В. О. Краєвський

Спецкурс математичного аналізу.

Диференціальні рівняння у частинних похідних та їх аналіз в системі Maple.

Частина 2

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Краєвський

СПЕЦКУРС МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ТА ЇХ АНАЛІЗ В СИСТЕМІ MAPLE. ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 517.958 (075)
ББК 22.161.6я73
К78

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 30.11.2015 р.)

Рецензенти:
В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор
Д. А. Найко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Краєвський, В. О.
К78 Спецкурс математичного аналізу. Диференціальні рівняння у частинних похідних та їх аналіз в системі Maple. Частина 2 : навчальний посібник / В. О. Краєвський. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 129 с.

У навчальному посібнику наведено основні поняття і означення теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, викладено класифікацію та зведення до канонічного вигляду квазілінійних рівнянь. Розглянуто низку фізичних процесів, які приводять до диференціальних рівнянь із частинними похідними. Підібрано достатню кількість задач для розв'язання на практичних заняттях та для самостійної роботи студентів. Розглянуто розв'язання прикладів з кожної теми, надається 100 варіантів завдань для типових розрахунків та контрольних робіт. Розглянуто можливість застосування математичного додатка Maple для розв'язання відповідних задач.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 517.958 (075)
ББК 22.161.6я73

© ВНТУ, 2017

ЗМІСТ

6 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

6.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

Загальний вигляд лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядкуEquation Section 6

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x}+X_2\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{6.1}$$

де $u(x,y)$ – шукана функція; X_1, X_2 – відомі функції незалежних змінних x і y.

Алгоритм знаходження розв'язку диференціального рівняння (6.1)

1. Записуємо рівняння у вигляді (6.1): переносимо все у ліву частину (права частина має дорівнювати нулю) і визначаємо X_1 і X_2: X_1 – коефіцієнт біля $\frac{\partial u}{\partial x}$; X_2 – коефіцієнт біля $\frac{\partial u}{\partial y}$.

2. Складаємо звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{X_1}=\frac{dy}{X_2}. \tag{6.2}$$

3. Знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння у вигляді

$$\varphi(x,y)=C. \tag{6.3}$$

4. Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (6.1) має вигляд

$$u=\varphi(x,y), \tag{6.4}$$

а його загальний розв'язок

$$u=F\left(\varphi(x,y)\right), \tag{6.5}$$

де F – довільна функція.

Додаткові теоретичні відомості

Алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь (6.1) приводить до того, що необхідно розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого порядку (6.2), які в свою чергу зводяться до знаходження інтегралів.

Основні типи диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх розв'язання

I. Диференціальні рівняння із відокремленими змінними:

а) форма запису із похідною

$$y' = f(x). \tag{6.6}$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) проінтегруємо

$$y = \int f(x)dx + C;$$

б) диференціальна форма запису

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx. \tag{6.7}$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) проінтегруємо

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C.$$

II. Диференціальні рівняння із відокремлюваними змінними

а) форма запису із похідною

$$y' = f_1(y)f_2(x). \tag{6.8}$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) запишемо похідну у вигляді частки диференціалів

$$\frac{dy}{dx} = f_1(y)f_2(x);$$

2) рознесемо диференціали

$$dy = f_1(y)f_2(x)dx;$$

3) відокремлюємо змінні (біля диференціала dx має бути функція, що залежить лише від x, а біля диференціала dy – функція, що залежить лише від y), тобто поділимо і праву, і ліву частину рівняння на $f_1(y)$

$$\frac{dy}{f_1(y)} = f_2(x)\,dx;$$

4) отримали диференціальне рівняння із відокремленими змінними (6.7). Розв'язуємо його

$$\int \frac{dy}{f_1(y)} = \int f_2(x)\,dx + C;$$

б) диференціальна форма запису

$$M_1(x)N_1(y)\,dy = M_2(x)N_2(y)\,dx. \qquad (6.9)$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) відокремлюємо змінні, тобто поділимо і праву, і ліву частину рівняння на $M_1(x)N_2(y)$

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx;$$

2) отримали диференціальне рівняння із відокремленими змінними (6.7). Розв'язуємо його

$$\int \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = \int \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx + C.$$

III. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$y' = f(x,y), \qquad (6.10)$$

де $f(tx,ty) = f(x,y)$.

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) робимо заміну $y = ux$, де $u = u(x) \Rightarrow y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u = \varphi(u);$$

2) отримали диференціальне рівняння із відокремлюваними змінними (6.8). Розв'язуємо його

$$\frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u;$$

$$x\,du = (\varphi(u) - u)\,dx;$$

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C;$$

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C;$$

3) в отриманий розв'язок замість u підставляємо $\frac{y}{x}$.

IV. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

$$y'+P(x)y=Q(x). \qquad (6.11)$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) робимо заміну

$$y=uv, \qquad (6.12)$$

де $u=u(x)$, $v=v(x)$ $\Rightarrow$ $y'=u'v+v'u$. Тоді

$$u'v+v'u+P(x)uv=Q(x);$$

2) групуємо другий і третій доданки і спільний множник u виносимо за дужки

$$u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x); \qquad (6.13)$$

3) накладаємо на функцію v обмеження, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$v'+P(x)v=0;$$

4) отримали диференціальне рівняння із відокремлюваними змінними (6.8). Розв'язуємо його

$$\frac{dv}{dx}=-P(x)v;$$

$$\frac{dv}{v}=-P(x)dx;$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int P(x)dx;$$

$$\ln|v| = -\int P(x)\,dx,$$

без константи C, тому що нам потрібен лише один частинний розв'язок;

$$v = e^{-\int P(x)dx};$$

5) підставляємо v у диференціальне рівняння (6.13)

$$u' = Q(x)e^{\int P(x)dx};$$

6) отримали диференціальне рівняння із відокремленими змінними (6.6). Розв'язуємо його

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

7) знаходимо функцію y

$$y = uv = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

V. Диференціальні рівняння Бернуллі

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}. \tag{6.14}$$

Алгоритм знаходження розв'язку:

1) робимо заміну

$$y = uv, \tag{6.15}$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ $\Rightarrow$ $y' = u'v + v'u$. Тоді

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x)u^{\alpha}v^{\alpha};$$

2) групуємо другий і третій доданки і спільний множник u виносимо за дужки

$$u'v + u\big(v' + P(x)v\big) = Q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}; \tag{6.16}$$

3) накладаємо на функцію v обмеження, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$v' + P(x)v = 0;$$

4) отримали диференціальне рівняння із відокремлюваними змінними (6.8). Розв'язуємо його

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v;$$

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|v| = -\int P(x)dx,$$

без константи C, тому що нам потрібний лише один частинний розв'язок;

$$v = e^{-\int P(x)dx};$$

5) підставляємо v у диференціальне рівняння (6.16):

$$u' = Q(x)u^{\alpha}e^{(1-\alpha)\int P(x)dx};$$

6) отримали диференціальне рівняння із відокремлюваними змінними (6.8). Розв'язуємо його

$$\frac{du}{dx} = Q(x)u^{\alpha}e^{(1-\alpha)\int P(x)dx};$$

$$\frac{du}{u^{\alpha}} = Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx;$$

$$\int u^{-\alpha}du = \int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx + C;$$

$$\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx + C;$$

7) розв'язуємо отримане рівняння відносно u

$$u = \begin{cases} \sqrt[\alpha-1]{\dfrac{1}{(1-\alpha)\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx + C}}, \text{ якщо } \alpha - \text{парне}; \\ \pm\sqrt[\alpha-1]{\dfrac{1}{(1-\alpha)\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx + C}}, \text{ якщо } \alpha - \text{непарне}; \end{cases}$$

8) знаходимо функцію y

$$y = uv.$$

Таблиця невизначених інтегралів

1) $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1);$

2) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3) $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$

4) $\int e^{u} du = e^{u} + C;$

5) $\int \sin u du = -\cos u + C;$

6) $\int \cos u du = \sin u + C;$

7) $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{u}{a} + C, \ (a \neq 0);$

8) $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C = -\dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$

9) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C, \ (a \neq 0);$

10) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C = -\arccos \dfrac{u}{a} + C, \ (a > 0);$

11) $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

12) $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

13) $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\dfrac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u\right| + C;$

14) $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\dfrac{1}{\cos u} - \operatorname{tg} u\right| + C;$

15) $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C;$

16) $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C;$

17) $\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C;$

18) $\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

Таблиця 6.1 – Огляд методів інтегрування

Структура інтеграла		*Метод інтегрування*
1	$\int F\left(f(x)\right) f'(x)\,dx$	Підстановка $f(x)=t$ або введення під знак диференціала $f(x)$
2	$\int P_n(x)e^{ax+b}dx$ $\int P_n(x)\cos(ax+b)\,dx$ $\int P_n(x)\sin(ax+b)\,dx$ $\int P_n(x)\operatorname{sh}(ax+b)\,dx$ $\int P_n(x)\operatorname{ch}(ax+b)\,dx$	Інтегрування частинами за формулою $\int udv = uv-\int vdu$. Тоді $u=P_n(x)$, dv – все те, що залишається
3	$\int P_n(x)\ln(ax+b)\,dx$ $\int P_n(x)\operatorname{arctg}(ax+b)\,dx$ $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}(ax+b)\,dx$ $\int P_n(x)\arcsin(ax+b)\,dx$ $\int P_n(x)\arccos(ax+b)\,dx$	Інтегрування частинами за формулою $\int udv = uv-\int vdu$. Тоді $dv=P_n(x)dx$, u – все те, що залишається
4	$\int e^{ax+b}\cos(cx+d)\,dx$ $\int e^{ax+b}\sin(cx+d)\,dx$ $\int e^{ax+b}\operatorname{sh}(cx+d)\,dx$ $\int e^{ax+b}\operatorname{ch}(cx+d)\,dx$	Двічі проінтегрувати частинами за формулою $\int udv = uv-\int vdu$ ($u=e^{ax+b}$, dv – все те, що залишається) і розв'язати рівняння відносно $\int udv$
5	$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$	Виділення повного квадрата у знаменнику $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$. Як результат отримаємо 7-й або 8-й табличний інтеграл.
6	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$	Виділення в чисельнику диференціалу знаменника. При цьому в загальному випадку утворюються два інтеграла виду $\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}$ і $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, перший з яких – табличний, а другий інтеграл 5.

Продовження таблиці 6.1

	Структура інтеграла	*Метод інтегрування*
7	$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$	Рекурентна формула $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{u}{2a^2(k-1)(u^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{k-1}}$
8	$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k} dx$	Те ж саме, що й інтеграл 6, після чого отримаємо інтеграл 7.
9	$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$	Відокремити цілу частину, розкласти знаменник на множники типу $(x-a)^n$, $(x^2+px+q)^n$, потім розкласти інтегрований дріб на суму простіших дробів
10	$\int \sin(ax+b)\cos(cx+d)\,dx$ $\int \sin(ax+b)\sin(cx+d)\,dx$ $\int \cos(ax+b)\cos(cx+d)\,dx$	Застосувати формули: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$, $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$, $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$
11	$\int \sin^m(ax+b)\cos^n(ax+b)$	1. Якщо m – непарне додатне, то підстановка $t=\cos(ax+b)$; 2. Якщо n – непарне додатне, то підстановка $t=\sin(ax+b)$; 3. Якщо m і n – парні додатні, то застосування формул $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
12	$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$	1. Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тоді спрощена універсальна підстановка: $u = \operatorname{tg} x$, $\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$. 2. Універсальна підстановка: $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, тоді $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$.

Продовження таблиці 6.1

	Структура інтеграла	Метод інтегрування
13	$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots, x^{\frac{r_v}{s_v}}\right) dx$	Підстановка $x = t^n$, де n – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{r_1}{s_1}, \ldots, \frac{r_v}{s_v}$, тобто $n = НСК\{s_1 \ldots s_v\}$
14	$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_v}{s_v}}\right) dx$	Підстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, де n – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{r_1}{s_1}, \ldots, \frac{r_v}{s_v}$, тобто $n = НСК\{s_1 \ldots s_v\}$
15	$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$	1. Якщо p – ціле $\Rightarrow$ інтеграл 13; 2. Якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то підстановка $a + bx^n = u^s$, де $p = \frac{r}{s}$, $s > 0$; 3. Якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, то підстановка $a + bx^n = u^s x^n$
16	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	Виділення повного квадрата у підкореневому виразі $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$, у результаті отримаємо 9-й чи 10-й табличний інтеграл
17	$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$	Виділення в чисельнику диференціала підкореневого виразу. При цьому в загальному випадку утворюються два інтеграла виду $\int \left(ax^2 + bx + c\right)^{-\frac{1}{2}} d(ax^2 + bx + c)$ і $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, перший з яких – табличний, а другий інтеграл 16.

Продовження таблиці 6.1

	Структура інтеграла	*Метод інтегрування*
18	$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Підстановка $x = 1/t$, яка приводить до інтеграла 16
19	$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$	Підстановка $x = a\sin t$ або $x = a\cos t$, яка приводить до інтеграла 12
20	$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$	Підстановка $x = a\,\mathrm{tg}\, t$ або $x = a\,\mathrm{ctg}\, t$, яка приводить до інтеграла 12
21	$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$	Підстановка $x = \frac{a}{\sin t}$ або $x = \frac{a}{\cos t}$, яка приводить до інтеграла 12
22	$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$	Виділення повного квадрата $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, далі підстановка $x + \frac{b}{2a} = t$, яка приводить до одного з інтегралів 19, 20, 21

Задача 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\mathrm{ctg}\, y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1-2x}\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (6.17)$$

Розв'язання

Записуємо задане рівняння у вигляді (6.1):

$$\frac{1}{1-2x}\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{ctg}\, y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Отже,

$$X_1 = \frac{1}{1-2x},\ X_2 = -ctg\, y.$$

Складаємо звичайне диференціальне рівняння (6.2)

$$(1-2x)dx = -\frac{dy}{ctg\, y}. \tag{6.18}$$

Отримали диференціальне рівняння першого порядку із відокремленими змінними (6.7), розв'язуємо його

$$\int(1-2x)dx + C = -\int\frac{dy}{ctg\, y}.$$

Враховуючи, що

$$\int(1-2x)dx = x - x^2 + C_1;$$

$$-\int\frac{dy}{ctg\, y} = \int\frac{-\sin y dy}{\cos y} = \int\frac{d\cos y}{\cos y} = \ln|\cos y| + C_2,$$

отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (6.18)

$$x - x^2 + C = \ln|\cos y|.$$

Запишемо його у вигляді (6.3)

$$\ln|\cos y| - x + x^2 = C.$$

Тоді

$$\varphi(x,y) = \ln|\cos y| - x + x^2,$$

а загальний розв'язок диференціального рівняння (6.17)

$$u(x,y) = F\left(\ln|\cos y| - x + x^2\right),$$

де F – довільна функція.
Відповідь: $u(x,y) = F\left(\ln|\cos y| - x + x^2\right)$.

Задача 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(xy - x^3y^3\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6.19}$$

Розв'язання

Записуємо задане рівняння у вигляді (6.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(x^3y^3 - xy\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Отже,

$$X_1 = 1,\ X_2 = x^3y^3 - xy.$$

Складаємо звичайне диференціальне рівняння (6.2)

$$dx = \frac{dy}{x^3y^3 - xy}. \tag{6.20}$$

Визначимо тип отриманого диференціального рівняння. Запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = x^3y^3 - xy;$$

$$y' + xy = x^3y^3.$$

Отримали диференціальне рівняння Бернуллі (6.14), розв'язуємо його

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' + xuv = x^3u^3v^3;$$

$$u'v + u(v' + xv) = x^3u^3v^3;$$

$$v' + xv = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -xv;$$

$$\frac{dv}{v} = -xdx;$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int xdx;$$

$$\ln|v| = -\frac{x^2}{2};$$

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}} = x^3u^3e^{-3\frac{x^2}{2}};$$

$$\frac{du}{u^3} = x^3e^{-x^2}dx;$$

$$\int u^{-3}du=\int x^3e^{-x^2}dx+C.$$

Враховуючи, що

$$\int x^3e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int -2x\cdot\left(-x^2\right)e^{-x^2}dx=\begin{vmatrix}t=-x^2\\ dt=-2xdx\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int te^t dt=$$

$$=\begin{vmatrix}u=t & du=dt\\ dv=e^t dt & v=e^t\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(te^t-\int e^t dt\right)=\frac{e^t}{2}(t-1)+C_1=$$

$$=-\frac{e^{-x^2}}{2}\left(x^2+1\right)+C_1,$$

отримаємо

$$-\frac{1}{2u^2}=-\frac{e^{-x^2}}{2}\left(x^2+1\right)-\frac{C}{2};$$

$$\frac{1}{u^2}=e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C;$$

$$u=\pm\sqrt{\frac{1}{e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C}}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (6.20)

$$y=\pm e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{\frac{1}{e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C}}.$$

Запишемо його у вигляді (6.3)

$$y^2=\frac{e^{-x^2}}{e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C};$$

$$y^2\left(e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C\right)=e^{-x^2};$$

$$e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{y^2}+1\right)=C.$$

Тоді

$$\cancel{\varphi(x,y)}=e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{y^2}+1\right),$$

а загальний розв'язок диференціального рівняння (6.17)

$$u(x,y)=F\left(e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{y^2}+1\right)\right),$$

де F – довільна функція.

Відповідь: $u(x,y)=F\left(e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{y^2}+1\right)\right)$.

Задача 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\sin x}{y}\frac{\partial u}{\partial x}+\ln y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$e^{x+3y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Задача 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2xy\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+(y^2-3x^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Задача 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$e^x\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

6.2 Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними та зведення їх до канонічного вигляду

Загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (6.21)$$

Алгоритм зведення диференціальних рівнянь (6.21) до канонічного вигляду

1. Визначаємо коефіцієнти A, B і C. Згідно з (6.21) A і C – коефіцієнти біля $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, відповідно, B – коефіцієнт біля $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ поділений на 2.

2. Визначаємо значення Δ за формулою

$\Delta = B^2 - AC$.

3. Залежно від знака Δ визначаємо тип диференціального рівняння:

а) якщо $\Delta > 0$ – диференціальне рівняння гіперболічного типу;
б) якщо $\Delta = 0$ – диференціальне рівняння параболічного типу;
с) якщо $\Delta < 0$ – диференціальне рівняння еліптичного типу.

4. Визначаємо характеристики ξ і η диференціального рівняння (6.21):

а) якщо диференціальне рівняння гіперболічного типу, то $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, де $\varphi(x,y) = C$, $\psi(x,y) = C$ – загальні розв'язки диференціальних рівнянь $\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{A}$ і $\frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{\Delta}}{A}$, відповідно;

б) якщо диференціальне рівняння параболічного типу, то $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, де $\varphi(x,y) = C$ – загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$, $\psi(x,y)$ – довільна функція, лінійно незалежна з функцією $\varphi(x,y)$;

в) якщо диференціальне рівняння еліптичного типу, то $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, де $\varphi(x,y) \pm \psi(x,y)i = C$, – загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{A} i$.

5. Виражаємо частинні похідні, що входять до диференціального рівняння (6.21), через нові незалежні змінні ξ і η, використовуючи формули диференціювання складних функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

6. Підставляємо знайдені частинні похідні у (6.21). Як результат, залежно від типу (6.21), отримаємо одну із канонічних форм:

а) якщо рівняння гіперболічного типу, то його канонічна форма

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right);$$

б) якщо рівняння параболічного типу, то його канонічна форма

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right);$$

в) якщо рівняння еліптичного типу, то його канонічна форма

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Додаткові теоретичні відомості

Під час зведення диференціальних рівнянь (6.21) до канонічного вигляду необхідно знаходити частинні похідні та розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку. У найпростішому випадку, коли A, B, C є константами, знаходження характеристик приводить до необхідності розв'язання звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dx}=a \text{ та } \frac{dy}{dx}=a\pm bi, \text{ де } a,b=const.$$

Алгоритм розв'язання цих рівнянь такий:

$\frac{dy}{dx} = a$;

$\int dy = a\int dx + C$;

$y = ax + C$;

$C = y - ax$.

$\frac{dy}{dx} = a \pm bi$;

$\int dy = (a \pm bi)\int dx + C$;

$y = (a \pm bi)x + C$;

$C = y - ax \pm bxi$.

