А.А. БАРКОВСЬКА, А.О. СИРОВАТКА

Вступ до математичного аналізу

"Тригонометричні функції, рівняння та нерівності"

Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

А.А. БАРКОВСЬКА, А.О. СИРОВАТКА

Вступ до математичного аналізу

"Тригонометричні функції, рівняння та нерівності"

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для учнів середніх шкіл та студентів технічних спеціальностей. Протокол №7 від 6 березня 2003р.

Вінниця ВНТУ 2003

УДК 517
Б 25

Рецензенти:

В.М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
Г.Г.Кашканова, кандидат педагогічних наук, доцент
В.М. Дубчак, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Барковська А.А., Сироватка А.О.
Б 25 **Вступ до математичного аналізу. "Тригонометричні функції, рівняння та нерівності".** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2003. – 103 *с*.

В посібнику розглянуті властивості тригонометричних функцій та їх геометрична інтерпретація, найпростіші тригонометричні рівняння, нерівності, тотожності, похідні тригонометричних функцій. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри прикладної математики та програми до дисциплін "Вища математика", "Елементарна математика".

УДК 517

Зміст

1 Загальні зауваження

Появі тригонометричних функцій сприяли задачі, пов'язані з землевимірюванням і будівельними справами для обчислення елементів плоских трикутників, астрономії та навігації – для обчислення елементів сферичних трикутників, тобто трикутників утворених дугами великих кіл сфери.

Вперше методи розв'язання трикутників, де розглядаються залежності між сторонами та кутами трикутників, були знайдені старогрецькими астрономами Гіпархом (2 ст.до н.е.) і Клавдієм Птоломеєм (2ст. до н.е).

Починаючи з XVII століття тригонометричні функції почали застосовувати до розв'язання рівнянь, задач механіки, оптики, електротехніки, радіотехніки, для опису коливних процесів, розповсюдження хвиль, руху різних механізмів, вивчення змінного електричного струму, опису періодичних явищ і технологічних процесів тощо.

Аналітична теорія тригонометричних функцій в основному була створена в середині XVIII ст. російським академіком Леонардом Ейлером. Він надав тригонометрії сучасний вид. Величини $\sin x$, $\cos x$ й інші він розглядав як функції числа **x** – радіанної міри відповідного кута.

Та частина тригонометрії, яка вивчає властивості тригонометричних функцій і залежностей між ними одержала назву гоніометрія (грецькі слова: *γωνix* - кут, *μεφεω* - міряю).

В шкільному курсі математики вперше терміни – косинус, синус, тангенс кута вводять на уроках геометрії; спочатку – щоб довести теорему Піфагора , а потім – для розв'язання трикутників (О.В.Погорєлов, Геометрія 6-10; § 7,11).

Тригонометричні функції, властивості, перетворення виразів, основні формули, доведення тотожностей, розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь, нерівностей , а також систем вивчають на уроках алгебри в X класі. (Алгебра і початки аналізу. Під редакцією А.М.Колмогорова. Розділ І. Розділ ІІ. § 127).

2 Вимірювання кутів

Нагадаємо, що в повсякденному житті і ряді наукових і технічних питаннях кути вимірюються градусами.

1^0(один градус) — центральний кут, що відповідає дузі, яка дорівнює $\frac{1}{360}$ довжини кола. (Повне коло має 360^0 (360 градусів)).

Кожний градус поділяють на 60 хвилин (1^0=$60'$), кожну хвилину на 60 секунд ($1' = 60''$). Ця традиція відноситься до шестидесятирічної системи числення, прийнятої у стародавньому Вавилоні.

Проте в дослідженнях, які відповідають більш високому математичному рівню і особливо, коли тригонометричні відношення розглядаються як функції числового аргументу, наприклад ***y = sinx*** тощо, кути вимірюються в радіанах.

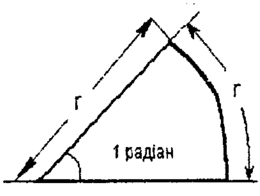


Рисунок 1

І радіан - це центральний кут, який відповідає дузі кола, довжина якої дорівнює радіусу кола.

Оскільки довжина кола дорівнює 2πr, і повне коло містить 360^0 ; то $360^0 = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ радіан або $180^0 = \pi$ радіан. Звідки $90^0 = \frac{\pi}{2}$ радіан; $45^0 = \frac{\pi}{4}$ радіан; $1^0 = 0{,}0175$ радіана, а І радіан – це $57^0 17' 45'' = 57{,}296^0$.

Обчислення значень тригонометричних і обернених тригонометричних функцій на деяких мікрокалькуляторах залежить від положення перемикача «Р-ГРД-Г». В положенні («Р») аргумент тригонометричних і результат обернених тригонометричних функцій обчислюється в радіанах; в положенні «Г» – в градусах; якщо в середньому «ГРД» – в градах. 1 град дорівнює 0,01 прямого кута, (позначається 1^9), тому 1^9=0,0157 радіана дорівнює $0{,}9^0 = 54'$.

Формули переведення з однієї міри кута в іншу можна не пам'ятати (їх можна одержати зведенням до одиниці або способом пропорцій).

Проте слід пам'ятати , що:

Кут 180^0 має π радіан ; а кут 90^0 має $\frac{\pi}{2}$ радіан.

2.1 Тригонометричні функції та їх властивості.

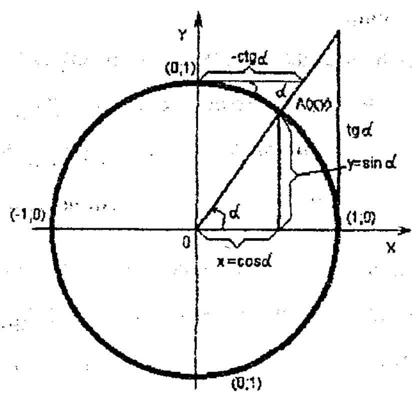


Рисунок 2

Коло радіуса 1 будемо називати тригонометричним колом.

Нехай радіус-вектор $\overline{OA}$ тригонометричного кола утворює кут α з додатним напрямком осі Ox.

Означення: Синусом кута α (позначається $\sin\alpha$) називається ордината кінця рухомого радіус-вектора $\overline{OA}$; косинусом кута α (позначається $\cos\alpha$) називається абсциса кінця рухомого радіус-вектора $\overline{OA}$. Тобто:

$\sin\alpha=y$	$\cos\alpha=x$

де **x** і **y** координати кінця радіус-вектора ОА, який утворює кут α з додатним напрямком осі Ох.

Означення: Тангенсом кута α (позначається $tg\alpha$) називається відношення синуса кута α до косинуса кута α ; котангенсом кута α (позначається $ctg\alpha$) називається відношення косинуса кута α до синуса кута α. Тобто:

$tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{y}{x}$	$ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{x}{y}$

Тригонометричною функцією числового аргументу x називається (однойменна) функція кута, який містить x радіан. Сформулюємо основні властивості тригонометричних функцій: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg x$, $y = ctg x$, розуміючи під x величину кута α , а y – відповідне значення тригонометричної функції.

2.1.1 Область визначення функцій

1. $D(\cos x)=D(\sin x)=R=\{x|\ -\infty<x<+\infty\}$,

тобто множина всіх дійсних чисел.

2. $D(tgx)=\{x|\ -\dfrac{\pi}{2}+\kappa\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+\kappa\pi\wedge\kappa\epsilon Z$,

тобто $y=tgx$ є функція, яка визначена для дуг, що закінчуються в правому або лівому відкритому півколі.

3. $D(ctgx)=\{x|\ \kappa\pi<x<(\kappa+1)\pi\wedge\kappa\in Z\}$,

тобто $y=ctgx$ є функція, яка визначена для дуг, що закінчуються у верхньому або нижньому відкритому півколі.

2.1.2 Множина значень

1. $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1;1]$ тобто $-1 \le \cos x \le 1$ і $-1 \le \sin x \le 1$.
2. $E(tgx) = E(ctgx) = R$, тобто множина всіх дійсних чисел.

2.1.3 Обмеженість

Із 2^0слідує, що функції ***y = cosx*** і ***y = sinx*** обмежені, а функції ***y = tgx*** і ***y = ctgx*** необмежені .

2.1.4 Періодичність

1. Функції ***y = cosx*** і ***y = sinx*** періодичні з найменшим додатним періодом $l = 2\pi$.
2. Функції ***y = tgx i y = ctgx*** є періодичними з найменшим періодом $T = \pi$.

2.1.5 Парність та непарність функцій

1. Функції ***y = sinx, y = tgx, y = ctgx*** є непарними функціями .
2. ***y = cosx*** – парна.

Таблиця 2.1 – Нулі функції

sin(x)=0	Cos(x)=0	tg(x)=0	ctg(x)=0
$x = \kappa\pi, де \kappa \epsilon Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi, де \kappa \epsilon Z$	$x = \kappa\pi, \kappa \epsilon Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi, де \kappa \epsilon Z$

Таблиця 2.2 - Знаки значень тригонометричних функцій по четвертях

Номер чверті	Значення величини	Функції			
		sin(x)	cos(x)	tg(x)	ctg(x)
I	$(0,\frac{\pi}{2})$	+	+	+	+
II	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	+	–	–	–
III	$(\pi,\frac{3\pi}{2})$	–	–	+	+
IV	$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$	–	+	–	–

Таблиця 2.3 - Проміжки постійних знаків

Функція додатна	$\mathrm{Sin}x > 0$	$\cos x > 0$
Інтервал	$2\kappa\pi < x < (2\kappa+1)\pi$	$-\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi < x < \frac{\pi}{2}+2\kappa\pi$
Функція додатна	$\mathrm{tg}x > 0$	$\mathrm{ctg}x > 0$
Інтервал	$\kappa\pi < x < \kappa\pi+\frac{\pi}{2}$	$\kappa\pi < x < \frac{\pi}{2}+\kappa\pi$
Функція від'ємна	$\mathrm{Sin}x < 0$	$\cos < 0$
Інтервал	$(2\kappa+1)\pi < x < (2\kappa+2)\pi$	$\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi < x < \frac{3\pi}{2}+2\kappa\pi$
Функція від'ємна	$\mathrm{tg}x < 0$	$\mathrm{ctg}x < 0$
Інтервал	$-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi < x < \kappa\pi$	$+\frac{\pi}{2}+\kappa\pi < x < \pi+\kappa\pi$

Таблиця 2.4 – Проміжки монотонності

Функції	Інтервал зростання	Інтервал спадання
Sinx	$-\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi < x < \frac{\pi}{2}+2\kappa\pi$	$\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi < x < \frac{3\pi}{2}+2\kappa\pi$
Cosx	$-\pi+2\kappa\pi < x < 2\kappa\pi$	$2\kappa\pi < x < \pi+2\kappa\pi$
Tgx	$-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi < x < \frac{\pi}{2}+\kappa\pi$	$\varnothing$
Ctgx	$\varnothing$	$\kappa\pi < x < \kappa\pi+\pi$

2.1.6 Неперервність і диференційованість

1.Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ – неперервні та диференційовані в будь-якій точці, що належить її області визначення.

2. $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

Графіки функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, зображенні на рисунках :

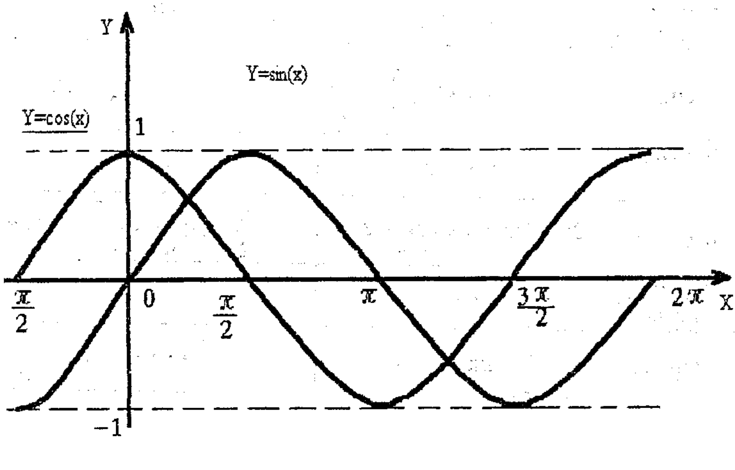


Рисунок 3

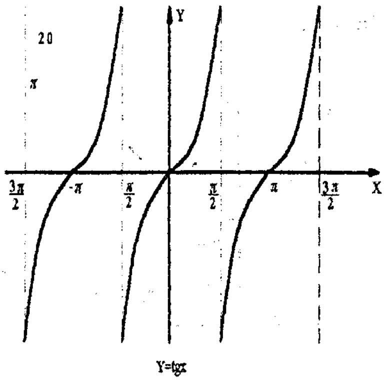


Рисунок 4

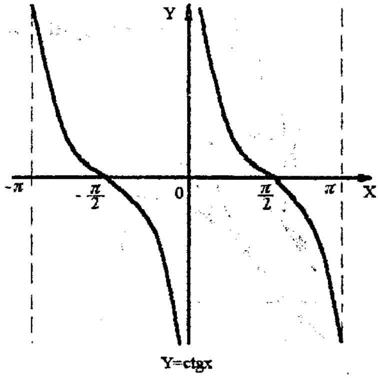


Рисунок 5

2.2 Обернені тригонометричні функції

Оскільки функції $y = sinx$ і $y = cosx$ не є монотонними, то щоб визначити для них обернені функції, потрібно вибрати інтервал, на якому функції зростають або спадають.

Функція $y = sinx$ зростає на проміжку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, а $y = cosx$ спадає на проміжку $[0;\pi]$, тому на цих проміжках вони мають обернені функції, відповідно $x = arcsin(y)$ і $x = arccos(y)$, обидві ці функції визначені на проміжку $[-1;1]$. Міняючи місцями x та y, одержимо записи цих функцій в звичайному вигляді, коли аргумент і функція позначені як і в прямій функції : $y = arcsin(x)$; $y = arccos(x)$.

Замітимо, що $y=arcsin(x)$ означає кут з відрізка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює x, тобто $sin(arcsin(x)) = x$; а $y = arccos(x)$ означає кут з проміжку $[0;\pi]$, косинус якого дорівнює x, тобто $cos(arccos(x)) = x$.

Графіки цих функцій зображені на рисунках:

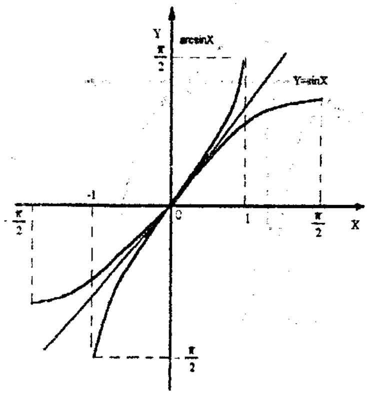


Рисунок 6

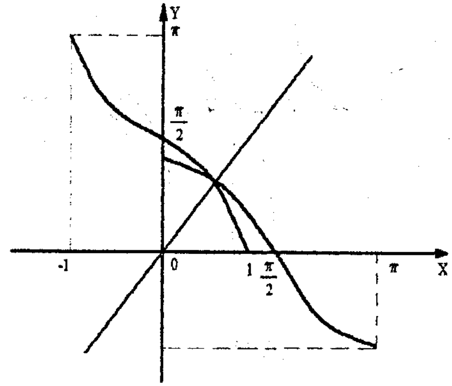


Рисунок 7

Оскільки функція $y = tg(x)$ ($y = ctg(x)$) строго зростає (строго спадає) на проміжку $(-\pi/2;\pi/2)$ ($(0;\pi)$), то вона має обернену функцію $x = arctg(y)$ ($x = arcctg(y)$), яка визначена на всій числовій прямій R. Міняючи місцями x і y, одержимо запис в звичайному вигляді:

$$y = arctg(x) \quad (y = arcctg(x)).$$

Замітимо, що $y = arctg(x)$ означає кут з інтервалу $(-\pi/2;\pi/2)$, тангенс якого дорівнює x, тобто $tg(arctg(x)) = x$; а $y = arcctg(x)$ означає кут з інтервалу $(0, \pi)$ котангенс якого дорівнює x, тобто $ctg(arcctg(x)) = x$.

Графік функції $y = arctg(x)$ ($y = arcctg(x)$) одержується симетричним відображенням відносно прямої $y = x$ графіка функції $y = tg(x)$ ($y = ctg(x)$), що зображено на рисунках:

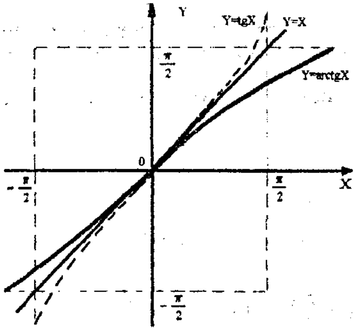


Рисунок 8

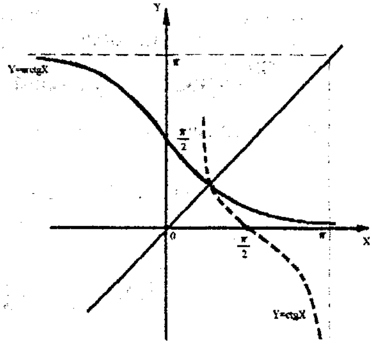


Рисунок 9

Природно, що формули, які пов'язують між собою тригонометричні функції, приводять до формул, які пов'язують між собою обернені тригонометричні функції. Наведемо деякі з них:

1. $\arcsin(x)+\arccos(x)=\dfrac{\pi}{2}$, якщо $x \in [-1;1]$;

2. $arctg(x)+arcctg(x)=\dfrac{\pi}{2}$, якщо $x \in R$;

3. $\arcsin(-x)=-\arcsin(x)$;   4. $\arccos(-x)=\pi-\arccos(x)$;

5. $arctg(-x)=-arctg(x)$;   6. $arcctg(-x)=\pi-arcctg(x)$;

7. $\arcsin(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}=arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=arcctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, якщо $x\in(0;1)$;

8. $\arccos(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}=arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=arcctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, якщо $x\in(0;1)$;

9. $arctg(x)=arcctg\dfrac{1}{x}=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, якщо $x\in(0;+\infty)$;

10. $arcctg(x)=arctg\dfrac{1}{x}=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, якщо $x\in(0;+\infty)$;

Зауважимо, що обернені тригонометричні функції є неперервними і диференційованими в будь-якій точці, що належить відкритому інтервалу області визначення.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2.3 Тотожні перетворення

Для того, щоб оволодіти технікою спрощення тригонометричних виразів і доведення тотожностей, необхідно твердо засвоїти співвідношення між тригонометричними функціями допустимих кутів.

Таблиця 2.5 – Основні тригонометричні тотожності та їх наслідки

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\cos ec\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$
$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$	$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \cos ec^2\alpha$

Таблиця 2.6 – Формули зведення

	I чверть		II чверть		III чверть		IV чверть	
Кути β / Функ-ція	$0<\alpha<\pi$	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3\pi/2-\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$0<\alpha<90$	$90-\alpha$	$90+\alpha$	$180-\alpha$	$180+\alpha$	$270-\alpha$	$270+\alpha$	$-\alpha$
$\sin\beta$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\beta$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

Нагадаємо, що формули зведення дозволяють перейти від тригонометричних функцій довільного кута до тригонометричних функцій найменшого гострого кута α ($0 \le \alpha \le \pi/2$).

