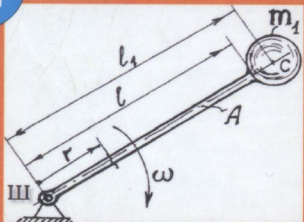
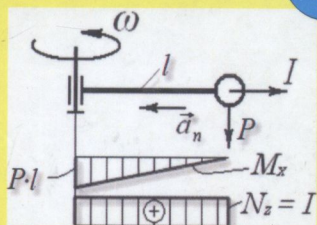
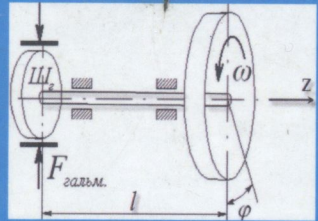
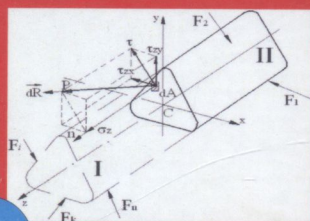
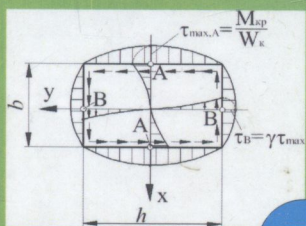


В.С. Кравчук, О.Ф. Дащенко,
Л.В. Коломієць, О.М. Лимаренко

ОСНОВИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ



В.С. Кравчук, О.Ф. Дащенко, Л.В. Коломісць, О.М. Лимаренко

ОСНОВИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Одеса
СТАНДАРТЪ
2014

ББК 30.121
К 772
УДК 621:539.3/6(075.8)

ISBN 978-966-413-482-5

Рекомендовано вченою радою Одеського національного політехнічного університету як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (протокол №4 від 24.12.2013 р.).

Основи опору матеріалів: Навч. посібник /В.С.Кравчук, О.Ф.Дашенко, Л.В.Коломієць, О.М.Лимаренко. — Одеса: СТАНДАРТЪ, 2014. — 322 с.

У навчальному посібнику розглянуто основні теми курсу опору матеріалів, а також рекомендації щодо вивчення теоретичного матеріалу і його практичного застосування в компактній формі у вигляді відповідних алгоритмів.

Для кожної із розглянутих тем детально проаналізовані приклади розв'язання задач з необхідними методичними порадами.

Наведено запитання для самоконтролю якості засвоєння вивченого матеріалу даного курсу.

Призначається для студентів денної та заочної форм навчання механічних, машинобудівних, транспортних і енергетичних спеціальностей вищих навчальних закладів, що вивчають відповідні розділи опору матеріалів.

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. **Г.В. Архангельський**
(Одеська національна академія харчових технологій)

д-р техн. наук, проф. **А.В. Грішин**
(Одеська державна академія будівництва та архітектури)

ISBN 978-966-413-482-5

© В.С.Кравчук, О.Ф.Дашенко,
Л.В.Коломієць, О.М.Лимаренко, 2014
© ВМВ, 2014

ПЕРЕДМОВА

Опір матеріалів – одна з перших інженерних дисциплін, яка займає важливе місце в програмі підготовки фахівців. Предметом вивчення цієї дисципліни є методи розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів інженерних конструкцій.

Без відповідних знань науки про опір матеріалів деформуванню та руйнуванню неможлива підготовка фахівців механічних, будівельних, енергетичних та інших спеціальностей, якщо їх діяльність буде пов'язана з проектуванням, виробництвом, експлуатацією та ремонтом будь-яких споруд, машин, апаратів, станків та пристроїв.

Розвиток науки опору матеріалів зумовлений вимогами практичної необхідності розвитку техніки різних галузей, а серйозне і сумлінне ставлення до оволодіння знаннями цієї науки зумовлене відповідальністю фахівців за надійну, безпечну роботу об'єктів техніки.

Серед нинішніх навчально-методичних видань з опору матеріалів, що охоплюють весь курс і рекомендовані для студентів технічних спеціальностей вузів, слід виділити базові підручники за редакцією Г.С. Писаренка різних років видання, а також підручник “Сопротивление материалов” В.І. Феодосьєва. Певне пізнавальне значення мають підручники інших авторів, які відрізняються оригінальним методичним викладенням матеріалу з різною глибиною освітлення розділів курсу.

Приймаючи до сьогоденних умов і враховуючи значне скорочення навчального часу на вивчення дисципліни «Опір матеріалів» в учбових графіках бакалаврів, автори цього посібника підготували його до друку.

У цьому виданні теоретична частина деяких тем наведена в об'ємі, необхідному для першого знайомства з основними положеннями курсу, передбачених діючою програмою дисципліни. Для більш глибокого розуміння матеріалу цих тем, усвідомлення та узагальнення явищ, які характерні для опору матеріалів, необхідно звернутися до базових підручників, а також

детально проаналізувати наведені в цьому навчальному посібнику приклади розрахунків та дати відповіді на запитання для самоперевірки до відповідної теми.

Приклади розв'язування типових задач наведені з необхідними вказівками щодо раціональних підходів та оптимальних рішень. Велика кількість детально розглянутих прикладів і їх характер роблять запропонований посібник зручним та корисним і для студентів–заочників.

Наведені узагальнення теоретичного матеріалу в алгоритмах та структурно-логічних схемах дають можливість наочно уявити головні залежності і зв'язки в різних темах курсу, а також виявити єдність методів виведення розрахункових формул, їх ідентичність та єдність методів рішення нібито різних задач.

Таблиця 1 – Основні позначення

Умовне позначення	Фізичні та геометричні величини	Одиниці виміру
A	Площа поперечного перерізу стержня (бруса, балки)	м ²
a, b, d, h, ℓ	Абсолютні розміри конструктивних елементів	мм
E	Модуль поздовжньої пружності, або модуль пружності першого роду, або модуль Юнга	МПа
F, M	Зосереджена сила та момент	кН; кН·м
f	Прогин балки, стріла прогину	мм
G	Модуль пружності при зсуві, або модуль пружності другого роду	МПа
g	Прискорення вільного падіння	м/с ²
I _{xz} , I _{yz} , I _{xy} , I _p	Осьові, відцентровий та полярний моменти інерції площі	см ⁴
i _{xz} , i _y	Радіуси інерції поперечного перерізу відносно осей x та y	см
M _x , M _y , M _{z,кр}	Згинальні та крутний моменти в поперечному перерізі балки	кН·м
N; N _z	Потужність, поздовжня (осьова) сила	кВт; кН
n _n , n _b , n _t	Коефіцієнт запасу міцності: нормативний, по границі міцності та текучості	—
Q; Q _x , Q _y	Вага вантажу; поперечні сили в перерізі	кН
ρ	Радіус: полярний, кривизни; густина матеріалу	мм; кг/м ³
q	Інтенсивність розподіленого навантаження	кН/м
U	Потенціальна енергія деформування тіла	Дж/м ³
S _x , S _y	Статичні моменти інерції площі перерізу відносно осей x та y	см ³
W _x , W _y	Осьові моменти опору перерізу відносно головних центральних осей інерції x та y при згинанні	см ³
x, y, z	Осі поперечного перерізу (x,y) та поздовжня вісь (z) стержня; координати точки	— мм
α	Коефіцієнт лінійного розширення матеріалу; кут; теоретичний коефіцієнт концентрації напружень	1/град; град; —
γ	Кут зсуву; відносний зсув; питома вага матеріалу	град; —; кН/м ³
Δ	Абсолютне (кінцеве) переміщення; приріст переміщення; зазори	мм
ε; ε _x , ε _y , ε _z	Лінійна деформація та її складові частини	%
φ; Θ	Повний та відносний кути закручування	рад; рад/м
λ	Гнучкість стержня	—
μ	Коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона)	—
σ, τ	Нормальне та дотичне напруження	МПа
σ ₁ , σ ₂ , σ ₃ ; ε ₁ , ε ₂ , ε ₃	Головні нормальні напруження та головні деформації	МПа; %
σ _B , τ _B	Границі міцності матеріалу при розтяганні та крученні	МПа
σ _T , τ _T	Границі текучості матеріалу	МПа
[F]; [σ], [τ]; [f]; [ε]	Допустимі значення сили; напружень; перемішень і деформацій	кН; МПа; м; %

Таблиця 2 – Загальні дані для розв'язання задач

№ з/п	Основні механічні і фізичні властивості деяких матеріалів: прийняті величини, їх позначення та одиниці виміру	Прийняті середні значення названих характеристик матеріалів					
		сталь	мідь	алюміній та дюралюміній	бронза	чавун сірий	деревина вздовж волокон
1	Модуль поздовжньої пружності E , МПа	$2,0 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	$1,3 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^4$
2	Модуль пружності при зсуві G , МПа	$8,0 \cdot 10^4$	$4,8 \cdot 10^4$	$2,6 \cdot 10^4$	$4,5 \cdot 10^4$	$4,4 \cdot 10^4$	$6,3 \cdot 10^2$
3	Коефіцієнт поперечної деформації $\mu = \varepsilon_{\text{попер}} / \varepsilon_{\text{позд}}$	0,30	0,35	0,33	0,33	0,25	—
4	Коефіцієнт лінійного температурного розширення α , $1/\text{град}$	$12,5 \cdot 10^{-6}$	$16,5 \cdot 10^{-6}$	$22,5 \cdot 10^{-6}$	$17,5 \cdot 10^{-6}$	$10,4 \cdot 10^{-6}$	—

Пропонується така послідовність вивчення курсу „Опір матеріалів”.

Насамперед вивчається теоретичний матеріал за допомогою цього навчального посібника та літературних джерел [1-7]. Велику увагу слід приділити розумінню фізичної суті явищ, введенню спрощень щодо об'єктів і властивостей матеріалів. Це дає змогу перейти до аналізу наведених розв'язків типових задач.

Після цього треба більш детально засвоїти матеріал відповідного розділу з розв'язанням задач, умови яких наведено у [2, 8-9], а також дати відповіді на наведені запитання.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОЛОЖЕННЯ

1.1. Наука про опір матеріалів

Міцність – *здатність матеріалу конструкції, її частин та деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.*

Жорсткість – *здатність конструкції та її елементів протистояти деформуванню (змінюванню форми і розмірів у певних межах) під дією зовнішніх навантажень.* При заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певного значення, встановленого вимогами до конструкції.

Стійкість – *здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.*

Надійність – *це більш загальна характеристика об'єкта, що охоплює і міцність, і жорсткість, і довговічність, і інші показники, щоб конструкція безвідмовно виконувала свої функції в заданих умовах на протязі певного часу.*

При цьому конструкція повинна бути економічною. Вимоги міцності та економічності конструкцій знаходяться в постійному протиріччі. Їх діалектична єдність і боротьба зумовлюють розвиток науки про опір матеріалів.

У курсі теоретичної механіки тіла приймаються абсолютно твердими. На відміну від цього опір матеріалів враховує властивості деформування, тобто зміну геометричних розмірів і форми тіла.

Деформація тіл відбувається внаслідок навантаження їх зовнішніми силами або зміни температури.

Пружність – властивість тіла відновлювати свої початкові розміри і форму при розвантажуванні.

Пластичність – властивість матеріалу сприймати значні залишкові деформації без руйнування.

Крихкість – схильність матеріалів до руйнування при незначних деформаціях.

Опір матеріалів – теоретико-експериментальна наука. Дослід – теорія – дослід – така діалектика розвитку науки про опір твердих тіл деформуванню і руйнуванню. Однак, наука опору матеріалів не вичерпує всіх питань механіки деформівних тіл. Цими питаннями займаються й інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стержневих систем, теорія пружності та теорія пластичності. Основна ж роль в інженерному вирішенні задач міцності належить дисципліні „Опір матеріалів”.

У курсі „Опір матеріалів” приймається значна кількість припущень, спрощень та обмежень, які дають змогу вирішувати широке коло інженерних розрахунків на міцність, витривалість, жорсткість та стійкість конструктивних елементів, коли результати розрахунків добре узгоджуються з даними практичної їх перевірки.

1.2. Реальний об'єкт і його розрахункові схеми

В опорі матеріалів проведення розрахунку на міцність, жорсткість, стійкість реального об'єкта чи конструкції починають з вибору їх розрахункових схем.

Розрахункова схема – це реальний об'єкт, звільнений від несуттєвих особливостей. Для одного й того ж об'єкта може бути створена не одна

розрахункова схема, що в першу чергу залежить від того, що вважати найбільш істотним у кожному конкретному випадку навантаження і умов роботи.

1.3. Схематизація (моделювання) конструктивних елементів

У розрахункових схемах усю різноманітність конструктивних елементів, що застосовуються в спорудах і машинах, зведено до таких основних чотирьох форм:

1. **Стержень або брус** – тіло, в якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри. Прикладами є вали, осі, балки, труби, рейки, в тому числі елементи криволінійної форми (гвинтові пружини, гаки та елементи ланцюгів).

2. **Пластина** – тіло, в якого один розмір (товщина) значно менше за два інші. Пластинами можна вважати плоскі днища й кришки резервуарів, апаратів хімічних виробництв, плити перекриття тощо.

3. **Оболонка** – тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної (стінки тонкостінних резервуарів, стінки котлів, куполи будівельних споруд, корпуси літаків, ракет, підводних човнів тощо).

4. **Масив (масивні тіла)** – тіла, в яких усі три розміри одного порядку. До них належать фундаменти споруд, підпірні стінки, основи потужних пресів і верстатів тощо.

1.4. Схематизація опорних закріплень конструкцій

При формуванні розрахункової схеми все різноманіття існуючих опорних закріплень схематизують у вигляді **трьох основних типів опор**:

1. *Шарнірно-рухома опора* (можливі її зображення показані на рис. 1,а).
2. *Шарнірно-нерухома опора* (рис. 1,б).
3. *Жорстке закріплення або заземлення* (рис. 1,в).

У шарнірно-рухомій опорі виникає одна опорна реакція R (рис. 1,а), рівнозначна протидії одного опорного стержня. Така опора позбавляє опорний переріз одного ступеня вільності, тобто перешкоджає переміщенню в напрямку, перпендикулярному до опорної площини, але допускає переміщення паралельне цій площині і поворот опорного перерізу.

У шарнірно-нерухомій опорі виникають дві реакції R і H (рис. 1,б). Тут неможливі переміщення по напрямках опорних стержнів, але допускається поворот опорного перерізу.

При жорсткому закріпленні виникають у загальному випадку навантаження вертикальна R і горизонтальна H реакції та опорний (реактивний) момент M (рис. 1,в). При цьому опорний переріз має всі три в'язі, необхідні для його нерухомості в площині.

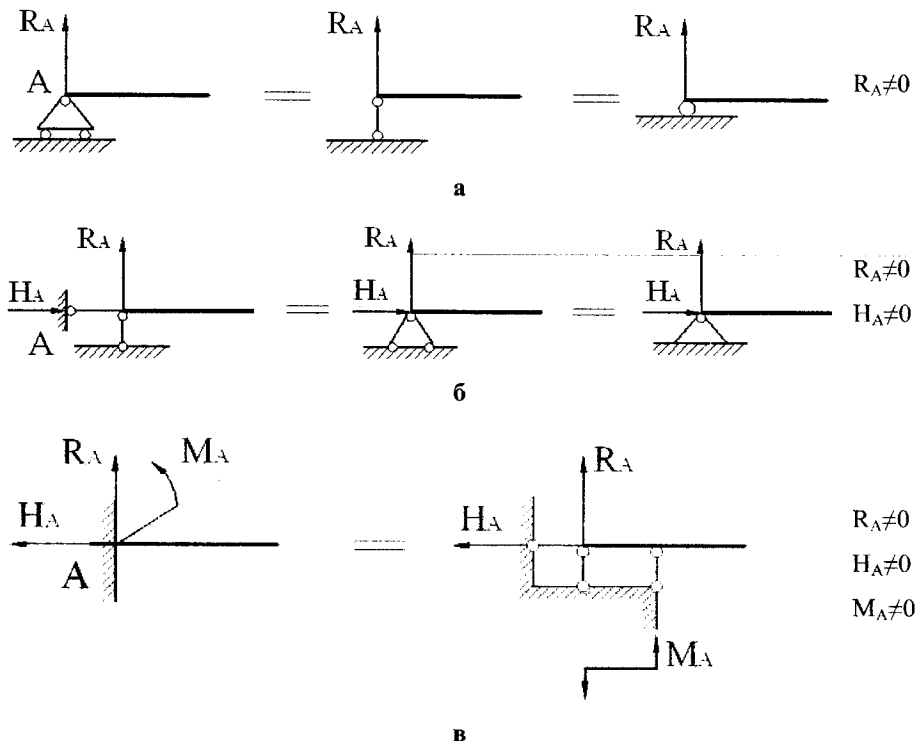


Рисунок 1.1 – Схематизація опорних закріплень стержня

Усі реакції вважаються прикладеними в точці перетину центральних осей перерізу стержня над опорою.

1.5. Припущення (гіпотези) стосовно властивостей матеріалів конструктивних елементів

- 1. Гіпотеза про суцільність матеріалу.** Припускається, що матеріал суцільно заповнює об'єм тіла, спростовуючи теорію дискретної будови речовини.
- 2. Гіпотеза про однорідність та ізотропність.** Вважається, що в будь-якій точці тіла та в будь-якому напрямі механічні властивості матеріалу однакові.
- 3. Гіпотеза про ідеальну пружність та природну ненапруженість матеріалу.** Припускається, що деформації, спричинені дією навантажень, після розвантаження повністю зникають, а початкові зусилля та напруження відсутні.

1.6. Класифікація та схематизація зовнішніх сил

1.6.1. Зовнішні сили навантаження

Із теоретичної механіки відомо, що зовнішні сили характеризують механічну взаємодію розглядуваного елемента конструкції з пов'язаними з ним тілами, тобто взаємодію окремих тіл між собою. В цьому розумінні власна вага тіла, що розподілена по всьому його об'єму, є зовнішньою силою як результат взаємодії тіла з Землею. Зовнішні сили, які діють на реальний об'єкт, майже завжди відомі. Поверхні тіла в місці контакту можуть бути досить складними. В залежності від вибору розрахункової схеми **зовнішні сили спрощують**: умовно уявляють зосередженими в обмеженому місці чи точці F (кН), або розподіленими по довжині стержня q (кН/м), по поверхні тіла P (кН/м²), чи по його об'єму γ (кН/м³).

Зазначимо, що рівнодійна рівномірно розподіленого навантаження F_q дорівнює добутку розподіленого навантаження q на довжину його дії l_i ($F_q = q \cdot l_i$, кН) і прикладена умовно посередині цієї довжини (ділянки стержня).

До категорії зовнішніх сил відносять реакції в'язей, що накладені на тіло для його рівноваги – так звані реакції опор (див. рис. 1.1). Приклади зображення зовнішніх сил навантаження показані на розрахункових схемах балок (рис. 1.2, а, б).

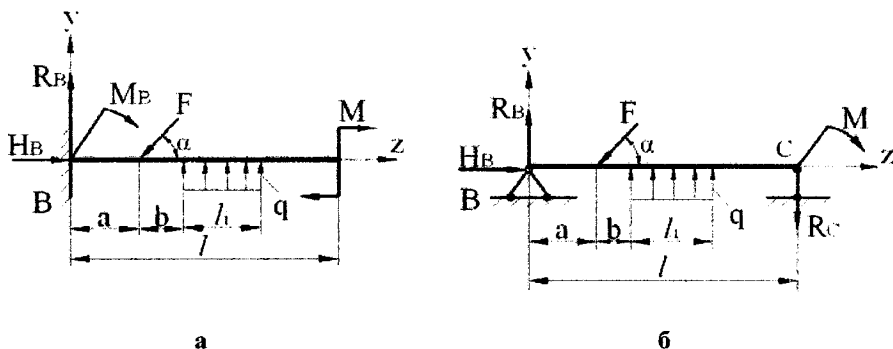


Рисунок 1.2 – Зображення зовнішніх сил на розрахункових схемах

Бувають такі навантаження, які не є наслідками контакту двох тіл, що взаємодіють, наприклад: власна вага Q , сила інерції тіла $F_{ин}$, що рухається, тощо. Ці сили прикладені в кожній точці об'єму, який займає тіло, і тому називаються об'ємними або масовими силами.

Навантаження вважається статичним, якщо воно постійне чи плавно зростає від нуля до свого значення, а далі залишається незмінним.

Динамічні навантаження супроводжуються значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що взаємодіють з ним.

Ударне навантаження вважається миттєво прикладеним (зростає від нуля до свого граничного значення за частки секунд).

Повторно-змінне навантаження, як правило, циклічно змінюється в часі.

У ненавантаженому стані між сусідніми частинками тіла (кристалами, молекулами, атомами) завжди є внутрішні сили взаємодії, що прагнуть зберегти його як єдине ціле, тобто перешкоджають зміні взаємного розташування частинок. Зовнішні сили, які діють на тіло, деформують його і зумовлюють появу в тілі протидіючих внутрішніх сил пружності, які проявляють себе в пружній віддачі при розвантаженні.

В опорі матеріалів вивчають і визначають саме ці **додаткові внутрішні сили**, які з'являються між частинами тіла при його навантаженні. Ці сили взаємодії називають **внутрішніми силами пружності**, і саме їх потрібно знати для **виконання розрахунків на міцність, жорсткість** тощо. Для виявлення **внутрішніх сил пружності**, а потім і визначення їх величини, застосовують **метод перерізів**. Розглянемо його зміст.

1.7. Зміст методу перерізів

Розглянемо стержень, навантажений самозрівноваженою системою сил (рис. 1.3,а). У місці, яке нас цікавить, уявно розсічемо його площиною P на дві частини I і II.

Відкинемо уявно одну з відокремлених частин тіла, наприклад ліву, помічену знаком I, замінивши її дію на залишену праву (II) частину системою внутрішніх сил пружності (**ВСП** – рис. 1.3,б). Внутрішні сили пружності віддзеркалюють взаємодію між частинами тіла, розташованими по різні боки від проведеного перерізу P . За принципом дії і протидії внутрішні сили пружності завжди взаємні: права відсічена частина стержня діє на ліву точно так само, як і ліва на праву, а це означає, **що внутрішні сили пружності можуть визначатися з умов рівноваги як лівої відсіченої частини тіла (стержня), так і правої**, бо під дією внутрішніх сил пружності і частини зовнішніх сил кожна з відокремлених частин I і II перебуває у рівновазі.

У загальному випадку внутрішні сили пружності розподілені по перерізу нерівномірно і направлені різноманітно, а тому визначити кожен з них тільки з

рівнянь рівноваги неможливо. Але з курсу теоретичної механіки відомо, що будь-яку довільну систему сил можна звести до головного вектора $\vec{R}$ та головного момента $\vec{M}$ (рис. 1.3,а). Виберемо в центрі перерізу прямокутну систему координат x, y, z так, що вісь z буде нормаллю до перерізу, а осі x і y лежатимуть у самому перерізі. Якщо головний вектор внутрішніх сил та вектор головного момента спроекувати на поздовжню вісь стержня z та головні центральні осі перерізу x та y , то в перерізі можна уявити **шість внутрішніх силових факторів** (рис.1.3,б): **три сили** (N_z, Q_x, Q_y) і **три моменти** (M_x, M_y, M_z).

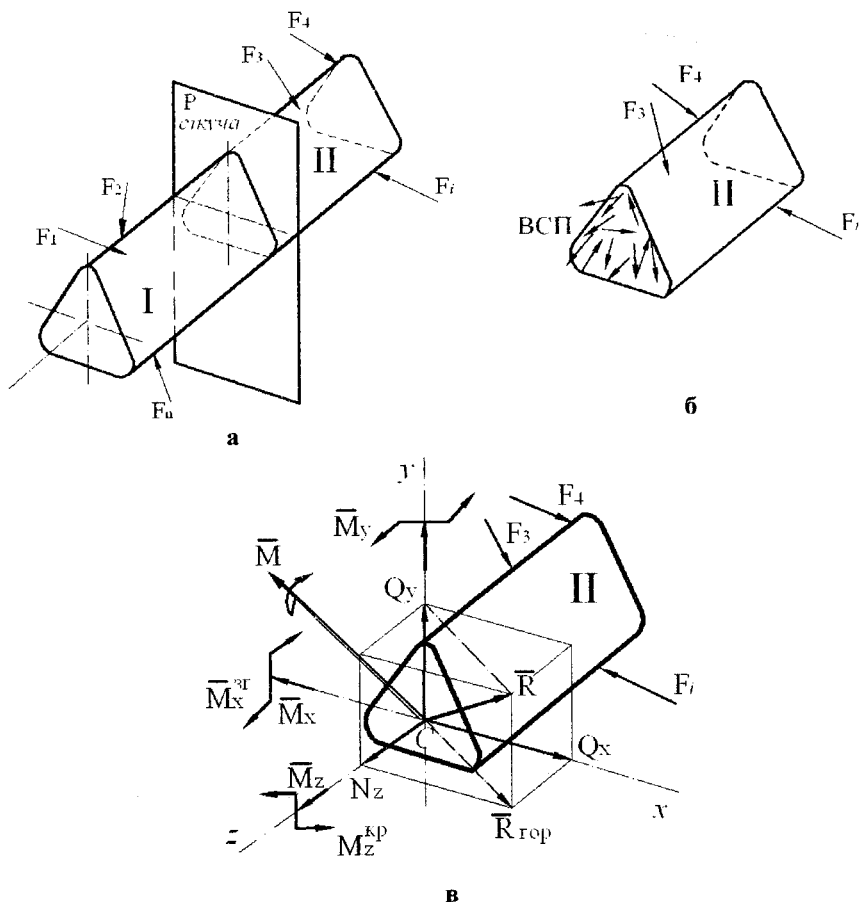


Рисунок 1.3 – До визначення внутрішніх силових факторів

1.8. Внутрішні силові фактори

Внутрішні силові фактори позначають та називають так:

N_z – поздовжня (осьова, нормальна) сила;

Q_x, Q_y – поперечні (перерізуючі) сили;

M_x, M_y – згинальні моменти;

M_z – крутний момент, який іноді позначають як $M_{кр}$ чи M_k .

Поздовжня сила N_z – проекція головного вектора $\vec{R}$ внутрішніх сил пружності в перерізі на вісь, яка є нормаллю до перерізу.

Поперечні сили в перерізі Q_x та Q_y – проекції головного вектора $\vec{R}$ внутрішніх сил пружності в перерізі на головні центральні осі перерізу x та y відповідно.

Крутний момент M_z (або $M_{кр}$) – проекція вектора головного моменту $\vec{M}$ внутрішніх сил пружності в перерізі на нормаль z до перерізу.

Згинальні моменти в перерізі M_x та M_y – проекції вектора головного моменту $\vec{M}$ внутрішніх сил у перерізі на головні центральні осі перерізу x та y .

Внутрішні сили незалежно від того, як вони розподілені в перерізі, повинні задовольняти умовам рівноваги розглядуваної (в нашому випадку правої II частини). Таким чином, наступним етапом методу перерізів є складання рівнянь рівноваги для тієї частини тіла, яку залишили для розгляду:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} + Q_x = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} + Q_y = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} + N_z = 0;$$
$$\sum_{i=1}^n M_{ix} + M_x = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} + M_y = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} + M_z = 0,$$

де n – кількість зовнішніх сил по одну сторону від розглядуваного перерізу.

Із цих шести рівнянь рівноваги однієї з відсічених частин тіла витікає, що будь-який внутрішній силовий фактор чисельно визначається як алгебраїчна сума проекцій на відповідну вісь перерізу (або моментів відносно цих осей)

тільки тих зовнішніх сил (чи моментів), якими навантажена ця відсічена частина.

Алгоритм застосування методу перерізів наведено на рис. 1.4.

1.9. Види опору (деформацій)

У відповідності з внутрішніми силовими факторами, що виникають у перерізах стержня, розрізняють такі **види простого опору**:

1. **Осьове розтягання, стискання** – це вид опору, при якому в поперечних перерізах стержня виникає тільки поздовжня сила N_z .
2. **Зріз (чистий зсув)** – це вид опору, при якому в поперечних перерізах виникає тільки поперечна сила Q_y (чи Q_x).
3. **Кручення** – це вид опору, при якому в поперечних перерізах виникає тільки крутний момент $M_{кр}$.
4. **Чисте згинання** – це вид опору, при якому в поперечних перерізах виникає тільки згинальний момент M_x (чи M_y).

Можливі випадки, коли в поперечних перерізах виникає два і більше **внутрішніх силових факторів одночасно**, тоді має місце **складний опір**. Так, при згинанні зовнішніми силами в перерізах стержня найчастіше виникають як згинальний момент, так і поперечна сила. У цьому випадку має місце поперечний згин, як складний вид опору.

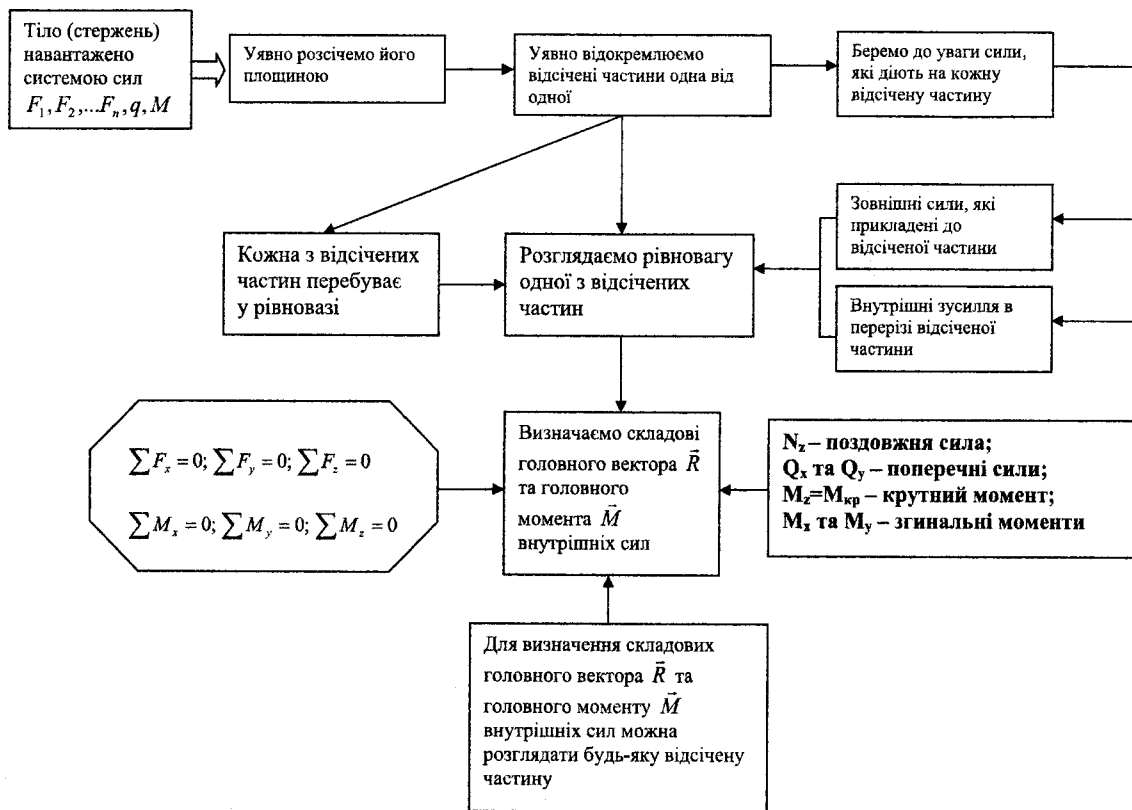


Рисунок 1.4 – Алгоритм застосування методу перерізів для виявлення та визначення внутрішніх силових факторів

1.10. Побудова епюр внутрішніх силових факторів

1.10.1. Вимоги до побудови епюр

Графік, що показує, як змінюється внутрішній силовий фактор вздовж осьової лінії стержня, називають епюрою.

Для побудови епюр внутрішніх силових факторів їх визначають лише в характерних перерізах стержня (бруса), а саме: на початку і в кінці кожної навантаженої ділянки, а також там, де внутрішні сили фактори -- екстремальні.

1. Вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна з віссю стержня. Поряд з віссю епюри записують назву внутрішнього силового фактора і одиницю виміру в СІ, відокремлену комою.
2. Ординати епюри, тобто значення внутрішнього силового фактора, відкладають від осі по перпендикуляру в певному масштабі. У межах кожної ділянки нанесені точки з'єднують лініями відповідно до закону розподілу навантаження і функції внутрішнього силового фактора.
3. Епюра повинна бути замкнутою.
4. Можна навести ординати епюри лініями, перпендикулярними до бази, які і віддзеркалюють відповідні значення внутрішнього силового фактора.
5. Зовні поля епюри проставляють абсолютні значення чисел, що показують значення характерних ординат, а в полі епюри в кружках ставлять їх знак.
6. Числа та літери необхідно писати чітко.
7. Небажано розривати або змішувати графічну інформацію, тобто одну частину, наприклад, розрахункову схему розмістити на одному аркуші паперу, а епюри – на іншому, та розміщати їх зі зміщеннями на одному аркуші.

1.10.2. Побудова епюр поздовжніх сил

Поздовжня сила N_z в перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на нормаль до перерізу тільки тих зовнішніх сил, що прикладені по одну сторону від розглядуваного перерізу.

Правило знаків для N_z : умовимося вважати поздовжню силу в перерізі додатною, якщо зовнішня сила, прикладена до розглянутої відсіченої частини стержня, викликає розтягання (рис. 1.5,а) та від'ємною – у протилежному випадку (рис. 1.5,б).

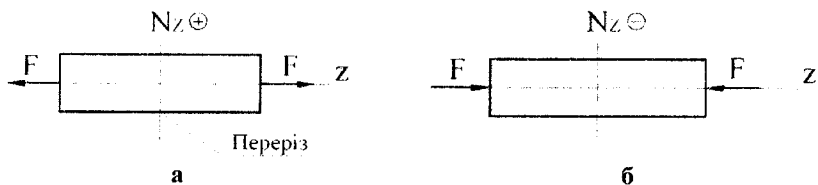


Рисунок 1.5 — Правило знаків для обчислення N_z

Приклад 1.1. Побудувати епюру поздовжніх сил для жорстко затисненого лівим кінцем стержня (рис. 1.6,а).

Вихідні дані: $F = 14,5 \text{ кН}$; $q = 9 \text{ кН/м}$.

Розв'язання.

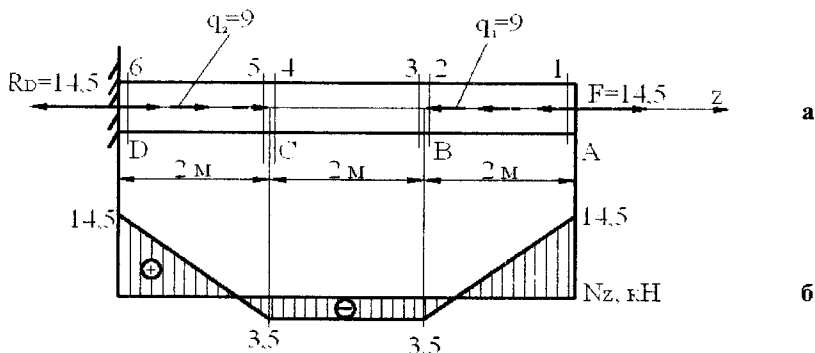


Рисунок 1.6 – Зовнішні сили навантаження F , q (а) та епюра поздовжніх сил N_z (б)

Обчислимо опорну реакцію

$$\sum F_z = 0; \quad -R_D + q_2 \cdot 2 - q_1 \cdot 9 + F = 0; \quad R_D = 14,5 \text{ кН}.$$

Зауваження. У даному випадку можна обійтись без обчислення реакції опори R_D , але тоді при обчисленні поздовжньої сили слід розглядати зовнішні сили *тільки справа від розгляданого перерізу*. Обчислення в цьому випадку простіші.

Ділимо стержень на ділянки AB , BC та CD , де зовнішнє навантаження відсутнє або міняється за одним законом.

Вісь z спрямовуємо вздовж осі стержня.

Намічаємо характерні перерізи 1...6 – на початку і в кінці кожної ділянки стержня.

Обчислюємо поздовжню силу N_z в кожному характерному перерізі, починаючи з правого торця бруса:

$$N_{z,1} = F = 14,5 \text{ кН};$$

$$N_{z,2} = F - q_1 \cdot 2 = 14,5 - 18 = -3,5 \text{ кН} = N_{z,3} = N_{z,4} = N_{z,5}.$$

Розглядаючи ліву відсічену частину бруса:

$$N_{z,6} = R_d = 14,5 \text{ кН};$$

$$N_{z,5} = R_d - q_2 \cdot 2 = 14,5 - 18 = -3,5 \text{ кН}.$$

Значення $N_{z,5} = -3,5 \text{ кН}$ ліворуч і праворуч від перерізу 5-го збігаються, що підтверджує правильність виконаних розрахунків.

За знайденими значеннями будемо епору N_z (рис. 1.6,б).

Додатні значення відкладаються (в обраному масштабі) над віссю епори, від'ємні – під віссю.

Приклад 1.2. Побудувати епору N_z для східчастого стержня з урахуванням його власної ваги (рис. 1.7,а).

Вихідні дані: $A = 14 \text{ см}^2$; $a = 4,8 \text{ м}$; $b = 2,2 \text{ м}$; $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$; $F = 1,6 \text{ кН}$.

Розв'язання.

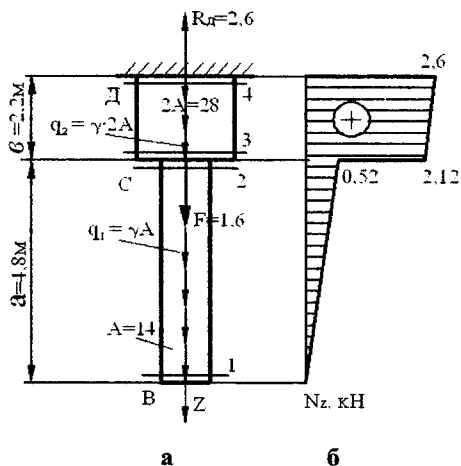


Рисунок 1.7 – Зовнішні сили навантаження F , q (а) та епюра поздовжніх сил N_z (б)

Запишемо рівняння рівноваги всього бруса

$$\sum F_z = 0; \quad \gamma \cdot A \cdot a + F + \gamma \cdot 2A \cdot b - R_d = 0.$$

Обчислимо опорну реакцію

$$R_d = 78 \cdot 14 \cdot 10^{-4} \cdot 4,8 + 1,6 + 78 \cdot 28 \cdot 10^{-4} \cdot 2,2 = 2,6 \text{ кН}.$$

Намічаємо характерні перерізи 1...4.

Обчислимо поздовжню силу в кожному перерізі, починаючи з нижнього перерізу 1:

$$N_{z,1} = \gamma \cdot A \cdot 0 = 0$$

$$N_{z,2} = \gamma \cdot A \cdot a = 78 \cdot 14 \cdot 10^{-4} \cdot 4,8 = 0,52 \text{ кН};$$

$$N_{z,3} = N_{z,2} + F = 0,52 + 1,6 = 2,12 \text{ кН};$$

$$N_{z,4} = N_{z,3} + \gamma \cdot 2A \cdot b = 2,12 + 78 \cdot 28 \cdot 10^{-4} \cdot 2,2 = 2,6 \text{ кН}.$$

Розглядаючи верхню відсічену частину бруса на рівні перерізу 4, визначимо

$$N_{z,4} = R_d = 2,6 \text{ кН} \text{ — розрахунки проведено без помилок, тобто обчислення вірні.}$$

За знайденими значеннями будуємо епюру N_z (рис. 1.7,б).

Зауваження. Епюри N_z (див. рис. 1.6,б та рис. 1.7,б) дають змогу зробити такі практичні висновки:

1. Проаналізувати, як змінюється значення поздовжньої сили N_z вздовж осдової лінії стержня.
2. Вибрати переріз, в якому значення поздовжньої сили максимальне N_{zmax} . Такий переріз за умови $A = \text{const}$ по довжині стержня називають **небезпечним перерізом**. На епюрі (рис. 1.6,б) перерізи А і Д — небезпечні ($N_{z,A} = N_{z,D} = N_{zmax} = 14,5 \text{ кН}$), а на епюрі (рис. 1.7,б) переріз Д — небезпечний ($N_{zmax} = N_{z,D} = 2,6 \text{ кН}$).

Для небезпечного перерізу проводяться відповідні розрахунки на міцність, про які мова йтиме у подальших розділах цього посібника.

1.10.3. Побудова епюр крутних моментів

Крутний момент $M_{кр}$ у перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених по одну сторону від розглянутого перерізу, відносно нормалі.

Прийmemo схематично таке **правило знаків** для $M_{кр}$ (рис. 1.8,а — крутний момент у перерізі додатний; рис. 1.8,б — крутний момент у перерізі від'ємний).

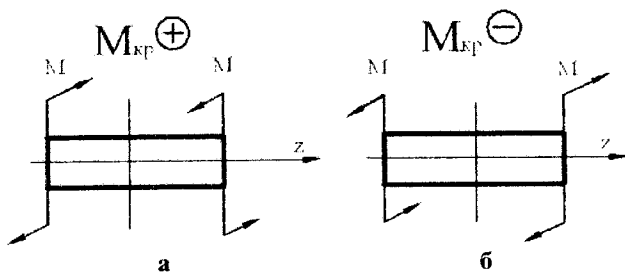


Рисунок 1.8 – Правило знаків для обчислення $M_z = M_{kp}$

Приклад 1.3. Побудувати епою крутних моментів для жорстко затисненого лівим кінцем стержня (рис. 1.9,а).

Вихідні дані: $M = 14,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $m = 5 \text{ кН}\cdot\text{м/м}$.

Розв'язання.

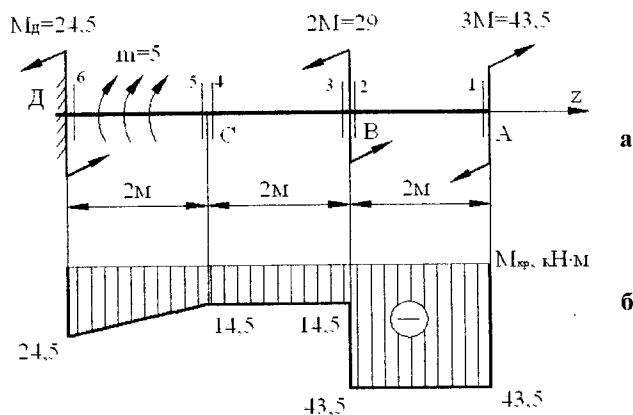


Рисунок 1.9 – Зовнішні моменти M , m (а) та епою внутрішніх (крутних) моментів M_{kp} (б)

Обчислюємо опорний момент M_D

$$\sum M_z = 0; \quad -3M + 2M - m \cdot 2 + M_D = 0; \quad M_D = 24,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Поділимо стержень на ділянки AB , BC та CD .

Намічаємо характерні перерізи 1...6.

Обчислюємо крутний момент у кожному перерізі:

- з правого боку:

$$M_{кр,1} = -3M = -43,5 \text{ кН}\cdot\text{м} = M_{кр,2};$$

$$M_{кр,3} = M_{кр,2} + 2M = -43,5 + 29 = -14,5 \text{ кН}\cdot\text{м} = M_{кр,4};$$

$$M_{кр,4} = M_{кр,5} = -14,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

- з лівого боку:

$$M_{кр,6} = -M_d = -24,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр,5} = -M_d + m \cdot 2 = -24,5 + 10 = -14,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки в перерізі $M_{кр,5}$ що з лівого, що з правого боку однаковий.

За знайденими значеннями будуємо епюру $M_{кр}$ (рис. 1.9,б).

1.10.4. Правила контролю епюр поздовжніх сил та крутних моментів

Для епюр поздовжніх сил та крутних моментів характерні деякі закономірності, знання яких дозволяє оцінити правильність виконаних розрахунків і побудови епюр.

1. Епюри N_z і $M_{кр}$ завжди прямолінійні, якщо q та m постійні.
2. На ділянці, де немає розподільного навантаження, епюра N_z чи $M_{кр}$ — пряма, паралельна осі стержня, а на ділянці під розподіленням навантаженням — похила пряма.

3. У місці прикладення зосередженої сили на епюрі N_z має місце кінцевий розрив функції (так званий «стрибок») на величину цієї сили, аналогічно в місці прикладеного зосередженого момента на епюрі $M_{кр}$ буде стрибок на величину цього момента. Напрями стрибків на епюрах повинні узгоджуватися з вибраним правилом знаків.

На рис. 1.10 наведено алгоритм побудови епюри N_z та епюри $M_{кр}$.

1.10.5. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів

Стержень, що зазнає згинання, називають балкою. В поперечних перерізах балки, навантаженої силами, виникають у загальному випадку навантаження два внутрішніх силових фактори — поперечна сила Q_y і згинальний момент M_x .

Поперечна сила в перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на поперечну вісь тільки тих зовнішніх сил, що прикладені по одну сторону від розглядуваного перерізу.

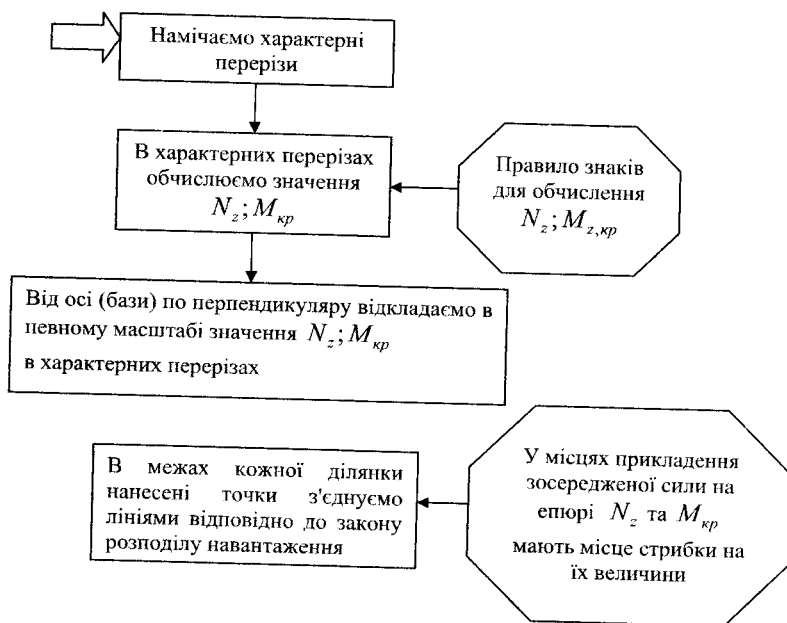


Рисунок 1.10 – Алгоритм побудови епюри N_z та епюри $M_{кр}$

Правило знаків для Q_x : умовимося вважати **поперечну силу** в перерізі **додатною**, якщо зовнішнє навантаження, прикладене до розглянутої відсіченої частини, прагне повернути даний переріз за ходом годинникової стрілки (рис. 1.11,*а*) і **від'ємною** – у протилежному напрямі (рис. 1.11,*б*).

Схематично це правило знаків можна уявити так:

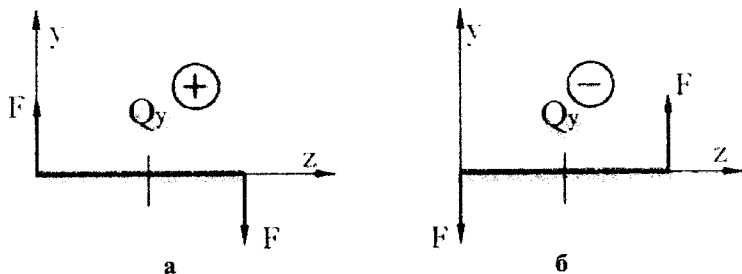


Рисунок 1.11 – Правило знаків для обчислення Q_y

Згинальний момент у перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно поперечної вісі тільки тих зовнішніх сил, що прикладені по одну сторону від розглядуваного перерізу.

Правило знаків для M_x : умовимося вважати згинальний момент у перерізі **додатним**, якщо зовнішнє навантаження, прикладене до правої розглянутої відсіченої частини, повертає її проти ходу годинникової стрілки (рис. 1.12,а) і **від'ємним** – у протилежних випадках (рис. 1.12,б).

Схематично це правило знаків можна подати у вигляді:

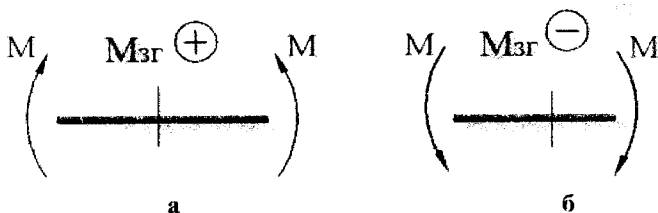


Рисунок 1.12 – Правило знаків для обчислення M_x

Слід зазначити, що при такому правилі знаків епюра M_x завжди виявляється побудованою з боку стиснутих волокон.

Розглянемо побудови епюр для найхарактерніших випадків навантажування балок.

- Навантаження зосередженою силою F (рис. 1.13,а).

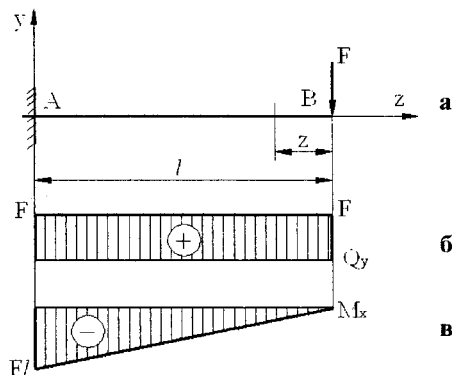


Рисунок 1.13 – Зовнішнє навантаження балки зосередженою силою F (а) та епюри поперечних сил Q_y (б) і згинальних моментів M_x (в)

Визначимо Q_y та M_x в довільному перерізі з абсцисою z

$$Q_y(z) = F; \quad M_x(z) = -F \cdot z; \quad 0 \leq z \leq l.$$

Із рівнянь видно, що поперечна сила однакова в усіх перерізах балки, тому $Q_y(z) = \text{const}$. Функція $M_x(z)$ – лінійна. Для її побудови досить знайти дві ординати – на початку та в кінці ділянки:

$$\text{при } z = 0 \text{ (переріз B)} \quad M_{x,B} = 0;$$

$$\text{при } z = l \text{ (переріз A)} \quad M_{x,A} = -F \cdot l.$$

Будуємо епюри Q_y (рис. 1.13, б) і M_x (рис. 1.13, в).

- Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q (рис. 1.14, а).

Визначаємо Q_y та M_x в довільному перерізі з абсцисою z :

$$Q_y(z) = -q \cdot z; \quad M_x(z) = -q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2}; \quad 0 \leq z \leq l.$$

Отже, поперечна сила $Q_y(z)$ змінюється за прямолінійним законом, а згинальний момент $M_x(z)$ – за параболічним законом. Для побудови епюри Q_y визначаємо ординати в двох перерізах:

$$\text{при } z = 0 \text{ (переріз A)} \quad Q_{y,A} = 0;$$

$$\text{при } z = l \text{ (переріз B)} \quad Q_{y,B} = -q \cdot l$$

і проводимо пряму лінію (рис. 1.14, б). Враховуючи, що епюра $M_x(z)$ криволінійна, для її побудови знаходимо ординати в трьох перерізах:

при $z = 0$ (переріз A) $M_{x,A} = 0$;

при $z = \frac{\ell}{2}$ (посередині балки, переріз C) $M_{x,C} = -q \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{4} = -\frac{q\ell^2}{8}$;

при $z = \ell$ (переріз B) $M_{x,B} = -q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = -\frac{q\ell^2}{2}$

і проводимо через три точки криву лінію.

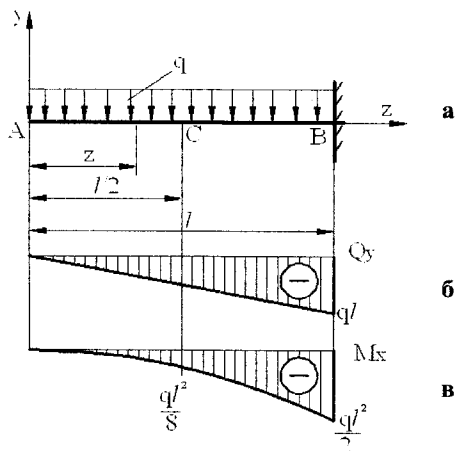


Рисунок 1.14 – Рівномірно розподілене навантаження q (а), епюри поперечних сил Q_y (б) і згинальних моментів M_x (в)

Приклад 1.4. Побудувати епюри поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_x для балки з довільним навантаженням (рис. 1.15,а).

Вихідні дані: $F = 10 \text{ кН}$; $q = 10 \text{ кН/м}$; $M = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Розв'язання.

Обчислюємо реакції опори консольної балки

$$\sum M_B = 0; \quad -M + q \cdot 2,4 \cdot 4,8 - F \cdot 3,6 - M_B = 0; \quad M_B = 72,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sum F_y = 0; \quad -q \cdot 2,4 + F + R_B = 0; \quad R_B = 14 \text{ кН}.$$

Намічаємо характерні перерізи 1...4 на початку і в кінці кожної ділянки навантаження.

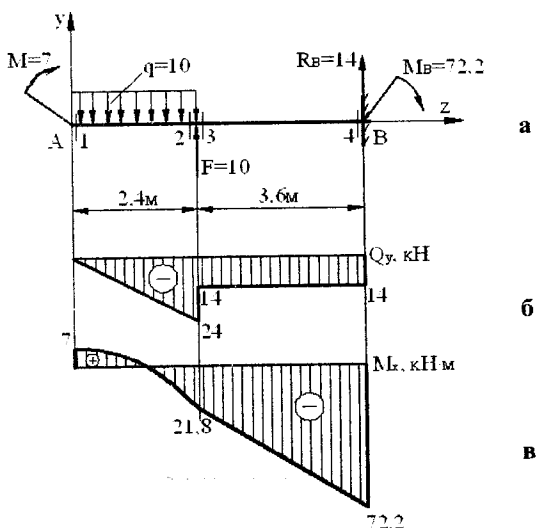


Рисунок 1.15 – Навантаження консольної балки (а) та епюри поперечних сил Q_y (б) і згинальних моментів M_x (в)

Визначасмо поперечні сили в цих перерізах з урахуванням правила знаків для Q_y (див. рис. 1.11, а, б):

$$Q_{y,1} = -q \cdot 0 = 0;$$

$$Q_{y,2} = -q \cdot 2,4 = -10 \cdot 2,4 = -24 \text{ кН};$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,2} + F = -24 + 10 = -14 \text{ кН};$$

$$Q_{y,4} = -R_B = -14 \text{ кН} = Q_{y,3}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки в 3-му перерізі $Q_{y,3}$ що зліва, що зправа однакові.

За знайденими значеннями будуємо епюру Q_y (рис. 1.15, б).

Визначасмо згинальні моменти в характерних перерізах з урахуванням правила знаків для M_x (див. рис. 1.12, а, б).

$$M_{x,1} = M = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,2} = M - q \cdot \frac{2,4^2}{2} = 7 - 10 \cdot \frac{2,4^2}{2} = -21,8 \text{ кН} \cdot \text{м} = M_{x,3};$$

$$M_{x,4} = -M_B = -72,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,3} = -M_B + R_B \cdot 3,6 = -72,2 + 14 \cdot 3,6 = -21,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки $M_{x,3}$, обчислені зліва і зправа, – однакові.

За знайденими значеннями будуємо епюру M_x (рис. 1.15, в). Аналіз епюри M_x показує, що переріз В – небезпечний; $M_{x, \max} = 72,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Приклад 1.5. Побудувати епюри Q_y , M_x для балки з шарнірними опорами (рис. 1.16,а).

Вихідні дані: $F = 10 \text{ кН}$; $q = 10 \text{ кН/м}$; $M = 7 \text{ кН·м}$.

Розв'язання.

Обчислюємо реакції опор

$$\sum M_B = 0; \quad M - q \cdot 4,8 \cdot 3,6 + R_C \cdot 3,6 + F \cdot 6 = 0; \quad R_C = 29,4 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0; \quad M - R_A \cdot 3,6 + q \cdot \frac{2,4^2}{2} - q \cdot \frac{2,4^2}{2} + F \cdot 2,4 = 0; \quad R_A = 8,6 \text{ кН}.$$

Перевірка обчислення реакцій

$$\sum F_y = 0; \quad R_A - q \cdot 4,8 + R_C + F = 8,6 - 10 \cdot 4,8 + 29,4 + 10 = 0.$$

Намічаємо характерні перерізи 1...6 на початку і в кінці кожної ділянки навантаження.

Обчислюємо поперечні сили в цих перерізах, розглядаючи спочатку ліву:

$$Q_{y,1} = R_A = 8,6 \text{ кН} = Q_{y,2} = Q_{y,3};$$

$$Q_{y,4} = R_A - q \cdot 2,4 = 8,6 - 10 \cdot 2,4 = -15,4 \text{ кН};$$

$$Q_{y,5} = Q_{y,4} + R_C = -15,4 + 29,4 = 14,0 \text{ кН},$$

а потім праву відсічені частини балки:

$$Q_{y,6} = -F = -10 \text{ кН};$$

$$Q_{y,5} = -F + q \cdot 2,4 = -10 + 10 \cdot 2,4 = 14,0 \text{ кН}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки $Q_{y,5}$ що з лівого, що з правого боку однакові.

За знайденими значеннями будуємо епюру Q_y (рис. 1.16,б).

Епюра Q_y перетинає вісь у точках D і E . Це свідчить про те, що у цих перерізах момент M_x буде мати екстремальні значення (див. п.п.1.10.6). Для визначення положення цих перерізів необхідно записати функцію $Q_y(z) = 0$ для ділянок, де діє q :

$$Q_{y,E} = -F + q \cdot Z_E = 0; \quad Z_E = \frac{F}{q} = \frac{10}{10} = 1,0 \text{ м},$$

приймаючи до уваги праву відсічену частину балки;

$$Q_{y,D} = R_A - qZ_D = 0; \quad Z_D = \frac{8,6}{10} = 0,86 \text{ м},$$

приймаючи до уваги ліву відсічену частину балки.

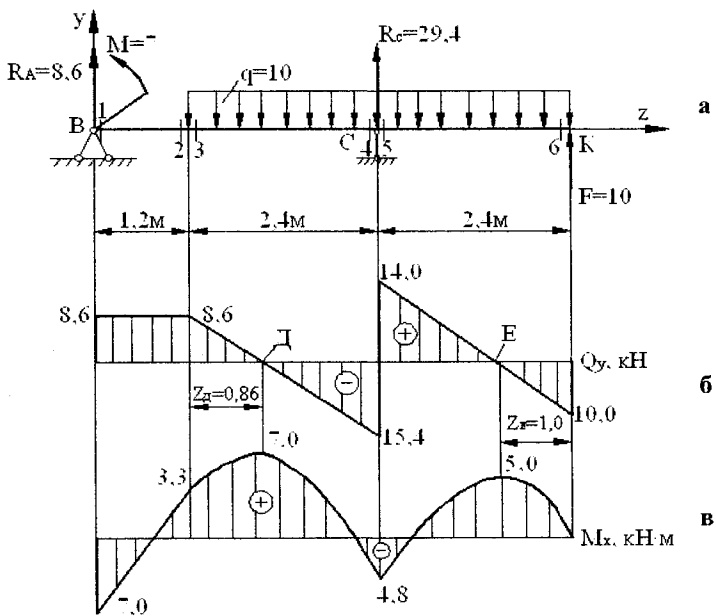


Рисунок 1.16 – Балка з шарнірними опорами (а) та епюри поперечних сил Q_y (б) і згинальних моментів M_x (в)

Обчислимо згинальні моменти в характерних перерізах, розглядаючи ліву відсічену частину балки:

$$M_{x,1} = -M = -7,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,2} = -M + R_A \cdot 1,2 = -7 + 8,6 \cdot 1,2 = 3,3 \text{ кН} \cdot \text{м} = M_{x,3};$$

$$M_{x,extr} = M_{x,4} = R_A \cdot 2,06 - M - q \frac{0,86^2}{2} = 8,6 \cdot 2,06 - 7 - 3,7 = 7,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,4} = -M + R_A \cdot 3,6 - q \frac{2,4^2}{2} = -7 + 8,6 \cdot 3,6 - 10 \frac{2,4^2}{2} = -4,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,5} = M_{x,4} = -4,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

розглядаючи тепер праву відсічену частину:

$$M_{x,6} = 0; \quad M_{x,extr} = M_{x,E} = F \cdot 1,0 - q \frac{1,0^2}{2} = 10 \cdot 1,0 - 10 \cdot 0,5 = 5,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,5} = F \cdot 2,4 - q \frac{2,4^2}{2} = 10 \cdot 2,4 - 10 \frac{2,4^2}{2} = -4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки $M_{x,5}$ що з лівого, що з правого боку однакові.

За знайденими значеннями будемо епюру M_x (рис. 1.16,а). Аналіз показує, що перерізи В і Д – небезпечні: $M_{x\max} = 7,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

При побудові та перевірці епюру Q_y та M_x використовуються диференціальні залежності між q , Q_y і M_x .

1.10.6. Диференціальні залежності при згинанні

Визначимо деякі характерні особливості епюру поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_x , знання яких полегшує побудову епюру і дає змогу певною мірою контролювати їх правильність.

Розглянемо балку з довільним навантаженням (рис. 1.17,а).

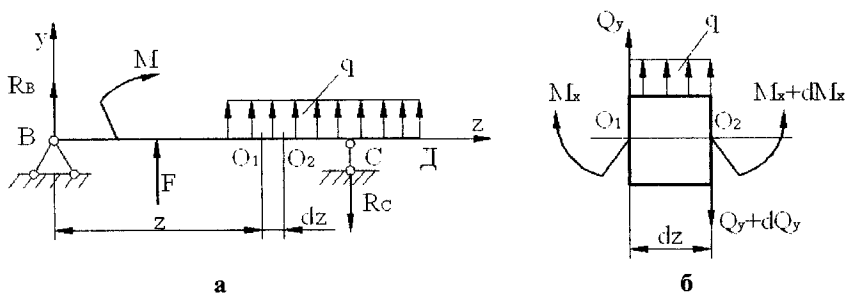


Рисунок 1.17 – До диференціальних залежностей між q , Q_y , M_x

Двома перерізами виділимо малий елемент O_1O_2 довжиною dz . Оскільки в загальному випадку навантаження значення Q_y і M_x змінюються вздовж осі балки, то в перерізі O_1 маємо Q_y і M_x , а в перерізі O_2 маємо $Q_y + dQ_y$ і $M_x + dM_x$. Елемент O_1O_2 (рис. 1.17,б) перебуває в рівновазі під дією зовнішнього навантаження, поперечних сил та згинальних моментів у перерізах O_1 і O_2 . Із умови рівноваги виділеної елементарної ділянки балки завдовжки dz одержуємо

$$\sum F_y = 0; \quad Q_y + qdz - (Q_y + dQ_y) = 0;$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = q; \tag{1.1}$$

$$\sum M_{O_1} = 0; \quad -M_x - Q_y \cdot dz - q \frac{dz^2}{2} + (M_x + dM_x) = 0.$$

Нехтуючи членом другого порядку малості $q \frac{dz^2}{2}$, одержуємо

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y. \quad (1.2)$$

Взявши похідну від рівняння (1.2) і враховуючи (1.1), знайдемо

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q. \quad (1.3)$$

Співвідношення (1.1)...(1.3) і є диференціальними залежностями при згинанні.

Аналіз прикладів 1.4 і 1.5 та залежностей (1.1)...(1.3) дають змогу встановити особливості епюр поперечних сил та згинальних моментів.

1.10.7. Деякі особливості епюр Q_y і M_x

1. На ділянках, де немає розподіленого навантаження q , епюра Q_y окреслюється прямими, паралельними базі (рис. 1.13,б), а епюра M_x в загальному випадку – похилими прямими (рис. 1.13,в).
2. На ділянках, де до балок прикладене рівномірно розподілене навантаження q , епюра Q_y є похилою прямою (рис. 1.14,б), а епюра M_x — квадратичною параболою (рис. 1.14,в), причому опуклість кривої звернена назустріч навантаженню q .
3. Якщо на ділянці під рівномірно розподіленим навантаженням епюра Q_y перетинає базу ($Q_y = 0$) (рис. 1.16,б: точки D і E), то в цьому перерізі має місце екстремум M_{extr} (див. рис. 1.16,в: перерізи D і E).
4. На ділянках з поперечною силою Q_y одного знака епюра M_x має однакову монотонність. Так, при $Q_y > 0$ $M_x(z)$ зростає зліва направо; при $Q_y < 0$ зменшується.
5. Порядок лінії на епюрі M_x завжди на одиницю вищий ніж на епюрі Q_y . Наприклад, якщо епюра $Q_y(z)$ – похила пряма, то епюра $M_x(z)$ – квадратична парабола; якщо Q_y на ділянці – пряма, паралельна осі стержня, то M_x – похила пряма; на ділянці, де $Q_y = 0$, $M_x = \text{const}$.

6. Під перерізом, де діє зосереджена сила (реакція), на епюрі Q_y обов'язково повинен бути стрибок на величину цієї сили (див., наприклад, на рис. 1.16,б в перерізах B, C, K). Аналогічно, під перерізом, де діє зосереджений момент, на епюрі M_x обов'язковий стрибок на величину цього моменту (див. рис. 1.16,в, переріз B).

На рис. 1.18 наведено алгоритм побудови епюр Q_y та M_x .

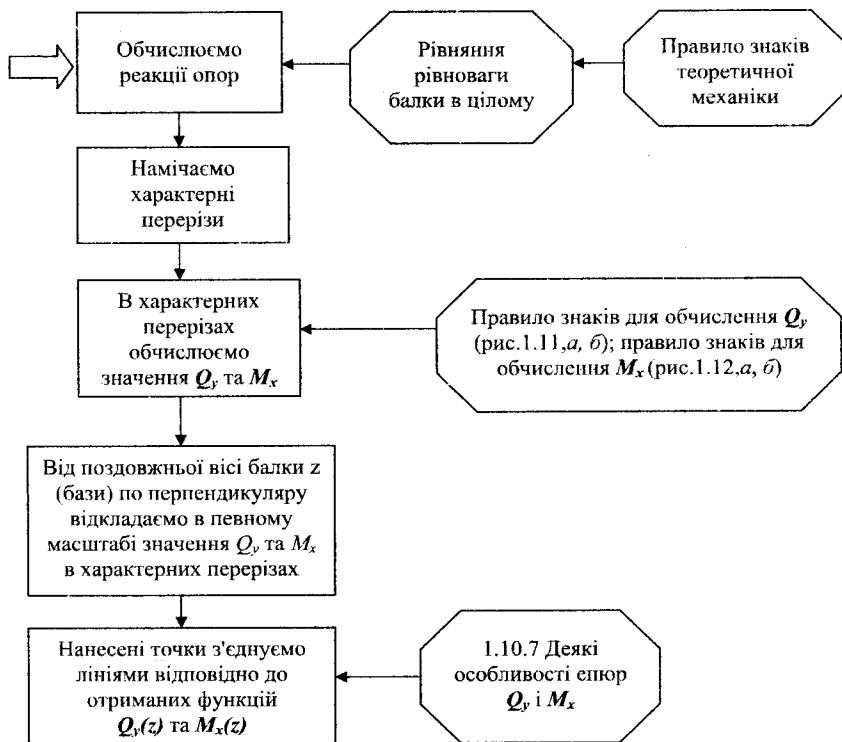


Рисунок 1.18 – Алгоритм побудови епюр Q_y та M_x

1.11. Напруження в точках перерізу

Як уже зазначалось, для виявлення, а потім і визначення внутрішніх силових факторів в опорі матеріалів широко застосовують *метод перерізів*.

Щоб характеризувати небезпечність дії внутрішніх силових факторів у перерізі, необхідно ввести міру їх інтенсивності. За таку міру приймають напруження.

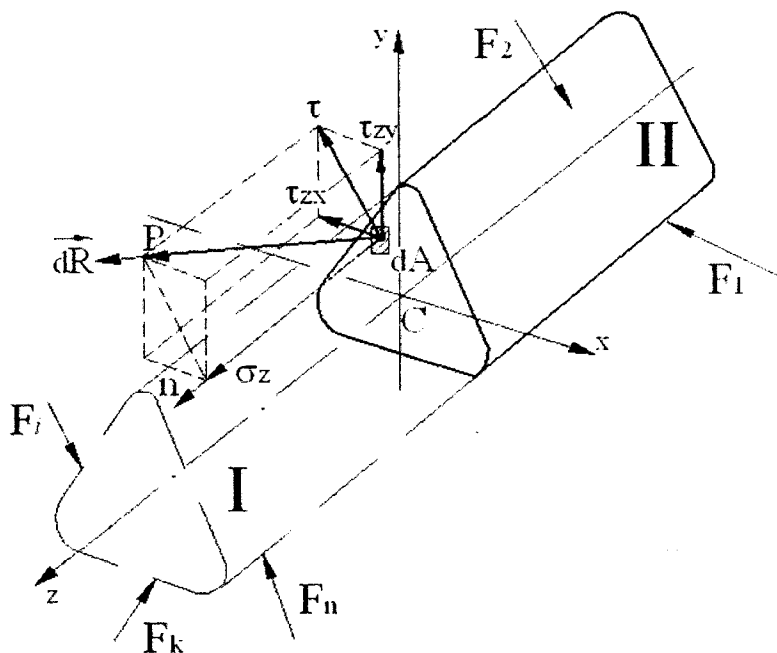


Рисунок 1.19 – Напруження в точці перерізу

Розглянемо нескінченно малий елемент dA перерізу (рис. 1.19) відсіченої частини пружного тіла.

Рівнодіючу $\overline{dR}$ внутрішніх сил пружності на елементарній площі dA вважаємо прикладеною до центра ваги елемента.

Проекціями $\overline{dR}$ на осі x , y , z будуть елементарна поздовжня dN_z та елементарні поперечні сили dQ_x і dQ_y .

Оскільки елемент площі dA нескінченно малий, то зусилля на цьому елементі можна вважати розподіленими рівномірно. Поділивши dN_z , dQ_x та dQ_y

на площу dA , дістанемо інтенсивність поздовжніх та поперечних сил, які припадають на одиницю площі:

$$\sigma_z = \frac{dN_z}{dA}; \quad \tau_{zy} = \frac{dQ_y}{dA}; \quad \tau_{zx} = \frac{dQ_x}{dA}. \quad (1.4)$$

Ці величини називають **напруженнями в точці** проведеного перерізу тіла (стержня), причому

σ – нормальне напруження;

τ – дотичне напруження.

Індекси z , zy , zx вказують напрямок напружень відповідно по нормалі до поперечного перерізу, і дотичних до поперечного перерізу паралельно осям y та x .

Із формул (1.4) очевидно, що напруження має таку одиницю виміру:

$$\dim \sigma, \tau = \frac{\text{сила}}{\text{площа}} (\text{Па}, \text{кПа}, \text{МПа}).$$

Напруження – це інтенсивність внутрішніх сил у довкіллі точки.

Повне напруження в точці перерізу

$$P = \frac{dR}{dA}.$$

Напруження P – вектор, і як всякий вектор його можна зобразити нормальною (по відношенню до перерізу) і дотичними складовими (див. рис. 1.19).

Повне дотичне напруження

$$\tau = \sqrt{\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}.$$

Очевидно, що повне напруження

$$P = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}.$$

Поняття „напруження” відіграє дуже важливу роль у розрахунках на міцність. Тому значна частина курсу опору матеріалів приділяється визначенню напружень σ та τ .

1.12. Інтегральні залежності між напруженнями та внутрішніми силовими факторами

Неважко визначити загальні залежності між σ та τ , з одного боку, та N_z , Q_x , Q_y , M_x , M_y та $M_{кр}$ – з іншого. Виходячи з визначень зусиль та моментів (див. п.п.1.6...1.8 та рис. 1.19) і враховуючи формули (1.4), маємо:

$$N_z = \int_A dN_z = \int_A \sigma_z dA; \quad (1.5)$$

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_A \tau_{zy} dA; \quad (1.6)$$

$$Q_x = \int_A dQ_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad (1.7)$$

$$M_x = \int_A y dN_z = \int_A \sigma_z y dA; \quad (1.8)$$

$$M_y = \int_A x dN_z = \int_A \sigma_z x dA; \quad (1.9)$$

$$M_{кр} = \int_A \rho \tau dA, \quad (1.10)$$

де x , y , ρ – координати центра ваги елемента dA .

У формулі (1.10) τ є повним дотичним напруженням в точці перерізу

$$\tau = \sqrt{\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}.$$

1.13. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Що вивчають у курсі «Опір матеріалів»?
2. Дати визначення міцності, жорсткості, стійкості.
3. Дати визначення розрахункової схеми.
4. Дати визначення пружності, пластичності матеріалів.
5. Навести приклади схематизації об'єктів вивчення.
6. Показати схематизацію опорних закріплень конструкцій.
7. Назвати основні гіпотези, які спрощують структуру й властивості матеріалу.
8. Дати визначення зовнішніх і внутрішніх сил.
9. Розкрити зміст (суть) методу перерізів.
10. Скільки внутрішніх силових факторів може виникати в перерізі пружного тіла в загальному випадку його навантаження?
11. Дати визначення кожного з внутрішніх силових факторів.
12. Епюри внутрішніх силових факторів. Практичне їх застосування.
13. Зобразити правила знаків, які застосовуються при визначенні внутрішніх силових факторів.
14. Записати диференціальні залежності при згинанні.
15. Назвати основні особливості епюр N_z та $M_{кр}$.
16. Назвати основні особливості епюр Q_y та M_x .
17. В яких випадках на епюрі M_x має місце екстремум?
18. Як визначити положення перерізу, в якому виникає M_{ext} ?
19. Дати визначення простого опору.
20. Назвати види простого опору та внутрішні силові фактори, що зумовлюють їх.
21. Дати визначення напруження в точці перерізу тіла.
22. Записати можливі одиниці виміру напруження.
23. Записати формули для визначення нормального, дотичного та повного напружень у загальному випадку навантаження.
24. Зобразити вектори нормального та дотичного напружень у точці перерізу.

2. РОЗТЯГАННЯ, СТИСКАННЯ. МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

2.1. Напруження при розтяганні-стисканні

Раніше зазначалося (див.п.п.1.9), що **розтягання-стискання** – це вид простого опору, при якому в поперечному перерізі стержня із шести внутрішніх силових факторів **виникає лише одна поздовжня** (нормальна, осьова) **сила N_z** .

Розглянемо призматичний брус (рис. 2.1,а) з постійною по довжині l площею поперечного перерізу A , який розтягується осьовою силою F , прикладеною до нижнього кінця бруса.

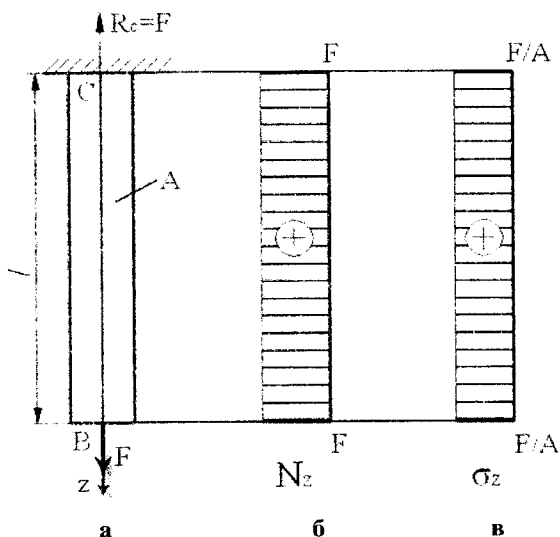


Рисунок 2.1 – Осьове розтягання бруса (а) та епюри поздовжніх сил N_z (б) і нормальних напружень σ_z (в)

Застосовуючи метод перерізів і правило знаків (п.п.1.10.2), побудуємо епюру нормальних сил N_z (рис. 2.1,б). Як бачимо, ці поздовжні сили постійні для всіх перерізів на всій довжині бруса.

Експериментальні і теоретичні дослідження показують, що **плоскі поперечні перерізи при розтяганні призматичних стержнів залишаються плоскими при деформуванні, переміщуючись вздовж осі стержня** (гіпотеза плоских перерізів Бернуллі). Завдяки цьому, при осьовому розтяганні-стисканні нормальні напруження вважають розподіленими рівномірно в перерізі і їх величину можна знайти за формулою

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A}. \quad (2.1)$$

Графік зміни цих напружень вздовж осі z бруса показаний на рис. 2.1,в.

Слід зауважити, що формула (2.1) справедлива лише для перерізів, досить віддалених від місць прикладення зосереджених навантажень. Поблизу місць прикладання навантажень розподіл напружень має складний характер. Але згідно **принципу Сен-Венана, особливості прикладання зовнішнього навантаження до стержня впливають на характер розподілу напружень у поперечних перерізах стержня лише на віддаленнях, які не перевищують розміри цих перерізів**. Дійсно, як показують експериментальні і теоретичні дослідження, місцеві особливості характеру розподілу напружень у поперечному перерізі стержня розповсюджуються лише на довжині z стержня, яка приблизно дорівнює його найбільшому розміру поперечного перерізу (для круглого перерізу – це діаметр стержня d ; для прямокутного перерізу, коли висота перерізу h більше його ширини b – це висота перерізу h).

2.2. Переміщення і деформації при розтяганні-стисканні

При розтяганні бруса (рис. 2.2,а) довжина l збільшується. На підставі гіпотези плоских перерізів роблять висновок, що всі волокна подовжуються на одну і ту саму величину, яку можна визначити згідно закону Гука:

$$\Delta l = \frac{N_z \cdot l}{E \cdot A}, \quad (2.2)$$

де $\Delta l = l_1 - l$ – абсолютне подовження бруса;

l, l_1 – початкова і кінцева довжина бруса;

N_z – поздовжня сила постійної величини у межах ділянки бруса довжиною l .

Добуток EA називають поздовжньою жорсткістю поперечного перерізу бруса.

Лінійне переміщення торця цього бруса дорівнює його подовженню: $W_B = \Delta l$.

Поділивши величину Δl на початкову довжину бруса l , можна визначити відносне подовження

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.3)$$

яке називають лінійною поздовжньою деформацією.

У межах пружних деформацій закон Гука, записаний у відносних величинах (в деформаціях і напруженнях), має вигляд

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \text{чи} \quad \sigma_z = E\varepsilon_z. \quad (2.4)$$

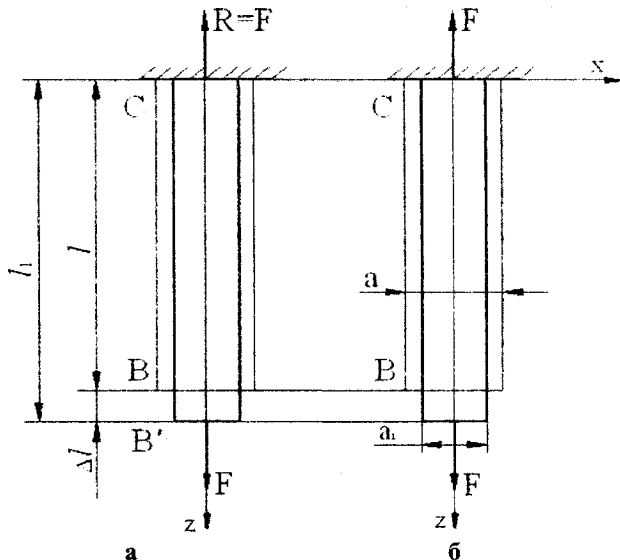


Рисунок 2.2 – До визначення подовження (а) та звуження (б) бруса

При подовженні бруса має місце звуження його поперечних перерізів, величина якого визначається так (рис. 2.2,б):

$$\Delta a = a_1 - a.$$

При розтяганні поперечні деформації від'ємні, а при стисканні – додатні.

Відносне звуження (поперечна деформація)

$$\varepsilon_x = \Delta a / a.$$

Відносне звуження для ізотропних матеріалів в усіх поперечних напрямках призматичного бруса однакове:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \text{const.}$$

Між відносним звуженням та відносним подовженням при осьовому розтяганні та стисканні в межах пружних деформацій існує постійне співвідношення

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \right|, \quad (2.5)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Ураховуючи, що подовження й поперечна деформації завжди мають протилежні знаки, маємо такий фізичний зв'язок:

$$\varepsilon_x = -\mu \varepsilon_z; \quad \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z. \quad (2.6)$$

Коефіцієнт Пуассона μ характеризує пружні властивості матеріалів. Взагалі, значення цього коефіцієнта перебуває в межах $0 \leq \mu \leq 0,5$. Зокрема, для корка μ наближається до нуля, для каучуку – до 0,5, для сталі $\mu \approx 0,3$ [4].

За формулою (2.2) обчислюється абсолютне подовження (укорочення) стержня, виготовленого з однорідного матеріалу ($E = \text{const}$) і у перерізах якого діють однакові подовжні сили ($N_z = \text{const}$).

У разі, коли стержень має декілька ділянок, переміщення будь-якого перерізу знайдемо

$$W(z) = \sum_{i=1}^k \frac{N_{zi} \cdot \ell_i}{E_i \cdot A_i}, \quad (2.7)$$

де k – кількість ділянок, які знаходяться між даним і зафіксованим перерізами при умові, що подовжня сила N_{zi} та площа поперечного перерізу A_i в межах окремих ділянок стержня постійні;

ℓ_i – довжина i -ої ділянки стержня;

E_i – модуль подовжньої пружності матеріалу i -ої ділянки стержня.

У розрахунках багатьох практичних задач виникає необхідність враховувати також подовження (укорочення) при зміні температури на Δt

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t,$$

де α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу.

