Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

С.Т.Барась, О.А.Костюк, Ю.І.Кравцов

# Основи теорії телекомунікаційних систем

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як збірник задач, запитань, вправ для студентів телекомунікаційного профілю. Протокол № 7 від 6 *березня* 2003р.

Вінниця ВНТУ 2003

УДК 621.391.(075)
Б 24

Р е ц е н з е н т и:
*Кичак В.М.* – доктор технічних наук, професор
*Поджаренко В.О.* – доктор технічних наук, професор
*Володарський Є.Т.* – доктор педагогічних наук, професор
*Козак О.І.* – директор обласного Вінницького РПЦ

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**Барась С.Т., Костюк О.А., Кравцов Ю.І.**
Б 24 **Основи теорії телекомунікаційних систем.** Збірник задач, запитань, вправ. – Вінниця: ВНТУ, 2003. – 79 с.

У збірнику розглянуті основні елементи теорії та практичні задачі з прикладами їх розв'язання, які необхідні студентам для створення цілісної картини процесу формування повідомлень, перетворення сигналів та їх передачі за допомогою реальних телекомунікаційних систем. Збірник стане в нагоді студентам телекомунікаційного профілю денної та заочної форм навчання, а також може бути корисним для викладачів та фахівців

УДК 621. 391.(075)

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Телекомунікаційні системи призначені для передачі інформації на відстань. Джерел і отримувачів повідомлень існує дуже багато і характеризуються вони великим розмаїттям параметрів. Передача інформації у вигляді повідомлень, які мають певну форму для її представлення, передбачає, зокрема, процедури перетворення повідомлень у сигнали і, навпаки, - сигналів у повідомлення. Отже, лініями зв'язку поширюються електричні сигнали, інформаційні параметри яких адекватно відповідають інформаційним параметрам повідомлень. В системах електрозв'язку знаходять застосування неперервні (аналогові), імпульсні та дискретні сигнали. Ефективне використання ліній зв'язку можливе лише за умови створення багатоканальних систем передачі, основними з яких на сьогодні є системи з частотним і часовим розділенням каналів [1, 2]

Якість телекомунікаційної системи тим вища, чим менше спотворюються повідомлення, які передаються каналом зв'язку. Самі ж спотворення залежать від рівня і виду завад, виду та енергії сигналу, параметрів каналу передачі, методів кодування та захисту інформації тощо. Наведені фактори впливають також на кількість інформації, що передається певним каналом зв'язку, її швидкість передачі та пропускну здатність каналу.

Саме такі питання і розглядаються у даному посібнику – від коротких відомостей про електричні сигнали до оцінки кількості та швидкості передачі інформації різними каналами зв'язку. Кожний розділ починається з основних теоретичних відомостей та розрахункових співвідношень, які використовуються в подальшому для розв'язання задач. Далі наводяться приклади розв'язання задач та умови задач, запитання, вправи для самостійного розв'язування студентами.

Даний посібник – це спроба у стислій формі з наданням основних елементів теорії та практичних задач донести до студентів цілісну картину процесу створення повідомлень, перетворення сигналів та їх передачі за допомогою реальних телекомунікаційних систем. Він містить в собі матеріал, який вивчається в курсах "Основи теорії телекомунікаційних систем" та "Передача та захист інформації на телекомунікаційних мережах" як на лекційних, так і на практичних заняттях.

# 1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИГНАЛІВ

## 1.1 Основні терміни та розрахункові співвідношення

В більшості випадків сигнал електрозв'язку можна розглядати як змінну в часі електричну величину (напругу, струм, електромагнітне коливання, напруженість поля). Ці величини можна спостерігати і реєструвати за допомогою різноманітних приладів, зокрема, осцилографа. Отже, сигнал представляється в вигляді функції часу, тобто має місце часова форма представлення сигналу.

Сигнали можуть бути розділені на класи за такими ознаками:

- формою – на прості і складні;
- інформативністю – на детерміновані та випадкові;
- характеристиками – на неперервні, дискретні та цифрові.

Звернемо увагу на прості та складні сигнали. Математичною моделлю простого сигналу є проста функція часу. Серед простих сигналів в електрозв'язку знаходять застосування гармонічні сигнали, обмежені в часі, нескінченні послідовності імпульсів та випробувальні сигнали. Складні сигнали – це такі функції часу, які важко навести в вигляді простої математичної формули. Приклад складного сигналу – відрізок мовного сигналу. Більшість реальних сигналів – це складні сигнали.

Складний сигнал може бути поданий в вигляді ряду певних елементарних (простих) функцій $\psi_k(t)$, які називаються базисними:

$$u(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa \psi_\kappa(t), \qquad (1.1)$$

де $a_k$ – коефіцієнти розкладу, що залежать від сигналу $u(t)$.

Вибір системи базисних функцій $\psi_k(t)$ залежить від виду сигналу і задачі, що розв'язується. Але існує загальне правило – функції $\psi_k(t)$ повинні бути простими, забезпечувати просте обчислення коефіцієнтів $a_k$ і давати хорошу збіжність ряду (1.1) до сигналу $u(t)$. Вибір функції $\psi_k(t)$ вважається тим кращим, чим менше складових ряду $n$ необхідно для представлення сигналу $u(t)$ з заданою точністю.

Зручною формою представлення сигналів є перетворення Фур'є, в якому в якості базисних функцій використовуються гармонічні коливання. Розрізняють спектральне розкладання періодичних і неперіодичних сигналів. Сигнал називається періодичним, якщо його форма циклічно повторюється в часі. Періодичний сигнал $u(t)$ в загальному вигляді записується так:

$$u(t) = u(t + mT), m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (1.2)$$

Тут $T$ – період сигналу. Періодичні сигнали можуть бути як простими, так і складними.

Ряд Фур'є для періодичного сигналу може бути записаний в тригонометричній або комплексній формах. Тригонометрична форма має такий вигляд:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t), \qquad (1.3)$$

де $a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t)dt; \quad a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos n\omega_1 t dt; \quad b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t)\sin n\omega_1 t dt.$

Можлива інша тригонометрична форма ряду Фур'є:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \text{ де } \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad tg\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}. \qquad (1.4)$$

Комплексна форма ряду Фур'є:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \text{ , де } \quad C_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \qquad (1.5)$$

З формул (1.3) – (1.5) видно, що в загальному випадку періодичний сигнал $u(t)$ має в своєму складі постійну складову $a_0/2$ і набір гармонічних коливань основної частоти $\omega_1 = 2\pi f_1$ та її гармонік з частотами $\omega_n = n\omega_1, n = 2,3,4,...$ Кожне з гармонічних коливань ряду Фур'є характеризується амплітудою $A_n$ і початковою фазою $\varphi_n$.

Спектр сигналу – це сукупність гармонічних складових з конкретними значеннями частот, амплітуд і початкових фаз, які створюють в сумі сигнал. На практиці частіше цікавляться амплітудним спектром, за яким можна оцінити процентний вміст гармонік в спектрі.

Для спектрального представлення неперіодичних (імпульсних) сигналів $u(t)$, що задані на кінцевому інтервалі $(t_1,t_2)$, безпосередньо користуватися рядом Фур'є неможливо. Імпульсний сигнал не є періодичним. Але в цьому випадку для гармонічного розкладу сигналу можна застосувати таку процедуру. Спочатку доповнити імпульсний сигнал до періодичного з будь-яким періодом $T$, що має в своєму складі проміжок $(t_1,t_2)$, після чого отриманий періодичний сигнал $u_{\text{пер}}(t)$ представити в вигляді ряду Фур'є, потім виконати граничний перехід від $u_{\text{пер}}(t)$ до $u(t)$, спрямувавши $T$ до нескінченності.

За умови такого граничного переходу основна частота сигналу $\omega_1 = 2\pi/T$ прямує до нуля, нескінченно збільшується кількість спектральних складових, частоти сусідніх гармонік $n\omega_1$ і $(n+1)\omega_1$ виявляються настільки близькими, що спектр буде суцільним. Для обчислення спектру неперіодичного сигналу найзручнішою є комплексна форма ряду Фур'є, але в ній замість суми буде інтеграл з нескінченними межами. Отже:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{1.6}$$

$$F(\omega) = \int u(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{1.7}$$

Формули (1.6) і (1.7) називаються відповідно зворотним та прямим перетворенням Фур'є. Вони дають фундаментальний взаємозв'язок між сигналом *u(t)* і його комплексною спектральною щільністю *F(ω)*. Як і в випадку ряду Фур'є, зазвичай цікавляться амплітудним спектром неперіодичного сигналу.

Спектральні характеристики в техніці електрозв'язку відіграють значну роль. Знаючи спектр сигналу, можна, наприклад, правильно розрахувати і встановити смугу пропускання підсилювачів, фільтрів та інших вузлів каналів зв'язку. Знання спектрів сигналів необхідне для побудови багатоканальних систем з частотним розділенням каналів. Без знання спектра завади важко відшукати ефективні методи боротьби з нею.

Всі реальні неперервні сигнали є плавними функціями часу. Різкі зміни значень в них практично не спостерігаються. Тому такі сигнали можна представити послідовністю їх значень, взятих з певним кроком в часі. Значення сигналу в фіксований момент часу називається відліком. Відповідь на питання, яким повинен бути інтервал часу між окремими відліками, щоб з їх використанням можна було повністю відтворити первинний сигнал, дає теорема Котєльнікова. Згідно з цією теоремою будь-який сигнал *u(t)*, який не має в своєму складі частот, що перевищували б частоту $F_m$, можна точно відтворити за його відліками $u(k\Delta t)$, які зроблені через інтервали $\Delta t = \frac{1}{2F_m}$ [3]. Відтворення сигналу здійснюється за допомогою ряду:

$$u(t) = \int_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi F_m(t-k\Delta t)}{2\pi F_m(t-k\Delta t)} \tag{1.8}$$

Вираз (1.8) називається рядом Котєльнікова. В ньому коефіцієнти розкладання $u(k\Delta t)$, що дорівнюють миттєвим значенням неперервного сигналу *u(t)* в моменти $k\Delta t$, є відліками сигналу *u(t)*, а функції

$$\psi_k(t) = \frac{\sin 2\pi F_m(t-k\Delta t)}{2\pi F_m(t-k\Delta t)}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

- функціями відліків, які мають однакову форму функції типу $\sin x/x$ і відрізняються одна від одної часовим зсувом на інтервал $k\Delta t$.

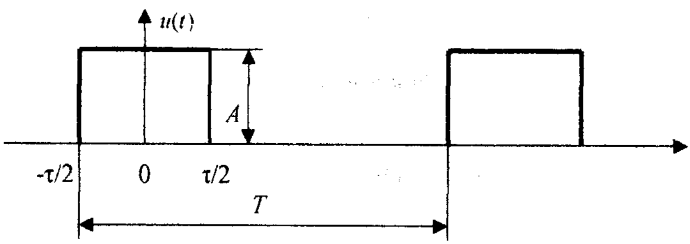
Теорема Котєльнікова є основою для дискретизації неперервних сигналів за часом, оскільки, по-перше, доводить, що неперервний сигнал можна замінити його дискретними значеннями, по-друге, дає правило визначення кроку дискретизації - $\Delta t = 1/2F_m$. Таким чином, в основі будь-яких імпульсних способів передачі лежить теорема Котєльнікова. Саме вона показує, за яких умов передача неперервного сигналу може бути замінена на передачу послідовності імпульсів. Частота проходження імпульсів, що має назву частоти дискретизації, визначається за теоремою Котєльнікова:

$$f_D = \frac{1}{\Delta t} = 2F_m. \tag{1.9}$$

Можливість передачі замість неперервних сигналів послідовностей імпульсів (відліків) дозволяє здійснити часове розділення каналів при організації багатоканального електрозв'язку.

## 1.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.** Отримати ряд Фур'є періодичної послідовності прямокутних імпульсів $u(t)$ з відомими параметрами $\tau$, $T$, $A$, яка є парною відносно точки $t = 0$.




***Розв'язання***

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами (1.3):

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Adt = \frac{2}{T}\cdot A\cdot t\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2A}{T}\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2A}{T}\cdot\tau.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\cos n\omega_1 t dt = \frac{2A}{T}\frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{4A}{nT\omega_1}\sin n\omega_1\frac{\tau}{2}.$$

Врахуємо, що частота першої гармоніки визначається через період $T$ за формулою $\omega_1 = 2\pi/T$ і продовжимо знаходження коефіцієнта $a_n$:

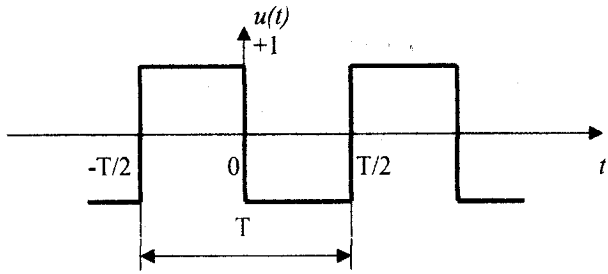
$$a_n = \frac{4AT}{2\pi nT}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2A}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}.$$

Умовою задачі задано, що функція *u(t)* парна, тому коефіцієнт $b_n = 0$, оскільки інтеграл від синуса є косинус (парна функція) і він розраховується для симетричних границь τ/2 і –τ/2.

Таким чином, ряд Фур'є для періодичної послідовності прямокутних імпульсів можна записати у такому вигляді:

$$u(t) = \frac{A}{T}\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\sin n\omega_1 t.$$

**Приклад 2.** Розкласти в ряд Фур'є періодичний сигнал, який зображений на рисунку, використавши тригонометричну та комплексну форми ряду Фур'є.




***Розв'язання***

Функція *u(t)* може бути записана таким чином:

$$u(t) = 1 \text{ при } -\frac{T}{2} \le t \le 0;$$

$$u(t) = -1 \text{ при } 0 \le t \le \frac{T}{2}.$$

Виконаємо розкладання з використанням тригонометричної форми ряду Фур'є, для чого за формулами (1.3) знайдемо коефіцієнти $a_0$, $a_n$ і $b_n$.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} 1dt + \int_{0}^{T/2}(-1)dt\right] = \frac{2}{T}\left(0 + \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + 0\right) = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos n\omega_1 t dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}\cos n\omega_1 t dt - \int_{0}^{T/2}\cos n\omega_1 t dt\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\left[\left.\frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1}\right|_{-T/2}^{0} - \left.\frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1}\right|_{0}^{T/2}\right] = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\sin n\omega_1 t dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}\sin n\omega_1 t dt - \int_{0}^{T/2}\sin n\omega_1 t dt\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\frac{\cos n\omega_1 t}{n\omega_1}\Bigg|_{-T/2}^{0} + \frac{\cos n\omega_1 t}{n\omega_1}\Bigg|_{0}^{T/2}\right] = -\frac{2}{T}\left(\frac{1}{n\omega_1} - \frac{1}{n\omega_1}\cos n\omega_1\frac{T}{2} - \frac{1}{n\omega_1}\cos n\omega_1\frac{T}{2} + \frac{1}{n\omega_1}\right) =$$

$$= -\frac{2}{T}\left(\frac{T}{2\pi n} - \frac{T}{2\pi n}\cos n\pi - \frac{T}{2\pi n}\cos n\pi + \frac{T}{2\pi n}\right) = -\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

При визначенні $b_n$ використовувалась формула для частоти основної гармоніки $\omega_1 = 2\pi/T$.

Аналіз виразу для $b_n$ показує, що:

$b_n = -\frac{4}{n\pi}$, якщо $n = 1, 3, 5, \ldots$ (при цьому $\cos n\pi = -1$);

$b_n = 0$, якщо $n = 2, 4, 6, \ldots$ (при цьому $\cos n\pi = 1$).

Таким чином, ряд Фур'є для даної функції $u(t)$ має вигляд:

$$u(t) = -\frac{4}{\pi}\sin\omega_1 t - \frac{4}{3\pi}\sin 3\omega_1 t - \frac{4}{5\pi}\sin 5\omega_1 t - \ldots = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin n\omega_1 t}{n}.$$

Можна використати іншу тригонометричну форму ряду Фур'є, для чого необхідно визначити амплітуди і фази гармонік:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{4}{n\pi}, \qquad tg\varphi_n = \frac{b_n}{a_n} = -\infty, \varphi_n = -\frac{\pi}{2}.$$

В цьому випадку ряд запишеться таким чином:

$$u(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\cos\left(n\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Для поданння ряду в комплексній формі скористаємось формулами (1.5). Визначимо амплітуду $C_n$.

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = \frac{1}{T}\left(\frac{e^{-jn\omega_1 t}}{-jn\omega_1}\Bigg|_{-T/2}^{0} - \frac{e^{-jn\omega_1 t}}{-jn\omega_1}\Bigg|_{0}^{T/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(-\frac{1}{jn\omega_1} + \frac{e^{jn\omega_1\frac{T}{2}}}{jn\omega_1} + \frac{e^{-jn\omega_1\frac{T}{2}}}{jn\omega_1} - \frac{1}{jn\omega_1}\right) = -\frac{1}{j2n\pi}\left(1 - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi} + 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{j2n\pi}\left[2 - \left(e^{jn\pi} + e^{-jn\pi}\right)\right] = -\frac{2}{j2n\pi}(1-\cos n\pi) = j\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}.$$

Отже, ряд Фур'є в комплексній формі для заданої функції *u(t)* має такий вигляд:

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} j\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}e^{jn\omega_1 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}e^{j\left(n\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

**Примітка.** При визначенні комплексної форми ряду були використані відомі співвідношення $j=e^{j\pi/2}$ та $e^{j\pi}=-1$, а також формула Ейлера:

$$\cos Z=\frac{e^{jZ}+e^{-jZ}}{2}.$$

## 1.3 Задачі, запитання, вправи

1.3.1 Чому просте гармонічне коливання $\cos(\omega t+\psi)$ грає особливу роль в техніці електрозв'язку?

1.3.2 Які сигнали можна розкласти в ряд Фур'є?

1.3.3 Що таке спектр сигналу?

1.3.4 Написати формулу ряду Котєльнікова, дати формулювання теореми Котєльнікова та пояснити її практичне застосування.

1.3.5 Знайти спектральну щільність прямокутного імпульса *u(t)* з амплітудою $U$ і тривалістю τ, який розташований симетрично відносно початку відліку часу. Побудувати спектральну діаграму, визначивши попередньо значення щільності в критичних точках.

Відповідь: $F(\omega)=\dfrac{2U}{\omega}\sin\dfrac{\omega\tau}{2}$.

1.3.6 Визначити спектр сигналу $u(t)=10|\cos 100\pi t|$.

Відповідь: $\dfrac{a_0}{2}=6{,}37,\quad A_{m2}=4{,}24,\quad A_{m4}=0{,}848,$

$A_{m6}=0{,}363,\quad f_1=50\,Гц.$

1.3.7 Обчислити спектральну щільність відеоімпульсу гауссового типу, який має таку математичну модель $u(t)=10e^{-2\cdot10^{12}t^2}$.

Відповідь: $F(\omega)=5\sqrt{\pi}\cdot10^{-6}e^{-1{,}25\cdot10^{-13}\omega^2}$.

1.3.8 Телеметричний сигнал має ширину спектру 100 – 500*Гц*. Визначити кількість відліків цього сигналу по Котєльнікову за час його існування $t_c=20c$.

Відповідь: $n=2\cdot10^4$.

# 2 МЕТОДИ ФОРМУВАННЯ І ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ У СИСТЕМАХ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗВ'ЯЗКУ

## 2.1 Основні терміни та розрахункові співвідношення

Типовими операціями, що виконуються у системах електричного зв'язку, є модуляція та демодуляція [3, 5, 13] Модуляція – це процес зміни одного або декількох параметрів носія відповідно до змін параметрів сигналу, який діє на нього (модулювального сигналу); демодуляція – це операція, яка є зворотною до модуляції. Існування цих операцій є очевидним, оскільки системи електричного зв'язку призначені для передачі повідомлень, отже, і повинні мати місце процедури занесення цих повідомлень в носії, які мають змогу їх передавати на значні відстані. Але системами електричного зв'язку одночасно проходить велика кількість повідомлень, які, очевидно, повинні бути розмежовані. Для цього використовується ще одна операція, яку часто також називають модуляцією, але з точки зору радіотехніки вона є перетворенням частоти. Її суть полягає в тому, що вже модульований повідомленням сигнал переноситься з однієї частотної області в іншу без зміни ширини спектра.

Слід зауважити, що дискретизація аналогового сигналу, а також зворотний процес отримання аналогового сигналу з дискретного є також перетворенням сигналу. В багатьох випадках ці перетворення здійснюються на основі процедур АЦП і ЦАП.

При амплітудній модуляції інформаційним параметром є амплітуда високочастотного гармонічного носія. Аналітичний вираз (математична модель) будь-якого амплітудно-модульованого (АМ) сигналу має такий вигляд:

$$s_{AM}(u_M, t) = A_0\left[1 + Mu_M(t)\right]\cos(\omega_0 t + \psi_0), \tag{2.1}$$

де $A_0$ – амплітуда високочастотного гармонічного коливання;

$M$ – коефіцієнт модуляції;

$u_M(t)$ – модулювальний сигнал;

$\omega_0$, $\psi_0$ – частота і початкова фаза високочастотного гармонічного коливання.

Коефіцієнт модуляції визначається за формулами:

$$M = \frac{\Delta A_m}{A_0}, \text{ або } \quad M = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}. \tag{2.2}$$

В наведених формулах: $\Delta A_m$ – максимальне відхилення амплітуди від значення $A_0$; $A_{\max}$ і $A_{\min}$ – відповідно максимальне та мінімальне значення амплітуди АМ сигналу. Очевидно, величина коефіцієнта модуляції лежить в межах $0 \le M \le 1$.

В амплітудній модуляції низькочастотним гармонічним коливанням з частотою $\Omega$ спектр АМ сигналу характеризується трьома спектральними складовими з частотами: $\omega_0$, $\omega_0+\Omega$ і $\omega_0-\Omega$. Амплітуди цих спектральних складових відповідно дорівнюють $A_0$, $MA_0/2$ і $MA_0/2$. Ширина спектра такого сигналу визначається за формулою:

$$\Delta\omega_{AM}=2\Omega \text{ або } \Delta f_{AM}=2F. \tag{2.3}$$

В амплітудній модуляції складним модулювальним сигналом фактично кожна гармонічна складова сигналу $u_M(t)$ з частотою $\Omega_i$ спонукає до появи в АМ сигналі двох бокових складових з частотами $\omega_0\pm\Omega_i$. Велика кількість гармонічних складових в модулювальному сигналі $\sum\Omega_i$ приведе до появи такої ж кількості бокових складових з частотами $\sum(\omega_0\pm\Omega_i)$. Таким чином, ширина спектра АМ сигналу за наявності певного спектру модулювального сигналу буде визначатися найвищою частотою цього спектра, отже:

$$\Delta f_{AM}=2F_m, \tag{2.4}$$

де $F_m$ – найвища частота в спектрі модулювального сигналу.

Для більш ефективного використання потужності спектру АМ сигналу в техніці електрозв'язку знайшли застосування балансна та односмугова модуляції (БМ і ОМ), які фактично випливають з амплітудної модуляції. Балансна модуляція реалізується шляхом виключення зі спектра АМ сигналу спектральної складової на частоті $\omega_0$ і передачі двох бокових смуг частот. Якщо зі спектра балансно-модульованого сигналу виключити ще одну бокову смугу частот (верхню або нижню), то отримаємо односмугову модуляцію. При цьому залишена бокова смуга має повну інформацію про модулювальний сигнал $u_M(t)$.

Аналітичний вираз БМ сигналу:

$$s_{БМ}(u_M,t)=A_0Mu_M(t)\cos(\omega_0 t+\psi_0). \tag{2.5}$$

Математична модель ОМ сигналу:

$$s_{OM}(u_M,t)=A_0Mu_M(t)\cos(\omega_0 t+\psi_0)\pm A_0Mu_M^*(t)\sin(\omega_0 t+\psi_0). \tag{2.6}$$

Знак "мінус" в формулі (2.6) відноситься до описування верхньої бокової смуги, а знак "плюс" – нижньої бокової смуги; $u_M^*(t)$ - сигнал, що є спряженим за Гільбертом з сигналом $u_M(t)$.

