

І. Ю. Кириця, В. Є. Перлов, С. І. Сухоруков

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

САМОСТІЙНА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. Ю. Кириця, В. Є. Перлов, С. І. Сухоруков

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА
САМОСТІЙНА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ

Електронний навчальний посібник
комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2024

УДК [531+620.1+621.81](075.8)
К43

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 10 від 27 березня 2024 р.)

Рецензенти:

Л. К. Поліщук, доктор технічних наук, професор

Н. Р. Веселовська, доктор технічних наук, професор

В. Р. Сердюк, доктор технічних наук, професор

Кириця, І. Ю.

К43 Технічна механіка. Самостійна та індивідуальна робота студентів : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / Кириця І. Ю., Перлов В. Є., Сухоруков С. І. – Вінниця : ВНТУ, 2024. – 172 с.

В навчальному посібнику наведено основні теоретичні відомості з дисципліни «Технічна механіка», яка охоплює три розділи: теоретична механіка, опір матеріалів та деталі машин. Розглянуто приклади використання теоретичного матеріалу для розв'язання задач. До кожного розділу наведено завдання для самостійного опрацювання студентами (комплекти завдань). Кожне із завдань ілюстровано детальним прикладом розрахунку із поясненнями в процесі розв'язування задачі.

Посібник призначений для студентів напрямів підготовки 275 – «Транспортні технології», 144 – «Теплоенергетика», 141 – «Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка» закладів вищої освіти денної та заочної форм навчання, що вивчають технічну механіку.

УДК [531+620.1+621.81](075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ВХІДНИЙ КОНТРОЛЬ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА».....	8
2 ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА (ТМ).....	16
2.1 СТАТИКА.....	17
2.1.1 Поняття сили.....	17
2.1.2 Момент сили відносно центра	18
2.1.3 Момент сили відносно осі.....	20
2.1.4 Поняття про пару сил.....	21
2.1.5 Класифікація сил.....	21
2.1.6 Класифікація в'язей та їх реакції.....	22
2.1.7 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з теоретичної механіки. ТМ1 Плоска система паралельних сил.....	27
2.1.8 Приклади виконання завдання до ТМ1	34
2.1.9 Тертя твердих тіл	36
2.1.10 Центр ваги твердого тіла. Методи визначення центра ваги твердих тіл	41
2.2 КІНЕМАТИКА.....	46
2.2.1 Кінематика точки. Основні поняття.....	46
2.2.2 Способи задання руху точки. Визначення швидкості та прискорення	46
2.2.3 Окремі випадки руху точки	51
2.2.4 Кінематика твердого тіла. Основні види руху твердого тіла	53
2.2.5 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з теоретичної механіки. ТМ2 Визначення кінематичних характеристик точок твердого тіла за поступального та обертального рухів.....	57
2.2.6 Приклад виконання завдання до ТМ2.....	63
2.3 ДИНАМІКА	65
2.3.1 Основні поняття та закони динаміки	65
2.3.2 Динаміка точки. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки.....	66
2.3.3 Дві основні задачі динаміки.....	68
2.3.4 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з теоретичної механіки. ТМ3 Рух матеріальної точки у разі дії постійних сил	69
2.3.5 Приклади виконання завдання до ТМ3	72

2.3.6	Динаміка системи матеріальних точок (динаміка матеріальної системи). Основні (загальні) теореми динаміки	76
2.3.7	Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з теоретичної механіки. ТМ4 Визначення кінематичних характеристик тіл за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи	90
2.3.8	Приклад виконання завдання до ТМ4.....	96
3	ОПР МАТЕРІАЛІВ (ОМ)	99
3.1	Основні поняття та означення	99
3.2	Основні гіпотези та припущення	102
3.3	Побудова епюр внутрішніх зусиль	103
3.3.1	Внутрішні сили. Метод перерізів	103
3.3.2	Епюри внутрішніх зусиль	105
3.3.3	Диференціальні залежності між q , Q та M	106
3.3.4	Побудова епюр Q і M для балок	107
3.3.5	Приклад побудови епюр Q і M для балок.....	108
3.4	Розрахунок балок на міцність за плоского згину	113
3.4.1	Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів	114
3.4.2	Розрахунок на міцність за плоского згину	117
3.4.3	Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з опору матеріалів. ОМ1 Розрахунок балок на міцність при плоскому згині	118
3.4.4	Приклад виконання завдання до ОМ1	118
3.5	Кручення	121
3.5.1	Напруження і деформації під час кручення стержнів круглого поперечного перерізу	121
3.5.2	Епюри крутних моментів	124
3.5.3	Розрахунки на міцність та жорсткість	125
3.5.4	Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з опору матеріалів. ОМ2 Розрахунок вала на кручення	127
3.5.5	Приклад виконання завдання до ОМ2	131
4	ДЕТАЛІ МАШИН (ДМ)	136
4.1	Критеріальні вимоги до деталей машин	136
4.2	Матеріали для виготовлення деталей машин	136
4.3	З'єднання деталей машин.....	137
4.4	Роз'ємні з'єднання. Переваги та недоліки.....	137
4.5	Нероз'ємні з'єднання. Переваги та недоліки	141
4.6	Механічні передачі.....	144

4.6.1 Основні і похідні параметри механічних передач	144
4.6.2 Основні групи та види механічних передач	146
4.6.3 Зубчасті передачі	147
4.7 Вали та осі	148
4.8 Підшипники. Призначення і класифікація	149
4.8.1 Підшипники ковзання	150
4.8.2 Підшипники кочення	150
4.9 Муфти	152
4.10 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з деталей машин. ДМ1 Розрахунок клемового з'єднання	153
4.11 Приклад виконання завдання до ДМ1	155
4.12 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з деталей машин. ДМ2 Розрахунок шпонки	157
4.13 Приклад виконання завдання до ДМ2	158
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	160
ДОДАТКИ	162
Додаток А. Оформлення розрахунково-графічної роботи	163
Додаток Б. Механічні характеристики вуглецевих конструкційних сталей	165
Додаток В. Характеристики метричної різьби	166
Додаток Г. Характеристики для шпонкового з'єднання	168
Додаток Д. Основні механічні характеристики матеріалів	169
Геометричні характеристики плоских перерізів	170
Умови міцності і жорсткості за найпростіших видів деформації	171

ВСТУП

«**Механіка**» належить до природничих наук, які вивчають різноманітні властивості матерії та різні форми її існування.

В основу класичної механіки покладені поняття абсолютного простору і часу, які були висловлені І. Ньютоном.

«**Механіка**» від грецького (Μηχανική) – це мистецтво створення машин. Механіка – це наука про механічний рух матеріальних тіл.

Історичний розвиток механіки починається з найдавніших часів, цей період характеризується такими винаходами як колесо, важіль, візок, а також створенням найпростіших механізмів, пристосувань та споруд.

Термін «механіка» ввів Аристотель (384–322 рр. до н.е.). Розвиток механіки як науки (в Європейській традиції) починається від Архімеда (287–212 рр. до н.е.). Класичний період (16–19 ст.) розвитку механіки відомий такими іменами як М. Коперник, Г. Галілей, Х. Гюйгенс, І Ньютон, Й. Бернуллі, Ж. Д’Аламбер, Ж. Лагранж. 19 ст. відоме такими вченими як П. Л. Чебишов, О. М. Крилов, М. Є. Жуковський, О. М. Ляпунов.

Сьогодні без знання законів механіки неможливо уявити сучасне життя та розвиток цивілізації. Кожен крок людини пов'язаний з використанням пристроїв, механізмів та машин. Вони полегшують нам життя, але й потребують відповідних знань та умінь.

У багатьох технічних вишах України та Європи для здобувачів викладаються такі дисципліни як «Теоретична механіка», «Технічна механіка» та «Прикладна механіка», основою яких є «Механіка».

Технічна механіка як наука відіграє провідну роль в інженерній освіті і є зв'язуючою ланкою між низкою теоретичних та технічних наук. Дисципліна «Технічна механіка» є основою формування інженерної думки, мислення та інтуїції майбутнього фахівця у будь-якій технічній галузі. Вивчення дисципліни «Технічна механіка» базується на знаннях, отриманих під час опанування дисциплін «Фізика» та «Вища математика».

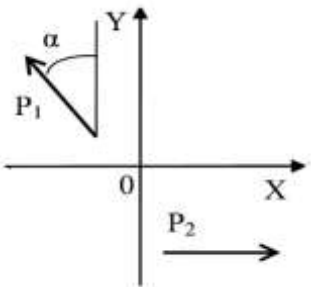
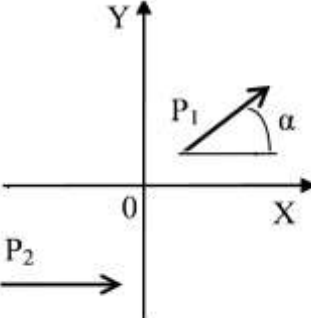
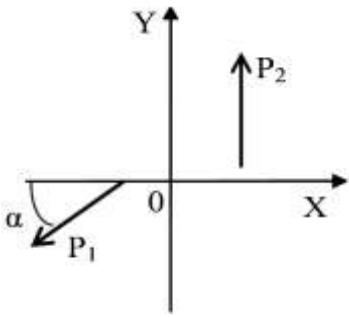
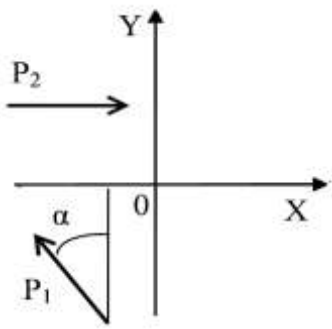
Метою вивчення дисципліни «Технічна механіка» є засвоєння студентами законів, принципів, методів та прийомів, необхідних майбутньому спеціалісту для розуміння основ роботи та розрахунку деталей, вузлів приладів, аналізу механічних явищ, що з'являються під час досліджень, експлуатації, випробувань та ремонтних робіт.

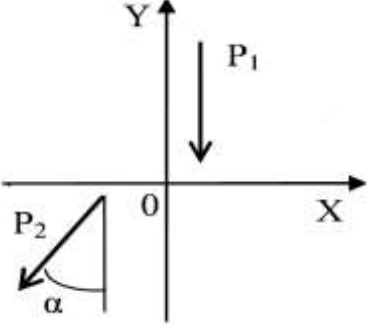
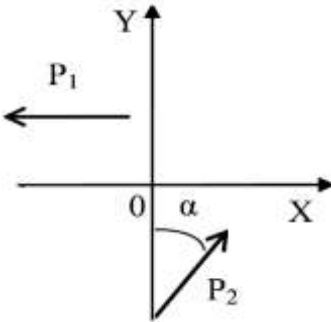
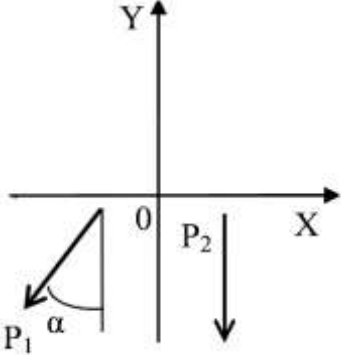
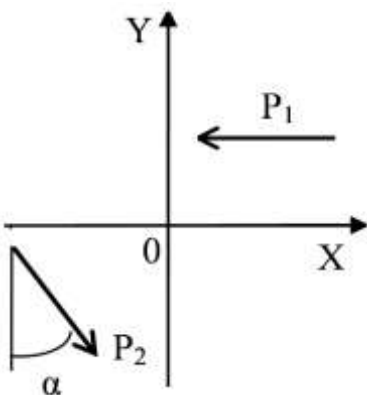
Курс «Технічна механіка» складається з трьох основних розділів:

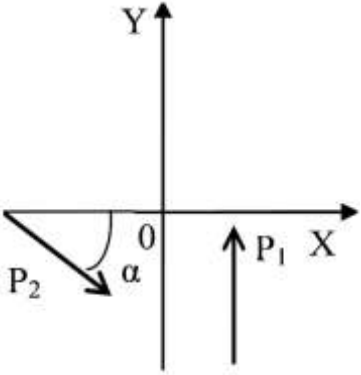
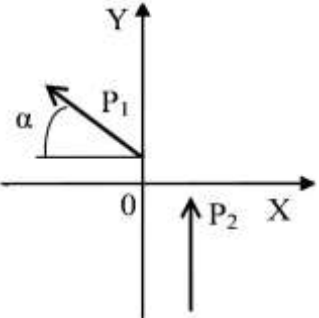
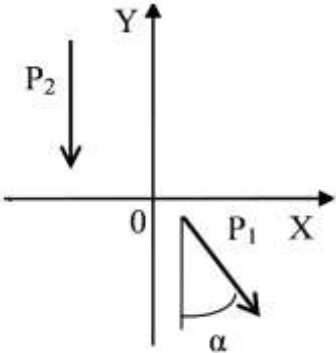
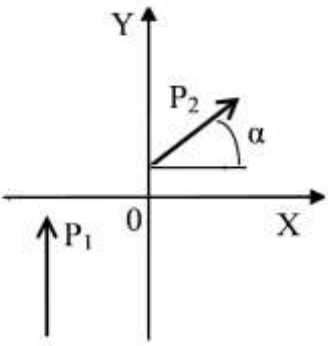
- теоретична механіка;
- опір матеріалів;
- деталі машин.

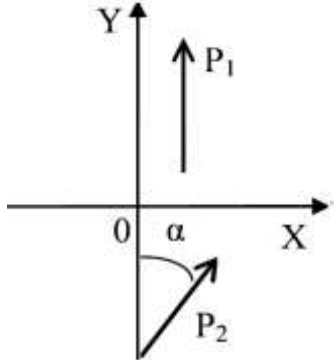
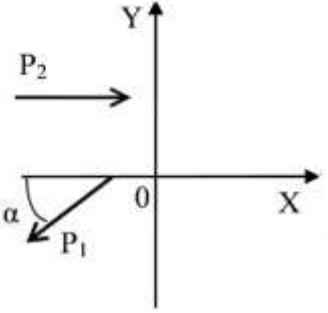
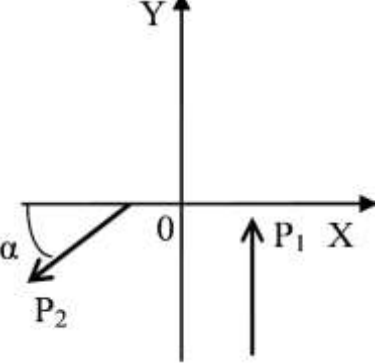
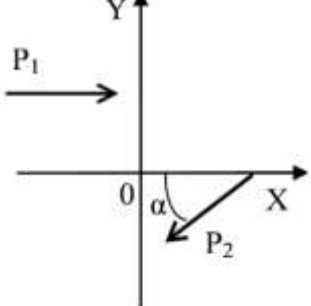
Методи технічної механіки та знання її законів і принципів дозволяють досліджувати найскладніші проблеми техніки і технологій, що постійно виникають у зв'язку із розвитком нових видів виробництва та нових технічних засобів, які вже не можна розв'язати на основі одних тільки дослідних даних, а потребують моделювання на основі попереднього точного розрахунку і наукового передбачення. «Технічна механіка» дає універсальні методи складання та аналізу рівнянь руху і рівноваги складних матеріальних систем, що є основою моделювання.

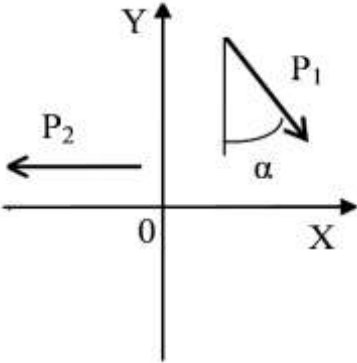
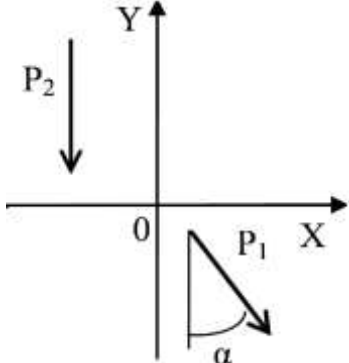
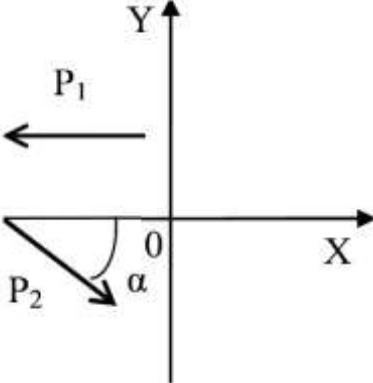
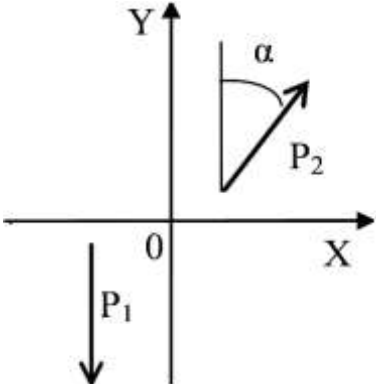
1 ВХІДНИЙ КОНТРОЛЬ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

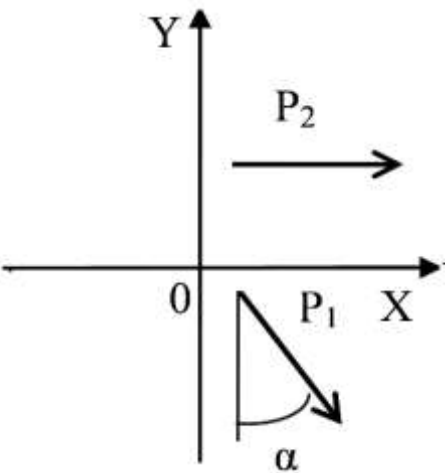
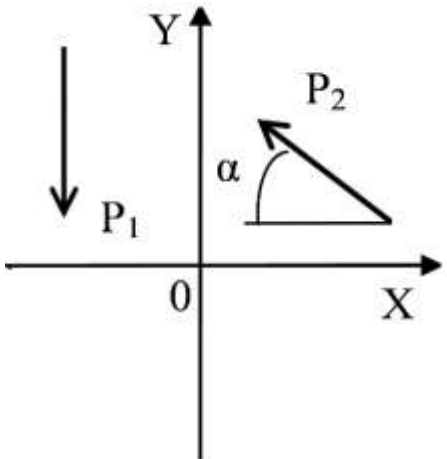
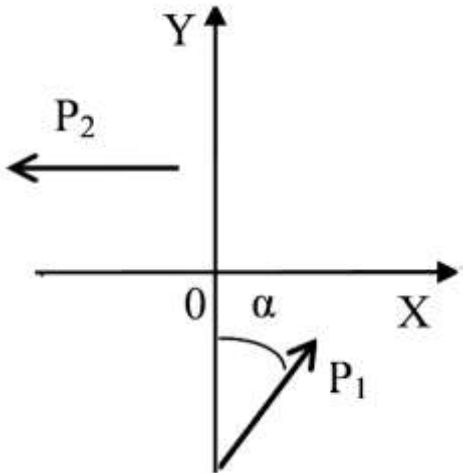
	Задача № 1 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 3$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 2 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 8$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 3 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 8$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 4 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 20$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

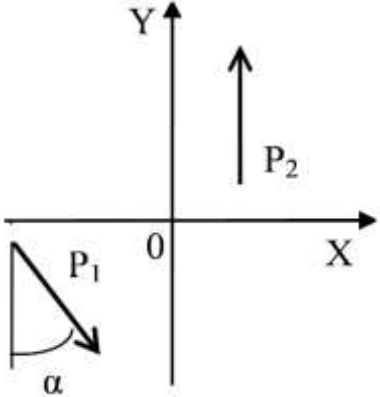
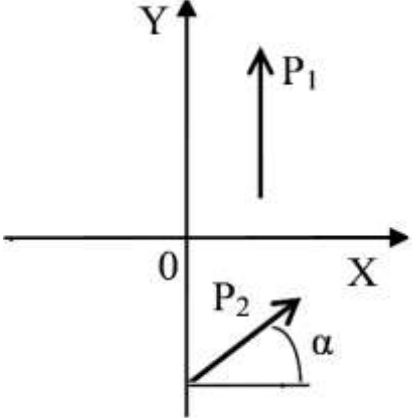
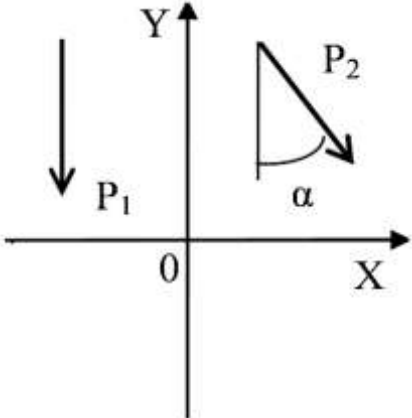
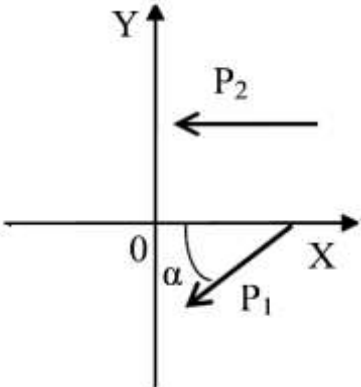
	Задача № 5 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 22$ кН, $P_2 = 30$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 6 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 3$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 7 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 32$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 8 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

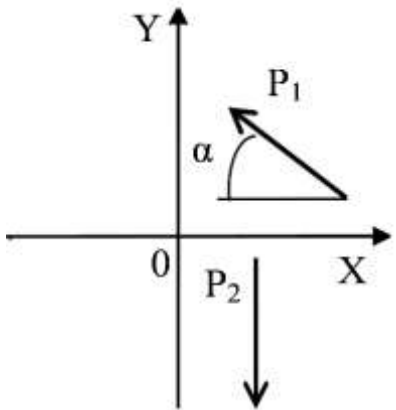
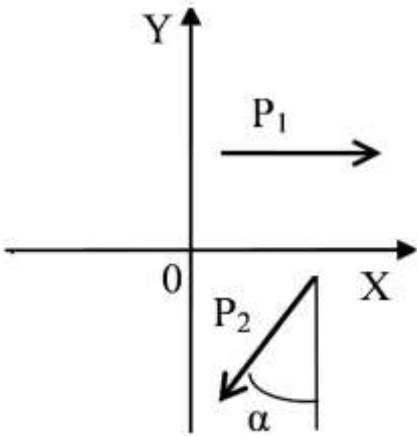
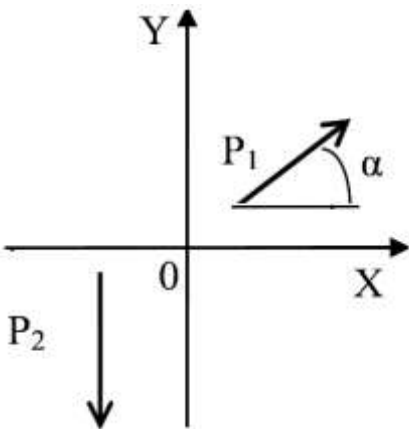
	Задача № 9 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 30$ кН, $P_2 = 4$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 10 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 9$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 11 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 8$ кН, $P_2 = 30$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 12 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 12$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 13 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 24$ кН, $P_2 = 8$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 14 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 21$ кН, $P_2 = 7$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 15 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 20$ кН, $P_2 = 8$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 16 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 6$ кН, $P_2 = 11$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 17 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 14$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 18 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 8$ кН, $P_2 = 13$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 19 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 7$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 20 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 3$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 21 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 18$ кН, $P_2 = 9$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 22 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 34$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 23 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 7$ кН, $P_2 = 8$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 24 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 5$ кН, $P_2 = 14$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 25 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 30$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 26 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 6$ кН, $P_2 = 30$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 27 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 14$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 28 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 16$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 29 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 18$ кН, $P_2 = 3$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 30 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні осі, якщо $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

2 ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Механіка – наука про загальні закони механічного руху матеріальних точок та тіл.

Теоретична механіка – це наука, яка дає універсальні методи складання і аналізу рівнянь руху та рівноваги складних матеріальних систем, що є основою їх моделювання.

Механічний рух – це переміщення точок та тіл у просторі з перебігом часу.

Теоретична механіка спирається на певну сукупність узгоджених законів і фактів, встановлених дослідною механікою, які вважаються істинними. На цій основі засобами математики дедуктивним шляхом встановлюються нові факти і закони руху.

Класична механіка (за Ньютоном) має справу з макроскопічними тілами, які рухаються зі швидкістю, набагато меншою від швидкості світла ($3 \cdot 10^8$ м/с). Межі істинності класичної механіки встановлюються, з одного боку, спеціальною та загальною теорією відносності (А. Пуанкаре, Н. Бор, А. Ейнштейн), а з іншого боку – квантовою теорією (М. Планк, Н. Бор, В. Гейзенберг, Л. де Бройль). В подальшому будемо розглядати тільки класичну теоретичну механіку, яка є основою теорії інших механічних дисциплін: опору матеріалів, теорії механізмів і машин, деталей машин, гідромеханіки і т. д.

Теоретична механіка і математика з часів Ньютона мають тісний зв'язок. Варто вказати на те, що визначні вчені механіки були одночасно і математиками. До часів М. Е. Жуковського теоретичну механіку викладали як суто математичну дисципліну. Для розуміння механіки потрібні знання фундаментальних розділів математики – аналітичної геометрії, векторної алгебри і аналізу, теорії тензорів, варіаційного числення, теорії диференціальних рівнянь, методів обчислювальної математики.

Знання теоретичної механіки потрібні як бакалаврам механічних, так і немеханічних спеціальностей, які розроблятимуть нову техніку, оскільки в більшості випадків кінцеві ланки складних автоматичних систем – це двигуни, прилади різного призначення, трансмісії, апарати, маніпулятори та ін. Нині, коли протягом життя доводиться змінювати характер діяльності, оволодіння фундаментальною наукою – теоретичною механікою, може стати важливою складовою частиною успішної інженерної діяльності.

Основні поняття (абстракції) механіки запроваджені як ідеалізовані образи (моделі), що мають певні, означені властивості, запозичені у реальних об'єктів. Це – простір, час, матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, сила.

Простір розглядається як абсолютний тривимірний евклідовий, що вміщує рухомі та нерухомі тіла.

Абсолютний протікає рівномірно і однаково у всіх частинах простору і на нього не впливає рух матерії або спостерігача.

Матеріальна точка – матеріальне тіло, розмірами якого можна знехтувати під час вивчення його руху.

Система матеріальних точок – сукупність матеріальних точок, в якій положення і рух однієї з цих точок залежить від положення і руху решти точок.

Абсолютно тверде тіло – система матеріальних точок, відстані між якими у процесі руху залишаються незмінними та які заповнюють простір, що займає тіло.

Традиційно теоретична механіка поділяється на три розділи:

- **статика** – розділ, в якому вивчаються методи еквівалентних перетворень систем сил, а також умови рівноваги матеріальних тіл;
- **кінематика** – розділ, в якому вивчається механічний рух матеріальних тіл з геометричного погляду, тобто незалежно від мас та діючих на них сил;
- **динаміка** – розділ, в якому вивчається рух матеріальних тіл під дією на них сил.

2.1 Статика

Статика – розділ механіки, в якому вивчаються методи перетворення сил і з'ясовуються умови рівноваги тіл.

Реальні об'єкти замінюються моделями – абсолютно твердими тілами, відстань між двома точками яких не змінюється.

Реальна взаємодія тіл (об'єктів) замінюється моделлю, механічна взаємодія тіл – силою.

2.1.1 Поняття сили

У теоретичній механіці одним із основних є поняття сили. У механіці під **силою** розуміють кількісну міру механічної взаємодії матеріальних тіл, внаслідок якої тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення або деформуватися (змінювати свою форму). Із цього означення випливають два методи вимірювання сили:

а) динамічний, в основі якого лежить вимірювання прискорення тіла в інерціальній системі відліку;

б) статичний, побудований на вимірюванні деформації пружних тіл.

Те, що в основу механіки було покладено кількісні закони сил, дозволило І. Ньютону сформулювати закони, не вивчаючи фізичних явищ, які

виникають під час взаємодії тіл. Більш того, в деяких випадках можна встановити кількісний зв'язок між механічними і немеханічними формами матерії під час їх взаємних перетворень.

Модель сили визначається трьома головними кількісними умовами: величиною, напрямом дії і точкою прикладання.

Такому означенню сили повністю відповідає поняття вектора, довжина якого в обраному масштабі дорівнює значенню сили, прикладеної в цій точці. Вектор напрямлений в бік дії сили. Силу позначимо символом $\vec{F}$ (рис. 2.1). Пряму ab , на якій відкладено відрізок, що зображає силу, називають лінією дії сили.

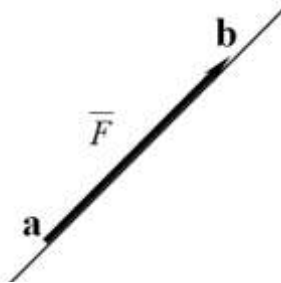


Рисунок 2.1

Для вимірювання модуля сили її порівнюють з іншою силою, яку вважають еталоном. В системі SI за одиницю сили (еталон) прийнято Ньютон (Н). Використовуються також більші одиниці вимірювання сил: меганьютон ($1 \text{ Мн} = 10^6 \text{ Н}$); кілоньютон ($1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$).

Сила, як векторна величина, підпорядкована всім законам векторного числення.

2.1.2 Момент сили відносно центра

Моментом сили $\vec{F}$ (рис. 2.2) відносно центра називається векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного із точки O до точки прикладення сили $\vec{F}$, на вектор сили $\vec{F}$:

$$m_0 \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

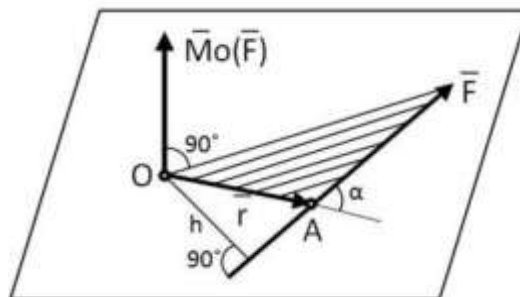


Рисунок 2.2

Модуль векторного добутку:

$$|m_0 \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot h,$$

де h – плече сили, тобто перпендикуляр, проведений із центра на лінію дії сили.

Правило знаків для моментів

Момент сили відносно точки вважається додатним, якщо сила намагається повертати відносно точки проти напрямку годинникової стрілки, і від'ємним, якщо намагається повертати за напрямком стрілки годинника (рис. 2.3).

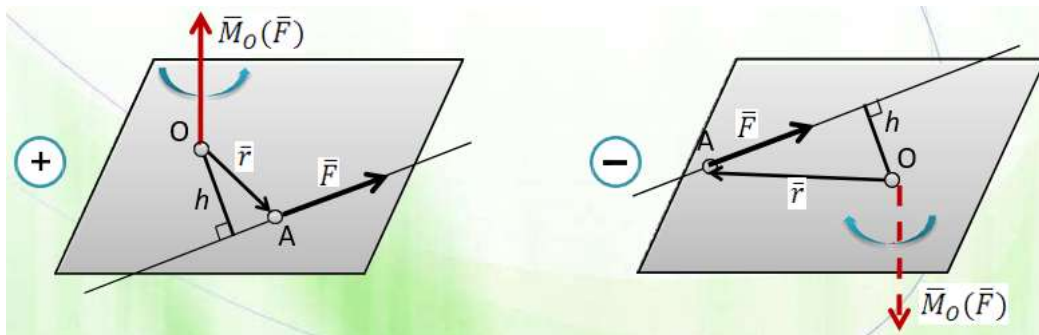


Рисунок 2.3

Властивості моменту сили відносно точки

1. Якщо перемістити силу вздовж лінії її дії, то момент сили відносно точки не зміниться (рис. 2.4).

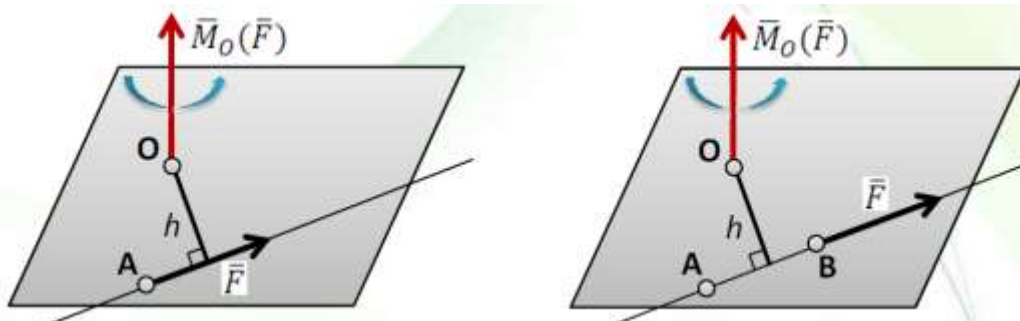


Рисунок 2.4

2. Момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінії дії сили проходить через цю точку (рис. 2.5).

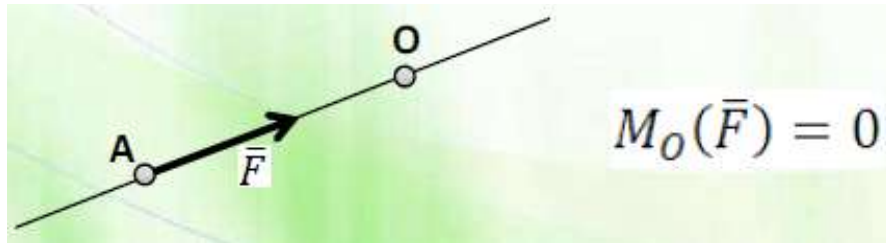


Рисунок 2.5

2.1.3 Момент сили відносно осі

Силу $\vec{F}$ прикладено в точці А (рис. 2.6). На площину, яку проведено перпендикулярно до осі z спроєкуємо вектор $\vec{F}$. Із точки О перетину площини з віссю z опустимо перпендикуляр на лінії дії вектора $\vec{F}_{np}$.

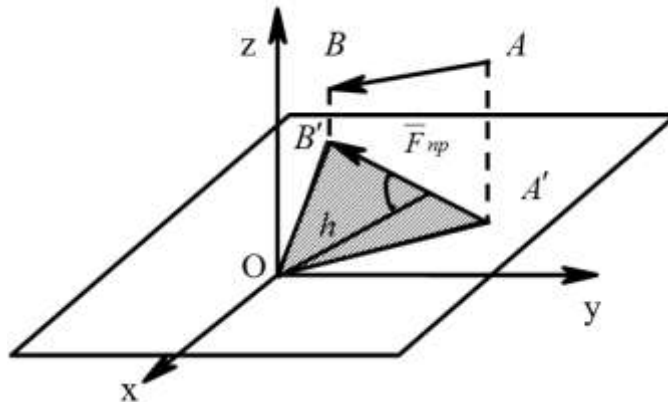


Рисунок 2.6

Моментом вектора $\vec{F}$ відносно осі z є скалярна величина $m_z \vec{F}$, яка дорівнює добутку модуля вектора $\vec{F}_{np}$ на плече h цього вектора:

$$m_z \vec{F} = \pm F_{np} \cdot h.$$

Знак «+» беремо в тому випадку, коли, дивлячись назустріч осі z , бачитимемо рух вектора $\vec{F}$ навколо неї проти годинникової стрілки.

Наслідок 1. Момент сили відносно осі не змінюється за переміщення сили $\vec{F}$ по лінії дії.

Наслідок 2. Якщо сила $\vec{F}$ і вісь z лежать в одній площині, то момент сили $\vec{F}$ відносно осі z дорівнює нулю.

2.1.4 Поняття про пару сил

Парою сил називається система двох колінеарних сил, що мають однакові модулі та протилежні напрямки (рис. 2.7).

Площина, в якій лежать сили $\vec{F}$ і $-\vec{F}$, називається **площиною пари**. Найкоротша відстань між лініями дії пари сил називається плечем пари сил.

Момент пари сил $(\vec{F}, -\vec{F})$ не залежить від вибору центра:

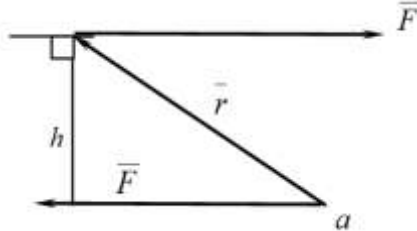


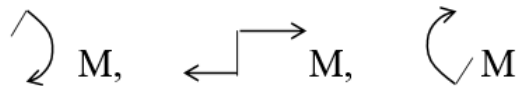
Рисунок 2.7

$$\vec{M} = m \cdot (\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Модуль моменту пари:

$$|\vec{M}| = F \cdot h.$$

Пара сил на рисунках умовно зображається:



Як впливає із означення пари сил, головний вектор пари $\vec{R}$ сил дорівнює нулю.

$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0.$$

2.1.5 Класифікація сил

В механіці, опорі матеріалів навантаження, що діє на вільне тверде тіло, називається **зовнішніми силами**. Ці сили розділяються на **активні** та **реакції в'язей**.

Активні сили визначаються службовим призначенням деталі (твердого тіла): тиск газів або води; вага стержня; вага снігу на покрівлі і под.

Активні сили розділяються на **зосереджені** $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (рис. 2.8) та **розподілені**, що характеризується навантаженням q (інтенсивність), яке діє на одиницю довжини тіла або площі. Найбільш поширене розподілене навантаження у формі прямокутника (рис. 2.8).

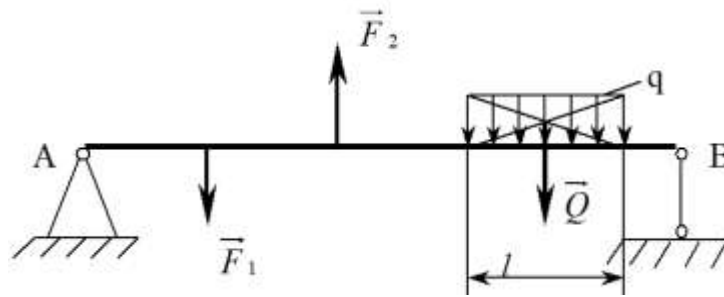


Рисунок 2.8

Розподілене навантаження можна замінити однією силою $\vec{Q}$, прикладеною у центрі мас $Q = q \cdot l$ (рис. 2.8).

2.1.6 Класифікація в'язей та їх реакції

В'язями називають тіла (поля) або сукупність тіл, які обмежують рух певного тіла (поля) чи певної матеріальної системи.

Реакція в'язі – це сила, з якою в'язь діє на вибране тіло, що досліджується (розглядається).

За своєю природою в'язі можна розділити на два класи.

До першого класу належать в'язі, напрям реакцій яких не залежить від величини і напрямку активних сил, прикладених до тіла, що перебуває у стані рівноваги.

Наприклад: гнучка в'язь (троси, нитки, ланцюги) (рис. 2.9); ідеально гладенькі поверхні (рис. 2.10); ідеальні стержні (рис. 2.12).

Розглянемо докладніше, як спрямовані реакції деяких основних типів в'язей.

Гнучка в'язь (нитки, канати, троси, ланцюги)

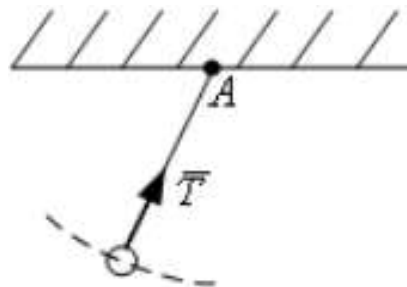


Рисунок 2.9

Реакції в'язей троса, нитки, ланцюга напрямлені по тросу, нитці, ланцюгу, причому ці тіла можуть тільки розтягуватися, тобто чинять протидію тільки дії розтягування.

Реакція нитки напрямлена вздовж нитки до точки її закріплення A і позначається через $\bar{T}$ або $\bar{S}$.

У задачах теоретичної механіки припускають, що нитка є невагомою і гнучкою.

Ідеально гладенькі поверхні

Реакція ідеально гладкої поверхні напрямлена по нормалі від поверхні і позначається через $\bar{N}$ або $\bar{R}_n$.

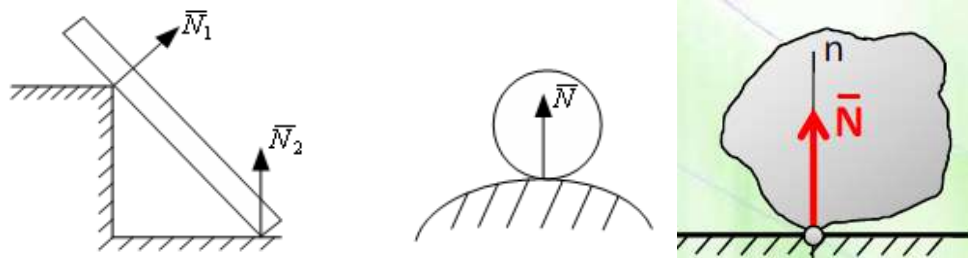


Рисунок 2.10

Гладенькими, з погляду статички, називаються такі поверхні, в яких реакції в'язей в точці контакту з іншими тілами напрямлені по загальній нормалі до дотичних поверхонь.

Примітка

У випадку *шорсткої поверхні* (рис. 2.11) реакція $\bar{R}_A$ розкладається на дві складові:

$\bar{R}_n$ – нормальну і $\bar{R}_\tau$ – дотичну, напрямлену по дотичній τ до поверхні.

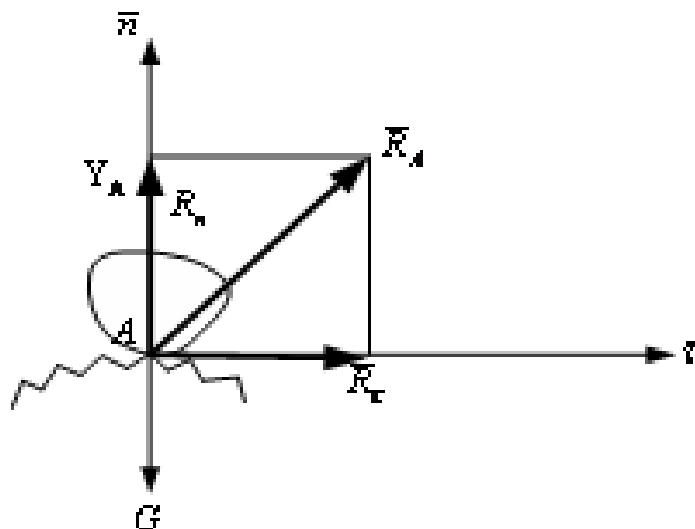


Рисунок 2.11

Ідеальний (невагомий стержень), що з'єднує два шарніри А та В. Реакція спрямована вздовж лінії, що з'єднує шарніри (рис. 2.12).

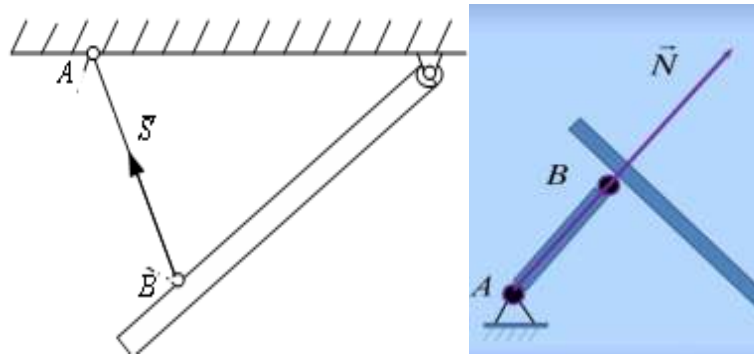


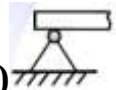
Рисунок 2.12

Невагомий стержень, до якого не прикладено сили (активні та реакції в'язей), називається ідеальним. Реакції в'язі ідеального стержня напрямлені по лінії, яка сполучає початок і кінець стержня (рис. 2.12), причому ідеальний стержень може стискатися або розтягуватися.

До **другого класу** належать в'язі, напрям реакцій яких повністю визначається напрямом і величиною активних сил.

Такими в'язями є шарніри нерухомий (рис. 2.13) і рухомий (рис. 2.14), сферичний шарнір (рис. 2.15), жорстке защемлення (рис. 2.16), підп'ятник (рис. 2.17) і т. д.

Нерухомий циліндричний шарнір (підшипник, нерухома опора)



Напрямок реакцій таких в'язів заздалегідь визначити не можна. Невідомий вектор реакції в'язі $\vec{R}_A$ в площині визначається двома складовими $\vec{Y}_A$ і $\vec{X}_A$ по осях Ox та Oy (рис. 2.13).

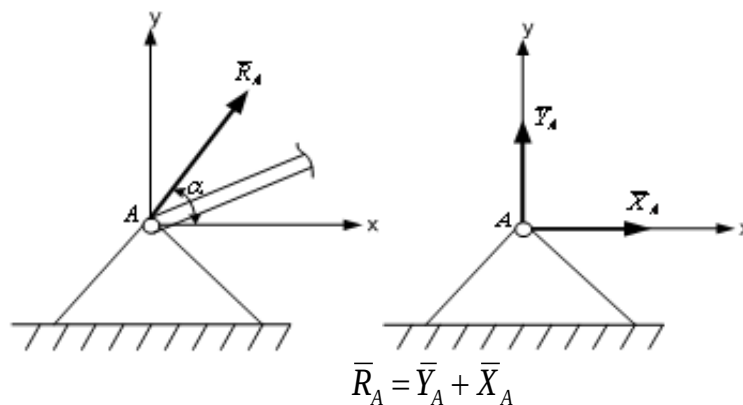


Рисунок 2.13

Рухомий шарнір

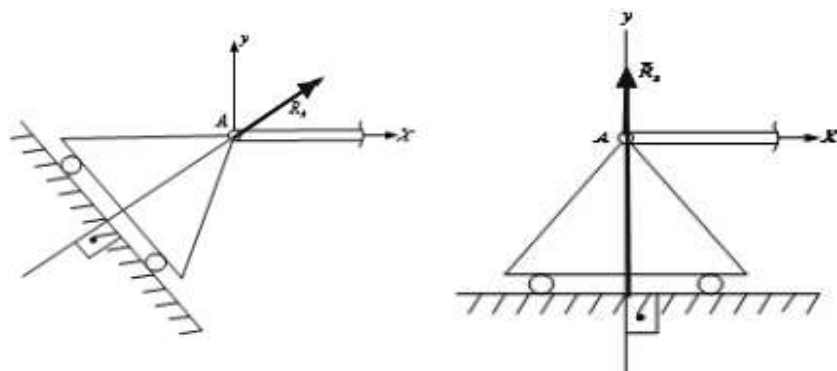
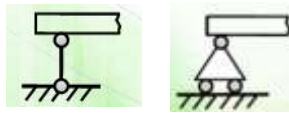


Рисунок 2.14

Реакція напрямлена перпендикулярно до опорної площини (рис. 2.14).

Сферичний шарнір (кульковий шарнір). Реакція $\bar{R}_A$ сферичного шарніра складається з трьох його проєкцій на три координатні осі $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ (рис. 2.15).

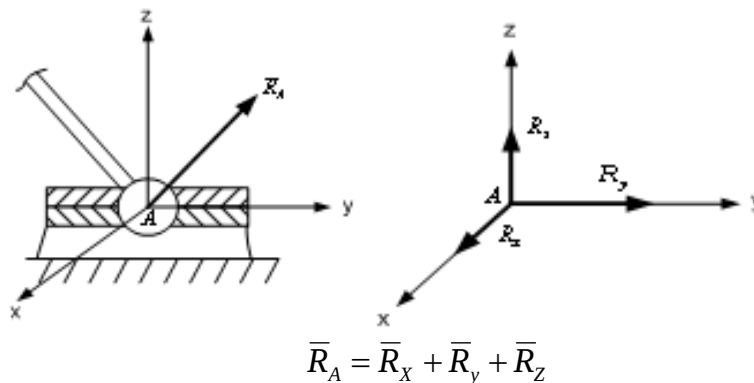


Рисунок 2.15

Жорстке зачеплення. Реакція жорсткого зачеплення складається із рівнодійної $\bar{R}_A$ ($\bar{R}_A = \bar{Y}_A + \bar{X}_A$) та пари сил з моментом $\bar{M}_A$ (три невідомі величини) (рис. 2.16).

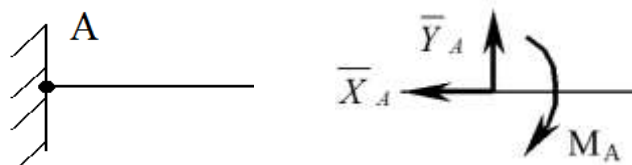


Рисунок 2.16

Підп'ятник (радіально упорний підшипник)

Як і кульковий шарнір, підп'ятник має три просторові складові: $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ (рис. 2.17).

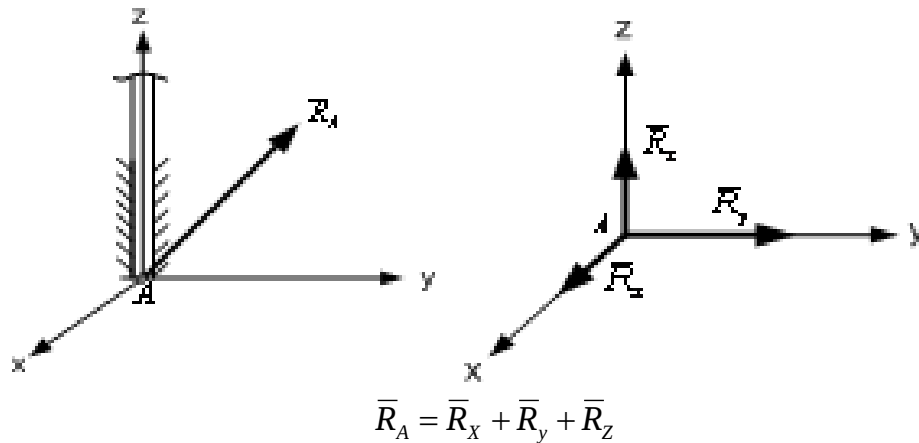


Рисунок 2.17

Примітка

Рухомий шарнір еквівалентний одному ідеальному стержню; нерухомий (циліндричний) – двом ідеальним стержням; защемлення – трьома ідеальними стержнями.