Для однорідного стержня, навантаженого на кінцях і рівномірно нагрітого, матимемо

$$\Delta \ell = \frac{N_z \ell}{EA} + \alpha \ell \Delta t. \quad (2.8)$$

Приклад 2.1. Побудувати епюри подовжніх сил, напружень та подовжніх переміщень перерізів для стержня, навантаженого зосередженими силами (рис. 2.3,а) без урахування ваги стержня.

Вихідні дані: $F_1 = 20 \text{ кН}$; $F_2 = 20 \text{ кН}$; $F_3 = 40 \text{ кН}$; $A = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$; $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа}$.

Розв'язання.

Обчислюємо реакцію опори:

$$\sum F_z = 0; \quad -R_B + F_3 + F_2 - F_1 = 0; \quad R_B = 40 \text{ кН}.$$

Намічаємо характерні перерізи 1....6 (по 2 на кожній ділянці навантаження).

Обчислюємо подовжню силу N_z в характерних перерізах:

$$N_{z,1} = -F_1 = -20 \text{ кН} = N_{z,2};$$

$$N_{z,3} = N_{z,2} + F_2 = -20 + 20 = 0 = N_{z,4};$$

$$N_{z,5} = N_{z,4} + F_3 = 0 + 40 = 40 \text{ кН};$$

$$N_{z,6} = R_B = 40 \text{ кН} = N_{z,5}.$$

За знайденими значеннями будемо епюру N_z (рис. 2.3,б).

Епюра побудована вірно, бо значення $N_{z,5}$ що зліва, що зправа збігаються.

За формулою (2.1) обчислюємо значення нормального напруження

$$\sigma_{zi} = \frac{N_{zi}}{A_i}.$$

Оскільки в межах ділянок поздовжня сила N_{zi} та площа поперечного перерізу стержня A_i постійні, то

$$\sigma_{z_{1-2}} = -\frac{20}{1 \cdot 10^{-3}} = -20 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z_{3-4}} = 0;$$

$$\sigma_{z_{5-6}} = \frac{40}{1 \cdot 10^{-3}} = 40 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 40 \text{ МПа}.$$

За знайденими значеннями будемо епюру σ_z (рис. 2.3,в).

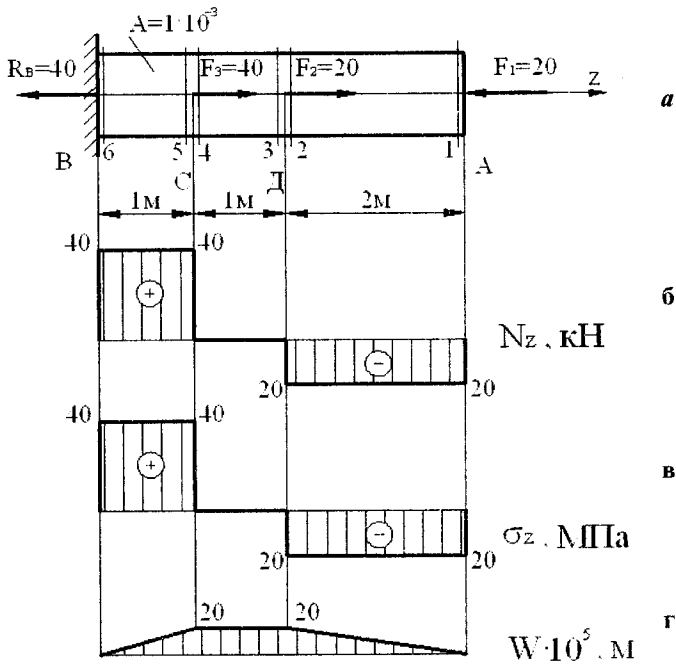


Рисунок 2.3 – Навантаження бруса (а) та епюри поздовжніх сил N_z (б), нормальних напружень σ_z (в) і поздовжніх переміщень W_z (г)

За формулою (2.1) обчислюємо поздовжні переміщення W як суму подовжень $\Delta \ell$, враховуючи, що $N_z = \text{const}$, $A = \text{const}$ та $EA = \text{const}$ в межах окремих ділянок. Обчислення починаємо від перерізу 6 біля опори B , для якого $W_B = 0$:

$$W_C = \frac{N_{z,BC} \cdot \ell_{BC}}{EA} = \frac{40 \cdot 1,0}{2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3}} = 20 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$W_D = W_C = 20 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$W_A = W_D - \frac{N_{z,DA} \cdot \ell_{DA}}{EA} = 20 \cdot 10^{-5} - \frac{20 \cdot 2}{2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3}} = 0.$$

За знайденими значеннями будемо епюру переміщень W (рис. 2.3,з).

Аналіз епюр N_z (рис. 2.3,б) і σ_z (рис. 2.3,в) показує, що перерізи стержня на ділянці BC найбільш навантажені ($N_{z \max} = 40 \text{ кН}$) та небезпечні ($\sigma_{z \max} = 40 \text{ МПа}$).

Переміщення всіх поперечних перерізів стержня на ділянці CD однакові, оскільки відсутня поздовжня сила $N_z = 0$.

Слід зауважити, що визначення нормальних напружень σ_z та поздовжніх переміщень $W(z)$ не є самоціль, а необхідність для розрахунків на міцність і жорсткість елементів конструкцій та споруд.

2.3. Випробування матеріалів на розтягання

При розрахунках на міцність, жорсткість та стійкість елементів механізмів та споруд треба знати механічні властивості матеріалів. Тому матеріали випробовують на розтягання, стискання, зсув, кручення, згинання. Докладні описи всіх видів механічних випробувань, а також машин та приладів, що при цьому застосовуються, наведено в спеціальних посібниках до лабораторних робіт з опору матеріалів, зокрема [10,11].

Одним із основних видів випробувань матеріалів є випробування на розтягання, оскільки при цьому визначають найбільш важливі їх механічні характеристики пружності, міцності, пластичності. Для цього використовують стандартні лабораторні зразки. На рис. 2.4,а показано один із видів зразків до випробування і після випробування (рис. 2.4,б).

Співвідношення між розрахунковою довжиною зразка ℓ_0 та діаметром d_0 повинні бути стандартними:

$$\ell_0 = 5 d_0 \text{ або } \ell_0 = 10 d_0.$$

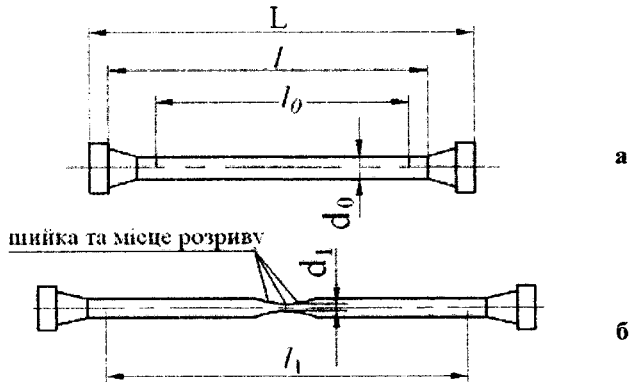


Рисунок 2.4 – Лабораторний зразок до випробування на розтяг (а) і перед руйнуванням (розривом) (б)

Розглянемо діаграму розтягання $F-\Delta\ell$, яку можна одержати за допомогою самописного приладу в певному масштабі (рис. 2.5,а), а також її основні особливості на прикладі випробування маловуглецевої сталі.

На діаграмі розтягання (рис. 2.5,а) умовно можна виділити п'ять характерних ділянок.

Ділянка ОА. На цій стадії розтягання має місце прямо пропорційна залежність між подовженням зразка $\Delta\ell$ та силою F .

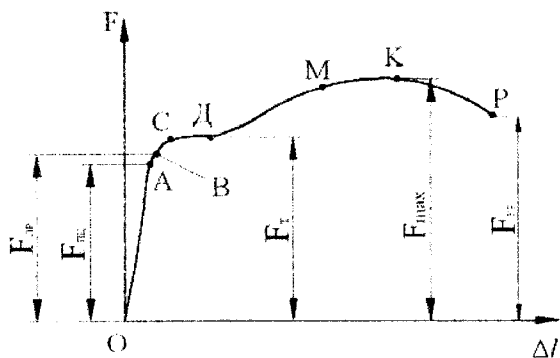
Ділянка ОВ – пружна стадія розтягання зразка. На цій стадії розтягання зразка при розвантаженні відсутні залишкові деформації.

Ділянка СД – площадка текучості. На цій ділянці подовження зразка зростає при сталому значенні розтягальної сили F_T .

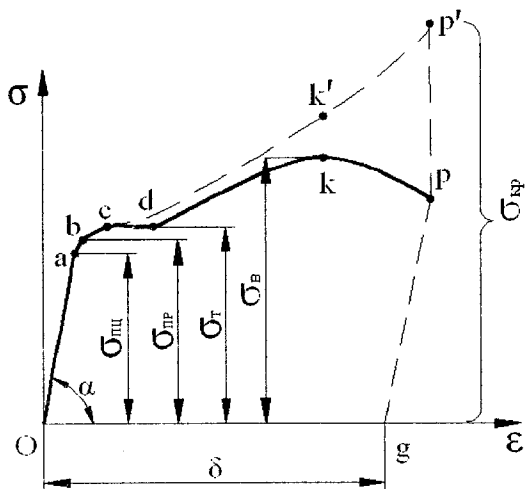
Ділянка ДМК – ділянка зміцнення. На цій стадії матеріал набирає здатності збільшувати опір подальшому деформуванню. Точка К відповідає найбільшому зусиллю $F_{\max}$, яке може сприймати зразок до початку руйнування.

Ділянка КР – ділянка місцевої текучості, або зона руйнування. Подовження зразка носить у цьому випадку місцевий (локальний) характер. На

цій ділянці подовження зразка завдяки значному звуженню відбувається зменшення сили. Точка *P* діаграми відповідає остаточному руйнуванню зразка.



а



б

Рисунок 2.5 – Діаграми розтягання (а) і напружень (б) маловуглецевої сталі

2.4. Основні механічні характеристики матеріалу

Переведемо діаграму розтягання $F=f(\Delta l)$ в координатах σ – ϵ . Для цього зменшимо в A_0 раз ординати і в ℓ_0 раз абсциси, де $A_0=\pi d_0^2/4$ і ℓ_0 – відповідно площа поперечного перерізу зразка і його робоча довжина до навантаження.

Так як ці величини постійні, то діаграма $\sigma=f(\varepsilon)$ (рис. 2.5,б) має той же вигляд, що і діаграма розтягання (див. рис. 2.5,а), але буде уже *характеризувати не властивості зразка, а властивості матеріалу.*

Дамо визначення відповідних величин механічних характеристик матеріалу.

Границя пропорційності

$$\sigma_{пi} = \frac{F_{пi}}{A_o} - \text{напруження,} \quad (2.9)$$

після якого порушується закон Гука.

Границя пружності

$$\sigma_{пp} = \frac{F_{пp}}{A_o} - \text{найбільше напруження,} \quad (2.10)$$

до якого залишкова деформація не виявляється.

Границя текучості

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_o} - \text{напруження,} \quad (2.11)$$

при якому деформація зразка відбувається при постійному розтягальному зусиллі.

Границя міцності (тимчасовий опір) умовна

$$\sigma_s = \frac{F_{\max}}{A_o} - \text{напруження,} \quad (2.12)$$

що відповідає максимальній силі навантаження (без врахування звуження перерізу).

Враховуючи звуження зразка та зусилля розтягу в момент розриву зразка (див. рис. 2.4,б та точку Р на рис. 2.5,б), можна визначити дійсну границю міцності

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A_1}.$$

В інженерних розрахунках на міцність використовується умовна границя міцності, як основна характеристика міцності матеріалу.

Із діаграми напружень (див. ділянку *Oa* на рис. 2.5,б) видно, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E, \quad (2.13)$$

тобто модуль поздовжньої пружності при певних масштабах для σ і ε чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу прямолінійної ділянки діаграми напружень. В цьому є механічна суть модуля пружності при розтяганні.

Зауваження. Для металів, що не мають площадки текучості, границю текучості визначають умовно як напруження, при якому залишкова деформація є величиною, регламентованою державним стандартом або технічними умовами. Згідно з ГОСТ 1497-84 залишкова деформація повинна становити 0,2 % від вимірюваної довжини зразка. Цю умовну границю текучості позначають відповідно $\sigma_{0,2}$.

Діаграма *Oabcdkp* (рис. 2.5,б) є умовною, тому що для її побудови не враховуються зміни площі поперечного перерізу під час деформування (умовно приймається $A_0 = \text{const}$).

Діаграма розтягання, яка побудована з урахуванням зменшення площі A_0 , називається дійсною діаграмою розтягання (див. криву *Oabck'p* на рис. 2.5,б).

На практиці механічні характеристики матеріалів визначають безпосередньо при випробуваннях зразків на машинах, або ж використовують діаграми умовних напружень.

Основні механічні характеристики різних матеріалів наведені у довідниках, підручниках, посібниках і в збірниках задач з опору матеріалів.

2.5. Характеристики пластичності матеріалу

Властивість пластичності матеріалу має вирішальне значення для таких технологічних операцій, як штамповка, витягування, волочіння тощо. **Мірою пластичності є відносне подовження зразка після розриву** (див. рис. 2.4)

$$\delta = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100\%, \quad (2.14)$$

де ℓ_1 – довжина зразка після розриву;

та відносне звуження зразка після розриву

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%, \quad (2.15)$$

де $A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = 0,785 d_1^2$ – площа перерізу круглого зразка в місці руйнування (див. рис. 2.4,б).

Відносне подовження та відносне звуження зразка після розриву дається у відсотках. Чим більше значення δ та ψ , тим більш пластичний матеріал. До числа надто пластичних матеріалів належать алюміній, латунь, маловуглецева сталь тощо. До числа мало пластичних матеріалів відноситься значна кількість легованих сталей.

2.6. Крихкість матеріалів.

Випробування матеріалів на стискання

Протилежною властивістю пластичності є крихкість, тобто схильність матеріалу руйнуватися без утворення помітних залишкових деформацій. Матеріали, що мають таку властивість, називаються крихкими. Для таких матеріалів величина подовження при розриві не перевищує 2...5 %, а деколи вимірюється долями відсотка. До крихких матеріалів відносяться чавун, високовуглецева інструментальна сталь, скло, камінь тощо. Діаграма розтягання крихких матеріалів не має площадки текучості і ділянки зміцнення. Крихкі матеріали, як правило, краще чинять опір стисканню, ніж розтягання, і

застосовуються для виготовлення елементів конструкцій, які працюють на стискання. Для розрахунку їх на міцність треба знати характеристики матеріалу, що визначають при випробуванні на стискання.

Для випробування на стискання виготовляють зразки у вигляді циліндрів невеликої висоти (як правило, від одного до трьох діаметрів) або кубиків. На рис. 2.6,*а* показано чавунний зразок після руйнування при стисканні, а на рис. 2.6,*б* наведено діаграму напружень при стисканні зразків.

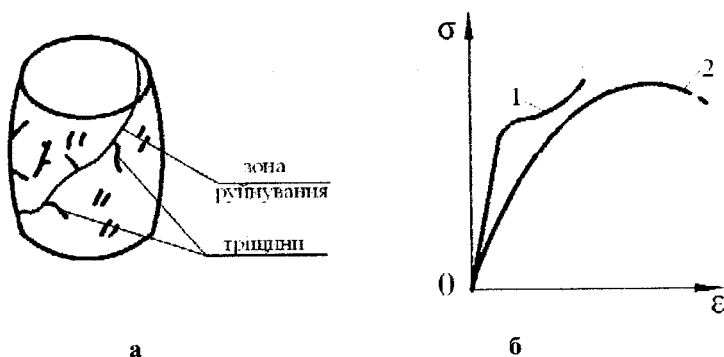


Рисунок 2.6 – Лабораторний чавунний зразок після руйнування (а) і діаграма напружень маловуглецевої сталі (1) та чавуну (2)

Руйнування при стисканні чавунного зразка відбувається внаслідок зсуву однієї частини зразка відносно іншої (див. рис. 2.6,*а*) по площадці, де $\tau_{\max}$.

Границя міцності при стисканні визначається так само, як при розтяганні

$$\sigma_a = \frac{F_{\max}}{A_0}$$

Порівняння границі міцності крихких матеріалів при розтяганні σ_{br} з границею міцності при стисканні σ_{ac} показує, що ці матеріали міцніші при стисканні, ніж при розтяганні.

Величина відношення

$$K = \frac{\sigma_{сп}}{\sigma_{вс}}$$

для чавуну коливається в межах 0,2...0,4, для керамічних матеріалів – в межах 0,1...0,2 [4].

Для пластичних матеріалів модуль пружності E , границя пружності $\sigma_{пр}$ та границя текучості σ_T при стисканні майже такі ж, що і при розтяганні.

2.7. Вплив температури та фактора часу на механічні характеристики матеріалу

Наведена вище інформація про механічні властивості матеріалів, а також про пластичність та крихкість відносилась до випробувань у так званих нормальних умовах, тобто при температурі 20 °C і при статичному навантаженні.

Діапазон температури, в межах якого реально працюють конструкційні матеріали, виходить далеко за рамки зазначених нормальних умов. Є конструкції, в яких матеріал знаходиться під дією надзвичайно високих температур, так, наприклад, елементи конструкцій надзвукових літаків нагріваються під час польоту до 200 °C і вище, деталі газових турбін авіаційних двигунів працюють при температурі 600–1000 °C. Мають місце конструкції, в яких, навпаки, робочі температури є низькими. Це – елементи холодильного устаткування та резервуари, в яких зберігаються рідинні гази.

Випробування показали, що всі механічні характеристики металів істотно змінюються залежно від температури.

На рис. 2.7 [7] наведено діаграми залежностей від температури модуля пружності E , границі міцності σ_s , границі текучості σ_T та відносного подовження після розриву δ для вуглецевої сталі в інтервалі температур 0...500 °C.

Із рис. 2.7 видно, що в цьому інтервалі температур монотонно зменшується модуль пружності E та границя текучості σ_T . Границя міцності σ_s досягає найбільшого значення в інтервалі температур 200...250 °C, а

відносне подовження після розриву δ – найменшого значення. При подальшому підвищенні температури пластичні властивості сталі поновлюються, а міцнісні показники (σ_n) різко зменшуються. Тому вуглецеві сталі при високих температурах не застосовують, а застосовують спеціальні жаростійкі та жароміцні сталі.

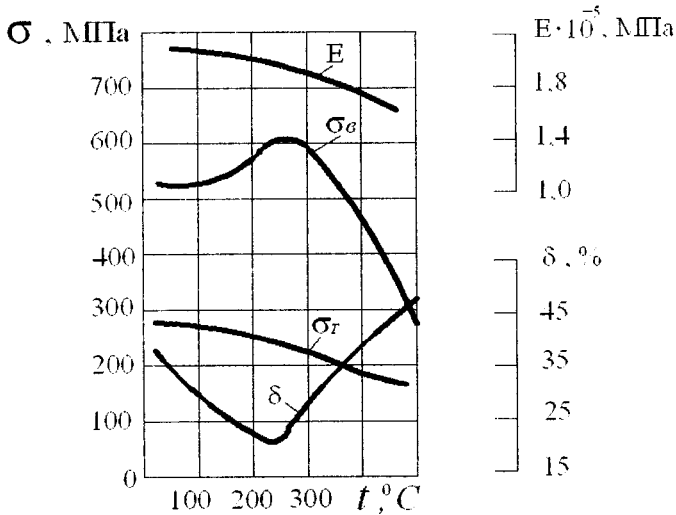


Рисунок 2.7 – Вплив підвищення температури на характеристики вуглецевої сталі

2.7.1. Повзучість. Релаксація напружень. Тривала міцність

При тривалій експлуатації, особливо при підвищених температурах конструкційні матеріали проявляють такі властивості як **повзучість та тривала міцність**.

Власне повзучість характеризується зростанням пластичної (залишкової) деформації при постійному навантаженні з плином часу. На рис. 2.8,а наведено криві повзучості сталі при постійному навантаженні, але різних температурах ($T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5$), з яких видно, що підвищення температури веде до збільшення швидкості повзучості.

Границею повзучості називається найбільше напруження, при якому деформація повзучості при даній температурі за визначений проміжок часу не перевищує встановленого значення. Наприклад, для нікелевого жароміцного сплаву ХН77ТЮР при температурі 700 °С за 100 годин і деформації повзучості 0,2 % границя повзучості $\sigma_{0,2/100}^{(700)}=400$ МПа.

Другим проявом повзучості є **релаксація** – самовільне змінення (зменшення) з часом напружень в деталі при незмінній її деформації. На рис. 2.8,б наведено вигляд діаграм релаксації. Релаксацію можна виявити на прикладі ослаблення затяжки болтового з'єднання з плином часу, особливо в умовах високих температур.

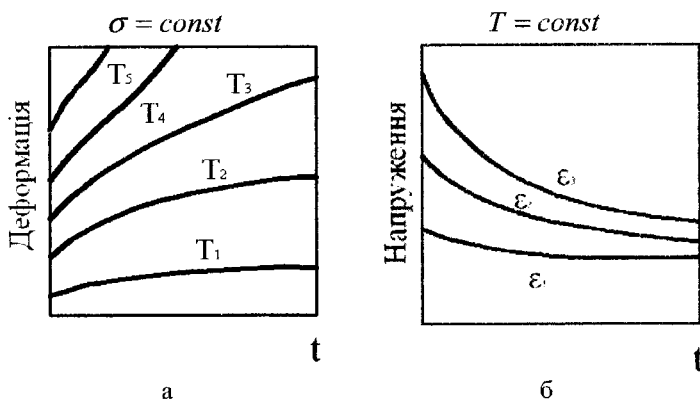


Рисунок 2.8 – Вплив високої температури на власне повзучість (а) та релаксацію (б) з плином часу

У разі високої температури й довгочасної дії навантаження відбувається руйнування матеріалу при напруженні, яке менше за тимчасовий опір матеріалу при даній температурі. Тому виникає потреба визначати тривалу міцність матеріалів.

Тривалою міцністю називається залежність руйнівних напружень (границя міцності) від тривалості роботи.

Границею тривалої міцності називається напруження, при якому матеріал руйнується не раніше заданого строку безперервної дії цього напруження при певній температурі.

Наприклад, для нікелевого жароміцного сплаву ХН77ТЮР при температурі 700 °С і 1000 годин границя тривалої міцності $\sigma_{\text{тр}1000}(700) = 330 \text{ МПа}$.

На механічні властивості деяких матеріалів істотно впливають низькі температури. Матеріали, будучи пластичними при нормальній температурі, стають крихкими при низьких температурах. Такі матеріали називають **холодноламкими**. Більшість чорних металів (сталі, цинкові сплави) є холодноламкими.

2.8. Умови міцності і жорсткості. Види розрахунків

В опорі матеріалів розрізняють три види нормальних (і дотичних) напружень:

Робочі (фактичні) напруження – це ті, що дійсно мають місце в елементі конструкції і визначаються розрахунками чи експериментально.

Граничні напруження – ті, при яких матеріал руйнується, або в ньому виникають помітні залишкові деформації.

Найбільше напруження, яке може витримати матеріал до початку руйнування, називають **границею міцності** і позначають $\sigma_{\text{в}}$ чи $\tau_{\text{в}}$.

Для пластичних матеріалів вважають граничним ще одне напруження, а саме: **границю текучості** $\sigma_{\text{т}}$ ($\tau_{\text{т}}$), коли мають місце значні деформації без помітного збільшення поздовжньої сили під час випробувань. Справа в тому, що виникнення значних залишкових деформацій в деталях недопустимо в багатьох випадках і розглядається як порушення їх конструкційної жорсткості та надійності в експлуатації. Наприклад, подовження лопаток турбіни на величину більшу, ніж зазор до корпусу, приведе до їх руйнування.

Очевидно, що для забезпечення міцності елементів конструкції треба, щоб виникаючі в них робочі напруження були менші за граничні. Але якщо робочі напруження дуже близькі до граничних (хоча і менші за них), то міцність деталі гарантувати не можна. Тому *при розрахунках на міцність робочі напруження порівнюють не з граничними, а з допустимими*.

Допустимі напруження – це такі, при яких *гарантована безпечна робота деталі*. Позначають їх $[\sigma]$ чи $[\tau]$ і визначають як деяку частину від граничних напружень, щоб гарантувати запас міцності:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{cp}}{n_n}; \quad [\tau] = \frac{\tau_{cp}}{n_n}, \quad (2.16)$$

де $\sigma_{гр}$, $\tau_{гр}$ – граничне (небезпечне) відповідно нормальне та дотичне напруження;

n_n – нормативний коефіцієнт запасу міцності, значення якого вибирають за відповідними нормами в кожній галузі промисловості.

Фактичний коефіцієнт запасу міцності визначають за формулами

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_z}; \quad n = \frac{\sigma_s}{\sigma_z}, \quad (2.17)$$

де σ_T, σ_s – відповідно границя текучості для пластичних і границя міцності для крихких матеріалів;

σ_z – фактичне (робоче) напруження в перерізі стержня.

Фізичний зміст умови міцності елемента конструкції полягає в тому, що **максимальні робочі (фактичні) напруження $\sigma_{z \max}$ не повинні перевищувати допустимі $[\sigma]$** :

$$\sigma_{z \max} = \frac{N_{z \max}}{A} \leq [\sigma] - \text{умова міцності.} \quad (2.18)$$

Найбільше значення поздовжньої сили $N_{z \max}$ слід брати з епюри N_z .

Залежно від того, що відомо (задано) і що необхідно визначити, розрізняють **три види розрахунків на міцність: перевірний, проектний і розрахунок допустимого навантаження.**

При **перевірному розрахунку** вважаються відомими навантаження, матеріал з граничними та допустимими напруженнями і розміри елемента конструкції. Перевірка умови міцності здійснюється безпосередньо за формулою (2.18).

Проектний розрахунок означає пошук необхідних за умови міцності розмірів поперечного перерізу елемента, зокрема його площі

$$A \geq \frac{N_{z \max}}{[\sigma]}. \quad (2.19)$$

Величину найбільш допустимої поздовжньої сили визначають за відомими розмірами поперечного перерізу елемента та допустимим напруженням

$$[N_z] \leq A \cdot [\sigma]. \quad (2.20)$$

Розрахунок же допустимого зовнішнього навантаження ведуть у відповідності з епюрою поздовжніх сил чи іншими їх залежностями від зовнішнього навантаження.

На рис. 2.9 показані схематично ці основні види розв'язання інженерних задач, а на рис. 2.10 — алгоритм визначення розміру поперечного перерізу при розтяганні та стисканні.

Іноді для забезпечення нормальної роботи машин та споруд розміри їхніх деталей треба вибирати так, щоб задовольнити умову жорсткості. При розтяганні, стисканні умова жорсткості з урахуванням формули (2.8) має такий вигляд:

$$W(z)_{\max} = \sum_{i=1}^k \frac{N_{zi} \cdot \ell_i}{E_i \cdot A_i} \leq [W], \quad (2.21)$$

де $W(z)_{\max}$ — найбільше переміщення небезпечного перерізу;

$[W]$ — допустиме значення таких переміщень.

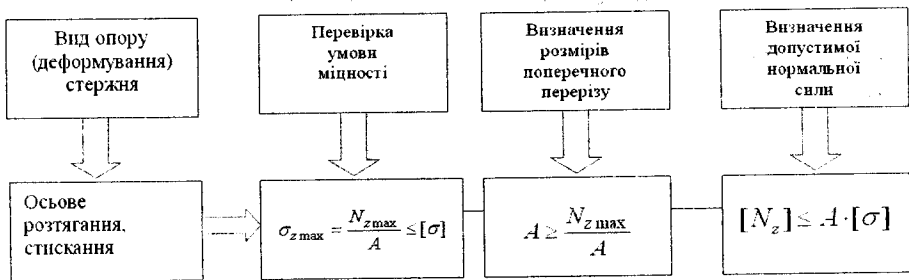


Рисунок 2.9 – Три види розрахунків на міцність

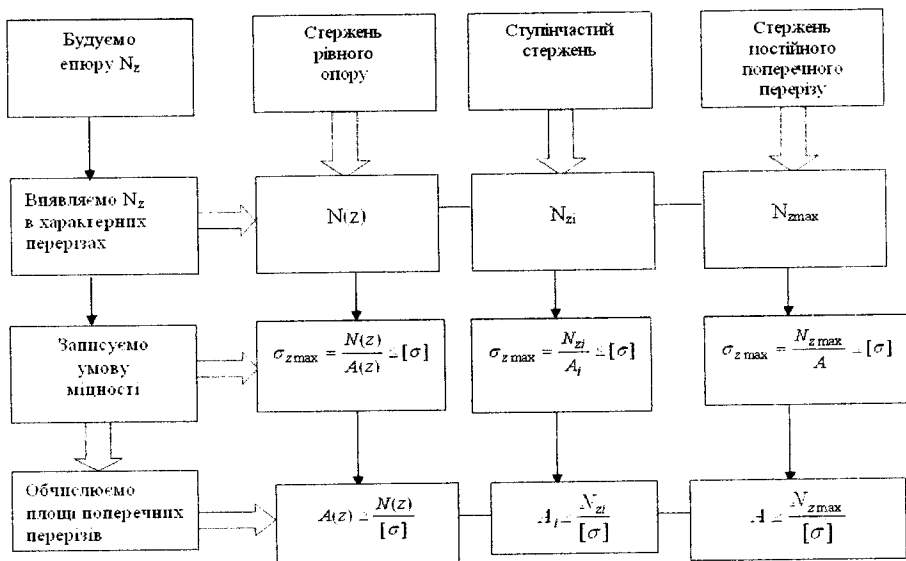


Рисунок 2.10 – Алгоритм визначення розміру поперечного перерізу при розтяганні, стисканні стержня (бруса)

Зауваження. Розрахунок за умовою жорсткості завжди слід доповнювати розрахунком на міцність. Якщо умова жорсткості виконується, а умова міцності ні, то задачу треба розв'язувати з умови міцності і навпаки.

Аналогічно розраховують на міцність та жорсткість при інших деформаціях стержня.

Основні фактори, які впливають на вибір коефіцієнта нормативного запасу міцності.

1. Якість матеріалу деталі, строк її експлуатації і наслідки аварії.
2. Наближеність розрахункових схем, певна наближеність розрахункових формул та можливість експериментальної перевірки.
3. Характер дії навантаження (статичне, динамічне тощо).

Приклад 2.2. Шарнірно-стержнева система (рис. 2.11,а) складається із двох стержнів BC і EK , що підтримують абсолютно жорсткі невагомі бруси AB і CD . Матеріал стержнів – сталь $Cm3$. Визначити зусилля в стержнях і необхідні діаметри d_1 і d_2 поперечних перерізів стержнів.

Вихідні дані: $F=40 \text{ кН}$; $\alpha=30^\circ$; $[\sigma]=160 \text{ МПа}$.

Розв'язання.

Використовуючи метод перерізів, зображуємо розрахункову схему з урахуванням внутрішніх зусиль у перерізах стержнів. Очевидно, обидва стержні заданої системи під дією зовнішнього навантаження $F=40 \text{ кН}$ розтягуються, що відображено в напрямі векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ (рис. 2.8,б).

Складаємо рівняння рівноваги для бруса AB

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot 3,75 - F \cdot 3 = 3,75N_1 - 40 \cdot 3 = 0; \quad N_1 = 32 \text{ кН}.$$

Із умови міцності при розтяганні визначаємо площу поперечного перерізу стержня (формула (2.11))

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{32}{160 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Для круглого перерізу $A = \frac{\pi d^2}{4} = 0,785 d^2$ діаметр

$$d_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{0,785}} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Приймаємо значення $d_1=16 \text{ мм}$.

Складаємо рівняння рівноваги для бруса CD

$$\sum M_d = 0; \quad N_1 \cdot 3,8 - N_2 \cdot 3,2 \cdot \sin 30^\circ = 32 \cdot 3,8 - 3,2 \cdot 0,5N_2 = 0; \quad N_2 = 76 \text{ кН}.$$

Необхідна площа поперечного перерізу стержня CD

$$A_2 = \frac{76}{160 \cdot 10^3} = 4,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

діаметр стержня CD

$$d_2 = \sqrt{\frac{4,75 \cdot 10^{-4}}{0,785}} = 2,46 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Приймаємо значення $d_2 = 25 \text{ мм}$.

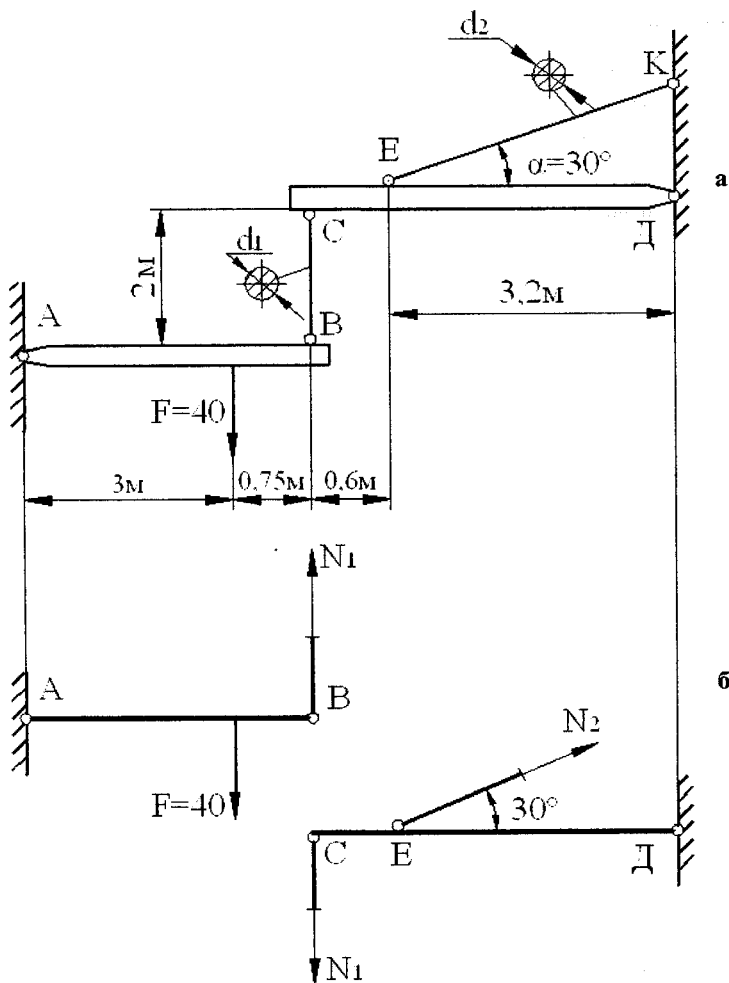


Рисунок 2.11 – До розрахунку на міцність стержнів BC і EK

2.9. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Розкрити суть гіпотези плоских перерізів та її практичне значення.
2. У чому суть принципу Сен-Венана при визначенні напружень?
3. Записати формули для абсолютного та відносного подовження, укорочення.
4. Що відображає коефіцієнт Пуассона; які його значення: граничні та для чорних металів?
5. Записати аналітичний вираз, який характеризує фізичний зв'язок між поздовжньою і поперечною деформаціями.
6. Записати аналітичні вирази закону Гука для визначення абсолютних подовжень (укорочень) та визначення напружень.
7. Як виявляється небезпечний переріз стержня при навантаженні?
8. Записати умови міцності. Показати за допомогою аналітичних виразів практичне застосування умови міцності.
9. Записати умову жорсткості при осьовому розтяганні (стисканні) стержня. Поясніть складові частин. Наведіть приклади застосування.
10. Дати визначення робочих, граничних та допустимих напружень. Показати за допомогою відповідних виразів їх фізичний зв'язок.
11. Як визначаються граничні напруження? Дати пояснення на прикладі діаграми напружень маловуглецевої сталі.
12. Як визначаються допустимі напруження для матеріалів? Записати відповідні аналітичні вирази для пластичних та крихких матеріалів.
13. Назвати типи розрахунків на міцність. Записати аналітичні вирази для цих розрахунків.
14. Назвати основні фактори, які впливають на вибір коефіцієнта запасу міцності матеріалу.
15. Записати аналітичні вирази для визначення числового значення дійсного запасу міцності.
16. Назвати характерні ділянки діаграми розтягання зразків із маловуглецевої сталі. Накреслити діаграму напружень σ - ϵ .
17. Дати визначення характеристик пластичності матеріалу. Записати для них аналітичні вирази.
18. Накреслити умовну і дійсну діаграми напружень маловуглецевої сталі.
19. Назвати одиниці виміру граничних напружень: $\sigma_{пц}$, $\sigma_{пр}$, σ_m , σ_s та модуля поздовжньої пружності E . Показати на прикладі (за допомогою діаграми) їх величини.

20. Дати визначення крихкості матеріалу.
21. Які механічні характеристики пластичних та крихких матеріалів визначають при стисканні зразків?
22. Як за результатами випробувань можна визначити марку матеріалу?
23. Які механічні характеристики можна визначити з діаграми розтягання маловуглецевої сталі, чавуну?
24. Яке практичне значення мають механічні характеристики і характеристики пластичності матеріалу?
25. Дати визначення повзучості матеріалу, границі повзучості.
26. Що таке релаксація напружень?
27. Дати визначення тривалої міцності матеріалу, границі тривалої міцності.
28. Які матеріали називають холодноламкими?

3. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ ПРИ РОЗТЯГАННІ-СТИСКАННІ

3.1. Статично невизначувані системи та особливості їх розрахунків

Пружна система (конструкція) є статично невизначуваною, якщо зусилля в її елементах не можуть бути знайдені тільки із рівнянь статички. Такі конструкції найбільш широко розповсюджені як більш жорсткі, надійні та економічні в порівнянні зі статично визначуваними. У багатьох випадках статично невизначувані системи є єдино можливими варіантами реалізації самої конструкції.

Ступінь статичної невизначуваності системи визначається надлишком загального числа невідомих реакцій зовнішніх в'язей і внутрішніх зусиль по відношенню до числа незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи. **Ступінь статичної невизначуваності системи** встановлюється за формулою

$$m=R-S,$$

де R – кількість невідомих зусиль (у тому числі реакцій в'язей);

S – число незалежних рівнянь статички, які можна скласти для розглядуваної системи сил.

Визначення всіх невідомих сил, тобто розкриття статичної невизначуваності, можливе тільки шляхом складання рівнянь, що доповнюють число рівнянь статички до числа невідомих. Ці додаткові рівняння відображають особливості геометричних в'язей, накладених на деформовану систему, і можуть бути складені за допомогою уявлення картини переміщень у конструкції при її деформуванні. Тому їх називають *рівняннями сумісності переміщень*.

Методи розрахунку статично невизначуваних систем підрозділяються в залежності від того, що приймається при розв'язанні задачі за основні невідомі.

У разі, коли основними шуканими є зусилля “зайвих” в'язей системи (в розумінні забезпечення рівноваги системи і її геометричної незмінності), тобто

зайві невідомі X_i ($i=1,2,\dots,m$), метод носить назву **метода сил**. Якщо основними невідомими є деформації або переміщення в системі, то розрахунок ведуть за так званим **методом переміщень**. Існує досить великий різновид цих **основних** і **змішаних методів**.

3.2. Приклад розрахунку бруса з жорсткими в'язями

Розрахунок статично невизначуваної системи (рис. 3.1,а) за методом сил починається зі складання рівняння рівноваги для розрахункової схеми об'єкта:

$$\sum F_z = 0; \quad -R_B + F - R_D = 0; \quad R_B + R_D = F. \quad (3.1)$$

Дві невідомі $R=2$ не можна визначити з одного рівняння рівноваги $S=1$. Система один раз статично невизначувана

$$m = R - S = 2 - 1 = 1.$$

Вибираємо раціонально основну систему. Основна система повинна бути геометрично незмінною, статично визначуваною та нерухомою.

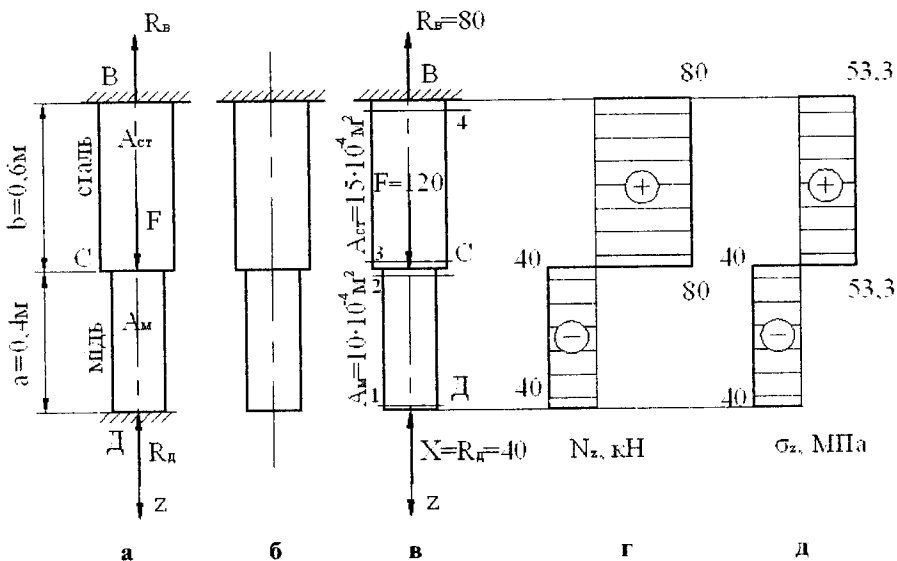


Рисунок 3.1 – Послідовність розкриття статичної невизначуваності системи (а,б,в) та побудови епюр поздовжніх сил N_z (г) і нормальних напружень σ_z (д)

Рациональний вибір основної системи спрощує розрахунок. Із умови деформації бруса очевидно, що переміщення перерізів B і D дорівнюють нулю (жорстке закріплення). Відкидаємо нижнє закріплення, зовнішнє навантаження. Одержуємо основну систему (рис. 3.1,б).

Замінюємо відкинуту “зайву” в’язь зусиллям $X=R_D$ та прикладаємо зовнішнє навантаження F . В результаті одержуємо еквівалентну систему (рис. 3.1,в). Еквівалентна система деформується так, як і вихідна (задана) система (рис. 3.1,а).

Для еквівалентної системи складаємо рівняння сумісності переміщень з урахуванням особливості відкинутої в’язі (при жорсткому закріпленні переміщення перерізу D вздовж осі стержня (осі z) дорівнює нулю, $W_{z,D} = 0$)

$$W_{z,D} = \Delta_D = \sum_{i=1}^n \Delta \ell_i = 0, \quad (3.2)$$

де i -число вантажних відрізків бруса, в межах яких при постійній їх жорсткості поздовжня сила постійна (або змінюється за одним законом).

Зауваження. Число рівнянь сумісності переміщень повинно дорівнювати ступеню статичної невизначуваності системи.

Переміщення перерізу D розглядуваного бруса дорівнює алгебраїчній сумі подовжень усіх навантажених відрізків бруса. Його можна обчислити, користуючись законом Гука і принципом незалежності дії сил. *Принцип незалежності дії сил (суперпозиції) дозволяє визначити загальне подовження усього бруса як алгебраїчну суму подовжень відрізків бруса від дії кожної сили окремо.* Запишемо рівняння (3.2) у вигляді

$$W_{z,D} = -\Delta \ell_{ДС}(X) - \Delta \ell_{СВ}(X) + \Delta \ell_{СВ}(F) = 0. \quad (3.3)$$

Виражаємо подовження кожного відрізка бруса через зусилля за законом Гука і отримаємо рівняння переміщень у фізичній формі

$$-\frac{X \cdot a}{E_m \cdot A_m} - \frac{X \cdot b}{E_{cm} \cdot A_{cm}} + \frac{F \cdot b}{E_{cm} \cdot A_{cm}} = 0. \quad (3.4)$$

Із табл. 2 вибираємо значення модулів поздовжньої пружності для сталі $E_{cm}=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ і міді $E_m=1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ і враховуючи співвідношення $E_{cm}=2E_m$ та $A_{cm}=1,5A_m$, рівняння (3.4) зводимо до вигляду

$$-3X \cdot a - X \cdot b + F \cdot b = 0. \quad (3.5)$$

Визначаємо “зайву” невідому реакцію в’язі із рівняння (3.5)

$$X = \frac{F \cdot b}{3a + b} = \frac{120 \cdot 0,6}{1,2 + 0,6} = 40 \text{ кН}.$$

Статична невизначуваність системи розкрита. Реакцію опори B визначаємо із рівняння статки (3.1)

$$R_B = F - X = 120 - 40 = 80 \text{ кН}.$$

Після того, як реакції опор бруса визначено, можна побудувати епюру поздовжніх сил N_z та епюру нормальних напружень σ_z . Епюра N_z будується для визначення нормальних напружень σ_z і побудови їх епюри. За допомогою епюри σ_z виявляється *небезпечний переріз, в якому виникає σ_{zmax}* .

Визначаємо величину поздовжніх сил N_z у перерізах 1...4:

$$N_{z,1} = -X = -40 \text{ кН} = N_{z,2};$$

$$N_{z,3} = N_{z,2} = -40 + 120 = 80 \text{ кН} = N_{z,4}.$$

Будуємо епюру N_z (рис. 3.1,з). Епюра замкнута. В перерізах D , C і B є “стрибки” на величину сил X , F та R_B .

Обчислюємо значення напружень у перерізах кожного відрізка. У зв’язку з тим, що в межах кожної ділянки бруса значення $E=\text{const}$ та $A=\text{const}$, маємо

$$\sigma_{z,DC} = \frac{N_{z,DC}}{A_M} = -\frac{40}{10 \cdot 10^{-4}} = -40 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z,CB} = \frac{N_{z,CB}}{A_{CT}} = \frac{80}{15 \cdot 10^{-4}} = 53,3 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 53,3 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру σ_z (рис. 3.1,д). На ділянці бруса BC $\sigma_{zmax}=53,3 \text{ МПа}$. Після визначення σ_{zmax} проводимо необхідні розрахунки на міцність (у даному випадку – це перевірний розрахунок).

На рис. 3.2 наведено алгоритм розкриття статичної невизначуваності систем за методом сил.

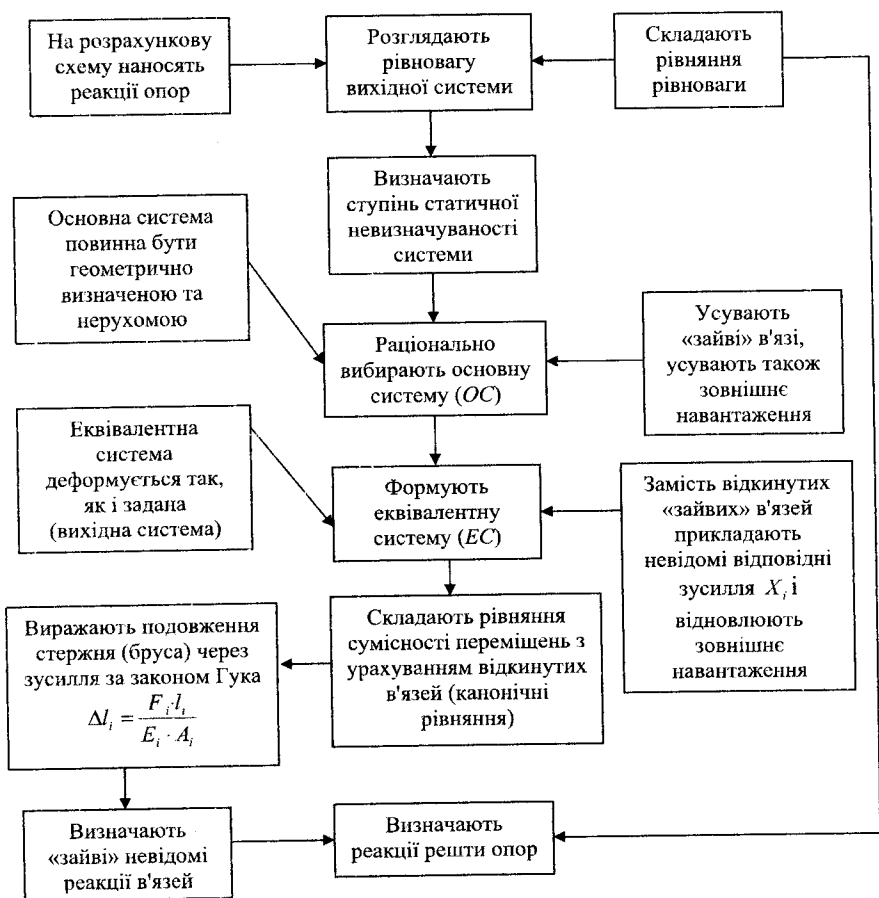


Рис.3.2 — Алгоритм розкриття статичної невизначуваності системи за методом сил

Статично невизначувані системи в порівнянні зі статично визначуваними системами мають такі відмінності:

1. Реакції в'язей у статично невизначуваних системах залежать від жорсткостей стержнів конструкції.
2. Статично невизначувані системи дуже чутливі до зміни температури навколишнього середовища і, як наслідок цього, в елементах систем виникають значні температурні напруження.

3. Якщо довжини стержнів відрізняються від проектних, то після монтажу статично невизначуваних систем виникають так звані монтажні напруження.
4. Статично невизначувані системи після втрати деяких “зайвих” в’язей зберігають геометричну незмінність. У разі втрати хоча б однієї кінематичної в’язі статично визначувана система стає геометрично змінною.
5. Статично невизначувані системи на відміну від статично визначуваних систем мають більш значну монолітність, здатність перерозподіляти навантаження між стержнями системи у випадку пошкодження або послаблення одного чи декількох елементів.

3.3. Приклад розрахунку стержневої конструкції з пружними в’язями

Шарнірно – стержнева система (рис. 3.3,а) складається із двох стержнів KC і MT , що підтримують абсолютно жорсткий невагомий брус BT , який опирається на шарнірно-нерухомий шарнір B . Навантаження $F=225$ кН, співвідношення площі перерізів стержнів $A_1/A_2=0,5$. Потрібно визначити зусилля в стержнях.

Розрахунок конструкції з пружними в’язями починаємо із застосування методу перерізів: зображаємо розрахункову схему з урахуванням внутрішніх зусиль у стержнях. Очевидно, обидва стержні заданої системи під дією зовнішнього навантаження розтягаються, що відображено в позначених напрямках векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ (рис. 3.3,б).

Складаємо рівняння рівноваги системи і визначаємо ступінь її статичної невизначуваності. Для зображеної плоскої довільної системи сил можна записати три рівняння статики:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_i = 0.$$

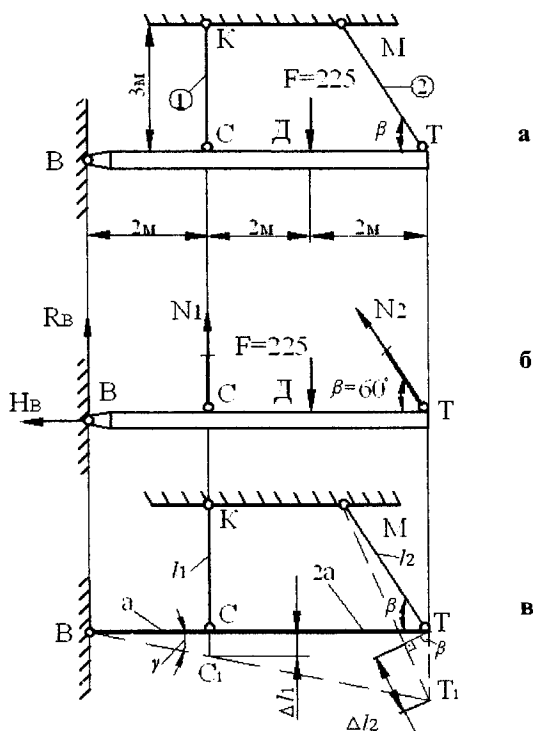


Рисунок 3.3 – До розрахунку стержневої конструкції з пружними в'язями

Оскільки невідомих зусиль $R=4$ (H_B , R_B , N_1 і N_2), а незалежних рівнянь статичи $S=3$, то система один раз статично невизначувана

$$m = R - S = 4 - 3 = 1.$$

Для визначення зусиль N_1 і N_2 в стержнях можна обійтися без визначення опорних реакцій у шарнірно-нерухомій опорі B , тому доцільно записати рівняння суми моментів усіх сил відносно точки B , в яке не ввійдуть реакції H_B і R_B цієї опори

$$\sum M_B = 0; \quad N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 6 \cdot \sin \beta - F \cdot 4 = 0. \quad (3.6)$$

Складаємо рівняння сумісності переміщень. Рівняння переміщень, що відображає залежність між подовженнями стержнів, можна отримати суто геометрично із розгляду схеми деформування системи: брус BT (абсолютно

жорсткий) повернеться на дуже малий кут γ (рис. 3.3,а) навколо нерухомого шарніра опори B ; торці C і T із рухомими шарнірами перемістяться вздовж дуг CC_1 і TT_1 , які описані навколо опори B . Однак, зважаючи на малість пружних деформацій стержнів і кута повороту γ , можна припустити, що торці C і T стержнів переміщуються по нормалям до осі балки в її вихідному положенні (величина похибки, що вводиться при цьому спрощенні, того ж порядку, що і співвідношення $(1-\cos \gamma)/\sin \gamma$).

Залежність між подовженнями стержнів можна записати із подібності трикутників ($\Delta TBT_1 \sim \Delta CBC_1$):

$$\frac{CC_1}{2} = \frac{TT_1}{6},$$

де $TT_1 = \Delta l_2 / \sin \beta$, $CC_1 = \Delta l_1$.

Тоді рівняння сумісності переміщень у геометричній формі має вигляд

$$\Delta l_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta l_2}{\sin \beta}. \quad (3.7)$$

Виражаючи подовження Δl через зусилля N за законом Гука, можна одержати рівняння переміщень у фізичній формі

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l_2}{3E_2 A_2 \cdot \sin \beta}. \quad (3.8)$$

У нашому випадку $A_2 = 2A_1$, $E_1 = E_2$, $l_1 = 3$ м, $l_2 = l_1 / \sin \beta$. Тоді вираз (3.8) можна спростити

$$N_1 \cdot l_1 = \frac{N_2 \cdot l_2}{6 \cdot \sin \beta} \quad \text{або} \quad N_1 = \frac{N_2}{6 \sin^2 \beta} = \frac{N_2}{6 \sin^2 60^\circ} = 0,222 N_2. \quad (3.9)$$

Підставляючи вираз (3.9) у рівняння статички (3.6)

$$4F - 0,222 N_2 \cdot 2 = N_2 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ,$$

знайдемо зусилля в другому стержні

$$N_2 = \frac{4 \cdot 225}{(0,222 + 2,6) \cdot 2} = 159,5 \text{ кН}.$$

У відповідності до (3.9) знайдемо зусилля в першому стержні

$$N_1 = 0,222 N_2 = 0,222 \cdot 159,5 = 35,4 \text{ кН.}$$

На рис. 3.4 наведено алгоритм розкриття статичної невизначуваності за методом переміщень.

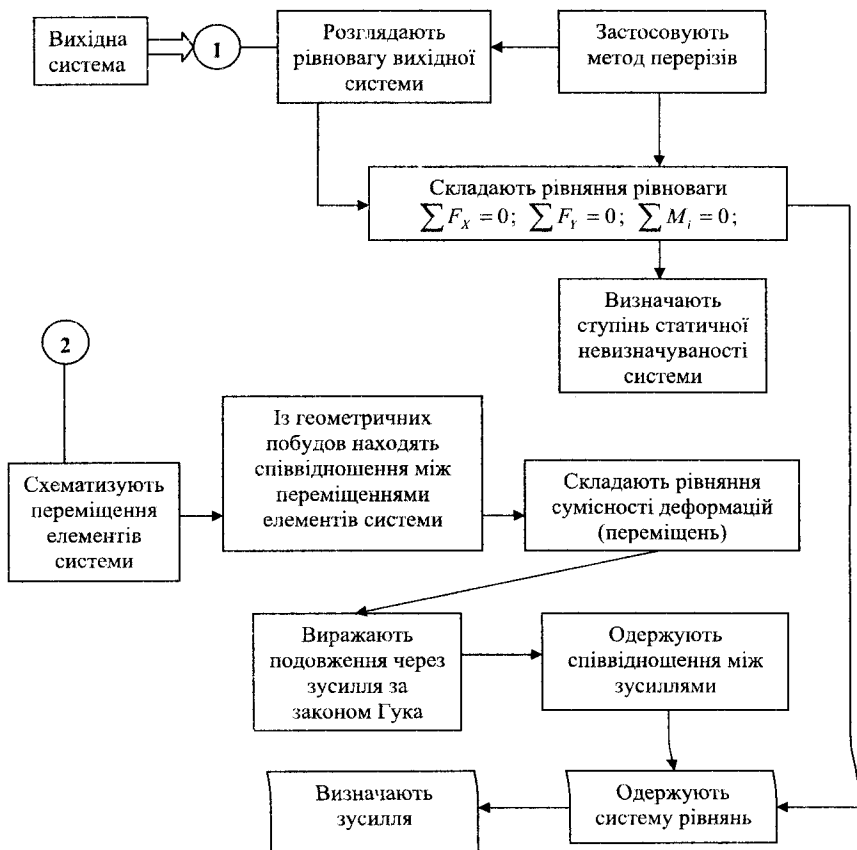


Рис.3.4 – Алгоритм розкриття статичної невизначуваності системи за методом переміщень

3.4. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Які системи називають статично невизначуваними? Чим зумовлена статична невизначуваність?
2. Як визначається ступінь статичної невизначуваності? Навести приклади.
3. Які в'язі називають «зайвими»? В чому полягає метод сил та метод переміщень при розкритті статичної невизначуваності?
4. Навести переваги і недоліки статично невизначуваних систем.
5. Як для заданої стержневої системи, що має певний ступінь статичної невизначуваності, вибирають основну та еквівалентну системи?
6. Записати алгоритм методу сил для розкриття статичної невизначуваності системи. Показати без обчислень на прикладі.
7. Записати алгоритм методу переміщень для розкриття статичної невизначуваності системи. Показати без обчислень на прикладі.
8. Яка особливість проектного розрахунку систем із пружними «зайвими» в'язями?
9. Як впливає зміна жорсткостей окремих елементів статично невизначуваних систем на розподіл зусиль між елементами?
10. Записати формулу для обчислення абсолютного подовження стержня при розтяганні або стисканні. Пояснити суть і одиниці вимірів величин, що входять до формули.

4. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ (ФІГУР)

В опорі матеріалів у розрахункових формулах на міцність, жорсткість та стійкість присутні геометричні характеристики поперечних перерізів стержнів, які враховують не тільки їх розміри, а й форму.

4.1. Площа перерізу

У загальному випадку складного окреслення плоскої фігури її площу визначають як суму елементарних площадок dA (рис. 4.1), тобто беручи подвійний інтеграл по площі A

$$\int_A dA = A, \text{ м}^2.$$

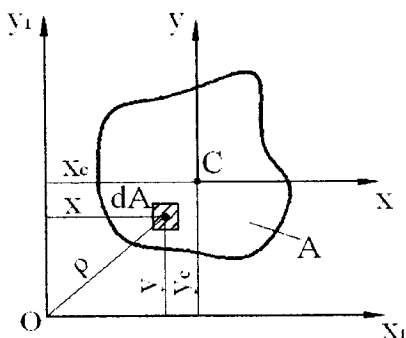


Рисунок 4.1 – До визначення площі та її моментів

Для простих геометричних фігур (прямокутник, трикутник, круг тощо) отримані прості відомі формули.

4.2. Статичні моменти площі перерізу

Розглянемо довільну фігуру (поперечний переріз стержня, рис. 4.1) в системі координат x_1, y_1 . Виділимо елемент площі dA з координатами x, y .

За аналогією з виразом для моменту сили відносно будь-якої осі можна записати вираз для моменту площі, який називають статичним моментом. Так, добуток елементарної площі dA на відстань y від осі x_1

$$dS_x = y \cdot dA$$

являє собою елементарний момент елемента dA відносно осі x_1 , а суму таких моментів, взяту по всій площі, **назвали її статичним моментом площі**.

Таким чином, відносно осей x_1 та y_1 статичні моменти всієї площі – це подвійні інтеграли:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA. \quad (4.1)$$

На основі теореми Вариньйона (про момент рівнодійної) можна записати такі вирази для статичних моментів площі:

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c, \text{ м}^3, \quad (4.2)$$

де x_c, y_c – координати центра ваги (C) площі перерізу.

Статичні моменти можуть бути додатніми і від'ємними в залежності від знаків координат центра ваги відносно відповідних осей.

Величина статичних моментів необхідна при визначенні координат центра ваги складних за формою перерізів:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (4.3)$$

Осі x і y , що проходять через центр площі перерізу, називають **центральними осями**. Із формул (4.2) матимемо, що **статичні моменти площі фігури відносно її центральних осей дорівнюють нулю**.

На рис. 4.2 наведено алгоритм визначення положення центра ваги складного перерізу.

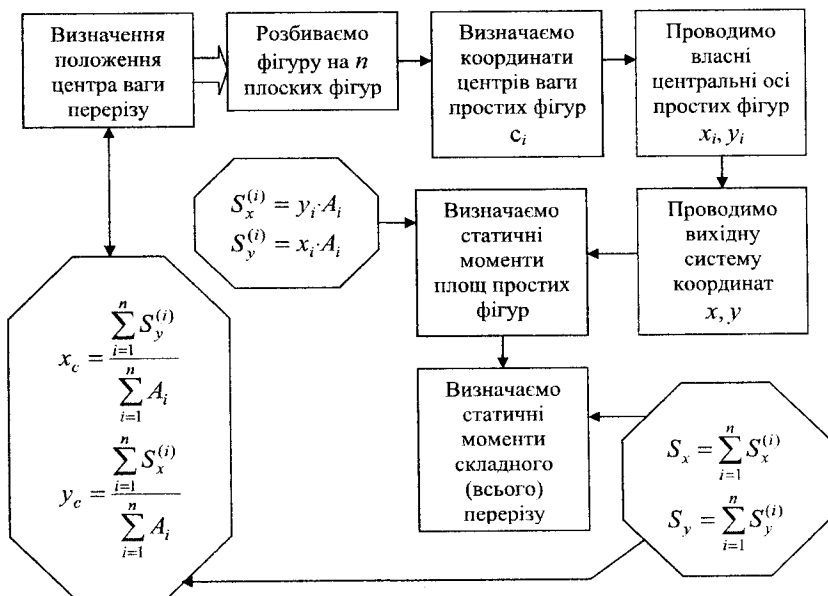


Рисунок 4.2 – Алгоритм визначення положення центра ваги перерізу

4.3. Моменти інерції площі перерізів

По аналогії з поняттям моменту інерції маси тіла відносно довільної осі введено поняття моментів інерції площі, як суми добутків елементарних площадок dA на квадрати їх відстаней відносно відповідної вісі координат (рис. 4.1). Записані у вигляді подвійних інтегралів по площі A , розрізняють такі моменти інерції:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_{xy} = \int_A xy dA; \quad I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.4)$$

тут I_x, I_y – **осьові або екваторіальні моменти інерції** площі перерізу відносно осей x_1 та y_1 , що знаходяться в одній площині з перерізом;

I_{xy} – **відцентровий момент інерції** площі перерізу відносно осей x_1, y_1 ;

I_p – **полярний момент інерції** площі перерізу відносно точки перетину осей x_1 і y_1 , тобто відносно (полюса O);

ρ – відстань від полюса до елементарних площинок dA .

Моменти інерції перерізу виражаються в одиницях довжини в четвертому ступені (наприклад, m^4).

Властивості моментів інерції перерізів.

1. Осьові та полярний моменти інерції не бувають нульовими і можуть набирати лише додатних значень.
2. Відцентровий момент інерції залежно від взаємного положення осей і перерізу може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю.

Осі, відносно яких $I_{xy} = 0$, називають головними.

3. **Сума осьових моментів інерції дорівнює полярному моменту інерції** відносно точки перетину відповідних осей і залишається незмінною при їх повороті

$$I_x + I_y = I_p = \text{const.} \quad (4.5)$$

4. Моменти інерції перерізу відносно осей, паралельних центральним (рис. 4.3):

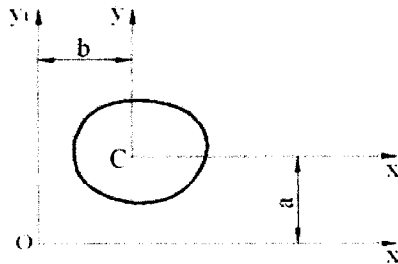


Рисунок. 4.3 – До визначення моментів інерції перерізу відносно осей, паралельних центральним

$$\left. \begin{aligned} I_{x1} &= I_x + a^2 \cdot A; \\ I_{y2} &= I_y + b^2 \cdot A; \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$I_{x1y1} = I_{xy} + a \cdot b \cdot A. \quad (4.7)$$

4.1. Момент інерції відносно довільної осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, паралельній даній, плюс добуток площі перерізу на

квадрат відстані між цими осями (див. формули (4.6)). Таким чином, **моменти інерції відносно центральних осей – найменші.**

4.2. Відцентровий момент інерції відносно довільної системи взаємно перпендикулярних осей дорівнює відцентровому моменту інерції відносно центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі перерізу на відстані між цими осями (див. формулу (4.7)).

Відстані a і b у формулах (4.6) треба підставляти, враховуючи їхні знаки в осях x_1, y_1 .

5. При повороті координатних осей сума осьових моментів інерції і полярний момент відносно початку координат не змінюються, а формули перетворення осьових моментів інерції набувають вигляду $I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0$; $I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha_0 + I_x \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0$.

6. Момент інерції складного перерізу дорівнює сумі моментів інерції його простих складових частин:

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{x_i}; \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i}; \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^n I_{x_i y_i}, \quad (4.8)$$

де I_{x_i}, I_{y_i} – моменти інерції i -ої простої частини перерізу;

n – кількість складових частин всього перерізу.

Геометричні характеристики деяких простих перерізів наведено в табл. 4.1 [4].

4.4. Головні осі інерції та головні моменти інерції перерізу

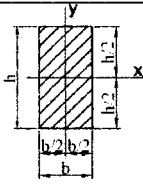
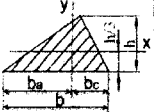
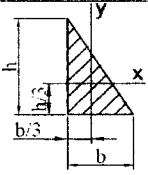
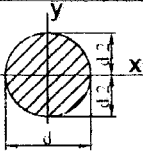
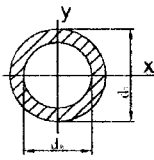
Осі x і y , відносно яких відцентровий момент інерції I_{xy} дорівнює нулю, називають головними осями інерції (перерізу).

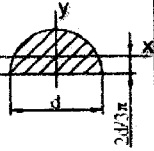
Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу, називають головними центральними осями.

Найбільше практичне значення мають головні центральні моменти інерції. Осьові моменти інерції відносно таких осей (так звані головні

моменти інерції перерізу) екстремальні, тобто один — найбільший, а другий — найменший у порівнянні з іншими центральними.

Таблиця 4.1 – Геометричні характеристики простих фігур (перерізів)

Форма перерізу	Формули для визначення			
	площі перерізу	головних моментів інерції		полярного момента інерції
	$A = bh$	$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{12}$	$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{Ab^2}{12}$	$I_p = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2) = \frac{A}{12}(b^2 + h^2)$
	$A = \frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{Ah^2}{18}$	$I_y = \frac{hb(b^2 - b_a \cdot b_c)}{36}$	$I_p = \frac{bh}{36} \times (h^2 + b^2 - b_a \cdot b_c)$
	$A = \frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{18}$	$I_y = \frac{b^3h}{36} = \frac{Ab^2}{18}$	$I_p = \frac{bh}{36}(b^2 + h^2) = \frac{bhc^2}{36}; c^2 = h^2 + b^2$
	$A = \frac{\pi d^2}{4} = 0,785d^2$	$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{Ad^2}{16}$	$I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{Ad^2}{16}$	$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$
	$A = \frac{\pi(d_3^2 - d_1^2)}{4} = \frac{\pi d_3^2}{4}(1 - c^2) = 0,785d_3^2(1 - c^2)$ $c = d_1 / d_3$	$I_x = \frac{\pi(d_3^4 - d_1^4)}{64} = \frac{\pi d_3^4}{64}(1 - c^4) \approx 0,05d_3^4(1 - c^4)$	$I_y = \frac{\pi(d_3^4 - d_1^4)}{64} = \frac{\pi d_3^4}{64}(1 - c^4) = 0,05d_3^4(1 - c^4)$	$I_p = \frac{\pi(d_3^4 - d_1^4)}{32} = \frac{\pi d_3^4}{32}(1 - c^4) \approx 0,1d_3^4(1 - c^4)$

Форма перерізу	Формули для визначення			
	площі перерізу	головних моментів інерції		полярного момента інерції
	$A = \frac{\pi d^2}{8} = 0,393d^2$	$I_x = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0,00686d^4$	$I_y = \frac{\pi d^4}{128} = 0,02453d^4$	$I_p = 0,03139d^4$

Для визначення положення головних центральних осей інерції несиметричного перерізу використовують формулу

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}, \quad (4.9)$$

де I_x , I_y , I_{xy} – моменти інерції відносно довільної початкової системи центральних осей x , y .

Головні моменти інерції перерізу визначають за формулою

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (4.10)$$

На рис. 4.4 наведено алгоритм визначення моментів інерції плоских фігур.

4.5. Послідовність визначення геометричних характеристик складних перерізів стержнів

Розглянемо приклади визначення геометричних характеристик складних перерізів, використовуючи при цьому рис. 4.2 та рис. 4.4. Для стандартних поперечних перерізів стержнів (кутників рівнобоких, кутників нерівнобоких, двотаврових, швелерних) геометричні характеристики відносно різних осей наведені в таблицях сортamentів: ГОСТ 8509–86, ГОСТ 8510–86, ГОСТ 8239–89, ГОСТ 8240–89 (див. додатки в кінці посібника).

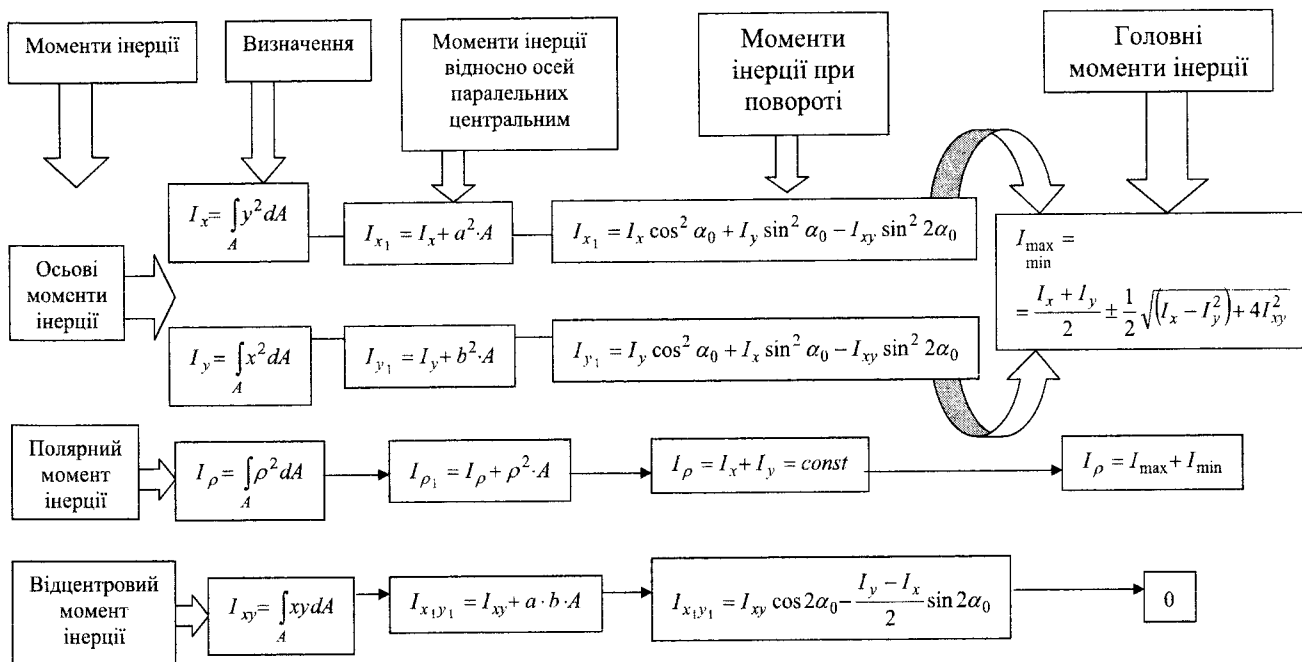


Рис.4.4 – Визначення моментів інерції плоских фігур (перерізів)

Приклад 4.1. Для перерізу, показаного на рис. 4.5, визначити положення центра ваги.

Розв'язання.

Всі необхідні дані для розв'язання задачі беремо із сортаменту для кутника рівнобокого (ГОСТ 8509–86). Розміри елементів перерізів, що входять у розрахунок, наведені на рис. 4.5.

Площі перерізів:

штаби $A_1 = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ см}^2$;

кутника $A_2 = 12,3 \text{ см}^2$.

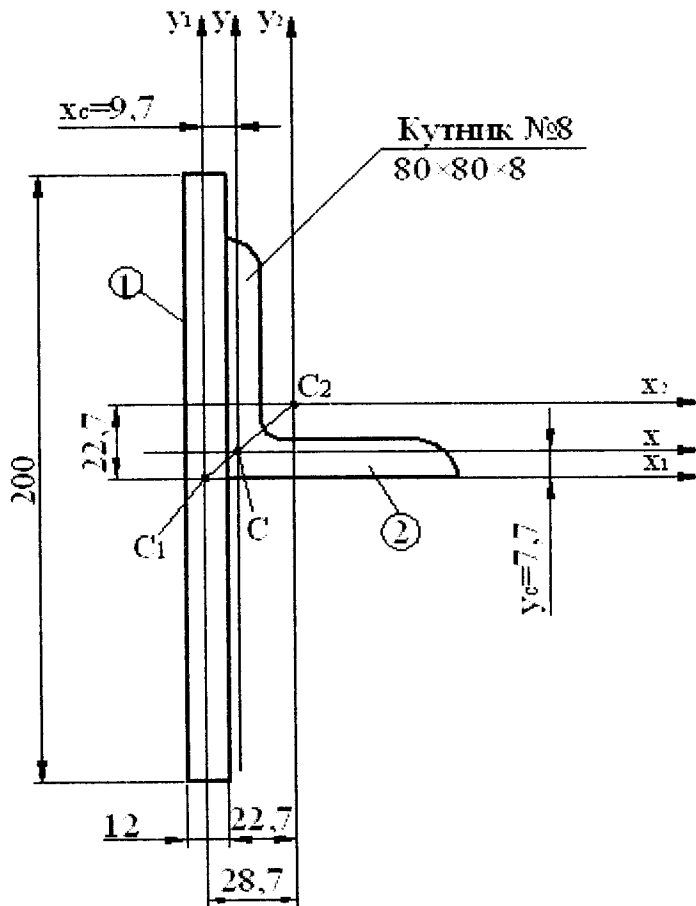


Рисунок 4.5 – До визначення положення центра ваги складного перерізу

Сумарна площа складного перерізу

$$A = A_1 + A_2 = 24 + 12,3 = 36,3 \text{ см}^2.$$

C_1, C_2 – центри ваги відповідно штаби і кутника;

x_1, y_1 та x_2, y_2 – власні центральні осі відповідно штаби і кутника.

Для подальших обчислень використовуємо алгоритм (рис. 4.2).

За вихідну систему координат вибираємо центральну систему координат штаби x_1, y_1 .

Статичні моменти штаби та кутника відносно осей координат x_1, y_1 обчислюємо за формулами (4.2)

$$S_{x_1}^{(1)} = 0; \quad S_{x_1}^{(2)} = 2,27 \cdot 12,3 = 27,9 \text{ см}^3;$$

$$S_{y_1}^{(1)} = 0; \quad S_{y_1}^{(2)} = 2,87 \cdot 12,3 = 35,3 \text{ см}^3.$$

Статичні моменти складного перерізу

$$S_{x_1} = 0 + 27,9 = 27,9 \text{ см}^3;$$

$$S_{y_1} = 0 + 35,3 = 35,3 \text{ см}^3.$$

Координати центра ваги C перерізу обчислюємо за формулами (4.3)

$$x_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{35,3}{36,3} = 0,97 \text{ см} = 9,7 \text{ мм};$$

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{24,9}{36,3} = 0,77 \text{ см} = 7,7 \text{ мм}.$$

Наносимо на рис. 4.5 центральні (не головні) осі перерізу x, y .

Приклад 4.2. Для перерізу, показаного на рис. 4.6, визначити головні моменти інерції.

Розв'язання.

Необхідні дані для розв'язання задачі беремо із сортamentів для двотавра (ГОСТ 8239–89) і для швелера (ГОСТ 8240–89). Розміри елементів перерізів, що входять у розрахунок, наведені на рис. 4.6.

Площі перерізів:

двотавра $A_1 = 26,8 \text{ см}^2$;

швелера $A_2 = 18,1 \text{ см}^2$.

Моменти інерції складових частин перерізу відносно власних центральних осей:

двотавра $I_{x_1}^{(1)} = 1840 \text{ см}^4$; $I_{y_1}^{(1)} = 115 \text{ см}^4$;

швелера $I_{x_2}^{(2)} = 63,6 \text{ см}^4$; $I_{y_2}^{(2)} = 747 \text{ см}^4$.

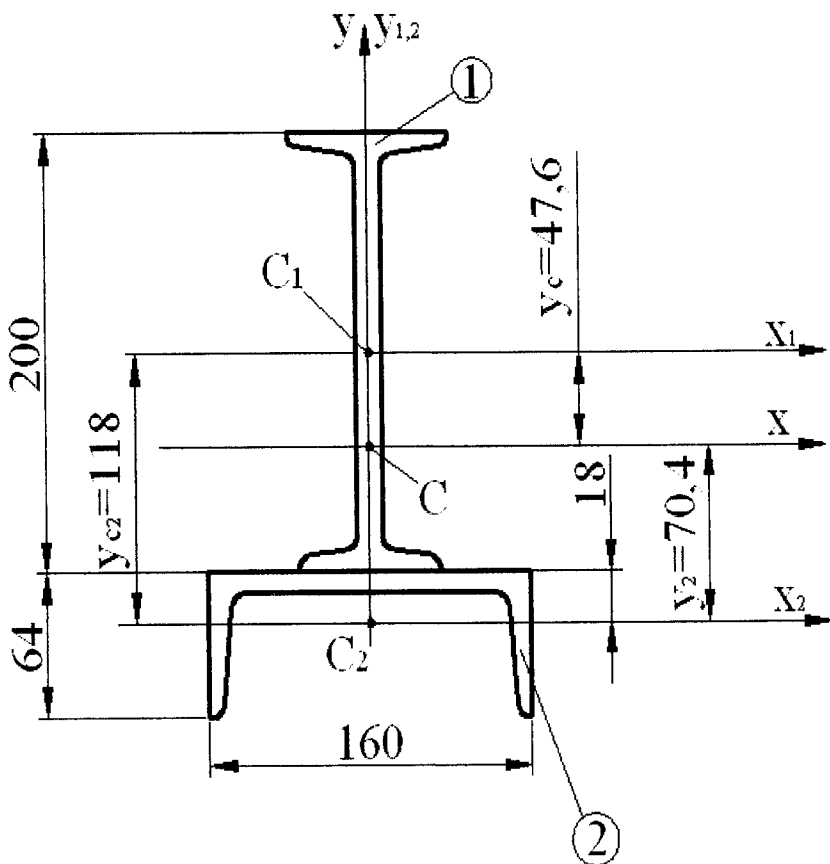


Рисунок 4.6 – До визначення головних моментів інерції складного перерізу

Центр ваги складного перерізу знаходиться на осі симетрії y (центральної осі y_1 (двотавра), y_2 (швелера) та y (всього перерізу) збігаються). За вихідну систему координат виберемо центральні вісі двотавра x_1, y_1 .

Тоді координати центра ваги цієї фігури будуть такими:

$$x_c = 0; \quad y_c = \sum S_{x_i} / A,$$

де $A = A_1 + A_2 = 26,8 + 18,1 = 44,9 \text{ см}^2$ – сумарна площа складного перерізу;

$\sum S_{x_i} = S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)}$ – статичний момент площі складного перерізу відносно осі x_1 .

$$S_{x_1}^{(1)} = A_1 \cdot y_{c_1} = 26,8 \cdot 0 = 0;$$

$$S_{x_1}^{(2)} = A_2 \cdot y_{c_2} = 18,1 \cdot (-11,8) = -213,6 \text{ см}^3,$$

де $S_{x_1}^{(1)}$ і $S_{x_1}^{(2)}$ – статичні моменти площі двотавра (1) і швелера (2) відносно осі x_1 .

Ордината центра ваги складного перерізу відносно осі x_1

$$y_c = -\frac{213,6}{44,9} = -4,76 \text{ см} = -47,6 \text{ мм}.$$

Наносимо центр ваги складної фігури C на рис. 4.6 вниз від осі x_1 , оскільки ордината y_c – від’ємна.

Через центр ваги (C) проводимо головні центральні осі складного перерізу x і y .