Таблиця похідних

1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', (\alpha \in R)$;

2) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;

3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$;

5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

9) $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12) $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13) $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

14) $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$;

15) $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$;

16) $(\mathrm{th}\, u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$;

17) $(\mathrm{cth}\, u)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$.

Правила диференціювання $C = const, u = u(x), v = v(x)$

$C' = 0$;

$(Cu)' = Cu'$;

$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(uv)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Задача 1. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (6.22)$$

Розв'язання

Визначимо тип ДРЧП

$$A=1,\ B=0,\ C=-1;$$

$$\Delta=B^2-AC=1>0\ -\ \text{рівняння гіперболічного типу.}$$

Знайдемо характеристики ДРЧП:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{A};$$

$$\frac{dy}{dx}=1;$$

$$dy=dx;$$

$$y=x+C;$$

$$C=y-x.$$

Отже, $\xi=y-x$ – перша характеристика ДРЧП.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{A};$$

$$\frac{dy}{dx}=-1;$$

$$dy=-dx;$$

$$y=-x+C;$$

$$C=y+x.$$

Отже, $\eta=y+x$ – друга характеристика ДРЧП.

Визначимо усі похідні, які входять до диференціального рівняння (6.22).

Враховуючи, що

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-1;\ \frac{\partial\xi}{\partial y}=1;$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=1;\ \frac{\partial\eta}{\partial y}=1;$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial x}=0\,;$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial x}=0\,,$$

отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння (6.22)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-$$
$$-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+3\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}+4\frac{\partial u}{\partial\xi}+4\frac{\partial u}{\partial\eta}=-4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+7\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

Тоді канонічний вигляд рівняння (6.22)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial\eta}.$

Задача 2. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{6.23}$$

Розв'язання

Визначимо тип ДРЧП

$$A=x^2,\ B=xy,\ C=y^2;$$

$\Delta=B^2-AC=x^2y^2-x^2y^2=0$ – рівняння параболічного типу.

Знайдемо характеристики ДРЧП:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2};$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|;$$

$$\ln|y|=\ln|Cx|;$$

$$y=Cx;$$

$$\frac{y}{x}=C.$$

Отже, $\xi=\frac{y}{x}$ – перша характеристика ДРЧП.

Нехай, $\eta=x$ – друга характеристика ДРЧП.

Визначимо усі похідні, які входять в диференціальне рівняння (6.23).

Враховуючи, що

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2};\ \frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=1;\ \frac{\partial\eta}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3};\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=0;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial x}=0,$$

отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=$$
$$=\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}=-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=$$
$$=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння (6.23)

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial y}=x^2\left(\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+$$
$$+2xy\left(-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+y^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)-5\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=$$
$$=\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+2\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+$$
$$+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{5}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{5}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

Тоді канонічний вигляд рівняння (6.23)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{5}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Виразимо x і y через нові незалежні змінні і підставимо їх у отримане рівняння

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{y}{x}; \\ \eta = x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \xi\eta; \\ x = \eta. \end{cases}$$

Тоді канонічний вигляд рівняння (6.23)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{5}{\eta^3} \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \dfrac{5}{\eta^3} \dfrac{\partial u}{\partial \xi}.$

Задача 3. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{3}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{140}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{3}u = 0.$$

Задача 4. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 36\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 54\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 9\frac{\partial u}{\partial x} + 7\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0.$$

Задача 5. Визначити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 56\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 212\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

6.3 Розв'язання однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах

Розв'язок однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$(0 < x < l, 0 < t < \infty),$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0, \end{cases}\ 0 < t < \infty$$

$$(\text{ПУ})\ u(x,0)=\varphi(x),\ \ (0<x<l)$$

знаходиться за формулою:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

Додаткові теоретичні відомості

Знаходження коефіцієнта B_n в більшості випадків зводиться до знаходження визначених інтегралів, в яких підінтегральна функція є добутком многочлена $P_n(x)$ на тригонометричну функцію $\cos(\alpha x)$ або $\sin(\alpha x)$. Такі інтеграли є типовими, для яких застосовується метод інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v du;$$

$$\int_a^b P_n(x)\sin(\alpha x)dx=\begin{vmatrix} u=P_n(x) & du=P_n'(x)dx \\ dv=\sin(\alpha x)dx & v=-\dfrac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{P_n(x)}{\alpha}\cos(\alpha x)\Big|_a^b+\frac{1}{\alpha}\int_a^b P_n'(x)\cos(\alpha x)dx;$$

$$\int_a^b P_n(x)\cos(\alpha x)dx=\begin{vmatrix} u=P_n(x) & du=P_n'(x)dx \\ dv=\cos(\alpha x)dx & v=\dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{P_n(x)}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_a^b-\frac{1}{\alpha}\int_a^b P_n'(x)\sin(\alpha x)dx.$$

Відповідні інтеграли після застосування методу інтегрування частинами зводяться до інтегралів

$$\int_a^b \sin(\alpha x)dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)\Big|_a^b;$$

$$\int_a^b \cos(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_a^b.$$

Для спрощення виразу для функції $u(x,t)$ іноді необхідно застосовувати такі співвідношення

$$\cos(\pi n) = (-1)^n;$$

$$\sin(\pi n) = 0,$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Задача 1. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 3, t > 0),$$

якщо $\begin{cases} u(0,t) = 0; \\ u(3,t) = 0, \end{cases}$ і $u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, 0 \le x \le \frac{3}{2}, \\ 3 - x, \frac{3}{2} < x \le 3. \end{cases}$

Розв'язання

За умовою $a = 4$, $l = 3$. Тоді розв'язок будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right),$$

де $B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$.

При $l = 3$

$$B_n = \frac{2}{3}\int_0^3 \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx = \frac{2}{3}\cdot\left(\int_0^{3/2} \frac{x^2}{3}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx + \int_{3/2}^3 (3-x)\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx\right).$$

Кожен з інтегралів знайдемо за формулою інтегрування частинами

$$\int_0^{3/2}\frac{x^2}{3}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=\left|\begin{matrix} u=\frac{x^2}{3} & du=\frac{2x}{3}dx \\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=-\frac{3}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{x^2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^{3/2}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{3/2}x\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=\frac{3}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{matrix}\right|=-\frac{9}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+\frac{6x}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^{3/2}-\frac{6}{\pi^2n^2}\int_0^{3/2}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=-\frac{9}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{18}{\pi^3n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^{3/2}=-\frac{9}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{18}{\pi^3n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{18}{\pi^3n^3};$$

$$\int_{3/2}^{3}(3-x)\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=\left|\begin{matrix} u=3-x & du=-dx \\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=-\frac{3}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{3(3-x)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_{3/2}^{3}-\frac{3}{\pi n}\int_{3/2}^{3}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=\frac{9}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-$$

$$-\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_{3/2}^{3}=\frac{9}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Тоді

$$B_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{18}{\pi^3n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{18}{\pi^3n^3}+\frac{9}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{9}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)=\frac{3}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{12}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{12}{\pi^3n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{12}{\pi^3n^3}.$$

Отже,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{12}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{12}{\pi^3 n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{12}{\pi^3 n^3}\right)\cdot e^{-\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right).$$

Відповідь:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{12}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{12}{\pi^3 n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{12}{\pi^3 n^3}\right)\cdot e^{-\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right).$$

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \left(0<x<4,\, t>0\right),$$

якщо $\begin{cases} u(0,t)=0; \\ u(4,t)=0, \end{cases}$ і $u(x,0)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2, 0\le x\le 2, \\ 4-x, 2<x\le 4. \end{cases}$

Задача 3. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \left(0<x<2,\, t>0\right),$$

якщо $\begin{cases} u(0,t)=0; \\ u(2,t)=0, \end{cases}$ і $u(x,0)=\begin{cases} 21x^2, 0\le x\le \frac{2}{7}, \\ 2-x, \frac{2}{7}<x\le 2. \end{cases}$

6.4 Розв'язання диференціального рівняння вільних коливань струни при нульових крайових умовах

Розв'язок диференціального рівняння вільних коливань струни при нульових крайових умовах

$$(\text{ДРЧП})\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \left(0<x<l, t>0\right),$$

$$(\text{КУ})\begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0; \end{cases}\ (t>0),$$

$$(\text{ПУ})\begin{cases} u(x,0)=f(x), \\ u'_t(x,0)=g(x), \end{cases}\ (0\le x\le l)$$

знаходиться за формулою:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi na}{l}t\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi na}{l}t\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

Задача 1. Знайти розв'язок диференціального рівняння вільних коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \left(0<x<3,\, t>0\right),$$

якщо $\begin{cases}u(0,t)=0;\\ u(3,t)=0,\end{cases}$ і $\begin{cases}u(x,0)=x\left(x-3\right);\\ u'\left(x,0\right)=2.\end{cases}$

Розв'язання

Згідно з умовою задачі $a=3$, $l=3$, $f\left(x\right)=x\left(x-3\right)$, $g\left(x\right)=2$. Тоді

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\pi nt\right)+b_n\sin\left(\pi nt\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right),$$

де

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 x\left(x-3\right)\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=\left|\begin{matrix}u=x^2-3x & du=\left(2x-3\right)dx\\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=-\frac{3}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2\left(x^2-3x\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^3+\frac{2}{\pi n}\int_0^3\left(2x-3\right)\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=2x-3 & du=2dx\\ dv=\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx & v=\frac{3}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\end{matrix}\right|=\frac{6\cdot(2x-3)}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^3-$$

$$-\frac{12}{\pi^2n^2}\int_0^3\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=\frac{36}{\pi^3n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^3=\frac{36}{\pi^3n^3}\left(\cos(\pi n)-1\right)=$$

$$=\frac{36}{\pi^3n^3}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}-\dfrac{72}{\pi^3(2k-1)^3},\ n=2k-1;\\ 0,\ n=2k.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{3\pi n}\int_0^3 2\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx=-\frac{4}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)\Bigg|_0^3=-\frac{4}{\pi^2n^2}\left(\cos(\pi n)-1\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi^2(2k-1)^2},\ n=2k-1;\\ 0,\ n=2k.\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{36}{\pi^3n^3}\left((-1)^n-1\right)\cos(\pi nt)-\frac{4}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right)\sin(\pi nt)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right).$$

Враховуючи, що усі парні члени ряду дорівнюють 0, отримаємо

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{72\cos\left((2k-1)\pi t\right)}{\pi^3(2k-1)^3}+\frac{8\sin\left((2k-1)\pi t\right)}{\pi^2(2k-1)^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right).$$

Відповідь:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{72\cos\left((2k-1)\pi t\right)}{\pi^3(2k-1)^3}+\frac{8\sin\left((2k-1)\pi t\right)}{\pi^2(2k-1)^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right).$$

Задача 2. Знайти розв'язок диференціального рівняння вільних коливань струни

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\ \left(0<x<2,\,t>0\right),$$

якщо $\begin{cases}u(0,t)=0;\\ u(2,t)=0,\end{cases}$ і $\begin{cases}u(x,0)=0.1x(x-2);\\ u'(x,0)=2-x.\end{cases}$

Задача 3. Однорідна струна закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$. В початковий момент струна має форму ламаної OAB, де $O(0,0)$, $A(2,-0.1)$, $B(3,0)$. Знайти форму струни в будь-який момент часу t, якщо початкові швидкості відсутні.

6.5 Розв'язання внутрішньої задачі Діріхле для круга

Розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для круга

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=0,$$

$$0\le r<a \ \text{і}\ 0\le\varphi<2\pi,$$

$$\text{(КУ)}\ u(a,\varphi)=f(\varphi),$$

знаходиться за формулою:

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cdot\left(A_n\cdot\cos n\varphi+B_n\cdot\sin n\varphi\right),$$

де

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Задача 1. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u=0$ в крузі $0\le r<1$, якщо $u(1,\varphi)=2\varphi^2-\varphi+2$.

Розв'язання

Згідно з умовою задачі $a=1$, $f(\varphi)=2\varphi^2-\varphi+2$. Тоді

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cdot\left(A_n\cdot\cos n\varphi+B_n\cdot\sin n\varphi\right),$$

де

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\varphi^3}{3}-\frac{\varphi^2}{2}+2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi^3}{3}-\frac{\pi^2}{2}+2\pi+\frac{2\pi^3}{3}+\frac{\pi^2}{2}+2\pi\right)=\frac{4\pi^2}{3}+4;$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)\cos(n\varphi)\,d\varphi=\left|\begin{matrix}u=2\varphi^2-\varphi+2 & du=(4\varphi-1)\,d\varphi\\ dv=\cos(n\varphi)\,d\varphi & v=\dfrac{1}{n}\sin(n\varphi)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)}{\pi n}\sin(n\varphi)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(4\varphi-1)\sin(n\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=4\varphi-1 & du=4d\varphi\\ dv=\sin(n\varphi)\,d\varphi & v=-\dfrac{1}{n}\cos(n\varphi)\end{matrix}\right|=\frac{4\varphi-1}{\pi n^2}\cos(n\varphi)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{\cos(n\pi)}{\pi n^2}(4\pi-1+4\pi+1)-\frac{4}{\pi n^3}\sin(n\varphi)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{8}{n^2}\cos(\pi n)=\frac{8(-1)^n}{n^2};$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)\sin(n\varphi)\,d\varphi=\left|\begin{matrix}u=2\varphi^2-\varphi+2 & du=(4\varphi-1)\,d\varphi\\ dv=\sin(n\varphi)\,d\varphi & v=-\dfrac{1}{n}\cos(n\varphi)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{\left(2\varphi^2-\varphi+2\right)}{\pi n}\cos(n\varphi)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(4\varphi-1)\cos(n\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=4\varphi-1 & du=4d\varphi\\ dv=\cos(n\varphi)\,d\varphi & v=\dfrac{1}{n}\sin(n\varphi)\end{matrix}\right|=-\frac{\cos(\pi n)}{\pi n}\left(2\pi^2-\pi+2-2\pi^2-\pi-2\right)+$$

$$+\frac{4\varphi-1}{\pi n^2}\sin(n\varphi)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\varphi)\,d\varphi=\frac{2}{n}\cos(\pi n)+\frac{4}{\pi n^3}\cos(n\varphi)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{n}\cos(\pi n)=\frac{2(-1)^n}{n}.$$

Отже, розв'язком внутрішньої задачі Діріхле буде функція

$$u(r,\varphi)=\frac{2\pi^2}{3}+2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(8\cos n\varphi+2n\sin n\varphi)}{n^2}\cdot r^n.$$

Відповідь: $u(r,\varphi)=\dfrac{2\pi^2}{3}+2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(8\cos n\varphi+2n\sin n\varphi)}{n^2}\cdot r^n$.

Задача 2. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u=0$ в крузі $0\le r<2$, якщо $u(2,\varphi)=\varphi^2$.

Задача 3. Знайти розподіл температури на однорідній пластинці радіусом $R=4$, на колі верхньої половини якої підтримується температура $1°$ С, а на нижній половині $0°$ С.

6.6 Метод сіток для математичної моделі поширення тепла у стержні

Постановка задачі: застосовуючи метод сіток, знайти розв'язок однорідного рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при ненульових крайових $\begin{cases} u(0,t)=f_1(t), \\ u(l,t)=f_2(t), \end{cases}$ $(0<x<l, 0<t<\infty)$ та початковій $u(x,0)=\varphi(x)$, $(0<x<l)$ умовах.

Алгоритм розв'язання при застосуванні явної схеми

1. Задаємо кількість n рівних частин, на які ми розбиваємо стержень довжиною l.

2. Визначаємо крок зміни незалежної змінної x

$$h=\frac{l}{n}.$$

3. Задаємо число $0<\sigma\leq\frac{1}{2}$ (найкраще $\sigma=\frac{1}{6}$).

4. Визначаємо крок зміни t

$$k=h^2\sigma.$$

5. Будуємо таблицю, яка містить $n+3$ стовпці

	i	0	1	2	3	…	i	…	n
j	t_j \ x_i								
0									
1									
2									
…									
j									
…									

6. Заповнюємо другий рядок. У ньому міститься координата x_i, яка обчислюється за формулою

$$x_i = i \cdot h.$$

7. Заповнюємо другий стовпець, який містить координату t_j

$$t_j = j \cdot k.$$

8. В результаті отримали таблицю, у якій на перетині i-ого стовпця і j-ого рядка повинно стояти значення температури в точці з координатою x_i в момент часу t_j.

9. Рядок $j = 0$ повинен містити значення температури в початковий момент часу. Заповнюємо даний рядок, використовуючи початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \text{ тобто } u_{i,0} = \varphi(x_i).$$

10. Стовпці $i = 0$ і $i = n$ визначають значення температури на кінцях стержня. Стовпець $i = 0$ заповнюємо, застосовуючи першу крайову умову

$$u(0,t) = f_1(t), \text{ тобто } u_{0,j} = f_1(t_j).$$

Заповнюємо стовпець $i = n$, використовуючи другу крайову умову

$$u(l,t) = f_2(t), \text{ тобто } u_{n,j} = f_2(t_j).$$

11. Заповнюємо усі клітинки рядка $j = 1$ за формулою

$$u_{i,1} = \sigma\left(u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}\right) + u_{i,0} \text{ при } 0 < \sigma \le \frac{1}{2};$$

$$u_{i,1} = \frac{1}{6}\left(u_{i+1,0} + 4u_{i,0} + u_{i-1,0}\right) \text{ при } \sigma = \frac{1}{6}.$$

12. Заповнюємо наступний рядок $j = j$ за формулою

$$u_{i,j+1} = \sigma\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + u_{i,j} \text{ при } 0 < \sigma \le \frac{1}{2};$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i+1,j} + 4u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) \text{ при } \sigma = \frac{1}{6}.$$

13. Повторюємо п.12 поки усі клітинки не будуть заповнені.

Задача 1. Методом сіток знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$(\text{КУ})\ \begin{cases} u(0;t)=1-6t; \\ u(0.6;t)=0.3624; \end{cases} (0<x<0.6, 0<t<\infty),$$

$$(\text{ПУ})\ u(x,0)=cos2x,\ (0<x<0.6).$$

Розв'язання

Скористаємось явною схемою при $\sigma=\frac{1}{6}$, матимемо формулу

$$u_{i,j+1}=\frac{1}{6}\left(u_{i-1,j}+4\cdot u_{i,j}+u_{i+1,j}\right).$$

Нехай $n=6$, тоді крок зміни змінної x

$$h=\frac{l}{n}=\frac{0,6}{6}=0,1.$$

Визначимо крок зміни змінної t

$$k=\frac{h^2}{6}=\frac{0,1^2}{6}=0,0017.$$

Далі складаємо таблицю. Спочатку заповнимо значення функції $u(x,t)$ у рядку із номером $j=0$, користуючись початковою умовою. Отже, $u_{i,0}=\cos(2x_i)$, тобто

$$u_{0,0}=\cos(2\cdot 0)=1,0;$$

$$u_{1,0}=\cos(2\cdot 0,1)=0,9801;$$

....

Користуючись крайовими умовами заповнимо стовпці із номерами $i=0$ та $i=6$: $u_{0,j}=1-6t_j$, $u_{6,j}=0,3624$. Отже, отримаємо

$$u_{0,1}=1-6\cdot 0,0017=0,99;$$

$$u_{0,2}=1-6\cdot 0,0033=0,98;$$

....

$$u_{6,1} = 0,3624;$$

$$u_{6,2} = 0,3624;$$

....

Потім послідовно заповнюємо пусті клітинки рядка під номером $j = 1$, починаючи з елемента $u_{1,1}$:

$$u_{1,1} = \frac{1}{6}\cdot\left(u_{0,0} + 4\cdot u_{1,0} + u_{2,0}\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(1,0 + 4\cdot 0,9801 + 0,9211\right) = 0,9736$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{6}\cdot\left(u_{1,0} + 4\cdot u_{2,0} + u_{3,0}\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(0,9801 + 4\cdot 0,9211 + 0,8253\right) = 0,9149$$

....

Аналогічно заповнюємо рядок під номером $j = 2$, далі рядок під номером $j = 3$. Продовжуємо заповнювати до тих пір, поки усі клітинки не будуть заповнені.