Очевидно, ширина спектра БМ сигналу точно така ж, як і АМ сигналу, а ширина спектра ОМ сигналу дорівнює ширині спектра модулювального сигналу $\Delta f_M$, тобто:

$$\Delta f_{БМ}=\Delta f_{AM}, \tag{2.7}$$

$$\Delta f_{OM}=\Delta f_M. \tag{2.8}$$

При кутовій (фазовій або частотній) модуляції інформаційним параметром, який змінюється за законом модулювального сигналу, є повна фаза високочастотного коливання – носія. Аналітичні вирази фазомодульованих (ФМ) і частотномодульованих (ЧМ) сигналів за формою запису мають однаковий вигляд:

$$s_{ФМ}(u_M,t)=A_0\cos[\omega_0 t+\psi_0+m_{ФМ}\cos(\Omega t+\Psi)];$$
$$s_{ЧМ}(u_M,t)=A_0\cos[\omega_0 t+\psi_0+m_{ЧМ}\sin(\Omega t+\Psi)], \tag{2.9}$$

де $m$ – індекс модуляції. Різниця тільки в підходах до обчислення індексу і фази модульованого коливання. Для ФМ індекс модуляції $m_{ФМ}$ – величина, що дорівнює девіації фази модульованого сигналу для гармонічного модулювального сигналу $u_M(t)$, тобто $m_{ФМ}=\Delta\varphi_Д$. Для ЧМ індекс модуляції $m_{ЧМ}$ – відношення девіації частоти модульованого сигналу $\Delta\omega_Д=2\pi\Delta f_Д$ до частоти модулювального гармонічного сигналу $\Omega=2\pi F$, тобто:

$$m_{ЧМ}=\frac{\Delta\omega_Д}{\Omega}=\frac{\Delta f_Д}{F}. \tag{2.10}$$

Отже, індекс фазової модуляції $m_{ФМ}$ не залежить від частоти модулювального коливання $\Omega$ і є пропорційним лише його амплітуді, а індекс частотної модуляції $m_{ЧМ}$ є функцією як девіації частоти $\Delta\omega_Д$, яка в свою чергу прямо пропорційна амплітуді модулювального коливання, так і частоти модулювального коливання.

Сигнали з кутовою модуляцією, як і при АМ, можуть бути подані в вигляді суми гармонічних коливань. Але навіть при однотональній кутовій модуляції спектр виявляється складним і визначається за допомогою функцій Бесселя:

$$s(u_M,t)=A_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(m)\cos(\omega_0+k\Omega)t. \tag{2.11}$$

З виразу (2.11) видно, що спектр сигналу при кутовій модуляції має в своєму складі гармонічну складову з частотою носія, групу гармонічних складових з частотами $\omega_0+k\Omega$, які створюють верхню бокову смугу частот, і нижню бокову смугу частот, яку визначають складові з частотами $\omega_0-k\Omega$. Бокові гармонічні коливання розташовані симетрично відносно $\omega_0$ на частотній відстані $\Omega$. Амплітуди всіх компонент спектра, в тому числі і з частотою $\omega_0$, пропорційні $J_k(m)$ – функції Бесселя $k$-го порядку від аргументу $m$, отже, амплітуда гармоніки на частоті носія дорівнює $A_0J_0(m)$, а амплітуди гармонік на бокових частотах - $(-1)^k\cdot A_0J_k(m)$, причому знаки складових верхньої бокової смуги визначаються лише знаками функцій Бесселя, а нижньої – і знаками функцій Бесселя, і множником $(-1)^k$.

Якщо $m<0,6$, то кутова модуляція вважається вузькосмуговою і її ширина спектра сумірна з шириною спектра для амплітудної модуляції. Якщо $m>>1$, то кутова модуляція є широкосмуговою з шириною спектра:

$$\Delta f_{ЧМ.ФМ} \approx 2(m+1)F_m, \qquad (2.12)$$

де $F_m$ – найвища частота в спектрі модулювального сигналу. З формул (2.12) і (2.10) випливає, що при частотній модуляції ширина спектра приблизно дорівнює подвоєній девіації частоти $\Delta f_Д$. Це справедливо і для складного модулювального сигналу, оскільки індекс модуляції визначається для найвищої частоти в його спектрі.

Дискретна модуляція гармонічного носія – це окремий випадок модуляції, коли модулювальний сигнал $u_М(t)$ дискретний. Керуючи параметрами гармонічного носія за допомогою первинного дискретного сигналу, можна отримати відповідно амплітудну (АМн), частотну (ЧМн) і фазову (ФМн) маніпуляції. Для розрахунку характеристик каналу зв'язку, призначеного для передачі маніпульованих сигналів, зазвичай не потрібні знання точної структури спектра, достатньо визначити ширину спектра. Для випадку маніпуляції прямокутними імпульсами тривалістю $\tau$ (ширина спектра таких імпульсів $\Delta f = 1/\tau$) ширина спектра може бути визначена:

$$\Delta f_{АМ_Н} = \frac{2}{\tau}; \quad \Delta f_{ЧМ_Н} = 2\left(\frac{1}{\tau} + \Delta f_Д\right); \quad \Delta f_{ФМ_Н} = \frac{2}{\tau}. \qquad (2.13)$$

В формулі для частотної маніпуляції $\Delta f_Д$ - девіація частоти.

Для імпульсних видів модуляції (АІМ, ЧІМ, ФІМ) ширина спектра не залежить ні від виду модуляції і її параметрів, ні від модулювального сигналу, ні від періоду проходження імпульсів, а визначається лише тривалістю імпульсу носія і, як згадувалось вище, вона обернено пропорційна тривалості імпульсу носія. Це справедливо і для широтно-імпульсної модуляції (ШІМ), але для визначення ширини спектра в цьому випадку необхідно підставляти мінімальну тривалість модульованих імпульсів $\tau_{\min}$, оскільки саме короткий імпульс має найширший спектр. Таким чином:

$$\Delta f_{АІМ,ЧІМ.ФІМ} = \frac{1}{\tau}, \qquad \Delta f_{ШІМ} = \frac{1}{\tau_{\min}}. \qquad (2.14)$$

Передача імпульсно-модульованих сигналів високочастотними лініями зв'язку принципово неможлива, оскільки їх спектр хоча і значно розширюється, але має в своєму складі і низькочастотні складові. Для перенесення спектра в область високих частот здійснюється повторна модуляція, що має назву подвійної (модульованими імпульсами знову модулюється гармонічна високочастотна несуча). При цьому можна отримати такі види подвійної модуляції: АІМ-АМ, АІМ-ОМ, ФІМ-АМ та інші. Очевидно, форма і ширина спектра для подвійної модуляції буде визначатися видом модуляції в кожному ступені, причому на другому ступені модулювальним сигналом вважається сигнал, отриманий на попередньому (першому) ступені модуляції. Це означає, що в розрахунках ширини спектра сигналу з подвійною модуляцією необхідно враховувати або ширину спектра, або найвищу частоту в спектрі модульованого на першому ступені сигналу.

## 2.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.** Написати рівняння АМ сигналу, нарисувати спектральну діаграму і написати аналітичний вираз обвідної АМ сигналу, якщо модулювальний сигнал і несуче коливання визначаються, відповідно, такими виразами:

$$u_M(t) = 0{,}4A_0\cos(2\pi\cdot 2\cdot 10^3 t) + 0{,}6A_0\cos(2\pi\cdot 4\cdot 10^3 t);$$

$$a_0(t) = A_0\cos 2\pi f t = A_0\cos(2\pi\cdot 10^4 t).$$

Визначити потужність несучого коливання і потужність однієї бокової смуги частот, якщо $A_0 = 10мА$, а опір навантаження $R = 100Ом$.

***Розв'язання***

Аналітичний вираз обвідної АМ сигналу можна записати, використавши безпосередньо математичну модель модулювального сигналу з урахуванням її впливу на амплітуду носія:

$$A(t) = A_0\left(1 + 0{,}4\cos(2\pi\cdot 2\cdot 10^3 t) + 0{,}6\cos(2\pi\cdot 4\cdot 10^3 t)\right).$$

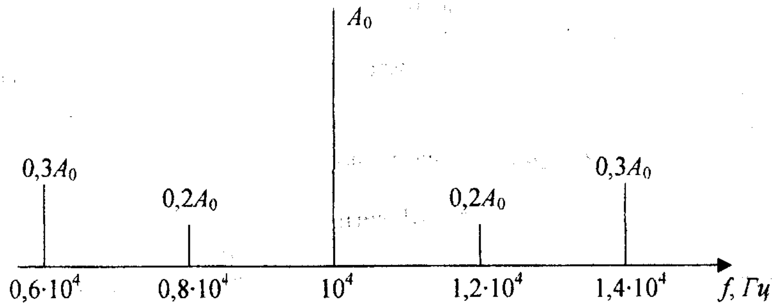
Користуючись формулою (2.1) і враховуючи необхідність зображення спектральної діаграми АМ сигналу, його рівняння запишемо в вигляді відповідної суми спектральних складових:

$$s_{AM}(t) = A_0\left[1 + 0{,}4\cos\left(2\pi\cdot 2\cdot 10^3 t\right) + 0{,}6\cos\left(2\pi\cdot 4\cdot 10^3 t\right)\right]\cos\left(2\pi\cdot 10^4 t\right) =$$

$$= A_0\left\{\begin{matrix}\cos(2\pi\cdot 10^4 t) + 0{,}2\cos\left[2\pi\left(10^4 + 2\cdot 10^3\right)t\right] + 0{,}2\cos\left[2\pi\left(10^4 - 2\cdot 10^3\right)t\right] + \\ + 0{,}3\cos\left[2\pi\left(10^4 + 4\cdot 10^3\right)t\right] + 0{,}3\cos\left[2\pi\left(10^4 - 4\cdot 10^3\right)t\right]\end{matrix}\right\} =$$

$$= A_0\left[\begin{matrix}\cos\left(2\pi\cdot 10^4 t\right) + 0{,}2\cos\left(2\pi\cdot 1{,}2\cdot 10^4 t\right) + 0{,}2\cos\left(2\pi\cdot 0{,}8\cdot 10^4 t\right) + \\ + 0{,}3\cos\left(2\pi\cdot 1{,}4\cdot 10^4 t\right) + 0{,}3\cos\left(2\pi\cdot 0{,}6\cdot 10^4 t\right)\end{matrix}\right].$$

Як видно з отриманої формули, спектр АМ сигналу має в своєму складі п'ять спектральних складових, дві з яких створюють верхню бокову смугу частот, дві інші – нижню бокову смугу частот і одна точно повторює несуче коливання. Таким чином, можна навести спектральну діаграму АМ сигналу з урахуванням отриманих значень амплітуд і частот спектральних складових.




Визначимо тепер потужності несучого коливання і однієї бокової смуги частот. З цією метою скористаємось формулою для визначення потужності для випадку відомої величини амплітуди струму і опору навантаження. Отже, потужність несучого коливання:

$$P_0 = \frac{A_0^2}{2}\cdot R = \frac{0{,}01^2}{2}\cdot 100 = 0{,}5\cdot 10^{-2}\,Вт = 5мВт.$$

Потужність однієї бокової смуги частот складається з суми потужностей двох спектральних складових:

$$P_b = P_1 + P_2 = \frac{(0{,}2\cdot A_0)^2}{2}\cdot R + \frac{(0{,}3\cdot A_0)^2}{2}\cdot R = 0{,}04\cdot P_0 + 0{,}09\cdot P_0 = 0{,}13\cdot P_0 = 0{,}65мВт.$$

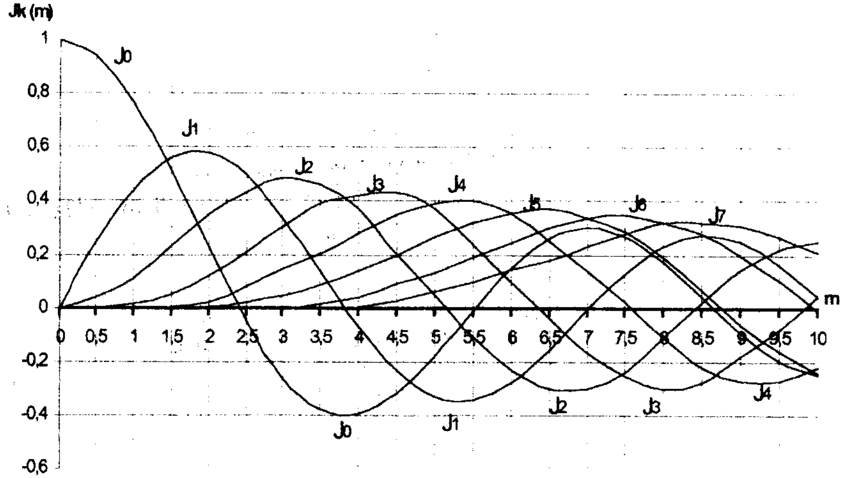
**Приклад 2.** Заданий вираз для фазомодульованого сигналу в такому вигляді:

$$i_{ФМ}(t) = I_M\cos(2\pi f_0 t + m_{ФМ}\sin 2\pi Ft) = 20\cos(2\pi\cdot 10^5 t + 0{,}3\sin 2\pi\cdot 10^3 t)$$

Визначити частотний спектр і амплітуди складових заданого ФМ сигналу та порівняти отриманий результат зі спектром і амплітудами складових АМ сигналу з таким же індексом модуляції $m_{АМ} = 0{,}3$. Визначити значення індексу фазової модуляції $m_{ФМ}$ ФМ сигналу, в якого відсутня спектральна складова на частоті носія $f_0$, і знайти спектр такого сигналу, користуючись заданою математичною моделлю з урахуванням отриманого значення індексу модуляції.

***Розв'язання***

Для визначення частотного спектра скористаємось формулою (2.11). Виходячи з заданого параметра $m$ = 0,3, знайдемо функції Бесселя таких порядків, які можна вважати значимими в спектрі даного сигналу. Визначення цих функцій здійснимо з використанням наведених нижче графіків функцій Бесселя.




Отже: $J_0(0{,}3) = 0{,}978$; $J_1(0{,}3) = 0{,}148$; $J_2(0{,}3) < 0{,}01$.

Очевидно, функцією $J_2(0{,}3)$ можна знехтувати і тоді спектр заданого сигналу буде складатися з трьох складових, оскільки параметр $к$ в формулі (2.11) приймає і від'ємні, і додатні значення:

$$i_{ФМ}(t) = 0{,}978 \cdot 20\cos\left(2\pi \cdot 10^5 t\right) + 0{,}148 \cdot 20\cos\left[2\pi\left(10^5 + 10^3\right)t\right] -$$
$$- 0{,}148 \cdot 20\cos\left[2\pi\left(10^5 - 10^3\right)t\right] = 19{,}56\cos\left(2\pi \cdot 10^5 t\right) +$$
$$+ 2{,}96\cos\left(2\pi \cdot 1{,}01 \cdot 10^5 t\right) - 2{,}96\cos\left(2\pi \cdot 0{,}99 \cdot 10^5 t\right).$$

Користуючись формулою (2.1), запишемо струм АМ коливання з індексом амплітудної модуляції $m_{AM} = 0{,}3$ і порівняємо отриманий вираз зі спектром наведеного вище фазомодульованого сигналу:

$$i_{AM}(t) = 20\left[1 + 0{,}3\cos\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)\right]\cos\left(2\pi \cdot 10^5 t\right) =$$
$$= 20\cos\left(2\pi \cdot 10^5 t\right) + 3\cos\left(2\pi \cdot 1{,}01 \cdot 10^5 t\right) + 3\cos\left(2\pi \cdot 0{,}99 \cdot 10^5 t\right).$$

Порівняння ФМ і АМ сигналів з однаковим і меншим за одиницю індексом модуляції показує, що ці сигнали мають практично однакову ширину спектра (причому майже збігаються за величиною) і амплітуди спектральних складових. Протилежні за знаком лише амплітуди нижніх бокових складових.

Перейдемо тепер до визначення такого значення індексу фазової модуляції, для якого в спектрі ФМ сигналу буде відсутня складова з частотою носія і визначимо частотний спектр ФМ сигналу з отриманим значенням індексу.

З графіків бесселевих функцій знаходимо мінімальне значення $m$, для якого $J_0(m) = 0$. Отримаємо $m_{ФМ} = 2{,}43$. Оскільки функція Бесселя нульового порядку визначає амплітуду спектральної складової на частоті носія (це видно з формули (2.11)), то, очевидно, для $m_{ФМ} = 2{,}43$ ця складова буде відсутня. Для отриманого значення індекса знаходимо функції Бесселя вищих порядків:

$J_1(2{,}43)=0{,}5133;\ \ J_2(2{,}43)=0{,}423;\ \ J_3(2{,}43)=0{,}1727;\ \ J_4(2{,}43)=0{,}004.$

Відкинувши, як незначну, функцію Бесселя четвертого порядку, отримаємо такий остаточний вигляд частотного спектра ФМ сигналу з індексом модуляції $m_{ФМ}=2{,}43$:

$$i_{ФМ}(t)=10{,}3\cos\left(2\pi\cdot 1{,}01\cdot 10^5 t\right)+8{,}46\cos\left(2\pi\cdot 1{,}02\cdot 10^5 t\right)+3{,}55\cos\left(2\pi\cdot 1{,}03\cdot 10^5 t\right)-$$
$$-10{,}3\cos\left(2\pi\cdot 0{,}99\cdot 10^5 t\right)+8{,}46\cos\left(2\pi\cdot 0{,}98\cdot 10^5 t\right)-3{,}55\cos\left(2\pi\cdot 0{,}97\cdot 10^5 t\right).$$

**Приклад 3.** Написати аналітичний вираз для сигналу з подвійною модуляцією типу ФМ-АМ. Визначити ширину смуги частот сигналу, якщо частота несучого коливання на першому ступені модуляції $f_{01}=100кГц$, найвища частота в спектрі первинного модулювального сигналу $F_m=4кГц$, а індекс фазової модуляції $m_{ФМ}=15$.

***Розв'язання***

Як видно з умови, на першому ступені здійснюється фазова модуляція. Позначивши модулювальний сигнал $u_M(t)$, можна записати загальну формулу для ФМ сигналу в такому вигляді:

$$s_{ФМ}(u_M,t)=A_0\cos\left[\omega_1 t+k_1\cdot u_M(t)\right].$$

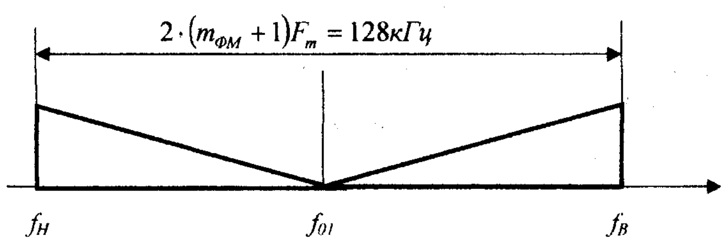
На другому ступені здійснюється амплітудна модуляція, причому ФМ сигнал, отриманий на першому ступені, є при амплітудній модуляції модулювальним сигналом. Отже, аналітичний вираз для сигналу з подвійною модуляцією типу ФМ-АМ має такий вигляд:

$$s_{AM}(t)=U_0\left[1+k_2\cdot s_{ФМ}(u_M,t)\right]\cos(\omega_2 t+\varphi_0)=$$
$$=U_0\left\{1+k_2\cdot A_0\cos\left[\omega_1 t+k_1\cdot u_M(t)\right]\right\}\cos(\omega_2 t+\varphi_0).$$

Перейдемо до визначення ширини спектра. Скористаємось формулою (2.12) і визначимо ширину спектра ФМ сигналу, тобто сигналу, отриманого на першому ступені модуляції:

$$\Delta f_{ФМ}=f_B-f_H=2\cdot(m_{ФМ}+1)\cdot F_m=2\cdot 16\cdot 4=128кГц.$$

Наведемо умовну спектральну діаграму ФМ сигналу (без визначення амплітуд спектральних компонент), але з урахуванням відомої за умовою задачі частоти несучого коливання.



Оскільки ширина спектра АМ сигналу визначається за формулою (2.4), в яку входить найвища частота спектра модулювального сигналу, то, очевидно, нам необхідно знайти величину $f_B$. Це легко зробити користуючись наведеною спектральною діаграмою.

$$f_B = f_{01} + (m_{ФМ} + 1)F_m = 100 + 64 = 164кГц$$

Таким чином, ширина спектра АМ сигналу, або ширина смуги частот, яку займає сигнал після другого і остаточного ступеня модуляції, дорівнює:

$$\Delta f_{AM} = 2 \cdot f_B = 2 \cdot 164 = 328кГц.$$

## 2.3 Задачі, запитання, вправи

2.3.1 З якою метою застосовують модуляцію в системах зв'язку?

2.3.2 Назвіть основні параметри АМ, ЧМ і ФМ сигналів.

2.3.3 Як визначити ширину спектрів АМ, ЧМ і ФМ сигналів?

2.3.4 Яка властивість функцій Бесселя дозволяє вважати спектр сигналів з кутовою модуляцією обмеженим?

2.3.5 Як вибирається період проходження імпульсів носія при імпульсних видах модуляції?

2.3.6 Що таке подвійна модуляція, для чого вона використовується?

2.3.7 В чому схожість і відмінність понять: модуляція, маніпуляція, дискретна модуляція, імпульсна модуляція?

2.3.8 Визначити амплітуду струму несучого коливання та індекс модуляції АМ сигналу, в якого максимальне і мінімальне значення амплітуд струмів відповідно дорівнюють 12 і 4 *мА*.

2.3.9 Визначити індекс модуляції $M$ та відношення максимальної амплітуди струму $i_{max}$ до мінімальної амплітуди $i_{min}$ для АМ сигналу, в якого амплітуда струму несучої частоти $I_m$ в чотири рази перевищує амплітуду струму бокової частоти $I_б$.

Відповідь: $M = 0{,}5$; $\;i_{max}/i_{min} = 3.$

2.3.10 Визначити потужності несучого $P_0$, а також бокового $P_б$ коливання АМ сигналу, якщо амплітуда напруги несучої частоти дорівнює $4В$, індекс модуляції – 0,6 і опір навантаження - $200Ом$.

Відповідь: $P_0 = 0{,}04Вт$; $P_б = 0{,}0036Вт$.

2.3.11 До резистивного навантаження опором $75Ом$ прикладена АМ напруга $s(u_M, t) = 1{,}55[1 + 0{,}8\cos(2\pi \cdot 10^3 t)]\cos(8\pi \cdot 10^6 t)$. Визначити: а) пікову та середню потужності в навантаженні; б) відносну частку середньої потужності, що зосереджена в бокових коливаннях.

Відповідь: а) $P_{пік} = 0{,}104Вт$; $P_{ср} = 0{,}0221Вт$; б) 32%.

2.3.12 Побудувати криву миттєвих значень ФМ сигналу

$$i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + m_{ФМ} \sin \Omega t).$$

виражаючи час $t$ залежністю $t = 2\pi k / 12\omega_0$, де $k$ -будь-яке (ціле чи дробове) число, включаючи нуль, якщо: $I_m = 20 мА$; $\omega_0 = 4\Omega$; $m_{ФМ} = \pi/2 = 1{,}57 рад.$ Для порівняння побудувати криві миттєвих значень гармонічних струмів – модульованого та модулювального, тобто: $i'(t) = I_m \cos\omega_0 t$, $i''(t) = m_{ФМ} \sin\Omega t$.

2.3.13 Визначити амплітуду відхилення (девіацію) частоти, якщо для найвищої частоти первинного (модулювального) сигналу, яка дорівнює $3400 Гц$, індекс модуляції становить $m_{ЧМ} = 2$.

Відповідь: $\Delta f_Д = 6800 Гц$.

2.3.14 Миттєва частота ЧМ сигналу змінюється в часі за законом:

$$\omega(t) = 10^6 \left[1 + 10^{-2}\cos\left(2\cdot 10^3 t\right)\right]$$

Записати математичну модель такого сигналу.

Відповідь: $s_{ЧМ}(u_m, t) = A_0 \cos\left[10^6 t + 5\sin\left(2\cdot 10^3 t\right)\right]$

2.3.15 Як зміниться ширина спектра однотональних АМ і ЧМ сигналів, якщо частоту модулювального сигналу збільшити вдвічі?