Обчислюємо головні моменти інерції I_x і I_y всього перерізу відносно головних центральних осей x і y :

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)}; \quad I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)},$$

де $I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + y_c^2 \cdot A_1 = 1840 + 4,76^2 \cdot 26,8 = 2447,2 \text{ см}^4;$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + y_2^2 \cdot A_2 = 63,3 + 7,04^2 \cdot 18,1 = 960,4 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(1)} = 115 \text{ см}^4; \quad I_y^{(2)} = 747 \text{ см}^4 \text{ (вихідні дані);}$$

$$I_x = 2447,2 + 960,4 = 3407,6 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 115 + 747 = 862 \text{ см}^4.$$

4.6. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Дати визначення осьового, відцентрового та полярного моментів інерції.
2. Записати аналітичну залежність між осьовими та полярним моментами інерції.
3. Які осі перерізу називають головними, а які – головними центральними осями?
4. Укажіть основну властивість головних моментів інерції.
5. Запишіть залежність між моментами інерції відносно осей, паралельних центральним.
6. Укажіть, відносно яких осей (центральної чи паралельної їм?) моменти інерції перерізу будуть меншими.
7. Які моменти мають властивість екстремальності?
8. Запишіть алгоритм визначення положення центра ваги перерізу.
9. Запишіть алгоритм визначення моментів інерції при повороті координатних осей.
10. Назовіть форми простих перерізів (фігур), для яких головні центральні моменти інерції однакові.

5. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ ЗГИНАННІ

5.1. Чисте плоске згинання

Згинання – це такий вид опору, коли в поперечних перерізах певної ділянки стержня **виникають тільки згинальний момент і (можливо) ще й поперечна сила**. Найчастіше такий вид опору зазнають балки.

Розглянемо випадок чистого згинання балки (рис. 5.1,а). Поперечна сила в цьому випадку відсутня ($Q_y = 0$), а значення згинального моменту постійні ($M_x = M = \text{const}$) в межах довжини l балки (рис. 5.1,б). Згинання буде **плоским** тоді, коли **площина дії сил і моментів збігається з головною віссю перерізу**.

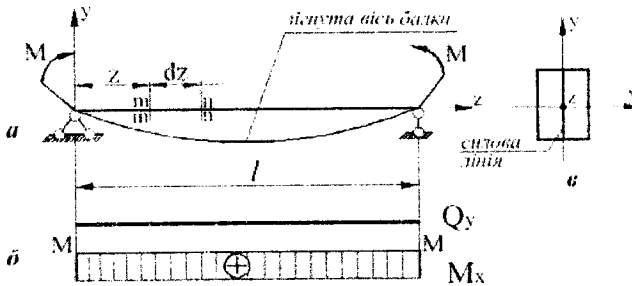


Рисунок 5.1 – Чисте плоске згинання балки

Таким чином, **чисте плоске згинання характеризується наявністю в поперечному перерізі балки тільки одного внутрішнього силового фактора: згинального моменту M_x (чи M_y)**, площина дії якого збігається з головною центральною віссю x чи y перерізу. Так, чисте плоске згинання зазнає балка, якщо до неї прикладені два рівних за величиною та протилежних за напрямком зовнішні моменти M , розташовані в одній площині, що утримує поздовжню вісь z балки і збігається з однією із головних осей перерізу (рис. 5.1,а, в).

Площини, утворені поздовжньою віссю балки z та центральною головною віссю x (чи y) поперечного перерізу, називають головними площинами.

Лінію перетину силової площини з поперечним перерізом балки називають силовою лінією. При чистому плоскому згинанні силова лінія

збігається з однією із головних центральних осей поперечного перерізу (рис. 5.1,б).

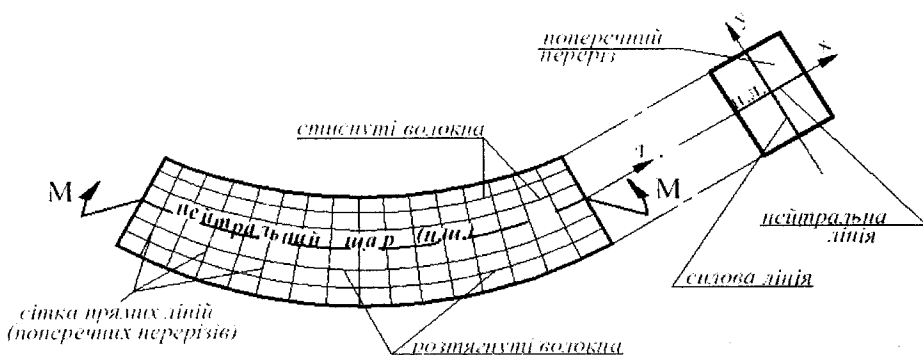
5.2. Нормальне напруження в поперечному перерізі балки при чистому плоскому згинанні

Для визначення напружень при чистому плоскому згинанні приймають такі гіпотези і припущення:

1. Поперечні перерізи балки плоскі до навантаження залишаються плоскими і під час згинання, повертаючись так, що залишаються перпендикулярними до зігнутої осі балки (рис. 5.2,а). Тобто, **гіпотеза плоских перерізів Бернуллі при чистому згинанні прямих стержнів є прийнятною**.

2. Умовні поздовжні волокна не тиснуть одне на одне, тобто **контактні напруження між ними відсутні**.

Неважко уявити, що при згинанні балки (рис. 5.2,а) одні (нижні) прошарки волокон зазнають розтягання і подовжуються, а інші (верхні) – стиснуті і укорочуються. Завдяки **нерозривності деформацій є шар волокон, які не змінюють свою початкову довжину. Такий шар волокон називають нейтральним. Лінію перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу балки назвали нейтральною лінією (віссю), бо навколо неї і повертаються перерізи** (рис. 5.2,б).



а

б

Рисунок 5.2 – Схема згинання балки

Очевидно, що нейтральна лінія перпендикулярна до силової площини і проходить через центр перерізу. Неважко довести, що нейтральна лінія збігається з головною віссю перерізу, перпендикулярною до силової лінії.

3. По ширині поперечного перерізу (на одному рівні) нормальні напруження однакові, оскільки волокна одного шару деформуються однаково.

Відома (див. формулу (1.8)) інтегральна залежність між згинальним моментом і нормальними напруженнями, появу яких він зумовлює в поперечному перерізі

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA, \tag{5.1}$$

де y – віддалення від елементарної сили « $\sigma_z \cdot dA$ » до нейтральної лінії (рис. 5.3);

dA – нескінченно малий елемент площі, координати якого x та y .

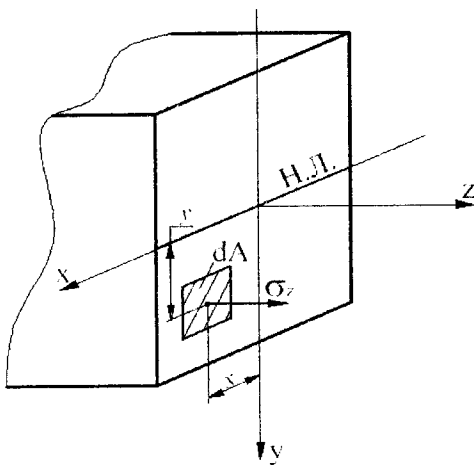


Рисунок 5.3 – «Реалізація» згинального моменту в перерізі елементарними « $\sigma_z \cdot y \cdot dA$ »

Визначити σ_z безпосередньо з виразу (5.1) неможливо, поки невідома функція $\sigma_z = f(y)$. Таким чином, задача є статично невизначуваною і для її розв'язання необхідно записати рівняння сумісності переміщень з розгляду схеми деформування волокон при згинанні балки.

Двома поперечними перерізами $m-m$ та $n-n$, які розташовані один від одного на нескінченно малій відстані dz (рис. 5.1,а), виділимо елемент балки (на рис.5.4

показаний пунктиром) при згинанні і розглянемо схему його деформування.

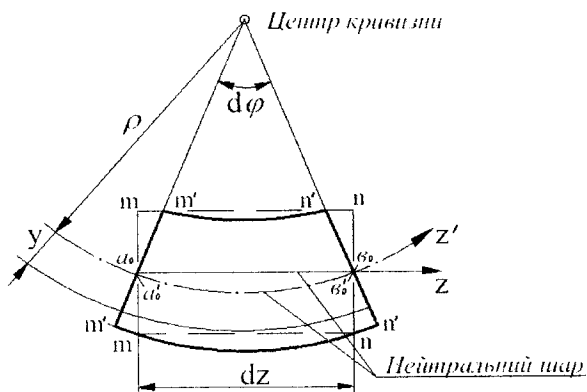


Рисунок 5.4 – Схема деформування елемента балки при чистому згинанні

Утворення деформацій при чистому згинанні можна розглядати як результат повороту плоских поперечних перерізів $m-m$ та $n-n$ під дією згинального моменту один відносно другого на деякий кут $d\varphi$. Елемент a_0b_0 нейтрального шару вигинається в дугу $a_1^1b_1^1$ з радіусом кривизни ρ , причому довжина цього елемента залишається незмінною, тобто $a_0b_0 = a_1^1b_1^1 = dz = \rho d\varphi$. Волокна, які знаходяться з опуклого боку балки (в нашому випадку – нижче нейтрального шару), розтягуються.

Відносне подовження волокна, розташованого на відстані y від нейтрального шару

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (5.2)$$

Відповідне нормальне напруження в цьому випадку згідно закону Гука при розтяганні

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \frac{y}{\rho}. \quad (5.3)$$

Таким чином, при чистому згинанні балки нормальні напруження, як і деформації, по висоті поперечного перерізу змінюються за лінійним законом.

Розв'язуючи тепер сумісно рівняння (5.3) і статки (5.1), та враховуючи те, що E і ρ не залежать від положення елемента dA в перерізі, одержимо

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_x. \quad (5.4)$$

Оскільки $I_x = \int_A y^2 dA$ – це момент інерції поперечного перерізу, то із залежності (5.4) можна отримати вираз для кривизни нейтрального шару

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (5.5)$$

тут: EI_x – це жорсткість балки при згинанні;

$\frac{1}{\rho}$ – кривизна поздовжньої вісі зігнутої балки, яка є мірою її деформування при згинанні.

Підставивши вираз (5.5) в закон Гука (5.3), можна одержати формулу для визначення нормальних напружень у будь-якій точці поперечного перерізу балки при її чистому згинанні:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y, \quad (5.6)$$

де M_x – згинальний момент у розглядуваному перерізі, $\kappa\text{Нм}$;

I_x – головний момент інерції перерізу відносно його нейтральної лінії, м^4 ;

y – віддалення від нейтральної лінії до точки перерізу, в якій обчислюється нормальне напруження, м .

Епюра нормальних напружень $\sigma_z = f(y)$ згідно функції (5.6) – лінійна (рис. 5.5,б).

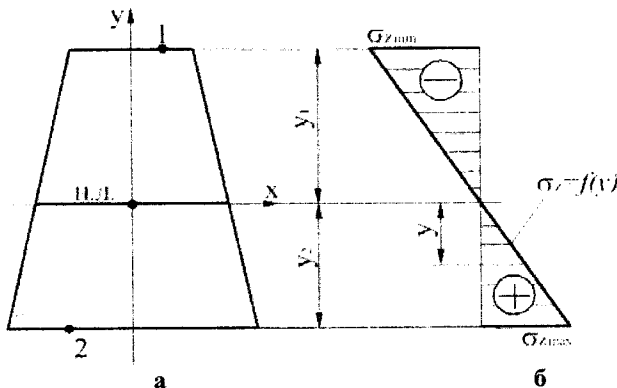


Рисунок 5.5 – Розподіл нормальних напружень σ_z (б) в перерізі балки (а) при чистому згинанні

Із рис. 5.5,б видно, що **максимальні нормальні напруження виникають у точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії:**

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (5.7)$$

де $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$ — осьовий момент опору перерізу при згинанні.

Для стандартних профілів (двотавр, швелер) значення осьових моментів опору W_x , W_y наведені в сортаменті (для двотавра — ГОСТ8239–89, для швелера — ГОСТ 8240–89, див. **додатки 3,4**).

Для нестандартних профілів моменти опору визначають із простих формул. Наприклад, для перерізу прямокутної форми

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{(bh^3/12)}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}, \quad (5.8)$$

тут b, h — відповідно ширина і висота поперечного перерізу;

- для перерізу квадратної форми

$$W_x = W_y = \frac{a^3}{6}, \quad (5.9)$$

де a — розмір сторони квадратного перерізу;

- для круглого перерізу

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{(\pi d^4/64)}{(d/2)} = \frac{\pi d^3}{32}; \quad \text{причому } W_x = W_y, \quad (5.10)$$

тут d — діаметр суцільного круглого перерізу.

Для кільцевого перерізу величина W_x являє собою різницю моментів інерції зовнішнього кола діаметром d і внутрішнього отвору діаметром d_s , поділену на $y_{\max} = d/2$, тобто

$$W_x = \frac{\left(\frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi d_s^4}{64} \right)}{(d/2)} = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4), \quad (5.11)$$

тут $c = d_s/d$ — коефіцієнт.

5.3. Умова міцності при чистому плоскому згинанні

Згідно з формулою (5.7), умова міцності має вигляд

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{x \max}}{W_{\max}} \leq [\sigma], \quad (5.12)$$

де $M_{x \max}$ – абсолютне значення найбільшого згинального моменту в небезпечному перерізі, чисельне значення якого беруть із епюри M_x , кНм ;

W_x – осьовий момент опору перерізу при згинанні, м^3 ;

$[\sigma]$ – допустиме напруження при розтяганні (стисканні), кПа .

5.4. Напруження при поперечному згинанні

Розглянемо приклад навантаження балки зосередженими силами F (рис. 5.6,а).

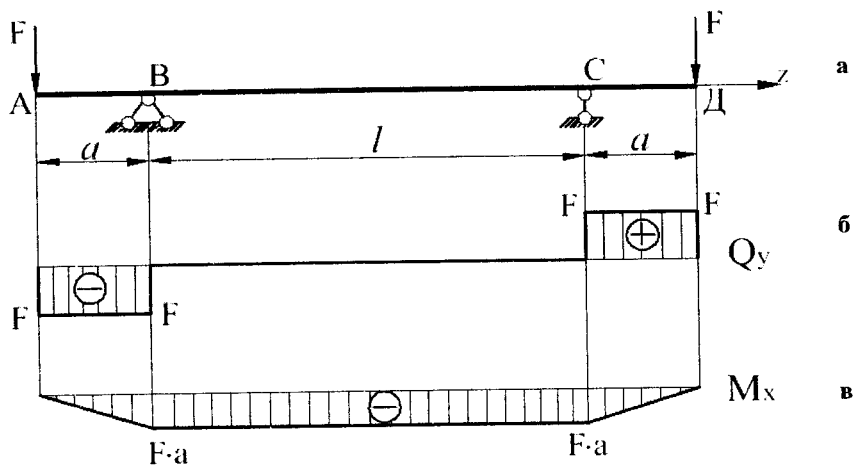


Рисунок 5.6 – Приклад чистого і поперечного згинання балки

Із рис. 5.6 видно, що на ділянці BC має місце чисте згинання, яке ми розглядали в п.п.5.1...5.3. На ділянках же AB і CD згинання характеризується наявністю в поперечних перерізах двох внутрішніх силових факторів: поперечної сили Q_y (рис. 5.6,б) та згинального моменту M_x (рис. 5.6,в). Такий

вид опору є поперечним згинанням. При поперечному згинанні в перерізах виникають не тільки нормальні σ_z , але й дотичні τ_{zy} напруження.

5.4.1. Нормальні напруження при поперечному згинанні

При поперечному згинанні виникають дотичні напруження в поперечному і поздовжньому перерізах, які депланують поперечні перерізи.

Якщо поперечні сили постійні в перерізах певної ділянки балки, то депланация всіх перерізів однакова і поздовжні деформації волокон будуть такими ж, як і при повороті плоских перерізів. У цьому разі формула (5.6) для визначення нормальних напружень буде вірною.

Якщо ж $Q_y = f(z)$, то ступінь депланції сусідніх поперечних перерізів буде різною. У цьому випадку формула (5.6) не буде точною, і похибка буде такої ж величини, що і відношення $\frac{h}{l}$ в порівнянні з одиницею (h – товщина балки, l – її довжина).

5.4.2. Дотичні напруження при поперечному згинанні

Щодо характеру розподілу дотичних напружень у поперечному перерізі балки приймають припущення, що по ширині поперечного перерізу (на одному рівні) дотичні напруження розподілені рівномірно, тобто τ_{zy} постійні по ширині.

Формула Д.І. Журавського для визначення дотичних напружень при поперечному згинанні має такий вигляд:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x(y)}{b(y) \cdot I_x}, \quad (5.13)$$

де τ_{zy} – дотичне напруження в розглядуваній точці поперечного перерізу, кПа ;

Q_y – абсолютне значення поперечної сили в розглядуваному перерізі, кН ;

S_x – абсолютне значення статичного моменту частини перерізу, відсіченої на рівні розглядуваної точки, м^3 ;

$b(y)$ – ширина перерізу балки на рівні, де визначають дотичні напруження, м ;

I_x – момент інерції всього перерізу відносно його центральної вісі x , м^4 .

Абсолютне значення статичного моменту відсіченої частини перерізу обчислюється за формулою

$$S_x(y) = A^{відс} \cdot y^*,$$

тут $A^{відс}$ та y^* – відповідно площа відсіченої частини перерізу і віддалення її центра ваги C_0 відносно центральної вісі x (рис. 5.7,а).

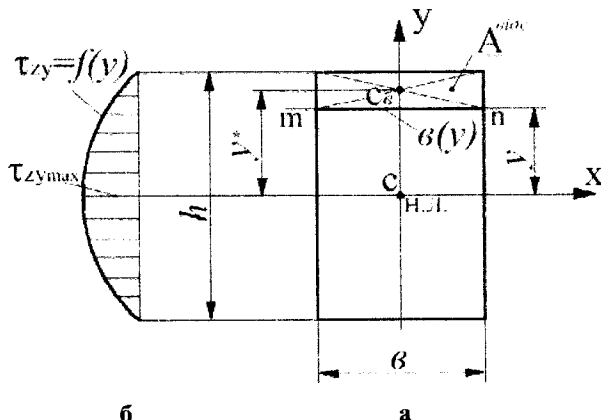


Рисунок 5.7 – Прямокутний переріз (а) та епюра розподілу дотичних τ_{zy} напружень (б) при поперечному згинанні

Для поперечного перерізу значення Q_y та I_x є сталі величини; в залежності від форми перерізу ширина $b(y)$ перерізу може бути, взагалі, змінною величиною (при наявності форми перерізу функція $b(y)$ – відома). На відміну від Q_y та I_x значення статичного моменту $S_x(y)$ відсіченої частини перерізу має змінну величину, яка залежить від y^* . Так, для балки прямокутного перерізу зі сторонами b і h (рис. 5.7,а):

- площа частини перерізу, відсіченої на рівні розглядуваного шару волокон mn :

$$A^{відс} = b\left(\frac{h}{2} - y\right);$$

- статичний момент цієї площі

$$S_x(y) = S_{xc}^{відс} = A^{відс} \cdot y^* = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Отже, епіюра дотичних напружень по висоті прямокутного перерізу окреслюється **квадратичною параболою** (рис. 5.7,б). **Найбільші дотичні напруження виникають при $y=0$**

$$\tau_{zy} = \tau_{zy \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{A}.$$

У найвіддаленіших від нейтральної лінії точках перерізу дотичні напруження відсутні, оскільки $S_x^{відс} = 0$.

Слід зауважити, що *практичне застосування формули (5.13) для визначення дотичних напружень у прямокутних перерізах справедливо при $h \gg b$* .

Із рис. 5.7 можна зробити **висновок**, що **максимальні нормальні і дотичні напруження виникають в різних точках поперечного перерізу**: для дотичних напружень **небезпечні точки належать нейтральній лінії**, для нормальних напружень **небезпечні точки – найбільш віддалені від нейтральної лінії**.

Зробимо аналіз абсолютних значень максимальних нормальних $\sigma_{z \max}$ і максимальних дотичних $\tau_{zy \max}$ напружень, які виникають у поперечних прямокутних перерізах консольної балки (рис. 5.8).

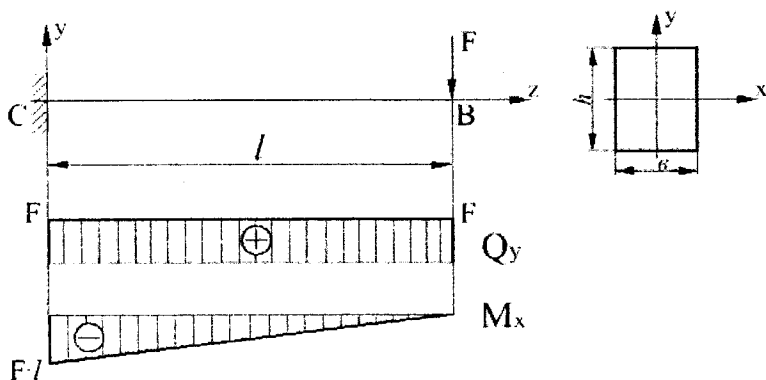


Рисунок 5.8 – До порівняння дотичних τ_{zy} і нормальних σ_z напружень

Переріз C – небезпечний:

$$Q_{y \max} = F; \quad M_{x \max} = Fl;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad A = bh;$$

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} = \frac{6Fl}{bh^2}; \quad \tau_{zy \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{y \max}}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{bh}.$$

Звідси $\frac{\tau_{zy \max}}{\sigma_{z \max}} = \frac{h}{4l}.$

Це свідчить про те, що **максимальні дотичні напруження при поперечному згинанні значно менші нормальних напружень** ($h \ll 4l$).

У випадку плоского поперечного згинання умови міцності можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{z \max} &= \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma]; \\ \tau_{zy \max} &= \frac{Q_{y \max} \cdot S_x(y)_{\max}}{b(y)I_x} \leq [\tau], \end{aligned} \quad (5.14)$$

де $[\sigma]$, $[\tau]$ – допустиме нормальне та дотичне напруження.

У зв'язку з незначною величиною $\tau_{zy \max}$ в довгих нетовстих балках розрахунок на міцність елементів конструкцій із пластичних матеріалів при поперечному згинанні проводять тільки за нормальними напруженнями. Однак, для коротких товстих балок (особливо із легко сколюваних матеріалів – дерево, волоконні пластики тощо) τ можуть бути небезпечними і необхідно перевіряти міцність по дотичним напруженням.

На рис. 5.9 наведено алгоритм вибору розмірів поперечного перерізу балки із умови міцності.

Приклад 5.1. Для балки на двох опорах (рис. 5.10,а) вибрати із умови міцності двотавровий переріз, взявши допустиме напруження $[\sigma]=160 \text{ МПа}$. Побудувати епюри нормальних та дотичних напружень для вибраного двотаврового перерізу.

Розв'язання.

Розв'язання задачі починаємо з визначення реакцій опор B і C :

$$\sum M_B = 0; \quad -F \cdot 1 + q \frac{1^2}{2} - M - q \cdot 2 \cdot 1 + R_C \cdot 1 = 0;$$

$$R_C = 20 - 20 \cdot 0,5 + 20 + 20 \cdot 2 = 70 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; \quad -F \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 - M + R_B \cdot 1 - q \frac{1^2}{2} = 0;$$

$$R_B = 40 - 40 + 20 + 20 \cdot 0,5 = 30 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевіряємо розрахунки: } \sum F_y = 20 - 20 \cdot 3 - 30 + 70 = 0.$$

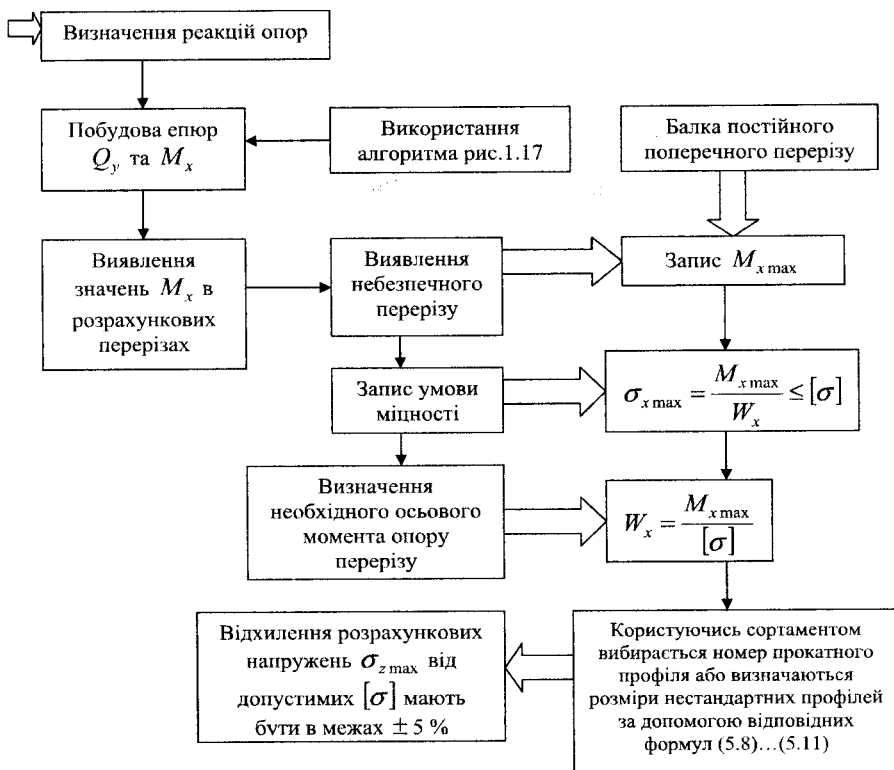


Рисунок 5.9 – Алгоритм вибору розмірів поперечного перерізу балки із умови міцності при чистому згинанні

Визначення поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_x у характерних перерізах:

$$Q_{y,1} = F = 20 \text{ кН};$$

$$Q_{y,2} = F - q \cdot 1 = 20 - 20 = 0;$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,2} - R_B = 0 - 30 = -30 \text{ кН};$$

$$Q_{y,4} = Q_{y,3} - q \cdot 1 = -30 - 20 = -50 \text{ кН};$$

$$Q_{y,6} = 0; \quad Q_{y,5} = q \cdot 1 = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кН};$$

$$Q_{y,4} = Q_{y,5} - R_C = 20 - 70 = -50 \text{ кН}.$$

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = F \cdot 1 - q \cdot \frac{1^2}{2} = 20 \cdot 1 - 20 \cdot \frac{1^2}{2} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x,3} = M_{x,2} + M = 10 + 20 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x,C} = F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 + M - R_B \cdot 1 = 20 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 + 20 - 30 \cdot 1 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

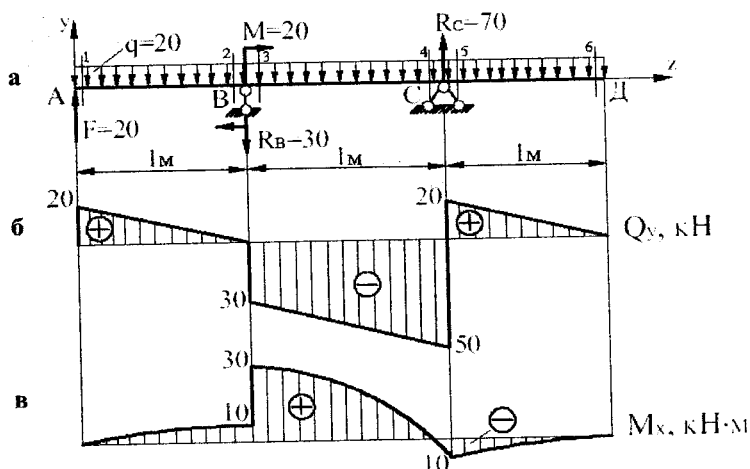


Рисунок 5.10 – До розрахунку на міцність балки

Будуємо епюри поперечних сил Q_y (рис. 5.10,б) і згинальних моментів M_x (рис. 5.10,в).

Небезпечний переріз розглядуваної балки знаходиться над опорою B, в якому максимальний згинальний момент $M_{x \max} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

За умови міцності (5.7) обчислюємо необхідний осьовий момент опору перерізу

$$W_x = \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{30}{16 \cdot 10^4} = 1,88 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 188 \text{ см}^3.$$

За таблицею сортаменту (див. додаток 3, ГОСТ8239-89) слід вибрати найближчий двотавр №20, для якого $W_x = 184 \text{ см}^3$. Максимальні нормальні напруження в небезпечних точках вибраного перерізу

$$\sigma_{z \max} = \frac{30}{184 \cdot 10^{-6}} = 163 \text{ МПа}$$

перевищують допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Перенапруження дорівнює

$$\Delta_{\sigma} = \frac{163 - 160}{160} \cdot 100 \% = 1,9 \% < 5 \%$$

Оскільки перенапруження менше 5 %, то приймаємо цей прокатний профіль №20. Згідно з таблицею сортаменту запишемо потрібні для подальших розрахунків вихідні дані для двотавра №20: $h = 200 \text{ мм}$; $b = 100 \text{ мм}$; $d = 5,2 \text{ мм}$; $t = 8,4 \text{ мм}$; $I_x = 1840 \text{ см}^4$; $W_x = 184 \text{ см}^3$; $S_x = 104 \text{ см}^3$ (статичний момент площі половини цього перерізу).

Побудуємо епюри нормальних і дотичних напружень для перерізу В двотаврової балки, в якому згинальний момент $M_{x \max} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і поперечна сила $Q_y = -30 \text{ кН}$.

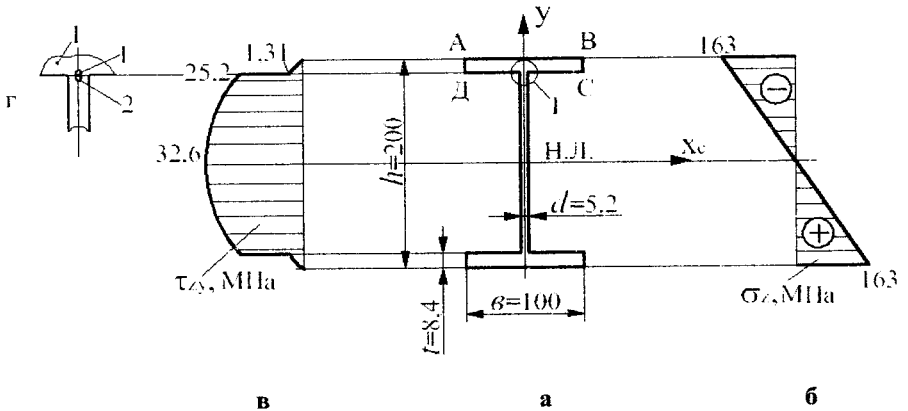


Рисунок 5.11 – Схематизований двотавровий переріз (а) балки та епюри нормальних σ_z (б) і дотичних τ_{zy} (в) напружень

Нормальні напруження σ_z в точках поперечного перерізу на відстані y від нейтральної лінії (н.л.) визначаємо за формулою (5.6)

$$\sigma_z = M_x \cdot y / I_x.$$

Максимальні значення напруження будуть при $y_{\max} = h/2 = 100 \text{ мм}$:

$$\sigma_{z \max} = 30 \cdot 0,1 / 1840 \cdot 10^{-8} = 163 \text{ МПа}.$$

Епюру напружень σ_z наведено на рис. 5.11,б.

Дотичні напруження τ_{zy} в точках поперечного перерізу балки обчислюються за формулою Д.І. Журавського (5.13)

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x(y)}{b(y) \cdot I_x}.$$

Для побудови епюри дотичних напружень обчислимо τ_{zy} в кількох характерних точках. Для крайніх верхніх точок (на лінії AB) статичний момент $S_x(0) = 0$. Отже, в точках лінії AB напруження $\tau_{zy} = 0$.

Для крайніх нижніх точок полиці (на лінії CD) статичний момент визначається моментом площі полиці

$$S_x(y) = b t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 10 \cdot 0,84 \cdot \left(\frac{20}{2} - \frac{0,84}{2} \right) = 80,5 \text{ см}^3.$$

У місці з'єднання полиці зі стінкою (в точках стінки **2**, розташованих нескінченно близько до межі полиці) дотичні напруження обчислюються відповідно: для точки **1** ширина перерізу $b = 100 \text{ мм}$, статичний момент $S_x(y) = 80,5 \text{ см}^3$

$$\tau_{zy,1} = \frac{30 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 13,1 \cdot 10^2 \text{ кПа} = 1,31 \text{ МПа};$$

для точки **2** статичний момент залишається практично тим самим, але ширина перерізу $b(y) = d = 5,2 \text{ мм}$, тому дотичні напруження в точці **2** будуть більшими майже в **20** раз:

$$\tau_{zy,2} = \frac{30 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 2,52 \cdot 10^4 \text{ кПа} = 25,2 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки **1** до точки **2** дотичні напруження різко збільшуються.

У точках нейтральної лінії ширина перерізу $b(y) = d = 5,2 \text{ мм}$, а статичний момент слід взяти для половини перерізу балки. Очевидно, що це буде найбільший статичний момент для даного перерізу $S_x(y)_{\max} = S_x = 104 \text{ см}^3$ (див. вихідні дані).

Тоді

$$\tau_{zy, \text{н.л.}} = \tau_{zy \max} = \frac{30 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 3,26 \cdot 10^4 \text{ кПа} = 32,6 \text{ МПа}.$$

На підставі цих даних будемо епюру τ_{zy} для верхньої половини перерізу. Для нижньої половини внаслідок симетрії профілю відносно осі x епюра буде симетричною. Епюра наведено на рис. 5.11, в.

Побудована епюра дещо умовна, оскільки дає справедливі значення τ_{zy} тільки для точок стінки, досить віддалених від полиць. Оскільки дотичні напруження дуже малі в окремих точках перерізу, то епюри τ_{zy} і σ_z побудовані в різних масштабах (для наглядності).

5.5. Переміщення при плоскому поперечному згинанні

Стержні, які застосовуються в інженерних спорудах і зазнають деформацію згинання, повинні мати не тільки відповідну міцність, але й достатню жорсткість. Під дією зовнішніх навантажень переміщення їх перерізів не повинні перевищувати встановлених нормами допустимих значень.

Тому на практиці виникає часто потреба проводити розрахунок стержнів при згинанні не тільки на міцність, але й на жорсткість. Для виконання розрахунку на жорсткість треба вміти обчислювати відповідні переміщення перерізів.

Розглянемо переміщення перерізів при згинанні консольної балки (рис. 5.12).

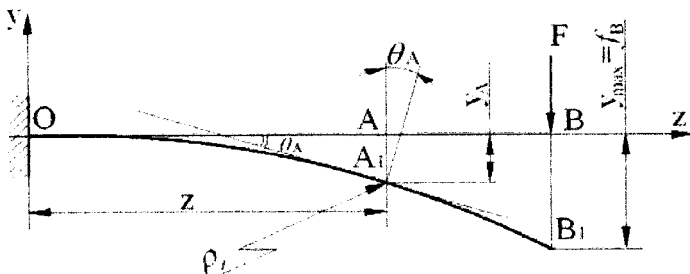


Рисунок 5.12 – Переміщення при згинанні балки: OB – недеформована вісь балки; OB_1 – зігнута вісь балки; θ_A – кутове переміщення перерізу A ; y_A – лінійне переміщення перерізу A ; ρ_z – радіус кривизни вісі балки

При плоскому поперечному згинанні зігнута вісь балки лежить у силувій площині і збігається з головною площиною. Викривлену вісь балки називають зігнутою віссю або пружною лінією.

Положення поперечного перерізу балки при згинанні визначається двома переміщеннями (див. рис. 5.12):

1. $y_A = y(z)$ – **лінійне переміщення центра ваги перерізу в напрямі, перпендикулярному до недеформованої осі балки, яке називають прогином;**

2. $\theta_A = \theta(z)$ – **кутове переміщення, а саме: кут повороту перерізу навколо нейтральної осі перерізу відносно його початкового положення.**

Вважають, що довжина зігнутої поздовжньої осі, що належить нейтральному шару, при викривленні балки не змінюється.

Найбільший прогин $y_{\max}$ позначають літерою f (на рис. 5.12 $y_{\max} = f_B$).

При пружних деформаціях кут повороту дуже малий ($\theta < 1^\circ$), тому можна вважати, що $\operatorname{tg}\theta(z) \approx \theta(z)$. Оскільки тангенс кута повороту є похідною від функції прогинів

$$\operatorname{tg}\theta(z) = \frac{dy}{dz},$$

то можна записати

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = y'(z). \quad (5.15)$$

Таким чином, прогин і кути поворотів балки на будь-якій відстані z від початку координат можуть бути визначені, якщо відоме рівняння зігнутої осі балки.

5.6. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

Між кривизною $1/\rho$ зігнутої осі балки (пружної лінії), згинальним моментом M_x , який зумовлює цю кривизну, та жорсткістю балки при згинанні EI_x має місце така аналітична залежність (див. формулу (5.5)):

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{M_x(z)}{EI_x}, \quad (5.16)$$

тут $\rho(z)$ – радіус кривизни пружної лінії балки в площині на відстані z від початку координат;

$M_x(z)$ – згинальний момент у тому ж перерізі балки.

Із курсу вищої математики відомо, що в системі координат YZ кривизна плоскої кривої

$$\frac{1}{\rho(z)} = \pm \frac{y''(z)}{[1 + y'(z)^2]^{3/2}}. \quad (5.17)$$

Прирівнюючи праві частини співвідношень (5.16) і (5.17), матимемо **точне диференціальне рівняння зігнутої осі балки**

$$EI_x \frac{y''(z)}{[1 + y'(z)^2]^{3/2}} = \pm M_x. \quad (5.18)$$

Враховуючи, що кути повороту перерізів балки малі, то величиною $y'(z)^2$ порівняно з одиницею можна знехтувати. Тоді з виразу (5.18) можна записати **приблизне диференціальне рівняння пружної лінії балки**

$$EI_x \cdot y''(z) = \pm M_x. \quad (5.19)$$

Для вибраного *напрямку* осі y (вгору) в правій частині рівняння потрібно брати знак плюс. У подальшому ми будемо направляти вісь y вгору, записуючи рівняння (5.19) у вигляді

$$EI_x \cdot y''(z) = M_x. \quad (5.20)$$

Інтегруючи його двічі чи один раз, можна визначити лінійні $y(z)$ та кутові $\theta(z)$ переміщення перерізів балки за будь-яких умов навантаження.

Приклад 5.2. Знайти прогини і кути повороту перерізів балки, зображеної на рис.5.13.

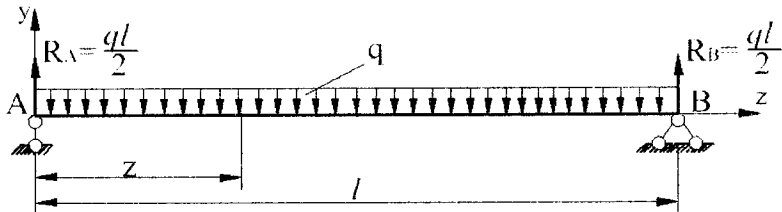


Рисунок 5.13 – До визначення кутових і лінійних переміщень перерізів балки

Розв'язання.

Визначасмо реакції опор, скориставшись симетрією системи

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Запишемо вираз для згинального моменту у перерізі на відстані z від початку координат

$$M_x = R_A \cdot z - \frac{qz^2}{2} = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}.$$

Підставляємо вираз для M_x в рівняння (5.20), маємо

$$y''(z) = \frac{ql}{2EI_x}z - \frac{qz^2}{2EI_x}.$$

Інтегруємо двічі:

$$y'(z) = \theta(z) = \frac{ql}{4EI_x}z^2 - \frac{qz^3}{6EI_x} + C; \quad (5.21)$$

$$y(z) = \frac{ql}{12EI_x}z^3 - \frac{qz^4}{24EI_x} + C \cdot z + D. \quad (5.22)$$

Значення сталих C та D визначимо з умов закріплення балки:

при $z = 0$ прогин $y(0) = 0$;

при $z = l$ прогин $y(l) = 0$.

З першої умови маємо

$$y(0) = D = 0.$$

Друга умова дає

$$y(l) = \frac{ql^4}{12EI_x} - \frac{ql^4}{24EI_x} + C \cdot l = 0$$

значення $C = -\frac{ql^3}{24EI_x}.$

Підставляючи значення C і D в рівняння (5.21) та (5.22), одержуємо відповідно кут повороту

$$y'(z) = \theta(z) = \frac{ql}{4EI_x}z^2 - \frac{qz^3}{6EI_x} - \frac{ql^3}{24EI_x}$$

та прогин будь-якого перерізу балки

$$y(z) = \theta(z) = \frac{ql}{12EI_x}z^3 - \frac{qz^4}{24EI_x} - \frac{ql^3}{24EI_x}z.$$

У розглянутому випадку балка має одну вантажну ділянку AB і для визначення прогинів та кутів повороту потрібно було визначати дві сталі. У загальному випадку навантаження балки може мати багато ділянок. Кількість

сталих інтегрування зростає вдвічі порівняно з кількістю ділянок. Виникають певні труднощі визначення сталих.

Однак, якщо при складанні диференціальних рівнянь пружної лінії балки та при їх інтегруванні дотримуватись певних правил, то число сталих інтегрування при будь-якій кількості ділянок можна звести до відшукування всього двох сталих: прогину y_0 та кута повороту θ_0 на початку координат, так званих початкових параметрів.

5.7. Визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів. Універсальне рівняння пружної лінії балки

Метод початкових параметрів дає можливість записати всього одне рівняння прогинів або кутів поворотів перерізів, яке є придатним для всіх ділянок балки. Тому таке рівняння називають **універсальним рівнянням пружної лінії**, яке враховує всі види навантажень: зосередженому силу F , зосереджений момент M , розподілене навантаження $q(z)$. Для балки (рис. 5.14) при вибраній системі координат осей y і z та різних видах навантаження універсальне рівняння пружної лінії може мати такий вигляд:

$$y(z) = y_0 + \theta_0 \cdot z + \frac{1}{EI_x} \left(M_0 \frac{z^2}{2!} + Q_0 \frac{z^3}{3!} + \left| F \frac{(z-a)^3}{3!} + \left| M \frac{(z-b)^2}{2!} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left| q \frac{(z-c)^4}{4!} - \left| q \frac{(z-d)^4}{4!} - \left| q(z) \frac{(z-k)^5}{5!} \right. \right. \right. \right) \quad (5.23)$$

де y_0, θ_0, M_0, Q_0 – початкові параметри, відповідно: прогин, кут повороту поперечного перерізу, згинальний момент і поперечна сила на початку координат;

a, b, c, d, k – відстань від початку координат до місця прикладення відповідно зосередженої сили F , зосередженого момента M чи початку дії

рівномірно розподіленого навантаження q і початку дії трикутного навантаження $q(z)$;

E – модуль поздовжньої пружності матеріалу балки;

I_x – момент інерції поперечного перерізу балки відносно осі x (нейтральної лінії);

EI_x – жорсткість перерізу стержня при згинанні.

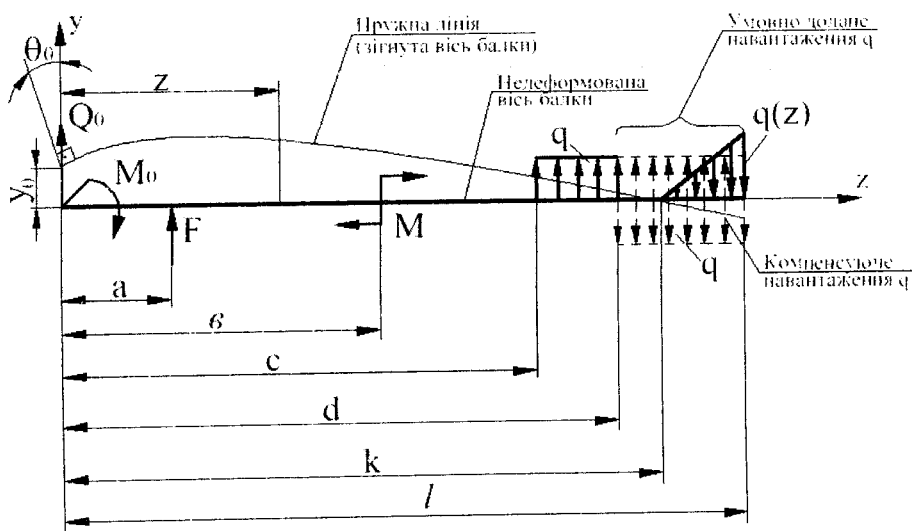


Рисунок 5.14 – До запису універсального рівняння пружної лінії балки

Лінія $\left| \begin{array}{l} \\ z > a \end{array} \right.$ – переривник (одинична розривна функція) означає, що

враховується лише відповідне навантаження, яке діє тільки ліворуч від розглядуваного перерізу, тобто при $z < a$.

Прогин y_0 та кут повороту θ_0 – *геометричні початкові параметри*; згинальний момент M_0 та поперечна сила Q_0 в перерізі, який збігається з початком координат, – *статичні початкові параметри*.

Прогин y_0 і кут повороту θ_0 початкового (лівого кінцевого) перерізу балки визначають із умов закріплення балки (рис. 5.15, а, б, в), M_0 і Q_0 – з епюр M_x і Q_x .

Початкові параметри y_0 , θ_0 , M_0 , Q_0 можуть бути додатними, від'ємними або дорівнювати нулю (див. рис. 5.15, а, б, в).

Знаки доданків визначаються знаками відповідних зовнішніх силових факторів: сила і розподілене навантаження спрямовані вгору – додатні, додатний і зосереджений момент, спрямований за ходом годинникової стрілки. Тобто, **правила знаків такі ж, які були прийняті для поперечних сил і згинальних моментів** (див. рис. 1.11 та рис. 1.12).

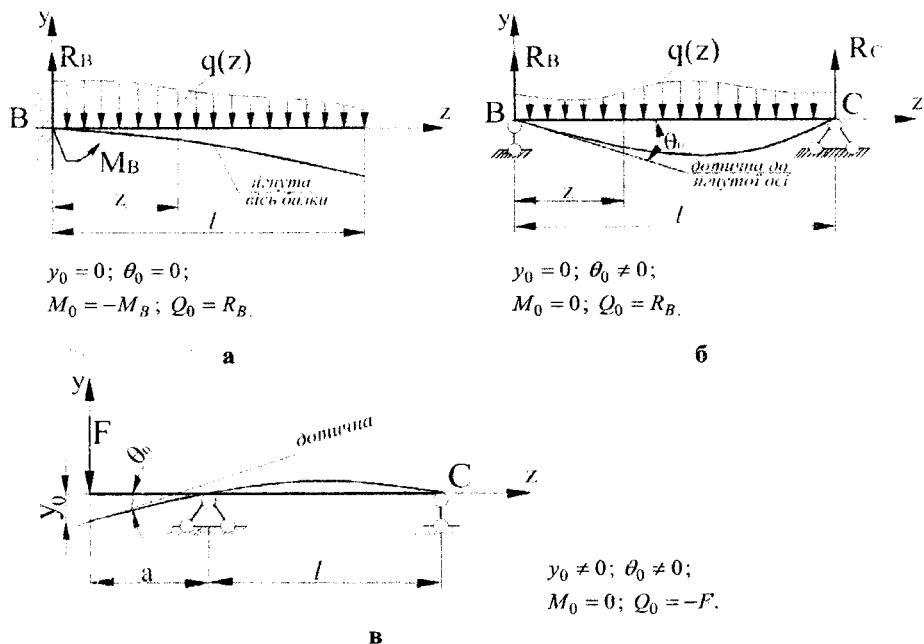


Рисунок 5.15 – Залежність початкових параметрів від умов закріплення балки

При складанні рівнянь пружної лінії балки потрібно дотримуватися ще й таких правил:

1. Початок координат слід вибирати в крайній лівій точці розглядуваної балки та зберігати його загальним для всіх ділянок.

2. У рівняння підставляють тільки ті навантаження, які прикладені ліворуч від розгляданого перерізу, на що і вказують вертикальні лінії (переривники).

3. Якщо розподілене навантаження $q(z)$ обривається на одній із ділянок балки, то його умовно продовжують до правого кінця балки, одночасно вводячи компенсувальне навантаження тієї ж інтенсивності, але зворотного напрямку (див. рис. 5.14).

5.8. Умова жорсткості при згинанні

Переміщення перерізів балки під дією зовнішніх навантажень не повинно перевищувати встановлених нормами значень для даної конструкції.

Розрахунок балок на жорсткість здійснюється за **максимальним прогином** $y(z)_{\max}$, і умова жорсткості має вигляд

$$y(z)_{\max} \leq [f], \quad (5.24)$$

де $[f]$ – допустимий прогин, який визначають на підставі експериментальних та експлуатаційних даних згідно нормативів.

Для визначення максимального прогину $y(z)_{\max}$ можна скористатися універсальним рівнянням пружної лінії (5.23) балки. Визначивши переміщення характерних перерізів балки, будують епюру прогинів. На побудованій епюрі виявляють найбільший прогин.

Розглянемо розрахунок балки на жорсткість із використанням універсального рівняння пружної лінії.

Приклад 5.3. Для балки на двох опорах (рис. 5.16,а) вибрати із умови жорсткості двотавровий переріз, взявши допустимий прогин $[f] = l/500$, де l – відстань між опорами. Вибрати остаточно двотавр, що задовольняє умовам міцності і жорсткості, прийнявши допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язання.

Визначення опорних реакцій R_A і R_C :

$$\sum M_A = 0; -15 \cdot 1 \cdot 0,5 - 35 + 20 \cdot 1 \cdot 1,5 - R_C \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 0;$$

$$R_C = \frac{-7,5 - 35 + 30 + 60}{2} = 23,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; -R_A \cdot 2 + 15 \cdot 1 \cdot 1,5 - 35 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 + 20 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = \frac{22,5 - 35 - 10 + 20}{2} = -1,2 \text{ кН}.$$

Отримана від'ємна величина реакції вказує на те, що дійсний її напрямок є протилежним тому, що взятий при складанні рівнянь статички і його слід змінити.

Бажаємо перевірити обчислення реакцій за таким рівнянням:

$$\sum F_y = 0; -1,2 - 15 \cdot 1 + 20 \cdot 1 - 23,8 + 20 = 0.$$

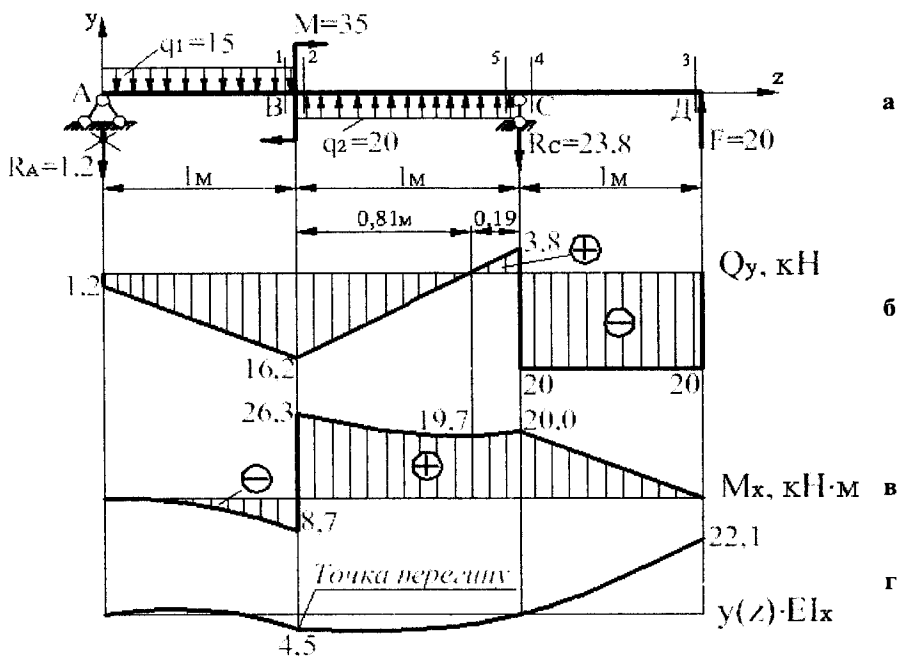


Рисунок 5.16 – До розрахунку балки на міцність та жорсткість

Для побудови епюр поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_x слід визначити їх величини в характерних перерізах балки:

$$Q_{y,A} = -R_A = -1,2 \text{ кН}; \quad Q_{y,1} = -R_A - q_1 \cdot 1 = -1,2 - 15 \cdot 1 = -16,2 \text{ кН};$$

$$Q_{y,3,4} = -F = -20 \text{ кН}; \quad Q_{y,5} = -F + R_C = -20 + 23,8 = 3,8 \text{ кН};$$

$$M_{x,1} = R_A \cdot 1 - q_1 \cdot 1 \cdot 0,5 = -1,2 \cdot 1 - 15 \cdot 1 \cdot 0,5 = -8,7 \text{ кН·м};$$

$$M_{x,2} = M_{x,1} + M = -8,7 + 35 = 26,3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x,C} = F \cdot 1 = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x,E} = F \cdot 1,19 - R_C \cdot 0,19 + q_2 \frac{0,19^2}{2} = 20 \cdot 1,19 - 23,8 \cdot 0,19 + 20 \frac{0,19^2}{2} = 19,7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На основі цих обчислень побудовані епюри Q_y і M_x (рис. 5.16,б, в).

Для розрахунку балки на жорсткість потрібно визначити прогини чотирьох – п'яти перерізів балки і побудувати епюру прогинів. Початок координат вибирають у лівому крайньому перерізі балки (тут він збігається з лівою опорою А).

Запишемо відповідно до рис. 5.16,а рівняння пружної лінії балки

$$y(z) = y_0 + \theta_0 \cdot z + \frac{1}{EI_x} \left(M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6} - q_1 \frac{z^4}{24} + \left| q_1 \frac{(z-1)^4}{24} + \right. \right. \quad (5.25) \\ \left. \left. + \left| M \frac{(z-1)^2}{2} + \right| q_2 \frac{(z-1)^4}{24} - \left| q_2 \frac{(z-2)^4}{24} - \right| R_C \frac{(z-2)^3}{6} \right) \right|_{z>2} \right).$$

Відповідно до умов закріплення лівої опори А початкові параметри: $y_0 = 0$; $\theta_0 \neq 0$; $M_0 = 0$; $\theta_0 = -1,2 \text{ кН}$ (див. рис. 5.16,б, в). Із врахуванням цих початкових параметрів і відповідних зовнішніх силових факторів універсальне рівняння прогинів (5.25) матиме вигляд:

$$y(z) = \theta_0 \cdot z + \frac{1}{EI_x} \left(-1,2 \frac{z^3}{6} - 15 \frac{z^4}{24} + 15 \frac{(z-1)^4}{24} + 35 \frac{(z-1)^2}{2} + \right. \quad (5.26) \\ \left. + 20 \frac{(z-1)^4}{24} - 20 \frac{(z-2)^4}{24} - 23,8 \frac{(z-2)^3}{6} \right).$$

Кут повороту θ_0 лівого кінцевого перерізу балки визначимо з тієї граничної умови, що при $z_c = 2 \text{ м}$ $y(z_c) = 0$, тобто прогин над опорою С неможливий

$$0 = \theta_0 \cdot 2 + \frac{1}{EI_x} \left(-1,2 \frac{2^3}{6} - 15 \frac{2^4}{24} + 15 \frac{(2-1)^4}{24} + 35 \frac{(2-1)^2}{2} + 20 \frac{(2-1)^4}{24} \right); \quad (5.27)$$

$$\text{звідки } \theta_0 = -\frac{3,7}{EI_x}.$$

Підставивши вираз (5.27) в рівняння (5.26), можна записати рівняння пружної лінії балки у вигляді:

$$y(z) = \frac{1}{EI_x} \left(-3,7 \cdot z - 1,2 \frac{z^3}{6} + 15 \frac{z^4}{24} + 15 \frac{(z-1)^4}{24} + 35 \frac{(z-1)^2}{2} + 20 \frac{(z-1)^4}{24} - 20 \frac{(z-2)^4}{24} - 23,8 \frac{(z-2)^3}{6} \right).$$

Для побудови зігнутої осі балки слід визначати прогини характерних перерізів: над опорами прогини – нульові: $y_A = 0$; $y_C = 0$; прогини двох інших характерних перерізів — посередині прольоту (при $z = 1$ м) і вільного правого кінця балки (при $z = 3$ м):

$$y(1) = \frac{1}{EI_x} \left(-3,7 \cdot 1 - 1,2 \frac{1^3}{6} - 15 \frac{1^4}{24} \right) = -\frac{4,5}{EI_x};$$

$$y(3) = \frac{1}{EI_x} \left(-3,7 \cdot 3 - 1,2 \frac{3^3}{6} + 15 \frac{3^4}{24} + 2 \frac{3^4}{24} + 35 \frac{2^2}{2} + 20 \frac{2^4}{24} - 20 \frac{1^4}{24} - 23,8 \frac{1^3}{6} \right) = \frac{22,1}{EI_x}.$$

За цими даними і побудована епюра прогинів $y(z) \cdot EI_x$ (рис. 5.16,з). В перерізі В, де згинальний момент змінює свій знак, змінюється і знак кривизни.

$$\text{Значення найбільшого з обчислених прогинів } y(z)_{\max} = \frac{22,1}{EI_x}.$$

Із умови жорсткості (5.24) визначається необхідний момент інерції перерізу

$$y(z)_{\max} = \frac{22,1}{EI_x} \leq [f]; \quad I_x \geq \frac{22,1}{E \cdot [f]},$$

де $[f] = \frac{l}{500} = \frac{2}{500} = 4 \cdot 10^{-3}$ м – допустимий прогин;

$E = 2 \cdot 10^8$ кПа – чисельне значення модуля Юнга взято із табл. 2:

$$I_x = \frac{22,1}{2 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 2,762 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4 = 2762 \text{ см}^4.$$

За таблицями сортамента знаходимо, що потрібний двотавр №24, момент інерції якого $I_x = 2900 \text{ см}^4$.

• **Вибір потрібного двотавра за умови міцності** (5.12). Небезпечним є переріз 2, в якому діє найбільший згинальний момент $M_{x \max} = 26,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 5.16,в).

Необхідний осьовий момент опору перерізу за умови міцності

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{26,36}{16 \cdot 10^4} = 1,64 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 164 \text{ см}^3.$$

У сортаменті двотавра з таким осьовим моментом опору немає, тому беремо найближчий двотавр №18а, для якого $W_x = 159 \text{ см}^3$.

• **Остаточний вибір перерізу балки:** із двох (необхідних за різних умов) двотаврів №18а і №24 слід вибирати більший (знайдений із умови жорсткості). Згідно з таблицею сортаменту основні вихідні дані цього двотавра:

№24: $A = 30,6 \text{ см}^2$; $I_x = 2900 \text{ см}^4$; $W_x = 242 \text{ см}^3$; $S_x = 139 \text{ см}^3$.

На рис. 5.17 наведено алгоритм вибору розмірів поперечного перерізу балки за умовою жорсткості при плоскому поперечному згинанні.

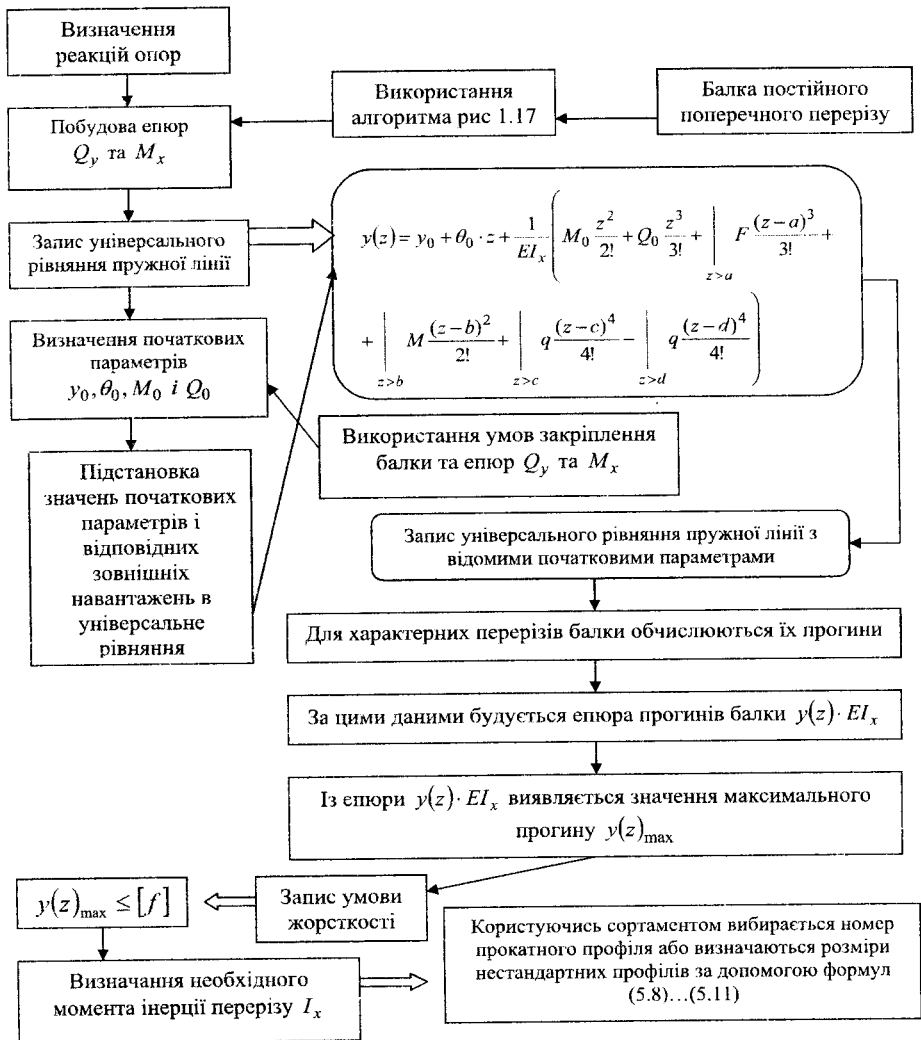


Рисунок 5.17 – Алгоритм вибору розмірів поперечного перерізу балки за умови жорсткості при плоскому поперечному згинанні

5.9. Раціональні форми перерізів балки при згинанні

При згинанні в поперечному перерізі балки напруження розподіляються нерівномірно (див. рис. 5.7, 5.11). Нормальні напруження у зоні нейтрального шару незначні. Тому з метою економії матеріалу та зниження ваги конструкції потрібно вибирати такі форми перерізів, щоб більша частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії.

За критерії раціональності прийняті такі безрозмірні характеристики перерізів, які можна назвати відповідно:

- питомий момент опору при згинанні

$$W_0 = \frac{W_x}{A^{3/2}}$$

- та питомий момент інерції при згинанні

$$I_0 = \frac{I_x}{A^2}.$$

У табл. 5.1 наведено значення W_0 і I_0 для простих форм перерізів.

Таблиця 5.1 – Характеристики раціональності форм перерізів

Форма перерізу	W_0	I_0
Круг	0,141	0,080
Квадрат	0,167	0,083
Прямокутник ($h=3b$)	0,289	0,250
Кільцевий переріз ($c = d_B/d = 0,9$)	0,580	0,144
Двотавр	0,91 – 1,51	1,2 – 4,4

Аналіз табл. 5.1 показує, що *найбільш раціональні* є двотаврові перерізи. Найбільш невідгідними *при згинанні балок* є поперечні перерізи, які мають форму круга або квадрата.

5.10. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Як згинання називають плоским, чистим та поперечним?
2. Який шар волоком називають нейтральним? Що являє собою нейтральна лінія при згинанні та як вона розташована в поперечному перерізі?
3. Які напруження виникають у поперечному перерізі балки при чистому і поперечному згинанні?
4. Назвати гіпотези і припущення, які приймають при виведенні формули для нормальних напружень?
5. Як визначити нормальне напруження в будь-якій точці поперечного перерізу?
6. Покажіть закономірність розподілу нормального напруження в поперечному перерізі балки.
7. В яких точках поперечного перерізу виникають найбільші та найменші нормальні напруження?
8. Запишіть умову міцності за нормальними напруженнями при згинанні. Поясніть зміст і одиниці вимірів величин, що входять до неї. Які три види розрахунків базуються на умові міцності?
9. Що називається осьовим моментом опору при згинанні та які одиниці його виміру?
10. Як визначити величину осьових моментів опору для прямокутного і круглого поперечних перерізів; для перерізів прокатних профілів?
11. Що називається жорсткістю балки при згинанні? Запишіть вираз для згинальної жорсткості. Від чого залежить жорсткість всієї балки?
12. Які напруження виникають в перерізі балки при плоскому поперечному згинанні?
13. Запишіть формулу Д. І. Журавського для дотичних напружень при поперечному згинанні. Поясніть зміст і одиниці вимірів величин, що входять до неї.
14. Як розподіляються дотичні напруження в поперечному перерізі балки прямокутного і круглого перерізів?
15. В яких точках прямокутного перерізу при поперечному згинанні виникають максимальні нормальні напруження, максимальні дотичні напруження?
16. Які переміщення отримують поперечні перерізи балок при плоскому згинанні?

17. Запишіть точне диференціальне рівняння пружної лінії балки. В яких випадках воно може бути заміненим наближеним рівнянням?
18. Запишіть універсальне рівняння пружної лінії балки для загального випадку навантаження. Що таке початкові параметри? Який їх фізичний та геометричний зміст? Для чого використовують одиничні розривні функції?
19. Яких правил потрібно дотримуватись при записанні універсального рівняння пружної лінії балки?
20. Запишіть умову жорсткості при згинанні. Поясніть зміст і одиниці виміру величин, що входять до неї.
21. За допомогою яких критеріїв визначається раціональність форми перерізу при згинанні? Яка із форм є найбільш раціональною?

6. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ ЗСУВІ ТА КРУЧЕННІ

Чому ці два види опору розглядаються в одному розділі? Справа в тому, що при закручуванні бруса мають місце і деформації зсуву. У цьому можна наочно переконатися: якщо спочатку нанести на поверхню трубки (рис. 6.1) ортогональну сітку, а потім закручувати її, то ці ортогональні елементи (прямокутники) будуть перекошуватися, перетворюючись у паралелограми, тобто зазнавати деформації зсуву.

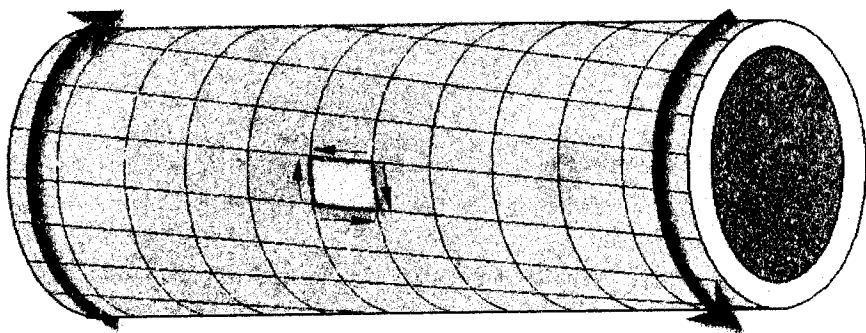


Рисунок 6.1 – Перекошення початково ортогональної сітки при закручуванні тонкостінної трубки – явище чистого зсуву

6.1. Зсув

Це такий вид простого опору, коли в поперечних перерізах елемента виникає тільки поперечна сила.

Дію поперечних сил та характер деформації зсуву можна уявити так: при спробі перерізати жорстку матерію старими ножицями з тупими лезами спочатку має місце зсув (рис. 6.2,а), а тоді вже розрізання матеріалу.

На практиці це можна уявити на прикладі зсуву в заклепкових з'єднаннях. Поруч з характером деформування при зсуві доречно розглянути визначення самих деформацій.

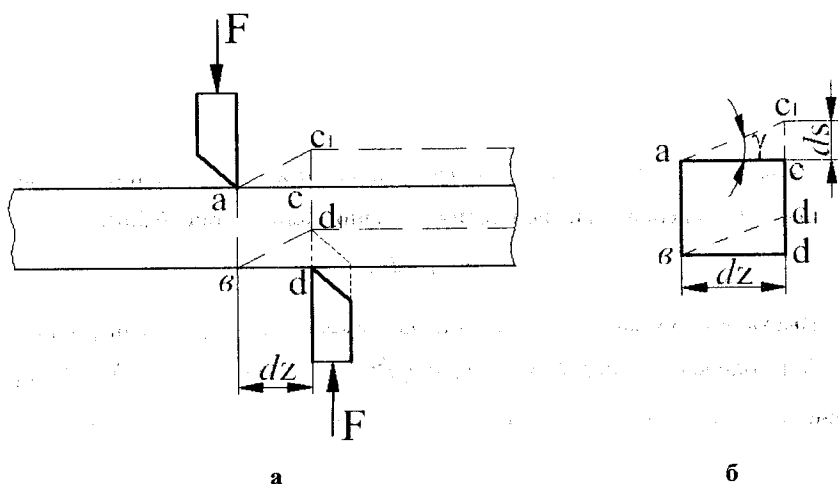


Рисунок 6.2 – Зсув, як початок зрізу (а), і схема зсуву (б)

6.1.1. Деформації, напруження при чистому зсуві. Закон Гука при зсуві

Зазначимо, що на практиці зсув у чистому вигляді спостерігати досить важко, оскільки деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій і найчастіше згинанням (лише при закручуванні тонкостінних трубок елементи на їх поверхні зазнають чистий зсув (рис. 6.3,а)).

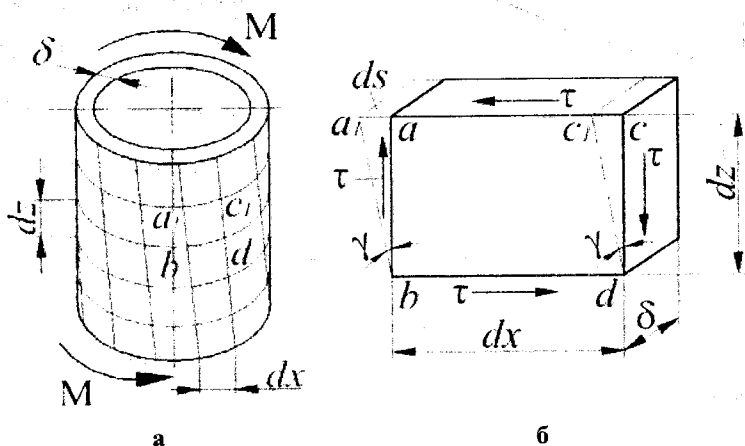


Рисунок 6.3 – Зсув при закручуванні тонкостінної трубки (а) і схема зсуву (б)

Запишемо вираз для відносної деформації при зсуві

$$\frac{ds}{dz} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma,$$

де γ – так званий **кут зсуву**; він дуже малий як і всі пружні деформації.

Поперечні сили Q в перерізі реалізуються в нескінченно малих площадках dA перерізу у вигляді дотичних напружень τ (рис. 6.3,б):

$$Q = \int_A \tau \cdot dA.$$

Вважаючи (умовно), що дотичні напруження τ розподілені рівномірно по площі поперечного перерізу A , можна записати формулу для визначення їх умовної середньої величини (про умовність цього припущення див в п.п. 6.1.2)

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (6.1)$$

Залежність між навантаженням та деформацією при зсуві зручно простежити за діаграмою зсуву (рис.6.4), яку можна отримати при закручуванні тонкостінної трубки.

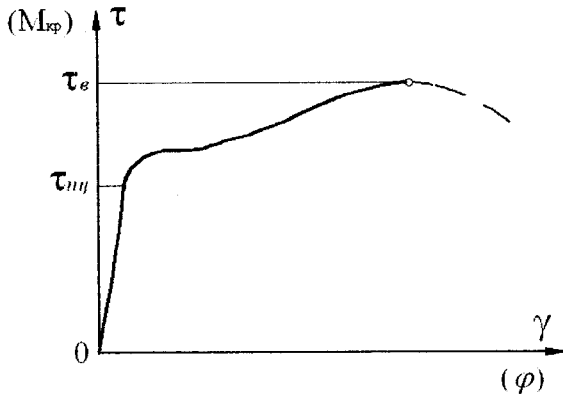


Рисунок 6.4 – Діаграма зсуву

Для пластичних матеріалів вона схожа на діаграму розтягання: такі ж зони, такі ж характеристики пружності та міцності. Згідно з діаграмою зсуву в межах пружного деформування між відносним зсувом та дотичними напруженнями існує лінійна залежність,

яка є законом Гука при зсуві

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ або } \tau = G \cdot \gamma, \quad (6.2)$$

де G – модуль пружності матеріалу при зсуві, або модуль пружності другого роду (для сталі $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$).

При розтяганні маємо

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z.$$

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності G при зсуві та модулем пружності E при розтяганні існує чітка залежність

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

де μ – коефіцієнт Пуассона для даного матеріалу.

Як бачимо, ці три (як, доречі, і інші) характеристики пружності кожного матеріалу при різних видах деформування пов'язані між собою.

6.1.2. Практичні розрахунки на міцність при зсуві

Припущення щодо рівномірного розподілу дотичних напружень по перерізу при зсуві є досить умовним, бо дійсна картина розподілу зусилля по контактній поверхні заклепки з листом (рис. 6.5) є складною.

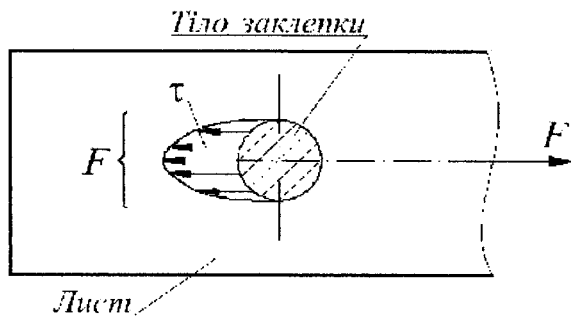


Рисунок 6.5 – Дійсна картина розподілу зусилля на боковій поверхні заклепки

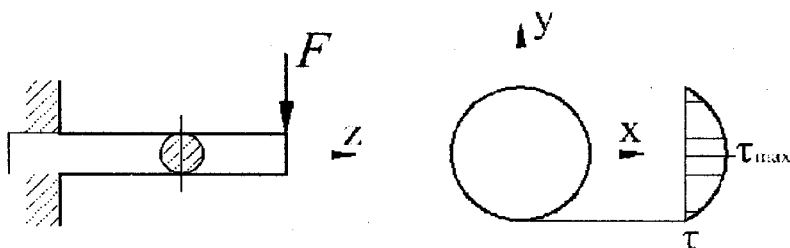


Рисунок 6.6 – Дійсний розподіл дотичних напружень у перерізі при поперечному згинанні

Розподіл дотичних напружень τ в круглому перерізі при поперечному згинанні балки (рис. 6.6), коли згідно з формулою Д. І. Журавського

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x(y)}{b(y) \cdot I_x} \quad \text{і} \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{A}, \quad (\text{а не } \tau = \frac{Q}{A}).$$

Однак, в практичних розрахунках на міцність при зсуві, який зазнають більшість реальних деталей (болти, заклепки, заплішки, штифти, шліци, бурти, кутові шви зварних з'єднань тощо), користуються формулою (6.1), яка є вірною лише при рівномірному розподілі напружень по перерізу.

Умову міцності на зсув запишемо в загально прийнятому вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y\max}}{A} \leq [\tau], \quad (6.3)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження при зсуві, яке може бути вибраним так [4]:

- для пластичних матеріалів

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6[\sigma],$$

- а для крихких матеріалів

$$[\tau] = (0,8 \dots 1,0)[\sigma],$$

тут $[\sigma]$ – допустиме напруження при розтяганні.

Зазначимо, що формула (6.3) придатна в основному для пластичних матеріалів, при зсуві яких (завдяки ділянці текучості на діаграмі зсуву) дотичні напруження в перерізі можна усереднювати, як це й зроблено в формулі (6.1).

6.2. Кручення

6.2.1 Кручення стержнів з круглим поперечним перерізом

Вали механізмів приводів, наприклад механізму пересування крана чи піднімання вантажу, зазнають поруч з деформацією згинання і деформацію кручення. Простіше всього деформацію кручення можна уявити як таку, що спричиняється парами сил, площини дії яких перпендикулярні до осі стержня (осі z , рис. 6.7,а).

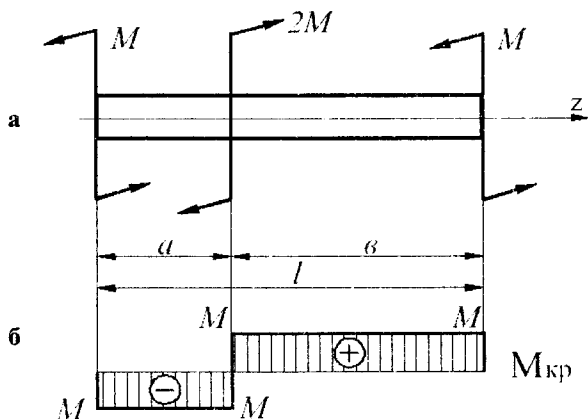


Рисунок 6.7 – Навантаження стержня моментами M (а) та епюра крутних моментів $M_{кр}$ (б)

Під **крученням** розуміють такий вид простого опору, при якому в поперечних перерізах стержня виникає тільки один силовий фактор – **крутний момент** $M_{кр}$. Інші силові фактори (поздовжня і поперечні сили, згинальні моменти) відсутні. Графік зміни крутних моментів $M_{кр}$ вздовж осі стержня і є їх епюрою (рис. 6.7,б).

Оскільки $M_{кр}$ – **сдиний внутрішній силовий фактор**, то вважають, що в поперечному перерізі стержня виникають тільки **дотичні напруження** τ .

6.2.2. Формула для визначення дотичних напружень у круглому поперечному перерізі стержня при крученні

Для визначення напружень у поперечному перерізі круглого стержня при крученні приймають такі **гіпотези і спрощення**:

1. *Перерізи плоскі до деформації, залишаються плоскими при крученні стержня, повертаючись відносно поздовжньої осі стержня як суцільні диски, тобто **прийнята гіпотеза плоских перерізів**.*

2. ***Радіуси поперечного перерізу під час деформування стержня залишаються прямими.***

3. ***Діаметри поперечних перерізів і відстані між ними не змінюються.***

Розглянемо круглий стержень, верхній кінець якого жорстко закріплено і який скручується парою сил, прикладених до нижнього торця (рис. 6.8,а). У поперечних перерізах цього стержня виникає крутний момент $M_{кр} = M$.

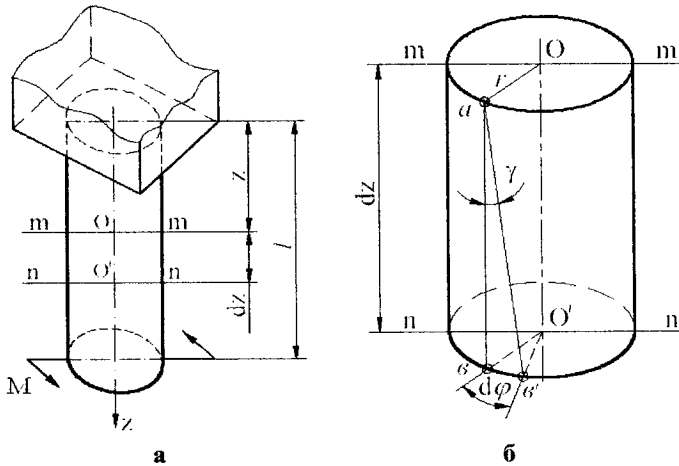


Рисунок 6.8 – Навантаження круглого стержня моментом M (а) та схема його закручування (б)

Відома (див. формулу (1.10)) інтегральна залежність між крутним моментом і дотичними напруженнями, появу яких він зумовлює в поперечному перерізі:

$$M_{кр} = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA, \quad (6.4)$$

де ρ – відстань від елементарної сили « $\tau \cdot dA$ » до центра перерізу (рис. 6.9).

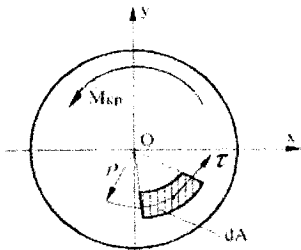


Рисунок 6.9 – «Реалізація» крутного моменту в перерізі елементарними « $\rho \cdot \tau \cdot dA$ »

Визначити τ безпосередньо з виразу (6.4) неможливо, пока невідома функція $\tau = f(\rho)$.

Таким чином, задача є статично невизначуваною і для її розв'язання необхідно записати рівняння переміщень із розгляду схеми деформування при закручуванні стержня.

Виділимо елемент закрученого стержня

двома поперечними перерізами $m-m$ та $n-n$, які розташовані один від одного на нескінченно малій відстані dz , та, маючи на увазі гіпотезу плоских перерізів, розглянемо його деформування (рис. 6.8,б). Переріз $n-n$ повертається під дією крутного моменту відносно перерізу $m-m$ на кут $d\varphi$. Твірна циліндра ab повертається при цьому на кут γ і займає положення ab' . Кут γ являє собою кут зсуву на циліндричній поверхні стержня. У межах пружного деформування він дуже малий і тому приймають, що $\text{tg} \gamma \approx \gamma$. Згідно схеми деформування (рис. 6.8,б) довжина дуги bb' дорівнює з одного боку $bb' = zd\varphi$, а з іншого $bb' = \gamma dz$, звідки деформація зсуву

$$\gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dz}.$$

Величина $\frac{d\varphi}{dz}$ є відносним кутом закручування, який позначають через θ :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \theta. \quad (6.5)$$

Вводячи це позначення, одержуємо

$$\gamma = r \cdot \theta.$$

Підставляючи цю залежність у закон Гука при зсуві (див. (6.2)), матимемо

$$\gamma = r \cdot \theta = \frac{\tau}{G}, \quad \text{або} \quad \tau = G \cdot \theta \cdot r. \quad (6.6)$$

Враховуючи, що радіуси поперечних перерізів залишаються прямими, можна по аналогії записати вираз для дотичних напружень τ у довільній точці, віддаленій на ρ від центра перерізу:

$$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho. \quad (6.7)$$

Таким чином, при крученні стержнів з круглим поперечним перерізом дотичні напруження змінюються вздовж радіуса за лінійним законом.