При цьому:

1. Якщо даний кут більше 2π, то використовуємо періодичність тригонометричних функцій: $\sin(\beta + 2k\pi) = \sin\beta$; $\cos(\beta + 2k\pi) = \cos\beta$;

$$\operatorname{tg}(\beta + k\pi) = \operatorname{tg}\beta; \qquad \operatorname{ctg}(\beta + k\pi) = \operatorname{ctg}\beta,$$

тобто відкидаємо кут, кратний періоду функції.

2. Визначаємо, якій чверті належить кут β і який знак має дана тригонометрична функція в цій чверті, і цей знак присвоюємо отриманому результату.

3. Якщо $\beta = \pi \pm \alpha$ або $\beta = 2\pi - \alpha$, то назва тригонометричної функції зберігається, а якщо $\beta = \pi/2 \pm \alpha$ або $\beta = 3\pi/2 \pm \alpha$, то назва тригонометричної функції змінюється (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

Приклади:

1. $\cos 1235^\circ = \cos(3 \cdot 360^\circ + 155^\circ) = \cos 155^\circ$, кут $155^\circ = 180^\circ - 25^\circ$ належить другій чверті, косинус в другій чверті від'ємний, тому кінцевий знак «-». Оскільки $\beta = \pi - \alpha$, то назва функції зберігається, тому

$\cos 155^\circ = -\cos 25^\circ$, тобто $\cos 1235^\circ = -\cos 25^\circ$.

2. $\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

3. $\sin(7\pi/2) = \sin(4\pi - \pi/2) = \sin(-\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$.

Таблиця 2.7 – Значення тригонометричних функцій основних кутів

Кути β / Функції	0	30^0 $\pi/6$	45^0 $\pi/4$	60^0 $\pi/3$	90^0 $\pi/2$	180^0 π	270^0 $3\pi/2$	360^0 2π
sinβ	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosβ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0	-1	0	1
tgβ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0
ctgβ	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

Значення тригонометричних функцій для кутів 0, π/2, π, 3π/2, 2π легко знаходяться з тригонометричного кола (Рисунок 2). Значення – для кутів π/6 і π/3 з рівностороннього трикутника із стороною 1 (Рисунок 11). Для кута π/4 – з прямокутного рівнобедреного трикутника (Рисунок 12) за допомогою теореми Піфагора і наслідків з прямокутного трикутника (a,b – катети, c – гіпотенуза) (Рисунок 10).

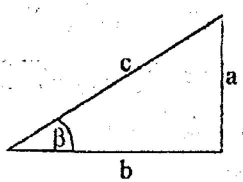


Рисунок 10

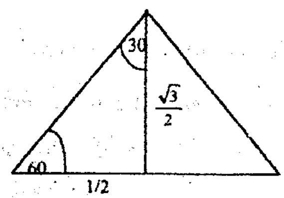


Рисунок 11

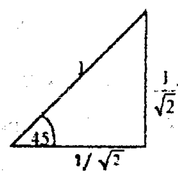


Рисунок 12

$$\sin\beta = \frac{a}{c} = \frac{\textit{протилежний катет}}{\textit{гіпотенуза}} \qquad tg\beta = \frac{a}{b} = \frac{\textit{протилежний катет}}{\textit{прилеглий катет}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{c} = \frac{\textit{прилеглий катет}}{\textit{гіпотенуза}} \qquad ctg\beta = \frac{b}{a} = \frac{\textit{прилеглий катет}}{\textit{протилежний катет}}$$

2.3.1 Формули додавання

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta;$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}.$$

2.3.2 Функції подвійного кута

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \qquad \mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

2.3.3 Функції половинного кута

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}.$$

2.3.4 Формули пониження степеня

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

2.3.5 Формули перетворення алгебраїчної суми тригонометричних функцій в добуток

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \alpha}{2} = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;$$
$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha;$$
$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

2.3.6 Формули перетворення добутків тригонометричних функцій в алгебраїчну суму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta));$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

2.3.7 Періодичність тригонометричних функцій

$$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha, n\in Z;$$
$$\cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha, n\in Z;$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi n)=\mathrm{tg}\alpha, n\in Z;$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha+\pi n)=\mathrm{ctg}\alpha, n\in Z.$$

2.4 Оволодіння технікою тотожніх перетворень на базі алгебраїчних законів, виконання співвідношень між тригонометричними функціями

При цьому слід ураховувати, що при доведенні тотожностей можна користуватись трьома різними способами :

1) Перетворити вираз, шляхом тотожніх перетворень, який знаходиться в лівій частині, у вираз який знаходиться в правій частині, або навпаки, правий – в лівий.

Наприклад: sin2α-tgα=cos2α·tgα.

a) $\sin 2\alpha - \mathrm{tg}\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot(2\cos^2\alpha - 1) = tg\alpha\cdot(\cos^2\alpha -$
$-(1-\cos^2\alpha)) = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot tg\alpha = \cos 2\alpha\cdot tg\alpha$

б) $\cos 2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\mathrm{tg}\alpha = (\cos^2\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha))\cdot\mathrm{tg}\alpha = (2\cos^2\alpha -$
$-1)\cdot\mathrm{tg}\alpha = 2\cos^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha = 2\cos^2\alpha\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \mathrm{tg}\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \mathrm{tg}\alpha = \sin 2\alpha -$
$-\mathrm{tg}\alpha$

2) Перетворити вирази, які стоять як в лівій, так і правій частинах до одного і того ж виразу, відмінного від тих виразів, якими представлена тотожність.

$$\sin 2\alpha - \mathrm{tg}\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cdot(2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha};$$

$$\cos 2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha))\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$
$$= \frac{\sin\alpha\cdot(2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha}.$$

3) Довести, що різниця виразів лівої та правої частини дорівнює нулю.

$$\sin 2\alpha - \mathrm{tg}\alpha - \cos 2\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha = \sin 2\alpha - \mathrm{tg}\alpha \cdot (1+\cos 2\alpha) = \sin 2\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot 2\cos^2\alpha =$$
$$= \sin 2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha - \sin 2\alpha = 0$$

Наприклад:

Щоб навчитись спрощувати тригонометричні вирази потрібно розв'язати достатньо велику кількість прикладів.

Приклади.

1. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} \cdot (1+\cos 4\alpha) = \sin 4\alpha;$

Доведення: $\dfrac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} \cdot (1+\cos 4a) = \dfrac{2\sin 2a \cdot \cos a}{2\cos 2a \cdot \cos 2a} \cdot 2\cos^2 2a =$

$= 2\sin 2a \cdot \cos 2a = \sin 4a.$

2. $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} - \dfrac{1-\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$.

Доведення: $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} - \dfrac{1-\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha} -$

$-\dfrac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{\cos\alpha \cdot \sin 2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha} =$

$= \dfrac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}\sin 4\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha}{\sin 4\alpha}.$

3. $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos 3\alpha} - \dfrac{2\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \dfrac{4\sin\alpha}{\sin 6\alpha}.$

Доведення: $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos 3\alpha} - \dfrac{2\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \dfrac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos 3\alpha} - \dfrac{2\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} =$

$= \dfrac{2\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos 3\alpha} - \dfrac{2\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \dfrac{2(\cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha)}{\cos 3\alpha \cdot \sin 3\alpha} =$

$= \dfrac{2\sin(3\alpha - 2\alpha)}{\frac{1}{2}\sin 6\alpha} = \dfrac{4\sin\alpha}{\sin 6\alpha}$.

4. $\dfrac{\sin\alpha - \sin2\alpha + \sin3\alpha - \sin4\alpha}{\cos\alpha - \cos2\alpha + \cos3\alpha - \cos4\alpha} = -ctg\dfrac{5}{2}\alpha.$

$$\frac{\sin\alpha - \sin2\alpha + \sin3\alpha - \sin4\alpha}{\cos\alpha - \cos2\alpha + \cos3\alpha - \cos4\alpha} = \frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{7\alpha}{2}}{2\sin\frac{3}{2}\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{7}{2}\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= -\frac{\cos\frac{3}{2}\alpha + \cos\frac{7}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha + \sin\frac{7}{2}\alpha} = -\frac{2\cos\frac{5}{2}\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\frac{5}{2}\alpha\cdot\cos\alpha} = -ctg\frac{5}{2}\alpha.$$

5. $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = tg(\alpha-\beta)\cdot tg(\alpha+\beta).$

Доведення: $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} =$

$$= \frac{(\sin\alpha - \sin\beta)\cdot(\sin\alpha + \sin\beta)}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta\cdot\cos^2\alpha + \sin^2\beta\cdot\cos^2\alpha - \sin^2\beta} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\beta\cdot\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta)}\cdot\frac{1}{(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta)} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)} = tg(\alpha-\beta)\cdot tg(\alpha+\beta).$$

6. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta = 1.$

Доведення: $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta =$

$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cdot(1 - \sin^2\beta) + \sin^2\beta\cdot(1 - \sin^2\alpha) =$$

$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta + \sin^2\beta\cdot\cos^2\alpha = 1.$$

7. $tg6\alpha - tg4\alpha - tg2\alpha = tg6\alpha\cdot tg4\alpha\cdot tg2\alpha.$

Доведення: $\mathrm{tg}6\alpha\text{-}\mathrm{tg}4\alpha\text{-}tg2\alpha = \dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 6\alpha \cdot \cos 2\alpha} - tg4\alpha =$

$$= tg4\alpha \cdot \left(\frac{\cos 4\alpha}{\cos 6\alpha \cdot \cos 2\alpha} - 1\right) = tg4\alpha \cdot \frac{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos 6\alpha \cdot \cos 2\alpha} =$$

$$= tg4\alpha \cdot \frac{\cos 4\alpha - \frac{1}{2}(\cos 4\alpha + \cos 8\alpha)}{\cos 6\alpha \cdot \cos 2\alpha} = tg4\alpha \cdot \frac{\frac{1}{2}\cos 4\alpha - \frac{1}{2}\cos 8\alpha}{\cos 6\alpha \cdot \cos 2\alpha} =$$

$$= tg4\alpha \cdot \frac{\sin 6\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\cos 6\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \mathrm{tg}6\alpha \cdot \mathrm{tg}4\alpha \cdot \mathrm{tg}2\alpha.$$

8. $4\sin\alpha \cdot \sin(60° - \alpha) \cdot \sin(60° + \alpha) = \sin 3\alpha.$

Доведення: $4\sin\alpha \cdot \sin(60° - \alpha) \cdot \sin(60° + \alpha) = 2\sin\alpha \cdot (\cos 2\alpha - \cos 120°) =$

$$= 2\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin\alpha = \sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha = \sin 3\alpha.$$

9. $\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^4\alpha = \cos 4\alpha\,.$

Доведення: $\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^4\alpha =$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha\,.$$

10. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta).$

Доведення: $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos(\alpha - \beta) =$

$$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) =$$

$$= \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + \sin^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta =$$

$$= \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \sin^2\beta \cdot \cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta =$$

$$= (\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha)^2 = \sin^2(\alpha - \beta).$$

11. $\dfrac{\sin(80° + \alpha)}{4\sin(20° + \frac{\alpha}{4}) \cdot \sin(70° - \frac{\alpha}{4})} = \cos(40° + \frac{\alpha}{4}).$

Доведення : $\dfrac{\sin(80°+\alpha)}{4\sin(20°+\frac{\alpha}{4})\cdot\sin(70°-\frac{\alpha}{4})}=\dfrac{2\sin(80°+\alpha)}{4\sin(20°+\frac{\alpha}{4})\cdot\cos(20°+\frac{\alpha}{4})}=$

$$=\frac{2\sin(40°+\frac{\alpha}{2})\cdot\cos(40°+\frac{\alpha}{2})}{2\sin(40°+\frac{\alpha}{2})}=\cos(40°+\frac{\alpha}{4}).$$

12. $\cos20°\cdot\cos40°\cdot\cos80°=\dfrac{1}{8}.$

Доведення: $\cos20°\cdot\cos40°\cdot\cos80°=\dfrac{2\sin20°\cdot\cos20°\cdot\cos40°\cdot\cos80°}{2\sin20°}=$

$$=\frac{\sin40°\cdot\cos40°\cdot\cos80°}{2\sin20°}=\frac{\sin80°\cdot\cos80°}{2\cdot2\sin20°}=\frac{\sin160°}{8\sin20°}=\frac{\sin(180°-20°)}{8\sin20°}=\frac{1}{8}.$$

13. $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha-2tg2\alpha-4tg4\alpha=8tg8\alpha.$

Доведення: Замітимо, що $\mathrm{ctg}\alpha-tg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=2ctg2\alpha.$$

Тоді: $ctg\alpha-tg\alpha-2tg2\alpha-4tg4\alpha=2ctg2\alpha-2tg2\alpha-4tg4\alpha=$

$=2(ctg2\alpha-tg2\alpha)-4\mathrm{tg}4\alpha=4\mathrm{ctg}4\alpha-4\mathrm{tg}4\alpha=4(\mathrm{ctg}4\alpha-\mathrm{tg}4\alpha)=8\mathrm{ctg}8\alpha.$

2.5 Тригонометричні рівняння

п.1. **Означення.** Рівняння називається тригонометричним, якщо воно задовольняє три умови:

1. Невідомі в рівнянні містяться лише під знаками тригонометричних функцій.
2. Аргументи тригонометричних функцій є лінійними функціями невідомих.
3. Над тригонометричними функціями виконуються лише алгебраїчні операції.

Тригонометричні рівняння.

$$tg(2x+30°)+\sqrt{3}=0;$$
$$\cos x=0;$$
$$2\cos 3x+\cos x=\sqrt{\cos^2 x};$$
$$\sqrt{3}\cdot\cos x+\sin x=1.$$

Не тригонометричні рівняння.

$$six|x|=|\sin x|;$$
$$\arcsin(x+2)=\frac{\pi}{4};$$
$$\cos\frac{1}{x}=\frac{1}{2};$$
$$\sin\sqrt{x}=\cos x.$$

Розв'язати тригонометричне рівняння – це значить знайти загальну формулу, яка містить всі кути, при підстановці яких обидві частини рівняння будуть рівні між собою.

Наприклад, cosx=0 має розв'язок $x=\frac{\pi}{2}$, але виходячи з властивостей функції y= cos x , маємо, що $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, де $k\in Z$ також є розв'язком цього рівняння.

Тобто, якщо тригонометричне рівняння має розв'язок, то їх завжди безліч.

Тригонометричне рівняння може не мати розв'язків. Наприклад не мають розв'язків рівняння $\sin x=-2$; $\cos x=5$; оскільки $|\sin x|\le 1$ і $|\cos x|\le 1$

Не дивлячись на те, що не існує загального методу розв'язання тригонометричних рівнянь, і в кожному окремому випадку потрібно побачити оптимальний шлях, який веде до розв'язку, існують напрямки якими більшість рухається до заданої мети. Наведемо деякі з цих напрямків.

2.5.1 Потрібно прагнути одержати одне або декілька найпростіших тригонометричних рівнянь, тобто рівняння вигляду

$\sin x=a$, $\cos x=a$, $tg\,x=a$, $ctg\,x=a$.

(або $\sin(\alpha x+\beta)=a$, $\cos(\alpha x+\beta)=a$, $tg(\alpha x+\beta)=a$, $ctg(\alpha x+\beta)=a$).

1) рівняння $\sin x=a$ і $\cos x=a$ мають розв'язки лише при $|a|\le 1$, (оскільки $|\sin x|\le 1$ і $|\cos x|\le 1$);

2) якщо $a \in \{-1, 0, 1\}$, то розв'язки рівняння $T(x)=a$ бажано записувати виходячи із властивостей тригонометричної функції $T(x)$, а не користуючись загальними формулами;

3) рівняння $T(\alpha x+\beta)=a$ спочатку розв'язується як тригонометричне, а після того, як лінійне.

Наприклад, рівняння $tg(2x+30°)=0$, як тригонометричне має розв'язки $2x+30°=n\cdot 180°$, де $n\in Z$. Далі розв'язуємо його як лінійне, тобто $2x=-30°+n\cdot 180°$ або $x=-15°+n\cdot 90°=15°\cdot(6n-1)$, де $n\in Z$.

4) загальні та частинні розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь, які приведені в таблиці 2.8.

Таблиця 2.8 – Розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь

рівняння $T(x)=a$	Частинні випадки			Загальні випадки	
	$a=-1$	$a=0$	$a=1$	$0<\|a\|<1$	$\|a\|>1$
$\sin x=a$	$x=-\pi/2+$ $+2k\pi$	$x=k\pi$	$x=\pi/2+$ $+2k\pi$	$X=(-1)^k\arcsin a+k\pi$, де $k\in Z$	$\varnothing$
$\cos x=a$	$x=\pi+$ $+2k\pi$	$x=\pi/2+$ $+k\pi$	$x=2k\pi$	$x=\pm\arccos a+2k\pi$, де $k\in Z$	$\varnothing$
$tg x=a$	$x=-\pi/4+$ $+k\pi$	$x=k\pi$	$x=\pi/4+$ $+k\pi$	$x=arctg a+k\pi$, де $k\in Z$	
$ctg x=a$	$x=3\pi/4+$ $+k\pi$	$x=\pi/2+$ $+k\pi$	$x=\pi/4+$ $+k\pi$	$x=arcctg a+k\pi$, де $k\in Z$	

Розглянемо декілька прикладів розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь.

1. $tg(3x+\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow tg(3x+\frac{\pi}{6})=-\sqrt{3} \Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{6}=arctg(-\sqrt{3})+k\pi, k\in Z.$

Звідки $3x=-\frac{\pi}{6}-arctg\sqrt{3}+k\pi$ або $3x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+k\pi$, або $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, де $k\in Z$ – відповідь.

2. $\cos(\frac{\pi - 3x}{5}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(\frac{3x-\pi}{5}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{3x-\pi}{5} = \pm\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) +$
$2k\pi \Leftrightarrow \frac{3x-\pi}{5} = \pm(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{3x-\pi}{5} = \pm(\pi - \frac{\pi}{4}) + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{3x-\pi}{5} =$
$= \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow 3x = \pi \pm \frac{15}{4}\pi + 10k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{5}{4}\pi + \frac{10}{3}k\pi,$ де $k \in Z$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{12}\cdot(4 \pm 15 + 40k)$, де $k \in Z$.

2.5.2 Одержувати найпростіші тригонометричні рівняння допомагає переконаність в розпізнаванні окремих типів тригонометричних рівнянь та знання методів їх розв'язання. Розглянемо деякі з них.

1. Рівняння, які зводяться до алгебраїчних за допомогою основних формул.

а.) Розв'язати рівняння, $tg^2x-3tgx+2=0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $tgx=y$. Одержимо квадратне рівняння $y^2-3y+2=0$, корені якого $y_1=1$; $y_2=2$. Повертаючись до заміни одержуємо два найпростіших тригонометричних рівняння: $tgx=1$ і $tgx=2$, кожне з яких має розв'язок. Причому $tgx=1 \Leftrightarrow x=\pi/4+k\pi$, де $k \in Z$; $tgx=2 \Leftrightarrow x=arctg2+k\pi$, де $k \in Z$.

