7,8*,9,11)
19. V_1(1,2,4*,6,8,10*,13,14)	49. V_1(0,1,3*,5,7,9,10,11,12*)
20. V_1(0,1,2,3,5*,7,10,11*,14)	50. V_1(4,6,7,9,*10,13*,15)
21. V_1(1,2*,3,5*,10,14,15)	51. V_1(0,4*,6,7,8*,9,13,14)
22. V_1(0,1,7*,11,12*,13,15*)	52. V_1(2,3*,4*,5,6,8,9*,10,15)
23. V_1(1,3*,5,6*,8,9*,11,15)	53. V_1(0,2,4,7*,8,9,10,12,13*)
24. V_1(2,4*,6*,8,10*,12,14,15)	54. V_1(0,1,3*,5,7,10*,11,12*,15)
25. V_1(0,1,2*,4,7,10*,12,13*,14)	55. V_1(3,5,6*,7,8,9*,11,15)
26. V_1(1,2*,3,4*,7,10*,12,15)	56. V_1(0,5,6*,8,9,10*,11,13,14)
27. V_1(3,4,5,7*,10,11,14,15*)	57. V_1(0,1,2,6*,8,9,10*,13,15)
28. V_1(5*,7,8*,10,11,12,14,15)	58. V_1(0,1,2,3,4,6*,8,9,13*)
29. V_1(2,5,6*,10,12*,13,14)	59. V_1(0,1,3,4,7*,8,9,11*,13,15)
30. V_1(1,2*,3,4,6*,13,14,15)	60. V_1(0,5,7*,8,9,10,11,12*)

5. Мінімізація систем булевих функцій

На практиці часто необхідно реалізовувати сукупності булевих функцій. Якщо зробити мінімізацію булевих функцій, які входять в систему незалежно одна від одної, то загальна схема буде складатися з ізольованих підсхем. Для того, щоб спростити отриману схему, використовують метод мінімізації булевих функцій, який грунтується на методі Квайна.

Нехай задана система повністю визначених булевих функцій, які подані в ДНФ:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_3} + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3 \\ f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2 \\ f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \overline{x_1x_2x_3} \end{cases}$$

Всі різні елементарні кон'юнкції системи об'єднуємо в множину А, яку назвемо повною множиною елементарних кон'юнкцій системи функцій.

$$A = \{x_1\overline{x_3}; x_1\overline{x_2}; \overline{x_1}x_3; \overline{x_1}x_2; x_1x_2; \overline{x_1x_2x_3}\}$$

Сума рангів (число букв) елементарних кон'юнкцій множини А є зручним критерієм для оцінки складності заданої системи.

Визначення. Система ДНФ булевих функцій називається мінімальною, якщо її повна множина елементарних кон'юнкцій має мінімальну кількість букв, а кожна ДНФ булевої функції системи містить мінімальне число елементарних кон'юнкцій найбільшого рангу.

Алгоритм мінімізації

1. Побудувати повну множину А елементарних кон'юнкцій системи, яку мінімізуємо, враховуючи, що спочатку кожна з функцій системи подана в ДДНФ. Кожній конституенті одиниці множини А присвоїти ознаку, що містить номери функцій системи, в яку входить розглядувана конституента.

2. Виконати мінімізацію ДДНФ функції φ , конституентами якої є всі елементи множини А. При цьому:

А). При склеюванні двох конституент одиниці кожній одержаній елементарній кон'юнкції присвоїти ознаку, що складається з номерів функцій, загальних для 2-х склеюваних конституент одиниці.

Б). Якщо ознаки не мають спільних номерів, то склеювання не відбувається.

В). Поглинання відбувається тільки для елементарних кон'юнкцій з однаковими ознаками. Одержані в результаті склеювання і поглинання кон'юнкції називаються простими імплікантами системи функцій.

3. Побудувати таблицю імплікант функції φ , аналогічно Квайну, тільки для кожної конституенти одиниці виділяється стільки стовпців, скільки різних номерів функцій має її ознака.

Приклад.

Система булевих функцій задана таблицею істинності

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Подамо кожну з функцій в ДДНФ

$$f_1 = \overline{x_1 x_2 x_3} + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3$$

$$f_1 = \overline{x_1 x_2 x_3} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3$$

1. Побудуємо повну множину елементарних кон'юнкцій системи, яку отримали, приписуючи кожній конституенті ознаку входження функції f_1 і f_2 :

$$A=\{\overline{x_1 x_2 x_3}(1,2);\overline{x_1}x_2\overline{x_3}(2);\overline{x_1}x_2x_3(2);x_1\overline{x_2}x_3(1,2);x_1x_2\overline{x_3}(1);x_1x_2x_3(1)\}$$

2. Будуємо ДДНФ функції φ :

$$\varphi=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(1,2)+\overline{x_1}x_2\overline{x_3}(2)+\overline{x_1}x_2x_3(2)+x_1\overline{x_2}x_3(1,2)+x_1x_2\overline{x_3}(1)+x_1x_2x_3(1)$$

1 2 3 4 5 6

Пронумеруємо конституенти для зручності склеювання.

1-2 : $\overline{x_1 x_3}(2)=\overline{x_1 x_2 x_3}(1,2)+\overline{x_1}x_2\overline{x_3}(2)$

2-3 : $\overline{x_1}x_2(2)=\overline{x_1}x_2\overline{x_3}(2)+\overline{x_1}x_2x_3(2)$

4-6 : $x_1x_3(1)=x_1\overline{x_2}x_3(1,2)+x_1x_2x_3(1)$

5-6 : $x_1x_2(1)=x_1x_2\overline{x_3}(1)+x_1x_2x_3(1)$

Після проведення поглинань $(\overline{x_1 x_3}+\overline{x_1}x_2\overline{x_3}=\overline{x_1 x_3}(1+\overline{x_2})=\overline{x_1 x_3})$, з урахуванням ознаки, маємо:

$$\varphi=\overline{x_1 x_3}(2)+x_1x_3(1)+\overline{x_1}x_2(2)+x_1x_2(1)+x_1\overline{x_2}x_3(1,2)+\overline{x_1 x_2 x_3}(1,2)$$

Таким чином отримані прості імпліканти вихідної системи булевих функцій

3. Будуємо імплікантну матрицю. Стовпці – конституенти одиниці з ДДНФ фунції φ. Для кожної конституенти виділяємо стільки стовпців, скільки різних номерів функцій мають ознаку конституенти.

Рядки матриці – прості імпліканти системи.

Заповнення матриці аналогічно Квайну. Отримане ядро покриває всі конституенти одиниці з ДДНФ функції φ.

	Конституенти одиниці функції φ							
	$\overline{x_1}\,\overline{x_2 x_3}$		$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$	$\overline{x_1} x_2 x_3$	$x_1 \overline{x_2} x_3$		$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 \overline{x_3}$
	1	2	2	2	1	2		1
$\overline{x_1 x_3}(2)$		■	■					
$x_1 x_3(1)$					■		■	
$\overline{x_1} x_2(2)$			■	■				
$x_1 x_2(1)$							■	■
$x_1 \overline{x_2} x_3(1,2)$					■	■		
$\overline{x_1 x_2 x_3}(1,2)$	■	■						

$$\varphi = \overline{x_1 x_2 x_3}(1,2) + x_1 \overline{x_2} x_3(1,2) + \overline{x_1} x_2(2) + x_1 x_2(1)$$

Виділяємо для функції f_i імпліканти з ознакою, що містить і, отримаємо таку мінімальну диз'юнктивну нормальну форму системи.

$$\begin{cases} f_1 = \overline{x_1 x_2 x_3} + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \\ f_2 = \overline{x_1 x_2 x_3} + x_1 \overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} x_2 \end{cases}$$

Недолік: велика громіздкість проведення операцій склеювання та поглинання з ознакою.

5.1. Контрольні завдання

Мінімізувати системи булевих функцій алгебри логіки.