Як результат отримали таку таблицю:

	i	0	1	2	3	4	5	6
	t_i \ x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,0	1,0	0,9801	0,9211	0,8253	0,6967	0,5403	0,3624
1	0,0017	0,99	0,9736	0,9149	0,8199	0,6921	0,5367	0,3624
2	0,0033	0,98	0,9665	0,9089	0,8144	0,6875	0,5336	0,3624
3	0,005	0,97	0,9592	0,9027	0,809	0,683	0,5307	0,3624
4	0,0067	0,96	0,9516	0,8965	0,8036	0,6786	0,528	0,3624
5	0,0083	0,95	0,9438	0,8902	0,7983	0,6743	0,5255	0,3624
6	0,01	0,94	0,9359	0,8838	0,7929	0,6702	0,5231	0,3624

Задача 2. Методом сіток знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо (КУ) $\begin{cases} u(0;t) = -t - 4,355; \\ u(0.6;t) = -4t + 6,453; \end{cases}$ $(0 < x < 0.6, 0 < t < \infty)$,

(ПУ) $u(x,0) = 6sin(4x - 0,94) + 0,49$, $(0 < x < 0.6)$.

6.7 Застосування Maple для розв'язання задач математичної фізики

Розв'язання усіх задач, які розглядаються у цьому посібнику, зводяться до строгих алгоритмів або до кінцевих формул, в які слід підставити вихідні дані. Основна складність полягає у тому, що для успішного розв'язання відповідних задач необхідно знаходити частинні похідні функції багатьох змінних, знаходити невизначені та визначені інтеграли, розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого порядку. Для виконання усіх цих операцій (або для перевірки отриманого результату) можна застосовувати математичний додаток Maple. Одразу зауважимо, що ми будемо розглядати лише незначну частину можливостей цього математичного додатку, які необхідні для розв'язання поставлених у посібнику задач. Навіть структура більшості операторів, які розглядаються, має багато варіацій, багато можливостей, які ми не в змозі охопити в рамках відповідного практичного заняття. Тому багато інформації, наприклад визначення потрібної структури та розшифрування багатьох необов'язкових параметрів, є можливість визначити безпосередньо у середовищі Maple, використовуючи вбудовану довідку. Для отримання інформації щодо певного оператора необхідно виділити його та натиснути F1.

Для знаходження повних та частинних похідних в Maple застосовується оператор `diff`. Структура оператора:

$$\mathrm{diff}\left(f, x_1, x_2, \ldots, x_n\right);$$

де f – функція (однієї або багатьох змінних), похідна якої визначається; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – змінні, за якими визначається похідна; n – порядок похідної.

Приклад. Знайти усі похідні першого та другого порядків функції $x^2 - \sin(xy)$.

Розв'язання

Застосуємо оператор diff

```
> diff(x^2-sin(x*y),x);
```

$$2x - \cos(xy)\,y$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),y);
```

$$-\cos(xy)\,x$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),x,y);
```

$$\sin(x\,y)\,x\,y-\cos(x\,y)$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),x,x);
```

$$2+\sin(x\,y)\,y^2$$

```
> diff(x^2-sin(x*y),y,y);
```

$$\sin(x\,y)\,x^2$$

Відповідь:

$$\left(x^2-\sin(xy)\right)'_x=2x-\cos(xy)y;$$

$$\left(x^2-\sin(xy)\right)'_y=-\cos(xy)x;$$

$$\left(x^2-\sin(xy)\right)''_{xy}=\sin(xy)xy-\cos(xy);$$

$$\left(x^2-\sin(xy)\right)''_{xx}=2+\sin(xy)y^2;$$

$$\left(x^2-\sin(xy)\right)''_{yy}=\sin(xy)x^2.$$

Якщо функція диференціюється декілька раз за однією змінною, то для скорочення можна застосовувати оператор $. Записи

```
> diff(sin(x),x$3);
```

$$-\cos(x)$$

```
> diff(sin(x),x,x,x);
```

$$-\cos(x)$$

еквівалентні, і таким чином визначається третя похідна від функції $\sin(x)$.

В Maple для знаходження визначених та невизначених інтегралів застосовується оператор int.

Структура оператора int для знаходження невизначених інтегралів:

$$\mathrm{int}(f,x);$$

де f – підінтегральна функція; x – змінна інтегрування.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^2(x)dx$

Розв'язання

```
> int((sin(x))^2,x);
```

$$-\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)+\frac{x}{2}$$

Відповідь: $\int \sin^2(x)dx=-\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x+\frac{x}{2}+C$.

Структура оператора int для знаходження визначених інтегралів:

$$\mathrm{int}\left(f,x=a..b\right);$$

де f – підінтегральна функція; x – змінна інтегрування; a і b – нижня і верхня межі інтегрування, відповідно.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x\sin(nx)dx$.

Розв'язання

Застосуємо оператор int

```
> int(x*sin(n*x),x=0..1);
```

$$-\frac{-\sin(n)+\cos(n)\,n}{n^2}$$

Відповідь: $\int_0^1 x\sin(nx)dx=-\frac{-\sin n+n\cos n}{n^2}$.

Для знаходження аналітичного розв'язку звичайних диференціальних рівнянь застосовується оператор dsolve. Структура оператора:

$$\mathrm{dsolve}(f);$$

де f – диференціальне рівняння.

Зауваження. В позначенні шуканої функції в дужках записується незалежна змінна. Наприклад, якщо шукана функція y залежить від незалежної змінної x, то скрізь, де в диференціальному рівнянні зустрічається y, ми записуємо $y(x)$. Похідні, що входять до диференціального рівняння, записуємо за допомогою оператора diff.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння $xy'-y=y^2$.

Розв'язання

```
> dsolve(x*diff(y(x),x)-y(x)=y(x)^2);
```

$$y(x) = -\frac{x}{x - \_C1}$$

Відповідь: $y = -\dfrac{x}{x - C_1}$.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 25y = e^x\left(\cos 5x - 10\sin 5x\right).$$

Розв'язання

```
>    dsolve(diff(y(x),x$2)+25*y(x)=exp(x)*(cos(5*x)-
10*sin(5*x)));
```

$$y(x) = \sin(5\,x)\,\_C2 + \cos(5\,x)\,\_C1 + e^x\cos(5\,x)$$

Відповідь: $y = C_2\sin 5x + C_1\cos 5x + e^x\cos 5x$.

В математичному аналізі суму великої або нескінченної кількості доданків записують використовуючи знак суми Σ. У системі Maple для цієї мети слугує оператор sum. Структура оператора

$$\mathrm{sum}(f,\ k = m..n);$$

де f – функція індексу підсумовування k, що пробігає значення від m до n. Нескінченність в Maple позначається як infinity.

Приклад. Знайти суму $\sum\limits_{n=1}^{10} n^2$.

Розв'язання

```
> sum(n^2,n=1..10);
```

$$385$$

Відповідь: $\sum\limits_{n=1}^{10} n^2 = 385.$

Приклад. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$.

Розв'язання

```
> sum(1/n!,n=0..infinity);
```

$$e$$

Відповідь :ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ – збіжний і його сума дорівнює e.

Приклад. Визначити характер збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Розв'язання

```
> sum(1/n,n=1..infinity);
```

$$\infty$$

Відповідь: враховуючи, що сума ряду прямує до нескінченності, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *– розбіжний.*

За допомогою оператора limit обчислюються границі функцій. Структура оператора

$$\mathrm{limit}(f\,, x = x0\,, dir\,);$$

де f – функція незалежної змінної x, що прямує до значення $x0$; dir – необов'язковий параметр, що визначає напрям прямування x до $x0$: right – x прямує до $x0$ справа ($x \to x0+0$), left – зліва ($x \to x0-0$). Якщо параметр dir не вказується, то шукається значення границі функції f в точці $x0$ (яке, очевидно, не залежить від напряму прямування).

Приклад. Знайти границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ та $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x}$.

Розв'язання

```
> limit(sin(x)/x, x=0);
```

$$1$$

```
> limit(exp(x), x=-infinity);
```

$$0$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x}=0$.

Приклад. Знайти границі функції $f(x)=\begin{cases} x^2-6, x<3; \\ 2x-1, x\ge 3, \end{cases}$ в точці $x=3$ та при прямуванні до $x=3$ зліва і справа.

Розв'язання

```
> limit(piecewise(x<3,x^2-6,3<=x,2*x-1), x=3);
```

undefined

```
> limit(piecewise(x<3,x^2-6,3<=x,2*x-1),
x=3,right);
```

$$5$$

```
> limit(piecewise(x<3,x^2-6,3<=x,2*x-1),
x=3,left);
```

$$3$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ *– не існує*; $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=5$; $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=3$.

Зауваження. Для побудови кускової функції використовується оператор piecewise.

Для побудови графіків функцій однієї та двох змінних у системі Maple використовують оператори plot та plot3d, відповідно.

Структура оператора plot:

$$\text{plot}(f, x);$$

або

$$\text{plot}(f, x = x0..x1);$$

або

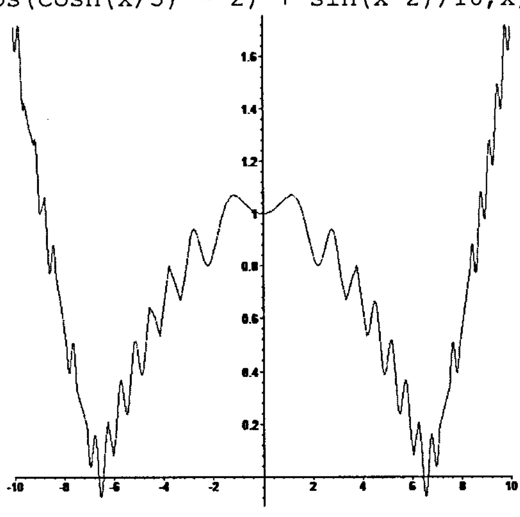
$$\text{plot}(v1, v2);$$

де f – функція однієї незалежної змінної x; $x0$ та $x1$ – ліва та права межі значень незалежної змінної x (якщо межі не вказуються, тоді вони підбираються автоматично); $v1$ та $v2$ – x та y координати точок, які мають бути зображені.

Приклад. Побудувати графік функції $y=\left|\text{ch}\dfrac{x}{5}-2\right|+\sin\dfrac{x^2}{10}$.

Розв'язання

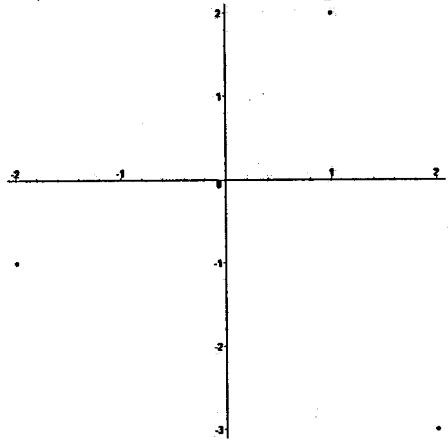
```
> plot(abs(cosh(x/5) - 2) + sin(x^2)/10,x);
```



Приклад. Побудувати на координатній площині точки з координатами $(1;2)$, $(-2;-1)$, $(2;-3)$.

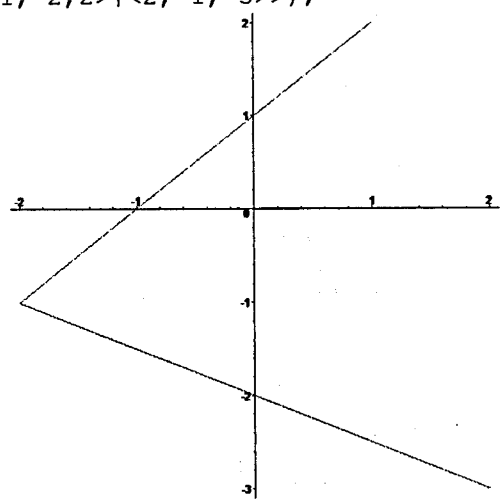
Розв'язання

```
>plot(<<1,-2,2>|<2,-1,-3>>, style=point);
```

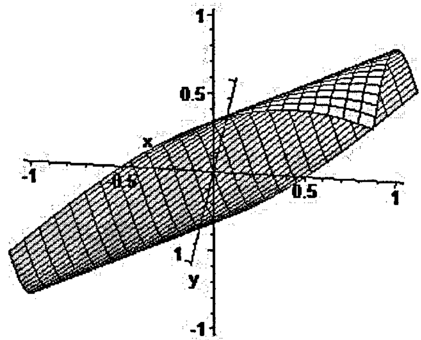


Зауваження: в структурі plot використали необов'язковий параметр style, який може набувати значень line, point, polygon та polygonoutline. Початково у системі style=line – система послідовно з'єднує точки лінією. Якщо style=point, то зображають лише точки, які обчислюються або вводяться, без з'єднання їх лінією. Якщо у попередньому прикладі не зазначити style=point, то отримаємо

```
>plot(<<1,-2,2>|<2,-1,-3>>);
```



Крім параметра style є ще ряд необов'язкових параметрів оператора plot, які, в основному, визначаються оформлення виведення графіка функції.



Структура оператора plot3d:

plot3d(f , $x = x0..x1$, $y = y0..y1$);

де f – функція двох незалежних змінних x та y; $x0$, $x1$, $y0$ та $y1$ – ліва та права межі значень незалежних змінних x та y, відповідно (якщо межі не вказуються, тоді вони підбираються автоматично).

Приклад. Побудувати графік функції $z = \sin(x + y)$ для $x \in [-1;1]$ та $y \in [-1;1]$.

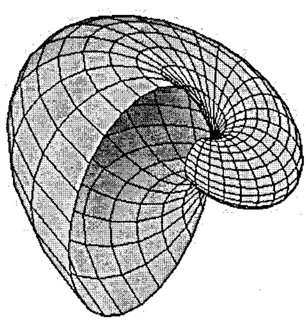
Розв'язання

```
>plot3d(sin(x+y), x=-1..1, y=-1..1);
```

Приклад. Побудувати у сферичні системі координат графік функції $r = 1{,}3^{\varphi} \cdot \sin\theta$ для $\varphi \in [0;2\pi]$ та $\theta \in [0;\pi]$.

Розв'язання

```
> plot3d((1.3)^phi * sin(theta), phi=0..2*Pi,
theta=0..Pi, coords=spherical);
```



Зауваження. В структурі plot3d використали необов'язковий параметр coord, який визначає систему координат, у якій побудовано графік функції двох змінних. Початково у системі значення параметра coord= cartesian, що означає побудову графіка у декартовій системі координат. Крім того, цей параметр може набувати більше десяти різних значень. У прикладі використано значення coord=spherical, тобто сферичну систему координат. У випадку необхідності побудови графіка у циліндричній системі координат coord=cylindrical.

Аналогічно оператору plot, оператор plot3d має значну кількість необов'язкових параметрів, які здебільшого визначають оформлення графіка.

Для зображення ліній рівня використовується оператор contourplot. Структура оператора

$$\text{contourplot}\,(f,\ x = x0..x1,\ y = y0..y1);$$

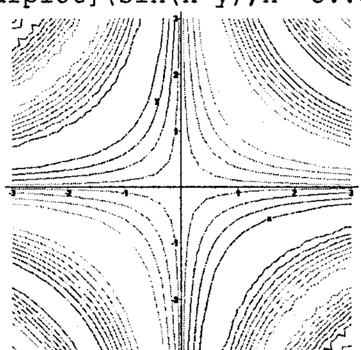
де f – функція двох незалежних змінних x та y; $x0$, $x1$, $y0$ та $y1$ – ліва та права межі значень незалежних змінних x та y, відповідно (якщо межі не вказуються, тоді вони підбираються автоматично).

Оператор contourplot не є основним оператором (тобто оператором, який входить до основного ядра системи Maple). Цей оператор входить до бібліотеки plots. Є дві можливості використовувати оператори, які входять до додаткових бібліотек. Якщо вам потрібно записати лише один оператор даної додаткової бібліотеки невелику кількість раз, то раціонально використовувати таку структуру

назва_бібліотеки[оператор](параметри_оператора);

Наприклад,

```
>plots[contourplot](sin(x*y),x=-3..3,y=-3..3);
```

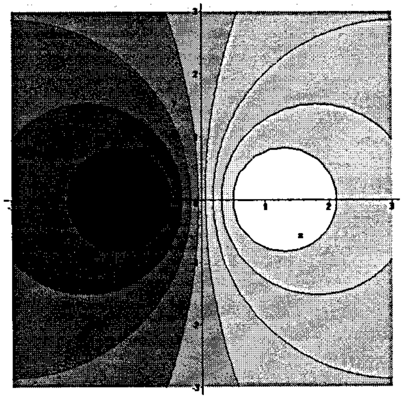


Якщо ж ви плануєте багаторазово використовувати можливості деякої додаткової бібліотеки, то є можливість її одноразової активації за допомогою оператора with:

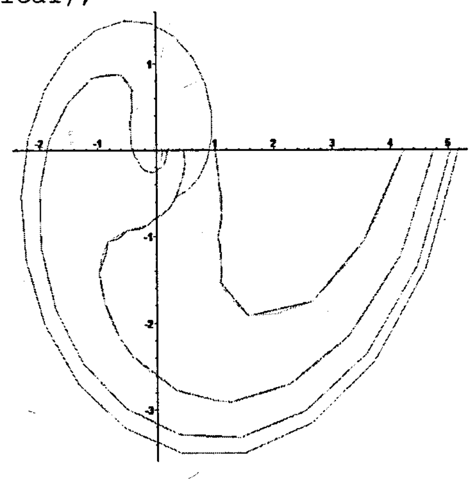
with(назва_бібліотеки):

Наприклад,

```
>with(plots):
>contourplot(-5*x/(x^2 + y^2 + 1),x=-3..3,y=-3..3,filledregions=true, coloring=[white,blue]);
```



```
>contourplot((1.3)^x * sin(y),x=-1..2*Pi,y=0..Pi,coords=spherical);
```



Враховуючи, що задачі математичної фізики, які ми розглядаємо, є динамічними (явище теплопровідності, коливальні процеси тощо), тому для візуалізації динамічних процесів використовується оператор animate, що входить до бібліотеки plots. Структура оператора

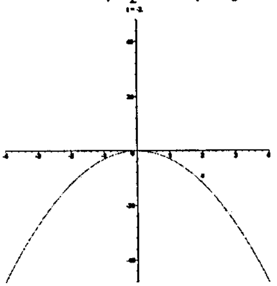
animate(*plotcommand* , [*plotarg*], $t = t0..t1$, *options*);

або

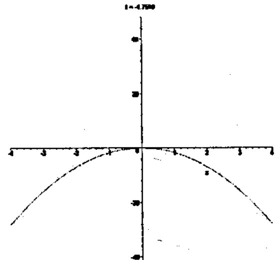
animate(*plotcommand* , [*plotarg*], $t = L$,);

де *plotcommand* – оператор для побудови графіка (наприклад, plot або plot3d); *plotarg* – параметри оператора для побудови графіка, t – величина, яка змінюється від кадру до кадру (наприклад, цією змінною може бути час, таким чином кожен кадр буде відповідати певному моменту часу); $t0$ та $t1$ – межі змінювання змінної t; L – список значень змінної t; *options* – необов'язкові параметри.

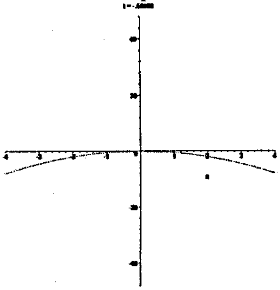
```
> with(plots):
> animate( plot, [t*x^2,x=-4..4], t=-3..3 );
```



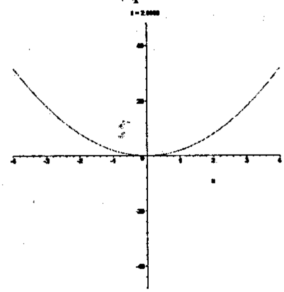
кадр 1



кадр 6

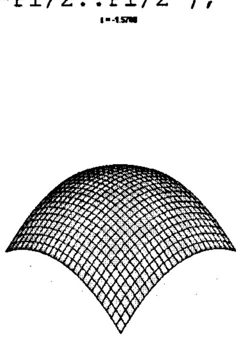


кадр 11

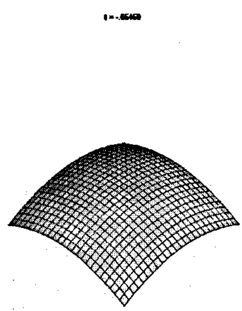


кадр 21

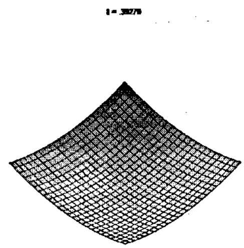
```
> animate( plot3d, [sin(t)*(x^2+y^2), x=-2..2, y=-
2..2], t=-Pi/2..Pi/2 );
```



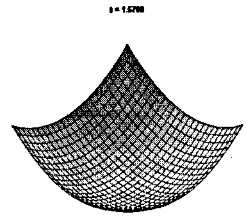
кадр 1



кадр 8



кадр 16



кадр 25

Усі оператори, які ми розглядали вище, є основними операторами, якими можна скористатись навіть у демонстраційній версії Maple. У ліцензійній версії Maple 9 (мабуть і у вищих, на час роботи над посібником вийшла 13 версія) вбудовано спеціальну бібліотеку для роботи з диференціальними рівняннями з частинними похідними – PDEtools. Після її активації