Відповідь: $\pi/4+k\pi$, де $k \in Z$; $arctg2+k\pi$, де $k \in Z$.

б.) Розв'язати рівняння: $2\cos^2x+4\cos x=3\sin^2x$.

Розв'язання. Замінимо $\sin^2x$ через $1-\cos^2x$, одержимо: : $2\cos^2x+4\cos x=3(1-\cos^2x)$, або $5\cos^2x+4\cos x-3=0$. Зробимо підстановку $y=\cos x$, одержимо квадратне рівняння: $5y^2+4y-3=0$, яке має корені:

$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{5}$; оскільки $y_2 = \frac{-2-\sqrt{19}}{5} < -1$, то воно може бути “відкинуто”. Маємо $\cos x = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}$, $x = \pm\arccos(\frac{-2+\sqrt{19}}{5}) + 2k\pi, k \in Z$ - відповідь.

3. Розвязати рівняння: $4\cos^3 x\sin x - 4\sin^3 x\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Розв'язання. Перетворимо ліву частину рівняння:
$4\cos^3x\cdot\sin x - 4\sin^3x\cdot\cos x = 4\cos x\cdot\sin x\cdot(\cos^2x - \sin^2x) = 2\sin 2x\cdot\cos 2x = \sin 4x$.

Маємо найпростіше тригонометричне рівняння $\sin 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, розв'язком якого є $4x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + k\pi, k \in Z$ або $4x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$ або $x = (-1)^k \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, k \in Z$ - відповідь.

4. Розв'язати рівняння $\cos^2 4x + 3\sin^2 2x - 1 = 0$.

Розв'язання. Замінимо, $\sin^2 2x$ за формулою пониження через $\frac{1-\cos 4x}{2}$, одержимо рівняння $\cos^2 4x + \frac{3}{2}(1-\cos 4x) - 1 = 0$ або $2\cos^2 4x - 3\cos 4x + 1 = 0$, яке є квадратичним відносно $\cos 4x$, зробимо підстановку $\cos 4x = y$, маємо $2y^2 - 3y + 1 = 0$. Звідки $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{2}$, які породжують два найпростіші тригонометричні рівняння $\cos x = 1$, $x = 2k\pi$, де $k \in Z$ і $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$.

Відповідь: $2k\pi$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$.

Зауваження.1. Спільним в цих рівняннях є те, що вони або були тригонометричними, які мають лише тригонометричну функцію одного найменування, яка залежить від одного і того ж аргументу (рівняння 1), або їх можна до такого рівняння звести (рівняння 2, 3, 4). Тоді підстановка $y = T(\alpha x + \beta)$ зводить тригонометричне рівняння до алгебраїчного $P(y) = 0$, корені якого y_i, породжують найпростіші тригонометричні рівняння : $T(\alpha x+\beta)=y_i$.

2. В кожному з цих прикладів перетворення були тотожними і приводили до тригонометричних рівнянь, рівносильних даним. При цьому втрати коренів, появи побічних коренів не відбувалося.

5. Розв'язати рівняння:

$$tg(x+\frac{\pi}{4})+tg(x-\frac{\pi}{4})=2ctgx. \qquad (1)$$

Розв'язання. ОДЗ: $\{x \mid x\neq k\pi \text{ і } x\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\pi, \text{ де } k\in Z\}$.

Якщо використати формули тангенса суми і різниці двох аргументів і $ctgx=\frac{1}{tgx}$, то одержимо рівняння:

$$\frac{tgx+1}{1-tgx}+\frac{tgx-1}{1+tgx}=\frac{2}{tgx}, \qquad (2)$$

яке не рівносильне даному, тому що з ОДЗ рівняння (1) виключаються точки $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, які залишаються і в рівнянні одержаному із (2) після нескладних перетворень: $tgx=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; звідки $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z$. Якщо підставити $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ в рівняння (1),

$$tg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi)+tg(\frac{\pi}{2}+k\pi-\frac{\pi}{4})=tg\frac{3\pi}{4}+tg\frac{\pi}{4}=0=ctg(\frac{\pi}{2}+k\pi),$$

то переконуємося, що це втрачені розв'язки рівняння (1).

2.5.3 Рівняння, які є, або приводяться до вигляду

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots f_n(x)=0$$

Розв'язання таких рівнянь грунтується на такому положенні: якщо ліва частина є добуток декількох співмножників, а права частина дорівнює нулю, то коренями такого рівняння є ті і тільки ті значення змінної, при яких перетворюється в нуль хоча б один із співмножників, проте жоден із них не втрачає числового змісту.

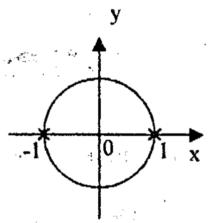
Розглянемо приклади рівнянь, які можна розкласти на множники і використати сформульоване положення.

Приклади.

1. Розв'язати рівняння: $\cos 3x - \cos 5x = 0$.

Розв'язання. $\cos 3x - \cos 5x = 2\sin 4x \cdot \sin x = 0$. Звідки $\sin 4x = 0$ або $\sin x = 0$, тобто $4x = k\pi$, де $k \in Z$, або $x = \pi n$, де $n \in Z$, або $x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in Z$.

Позначимо розв'язки рівнянь на тригонометричному колі, які належать одному рівнянню кружечками, а хрестиками – другому. З рисунка видно, що корені другого рівняння знаходяться серед коренів першого рівняння (при $k=4n$ два загальні розв'язки замінюєм одним $x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in Z$ – відповідь.



2. Розв'язати рівняння: $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 4x$

Розв'язання. Використовуючи формули скороченого множення $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$ і $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ маємо $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, тоді $\cos 2x = \sin 4x$ або $\cos 2x - 2\cos 2x \cdot \sin 2x = 0$ або $\cos 2x \cdot (1 - 2\sin 2x) = 0$. Звідки $\cos 2x = 0$ або $1 - 2\sin 2x = 0$.

Перше рівняння має розв'язок $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, де $k \in Z$.

Друге рівняння $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, де $k \in Z$.

Відповідь: $\{ \frac{\pi}{4}(2k\pi + 1)$, де $k \in Z$; $\frac{\pi}{12}(6k\pi + (-1)^k)$, де $k \in Z \}$.

3. Розв'язати рівняння: $tg 5x \cdot \cos x = 0$.

Розв'язання. В ОДЗ входять всі x для яких $\cos 5x \neq 0$, тобто $x \neq \frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5} =$

$= \frac{\pi}{10}(2k+1)$, де $k \in Z$.

Дане рівняння розкладається на два рівняння :

$tg 5x=0$ або $\cos x=0$

$5x= k\pi$, де $k \in Z$; $x= \frac{\pi}{2}+k\pi$, де $k \in Z$

$x=\frac{k\pi}{5}$, де $k \in Z$.

Якщо $x= \frac{\pi}{2}+k\pi$, то $\cos 5(\frac{\pi}{2}+k\pi)=\cos(\frac{\pi}{2}+(k+2)\pi)=0$. Тому серія коренів $x= = \frac{\pi}{2}+k\pi$ не є розв'язком даного рівняння.

Відповідь: $\frac{k\pi}{5}$, де $k \in Z$.

2.5.4 Рівняння вигляду $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0.$

Коренями такого рівняння є ті і тільки ті значення, при яких $f_1(x)=0$ і $f_2(x) \neq 0$.

Приклади.

1. Розв'язати рівняння.

$$\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=0$$

Розв'язання. Маємо систему:

$$\begin{cases}\sin x+\sin 3x=0\\ \cos x+\cos 3x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\sin 2x\cos x=0\\ 2\cos x\cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\sin x\cos^2 x=0\\ 2\cos x\cos 2x \neq 0.\end{cases}$$

Оскільки $\cos x \neq 0$, то залишається $\sin x=0 \Leftrightarrow x= k\pi$, де $k \in Z$. При $x=k\pi$, $\cos 2x \cdot \cdot \cos x \neq 0$.

Відповідь: $k\pi$, де $k \in Z$.

2. Розв'язати рівняння $\dfrac{\cos x+\sin 2x-\cos 3x}{1+\sin x}=0.$

Розв'язання. Маємо систему:

$$\begin{cases}\cos x+\sin 2x-\cos 3x=0\\ 1+\sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin 2x\sin x+\sin 2x=0\\ 1+\sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x(2\sin x+1)=0\\ 1+\sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ 2\sin x+1=0\end{array}\right.\\ \sin x+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2},k\in Z,\\ x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z\end{array}\right.\\ x\neq\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi,n\in Z\end{cases}$$

Перетворимо $\frac{3\pi}{2}+2n\pi=\frac{\pi}{2}\cdot(3+4n)$. Бачимо, що при $k=3+4n$ знаменник перетворюється в нуль, тому серед коренів $x=\frac{k\pi}{2}$ потрібно виключити $k=3+4n$, $n\in Z$.

Відповідь: $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\neq 3+4n$; k, $n\in Z$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$.

2.5.5 Рівняння, однорідні відносно sinx, cosx.

Однорідним рівнянням відносно sinx і cosx, називається рівняння вигляду:

(1) $a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cdot\cos x+a_2\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x+\ldots+a_n\cos^n x$; де a_0, $a_1,\ldots,a_n$ – коефіцієнти (числа), і всі члени мають одну і ту ж степінь n відносно синуса і косинуса.

Це рівняння легко зводиться до алгебраїчного відносно tgx (або ctgx), якщо всі його члени поділити на $\cos^n x$ (або $\sin^n x$).

При цьому, якщо $a_0\neq 0$ (або $a_n\neq 0$), то таке ділення не приводить до втрати коренів, тому що значення x , при яких cosx (або sinx) дорівнює нулю, не задовольняють рівняння (1).

Якщо $a_0=0$ (або $a_n=0$), то таке ділення приводить до втрати розв'язків, тому у відповідь потрібно включати розв'язки рівняння $\cos x=0$ (або $\sin x=0$).

Приклади.

1. Розв'язати рівняння: $\cos^2x+\sin x\cdot\cos x-2\sin^2x=0$.

Розв'язання. Оскільки $\cos x=0$ не дає розв'язків рівняння, тобто $\cos x\neq 0$, то поділимо почленно на $\cos^2x$, одержимо :

$1+\mathrm{tg}x-2\mathrm{tg}^2x=0 \Leftrightarrow 2\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}x-1=0$.

Заміна $\mathrm{tg}x=y$, дає квадратичне рівняння $2y^2-y-1=0$, яке має корені $y_1=1$, $y_2=-\frac{1}{2}$. Повертаючись до заміни одержуємо два найпростіших тригонометричних рівняння: $\mathrm{tg}x=1$ і $\mathrm{tg}x=-\frac{1}{2}$. Розв'язуючи кожне з них, маємо:

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, де $k\in Z$; $x=\mathrm{arctg}(-\frac{1}{2})+k\pi$, де $k\in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}+k\pi$, де $k\in Z$; $-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$, де $k\in Z$.

2. Розв'язати рівняння: $\sin x\cdot\cos x+3\sin^2x+4\cos^2x=3$.

Розв'язання. Замітимо, що $3=3\cdot1=3\cdot(\cos^2x+\sin^2x)$, маємо однорідне рівняння $\sin x\cos x+3\sin^2x+4\cos^2x=3\cos^2x+3\sin^2x$ або $\sin x\cos x+\cos^2x=0$. Тому що $\sin x\neq 0$, то поділимо на $\sin^2x$, одержимо:

$$\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}^2x=0 \Leftrightarrow \mathrm{ctg}x(\mathrm{ctg}x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{ctg}x=0\\ \mathrm{ctg}x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z\end{array}\right.$$

Можна інакше,

$$\sin x\cos x+\cos^2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x(\sin x+\cos x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \operatorname{tg} x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\end{array}\right.$$

3. Розв'язати рівняння: $\cos 5x + \sin 5x = 0$.

Розв'язання. $\sin 5x = -\cos 5x$, оскільки значення x при яких $\cos 5x = 0$ не є коренями вихідного рівняння, то поділимо обидві частини на $\cos 5x$, одержимо рівняння рівносильне даному

$$\operatorname{tg} 5x = -1 \quad \text{або} \quad 5x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{або} \quad x = -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}, \text{ де } k \in Z.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}$, де $k \in Z$.

2.5.6 Рівняння вигляду $a\sin\omega x + b\cos\omega x = c$ (a, b, c≠0).

Такі рівняння називаються лінійними відносно $\sin\omega x$ і $\cos\omega x$, і можуть бути розв'язані різними методами. Покажемо деякі з них на конкретних прикладах.

<u>1-й метод.</u> Введення допоміжного кута.

Розв'язати рівняння : $3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$

Розв'язання. Тут $a = 3$; $b = -\sqrt{3}$; $c = \sqrt{3}$; $\omega = 2$. Поділимо почленно обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, одержимо: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot$ $\cdot\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$. Далі вводимо допоміжний кут φ - який є одним із розв'язків системи $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$, тобто $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ і застосовуємо формулу синусів суми кутів (аргументів):

$\cos(-\frac{\pi}{6})\sin 2x + \sin(-\frac{\pi}{6})\cos 2x = \frac{1}{2}$; або $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Звідки $2x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k$ $\cdot\arcsin(\frac{1}{2}) + k\pi$ або $x = \frac{\pi}{12} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

Відповідь: $x=\frac{(2n+1)\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in Z$.

<u>2-й метод.</u> Застосування універсальної підстановки $tg(\frac{\omega x}{2})=U$.

Слід врахувати, що $\sin\omega x=\frac{2tg\frac{\omega x}{2}}{1+tg^2\frac{\omega x}{2}}=\frac{2U}{1+U^2}$; $\cos\omega x=\frac{1-tg^2\frac{\omega x}{2}}{1+tg^2\frac{\omega x}{2}}=\frac{1-U^2}{1+U^2}$.

Розв'яжемо попереднє рівняння. При $\omega=2$, маємо $U=tgx$; $\sin 2x=\frac{2U}{1+U^2}$;

$\cos 2x=\frac{1-U^2}{1+U^2}$. Підставляючи в рівняння, одержимо $\frac{6U}{1+U^2}-\sqrt{3}\frac{1-U^2}{1+U^2}$ або

$6U-\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot U^2=\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot U^2$ або $U=\frac{\sqrt{3}}{3}$, тобто $tgx=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Звідки

$x=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}+n\pi, n\in Z$ або $x=\frac{\pi}{6}+n\pi, n\in Z$. При переході до нового рівняння ОДЗ звузилась, оскільки tgx невизначений при $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in Z$.

ОДЗ вихідного рівняння ці значення включає, тому робимо перевірку щодо цих значень:

$$2\sin 2(\frac{\pi}{2}+n\pi)-\sqrt{3}\cos 2(\frac{\pi}{2}+n\pi)=2\cdot 0-\sqrt{3}\cos\pi\equiv\sqrt{3}$$ – істина.

Значить при даному способі були втрачені корені $x=\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi}{2}(2n+1), n\in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $\frac{\pi}{6}+n\pi$; $n\in Z$.

<u>3 метод.</u> Зведення даного рівняння до однорідного відносно $\sin\frac{\omega x}{2}$, $\cos\frac{\omega x}{2}$ (модифікація універсальної підстановки).

Розв'язати рівняння: $3\cos x+4\sin x=5$.

Розв'язання.

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right);$$

$$\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2};$$

$$1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}.$$

Підставивши в рівняння отримаємо:

$$3(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) + 8\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 5(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}) \text{ або } 4\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} +$$

$$+\cos^2\frac{x}{2} = 0; \left[:\cos^2\frac{x}{2}\right] \quad \left(\cos^2\frac{x}{2} \neq 0\right)$$

Тобто

$$4\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 4\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2\mathrm{arctg}(\frac{1}{2}) + 2k\pi, k \in Z.$$

4 метод. Зведення до рівняння, яке містить тригонометричну функцію одного найменування, одного й того ж аргументу.

Оскільки $\cos 2x = \sqrt{1 - \sin^2 2x}$, то перше рівняння можна записати:

$$-\sqrt{3}\cdot\sqrt{1 - \sin^2 2x} = \sqrt{3} - 3\sin 2x \quad \text{або}$$

$$3(1 - \sin^2 2x) = 3 - 6\sqrt{3}\cdot\sin 2x + 9\sin^2 2x \quad \text{або}$$

$$12\sin^2 2x - 6\sqrt{3}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z. \\ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z. \end{array}\right.$$

Проте тут, як і при розв'язанні ірраціональних рівнянь можуть з'являтися сторонні корені. Дійсно, в групі коренів $x = \frac{k\pi}{2}$ є сторонні, про що свідчить перевірка і при k=2n, $x=n\pi$ маємо

$3\sin(2n\pi) - \sqrt{3}\cos(2n\pi) = -\sqrt{3} \neq \sqrt{3}$. А в групі коренів

$x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, сторонні корені з'являються при k=2n+1, дійсно:

$$3\sin 2\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2}\right)-\sqrt{3}\cos 2\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2}\right)=3\sin(-\frac{\pi}{3}+\pi)-$$

$$-\sqrt{3}\cos(-\frac{\pi}{3}+\pi)=3\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}=3\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\neq\sqrt{3}.$$

Відповідь: $\frac{(2n-1)\cdot\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}+n\pi, n\in Z.$

2.6 Тригонометричні нерівності

Нерівності вигляду: $T(x)\ \ V0$ або $T(ax+b)V0$, (де $T:=\sin;\cos;tg;ctg;$ $V:=<$ або $>$) називаються найпростішими.

Поряд з строгими нерівностями $T(x)V0$ будемо розглядати і нестрогі нерівності $T(x)V|0$.

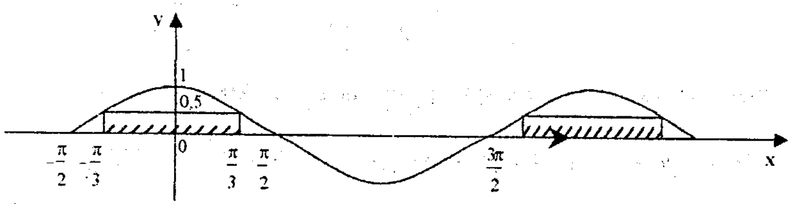
При розв'язанні складних нерівностей їх стараються звести до найпростіших.

Найпростіші нерівності розв'язуються за допомогою дуг геометричного кола або використовують графіки відповідних функцій. При цьому враховується періодичність відповідних функцій.

Приклади.

1. Розв'язати нерівність $\cos x>0,5$.

<u>1 спосіб</u>. Будуємо графіки функцій $y=\cos x$ і $y=0,5$.



Оскільки період функції $y=\cos x$ дорівнює 2π, то розглянемо відрізок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ довжиною 2π. Знайдемо корені рівняння $\cos x=0,5$, які належать цьому відрізку, $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ графік функції y=cosx знаходиться вище графіка прямої y=0,5, тому всі $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ є розв'язками нерівності cosx > 0,5.

В силу періодичності функції y=cosx такі проміжки будуть повторюватись через 2π періода. Тому:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z.$$

2 спосіб. Будуємо в системі координат XOY одиничне коло. На осі Ох будуємо точку А з абсцисою 0,5 і проводимо через точку А пряму паралельно осі Оу, яка перетинає коло в двох точках В і С. Їх косинуси дорівнюють 0,5; тому що їх абсциси 0,5.