Варіанти завдань

1. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(2,4,6,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,3,5) \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,3,7) \end{cases}$

$\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,2,5) \\ f(x,y,z) = V_1(3,5,7) \end{cases}$

3. $f(x,y,z) = V_1(3,5,7)$

$f(x,y,z) = V_1(0,5,6)$

4. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,3,5,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,4,5) \\ f(x,y,z) = V_1(2,3,7) \end{cases}$

5. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,4,5) \\ f(x,y,z) = V_1(0,1,4) \end{cases}$

6. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,5,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,4,3,7) \end{cases}$

7. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,2,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(0,2,6,7) \end{cases}$

8. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,1,5,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,4,6,7) \\ f(x,y,z) = V_1(0,5,6,7) \end{cases}$

9. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,3,6,7) \\ f(x,y,z) = V_1(0,4,6,7) \end{cases}$

10. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,2,6,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,3,5,7) \end{cases}$

11. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,2,5,7) \\ f(x,y,z) = V_1(0,1,4,7) \end{cases}$

$f(x,y,z) = V_1(2,3,6,7)$

12 $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,2,4) \\ f(x,y,z) = V_1(3,4,7) \end{cases}$

13. $\begin{cases} f(x,y,z) = V\ (2,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(2,5,7) \end{cases}$

14. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(4,6,7) \end{cases}$

15. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,2,3) \\ f(x,y,z) = V_1(5,6,7) \end{cases}$

16. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(3,4,5) \\ f(x,y,z) = V_1(5,6,7) \end{cases}$

17. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,1,2) \\ f(x,y,z) = V_1(3,5,7) \end{cases}$

18. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(2,6) \end{cases}$

19. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(3,7) \end{cases}$

20. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,2,3) \\ f(x,y,z) = V_1(4,5,7) \end{cases}$

21. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,3,5) \\ f(x,y,z) = V_1(4,5,7) \end{cases}$

22. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(4,6,7) \end{cases}$

23. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,4,5) \\ f(x,y,z) = V_1(3,5,6) \end{cases}$

24. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(4,6,7) \end{cases}$

25. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(6,7) \end{cases}$

26. $\begin{cases} f(x,y,z)=V_1(0,2,3) \\ f(x,y,z)=V_1(3,5,6) \end{cases}$

27. $\begin{cases} f(x,y,z)=V_1(1,3,5) \\ f(x,y,z)=V_1(5,7) \end{cases}$

28. $\begin{cases} f(x,y,z)=V_1(0,2,3) \\ f(x,y,z)=V_1(4,6,7) \end{cases}$

29. $\begin{cases} f(x,y,z)=V_1(0,2,4) \\ f(x,y,z)=V_1(3,6,7) \end{cases}$

30. $\begin{cases} f(x,y,z)=V_1(0,1,2,4) \\ f(x,y,z)=V_1(3,5,6,7) \end{cases}$

6. Контрольна робота

Контрольні завдання	Зміст завдання	Номер варіанта
I.	Проаналізувати логічні функції, а також дати відповіді на такі питання: в якій формі подана логічна функція: в ДНФ або в КНФ, якщо будь-яка з функцій не є ДНФ або КНФ, то необхідно її привести до ДНФ (КНФ)	Номер варіанта відповідає порядковому номеру студента в списку групи
II.	Записати конституенту нуля та одиниці функції $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ на N наборі відповідного варіанта	Номер варіанта відповідає порядковому номеру студента в списку групи + 1
III.	Перейти від ДНФ (КНФ) до ДДНФ (ДКНФ).	Номер варіанта відповідає порядковому номеру студента в списку групи + 2
IV.	Записати в ДДНФ і ДКНФ булеву функцію $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$, яка приймає відповідні значення P на заданих наборах	Номер варіанта відповідає порядковому номеру студента в списку групи +3

V.	Мінімізувати за допомогою методу Квайна-Мак-Класкі та діаграм Вейча логічні функції відповідно до заданого варіанта таблиці	Номер варіанта відповідає порядковому номеру студента в списку групи

Завдання 1.

Варіанти завдань:

1.

1.$f(xyzw) = \overline{x\bar{w} \vee x(\bar{w} \vee zy)} \vee yw \vee xz\bar{w}$

2.$f(abdf) = ab \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d} \vee \bar{a}\,df \vee \bar{a}\,b\,\bar{f}\,d$

3.$f(x_1x_2x_3) = x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$

4.$f(abcd) = (a \vee \bar{b})(a \vee d)(a \vee d \vee b)(c \vee d)$

5.$f(x_1x_2x_3) = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3$

6.$f(x_1x_2x_3x_4) = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$

2.

1.$f(abce) = (a\bar{b}\,\bar{c} \vee \overline{b\bar{c}(a \vee e)}) \vee \bar{b}\,c\,\bar{e}$

2.$f(x_1x_2x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

3.$f(abcd) = a\bar{b} \vee \bar{a}c \vee b\overline{(cd \vee \bar{a}b)}$

4.$f(x_1x_2x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3$

5.$f(abc) = (a \vee b \vee \bar{c})(a \vee c)(b \vee \bar{c})$

6.$f(abc) = \bar{a}\,b \vee \bar{a}\,bc \vee b\,\bar{c} \vee \bar{b}\,\bar{c}$

3.

$1. f(x_1x_2x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3 \vee_1)$

$2. f(abdf) = (ab \vee \overline{a}\,\overline{bd} \vee \overline{a}\,df \vee ab\,\overline{f}\,d)$

$3. f(x_1x_2x_3) = x_1\,\overline{x_3} \vee x_2\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\,\overline{x_3}$

$4. f(abxd) = (\overline{a} \vee b)(a \vee \overline{x} \vee d)(b \vee \overline{x} \vee \overline{d})$

$5. f(abcd) = ab(c \vee \overline{d}) \vee \overline{a} \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,d \vee ab\,\overline{d}$

$6. f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \overline{c}\,d \vee acd}$

4.

$1. f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \overline{x_1}\,x_2}$

$2. f(x_1x_2x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(x_2 \vee x_3)$

$3. f(abcdx) = ab\overline{(c \vee x)} \vee cdx\overline{(a \vee \overline{x})} \vee d\,\overline{x} \vee bcd$

$4. f(x_1x_2x_3) = x_1\,\overline{x_2} \vee xx_3 \vee \overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3$

$5. f(abcd) = (\overline{a} \vee \overline{b})(a \vee b \vee c)(c \vee \overline{d})$

$6. f(abcx) = ab\,\overline{c} \vee \overline{a}\,bx \vee ac \vee c\,\overline{x}$

5.

$1. f(abcd) = a\,\overline{b} \vee ac\,\overline{d} \vee b\,\overline{c}\,d \vee \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d$

$2. f(abcd) = (a \vee \overline{b} \vee c)(a \vee \overline{c} \vee \overline{d})(\overline{c} \vee b \vee \overline{d})$

$3. f(abcd) = \overline{a\,\overline{b}\,c \vee \overline{a}(b \vee c \vee d)} \vee \overline{abcd}$

$4. f(abcd) = \overline{a}\,b\,\overline{c} \vee ab\,\overline{d} \vee \overline{ab(ac \vee d)}$

$5. f(x_1x_2x_3) = x_1\,\overline{x_2} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_2x_3}$

$6. f(abc) = (\overline{a} \vee b)(\overline{a} \vee b\,\overline{c})(b \vee \overline{c})$

6.

1. $f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \bar{x}_1 x_2}$

2. $f(x_1x_2x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3)$

3. $f(abcdx) = ab\overline{(c \vee x)} \vee cdx((a \vee \bar{x}) \vee d\,\bar{x} \vee bcd)$

4. $f(abcd) = (\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee b \vee c)(c \vee \bar{d})$

5. $f(x_1x_2x_3) = x_1\,\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2\,x_3 \vee x_1\,\bar{x}_2\,x_3$

6. $f(abcx) = ab\,\bar{c} \vee \bar{a}\,bx \vee ac \vee c\,\bar{x}$

7.

1. $f(abc) = (ab \vee c)\,\bar{a} \vee ab\,\overline{a \vee b\,\bar{c}}$

2. $f(abc) = (a \vee c)(\bar{a}\,b \vee \bar{c})(\bar{b} \vee c)$

3. $f(xyz) = xy \vee x\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z$

4. $f(abc) = \overline{a(b \vee c)\overline{(a \vee bc)}}$

5. $f(adc) = (\bar{a} \vee c)(\bar{a} \vee d \vee c)(d \vee \bar{c})$

6. $f(abc) = a\,\bar{b} \vee \bar{a}\,b\,\bar{c} \vee bc$

8.

1. $f(abc) = \bar{a}(\bar{b} \vee \bar{c}) \vee \overline{a\,\bar{b} \vee a(b \vee \bar{c})}$

2. $f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{z})(z \vee \bar{y})$

3. $f(abc) = (a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee \bar{c})(a \vee b \vee c)$

4. $f(abc) = \bar{a}\,b \vee ab\,\bar{c} \vee b\,\bar{c}$

5. $f(abcd) = \bar{a}\,b \vee ab\,\bar{c} \vee b\,\bar{c}\,d$

6. $f(abce) = \bar{a}\,\bar{b}\,\overline{ce} \vee \bar{a}\,c\,\bar{e} \vee ab\,\bar{c} \vee a\,\bar{b}$

9.