```
> with(PDEtools):
```

стають доступними ряд операторів. Коротко розглянемо деякі з них (лише їх можливості, що не виходять за рамки курсу, що розглядається).

За допомогою оператора difforder визначають порядок диференціального рівняння. Структура оператора

$$\text{difforder}(PDE);$$

де PDE – диференціальне рівняння з частинними похідними.

Наприклад, визначимо порядок диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

```
> difforder(diff(u(x,y),x)=2*(diff(u(x,y),y))^2);
```

$$1$$

Отже, диференціальне рівняння першого порядку.

Операцію переходу до нових незалежних змінних у диференціальному рівнянні з частинними похідними можна здійснити, застосувавши оператор dchange. Структура оператора

$$\text{dchange}(tr, PDE);$$

де tr – система виразів, які визначають залежність старих змінних від нових; PDE – диференціальне рівняння з частинними похідними.

Приклад. У диференціальному рівнянні з частинними похідними

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2,$$

де $z=z(x,y)$, виконати перехід до нових змінних u, v, якщо $x=2u-v$; $y=7v$.

Розв'язання:

```
> dchange({x=2*u-v,y=7*v},diff(z(x,y),y)=
4*diff(z(x,y),x,x)+x^2);
```

$$\frac{1}{14}\left(\frac{\partial}{\partial u}z(u,v)\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{\partial}{\partial v}z(u,v)\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}z(u,v)\right)+(2u-v)^2$$

Відповідь: $\frac{1}{14}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2u-v)^2$, де $z=z(u,v)$.

У бібліотеці PDEtools є можливість одразу визначити канонічну форму диференціального рівняння із частинними похідними та знайти його характеристики. Для цього потрібно ввести таку структуру оператора mapde:

mapde(PDE,canom);

де PDE – диференціальне рівняння із частинними похідними.

Приклад. Знайти характеристики диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

та визначити його канонічну форму.

Розв'язання:

```
> mapde(diff(u(x,y),x,x)-diff(u(x,y),y,y)-
3*diff(u(x,y),x)+4*diff(u(x,y),y)=0,canom);
```

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial\_\xi1}u(\_\xi1,\_\xi2)\right)-\frac{7}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\_\xi2}u(\_\xi1,\_\xi2)\right)+2\left(\frac{\partial^2}{\partial\_\xi2\,\partial\_\xi1}u(\_\xi1,\_\xi2)\right)\right)\ \&\text{where}$$

$$\{\_\xi1=x+y,\_\xi2=\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\}$$

Відповідь: канонічна форма рівняння $\frac{\partial u}{\partial\xi_1}-\frac{7}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi_2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\xi_2}=0$, *а його характеристики* $\xi_1=x+y$, $\xi_2=\frac{x}{2}-\frac{y}{2}$.

Приклад. Знайти характеристики диференціального рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

та визначити його канонічну форму.

Розв'язання:

```
> mapde(x^2*diff(u(x,y),x,x)+
2*x*y*diff(u(x,y),x,y)+y^2*diff(u(x,y),y,y)-
5*diff(u(x,y),y)=0,canom);
```

$$\left(-\frac{5\left(\frac{\partial}{\partial \_\xi1}\mathrm{u}(\_\xi1,\_\xi2)\right)}{\_\xi2}+\left(\frac{\partial^2}{\partial \_\xi2^2}\mathrm{u}(\_\xi1,\_\xi2)\right)\_\xi2^2\right)\&\text{where }\left\{\_\xi1=\frac{y}{x},\_\xi2=x\right\}$$

Відповідь: канонічна форма рівняння $-\frac{5}{\xi_2}\frac{\partial u}{\partial \xi_1}+\xi_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}=0$, *а його характеристики* $\xi_1=\frac{y}{x}$, $\xi_2=x$.

Зауваження. Розробник системи попереджає, що операція визначення канонічної форми диференціального рівняння з частинними похідними успішно виконується, якщо коефіцієнти сталі. Із змінними коефіцієнтами можливі проблеми, але у попередньому прикладі система виконала поставлену задачу.

Для знаходження загального розв'язку диференціальних рівнянь із частинними похідними в аналітичному вигляді та для знаходження числового розв'язку задачі, що містить диференціальне рівняння та початкові й граничні умови, використовується оператор pdsolve. Структура оператора pdsolve для знаходження загального розв'язку:

$$\mathrm{pdsolve}(PDE, options);$$

де PDE – диференціальне рівняння із частинними похідними, *options* – необов'язкові параметри, серед яких варто зазначити такі:

$HINT = rozdil\_zm$ – параметр, що визначає пошук розв'язку диференціального рівняння методом відокремлення змінних, при цьому $rozdil\_zm$ може дорівнювати \`+\`, що означає розділення змінних у вигляді суми, або \`*\` – розділення змінних у вигляді добутку;

INTEGRATE – визначає автоматичне знаходження розв'язку звичайних диференціальних рівнянь, які отримаємо внаслідок розділення змінних;

build – знаходження розв'язку у явному вигляді.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Розв'язання:

```
> pdsolve(diff(u(x,t),t)=a^2*diff(u(x,t),x,x));
```

$$(u(x,t) = \_F1(x)\,\_F2(t))\ \&\text{where}$$

$$\left[\{\frac{d^2}{dx^2}\_F1(x) = \_c_1\,\_F1(x), \frac{d}{dt}\_F2(t) = a^2\,\_c_1\,\_F2(t)\}\right]$$

```
> pdsolve(diff(u(x,t),t)=a^2*diff(u(x,t),x,x),
HINT=`*`);
```

$$(u(x,t) = \_F1(x)\,\_F2(t))\ \&\text{where}$$

$$\left[\{\frac{d^2}{dx^2}\_F1(x) = \_c_1\,\_F1(x), \frac{d}{dt}\_F2(t) = a^2\,\_c_1\,\_F2(t)\}\right]$$

```
> pdsolve(diff(u(x,t),t)=a^2*diff(u(x,t),x,x),
HINT=`*`,INTEGRATE);
```

$$(u(x,t) = \_F1(x)\,\_F2(t))\ \&\text{where}$$

$$\left[\{\{\_F1(x) = \_C1\,e^{(\sqrt{\_c_1}\,x)} + \_C2\,e^{(-\sqrt{\_c_1}\,x)}\}, \{\_F2(t) = \_C3\,e^{(a^2\,\_c_1\,t)}\}\}\right]$$

```
> pdsolve(diff(u(x,t),t)=a^2*diff(u(x,t),x,x),
HINT=`*`,build);
```

$$u(x,t) = e^{(\sqrt{\_c_1}\,x)}\,\_C3\,e^{(a^2\,\_c_1\,t)}\,\_C1 + \frac{\_C3\,e^{(a^2\,\_c_1\,t)}\,\_C2}{e^{(\sqrt{\_c_1}\,x)}}$$

З цих прикладів стає зрозумілим вплив необов'язкових параметрів оператора pdsolve на структуру загального розв'язку.

Позначення в Maple деяких математичних функцій наведено у таблиці 6.2.

Таблиця 6.2 – Позначення математичних функцій у Maple

Математична функція	Її позначення в Maple	Математична функція	Її позначення в Maple
$x \cdot y$	x*y	$\operatorname{th} x$	tanh(x)
x^y	x^y	$\operatorname{cth} x$	coth(x)
$\sqrt{x}$	sqrt(x)	$\arcsin x$	arcsin(x)
e^x	exp(x)	$\arccos x$	arccos(x)
$\sin x$	sin(x)	$\operatorname{arctg} x$	arctan(x)
$\cos x$	cos(x)	$\operatorname{arcctg} x$	arccot(x)
$\operatorname{tg} x$	tan(x)	$\operatorname{arcsh} x$	arcsinh(x)
$\sec x$	sec(x)	$\operatorname{arcch} x$	arccosh(x)
$\operatorname{ctg} x$	cot(x)	$\operatorname{arcth} x$	arctanh(x)
$\operatorname{sh} x$	sinh(x)	$\operatorname{arccth} x$	arccoth(x)
$\operatorname{ch} x$	cosh(x)		

Задача 1. Встановити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0. \qquad (6.24)$$

Розв'язання

Визначимо тип ДРЧП

$$A=1,\ B=\cos x,\ C=-\sin^2 x;$$

$\Delta=B^2-AC=\cos^2 x+\sin^2 x=1>0$ – рівняння гіперболічного типу.

Знайдемо характеристики ДРЧП:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{A};$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x-1;$$

```
> dsolve(diff(y(x),x) = cos(x)-1);
```

$$\mathrm{y}(x)=\sin(x)-x+\_C1$$

$$C=y-\sin x+x$$

Отже, $\xi=y-\sin x+x$ – перша характеристика ДРЧП.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{A};$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x+1;$$

```
> dsolve(diff(y(x),x) = cos(x)+1);
```

$$\mathrm{y}(x)=\sin(x)+x+\_C1$$

$$C=y-\sin x-x.$$

Отже, $\eta=y-\sin x-x$ – друга характеристика ДРЧП.

Визначимо усі похідні, які входять до диференціального рівняння (6.24).

Знайдемо усі похідні першого та другого порядків від функції $\xi=y-\sin x+x$

```
> diff(y-sin(x)+x,x);
```

$$-\cos(x)+1$$

```
> diff(y-sin(x)+x,y);
```

$$1$$

```
> diff(y-sin(x)+x,x$2);
```

$$\sin(x)$$

```
> diff(y-sin(x)+x,x,y);
```

$$0$$

```
> diff(y-sin(x)+x,y$2);
```

$$0$$

Отже,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\cos x + 1;\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \sin x;\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Знайдемо усі похідні першого та другого порядків від функції $\eta = y - \sin x - x$

```
> diff(y-sin(x)-x,x);
```

$$-\cos(x) - 1$$

```
> diff(y-sin(x)-x,y);
```

$$1$$

```
> diff(y-sin(x)-x,x$2);
```

$$\sin(x)$$

```
> diff(y-sin(x)-x,x,y);
```

$$0$$

```
> diff(y-sin(x)-x,y$2);
```

$$0$$

Тоді

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\cos x - 1;\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \sin x;\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} = 0.$$

Отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=$$

$$=(1-\cos x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+(\cos x+1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\sin x\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}=(1-\cos x)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-(\cos x+1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння (6.24)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=(1-\cos x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+$$

$$+(\cos x+1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\sin x\frac{\partial u}{\partial \eta}+2\cos x(1-\cos x)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-$$

$$-4\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-2\cos x(\cos x+1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-$$

$$-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}-\sin x\frac{\partial u}{\partial \eta}=-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0.$$

Тоді канонічний вигляд рівняння (6.24)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0. \tag{6.25}$$

Спробуємо знайти канонічний вигляд рівняння (6.24), використавши оператор mapde бібліотеки PDEtools

```
>with(PDEtools):
>mapde(diff(u(x,y),x,x)+2*cos(x)*
diff(u(x,y),x,y)-(sin(x))^2*diff(u(x,y),y,y)-
sin(x)*diff(u(x,y),y)=0,canom);
```

$$\left(-4\left(\frac{\partial^2}{\partial\_\xi 2\ \partial\_\xi 1}\mathrm{u}(\_\xi 1,\_\xi 2)\right)\right) \&\text{where } \{\_\xi 1=-\sin(x)+x+y,\ \_\xi 2=-\sin(x)-x+y\}$$

Отже, згідно із даним способом канонічний вигляд рівняння (6.24):

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\xi_2}=0,$$

який очевидно еквівалентний (6.25).

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} u(0,t)=2; \\ u(4,t)=2t+18; \end{cases}$$

$$\text{(ПУ)}\ u(x,0)=x^2+2.$$

Розв'язання

Маємо однорідне рівняння теплопровідності із ненульовими крайовими умовами. Розв'язок будемо шукати у вигляді (див. п. 4.2.2).

$$u(x,t)=s(x,t)+w(x,t)+g_1(t)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\frac{x}{l} \tag{6.26}$$

Згідно з умовою задачі

$$g_1(t)=2;$$

$$g_2(t)=2t+18;$$

$$\varphi(x)=x^2+2;$$

$$a=3;$$

$$l=4.$$

Враховуючи, що

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)-g_1(0)+\left(g_1(0)-g_2(0)\right)\frac{x}{l}=x^2+2-2+\left(2-0-18\right)\frac{x}{4}=x^2-4x,$$

$s(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$(\text{ДРЧП})\ \frac{\partial s}{\partial t}=9\frac{\partial^2 s}{\partial x^2},(0<x<4,0<t<\infty),$$

$$(\text{КУ})\ \begin{cases} s(0,t)=0, \\ s(l,t)=0, \end{cases}\ 0<t<\infty$$

$$(\text{ПУ})\ s(x,0)=x^2-4x,\ (0<x<4).$$

Відносно функції $s(x,t)$ отримали однорідне рівняння теплопровідності із нульовими крайовими умовами. Згідно з п. 4.2.2 отримаємо

$$s(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^4\left(x^2-4x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)dx.$$

```
> int((x^2-4*x)*sin(Pi*n*x/4),x=0..4);
```

$$\frac{64\,(-2+\pi\,n\sin(\pi\,n)+2\cos(\pi\,n))}{\pi^3\,n^3}$$

Тоді $B_n=\dfrac{-64+32\pi n\sin(\pi n)+64\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3}$.

Враховуючи, що n натуральне число

$$B_n=\frac{64}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0, n=2k, \\ -\dfrac{128}{\pi^3\left(2k-1\right)^3}, n=2k-1.\end{cases}$$

Як результат отримаємо

$$s(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{128}{\pi^3(2k-1)^3}\cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi\left(2k-1\right)}{4}x\right).$$

Знайдемо $f_1\left(x,t\right)$

$$f_1(x,t)=f(x,t)-g_1'(t)+\left(g_1'(t)-g_2'(t)\right)\frac{x}{l}=0-0+\left(0-2\right)\frac{x}{4}=-\frac{x}{2}.$$

Тоді $w(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$(\text{ДРЧП})\ \frac{\partial w}{\partial t}=9\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{x}{2},(0<x<4,0<t<\infty),$$

$$(\text{КУ})\ \begin{cases} w(0,t)=0, \\ w(l,t)=0, \end{cases}\ 0<t<\infty$$

$$(\text{ПУ})\ w(x,0)=0,\ (0<x<4).$$

Розв'язок останньої задачі знаходиться у вигляді:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$h_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=-\frac{1}{4}\int_0^4 x\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)dx,$$

```
> int(x*sin(Pi*n*x/4),x=0..4);
```

$$-\frac{16\,(-\sin(\pi\,n)+\cos(\pi\,n)\,\pi\,n)}{\pi^2\,n^2}$$

$$h_n(t)=\frac{-4\sin(\pi n)+4\pi n\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}=\frac{4(-1)^n}{\pi n};$$

$$T_n(t)=\int_0^t h_n(\tau)e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau=\int_0^t\frac{4(-1)^n}{\pi n}e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2(t-\tau)}d\tau;$$