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. Що називають матеріальною точкою та абсолютно твердим тілом?
2. Що таке сила? Класифікація сил.
3. Що таке в'язь? Що називається реакцією в'язі?
4. Види в'язей та їх реакції.
5. Як визначити момент сили відносно центра?
6. Коли момент сили відносно центра дорівнює нулю?
7. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
8. Як визначити момент сили відносно осі?
9. Що таке пара сил? Що називають моментом пари сил?

2.1.7 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи.
Розрахунково-графічна робота (РГР) з теоретичної механіки

ТМ1 Плоска система паралельних сил

Балка (ст. 28 – 33) завантажена силою P , розподіленим навантаженням інтенсивністю q та парою сил з моментом M .

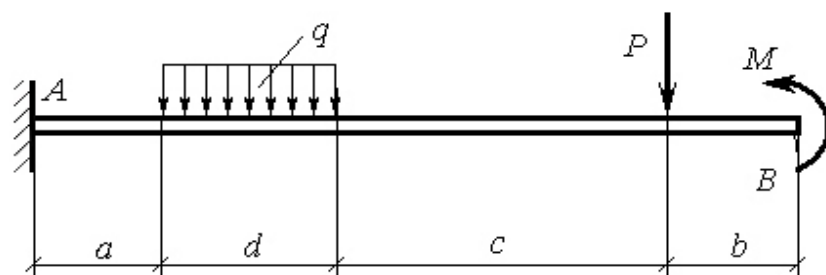
Знайти реакції в'язей.

Дані для розрахунків наведено в таблиці 2.1.

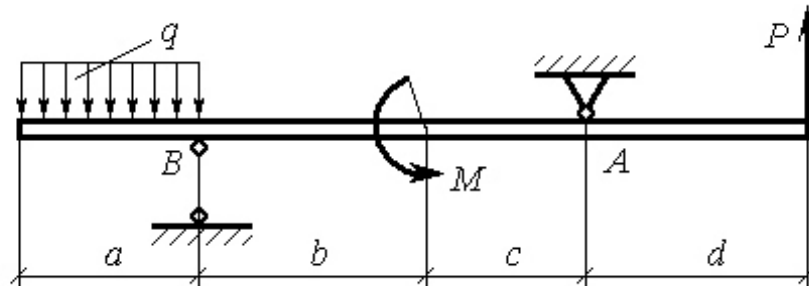
Таблиця 2.1

Варіант	M , кН·м	P , кН	q , кН/м	a , м	b , м	c , м	d , м
1	5	4	2	2	3	4	2
2	6	3	1	3	2	5	1
3	1	5	2	1	2	4	3
4	4	1	2	2	3	5	1
5	6	8	1	3	2	4	2
6	3	5	2	1	3	5	2
7	4	6	1	2	3	4	1
8	5	7	2	3	2	5	2
9	6	8	1	1	2	4	2
0	5	3	2	2	3	5	3

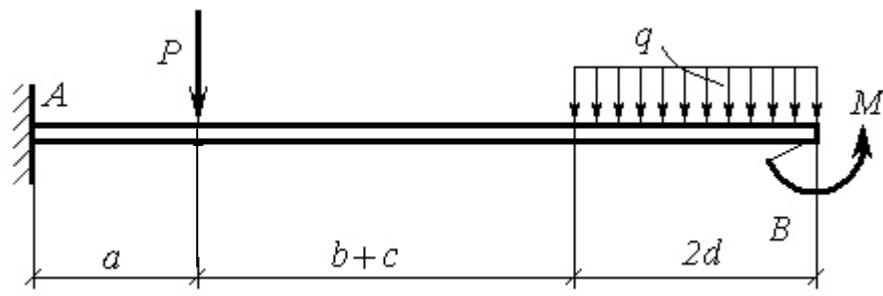
1



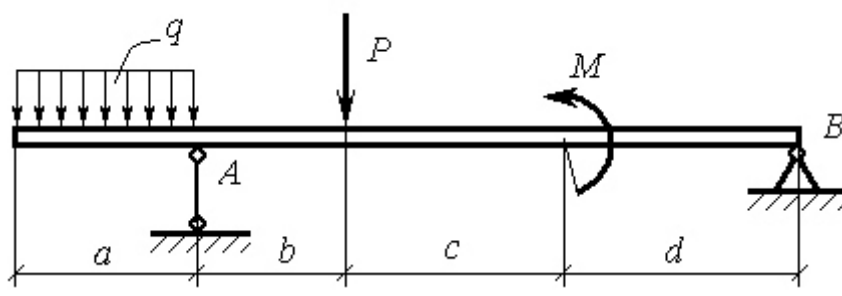
2



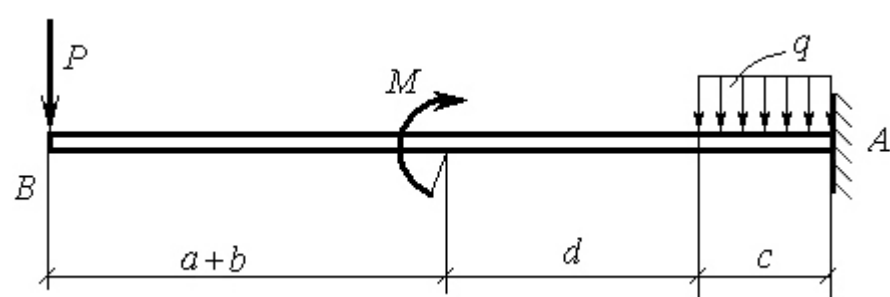
3



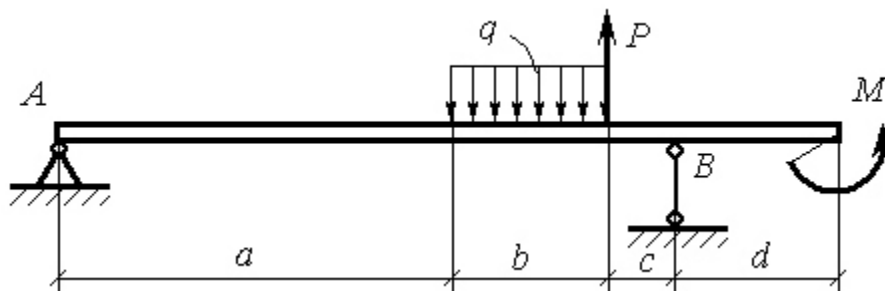
4



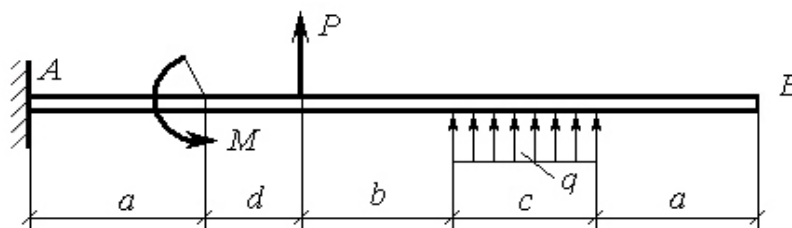
5



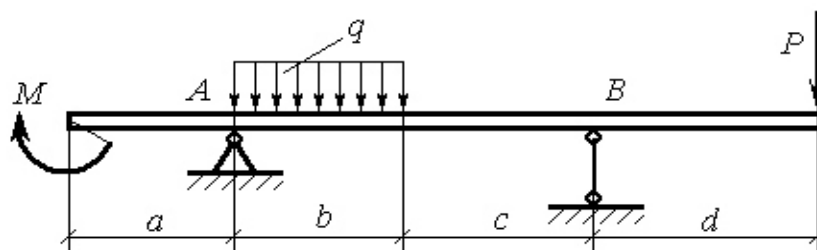
6



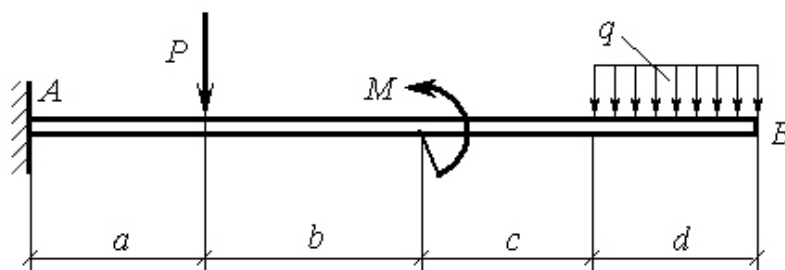
7



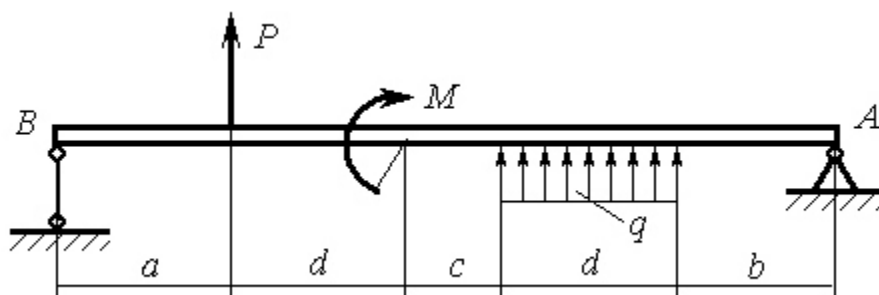
8



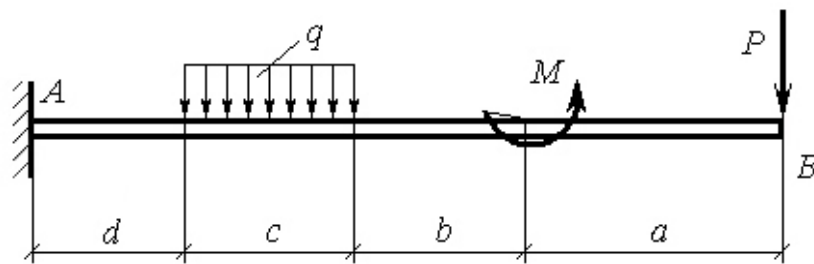
9



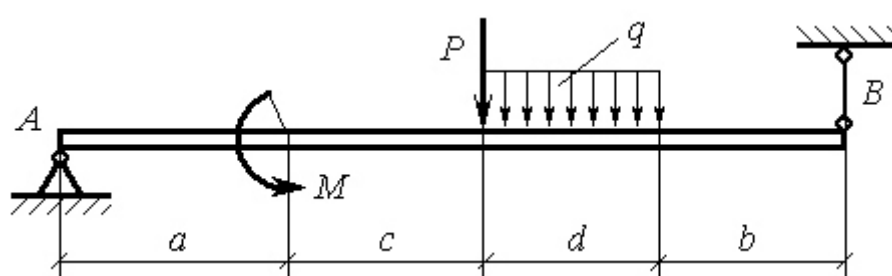
10



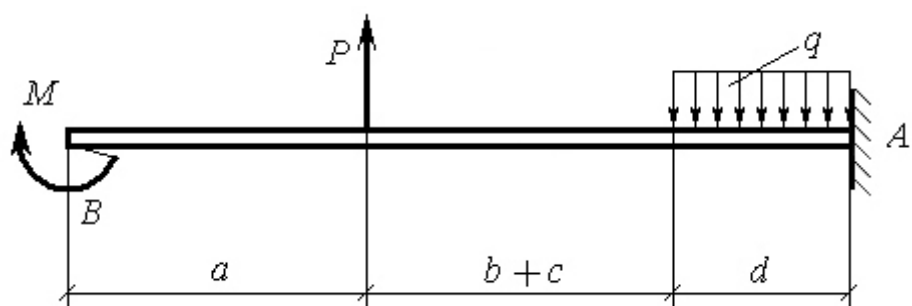
11



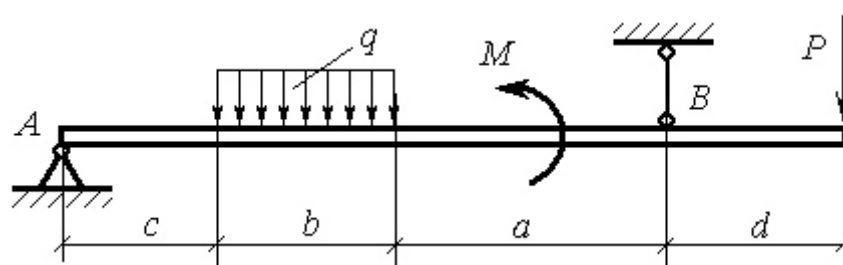
12



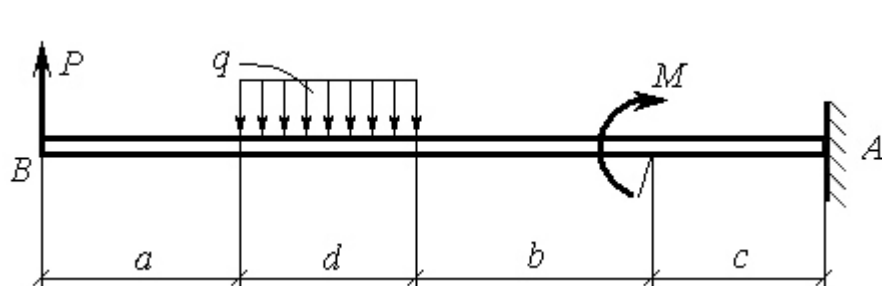
13



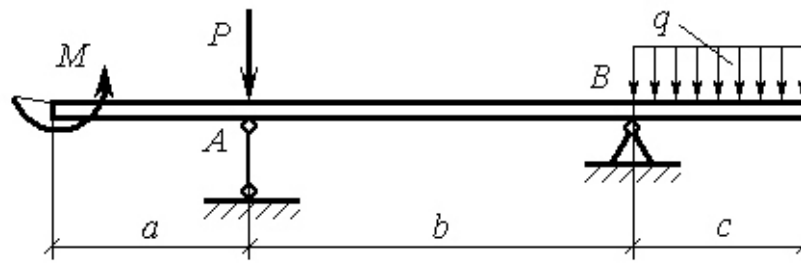
14



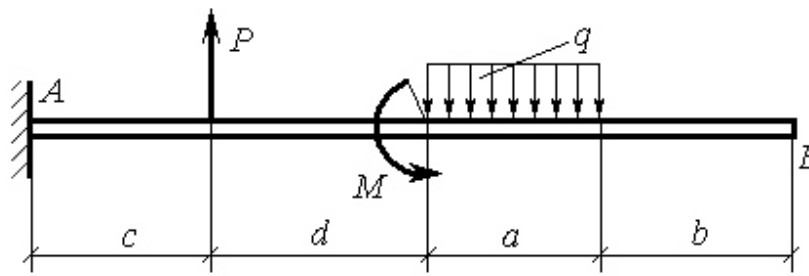
15



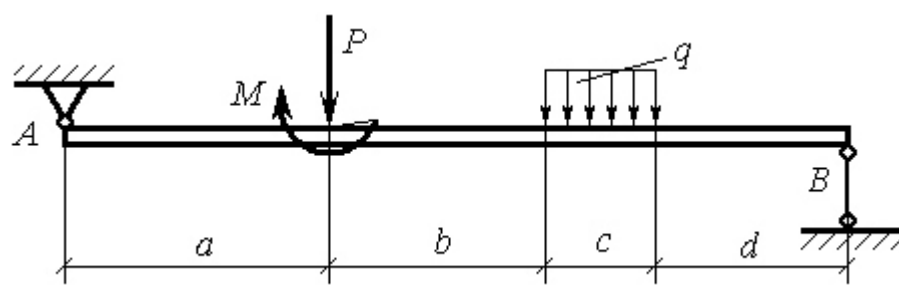
16



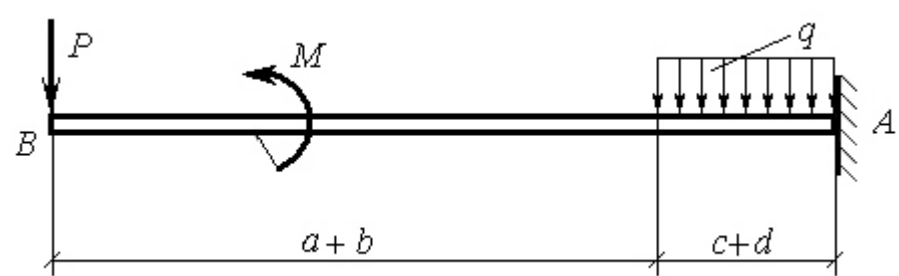
17



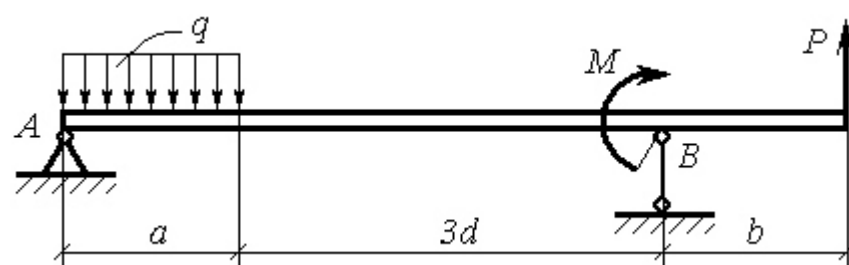
18



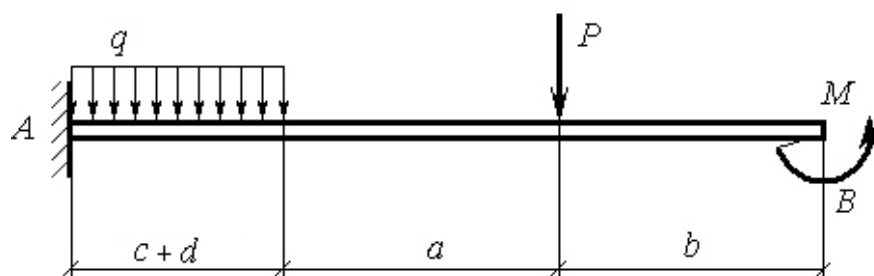
19



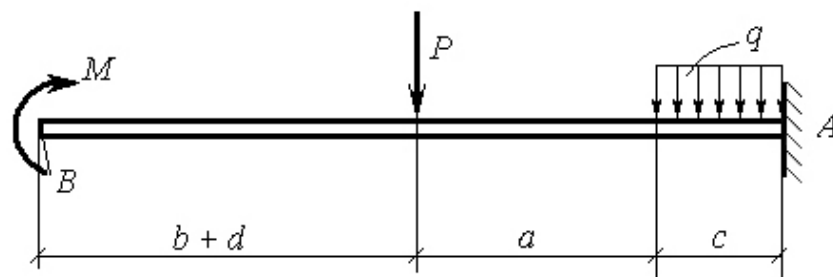
20



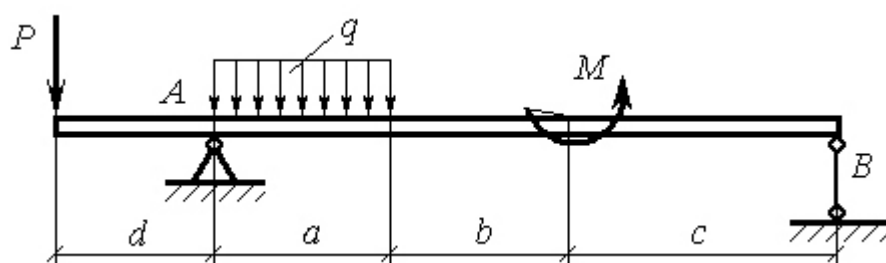
21



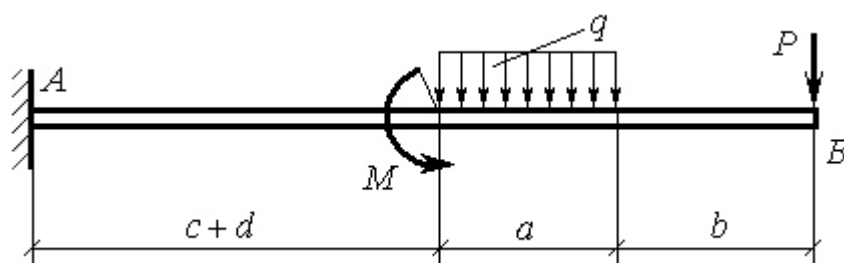
22



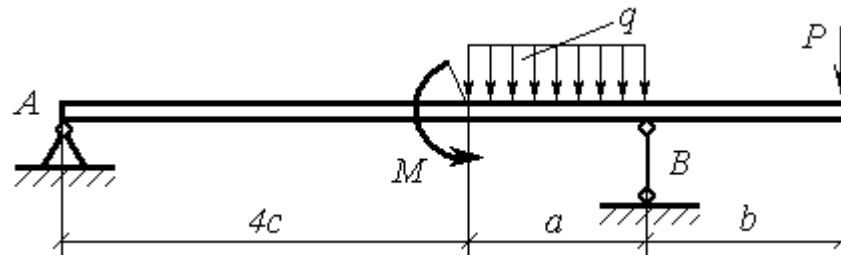
23



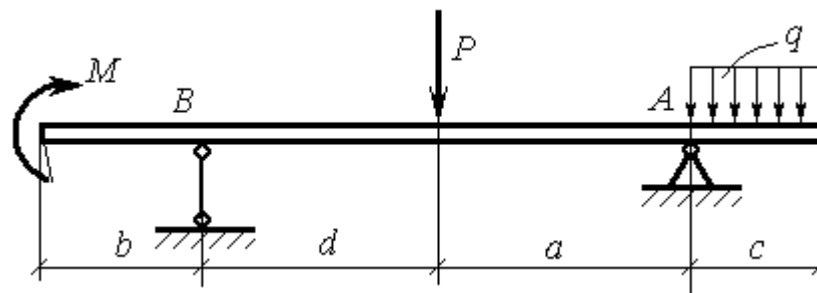
24



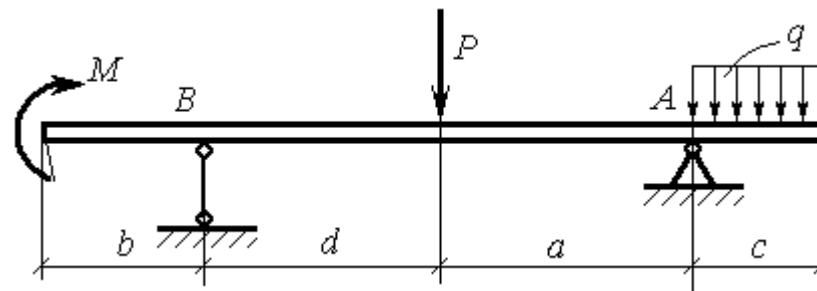
25



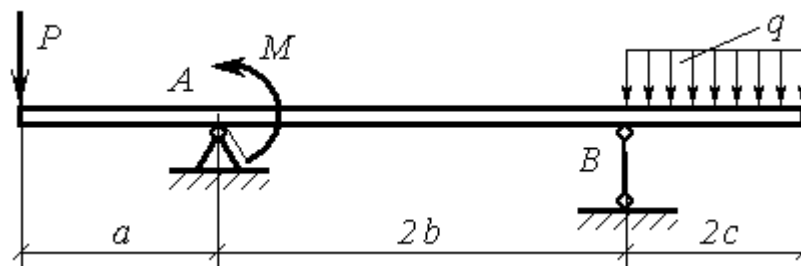
26



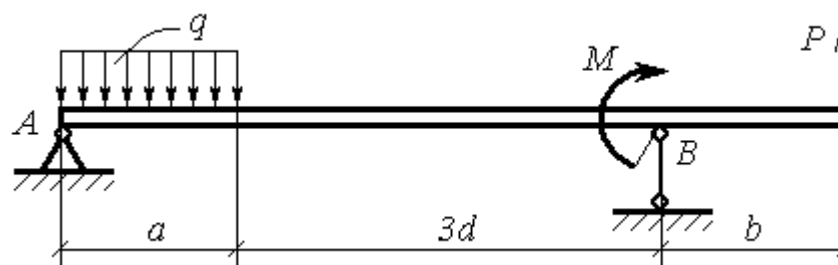
27



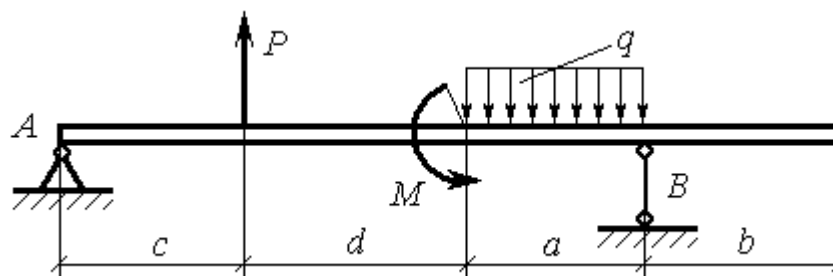
28



29



30



2.1.8 Приклади виконання завдання до ТМ1

Приклад 1: Для балки (рис. 2.18) знайти опорні реакції, якщо $F = 3 \text{ кН}$, $q = 1 \text{ кН/м}$.

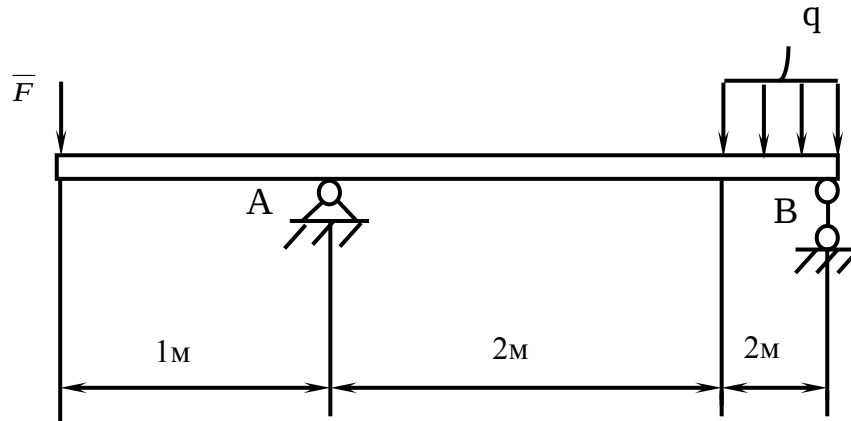


Рисунок 2.18

Розв'язання

Розглянемо балку АВ, що знаходиться у рівновазі (спокій).

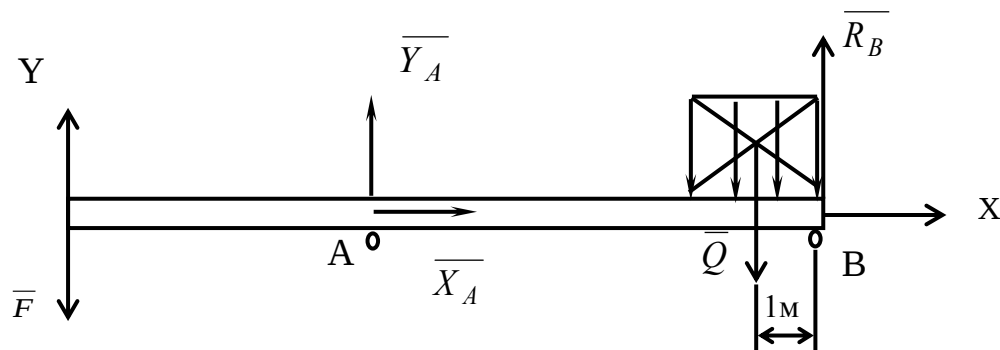


Рисунок 2.19

На балку діють активні сили: зосереджена сила $\bar{F}$ та розподілене навантаження q , яке еквівалентне зосередженій силі $\bar{Q}$.

$$Q = q \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН.}$$

Дію циліндричного шарніра А та рухомого В замінюємо їх реакціями $\bar{Y}_A$, $\bar{X}_A$, $\bar{R}_B$ (рис. 2.19). Для врівноваженої системи сил $\{\bar{F}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Q}, \bar{R}_B\} \sim 0$ запишемо умови рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum F_X &= 0; \quad X_A = 0, \\ \sum M_A(\bar{F}) &= 0; \quad F \cdot 1 - Q \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0, \\ \sum M_B(\bar{F}) &= 0; \quad F \cdot 5 - Y_A \cdot 4 + Q \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Тоді: $R_B = 0,75 \text{ кН}$, $Y_A = 4,25 \text{ кН}$, $X_A = 0$.

Достовірність отриманих результатів можна перевірити записавши ще одне рівняння, рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum F_Y &= 0; \quad -F + Y_A - Q + R_B = 0, \\ -3 + 4,25 - 2 + 0,75 &= 0.\end{aligned}$$

Отже, задача розв'язана правильно.

Відповідь: $R_B = 0,75 \text{ кН}$, $Y_A = 4,25 \text{ кН}$, $X_A = 0$.

Приклад 2: Для консольної балки (рис. 2.20) знайти реакції жорсткого защемлення, якщо $F = 2 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

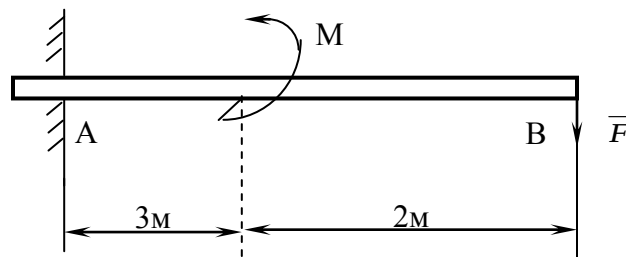


Рисунок 2.20

Розв'язання:

На балку AB діють: активна сила F , пара сил з моментом M ; її руху перешкоджає в'язь – жорстке защемлення в точці A . Відкидаємо в'язь в точці A , і на підставі аксіоми звільнення від в'язей її дію замінюємо силами $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ та моментом M_A (рис. 2.21).

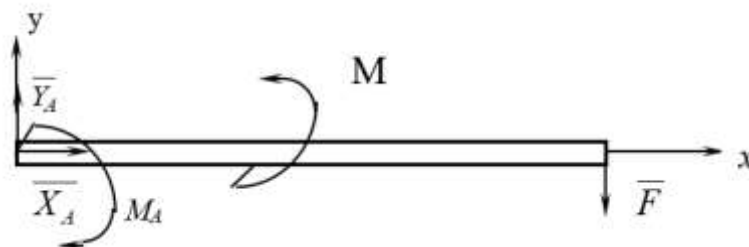


Рисунок 2.21

Запишемо умови рівноваги для системи сил $\{\overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{M_A}, \overline{M}, \overline{F}\} \sim 0$.

$$\begin{aligned}\sum F_X &= 0; \quad X_A = 0; \\ \sum F_Y &= 0; \quad Y_A - F = 0; \\ \sum M_A(\overline{F}) &= 0; \quad -M_A + M - F \cdot 5 = 0.\end{aligned}$$

Звідки знаходимо:

$$\begin{aligned}Y_A &= F = 2 \text{ кН}, \\ M_A &= M - 5 \cdot F = 5 - 5 \cdot 2 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Від'ємний знак величини M_A вказує, що дійсний напрямок моменту сили в жорсткому защемленні протилежний показаному на рис. 2.21.

Виконаємо перевірку.

Задача розв'язана правильно, якщо виконується умова:

$$\sum M_{B_i} = 0.$$

Складемо це рівняння, користуючись рисунками 2.20 та 2.21.

$$\begin{aligned}\sum M_B(\overline{F}) &= 0; \quad M - M_A - Y_A \cdot (3 + 2) = 0; \\ 5 - (-5) - 2 \cdot (3 + 2) &= 0.\end{aligned}$$

Отже, задача розв'язана правильно.

Відповідь: $X_A = 0$; $Y_A = 2 \text{ кН}$; $M_A = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2.1.9 Тертя твердих тіл

Силова взаємодія у разі контактування двох матеріальних об'єктів пов'язана з поняттям в'язей. В'язі, обмежуючи поведінку тіла, змінюють його стан.

Розглянемо взаємодію твердого тіла і площини в т. М (рис. 2.22).

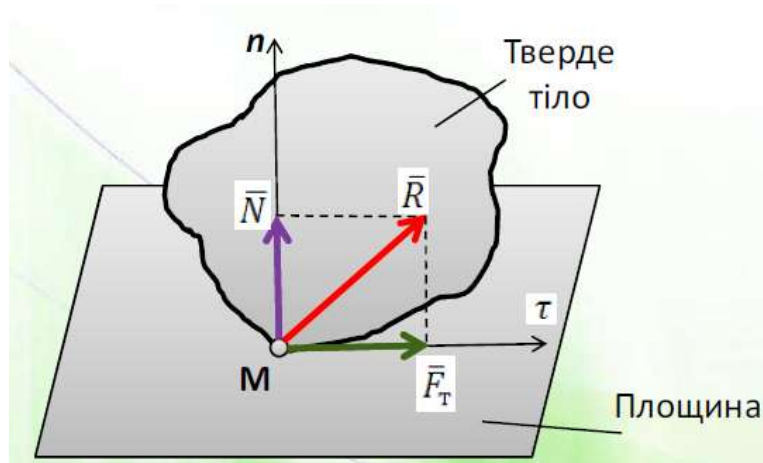


Рисунок 2.22

$\bar{R}$ – реакція площини (в'язі);

$\bar{N}$ – нормальна реакція (нормальна складова сили);

$\bar{F}_T$ – сила тертя (дотична складова сили $\bar{R}$).

Якщо сила тертя виявляється малою – її не враховують. Тоді поверхню називають ідеально гладкою і враховують лише нормальну складову $\bar{N}$.

Однак, в реальному житті під час контактування двох матеріальних тіл тертя найчастіше враховується. **Тертя** є фізичним явищем, що супроводжується руйнуванням поверхонь контакту, нагрівом тіл, електризацією та ін.

В теоретичній механіці за умови врахування тертя спираються на закони тертя ковзання Амонтона-Кулона за стану спокою.

Сила тертя ковзання – це сила тертя, яка діє на тіло під час його ковзання по опорній поверхні.

Сила тертя спокою – це сила тертя, яка виникає до початку ковзання за наявності сил, що намагаються зрушити тіло з місця.

Закони Амонтона-Кулона застосовуються для сухого тертя (без змащування) і формуються таким чином:

Тертя ковзання

1. Під час намагання зрушити одне тіло по поверхні іншого у площині стикання тіл виникає сила тертя $\bar{F}_T$, величина якої може змінюватись від 0 до $\bar{F}_{T \max}$ – максимально граничної сили тертя.

$$F_T = 0..F_{T\max}; \quad F_T \leq F_{T\max}$$

2. Сила тертя направлена у бік, протилежний можливому напрямку руху або ковзання (рис. 2.23).

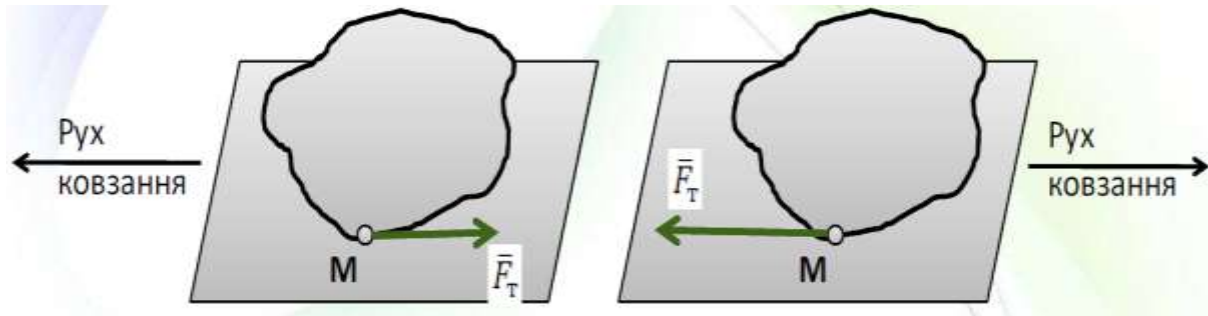


Рисунок 2.23

3. Величина максимально граничної сили тертя дорівнює добутку коефіцієнта тертя на нормальну реакцію

$$F_{T\max} = f \cdot N,$$

де f – статичний коефіцієнт тертя (безрозмірна величина).

4. Величина $\overline{F_{T\max}}$ не залежить від величини площі поверхні взаємодії.
Отже, за рівноваги сила тертя спокою

$$F_T \leq F_{T\max} \text{ або } F_T \leq f \cdot N.$$

5. Коефіцієнт тертя f залежить від матеріалу і стану поверхні тертя.

6. Сила тертя ковзання менше сили тертя спокою. У довідниках позначають f – коефіцієнт тертя ковзання, f_0 – коефіцієнт тертя спокою.

7. Вважається, що сила тертя не залежить від швидкості ковзання.

Під час руху сила тертя дорівнює добутку динамічного коефіцієнта тертя на нормальну реакцію

$$F_T = f_d \cdot N.$$

Кутом тертя називається найбільший кут φ між граничною силою реакції шорсткої в'язі $\bar{R}^{\max}$ і нормальною реакцією $\bar{N}$ (рис. 2.24):

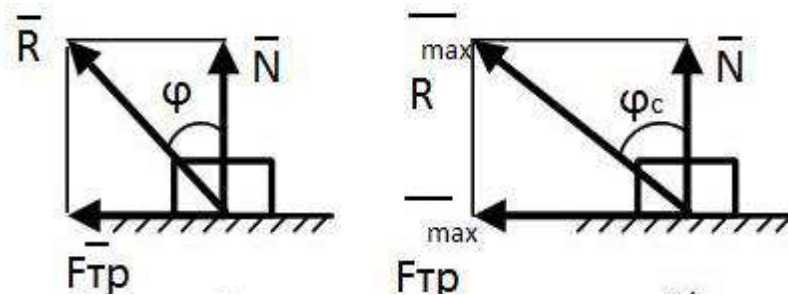


Рисунок 2.24

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_T}{N} = (F_T = f \cdot N) = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

Конусом тертя називають поверхню, яку описує повна реакція в разі її обертання навколо нормальної реакції (рис. 2.25).

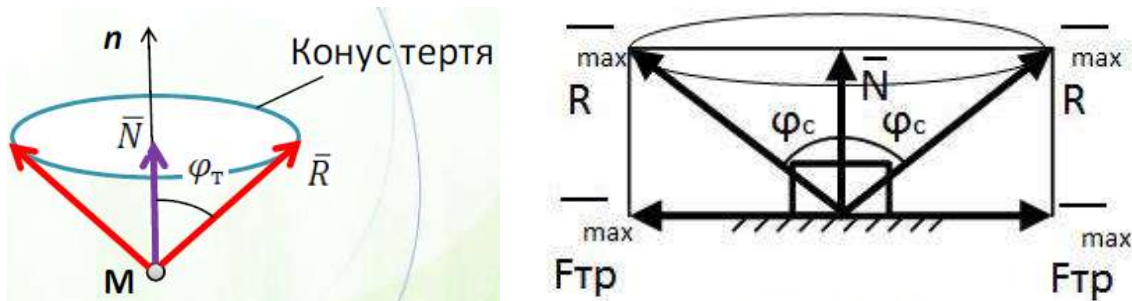


Рисунок 2.25

Якщо рівнодійна активних сил, що діють на тіло, знаходиться всередині конуса тертя, то ніяким збільшенням модуля цієї рівнодійної не можна порушити рівновагу тіла.

Це явище називається самогальмуванням і широко використовується в промисловості, зокрема, у вантажопідійомних механізмах.

Тертя кочення

Опір, що виникає під час кочення одного тіла по поверхні іншого, називається **тертям кочення**.

Розглянемо циліндр, який перебуває у стані спокою на горизонтальній площині. Покажемо сили, що виникають у такому випадку (рис. 2.26).

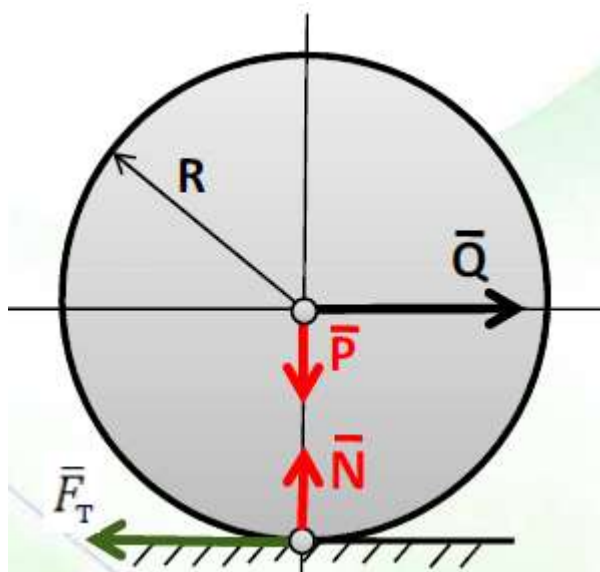


Рисунок 2.26

$\bar{Q}$ – активна сила, що намагається зрушити циліндр з місця;
 $\bar{P}$ – сила ваги;
 $\bar{N}$ – нормальна реакція;
 $\bar{F}_T$ – сила тертя;
 R – радіус циліндра.

Циліндр перебуває у спокої. Активна сила $\bar{Q}$ і сила тертя $\bar{F}_T$ утворюють пару сил, яка здатна спричинити кочення.

Тіло (циліндр) не рухається, оскільки насправді контакт тіла з горизонтальною площиною відбувається не в точці С (рис. 2.27), а по деякій площині (внаслідок деформацій котка і горизонтальної опорної поверхні вони доторкаються один до одного вздовж деякої ділянки контакту). Отже, нормальна реакція насправді зміщена у бік активної сили на деяку величину δ .

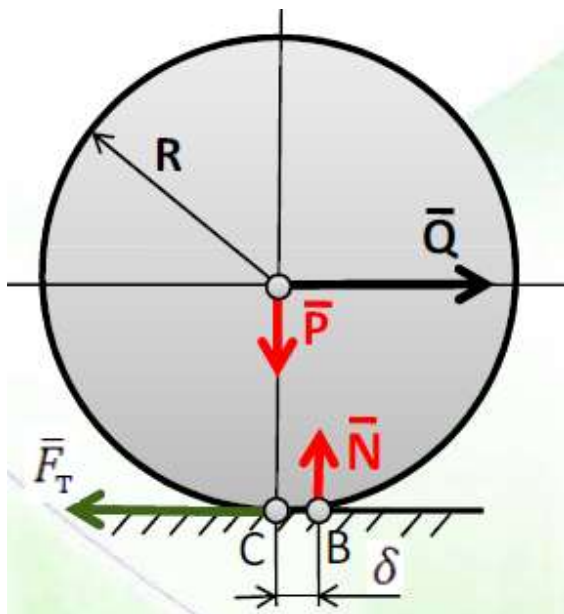


Рисунок 2.27

У стані рівноваги маємо

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) &= 0; \\
 -Q \cdot R + N \cdot \delta &= 0; \\
 Q_{\text{ГР}} &= \frac{N \cdot \delta}{R}.
 \end{aligned}$$

Коли $Q < Q_{гр}$ – тіло перебуває у спокої, за $Q > Q_{гр}$ починається кочення. Величина δ називається коефіцієнтом тертя кочення і має одиниці виміру довжини.

Добуток нормальної реакції на коефіцієнт тертя кочення називається **граничним моментом кочення**.

$$M_{гр} = N \cdot \delta.$$

Зазвичай сила тертя кочення набагато менша за силу тертя ковзання.

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. Що називається тертям?
2. Що називається тертям ковзання?
3. Чому дорівнює сила тертя ковзання?
4. Що таке кут тертя? Чому дорівнює тангенс кута тертя?
5. Які одиниці вимірювання коефіцієнта тертя ковзання?
6. Що називається тертям кочення?
7. Чому рівний момент тертя кочення?
8. Які одиниці вимірювання коефіцієнта тертя кочення?

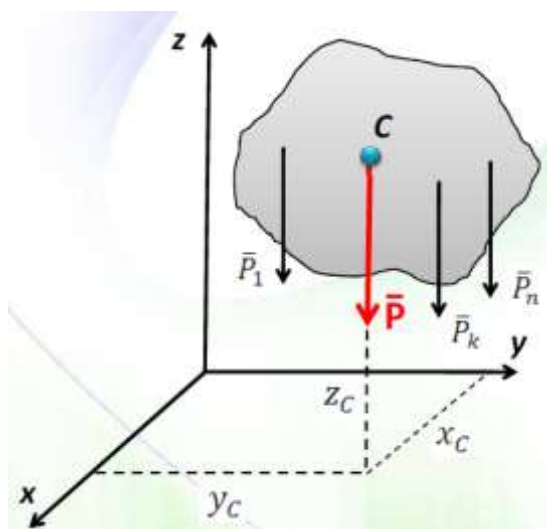
2.1.10 Центр ваги твердого тіла. Методи визначення центра ваги твердих тіл

Поняття центра ваги тіла, координати центра ваги

На будь-яке тіло, розміщене на поверхні Землі, діють сили ваги кожної частини цього тіла. Лінії дії цих сил перетинаються в центрі Землі. Оскільки розміри тіл достатньо малі, можна вважати, що вони утворюють просторову систему паралельних сил (рис. 2.28).

Сила ваги або **вага твердого тіла** – це рівнодійна, що визначається сумою сил ваги усіх частин тіла

$$P = \sum_{i=1}^n P_i$$



т. С – центр ваги тіла;
 x_c, y_c, z_c – координати центра ваги;

Рисунок 2.28

Центр ваги твердого тіла – це незмінно пов’язана з цим тілом точка, через яку проходить лінія дії рівнодійної сили ваги частин тіла за будь-якого положення тіла у просторі або це точка прикладання сили ваги тіла.

Для визначення координат центра ваги тіла можна використати такі формули:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k P_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k P_k}{P}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k P_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{\sum_{k=1}^n z_k P_k}{P}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

де P_k – вага окремої частини тіла;

x_k, y_k, z_k – координати частини тіла;

P – вага усього тіла.

Центр ваги однорідного об’ємного тіла

До однорідних тіл віднесемо тіла, питома вага яких по об’єму є постійною $\rho = const$.

Тоді

$$P = \rho V, \quad P_k = \rho V_k,$$

де V – об’єм усього тіла;

V_k – об’єм частинки тіла.

Підставивши ці значення в формули (2.1)

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \rho V_k}{\rho V} = \frac{\rho \sum_{k=1}^n x_k V_k}{\rho V} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{V},$$

отримаємо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{V}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k V_k}{V}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рівняння (2.2) дозволяють визначити координати центра ваги об'ємного тіла.

Центр ваги однорідного плоского тіла

Вагу однорідного плоского тіла і вагу окремих його частин можна визначити за формулами

$$P = \rho S, \quad P_k = \rho S_k,$$

де ρ – вага одиниці площі тіла;

S – площа усього тіла;

S_k – площа k -тої частини тіла.

Отже, враховуючи вищезазначене та формули (2.1), отримаємо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рівняння (2.3) дозволяють визначити координати центра ваги плоского тіла.

Центр ваги однорідного лінійного тіла

Позначимо ρ – вагу одиниці довжини однорідного лінійного тіла. Тоді його вага і вага його частини відповідно дорівнюють

$$P = \rho L, \quad P_k = \rho l_k,$$

де L – довжина тіла;

l_k – довжина k -того елемента тіла.

Підставивши ці значення в формули (2.1), отримаємо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k l_k}{L}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k l_k}{L}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k l_k}{L}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рівняння (2.4) дозволяють визначити координати центра ваги лінійного тіла (наприклад, стержневої конструкції, ламаної лінії і под.).

Методи визначення центра ваги твердих тіл

Метод симетрії

Якщо тіло має площину, вісь чи центр симетрії, то центр ваги тіла знаходиться відповідно або в площині симетрії, або на осі симетрії, або в центрі симетрії (рис. 2.29).

Звідси випливає, що центр ваги правильних геометричних тіл (коло, диск, куля, ромб, прямокутник) розташований в їхніх геометричних центрах.

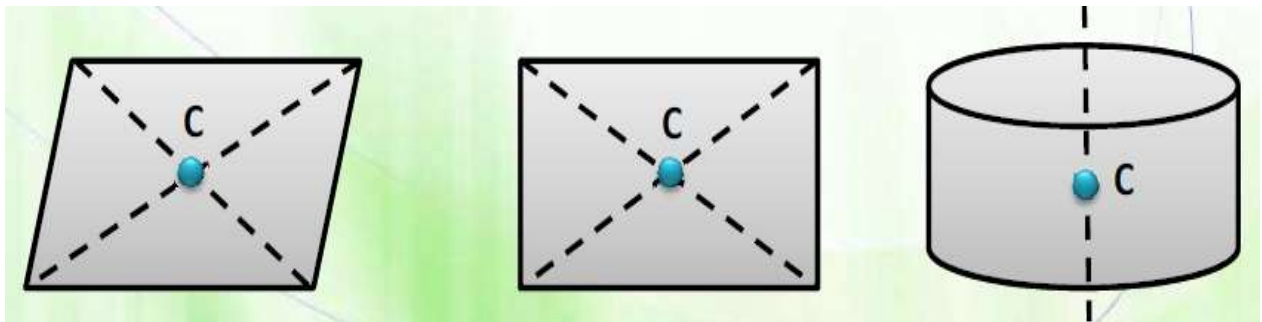


Рисунок 2.29

Метод розбиття

Якщо однорідне тверде тіло можна розбити на частини, для яких заздалегідь відоме положення їхніх центрів ваги (рис. 2.30), то координати центра ваги всього тіла визначаються за відповідними формулами, наведеними вище.