1. $f(abc)=(ab\vee c)\bar{a}\vee ab\overline{(a\vee b\bar{c})}$

2. $f(abc)=(a\vee b)(\bar{a}\vee b\vee \bar{c})(\bar{b}\vee c)$

3. $f(xyz)=xy\vee x\bar{z}\vee x\bar{y}z$

4. $f(abc)=\overline{a(b\vee c)\overline{(a\vee b\vee c)}}$

5. $f(adc)=(\bar{a}\vee c)(\bar{a}\vee d\vee c)(d\vee \bar{c})$

6. $f(abc)=a\bar{b}\vee \bar{a}b\bar{c}\vee bc$

10.

1. $f(ab)=\overline{\bar{a}b\vee b(a\vee \bar{b})}$

2. $f(ade)=\overline{a\bar{d}\vee a(d\vee \bar{e})}\vee \bar{a}\bar{d}e$

3. $f(abc)=ab\bar{c}\vee \bar{a}b\bar{c}\vee bc$

4. $f(abcd)=(a\vee b)(\bar{a}\vee d)(\bar{a}\vee b\vee \bar{d})$

5. $f(xyz)=x\bar{y}\vee xy\bar{z}\vee \overline{xy}z$

6. $f(xyz)=(\bar{x}\vee y)(\bar{x}\vee \bar{y}\vee \bar{z})(x\vee \bar{y}\vee z)$

11.

1. $f(xyz)=\overline{x\bar{z}\vee yx\vee \overline{\overline{xy}z\vee xz\bar{y}}}$

2. $f(xyw)=x\bar{y}\vee xyw\vee \overline{xw}\vee y\bar{w}$

3. $f(xyz)=(\bar{x}\vee y)(x\vee \bar{y}\vee \bar{z})(\bar{y}\vee \bar{z})$

$4.f(abcf) = abc \vee abf \vee bcf \vee cf$

$5.f(abcd) = ab\bar{c} \vee ad \vee \bar{c}d \vee a\bar{b}\bar{c}d \vee a$

$6.f(abf) = (\bar{b} \vee f)(\bar{a} \vee b \vee \bar{f})(\bar{a} \vee f)$

12.

$1.f(abc) = (ab \vee c)\bar{a} \vee ab\overline{(a \vee b\bar{c})}$

$2.f(abc) = (a \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{b} \vee \bar{c})$

$3.f(xyz) = xy \vee x\bar{z} \vee x\bar{y}z$

$4.f(abc) = \overline{a(b \vee c)(\overline{a \vee bc})}$

$5.f(adc) = (\bar{a} \vee c)(\bar{a} \vee d \vee c)(d \vee \bar{c})$

$6.f(abc) = a\bar{b} \vee \bar{a}b\bar{c} \vee bc$

13.

$1.f(abce) = a\bar{b}\bar{e} \vee \overline{b\bar{c}(a \vee e)} \vee \bar{b}c\bar{e}$

$2.f(abc) = (\bar{a} \vee b)(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{b} \vee \bar{c})$

$3.f(abcd) = a\bar{b} \vee \bar{a}c \vee b\overline{(cd \vee \bar{a}d)}$

$4.f(ade) = a\bar{d} \vee \bar{a}d\bar{e} \vee de$

$5.f(abc) = (a \vee b \vee \bar{c})(a \vee c)(b \vee \bar{c})$

$6.f(abc) = \bar{a}b \vee \bar{a}bc \vee b\bar{c} \vee \bar{b}\bar{c}$

14.

$1.f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})$

$2.f(abcd) = a\bar{b} \vee ad \vee b\bar{c}d$

$3.f(abc) = (\bar{a} \vee b)(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{b} \vee \bar{c})$

4. $f(abx) = ab\bar{x} \vee x\bar{b} \vee \bar{a}bx$

5. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c\bar{c}d \vee acd}$

6. $f(abx) = ab\bar{x} \vee \bar{x}b \vee \bar{a}bx$

15.

1. $f(abc) = \bar{a}(\bar{b} \vee \bar{c}) \vee \overline{a\bar{b} \vee a(b \vee \bar{c})}$

2. $f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{z})(z \vee \bar{y})$

3. $f(xyz) = x\bar{y} \vee xy\bar{z} \vee yz$

4. $f(abc) = (a \vee \bar{b} \vee c)(b \vee \bar{c})(a \vee b \vee c)$

5. $f(xyz) = \bar{y} \vee xyz \vee xz\bar{y}$

6. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \bar{c}da \vee cd}$

16.

1. $f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee z)(\bar{z} \vee \bar{y})$

2. $f(abcd) = a\bar{b} \vee ad \vee b\bar{c}d$

3. $f(abc) = (\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{b} \vee \bar{c})$

4. $f(xyz) = xy\bar{z} \vee \bar{z}y \vee \bar{x}yz$

5. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \bar{c}da \vee cd}$

6. $f(abcf) = \bar{a}(\bar{a} \vee \bar{b}) \vee \overline{b\bar{c}f \vee \bar{a}cf}$

17.

1. $f(abcd) = \overline{a\bar{d} \vee a(\bar{d} \vee cb)} \vee ad \vee ac\bar{d}$

2. $f(abcf) = (a \vee \bar{b})(a \vee f)(a \vee b \vee f)(c \vee f)$

3. $f(xyz) = x\bar{y}z \vee xz \vee y\bar{z}$

$4. f(abcd) = (\bar a \vee b)(\bar b \vee \bar c \vee d)(a \vee \bar b \vee c)$

$5. f(abcd) = a\bar b \vee \bar a\,\bar d\,\bar c \vee dbc \vee ab\bar c\,d$

$6. f(abc) = \overline{a\bar b \vee abc} \vee \bar a\,\bar b(a \vee \bar b\,\bar c)$

18.

$1. f(abc) = \bar a(\bar b \vee \bar c) \vee \overline{a\bar b \vee a(b \vee \bar c)}$

$2. f(abc) = (a \vee \bar b \vee c)(b \vee \bar c)(a \vee b \vee c)$

$3. f(xyz) = x\bar y \vee xy\bar z \vee yz$

$4. f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar z)(z \vee \bar y)$

$5. f(xyz) = \bar x \vee xy\bar z \vee x\bar c\,z$

$6. f(abcd) = \bar a\,\bar b\,\bar c\,\bar d \vee \bar a\,c\,\bar d \vee \overline{ab\bar c \vee a\bar b}$

19.

$1. f(abc) = a\bar b \vee \bar a\,b\,\bar c \vee bc$

$2. f(abc) = (a \vee c)(\bar a\,b \vee \bar c)(\bar b \vee c)$

$3. f(xyz) = xy \vee x\bar z \vee x\bar y\,z$

$4. f(abc) = \overline{a(b \vee c)\overline{(a \vee bc)}}$

$5. f(abc) = (\bar a \vee c)(\bar a \vee d \vee c)(d \vee \bar c)$

$6. f(abc) = (ab \vee c)\,\bar a \vee ab\,\overline{a \vee b\bar c}$

20.

$1. f(xyzw) = \overline{xw \vee x(\bar w \vee zy)} \vee yw \vee xz\bar w$

$2. f(x_1x_2x_3) = x_1\,\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1x_3 \vee x_2\,\overline{x_3}$

$3. f(x_1x_2x_3) = \overline{x_1\,\overline{x_2} \vee x_1x_2\,\overline{x_3}} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_1 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3})$

$4. f(abcd) = (a \vee \bar{b})(a \vee d)(a \vee b \vee d)(c \vee d)$

$5. f(abc) = (ab \vee c)\bar{a} \vee ab\, \overline{a \vee b\,\bar{c}}$

$6. f(x_1x_2x_3x_4) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

21.

$1. f(abc) = \bar{a}\, b \vee \bar{a}\, bc \vee b\, \bar{c} \vee \bar{b}\, \bar{c}$

$2. f(x_1x_2x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

$3. f(abcd) = a\, \bar{b} \vee \bar{a}\, c \vee b(\overline{cd \vee \bar{a}\, b})$

$4. f(abce) = a\, \bar{b}\, \bar{c} \vee \overline{b\, \bar{c}(a \vee e)} \vee \bar{b}\, c\, \bar{e}$

$5. f(abc) = (a \vee b \vee \bar{c})(a \vee c)(b \vee \bar{c})$

$6. f(x_1x_2x_3) = x_1\, \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_3 \vee x_2x_3$

22.