```
> int(4*(-1)^n/Pi/n*exp(-((3*Pi*n/4)^2)*(t-
tau)),tau=0..t);
```

$$\frac{64}{9}\frac{(-1)^{(1+n)}\left(e^{\left(-\frac{9\,t\,\pi^2\,n^2}{16}\right)}-1\right)}{\pi^3\,n^3}$$

$$T_n(t)=\frac{64(-1)^n}{9\pi^3 n^3}\left(1-e^{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{16}}\right).$$

Отримаємо

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64(-1)^n}{9\pi^3 n^3}\left(1-e^{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{16}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right).$$

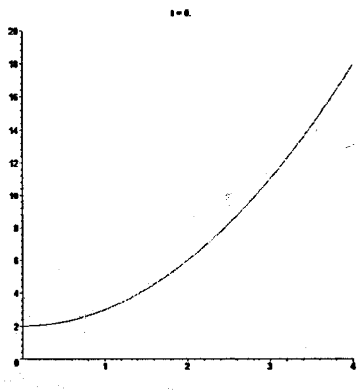
Тоді згідно з (6.26) шукана функція набуде вигляду

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{128}{\pi^3(2k-1)^3}\cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4}x\right)+$$

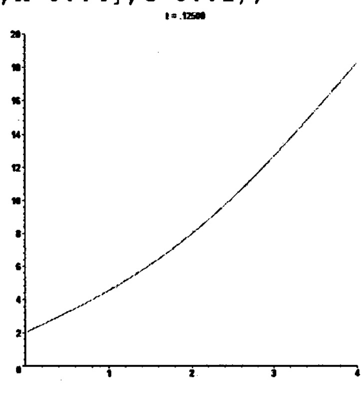
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64(-1)^n}{9\pi^3n^3}\left(1-e^{-\frac{9\pi^2n^2t}{16}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)+2+\frac{x(t+8)}{2}.$$

Розглянемо у динаміці явище поширення тепла у стержні, використавши оператор animate

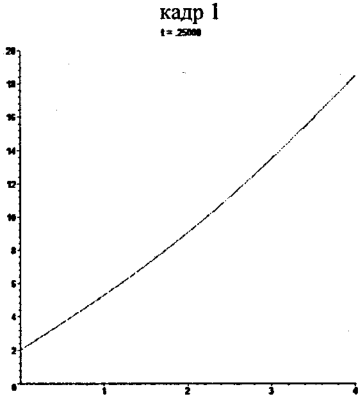
```
> with(plots):
> animate(plot,[sum(-128/(Pi^3*(2*k-1)^3)*
exp(-(3*Pi*(2*k-1)/4)^2*t)*sin(Pi*(2*k-1)/4*x),
k=1..infinity)+sum(64*(-1)^n/(9*Pi^3*n^3)*
(1-exp(-9*Pi^2*n^2*t/16))*sin(Pi*n*x/4),
n=1..infinity)+2+x*(t+8)/2,x=0..4],t=0..1);
```



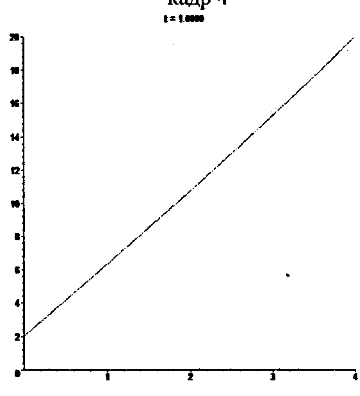
кадр 1



кадр 4



кадр 7



кадр 25

Відповідь:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{128}{\pi^3(2k-1)^3}\cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4}x\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64(-1)^n}{9\pi^3 n^3}\left(1-e^{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{16}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)+2+\frac{x(t+8)}{2}.$$

Задача 3. Встановити тип ДРЧП та звести його до канонічного вигляду

$$3\operatorname{tg}^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\operatorname{tg}x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\operatorname{tg}^3 x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Задача 4. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(0<x<2,t>0\right)$, якщо $u(0,t)=0$, $u(2,t)=8$ $(t>0)$, $u(x,0)=2x^2$ при $0\le x\le 2$.

7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Завдання 1

Визначити тип диференціального рівняння та звести його до канонічного вигляду.

1.1.

а) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{13}{72}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{72}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{2}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{162}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{53}{980}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{10}u=0.$

1.2.

а) $-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{5}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0;$

б) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{9}u=0;$

в) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-28\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-371\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.3.

а) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-189\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{21}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{147}{256}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{5}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+145\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.4.

а) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{9}u=0;$

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+30\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+75\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{8}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{25}{108}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{8}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0.$

1.5.

а) $4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-8\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+16\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-64\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+40\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+232\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}-9\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.6.

а) $-\frac{1}{8}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{3}{80}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{80}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{9}u=0;$

б) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1}{14}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{196}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

в) $7\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-112\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+476\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.7.

а) $-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{31}{45}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{4}{45}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

б) $4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+64\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+256\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-\frac{1}{9}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{18}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\frac{97}{11664}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{10}u=0.$

1.8.

а) $-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1}{81}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{6}u=0;$

б) $-2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-12\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-72\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.9.

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{144}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

в) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+108\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-1086\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.10.

а) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{30}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{450}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0;$

б) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{63}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{567}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

в) $-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{4}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{241}{300}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0.$

1.11.

а) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{24}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{72}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

б) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{5}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{5}u=0;$

в) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-126\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+1017\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.12.

а) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+63\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-90\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-108\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-486\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}-9\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+100\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-680\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.13.

а) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+48\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+108\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+72\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-216\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+28\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+728\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.14.

а) $10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-160\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{400}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-15\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.15.

а) $-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+144\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-56\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-196\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{30}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{17}{4500}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{10}u=0.$

1.16.

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-13\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+42\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+45\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.17.

а) $-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{7}{30}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{5}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{9}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+126\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-567\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+98\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+406\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.18.

а) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{53}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{5}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{6}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{8}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{40}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{6}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+145\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.19.

а) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{64}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}-10\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-\frac{5}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{35}{18}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{8}u=0.$

1.20.

а) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+51\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-216\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+96\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-288\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-\frac{3}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{6}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{15}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0.$

1.21.

а) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{18}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{5}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

б) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{697}{98}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.22.

а) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-35\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+28\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+90\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-225\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{18}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{97}{11664}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0.$

1.23.

а) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{5}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

б) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{200}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{9}u=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{5}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{29}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{10}u=0.$

1.24.

а) $-\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{7}{108}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{108}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

б) $-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{512}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{5}u=0;$

в) $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{85}{1944}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0.$

1.25.

а) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{315}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

б) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+140\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+700\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{109}{900}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0.$

1.26.

а) $6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-18\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{5}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0;$

в) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.27.

а) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+49\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-70\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $\frac{7}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{56}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{112}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0;$

в) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+32\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-130\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.28.

а) $-\frac{6}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{39}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{18}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{10}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-180\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+24\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-292\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.29.

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{69}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{27}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{8}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+48\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+144\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+32\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+64\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.30.

а) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+18\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+48\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}=0;$

б) $-\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{18}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{216}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $\frac{6}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{16}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{50}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{7}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0.$

1.31.

а) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{39}{80}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{9}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{10}{9}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{8}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0;$

б) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+126\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+567\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{65}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{3}{10}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{3}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.32.

а) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+18\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-15\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{320}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0;$

в) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+225\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.33.

а) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+160\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-84\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-252\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{25}{288}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{9}u=0.$

1.34.

а) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{11}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{5}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{6}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{7}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{7}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{21}{128}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{4}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{5}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-40\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+205\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+10\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.35.

а) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+42\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-147\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-425\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.36.

а) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{405}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0;$

б) $-\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{6}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{9}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{7}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{9}u=0;$

в) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+70\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-425\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.37.

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{24}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{1}{24}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0;$

б) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0;$

в) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+126\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+1134\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.38.

а) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{105}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{1}{105}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0;$

б) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-84\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-252\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+104\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.39.

а) $-\frac{8}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{8}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{10}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{4}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}u=0;$

б) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{1}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{7}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{7}u=0;$

в) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{13}{50}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0.$

1.40.

а) $\frac{5}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{155}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{9}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

б) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{1}{256}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+100\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.41.

а) $\frac{9}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{243}{70}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{18}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{6}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

б) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

в) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-28\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-595\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.42.

а) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-15\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-42\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+90\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-405\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-80\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-464\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.43.

а) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+280\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{85}{972}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}u=0.$

1.44.

а) $\frac{3}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{19}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{7}{64}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

б) $-8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+112\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-623\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.45.

а) $\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}u = 0;$

б) $-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{192}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{5}u = 0;$

в) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 41\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0.$

1.46.

а) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{60}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{240}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

б) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 36\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 162\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 10\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

в) $-\frac{9}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{54}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{7362}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{6}{7}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.47.

а) $6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 66\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 108\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 9\frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

б) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{63}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4}u = 0;$

в) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{362}{2025}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{5}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{6}u = 0.$

1.48.

а) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{160}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{160}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{9}u = 0;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 64\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0;$

в) $-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{145}{46656}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{5}u = 0.$

1.49.

а) $-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{126}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{126}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{7}u=0;$

б) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+24\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-72\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-10\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{8}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{401}{75}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{3}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.50.

а) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{108}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{324}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{9}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{15}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{169}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.51.

а) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{70}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{210}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0;$

б) $-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+28\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-116\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.52.

а) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{91}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{42}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{34}{1125}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0.$

1.53.

а) $-10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-40\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+600\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$;

б) $-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{6}u=0$;

в) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{7}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1649}{800}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0$.

1.54.

а) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{3}{32}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{128}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0$;

б) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{8}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{32}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0$;

в) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-65\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}-u=0$.

1.55.

а) $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+80\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+128\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial y}-u=0$;

б) $-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{80}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}u=0$;

в) $\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{49}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.56.

а) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{8}{75}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{75}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{8}u=0$;

б) $-\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{7}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{49}{48}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{8}u=0$;

в) $\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{15}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{5}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0$.

1.57.

а) $\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{64}{243}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{5}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

б) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-108\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-486\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+10\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{10}{729}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0.$

1.58.

а) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{7}u=0;$

б) $-\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{18}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{216}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{10}u=0;$

в) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{58}{3087}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0.$

1.59.

а) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-96\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-9\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{7}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{35}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{2125}{252}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.60.

а) $\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{33}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{7}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{7}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{9}{8}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-56\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-392\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.61.

а) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 120\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 9\frac{\partial u}{\partial x} + 8\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

б) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 7\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

в) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 30\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 125\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6\frac{\partial u}{\partial x} + 9\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.62.

