С. А. Кирилащук, З. В. Бондаренко, В. І. Клочко

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА 3
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

С. А. Кирилащук, З. В. Бондаренко, В. І. Клочко

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА 3
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Електронний навчальний посібник
комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2024

УДК 512.64(075.8)
К43

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 28.11.2023 р.).

Рецензенти:
О. Д. Азаров, доктор технічних наук, професор
В. Х. Касіяненко, доктор фізико-математичних наук, професор
О. Б. Панасенко, кандидат фізико-математичних наук

Кирилащук, С. А.
К43 Вища математика. Частина 3. Індивідуальні завдання : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / Кирилащук С. А., Бондаренко З. В., Клочко В. І. – Вінниця : ВНТУ, 2023. – 110 с.

В посібнику розглянуто основні поняття інтегрального числення функції однієї змінної. Кожен розділ посібника містить основні теоретичні положення, методичні рекомендації до розв’язання задач, питання та завдання з відповідями для самоперевірки, розрахункові індивідуальні роботи та зразки їх виконання. Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 512.64(075.8)

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

ПЗ-1 ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ ТА НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ. МЕТОД РОЗВИНЕННЯ. МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ, АБО ПІДСТАНОВКИ. МЕТОД ВНЕСЕННЯ ПІД ЗНАК ДИФЕРЕНЦІАЛА

Теоретичні відомості

1. Функцію $F(x)$ називають **первісною** функції f(x), якщо виконується рівність $F'(x) = f(x)$, або $d(F(x)) = f(x)dx$.

2. Якщо функція $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то будь-яка функція $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – довільна стала, теж буде первісною функції $f(x)$.

3. Якщо функція $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то будь-яку іншу первісну $\Phi(x)$ функції $f(x)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

де C – довільна стала.

4. Множину всіх первісних функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегралом** цієї функції і позначають

$$\int f(x)dx. \tag{1}$$

Отже, $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, а C – довільна стала (*стала інтегрування*).

5. У виразі (1) функцію $f(x)$ називають *підінтегральною функцією,* добуток $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, а аргумент x – *змінною інтегрування*.

6. Правильність інтегрування перевіряють диференціюванням: $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$.

7. **Основні властивості невизначеного інтеграла**. Нехай $f(x)$ та $\varphi(x)$ – деякі функції, k – стала, тоді:

1) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;
2) $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
3) $\int k \cdot f(x)dx = \int f(x)dx$;
4) $\int\left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$.

8. *Таблиця основних інтегралів*. Нехай *f(x)* – деяка функція, *a* та *n* – сталі, тоді:

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	**2.** $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$	**4.** $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	**6.** $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	**8.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	**10.** $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	**12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
13. $\int shxdx = chx + C$	**14.** $\int chxdx = shx + C$

9. Процес знаходження $\int f(x)dx$ називають *інтегруванням функції f(x)*. Існують різноманітні методи інтегрування. В цьому розділі ми розглянемо найбільш поширені з них.

10. Щоб перевірити інтегрування, потрібно скористатися властивістю 2 (*див. п. 6*), тобто знайти похідну кінцевого результату інтегрування і переконатися, що отримали підінтегральну функцію.

11. Метод інтегрування, який полягає у прямому використанні табличних інтегралів, носить назву *методу безпосереднього інтегрування*. Як правило, цей метод потребує попереднього перетворення заданого інтеграла в табличний.

12. *Метод розвинення* полягає у зведенні заданого інтеграла за властивістю 4 (*див. п. 6*) до суми більш простих, краще табличних, інтегралів.

Розглянемо **основні методи інтегрування.**

Приклад. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx$ **безпосереднім інтегруванням.**

Розв'язання. Подамо заданий інтеграл у вигляді суми табличних інтегралів:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3 e^x}{x^3} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{8}{3}} - \frac{1}{x} + e^x \right) dx =$$

$$= \int x^{-\frac{8}{3}} dx - \int \frac{dx}{x} + \int e^x dx = \frac{x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}} - \ln|x| + e^x + C = -\frac{3}{5x\sqrt[3]{x^2}} - \ln|x| + e^x + C$$

Відповідь. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx = -\frac{3}{5x\sqrt[3]{x^2}} - \ln|x| + e^x + C.$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} dx$.

Розв'язання. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} dx = \int \frac{x^2 + 1 + 3 - 3}{x^2 + 4} dx = \int \frac{(x^2 + 4) - 3}{x^2 + 4} dx =$

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x^2 + 4} = x - \frac{3}{2} arctg \frac{x}{2} + C .$$

Відповідь. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} dx = x - \frac{3}{2} arctg \frac{x}{2} + C.$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int tg^2 x dx$. Виконати перевірку.

Розв'язання. Скористаємось відомими нам зі шкільного курсу математики тригонометричними формулами $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ та $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ і перетворимо підінтегральну функцію

$$tg^2 x = \frac{sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} - \frac{cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} - 1. \quad (2)$$

Підставивши рівність (2) у заданий інтеграл і скориставшись методом розвинення (*див. п. 11*), тобто властивістю 4) (*див. п. 6*), матимемо

$$\mathrm{I} = \int tg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{cos^2 x} - \int dx. \qquad (3)$$

Обчислимо інтеграли (методом безпосереднього інтегрування (*див. п. 10*)

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\ x + C_1; \int dx = x + C_2. \qquad (4)$$

Підставивши рівності (4) у рівність (3), матимемо

$$I = \int \frac{dx}{cos^2 x} - \int dx = tg\ x + C_1 - (x + C_2) = tg\ x - x + C_1 - C_2. \qquad (5)$$

Замінимо в рівності (5) сталу інтегрування $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 = \mathrm{C}$, тоді шуканий інтеграл

$$I = \int tg^2 x\, dx = tg\ x - x + C.$$

Перевірка. Користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних, знайдемо похідну функції $I(\mathrm{x})$, яка є кінцевим результатом інтегрування,

$$I' = (tg\ x - x + C)' = (tg\ x)' - x' + C' = \frac{1}{cos^2 x} - 1 + 0 =$$
$$= \frac{1}{cos^2 x} - 1 = \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{sin^2 x}{cos^2 x} = tg^2 x.$$

Знайдена похідна дорівнює підінтегральній функції, тому інтегрування виконане правильно (*див. ПЗ-1, п. 9*).

13. Метод внесення функції під знак диференціала

Метод внесення функції під знак диференціала доцільно застосовувати, якщо підінтегральний вираз можна подати у вигляді добутку деякої функції та її диференціала, тобто,

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x) = \int g(u)du, u = \varphi(x).$$

Наведемо деякі корисні співвідношення (таблиця диференціалів).

$x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} d\left(x^{\alpha+1}\right), \alpha \neq -1$	$\frac{1}{x} dx = d\left(\ln\lvert x\rvert\right)$	$\sin x dx = -d(\cos x)$
$\cos x dx = d(\sin x)$	$\frac{1}{\cos^2 x} dx = d(tgx)$	$\frac{1}{\sin^2 x} dx = -d(ctgx)$
$a^x dx = \frac{1}{\ln a} d\left(a^x\right)$, $e^x dx = de^x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$	$\frac{1}{1+x^2} dx = d(arctgx) = -d(arcctgx)$

Приклад 4. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(5x-1)^4}$ за допомогою методу введення функції під знак диференціала.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{(5x-1)^4} = \frac{1}{5}\int (5x-1)^{-4} 5dx = \frac{1}{5}\int (5x-1)^{-4} d(5x-1) =$

$= \frac{1}{5}\int u^{-4}du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{15(5x-1)^3} + C.$

Відповідь. $\int \frac{dx}{(5x-1)^4} = -\frac{1}{15(5x-1)^3} + C$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, що знаходиться у знаменнику підінтегрального виразу: $x^2+6x+10 = x^2+6x+9+1 = (x+3)^2+1$. Враховуючи, що $d(x+3) = (x+3)'dx = dx$, знаходимо інтеграл: $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1} = arctg(x+3) + C$

Відповідь. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = arctg(x+3) + C.$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int cos(3x+5)dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод внесення під знак диференціала. За правилами диференціювання знаходимо

$$d(3x+5) = (3x+5)'dx = 3dx.$$

Звідси $dx = \frac{d(3x+5)}{3}$.

Підставивши отриману рівність у заданий інтеграл і скориставшись властивістю 3) (*див. п. 6*), матимемо

$$I = \int cos(3x+5)\,dx = \int cos(3x+5)\,\frac{d(3x+5)}{3} = \frac{1}{3}\cdot\int cos(3x+5)\,d(3x+5).$$

Не записуючи нової змінної, усно, зробимо заміну $3x+5=u$ і, використавши табличний інтеграл 6) (*див. п. 7*), отримаємо

$$\mathrm{I} = \int cos(3x+5)\,dx = \frac{1}{3}\cdot sin(3x+5) + C.$$

14. Метод заміни змінної. Нехай в інтегралі $\int f(x)dx$ проведено заміну змінної $x=\varphi(t)$. Якщо функція $f(x)$ неперервна, функція $\varphi(t)$обернена і має неперервну похідну, то

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt+C. \qquad (6)$$

Формула (6) називається формулою заміни змінної у невизначеному інтегралі. Можлива також заміна $t=\psi(x)$. Метод заміни змінної доцільно застосовувати для приведення початкового інтеграла до табличного. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної.

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int\sqrt{\cos 5x+1}\cdot\sin 5xdx.$

Розв'язання. Проведемо заміну змінної $t=\cos 5x+1$, тоді $dt=-5\sin 5xdx$, а $\sin 5xdx=-\frac{1}{5}dt$.

$$\int\sqrt{\cos 5x+1}\cdot\sin 5xdx=\int t^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{5}\right)dt=-\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{5}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{15}t\sqrt{t}+C=$$

$$=-\frac{2}{15}(\cos 5x+1)\sqrt{\cos 5x+1}+C.$$

Запропоновані перетворення рівносильні введенню під знак диференціала функції $\cos 5x+1$.

Відповідь. $\int\sqrt{\cos 5x+1}\cdot\sin 5xdx=-\frac{2}{15}(\cos 5x+1)\sqrt{\cos 5x+1}+C.$

Приклад 8. Методом підстановки обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Введемо нову змінну

$$t=2+\sqrt{x}. \qquad (7)$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно *x*

$$\sqrt{x}=t-2,$$
$$x=(t-2)^2. \qquad (8)$$

Диференціюємо обидві частини рівності (8) за змінною *t*. Матимемо

$$dx=x'_t\cdot dt=2\cdot(t-2)dt. \qquad (9)$$

Підставивши рівності (7) і (9) у заданий інтеграл і виконавши алгебраїчні перетворення, отримаємо

$$I = \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \int \frac{2\cdot(t-2)dt}{t} = \int \frac{2t-4}{t} dt = \int \left(2 - \frac{4}{t}\right) dt.$$

Застосуємо властивості 3 та 4 (*див. п. 6*) , отримаємо

$$\mathrm{I} = \int 2\, dt - \int \frac{4}{t} dt = 2 \cdot \int dt - 4 \cdot \int \frac{dt}{t} = 2t - 4 \cdot ln|t| + C_1. \qquad (10)$$

Підставивши рівність (7) у (10), повернемось до змінної *x*

$$I = 2 \cdot \left(2 + \sqrt{x}\right) - 4 \cdot ln\left(2 + \sqrt{x}\right) + C_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{x} - 4 \cdot ln\left(2 + \sqrt{x}\right) + C_1.$$

Замінивши сталу інтегрування $4 + \mathrm{C}_1 = \mathrm{C}$, одержимо

$$I = \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = 2 \cdot \sqrt{x} - 4\, ln\left(2 + \sqrt{x}\right) + C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

№1. Знайти первісну *F(x)* функції $f(x) = 5x^4 + 2$, якщо відомо, що графік *F(x)* проходить через точку *M(1; 7).*

Вказівка. *Знайти первісну заданої функції у вигляді* $F(x) = \Phi(x) + C$, *а потім визначити невідому сталу С з рівняння* $F(1) = 7$.

Відповідь. $F(x) = x^5 + 2x + 4$.

№ 2. Заповнити пропущені місця в таких рівностях:

а) $d(\dots) = 2xdx$; *б)* $d(\dots) = x^3dx$; *в)* $d(\dots) = \frac{dx}{x}$; *г)* $d(\dots) = \frac{dx}{1+x^2}$.

Відповідь: *а)* $x^2 + C$; *б)* $\frac{x^4}{4} + C$; *в)* $ln\, x + C$; *г)* $arctg\, x + C$.

№ 3. Методом розкладання знайти інтеграли:

а)$\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx$; *б)*$\int \frac{10x^8+3}{x^4} dx$;

в)$\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$; *г)*$\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$;

д)$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx$; *е)*$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx$;

ж)$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$; *и)*$\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$.

Вказівка. *Застосувати формули : в)* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

д)$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; *и)* $sin^2\alpha = \frac{1-cos\alpha}{2}$.

Відповідь:

а) $\frac{x^3}{3} + x^2 + ln|x| + C$; *б)* $2x^5 - \frac{1}{x^3} + C$;

в) $\frac{x^2}{2} + 2\,ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$; *г)* $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + C$;

д) $\frac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3} - 3x + 6 \cdot \sqrt{x} - ln|x| + C$; *е)* $2 \cdot \sqrt{x} - 4 \cdot \sqrt[4]{x} + C$;

ж) $arctg\, x - 3\, arcsin\, x + C$; *и)* $\frac{x - sin\, x}{2} + C$.

№ 4. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \sqrt[3]{5 - 6x}\, dx$; *б)* $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$;

в) $\frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx$; *г)* $\int \frac{cos\, 2x}{sin\, x \cdot cos\, x} dx$;

д) $\int e^{x^3} \cdot x^2\, dx$; *е)* $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}}$;

ж) $\int \frac{\sqrt{1+lnx}}{x} dx$; *и)* $\int \sqrt[3]{x^3 - 8} \cdot 4x^2\, dx$;

к) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx$; *л)* $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + 2\cdot\sqrt{x}}$;

м) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$; *н)* $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^3-1}}$.

Відповідь:

а) $\mathrm{C} - \frac{\sqrt[3]{(5-6x)^4}}{8}$; *б)* $C - \sqrt{3 - 2x}$;

в) $ln(x^2 - 5x + 7) + C$; *г)* $ln|sin\, 2x| + C$;

д) $\frac{1}{3} \cdot e^{x^3} + C$; *е)* $2 \cdot e^{\sqrt{x}} + C$;

ж) $\frac{2\cdot\sqrt{(1+ln\, x)^3}}{3} + C$; *и)* $\sqrt[3]{(x^3 - 8)^4} + C$;

к) $\frac{2arctg\sqrt{x^3-1}}{3} + C$; *л)* $3 \cdot \sqrt[3]{x} - 12 \cdot \sqrt[6]{x} + C$;

м) $arcsin\, x + \sqrt{1 - x^2} + C$; *н)* $2 \cdot \sqrt{x+1} + ln\left|\frac{x+2-\sqrt{x+1}}{x}\right| + C$.

№ 5. Обчислити невизначені інтеграли безпосереднім інтегруванням.

1. $\int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} dx$	2. $\int \frac{x^3 - 8}{x - 2} dx$	3. $\int \frac{x^2 + 2x - 7}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x} - x} dx$	5. $\int \frac{x^2 - 2^x x^3 + x}{x^3} dx$	6. $\int \frac{x^2 + 2x + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

7. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$	8. $\int \frac{x-3^x x^3+x^2}{x^3}dx$	9. $\int \frac{x^2-3x+1}{\sqrt[5]{x^4}}dx$
10. $\int \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$	11. $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}dx$	12. $\int \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{5x}}dx$
13. $\int \frac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$	14. $\int tg^2 x dx$	15. $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$
16. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$	17. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$	18. $\int ctg^2 x dx$
19. $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$	20. $\int \frac{x^2\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x}}dx$	21. $\int \frac{1}{\cos 2x+\sin^2 x}dx$
22. $\int \frac{2+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$	23. $\int \sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+x\right)dx$	24. $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$
25. $\int \frac{3tg^2 x-2}{\sin^2 x}dx$	26. $\int \frac{5-4ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$	27. $\int \frac{x^3-5x+4}{\sqrt[5]{x}}dx$
28. $\int \frac{x-3e^x\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^4}}dx$	29. $\int \frac{x^3-3\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}}dx$	30. $\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{1+\sqrt{x}}dx$

№ 6. Обчислити невизначені інтеграли за допомогою методу введення функції під знак диференціала або методу підстановки.

1. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$	2. $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$	3. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$
4. $\int \frac{\cos\left(3\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}dx$	5. $\int \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x^3}-3\right)dx$	6. $\int \frac{xdx}{\cos^2\left(3x^2+\frac{1}{2}\right)}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$	8. $\int \frac{e^{\sqrt{\sin x}}}{\sqrt{\sin x}}\cos x dx$	9. $\int x^3\sin^2 x^4\cos x^4\,dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}\arcsin\frac{x}{5}}$	11. $\int \frac{dx}{\left(1+4x^2\right)arctg^2 x}$	12. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3+\cos^2 x}}dx$

13. $\int \frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	14. $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(tg^2\frac{x}{2}-9\right)}$	15. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+4}dx$
16. $\int \frac{3^{3x}}{3^{5x}-16}dx$	17. $\int \frac{\sin 2xdx}{\cos^2 2x-5}$	18. $\int \frac{x^2}{\sqrt{7+2x^3}}dx$
19. $\int \left(3-2^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin^2 x+4}}$	21. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$
22. $\int \sqrt[3]{\cos 5x}\sin 5x\,dx$	23. $\int \frac{2+tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	24. $\int \frac{\cos\frac{1}{x}+4}{x^2}dx$
25. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{(1+2\cos x)^5}}dx$	26. $\int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}dx$	27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^6}}dx$
28. $\int \frac{2x-x^3}{\sqrt{25+x4}}dx$	29. $\int \frac{2arctg2x}{1+4x^2}dx$	30. $\int \frac{\sqrt{tg2x}}{\cos^2 2x}dx$

ПЗ-2 МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ВИДІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Теоретичні відомості

1. **Метод інтегрування частинами** полягає у використанні формули

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{1}$$

де $u = u(x)$ і$v = v(x)$ – деякі функції.

Використовуючи цей метод, за u приймають функцію, яка під час диференціювання спрощується, а за dv – ту частину підінтегрального виразу, яка містить dx і легко інтегрується. Мета цих дій полягає в тому, щоб інтеграл $\int vdu$ виявився простішим, ніж $\int u\, dv$.

2. ***Зауваження.*** *За диференціалом dv функція v визначається неоднозначною (з точністю до сталої інтегрування).*

Для обчислення інтегралів:

1. $\int P_n(x)\begin{bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ a^x\end{bmatrix}dx,$

2. $\int P_n(x)\begin{bmatrix}\arcsin bx\\ arc\cos bx\\ \log_a bx\end{bmatrix}dx$

3. $\int e^{ax}\begin{bmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{bmatrix}dx$ та ін.

застосовують формулу $\int udv = uv - \int vdu$, де $u(x), v(x)$ – диференційовні функції. В інтегралах першого типу за u потрібно брати многочлен, а за dv – ту частину підінтегрального виразу, що залишилась. В результаті інтеграл $\int vdu$ має стати простішим порівняно з початковим. В інтегралах другого типу навпаки: за u приймаємо логарифмічну чи обернену тригонометричну функцію. В інтегралах третього типу отримуємо лінійне рівняння відносно початкового інтеграла.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int(2x+3)\sin 3xdx$.

Розв'язання. Покладаємо $u = 2x+3, dv = \sin 3xdx$, тоді $du = 2dx$, $v = \int \sin 3xdx = -\frac{1}{3}\cos 3x$. Згідно з формулою інтегрування частинами маємо

$$\int(2x+3)\sin 3xdx = -\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{3}\int \cos 3xdx = -\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x +$$

$$+\frac{2}{9}\sin 3xdx + C.$$

Відповідь **.** $\int(2x+3)\sin 3xdx = -\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3xdx + C.$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int x\ln^2 xdx$.

Розв'язання. Покладаємо $u = \ln^2 x$, $dv = xdx$, тоді $du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$, $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$. Застосувавши формулу інтегрування частинами, отримуємо

$\int x\ln^2 xdx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x^2 \ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln xdx$. Інтеграл $\int x\ln xdx$ також знаходимо методом інтегрування частинами. Покладаємо $u = \ln x, dv = xdx$, тоді $du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^2}{2}$, $\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x} =$
$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ +C.

Остаточно маємо $\int x\ln^2 xdx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$ +C.

Відповідь. $\int x\ln^2 xdx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$ +C.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int x^2 \cdot \cos x\ dx$. Результати перевірити диференціюванням.

Розв'язання. Застосуємо метод інтегрування частинами. Позначимо

$$u = x^2,\ \textit{тоді}\ dv = \cos x\ dx. \quad (2)$$

З цих рівностей знаходимо

$$du = (x^2)' \cdot dx = 2x\ dx\ і\ v = \sin x. \quad (3)$$

Підставивши рівності (2) і (3) у формулу інтегрування частинами (1), матимемо

$$I = \int x^2 \cdot \cos x\ dx = x^2 \cdot \sin x - \int 2x \cdot \sin x\ dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \cdot \int x \cdot \sin x\ dx. \quad (4)$$

До отриманого в рівності (4) інтеграла знову застосуємо метод інтегрування частинами. Позначимо

$$u = x,\ \textit{тоді}\ dv = \sin x\ dx. \quad (5)$$

З цих рівностей $du = dx\ і\ v = -\cos x$. (6)

Підставивши рівності (5) і (6) у формулу інтегрування частинами (1), матимемо

$$\int x \cdot \sin x\ dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x\ dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x\ dx. \quad (7)$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C\ . \quad (8)$$

Підставимо рівність (8) у (7), а отриману таким чином рівність – у (4) і одержимо шуканий результат

$$I = x^2 \cdot sin\, x + 2x \cdot cos\, x - 2\, sin\, x + C = (x^2 - 2) \cdot sin\, x + 2x \cdot cos\, x + C\ .$$

Перевірка. Користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних, знайдемо похідну функції *I(x)*, яка є кінцевим результатом інтегрування. Матимемо

$$I' = ((x^2 - 2) \cdot sin\, x + 2x \cdot cos\, x + C)' = (x^2 - 2)' \cdot sin\, x\ +$$
$$+(x^2 - 2) \cdot (sin\, x)' + 2 \cdot x' \cdot cos\, x + 2x \cdot (cos\, x)' + C' =$$
$$= 2x \cdot sin\, x + (x^2 - 2) \cdot cos\, x + 2\, cos\, x - 2x \cdot sin\, x =$$
$$= x^2 \cdot sin\, x - 2\, cos\, x + 2\, cos\, x = x^2 \cdot cos\, x\ .$$

Знайдена похідна дорівнює підінтегральній функції, тому інтегрування виконане правильно (*див. ПЗ-1, п. 9*).

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int e^x \cdot sin\, x\, dx$.

Застосуємо метод інтегрування частинами. Позначимо

$$u = sin\, x, \textit{ тоді } dv = e^x\, dx. \qquad (9)$$

І з цих рівностей знаходимо

$$du = cos\, x\ \ dx\ i\ v = e^x. \qquad (10)$$

Підставивши рівності (9) і (10) у формулу інтегрування частинами, матимемо

$$I = \int e^x \cdot sin\, x\, dx = e^x \cdot sin\, x - \int e^x \cdot cos\, x\, dx\ . \qquad (11)$$

До отриманого в рівності (11) інтеграла знову застосуємо метод інтегрування частинами. Позначимо

$$u = cos\, x, \text{ тоді } dv = e^x\, dx. \qquad (12)$$

З цих рівностей знаходимо

$$du = -\, sin\, x\ \ dx\ i\ v = e^x. \qquad (13)$$

Підставивши рівності (12) і (13) у формулу (1), матимемо

$$\int e^x \cdot cos\, x\, dx = e^x \cdot cos\, x - \int - e^x \cdot sin\, x\, dx = e^x \cdot cos\, x + \int e^x \cdot sin\, x\, dx. \qquad (14)$$

Підставимо рівність (14) у (11) і отримаємо

$$\int e^x \cdot sin\, x\, dx = e^x \cdot sin\, x - e^x \cdot cos\, x - \int e^x \cdot sin\, x\, dx\ . \qquad (15)$$

Легко помітити, що інтеграли у правій і лівій частинах рівності (15) однакові і дорівнюють шуканому інтегралу $I = \int e^x \cdot \sin x\, dx$. Отже, рівність (15) приймає вигляд рівняння $I = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - 1$.