У цьому випадку кількість доданків в кожній з сум буде дорівнювати кількості частин, на які розбито тіло.

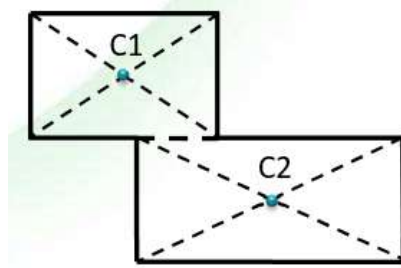


Рисунок 2.30

Метод доповнення (від'ємної ваги)

Метод доповнення застосовується до тіл, які мають вирізані частини (отвори, порожнини) (рис. 2.31).

В процесі проведення розрахунків потрібно враховувати, що вирізані частини (отвори, порожнини) мають від'ємні площі або об'єми.

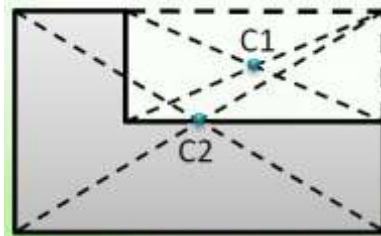


Рисунок 2.31

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. Що називається вагою твердого тіла?
2. Що називається центром ваги твердого тіла?
3. За якими формулами визначаються координати центра ваги твердого тіла?
4. Які є методи визначення положення центра ваги тіла?
5. В чому полягає метод симетрії?
6. В чому суть методу розбиття?
7. Поясніть особливості методу доповнення (від'ємної ваги).

2.2 Кінематика

Кінематикою називають розділ механіки, в якому вивчаються геометричні властивості руху тіл без урахування їх інертності (маси) і діючих на них сил. Вона умовно поділяється на два розділи:

- 1) кінематика точки, тобто кінематика тіла, розмірами якого можна знехтувати і положення якого можна описати як положення геометричної точки;
- 2) кінематика твердого тіла.

2.2.1 Кінематика точки. Основні поняття

Рух точки характеризується **законом руху, траєкторією, швидкістю і прискоренням**.

Закон руху точки визначає залежність між довільним положенням рухомої точки в просторі й часі. Рух точки відносно вибраної системи відліку вважається заданим, якщо відомо, за допомогою якого способу можна визначити положення точки в будь-який момент часу.

Лінія, яку описує точка під час свого руху, називається **траєкторією**. Якщо траєкторія точки є пряма лінія, то рух точки називається прямолінійним, якщо траєкторія точки крива, то – криволінійним.

Основними кінематичними характеристиками руху точки є її положення, швидкість і прискорення.

Основне завдання кінематики точки полягає в знаходженні способів задання її положення та методів визначення швидкості й прискорення. Рух точки можна визначити трьома способами: векторним, координатним і природним.

2.2.2 Способи задання руху точки. Визначення швидкості та прискорення

Векторний спосіб

Положення точки M визначається за допомогою радіус-вектора $\vec{r}$, проведеного з деякої нерухомої точки O в задану точку M (рис. 2.32). Під час руху радіус-вектор $\vec{r}$ змінюється за величиною і напрямком. Кожному моменту часу t відповідає певне значення $\vec{r}$.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) називається **кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі**, а також рівнянням траєкторії точки у векторній формі.

Швидкість точки $\vec{V}$ дорівнює векторній похідній від радіус-вектора точки ($\vec{r}$) за часом і завжди спрямована по дотичній до траєкторії руху точки:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (1.6)$$

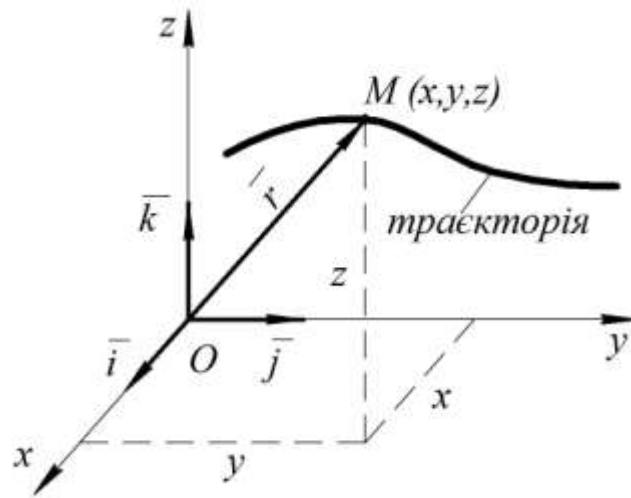


Рисунок 2.32

Прискоренням точки $\bar{a}$ називають міру зміни швидкості точки за часом.

Прискорення точки дорівнює другій похідній від вектора її швидкості за часом

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \quad (2.7)$$

Прискорення точки $\bar{a}$ завжди спрямоване в бік угнутості траєкторії її руху.

Закон руху точки вважається відомим, якщо задано умови, які дозволяють визначити положення точки в будь-який момент часу. (Будь-який вектор повністю визначається одним з двох способів: а) проекціями вектора на координати осі; б) модулем вектора і його спрямованістю у просторі).

Координатний спосіб

Радіус-вектор точки M дорівнює (рис. 2.32)

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z,$$

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти осей x, y, z .

Тобто $r_x = x, r_y = y, r_z = z$ і $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Проекції радіус-вектора на осі x, y, z – це декартові координати цієї точки.

Кінематичні характеристики точки за координатного способу задання руху. При русі матеріальної точки M у просторі вводять систему координат $Oxyz$. Рух точки задається трьома функціями:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (2.8)$$

Рівняння (2.8) називають **рівняння руху точки в координатній формі** в просторовому випадку.

Швидкість точки $\bar{V}$ визначають за проекціями вектора швидкості на координатні осі, які знаходять за формулами:

$$V_x = \dot{x}(t), V_y = \dot{y}(t), V_z = \dot{z}(t), \quad (2.9)$$

де V_x, V_y, V_z – проекції вектора швидкості на координатні осі відповідно x, y, z .

За відомими значення проекцій швидкості (2.9) на координатні осі можна обчислити модуль і спрямовувальні косинуси вектора швидкості.

$$\bar{V} = \bar{V}_x + \bar{V}_y + \bar{V}_z = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k}, \quad (2.10)$$

модуль швидкості : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$

$$\cos \alpha_v = \frac{V_x}{V}; \cos \beta_v = \frac{V_y}{V}; \cos \gamma_v = \frac{V_z}{V},$$

де $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$ – відповідні кути між вектором швидкості $\bar{V}$ і відповідною віссю.

Прискорення точки $\bar{a}$ визначають за проекціями вектора прискорення на координатні осі, які знаходять за формулами:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}(t), a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}(t), a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}(t), \quad (2.11)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора прискорення на осі x, y, z , відповідно

За відомими значення проекцій прискорення (2.11) на координатні осі можна обчислити модуль і спрямовувальні косинуси вектора прискорення:

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \quad (2.12)$$

де $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – модуль прискорення точки;

$$\cos \alpha_a = \frac{a_x}{a}; \cos \beta_a = \frac{a_y}{a}; \cos \gamma_a = \frac{a_z}{a},$$

де $\alpha_a, \beta_a, \gamma_a$ – відповідні кути між вектором прискорення $\bar{a}$ і відповідною віссю.

У випадку плоскої траєкторії одна з складових відсутнє.

Натуральний спосіб

Якщо траєкторія руху відома наперед (наприклад, траєкторія руху потягу, трамвая, тролейбуса), то для визначення закону її руху достатньо задати початок і напрям руху. Тому одну з точок M_0 на траєкторії (рис. 2.33) беруть за початок відліку дугових координат, оскільки положення рухомої точки M визначається її відстанню S , яка відлічується по дузі траєкторії від вибраної точки відліку.

$$S = S(t). \quad (2.13)$$

Рівняння (2.13) називають **законом руху точки** по траєкторії. Функція (2.13) має бути однозначною, неперервною і диференційованою.

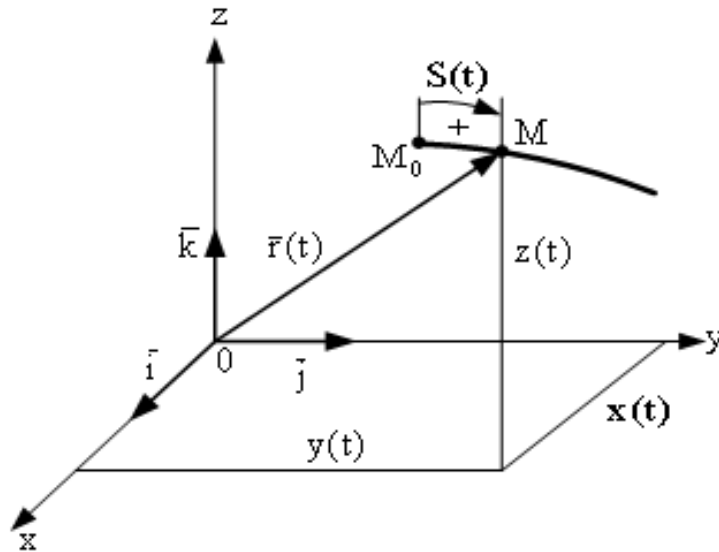


Рисунок 2.33

Модуль швидкості визначається за формулою:

$$\bar{V} = \frac{dS}{dt} \quad (2.14)$$

Вектор $\bar{V}$ спрямований по дотичній $\bar{\tau}$ до траєкторії у бік руху точки (рис. 2.34).

Прискорення розкладається на два взаємно перпендикулярних вектори $\bar{a}_n$ і $\bar{a}_\tau$ (рис. 2.34), модулі яких дорівнюють

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \quad \bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n. \quad (2.15)$$

Дотичне прискорення $\bar{a}_\tau$, характеризує зміну швидкості за величиною і завжди спрямоване вздовж дотичної до траєкторії в точці.

$$\bar{a}_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

$$\bar{a}_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V}$$

Якщо $\bar{a}_\tau > 0$, то вектор $\bar{a}_\tau$ збігається з напрямом вектора швидкості $\bar{V}$ або спрямований у бік, протилежний швидкості, якщо $\bar{a}_\tau < 0$.

Нормальне прискорення $\bar{a}_n$ характеризує зміну швидкості за напрямком. Вектор $\bar{a}_n$ завжди спрямований по головній нормалі $\bar{n}$ до траєкторії точки у бік угнутості кривої, тобто по ρ (рис. 2.34).

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

$$\bar{a}_n = \frac{V^2}{\rho},$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії в точці $\rho = \frac{V^2}{a_n}$.

Повне прискорення визначається:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n} = \frac{V^2}{\rho} \cdot \bar{n} + \frac{dV}{dt} \cdot \bar{\tau}, \quad \bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n, \quad (2.16)$$

де $\bar{\tau}$ – орт дотичної;

$\bar{n}$ – орт нормалі.

Модуль прискорення $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

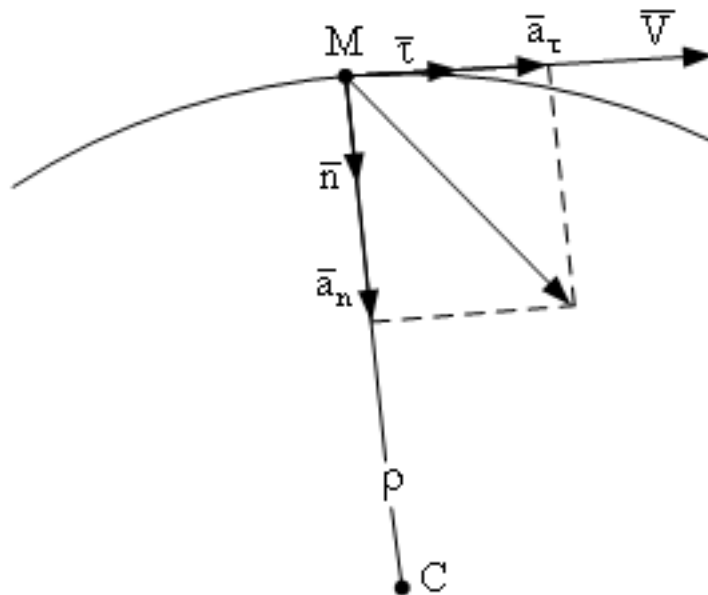


Рисунок 2.34

2.2.3 Окремі випадки руху точки

Розрізняють окремі випадки руху точки:

Прямолінійний рух: Якщо під час руху точки нормальне прискорення $\bar{a}_n = 0$, то рух точки є прямолінійним: якщо $\bar{a}_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$; $\rho \rightarrow \infty$, тобто траєкторія є пряма (рис. 2.35).

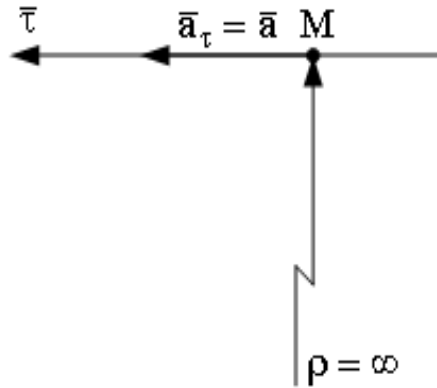


Рисунок 2.35

У цьому разі повне прискорення дорівнює дотичному $\bar{a} = \bar{a}_\tau$.

Якщо під час криволінійного руху матеріальної точки в певний момент часу нормальне прискорення дорівнює нулю ($\bar{a}_n = 0$), то точка в цей момент часу знаходиться в точці перегину траєкторії.

Рівномірний прямолінійний рух. Якщо під час руху матеріальної точки її прискорення $\vec{a} = 0$, то рух є рівномірним і прямолінійним, швидкість не змінюється ні за величиною ($\bar{a}_\tau = 0$), ні за напрямком ($\bar{a}_n = 0$), тобто $\bar{V} = const$, $\bar{a} = 0$.

Рівномірний криволінійний рух. Якщо під час руху точки дотичне прискорення $\bar{a}_\tau = 0$, то проекція швидкості $\bar{V}_\tau$ не змінюється, $\bar{a}_\tau = \frac{d\bar{V}}{dt} = 0$, $\bar{V} = const$, і точка рухається рівномірно по кривій, а повне прискорення $\bar{a}$ дорівнює нормальному $\bar{a}_n$ (рис. 2.36):

$$\bar{a} = \bar{a}_n.$$

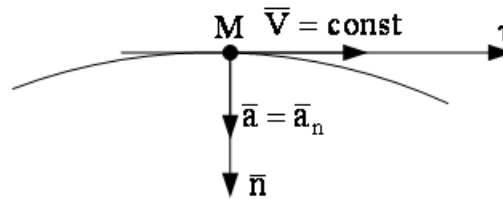
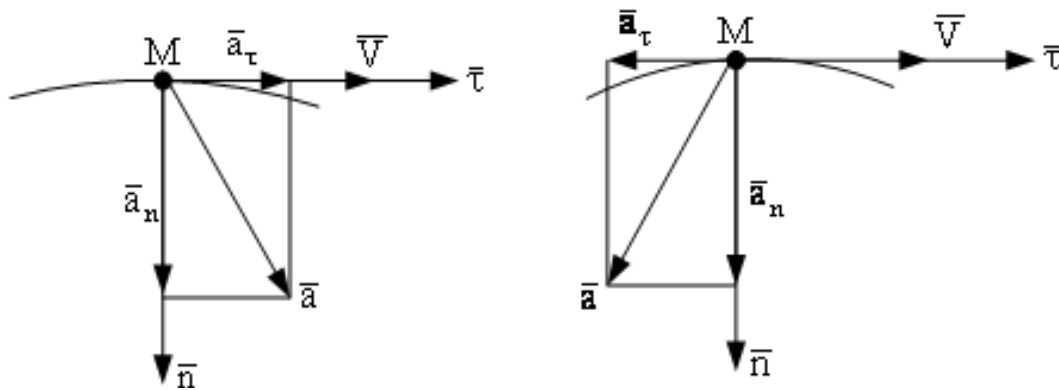


Рисунок 2.36

Рівнозмінний криволінійний рух. Якщо під час руху точки по деякій кривій її дотичне прискорення буде постійним за величиною ($\bar{a}_\tau = \text{const}$), то рух точки називається рівнозмінним криволінійним рухом (рис. 2.37).



Прискорений рух

Сповільнений рух

Рисунок 2.37

Якщо прискорення $\bar{a}_\tau$ збігається з напрямком швидкості $\bar{V}_\tau$, то рух точки називається рівноприскореним, якщо $\bar{a}_\tau$ напрямлено у бік, протилежний швидкості $\bar{V}_\tau$ – рівносповільненим.

У цьому випадку

$$V_\tau = V_{0\tau} + a_\tau \cdot t, \quad S = V_{0\tau} t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2} + S_0,$$

де $V_{0\tau}$ – початкова швидкість,

S_0 – початкова координата,

$V_{0\tau}$ і S_0 визначається з початкових умов, тобто за $t = 0$.

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. Що таке закон руху точки?
2. Які є способи задання руху точки?
3. Що таке траєкторія точки, як її можна визначити, якщо закон руху відомий?
4. Як можна визначити швидкість точки, якщо рівняння руху задані?
5. Як вектор швидкості напрямлений відносно траєкторії?
6. Як визначити прискорення, якщо закон зміни швидкості знайдено?
7. Як вектор прискорення напрямлений відносно траєкторії?
8. Що таке дотичне і нормальне прискорення, як вони напрямлені?

2.2.4 Кінематика твердого тіла. Основні види руху твердого тіла

У кінематиці, як і в статиці, всі тіла визнаються *абсолютно твердими*. Основні завдання кінематики твердого тіла полягають:

1. У знаходженні способів задання руху твердого тіла та його кінематичних характеристик;
2. У визначенні руху кожної точки твердого тіла окремо.

Залежно від способів задання руху тіла (від виду рівняння, що однозначно визначає положення тіла в обраній системі відліку в будь-який момент часу) розрізняються п'ять видів руху твердого тіла: поступальний, обертальний, складний (окремий випадок – плоский), сферичний, загальний випадок руху.

Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називають такий рух твердого тіла, за якого будь-яка пряма АВ, проведена в тілі, залишається під час руху паралельною до свого первісного положення (рис. 2.38).

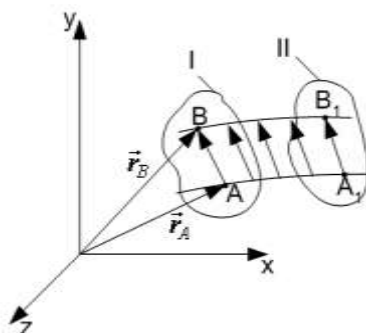


Рисунок 2.38

За поступального руху тіла з положення *I* в положення *II*

$$AB = A_1B_1 = \text{const} \text{ (тверде тіло) (рис. 2.38): } \bar{V}_A = \bar{V}_B; \bar{a}_A = \bar{a}_B.$$

Швидкості й прискорення усіх точок тіла під час поступального руху є однаковими. **Траєкторії** також однакові, але паралельно зміщені. Закон руху задається законом руху будь-якої точки. Швидкість $\vec{V}$ і прискорення $\vec{a}$ вивчаються так само, як і для ізольованої точки. Таким чином, вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху будь-якої його точки, тобто до задачі кінематики точки.

Обертальний рух твердого тіла

Обертальним рухом твердого тіла називають такий рух тіла (рис. 2.39), за якого є пряма, жорстко зв'язана з тілом (називають віссю обертання), що залишається увесь час нерухомою.

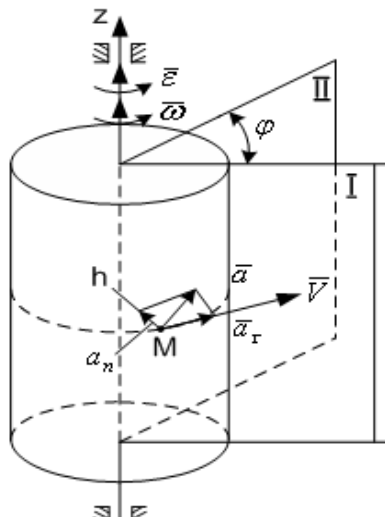


Рисунок 2.39

Під час обертання твердого тіла навколо осі Z (рис. 2.39) його положення визначається **кутом повороту** φ . Кут φ вважається додатним, якщо перехід від площини I , нерухомо фіксованої у просторі, до площини II , незмінно зв'язаної з тілом, відбувається проти руху годинникової стрілки, а якщо за ходом годинникової стрілки – від'ємним.

Закон руху тіла:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.17)$$

Закон (2.17) називається кінематичним рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

Головні кінематичні характеристики обертального руху твердого тіла: кут повороту φ , кутова швидкість ω , кутове прискорення у заданий момент часу ε .

$$\text{Кутова швидкість } \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad [c^{-1}]$$

Отже, кутова швидкість дорівнює першій похідній за часом від кута повороту φ . У техніці кутову швидкість часто задають числом n обертів за хвилину. Зв'язок між ω і n визначається формулою $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$.

Якщо під час обертання тіла кутова швидкість є сталою ($\omega = \text{const}$), то обертання тіла називається *рівномірним*. У цьому випадку кут повороту змінюється пропорційно часу:

$$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0,$$

де φ_0 - початковий кут повороту.

Це рівняння називається рівнянням рівномірного обертання тіла навколо нерухомої осі.

Кутова швидкість $\bar{\omega}$ – векторна величина.

Вектором кутової швидкості $\bar{\omega}$ називають вектор, який чисельно дорівнює абсолютному значенню похідної кута повороту за часом і спрямований уздовж осі обертання у той бік, звідки обертання тіла видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.

$$\text{Кутове прискорення } \bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \quad [c^{-2}].$$

Кутове прискорення тіла ε характеризує швидкість зміни кутової швидкості ω за часом.

Кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$ – величина векторна, дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній за часом від кута повороту, вектор кутового прискорення спрямований уздовж осі обертання у той бік, звідки обертання тіла видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.

Якщо напрямок $\bar{\varepsilon}$ збігається з напрямком вектора $\bar{\omega}$, то обертання прискорене і протилежне $\bar{\omega}$ у разі сповільненого руху.

Траєкторія, швидкість та прискорення точки, що знаходиться на тілі, яке виконує обертальний рух

Траєкторією будь-якої точки M тіла, яке обертається, є коло з центром C на осі обертання (рис. 2.40).

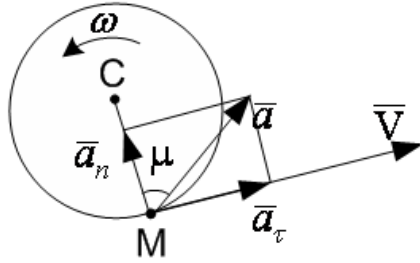


Рисунок 2.40

Швидкість $\vec{V}$ будь-якої точки M тіла, яке обертається, спрямована перпендикулярно до прямої, що з'єднує її з віссю обертання, у бік обертання тіла і за модулем дорівнює

$$V = \omega \cdot R,$$

де R – відстань від точки M до осі обертання, або радіус MC кола, яке описує точка M .

Прискорення точки M розкладається на тангенціальну (обертальну) ($\vec{a}_\tau$) і нормальну (доцентрову) ($\vec{a}_n$) складові:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n,$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R;$$

$$a_n = \omega^2 \cdot R.$$

За модулем $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Відхилення вектора повного прискорення $\vec{a}$ від радіуса, описуваного точкою кола, визначається кутом μ :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \varepsilon / \omega^2.$$

Вектор $\vec{a}_\tau$ спрямований по дотичній у бік (обертання) руху за прискореного обертання тіла і в протилежний – за сповільненого.

Вектор $\vec{a}_n$ – спрямовано по радіусу MC до осі обертання, тобто у бік увігнутості траєкторії точки M .

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. Який рух твердого тіла називається поступальним?
2. Який рух твердого тіла називається обертальним?
3. Як визначити кутову швидкість та кутове прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
4. Як визначити швидкість та прискорення точок твердого тіла, яке обертається відносно нерухомої осі?

2.2.5 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи.
Розрахунково-графічна робота (РГР) з теоретичної механіки.

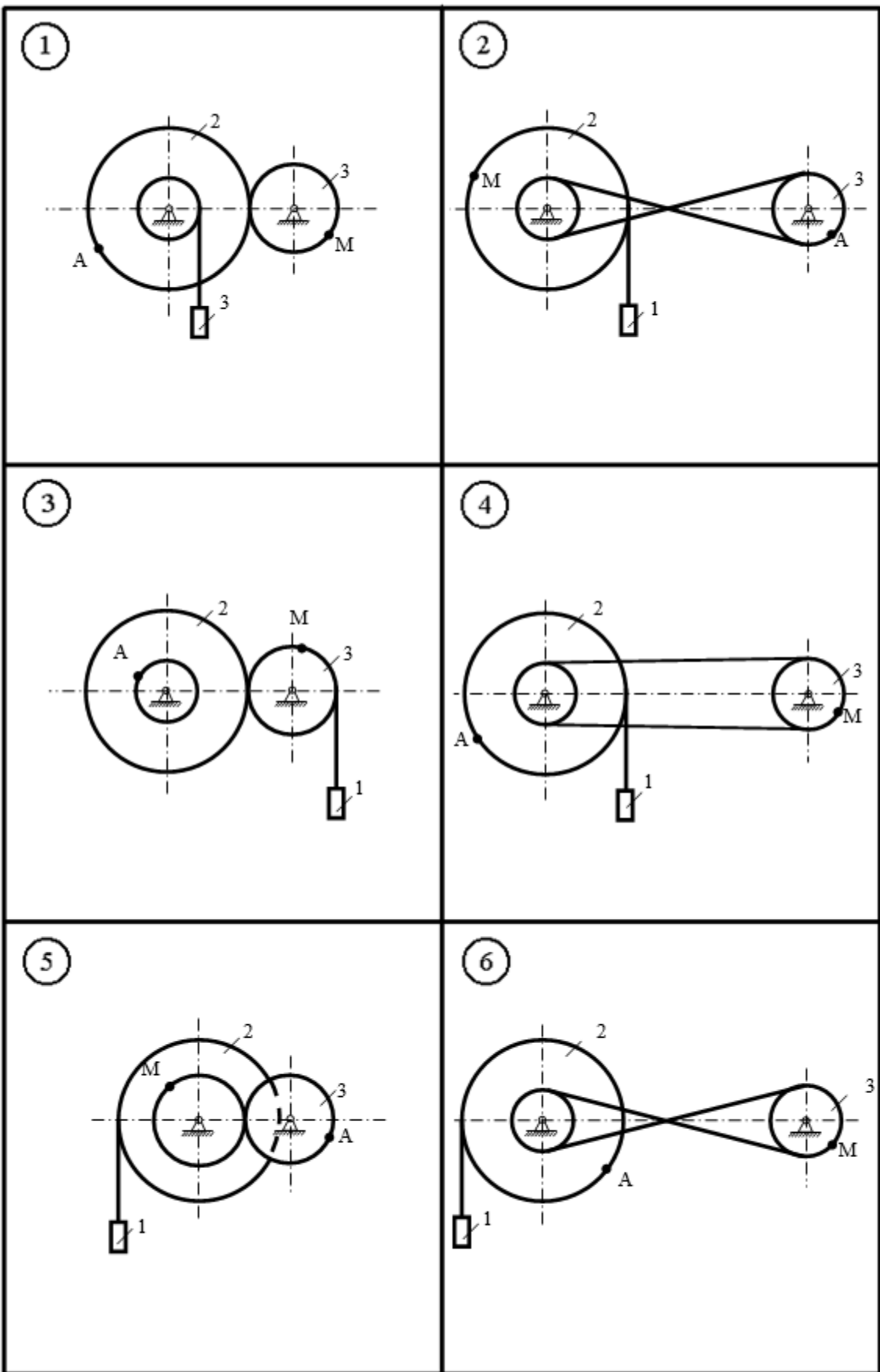
ТМ2 Визначення кінематичних характеристик точок твердого тіла за поступального та обертального рухів

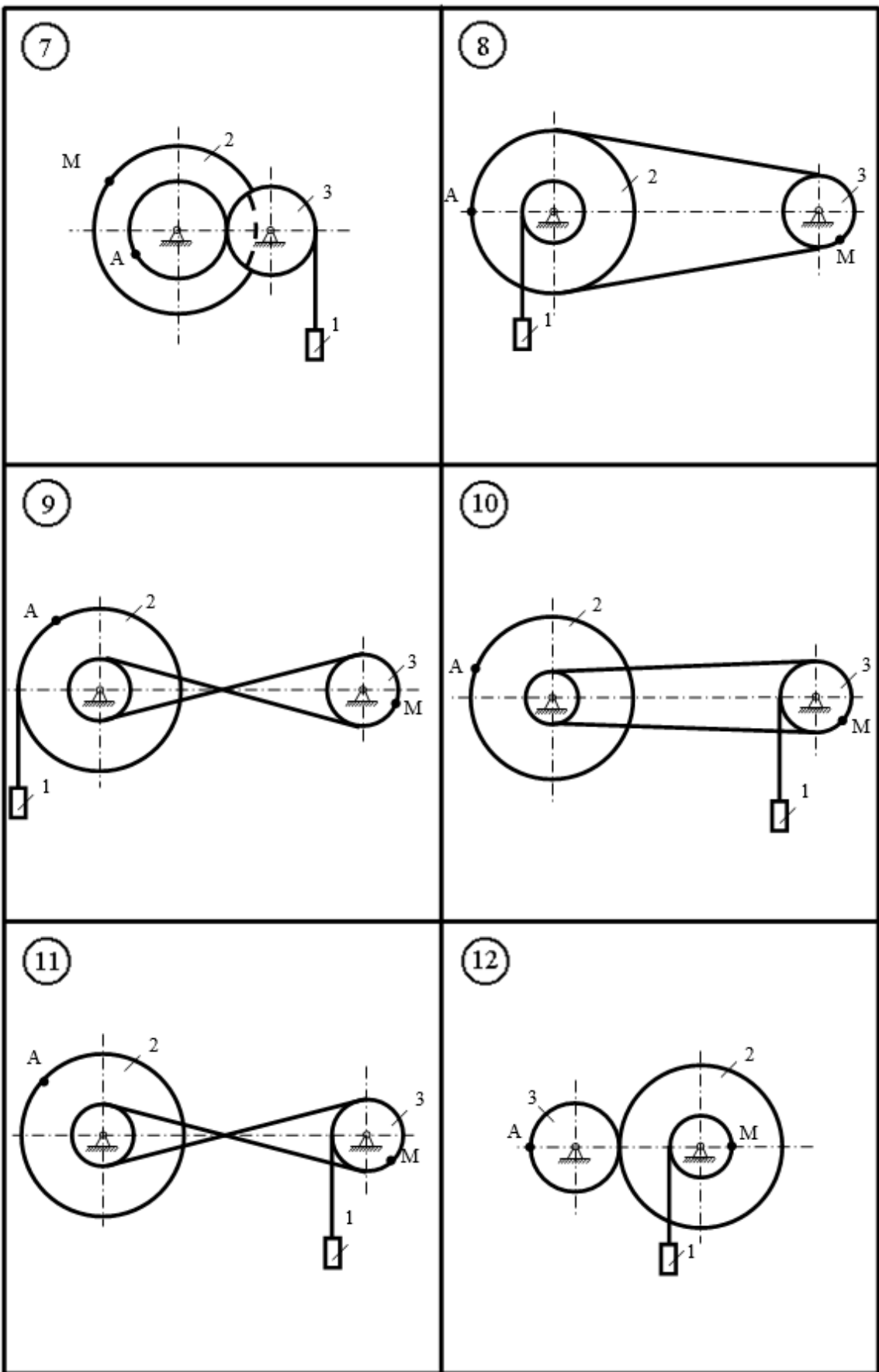
Механізм складається з трьох тіл: ступеневого шківів 2, тіла 1 та шківів 3 (С. 58 – 62). Тіло 1 рухається за законом $x = f(t)$. Визначити за $t = t_1$ швидкість та прискорення точок A та M .

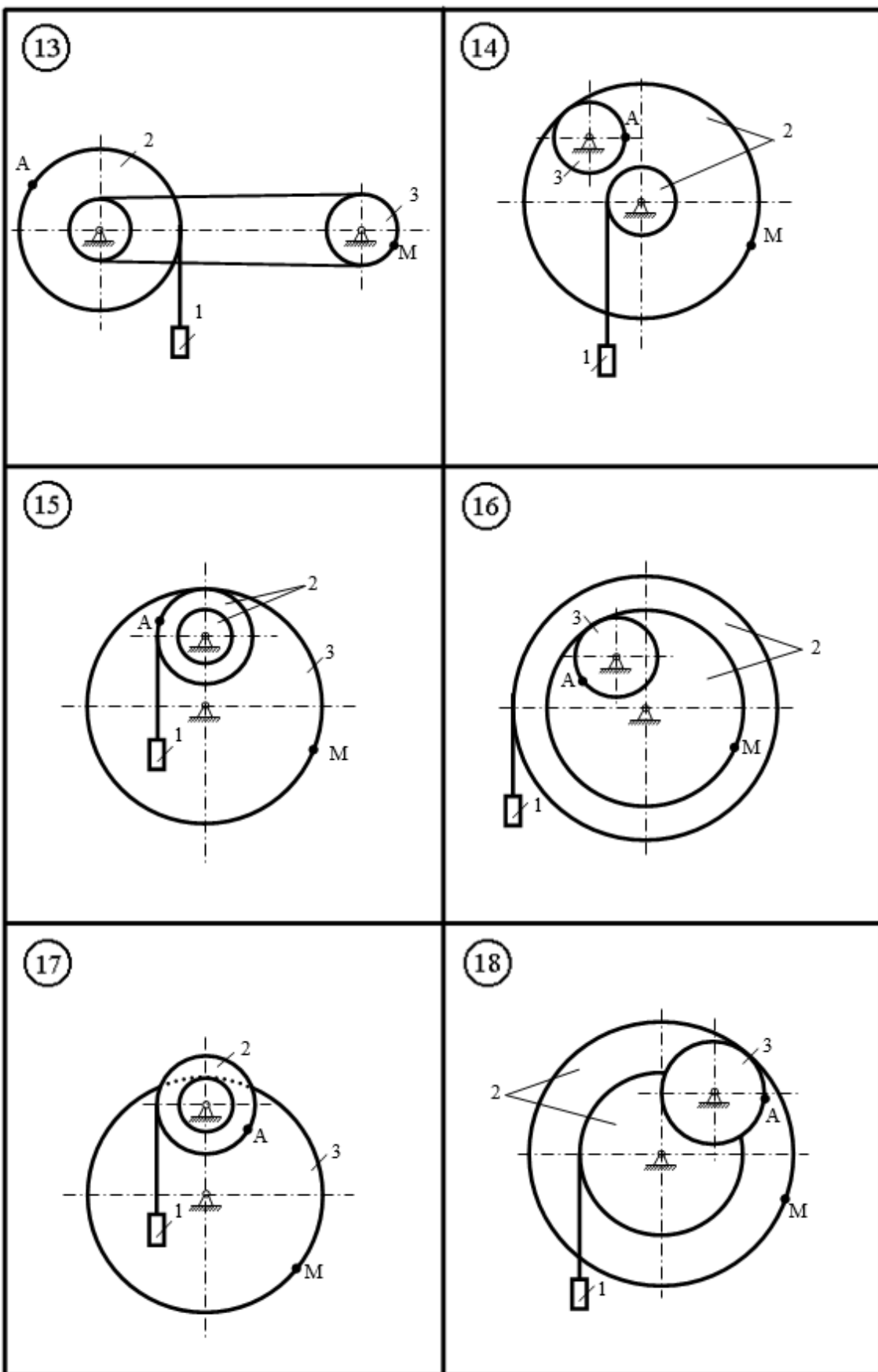
Дані для розрахунку в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

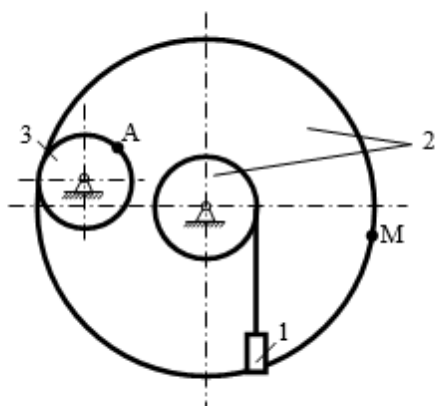
Варіант	$R_2, м$	$r_2, м$	$R_3, м$	$x = f(t), м$	$t_1, с$
1	0,1	0,05	0,3	$0,5t^2 + 0,2$	2
2	0,3	0,2	0,15	$0,5\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)$	1
3	0,4	0,3	0,1	$0,6t^3 + 0,4$	2
4	0,3	0,15	0,2	$0,6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
5	0,2	0,1	0,15	$0,6t^3$	2
6	0,3	0,15	0,2	$0,3t^2 - 0,4$	1
7	0,2	0,1	0,15	$0,2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	1
8	0,1	0,05	0,3	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)$	1
9	0,2	0,1	0,3	$5\sin(\pi t^2)$	1
0	0,3	0,2	0,15	$0,7t^3 + 0,1$	2



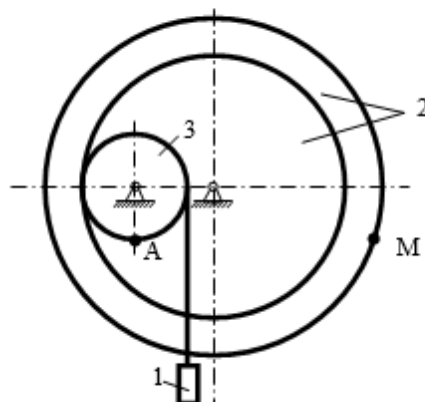




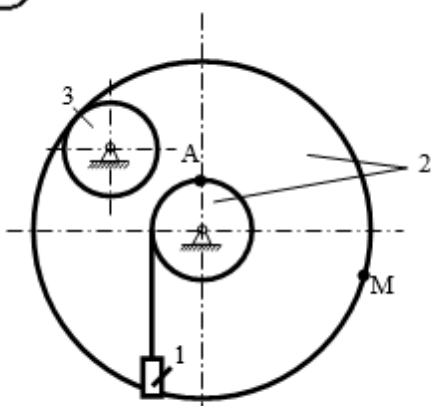
19



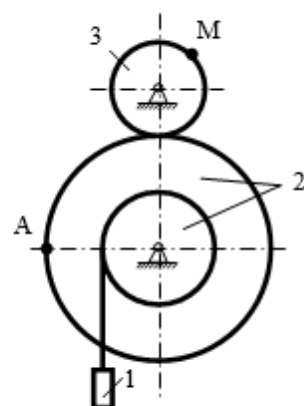
20



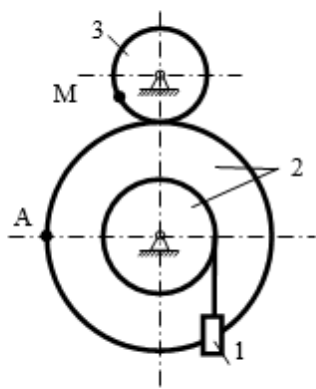
21



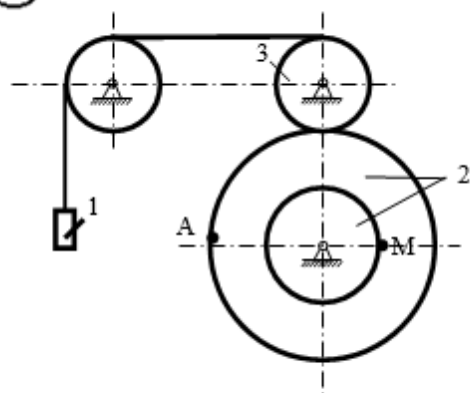
22



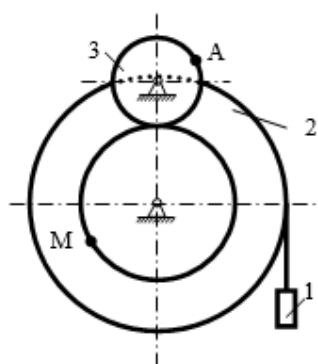
23



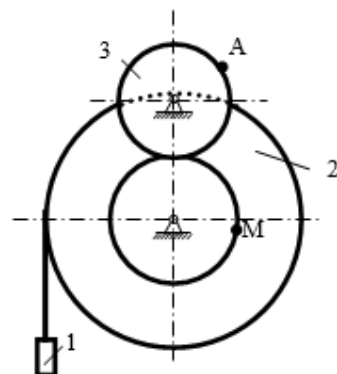
24



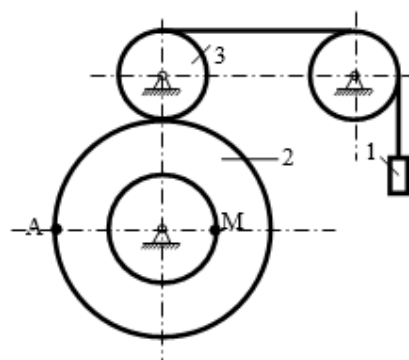
25



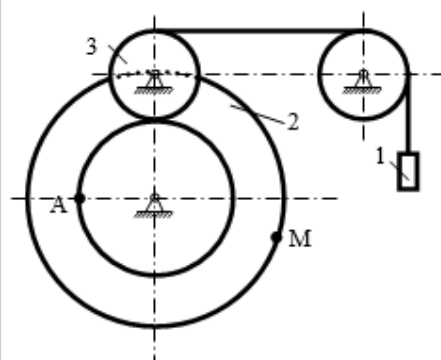
26



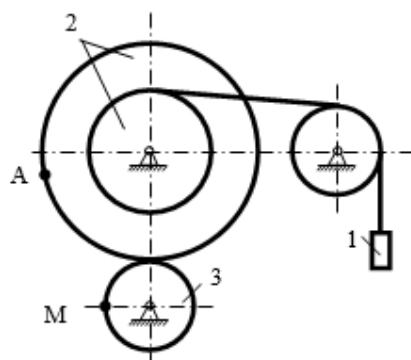
27



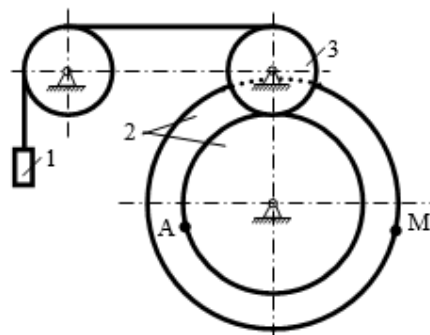
28



29



30



2.2.6 Приклад виконання завдання до ТМ2

Для механізму (рис. 2.41) знайти швидкість і прискорення точок A і M за умови $t_1 = 1\text{ с}$, якщо тіло 2 рухається за законом $\varphi_2 = 8t^3 - 3t^2$ ($R_2 = 0,1\text{ м}$; $R_1 = 0,4\text{ м}$; $r_1 = 0,15\text{ м}$).

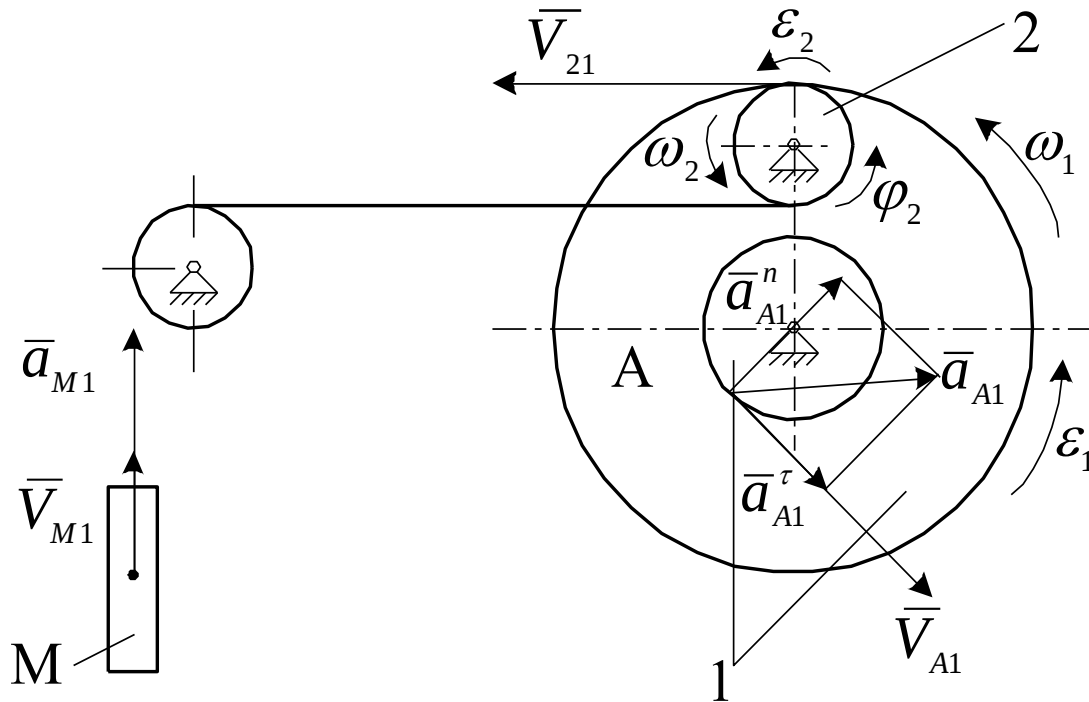


Рисунок 2.41

Розв'язання

Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення тіла 2

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = (24t^2 - 6t) \frac{1}{\text{с}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = (48t - 6) \frac{1}{\text{с}^2}$$

Для $t_1 = 1\text{ с}$

$$\omega_{21} = 24 - 6 = 18 \frac{1}{\text{с}},$$

$$\varepsilon_{21} = 48 - 6 = 42 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Знайдемо швидкість V_{21} точок контакту тіл 2 та 1

$$V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot R_1,$$

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = 0,25\omega_2.$$

Визначимо швидкість точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = 0,25 \cdot 0,15 \cdot \omega_2 = 0,0375 \cdot \omega_2.$$

Прискорення точки A

$$\bar{a}_n = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau,$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_1} = \omega_1^2 r_1 = 9,375 \cdot \omega_2^2 \cdot 10^{-3} \frac{M}{c^2},$$

$$a_A^\tau = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot r_1 = 0,0375 \cdot \varepsilon_2 \frac{M}{c^2},$$

де $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0,25 \cdot \varepsilon_2.$

Величина прискорення точки A

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2}.$$

За умови $t_1=1$ с; $V_{A1} = 0,0375 \cdot \omega_{21} = 0,0375 \cdot 18 = 0,675 \frac{M}{c},$

$$a_{A1}^n = 9,375 \cdot \omega_{21}^2 \cdot 10^{-3} = 9,375 \cdot 18^2 \cdot 10^{-3} = 3,038 \frac{M}{c^2},$$

$$a_{A1}^\tau = 0,0375 \cdot \varepsilon_{21} = 0,0375 \cdot 42 = 1,575 \frac{M}{c^2},$$

$$a_{A1} = \sqrt{3,038^2 + 1,575^2} = 3,42 \frac{M}{c^2}.$$

Визначимо швидкість та прискорення тіла M , що переміщується поступально

$$V_M = V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = 0,1 \cdot \omega_2,$$

$$a_M = \frac{dV_M}{dt} = 0,1 \cdot \varepsilon_2.$$

За $t_1=1$ с $V_{M1} = 0,1 \cdot \omega_{21} = 1,8 \frac{M}{c},$

$$a_{M1} = 0,1 \cdot \varepsilon_{21} = 4,2 \frac{M}{c^2}.$$

Показуємо на рис. 2.41 вектори $\overline{V_{A1}}, \overline{a_{A1}^n}, \overline{a_{A1}^\tau}, \overline{a_{A1}}, \overline{V_{M1}}, \overline{a_{M1}}.$

2.3 Динаміка

Динаміка – це основний розділ теоретичної механіки, де узагальнюються положення і висновки, отримані в статиці і кінематиці; тобто динаміка вивчає механічний рух матеріальних об'єктів, що виникає під дією сил, прикладених до цих об'єктів.

Саме у динаміці ставляться і розв'язуються дві основні задачі механіки:

- за відомим законом руху матеріального об'єкта потрібно визначити сили, які цей рух викликають (перша або пряма задача);
- за відомими силами, що діють на матеріальний об'єкт, потрібно знайти закон його руху (друга або обернена задача).

Звичайно динаміку залежно від конкретного поняття матеріального об'єкта поділяють на три частини: динаміку матеріальної точки, динаміку системи матеріальних точок і динаміку твердого тіла.

2.3.1 Основні поняття та закони динаміки

В основі динаміки лежать закони І. Ньютона, викладені в «Математичних началах натуральної філософії». В процесі формулювання основних законів динаміки користуються такими поняттями, як **сила**, **інертність**, **маса**, **матеріальна точка**.

Сила – це міра механічного прояву фізичного впливу на матеріальні тіла. Сила, як векторна величина, підпорядкована всім законам векторного числення.

Основні види сил: сила тяжіння ($\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, або $m = P/g$); сила тертя ($\vec{F} = f \cdot \vec{N}$); сила пружності ($\vec{F} = c \cdot x$, де c – коефіцієнт жорсткості [Н/м]); сила в'язкого тертя ($\vec{R} = \mu \cdot \vec{V}$), сили аеродинамічного (гідродинамічного) опору.