$1. f(xyz) = \overline{x\, \bar{z} \vee yx \vee \overline{\overline{xy}\, zxz\, \bar{y}}}$

$2. f(abf) = (\bar{b} \vee f)(\bar{a} \vee b \vee \bar{f})(\bar{a} \vee f)$

$3. f(xyw) = x\, \bar{y} \vee xyw \vee \overline{xw} \vee y\, \bar{w}$

$4. f(abcf) = ab\, \bar{c} \vee \bar{a}\, bf \vee bc\, \bar{f} \vee c\, \bar{f}$

$5. f(abcd) = ab\, \bar{c} \vee ad \vee \bar{c}\, d \vee a\, \bar{b}\, \bar{c}\, d \vee a$

$6. f(xyz) = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z})$

23.

$1. f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \overline{x_1}\, x_2}$

$2. f(abcd) = (\overline{a} \vee \overline{b})(a \vee b \vee c)(c \vee \overline{d})$

$3. f(x_1x_2x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(x_2 \vee x_3)$

$4. f(x_1x_2x_3) = x_1\, \overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_3$

$5. f(abcdx) = ab\overline{(c \vee x)} \vee cdx\overline{(a \vee \overline{x})} \vee d\, \overline{x} \vee bcd$

$6. f(abcx) = ab\, \overline{c} \vee \overline{a}\, bx \vee ac \vee c\, \overline{x}$

24.

$1. f(abc) = (a \vee b \vee \overline{c})(a \vee c)(b \vee \overline{c})$

$2. f(abc) = (\overline{a} \vee b)(a \vee \overline{b} \vee c)(\overline{b} \vee \overline{c})$

$3. f(abce) = a\, \overline{b}\, \overline{e} \vee \overline{b\, \overline{c}(a \vee e)} \vee \overline{b}\, c\, \overline{e}$

$4. f(abcd) = a\, \overline{b} \vee \overline{a}\, c \vee b\overline{(cd \vee \overline{a}\, d)}$

$5. f(ade) = a\, \overline{d} \vee \overline{a}\, d\, \overline{e} \vee de$

$6. f(abc) = \overline{a}\, b \vee \overline{a}\, bc \vee b\, \overline{c} \vee \overline{b}\, \overline{c}$

25.

$1. f(x_1x_2x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(x_2 \vee x_3)$

$2. f(abcx) = ab\, \overline{c} \vee \overline{a}\, bx \vee ac \vee c\, \overline{x}$

$3. f(abcdx) = ab\overline{(c \vee x)} \vee cdx((a \vee \overline{x}) \vee d\, \overline{x} \vee bcd)$

$4. f(abcd) = (\overline{a} \vee \overline{b})(a \vee b \vee c)(c \vee \overline{d})$

$5. f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \overline{x_1}\, x_2}$

$6. f(x_1x_2x_3) = x_1\, \overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_3$

26.

$1. f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee z)(\overline{y} \vee \overline{z})$

$2. f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c\, \overline{c}\, d \vee acd}$

$3. f(abc) = (\overline{a} \vee b)(a \vee \overline{b} \vee c)(\overline{b} \vee \overline{c})$

$4. f(abx) = ab\, \overline{x} \vee x\, \overline{b} \vee \overline{a}\, bx$

$5. f(abx) = ab\, \overline{x} \vee \overline{x}\, b \vee \overline{a}\, bx$

$6. f(abcd) = a\, \overline{b} \vee ad \vee b\, \overline{c}\, d$

27.

$1. f(abcd) = ab\, \overline{c} \vee ab \vee \overline{c}\, d \vee a\, \overline{b}\, \overline{c}\, d \vee a$

$2. f(abcf) = ab\, \overline{c} \vee \overline{a}\, bf \vee bc\, \overline{f} \vee c\, \overline{f}$

$3. f(xyz) = (\overline{x} \vee y)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{y} \vee \overline{z})$

$4. f(xyz) = \overline{x\, \overline{z} \vee yx \vee \overline{\overline{xy}\, z \vee xz\, \overline{y}}}$

$5. f(xyw) = x\, \overline{y} \vee xyw \vee \overline{xw} \vee y\, \overline{w}$

$6. f(abf) = (\overline{b} \vee f)(\overline{a} \vee b \vee \overline{f})(\overline{a} \vee f)$

28.

$1. f(xyw) = x\, \overline{y} \vee xyw \vee \overline{xw} \vee y\, \overline{w}$

$2. f(abcf) = ab\, \overline{c} \vee \overline{a}\, bf \vee bc\, \overline{f} \vee c\, \overline{f}$

$3. f(xyz) = \overline{xz \vee yx \vee \overline{\overline{xy}z \vee xz\, \overline{y}}}$

$4.f(abf) = (\bar b \vee f)(\bar a \vee b \vee \bar f)(\bar a \vee f)$

$5.f(abcd) = ab\bar c \vee ad \vee \bar c d \vee a\bar b\bar c d \vee a$

$6.f(xyz) = \overline{x\bar z \vee yx \vee \overline{\bar x yz \vee xz\bar y}}$

29.

$1.f(xyzw) = \overline{xw \vee x(\bar w \vee zy)} \vee yw \vee xz\bar w$

$2.f(x_1x_2x_3x_4) = (\bar x_1 \vee \bar x_2)(\bar x_2 \vee \bar x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar x_2 \vee x_3)$

$3.f(x_1x_2x_3) = \overline{x_1\bar x_2 \vee x_1x_2\bar x_3} \vee \bar x_1\bar x_2(x_1 \vee \bar x_2\bar x_3)$

$4.f(abcd) = (a \vee \bar b)(a \vee d)(a \vee b \vee d)(c \vee d)$

$5.f(abdf) = a\bar b \vee \bar a\,\overline{fd} \vee fbd \vee ab\bar d f$

$6.f(x_1x_2x_3) = x_1\bar x_2 x_3 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar x_3$

30.

$1.f(abc) = \bar a(\bar b \vee \bar c) \vee \overline{a\bar b \vee a(b \vee \bar c)}$

$2.f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \bar c da \vee cd}$

$3.f(xyz) = \bar y \vee xy\bar z \vee x\bar y z$

$4.f(abc) = (a \vee \bar b \vee c)(b \vee \bar c)(a \vee b \vee c)$

$5.f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar z)(z \vee \bar y)$

$6.f(xyz) = x\bar y \vee xy\bar z \vee yz$

31.

$1.f(abcd) = a\bar b \vee ac\bar d \vee b\bar c d \vee \bar a b\bar c d$

$2.f(abcd) = (a \vee \bar b \vee c)(a \vee \bar c \vee \bar d)(\bar c \vee b \vee \bar d)$

$3.f(abcd) = \overline{a\bar b c \vee \bar a(b \vee c \vee d)} \vee \overline{abcd}$

$4. f(abcd) = (a \vee b)(\bar{a} \vee d)(\bar{a} \vee b \vee \bar{d})$

$5. f(xyz) = x\bar{y} \vee xy\bar{z} \vee \overline{xy}\,z$

$6. f(xyz) = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)$

32.

$1. f(abcd) = \bar{a}\,b\,\bar{c} \vee ab\bar{d} \vee \overline{ab(ac \vee d)}$

$2. f(x_1x_2x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \overline{x_2x_3}$

$3. f(abc) = (\bar{a} \vee b)(\bar{a} \vee b\bar{c})(b \vee \bar{c})$

$4. f(abcf) = abc \vee abf \vee bcf \vee cf$

$5. f(abcd) = ab\bar{c} \vee ad \vee \bar{c}\,d \vee a\bar{b}\,\bar{c}\,d \vee a$

$6. f(abf) = (\bar{b} \vee f)(\bar{a} \vee b \vee \bar{f})(\bar{a} \vee f)$

33.

$1. f(abx) = ab\bar{x} \vee x\bar{b} \vee \bar{a}\,bx$

$2. f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c\,\bar{c}\,d \vee acd}$

$3. f(abx) = ab\bar{x} \vee \bar{x}\,b \vee \bar{a}\,bx$

$4. f(abcf) = ab\bar{c} \vee \bar{a}\,bf \vee bc\bar{f} \vee c\bar{f}$

$5. f(abcd) = ab\bar{c} \vee ad \vee \bar{c}\,d \vee a\bar{b}\,\bar{c}\,d \vee a$

$6. f(xyz) = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z})$

34.