Розв'яжемо отримане рівняння і знайдемо невідоме *I,* ввівши при цьому сталу інтегрування C_1. Матимемо

$$2I = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + C_1,$$
$$I = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + \frac{C_1}{2}.$$

Замінивши сталу інтегрування $\frac{C_1}{2} = \mathrm{C}$, одержимо

$$I = \int e^x \cdot \sin x\, dx = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + C \ .$$

Перевірка. Користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних, знайдемо похідну функції *I(x)*, яка є кінцевим результатом інтегрування. Матимемо

$$I' = (\frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + C)' =$$
$$= \frac{(e^x)'}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cdot ((\sin x)' - (\cos x)') + C' =$$
$$= \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cdot (\cos x + \sin x) + 0 =$$
$$= \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x + \cos x + \sin x) = \frac{e^x}{2} \cdot 2 \sin x = e^x \cdot \sin x.$$

Знайдена похідна дорівнює підінтегральній функції, тому інтегрування виконане правильно (*див. ПЗ-1, п. 9*).

3. Інтегрування деяких тригонометричних функцій. Інтеграли вигляду$\int \sin^n x \cdot \cos^m x\, dx$, де $n \neq m$ – натуральні числа і хоч одне з них непарне, обчислюють методом підстановки, позначивши за нову змінну функцію, степінь якої непарний.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$.

Розв'язання. Перепишемо інтеграл у вигляді

$$I \ = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x\, dx. \tag{16}$$

Непарний степінь має функція $\cos x$, тому введемо нову змінну

$$t = \sin x. \tag{17}$$

Тоді

$$dt = (\sin x)' dx = \cos x\, dx I t^2 = \sin^2 x. \tag{18}$$

За основною тригонометричною тотожністю $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, тоді

$$cos^4 x = (cos^2 x)^2 = (1 - sin^2 x)^2 = (1 - t^2)^2 = 1 - 2t^2 + t^4. \qquad (19)$$

Підставивши рівності (18), (19) у рівність (16) і виконавши очевидні алгебраїчні перетворення, отримаємо

$$I = \int t^2 \cdot (1 - 2t^2 + t^4)\, dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt.$$

Скориставшись властивостями 3), 4) (*див. ПЗ-1, п. 6*) і табличним інтегралом 2) (*див. ПЗ-1, п. 7*), матимемо

$$I = \int t^2\, dt - 2 \cdot \int t^4\, dt + \int t^6\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C\,. \qquad (20)$$

Підставивши рівність (17) у (20), повернемось до змінної x і отримаємо шуканий інтеграл

$$I = \frac{sin^3 x}{3} - \frac{2 \cdot sin^5 x}{5} + \frac{sin^7 x}{7} + C\,.$$

4. Інтеграли вигляду $\int sin^{2n} x \cdot cos^{2m} x\, dx$, де $n \neq m$ – натуральні числа, знаходять, застосовуючи тригонометричні формули зниження степеня, відомі нам зі шкільного курсу математики

$$sin^2 x = \frac{1 - cos\, 2x}{2}; \quad cos^2 x = \frac{1 + cos\, 2x}{2}. \qquad (21)$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int sin^2 x \cdot cos^4 x\, dx$.

Розв'язання. Застосувавши до підінтегральної функції формули (21) і виконавши очевидні алгебраїчні перетворення, отримаємо

$$\mathrm{I} = \int \sin^2 \mathrm{x} \cdot \cos^4 \mathrm{x}\, \mathrm{dx} = \int \sin^2 \mathrm{x} \cdot (\cos^2 \mathrm{x})^2\, \mathrm{dx} =$$
$$= \int \frac{1 - \cos 2\mathrm{x}}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2\mathrm{x}}{2}\right)^2 \mathrm{dx} = \int \frac{(1 - \cos^2 2\mathrm{x}) \cdot (1 + \cos 2\mathrm{x})}{2 \cdot 4}\, \mathrm{dx} =$$
$$= \int \frac{1}{8} \cdot (1 + \cos 2\mathrm{x} - \cos^2 2\mathrm{x} - \cos^3 2\mathrm{x})\, \mathrm{dx}.$$

Скориставшись властивостями 3), 4) (*див. ПЗ-1, п. 6*), матимемо

$$I = \frac{1}{8} \cdot \int dx + \frac{1}{8} \cdot \int cos\, 2x\, dx - \frac{1}{8} \cdot \int cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8} \cdot \int cos^3 2x\, dx\,. \qquad (22)$$

Знайдемо окремо кожен з інтегралів, отриманих у правій частині рівності (22).

1) $I_1 = \int dx = x + C_1$.(23)

2) $I_2 = \int cos\, 2x\, dx$. Внесемо $2x$ під знак диференціала, тобто скористаємось рівністю $d(2x) = (2x)' dx = 2\, dx$, звідки $dx = \frac{d(2x)}{2}$.

$$\int cos\,2x\,dx = \int cos\,2x \frac{d(2x)}{2}.$$

Скористаємось властивістю 3) (*див. ПЗ-1, п. 6*) і табличним інтегралом 6. (*див. ПЗ-1, п. 7*), зробивши в ньому заміну $u = 2x$,

$$\int cos\,2xdx = \frac{1}{2} \cdot \int cos\,2xd(2x) = \frac{sin\,2x}{2} + C_2\,. \quad (24)$$

3) $I_3 = \int cos^2\,2x\,dx$. Застосуємо формули (21) і скористаємося властивостями 3, 4 (*див. ПЗ-1, п. 6*). Матимемо

$$\int cos^2\,2x\,dx = \frac{1 + cos\,4x}{2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int (1 + cos\,4x)\,dx\,.$$

Діючи аналогічно знаходженню I_1 та I_2, отримаємо

$$\int cos^2\,2x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int cos\,4x\,d(4x) = \frac{x}{2} + \frac{sin\,4x}{8} + C_3. \quad (25)$$

4) $I_4 = \int cos^3\,2x\,dx = \int cos^2\,2x \cdot cos\,2x\,dx$. Степінь функції $cos\,2x$ непарний, то (*див. п. 3*) застосуємо підстановку

$$t = sin\,2x. \quad (26)$$

Із рівності (26) випливає, що $dt = (sin\,2x)'\,dx = 2cos\,2x\ \ dx$, звідки

$$cos\,2x\,dx = \frac{dt}{2}. \quad (27)$$

За основною тригонометричною тотожністю знаходимо

$$cos^2\,2x = 1 - sin^2\,2x = 1 - t^2. \quad (28)$$

Підставивши рівності (27), (28) у інтеграл I_4, застосуємо до нього властивості 3, 4 (*див. ПЗ-1, п. 6*) і табличні інтеграли 1, 2 (*див. ПЗ-1, п. 7*). Матимемо

$$\int cos^3\,2x\,dx = \int (1 - t^2)\frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot \int dt - \frac{1}{2} \cdot \int t^2\,dt =$$
$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + C_4 = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{6} + C_4. \quad (29)$$

Підставивши рівність (26) у (29), повернемось до змінної *x*

$$\int cos^3\,2xdx = \frac{sin\,2x}{2} - \frac{sin^3\,2x}{6} + C_4. \quad (30)$$

Підставивши рівності (23) – (25) і (30) у рівність (22), отримаємо

$$\mathrm{I} = \frac{1}{8}\cdot(x + C_1) + \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2} + C_2\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C_3\right) -$$
$$-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} + C_4\right).$$

Виконавши алгебраїчні перетворення та замінивши сталу інтегрування $\frac{C_1}{8} + \frac{C_2}{8} - \frac{C_3}{8} - \frac{C_4}{8} = C$, одержимо шуканий результат

$$I = \frac{x}{8} + \frac{C_1}{8} + \frac{\sin 2x}{16} + \frac{C_2}{8} - \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{C_3}{8} - \frac{\sin 2x}{16} +$$
$$+\frac{\sin^3 2x}{48} - \frac{C_4}{8} = \frac{x}{8} - \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C =$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Отже, $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$.

5. Інтеграли вигляду $\int \sin^n x\cdot\cos^n x\,dx$, де n – натуральне число, за відомою з тригонометрії формулою $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$, звідки

$$\sin x\cdot\cos x = \frac{\sin 2x}{2} \quad \text{і} \quad \sin^n x\cdot\cos^n x = \frac{\sin^n 2x}{2^n}, \qquad (31)$$

зводять до вигляду $\frac{1}{2^n}\cdot\int \sin^n 2x\,dx$ і знаходять одним із розглянутих вище методів (*див. п. 3, якщо* n *– непарне число; див. п. 4, якщо* n *– парне).*

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int \sin^2 3x\cdot\cos^2 3x\,dx$.

Розв'язання. Скориставшись формулами (31), потім (21), а також властивостями 3) та 4) (*див. ПЗ-1, п. 6*), зведемо заданий інтеграл до вигляду

$$\mathrm{I} = \int \sin^2 3x\cdot\cos^2 3x\,dx = \int \frac{\sin^2(2\cdot 3x)}{2^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int \sin^2 6x\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1-\cos(2\cdot 6x)}{2}\,dx = \frac{1}{8}\cdot\int dx - \frac{1}{8}\cdot\int \cos 12x\,dx. \qquad (32)$$

Знайдемо окремо обидва інтеграли, отримані у правій частині рівності (32).

1) За табличним інтегралом 1 (*див. ПЗ-1, п. 7*) знаходимо

$$\int dx = x + C_1. \qquad (33)$$

2) Внесемо $12x$ під знак диференціала. Для цього скористаємось рівністю $d(12x) = (12x)'dx = 12\,dx$, звідки $dx = \frac{d(12x)}{12}$. Матимемо

$$\int cos\,12x\,dx = \int cos\,12x\,\frac{d(12x)}{12}.$$

Скористаємось властивістю 3) (*див. ПЗ-1, п. 6*) і табличним інтегралом 6 (*див. ПЗ-1, п. 7*), зробивши заміну в ньому $u = 12x$,

$$\int cos\,12xdx = \frac{1}{12}\cdot\int cos\,12xd(12x) = \frac{sin\,12x}{12} + C_2\,. \tag{34}$$

Підставимо рівності (33), (34) у рівність (32). Виконавши необхідні алгебраїчні перетворення і замінивши сталу інтегрування $\frac{C_1}{8} - \frac{C_1}{8} = C$, одержимо шуканий інтеграл

$$\int sin^2\,3x\cdot cos^2\,3x\,dx = \frac{1}{8}\cdot(x + C_1) - \frac{1}{8}\cdot(\frac{sin\,12x}{12} + C_2) =$$
$$= \frac{x}{8} + \frac{C_1}{8} - \frac{sin\,12x}{8\cdot 12} + \frac{C_1}{8} = \frac{x}{8} - \frac{sin\,12x}{96} + C\,.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int sin^3\,5x\cdot cos^3\,5x\,dx$.

Скориставшись формулами (31) і властивістю 3) (див. ПЗ-1, п. 6), зведемо заданий інтеграл до вигляду

$$\int sin^3\,5x\cdot cos^3\,5x\,dx = \int\frac{sin^3(2\cdot 5x)}{2^3}\,dx = \frac{1}{8}\cdot\int sin^3\,10x\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\int sin^2\,10x\cdot sin\,10x\,dx\,. \tag{35}$$

Функція $sin\,10x$ має непарний степінь *n* = *3*, то (*див. п. 3*) застосуємо підстановку

$$t = cos\,10x\,. \tag{36}$$

Із рівності (36) випливає $dt = (cos\,10x)'\,dx = -10\cdot sin\,10xdx$, звідки

$$sin\,10x\,dx = \frac{dt}{-10}. \tag{37}$$

За основною тригонометричною тотожністю знаходимо

$$sin^2\,10x = 1 - cos^2\,10x = 1 - t^2. \tag{38}$$

Підставивши рівності (37) і (38) у (35), застосуємо до отриманого інтеграла властивості 3) та 4) (*див. ПЗ-1, п. 6*) і табличні інтеграли 2 та 1 (*див. ПЗ-1, п. 7*). Матимемо

$$\int sin^3\,5x\cdot cos^3\,5x = \frac{1}{8}\cdot\int(1 - t^2)\frac{dt}{-10} = \frac{1}{8\cdot 10}\cdot\int -(1 - t^2)dt =$$

$$= \frac{1}{80} \cdot \int (t^2 - 1)\, dt = \frac{1}{80} \cdot \int t^2\, dt - \frac{1}{80} \cdot \int dt = \frac{1}{80} \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{t}{80} + C =$$

$$= \frac{t^3}{240} - \frac{t}{80} + C\,. \tag{39}$$

Підставивши рівність (36) у рівність (39), повернемось до змінної x і отримаємо шуканий інтеграл

$$\int sin^3\, 5x \cdot cos^3\, 5x\, dx = \frac{cos^3\, 10x}{240} - \frac{cos\, 10x}{80} + C\,.$$

6. Інтеграли вигляду $\int sin\, nx \cdot cos\, mx\, dx$, $\int cos\, nx \cdot cos\, mx\, dx$, $\int sin\, nx \cdot sin\, mx\, dx$ за відомими з тригонометрії формулами

$$sin\, nx \cdot cos\, mx = \frac{1}{2} \cdot (sin(n+m)\, x + sin(n-m)\, x), \tag{40}$$

$$cos\, nx \cdot cos\, mx = \frac{1}{2} \cdot (cos(n+m)\, x + cos(n-m) x), \tag{41}$$

$$sin\, nx \cdot sin\, mx = \frac{1}{2} \cdot (cos(n-m)\, x - cos(n+m)\, x) \tag{42}$$

зводять до простіших і знаходять, застосувавши метод розкладання та метод внесення під знак диференціала (*див. ПЗ-1, п.п. 11, 13*).

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int sin\, 5x \cdot sin\, 4x dx$.

Розв'язання. Припустивши, що *n=5* і *m=4*, застосуємо до підінтегральної функції формулу (42). Отримаємо

$$I = \int sin\, 5x \cdot sin\, 4x = \int \frac{1}{2} \cdot (cos(5-4)\, x - cos(5+4)\, x) dx =$$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot (cos\, x - cos\, 9x)\, dx.$$

Скористаємось властивостями 3) та 4) (*див. ПЗ-1, п. 6*)

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int cos\, x dx - \frac{1}{2} \cdot \int cos\, 9x dx\,. \tag{43}$$

Знайдемо окремо обидва інтеграли, отримані в правій частині рівності (43).

1) За табличним інтегралом 6. (*див. ПЗ-1 п. 7*) знаходимо

$$\int cos\, x dx = sin\, x + C_1\,. \tag{44}$$

2) Щоб знайти інтеграл $\int cos\, 9x dx$, внесемо $9x$ під знак диференціала. Для цього скористаємось рівністю $d(9x) = (9x)' dx = 9 dx$, звідки $dx = \frac{d(9x)}{9}$. Матимемо $\int cos\, 9x dx = \int cos\, 9x \frac{d(9x)}{9}$.

Скористаємось властивістю 3) (*див. ПЗ-1, п. 6*) і табличним інтегралом 6 (*див. ПЗ-1, п. 7*), зробивши заміну в ньому u=9x,

$$\int cos\,9xdx = \frac{1}{9}\cdot\int cos\,9xd(9x) = \frac{sin\,9x}{9} + C_2\,. \tag{45}$$

Підставимо рівності (44) та (45) у (43). Виконавши необхідні алгебраїчні перетворення і замінивши сталу інтегрування $\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{2}=C$, одержимо шуканий інтеграл

$$I = \int sin\,5x\cdot sin\,4x\,dx = \frac{1}{2}\cdot(sin\,x + C_1) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{sin\,9x}{9} + C_2\right) =$$
$$= \frac{sin\,x}{2} + \frac{C_1}{2} - \frac{sin\,9x}{2\cdot 9} - \frac{C_2}{2} = \frac{sin\,x}{2} - \frac{sin\,9x}{18} + C\,.$$

7. Якщо функція містить **цілі степені $\boldsymbol{sinx}$ та $\boldsymbol{cosx}$**, над якими виконано арифметичні операції (додавання, віднімання, множення, ділення), то таку функцію називають *раціональною функцією* від $sinx$ та $cosx$ і позначають

$$R(sin\,x, cos\,x)\,. \tag{46}$$

8. Інтеграли вигляду $\int R(sin\,x, cos\,x)\,dx$ знаходять методом підстановки:

а) якщо підінтегральна функція змінює свій знак при зміні знака $cosx$, то застосовують підстановку $sinx = t$;

б) якщо підінтегральна функція змінює свій знак при зміні знака $sinx$, то застосовують підстановку $cosx = t$;

в) якщо підінтегральна функція не змінюється при одночасній зміні знаків $sinx$ та $cosx$, то застосовують підстановку $tgx = t$;

г) якщо підінтегральна функція не задовольняє жодну з перерахованих вище умов, то застосовують *універсальну тригонометричну підстановку* $tg\frac{x}{2} = t$; при цьому

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}. \tag{47}$$

9. ***Зауваження.*** *Універсальна тригонометрична підстановка допомагає в усіх випадках інтегрування виразів* (46), *але через її громіздкість цю підстановку використовують лише тоді, коли не вдається застосувати більш прості підстановки, вказані в п. 8* (а–в).

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{1+3\,cos\,x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від $cosx$ (*див. п. 7*). Вона не задовольняє жодну з умов п. 8 (а–в). Тому для знаходження заданого інтеграла застосуємо універсальну тригонометричну підстановку

$$tg\frac{x}{2} = t\,. \tag{48}$$

Скориставшись рівностями (47), матимемо

$$I = \int \frac{dx}{1 + 3\,cos\,x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}}.$$

Виконавши алгебраїчні перетворення і скориставшись властивістю 3) (*див. ПЗ-1*, *п. 6*), отримаємо

$$I = \int \frac{2dt}{1 + t^2 + 3 \cdot (1 - t^2)} = \int \frac{2dt}{4 - 2t^2} = \int \frac{2dt}{-2 \cdot (t^2 - 2)} =$$

$$= -1 \cdot \int \frac{dt}{t^2-2} = -\int \frac{dt}{t^2-2}\ . \qquad (49)$$

Використавши табличний інтеграл 10. (*див. ПЗ-1, п. 7*), матимемо

$$I = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{2}} \cdot ln\left|\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right| + C = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \cdot ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right| + C\ . \qquad (50)$$

Підставивши рівність (48) у (50), повернемось до змінної x і одержимо шуканий результат

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{1 + 3\,cos\,x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot ln\left|\frac{\sqrt{2} + tg\ \frac{x}{2}}{\sqrt{2} - tg\ \frac{x}{2}}\right| + C\ .$$

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

Розв'язання. Покладаємо $t = tg\,\frac{x}{2}$, тоді

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = 2\int \frac{dt}{\left(4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} =$$

$$= \int \frac{d\left(t+3\right)}{\left(t+3\right)^2} = -\frac{2}{\left(t+3\right)} + C = -\frac{2}{tg\,\frac{x}{2} + 3} + C.$$

Відповідь. $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = -\frac{2}{tg\,\frac{x}{2} + 3} + C.$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, то можна застосувати підстановку $\cos x = t, -\sin x dx = dt$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt = t - 2arctgt + C =$$
$$= \cos x - 2arctgx + C.$$

Відповідь. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \cos x - 2arctgx + C.$

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Застосувавши метод інтегрування частинами, знайти інтеграли:

а) $\int x \cdot ln(x-1)dx$; *б)* $\int ln^2 x\, dx$;
в) $\int \sqrt{x} \cdot ln\, x dx$; *г)* $\int \frac{x\, dx}{cos^2 x}$;
д) $\int arcsin\, x\, dx$ *е)* $\int x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$;
ж) $\int \frac{x \cdot cos\, x}{sin^3 x} dx$; *и)* $\int e^x \cdot cos\, x dx$.

Відповідь: *а)* $\frac{x^2}{2} \cdot ln|x-1| - \frac{1}{4} \cdot (x^2 + 2x + ln(x-1)^2) + C$;
б) $x + x \cdot (1 - ln\,|x|)^2 + C$; *в)* $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{x}}{3} \cdot \left(ln|x| - \frac{2}{3}\right) + C$;
г) $x \cdot tgx + ln|cos\, x| + C$; *д)* $x \cdot arcsin\, x + \sqrt{1 - x^2 + C}$;
е) $-2 \cdot (x^2 + 4x + 8) \cdot e^{-\frac{x}{2}} + C$; *ж)* $-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{sin^2 x} + ctgx\right) + C$;
и) $(sin\, x + cos\, x) \cdot \frac{e^x}{2} + C$.

№ 2. Інтегруючи частинами, довести, що

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{x^2+1} + ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

№ 3. Інтегруючи частинами, вивести «формули зниження степеня»:

а) $\int sin^n x\, dx = -\frac{cos\, x \cdot sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \int sin^{n-2} x dx$;

б) $\int cos^n x\, dx = -\frac{sin\, x \cdot cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \int cos^{n-2} x dx$;

№ 4. Знайти такі значення сталих *A*, *B* і *C*, за яких справедлива рівність:

$$\int \frac{\cos x + 2\sin x + 5}{3\cos x + 4\sin x + 1}\,dx =$$
$$= Ax + B \cdot \ln|3\cos x + 4\sin x + 1| + \int \frac{C\,dx}{3\cos x + 4\sin x + 1}.$$

Вказівка. *Потрібно знайти похідну обох частин заданої рівності. В отриманому рівнянні позбутися знаменників і прирівняти між собою коефіцієнти при* $\sin x$*,* $\cos x$ *та вільні члени в його правій і лівій частинах. Шуканим результатом буде розв'язок отриманої таким чином системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.*

Відповідь. *A=0,44; B=-0,08; C=4,56.*

№ 5. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin^2 3x\,dx$; *б)* $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x\,dx$;

в) $\int \cos^4 x\,dx$; *г)* $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx$;

д) $\int \cos^7 x\,dx$; *е)* $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$;

ж) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$; *и)* $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5;}$

к) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$; *л)* $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x \cdot \cos x + 9\cos^3 x} dx$;

м) $\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 3x dx$; *н)* $\int \sin^2 3x \cdot \sin^2 4x dx$.

Вказівка. *а), в)скористатися формулами (21) (див. п. 4);*

б) підстановка $t = \sin x$ *або* $t = \cos x$ *(див. п. 3);*

г) скористатися формулою (42) (див. п. 6);

д) підстановка $t = \sin x$ *(див. п. 3);*

е) скористатися формулою (40) (див. п. 6);

ж) л). підстановка $t = tg\,x$ *(див. п. 8);*

и) універсальна тригонометрична підстановка (див. п. 8);

к) підстановка $t = ctg\,x$ *;*

м) піднести до другого степеня обидві частини формули (41) і скористатися отриманою рівністю, потім формулами (21) і (42) (див. пп. 4, 8);

н) піднести до квадрата обидві частини формули (42), і скористатися отриманою рівністю, потім формулами (21) і (41) (див. пп. 4, 8).