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 11\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 24\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0;$

б) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 54\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 81\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - 7\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

в) $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 112\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 592\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 7\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.63.

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 7\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{9}u = 0;$

в) $-\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{29}{1000}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{5}u = 0.$

1.64.

а) $-\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{7}{108}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{108}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{5}u = 0;$

б) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{14}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{112}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{7}u = 0;$

в) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{13}{400}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4}u = 0.$

1.65.

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{23}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{9}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{9}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{10}u=0;$

б) $-8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+32\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-32\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+10\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-42\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-390\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.66.

а) $\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{19}{108}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{10}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{4}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-\frac{9}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{18}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{45}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+72\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-1044\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.67.

а) $-\frac{3}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{17}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{20}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{10}u=0;$

б) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-18\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{81}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{17}{256}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0.$

1.68.

а) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-18\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-135\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}-10\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-18\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+27\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-28\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+196\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.69.

а) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+54\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+243\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{7}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{49}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{343}{900}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{145}{20736}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0.$

1.70.

а) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+14\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+56\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+32\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{145}{36288}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{7}u=0.$

1.71.

а) $-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{5}{48}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{48}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

б) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-112\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+448\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+u=0;$

в) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+70\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+287\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.72.

а) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{9}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{9}{50}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{4}{5}\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

б) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{9}u=0;$

в) $-\frac{6}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{108}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{2258}{525}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{5}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0.$

1.73.

а) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-98\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+336\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{14}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{49}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{15}{14}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1623}{784}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.74.

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{6}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{10}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{80}{63}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{160}{441}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+81\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.75.

а) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{315}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{315}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{5}u=0;$

б) $-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{5}{6}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{5}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0;$

в) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+60\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-204\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.76.

а) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-18\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-32\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $\frac{5}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{70}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{265}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{5}{9}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{10}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0.$

1.77.

а) $-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+36\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+54\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-10\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{9}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{90}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1989}{343}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{4}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.78.

а) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{31}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{56}{135}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{7}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{10}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{2125}{756}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{6}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.79.

а) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-36\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-405\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{500}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

в) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{447}{1225}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{10}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0.$

1.80.

а) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{72}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{9}u=0;$

б) $-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}-8\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.81.

а) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{4}{27}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{81}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{10}u=0;$

б) $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+128\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+512\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{13}{252}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{7}u=0.$

1.82.

а) $-\frac{5}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{6}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

б) $-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0;$

в) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-136\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.83.

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-25\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{17}{128}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}u=0.$

1.84.

а) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0;$

б) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{36}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0;$

в) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-324\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.85.

а) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{11}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{15}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{7}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0;$

б) $-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-90\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-225\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{74}{3675}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}u=0.$

1.86.

а) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+40\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+100\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

в) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+50\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.87.

а) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{90}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{360}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0;$

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+36\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+108\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

1.88.

а) $\frac{7}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{91}{216}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{35}{72}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{8}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{9}u=0;$

б) $-\frac{8}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{24}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{18}{125}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{7}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{9}u=0;$

в) $-\frac{7}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{14}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{9275}{5184}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0.$

1.89.

а) $-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{64}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{256}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{7}u=0;$

б) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{900}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{10}u=0;$

в) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+70\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+370\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

1.90.

а) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{7}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{128}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0;$

в) $\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{89}{14400}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{5}u=0.$

1.91.

а) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-18\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+40\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

б) $-\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{294}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}u=0;$

в) $-\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{128}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.92.

а) $\frac{3}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{69}{175}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{12}{175}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{10}{9}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+14\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-49\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{13}{300}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{3}u=0.$

1.93.

а) $-\frac{5}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{14}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{25}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{7}u=0;$

б) $-\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{252}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{8}u=0;$

в) $-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+84\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-252\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.94.

а) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-42\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+144\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}+8\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{85}{648}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{6}u=0.$

1.95.

а) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{7}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{40}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}u=0;$

б) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-80\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-320\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial y}-u=0;$

в) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+50\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-205\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.96.

а) $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-34\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-144\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-7\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $-\frac{5}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{5}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{5}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

в) $-10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+100\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-260\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.97.

а) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 128\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$

б) $-\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{9}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{9}{64}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{5}{7}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{9}\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

в) $\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{8}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{8}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{5}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.98.

а) $-5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{45}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{10}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

б) $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{1}{200}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{4}u = 0;$

в) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 72\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0.$

1.99.

а) $-\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{23}{18}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{9}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{9}{5}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{3}u = 0;$

б) $\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{15}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{1}{45}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{6}u = 0;$

в) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 70\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 238\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8\frac{\partial u}{\partial x} - 10\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$

1.100.

а) $-\frac{2}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{17}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

б) $-8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 160\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 800\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

в) $\frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{1}{128}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4}u = 0.$

Завдання 2

Знайти розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності на відрізку $[0;l]$, якщо $u(0;t)=u(l;t)=0$ при $t \geq 0$.

2.1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 56\,x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{8}, \\ 1 - x, & \frac{1}{8} < x \leq 1. \end{cases}$

2.2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 121\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{56}{9}\,x^2, & 0 \leq x \leq \frac{9}{8}, \\ 9 - x, & \frac{9}{8} < x \leq 9. \end{cases}$

2.3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{20}{11}\,x^2, & 0 \leq x \leq \frac{11}{5}, \\ 11 - x, & \frac{11}{5} < x \leq 11. \end{cases}$

2.4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 6\,x^2, & 0 \leq x \leq \frac{5}{6}, \\ 5 - x, & \frac{5}{6} < x \leq 5. \end{cases}$

2.5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 12\,x^2, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 6 - x, & \frac{2}{3} < x \leq 6. \end{cases}$

2.6. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 3\,x^2, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 2 - x, & \frac{2}{3} < x \leq 2. \end{cases}$

2.7. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{6}{5}\,x^2, & 0 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 10 - x, & \frac{5}{2} < x \leq 10. \end{cases}$

2.8. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{90}{11}x^2, & 0\le x\le \dfrac{11}{10}, \\ 11 - x, & \dfrac{11}{10}<x\le 11. \end{cases}$

2.9. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 55\,x^2, & 0\le x\le \dfrac{2}{11}, \\ 2 - x, & \dfrac{2}{11}<x\le 2. \end{cases}$

2.10. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{45}{2}x^2, & 0\le x\le \dfrac{2}{5}, \\ 4 - x, & \dfrac{2}{5}<x\le 4. \end{cases}$

2.11. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{30}{7}x^2, & 0\le x\le \dfrac{7}{6}, \\ 7 - x, & \dfrac{7}{6}<x\le 7. \end{cases}$

2.12. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 6\,x^2, & 0\le x\le 1, \\ 7 - x, & 1<x\le 7. \end{cases}$

2.13. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 6\,x^2, & 0\le x\le 1, \\ 7 - x, & 1<x\le 7. \end{cases}$

2.14. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{28}{5}x^2, & 0\le x\le \dfrac{5}{4}, \\ 10 - x, & \dfrac{5}{4}<x\le 10. \end{cases}$

2.15. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 121\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 12\,x^2, & 0\le x\le \dfrac{2}{3}, \\ 6 - x, & \dfrac{2}{3}<x\le 6. \end{cases}$

2.16. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 2\,x^2, & 0\le x\le \dfrac{3}{2}, \\ 6 - x, & \dfrac{3}{2}<x\le 6. \end{cases}$

2.17. $\frac{\partial u}{\partial t} = 81\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{4}{3}\,x^2,\ 0\le x\le \frac{9}{4}, \\ 9 - x,\ \frac{9}{4}< x\le 9. \end{cases}$

2.18. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{110}{9}\,x^2,\ 0\le x\le \frac{9}{11}, \\ 9 - x,\ \frac{9}{11}< x\le 9. \end{cases}$

2.19. $\frac{\partial u}{\partial t} = 100\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 36\,x^2,\ 0\le x\le \frac{2}{9}, \\ 2 - x,\ \frac{2}{9}< x\le 2. \end{cases}$

2.20. $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{28}{5}\,x^2,\ 0\le x\le \frac{5}{4}, \\ 10 - x,\ \frac{5}{4}< x\le 10. \end{cases}$

2.21. $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{90}{11}\,x^2,\ 0\le x\le \frac{11}{10}, \\ 11 - x,\ \frac{11}{10}< x\le 11. \end{cases}$

2.22. $\frac{\partial u}{\partial t} = 100\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 9\,x^2,\ 0\le x\le 1, \\ 10 - x,\ 1< x\le 10. \end{cases}$

2.23. $\frac{\partial u}{\partial t} = 100\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 14\,x^2,\ 0\le x\le \frac{1}{2}, \\ 4 - x,\ \frac{1}{2}< x\le 4. \end{cases}$

2.24. $\frac{\partial u}{\partial t} = 36\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} x^2,\ 0\le x\le 2, \\ 6 - x,\ 2< x\le 6. \end{cases}$

2.25. $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 9\,x^2,\ 0\le x\le \frac{8}{9}, \\ 8 - x,\ \frac{8}{9}< x\le 8. \end{cases}$

2.26. $\frac{\partial u}{\partial t} = 121\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 8\,x^2, & 0\le x\le\frac{7}{8}, \\ 7 - x, & \frac{7}{8}<x\le 7. \end{cases}$

2.27. $\frac{\partial u}{\partial t} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{56}{3}\,x^2, & 0\le x\le\frac{3}{8}, \\ 3 - x, & \frac{3}{8}<x\le 3. \end{cases}$

2.28. $\frac{\partial u}{\partial t} = 121\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{45}{2}\,x^2, & 0\le x\le\frac{2}{5}, \\ 4 - x, & \frac{2}{5}<x\le 4. \end{cases}$

2.29. $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{12}{7}\,x^2, & 0\le x\le\frac{7}{4}, \\ 7 - x, & \frac{7}{4}<x\le 7. \end{cases}$

2.30. $\frac{\partial u}{\partial t} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 18\,x^2, & 0\le x\le\frac{4}{9}, \\ 4 - x, & \frac{4}{9}<x\le 4. \end{cases}$

2.31. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 10\,x^2, & 0\le x\le\frac{2}{5}, \\ 2 - x, & \frac{2}{5}<x\le 2. \end{cases}$

2.32. $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 7\,x^2, & 0\le x\le\frac{6}{7}, \\ 6 - x, & \frac{6}{7}<x\le 6. \end{cases}$

2.33. $\frac{\partial u}{\partial t} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{1}{4}\,x^2, & 0\le x\le 4, \\ 8 - x, & 4<x\le 8. \end{cases}$

2.34. $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 9\,x^2, & 0\le x\le 1, \\ 10 - x, & 1<x\le 10. \end{cases}$

2.35. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{15}{4}x^2, & 0\le x\le\dfrac{4}{3}, \\ 8-x, & \dfrac{4}{3}<x\le 8. \end{cases}$

2.36. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 18x^2, & 0\le x\le\dfrac{1}{2}, \\ 5-x, & \dfrac{1}{2}<x\le 5. \end{cases}$

2.37. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}x^2, & 0\le x\le\dfrac{3}{2}, \\ 3-x, & \dfrac{3}{2}<x\le 3. \end{cases}$

2.38. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 2, \\ 6-x, & 2<x\le 6. \end{cases}$

2.39. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}x^2, & 0\le x\le 3, \\ 9-x, & 3<x\le 9. \end{cases}$

2.40. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{12}{7}x^2, & 0\le x\le\dfrac{7}{4}, \\ 7-x, & \dfrac{7}{4}<x\le 7. \end{cases}$

2.41. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{30}{7}x^2, & 0\le x\le\dfrac{7}{6}, \\ 7-x, & \dfrac{7}{6}<x\le 7. \end{cases}$

2.42. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{56}{3}x^2, & 0\le x\le\dfrac{3}{8}, \\ 3-x, & \dfrac{3}{8}<x\le 3. \end{cases}$

2.43. $\frac{\partial u}{\partial t} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{42}{5}x^2, & 0\le x\le\frac{5}{7},\\ 5-x, & \frac{5}{7}<x\le 5.\end{cases}$

2.44. $\frac{\partial u}{\partial t} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}24x^2, & 0\le x\le\frac{1}{3},\\ 3-x, & \frac{1}{3}<x\le 3.\end{cases}$

2.45. $\frac{\partial u}{\partial t} = 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}8x^2, & 0\le x\le\frac{7}{8},\\ 7-x, & \frac{7}{8}<x\le 7.\end{cases}$

2.46. $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{90}{7}x^2, & 0\le x\le\frac{7}{10},\\ 7-x, & \frac{7}{10}<x\le 7.\end{cases}$

2.47. $\frac{\partial u}{\partial t} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{30}{11}x^2, & 0\le x\le\frac{11}{6},\\ 11-x, & \frac{11}{6}<x\le 11.\end{cases}$

2.48. $\frac{\partial u}{\partial t} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}4x^2, & 0\le x\le\frac{3}{4},\\ 3-x, & \frac{3}{4}<x\le 3.\end{cases}$

2.49. $\frac{\partial u}{\partial t} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}10x^2, & 0\le x\le\frac{2}{5},\\ 2-x, & \frac{2}{5}<x\le 2.\end{cases}$

2.50. $\frac{\partial u}{\partial t} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}8x^2, & 0\le x\le\frac{7}{8},\\ 7-x, & \frac{7}{8}<x\le 7.\end{cases}$

2.51. $\frac{\partial u}{\partial t} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 21x^2, & 0\le x\le \frac{2}{7}, \\ 2-x, & \frac{2}{7}<x\le 2. \end{cases}$

2.52. $\frac{\partial u}{\partial t} = 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 15x^2, & 0\le x\le \frac{1}{3}, \\ 2-x, & \frac{1}{3}<x\le 2. \end{cases}$

2.53. $\frac{\partial u}{\partial t} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 7x^2, & 0\le x\le \frac{6}{7}, \\ 6-x, & \frac{6}{7}<x\le 6. \end{cases}$

2.54. $\frac{\partial u}{\partial t} = 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2. \end{cases}$

2.55. $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 12x^2, & 0\le x\le \frac{2}{3}, \\ 6-x, & \frac{2}{3}<x\le 6. \end{cases}$

2.56. $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 5x^2, & 0\le x\le 1, \\ 6-x, & 1<x\le 6. \end{cases}$

2.57. $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 6x^2, & 0\le x\le \frac{1}{2}, \\ 2-x, & \frac{1}{2}<x\le 2. \end{cases}$

2.58. $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{6}{5}x^2, & 0\le x\le \frac{5}{3}, \\ 5-x, & \frac{5}{3}<x\le 5. \end{cases}$

2.59. $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{28}{3}x^2, & 0\le x\le \frac{3}{4}, \\ 6-x, & \frac{3}{4}<x\le 6. \end{cases}$

2.60. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{56}{5}x^2, & 0\le x\le\frac{5}{8},\\ 5-x, & \frac{5}{8}<x\le 5.\end{cases}$

2.61. $\frac{\partial u}{\partial t}=81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2, & 0\le x\le 4,\\ 8-x, & 4<x\le 8.\end{cases}$

2.62. $\frac{\partial u}{\partial t}=64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}10x^2, & 0\le x\le\frac{2}{5},\\ 2-x, & \frac{2}{5}<x\le 2.\end{cases}$

2.63. $\frac{\partial u}{\partial t}=81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}14x^2, & 0\le x\le\frac{3}{7},\\ 3-x, & \frac{3}{7}<x\le 3.\end{cases}$

2.64. $\frac{\partial u}{\partial t}=100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{56}{9}x^2, & 0\le x\le\frac{9}{8},\\ 9-x, & \frac{9}{8}<x\le 9.\end{cases}$

2.65. $\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{15}{2}x^2, & 0\le x\le\frac{2}{3},\\ 4-x, & \frac{2}{3}<x\le 4.\end{cases}$

2.66. $\frac{\partial u}{\partial t}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{21}{5}x^2, & 0\le x\le\frac{10}{7},\\ 10-x, & \frac{10}{7}<x\le 10.\end{cases}$

2.67. $\frac{\partial u}{\partial t}=81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{12}{5}x^2, & 0\le x\le\frac{5}{4},\\ 5-x, & \frac{5}{4}<x\le 5.\end{cases}$

2.68. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}5\,x^2,\ 0\le x\le\frac{4}{5},\\ 4-x,\ \frac{4}{5}<x\le 4.\end{cases}$

2.69. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}42\,x^2,\ 0\le x\le\frac{1}{7},\\ 1-x,\ \frac{1}{7}<x\le 1.\end{cases}$