$1. f(abcd) = (a \vee \bar{b})(a \vee d)(a \vee b \vee d)(c \vee d)$

$2. f(abc) = (ab \vee c)\bar{a} \vee ab\,\overline{a \vee b\bar{c}}$

$3. f(x_1x_2x_3x_4) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

4. $f(x_1x_2x_3) = x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,x_3$

5. $f(abcdx) = ab\overline{(c \vee x)} \vee cdx\overline{(a \vee \overline{x})} \vee d\,\overline{x} \vee bcd$

6. $f(abcx) = ab\,\overline{c} \vee \overline{a}\,bx \vee ac \vee c\,\overline{x}$

35.

1. $f(abce) = (a\overline{b}\,\overline{c} \vee \overline{b\,\overline{c}(a \vee e)}\,) \vee \overline{b}\,c\,\overline{e}$

2. $f(x_1x_2x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

3. $f(abcd) = a\overline{b} \vee \overline{a}\,c \vee b\overline{(cd \vee \overline{a}\,b)}$

4. $f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee z)(\overline{y} \vee \overline{z})$

5. $f(abcd) = a\overline{b} \vee ad \vee b\,\overline{c}\,d$

6. $f(abc) = (\overline{a} \vee b)(a \vee \overline{b} \vee c)(\overline{b} \vee \overline{c})$

36.

1. $f(abc) = (a \vee \overline{b} \vee c)(b \vee \overline{c})(a \vee b \vee c)$

2. $f(xyz) = \overline{y} \vee xyz \vee xz\,\overline{y}$

3. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \overline{c}\,da \vee cd}$

4. $f(abcd) = a\,\overline{b} \vee \overline{a}\,c \vee b\overline{(cd \vee \overline{a}\,d)}$

5. $f(ade) = a\,\overline{d} \vee \overline{a}\,d\,\overline{e} \vee de$

6. $f(abc) = \overline{a}\,b \vee \overline{a}\,bc \vee b\,\overline{c} \vee \overline{b}\,\overline{c}$

37.

1. $f(abc) = \overline{a}(\overline{b} \vee \overline{c}) \vee \overline{a\,\overline{b} \vee a(b \vee \overline{c})}$

2. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \overline{c}\,da \vee cd}$

3. $f(xyz) = \overline{y} \vee xy\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z$

4. $f(abx) = ab\,\bar{x} \vee x\,\bar{b} \vee \bar{a}\,bx$

5. $f(abx) = ab\,\bar{x} \vee \bar{x}\,b \vee \bar{a}\,bx$

6. $f(abcd) = a\,\bar{b} \vee ad \vee b\,\bar{c}\,d$

38.

1. $f(xyz) = \overline{x\,\bar{z} \vee yx \vee \overline{\overline{xy}\;zxz\;\bar{y}}}$

2. $f(abf) = (\bar{b} \vee f)(\bar{a} \vee b \vee \bar{f})(\bar{a} \vee f)$

3. $f(xyw) = x\,\bar{y} \vee xyw \vee \overline{xw} \vee y\,\bar{w}$

4. $f(abcd) = ab\,\bar{c} \vee ab \vee \bar{c}\,d \vee a\,\bar{b}\,\bar{c}\,d \vee a$

5. $f(abcf) = ab\,\bar{c} \vee \bar{a}\,bf \vee bc\,\bar{f} \vee c\,\bar{f}$

6. $f(xyz) = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z})$

39.

1. $f(xyzw) = \overline{x\,\bar{w} \vee x(\bar{w} \vee zy)} \vee yw \vee xz\,\bar{w}$

2. $f(abdf) = ab \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d} \vee \bar{a}\,df \vee \bar{a}\,b\,\bar{f}\,d$

3. $f(x_1x_2x_3) = x_1\,\bar{x}_3 \vee x_2\,\bar{x}_3 \vee x_1x_2\,\bar{x}_3$

4. $f(x_1x_2x_3) = x_1\,\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\,x_2\,\bar{x}_3 \vee x_2x_3$

5. $f(abc) = (a \vee b \vee \bar{c})(a \vee c)(b \vee \bar{c})$

6. $f(abc) = \bar{a}\,b \vee \bar{a}\,bc \vee b\,\bar{c} \vee \bar{b}\,\bar{c}$

40.

1. $f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \bar{x}_1\,x_2}$

2. $f(x_1x_2x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3)$

3. $f(abcdx) = ab(\overline{c \vee x}) \vee cdx(\overline{a \vee \bar{x}}) \vee d\,\bar{x} \vee bcd$

4. $f(abcd) = (\overline{a} \vee \overline{b})(a \vee b \vee c)(c \vee \overline{d})$

5. $f(x_1 x_2 x_3) = x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\, x_3$

6. $f(abcx) = ab\,\overline{c} \vee \overline{a}\, bx \vee ac \vee c\,\overline{x}$

41.

1. $f(abc) = a\overline{(b \vee c)(\overline{a \vee bc})}$

2. $f(adc) = (\overline{a} \vee c)(\overline{a} \vee d \vee c)(d \vee \overline{c})$

3. $f(abc) = a\,\overline{b} \vee \overline{a}\, b\, \overline{c} \vee bc$

4. $f(abc) = \overline{a}(\overline{b} \vee \overline{c}) \vee \overline{a\,\overline{b} \vee a(b \vee \overline{c})}$

5. $f(abc) = (a \vee \overline{b} \vee c)(b \vee \overline{c})(a \vee b \vee c)$

6. $f(xyz) = x\,\overline{y} \vee xy\overline{z} \vee yz$

42.

1. $f(abcd) = \overline{a\,\overline{d} \vee a(\overline{d} \vee cb)} \vee ad \vee ac\,\overline{d}$

2. $f(abcf) = (a \vee \overline{b})(a \vee f)(a \vee b \vee f)(c \vee f)$

3. $f(xyz) = x\,\overline{y}\, z \vee xz \vee y\,\overline{z}$

4. $f(abc) = \overline{a}\, b \vee \overline{a}\, bc \vee b\,\overline{c} \vee \overline{b}\,\overline{c}$

5. $f(x_1 x_2 x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

6. $f(abcd) = a\,\overline{b} \vee \overline{a}\, c \vee b(\overline{cd \vee \overline{a}\, b})$

43.

1. $f(x_1 x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3 \vee_1)$

2. $f(abdf) = (ab \vee \overline{a}\, \overline{bd} \vee \overline{a}\, df \vee ab\,\overline{f}\, d)$

3. $f(x_1 x_2 x_3) = x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$

4. $f(abxd) = (\overline{a} \vee b)(a \vee \overline{x} \vee d)(b \vee \overline{x} \vee \overline{d})$

1. $f(xyz)=(x\vee y\vee z)(x\vee z)(\bar z\vee \bar y)$

2. $f(abcd)=a\bar b\vee ad\vee b\bar c\, d$

44.

1. $f(abce)=a\bar b\,\bar e\vee \overline{b\bar c(a\vee e)}\vee \bar b\, c\,\bar e$

2. $f(abc)=(\bar a\vee b)(a\vee \bar b\vee c)(\bar b\vee \bar c)$

3. $f(abcd)=a\bar b\vee \bar a c\vee b(\overline{cd\vee \bar a\, d})$

4. $f(abcd)=(a\vee \bar b)(a\vee d)(a\vee d\vee b)(c\vee d)$

5. $f(x_1x_2x_3)=x_1\,\bar x_2\,x_3\vee x_1x_3\vee x_2\,\bar x_3$

6. $f(x_1x_2x_3x_4)=(\bar x_1\vee x_2)(\bar x_2\vee \bar x_3\vee x_4)$

45.

1. $f(abf)=(\bar b\vee f)(\bar a\vee b\vee \bar f)(\bar a\vee f)$

2. $f(abcd)=ab\bar c\vee ad\vee \bar c\, d\vee a\bar b\,\bar c\, d\vee a$

3. $f(xyz)=\overline{x\,\bar z\vee yx\vee \overline{\overline{xy}z\vee xz\,\bar y}}$

4. $f(x_1x_2x_3)=(\bar x_1\vee x_2\vee \bar x_3)(x_1\vee \bar x_2)(x_2\vee x_3)$

5. $f(abcx)=ab\,\bar c\vee \bar a\, bx\vee ac\vee c\,\bar x$

6. $f(abcdx)=ab\overline{(c\vee x)}\vee cdx((a\vee \bar x)\vee d\,\bar x\vee bcd)$

46.