Відповідь: АМ – збільшиться вдвічі; ЧМ – не зміниться.

2.3.16 Як зміниться ширина спектра АМ і ФМ сигналів, якщо рівень модулювального сигналу збільшити вдвічі?

Відповідь: АМ – не зміниться;
для широкосмугової ФМ – збільшиться вдвічі.

2.3.17 Написати вираз для сигналу в системі ОМ-ФМ (на першому ступені модуляції використовується нижня або верхня бокові смуги; модулювальний сигнал вважати гармонічним). Визначити ширину смуги сигналу, якщо перша піднесуча частота дорівнює $100 кГц$, верхня частота повідомлення (модулювального сигналу) становить $4 кГц$, а індекс модуляції на другому ступені дорівнює 15.

Відповідь: $\Delta f_{ОМ-ФМ} = 3{,}328 МГц$.

2.3.18 Визначити ширину смуги частот сигналу в системі ЧМ-ОМ, якщо найвища частота в спектрі модулювального сигналу дорівнює $4 кГц$, а індекс частотної модуляції $m_{ЧМ} = 15$.

Відповідь: $\Delta f_{ЧМ-ОМ} = 128 кГц$.

2.3.19 Використовується система ЧМ-ЧМ. Визначити ширину смуги частот сигналу, якщо індекси модуляції на першому і другому ступенях відповідно дорівнюють $m_{ЧМ1} = 10$, $m_{ЧМ2} = 15$. Перша піднесуча частота $f_{01} = 100 кГц$, найвища частота в спектрі модулювального сигналу $F_m = 4 кГц$.

Відповідь: $\Delta f_{ЧМ-ЧМ} = 4{,}608 МГц$.

2.3.20 Навести реалізації сигналів для випадків амплітудної, частотної та фазової маніпуляцій за умови дискретного модулювального сигналу, що відображає символи таких кодових комбінацій: 11010011, 10111001, 11111000, 00111110, 10000001.

2.3.21 Визначити ширину спектра ЧІМ-АМ сигналу, якщо первинним модулювальним сигналом є радіомовний сигнал з верхньою частотою $8 кГц$. Шпаруватість імпульсів, які використовуються після дискретизації радіомовного сигналу на першому ступені модуляції, становить $Q = 10$.

Відповідь: $\Delta f_{ЧІМ-АМ} = 320 кГц$.

2.3.22 Для передачі мовного (телефонного) сигналу використовується система подвійної модуляції ФІМ-АМ. Визначити ширину спектра ФІМ-АМ сигналу, якщо шпаруватість імпульсів $Q = 10$. Врахувати рекомендацію МККТТ (МСЕ-Т) щодо частоти дискретизації мовного сигналу.

Відповідь: $\Delta f_{ФІМ-АМ} = 160 кГц$.

2.3.23 Написати рівняння синусоїдно-модульованого коливання, якщо амплітуда несучого коливання дорівнює 10 *В*, частота - $5 \cdot 10^5$ *Гц*, коефіцієнт модуляції дорівнює 0,6, а частота модулювального коливання дорівнює 1000 *Гц*.

Відповідь: $u(t) = 10(1 + 0{,}6\cos 2000\pi t)\sin 10^6 \pi t$.

2.3.24 Написати вираз для миттєвої частоти частотно-модульованого коливання, якщо несуча частота становить $10^8$ *Гц*, частота модуляції – $1{,}5 \cdot 10^4$ *Гц*, девіація частоти – $1{,}2 \cdot \pi \cdot 10^5$. Визначити індекс частотної модуляції.

Відповідь: $\omega = 2\pi \cdot 10^8 + 1{,}2 \cdot \pi \cdot 10^5 \sin 3\pi \cdot 10^4 t$; $m_f = 4$.

2.3.25 В передавачі здійснюється частотна модуляція. Несуча частота дорівнює $5 \cdot 10^8$ *Гц*. Девіація дорівнює $\pm 3{,}14 \cdot 10^3$. Визначити індекс частотної модуляції, якщо частота модулювального коливання дорівнює 100, 1000, 5000, 10000 *Гц*.

Відповідь: $m_f = 5; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}05$.

2.3.26 В радіолінії з ЧМ індекс модуляції може бути рівним 2 і 5. Визначити девіацію частоти, якщо частота модулювального коливання дорівнює 10 *кГц*.

Відповідь: $\Delta f_1 = 12560 Гц; \Delta f_2 = 31400 Гц$.

2.3.26 Визначити, у скільки разів збільшується відношення сигналу до шуму за потужністю на виході синхронного детектора в порівнянні з відношенням сигналу до шуму на його вході.

Відповідь: збільшується вдвічі.

# 3 РІВНІ ПЕРЕДАЧІ

## 3.1 Основні терміни та розрахункові співвідношення

Для спрощення електричних розрахунків та зручності експлуатації систем передачі потужність, напругу і струм оцінюють не абсолютними їх значеннями, а відносними, і вимірюють не в ваттах, вольтах і амперах, а в одиницях рівня передачі – децибелах [4, 5].

Рівнем передачі називається логарифмічне відношення потужності, напруги і струму в точці вимірювання кола до потужності, напруги і струму, які прийняті за початкові або еталонні. Рівні передачі потужності, напруги та струму визначаються такими співвідношеннями:

$$p_П = 10\lg\frac{P_x}{P_0}; \quad p_Н = 20\lg\frac{U_x}{U_0}; \quad p_С = 20\lg\frac{I_x}{I_0}, \tag{3.1}$$

де $P_x$, $U_x$, $I_x$ – величини потужності, напруги і струму в точці спостереження;

$P_0$, $U_0$, $I_0$ – величини, які прийняті за початкові у визначенні рівнів передачі.

В загальному випадку рівень передачі потужності не дорівнює рівню передачі напруги або струму. Але між ними легко встановити взаємозв'язок, якщо відомі опори $Z_x$ і $Z_0$, на яких виділяється відповідна потужність $P_x$ і $P_0$. Дійсно:

$$p_П = 10\lg\frac{P_x}{P_0} = 10\lg\frac{U_x^2}{|Z_x|}\frac{|Z_0|}{U_0^2} = 20\lg\frac{U_x}{U_0} - 10\lg\left|\frac{Z_x}{Z_0}\right| = p_Н - 10\lg\left|\frac{Z_x}{Z_0}\right|, \tag{3.2}$$

або

$$p_П = 10\lg\frac{I_x^2}{I_0^2}\frac{|Z_x|}{|Z_0|} = 20\lg\frac{I_x}{I_0} + 10\lg\left|\frac{Z_x}{Z_0}\right| = p_С + 10\lg\left|\frac{Z_x}{Z_0}\right|. \tag{3.3}$$

З отриманих формул (3.2) та (3.3) видно, що за умови $Z_x = Z_0$ всі рівні передачі будуть мати одне значення, тобто $p_П = p_Н = p_С$.

Рівні передачі можуть бути додатними, від'ємними і нульовими, оскільки логарифм числа, більшого одиниці, додатний, меншого одиниці – від'ємний, рівного одиниці дорівнює нулю.

Залежно від значень потужності, напруги і струму, які прийняті за початкові, розрізняють абсолютний, відносний і вимірювальний рівні передачі.

Якщо величини потужності, напруги або струму віднесені відповідно до величин $1мВт$, $0{,}775В$, і $1{,}29мА$, тобто $P_0 = 1мВт$, $U_0 = 0{,}775В$, $I_0 = 1{,}29мА$, то рівні називають абсолютними. Якщо ці рівні визначаються в точці спостереження, яка характеризується опором $600Ом$, то $p_П = p_Н = p_С$, що пояснюється наведеним вище вибором початкових величин, які відповідають саме опору $600Ом$:

$$U_0 \cdot I_0 = 0{,}775 \cdot 1{,}29 = 1 мВт;$$

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{0{,}775}{1{,}29 \cdot 10^{-3}} = 600 Ом.$$

Рівні називають нульовими абсолютними, якщо величини потужності, напруги і струму в точці спостереження дорівнюють початковим, тобто: $P_x = 1 мВт$, $U_x = 0{,}775 В$, $I_x = 1{,}29 мА$.

Абсолютний рівень потужності, напруги або струму, рекомендований для вимірювання параметрів та характеристик трактів або каналів, називається вимірювальним рівнем. Вимірювальний рівень – це абсолютний рівень в даній точці, коли рівень на вході кола становить $0 дБ$.

Якщо рівень в точці спостереження $x$ тракту визначається відносно величин потужності, напруги або струму, які виміряні в точці, що прийнята за початок тракту, то рівень передачі називається відносним і вимірюється відповідно в *дБоп*, *дБон*, *дБос*. Відносні рівні дорівнюють різниці абсолютних рівнів в точках спостереження (вимірювання) і на початку тракту:

$$\begin{aligned} p_{В.П} &= p_{Пx} - p_{П0}; \\ p_{В.Н} &= p_{Нx} - p_{Н0}; \\ p_{В.С} &= p_{Сx} - p_{С0}. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Для наведених формул (3.4), очевидно, справедливі співвідношення (3.2) і (3.3), тобто:

$$p_{В.П} = p_{В.Н} - 10\lg\left|\frac{Z_x}{Z_0}\right|, \qquad p_{В.П} = p_{В.С} + 10\lg\left|\frac{Z_x}{Z_0}\right|, \qquad (3.5)$$

де $Z_0$ – повний вхідний опір на початку тракту;

$Z_x$ – опір тракту в точці спостереження.

Слід відмітити, що для визначення відносних рівнів можна скористатися не лише абсолютними рівнями, а також величинами потужностей, напруг та струмів в точці спостереження і на початку тракту. При цьому формули для визначення відносних рівнів мають такий вигляд, який легко отримати з формул (3.4) і (3.1), якщо припустити, що формули (3.1) визначають абсолютні рівні:

$$p_{В.П} = 10\lg\frac{P_x}{P_0}; \quad p_{В.Н} = 20\lg\frac{U_x}{U_0}; \quad p_{В.С} = 20\lg\frac{I_x}{I_0}, \qquad (3.6)$$

де $P_0$, $U_0$, $I_0$ – відповідно потужність, напруга і струм на початку (вході) каналу.

Відносний рівень характеризує не величину потужності в точці спостереження каналу, а зміну цієї потужності в каналі між даною точкою і точкою нульового відносного рівня (ТНВР). ТНВР в каналі тональної частоти – це двопроводовий вхід каналу. Таким чином, в каналі має місце підсилення, якщо виконується умова $p_{В.П}>0$, і має місце згасання за умови, ню $p_{В.П}<0$. Якщо довжина ділянки лінії зв'язку між $i$-тою та ($i$-1)-ою підсилювальними станціями складає $l_i$, а коефіцієнт згасання на цій ділянці становить $\alpha$, то рівень прийому на вході $i$-тої підсилювальної станції визначається так:

$$p_{пр.i} = p_{пер.(i-1)} - \alpha \cdot l_i, \qquad (3.7)$$

де $p_{пер.(i-1)}$ - рівень передачі на виході ($i$-1)-ої підсилювальної станції.

За допомогою визначених рівнів передачі можна визначити такі важливі характеристики каналів передачі, як залишкове згасання (підсилення) та перехідне згасання. Залишкове згасання (підсилення) каналу – це робоче згасання (підсилення) каналу, яке визначається в умовах замкнення входу і виходу каналу на активні опори навантажень, що дорівнюють номінальним значенням вхідного і вихідного опорів каналу, як чотириполюсника. За умови забезпечення узгодження каналу з навантаженнями на вході і виході залишкове згасання можна визначити як:

$$a_r = p_{вх} - p_{вих}. \qquad (3.8)$$

Аналіз формули (3.8) показує, що в каналі має місце згасання, якщо залишкове згасання $a_r>0$, тобто виконується умова $p_{вх}>p_{вих}$; якщо залишкове згасання від'ємне $a_r<0$ (тобто $p_{вх}<p_{вих}$), то в каналі має місце підсилення, причому коефіцієнт підсилення за модулем дорівнює залишковому згасанню $a_r$. За умови узгодження всіх елементів, що створюють канал передачі, за вхідними опорами залишкове згасання можна визначити, як різницю суми всіх згасань і суми всіх підсилень в каналі:

$$a_r = \sum a_i - \sum S_i, \qquad (3.9)$$

де $S_i$ – коефіцієнт підсилення $i$-тої підсилювальної станції;

$a_i$ – згасання на $i$-тій ділянці каналу.

Перехід енергії з одного кола в інше на трасі поширення електромагнітних хвиль спричиняє погіршення якості та дальності зв'язку. Таке погіршення проявляється в вигляді перехідної розмови або шуму. Для оцінки взаємного впливу між колами застосовують такий показник, як перехідне згасання:

$$A = 10\lg\frac{P_1}{P_2}, \qquad (3.10)$$

де $P_1$ – потужність, що впливає на початку кола;

$P_2$ – потужність в відповідній точці кола, на яке здійснюється вплив.

Захищеність кіл – різниця між рівнями корисного сигналу і завади в відповідній точці кола:

$$A_З = p_C - p_З. \qquad (3.11)$$

## 3.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.** Напруга $U_x$ та струм $I_x$ в точці спостереження кола дорівнюють відповідно 0,2*В* і 0,2*мА*. Визначити величини відносних рівнів передачі потужності, напруги і струму в цій точці відносно початку кола, якщо на початку кола напруга і струм становлять: $U_0 = 10В$; $I_0 = 20мА$. Чим пояснюється розбіжність між величинами рівнів передачі потужності, напруги та струму?

***Розв'язання***

Для розв'язання цієї задачі доцільно скористатися безпосередньо формулами (3.6). За цими формулами і даними умови задачі можна шляхом відповідної підстановки і обчислень визначити відносні рівні передачі напруги і струму, а щодо рівня передачі потужності, то попередньо потрібно визначити самі потужності на початку кола і в точці спостереження. Виконаємо такі розрахунки:

$$P_0 = U_0 \cdot I_0 = 10 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 200 \cdot 10^{-3}\,Вт;$$

$$P_x = U_x \cdot I_x = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}04 \cdot 10^{-3}\,Вт.$$

Тепер переходимо до визначення відносних рівнів передачі:

$$p_{В.П} = 10\lg\frac{P_x}{P_0} = 10\lg\frac{0{,}04 \cdot 10^{-3}}{200 \cdot 10^{-3}} = 10\lg\left(2 \cdot 10^{-4}\right) = -37дБоп,$$

$$p_{В.Н} = 20\lg\frac{U_x}{U_0} = 20\lg\frac{0{,}2}{10} = 20\lg\left(2 \cdot 10^{-2}\right) = -34дБон,$$

$$p_{В.С} = 20\lg\frac{I_x}{I_0} = 20\lg\frac{0{,}2}{20} = 20\lg\left(1 \cdot 10^{-2}\right) = -40дБос.$$

Визначимо опори на початку кола і в точці спостереження:

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{10}{20 \cdot 10^{-3}} = 500Ом; \quad R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{0{,}2}{0{,}2 \cdot 10^{-3}} = 1000Ом.$$

Видно, що опори на початку кола і в точці спостереження відрізняються між собою. Очевидно, це і є причиною розбіжностей між величинами відносних рівнів передачі потужності, напруги і струму. Формально це пояснюють співвідношення (3.2) і (3.3).

## 3.3 Задачі, запитання, вправи

3.3.1 Знайти відносні рівні потужності, напруги і струму в точці спостереження з опором $R_x = 800Ом$ і струмом через нього $I_x = 0{,}2мА$ відносно початку кола з вхідним опором $R_0 = 400Ом$ і струмом через нього $I_0 = 0{,}3мА$.

Відповідь: $p_{В.П} = -0{,}51дБоп$; $p_{В.Н} = 2{,}5дБон$; $p_{В.С} = -3{,}52дБос$.

3.3.2 На опорі $R_x$ діє напруга $U_x = 1В$. Визначити абсолютні рівні потужності, напруги та струму, якщо: а) $R_x = 1000 Ом$; б) $R_x = 400 Ом$.

Відповідь: а) $p_П = 0 дБ$; $p_Н = 2{,}2 дБ$; $p_С = -2{,}2 дБ$.

б) $p_П \approx 4 дБ$; $p_Н = 2{,}2 дБ$; $p_С = 5{,}6 дБ$.

3.3.3 Середня потужність телефонного сигналу в ТНВР на так званих інтервалах активності (за відсутності пауз) складає $88 мкВт$. Паузи під час розмови займають в середньому 75% часу, потужність сигналів керування (набір номера, виклик) приймається рівною $10 мкВт$. Визначити абсолютний рівень потужності телефонного сигналу в ТНВР з урахуванням пауз і сигналів керування.

Відповідь: $p_{П.ср} = -15 дБм$.

3.3.4 Максимальна потужність телефонного сигналу, імовірність перевищення якого надзвичайно мала, складає $2220 мкВт$. Мінімальна потужність сигналу, який ще сприймається на фоні шумів, прийнята рівною $0{,}22 мкВт$. Визначити абсолютні рівні максимальної і мінімальної потужностей телефонного сигналу та з їх використанням – динамічний діапазон телефонного сигналу $D_c$.

Відповідь: $D_c = 40 дБ$.

3.3.5 Визначити абсолютний рівень напруги на навантаженні $600 Ом$, якщо величина напруги на цьому навантаженні дорівнює: а) $1 мкВ$; б) $1 мВ$; в) $100 мВ$; г) $1 В$.

Відповідь: а) $-117{,}8 дБ$; б) $-57{,}8 дБ$; в) $-17{,}8 дБ$; г) $2{,}2 дБ$.

3.3.6 Визначити абсолютний рівень потужності в точці спостереження лінії зв'язку, якщо величина виміряної потужності в цій точці дорівнює: а) $100 мкВт$; б) $10 мВт$; в) $1 Вт$.

Відповідь: а) $-10 дБ$; б) $10 дБ$; в) $30 дБ$.

3.3.7 Вхідна напруга лінії зв'язку становить $10 В$. Визначити величину згасання в лінії, якщо напруга на виході лінії зв'язку зменшилась: а) на 20%; б) на 40%.

Відповідь: а) $1{,}94 дБ$; б) $4{,}44 дБ$.

3.3.8 Визначити, як зміниться початкова різниця абсолютних рівнів на вході і виході лінії зв'язку, що становила $49 дБ$, якщо напруга сигналу на вході каналу: а) збільшиться вдвічі; б) зменшиться вдвічі.

Відповідь: не зміниться в обох випадках.

3.3.9 Визначити, у скільки разів змінилась потужність сигналу на виході лінії зв'язку, якщо абсолютний рівень напруги сигналу зменшився на $21{,}7 дБ$.

Відповідь: зменшилась у 148 разів.

3.3.10 Який рівень напруги сигналу потрібно подавати на вхід підсилювача з коефіцієнтом підсилення потужності $20 дБ$ і вхідним опором $600 Ом$, щоб отримати на вихідному опорі величиною $135 Ом$ сигнал потужністю $0{,}5 Вт$?

Відповідь: $7 дБ$.

3.3.11 Відносний рівень сигналу в певній точці спостереження лінії зв'язку становить мінус 4,34*дБ*. Визначити абсолютний і вимірювальний рівні в даній точці, якщо потужність вхідного сигналу дорівнює 100*мВт*.

Відповідь: $p_П$ = 15,635*дБ*.

3.3.12 Вимірювальний рівень сигналу в даній точці лінії зв'язку дорівнює мінус 8,68*дБ*. Визначити відносний та абсолютний рівні, якщо потужність вхідного сигналу становить 10*Вт*.

Відповідь: $p_{В.П}$ = -8,68*дБ*; $p_П$ = 31,32*дБ*.

3.3.13 Напруга на вході проводової лінії зв'язку дорівнює 3*В*, хвильовий опір лінії $Z$ = 50*Ом*. Довжина лінії зв'язку 50*км*. Кілометричне згасання 0,174*дБ/км*. Визначити напругу сигналу і його абсолютний рівень на виході лінії зв'язку.

Відповідь: $U_x$ = 1,1*В*; $p_Н$ = 3*дБ*.

3.3.14 Лінією зв'язку, яка має кілометричне згасання 0,1736*дБ/км*, здійснюється безпосередній зв'язок на відстань 50*км*. Побудувати діаграму відносних рівнів, визначити залишкове згасання і обчислити потужність сигналу на виході за умови, що вхідна потужність сигналу дорівнює 2*мВт*.

Відповідь: $a_r$ = 8,68*дБ*; $P_{вих}$ = 0,27*мВт*.

3.3.15 За допомогою кабельної лінії з кілометричним згасанням 0,1736*дБ/км* необхідно забезпечити міжміський телефонний зв'язок на відстань 300*км*. Дальність безпосереднього телефонування обмежується допустимим згасанням 10,42*дБ*. Допустимий відносний рівень на виході *кожного* підсилювального пункту складає 0*дБ* (по відношенню до входу). Визначити необхідну кількість підсилювальних пунктів та побудувати діаграму рівнів.

Відповідь: кількість пунктів – 5.

3.3.16 Визначити необхідну кількість проміжних підсилювальних пунктів, які б забезпечили стійкий телефонний зв'язок між абонентами, віддаленними на відстань 400*км*, якщо потужність сигналу на виході мікрофону дорівнює $10^{-3}$*Вт*, а чутливість телефона $10^{-6}$*Вт*. Кілометричне згасання лінії зв'язку становить 0,608*дБ/км*.

Відповідь: кількість пунктів – 8.

3.3.17 Повітряні лінії зв'язку мають такі значення кілометричного згасання: мідь діаметром 4*мм* – $21{,}7\cdot10^{-3}$*дБ/км*; сталь діаметром 0,9*мм* – 0,57*дБ/км*; сталь діаметром 1,2*мм* – 0,43*дБ/км*; сталь діаметром 4*мм* – 0,15*дБ/км*. Вибрати тип лінії зв'язку, яка б забезпечувала зв'язок на відстані 200*км*, якщо згасання на трасі не повинне перевищувати 8,68*дБ*.

Відповідь: мідь діаметром 4*мм*.

3.3.18 Лінією зв'язку з кілометричним згасанням 0,1736*дБ/км* здійснюється зв'язок на відстані між абонентами 25*км*. Обчислити залишкове згасання та потужність на виході каналу за умови, що потужність на вході становить 3*мВт*.

Відповідь: $a_r$ = 4,34*дБ*; $P_{вих}$ = 1,1*мВт*.

3.3.19 За допомогою кабельної лінії зв'язку з кілометричним згасанням 0,434*дБ/км* необхідно забезпечити міжміський зв'язок на відстань 70*км*. Залишкове згасання має бути не більшим 10,42*дБ*. Визначити необхідну кількість підсилювальних пунктів; побудувати діаграму рівнів.

Відповідь: два пункти з довжиною ділянки між пунктами 24*км*.

3.3.20 Лінія довжиною 2 *км* характеризується згасанням 14,2 *дБ*. Визначити коефіцієнт згасання.

Відповідь: $\alpha = 7{,}1$ *дБ*.

3.3.21 Лінія характеризується коефіцієнтом згасання $\alpha$ = 2,66 *дБ/км*. Визначити, на якій відстані від початку лінії амплітуда напруги буде в два рази меншою, ніж на вході лінії.

Вказівка. Розподіл напруги вздовж узгоджено навантаженої лінії описується формулою:

$$U_x = U_0 e^{-\alpha l} \quad \text{(для } \alpha \text{ в } Нп/км\text{);}$$

$$U_x = U_0 \cdot 10^{-0.05\alpha l} \quad \text{(для } \alpha \text{ в } дБ/км\text{).}$$

Відповідь: $l = 2{,}265$ *км*.

3.3.22 До входу узгоджено навантаженої лінії довжиною 10 *км* з коефіцієнтом згасання $\alpha$ = 0,1 *Нп/км* під'єднане джерело напруги 10 *В*. Визначити величину напруги на виході лінії (скористатись вказівкою до задачі 3.3.21).

Відповідь: $U_l = 3{,}68$ *В*.

3.3.23 Визначити захищеність кола на дальньому кінці, якщо рівень прийому становить мінус 30 *дБ*, а рівень перехідних завад дорівнює мінус 78 *дБ*.

Відповідь: $A_з = 48$ *дБ*.