2.70. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{72}{11}\,x^2,\ 0\le x\le\frac{11}{9},\\ 11-x,\ \frac{11}{9}<x\le 11.\end{cases}$

2.71. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{110}{9}\,x^2,\ 0\le x\le\frac{9}{11},\\ 9-x,\ \frac{9}{11}<x\le 9.\end{cases}$

2.72. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}15\,x^2,\ 0\le x\le\frac{3}{5},\\ 6-x,\ \frac{3}{5}<x\le 6.\end{cases}$

2.73. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}6\,x^2,\ 0\le x\le\frac{5}{6},\\ 5-x,\ \frac{5}{6}<x\le 5.\end{cases}$

2.74. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}2\,x^2,\ 0\le x\le\frac{3}{2},\\ 6-x,\ \frac{3}{2}<x\le 6.\end{cases}$

2.75. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{90}{7}\,x^2,\ 0\le x\le\frac{7}{10},\\ 7-x,\ \frac{7}{10}<x\le 7.\end{cases}$

2.76. $\frac{\partial u}{\partial t} = 49 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 14\,x^2, & 0 \le x \le \frac{3}{7}, \\ 3 - x, & \frac{3}{7} < x \le 3. \end{cases}$

2.77. $\frac{\partial u}{\partial t} = 64 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 14\,x^2, & 0 \le x \le \frac{3}{7}, \\ 3 - x, & \frac{3}{7} < x \le 3. \end{cases}$

2.78. $\frac{\partial u}{\partial t} = 64 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{20}{11}\,x^2, & 0 \le x \le \frac{11}{5}, \\ 11 - x, & \frac{11}{5} < x \le 11. \end{cases}$

2.79. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 28\,x^2, & 0 \le x \le \frac{1}{4}, \\ 2 - x, & \frac{1}{4} < x \le 2. \end{cases}$

2.80. $\frac{\partial u}{\partial t} = 81 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,x^2, & 0 \le x \le 4, \\ 8 - x, & 4 < x \le 8. \end{cases}$

2.81. $\frac{\partial u}{\partial t} = 49 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 14\,x^2, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 4 - x, & \frac{1}{2} < x \le 4. \end{cases}$

2.82. $\frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 18\,x^2, & 0 \le x \le \frac{4}{9}, \\ 4 - x, & \frac{4}{9} < x \le 4. \end{cases}$

2.83. $\frac{\partial u}{\partial t} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} 10\,x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 11 - x, & 1 < x \le 11. \end{cases}$

2.84. $\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{3}{2}\,x^2, & 0 \le x \le \frac{4}{3}, \\ 4 - x, & \frac{4}{3} < x \le 4. \end{cases}$

2.85. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 64\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 30\,x^2, & 0 \le x \le \frac{1}{6}, \\ 1 - x, & \frac{1}{6} < x \le 1. \end{cases}$

2.86. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{72}{5}\,x^2, & 0 \le x \le \frac{5}{9}, \\ 5 - x, & \frac{5}{9} < x \le 5. \end{cases}$

2.87. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 9\,x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 10 - x, & 1 < x \le 10. \end{cases}$

2.88. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{45}{4}\,x^2, & 0 \le x \le \frac{4}{5}, \\ 8 - x, & \frac{4}{5} < x \le 8. \end{cases}$

2.89. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{20}{9}\,x^2, & 0 \le x \le \frac{9}{5}, \\ 9 - x, & \frac{9}{5} < x \le 9. \end{cases}$

2.90. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{20}{7}\,x^2, & 0 \le x \le \frac{7}{5}, \\ 7 - x, & \frac{7}{5} < x \le 7. \end{cases}$

2.91. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 36\,x^2, & 0 \le x \le \frac{2}{9}, \\ 2 - x, & \frac{2}{9} < x \le 2. \end{cases}$

2.92. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 9\,x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 10 - x, & 1 < x \le 10. \end{cases}$

2.93. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 64\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 14\,x^2, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 4 - x, & \frac{1}{2} < x \le 4. \end{cases}$

2.94. $\frac{\partial u}{\partial t} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} x^2, 0 \le x \le 2, \\ 6 - x, 2 < x \le 6. \end{cases}$

2.95. $\frac{\partial u}{\partial t} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{6}{11} x^2, 0 \le x \le \frac{11}{3}, \\ 11 - x, \frac{11}{3} < x \le 11. \end{cases}$

2.96. $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{21}{5} x^2, 0 \le x \le \frac{10}{7}, \\ 10 - x, \frac{10}{7} < x \le 10. \end{cases}$

2.97. $\frac{\partial u}{\partial t} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{2}{7} x^2, 0 \le x \le \frac{7}{2}, \\ 7 - x, \frac{7}{2} < x \le 7. \end{cases}$

2.98. $\frac{\partial u}{\partial t} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{56}{9} x^2, 0 \le x \le \frac{9}{8}, \\ 9 - x, \frac{9}{8} < x \le 9. \end{cases}$

2.99. $\frac{\partial u}{\partial t} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} \frac{72}{11} x^2, 0 \le x \le \frac{11}{9}, \\ 11 - x, \frac{11}{9} < x \le 11. \end{cases}$

2.100. $\frac{\partial u}{\partial t} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases} 18 x^2, 0 \le x \le \frac{4}{9}, \\ 4 - x, \frac{4}{9} < x \le 4. \end{cases}$

Завдання 3

Розв'язати крайову задачу для хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо $u(0,t)=u(l,t)=0$, $u(x,0)=f(x)$, $u_t'(x;0)=g(x)$ $(0\le x\le l)$.

3.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= 0,4x(x-6) ; u′(x,0)=-10x+7.

3.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= -0,9x(x-10) ; u′(x,0)=-2x+10.

3.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= -0,5x(x-4) ; u′(x,0)=7x-5.

3.4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= -0,3x(x-4) ; u′(x,0)=7x+4.

3.5. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= x(x-4) ; u′(x,0)=-2x+2.

3.6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= 0,2x(x-5) ; u′(x,0)=9x-3.

3.7. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= 0,9x(x-6) ; u′(x,0)=-2x+3.

3.8. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= -0,5x(x-9) ; u′(x,0)=3x-9.

3.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= 0,7x(x-5) ; u′(x,0)=3x-5.

3.10. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=8 ; u(x,0)= -0,4x(x-8) ; u′(x,0)=10x+8.

3.11. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=2 ; u(x,0)= 0,5x(x-2) ; u′(x,0)=6x+5.

3.12. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= 0,2x(x-5) ; u′(x,0)=-8x-10.

3.13. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=2 ; u(x,0)= -0,3x(x-2) ; u′(x,0)=-2x-9.

3.14. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=1 ; u(x,0)= 0,5x(x-1) ; u′(x,0)=-8x-4.

3.15. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=3 ; u(x,0)= -0,6x(x-3) ; u′(x,0)=5x+7.

3.16. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= 0,9x(x-10) ; u′(x,0)=x-8.

3.17. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= -0,3x(x-6) ; u′(x,0)=-3x+7.

3.18. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= -0,4x(x-4) ; u′(x,0)=-3x-2.

3.19. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= -0,5x(x-5) ; u′(x,0)=x-1.

3.20. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= 0,7x(x-10) ; u′(x,0)=9x+6.

3.21. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=1 ; u(x,0)= 0,2x(x-1) ; u′(x,0)=-9x-6.

3.22. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=1 ; u(x,0)= -0,7x(x-1) ; u′(x,0)=4x+10.

3.23. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= -x(x-9) ; u′(x,0)=-9x+1.

3.24. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=1 ; u(x,0)= 0,7x(x-1) ; u′(x,0)=5x+3.

3.25. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=7 ; u(x,0)= -0,8x(x-7) ; u′(x,0)=-10x.

3.26. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=7 ; u(x,0)= -0,1x(x-7) ; u′(x,0)=5x+7.

3.27. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= 0,7x(x-6) ; u′(x,0)=-8x+10.

3.28. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= -0,1x(x-9) ; u′(x,0)=4x+2.

3.29. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=2 ; u(x,0)= -0,2x(x-2) ; u′(x,0)=5x-10.

3.30. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= -0,5x(x-4) ; u′(x,0)=10x-1.

3.31. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=3 ; u(x,0)= -0,7x(x-3) ; u′(x,0)=3x+2.

3.32. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= -0,1x(x-10) ; u′(x,0)=8x-1.

3.33. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=2 ; u(x,0)= -0,6x(x-2) ; u′(x,0)=-6x+4.

3.34. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=2 ; u(x,0)= -0,2x(x-2) ; u′(x,0)=7x+3.

3.35. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=7 ; u(x,0)= 0,9x(x-7) ; u′(x,0)=-9x+3.

3.36. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= -0,1x(x-9) ; u′(x,0)=-3x-1.

3.37. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=3 ; u(x,0)= -0,6x(x-3) ; u′(x,0)=7x+10.

3.38. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= 0,5x(x-10) ; u′(x,0)=4x+2.

3.39. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= 0,7x(x-10) ; u′(x,0)=-9x+7.

3.40. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= x(x-4) ; u′(x,0)=-5x+5.

3.41. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= 0,7x(x-9) ; u′(x,0)=6x+1.

3.42. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= 0,7x(x-6) ; u′(x,0)=7x-9.

3.43. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=8 ; u(x,0)= -0,5x(x-8) ; u'(x,0)=8x+4.

3.44. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= x(x-4) ; u'(x,0)=-3x+1.

3.45. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= 0,6x(x-4) ; u'(x,0)=5x-5.

3.46. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= 0,6x(x-5) ; u'(x,0)=7x-3.

3.47. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=8 ; u(x,0)= 0,9x(x-8) ; u'(x,0)=-8x-9.

3.48. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= -0,3x(x-4) ; u'(x,0)=10x+1.

3.49. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=8 ; u(x,0)= 0,8x(x-8) ; u'(x,0)=10x-7.

3.50. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=8 ; u(x,0)= 0,3x(x-8) ; u'(x,0)=-8x+6.

3.51. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=7 ; u(x,0)= -x(x-7) ; u'(x,0)=10x-3.

3.52. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=1 ; u(x,0)= 0,6x(x-1) ; u'(x,0)=-2x-1.

3.53. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= -0,7x(x-5) ; u'(x,0)=-2x+6.

3.54. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=2 ; u(x,0)= 0,8x(x-2) ; u'(x,0)=-4x-6.

3.55. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= 0,4x(x-6) ; u'(x,0)=-x+1.

3.56. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=7 ; u(x,0)= 0,2x(x-7) ; u'(x,0)=9x-3.

3.57. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=8 ; u(x,0)= 0,5x(x-8) ; u′(x,0)=-8x-10.

3.58. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= -0,8x(x-6) ; u′(x,0)=4x-8.

3.59. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= -0,6x(x-9) ; u′(x,0)=9x+7.

3.60. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=7 ; u(x,0)= 0,2x(x-7) ; u′(x,0)=x+9.

3.61. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= -x(x-4) ; u′(x,0)=3x-4.

3.62. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= 0,5x(x-9) ; u′(x,0)=-6x+6.

3.63. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= 0,8x(x-6) ; u′(x,0)=-x+8.

3.64. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= x(x-4) ; u′(x,0)=-6x-9.

3.65. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= 0,8x(x-6) ; u′(x,0)=-6x-1.

3.66. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=1 ; u(x,0)= -0,5x(x-1) ; u′(x,0)=-4x+4.

3.67. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=8 ; u(x,0)= 0,7x(x-8) ; u′(x,0)=-x-4.

3.68. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= 0,4x(x-4) ; u′(x,0)=x+7.

3.69. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=2 ; u(x,0)= 0,4x(x-2) ; u′(x,0)=-4x+4.

3.70. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=7 ; u(x,0)= 0,5x(x-7) ; u′(x,0)=-x-9.

3.71. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= -0,9x(x-5) ; u′(x,0)=-8x-7.

3.72. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= -0,5x(x-9) ; u′(x,0)=x+7.

3.73. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=3 ; u(x,0)= -0,4x(x-3) ; u′(x,0)=-10x-8.

3.74. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= -0,3x(x-6) ; u′(x,0)=-2x+6.

3.75. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= 0,1x(x-9) ; u′(x,0)=8x.

3.76. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= x(x-4) ; u′(x,0)=-2x+10.

3.77. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=7 ; u(x,0)= -0,5x(x-7) ; u′(x,0)=x+2.

3.78. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= -x(x-5) ; u′(x,0)=-8x+5.

3.79. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= 0,7x(x-10) ; u′(x,0)=-8x+6.

3.80. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= 0,3x(x-9) ; u′(x,0)=10x-7.

3.81. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=6 ; u(x,0)= 0,9x(x-6) ; u′(x,0)=-4x+8.

3.82. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= 0,1x(x-10) ; u′(x,0)=2x-5.

3.83. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=1 ; u(x,0)= 0,3x(x-1) ; u′(x,0)=-7x-2.

3.84. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= 0,1x(x-5) ; u′(x,0)=6x-1.

3.85. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= -0,4x(x-10) ; u′(x,0)=5x+7.

3.86. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=3 ; u(x,0)= 0,2x(x-3) ; u′(x,0)=-10x+2.

3.87. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= -0,3x(x-4) ; u′(x,0)=3x+10.

3.88. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= 0,3x(x-4) ; u′(x,0)=-9.

3.89. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= 0,3x(x-10) ; u′(x,0)=7x+1.

3.90. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= -0,5x(x-9) ; u′(x,0)=-x+3.

3.91. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=5 ; u(x,0)= -0,3x(x-5) ; u′(x,0)=-3x-2.

3.92. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=9 ; u(x,0)= 0,9x(x-9) ; u′(x,0)=6x-9.

3.93. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= -x(x-4) ; u′(x,0)=8x+8.

3.94. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=8 ; u(x,0)= -0,1x(x-8) ; u′(x,0)=-3x+3.

3.95. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=4 ; u(x,0)= 0,3x(x-4) ; u′(x,0)=-8x.

3.96. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=7 ; u(x,0)= 0,4x(x-7) ; u′(x,0)=-x+5.

3.97. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=10 ; u(x,0)= 0,3x(x-10) ; u′(x,0)=10x+3.

3.98. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=8 ; u(x,0)= 0,5x(x-8) ; u′(x,0)=-6x+6.

3.99. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=1 ; u(x,0)= 0,5x(x-1) ; u′(x,0)=7x+10.

3.100. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; l=1 ; u(x,0)= 0,4x(x-1) ; u′(x,0)=6x-8.

Завдання 4

Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в крузі при заданих крайових умовах.

4.1. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=6\varphi-2$;
4.2. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=9\varphi^2-2\varphi-10$;
4.3. $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi)=6\varphi^2-2\varphi+1$;
4.4. $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi)=-5\varphi^2-3\varphi+8$;
4.5. $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi)=10\varphi^2-5\varphi-7$;
4.6. $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi)=10\varphi^2-6\varphi+1$;
4.7. $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi)=-4\varphi^2-7\varphi-6$;
4.8. $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi)=-5\varphi^2-6\varphi+3$;
4.9. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=7\varphi^2-8$;
4.10. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=-6\varphi^2-3\varphi+1$;
4.11. $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi)=8\varphi^2+2\varphi-2$;
4.12. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=2\varphi^2-10\varphi+9$;
4.13. $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi)=5\varphi^2-3\varphi+7$;
4.14. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=-8\varphi^2-5\varphi+10$;
4.15. $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi)=8\varphi^2+4\varphi-4$;
4.16. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=-4\varphi^2-2\varphi-6$;
4.17. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi)=3\varphi^2+9\varphi-10$;
4.18. $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi)=\varphi^2+\varphi+6$;
4.19. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=7\varphi^2+\varphi-5$;
4.20. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=8\varphi^2-9\varphi-7$;
4.21. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi)=8\varphi^2+4$;
4.22. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=-\varphi^2-9\varphi-3$;
4.23. $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi)=3\varphi^2+5\varphi+10$;
4.24. $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi)=9\varphi^2-10\varphi+5$;
4.25. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=6\varphi^2+4\varphi-8$;
4.26. $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi)=-7\varphi^2-10\varphi-5$;
4.27. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi)=-3\varphi^2+9\varphi-6$;
4.28. $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi)=-2\varphi^2+\varphi-7$;
4.29. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=-6\varphi^2-3\varphi+6$;
4.30. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=-6\varphi^2+6\varphi-4$;
4.31. $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi)=-2\varphi^2-10\varphi-6$;
4.32. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi)=-\varphi^2-6\varphi+6$;
4.33. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi)=-10\varphi^2-1$;
4.34. $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi)=-3\varphi^2-10\varphi$;
4.35. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi)=-4\varphi^2-4\varphi-4$;
4.36. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi)=5\varphi-2$;
4.37. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=-8$;
4.38. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=3\varphi^2+2\varphi-6$;
4.39. $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi)=10\varphi^2-7\varphi-8$;
4.40. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=-7\varphi^2-7\varphi+8$;
4.41. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi)=-8\varphi^2+9\varphi-10$;
4.42. $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi)=-2\varphi^2+4\varphi-10$;
4.43. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi)=-\varphi^2-2\varphi+1$;
4.44. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=-2\varphi^2+5\varphi-1$;
4.45. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi)=\varphi^2+3\varphi+5$;
4.46. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=-7\varphi^2+3\varphi+5$;
4.47. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=-8\varphi^2+8\varphi+4$;
4.48. $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi)=-4\varphi^2+10\varphi+1$;
4.49. $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi)=7\varphi^2+4\varphi+9$;
4.50. $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi)=3\varphi^2-8\varphi-2$;
4.51. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=\varphi^2+7\varphi+9$;
4.52. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi)=-3\varphi^2+4\varphi+8$;
4.53. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi)=-8\varphi^2-\varphi+3$;
4.54. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=9\varphi^2-10\varphi-3$;
4.55. $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi)=3\varphi^2+5\varphi+9$;
4.56. $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi)=-6\varphi^2+7\varphi-3$;
4.57. $0 \le r < 4$; $u(4;\varphi)=10\varphi^2-\varphi-8$;
4.58. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=-5\varphi^2+\varphi-8$;
4.59. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=-2\varphi^2-4\varphi+1$;
4.60. $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi)=5\varphi^2+5\varphi-7$;
4.61. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi)=-10\varphi^2+\varphi+8$;
4.62. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=-5\varphi^2+10\varphi$;
4.63. $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi)=-5\varphi^2-\varphi+8$;
4.64. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi)=-8\varphi^2+9\varphi+5$;
4.65. $0 \le r < 2$; $u(2;\varphi)=-4\varphi^2+7\varphi+4$;
4.66. $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi)=3\varphi^2-9\varphi+5$;
4.67. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=6\varphi^2-\varphi-2$;
4.68. $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi)=5\varphi^2-8\varphi+7$;
4.69. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=-10\varphi^2+2\varphi$;
4.70. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi)=-\varphi^2+3\varphi+10$;
4.71. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=7\varphi^2+4\varphi+3$;
4.72. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=-4\varphi^2-3\varphi-4$;
4.73. $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi)=4\varphi^2+3$;
4.74. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=10\varphi^2+8\varphi+6$;
4.75. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi)=-\varphi^2+8\varphi$;
4.76. $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi)=4\varphi^2+9\varphi-2$;
4.77. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=9\varphi^2-5\varphi+1$;
4.78. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi)=6\varphi^2-7\varphi-10$;
4.79. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi)=-9\varphi^2-10\varphi-8$;
4.80. $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi)=-9\varphi^2-3\varphi+2$;

4.81. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = 6\varphi^2 - 9\varphi - 10$;
4.82. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = 2\varphi^2 - 8\varphi + 6$;
4.83. $0 \le r < 9$; $u(9;\varphi) = -5\varphi^2 - 4\varphi + 9$;
4.84. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = 8\varphi^2 - 3\varphi$;
4.85. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = -\varphi^2 - 6\varphi - 10$;
4.86. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = 3\varphi - 4$;
4.87. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = 6\varphi^2 - 6\varphi - 1$;
4.88. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = 4\varphi^2 + 10\varphi - 9$;
4.89. $0 \le r < 8$; $u(8;\varphi) = -\varphi^2 - 4\varphi + 7$;
4.90. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = 6\varphi^2 + 9\varphi - 5$;
4.91. $0 \le r < 6$; $u(6;\varphi) = 8\varphi^2 - 2\varphi + 4$;
4.92. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = \varphi^2 + 1$;
4.93. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = -\varphi^2 - 8\varphi + 10$;
4.94. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = 9\varphi^2 - 3\varphi - 3$;
4.95. $0 \le r < 3$; $u(3;\varphi) = 6\varphi^2 + 8\varphi + 3$;
4.96. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = -\varphi - 3$;
4.97. $0 \le r < 1$; $u(1;\varphi) = -\varphi^2 + 5\varphi - 8$;
4.98. $0 \le r < 7$; $u(7;\varphi) = 6\varphi^2 + 5$;
4.99. $0 \le r < 5$; $u(5;\varphi) = -7\varphi^2 + 6\varphi + 6$;
4.100. $0 \le r < 10$; $u(10;\varphi) = 10\varphi^2 + \varphi - 8$.

Завдання 5

Методом сіток знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданих крайових умовах $u(0;t) = g_1(t)$, $u(l;t) = g_2(t)$ та початковій умові $u(x;0) = f(x)$ для $x \in [0;0,6]$. Розв'язок виконувати при $h = 0{,}1$ для $t \in [0;0,01]$ з чотирма десятковими знаками при $\sigma = \frac{1}{6}$.

5.1. u(x,0)=9 sin(-4x+0,71)-0,84 ; u(0,t)=-t+5,027 ;
u(0.6,t)=-3t-9,776.

5.2. u(x,0)=9 sin(-9x+0,35)-0,95 ; u(0,t)=4t+2,136 ;
u(0.6,t)=t+7,542.

5.3. u(x,0)=4 sin(-6x-0,56)+0,49 ; u(0,t)=-4t-1,635 ;
u(0.6,t)=3t+3,895.

5.4. u(x,0)=4 x(4x-0,26)-0,81 ; u(0,t)=-4t-0,81 ;
u(0.6,t)=5t+4,326.

5.5. u(x,0)=7 x(10x-0,09)+0,06 ; u(0,t)=2t+0,06 ;
u(0.6,t)=-2t+24,882.

5.6. u(x,0)=2 sin(4x+0,73)-0,48 ; u(0,t)=-4t+0,854 ;
u(0.6,t)=t-0,457.

5.7. u(x,0)=7 cos(-3x-0,59)+0,04 ; u(0,t)=5t+5,857 ;
u(0.6,t)=t-5,074.

5.8. $u(x,0)=6\cos(4x-0,85)-0,94$; $u(0,t)=t+3,02$;
$u(0.6,t)=3t-0,815$.

5.9. $u(x,0)=3\cos(x-0,47)+0,79$; $u(0,t)=-3t+3,465$;
$u(0.6,t)=5t+3,465$.

5.10. $u(x,0)=\cos(2x+0,32)+0,66$; $u(0,t)=-5t+1,609$;
$u(0.6,t)=-5t+0,711$.

5.11. $u(x,0)=8\cos(10x+0,24)-0,38$; $u(0,t)=-5t+7,391$;
$u(0.6,t)=-2t+7,613$.

5.12. $u(x,0)=5\sin(3x-0,28)-0,33$; $u(0,t)=3t-1,712$;
$u(0.6,t)=t+4,664$.

5.13. $u(x,0)=7x(-6x+0,23)-0,56$; $u(0,t)=2t-0,56$;
$u(0.6,t)=t-14,714$.

5.14. $u(x,0)=9\ln(7x+0,26)-0,04$; $u(0,t)=3t-12,164$;
$u(0.6,t)=4t+13,416$.

5.15. $u(x,0)=10\sin(6x-0,21)-0,34$; $u(0,t)=5t-2,425$;
$u(0.6,t)=t-2,799$.

5.16. $u(x,0)=2\cos(8x+0,42)-0,6$; $u(0,t)=-t+1,226$;
$u(0.6,t)=t+0,372$.

5.17. $u(x,0)=6x(10x-0,79)-0,59$; $u(0,t)=-2t-0,59$;
$u(0.6,t)=2t+18,166$.

5.18. $u(x,0)=6\cos(-6x-0,27)-0,71$; $u(0,t)=2t+5,073$;
$u(0.6,t)=-3t-5,187$.

5.19. $u(x,0)=4\ln(9x+0,39)+0,39$; $u(0,t)=-t-3,376$;
$u(0.6,t)=-t+7,415$.

5.20. $u(x,0)=4x(2x+0,36)-0,69$; $u(0,t)=3t-0,69$;
$u(0.6,t)=t+3,054$.

5.21. $u(x,0)=7x(5x-0,44)+0,28$; $u(0,t)=5t+0,28$;
$u(0.6,t)=-t+11,032$.

5.22. $u(x,0)=5\ln(2x+0,95)-0,94$; $u(0,t)=4t-1,196$;
$u(0.6,t)=-4t+2,887$.

5.23. $u(x,0)=3\sin(x-0,56)-0,03$; $u(0,t)=-t-1,624$;
$u(0.6,t)=-4t+0,09$.

5.24. $u(x,0)=4\cos(-4x+0,58)-0,92$; $u(0,t)=t+2,426$;
$u(0.6,t)=4t-1,907$.

5.25. $u(x,0)=10\cos(x+0,94)+0,81$; $u(0,t)=-3t+6,708$;
$u(0.6,t)=-t+6,708$.

5.26. $u(x,0)=10\ln(5x+0,95)+0,8$; $u(0,t)=-3t+0,287$;
$u(0.6,t)=4t+14,537$.

5.27. $u(x,0)=8\ln(4x+0,04)+0,72$; $u(0,t)=t-25,031$;
$u(0.6,t)=3t+7,856$.

5.28. $u(x,0)=7x(10x-0,73)-0,58$; $u(0,t)=-t-0,58$;
$u(0.6,t)=5t+21,554$.

5.29. $u(x,0)=5\ln(2x+0,58)-0,12$; $u(0,t)=4t-2,844$;
$u(0.6,t)=4t+2,763$.

5.30. $u(x,0)=x(-x+0,85)+0,25$; $u(0,t)=2t+0,25$;
$u(0.6,t)=-5t+0,4$.

5.31. $u(x,0)=3\cos(-10x-0,16)+0,75$; $u(0,t)=-3t+3,712$;
$u(0.6,t)=4t+3,727$.

5.32. $u(x,0)=4\cos(-3x-0,72)-0,86$; $u(0,t)=-5t+2,147$;
$u(0.6,t)=2t-4,112$.

5.33. $u(x,0)=4\cos(6x+0,01)-0,04$; $u(0,t)=3t+3,96$;
$u(0.6,t)=-5t-3,609$.

5.34. $u(x,0)=4\ln(10x+0,87)-0,32$; $u(0,t)=-2t-0,877$;
$u(0.6,t)=4t+7,389$.

5.35. $u(x,0)=6\cos(x-0,26)-0,35$; $u(0,t)=5t+5,448$;
$u(0.6,t)=-t+5,307$.

5.36. $u(x,0)=2\ln(5x+0,53)-0,86$; $u(0,t)=-t-2,13$;
$u(0.6,t)=-2t+1,663$.

5.37. $u(x,0)=10\cos(7x+0,18)+0,32$; $u(0,t)=5t+10,158$;

$u(0.6,t)=-t-2,943$.

5.38. $u(x,0)=2\ln(6x+0,33)-0,72$; $u(0,t)=5t-2,937$;
$u(0.6,t)=5t+2,017$.

5.39. $u(x,0)=10\ln(4x+)+0,99$; $u(0,t)=-2t+0,99$;
$u(0.6,t)=-t+13,228$.

5.40. $u(x,0)=9\ln(6x+0,21)+0,34$; $u(0,t)=-2t-13,706$;
$u(0.6,t)=4t+12,379$.

5.41. $u(x,0)=2\ln(9x+0,36)-0,85$; $u(0,t)=2t-2,893$;
$u(0.6,t)=-t+2,652$.

5.42. $u(x,0)=10\sin(7x+0,56)-0,9$; $u(0,t)=-t+4,412$;
$u(0.6,t)=t-10,889$.

5.43. $u(x,0)=7\ln(10x+0,93)+0,81$; $u(0,t)=-4t+0,302$;
$u(0.6,t)=-3t+14,361$.

5.44. $u(x,0)=7x(9x-0,37)+0,8$; $u(0,t)=t+0,8$;
$u(0.6,t)=t+21,926$.

5.45. $u(x,0)=6\cos(9x-0,13)+0,5$; $u(0,t)=4t+6,449$;
$u(0.6,t)=-3t+3,675$.

5.46. $u(x,0)=\ln(2x+0,85)-0,78$; $u(0,t)=3t-0,943$;
$u(0.6,t)=5t-0,062$.

5.47. $u(x,0)=3\cos(-x+0,84)-0,8$; $u(0,t)=-t+1,202$;
$u(0.6,t)=5t+2,114$.

5.48. $u(x,0)=10x(-6x+0,12)+0,59$; $u(0,t)=5t+0,59$;
$u(0.6,t)=3t-20,29$.

5.49. $u(x,0)=5\sin(x+0,01)+0,43$; $u(0,t)=-t+0,48$;
$u(0.6,t)=-3t+3,294$.

5.50. $u(x,0)=2\ln(8x+0,15)+0,04$; $u(0,t)=t-3,754$;
$u(0.6,t)=5t+3,239$.

5.51. $u(x,0)=4x(-5x+0,73)+0,97$; $u(0,t)=-t+0,97$;
$u(0.6,t)=t-4,478$.

5.52. $u(x,0)= x(-3x+0,17)+0,1$; $u(0,t)=-5t+0,1$; $u(0.6,t)=-3t-0,878$.

5.53. $u(x,0)=6 \sin(-9x+0,69)+0,89$; $u(0,t)=3t+4,709$; $u(0.6,t)=t+6,89$.

5.54. $u(x,0)=2 x(2x+0,46)-0,15$; $u(0,t)=-t-0,15$; $u(0.6,t)=3t+1,842$.

5.55. $u(x,0)= x(9x+0,3)-0,49$; $u(0,t)=2t-0,49$; $u(0.6,t)=-2t+2,93$.

5.56. $u(x,0)=8 x(x+0,68)-0,55$; $u(0,t)=2t-0,55$; $u(0.6,t)=-3t+5,594$.

5.57. $u(x,0)= \ln(4x+0,74)-0,74$; $u(0,t)=t-1,041$; $u(0.6,t)=3t+0,404$.

5.58. $u(x,0)=6 \cos(-8x-0,74)-0,42$; $u(0,t)=2t+4,011$; $u(0.6,t)=2t+3,998$.

5.59. $u(x,0)=10 \ln(2x+0,3)-0,95$; $u(0,t)=3t-12,99$; $u(0.6,t)=-5t+3,105$.

5.60. $u(x,0)=5 \ln(x+0,84)-0,62$; $u(0,t)=2t-1,492$; $u(0.6,t)=-2t-1,492$.

5.61. $u(x,0)= \sin(-4x-0,61)+0,29$; $u(0,t)=-t-0,283$; $u(0.6,t)=-t+0,159$.

5.62. $u(x,0)=9 x(-8x-0,18)+0,53$; $u(0,t)=-2t+0,53$; $u(0.6,t)=2t-26,362$.

5.63. $u(x,0)=5 x(-10x+0,51)+0,9$; $u(0,t)=t+0,9$; $u(0.6,t)=t-15,57$.

5.64. $u(x,0)=6 x(4x-0,85)-0,47$; $u(0,t)=-3t-0,47$; $u(0.6,t)=t+5,11$.

5.65. $u(x,0)=10 x(-4x-0,7)+0,46$; $u(0,t)=-2t+0,46$; $u(0.6,t)=2t-18,14$.