Відповідь: *а)* $\frac{6x - \sin 6x}{12} + C$; *б)* $\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C$;

в) $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$; *г)* $\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C$;

д) $\sin x - \sin^3 x + \frac{3\sin^5 x}{5} - \frac{3\sin^7 x}{7} + C$; *е)* $C - \frac{\cos 6x}{12} - \frac{\sin 4x}{8}$;

ж) $\frac{tg^4 x}{4}+C$; и) $C-\frac{2}{3+tg\frac{x}{2}}$; к) $C-\frac{ctg^3 x}{3}$;

л) $ln(9+tg^2 x)+arctg\,\frac{tg\,x}{3}+C$;

м) $\frac{x}{4}-\frac{sin\,2x+sin\,4x}{16}+\frac{sin\,6x}{24}-\frac{sin\,10x}{80}+C$;

н) $\frac{x}{4}+\frac{sin\,2x}{16}-\frac{sin\,6x}{24}-\frac{sin\,8x}{32}+\frac{sin\,14x}{112}+C$.

№ 6. Обчислити невизначені інтеграли методом інтегрування частинами

1. $\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$	2. $\int\left(x^2-2x+2\right)e^{-x}dx$	3. $\int(2x+3)2^x dx$
4. $\int\left(x^2+32\right)\sin 3x dx$	5. $\int(x+1)\cos 5x dx$	6. $\int(3x+5)e^{4x}dx$
7. $\int\left(x^2-2x+2\right)e^{-x}dx$	8. $\int arctgx dx$	9. $\int\sqrt{x}\ln^2 x\,dx$
10. $\int\left(x^2+1\right)\ln x dx$	11. $\int x^2 e^{5x}dx$	12. $\int x^2\sin 2x\,dx$
13. $\int(2x-3)\cos x dx$	14. $\int\left(x^2+3x\right)\sin 2x dx$	15. $\int\left(x^2+2\right)3^x dx$
16. $\int(2x-1)5^x dx$	17. $\int x^2\cos 2x\,dx$	18. $\int x\arcsin x\,dx$
19. $\int\frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$	20. $\int x\arccos 3x\,dx$	21. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$
22. $\int x\cos^2 x\,dx$	23. $\int x\sin^2 x\,dx$	24. $\int e^{2x}\left(3x^2+1\right)dx$
25. $\int\left(x^2+x\right)e^{-x}dx$	26. $\int(x+2)3^x dx$	27. $\int(4-x)e^{-5x}dx$
28. $\int\frac{xdx}{\sin^2 3x}$	29. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	30. $\int e^{-x}\sin xdx$

ПЗ-3 ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Теоретичні відомості

1. Вираз $a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots+a_1\cdot x+a_0$, де n – натуральне число, a_n, a_{n-1}, ... ,a_1, a_0 – дійсні числа, причому $a_n\neq 0$, називають ***многочленом*** n-го степеня від змінної x і позначають $P_n(x)$.

2. Функція **вигляду** $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}$, де $Q_m(x), P_n(x)$ – многочлени степенів m і n з дійсними коефіцієнтами називається ***раціональним дробом.***

3. Якщо $n < m$, то раціональний дріб називають ***правильним***, а якщо $n \geq m$ – ***неправильним***. Многочлен також можна вважати раціональним дробом, у якому $Q_m(x) = 1$.

4. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді *суми многочлена і правильного раціонального дробу*, тобто,

$$\frac{P'_n(x)}{Q_m(x)} = U_i(x) + \frac{V_k(x)}{Q_m(x)},$$

де n, m, i, k – натуральні числа, причому $n \geq m$, $k < m$. Цього досягають шляхом ділення з остачею чисельника неправильного раціонального дробу на його знаменник (*див. приклад 1*).

5. ***Найпростішими*** або ***елементарними*** називають правильні раціональні дроби таких виглядів:

а) $\frac{A}{x-a}$; *б)* $\frac{A}{(x-a)^k}$;

в) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; *г)* $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$;

де k належить N, $k \neq 1$, A, B, a, p, q – дійсні числа, причому $p^2 - 4q < 0$ (тобто многочлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів і не розкладається на множники у полі дійсних чисел).

6. Будь-який правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми елементарних раціональних дробів. Для цього застосовують так званий ***метод невизначених коефіцієнтів*** (*див. приклад 1*).

7. З пунктів 3, 5 випливає, що для інтегрування будь-яких раціональних дробів досить вміти інтегрувати многочлени й елементарні раціональні дроби. Інтеграли від многочленів методом розкладання (*див. ПЗ-1, п. 11*) легко зводяться до табличних. Розглянемо прийоми, які застосовуються для інтегрування елементарних раціональних дробів.

а) $I = \int \frac{A\,dx}{x-a}$, де A та a – дійсні числа. Зведемо, застосувавши властивість 3 (*див. ПЗ-1, п. 6*) і замінивши $dx = d(x-a)$, до табличного інтеграла 3 (*див. ПЗ−1, п. 7*). Отримаємо

$$I = A \cdot \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot ln|x-a| + C \ .$$

б) $\mathrm{I} = \int \frac{A\,dx}{(x-a)^k}$, де A та a – дійсні числа, k належить N, $k \neq 1$, зведемо, ввівши від'ємний показник степеня, застосувавши властивість 3 (*див. ПЗ-1, п. 6*) і замінивши $dx = d(x-a)$, до табличного інтеграла 2 (*див. ПЗ-1, п. 7*). Матимемо

$$I = A \cdot \int (x-a)^{-k}\, d(x-a) = \frac{A \cdot (x-a)^{1-k}}{1-k} + C\,.$$

в) $I = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$, де *A, B, p, q*– дійсні числа, причому $p^2 - 4q < 0$, за властивостями 3, 4 (*див. ПЗ-1, п. 6*) подамо у вигляді суми двох інтегралів так, щоб чисельник підінтегральної функції першого інтеграла дорівнював похідній знаменника$(x^2+px+q)' = 2x + p$. Отримаємо

$$I = \frac{A}{2} \cdot \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{x^2+px+q}. \tag{1}$$

Виділимо в знаменнику повний квадрат

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p}{4}\right)^2. \tag{2}$$

Позначимо

$$q - \frac{p}{4} = a^2 \tag{3}$$

і застосуємо до обох інтегралів з рівності (1) підстановку

$$x + \frac{p}{2} = t\,. \tag{4}$$

Підставивши рівності (3), (4) у рівність (2), матимемо

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2\,. \tag{5}$$

Диференціюючи рівності (4), (5), отримаємо

$$dx = dt \text{та} (2x+p)dx = d(t^2 + a^2). \tag{6}$$

Підставивши рівності (5), (6) у рівність (1), матимемо

$$\frac{A}{2} \cdot \int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{t^2+a^2}. \tag{7}$$

У рівності (7) обидва інтеграли знайти неважко. Досить застосувати табличні інтеграли 3 та 11 (*див. ПЗ-1, п. 7*).

г) $I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$, де k належить *N, k ≠ 1*; *A, B, p, q* – дійсні числа, причому $p^2 - 4q < 0$, знайдемо, виконавши перетворення, аналогічні застосованим у попередньому випадку (*див, рівності (1) та (2)*). Ввівши такі самі позначення і таку саму заміну змінної, отримаємо

$$I=\frac{A}{2}\cdot\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{(t^2+a^2)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{(t^2+a^2)^k}. \qquad (8)$$

Інтеграл у першому доданку рівності (8) за допомогою алгебраїчних перетворень (введення від'ємного показника степеня) зведемо до табличного інтеграла 2 (*див. ПЗ-1, п. 7*) і знайдемо методом безпосереднього інтегрування.

Щоб знайти інтеграл у другому доданку рівності (8), застосуємо рекурентну формулу для зниження степеня k

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2a^2\cdot(k-1)}\cdot\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}}-(2k-3)\cdot\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right). \qquad (9)$$

Формулу (9) будемо застосовувати до тих пір, поки не отримаємо табличний інтеграл 11 (*див. ПЗ-1, п. 7*), який знайдемо методом безпосереднього інтегрування.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\frac{3x+5}{x^2+4x+13}dx.$

Розв'язання. $\int\frac{3x+5}{x^2+4x+13}dx=\int\frac{3x+5}{(x+2)^2+9}dx=\begin{bmatrix}x+2=t\\ x=t-2\\ dx=dt\end{bmatrix}=$

$$=\int\frac{3t-1}{t^2+9}dt=3\int\frac{t}{t^2+9}dt-\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9}-\int\frac{dt}{t^2+3^3}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(t^2+9\right)-\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4x+13\right)-\frac{1}{3}arctg\frac{x+2}{3}+C.$$

Відповідь. $\int\frac{3x+5}{x^2+4x+13}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4x+13\right)-\frac{1}{3}arctg\frac{x+2}{3}+C.$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\frac{2x^5+x^4-11x^3-13x^2+20x+48}{(x-2)^2\cdot(x^2+3x+4)}\,dx.$

Розв'язання. Розглянемо підінтегральну функцію

$$W(x)=\frac{2x^5+x^4-11x^3-13x^2+20x+48}{(x-2)^2\cdot(x^2+3x+4)}. \qquad (10)$$

Це неправильний раціональний дріб, тому що степінь многочлена в чисельнику – 5, а в знаменнику – 4 і 4 < 5.

Розкриємо дужки в знаменнику дробу

$$(x-2)^2\cdot(x^2+3x+4)=(x^2-4x+4)\cdot(x^2+3x+4)=$$
$$=x^4-x^3-4x^2-4x+16\,.$$

Виділимо цілу частину раціонального дробу (10), поділивши з остачею його чисельник на знаменник.

$$
\begin{array}{l|l}
-\;\; 2x^5 + x^4 - 11x^3 - 13x^2 + 20x + 48 & x^4 - x^3 - 4x^2 - 4x + 16 \\ \cline{2-2}
\quad\;\; \underline{2x^5 - 2x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 32x} & 2x + 3 \\
\qquad\qquad -\;\; 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 12x + 48 & \\
\qquad\qquad\quad\;\; \underline{3x^4 - 3x^3 - 12x^2 - 12x + 48} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 7x^2 &
\end{array}
$$

Отже,

$$W(x) = 2x + 3 + \frac{7x^2}{(x-2)^2 \cdot (x^2+3x+4)}. \tag{11}$$

Розкладемо правильний раціональний дріб, що залишився, на елементарні раціональні дроби з поки що невідомими коефіцієнтами A, B, C та D в чисельнику кожного з них

$$\frac{7x^2}{(x-2)^2 \cdot (x^2+3x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3x+4}. \tag{12}$$

Зведемо дроби у правій частині рівності (12) до спільного знаменника, такого самого, як у лівій частині цієї рівності.

$$\frac{7x^2}{(x-2)^2 \cdot (x^2+3x+4)} =$$

$$= \frac{A \cdot (x-2) \cdot (x^2+3x+4) + B \cdot (x^2+3x+4) + (Cx+D) \cdot (x-2)^2}{(x-2)^2 \cdot (x^2+3x+4)}.$$

Прирівняємо чисельники дробів у правій та лівій частинах отриманої рівності. Матимемо

$$7x^2 = A \cdot (x-2) \cdot (x^2+3x+4) + B \cdot (x^2+3x+4) + (Cx+D) \cdot (x-2)^2.$$

Розкриємо дужки і зведемо подібні в останній рівності

$$\begin{aligned} 7x^2 = {} & (A+C) \cdot x^3 + (A+B-4C+D) \cdot x^2 + \\ & +(-2A+3B+4C-4D) \cdot x + (-8A+4B+4D). \end{aligned} \tag{13}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної x у правій і лівій частинах рівності (13), отримаємо систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими – A, B, C, D

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A + D - 4C + D = 7, \\ -2A + 3B + 4C - 4D = 0, \\ -8A + 4B + 4D. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь одним із відомих нам методів (*див. розділ 1, ПЗ-3, пп. 5, 6, 9, 10*), знаходимо

$$A = 1; \qquad B = 2; \qquad C = -1; \quad D = 0. \tag{14}$$

Підставивши рівності (14) у рівність (12), а потім у рівність (11), одержимо розклад підінтегральної функції на суму многочлена і трьох елементарних раціональних дробів

$$W(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{x}{x^2+3x+4}. \tag{15}$$

Підставимо рівності (10) і (15) у заданий інтеграл і, застосувавши властивості 3) та 4) (*див. ПЗ-1, п. 6*), отримаємо

$$I = \int W(x)dx = 2 \cdot \int x\, dx + 3 \cdot \int dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{x-2} + 2 \cdot \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{x\, dx}{x^2+3x+4}. \tag{16}$$

Застосуємо до перших двох інтегралів у правій частині рівності (16) табличні інтеграли 2, 1 (*див. ПЗ-1, п. 7*). Матимемо

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C_1 ma \int dx = x + C_2. \tag{17}$$

В інтегралах $\int \frac{dx}{x-2}$ та $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$ внесемо вираз $(x-2)$ під знак диференціала, тобто скористаємось рівністю $dx = d(x-2)$ і застосуємо табличні інтеграли 3 і 2 (*див. ПЗ-1, п. 7*). Отримаємо

$$\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{d(x-2)}{x-2} = ln|x-2| + C_3. \tag{18}$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \int (x-2)^{-2} d(x-2) = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C_4 = C_4 - \frac{1}{x-2}. \tag{19}$$

Скориставшись властивостями 3, 4 (*див. ПЗ-1, п. 6*), подамо інтеграл $\int \frac{x}{x^2+3x+4}$ у вигляді суми двох інтегралів так, щоб чисельник підінтегральної функції першого інтеграла дорівнював похідній знаменника $(x^2 + 3x + 4)' = 2x+3$. Отримаємо

$$\int \frac{x}{x^2+3x+4} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+3x+4} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+3-3}{x^2+3x+4} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx - \frac{3}{2} \cdot \int \frac{dx}{x^2+3x+4}\,. \qquad (20)$$

Для знаходження інтеграла $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx$ внесемо вираз x^2+3x+4 під знак диференціала, тобто скористаємось рівністю $d(x^2+3x+4) = (x^2+3x+4)' dx = (2x+3)dx$ і застосуємо табличний інтеграл 3 (*див. ПЗ-1, п. 7*), зробивши заміну $u = x^2+3x+4$. Отримаємо

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx = \int \frac{d\left(x^2+3x+4\right)}{x^2+3x+4} dx = ln(x^2+3x+4) + C_5\ . \qquad (21)$$

Для знаходження інтеграла $\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{x^2+3x+4}$ виділимо в знаменнику підінтегральної функції повний квадрат

$$x^2+3x+4 = \left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right) + 4 - \frac{9}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = (x+1{,}5)^2 + 1{,}75\,.$$

Матимемо

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{(x+1{,}5)^2 + 1{,}75}\,.$$

Виконаємо заміну змінної

$$x + 1{,}5 = t\,, \qquad (22)$$

тоді $dx = dt$. Отримаємо

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{t^2 + 1{,}75}\ .$$

Застосуємо табличний інтеграл 11 (*див. ПЗ-1, п. 7*), зробивши заміну $u = t$ та $a^2 = 1{,}75$, звідки $a = \sqrt{1{,}75} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Матимемо

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{1{,}75}} \cdot arctg\ \frac{t}{\sqrt{1{,}75}} + C_6 = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot arctg\ \frac{2t}{\sqrt{7}} + C_6\,. \qquad (23)$$

Підставивши рівність (22) у (23), повернемось до змінної *x*

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{x^2+3x+4} = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot arctg\ \frac{2(x+1{,}5)}{\sqrt{7}} + C_6 = = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot arctg\ \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C_6\,. \qquad (24)$$

Підставивши рівності (21) і (24) у (20) і виконавши очевидні алгебраїчні перетворення, отримаємо

$$\int \frac{xdx}{x^2+3x+4} = \frac{1}{2} \cdot (ln(x^2+3x+4)+C_5) - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \cdot arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C_6\right) =$$

$$= ln\sqrt{x^2+3x+4} - \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + \frac{C_5-3C_6}{2} . \qquad (25)$$

Підставивши рівності (17) – (19) і (25) у рівність (16), виконавши алгебраїчні перетворення та замінивши сталу інтегрування, одержимо шуканий результат

$$\mathrm{I} = 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 3 \cdot (x + C_2) + (ln|x-2| + C_3) + 2 \cdot \left(C_4 - \frac{1}{x-2}\right) -$$

$$-\left(ln\sqrt{x^2+3x+4} - \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + \frac{C_5-3C_6}{2}\right) =$$

$$x^2 + 3x + ln|x-2| - \frac{2}{x-2} - ln\sqrt{x^2+3x+4} +$$

$$+\frac{3}{\sqrt{7}} \cdot arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + \left(2C_1 + 3C_2 + C_3 + 2C_4 - \frac{C_5-3C_6}{2}\right) =$$

$$= x^2 + 3x - \frac{2}{x-2} + ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+3x+4}} + \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx.$

Розв'язання. Подамо підінтегральний вираз у вигляді суми простих дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приведемо праву частину до спільного знаменника та прирівняємо чисельники:

$$3x^2+2x+1 = A(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2;$$

$$3x^2+2x+1 = (B+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (B+C+2D)x + (A+B+D).$$

Прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях x в лівій та правій частинах рівності

$$
\begin{array}{c|c}
x^3 & B+C=0 \\
x^2 & A+B+2C+D=3 \\
x & B+C+2D=2 \\
x^0 & A+B+D=1
\end{array}
$$

Розв’язавши систему відносно *A, B, C, D* отримуємо:

$$A=1, B=-1, C=1, D=1.$$

Таким чином,

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} - \int \frac{d(x+1)}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - arctgx + C.$$

Відповідь. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - arctgx + C.$

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Обчислити інтеграли, не застосовуючи загальний метод невизначених коефіцієнтів:

а) $\int \frac{dx}{(x^2-3)\cdot(x^2+2)}$; *б)* $\int \frac{dx}{x^2+2x}$;

в) $\int \frac{dx}{(x+2)\cdot(x-1)}$; *г)* $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.

Вказівка. *Помножити чисельник і знаменник підінтегрального виразу на різницю множників знаменника, а потім застосувати метод розкладання (див. ПЗ-1, п. 11).*

***Відповідь*:** *а)* $\frac{1}{10\cdot\sqrt{3}} \cdot ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| - \frac{1}{5\cdot\sqrt{2}} \cdot arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C$;

б) $ln\sqrt{|\frac{x-2}{x}|} + C$; *в)* $ln\sqrt[3]{\frac{|x-1|}{|x+2|}} + C$;

г) $\frac{1}{x} + ln\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}} + C$.

№ 2. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{x^4dx}{1-x^4}$;

б) $\int \frac{dx}{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}$;

в) $\int \frac{(5x-3)dx}{(x-2)\cdot(3x^2+2x-1)}$;

г) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)}$;

д) $\int \frac{x^2+1}{x\cdot(x-1)^3}dx$;

е) $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot(x-2)}$;

ж) $\int \frac{x^5-2x^2+3}{(x^2-4x+4)}dx$;

и) $\int \frac{dx}{x^6+2x^4+x^2}$;

к $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}dx$;

л) $\int \frac{x^5dx}{x^4-2x^3+2x-1}$;

м) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;

н) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2\cdot(x+3)^3}$;

п) $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$;

р) $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)\cdot(x^2-x+1)}dx$.

Відповідь:

а) $ln\frac{|x+1|}{|x+1|}+\frac{arctg\, x}{2}-x+C$; б) $ln\frac{\sqrt[12]{|x-1|}\cdot\sqrt[4]{|x+3|}}{\sqrt[3]{|x+2|}}+C$;

в) $ln\frac{\sqrt[15]{|x-2|^7}\cdot\sqrt[5]{|3x-1|}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}+C$; г) $ln\frac{(x-1)^4\cdot|x-4|^5}{|x+3|^7}+C$;

д) $ln\frac{|x-1|}{|x|}-\frac{1}{(x-1)^2}+C$; е) $ln\sqrt[3]{\frac{|x-2|}{|x+1|}}+C$;

ж) $\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+6x^2+30x-\frac{27}{x-2}+72\cdot ln|x-2|+C$;

и) $C-\frac{3x^2+2}{2x\cdot(x^2+1)}-\frac{3arctg\, x}{2}$;

к) $\frac{3x^2}{2}+ln\sqrt{|(x-2)^{11}\cdot(x+2)^3|}+C$;

л) $\frac{x^2+4x}{2}-\frac{9x-8}{4\cdot(x-1)^2}+ln\sqrt[8]{|(x+1)(x-1)^{31}|}+C$;

м) $ln\frac{\sqrt[11]{|3x+1|^3}\cdot\sqrt[33]{(2x-3)^2}}{\sqrt[3]{|x|}}+C$;

н) $\frac{9x^2+50x+68}{4\cdot(x+2)\cdot(x+3)^2}+ln\frac{\sqrt[8]{|x+1|}\cdot(x+2)^2}{\sqrt[8]{|x+3|^{17}}}+C$;

п) $\frac{x^3+x}{8\cdot(1-x^2)^2}-\ln\sqrt[16]{\frac{|1+x|}{|1-x|}}+C$;

р) $ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

№3. Обчислити інтеграли

1. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx$	2. $\int \frac{dx}{x^3-8}dx$	3. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}$
4. $\int \frac{5-4x}{x^2-x-2}dx$	5. $\int \frac{x^2-72}{x(x+4)(x-3)}dx$	6. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+16\right)}dx$
7. $\int \frac{6+8x-x^2}{x\left(x^2+3x+2\right)}dx$	8. $\int \frac{x^2-7x-6}{\left(x^2+4\right)(x-3)}dx$	9. $\int \frac{x^2+6x-18}{(x-2)\left(x^2+2x+5\right)}dx$
10. $\int \frac{x}{x^3+8}dx$	11. $\int \frac{x^3-7x^2-3}{\left(x^2+4\right)x^2}dx$	12. $\int \frac{8x-15}{x\left(x^2-4x+5\right)}dx$
13. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$	14. $\int \frac{dx}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$	15. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$
16. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$	17. $\int \frac{\left(x^3+4x^2+6\right)dx}{(x+1)^2\left(x^2+2\right)}$	18. $\int \frac{\left(x^2-5x+9\right)dx}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}$
19. $\int \frac{xdx}{(x+1)^2(x+2)}$	20. $\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx$	21. $\int \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}dx$
22. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$	23. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$	24. $\int \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}$
25. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$	26. $\int \frac{dx}{x^4-1}$	27. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$
28. $\int \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$	29. $\int \frac{2x^2dx}{x^2-16}$	30. $\int \frac{x-3}{x^4+4x^2}dx$

ПЗ-4 ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТІ

Теоретичні відомості

1. Оскільки методи інтегрування будь-якого раціонального дробу відомі, то, наштовхнувшись при інтегруванні на ірраціональність (тобто вираз, що містить дробові степені змінної), природно спробувати перетворити цей вираз методом заміни змінної на раціональний вираз, тобто, як кажуть, *раціоналізувати* його.

Нижче ми розглянемо методи і прийоми, які застосовують для раціоналізації і подальшого інтегрування деяких видів ірраціональних виразів.

2. Інтеграли вигляду $\int R\left(x^{\alpha},\ x^{\beta},\dots,x^{\omega}\right)dx$, де $\alpha,\beta,\dots,\omega$ – раціональні числа, знаходять, застосовуючи підстановку $x = t^{q}$, де q – спільний знаменник показників степеня змінної *x* (тобто чисел $\alpha,\beta,\dots,\omega$).

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}$.