Підставляючи (6.7) в рівняння статки (6.4) та враховуючи, що G і θ не залежать від положення елемента dA в перерізі, одержуємо таку залежність:

$$M_{кр} = G \cdot \theta \int_A \rho^2 dA. \quad (6.8)$$

Оскільки $I_p = \int_A \rho^2 dA$ є полярний момент інерції круглого перерізу, то залежність (6.8) можна записати у вигляді

$$M_{кр} = G \cdot \theta \cdot I_p, \text{ або } \theta = \frac{M_z}{GI_p}. \quad (6.9)$$

Тут GI_p – жорсткість поперечного перерізу стержня при крученні.

Підставляючи (6.9) в (6.7), одержуємо **формулу для визначення дотичних напружень у будь-якій точці круглого поперечного перерізу**

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_p} \rho, \quad (6.10)$$

де $M_{кр}$ – крутний момент у розглядуваному перерізі, κHm ;

I_p – полярний момент інерції круглого перерізу, m^4 ;

ρ – радіус-вектор розглядуваної точки в перерізі, m .

Епюра дотичних напружень $\tau = f(\rho)$ згідно функції (6.10) – лінійна (рис. 6.10).

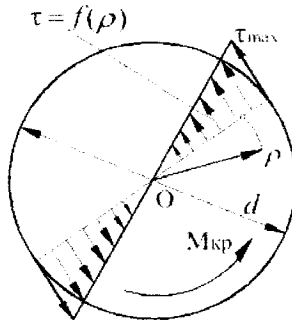


Рисунок 6.10 – Розподіл дотичних напружень у круглому перерізі при крученні

Із рис. 6.10 видно, що **максимальні дотичні напруження виникають у точках, найбільш віддалених від центра ваги перерізу** і за величиною дорівнюють

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (6.11)$$

де $W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{2I_p}{d}$ – полярний момент опору при крученні.

6.2.3. Умови міцності і жорсткості при крученні стержнів з круглим поперечним перерізом

Згідно з формулою (6.11) умова міцності має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp \max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (6.12)$$

де $M_{kp \max}$ – абсолютне значення найбільшого крутного моменту в небезпечному перерізі, чисельне значення якого беруть із епюри M_{kp} , $\text{кН}\cdot\text{м}$;

$[\tau]$ – допустиме напруження при крученні, яке встановлюють у відповідності з нормативним запасом, кПа :

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{n_T} \quad \text{або} \quad [\tau] = \frac{\tau_B}{n_B},$$

тут τ_T, τ_B – відповідно границя текучості і границя міцності матеріалу;

n_T, n_B – коефіцієнт запасу міцності до границь текучості чи міцності.

Умову міцності (6.12) залежно від того, що задано і що необхідно визначити, можна застосовувати для виконання таких типів розрахунків на міцність: *перевірний, проектний і розрахунок допустимого значення навантаження*.

Умова жорсткості на кручення, враховуючи вираз (6.9), запишеться у вигляді

$$\theta_{\max} = \frac{M_{kp}}{GI_p} \leq [\theta], \quad (6.13)$$

де $[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування, $\text{рад}/\text{м}$; $M_{kp}, \text{кН}\cdot\text{м}$;
 $GI_p, \text{кН}\cdot\text{м}^2$.

Приклад 6.1. Визначити, при якому значенні момента M кут закручування правого кінцевого перерізу сталевого вала дорівнює нулю при таких значеннях трьох інших моментів (рис. 6.11.а):

$$M_1 = 1,9 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = 1,3 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3 = 1,1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Необхідно крім цього:

1. Із умови міцності визначити діаметр вала, якщо допустиме напруження $[\tau] = 70 \text{ МПа}$.

2. Побудувати епюру кутів закручування. Модуль пружності сталі при зсуві $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

3. Визначити максимальне значення відносного кута закручування.

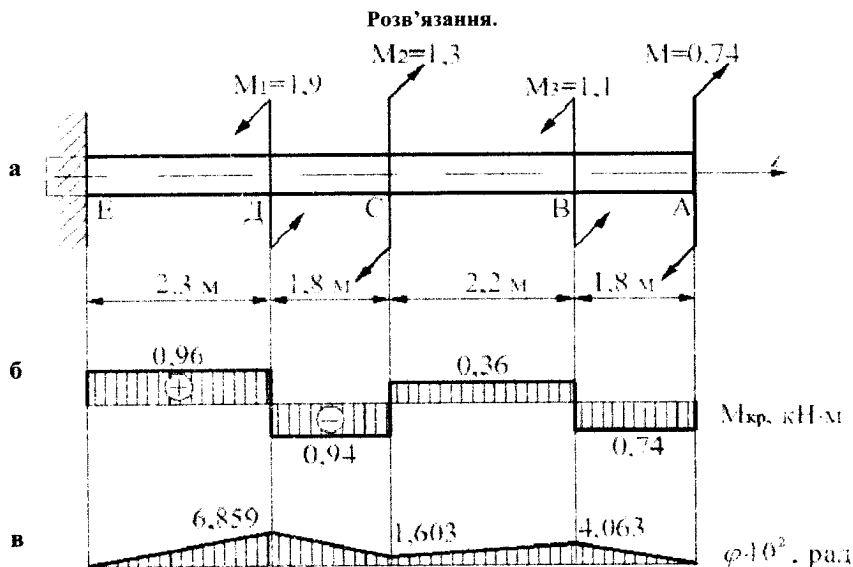


Рисунок 6.11 – Навантаження вала моментами (а) та епюри крутних моментів $M_{кр}$ (б) і кутів закручування φ (в)

Розв'язання задачі починаємо з написання формули для визначення кутів закручування φ за законом Гука:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{GI_p}, \quad (6.14)$$

де l – відстань між перерізами, для яких визначається взаємний кут закручування.

Вал має чотири ділянки. Запишемо вираз для кута закручування перерізу А відносно жорстко закріпленого перерізу Е:

$$\varphi_{A-E} = \frac{1}{GI_p} (-M_1 \cdot 8,1 + M_2 \cdot 6,3 - M_3 \cdot 4,1 + M \cdot 2,3) = 0.$$

Підставивши задані вихідні дані, матимемо

$$8,1M = 5,97; \quad M = 0,74 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За методом перерізів визначаємо крутні моменти в характерних перерізах вала. На ділянках вала визначені моменти будуть такими:

$$M_{кр, AB} = -0,74 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр,BC} = -0,74 + 1,1 = 0,36 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр,CD} = 0,36 - 1,3 = -0,94 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр,DE} = -0,94 + 1,9 = 0,96 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За цими даними будемо спору крутних моментів (рис. 6.11, б). Найбільші моменти виникають у перерізах на ділянці DE , де їх величина дорівнює

$$M_{кр,max} = 0,96 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Визначимо діаметр стержня із умови міцності (6.12), враховуючи, що для круглого перерізу полярний момент опору при крученні $W_p = \pi d^3 / 16$:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр,max}}{W_p} \leq [\tau],$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр,max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,96}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4}} = 4,11 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 41,4 \text{ мм}.$$

З урахуванням стандартного ряду розмірів приймаємо $d = 45 \text{ мм}$.

Полярний момент інерції круглого перерізу визначимо за формулою:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14}{32} (4,5 \cdot 10^{-2})^4 = 40,24 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Жорсткість поперечного перерізу вала при крученні:

$$GI_p = 0,8 \cdot 10^8 \cdot 40,24 \cdot 10^{-8} = 32,19 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Підставляючи в формулу (6.15) значення $M_{кр}$ і l для різних ділянок, знайдемо кути закручування вала на кожній із ділянок, враховуючи, що $GI_p = const$ на всій довжині вала:

$$\varphi_E = 0; \text{ (переріз } E \text{ — нерухомий);}$$

$$\varphi_{D-E} = \varphi_E + \frac{M_{кр,ED} \cdot l_{ED}}{GI_p} = \frac{0,96 \cdot 2,3}{32,19} = 6,859 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{C-E} = \varphi_D - \frac{M_{кр,DC} \cdot l_{DC}}{GI_p} = 6,859 \cdot 10^{-2} - \frac{0,94 \cdot 1,8}{32,19} = 1,603 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{B-E} = \varphi_C + \frac{M_{кр,CB} \cdot l_{CB}}{GI_p} = 1,603 \cdot 10^{-2} + \frac{0,36 \cdot 2,2}{32,19} = 4,063 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{A-E} = \varphi_B - \frac{M_{кр,BA} \cdot l_{BA}}{GI_p} = 4,063 \cdot 10^{-2} - \frac{0,76 \cdot 1,8}{32,19} = 0.$$

Розрахунки проведено вірно, оскільки кут закручування φ_{A-E} перерізу A відносно опори як за розрахунками, так і за умовою задачі дорівнює нулю.

За результатами цих розрахунків будемо спору кутів закручування вала (рис. 6.11, в).

Максимальне значення відносного кута закручування є на відрізку ED :

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр,ED}}{GI_p} = \frac{0,96}{32,19} = 2,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м}.$$

6.2.4. Кручення стержнів некруглого поперечного перерізу

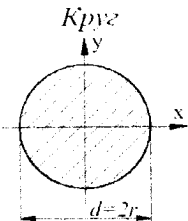
На практиці кручення зазнають не тільки стержні круглого поперечного перерізу, але й прямокутного, трикутного, еліптичного тощо. У цих випадках гіпотеза плоских перерізів не може бути застосована, оскільки перерізи під час деформування викривляються (депланують). Саме цьому дослідження напружено-деформованого стану таких стержнів не можна виконати методами опору матеріалів. Для розв'язання цієї проблеми застосовують методи теорії пружності. Результати досліджень цими методами показали, що в межах закону Гука найбільші дотичні напруження, які спрямовані по дотичній до контуру перерізу, і кути закручування можуть бути знайдені за формулами:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\kappa}}; \quad (6.15)$$

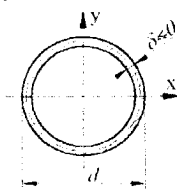
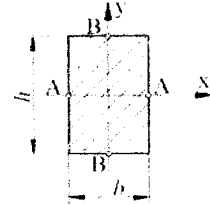
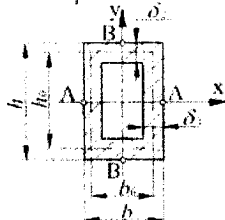
$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{GI_{\kappa}}. \quad (6.16)$$

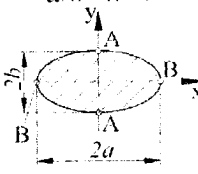
Тут W_{κ} і I_{κ} – геометричні характеристики, які умовно називають моментом опору та моментом інерції при крученні. Формули для визначення I_{κ} та W_{κ} для деяких перерізів наведені в табл. 6.1 [4].

Таблиця 6.1 — Геометричні характеристики для деяких перерізів при крученні

Форма поперечного перерізу стержня	Момент інерції при крученні I_{κ} , см^4	Момент опору при крученні W_{κ} , см^3	Положення точки, в якій виникає найбільше дотичне напруження
	$I_{\kappa} = I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$ або $I_{\kappa} = I_p = \frac{\pi r^4}{2} \approx 1,57r^4$	$W_{\kappa} = W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$ або $W_{\kappa} = W_p = \frac{\pi r^3}{2} \approx 1,57r^3$	Найбільше напруження виникає у всіх точках поблизу контура поперечного перерізу $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\kappa}}.$

Продовження табл. 6.1

Форма поперечного перерізу стержня	Момент інерції при крученні $I_K, \text{см}^4$	Момент опору при крученні $W_K, \text{см}^3$	Положення точки, в якій виникає найбільше дотичне напруження									
Тонкостінне кільце 	$I_K = \frac{\pi d^3 \delta_0}{4}$	$W_K = \frac{\pi d^2 \delta_0}{2}$	Всі точки знаходяться в однакових умовах $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_K}.$									
Прямокутник, $h/b \geq 1$ 	$I_K = \beta h b^3$	$W_K = \alpha h b^2$	Найбільші напруження виникають посередині довгих сторін перерізу (в точках A) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_K};$ в точках B напруження $\tau = \gamma \frac{M_K}{W_K} = \gamma \tau_{\max}.$									
Значення коефіцієнтів α , β і γ в залежності від $\frac{h}{b}$												
Коефіцієнт	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10,00	∞
α	0,208	0,221	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,312	0,333
β	0,141	0,172	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,312	0,333
γ	1,000	0,910	0,860	0,820	0,790	0,770	0,750	0,740	0,740	0,740	0,740	0,740
Прямокутник коробчатий 	$I_K = \frac{h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_{K1} = 2h_0 b_0 \delta_1;$ $W_{K2} = 2h_0 b_0 \delta_2$	Найбільші напруження $\tau_{\max}$ виникають посередині довгих сторін (в точках A) $\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{K1}};$ в точках B напруження $\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_{K2}}.$									

Форма поперечного перерізу стержня	Момент інерції при крученні $I_K, \text{см}^4$	Момент опору при крученні $W_K, \text{см}^3$	Положення точки, в якій виникає найбільше дотичне напруження
Суцільний еліптичний, $a/b=n>1$ 	$I_K = \pi \frac{n^3}{n^2 + 1} b^4$	$W_K = \frac{\pi n}{2} b^3$	Найбільші напруження $\tau_{\max}$ виникають у кінці малої півосі в (точках A) $\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_K};$ в точках B напруження $\tau_B = \frac{\tau_{\max}}{n}.$

Епюра розподілу дотичних напружень у прямокутному перерізі ($h > b$) має вигляд (рис. 6.12)

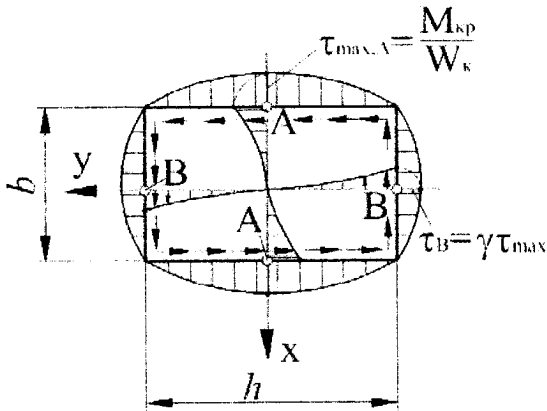


Рисунок 6.12 – Епюри розподілу дотичних напружень у прямокутному перерізі стержня при крученні

Аналіз епюри дотичних напружень у прямокутному поперечному перерізі показує, що в кутах напруження дорівнюють нулю, а найбільші напруження виникають посередині довших сторін перерізу (в точках A):

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha h b^2}.$$

У точках B посередині коротких сторін прямокутника

$$\tau_B = \gamma \tau_{\max},$$

де h – більша, а b – менша сторони прямокутника.

Коефіцієнти α і γ залежать від співвідношення сторін $\frac{h}{b}$. Значення коефіцієнтів наведено в табл. 6.1.

Кут закручування прямокутного стержня

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{\beta h b^3 G}. \quad (6.17)$$

Коефіцієнт β є іншою дискретною функцією співвідношення h/b . Числові значення коефіцієнта β наведено в табл. 6.1.

Зауваження.

1. Стержні, які мають поперечні перерізи у вигляді кутника, двотавра, тавра, швелера тощо, так звані відкриті, можна розраховувати в опорі матеріалів за такими ж по формі формулами, що і стержні прямокутного поперечного перерізу. У цьому разі вище названі перерізи розбиваються на прямокутні перерізи, товщина яких значно менша, ніж їхня довжина. При цьому геометрична характеристика жорсткості визначається за формулою

$$I_{\kappa} = \eta \frac{1}{3} \sum b_i^3 \cdot h_i, \quad (6.18)$$

де b_i, h_i – відповідно менша і більша сторона кожного із прямокутників, на які розбито реальний відкритий переріз;

η – коефіцієнт, який залежить від форми перерізу і дорівнює відповідно [4]:

- для кутникового перерізу $\eta=1,00$;
- для двотаврового перерізу $\eta=1,20$;
- для таврового перерізу $\eta=1,15$;
- для швелерного перерізу $\eta=1,12$.

Геометричну характеристику міцності (момент опору при крученні) W_{κ} визначають за формулою

$$W_{\kappa} = \frac{I_{\kappa}}{\delta_{\max}}, \quad (6.19)$$

де $\delta_{\max}$ – найбільша із товщин прямокутників, які входять у розгорнутий складний переріз.

Кут закручування визначається за формулою (6.17), а найбільше дотичне напруження – за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa} \cdot \delta_{\max}}{I_{\kappa}}, \quad (6.20)$$

де згідно з формулою (6.19) $\delta_{\max} = \left(\frac{I_{\kappa l}}{W_{\kappa l}} \right)_{\max}$.

2. У розрахунках на кручення стержнів з тонкостінними замкненими профілями припускають, що по товщині їх стінок дотичні напруження розподілені рівномірно. Якщо товщина профілю по контуру неоднакова, то максимальне дотичне напруження виникає в найменш тонкому місці перерізу і визначається за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa p}}{2A_0 \cdot \delta_{\min}}, \quad (6.21)$$

де A_0 – площа, яка окреслена серединною лінією тонкостінного замкнутого перерізу;

$\delta_{\max}$ – мінімальна товщина стінки перерізу.

Приклад 6.2. Визначити максимальне дотичне напруження, яке виникає в поперечному перерізі стержня у вигляді швелера № 22а. Стержень скручується моментом $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Розв'язання.

Згідно з таблицею сортаменту (ГОСТ 8240–89) запишемо потрібні для подальших розрахунків вихідні дані швелера № 22 а (рис. 6.13):

$$h=220 \text{ мм}; b=87 \text{ мм}; d=5,4 \text{ мм}; t=10,2 \text{ мм}.$$

Профіль швелера є тонкостінним відкритим. Розбиваємо заданий профіль на три прямокутні елементи. Визначаємо за формулою (6.18) геометричну характеристику жорсткості при крученні, приймаючи $\eta = 1,12$,

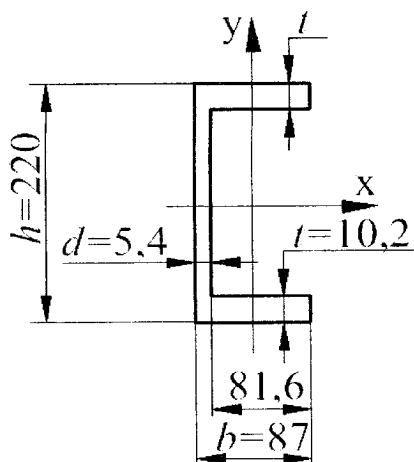


Рисунок 6.13 – До визначення максимальних дотичних напружень у тонкостінному стержні відкритого профілю (швелера)

$$I_k = \eta \frac{1}{3} \sum b_i^3 \cdot h_i = 1,12 \frac{1}{3} (220 \cdot 5,4^3 + 2 \cdot 81,6 \cdot 10,2^3) = 77,4 \cdot 10^3 \text{ мм}^4 = 77,4 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4.$$

За формулою (6.19) визначаємо геометричну характеристику міцності

$$W_k = \frac{I_k}{\delta_{\max}} = \frac{77,4 \cdot 10^{-9}}{10,2 \cdot 10^{-3}} = 7,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

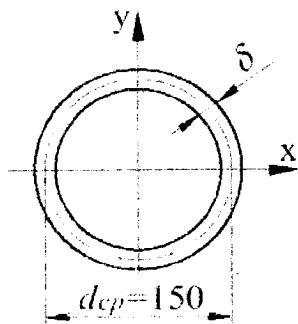
Максимальні дотичні напруження виникають посередині довгих сторін прямокутників, які мають найбільшу товщину стінки $\delta_{\max}$, тобто в даному випадку полиць:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_k} = \frac{M}{W_k} = \frac{600}{7,6 \cdot 10^{-6}} = 79 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 79 \text{ МПа}.$$

Приклад 6.3. Сталевий стержень кільцевого перерізу передає крутний момент $M_{kp} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Діаметр серединного кола $d_{cp} = 150 \text{ мм}$ (рис. 6.14). Яка повинна бути товщина δ стінки кільцевого перерізу (труби), щоб дотичні напруження не перевищували $[\tau] = 60 \text{ МПа}$?

Розв'язання.

Розглядуваний стержень – тонкостінний, що має поперечний переріз замкнутого профілю. Використовуючи формулу (6.21), запишемо умову міцності для $\delta_{\min} = \delta$.



$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{2A_0 \cdot \delta} \leq [\tau].$$

Рисунок 6.14 – До визначення товщини стінки δ при крученні замкнутого тонкостінного профілю

Площа, окреслена серединною лінією перерізу

$$A_0 = \frac{\pi d_{cp}^2}{4} = 0,785 \cdot (15 \cdot 10^{-2})^2 = 176,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Необхідна за умови міцності товщина стінки

$$\delta \geq \frac{M_{kp}}{2 \cdot A_0 \cdot [\tau]} = \frac{5}{2 \cdot 176,6 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^4} = 2,36 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Приймаємо $\delta = 2,5 \text{ мм}$.

6.2.5. Раціональні форми перерізу стержня при крученні

Критерієм раціональності тієї чи іншої форми поперечного перерізу стержня (вала) при крученні є економічна доцільність, при якій витрати матеріалу будуть мінімальні при однаковій гарантії міцності і жорсткості.

Для зручності порівняння різних перерізів введемо безрозмірні характеристики

$$W_0 = \frac{W_K}{A^{3/2}}; \quad I_0 = \frac{I_K}{A^2},$$

які можна назвати відповідно:

W_0 – питомий момент опору при крученні;

I_0 – питомий момент інерції перерізу при крученні,

де A – площа поперечного перерізу стержня.

У табл. 6.2 наведено значення W_0 і I_0 для деяких форм поперечних перерізів.

Таблиця 6.2 – Характеристики раціональності форми перерізів

№ з/п	Форма перерізу		W_0	I_0
1	Швелер		0,04–0,05	0,010-0,011
2	Двотавр		0,05–0,07	0,009-0,015
3	Прямокутник	$h/b=10$	0,10	0,131
		$h/b=2$	0,18	0,115
4	Квадрат	$h/b=1$	0,21	0,140
5	Круг		0,28	0,160
6	Кільцевий переріз	$c = \frac{d_B}{d} = 0,5$	0,37	0,264
		$c = \frac{d_B}{d} = 0,9$	1,16	1,52

Аналіз табл. 6.2 показує, що **найбільш раціональні є кільцеві перерізи**. Найближчий до ідеального є кільцевий переріз із співвідношенням діаметрів $c = 0,75...0,9$. Найбільш не вигідними при крученні стержнів є поперечні перерізи з відкритим тонкостінним контуром, які можуть мати форму швелера, двотавра або вузького прямокутника.

6.3. Самоперевірка якості засвоєння теми

1. Який вид опору називають зсувом? Навести приклади деталей, які зазнають при навантаженні деформації зсуву (зрізу).
2. Дати визначення переміщення і деформації при зсуві.
3. Записати закон Гука при зсуві.

4. Який модуль пружності більше: при розтяганні E чи при зсуві G ? Записати залежність, яка має місце між цими фізичними константами матеріалу.
5. Записати умовну формулу для визначення напружень при зсуві. Дати рекомендації за і проти практичного використання цієї формули.
6. Які напруження виникають у поперечному перерізі круглого стержня при крученні?
7. Назвати гіпотези і спрощення, які застосовуються при виведенні формули дотичних напружень.
8. Як визначити дотичне напруження у будь-якій точці круглого поперечного перерізу?
9. Показати закономірність розподілу дотичного напруження в стержні круглого перерізу.
10. Чи виникають при чистому крученні нормальні напруження?
11. Накреслити епюру розподілу дотичних напружень для суцільного і кільцевого перерізів.
12. Записати формулу для визначення полярного моменту інерції круглого перерізу, полярного моменту опору при крученні. Назвати одиниці їх виміру.
13. Записати формулу для визначення полярного моменту опору кільцевого перерізу.
14. Записати умову міцності при крученні стержня круглого перерізу. Назвати типи розрахунків, які можна виконати, застосовуючи умову міцності.
15. Записати умову жорсткості при крученні круглого стержня. Дати її аналіз.
16. Дати пояснення кута закручування та відносного кута закручування стержня.
17. Особливості теорії кручення некруглих перерізів.
18. В яких точках прямокутного перерізу стержня при крученні дотичні напруження найбільші?
19. Накреслити епюру розподілу дотичних напружень для прямокутного перерізу.
20. Записати геометричні характеристики, які застосовуються в формулах для визначення дотичних напружень та кутів закручування стержнів некруглого перерізу.
21. За якими формулами визначають напруження і деформації стержнів, які мають поперечні перерізи у вигляді кутника та двотавра?
22. Накреслити епюру розподілу дотичних напружень у перерізі стержня з тонкостінним замкненим профілем.
23. Особливості розподілу дотичних напружень у круглих та некруглих поперечних перерізах стержнів при крученні (показати на епюрах).
24. За допомогою яких критеріїв визначається раціональність форми перерізу при крученні? Яка із форм є найбільш раціональною?

7. ЕНЕРГЕТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Пружні переміщення та деформації необхідно визначати для перевірки умов жорсткості елементів, для розкриття статичної невизначуваності систем, а також при вивченні коливань та динамічних навантажень. Деформації прямих стержнів при простих видах опору визначають за допомогою закону Гука. Але в більш складних випадках, коли в поперечних перерізах стержнів виникає до шести внутрішніх силових факторів, а самі стержні криволінійні та до того ж є елементами просторових систем (рис. 7.1), знайти пружні переміщення та деформації за законом Гука дуже складно, а то й зовсім неможливо. У таких системах пружні переміщення перерізів елементів можна визначати за допомогою енергетичних методів на базі потенціальної енергії деформування навантаженої системи. Але і в цих випадках визначення переміщень починають з аналізу внутрішніх силових факторів, як відомо, за допомогою методу перерізів. Далі, користуючись формулами енергетичних методів, можна знайти шукані переміщення.

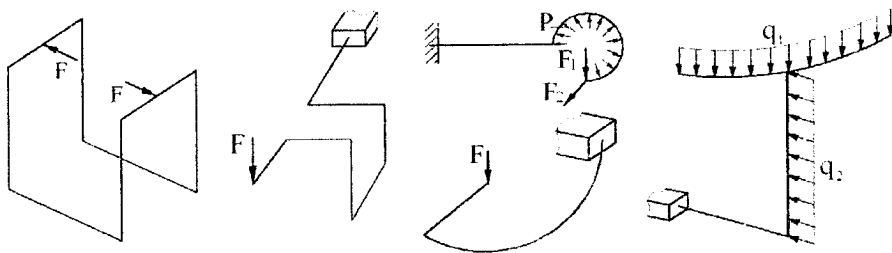


Рисунок 7.1 – Просторові стержневі системи
з лінійними та кривими елементами

7.1. Потенціальна енергія деформування тіл при простих видах опору

7.1.1. Розтяг і стиск

Сила, яка розтягує брус (рис. 7.2,а), виконує роботу на переміщенні того перерізу, де вона прикладена. Якщо за допомогою діаграми розтягу

зобразити графічно процес подовження бруса при навантаженні, то в межах зони OB лінійної пропорційності діаграма робота сили F дорівнює площі заштрихованого трикутника

$$T = 0,5F \cdot \Delta l,$$

де коефіцієнт 0,5 враховує поступове лінійне зростання сили $\tilde{F}$ від нуля до кінцевого значення (середнє значення сили дорівнює $\tilde{F} = 0,5F$).

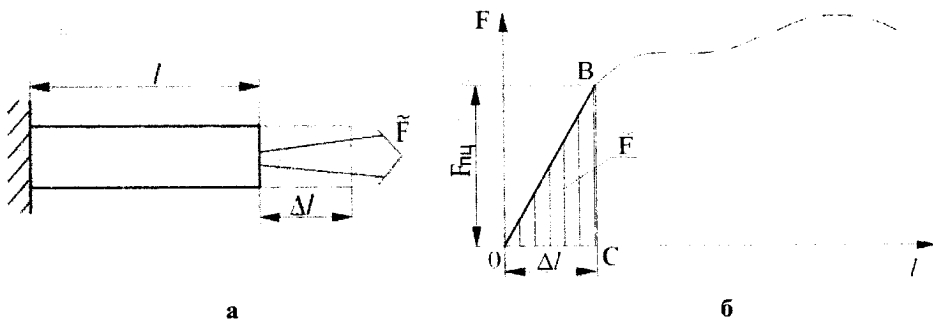


Рисунок 7.2 – Схема подовження зразка (а) і діаграма розтягу (б)

При повному розвантаженні потенціальна енергія, що накопичилась у брусі при його подовженні, скорочує брус до початкового стану. Таким чином, потенціальна енергія пружної деформації дорівнює роботі зовнішнього навантаження

$$T = 0,5F \cdot \Delta l = U \quad (7.1)$$

Цю властивість пружних тіл, як акумуляторів енергії, широко використовують у техніці, особливо – в автоматичних механічних пристроях, в пружинах тощо.

Підставляючи в формулу (7.1) внутрішнє поздовжнє зусилля N_z , що виникає в перерізах даної ділянки бруса під дією зовнішніх сил $F_{1...n}$, одержимо вираз потенціальної енергії деформування у вигляді

$$U = 0,5N_z \cdot \Delta l.$$

Якщо замість Δl підставити сюди його вираз на основі закону Гука

$$\Delta l = \frac{N_z \cdot l}{EA},$$

то одержимо

$$U = \frac{N_z^2 \cdot l}{2EA}.$$

Коли поздовжня сила не постійна в усіх перерізах бруса, а перемінна по його довжині, то в елементі бруса довжиною dz накопиться потенціальна енергія

$$dU = 0,5N(z) \cdot \Delta(dz) = \frac{N(z)^2 \cdot dz}{2EA},$$

а в усьому брусі цілком

$$U = \int_0^l \frac{N^2(z) dz}{2EA}. \quad (7.2)$$

7.1.2. Кручення

Потенціальна енергія деформації при крученні виражається формулою, аналогічною (7.2). Розглянемо короткий елемент вала довжиною dz (рис. 7.3,а). При пружній деформації закручування в межах пропорціональної залежності між M_z і кутом закручування $d\varphi$ елементарна робота, яку здійснює момент, дорівнює

$$dT = 0,5M_z \cdot d\varphi, \quad (7.3)$$

де коефіцієнт 0,5 враховує середнє значення моменту, оскільки він поступово (лінійно) зростає від нуля до кінцевого значення M_z .

Підставляючи в формулу (7.3) замість кута $d\varphi$ його вираз на основі закону Гука

$$d\varphi = \frac{M_z \cdot dz}{GI_p},$$

одержимо формулу для потенціальної енергії, що накоплюється при закручуванні елемента довжиною dz і яка дорівнює роботі dT ; при припиненні дії скручувального моменту вал, розкручуючись, “поверне” накопичену енергію:

$$dU = dT = \frac{M_z^2 \cdot dz}{2GI_p}.$$

Потенціальна ж деформація закручування всього вала довжиною ℓ буде:

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2 dz}{2GI_p}. \quad (7.4)$$

Надаючи скручуваному брусу певної форми, можна виконати конструкцію, здатну накопичувати значну кількість енергії – акумулювати енергію деформації. Такі констукції виконують у вигляді пружин і широко застосовують у техніці.

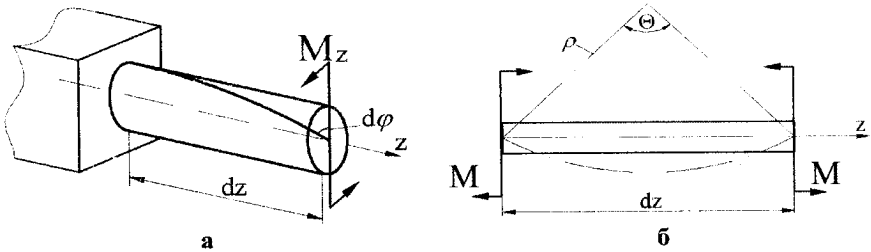


Рисунок 7.3 – Переміщення при крученні (а) та згинанні (б)

7.1.3. Чистий та поперечний згин балок

Потенціальна енергія пружної деформації при чистому згинанні балки дорівнює роботі моменту M_x на взаємному кутовому переміщенні Θ поперечних перерізів балки (рис. 7.3,б):

$$T = 0,5M_x \cdot \Theta, \quad (7.5)$$

$$\Theta = \frac{l}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x} \cdot l,$$

де $\frac{1}{\rho}$ – кривизна нейтрального шару розглядуваної ділянки балки, залежність якої від моменту M_x та жорсткості EI_x відома з теорії чистого згинання (див. п.п. 5.2).

Підставивши значення Θ в рівняння (7.5), матимемо

$$U = \frac{M_x^2 \cdot l}{2EI_x}.$$

Якщо згинальний момент змінюється від перерізу до перерізу ($M_x=f(z)$), то вираз для потенціальної енергії буде відповідно:

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x}. \quad (7.6)$$

При поперечному згині в перерізах балки крім згинального момента виникає ще й поперечна сила Q_x чи Q_y . Додаткову потенціальну енергію деформації зсуву по аналогії з попередніми формулами можна записати у вигляді:

$$U = K_y \int_0^l \frac{Q_y^2 dz}{2GA}, \quad (7.7)$$

де K_y – коефіцієнт, який залежить від форми поперечного перерізу балки (для прямокутника $K_y=1,20$; для круга $K_y=1,18$ [4]);

GA – жорсткість поперечного перерізу балки при зсуві.

Потенціальна енергія деформації зсуву значно менша за енергію згинання, тому нею часто нехтують.

7.2. Потенціальна енергія деформування пружного тіла при довільному навантаженні

Розглянемо брус, навантажений складним способом (рис. 7.4,а). Визначення переміщень за допомогою енергетичних методів починають з аналізу внутрішніх силових факторів, що виникають у перерізах кожної ділянки бруса. Користуючись методом перерізів, розріжемо (уявно) брус на нескінченно близькій відстані dz від лівої опори, де брус жорстко затиснутий (рис. 7.4,б).

В уявному перерізі може виникнути в загальному випадку шість внутрішніх силових факторів – три сили в напрямку центральних осей перерізу та три моменти відносно них. Лівий затиснутий кінець бруса нерухомий, а переріз на відстані dz може мати лінійні та кутові переміщення, на яких внутрішні силові фактори виконують відповідну роботу. Так, поздовжня сила N_z виконує роботу тільки на поздовжньому переміщенні $\Delta(dz)$ перерізу; поперечна сила Q_y «працює» відповідно тільки на зсуві вздовж вісі y , а вздовж z

роботи не виконує, бо перпендикулярна до неї; момент M_z виконує роботу тільки на кутовому переміщенні перерізу відносно осі z , а до осі x його вектор – перпендикулярний і вздовж неї роботи не виконує. Це дуже важливо в дослідженнях, що кожний із силових факторів виконує роботу тільки на відповідному йому переміщенні, коли останні п'ять факторів на цьому переміщенні не «працюють».

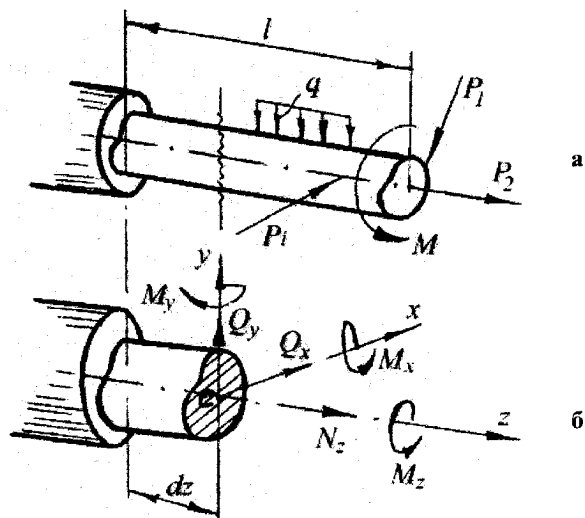


Рисунок 7.4 – До визначення енергії деформування при складному опорі

Таким чином, роботу всіх силових факторів, а значить і потенціальну енергію деформування тіла при довільному навантаженні можна визначати як суму незалежних робіт кожного силового фактора:

$$U = \int_0^l \frac{N_z^2}{2EA} dz + \int_0^l \frac{M_{x,y}^2}{2EI_{x,y}} dz + \int_0^l \frac{M_z^2}{2GI_p} dz + K_x \int_0^l \frac{Q_x^2}{2GA} dz + K_y \int_0^l \frac{Q_y^2}{2GA} dz. \quad (7.8)$$

Використання формули (7.8) в повному обсязі пов'язане з дуже громіздкими розрахунками, до того ж деякі складові можуть бути дуже незначними в порівнянні з другими. *Досвід розрахунків показує, що слід брати*

до уваги різні складові в таких конкретних випадках: **поздовжню силу** N_z – в фермах, де стержні з'єднані в вузлах за допомогою шарнірів; **згинальні моменти** $M_{x,y}$ – для балок та плоских рам; **згинальні моменти і нормальні сили** – для арок; **згинальні та крутні моменти** – для просторових стержневих систем. Крім цього, слід мати на увазі, що потенціальна енергія зсуву значно менша за потенціальну енергію при інших деформаціях, тому нею часто нехтують.

7.3. Узагальнена сила, узагальнене переміщення та їх відповідність

Одна – єдина сила не може деформувати брус (рис. 7.5), тільки система сил може деформувати окреме тіло чи конструкцію в цілому.

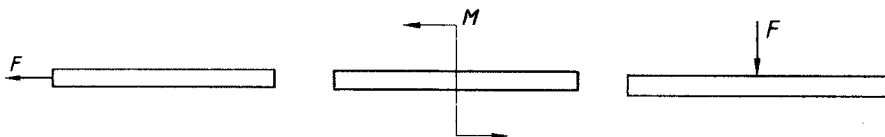


Рисунок 7.5 – Брус з єдиною силою – механізм

Для того щоб характеризувати результат дії системи сил на тіло, введемо поняття узагальненої сили та узагальненого переміщення.

Узагальненою силою назвемо систему сил, прикладених до тіла, які пропорційні єдиному параметру (рис. 7.6 – F, M) і деформують тіло.

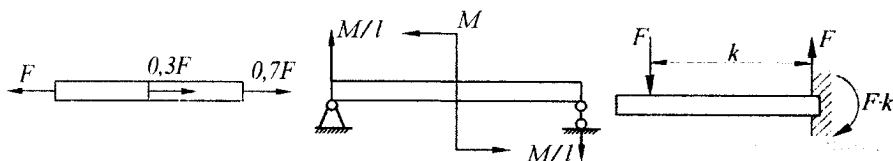


Рисунок 7.6 – Введення поняття узагальненої сили

Узагальненим переміщенням назвемо незалежний параметр, що однозначно і в повній мірі характеризує деформування тіла. Це може бути як лінійне, так і кутове переміщення.

Узагальнені сили та переміщення називають відповідними, якщо сила виконує роботу на переміщенні точки її прикладання. На схемах двох консольно закріплених балок, навантажених окремими зосередженими силами F та парою сил M (рис. 7.7,а, б), показані лінійні (прогини) та кутові переміщення кінцевого перерізу T . **Подвійні індекси** при узагальнених переміщеннях ($f_{2F}, \theta_{TF} \dots$) **означають:** перший вказує саме той переріз, переміщення якого визначають (тобто географію переміщення), а другий індекс вказує причину відповідного переміщення (тобто історію його появи).

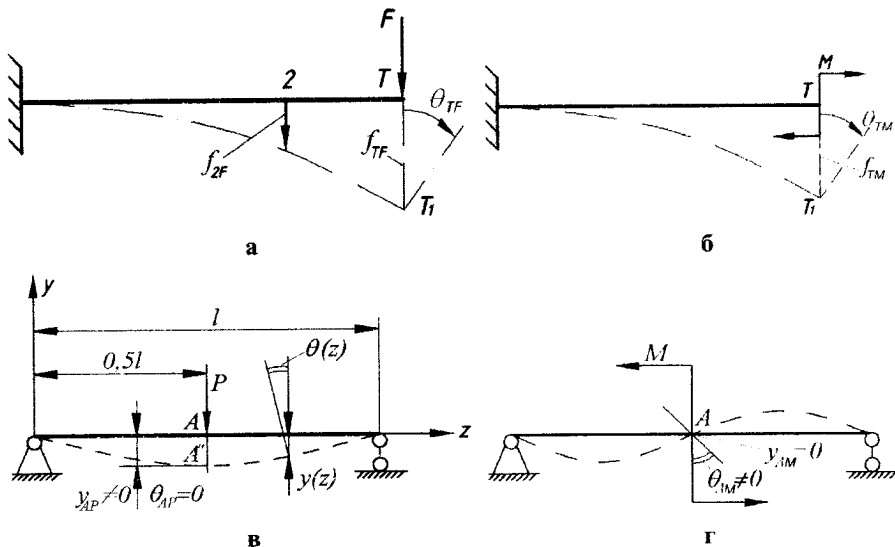


Рисунок 7.7 – Узагальнені сили, переміщення і їх відповідність

На першій схемі (рис. 7.7,а) сила F зумовлює лінійні і кутові переміщення, але роботу виконує лише на прогині f_{TF} , а на кутовому (як і на лінійному прогині перерізу 2) – чи то взагалі не виконує роботи, чи роботу не відповідну повному переміщенню перерізу з силою.

Зосереджений момент (на другій схемі – б) виконує роботу лише на кутовому переміщенні того перерізу, де він прикладений, а саме $A = M \cdot \theta_{TM}$.

Лінійне ж узагальнене переміщення буде відповідним зосередженій узагальненій силі, що має бути прикладена до того перерізу балки, прогин якого визначають (рис. 7.7,в). Тут тільки прогин y_{AP} є відповідним силі P , а переміщення $\theta_{AP}, \theta_{(z)}$ і навіть $y_{(z)}$ – не будуть відповідними силі P . Те, що лінійне переміщення не є відповідним моменту M видно з рис. 7.7,г, де вигин того перерізу балки, де зосереджений момент дорівнює нулю; кутове ж (відповідне) переміщення має місце: $\theta_{AM} \neq 0$.

На рис. 7.7,в показано, що кутове переміщення θ_{AP} перерізу A під силою P не є відповідним цій силі, бо воно взагалі відсутнє.

Таким чином, формальною ознакою відповідності узагальнених сил і переміщень є розмірність їх добутку – розмірність роботи.

7.4. Основні формули визначення переміщень енергетичним методом

7.4.1. Теорема Кастіліано

Розглянемо пружне тіло (балку, рис. 7.8), навантажене довільною системою зовнішніх сил $P_1, P_2, \dots, P_i, P_n$. Під дією такого навантаження балка деформується, сили P_i виконують роботу на вигинах Δ_i :

$$T = f(P_1, P_2, \dots, P_i, P_n),$$

яка акумулюється в потенціальну енергію деформування $U = T$.

Збільшимо одну з сил, наприклад – P_i , на величину dP_i (рис. 7.8,а), тоді збільшення потенціальної енергії деформування при цьому, як диференціал функції, буде

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_i} \cdot dP_i. \quad (7.9)$$

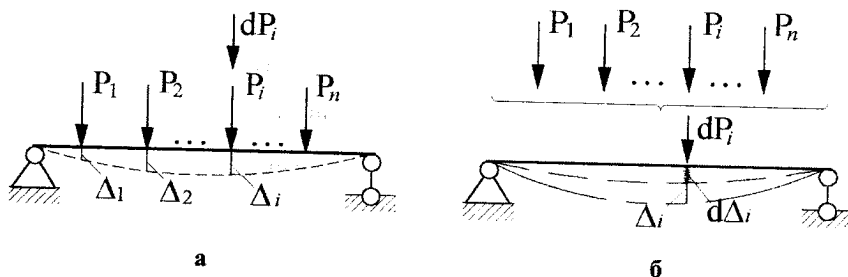


Рисунок 7.8 – До доказу теореми Кастіліано

Сумарна ж енергія деформування при такому послідовному навантаженні стане рівною

$$U_{\text{сум.}} = U + \frac{\partial U}{\partial P_i} \cdot dP_i. \quad (7.10)$$

Змінімо порядок навантаження балки: спочатку прикладемо силу dP_i (рис. 7.8,б), яка на відповідному переміщенні $d(\Delta_i)$ виконає роботу

$$T_1 = \frac{1}{2} dP_i \cdot d(\Delta_i) = U_1.$$

Навантажимо тепер балку системою зовнішніх сил $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$, які на відповідних переміщеннях $\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ виконують роботу U , а прикладена раніш сила dP_i виконає додаткову роботу $dP_i \cdot \Delta_i$.

Таким чином, сумарна енергія деформування при такій послідовності навантаження буде

$$U_{\text{сум.}} = \frac{1}{2} dP_i \cdot d(\Delta_i) + U + dP_i \cdot \Delta_i. \quad (7.11)$$

Порівнявши вирази (7.10) і (7.11) на основі принципу незалежності дії сил при пружному деформуванні балки та нехтуючи при цьому добутком $\frac{1}{2} dP_i \cdot d(\Delta_i)$, як нескінченно малим другого порядку, можна отримати такий вираз теореми Кастіліано

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i, \quad (7.12)$$

яка формулюється так:

«Частинна похідна від потенціальної енергії деформації системи за узагальненою силою дорівнює відповідному узагальненому переміщенню».

Тут в якості узагальненої відповідної сили P_i може бути зосереджена сила, якщо визначають лінійне переміщення, або зосереджений момент, якщо шукають кутове переміщення того перерізу, де вони прикладені.

Теорема Кастіліано є універсальною для всіх видів опору (простих і складних), а також навіть за межами пружного деформування при відповідному її вдосконаленні.

У випадку чистого плоского згинання в площині $zoу$, коли в поперечних перерізах балки виникає тільки M_x згинаючий, потенціальна енергія деформування мала вираз:

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2 \cdot dz}{2EI_x}, \quad (7.13)$$

де EI_x – жорсткість балки при згинанні її в площині відносно вісі x .

Беручи тепер частинну похідну від виразу (7.13), одержуємо

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{F_i} = \int_0^l 2M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial F_i} \cdot \frac{1}{2EI_x} \cdot dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_x \frac{\partial M_x}{\partial F_i} dz. \quad (7.14)$$

Виносити жорсткість за знак інтеграла можна лише для призматичних балок постійної жорсткості.

Розглянемо приклад користування формулою Кастіліано для визначення лінійного (прогину) та кутового переміщень кінцевого перерізу призматичної балки, закріпленої жорстко лівим кінцем у стіні, при навантаженні зосередженою силою на кінці (рис. 7.9).

Записавши вираз для функції згинаючого момента в поточних перерізах балки і частинну похідну цієї функції по відповідній силі F та розкриваючи інтеграл (7.14), можна визначити лінійне переміщення торця A

$$\Delta_A = y_A = \frac{1}{EI_x} \int_0^l (-F \cdot z) \cdot (-z) dz = \frac{F}{EI_x} \frac{z^3}{3} \Big|_0^l = \frac{F \cdot l^3}{3EI_x}.$$

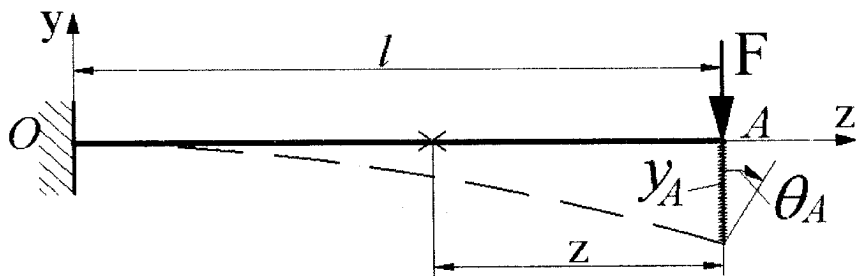


Рисунок 7.9 – До визначення переміщень за формулою Кастіліано

Для того щоб визначити кут повороту кінцевого перерізу, частинну похідну треба брати по зосередженому моменту, прикладеному в цьому перерізі. Але такого зовнішнього моменту на схемі навантаження балки немає. У таких випадках при користуванні теоремою Кастіліано необхідно прикласти фіктивний (нульовий) момент $M_0 = 0$.

У цьому випадку функція згинального моменту в перерізах та частинна похідна від неї по відповідній узагальненій силі (по моменту M_0) будуть:

$$M_x(z) = -F \cdot z + M_0; \quad \frac{\partial M_x(z)}{\partial M_0} = +1,$$

а кутове переміщення – таким:

$$\theta_A = \frac{1}{EI_x} \int_0^l [-F \cdot z + M_0] \cdot (+1) dz = \frac{-F}{2EI_x} z^2 \Big|_0^l = -\frac{F \cdot l^2}{2EI_x},$$

(тут, розкриваючи інтеграл, ми «згадали», що $M_0 = 0$).

Якщо знайдене переміщення від'ємне, то дійсний його напрямок протилежний відповідній узагальненій силі.

Інтегрування здійснюють на кожній ділянці балки (з різними $M_x = f(z)$), а суму беруть із врахуванням всіх ділянок.

Формула Кастіліано універсальна, але для систем з численними ділянками навантаження (більше двох) *розрахунки досить громіздкі*. Через це в свій час були отримані і інші формули на базі енергетичних методів.

7.4.2. Формула Максвелла-Мора для визначення пружних переміщень перерізів (“інтеграл Мора”)

При навантаженні балки системою узагальнених сил P_i (рис. 7.10) функцію згинаючого моменту можна записати у вигляді:

$$M_x(z) = m_{x1}(z) \cdot P_1 + m_{x2}(z) \cdot P_2 + m_{xn}(z) \cdot P_n = \sum_{i=1}^n m_x(z) \cdot P_i, \quad (7.15)$$

де m_{xi} – вираз згинаючого моменту від дії одиничного навантаження $P_i=1$.

Ввівши таким чином поняття одиничної сили та одиничного моменту m_x і беручи частину похідну від виразу (7.15) по відповідній узагальненій силі.

О.Мор одержав, що $\frac{\partial M_x(z)}{\partial P_i} = m_{xi}^{(1)}(z)$, **а формулу для переміщення – такою:**

$$\Delta_i = \int_0^l \frac{M_x(z) \cdot m_x(z)}{EI_x} dz,$$

де $M_x(z)$ – вираз згинаючого моменту від дії зовнішнього заданого навантаження; $m_x(z)$ – вираз згинаючого моменту від дії прикладеної одиничної відповідної узагальненої сили: якщо шукають лінійне переміщення, то прикладають одиничну зосереджену силу $P_i=1$, а якщо треба визначити кутове переміщення, то прикладають одиничний зосереджений момент $m_i=1$ (біля того перерізу, де шукають переміщення).

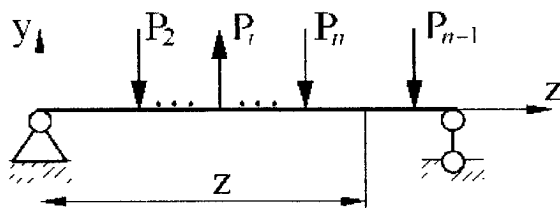


Рисунок 7.10 – До виведення формули Максвелла – Мора

Якщо отримане значення переміщення додатне – напрям його збігається з напрямом прикладеної одиничної сили, а якщо результат від’ємний – переміщення має протилежний напрям.

Інтеграл Мора, як і теорема Кастіліано, поширюється на всі бруси і стержневі системи, в т.ч. криволінійні. У найбільш загальному випадку складного опору, коли всі шість внутрішніх силових факторів виникають у перерізах даної ділянки елемента конструкції, кутові і лінійні переміщення того перерізу, де прикладено відповідну одиничну силу, можна обчислити за загальною формулою Максвелла – Мора:

$$\Delta_i = \sum \int \frac{N(z) \cdot n(z)}{EA} dz + \sum \int \frac{M_{x,y}^{32} \cdot m_{x,y}}{EI_{x,y}} dz + \sum \int \frac{M_z^{kp} \cdot m_z}{GI_p} dz + k_{x,y} \sum \int \frac{Q_{x,y} \cdot Q'_{x,y}}{GA} dz$$

(тут теж підсумування поширюється на всі елементи системи).

У випадку, коли елементи пружної системи працюють лише на розтяг-стиск, як це має місце у фермах, використовують тільки перший член формули переміщень. При роботі стержнів на згинання (балки та плоскі рами) використовують другий член формули, а першим і останніми нехтують, бо вони дуже малі порівняно з другими.

В особливих, дуже рідких, випадках, коли не можна нехтувати впливом поздовжніх сил (в коротких елементах, при шарнірному з'єднанні в стержневих системах тощо), доводиться користуватися повною формулою Максвелла - Мора.

Слід зазначити, що вираз інтегралу Мора можна отримати незалежно від теореми Кастіліано, з геометричних міркувань.

Розглянемо приклад визначення кутового переміщення перерізу T криволінійного бруса постійної товщини та кривизни $\left(\frac{1}{R}\right)$, жорстко закріпленого в опорі B (рис. 7.11).

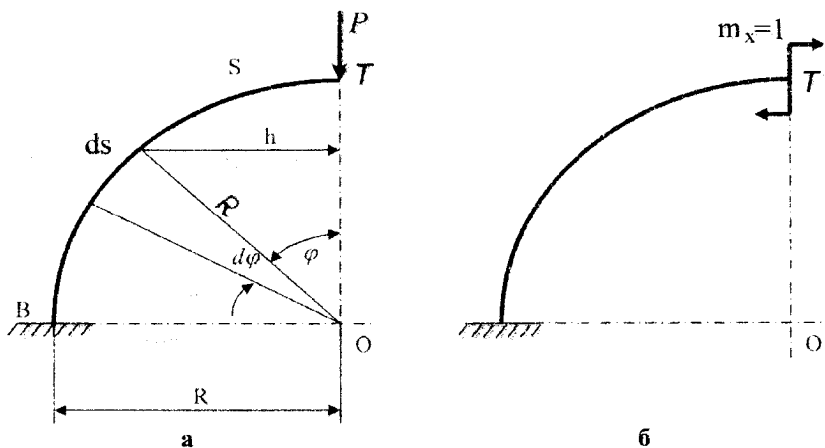


Рисунок 7.11 – До визначення кутового переміщення перерізу T :
реальне (а) та "одиничне" (б) навантаження

Якщо шукати кутове переміщення перерізу T , то необхідно прикласти відповідний одиничний момент $m_x = 1$ до цього перерізу.

Напрямок момента в площині стержня беруть довільним, а далі оцінюють по отриманому знаку обчислень.

Слід зазначити, що переміщення перерізів такого бруса будуть зумовлені, в основному, дією згинаючого моменту, в той час як нормальна та поперечна сили мало впливають на лінійні та кутові переміщення перерізів:

$$\theta_A = \int_{(s)} \frac{M_x(s) \cdot m_{x1}(s)}{EI_x} \cdot ds.$$

Інтегрування слід вести вздовж дуги S . Довжина нескінченно малого елемента дуги $ds = R \cdot d\varphi$, а вирази для згинаючих моментів в залежності від центрального кута $d\varphi$ будуть такими:

- від заданого навантаження $M_x(s) = -P \cdot h = -P \cdot R \cdot \sin \varphi$, $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$,
- від одиничної відповідної сили $m_{x1}(s) = -1$.

Підставляючи ці вирази в інтеграл Мора, визначимо величину кута повороту перерізу T :

$$\Theta_T = \frac{1}{EI_x} \int_{-\varphi}^{\varphi} P \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot (-1) d\varphi = \frac{PR^2}{EI_x} \int_{-\varphi}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi = \frac{PR^2}{EI_x} (-\cos \varphi) \Big|_{-\varphi}^{\varphi} = \frac{PR^2}{EI_x}.$$

Визначення переміщень за допомогою інтеграла Мора потребує формування аналітичних виразів для внутрішніх силових факторів від зовнішнього заданого навантаження і від одиничних відповідних сил для кожної навантаженої ділянки кожного елемента стержневої системи. Якщо ділянок навантаження багато, то такі розрахунки дуже кропіткі. Але **якщо стержнева система зібрана з прямолінійних елементів**, то складати аналітичні функції для силових факторів та інтегрувати їх необов'язково, обчислення ж інтеграла можна реалізувати за способом Верещагіна.

7.4.3. Обчислення інтеграла Мора за способом Верещагіна

За правилом інтегрального обчислення можна замінити процес інтегрування так званим «перемноженням» епюр $M_x(z)$ і $m_x(z)$, якщо одинична епюра прямолінійна.

Згинаючий момент від дії зовнішнього навантаження може бути довільною функцією від z , і епюра $M_x(z)$ може мати довільну форму. Згинаючі моменти від дії прикладених одиничних відповідних сил ($P=1$, $m=1$) на прямолінійних ділянках елементів будуть завжди лінійною функцією, або сталою величиною. Використовуючи цю особливість, А.К. Верещагін запропонував графоаналітичний спосіб обчислення інтеграла Мора для визначення переміщень. Так, при інтегруванні по Морі добуток функцій згинальних моментів на ділянці бруса постійної жорсткості

$$\Delta_i = \frac{1}{EI_x} \int M_x(z) \cdot m_x^1(z) \cdot dz = \frac{1}{EI_x} \int f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot dz$$

(де $m_x^1(z) = f_2(z) = d + k \cdot z$)

перетворюється в суму інтегралів

$$\int f_1(z)(d + k \cdot z) dz = b \int f_1(z) dz + k \int z f_1(z) dz. \quad (7.10)$$

Перший з цих інтегралів являє собою площу, окреслену криволінійною функцією $f_1(z)$ згинаючого моменту (рис. 7.12), тобто площу ω_1 реальної епюри від дії зовнішнього навантаження.

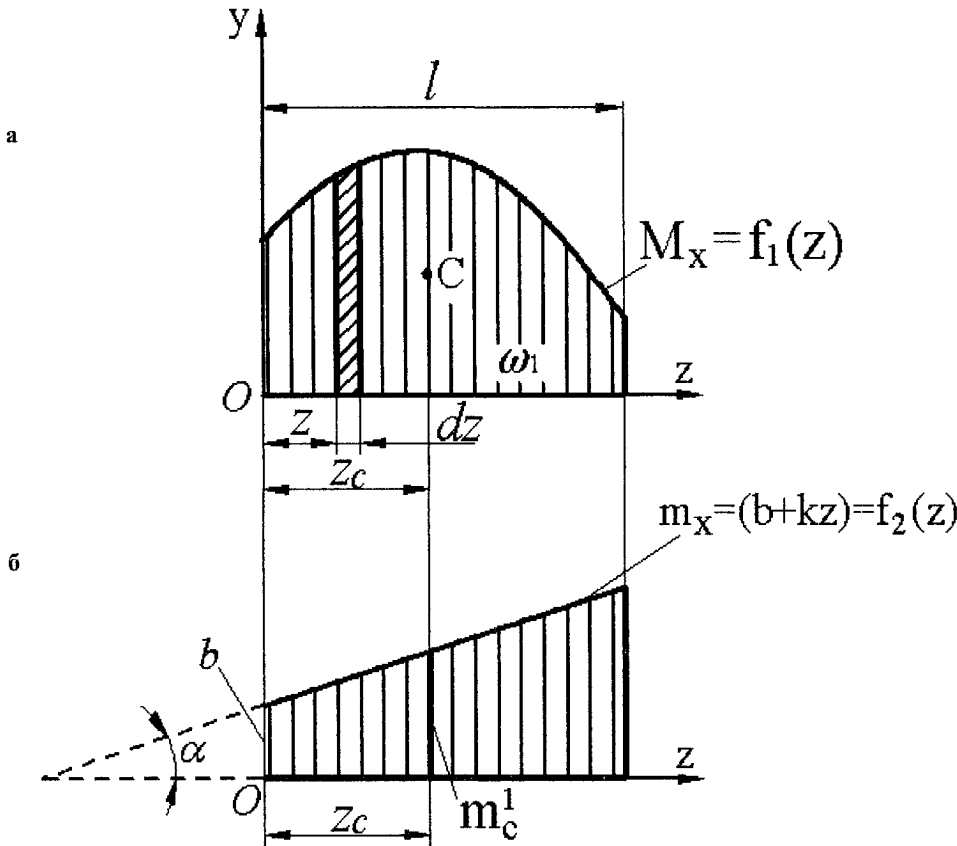


Рисунок 7.12 – До графоаналітичного обчислення інтеграла Мора за методом Верещагіна

Другий інтеграл виражає статичний момент цієї ж площі відносно вісі y на початку ділянки l бруса:

$$\int_0^l z \cdot f_1(z) \cdot dz = \omega_1 \cdot z_c,$$

де z_c -- координата центра ваги площі реальної епюри ω_1 .

Із врахуванням цього вираз (7.10) можна уявити так:

$$b \cdot \omega_1 + k \omega_1 \cdot z_c = \omega_1 (b + k z_c).$$

Тут $(b + k z_c)$ є значення функції на одиничній епюрі, взяте під центром ваги z_c вантажної реальної епюри. Позначимо цю ординату на епюрі як m_c^1 .

Таким чином, **спосіб Верещагіна для визначення пружних переміщень можна уявити в такій простій формі:**

$$\Delta = \frac{\omega \cdot m_c}{EI_x},$$

тобто будь-яке переміщення перерізу елемента дорівнює добутку площі (ω) реальної (вантажної) епюри на ординату одиничної (m_c) відповідної епюри, взятую під центром ваги реальної.

Слід зауважити, що треба брати саме площу довільної (вантажної) епюри, а не навпаки, за винятком випадків, коли обидві епюри в межах однієї ділянки прямолінійні: тоді все одно, площу якої епюри брати і на ординату якої множити.

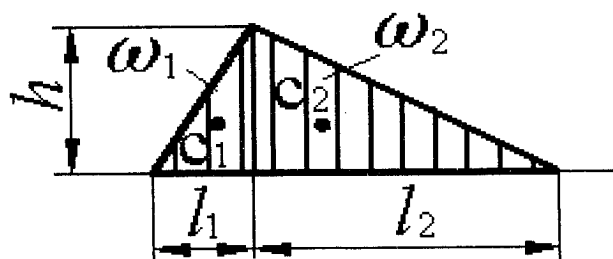
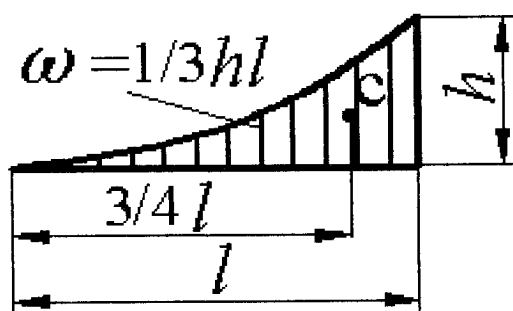
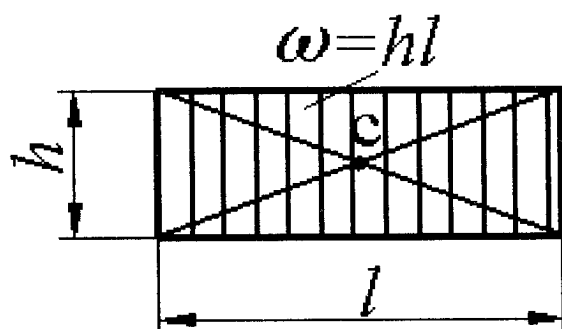
Щоб не зв'язувати себе будь-яким правилом знаків та уникнути помилок, доцільно епюри і реальних, і одиничних згинаючих моментів будувати з боку стиснутих волокон стержня. Тоді перемноження епюр, відкладених в один бік, даватиме знак "плюс", а в різні боки – "мінус".

Формулу Верещагіна можна використати при будь-яких видах простого та складного опору, треба лише перемножати відповідні епюри ($N_z \cdot n_z$; $M_z^{kp} \cdot m_z^{kp}$, $M_x^{3z} \cdot m_x^{3z}$, розташовані в одній площині) та ділити на відповідну жорсткість (поздовжню – EA ; згинальну – EI_x , EI_y ; крутильну – GI_p). Але для

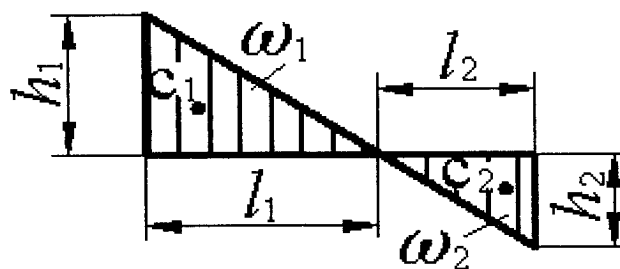
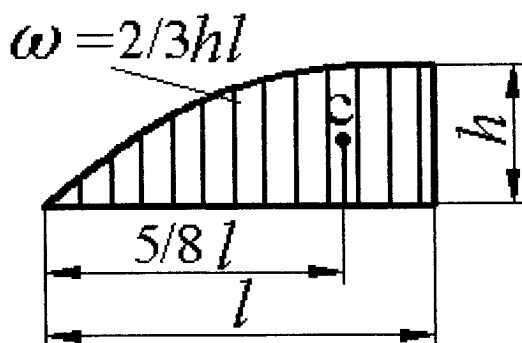
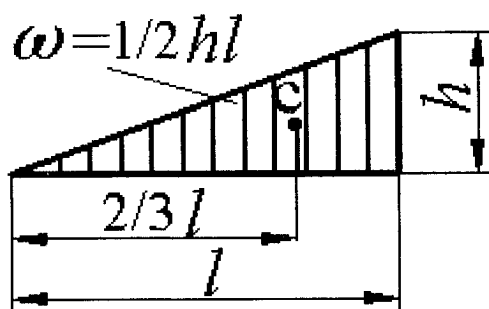
криволінійних стержнів її не можна застосувати, як і для прямих елементів зі змінною жорсткістю.

Складні за окресленням реальні епюри, що зумовлені заданим навантаженням, слід розкладати на окремі простіші фігури – прямокутники, трикутники, параболічні сегменти, площу яких та місце центра ваги визначати просто. При перемноженні слід керуватися алгебраїчними правилами перемноження многочленів. А щоб реальні епюри були як можна простіші, їх треба будувати окремо від дії кожної із заданих активних сил. Якщо епюра внутрішнього силового фактора є ламаною лінією або перетинає поздовжню вісь стержня в межах однієї грузової ділянки бруса, то необхідно розкладати їх на найпростіші прямокутні трикутники (рис. 7.13).

Розглянемо декілька прикладів визначення пружних переміщень перерізів балок і стержневих систем за способом Верещагіна.



a



6

Рисунок 7.13 – Найпростіші окреслення епюр, їх площі та центри ваги

Таблиця 7.1 – Результати перемноження реальних і одиничних функцій згинальних моментів по Мору чи епюрі по Верещагіну

ЕПЮРИ		$\int M_x(z) \cdot m_x(z) dz$ чи $(\omega \cdot m_c)$								
реальні $M_x^{32.}$ $m_x^{32.}$ одиничні		1	2	3	4	5	6	7	8	9
						квадратичні параболи				
а		lik	$\frac{1}{2}lik$	$\frac{1}{2}lik$	$\frac{1}{2}l(i_1 + i_2)k$	$\frac{2}{3}lik$	$\frac{2}{3}lik$	$\frac{2}{3}lik$	$\frac{1}{3}lik$	$\frac{1}{3}lik$
б		$\frac{1}{2}lik$	$\frac{1}{3}lik$	$\frac{1}{6}lik$	$\frac{1}{6}l(i_1 + 2i_2)k$	$\frac{1}{3}lik$	$\frac{5}{12}lik$	$\frac{1}{4}lik$	$\frac{1}{4}lik$	$\frac{1}{12}lik$
в		$\frac{1}{2}li(k_1 + k_2)$	$\frac{1}{6}li(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{6}li(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{6}li(2k_1 + k_2) + \frac{1}{6}l(1+a)i_2k$	$\frac{1}{3}li(k_1 + k_2)$	$\frac{1}{12}li \times \times (3k_1 + 5k_2)$	$\frac{1}{12}li \times \times (5k_1 + 3k_2)$	$\frac{1}{12}li \times \times (k_1 + 3k_2)$	$\frac{1}{12}li \times \times (3k_1 + k_2)$
г		$\frac{1}{2}lik$	$\frac{1}{6}l(1+a)ik$	$\frac{1}{6}l(1+b)ik$	$\frac{1}{6}l(1+b)i_1k + \frac{1}{6}l(1+a)i_2k$	$\frac{1}{3}l(1+ab)ik$	$\frac{1}{12}li \times \times (5-b-b^2)$	$\frac{1}{12}lik \times \times (5-a-a^2)$	$\frac{1}{12}lik \times \times (1+a+a^2)$	$\frac{1}{12}lik \times \times (1+b+b^2)$

Приклад 7.1. Визначити вертикальне лінійне переміщення (вигин) кінцевого перерізу балки (рис. 7.14,а), навантаженої рівномірно розподіленою силою q . Жорсткість балки постійна по довжині.

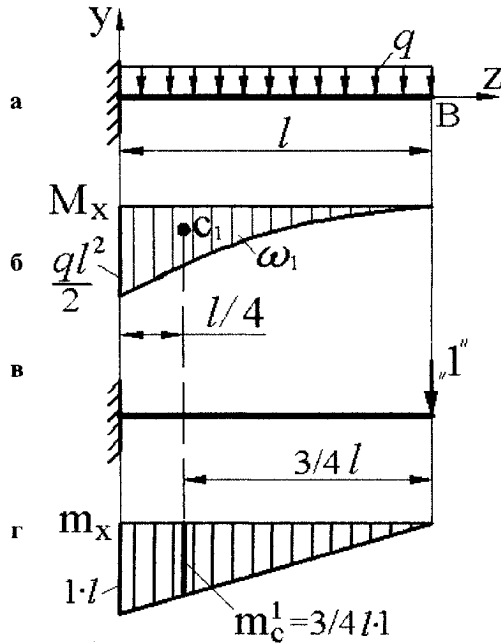


Рисунок 7.14 – До визначення прогину торця балки

Розв'язання.

Щоб скористатися способом Верещагіна, побудуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження q (реальна епюра – рис. 7.14,б) та одиничну епюру m_x від дії прикладеної в кінці балки відповідної одиничної сили "1" (рис. 7.14,г). Перемножуючи ці епюри за правилом Верещагіна, знайдемо вертикальний вигин кінця балки

$$\Delta_B = y_B = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{3} \cdot l \cdot q \frac{l^2}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot l \right] = \frac{ql^4}{8EI_x}.$$

Приклад 7.2. Знайти вертикальне зміщення перерізу A плоскої рами, навантаженої в цьому перерізі зосередженим моментом M , площа дії якого перпендикулярна площині самої рами. Реальні епюри крутильних та згинальних моментів від дії заданого навантаження показані на рис. 7.15,а. Одиничні епюри від дії відповідної сили "1" побудовані на рис. 7.15,б. Перемножуючи відповідні епюри, знайдемо шукане переміщення:

$$v_A = \frac{1}{EI_x} \left[M \cdot l_1 \left(-\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_1 \right) \right] + \frac{1}{GI_p} [M \cdot l_2 (-l_1 \cdot l_1)]$$

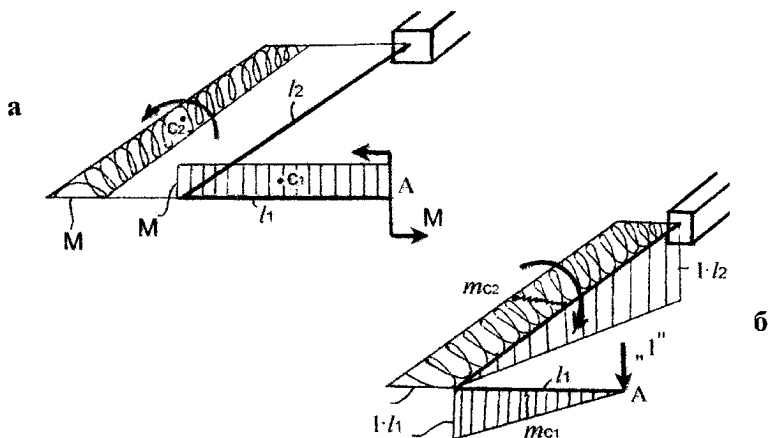


Рисунок 7.15 – До визначення прогину перерізу А

Користуючись співвідношенням згинальної та крутильної жорсткості реальних стержнів, наприклад для круглих сталевих

$$\frac{EI_x}{GI_p} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot I_x}{8 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot I_x} = 1,25,$$

або $GI_p = 0,8EI_x$, можна спростити обчислювання переміщень:

$$v_A = \frac{1}{EI_x} \left[-0,5 \cdot M \cdot l_1^2 - 1,25 \cdot M \cdot l_1 \cdot l_2 \right].$$

Знак мінус тут означає, що дійсне переміщення перерізу А направлено в сторону, протилежну вибраному напрямку одиничної сили, тобто – вгору.

Приклад 7.3. Плоска стержнева система, складена з двох прямолінійних елементів l_1 і l_2 з жорстким закріпленням лівого кінця стержня в опорі В (рис. 7.16) і навантажена розподіленою силою q_1 та зосередженим моментом M . Жорсткість елементів при згині (EI_x), та при крученні (GI_p) — постійні. Матеріал елементів системи – сталь з модулями пружності $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; всі стержні круглі одного діаметра $d=200 \text{ мм}$ довжиною $l_1 = 2 \text{ м}$; $l_2 = 1 \text{ м}$. Зовнішнє навантаження: $q = 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Треба визначити переміщення вільного кінця А бруса вздовж вертикальної вісі

$W_y^A = Y_A$, та кути повороту $\Theta_{y,A}, \varphi_{z,A}$ перерізу відносно осей y і z .

Розв'язання.

1. Спочатку побудуємо епюри згинальних та крутильних моментів (силами Q_y нехтуємо). Для цього перш за все слід зобразити (уявити) три осі для характерних перерізів обох стержнів: вісь z – поздовжня, x і y – поперечні.

2. Обчислювання моментів $M_x(z)$ і $M_z^{sp}(z)$ у характерних перерізах доцільно виконувати від дії кожної сили навантаження окремо. Визначені ординати згинальних моментів треба відкласти з боку стиснутого волокна у відповідній площині (в аксонометрії, оскільки система плоско-просторова). Епюра крутильних моментів не пов'язана з площинами xoy чи yoz , а тому будують її в будь-якій площині, що містить в собі поздовжню вісь z стержня. Щоб відрізнити епюри M_x^{sc} від M_z^{sp} , на останій роблять гвинтову штриховку, показуючи стрілкою напрямок дії крутного моменту. Якщо реальний і одиничний крутні моменти мають однаковий напрямок, то їх добуток буде позитивним, і навпаки.

"Перемножуючи" тепер реальні (рис. 7.16,а) і одиничні (рис. 7.16,б) епюри відповідного виду опору, можна визначити лінійне вертикальне переміщення перерізу A

$$y_A = \frac{1}{EI_x} [0,333l_1 \cdot 0,5ql_1^2 \cdot 0,75 \cdot 1 \cdot l_1 + 0,5l_2 \cdot ql_1 \cdot l_2 \cdot 0,666 \cdot 1 \cdot l_2 + \\ + l_2 \cdot M \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot l_2 \cdot (-1)] + \frac{1}{GI_p} [l_2 \cdot 0,5ql_1^2 \cdot 1 \cdot l_1].$$

3. Якщо шукати кутове переміщення перерізу A відносно вертикальної осі y , то необхідно перемножити ті ж реальні епюри на одиничні, зумовлені дією одиничного моменту $m_y = I_2$ (рис. 7.16,с). Але тут реальні і одиничні епюри згинальних моментів знаходяться в різних площинах, тому вони не перемножуються, тобто $\Theta_{y,A} = 0$.

4. Щоб визначити кутове переміщення перерізу A відносно поздовжньої осі z , необхідно перемножити ті ж реальні епюри на одиничні, зумовлені дією одиничного крутильного моменту $m_z = I_3$ (рис. 7.16,д):

$$\varphi_{z,A} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot ql_1 \cdot l_2 \cdot 1 + m \cdot l_2 \cdot 1 \cdot (-1) \right].$$

Моменти інерції круглих перерізів обох стержнів:

- осьові: $I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot (0,2)^4}{64} = 0,0000785 \text{ м}^4 = 785 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$;
- полярний: $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 2 \cdot I_x = 0,000157 \text{ м}^4 = 157 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$.

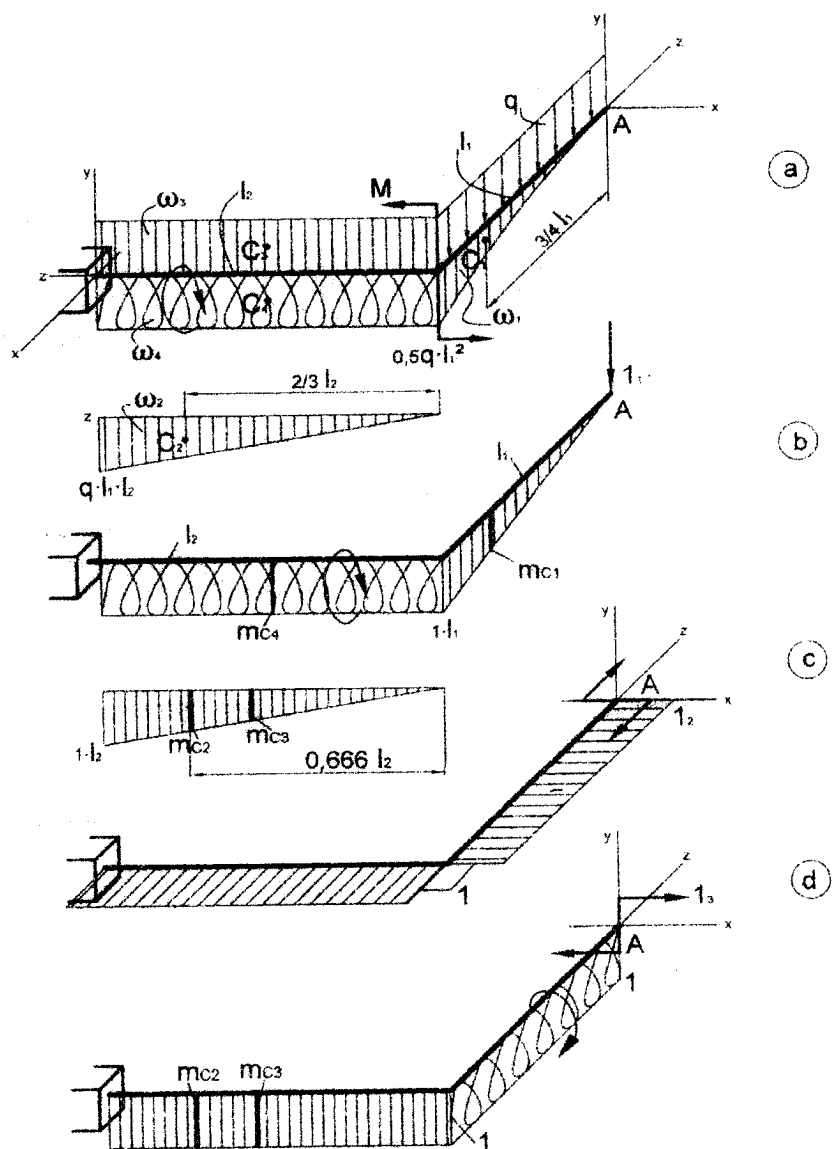


Рисунок 7.16 – До визначення лінійного і кутового переміщень торця A

Із врахуванням пружно-геометричних характеристик поперечних перерізів та зовнішнього навантаження числові значення переміщення перерізу A будуть такими:

- лінійне вертикальне

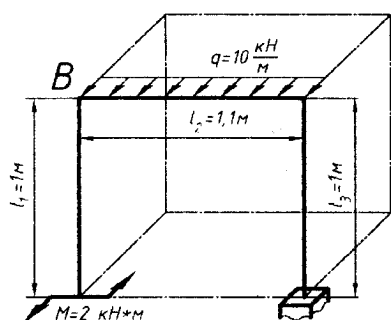
$$Y_A = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 785 \cdot 10^{-7}} [0,333 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 0,75 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0,666 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot (-1)] + \\ + \frac{1}{8 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 157 \cdot 10^{-6}} [1 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2] = 21,2 \cdot 10^{-6} + 317 \cdot 10^{-6} = 388 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,38 \text{ мм};$$

- кутові

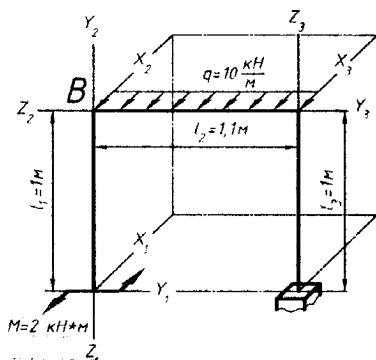
$$\varphi_{z,A} = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 785 \cdot 10^{-7}} [0,5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1)] = 0.$$

Приклад 7.4. Для показаної на рис. 7.17 плоско-просторової стержневої системи необхідно визначити лінійне переміщення перерізу B і кутові переміщення цього перерізу:

Θ_y відносно поперечної вісі y_2 та φ_z відносно поздовжньої вісі z_2 . Всі стержні – круглі діаметром 100 мм, модулі пружності їх матеріалу: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, зовнішнє навантаження: $q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$.



а



б

Рисунок 7.17 – Плоско-просторова стержнева система (а) та рухомі вісі (б) для кожного стержня

Розв'язання.

1. Показати стержневу систему на ребрах уявного паралелепіпеда та рухому систему координат $X_i Y_i Z_i$, вісі якої паралельні ребрам.

2. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для кожного стержня, зумовлені діями кожного відокремленого зовнішнього навантаження, що спростує як побудову епюр, так і подальше їх перемноження.