Одиницею вимірювання сили є **Н** (Ньютон) – це сила, яка надає масі в 1 кілограм прискорення в 1 м/с^2 – $1 \text{ Н} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$. Незалежним первинним

поняттям в теоретичній механіці є маса. Під **масою** розуміють **інертність** тіла. З іншого боку, масу можна визначити як кількість речовин в тілі, що пропорційна його вазі («гравітаційна маса»). У теоретичній механіці вважається, що маса не змінюється за часом, її величина не залежить ні від швидкості точки, ні від її положення у просторі.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло (тіло, що має масу), розмірами якого під час вивчення його руху можна знехтувати.

Закони динаміки

Перший закон Ньютона (закон інерції)

Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших сил не виведе її з цього стану.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки)

Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку. Прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має однаковий з нею напрям:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}.$$

Третій закон Ньютона (закон рівності дії та протидії)

Сили взаємодії двох матеріальних точок або двох тіл (дія і протидія) однакові за величиною, напрямлені в протилежні боки і мають загальну лінію дії.

Четвертий закон Ньютона (принцип суперпозиції)

Прискорення матеріальної точки, що виникає за одночасної дії декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які надають точці окремі сили.

2.3.2 Динаміка точки. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки отримують шляхом проектування векторного рівняння $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ на координатні осі :

а) в декартовій системі координат (див. рис. 2.1):

$$m \cdot a_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} ; m \cdot a_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} ; m \cdot a_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} ,$$

або
$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix} ; m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy} ; m\ddot{z} = \sum_{i=1}^n F_{iz} ,$$

де m – маса точки,

$\ddot{x} = a_x ; \ddot{y} = a_y ; \ddot{z} = a_z$ – проекції прискорення точки на осі,

$\sum_{i=1}^n F_{ix}, \sum_{i=1}^n F_{iy}, \sum_{i=1}^n F_{iz}$ – алгебраїчні суми проекцій на координатні осі сил, що діють на точку.

Ці рівняння називаються динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі.

Якщо точка рухається в площині, то її рух описується першими двома рівняннями, а якщо по прямій, то тільки одним з них (вісь потрібно спрямувати за рухом точки).

б) у природній системі координат в натуральній формі (дотична, нормаль і бінормаль) (рис. 2.42):

$$\frac{m \cdot dV\tau}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} ;$$

$$m \frac{V^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in};$$

$$0 = \sum_{i=1}^n F_{is},$$

де V_τ – проекція швидкості на дотичну τ ;

ρ – радіус кривизни траєкторії в заданій точці;

$\sum_{i=1}^n F_{i\tau}$, $\sum_{i=1}^n F_{in}$, $\sum_{i=1}^n F_{is}$ – алгебраїчні суми проекцій всіх сил, які діють на

точку, на натуральні осі τ , n , s .

Ці рівняння називаються динамічними рівняннями руху точки в **натуральній формі** або у **формі Ейлера**.

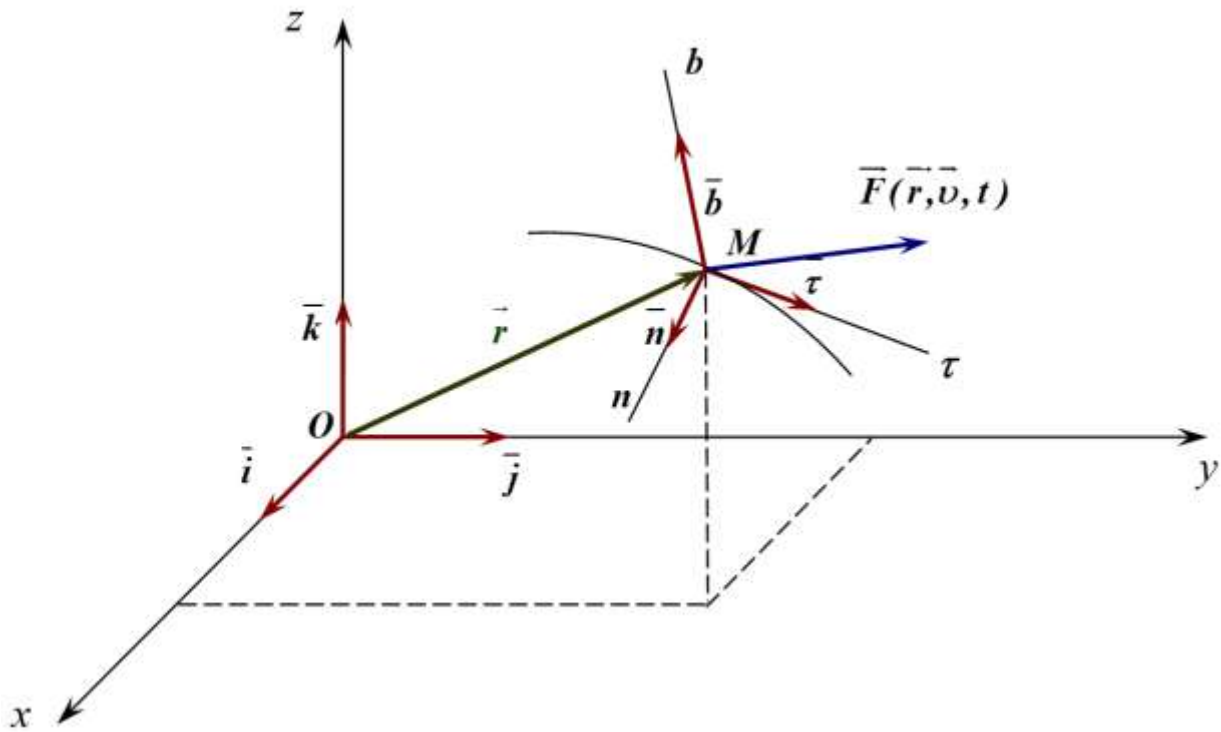


Рисунок 2.42

Ця система використовується, якщо рух точки є невідомим, коли, завдяки наявності зв'язків, точка рухається по відомій траєкторії або поверхні.

Перше рівняння є диференціальним, якщо відомі проекції сил на дотичну до траєкторії руху. Інші два рівняння дозволяють визначити реакції в'язів.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки дозволяють розв'язати дві основні задачі динаміки.

2.3.3 Дві основні задачі динаміки

Перша або **пряма** основна задача динаміки: *знаючи закон руху точки і її масу, визначити сили, що викликають цей рух.*

Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то

1. Диференціюючи двічі ці співвідношення за часом, одержимо проекції прискорень на координатні осі:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

2. Використовуючи динамічні рівняння руху матеріальної точки в координатній формі, визначимо проекції сили:

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}; \quad F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

3. Знаходимо модуль рівнодійної сили $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

4. Напрямок рівнодійної сили визначимо за направленими косинусами

$$\cos(\bar{F}, OX) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\bar{F}, OY) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\bar{F}, OZ) = \frac{F_z}{F}.$$

Друга або **обернена** задача динаміки: *визначити кінематичні рівняння руху точки, якщо відомі її маса m , прикладені до неї сили $\bar{F}$ і початкові умови руху.*

Розв'язання другої задачі динаміки зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

1. Складання динамічних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовами задачі (спочатку знаходять проекції сил F на осі координат (F_x, F_y, F_z)).

2. Інтегрування одержаної системи диференціальних рівнянь.

3. Визначення значень сталих інтегрування. Сталі інтегрування визначають з початкових умов. **Початкові умови** — це величини, що визначають положення точки і проекції вектора швидкості в початковий момент часу ($t = t_0$).

4. Знаходження закону руху: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. Що вивчає розділ теоретичної механіки – динаміка?
2. Які закони лежать в основі динаміки?
3. Що називають матеріальною точкою?
4. Що таке сила?
5. Як отримують диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки?
6. У чому суть першої та другої задач динаміки?

2.3.4 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з теоретичної механіки ТМЗ Рух матеріальної точки у разі дії постійних сил

Варіант 1

Тіло починає рухатись зі стану спокою донизу по гладкій похилій площині, розміщеній під кутом $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. Визначити, за який час тіло пройде шлях 30 м.

Варіант 2

Тіло масою $m = 4$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,8v$. Визначити швидкість тіла в момент часу $\tau = 6$ с.

Варіант 3

Тіло масою $m = 25$ кг починає рухатись зі стану спокою по горизонтальній прямій площині під дією сили $F = 20t$, яка направлена по тій самій прямій. Визначити шлях, який пройде тіло за 4 с.

Варіант 4

Тіло рухається донизу по гладкій похилій площині, розміщеній під кутом $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. В початковий момент руху швидкість тіла дорівнювала $v_0 = 10$ м/с. Визначити, за який час тіло пройде шлях 50 м.

Варіант 5

Тіло масою $m = 200$ кг починає рухатись зі стану спокою донизу по гладкій похилій площині, розташованій під кутом $\alpha = 60^\circ$ з горизонтом. Визначити час, за який тіло пройде шлях 8 м.

Варіант 6

Тіло масою $m = 3$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 2$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,3v$. Визначити швидкість тіла в момент часу $\tau = 3$ с.

Варіант 7

Тіло починає рухатись зі стану спокою донизу по негладкій похилій площині, розміщеній під кутом $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. Визначити шлях, який пройде тіло за 5 с, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$.

Варіант 8

Тіло масою $m = 5$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 3$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,5v$. Визначити шлях, який пройде тіло за 3 с.

Варіант 9

Тіло рухається донизу по гладкій похилій площині, розміщеній під кутом $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. В початковий момент руху швидкість тіла дорівнювала $v_0 = 5$ м/с. Визначити, за який час тіло пройде шлях 40 м.

Варіант 10

Тіло масою $m = 6$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 4$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,6v$. Визначити швидкість тіла в момент часу $\tau = 4$ с.

Варіант 11

Тіло масою $m = 15$ кг рухається по горизонтальній прямій площині під дією сили $F = 15t$, яка направлена по тій самій прямій. В початковий момент руху швидкість тіла дорівнювала $v_0 = 10$ м/с. Визначити шлях, який пройде тіло за 8 с.

Варіант 12

Тіло масою $m = 7$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 6$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,7v$. Визначити шлях, який пройде тіло за 4 с.

Варіант 13

Тіло масою $m = 100$ кг рухається доверху по гладкій похилій площині, що створює кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. В початковий момент руху швидкість тіла дорівнювала $v_0 = 15$ м/с. Визначити час, за який тіло пройде шлях 10 м.

Варіант 14

Тіло рухається донизу по гладкій похилій площині, що утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з горизонтом. В початковий момент руху швидкість тіла дорівнювала $v_0 = 7$ м/с, а координата $x_0 = 1$ м. Визначити, за який час тіло пройде шлях 20 м.

Варіант 15

Тіло рухається донизу по негладкій похилій площині, розміщеній під кутом $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. В початковий момент руху швидкість тіла дорівнювала $v_0 = 18$ м/с. Визначити шлях, який пройде тіло за 10 с, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$.

Варіант 16

Тіло масою m починає рухатись зі стану спокою донизу по гладкій похилій площині, що утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з горизонтом. Визначити час, за який тіло пройде шлях 9 м.

Варіант 17

Тіло масою $m = 8$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 7$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,8v$. Визначити швидкість тіла в момент часу $\tau = 5$ с.

Варіант 18

Тіло починає рухатись зі стану спокою донизу по негладкій похилій площині, розміщеній під кутом $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. Визначити шлях, який пройде тіло за 10 с, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$.

Варіант 19

Тіло масою $m = 18$ кг рухається по горизонтальній прямій площині під дією сили $F = 9t$, яка направлена по тій же прямій. В початковий момент руху швидкість тіла дорівнювала $v_0 = 6$ м/с, а координата $x_0 = 0,5$ м. Визначити шлях, який пройде тіло за 15 с.

Варіант 20

Тіло масою $m = 2$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,4v$. Визначити шлях, який пройде тіло за 6 с.

Варіант 21

Тіло масою $m = 80$ кг рухається доверху по гладкій похилій площині, що складає кут $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. В початковий момент руху швидкість тіла дорівнювала $v_0 = 4$ м/с, а координата $x_0 = 0,7$ м. Визначити час, за який тіло пройде шлях 5 м.

Варіант 22

Тіло масою $m = 3$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 11$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,6v$. Визначити швидкість тіла в момент часу $\tau = 7$ с.

Варіант 23

Тіло рухається донизу по негладкій похилій площині, що складає кут $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. В початковий момент руху швидкість тіла дорівнювала $v_0 = 13$ м/с, а координата $x_0 = 0,2$ м. Визначити шлях, який пройде тіло за 12 с, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$.

Варіант 24

Тіло масою $m = 2$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 5$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,4v$. Визначити шлях, який пройде тіло за 7 с.

Варіант 25

Тіло починає рухатись зі стану спокою донизу по гладкій похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. Визначити, за який час тіло пройде шлях 20 м.

Варіант 26

Тіло масою $m = 3$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 6$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,9v$. Визначити швидкість тіла в момент часу $\tau = 8$ с.

Варіант 27

Тіло масою $m = 23$ кг починає рухатись зі стану спокою по горизонтальній прямій площині під дією сили $F = 20t$, яка направлена по тій самій прямій. Визначити шлях, який пройде тіло за 3 с.

Варіант 28

Тіло масою $m = 4$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 7$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,8v$. Визначити шлях, який пройде тіло за 8 с.

Варіант 29

Тіло масою $m = 150$ кг починає рухатись зі стану спокою донизу по гладкій похилій площині, розміщеній під кутом $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. Визначити час, за який тіло пройде шлях 7 м.

Варіант 30

Тіло масою $m = 5$ кг рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 8$ м/с. На точку діє сила опору $R = 0,5v$. Визначити швидкість тіла в момент часу $\tau = 9$ с.

2.3.5 Приклад виконання завдання до ТМЗ

Приклад 1. Вантаж масою m підіймається по шорсткій похилій площині (рис. 2.43), розташований під кутом $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. В початковий момент швидкість вантажу дорівнювала $v_0 = 15$ м/с. Коефіцієнт тертя $f = 0,1$. Який шлях пройде вантаж до зупинки? За який час вантаж пройде цей шлях?

Розв'язання

1. Для дослідження руху вантажу запишемо диференціальне рівняння невірного вантажу в проекціях на вісь x .

$$m\ddot{x} = \Sigma F_x \quad (2.18)$$

Вантаж переміщується під дією ваги P , нормальної складової N та сили тертя $F_{тр}$ шорсткої поверхні.

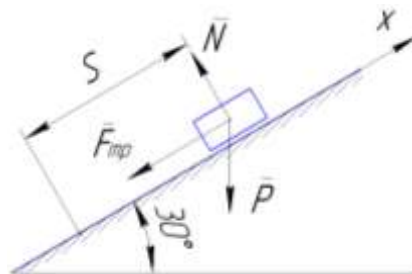


Рисунок 2.43

Враховуючи сили, прикладені до вантажу (рис. 2.43), рівняння (2.18) запишеться в вигляді:

$$m\ddot{x} = -P \sin 30^\circ - F_{\text{тр}}. \quad (2.20)$$

Вага вантажу біля поверхні Землі.

$$P = mg. \quad (2.21)$$

За законом Амонтона-Кулона у випадку критичної рівноваги вантажу отримаємо:

$$F_{\text{тр}} = fN. \quad (2.22)$$

Оскільки вантаж рухається вздовж осі x , то:

$$N = P \cos 30^\circ \quad (2.23)$$

Підставимо формули (2.21), (2.22) та (2.23) в диференціальне рівняння (2.20)

$$m\ddot{x} = -mg \sin 30^\circ - fmg \cos 30^\circ; m \neq 0. \quad (2.24)$$

$$\ddot{x} = -g(\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ). \quad (2.25)$$

$$\ddot{x} = -9,8 \left(\frac{1}{2} + 0,1 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -5,75. \quad (2.26)$$

$$\ddot{x} = -5,75. \quad (2.27)$$

2. Інтегруємо диференційне рівняння (2.27) двічі:

$$\dot{x} = -5,75t + C_1, \quad (2.28)$$

$$x = -5,75 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (2.29)$$

3. Для визначення сталих інтегрування в рівняннях (2.28) та (2.29) скористаємось початковими умовами:

Початкові умови: за $t = 0$; $\dot{x}_0 = 15 \text{ м/с}$; $x_0 = 0$.

Отже, $C_1 = \dot{x}_0$; $C_2 = x_0$. Відповідно: $C_1 = 15$; $C_2 = 0$, тоді

$$\dot{x} = -5,75t + 15. \quad (2.30)$$

$$x = -5,75 \frac{t^2}{2} + 15t + 0. \quad (2.31)$$

4. Для моменту τ , коли вантаж зупиниться.

За умови $t = \tau$; $\dot{x} = 0$; $x = S$.

Тоді

$$0 = -5,75\tau + 15. \quad (2.32)$$

$$S = -5,75 \frac{\tau^2}{2} + 15\tau. \quad (2.33)$$

З формули (2.32) знаходимо τ :

$$\tau = 15 / 5,75 = 2,61 \text{ с.} \quad (2.34)$$

Підставимо значення τ із (2.34) в рівняння (2.33) і отримаємо шлях, який пройде вантаж до зупинки

$$S = -5,75 \frac{2,61^2}{2} + 15 \cdot 2,61 = 19,57 \text{ м.}$$

Відповідь: $\tau = 2,61 \text{ с}$; $S = 19,57 \text{ м}$.

Приклад 2. Тіло масою $m = 2 \text{ кг}$ рухається по горизонтальній прямій площині з початковою швидкістю $v_0 = 8 \text{ м/с}$. На тіло діє сила опору $R = 0,8v$ (рис. 2.44). Визначити:

- швидкість тіла в момент часу $\tau = 5 \text{ с}$;
- шлях, який пройде тіло за 5 с .

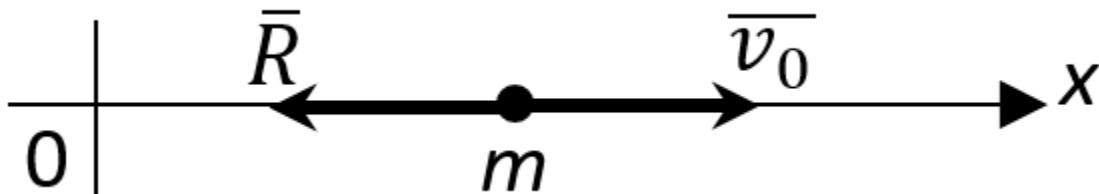


Рисунок 2.44

Диференціальне рівняння руху в цьому випадку матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}) . \quad (2.35)$$

Спроекуємо усі діючі на вісь X сили:

$$m\ddot{x} = -R , \quad (2.36)$$

$$R = 0,8\dot{x} , \quad (2.37)$$

Підставимо (2.37) в (2.36):

$$m\ddot{x} = -0,8\dot{x} . \quad (2.38)$$

Оскільки $m \neq 0$, тоді :

$$\ddot{x} = -\frac{0,8}{2} \dot{x} \quad (2.39)$$

$$\ddot{x} = -0,4\dot{x} \quad (2.40)$$

Враховуючи те, що $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$,

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -0,4\dot{x} . \quad (2.41)$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -0,4dt . \quad (2.42)$$

Інтегруємо рівняння (2.42)

$$\ln \dot{x} = -0,4t + C_1 . \quad (2.43)$$

Використовуємо початкові умови для визначення сталої інтегрування C_1 .

Початкові умови: $t = 0$; $\dot{x} = v_0 = 8$ м/с.

$$\ln 8 = -0,4 \cdot 0 + C_1 ; \quad (2.44)$$

$$C_1 = \ln 8 .$$

$$\ln \dot{x} = -0,4t + \ln 8 \quad (2.45)$$

$$\ln \dot{x} - \ln 8 = -0,4t \quad (2.46)$$

За властивістю логарифмів

$$\ln \frac{\dot{x}}{8} = -0,4t. \quad (2.47)$$

$$\dot{x} = 8e^{-0,4t}. \quad (2.48)$$

Інтегруємо рівняння (2.48)

$$x = -\frac{10}{4}8e^{-0,4t} + C_2. \quad (2.49)$$

Використовуємо початкові умови для визначення сталої інтегрування C_2 .

Початкові умови:

За $t = 0; x=0$

$$0 = -\frac{10}{4}8e^{-0,4 \cdot 0} + C_2. \quad (2.50)$$

$$C_2 = 20.$$

$$\text{Тоді} \quad x = -\frac{10}{4}8e^{-0,4t} + 20. \quad (2.51)$$

або

$$x = -20e^{-0,4t} + 20 = 20(1 - e^{-0,4t}). \quad (2.52)$$

Граничні умови:

За $t = \tau = 5\text{с}; \dot{x} = v_\tau; x = S_\tau$.

Підставляємо граничні умови в рівняння (2.48) та (2.52):

$$v_\tau = 8e^{-0,4\tau} = 8e^{-0,4 \cdot 5} = 1,1 \text{ (м/с)}.$$

$$S_\tau = 20(1 - e^{-0,4\tau}) = 20(1 - e^{-0,4 \cdot 5}) = 17,3 \text{ (м)}.$$

Відповідь: $v_\tau = 1,1 \text{ (м/с)}; S_\tau = 17,3 \text{ (м)}$.

2.3.6 Динаміка системи матеріальних точок (динаміка матеріальної системи). Основні (загальні) теореми динаміки

Системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємопов'язані.

1. Теорема про рух центра мас механічної системи

Центр мас механічної системи рухається як вільна матеріальна точка, яка має масу цієї системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на

систему:

$$m\bar{a}_C = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^e = \bar{F}^e, \quad i = 1, 2, 3 \dots n,$$

де $\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^e$ – сили, які діють на тіло і точки системи з боку тіл, що не входять до системи.

Диференціальні рівняння руху центра мас:

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e = F_x^e;$$

$$m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e = F_y^e;$$

$$m\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e = F_z^e.$$

Наслідки теореми

1. Внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас матеріальної системи.
2. Якщо головний вектор $\bar{F}^e$ зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю ($\bar{F}^e = 0$), то центр мас перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно залежно від початкових умов.
3. Якщо одна з проекцій головного вектора зовнішніх сил на вісь нерухомої системи координат дорівнює нулю (наприклад, $F_{ix}^e = 0$), то проекція швидкості центра мас на цю вісь (V_{cx}) не змінюється, є сталою величиною $V_{cx} = \dot{x}_C = const$.

Приклад розв'язання задачі

По похилій площині (рис. 2.45) призми 1 маси $m_1 = 10$ кг спускається вантаж 2 ($m_2 = 6$ кг), який тягне за допомогою невагомої нитки вантаж 3 масою $m_3 = 4$ кг.

Знайти переміщення призми 1 по гладенькій горизонтальній площині, якщо тіло 2 опустилось по похилій площині на $S = 0,5$ м.

Розв'язання

Покажемо зовнішні сили, прикладені до матеріальної системи, що складається з призми 1 та тіл 2, 3. Такими самими є: $P_1 = m_1 g$ – сила ваги

призми, $P_2 = m_2g$ і $P_3 = m_3g$ – вага відповідно другого та третього вантажів, N – реакція гладенької горизонтальної поверхні.

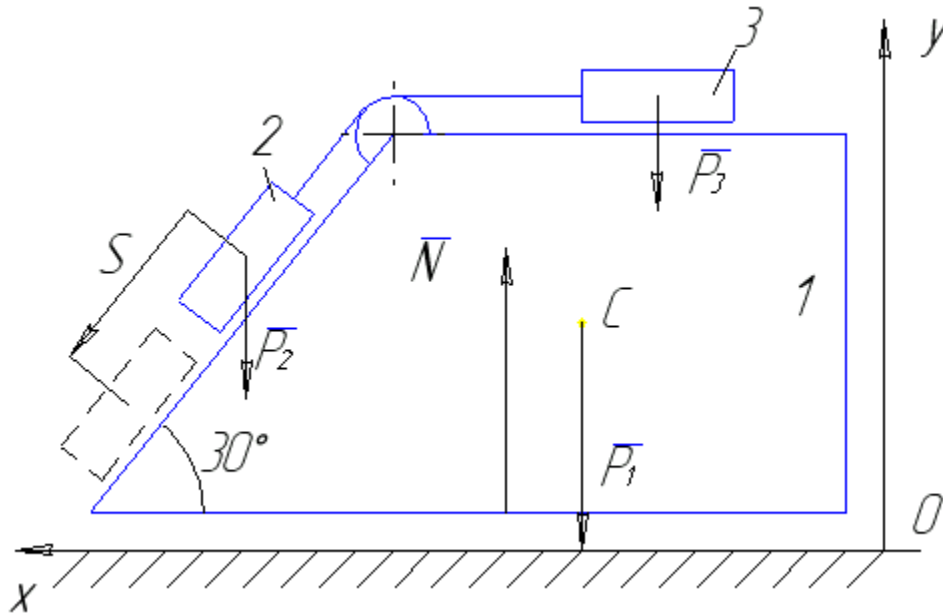


Рисунок 2.45

Запишемо теорему про рух центра мас матеріальної системи в проекціях на вісь X :

$$M\ddot{x}_C = F_X^e \quad (2.53)$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3$,

F_X^e – проекція головного вектора зовнішніх сил на вісь X .

Оскільки $F_X^e = 0$, то $M\ddot{x}_C = 0$. Тоді $M\dot{x}_C = C_1$.

В початковий момент часу система знаходилась у спокої і тому $C_1 = 0$. Із формули (2.53) маємо:

$$Mx_C = C_2.$$

Таким чином, координата x_C центра мас матеріальної системи залишається сталою незалежно від переміщень тіл, що входять у систему.

Визначимо положення центра мас системи в початковий момент часу:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} \quad (2.54)$$

Якщо вантаж 2 переміститься на величину Δx_2 , тоді тіло 3 – на Δx_3 , а призма 1 – Δx_1 і положення x_C центра мас знайдемо за формулою:

$$X_C = \frac{m_1(x_1 + \Delta x_1) + m_2(x_2 + \Delta x_2) + m_3(x_3 + \Delta x_3)}{M}. \quad (2.55)$$

Враховуючи (2.54), із формули (2.55) отримаємо:

$$m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 = 0. \quad (2.56)$$

Переміщення ΔX_2 та ΔX_3 складається із відносного по призмі і переносного разом із призмою.

$$\Delta x_2 = S \cdot \cos 30^\circ + \Delta x_1,$$

$$\Delta x_3 = S + \Delta x_1.$$

Тепер із формули (4) знаходимо переміщення призми.

$$10 \cdot \Delta x_1 + 6(S \cdot \cos 30^\circ + \Delta x_1) + 4(S + \Delta x_1) = 0,$$

$$\Delta x_1 = -\frac{(6 \cdot \cos 30^\circ + 4)S}{10 + 6 + 4} = -0,229 \text{ м.}$$

Знак «мінус» вказує на те, що призма 1 перемістилася в сторону, протилежну додатному напрямку осі X .

2. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки і кількості руху механічної системи

Кількістю руху (мірою механічного руху) матеріальної точки масою m_i називається вектор $\bar{q}_i$, який дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості $\bar{q}_i = m_i \bar{V}_i$.

Кількістю руху системи матеріальних точок називається головний вектор (векторна сума) кількостей руху всіх точок системи:

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \bar{V}_i$$

або кількість руху всієї системи дорівнює кількості руху однієї матеріальної точки, маса якої дорівнює масі системи, а швидкість – швидкості центра мас: $\bar{Q} = m \bar{V}_C$.

Векторній формі цього рівняння відповідають три рівності в координатній формі:

$$Q_x = mV_{Cx}; \quad Q_y = mV_{Cy}; \quad Q_z = mV_{Cz}.$$

Імпульсом сталої сили $\bar{S}$ називається векторна величина, яка дорівнює добутку сили на час її дії

$$\bar{S} = \bar{F} \cdot \Delta t.$$

Повний імпульс сили

$$\bar{S} = \int_{t_0}^t \bar{F} \cdot dt.$$

Проекції імпульсу сили на координатні осі

$$S_x = \int_{t_0}^t F_x \cdot dt; \quad S_y = \int_{t_0}^t F_y \cdot dt; \quad S_z = \int_{t_0}^t F_z \cdot dt;.$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі: похідна за часом від кількості руху матеріальної точки геометрично дорівнює рівнодійній сил, прикладених до точки

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{R}$$

або

$$\frac{d(mV_x)}{dt} = R_x; \quad \frac{d(mV_y)}{dt} = R_y; \quad \frac{d(mV_z)}{dt} = R_z.$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі: зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної сили за той самий проміжок часу:

$$m\bar{V}_i - m\bar{V}_0 = \bar{S}$$

або в проекціях на осі координат:

$$mV_{ix} - mV_{0x} = S_x; \quad mV_{iy} - mV_{0y} = S_y; \quad mV_{iz} - mV_{0z} = S_z.$$

Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній формі: похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на систему:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}^e$$

або в проекціях на осі координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e.$$

Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі: зміна кількості руху системи за якийсь проміжок часу дорівнює сумі імпульсів, що діють на систему зовнішніх сил, за цей самий проміжок часу:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \bar{S}^e,$$

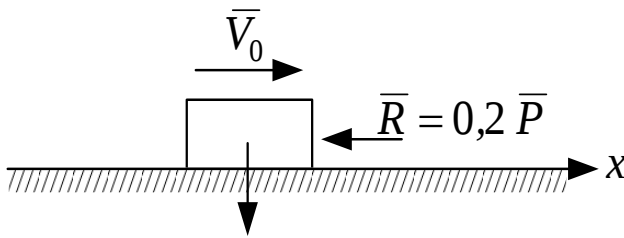
у проекціях на осі:

$$Q_{lx} - Q_{0x} = \sum_{i=1}^n S_{ix}^e; \quad Q_{ly} - Q_{0y} = \sum_{i=1}^n S_{iy}^e; \quad Q_{lz} - Q_{0z} = \sum_{i=1}^n S_{iz}^e.$$

Наслідки теореми

1. Внутрішні сили системи безпосередньо не впливають на зміну вектора кількості руху системи.
2. Якщо сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю $\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^e = 0$, то вектор кількості руху системи буде постійним за модулем і напрямком $\bar{Q} = \text{const}$. $\bar{Q} = \text{const}$ – закон збереження кількості руху системи.
3. Якщо сума проекцій всіх діючих сил на будь-яку вісь F_{ix}^e дорівнює нулю $\sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix}^e = 0$, то проекція кількості руху системи на цю вісь є величиною постійною, $Q_x = \text{const}$.

Приклад розв'язання задачі



По горизонтальній ділянці шляху рухається тіло масою m зі швидкістю 10 м/с, і зустрічає силу опору $\bar{R}$, яка дорівнює 0,2 від ваги тіла (рис. 2.46).

Рисунок 2.46

У деякий момент часу рушійна сила – сила тяги – вимикається, а тіло продовжує рухатися далі.

Визначити, через який час тіло зупиниться?

Розв'язання

За теоремою імпульсів

$$mV_x - mV_{0x} = \int_0^t -0,2P dt = -0,2Pt,$$

$$V_x = 0, \quad \bar{P} = m\bar{g}, \quad \bar{R} = 0,2m\bar{g},$$

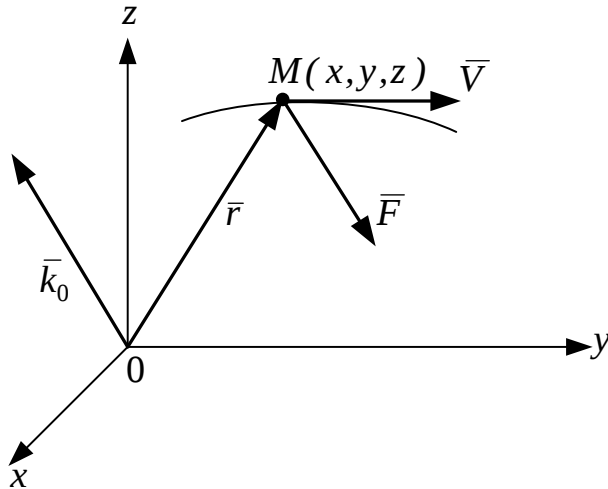
$$-mV_{0x} = -0,2mgt.$$

Тоді

$$t = \frac{V_{ox}}{0,2g} = \frac{10}{0,2 \cdot 10} = 5 \text{ с.}$$

Відповідь: тіло зупиниться за 5 с після вимкнення тяги.

3. Теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і механічної системи



Моментом кількості руху точки M відносно центра O називається величина $\bar{k}_0$, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\bar{r}$ матеріальної точки, проведеного з цього центра, на кількість її руху (рис. 2.47)

$$\bar{k}_0 = \bar{r} \times \bar{q} = \bar{r} \times m\bar{v}.$$

Рисунок 2.47

Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки: похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра O (або осі) дорівнює моменту рівнодійної сил, прикладених до точки, відносно того самого центра (або осі): $\frac{d\bar{k}_0}{dt} = \bar{M}_0(\bar{F})$

або
$$\frac{dk_x}{dt} = \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i); \quad \frac{dk_y}{dt} = \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i); \quad \frac{dk_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i);$$

Кінетичним моментом системи матеріальних точок або головним моментом кількості руху системи ($\bar{K}_0$) відносно центра O називається векторна сума моментів кількостей руху точок системи відносно того самого центра:

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{k}_{0i} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{V}_i,$$

де $\bar{k}_{0i}$ – момент кількості руху i -ї точки системи,

$m_i \bar{V}_i$ – кількість руху i -ї точки,

$\bar{r}_i$ – радіус-вектор, що з'єднує нерухомий центр O з i -ю точкою системи.

Кінетичний момент системи відносно координатних осей

$$K_x = \sum_{i=1}^n M_x(m_i \bar{V}_i); \quad K_y = \sum_{i=1}^n M_y(m_i \bar{V}_i); \quad K_z = \sum_{i=1}^n M_z(m_i \bar{V}_i).$$

Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання

Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω (рис. 2.48).

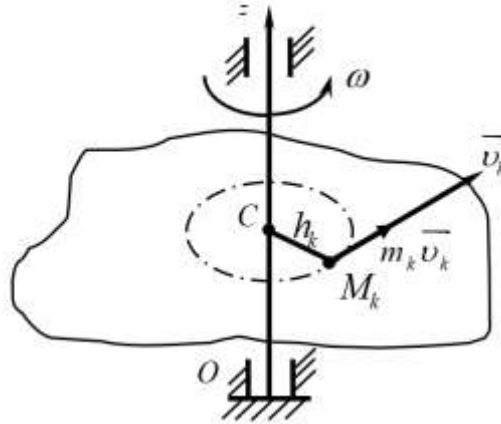


Рисунок 2.48

Для довільної точки тіла M_k масою m_k , яка розташована на відстані h_k від осі обертання і має швидкість $\vec{v}_k$, кінетичний момент:

$$K_{kz} = M_z(m_k \vec{v}_k).$$

Але $v_k = h_k \cdot \omega$, причому вектор кількості руху точки перпендикулярний до h_k , тобто він лежить у площині, перпендикулярній до осі Oz . Отже виходить, що:

$$K_{kz} = h_k \cdot m_k \cdot v_k = m_k h_k^2 \omega.$$

Кінетичний момент всього тіла: $K_z = \sum_1^n m_k h_k^2 \omega.$

Як було визначено раніше, $\sum_1^n m_k h_k^2$ є моментом інерції тіла відносно осі Oz , тому остаточно: $K_z = J_z \cdot \omega$

Таким чином, **кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання** дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на кутову швидкість тіла.

Знак кінетичного моменту збігається зі знаком кутової швидкості.

Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи:
 похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно будь-якого нерухомого центра $\bar{K}_0$ дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил системи відносно того самого центра:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_i^e)$$

або в проекціях на осі:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i^e); \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i^e); \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i^e),$$

або похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно будь-якої нерухомої осі дорівнює головному моменту зовнішніх сил, що діють на систему відносно тієї самої осі.

Для осей, що рухаються поступально: $\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i^e).$

Наслідки теореми

1. Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну моменту кількості руху системи.
2. Якщо сума моментів відносно заданого центра всіх прикладених до системи зовнішніх сил дорівнює нулю $\bar{M}_0^e = 0$, то $\bar{K}_0 = const$.
 $\bar{K}_0 = const$ – закон збереження головного моменту кількості руху (закон збереження кінетичного моменту відносно центра O). За допомогою даного закону створені всі системи навігації.
3. Якщо $\sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i^e) = 0$, то головний момент кількості руху системи відносно цієї осі буде величиною постійною $K_z = const$.

Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Припустимо, що певне тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Oz під дією системи зовнішніх сил $\{\bar{F}_k^e\}$. Тоді :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_1^n M_z(\bar{F}_k^e),$$

де K_z – кінетичний момент тіла відносно осі Oz .

В той самий час, як відомо, $K_z = J_z \cdot \omega$, і попереднє співвідношення набуває вигляду:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_1^n M_z(\overline{F_k^e}).$$

Отримана формула і є диференціальним рівнянням обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Під час обчислення суми моментів зовнішніх сил відносно осі обертання твердого тіла потрібно мати на увазі, що реакції ідеальних в'язей (реакції опор осі) в рівняння не входять, бо лінії їх дії перетинають вісь.

З диференціального рівняння обертання тіла виходить:

1. Якщо $\sum M_z(\overline{F_k^e}) = const$, то $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ також є сталою, тобто обертання тіла є рівнозмінним.

2. Якщо $\sum M_z(\overline{F_k^e}) = 0$, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$ і $\omega = const$ – маємо випадок рівномірного обертання тіла навколо осі.

Примітка: кінетичний момент системи матеріальних точок (головний момент кількості руху системи) позначають $\bar{K}_0$ або $\bar{L}_0$.

4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і механічної системи

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна міра механічного руху в нерухомій системі координат, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості $T = \frac{mV^2}{2}$.

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називають суму кінетичних енергій всіх точок, що входять у систему:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2,$$

де m_i – маса i -точки системи;

V_i – швидкість i -точки.

Якщо система складається з кількох твердих тіл, то її кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл, що входять в систему.

1. За поступального руху твердого тіла: $T = \frac{M \cdot V_C^2}{2}$.

2. За обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі z : $T = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2$.

3. За плоско-паралельного руху: $T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{1}{2} I_{cz} \cdot \omega^2$,

де M – маса тіла;

V_c – швидкість центра мас тіла;

I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання z ;

I_{zc} – момент інерції тіла відносно осі Z_c , що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до площини руху;

ω – миттєва кутова швидкість тіла.

Наприклад, для колеса масою M , яке котиться без ковзання по прямолінійній рейці (рис. 2.49)

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{MR^2}{2} \cdot \left(\frac{V_c}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} M V_c^2$$

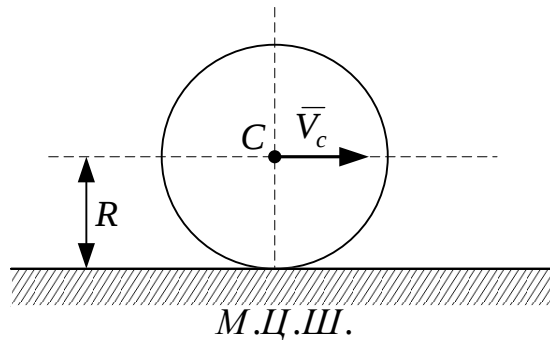


Рисунок 2.49

Елементарною роботою δA сили F називається скалярна величина, що дорівнює скалярному добутку $\vec{F}$ на вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$ точки її прикладення (рис. 2.50):

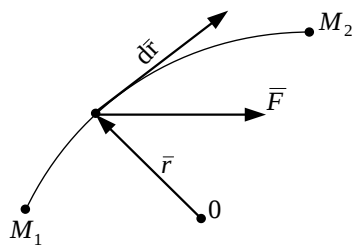


Рисунок 2.50

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r})$$

Якщо під дією сили $\vec{F}$ матеріальна точка переміщується з положення M_1 в положення M_2 , то робота сили $\vec{F}$ на шляху $M_1 M_2$ дорівнює

$$A = \int_{M_1 M_2} \delta A = \int_{M_1 M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1 M_2} F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F}, dr).$$

Враховуючи властивості скалярного добутку, маємо

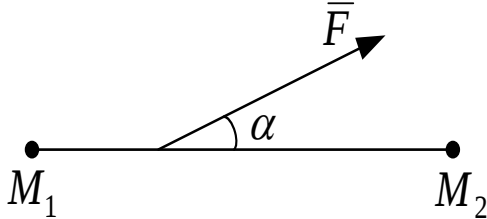
$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Робота на скінченному переміщенні

$$A_{M_1 M_2} = \int_{M_1 M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Одиниця виміру роботи $[A] = H \cdot M = 1 \text{ Дж} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$.

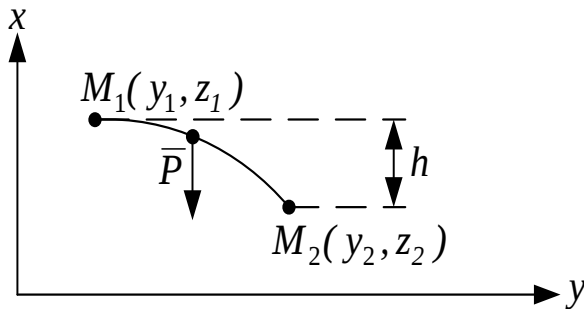
1. Робота сталої сили $\vec{F}$ на прямолінійному переміщенні S (рис. 2.51):



$$A = F \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Рисунок 2.51

2. Робота сили тяжіння (рис. 2.52)



$A = \pm F \cdot h$ («+» коли точка опускається,
«-» коли точка підіймається),
де h – різниця кінцевого і початкового положень

Рисунок 2.52

3. Робота пружної сили: $A = \frac{c}{2} [(\Delta l_{\text{поч}})^2 - (\Delta l_{\text{кін}})^2]$,

де c – коефіцієнт пружності,

$\Delta l_{\text{поч}}$ – початкова деформація пружини,

$\Delta l_{\text{кін}}$ – кінцева деформація пружини.

4. Робота сили тертя: $A = -F_{\text{тр}} \cdot S$

5. Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається:

$$A = M_{OZ} \cdot \varphi,$$

де $M_{OZ} = \text{const}$ – момент сили відносно осі обертання,

φ – кут повороту.

Потужність – це робота, виконана за одиницю часу.

$$N = \frac{dA}{dt} = \bar{F} \cdot V = F_{\tau} \cdot V ,$$

де F_{τ} – проекція сили на дотичну вісь;
 V – швидкість точки прикладення сили.

Потужність сили, прикладеної до тіла, що обертається

$$N = M_z(\bar{F}) \cdot \omega ,$$

де $M_z(\bar{F})$ – момент сили відносно осі обертання z ;
 ω – кутова швидкість тіла.

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки: приріст кінетичної енергії точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі рівнодійної всіх сил, що прикладені до точки на цьому самому відрізку дуги траєкторії:

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A ,$$

де V_2 – швидкість точки в кінці пройденого шляху;

V_1 – швидкість точки на початку шляху;

$A = \sum_{i=1}^n A_i$ – алгебраїчна сума роботи сил, прикладених до точки, на пройденому шляху.

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі: приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює сумі робіт зовнішніх сил, що діють на точки системи, протягом розглянутого проміжку часу

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i ,$$

де T_0, T – кінетична енергія системи відповідно в початковому і кінцевому її положеннях;

$\sum_{i=1}^n A_i$ – сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему.

У випадку абсолютно твердого тіла (незмінна система), внутрішні сили урівноважуються і їхня робота дорівнює нулю. Також дорівнює нулю робота ідеальних зв'язків.

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи у диференціальній формі:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n N_i,$$

тобто похідна від кінетичної енергії за часом дорівнює сумі потужностей усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до системи.

**Питання для самоперевірки знань
та контролю засвоєння матеріалу**

1. У чому суть теореми про рух центра мас механічної системи і які наслідки випливають із неї?
2. Що називають кількістю руху матеріальної точки?
3. Що називають кількістю руху системи матеріальних точок?
4. Що називають імпульсом сили?
5. У чому суть теореми про зміну кількості руху системи матеріальних точок і які наслідки випливають із неї?
6. Що називають моментом кількості руху точки відносно деякого центра?
7. Що називають кінетичним моментом системи матеріальних точок або головним моментом кількості руху системи відносно деякого центра?
8. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання?
9. У чому суть теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи і які наслідки випливають із неї?
10. Як записується диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі?
11. Що називають кінетичною енергією матеріальної точки?
12. Що називають кінетичною енергією системи матеріальних точок?
13. Що називають елементарною роботою?
14. Що називають потужністю?
15. У чому суть теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи?

2.3.7 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи.
Розрахунково-графічна робота (РГР) з теоретичної механіки

ТМ4 Визначення кінематичних характеристик тіл за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

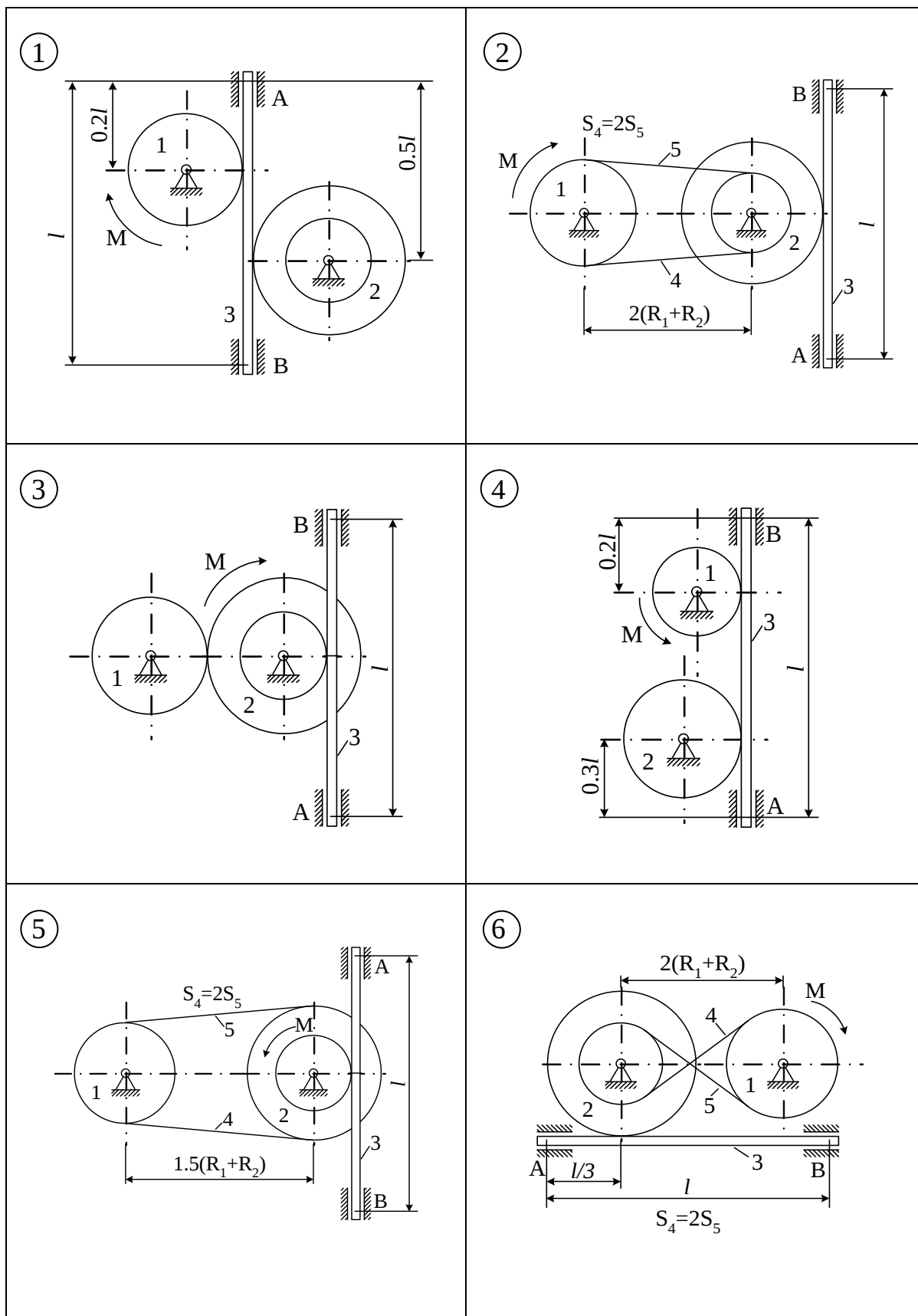
Матеріальна система (С. 92 – 96) приводиться до руху моментом M . Знайти прискорення тіла 3 та кутові прискорення тіл в момент часу $t = t_1$.

Масами пасів та їх ковзанням по шківках знехтувати. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Однорідний диск 1 та ступінчастий шків 2 обертаються навколо горизонтальних осей.

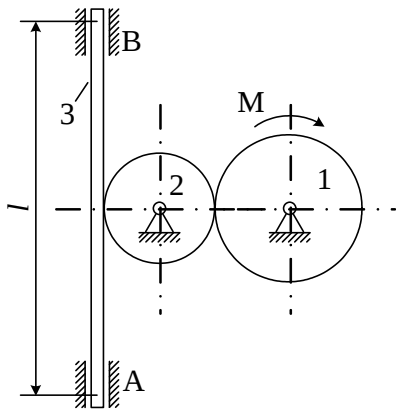
Дані для розрахунку наведено в таблиці 2.3, де m_1, m_2, m_3 – маси тіл 1, 2 та 3; R_1, R_2, r_2 – розміри тіл 1 та 2; i_2 – радіус і інерції тіла 2 відносно горизонтальної осі.