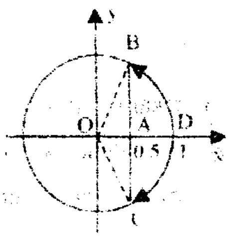


Рисунок 1

Нерівність задовольняють точки, абсциси яких більші 0,5, тобто лежать справа від точки А. Їм відповідає виділена на рисунку (Рис.1) дуга кола. Тобто $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$. З урахуванням періодичності одержимо:

$$2\pi k - \frac{\pi}{3} < x < 2\pi k + \frac{\pi}{3}, k \in Z.$$

2. Розв'язати нерівність $2\sin(3x - \frac{\pi}{4}) < 1$.

Розв'язання. Зробимо заміну $t = 3x - \frac{\pi}{4}$ і будемо розв'язувати найпростішу нерівність $2\sin t < 1 \Leftrightarrow \sin t < \frac{1}{2}$.

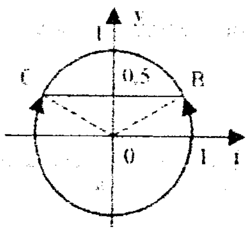


Рисунок 2

На осі ординат відкладемо відрізок 0,5 і через точку проводимо пряму перпендикулярну до осі Оу. Нерівність задовольняють точки, ординати яких менші 0,5. Граничні значення знаходимо виходячи з розв'язування рівняння $\sin t = \frac{1}{2}$, тобто $t = \frac{\pi}{6}$. З

рисунка: $\pi - \frac{\pi}{6} < t < 2\pi + \frac{\pi}{6}$ або $\frac{5\pi}{6} < t < \frac{13\pi}{6}$ і періодичності $2k\pi + \frac{5\pi}{6} < t < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$. Звідки $2k\pi + \frac{5\pi}{6} < 3x - \frac{\pi}{4} < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi$ або $\frac{\pi}{36} \cdot (24k + 13) < x < \frac{\pi}{36} \cdot (24k + 29),\ k \in Z.$

3. Розв'язати нерівність $tgx < \frac{1}{3}$.

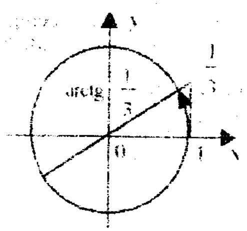


Рисунок 3

Розв'язання. В декартовій системі координат будуємо одиничне коло з центром в початку координат. Проводимо дотичну до кола через точку (1,0) і вверх від цієї точки відклядаємо відрізок довжиною $\frac{1}{3}$. З'єднуємо кінець відрізка з центром одиничного кола. З рисунка 3 видно, що $-\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, а з урахуванням періодичності функції tgx маємо:

$n\pi - \frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + n\pi,\ n \in Z.$

4. Розв'язати нерівність $ctg4x > 5$.

Розв'язання. Покладемо $t = 4x$, одержимо нерівність $\operatorname{ctg} t > 5$. Будуємо в системі координат YoT одиничне коло. Проводимо дотичну до кола в точці (0;1) і вправо від точки (0;1) відкладаємо відрізок довжиною 5 одиниць. Кінець цього відрізка з'єднуємо з центром одиничного кола. З рисунка 4 видно, що $n\pi < t < n\pi + \operatorname{arctg} 5$ або

$$\frac{n\pi}{4} < x < \frac{n\pi}{4} + \frac{1}{4}arcctg5 \; n \in Z.$$

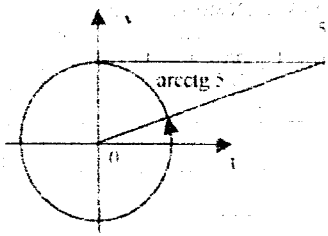


Рисунок 4

5. Розв'язати нерівність $4\sin^2 x - 11\operatorname{tg}x + \frac{2{,}5}{\cos^2 x} \geq 0.$

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$. Помножимо обидві частини нерівності на $2\cos^2 x > 0$, одержимо $2\sin^2 2x - 11\sin^2 2x + 5 \geq 0$. Покладемо sin2x=y, одержимо квадратичну нерівність: $2y^2 - 11y + 5 \geq 0$, яка має розв'язок $y \leq \frac{1}{2}$ або $y \geq 5$. Повертаючись до заміни одержимо $\sin 2x \geq 5 \Leftrightarrow \varnothing$ (оскільки $|\sin 2x| \leq 1$) або $\sin 2x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow k\pi + \frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{13\pi}{12} + k\pi, k \in Z$. З урахуванням ОДЗ маємо $k\pi + \frac{5\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ або $k\pi + \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{13\pi}{12} + k\pi, k \in Z$.

При розв'язанні складних нерівностей можна користуватись методом інтервалів.

6. Розв'язати нерівність: $\sin 2x > \sin x$.

Розв'язання. $(\sin 2x > \sin x) \Leftrightarrow (\sin 2x - \sin x > 0) \Leftrightarrow (2\sin x \cdot \cos x - \sin x > 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin x(2\cos x - 1) > 0)$.

Розглянемо функцію f(x)=sinx(2cosx-1), період якої дорівнює 2π.

Функція f(x) на інтервалі $(0;2\pi)$ має корені $x_1 = \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}$, які розбивають його на інтервали: $(0;\frac{\pi}{3}), (\frac{\pi}{3};\pi), (\pi;\frac{5\pi}{3}), (\frac{5\pi}{3};2\pi)$.

Для визначення знака на кожному інтервалі складаємо таблицю:

Інтервали	$(0;\frac{\pi}{3})$	$(\frac{\pi}{3};\pi)$	$(\pi;\frac{5\pi}{3})$	$(\frac{5\pi}{3};2\pi)$
sinx	+	+	—	—
2cosx-1	+	—	—	+
f(x)	+	—	+	—

З останнього рядка видно, що на інтервалі $(0;2\pi)$ дана нерівність має такі розв'язки: $(0;\frac{\pi}{3}), (\pi;\frac{5\pi}{3})$.

Враховуючи періодичність функції f(x) одержуємо відповідь:

$(2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k)\cup((2k+1)\pi;\frac{5\pi}{3}+2\pi k)$, де $k \in Z$.

2.7 Розв'язання типового варіанта

1 Обчислити без таблиць

а) $1/\sin 10° - 4\cos 20°$;

Розв'язання:

$1/\sin 10° - 4\cos 20° = (1 - 4\sin 10°\cos 20°)/\sin 10° = (1 - 4\times(1/2)(\sin 30° + \sin(-10°))) = 1 - 2(\sin 30° - \sin 10°)/\sin 10° = (1 - 2(1/2 - \sin 10°))/\sin 10° = (1 - 1 + 2\sin 10°)/\sin 10° = 2\sin 10°/\sin 10° = 2.$

Застосували формулу: $\sin\alpha\cos\beta = ½(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

б) $\cos 15°$;

Розв'язання:

$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30°$

$= \sqrt{2}/2 \times \sqrt{3}/2 + \sqrt{2}/2 \times 1/2 = (\sqrt{2}/4)(\sqrt{3} + 1)$.

в) $\mathrm{tg}9° - \mathrm{tg}27° - \mathrm{tg}63° + \mathrm{tg}81°$;

Розв'язання:

$\mathrm{tg}9° - \mathrm{tg}27° - \mathrm{tg}63° + \mathrm{tg}81° = (\mathrm{tg}9° + \mathrm{tg}81°) - (\mathrm{tg}27° + \mathrm{tg}63°) = (\sin 9°/\cos 9° + \sin 81°/\cos 81°) - (\sin 27°/\cos 27° + \sin 63°/\cos 63°) = (\sin 9°/\cos 9° + \cos 9°/\sin 9°) - (\sin 27°/\cos 27° + \cos 27°/\sin 27°) = (\sin^2 9° + \cos^2 9°)/(\sin 9°\cos 9°) - (\sin^2 27° + \cos^2 27°)/(\sin 27°\cos 27°) = 1/(\sin 9°\cos 9°) - 1/(\sin 27°\cos 27°) = 2/(2\sin 9°\cos 9°) - 2/(2\sin 27°\cos 27°) = 2/\sin 18° - 2/\sin 54°$

$2((\sin 54° - \sin 18°)/(\sin 18° \sin 54°)) = 2((2 \sin 18° \cos 36°)/(\sin 18° \sin 54°)) =$

$4(\cos 36°/\sin 54°) = 4(\sin 54°/\sin 54°) = 4.$

г) $tg396°tg486°$;

Розв'язання:

$tg396°tg486° = (\sin 396° \sin 486°)/(\cos 396° \cos 486°) = ½(\cos 90° - \cos 882°) /$

$/ ½(\cos 882° + \cos 90°) = -\cos 882°/\cos 882° = -1.$

д) $\sin^2 72\pi/36 - \cos^2 495°$;

Розв'язання:

$\sin^2(72\pi/36) - \cos^2 495° = \sin^2(2\pi) - \cos^2(450°+45°) = 0 - (-\sin 45°)^2 =$

$= -(-\sqrt{2}/2)^2 = -2/4 = -1/2.$

є) $\cos^2(\pi/2) + (\sin 210°)^2 - tg(9\pi/4) - \cos 4\pi$

Розв'язання:

$\cos^2(\pi/2) + (\sin 210°)^2 - tg(9\pi/4) - \cos 4\pi = 0 + (\sin(180° + 30°))^2 - tg(2\pi +$

$\pi/4) - 1 = = (-\sin 30°)^2 - tg(\pi/4) - 1 = (-1/2)^2 - 1 - 1 = 1/4 - 2 = -7/4 = -1\frac{3}{4}.$

ж) $\sin 755° \sin 145° + \cos 935° \cos 865° - ctg786°ctg924°$;

Розв'язання:

$\sin 755° \sin 145° + \cos 935° \cos 865° - ctg786°ctg924° = \sin(720° + 35°)\sin(180° -$

$35°) + +\cos(900° + 35°)\cos(900° - 35°) - ctg(720° + 66°)ctg(900° + 24°) =$

$\sin 35°\sin 35° + +(-\cos 35°)(-\cos 35°) - ctg66°ctg24° = \sin^2 35° + \cos^2 35°$ - $(\cos 66°\cos 24°)/(\sin 66°\sin 24°) = =1 - (½(\cos 90° + \cos 42°))/(½(\cos 42° - \cos 90°))$ $= 1 - \cos 42°/\cos 42° = 1 - 1 = 0.$

2 Спростити

а) $(3tg^2(\alpha/2) + 10tg(\alpha/2) + 3)/(1 + tg^2(\alpha/2)) - 5\sin\alpha$;

Розв'язання:

$(3tg^2(\alpha/2) + 10tg(\alpha/2) + 3)/(1 + tg^2(\alpha/2)) - 5\sin\alpha = ((3tg^2(\alpha/2) + 3) + 10tg(\alpha/2))/ /(1 + tg^2(\alpha/2)) - 5\sin\alpha = (3(tg^2(\alpha/2) + 1) + 10tg(\alpha/2))/(1 + tg^2(\alpha/2)) - 5\sin\alpha = 3 + +10((tg\alpha/2)/(1 + tg^2\alpha/2)) - 5\sin\alpha = 3 + 5((2\, tg\alpha/2)/(1 + tg^2\alpha/2)) - 5\sin\alpha = 3 + 5\sin\alpha - -5\sin\alpha = 3.$

б) $(\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta))/(2\sin^2\alpha\sin^2\beta) - ctg^2\alpha ctg^2\beta$;

Розв'язання:

$(\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta))/(2\sin^2\alpha\sin^2\beta) - ctg^2\alpha ctg^2\beta = ((\cos(\alpha + \beta))^2 + ((\cos(\alpha - \beta))^2)/(2\sin^2\alpha\sin^2\beta) - ctg^2\alpha ctg^2\beta = ((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2)/(2\sin^2\alpha\sin^2\beta) - ctg^2\alpha ctg^2\beta = (\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta + +\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta)/(2\sin^2\alpha\sin^2\beta) - ctg^2\alpha ctg^2\beta = (2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta)//(2\sin^2\alpha\sin^2\beta) - ctg^2\alpha ctg^2\beta = 1 + ctg^2\alpha ctg^2\beta - ctg^2\alpha ctg^2\beta = 1.$

в) $\cos^2 67°30' - \sin^2 67°30'$;

Розв'язання:

$\cos^2 67°30' - \sin^2 67°30' = \cos 2\times 67°30' = \cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° =$
$= -\sqrt{2}/2.$

г) $(\cos 40°\cos 10° + \sin 40°\sin 10°)/(\sin 65°\cos 5° - \sin 5°\cos 65°)$;

Розв'язання:

$(\cos 40°\cos 10° + \sin 40°\sin 10°)/(\sin 65°\cos 5° - \sin 5°\cos 65°) = \cos(40° - 10°)/$
$/\sin(65° - 5°) = \cos 30°/\sin 60° = 1.$

д) $(\cos\alpha + \sin\alpha)/\sqrt{2}$;

Розв'язання:

Поділивши почленно чисельник на знаменник і врахувавши, що $1/\sqrt{2}$ можна подати як $\sin(\pi/4)$ або $\cos(\pi/4)$, дістанемо:

$(\cos\alpha + \sin\alpha)/\sqrt{2} = (1/\sqrt{2})\cos\alpha + (1/\sqrt{2}2)\sin\alpha = \sin(\pi/4)\cos\alpha + \cos(\pi/4)$
$\sin\alpha = \sin(\pi/4 + \alpha).$

є) $2\cos^2(\pi/4 - \alpha/2) - \sin\alpha$;

Розв'язання:

$2\cos^2(\pi/4 - \alpha/2) - \sin\alpha = (2(1 + \cos 2(\pi/4 - \alpha/2))/2 - \sin\alpha =$
$= 1 + \cos(\pi/2 - \alpha) - \sin\alpha = = 1 + \sin\alpha - \sin\alpha = 1.$

ж) $\cos(\pi/3 + \beta) + \cos(\pi/3 - \beta)$;

Розв'язання:

$\cos(\pi/3 + \beta) + \cos(\pi/3 - \beta) = 2\cos((\pi/3 + \beta + \pi/3 - \beta)/2)\cos((\pi/3 + \beta - \pi/3 + + \beta)/2) = 2\cos(\pi/3)\cos\beta = 2\times(1/2)\cos\beta = \cos\beta$.

з) $\sin^2(\alpha + \pi/4) - \cos^2(\alpha + \pi/4)$;

Розв'язання:

$\sin^2(\alpha + \pi/4) - \cos^2(\alpha + \pi/4) = -(\cos^2(\alpha + \pi/4) - \sin^2(\alpha + \pi/4)) = -\cos2(\alpha + \pi/4) = -\cos(2\alpha + \pi/2) = -(\cos2\alpha\cos(\pi/2) - \sin2\alpha\sin(\pi/2)) =$
$= -(0 - \sin2\alpha) = \sin2\alpha$.

3 Довести тотожності

а) $\cos^4x = (3 + 4\cos2x + \cos4x)/8$;

Розв'язання:

$\cos^4x = (8\cos^4x)/8 = (2\times2^2(\cos^2x)^2)/8 = (2(2\cos^2x)^2)/8 = (2(1 + \cos2x)^2)/8 = (2(1 + +2\cos2x + \cos^22x))/8 = (2 + 4\cos2x + 2\cos^22x)/8 =$
$= (2 + 4\cos2x + 1 + \cos4x)/8 = (3+ +4\cos2x + \cos4x)/8$.

Тотожність доведено.

б) $(tg(45° + x) - tg(45° - x))/(tg(45° + x) + tg(45° - x)) = \sin 2x$.

Розв'язання:

Застосувавши формули $tg\alpha + tg\beta = (\sin(\alpha + \beta)/\cos\alpha\cos\beta)$, $tg\alpha - tg\beta =$ $= (\sin(\alpha - \beta)/\cos\alpha\cos\beta)$ матимемо:

$(tg(45° + x) - tg(45° - x))/(tg(45° + x) + tg(45° - x)) = ((\sin(45° + x - 45° + x)/ /(\cos(45° + x)\cos(45° - x))/((\sin(45° + x + 45° - x)/(\cos(45° + x)\cos(45° - x)) = \sin 2x/\sin 90° = (\sin 2x)/1 = \sin 2x$.

Тотожність доведено.

в) $\cos 5° + \cos 15° + \cos 25° - 1/4\sin 5° = 0$.

Розв'язання:

Позбавившись від знаменника, дістанемо:

$4\sin 5°\cos 5° + 4\sin 5°\cos 15° + 4\sin 5°\cos 25° - 1 = 0$.

Застосувавши формули подвійного аргументу і перетворення добутку в суму, матимемо:

$2\sin 10° + 4\times(1/2)[\sin(5° + 15°) + \sin(5° - 15°)] + 4\times(1/2)[\sin(5° + 25°) + +2\sin 10° + +2\sin 20° - 2\sin 10° + 2\sin 30° - 2\sin 20° - 1 = 0$.

Остаточно дістанемо:

$2\sin 30° - 1 = 0$, або $2\times(1/2) - 1 = 0$.

Тотожність доведено.

г) $\cos(3/2\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha) = 4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$;

Розв'язання.

$\cos(3/2\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha) = \sin 4\alpha + \sin 8\alpha + \sin 12\alpha =$
$= 2\sin 6\alpha\cos 2\alpha + \sin 12\alpha = 2\sin 6\alpha\cos 2\alpha + \sin 2(6\alpha) = 2\sin 6\alpha\cos 2\alpha +$
$+ 2\sin 6\alpha\cos 6\alpha = 2\sin 6\alpha(\cos 2\alpha + \cos 6\alpha) = 2\sin 6\alpha 2\cos 4\alpha\cos 2\alpha =$
$4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$.

Тотожність доведено.

4 Розв'язати тригонометричні рівняння

а) $2\cos^2 2x + 7\cos 2x - 4 = 0$;

Розв'язання:

$\cos 2x = y$;

$2y^2 + 7y - 4 = 0$;

$y = (-7 \pm \sqrt{49} + 32)/4 = (-7 \pm 9)/4$;

$y_1 = -4$; $y_2 = ½$.

y_1 - сторонній корінь, $-1 \le \cos x \le 1$;

$\cos 2x = S$;

$2x = \pm \arccos 1/2 + 2\pi k$, $k \in z$.

$2x = \pm \pi/3 + 2\pi k$, $k \in z$.

$x = \pm \pi/6 + \pi k, \quad k \in z.$

б) $6\sin^2 2x + 5\cos 2x - 7 = 0;$

Розв'язання:

$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x;$

$6 - 6\cos^2 2x + 5\cos 2x - 7 = 0;$

$-6\cos^2 2x + 5\cos 2x - 1 = 0;$

$6\cos^2 2x - 5\cos 2x + 1 = 0;$

$\cos 2x = y;$

$6y^2 - 5y + 1 = 0;$

$y = (5 \pm \sqrt{25 - 24})/12 = (5 \pm 1)/12$

$y_1 = 1/2; \quad y_2 = 1/3;$

1) $\cos 2x = 1/2;$

$2x = \pm \arccos(1/2) + 2\pi k, k \in z;$

$2x = \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in z;$

$x = \pm \pi/6 + \pi k, k \in z;$

2) $\cos 2x = 1/3;$

$2x = \pm \arccos 1/3 + 2\pi k, k \in z;$

$x = \pm 1/2\arccos 1/3 + \pi k. k \in z.$

в) $\sin^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + 3\cos^4 x = 0;$

Розв'язання:

$\cos^4 \neq 0;$

$tg^4 x - 4tg^2 x + 3 = 0;$

$y^4 - 4y^2 + 3 = 0;$

$(y^2 - 1)(y^2 - 3) = 0;$

$y_{1,2} = \pm 1; \quad y_{3,4} = \pm \sqrt{3};$

1) $tgx = \pm 1$;

$x = arctg(\pm 1) + \pi k,\ k \in z$;

$x = \pm \pi/4 + \pi k,\ k \in z$;

2) $tgx = \pm\sqrt{3}$;

$x = arctg(\pm\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in z$;

$x = \pm\pi/3 + \pi k,\ k \in z$.