При цьому слід врахувати деякі тонкощі та правила:

- вплив поздовжніх і поперечних сил на переміщеннях перерізів в елементах рам

набагато менший, ніж вплив внутрішніх моментів, а тому будувати епюри N_z і $Q_{x,y}$ не обов'язково;

- визначені в характерних перерізах величини згинальних моментів слід відкладати від стиснутих волокон стержня у відповідних площинах, паралельних граням уявного паралелепіпеда;
- епюри крутних моментів будують у площині з подовжньою віссю Z_i відповідного стержня, позначаючи стрілкою напрям дії моменту.

Епюри внутрішніх силових факторів від зовнішнього навантаження називають ще «реальними», дійсними або вантажними.

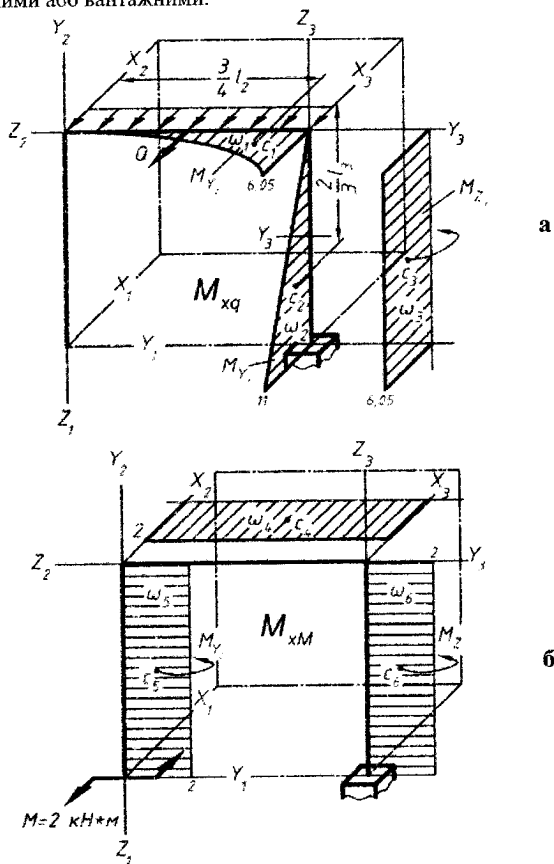


Рисунок 7.18 – Епюри згинальних і крутних моментів від зовнішнього навантаження окремо тільки розподіленою силою (а) та моментом (б)

3. Щоб визначити лінійне горизонтальне переміщення перерізу B , необхідно біля

цього перерізу прикласти одиничну відповідну силу I_x , побудувати так звані «одиничні» епюри моментів (рис. 7.19) та перемножити їх (за правилом Верещагіна) з усіма реальними епюрами моментів.

$$W_x^B = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{3} \cdot 6,05 \cdot 1,1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1,1 + \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 2 \right] + \frac{1}{GI_p} [6,05 \cdot 1 \cdot 1,1 + 2 \cdot 1 \cdot 1,1] = \frac{6,71}{EI_x} + \frac{8,86}{GI_p}.$$

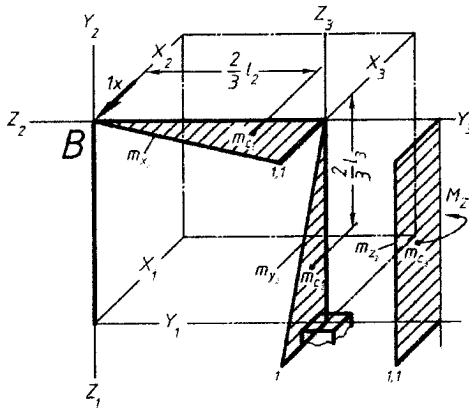


Рисунок 7.19 – Одиничні епюри моментів, зумовлені відповідною одиничною силою I_x

4. Щоб визначити кут повороту Θ перерізу B другого, горизонтального стержня відносно вертикальної вісі y_2 , необхідно прикласти до лівого торця B цього стержня одиничний відповідний момент $m_y=1$. Епюри внутрішніх моментів, зумовлені цим зовнішнім одиничним, зображені на рис. 7.20:

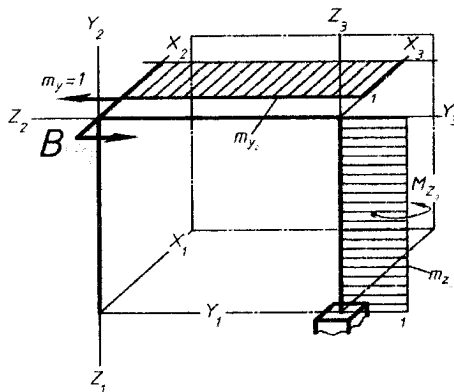


Рисунок 7.20 – Одиничні епюри, зумовлені моментом $m_y=1$

Результат перемноження їх на реальні епюри (рис. 7.18) явить собою шуканий кут повороту Θ_y перерізу B в горизонтальній площині:

$$\Theta_y = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{3} \cdot 6,05 \cdot 1,1 \cdot 1 + 2 \cdot 1,1 \cdot 1 \right] + \frac{1}{GI_p} [6,05 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1] = \frac{4,418}{EI_y} + \frac{8,05}{GI_p}.$$

5. Абсолютний кут закручування φ_z кінцевого перерізу B другого стержня відносно його поздовжньої осі z_2 можна визначити таким чином: слід навантажити переріз B зовнішнім одиничним крутним моментом $m_z=1$, побудувати ним зумовлені епюри внутрішніх силових факторів (рис. 7.21), та перемножити їх з реальними (рис. 7.18):

$$\varphi_z = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \right] + \frac{1}{GI_p} [0] = \frac{5,5}{EI_y}.$$

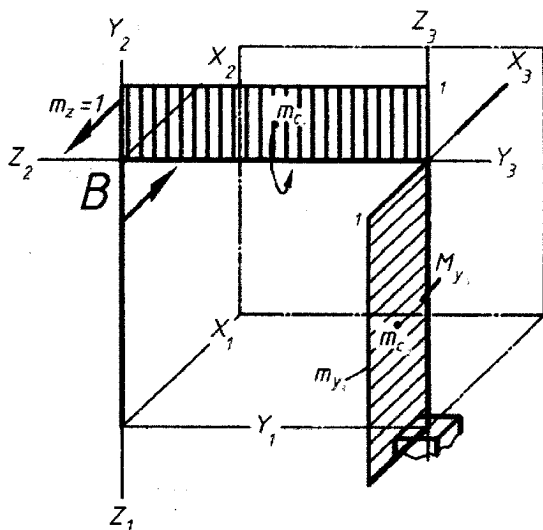


Рисунок 7.21 – Одиничні епюри внутрішніх силових факторів, зумовлені моментом $m_z=1$

6. Щоб отримати числові значення одержаних у загальному вигляді переміщень, необхідно визначити моменти інерції I_x, I_y, I_p перерізів всіх елементів рами, які для круглого перерізу будуть такими:

$$\bullet \text{ осьові } I_{x,y} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot (10 \cdot 10^{-2})^4}{64} = 49 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

- полярний $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (10 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 98 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$.

Жорсткості перерізів:

- при згинанні $EI_y = 2 \cdot 10^8 \cdot 49 \cdot 10^{-6} = 9800 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$;
- при крученні $GI_p = 8 \cdot 10^7 \cdot 98 \cdot 10^{-6} = 7840 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.

Величини перемішень:

$$W_x^B = \frac{6,71}{9800} + \frac{8,86}{7840} = 181 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 1,81 \text{ мм};$$

$$\Theta_y = \frac{4,42}{9800} + \frac{8,05}{7840} = 148 \cdot 10^{-5} \text{ рад};$$

$$\varphi_z = \frac{5,5}{9800} = 56 \cdot 10^{-5} \text{ рад}.$$

7.5. Самоперевірка якості засвоєння теми

1. Як виражається робота зовнішніх статично прикладених сил через величини цих сил і відповідні переміщення точок пружного тіла?
2. Як визначається потенціальна енергія деформації в загальному випадку навантаження стержня?
3. Що таке узагальнена сила та узагальнене переміщення? Що означає відповідність між ними?
4. Запишіть та сформулюйте теорему Кастіліано для визначення пружних переміщень.
5. Запишіть інтеграл Мора для загального випадку навантаження стержня.
6. У чому полягає спосіб Верещагіна обчислення інтегралів Мора? Які обмеження при застосуванні цього способу?
7. Викладіть суть теореми про взаємність робіт і теореми про взаємність переміщень.
8. У якому порядку здійснюється визначення лінійних і кутових переміщень за формулою Мора?
9. Як виконується перемноження епюр за способом Верещагіна?
10. Як визначається знак при перемноженні епюр за способом Верещагіна, і про що він свідчить?

8. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ

Статично невизначуваними, або гіперстатичними, називають системи, в яких реакції в'язей та внутрішні зусилля неможливо знайти лише за допомогою рівнянь рівноваги.

Такі системи (конструкції) найбільш поширені, бо вони є більш економічно доцільними, більш надійними та жорсткими в порівнянні з статично визначуваними, тобто ізостатичними. Щоб уявити та оцінити ці переваги, розглянемо рівномірно навантажену по всій довжині балку (рис. 8.1). Коли вона опирається на дві шарнірні опори (рис. 8.1,а), що накладають три в'язі, то всі три опорні реакції можна визначити за допомогою рівнянь рівноваги, які можна скласти для плоскої довільної системи сил. Отже, ця балка є статично визначуваною (ізостатичною). При необхідності можна значно збільшити навантаження на балку, не змінюючи її поперечних розмірів, встановити додаткову (зайву з точки зору рівноваги системи) опору, при цьому система стане гіперстатичною. Якщо ця зайва опора буде розміщена посередині прольоту (рис. 8.1,б), то найбільший момент у небезпечних перерізах зменшиться в 4 рази, а найбільший вигин – майже в 20 разів. Таким чином, не міняючи балку, можна збільшити навантаження. Крім того, в разі пошкодження однієї з опор в ізостатичній системі вона перетворюється в механізм, тоді як гіперстатична система залишається нерухомою, здатною сприймати навантаження.

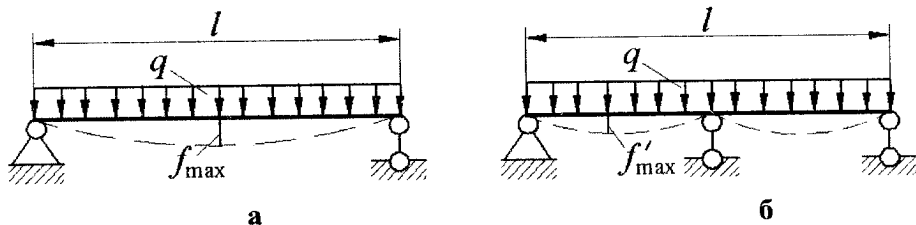


Рисунок 8.1 – Балка із «зайвою» опорою (б) більш жорстка ніж ізостатична (а)

У багатьох випадках статично невизначувані системи є єдино можливим варіантом реалізації конструкції.

8.1. В'язі зовнішні, необхідні та зайві. Ступінь зовнішньої гіперстатичності системи

Тверде тіло у просторі, маючи можливість вільно переміщатися вздовж трьох взаємно перпендикулярних осей та повертатися відносно них, володіє, таким чином, шістьма ступенями вільності і його положення визначається шістьма незалежними координатами (лінійними та кутовими).

Щоб зафіксувати положення тіла у просторі, необхідно обмежити (заборонити) всі ці можливі переміщення, тобто ввести (накласти на тіло) шість зовнішніх в'язей.

В одній площині тверде тіло володіє трьома ступенями вільності, бо може мати три довільні переміщення: лінійні вздовж двох осей, що формують дану площину, та одне кутове відносно вісі, перпендикулярної до площини. Щоб зафіксувати тіло на площині, необхідно заборонити всі ці переміщення, тобто накласти три в'язі.

Під зовнішніми в'язями розуміють ті обмеження, що накладені на абсолютні переміщення тіла чи окремих його перерізів відносно інших тіл. Так, наприклад, щоб зробити неможливим вертикальне переміщення лівого кінця балки (рис. 8.2), необхідно прикласти до цього кінцевого перерізу одну зовнішню в'язь, яку умовно зображають у вигляді одного циліндра, або стержня з двома шарнірами, тобто шарнірно-рухомої опори. Така опора допускає горизонтальне переміщення закріпленого на ній лівого кінця балки, а також – кутове переміщення (поворот) цього лівого перерізу. Реакція такої опори – одна сила R_v , що проходить через центр опори чи циліндра і перпендикулярна до напрямку можливого його переміщення.

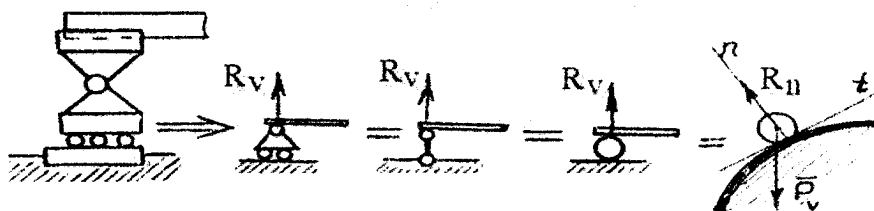


Рисунок 8.2 – Шарнірно-рухома опора та її зображення на схемах

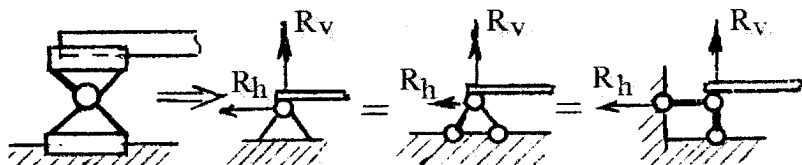


Рисунок 8.3 – Схематизація шарнірно-нерухомої опори

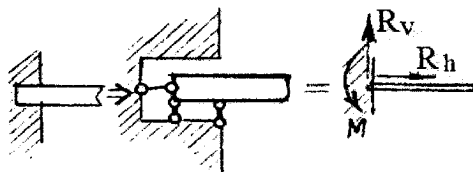


Рисунок 8.4 – Жорстке закріплення кінця балки

Шарнірно – нерухома опора (рис. 8.3) накладає дві в'язі на переріз балки біля закріплення, бо не допускає ні горизонтального, ні вертикального його переміщення, а лише кутове – відносно верхнього шарніра. Реакції цієї опори – дві: R_v і R_h .

Але як в першому (рис. 8.2), так і в другому (рис. 8.3) випадках зовнішніх в'язей недостатньо для забезпечення геометричної незмінності та нерухомості балки при її навантаженні. По суті це – механізми: перший – немов шатун, другий – кривошип.

Третій вид опори – жорстке закріплення кінця балки у нерухомій стіні – накладає три зовнішні в'язі на цей кінець балки, що зумовлюють появу трьох реакцій: реактивного моменту в закріпленні та двох сил (рис. 8.4).

Зовнішні в'язі бувають **необхідні** та **зайві**. Необхідні в'язі – ті, що потрібні для забезпечення геометричної незмінності та рівноваги системи при дії навантаження. Зайвими називають в'язі, які додані системі понад необхідних. Зусилля, що виникають у зайвих в'язях, є зайвими невідомими. **Кількість зайвих невідомих зусиль вказує на ступінь статичної невизначуваності системи.**

Найбільш загальне правило встановлення кількості зайвих в'язей у стержневих системах дає статичний метод, згідно з яким ступінь зовнішньої статичної невизначуваності встановлюється за формулою

$$n_{\text{зовн}} = R - S_t, \quad (8.1)$$

де R – кількість невідомих реакцій зовнішніх в'язей, які треба знайти;

S_t – кількість незалежних рівнянь статички, які можуть бути складені з умов рівноваги заданої стержневої системи.

Так, балка, схема якої зображена на рис. 8.5, маючи п'ять зовнішніх в'язей, є двічі статично невизначеною, оскільки дві в'язі – зайві.

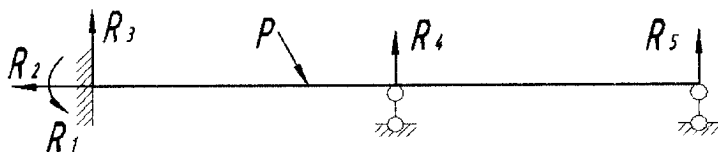


Рисунок 8.5 – Гіперстатична балка

8.2. В'язі внутрішні.

Внутрішня та загальна ступені статичної невизначеності систем

Внутрішні, або взаємні в'язі накладають обмеження на взаємні переміщення сусідніх перерізів одного й того ж пружного тіла при його деформуванні. Появу та особливості внутрішніх в'язкей розглянемо на прикладі плоскої рами (рис. 8.6,б), що має необхідні для її рівноваги три зовнішні в'язі. Якщо контур рами відкритий (рис. 8.6,а), то внутрішні зусилля можна встановити, користуючись методом перерізів, за допомогою рівнянь рівноваги.

Якщо закрити жорстко контур рами, наприклад за допомогою електрозварювання (рис. 8.6,б), то на взаємні переміщення двох сусідніх перерізів A і B будуть накладені обмеження: хоч у цілому нескінченно короткий елемент AB може мати вертикальне та горизонтальне лінійні переміщення, а також кутове переміщення (поворот) в площині рами, але перерізи A і B один відносно іншого не зміщуються внаслідок внутрішніх в'язів, що виникли при закритті контура рами.

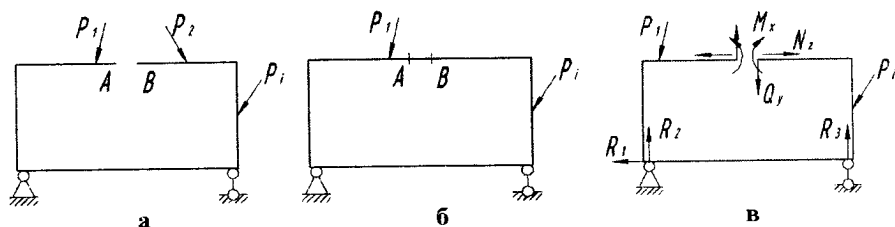


Рисунок 8.6 – Поява внутрішніх зайвих зусиль (в) у замкнутому плоскому контурі (б) і їх відсутність в незамкнутій рамі (а)

Роблячи переріз у довільному місці плоскої рами (без порушення кінематичної незмінності), можна встановити появу трьох внутрішніх силових факторів: поздовжньої N_z і поперечної Q_y сил та згинаючого моменту M_x (рис. 8.6,в). Вони поки що невідомі, а визначити їх величину за допомогою рівнянь рівноваги неможливо, бо є ще три реакції опор, а рівнянь рівноваги для плоскої довільної системи сил можна скласти тільки три.

Таким чином, замкнутий (закритий) плоский контур рами додає три зайві внутрішні в'язі і є тричі статично невизначеним (внутрішнім чином).

Іноколи в стержневих системах передбачають та реалізують шарнірні з'єднання стержнів. Шарнір, у якому з'єднуються два стержні, називають простим, або одинарним (рис. 8.7,а). У такому шарнірі лінійні взаємні переміщення неможливі, а тому виникають зусилля N_z і Q_y . Зате можливий поворот лівої частини шарніра з перерізом A стержня відносно правої з кінцевим перерізом стержня B . Таким чином, згинальний момент у шарнірному

з'єднанні стержнів не виникає, а ступінь внутрішньої статичної невизначеності завдяки введенню одинарного шарніра зменшується на одиницю.

Шарнір, що з'єднує три стержні (рис. 8.7,б), "знищує" дві внутрішні в'язі, оскільки дозволяє поворот одного стержня відносно двох інших. Такий шарнір можна зобразити (уявити) як комбінацію двох простих (рис. 8.7,в), які і скасовують дві в'язі.

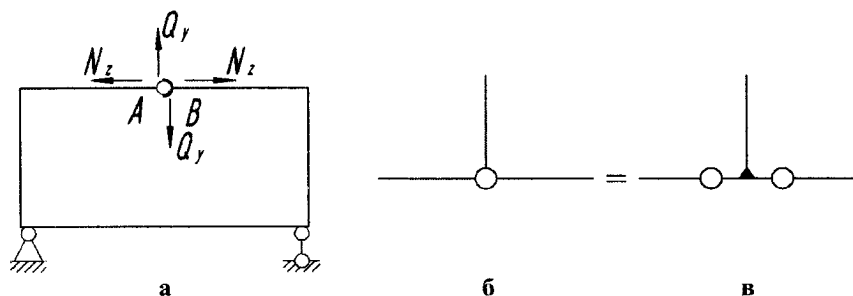


Рисунок 8.7 – Одинарний (а) та складний (б,в) шарніри

Взагалі, шарнір, що з'єднує більш ніж два стержні, називають складним. Якщо до складного шарніра примикає " m " стержнів, то такий шарнір вміщує $(m-1)$ простих шарнірів і скасовує $(m-1)$ в'язей.

Із врахуванням цих особливостей ступінь внутрішньої статичної невизначуваності плоских стержневих систем із замкнутими контурами може бути визначений за формулою:

$$n_{\text{внутр}} = 3 \cdot k - \sum (m-1) \cdot \Pi_m = 3 \cdot k - \Pi, \quad (8.2)$$

де k – кількість замкнутих контурів рами;

Π_m – кількість шарнірів, у яких з'єднуються m стержнів ($m > 2$);

Π – кількість простих шарнірів (якщо у складному шарнірі з'єднано $(m > 2)$ стержнів, то він еквівалентний $m-1$ простим шарнірам).

Ступінь загальної статичної невизначуваності системи можна визначити як суму зовнішньої та внутрішньої гіперстатичності:

$$n_{\text{зовн}} + n_{\text{внутр}} = n. \quad (8.3)$$

Так, плоска стержнева система, що показана на рис. 8.8, є п'ять раз статично невизначеною: двічі – зовнішнім і тричі – внутрішнім чином.

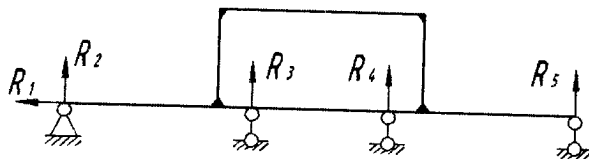


Рисунок 8.8 – П'ять раз гіперстатична стержнева система

Ступінь загальної статичної невизначеності системи можна встановити також за допомогою тільки формули (8.2), якщо при підрахунку кількості замкнутих контурів “ k ” фундамент приймається за стержень і таким чином враховуються контури, які сформовані опорними стержнями.

Так, наприклад, для системи, показаної на рис. 8.9, знаходимо: $k=4$, $III_2=6$ (1...6), $III_3=1$ (№7); у результаті ступінь загальної гіперстатичності буде: $n=3k-1 \cdot 6-2 \cdot 1=3 \cdot 4-8=4$.

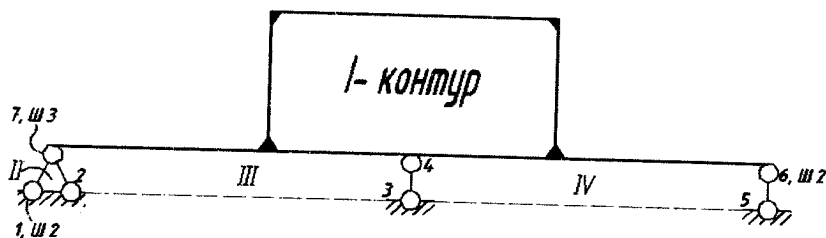


Рисунок 8.9 – Перелік замкнутих контурів (I...IV) і шарнірів (1...7)

Система гіперстатична чотири рази: внутрішнім чином – тричі і зовнішнім – один раз.

Для просторових стержневих систем (рис. 8.10) ступінь статичної невизначуваності можна встановити так:

$$n = 6 \cdot p, \quad (8.4)$$

де p – кількість розрізів, які треба зробити, щоб утворити так звану основну систему, коли кожна відсічена частина системи повинна бути статично визначеною, геометрично незмінною та нерухомою.

Наприклад, для просторової системи, що зображена на рис. 8.10, треба (і можна) зробити п'ять розрізів, а тому ця рама 30 раз – статично невизначена:

$$n = 6 \cdot p = 5 \cdot 6 = 30.$$

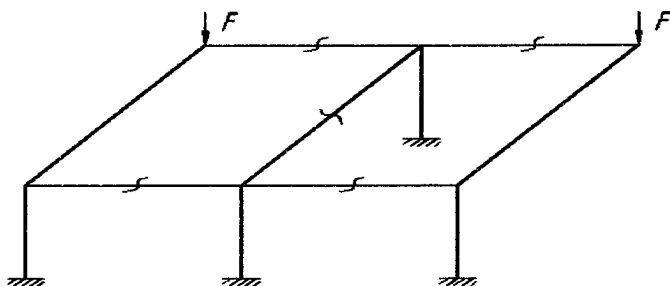


Рисунок 8.10 –Просторова стержнева система

Для плоских систем, навантажених перпендикулярно до площини системи (так званих плоско-просторових систем), силові фактори, які характеризують роботу у площині системи, дорівнюють нулю. Тому ступінь статичної невизначеності плоско-просторових систем може бути визначений за формулою

$$n = 3 \cdot p, \quad (8.5)$$

де p – те ж саме, що у формулі (8.4).

8.3. Основні переваги, недоліки та особливості статично невизначуваних систем

Статично невизначувані (гіперстатичні) системи, створені на базі відповідних статично визначуваних (ізостатичних) систем шляхом введення зайвих в'язей, дозволяють значно зменшити пружні переміщення, збільшити жорсткість і стійкість елементів системи, значно зменшити робочі напруження в їх перерізах. Так, щоб зменшити вигин та напружений стан балки навіть при значному підвищенні її навантаження, достатньо встановити додаткові (зайві) опори. Це може бути економічно більш доцільним ніж збільшення розмірів поперечного перерізу балки.

Статично невизначувані системи у разі втрати деяких зайвих в'язей зберігають нерухомість та геометричну незмінність. У разі ж втрати хоча б одної кінематичної в'язі статично визначувана система стає геометрично змінною, або механізмом. Таким чином, гіперстатичні системи є більш надійними. Вони мають більшу монолітність та зв'язність елементів у роботі, здатність перерозподіляти навантаження між елементами в разі пошкодження або ослаблення деяких з них, наприклад, у випадку осадки однієї чи декількох опор (рис. 8.8).

Але в той час, як ізостатичні системи під дією температурного фактора беззаборонно деформуються, статично невизначувані дуже чуткі до змін температури, в них виникають температурні напруження.

Крім цього недоліку при збиранні гіперстатичних систем з елементів, розміри яких відрізняються від проектних, виникають так звані монтажні напруження, тоді як в ізостатичних їх не буває. Іноді таким чином можна підвищити міцність конструкції, але частіше всього монтажні напруження небажані.

Слід також мати на увазі і враховувати при проектуванні статично невизначуваних систем такі специфічні особливості:

- На відміну від ізостатичних систем реакції опор і внутрішні зусилля в елементах гіперстатичних систем залежать від жорсткостей поперечних перерізів елементів стержневої системи. І якщо задача визначення реакцій в ізостатичних системах розв'язується однозначно, то гіперстатична система допускає нескінченну чисельність розв'язків, які задовольняють рівнянням рівноваги, але лише один з них задовольняє, крім того, тим умовам, що накладені зайвими в'язями на переміщення.
- У загальному випадку неможливо забезпечити однакові запаси міцності у всіх елементах, що складають гіперстатичну систему. Розподіл зусиль між елементами залежить від їх жорсткості: більш жорсткі "беруть на себе" більшу частину навантаження, а менш жорсткі – меншу частину, будучи, як правило, недовантаженими до норм по запасу міцності. Тому

проблема оптимального проектування гіперстатичних систем виникає постійно.

8.4. Основні методи розкриття статичної невизначеності систем

Розрахунок статично невизначуваних систем полягає у тому, що знаючи геометричну схему, зовнішнє активне навантаження та механічні характеристики матеріалу стержнів, необхідно визначити зусилля (реакції та внутрішні силові фактори), напруження і переміщення в елементах системи.

Оскільки невідомих зусиль більше, ніж рівнянь рівноваги, то розкриття статичної невизначеності системи можливе лише за допомогою додаткових рівнянь, що доповнюють число рівнянь статички до числа невідомих.

Ці додаткові рівняння повинні відобразити ті особливості геометричних в'язей, що накладені на стержневу систему, чи іншу конструкцію. Ці **рівняння** можуть бути складені за допомогою уявлення та зображення картини переміщень перерізів елементів конструкції при її деформуванні, тому їх називають **рівняннями сумісності переміщень**.

Методи розрахунку класифікують у залежності від того, що приймається за невідомі величини. Якщо за невідомі прийняті **переміщення**, то **метод розрахунку** називають **методом переміщень**, якщо за невідомі прийняті зусилля, то і **метод розрахунку** носить назву **метода сил**.

Якщо ж **основними невідомими** є **частково сили, частково переміщення**, то **метод розрахунку** носить назву **змішаного**.

Метод переміщення, в якому за невідомі в рівняннях прийняті лінійні та кутові переміщення жорстких вузлів стержневої системи, почав своє існування з 1880 року, тоді як метод сил відомий з 1807 року.

Для рам, що мають значну кількість замкнених контурів з жорсткими вузлами, метод переміщень має ряд переваг порівняно з методом сил:

- зменшення кількості невідомих;
- одноманітність основної системи;

- відносна простота розрахунку коефіцієнтів системи рівнянь.

Ці переваги зробили метод переміщень головним в алгоритмах програм розрахунків на ЕОМ.

У курсах опору матеріалів машинобудівельних і технологічних вузів розрахунки статично невизначуваних систем за методом переміщень ведуть рідко. Цей метод найчастіше розглядають у курсі будівельної механіки.

8.5. Розрахунок статично невизначуваних систем за методом сил

Цей метод полягає в тому, що задана гіперстатична система звільняється від зайвих в'язей як зовнішніх, так і внутрішніх (взаємних), а їх дію замінюють невідомими силами, які не можна визначити за допомогою тільки рівнянь статички. Значення цих сил знаходять із додаткових рівнянь, що повинні відобразити особливості відкинутих зайвих в'язей. Таким чином, *невідомими в рівняннях є сили*, звідки і назва – “метод сил”.



Рисунок 8.11 – До розкриття гіперстатичності багатопрольотної нерозривної балки

Основу метода сил, його особливості і послідовність розрахункових операцій розглянемо на прикладі нерозрізної балки на багатьох опорах (рис. 8.11,а), та плоскої рами з жорстким закріпленням нижніх торцевих перерізів обох стоек (рис. 8.12,а).

Порядок розрахунку статично невизначуваних систем за методом сил складається з послідовного виконання наступних операцій:

1. *Встановлення ступеня статичної невизначуваності системи.* Для наших прикладів можна скористатись загальною формулою (8.1) для зовнішньої гіперстатичності:

$$n = R - S_i = 6 - 3 = 3,$$

тобто балка та рама тричі гіперстатичні, бо мають по три зайві в'язі.

2. *Вибір основної системи шляхом відкидання зайвих в'язей.* Основна система повинна бути статично визначуваною, нерухомою та геометрично незмінною і після прикладання навантаження. Якщо задана система має замкнуті контури, то основну систему можна одержати або розрізом її контура, або введенням необхідної кількості шарнірів, як це роблять у фермах. Раціональний вибір основної системи спрощує розрахунки. Так, для нескладних балок і рам доцільніше відкидати в якості зайвих в'язей крайні опори. Взагалі, для кожної заданої системи можна вибрати безліч основних, а тому доцільно вести пошук оптимальної основної системи.

3. *Формування еквівалентної системи.* Штучні зміни у статично невизначуваній заданій системі при переході до основної системи повинні бути компенсовані введенням відповідних узагальнених невідомих зусиль, прикладених замість відкинутих в'язей. У перерізах, де неможливі лінійні переміщення, прикладають зосереджені сили, а там, де заборонені кутові переміщення, вводять моменти. Ці невідомі, поки що, зусилля позначають X_i , де i – номер невідомого зайвого зусилля. Таким чином, заміна відкинутих зайвих в'язей зусиллями X_i та прикладання зовнішнього навантаження формують так звану еквівалентну систему. При переході до еквівалентної системи повинна бути збережена не лише силова схема заданої гіперстатичної системи, а і її

деформаційна схема, тобто еквівалентна система повинна деформуватися так само, як і задана гіперстатична. Ці вимоги можуть бути сформульовані у вигляді так званих умов нерозривності (або сумісності деформацій).

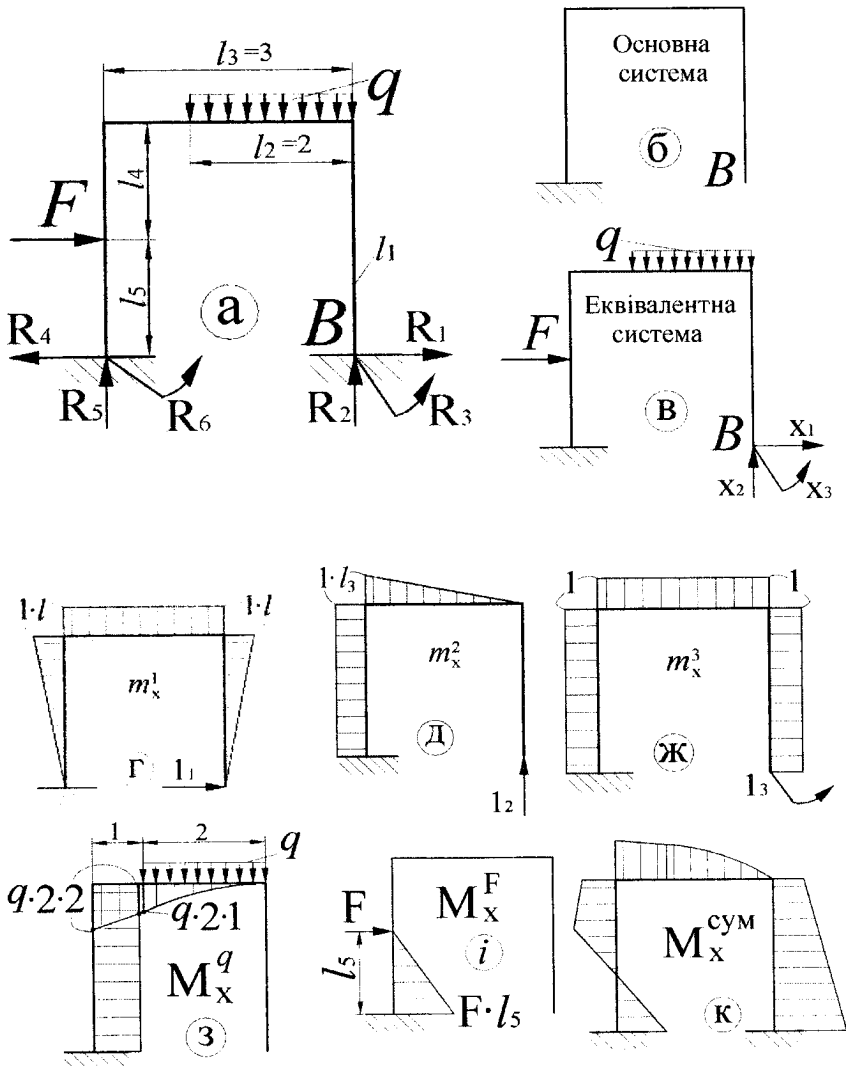


Рисунок 8.12 – Загальний порядок розкриття гіперстатичності методом сил

4. *Рівняння сумісності деформацій* (рівняння нерозривності переміщень) для еквівалентної системи записують, виходячи з умов, що переміщення, які неможливі у заданій системі, повинні бути неможливими і в еквівалентній системі під дією даного активного навантаження та невідомих зайвих зусиль (реакцій). В узагальненій геометричній формі ці рівняння можна уявити так:

$$\Delta_i(X_1, X_2, X_3, F, q, M) = 0, \quad (8.6)$$

де i – номер невідомого зайвого зусилля X_i ($i = 1, 2, 3$), в напрямку якого визначають переміщення під дією всіх сил як відомих, так і невідомих.

Вводячи поняття одиничного зусилля, прикладеного замість невідомого $X_i = 1$, та термін "одиничне переміщення" δ_{ik} , що відбувається у напрямі i -тої одиничної сили від дії k -тої одиничної сили, **систему рівнянь** (8.6) *записують у канонічній (найпростішій) формі*:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3F} &= 0, \end{aligned} \quad (8.7)$$

де δ_{11} – одиничне (питоме) переміщення того перерізу, де прикладена перша сила X_1 в її напрямі від дії першої одиничної сили I_1 (рис. 8.12,г), а оскільки реальне невідоме має деяку величину X_1 , то одиничне δ_{11} переміщення в рівнянні сумісності необхідно домножити на X_1 ;

δ_{12} – питоме переміщення перерізу в напрямі X_1 від дії другої одиничної сили I_2 ;

Δ_{1F} – реальне (повне) переміщення цього ж перерізу в напрямі сили X_1 від дії всього зовнішнього навантаження.

Одиничні переміщення є коефіцієнтами в канонічних рівняннях, а повні – вільними членами. Взагалі, *перший індекс при переміщеннях вказує, в напрямі якої сили відбувається переміщення того перерізу, де ця сила прикладена (це як географія переміщення), а другий індекс означає причину (силу), що визвала це переміщення (це як історія переміщення).* Одиничні

переміщення з однаковими індексами називають головними коефіцієнтами системи канонічних рівнянь, а з різними індексами – другорядними (побічними), при цьому $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Кожне окреме канонічне рівняння системи (8.7) показує, що переміщення перерізу, де відкинуто зайву в'язь, є неможливим у напрямку реакції цієї в'язі під дією заданого навантаження та всіх невідомих сил $X_{1,2,3}$.

Загальна кількість рівнянь сумісності переміщень дорівнює кількості невідомих зусиль, тобто ступеню статичної невизначуваності системи.

5. Обчислення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь.

Доцільніше всього ці переміщення визначати за допомогою формул енергетичного методу. Якщо це робити згідно з інтегралом Мора, то спочатку необхідно скласти вирази для згинальних моментів, зумовлених зовнішнім навантаженням, потім – зумовлених одиничними відповідними силами, для кожної ділянки стержневої системи, а далі виконати інтегрування добутку цих функцій.

Якщо визначати переміщення за способом Верещагіна, то спочатку необхідно побудувати епюри згинальних моментів, окремо від дії кожної одиничної сили I_i , які прикладають замість відповідних невідомих зусиль X_i . Ці так звані одиничні епюри на прикладі рами зображені на рис. 8.12 (г...ж). Тепер, щоб знайти коефіцієнт δ_{11} – тобто одиничне переміщення, зумовлене першою одиничною силою I_1 , необхідно одиничну епюру $m_{x,1}$ (рис.8.12,г) перемножити саму на себе, беручи як площу ω так і ординату m_x на одній і тій же епюрі. Щоб визначити переміщення δ_{12} , слід перемножити між собою одиничні епюри $m_{x,1}$ і $m_{x,2}$. Для того, щоб знайти вільні члени рівнянь (8.7), тобто повні переміщення Δ_{1F} , необхідно побудувати епюри M_x , зумовлені дією зовнішніх сил навантаження (краще – від кожної сили окремо – рис. 8.12,з, і). Перемноження цих реальних епюр на відповідні одиничні визначить величину переміщень Δ_{1F} .

Зауваження: при визначенні δ_j та Δ_{jF} вирази для жорсткості EI елементів краще залишати в загальному (а не числовому) вигляді, щоб спростити

канонічні рівняння та скоротити розрахунки. Співвідношеннями осьових моментів інерції перерізів елементів рами слід спочатку задаватися, а далі давати їм оцінку з точки зору раціонального їх вибору при оптимальному проектуванні конструкції.

6. *Визначення невідомих зусиль із системи канонічних рівнянь.* Вирішуючи систему рівнянь типу (8.7) відносно невідомих X_i , розкривають, таким чином, статичну невизначуваність системи.

7. *Далі всі розрахунки на міцність, жорсткість та стійкість можна вести аналогічно тому, як це роблять у випадку статично визначуваних систем.* Так, визначення сумарних згинальних моментів та інших внутрішніх силових факторів у перерізах ведуть на основі принципу незалежності дії сил класичним методом перерізів, або способом складання відповідних епюр. Загальний вигляд епюри $M_x^{сум}$ для заданої рами показаний на рис. 8.12,к.

При визначенні реальних переміщень окремих перерізів розкривати знову (другий раз) статичну невизначеність системи (при навантаженні одиничною силою у відповідному перерізі) немає необхідності, оскільки реакції зайвих в'язей вже знайдені, і система стала ізостатичною. Слід лише прикласти відповідну одиничну силу до основної системи (рис. 8.12,б), побудувати одиничні епюри і перемножити їх із сумарною від зовнішнього навантаження. Щоб не ділити сумарну епюру на прості ділянки, можна перемножати одиничну епюру на окремі реальні від дії кожної сили і скласти результати. Часто переміщення характерних перерізів (зокрема – закріплених на опорах) визначають для перевірки вірності всіх попередніх розрахунків гіперстатичної системи. У наведеному прикладі, де переріз правої стійки жорстко закріплений, повні лінійні (вертикальне і горизонтальне) та кутове його переміщення повинні рівнятися нулю.

Приклад 8.1. За умовою міцності підібрати номер двотавра для балки, показаної на рис. 8.13,а.

Розв'язання.

1. Визначимо ступінь статичної невизначуваності балки. При заданому її

навантаженні (без горизонтальних і нахилених сил) в опорах виникає чотири реакції: R_A, R_C, R_D, R_L . Оскільки для плоскої системи можна скласти три незалежні рівняння статички, а в даному випадку рівняння $\sum Z = 0$ вироджується в тотожність, то кількість можливих рівнянь статички – два і, отже, ступінь статичної невизначуваності $m = 4 - 2 = 2$.

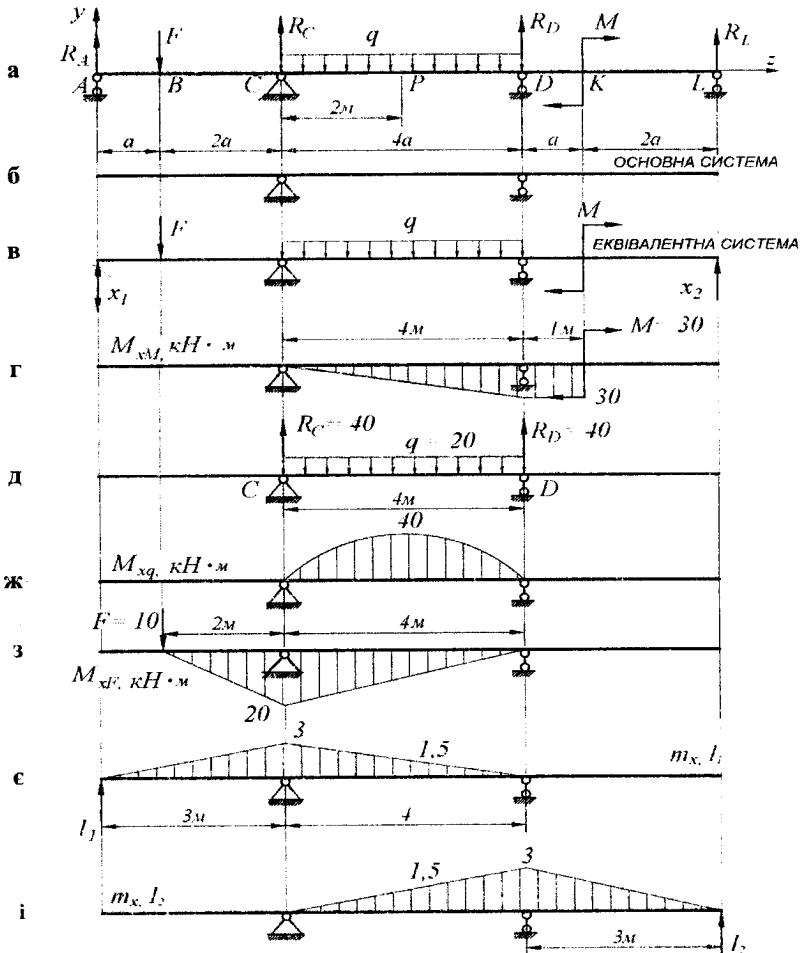


Рисунок 8.13 – Розрахункова схема статично невизначуваної балки (а), її основна (б) та еквівалентна (в) системи; реальні (г,ж,з) і одиничні (е,и) епюри згинальних моментів

2. Вибираємо основну систему: видаляємо два «зайві» в'язі – опори A і L , а також зовнішнє навантаження (рис. 8.13,б). Відзначимо, що видалення саме крайніх

опор дозволяє скоротити подальші розрахунки.

3. Формуємо еквівалентну систему: заміняємо відкинуті в'язі невідомими силами і прикладаємо задане навантаження (рис. 8.13,в).

4. Складаємо систему канонічних рівнянь сумісності переміщень, суть яких полягає в тому, що перерізи A і L не повинні мати вертикальних зміщень:

$$W_A = \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} + \Delta_{1q} + \Delta_{1M} = 0;$$

$$W_L = \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} + \Delta_{2q} + \Delta_{2M} = 0.$$

Відзначимо, що при цьому використовувався принцип незалежності дії сил, завдяки якому переміщення в напрямі “зайвої” невідомої від зовнішнього навантаження подали як суму переміщень від окремих навантажень: від невідомих сил X_i , від сили F , момента M та рівномірно розподіленого навантаження q . Це в подальшому полегшує графоаналітичне визначення переміщень за правилом Верещагіна.

5. Навантажуємо основну систему окремо кожним із заданих силових факторів і одиничними силами замість “зайвих” невідомих X_i та будемо відповідні епюри реальних і одиничних згинальних моментів (рис. 8.13,г... і).

6. Визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, тобто одиничні переміщення δ_{ij} та вільні члени (повні переміщення) Δ_{iF} , перемножуючи відповідні епюри за способом Верещагіна:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{9}{EI_x} + \frac{12}{EI_x} = \frac{21}{EI_x};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{21}{EI_x};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = -\frac{6}{EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 20 = -\frac{80}{EI_x};$$

$$\Delta_{1q} = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 40 \cdot 2 \cdot 1.5 = \frac{160}{EI_x};$$

$$\Delta_{1M} = -\frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 30 = -\frac{60}{EI_x};$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 20 = -\frac{40}{EI_x};$$

$$\Delta_{2q} = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 40 \cdot 2 \cdot 1.5 = \frac{160}{EI_x};$$

$$\Delta_{2M} = - \left[\frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 30 + \frac{(3+2)}{2} \cdot 1 \cdot 30 \right] = - \frac{1}{EI_x} (120 + 75) = - \frac{195}{EI_x}.$$

7. Канонічні рівняння після підстановки знайдених значень переміщень і скорочення на жорсткість EI_x набувають вигляду

$$21X_1 + 6X_2 = -20;$$

$$6X_1 + 21X_2 = 75.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо реакції відкинутих в'язей:

$$X_1 = -2,1 \text{ кН}, \quad X_2 = 4,2 \text{ кН}.$$

Отримана від'ємна величина X_1 вказує на те, що дійсний її напрямок є протилежний тому, що взятий в еквівалентній системі (рис. 8.13,в).

8. Для еквівалентної системи з урахуванням знайдених “зайвих” невідомих і протилежності прийнятого напрямку X_1 (рис. 8.14,а) будемо сумарні епюри поперечних сил Q_y (рис. 8.14, б) і згинальних моментів M_x (рис. 8.14, в), визначивши спочатку із рівнянь статки сумарні реакції опор R_C і R_D .

9. Зігнуто вісь балки можна побудувати таким чином. Спочатку необхідно визначити прогини трьох характерних перерізів балки (вільних торців на консолях і посередині найбільших прольотів). Якщо обчислювати їх по способу Верещагіна, то слід перемножити “одиничну” епюру (від прикладеної біля відповідного перерізу одиничної сили) на всі реальні, що були побудовані від дії кожної сили окремо. Відклавши обчислені прогини, можна провести через ці точки та нульові прогини над опорами криву зігнутої вісі балки (рис. 8.14,г). Її знаки кривизни повинні бути відповідними характеру епюри M_x . Оскільки згідно прийнятому правилу знаків ординати M_x відкладені від стиснутих волокон, то при $M_x > 0$ вісь балки вигнута вниз, а при $M_x < 0$ крива вісі – опукла вгору.

У тих перерізах, де функція $M_x(z)$ змінює знак, тобто перетинає вісь z балки, змінює знак і кривизна зігнутої вісі, тобто мають місце перегини кривої. Над опорами прогинів не може бути.

Можливість задоволення всіх цих вимог при зображенні зігнутої осі є якісною перевіркою достовірності всіх розрахунків і побудови сумарної епюри M_x .

10. Умова міцності балки за нормальними напруженнями при згинанні:

$$\max \sigma_z = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma],$$

де допустиме напруження

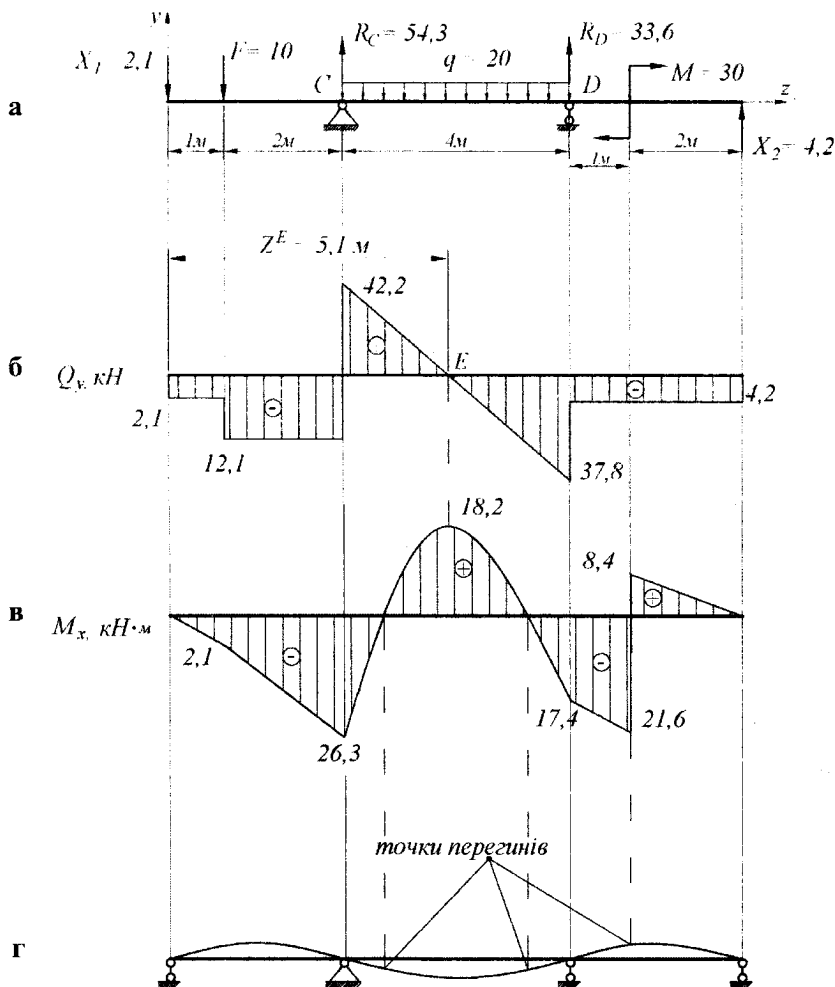


Рисунок 8.14 – Розрахункова схема ізостатичної балки (а), епюри Q_y (б) і M_x (в) та вигляд зігнутої вісі балки (г)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{320}{1,5} = 214 \text{ МПа.}$$

Необхідний осьовий момент опору, що забезпечить міцність, повинен бути:

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]} = \frac{26,3 \cdot 10^{-3}}{214} = 0,123 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 123 \text{ см}^3.$$

Беремо двотавр №18, для якого $W_x = 143 \text{ см}^3$.

Приклад 8.2. Розрахунок на міцність елементів плоско-просторової рами

Для зображеної на рис. 8.15,а рами з елементів (стояків та ригеля) однакової жорсткості необхідно:

1. Побудувати епюри поздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів;
2. Визначити діаметри стержнів;
3. Перевірити міцність елементів рами заданої складної форми (їх перерізів);
4. Накреслити (приблизно) зігнуту вісь стержнів.

Вихідні дані: $l_1 = l_2 = l_3 = 1\text{м}$; $F=1\text{кН}$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язання.

1. Ступінь статичної невизначуваності рами (при шести реакціях зовнішніх в'язей):

$$n = R - S_i = 6 - 3 = 3.$$

2. Вибір основної системи шляхом усунення зайвих в'язей та заданого навантаження (рис. 8.15,б).

3. Формування еквівалентної системи (рис. 8.15,в) шляхом заміни зайвих в'язей невідомими зусиллями $X_1, \dots, X_3$ та відновлення активної сили F .

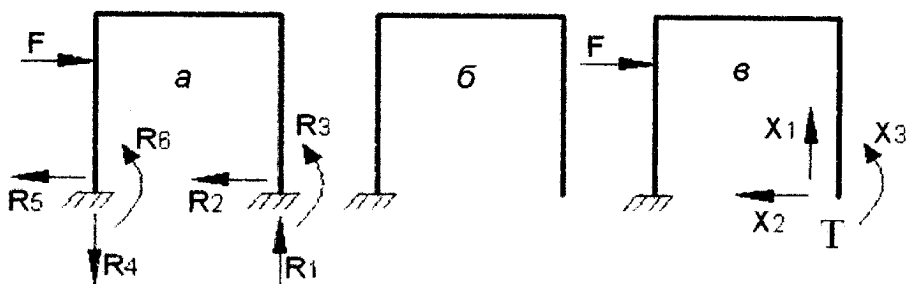


Рисунок 8.15 – До визначення гіперстатичності рами (а) та вибору основної (б) і еквівалентної (в) систем

4. Запис рівнянь сумісності переміщень, які повинні відобразити той факт, що лінійні та кутові переміщення нижнього торця Т правої стійки неможливі, оскільки він був жорстко закріплений у заданій (рис. 8.15,а) розрахунковій схемі:

$$\begin{cases} W_T^{perm} = \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1F} = 0; \\ W_T^{гориз} = \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2F} = 0; \\ \Theta_T = \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3F} = 0. \end{cases}$$

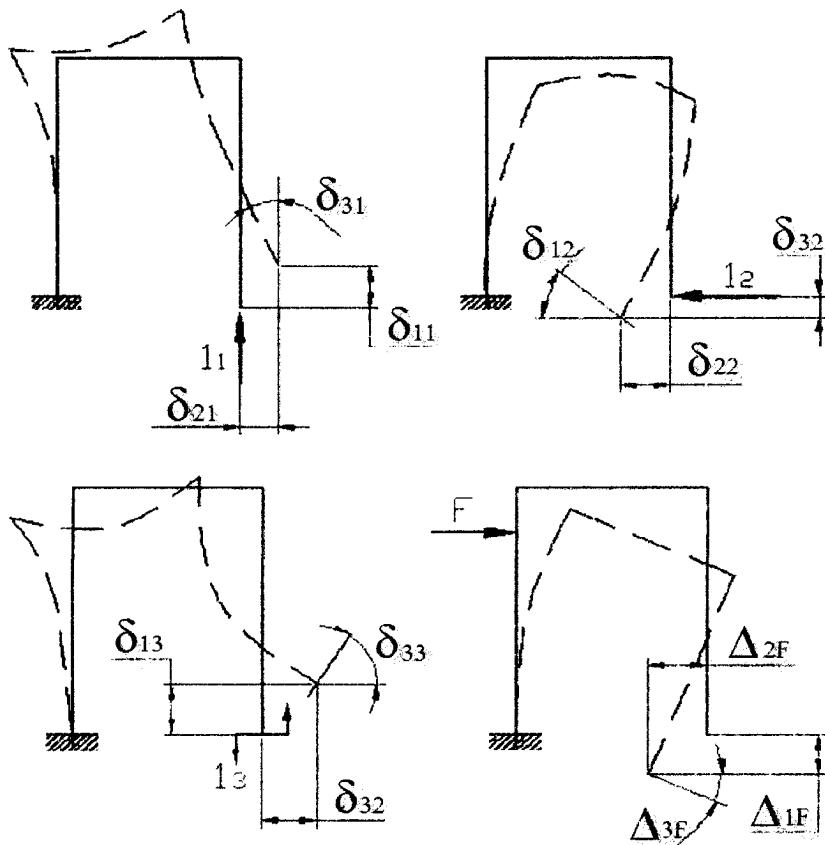


Рисунок 8.16 – Графічне зображення можливих одиничних і повних переміщень “звільненого” торця правої стійки

Віртуальні одиничні δ_{ij} та повні Δ_{iF} переміщення звільненого нижнього торця правого стояка рами уявно показані на можливих схемах деформування елементів рами (рис.8.16).

5. Визначення переміщень (коефіцієнтів δ_{ij} і вільних членів Δ_{iF}) канонічних рівнянь.

5.1. Якщо обчислювати ці переміщення за способом Верещагіна, то необхідно спочатку побудувати одиничні епюри згинальних моментів, зумовлені дією кожної одиничної сили окремо (рис. 8.17):

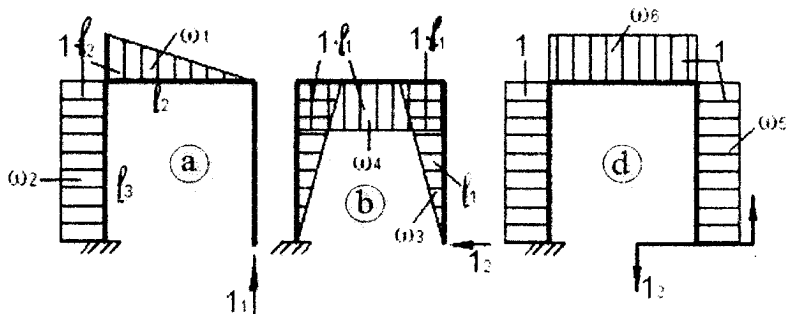


Рисунок 8.17 – Одиничні епюри згинальних моментів

5.2. Перемножуючи тепер відповідні одиничні епюри між собою за правилом Верещагіна, можна визначити одиничні переміщення δ_{ij} , тобто коефіцієнти канонічних рівнянь:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^2 (\omega_a \cdot m_{c,a}) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} l_2 \cdot 1 \cdot l_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot l_2 + 1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot 1 \cdot l_2 \right] = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EI_x};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^2 (\omega_a \cdot m_{c,b}) = \frac{-1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot 1 \cdot l_2 \cdot 1 \cdot l_1 + 1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_1 \right] = \frac{-1 \cdot l^3}{EI_x};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^3 (\omega_b \cdot m_{c,b}) = \frac{1}{EI_x} \left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_1 \cdot l_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot l_1 + 1 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot 1 \cdot l_1 \right] = \frac{5 \cdot l^3}{3EI_x};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^3 (\omega_a \cdot m_{c,d}) = \frac{1}{EI_x} \left[1 \cdot l_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_2 + 1 \cdot l_3 \cdot 1 \cdot l_2 \right] = \frac{3l^2}{2EI_x};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^3 (\omega_b \cdot m_{c,d}) = \frac{-1}{EI_x} \left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_1 + 1 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot 1 \right] = \frac{-2l^2}{EI_x};$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^3 (\omega_d \cdot m_{c,d}) = \frac{1}{EI_x} [1 \cdot l_1 \cdot 1 + 1 \cdot l_2 \cdot 1 + 1 \cdot l_3 \cdot 1] = \frac{3l}{EI_x}.$$

Примітка: вирази для жорсткості “ EI_x ” слід залишати в загальному вигляді (без чисельних значень), оскільки в канонічних рівняннях їх можна буде взагалі скоротити чи звести в один знаменник.

5.3. Далі слід побудувати реальну епюру згинальних моментів, зумовлену заданим зовнішнім навантаженням (рис. 8.18), і перемножуючи її з відповідними одиничними, визначити повні переміщення Δ_{iF} , тобто вільні члени канонічних рівнянь. Спочатку доцільно визначити площу ω_F реальної епюри, положення центра її ваги k_1 і відповідну йому ординату $m_{c,b}$ на трикутній одиничній епюрі (рис. 8.17,b), а тоді вже перемножити епюри:

$$\begin{aligned}\omega_F &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l_3 \cdot F \cdot \frac{2}{3} l_3; \quad k_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} l_3 = \frac{2}{9} l_3; \quad m_{c,b} = \frac{2}{9} \cdot 1 \cdot l_3; \\ \Delta_{1F} &= \frac{1}{EI_x} \cdot (\omega_g \cdot m_{c,d}) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l_3 \cdot F \cdot \frac{2}{3} l_3 \cdot 1 \cdot l_2 \cdot (-1) \right] = -\frac{2}{9} \cdot \frac{Fl^3}{EI_x}; \\ \Delta_{2F} &= \frac{1}{EI_x} \cdot (\omega_g \cdot m_{c,b}) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l_3 \cdot F \cdot \frac{2}{3} l_3 \cdot \frac{2}{9} l_3 \cdot 1 \right] = \frac{4Fl^3}{81EI_x}; \\ \Delta_{3F} &= \frac{1}{EI_x} \cdot (\omega_g \cdot m_{c,d}) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{2}{9} F \cdot l_3^2 \cdot 1 \cdot (-1) \right] = -\frac{2}{9} \frac{Fl^2}{EI_x}.\end{aligned}$$

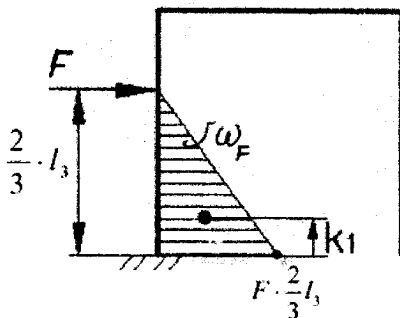


Рисунок 8.18 – Реальна епюра згинальних моментів зумовлена силою F

6. Розв'язання системи канонічних рівнянь.

6.1. Підставляємо чисельні значення переміщень у канонічні рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{4l^3}{3EI_x} \cdot X_1 - \frac{1l^3}{EI_x} \cdot X_2 + \frac{3l^3}{2EI_x} \cdot X_3 - \frac{2Fl^3}{9EI_x} &= 0; \\ -\frac{1l^3}{EI_x} \cdot X_1 + \frac{5l^3}{3EI_x} \cdot X_2 - \frac{2l^2}{EI_x} \cdot X_3 + \frac{4Fl^3}{81EI_x} &= 0; \\ \frac{3l^2}{2EI_x} \cdot X_1 - \frac{2l^2}{EI_x} \cdot X_2 + \frac{3l}{EI_x} \cdot X_3 - \frac{2Fl^2}{9EI_x} &= 0.\end{aligned}$$

Примітки:

- У проектних розрахунках, коли ще невідомі розміри перерізів стояків та ригеля, доводиться приймати початкове співвідношення їх жорсткості;
- крім того, щоб спростити подальші розрахунки, доцільно скоротити не тільки жорсткості, а й лінійні розміри елементів, користуючись заданим їх співвідношенням.

Так, прийнявши, що $EI_{x,i} = EI_{x,2} = EI_{x,3} = \text{const}$; $l_1 = l_2 = l_3$; $F = 1 \text{ кН}$, можна записати канонічні рівняння у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot X_1 - X_2 + \frac{2}{3} \cdot X_3 &= \frac{2}{9} \\ -X_1 + \frac{5}{3} \cdot X_2 - 2X_3 &= -\frac{4}{81} \\ \frac{3}{2} \cdot X_1 - 2X_2 + 3X_3 &= \frac{2}{9} \end{aligned} \right\}$$

6.2. Розв'язання системи трьох лінійних рівнянь наведемо в матричній формі.

Визначник цієї системи рівнянь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{5}{3} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{vmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0,583.$$

Оскільки визначник не нульовий, то система має лише одне рішення. Частинні визначники з заміною одного (відповідного шуканому невідомому X_i) стовпця коефіцієнтів вільними членами рівнянь:

$$\begin{aligned} \Delta_{X1} &= \begin{vmatrix} \Delta_{1F} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \Delta_{2F} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \Delta_{3F} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{9} & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{4}{81} & \frac{5}{3} & -2 \\ \frac{2}{9} & -2 & 3 \end{vmatrix} = \left[\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{3} \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \cdot \frac{2}{9} + \left(-\frac{4}{81} \right) \cdot (-2) \cdot \frac{3}{2} \right] - \\ &- \left[\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} + \left(-\frac{4}{81} \right) \cdot (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) \cdot \frac{2}{9} \right] = 0,111; \end{aligned}$$

$$\Delta_{X_2} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{9} & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{4}{81} & -2 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{9} & 3 \end{vmatrix} = \left[\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{4}{81} \right) \cdot 3 + \frac{2}{9} \cdot (-2) \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot \frac{2}{9} \right] -$$

$$- \left[\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{4}{81} \right) \cdot \frac{3}{2} + \frac{2}{9} \cdot (-2) \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot (-1) \cdot \frac{2}{9} \right] = 0,172;$$

$$\Delta_{X_3} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{9} \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{81} \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{2}{9} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{81} \\ -2 & \frac{2}{9} \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -\frac{4}{81} \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{9} \end{vmatrix} + \frac{2}{9} \begin{vmatrix} -1 & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0,102.$$

Чисельні значення невідомих зайвих реакцій правої опори :

$$X_1 = \frac{\Delta_{X1}}{\Delta} = \frac{0,111}{0,583} = 0,19 \text{ кН};$$

$$X_2 = \frac{\Delta_{X2}}{\Delta} = \frac{0,172}{0,583} = 0,295 \text{ кН};$$

$$X_3 = \frac{\Delta_{X3}}{\Delta} = \frac{0,102}{0,583} = 0,175 \text{ кН}.$$

7. Всі подальші розрахунки на міцність, жорсткість, стійкість елементів заданої рами ведуть вже як для статично визначеної (рис. 8.19,а).

7.1. Визначення внутрішніх силових факторів (N_z, Q_y, M_x) у характерних перерізах (1...8) стійок і ригеля:

$$N_{Z,1...2} = -X_1 = -0,19 \text{ кН}; \quad Q_{Y,1...2} = X_2 = 0,295 \text{ кН}; \quad M_{X,1} = X_3 = 0,175 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N_{Z,3...4} = X_2 = -0,295 \text{ кН}; \quad Q_{Y,3...4} = X_1 = -0,19 \text{ кН}; \quad M_{X,2...3} = -0,12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N_{Z,5...8} = X_1 = 0,19 \text{ кН}; \quad Q_{Y,5...6} = X_2 = -0,295 \text{ кН};$$

$$Q_{Y,7...8} = -0,295 + 1 = 0,705 \text{ кН};$$

$$M_{X,4...5} = 0,175 + 0,19 \cdot 1 - 0,295 \cdot 1 = 0,07 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{X,6...7} = 0,175 + 0,19 \cdot 1 - 0,295 \cdot 0,333 = 0,168 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{X,8} = 0,175 + 0,19 \cdot 1 - 1 \cdot 0,667 = -0,302 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

7.2. Побудова сумарних (остаточних) епюр поздовжніх N_z , поперечних Q_y , сил і згинальних моментів M_x (рис. 8.19,б, с, д).

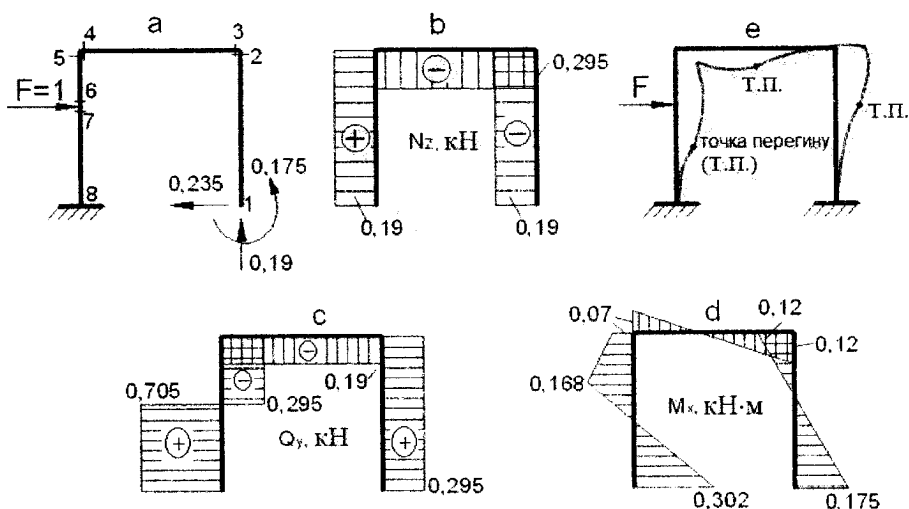


Рисунок 8.19 – Сумарні епюри внутрішніх силових факторів (b,c,d) та зігнута вісь рами (e)

8. Розрахунки на міцність елементів рами.

8.1. Проектний розрахунок – визначення діаметра стержнів за умови міцності при зігинанні (поки що без урахування нормальної сили в перерізах стержнів).

Умова міцності $\max \sigma_z = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma]$.

Осьовий момент опору круглого перерізу $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$, тоді необхідний діаметр найбільш навантаженого перерізу повинен бути:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_x}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,302}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^3}} = 2,67 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Діаметри всіх інших перерізів-стійок і ригеля повинні бути взятими у відповідності з прийнятим співвідношенням моментів інерції перерізів. У нашому прикладі початкове співвідношення було взяте рівним одиниці і, таким чином, діаметри всіх трьох стержнів слід прийняти рівними $d = 28 \text{ мм}$. При цьому ригель і права стійка будуть недовантаженими, та про оптимальне проектування річ піде далі.

Напруження від поздовжньої сили: $\sigma_z = \frac{N_z}{A} = \frac{0,705}{3,14 \cdot 0,014^2} \cdot 10^3 = 1,25 \text{ МПа.}$

Це набагато менше допустимих напружень і тому поздовжньою силою можна було знехтувати у виразі для умови міцності.

8.2. Перевірний розрахунок на міцність перерізів стержнів у вигляді правильного шестикутника з довжиною сторони $a = 10 \text{ см}$.

Осьовий момент інерції такого складного перерізу (рис. 8.20):

$$I_x = I_{x,1} + 2I_{x,2} = \frac{ah^3}{12} + 2\frac{bh^3}{48} = \frac{a^4\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16}a^4 = \frac{5}{16}a^4\sqrt{3}.$$

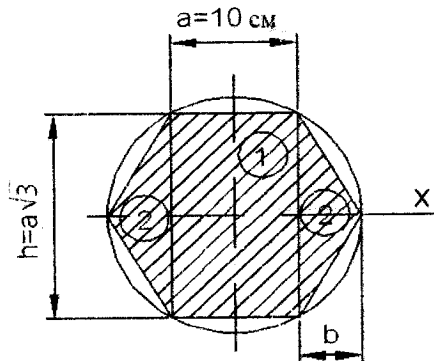


Рисунок 8.20 – Шестигранний переріз стержнів рами

Осьовий момент опору такого перерізу при згинанні:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad y_{\max} = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$W_x = \frac{5}{16} \cdot \frac{a^4 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{5}{8}a^3 = \frac{5}{8} \cdot 10^3 \text{ см}^3 = 625 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Перевірка міцності:

$$\max \sigma_z = \frac{0,302}{625 \cdot 10^{-6}} = 0,483 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 0,483 \text{ МПа} \ll [\sigma],$$

так що міцність гарантована, але запас – занадто великий.

9. Побудова зігнутої вісі елементів рами.

Накреслити лінію прогинів кожного стержня можна визначивши переміщення характерних перерізів рами. Однак приблизний вигляд зігнутої вісі елементів такої простої рами можна уявити без розрахунків – із таких міркувань:

- осьові лінії стійок із жорстких закріплень виходять прямими (без нахилів та прогинів біля опор);

- із розташування епюр згинальних моментів, побудованих згідно правила знаків на стиснутих прошарках волокон, витікає характер і знак кривизни ділянок зігнутої вісі: так, між перерізами 8 і 7 стиснуті волокна розташовані праворуч від нейтральної лінії, а між перерізами 6 і 5 – ліворуч (рис. 8.19,а, d, e) ;
- у тих місцях, де епюра згинальних моментів змінює знак, зігнута лінія змінює знак кривизни, тобто має точки перегину – (Т.П., рис. 8.19,е).

8.6. Використання симетрії при розрахунках статично невизначуваних систем

Симетричними вважають такі конструкції, в яких не тільки геометрична схема має вісь симетрії (рис. 8.21), але й однакові жорсткості поперечних перерізів симетрично розташованих елементів (стержнів). У симетричних системах розрізняють симетричне (рис. 8.21,а) та кососиметричне (рис. 8.21,б) навантаження.

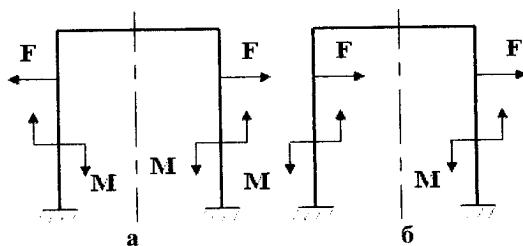


Рисунок 8.21 – Симетрична рама з симетричним (а) і кососиметричним (б) навантаженням

Внутрішні силові фактори, що виникають у поперечних перерізах, можна також розділити на симетричні та кососиметричні. Так, за допомогою рис. 8.22 можна уявити, що відносно площини перерізу поздовжня (нормальна) сила N_z та згинальні моменти M_x і M_y є симетричними силовими факторами, тоді як поперечні сили Q_x , Q_y та крутний момент M_z – кососиметричні внутрішні силові фактори.

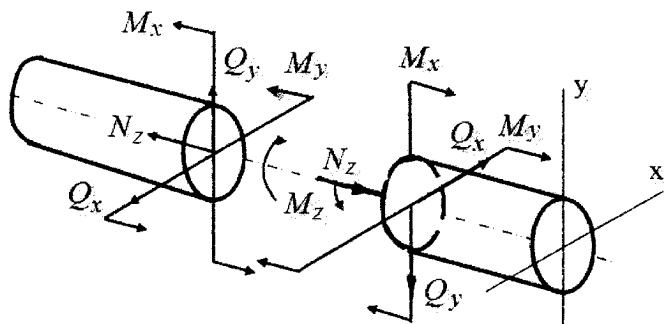


Рисунок.8.22 – Симетричні (N_z і M_{xy}) і косиметричні (M_z , Q_{xy}) внутрішні силові фактори

При розрахунках симетричних конструкцій є можливість спростити розв'язання задачі по розкриттю статичної невизначеності шляхом зменшення кількості невідомих внутрішніх силових факторів у характерних перерізах елементів системи. Неважко встановити, що в тих перерізах системи, які збігаються з площиною її симетрії, при симетричному навантаженні косиметричні внутрішні силові фактори дорівнюють нулю, а при косиметричному навантаженні відсутні симетричні внутрішні силові фактори. Це легко зрозуміти з того, що при визначенні одиничних (питомих) та повних переміщень перерізу в площині симетрії косиметричної рами (рис.8.23,а) за формулою Верещагіна перемноження симетричних епюр на косиметричні (рис. 8.23,е-з) дає нульовий результат: $\delta_{12}=\delta_{21}=0$; $\delta_{23}=\delta_{32}=0$; $\Delta_{2F}=\Delta_{3F}=0$. Завдяки цьому система канонічних рівнянь розпадається на незалежні частини, при розв'язанні яких відповідні внутрішні силові фактори дорівнюють нулю. Такі рішення для заданих рам корисно виконати самостійно тим, хто хоче перекоонатися в цьому.

Розглянемо більш докладно всі ці тонкощі на прикладі плоскої симетричної рами (рис. 8.23,а), яка є тричі статично невизначеною, бо на неї накладені три зайві зовнішні в'язі. Якщо (без роздумів про найбільш вдалий вибір основної системи) відкинути в якості зайвих три в'язі правої жорсткої опори і сформувати відповідну еквівалентну систему (рис. 8.23,в), то канонічні рівняння методу сил будуть такими:

$$\delta_{1I'}X_1 + \delta_{12'}X_2 + \delta_{13'}X_3 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{2I'}X_1 + \delta_{22'}X_2 + \delta_{23'}X_3 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{3I'}X_1 + \delta_{32'}X_2 + \delta_{33'}X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

Для визначення питомих δ_{ij} та повних Δ_{iF} переміщень у цьому разі необхідно будувати епюри для всієї рами від дії кожної сили окремо (5 разів) та перемножити їх у відповідності з індексами (9 разів). Потім, розв'язуючи систему рівнянь, знайти невідомі реакції $X_{1,2,3}$. Як бачимо, обсяг роботи буде значним.

Якщо ж в якості зайвих в'язей розглядати ті три внутрішні, що виникають у перерізі кожного елемента плоскої рами, то при виборі основної системи необхідно усунути саме ці внутрішні в'язі. Вони, як вже відомо, не дозволяють взаємних лінійних та кутових переміщень двох сусідніх нескінченно близьких перерізів, фактично жорстко з'єднаних в одне ціле.

Найдоцільніше такі перерізи робити в площині симетрії завдяки її властивостям “зануляти” відповідні внутрішні силові фактори. У цьому разі основну систему можна формувати з двох частин (рис. 23,г), які повинні бути кінематично незмінними та статично визначуваними. Еквівалентна система зображена на рис. 23,д, де замість відкинутих зайвих внутрішніх в'язей прикладені невідомі внутрішні силові фактори: поздовжня (N_z) і поперечна (Q_y) сили та згинальний момент (M_x).

Завдяки тому, що система кососиметрична, симетричні внутрішні силові фактори в цьому перерізі дорівнюють нулю (а це N_z і M_x), так що невідомою є поки що тільки одна поперечна сила $Q_y = X_1$. І тепер канонічне рівняння переміщень буде єдиним та простим:

$$\delta_{1I'}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Для визначення коефіцієнта $\delta_{1I'}$ необхідно перемножити саму на себе першу одиничну епюру (рис. 8.23,е), а переміщення Δ_{1F} знайдемо перемноженням цієї епюри на реальну M^F_x , зумовлену зовнішнім навантаженням F .

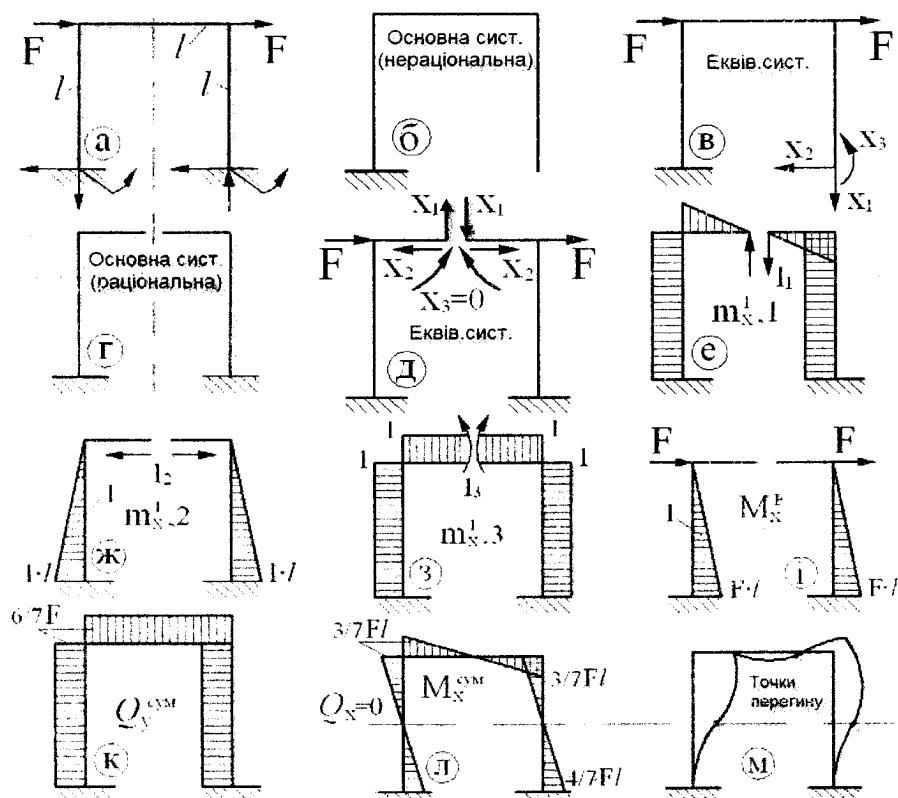


Рисунок 8.23 – До визначення питомих δ_{ij} і повних переміщень Δ_{iF}

Розглянемо ще декілька прикладів раціонального вибору основної та еквівалентної систем.

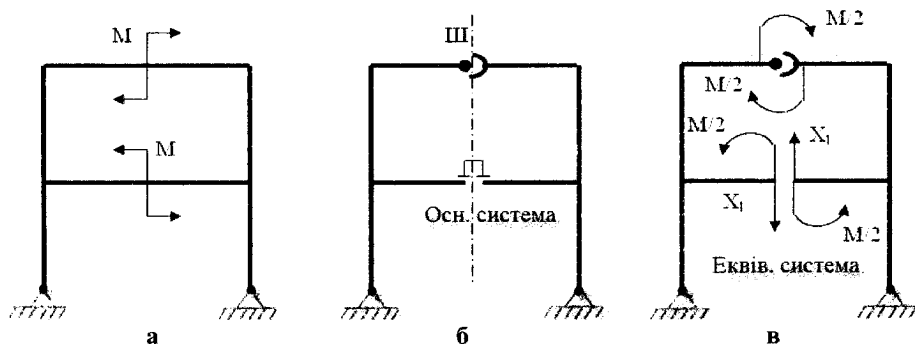


Рисунок 8.24 – Формування косиметричної еквівалентної системи

Наприклад, для рами із замкнутим контуром (рис. 8.24,а), яка має чотири зайві в'язі (одну зовнішню та три внутрішні), основну систему доцільно вибрати такою, як показано на рис. 8.24,б; тобто розрізати раму по площині симетрії не повністю (щоб не перетворити її на два механізми), а з заміною однієї з жорстких в'язей у площині симетрії шарніром **III**.