# 4 БАГАТОКАНАЛЬНІ СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗКУ

## 4.1 Основні терміни та розрахункові співвідношення

Для передачі інформації від декількох джерел повідомлень однією лінією зв'язку застосовуються багатоканальні системи. Найбільше застосування знаходять багатоканальні системи з частотним і часовим ущільненням каналів. Створення каналів для передачі окремих сигналів електрозв'язку однією лінією зв'язку називається по-іншому розділенням каналів. Операція розділення каналів базується на наданні кожному сигналу, що передається, індивідуальної ознаки [4, 5, 6]

Системами передачі з частотним розділенням каналів (СП з ЧРК) називаються системи, в лінійних трактах яких для передачі канальних сигналів відводяться смуги частот, які не перекриваються. Розділення таких канальних сигналів здійснюється за допомогою частотних смугових фільтрів.

Таким чином, при частотному розділенні каналів кожному каналу відводиться своя частотна область смуги пропускання лінії зв'язку. Ширина частотного спектра групового сигналу $\Delta\omega_\Sigma$ визначається числом каналів в системі передачі, шириною спектра канальних сигналів, а також частотними характеристиками згасання смугових розділювальних фільтрів. В СП з ЧРК кожний канальний сигнал проходить в межах смуги пропускання "свого" канального фільтра, що забезпечується низьким рівнем згасання в межах цієї смуги і якомога більшим згасанням в діапазоні ефективної затримки, тобто за межами спектра даного канального сигналу. Очевидно, між смугою пропускання фільтра і діапазонами ефективної затримки існує перехідна область (смуга розфільтровування). В зв'язку з цим між смугами частот, які відводяться для передачі канальних сигналів, необхідно передбачити захисні проміжки $\Delta\omega_з$, величини яких повинні бути не меншими смуг розфільтровування розділювальних фільтрів. За цієї умови ширина частот групового сигналу визначається за формулою:

$$\Delta\omega_\Sigma = \sum_{n=1}^{N}\Delta\omega_n + \sum_{n=1}^{N-1}\Delta\omega_{зn}, \tag{4.1}$$

де $\Delta\omega_n = \omega_n'' - \omega_n'$ - смуга частот $n$-го каналу;

$N$ – кількість каналів, які створюються в багатоканальній системі зв'язку.

Якщо смуги частот всіх каналів однакові, тобто $\Delta\omega_n = \Delta\omega_{n+1} = \Delta\omega_k$, а також однакові всі захисні проміжки, тобто $\Delta\omega_{зn} = \Delta\omega_{зn+1} = \Delta\omega_з$, то для великої кількості каналів $N$:

$$\Delta\omega_\Sigma = N(\Delta\omega_k + \Delta\omega_з). \tag{4.2}$$

Через те, що згасання затримки розділювальних фільтрів має кінцеве значення, повне розділення канальних сигналів неможливе. Це є однією з причин виникнення міжканальних перехідних завад. Зокрема, на вході демодулятора $n$-го каналу крім корисного канального сигналу, спектр якого збігається зі смугою пропускання $n$-го розділювального фільтра, з'являться послаблені сигнали всіх решти каналів. Ці сигнали після демодуляції надходять на вхід $n$-го каналу в вигляді міжканальних завад, характер і рівень яких визначається якістю розділювальних фільтрів та видом модуляції.

Важливим показником багатоканальної системи зв'язку є її пропускна здатність, яка, очевидно, визначається значеннями пропускних здатностей окремих каналів, які входять в цю систему:

$$C_n = \sum_{i=1}^{N} C_{ni}, \tag{4.3}$$

де $C_{ni}$ – пропускна здатність $i$-го каналу, яка при передачі неперервних повідомлень (а саме така передача здійснюється в СП з ЧРК, які є аналоговими системами) за обмеженої середньої потужності сигналу і дії флуктуаційних завад визначається за формулою:

$$C_{ni} = \Delta F_k \log_2\left(1 + \frac{P_c}{\sigma_з^2}\right), \tag{4.4}$$

де $\Delta F_k$ – смуга пропускання каналу зв'язку;
$P_c$ – середня потужність сигналу;
$\sigma_з^2$ – потужність (дисперсія) завади.

В системах передачі з часовим розділенням каналів (СП з ЧсРК) лінія зв'язку на короткі проміжки часу періодично під'єднується до джерела і приймача сигналів кожного каналу, тобто відрізки сигналу, які належать даному каналу, передаються в ті проміжки часу, коли лінія вільна від передачі сигналів інших каналів. Спочатку в лінію надходять перші елементи першого сигналу, потім – перші елементи другого сигналу і так до останнього $n$-го сигналу. Далі передаються другі елементи знову від першого до останнього сигналу. Така процедура повторюється цикл за циклом до тих пір, поки не будуть передані останні елементи всіх $n$ сигналів.

Якість передачі інформації, пропускна здатність СП з ЧсРК залежать від виду модуляції, яка застосована. Найширше використання знаходять такі види модуляції, як АІМ, ШІМ, ФІМ та ІКМ. Системи передачі, в яких використана імпульсно-кодова модуляція (ІКМ), отримали назву цифрових.

Інтервал дискретизації кожного індивідуального (первинного) сигналу визначається теоремою Котєльнікова і, наприклад, для телефонного (мовного) сигналу становить 125*мкс*. Що стосується тривалості імпульсів на виході імпульсних модуляторів, то вона залежить від кількості каналів в системі і може сягати часток мікросекунди. Залежно від виду лінії зв'язку, зокрема від її частотних характеристик, отримані послідовності імпульсів можуть бути подані в лінію безпосередньо, або після здійснення ще одного – другого ступеня модуляції високочастотних коливань. Іншими словами саме в СП з ЧсРК може бути застосована подвійна модуляція АІМ-АМ, ФІМ-АМ, ФІМ-ЧМ, ФІМ-ОМ, тощо.

Найбільш завадостійкою є СП з ЧсРК, в якій на першому ступені здійснюється фазо-імпульсна модуляція. Кількість каналів $N$, яку можна отримати в системі з ФІМ, визначається з такого співвідношення:

$$T_Д = \left(2 \cdot \Delta\tau_{\max} + \tau_з\right) \cdot N\,, \tag{4.5}$$

де $T_Д$ – інтервал дискретизації;

$\Delta\tau_{\max}$ - максимальне зміщення (девіація) імпульсів;

$\tau_з$ - захисний інтервал.

При цьому вважають, що тривалість імпульсів незначна в порівнянні з $\tau_з$ і $\Delta\tau_{\max}$. Формула (4.5) дає можливість розв'язати і обернену задачу, а саме – визначити максимальну девіацію імпульсів для заданої кількості каналів.

В СП з ЧсРК-ІКМ не існує часового зміщення імпульсів, як при ФІМ, тому кількість каналів $N$ в лінії залежить від інших очевидних факторів: тривалості імпульсів та розрядності кодової комбінації, величини захисного інтервалу між кодовими імпульсами і, очевидно, від величини інтервалу дискретизації. Важливим показником таких систем є пропускна здатність лінії, яка по суті визначає можливу швидкість передачі цифрової інформації:

$$C_n = f_T \cdot \log_2 l_k\,, \tag{4.6}$$

де $f_T$ – тактова частота або частота проходження імпульсів в лінії зв'язку;

$l_k$ – число дозволених значень (рівнів), які може приймати дискретний сигнал.

Формула (4.6) може бути використана для визначення швидкості передачі інформації як в окремих каналах, так і в усій багатоканальній системі зв'язку.

## 4.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.** 1. Визначити необхідну смугу частот $\Delta f_c$ для передачі десяти незалежних мовних повідомлень (смуга кожного 0,3 – 3,4*кГц*) за допомогою односмугової модуляції на піднесучих і амплітудної модуляції спільної несучої (система ОМ-АМ) лінією зв'язку з частотним розділенням каналів. Вважати, що для зменшення перехідних завад між каналами рознесення між піднесучими частотами каналів зростає порівняно з мінімально необхідною величиною на величину захисного інтервалу $\Delta f_з$, який складає 30% від $\Delta f_k$.. Найнижча піднесуча частота дорівнює 24*кГц*, в процесі формування односмугового сигналу в кожному каналі виділяється верхня бокова смуга частот. Навести плани частот для першого і другого ступенів модуляції.

2. Розв'язати задачу для випадку використання системи АМ-ОМ.

3. Розв'язати задачу для випадку фазової модуляції спільної несучої. Індекс фазової модуляції $m_{ФМ} = 6$.

***Розв'язання***

1. Для односмугової модуляції (ОМ) ширина спектра модульованого сигналу дорівнює ширині спектра первинного повідомлення, тобто:

$$\Delta f_k = 3{,}4 - 0{,}3 = 3{,}1 кГц.$$

Визначимо ширину захисного інтервалу:

$$\Delta f_з = 0{,}3 \cdot \Delta f_k \cong 0{,}9 кГц.$$

Отже, рознесення між піднесучими частотами складе:

$$\Delta f_{ПН} = 3{,}1 + 0{,}9 = 4 кГц.$$

Для передачі десяти незалежних повідомлень з використанням ОМ, тобто на першому ступені модуляції, необхідна смуга частот, яка з урахуванням отриманого рознесення між піднесучими буде дорівнювати:

$$\Delta f_c' = 4 \cdot 10 = 40 кГц.$$

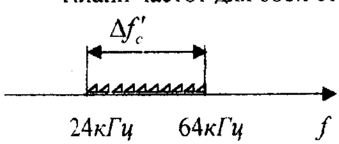
Для визначення ширини спектра АМ сигналу, тобто сигналу, отриманого в результаті другого ступеня модуляції, потрібно знати найвищу частоту спектра модулювального сигналу, яким в даному випадку є ОМ сигнал, сформований на першому ступені модуляції. Верхня частота спектра цього сигналу, очевидно, буде визначатися шириною спектра десяти первинних повідомлень з урахуванням захисних проміжків $\Delta f_c'$, а також значенням нижньої піднесучої частоти, тобто:

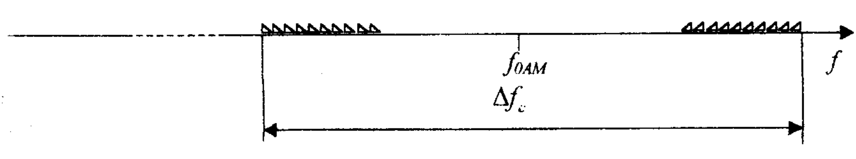
$$F_{\max ОМ} = f_{0ПН} + \Delta f_c' = 24 + 40 = 64 кГц.$$

Необхідна смуга частот для передачі даних повідомлень дорівнює, очевидно, ширині спектра АМ сигналу, яку можна визначити за формулою (2.4):

$$\Delta f_c = 2 \cdot F_{\max ОМ} = 2 \cdot 64 = 128 кГц.$$

Плани частот для обох ступенів модуляції наведені нижче.



2. При використанні системи АМ-ОМ на першому ступені здійснюється амплітудна модуляція кожного первинного сигналу, причому спектр модульованого сигналу визначається за формулою (2.4), де $F_{max}$ = 3,4*кГц*. Отже:

$$\Delta f_k = 2 \cdot F_{max} = 2 \cdot 3{,}4 = 6{,}8 кГц.$$

Рознесення між піднесучими частотами з урахуванням ширини захисного проміжку в даному випадку становитиме:

$$\Delta f_{ПН} = \Delta f_k + \Delta f_з = \Delta f_k + 0{,}3 \cdot \Delta f_k = 6{,}8 + 0{,}3 \cdot 6{,}8 = 8{,}84 кГц.$$

Смуга частот, яку займає в багатоканальній системі передачі десять повідомлень, після першого ступеня модуляції дорівнює:

$$\Delta f_{AM} = 10 \cdot \Delta f_{ПН} = 10 \cdot 8{,}84 = 88{,}4 кГц.$$

Оскільки на другому ступені модуляції здійснюється формування односмугового сигналу, то остаточна смуга частот в багатоканальній системі передачі при подвійній модуляції типу АМ-ОМ буде дорівнювати 88,4*кГц*.

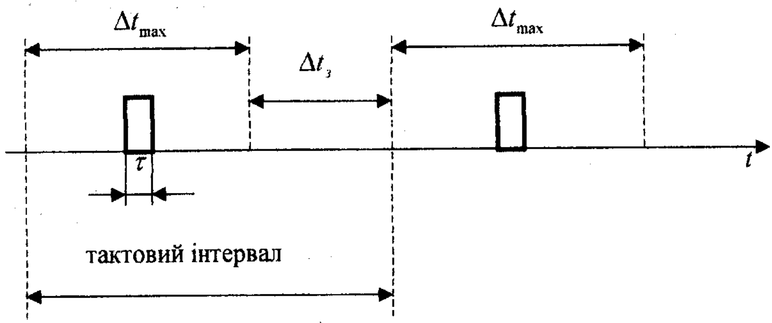
3. Для випадку фазової модуляції спільної несучої односмуговим сигналом, отриманим на десяти піднесучих на першому ступені модуляції, ширина спектра ФМ сигналу визначається за формулою (2.12), в якій найвищою частотою в спектрі модулювального сигналу слід вважати, очевидно, частоту $F_{max ОМ}$. Таким чином, ширина смуги частот в багатоканальній системі передачі при подвійній модуляції типу ОМ-ФМ становитиме:

$$\Delta f_c = 2 \cdot (m_{ФМ} + 1) \cdot F_{max\, ОМ} = 2 \cdot 7 \cdot 64 = 896 кГц.$$

**Приклад 2.** В системі з часовим розділенням каналів передаються незалежні мовні повідомлення (спектр кожного з них складає 0,3 – 3,4*кГц*) з первинною фазоімпульсною модуляцією і вторинною амплітудною модуляцією спільної несучої (система ФІМ-АМ). Поклавши, що лінійний сигнал займає смугу частот 21,5*МГц*, визначити кількість каналів в багатоканальній системі передачі. Вважати, що для зменшення перехідних завад в системі створюються захисні проміжки $\Delta t_з$ між тактовими інтервалами окремих каналів, які складають 2% від інтервалу дискретизації первинного сигналу в часі, а максимальний час відхилення фронту імпульсу в тактовому інтервалі $\Delta t_{max} = 128\tau$ ($\tau$ - тривалість елементарної посилки). У скільки разів збільшиться кількість каналів для такого ж відношення $\Delta t_{max}/\tau$, якщо внаслідок заходів, що прийняті для компенсації перехідного процесу в каналі, можна буде відмовитися від захисних проміжків між тактовими інтервалами?

***Розв'язання***

З метою наглядності наведемо часову діаграму двох сусідніх канальних імпульсів після першого ступеня модуляції.




Визначимо тривалість імпульсів, яка узгоджується з заданою смугою частот, яку займає лінійний сигнал. При цьому потрібно врахувати, що на другому ступені застосована амплітудна модуляція, в результаті якої ширина спектра АМ сигналу порівняно з модулювальним (відеосигналом) подвоюється. Таким чином, тривалість елементарної посилки, яка може бути застосована в системі ФІМ-АМ при смузі частот $21{,}5\,МГц$, становить:

$$\tau = \frac{2}{\Delta f_c} = \frac{2}{21{,}5 \cdot 10^6} = 0{,}093\,мкс.$$

З урахуванням теореми Котєльнікова визначимо для заданих мовних сигналів інтервал дискретизації і приймемо його граничне значення:

$$T_D = \frac{1}{2 \cdot F_{max}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}4 \cdot 10^3} = 147\,мкс.$$

Виходячи з принципу роботи систем з часовим розділом каналів, коли дискретні вибірки всіх $N$ каналів повинні бути зосереджені в межах інтервалу дискретизації (мова йде про однакові за параметрами повідомлення і одноіменні вибірки), і спираючись на умову задачі та наведену вище часову діаграму, складемо таке рівняння:

$$T_D = N \cdot \left(\Delta t_{max} + \Delta t_з\right) = N \cdot \left(128 \cdot \tau + 0{,}02 \cdot T_D\right).$$

Рівняння відображає те, що в межах інтервалу дискретизації може розміститися $N$ імпульсів з урахуванням максимальних їх часових зміщень, а також тривалості захисного проміжку.

Наведене рівняння дозволяє визначити кількість каналів:

$$N = \frac{T_D}{128 \cdot \tau + 0{,}02 \cdot T_D} = \frac{147}{128 \cdot 0{,}093 + 0{,}02 \cdot 147} \approx 10.$$

Якщо захисний інтервал між імпульсами відсутній, то рівняння для інтервалу дискретизації буде мати спрощений вигляд (його можна отримати з попереднього рівняння):

$$T_D = N' \cdot \Delta t_{\max} = N' \cdot 128 \cdot \tau.$$

Кількість каналів за умови відсутності захисних інтервалів:

$$N' = \frac{T_D}{128 \cdot \tau} = \frac{147}{128 \cdot 0{,}093} \approx 12.$$

Таким чином, за відсутності захисних інтервалів кількість каналів в багатоканальній системі передачі збільшиться в 1,2 рази.

## 4.3 Задачі, запитання, вправи

4.3.1 Визначити ширину спектра сигналів в багатоканальній системі передачі при використанні подвійної модуляції типу: а) БМ-АМ; б) БМ-ФМ. Врахувати, що верхні частоти повідомлень в усіх $N$ каналах однакові і дорівнюють $F_B$. Для запобігання виникнення міжканальних завад спектри модульованих піднесучих розділені захисною смугою $\delta F_з$, а нижня гранична частота спектра багатоканального повідомлення дорівнює $f_H$.

Відповідь: а) $\Delta f_{БМ-АМ} = 2 \cdot \left[f_H + 2NF_B + (N-1) \cdot \delta F_з\right]$;

б) $\Delta f_{БМ-ФМ} = 2 \cdot m_{ФМ} \cdot \left[f_H + 2NF_B + (N-1) \cdot \delta F_з\right]$

4.3.2 Визначити ширину спектра сигналів в багатоканальній системі передачі при використанні подвійної модуляції типу: а) АМ-АМ; б) АМ-ЧМ; в) АМ-ФМ. Врахувати, що верхні частоти повідомлень в усіх каналах однакові і дорівнюють $F_B$. Для запобігання виникненню міжканальних завад спектри модульованих піднесучих розділені захисною смугою $\delta F_з$, а нижня гранична частота спектра багатоканального повідомлення дорівнює $f_H$. Передається $N$ повідомлень.

Відповідь: а) $\Delta f_{АМ-АМ} = 2 \cdot \left[f_H + 2NF_B + (N-1) \cdot \delta F_з\right]$;

б) $\Delta f_{АМ-ЧМ} = \Delta f_{АМ-ФМ} = 2 \cdot m_{ФМ} \cdot \left[f_H + 2NF_B + (N-1) \cdot \delta F_з\right]$

4.3.3 Визначити ширину спектра сигналів в багатоканальній системі передачі при використанні подвійної модуляції типу: а) ФМ-АМ; б) ФМ-ЧМ; в) ФМ-ФМ. Врахувати, що верхні частоти повідомлень в усіх каналах однакові і дорівнюють $F_B$, однакові також індекси фазової модуляції піднесучих $m_{ФМ}$. Для запобігання виникненню міжканальних завад спектри модульованих піднесучих розділені захисною смугою $\delta F_з$, а нижня гранична частота спектра багатоканального повідомлення дорівнює $f_H$. Передається $N$ повідомлень.

Відповідь: а) $\Delta f_{ФМ-АМ} = 2 \cdot \left[2Nm_{ФМ}F_B + (N-1) \cdot \delta F_з + f_H\right]$;

б) $\Delta f_{ФМ-ЧМ} = \Delta f_{ФМ-ФМ} \cong 2 \cdot m'_{ФМ} \cdot \left[2Nm_{ФМ}F_B + (N-1) \cdot \delta F_з + f_H\right]$

4.3.4 Задана лінія зв'язку з верхньою частотою смуги пропускання $2МГц$. Визначити можливу кількість стандартних телефонних каналів, які можуть бути розміщені в межах смуги пропускання заданої лінії, якщо використане частотне ущільнення. Нижня гранична частота спектра багатоканального повідомлення дорівнює $4кГц$, захисний проміжок між каналами становить 20% від ширини спектра кожного з каналів.

Відповідь: кількість каналів – 536.

4.3.5 Багатоканальною системою зв'язку з частотним розділенням каналів передається інформація від 50 джерел. Ширина спектра частот функцій, які передаються, становить $100Гц$. Захисний проміжок між каналами становить 20% від ширини спектра вказаних функцій. Визначити необхідну смугу пропускання лінії зв'язку.

Відповідь: $\Delta f = 6кГц$.

4.3.6 В апаратурі частотного ущільнення трьох стандартних телефонних каналів застосовано фільтровий метод формування односмугового сигналу з використанням нижньої бокової смуги. Запас на розфільтровування складає приблизно 25% від ширини спектра сигналу. 1. Побудувати структурну схему апаратури. 2. Навести частотний спектр канальних сигналів та лінійного сигналу. 3. Вибрати значення частот генераторів піднесучих коливань та граничні значення частот смуги пропускання фільтрів.

4.3.7 Відомо, що діапазон частот 60-$108кГц$, в якому розміщені 12 телефонних каналів, приймається в якості стандартного. Побудувати структурну схему 24-канальної апаратури. Аппаратура працює на проводову лінію зв'язку, смуга пропускання якої займає діапазон частот від 0 до $150кГц$.

4.3.8 В системі з часовим розділенням каналів передаються 20 незалежних мовних повідомлень (смуга кожного 0,3-$3{,}4кГц$) за допомогою системи ФІМ-АМ. Для зменшення перехідних завад створюються захисні проміжки між тактовими інтервалами окремих каналів, які становлять 2% від інтервалу дискретизації первинного сигналу в часі. Максимальне відхилення фронту імпульсу в тактовому інтервалі $\Delta t_{max} = 128\tau$ ($\tau$ – тривалість елементарної посилки). Під час розв'язання задачі скористайтесь часовою діаграмою, наведеною в прикладі 2.

Відповідь: $\Delta f_c \approx 58МГц$.

4.3.9 Розв'язати попередню задачу для системи ФІМ-ЧМ, поклавши, що індекс частотної модуляції дорівнює 10.

Відповідь: $\Delta f_c \approx 580МГц$.

4.3.10 Визначити необхідну смугу пропускання багатоканальної системи передачі на 24 канали з часовим розділенням каналів, якщо в кожному з каналів необхідно передати з циклом $0{,}1с$ повідомлення в вигляді семирозрядних кодових комбінацій методом ІКМ-АМ. Захисний проміжок між імпульсами кодових комбінацій дорівнює тривалості імпульсу.

Відповідь: $\Delta f_c \geq 6720Гц$.

4.3.11 Визначити максимальну кількість каналів в системі зв'язку з часовим розділенням каналів при використанні ФІМ, якщо максимальна частота модуляції сигналу, який передається, дорівнює 4000*Гц*, тривалість імпульсів, що передаються, $\tau = 1мкс$, захисний проміжок між імпульсами сусідніх каналів з урахуванням тривалості імпульсів дорівнює $1{,}5 \cdot \Delta t_{\max}$, максимальна девіація імпульсів дорівнює: а) $\Delta t_{\max} = 6 \cdot \tau$; б) $\Delta t_{\max} = 1{,}5 \cdot \tau$ (практична межа).

Відповідь: а) $N = 6$; б) $N = 24$.

4.3.12 Визначити максимальну кількість каналів у системі зв'язку з часовим розділенням каналів і частотною імпульсною модуляцією (ЧІМ), якщо максимальне значення девіації імпульсів визначається співвідношенням:

$$\Delta t_{\max} = \Delta t_{\min} \frac{F_{\max}}{F_{\min}},$$

де $\Delta t_{\min} = 1{,}5 \cdot \tau$ - мінімальна девіація імпульсів; $F_{\max}$, $F_{\min}$ – максимальне та мінімальне значення частоти модуляції.

Захисний проміжок $\Delta t_з = 1{,}5 \cdot \Delta t_{\min}$. Задачу розв'язати для умов:

$F_{\max} = 3400Гц$; $F_{\min} = 300Гц$; $\tau = 1мкс$.

Відповідь: кількість каналів – 3.

4.3.13 Визначити необхідну швидкість передачі даних в системі зв'язку з часовим розділенням каналів, якщо неперервний сигнал, що передається, дискретизується в часі з частотою $F_D$ і квантується за рівнем з відображенням у двійковому коді, причому максимальне число рівнів дорівнює $M$. Кількість каналів в системі становить $N$.