1. $f(xyzw)=\overline{xw\vee x(\bar w\vee zy)}\vee yw\vee xz\,\bar w$

2. $f(x_1x_2x_3x_4)=(\bar x_1\vee \bar x_2)(\bar x_2\vee \bar x_3\vee x_4)(x_1\vee \bar x_2\vee x_3)$

3. $f(x_1x_2x_3)=\overline{x_1\,\bar x_2\vee x_1x_2\,\bar x_3}\vee \bar x_1\,\bar x_2(x_1\vee \bar x_2\,\bar x_3)$

4.$f(abc) = (a \vee \bar{b} \vee c)(b \vee \bar{c})(a \vee b \vee c)$

5.$f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{z})(z \vee \bar{y})$

6.$f(xyz) = x\,\bar{y} \vee xy\,\bar{z} \vee yz$

47.

1.$f(abc) = a\,\bar{b} \vee \bar{a}\,b\,\bar{c} \vee bc$

2.$f(abc) = (a \vee c)(\bar{a}\,b \vee \bar{c})(\bar{b} \vee c)$

3.$f(xyz) = xy \vee x\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z$

4.$f(abc) = \overline{a(b \vee c)(\overline{a \vee bc})}$

5.$f(abcd) = ab(c \vee \bar{d}) \vee \bar{a} \vee a\,\bar{b}\,\bar{c}\,d \vee ab\,\bar{d}$

6.$f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \bar{c}\,d \vee acd}$

48.

1.$f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \bar{x}_1\,x_2}$

2.$f(x_1x_2x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3)$

3.$f(abcdx) = ab(\overline{c \vee x}) \vee cdx((a \vee \bar{x}) \vee d\,\bar{x} \vee bcd)$

4.$f(x_1x_2x_3) = x_1\,\bar{x}_2 \vee xx_3 \vee \bar{x}_2\,x_3 \vee x_1\,\bar{x}_2\,x_3$

5.$f(abcd) = (\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee b \vee c)(c \vee \bar{d})$

6.$f(abcx) = ab\,\bar{c} \vee \bar{a}\,bx \vee ac \vee c\,\bar{x}$

49.

1.$f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})$

2.$f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c\,\bar{c}\,d \vee acd}$

3.$f(abc) = (\bar{a} \vee b)(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{b} \vee \bar{c})$

$4. f(xyw) = x\bar{y} \vee xyw \vee \overline{xw} \vee y\bar{w}$

$5. f(abcf) = ab\bar{c} \vee \bar{a}bf \vee bc\bar{f} \vee c\bar{f}$

$6. f(xyz) = \overline{xz \vee yx \vee \overline{\overline{xy}z \vee xz\bar{y}}}$

50.

$1. f(abce) = a\bar{b}\bar{c} \vee \overline{b\bar{c}(a \vee e)} \vee \bar{b}c\bar{e}$

$2. f(abc) = (a \vee b \vee \bar{c})(a \vee c)(b \vee \bar{c})$

$3. f(x_1x_2x_3) = x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_2x_3$

$4. f(abcd) = (\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee b \vee c)(c \vee \bar{d})$

$5. f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \overline{x_1}x_2}$

$6. f(x_1x_2x_3) = x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3$

51.

$1. f(xyzw) = \overline{xw \vee x(\bar{w} \vee zy)} \vee yw \vee xz\bar{w}$

$2. f(x_1x_2x_3) = x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_3 \vee x_2\overline{x_3}$

$3. f(x_1x_2x_3) = \overline{x_1\overline{x_2} \vee x_1x_2\overline{x_3}} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_1 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3})$

$4. f(abcd) = (a \vee \bar{b})(a \vee d)(a \vee b \vee d)(c \vee d)$

$5. f(abdf) = a\bar{b} \vee \bar{a}\overline{fd} \vee fbd \vee ab\bar{d}f$

$6. f(x_1x_2x_3) = x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_3 \vee x_2\overline{x_3}$

52.

1. $f(abc) = (a \vee b \vee \bar{c})(a \vee c)(b \vee \bar{c})$

2. $f(abc) = (\bar{a} \vee b)(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{b} \vee \bar{c})$

3. $f(abce) = a\bar{b}\,\bar{e} \vee \overline{b\,\bar{c}(a \vee e)} \vee \bar{b}\,c\,\bar{e}$

4. $f(xyz) = \overline{x\,\bar{z} \vee yx \vee \overline{\overline{xy}\,z \vee xz\,\bar{y}}}$

5. $f(xyw) = x\,\bar{y} \vee xyw \vee \overline{xw} \vee y\,\bar{w}$

6. $f(abf) = (\bar{b} \vee f)(\bar{a} \vee b \vee \bar{f})(\bar{a} \vee f)$

53.

1. $f(abc) = (ab \vee c)\,\bar{a} \vee ab\,\overline{a \vee b\,\bar{c}}$

2. $f(abc) = (a \vee c)(\bar{a}\,b \vee \bar{c})(\bar{b} \vee c)$

3. $f(xyz) = xy \vee x\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z$

4. $f(x_1x_2) = x_1 \vee \overline{x_1x_2 \vee \bar{x}_1\,x_2}$

5. $f(abcd) = (\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee b \vee c)(c \vee \bar{d})$

6. $f(x_1x_2x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(x_2 \vee x_3)$

54.

1. $f(abc) = \bar{a}(\bar{b} \vee \bar{c}) \vee \overline{a\,\bar{b} \vee a(b \vee \bar{c})}$

2. $f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{z})(z \vee \bar{y})$

3. $f(abc) = (a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee \bar{c})(a \vee b \vee c)$

4. $f(abc) = \overline{a(b \vee c)(\overline{a \vee bc})}$

5. $f(adc) = (\bar{a} \vee c)(\bar{a} \vee d \vee c)(d \vee \bar{c})$

6. $f(abc) = a\,\bar{b} \vee \bar{a}\,b\,\bar{c} \vee bc$

55.

1. $f(abc) = (ab \vee c)\,\overline{a} \vee ab\overline{(a \vee b\,\overline{c})}$

2. $f(abc) = (a \vee c)(a \vee \overline{b} \vee c)(\overline{b} \vee \overline{c})$

3. $f(xyz) = xy \vee x\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z$

4. $f(abc) = \overline{a}(\overline{b} \vee \overline{c}) \vee \overline{a\,\overline{b} \vee a(b \vee \overline{c})}$

5. $f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee \overline{z})(z \vee \overline{y})$

6. $f(xyz) = x\,\overline{y} \vee xy\overline{z} \vee yz$

56.

1. $f(abc) = \overline{a(b \vee c)\overline{(a \vee b \vee c)}}$

2. $f(adc) = (\overline{a} \vee c)(\overline{a} \vee d \vee c)(d \vee \overline{c})$

3. $f(abc) = a\,\overline{b} \vee \overline{a}\,b\,\overline{c} \vee bc$

4. $f(abcd) = (\overline{a} \vee b)(\overline{b} \vee \overline{c} \vee d)(a \vee \overline{b} \vee c)$

5. $f(abcd) = a\,\overline{b} \vee \overline{a}\,\overline{d}\,\overline{c} \vee dbc \vee ab\,\overline{c}\,d$

6. $f(abc) = \overline{a\,\overline{b} \vee abc} \vee \overline{a}\,\overline{b}(a \vee \overline{b}\,\overline{c})$

57.

1. $f(abc) = (\overline{a} \vee \overline{b})(a \vee \overline{b} \vee c)(\overline{b} \vee \overline{c})$

2. $f(xyz) = xy\overline{z} \vee \overline{z}\,y \vee \overline{x}\,yz$

3. $f(abcd) = \overline{a \vee b \vee c \vee \overline{c}\,da \vee cd}$

4. $f(abcf) = \overline{a}(\overline{a} \vee \overline{b}) \vee \overline{b\,\overline{c}\,f \vee \overline{a}\,cf}$

5. $f(abc) = (\overline{a} \vee c)(\overline{a} \vee d \vee c)(d \vee \overline{c})$

6. $f(abc) = (ab \vee c)\,\overline{a} \vee ab\,\overline{a \vee b\,\overline{c}}$

58.