Щоб утворити косу симетрію рами, уявимо кожний момент M двома половинними ($M/2$), прикладеними по обидва боки від проведеної сікучої площини симетрії. І оскільки в такому перерізі симетричні внутрішні силові фактори, а саме N_z і M_x відсутні, то рама, еквівалентна система якої зображена на рис. 8.24,в, стане один раз статично невизначуваною. Рівняння сумісності взаємних переміщень перерізів **II** у площині симетрії буде таким

$$\delta_{II'} X_I + \Delta_{IM} = 0.$$

Розглянемо ще один приклад плоскої рами (рис. 8.25,а), яка є три рази статично невизначуваною внутрішнім чинсм. Скориставшись тим, що рама має дві площини косої симетрії (відносно вертикальної та горизонтальної осей), і формуючи еквівалентні системи так, як показано на рис. 8.25,б, в, можна доказати, що навантажена таким чином рама взагалі є статично визначеною. Насправді, і з умови рівноваги кожної половини рами, розсіченої вертикальною площиною (рис. 8.25,б), маємо, що $Q_y = F/2$. Використовуючи тепер властивості косої симетрії рами відносно її горизонтальної вісі (рис. 8.25,в), можна визначити невідомі Q_x в горизонтальних перерізах: $Q_x = F/2$.

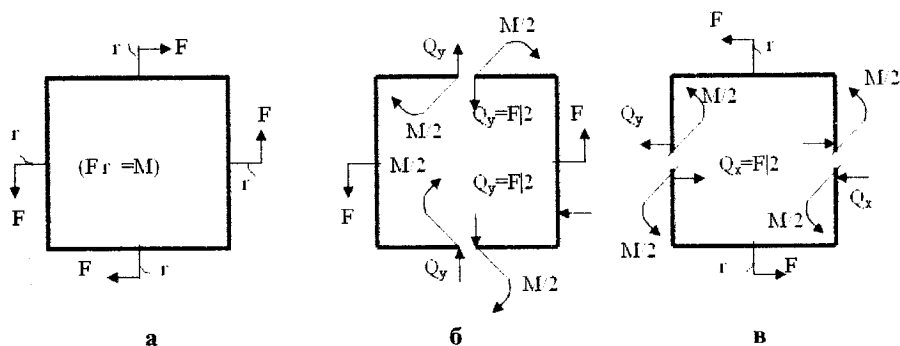


Рисунок 8.25 – Приклад використання подвійної симетрії

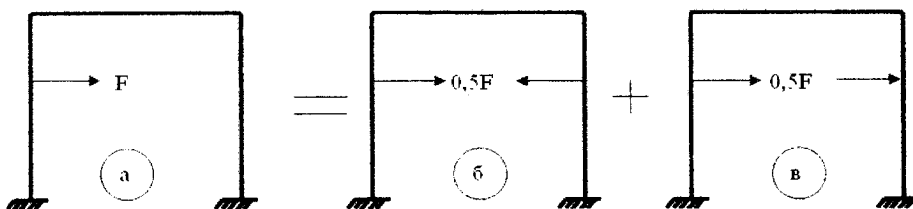


Рисунок 8.26 – Приведення довільної системи до прямо – і косиметричних

Інколи, якщо є можливість довільну раму уявити як комбінацію рам із симетричним та косиметричним навантаженням, то це доцільно робити (рис.8.2,б), щоб скоротити розрахунки.

Використання симетрії систем слід пов'язувати також із раціональним вибором напрямку невідомих зусиль. Так, наприклад, якщо для стержневої системи, показаної на рис. 8.27,а в перерізі по площині симетрії невідомі зусилля взяти не горизонтальними та вертикальними (рис. 8.27,б), а поздовжніми та поперечними (рис. 8.27,в), то можна значно скоротити об'єм обчислювальної роботи.

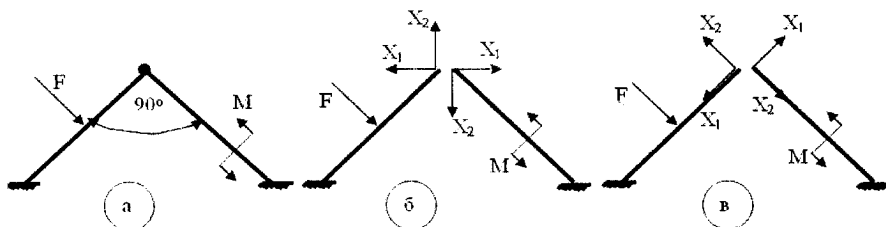


Рисунок 8.27 – До раціонального вибору напрямків внутрішніх силових факторів

Ступінь гіперстатичності цієї рами дорівнює двом. Але в двох рівняннях сумісності переміщень побічні питомі переміщення δ_{12} і δ_{21} будуть нульові, оскільки сили X_1 і X_2 зумовлюють різні види опору одного й того ж стержня. Завдяки цьому система канонічних рівнянь має два незалежні рівняння, кожне з яких – з одним невідомим, а саме:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Приклад 8.3. Вибрати найкоротший шлях для визначення лінійного переміщення (прогину) посередині прольоту балки (рис. 8.28) і визначити це переміщення. Зробимо короткий аналіз відомих методів визначення переміщень при згинанні.

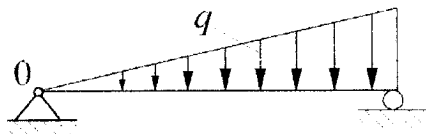


Рисунок 8.28 – Балка з нерівномірно розподіленим навантаженням

Розв'язання.

1. Якщо визначати прогин з універсального рівняння зігнутої вісі балки, то крім визначення реакцій опор, необхідно буде знати ще й кут повороту лівого опорного перерізу θ_0 .

2. Визначення прогину енергетичним методом за допомогою теореми Кастіліано теж вимагає виконання операцій по визначенню реакцій опор (з врахуванням фіктивної сили, прикладеної посередині прольоту). Далі необхідно скласти рівняння для згинального моменту і частинної похідної і проінтегрувати їх добуток. По Мору – ті ж операції тільки з врахуванням одиничної відповідної сили. По графоаналітичному методу Верещагіна доведеться будувати реальну (досить складну) та одиничну епюри і перемножити чотири їх дільниці епюри.

3. Якщо ж добудувати схему навантаження до прямокутної симетричної, а саме – додати таке ж трикутне навантаження (рис. 8.29,а), то прогин посередині прольоту буде вдвічі більшим реального, та визначити його дуже просто або згадати формулу (майже таблицю) для прогинів балки $y = 5ql^4 / 384EI_x$; або ж, користуючись формулою Верещагіна, перемножити лише дві прості епюри (рис. 8.29,б, в):

$$f_c = \frac{1}{EI_x} \times \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1 \cdot l}{4} \right] \times 2 = \frac{5ql^4}{384EI_x}.$$

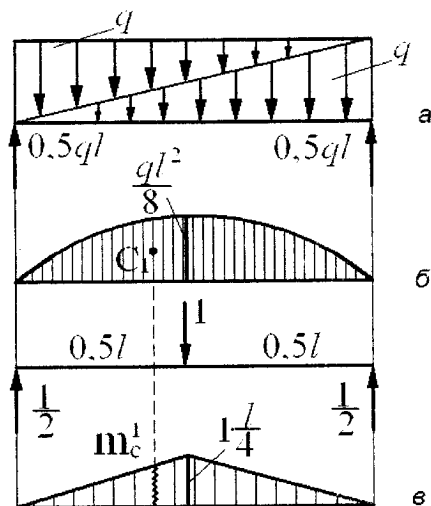


Рисунок 8.29 – Приклад з добудовою довільної системи до симетричної

8.7. Самоперевірка якості засвоєння теми

1. Які системи називають статично невизначуваними? Чим зумовлена статична невизначуваність?
2. Як визначається ступінь статичної невизначуваності? Наведіть приклади.
3. Які в'язі називають "зайвими"? У чому полягає метод сил і метод переміщень при розкритті статичної невизначуваності?
4. Які переваги і недоліки статично невизначуваних систем?
5. Як для заданої стержневої системи, що має певний ступінь статичної невизначуваності, вибирають основну і еквівалентну системи?
6. У чому полягає раціональний вибір основної системи?
7. Як скласти додаткові рівняння методу сил – рівняння сумісності переміщень? Що відображає кожне канонічне рівняння?
8. Що означають коефіцієнти канонічних рівнянь методу сил? Яку вони мають властивість?
9. Що означають вільні члени канонічних рівнянь?
10. Як можна спростити обчислення при розв'язанні системи канонічних рівнянь?
11. Як можна спростити розрахунки, використовуючи властивості геометричної і вантажної симетрії?
12. Як впливає зміна жорсткостей окремих елементів статично невизначуваних систем на розподіл зусиль між елементами?

9. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ПРИ СКЛАДНИХ ВИДАХ ОПОРУ ТА СКЛАДНОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ

Складний опір має місце, коли в поперечних перерізах виникає більше одного внутрішнього силового фактора. Будь-якій сукупності простих деформацій (розтягання, стискання і згинання, в т.ч. поперечне згинання; розтягання, стискання і кручення; кручення і згинання тощо) переріз чинить складний опір.

У випадку складного опору стержня визначають внутрішні силові фактори і деформації, застосовуючи принцип суперпозиції (принцип незалежності дії сил).

Розглянемо деякі випадки складного опору стержнів.

9.1. Косе згинання

Якщо зовнішні сили, які спричиняють згинання, діють у силувій площині, яка не збігається ні з однією із головних площин, то таке згинання називають косим (рис. 9.1).

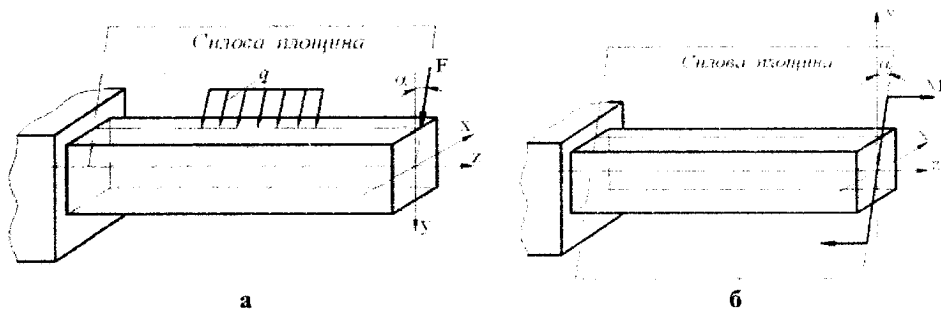


Рисунок 9.1 – Схеми косого згинання

9.1.1. Нормальні напруження в поперечному перерізі при косому згинанні

Розглянемо випадок чистого косого згинання. У довільному поперечному перерізі силова площина дії згинальної пари M утворює з головною віссю

інерції поперечного перерізу у кут α (рис. 9.1,б). Косе згинання зручно розглядати як одночасне згинання балки в двох головних площинах xz та yz (рис. 9.2, осі x та y – головні центральні осі інерції перерізу, вісь z збігається з поздовжньою віссю балки).

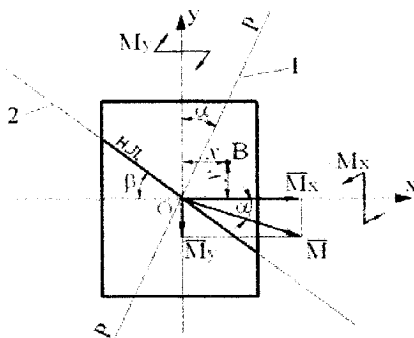


Рисунок 9.2 – Згинальні моменти M_x і M_y та положення силової лінії $P-P$ загального згинального момента M (1) і нейтральної лінії (2)

Складові M_x і M_y загального згинального момента M будуть:

$$\overline{M}_x = \overline{M} \cdot \cos \alpha; \quad \overline{M}_y = \overline{M} \cdot \sin \alpha.$$

Нормальне напруження в будь-якій точці поперечного перерізу, наприклад у точці B з координатами x і y (рис. 9.2), дорівнює алгебраїчній сумі напружень, зумовлених моментами M_x і M_y

$$\sigma_{z, \text{сум}} = \sigma_z(M_x) + \sigma_z(M_y) = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (9.1)$$

або

$$\sigma_{z, \text{сум}} = M \cdot \left(\frac{y}{I_x} \cos \alpha + \frac{x}{I_y} \sin \alpha \right). \quad (9.2)$$

Рівняння нейтральної лінії при косому згинанні одержимо із формули (9.2). Для цього прирівняємо нулю рівняння (9.2) і замість координат x і y підставимо координати точок нейтральної лінії x_0 і y_0

$$\sigma_z = M \cdot \left(\frac{y_0}{I_x} \cos \alpha + \frac{x_0}{I_y} \sin \alpha \right) = 0. \quad (9.3)$$

За умовою $M \neq 0$, отже

$$\frac{y_0}{I_x} \cos \alpha + \frac{x_0}{I_y} \sin \alpha = 0. \quad (9.4)$$

Залежність (9.4) і є рівнянням нейтральної лінії, яка проходить через центр ваги поперечного перерізу, оскільки при $x_0=0$, y_0 теж дорівнює нулю. Положення такої лінії визначають кутом її нахилу до вісі x :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.5)$$

9.1.2. Епюра розподілу нормальних напружень у перерізі при косому згинанні. Умови міцності

Розглянемо поперечний переріз довільної форми (рис. 9.3,а), для якого попередньо визначено положення нейтральної лінії (н.л.).

Для побудови епюри сумарних нормальних напружень (рис. 9.3,б) використаємо формулу (9.2). Точки 1 і 2 – небезпечні (найвіддаленіші від н.л.).

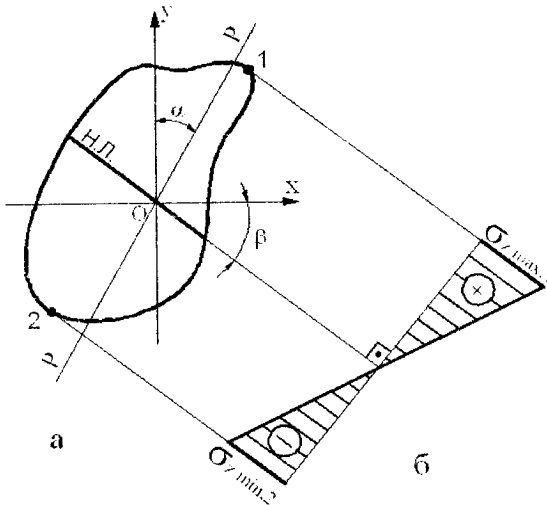


Рисунок 9.3 – Поперечний переріз (а) та епюра сумарних нормальних напружень σ_z (б)

Напруження в цих точках при підстановці відповідних значень їх координат визначаються за формулою (9.2), а умова міцності буде:

$$\sigma_{z \max \min} = M \cdot \left(\frac{y_{1,2}}{I_x} \cos \alpha + \frac{x_{1,2}}{I_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma_{\pm}], \quad (9.6)$$

де M – загальний згинальний момент у даному перерізі в силовій площині $p-p$, числове значення якого береться із епюри, $\kappa\text{Нм}$;

$x_{1,2}, y_{1,2}$ – координати точок, в яких визначають напруження, підставляють зі своїми знаками, м ;

I_x, I_y – моменти інерції даного перерізу відносно його головних центральних осей, м^4 ;

α – кут нахилу його площини дії (силової лінії $p-p$), град ;

$[\sigma_{\pm}]$ – допустиме напруження відповідно на розтягання і стискання, $\kappa\text{Па}$.

У перерізах із зовнішніми кутами (прямокутник, двотавр, швелер) найбільш віддаленими від нейтральної лінії є **кутові точки** з координатами $x_{\max}$ і $y_{\max}$, тоді:

$$\frac{y_{\max}}{I_x} = \frac{1}{W_x}; \quad \frac{x_{\max}}{I_y} = \frac{1}{W_y},$$

а умови міцності мають такий вигляд:

$$\sigma_{z \text{ сум}} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_{\pm}], \quad (9.7)$$

тут M_x, M_y – згинальні моменти відносно головних осей у найбільш навантаженому небезпечному перерізі.

9.1.3. Деформації при косому згинанні

Аналізуючи вираз (9.5), приходимо до висновку, що в загальному випадку, коли $I_x \neq I_y$ і $\text{tg} \beta \neq \text{tg} \alpha$, **нейтральна лінія не перпендикулярна силовій лінії, а відхилена в сторону осі мінімального моменту інерції перерізу**. І оскільки напрям повного прогину f і нейтральна лінія завжди ортогональні (рис. 9.4), то виходить, що **балка при косому згинанні згинається не в силовій площині, а в деякій іншій площині, де жорсткість на згинання буде меншою**.

Зводячи косе згинання до двох плоских і застосовуючи принцип суперпозиції, можна визначити переміщення f_x і f_y в кожній із головних площин. Значення загального прогину f визначається геометричною сумою цих переміщень:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

Напрямок повного прогину визначається кутом

$$\gamma = \arctg(f_x / f_y),$$

одинаковим, доречі, з кутом β .

Зауваження. Явище косоного згинання особливо небезпечне для перерізів, які значно відрізняються моментами інерції відносно головних центральних осей перерізу (наприклад, двотавра); балки з таким перерізом мало прогинаються при згинанні в площині найбільшої жорсткості, але навіть при незначних кутах нахилу

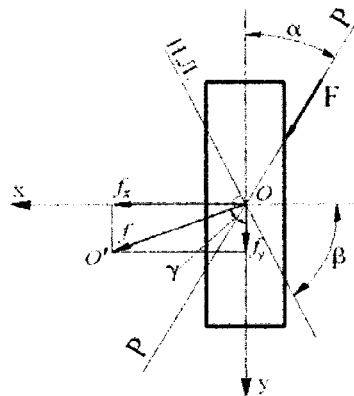


Рисунок 9.4 – Переміщення при косому згинанні

площини дії зовнішніх сил до площини найбільшої жорсткості в балках виникає значне відхилення лінії повного прогину f у бік меншої жорсткості.

Приклад 9.1. Сталева консольна балка (рис 9.5,а) навантажена силами $F_1=2$ кН і $F_2=3$ кН, які діють у головних площинах yz та xz . Визначити найбільші напруження розтягання та стискання в небезпечному перерізі балки. Побудувати епюру розподілу нормальних напружень у небезпечному перерізі і перевірити міцність балки при $[\sigma] = 200$ МПа. Форма поперечного перерізу балки і його розміри наведені на рис. 9.6,а.

Розв'язання.

Визначимо згинальні моменти відносно головних центральних осей перерізу С балки:

$$M_{x,c} = -F_2 \cdot 2,1 = -3 \cdot 2,1 = -6,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{y,c} = -F_1 \cdot 2,8 = 2 \cdot 2,8 = 5,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри M_x (рис 9.5,б) і M_y (рис 9.5,в); робимо висновок, що небезпечним є переріз С:

$$M_{x\max} = 6,3 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{y\max} = 5,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знаходимо моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей x і y :

$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12} - 2 \frac{\pi d^4}{64} = \frac{24 \cdot 15^3}{12} - 2 \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 6720 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{12} - 2 \left(\frac{\pi d^4}{64} + 6^2 \cdot 0,785 \cdot d^2 \right) = \frac{15 \cdot 24^3}{12} - 2 \left(\frac{3,14 \cdot 4^4}{64} + 6^2 \cdot 0,785 \cdot 4^2 \right) = 16350 \text{ см}^4.$$

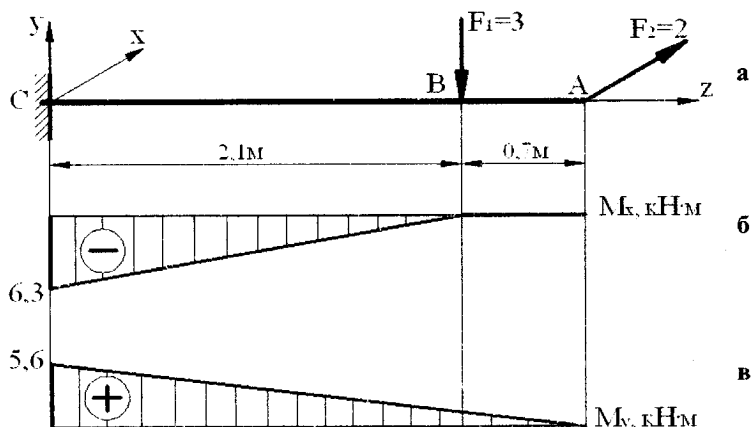


Рисунок 9.5 – Елюри згинальних моментів у вертикальній (б) і горизонтальній (в) площинах

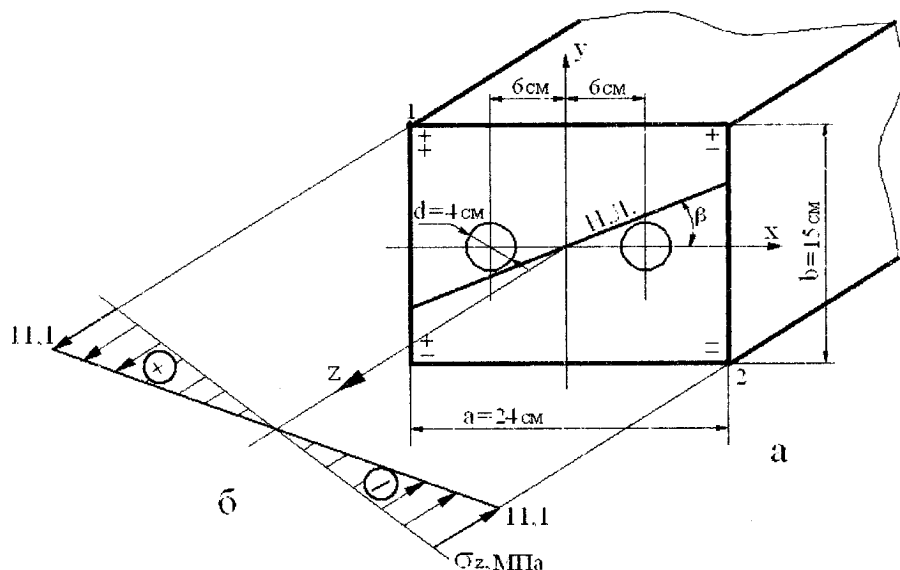


Рисунок 9.6 – Переріз (а) та епюра нормальних напружень σ_z (б)

Вираз для кута нахилу нейтральної лінії з урахуванням формули (9.1) та рис. 9.7 можна записати у вигляді

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y}.$$

Маємо

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{5,6}{(-6,3)} \cdot \frac{67200}{16400} = 0,366; \quad \beta = 20^\circ.$$

Оскільки β додатний, то нейтральна лінія проходить через перший і третій квадранти.

Небезпечні точки **1** і **2** – в найбільш віддалених кутах перерізу.

Обчислимо осеві моменти опору складного перерізу

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{6720}{7,5} = 896,6 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{16350}{12} = 1362,5 \text{ см}^3.$$

Напруження в небезпечних точках:

$$\sigma_{z \max, 1} = \frac{M_{x \max}}{W_x} + \frac{M_{y \max}}{W_y} = \frac{6,3}{896,6 \cdot 10^{-6}} + \frac{5,6}{1362,6 \cdot 10^{-6}} = 11,1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z \min, 1} = -\left(\frac{M_{x \max}}{W_x} + \frac{M_{y \max}}{W_y} \right) = -\left(\frac{6,3}{896,6 \cdot 10^{-6}} + \frac{5,6}{1362,6 \cdot 10^{-6}} \right) = -11,1 \text{ МПа}.$$

Будуємо епору розподілу нормальних напружень σ_z у небезпечному перерізі С (рис. 9.6,б).

Перевіримо умову міцності

$$\sigma_{z \max} \stackrel{?}{\leq} [\sigma].$$

Маємо

$$\sigma_{z \max} = 11,1 << [\sigma] = 200 \text{ МПа}.$$

Отже, міцність балки забезпечена.

На рис. 9.7 наведено алгоритм розрахунку балки на міцність при косому згинанні (перевірний).

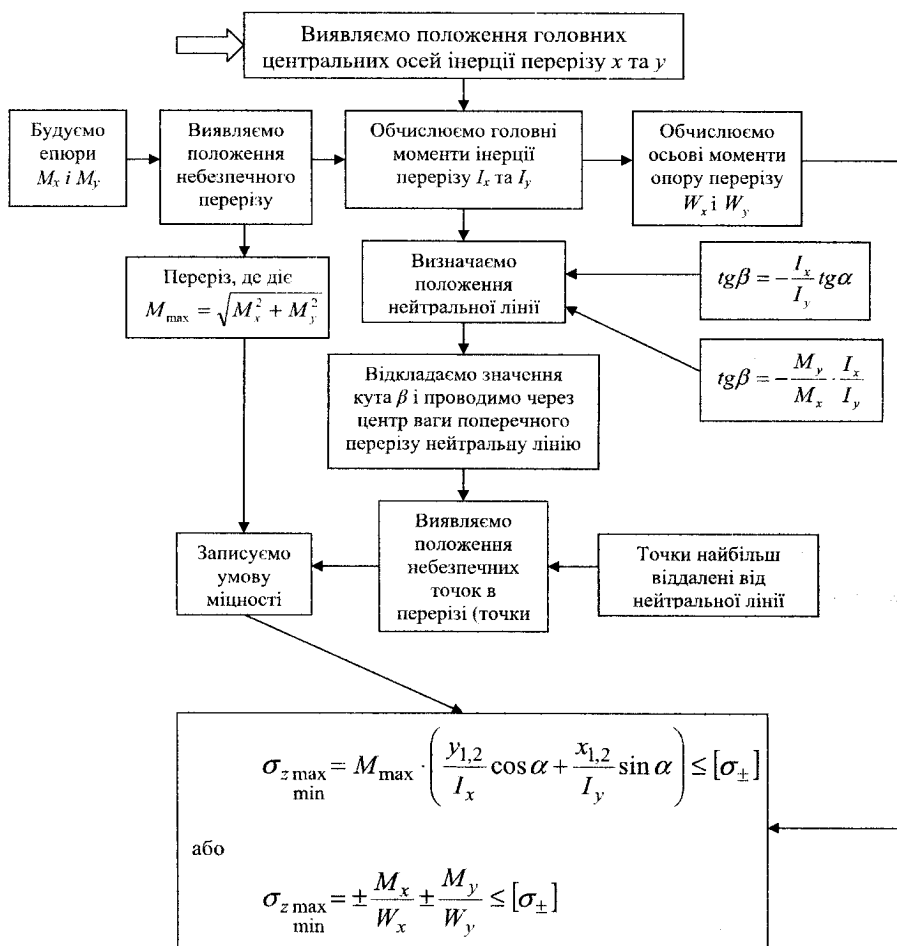


Рисунок 9.7 – Алгоритм розрахунку балки на міцність при косому згинанні (перевірний)

9.2. Позацентрове розтягання –стискання бруса

Якщо зовнішня сила F , паралельна поздовжній вісі стержня z (рис. 9.8,а), прикладена не в центрі перерізу, а в деякій точці B (полюсі) з координатами x_p , y_p , то має місце позацентрове розтягання–стискання.

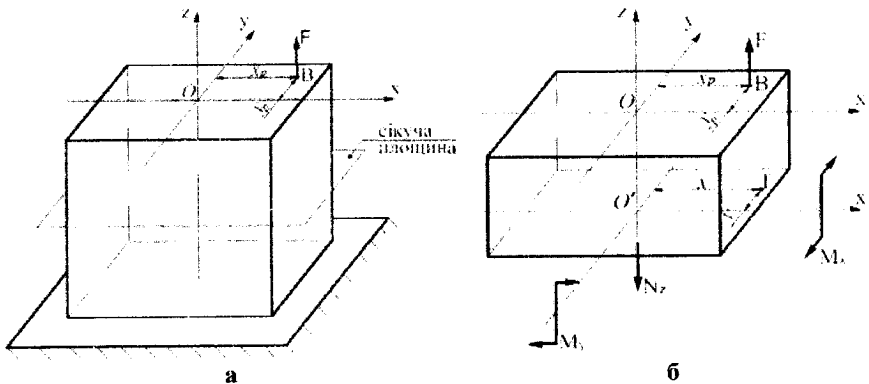


Рисунок 9.8 – Позацентрове прикладення зовнішньої поздовжньої сили F

Внутрішні силові фактори.

Користуючись методом перерізів (рис. 9.8,б), можна встановити, що при такому навантаженні в будь-якому поперечному перерізі бруса виникають (при такому навантаженні) такі внутрішні силові фактори:

$$\left. \begin{aligned} \text{із } \sum F_z = 0 &\Rightarrow N_z = F; \\ \text{із } \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x = F \cdot y_p; \\ \text{із } \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = F \cdot x_p. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Таким чином, **опір** — **складний** і являє собою комбінацію розтягу (стиску) і косого згину, яку іноді називають **складним згинанням**.

9.2.1. Нормальні напруження в поперечному перерізі при складному згинанні з розтяганням (стисканням)

На основі принципу суперпозиції сумарне нормальне напруження в довільній точці T перерізу з координатами x , y , наприклад, в I -му квадранті (рис. 9.8,б) обчислюється за формулою

$$\sigma_{z, \text{сум}} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x. \quad (9.9)$$

Підставивши в цю формулу внутрішні силові фактори із (9.8), одержуємо

$$\sigma_z = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_p}{I_x} \cdot y + \frac{F \cdot x_p}{I_y} \cdot x. \quad (9.10)$$

Приводячи формулу (9.10) до виразу із загальним множником F/A

$$\sigma_z = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{A \cdot y_p}{I_x} \cdot y + \frac{A \cdot x_p}{I_y} \cdot x \right)$$

і враховуючи те, що $\frac{I_x}{A} = i_x^2$, а $\frac{I_y}{A} = i_y^2$, – радіуси інерції перерізу в другому ступені, можна записати

$$\sigma_z = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_p}{i_x^2} \cdot y + \frac{x_p}{i_y^2} \cdot x \right). \quad (9.11)$$

У точках на нейтральній лінії $\sigma_z = 0$, і оскільки $F/A \neq 0$, то вираз у дужках дорівнює нулю. **Це геометричне рівняння являє собою нейтральну лінію перерізу:**

$$\frac{y_p}{i_x^2} \cdot y + \frac{x_p}{i_y^2} \cdot x = -1. \quad (9.12)$$

Положення нейтральної лінії знаходимо за правилами аналітичної геометрії, будуючи пряму в відрізках на координатних осях (рис. 9.9, а):

$$\begin{aligned} \text{при } y=0 \quad x_n &= -\frac{i_y^2}{x_p}; \\ \text{при } x=0 \quad y_n &= -\frac{i_x^2}{y_p}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

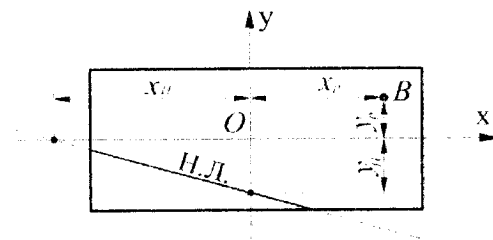


Рисунок 9.9 – Положення нейтральної лінії (н.л.) перерізу

У правій частині рівнянь (9.13) значення $i_x^2 > 0$ та $i_y^2 > 0$ (завжди додатні). Отже, координати полюса x_p та y_p і точок x_n та y_n , в яких нейтральна лінія перетинає координатні осі, мають завжди протилежні знаки.

Це означає, що полюс B і нейтральна лінія знаходяться по різні сторони від центра ваги перерізу (див. рис. 9.9).

9.2.2. Епюра нормальних напружень у перерізі при складному згинанні з розтяганням (стисканням). Умова міцності

Для побудови епюри сумарних нормальних напружень у поперечному перерізі довільної форми, наприклад трикутної форми (рис. 9.10,а), при позацентровому стисканні силою F необхідно спочатку за допомогою формули (9.13) визначити положення нейтральної лінії (н.л.) перерізу. Точки **1** і **2** – небезпечні. Напруження в цих точках після підстановки відповідних значень координат визначаються за формулою (9.11), і умови міцності мають вигляд

$$\sigma_{z\max/\min} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_P}{I_x} y_{1,2} + \frac{x_P}{I_y} x_{1,2} \right) \leq [\sigma_{\pm}], \quad (9.14)$$

тут: $F < 0$; $x_P > 0$ і $y_P > 0$; $x_1 < 0$ і $y_1 < 0$; $x_2 > 0$ і $y_2 > 0$.

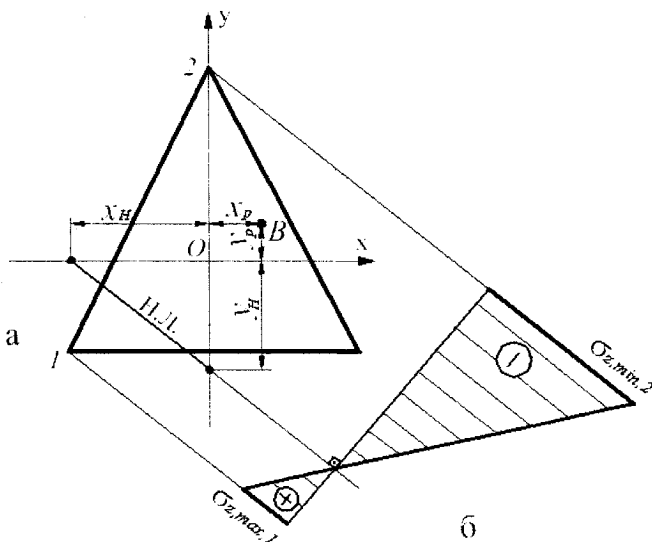


Рисунок 9.10 – Поперечний переріз (а) та епюра сумарних нормальних напружень σ_z (б)

Для перерізів із зовнішніми кутами найбільш віддаленими від нейтральної лінії точками будуть саме кутові точки з $x_{\max}$ і $y_{\max}$ в центральних осях перерізів. Тоді враховуючи в формулі (9.14), що

$$\frac{I_x}{y_{\max}} = W_x, \text{ а } \frac{I_y}{x_{\max}} = W_y,$$

умови міцності можна записати у такому вигляді:

$$\sigma_{z_{\max \min}} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_{\pm}], \quad (9.15)$$

тут F – позacentрово розтягуюча (стискаюча) сила, κH ;

M_x, M_y – згинальні моменти в головних площинах, які діють у розглядуваному небезпечному перерізі, κHm ;

A – площа небезпечного поперечного перерізу, m^2 ;

W_x, W_y – осьові моменти опору небезпечного перерізу відносно його головних центральних осей x та y , m^3 ,

$[\sigma_{\pm}]$ – допустимі напруження відповідно на розтяг та стиск, $\kappa Па$.

9.2.3. Ядро перерізу

Із рис.9.10 видно, що в залежності від положення полюса і геометричних характеристик перерізу можуть мати місце **дві зони: розтягнутих волокон і стиснутих волокон**. При проектуванні стояків із крихких матеріалів, які чинять слабкий опір при розтяганні (наприклад, цегляна та камінна кладки підмурків), важливо мати у всьому перерізі тільки стискаючі напруження. Цього можна досягнути, якщо силу F прикласти в межах так званого **ядра перерізу**.

Ядром перерізу називають зону навколо центра ваги поперечного перерізу, яка має ту властивість, що позacentрово прикладене навантаження розташоване в зоні ядра зумовлює нормальні напруження одного знаку в усіх точках поперечного перерізу. Якщо точки $B_i(x_p, y_p)$ позacentрового прикладення сили F будуть знаходитись у межах ядра перерізу, то нейтральні лінії будуть розташовані за межами перерізу або будуть дотичними до контура перерізу.

Для побудови ядра перерізу задаються такими положеннями нейтральної лінії, коли вона є дотичною до контура, а координати відповідних точок прикладення сили F визначають за формулами

$$x_p = -\frac{i_y^2}{x_H}; \quad y_p = -\frac{i_x^2}{y_H} \quad (9.16)$$

і знаходяться на межі ядра перерізу.

Щоб виявити ядро перерізу, треба уявити собі, що нейтральна лінія повертається навколо перерізу. При цьому точка прикладання сили окреслює контур ядра. Розглянемо побудову ядра перерізу на прикладах.

Приклад 9.2. Визначити ядро перерізу для стояка, що має прямокутний переріз зі сторонами b і h (рис. 9.11)

Розв'язання.

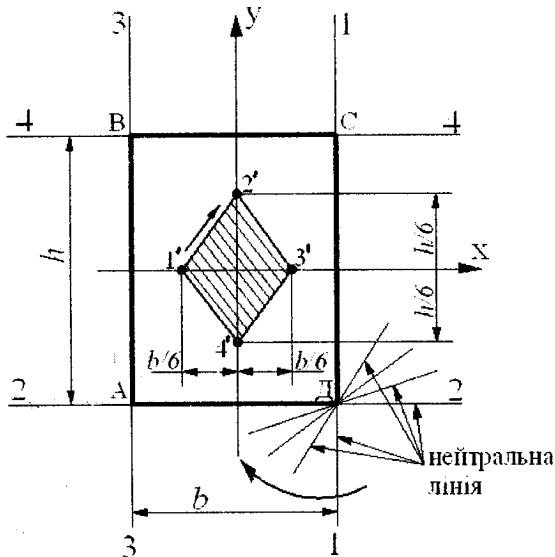


Рисунок 9.11 – Ядро перерізу (заштриховано)

Враховуючи, що

$$A = b \cdot h; \quad I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12},$$

маємо

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3}{12 \cdot bh} = \frac{h^2}{12};$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{hb^3}{12 \cdot bh} = \frac{b^2}{12}.$$

Обчислимо за формулами (9.16) координати точок 1'...4' ядра перерізу. Коли нейтральна лінія збігається з стороною CD прямокутника (положення 1-1), то полюс знаходиться в точці 1'.

тобто

$$\text{при } x_H = b/2 \quad x_p = -\frac{i_y^2}{x_H} = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot b} = -\frac{b}{6}; \quad y_p = 0.$$

Для положення 2-2 нейтральної лінії, координати полюса будуть

$$\text{при } y_H = -h/2 \quad y_p = -\frac{i_x^2}{y_H} = -\frac{h^2}{12 \cdot (-h/2)} = -\frac{h}{6}; \quad x_p = 0.$$

Аналогічно визначаються координати точок 3' та 4'. Для побудови ядра перерізу використаємо таку властивість нейтральної лінії: при повороті нейтральної лінії навколо деякої фіксованої точки контура перерізу точка прикладання сили переміщується вздовж прямої лінії. У даному випадку при повороті нейтральної лінії навколо нерухомої точки *D* точка прикладання сили *F* переміщується по прямій і проходить через точки 1' і 2'. З'єднавши точки 1', 2', 3' і 4' прямими, одержуємо границі ядра перерізу у вигляді ромба з діагоналями, що дорівнюють *b/3* та *h/3*.

Приклад 9.3. До стояка складного перерізу (рис. 9.12,а) в точці *B* позацентрово прикладена стискаюча сила $F=400 \text{ кН}$. Визначити найбільші напруження у розтягнутій та стиснутій зонах перерізу.

Розв'язання.

Визначимо моменти інерції перерізу відносно його головних центральних осей:

$$I_x = \frac{180 \cdot 120^3}{12} - 2 \cdot \frac{30 \cdot 40^3}{12} = 256 \cdot 10^5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{120 \cdot 180^3}{12} - 2 \cdot \left(\frac{40 \cdot 30^3}{12} + 45^2 \cdot 30 \cdot 40 \right) = 5809 \cdot 10^4 \text{ см}^4.$$

Площа поперечного перерізу

$$A = 180 \cdot 120 - 2 \cdot 30 \cdot 40 = 192 \cdot 10^2 \text{ см}^2.$$

Головні центральні радіуси інерції перерізу:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{256 \cdot 10^5}{192 \cdot 10^2} = 1333 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{5809 \cdot 10^4}{192 \cdot 10^2} = 3026 \text{ см}^2.$$

Знайдемо відрізки, що відсікаються нейтральною лінією на осях *y* та *x*:

$$y_n = -\frac{i_x^2}{y_p} = -\frac{1333}{60} = -22,2 \text{ см};$$

$$x_n = -\frac{i_y^2}{x_p} = -\frac{3026}{90} = -33,6 \text{ см},$$

де $x_p = 90 \text{ см}$ і $y_p = 60 \text{ см}$ — координати полюса. Наносимо значення x_n та y_n на головні центральні осі перерізу, через відповідні точки проводимо нейтральну лінію.

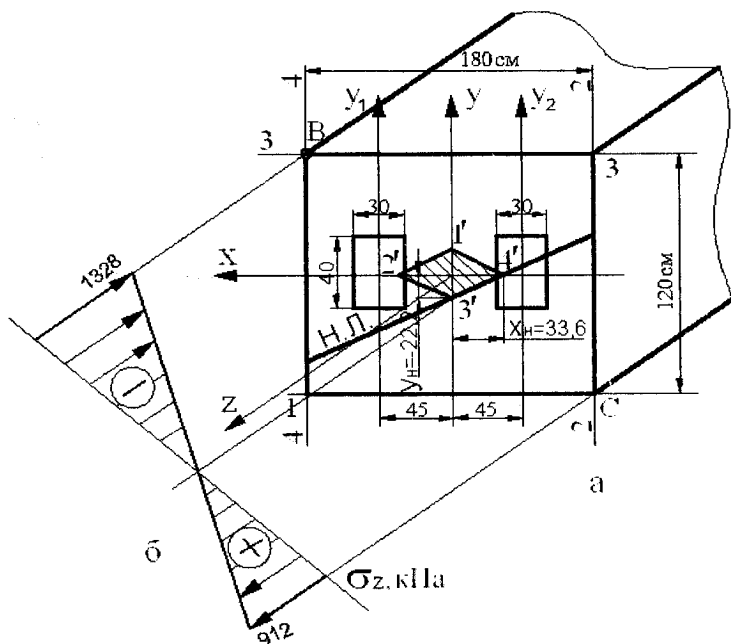


Рисунок 9.12 – Переріз стояка з ядром перерізу (заштриховано) (а) та епюра нормальних напружень σ_z (б)

Провівши паралельно нейтральній лінії дотичні до контура перерізу, виявляємо небезпечні точки B (90; 60) та C (-90; -60) у стиснутій та розтягнутій зонах перерізу. Враховуючи, що розглядуваний переріз має зовнішні кути і сила F стискаюча, нормальні напруження визначаються за формулою

$$\sigma_{z \max \min} = -\frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y},$$

тут: $M_x = F \cdot y_p = 400 \cdot 60 \cdot 10^{-2} = 240 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$M_y = F \cdot x_p = 400 \cdot 90 \cdot 10^{-2} = 360 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{256 \cdot 10^5}{60} = 4,27 \cdot 10^5 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{5809 \cdot 10^4}{90} = 64,54 \cdot 10^4 \text{ см}^3.$$

Підставляючи відповідні значення, одержуємо

$$\sigma_{z \min} = \sigma_{z, B} = -\frac{400}{192 \cdot 10^{-2}} - \frac{240}{4,27 \cdot 10^{-1}} - \frac{360}{64,54 \cdot 10^{-2}} = -1328 \text{ кПа};$$

$$\sigma_{z \max} = \sigma_{z, C} = -\frac{400}{192 \cdot 10^{-2}} + \frac{240}{4,27 \cdot 10^{-1}} + \frac{360}{64,54 \cdot 10^{-2}} = 912 \text{ кПа}.$$

За здобутими даними будемо епору сумарних нормальних напружень (рис. 9.12,б).

Побудуємо ядро перерізу. Сумістимо нейтральну лінію з нижньою (довшою) стороною поперечного перерізу (положення 1–1). У даному разі

$$y_H = -60 \text{ см}; \quad x_H = \infty.$$

Використовуючи вирази (9.16), маємо

$$y_{p,1'} = -\frac{i_x^2}{y_H} = -\frac{1333}{(-60)} = 22,1 \text{ см};$$

$$x_{p,1'} = -\frac{i_y^2}{x_H} = 0.$$

Отже, координати точки 1' ядра перерізу визначені. Сумістимо нейтральну лінію з меншою стороною поперечного перерізу (положення 2–2), маємо $x_H = -90 \text{ см}; \quad y_H = \infty$;

тоді $x_{p,2} = -\frac{i_y^2}{x_H} = -\frac{3026}{(-90)} = -33,6 \text{ см}; \quad y_{p,2} = -\frac{i_x^2}{y_H} = 0$ – координати точки 2' ядра перерізу.

Аналогічно визначаємо координати точок ядра перерізу 3' та 4', що відповідають положенням нейтральної лінії 3–3 та 4–4. Наносимо ці точки на головні центральні вісі інерції перерізу (точки 1' ... 4'). Маючи чотири точки, будуємо контур ядра перерізу у формі ромба (рис. 9.12,а; **ядро перерізу заштриховано**).

На рис. 9.13 наведено алгоритм розрахунку бруса (стояка) на міцність при позацинтровому розтяганні (стисканні).

9.3. Елементи теорії напружено-деформованого стану

9.3.1. Напружений стан у точці (поняття)

Введемо це поняття на найпростішому прикладі розтягнутого стержня (рис. 9.14):

Передусім знайдемо відповідь на таке запитання: чи виникають дотичні напруження в стержні при його осьовому розтяганні – стисканні? Згадаймо й те, що в перерізах, перпендикулярних до повздовжньої вісі (тобто – в поперечних перерізах), виникають тільки нормальні напруження (див. п.п. 2.1)

$$\sigma_z = N_z / A,$$

де N_z – поздовжня сила в перерізі, як рівнодіюча внутрішніх сил пружності, визначена з умови рівноваги відсіченої частини бруса ; A – площа поперечного перерізу бруса.

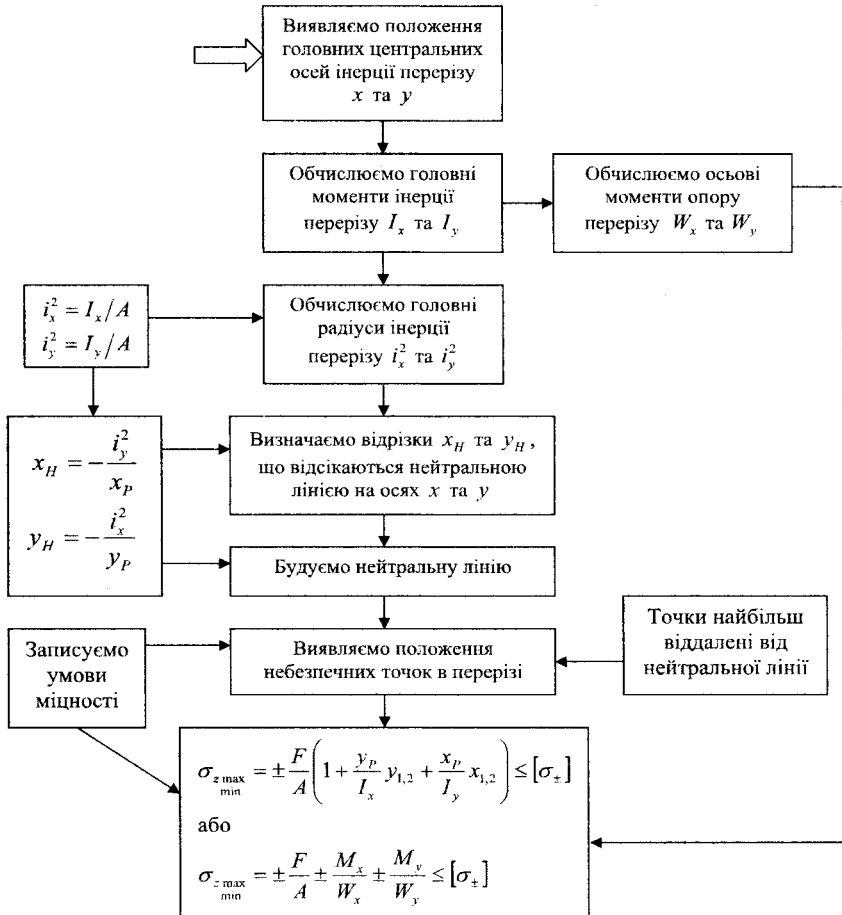


Рисунок 9.13 – Алгоритм розрахунку бруса (стояка) на міцність при позацинтрівому розтягненні (стисканні)

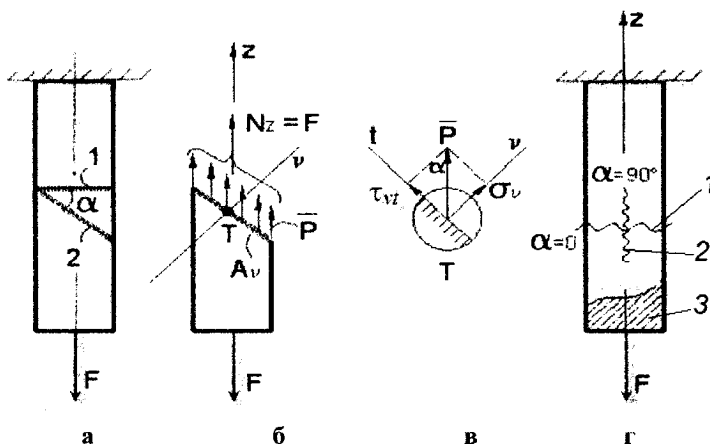


Рисунок 9.14 – Напружений стан при розтяганні: а – поперечний і нахилений перерізи; б – розподіл напружень у нахилому перерізі; в – напруження у точці Т; г – 1,2,3 – головні площадки

Якщо провести сікучу площину, нахилenu під деяким кутом α відносно поперечного перерізу, то поздовжня (нормальна) сила в перерізі A_v , визначена з умови рівноваги відсіченої нижньої частини бруса, буде такою ж як і в попередньому випадку: $N_z = F$ (рис. 9.14, б).

Площина нахилоного перерізу $A_v = A / \cos \alpha$, а повне напруження в довкіллі точки Т буде таким:

$$P = N_z / A_v = (N_z / A) \cdot \cos \alpha = \sigma_z \cdot \cos \alpha.$$

Для аналізу напруженого стану в довкіллі точки Т покажемо окремо її модель – рис. 9.14, в. Повне напруження $\bar{P}$ доцільно розглядати у вигляді двох складових напружень: нормального до площадки $\sigma_v = P \cdot \cos \alpha = \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha$, та дотичного напруження $\tau_v = P \cdot \sin \alpha = \sigma_z \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 0,5 \sigma_z \sin 2\alpha$.

Таким чином, з'ясовано, що напруження в точці залежить не тільки від зусилля, а й від положення площини, що проведена через точку. Якщо провести площину інакше, то і напруження будуть іншими. Взагалі **напружений стан у точці** – це сукупність напружень на нескінченному числі площадок, що проходять крізь досліджувану точку в усіх напрямках. На цьому ж прикладі

ми з'ясували можливість визначення напружень на будь-яких похилих площадках, якщо відомі напруження на якихось похідних.

Оскільки функція синуса – періодична (через 180°), то з останньої формули витікає, що $\tau(\alpha) = \tau(\alpha + 90^\circ)$, тобто на взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження однакові. Їх напрямки мають бути такими, щоб відсічена частина бруса була урівноважена (тобто – до загального ребра взаємно перпендикулярних площадок чи від нього).

У загальному випадку навантаження бруса (рис. 9.15,а), для аналізу напруженого стану в довкіллі досліджуваної точки на нескінченно близьких відстанях dx , dy , dz проводять шість взаємно перпендикулярних сікучих площин, формуючи елементарний паралелепіпед, як об'ємну модель точки (рис. 9.15,б).

На кожній грані паралелепіпеда може виникати довільне напруження P , яке доцільно (при аналітичному та механічному дослідженнях) розглядати у вигляді трьох його складових частин, а саме – проєкцій на три взаємно перпендикулярні вісі, проведені через центр площадки: проєкція вектора P на зовнішню нормаль z до площадки є нормальне напруження σ_z ; проєкція P на площину грані є повне дотичне напруження τ_z , яке в свою чергу розкладають на два вектори τ_{zx} і τ_{zy} вздовж осей x - y , що формують цю площадку. Перший індекс при напруженнях означає нормаль до площадки, в якій вони виникли, тобто – саму площадку. Другий індекс вказує напрямок вектора напружень, тобто вздовж якої осі направлено напруження (при нормальних напруженнях другий індекс опускають, бо він співпадає з першим).

Тепер, повертаючись до моделі досліджуваної точки (рис. 9.16), покажемо, що на кожній грані виникає по три можливі складові частини (σ_j , τ_{ij}) повного напруження. На трьох видимих гранях напрямки векторів напружень взяті позитивними (вздовж x , y , z та в їх напрямі).

На невидимих гранях паралелепіпеда вектори напружень σ_j , τ_{ij} повинні бути рівними за величиною та протилежного напрямку, бо відокремлений у

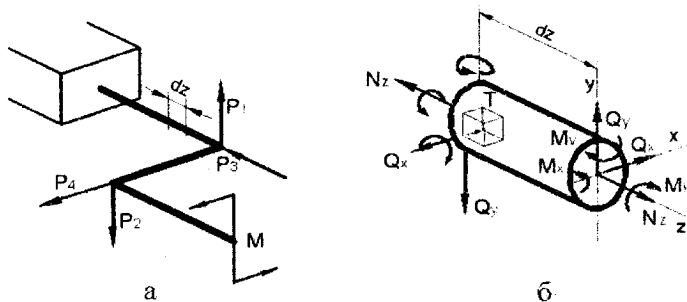


Рисунок 9.15 – Зовнішнє навантаження рами (а), внутрішні силові фактори і модель точки T (б)

довкіллі точки T паралелепіпед має бути врівноваженим під дією внутрішніх сил пружності, що виникли на його шести гранях. На трьох невидимих гранях вектори напружень умовно не показані, щоб не ускладнювати рисунок.

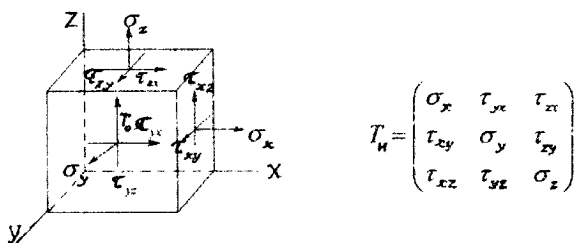


Рисунок 9.16 – Модель точки з компонентами напружень на видимих гранях

Завдяки гіпотезі суцільності та однорідності матеріалу всі шість граней паралелепіпеда можна зближувати так, що гранично вони пройдуть через точку T , формуючи три взаємно перпендикулярні площадки, проведені саме через неї.

Компоненти напружень на цих трьох взаємно перпендикулярних площадках записують у чітко визначеній послідовності у вигляді таблиці – так званого тензора T_H напруженого стану. У першому рядку записують ті напруження, що паралельні вісі x (на це вказує другий індекс при τ); у другому рядку – напруження паралельні вісі y ; у третьому – паралельні вісі z . При такому записі простіше складати рівняння рівноваги елемента: $\sum x = 0$; $\sum y = 0$; $\sum z = 0$.

У межах кожного стовпчика таблиці записують ті напруження, що виникають на одній тільки грані з відповідною нормаллю (на це вказує перший індекс при τ). По суті – це координати повного вектора напружень на одній площадці. На головній діагоналі матриці розміщують компоненти нормальних напружень $\sigma_{x,y,z}$, а на побічних – дотичні τ_{ij} . Складену таким чином таблицю (квадратну матрицю) і назвали **тензором напруженого стану в точці**. У ньому дев'ять компонентів напружень. Згідно закону парності дотичних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження, перпендикулярні до загального ребра, рівні між собою і прямують до ребра або від нього, тобто $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Завдяки цьому компоненти дотичних напружень, розміщені на побічних діагоналях матриці, однакові, а тензор напружень – симетричний відносно головної діагоналі і повністю визначається лише шістьма незалежними компонентами напружень.

Продемонструємо закон парності дотичних напружень у загальному випадку напруженого стану. Складемо одно з шести можливих рівнянь рівноваги елементарного паралелепіпеда (рис. 9.16), наприклад, суму моментів відносно вертикальної осі z , проведеної через точку T в центрі паралелепіпеда $\sum m_z = 2\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot 0,5dx - 2\tau_{xy} \cdot dx \cdot dz \cdot 0,5dy = 0$ з врахування того, що лінії дії нормальних зусиль на гранях $(\sigma_z \cdot dx \cdot dz)$, $(\sigma_x \cdot dy \cdot dz)$ і $(\sigma_y \cdot dx \cdot dz)$ проходять через цю точку, а зусилля від інших дотичних напружень паралельні з віссю z , або ж перетинаються з нею. Скоротивши тепер на $(dx \cdot dy \cdot dz)$, отримаємо, що $\tau_{xy} = \tau_{yz}$, а по аналогії $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Отриманий результат стверджує властивість симетрії тензора напружень відносно головної діагоналі.

У дослідженнях напружено-деформованого стану тензор напружень зручно уявляти у вигляді двох складових частин – шарового тензора T_0 і діватора напружень D :

$$T_H = T_0 + D = \begin{pmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_c & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_c & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_c \end{pmatrix},$$

$$\text{де } \sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Шаровий тензор характеризує тільки зміну об'єму елемента при рівномірному трьохосному розтяганні чи стисканні з врахуванням дії тільки середніх напружень σ_c у трьох напрямках. Девіатор же зумовлює зміну тільки форми елемента в довільні точки.

9.3.2. Визначення напружень на площадках довільного положення

Якщо трійка ортогональних сікучих площин буде зорієнтована інакше, ніж на рис. 9.16, то складові тензора напружень будуть іншими. Їх можна визначити з рівнянь рівноваги частини паралелепіпеда, відсіченої цими нахиленими площинами.

Спочатку проведемо через точку T в центрі паралелепіпеда (рис. 9.17,а) похилу площину з нормаллю ν , напрямні косинуси якої відносно похідних осей x, y, z позначимо так: $\cos(\nu, \hat{x}) = l$; $\cos(\nu, \hat{y}) = m$; $\cos(\nu, \hat{z}) = n$.

Вектор повного напруження P_ν на цій площадці розкладено на три складові частини паралельні похідним осям: $P_{\nu x}, P_{\nu y}, P_{\nu z}$. Відокремлений таким чином чотирихгранник (тетраedr, рис. 9.17,б) має бути в рівновазі під дією сил пружності, що виникли на його гранях. Проектуючи всі ці сили на осі x, y, z та враховуючи співвідношення площадок граней тетраедра: $A_x = A_\nu \cdot l$; $A_y = A_\nu \cdot m$; $A_z = A_\nu \cdot n$, можна отримати складові повного напруження P_ν на площадці A_ν :

$$\begin{aligned} P_{\nu x} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n; \\ P_{\nu y} &= \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n; \\ P_{\nu z} &= \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Таким чином, з'ясовано, що напружений стан у точці визначається повністю тензором напружень, отриманих для будь-якої похідної трійки взаємно перпендикулярних площадок, проведених через досліджувану точку.

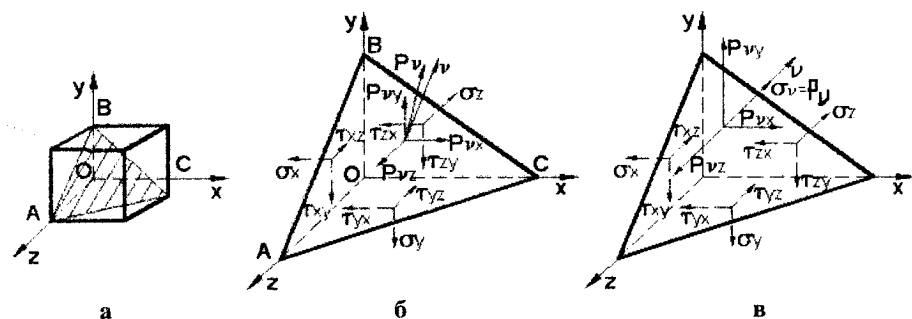


Рисунок 9.17 – Нахилена площадка загального положення (а); вектори напружень на довільних площадках тетраедра (б) та на головній нахиленій площадці (в)

Далі можна визначити повне напруження на довільно нахиленій площадці ABC : $P_v = \sqrt{P_{vx}^2 + P_{vy}^2 + P_{vz}^2}$, його проекції на нормаль до цієї площадки $\sigma_v = P_{vx} \cdot l + P_{vy} \cdot m + P_{vz} \cdot n$ та повне дотичне напруження $\tau_v = \sqrt{P_v^2 - \sigma_v^2}$.

Отримані співвідношення (9.17) показують, що в залежності від нахилу сікучої площини напруження змінюються.

Можна доказати, що існує така трійка ортогональних площадок, проведених через розглядувану точку, на яких дотичні напруження відсутні (при розтяганні це має місце при $\alpha = 0$; і при $\alpha = 90^\circ$). При цьому нормальні напруження на них – екстремальні, що й необхідно знати для оцінки міцності.

9.3.3. Головні площадки та головні напруження

Простіше всього та дохідливо уявити їх можна на прикладі осьового розтягання бруса (рис. 9.14,а), де напруження на нахиленій під кутом α площадці 2 визначались як $\tau_v = 0,5 \cdot \sigma_z \cdot \sin 2\alpha$; $\sigma_v = \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha$, де σ_z – напруження в поперечному перерізі бруса. Як видно з цих формул при $\alpha = 0$: $\tau_v = \tau_z = 0$, а $\sigma_v = \sigma_z$ є найбільшим; при $\alpha = 90^\circ$: $\tau = 0$ і $\sigma_v = 0$ – найменше.

Ті площадки, на яких відсутні дотичні напруження, назвали головними площадками, а нормальні напруження на них – головними нормальними напруженнями.

Завдяки періодичності функції синуса ($180^\circ = 2\alpha$) можна уявити три головні площадки, що проходять через точку: перша (при $\alpha = 0$) – перпендикулярна до поздовжньої вісі бруса; друга (при $\alpha = 90^\circ$) – паралельна поздовжній осі бруса; третя (як і друга) –, але в самій площині рисунка (рис. 9.14,г).

Нормальні напруження на головних площадках – екстремальні; при розтязі це: $\sigma_{1(\max)} = \sigma_z$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = 0$.

Найбільші ж дотичні напруження виникають при розтязі (стиску) бруса на площадках, нахилених під кутом $\alpha = 45^\circ$ до поздовжньої осі бруса і дорівнюють $\tau = 0.5 \cdot \sigma_z$. Це підтверджує і той факт, що зсув та сколювання стиснутих чавунних зразків проходило на площадках цього напрямку, оскільки крихкі матеріали протистоять зсуву дуже слабо.

Якщо з трьох головних напружень тільки одне не дорівнює нулю, то напружений стан називають лінійним (одновісним); якщо виникають два головні нормальні напруження, то напружений стан є плоским (двовісним); коли ж наявні всі три головні напруження, напружений стан – об'ємним (тривісним). Лінійний напружений стан називають простим, а плоский та об'ємний – складними.

Із наведених формул можна встановити та неважко уявити, що при розтяганні, стисканні та чистому згинанні напружений стан в усіх точках поперечного перерізу буде одновісним, з одним лише головним напруженням на першій, поперечній головній площадці (при $\alpha = 0$); на двох інших ортогональних площадках (при $\alpha = 90^\circ$) нормальні напруження відсутні.

9.3.4. Визначення положення головних площадок та значень головних нормальних напружень у загальному випадку складного напруженого стану

Нехай відомі $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ та $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ на трьох похідних взаємно перпендикулярних площадках, що проведені через досліджувану точку (рис. 9.17,в). Необхідно визначити положення головних площадок, тобто

напрямні косинуси нормалей до них $[\cos(\hat{v}, \hat{x})=l; \cos(\hat{v}, \hat{y})=m; \cos(\hat{v}, \hat{z})=n]$ та значення головних нормальних напружень на цих площадках.

Розв'язання.

Припустимо, що нахилена площадка (рис. 9.17,в) є головною, тобто на ній $\tau_{vi}=0$, а повне напруження P_v буде головним, тобто $P_v=\sigma$. У цьому разі проекції головного напруження на похідні вісі x, y, z будуть такими: $P_{vx}=\sigma \cdot l; P_{vy}=\sigma \cdot m; P_{vz}=\sigma \cdot n$.

Підставивши ці вирази в попередню формулу перетворення векторів напружень (9.17) та зробивши відповідні перетворення, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n &= 0; \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n &= 0; \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Щоб знайти чотири невідомі (l, m, n та σ), необхідно скласти ще одне рівняння. Із лінійної алгебри відомо, що сума квадратів напрямних косинусів вектора в просторі дорівнює одиниці. Розв'язуючи рівняння (9.18) відносно невідомих l, m, n , можна визначити положення головних площадок. Нульові розв'язки $l=m=n=0$ неможливі внаслідок відомого співвідношення між напрямними косинусами:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Відомо, що система лінійних однорідних рівнянь має ненульове рішення в тому випадку, коли визначник, складений з коефіцієнтів при невідомих, дорівнює нулю, а саме:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, позначивши при цьому незмінні (інваріантні) складові частини загального рішення літерами I_1, I_2, I_3

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

отримасмо таке кубічне рівняння для головних напружень:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0. \quad (9.19)$$

У цьому рівнянні коефіцієнти $I_{1...3}$ – інваріанти напруженого стану в точці, коли самі компоненти σ_i, τ_{ij} можуть змінюватись при повороті площадок, але такі їх комбінації – постійні незалежно від орієнтації площадок.

Розв'язання кубічного рівняння дає три дійсних корені, які і є трьома головними напруженнями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, що виникають на трьох взаємно перпендикулярних головних площадках; при цьому $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (в алгебраїчному розумінні).

Для визначення напрямку будь-якої головної площадки (наприклад, першої) необхідно в систему рівнянь (9.18) підставити значення відповідного головного напруження (наприклад, першого σ_1) та розв'язати ці рівняння відносно l_1, m_1, n_1 .

Найбільше дотичне напруження при будь-якому об'ємному стані виникає на площадках, паралельних головному напруженню σ_2 і рівно нахилених (під кутом 45°) до головних напружень σ_1 та σ_3 , причому $\tau_{\max} = 0,5 \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)$, а нормальні напруження на цих площадках дорівнюють половині суми відповідних головних.

Загальна класифікація напружених станів.

Якщо всі три інваріанти напруженого стану ненульові, то всі три корені кубічного рівняння (9.19) дійсно ненульові, а напружений стан у точці буде тривісним (об'ємним – рис.9.18,в). Так, в точках тіла зануреного глибоко в воду, має місце рівномірне тривісне стискання.

Якщо один з інваріантів напруженого стану – нульовий (наприклад $I_3=0$), то кубічне рівняння спрощується, його розв’язання дає два ненульові корені, і напружений стан у точці буде двовісним, або плоским (рис. 9.18,с). Приклади такого напруженого стану: в точках тонкостінних оболонок під дією внутрішнього тиску; в тонких дисках, що швидко обертаються; в стержнях при їх чистому крученні, та в інших випадках складного опору.

Якщо два інваріанти напруженого стану нульові (наприклад: $I_3 = 0$; $I_2 = 0$), то кубічне рівняння після скорочення стане лінійним і матиме при розв’язуванні лише один корінь, тобто одне головне напруження σ_1 або σ_3 . Напружений стан при цьому – лінійний, одновісний. Приклад: при розтягу – стиску (рис. 9.18,а) та при чистому згинанні.

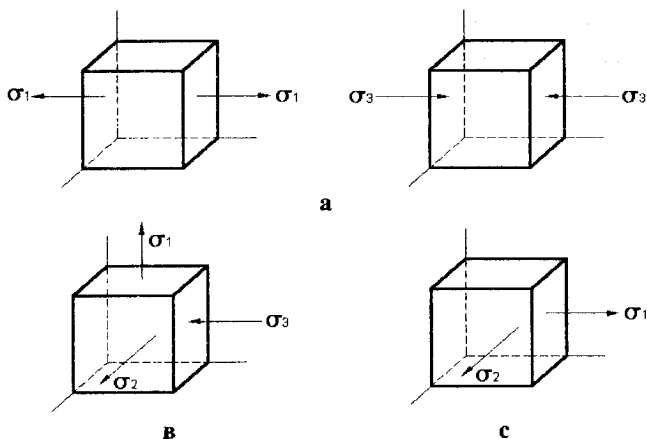


Рисунок 9.18 – Види напруженого стану:
а – лінійний; б – просторовий; с – плоский

Узагальнюючи все сказане, треба запам’ятати: в залежності від наявності головних нормальних напружень на трьох головних площадках, що проходять через точку, напружений стан в довкіллі точки може бути складним (двовісним) чи простим (одновісним, лінійним).

9.3.5. Напруження на довільних і головних площадках при плоскому напруженому стані

У розрахунках на міцність реальних деталей найчастіше мають справу з

двовісним (плоским) напруженим станом. Його можна уявити на прикладі зображених на рис. 9.19 компонентів напружень на довільних і головних площадках, проведених у довільній розглядуваній точці. На одній із трьох пар взаємно перпендикулярних площадок (а саме – фронтальній) відсутні всіякі напруження. В ортогональній проекції ця площадка закраплена крапками. На інших взаємно перпендикулярних площадках виникли, наприклад, нормальні σ_x , σ_y і дотичні τ_{xy} , τ_{yx} напруження (рис. 9.19,а).

Компоненти напружень в нахиленій під кутом α до горизонталі площадці (рис. 9.19,б) можна визначити з рівнянь рівноваги трикутного елемента:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau(\alpha) &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\}$$

Положення головних площадок (рис. 9.19,в), на яких відсутні дотичні напруження (а нормальні будуть екстремальними), можна визначити, досліджуючи на екстремум функцію $\sigma = f(\alpha)$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

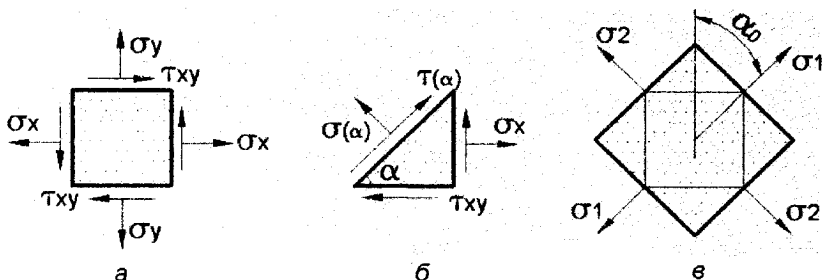


Рисунок 9.19 – Напруження при плоскому напруженому стані: а – на довільних гранях ортогонального елемента; б – в нахиленій площадці; в – на головних площадках

На основі цього дослідження з використанням формул перетворення тригонометричних функцій подвійних аргументів можна отримати більш

просту (без тригонометричних функцій з їх різними знаками) формулу для головних нормальних напружень σ_1 і σ_3 :

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (9.20)$$

Визначимо, наприклад, положення головних площадок і головні нормальні напруження в циліндричному стержні при його вільному закручуванні (рис. 9.20). В поперечних і поздовжніх перерізах виникають дотичні напруження τ , і початково ортогональні елементи перекошуються, зазнаючи зсув і перетворюючись в ромби.

Напрямок головних площадок відносно поперечних:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\tau}{0} = \infty, \text{ тобто } 2\alpha_0 = 90^\circ; \alpha_0 = 45^\circ.$$

Таким чином, перша головна площадка нахилена під кутом 45° до поперечного перерізу, а друга – їй перпендикулярна; головні ж напруження на них (при $\sigma_x = \sigma_y = 0$ в формулі (9.20)) будуть такими:

$$\sigma_{1,3} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2} = \pm \tau,$$

тобто σ_1 – розтягання, а σ_3 – стискання.

Якщо накреслити таким чином (при $\alpha_0 = 45^\circ$) ортогональний елемент на поверхні вала, то при закручуванні останнього моментом M_z елемент залишиться ортогональним, без перекошення (рис. 9.20).

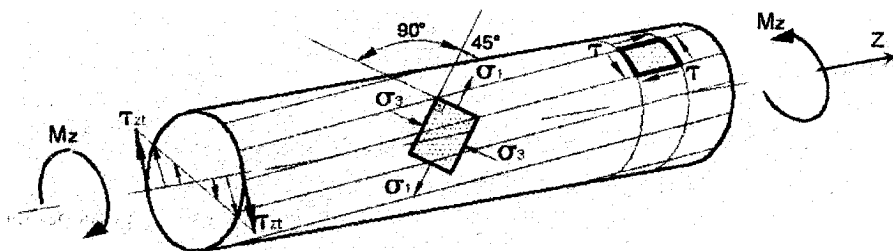


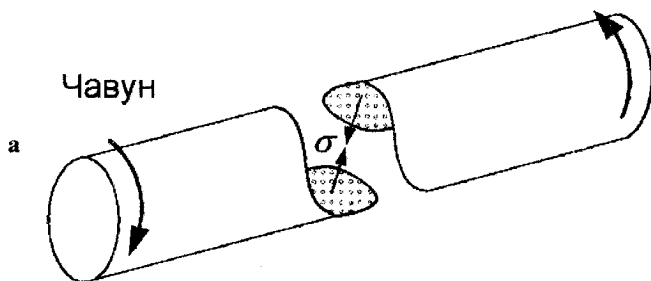
Рисунок 9.20 – Довільні площадки з τ і головні з $\sigma_{1,3}$ при крученні вала

Аналіз отриманих вище формул показує, що в перерізах вала, перпендикулярних до поздовжньої вісі та паралельних їй, виникають тільки дотичні напруження τ_{zt} , які зростають від центра поперечного перерізу до периферії по лінійному закону.

У перерізах, нахилених до поздовжньої вісі, виникають як дотичні τ_{zt} , так і нормальні $\sigma_{1,3}$ напруження. Найбільші нормальні напруження виникають в точках у поверхні вала в площадках, нахилених під кутом 45° до площини з чистим зсувом.

Цей аналіз показує, що при крученні круглих валів небезпечними можуть стати як дотичні напруження, якщо матеріал погано чинить опір зсуву та зрізу, так і нормальні напруження, якщо матеріал погано чинить опір розтягання.

Таким висновком відповідає і різний характер руйнування валів з різних матеріалів. Так, вали з вуглецевої конструкційної сталі на практиці часто руйнуються по поперечному перерізу, бо перші тріщини з'являються в місцях найбільших дотичних напружень у напрямку дотичних і твірних (рис. 9.21,в). У валах із крихких матеріалів або з крихким (після хім-термообробки) поверхневим шаром перші тріщини руйнування можуть з'явитися вздовж ліній, нормальних до найбільших (розтягуючих) головних напружень, тобто по гвинтових лініях, дотичні до яких утворюють кут в 45° з віссю вала (рис.9.21,а).



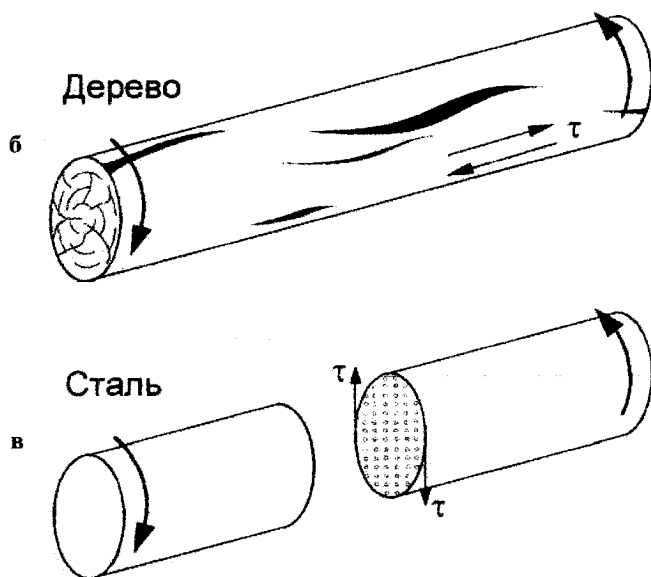


Рисунок 9.21 – Характер руйнування різних матеріалів при закручуванні

Такий аналіз напруженого стану є дуже важливим, наприклад, для оптимального конструювання деталей із композитних матеріалів: якщо вони мають «працювати» на кручення, то волокна слід орієнтувати по гвинтових лініях, нахилених під кутом 45° до поздовжньої вісі.

9.3.6. Деформований стан у довкіллі точки

При навантаженні тіла зовнішніми силами воно деформується, а його точки отримують переміщення. Так, наприклад, кутова точка P елементарного паралелепіпеда з довжиною ребер dx , dy , dz (на рис. 9.22 показана лише вертикальна проекція паралелепіпеда в площині X - Y) переміститься в цій площині на величину f . Компоненти цього вектора вздовж осей, формуючих площину, будуть u і v . Водночас довжина сторін елемента може змінитися і стати dx' , dy' , dz' . Приріст довжини сторін, як частинний диференціал функції

однієї перемінної, буде відповідно: вздовж вісі X — $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right]$ і $\left[\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \right]$, а

вздовж вісі Y — $\left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \right]$ і $\left[\frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy \right]$.

Відносне ж подовження ребра dx , тобто його лінійна деформація вздовж вісі X буде такою:

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

а вздовж інших осей — відповідно: $\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ і $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$.

Кут повороту ребра dx елемента в площині xy буде таким:

$$\gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \approx \frac{\partial v}{\partial x},$$

оскільки величиною $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$ можна знехтувати як дуже малою в порівнянні з одиницею.

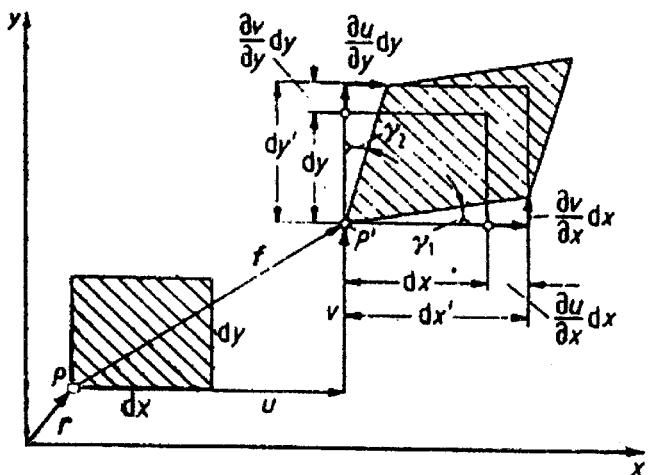
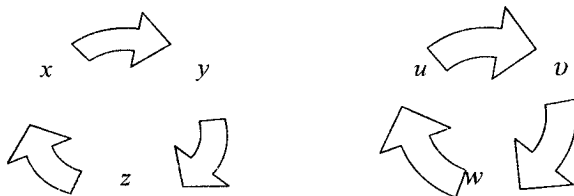


Рисунок 9.22 — Переміщення u , v точки P , лінійні подовження сторін елемента і його перекошення (зсув)

Визначивши аналогічно кут повороту γ_2 ребра dy , можна записати вираз для повного перекосу прямого кута елемента (тобто спотворення, або зсув вертикальної проекції спочатку ортогональної гранки):

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Вирази для зсувів в двох других координатних площинах можна записати, користуючись круговими підстановками букв



$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Таким чином, в довкіллі точки навантаженого тіла можна визначити (виділити) шість компонентів деформацій: три лінійні вздовж трійки взаємно перпендикулярних осей, проведених через точку, і три кутових – перекоси трьох ортогональних площадок, що вміщують ці осі. Компоненти лінійних та кутових деформацій записують у вигляді впорядкованої таблиці – так званого тензора деформацій:

$$T_D = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0,5\gamma_{yx} & 0,5\gamma_{zx} \\ 0,5\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0,5\gamma_{zy} \\ 0,5\gamma_{xz} & 0,5\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Вважається, що деформований стан у довкіллі точки – це сумісність лінійних та кутових деформацій, відповідно в напрямку всіх осей та в площинах, що проходять через розглядувану точку в усіх напрямках.

Можна довести, що тензор деформацій, визначений для будь-якої трійки ортогональних осей і відповідних площадок, повністю характеризує

деформований стан в точці. До того ж, завдяки закону парності дотичних напружень (і зсувів $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$) доказано, що всього шість незалежних компонентів деформацій для трійки ортогональних осей і площадок, проведених через точку, повністю характеризують деформований стан у довкіллі точки. Його аналіз подібний аналізу напруженого стану в точці: площадки, на яких відсутні дотичні напруження, не зазнають і зсувів. Ці **площинки** називаються **головними**, а вісі, перпендикулярні до них – **головними осями**; лінійні деформації в головних напрямках **екстремальні**; причому $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$ в алгебраїчному сенсі.

Положення головних осей та величини головних деформацій можна визначити таким же чином, як і при дослідженні напруженого стану в довкіллі точки.

9.3.7 Залежність між деформаціями і напруженнями при складному напруженому стані (узагальнений закон Гука)

Спочатку пригадаємо закон Гука при лінійному напруженому стані (в разі одновісного розтягання – стискування):

- абсолютне подовження $\Delta l = \frac{N_z \cdot l}{E \cdot A}$;
- відносне подовження $\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_z}{E}$;
- поперечна деформація бруса (звуження) $\epsilon' = \mu \cdot \epsilon$,

де μ – коефіцієнт Пуассона $\mu = -\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)$;

- деформація елементів в напрямі, перпендикулярному дії σ_z $\epsilon' = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$.

У загальному випадку складного напруженого стану лінійні деформації в напрямку кожної вісі можна визначити як алгебраїчну суму подовжень та укорочень, зумовлених тільки нормальними напруженнями, оскільки дотичні не впливають на лінійні деформації елемента (так, ребра сірникової коробки не

подовжуються при зсуві її гранок). Із врахуванням всього цього запишемо вираз для відносного подовження елемента вздовж вісі x (рис. 9.23,а):

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Тут дві від'ємні складові означають, що компоненти напружень σ_y і σ_z обумовлюють звуження елемента в напрямку вісі x (по Пуассону).