Відповідь: $C_n = f_T = F_D \cdot N \cdot \log_2 M$.

4.3.14 Розв'язати попередню задачу для таких даних: $F_D = 8кГц$; $M = 32$; $N = 12$.

4.3.15 Визначити кількість каналів, які можна отримати використовуючи ФІМ, якщо частота проходження імпульсів $F_T = 45кГц$, максимальна девіація $\Delta t_{\max} = 1{,}5мкс$, захисний проміжок з урахуванням тривалості імпульсів $\Delta t_з = 1{,}5 \cdot \Delta t_{\max}$.

Відповідь: кількість каналів – 4.

4.3.16 Визначити кількість каналів, які можна отримати використовуючи ФІМ, якщо період послідовностей імпульсів, що передаються, $T_n = 125мкс$, максимальна девіація $\Delta t_{\max} = 3мкс$, захисний проміжок з урахуванням тривалості імпульсів $\Delta t_з = 1{,}5 \cdot \Delta t_{\max}$.

Відповідь: кількість каналів – 12.

4.3.17 В багатоканальній системі зв'язку з часовим розділенням каналів період проходження тактових імпульсів становить 100*мкс*. Тривалість імпульсу складає 2*мкс*. Здійснюється 100% широтна модуляція. Якщо використати ФІМ, то максимальне зміщення імпульсів при модуляції повинне дорівнювати величині зміщення фронту при ШІМ. Захисний часовий проміжок між каналами дорівнює 2*мкс*. Визначити кількість каналів, які можна організувати в цій системі, використовуючи АІМ, ФІМ, ШІМ.

Відповідь: $N_{\text{АІМ}} = 25$; $N_{\text{ФІМ}} = 12$; $N_{\text{ШІМ}} = 16$.

4.3.18 Вводиться в експлуатацію радіолінія зі смугою пропускання 3*МГц*. Визначити максимальну кількість стандартних телефонних каналів, які можуть бути розміщені в цій смузі при часовому і частотному розділенні каналів. При часовому розділенні використовується ФІМ з девіацією імпульсів $\Delta t_{\max} = 5 \cdot \tau$ та захисним проміжком між каналами $\Delta t_з = 5 \cdot \tau$ ($\tau$ – тривалість імпульсу). При частотному розділенні каналів на розфільтровування витрачається ділянка смуги пропускання шириною 900*Гц*.

Відповідь: при ЧсРК – 24 канали; при ЧРК – 750 каналів.

4.3.19 Багатоканальною системою зв'язку з часовим розділенням каналів передається інформація від 50 джерел. Використовується ФІМ з девіацією імпульсів $\Delta t_{\max} = \pm 10$*мкс*. Захисний інтервал між каналами складає $7 \cdot \tau$ ($\tau$ – тривалість імпульсу). Ширина спектра частот функцій, які передаються, дорівнює 100*Гц*. Визначити необхідну смугу пропускання лінії зв'язку.

Відповідь: 100*кГц*.

4.3.20 Визначити тривалість імпульсів при передачі сигналів з ІКМ каналом 24-канальної системи з часовим розділенням каналів, якщо число можливих станів кожного з сигналів, що передаються, дорівнює 256, максимальна частота спектра сигналу 4*кГц*, захисний проміжок між імпульсами дорівнює тривалості імпульсу.

Відповідь: $\tau \approx 0{,}33$*мкс*.

# 5 КІЛЬКІСНА ОЦІНКА ІНФОРМАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ ДЖЕРЕЛ ПОВІДОМЛЕНЬ

## 5.1 Основні терміни та розрахункові співвідношення

Будь-яке джерело інформації створює повідомлення тільки з того набору символів (елементів), який воно має в своєму арсеналі. Такий набір символів називають алфавітом джерела інформації. Якщо ймовірність вибору символів повідомлень неоднакова, то джерело інформації визначається такою схемою:

$$A = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, & ..., a_i, & ..., & a_m \\ p(a_1), & p(a_2), & ..., p(a_i), & ..., p(a_m) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ – символи (елементи) алфавіту джерела повідомлень; $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_i), \ldots, p(a_m)$ – ймовірності того, що джерело повідомлень знаходиться відповідно в станах $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$. При цьому $\sum_{i=1}^{m} p(a_i) = 1$.

Схема виду (5.1) називається ансамблем повідомлень. Ансамбль повідомлень на вході приймача називають ансамблем приймача повідомлень і позначають буквою $B$. Щоб відрізнити передані і прийняті сигнали, алфавіт, в якому надходить ансамбль приймача повідомлень, позначають $\{b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_m\}$, а відповідні йому імовірності - $\{p(b_1), p(b_2), \ldots, p(b_j), \ldots, p(b_m)\}$.

Мірою кількості інформації, яку в середньому може створити джерело повідомлень, є ентропія цього джерела [7, 8]:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} \left[ p(a_i) \cdot \log_k p(a_i) \right], \quad (5.2)$$

де $k$ – основа логарифма.

Якщо основою логарифма є число 2, то одиницю вимірювання кількості інформації називають "біт" або "двійкова одиниця". В цьому випадку "двійку" при логарифмі не пишуть:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} \left[ p(a_i) \cdot \log_2 p(a_i) \right] = -\sum_{i=1}^{m} \left[ p(a_i) \cdot \log p(a_i) \right], \text{ } \textit{біт/симв.} \quad (5.3)$$

Ентропія $H(A)$ характеризує середню невизначеність ситуації до передачі повідомлень, оскільки невідомо, який із символів ансамблю $A$ буде передано. Таким чином, ентропія – це міра апріорної (до настання передачі) невизначеності джерела повідомлень і вона характеризує в середньому кількість інформації, яка припадає на один символ алфавіту джерела повідомлень.

Ентропія приймача повідомлень

$$H(B) = -\sum_{j=1}^{m}\left[p(b_j)\cdot\log p(b_j)\right],\ біт/симв. \quad (5.4)$$

характеризує невизначеність появи на вході приймача символу після його появи на виході джерела повідомлень. Якщо у каналі зв'язку відсутні завади та спотворення, то завжди символ $a_1$ відповідає символу $b_1$, символ $a_2$ – $b_2$ і т.д. При цьому $H(A) = H(B)$.

Кількість інформації, яка міститься в прийнятому повідомленні з $n$ символів, за відсутності в каналі зв'язку завад і спотворень визначається за формулою:

$$I = n\cdot H(A) = n\cdot H(B),\ біт. \quad (5.5)$$

Кількість інформації $I$ – оцінка апостеріорна (визначається після передачі повідомлень). Наведені формули (5.2) – (5.5) справедливі за умови відсутності між символами алфавіту статистичних зв'язків.

Слід відмітити, що ентропія максимальна у випадку, коли ймовірності вибору символів однакові, тобто, якщо $p(a_1) = p(a_2) = \ldots = p(a_i) = \ldots = p(a_m) = {}^{1}\!/_{m}$, то:

$$H(A) = H_{\max}(A) = -\sum_{i=1}^{m}\left[p(a_i)\cdot\log p(a_i)\right] = -m\cdot\frac{1}{m}\cdot\log\frac{1}{m} = \log m,\ біт/симв. \quad (5.6)$$

Під час визначення ентропій необхідно враховувати, що ентропія детермінованих повідомлень дорівнює нулю. В цьому легко пересвідчитись, якщо врахувати, що ймовірність появи одного з символів для детермінованого повідомлення дорівнює одиниці, а решти символів – нулю. Сума в формулі (5.3) в цьому випадку перетворюється в нуль. Таким чином, якщо заздалегідь відомо, який із символів джерела повідомлень буде передано, тобто, який стан прийме джерело повідомлень, то невизначеність стану такого джерела відсутня, отже, і ентропія, як міра невизначеності, дорівнює нулю.

Якщо необхідно визначити загальну (сукупну) ентропію декількох статистично незалежних джерел інформації під час їх спільної дії, то користуються правилом додавання ентропій:

$$H(A,B,C,\ldots) = H(A) + H(B) + H(C) + \ldots \quad (5.7)$$

## 5.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.** Алфавіт складається з символів $A$, $B$, $C$, $D$. Імовірності появи символів дорівнюють відповідно $p(A) = p(B) = 0{,}25$, $p(C) = 0{,}34$, $p(D) = 0{,}16$. Визначити кількість інформації на символ повідомлення, складеного з такого алфавіту.

*Розв'язання*

Кількість інформації на символ алфавіту є ентропія цього алфавіту. Оскільки символи алфавіту нерівноймовірні і статистично незалежні, то для визначення ентропії скористаємося формулою (5.3), отже:

$$H = -\sum_{i=1}^{m}\left[p(a_i)\cdot\log p(a_i)\right] = -\left(2\cdot 0{,}25\cdot\log 0{,}25 + 0{,}34\cdot\log 0{,}34 + 0{,}16\cdot\log 0{,}16\right) =$$

$$= 1{,}952\,біт\,/\,симв.$$

**Приклад 2.** Визначити ентропію повідомлення, складеного з п'яти символів українського алфавіту, якщо загальне число букв в алфавіті 32 і всі повідомлення рівноймовірні.

*Розв'язання*

Загальне число п'ятисимвольних повідомлень складе:

$$m = 32^5.$$

Ентропія рівноймовірних повідомлень визначається за формулою (5.6):

$$H = \log m = 5\cdot\log 32 = 25\,біт/симв.$$

**Приклад 3.** Повідомлення складене з рівноймовірного алфавіту і містить $m$ =128 якісних ознак. Скільки символів буде знаходитись в прийнятому повідомленні, якщо відомо, що воно містить 42 *біти* інформації? Визначити ентропію цього повідомлення.

*Розв'язання*

Згідно з формулою (5.5) кількість інформації в повідомленні дорівнює:

$$I = n\cdot H = n\cdot\log m = n\cdot\log 128 = 7\cdot n = 42\,біт.$$

Тепер можна визначити кількість символів $n$:

$$n = \frac{42}{7} = 6.$$

Ентропія визначається за формулою (5.6):

$$H = \log m = \log 128 = 7\ біт/симв.$$

## 5.3 Задачі, запитання, вправи

5.3.1 Число символів алфавіту $m$ = 5. Визначити кількість інформації на символ повідомлення, складеного з цього алфавіту, якщо: а) символи алфавіту рівноймовірні; б) символи алфавіту зустрічаються з такими ймовірностями: $p_1$ = 0,8; $p_2$ = 0,15; $p_3$ = 0,03; $p_4$ = 0,015; $p_5$ = 0,005. На скільки недовантажені символи у другому випадку?

Відповідь: а) $H_{max} = 2{,}322$ *біт/симв*; б) $H = 0{,}949$ *біт/симв*;
$\Delta H = 1{,}373$ *біт/симв.*

5.3.2 Чому дорівнює ентропія джерела повідомлень, стан якого описується таким ансамблем:

$$H(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $H(x) = 1{,}85$ *біт/симв.*

5.3.3 В повідомленні, складеному з п'яти якісних ознак, які використовуються з різною частотою, ймовірності їх появи відповідно дорівнюють: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}08$; $p_4 = 0{,}015$; $p_5 = 0{,}005$. Всього в повідомленні прийнято 20 знаків. Визначити кількість інформації, що міститься в усіх повідомленнях. Яка кількість інформації буде в такому повідомленні, яке буде мати всі ознаки рівноймовірними?

Відповідь: $I_1 = 24{,}9$ *біт*; $H_1 = 1{,}245$ *біт/знак*;
$I_2 = 46{,}4$ *біт*; $H_2 = 2{,}32$ *біт/знак.*

5.3.4 Скільки міститься інформації в повідомленні про несправність $n$ транзисторів після температурних випробувань партії з $N$ штук, якщо транзистори виготовлені на одному заводі в один і той же день?

Відповідь: $I = n \cdot \log N$.

5.3.5 Визначити повну сукупну ентропію системи, яка складається з двох підсистем. Перша підсистема створює повідомлення з трьох символів, які можуть перебувати в двох станах з імовірностями 0,6 та 0,4. Друга підсистема створює повідомлення з двох символів, які можуть перебувати в трьох станах з імовірностями 0,1, 0,4 і 0,5.

Відповідь: $H = 5{,}63$ *біт/стан.*

5.3.6 На вході двійкового джерела повідомлень символи "0" і "1" з'являються з імовірностями відповідно $p$ і $(1\text{-}p)$. Для якого значення $p$ ентропія джерела максимальна та мінімальна? Побудуйте графік залежності $H(p)$.

Відповідь: $H = H_{max}$ для $p = 0{,}5$; $H = H_{min}$ для $p = 1$ або $p = 0$.

5.3.7 Показати, що для двох незалежних джерел повідомлень $A$ і $B$ з ентропіями $H(A)$ і $H(B)$ відповідно сукупна ентропія $H(AB)$ дорівнює:

$$H(AB) = H(A) + H(B).$$

Врахувати, що для статистично незалежних джерел повідомлень імовірність сукупної події $AB$ дорівнює добутку ймовірностей подій $A$ і $B$.

5.3.8 Визначити кількість інформації в повідомленні "Учитись ніколи не пізно". Врахувати, що ентропія українського алфавіту складає 4,58 *біт/симв.*

Відповідь: $I = 91{,}6$ *біт.*

# 6 ЕНТРОПІЯ ОБ'ЄДНАНЬ (СКЛАДНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ)

## 6.1 Основні терміни та розрахункові співвідношення

На практиці в більшості випадків визначають кількість інформації, яку виробляють декілька статистично залежних джерел повідомлень. Сукупність таких повідомлень називають складними повідомленнями, а їх спільну ентропію – ентропією об'єднань [9, 10]. Статистичний зв'язок між джерелами повідомлень характеризується умовними імовірностями. Наприклад, для залежних джерел повідомлень $A$ і $B$ умовна ймовірність $p\left(a_i/b_j\right)$ - це ймовірність того, що джерело повідомлень $A$ прийме якийсь $i$-тий стан, якщо відомо, що джерело $B$ прийняло $j$-тий стан.

Сукупна ймовірність появи двох взаємозалежних подій $p(a_i,b_j)$ визначається як добуток ймовірності появи однієї з них на умовну ймовірність другої відносно першої:

$$p(a_i,b_j) = p(a_i)\cdot p\left(b_j/a_i\right) = p(b_j)\cdot p\left(a_i/b_j\right). \qquad (6.1)$$

Від класичного виразу формула умовної ентропії відрізняється тим, що в ній імовірності умовні:

$$H\left(A/b_j\right) = H\left(a_i/b_j\right) = -\sum_{i=1}^{m}\left[p\left(a_i/b_j\right)\cdot\log p\left(a_i/b_j\right)\right]; \qquad (6.2)$$

$$H\left(B/a_i\right) = H\left(b_j/a_i\right) = -\sum_{j=1}^{m}\left[p\left(b_j/a_i\right)\cdot\log p\left(b_j/a_i\right)\right], \qquad (6.3)$$

де індекс $i$ стосується позначення довільного стану джерела повідомлень $A$, а індекс $j$ – джерела повідомлень $B$.

Вирази (6.2) і (6.3) – це часткові умовні ентропії, причому $H\left(A/b_j\right)$ характеризує невизначеність того, який стан прийме джерело $A$, якщо відомо, що джерело $B$ прийняло певний фіксований $j$-тий стан (додавання ведеться по $i$), а $H\left(B/a_i\right)$ характеризує невизначеність того, який стан прийме джерело $B$, якщо джерело $A$ прийняло певний фіксований $i$-тий стан.

Загальна умовна ентропія повідомлення $B$ відносно повідомлення $A$ характеризує кількість інформації, яка міститься в будь-якому символі алфавіту і дорівнює сумі ймовірності появи символів алфавіту, помноженій на невизначеність, яка залишається після того, як адресат прийняв сигнал, тобто:

$$H\left(B/A\right) = -\sum_{i=1}^{m}\left[p(a_i)\cdot H\left(b_j/a_i\right)\right] = -\sum_{i=1}^{m}\left[p(a_i)\cdot H\left(B/a_i\right)\right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(a_i)\cdot p\left(b_j/a_i\right)\cdot \log p\left(b_j/a_i\right)\right] = \qquad (6.4)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(a_i, b_j)\cdot \log p\left(b_j/a_i\right)\right], біт/симв.$$

Поняття загальної і часткової умовних ентропій широко використовується при визначенні інформаційних втрат в каналах зв'язку з завадами.

В загальному випадку, якщо передається $m$ сигналів джерела $A$ і очікують отримати $m$ сигналів $B$, то вплив завад в каналі зв'язку повністю описується канальною матрицею наведеного нижче виду.

Ймовірності, які розташовані по діагоналі (підкреслені), визначають правильний прийом, решта – помилковий (якщо завади відсутні, то непідкреслені в наведеній матриці ймовірності дорівнюють нулю). Сума ймовірностей в кожному рядку дорівнює одиниці.

$$\begin{array}{ccccccc}
A^{\bullet}\cdot.B & b_1 & b_2 & \dots & b_j & \dots & b_m \\
a_1 & \underline{p\left(b_1/a_1\right)} & p\left(b_2/a_1\right) & \dots & p\left(b_j/a_1\right) & \dots & p\left(b_m/a_1\right) \\
a_2 & p\left(b_1/a_2\right) & \underline{p\left(b_2/a_2\right)} & \dots & p\left(b_j/a_2\right) & \dots & p\left(b_m/a_2\right) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_i & p\left(b_1/a_i\right) & p\left(b_2/a_i\right) & \dots & \underline{p\left(b_j/a_i\right)} & \dots & p\left(b_m/a_i\right) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_m & p\left(b_1/a_m\right) & p\left(b_2/a_m\right) & \dots & p\left(b_j/a_m\right) & \dots & \underline{p\left(b_m/a_m\right)}
\end{array}$$

Щоб врахувати втрати інформації під час передачі всіх сигналів даним каналом зв'язку, необхідно користуватися формулою (6.4). У випадку рівноймовірної появи сигналів на виході джерела повідомлень формула (6.4) має такий вигляд:

$$H\left(B/A\right) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i)\sum_{j=1}^{m}\left[p\left(b_j/a_i\right)\cdot \log p\left(b_j/a_i\right)\right] = \qquad (6.5)$$

$$= -\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}\left[p\left(b_j/a_i\right)\cdot \log p\left(b_j/a_i\right)\right], біт/симв.$$

Наведені зауваження справедливі, якщо досліджується канал зв'язку зі сторони джерела повідомлень, тобто передавача. Якщо ж досліджується канал зв'язку зі сторони приймача повідомлень, то в разі надходження сигналу $b_j$ припускають, що передавався при цьому якийсь із сигналів $a_1$, $a_2,\ldots, a_i,\ldots, a_m$. Канальна матриця тепер буде мати такий вигляд:

$$\begin{array}{ccccccc}
A \cdot B & b_1 & b_2 & \ldots & b_j & \ldots & b_m \\
a_1 & p\left(\frac{a_1}{b_1}\right) & p\left(\frac{a_1}{b_2}\right) & \ldots & p\left(\frac{a_1}{b_j}\right) & \ldots & p\left(\frac{a_1}{b_m}\right) \\
a_2 & p\left(\frac{a_2}{b_1}\right) & p\left(\frac{a_2}{b_2}\right) & \ldots & p\left(\frac{a_2}{b_j}\right) & \ldots & p\left(\frac{a_2}{b_m}\right) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_i & p\left(\frac{a_i}{b_1}\right) & p\left(\frac{a_i}{b_2}\right) & \ldots & p\left(\frac{a_i}{b_j}\right) & \ldots & p\left(\frac{a_i}{b_m}\right) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_m & p\left(\frac{a_m}{b_1}\right) & p\left(\frac{a_m}{b_2}\right) & \ldots & p\left(\frac{a_m}{b_j}\right) & \ldots & p\left(\frac{a_m}{b_m}\right)
\end{array}$$

Для такої матриці сума умовних імовірностей в кожній колонці дорівнює одиниці.

Таким чином, якщо розглядати канал зв'язку зі сторони приймача, то під час надходження будь-якого сигналу $b_j$ виникає невизначеність того, який з можливих сигналів $a_i$ був переданий. Ця невизначеність характеризується умовною ентропією $H\left(\frac{A}{B}\right)$, яку називають ентропією входу (на відміну від $H\left(\frac{B}{A}\right)$ - ентропії виходу):

$$H\left(\frac{A}{B}\right) = -\sum_{j=1}^{m}\left[p(b_j)\cdot H\left(\frac{a_i}{b_j}\right)\right] = -\sum_{j=1}^{m}\left[p(b_j)\cdot H\left(\frac{A}{b_j}\right)\right] =$$
$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(b_j)\cdot p\left(\frac{a_i}{b_j}\right)\cdot \log p\left(\frac{a_i}{b_j}\right)\right]. \qquad (6.6)$$

Ентропія об'єднань характеризує ентропію спільної появи статистично залежних повідомлень. Вона пов'язана з умовною ентропією таким чином:

$$H(A,B) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(a_i,b_j)\cdot \log p(a_i,b_j)\right] = H(A) + H\left(\frac{B}{A}\right) =$$
$$= H(B) + H\left(\frac{A}{B}\right). \qquad (6.7)$$

Основні властивості умовної ентропії та ентропії об'єднань.

1. Якщо джерела повідомлень $A$ і $B$ статистично незалежні, то:

$$H\left(\frac{A}{B}\right) = H(A); \qquad H(A,B) = H(A) + H\left(\frac{B}{A}\right) = H(A) + H(B);$$

$$H\left(B/A\right) = H(B); \quad H(B,A) = H(B) + H\left(A/B\right) = H(B) + H(A).$$

2. Якщо джерела повідомлень $A$ і $B$ жорстко статистично пов'язані, тобто кожному стану одного з них відповідає певний стан іншого, то:

$$H\left(A/B\right) = H\left(B/A\right) = 0; \quad H(A,B) = H(A) + 0 = H(A);$$

$$H(B,A) = H(B) + 0 = H(B).$$

3. Умовна ентропія не може бути більшою безумовної:

$$0 \le H\left(A/B\right) \le H(A),$$

$$0 \le H\left(B/A\right) \le H(B),$$

$$H(A,B) \le H(A) + H(B),$$

$$H(B,A) \le H(B) + H(A).$$

Ентропія об'єднань може бути розрахована за допомогою матриці такого виду:

$$p(a_i,b_j) = \begin{bmatrix} p(a_1,b_1) & p(a_1,b_2) & \dots & p(a_1,b_m) \\ p(a_2,b_1) & p(a_2,b_2) & \dots & p(a_2,b_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(a_m,b_1) & p(a_m,b_2) & \dots & p(a_m,b_m) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Для цієї матриці характерні такі властивості: $\sum\limits_{i=1}^{m} p(a_i,b_j) = p(b_j)$, $\sum\limits_{j=1}^{m} p(a_i,b_j) = p(a_i)$. При цьому ентропія передавача і приймача повідомлень визначаються відповідно:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(a_i,b_j)\cdot\log\sum_{j=1}^{m}p(a_i,b_j)\right], \quad (6.9)$$

$$H(B) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(b_j,a_i)\cdot\log\sum_{i=1}^{m}p(b_j,a_i)\right]. \quad (6.10)$$

Умовні ймовірності можуть визначатися за допомогою таких виразів:

$$p\left(a_i/b_j\right) = \frac{p(a_i,b_j)}{\sum\limits_{i=1}^{m}p(a_i,b_j)} = \frac{p(a_i,b_j)}{p(b_j)};$$

$$p\left(b_j/a_i\right) = \frac{p(a_i,b_j)}{\sum\limits_{j=1}^{m}p(a_i,b_j)} = \frac{p(a_i,b_j)}{p(a_i)}. \quad (6.11)$$

## 6.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.** Визначити загальну умовну ентропію повідомлень, складених з алфавіту $A,B$, якщо ймовірність появи символів у повідомленні дорівнюють: $p_A = 0{,}6$; $p_B = 0{,}4$. Умовні ймовірності переходу одного символу в інший дорівнюють: $p(B/A) = 0{,}15$; $p(A/B) = 0{,}1$.