Розв'язання. Спільним знаменником показників степеня змінної *x* (тобто чисел $\frac{1}{2},\frac{4}{3}$, та $\frac{5}{4}$) буде число 12. Виконаємо підстановку

$$x = t^{12} \qquad \textit{або} \qquad t = \sqrt[12]{x} \tag{1}$$

тоді $\sqrt{x} = \sqrt{t^{12}} = t^6$; $\sqrt[3]{x^4} = t^{16}$; $\sqrt[4]{x^5} = t^{15}$; $dx = 12\cdot t^{11}dt$.
Матимемо

$$I = \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}} = \int \frac{t^6\cdot 12\cdot t^{11}}{t^{16}-t^{15}}dt\,.$$

Скоротимо отриманий під знаком інтеграла раціональний дріб на t^{15} і, застосувавши відомі прийоми інтегрування раціональних дробів (*див. ПЗ-1*), отримаємо

$$I = \int \frac{12\cdot t^{17}}{(t-1)\cdot t^{15}}dt = 12\cdot\int\frac{t^2}{t-1}dt = 12\cdot\int\frac{t^2-t+1}{t-1}dt =$$
$$= 12\cdot\int\frac{t^2-1}{t-1}dt + 12\cdot\int\frac{dt}{t-1} = 12\cdot\int(t+1)dt + 12\cdot ln|t-1| =$$
$$= 12\cdot\int t\,dt + 12\cdot\int dt + 12\cdot ln|t-1| = 6t^2 + 12t + 12\cdot ln|t-1| + C\,. \tag{2}$$

Підставивши рівність (1) у (2), повернемось до змінної *x* і отримаємо шуканий результат

$$I = \int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}} = 6\cdot\sqrt[6]{x} + 12\cdot\sqrt[12]{x} + 12\cdot ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right| + C\,.$$

3. Інтеграли вигляду $\int R\left(x,(ax+b)^{\alpha},(ax+b)^{\beta},\dots,(ax+b)^{\omega}\right)dx$, де *α, β, ω* – раціональні числа, знаходять за допомогою підстановки $ax+b = t^{q}$, де q – спільний знаменник дробових показників степеня двочлена $ax+b$ (тобто чисел *α, β, ω*).

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. Спільним знаменником показників степеня двочлена $(x+1)$, тобто чисел $\frac{3}{2}$ та $\frac{1}{2}$, є число 2. Виконаємо підстановку

$$x+1 = t^2 \ \text{ та } \quad t = \sqrt{x+1}, \tag{3}$$

тоді $x = t^2 - 1;\ dx = 2t\,dt;\ \sqrt{(x+1)^3} = \sqrt{t^6} = t^3.$ Матимемо

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+1}} = \int \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t^3+t}\ .$$

Скоротимо отриманий раціональний дріб на $\boldsymbol{t}$ і, застосувавши відомі прийоми інтегрування раціональних дробів (*див. ПЗ-1*), отримаємо

$$\mathrm{I} = 2\cdot\int \frac{t\cdot(t^2-1)dt}{t\cdot(t^2+1)} = 2\cdot\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt = 2\cdot\int\frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt =$$
$$= 2\cdot\int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = 2\cdot\int dt - 4\cdot\int\frac{dt}{t^2+1} = 2t - 4arctg\ t + C\ . \qquad (4)$$

Підставивши рівність (3) у (4), повернемось до змінної x і отримаємо шуканий результат

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+1}} = 2\cdot\sqrt{x+1} - 4arctg\sqrt{x+1} + C\ .$$

4. Вираз $x^m\cdot(a+bx^n)^p,$ де a та b – дійсні, m, n, p – раціональні числа, називають **диференціальним біномом**. При інтегруванні диференціального бінома, тобто при знаходженні $\int x^m\cdot(a+bx^n)^p dx$, розрізняють такі випадки:

а) Число p – *ціле*. Якщо m і n – цілі числа, то ми маємо многочлен, який легко інтегрувати. Якщо числа m і n – дробові, то матимемо інтеграл, розглянутий вище (*див. п. 2*), тоді застосовують підстановку $x = t^q$, де q – спільний знаменник дробів m і n.

б) Число $\boldsymbol{p}$ – *дробове*: $p = \frac{r}{s}$, а число $\frac{m+1}{n}$ – ціле. В цьому випадку застосовують підстановку $(a+bx^n)^p = t^r$, або, що те саме, $a+bx^n = t^s$.

в) Число p – *дробове*: $p = \frac{r}{s}$, а число $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле. В цьому випадку застосовують підстановку $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^s$.

г) Якщо диференціальний біном не задовольняє жодну з умов, перерахованих у пунктах а) – в), то його інтеграл не можна подати через елементарні функції.

Приклад 3.Обчислити інтеграл $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Розв'язання. Заданий інтеграл є інтегралом від диференціального бінома (*див.* п. **4**), де *m=3, n=2, p=* $-\frac{3}{2}$ *(r=-3, s=2).* При цьому $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$ – ціле число. Виконаємо підстановку (*див.* п. 4, б))

$$1 + x^2 = t^2 \text{або} t = \sqrt{1+x^2}, \qquad (5)$$

тоді $x\,dx = t\,dt; x^2 = t^2 + 1;\ \sqrt{(1+x^2)^3} = \sqrt{t^6} = t^3$. Матимемо

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{x^2 \cdot x\,dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{(t^2-1)\cdot t\,dt}{t^3} = \int \frac{t^2-1}{t^2} dt\,.$$

Почленно поділимо чисельник отриманого підінтегрального виразу на його знаменник, застосуємо властивість 4 (*див. ПЗ-1Б п.6*), табличний інтеграл 1, 2) (*див. ПЗ-1, п. 7*) і отримаємо

$$I = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = \int dt - \int t^{-2}\,dt = t - \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= t + \frac{1}{t} + C = \frac{t^2+1}{t} + C\,. \qquad (6)$$

Підставивши рівність (5) у (6), повернемось до змінної *x* і отримаємо шуканий результат

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{1+x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{x^2+2}{\sqrt{1+x^2}} + C\,.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}}$.

Заданий інтеграл є інтегралом від диференціального бінома (*див. п. 4*), де *m=-4, n=2,* $p = -\frac{1}{2}$ *(r=-1, s=2).* При $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$. Вираз $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число. Застосуємо підстановку (*див. п. 4,* в))

$$\frac{1+x^2}{x^2} = t^2 \qquad \text{або} \qquad t = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}, \qquad (7)$$

тоді $x^2 = \frac{1}{t^2-1}$, $xdx = \frac{-tdt}{(t^2-1)^2}$ (цю рівність отримаємо, продиференціювавши попередню), $x^6 = \frac{1}{(t^2-1)^3}$. Матимемо

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{x\,dx}{x^5 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{x\,dx}{x^6 \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}} =$$

$$= \int \frac{-t\,dt}{(t^2-1)^2 \cdot \left(\frac{t}{(t^2-1)^3}\right)} = \int (1-t^2) dt\,.$$

Застосуємо до отриманого інтеграла властивість 4) (*див. ПЗ-1, п. 6*) і табличні інтеграли 1), 2) (*див. ПЗ-1, п. 7*). Матимемо

$$I = \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{t^3}{3} + C\,. \qquad (8)$$

Підставивши рівність (7) у (8), повернемось до змінної x і одержимо шуканий результат

$$I = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3} + C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C\,.$$

5. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$, де a – дійсне число, знаходять, застосувавши підстановку $x = a \cdot \sin t$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Розв'язання. Застосуємо (*див. п. 5*) підстановку

$$x = 2 \sin t\,, \qquad (9)$$

звідки

$$\sin t = \frac{x}{2}\,. \qquad (10)$$

За основною тригонометричною тотожністю $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ маємо

$$\sqrt{(4-x^2)^3} = \sqrt{(4 - 4 \cdot \sin^2 t)^3} = \sqrt{4^3 \cdot (1 - \sin^2 t)^3} = 2^3 \cdot \cos^3 t = 8 \cdot \cos^3 t. \quad (11)$$

Диференціюючи рівність (9), знаходимо

$$dx = 2 \cdot \cos t \, dt\,. \qquad (12)$$

Підставивши рівності (11), (12) в заданий інтеграл, отримаємо

$$I = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\cos^2 t} = \frac{tg\, t}{4} + C\,.$$

Користуючись вже відомими нам тригонометричними формулами

$$tg\, t = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ та } \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t},$$

перетворимо отриманий вираз, а потім, підставивши в нього рівність (10), повернемось до змінної x. Таким чином, одержимо шуканий результат

$$I = \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \frac{\sin t}{4 \cdot \cos t} + C = \frac{\sin t}{4 \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}} + C =$$

$$= \frac{\frac{x}{2}}{4 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{4}\right)}} + C = \frac{x}{8 \cdot \sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} + C = \frac{x}{4 \cdot \sqrt{4 - x^2}} + C\,.$$

6. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, де a–дійсне число, знаходять за допомогою підстановки $x = a \cdot tg\, t$.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{(3+\mathrm{x}^2)^5}}$.

Розв'язання. Застосуємо (*див. п. 6*) підстановку

$$x = \sqrt{3} \cdot tg\, t\,, \tag{13}$$

звідки

$$tg\, t = \frac{x}{\sqrt{3}}. \tag{14}$$

З останньої рівності за відомою тригонометричною формулою

$$1 + tg^2 t = \frac{1}{cos^2\, t}, \tag{15}$$

знаходимо

$$\sqrt{(3+x^2)^5} = \sqrt{3^5 \cdot \left(1+\frac{x^2}{3}\right)^5} = \sqrt{3^5} \cdot \sqrt{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^5} =$$

$$= 3^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\mathrm{t})^5} = \frac{9\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{(\cos^2 \mathrm{t})^5}} = \frac{9\cdot\sqrt{3}}{\cos^5 \mathrm{t}}. \tag{16}$$

Диференціюючи рівність (13), знайдемо

$$dx = \frac{\sqrt{3}\, dt}{cos^2\, t}. \tag{17}$$

Підставивши рівності (16), (17) у заданий інтеграл і виконавши очевидні алгебраїчні перетворення, отримаємо

$$I = \int \frac{\sqrt{3} \cdot cos^5\, t}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot cos^2\, t} dt = \int \frac{cos^3\, t}{9} dt\,.$$

Застосувавши вже відомі нам прийоми інтегрування тригонометричних функції (*див. ПЗ-2, п. 3, приклад 2*), отримаємо

$$I = \frac{1}{9} \cdot \int cos^2\, t \cdot cos\, t\;\; dt = \frac{1}{9} \cdot \int (1 - sin^2\, t) d(sin\, t) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot (\int d(sin\, t) - \int sin^2\, t\, d(sin\, t))\,.$$

Застосувавши табличні інтеграли 1 та 2 (*див. ПЗ-1, п. 7*), отримаємо

$$I = \frac{1}{9} \cdot \left(sin\, t - \frac{sin^3\, t}{3}\right) + C\,. \tag{18}$$

З рівності (15) знаходимо

$$cos^2 t = \frac{1}{1+tg^2 t}. \qquad (18, а)$$

За основною тригонометричною тотожністю $sin\, t = \sqrt{1 - cos^2 t}$, з (18, а) одержимо

$$sin\, t = \sqrt{1 - \frac{1}{1+tg^2 t}} = \sqrt{\frac{1+tg^2 t - 1}{1+tg^2 t}} = \sqrt{\frac{tg^2 t}{1+tg^2 t}} = \frac{tg\, t}{\sqrt{1+tg^2 t}}. \qquad (19)$$

Підставивши рівність (14) у (19), матимемо

$$sin\, t = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{3+x^2}{3}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{3}}} = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}. \qquad (20)$$

Підставивши рівність (20) у (18), повернемось до змінної x і, виконавши алгебраїчні перетворення, отримаємо шуканий результат

$$I = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{3+x^2}} - \frac{x^3}{3 \cdot \sqrt{(3+x^2)^3}} \right) + C =$$

$$= \frac{x}{9 \cdot \sqrt{3+x^2}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot (3+x^2)} \right) + C = \frac{x}{9 \cdot \sqrt{3+x^2}} \cdot \left(\frac{9 + 3x^2 - x^2}{3 \cdot (3+x^2)} \right) + C =$$

$$= \frac{x}{9 \cdot \sqrt{3+x^2}} \cdot \frac{9+2x^2}{3 \cdot (3+x^2)} + C = \frac{9x + 2x^3}{27 \cdot \sqrt{(3+x^2)^3}} + C.$$

7. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$, де a – дійсне число, знаходять, застосувавши підстановку $x = \frac{a}{cos\, t}$.

Приклад 7 **.**Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}}$.

Розв'язання. Застосуємо (*див. п. 7*) підстановку

$$x = \frac{\sqrt{5}}{cos\, t}, \qquad (21)$$

Звідки
$$cos\, t = \frac{\sqrt{5}}{x}. \qquad (22)$$

Диференціюючи вираз (21), знаходимо

$$dx = -\frac{\sqrt{5} \cdot (-sin\, t)}{cos^2 t} dt = \frac{\sqrt{5} \cdot tg\, t}{cos\, t} dt. \qquad (23)$$

Із формули (15) випливає, що $\frac{1}{cos^2 t} - 1 = tg^2 t$, тому, беручи до уваги рівність (22), матимемо

$$\sqrt{(x^2-5)} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{5}-1} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2-1} =$$

$$= \sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{cos^2 t}-1} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{tg^2 t} = \sqrt{5}\cdot tg\ t\,,$$

звідки

$$\sqrt{(x^2-5)^3} = \sqrt{5^3}\cdot tg^3 t\,. \tag{24}$$

Підставивши рівності (23), (24) у заданий інтеграл, отримаємо

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}} = \int\frac{\sqrt{5}\cdot tg\ t}{\sqrt{5^3}\cdot tg^3 t\cdot cos\,t}dt =$$
$$= \int\frac{dt}{5\cdot tg^2 t\cdot cos\,t} = \int\frac{cos\,t\ dt}{5\cdot sin^2 t} = \frac{1}{5}\cdot\int\frac{cos\,t\ dt}{sin^2 t}\ .$$

Застосуємо до цього інтеграла метод внесення під знак диференціала, тобто скористаємось рівністю $d(sin\,t) = cos\,t\ dt$ і табличним інтегралом 2 (*див. ПЗ-1, п. 7*). Отримаємо

$$\mathrm{I} = \frac{1}{5}\cdot\int sin^{-2}\,t\ d(sin\,t) = \frac{1}{5}\cdot\frac{sin^{-1}\,t}{-1} + C = C - \frac{1}{5\cdot sin\,t}\,. \tag{25}$$

За основною тригонометричною тотожністю $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$, тому з рівності (22) отримаємо

$$sin\,t = \sqrt{1-cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{5}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-5}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\,. \tag{26}$$

Підставивши рівність (26) у (25), повернемось до змінної x і отримаємо шуканий результат

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}} = C - \frac{x}{5\cdot\sqrt{x^2-5}}\ .$$

8. Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+dx+c}\right)dx$, де a, b, c – дійсні числа, причому *a≠ 0,* знаходять, виділяючи під знаком кореня повний квадрат двочлена. Таким чином, заданий інтеграл легко зводиться до одного з розглянутих вище інтегралів (*див. пп. 5–7*).

9. Інтеграли вигляду $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+dx+c}}$, де a, d,c – дійсні числа, причому $a \neq 0$, $P_n(x)$ – многочлен *n*-го степеня, методом невизначених коефіцієнтів подають у вигляді

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+dx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+dx+c} + \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+dx+c}}\ . \tag{27}$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів потрібно продиференціювати вираз (1) і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x у лівій і правій частинах отриманої рівності.

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-x+2}}dx$.

Розв'язання. В чисельнику підінтегральної функції стоїть многочлен другого степеня. Тому у формулі (27) многочлен $Q_{\text{n}-1}(x)$ буде многочленом першого степеня, тобто.$Q_{n-1}(x) = Ax + B$. Тоді за формулою (27) матимемо

$$I = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-x+2}}dx = (Ax + B) \cdot \sqrt{x^2 - x + 2} + \lambda \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+2}} \ . \quad (28)$$

Продиференціюємо цю рівність, врахувавши властивість 2 (*див. ПЗ-1, п. 6*). Отримаємо

$$\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - x + 2}} = (Ax + B) \cdot \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 2}} + A \cdot \sqrt{x^2 - x + 2} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - x + 2}}.$$

Зведемо отриману рівність до спільного знаменника і прирівняємо чисельники лівої та правої частин, згрупувавши подібні члени

$$2 \cdot (x^2 + 1) = (Ax + B) \cdot (2x - 1) + 2A \cdot (x^2 - x + 2) + 2\lambda\,,$$

$$2x^2 + 2 = 4Ax^2 + (2B - 3A) \cdot x + (4A - B + 2\lambda). \quad (29)$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x у лівій і правій частинах рівності (29), отримаємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими – A, B, λ

$$\begin{cases} 4A = 2, \\ -3A + 2B = 0, \\ 4A - B + 2\lambda = 2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо:

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{3}{4}, \qquad \lambda = \frac{3}{8}.$$

Підставивши знайдені невідомі у рівність (28), матимемо

$$I = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot \sqrt{x^2 - x + 2} + \frac{3}{8} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+2}} \ . \quad (30)$$

Для знаходження інтеграла, отриманого в рівності (30), виділимо в підкореневому виразі повний квадрат $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$, внесемо вираз $x - \frac{1}{2}$ під знак диференціала і застосуємо табличний інтеграл 14 (*див. ПЗ-1, п. 7*). Матимемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 2}} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}} =$$

$$ln\left|x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\right| + C_1 = ln\left|x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 2}\right| + C_1 .$$

Підставивши знайдений інтеграл у рівність (30) і, замінивши сталу інтегрування $\frac{3}{8} \cdot C_1 = C$, одержимо шуканий результат

$$I = \frac{2x + 3}{4} \cdot \sqrt{x^2 - x + 2} + \frac{3}{8} \cdot ln\left|x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 2}\right| + C .$$

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[6]{x}\, dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[12]{x^5}\right)^3}$;

в) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x+x\cdot\sqrt[3]{x}} dx$ г) $\int \frac{dx}{x+2\cdot\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$;

Вказівка: а), в), г) *див. п. 2, підстановка* $x = t^6$;
б) *див. п. 2, підстановка* $x = t^{12}$;

Відповідь: а) $\frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} - 2 \cdot \sqrt{x} + 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6 \cdot arctg\,\sqrt[6]{x} + C$;
б) $\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + C$;в) $\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + 6 \cdot arctg\sqrt[6]{x} + C$;
г) $ln\,|x| - \frac{3}{2} \cdot ln\left|1 + \sqrt[6]{x}\right| - \frac{9}{4} \cdot ln\left|1 - \sqrt[6]{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x}\right| + \frac{3}{2\cdot\sqrt{7}} \cdot arctg\,\frac{1-4\cdot\sqrt[6]{x}}{\sqrt{7}} + C$;

№ 2. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x-1}}$.

Вказівки: а) *див. п. 3, підстановка* $3x + 1 = t^3$;
б) *врахувати, що* $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$, *підстановка* $2x + 1 = t^6$ *(див. п. 3).*

Відповідь: а) $\frac{2x+1}{5} \cdot \sqrt[3]{(3x + 1)^2} + C$;
б) $\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2x + 1} + 3 \cdot \sqrt[6]{2x + 1} + ln\left|1 - \sqrt[6]{2x + 1}\right|^3 + C$.

№ 3. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{x^3+1}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$;

в) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{(2x^3+3)^2}}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3 x}}$;

Вказівки: а) *див. п.* **4**, б) *підстановка* $x^3+1=t^4$;

б) *див. п.* **4**, в), *підстановка* $\frac{x^4+1}{x^4}=t^4$;

в) *див. п.* **4**, г)*;*

г) *див. п.* **4**, в)*, підстановка* $\frac{x^2+1}{x^2}=t^2$.

Відповідь: а) $\frac{1}{3}\cdot ln\left|\frac{1-\sqrt[4]{x^3+1}}{1+\sqrt[4]{x^3+1}}\right|+\frac{2}{3}\cdot arctg\ \sqrt[4]{x^3+1}+C$;

б) $\frac{1}{4}\cdot ln\left|\frac{x+\sqrt[4]{x^4+1}}{x-\sqrt[4]{x^4+1}}\right|-\frac{1}{2}\cdot arctg\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}+C$;

в) не подається через елементарні функції; г) $C-\frac{2x^2+1}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$.

№ 4. Обчислити інтеграли: а)$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$; б)$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$.

Вказівки: а) *див. п. 5, підстановка* $x=\sqrt{2}\cdot sin\,t$*;*

б) *врахувати, що* $3+2x-x^2=2^2-(x-1)^2$,

підстановка $x-1=2\,sin\,t$ *(див. п. 5).*

Відповідь: а) $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}-arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; б) $2\cdot arcsin\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)\cdot(\sqrt{3+2x+x^2})}{2}+C$.

№ 5. Обчислити інтеграли:

а)$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; б)$\int \sqrt{3-4x+4x^2}\,dx$.

Вказівки:а) *див. п. 6, підстановка* $x=2\cdot tg\ t$;

б) *врахувати, що* $3-4x+4x^2=2+(2x+1)^2$,

підстановка $2x+1=\sqrt{2}\cdot \mathrm{tg}\ t$*(див. п. 6).*

Відповідь: а) $\frac{x}{4\cdot\sqrt{x^2+4}}+C$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot ln\frac{x^2+x\cdot\sqrt{3}+1}{x^2-x\cdot\sqrt{3}+1}+\frac{1}{2}\cdot arctg\ x+\frac{1}{6}\cdot arctg\ x^3+C$.

№ 6. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$; б) $\int \frac{x^8dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Вказівки: а) *врахувати, що* $x^2+2x-3=(x+1)^2-2^2$,

підстановка $x+1=\frac{2}{cos\,t}$ *(див. п. 7);*

б) *див. п. 7, підстановка* $x = \frac{1}{\cos t}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{2} \cdot ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x-3}+x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}-x-1}\right| + C$;

б) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{8} \cdot \left(x^7 + \frac{7x^5}{6} + \frac{35x^3}{24} + \frac{35x}{16}\right) + \frac{35}{128} \cdot ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$.

№ 7. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+1)^5}}$.

Вказівка: *виділити в підкореневому виразі квадрат двочлена (див. п. 8).*

Відповідь: а) $\frac{x+2}{3 \cdot \sqrt{x^2+4x+7}} + C$; б) $\frac{8 \cdot (2x+1)}{9 \cdot \sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2}{27} \cdot \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)^3 + C$.

№ 8. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx$; б) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx$;

в) $\int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}} dx$; г) $\int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$.

Вказівка. *Скористатися рівністю (27) (див. п. 9).*

Відповідь: а) $\frac{2x^2+x+7}{6} \cdot \sqrt{x^2+2x-1} - 2 \cdot ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2+2x-1}\right| + C$;

б) $\frac{x^2-14x+111}{3} \cdot \sqrt{x^2+4x+3} - 66 \cdot ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+3}\right| + C$;

в) $\frac{8x^2+6x+1}{8} \cdot \sqrt{4x^2+4x+2} + \frac{1}{8} \cdot ln\left|2x + 1 + \sqrt{4x^2+4x+2}\right| + C$;

г) $\frac{x+5}{2} \cdot \sqrt{x^2+2x+2} - \frac{7}{2} \cdot ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2+2x+2}\right| + C$.

№ 9. Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x} dx$	2. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$	3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{5-x^2}} dx$
4. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$	5. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{(9+x^2)^3}}$	6. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+13}} dx$
7. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+4x^2}} dx$	8. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2} dx$	9. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx$
10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}} dx$	11. $\int \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx$	12. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} dx$
13. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$	14. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$	15. $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2+2x}} dx$

16. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$	17. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$	18. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$
19. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$	20. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$	21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$
22. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$	23. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$	24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
25. $\int \frac{2-5x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$	26. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$	27. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+1}}$
28. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$	29. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}dx$	30. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

ІЗ № 1–1

Обчислити невизначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

1. а) $\int \frac{x^8+x^4+4x^3-1}{\left(x^4\cdot\sqrt[4]{x}\right)}dx$; б) $\int \frac{e^x+3x^2}{\sqrt{x^3+e^x}}dx$.

2. а) $\int \frac{x^3-7x+5\cdot\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x^4}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x+x\cdot ln^2\,x}$.