Таблиця 2.3

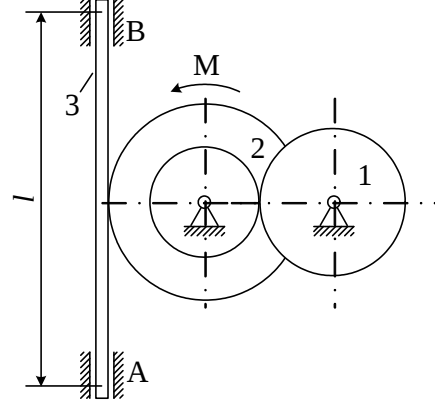
Варіант	$R_1, \text{ м}$	$R_2, \text{ м}$	$r_2, \text{ м}$	$i_2, \text{ м}$	$m_1, \text{ кг}$	$m_2, \text{ кг}$	$m_3, \text{ кг}$	$M, H \cdot M$	$t_1, \text{ с}$
1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	2	1	$1+3t$	2
2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,3	3	2	$2+t^2$	1
3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,4	4	3	$3+2t^2$	3
4	0,5	0,6	0,4	0,5	0,5	5	4	$4+t^2$	4
5	0,6	0,55	0,25	0,4	0,6	6	3	$6+5t$	5
6	0,1	0,15	0,1	0,1	0,1	1	1	$2+3t^2$	6
7	0,15	0,2	0,15	0,2	0,15	1,5	1	$4+5t$	2
8	0,25	0,3	0,2	0,25	0,25	2,5	2	$5+3t^2$	1
9	0,35	0,4	0,2	0,3	0,35	3,5	3	$7+2t$	3
0	0,45	0,5	0,4	0,45	0,45	4,5	4	$9+t^2$	2



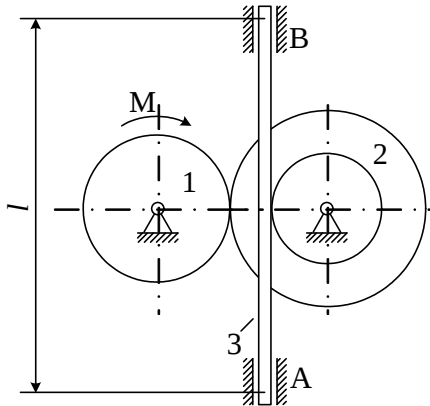
7



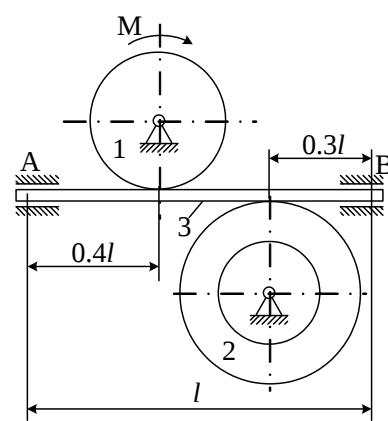
8



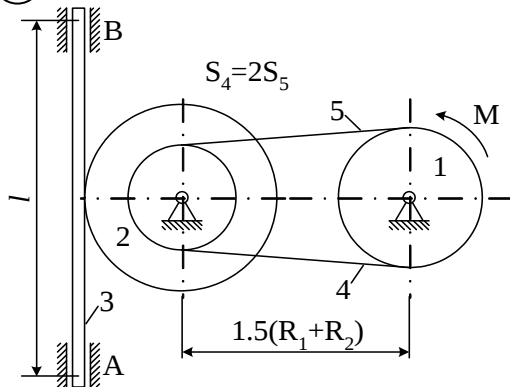
9



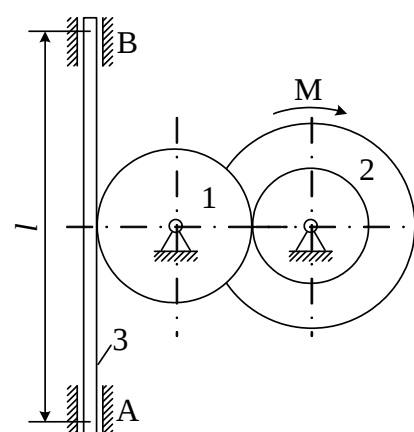
10



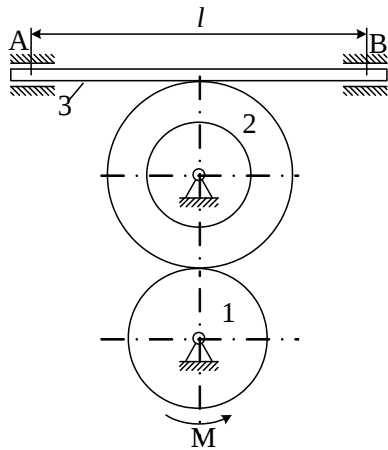
11



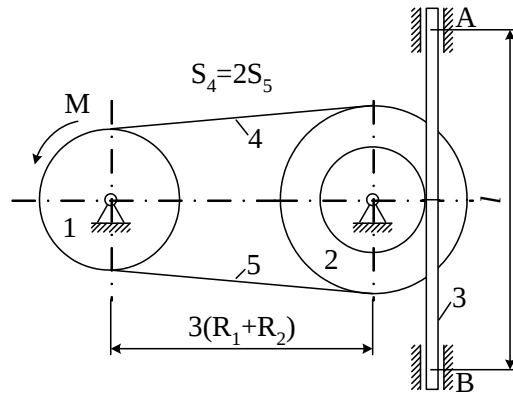
12



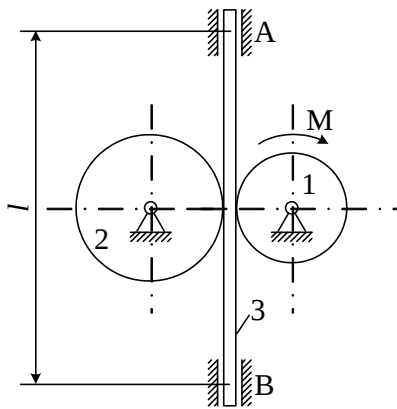
⑬



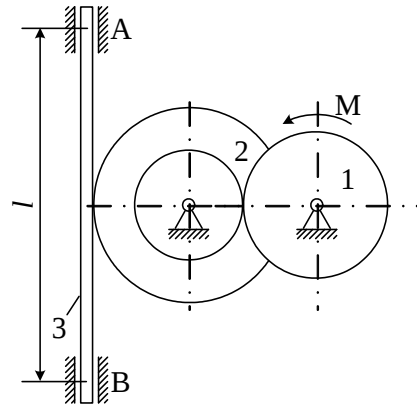
⑭



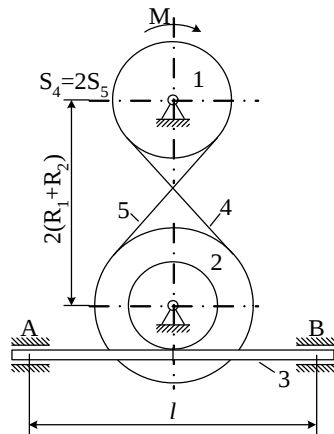
⑮



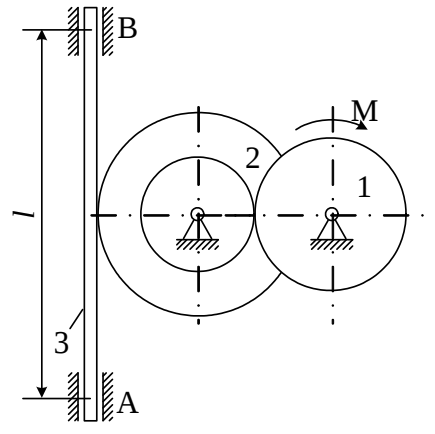
⑯



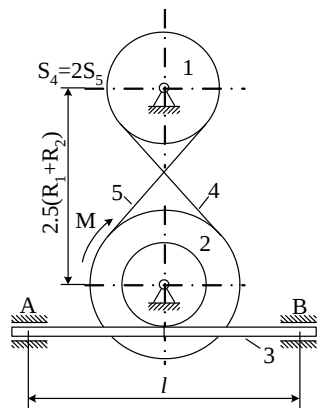
⑰



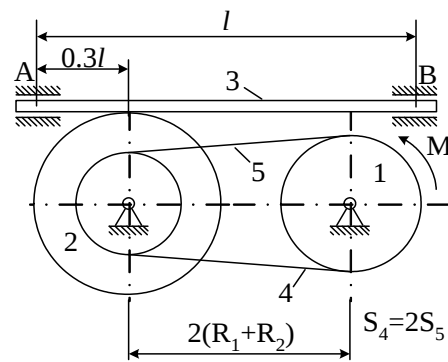
⑱



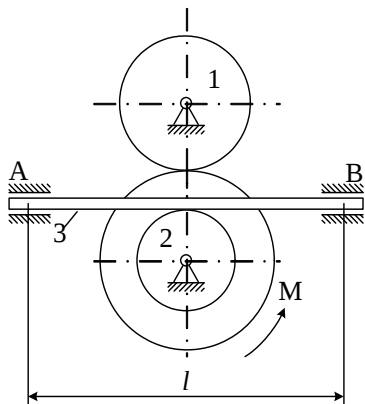
19



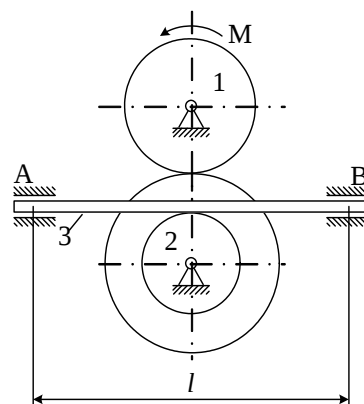
20



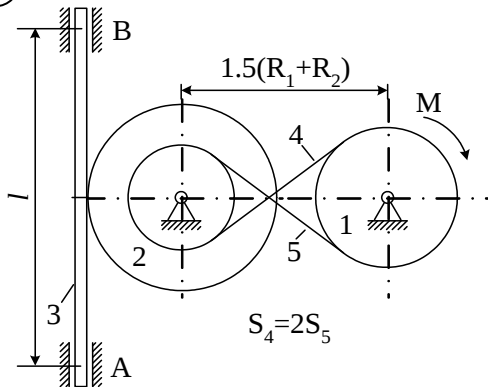
21



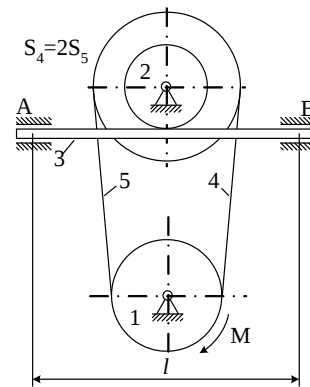
22



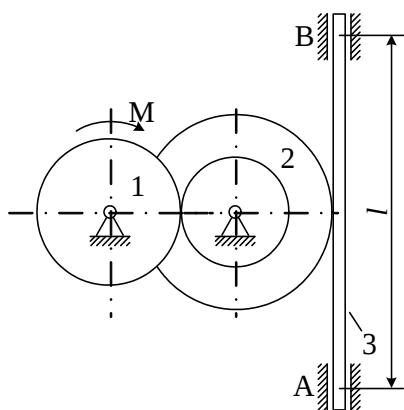
23



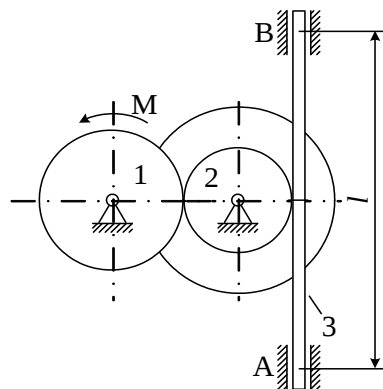
24



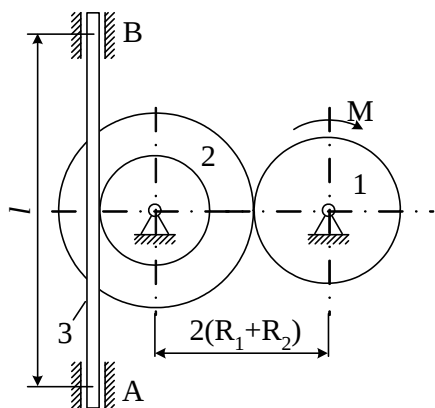
25



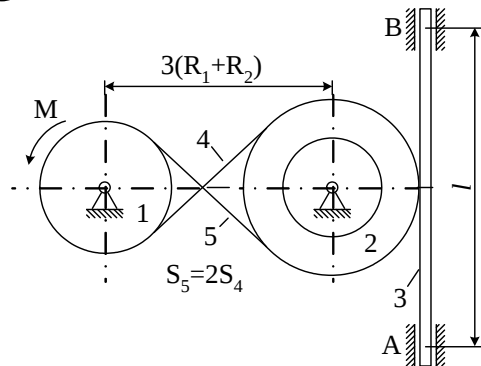
26



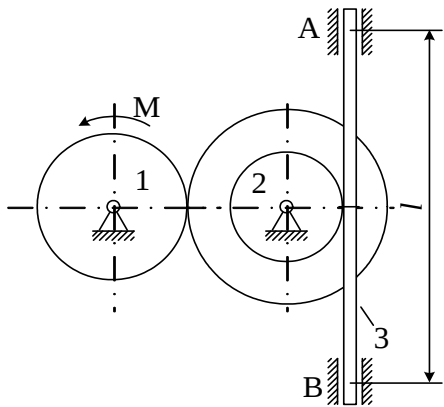
27



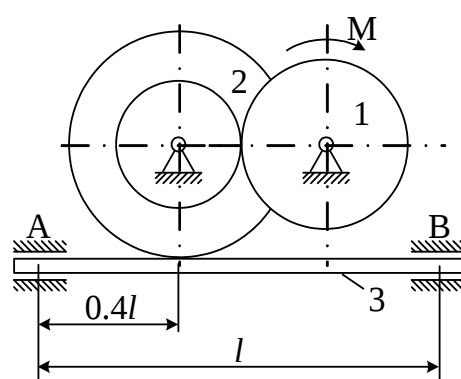
28



29



30



2.3.8 Приклад виконання завдання до ТМ4

Матеріальна система (рис. 2.53) рухається під дією моменту M , що діє на тіло 1. Осі тіла 1 та 2 горизонтальні. В точках контакту тіл та пасажовзання відсутнє. Масою тіла знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3 та кутові прискорення тіл 1 та 2, якщо: $R_1 = 0,25\text{м}$; $R_2 = 0,45\text{м}$; $r_2 = 0,15\text{м}$; $i_2 = 0,4\text{м}$; $l = 0,7\text{м}$; $m_1 = 0,5\text{кг}$; $m_2 = 5\text{кг}$; $m_3 = 4\text{кг}$; $M = 3t^3\text{Н}\cdot\text{м}$; $t_2 = 2\text{с}$.

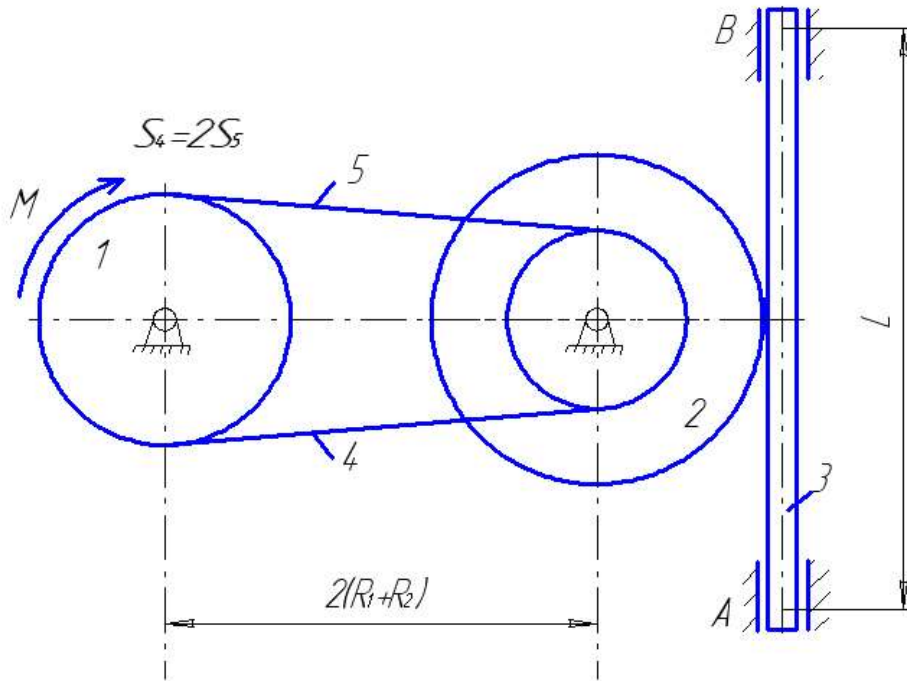


Рисунок 2.53

Розв'язання

Для дослідження руху матеріальної системи (рис. 2.53) використаємо теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \quad (2.57)$$

де T – кінетична енергія системи,

N^e – потужність зовнішніх сил системи,

N^i – потужність внутрішніх сил системи, $N^i = 0$ – тіла тверді, а пасажовзання абсолютно гнучкий та нерозтяжний.

Кінетична енергія системи складається із кінетичної енергії тіл, що входять в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Тіла 1 та 2 обертаються навколо нерухомих горизонтальних осей і їх кінетична енергія знаходиться за формулами:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2, T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \quad (2.58)$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$, $I_2 = m_2 i_2^2$ – моменти інерції відповідно тіл 1 та 2,

ω_1, ω_2 – кутові швидкості тіл.

Тіло 3 переміщується поступально зі швидкістю V_3 , тоді

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2. \quad (2.59)$$

Взаємозв'язок між кінематичними характеристиками руху тіл (рис. 2.54)

$$\omega_2 = \frac{V_3}{R_2}, \quad \omega_1 = \omega_2 \frac{r_2}{R_1} = V_3 \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}. \quad (2.60)$$

Запишемо кінетичну енергію системи, враховуючи (2.58), (2.59) та (2.60), як функцію швидкості V_3 тіла 3

$$T = \frac{V_3^2}{4R_2^2} (m_1 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2). \quad (2.61)$$

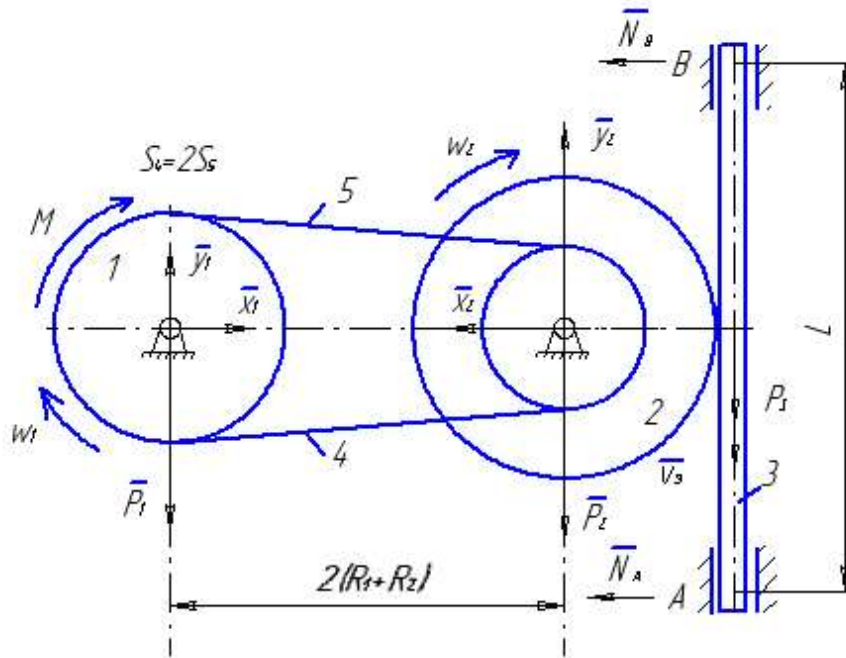


Рисунок 2.54

Знайдемо потужність зовнішніх сил (рис. 2.54) матеріальної системи: сили тяжіння $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$, $P_3 = m_3 g$ моменту M ; реакції в'язей нерухомих (циліндричних) шарнірів $X_1, Y_1, X_2, Y_2, N_A, N_B$.

Потужність сил $X_1, Y_1, P_1, X_2, Y_2, P_2, N_A$ і N_B дорівнює нулю тому, що точки прикладення сил не переміщуються. Тоді потужність N^e зовнішніх сил буде складатися із потужності моменту M та сили тяжіння тіла 3 – P_3 .

$$N^e = N(M) + N(\bar{P}_3)$$

де

$$N(M) = M \cdot \omega_1 = MV_3 \frac{r_2}{R_1 R_2},$$

$$N(\bar{P}_3) = P_3 \cdot V_3 = m_3 g V_3.$$

Або

$$N^e = V_3 \left(m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2} \right). \quad (2.62)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи з врахуванням (2.61) та (2.62) запишеться:

$$\frac{1}{4R_2^2} (m_2 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2) \frac{dV_3^2}{dt} = V_3 (m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}).$$

Оскільки $\frac{dV_3^2}{dt} = 2V_3 \cdot a_3$, тоді

$$a_3 = \frac{4R_2^2 (m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2})}{m_1 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2}. \quad (2.63)$$

Кутові прискорення тіл

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{a_3}{R_2}, \quad \ddot{\varphi}_1 = a_3 \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}.$$

Підставляючи дані умови задачі, отримаємо :

$$a_3 = (4,93 + 0,50t^3) \frac{M}{c},$$

$$\ddot{\varphi}_2 = (10,96 + 1,11t^3) \frac{1}{c^2},$$

$$\ddot{\varphi}_1 = (6,57 + 0,67t^3) \frac{1}{c^2}.$$

$$\text{За } t_1 = 2\text{с, } a_3 = 8,93 \frac{M}{c^2}, \quad \ddot{\varphi}_2 = 19,84 \frac{1}{c^2}, \quad \ddot{\varphi}_1 = 11,9 \frac{1}{c^2}.$$

3 ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Опір матеріалів, як наука, виник в епоху Відродження, коли розвиток техніки, торгівлі, мореплавства, військової справи потребував наукових обґрунтувань, потрібних для будівництва великих морських суден, мостів, гідротехнічних споруд та інших складних конструкцій. Засновником цієї науки вважають італійського вченого Галілея (1564–1642). Значний вклад в розвиток науки про опір матеріалів вніс англійський вчений Роберт Гук (1635–1703), який відкрив закон пружної деформації. Подальший розвиток цієї науки був викликаний прогресом промисловості і пов'язаний з працями видатних учених та інженерів: Леонарда Ейлера (1707–1783), М. В. Ломоносова (1711–1765), І. П. Кулібіна (1735–1818), Д. І. Журавського (1821–1891), Ф. С. Ясинського (1856–1899), Н. А. Боголюбського (1845–1922), О. М. Крилова (1863–1945) та інших. Значний вклад в розвиток опору матеріалів як науки внесли також Лагранж, Максвелл, Мор, Кастільяно.

Опір матеріалів як класична наука має менш абстрактний характер порівняно з теоретичною механікою, що досліджує закони руху абсолютно твердих тіл. Опір матеріалів вивчає поведінку реальних твердих тіл, розміри яких можуть змінюватися у процесі дії сил.

Досвід показує, що всі частини конструкцій під дією навантажень деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри, а іноді руйнуються.

3.1 Основні поняття та означення

Опір матеріалів – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин та споруд.

Міцністю називається здатність матеріалу конструкцій і їх елементів чинити опір дії зовнішніх сил не руйнуючись. В опорі матеріалів розглядають методи розрахунку елементів конструкцій на міцність.

Під **жорсткістю** розуміють здатність конструкцій, їх елементів протидіяти деформації (зміні розмірів і форми). Розрахунки на жорсткість гарантують, що зміни форми і розміру конструкцій та їхніх елементів не перевищать допустимих норм.

Під **стійкістю** розуміють здатність конструкції і її елементів протидіяти зусиллям, які намагаються вивести її з початкового стану рівноваги. Розрахунки на стійкість дають можливість уникнути раптової втрати стійкості і викривлення довгих або тонких деталей.

Щоб конструкція загалом відповідала вимогам міцності, жорсткості і стійкості, необхідно придати її елементам раціональну форму і необхідні розміри – всі ці питання розглядаються в курсі «Опір матеріалів».

Наука про опір матеріалів ґрунтується на законах теоретичної механіки, в якій тіла вважаються абсолютно жорсткими, тобто не здатними до деформації. В опорі матеріалів, як і в теоретичній механіці, для визначення реакцій опор і діючих у перерізах деталей внутрішніх сил застосовуватимемо до деформованих тіл умови рівноваги статички.

Проте для розрахунків на міцність та жорсткість деякі положення теоретичної механіки виявляються непридатними, зокрема:

1) зовнішні сили, які діють на тіло, не можна замінити їх рівнодієюю або еквівалентною системою сил;

2) силу не можна переносити вздовж лінії її дії;

3) пару сил не можна пересувати в площині дії пари.

Ці правила мають виняток. Так, наприклад, сили, прикладені до невеликої поверхні тіла як і в теоретичній механіці, вважатимемо зосередженими, тобто прикладеними до однієї точки; розподілені реактивні сили, прикладені до затисненого кінця балки, як і раніше, замінюватимемо реактивною силою і реактивним моментом. Такі заміни не вносять суттєвих змін в умови деформування. Це положення має назву принципу пом'якшених граничних умов або принципу Сен-Венана, за ім'ям французького вченого Сен-Венана (1797–1886).

Принцип Сен-Венана можна сформулювати так: у точках тіла, достатньо віддалених від місць прикладення зовнішніх сил, величина внутрішніх сил дуже мало залежить від конкретного способу прикладення сил. Надалі, вивчаючи окремі види деформацій, на підставі принципу Сен-Венана не будемо цікавитися конкретними способами прикладення зовнішніх сил і вважатимемо, що в місці їх прикладення внутрішні сили змінюються стрибкоподібно.

В поєднанні з аналітичними методами, розвинутими в математиці, в курсі опору матеріалів використовуються експериментальні методи, досягнення фізики і матеріалознавства.

На практиці доводиться мати справу з конструкціями складної форми, але їх можна уявити складеними з окремих простих елементів, наприклад, брусів, пластин, оболонок і масивів.

Нескінчену різноманітність твердих тіл за їх формою можна розділити на три групи:

1. Тіла, у яких всі три розміри є величинами одного порядку (рис. 3.1, а). До таких тіл відносять масивні фундаменти споруд і машин, станини верстатів, катки. Такі тіла називаються масивними.

2. Тіла, у яких два розміри суттєво більші третього (рис. 3.1, б). До таких тіл, що називаються пластинами або оболонками, відносяться фундаментні плити, стіни і дно чанів, тонкостінні резервуари, куполи споруд, мембрани, обшивки кораблів та літаків тощо.

3. Тіла, у яких один розмір (довжина) значно більший двох інших, наприклад брус (рис. 3.1, в). До числа тіл третьої групи відносять вали, осі, балки, важелі, тяги, кабелі і т. д.

Прямий брус, що зазнає розтягу або стиску називається *стержнем*. Якщо брус працює на згин, то його називають *балкою*, а на кручення – *валом*. Бруси бувають прямолінійні і криволінійні, сталого і змінного перерізу. Залежно від їх призначення в конструкції бруси називають колонами, балками, стержнями.

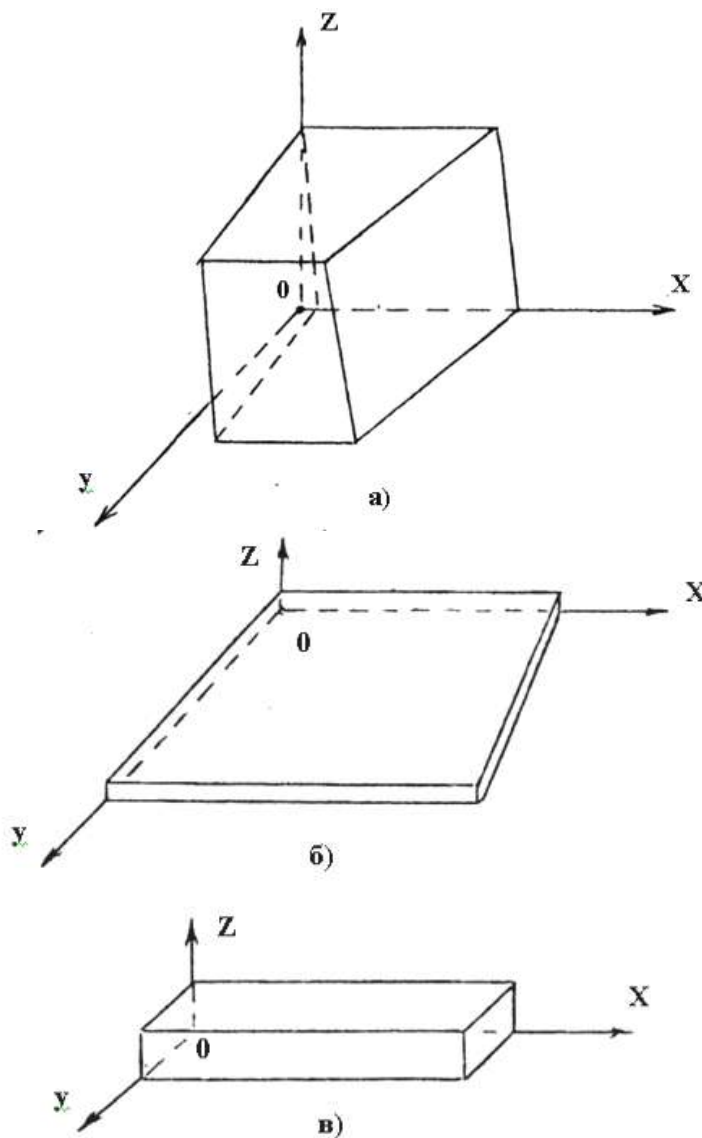


Рисунок 3.1

Перед тим як починати розрахунки необхідно з'ясувати, що в цьому випадку є головним, а що другорядним, тобто тим, що мало впливає на роботу системи загалом. Другорядні фактори під час розрахунків системи не враховуються.

Реальний об'єкт, звільнений від факторів, що мало впливають, називається **розрахунковою схемою**.

Для одного і того самого об'єкта може бути запропоновано декілька розрахункових схем залежно від необхідної точності розрахунків і від того, яка сторона явища цікавить дослідника. Разом з тим одній і тій самій розрахунковій схемі може відповідати багато різних реальних об'єктів, що дуже важливо, оскільки досліджуючи одну розрахункову схему, можна одержати рішення певного класу задач.

Вибір розрахункової схеми в опорі матеріалів починається із схематизації властивостей матеріалу, які називають гіпотезами.

3.2 Основні гіпотези і припущення

Розглянемо основні гіпотези і припущення стосовно фізико-механічних властивостей матеріалів.

1. Гіпотеза про відсутність початкових внутрішніх зусиль.

Згідно з цією гіпотезою, припускають, що коли немає причин для деформації тіла (навантаження, зміна температури), то в усіх його точках внутрішні зусилля дорівнюють нулю. Тобто, сили взаємодії між частинками ненавантаженого тіла до уваги не беруть.

2. Гіпотеза про однорідність матеріалу. Фізико-механічні властивості тіла в різних точках можуть бути неоднаковими. В опорі матеріалів ці відмінності не враховують, припускаючи, що матеріал в усіх точках тіла має однакові властивості.

3. Гіпотеза про неперервність матеріалу. Згідно з цією гіпотезою, матеріал будь-якого тіла має неперервну будову і є суцільним середовищем. Припущення про неперервну будову дає змогу використовувати під час розрахунків методи вищої математики.

4. Гіпотеза про ізотропність матеріалу. Ця гіпотеза передбачає, що матеріал тіла має однакові властивості в усіх напрямках. Багато матеріалів складається з кристалів, в яких фізико-механічні властивості в різних напрямках істотно відрізняються. Проте, завдяки наявності в тілі великої кількості безладно розміщених кристалів, властивості всього тіла в різних напрямках вирівнюються.

Припущення про ізотропність добре підтверджується практикою для більшості матеріалів і лише наближено для таких матеріалів, як камінь,

пластмаси, залізобетон. Матеріали, які мають неоднакові властивості в різних напрямках, називають анізотропними.

5. Гіпотеза про ідеальну пружність. Ця гіпотеза передбачає, що в певних межах навантаження матеріал виявляє ідеальну пружність, тобто після зняття навантаження деформації повністю зникають.

Розглянемо тепер гіпотези, пов'язані з деформаціями елементів конструкцій. Зміну лінійних і кутових розмірів тіла називають відповідно лінійною та кутовою деформаціями. Зміну положення (координат) точок тіла, спричинену деформацією, називають переміщенням.

6. Гіпотеза про малість деформацій. За цим припущенням деформації тіла і пов'язані з ними переміщення точок і перерізів дуже малі порівняно з розмірами тіла. На підставі цього змінами в розміщенні зовнішніх сил, спричинених деформацією, нехтують.

7. Гіпотеза про лінійну залежність між навантаженням і деформацією. Згідно з цією гіпотезою, зміщення точок і перерізів пружного тіла в певних межах навантаження прямо пропорційне силам, які спричиняють ці переміщення.

8. Гіпотеза плоских перерізів або гіпотеза Бернуллі. Згідно з цією гіпотезою, плоскі поперечні перерізи, зроблені в тілі до деформації, залишаються під час деформації плоскими і нормальними до осі.

3.3 Побудова епюр внутрішніх зусиль

3.3.1 Внутрішні сили. Метод перерізів

У будь-якому тілі між його мікрочастинками завжди існують сили взаємодії, які зумовлюють існування тіла як єдиного цілого.

Під час дії на тіло зовнішніх сил у будь-якому його перерізі виникають додаткові, внутрішні сили взаємодії між частинками тіла (крім тих, що існували в цьому елементі, коли він був ненавантажений), які перешкоджають зміні відстаней між цими частинками та руйнуванню тіла. Ці сили часто називають внутрішніми силами пружності. Саме внутрішні сили й визначають для розрахунку на міцність та жорсткість бруса.

Для встановлення величини внутрішніх сил, що виникають у перерізі стержнів, які підлягають зовнішній силовій дії, використовується метод перерізів.

Нехай є деяке пружне тіло (рис. 3.2, а), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$.

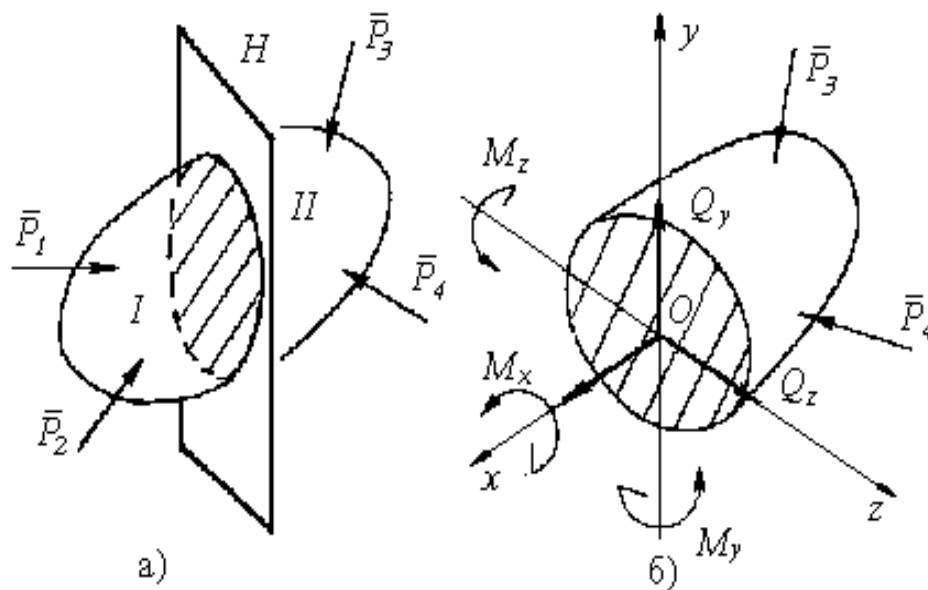


Рисунок 3.2

Розділимо це тіло деякою площиною H на дві частини I і II (рис. 3.2, а). Відкинемо одну з частин, наприклад I і розглянемо умови рівноваги частини II (рис. 3.2, б), що залишилася. Щоб ця частина була в рівновазі, як і у випадку, коли вона була частиною цілого тіла, потрібно, щоб крім зовнішніх сил, прикладених до неї, були збережені й раніше діючі на цю частину внутрішні сили взаємодії, що виникають між частинами I і II під впливом зовнішніх сил.

Згадані внутрішні сили, суцільно розподілені по зробленому перерізу, очевидно, можна звести до деякої системи сил, яка замінює вплив відкинутої частини тіла на ту, що залишилася.

Якби ми розглядали рівновагу частини I , відкинувши частину II , то вплив відкинутої частини, очевидно, врахували б такими самими внутрішніми силами, прикладеними до частини I у тому самому перерізі, але у зворотному до попереднього напрямку.

У найбільш загальному випадку систему внутрішніх сил можна звести до однієї сили $\vec{R}$ (головного вектора) і однієї пари сил $\vec{M}$ (головного моменту).

Під час визначення внутрішніх сил в стержнях рекомендується проводити переріз перпендикулярно до осі стержня. Виберемо осі координат x, y, z з початком в центрі ваги перерізу так, щоб осі Oy і Oz лежали в його площині. Розкладемо головний вектор $\vec{R}$ на складові по осях координат: N, Q_y, Q_z , а головний момент M – на три моменти: M_x, M_y і M_z (рис. 3.2, б).

Ці шість зусиль можуть бути легко знайдені з рівнянь рівноваги (рівнянь статички), записаних для будь-якої із частин тіла

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{yi} + Q_y &= 0, & \sum_{i=1}^n m_{yi} + M_y &= 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{zi} + Q_z &= 0, & \sum_{i=1}^n m_{zi} + M_z &= 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{xi} + N &= 0, & \sum_{i=1}^n m_{xi} + M_x &= 0, \end{aligned}$$

де P_{yi} , P_{zi} , P_{xi} – проекції зовнішніх сил на відповідні осі;

m_{yi} , m_{zi} , m_{xi} – моменти зовнішніх сил відносно відповідних осей.

Шість величин N , Q_y , Q_z , M_x , M_y і M_z називають внутрішніми силовими факторами або внутрішніми зусиллями. Кожна із цих сил має свою назву. Силу N , що діє вздовж осі x , називають поздовжньою або нормальною силою. Сили Q_y і Q_z називають поперечними силами (рідше – силами, що перерізують). Моменти M_y і M_z , очевидно, намагатимуться зігнути стержень у площинах xOy і xOz , тому їх називають згинальними, а момент M_x , який скручує стержень, називають крутним моментом.

Для зусиль і моментів у перерізі можна дати такі означення:

поздовжня сила N – це сума проекцій усіх внутрішніх сил, що діють у перерізі на нормаль до перерізу (чи на вісь стержня);

поперечні сили Q_y , Q_z – це суми проекцій усіх внутрішніх сил у перерізі на головні центральні осі перерізу y і z , відповідно;

крутний момент M_x (чи $M_{кр}$) – це сума моментів усіх внутрішніх сил у перерізі щодо осі стержня;

згинальні моменти M_y і M_z – це суми моментів усіх внутрішніх сил у перерізі щодо головних центральних осей перерізу y і z , відповідно.

3.3.2 Епюри внутрішніх зусиль

Метод перерізів дозволяє знайти всі зусилля і моменти в будь-якому перерізі стержня під час дії будь-якого навантаження.

Для того, щоб поперечна сила та згинальний момент, визначені з розгляду лівої та правої частин балки, були однакових знаків, потрібно дотримуватися певного правила знаків.

Поперечну силу Q в перерізі будемо вважати додатною, якщо вона намагається повернути вирізаний елемент за стрілкою годинника (рис. 3.3, а). Згинальний момент M (для горизонтальних прямолінійних ділянок) будемо вважати додатним, якщо він вигинає балку опуклістю вниз (стиснуті верхні

волокна) (рис. 3.3, а). Поздовжню силу N в перерізі будемо вважати додатною, якщо її вектор направлений від перерізу (викликає деформацію розтягу).

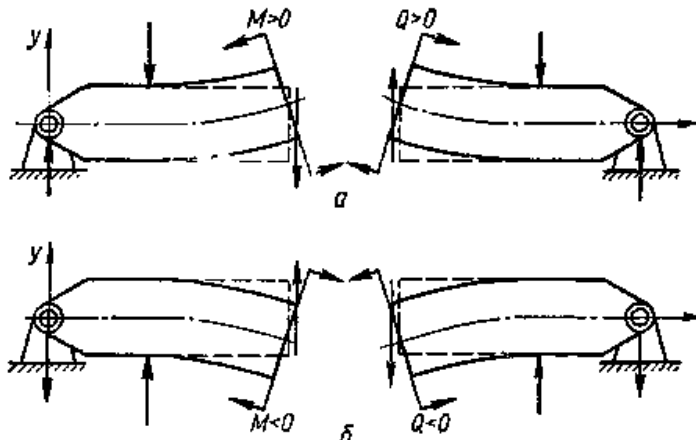


Рисунок 3.3

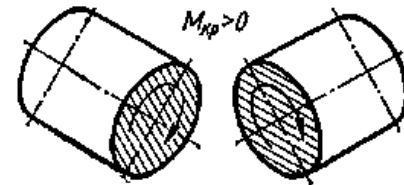


Рисунок 3.4

Крутний момент $M_{кр}$ вважається додатним, якщо при спостереганні з торця вздовж осі частини, що розглядається, він діє за годинниковою стрілкою (рис. 3.4).

Зусилля і моменти в різних перерізах одного й того ж стержня різні.

Графіки (діаграми), що показують, як змінюються внутрішні зусилля в процесі переходу від перерізу до перерізу, називають **епюрами**.

Відзначимо деякі правила, які застосовуються під час побудови епюр:

а) вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна чи просто збігалася з віссю стержня;

б) ординати епюри відкладають від осі епюри по перпендикуляру;

в) штрихують епюри лініями, перпендикулярними до бази;

г) для зусиль і моментів вибирають деякий масштаб. Ординати відкладають в масштабі. Крім того, на епюрах проставляють числа, що показують величини характерних ординат, а в полі епюри в кружках ставлять знак зусилля.

3.3.3 Диференціальні залежності між q , Q та M

Нехай на прямолінійний стержень в площині xOy діє зрівноважена система зосереджених сил P_i , моментів M_i та розподіленого навантаження q , напрямки яких не збігаються з віссю стержня (рис. 3.5). Тоді диференціальні залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження q , поперечною силою Q і згинальним моментом M будуть мати вигляд (теорема Журавського)

$$\frac{dQ_y}{dx} = q, \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad \frac{d^2 M_z}{dx^2} = q. \quad (3.1)$$

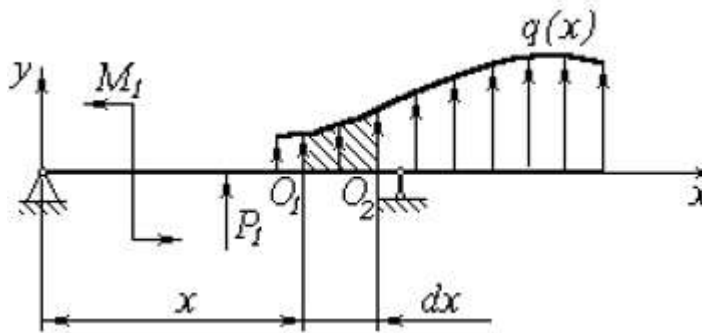


Рисунок 3.5

З рівнянь (3.1) випливають правила, які застосовують для перевірки правильності побудови епюр:

а) на тих ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюра Q обмежена прямими, паралельними базі, а епюра M , у загальному випадку — похилими прямими;

б) на тих ділянках, де до балки прикладено рівномірно розподілене навантаження, епюра Q обмежена похилими прямими, а епюра M — квадратичними параболоми. Під час побудови епюри M на стиснутих волокнах опуклість параболи повернена в бік, протилежний напрямку дії навантаження q ;

в) у тих перерізах, де $Q = 0$, дотична до епюри M паралельна осі епюри;

г) на ділянках, де $Q > 0$, M зростає, де $Q < 0$, M спадає.

д) у тих перерізах, де до балки прикладено зосереджені сили, на епюрі Q будуть стрибки на величину та у напрямку прикладених сил, а на епюрі M будуть злами;

е) у тих перерізах, де до балки прикладено зосереджені моменти, на епюрі M будуть стрибки на величину цих моментів, на епюрі Q змін не буде.

3.3.4 Побудова епюр Q і M для балок

Побудову епюр Q та M для балок починають з визначення повної системи навантажень, в яку входять як задані сили, так і опорні реакції, тобто визначають реакції опор. Після визначення опорних реакцій та їх перевірки балку розбивають на ділянки. У цьому випадку керуються правилом, що граничними точками ділянок є точки прикладення зосереджених сил та моментів, а також точки, де змінюється інтенсивність розподіленого навантаження.

Далі, використовуючи метод перерізів, будують епюри Q та M на кожній ділянці балки, з врахуванням основних правил побудови епюр.

З практичної сторони, стосовно балок, користуються такими правилами (рис. 3.6):

а) поперечна сила Q в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вертикальну вісь перерізу всіх сил, що діють по один бік від нього (рис. 3.6, а);

$$Q_y = \sum_{i=1}^n P_{yi \text{ відсіч}}.$$

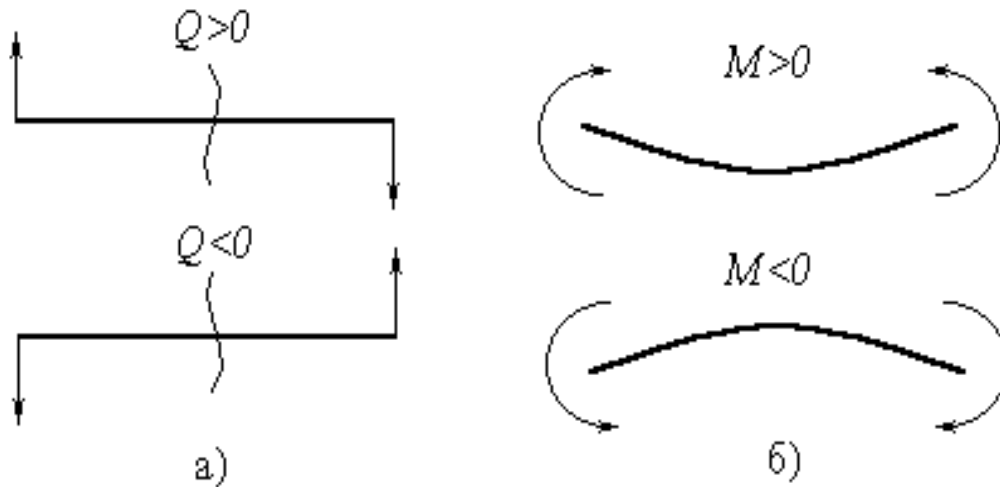


Рисунок 3.6

б) згинальний момент M в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу всіх сил, розташованих по один бік від цього перерізу.

$$M_z = \sum_{i=1}^n m_{zi \text{ відсіч}}.$$

В праву частину записуються моменти зовнішніх сил з врахуванням такого правила знаків: якщо зовнішня сила (або момент чи розподілене навантаження) створює такий згинальний момент, що викликає деформації стиску в верхніх волокнах балки відносно перерізу, то він береться з знаком «плюс» («+») (рис. 3.6, б).

3.3.5 Приклад побудови епюр Q і M для балок

Побудуємо епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, показаної на рис. 3.7, а).