Спрощуючи останній вираз, отримаємо:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

аналогічно:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Дотичні напруження на гранях розглядуваного елемента обумовлюють деформації зсуву, тобто перекоси відповідних гранок елемента (рис. 9.23,в).

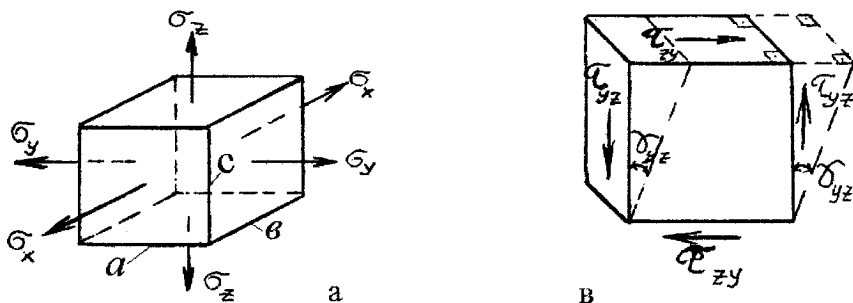


Рисунок 9.23 – До запису узагальненого закону Гука і об'ємної деформації

Зазначимо, що компоненти інших дотичних ($\tau_{xy\dots}$) напружень на гранях, перпендикулярних до розглядуваної, не впливають на зсуви γ_{xy} в цій площині. Завдяки цьому кутові деформації γ_{ij} можна записати безпосередньо за законом Гука при зсуві:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

де G – модуль пружності матеріалу при зсуві (модуль Кулона).

Таким чином, всі ці шість залежностей компонентів лінійних і кутових деформацій від напружень і є **узагальненим законом Гука**.

На головних площадках, де $\tau_{ij} = 0$, зсуви відсутні $\gamma_{ij} = 0$. Лінійні ж деформації в напрямках головних осей 1,2,3 будуть такими:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\tag{9.21}$$

9.3.8. Об'ємна деформація. Об'ємний закон Гука. Питома потенціальна енергія деформування

У довірчій точці деформованого тіла виділимо елемент об'єму у вигляді кубика (рис. 9.23,а) з нескінченно короткими ребрами a , b , c .

Нехай сікучі площини (площинки кубика) будуть головними, тобто на них виникають тільки $\sigma_{1,2,3}$, а $\tau_{ij} = 0$.

Після навантаження тіла довжини ребер розглядуваного елемента стануть: $(a + \Delta a)$; $(b + \Delta b)$; $(c + \Delta c)$; (сума тут, звісно – алгебраїчна).

Відносна зміна об'єму елемента (*об'ємна його деформація*) буде:

$$\theta = \frac{v_x - v_0}{v_0} = \frac{(a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c)}{a \cdot b \cdot c} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

тобто дорівнює сумі лінійних деформацій ребер кубика, що вийде після перемноження складових багаточлена та скорочення відповідних добутоків.

Залежність θ від напружень (об'ємний закон Гука) отримаємо після підстановки залежностей $\varepsilon_i = f(\sigma_i)$ за узагальненим законом Гука (9.21):

$$\theta = \frac{1}{E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{E} \cdot (1 - 2\mu).$$

При рівномірному тривісному розтяганні $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma \rightarrow \theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot 3\sigma$,

звідки витікає, що коефіцієнт Пуассона μ не може бути більшим ніж 0,5; якщо уявити, що $\mu > 0,5$, то при всебічному рівномірному розтяганні об'єм елемента буде зменшуватись, що неможливо фізично.

Питома потенціальна енергія деформованого тіла.

При розтяганні повна потенціальна енергія, що накопичується в цілому брусі $U = 0,5 \cdot N_z \cdot \Delta l$, а віднесена до одиниці об'єму бруса, тобто питома енергія деформування буде такою:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N_z \cdot \Delta l}{A \cdot l} = \frac{\sigma_z \cdot \varepsilon_z}{2}.$$

У загальному випадку об'ємного напруженого стану (коли грані кубика є головними площадками) питома енергія деформування буде:

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2}.$$

Підставляючи в цей вираз залежності (9.21) за узагальненим законом Гука, можна отримати:

$$u = \frac{1}{2E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)].$$

При деформуванні навантаженого тіла мають місце як зміна його форми, так і зміна об'єму. Розділяючи умовно ці процеси, можна уявити u у вигляді суми $u = u_\phi + u_0$.

Вираз для питомої енергії формозміни можна отримати формально, прийнявши, що $\mu = 0,5$, коли об'єм не змінюється:

$$u_\phi \approx \frac{1}{2E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)].$$

Загальному виразу в дужках «пощастило» – μ_ϕ прийнята як критерій граничного напруженого стану в четвертій гіпотезі міцності і, крім цього, вона покладена в основу однієї з теорій пластичності.

9.4. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Який опір стержнів називають складним?
2. Який випадок згинання називають косим згинанням?
3. Чи можливе косе згинання при чистому згинанні?
4. В яких точках поперечного перерізу виникають найбільші напруження при косому згинанні?
5. Як виявити положення нейтральної лінії при косому згинанні?
6. Дати визначення нейтрального шару, силової площини, нейтральної лінії, силової лінії, головної площини.
7. Як взаємно розташовані силова і нейтральна лінії при плоскому поперечному та косому згинаннях?
8. Записати умови міцності при косому згинанні, пояснити їх практичне застосування.
9. Як визначаються переміщення при косому згинанні?
10. Чи можливе косе згинання балки круглого поперечного перерізу?
11. Як визначаються нормальні напруження при нецентральному розтяганні бруса?
12. Як обчислити напруження в центрі поперечного перерізу бруса при позацентровому стисканні чи розтяганні?
13. Як визначити положення нейтральної лінії при позацентровому розтяганні чи стисканні бруса?
14. Дати визначення ядра поперечного перерізу бруса, пояснити послідовність його графічної побудови.
15. Яке положення займе нейтральна лінія, якщо позацентрово прикладена сила знаходиться в вершині ядра прямокутного перерізу?
16. Записати умови міцності при позацентровому розтяганні чи стисканні бруса, пояснити їх практичне застосування.
17. Яким чином характеризують напружений стан у точці тіла? Зобразити загальну модель напруженого стану і його схеми при різних видах опору.
18. Дати визначення головних площадок і головних напружень. На чисельних прикладах пояснити особливості індексації головних напружень.

19. Аналіз формули головних напружень та її використання для різних видів опору.
20. Як виводять формулу, що визначає положення головних площадок для плоского напруженого стану?
21. Записати узагальнений закон Гука.
22. На які дві частини поділяють потенціальну енергію деформації? Аналіз обох частин.

10. ТЕОРІЯ ГРАНИЧНИХ НАПРУЖЕНИХ СТАНІВ (ТЕОРІЯ ТЕКУЧОСТІ ТА ПОЧАТКУ РУЙНУВАННЯ, ЧИ ПРОСТО – ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ)

Ці теорії необхідні для оцінки міцності при складному напруженому стані. Згадаємо, що складний напружений стан – це плоский (двовісний) та об’ємний (тривісний); лінійний же, або одновісний напружений стан, є простим.

Механічний стан матеріалу і поняття граничного напруженого стану.

У залежності від цілого ряду факторів (температури Δt° , часу дії, напружень σ, τ) матеріал може перебувати в різному механічному стані.

У науці опору матеріалів вважається, що механічний стан матеріалу залежить, в основному, від його напруженого стану. Так, на прикладі діаграми напружень при розтяганні маловуглецевої сталі (див. рис. 2.5) можна розрізнити три механічні стани цього матеріалу: пружний, пружно-пластичний та стан початку руйнування.

Той *напружений стан*, при якому має місце перехід від одного механічного стану матеріалу до іншого, називають **граничним напруженням станом**.

Встановити граничний напружений стан при розтяганні дуже просто – з випробувань матеріалу; так, з діаграми $\sigma = f(\epsilon)$ (рис. 2.5) видно, що це може бути границя текучості σ_T , коли виникають значні пластичні деформації, а також границя міцності σ_R , коли починається руйнування матеріалу – від появи шийки до розриву. При складному напруженому стані, коли два, а то й три головні напруження виникають у довкіллі точки, встановити дослідним шляхом граничний напружений стан дуже важко, а то й взагалі неможливо із-за

невичерпності можливих співвідношень напружень, що можуть привести до граничного стану, а також великих складнощів у проведенні випробувань.

Через це змушені давати оцінку міцності при складному напруженому стані на основі механічних характеристик матеріалів, отриманих при одновісному розтяганні. Тобто **напружений стан при розтяганні приймають в якості еталона (еквівалента) для перевірки міцності при складному напруженому стані.**

Поняття про рівнонебезпечні напружені стани і еквівалентне напруження.

Уявимо в довкіллі небезпечних точок двох тіл два напружених стани – тривісний і лінійний – при розтяганні (рис. 10.1).

Якщо збільшити всі компоненти напружень при складному напруженому стані в n^1 раз і настане граничний стан (текучість чи руйнування), і якщо збільшити σ_1 при розтязі в n^1 раз і теж настане граничний стан, то ці два напружені стани є рівнонебезпечними.

Еквівалентним напруженням називають таке, що необхідно *створити в зразку при розтяганні*, щоб його **напружений стан був рівнонебезпечним** заданому складному напруженому стану. Вирази для $\sigma_{екв}$ отримують, виходячи з різних припущень (критеріїв) щодо настання граничного напруженого стану.

10.1. Критерії початку текучості та руйнування (гіпотези та теорії міцності)

Критерій руйнування – *математичне формулювання умови руйнування, основою якого є дана конкретна модель руйнування* [5].

Відомо, що при будь-якому напруженому стані можна визначити такі показники напружено-деформованого стану в довкіллі точки: найбільші нормальні чи дотичні напруження, найбільшу лінійну деформацію, потенціальну енергію деформування.

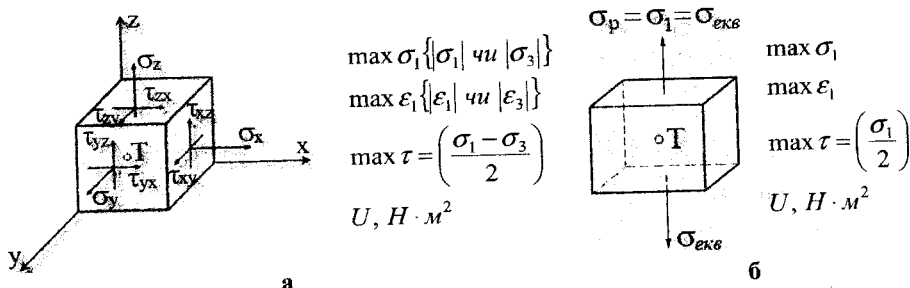


Рисунок 10.1 – Рівнонебезпечні об’ємний (а) ті лінійний (б) напружені стани (до вибору критеріїв міцності)

10.2. Основні (класичні) гіпотези граничних станів та теорія граничних станів Мора

Маючи справу з багатофакторними характеристиками напружених станів у небезпечній точці деформованого тіла, дослідники міцності приймали різні припущення (гіпотези) щодо головної причини настання граничного напруженого стану. **Гіпотеза руйнування – припущення щодо основного фактора або механізму, відповідального за процес руйнування матеріалу.**

Так, в XVII сторіччі Галілей вирішив судити про міцність матеріалу при складному напруженому стані по **найбільшому головному нормальному напруженню** σ_1 чи $|\sigma_3|$. Ця, перша, гіпотеза годилась для крихких матеріалів при розтязії та згинанні. Але подальші досліді з іншими матеріалами та різному напруженому стану не підтвердили її.

У тому ж сторіччі Маріотт висунув *гіпотезу*, що **критерієм** настання граничного стану при складному напруженому стані є **найбільша лінійна деформація** ε_1 чи $|\varepsilon_3|$. І оскільки по Гуку при складному напруженому стані $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))$, а при простому напруженому стані $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{екв}}{E}$, то порівнюючи їх, можна записати вираз для еквівалентного напруження за цією, другою, гіпотезою: $\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$.

Ця гіпотеза була підтверджена тільки для крихких матеріалів, та навіть для них у випадку розтягання тонкостінної трубки, навантаженої ще й внутрішнім тиском, вона виявилась неприйнятною.

Через два століття (в 1882 р.) була запропонована **третя гіпотеза**, згідно з якою **критерієм появи пластичних деформацій** (тобто початку текучості) було взяте **найбільше дотичне напруження**. При складному напруженому стані найбільше дотичне напруження $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ виникає на площадках, рівнонахилених до 1-ї та 3-ї головних площадок. При розтяганні зразка найбільше дотичне напруження $\tau_{\max} = 0,5 \cdot \sigma_{\text{екв}}^P$ і виникає в площадці, нахилений під кутом 45° до головної (поперечної) площадки.

Порівнюючи складний напружений стан і лінійний напружений стан за цим критерієм пластичності, можна записати вираз для еквівалентного напруження за цією гіпотезою міцності $\sigma_{\text{екв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3$.

Недолік цієї гіпотези той, що не вона не враховує σ_2 , хоч воно може бути значним.

Четверта (по черзі) **гіпотеза міцності** була висунута вже в 20-му столітті (1906 р.) Хубером. **Критерієм настання граничного стану взята питома потенціальна енергія зміни форми тіла при його деформуванні.**

Вираз для еквівалентного напруження за цією гіпотезою можна отримати, співставляючи вирази для питомої потенціальної енергії формозміни при складному напруженому стані з виразом для такої ж енергії при розтяганні:

$$\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)}.$$

Слід зауважити, що третя і четверта гіпотези придатні тільки для пластичних матеріалів, для яких $\sigma_T^{\text{розтяг}} = \sigma_T^{\text{стиск}}$. Вони зовсім не придатні при рівномірному трьохвісному розтяганні чи стисканні, коли $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ і відповідно $\sigma_{\text{екв}}^{III,IV} = 0$.

Для крихких і пластичних матеріалів з різним опором розтяганню і стисканню була запропонована (Отто Мором в 1900 р.) **феноменологічна**

теорія міцності. Будь-яких критеріїв початку текучості не приймалось, а лише логічно систематизовані результати можливих випробувань зразків при різних видах напруженого стану. **Критерій Мора** ґрунтується на припущенні, що міцність матеріалу у загальному випадку напруженого стану залежить в основному від значення і знака найбільшого σ_1 та найменшого σ_3 головних напружень.

Ґрунтуючись цілком на дослідних даних, теорія Мора не потребує додаткової експериментальної перевірки.

$$\text{По теорії Мора } \sigma_{\text{екв}} = \sigma_1 - K_T \cdot \sigma_3, \text{ де } K_T = \sigma_T^p / \sigma_T^c.$$

Однак, і теорія Мора не придатна при всебічному, рівномірному напруженому стані матеріалів з однаковим опором розтягання і стискання ($\sigma_{\text{екв}} = \sigma_1 - 1 \cdot \sigma_3 = 0$).

Для пластичних матеріалів можна (рекомендувати) користуватись третьою та четвертою гіпотезами міцності: розбіжність у величині $\sigma_{\text{екв}}$ за ними не перевищує 16 відсотків, при цьому III-я підкупає простотою, а IV-а лягла в основу однієї з теорій пластичності.

За всіма розглянутими критеріями пластичності і теорією Мора **граничний напружений стан початку текучості** при складному напруженому стані виражається умовою текучості:

$$\sigma_{\text{екв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_T,$$

де σ_T – границя текучості матеріалу при випробуванні на розтягання.

Із врахуванням нормативного запасу міцності $n_T = \frac{\sigma_T}{[\sigma]}$, де $[\sigma]$ – допустиме напруження при розтяганні, умову міцності при складному напруженому стані можна записати так:

$$\sigma_{\text{екв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Інколи при дослідженні напруженого стану одразу простіше визначити не головні напруження $\sigma_{1...3}$, а дотичні τ_{ij} та нормальні σ_j на довільних площадках, наприклад, в поперечних перерізах стержнів при їх крученні, згині

та розтязі. Вали в редукторах та коробках передач зазнають саме такі види деформування, і напружений стан в небезпечних точках перерізу – складний. У таких випадках, користуючись формулами перетворення напружень (9.20), можна отримати вирази для $\sigma_{екв}$ безпосередньо через довільні напруження.

Схематично перехід від напружень σ_j і τ_{ij} на довільних площадках (у загальному випадку навантаження) до головних нормальних напружень $\sigma_{1...3}$ на головних площинках і далі – до визначення еквівалентного напруження та порівняння його з граничним при розтяганні (для оцінки міцності) показано на рис. 10.2.

Якщо виразити компоненти напружень через внутрішні силові фактори в перерізі, то можна визначити величину $\sigma_{екв}$. Такі розрахункові формули наведені в табл. 10.1.

Критерії початку руйнування розроблені не так чітко і досконало, як розглянуті вище критерії пластичності. Це пов'язано з дуже складними явищами в процесі руйнування і неможливістю їх простого і чіткого математичного описання та дослідної перевірки.

Із достатнім ступенем достовірності граничний напружений стан, що

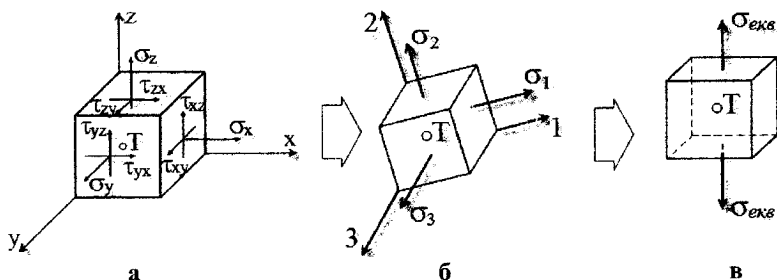


Рисунок 10.2 – Схема перетворень довільних напружень в головні та еквівалентні для оцінки міцності

відповідає початку руйнування, можна визначити за теорією Мора:

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - K_\sigma \cdot \sigma_3, \text{ якщо коефіцієнт } K_\sigma \text{ визначити так: } K_\sigma = \frac{\sigma_\sigma^{\text{розтяг}}}{\sigma_\sigma^{\text{стиск}}}.$$

Таблиця 10.1 – **Формули для практичних розрахунків на міцність при об'ємному та плоскому (найбільш поширеному) напруженому стані (оболонки, вали, просторові системи)**

Формули	Гіпотези міцності		
	III ($\tau_{\max}$)	IV (енергетична)	Теорія міцності Мора
1	Вирази для $\sigma_{екв}$ через головні нормальні напруження (на головних площадках)		
	$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)}$	$\sigma_{екв} = \sigma_1 - K \cdot \sigma_3$
2	Інколи ж простіше знайти величину τ_{ij} , $\sigma_{X,Y,Z}$ (наприклад, в поперечних перерізах стержнів при їх крученні, згині та розтязі). Вали, що обертаються, зазнають саме такі види деформування і напружений стан при цьому – двовісний (плоский). У цьому разі з урахуванням того, що σ_y перпендикулярне поздовжній осі – відсутнє, то: $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zt}^2}$, а вирази для $\sigma_{екв}$ через напруження σ_z і τ_{zt} будуть такими:		
	$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zt}^2}$	$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zt}^2}$	$\sigma_{екв} = \frac{1-k}{2} \sigma_{1z} + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zt}^2}$
	Якщо ж виразити компоненти напружень σ_z і τ_{zt} через відповідні внутрішні силові фактори та геометричні характеристики перерізу, то для некруглих перерізів із зовнішніми кутами:		
	$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \left(\frac{M_{zкр}}{W_{кр}} \right)^2}$	$\sigma_{екв} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} \right)^2 + 3 \left(\frac{M_z}{W_{кр}} \right)^2}$	$\sigma_{екв} = \frac{1-k}{2} \sigma_z + \frac{1+k}{2} \times \sqrt{\sigma_{zсум}^2 + 4 \left(\frac{M_{zсум}}{W_{кр}} \right)^2}$

Примітка: для круглих перерізів визначати σ_z при косому згинанні як суму $\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$ буде невірно, так як точки з таким $\sigma_{z\text{ сум}}$ у перерізі немає, а тому слід визначити $M_{z\text{ сум}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, а нормальне напруження в небезпечних точках у площині дії цього моменту буде $\sigma_z = \frac{M_{z\text{ сум}}}{W_x}$.		
Для круглих перерізів $W_p = 2W_x$ і вирази для $\sigma_{екв}$ можна отримати (якщо нехтувати можливістю N_z) такими:		
3 $\sigma_{екв} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_{z\text{ сум}}^2 + M_{z\text{ кр}}^2}$	$\sigma_{екв} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_{z\text{ сум}}^2 + 0,75M_{z\text{ кр}}^2}$	$\sigma_{екв} = \frac{1}{W_x} \left[\frac{1-k}{2} M_{z\text{ сум}} + \frac{1+k}{2} \sqrt{M_{z\text{ сум}}^2 + M_{z\text{ кр}}^2} \right]$
Якщо комбінацію $\sqrt{M_{z\text{ сум}}^2 + M_{z\text{ кр}}^2}$ назвати «приведеним» або еквівалентним моментом ($M_{прив}$), то умову міцності при згині з крученням круглих валів можна записати так: $\max \sigma_{екв} = \frac{M_{прив}}{W_x} \leq [\sigma]$, де $[\sigma]$ – при розтязі. Вирази для $M_{прив}$ – різні за різними гіпотезами (див. формули 3).		
Якщо врахувати і поздовжню силу, то слід користуватися формулами 2, але мати на увазі, що $\sigma_z = \frac{M_{z\text{ сум}}}{W_x} + \frac{N_z}{A}$, де $M_{z\text{ сум}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.		

Недоліки розглянутих теорій, а також поява нових матеріалів та бажання враховувати вплив виду напруженого стану на міцність елементів (у тому числі в екстремальних умовах ($\Delta t^\circ, \Delta \rho, K_{дин}$ при експлуатації)) були і є стимулами для розробки нових теорій міцності. Ми можемо лише назвати деякі з останніх (теорія Ягна, теорія Давиденкова, теорія Писаренка і Лебедева, критерій Фрідмана тощо) для ізотропних матеріалів і не менше їх – для анізотропних матеріалів. Детальніше про всі ті теорії слід читати в літературних джерелах [3–6,13].

Приклад 10.1. Визначити за умов міцності розміри поперечних перерізів елементів плоско-просторової стержневої системи (рис. 10.3). Зовнішня сила $P = 1,3 \text{ кН}$; границя текучості матеріалу стержнів $\sigma_T = 360 \text{ МПа}$, запас міцності $n_T = 3$; співвідношення сторін прямокутного перерізу $h/b = 2$.

Розв'язання.

1. Для визначення згинальних і крутних моментів та побудови їх епюр у відповідних площинах слід показати вісі X, Y, Z просторової системи координат на кожному стержні. Далі визначити нормальні сили, згинальні та крутні моменти в характерних перерізах і побудувати їх епюри (рис. 10.4).

2. Підбір розмірів ($h \times b$) прямокутного перерізу першого (A-B) стержня.

2.1. Допустиме напруження

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{360}{3} = 120 \text{ МПа}$$

2.2. Умова міцності для першого стержня, який зазнає згинання в двох площинах: $M_x = 1,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_y = 0,65 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Як бачимо, вид опору – складний, але напружений стан у небезпечних кутових точках є простим (одновісним), а тому умова міцності така:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} + \frac{\max M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

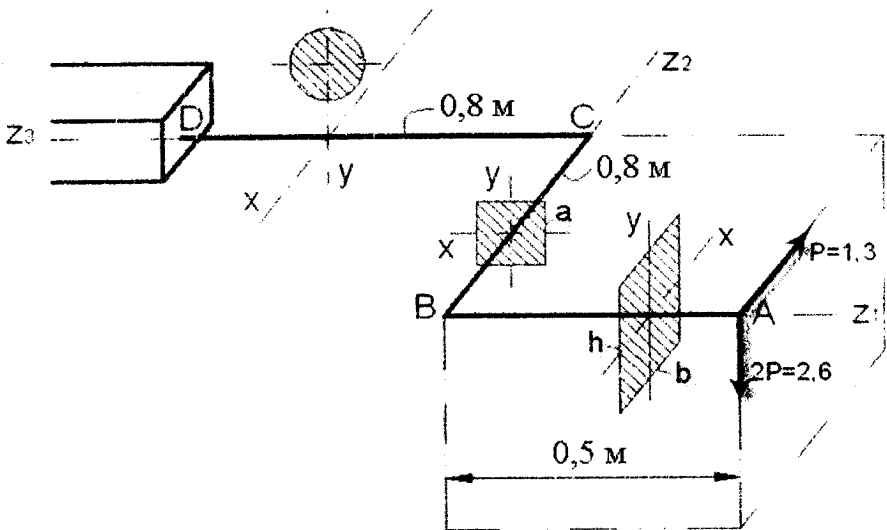


Рисунок 10.3 – Плоска стержнева система з просторовим навантаженням

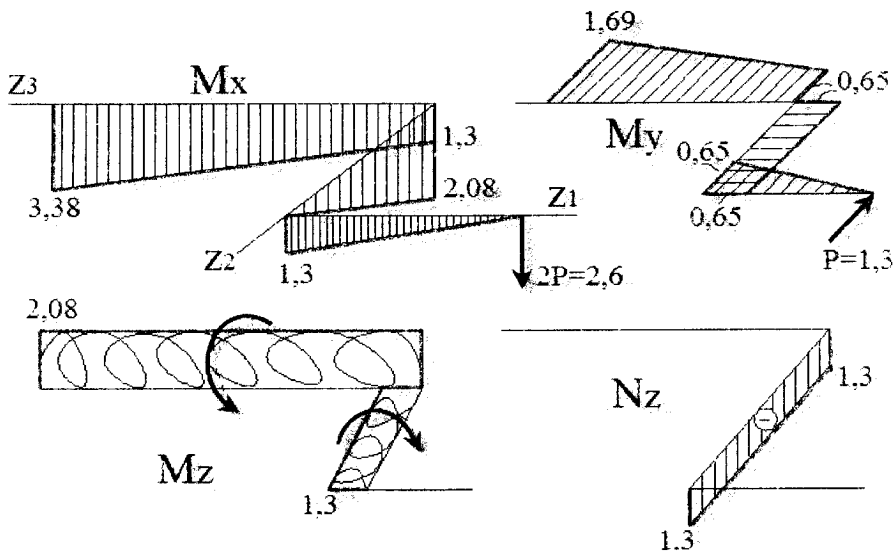


Рисунок 10.4 – Епюри внутрішніх силових факторів: M – в $\kappa H \cdot m$; N_z – в κH

2.3. Осьові моменти опору прямокутного перерізу:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3;$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Для визначення небезпечної точки в найбільш навантаженому перерізі покажемо (рис. 10.5) вектори напружень σ_z , зумовлених дією кожного згинального моменту.

Небезпечними є точки 1 і 2; умова міцності для 1-ї точки:

$$\frac{1,3 \cdot 10^3}{2/3b^3} + \frac{0,65 \cdot 10^3}{1/3 \cdot b^3} \leq 120 \cdot 10^6,$$

звідки необхідний розмір має бути

$$b = \sqrt[3]{\frac{3,9 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6}} = 3,191 \cdot 10^{-2} m = 31,91 mm.$$

Згідно нормативних розмірів слід взяти $b = 35 mm$; тоді $h = 70 mm$.

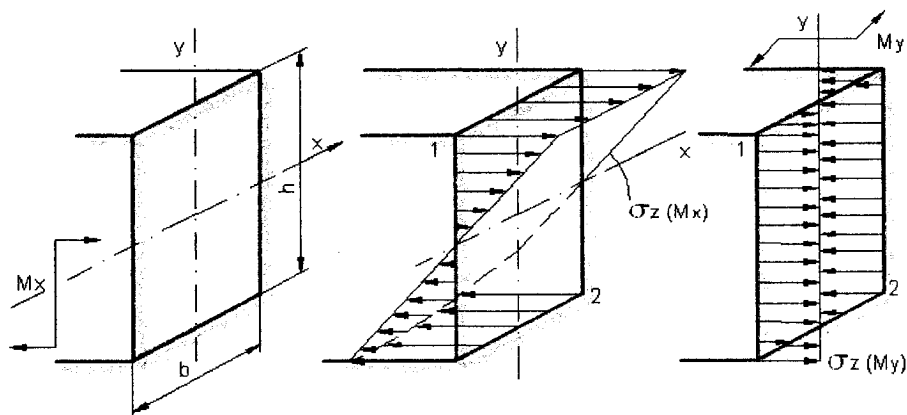


Рисунок 10.5 – Прямокутний переріз стержня $A-B$ з епюрами і векторами нормальних напружень σ_z від дії кожного моменту

3. Підбір розмірів квадратного перерізу другого ($B-C$) стержня. Цей стержень зазнає згинання в двох площинах ($M_x = 2,08 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і $M_y = 0,65 \text{ кН}\cdot\text{м}$), стиснення ($N_z = -P = -1,3 \text{ кН}$) та кручення ($M_z = 1,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$).

3.1. Геометричні характеристики поперечного перерізу: площа $A = a^2$;

моменти опору: при згинанні $W_x = W_y = \frac{a^3}{6}$; при крученні $W_z = \alpha \cdot a^3 = 0,208 a^3$.

3.2. Найбільше по модулю (сумарне) нормальне напруження – в точці 1 (рис. 10.6):

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} + \frac{\max M_y}{W_y} = \frac{2,08 \cdot 10^3}{a^3/6} + \frac{0,65 \cdot 10^3}{a^3/6}.$$

Тут, для спрощення розрахунків, ми спочатку не враховуємо напруження, зумовлене дією нормальної сили. Далі ми оцінимо похибку.

3.3. Дотичні напруження посередині бокових сторін квадратного перерізу

$$\max \tau = \frac{\max M_z}{W_k} = \frac{1,3 \cdot 10^3}{0,208 a^3}.$$

3.4. За умови міцності в кутовій точці 1, де $\sigma_{z \text{ сум}}$ – найбільше, а $\tau = 0$,

$\frac{10^3}{a^3/6} \cdot (2,08^2 + 0,65^2) \leq 120 \cdot 10^6$ необхідний розмір квадрата має бути

$$a^3 = \frac{2,73 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6 / 6}; \quad a = 10^{-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{2,73}{20}} \approx 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 52 \text{ мм}.$$

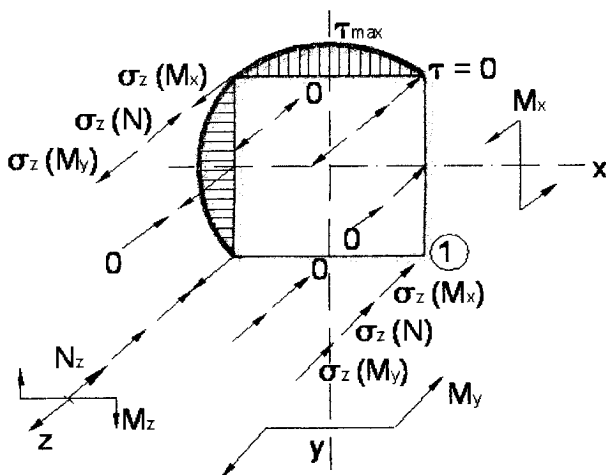


Рисунок 10.6 – Квадратний переріз *BC* – стержня з внутрішніми силовими факторами і відповідними епюрами та векторами напружень

3.5. Перевіримо тепер вплив нормальної сили на напружений стан визначеного перерізу:

- площа перерізу $A = a^2 = 52^2 = 2704 \text{ мм}^2$;
- осеві моменти опору $W_x = W_y = \frac{a^3}{6} = \frac{52^3}{6} \approx 234 \cdot 10^2 \text{ мм}^3$;
- момент опору при крученні $W_k = \alpha \cdot a^3 = 0,208 \cdot 52^3 = 292 \cdot 10^2 \text{ мм}^3$;
- найбільше по модулю нормальне напруження посередині сторони квадрата

$$\sigma = \frac{-N_z}{A} - \frac{M_{yz}}{W_x} = -\frac{1,3 \cdot 10^3}{2700 \cdot 10^{-6}} - \frac{2,08 \cdot 10^3}{23,4 \cdot 10^{-6}} = -89,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = -89,4 \text{ МПа};$$

- дотичні напруження посередині сторін

$$\tau = \frac{M_z}{W_k} = \frac{1,3 \cdot 10^3}{292 \cdot 10^{-7}} = 44,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 44,5 \text{ МПа};$$

- еквівалентне напруження в цій точці, наприклад, за IV-ю гіпотезою міцності:

$$\max \sigma^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{89,4^2 + 3 \cdot (44,5)^2} = 118 \text{ МПа}.$$

Таким чином, допустиме напруження [120] не перевищено.

4. Ділянка *CD* стержневої системи зазнає подвійне згинання і закручування (див. епюри внутрішніх силових факторів – рис. 10.4).

4.1. Моменти опору круглого перерізу цього стержня:

- при згинанні $W_x = \frac{\pi D^3}{32}$;
- полярний при крученні $W_p = \frac{\pi D^3}{16}$;

4.2. Оскільки переріз – круглий і $W_p = 2W_x$, а згинальні моменти мають бути зведені до векторної їх суми $\bar{M}_{\Sigma, \text{сум}} = \sqrt{\bar{M}_x^2 + \bar{M}_y^2}$, то умову міцності для цього перерізу слід записати у вигляді

$$\sigma_{\text{екв}} = \frac{M_{np}}{W_x} \leq [\sigma],$$

де M_{np} – приведений момент, який за IV-ю гіпотезою міцності визначається так:

$$M_{np}^{IV} = \sqrt{M_{\Sigma, \text{сум}}^2 + 0,75 M_z^2} = \sqrt{3,78^2 + 0,75 \cdot 2,08^2} = 41,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Необхідний момент опору перерізу за умовою міцності має бути

$$W_x \geq \frac{M_{np}^{IV}}{[\sigma]} \geq \frac{41,8}{120 \cdot 10^3} = 3,48 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 3,48 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

Необхідний діаметр

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = 71 \text{ мм}.$$

Приймаємо за нормами $D = 72 \text{ мм}$.

Приклад 10.2. Розрахунок на міцність і жорсткість вала прямозубої передачі.

Для вала, схема якого показана на рис. 10.8, а, необхідно: визначити діаметр за умови міцності і перевірити його на жорсткість по прогинам і кутам повороту перерізів при допустимих значеннях: напружень – $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; прогинів – $[f] = l/500$; кутів повороту перерізів: $\varphi_z = 1,5 \text{ град/м}$; $\theta_x = 0,008 \text{ радіан}$. Потужність, яку передає вал $P = 16 \text{ кВт}$, швидкість обертання $n = 191 \text{ об/хв}$.

Розв'язання.

1. Момент закручування: на ведучому зубчатому колесі при передачі потужності P і кутовій швидкості обертання $\omega = 2\pi \cdot n/60 = 2 \cdot 3,14 \cdot 191/60 = 20 \text{ с}^{-1}$

$$M_1 = \frac{P}{\omega} = \frac{16 \cdot 10^3}{20} = 800 \text{ Н} \cdot \text{м} = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на веденому колесі $M_2 = M_1 = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

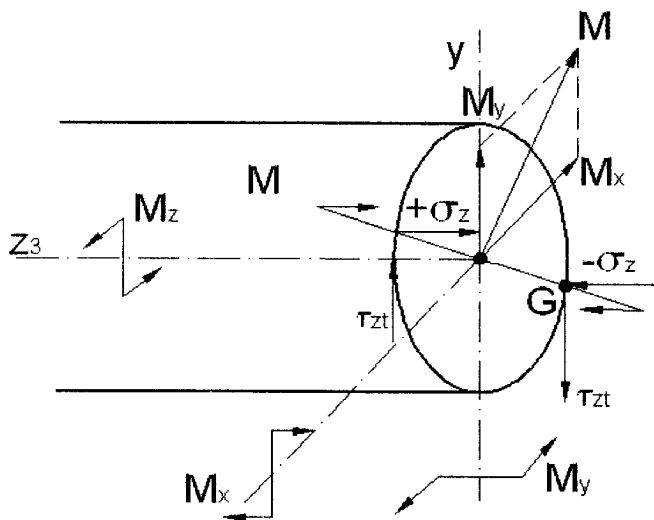


Рисунок 10.7 – Ділянка CD стержня з векторами згинальних і крутного моментів у перерізі

2. Епюра внутрішніх крутних моментів, що виникають у перерізах вала, зображена на рис. 10.8,в.

3. Сили в евольвентному прямозубому зачепленні:

- окружна $F = \frac{M}{D/2} = \frac{2M}{D}$:

$$F_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,8}{60 \cdot 10^{-3}} = 26,7 \text{ кН}; \quad F_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,8}{190 \cdot 10^{-3}} = 8,38 \text{ кН};$$

- радіальна $F_r = 0,4F$:

$$F_{r1} = 0,4 \cdot 26,7 = 10,7 \text{ кН}; \quad F_{r2} = 0,4 \cdot 8,38 = 3,34 \text{ кН}.$$

Всі ці зусилля і відповідні реакції опор зображені на розрахунковій схемі вала (рис. 10.8,б); просторову систему сил у зачепленні слід розглядати в двох площинах – вертикальній і горизонтальній.

4. Епюри згинальних моментів у вертикальній (M_x) і горизонтальній (M_y) площинах зображені на рис. 10.8,г, д.

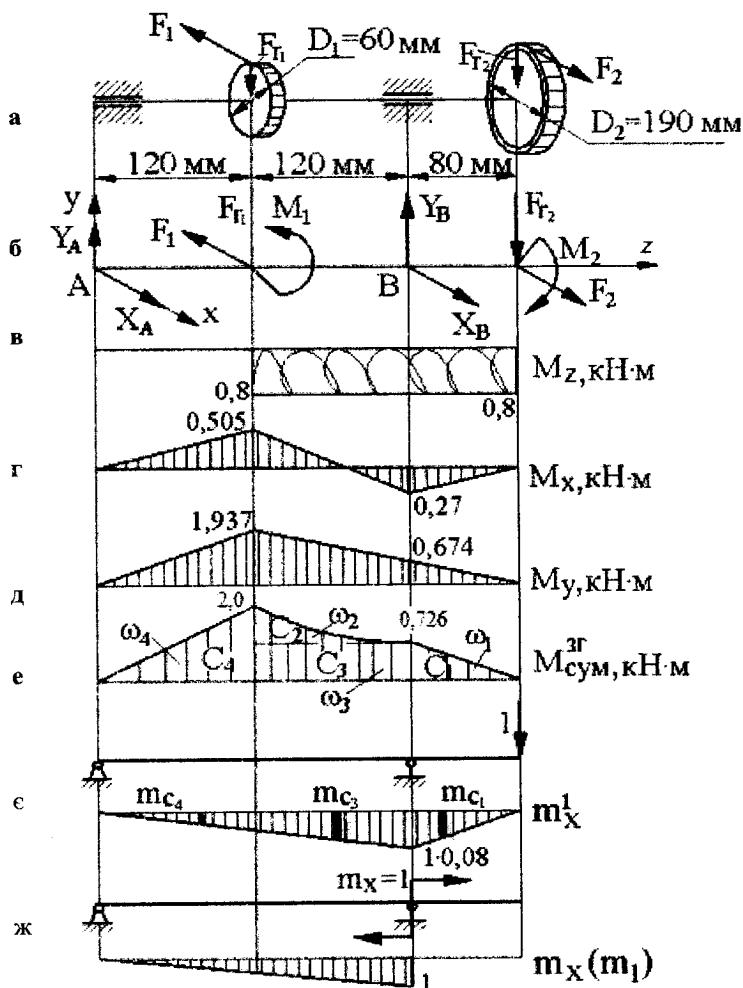


Рисунок 10.8 – До розрахунку вала прямозубої передачі

5. Для круглих перерізів вала згинальні моменти в двох площинах необхідно звести до сумарного, беручи геометричну суму векторів $\bar{M}_{\text{сум}} = \sqrt{\bar{M}_x^2 + \bar{M}_y^2}$. Вектори цього $\bar{M}_{\text{сум}}$ в різних перерізах по довжині вала мають довільні значення і напрямки, але умовно можна уявити їх епюру в одній площині $z - y$ (рис. 10.8,е).

Найбільший сумарний момент буде в перерізі вала під першим колесом D_1 :

$$M_{\Sigma, \text{сум}} = \sqrt{0,505^2 + 1,937^2} = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В перерізі біля опори В: $M_{\Sigma, \text{сум}} = \sqrt{0,27^2 + 0,674^2} = 0,726 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Епюра сумарних згинальних моментів побудована на рис. 10.8,е .

6. Оскільки вал зазнає згинання з крученням, напружений стан у небезпечних точках біля поверхні є складним, то необхідно визначати еквівалентні (рівнодіючі або ж зведені) моменти, користуючись гіпотезами міцності. Так, за четвертою (енергетичною) гіпотезою $M_{\text{екв}}$ в найбільш навантаженому перерізі буде:

$$M_{\text{екв}} = \sqrt{(M_{\Sigma, \text{сум}})^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{2^2 + 0,75 \cdot 0,8^2} = 2,12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

7. **Умова міцності** для круглих перерізів згідно гіпотез

$$\max \sigma_{\text{екв}} = \frac{\max M_{\text{екв}}}{W_x} \leq [\sigma]_{\text{розтяг}},$$

звідки можна визначити необхідний момент опору перерізу,

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{2,12 \cdot 10^{-3}}{160} = 1,32 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Виходячи з того, що $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$, можна визначити необхідний за умови міцності діаметр

$$\text{вала } \max d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,32 \cdot 10^{-5}}{3,14}} = 5,13 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 51,3 \text{ мм}.$$

Згідно нормативних діаметрів слід взяти $d = 55 \text{ мм}.$

8. **Перевірка умов жорсткості вала.**

8.1. **Найбільше лінійне переміщення (прогин) правого торця вала з колесом D_2 ,** визначене способом Верещагіна (рис. 10.8,е, є):

$$\begin{aligned} \max f = \sum \frac{\omega \cdot m_c}{E \cdot I_x} &= \frac{-1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 0,08 \cdot 0,76 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 0,08 + \frac{1}{3} \cdot 0,12 \cdot 1,274 \cdot \left(0,12 + \frac{1}{4} \cdot 0,12 \right) + 0,12 \cdot 0,726 \times \right. \\ &\times (0,12 + 0,06) \cdot \frac{0,08}{0,24} + \frac{1}{2} \cdot 0,12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,12 \cdot \frac{0,08}{0,24} \left. \right] = -\frac{0,0125}{EI_x}. \end{aligned}$$

$$\text{тут: } I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 0,05 \cdot (55 \cdot 10^{-3})^4 = 4,57 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4;$$

$$EI_x = 2 \cdot 10^8 \cdot 4,57 \cdot 10^{-7} = 91,4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$\max f = \frac{0,0125}{91,4} = 126 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,126 \text{ мм}.$$

Допустимий прогин згідно нормативів $[f] = l/300 = 240/300 = 0,8 \text{ мм}$. Порівнюючи його з розрахунковим, можна зробити висновок, що по прогину жорсткість гарантована.

8.2. Розрахунковий кут закручування вала на ділянці з $M_z = 0,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ за законом Гука

$$\theta_z = M_z / GI_p = 0,8 \cdot 10^{-3} / 8 \cdot 10^4 \cdot 9,14 \cdot 10^{-7} = 0,0109 \text{ рад/м},$$

$$\text{де } I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (55 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Допустима величина відносного кута закручування

$$[\theta_z] = 1,5 \text{ град/м} = 1,5 \cdot \pi / 180 = 0,0262 \text{ рад/м}.$$

Оскільки $\theta_z \leq [\theta_z]$, то – крутильна жорсткість забезпечена.

8.3. *Перевірка умови жорсткості по куту повороту перерізу вала в правій опорі В*, щоб гарантувати надійну роботу правого підшипника.

Кут нахилу зігнутої вісі вала $\theta_{x,B}$ у цьому місці можна визначити за способом Верещагіна, перемножуючи реальну епюру $M_{\text{зг,сум}}$ з одиничною, зумовленою одиничним моментом, прикладеним біля перерізу В (рис. 10.8,е, ж):

$$\theta_{x,B} = \frac{-1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,12 \cdot \frac{1}{0,24} + \frac{1}{3} \cdot 1,274 \cdot 0,12 \cdot \left(0,12 + \frac{1}{4} \cdot 0,12 \right) \cdot \frac{1}{0,24} + 0,726 \cdot 0,12 \cdot (0,12 + 0,06) \cdot \frac{1}{0,24} \right] = -\frac{0,137}{EI_x}.$$

$$\text{При } E = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа і } I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot (55 \cdot 10^{-3})^4}{64} = 4,57 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$$

$$\theta_x = \frac{0,137}{2 \cdot 10^8 \cdot 4,57 \cdot 10^{-7}} = 0,0015 \text{ рад}.$$

Допустимий нахил зігнутої вісі згідно нормативів – $[\theta_x] = 8 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,008 \text{ рад}$.

Таким чином, згинальна жорсткість по куту нахилу перерізу вала в підшипнику – достатня.

10.3. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Як перевірити міцність елемента при простому та при складному напруженому стані?
2. В яких випадках для перевірки міцності елемента змушені використовувати гіпотези міцності?
3. Чому при складному напруженому стані в точках вала при закручуванні можна перевіряти міцність без всіляких гіпотез міцності?
4. Що таке граничний напружений стан матеріалу, як його визначають та використовують для перевірки міцності при простому та складному напруженому стані?
5. Як використовують поняття рівнонебезпечних напружених станів для перевірки міцності при складному напруженому стані?
6. Поняття про еквівалентне напруження. Назвати відомі критерії міцності і пояснити як, виходячи з них, складають вирази для еквівалентних напружень (показати на прикладі гіпотези найбільших дотичних напружень).
7. Для яких матеріалів придатні третя та четверта гіпотези міцності?
8. Записати умову міцності за теорією Мора.
9. Чому запропоновано багато гіпотез міцності?
10. Для яких видів напруженого стану не прийнятні ні третя, ні четверта гіпотези і навіть теорія Мора?
11. Записати вирази для $\sigma_{екв}$ (згідно третьої гіпотези) через головні дотичні і нормальні напруження і через внутрішні силові фактори для круглих і некруглих перерізів.
12. Скільки критеріїв і гіпотез міцності запропоновано до цього часу? Назвіть останні з них.
13. Чому змушені користуватись гіпотезами міцності при складному напруженому стані? У чому їх загальна суть?
14. Чому та як виконують подвійне співставлення складному напруженому стані з одновісним напруженим станом при розтязі для перевірки міцності при складному напруженому стані?

11. НАПРУЖЕННЯ І ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Динамічним називають навантаження, яке частково або повністю спричинене силами інерції (при прискореному русі деталей, при обертанні їх та коливанні), а також при миттєвому навантаженні та ударах. Одні й ті ж елементи конструкцій і їх матеріал деформуються по-різному в залежності від того, як вони навантаженні: статично чи динамічно.

Особливість руйнування при динамічній дії сил – та, що пластичні матеріали, такі як маловуглецева сталь, при миттєвому (ударному) навантаженні демонструють крихкі властивості, тобто руйнуються без значних залишкових деформацій і при значно меншій енергії деформування. **Механічну характеристику матеріалу, що відображає його здатність чинити опір ударному навантаженню, називають ударною в'язкістю.** Ударна в'язкість характеризується площею діаграми напружень “ $\varepsilon - \sigma$ ” до руйнування. До речі, модулі пружності при динамічному навантаженні теж інші, ніж при статичному. Але в опорі матеріалів використовують наближену теорію удару, вважаючи, що і закон Гука виконується, і модулі пружності незмінні, і немає розсіювання енергії при ударі.

11.1. Розрахунки на міцність і жорсткість із врахуванням сил інерції рухомого тіла

Розглянемо приклад прискореного руху шахтної кліті при підніманні вантажу (рис. 11.1). Для запису рівнянь миттєвої рівноваги рухомого тіла прикладемо (згідно принципу Даламбера) до цього тіла силу інерції $I_n = m \cdot a$ протилежну по напрямку прискоренню. Маса вантажу $m = \frac{P}{g}$, де g – прискорення вільного падіння (прискорення сили земного тяжіння). Із рівняння рівноваги відсіченої нижньої частини каната з вантажем маємо

$$\sum Z = -P - I_n + N_z = 0; \quad N_z = P + \frac{P}{g} \cdot a = P \left(1 + \frac{a}{g} \right) = P \cdot K_{\text{дин}},$$

де $K_{дин} = \left(1 + \frac{a}{g}\right)$ – коефіцієнт динамічності при прискореному вертикальному підніманні вантажу.

Динамічне напруження при цьому буде

$$\sigma_{дин.} = \frac{N_{z,дин.}}{A} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_{ст.} \cdot K_{дин.},$$

а динамічне подовження каната (якщо закон Гука виконується) –

$$\Delta l_{дин.} = \Delta l_{ст.} \cdot K_{дин.}.$$

У разі прискореного опускання кліті коефіцієнт динамічності $K_{дин} = 1 - \frac{a}{g}$.

Але такі прості формули для динамічних напружень $\sigma_{дин}$ і деформацій $\varepsilon_{дин}$ можливі лише при вертикальному підніманні, коли прискорення збігається з напрямом сили ваги вантажу. В інших, більш загальних випадках динамічні напруження та деформації можна визначити у вигляді двох складових: одна з них – від статичної дії зовнішніх сил, а друга – від сил інерції (рис. 11.2):

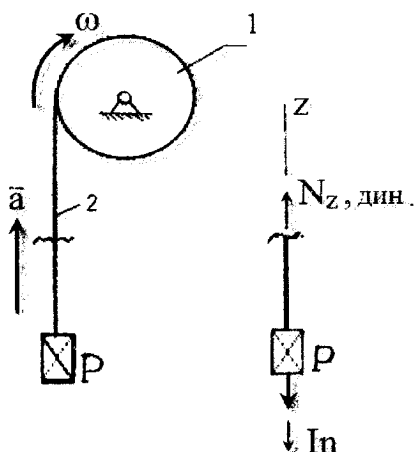


Рисунок 11.1 – Схема прискореного піднімання вантажу та визначення динамічного зусилля в канаті: 1 – барабан лебідки; 2 – канат, P – вантаж

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} + \sigma_{ин.}$$

$$\sigma_{дин} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{N_z}{A} = \frac{P \cdot l}{W_x} + \frac{m \cdot \omega^2 \cdot l}{A}$$

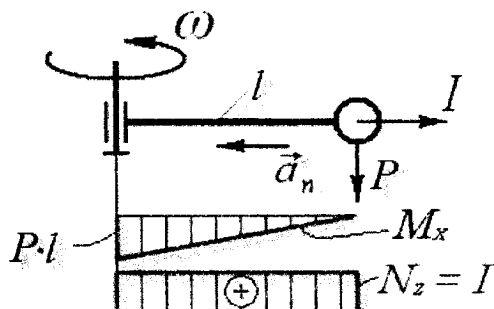


Рисунок 11.2 – Статичне згинання та динамічне розтягання при обертанні маси в горизонтальній площині

Спосіб визначення складової, спричиненої силами інерції, залежить від виду опору, від виду і напрямків динамічного навантаження (удар, коливання тощо).

Приклад 11.1. Визначити найбільше нормальне напруження, що виникає в поперечному перерізі A стержня довжиною ℓ , в кінці якого прикріплена кулька масою m_1 , що обертається з кутовою швидкістю ω навколо нерухомого шарніра III (рис. 11.3).

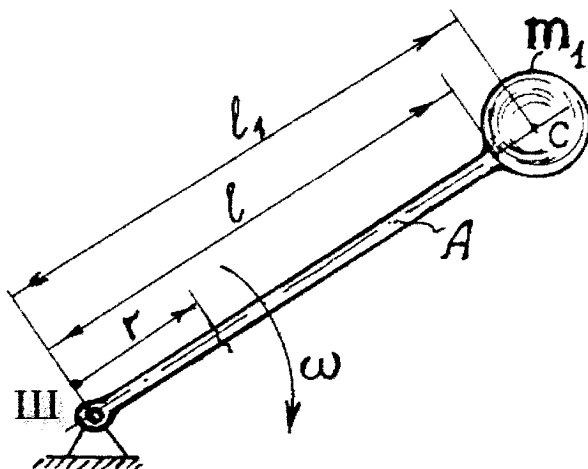


Рисунок 11.3 – До визначення напружень у стержні, що обертається з вантажем на кінці

Розв'язання.

1. Момент інерції тонкого довгого стержня відносно шарніра (при $r = 0$):

$$I_x = \frac{M \cdot l^2}{3}, \text{ де } M - \text{маса стержня довжиною } l;$$

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l, \text{ де } \rho - \text{щільність (питома маса) матеріалу стержня.}$$

2. Момент інерції кульки масою m_1 при її обертанні на радіусі l_1 відносно шарніра **III**:

$$I_k = m_1 \cdot a_r = m_1 \cdot \omega^2 \cdot l_1,$$

де l_1 – радіус-вектор центра ваги кульки.

3. Найбільша динамічна поздовжня сила виникне в перерізі стержня біля шарніра **III** (при $r = 0$), причому в той момент, коли кулька буде в найнижчому положенні і її вага (разом з вагою стержня) збігаються по напрямку з відцентровою силою інерції цих двох елементів системи:

$$N_{\text{дин}} = Q_{\text{ст}} + Q_k + I_{\text{ст}} + I_k = \rho \cdot A \cdot l + m_1 \cdot g + \frac{\rho \cdot A \cdot l^3 \cdot \omega^2}{3} + m_1 \cdot \omega^2 \cdot l_1.$$

4. Найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі стержня (біля шарніра, при $r = 0$) буде

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{A}.$$

11.2. Ударне навантаження вільно падаючим тілом

Для отримання формул міцності і жорсткості при такому навантаженні (бодай у наближеному вигляді) приймають такі припущення:

1. Прискорення і сила інерції тіла, що спричиняє удар, зростають, не змінюючи напрямку, від нуля до кінцевого значення. Тіло, що зазнає удар, має лише один ступінь вільності.
2. Тіло, що ударяє – абсолютно жорстке і не деформується; удар – пружний, але тіла після удару переміщуються разом (немає «відскоку»).
3. Деформації того тіла, що зазнало удару, – пружні; причому закон Гука – прийнятний.
4. Розсіюванням енергії при ударі нехтуємо.

Розглянемо найпростіший випадок ударного навантаження вертикальної колони вільно падаючим абсолютно твердим тілом (рис. 11.4).

Користуватися принципом Даламбера в цьому випадку неможливо, оскільки невідомо прискорення при деформуванні самої колони. А тому, користуючись законом збереження енергії, складемо рівняння балансу енергії системи «падаюче тіло – конструкція» для моменту найбільшого переміщення $\Delta l_{\text{дин}}$:

$$K_m = U_{\text{кол}}, \quad (11.1)$$

де K_m – кінематична енергія тіла, що падає, з врахуванням його переміщення (разом з динамічним укороченням колони на $\Delta l_{\text{дин}}$) аж до зупинки в кінці максимального переміщення точки удару:

$$K_m = Q(h + \Delta l_{\text{дин}}). \quad (11.2)$$

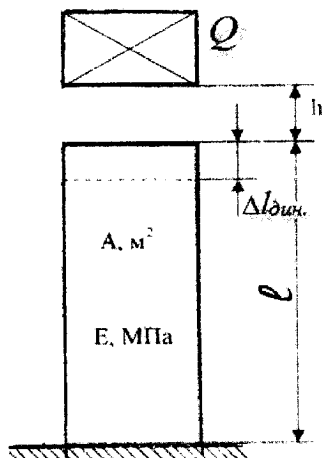


Рисунок 11.4 – Удар вільно падаючим абсолютно твердим тілом Q

Потенціальна енергія пружної деформації, що накопичиться при такому укороченні колони

$$U = 0,5 \cdot N_{\text{дин}} \cdot \Delta l_{\text{дин}}, \quad (11.3)$$

де $N_{\text{дин}}$ – найбільше внутрішнє зусилля при пружному деформуванні. Зрозуміло, що $N_{\text{дин}} \neq Q$, але яка вона? Невідомим є також і переміщення $\Delta l_{\text{дин}}$, а тому запишемо зв'язок між ними, вважаючи, що закон Гука виконується:

$$\Delta l_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}} \cdot l}{E \cdot A}, \text{ звідки } N_{\text{дин}} = \frac{\Delta l_{\text{дин}} \cdot E \cdot A}{l}.$$

Енергія деформування буде

$$U = \frac{\Delta l_{\text{дин}}^2 \cdot E \cdot A}{2l}. \quad (11.3')$$

Згідно балансу енергій порівняймо (11.2) і (11.3'):

$$Q(h + \Delta l_{\text{дин}}) = \Delta l_{\text{дин}}^2 \cdot 0,5 \cdot E \cdot A / l$$

і запишемо квадратне рівняння в найпростішому вигляді

$$\Delta l_{\text{дин}}^2 - 2 \cdot \frac{Q \cdot l}{E \cdot A} \cdot \Delta l_{\text{дин}} - \frac{2Q \cdot l \cdot h}{E \cdot A} = 0.$$

Оскільки вираз $\frac{Ql}{EA}$ являє собою укорочення (по Гуку) колони при статичному навантаженні силою, що дорівнює вазі Q тіла ($\Delta l_{\text{ст}}$), то укорочення при динамічному навантаженні визначається за формулою:

$$\Delta l_{\text{дин}} = \Delta l_{\text{ст}} + \sqrt{\Delta l_{\text{ст}}^2 + 2\Delta l_{\text{ст}} \cdot h}.$$

Вносячи статичне укорочення з-під кореня і за дужки, отримаємо

$$\Delta l_{\text{дин}} = \Delta l_{\text{ст}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} \right).$$

Вираз в дужках можна вважати коефіцієнтом динамічності при ударі вільно падаючим тілом. Проаналізуємо цей вираз.

При $h=0$, тобто при падінні тіла з нульової висоти (або ж при так званому миттєвому прикладенні сили) $K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1} = 2$. Пружні деформації частіше всього набагато менші ніж h , а тому можна брати

$$K_{\text{дин}} \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}}.$$

Як бачимо, чим більший знаменник, тим менший $K_{\text{дин}}$. Це означає, що більш піддатлива деформуванню (менш жорстка) система є міцнішою при ударах і, до речі, — при коливаннях теж. Тут бачимо зворотну сторону збільшення жорсткості систем.

Примітки.

1. Нехтуємо власною масою того тіла, що деформується. Так можна поступати лише в наближених розрахунках.
2. Наведемо значення коефіцієнтів динамічності ще для двох випадків при нехтуванні масою конструкції:
 - 2.1. При вертикальному ударі з розмаху (а не з падінням)

$$K_{\text{дин}} = \pm 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \cdot \Delta_{\text{ст}}}},$$

де V – швидкість ударного тіла в момент дотику;

g – прискорення сили земного тяжіння;

$\Delta_{\text{ст}}$ – переміщення точки удару при статичній дії сили.

Знак мінус ставлять при ударі знизу вгору.

2.2. При горизонтальному ударі $K_{\text{дин}} = \frac{V}{\sqrt{g \cdot \Delta_{\text{ст}}}}$.

2.3. У загальному випадку, коли між вертикально і напрямком удару кут

α – гострий, то $K_{\text{дин}} = \pm \cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{V^2}{g \cdot \Delta_{\text{ст}} \left(1 + \beta \frac{m_{\kappa}}{m}\right)}}$,

де β – коефіцієнт приведення маси конструкції до точки удару; m – маса падаючого тіла; m_{κ} – маса конструкції (якщо масу конструкції можна вважати зосередженою в точці удару, то $\beta = 1$). Точніше можна приймати так:

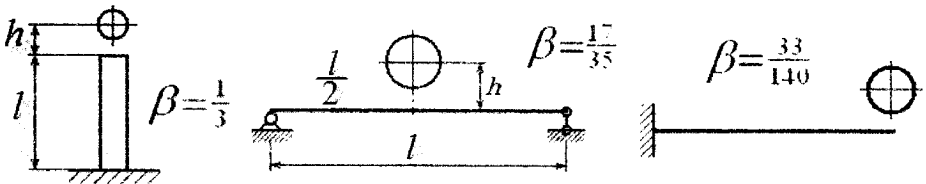


Рисунок 11.5 – До вибору коефіцієнта приведення маси конструкції

11.3. Скручувальний удар обертовим тілом

При необхідності екстренного гальмування для негайної (миттєвої) зупинки мас, що обертаються (рис. 11.6), динамічні напруження і кути закручування можна визначити з балансу енергій – кінетичної обертання маси

$K_{\text{кін}} = \frac{I_m \cdot \omega^2}{2}$ і потенціальної енергії закручування вала при раптовому

гальмуванні шківів:

$$U_o = \frac{M_{\partialин} \cdot \varphi_{\partialин}}{2} = \frac{M_{\partialин}^2 \cdot l}{2GI_p}$$

Момент інерції обертового тіла I_m залежить від його форми – для нетовстих

круглих дисків і валів радіусом R і масою m $I_{m,z} = \frac{m \cdot R^2}{2}$.

Із балансу енергій $K_{кин} = U_o$ можна визначити динамічний момент, що закручує вал при раптовому гальмуванні (якщо не враховувати масу вала):

$$M_{\partialин} = \omega \cdot \sqrt{\frac{GI_p \cdot I_m}{l}}, \text{ а кут закручування вала при цьому } \varphi_{\partialин} = \sqrt{2 \cdot \delta \cdot K_{кин}},$$

де δ – кут повороту від одиничного скручувального момента статично прикладеного в місці кріплення маховика. До речі, скручувальний момент при цьому можна визначити і так:

$$M_{\partialин} = \sqrt{\frac{2K_{кин}}{\delta}}.$$

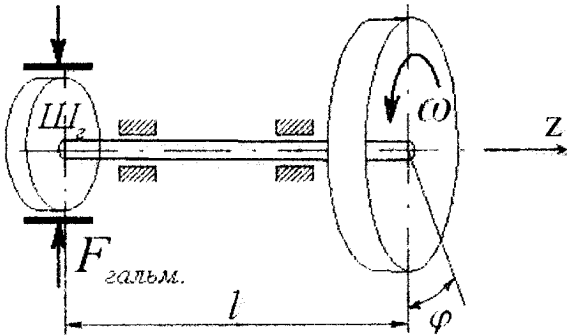


Рисунок 11.6 – Обертове тіло і раптове гальмування

11.4. Приклад розрахунку балки на ударне навантаження

Задана схема балки з двотавра № 40 на двох шарнірних опорах (рис. 11.7,а): довжина прольоту $l = 3$ м, консолі $a = 0,9$ м; вантаж ($F = 1,8$ кН) падає з висоти $h = 0,11$ м; осьові моменти інерції і опору двотавра №40: $I_x = 18930$ см⁴, $W_x = 947$ см³.

Необхідно:

- знайти найбільше напруження і перевірити міцність балки, якщо допустиме напруження становить $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- визначити найбільший прогин і перевірити жорсткість балки, якщо допустимий прогин балки становить $[f] = 1/100$;
- знайти найбільше нормальне напруження і прогин балки у разі перетворення опори A в пружну опору шляхом постановки там пружини з жорсткістю c ;
- порівняти найбільші нормальні напруження та прогини для указаних двох варіантів обпирання балки і визначити ефективність встановлення пружної опори для пом'якшення результатів ударного навантаження балки.

•

Розв'язання.

1. Оскільки для такого випадку динамічного навантаження можна визначити коефіцієнт динамічності $K_{дин}$, то напруження і переміщення можна визначити спочатку при (умовно) статичній дії вантажу, збільшуючи їх в подальшому в $K_{дин}$ раз:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot K_{дин}; \quad \Delta_{дин} = \Delta_{ст} \cdot K_{дин}.$$

1.1. Умове статичне навантаження силою $F_{ст} = 1,8 \text{ кН}$ і зумовлена нею реальна епюра згинальних моментів зображені на рис. 11.7,б, в.

1.2. Найбільше статичне напруження в найбільш навантаженому перерізі B буде

$$\sigma_{ст} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{1,62}{947 \cdot 10^{-6}} = 1,71 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 1,71 \text{ МПа}.$$

1.3. Коефіцієнт динамічності при ударі вільно падаючим тілом

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}, \text{ де } \Delta_{ст} - \text{переміщення того перерізу, над яким впаде}$$

вантаж при умові його статичної дії (без падіння, прикладеного статично рис. 11.7,б).

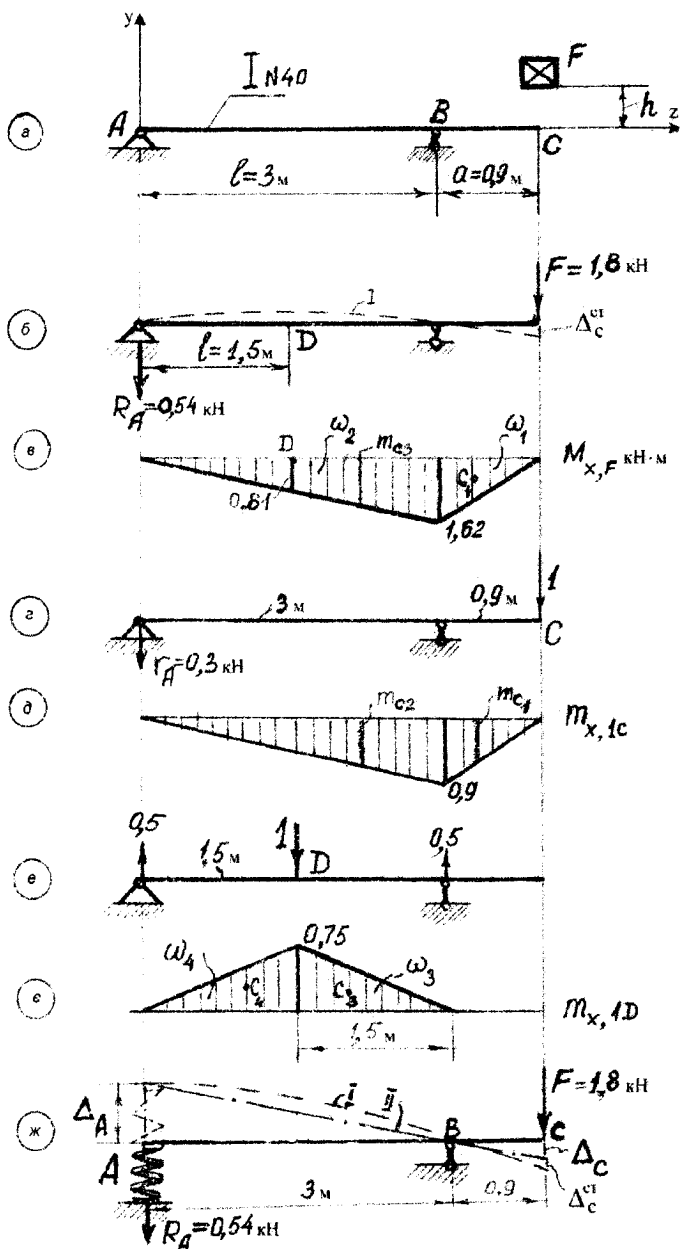


Рисунок 11.7 – Схеми навантаження балки, деформування її поздовжньої вісі та епюри згинальних моментів

У нашому випадку це – прогин перерізу C , для визначення якого за способом Верещагіна слід прикласти одиничну силу 1 (рис. 11.7, г), побудувати відповідну їй одиничну епюру (рис. 11.7, д) та перемножити її з реальною (рис. 11.7, в):

$$\begin{aligned}\Delta_C^{cm} &= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 1,62 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,9 + \frac{1}{2} \cdot 1,62 \cdot 0,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,9 \right] = \\ &= \frac{1,895}{2 \cdot 10^8 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м.}\end{aligned}$$

При такому переміщенні перерізу C значення коефіцієнта динамічності буде

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,11}{5 \cdot 10^{-5}}} = 67,3, \quad \text{а найбільше динамічне напруження}$$

$\sigma_{дин} = 1,71 \cdot 67,3 = 115 \text{ МПа}$, і оскільки воно менше допустимого ($[\sigma] = 160 \text{ МПа}$), то умова міцності виконується.

2. Для пошуку найбільшого статичного і динамічного переміщення слід визначити прогини двох характерних перерізів цієї балки – вільного торця C консолі і посередині прольоту. Так, приклавши біля середнього перерізу D одиничну силу і побудувавши відповідну одиничну епюру (рис. 11.7, е, є), можна отримати

$$\begin{aligned}\Delta_D^{cm} &= \frac{1}{EI_x} \left[(-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,81 + \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1,5 \cdot \left(1,5 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) \cdot \frac{1,62}{3} \right] = \\ &= \frac{0,911}{2 \cdot 10^8 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = -2,4 \cdot 10^{-5} \text{ м.}\end{aligned}$$

Порівнявши статичні прогини перерізів C і D (більшим є прогин

$\Delta_D^{cm} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$), можна перевірити умову жорсткості:

$$\Delta_{дин}^d = \Delta_D^{cm} \cdot K_{дин} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

допустимий прогин $[f] = l/100 = 3/100 = 30 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Оскільки найбільший прогин менше допустимого, то умова жорсткості виконується.

3. Визначимо найбільші напруження і переміщення для випадку, коли на лівій опорі A встановлена пружина з поздовжньою жорсткістю $c = 50 \text{ кН/м}$. При статичній дії вантажу F завдяки подовженню пружини Δ_A (рис. 11.7,ж)

$$\Delta_A = \frac{R_A}{c} = \frac{0,54}{50} = 1,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

переріз C балки при її повороті відносно шарніра B отримає додаткове переміщення:

$$\Delta_C = \frac{0,9}{3} \cdot \Delta_A = 3,24 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

3.1. Повна величина статичного переміщення перерізу C з вантажем (з брахуванням вигину балки) стане

$$\Delta_C^{\text{сум}} = \Delta_C + \Delta_C^{\text{см}} = 3,24 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-5} = 3,29 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Коефіцієнт динамічності в цьому випадку буде таким:

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,11}{3,29 \cdot 10^{-3}}} = 9,2.$$

Як бачимо, завдяки пружині **коефіцієнт динамічності $K_{\text{дин}}$ зменшиться в $67,3/9,2 = 7,3$ рази.**

3.2. Найбільше напруження в цьому випадку

$$\sigma_{\text{дин}} = 1,71 \cdot 9,2 = 15,7 \text{ МПа}.$$

3.3. Найбільше сумарне переміщення (завдяки повороту балки при подовженні пружини) отримає тепер переріз A :

$$\Delta_A^{\text{дин}} = 1,08 \cdot 10^{-2} \cdot 9,2 = 9,94 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

що більше допустимого прогину ($[f] = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$).

Щоб виконати умову жорсткості, слід встановити пружину більшої поздовжньої жорсткості і повторити розрахунки з такою пружиною.

11.5. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Які навантаження слід вважати динамічними? Чим вони зумовлені?
2. Особливості руйнування матеріалів при динамічних навантаженнях.
3. Яка механічна характеристика міцності матеріалів при ударі?
4. Записати загальні вирази для динамічних напружень і деформацій з використанням коефіцієнтів динамічності. Записати вирази для цих коефіцієнтів для випадків, коли їх можна визначити.
5. На основі якого принципу та законів можна визначити динамічні напруження і переміщення?
6. Як впливає жорсткість елементів на їх динамічну міцність?
7. Яким чином можна значно зменшити динамічні напруження?

12. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЦИКЛІЧНО-ЗМІННИХ НАПРУЖЕННЯХ

12.1. Основні поняття та визначення

У багатьох елементах машин і механізмів напруження в процесі експлуатації циклічно змінюються у часі. Причому, це має місце як при змінному навантаженні (у відповідності з діаграмами роботи механізму), так і при постійних зовнішніх силах (при обертанні валів, що навантажені силами згинання).

Сукупність послідовних значень напружень *протягом одного періоду* T їх змінювання називають **циклом напружень** (рис. 12.1).

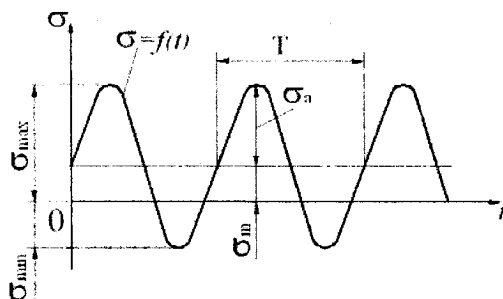


Рисунок 12.1 – Періодичне змінювання напружень

Цикл зміни напружень характеризується чотирма напруженнями:

- максимальним $\sigma_{\max}$;
- мінімальним $\sigma_{\min}$;
- середнім $\sigma_m = 0,5 \cdot (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$;
- амплітудним $\sigma_a = 0,5 \cdot (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$

та коефіцієнтом асиметрії циклу $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$.

Види циклів та значення коефіцієнтів асиметрії циклів наведені у табл. 12.1. Загальними є **асиметричні цикли**, частинними – **симетричний** ($R = -1$) та **пульсуючі або віднульові** ($R = 0$ і $R = -\infty$). При **постійному напруженні** $R = 1$.

Головною особливістю (та неприємною несподіванкою) руйнування деталей при циклічно-змінних напруженнях є те, що воно наступає раптово при значно меншому навантаженні ніж те, що могла б витримати деталь у разі його постійної статичної дії. Відбувається це внаслідок накопичення ушкоджень у матеріалі деталі при повторно-змінних напруженнях, утворення мікротріщин і їх поступового розвитку аж до руйнування.

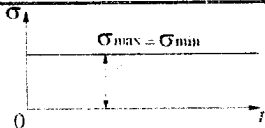
Процес накопичення пошкоджень в матеріалі, що веде до його руйнування, називають втомою матеріалу. Здатність чинити опір втомі називають витривалістю.

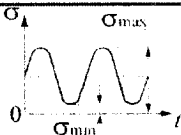
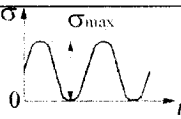
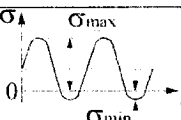
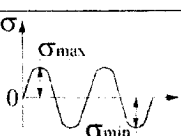
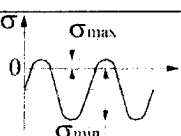
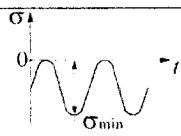
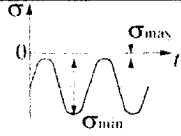
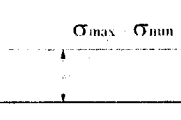
Характеристики витривалості матеріалів визначають відповідно до ГОСТ 25.502–79 випробуванням стандартних зразків на спеціальних машинах; найчастіше характеристики витривалості визначають в умовах симетричних циклів ($R=1$) при згинанні зразків, що обертаються. **Величину максимального напруження циклу $\sigma_{\max}$, при якому зразок витримує, не руйнуючись, базове число циклів навантаження ($N_b=10^7 \dots 10^8$), називають границею витривалості.**

Про випробування на витривалість в умовах симетричних та асиметричних циклів, побудову кривих витривалості та діаграм граничних амплітуд, графоаналітичне визначення запасу витривалості слід обов'язково прочитати в підручниках [3,6] або в довідниках [4-5]. Зазначимо, що методи випробування на витривалість потребують дуже багато часу, багато дорогих зразків, складного обладнання та витрат на енергію.

Перспективними є методи прискорених випробувань на витривалість.

Таблиця 12.1 – Види циклів та значення коефіцієнтів асиметрії циклу

№ з/п	Графік залежності	Вид циклу напружень	Напруження			R
			$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$	σ_m	σ_a	
1		Постійний додатний	$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} > 0$	$\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$	0	+1

№ з/п	Графік залежності	Вид циклу напружень	Напруження			R
			$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$	σ_m	σ_a	
2		Асиметричний знакопостійний додатний	$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} > 0$	> 0	$\neq 0$	$0 < R < 1$
3		Віднульовий додатний	$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} = 0$	$0,5 \sigma_{\max}$	$0,5 \sigma_{\max}$	0
4		Асиметричний знакоперемінний додатний	$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} < 0$	> 0	$\neq 0$	$-1 < R < 0$
5		Симетричний	$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} < 0$ $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$	0	$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$	-1
6		Асиметричний знакоперемінний від'ємний	$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} < 0$	< 0	$\neq 0$	$-\infty < R < -1$
7		Віднульовий від'ємний	$\sigma_{\max} = 0$ $\sigma_{\min} < 0$	$0,5 \sigma_{\min} $	$0,5 \sigma_{\min} $	$-\infty$
8		Асиметричний знакопостійний від'ємний	$\sigma_{\max} < 0$ $\sigma_{\min} < 0$	< 0	$\neq 0$	$1 < R < +\infty$
9		Постійний від'ємний	$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} < 0$	$\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$	0	+1

Для не дуже відповідальних розрахунків границю витривалості для чорних металів можна наближено брати як частину від границі міцності за такими емпіричними співвідношеннями [4]:

- при розтяганні-стисканні $\sigma_{-1}^{(p)} = 0,28\sigma_B$;
- при згинанні $\sigma_{-1} = 0,4\sigma_B$;
- при крученні $\tau_{-1} = 0,22\sigma_B$;

для кольорових металів $\sigma_{-1} = (0,24 \dots 0,50) \sigma_B$.

Індекс у позначенні границь витривалості – це є коефіцієнт асиметрії циклів при випробуванні зразків.

На витривалість впливають не тільки властивості матеріалу, а й такі основні фактори, як концентрація напружень у місцях різкої зміни форми деталі, якість її поверхні та розміри. Ось чому об'єктивно існує відмінність границі витривалості матеріалу гладенького полірованого зразка від границі витривалості деталі того ж матеріалу.

12.2. Основні фактори, що впливають на границю витривалості

12.2.1. Вплив концентрації напружень

У місцях різкої зміни форми деталі внаслідок наявності галтелі, виточки, отвору, шпоночної канавки (рис. 12.2), надрізів закон розподілу напружень є складним. Наприклад, при розтяганні полоси з невеликим отвором діаметром d (рис. 12.3) закон рівномірного розподілу напружень порушується: біля отвору з'являється пік місцевих напружень, має місце так звана **концентрація напружень**. *При повторно-змінних напруженнях концентрація напружень знижує границю витривалості.*

Основним показником місцевих напружень є теоретичний коефіцієнт концентрації напружень:

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}},$$

тут $\sigma_{\max}$ – найбільше місцеве напруження;

$\sigma_{\text{ном}}$ – номінальне напруження – це те напруження, яке визначається за формулами опору матеріалів без врахування концентратора.

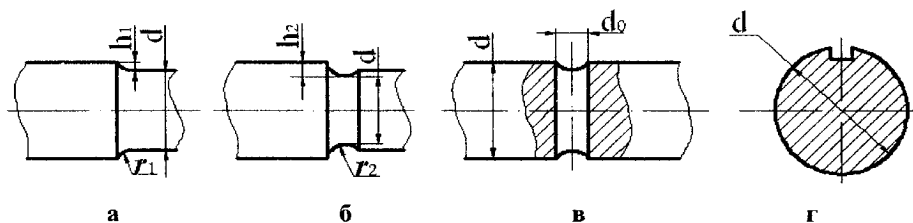


Рисунок 12.2 – Типи концентраторів напружень: а – галтель; б – виточка; в – поперечний отвір; г – шпоночна канавка

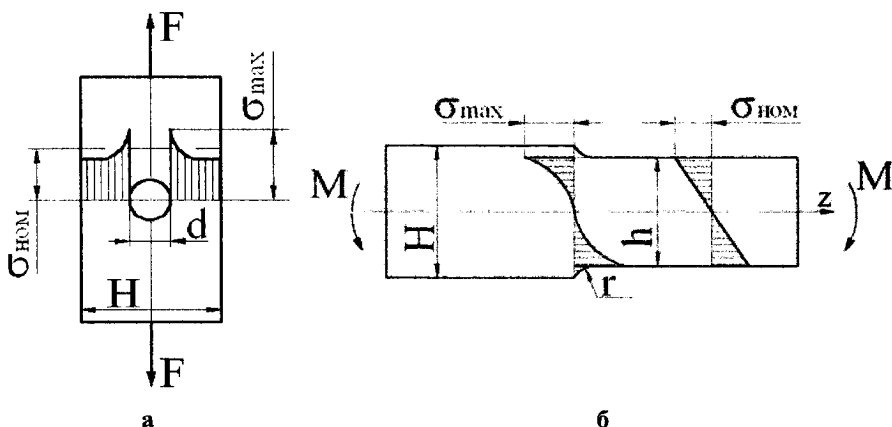


Рисунок 12.3 – Спрощені епюри розподілу нормальних напружень при розтяганні (а) та згинанні (б): σ_{max} – максимальне місцеве напруження; $\sigma_{\text{ном}}$ – номінальне напруження

Величину місцевих напружень σ_{max} в залежності від типу концентратора, його відносних розмірів визначають за допомогою методів теорії пружності або експериментально. Дані про теоретичні концентратори напружень наведені у вигляді таблиць і графіків у довідниках. Але *теоретичні коефіцієнти концентрації напружень не враховують механічні властивості матеріалів. Вплив цих і інших факторів визначають експериментально і враховують у розрахунках на витривалість за допомогою ефективних коефіцієнтів концентрації напружень:*

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}; \quad K_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}},$$

тут σ_{-1} , τ_{-1} – границя витривалості гладеньких полірованих зразків при симетричному циклі відповідно нормальних і дотичних напружень;

σ_{-1K} , τ_{-1K} – границя витривалості зразків з такими ж концентраторами напружень, які є в реальній деталі.

У табл. 12.2 [12] наведені значення ефективних коефіцієнтів напружень для чотирьох типів концентраторів напружень (див. рис. 12.2).