***Розв'язання***

Визначимо загальну умовну ентропію за формулою (6.4):

$$H\left(B/A\right) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(a_i)\cdot p\left(b_j/a_i\right)\cdot\log p\left(b_j/a_i\right)\right] =$$
$$= -\left\{p(A)\cdot\left[p\left(A/A\right)\cdot\log p\left(A/A\right) + p\left(B/A\right)\cdot\log p\left(B/A\right)\right]\right\} -$$
$$- \left\{p(B)\cdot\left[p\left(A/B\right)\cdot\log p\left(A/B\right) + p\left(B/B\right)\cdot\log p\left(B/B\right)\right]\right\},$$

де $p\left(A/A\right)$ і $p\left(B/B\right)$ - імовірності появи символів $A$ і $B$ під час передачі символів $A$ і $B$ відповідно.

$$p\left(A/A\right) = 1 - p\left(B/A\right) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$
$$p\left(B/B\right) = 1 - p\left(A/B\right) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$$

В результаті отримаємо:

$$H\left(B/A\right) = -\begin{bmatrix}0{,}6\cdot(0{,}85\cdot\log 0{,}85 + 0{,}15\cdot\log 0{,}15) + \\ + 0{,}4\cdot(0{,}1\cdot\log 0{,}1 + 0{,}9\cdot\log 0{,}9)\end{bmatrix} = 0{,}554 біт/симв.$$

**Приклад 2.** Задана матриця ймовірностей системи, яка об'єднує дві взаємозалежні системи $A$ і $B$:

$$p(A,B) = \begin{vmatrix}0{,}3 & 0 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}1 & 0\end{vmatrix}.$$

Визначити загальні умовні ентропії $H\left(B/A\right)$ і $H\left(A/B\right)$.

***Розв'язання***

Визначимо безумовні ймовірності $p(a_i)$ і $p(b_j)$ як суми спільних імовірностей по рядках і колонках відповідно:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & & & p(a_i) \\ p(A,B) = & 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}3 \\ & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ & 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ p(b_j) & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 & \end{array}$$

Визначимо умовні ймовірності та складемо матрицю умовних імовірностей (6.11):

$$p\left(a_i/b_j\right) = \frac{p(a_i,b_j)}{p(b_j)};$$

$$p\left(a_1/b_1\right) = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6; \quad p\left(a_2/b_1\right) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4; \quad p\left(a_2/b_2\right) = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75;$$

$$p\left(a_3/b_2\right) = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25; \quad p\left(a_2/b_3\right) = \frac{0{,}1}{0{,}1} = 1;$$

$$p\left(a_3/b_1\right) = p\left(a_1/b_2\right) = p\left(a_1/b_3\right) = p\left(a_3/b_3\right) = 0.$$

$$p\left(a_i/b_i\right) = \begin{vmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}75 & 1 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{vmatrix}.$$

Загальна умовна ентропія дорівнює:

$$H\left(A/B\right) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(b_j)\cdot p\left(a_i/b_j\right)\cdot \log p\left(a_i/b_j\right)\right] =$$

$$= -0{,}5\cdot\left(0{,}6\cdot\log 0{,}6 + 0{,}4\cdot\log 0{,}4\right) - 0{,}4\cdot\left(0{,}75\cdot\log 0{,}75 + 0{,}25\cdot\log 0{,}25\right) -$$

$$- 0{,}1\cdot 1\cdot\log 1 = 0{,}81\, біт/симв.$$

Визначення загальної умовної ентропії можна здійснити також з використанням матриці $p(A,B)$ за допомогою такої формули:

$$H\left(A/B\right) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(a_i,b_j)\cdot\log p\left(a_i/b_j\right)\right].$$

Аналогічно визначається загальна умовна ентропія $H\left(B/A\right)$.

$$p\left(b_j/a_i\right) = \frac{p(a_i,b_j)}{p(a_i)};$$

$$p\left(b_1/a_1\right) = \frac{0{,}3}{0{,}3} = 1; \quad p\left(b_1/a_2\right) = \frac{0{,}2}{0{,}6} = 0{,}333; \quad p\left(b_2/a_2\right) = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5;$$

$$p\left(b_2/a_3\right)=\frac{0,1}{0,1}=1;\quad p\left(b_3/a_2\right)=\frac{0,1}{0,6}=0,167;$$

$$p\left(b_1/a_3\right)=p\left(b_2/a_1\right)=p\left(b_3/a_1\right)=p\left(b_3/a_3\right)=0.$$

$$p\left(b_j/a_i\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0,333 & 0,5 & 0,167\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

$$H\left(B/A\right)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(a_i)\cdot p\left(b_j/a_i\right)\cdot\log p\left(b_j/a_i\right)\right]=$$

$$=-0,6\cdot(0,333\cdot\log 0,333+0,5\cdot\log 0,5+0,167\cdot\log 0,167)\approx 0,876\,біт/симв.$$

## 6.3 Задачі, запитання, вправи

6.3.1 Статистичні спостереження показали, що під час передачі текстових повідомлень в словах із середньою довжиною в 6 літер на кожні 100 повідомлень літера А зустрічається 80 разів, літера В – 50 разів, літери А і В разом зустрічаються 10 разів. Визначити умовну ентропію появи літери А, якщо у слові присутня літера В, і умовну ентропію появи літери В, якщо у слові присутня літера А.

Вказівка. 1. Знайти загальну кількість $n$ літер у повідомленні, та ймовірності появи літер А і В та ймовірність спільної появи літер А і В $\left(p(AB)=\frac{10}{n}\right)$.

2. Визначити умовну ймовірність появи літери А відносно літери В і навпаки:

$$p\left(A/B\right)=\frac{p(AB)}{p(B)};\quad p\left(B/A\right)=\frac{p(AB)}{p(A)}.$$

3. Знайти умовну ентропію літери А відносно В і навпаки:

$$H\left(A/B\right)=-\left\{p\left(A/B\right)\cdot\log p\left(A/B\right)+\left[1-p\left(A/B\right)\right]\cdot\log\left(1-p\left(A/B\right)\right)\right\};$$

$$H\left(B/A\right)=-\left\{p\left(B/A\right)\cdot\log p\left(B/A\right)+\left[1-p\left(B/A\right)\right]\cdot\log\left(1-p\left(B/A\right)\right)\right\}.$$

Відповідь: $H\left(A/B\right)\approx 0,722$ *біт/симв*;

$H\left(B/A\right)\approx 0,095$ *біт/симв*.

6.3.2 Визначити умовну ентропію повідомлень, які передаються каналом зв'язку, якщо канальна матриця має такий вигляд:

$$p\left(\frac{a}{b}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Відповідь: $H\left(\frac{A}{B}\right)=0 біт/симв.$

6.3.3 Вплив завад у каналі зв'язку описується таким розподілом умовних імовірностей:

$$p\left(\frac{b}{a}\right)=\begin{vmatrix}0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01\\ 0{,}15 & 0{,}75 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\end{vmatrix}$$

Обчислити повну умовну ентропію повідомлень, які передаються даним каналом зв'язку:

а) за умови рівноймовірної появи символів у повідомленні;

б) для ймовірностей $p(a_1)=0{,}7$; $p(a_2)=0{,}2$; $p(a_3)=0{,}1$.

Вказівка. Для рівноймовірної появи символів ентропія джерела повідомлень визначається за формулою (5.6), отже:

$$H(A)=\log 3=1{,}58 біт/симв.$$

У цьому випадку загальна умовна ентропія визначається за формулою:

$$H\left(\frac{B}{A}\right)=-\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p\left(\frac{b_j}{a_i}\right)\cdot\log p\left(\frac{b_j}{a_i}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(0{,}98\cdot\log 0{,}98+2\cdot 0{,}01\cdot\log 0{,}01+0{,}15\cdot\log 0{,}15+0{,}75\cdot\log 0{,}75\right)-$$

$$-\frac{1}{3}\left(0{,}1\cdot\log 0{,}1+0{,}3\cdot\log 0{,}3+0{,}2\cdot\log 0{,}2+0{,}5\cdot\log 0{,}5\right)=0{,}9 біт/симв.$$

Відповідь: для нерівноймовірної появи символів – $H(A)=1{,}156 біт/симв$;

$$H\left(\frac{B}{A}\right)=0{,}463 біт/симв.$$

6.3.4 Визначити загальну умовну ентропію повідомлень, що передаються каналом зв'язку, який описується такою канальною матрицею:

$$p\left(\frac{a}{b}\right)=\begin{vmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0 & 0\\ 0{,}05 & 0{,}84 & 0{,}01 & 0\\ 0{,}03 & 0{,}06 & 0{,}98 & 0{,}1\\ 0{,}02 & 0 & 0{,}01 & 0{,}9\end{vmatrix}.$$

Символи алфавіту, з якого складаються повідомлення, - рівноймовірні. Для даного джерела повідомлень число символів алфавіту дорівнює чотирьом.

Відповідь: $H\left(\frac{A}{B}\right)=0{,}508 біт/симв.$

6.3.5 Визначити ентропію приймача повідомлень, якщо канальна матриця має такий вигляд:

$$p\left(b/a\right)=\begin{vmatrix}0{,}97 & 0{,}03 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}98 & 0{,}01\\ 0 & 0{,}04 & 0{,}96\end{vmatrix},$$

а ймовірності появи символів на виході джерела повідомлень дорівнюють: $p(a_1) = 0{,}5$; $p(a_2) = 0{,}3$; $p(a_3) = 0{,}2$.

Вказівка:

$$p(b_1)=\sum_{i=1}^{3}\left[p(a_i)\cdot\log p\left(b_1/a_i\right)\right]=p(a_1)\cdot\log p\left(b_1/a_1\right)+$$

$$+\,p(a_2)\cdot\log p\left(b_1/a_2\right)+p(a_3)\cdot\log p\left(b_1/a_3\right).$$

Аналогічно визначаються $p(b_2)$ і $p(b_3)$; $H(B)=-\sum_{j=1}^{m}\left[p(b_j)\cdot\log p(b_j)\right]$

Відповідь: $p(b_1) = 0{,}488$; $p(b_2) = 0{,}317$; $p(b_3) = 0{,}195$; $H(B) = 1{,}49$*біт/симв.*

6.3.6 Скласти довільну канальну матрицю, яка описує канал зв'язку: а) зі сторони передавача; б) зі сторони приймача. Навести методику визначення часткових та загальної умовних ентропій для цих випадків.

6.3.7 Під час передачі повідомлень каналом зв'язку з завадами була отримана така статистика: частота $f_1$ із 100 разів була прийнята 97 разів, 2 рази була прийнята частота $f_2$ і один раз – частота $f_3$; під час передачі частоти $f_2$ 98 разів прийнята $f_2$, два рази – $f_1$; під час передачі $f_3$ 96 разів прийнята $f_3$, два рази - $f_2$ і два рази – $f_4$; під час передачі $f_4$ 99 разів була прийнята частота $f_4$ і один раз – $f_3$. Скласти канальну матрицю, яка описує даний канал зв'язку з точки зору умов проходження частот $f_1 \dots f_4$.

Відповідь: $$p\left(b/a\right)=\begin{vmatrix}0{,}97 & 0{,}02 & 0{,}01 & 0\\ 0{,}02 & 0{,}98 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}02 & 0{,}96 & 0{,}02\\ 0 & 0 & 0{,}01 & 0{,}99\end{vmatrix}.$$

6.3.8 Взаємодія передавача (алфавіт $A$) і приймача (алфавіт $B$) описується такою матрицею:

$$p(A,B)=\begin{vmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0 & 0 & 0{,}2\end{vmatrix}.$$

Визначити безумовну ентропію джерел повідомлень передавача $H(A)$ та приймача $H(B)$, зробити висновок.

Вказівка: використати формули (6.9) і (6.10).

Відповідь: $H(A) = 1{,}48$*біт/симв*; $H(B) = 1{,}54$*біт/симв.*

6.3.9 Обчислити загальні умовні ентропії джерел повідомлень передавача $H\left(A/B\right)$ та приймача $H\left(B/A\right)$, якщо їх спільна робота описується такою матрицею об'єднання:

$$p(A,B)=\begin{vmatrix}0{,}2 & 0 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4\end{vmatrix}.$$

Знайти також ентропію об'єднання $H(A,B)$ і $H(B,A)$.

Вказівка: в процесі розрахунків необхідно отримати такі матриці умовних імовірностей:

$$p\left(a_i/b_j\right)=\begin{vmatrix}0{,}67 & 0 & 0\\ 0{,}33 & 0{,}67 & 0\\ 0 & 0{,}33 & 1\end{vmatrix} \text{ та } p\left(b_j/a_i\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0{,}33 & 0{,}67 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8\end{vmatrix}.$$

Відповідь: $H\left(A/B\right)=0{,}55$ *біт/симв*; $H\left(B/A\right)=0{,}63$ *біт/симв*;
$H(A,B)=2{,}12$ *біт/симв*; $H(B,A)=2{,}12$ *біт/симв*.

6.3.10 Канал зв'язку описується такою канальною матрицею:

$$p(B,A)=\begin{vmatrix}0{,}1 & 0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}3 & 0{,}3\end{vmatrix}.$$

Визначити ентропію джерел повідомлень передавача $H(A)$, приймача $H(B)$ та ентропію об'єднання $H(A,B)$.

Відповідь: $H(A)=1{,}49$ *біт/симв*; $H(B)=1{,}36$ *біт/симв*;
$H(A,B)=2{,}45$ *біт/симв*.

# 7 ПЕРЕДАЧА ПОВІДОМЛЕНЬ ПО ДИСКРЕТНОМУ КАНАЛУ З ЗАВАДАМИ

## 7.1 Основні терміни та розрахункові співвідношення

В разі відсутності завад (канал зв'язку без спотворень) між переданими і прийнятими символами існує жорсткий статистичний зв'язок, тобто кожному переданому символу $a_i$ відповідає цілком конкретний прийнятий символ $b_j$. Кількість інформації, яка міститься в прийнятому ансамблі повідомлень, дорівнює ентропії джерела повідомлень (невизначеність на приймальній стороні відсутня):

$$I(B,A) = H(A), біт/симв., \tag{7.1}$$

умовна ймовірність $p\left(b_j/a_i\right)=1$, а умовна ентропія:

$$H\left(B/A\right) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(a_i)\cdot p\left(b_j/a_i\right)\cdot \log p\left(b_j/a_i\right)\right]=0. \tag{7.2}$$

Наявність завад порушує однозначну відповідність між переданим $A$ і прийнятим $B$ алфавітами, тобто при передачі певного символу $a_i$ на виході каналу зв'язку з тією чи іншою ймовірністю може бути прийнятий будь-який із символів алфавіту $B$ [8, 11] Зв'язок між символами алфавітів $A$ і $B$ характеризується умовними ймовірностями $p\left(a_i/b_j\right)$ та $p\left(b_j/a_i\right)$. В загальному вплив завад описується канальними матрицями (див. розділ 6). Тому за наявності завад фактична кількість правильно прийнятих символів буде меншою загальної кількості переданих, оскільки лише частина символів буде передана правильно, а інша їх частина містить помилкову інформацію. Якщо із загальної кількості інформації $H(A)$, яку виробляє джерело повідомлень, відняти втрати інформації за рахунок дії завад $H\left(A/B\right)$, то знайдемо кількість <u>корисної</u> інформації, яка міститься в прийнятій сукупності повідомлень $B$ відносно переданої $A$, тобто:

$$I(A,B) = H(A) - H\left(A/B\right) = H(B) - H\left(B/A\right) \tag{7.3}$$

Або:

$$I(B,A) = I(A,B) = H(A) + H(B) - H(B,A) = H(A) + H(B) - H(A,B). \tag{7.4}$$

Якщо рівень завад дуже високий, то статистичний зв'язок між символами алфавітів $A$ і $B$ відсутній, $p\left(b_j/a_i\right) = p(b_j)$, $p\left(a_i/b_j\right) = p(a_i)$ і, як наслідок,

$$H\left(A/B\right) = H(A);\quad H\left(B/A\right) = H(B). \tag{7.5}$$

Тоді

$$I(A,B)=H(A)-H\left(A/B\right)=H(B)-H\left(B/A\right)=0. \tag{7.6}$$

Із формули (7.4) отримуємо:

$$I(B,A)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(a_i)\cdot p\left(b_j/a_i\right)\cdot\log\frac{p\left(b_j/a_i\right)}{p(b_j)}\right]. \tag{7.7}$$

$$I(A,B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[p(b_j)\cdot p\left(a_i/b_j\right)\cdot\log\frac{p\left(a_i/b_j\right)}{p(a_i)}\right]. \tag{7.8}$$

За необхідності можна використати співвідношення:

$$p(a_i,b_j)=p(a_i)\cdot p\left(b_j/a_i\right),$$

$$p(b_j,a_i)=p(b_j)\cdot p\left(a_i/b_j\right).$$

Під час здійснення обчислень зручно застосовувати вирази (7.7) і (7.8) у вигляді:

$$I(A,B)=\sum_{j=1}^{m}p(b_j)\sum_{i=1}^{m}\left[p\left(a_i/b_j\right)\cdot\log p\left(a_i/b_j\right)-p\left(a_i/b_j\right)\cdot\log p(a_i)\right];$$

$$I(B,A)=\sum_{i=1}^{m}p(a_i)\sum_{j=1}^{m}\left[p\left(b_j/a_i\right)\cdot\log p\left(b_j/a_i\right)-p\left(b_j/a_i\right)\cdot\log p(b_j)\right].$$

Для того, щоб повністю і всебічно описати канал зв'язку, необхідно задати канальну матрицю виду $p\left(a_i/b_j\right)$ і безумовні ймовірності виду $p(b_j)$, або канальну матрицю виду $p\left(b_j/a_i\right)$ і безумовні ймовірності $p(a_i)$, або канальну матрицю виду $p(a_i,b_j)$. В останньому випадку сума значень матриці по колонках дає імовірності виду $p(b_j)$, при цьому $\sum_{j=1}^{m}p(b_j)=1$, а сума по рядках дає імовірності виду $p(a_i)$, при цьому $\sum_{i=1}^{m}p(a_i)=1$. Умовні ймовірності знаходяться з виразів (6.10). Знаючи умовні та безумовні ймовірності, можна визначити $H(A), H(B), H\left(A/B\right), H\left(B/A\right)$

Для надто високого рівня завад може статись, що кількість інформації $I(A,B)<0$. Це означає, що канал зв'язку вносить дезінформацію. Взагалі, втрати інформації в результаті дії завад при передачі $k$ символів визначаються, як:

$$\Delta I = k \cdot H\left(A/_B\right)$$

## 7.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.** Визначити середню кількість інформації, яка переноситься одним символом, якщо імовірності появи символів джерела повідомлень дорівнюють: $p(a_1) = 0{,}7$; $p(a_2) = 0{,}2$; $p(a_3) = 0{,}1$. Визначити також інформаційні втрати при передачі повідомлення з 400 символів алфавіту $a_1$, $a_2$, $a_3$ і кількість корисної інформації в цьому повідомленні. Канал зв'язку описується такою канальною матрицею:

$$p\left(b/_a\right) = \begin{vmatrix} 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{vmatrix}.$$

***Розв'язання***

Ентропія джерела повідомлень:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{3}\left[p(a_i)\cdot\log p(a_i)\right] = -(0{,}7\cdot\log 0{,}7 + 0{,}2\cdot\log 0{,}2 + 0{,}1\cdot\log 0{,}1) =$$

$= 1{,}16\,біт\,/\,симв.$

Загальна умовна ентропія:

$$H\left(B/_A\right) = -\sum_{i=1}^{3} p(a_i)\sum_{j=1}^{3}\left[p\left(b_j/_{a_i}\right)\cdot\log p\left(b_j/_{a_i}\right)\right] =$$

$$= -0{,}7(0{,}98\cdot\log 0{,}98 + 2\cdot 0{,}01\cdot\log 0{,}01) -$$

$$- 0{,}2(0{,}1\cdot\log 0{,}1 + 0{,}75\cdot\log 0{,}75 + 0{,}15\cdot\log 0{,}15) -$$

$$- 0{,}1(0{,}2\cdot\log 0{,}2 + 0{,}3\cdot\log 0{,}3 + 0{,}5\cdot\log 0{,}5) = 0{,}473\,біт\,/\,симв.$$

Втрати у каналі зв'язку:

$$\Delta I = k\cdot H\left(B/_A\right) = 400\cdot 0{,}473 = 189{,}5\,біт.$$

Ентропія приймача:

$$H(B) = -\sum_{j=1}^{3}\left[p(b_j)\cdot\log p(b_j)\right]$$

Визначимо складові наведеної суми.

$$p(b_1)=\sum_i\left[p(a_i)\cdot p\left(b_1/a_i\right)\right]=p(a_1)\cdot p\left(b_1/a_1\right)+p(a_2)\cdot p\left(b_1/a_2\right)+$$

$$+p(a_3)\cdot p\left(b_1/a_3\right)==0{,}7\cdot 0{,}98+0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}2=0726.$$

Аналогічно:

$$p(b_2)=0{,}187; \qquad p(b_3)=0{,}087.$$

Таким чином $\sum_j p(b_j)=1$.

Тоді:

$$H(B)=-\left(0{,}726\cdot\log 0{,}726+0{,}187\cdot\log 0{,}187+0{,}087\cdot\log 0{,}087\right)=1{,}094 біт/симв.$$

Середня кількість отриманої (корисної) інформації:

$$I(A,B)=I(B,A)=k\cdot\left[H(B)-H\left(B/A\right)\right]=k\cdot H(B)-\Delta I=248{,}1 біт.$$

**Приклад 2.** Обчислити середню кількість інформації, яка переноситься одним символом, якщо робота каналу зв'язку характеризується такою матрицею:

$$p(A,B)=\begin{vmatrix}0{,}2 & 0 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4\end{vmatrix}.$$

Визначити також інформаційні втрати при передачі повідомлення із ста символів алфавіту $a_1$, $a_2$, $a_3$ і кількість отриманої (корисної) інформації в цьому повідомленні.

***Розв'язання***

Обчислюються безумовні ймовірності за формулами (6.8) – (6.10):

$$\begin{array}{rccc|c} & & & & p(a_i)\\ p(A,B)= & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}2\\ & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0{,}3\\ & 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5\\ p(b_j) & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & \end{array}$$

Визначаються умовні ймовірності і складається канальна матриця умовних ймовірностей (6.11).