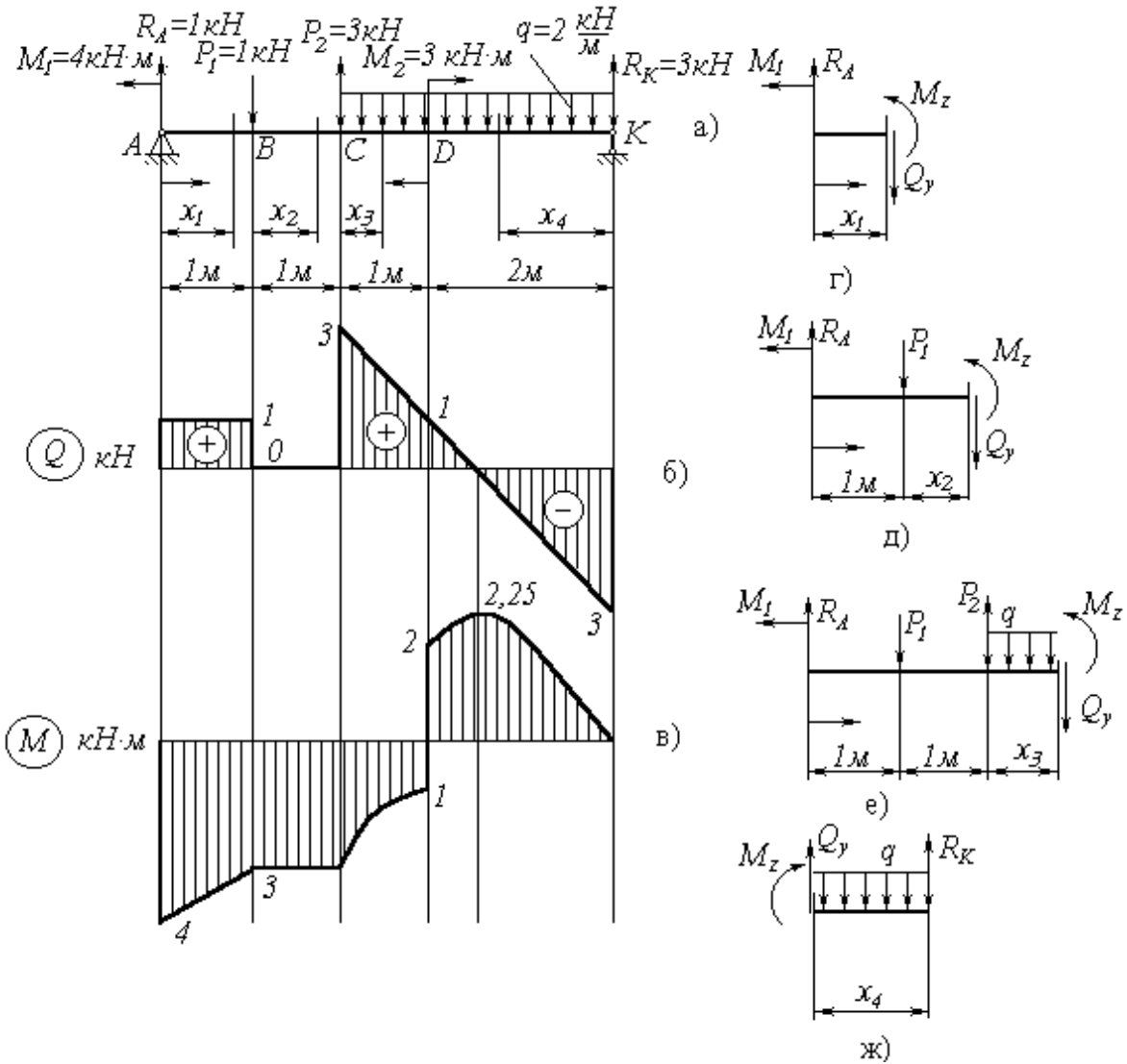


Рисунок 3.7

Розв'язання

Спочатку визначимо реакції опор R_A і R_K із рівнянь рівноваги статки (в опорі А горизонтальна складова реакції R_A дорівнює нулю, оскільки в системі відсутні сили, що проектується на вісь стержня):

$$\sum M_A = 0;$$

$$M_1 - P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 - q \cdot 3(2 + 3/2) - M_2 + R_K \cdot 5 = 0;$$

$$\sum M_A = 4 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 3,5 - 3 + R_K \cdot 5 = 0;$$

$$R_K = 3 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_K = 0;$$

$$M_1 - R_A \cdot 5 + P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 3 - q \cdot 3(3/2) - M_2 = 0;$$

$$\Sigma M_K = 4 - R_A \cdot 5 + 1 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 3 = 0;$$

$$R_A = 1 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\Sigma Y = R_A - P_1 + P_2 - q \cdot 3 + R_K = 1 - 1 + 3 - 2 \cdot 3 + 3 = 0.$$

Отже, реакції розраховані правильно.

Розділяємо балку на чотири ділянки і складаємо рівняння поперечних сил та згинальних моментів для кожної з них.

Будуємо епюри Q_y і M_z для ділянки AB . Для цього зробимо переріз m_1-n_1 на відстані x від опори A і розглянемо рівновагу відсіченої частини (див. рис. 3.7, г). Згинальний момент M_z і поперечну силу Q_y в перерізі будемо зображати додатними.

Ділянка AB : $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м.}$

$$Q_y(x_1) = R_A = 1 \text{ кН}; \quad (3.2)$$

$$M_z(x_1) = R_A \cdot x_1 - M_1 = x_1 - 4; \quad (3.3)$$

за $x_1 = 0 \text{ м}$, $M_z(0) = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}$,

за $x_1 = 1 \text{ м}$, $M_z(1) = 1 - 4 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Як видно із рівнянь (3.2) і (3.3) поперечна сила залишається сталою на всій довжині ділянки AB , а згинальний момент змінюється за лінійним законом. Графіки цих залежностей показано на рисунках 3.7, б) та 3.7, в). Додатні значення сили Q_y будемо відкладати вгору від базової прямої, а від'ємні – вниз. Епюри згинальних моментів будемо на стиснутих волокнах. Тому вгору від базової лінії будемо відкладати в масштабі додатні значення згинального моменту, а вниз – від'ємні.

Вказівка. Під час побудови епюр згинальних моментів на розтягнутих волокнах додатні значення згинального моменту відкладаються вниз, а вверх – від'ємні).

Будуємо епюри M_z і Q_y для ділянки BC . Для цього зробимо переріз m_2-n_2 і розглянемо рівновагу лівої відрізаної частини балки (див. рис. 3.7, д)

Ділянка BC : $0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м};$

$$Q_y(x_2) = R_A - P_1 = 1 - 1 = 0 \text{ кН};$$

$$M_z(x_2) = R_A(1+x_2) - P_1 x_2 - M_1 = 1(1+x_2) - 1 \cdot x_2 - 4 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо графіки епюри Q_y і M_z на ділянці BC (див. рис. 3.7, б), в).

Із умов рівноваги лівої відсіченої частини балки знаходимо закони, за якими змінюються Q_y і M_z на ділянці CD .

Ділянка CD : $0 \leq x_3 \leq 1$ м.

$$Q_y(x_3) = R_A - P_1 + P_2 - qx_3 = 3 - 2 \cdot x_3;$$

$$M_z(x_3) = R_A(2 + x_3) - M_1 - P_1(1 + x_3) + P_2x_3 - \frac{qx_3^2}{2} = 1(2 + x_3) - 4 - 1(1 + x_3) + 3x_3 - 2 \cdot x_3^2/2 = -3 + 3x_3 - x_3^2;$$

за $x_3 = 0$ м, $Q_y(0) = 3$ кН; $M_z(0) = -3$ кН·м;

за $x_3 = 1$ м, $Q_y(1) = 1$ кН; $M_z(1) = -1$ кН·м.

Для побудови епюр Q_y і M_z на ділянці DK розглянемо рівновагу правої відрізаної частини балки (переріз m_3-n_3 , рисунок 3.7, е)

Ділянка DK : $0 \leq x_4 \leq 2$ м.

$$Q_y(x_4) = q \cdot x_4 - R_K = 2x_4 - 3; \quad (3.4)$$

$$M_z(x_4) = R_K x_4 - \frac{qx_4^2}{2} = 3x_4 - x_4^2; \quad (3.5)$$

за $x_4 = 0$ м, $Q_y(0) = -3$ кН; $M_z(0) = 0$ кН·м;

за $x_4 = 2$ м, $Q_y(2) = 1$ кН; $M_z(2) = 2$ кН·м.

Епюра $Q_y(x_4)$ перетинає вісь x , (рис. 3.7, б), це означає що в точці перетину момент M_z набуде екстремального значення. Знайдемо цю точку із умови

$$Q_y(x_4) = 0 \text{ або } 2x_4 - 3 = 0, \text{ звідки } x_4 = \frac{R_K}{q} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ м.}$$

Величина згинального моменту за умови: $x_4 = 1,5$ м,

$$M_z(1,5) = 3x_4 - x_4^2 = 3 \cdot 1,5 - 1,5^2 = 2,25 \text{ кН·м.}$$

Будуємо епюри Q_y і M_z на ділянці DK (див. рис. 3.7, б), в).

Як видно із рисунків 3.7, б) і в) на ділянках, де немає розподіленого навантаження ($q = 0$), поперечна сила Q_y залишається сталою, а момент M_z змінюється за лінійним законом (ділянка AB). На ділянці BC $Q_y = 0$, а

$M_z = \text{const}$. На ділянках CD та CK з рівномірно розподіленим навантаженням ($q = \text{const}$) епюра Q_y – лінійна (3.4), а згинальний момент M_z змінюється за законом квадратичної параболи (3.5).

Оскільки епюра M_z побудована на стиснутих волокнах, то опуклість параболи повернена в бік, протилежний напрямку дії навантаження q (ділянки CD та CK).

Вказівка. Під час побудови епюр згинальних моментів на розтягнутих волокнах опуклість параболи повернена в бік, що збігається з напрямком дії навантаження q).

В перерізах, де прикладено зосереджені сили, на епюрі Q_y мають місце стрибки на величину цих сил в напрямку вектора сили, а на епюрі M_z – злами.

В перерізах, де прикладено тільки зосереджені моменти, на епюрі Q_y змін немає, а на епюрі M_z мають місце стрибки на величину цих моментів.

На ділянках, де $Q_y = 0$, момент M_z сталий, а в перерізах, де $Q_y = 0$, згинальний момент набуває екстремального значення.

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. Предмет і задачі курсу опору матеріалів.
2. Реальний об'єкт і розрахункова схема.
3. Основні гіпотези і припущення в опорі матеріалів.
4. Види навантажень.
5. Внутрішні та зовнішні сили.
6. Як визначаються внутрішні сили.
7. Чи залежать внутрішні сили в тілах від зовнішніх.
8. Що називають епюрами?
9. Правила побудови епюр Q і M для балок.

3.4 Розрахунок балок на міцність при плоскому згині

Розглянемо призматичний брус з прямою віссю, на який діє ряд зрівноважених сил, розташованих в одній площині, що проходить через вісь бруса (рис. 3.8). У такому випадку брус зазнаватиме деформації згину. Площину, в якій розташовано сили, що викликають згинання бруса, називають площиною дії згинальних сил.

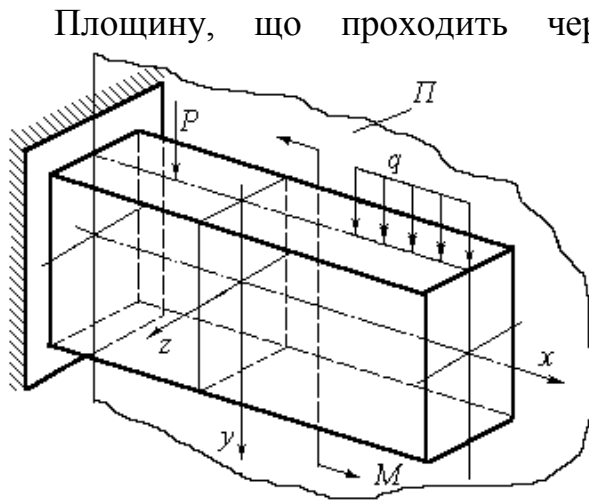


Рисунок 3.8

Площину, що проходить через вісь бруса і головні осі інерції поперечних перерізів, називають головною площиною бруса.

Якщо площина дії згинальних сил збігається з головною площиною, то і згин буде відбуватися в цій самій площині. Такий згин називається **прямим або плоским згином**. Будь-який брус з прямолінійною віссю, що зазнає деформації згину, називають балкою.

Балка, жорстко закріплена одним кінцем, називається **консоллю** (рис. 3.9, а). На рис. 3.9, б) зображено балку на трьох опорах, навантажену зосередженими силами P_1 , P_2 , рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q і парою сил M .

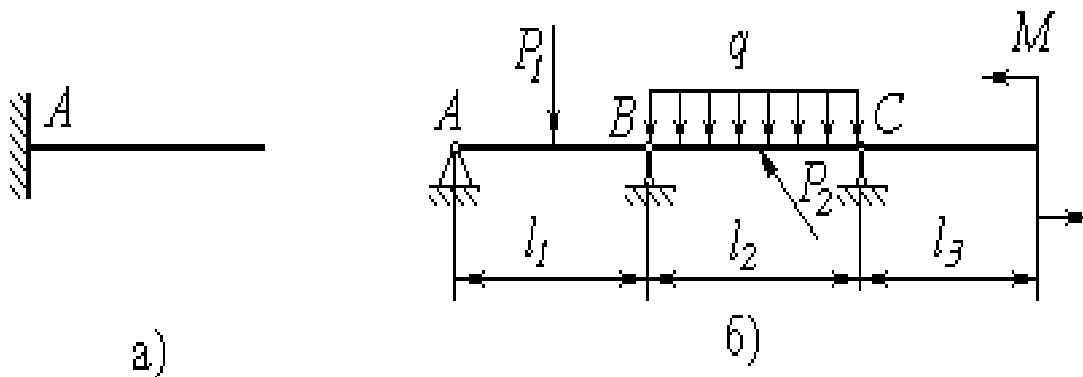


Рисунок 3.9

Відстань між двома суміжними опорами балок називають **прогоном**. Кінець балки, який звисає, називають **консольним кінцем**.

3.4.1 Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів

У випадку деформації плоского згину балки необхідно враховувати геометричні характеристики плоских поперечних перерізів.

Добуток площі dS (рис. 3.10) на відстань її від деякої осі називається елементарним моментом площі відносно осі.

Тоді, складаючи елементарні моменти по всій площі поперечного перерізу, отримаємо

$$\begin{aligned} S_x &= \int_S y \cdot dS \\ S_y &= \int_S x \cdot dS \end{aligned} \quad \left| \right.$$

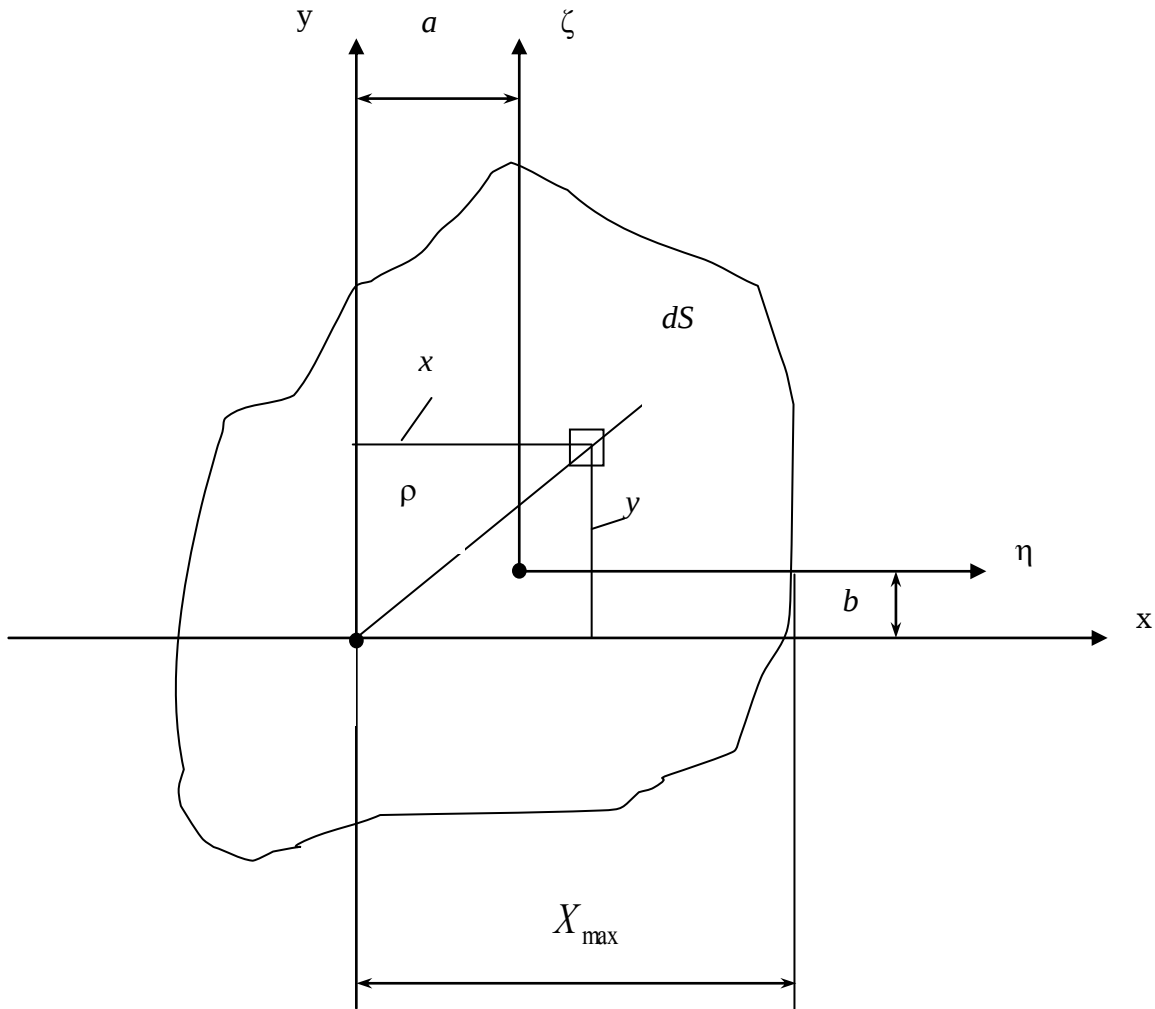


Рисунок 3.10

Статичні моменти площі S_x, S_y використовуються під час визначення центра ваги поперечного перерізу

$$Y_c = \frac{S_x}{S}, X_c = \frac{S_y}{S},$$

де S – площа поперечного перерізу.

Момент інерції поперечного перерізу відносно осей x і y знайдемо таким чином:

$$I_x = \int_S y^2 dS, I_y = \int_S x^2 dS.$$

Під час розрахунків на кручення використовується полярний момент інерції:

$$I_\rho = \int_S \rho^2 dS.$$

У розрахунках на міцність зустрічаються з відношенням осьових моментів інерції до відстані точок, найбільш віддалених від відповідної осі (рис. 4.1).

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{x_{\max}},$$

де W_x, W_y – осьові моменти опору відносно осей x та y .

Момент інерції поперечного перерізу відносно осі, що не проходить через центр маси C знаходиться за формулою.

$$I_x = I_\eta + b^2 \cdot S, I_y = I_\zeta + a^2 \cdot S.$$

де I_η, I_ζ – моменти інерції поперечного перерізу тіла відносно центральних осей η і ζ (див. рис. 3.10).

Геометричні характеристики деяких плоских поперечних перерізів:
а) в формі прямокутника (рис. 3.11);

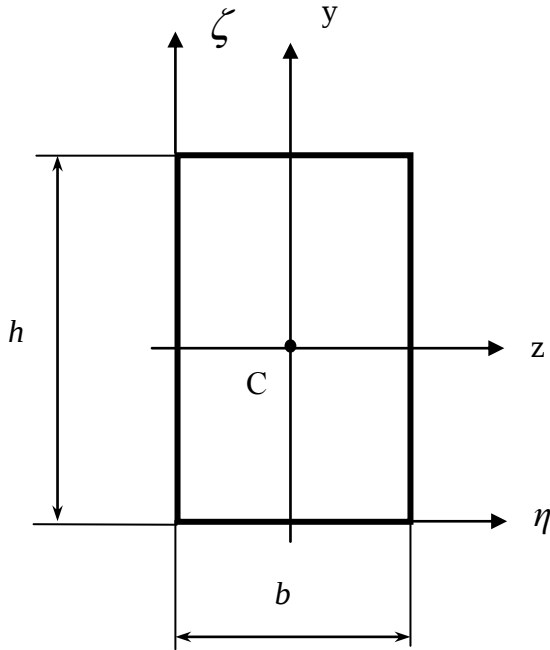


Рисунок 3.11

Моменти інерції поперечного перерізу відносно осей z, y, η та ζ

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3, \quad I_\eta = \frac{1}{3}bh^3,$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3, \quad I_\zeta = \frac{1}{3}hb^3.$$

Моменти опору поперечного перерізу відносно осей z та y

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$

б) в формі круга (рис. 3.12);

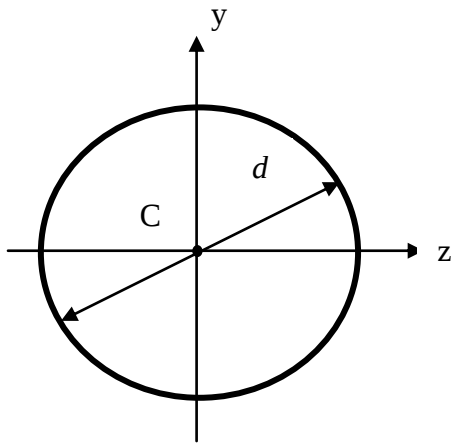


Рисунок 3.12

Моменти інерції поперечного перерізу відносно осей z і y та полярний момент інерції відносно центра мас C

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_c = \frac{\pi d^4}{32}$$

Моменти опору поперечного перерізу відносно осей z і y та центра мас C

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_c = \frac{\pi d^3}{16}$$

3.4.2 Розрахунок на міцність при плоскому згині

У разі плоского згину (рис. 3.13) у стержні з'являються дотичні та нормальні напруження.

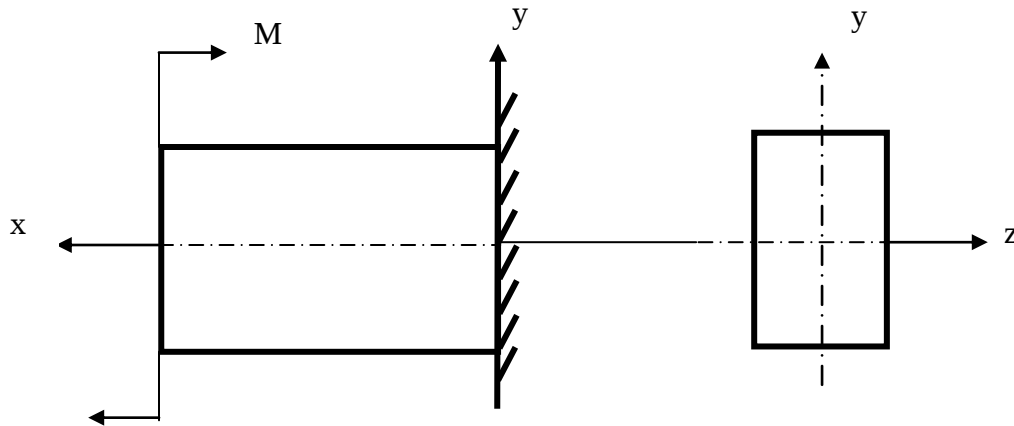


Рисунок 3.13

Але неврахування дотичних напружень під час розрахунків дає похибку близько 3 %. Тому умови міцності за згину можна записати у вигляді:

$$\sigma_{z2} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]_{z2},$$

де $[\sigma]_{z2}$ – допустимі напруження за згину.

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. Що називають плоским згином?
2. Момент інерції поперечного перерізу тіла відносно центральної осі.
3. Означення центральних осей.
4. Записати формулу для визначення моменту інерції поперечного перерізу тіла відносно осі, що паралельна центральній.
5. Моменти інерції поперечного перерізу балки у формі прямокутника та круга відносно центральних осей.
6. Моменти інерції поперечного перерізу балки у формі прямокутника та круга відносно осі, що паралельна центральній.
7. Дати означення моменту опору поперечного перерізу тіла відносно осі.
8. Момент опору поперечного перерізу балки у формі прямокутника та круга відносно центральних осей.
9. Умови міцності за плоского згину балки.

3.4.3 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з опору матеріалів

ОМ1 Розрахунок балок на міцність при плоскому згині

Для балки (С. 28 – 33, підрозділ 2.1.7) побудувати епюри згинальних моментів та поперечних сил і на підставі епюри згинальних моментів M підібрати сталеву балку прямокутного (рис. 3.11) поперечного профілю ($h=2b$) за умови $[\sigma]=160 \text{ МН/м}^2$.

3.4.4 Приклад виконання завдання

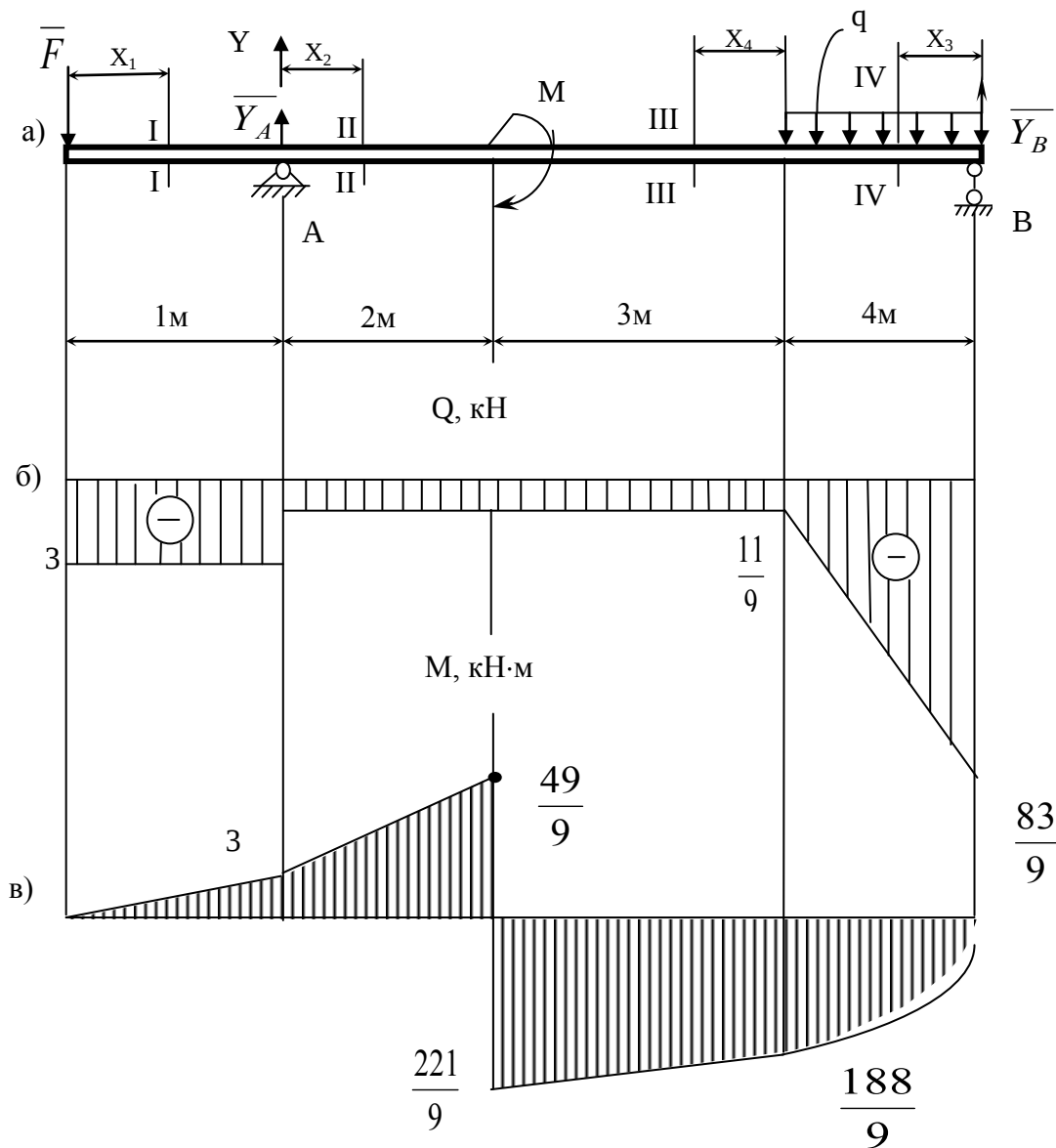


Рисунок 3.14

Розв'язання

Розглянемо просту балку на двох опорах (рис. 3.14, а): опора A – нерухомий шарнір; опора B – рухомий шарнір. Дію в'язей (шарнірів) на балку замінюємо реакціями в'язей $\overline{Y}_A, \overline{Y}_B$, які знаходимо з рівнянь рівноваги за $F = 3\kappa H$, $q = 2\kappa H/м$, $M = 30\kappa H \cdot м$

$$\sum m_A \overline{F} = 0; 1 \cdot F - M - 4 \cdot q \cdot 7 + 9 \cdot Y_B = 0; Y_B = \frac{83}{9} \kappa H,$$

$$\sum m_B \overline{F} = 0; 10 \cdot F - M - Y_A \cdot 9 + 4 \cdot q \cdot 2 = 0; Y_A = \frac{16}{9} \kappa H.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0; -F + Y_A - 4 \cdot q + Y_B = 0, \\ -3 + \frac{16}{9} - 4 \cdot 2 + \frac{83}{9} &= 0; -99 + 99 = 0. \end{aligned}$$

Балка має чотири ділянки, тому проводимо чотири довільні перерізи (рис. 3.14, а) і знаходимо поперечну силу Q_i та згинальний момент M_i у кожному перерізі.

Переріз I-I: $\underline{0 \leq x_1 \leq 1м}$

$$Q_1 = -F = -3\kappa H;$$

$$M_1 = -F \cdot x_1 = -3 \cdot x_1.$$

за $x_1 = 0$; $Q_1 = -3\kappa H$, $M_1 = 0$.

за $x_1 = 1м$; $Q_1 = -3\kappa H$; $M_1 = -3\kappa H \cdot м$.

Переріз II-II: $\underline{0 \leq x_2 \leq 2м}$

$$Q_2 = -F + Y_A = -3 + \frac{16}{9} = -\frac{11}{9} \kappa H,$$

$$M_2 = -F(1 + x_2) + Y_A \cdot x_2 = -3(1 + x_2) + \frac{16}{9} \cdot x_2.$$

за $x_2 = 0$; $Q_2 = -\frac{11}{9} \kappa H$; $M_2 = -3\kappa H \cdot м$.

за $x_2 = 2$; $Q_2 = -\frac{11}{9} \kappa H$; $M_2 = -\frac{49}{3} \kappa H \cdot м$.

Переріз III-III: $\underline{0 \leq x_3 \leq 4м}$

$$Q_3 = q \cdot x_3 - Y_B = 2 \cdot x_3 - \frac{83}{9},$$

$$M_3 = Y_B \cdot x_3 - q \frac{x_3^2}{2} = \frac{83}{9} \cdot x_3 - x_3^2.$$

$$\text{за } x_3 = 0; Q_3 = -\frac{83}{9} \kappa H; M_3 = 0.$$

$$\text{за } x_3 = 4; Q_3 = -\frac{11}{9} \kappa H; M_3 = \frac{188}{9} \kappa H.$$

Переріз IV-IV: $0 \leq x_4 \leq 3 \text{ м}$

$$Q_4 = q \cdot 4 - Y_B = -\frac{11}{9} \kappa H,$$

$$M_4 = Y_B(4 + x_4) - 4 \cdot q(2 + x_4) = \frac{83}{9}(4 + x_4) - 8(2 + x_4).$$

$$\text{за } x_4 = 0; Q_4 = -\frac{11}{9} \kappa H; M_4 = \frac{188}{9} \kappa H.$$

$$\text{за } x_4 = 3; Q_4 = -\frac{11}{9} \kappa H; M_4 = \frac{221}{9} \kappa H.$$

За отриманими даними Q_i та M_i ($i=1, 2, 3, 4$) будемо епюри Q (рис. 3.14, б) та M (рис. 3.14, в).

Ординати Q_i та M_i відкладаємо перпендикулярно до осі балки. Для поперечної сили Q_i додатні значення відкладаємо над базовою лінією (відносно балки), а епюру M_i будемо на розтягнутих волокнах.

Розміри поперечного перерізу балки будемо знаходити із умови міцності (4.12)

$$\sigma_{32} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]_{32},$$

де $W_z = \frac{bh^2}{6}$ – момент опору.

Оскільки за умовою $h=2b$, то $W_z = \frac{2}{3} b^3$.

Знайдемо мінімальне значення ширини b поперечного профілю балки:

$$\frac{3M_{\max}}{2b^3} = [\sigma]_{32},$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M_{\max}}{2[\sigma]_{32}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 221 \cdot 10^3}{2 \cdot 9 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,059 \text{ м},$$

де $M_{\max} = \frac{221}{9} (\kappa H \cdot \text{м})$ – максимальне значення згинального моменту (рис. 3.14, в).

Відповідь: вибираємо $b = 60 \text{ мм}$, $h = 120 \text{ мм}$.

3.5 Кручення

Крученням називають такий вид деформації, за якого в поперечних перерізах стержня виникає лише один внутрішній силовий фактор – крутний момент.

Кручення зазнають численні деталі машин і споруд, вали двигунів та верстатів, осі моторних вагонів і локомотивів, елементи просторових конструкцій тощо.

3.5.1 Напруження і деформації під час кручення стержнів круглого поперечного перерізу

Деформація кручення бруса має місце тоді, коли на них діють пари сил, розташованих у площинах, перпендикулярних до осі бруса.

Деформація під час кручення виявляється у взаємному повороті перерізів бруса і вимірюється у кутових одиницях (радіанах). Кут повороту двох крайніх перерізів, розташованих на відстані l один від одного, називають повним кутом закручування φ_l або просто φ (рис. 3.15). Кут закручування, віднесений до одиниці довжини бруса, називається відносним кутом закручування

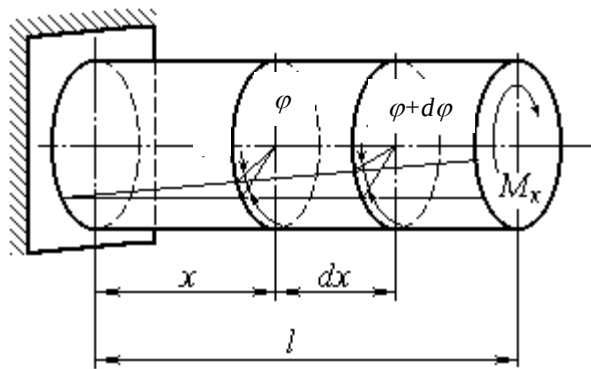


Рисунок 3.15

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (3.6)$$

Прикладений до будь-якого перерізу бруса зовнішній момент, що викликає деформацію бруса, називають скручувальним моментом M_k , а внутрішній силовий фактор називається крутним моментом M_x .

У розглядуваному брусі (рисунок 3.15) в будь-якому поперечному перерізі крутний момент M_x дорівнює скручувальному моменту M_k . Початкова твірна після деформації набуде вигляду E, A, B, C . На відстані x від закріпленого кінця бруса виділимо елемент завдовжки dx (рис. 3.15, 3.16). Як видно із рисунка 3.16

$$\gamma_{\max} = \frac{r d\varphi}{dx}, \quad (3.7)$$

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx}, \quad (3.8)$$

де ρ – відстань від точки перерізу до осі бруса,

$r = d / 2$ – радіус перерізу,

d – діаметр бруса,

$\gamma_{\max}$, γ – відносний зсув на поверхні і на віддалі ρ від осі бруса, відповідно.

Використовуючи закон Гука під час зсуву, для дотичних напружень під час кручення отримаємо вираз

$$\tau = \gamma \cdot G = \rho \frac{d\varphi}{dx} G = \rho \cdot G \cdot \theta. \quad (3.9)$$

У площині поперечного перерізу на відстані ρ від осі бруса виділимо елементарну площадку dA . Зусилля, що припадає на цю площадку, дорівнює $\tau \cdot dA$, а момент цього зусилля відносно осі бруса дорівнює $\tau \cdot \rho \cdot dA$. Додавши суми зусиль отримаємо величину крутного моменту

$$M_x = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA. \quad (3.10)$$

Підставивши значення τ із (3.9), матимемо

$$M_x = \int_A \rho^2 \cdot G \cdot \theta \cdot dA = G \cdot \theta \int_A \rho^2 dA. \quad (3.11)$$

Оскільки полярний момент інерції

$$I_p = \int_A \rho^2 dA,$$

то (3.11) запишемо у вигляді

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot I_p}. \quad (3.12)$$

Підставивши це значення θ у вираз (3.9) матимемо

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho. \quad (3.13)$$

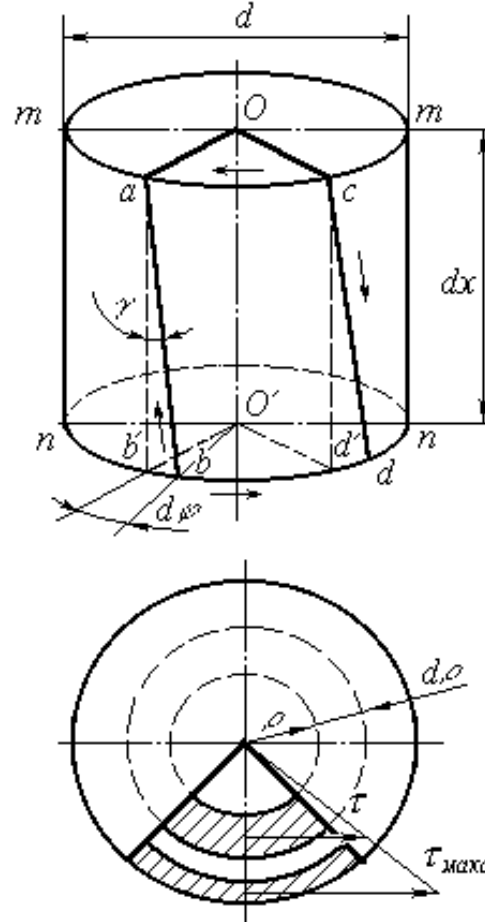


Рисунок 3.16

Для круглого поперечного перерізу $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$.

Користуючись цією формулою, легко визначити величину напружень в будь-якій точці перерізу, розташований на відстані ρ від осі бруса. Максимальні напруження діють у точках, розташованих на контурі поперечного перерізу бруса (рис. 3.16), для яких $\rho_{\max} = r$. Величина максимальних напружень

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_p} r.$$

Замінімо величину I_p/r полярним моментом опору. Тоді для круглого поперечного перерізу

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}. \quad (3.14)$$

З формули (3.13) видно, що напруження τ змінюються прямо пропорційно відстані ρ від осі бруса. Розподіл дотичних напружень по перерізу бруса наведено на рисунку 3.17. Згідно з законом парності дотичних напружень, такі самі напруження діятимуть і в поздовжніх перерізах бруса (рис. 3.17).

Таким чином під час кручення бруса виникає плоский напружений стан – чистий зсув (рис. 3.17). Для елемента біля поверхні бруса взаємне положення головних площадок і площадок, на яких діють максимальні дотичні напруження, показано на рисунку 3.17.

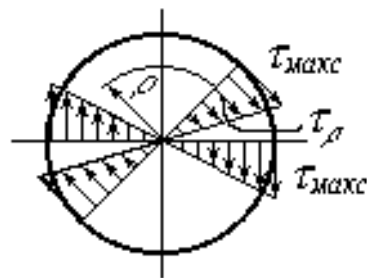


Рисунок 3.17

Характер руйнування під час кручення визначається напруженим станом і особливостями опору матеріалу бруса лінійним і кутовим деформаціям. Так, стержні із пластичних матеріалів будуть руйнуватися по поперечному перерізу від дотичних напружень. Дерев'яний стержень буде руйнуватися по поздовжніх перерізах, оскільки дерево погано чинить опір зсуву вздовж волокон. Стержень із крихкого матеріалу буде руйнуватися по площадках, розміщених під кутом 45° до осі, тобто перпендикулярних до головного напруження $\sigma_{\max}$.

Кут закручування ділянки стержня довжиною l знайдемо за формулою (3.12) з врахуванням (3.6)

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_x dx}{I_p G}. \quad (3.15)$$

Якщо крутний момент M_x і жорсткість перерізу GI_p величини сталі на ділянці довжиною l , то

$$\varphi = \frac{M_x l}{I_p G}. \quad (3.16)$$

Кут закручування стержня, який має n ділянок

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{xi} l_i}{I_p G}. \quad (3.17)$$

3.5.2 Епюри крутних моментів

Для розрахунку бруса на кручення (формули 3.7 – 3.12) необхідно знати величину крутного моменту M_x в будь-якому поперечному перерізі бруса. Закон зміни крутних моментів по довжині бруса $M_x(x)$ називають епюрою крутних моментів. Епюра дає наочне зображення розподілу крутних моментів вздовж осі бруса. Величину M_x знаходять із умови рівноваги будь-якої частини бруса, розміщеної з одного боку від перерізу. Із рівнянь рівноваги випливає, що крутний момент у будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.

Епюри крутних моментів дають змогу визначити небезпечні перерізи, зокрема, якщо брус має сталий поперечний переріз, то небезпечними будуть перерізи на ділянці, де виникає найбільший крутний момент.

Крутний момент вважають додатним, якщо результуючий момент зовнішніх пар, прикладених до розглядуваної частини бруса буде напрямлений за годинниковою стрілкою, коли дивитися в торець перерізу, і навпаки. Користуючись принципом пом'якшених граничних умов, вважатимемо, що у поперечному перерізі, де прикладено скручувальний момент, значення крутного моменту змінюється стрибкоподібно.

Під час побудови епюри крутних моментів їх величини відкладають перпендикулярно до прямої, паралельної осі бруса (базі епюри). На рисунку 3.18 наведено приклад побудови епюри крутних моментів.

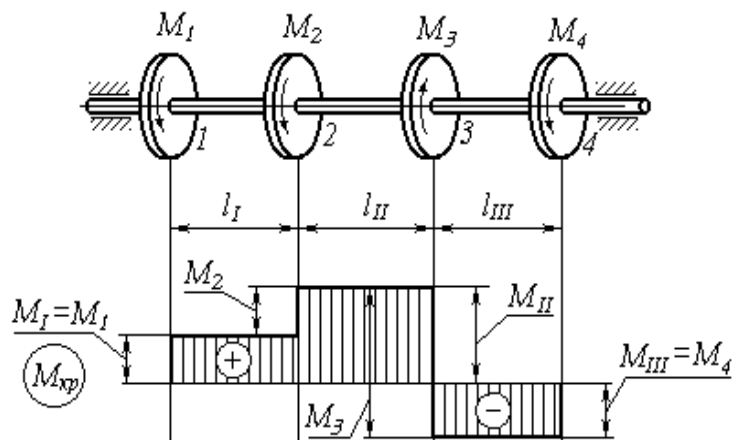


Рисунок 3.18

3.5.3 Розрахунки на міцність та жорсткість

Для нормальної роботи стержнів на кручення необхідно задовольнити:

а) умову міцності

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau], \quad (3.18)$$

б) умову жорсткості

$$\theta_{\max} = \frac{M_x}{I_p G} \leq [\theta], \quad (3.19)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження кручення, яке вибирають залежно від допустимого напруження на розтяг, умов роботи конструкції та інше. Наприклад:

- для сталей $[\tau] = (0,55 \dots 0,60)[\sigma]_p$,
- для чавунів $[\tau] = (1,0 \dots 1,2)[\sigma]_p$.

В формулі (3.19) $[\theta]$ – допустимий кут закручування, нормований технічними умовами.

Для вала суцільного поперечного перерізу

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{M_x}{[\tau]},$$

звідки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi[\tau]}}.$$

Для трубчастого вала

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{M_x}{[\tau]},$$

звідки

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}}.$$

де $\alpha = d/D$.

Під час розрахунків на жорсткість, враховуючи (3.19) і значення I_p для суцільного вала $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$, для трубчастого вала $I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$ знаходимо:

для суцільного вала

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_x}{G\pi[\theta]}}$$

для трубчастого вала

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_x}{G\pi[\theta](1 - \alpha^4)}}$$

Таким чином діаметр вала визначають з умови міцності (3.18) та умови жорсткості (3.19). За кінцевий розмір беруть більший діаметр.

Часто скручувальні моменти визначають за потужністю N , що передається на вал або знімається з нього і за його кутовою швидкістю ω .

У такому випадку скручувальний момент визначають за формулою

$$M_k = \frac{N}{\omega}. \quad (3.20)$$

Якщо N взяти в ватах, а ω – у радіанах за секунду, то M_k буде в Н·м.

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. За яких умов вал буде працювати на кручення?
2. Дати означення правила знаків за кручення.
3. Умова міцності за процесу кручення.
4. Умова жорсткості за процесу кручення.
5. Формула відносного кута і кута закручування вала.
6. Порядок розрахунку розмірів поперечного перерізу вала під час кручення.

3.5.4 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з опору матеріалів ОМ2 Розрахунок вала на кручення

Для вала, який навантажений тільки крутними моментами (С. 128 – 130):

- а) обчислити величину та напрямок моменту T_0 ;
- б) побудувати епюру крутних моментів;
- в) обчислити діаметри ділянок вала із умов міцності і жорсткості, якщо

$$[\theta] = 0,5 \text{ } ^\circ/\text{м};$$

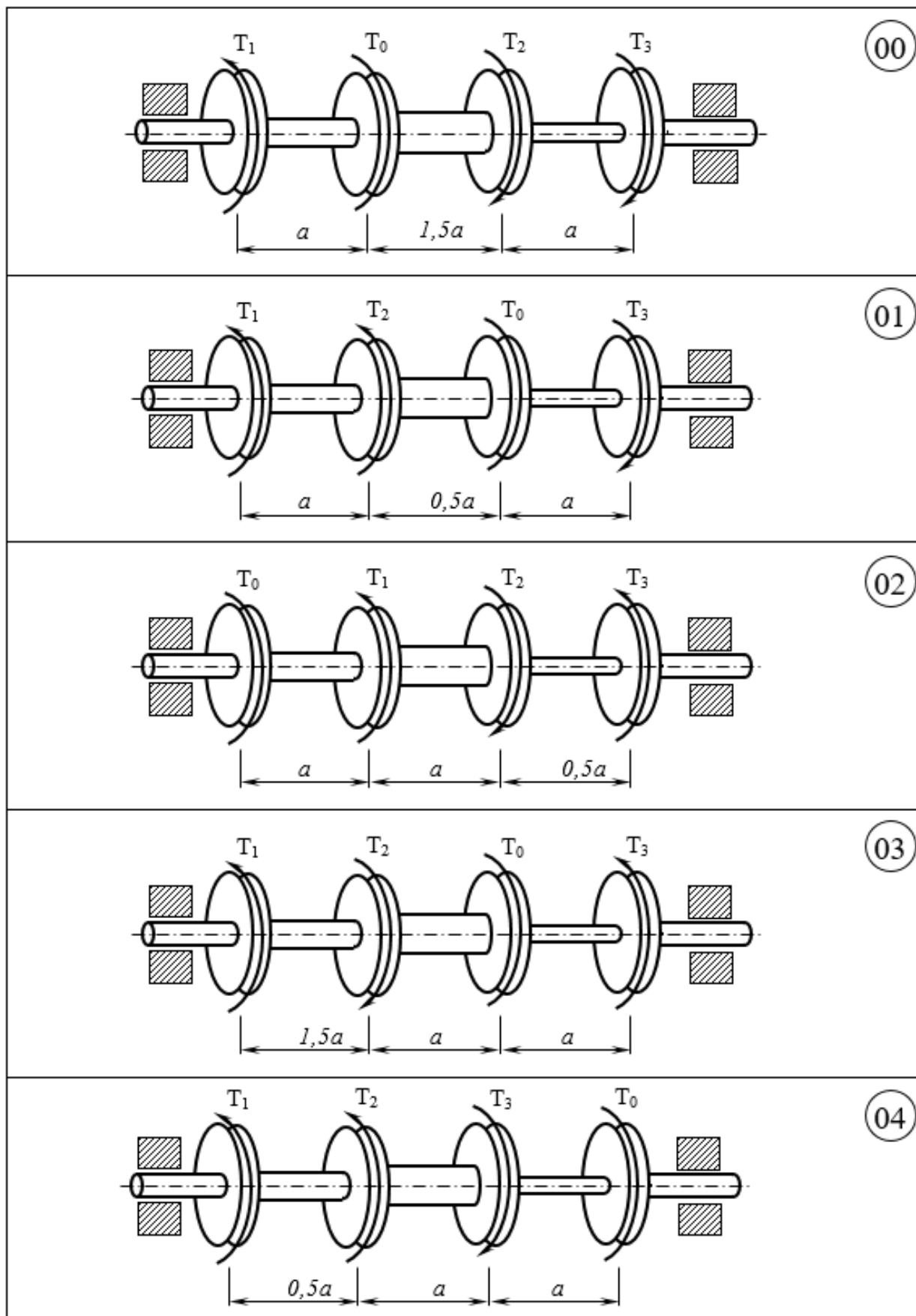
Для однієї із ділянок розрахунок зробити для двох випадків:

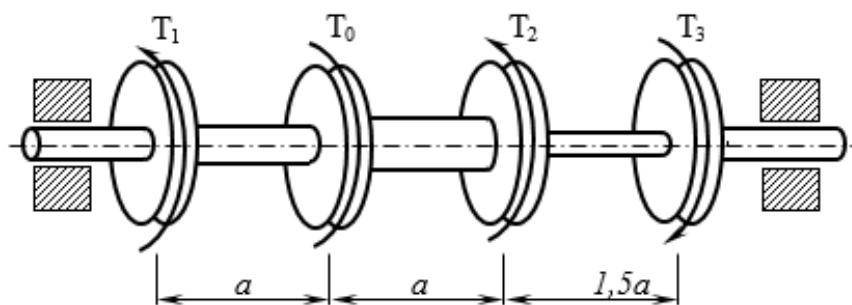
- суцільний переріз вала і кільцевий за відношення внутрішнього діаметра до зовнішнього $\alpha = d/D = 0,8$;
- порівняти вагу валів суцільного та кільцевого перерізу, зробити висновок щодо раціонального перерізу;

- г) побудувати епюру кутів повороту перерізів вала (в градусах).