3. а) $\int \frac{x^2+2x^2\cdot\sqrt{x}-5\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{arctg\;2x}}{1+4x^2}dx$.

4. а) $\int \frac{3x^7-2\cdot\sqrt{x^5}+x-1}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{ctg\;2x}}{sin^2\,x}dx$.

5. а) $\int \frac{7\cdot\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-5x+6}{3\cdot\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

6. а) $\int \frac{4x^2-\sqrt[4]{x^3}-x+1}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{e^{arct\;2x}}{4x^2+1}dx$.

7. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^8}-x+\sqrt{x}+1}{x^2\cdot\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{3x^2+cos\,x}{\sqrt{x^3+sin\,x}}dx$.

8. а) $\int \frac{x^3+\sqrt[3]{x^{10}}-x-1}{3\cdot\sqrt{x^5}}dx$; б) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+2\cdot e^{2x}+1}$.

9. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x^7}+5\cdot\sqrt{x^3}+x-1}{x^2\cdot\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

10. а) $\int \frac{3x^3-\sqrt[5]{x^3}+2x-7}{\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

11. *а)* $\int \frac{9x^4+5\cdot\sqrt{x}-7x+3}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$ б)$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-ln^2 x}}.$

12. а)$\int \frac{2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt{x}+2x^3-3}{x^3\cdot\sqrt[5]{x^2}}dx;$ б)$\int \frac{8x^3+2\cdot cos\, x}{x^4+sin\, x}dx.$

13. а)$\int \frac{x^2+\sqrt[3]{x}-2\cdot\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$ б)$\int \frac{3x^6}{\sqrt[6]{1-x^7}}dx.$

14. а)$\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}-x+4}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$ б)$\int \frac{5x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx.$

15. а)$\int \frac{x^5-\sqrt[3]{x^7}+\sqrt{x}-1}{x^3}dx;$ б)$\int cos\, 6x\cdot\sqrt{sin\, 6x}\;\, dx.$

16. а)$\int \frac{3x^2-5x+\sqrt[4]{x^{11}}+3}{\sqrt{x^7}}dx;$ б)$\int \frac{\sqrt[3]{5+ln\, x}}{x}dx.$

17. а)$\int \frac{2x^3+\sqrt[3]{x^2}+5x-2}{\sqrt[5]{x^3}}dx;$ б)$\int x^3\cdot e^{-x^4}dx.$

18. а)$\int \frac{5x^9-\sqrt[5]{x^{13}}+x^2-1}{x^3}dx;$ б)$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

19. а)$\int \frac{2x^3-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x^3}+5}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$ б)$\int e^{sin\, 5x}\cdot cos\, 5x\, dx.$

20. а)$\int \frac{4x^7+\sqrt[7]{x^5}-3\cdot\sqrt{x}+1}{x^4}dx;$ б)$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

21. а)$\int \frac{5x^6\cdot\sqrt{x}-\sqrt[5]{x^2}+x-2}{x^2\cdot\sqrt{x}}dx;$ б.$\int e^{3x}\cdot\sqrt[3]{(e^{3x}+2)^5}dx.$

22. а)$\int \frac{2x^5+3x^3-4x+5}{x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}}dx;$ б)$\int \frac{3+ln\, x^{10}}{x}dx.$

23. а)$\int \frac{3x^4+\sqrt[3]{x^2}-5\cdot\sqrt{x}+2}{x^2}dx;$ б)$\int \frac{tg^3 5x}{cos^2\, 5x}dx.$

24. а)$\int \frac{\sqrt[3]{x^8}-\sqrt{x^5}+3x^2-4}{\sqrt[4]{x^3}}dx;$ б)$\int x^2\cdot\sqrt{2x^3+8}\, dx.$

25. а)$\int \frac{5\cdot\sqrt{3x^5}-\sqrt[4]{x^3}-8x+3}{\sqrt[3]{x}}dx;$ б)$\int \frac{5^{ctg\, x}}{sin^2\, x}dx.$

26. а)$\int \frac{3x^3-\sqrt[5]{2x^4}+2x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$ б)$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-lg\, x}}.$

27. а)$\int \frac{\sqrt[4]{x^5}+3\cdot\sqrt{x^3}-2x^2+4}{3x^3}dx;$ б)$\int \frac{log_2^3(x+5)}{x+5}dx.$

28. а)$\int \frac{2x^4+\sqrt[4]{3x^7}-3x+5}{2\cdot\sqrt{x^3}}dx;$ б)$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-lg^2\, x}}.$

29. а)$\int \frac{\sqrt[7]{x^5}-3\cdot\sqrt{x}-3x^3+1}{x\cdot\sqrt{x}}dx;$ б)$\int \frac{x^3 dx}{x^8+1}.$

30. а)$\int \frac{4x^4-\sqrt[4]{x^3}-x^2+3}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}dx;$ б)$\int \frac{\sqrt{log_2\, x}}{x}dx.$

ІЗ № 1–2

Обчислити невизначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

1. а) $\int x \cdot e^{-2x} dx$; б) $\int (1 - \sin 2x)^3 dx$.

2. а) $\int x^2 \cdot 2^x dx$; б) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \ dx$.

3. а) $\int (2 + x)^2 \cdot \sin x \ dx$; б) $\int (1 + \cos 3x)^3 dx$.

4. а) $\int (x^2 + 1) \cdot \cos x \, dx$; б) $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \, dx$.

5. а) $\int 2^x \cdot \sin x \ dx$; б) $\int \sin^5 x \, dx$.

6. а) $\int \ln x \cdot \sqrt[5]{x^3} \, dx$; б) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$.

7. а) $\int \frac{\ln x}{x^5} dx$; б) $\int tg^3 x \, dx$.

8. а) $\int x^2 \cdot \sin 4x \ dx$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

9. а) $\int 3^x \cdot \cos x \, dx$; б) $\int ctg^3 x \, dx$.

10. а) $\int x \cdot 5^{-x} dx$; б) $\int \cos x \cdot \sin 7x \ dx$.

11. а) $\int (x^2 - 3) \cdot \sin x \, dx$; б) $\int \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\sin 2x} dx$.

12. а) $\int \ln x \, dx;$ б) $\int \frac{dx}{\cos x};$

13. а) $\int x^2 \cdot \cos 5x \, dx;$ б) $\int \frac{1+\sin^3 x}{\cos^2 x} dx;$

14. а) $\int x \cdot 7^x dx;$ б) $\int \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx;$

15. а) $\int x^2 \cdot \sin 3x \, dx;$ б) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \ dx;$

16. а) $\int x^2 \cdot arctg \ x \, dx;$ б) $\int \sin 3x \cdot \cos 2x \, dx;$

17. а) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx;$ б) $\int \cos 5x \cdot \cos 2x \, dx;$

18. а) $\int x \ln(x^2 + 1) \, dx;$ б) $\int \sin 5x \cdot \sin 2x \, dx \ ;$

19. а) $\int e^{-2x} \cdot \cos x \, dx;$ б) $\int \sin x \cdot \cos 6x;$

20. а) $\int \frac{x \, dx}{\sin^2 3x};$ б) $\int \cos x \cdot \cos 2x \, dx;$

21. а) $\int \arccos 4x \, dx;$ б) $\int \sin x \cdot \cos 3x \, dx;$

22. а) $\int x^2 \cdot arctg \ 2x \, dx;$ б) $\int \sin x \cdot \sin(2x + 3) \, dx;$

23. а) $\int x^2 \cdot \sin 7x \, dx;$ б) $\int \frac{\sin x \, dx}{(1 - 3\cos x)^2};$

24. а) $\int (x^2 - x) \cdot \ln x \, dx;$ б) $\int \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx;$

25. а) $\int 4^x \cdot \sin 3x \, dx;$ б) $\int \frac{dx}{4 + \cos x};$

26. а) $\int \log_5 2x \, dx;$ б) $\int \frac{dx}{\cos^3 x};$

27. а) $\int (2x^2-3)\cdot cos\,x\,dx;$ б) $\int sin^3 x\cdot cos^5 x\,dx;$

28. а) $\int (x^3+\sqrt{x^7})\cdot ln\,x\,dx;$ б) $\int \frac{dx}{cos\,x+sin\,x+1};$

29. а) $\int e^{-3x}\cdot cos\,4x\,dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3}cos\,x+sin\,x};$

30. а). $\int ln\,x\,dx;$ б). $\int \frac{cos^4 x}{sin^3 x}dx;$

ІЗ № 1–3

Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{8x-1}{(x+1)\cdot(x^2+2x+10)}dx.$

2. $\int \frac{x^2-1}{x^2+2x+2}dx.$

3. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)\cdot(x^2+2x+2)}.$

4. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

5. $\int \frac{x^3-12}{x^4-3x^3+2x^2}dx.$

6. $\int \frac{11-10x-x^4}{x^3-4x}dx.$

7. $\int \frac{3x^2-2}{(x+3)\cdot(2x^2-3x-2)}dx.$

8. $\int \frac{3x-8}{x^3+x^2+4x+4}dx.$

9. $\int \frac{x^2-2x+5}{(x-1)\cdot(x^2-4x+3)}dx.$

10. $\int \frac{2x^4-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx.$

11. $\int \frac{5x^3+2}{x^3+2x^2+2x}dx.$

12. $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx.$

13. $\int \frac{3x^2+x+2}{(x-1)^2\cdot(x^2-2x+1)}dx.$

14. $\int \frac{x^3+x+1}{x\cdot(x^2+1)}dx.$

15. $\int \frac{2x^2-5x+1}{(x-2)\cdot(x^2-2x+1)}dx.$

16. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$

17. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2\cdot(x+1)}dx.$

18. $\int \frac{3x^3+4x}{(x-2)^2\cdot(x^2+4)}dx.$

19. $\int \frac{3-4x}{(x-1)\cdot(x^2-3x+2)}dx.$

20. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx.$

21. $\int \frac{3x^2+14x+37}{(x-1)\cdot(x^2+4x+13)}dx.$

22. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\cdot(x+3)}.$

23. $\int \frac{2x^4+9x^3+3x^2+27}{x^3+6x^2+9x}dx.$

24. $\int \frac{x^4-2}{x^3+x}dx.$

25. $\int \frac{7x^3+40x-96}{2x^4+5x^3-12x^2}dx.$

26. $\int \frac{5}{x^3+2x^2+5x}dx.$

27. $\int \frac{4x^4-2x^3+x^2+5}{4x^3+4x^2+5x}dx.$

28. $\int \frac{x^4+2}{(x-1)\cdot(x^2-x)}dx.$

29. $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2+4}{x^3+4x^2+4x}dx.$

30. $\int \frac{x+2}{(x+1)^2\cdot(2x+4)}dx.$

ІЗ № 1–4

Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{3-4x-x^2}}dx.$

2. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}}.$

3. $\int \sqrt{x^2+4x}\,dx.$

4. $\int \frac{5x-7}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx.$

5. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx.$

6. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

7. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}.$

9. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{3x^2+6x+2}}dx.$

10. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}.$

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}.$

12. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

13. $\int \frac{3x-8}{\sqrt{7-2x-9x^2}}dx.$

14. $\int x^2\cdot\sqrt{3-x^2}dx.$

15. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{3x^2-2x-1}}.$

16. $\int \frac{3x+7}{\sqrt{1+6x+x^2}}dx.$

17. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

19. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}}.$

20. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

21. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}.$

23. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$

24. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

25. $\int \frac{3x+8}{\sqrt{x^2+3x+3}}dx.$

26. $\int \frac{\sqrt{(x^2-7)^3}}{x^6}dx.$

27. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2-3}}.$

28. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$

29. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{3-2x-9x^2}}dx.$

30. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2-16}}.$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 1

ІЗ № 1–1

Обчислити невизначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

а) $\int \frac{x^2\cdot\sqrt[5]{x^3}+3x^2+\sqrt{x}+1}{x\cdot\sqrt{x}}dx;$ б) $\int \frac{e^{\arcsin 2x}\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$

Розв'язання.

а) Почленно поділимо чисельник підінтегрального дробу на його знаменник і зведемо отримані частки до вигляду степенів з основою x. Матимемо

$$I = \int \frac{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3} + 3x^2 + \sqrt{x} + 1}{x \cdot \sqrt{x}} dx == \int \left(\frac{x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}}}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^3}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{x \cdot x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{1+\frac{1}{2}}} \right) dx = \int \left(x^{1+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}} + 3x^{2-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{10}{11}} + 3x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx.$$

Застосуємо до отриманого інтеграла властивості 3 та 4 (*див. ПЗ-1, п.6*) і табличні інтеграли 2), 3) (*див. ПЗ-1, п.7*). Матимемо

$$I = \int x^{\frac{10}{11}} dx + \mathbf{3} \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int \frac{dx}{x} - \int x^{-\frac{3}{2}} dx == \frac{x^{\frac{21}{10}}}{\frac{21}{10}} + \frac{3 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + ln|x| - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{10 \cdot x^{\frac{21}{10}}}{21} + \frac{6 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{5} + ln|x| + 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + C.$$

Позбувшись від'ємних і дробових показників, одержимо шуканий результат

$$I = \frac{10x^2}{21} \cdot x^{\frac{1}{10}} + \frac{6x^2}{5} \cdot x^{\frac{1}{2}} + ln|x| + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} + C == \frac{10x^2}{21} \cdot \sqrt[10]{x} + \frac{6x^2}{5} \cdot \sqrt{x} + ln|x| + \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Перевірка. Користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних (*див. Розділ 6, ПЗ-1, пп. 6, 7*), знайдемо похідну функції *I(x)*, яка є кінцевим результатом інтегрування.

$$I' = \frac{10}{21} \cdot \left(x^{\frac{21}{10}} \right)' + \frac{6}{5} \cdot \left(x^{\frac{5}{2}} \right)' + \frac{1}{x} + 2 \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{10}{21} \cdot \frac{21}{10} \cdot x^{\frac{11}{10}} +$$

$$+ \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{\frac{11}{10}} + 3 \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{11}{10}+\frac{3}{2}} + 3 \cdot x^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}} + 3x^3 + \sqrt{x} - 1}{x \cdot \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3} + 3x^3 + \sqrt{x} - 1}{x \cdot \sqrt{x}}.$$

Знайдена похідна дорівнює підінтегральній функції, тому інтегрування виконане правильно (*див. ПЗ-1, п. 9*).

б) ***1-й спосіб.*** Застосуємо до заданого інтеграла метод заміни змінної. Виконаємо підстановку

$$arcsin\,2x = t. \qquad (1)$$

Тоді

$$\mathrm{e}^{\arcsin 2\mathrm{x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{t}}. \qquad (2)$$

Диференціюючи рівність (1) знаходимо $\frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = dt$, звідки

$$\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{dt}{2}. \qquad (3)$$

Підставивши рівності (2), (3) у заданий інтеграл, матимемо

$$\mathrm{I} = \int \frac{e^{\arcsin 2\mathrm{x}}\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{e^t dt}{2}.$$

Застосувавши властивість 3 (*див. ПЗ-1, п. 6*) і табличний інтеграл 5 (*див. ПЗ-1, п.7*), отримаємо

$$I = \frac{1}{2} \cdot a \int e^t dt = \frac{e^t}{2} + C. \qquad (4)$$

Підставивши рівність (1) у (4), повернемось до змінної x і одержимо шуканий результат

$$I = \int \frac{e^{arcsin\,2x}\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{e^{arcsin\,2x}}{2} + C.$$

2-й спосіб. Застосуємо метод внесення під знак диференціала, тобто скористаємось рівністю $\mathrm{d}(\arcsin 2x\,) = \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, звідки

$$\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{\mathrm{d}(\arcsin 2x\,)}{2}.$$

Підставивши цю рівність у заданий інтеграл, матимемо

$$\mathrm{I} = \int \frac{e^{\arcsin 2\mathrm{x}}\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int e^{\arcsin 2\mathrm{x}} \frac{\mathrm{d}(\arcsin 2x\,)}{2}.$$

Застосуємо властивість 3 (*див. ПЗ-1, п.6*) і табличний інтеграл 5 (*див. ПЗ−1, п.7*), зробивши заміну в ньому $u = \arcsin 2x$. Таким чином одержимо шуканий результат

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} \cdot \int e^{\arcsin 2x} d(\arcsin 2x) = \frac{e^{\arcsin 2x}}{2} + \mathrm{C}.$$

Перевірка. Користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних, знайдемо похідну функції $\mathrm{I}(x)$, яка є кінцевим результатом інтегрування

$$\mathrm{I}' = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\arcsin 2x}\right)' + \mathrm{C}' = e^{\arcsin 2x} \cdot (\arcsin 2x)' =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{\arcsin 2x} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Знайдена похідна дорівнює підінтегральній функції, отже, інтегрування виконане правильно (*див. ПЗ-1, п.9*).

ІЗ № 1–2

№ 1. Обчислити інтеграл $\int x^2 \cdot sin\,4x\ \ dx$.

Використаємо формулу інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{1}$$

Результат перевірити диференціюванням.

Розв'язання.

Застосуємо метод інтегрування частинами. Позначимо

$$u = x^2, \text{ тоді } dv = sin\,4x\ \ dx. \tag{2}$$

З цих рівностей знаходимо

$$du = (x^2)' \cdot dx = 2x\,dx \text{ і } v = -\tfrac{1}{4} cos\,4x. \tag{3}$$

Підставивши рівності (2) і (3) у формулу інтегрування частинами матимемо

$$I = \int x^2 \cdot cos\,x\,dx(-\tfrac{1}{4}cos\,4x) - \int 2x \cdot (-\tfrac{1}{4}cos\,4x)\,dx = x^2 \cdot (-\tfrac{1}{4}cos\,4x) - 2 \cdot \int x \cdot (-\tfrac{1}{4}cos\,4x)\,dx. \tag{4}$$

До отриманого в рівності (4) інтеграла знову застосуємо метод інтегрування частинами. Позначимо

$$u = x, \text{ тоді } dv = (-\tfrac{1}{4}cos\,4x)\,dx. \tag{5}$$

З цих рівностей знаходимо

$$du = dx \text{ і } v = -\tfrac{1}{16} sin\,4x. \tag{6}$$

Підставивши рівності (5) і (6) у формулу інтегрування частинами (1), матимемо

$$\int x \cdot (-\tfrac{1}{4}cos\,4x)\,dx = -x \cdot (-\tfrac{1}{16}sin\,4x) - \int -\tfrac{1}{16}sin\,4x\,dx = -x \cdot (-\tfrac{1}{16}sin\,4x) - \tfrac{1}{64}cos4x + C. \tag{7}$$

Підставимо отриману таким чином рівність у (4) і одержимо шуканий результат

$$I = x^2 \cdot (-\frac{1}{4} cos\, 4\, x) - \frac{1}{8} x \cdot sin4\, x + \frac{1}{32} cos4\, x + C$$

№ 2. Обчислити інтеграли:

а) $\int x \cos x\, dx.$

$$\int x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} u = x,\ dv = \cos x dx, \\ du = dx,\ \ v = \sin x \end{bmatrix} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C;$$

б) $\int \ln x\, dx.$

$$\int \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x,\ dv = dx, \\ du = \dfrac{1}{x},\ v = x. \end{bmatrix} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C;$$

в) $\int xarctgx\, dx.$

$$\int x \cdot arctgx\ \ dx = \begin{bmatrix} u = arctgx,\ \ dv = xdx, \\ du = \dfrac{dx}{x^2+1}, v = \dfrac{1}{2} x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(x^2 arctgx - x + arctgx \right) + C.$$

№ 3. Обчислити інтеграли:

а) $\int x \sin x dx.$

$$\int x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = -\cos x \end{vmatrix} = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

б) $\int x^2 e^{3x} dx.$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \left| \begin{aligned} & u = x^2, du = 2xdx; \\ & dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{aligned} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx =$$

$$= \left| \begin{aligned} & u = x, du = dx; \\ & dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{aligned} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx \right) =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27} \right) + C.$$

в) $\int e^x \cos xdx.$

$$G = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{aligned} & \cos x = u, \; du = -\sin x dx; \\ & e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{aligned} \right| =$$

$$= e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx = \left| \begin{aligned} & \sin x = u, \; du = \cos x dx; \\ & e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{aligned} \right| =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x(\cos x + \sin x) - G.$$

Отже, дістали рівняння $G = e^x(\cos x + \sin x) - G$, з якого знаходимо $G = \int e^x \cos xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$

№ 4. Обчислити інтеграл $\int \sin^2 x \cos^4 xdx.$

Розв'язання.

$$\int \sin^2 x \cos^4 xdx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 xdx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2xdx = \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2xd\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16x} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

№ 5. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}.$

Розв'язання. Покладаємо $t = tg\frac{x}{2}$, тоді

$$\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=2\int\frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)}=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=\int\frac{d\left(t+3\right)}{\left(t+3\right)^2}=$$

$$=-\frac{2}{\left(t+3\right)}+C=-\frac{2}{tg\,\frac{x}{2}+3}+C.$$

№ 6. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{\sin x}dx.$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t,\ x=2\,\mathrm{arctg}t,\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\left(1+t^2\right)2dt}{2t\left(1+t^2\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|\,t\,|+C=\ln\left|\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

№ 7. Обчислити інтеграл $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx.$

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^3 x\cdot\sin x}{\cos^2 x\cdot\sin x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx=$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\ \sin x dx=-dt\end{array}\right|=\int\frac{1-t^2}{t^2}(-dt)=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=t+\frac{1}{t}+C=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C.$$

№ 8. Обчислити інтеграл $\int\frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}dx.$

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}x=t,\quad x=\mathrm{arctg}t,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2};\\ \sin^2 x=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2};\\ \cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)}=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)dt=$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - 2\operatorname{ctg} x + C .$$

№ 9. Обчислити інтеграл $\int tg^3 x dx.$

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^3 dt}{t^2+1} = \left| \begin{array}{l|l} t^3 & \dfrac{t^2+1}{t} \\ - & \\ \dfrac{t^3+t}{-t} & \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1} + C .$$

***Див. приклади**, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-2, Розділ 1:*
а) ***приклад 1***;
б) ***приклади 2–6***.