1. $f(xyz) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{z})(z \vee \bar{y})$

2. $f(xyz) = \bar{x} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{c}z$

3. $f(abcd) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} \vee \bar{a}c\bar{d} \vee \overline{ab\bar{c} \vee a\bar{b}}$

4. $f(ab) = \overline{\bar{a}b \vee b(a \vee \bar{b})}$

5. $f(ade) = \overline{a\bar{d} \vee a(d \vee \bar{e})} \vee \bar{a}\,\bar{d}\,e$

6. $f(abc) = ab\bar{c} \vee \bar{a}b\bar{c} \vee bc$

59.

1. $f(xyz) = \overline{x\bar{z} \vee yx \vee \overline{\overline{xy}\,z \vee xz\bar{y}}}$

2. $f(xyw) = x\bar{y} \vee xyw \vee \overline{xw} \vee y\bar{w}$

3. $f(xyz) = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z})$

4. $f(abcf) = abc \vee abf \vee bcf \vee cf$

5. $f(abcd) = ab\bar{c} \vee ad \vee \bar{c}d \vee a\bar{b}\bar{c}d \vee a$

6. $f(abf) = (\bar{b} \vee f)(\bar{a} \vee b \vee \bar{f})(\bar{a} \vee f)$

60.

1. $f(abc) = (ab \vee c)\bar{a} \vee ab\overline{(a \vee b\bar{c})}$

2. $f(abc) = (a \vee b)(\bar{a} \vee b \vee \bar{c})(\bar{b} \vee c)$

3. $f(xyz) = xy \vee x\bar{z} \vee x\bar{y}z$

4. $f(abc) = \bar{a}b \vee ab\bar{c} \vee b\bar{c}$

5. $f(abcd) = \bar{a}b \vee ab\bar{c} \vee b\bar{c}d$

6. $f(abce) = \bar{a}\,\bar{b}\,\overline{ce} \vee \bar{a}c\bar{e} \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}$

Завдання II.

Варіанти завдань

№	*N*
1	24
2	48
3	53
4	57
5	38
6	18
7	22
8	22
9	36
10	34
11	57
12	59
13	55
14	35
15	16
16	29
17	11
18	63
19	41
20	27
21	53
22	59
23	15
24	49
25	45
26	38
27	59
28	60
29	21
30	19

№	*N*
31	17
32	42
33	37
34	48
35	25
36	29
37	35
38	12
39	44
40	32
41	19
42	51
43	55
44	57
45	49
46	31
47	26
48	38
49	15
50	19
51	26
52	14
53	18
54	43
55	52
56	36
57	24
58	48
59	17
60	25

Завдання III.

Варіанти завдань

1.

$y = \overline{x_1} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_3$

$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})\overline{(x_2 \vee \overline{x_3})}$

2.

$y = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_3}$

$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

3.

$y = x_1x_2 \vee \overline{x_2x_3} \vee \overline{x_2}$

$f = (\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_3)$

4.

$y = \overline{x_1x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1x_2}x_3$

$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})(x_2 \vee x_3)$

5.

$y = \overline{x_1} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_3$

$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})\overline{(x_2 \vee \overline{x_3})}$

6.

$y = \overline{x_1x_2}x_3 \vee x_2\overline{x_3 \vee \overline{x_1x_3}}$

$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

7.

$y = \overline{x_1} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_3$

$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

8.

$$y = x_1\overline{x_2} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_3}$$
$$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2x_3)$$

9.

$$y = \overline{x_1x_2} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_3}$$
$$f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2x_3})(\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_2 \vee x_3})$$

10.

$$y = x_1x_2 \vee \overline{x_2x_3} \vee x_2$$
$$f = (\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)$$

11.

$$y = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_3}$$
$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

12.

$$y = x_1\overline{x_2} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_3}$$
$$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2x_3)$$

13.

$$y = \overline{x_1x_2x_3} \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1x_3}$$
$$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$$

14.

$$y = x_1\overline{x_2} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_3}$$
$$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

15.

$y = \overline{x_1 x_2} x_3 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$

$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

16.

$y = x_1 \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_3})$

17.

$y = \overline{x_1 x_2} x_3 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$

$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

18.

$y = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3$

$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

19.

$y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3}$

$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

20.

$y = \overline{x_1 x_2} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

21.

$y = x_1 \overline{x_2} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$

22.

$y = \overline{x_1 x_2} x_3 \vee x_2 \overline{x_3 \vee \overline{x_1 x_3}}$

$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

23.

$$y = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$$

$$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$$

24.

$$y = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3$$

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2 \vee \overline{x_3}})$$

25.

$$y = x_1 \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$$

$$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_3})$$

26.

$$y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3}$$

$$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

27.

$$y = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$$

$$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$$

28.

$$y = \overline{x_1 x_2} x_3 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$$

$$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$$

29.

$$y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3}$$

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

30.

$y = \overline{x_1 x_2} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

31.

$y = \overline{x_1 x_2} x_3 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$

$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$

32.

$y = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$

$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$

33.

$y = x_1 \overline{x_2} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 x_3)$

34.

$y = \overline{x_1 x_2} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

35.

$y = \overline{x_1 x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1 x_2} x_3$

$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})(x_2 \vee x_3)$

36.

$y = x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3} \vee x_2$

$f = (\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)$

37.

$y = x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3} \vee x_2$

$f = (\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)$

38.

$$y = x_1x_2 \vee \overline{x_2x_3} \vee \overline{x_2}$$
$$f = (\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_3)$$

39.

$$y = \overline{x_1x_2}x_3 \vee x_2\overline{x_3 \vee \overline{x_1x_3}}$$
$$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$$

40.

$$y = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_3}$$
$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

41.

$$y = \overline{x_1x_2}x_3 \vee x_2\overline{x_3 \vee \overline{x_1x_3}}$$
$$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$$

42.

$$y = \overline{x_1} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_3$$
$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})\overline{(x_2 \vee \overline{x_3})}$$

43.

$$y = x_1\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3}$$
$$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_3})$$

44.

$$y = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_3}$$
$$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

45.

$$y = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_3}$$
$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

46.

$$y = \overline{x_1 x_2} x_3 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$$

$$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$$

47.

$$y = \overline{x_1 x_2} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

48.

$$y = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3$$

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})\overline{(x_2 \vee \overline{x_3})}$$

49.

$$y = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$$

$$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$$

50.

$$y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3}$$

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

51.

$$y = \overline{x_1 x_2} x_3 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$$

$$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$$

52.

$$y = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3$$

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})\overline{(x_2 \vee \overline{x_3})}$$

53.

$y = x_1\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_3})$

54.

$y = x_1\overline{x_2} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$

55.

$y = x_1\overline{x_2} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 x_3)$

56.

$y = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3$

$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

57.

$y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3}$

$f = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

58.

$y = x_1\overline{x_2} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_3}$

$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$

59.

$y = \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3$

$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

60.

$y = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_3}$

$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$

Завдання IV.

Варіанти завдань.

№	$y=f(x_1,x_2,...x_n)$	P	Набори з
1	$y=f(x,y,z)$	1	0,2,3,5,6
2	$y=f(a,b,c,d)$	1	6,14,12,3,8
3	$y-f(a,b,c,d,f)$	1	7,18,20,24,30
4	$y=f(x,y,z,w)$	1	2,4,6,9,13
5	$y=f(a,b,c,d)$	1	4,6,8,9,14
6	$y=f(x,y,z,d)$	1	6,8,1,3,14
7	$y=f(a,b,c,d,f)$	1	6,8,15,19,24
8	$y=f(a,b,c,e)$	1	2,6,10,13,23
9	$y=f(a,c,d,f)$	1	0,4,7,20,30
10	$y=f(a,b,c,d,f)$	1	0,2,5,8,11
11	$y=f(a,b,c,d)$	1	0,4,5,6
12	$y=f(a,b,c,d,f)$	1	6,7,8,12,14
13	$y=f(a,b,c,d,f)$	1	0,4,7,9,14
14	$y=f(a,b,c,d,f)$	1	0,1,5,8,12
15	$y=f(a,b,c,d,f)$	1	0,4,7,9,14
16	$y=f(x,y,z,v)$	0	0,4,7,9,10,14
17	$y=f(a,b,c,d,e)$	1	0,1,3,11,14
18	$y=f(x,y,z,w,v)$	1	5,8,12,17,24
19	$y=f(a,b,c,e)$	1	0,1,3,5,7,14
20	$y=f(a,b,c,d)$	0	0,1,7,12,13
21	$y=f(x,y,z,w)$	0	2,3,10,12
22	$y=f(a,b,c,d,e)$	0	2,4,6,26,27
23	$y=f(a,b,c,d)$	0	2,3,8,9,13
24	$y=f(x,y,z)$	0	0,1,4,12,13
25	$y=f(a,b,c,d,e)$	0	2,3,8,17,26
26	$y=f(a,b,c,d,e)$	0	7,18,20,24,30
27	$y=f(a,b,c,d)$	1	3,1,6,0,13
28	$y=f(a,b,c,e,f)$	1	0,3,14,2,11
29	$y=f(a,b,c,d,e)$	1	0,2,14,20,29
30	$y=f(x,y,z)$	1	0,1,3,5,7