г) $sinxcosx + 3sin^2x + 4cos^2x = 3$;

Розв'язання:

$sinxcosx + 3sin^2x + 4cos^2x - 3 = 0$;

$sinxcosx + 3sin^2x + 4cos^2x - 3(cos^2x + sin^2x) = 0$;

$sinxcosx + 3sin^2x + 4cos^2x - 3cos^2x - 3sin^2x = 0$;

$sinxcosx + cos^2x = 0$;

$cosx(sinx + cosx) = 0$;

1) $cosx = 0$;

$x = \pi/2 + \pi k,\ k \in z$;

2) $sinx + cosx = 0$;

$cosx \neq 0$;

$tgx + 1 = 0$;

$tgx = -1$;

$x = arctg(-1) + \pi k,\ k \in z$;

$x = -\pi/4 + \pi k,\ k \in z$.

д) $\sqrt{3}sinx + cosx = 1$;

Розв'язання:

Поділимо на $\sqrt{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2\right)} = \sqrt{4} = 2$ ліву і праву частину рівняння.

$(\sqrt{3}/2)\sin x + (1/2)\cos x = 1/2;$ $\qquad \sqrt{3}/2 = \cos 30°, \quad 1/2 = \sin 30°;$

$\sin x\cos 30° + \sin 30°\cos x = 1/2;$

$\sin(x + 30°) = 1/2;$

$x + 30° = (-1)^k \arcsin(1/2) + \pi k,\ k\in z;$

$x + \pi/6 = (-1)^k \pi/6 + \pi k,\ k\in z;$

$x = (-1)^k \pi/6 - \pi/6 + \pi k,\ k\in z;$

Якщо, $k = 2m$, $m = 0; \pm1; \pm2;\ldots$, то $x = 2\pi m,\ m\in z.$

Якщо, $k = 2m + 1$, $m = 0; \pm1; \pm2;\ldots$, то

$x = -\pi/6 - \pi/6 + \pi(2m + 1),\ m\in z;$

$x = -\pi/3 + 2\pi m + \pi,\ m\in z;$

$x = 2\pi/3 + 2\pi m,\ m\in z.$

є) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x;$

Розв'язання:

$\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x = 0;$

Згрупуємо перший і третій члени даного рівняння і розкладемо цю різницю на множники:

$(\sin^2 x - \sin^2 3x) + \sin^2 2x = 0;$

$(\sin x + \sin 3x)(\sin x - \sin 3x) + \sin^2 2x = 0;$

$2\sin 2x\cos x \times 2\cos 2x\sin(-x) + \sin^2 2x = 0;$

$-2\sin 2x\cos 2x \times 2\sin x\cos x + \sin^2 2x = 0;$

$-2\sin 2x\cos 2x\sin 2x + \sin^2 2x = 0;$

$- 2\sin^2 2x\cos 2x + \sin^2 2x = 0;$

$\sin^2 2x(1 - 2\cos 2x) = 0;$

1) $\sin^2 2x = 0;$

$\sin 2x = 0;$

$2x = \pi k, k \in z;$

$x = \pi k/2, k \in z;$

2) $1 - 2\cos 2x = 0;$

$- 2\cos 2x = -1;$

$\cos 2x = 1/2;$

$2x = \pm \arccos(1/2) + 2\pi k, k \in z;$

$2x = \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in z;$

$x = \pm \pi/6 + \pi k, k \in z.$

ж) $\cos^2 2x + \cos^2 3x = \cos^2 5x + \cos^2 4x;$

Розв'язання:

Застосуємо формули пониження степеня:

$\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2;$ $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2.$

$(1 + \cos 4x)/2 + (1 + \cos 6x)/2 = (1 + \cos 10x)/2 + (1 + \cos 8x)/2;$

$\cos 4x + \cos 6x = \cos 10x + \cos 8x;$

$2\cos 5x\cos x = 2\cos 9x\cos x;$

$\cos 5x\cos x - \cos 9x\cos x = 0;$

$\cos x(\cos 5x - \cos 9x) = 0;$

$\cos x \times 2\sin 7x\sin 2x = 0;$

$\sin 2x\sin 7x\cos x = 0;$

1) $\sin 2x = 0;$

$2x = \pi k, k \in z;$

$x = \pi k/2, k \in z;$

2) $\sin 7x = 0;$

$7x = \pi k, k \in z;$

$x = \pi k/7, k \in z;$

3) $\cos x = 0;$

$x = \pi/2 + \pi k, k \in z.$

з) $\sin x = \cos 2x$;

Розв'язання:

$\sin x - \cos 2x = 0$;

$\sin x - \sin(\pi/2 - 2x) = 0$;

$2\sin(1/2)(3x - \pi/2)\cos(1/2)(\pi/2 - x) = 0$;

$\sin(1/2)(3x - \pi/2)\cos(1/2)(\pi/2 - x) = 0$;

1) $\sin(3x - \pi/2)/2 = 0$;

$\frac{1}{2}(3x - \pi/2) = \pi k,\ k \in z$;

$3x - \pi/2 = 2\pi k,\ k \in z$;

$3x = \pi/2 + 2\pi k,\ k \in z$;

$x = \pi/6 + 2\pi k/3,\ k \in z$;

2) $\cos(1/2)(\pi/2 - x) = 0$;

$\cos(1/2)(x - \pi/2) = 0$;

$\frac{1}{2}(x - \pi/2) = \pi/2 + \pi k,\ k \in z$;

$x - \pi/2 = \pi + 2\pi k,\ k \in z$;

$x = 3\pi/2 + 2\pi k,\ k \in z$.

Відповідь можна записати однією формулою:

$x = \pi/6 + (2\pi k)/3,\ k \in z$.

і) $\text{tg}2x + \text{tg}4x = \text{tg}5x + \text{tg}x$

Розв'язання:

Застосуємо формулу: $\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta = (\sin(\alpha + \beta))/(\cos\alpha\cos\beta)$.

$\sin 6x/(\cos 2x\cos 4x) = \sin 6x/(\cos 5x\cos x)$;

$(\sin 6x(\cos 5x\cos x - \cos 2x\cos 4x))/(\cos 2x\cos 4x\cos 5x\cos x) = 0$;

$\cos 2x \neq 0,\quad \cos 4x \neq 0,\quad \cos 5x \neq 0,\ \cos x \neq 0$;

$\sin6x(\cos5x\cos x - \cos2x\cos4x) = 0;$

$\sin6x((1/2)(\cos6x + \cos4x) - (1/2)(\cos6x + \cos2x)) = 0;$

$(1/2)\sin6x(\cos6x + \cos4x - \cos6x - \cos2x) = 0;$

$\sin6x(\cos4x - \cos2x) = 0;$

$\sin6x\times2\sin3x\sin(-x) = 0;$

$-2\sin6x\sin3x\sin x = 0;$

$\sin6x\sin3x\sin x = 0;$

1) $\sin x = 0;$ $x = \pi k, k\in z;$

2) $\sin3x = 0;$ $3x = \pi k, k\in z;$ $x = \pi k/3, k\in z;$

3) $\sin6x = 0;$ $6x = \pi k, k\in z;$ $x = \pi k/6, k\in z.$

Відповідь можна записати однією формулою: $x = \pi k/6, k\in z.$

к) $2\sin3x = 3\cos x + \cos3x;$

Розв'язання:

$2(3\sin x - 4\sin^3x) = 3\cos x + 4\cos^3x - 3\cos x;$

$6\sin x - 8\sin^3x = 3\cos x + 4\cos^3x - 3\cos x;$

$6\sin x - 8\sin^3x = 4\cos^3x;$

$6\sin x - 8\sin^3x - 4\cos^3x = 0;$

Поділимо ліву і праву частину рівняння на $2\cos^3x \neq 0$, одержимо:

$3\text{tg}x/\cos^2x - 4\text{tg}^3x - 2 = 0;$

Застосуємо формулу: $\cos^2x = 1/(1 + \text{tg}^2x);$

$3tgx(1 + tg^2x) - 4tg^3x - 2 = 0;$

$3tgx + 3tg^3x - 4tg^3x - 2 = 0;$

$tg^3x - 3tgx + 2 = 0;$

$tg^3x - tg^2x + tg^2x - 3tgx + 2 = 0;$

$tg^2x(tgx - 1) + (tgx - 1)(tgx - 2) = 0;$

$(tgx - 1)(tg^2x + tgx - 2) = 0;$

$(tgx - 1)(tgx - 1)(tgx + 2) = 0;$

$(tgx - 1)^2(tgx + 2) = 0;$

1) $(tgx - 1)^2 = 0;$

$tgx - 1 = 0;$

$tgx = 1;$

$x = arctg1 + \pi k, k \in z;$

$x = \pi/4 + \pi k, k \in z.$

2) $tgx + 2 = 0;$

$tgx = -2;$

$x = arctg(-2) + \pi k, k \in z;$

$x = -arctg2 + \pi k, k \in z;$

л) $\sin 5x\cos 3x = \sin 8x\cos 6x;$

Розв'язання:

$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 14x + \sin 2x);$

$\sin 8x - \sin 14x = 0;$

Застосуємо формулу: $\sin\alpha - \sin\beta = (2\cos(\alpha + \beta)/2)(\sin(\alpha - \beta)/2).$

$-2\cos 11x\sin 3x = 0;$

$\cos 11x\sin 3x = 0;$

1) $\cos 11x = 0;$

$11x = \pi/2 + \pi k, k \in z;$

$x = \pi/22 + \pi k/11, k \in z;$

2) $\sin 3x = 0;$

$3x = \pi k, k \in z;$

$x = \pi k/3, k \in z.$

м) $\cos 2x - \cos 6x = \sin 3x + \sin x$;

Розв'язання:

Застосуємо формулу: $\cos\alpha - \cos\beta = (2\sin(\alpha + \beta)/2)(\sin(\beta - \alpha)/2)$;

$\sin\alpha + \sin\beta = (2\sin(\alpha + \beta)/2)(\cos(\alpha - \beta)/2)$.

$2\sin 4x\sin 2x = 2\sin 2x\cos x$;

$\sin 4x\sin 2x - \sin 2x\cos x = 0$;

$\sin 2x(\sin 4x - \cos x) = 0$; $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$;

$\sin 2x(\sin 4x - \sin(\pi/2 - x)) = 0$;

$\sin 2x \times 2\cos(3/2x + \pi/4)\sin(5/2x - \pi/4) = 0$;

$\sin 2x \times \cos(3/2x + \pi/4)\sin(5/2x - \pi/4) = 0$;

1) $\sin 2x = 0$; 2) $\cos(3/2x + \pi/4) = 0$; 3) $\sin(5/2x - \pi/4) = 0$;

$2x = \pi k, k \in z$; $3x/2 + \pi/4 = \pi/2 + \pi k, k \in z$; $5x/2 - \pi/4 = \pi k,$

$k \in z$;

$x = \pi k/2, k \in z$; $3x/2 = \pi/2 - \pi/4 + \pi k, k \in z$; $5x/2 = \pi/4 + \pi k,$

$k \in z$;

$3x/2 = \pi/4 + \pi k, k \in z$; $x = \pi/10 + 2\pi k/2,$

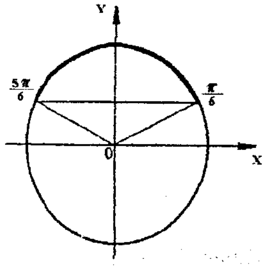
$k \in z$;

$x = \pi/6 + 2\pi k/3, k \in z$.

5 Розв'язати тригонометричні нерівності

а) $\sin x > ½$;

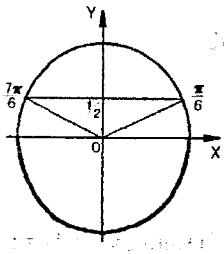
Розв'язання:



$\pi/6 + 2\pi k < x < 5\pi/6 + 2\pi k,\ k \in z.$

б) $\sin x < ½$;

Розв'язання:



$-7\pi/6 + 2\pi k < x < \pi/6 + 2\pi k,\ k \in z.$

в) $\cos x \le -1$;

Розв'язання:

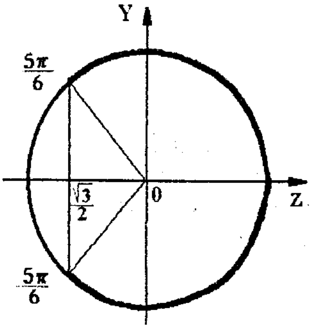
Оскільки при будь-якому x, $\cos x \ge -1$, то дану нерівність задовольняють тільки ті значення x, при яких косинус дорівнює -1.

$$x = \pi + 2\pi k,\ k \in z.$$

г) $\cos 3x > -\sqrt{3}/2$;

Розв'язання:

Нехай $z = 3x$, тоді $\cos z > -\sqrt{3}/2$;



$-5\pi/6 + 2\pi k < z < 5\pi/6 + 2\pi k,\ k \in z;$

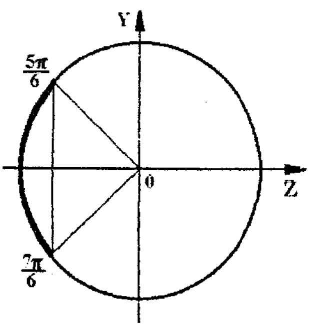
$-5\pi/6 + 2\pi k < 3x < 5\pi/6 + 2\pi k,\ k \in z;$

$-5\pi/18 + 2\pi k/3 < x < 5\pi/18 + 2\pi k/3, \quad k \in z.$

д) $\cos x \le -\sqrt{3}/2$;

Розв'язання:

Нехай $z = 3x$, тоді $\cos z \le -\sqrt{3}/2$;



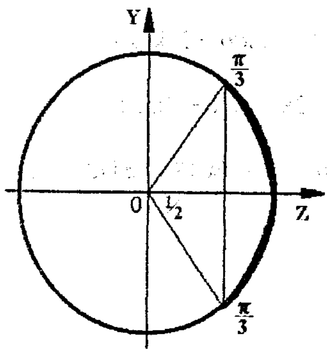
$5\pi/6 + 2\pi k \le z \le 7\pi/6 + 2\pi k,\ k \in z;$

$5\pi/18 + 2\pi k/3 \le 3x \le 7\pi/18 + 2\pi k/3,$
$k \in z.$

є) $\cos\pi/6 \cos x + \sin\pi/6 \sin x \ge S$;

Розв'язання:

Нехай $x - \pi/6 = z$, тоді $\cos z \geq 1/2$;



$-\pi/3 + 2\pi k \leq z \leq \pi/3 + 2\pi k,\ k \in z$;
$-\pi/3 + 2\pi k \leq x - \pi/6 \leq \pi/3 + 2\pi k,\ k \in z$;
$-\pi/3 + \pi/6 + 2\pi k \leq x \leq \pi/3 + \pi/6 + 2\pi k,\ k \in z$;
$-\pi/6 + 2\pi k \leq x \leq \pi/2 + 2\pi k,\ k \in z$.

ж) $\cos 6x - 5/2 < 2\sqrt{3}\sin 3x$;

Розв'язання:

Застосуємо формулу: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$\cos 2\times 3x - 5/2 < 2\sqrt{3}\ (\sin 3x)$;

$1 - 2\sin^2 3x - 5/2 < 2\sqrt{3}\ (\sin 3x)$;

$-2\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\ (\sin 3x) - 3/2 < 0$;

$2\sin^2 3x + 2\sqrt{3}\ (\sin 3x) + 3/2 > 0$;

$2(\sin 3x + \sqrt{3}/2)^2 > 0$;

$\sin 3x \neq -\sqrt{3}/2$;

$3x \neq (-1)^k \arcsin(-\sqrt{3}/2) + \pi k,\ k \in z$;

$3x = (-1)^k(-\pi/3) + \pi k,\ k \in z;$

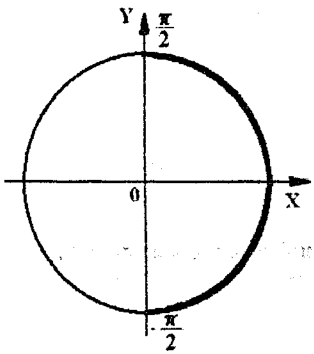
$3x \neq (-1)^{k+1}(\pi/3) + \pi k,\ k \in z;$

$x \neq (-1)^{k+1}(\pi/9) + \pi k/3,\ k \in z.$

з) $\cos^2 x - 3\cos x < 0;$

Розв'язання:

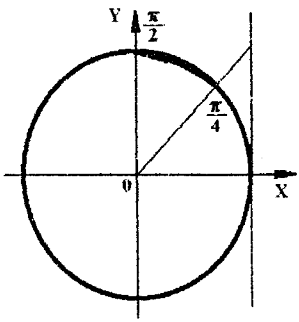
Розкладемо ліву частину нерівності на множники $\cos x(\cos x - 3) < 0$. Враховуючи, що $\cos x - 3 < 0$ при всіх значеннях x, одержимо $\cos x > 0$.