ІЗ № 1–3

Алгоритм інтегрування раціональних функцій

1. Якщо підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

№ 1. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8} dx.$

$$\int \frac{x^4+2x}{x^3+8} dx = \left| \begin{array}{l|l} x^4+2x & \dfrac{x^3+8}{x} \\ - & \\ \dfrac{x^4+8x}{-6x} & \end{array} \right. \quad \frac{x^4+2x}{x^3+8} = x - \frac{6x}{x^3+8};$$

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{6x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} =$$

$$=\frac{A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8}\Rightarrow 6x=A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x=x^2(A+B)+x(-2A+2B+C)+4A+2C;$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0=A+B\\ x^1 & 6=-2A+2B+C\\ x^0 & 0=4A+2C\end{array}\right\} \\ x=-2\Rightarrow -12=12A\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}A=-1\\ B=1\\ C=2\end{array}\right| = \int\left(x+\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3}=\left|\begin{array}{l}x-1=t\\ dx=dt\\ x=t+1\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{t+3}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{tdt}{t^2+3}-3\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+3\right)-$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+C=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Див. ***приклад 1*** *в теоретичних відомостях до ПЗ-3.*

ІЗ № 1–4

Див. ***приклади 1–7*** *в теоретичних відомостях до ПЗ-4.*

№ 1. Обчислити інтеграл $\int\frac{3x-1}{4x^2-2x+17}dx.$

$$\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx=\int\frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{(3x-1)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}=\left|\begin{array}{l}x-\frac{1}{2}=t;dx=dt\\ x=t+\frac{1}{2};\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+4}dt=\frac{3}{4}\int\frac{tdt}{t^2+4}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+C.$$

№ 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx.$

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-6)}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{(8t-3)}{\sqrt{6-t^2}}dt = 4\int \frac{2tdt}{\sqrt{6-t^2}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - t^2}} =$$

$$= -4\int \frac{d\left(6-t^2\right)}{\sqrt{6-t^2}} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{6-t^2} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

№ 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx.$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^3-1\right)3t^2dt}{t^2} = 3\int \left(t^3-1\right)dt =$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - 3t + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(x+1\right)^4} - \sqrt[3]{x+1} + C.$$

№ 4. Обчислити інтеграл $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx.$

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1}=t^2,\ x+1=t^2(x-1), \\ x=\frac{t^2+1}{t^2-1};\ dx=\frac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^2-1\right)^2 t(-4t)dt}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2-1\right)^2} =$$

$$= 2\int \frac{t\cdot(-2t)dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \left| \begin{array}{l} u=t, du=dt; \\ \frac{-2tdt}{\left(t^2+1\right)^2} = dv \Rightarrow v = \frac{1}{t^2+1} \end{array} \right| = \frac{2t}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x+1}{x-1}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C..$$

№ 5. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x=t^{12}, 12=HCK(2,3,4) \\ dx=12t^{11}dt; t=\sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}dt}{t^8-t^3} =$$

$$=12\int \frac{t^{14}dt}{t^5-1} = 12\int \frac{t^4\left(t^{10}-1+1\right)dt}{t^5-1} = 12\int \left(t^4\left(t^5+1\right) + \frac{t^4}{t^5-1} \right) dt =$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left| t^5-1 \right| \right) + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5}\ln\left| \sqrt[12]{x}-1 \right| + C.$$

№ 6. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}} = \left| \begin{array}{l} x=5\mathrm{tg}z, \quad z\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \quad z\neq 0, \\ dx=\frac{5dz}{\cos^2 z}; \quad z=\mathrm{arctg}\frac{x}{5}; \\ \sqrt{x^2+25}=5\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 z}=\frac{5}{\cos z} \end{array} \right| = \int \frac{\cos z\cdot 5dz}{5\cdot 25\mathrm{tg}^2 z\cdot\cos^2 z} =$$

$$=\frac{1}{25}\int \frac{\cos z dz}{\sin^2 z} = -\frac{1}{25\sin z} + C = -\frac{1}{25\sin\mathrm{arctg}\frac{x}{5}} + C = \frac{\sqrt{x^2+25}}{25x} + C.$$

№ 7. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1}=t-x, \ a=1>0; \\ x+x+1=t^2-2tx+x^2, \\ x=\frac{t^2-1}{2t+1}, \ dx=\frac{2\left(t^2+t+1\right)dt}{(2t+1)^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{\left(t^2+t+1\right)dt}{(x+t-x)(2t+1)^2} =$$

$$=\left| \frac{t^2+t-1}{t(2t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t+1} + \frac{C}{(2t+1)^2} \Rightarrow t^2+t+1 = A(2t+1)^2 + Bt(2t+1) + C\cdot t \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ C=-\frac{3}{2} \\ B=-\frac{3}{2} \end{array} \right| = 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t+1)^2} \right) dt = \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3} + \frac{3}{2(2t+1)} + C,$$

де $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

№ 8. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 \cdot \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} m=0,\ n=4,\ p=-\dfrac{1}{4},\ a=b=1, \\ \dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{0+1}{4}-\dfrac{1}{4}=0\in Z \Rightarrow \\ \Rightarrow x^{-4}+1=t^4,\ x^4=\left(t^4-1\right)^{-1}, \\ x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}},\ dx=-t^3\cdot\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt, \\ \sqrt[4]{1+x^4}=t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}} \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt}{t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}} = -\int \frac{t^2dt}{t^4-1} = \left| \frac{t^2}{t^4-1} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1} \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow t^2 = A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1) \Rightarrow$$

$$\left. \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=-\dfrac{1}{4} \\ C=0 \\ D=\dfrac{1}{2} \end{cases} \right| = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\, t + C.$$

де $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$.

№ 9. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}\cdot\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}dx = \left| \begin{array}{l} m=-1,\ n=5,\ p=-\dfrac{1}{3},\ a=b=1, \\ \dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1+1}{5}=0\in Z \Rightarrow 1+x^5=t^3, \\ x=\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{5}},\ dx=\dfrac{3}{5}t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{5}}dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{5}\int\frac{tdt}{t^3-1} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt = \frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

де $t=\sqrt[3]{1+x^5}$.

РОЗДІЛ 2
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

ПЗ-1 ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Теоретичні відомості

1. Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $a \le x \le b, a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ – довільне розбиття відрізка на *n* частин, то інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається сума вигляду

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, x_{k-1} \le \xi_k \le x_k, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, ..., n.$$

2. Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називають скінченну границю інтегральної суми S_n, якщо найбільша з різниць Δx_k прямує до нуля, і при цьому не залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ та вибору точок ξ_k та позначають $\lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx.$

3. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$ і *F(x)* одна з її первісних, то визначений інтеграл обчислюється за **формулою Ньютона – Лейбниця**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}$.

Розв'язання. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$.

Відповідь. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln 2.$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx.$

Розв'язання. $\int\limits_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \int\limits_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 d\left(e^x - 1\right) = \frac{1}{5}\left(e^x - 1\right)^5 \Big|_0^{\ln 2} =$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2} - 1\right)^5 - \left(e^0 - 1\right)^5\right) = \frac{1}{5}\left((2-1)^5 - (1-1)^5\right) = \frac{1}{5}.$$

Відповідь. $\int\limits_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = 1/5.$

4. Метод заміни змінної

Нехай в інтегралі $\int\limits_a^b f(x)dx$ проведено заміну змінної $x = \varphi(t)$. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, функція $\varphi(t)$ диференційовна та визначена на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $a \le \varphi(t) \le b, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то має місце формула заміни змінної у визначеному інтегралі

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

При застосуванні цієї формули маємо пам'ятати про потребу заміни меж інтегрування. Можлива також обернена заміна $t = \psi(x)$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}.$

Розв'язання. $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2, \quad dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}dt =$

$$= 2\int\limits_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2(t - \ln|t+1|)\Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

Відповідь. $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$

Приклад 4. Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

Розв'язання. Застосуємо підстановку $x = 2\sin t$. Межі інтегрування знаходимо зі співвідношень $2\sin t = 0, t_1 = 0$ і $2\sin t = 1, t_2 = \frac{\pi}{6}$. Функція $x = 2\sin t$ та її похідна $x' = 2\cos t$ неперервні на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, що підтверджує законність цієї підстановки. Отже, маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}2\cos t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

5. Метод інтегрування частинами

У визначеному інтегралі інтегрування частинами виконують за формулою $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu, u(x), v(x)$ – функції, диференційовні на $[a;b]$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 xe^x dx.$

Розв'язання. $\int\limits_0^1 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{vmatrix} = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$

Відповідь. $\int\limits_0^1 xe^x dx = 1.$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x, dv=\frac{dx}{x^5} \\ du=\frac{dx}{x}, v=-\frac{dx}{4x^4} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln x}{4x^4}\Bigg|_1^2 + \frac{1}{4}\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Bigg|_1^2 = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}.$$

Відповідь. $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}.$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u=x, \quad du=dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = 1/2.$

Завдання для роботи в аудиторії

1. $\int\limits_0^1 \left(1+e^{3x}\right)^2 e^{3x}dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{9}\left(\left(1+e^3\right)^3 - 8\right).$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$ *Відповідь.* $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ *Відповідь.* $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}.$ *Відповідь.* $\frac{\sqrt{2}}{8}.$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$. *Відповідь.* $\dfrac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.

6. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$. *Відповідь.* $\ln\dfrac{7+2\sqrt{7}}{9}$.

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$ *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$.

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx.$ *Відповідь.* $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$.

9. $\displaystyle\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx.$ *Відповідь.* $\dfrac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3}$.

ПЗ-2 ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМУ ТІЛА

Теоретичні відомості

Якою б не була криволінійна фігура, обмежена неперервними кривими лініями шляхом її розсікання лініями, паралельними осям координат, обчислення площі фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче фігур.

1. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 1). Функція $f(x)$ – неперервна та $f(x) \geq 0.$ Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така $S = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

2. Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \leq 0$ (рис. 2), $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right|.$

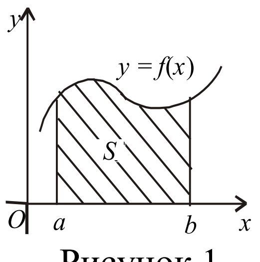

Рисунок 1

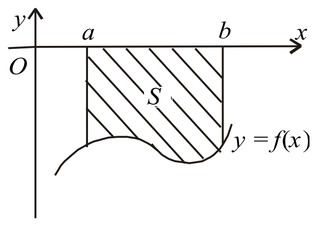

Рисунок 2

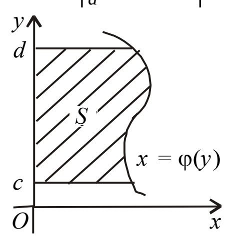

Рисунок 3

4. Фігура обмежена лініями $x = \phi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 3). Функція $x = \varphi(y)$ – неперервна та $\varphi(y) \geq 0.$

   Площа S такої фігури буде

$$S = \int_c^d \phi(y)\,dy.$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y=-x^2+4x+5 \text{ та } y=2x-3.$$

Розв'язання.

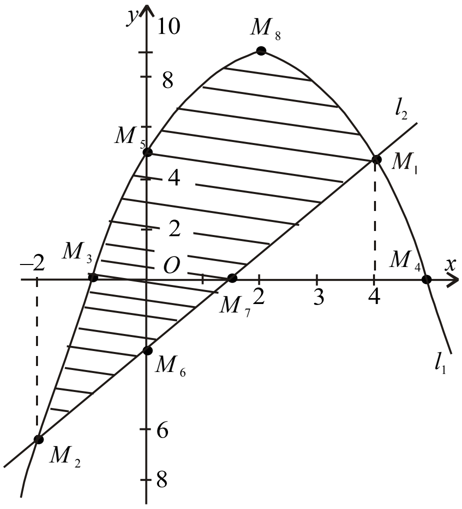

Рисунок 4

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y=-x^2+4x+5\ (l_1)$ та прямою $y=2x-3\ (l_2)$ на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи (рис. 4).

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ \ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ – вершина параболи $y-9=-(x-2)^2$.

Площа S фігури $M_1M_8M_2$ буде

$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

Відповідь. S = 36.

4. Якщо крива, що обмежує криволінійну трапецію (див. рис. 1), задана параметрично $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ і якщо $x=a$ при $t=t_0$ і $x=b$ при $t=T$, то площу криволінійної трапеції можна обчислити за формулою (5), зробивши при цьому у визначеному інтегралі заміну: $y=f(x)=\psi(x)$, $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi\ '(t)dt$, $S=\int\limits_{t_0}^{T}\psi(t)\varphi\ '(t)dt$.

Приклад 2 **.**Обчислити площу фігури, яка обмежена еліпсом $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$.

Розв'язання. Побудуємо схематичний рисунок. Фігура симетрична відносно осей *OX* та *OY* і розбита ними на 4 однакові за площею частини (рис. 5).

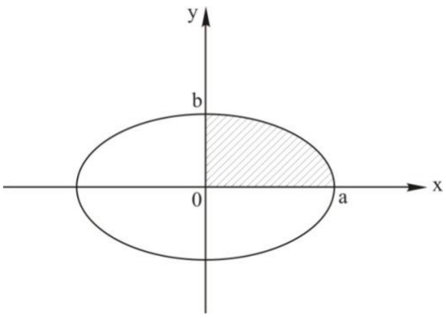

Рисунок 5

Тому можна знайти площу однієї з частин і помножити її на $4S=4S_1$ або $S=\int\limits_0^a ydx$, де за умовою задачі $y=b\sin\varphi$, $dx=-a\sin t dt$. Далі знайдемо межі інтегрування. Складемо таку таблицю (таблиця отримана з формули $x=a\cos\phi$)

x	t
0	$\frac{\pi}{2}$
a	0

Зробивши заміну у визначеному інтегралі, отримаємо

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt\cdot$$

Після обчислення інтеграла знаходимо, що $S = \pi ab$.

Відповідь. $S = \pi ab$ кв. од.

5. Якщо фігура являє собою криволінійний сектор (рис. 6), обмежений двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ та неперервною кривою, яка задана рівнянням в полярній системі координат, то площа такої фігури обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(\rho(\varphi))^2 d\varphi\cdot$$

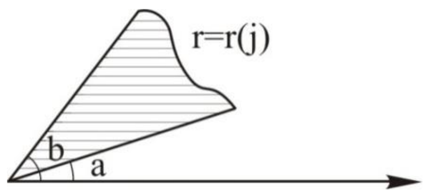

Рисунок 6

Приклад 3. Обчислити площу фігури, що обмежена кривою $\rho = a\sin 3\varphi$.

Розв'язання. Побудуємо схематичний рисунок. Знайдемо період функції $\rho = a\sin 3\varphi$. За означенням період T – це найменше число, для якого має місце тотожність

$$a\sin 3(\varphi + T) \equiv a\sin 3\varphi, \sin 3(\varphi + T) \equiv \sin 3\varphi \Rightarrow$$
$$\sin 3\varphi \cdot \cos 3T + \cos 3\varphi \cdot \sin 3T \equiv \sin 3\varphi.$$

Звідси випливає, що $\cos 3T = 1$, $\sin 3T = 0$. Отже, $3T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{3}$. Таким чином, криву достатньо розглянути лише в секторі $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$. Оскільки полярний радіус ρ за означенням має бути додатним, то межі зміни кута φ потрібно обмежити інтервалом $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. На інтервалі, що залишився, $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$, $\rho < 0$ точок цієї кривої не буде.

При зміні кута φ від 0 до $\frac{\pi}{6}$ функція $\sin 3\varphi$ зростає від 0 до 1, а при зміні кута φ від $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{9}$ – спадає від 1 до 0. Враховуючи викладене вище, будуємо графік функції $\rho = a\sin 3\varphi$ для $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ в полярній системі координат. Оскільки період функції $\rho = a\sin 3\varphi$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$, то в повному куті 2π будуть міститися три аналогічні петлі: друга петля буде на проміжку $\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi$ і третя петля – на проміжку $\frac{4\pi}{3} \le \varphi \le \frac{5\pi}{3}$ (рис. 7).

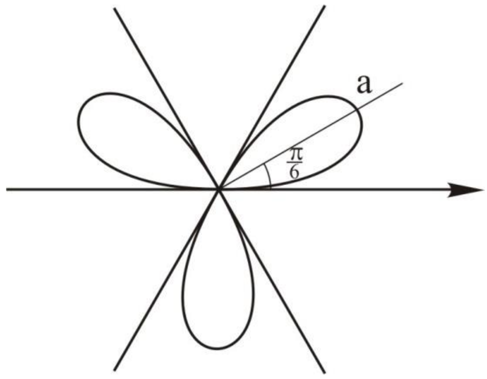

Рисунок 7

За формулою $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\varphi \cdot d\varphi$.

Після обчислення визначеного інтеграла отримуємо $S = \frac{1}{4}a^2\pi$ кв. од.

Відповідь. $S = \frac{1}{4}a^2\pi$ кв. од.

6. Обчислення об'єму тіла

Задача. Знаючи закон зміни площі поперечного перерізу тіла, знайти його об'єм.

Розв'язання. Нехай функція $S = S(x)$ – площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі *Ox* у деякій точці $x \in [a;\, b]$. Відрізок $[a;\, b]$ дає лінійний розмір тіла в напрямі осі *Ox*.

Поділимо проміжок $[a;\, b]$ на n частин точками x_i, $i = \overline{(0, n)}$ так, що $a = x_0$, $b = x_n$. Через ці точки проведемо площини перпендикулярно до осі, у результаті чого тіло буде розбито на n частин. Кожну з цих частин наближено замінимо циліндром з висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ та площею основи $S(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ (рис. 8).

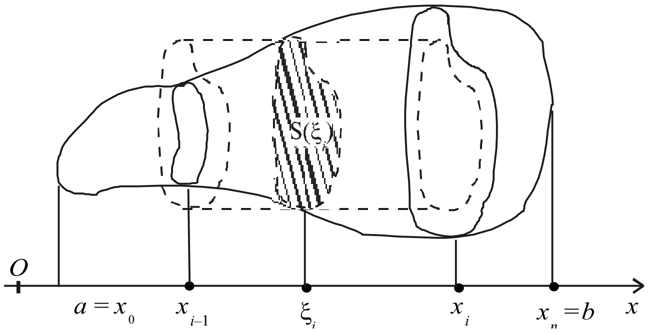

Рисунок 8

Тоді об'єм тіла наближено дорівнюватиме інтегральній сумі $V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$, а точне значення об'єму тіла подаватиметься границею

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx,$$

якщо ця границя існує.

Задача. Обчислити об'єм тіла V_x, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = f(x) \ge 0, y = 0, x = a, x = b$ (рис. 9).

Розв'язання. Розглядаючи цю задачу як частинний випадок попередньої задачі, встановлюємо, що площа поперечного перерізу $S(x)$ в такому випадку є площею круга радіусом $y = f(x)$, тобто $S(x) = \pi \cdot (f(x))^2$, а об'єм тіла обертання буде

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

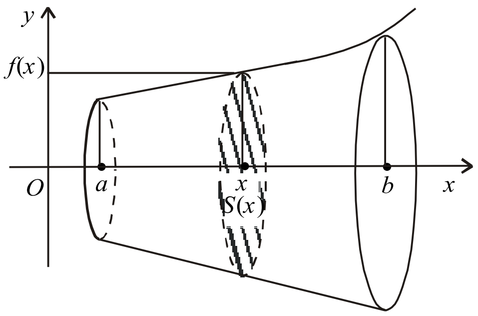

Рисунок 9

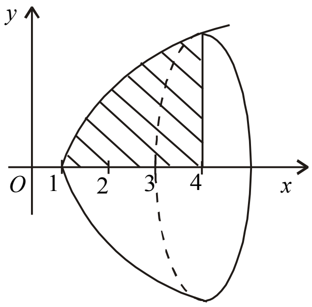

Рисунок 10

Зауваження. Аналогічно, об’єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x=\varphi(y)\geq 0$, $y=c$, $y=d$, матиме вигляд

$$V_y=\pi\int_c^d(\varphi(y))^2\,dy.$$

Приклад 4. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2=3x-3$, $x = 1$, $x = 4$.

Розв’язання. У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями (рис. 10). Об’єм тіла буде таким:

$$V=\pi\int_1^4 y^2dx=\pi\int_1^4(3x-3)dx=\frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Big|_1^4=\frac{27}{2}\pi.$$

Відповідь. ***V***= $\frac{27}{2}\pi$.

7. Обчислення довжини плоскої кривої

Довжина дуги гладкої плоскої кривої, заданої рівнянням $y=f(x)$ на відрізку $a\leq x\leq b$, обчислюється за формулою

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Якщо ж крива задана параметрично: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_0\leq t\leq T$, то

$$L=\int_{t_0}^T\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Крива може бути задана в полярній системі координат: $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leq\varphi\leq\beta$. Тоді

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Приклад 5. Знайти довжину дуги лінії кардіоїди, що задана рівнянням $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$.

Розв’язання. Зробимо схематичний рисунок кардіоїди (рис. 11).

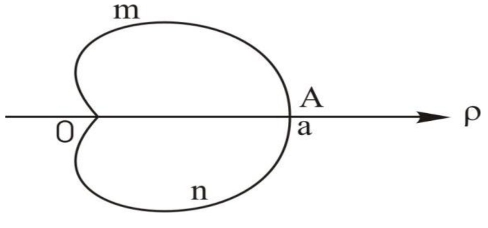

Рисунок 11

З рисунка видно, що крива складається з двох симетричних частин, одна з яких (AmO) відповідає зміні кута φ від 0 до π, друга – (OnA) – від π до 2π. Тому достатньо обчислити довжину половини дуги і подвоїти результат. Крива задана в полярній системі координат. Тому для розв'язання задачі потрібно використати формулу $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

Спочатку знаходимо довжину дуги (AmO), що описується при зміні кута φ від 0 до π

$$L_{(AmO)} = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{(a(1+\cos\varphi))^2 + (-a\sin\varphi)^2}\, d\varphi = a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int\limits_0^{\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi.$$

Оскільки $\cos\frac{\varphi}{2} \geq 0$ при $\varphi \in [0,\pi]$, то $\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = \cos\frac{\varphi}{2}$ і

$$L_{(AmO)} = 2a\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a,\ \ L = 2L_{(AmO)} = 8a \text{ лін. од.}$$

Відповідь. Довжина дуги цієї лінії кардіоїди становить 8*a* лін. од.

Приклад 6. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y^2 = (x-p)^3$, що вирізана параболою $y^2 = \frac{1}{2}p^2 x$.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис. 12).

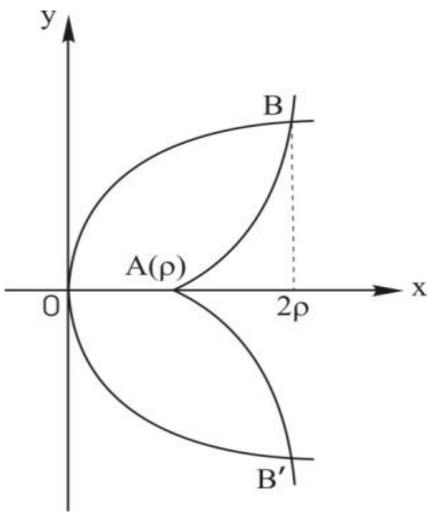

Рисунок 12

З рисунка видно, що в задачі потрібно знайти довжину дуги BAB', що складається з двох симетричних частин.

Тому достатньо обчислити довжину дуги АВ і подвоїти результат. Для знаходження меж інтегрування достатньо знайти абсцису точки В, оскільки абсциса точки А уже відома і дорівнює р. Розв'яжемо систему рівнянь двох парабол:

$$\begin{cases} y^2 = (x-p)^3 \\ y^2 = \frac{1}{2}p^2 x \end{cases} \Rightarrow (x-p)^3 = \frac{1}{2}p^2 x.$$

Отримали кубічне рівняння, розв'язок якого знаходимо підбором $x = 2p$. Оскільки функцію можна записати рівнянням $y = f(x)$, то для розв'язання задачі використовується формула

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx,$$

де $a = p$,

$b = 2p$, $f(x) = \sqrt{(x-p)^3}$,

$f'(x) = \frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}}$.

$$L = 2\int_p^{2p} \sqrt{1+(\frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = 2\int_p^{2p} \sqrt{1+\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}p}\,dx =$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-\frac{9}{4}p+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_p^{2p} = \frac{16}{27}(\sqrt{(1+\frac{9}{4}p)^3}-1).$$

Відповідь. $\frac{16}{27}(\sqrt{(1+\frac{9}{4}p)^3}-1)$.

Зауваження**:** 1. Якщо при обчисленні довжин дуг межі інтегрування відомі, будувати рисунок не обов'язково.

2. В деяких випадках при використанні формули $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ доцільно за значення функції взяти змінну *x*, і формула матиме вигляд $L = \int_c^d \sqrt{1+(\phi'(y))^2}\,dy$, де дуга кривої буде задана рівнянням $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$.

8. Обчислення площ поверхонь та об’ємів тіл обертання

Нехай задана криволінійна трапеція (рис. 13), що спирається на вісь OX і обмежена неперервною кривою $y = f(x)$. Обертаючи таку трапецію навколо осі OX, отримаємо тіло обертання, об’єм якого обчислюється за формулою

$$V_{OX} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot$$

Якщо ж трапеція спирається на вісь OY (рис. 14) і обертається навколо осі OY, то об’єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V_{OY} = \pi \int_c^d (\phi(y))^2 dy.$$

Зауваження 1. Якщо крива, що обмежує трапецію, задається n аналітичними виразами, то задана трапеція розбивається на n трапецій. Тоді обчислюють об’єм тіл, отриманих обертанням кожної з n трапецій, і результати підсумовуються.