Оскільки $p(a_i,b_j)=p(a_i)\cdot p\left(b_j/a_i\right)=p(b_j)\cdot p\left(a_i/b_j\right)$, то:

$$p\left(a_1/b_1\right)=\frac{0{,}2}{0{,}3}=0{,}67;\quad p\left(a_2/b_1\right)=\frac{0{,}1}{0{,}3}=0{,}33;\quad p\left(a_2/b_2\right)=\frac{0{,}2}{0{,}3}=0{,}67;$$

$$p\left(a_3/b_2\right)=\frac{0{,}1}{0{,}3}=0{,}33;\quad p\left(a_3/b_3\right)=\frac{0{,}4}{0{,}4}=1;$$

$$p\left(a_3/b_1\right)=p\left(a_1/b_2\right)=p\left(a_1/b_3\right)=p\left(a_2/b_2\right)=0.$$

$$p\left(a_i/b_j\right)=\begin{vmatrix}0{,}67 & 0 & 0\\ 0{,}33 & 0{,}67 & 0\\ 0 & 0{,}33 & 1\end{vmatrix}.$$

Повна умовна ентропія $H\left(A/B\right)$ обчислюється за формулою (6.6):

$$H\left(A/B\right)=-\sum_j p(b_j)\sum_i\left[p\left(a_i/b_j\right)\cdot\log p\left(a_i/b_j\right)\right]=$$

$$=-0{,}3(0{,}67\cdot\log 0{,}67+0{,}33\cdot\log 0{,}33)-0{,}3(0{,}67\cdot\log 0{,}67+0{,}33\cdot\log 0{,}33)-$$
$$-0{,}4\cdot 1\cdot\log 1=0{,}549\,біт/симв.$$

Аналогічно обчислюються умовні ймовірності типу $p\left(b_j/a_i\right)=\frac{p(a_i,b_j)}{p(a_i)}$ і складається канальна матриця цих умовних імовірностей:

$$p\left(b_1/a_1\right)=1;\ p\left(b_1/a_2\right)=0{,}33;\ p\left(b_2/a_2\right)=0{,}67;\ p\left(b_2/a_3\right)=0{,}2;$$

$$p\left(b_3/a_3\right)=0{,}8;\ p\left(b_1/a_3\right)=p\left(b_2/a_1\right)=p\left(b_3/a_1\right)=p\left(b_3/a_2\right)=0.$$

$$p\left(b_j/a_i\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0{,}33 & 0{,}67 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8\end{vmatrix}.$$

$$H\left(B/A\right)=-\sum_i p(a_i)\sum_j\left[p\left(b_j/a_i\right)\cdot\log p\left(b_j/a_i\right)\right]=-0{,}2\cdot 1\cdot\log 1-$$
$$-0{,}3\cdot\left(0{,}33\cdot\log 0{,}33+0{,}67\cdot\log 0{,}67\right)-0{,}5\cdot\left(0{,}2\cdot\log 0{,}2+0{,}8\cdot\log 0{,}8\right)=$$
$$=0{,}635\,біт/симв.$$

Використовуючи значення безумовних імовірностей $p(a_i)$, можна визначити ентропію джерела повідомлень $H(A)$:

$$H(A) = -\sum_i [p(a_i) \cdot \log p(a_i)] = -(0{,}2 \cdot \log 0{,}2 + 0{,}3 \cdot \log 0{,}3 + 0{,}5 \cdot \log 0{,}5) =$$

$= 1{,}485 біт / симв.$

Аналогічно визначається ентропія приймача $H(B)$:

$$H(B) = 1{,}571 біт / симв.$$

Втрати інформації в каналі зв'язку:

$$\Delta I = k \cdot H\left(B/A\right) = 100 \cdot 0{,}635 = 63{,}5 біт.$$

Середня кількість отриманої (корисної) інформації:

$$I(B,A) = k \cdot \left[H(B) - H\left(B/A\right)\right] = k \cdot H(B) - \Delta I = 100 \cdot 1{,}571 - 63{,}5 = 93{,}6 біт.$$

Або:

$$I(A,B) = k \cdot \left[H(A) - H\left(A/B\right)\right] = 100 \cdot (1{,}485 - 0{,}549) = 93{,}6 біт.$$

Таким чином, кількість корисної інформації відповідає умові:

$$I(A,B) = I(B,A).$$

### 7.3 Задачі, запитання, вправи

7.3.1 Визначити інформаційні втрати в каналі зв'язку, який описується за допомогою такої матриці:

$$p\left(a_i / b_j\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

7.3.2 Символи алфавіту джерела інформації зустрічаються в повідомленнях з рівною ймовірністю. Визначити інформаційні втрати, якщо дія завад в каналі зв'язку описується матрицею виду:

$$p\left(a/b\right) = \begin{vmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}98 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вказівка: $\Delta I = k \cdot H\left(A/B\right) = k \cdot \left\{-\frac{1}{m}\sum_i \left[p\left(b_j / a_i\right) \cdot \log p\left(b_j / a_i\right)\right]\right\}.$

Відповідь: $\Delta I = k \cdot 0{,}08 біт.$

7.3.3 По телетайпу передається український текст. Які відомості необхідно мати для того, щоб визначити кількість прийнятої інформації, якщо відомо, що в каналі зв'язку частина інформації спотворюється завадами?

7.3.4 Повідомлення передаються шляхом комбінації частот $f_1$, $f_2$, $f_3$ і $f_4$. При цьому матриця каналу зв'язку має вигляд:

| | | Приймач | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
| Передавач | $f_1$ | 0,9834 | 0,0160 | 0,0006 | 0 |
| | $f_2$ | 0,0160 | 0,9837 | 0,0003 | 0 |
| | $f_3$ | 0 | 0,0290 | 0,9708 | 0,0002 |
| | $f_4$ | 0 | 0 | 0,0087 | 0,9913 |

а) Обчислити ентропію об'єднання переданих і прийнятих повідомлень, якщо частоти $f_1 \ldots f_4$ на виході передавача з'являються з такими імовірностями: $p(f_1) = p(f_2) = p(f_3) = 0,2$; $p(f_4) = 0,4$.

б) Обчислити інформаційні втрати при передачі повідомлення, яке складається із 1000 елементарних частотних посилок.

Вказівка:

$$H\left(B/A\right) = -\sum_i p(a_i) \sum_j \left[ p\left(b_j/a_i\right) \cdot \log p\left(b_j/a_i\right) \right];$$

$$H(A,B) = H(A) + H\left(B/A\right)$$

Відповідь: $H\left(B/A\right) = 0.12 біт/симв$;

$H(A,B) = 2,04 біт/симв$;

$\Delta I = 116,8 біт$.

7.3.5 Визначити інформаційні втрати в каналі зв'язку, який описується такою канальною матрицею:

$$p(A,B) = \begin{vmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,3 \end{vmatrix}.$$

Перевірити правильність розв'язку задачі декількома способами.

Відповідь: $\Delta I = k \cdot 0,4 біт$.

7.3.6 Квантований сигнал має три рівні $\{x\} = 0;1;2$. Ймовірності появи цих рівнів відповідно дорівнюють: $p(0) = 11/36$; $p(1) = 4/9$; $p(2) = 1/4$. Умовні ймовірності появи того чи іншого рівня $x_i$ в залежності від попереднього рівня $y_i$ $p\left(x_i/y_j\right)$ описуються схемою:

$$p\left(\frac{x_i}{y_j}\right)=\begin{vmatrix} 9/11 & 1/8 & 0 \\ 2/11 & 3/4 & 2/9 \\ 0 & 1/8 & 7/9 \end{vmatrix}.$$

Визначити ентропію системи без урахування і з урахуванням взаємозалежності рівнів.

Відповідь: $H(x)=1{,}542 біт/рівень; H\left(\frac{x}{y}\right)=0{,}89 біт/рівень.$

7.3.7 Визначити кількість інформації в прийнятому ансамблі повідомлень, якщо задані умовні ймовірності переходу одного сигналу в інший та ймовірності появи сигналів на виході джерела повідомлень: $p_a=0{,}2;\quad p_b=0{,}3;\quad p_c=0{,}5;$ $p\left(a'/a\right)=p\left(b'/b\right)=p\left(c'/c\right)=0{,}97;$ $p\left(b'/a\right)=p\left(c'/a\right)=p\left(a'/b\right)=p\left(c'/b\right)=p\left(a'/c\right)=p\left(b'/c\right)=0{,}015.$

Вказівка 1. Визначити ймовірності спільної появи на виході джерела повідомлень всіх можливих поєднань символів типу $p(a',a),\ p(b',a),\ \dots,\ p(a',c)$, наприклад,

$$p(a',a)=p(a)\cdot p\left(a'/a\right).$$

При цьому $\sum_a\sum_b\sum_c p=1$.

2. Знайти ентропію джерела повідомлень:

$$H(A)=-\sum_i p_i\cdot\log p_i.$$

3. Обчислити часткові умовні ентропії, наприклад:

$$H(a)=-p_a\left[p\left(a'/a\right)\cdot\log p\left(a'/a\right)+p\left(b'/a\right)\cdot\log p\left(b'/a\right)+p\left(c'/a\right)\cdot\log p\left(c'/a\right)\right]$$

Аналогічно визначити ентропії $H(b)$, $H(c)$.

4. Загальна умовна ентропія $H\left(B/A\right)=H(a)+H(b)+H(c)$.

5.Спільна ентропія:

$$H(A,B)=-\left[p(a',a)\cdot\log p(a',a)+p(b',b)\cdot\log p(b',b)+\dots+p(a',c)\cdot\log p(a',c)\right]$$

Відповідь: $I(A,B)=1{,}26$ *біт*.

# 8 ШВИДКІСТЬ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ. ПРОПУСКНА ЗДАТНІСТЬ ДИСКРЕТНОГО КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ

## 8.1 Основні терміни та розрахункові співвідношення

Продуктивність джерела повідомлень $\{A\}$ обчислюється за допомогою виразу:

$$H_t(A) = m_0 \cdot H(A), біт/c \tag{8.1}$$

де $m_0$ – кількість символів, які виробляє джерело повідомлень за одиницю часу; $H(A)$ – ентропія даного джерела повідомлень.

Продуктивність джерела повідомлень визначає швидкість, з якою інформація надходить на вхід каналу зв'язку [9, 13]. Якщо в ньому завади та спотворення відсутні, то з такою ж швидкістю інформація передається по цьому каналу зв'язку, тобто швидкість передачі інформації $R$ визначається за формулою:

$$R = H_t(A) = m_0 \cdot H(A), біт/c. \tag{8.2}$$

Якщо виявляється заданою тривалість $\tau$ передачі одного двійкового символу, то:

$$R = \frac{H(A)}{\tau}. \tag{8.3}$$

Якщо у каналі використовують кодування, тобто первинний алфавіт джерела повідомлень перетворюють у деякий вторинний (первинний алфавіт замінюють на певний код), то швидкість передачі сигналів (не інформації) дорівнює:

$$V = \frac{1}{\tau}. \tag{8.4}$$

Максимально можливу швидкість передачі інформації по каналу зв'язку називають його пропускною здатністю $C$:

$$C = \max R = \max[m_0 \cdot H(A)].$$

Оскільки величина $m_0$ для даного джерела повідомлень є заданою, то:

$$C = \max[m_0 \cdot H(A)] = m_0 \cdot \max H(A) = m_0 \cdot \log m. \tag{8.5}$$

З урахуванням (8.3) для двійкового коду отримаємо:

$$C = \max R = \frac{\log 2}{\tau} = \frac{1}{\tau}. \tag{8.6}$$

Наявність завад у каналі зв'язку зменшує на величину $\Delta I$ кількість корисної інформації, яка приймається, тобто:

$$I(A,B) = I(B,A) = H(A) - H\left(A/B\right) = H(A) - \Delta I. \tag{8.7}$$

В цьому випадку дійсна швидкість передачі інформації визначається як різниця між швидкістю надходження інформації на вхід каналу (тобто продуктивність джерела) і швидкістю руйнування корисної інформації завадами:

$$R = H_t(A) - H_t\left(A/B\right) = m_0 \cdot \left[H(A) - H\left(A/B\right)\right]$$

В загальному випадку:

$$R = m_0 \cdot \left[H(A) - H\left(A/B\right)\right] = m_0 \cdot \left[H(B) - H\left(B/A\right)\right] = \\ = m_0 \cdot \left[H(A) + H(B) - H(B,A)\right]. \quad (8.8)$$

Для симетричного бінарного (двійкового) каналу ймовірність переходу, тобто ймовірність того, що при передачі "1" помилково прийнято "0" і навпаки, однакові і позначаються як:

$$p_H = p\left(1/0\right) = p\left(0/1\right),$$

а ймовірності правильного прийому:

$$p_П = p\left(1/1\right) = p\left(0/0\right) = 1 - p_H.$$

Тоді швидкість передачі дорівнює пропускній здатності каналу і обчислюється за формулою:

$$C = \max R = m_0 \cdot \left[1 + p_H \cdot \log p_H + \left(1 - p_H\right) \cdot \log\left(1 - p_H\right)\right]. \quad (8.9)$$

На практиці найчастіше доводиться розв'язувати задачі з визначення пропускної здатності для заданого відсотку спотворень в каналі зв'язку. У випадку бінарних каналів при цьому вважається заданою ймовірність або відсоткове співвідношення переходів "1" в "0" і навпаки.

Отже, властивості симетричного каналу зв'язку такі:

1. $H(A) = H(B)$.
2. $H\left(A/B\right) = H\left(B/A\right)$.
3. Середня кількість інформації в ансамблі повідомлень, який прийнятий відносно переданого, дорівнює:

$$I(B,A) = I(A,B) = H(B) - H\left(B/A\right) = H(A) - H\left(A/B\right) = \\ = H(A) - H\left(B/A\right) = H(B) - H\left(A/B\right) = H(A) + H(B) - H(B,A).$$

4. Канальні матриці зі сторони передавача та зі сторони приймача однакові.
5. Суми ймовірностей в кожному рядку і в кожній колонці дорівнюють одиниці.
6. Пропускна здатність каналу зв'язку від $A$ до $B$ дорівнює пропускній здатності від $B$ до $A$.

## 8.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.** Повідомлення передаються в двійковому коді ($m = 2$). Тривалість імпульсу, що відповідає "0" $\tau_0 = 1c$, а "1" $\tau_1 = 5c$. Визначити швидкість передачі інформації для випадків:

а)символи рівноймовірні і незалежні;

б)ймовірність появи символів $p_0 = 0{,}37$ і $p_1 = 0{,}63$;

в)ймовірність появи символів $p_0 = 0{,}02$ і $p_1 = 0{,}98$.

***Розв'язання***

Для випадків а), б) і в) знайдемо відповідно величини швидкостей передачі інформації $R_1$, $R_2$ і $R_3$:

$$R_1 = \frac{H_1}{\tau_{cp}} = \frac{\log m}{0{,}5\cdot(\tau_0+\tau_1)} = \frac{\log 2}{0{,}5(1+5)} \approx 0{,}33 біт/с;$$

$$R_2 = \frac{H_2}{\tau_{cp}} = \frac{-\sum_i p_i\cdot\log p_i}{\sum_i \tau_i\cdot p_i} = \frac{-(0{,}37\cdot\log_2 0{,}37 + 0{,}63\cdot\log_2 0{,}63)}{0.63\cdot 5 + 0.37\cdot 1} = 0{,}27 біт/с;$$

$$R_3 = \frac{H_3}{\tau_{cp}} \approx 0{,}3 біт/с.$$

Самостійно зробіть висновки.

**Приклад 2.** Визначити пропускну здатність симетричного бінарного каналу зв'язку, по якому передаються повідомлення, складені з алфавіту $A$ і $B$, якщо на виході джерела повідомлення з'являються зі швидкістю 50 символів за секунду, а в каналі зв'язку завади спотворюють 3% повідомлень.

***Розв'язання***

Оскільки канал зв'язку симетричний, то $p_A = p_B = 0{,}5$, а згідно з умовою $p\left({}^{b_0}/_{a_0}\right) = p\left({}^{b_1}/_{a_1}\right) = 0{,}97$. Тому:

$$H\left({}^{A}/_{B}\right) = H\left({}^{B}/_{A}\right) = -(0{,}97\cdot\log 0{,}97 + 0{,}03\cdot\log 0{,}03) = 0{,}19 біт/симв;$$

$$C = n\cdot\left[H(A) - H\left({}^{A}/_{B}\right)\right] = 50\cdot(1-0{,}19) = 40{,}2 біт/с.$$

**Приклад 3.** Визначити пропускну здатність каналу зв'язку, якщо $p(a_1) = 0{,}1$; $p(a_2) = 0{,}4$; $p(a_3) = 0{,}5$, а матриця умовних імовірностей описується схемою:

$$p\left(\frac{b}{a}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8\end{vmatrix}.$$

Відомо також, що кожний символ, який циркулює між передавачем та приймачем, формується протягом 0,1*с*. Чи відповідає отриманий результат розв'язання задачі величині пропускної здатності каналу зв'язку?

***Розв'язання***

Знаходимо значення ймовірностей спільних подій і будуємо матрицю об'єднань *A* і *B*:

$$p(a_1,b_1)=p(a_1)\cdot p\left(\frac{b_1}{a_1}\right)=0{,}1\cdot 1=0{,}1;$$

$$p(a_2,b_1)=p(a_2)\cdot p\left(\frac{b_1}{a_2}\right)=0{,}4\cdot 0{,}25=0{,}1.$$

Аналогічно:

$p(a_3,b_1)=0;\quad p(a_1,b_2)=0;\quad p(a_2,b_2)=0{,}3;\quad p(a_3,b_2)=0{,}1;\quad p(a_1,b_3)=0;$
$p(a_2,b_3)=0;\quad p(a_3,b_3)=0{,}4;$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & & p(a_i)\end{array}\\ p(A,B)= & \left|\begin{array}{ccc|c}0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0 & 0{,}4\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5\end{array}\right.\\ p(b_j) & \begin{array}{ccc}0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\end{array}\end{array}$$

$$\sum_j p(b_j)=1;\qquad \sum_i p(a_i)=1.$$

Визначимо умовні ймовірності виду $p\left(\frac{a}{b}\right)$ і побудуємо відповідну матрицю умовних імовірностей:

$$p\left(\frac{a_1}{b_1}\right)=\frac{p(b_1,a_1)}{p(b_1)}=\frac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5;$$

$$p\left(\frac{a_1}{b_2}\right)=\frac{p(b_2,a_1)}{p(b_2)}=\frac{0}{0{,}4}=0;\quad p\left(\frac{a_1}{b_3}\right)=\frac{p(b_3,a_1)}{p(b_3)}=\frac{0}{0{,}4}=0;$$

$$p\left(\frac{a_2}{b_1}\right)=0{,}5;\quad p\left(\frac{a_2}{b_2}\right)=0{,}75;\quad p\left(\frac{a_2}{b_3}\right)=0;\quad p\left(\frac{a_3}{b_1}\right)=0;$$

$$p\left(\frac{a_3}{b_2}\right)=0{,}25;\quad p\left(\frac{a_3}{b_3}\right)=1.$$

$$p\left(\frac{a}{b}\right)=\begin{vmatrix}0,5 & 0 & 0\\ 0,5 & 0,75 & 0\\ 0 & 0,25 & 1\end{vmatrix}.$$

Безумовні ентропії:

$$H(A)=-(0,1\cdot\log 0,1+0,4\cdot\log 0,4+0,5\cdot\log 0,5)=1,36 біт/симв;$$

$$H(B)=-(0,2\cdot\log 0,2+0,4\cdot\log 0,4+0,4\cdot\log 0,4)=1,52 біт/симв.$$

Умовні ентропії:

$$H\left(\frac{B}{A}\right)=-\sum_i p(a_i)\sum_j\left[p\left(\frac{b_j}{a_i}\right)\cdot\log p\left(\frac{b_j}{a_i}\right)\right]=-0,1\cdot 1\cdot\log 1-$$

$$-0,4\cdot(0,75\cdot\log 0,75+0,25\cdot\log 0,25)-0,5\cdot(0,8\cdot\log 0,8+0,2\cdot\log 0,2)=$$

$$=0,6854 біт/симв;$$

$$H\left(\frac{A}{B}\right)=-\sum_j p(b_j)\sum_i\left[p\left(\frac{a_i}{b_j}\right)\cdot\log p\left(\frac{a_i}{b_j}\right)\right]=0,5244 біт/симв.$$

Пропускну здатність каналу зв'язку визначимо за формулою (8.8):

$$C=m_0\cdot\left[H(A)-H\left(\frac{A}{B}\right)\right]=10\cdot(1,36-0,524)\approx 8,3 біт/с, \text{ або}$$

$$C=m_0\cdot\left[H(B)-H\left(\frac{B}{A}\right)\right]=10\cdot(1,52-0,6854)\approx 8,3 біт/с.$$

## 8.3 Задачі, запитання, вправи

8.3.1 Використовуючи формули (8.5) і (8.7) та враховуючи властивості ентропій $H\left(\frac{A}{B}\right)$ і $H(A,B)$, покажіть, як визначаються $I(A,B)$ та $R$ для випадків, коли рівень завад дуже низький і рівень завад дуже високий.

8.3.2 Повідомлення складене з п'яти якісних ознак ($m$ = 5). Тривалість елементарної посилки $\tau$ = 20*мс*. Визначити швидкість передачі інформації та швидкість передачі сигналів.

Вказівка: використати формули (8.3) і (8.4).

8.3.3 Повідомлення передається взаємонезалежними символами рівної тривалості $\tau$ = 0,1*с*, ймовірності появи символів у повідомленні однакові. Обчислити швидкість передачі сигналів та швидкість передачі інформації, якщо повідомлення складене з 5 і 32 якісних ознак.

Відповідь: $V$ = 10*симв/с*; $R_1$ = 23,2*біт/с*; $R_2$ = 50*біт/с*.

8.3.4 Число символів алфавіту $m$ = 4. Ймовірності появи символів відповідно становлять: $p_1$ = 0,15; $p_2$ = 0,4; $p_3$ = 0,25; $p_4$ = 0,2; їх тривалості: $\tau_1$ = 3*с*; $\tau_2$ = 2*с*; $\tau_3$ = 5*с*; $\tau_4$ = 6*с*. Знайти швидкість передачі повідомлень, складених з цих символів.

Вказівка: скористайтесь виразом $R = \dfrac{1}{\sum\limits_i (\tau_i \cdot p_i)} \left[ -\sum\limits_i (p_i \cdot \log p_i) \right]$.

Відповідь: $R = 0{,}514$ *біт/с*.

8.3.5 Алфавіт, з якого будуються повідомлення, складається із 7 символів $\{A\}$. Тривалість передачі символів відповідно дорівнює: $\tau_1 = 1c$; $\tau_2 = 2c$; $\tau_3 = 3c$; $\tau_4 = \tau_5 = \tau_6 = 5c$; $\tau_7 = 7c$. Визначити швидкість передачі інформації для таких випадків: а) символи рівноймовірні; б) ймовірність появи символів: $p(A_1) = 0{,}125$; $p(A_2) = 0{,}705$; $p(A_3) = p(A_4) = p(A_7) = 0{,}02$; $p(A_5) = 0{,}098$; $p(A_6) = 0{,}012$.

Відповідь: $R_1 = 0{,}7$ *біт/с*; $R_2 = 0{,}62$ *біт/с*.

8.3.6 Визначити пропускну здатність симетричного бінарного каналу, якщо $p_H = 0{,}02$, а $\tau_0 = \tau_1 = 0{,}1c$.

Вказівка: врахувати, що $m_0 = \dfrac{1}{\tau}$.

Відповідь: $C = 2{,}8$ *біт/с*.

8.3.7 Відомо, що $m_0 = 10$ знаків за секунду, апріорні ймовірності появи символів первинного алфавіту рівні між собою, а 5% повідомлень в результаті дії завад з рівною ймовірністю можуть перейти в будь-який інший символ даного алфавіту. Обчислити пропускну здатність каналу зв'язку.

Відповідь: $C = 7{,}14$ *біт/с*.

8.3.8 Симетричний бінарний канал характеризується такою канальною матрицею:

$$p\left(b/a\right) = \begin{vmatrix} p\left(b_0/a_0\right) & p\left(b_1/a_0\right) \\ p\left(b_0/a_1\right) & p\left(b_1/a_1\right) \end{vmatrix}.$$

Продуктивність джерела повідомлень $m_0$, а символи "0" і "1" (відповідно $a_0$ і $a_1$ та $b_0$ і $b_1$) рівноймовірні. Отримати вираз для визначення пропускної здатності каналу зв'язку. Як залежить пропускна здатність від імовірності переходу $p_H$?

Відповідь: формула (8.9).

8.3.9 Інформація по каналу зв'язку передається за допомогою двох телетайпів, які працюють зі швидкістю 50 *біт/с*. Обчислити пропускну здатність каналу зв'язку при передачі інформації зі сторони $A$ і зі сторони $B$, якщо матриця ймовірностей об'єднання має вигляд:

$$p(A,B) = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{vmatrix}.$$

Вказівка: побудувати матриці умовних імовірностей типу $p\left(b_j/a_i\right)$ та $p\left(a_i/b_j\right)$ і визначити ентропії $H(A)$, $H(B)$, $H(A/B)$ та $H(B/A)$. Проаналізувати, чи відповідає результат розв'язання задачі значенню пропускної здатності каналу.

Відповідь: $C = 47$ *біт/с*.

8.3.10 Канал зв'язку характеризується такою матрицею об'єднань:

$$p(A,B) = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Визначити швидкість передачі інформації каналом зв'язку в обидві сторони.

Відповідь: $R = m_0 \cdot 0{,}485 біт/с$.

8.3.11 Визначити пропускну здатність симетричного бінарного каналу зв'язку в прямому та зворотному напрямках, якщо під дією завад у каналі спотворюється 3% повідомлень.

Відповідь: $C = m_0 \cdot 0.8056 біт/с$.