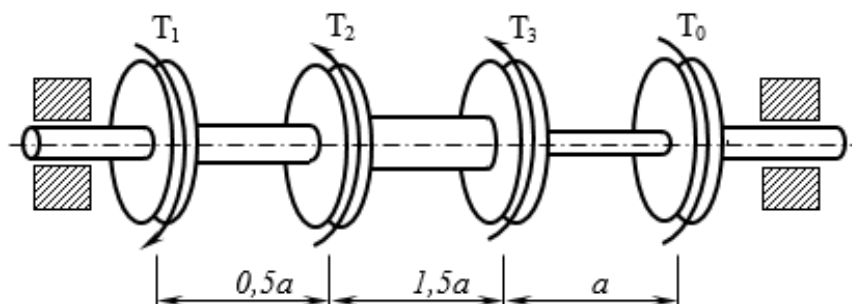
Таблиця 3.1

Варіант	T_1 , Н·м	T_2 , Н·м	T_3 , Н·м	a , м	Матеріал (сталь)
0	1000	3100	2200	0,1	Ст5
1	2500	1200	2500	0,5	20
2	4000	1500	1800	0,2	30
3	1500	2200	2800	0,4	45
4	3000	2300	1600	0,1	60Г
5	2000	1500	1700	0,3	40Х
6	3500	1400	3100	0,5	20Х
7	1000	3100	2700	0,2	45Х
8	2000	1700	1400	0,4	12ХН3А
9	1500	2100	2300	0,1	30ХСГА

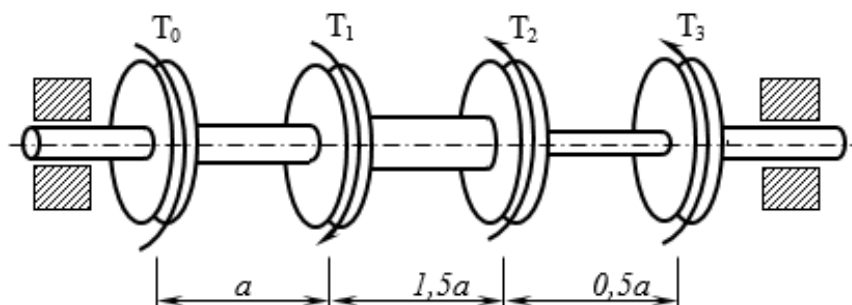




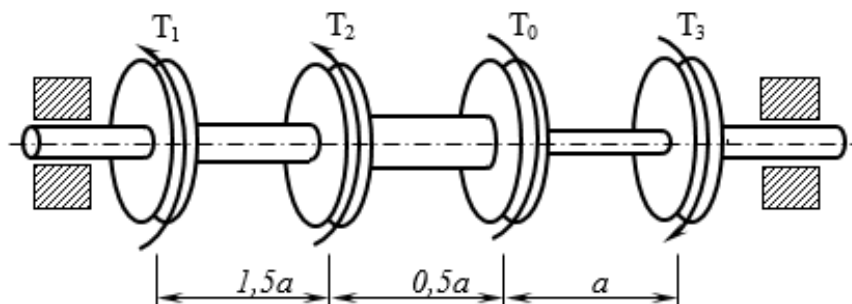
05



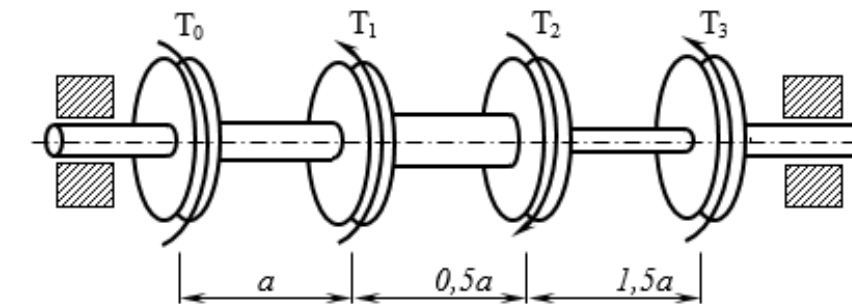
06



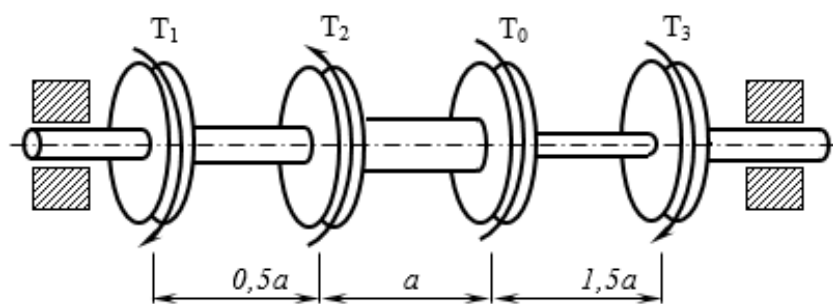
07



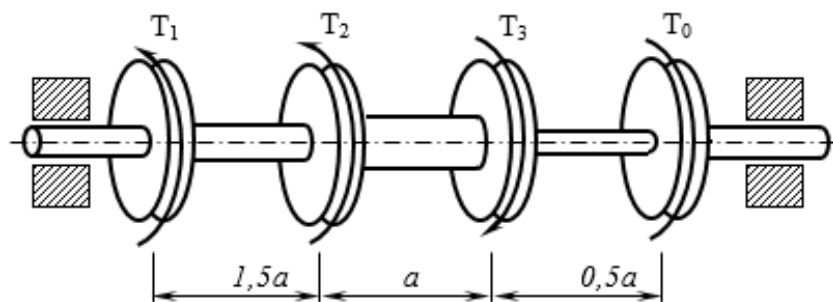
08



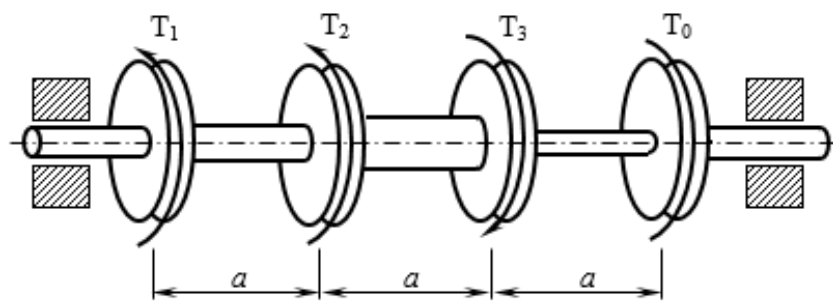
09



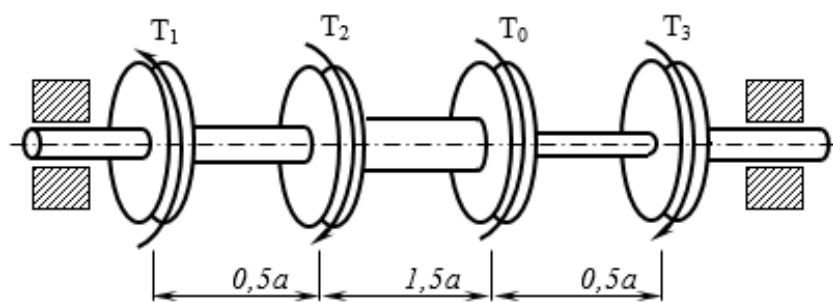
10



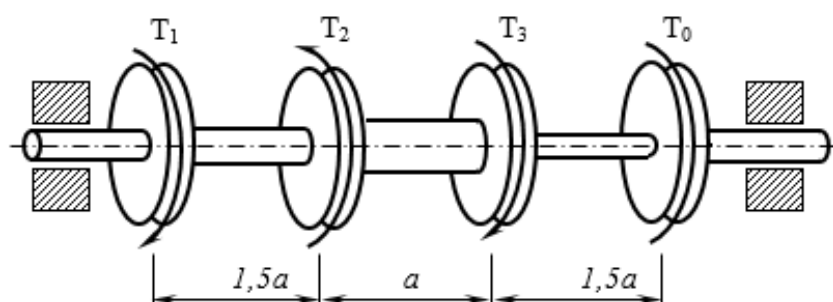
11



12



13



14

3.5.5 Приклад виконання завдання до ОМ2

Розрахувати вал, зображений на рисунку 3.19 на кручення, відповідно до наведеного вище (пп. 3.5.4) порядку розрахунку.

Вихідні дані. $T_1 = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $T_2 = 3000 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $T_3 = 2000 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $[\theta] = 1^\circ/\text{м}$;
 $\alpha = d/D = 0,7$, сталь 40Х.

Знайти: T_0 , $M_{кр}(x)$, d_1 , d_2 , d_3 , $\varphi(x)$.

Розв'язання:

Знаходимо невідомий крутний момент T_0 , користуючись рівнянням рівноваги у вигляді $\sum T_i = 0$.

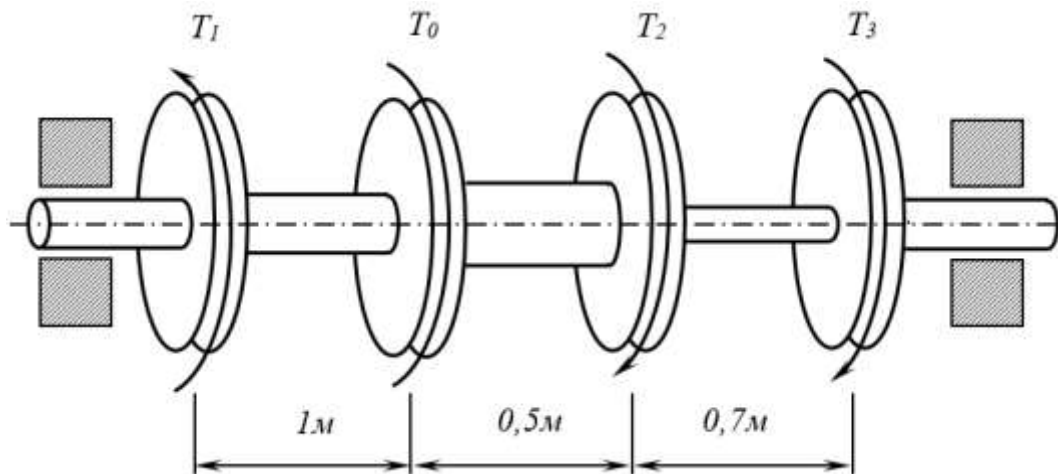


Рисунок 3.19

Нехай T_0 має такий самий напрямок, як і T_1 , (правило знаків вибираємо довільно) тоді

$$T_1 + T_0 - T_2 - T_3 = 0, \text{ звідки}$$

$$T_0 = -T_1 + T_2 + T_3 = -1000 + 3000 + 2000 = 4000 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюру крутних моментів

Знаходимо внутрішні крутні моменти, використовуючи метод перерізів.

Ділянка АВ

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м},$$

$$M_I = -T_1 = -1000 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Ділянка ВС

$$0 \leq x_2 \leq 0,5 \text{ м},$$

$$M_{II} = -T_1 - T_0 = -1000 - 4000 = -5000 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Ділянка CD

$$0 \leq x_3 \leq 0,7 \text{ м},$$

$$M_{III} = -T_1 - T_0 + T_2 = -1000 - 4000 + 3000 = -2000 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Епюру крутних моментів наведено на рис. 3.20.

Із умови міцності під час кручення $\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau]$ знаходимо мінімальне значення діаметра ділянок вала суцільного перерізу

$$\frac{16M_{кр}}{\pi d^3} = [\tau],$$

звідки

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau]}},$$

Для трубчастого вала

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) = \frac{M_{кр}}{[\tau]},$$

звідки

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}}, \text{ де } \alpha = d/D.$$

Із умови жорсткості під час кручення $\theta_{\max} = \frac{M_x}{I_p G} \leq [\theta]$ знаходимо мінімальне значення діаметра ділянок вала, де значення I_p для суцільного вала $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$, для трубчастого вала $I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4)$.

$$\text{Отже, для суцільного вала} \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_{кр}}{G\pi^2[\theta^0]}},$$

$$\text{для трубчастого вала} \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_{кр}}{G\pi^2[\theta^0](1 - \alpha^4)}}.$$

Визначення допустимих напружень

Допустимі напруження для сталі 40Х (пластичний матеріал) дорівнюють

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\sigma_m}{n} = \frac{800}{2} = 400 \text{ МПа},$$

$$[\tau] = (0,55 \dots 0,60)[\sigma]_p = 0,6 \cdot 400 = 240 \text{ МПа}.$$

де $\sigma_n = \sigma_m = 800 \text{ МПа}$ – границя текучості сталі 40Х (див. **Додаток Б**),

n – коефіцієнт запасу міцності за дії на вал статичного навантаження
 $n = 1,5 \dots 2$, вибираємо $n = 2$.

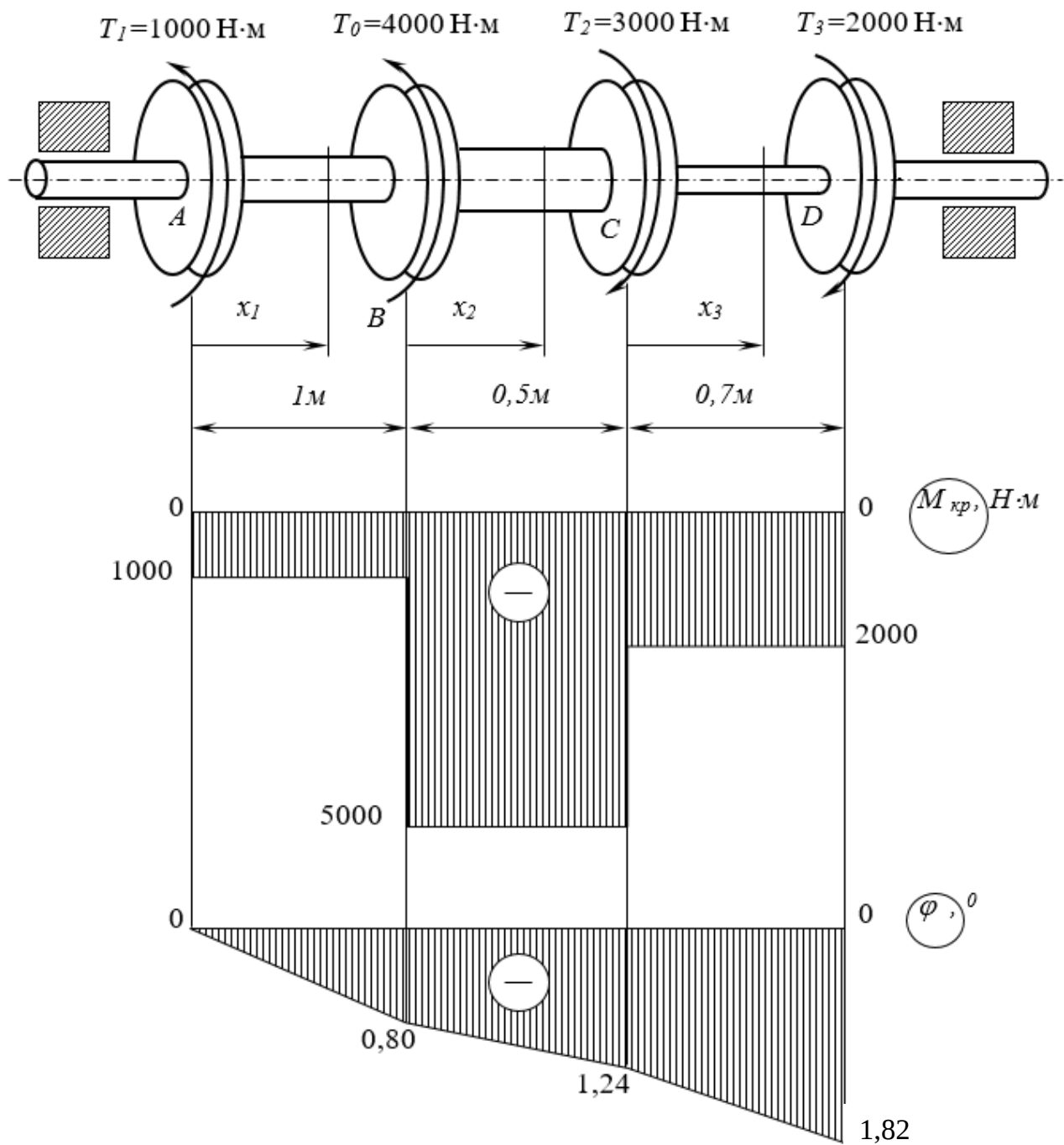


Рисунок 3.20

Ділянка АВ. $M_I = -1000 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Суцільний переріз

умова міцності

$$d_I = \sqrt[3]{\frac{16M_I}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000}{\pi \cdot 240 \cdot 10^6}} = 0,0277 \text{ (м)},$$

умова жорсткості

$$d_I \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_I}{G \pi^2 [\theta^0]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 1000}{8 \cdot 10^{10} \pi^2 \cdot 1}} = 0,052 \text{ (м)},$$

Беремо більший з розрахованих та округляємо його до стандартного числа $d_I = 55 \text{ мм}$.

Для трубчастого вала

умова міцності

$$D_I = \sqrt[3]{\frac{16 M_I}{\pi [\tau] (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000}{\pi \cdot 240 \cdot 10^6 (1 - 0,7^4)}} = 0,0303 \text{ (м)},$$

умова жорсткості

$$D_I \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_I}{G \pi^2 [\theta^0] (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 1000}{8 \cdot 10^{10} \pi^2 \cdot 1 (1 - 0,7^4)}} = 0,0557 \text{ (м)}.$$

Вибираємо більший з розрахованих та округляємо його до стандартного числа $D_I = 60 \text{ мм}$.

Внутрішній діаметр трубчастого перерізу $d_m = D_I \cdot \alpha = 60 \cdot 0,7 = 42 \text{ мм}$.

Порівнюємо вагу валів кожного перерізу. Співвідношення мас валів прямо пропорційне площам їх перерізів за однакової густини матеріалу ρ та довжини вала:

$$\frac{m_c}{m_m} = \frac{V_c \rho}{V_m \rho} = \frac{A_c l}{A_m l} = \frac{A_c}{A_m},$$
$$\frac{A_c}{A_m} = \frac{(\pi/4) d_c^2}{(\pi/4) (D_m^2 - d_m^2)} = \frac{d_c^2}{D_m^2 - d_m^2} = \frac{55^2}{60^2 - 42^2} = 1,65.$$

Отже, з погляду економії матеріалу кільцевий переріз вала є раціональнішим, оскільки вал буде мати меншу масу в 1,65 раза за заданої величини $\alpha = 0,7$.

Подальший розрахунок ділянок вала ведемо за умовою жорсткості, виходячи із аналізу результатів для першої ділянки.

Ділянка ВС. $M_{II} = -5000 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

$$d_{II} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_{II}}{G \pi^2 [\theta^0]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 5000}{8 \cdot 10^{10} \pi^2 \cdot 1}} = 0,0778 \text{ (м)}.$$

Вибираємо $d_{II} = 80 \text{ мм}$.

Ділянка CD. $M_{III} = -2000 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

$$d_{III} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_{III}}{G \pi^2 [\theta^0]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 2000}{8 \cdot 10^{10} \pi^2 \cdot 1}} = 0,0618 \text{ (м)}.$$

Беремо $d_{III} = 65 \text{ мм}$.

Будуємо епюру кутів закручування

Кут закручування знаходимо із виразу

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p},$$

де l – довжина відрізка вала;

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} - \text{полярний момент інерції.}$$

Визначимо кут закручування граничних перерізів на кожній ділянці відносно перерізу в точці А.

Ділянка АВ. $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$, $M_I = -1000 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $d_I = 55 \text{ мм}$.

$$I_{p1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,055^4}{32} = 8,98 \cdot 10^{-7} \text{ (м}^4\text{)},$$

$$\varphi_{BA} = \frac{M_I \cdot 1}{G \cdot I_{p1}} = \frac{-1000 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 8,98 \cdot 10^{-7}} = -0,0139 \text{ рад} = 0,80^\circ.$$

Ділянка ВС. $0 \leq x_2 \leq 0,5 \text{ м}$, $M_{II} = -5000 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $d_{II} = 80 \text{ мм}$.

$$I_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,08^4}{32} = 4,02 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^4\text{)},$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \frac{M_{II} \cdot 0,5}{G \cdot I_{p2}} = -0,0139 + \frac{-5000 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,02 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= -0,0139 - 0,0078 = -0,0217 \text{ рад} = -1,24^\circ,$$

Ділянка CD. $0 \leq x_3 \leq 0,7 \text{ м}$, $M_{III} = -2000 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $d_{III} = 65 \text{ мм}$.

$$I_{p3} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,065^4}{32} = 1,75 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^4\text{)},$$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \frac{M_{III} \cdot 0,7}{G \cdot I_{p3}} = -0,0217 + \frac{-2000 \cdot 0,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= -0,0217 - 0,0100 = -0,0317 \text{ рад} = -1,82^\circ.$$

Виходячи із отриманих значень φ_i ($i = 1, 2, 3$), будуємо епюру кутів закручування вала (рис. 3.20), враховуючи лінійний вид графіка.

4 ДЕТАЛІ МАШИН

Задачами розділу «Деталі машин» є вивчення явищ, що відбуваються в з'єднаннях деталей машин і передачах, а також розробка методів їх розрахунку та конструювання на основі опору матеріалів.

4.1 Критеріальні вимоги до деталей машин

Критеріальні вимоги до деталей машин визначаються відповідними вимогами до технічних засобів (ТЗ), у конструкції яких вони використовуються.

До основних з них належать: *працездатність, надійність, технологічність, економічність*, а також *екологічність і естетичність*.

Під працездатністю розуміють такий стан ТЗ, за якого він здатний виконувати задані функції (функціонувати), зберігаючи значення основних параметрів у межах, установлених відповідними нормативними документами.

Основними критеріями працездатності ТЗ і його деталей є: міцність, жорсткість, стійкість, вібростійкість, теплостійкість, стійкість проти корозії і старіння.

Надійність – властивість ТЗ виконувати задані функції (зберігати *працездатність*) протягом необхідного часу.

Технологічність і економічність конструкції машини чи деталі – це її найбільша простота і найменші матеріальні затрати для її виготовлення.

Екологічність – здатність машини виконувати свої функції без шкідливого впливу на навколишнє середовище.

Усі ці вимоги значною мірою взаємопов'язані, і лише повне виконання їх дає можливість досягнути високої якості машин під час проектування і конструювання.

4.2 Матеріали для виготовлення деталей машин

У машинобудуванні для виготовлення деталей машин застосовують чорні та кольорові метали, їх сплави, комбіновані та неметалеві матеріали.

До чорних металів належать *сталі та чавуни*.

До кольорових – *сплави на основі міді (латуні, бронзи), сплави на основі олова (бабіти), алюмінієві сплави, титанові сплави*.

До *комбінованих матеріалів* відносяться – *композитні, армовані, металокерамічні* тощо.

До *неметалічних матеріалів* відносяться – насамперед *пластмаси, гума*.

Вибір того чи іншого матеріалу визначається функціональним призначенням деталі, умовами її роботи, конструктивними, технологічними та економічними вимогами. До основних показників, які забезпечують головні властивості матеріалів, належать: межа міцності, межа текучості, відносне видовження, твердість, густина.

4.3 З'єднання деталей машин

Деталі, що складають конструкцію технічного засобу, пов'язуються між собою відповідними способами, які отримали назву **зв'язки**. Вони розділяються на **рухомі** і **нерухомі**. Наявність рухомих зв'язків у механізмах і машинах (кінематичні пари – наприклад, різні шарніри, зубчасте зачеплення) обумовлена їх кінематичними схемами. Формування нерухомих зв'язків визначається необхідністю розділення загальної конструкції технічного засобу на вузли і деталі для спрощення виробництва, полегшення складання, ремонту та транспортування. Нерухомі зв'язки мають назву **з'єднання**.

З'єднання є важливими елементами машинобудівних конструкцій. Досвід експлуатації транспортних технічних засобів виявив, що велика кількість відмов у їх роботі пов'язана з незадовільною якістю з'єднань.

Основним критерієм **працездатності** з'єднань є міцність.

За ознакою роз'ємності всі види з'єднань можна розділити на **роз'ємні** і **нероз'ємні**.

До **роз'ємних з'єднань**, які можуть розбиратися без руйнування деталей, що їх складають, належать: різьбові з'єднання; шпонкові з'єднання; шліцьові з'єднання; профільні з'єднання; штифтові з'єднання; клинові з'єднання.

До **нероз'ємних з'єднань**, які не можуть розбиратися без руйнування деталей, що з'єднуються, або їхніх поверхонь, належать: зварні з'єднання; заклепкові з'єднання; з'єднання з натягом; паяні з'єднання; клейові з'єднання.

4.4 Роз'ємні з'єднання. Переваги та недоліки

Різьбові з'єднання

Різьба – це виступи, утворені на основній поверхні гвинтів або гайок і розташовані за гвинтовою лінією.

Різьбові з'єднання є одними з найбільш поширених роз'ємних з'єднань (рис. 4.1), які здійснюються за допомогою деталей, що мають зовнішню (болти, гвинти, шпильки та ін.) і внутрішню (гайки, різьбові отвори в корпусних деталях) різьбу.

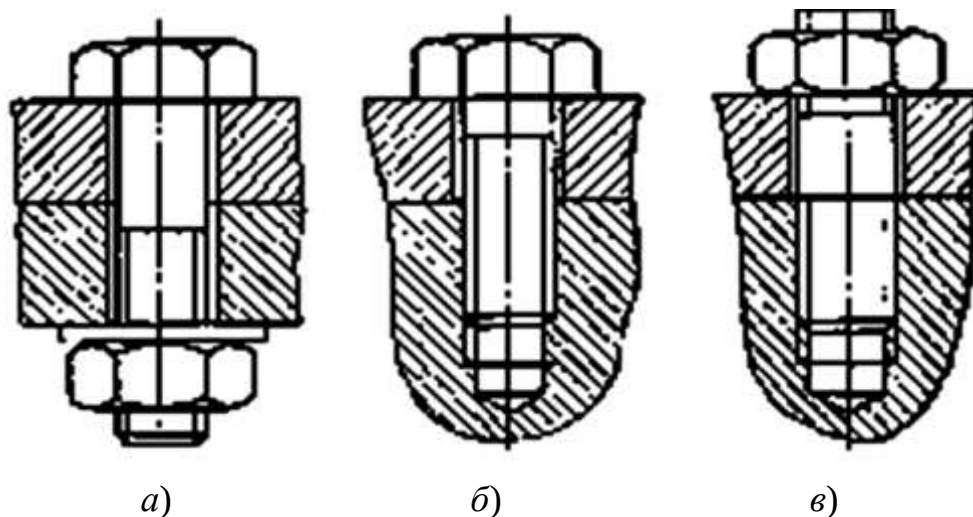


Рисунок 4.1

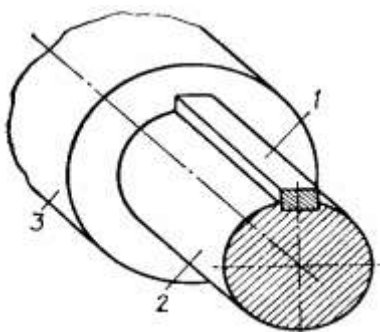
(З'єднання за допомогою *а)* – болта, *б)* – гвинта, *в)* – шпильки)

До **переваг** різьбових з'єднань потрібно віднести високу надійність, зручність складання та розбирання, можливість утворення великих осьових навантажень, відносно невелику вартість, що обумовлюється стандартизацією та масовим виробництвом кріпильних різьбових деталей.

Недоліком потрібно вважати концентратори напружень у западинах різьби, що знижує втомлену міцність різьбового з'єднання, а також необхідність застосування в багатьох випадках засобів стопоріння (для запобігання саморозгвинчування з'єднання).

Шпонкові з'єднання

Шпонкове з'єднання здійснюється за допомогою спеціальної деталі – шпонки, яка закладається у відповідні пази, виконані на сполучених поверхнях деталей, що з'єднуються (рис. 4.2, рис. 4.3). Воно забезпечує нерухоме скріплення деталей для передачі крутного моменту.



- 1 – шпонка
- 2 – вал
- 3 – втулка (або маточина шківа, зубчастого колеса)

Рисунок 4.2

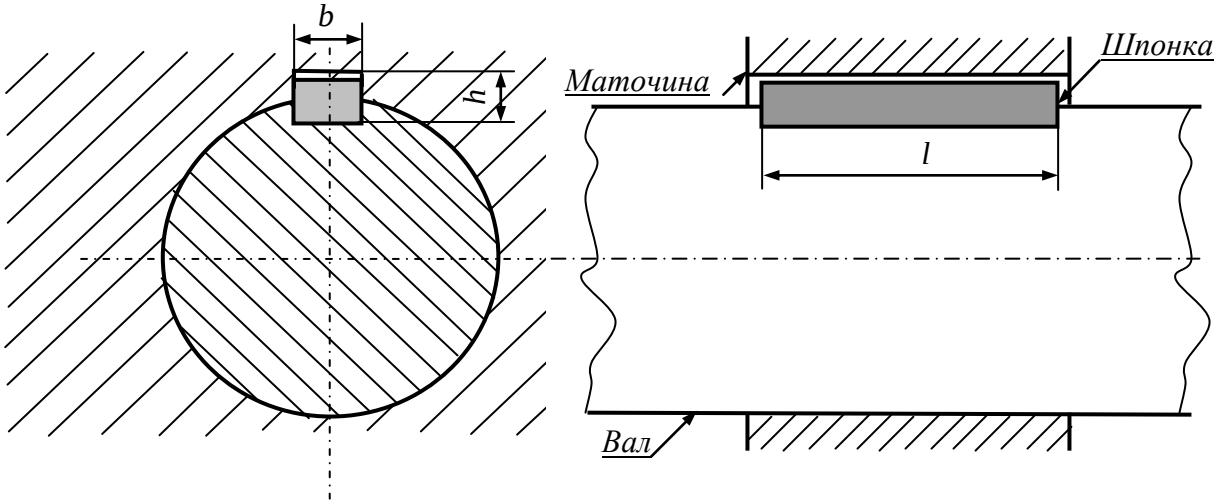


Рисунок 4.3

До **переваг** шпонкових з'єднань потрібно віднести простоту і надійність конструкції, зручність складання і розбирання, невисоку вартість.

Недоліки з'єднання визначаються ослабленням суцільних перерізів сполучених деталей і наявністю концентраторів напружень.

Найбільш поширені в машинобудівних конструкціях такі **типи шпонок** (рис. 4.4):

- клинова врізна, створює напружений стан за верхньою та нижньою гранями шпонки і передає крутний момент за рахунок сил тертя на них (рис. 4.4, *а*);
- призматична звичайна з округленими кінцями, сприймає навантаження бічними гранями (рисунок 4.4, *б*);
- призматична напрямна врізна із закріпленням на валу, допускає переміщення маточини вздовж осі вала (рисунок 4.4, *в*);
- сегментна (рисунок 4.4, *г*);
- кругла (не стандартизована) (рисунок 4.4, *д*).

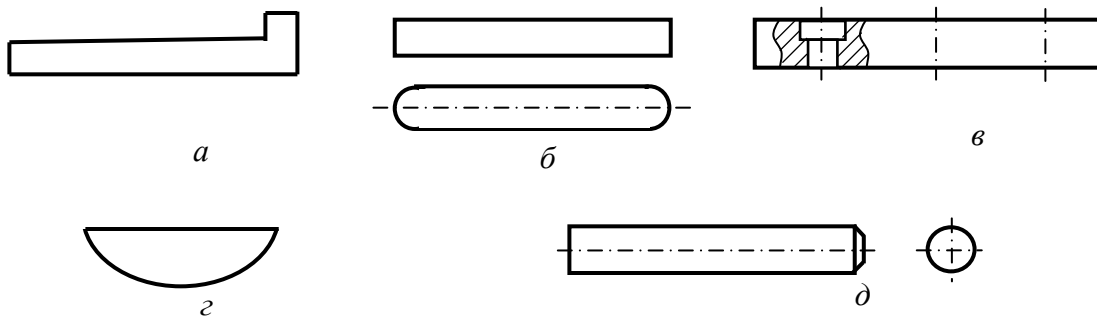


Рисунок 4.4

Шліцьові з'єднання

Шліцьове з'єднання можна умовно уявити як багатошпонкове, у якого шпонки виготовлені безпосередньо на валу (рис. 4.5). Призначається для передачі значних крутних моментів. За допомогою шліцьового з'єднання забезпечується як нерухоме, так і рухоме (з відносним осьовим переміщенням сполучених поверхонь) скріплення деталей.

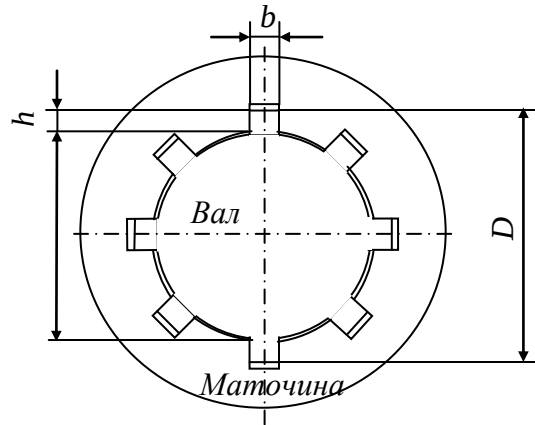


Рисунок 4.5

До **переваг** шліцьових з'єднань потрібно віднести більшу міцність шліцьових валів порівняно зі шпонковими, а також краще центрування деталей.

Недоліком потрібно вважати складність виготовлення шліцьових валів і збільшення концентраторів напружень.

Профільні з'єднання

У **профільному з'єднанні** охоплювальна та охоплювана поверхні деталей мають некруглий профіль перерізу, внаслідок чого забезпечується передача великих крутних моментів без використання додаткових деталей (наприклад, з'єднання корабельного гребного гвинта з кінцевим валом) (рис. 4.6).

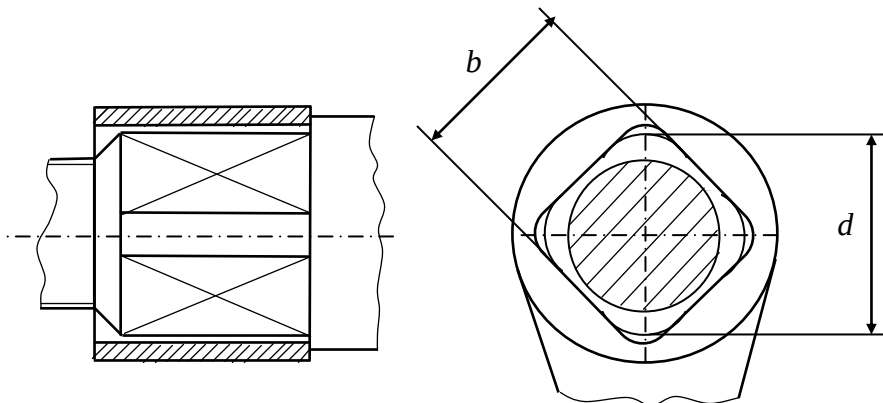


Рисунок 4.6

Переваги: порівняно зі шпонковими та шліцьовими з'єднаннями профільне відрізняється меншою концентрацією напружень і кращим centruванням.

Недолік з'єднання полягає в складності виготовлення профільних сполучених поверхонь.

Штифтові з'єднання

Штифтове з'єднання, яке досить поширене в машинобудуванні, здійснюється за допомогою додаткової деталі – штифта (рис. 4.7).

З'єднання використовується для передачі осьового навантаження або крутного моменту, а також для забезпечення точного взаємного розташування деталей, що з'єднуються.

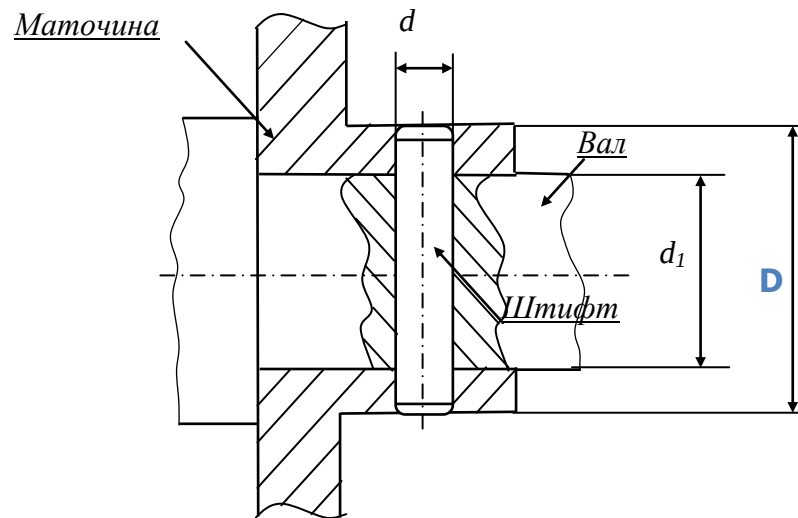


Рисунок 4.7

Перевагами штифтових з'єднань є простота конструкції, зручність монтажу.

До **недоліків** потрібно віднести послаблення основних деталей отворами під штифти, нетехнологічність конструкції та обмеження навантажень, що передаються.

4.5 Нероз'ємні з'єднання. Переваги та недоліки

Зварні з'єднання

З'єднання деталей під час зварювання супроводжується місцевим нагріванням поверхонь, що з'єднуються, до розплавленого або пластичного стану. Зварюванням можна з'єднувати як металеві, так і неметалеві деталі. Зварне з'єднання вважається найбільш досконалим нероз'ємним з'єднанням (рис. 4.8).

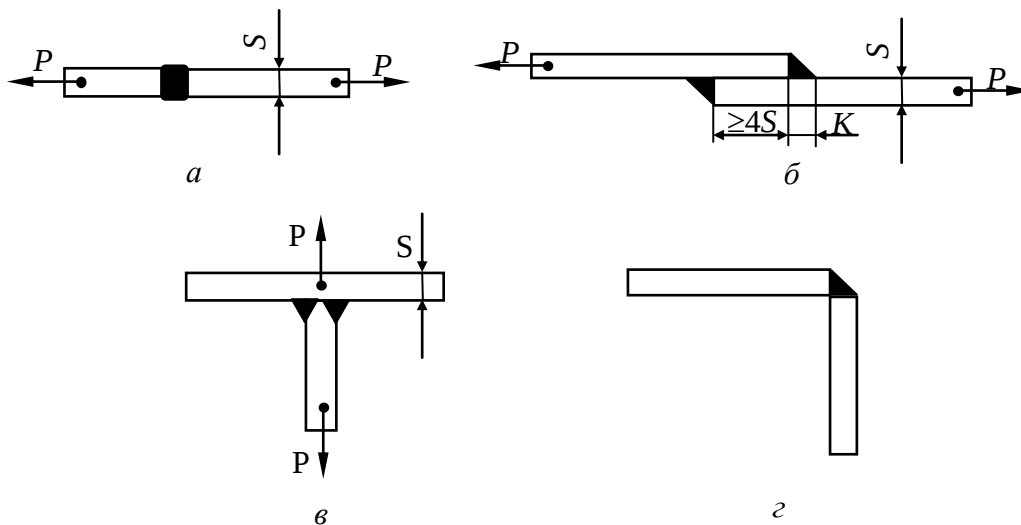


Рисунок 4.8

(Зварні з'єднання: *а* – встик, *б* – внапустку, *в* – таврове, *г* – кутове)

До його **переваг** належать рівномірність щодо сполучених поверхонь, економія матеріалів і зменшення маси порівняно з заклепковими з'єднаннями, висока продуктивність і технологічність процесу зварювання.

Недоліками з'єднання вважаються поява температурних напружень і їх концентрація, а також жолоблення тонкостінних деталей.

Заклепкові з'єднання

Заклепкове з'єднання здійснюється з використанням додаткової деталі – заклепки (рис. 4.9). Форма та розміри заклепок стандартизовані.

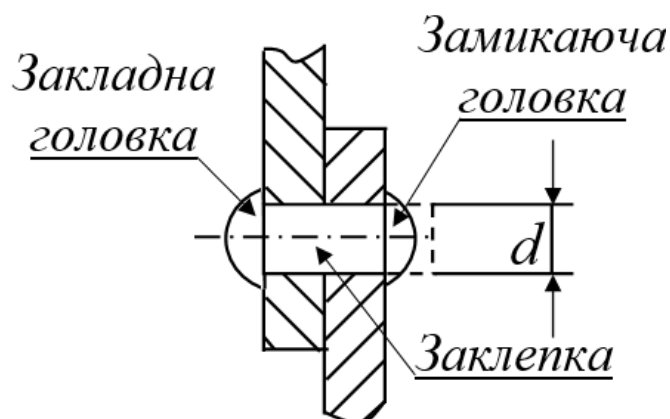


Рисунок 4.9

Порівняно зі зварними з'єднаннями **переваги** заклепкових полягають у можливості з'єднання незварюваних деталей, менших руйнуваннях деталей під час розбирання, а також меншій концентрації напружень.

Недоліки їх визначаються малою продуктивністю технологічного процесу, великими витратами металу, значною вартістю, підвищеним рівнем негативного впливу вібрацій на робітників.

З'єднання з натягом

З'єднання цього типу забезпечує нерухоме скріплення деталей за рахунок сил тертя, що виникають між охоплювальною та охоплюваною поверхнями під час складання деталей за групою посадок з натягом. Такий спосіб з'єднання застосовують для складання деталей, навантажених значними зусиллями, або тих, що підлягають в процесі роботи впливу вібрацій та ударів – для з'єднання валів із зубчастими колесами або бандажів черв'ячних коліс з маточинами. Окрім гладких, у таких з'єднаннях застосовують накатані деталі. Надійність з'єднання у цьому випадку забезпечується за рахунок вдавнення зубців накатки в циліндричну поверхню сполученої деталі.

Паяні з'єднання

Під час паяння деталі (з чавуну, сталі, кольорових металів та сплавів) з'єднуються розплавленим припоєм. Такі з'єднання широко застосовуються в електричних машинах, приладах, радіоапаратурі.

Перевагами паяних з'єднань є їх герметичність, відносна простота і технологічність процесу, малі остаточні деформації. До **недоліків** потрібно віднести невисоку механічну та термічну міцність, високу вартість припоїв і флюсів.

Відрізняють легкоплавкі (м'які) припої з температурою плавлення до 300 °С і тугоплавкі (тверді) припої з температурою плавлення більше 500 °С.

Поширеними м'якими припоями є сплави олова та свинцю – ПОС (з вмістом олова 18...90 %; наприклад, припій ПОС-60 містить 60 % олова і близько 40 % свинцю); олова, свинцю та кадмію – ПОСК; олова, свинцю та вісмуту – ПОСВ. Такі припої застосовують для паяння міді, сплавів, сталі.

Тверді припої застосовуються для паяння міді, сталей, нержавіючих сталей. До складу твердих припоїв можуть входити такі складові: срібло, мідь, кадмій (ПСр50Кд34); мідь і нікель (ПН25) та ін. Такі припої забезпечують шви з відносно високими механічною та термічною міцністю.

Для отримання якісних паяних з'єднань поверхні деталей очищують від окисних плівок шляхом застосування флюсів - каніфолі, розчину спирту, а також хімічно активних флюсів – бури, хлористого цинку та ін.

Клейові з'єднання

З'єднання конструкційних матеріалів склеюванням широко використовується в різних галузях машинобудування. Основною **перевагою**

цього з'єднання є їх щільність, можливість склеювання різнорідних металевих і неметалевих матеріалів у різноманітних сполученнях. **Недоліком** є низька теплостійкість (60 °С для більшості клеїв і 250 °С для теплостійких клеїв), а також невисока міцність.

Вибір клею здійснюється залежно від виду матеріалів, що склеюються, і робочих температур. Так, клеї марок БФ-2 і БФ-4 (розчини синтетичних смол у спирті або ацетоні) застосовуються для склеювання металів і сплавів між собою та неметалевими матеріалами. Епоксидні клеї використовуються для склеювання сталі, міді, алюмінію та його сплавів, пластмас. В електро- та приладобудуванні використовуються епоксидний К-8 і феноло-вінілацетатний ВК-20 струмопровідні клеї.

4.6 Механічні передачі

4.6.1 Основні і похідні параметри механічних передач

Механічна передача – механізм, що перетворює задані кінематичні та енергетичні параметри двигуна на потрібні параметри руху робочих органів машин та призначений для погодження режиму роботи двигуна з режимом роботи виконавчих органів.

Незалежно від типу та конструкції в будь-якій механічній передачі можна виділити два вали: **вхідний** (ведучий) та **вихідний** (ведений) (рис. 4.10).

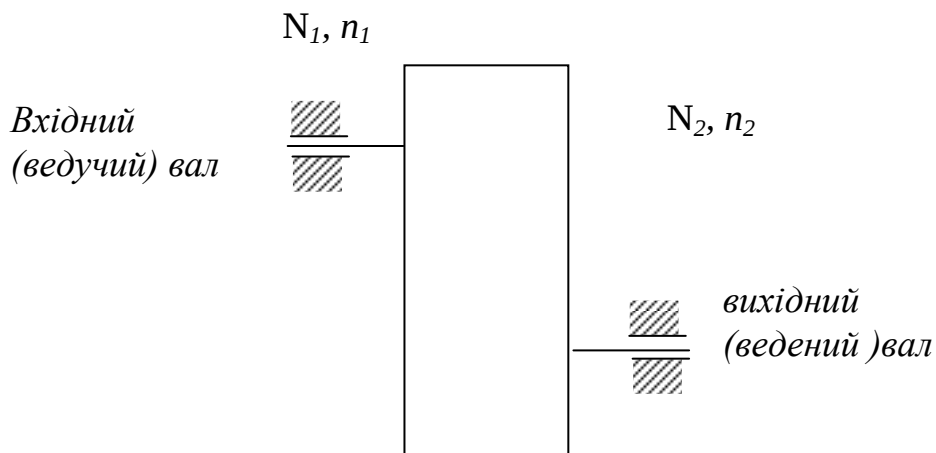


Рисунок 4.10

Цим валам приписують **основні параметри** – потужність N (кВт) і частота обертання n (хв⁻¹). Параметри вхідного (ведучого) вала мають індекс 1, параметри вихідного (веденого) вала – 2.

Крім основних параметрів, роботу механічної передачі характеризують **похідні параметри**:

– передаточне число

$$u = \frac{n_1}{n_2}; \quad (3.1)$$

– коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{N_2}{N_1}; \quad (3.2)$$

– кутова швидкість обертання вала, $рад/с$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}. \quad (3.3)$$

За відомої потужності і частоти обертання на валу можна визначити крутний момент, $Н \cdot м$ або $\frac{кВт}{хв^{-1}}$.

$$T = \frac{N}{\omega}; \quad (3.4)$$

$$T = 9550 \frac{N}{n}. \quad (3.5)$$

Залежно від співвідношення параметрів вхідного і вихідного валів передачі поділяються:

- **на редуктори (знижувальні передачі)** – від вхідного вала до вихідного зменшують частоту обертання ($n_1 > n_2$) і збільшують крутний момент ($T_1 < T_2$); передаточне число передачі $u > 1$;
- **на мультиплікатори (підвищувальні передачі)** – від вхідного вала до вихідного збільшують частоту обертання ($n_1 < n_2$) і зменшують крутний момент ($T_1 > T_2$); передаточне число передачі $u < 1$.

Коробка передач слугує для ступінчастого регулювання частоти обертання або кутової швидкості.

Структурну схему машини можна подати у вигляді:

М—ПМ—РМ

М – двигун;

ПМ – передаточний механізм;

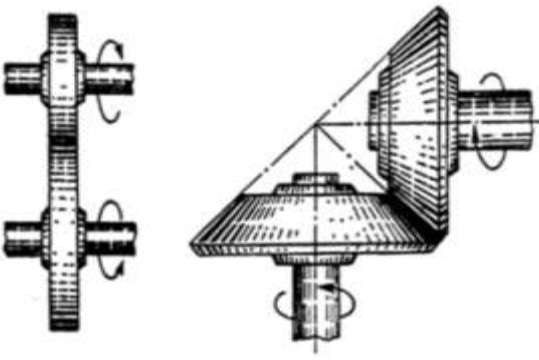
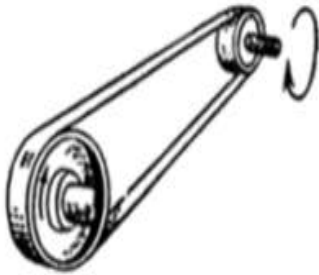
РМ – робочий механізм (орган).

Основне призначення механічних передач – це узгодження параметрів руху робочих органів машини з параметрами руху вала двигуна.

4.6.2 Основні групи та види механічних передач

Залежно від способу передачі руху механічні передачі поділяють на дві групи:

- а) передачі зачепленням (зубчасті, черв'ячні, ланцюгові);
- б) передачі тертям (пасові, фрикційні).

Групи передач	Передачі з безпосереднім дотиканням	Передачі гнучким зв'язком
Передачі тертям	Фрикційна 	Пасова 
Передачі зачепленням	Зубчаста гайка Черв'ячна Гвинт- 	Ланцюгова 

4.6.3 Зубчасті передачі

Зубчасті передачі класифікуються:

1. За характером зачеплення:

- а) із зовнішнім зачепленням;
- б) із внутрішнім зачепленням.

2. За відносним розташуванням осей коліс:

- а) передачі з паралельними осями коліс (циліндричні);
- б) передачі, осі коліс яких перетинаються (конічні);
- в) передачі, осі коліс яких перехрещуються (гвинтові, черв'ячні).

3. За розміщенням зубців відносно осі колеса:

- а) прямозубі;
- б) косозубі;
- в) гвинтові.

Зубчасті передачі є найпоширенішими механічними передачами у сучасному машино- та приладобудуванні. Вони застосовуються як у механізмах найточніших приладів, де розміри коліс вимірюються кількома міліметрами, так і в найпотужніших машинах із розмірами коліс до 10 м.

Зубчаста передача складається з двох коліс, на ободі яких розміщено зубці. Зубці цих коліс входять у зачеплення між собою і завдяки їхній взаємодії забезпечують передачу обертового руху від одного колеса до іншого.

Менше з двох спряжених коліс називають *шестернею*, більше – *колесом*; термін «*зубчасте колесо*» належить до обох коліс передачі.

До переваг зубчастих передач належать:

- компактність;
- найбільші передані потужності ;
- найбільші колові швидкості;
- постійне передатне відношення;
- найбільший ККД.