5.66. $u(x,0)=4 \sin(-6x+0,14)+0,09$; $u(0,t)=-4t+0,648$;

u(0.6,t)=4t+1,342.

5.67. u(x,0)=7 cos(-5x-0,47)-0,15 ; u(0,t)=-5t+6,091 ;
u(0.6,t)=2t-6,776.

5.68. u(x,0)=3 ln(2x+0,87)+0,54 ; u(0,t)=t+0,122 ;
u(0.6,t)=3t+2,723.

5.69. u(x,0)=5 ln(7x+0,97)+0,64 ; u(0,t)=-5t+0,488 ;
u(0.6,t)=-4t+8,854.

5.70. u(x,0)=2 sin(-9x-0,55)+0,52 ; u(0,t)=2t-0,525 ;
u(0.6,t)=4t+1,174.

5.71. u(x,0)=9 ln(8x+0,88)-0,76 ; u(0,t)=t-1,911 ;
u(0.6,t)=-5t+14,873.

5.72. u(x,0)=2 x(6x-0,38)+0,85 ; u(0,t)=5t+0,85 ;
u(0.6,t)=5t+4,714.

5.73. u(x,0)=3 cos(4x+0,77)+0,95 ; u(0,t)=-5t+3,104 ;
u(0.6,t)=2t-2,049.

5.74. u(x,0)=6 ln(x+0,48)-0,36 ; u(0,t)=-5t-4,764 ;
u(0.6,t)=3t+0,102.

5.75. u(x,0)=4 ln(9x+0,99)+0,56 ; u(0,t)=-4t+0,52 ;
u(0.6,t)=t+7,979.

5.76. u(x,0)=5 sin(-10x-0,54)-0,1 ; u(0,t)=t-2,671 ;
u(0.6,t)=3t-1,37.

5.77. u(x,0)=8 ln(6x+0,64)-0,63 ; u(0,t)=-4t-4,2 ;
u(0.6,t)=-2t+10,927.

5.78. u(x,0)=3 sin(10x+0,27)-0,81 ; u(0,t)=-5t-0,01 ;
u(0.6,t)=-4t-0,85.

5.79. u(x,0)=5 x(7x-0,06)-0,85 ; u(0,t)=-4t-0,85 ;
u(0.6,t)=-4t+11,57.

5.80. u(x,0)=8 cos(3x-0,73)-0,45 ; u(0,t)=-t+5,511 ;
u(0.6,t)=3t+3,391.

5.81. $u(x,0)=9\sin(-2x-0{,}69)+0{,}21$; $u(0,t)=3t-5{,}519$; $u(0.6,t)=-2t-8{,}335$.

5.82. $u(x,0)=6\sin(-4x+0{,}27)-0{,}49$; $u(0,t)=-5t+1{,}11$; $u(0.6,t)=-2t-5{,}576$.

5.83. $u(x,0)=2\,x(-9x+0{,}53)-0{,}67$; $u(0,t)=5t-0{,}67$; $u(0.6,t)=-t-6{,}514$.

5.84. $u(x,0)=10\cos(2x-0{,}39)+0{,}11$; $u(0,t)=-3t+9{,}359$; $u(0.6,t)=-t+7{,}005$.

5.85. $u(x,0)=5\,x(x-0{,}82)-0{,}2$; $u(0,t)=t-0{,}2$; $u(0.6,t)=-4t-2{,}66$.

5.86. $u(x,0)=3\,x(-2x+0{,}09)+0{,}89$; $u(0,t)=3t+0{,}89$; $u(0.6,t)=5t-1{,}108$.

5.87. $u(x,0)=5\,x(4x-0{,}68)-0{,}6$; $u(0,t)=-4t-0{,}6$; $u(0.6,t)=2t+4{,}56$.

5.88. $u(x,0)=2\sin(7x-0{,}97)-0{,}11$; $u(0,t)=t-1{,}76$; $u(0.6,t)=-5t-0{,}287$.

5.89. $u(x,0)=8\,x(8x-0{,}47)+0{,}43$; $u(0,t)=-4t+0{,}43$; $u(0.6,t)=-3t+21{,}214$.

5.90. $u(x,0)=5\cos(-6x+0{,}27)-0{,}35$; $u(0,t)=2t+4{,}469$; $u(0.6,t)=-4t-5{,}262$.

5.91. $u(x,0)=5\ln(2x+0{,}88)-0{,}32$; $u(0,t)=-2t-0{,}959$; $u(0.6,t)=-t+3{,}342$.

5.92. $u(x,0)=5\,x(-7x+0{,}12)-0{,}79$; $u(0,t)=2t-0{,}79$; $u(0.6,t)=-5t-13{,}03$.

5.93. $u(x,0)=7\ln(x+0{,}93)+0{,}43$; $u(0,t)=4t-0{,}078$; $u(0.6,t)=5t+3{,}407$.

5.94. $u(x,0)=3\sin(2x-0{,}61)+0{,}1$; $u(0,t)=-3t-1{,}619$; $u(0.6,t)=t+1{,}769$.

5.95. $u(x,0)= x(4x-0{,}24)+0{,}48$; $u(0,t)=5t+0{,}48$;

u(0.6,t)=5t+1,776.

5.96. u(x,0)=8 x(x-0,58)+0,37 ; u(0,t)=-2t+0,37 ;
u(0.6,t)=4t+0,466.

5.97. u(x,0)=3 sin(-3x-0,07)+0,11 ; u(0,t)=-2t-0,1 ;
u(0.6,t)=3t-2,757.

5.98. u(x,0)=7 sin(-x+0,01)+0,56 ; u(0,t)=-5t+0,63 ;
u(0.6,t)=t-3,335.

5.99. u(x,0)=6 cos(9x+0,53)+0,11 ; u(0,t)=t+5,287 ;
u(0.6,t)=3t+5,74.

5.100. u(x,0)=2 sin(8x-0,5)-0,3 ; u(0,t)=5t-1,259 ;
u(0.6,t)=5t-2,132.

Приклад розв'язання варіанта контрольної роботи

Задача 1.1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду рівняння:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{70}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{10}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{3}u=0$$

Визначимо тип диференціального рівняння

$$A=-\frac{1}{2};\ B=\frac{1}{70};\ C=\frac{1}{70}.$$

Тоді

$$\Delta=B^2-AC=\frac{1}{4900}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{70}=\frac{9}{1225}>0$$

Отже, задане рівняння – рівняння гіперболічного типу.
Знайдемо характеристики ДРЧП

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{A},$$

$$\frac{dy}{dx}=-2\left(\frac{1}{70}+\frac{3}{35}\right),$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{5},$$

$$\int dy = -\frac{1}{5}\int dx + C,$$

$$y = -\frac{1}{5}x + C,$$

$$C = y + \frac{1}{5}x.$$

Отже, $\xi = y + \frac{1}{5}x$ – перша характеристика ДРЧП.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{A},$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\left(\frac{1}{70} - \frac{3}{35}\right).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{7},$$

$$\int dy = \frac{1}{7}\int dx + C,$$

$$y = \frac{1}{7}x + C,$$

$$C = y - \frac{1}{7}x.$$

Отже, $\eta = y - \frac{1}{7}x$ – друга характеристика ДРЧП.

Визначимо усі похідні, які входять в задане диференціальне рівняння. Враховуючи, що

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(y + \frac{1}{5}x\right)'_x = \frac{1}{5}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \left(y + \frac{1}{5}x\right)'_y = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{5}\right)'_x = 0; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = \left(\frac{1}{5}\right)'_y = 0; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = (1)'_y = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(y - \frac{1}{7}x\right)'_x = -\frac{1}{7}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(y - \frac{1}{7}x\right)'_y = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{7}\right)'_x = 0; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = \left(-\frac{1}{7}\right)'_y = 0; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = (1)'_y = 0,$$

отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{7}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{1}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{2}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{49}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}=$$

$$=\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння

$$-\frac{1}{50}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{98}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{175}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{1225}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{245}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{70}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+$$

$$+\frac{1}{35}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{70}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{50}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{70}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{3}u=$$

$$=\frac{72}{1225}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{27}{100}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{33}{140}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{3}u=0.$$

Канонічний вигляд рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{147}{32}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{385}{96}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{1225}{216}u.$$

Задача 1.2. Визначити тип та звести до канонічного вигляду рівняння:

$$-10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+180\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-810\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-8\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}+1\,u=0.$$

Визначимо тип диференціального рівняння

$$A=-10\,;\ B=\ 90\,;\ C=-810..$$

Тоді

$$\Delta=B^2-AC=\ 8100-10\ \cdot\ 810\ =0.$$

Отже, задане рівняння – рівняння параболічного типу.

Знайдемо характеристики ДРЧП

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A},$$

$$\frac{dy}{dx}=-9,$$

$$\int dy=-9\int dx+C\cdot$$

$$y=-9\,x+C.$$

$$C=y+9\,x.$$

Отже, $\xi=y+9x$ – перша характеристика ДРЧП.

Нехай $\eta=x$ – друга характеристика ДРЧП.

Визначимо усі похідні, які входять в задане диференціальне рівняння. Враховуючи, що

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=(y+9\,x)'_x=9\,;\ \ \frac{\partial\xi}{\partial y}=(y+9\,x)'_y=1.$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=(\,9\,)'_x=0;\ \ \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}=(\,9\,)'_y=0;\ \ \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=(1)'_y=0.$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=(x)'_x=1;\ \ \frac{\partial\eta}{\partial y}=(x)'_y=0.$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=(1)'_x=0;\ \ \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}=(1)'_y=0;\ \ \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=(0)'_y=0.$$

отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\ 9\ \frac{\partial u}{\partial\xi}+\ \frac{\partial u}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=$$

$$=81\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+18\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}=$$

$$=9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння

$$-810\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-180\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-10\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+1620\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+180\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-810\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-72\frac{\partial u}{\partial \xi}-8\frac{\partial u}{\partial \eta}-$$

$$-7\frac{\partial u}{\partial \xi}+u=-10\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-79\frac{\partial u}{\partial \xi}-8\frac{\partial u}{\partial \eta}+u=0.$$

Канонічний вигляд рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=-\frac{79}{10}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{4}{5}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{10}u.$$

Задача 1.3. Визначити тип та звести до канонічного вигляду рівняння:

$$-\frac{6}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{9}{7}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{111}{224}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{7}{6}\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{8}u=0.$$

Визначимо тип диференціального рівняння

$$A=-\frac{6}{7};\ B=-\frac{9}{14};\ C=-\frac{111}{224}.$$

Тоді

$$\Delta=B^2-AC=\frac{81}{196}-\frac{6}{7}\cdot\frac{111}{224}=-\frac{9}{784}<0.$$

Отже, задане рівняння – рівняння еліптичного типу.

Знайдемо характеристики ДРЧП

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A}\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{A}i,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{14}\pm\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{28}i,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}\pm\frac{1}{8}i,$$

$$\int dy=\left(\frac{3}{4}\pm\frac{1}{8}i\right)\int dx+C,$$

$$y=\left(\frac{3}{4}\pm\frac{1}{8}i\right)x+C,$$

$$C=y-\frac{3}{4}x\pm\frac{1}{8}xi,$$

Отже, $\xi=y-\frac{3}{4}x$ – перша характеристика ДРЧП

Нехай $\eta=\frac{1}{8}x$ – друга характеристика ДРЧП

Визначимо усі похідні, які входять в задане диференціальне рівняння. Враховуючи, що

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\left(y-\frac{3}{4}x\right)'_x=-\frac{3}{4};\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=\left(y-\frac{3}{4}x\right)'_y=1,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\left(-\frac{3}{4}\right)'_x=0;\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}=\left(-\frac{3}{4}\right)'_y=0;\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=(1)'_y=0,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\left(\frac{1}{8}x\right)'_x=\frac{1}{8};\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\left(\frac{1}{8}x\right)'_y=0,$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{8}\right)'_x=0;\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{8}\right)'_y=0;\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=(0)'_y=0,$$

отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial\eta};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=$$

$$= \frac{9}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{3}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{64}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} =$$

$$= -\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння

$$-\frac{27}{56}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{9}{56}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{3}{224}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{27}{28}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{9}{56}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{111}{224}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{7}{8}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{7}{48}\frac{\partial u}{\partial \eta} -$$

$$-4\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{8}u = -\frac{3}{224}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{3}{224}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{39}{8}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{7}{48}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{8}u = 0.$$

Канонічний вигляд рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -364\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{98}{9}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{28}{3}u.$$

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{49}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ (0<x<8,\ t>0),$$

$$\text{якщо } \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(8,t)=0 \end{cases} \ \text{і } u(x,0)=\begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & 0 \le x \le 2, \\ 8-x, & 2 < x \le 8. \end{cases}$$

Розв'язання:

За умовою $a = \frac{7}{10}$, $l = 8$. Тоді розв'язок будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\left(\frac{7\pi n}{80}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right),$$

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

При l=8

$$B_n=\frac{1}{4}\int_0^8 \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx=\frac{1}{4}\left(\int_0^2\frac{3}{2}x^2\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx+\int_2^8(8-x)\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx\right).$$

Кожен з інтегралів знайдемо за формулою інтегрування за частинами

$$\int_0^2\frac{3}{2}x^2\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx=\left|\begin{matrix} u=\frac{3}{2}x^2 & du=3\,x\,dx \\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx & v=-\frac{8}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{12}{\pi n}x^2\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\Big|_0^2+\frac{24}{\pi n}\int_0^2 x\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx & v=\frac{8}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\end{matrix}\right|=-\frac{48}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}+$$

$$+\frac{192}{\pi^2n^2}x\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\Big|_0^2-\frac{192}{\pi^2n^2}\int_0^2\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx=-\frac{48}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}+$$

$$+\frac{384}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{4}+\frac{1536}{\pi^3n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\Big|_0^2=-\frac{48}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}+$$

$$+\frac{384}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{4}+\frac{1536}{\pi^3n^3}\cos\frac{\pi n}{4}-\frac{1536}{\pi^3n^3}.$$

$$\int_2^8(8-x)\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx=\left|\begin{matrix} u=8-x & du=-dx \\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx & v=-\frac{8}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{8}{\pi n}(8-x)\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\Big|_2^8-\frac{8}{\pi n}\int_2^8\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx=\frac{48}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}-$$

$$-\frac{64}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\Big|_2^8=\frac{48}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}+\frac{64}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{4}.$$

$$B_n=\frac{1}{4}\left(-\frac{48}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}+\frac{384}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{4}+\frac{1536}{\pi^3n^3}\cos\frac{\pi n}{4}-\frac{1536}{\pi^3n^3}+\frac{48}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{64}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{4}\right)=\frac{112}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{4}+\frac{384}{\pi^3n^3}\cos\frac{\pi n}{4}-\frac{384}{\pi^3n^3}.$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{112}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{4}+\frac{384}{\pi^3n^3}\cos\frac{\pi n}{4}-\frac{384}{\pi^3n^3}\right)\times\right.$$

$$\times e^{-\left(\frac{7\pi n}{80}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\Bigg].$$

Задача 3. Знайти розв'язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ (0 < x < 9,\ t > 0),$$

якщо $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(9,t) = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} u(x,0) = -0{,}2x\,(x-9) \\ u'_t(x,0) = 10\,x + 5\,. \end{cases}$

Розв'язання:

За умовою $a = \frac{3}{2}$, $l = 9$, $f(x) = -0{,}2x\,(x-9)$, $g(x) = 10\,x + 5$

Тоді розв'язок будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Знайдемо коефіцієнти a_n і b_n

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = -\frac{0{,}4}{9}\int_0^9 x\,(x-9)\sin\left(\frac{\pi n}{9}x\right)dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x^2 - 9x & du = (2x-9)\,dx \\ dv = \sin\left(\frac{\pi n}{9}x\right)dx & v = -\frac{9}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{9}x\right) \end{matrix}\right| = \frac{0{,}4}{\pi n}(x^2 - 9x)\cos\left(\frac{\pi n}{9}x\right)\Big|_0^9 -$$

$$-\frac{0{,}4}{\pi n}\int_0^9 (2x-9)\cos\left(\frac{\pi n}{9}x\right)dx = \left|\begin{matrix} u = 2x - 9 & du = 2\,dx \\ dv = \cos\left(\frac{\pi n}{9}x\right)dx & v = \frac{9}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{9}x\right) \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{3{,}6}{\pi^2 n^2}(2x-9)\sin\left(\frac{\pi n}{9}x\right)\Big|_0^9 + \frac{7{,}2}{\pi^2 n^2}\int_0^9 \sin\left(\frac{\pi n}{9}x\right)dx = -\frac{64{,}8}{\pi^3 n^3}\cos\left(\frac{\pi n}{9}x\right)\Big|_0^9 =$$

$$= -\frac{64{,}8}{\pi^3 n^3}(\cos \pi n - 1) = -\frac{64{,}8}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{129{,}6}{\pi^3 (2k-1)^3}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = \frac{4}{3\pi n}\int_0^9 (10x+5)\sin\left(\frac{\pi n}{9}x\right)dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = 10x + 5 & du = 10\,dx \\ dv = \sin\left(\frac{\pi n}{9}x\right)dx & v = -\frac{9}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{9}x\right) \end{matrix}\right| = -\frac{12}{\pi^2 n^2}(10x+5)\cos\left(\frac{\pi n}{9}x\right)\Big|_0^9 +$$

$$+\frac{120}{\pi^2 n^2}\int_0^9 \cos\left(\frac{\pi n}{9}x\right)dx = -\frac{1140}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n) + \frac{60}{\pi^2 n^2} + \frac{1080}{\pi^3 n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{9}x\right)\Bigg|_0^9 =$$

$$= \frac{60}{\pi^2 n^2} - \frac{1140}{\pi^2 n^2}(-1)^n = \begin{cases} \dfrac{1200}{\pi^2(2k-1)^2}, n = 2k-1, \\ -\dfrac{270}{\pi^2 k^2}, n = 2k. \end{cases}$$

Тоді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{129{,}6}{\pi^3(2k-1)^3}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{6}t\right) + \frac{1200}{\pi^2(2k-1)^2}\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{6}t\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{9}x\right) - \frac{270}{\pi^2 k^2}\sin\left(\frac{\pi k}{3}t\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{9}x\right)\right].$$

Задача 4. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u=0$ в крузі $0\le r\le 4$, якщо $u(4;\varphi) = -9\varphi^2 - 3\varphi - 8$.

Розв'язання:

Згідно з умовою задачі $a = 4$, $f(\varphi) = -9\varphi^2 - 3\varphi - 8$. Тоді

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)\right),$$

де

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-9\varphi^2 - 3\varphi - 8)\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\left(-3\varphi^3 - \frac{3}{2}\varphi^2 - 8\varphi\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-3\pi^3 - \frac{3}{2}\pi^2 - 8\pi - 3\pi^3 + \frac{3}{2}\pi^2 - 8\pi\right) = -6\pi^2 - 16,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-9\varphi^2 - 3\varphi - 8)\cos(n\varphi)d\varphi =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = -9\varphi^2 - 3\varphi - 8 & du = (-18\varphi - 3)\,d\varphi \\ dv = \cos(n\varphi)\,d\varphi & v = \dfrac{1}{n}\sin(n\varphi) \end{matrix}\right| = \frac{1}{\pi n}(-9\varphi^2 - 3\varphi - 8)\sin(n\varphi)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(-18\varphi - 3)\sin(n\varphi)d\varphi = \left|\begin{matrix} u = -18\varphi - 3 & du = -18\,d\varphi \\ dv = \sin(n\varphi)\,d\varphi & v = -\dfrac{1}{n}\cos(n\varphi) \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(-18\varphi - 3)\cos(n\varphi)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{18}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi n^2}\cos(n\pi)\,(-18\pi -$$

$$- 3- 18\pi+ 3) + \frac{18}{\pi n^3} \sin(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{36}{n^2}(-1)^n,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-9\varphi^2 - 3\varphi - 8)\sin(n\varphi)d\varphi =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = -9\varphi^2 - 3\varphi - 8 & du = (-18\varphi - 3)\,d\varphi \\ dv = \sin(n\varphi)\,d\varphi & v = -\frac{1}{n}\cos(n\varphi) \end{matrix} \right| = -\frac{1}{\pi n}(-9\varphi^2 - 3\varphi - 8)\cos(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(-18\varphi - 3)\cos(n\varphi)d\varphi = \left| \begin{matrix} u = -18\varphi - 3 & du = -18\,d\varphi \\ dv = \cos(n\varphi)\,d\varphi & v = \frac{1}{n}\sin(n\varphi) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{6}{n}\cos(\pi n) + \frac{1}{\pi n^2}(-18\varphi - 3)\sin(n\pi)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{18}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{6}{n}(-1)^n - \frac{18}{\pi n^3}\cos(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{6}{n}(-1)^n,$$

$$u(r,\varphi) = -3\pi^2 - 8 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{36}{n^2}(-1)^n\cos(n\varphi) + \frac{6}{n}(-1)^n\sin(n\varphi)\right)\left(\frac{r}{4}\right)^n.$$

Задача 5. Методом сіток знайти розв'язок рівняння теплопровідності, якщо

(КУ) u(0;t)=t+7,804, u(0,6;t)=-4t-6,012,

та

(ПУ) u(x,0)= 9cos(-3x-0,47)-0,22.

Розв'язок.

Скористаємось явною схемою при $\sigma = \frac{1}{6}$, матимемо формулу

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\cdot\left(u_{i-1,j} + 4\cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}\right).$$

Визначимо крок зміни змінної x:

$$h = \frac{1}{n} = \frac{0{,}6}{6} = 0{,}1.$$

Визначимо крок зміни змінної t:

$$k = \frac{h^2}{6} = \frac{0{,}1^2}{6} = 0{,}0017.$$

Далі складаємо таблицю. Спочатку заповнимо значення функції u(x,t) у рядку із номером j=0, користуючись початковою умовою. Користуючись крайовими умовами заповнимо стовпці із номерами i=0 та i=6.

Потім послідовно заповнюємо пусті клітинки рядка під номером j=1, починаючи з елемента $u_{1,1}$:

$$u_{1,1}=\frac{1}{6}\cdot\left(u_{0,0}+4\cdot u_{1,0}+u_{2,0}\right)=\frac{1}{6}\cdot(7{,}804+4\cdot 6{,}2412+4{,}1011)=6{,}145,$$

$$u_{2,1}=\frac{1}{6}\cdot\left(u_{1,0}+4\cdot u_{2,0}+u_{3,0}\right)=\frac{1}{6}\cdot(6{,}2412+4\cdot 4{,}1011+1{,}575)=4{,}0368.$$

. . . .

Потім аналогічно заповнюємо рядок під номером j=2, далі рядок під номером j=3. Продовжуємо заповнювати до тих пір, поки усі клітинки не будуть заповнені.

Як результат отримали таку таблицю:

j	i	0	1	2	3	4	5	6
	t \ x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,0	7,804	6,2412	4,1011	1,575	-1,1114	-3,7182	-6,012
1	0,0017	7,8057	6,145	4,0368	1,5483	-1,0981	-3,666	-6,0187
2	0,0033	7,8073	6,0704	3,9734	1,522	-1,085	-3,6301	-6,0253
3	0,005	7,809	6,0104	3,9143	1,4961	-1,0747	-3,6051	-6,032
4	0,0067	7,8107	5,9608	3,8606	1,4706	-1,068	-3,5879	-6,0387
5	0,0083	7,8123	5,9191	3,8123	1,4459	-1,0649	-3,5764	-6,0453
6	0,01	7,814	5,8835	3,7691	1,4218	-1,065	-3,5693	-6,052

ЛІТЕРАТУРА

1. Краєвський В. О. Спецкурс математичного аналізу : навчальний посібник / Краєвський В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 178 с.

2. Литвинюк В. П. Рівняння математичної фізики : навчальний посібник / Литвинюк В. П. – Вінниця : ВДТУ, 2003. – 106 с.

3. Сачанюк-Кавецька Н. В. Рівняння математичної фізики : навчальний посібник / Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 108 с.

4. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики : підручник / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. – К. : Либідь, 2006. – 424 с.

5. Вища математика : у 2-х кн. : підручник для студ. природ. спец. ун-тів і вищ. техн. навч. закл. / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін. ; за ред. Г. Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 2. Спеціальні розділи– 368 с.

6. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарський. – М. : Наука, 1972. – 735 с.

7. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / Фарлоу С. – М. : Мир, 1985. – 384 с.

8. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Демидович Б. П., Марон И. А. , Шувалова Э. З. – М. : Наука, 1967. – 368 с.

9. Кошляков Н. С. Уравнение в частных производных математической физики / Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.

10. Араманович И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.

11. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – [3-е изд., испр.]. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 616 с.

12. Самарский А. А. Введение в численные методы / Самарский А. А. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 272 с.

13. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.

14. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / Михайлов В. П. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 391 с.

15. Белевец П. С. Задачник-практикум по методам математической физики / П. С. Белевец, И. Г. Кожух. – Мн. : Вышейша шк., 1989. – 274 с.

16. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции / Арсенин В. Я. – М. : Наука, 1974. – 432 с.

СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ ВЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ

внутрішній вузол	internal node
вузол другого роду	node of the second sort
вузол першого роду	node of the first sort
вузол сітки	mesh node
гіперболічний	hyperbolic
двовимірний	two-dimensional
диференціал	differential
диференціальне рівняння	differential equation
диференціювання	differentiation
еліптичний	elliptic
загальний розв'язок	general solution
задача Діріхле	Dirichlet's problem
задача Неймана	Neumann problem
інтеграл	integral
канонічний вигляд	canonical form
квазілінійний	quasilinear
кількість змінних	amount of variables
крайові умови	boundary conditions
лінійний	linear
математична фізика	mathematical physics
межовий вузол	boundary node
метод відокремлення змінних	method of separation of variable
метод сіток	net-point method
метод Фур'є	Fourier method
моделювання	modelling
неявна схема	implicit scheme
одновимірний	one-dimensional
однорідний	homogeneous
оператор Лапласа	Laplace operator
параболічний	parabolic
первісна	primitive
порядок диференціального рівняння	degree of a differential equation
похідна	derivative
початкові умови	entry conditions
рівняння вимушених коливань струни	equation of forced oscillationses of a string
рівняння вільних коливань струни	equation of free oscillations of a string
рівняння коливання мембрани	equation of oscillation of a diaphragm
рівняння Лапласа	Laplace equatione
рівняння Пуассона	Poisson equation

рівняння теплопровідності	heat conduction equation
рівняння характеристик	equation of characteristics
різницева похідна	difference derivation
розв'язок	solution
розрахункова точка	rated point
ряд Тейлора	Taylor series
ряд Фур'є	Fourier series
сіткова область	net domain
скінченнорізницеві наближення	finite-difference approximation
стійкість	stability
сусідній вузол	neighboring node
теплове поле	thermal field
тривимірний	three-dimensional
умови Робена	Roben's conditions
функціональна залежність	functional association
функція	function
характеристики	characteristics
хвильове рівняння	wave equation
частинна похідна	partial derivative
частинний розв'язок	partial solution
явна схема	explicit scheme

Навчальне видання

Краєвський Володимир Олександрович

СПЕЦКУРС МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ТА ЇХ АНАЛІЗ В СИСТЕМІ MAPLE. ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено В. Краєвським

Підписано до друку 11.10.2017 р.
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 7,42.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2017-370.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 59-85-32, 59-87-38.
press.vntu.edu.ua; *e-mail:* kivc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.