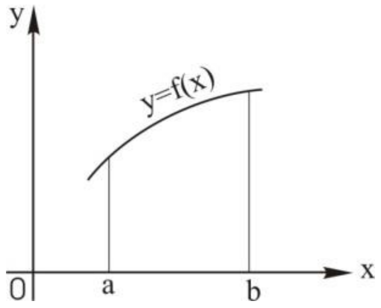

Рисунок 13

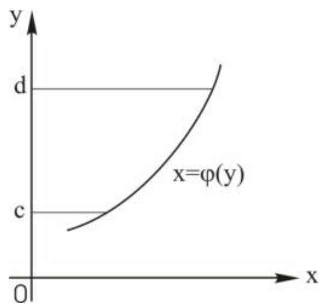

Рисунок 14

Зауваження 2. Якщо тіло утворюється обертанням фігури, що не є трапецією (рис. 15), то воно розкладається на трапеції: знаходять об’єм тіл обертання кожної з побудованих трапецій.

Тоді підсумковий об’єм $V=V_{об.A1\ AmBB1}-V_{об.\ A1\ A\ nBB1}$.

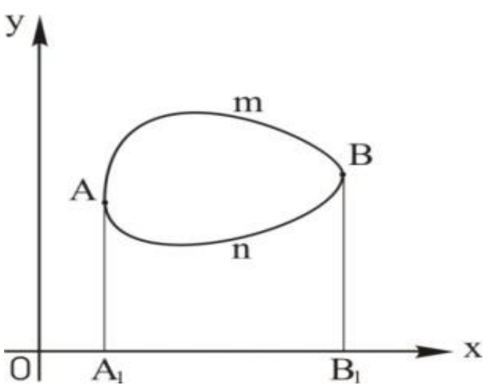

Рисунок 15

Приклад 7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *OX* фігури, обмеженої півеліпсом $y = 3\sqrt{1-x^2}$, півпараболою $x = \sqrt{1-y}$ і віссю *OY*.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис. 16)

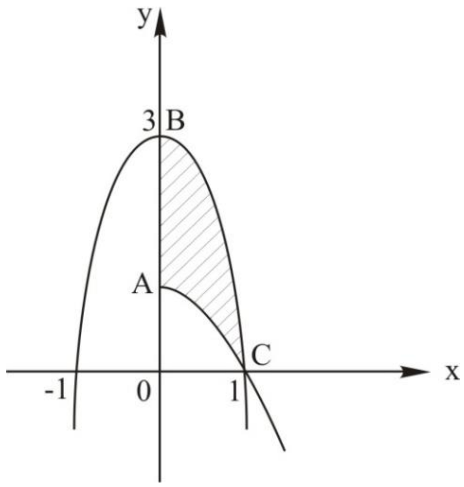

Рисунок 16

Рівняння $y = 3\sqrt{1-x^2}$ задає верхню половину еліпса $\frac{y^2}{9} + x^2 = 1$; рівняння $x = \sqrt{1-y}$ задає праву вітку параболи $x^2 = 1 - y$ з вершиною в точці (0,1), що перетинає вісь *OX* в точках (1,0), (-1,0). Навколо осі *OX* обертається заштрихована фігура ABC. Об'єм тіла обертання знайдемо як різницю об'ємів, отриманих від обертання трапецій 0BC та 0AC. Використаємо формулу

$$V_{OX} = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

$$V = \pi\int_0^1 9(1-x^2)dx - \pi\int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = \pi(9x - 3x^3)\Big|_0^1 -$$

$$-(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5})\Big|_0^1 = 5\frac{7}{15}\pi \text{ куб. од.}$$

Відповідь. $5\frac{7}{15}\pi$ куб. од.

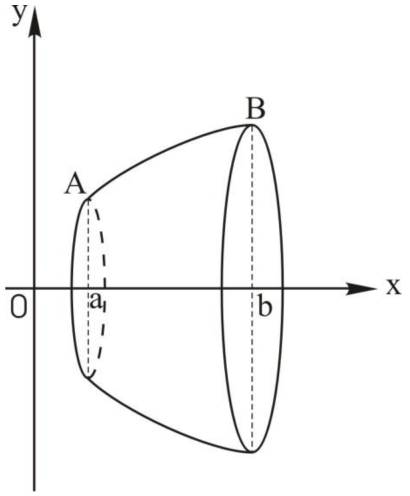

Рисунок17

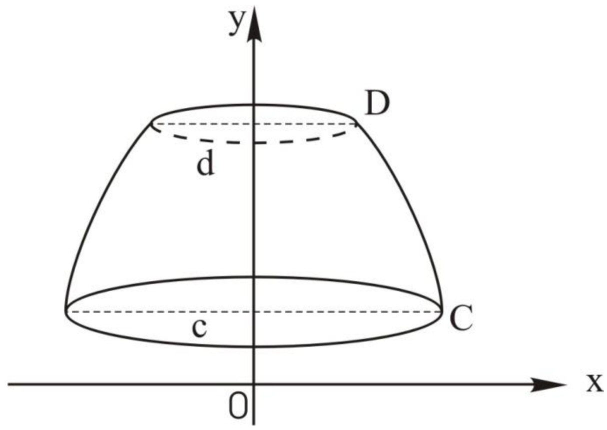

Рисунок18

Якщо навколо осі координат обертається дуга кривої AB (рис. 17, 18), то утворюється поверхня обертання, площа P якої обчислюється за такими формулами:

- крива задана явним рівнянням $y = f(x)$ і обертається навколо осі OX, $a \le x \le b$

$$P_{OX} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx;$$

- крива задана параметрично $x = x(t),\ y = y(t),\ t_0 \le t \le T$ і обертається навколо осі OX

$$P_{OX} = 2\pi\int_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt;$$

- крива задана явним рівнянням $x = \varphi(y)$ і обертається навколо осі OY (рис. 18)

$$P_{Oy} = 2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy;$$

- крива задана параметрично $x = x(t),\ y = y(t),\ t_0 \le t \le T$ і обертається навколо осі OY

$$P_{OY} = 2\pi\int_{t_0}^{T} x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Приклад 8. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ навколо осі OX.

Розв'язання. Будуємо схематичний рисунок поверхні, утвореної обертанням астроїди в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Астроїда симетрична відносно осей координат. Тому для розв'язання задачі достатньо обчислити площу поверхні, отриманої обертанням дуги *AB*, що розміщена в першій чверті, і результат помножити на 2 (рис. 19).

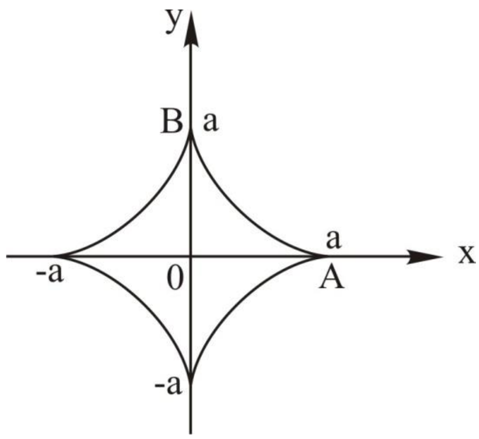

Рисунок 19

Розв'язання. Для обчислення площі поверхні обертання астроїди навколо осі OX використаємо параметричне задання кривої, а отже, формулу $P_{OX} = 2\pi\int\limits_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$. Оскільки дуга AB описується при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то

$$\rho = 2\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\cdot\sin t)^2 + (3a\sin^3 t\cdot\cos t)^2}dt =$$

$$= 4\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\cos t\cdot\sin t dt = 12\pi a^2 \left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

Шукана площа $P = \frac{12}{5}\pi a^2$ (кв. од.).

Відповідь. $P = \frac{12}{5}\pi a^2$ (кв. од.).

Завдання для роботи в аудиторії

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. *Відповідь.* $S = \dfrac{125}{6}$.

2. $y = -x^2 + 9$, $y = 2x + 1$. *Відповідь.* $S = 36$.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. *Відповідь.* $S = \pi ab$.

4. $y = \dfrac{\ln x}{4x}$, $y = x\ln x$ *Відповідь.* $S = \dfrac{1}{16}\left(3 - \ln 4 - 2\ln^2 2\right)$.

5. $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \dfrac{2}{3}\cos x$, $x = 0$. *Відповідь.* $S = \dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена лініями:

6. $y^2 = 1 - x$, $x = 0$ навколо осі Oy. *Відповідь.* $V = \dfrac{16}{15}\pi$.

7. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ навколо осі Oy. *Відповідь.* $V = \dfrac{64}{3}\pi$.

8. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$ навколо осі Ox. *Відповідь.* $V = \dfrac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$.

9. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x = 0$, $x = 1$ навколо осі Ox. *Відповідь.* $V = \dfrac{\pi}{8}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right)$.

10. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ навколо осі Ox. *Відповідь.* $V = 12\pi$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

ІЗ № 2–1

Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної.

1. $\displaystyle\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ 2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ 3. $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

4. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x + e^{-x}}dx$ 5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x+1}}$ 6. $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x}$ 8. $\displaystyle\int_0^{64} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}dx$ 9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$

10. $\int\limits_{4\sqrt{2}}^{8} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$ 11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ 12. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+2}dx$

13. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$ 14. $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$ 15. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

16. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\left(9-x^2\right)^2}$ 17. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}dx}{x^2}$ 18. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$

19. $\int\limits_{15}^{99} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+3}$ 20. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{\left(4-x^2\right)^3}dx$ 21. $\int\limits_{4}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

22. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$ 23. $\int\limits_{27}^{125} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}$ 24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{(x+1)^4}dx$

25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$ 26. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$ 27. $\int\limits_{4}^{9} \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}+1}$

28. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ 29. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{5\cos^2 x-1}$ 30. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

ІЗ № 2–2

Обчислити визначений інтеграл методом інтегрування частинами

1. $\int\limits_{0}^{1} x\arcsin 2x\,dx$ 2. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} arctg3x\,dx$ 3. $\int\limits_{0}^{0,5} \arcsin x\,dx$

4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 3x\,dx$ 5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos\frac{x}{2}dx$ 6. $\int\limits_{1}^{2} (3x+2)\ln(x+3)dx$

7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin 4x\,dx$ 8. $\int\limits_{-1}^{1} \arccos\frac{x}{2}dx$ 9. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\sin 3x\,dx$

10. $\int\limits_{1}^{e^4} \sqrt{x}\ln\frac{x}{16}\,dx$ 11. $\int\limits_{1}^{e} \sin(\ln x)\,dx$ 12. $\int\limits_{0}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

13. $\int\limits_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}\,dx$ 14. $\int\limits_{1}^{\pi} (\pi-x)\sin x\,dx$ 15. $\int\limits_{-2}^{2} (1-x)\sin \pi x\,dx$

16. $\int\limits_{0}^{1} \ln(x+1)\,dx$ 17. $\int\limits_{2}^{3} \ln(x-1)\,dx$ 18. $\int\limits_{1}^{2} x\log_2 x\,dx$

19. $\int\limits_{0}^{2\pi} x\sin 2x\,dx$ 20. $\int\limits_{0}^{1} (x+1)e^{-x}\,dx$ 21. $\int\limits_{0}^{\ln 2} xe^{-2x}\,dx$

22. $\int\limits_{1}^{2} x\ln(5x+1)\,dx$ 23. $\int\limits_{0}^{\pi} e^{2x}\cos^2 x\,dx$ 24. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos\frac{x}{3}\,dx$

25. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\,arctg\frac{x}{3}\,dx$ 26. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\cos 2x\,dx$ 27. $\int\limits_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

28. $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{2}\,dx$ 29. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^2}\,dx$ 30. $\int\limits_{0}^{2} \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx$

ІЗ № 2–3

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

1.	$y=(x-2)^3,$ $y=4x-8$	$\rho=4\cos 3\varphi,$ $\rho=2\ (\rho\geq 2)$	$\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$
2.	$y=(x+1)^2,$ $y^2=x+1$	$\rho=4\cos 4\varphi$	$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \\ x=1\ (x\geq 1). \end{cases}$
3.	$y=4-x^2,$ $y=x^2-2x$	$\rho=\cos 2\varphi$	$\begin{cases} x=2(t-\sin t),\ \frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{3\pi}{2}, \\ y=2(1-\cos t), \\ y=0. \end{cases}$

4.	$y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0,\ x=0,\ x=1$	$\rho=\sin 6\varphi$.	$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \\ y=4\ \ (y\ge 4). \end{cases}$
5.	$y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$	$\rho=\sin\varphi$, $\varphi=\frac{\pi}{4}\ \left(\varphi\ge\frac{\pi}{4}\right)$	$\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t \end{cases}$
6.	$x=\sqrt{e^y-1},\ x=0$, $y=\ln 2$	$\rho=2\cos\varphi$, $\rho=3\cos\varphi$.	$\begin{cases} x=t-\sin \boldsymbol{t}, \\ y=1-\cos \boldsymbol{t}, \\ y=1\ (y\ge 1), \end{cases}$ $0<x<2\pi$
7.	$x=(y-2)^3$, $x=4y-8$	$\rho=\cos\varphi$, $\rho=2\cos\varphi$	$\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \\ x=1\ \ (x\ge 1). \end{cases}$
8.	$y=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $y=0, x=1$	$\rho=5\sin\varphi$, $\varphi=\frac{\pi}{3}\ \left(\varphi\ge\frac{\pi}{3}\right)$.	$\begin{cases} x=32\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \\ x=4\ \ (x\ge 4). \end{cases}$
9.	$x=4-y^2$, $x=y^2-2y$	$\rho=1+\sqrt{2}\cos\varphi$, $\rho=2\ \ (\rho\ge 2)$	$\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=8\sin t,\ \ y=4\ (y\ge 4) \end{cases}$
10.	$y^2=x-1$, $y=(x-1)^2$	$\rho=2\sin 4\varphi$	$\begin{cases} x=9\cos t, \\ y=4\sin t, \\ y=2\ \ (y\ge 2). \end{cases}$
11.	$x=\sqrt{4-y^2}$, $x=0,\ \ y=0,\ \ y=1$	$\rho=2\cos 6\varphi$.	$\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \\ y=0,\ 2\pi\le t\le 5\pi. \end{cases}$
12.	$y=\frac{2a^3}{a^3+x^2}$, $y=1$	$\rho=1+\sqrt{2}\sin\varphi$.	$\begin{cases} x=8(t-\sin t), \\ y=8(1-\cos t), \\ y=12,\ y\ge 12,\ \ 0\le t\le 16\pi. \end{cases}$

13.	$y=\lvert\ln x\rvert$, $y=10$	$\rho=3\sin\varphi$, $\rho=5\sin\varphi$.	$\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=2t^2-t^3 \end{cases}$
14.	$y=5x^3+x$, $y=8,\ x=\pm1$	$\rho=\frac{5}{2}\sin\varphi$, $\varphi=\frac{\pi}{4}\ \left(\varphi\le\frac{\pi}{4}\right)$.	$\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \\ x=3\sqrt{3}\ \left(x\ge 3\sqrt{3}\right). \end{cases}$
15.	$x=x^2+y^2$, $x+2y=1$	$\rho=4\cos 4\varphi$	$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\sin t, \\ x=-1, x=1, -1\le x\le 1 \end{cases}$
16.	$x^2+y^2=8x$, $y=2$	$\rho=1+\cos\varphi$, $\rho=1(\rho\ge1)$	$\begin{cases} x=10(t-\sin t), \\ y=10(1-\cos t), \\ y=15,\ 0\le x\le 6\pi\ \ y\ge 15. \end{cases}$
17.	$ay^2=x^3,\ y=0,$, $x=a$	$\rho=1-\cos\varphi$, $\rho=1(\rho\ge1)$	$\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \\ x=2\ (x\ge 2). \end{cases}$
18.	$y=x^2e^{-x}$, $y=e^{-x}$	$\rho=1+\sin\varphi$, $\rho=1(\rho\ge1)$	$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=3\sqrt{2}\sin t, \\ y=3\ (y\ge 3). \end{cases}$
19.	$a^2y=8x^2$, $x=a,\ y=0$/	$\rho=1+\sin\varphi$, $\rho=\frac{1}{2}\left(\rho\ge\frac{1}{2}\right)$	$\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \\ x=3\sqrt{3}\ \left(x\ge 3\sqrt{3}\right). \end{cases}$
20.	$2y=3\sqrt{4-x^2}$, $2y=4-x^2$	$\rho=1+\cos\varphi$, $\rho=\frac{3}{2}\left(\rho\le\frac{3}{2}\right)$	$\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \\ y=3,\ 0\le x\le 6\pi\ \ y\ge 3. \end{cases}$

21.	$y=3\sqrt{1-x^2}$, $x=\sqrt{1-y},\ x=0$	$\rho=1+\cos\varphi,$ $\rho=1(\rho\geq 1)$	$\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \\ y=0, y=6, \\ 0\leq x\leq 2\pi, 0\leq y\leq 6. \end{cases}$
22.	$2y=-3\sqrt{4-x^2}$, $4y=4-x^2$	$\rho=2\cos 2\varphi,$ $\rho=1(\rho\geq 1)$	$\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \\ x=2\ \ (x\geq 2). \end{cases}$
23.	$y=\dfrac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$	$\rho=4\sin 2\varphi,$ $\rho=2(\rho\geq 2)$	$\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \\ y=2, y=3, \\ 0\leq x\leq 4\pi, 2\leq y\leq 3. \end{cases}$
24.	$y=\sqrt{(x-2)^3}$, $y=0,\ x=6$	$\rho=\sqrt{3}\cos\varphi,$ $\rho=\sin\varphi$	$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=5\sqrt{2}\sin t, \\ y=-5\ (y\geq -5) \end{cases}$
25.	$y^2=x(1-x),$ $y^2=\dfrac{1}{2}-x$	$\rho=\cos\varphi+\sin\varphi$	$\begin{cases} x=\dfrac{t}{3}(6-t) \\ y=\dfrac{t^2}{8}(6-t) \end{cases}$
26.	$y=-\sqrt{4-x^2}$, $x=0,\ \ y=0,\ \ x=1$	$\rho=\cos^2\varphi$	$\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \\ y=6,\ 0\leq x\leq 4\pi\ \ y\geq 6. \end{cases}$
27.	$y=(x+2)^2,$ $y=x+2$	$\rho=\sin^2\varphi$	$\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \\ y=1, y=3\sqrt{3} \\ 1\leq y\leq 3\sqrt{3}. \end{cases}$

28. $x=4-(y+1)^2,$ $x=y^2+2y-3$ $\rho=4\sin 2\varphi$ $\rho=2(\rho\ge 2)$ $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t\ , \\ y=4\sqrt{2}\sin t\ , \\ y=-4\ (y\le -4) \end{cases}$

29. $y=\ln x,$ $y=\ln^2 x$ $\rho=2-\cos 2\varphi$ $\begin{cases} x=8(t-\sin t), \\ y=8(1-\cos t), \\ y=4, y=12, \\ 0\le x\le 2\pi, 4\le y\le 12. \end{cases}$

30. $x=4-(y-1)^2$ $x=y^2-4y+3$ $\rho=1-\cos\varphi,$ $\rho=1(\rho\le 1)$ $\begin{cases} x=8\cos^3 t\ , \\ y=2\sin^3 t\ , \\ x=-1\ (x\le -1). \end{cases}$

ІЗ № 2–4

Обчислити довжину дуги кривої.

1. а) $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$. б) $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi$.

2. а) $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\ 1\le x\le 2$. б) $\rho=3e^{\frac{3\varphi}{3}},\ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

3. а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$. б) $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

4 а) $y=\ln\dfrac{5}{2x},\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$. б) $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi},\ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$

5. а) $y=-\ln\cos x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$. б) $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t), \\ y=4(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2$

6. а) $y=2+\sqrt{x-x^2},\ \dfrac{3}{4}\ge x\ge\dfrac{1}{4}$. б) $\rho=1-\sin\varphi$

7. а) $y=e^x+6,$ $\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$. б) $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi$.

8. а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$.

б) $\rho=5(1-\cos\varphi)$.

9. а) $y=\ln(x^2-1)$, $2\le x\le 3$.

б) $\begin{cases} x=10\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t. \end{cases}$

10. а) $y=\ln(1-x^2)$, $0\le x\le \frac{1}{4}$.

б) $\rho=3(1+\sin\varphi)$.

11. а) $y=2+chx$, $0\le x\le 1$.

б) $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi$

12. а) $y=1-\ln\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$.

б) $\rho=5e^{\frac{5\varphi}{12}}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$

13. а) $y=e^x+13$, $\ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}$.

б) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $\pi\le t\le 2\pi$.

14. а) $y=2-\sqrt{x-x^2}$, $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}$.

б) $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

15. а) $y=2-e^x$, $\ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$.

б) $\begin{cases} x=3(\cos t+t\sin t), \\ y=3(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

16. а) $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$.

б) $\rho=2\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{3}{4}$.

17. а) $y=21-\ln\cos x$, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

б) $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$

$0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

18. а) $y=1-\ln(x^2-1)$, $3\le x\le 4$.

б) $\rho=6(1+\sin\varphi)$.

19. а) $y=5+\ln\sin x$, $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{4}$.

б) $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=6\sin^3 t. \end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

20. а) $y=\sqrt{1-x^2}-\arccos x+1$.

б) $\rho=8\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

21. а) $y=\ln\sin x$, $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

б) $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$

.

22. а) $y=\ln 7-\ln x$,
$\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

б) $\rho=3\varphi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.

23. а) $y=chx+3,\ 0\le x\le 1$.

б) $\begin{cases}x=2{,}5(t-\sin t),\\ y=2{,}5(1-\cos t),\end{cases}\ \dfrac{\pi}{2}\le t\le\pi$.

24. а) $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$.

б) $\rho=4(1-\sin\varphi),\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{6}$.

25. а) $y=\ln\cos x+2,\ \ 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$

б) $\begin{cases}x=4(t-\sin t),\\ y=4(1-\cos t),\end{cases}\ \dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{2\pi}{3}$.

26. а) $y=e^x+26$,
$\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{24}$.

б) $\rho=8\sin\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

27. а) $y=-\sqrt{x-x^2}+4$,
$0\le x\le\dfrac{3}{4}$.

б) $\begin{cases}x=2(2\cos t-\cos 2t),\\ y=2(2\sin t-\sin 2t),\end{cases}$
$0\le t\le\dfrac{\pi}{3}$.

28. а) $y=\dfrac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}+3)$,
$0\le x\le 2$.

б) $\rho=12e^{\frac{12\varphi}{5}},\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$

29. а) $y=e^x+e$,
$\ln\sqrt{x}\le x\le\ln\sqrt{15}$.

б) $\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\end{cases}$
$0\le t\le\dfrac{3\pi}{2}$.

30. а) $y=\dfrac{1}{2}(1-e^x-e^{-x})$,
$0\le x\le 3$

б) $\rho=8(1-\cos\varphi)$.

ІЗ № 2–5

Знайти об’єм тіл обертання навколо кривої *OX* фігур, обмежених графіками функцій.

1. $y=3\sin x,\ y=\sin x,\ \ 0\le x\le\pi$.
2. $2x-x^2-y=0,\ 2x^2-4x+y=0$.
3. $x=\sqrt[3]{y-2},\ x=1,\ y=1$.
4. $y=xe^x,\ y=0,\ x=1$.

5. $y=2x-x^2,\ y=-x+2,\ x=0.$

6. $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1$

7. $x^2+(y-2)^2=1.$

8. $y=1-x^2,\ x=0,\quad x=\sqrt{y-2},\ x=1.$

9. $y=x^3,\ y=\sqrt{x}.$

10. $y=\sin(\frac{\pi x}{2}),\ y=x^2.$

Знайти об’єм тіл обертання навколо осі *OY* фігур, обмежених графіками функцій.