Недоліками слід вважати:

- складність передачі руху на значні відстані;
- жорсткість передачі;
- шум під час роботи;
- потребує змащення.

4.7 Вали та осі

Обертові деталі механічних передач розміщують на валах та осях, які забезпечують постійне положення осі обертання цих деталей. Вали та осі призначені для підтримування закріплених на них деталей і забезпечення їх постійного положення відносно інших частин машини (рисунок 4.11).

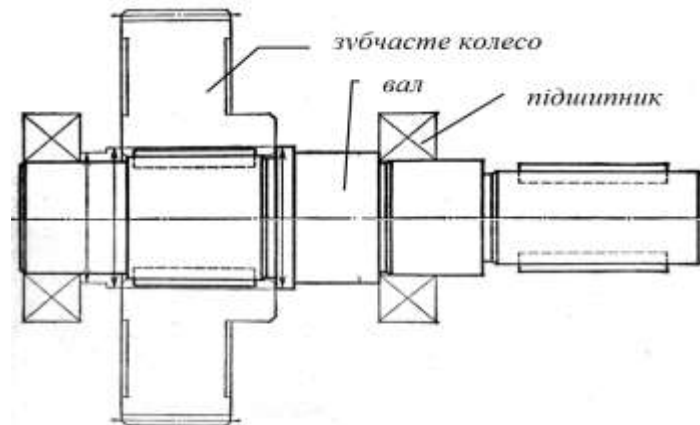


Рисунок 4.11

Осі не передають крутного моменту і працюють тільки на згин. Вісь може бути рухомою і нерухомою.

Вали передають обертовий момент і тому працюють на згин та кручення.

Залежно від форми повздовжньої осі вали поділяють на **прямі** (рис. 4.12, а), **колінчасті** (рис. 4.12, б), **гнучкі** (рис. 4.12, в).

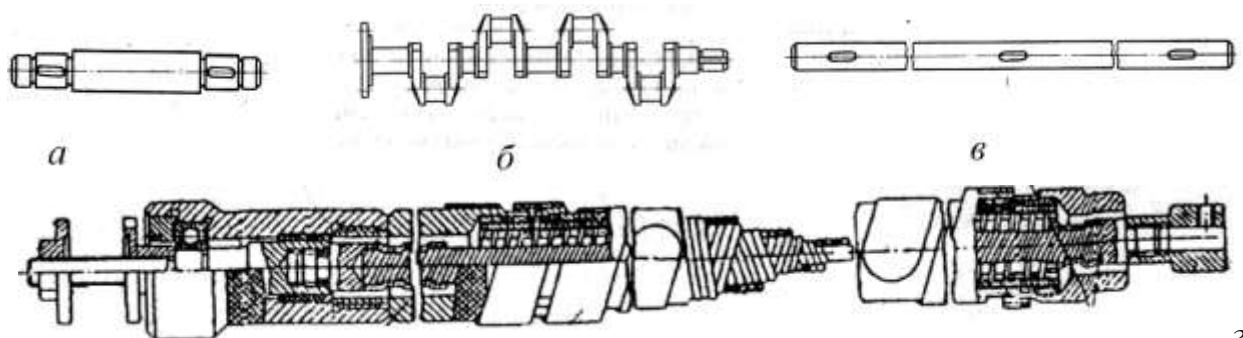


Рисунок 4.12

Колінчасті і гнучкі вали належать до спеціальних деталей.

За конструкцією розрізняють вали й осі: **гладкі** (рисунок 4.12, в) та **ступінчасті** (рисунок 4.12, а) (фасонні). Ступінчасті вали роблять для фіксації деталей в осьовому напрямку, а також для монтажу деталей у разі посадки з натягом.

Для зменшення маси, а також для підведення змащення проектують порожні вали.

Вздовж вала чи осі розрізняють такі ділянки: опорні ділянки – **цапфи**, які спираються на підшипники – несучі ділянки, на яких закріплюють обертові деталі (зубчасті колеса, шків, зірочки ланцюгових передач тощо), перехідні ділянки, які з'єднують опорні ділянки з несучими. Цапфи поділяються на **шпи**, які знаходяться на кінцях вала та сприймають радіальні сили, **шійки** – проміжні цапфи та **п'яти** – кінцеві ділянки, які сприймають осьові сили.

Вали та осі найчастіше виконуються з таких матеріалів:

- Ст5, Ст4 та інші для валів без термообробки;
- сталь 45, 40Х та інші для валів з термообробкою (поліпшення);
- сталь 20, 20Х для швидкохідних валів на підшипниках ковзання з цементацією цапф;
- сталь 20,30, Ст3, Ст4 та інші для осей.

Задачами розрахунку валів та осей є забезпечення втомлюваної міцності, обмеження деформації згину та кручення, можливих поперечних та крутих коливань. Розрахунок і конструювання валів – взаємопов'язані процеси, тому розрахунок валів складається з двох етапів: **проектного** та **перевірочного розрахунку**.

Під час проектного розрахунку валів, як правило, відомо навантаження, розміри основних деталей, розташованих на валу. Потрібно вибрати матеріал і визначити розміри вала.

4.8 Підшипники. Призначення і класифікація

Підшипники слугують опорами для валів і осей, вони підтримують їх у просторі, забезпечуючи можливість обертання і кочення, та сприймають прикладені до них радіальні й осьові навантаження. Від якості підшипників значною мірою залежать **працездатність** і довговічність машин. Щоб уникнути зниження ККД механізму, втрати в підшипниках мають бути мінімальними.

Підшипники класифікують за видом тертя та сприйманим навантаженням.

За видом тертя розрізняють:

- **підшипники ковзання**, у яких опорна ділянка вала ковзає по поверхні підшипника;
- **підшипники кочення**, у яких тертя ковзання замінюють тертям кочення за допомогою установа шарики або роликів між опорними поверхнями підшипника і вала.

За сприйманим навантаженням розрізняють підшипники:

- **радіальні**, які сприймають радіальні навантаження;

- **упорні**, які сприймають осьові навантаження;
- **радіально-упорні**, які сприймають радіальні й осьові навантаження.

4.8.1 Підшипники ковзання

Підшипники ковзання – це опори обертових деталей, які працюють в умовах ковзання поверхні цапфи по поверхні підшипника.

Форма робочої поверхні підшипника ковзання (рис. 4.13) так само, як і форма цапфи вала, може бути циліндричною (а), плоскою (б), конічною (в) або кульковою (г). Опору, що передає осьове навантаження, називають **підп'ятником**.

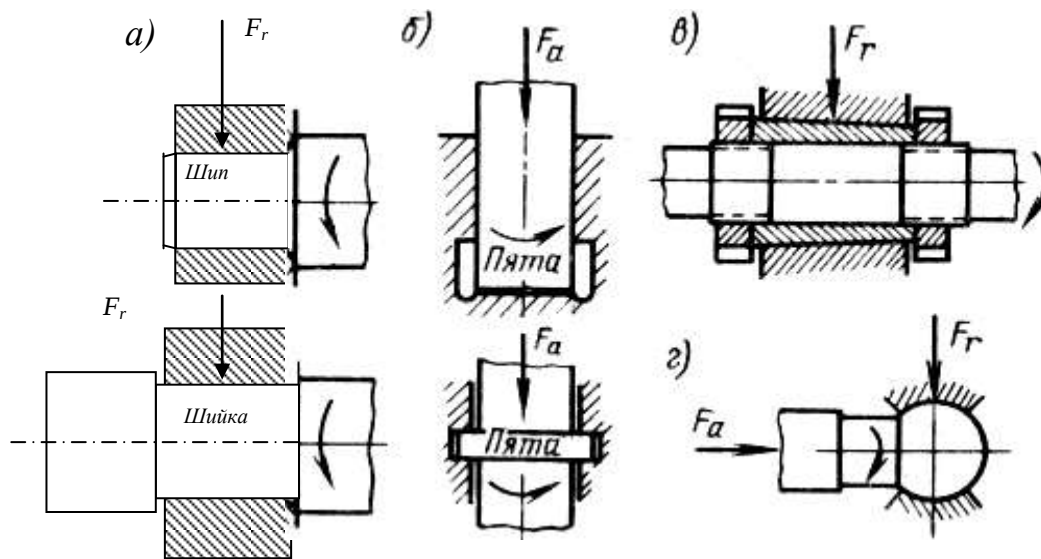


Рисунок 4.13

4.8.2 Підшипники кочення

Застосування підшипників кочення дозволяє замінити тертя ковзання на тертя кочення, яке менш суттєво залежить від змащування (умовний коефіцієнт тертя близький до коефіцієнта рідинного тертя $f \approx 0,0015 \dots 0,006$). Водночас спрощується система змащування та обслуговування підшипника. Конструкція підшипників кочення дозволяє виготовляти їх у масових кількостях як стандартну продукцію, що значно зменшує вартість виробництва.

Підшипники кочення складаються (рис. 4.14) з внутрішнього 1 та зовнішнього 2 кілець з доріжками кочення, тіл кочення 3 (шариків чи роликів), сепараторів 4, які розділяють та направляють тіла кочення.

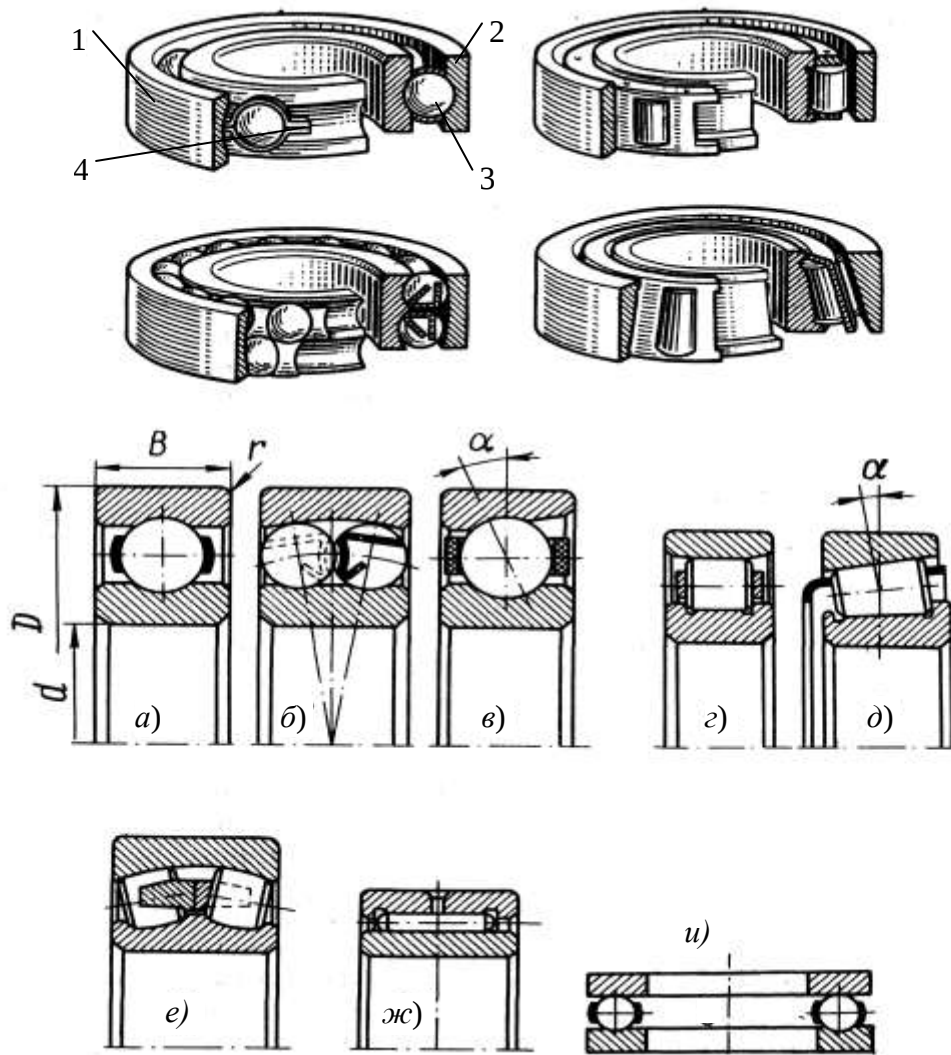


Рисунок 4.14

До недоліків підшипників кочення відносяться: відсутність роз'ємних конструкцій, порівняно великі радіальні габарити, обмежена швидкохідність, низька **працездатність** за вібраційних та ударних навантажень та в агресивних середовищах.

За формою тіл кочення підшипники поділяються на *шарикові* та *роликові*.

За напрямком навантаження, яке сприймається – радіальні, упорні, радіально-упорні, упорно-радіальні.

Різновиди підшипників: радіальні шарикові (рис. 4.14, а), самоустановлювальні шарикові (рис. 4.14, б), радіально-упорні шарикові (рис. 4.14, в), радіальні роликові (рис. 4.14, г), радіально-упорні роликові (рис. 4.14, д), самоустановлювальні роликові (рис. 4.14, е), голчасті (рис. 4.14, ж), упорні (рис. 4.14, и).

4.9 Муфти

У сучасному машинобудуванні більшість машин складається зі складальних одиниць (вузлів) і механізмів. Для забезпечення кінематичного і силового зв'язку вали вузлів з'єднують муфтам (рис. 4.15).

Муфтою називається пристрій для з'єднання кінців валів або для з'єднання валів з вільно сидячими на них деталями (зубчасті колеса, зірочки і т. д.).

Призначення муфт – передача обертального моменту без зміни його значення і напрямку. У ряді випадків муфти додатково поглинають вібрації і поштовхи, охороняють машину від аварій за перевантажень, а також використовуються для вмикання і вимикання робочого механізму машини без зупинення двигуна.

Різноманіття вимог, які висуваються до муфт, і різні умови їхньої роботи обумовили створення великої кількості конструкцій муфт, що класифікують за різними ознаками на групи.

За принципом дії:

- постійні муфти, що здійснюють постійне з'єднання валів між собою;
- зчіпні муфти, що допускають під час роботи зчеплення і розчіплювання валів за допомогою системи керування;
- самокеровані муфти, що автоматично роз'єднують вали під час зміни заданого режиму роботи машини.

По характеру роботи:

- тверді муфти, що передають разом з обертальним моментом вібрації, поштовхи й удари;
- пружні муфти, що амортизують вібрації, поштовхи й удари під час передачі обертального моменту завдяки наявності пружних елементів – різних пружин, гумових втулок та ін.

В курсі «Технічна механіка» розглядаються тільки механічні муфти. Електромагнітні і гідравлічні муфти вивчають у спеціальних курсах.

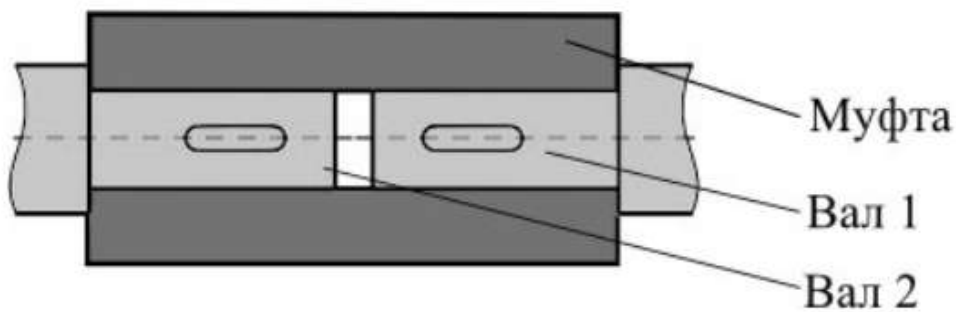


Рисунок 4.15

Питання для самоперевірки знань та контролю засвоєння матеріалу

1. Основні критеріальні вимоги до деталей машин.
2. Які використовують матеріали для виготовлення деталей машин?
3. Класифікація з'єднань.
4. Роз'ємні з'єднання.
5. Різьбові з'єднання. Переваги та недоліки.
6. Шпонкові з'єднання. Переваги та недоліки.
7. Шліцьові з'єднання. Переваги та недоліки.
8. Профільні з'єднання. Переваги та недоліки.
9. Штифтові з'єднання. Переваги та недоліки.
10. Нероз'ємні з'єднання.
11. Зварні з'єднання. Переваги та недоліки.
12. Заклепкові з'єднання. Переваги та недоліки.
13. З'єднання з натягом. Переваги та недоліки.
14. Паяні з'єднання. Переваги та недоліки.
15. Клейові з'єднання. Переваги та недоліки.
16. Механічна передача. Основні і похідні параметри механічних передач.
17. Редуктор. Мультиплікатор.
18. Основні групи та види механічних передач.
19. Для чого застосовуються осі та вали.
20. Відмінність вала від осі.
21. За якими ознаками класифікують вали.
22. Матеріали валів та осей.
23. Підшипники. Призначення і класифікація.
24. Недоліки та переваги підшипників кочення та ковзання.
25. Матеріали підшипників кочення та ковзання .
26. Основне призначення муфт.
27. Класифікація муфт.
28. Переваги та недоліки глухих муфт.

4.10 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з деталей машин ДМ1 Розрахунок клемового з'єднання

На вал 1 (рис. 4.16) з допомогою болта 2 та гайки 3 закріплюється важіль 4 на який діє сила F під кутом α . Знайти діаметр болта 2 вважаючи, що важіль нерухомий і коефіцієнт тертя між валом 1 і важелем 4 дорівнює f .

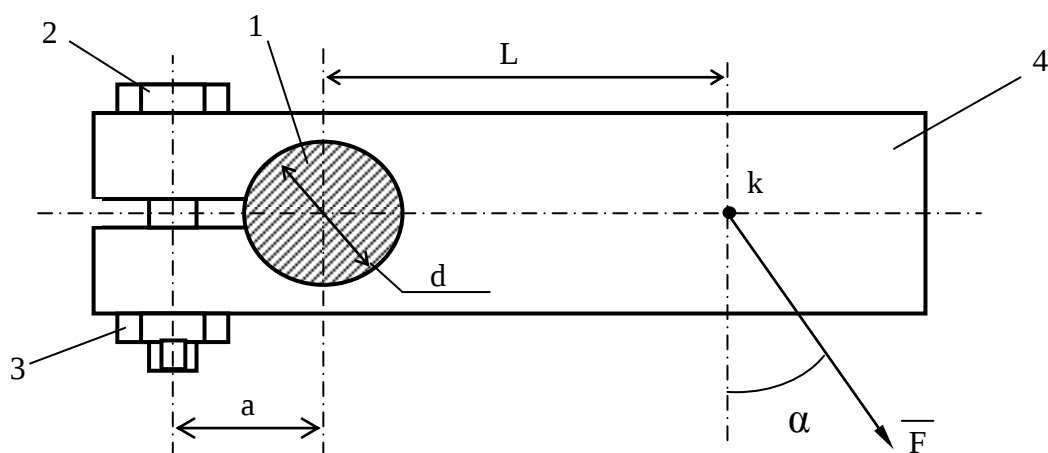


Рисунок 4.16

Дані для розрахунку взяти з таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

№ варіанта	F, кН	L, мм	d, мм	f	a, мм	α , град
1	1	300	50	0,4	50	30
2	2	200	60	0,45	60	45
3	3	100	70	0,4	70	60
4	4	100	80	0,45	70	120
5	0,5	600	30	0,15	40	135
6	0,6	500	40	0,16	50	150
7	0,7	400	40	0,17	50	30
8	0,8	300	45	0,18	65	45
9	0,9	350	50	0,19	70	60
10	1	250	55	0,2	75	120
11	2	300	60	0,21	80	135
12	3	250	65	0,22	85	150
13	4	150	70	0,24	90	30
14	0,9	600	45	0,23	55	45
15	0,8	200	45	0,22	60	60
16	0,7	400	50	0,21	70	120
17	0,6	350	55	0,2	75	135
18	0,5	400	20	0,19	40	150
19	0,4	600	25	0,18	45	30
20	1	350	60	0,4	70	45
21	2	250	65	0,35	75	60
22	3	450	70	0,4	80	120
23	4	250	80	0,6	90	135
26	0,6	600	45	0,17	65	45
27	0,7	500	50	0,18	70	60
28	0,8	400	55	0,19	75	120
29	0,9	300	60	0,20	80	135
30	1	450	65	0,21	85	150

4.11 Приклад виконання завдання до ДМ1

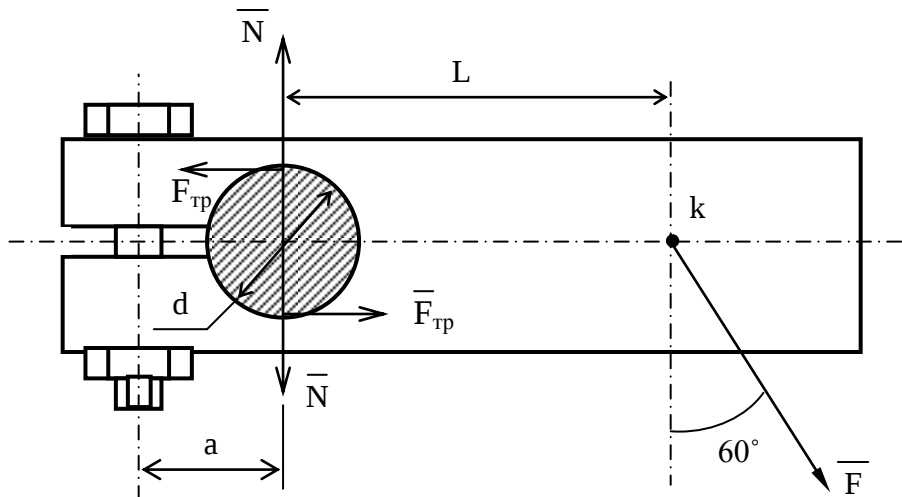


Рисунок 4.17

Знайти діаметр болта 2 (рис. 4.17) якщо: $L = 400$ мм, $a = 40$ мм, $d = 35$ мм, $F = 600$ Н, $f = 0.3$, $\alpha = 60^\circ$.

Розв'язання

Розглянемо рівновагу важеля, рис. 4.17.

Дію вала на важіль замінюємо приведеними силами N та $F_{\text{тр}}$. Так, як важіль перебуває у спокої, то:

$$\begin{aligned}\sum m_0 F &= 0; \quad F_{\text{тр}} \cdot d - F \cdot L \cdot \cos 60^\circ = 0, \\ F_{\text{тр}} &= (F \cdot L / d) \cdot \cos 60^\circ.\end{aligned}$$

За законом Амонтона-Кулона за критичної рівноваги отримаємо:

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N;$$

Тоді

$$N = \frac{F \cdot L}{f \cdot d} \cdot \cos 60^\circ.$$

Введемо коефіцієнт $n = 1,2$ і визначимо розрахункове значення нормальної сили N_p :

$$N_p = n \cdot N = \frac{F \cdot L \cdot n}{f \cdot d} \cdot \cos 60^\circ. \quad (4.1)$$

Силу затяжки болта знайдемо, розглядаючи схематично частину важеля, що знаходиться зліва від точки C та замінюючи жорстке зацмлення на шарнірне (рис. 4.18).

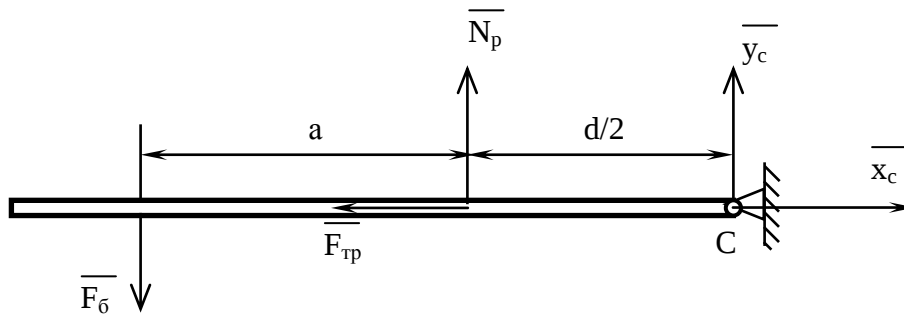


Рисунок 4.18

$$\begin{aligned} \Sigma m_C F &= 0; & F_{\delta} \cdot (d/2 + a) - N_p \cdot d/2 &= 0, \\ F_{\delta} &= \frac{N_p \cdot d}{2a + d}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

або, враховуючи (4.1),

$$F_{\delta} = \frac{F \cdot L \cdot n}{f \cdot (2a + d)} \cdot \cos 60^{\circ}.$$

Запишемо умову міцності болта при розтягу:

$$\sigma = \frac{F_{\delta}}{A} \leq [\sigma]$$

де $A = \frac{\pi \cdot d_{\delta}^2}{4}$ – площа поперечного перерізу болта;

d_{δ} – внутрішній діаметр різьби болта;

$[\sigma] = 160 \text{ МН/м}^2$ – допустиме нормальне напруження.

Тоді мінімальний діаметр болта

$$\begin{aligned} d_{\delta} &= \sqrt{\frac{4F_{\delta}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot F \cdot L \cdot n \cdot \cos 60^{\circ}}{\pi \cdot f \cdot [\sigma] \cdot (2a + d)}}; \\ d_{\delta} &= \sqrt{\frac{4 \cdot 600 \cdot 0,4 \cdot 1,2 \cdot 0,5}{3,14 \cdot 0,3 \cdot 160 \cdot 10^6 (2 \cdot 0,04 + 0,035)}} = 5,76 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

За **Додатком В** вибираємо різьбу М8 для якої внутрішній діаметр різьби $d_1 = 6,647 > 5,76 \text{ мм}$.

4.12 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунково-графічна робота (РГР) з деталей машин

ДМ2 Розрахунок шпонки

Для електродвигуна (рис. 4.19) потужністю N та кутовою швидкістю ω знайти діаметр ротора та підібрати шпонку із умови міцності її на зріз.

Дані для розрахунку взяти із табл. 4.3.

Таблиця 4.3

№ вар.	N, кВа	ω , 1/с	G, кН	l, мм	D _б , мм	Z, шт	f	$[\sigma]_б$, МН/м ²	$[\sigma]_з$, МН/м ²	$[\tau]_{кр}$, МН/м ²
1	4	40	1	220	300	4	0,1	160	80	60
2	4,5	45	1,1	230	310	4	0,11	150	90	70
3	5	50	1,2	240	320	4	0,12	140	100	80
4	5,5	55	1,3	250	330	4	0,13	130	80	60
5	6	60	1,4	260	340	6	0,14	120	90	70
6	6,5	65	1,5	270	350	6	0,15	130	100	80
7	7	70	1,6	280	360	6	0,16	140	80	60
8	7,5	75	1,7	290	370	6	0,17	150	90	70
9	8	80	1,8	290	380	6	0,18	160	10080	80
10	8,5	85	1,9	300	390	6	0,19	170	90	60
11	9	90	2,0	310	400	6	0,20	130	100	70
12	9,5	95	2,1	320	410	6	0,21	140	80	80
13	10	100	2,3	330	420	8	0,22	150	90	60
14	10,5	95	2,4	340	430	8	0,23	160	100	70
15	11	90	2,5	340	440	8	0,24	170	80	80
16	11,5	85	2,6	350	450	8	0,25	180	90	60
17	12	80	2,7	350	460	8	0,26	170	100	70
18	12,5	75	2,8	360	470	8	0,27	160	80	80
19	13	70	2,9	370	480	8	0,28	150	90	60
20	13,5	75	3,0	380	490	8	0,29	140	100	70
21	14	80	3,1	390	400	8	0,3	130	80	80
22	14,5	85	3,1	400	420	8	0,31	120	90	60
23	15	90	3,2	410	440	8	0,32	130	100	70
24	14	95	3,0	390	380	8	0,3	140	80	80
25	13	90	2,8	380	360	8	0,28	150	90	60
26	12	85	2,6	370	340	6	0,26	160	100	70
27	11	80	2,4	360	320	6	0,24	170	80	80
28	10	75	2,2	350	300	6	0,22	180	90	60
29	9	70	2,0	340	280	4	0,2	160	100	70
30	8	60	1,8	300	260	4	0,18	150		80

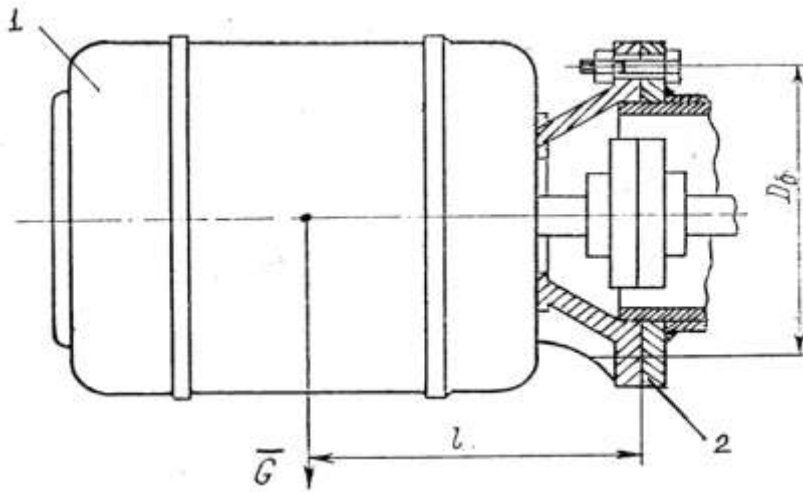


Рисунок 4.19

4.13 Приклад виконання завдання до ДМ2

Знайти діаметр вихідного кінця ротора електродвигуна та підібрати призматичну шпонку, якщо: $N = 10$ кВт; $\omega = 50 \frac{1}{с}$; $[\tau]_3 = 100 \frac{МН}{м^2}$; $[\tau]_{кр} = 80 \frac{МН}{м^2}$.

Розв'язання

Крутний момент на валу ротора

$$M_{кр} = \frac{N}{\omega} = \frac{10000}{50} = 200 Н \cdot м.$$

Із умови міцності на кручення знайдемо діаметр вихідного кінця ротора.

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau]_{кр}$$

де $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ – момент опору відносно осі вала.

Мінімальний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi [\tau]_{кр}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 200}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 2,3 \cdot 10^{-2} м.$$

Вибираємо $D = 25$ мм

За **Додатком Г** для діаметра вала $\varnothing 25$ вибираємо розміри поперечного перерізу призматичної шпонки: $h = 7$ мм, $b = 8$ мм (рис. 4.20).

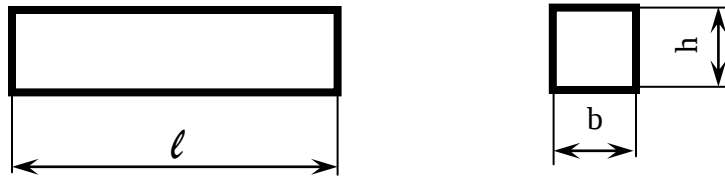


Рисунок 4.20

Довжину шпонки l знайдемо із умови міцності шпонки на зріз.

$$\tau = \frac{F}{b \cdot l} \leq [\tau]_{зр}$$

де $F = \frac{2M_{кр}}{D}$ – сила, що намагається зрізати шпонку.

Мінімальна довжина l шпонки буде дорівнювати:

$$l = \frac{2M_{кр}}{D \cdot b \cdot [\tau]_{зр}} = \frac{2 \cdot 200}{0,025 \cdot 0,008 \cdot 100 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Беремо $l = 20$ мм.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М. А. Теоретична механіка : [підручник] / Павловський М. А. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
2. Теоретична механіка : збірник задач / [О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.]; за ред. М. А. Павловського. – К. : Техніка, 2007. – 400 с.
3. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : навч. пос. / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 108 с.
4. Видмиш А. А. Збірник завдань для самостійної роботи з теоретичної механіки. Статика. Кінематика : збірник завдань / Видмиш А. А., Приятельчук В. О., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 128 с.
5. Огородніков В. А. Теоретична механіка. Динаміка. Самостійна та індивідуальна робота студентів : конспект лекцій / Огородніков В. А., Федотов В. О., Кириця І. Ю. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 84 с. (сл. видання).
6. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Динаміка точки. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : збірник завдань / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 100 с.
7. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Динаміка матеріальної системи. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : навч. пос. / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 85 с.
8. Федотов В. О. Збірник завдань для самостійної роботи з технічної механіки : збірник завдань / В. О. Федотов, О. В. Грушко. – Вінниця : ВДТУ, 2002. – 111 с.
9. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Частина 1 : навчальний посібник / Огородніков В. А., Грушко О. В., Побережний М. І. – Вінниця : ВНТУ, 2003. – 158 с.
10. Федотов В. О. Теоретична та прикладна механіка. (Технічна механіка) Самостійна та індивідуальна робота студентів. Частина 1 : навчальний посібник / Федотов В. О., Віштак І. В., Молодецька Т. І. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 107 с.
11. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підручник / Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. – К. : Вища школа, 2004. – 655 с.
12. Коновалюк Д. М. Деталі машин : підручник / Д. М. Коновалюк, Р. М. Ковальчук. – 2-ге вид. – К. : Кондор, 2004. – 584 с.

13. Мархель І. І. Деталі машин : навч. посібник / Мархель І. І. – К. : Алерта, 2005. – 368 с.
14. Кузьо І. В. Теоретична механіка / Кузьо І. В., Шпачук В. П., Цідило І. В. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
15. Черниш О. М. Теоретична механіка / О. М. Черниш, М. Г. Яременко – К. : Центр навчальної літератури, 2018. – 760 с.
16. Гайдайчук В. В. Теоретична механіка. Загальні принципи механіки / В. В. Гайдайчук, М. Г. Гонтарь. – К. : КНУБА, 2018. – 260 с.
17. Дмитриченко М. Ф. Теоретична механіка / М. Ф. Дмитриченко, М. О. Гончар – К. : НТУ, 2018. – 364 с.
18. Поліщук Л. К. Прикладна механіка та матеріалознавство : навчальний посібник / Поліщук Л. К. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 209 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Оформлення розрахунково-графічної роботи

Титульний аркуш

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Вінницький національний технічний університет

Факультет МТ

(Факультет БЦЕІ)

(Факультет ЕЕЕМ)

Кафедра ОМТМІГ

Розрахунково-графічна робота № 1

з дисципліни «Технічна механіка»

Задача **ТМ1 Плоска система паралельних сил**

Варіант _____

Схема _____

Викладач: доцент, к.т.н. _____ В. Є. Перлов
(підпис)

«___» _____ 2024 р.

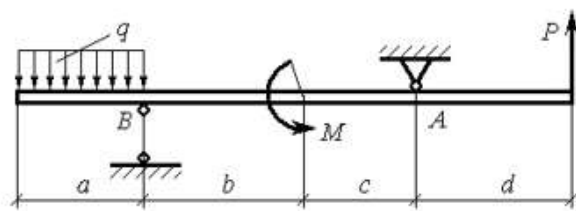
Виконав: ст. гр. ТТ-23б _____ І. О. Вакарчук
(підпис)

«___» _____ 2024 р.

ВНТУ, 2024

Задача ТМ1
Плоска система паралельних сил

Горизонтальна балка закріплена на опорах А та В, навантажена силою Р, моментом М і розподіленим навантаженням інтенсивністю q. Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.



Дано: $a = \dots$ м; $P = \dots$ кН; ...

Визначити: $X_A - ?$; $Y_A - ?$ $Y_B - ?$

Розв'язання

Відповідь: $X_A = \dots$ кН; $Y_A = \dots$ кН; $Y_B = \dots$ кН

7	10	23	15	10	110	10
		Вакарчук		02.2		Лист
		Перев.			ТМ.ТТ-23.	2
Зм	Арк.	№ докум.	Підп	Дата		

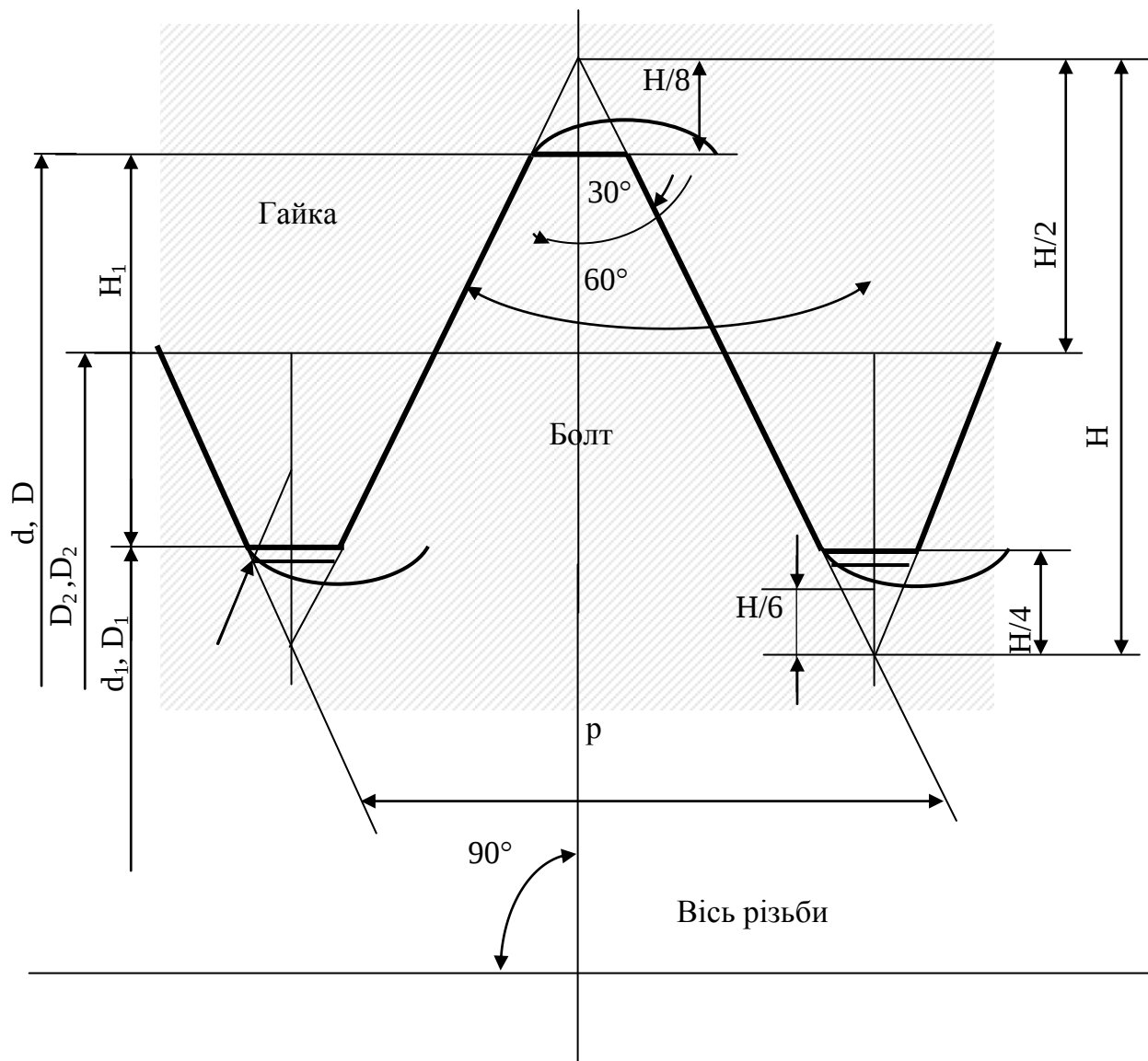
Додаток Б

Механічні характеристики вуглецевих конструкційних сталей

Марка сталі	Границя міцності у випадку розтягу	Границя текучості у разі розтягу	Границя текучості у разі кручення	Відносне видовження δ , %, при $l=10d$	Ударна в'язкість $a_k \times 10^{-5}$ (Н·м)/м ²
	σ_{σ}	σ_m	τ_m		
	не менше МПа				
10	340	210	140	31	24
20	420	250	160	25	—
25	460	280	—	23	9
30	500	300	170	21	8
35	540	320	190	20	7
40	580	340	—	19	6
45	610	360	220	16	5
50	640	380	—	14	4
55	660	390	—	13	—
60	690	410	—	12	—
20Г	460	280	—	24	—
30Г	550	320	—	20	8
50Г	660	400	—	13	4
20Х	800	650	—	11	6
40Х	1000	800	—	10	6
45Х	1050	850	—	9	5
30ХМ	950	750	—	11	8
35ХМ	1000	850	—	12	8
40ХН	1000	800	390	11	7
50ХН	1100	900	—	9	5
40ХФА	900	750	—	10	9
38ХМЮА	1000	850	—	14	9
12ХН3А	950	700	400	11	9
20ХН3А	950	750	—	12	10
30ХН3А	1000	800	—	10	8
40ХНМА	1000	950	—	12	10
30ХГСА	1100	850	—	10	5

Додаток В

Характеристики для метричної різьби

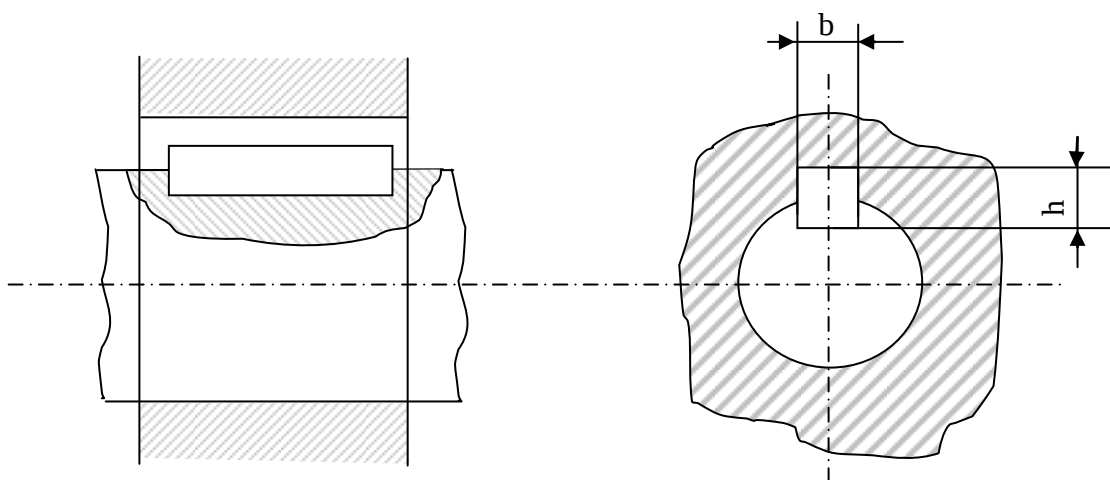


d, d_1, d_2 – діаметри різьби болта;
 D, D_1, D_2 – діаметри різьби гайки;
 $H = 0,866025P$;
 $H_1 = 5/8 \cdot H = 0,541266P$;
 $P = H/6 = 0,144$.

Крок різьби	Діаметри різьби, мм		
	Зовнішній $d = D$	Середній $d_2 = D_2$	Внутрішній $d_1 = D_1$
0,40	2	1,74	1,567
0,45	2,5	2,208	2,013
0,50	3	2,675	2,459
0,60	(3,5)	3,110	2,850
0,70	4	3,546	3,242
0,75	(4,5)	4,013	3,688
0,80	5	4,480	4,134
1	6	5,350	4,918
1,25	8	7,188	6,647
1,5	10	9,026	8,376
1,75	12	10,863	10,106
2	(14)	12,701	11,835
2	16	14,701	13,835
2,5	(18)	16,376	15,294
2,5	20	18,376	17,294
2,5	(22)	20,376	19,294
3	24	22,051	20,752
3	(27)	25,051	23,752
3,5	30	27,727	26,211
3,5	(33)	30,727	29,211
4	36	33,402	31,670
4	(39)	36,402	34,670
4,5	42	39,077	37,129
4,5	(45)	42,077	40,129
5	48	44,752	42,587
5	(52)	48,752	46,587
5,5	56	52,428	50,046
5,5	(60)	56,428	54,046
6	64	60,103	57,505
6	(68)	64,103	61,505

Додаток Г

Характеристики для шпонкового з'єднання



Діаметр вала D, мм	Розміри перерізів шпонок	
	b	h
Від 6 до 8	2	2
Більше 8 » 10	3	3
» 10 » 12	4	4
Більше 12 до 17	5	5
» 17 » 22	6	6
» 22 » 30	8	7
Більше 30 до 38	10	8
» 38 » 44	12	8
» 44 » 50	14	9
» 50 » 58	16	10
» 58 » 65	18	11
Більше 65 до 75	20	12
» 75 » 85	22	14
» 85 » 95	25	14
» 95 » 110	28	16
» 110 » 130	32	18

Додаток Д

Основні механічні характеристики матеріалів

Основні характеристики міцності $\sigma = \frac{P}{A_0}$:

- границя текучості σ_m ;
- умовна границя текучості $\sigma_{0,2}$;
- границя міцності σ_B .

Допустиме напруження $[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n}$,

$\sigma_n = \sigma_m$ – для пластичних матеріалів $n = 1,5 \dots 2$;

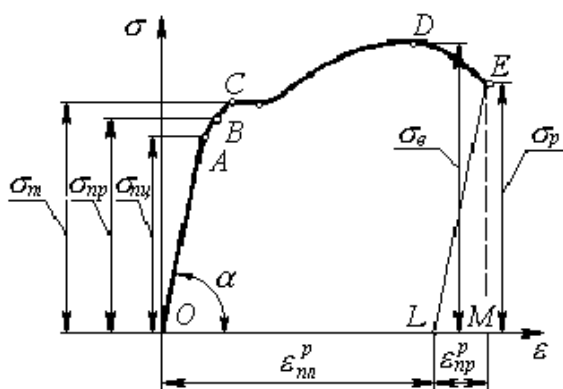
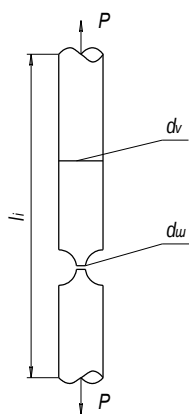
$\sigma_n = \sigma_B$ – для крихких, $n = 3 \dots 5$, n – коефіцієнт запасу міцності.

Характеристики пластичності:

- відносне залишкове видовження - $\delta = \frac{l_{розр} - l_0}{l_0} \cdot 100\%$,

- відносне залишкове звуження $\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} \cdot 100\%$,

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} \quad A_{ш} = \frac{\pi d_{ш}^2}{4}.$$



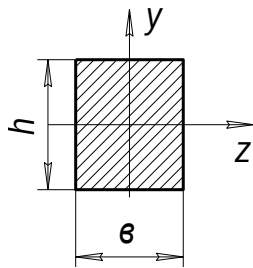
Характеристики пружності для сталі :

$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$;

$\mu = 0.25 \dots 0.3$;

$G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$.

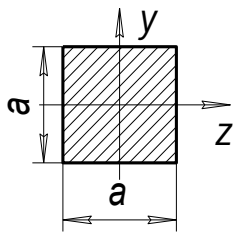
Геометричні характеристики плоских перерізів



Прямокутник

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{b^3h}{12};$$

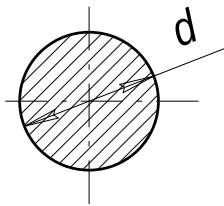
$$W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6}.$$



Квадрат

$$I_z = \frac{a^4}{12}; \quad I_y = \frac{a^4}{12};$$

$$W_z = \frac{a^3}{6}; \quad W_y = \frac{a^3}{6}.$$

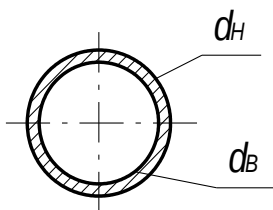


Круг

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_y = \frac{\pi d^3}{32}$$



Порожній вал (кільцевий переріз)

$$W_p = \frac{\pi d_H^3}{16} (1 - \alpha^4); \quad I_p = \frac{\pi d_H^4}{32} (1 - \alpha^4);$$

$$\alpha = \frac{d_B}{d_H}; \quad I_z = I_y = \frac{4\pi d_H^4}{64} (1 - \alpha^4);$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} (1 - \alpha^4).$$

Умови міцності і жорсткості за найпростіших видів деформації

Розтяг – стиск

Закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Умова жорсткості

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA(x)} \leq [\Delta l].$$

Умова міцності $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, $\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$, коефіцієнт запасу $n = \frac{\sigma_m}{\sigma}$.

Проектний розрахунок $A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$

Допустиме навантаження $[N] = [\sigma] \cdot A.$

Зсув

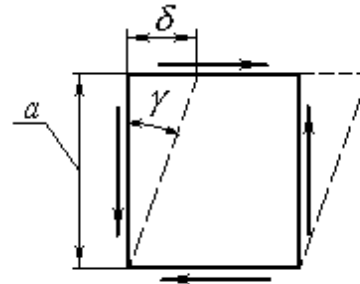
Закон Гука при зсуві

$$\tau = G\gamma.$$

Умова жорсткості $\delta = \frac{Qa}{GA} \leq [\delta].$

Умова міцності $\tau_{\max} = \frac{Q}{A} \leq [\tau],$

A – площа зрізу.



Кручення

Умова міцності

$$\tau_{kp} = \frac{M_{kp}}{W_p} \leq [\tau].$$

Жорсткість при крученні:

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_p} \leq [\varphi].$$

Згин

Умова міцності

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{32}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Умова жорсткості балки

$$y_{max} \leq [f].$$

*Навчальне електронне видання
комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах*

**Інна Юріївна Кириця
Віктор Євгенович Перлов
Сергій Іванович Сухоруков**

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА
САМОСТІЙНА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА
СТУДЕНТІВ**

Навчальний посібник

Рукопис оформила *І. Кириця*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет підготувала *Т. Старічек*

Підписано до видання 23.05.2024 р.

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № P2024-111.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.

press.vntu.edu.ua;

E-mail: irvc.ed.vntu@gmail.com.

Свідectво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.