$-\pi/2 + 2\pi k < x < \pi/2 + 2\pi k,\ k \in z.$

і) $\operatorname{tg} x > 1;$

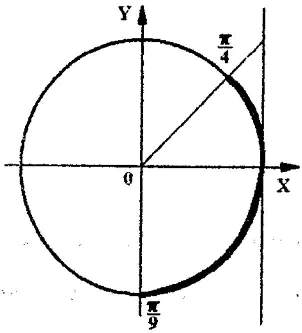
Розв'язання:



$\pi/4 + \pi k < x < \pi/2 + \pi k,\ k \in z.$

к) $\text{tg}x \le 1$;

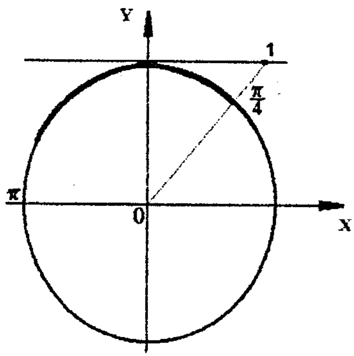
Розв'язання:



$-\pi/2 + \pi k < x \le \pi/4 + \pi k,\ k \in z.$

л) $\text{ctg}x < 1$;

Розв'язання:



$\pi/4 + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in z.$

м) $\text{ctg}2x > \sqrt{3}$

Розв'язання:

$\pi k < 2x < \text{arctg}\sqrt{3} + \pi k,\ k \in z;$

$\pi k < 2x < \pi/6 + \pi k,\ k \in z;$

$\pi k/2 < x < \pi/12 + \pi k/2,\ k \in z.$

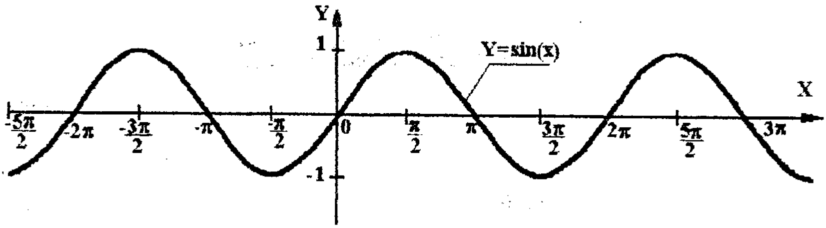
6 Побудувати графіки функцій

а) $y = 2\sin(2x - \pi/3)$;

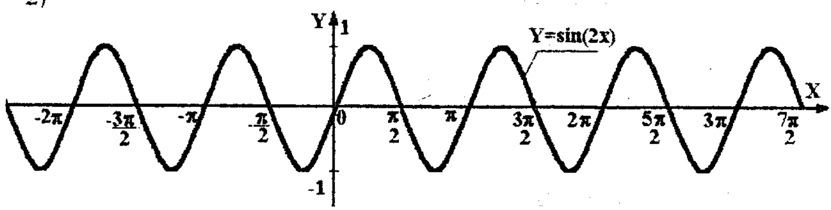
Розв'язання:

$y = 2\sin(2x - \pi/3) = 2\sin2(x - \pi/6)$;

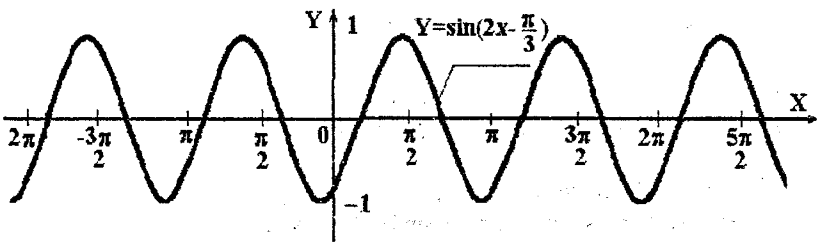
1)



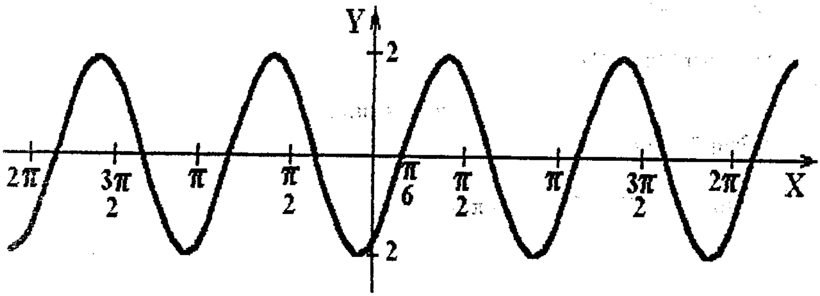
2)



3)



4) $y = 2\sin(2x - \pi/3)$



2.8 Завдання для типового варіанта

Відповідь:

1.1. $(tg9° + tg36°)/(1 - tg9°tg36°)$; 1.

1.2. $(1 + tg54°tg9°)/(tg54° - tg9°)$; 1.

1.3. $\sin(-18\pi + \pi/3)\cos(10\pi - 5\pi/6)tg(9\pi + \pi/4)$; - 0,75.

1.4. $\sin^2 402° + \sin^2 48° + tg^2 225°$; 2.

1.5. $\sin^2 99° + \cos^2 81° + ctg^2 315°$; 2.

1.6. $tg18°tg288° + \sin32°\sin148° - \sin302°\sin122°$; 0.

1.7. $\sin105°\cos15° + \cos75°\sin165° - tg25°tg245°$; 0.

1.8. $\sin335°\cos115° + \sin70°tg200° + \sin340° + \cos^2 25°$; 1.

1.9. $\sin150° + tg(7\pi/4) + \cos(31\pi/3) - \sin(-\pi/6)$; ½.

1.10. $(\sin 110^\circ \sin 250^\circ + \cos 540^\circ \cos 290^\circ \cos 430^\circ)/\cos^2 1260^\circ$; - 1.

1.11. $\mathrm{tg}^2 300^\circ - (\cos 300^\circ)^2 + \sin 150^\circ + \cos(7\pi/2)$; 3¼.

1.12. $3\sin(\pi/6) - 2\cos 30^\circ + 3\mathrm{tg}60^\circ - 4\mathrm{ctg}(\pi/2)$; $(3 + \sqrt{3})/2$.

1.13. $2\mathrm{tg}1950^\circ \cos(-510^\circ) - (1/2)\sin(-120^\circ)\mathrm{ctg}30^\circ$; 7/4.

1.14. $(1/2)\sin 300^\circ \mathrm{tg}(-690^\circ) + \mathrm{ctg}1200^\circ \sin 690^\circ + (1/2)\mathrm{tg}(-750^\circ)$; -1/4.

1.15. $\sin 450^\circ \cos 180^\circ + \mathrm{tg}405^\circ \mathrm{ctg}765^\circ + \cos 315^\circ \sin 405^\circ$; S.

1.16. $[2\mathrm{ctg}(-240^\circ)\cos(-1050^\circ) - \mathrm{tg}^2 40^\circ]\cos^2 40^\circ$; - 1.

1.17. $(\cos^2(-135^\circ) + \sin(-300^\circ))/(\mathrm{tg}(-225^\circ) + \cos(-240^\circ))$; $-(\sqrt{3} + 1)/3$.

1.18. $\mathrm{tg}18^\circ \mathrm{tg}288^\circ + \sin 32^\circ \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \sin 122^\circ$; 0.

1.19. $(6\cos^2(-240^\circ)\mathrm{ctg}210^\circ)/(\sin(-300^\circ)\cos^2 180^\circ)$; - 3.

1.20. $8\sin 510^\circ \cos(-300^\circ)\mathrm{tg}240^\circ$; $2\sqrt{3}$.

1.21. $2\sin^2 225^\circ - \mathrm{ctg}330^\circ \mathrm{tg}405^\circ$; $\sqrt{3} + 1$.

1.22. $(\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ)/(\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ)$; 1.

1.23. $(\cos 70°\cos 10° + \cos 80°\cos 20°)/(\cos 69°\cos 9° + \cos 81°\cos 21°)$; 1.

1.24. $\mathrm{ctg}70° + 4\cos 70°$; $\sqrt{3}$.

1.25. $(\cos 64°\cos 4° - \cos 86°\cos 26°)/(\cos 71°\cos 41° - \cos 49°\cos 19°)$; - 1.

1.26. $\cos 11(\pi/5) + \cos(2\pi/5)$; 1/2.

1.27. $\cos(11\pi/12) + \cos(5\pi/12)$; $-\sqrt{2}/2$.

1.28. $\cos(\pi/12) + \sin(7\pi/12)$; $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$.

1.29. $\sin^2 70° \qquad \sin^2 50°\sin^2 10°$; 1/64.

1.30. $1/\sin 10° - \sqrt{3}/\cos 10°$; 4.

2 Спростити вирази

Відповідь:

2.1. $(\mathrm{tg}^2(45° + \alpha) - 1)/(\mathrm{tg}^2(45° + \alpha) + 1)$;
$\sin 2\alpha$.

2.2. $\mathrm{tg}(\pi/4 + \alpha/2)((1 - \sin\alpha)/\cos\alpha)$; 1.

2.3. $(2\cos^2\alpha - 1)/(2\mathrm{tg}(\pi/4 - \alpha)\sin^2(\pi/4 + \alpha)$; 1.

2.4. $(\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha)/(\cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha)$; $\quad$ $\text{tg}3\alpha$.

2.5. $(\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha + \sin7\alpha)/(\cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha + \cos7\alpha)$; $\quad$ $\text{tg}4\alpha$.

2.6. $(\sqrt{2} - \sin\alpha - \cos\alpha)/(\sin\alpha - \cos\alpha)$; $\quad$ $\text{tg}(\alpha/2 - \pi/8)$.

2.7. $\cos4\alpha + 4\cos2\alpha + 3$; $\quad$ $8\cos^4\alpha$.

2.8. $(\sin4\alpha/(1 + \cos4\alpha))\times(\cos2\alpha/(1 + \cos2\alpha))$; $\quad$ $\text{tg}\alpha$.

2.9. $(\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha)/(\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4)$; $\quad$ $\text{tg}^4\alpha$.

2.10. $\sin^2(\pi/8 + \alpha/2) - \sin^2(\pi/8 - \alpha/2)$; $\quad$ $(1/\sqrt{2})\sin\alpha$.

2.11. $\sin\alpha + \sin\beta(\cos\alpha + \beta)$; $\quad$ $\cos\beta\sin(\alpha + \beta)$.

2.12. $\sin\alpha\cos3\alpha - \cos\alpha\sin3\alpha$; $\quad$ $-\sin2\alpha$.

2.13. $\cos4\alpha\cos\alpha + \sin4\alpha\sin\alpha$; $\quad$ $\cos3\alpha$.

2.14. $\cos(\alpha + \pi/6) + \cos(\alpha - \pi/6)$; $\quad$ $\sqrt{3}\cos\alpha$.

2.15. $\cos(\alpha + \pi/3) + \cos(\alpha - \pi/3)$; $\quad$ $-\sqrt{3}\sin\alpha$.

2.16. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$; $\quad$ $2\cos\alpha\cos\beta$.

2.17. $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$; $\quad - 2\sin\alpha\sin\beta$.

2.18. $\sin\alpha\sin\beta - \cos(\alpha - \beta)$; $\quad - \cos\alpha\cos\beta$.

2.19. $(\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha + \beta))/(\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta)$; $\quad \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta$.

2.20. $(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))/(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$; $\quad \mathrm{tg}\alpha$.

2.21. $(\sin(45° + \alpha) - \cos(45° + \alpha))/(\sin(45° + \alpha) + \cos(45° + \alpha))$; $\quad \mathrm{tg}\alpha$.

2.22. $(\sin(\alpha + \beta) - 2\sin\alpha\cos\beta)/(2\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha + \beta))$; $\quad \mathrm{tg}(\beta - \alpha)$.

2.23. $(2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta))/(\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\cos\beta)$; $\quad \mathrm{tg}(\alpha + \beta)$.

2.24. $(\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta)/(\sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)$; $\quad - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta$.

2.25. $\sin15° + \mathrm{tg}30°\cos15°$; $\quad \sqrt{6}/3$.

2.26. $\cos40° + \mathrm{tg}\alpha\sin40°$; $\quad (\cos(\alpha - 40°))/\cos\alpha$.

2.27. $\sin3\alpha + \mathrm{tg}(\pi/4)\cos3\alpha$; $\quad \sqrt{2}\sin(3\alpha + \pi/4)$.

2.28. $S(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)$; $\quad \cos(\alpha - 60°)$.

2.29. $\cos15° + \sqrt{3}\sin15°$; $\quad \sqrt{2}$.

2.30. $\sqrt{3}\cos(\pi/9) - \sin(\pi/9)$; $\quad 2\cos(5\pi/18)$.

3 Довести тотожності

3.1. а) $(\sin(\alpha - \beta))/(\cos\alpha\cos\beta) = \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta$;

б) $(\sin(\alpha + \beta))/(\sin\alpha\sin\beta) = \mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta$;

в) $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$;

3.2. а) $1/(1 - \mathrm{tg}^2\alpha) - 1/(1 - \mathrm{ctg}^2\alpha) = 1/\cos2\alpha$;

б) $1/(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) - 1/(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha) = \cos2\alpha$;

в) $(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)/(\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha) = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

3.3. а) $(\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)/(\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\beta) = \cos(\alpha - \beta)/\cos(\alpha + \beta)$;

б) $(\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta)/(\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta) = \sin(\alpha + \beta)/\sin(\beta - \alpha)$;

в) $(1 - 2\sin^2\alpha)/(1 + \sin2\alpha) = (1 - \mathrm{tg}\alpha)/(1 + \mathrm{tg}\alpha)$;

3.4. а) $\mathrm{tg}\alpha/(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha) = \sin^2\alpha$;

б) $\mathrm{ctg}\alpha/(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha) = \cos^2\alpha$;

в) $(\sqrt{2}\sin(2\alpha + \pi/2))/(\cos(2\alpha + \pi/4) + \cos(2\alpha - \pi/4)) = 1$;

3.5. а) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}2\alpha = 1/\sin2\alpha$;

б) $1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}2\alpha = 1/\cos2\alpha$;

в) $(\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha)/(1 + \mathrm{tg}2\alpha\mathrm{tg}\alpha) = 2\mathrm{ctg}2\alpha$;

3.6. а) $1 - \mathrm{tg}^2\alpha = \cos2\alpha/\cos^2\alpha$;

б) $\mathrm{ctg}^2\alpha - 1 = \cos2\alpha/\sin^2\alpha$;

в) $\sin^3\alpha(1 + \mathrm{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \mathrm{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

3.7. а) $(1 + \mathrm{tg}\alpha)/(1 - \mathrm{tg}\alpha) = \mathrm{tg}(\pi/4 + \alpha)$;

б) $(1 + \mathrm{ctg}\alpha)/(\mathrm{ctg}\alpha - 1) = \mathrm{ctg}(\pi/4 - \alpha)$;

в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$;

3.8. а) $\sin3\alpha/\sin\alpha - \cos3\alpha/\cos\alpha = 2$;

б) $\cos3\alpha/\cos\alpha - \sin3\alpha/\sin\alpha = -2$;

в) $(\cos\alpha + \sin\alpha)/(\cos\alpha - \sin\alpha) = \mathrm{tg}(45° + \alpha)$;

3.9. а) $(\cos\alpha - \cos3\alpha)/(\sin\alpha + \sin3\alpha) = \mathrm{tg}\alpha$;

б) $(\sin3\alpha - \sin\alpha)/(\cos3\alpha - \cos\alpha) = - \mathrm{ctg}2\alpha$;

в) $(1 - \cos2\alpha + \sin2\alpha)/(1 + \cos2\alpha + \sin2\alpha) = \mathrm{tg}\alpha$;

3.10. а) $(\sin\alpha + \sin2\alpha + \sin3\alpha)/(\cos\alpha + \cos2\alpha + \cos3\alpha) = \mathrm{tg}2\alpha$;

б) $(\sin3\alpha + \cos2\alpha - \sin\alpha)/(\cos\alpha + \sin2\alpha - \cos3\alpha) = \mathrm{ctg}2\alpha$;

в) $\sin\alpha/(1 + \cos\alpha) + (1 + \cos\alpha)/\sin\alpha = 2/\sin\alpha$;

3.11. а) $\sin3\alpha/\sin\alpha + \cos3\alpha/\cos\alpha = 4\cos2\alpha$;

б) $\cos3\alpha/\sin\alpha + \sin3\alpha/\cos\alpha = 2\mathrm{ctg}2\alpha$;

в) $\mathrm{tg}4\alpha - 1/\cos4\alpha = (\sin2\alpha - \cos2\alpha)/(\sin2\alpha + \cos2\alpha)$;

3.12. а) $(\sin4\alpha/\sin\alpha - \cos4\alpha/\cos\alpha)(1/\sin3\alpha + 1/\sin\alpha) = 4\mathrm{ctg}\alpha$;

б) $(\sin4\alpha/\cos\alpha + \cos4\alpha/\sin\alpha)(1/\cos3\alpha - 1/\cos\alpha) = 4\mathrm{tg}\alpha$;

в) $4\cos(\pi/6 - \alpha)\sin(\pi/3 - \alpha) = \sin3\alpha/\sin\alpha$;

3.13. а) $(\sin 3\alpha + \sin\alpha)/(\cos 3\alpha + \cos\alpha) = \sin 4\alpha/(1 + \cos 4\alpha)$;

б) $(\sin^3\alpha/2 - \sin\alpha/2)/(\cos^3\alpha/2 - \cos\alpha/2) = (1 + \cos\alpha)/\sin\alpha$;

в) $\cos(\pi/3 + \beta) + \cos(\pi/3 - \beta) = \cos\beta$;

3.14. а) $(1/\sin 2\alpha - 1/\sin 6\alpha)((\cos 7\alpha - \cos 5\alpha)/(\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha)) = 4\sin\alpha$;

б) $(1/\cos 3\alpha + 1/\cos\alpha)(1/\sin\alpha - 1/\sin 3\alpha) = 8\cos^2 2\alpha/\sin 6\alpha$;

в) $\cos 2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 0$;

3.15. а) $(1/\cos\alpha + 1/\cos 3\alpha)\times(1/(\sin\alpha + \sin 5\alpha)) = 2/\sin 6\alpha$;

б) $(1/\sin\alpha - 1/\sin 3\alpha)\times(1/(\cos\alpha + \cos 5\alpha)) = 2/\sin 6\alpha$;

в) $\sin^2(\alpha + \pi/4) - \cos^2(\alpha + \pi/4) = -\cos(2\alpha + \pi/2)$;

3.16. а) $\sin 2\alpha/(\sin\alpha + \sin 3\alpha)\times(\sin 3\alpha/(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha)) = 1/(2\sin 2\alpha)$;

б) $\cos 2\alpha/(\sin 3\alpha - \sin\alpha)\times(\cos 3\alpha/(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) = 1/(2\sin 2\alpha)$;

в) $\cos(3\pi - 2\alpha)/(1 - 2\sin^2(5\pi/4 + \alpha)) = \mathrm{ctg}\,2\alpha$;

3.17. а) $\sin 2\alpha/(\sin 3\alpha - \sin\alpha) - ((1 - \cos 2\alpha)/(\cos\alpha - \cos 3\alpha)) = (2\sin\alpha)/\sin 4\alpha$;

б) $\sin 2\alpha/(\cos\alpha + \cos 3\alpha) + (1 + \cos 2\alpha/(\sin\alpha - \sin 3\alpha) = (2\cos\alpha)/\sin 4\alpha$;

в) $\mathrm{tg}\,\alpha + \cos\alpha/(1 + \sin\alpha) = \sec\alpha$;

3.18. а) $(2\cos^2\alpha - 1)/(2\sin\alpha\cos\alpha) + (\sin 3\alpha - \sin\alpha)/(\cos 3\alpha + \cos\alpha) = 1/\sin 2\alpha$;

б) $(1 - 2\sin^2\alpha)/(2\sin\alpha\cos\alpha) - (\cos 3\alpha - \cos\alpha)/(\sin 3\alpha + \sin\alpha) = 1/\sin 2\alpha$;

в) $2\cos^2(\pi/4 - \alpha/2) - \sin\alpha = 1$;

3.19. а) $1/\cos\alpha + 1/\cos 3\alpha - (2\sin 2\alpha)/\sin 3\alpha = (4\sin\alpha)/\sin 6\alpha$;

б) $1/\sin\alpha + 1/\sin 3\alpha - (2\sin 2\alpha)/\cos 3\alpha = (4\cos\alpha)/\sin 6\alpha$;

в) $(2\cos^2x - \sin2x)/(\cos x + \cos(0,5\pi + x) = 2\cos x$;

3.20. а) $(1 - \cos2\alpha - \cos6\alpha + \cos8\alpha)/(\cos4\alpha - \cos\alpha\cos3\alpha) = 4\cos4\alpha$;