Ефективні коефіцієнти концентрації напружень мають менші значення, ніж коефіцієнти концентрації α_{σ} , що визначаються теоретично. Між ефективним і теоретичним коефіцієнтами напружень встановлена залежність:

Таблиця 12.2 – Значення ефективних коефіцієнтів концентрації напружень

Характеристики концентратора і матеріалу	Ефективні коефіцієнти концентрації напружень							
	Галтель							
h_1/r_1	2			3			5	
r_1/d	0,01	0,02	0,03	0,01	0,02	0,03	0,01	0,02
$\sigma_B, \text{МПа}$	K_{σ}							
800	1,62	1,96	1,99	2,03	2,13	2,10	2,23	2,30
900	1,64	2,01	2,05	2,08	2,19	2,16	2,28	2,38
1000	1,67	2,06	2,11	2,12	2,25	2,23	2,34	2,45
	K_{τ}							
800	1,43	1,61	1,61	1,64	1,72	1,74	2,37	2,22
900	1,44	1,62	1,64	1,66	1,75	1,77	2,42	2,26
1000	1,46	1,65	1,66	1,68	1,79	1,81	2,43	2,31
Виточка								
r_2/d	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,02
h_2/r_2	1		2		3		K_{τ}	
$\sigma_B, \text{МПа}$	K_{σ}							
800	2,37	2,20	2,56	2,45	2,73	2,56	2,00	1,86
900	2,39	2,28	2,63	2,51	2,81	2,63	2,10	1,94
1000	2,45	2,35	2,70	2,58	2,90	2,70	2,20	2,03
Отвір							Шпоночна канавка	
d_0/d	0,05...0,1		0,15...0,25		0,05...0,25		K_{σ}	K_{τ}
$\sigma_B, \text{МПа}$	K_{σ}			K_{τ}				
700	2,00		1,8		1,75		1,90	1,70
900	2,15		1,9		1,90		2,15	2,05
1000	2,13		2,1		2,00		2,30	2,20

$$K_{\sigma} = 1 + q_{\sigma}(\alpha_{\sigma} - 1),$$

де q_{σ} – коефіцієнт чутливості металу до концентрації напружень. Для конструкційних сталей $q_{\sigma} = 0,6...0,8$, причому, чим вища міцність сталі, тим вища її чутливість до концентрації напружень. Для високоміцних легованих сталей величина q_{σ} близька до одиниці. Тому застосування високоміцних легованих сталей при циклічно-змінних напруженнях не завжди виявляється доцільним.

12.2.2. Вплив розмірів деталі

Величина границі витривалості залежить також від розмірів деталі. Із збільшенням розмірів перерізів границі витривалості знижуються, що пояснюється впливом таких факторів: більшою неоднорідністю механічних властивостей у більших об'ємах матеріалу та напруженістю різних зерен у зв'язку з полікристалічною структурою металу і як наслідок підвищення імовірності більш раннього руйнування від втоми зі збільшенням розмірів деталі. Тому в розрахунках деталей на втомну міцність потрібно враховувати **масштабний фактор**. *Відношення границі витривалості деталі σ_{-1d} до границі витривалості лабораторного зразка σ_{-1} діаметром $d_0 = 7,5...10$ мм називають коефіцієнтом масштабного фактора або коефіцієнтом впливу розмірів деталі на витривалість і позначають стосовно до нормальних та дотичних напружень так:*

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}; \quad \varepsilon_{\tau} = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}}.$$

При визначенні коефіцієнтів ε_{σ} , ε_{τ} якості поверхні деталі і зразків мають бути однаковими.

На рис. 12.4 [3] наведені графіки залежності коефіцієнта впливу на границю витривалості діаметра вала d , побудованих на основі експериментів для випадку згинання та кручення.

Аналіз графіків 1...4 (рис. 12.4) показує, що вплив розмірів деталей на границю витривалості проявляється значно більше знову ж таки для легованих сталей, особливо для сталей при високому ступені концентрації напружень.

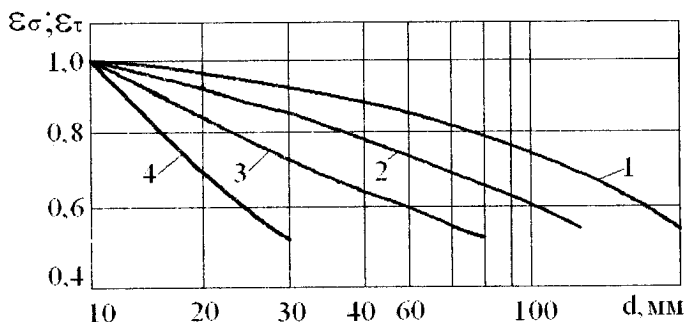


Рисунок 12.4 – Графіки коефіцієнтів впливу розмірів деталі:

- 1 – вуглецева сталь без концентратора напружень;
- 2 – легована сталь без концентратора напружень та вуглецева сталь при наявності помірної концентрації напружень;
- 3 – легована сталь при наявності концентрації напружень;
- 4 – сталь при високому ступені концентрації напружень

12.2.3. Вплив якості поверхні деталі

Поверхня деталі завжди має дефекти, пов'язані з якістю механічної та термохімічної обробки. Наявність дефектів на поверхні зменшує границю витривалості деталі. Для чутливих до концентрації напружень матеріалів вплив якості поверхні буде більш помітним. До того ж при згинанні та крученні поверхневі шари деталі є найбільш напруженими (див. розділи 5...6). У зв'язку з цим зростає необхідність якісної обробки деталей та її врахування в розрахунках на витривалість.

Вплив якості обробленої поверхні на границю витривалості оцінюється коефіцієнтом β , що встановлюють з випробувань зразків:

$$\beta = \frac{\sigma_{-II}}{\sigma_{-I}},$$

тут σ_{-II} – границя витривалості випробуваного зразка з певною обробкою поверхні;

σ_{-I} – границя витривалості полірованого зразка.

На графіках рис.12.5 [4] наведені залежності коефіцієнта β для різних видів обробки поверхні. Видно, що з погіршенням якості обробки поверхні знижується границя витривалості.

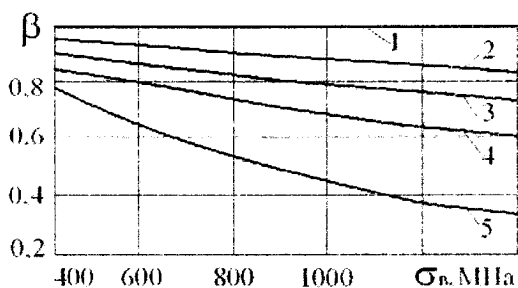


Рисунок 12.5 – Графіки коефіцієнта β впливу обробки поверхні деталі:
 1 – поліровка; 2 – шліфровка; 3 – тонка обточка; 4 – груба обточка;
 5 – наявність на поверхні окалини або корозії

У розрахункових формулах на витривалість вплив зазначених вище трьох факторів враховують за допомогою відповідних коефіцієнтів, і оскільки вони взаємопов'язані (особливо концентрація напружень і якість поверхні), то їх об'єднують таким чином:

$$K_{\sigma D} = \frac{K_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma} \cdot \beta}; \quad K_{\tau D} = \frac{K_{\tau}}{\epsilon_{\tau} \cdot \beta}, \quad (12.1)$$

тут $K_{\sigma D}$, $K_{\tau D}$ – так звані ефективні коефіцієнти концентрації напружень деталі.

12.3. Розрахунок на циклічну міцність. Коефіцієнти запасу витривалості

У загальному комплексі проектування, як правило, спочатку виконують розрахунок деталі на статичну міцність, коли визначають її необхідні розміри при постійних напруженнях. Розрахунок на витривалість деталі виконують як перевірний, порівнюючи розрахунковий запас витривалості з нормативним

$$n \geq n_{\text{норм}}, \quad (12.2)$$

який встановлено в таких межах [4]:

- при підвищеній точності визначення напружень, однорідності матеріалу та якісній обробці поверхні, $n_{\text{норм}}=1,3 \dots 1,4$;
- для звичайної точності розрахунку, при помірній якості матеріалу, $n_{\text{норм}}=1,4 \dots 1,7$;

- при зниженій точності розрахунку, а також зниженій якості матеріалу, особливо для литва та деталей великих розмірів, $n_{\text{норм}}=1,7...3,0$.

Формула для розрахункового запасу витривалості при складному напруженому стані, що зокрема має місце при сумісному крученні та згинанні, має такий вигляд:

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}, \quad (12.3)$$

де n_{σ} і n_{τ} – запаси витривалості, визначені з відокремленим врахуванням відповідно тільки нормальних σ і тільки дотичних τ напружень. Ці частинні коефіцієнти запасу в умовах асиметричних циклів можна визначити за формулами, отриманими графоаналітичним методом зі схематизованих діаграм граничних амплітуд:

- при згинанні

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\alpha} \cdot K_{\sigma D} + \sigma_m \cdot \psi_{\sigma}}; \quad (12.4)$$

- при розтяганні-стисканні

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}^{(p)}}{\sigma_{\alpha} \cdot K_{\sigma D} + \sigma_m \cdot \psi_{\sigma}}; \quad (12.5)$$

- при крученні

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{\alpha} \cdot K_{\tau D} + \tau_m \cdot \psi_{\tau}}, \quad (12.6)$$

де σ_{-1} , $\sigma_{-1}^{(p)}$ і τ_{-1} – границі витривалості гладеньких полірованих зразків при симетричних циклах;

σ_{α} , σ_m та τ_{α} , τ_m – розрахункові (номінальні) значення амплітудних і середніх нормальних і дотичних напружень;

ψ_{σ} , ψ_{τ} – коефіцієнти впливу асиметрії циклу зміни напружень на витривалість, чисельні значення яких в залежності від границь міцності σ_{σ} матеріалів наведені в табл. 12.3 [4].

Таблиця 12.3 – Коефіцієнти впливу асиметрії циклів

σ_B , МПа	350...550	520...750	700...1000	1000...1200	1200...1400
ψ_σ	0	0,05	0,10	0,20	0,25
ψ_τ	0	0	0,05	0,10	0,15

Приклад 12.1. Навантаження вала (рис. 12.6) здійснюється шляхом прикладання згинальних та крутних моментів. Перевірити його витривалісну міцність там, де є концентратор напружень у вигляді галтелі (див. рис. 12.2,а) з характеристиками: $h_1 / r_1 = 2$; $r_1 / d = 0,01$ (тут h_1 – різниця радіусів вала біля галтелі; r_1 – радіус галтелі). Діаметр вала $d = 50$ мм; матеріал – легована сталь 30ХМ з границею міцності матеріалу $\sigma_B = 950$ МПа, границею витривалості на згинання при симетричному циклі $\sigma_{-1} = 310$ МПа та границею витривалості на кручення при симетричному циклі $\tau_{-1} = 230$ МПа. Обробка поверхні – груба обточка. Внаслідок зазначеного циклічного навантаження в розрахунковому перерізі виникає згинальний момент $M_{x\max} = 0,5$ кН·м, який змінюється з коефіцієнтом асиметрії $R_\sigma = -0,25$, та крутний момент $M_{\tau\max} = 1,2$ кН·м – з коефіцієнтом асиметрії $R_\tau = -0,20$. Нормативний запас міцності $n_{\text{норм}} = 1,7$.

Розв’язання.

1. Обчислюємо нормальні і дотичні напруження, що виникають при заданих асиметричних циклах зміни навантаження.

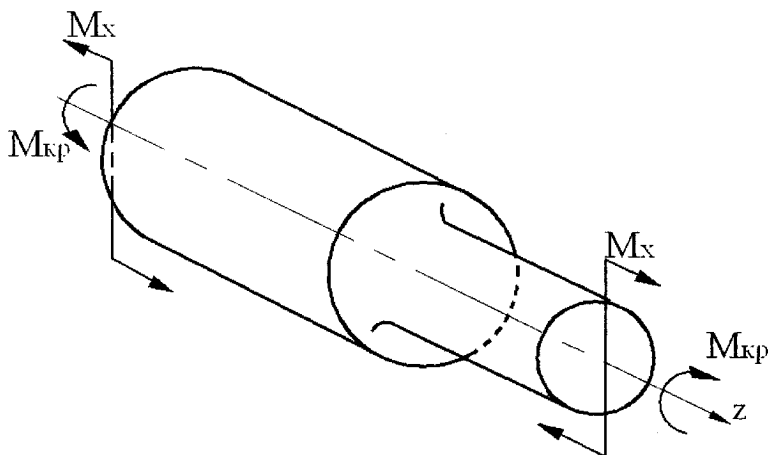


Рисунок 12.6 – Схема навантаження вала

Максимальні напруження циклів:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} = \frac{0,5 \cdot 32}{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3} = 40,8 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 40,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\varphi \max}}{W_p} = \frac{1,2 \cdot 16}{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3} = 48,9 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 48,9 \text{ МПа}.$$

Мінімальні напруження циклів:

$$\sigma_{\min} = R_{\sigma} \cdot \sigma_{\max} = -0,25 \cdot 40,8 = -10,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\min} = R_{\tau} \cdot \tau_{\max} = -0,2 \cdot 48,9 = -9,8 \text{ МПа}.$$

Середні напруження циклів:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{40,8 - 10,2}{2} = 15,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{48,9 - 9,8}{2} = 19,6 \text{ МПа}.$$

Амплітудні напруження циклів:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{40,8 + 10,2}{2} = 25,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{48,9 + 9,8}{2} = 29,3 \text{ МПа}.$$

2. Визначаємо коефіцієнти впливу основних факторів на витривалість:

- коефіцієнти впливу концентрації напружень – за табл. 12.2 в залежності від типу і характеристик концентратора «галтель» та границі міцності матеріалу ($\sigma_B = 950 \text{ МПа}$):

$$K_{\sigma} = 1,65; \quad K_{\tau} = 1,45;$$

- коефіцієнти впливу розмірів – за графіками (рис. 12.4) в залежності від діаметра вала ($d = 50 \text{ мм}$), марки сталі (30ХМ) та наявності концентратора напружень:

$$\epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\tau} = 0,58;$$

- коефіцієнт впливу обробки поверхні вала – за графіками (рис. 12.5) при грубій обточці та границі міцності матеріалу $\sigma_B = 950 \text{ МПа}$:

$$\beta_{\sigma} = \beta_{\tau} = \beta = 0,70;$$

- коефіцієнт впливу асиметрії циклів – за табл. 12.3:

$$\psi_{\sigma} = 0,10; \quad \psi_{\tau} = 0,05.$$

3. Обчислюємо коефіцієнти загального впливу трьох основних факторів на витривалість вала – за формулами (12.1):

$$K_{\sigma D} = \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \cdot \beta} = \frac{1,65}{0,58 \cdot 0,7} = 4,08;$$

$$K_{\tau D} = \frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \cdot \beta} = \frac{1,45}{0,58 \cdot 0,7} = 3,57.$$

4. Обчислюємо розрахункові частинні запаси витривалості – за формулами (12.4) та (12.6):

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_{\alpha} + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m} = \frac{310}{4,08 \cdot 25,5 + 0,1 \cdot 15,3} = 2,9;$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \cdot \tau_{\alpha} + \psi_{\tau} \cdot \tau_m} = \frac{230}{3,57 \cdot 29,3 + 0,05 \cdot 19,6} = 2,2.$$

Тоді загальний запас витривалості при спільній дії змінного згинання та кручення – за формулою (12.3):

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2,9 \cdot 2,2}{\sqrt{2,9^2 + 2,2^2}} = 1,75.$$

Оскільки $n = 1,75 > n_{\text{норм}} = 1,7$, то витривалість даного вала забезпечена.

12.4. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Дати визначення циклу напружень. Назвати напруження, які характеризують цикл. Зобразити графік асиметричного циклу зміни напружень.
2. Назвати та показати на схемах чотири види циклів.
3. Що називають втомою і витривалістю матеріалу? Як визначають характеристики витривалості матеріалу?
4. Назвати та проаналізувати основні фактори, що впливають на витривалість деталі. Яким чином вони враховуються при розрахунках на циклічну міцність?
5. Записати формули для обчислення частинних запасів витривалості при асиметричних циклах зміни нормальних і дотичних напружень.
6. Записати формулу для обчислення загального запасу витривалості при спільній дії змінного згинання та кручення.

13. СТІЙКІСТЬ ФОРМ РІВНОВАГИ

Елементи конструкцій можуть руйнуватися в результаті втрати початкової форми пружної рівноваги, тобто втрати стійкості. При цьому, наприклад, при стисканні поздовжня (нормальна) сила в елементі може бути значно меншою за граничну, руйнівну.

Історична довідка: наприкінці XIX сторіччя у Франції обрушилось 24 великі мости. Головною причиною була втрата стійкості стиснутих стержнів.

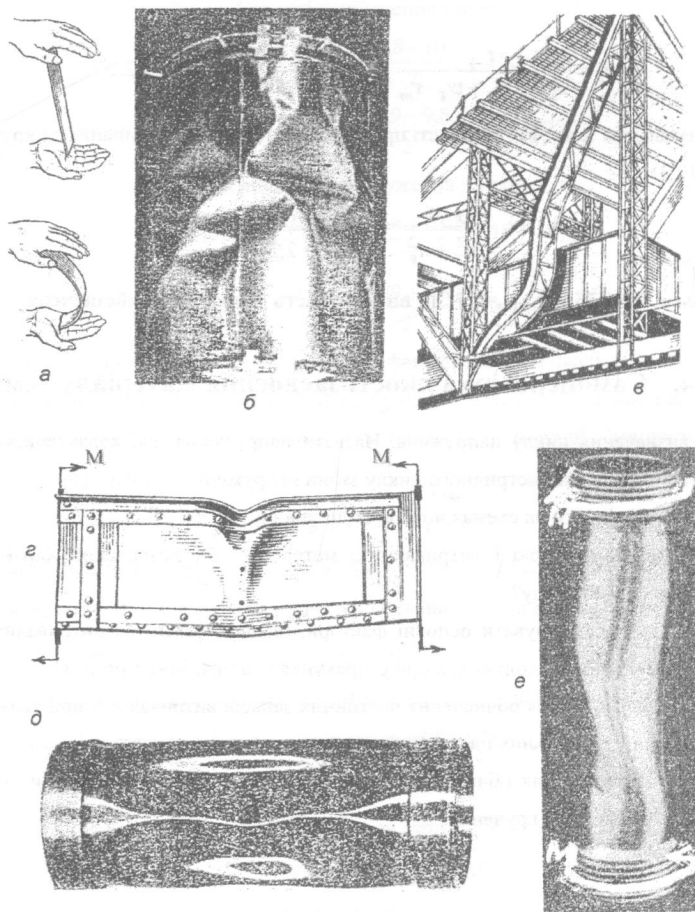


Рисунок 13.1 – Втрата форм стійкості: а, б, в – стиснутих елементів; г – при згинанні; е – при закручуванні; д – під зовнішнім тиском

13.1. Основні види втрати початкової форми рівноваги

- При згинанні балок у площині значно більшої жорсткості може мати місце втрата плоскої форми згинання (рис. 13.2,а, б).

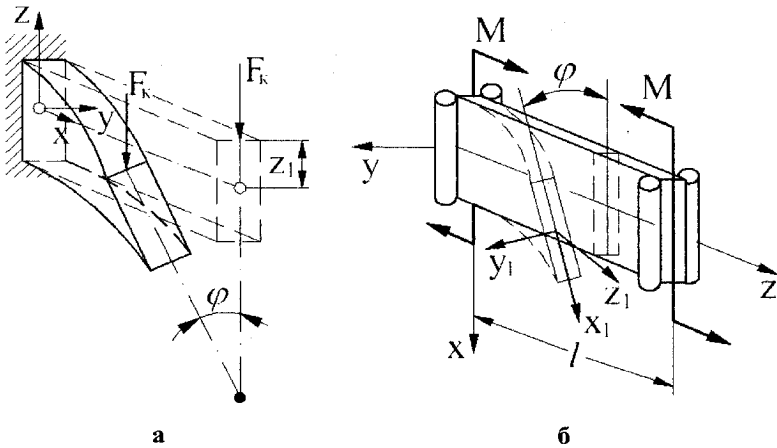


Рисунок 13.2 – Втрата плоскої форми згинання: консольної (а) та шарнірно закріпленої балки (б)

- При закручуванні тонкостінної трубки (та згину зі стиском) циліндрична форма може перетворитись у «свердлову» (рис. 13.1,е).
- Тонкостінні оболонки (у т.ч. циліндри, пластини) під дією зовнішнього навантаження можуть сплющуватися (рис. 13.1,д).
- При поздовжньому стисканні тонкостінні стержні вигинаються, що супроводжується значними додатковими деформаціями і виникаючі при цьому додаткові напруження згину можуть спричинити їх руйнування (рис. 13.1,б, в).

Виникає, таким чином, необхідність розрахунків конструктивних елементів на стійкість.

13.2. Стійка та нестійка форми рівноваги. Критична сила (на прикладі поздовжнього стиску стержня)

До цієї теми при розрахунках на стискання ми вважали, що стержень може мати лише одну (прямолінійну) форму рівноваги (рис. 13.3,а).

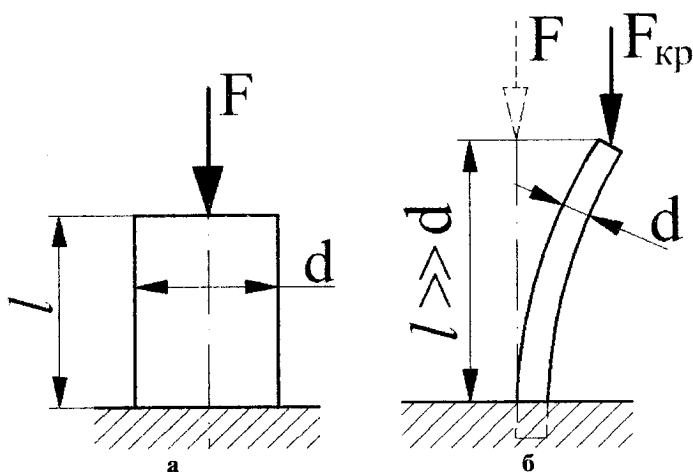


Рисунок 13.3 – Стискання товстого (а) і втрата стійкості тонкого (б) стержня

Так воно й буде, якщо брус короткий та товстий, але якщо він довший і тонший, то при збільшенні навантаження (при якомусь значенні стискаючої сили) можна зафіксувати перехід прямої форми рівноваги до криволінійної, яка вже не буде стійкою, бо при найменшому збільшенні сили розвивається значне викривлення, втрата рівноваги і руйнування (рис. 13.3,б).

Пригадаймо поняття стійкого і нестійкого положення кульки на різних поверхнях:

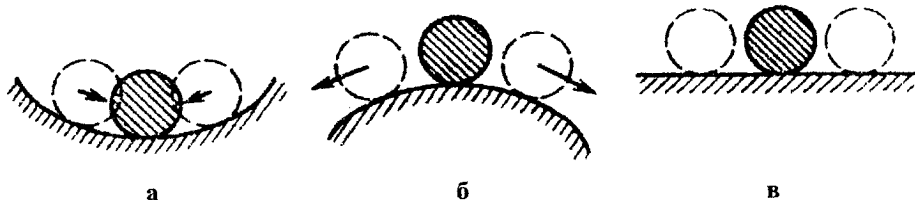


Рисунок 13.4 – Положення кульки на поверхні:
а – стійке; б – нестійке; в – байдуже

і по аналогії з цим дамо визначення форм рівноваги стиснутого стержня.

Якщо після усунення причини, що привела стиснутий стержень до криволінійної форми рівноваги, він повернеться до початкової прямолінійної форми рівноваги, то вона є стійкою. Тобто **стійка форма рівноваги – та, яка**

відновлюється після усунення причини відхилення від початкової форми. Нестійка ж форма рівноваги – та, що не відновлюється після усунення причини її появи.

Найменша поздовжня стискаюча сила, при дії якої можливі *стійка і нестійка форми рівноваги*, називається **критичною силою**. Іншими словами: це сила, при якій можливий перехід від стійкого до нестійкого стану, тобто має місце біфуркація («роздвоєння») форм рівноваги.

Визначення критичної сили стискання прямолінійного стержня.

Розглянемо прямий стержень, матеріал якого ідеально пружний, а стискаюча сила діє чітко вздовж його поздовжньої вісі. При малому навантаженні стержень зберігає прямолінійну форму рівноваги.

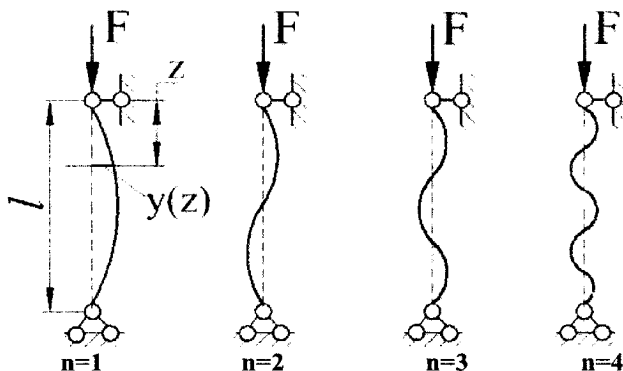


Рисунок 13.5 – Форми втрати стійкості при різному числі півхвиль синусоїди

Коли зростаюча поздовжня сила F досягне певного («критичного») значення $F_{кр}$, то стержень почне згинатися (рис. 13.5). Цьому явищу може сприяти якась причина: початкова кривизна начебто прямого стержня, нецентральне прикладення поздовжньої сили та інші побічні причини відхилення початкової прямої вісі стержня від прямолінійної форми його рівноваги.

Приблизне диференціальне рівняння зігнутої вісі стержня (див. формулу (5.20)) має вигляд:

$$y''(z) \approx M_x(z)/EI_x,$$

де $M_x(z)$ – функція згинального моменту в перерізах стержня;

EI_x – жорсткість перерізу стержня при згинанні.

Так, для першого, з шарнірно закріпленими торцями стержня (рис. 13.5, $n=1$) $M_x(z) = F \cdot y(z)$ аж до моменту втрати форми рівноваги, коли сила стане критичною $F_{кр}$. Позначивши $F_{кр}/EI_{\min} = k^2$ і розв'язуючи диференціальне однорідне рівняння $y''(z) \pm k^2 \cdot y(z) = 0$ з врахуванням граничних умов закріплення стержня, отримаємо **вираз** для **першої** (найменшої) **критичної сили Ейлера** (коли стержень вигинається по одній півхвилі синусоїди):

$$F_{кр} = \pi^2 \cdot E \cdot \frac{I_{\min}}{l^2}.$$

Кількість n можливих «півхвиль» синусоїди – кривої згинання стержня на всій його довжині може бути різною (див. рис.13.5). Критична сила при цьому буде відповідно в n^2 раз більшою.

Практичну важливість має **найменше значення критичної сили** (при $n = 1$). На вигляд кривої вісі стержня впливає також те, яким чином закріплено стержень на торцях та по довжині. У загальному випадку вираз для критичної сили, при якій можливий вигин стиснутого (вздовж) стержня, має бути таким:

$$F_{кр} = \pi^2 \cdot E \cdot \frac{I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

де $I_{\min}$ – найменший з осевих моментів інерції поперечного перерізу стержня;

μ – коефіцієнт приведення довжини, що враховує особливості закріплення стержня. Поняття приведеної довжини $\mu l = l_{\text{пр}}$ вперше ввів Ф.С. Ясинський. Наведемо деякі міркування щодо визначення коефіцієнта μ , використовуючи особливості (характер) зігнутої вісі бруса. Так, при $n = 1$ ($kl = \pi$, рис. 13.5) півхвиля синусоїди має місце на всій довжині l шарнірно закріпленого з обох боків стержня. Якщо ж торці стержня закріплені інакше, то слід дивитися, на якій довжині має бути півхвиля синусоїди (рис. 13.6 [7]).

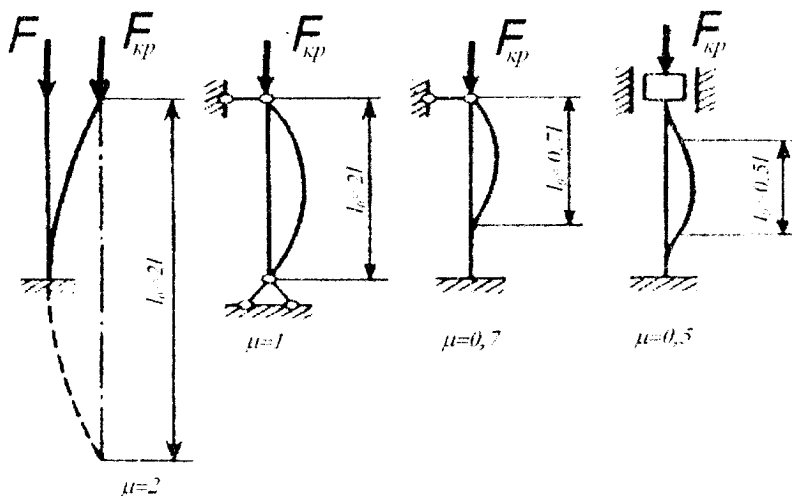


Рисунок 13.6 – Вплив способу закріплення стержня на величину коефіцієнта μ приведення довжини

13.3. Границі застосування формули Ейлера

Формула Ейлера справедлива за умови, що напруження в стиснутому стержні не перевищує границю пропорційності $\sigma_{\text{пл}}$ матеріалу, тобто поки модуль поздовжньої пружності E має сталі значення. **Користуватися** *як формулою Ейлера за межами пружності не тільки принципово невірно, а й вкрай небезпечно*, коли $E_1 \ll E$. Критерій обмеження можна отримати з висловленої вище умови, що $\sigma = \sigma_{\text{пл}}$ в момент втрати стійкості форми рівноваги

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \pi^2 \cdot E \cdot \frac{I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \sigma_{\text{пл}}.$$

Знаючи, що $I_{\min}/A = (i_{\min})^2$, оскільки співвідношення $\sqrt{I_x/A}$ являє собою радіус інерції перерізу i_x , і позначивши $\mu l / i_{\min} = \lambda$ – як геометричну гнучкість стержня, з попередньої формули можна отримати вираз для граничного значення гнучкості

$$\lambda_{\text{еп}} = \sqrt{\pi^2 \cdot E / \sigma_{\text{пл}}},$$

яка є уже фізичною характеристикою гнучкості стержня з урахуванням пружних властивостей його матеріалу. Так, наприклад, для сталі при $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ і $\sigma_{\text{пл}} = 200 \text{ МПа}$

$$\lambda_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^5}} = 100.$$

Таким чином, отримано зручний критерій обмеження застосування формули Ейлера: якщо реальна геометрична гнучкість перевищує граничну, тобто

$$\left(\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{min}}} \right) \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{пл}}}},$$

то формула Ейлера – справедлива, прийнятна для визначення $F_{\text{кр}}$. Таким чином, ця формула придатна для стержнів великої гнучкості.

13.4. Формули для практичних розрахунків на стійкість стиснутих стержнів середньої і малої гнучкості

1. Емпірична формула Ясинського-Тетмайера для визначення критичних напружень, при яких стержень може втратити стійкість, у загальному випадку (для будь-яких матеріалів) має вигляд

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2.$$

Для пластичних матеріалів найчастіше $c = 0$ і формула спрощується:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b \cdot \lambda.$$

У цих формулах a , b , c – дослідні коефіцієнти (табл. 13.1 [3]), що мають одиницю виміру напруження, МПа .

Таблиця 13.1 – Значення коефіцієнтів та гнучкості для деяких матеріалів

Матеріал	a	b	c	λ_0	$\lambda_{\text{гр}}$
Сталь Ст3	310	1,14	0	61	100
Чавун	776	12	0,05	10	80
Сосна	29,3	0,19	0	–	70
Дюраль Д 16Т	406	2,83	0	30	53

Ці формули застосовують для стержнів, гнучкість яких знаходиться в межах $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{гр}}$, де λ_0 – гнучкість, при якій $\sigma_{\text{кр}}$ дорівнює границі текучості σ_T пластичних або границі міцності σ_e крихких матеріалів. Якщо ж реальна (геометрична) гнучкість $\lambda < \lambda_0$, то в цьому випадку стержні на стійкість можна не розраховувати, бо вони мають малу гнучкість і розраховують їх тільки на міцність. Графік залежності критичного напруження від гнучкості і границі застосування тих чи інших розрахункових формул на стійкість показані на рис.13.7 [4].

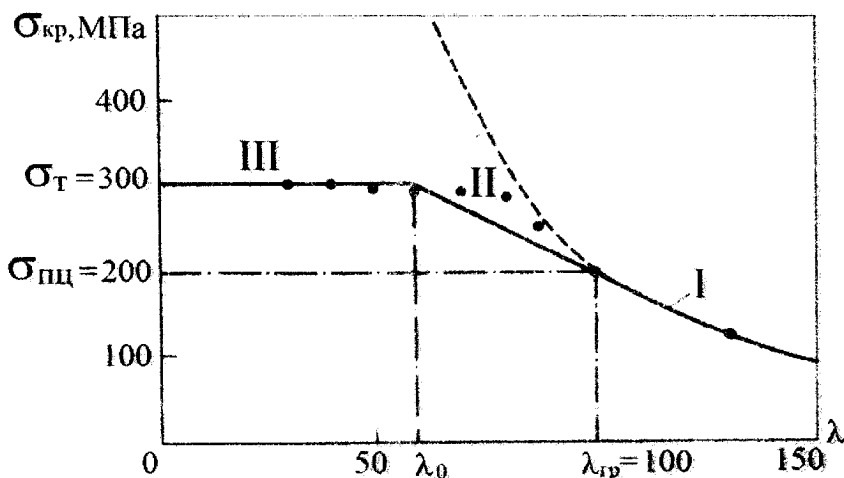


Рисунок 13.7 – Залежність критичного напруження від гнучкості сталевого (Ст3) стержня: I— гіпербола Ейлера для гнучких стержнів; II – залежність для стержнів середньої гнучкості; III— для стержнів малої гнучкості $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_T$

13.5. Розрахунки на стійкість за коефіцієнтом зниження основного допустимого напруження

Умова стійкості $\sigma = F/A \leq \varphi[\sigma]$, де $[\sigma]$ – основне допустиме напруження на стиск; φ – коефіцієнт зниження основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість. Коефіцієнт φ залежить від реальної (геометричної) гнучкості ($\lambda = \mu l / i_{\min}$) стержня і від його матеріалу; він

встановлений дослідним шляхом. Значення коефіцієнта φ наведено в табл. 13.2 [4].

Таблиця 13.2 – Значення коефіцієнта зниження основного допустимого напруження

Гнучкість λ	Коефіцієнт φ				Гнучкість λ	Коефіцієнт φ			
	Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Дерева		Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	110	0,52	0,43	—	0,25
10	0,99	0,98	0,97	0,99	120	0,45	0,36	—	0,22
20	0,96	0,95	0,91	0,97	130	0,40	0,33	—	0,18
30	0,94	0,92	0,81	0,93	140	0,36	0,29	—	0,16
40	0,92	0,89	0,69	0,87	150	0,32	0,26	—	0,14
50	0,89	0,86	0,57	0,80	160	0,29	0,24	—	0,12
60	0,86	0,82	0,44	0,71	170	0,26	0,21	—	0,11
70	0,81	0,76	0,34	0,60	180	0,23	0,19	—	0,10
80	0,75	0,70	0,26	0,48	190	0,21	0,17	—	0,09
90	0,69	0,62	0,20	0,38	200	0,19	0,16	—	0,08
100	0,60	0,51	0,16	0,31					

Приклад 13.1. Визначити допустиму стискаючу силу $[F]$ для шарнірно закріпленого з обох кінців сталевго стержня для двох варіантів поперечних перерізів: із швелера (профіль №10) і круглого пустотілого $D \times \delta = (140 \times 2)$ мм (рис. 13.8). Довжина обох стержнів $l = 1,6$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; основне допустиме напруження на стиск $[\sigma]_{\text{ст}} = 160$ МПа; гранична гнучкість (фізична) для стержнів із сталі Ст5 $\lambda_{\text{гр}} = 100$.

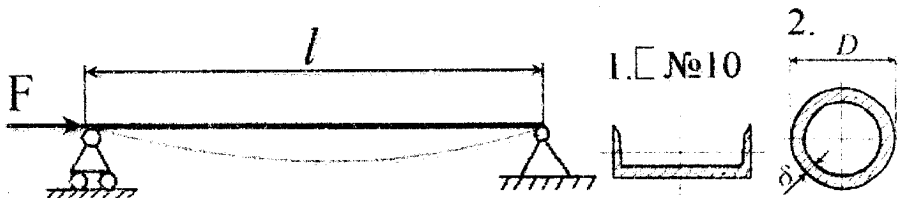


Рисунок 13.8 – До визначення допустимої сили для стержнів різної гнучкості

Розв’язання.

1. Швелер №10 з площею поперечного перерізу $A = 10,9$ см² і найменшим осьовим моментом інерції $\min I_y = 20,4$ см⁴ має радіус інерції перерізу

$$\min i_y = \sqrt{\frac{\min I_y}{A}} = \sqrt{\frac{20,4}{10,4}} = 1,37 \text{ см}$$

і гнучкість (геометричну) $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 160}{1,37} = 118$.

Оскільки $(\lambda=118) > (\lambda_{\text{гр}}=100)$, то прийнятною є формула Ейлера для визначення критичної сили:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 20,4 \cdot (10^{-2})^4}{1 \cdot 1,6^2} = 157 \text{ кН}.$$

Із врахуванням коефіцієнта запасу стійкості для стиснутих сталевих стержнів ($n_y=1,8 \dots 3$) можна встановити допустиму поздовжню силу стискання

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{157}{3} = 52,3 \text{ кН}.$$

2. Стержень з круглим кільцевим перерізом діаметром (зовнішнім) $D = 140 \text{ мм}$ і внутрішнім $d = D - 2 \cdot \delta = 140 - 2 \cdot 3 = 134 \text{ мм}$. Геометричні характеристики такого перерізу:

- площа $A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (1 - 0,957^2) = 12,95 \text{ см}^2$, тут $\alpha = \frac{d}{D} = \frac{134}{140} = 0,957$;
- осьовий момент інерції кільцевого перерізу

$$I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{3,14 \cdot 14^4}{64} \cdot (1 - 0,957^4) = 304 \text{ см}^4;$$

- радіус інерції перерізу

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{304}{12,95}} = 4,85 \text{ см};$$

- геометрична гнучкість такого круглого стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{1 \cdot 160}{4,85} = 33.$$

Оскільки ця реальна гнучкість значно менше граничної ($\lambda_{\text{гр}} = 100$), то формулою Ейлера не можна скористуватися для визначення критичної сили. У цьому випадку можна визначити допустиму поздовжню силу з виразу $\sigma = F/A \leq \varphi \cdot [\sigma]$, встановивши за табл. 13.2 величину коефіцієнта φ зниження основного допустимого напруження із-за можливої втрати стійкості (при $\lambda=33$, для сталевих стержнів $\varphi=0,93$):

$$[F] = \varphi \cdot [\sigma] \cdot A = 0,93 \cdot 160 \cdot 12,95 \cdot 10^{-4} = 0,1927 \text{ МН} \approx 193 \text{ кН}.$$

Як бачимо, для другого (кільцевого перерізу) стержня допустима сила майже в 4 рази більша, ніж для швелера, приблизно однакової площі перерізу.

Приклад 13.2. Підібрати діаметр дерев'яної стійки довжиною $l = 1$ м, з одним жорстко закріпленням і другим – вільним торцями і навантаженої поздовжньою силою стискування $F = 20$ кН (рис. 13.9). Основне допустиме напруження $[\sigma] = 20$ МПа.

Розв'язання.



Рисунок 13.9 – Схема закріплення та навантаження дерев'яної стійки

1. Коли невідомі розміри поперечного перерізу стійки, то невідома її геометрична гнучкість і встановити прийнятність формули Ейлера неможливо. В таких випадках можна скористатися формулою $\sigma = F/A \leq \varphi[\sigma]$, приймаючи числові значення коефіцієнта φ за методом послідовних наближень.

2. **Перше наближення:** вихідне значення доцільно взяти як середнє з усього ряду значень для даного матеріалу, а саме: $\varphi = 0,5$. Тепер можна визначити:

- необхідну площу перерізу $A \geq F/\varphi[\sigma] = 20 \cdot 10^{-3} / 0,5 \cdot 20 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2$,
- діаметр стійки $d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20}{3,14}} = 5 \text{ см}$,
- радіус інерції перерізу $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot d^4}} = \frac{d}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ см}$
- і геометричну гнучкість стійки $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{2 \cdot 100}{1,25} = 160$.

У табл. 13.2 коефіцієнтів зниження основного допустимого напруження для дерева можна знайти, що при $\lambda = 160$ коефіцієнт $\varphi_1 = 0,12$.

Як бачимо, він не такий, яким був прийнятий у першому наближенні ($\varphi = 0,5$).

3. **Друге наближення:** в якості наступного вихідного значення коефіцієнта φ_2 можна взяти середнє арифметичне двох попередніх – вихідного та отриманим першим розрахунком φ_1 :

$$\varphi_2 = (\varphi + \varphi_1)/2 = (0,5 + 0,12)/2 = 0,31.$$

Повторні обчислення згідно пункту 2:

$$A_2 = \frac{F}{0,31 \cdot [\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{0,31 \cdot 20} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 32 \text{ см}^2,$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 32}{3,14}} = \sqrt{41} = 6,5 \text{ см}, \quad \lambda_2 = \frac{2 \cdot 100 \cdot 4}{6,5} = 120.$$

При такій гнучкості коефіцієнт $\varphi_3 = 0,22$.

4. Третє наближення: $\varphi_4 = (\varphi_2 + \varphi_3)/2 = (0,31 + 0,22)/2 = 0,265$:

$$A_3 \geq \frac{20 \cdot 10^{-3}}{0,265 \cdot 20} = 3,77 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 37,7 \text{ см}^2,$$

$$d_3 = \sqrt{48} = 6,93 \text{ см}, \quad i = \frac{d}{4} = \frac{6,93}{4} = 1,73 \text{ см}, \quad \lambda = \frac{2 \cdot 100}{1,73} = 116.$$

При $\lambda = 116$ для дерева $\varphi_5 = (0,22 + 0,25)/2 = 0,235$.

Розбіжність з прийнятим у третьому наближенні вихідним значенням ($\varphi_4 = 0,265$)

складає $\delta = \frac{0,265 - 0,235}{0,235} = 12,8 \%$.

Наступні приближення продовжують до тих пір, поки розбіжність стане відповідною тій точності, що вимагається в конкретному інженерному розрахунку (зазвичай – це $\leq 5 \%$).
То ж можна запропонувати читачам закінчити цей приклад самостійно.

13.6. Рациональні форми перерізу стержнів з точки зору їх стійкості

- У першу чергу осеві моменти інерції I_y , I_x не повинні набагато відрізнятись (краще, якщо вони однакові, як у перерізів з круговою симетрією).
- Крім цього для оцінки раціональності форми перерізу використовують таку геометричну характеристику як питомий радіус інерції, що залежить лише від розмірів перерізу: $\rho = i_{\min}/(\sqrt{A})$.

Чим більший ρ , тим більше вантажопіднімальність стиснутого стержня при рівновеликій площі.

13.7. Узагальнення: особливості розрахунків на стійкість

1. Визначення допустимої сили стискування з врахуванням можливості втрати стійкості можна вести двома шляхами:

1.1. Якщо *гнучкість стержня* ($\lambda_{\text{теом}} = \mu l / i_{\min}$) *перевищує критичну*

$\lambda_{\text{крит}} = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{\text{ти}}}$ (для цього матеріалу), то **критичну силу можна визначити**

по **Ейлеру**: $F_{\text{кр}} = \pi^2 \cdot E \cdot I_{\min} / (\mu l)^2$, а допустиме навантаження як $[F] \leq F_{\text{кр}} / [n]$,

де $[n]$ – нормативний коефіцієнт запасу стійкості, який приймають: для сталі – 1,8...3,0; для чавуна – 5,0...5,5; для деревини – 2,8...3,2 [4].

1.2. Якщо $\lambda_{\text{теом}} < \lambda_{\text{крит}}$, то **допустиме значення стискаючої сили визначають з врахуванням коефіцієнта ϕ зниження основного допустимого напруження, зменшуючи допустимі напруження $[\sigma]$ при стисканні на величину цього коефіцієнта:**

$$\sigma = F / A \leq \phi [\sigma], \text{ звідки } [F] \leq \phi \cdot [\sigma] \cdot A.$$

Величини A і ϕ знаходять за відомими розмірами стержня.

2. Проектувальні розрахунки стержнів на стійкість (коли розміри перерізів невідомі і оцінити гнучкість, щоб встановити достовірність та прийнятність формули Ейлера, неможливо) *ведуть на основі емпіричних формул методом поступових наближень*. Наприклад, з умови стійкості $\sigma = F / A \leq \phi [\sigma]$ необхідна площа перерізу стержня має бути $A \geq F / (\phi \cdot [\sigma])$. Але визначити її безпосередньо з цієї умови неможливо, оскільки невідомі як площа перерізу A , так і коефіцієнт ϕ , що залежить від розміру перерізу. Тому розрахунок виконують методом поступових наближень. У першому наближенні задаються $\phi_1 = 0.5 \dots 0.6$. Із умови стійкості визначають відповідну площу $A_1 \geq F \cdot \phi \cdot [\sigma]$. Далі послідовно знаходять $I_{\min}$, радіус інерції $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$ та гнучкість $\lambda' = \mu l / i_{\min}$. Із таблиць (наприклад, з табл. 13.2) знаходять перше «розрахункове» значення коефіцієнта поздовжнього згину ϕ' відповідне гнучкості λ' .

Якщо прийняте спочатку значення ϕ'_1 суттєво відрізняється від «розрахункового ϕ'_1 », то в наступному наближенні задаються новим значенням

$\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi'_1)/2$ і повторюють розрахунки. Для останнього наближення фактичне напруження σ і величина $\varphi[\sigma]$ не повинні відрізнятись більше ніж на 5 %.

13.8. Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми

1. Дати поняття стійких та нестійких форм рівноваги і навести приклади їх втрати при різних видах опору.
2. Назвати причини втрати форм рівноваги і наслідки такої втрати.
3. Дати поняття критичної сили при стисканні прямолінійного стержня та записати загальну формулу для її визначення при різноманітному закріпленні стиснутого стержня. Пояснити складові частини формули.
4. Як встановити границі застосування формули Ейлера для критичної сили при стисканні бруса? Показати це на діаграмі напружень та зі співвідношення геометричної і фізичної гнучкості стержня.
5. Записати формулу для практичних розрахунків на стійкість стиснутих стержнів середньої і малої гнучкості. Яким способом ведуть проектні розрахунки стиснутих вздовж стержнів?
6. Накреслити найбільш раціональні форми перерізів з точки зору стійкості при стисканні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ТА РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

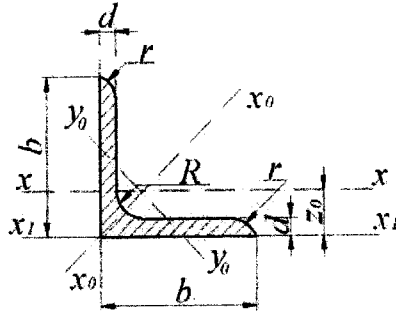
1. **Основи розрахунків на міцність та жорсткість елементів конструкцій** /В.С. Кравчук, П.М. Калініченко, Л.В. Коломієць, О.М. Лимаренко; Одес. нац. політехн. ун-т; За ред. О.Ф. Дашенка. – Одеса: ВМВ, 2009. – 295 с.
2. **Опір матеріалів. Основи і приклади розрахунків:** Навч. посібник /В.С. Кравчук, О.Ф. Дашенко, Л.В. Коломієць, О.М. Лимаренко. – Одеса: Стандарт, 2012. – 252 с.
3. **Опір матеріалів:** Підручник /Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
4. **Справочник по сопротивлению материалов** /Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев; Отв.ред. Г.С. Писаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
5. **Сопротивление материалов деформированию и разрушению:** Справочное пособие /В.Т. Трощенко, А.Я. Арнольд, В.В. Покровский и др.; Отв. ред. В.Т. Трощенко – К.: Наук. думка, 1993. – Ч.1. – 242 с.; Ч.2. – 700 с.
6. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. **Сопротивление материалов:** Учеб. пособие. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
7. Феодосьев В.И. **Сопротивление материалов:** Учебник для вузов. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
8. **Сборник задач по сопротивлению материалов** /Под ред. В.К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
9. Винокуров А.И. **Сборник задач по сопротивлению материалов:** Учеб. пособие для учащихся машиностр. спец. – М.: Высш. шк., 1990. – 383 с.
10. **Сопротивление материалов: Лаб. работы:** Учеб. пособие для вузов /И.А. Цурпал, Н.П. Барабан, В.М. Швайко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Высш. шк., 1988. – 245 с.
11. **Лабораторные исследования в механике материалов:** Учеб. пособие /Н.Г.Сурьянинов, П.А.Белоус; Одес. нац. политехн. ун-т; Под ред. А.Ф. Дашенко. – Одесса: Пальмира, 2005. – 261 с.
12. **Курсовое проектирование деталей машин:** Учеб. пособие для техникумов /С.А. Чернавский, Г.М. Ицкович, К.Н. Боков и др. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
13. Гольденблат Н.Н., Копнов В.А. **Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов.** – М.: Машиностроение, 1968. – 191 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Сортамент прокатної сталі

Кутники рівнобікі (за ГОСТ 8509–86)



Позначення:

b – ширина полиці;

d – товщина полиці;

I – момент інерції;

i – радіус інерції;

z_0 – відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці.

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	$I_{x_0 \max}$, см ⁴	$i_{x_0 \max}$, см	$I_{y_0 \min}$, см ⁴	$i_{y_0 \min}$, см	I_{x_1} , см ⁴	z_0 , см	Маса 1м, кг
	b	d										
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,90
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	50,0	1,78	5,72
6,5	65	6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83	5,91
			9,84	38,13	1,97	60,42	1,27	15,85	2,48	28,29	1,90	7,73

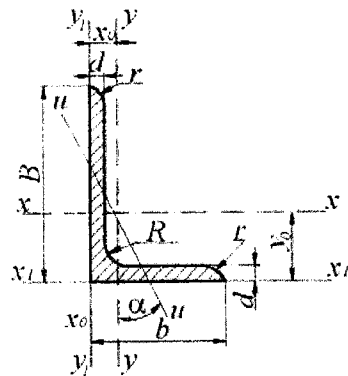
Продовження дод. І

Номер профі- лю	Розміри, мм		Площа перерізу $A, \text{см}^2$	$I_x,$ см^4	$i_x,$ см	$I_{x_0 \max},$ см^4	$i_{x_0 \max},$ см	$I_{y_0 \min},$ см^4	$i_{y_0 \min},$ см	$I_{x_1},$ см^4	$z_0,$ см	Маса 1м, кг
	b	d										
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,34	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,96	48,6	1,77	219	2,55	12,2
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	15,1
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
11	110	16	29,7	264	2,98	416	3,74	112,0	1,94	542	3,06	23,3
		7	15,7	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9
12,5	125	8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	13,5
		8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
14	140	14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
14	140	10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5

Продовження дод. 1

Номер профі- лю	Розміри, мм		Площа перерізу A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	$I_{x_0\max}$, см ⁴	$i_{x_0\max}$, см	$I_{y_0\min}$, см ⁴	$i_{y_0\min}$, см	I_{x_1} , см ⁴	z_0 , см	Маса 1м, кг
	b	d										
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
18	180	20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
		11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
20	200	12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
		12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
22	220	25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
25	250	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
		16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
25	250	25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	14753	7,31	111,4

Кутники нерівнобокі (за ГОСТ 8510–86)



Позначення:

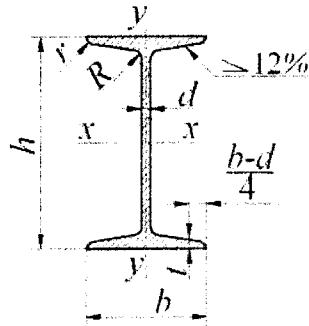
 B – ширина більшої полиці; b – ширина полиці; d – товщина полиці; I – момент інерції; i – радіус інерції; x_0, y_0 – відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці.

Номер профілю	Розміри, мм			Площа перерізу A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_y , см ⁴	i_y , см	$I_{u_{min}}$, см ⁴	$i_{u_{min}}$, см	Кут нахилу осі u , $tg \alpha$	I_{x_1} , см ⁴	I_{x_2} , см ⁴	x_0 , см	y_0 , см	Маса 1м, кг
	B	b	d													
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
			5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
			5	4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	3,72	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			6	5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
			8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	69,7	20,8	1,17	2,39	4,79
			6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
			8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92

Продовження дод. 2

Номер профілю	Розміри, мм			Площа перерізу A , см^2	I_x , см^4	i_x , см	I_y , см^4	i_y , см	$I_{u_{\min}}$, см^4	$i_{u_{\min}}$, см	Кут нахилу осі u , $\text{tg } \alpha$	I_{x_1} , см^4	I_{x_2} , см^4	x_0 , см	y_0 , см	Маса 1м, кг
	B	b	d													
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	47,8	1,36	3,04	8,77
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	870
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,87
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,40	12,10
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	285	74,3	1,58	3,55	8,98
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,90
12,5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
			8	16,0	256	4,00	83	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	104	2,03	4,49	14,1
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
16/10	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3
18/11	180	110	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2324	537	2,52	5,97	26,4
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,59	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2478	3,77	8,23	55,4
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	10410	2776	3,85	8,31	61,7

Балки двотаврові (за ГОСТ 8239–89)

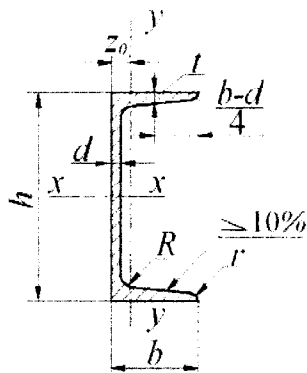


Позначення:

 h – висота балки; b – ширина полиці; d – товщина стінки; t – середня товщина полиці; I – момент інерції; W – момент опору; i – радіус інерції; S – статичний момент півперерізу.

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу A , см^2	I_x , см^4	W_x , см^3	i_x , см	S_x , см^3	I_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	Маса m , кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2

Швелери (за ГОСТ 8240–89)



Позначення:

h – висота балки; I – момент інерції;
 b – ширина полиці; W – момент опору;
 d – товщина стінки; i – радіус інерції;
 t – середня товщина полиці; S – статичний момент півперерізу;
 z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані стінки.

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу A , см^2	I_x , см^4	W_x , см^3	i_x , см	S_x , см^3	I_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	z_0 , см	Маса $\Gamma\text{м, кг}$
	h	b	d	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,01	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,1	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,0	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0

Продовження дод. 4

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t										
22а	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24а	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Механічні характеристики, МПа, вуглецевих конструкційних сталей [4]

Марка сталі	σ_B	σ_T	τ_T	Відносне подовження δ , %, при $l=10d$	Ударна в'язкість КС, кДж/м ²	$\sigma_{-1\beta}$	σ_{-1p}	$\tau_{-1\beta p}$
	не менше							
10	340	210	140	31	2400	160...220	120...150	80...120
20	420	250	160	25	—	170...220	120...160	100...130
25	460	280	—	23	900	190...250	—	—
30	500	300	170	21	800	200...270	170...210	110...140
35	540	320	190	20	700	220...300	170...220	130...180
40	580	340	—	19	600	230...320	180...240	140...190
45	610	360	220	16	500	250...340	190...250	150...200
50	640	380	—	14	400	270...350	200...260	160...210
55	660	390	—	13	—	—	—	—
60	690	410	—	12	—	310...380	220...280	180...220
20Г	460	280	—	24	—	—	—	—
30Г	550	320	—	20	800	220...320	—	—
50Г	660	400	—	13	400	290...360	—	—
20Х	800	650	—	11	600	380	—	170...230
40Х	1000	800	—	10	600	350...380	250	225
45Х	1050	850	—	9	500	400...500	—	—
30ХМ	950	750	—	11	800	310...410	370	230
35ХМ	1000	850	—	12	800	470...510	—	—
40ХН	1000	800	390	11	700	400	290	240
50ХН	1100	900	—	9	500	550	—	—
40ХФА	900	750	—	10	900	380...490	—	—
38ХМЮА	1000	850	—	14	900	420...550	—	—
12ХН3А	950	700	400	11	900	390...470	270...320	220...260
20ХН3А	950	750	—	12	1000	430...450	300...320	245...255
30ХН3А	1000	800	—	10	800	520...700	—	320...400
40ХНМА	1000	950	—	12	1000	500...700	—	270...380
30ХГСА	1100	850	—	10	500	510...540	500...535	220...245

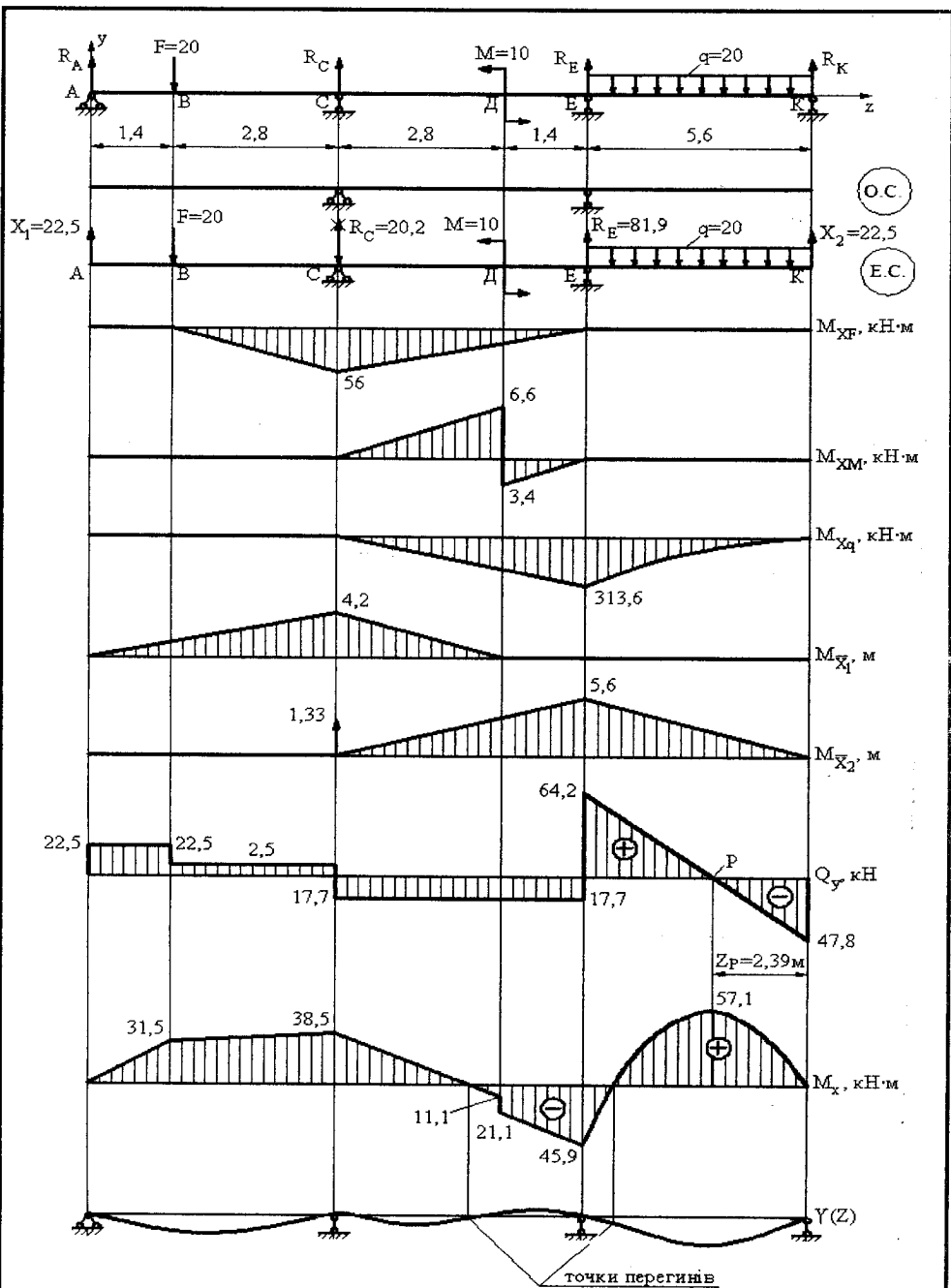
Механічні характеристики, МПа, чавуну [3]

	Границя міцності, МПа, при				Твердість за Брінеллем HB	Границя витривалості, МПа, при	
	розтяганні σ_B	стисканні σ_B	згинанні σ_B	кручені τ_B		згинанні $\sigma_{-1г}$	кручені $\tau_{-1кр}$
СЧ 12	120	500	280	—	143...229	—	—
СЧ 15	150	600	320	240	163...229	70	50
СЧ 18	180	700	360	—	170...229	—	—
СЧ 21	210	750	400	280	171...241	100	80
СЧ 24	240	850	440	300	187...217	120	100
СЧ 28	280	1000	480	350	170...241	140	110
СЧ 32	320	1100	520	390	187...255	140	110
СЧ 35	350	1200	560	400	197...269	150	115
СЧ 38	380	1400	600	460	207...269	150	115
ВЧ 40 - 10	400	1600...1700	—	480...510	156...197	150...170	198
ВЧ 50 - 1,5	500	1860...2000	—	740...790	187...255	230...270	170...210
ВЧ 60 - 2	600	2040...2290	—	660...810	197...269	170...230	150...160

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ГРАФІЧНОГО МАТЕРІАЛУ

В КУРСОВІЙ РОБОТІ

З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

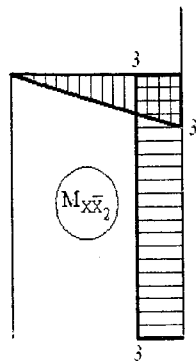
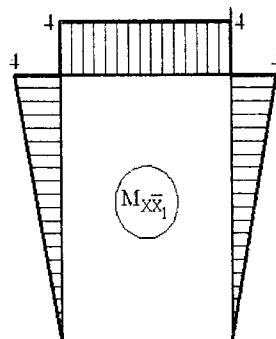
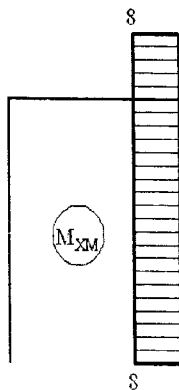
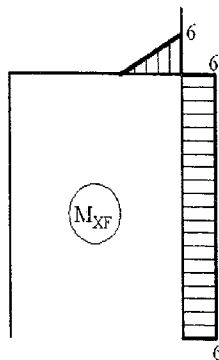
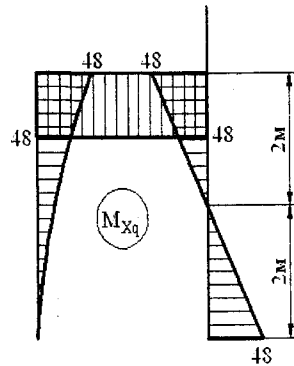
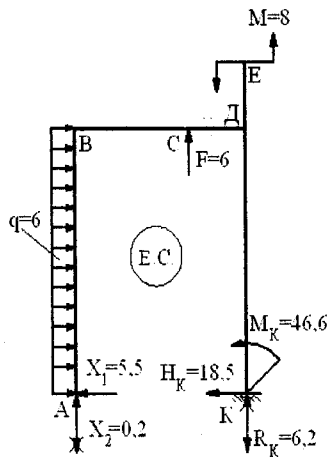
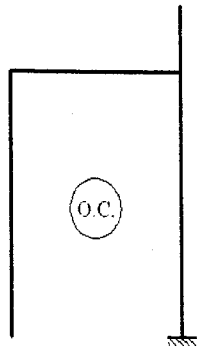
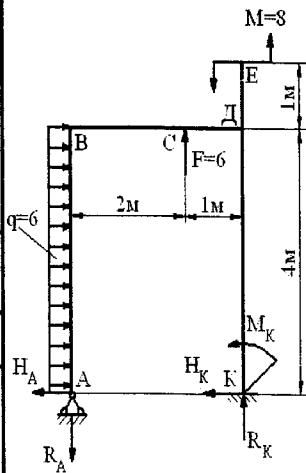


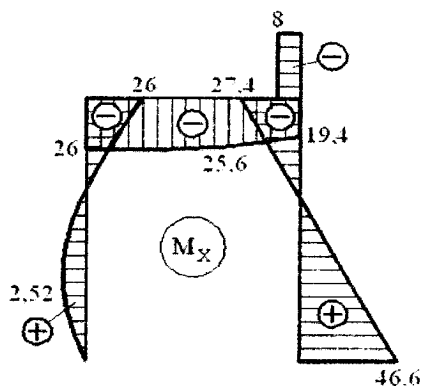
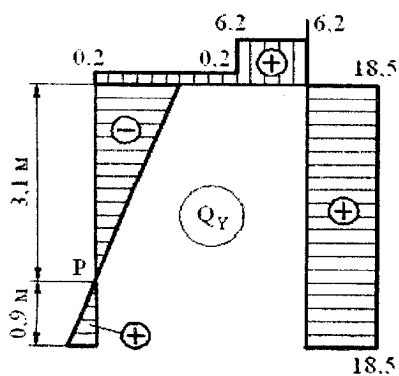
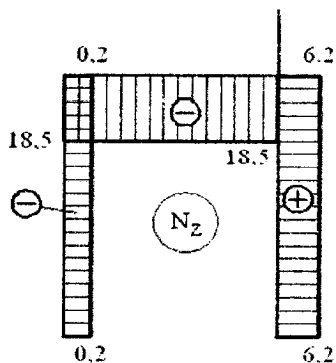
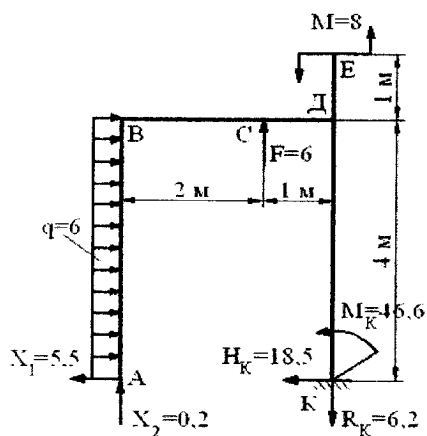
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата

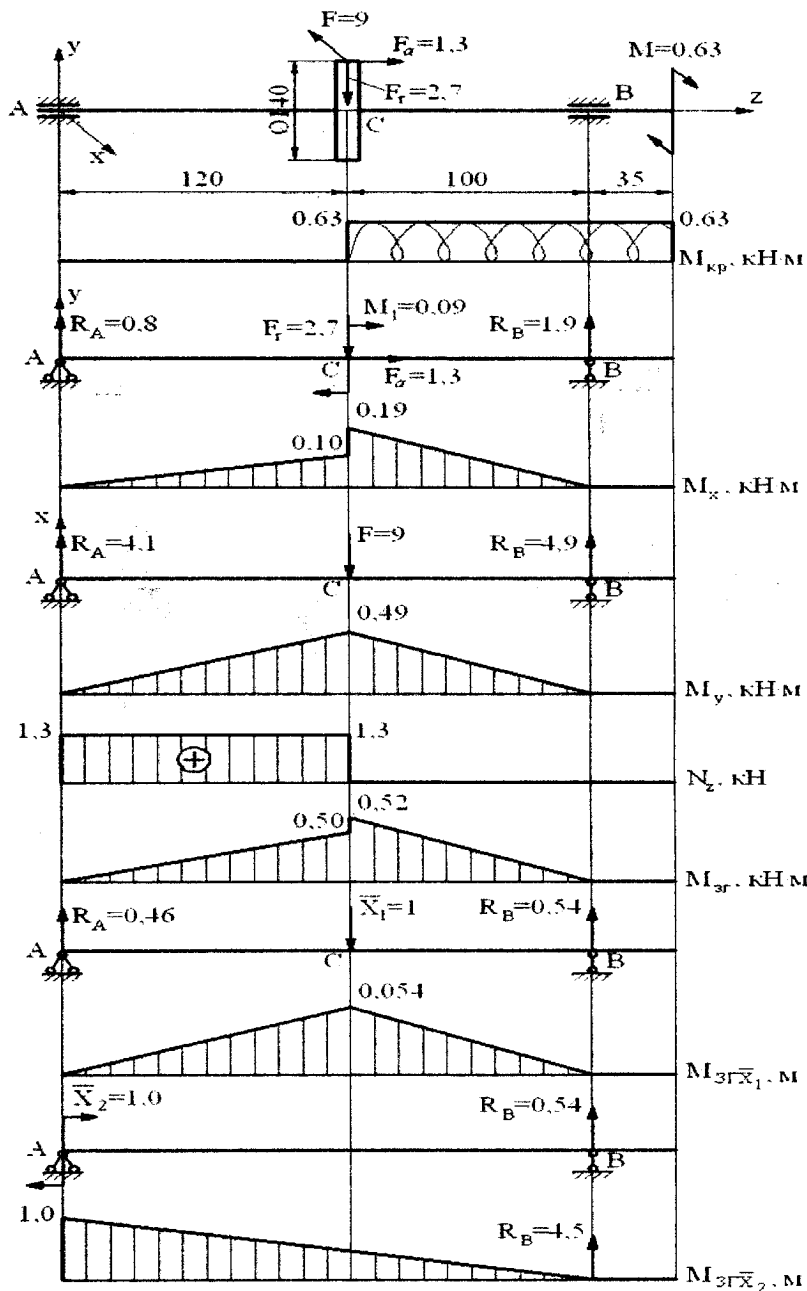
Лист

2

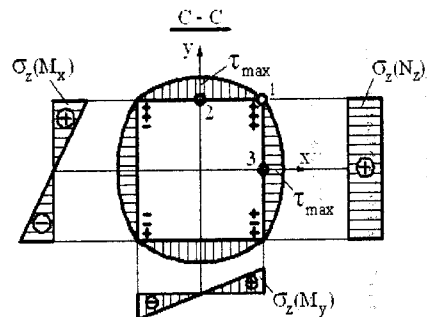
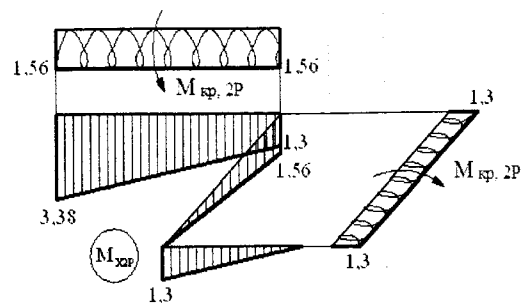
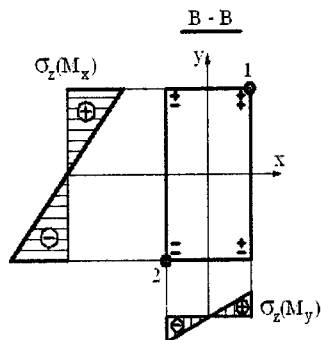
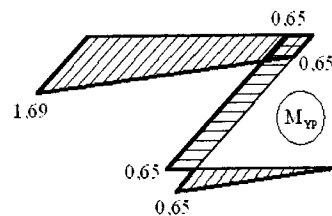
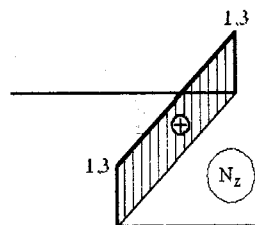
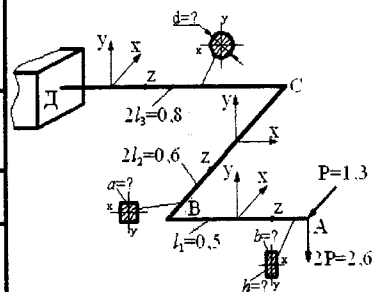
Мем.	
План	
№ задачи	
Подпись	
Дата	
3	Мем







№ п/п	№ задачи	Решение	Дата
6			



ЗМІСТ

Передмова	3
1. Основні поняття та положення	7
1.1 Наука про опір матеріалів.....	7
1.2 Реальний об'єкт і його розрахункові схеми.....	8
1.3 Схематизація (моделювання) конструктивних елементів.....	9
1.4 Схематизація опорних закріплень конструкцій.....	9
1.5 Припущення (гіпотези) стосовно властивостей матеріалів конструктивних елементів.....	11
1.6 Класифікація та схематизація зовнішніх сил.....	11
1.6.1 Зовнішні сили навантаження.....	11
1.7 Зміст методу перерізів.....	13
1.8 Внутрішні силові фактори.....	15
1.9 Види опору (деформацій).....	16
1.10 Побудова епюр внутрішніх силових факторів.....	18
1.10.1 Вимоги до побудови епюр.....	18
1.10.2 Побудова епюр поздовжніх сил.....	18
1.10.3 Побудова епюр крутних моментів.....	21
1.10.4 Правила контролю епюр поздовжніх сил та крутних моментів.....	23
1.10.5 Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.....	23
1.10.6 Диференціальні залежності при згинанні.....	31
1.10.7 Деякі особливості епюр Q_x і M_x	32
1.11 Напруження в точках перерізу.....	33
1.12 Інтегральні залежності між напруженнями та внутрішніми силовими факторами.....	36
1.13 Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	37
2. Розтягання, стискання. Механічні характеристики матеріалів	38
2.1 Напруження при розтяганні-стисканні.....	38
2.2 Переміщення і деформації при розтяганні-стисканні.....	39
2.3 Випробування матеріалів на розтягання.....	44
2.4 Основні механічні характеристики матеріалу.....	46

2.5	Характеристики пластичності матеріалу	49
2.6	Крихкість матеріалів. Випробування матеріалів на стискання.....	49
2.7	Вплив температури та фактора часу на механічні характеристики матеріалу.....	51
2.7.1	Повзучість. Релаксація напружень. Тривала міцність.....	52
2.8	Умови міцності і жорсткості. Види розрахунків.....	54
2.9	Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	60
3.	Розрахунок статично невизначуваних систем при розтяганні – стисканні.....	62
3.1	Статично невизначувані системи та особливості їх розрахунків.....	62
3.2	Приклад розрахунку бруса з жорсткими в'язями.....	63
3.3	Приклад розрахунку стержневої конструкції з пружними в'язями.....	67
3.4	Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	71
4.	Геометричні характеристики плоских перерізів (фігур).....	72
4.1	Площа перерізу.....	72
4.2	Статичні моменти площі перерізу.....	72
4.3	Моменти інерції площі перерізів.....	74
4.4	Головні осі інерції та головні моменти інерції перерізу.....	76
4.5	Послідовність визначення геометричних характеристик складних перерізів стержнів.....	78
4.6	Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	83
5.	Розрахунки на міцність та жорсткість при згинанні.....	84
5.1	Чисте плоске згинання.....	84
5.2	Нормальне напруження в поперечному перерізі балки при чистому плоскому згинанні.....	85
5.3	Умова міцності при чистому плоскому згинанні.....	90
5.4	Напруження при поперечному згинанні.....	90
5.4.1	Нормальні напруження при поперечному згинанні.....	91
5.4.2	Дотичні напруження при поперечному згинанні.....	91
5.5	Переміщення при плоскому поперечному згинанні.....	99
5.6	Диференціальне рівняння зігнутої осі балки.....	100

5.7	Визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів.	
	Універсальне рівняння пружної лінії балки.....	103
5.8	Умова жорсткості при згинанні.....	106
5.9	Рціональні форми перерізів балки при згинанні.....	111
5.10	Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	112
6.	Розрахунки на міцність та жорсткість при зсуві та крученні.....	114
6.1	Зсув.....	114
6.1.1	Деформації, напруження при чистому зсуві. Закон Гука при зсуві.....	115
6.1.2	Практичні розрахунки на міцність при зсуві.....	117
6.2	Кручення.....	118
6.2.1	Кручення стержнів з круглим поперечним перерізом.....	118
6.2.2	Формула для визначення дотичних напружень у круглому поперечному перерізі стержня при крученні.....	119
6.2.3	Умови міцності і жорсткості при крученні стержнів з круглим поперечним перерізом.....	123
6.2.4	Кручення стержнів некруглого поперечного перерізу.....	126
6.2.5	Рціональні форми перерізу стержня при крученні.....	132
6.3	Самоперевірка якості засвоєння теми.....	133
7.	Енергетичний метод визначення пружних переміщень.....	135
7.1	Потенціальна енергія деформування тіл при простих видах опору.....	135
7.1.1	Розтяг і стиск.....	135
7.1.2	Кручення.....	137
7.1.3	Чистий та поперечний згин балок.....	138
7.2	Потенціальна енергія деформування пружного тіла при довільному навантаженні.....	139
7.3	Узагальнена сила, узагальнене переміщення та їх відповідність.....	141
7.4	Основні формули визначення переміщень енергетичним методом.....	143
7.4.1	Теорема Кастіліано.....	143
7.4.2	Формула Максвелла-Мора для визначення пружних переміщень перерізів ("інтеграл Мора").....	147
7.4.3	Обчислення інтеграла Мора за способом Верещагіна.....	150
7.5	Самоперевірка якості засвоєння теми.....	165

8. Загальні методи розрахунку статично невизначуваних систем.....	166
8.1 В'язі зовнішні, необхідні та зайві.	
Ступінь зовнішньої гіперстатичності системи.....	167
8.2 В'язі внутрішні.	
Внутрішня та загальна ступені статичної невизначеності систем.....	169
8.3 Основні переваги, недоліки та особливості статично невизначуваних систем.....	173
8.4 Основні методи розкриття статичної невизначеності систем.....	175
8.5 Розрахунок статично невизначуваних систем за методом сил.....	176
8.6 Використання симетрії при розрахунках статично невизначуваних систем.....	194
8.7 Самоперевірка якості засвоєння теми.....	201
 9. Розрахунки на міцність і жорсткість при складних видах опору та складному напруженому стані.....	202
9.1 Косе згинання.....	202
9.1.1 Нормальні напруження в поперечному перерізі при косому згинанні.....	202
9.1.2 Епюра розподілу нормальних напружень у перерізі при косому згинанні.	
Умови міцності.....	204
9.1.3 Деформації при косому згинанні.....	205
9.2 Позацентрове розтягання – стискання бруса.....	209
9.2.1 Нормальні напруження в поперечному перерізі при складному згинанні з розтяганням (стисканням).....	210
9.2.2 Епюра нормальних напружень у перерізі при складному згинанні з розтяганням (стисканням). Умова міцності.....	212
9.2.3 Ядро перерізу.....	213
9.3 Елементи теорії напружено-деформованого стану.....	217
9.3.1 Напружений стан в точці (поняття).....	217
9.3.2 Визначення напружень на площадках довільного положення.....	223
9.3.3 Головні площадки та головні напруження.....	224
9.3.4 Визначення положення головних площадок та значень головних нормальних напружень у загальному випадку складного напруженого стану.....	225
9.3.5 Напруження на довільних і головних площадках при плоскому напруженому стані.....	228
9.3.6 Деформований стан у довільній точці.....	232
9.3.7 Залежність між деформаціями і напруженнями при складному напруженому	

стані (узагальнений закон Гука).....	235
9.3.8 Об'ємна деформація. Об'ємний закон Гука.	
Питома потенціальна енергія деформування.....	237
9.4 Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	239
10. Теорія граничних напружених станів	
(теорія текучості та початку руйнування, чи просто – теорії міцності)	240
10.1 Критерії початку текучості та руйнування (гіпотези та теорії міцності).....	241
10.2 Основні (класичні) гіпотези граничних станів та	
теорія граничних станів Мора.....	242
10.3 Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	257
11. Напруження і деформації при динамічних навантаженнях	258
11.1 Розрахунки на міцність і жорсткість з врахуванням	
сил інерції рухомого тіла.....	258
11.2 Ударне навантаження вільно падаючим тілом.....	261
11.3 Скручувальний удар обертовим тілом.....	264
11.4 Приклад розрахунку балки на ударне навантаження.....	265
11.5 Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	270
12. Розрахунки на міцність при циклічно-змінних напруженнях	271
12.1 Основні поняття та визначення.....	271
12.2 Основні фактори, що впливають на границю витривалості.....	274
12.2.1 Вплив концентрації напружень.....	274
12.2.2 Вплив розмірів деталі.....	277
12.2.3 Вплив якості поверхні деталі.....	278
12.3 Розрахунок на циклічну міцність. Коефіцієнти запасу витривалості.....	279
12.4 Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	283
13. Стійкість форм рівноваги	284
13.1 Основні види втрати початкової форми рівноваги.....	285
13.2 Стійка та нестійка форми рівноваги.	
Критична сила (на прикладі поздовжнього стиску стержня).....	285
13.3 Границі застосування формули Ейлера.....	289

13.4	Формули для практичних розрахунків на стійкість стиснутих стержнів середньої і малої гнучкості.....	290
13.5	Розрахунки на стійкість за коефіцієнтом зниження основного допустимого напруження.....	291
13.6	Раціональні форми перерізу стержнів з точки зору їх стійкості.....	295
13.7	Узагальнення: особливості розрахунків на стійкість.....	295
13.8	Самоперевірка якості засвоєння матеріалу теми.....	297
Список використаних та рекомендованих джерел.....		298
Додатки.....		299

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ОСНОВИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

КРАВЧУК Василь Степанович

канд. техн. наук, приват-професор

ДАЩЕНКО Олександр Федорович

д-р техн. наук, професор

КОЛОМІЄЦЬ Леонід Володимирович

д-р техн. наук, професор

ЛИМАРЕНКО Олександр Михайлович

канд. техн. наук, доцент

Підписано до друку 10.06.2014 р. Формат 60х90^{1/16}. Папір офсетний.

Ум. друк. стор. 32.12. Заказ № 7771. Наклад 300 прим.

Надруковано з оригінал-макету в друкарні ТОВ “ВМВ”.

Україна, 65053, м. Одеса, пр-т Добровольського, 82а.

Тел. 52-22-03, 54-50-48.