31	$y = f(x,y,z)$	1	0,1,2,4,5
32	$y = f(a,b,c,d)$	1	5,13,11,2,7
33	$y - f(a,b,c,d,f)$	1	6,17,19,23,29
34	$y = f(x,y,z,w)$	1	1,3,5,8,12
35	$y = f(a,b,c,d)$	1	3,5,7,8,13
36	$y = f(x,y,z,d)$	1	5,7,0,2,13
37	$y = f(a,b,c,d,f)$	1	8,10,17,21,26
38	$y = f(a,b,c,e)$	1	0,4,9,11,13
39	$y = f(a,c,d,f)$	1	0,2,3,14,17
40	$y = f(a,b,c,d,f)$	1	0,1,4,6,9
41	$y = f(a,b,c,d)$	1	0,2,8,14
42	$y = f(a,b,c,d,f)$	1	4,6,9,19,24
43	$y = f(a,b,c,d,f)$	1	0,7,12,17,25
44	$y = f(a,b,c,d,f)$	1	1,5,13,19,29
45	$y = f(a,b,c,d,f)$	1	5,11,13,22,30
46	$y = f(x,y,z,v)$	0	2,5,7,9,11,15
47	$y = f(a,b,c,d,e)$	1	7,15,9,27,31
48	$y = f(x,y,z,w,v)$	1	8,12,16,23,29
49	$y = f(a,b,c,e)$	1	1,4,5,7,13,15
50	$y = f(a,b,c,d)$	0	0,3,7,9,14
51	$y = f(x,y,z,w)$	0	2,4,8,15
52	$y = f(a,b,c,d,e)$	0	0,1,25,17,28
53	$y = f(a,b,c,d)$	0	0,5,10,12,16
54	$y = f(x,y,z)$	0	3,5,1,9,12
55	$y = f(a,b,c,d,e)$	0	0,12,3,14,25
56	$y = f(a,b,c,d,e)$	0	2,11,20,28,31
57	$y = f(a,b,c,d)$	1	1,4,2,10,11
58	$y = f(a,b,c,e,f)$	1	4,7,18,22,25
59	$y = f(a,b,c,d,e)$	1	7,11,17,25,30
60	$y = f(x,y,z)$	1	2,0,6,4,8

Завдання V.

Варіанти завдань

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=$	
1. $V_1(0,2,3,5,7,8,10,13)$	31. $V_1(1,3,6,8,11,12,13,15)$
2. $V_1(0,1,2,3,4,9,10,11,12)$	32. $V_1(1,6,5,7,9,10,13,14)$
3. $V_1(0,1,2,4,6,9,8,11)$	33. $V_1(2,4,7,6,11,13,14,12)$
4. $V_1(0,1,3,5,7,9,10,14)$	34. $V_1(0,3,7,10,9,12,11,14)$
5. $V_1(1,2,5,6,8,9,11,13,14)$	35. $V_1(2,0,6,7,10,12,13)$
6. $V_1(1,3,4,7,9,12,13)$	36. $V_1(1,4,6,7,11,9,14,13,15)$
7. $V_1(0,1,2,5,7,8,11,14,15)$	37. $V_1(0,3,5,7,9,10,11,14)$
8. $V_1(1,2,3,5,8,9,10,11)$	38. $V_1(1,4,5,0,7,12,13,15)$
9. $V_1(0,1,3,4,6,8,10,12)$	39. $V_1(0,2,4,5,7,11,13,12,15)$
10. $V_1(1,4,5,9,11,12,13,14)$	40. $V_1(0,1,5,4,6,8,10,11,13)$
11. $V_1(1,3,5,9,11,13,14)$	41. $V_1(1,2,3,4,5,7,8,9,13)$
12. $V_1(0,1,2,8,9,10,11,14)$	42. $V_1(0,1,2,4,5,8,7,9,11)$
13. $V_1(0,1,2,5,6,8,10,5)$	43. $V_1(0,4,3,7,9,11,12,15,14)$
14. $V_1(0,1,4,7,8,11,12,14)$	44. $V_1(3,4,7,9,10,12,14,15)$
15. $V_1(1,4,6,7,10,11,13,15)$	45. $V_1(0,1,2,6,4,8,9,11,12)$
16. $V_1(0,2,4,5,6,9,10,12)$	46. $V_1(0,5,7,6,8,10,11,13,14)$
17. $V_1(2,4,6,8,11,12,13,15)$	47. $V_1(0,1,2,4,5,9,10,12,15,14)$
18. $V_1(1,5,4,0,1,11,13,12,15)$	48. $V_1(0,1,2,4,6,8,10,12)$
19. $V_1(0,2,3,6,8,10,11,14)$	49. $V_1(0,1,4,5,7,8,10,11,13)$
20. $V_1(0,1,2,8,5,6,9,11,13)$	50. $V_1(3,5,7,9,10,12,14)$
21. $V_1(1,2,5,7,10,13,15)$	51. $V_1(0,2,5,7,8,10,13,14)$
22. $V_1(0,1,4,11,7,12,15)$	52. $V_1(2,0,4,5,6,7,9,10,11)$
23. $V_1(1,2,7,6,10,9,11,13)$	53. $V_1(0,2,3,7,8,11,10,12,13)$
24. $V_1(2,3,5,7,9,11,12,14)$	54. $V_1(0,1,2,5,7,8,11,13,15)$
25. $V_1(0,1,2,4,5,8,11,12,15)$	55. $V_1(2,4,6,7,8,10,11,15)$
26. $V_1(1,2,0,4,6,10,11,15)$	56. $V_1(0,2,6,7,5,10,11,12,14)$
27. $V_1(2,4,5,7,11,9,13,14)$	57. $V_1(0,1,3,5,8,9,10,13,14)$
28. $V_1(1,7,9,6,11,10,14,15)$	58. $V_1(0,1,2,5,4,7,8,10,13)$
29. $V_1(2,3,4,10,12,11,14)$	59. $V_1(0,2,3,4,6,8,9,11,12,15)$
30. $V_1(0,2,5,4,6,8,14,12)$	60. $V_1(0,4,7,6,9,10,12,13)$

7. Література

1. Самофалов К. Г., Тарасенко В. П. Электронные цифровые вычислительные машины. – Киев: Высшая школа, 1976.-480с.

2. Самофалов К. Г. и др. Прикладная теория цифровых автоматов. – Киев: Высшая школа, 1987.

3. Савельев А. Я. Прикладная теория цифровых автоматов. – М.: Высшая школа, 1987.

4. Савельев А. Я. Арифметические и логические основы автоматов. – М.: Высшая школа, 1980.-255с.

5.Лужецкий В. А. и др. Методические указания к практическим занятиям по курсу "Прикладная теория цифровых автоматов" (раздел – алгебра логики). – Винница, 1990.

6.Каган Е.Н. Электронные вычислительные машины и системы. - М.: Энергоатомиздат, 1991. - 590 с.

7.Майоров С.А., Новиков Г.И. Электронные вычислительные машины: Введение в специальность. - М.: Высшая школа, 1982. - 175 с.

8.Сергеев Н.П., Вашкевич Н.П. Основы вычислительной техники. - М.: Высшая школа, 1988. - 310 с.

9.Миллер Р. Теория переключательных схем. Т.1. - М.: Наука, 1970. - 416с.

10.Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. - М.: Наука, 1979. - 272 с.

Міністерство освіти і науки України

Вінницький державний технічний університет

Наталія Романівна Кондратенко

Дискретна математика. Мінімізація логічних функцій у класі ДНФ

Навчальний посібник

Редактор С.А. Малішевська

Формат 29.7×42 ¼
Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний
Зам.№2000 - 0092
Тираж 30 прим.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
ВДТУ м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх
Тел. (0432) 44-01-59