б) $(1 + \cos2\alpha - \cos4\alpha - \cos6\alpha)/(\sin3\alpha - \sin\alpha\cos2\alpha) = 4\sin3\alpha$;

в) $((\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1)/(\mathrm{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = 2\mathrm{tg}^2\alpha$;

3.21. а) $2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1$;

б) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha = \cos^4\alpha - \cos^4\alpha$;

в) $(\sin2\alpha + \mathrm{tg}2\alpha)/\mathrm{tg}2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

3.22. а) $(\sin(\alpha/2) + \cos(\alpha/2))^2/(\sin\alpha + 1) = 1$;

б) $(\sin4\alpha - 1)/(\cos2\alpha - \sin2\alpha)^2 = -1$;

в) $\cos2\alpha(1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}2\alpha) = 1$;

3.23. а) $(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)/(\cos^2\alpha - \sin^2\beta) = \mathrm{tg}(\alpha - \beta)\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$;

б) $(\sin^2\alpha - \cos^2\beta)/(\sin^2\beta - \sin^2\alpha) = \mathrm{ctg}(\alpha - \beta)\mathrm{ctg}(\alpha + \beta)$;

в) $(\cos\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)/\mathrm{ctg}\alpha = 1 + \sin\alpha$;

3.24. а) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2((\alpha - \beta)/2)$;

б) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2((\alpha - \beta)/2)$;

в) $(\sin2\alpha + \mathrm{tg}2\alpha)/\mathrm{tg}2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

3.25. а) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = -4\sin^2((\alpha - \beta)/2)\cos(\alpha + \beta)$;

б) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 - (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2((\alpha - \beta)/2)\cos(\alpha + \beta)$;

в) $1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = (1 + \mathrm{tg}^2\beta)/(1 - \mathrm{tg}^2\alpha)$;

3.26. а) $(1 - \cos\alpha\cos\beta)^2 - \sin^2\alpha\sin^2\beta = 4\sin^2((\alpha - \beta)/2)\sin^2((\alpha + \beta)/2)$;

б) $(1 - \sin\alpha\sin\beta)^2 - \cos^2\alpha\cos^2\beta = 4\sin^2((\alpha - \beta)/2)\cos^2((\alpha + \beta)/2)$;

в) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

3.27. а) $((\sin\alpha + \sin3\alpha)/(\cos\alpha + \cos3\alpha))(1 + \cos4\alpha) = \sin4\alpha$;

б) $((\sin\alpha - \sin3\alpha)/(\cos\alpha - \cos3\alpha))(1 - \cos4\alpha) = - \sin4\alpha$;

в) $(1 - tg\alpha)^2 + (1 + tg\alpha)^2 = 2/\cos^2\alpha$;

3.28. а) $((\sin\alpha + \sin3\alpha)(\cos\alpha - \cos3\alpha))/(1 - \cos4\alpha) = \sin2\alpha$;

б) $((\sin3\alpha - \sin\alpha)(\cos3\alpha - \cos\alpha))/(1 + \cos4\alpha) = \sin2\alpha$;

в) $tg\alpha/(tg\alpha + ctg\alpha) = \sin^2\alpha$;

3.29. а) $(3 - 4\cos2x + \cos4x)/8 = \sin^4x$;

б) $(1 - tg^2(45° - \alpha/2))/(1 + tg^2(45° - \alpha/2)) = \sin\alpha$;

в) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos2\alpha$;

3.30. а) $ctg\alpha/(ctg\alpha - ctg3\alpha) + tg\alpha/(tg\alpha - tg3\alpha) = 1$;

б) $2/(tg\alpha/2 + ctg\alpha/2) = \sin\alpha$;

в) $tg\alpha + ctg\alpha = 2/\sin2\alpha$.

4 Розв'язати тригонометричні рівняння

4.1. а) $tg(2x + 1) = - tgx$; $(- 1/3 + k\pi/3)$

б) $2\sin^2x - 1 = \cos x$; $(\pi/3 + 2k\pi/3)$

в) $5\sin^2x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2x = 3$; $(\pi/4 + \pi k; - arctg5/2 + \pi k)$

г) $\sin3x = \cos2x\sin x$; $(\pi k/2)$

д) $\cos^22x + \cos^23x = 1$; $(\pi/10 + \pi k/5; \pi/2 + \pi k)$

4.2. а) $\cos 7x = \cos x$; $(\pi k/4;\ \pi k/3)$

б) $7\mathrm{tg}x - 4\mathrm{ctg}x = 12$; $(\mathrm{arctg}2 + k\pi)$

в) $\cos 6x + \cos 2x - \cos 8x = 1$; $(k\pi/3;\ \pi/3 + \pi k/4)$

г) $\sin 5x\cos 3x = \sin 9x\cos 7x$; $(\pi k/4;\ \pi/24 + \pi k/12)$

д) $\cos^2 x + 2\cos x + \mathrm{tg}^2 x + 1 = 0$; $(\pi + 2\pi k)$

4.3. а) $\sin 2x = -\sin x$; $((2\pi k)/3;\ \pi + 2\pi k)$

б) $4\cos 4x - 5\cos^2 x + 1 = 0$; $(\pi k;\ \pm(\pi/2 - (1/2)\arccos(11/16)) + k\pi)$

в) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$; $(\pi k/4;\ \pi/3 \pm 2\pi k)$

г) $\sin 3x\sin 7x = \sin x\sin 9x$; $(\pi k/6)$

д) $\sec 5x = \cos 2x$; $(2\pi k)$

4.4. а) $\cos 2x = -\sin x$; $(\pi/2 + 2\pi k/3)$

б) $(1 + \cos x)\mathrm{tg}(x/2) = 0$; $(2\pi k)$

в) $(\sin 7x + \cos 5x + 3)/\mathrm{tg}3x = 3\mathrm{ctg}3x$; $(-\pi/4 + \pi k;\ \pi/8 + \pi k/6)$

г) $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x = \sin 4x$; $(\pi k/2;\ \pi/24 + \pi k/12)$

д) $\sin x\sin y = 1$; $((\pi/2)(4k \pm 1);\ (\pi/2)(4k \pm 1))$

4.5. а) $\sin 3x = -\cos x$; $((\pi/4)(4k - 1);\ (\pi/8)(4k + 3))$

б) $\sin 5x\,\mathrm{ctg}x = 0$; $(\pi/2 + \pi k;\ \pi k/5,\ k \neq 5m)$

в) $2\sin x - \cos 2x + 4\cos 8x = 7$; $(\pi/2 + 2\pi k)$

г) $(1/2)\sin 4x\sin x + \sin 2x\sin x = 2\cos^2 x$; $((\pi/2)(2k + 1))$

д) $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 8\sin 5x\cos 5x$; $(\pi/20 + \pi k/5;(1/5)\mathrm{arctg}(1/7) + k\pi/5)$

4.6. а) $\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}x$; $(\pi/4 + k\pi/2)$

б) $\sin 3x + \mathrm{tg}2x\sec x = 0$; $(k\pi)$

в) $5\sin 5x - 3\sin 7x = 8$; $(\pi/2 + 2k\pi)$

г) $8\sin x\cos 2x\cos x = \sqrt{3}$; $((-1)^k\pi/12 + k\pi/4)$

д) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$; $(k\pi/2;\ k\pi/5)$

4.7. а) $\sin 3x = \sin x$; $(k\pi;\ \pi/4 + \pi k/2)$

б) $tg^2 x - 3tgx + 2 = 0$; $(\pi/4 + \pi k;\ arctg2 + k\pi)$

в) $\sin 7x + \cos 2x = -2$; $(\pi/2 + 2k\pi)$

г) $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x = (1/4)\sin 12x$; $(\pi k/8)$

д) $2\sin^4 x + 1{,}25\sin^2 2x - \cos^4 x = \cos 2x$; $(\pi k \pm \pi/6)$

4.8. а) $\cos 5x = \cos 3x$; $(\pi k/4)$

б) $6\cos^2 x + 5\cos x + 1 = 0$; $(\pm(\pi - \arccos((1/3))+2\pi k,\ \pm 2\pi/3+2k\pi)$

в) $1 + \cos x + \sin x + \cos 2x + \sin 2x = 0$; $(-\pi/4 + k\pi;\ \pm 2\pi/3 + 2k\pi)$

г) $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos(\pi/6 + x)$; $(k\pi/2)$

д) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 3/2$; $(\pm \pi/3 + k\pi;\ \pi/8 + k\pi/4)$

4.9. а) $ctg3x - ctg8x = 0$; $(\pi k/5,\ k \neq 5n)$

б) $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - \sin 3x - 9 = 0$; $(\pi/2 + 2k\pi)$

в) $\sin 9x + \sin 3x = \sin 6x$; $(k\pi/6;\ \pm \pi/9 + 2k\pi/3)$

г) $siin2x\sin x + \cos^2 x = \sin 5x\sin 4x + \cos^2 4x$; $(k\pi/3;\ \pi/11 + 2k\pi/11)$

д) $\sin x\sin 5x = \sec 4x$; $(\pi/2 + k\pi)$

4.10. а) $tg(x + \pi/12) + ctg(x + \pi/4) = 0$; $(\varnothing)$

б) $3\sin x = 2\cos^2 x$; $((-1)^k\pi/6 + k\pi)$

в) $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$; $(k\pi/2;\ (-1)^k\pi/6 + \pi k)$

г) $\sin 2x\sin 4x\sin 6x = (1/4)\sin 4x$; $(\pi k/4;\ \pm(1/4)\arccos(1\pm\sqrt{5})/4+\pi k/2)$

д) $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 3/2$; $(\pi/8 + k\pi/4;\ \pm \pi/6 + \pi k)$

4.11. а) $\sin(x + \pi/6) + \cos(x + \pi/6) = 0$; $(-5\pi/12 + k\pi)$

б) $\sin^2x - \cos^2x = \cos x$; $(\pi + 2\pi k; \pm \pi/3 + 2k\pi)$

в) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$; $(k\pi/3; \pi/7 + 2k\pi/7)$

г) $2\cos^2 8x + \sin 6x = 1$; $(\pi/20 + k\pi/5; 3\pi/44 + k\pi/11)$

д) $\cos^2x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$; $(k\pi/2; k\pi/5)$

4.12. а) $\cos 15x = \sin 5x$; $(-\pi/20 + k\pi/5; \pi/40 + k\pi/10)$

б) $\sin^4x + \cos^4x = \cos 4x$; $(k\pi/2)$

в) $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$; $(\pi/12 + k\pi/6; \pm 2\pi/3 + 2\pi k)$

г) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$; $(k\pi/2)$

д) $3\cos^2x - \sin^2x - \sin 2x = 0$; $(\pi/4 + k\pi; -\mathrm{arctg}\,3 + \pi k)$

4.13. а) $\cos 7x + \cos 3x = 0$; $(\pi/4 + \pi k/2; \pi/10 + \pi k/5)$

б) $6\sin^2x + 2\sin^2 2x = 5$; $(\pi/4 + \pi k/2)$

в) $\sin^6x + \cos^6x = (1/4)\sin^2 2x$; $(\pi/4 + \pi k/2)$

г) $3\sin x\cos x + 4\cos^2x = 0$; $(\pi/2 + \pi k; -\mathrm{arctg}(4/3) + \pi k)$

д) $\sin^2 3x + \cos^2 4x = 1$; $(k\pi/7)$

4.14. а) $\sin 3x = \cos 2x$; $(\pi/10 + 2\pi k/5)$

б) $\sin^2 3x = 3\cos^2 3x$; $(\pm (1/3)\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \pi k/3)$

в) $6\sin x - 4\cos x = \mathrm{cosec}\, x$; $(\pi/4 + \pi k; -\mathrm{arctg}(1/5) + \pi k)$

г) $\sin 3x = \cos 2x \sin x$; $(\pi k/2)$

д) $1 - 2\sin^2 8x = \sin 4x$; $(-\pi/24 + \pi k/6; \pi/40 + \pi k/10)$

4.15. а) $\cos 3x = \cos x$; $(\pi k/2)$

б) $3\cos^2x - \sin^2x - \sin 2x = 0$; $(\pi/4 - \pi k; -\mathrm{arctg}\,3 + \pi k)$

в) $1 + \sin x\cos x - \sin x - \cos x = 0$; $((-1)^k\pi/4 - \pi/4 + \pi k)$

г) $\sin 3x \operatorname{tg} 3x \operatorname{cec} x = 0$; $(\pi k/3)$

д) $2\cos^2 8x + \sin 6x = 1$; $(\pi/20 + \pi k/5; 3\pi/44+\pi k/11)$

4.16. а) $\sin 5x = \cos 4x$; $(\pi/18 + 2\pi k/9; \pi/2 + 2\pi k)$

б) $\sin^2 x - \sin^2 x + 4(\sin x + 1) = 0$; $(-\pi/2 + 2\pi k)$

в) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - 1/2\sin 2x$; $((-1)^k \arcsin(\sqrt{41} - 1)/4\sqrt{2} - \pi/4+\pi k)$

г) $\cos 3x \cos 6x = \cos 5x \cos 8x$; $(\pi k/10)$

д) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$; $(\pi k/4; \pi k/5)$

4.17. а) $\sin 2x = \sin x$; $(\pi k; \pm \pi/3 + 2\pi k)$

б) $\operatorname{tg} x(1 + \cos 2x) = 0$; (πk)

в) $\sin 6x + \sin 2x = \sin 4x$; $(\pi k/4; \pm \pi/3 + 2\pi k)$

г) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$; $(\pi k/2)$

д) $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$; $(\pi/8 + \pi k/4; \pm \pi/9 + 2\pi k/3)$

4.18. а) $\sin 3x = \cos 5x$; $(\pi/16 + \pi k/4; 3\pi/4 + \pi k)$

б) $(1 - \operatorname{ctg}^2 x)\cos x \operatorname{tg} x = 0$; $(\pi/4 + \pi k/2)$

в) $\sin x - \cos x + \sin 3x = 0$; $(\pi/2+\pi k; (-1)^k \pi/12 + \pi k/2)$

г) $\sin 2x \cos 6x = \sin 5x \cos 3x - \sin 2x$; $(\pi k/2; \pm \pi/6 + \pi k)$

д) $(1/2)(\sin^4 x + \cos^4 x) = \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x - S$; $(\pi/4 + \pi k)/$

4.19. а) $\operatorname{tg} 7x = \operatorname{ctg} 3x$; $(\pi/20 + \pi k/10)$

б) $\sin x \operatorname{cosec} 2x = 0$; $(\varnothing)$

в) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$; $(\pi/2 + \pi k; \pi + 2\pi k; 2\pi k/5)$

г) $\sin 2x \cos x + \sin x = 1$; $(\pi/2+2\pi k; (-1)^k \arcsin((\sqrt{3}-1)/2)+\pi k)$

д) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 3/2$; $(\pi/8 + \pi k/4)$

4.20. а) $\cos(x - \pi/3) = \sin 5x$; $(5\pi/36 + \pi k/3;\ \pi/24 + \pi k/2)$

б) $\sin 3x - \cos 3x = 1$; $((-1)^k\pi/12 + \pi/12 + \pi k/3)$

в) $\cos 7x + \cos x + \sin^2 2x = \cos^2 2x$; $(\pi/8 + \pi k/4;\ \pm\pi/9 + 2\pi k/3)$

г) $\mathrm{tg}x\,\mathrm{ctg}2x + \mathrm{tg}2x\,\mathrm{ctg}x = \sin x$; $(\varnothing)$

д) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = 2$; $(\varnothing)$

4.21. а) $\mathrm{ctg}7x = \mathrm{tg}11x$; $(\pi/36 + \pi k/18)$

б) $2\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}(x + \pi/4) + \mathrm{tg}(x - \pi/4)$; (πk)

в) $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$; $(\pi/12 + \pi k;\ \pi/24 + \pi k/6)$

г) $\mathrm{ctg}^3 x \sin x = \cos x$; $(\pi/2 + \pi k;\ \pm\pi/4 + \pi k)$

д) $\cos^4 x + \sin^4 x = \cos 4x$; $(\pi k/2)$

4.22. а) $\sin(x + 60°) = \cos 7x$; $((1/4)(15° + 180°k);\ 55° + 60°k)$

б) $(1 + \mathrm{tg}x)/(1 - \mathrm{tg}x) = 1 + \sin 2x$; $(\pi k;\ -\pi/4 + \pi k)$

в) $\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x = \sin x - \cos x$; $(\pi/4 + \pi k;\ (-1)^k\arcsin(\sqrt{2} - 1))$

г) $\cos x \sin 7x = \cos 3x \sin 5x$; $(\pi k/2;\ \pi/8 + \pi k/4)$

д) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$; $(\pi/10 + \pi k/5;\ \pi/4 + \pi k/2)$

4.23. а) $\mathrm{tg}(x + \pi/3) = \mathrm{ctg}(x - \pi/6)$; $(\pi/6 + 2\pi k/2)$

б) $2\sin 15x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$; $(-\pi/60 + \pi k/10;\ 2\pi/15 + \pi k/5)$

в) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$;

$(\pi/2 + \pi k;\ \pm 2\pi/3 + 2\pi k; (-1)^k\pi/6 + \pi k)$

г) $\sin 3x = 4\sin x\cos 2x$; $(\pi k;\ \pm\pi/6 + \pi k)$

д) $\sin^4(x/2) - \cos^4(x/2) = j$; $(\pm\arccos(-1/4) + 2\pi k)$

4.24. а) $\cos(x - \pi/6) = \sin(5x + \pi/3)$; $(\pi k/2;\ \pi/18 + \pi k/3)$

б) $\mathrm{tg}x - \sin x = \mathrm{tg}2x$; (πk)

в) $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}3x$; $(\pi k/3)$

г) $\sin 3x \sin 7x = \sin x \sin 9x$; $(\pi k/6)$

д) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$; $(\pi/4 + \pi k)$

4.25. а) $\operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}11x$; $(\pi/24 + \pi k/12)$

б) $\cos^2 x + 3\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0$; $(-\pi/4 + \pi k;\ -\operatorname{arctg}(1/2)+\pi k)$

в) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$; $(\pi k/3;\ \pi/8 + \pi k/4)$

г) $\sin 5x\cos 3x = \sin 9x\cos 7x$; $(\pi/24 + \pi k/12;\ \pi k/4)$

д) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$; $(\pi k/5;\ \pi/2 + \pi k)$

4.26. а) $\cos 3x = \sin 7x$; $(\pi/20 + \pi k/5;\ \pi/8 + \pi k/2)$

б) $3\cos^2 x + 4\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 2$; $(-\pi/4 + \pi k;\ -\operatorname{arctg}(1/3)+\pi k)$

в) $\operatorname{tg}3x - \operatorname{tg}x = 4\sin x$; $(\pi k;\ \pm\pi/6 + \pi k)$

г) $\sin x\sin 3x = 0{,}5$; $(\pi/4 + \pi k/2;\ \pm\pi/6 + \pi k)$

д) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 3/2$; $(\pi/8 + \pi k/4;\ \pm\pi/3+\pi k)$

4.27. а) $\sin 4x = \cos 6x$; $(\pi/20 + \pi k/5;\ 3\pi/4 + \pi k)$

б) $\cos 2x - 2\sin 2x = 1$; $(\pi k;\ -\operatorname{arctg}2 + \pi k)$

в) $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0$; $(\pi k/3;\ \pi k/4)$