11. $y=\arccos\left(\frac{x}{3}\right), y=\arccos x,\quad y=0.$

12. $y=\arcsin\left(\frac{x}{3}\right), y=\arcsin x,\quad y=\frac{\pi}{2}$

13. $y=x^2+1,\quad y=x, x=0,\quad x=1.$

14. $y=\sqrt{x-1},\ y=0, y=1,\ x=0{,}5.$

15. $y=\ln x,\ x=2,\ y=0$

16. $y=(x-1)^2,\quad y=1$

17. $y=\arccos\left(\frac{x}{5}\right), y=\arccos\left(\frac{x}{3}\right),\ y=0$

18. $y=x^2-2x+1,\ x=2, y=0$

19. $y=\arccos\left(\frac{x}{5}\right), y=\arccos(x),\ y=0$

20. $y=(x-1)^2,\ x=0, x=2,\quad y=0.$

Знайти площі поверхонь обертання навколо осі *OX* кривих графіків функцій.

21. $y=\frac{1}{3}ch3x,\ 0\le x\le 1.$

22. $y=\frac{1}{3}x^3,\ -1\le x\le 1.$

23. $y=e^{-\frac{x}{2}},\ 0\le x\le 2.$

24. $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

Знайти площі поверхонь обертання навколо осі OY кривих графіків функцій

26. $9y^2 = 4x^3,\ 0 \le x \le 1.$

27. $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t, \\ y = 3\sin t - \sin 3t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

28. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

29. $x = \frac{1}{3}y^3,\ \ 0 \le y \le 2.$

30. $4x^2 + y^2 = 4.$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 2

ІЗ № 2–1

1. Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{matrix} x = t^2, \quad dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{matrix} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2(t - \ln|t+1|)\Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

2.Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{matrix} 1 + \sqrt{2x+1} = t, \quad dx = (t-1)dt; \\ x = \frac{(t-1)^2}{2}, \qquad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_2^4 \frac{t-1}{t}\,dt = \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = (t - \ln|t|)\Big|_2^4 = 4 - \ln 4 - \left(2 - \ln 2\right) = 2 - \ln 2.$$

***Див. приклади 1–4**, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-1, Розділ 2.*

ІЗ № 2–2

Обчислити визначений інтеграл методом інтегрування частинами $\int\limits_1^e x\ln x d\,x.$

$$\int\limits_1^e x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}; \\ dv=xdx, & v=\dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e \frac{x^2\cdot dx}{x} =$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}\left(\ln e-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln 1-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2+1}{4}.$$

***Див. приклади 5–7**, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-1, Розділ 2.*

ІЗ № 2–3

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

$$x=y^2+2y+6(l_1),$$
$$x-3y=26(l_2)\,.$$

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $x=y^2+2y+6$ та прямою $x-3y=26$, на координатній площині; при цьому обов'язково потрібно знайти точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат (рис. 20)

$$l_1\cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2+2y+6 \\ x-3y=26 \end{cases} \begin{cases} x=3y+26 \\ y^2-y-20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y+26 \\ \left[\begin{array}{l} y=-4 \\ y=5 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=14 \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=41 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(14;\ -4) \\ M_2(41;\ 5). \end{array}\right.$$

$$l_1\cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2+2y+6 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_3(6;\ 0).$$

$$l_1\cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=y^2+2y+6 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y^2+2y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

$$l_1\cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=26 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M_4\left(0;\ -\frac{26}{3}\right).$$

$$l_2\cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=26 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=26 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(26;\ 0).$$

$x = y^2 + 2y + 6 \Leftrightarrow (x-5) = (y+1)^2 \Rightarrow M_6(5;\ -1)$ — вершина параболи.

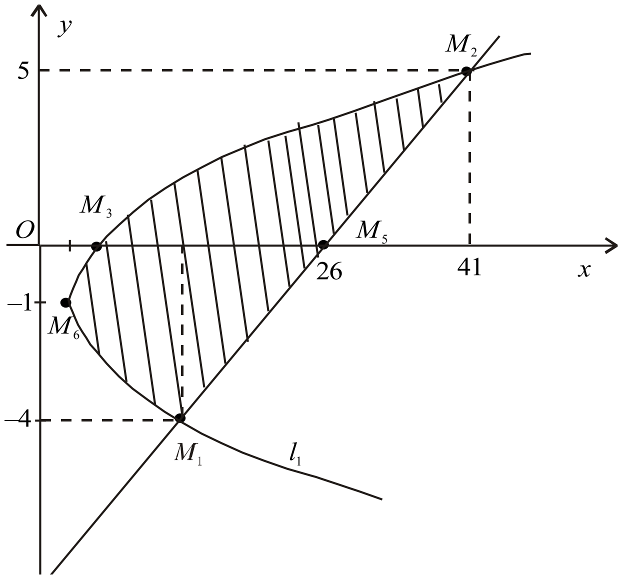

Рисунок 20

Для обчислення площі фігури $S_{M_1M_2M_6}$ найзручніше скористатись формулою $S = \int\limits_c^d \left(\phi_1(y) - \phi_2(y)\right) dy$

Отже, за цією формулою отримаємо

$$S_{M_1M_2M_6} = \int\limits_{-4}^{5} \left(3y + 26 - \left(y^2 + 2y + 6\right)\right) dy = \int\limits_{-4}^{5} \left(-y^2 + y + 20\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 20y\right)\Bigg|_{-4}^{5} = -\frac{125}{3} + \frac{25}{2} + 100 - \left(\frac{64}{3} + \frac{16}{2} - 80\right) = 121{,}5.$$

Див. приклади**, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-2, Розділ 2:* ***приклад 1, приклад 2, приклад 3.

ІЗ № 2–4

***Див. приклад 6**, розглянутий в теоретичних відомостях до ПЗ-2, Розділ 2*.

ІЗ № 2–5

Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ох* фігури, обмеженої лініями $x = y^2 + 2y + 6$, $x - 3y - 26 = 0$ $y = 0$, при $y > 0$.

Будуємо задані лінії на координатній площині аналогічно попередній задачі і штрихуванням визначаємо ту фігуру, яка, за умовою задачі, обертається навколо осі *Ох*. Це буде фігура $M_2M_3M_5$ (рис. 21). Об’єм тіла обертання $V_{M_2M_3M_5} = V_{M_3M_2M_7}$ (об’єм конуса $V_{M_2M_5M_8}$).

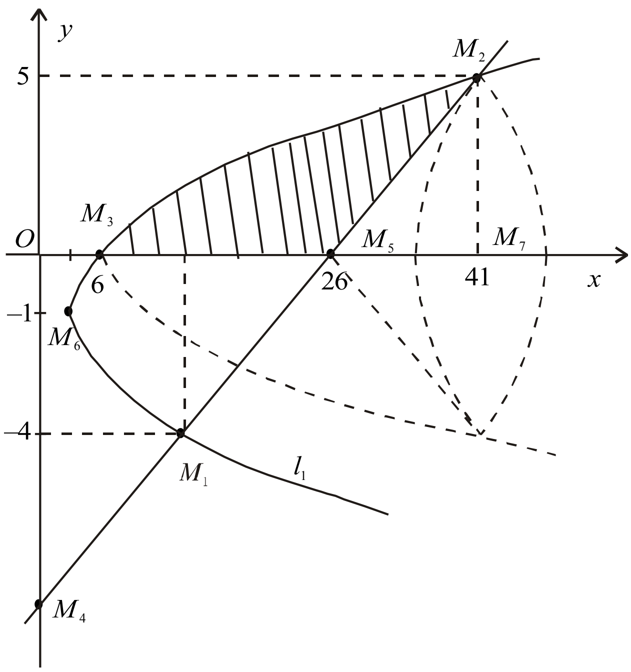

Рисунок 21

Об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо осі Ox, обчислюється за формулою $V_x = \int\limits_a^b S(x)\,dx = \pi\int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$.

У цьому прикладі для знаходження функції $y = f(x)$ виконаємо такі перетворення:

$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 6 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = (y+1)^2 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x-5} - 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-5} - 1.$$

Знаходимо об'єми тіла обертання та конуса.

$$V_{M_3M_2M_7} = \pi\int\limits_6^{41}\left(\sqrt{x-5}-1\right)^2 dx = \pi\int\limits_6^{41}\left(x - 2\sqrt{x-5} - 4\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{4\left(\sqrt{x-5}\right)^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_6^{41} = 395{,}8\pi;$$

$$V_{M_2M_5M_8} = \frac{1}{3}\pi(M_2M_7)^2 \cdot M_5M_7 = \frac{\pi}{3}25\cdot 15 = 125\pi.$$

Отже, об'єм тіла обертання $V_{M_2M_3M_5}$ буде таким:

$$V_{M_2M_3M_5} = (395{,}8 - 125)\pi = 270{,}8\pi \text{ куб.од.}$$

***Див. приклади 7, 8**, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-2, Розділ 2*

РОЗДІЛ 3
НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

ПЗ-1 НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ З НЕСКІНЧЕННИМИ МЕЖАМИ ІНТЕГРУВАННЯ.

Теоретичні відомості

1. **Невласним інтегралом** від неперервної функції *f(x)* на інтервалі $[a,+\infty)$ називається $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Якщо ця границя скінченна, то кажуть, що невласний інтеграл збігається, якщо ж границя (1) не існує або нескінченна, то інтеграл називається *розбіжним*.

Аналогічно, за означенням, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx\cdot$

2. Для визначення інтеграла на інтервалі $(-\infty,+\infty)$ розіб'ємо заданий інтервал довільною точкою *c* на два: $(-\infty,c]$, $[c,+\infty)$. Тоді, якщо кожний з невласних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^c f(x)dx$ і $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ і дорівнює їх сумі

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx\cdot$$

Якщо ж хоча б один із невласних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^c f(x)dx$ або $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$

Розв'язання. Для розв'язання задачі розглянемо такі три випадки:

I. $p = 1$. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln|x|)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty,$ інтеграл розбіжний.

II. $p< 1$. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-1\right)=+\infty$, інтеграл розбіжний.

III. $p>1$. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{\frac{1}{p-1}}-1\right)=$

$=\frac{1}{1-p}(0-1)=\frac{1}{p-1}$, інтеграл збіжний.

Відповідь. Інтеграл Діріхле збіжний при $p>1$ та розбіжний при $p\le 1$.

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$.

Розв'язання. В цьому прикладі обидві границі інтегрування нескінченні, тому розбиваємо заданий інтеграл на два

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2+2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)^2+2}.$$

Далі, за означенням, маємо

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2+2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)^2+2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+3)^2+2}+$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+3)^2+2}=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{2}}\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{2}}\Big|_0^b=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3}{\sqrt{2}}-\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{a+3}{\sqrt{2}}+$$

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{b+3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3}{\sqrt{2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Згідно з означенням невласного інтеграла, маємо

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1.$$

Відповідь. Інтеграл збіжний, дорівнює 1.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$.

Розв'язання. Введемо заміну

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{e^x}=t, & dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2}=\frac{2dt}{t}\\ e^x=t^2, & \alpha=\sqrt{e^0}=1,\\ e^xdx=2tdt, & \beta=\sqrt{e^{+\infty}}=+\infty\end{array}\right|=\int\limits_1^{+\infty}\frac{2dt}{t(t^2+t)}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{2dt}{t^2(t+1)}.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на прості дроби

$$\frac{2}{t^2(t+1)}=\frac{A_1}{t}+\frac{A_2}{t^2}+\frac{A_3}{(t+1)}\Rightarrow 2=A_1(t^2+t)+A_2(t+1)+A_3t^2\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A_1+A_3=0\\ A_1+A_2=0\\ A_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_3=2\\ A_1=-2\\ A_2=2\end{cases}.$$

Отже, маємо $\frac{2}{t^2(t+1)}=\frac{-2}{t}+\frac{2}{t^2}+\frac{2}{(t+1)}$.

Повертаючись до нашого інтеграла, отримаємо

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{2dt}{t^2(t+1)}=\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{-2}{t}+\frac{2}{t^2}+\frac{2}{(t+1)}\right)dt=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}\left(\frac{-2}{t}+\frac{2}{t^2}+\frac{2}{(t+1)}\right)dt=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-2\ln t-\frac{2}{t}+2\ln(t+1)\right)\Bigg|_1^A=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{2}{t}+2\ln\frac{(t+1)}{t}\right)\Bigg|_1^A=$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{2}{A}+2\ln\frac{(A+1)}{A}\right)-(-2+\ln 2)=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{2}{A}+2\ln\left(1+\frac{1}{A}\right)\right)+(2-\ln 2)=2-\ln 2.$$

Відповідь. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}=2-\ln 2.$

ПЗ-2 НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ВІД РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ

Теоретичні відомості

1. Нехай функція *f(x)* визначена і неперервна при $a \le x < b$ і необмежена поблизу точки *b*, тобто $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$. Крім того, функція *f(x)* інтегровна на кожному з інтервалів $[a, b-\varepsilon]$, де $\varepsilon>0$, тобто має місце інтеграл $I(\varepsilon)=\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

2. Границя змінної $I(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ називається **невласним інтегралом від розривної функції** *f(x)* на інтервалі від *a* до *b*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{1}$$

Якщо існує скінченна границя в правій частині формули (1), то невласний інтеграл називається збіжним, якщо ця границя не існує – розбіжним.

Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$

Якщо функція *f(x)* має розрив в деякій точці $x=c$ всередині відрізка $[a,b]$, то покладемо

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx,$$

якщо обидва інтеграли в правій частині збігаються.

Зауваження. Точку *b* називають особливою, якщо або $b=\infty$, або $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$. Тоді, якщо первісна функції *f(x)* на $[a,c]$, де *c* – скінченне число і *c*<*b*, неперервна, то для невласних інтегралів має місце узагальнена формула Ньютона – Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, де $F(b)=\lim\limits_{x\to b} F(x)$.

Приклад 1. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

Розв'язання. Перетворимо цей інтеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\int_{-1}^{1}x^{\frac{4}{3}}dx + 2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3I_1 + 2I_2.$$

Інтеграл I_1 в силу неперервності підінтегральної функції обчислюється за формулою Ньютона – Лейбніца $I_1 = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_{-1}^{1} = \frac{6}{7}$.

Інтеграл I_2 називається невласним, оскільки підінтегральна функція в точці $x=0$ має нескінченний розрив. Тому

$$I_2 = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{2/3}} = \int_{-1}^{0}x^{-\frac{2}{3}}dx + \int_{0}^{1}x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}x^{-\frac{2}{3}}dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}3\varepsilon_1^{\frac{1}{3}} + 3 + \lim_{\varepsilon_2\to 0}3\varepsilon_2^{\frac{1}{3}} + 3 = 6.$$

Остаточно $\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\cdot\frac{6}{7} + 2\cdot 6 = 14\frac{4}{7}$.

Відповідь. $\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 14\frac{4}{7}$.

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ має нескінченний розрив в точці $x=1$, але її первісна $F(x) = 3\sqrt[3]{x-1}$ неперервна на [1, 2]. Тому тут можна застосувати формулу Ньютона – Лейбніца

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3\sqrt[3]{x-1} = 3.$$

Приклад 3. Обчислити невласний інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$

Розв'язання. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty) \Rightarrow \Rightarrow x = 0 \in [-1;\ 1]$ – точка розриву 2-го роду функції $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ – невласний.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to +0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to +0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to +0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon_1} +$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty+\infty=+\infty\Rightarrow$$ інтеграл розбіжний.

Відповідь. Інтеграл розбіжний.

Приклад 4. Переконатися у розбіжності інтеграла $\int\limits_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція визначена на множині $(0;\quad+\infty)$, отже, $x=0$ – особлива точка.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\limits_0^{\frac{1}{e}}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{e}}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{e}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\ln\frac{1}{e}}+-\frac{1}{\ln(0+\varepsilon)}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{1}{\ln(0+\varepsilon)}\right)=\infty.$$

Інтеграл розбіжний.

Відповідь. Інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ розбіжний.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення підінтегральної функції. $D(y)=(-1;\quad 1)$, отже, точки $x=-1$ та $x=1$ особливі, тоді

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{-1-\varepsilon_1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{0}^{1-\varepsilon_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon_1}^{0}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\arcsin\Big|_{0}^{1-\varepsilon_2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\arcsin 0-\arcsin(-1+\varepsilon_1)\right)+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon_2)-\arcsin 0\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Відповідь. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$.

Завдання для роботи в аудиторії

1. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$; 3) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3+7}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+17}$;

5) $\int\limits_{0}^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$; 6) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{e^{-\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}}dx$; 7) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$; 8) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Відповідь. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\ln 2$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{2}{e}$; 7) – розбіжний; 8) $\frac{1}{2}$; 9) π.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{2x^2+x^4}$; 3) $\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{(x^2-1)^{4/5}}$; 4) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\ln^3 x}$;

5) $\int\limits_{0}^{1}\ln^2 xdx$; 6) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; 7) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 9) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\sin x^2}$;

10) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$; 11) $\int\limits_{3}^{5}\frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$; 12) $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

Відповідь. 1) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; 2) розбіжний ; 3) $\frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{3}+1\right)$; 4) розбіжний; 5) 2;

6) $2arctg\sqrt{e-1}$; 7) $\frac{16}{3}$; 8) розбіжний; 9) $6-\frac{9}{2}\ln 3$; 10) $\frac{33\pi}{2}$; 11) π.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}$; 3) $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 4) $\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$;

5) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{arctgx}{x^2+1}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{+\infty}x\cos xdx$; 7) $\int\limits_{0}^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$; 8) $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$;

9) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$; 10) $\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2}dx$; 11) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$; 12) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

13) $\int_0^2 \ln x dx$; 14) $\int_0^1 x\ln x dx$; 15) $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$; 16) $\int_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\frac{1}{x^2}\frac{dx}{x^3}$;

17) $\int_0^{\pi/2} ctgx dx$; 18) $\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$; 19) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; 20) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3
ІЗ № 3–1

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

1. $\int_1^{\infty} \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$
2. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$
3. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-3x+4}$
4. $\int_{5/8}^{\infty} \frac{dx}{4x^2-5x+2}$
5. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$
6. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(1+x)^3}}$
7. $\int_1^{\infty} \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
8. $\int_1^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$
9. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^3}$
10. $\int_2^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{\frac{x}{2}}}$
11. $\int_5^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$
12. $\int_0^{\infty} \frac{2dx}{2x^2+17}$
13. $\int_{-\infty}^{2} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}dx$
14. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x}}$
15. $\int_1^{\infty} \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx$
16. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln^8 x}}$
17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{5+2x+x^2}dx$
18. $\int_{-\infty}^{0} \frac{4dx}{x^2-7x+12}$
19. $\int_1^{\infty} \frac{3dx}{x+x^3}$
20. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$
21. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$
22. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
23. $\int_0^{\infty} x\sin 3x dx$
24. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$

25. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{x}{2}}dx$ 26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}}$ 27. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$

28. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$ 29. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ 30. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

ІЗ № 3–2

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

1. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-2)^4}$ 2. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ 3. $\int\limits_{1}^{3} \frac{2xdx}{(x-3)^5}$

4. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-1}}$ 5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$ 6. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$

7. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ 8. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{dx-1}{x\ln^2 x}$ 9. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

10. $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ 11. $\int\limits_{1}^{3} \frac{3dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ 12. $\int\limits_{0}^{4} \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$

13. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 14. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{5dx}{x^3-x^2}$ 15. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$

16. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3dx}{4-x^2}$ 17. $\int\limits_{2}^{3} \frac{4xdx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$ 18. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{\frac{2+x}{8-x}}dx$

19. $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{\frac{x^2}{9-x^2}}dx$ 20. $\int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 21. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$

22. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$ 23. $\int\limits_{0}^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{3-e^{2x}}}$ 24. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$

25. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ 26. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{2x\sqrt{1-x}}$ 27. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

28. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$ 29. $\int\limits_{3}^{6} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-25}}$ 30. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 3

ІЗ № 3–1

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} e^x dx$ або встановити його розбіжність.

$$\int_0^{\infty} e^x dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^x dx = \lim_{a\to\infty} e^x\Big|_0^a = \lim_{a\to\infty}(e^a - e^0) = e^{\infty} - 1 = \infty.$$

Відповідь. Інтеграл розбіжний

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ або встановити його розбіжність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Обчислимо перший інтеграл

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(arctg0 - arctga) = \frac{\pi}{2}.$$

Обчислимо другий інтеграл

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(arctgb - arctg0) = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. Інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ збіжний.

Приклад 3.Обчислити або встановити розбіжність інтеграла $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання. За означенням $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{в\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Позбудемось ірраціональності в підінтегральному виразі, застосовуючи підстановку $t = \sqrt{x^2-1}$.

Тоді $x = \sqrt{t^2+1}$, $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$, $t_1 = \sqrt{2^2-1} = \sqrt{3}$, $t_2 = \sqrt{b^2-1}$

Одержимо

$$\int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b^2-1}} \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}\cdot t\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b^2-1}} \frac{dt}{t^2+1} = \mathrm{arctgt}\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b^2-1}} = \mathrm{arctg}\sqrt{b^2-1} - \mathrm{arctg}\sqrt{3}.$$

Тоді, пам'ятаючи, що $\lim\limits_{x\to\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$, отримаємо

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{в\to\infty}\left(arctg\sqrt{b^2-1} - arctg\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Відповідь. Інтеграл збіжний.

Див. приклади 1–4, *розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-1, Розділ 3.*

ІЗ № 3–2

Приклад 1. Обчислити або встановити розбіжність інтеграла $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^4 x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{x\ln^4 x}$ має розрив у точці $x = 1(\ln 1 = 0)$, тобто $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^4 x}$ є невласним інтегралом від розривної функції.

За означенням $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^4 x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\ln^4 x}$.

Інтеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^4 x}$ знаходимо, використовуючи підстановку $\ln x = t$, тоді:

$d(\ln x) = \frac{dx}{x} = dt,\ t_1 = \ln(1+\varepsilon),\ t_2 = \ln e = 1.$

$$\int_{\ln(1+\varepsilon)}^1 \frac{dt}{t^4} = \int_{\ln(1+\varepsilon)}^1 t^{-4}dt = -\frac{1}{3t^3}\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3\ln^3(1+\varepsilon)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ln(1+\varepsilon) = 0$, то $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^4 x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3\ln^3(1+\varepsilon)}\right) = \infty.$

Відповідь. Інтеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^4 x}$. є розбіжним.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{1-\varepsilon-1}+\frac{1}{-1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = \infty.$$

Відповідь. Інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ є розбіжним.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-(1-\varepsilon)}+2\sqrt{1-0}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\right) = 0+2 = 2.$$

Відповідь. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$.

Див. приклади 1–5, *розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-2, Розділ 3.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів. К. : ЦУЛ, 2002. 400 с.
3. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. Вид. 6-те. К. : Ігнатекс-Україна. 2018. 648 с.
4. Вища математика : зб. задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик та ін. ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. К. : А.С.К., 2011. 480 с.
5. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: приклади і задачі : посібник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2003. 624 с.
6. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах : навч. пос. К. : Центр навчальної літератури, 2006. 600 с.
7. Математичний аналіз у задачах і прикладах : навч. пос. У 2-х ч. Ч. 1. / Дюженкова Л. І та ін. К. : Вища школа, 2002. 462 с.
8. Михайленко В. М., Федоренко Н. Д. Математичний аналіз для економістів : навч. пос. К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2002. 298 с.
9. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Ч. 1. К. : Вища школа, 2005. 448 с.

Навчальне електронне видання
комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Світлана Анатоліївна Кирилащук
Злата Василівна Бондаренко
Віталій Іванович Клочко

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА 3
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *З. Бондаренко*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет виготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 19.02.2024 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2024-047.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: irvc.ed.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009.