# 9 КІЛЬКІСТЬ ТА ШВИДКІСТЬ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ ПО НЕПЕРЕРВНОМУ КАНАЛУ ЗВ'ЯЗККУ

## 9.1 Основні терміни та розрахункові співвідношення

Джерела повідомлень, елементи алфавіту яких можуть приймати в певному обмеженому інтервалі будь-який стан, причому число станів безмежне ($m \to \infty$), називають неперервними за розподілом станів елементів або просто неперервними [10, 11, 14] Ймовірність появи окремого, заздалегідь вибраного стану такого джерела дорівнює нулю. Неперервне повідомлення, як випадкова величина, характеризується диференціальним законом розподілу ймовірностей $w(x)$. В цьому випадку крива розподілу характеризує ймовірність попадання випадкової величини $X$ в деякий елементарний інтервал $\Delta x$ $(p(x_i) = w(x_i) \cdot \Delta x_i)$. Тоді ентропія джерела:

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \cdot \log w(x) dx. \tag{9.1}$$

Величину $h(X)$ також називають диференціальною ентропією. Якщо прийняти величину $X$ безрозмірною, то $h(X)$ вимірюють у двійкових одиницях, які приходяться на один відлік (теорема Котєльнікова), тобто:

$$[h(X)] = \left[\frac{дв.\ од.}{відлік}\right] = \left[\frac{дв.\ од.}{ступінь\ свободи}\right]. \tag{9.2}$$

Число ступенів свободи – це число незалежних відліків, якими можна замінити неперервне повідомлення:

$$m = \frac{T_c}{\Delta t} = \frac{T_c}{2 \cdot \Delta f_c} = 2 \cdot \Delta f_e \cdot T_c, \tag{9.3}$$

де $T_c$ – тривалість повідомлення; $\Delta t$ – період відліків; $\Delta f_e$ – ефективна ширина спектра повідомлення.

Середнє число відліків за секунду:

$$m_0 = \frac{m}{T_c}.$$

Продуктивність джерела повідомлень:

$$H_t = m_0 \cdot h(X) = 2 \cdot \Delta f_e \cdot h(X). \tag{9.4}$$

Найбільше значення диференціальної ентропії при незалежних відліках і заданій дисперсії $\sigma^2$ має випадковий процес $X(t)$ з нормальним розподілом миттєвих значень. В цьому випадку:

$$h_{max}(X) = \log\sqrt{2\pi e \sigma^2}. \tag{9.5}$$

Аналогічно формулам для дискретного джерела повідомлень кількість інформації, яка міститься в одному неперервному відліку процесу $Y(t)$ відносно відліку процесу $X(t)$, визначається за формулою:

$$I(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w(X,Y)\log\frac{w(X,Y)}{w(X)\cdot w(Y)}dXdY. \quad (9.6)$$

Тут $w(X,Y)$ – спільна щільність ймовірностей процесів $X(t)$ і $Y(t)$.

Формулу (9.6) можна записати у вигляді:

$$I(X,Y)=h(X)-h\left(X/_Y\right)=h(Y)-h\left(Y/_X\right) \quad (9.7)$$

Умовна диференціальна ентропія відліку $X(t)$ для відомого відліку $Y(t)$ визначається як:

$$h\left(X/_Y\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w(X,Y)\log w\left(X/_Y\right)dXdY. \quad (9.8)$$

Аналогічно диференціальна ентропія відліку $Y(t)$ для відомого відліку $X(t)$ дорівнює:

$$h\left(Y/_X\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w(X,Y)\log w\left(Y/_X\right)dXdY. \quad (9.9)$$

Епсілон-ентропією $H_\varepsilon(X)$ неперервного джерела або власною інформацією в одному відліку процесу $X(t)$ називають мінімальну кількість інформації, яка необхідна для відтворення сигналу $X(t)$ з використанням прийнятого сигналу $X'(t)$ з допустимою похибкою $\sigma_u^2$. Вона визначається так:

$$H_\varepsilon\left(X/_{X'}\right)=\min I(X,X')=h\left(X/_{X'}\right)-\log\sqrt{2\pi e\sigma_u^2}. \quad (9.10)$$

де $H_\varepsilon\left(X/_{X'}\right)$ - епсілон-ентропія на один відлік за умови, що відліки сигналу фіксовані; $h\left(X/_{X'}\right)$ - диференціальна ентропія відліку сигналу за умови, що відліки сигналу фіксовані.

Якщо джерело формує незалежні відліки неперервного повідомлення дискретно в часі, то його епсілон-продуктивність визначається:

$$H_a\left(X/_{X'}\right)=m_0\cdot H\left(X/_{X'}\right)=m_0\cdot\left[h\left(X/_{X'}\right)-\log\sqrt{2\pi e\sigma_u^2}\right] \quad (9.11)$$

Для неперервного часу:

$$H_a\left(X/_{X'}\right)=2\cdot F_c\cdot\left[h\left(X/_{X'}\right)-\log\sqrt{2\pi e\sigma_u^2}\right] \quad (9.12)$$

Якщо на вхід каналу подається сигнал $S(t)$, а в каналі діє адитивна завада $n(t)$, то прийняте повідомлення $Y(t)$ розглядають як

$$Y(t)=S(t)+n(t).$$

В цьому випадку швидкість передачі інформації визначається як різниця ентропій прийнятого сигналу $H(Y)$ і завади $H(n)$, тобто:

$$R=H_t(Y)-H_t(n)=m_0\cdot[h(Y)-h(n)], \quad (9.13)$$

де $h(n)=h\left(Y/_X\right)$

Пропускна здатність:

$$C = \max R = \max\left[H_t(Y) - H_t(n)\right].$$

Якщо середні потужності сигналу і завади обмежені певною величиною, а завада є флуктуаційним шумом, то пропускна здатність визначається за формулою К.Шеннона:

$$C = \Delta f_e \cdot \log\left(1 + \frac{P_c}{P_ш}\right), \tag{9.14}$$

де $\Delta f_e$ - ефективна смуга частот сигналу, яку може пропустити канал;

$P_c$ і $P_ш$ – середні потужності сигналу і шуму відповідно.

В цілому, формули, які характеризують кількісні властивості неперервних каналів з завадами, аналогічні формулам для дискретного каналу.

## 9.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.** Повідомлення змінюється в межах від $x_0$ до $(x_0 + a)$ і розподілене за законом рівної ймовірності. Знайти диференціальну ентропію цього повідомлення.

***Розв'язання***

Закон рівної імовірності можна аналітично подати у такому вигляді:

$$w(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & якщо \quad x_0 \le X \le x_0 + a; \\ 0, & якщо \quad X < x_0;\, X > x_0 + a. \end{cases}$$

Використовуючи формулу (9.1), отримаємо вираз для диференціальної ентропії:

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(X) \log w(X) dX = -\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x_0+a} \log\frac{1}{a} dX = \log a.$$

**Приклад 2.** По каналу зв'язку передається сигнал $X(t)$, який є нормальним випадковим процесом з нульовим середнім значенням і дисперсією $\sigma_x^2 = 4\ мВт$. В каналі діє незалежний від сигналу нормальний шум $U(t)$ з нульовим математичним очікуванням та дисперсією $\sigma_u^2 = 1\ мВт$. Знайти диференціальну ентропію вхідного та вихідного сигналів, а також умовні диференціальні ентропії $h\left(X/_Y\right)$ та $h\left(Y/_X\right)$.

### *Розв'язання*

Вихідний сигнал $Y(t) = X(t) + U(t)$. Оскільки $X(t)$ і $Y(t)$ незалежні і $X(t)$ має нормальний закон розподілу, то і $Y(t)$ також буде розподіленим за нормальним законом з дисперсією $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_u^2$. Згідно з формулою (9.5) диференціальні ентропії вхідного та вихідного сигналів будуть дорівнювати:

$$h(X) = \log\sqrt{2\pi e \sigma_x^2} = 3{,}05\ біт/відлік;$$

$$h(Y) = \log\sqrt{2\pi e\left(\sigma_x^2 + \sigma_u^2\right)} = 3{,}21\ біт/відлік.$$

Умовна диференціальна ентропія відліку $Y(t)$ для відомого $X(t)$ визначається ентропією шуму в каналі. Таким чином:

$$h\left(Y/X\right) = \log\sqrt{2\pi e \sigma_u^2} = 2{,}05\ біт/відлік.$$

Умовна диференціальна ентропія відліку $X(t)$ для відомого відліку $Y(t)$ згідно з формулою (9.8) дорівнює:

$$h\left(X/Y\right) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(X)w\left(Y/X\right)\log\frac{w(X)\cdot w\left(Y/X\right)}{w(Y)}dXdY.$$

Враховуючи, що $\int_{-\infty}^{\infty} w(X)w\left(Y/X\right)dX = w(Y)$, отримаємо:

$$h\left(X/Y\right) = h(X) + h\left(Y/X\right) - h(Y) = \log\sqrt{2\pi e\frac{\sigma_x^2\cdot\sigma_u^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2}} = 1{,}89\ біт/відлік.$$

**Приклад 3.** Визначити пропускну здатність неперервного каналу з завадами типу білого гауссового шуму. Врахувати, що смуга пропускання каналу $\Delta f_e = 1000\ Гц$, дисперсія корисного сигналу $\sigma_y^2 = P_y = 4000\ B^2$, спектральна щільність потужності завади $P_0 = 0{,}002\ B^2/c$.

### *Розв'язання*

Використаємо формулу (9.14). При цьому слід мати на увазі, що енергетичний спектр білого шуму рівномірний, тому потужність такої завади визначається як $P_ш = P_0 \cdot \Delta f_e$. Тоді:

$$C = \Delta f_e \cdot \log\left(1 + \frac{P_c}{P_ш}\right) = \Delta f_e \cdot \log\left(1 + \frac{P_c}{P_0\cdot\Delta f_e}\right) =$$

$$= 1000\cdot\log\left(1 + \frac{4\cdot10^3}{0{,}002\cdot10^3}\right) = 10970\ біт/c.$$

**Приклад 4.** Визначити швидкість передачі інформації по телефонному каналу, який забезпечує передачу розмови зі швидкістю 100 слів за хвилину. Середня довжина слова становить 5 літер.

***Розв'язання***

Враховуючи умову задачі, слід зауважити, що для українського алфавіту вибір кожного символу залежить від восьми попередніх $\left(H_8(X) = H_{\min} = 2\,\dfrac{дв.\,од.}{симв.}\right)$, тобто на кожний символ алфавіту припадає дві двійкових одиниці інформації. Отже отримаємо таке значення швидкості передачі:

$$C = \frac{100 \cdot 5 \cdot 2}{60} = 16{,}6\ дв.\,од./с.$$

**Приклад 5.** Показати, що пропускна здатність гауссового каналу неперервного часу не може бути більшою за величину:

$$C = \Delta f_e \cdot \log\left(1 + \frac{P_c}{P_ш}\right),$$

де $\Delta f_e$ - ефективна смуга частот каналу; $P_c$ і $P_ш$ – фіксовані середні потужності сигналу і шуму у каналі, причому вони вважаються незалежними.

***Розв'язання***

Оскільки пропускна здатність каналу з заданим шумом і продуктивністю $m_0$ джерела повідомлень є фактично найбільшим значенням швидкості передачі інформації, то з урахуванням (9.13) маємо:

$$C = \max R = m_0 \cdot \max[h(Y) - h(n)].$$

Якщо шум аддітивний і розподілений за нормальним законом, то:

$$h(n) = \log\sqrt{2\pi e P_ш}.$$

У цьому випадку $C = m_0 \cdot \max\left[h(Y) - \log\sqrt{2\pi e P_ш}\right]$. Враховуючи, що за умовою задачі дисперсія шуму фіксована, отримаємо:

$$C = m_0 \cdot \left[\max h(Y) - \log\sqrt{2\pi e P_ш}\right].$$

За умовою задачі сигнал і шум незалежні, отже дисперсія вихідного сигналу становить $\sigma_y^2 = P_c + P_ш$. Для фіксованої дисперсії вихідного сигналу $\sigma_y^2$ $\max h(Y)$ буде мати місце за умови нормального розподілу процесу $Y = S + n$, тобто для нормального розподілу вхідного сигналу $S(t)$. У цьому випадку:

$$C = m_0 \cdot \left(\log\sqrt{2\pi e\sigma_y^2} - \log\sqrt{2\pi e P_{ш}}\right) = \frac{m_0}{2}\log\left(1+\frac{P_c}{P_ш}\right).$$

Згідно з теоремою Котєльнікова $m_0 = 2 \cdot \Delta f_e$. Тоді:

$$C = \Delta f_e \cdot \log\left(1+\frac{P_c}{P_ш}\right).$$

## 9.3 Задачі, запитання, вправи

9.3.1 Показати, що кількість інформації, яка міститься в одному відліку неперервного повідомлення при абсолютному його відтворенні, дорівнює нескінченності.

Вказівка. Необхідно розділити область зміни $x$ на дискретні рівні $x_i$ з малим інтервалом $\Delta x$ між ними. Враховуючи, що імовірність того, що значення $x$ попадає в інтервал $(x_i, x_i + \Delta x)$, приблизно дорівнює $p_i = w(x_i) \cdot \Delta x$, підставити це значення у формулу для визначення ентропії дискретного джерела повідомлень за умови, що $\Delta x \to 0$.

9.3.2 Доведіть справедливість виразу (9.4), враховуючи, що повідомлення, що розподілене за нормальним законом, описується формулою:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma^2}\right].$$

9.3.3. Порівняти диференціальну ентропію нормального процесу і процесу, розподіленого рівномірно на інтервалі (*-a*, *a*), якщо їх дисперсії однакові.

Вказівка. Інтервал процесу дорівнює $2a$. Дисперсія рівномірно розподіленого процесу дорівнює $\sigma^2$, якщо $a = \sigma\sqrt{3}$.

9.3.4 Нормальний випадковий процес з нульовим математичним очікуванням і дисперсією $\sigma^2 = 4\ мВт$ проходить через лінійний підсилювач з коефіцієнтом підсилення $k = 100$. Визначити приріст диференціальної ентропії вихідного сигналу в порівнянні з вхідним.

Вказівка. Врахувати, що вхідний і вихідний сигнали пов'язані між собою співвідношенням $Y(t) = k \cdot X(t)$, $Y(t)$ – має нормальний розподіл з дисперсією $\sigma_y^2 = k \cdot \sigma_x^2$.

9.3.5 У випадку каналу зв'язку, який описаний в прикладі 2 (розділ 9.2), визначити кількість інформації, яка міститься в сукупності $(X,Y)$ та $(Y,X)$ процесів. Зробити висновки.

9.3.6 Середня потужність неперервного сигналу $P_c$, середня потужність шуму на виході каналу зв'язку $P_ш$. Визначити максимально можливе значення епсілон-ентропії для наведеної умови.

Вказівка. Максимальне значення епсілон-ентропії неперервного сигналу буде досягнуто за умови $\max h(X)$. Якщо задана середня потужність сигналу $P_c = \sigma_x^2 \cdot \max h(X) = \log\sqrt{2\pi e P_c}$, то епсілон-ентропія буде максимальною для нормального розподілу сигналу $X(t)$, при цьому $\sigma_u^2 = P_ш$.

9.3.7 По телефонному каналу зв'язку без пам'яті передається сигнал $S(t)$ (нормальний випадковий процес з нульовим середнім значенням, дисперсією $\sigma_x^2 = 8\ мВт$ і рівномірним енергетичним спектром $G_0$ в смузі частот 3100 *Гц*). В каналі діє незалежний від сигналу флуктуаційний шум з енергетичним спектром $G_ш = 3{,}22 \cdot 10^{-7}\ Вт/Гц$, нормальним розподілом і нульовим середнім значенням. Визначити середню на один відлік сигналу кількість інформації, що передається по каналу.

Вказівка. Необхідно скористатись формулою (9.7), а також результатами розрахунків $h(X)$, $h\left(X/_Y\right)$, $h(Y)$, $h\left(Y/_X\right)$ наведених в прикладі 2.

Відповідь: $I(X,Y) = 1{,}58\ біт/відлік.$

9.3.8 Визначити максимально можливу величину пропускної здатності гауссового каналу для необмеженої смуги частот.

Вказівка. Необхідно використати залежність з прикладу 3.

Відповідь: $C_\infty = \dfrac{P_c}{P_0}\log e.$

9.3.9 Середня потужність сигналу 1 *мкВт*, завадою є тепловий шум приймального пристрою зі смугою частот 10 *кГц*. Приймач працює при температурі 20$^0$С. Визначити пропускну здатність такого каналу.

Вказівка. Потужність теплового шуму визначити за формулою $P_ш = 4kTF$, де $k$ – стала Больцмана, яка дорівнює $1{,}37 \cdot 10^{-23}\ Дж/град.$

Відповідь: $C \approx 3{,}26 \cdot 10^5\ біт/с.$

## Додаток А

Таблиця А.1 - Значення величин $-p\log_2 p$

| $p$ | $-p\log_2 p$ | $p$ | $-p\log_2 p$ | $p$ | $-p\log_2 p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | - | 0,34 | 0,5292 | 0,68 | 0,3784 |
| 0,01 | 0,0664 | 0,35 | 0,5301 | 0,69 | 0,3694 |
| 0,02 | 0,1129 | 0,36 | 0,5306 | 0,70 | 0,3602 |
| 0,03 | 0,1517 | 0,37 | 0,5307 | 0,71 | 0,3508 |
| 0,04 | 0,1857 | 0,38 | 0,5304 | 0,72 | 0,3412 |
| 0,05 | 0,2161 | 0,39 | 0,5298 | 0,73 | 0,3314 |
| 0,06 | 0,2435 | 0,40 | 0,5288 | 0,74 | 0,3215 |
| 0,07 | 0,2686 | 0,41 | 0,5274 | 0,75 | 0,3113 |
| 0,08 | 0,2915 | 0,42 | 0,5256 | 0,76 | 0,3009 |
| 0,09 | 0,3127 | 0,43 | 0,5236 | 0,77 | 0,2903 |
| 0,10 | 0,3322 | 0,44 | 0,5211 | 0,78 | 0,2796 |
| 0,11 | 0,3503 | 0,45 | 0,5184 | 0,79 | 0,2687 |
| 0,12 | 0,3671 | 0,46 | 0,5153 | 0,80 | 0,2575 |
| 0,13 | 0,3826 | 0,47 | 0,5120 | 0,81 | 0,2462 |
| 0,14 | 0,3971 | 0,48 | 0,5083 | 0,82 | 0,2348 |
| 0,15 | 0,4105 | 0,49 | 0,5043 | 0,83 | 0,2231 |
| 0,16 | 0,4230 | 0,50 | 0,5000 | 0,84 | 0,2113 |
| 0,17 | 0,4346 | 0,51 | 0,4954 | 0,85 | 0,1993 |
| 0,18 | 0,4453 | 0,52 | 0,4906 | 0,86 | 0,1871 |
| 0,19 | 0,4552 | 0,53 | 0,4854 | 0,87 | 0,1748 |
| 0,20 | 0,4644 | 0,54 | 0,4800 | 0,88 | 0,1623 |
| 0,21 | 0,4728 | 0,55 | 0,4744 | 0,89 | 0,1496 |
| 0,22 | 0,4806 | 0,56 | 0,4684 | 0,90 | 0,1368 |
| 0,23 | 0,4877 | 0,57 | 0,4623 | 0,91 | 0,1238 |
| 0,24 | 0,4941 | 0,58 | 0,4558 | 0,92 | 0,1107 |
| 0,25 | 0,5000 | 0,59 | 0,4491 | 0,93 | 0,0974 |
| 0,26 | 0,5053 | 0,60 | 0,4422 | 0,94 | 0,0839 |
| 0,27 | 0,5100 | 0,61 | 0,4350 | 0,95 | 0,0703 |
| 0,28 | 0,5142 | 0,62 | 0,4276 | 0,96 | 0,0565 |
| 0,29 | 0,5179 | 0,63 | 0,4199 | 0,97 | 0,0426 |
| 0,30 | 0,5211 | 0,64 | 0,4121 | 0,98 | 0,0286 |
| 0,31 | 0,5238 | 0,65 | 0,4040 | 0,99 | 0,0140 |
| 0,32 | 0,5260 | 0,66 | 0,3957 | | |
| 0,33 | 0,5278 | 0,67 | 0,3871 | | |

## Додаток Б

Таблиця Б.1 – Розподіл імовірностей літер в українських текстах (без урахування ймовірності появи в текстах пропусків між словами)

| Літера | Середня імовірність появи в тексті | $-p_i \log p_i$ | Літера | Середня імовірність появи в тексті | $-p_i \log p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| А | 0,0855 | 0,303348 | Н | 0,0613 | 0,247431 |
| Б | 0,0183 | 0,105195 | О | 0,1037 | 0,338683 |
| В | 0,0540 | 0,227388 | П | 0,0296 | 0,150316 |
| Г | 0,0150 | 0,090883 | Р | 0,0468 | 0,206732 |
| Д | 0,0298 | 0,151043 | С | 0,0394 | 0,183827 |
| Е | 0,0473 | 0,208511 | Т | 0,0509 | 0,218961 |
| Є | 0,0036 | 0,029224 | У | 0,03689 | 0,175321 |
| Ж | 0,0080 | 0,055726 | Ф | 0,0023 | 0,020158 |
| З | 0,0203 | 0,113716 | Х | 0,0097 | 0,064872 |
| И | 0,0684 | 0,264941 | Ц | 0,0074 | 0,052379 |
| І | 0,0634 | 0,252546 | Ч | 0,0136 | 0,084323 |
| Ї | 0,0067 | 0,048385 | Ш | 0,0110 | 0,071570 |
| Й | 0,0202 | 0,113716 | Щ | 0,0091 | 0,061697 |
| К | 0,0368 | 0,175321 | Ю | 0,0072 | 0,051248 |
| Л | 0,0388 | 0,179933 | Я | 0,0172 | 0,100817 |
| М | 0,0268 | 0,139939 | Ь | 0,0246 | 0,890290 |

Примітка. Для українського алфавіту $H$ = 4,577179 *біт/симв.*

# ЛІТЕРАТУРА


1. Норенков И.П., Трудоношин В.А. Телекоммуникационные технологии и сети. 2-е изд., испр. и доп.–М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 248с.
2. Теорія електричного зв'язку. Ч.1 /В.О.Омельченко, В.Г.Санніков. Під ред. В.О.Омельченка. – К.: ІСДО, 1994. – 304с.
3. Панфилов И.П., Дырда В.Е. Теория электрической связи. Учебник для техникумов. – М.: Радио и связь, 1991. – 344с.
4. Баева Н.Н. Многоканальная электросвязь и РРЛ. Учебник для высших учебных заведений. – М.: Радио и связь, 1988. – 312с.
5. Гитлиц М.В., Лев А.Ю. Теоретические основы многоканальной связи. – М.: Радио и связь, 1985. – 246с.
6. Кловский Д.Д., Шилкин В.А. Теория электрической связи. Сборник задач и упражнений. - М.: Радио и связь, 1990. – 252с.
7. Основы теории информации и кодирования. /Кузьмин И.А., Кедрус В.А. – К.: Вища школа, 1977. – 280с.
8. Теория информации и кодирование. /Цымбал В.П. – К.: Вища школа, 1987. – 288с.
9. Орлов В.А., Филиппов Л.И. Теория информации в упражнениях и задачах. Учебное пособие для втузов.- М.: Высшая школа, 1976. – 136с.
10. Основы теории передачи данных. Сборник задач. /Лосев Ю.И., Плотников Н.Д. – К.: Вища школа, 1977. – 160с.
11. Теория передачи сигналов. Учебник для вузов. /А.Г.Зюко, Д.Д.Кловский, М.В.Назаров, Л.М.Финк. – 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Радио и связь, 1986. – 304с.
12. Садовский А.С. Задачник по теории электрической связи. - М.: Радио и связь, 1963. – 217с.
13. Сборник задач по курсу «Системы передачи информации». Учебное пособие. /Под ред. Пенина П.И./ - Изд-во МЭИ, 1974. – 170с.
14. Задачник по теории информации и кодированию. /Цымбал В.П. – К.: Вища школа, 1976. – 276с.

*Навчальне видання*

Святослав Тадіонович Барась
Олександр Андрійович Костюк
Юрій Іванович Кравцов

# Основи теорії телекомунікаційних систем

Оригінал-макет підготовлено Барасем С.Т.

Редактор Малішевська С.А.

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 29.09.04
Формат 29,7x42 1/4
Друк різографічний
Тираж 85 прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 3,96

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95