г) $\sin 2x\sin 6x = \cos x\cos 3x$;

$(\pi/6 + \pi k/3;\ \pm(1/2)\arccos((1\pm\sqrt{5})/2)+\pi k)$

д) $\sin x\sin 2x + \cos^2 x = \sin 4x\sin 5x + \cos^2 4x$; $(\pi k/3;\ \pi/11 + 2\pi k/11)$

4.28. а) $\cos 11x = \sin 9x$; $(\pi/40 + \pi k/10;\ 3\pi/4 + \pi k)$

б) $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}x + 2 = 0$; $(-\pi/4 + \pi k;\ -\operatorname{arctg}2 + \pi k)$

в) $6tgx + 5ctg3x = tg2x$;

$(\pm 1/2\arccos(1/3)+ \pi k; \pm 1/2\arccos(1/4))+\pi k)$

г) $\sin3x = 4\sin x\cos2x$; $(\pi k; \pm \pi/6 + \pi k)$

д) $\sin^2x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$; $(\pi/10 + \pi k/5; \pi/4 + \pi k/2)$

4.29. а) $tg7x = ctg3x$; $(\pi/20 + \pi k/10)$

б) $\cos^2x - 5\cos x - 6 = 0$; $(\pi + 2\pi k)$

в) $4\cos x - 2\cos2x - \cos4x = 1$; $(\pi/2 + \pi k; 2\pi k)$

г) $\cos2x\cos x = \sin7x\sin6x + 5\cos\pi/2$; $(\pi/16 + \pi k/8; \pi/10 + \pi k/5)$

д) $\sin^4x + \cos^4x = (3 - \cos6x)/4$; $(\pi/10 + \pi k/5; \pi/2 + \pi k)$

4.30. а) $\sin5x = \cos13x$; $(\pi/36 + \pi k/9; 3\pi/16 + \pi k/4)$

б) $3\sin^3x - \sin x\cos^2x - 2\sin x + \cos x = 0$;

$(\pi/4 + \pi k; -\operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{2})+\pi k)$

в) $tgx - \sin x = tg2x$; (πk)

г) $\cos3x + \sin x\sin2x = 0$; $(\pi/2 + \pi k; \pi/4 + \pi k/2)$

д) $\sin^4x + \cos^4x = \sin2x - 0{,}5$; $(\pi/4 + \pi k)$

5 Розв'язати тригонометричні нерівності

5.1. $0{,}5\sin(x + \pi/6) \ge \sqrt{3}/4$; $[\pi/6 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$, $k \in z$

5.2. $0{,}5\sin(x - \pi/4) \le \sqrt{3}/4$; $[-13\pi/12 + 2\pi k; 7\pi/12 + 2\pi k]$, $k \in z$

5.3. $\cos(x + \pi/4) \ge 0{,}25$; $[-7\pi/12 + 2\pi k; \pi/12 + 2\pi k]$, $k \in z$

5.4. $0{,}5\cos(x - \pi/4) \le \sqrt{3}/4$; $[5\pi/12 + 2\pi k;\ 25\pi/12 + 2\pi k]$, $k \in z$

5.5. $-2\cos(x + 45°) \ge -1$; $[15° + 360°k;\ 255° + 360°k]$, $k \in z$

5.6. $-\cos(x + 45°) \le 0{,}5$; $[-165° + 360°k;\ 75° + 360°k]$, $k \in z$

5.7. $3\operatorname{tg}(3x + 2) \le \sqrt{3}$; $]\pi k/3 - \pi/6 - 2/3; \pi/18 - 2/3 + \pi k/3]$, $k \in z$

5.8. $-2\sin(x + \pi/3) > \sqrt{2}$; $]2\pi k - 13\pi/12;\ 2\pi k - 7\pi/12[$, $k \in z$

5.9. $2\cos(x - \pi/6) < -\sqrt{2}$; $]11\pi/12 + 2\pi k;\ 17\pi/12 + 2\pi k[$, $k \in z$

5.10. $\cos(2x + 45°) > 0{,}5$; $]-105°/2 + 180°k;\ 15°/2 + 180°k$

5.11. $3\sin(2x + \pi/3) < 3$; $x \ne \pi/12 + \pi k$, $k \in z$

5.12. $-2\cos(x + 2) \ge 1$; $[2\pi/3 - 2 + 2\pi k;\ 4\pi/3 - 2 + \pi k]$, $k \in z$

5.13. $\cos(2 - x) \le 1/2$; $[\pi/3 + 2 + 2\pi k;\ 7\pi/3 + 2 + 2\pi k]$, $k \in z$

5.14. $1{,}5\cos(3x + 1) < 0{,}75$;

$]\pi/9 - 1/3 + 1/3 \times 2\pi k;\ 7\pi/9 - 1/3\ +\ +2\pi k/3[$, $k \in z$

5.15. $(-5/6)\cos(1 - 2x) > 6/5$; $\varnothing$

5.16. $2\sin(3x + 60°) > \sqrt{2}$; $]-5° + 120°k;\ 70°/3 + 120°k[$, $k \in z$

5.17. $-2tg(2x-1)<2;$ $]1/2-\pi/8+\pi k/2;\ ½+\pi/4+\pi k/2[,$

5.18. $3\sin(1-x)<-1,5;$ $]\pi/6+1+2\pi k;\ 5\pi/6+1+2\pi k[,\ k\in z$

5.19. $1,5\cos(2x+5)\geq 1,5;$ $x=-2,5+\pi k,\ k\in z$

5.20. $-\sin(x-\pi/2)\geq ½;$ $]-\pi/3+2\pi k;\ \pi/3+2\pi k[,\ k\in z$

5.21. $\sin(\pi/4-2x)\geq \sqrt{3}/2;$ $]-5\pi/24+\pi k;\ -\pi/24+\pi k[,\ k\in z$

5.22. $\cos(-2x+\pi/6)\leq 1-\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)};$ $]\pi/4+\pi k;\ 11\pi/12+\pi k[,\ k\in z$

5.23. $\sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 1;$ $]2\pi k;\ 2\pi/3+2\pi k[,\ k\in z$

5.24. $\sin x+\cos x\leq \sqrt{2};$ $x\in R$

5.25. $\sin x-\cos x\leq \sqrt{2};$ $x\in R$

5.26. $\sin^2(x-1)\leq ½;$ $]1-\pi/4+\pi k;\ 1+\pi/4+\pi k[,\ k\in z$

5.27. $\sin^2(2x-\pi/4)<3/4;$ $]-\pi/24+\pi k/2;\ 7\pi/24+\pi k/2[,\ k\in z$

5.28. $\cos^2x+2\cos x<0;$ $]\pi/2+2\pi k;\ 3\pi/2+2\pi k[,\ k\in z$

5.29. $tg^2x>3;$ $]\pi/3+\pi k;\ \pi/2+\pi k[\cup]-\pi/2+\pi k;\ -\pi/3+\pi k[,\ k\in z$

5.30. $\cos^2 x - 3\cos x < 0$; $]-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k[, k \in z$

6 Побудувати графіки тригонометричних функцій

6.1. $y = 2\sin(x - \pi/4)$;

6.2. $y = 3/2\cos(2x - \pi/3) + 1$;

6.3. $y = \sin(2x - 1) - 1$;

6.4. $y = -\cos(1{,}5x - \pi/4)$;

6.5. $y = |\sin(x - 1)|$;

6.6. $y = |2\cos x|$;

6.7. $y = |\arcsin x|$;

6.8. $y = |\mathrm{tg} x|$;

6.9. $y = -\sin(\pi/4 - x)$;

6.10. $y = (3/2)\sin(\pi/4 - x)$;

6.11. $y = \sin(x/3) + 1$;

6.12. $y = \cos 3x - 1$;

6.13. $y = -\cos(x/2) + 2;$

6.14. $y = \mathrm{tg}2x;$

6.15. $y = \mathrm{ctg}3x;$

6.16. $y = (1/3)\sin(x - 1);$

6.17. $y = (2/3)\cos(x + 1);$

6.18. $y = \sin(2x + 3);$

6.19. $y = -\sin(2x + 3);$

6.20. $y = (1/2)\sin 2x;$

6.21. $y = -2\sin(x/2);$

6.22. $y = \sin(4x + 8);$

6.23. $y = \sin(x/2 - 3);$

6.24. $y = -\sin(2x - 4);$

6.25. $y = 3\sin(2x - 4);$

6.26. $y = 2\cos(3x + 1);$

6.27. $y = 2cox3x - 1$;

6.28. $y = - 2six(2x - 1)$;

6.29. $y = - 3\cos(3x + 1)$;

6.30. $y = | \sin 2x | + 1$.

2.9 Вимоги до знань і умінь (контрольні питання)

1. Одиничний круг, одиничне коло, одиничний радіус-вектор.
2. Градус і радіан.
3. Тригонометричні функції.
4. Властивості тригонометричних функцій та їх геометрична інтерпретація.
5. Формули зведення.
6. Обернені тригонометричні функції та їх графіки.
7. Найпростіші тригонометричні рівняння.
8. Основні тригонометричні тотожності.
9. Похідні тригонометричних функцій.
10. Основні співвідношення для обернених тригонометричних функцій.
11. Втрачені і сторонні корені.
12. Формули додавання і віднімання аргументів тригонометричних функцій.
13. Формули подвійних і половинних аргументів.
14. Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.
15. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.
16. Формули подання тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу.
17. Тригонометричні нерівності.

2.10 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

2.10.1 Синус, косинус, тангенс, котангенс кутів трикутника

1. Чи може косинус гострого кута набувати значення: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{7}{6}$; в) $\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$;

   г) $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ при будь-якому $a \neq 0$?

2. Нехай α і β - нерівні гострі кути прямокутного трикутника. Скільки серед таких чисел може бути різних:

   $$\sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta\,?$$

3. Чи вірно, що сума синуса і косинуса одного і того самого гострого кута більша від 1?
4. Чому дорівнює добуток котангенсів гострих кутів прямокутного трикутника?
5. Чи дорівнює відношення синусів двох кутів трикутника відношенню протилежних до них сторін?
6. Гострим, прямим чи тупим є найбільший кут трикутника зі сторонами 4, 5, 7 см.
7. Чи однозначно визначають трикутник дві його сторони і кут проти однієї з них?
8. Чи можуть бути рівними для одного і того самого гострого кута:

   а) синус і косинус;

   б) синус і тангенс?
9. Для яких гострих кутів тангенс більший від 1?
10. Як виразити добуток синусів гострих кутів прямокутного трикутника: через його площу чи гіпотенузу?
11. Чи можна стверджувати, що трикутник прямокутний, якщо його сторони дорівнюють:

    а) 12; 5; 13; б) 3; 4; 6?

2.10.2 Тригонометричні функції числового аргументу

1. У якій чверті міститься точка P_t, якщо t дорівнює:

а) $\frac{2\pi}{9}$; б) $\frac{8\pi}{9}$; в) 4; г) $-\frac{17\pi}{9}$; д) $5{,}7\pi$?

2. Якому з чисел проміжку $[0; 2\pi]$ відповідає на одиничному колі точка, симетрична до точки $P_{\frac{2\pi}{3}}$ відносно:

а) початку координат; б) осі ординат; в) осі абсцис; г) прямої $y=x$;

д) прямої $y=-x$

3. Яким числам t з проміжку $(0;3\pi)$ на одиничному колі відповідає точка P_t з:

а) ординатою 0; б) ординатою 1; в) ординатою -1;

г) абсцисою 0; д) абсцисою -1; е) абсцисою 1?

4. Чому дорівнюють координати точок P_t на одиничному колі, якщо t дорівнює:

а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) π; д) $-\frac{\pi}{2}$?

5. Скільки на проміжку $[0;99\pi]$ чисел t, які задовольняють умову:

а) $\cos t = -1$; б) $\sin t = 1$; в) $\operatorname{tg} t = 0$; г) $\cos t = 0$?

6. Значенням якої тригонометричної функції і якого аргументу є число:

а) 0,5; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) 0?

7. На який кут повернеться точка на колесі машини за 5 с, якщо за 2 с колесо робить 6 обертів?

8. Чи можлива при деяких значеннях x рівність:

а) $\sin x = -0.8$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{17}}{4}$; в) $\operatorname{tg} x = 5$; г) $\frac{1}{\sin x} = 0{,}7$; д) $\frac{1}{\cos x} = -2{,}1$?

9. Скільки існує точок P_t на одиничному колі, якщо для відповідних значень t:

а) $\sin t = 0{,}7$; б) $\cos t = 1$; в) $\sin t = -1$; г) $\cos t = -0{,}6$?

10. Чому дорівнює радіанна міра центрального кута сектора, якщо довжина його дуги дорівнює діаметру кола?

11. Як пов'язані між собою кути t і t', якщо $P_t = P_{t'}$?

12. Чому дорівнює α, якщо вираз $\sqrt{2\cos\alpha - 1 - \cos^2\alpha}$ має зміст

2.10.3 Найпростіші співвідношення між тригонометричними функціями

1. Які знаки мають синус, косинус, тангенс числа t, якщо:

а) $t = 3$; б) $t = \frac{16\pi}{9}$; в) $t = 7$;

2. Який знак має сума синусів усіх кутів трапеції?

3. Чому дорівнює сума косинусів:

а) усіх кутів паралелограма;

б) чотирьох кутів, утворених двома прямими, що перетинаються?

4. Синус одного з кутів паралелограма дорівнює 0,6. Чому дорівнює сума синусів усіх його кутів?

5. Чи може точка на одиничному колі мати координати:

а) $\frac{3}{5}$ і $-\frac{4}{5}$; б) 1 і 0; в) 0,9 і 0,1; г) 0 і 0; д) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\sqrt{\frac{2}{3}}$?

6. Чи можуть тангенс і котангенс одного й того самого аргументу дорівнювати:

а) $\frac{1}{2}$ і 2; б) 0,6 і 0,8; в) $\sqrt{2}+1$ і $\sqrt{2}-1$; г) 5 і $-\frac{1}{5}$;

7. Чому дорівнює сума тангенсів усіх кутів рівнобічної трапеції?

8. Які з наведених нижче точок лежать на одиничному колі з центром на початку координат:

а) A(0,3; 0,7); б) B(-0,8; -0,6); в) $C\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; г) $D\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$;

д) E(0;0)?

9. Чи можуть косинуси суміжних кутів мати однакові знаки?

10. Нехай значення $\sin t$ відоме. Чи достатньо цього, щоб знайти значення інших тригонометричних функцій кута t?

11. Косинус суми двох кутів трикутника дорівнює 0,3. Чи існує серед кутів трикутника тупий кут?

12. Чому дорівнює $\sin \alpha + \cos \alpha$, якщо $\sin \alpha \cos \alpha = 0,4$?

13. Чи вірно, що для чисел x, які належать проміжку $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, виконується нерівність $\sin x + \cos x < -1$?

14. Чи завжди $\operatorname{tg} x > \sin x$?

2.10.4 Властивості і графіки синуса і косинуса

1. Які з наведених чисел належать до області визначення функції $y = \sqrt{\cos x}$:

а) $\frac{2\pi}{3}$; б) π; в) $\frac{5\pi}{3}$; г) $\frac{4\pi}{3}$; д) 0; е) 5;

2. Які з наведених чисел не належать до області визначення функції $y = \frac{1}{\sin x}$:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) 1; г) π; д) $\frac{3\pi}{2}$; е) 2π;

3. Які з наведених чисел належать до множини значень функції $y = \frac{1}{2}\sin^2 x - 1$:

а) $-\frac{3}{4}$; б) $-\frac{2}{3}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) -1; д) 0; е) $-\frac{1}{3}$;

4. Які з наведених функцій є парними; непарними, ні парними, ні непарними:

а) $y = \cos x$; б) $y = x + \cos x$; в) $y = x^2 \cos x$; г) $y = \sin^2 x$; д) $y = \sin x \cos x$;

е) $y = \sin x + \cos x$; є) $y = x + \cos^2 2x$; ж) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

5. Відносно яких із зазначених прямих симетричний графік функції $y = \sin x$:

а) $x = 0$; б) $x=\frac{\pi}{2}$; в) $x = \pi$; г) $x=\frac{3\pi}{2}$?

6. Відносно яких із зазначених прямих симетричний графік функції $y=\cos x$:

а) $x = 0$; б) $x=\frac{\pi}{2}$; в) $x = \pi$; г) $x=\frac{3\pi}{2}$?

7. Зростаючою чи спадною є функція $y=\sin x$ на проміжку:

а) $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$; б) $[2;3]$; в) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; г) $[0; \pi]$; д) $[0;1]$; е) $[\pi; 2\pi]$?

8. Зростаючою чи спадною є функція $y=\cos x$ на проміжку:

а) $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$; б) $[1;2]$; в) $[\pi;2\pi]$; г) $[5; 6]$; д) $[3;4]$; е) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$?

9. Що більше:

а) $\sin\frac{\pi}{9}$ чи $\sin\frac{4\pi}{9}$; б) $\cos\frac{2\pi}{9}$ чи $\cos\frac{\pi}{3}$; в) sin1 чи sin2; г) cos2 чи cos3?

10. Які з поданих чисел є періодами функції $y=\cos x$:

а) π; б) 2π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 3π; д) 4π; е) 5π; ж) 6π;

11. Чому дорівнює на проміжку $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ найменше значення функції:

а) $\sin x$; б) $\cos x$?

12. Чому дорівнює на проміжку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ найбільше значення функції:

а) $\sin x$; б) $\cos x$?

13. Чи збігаються області визначення функцій $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ і $y = 1$?

14. Чи є періодичною функція $y=\frac{1}{\sin x}$?

15. Чи можлива рівність:

а) $\sin x=\frac{\pi}{4}$; б) $\sin^{10} x=1{,}5$;

2.10.5 Властивості і графіки тангенса і котангенса

1. Чи збігаються області визначення функцій:

а) tgx і $\frac{1}{ctgx}$; б) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$ і 1?

2. Які з поданих чисел належать до області визначення функції $y = tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$:

а) 0; б) $-\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{4}$; е) 0?

3. Які з поданих чисел належать до області визначення функції $y=\sqrt{ctgx}$:

а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{11\pi}{6}$; в) π; г) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) $\frac{5\pi}{4}$;

4. Чому дорівнює на проміжку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ найбільше значення (якщо воно існує) функції:

а) $\operatorname{tg} x$; б) $\operatorname{ctg} x$?

5. Чому дорівнює на проміжку $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ найменше значення (якщо воно існує) функції:

а) $\operatorname{tg} x$; б) $\operatorname{ctg} x$?

6. Скільки точок розриву має на відрізку $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{13\pi}{4}\right]$ функція:

а) $\operatorname{tg} x$; б) $\operatorname{ctg} x$?

7. Які з поданих функцій є парними; непарними, ні парними, ні непарними:

а) $x \operatorname{tg} x$; б) $x^2 + \operatorname{tg} x$; в) $\operatorname{tg}^2 x$; г) $\frac{tgx}{x+\sin x}$; д) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; е) $x + \operatorname{ctg} x$;

є) $\cos x + \operatorname{tg} x$; ж) $tg\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; з) $\cos x \operatorname{ctg} x$?

8. Відомо, що $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = b$. Чому дорівнює:

а) $\operatorname{tg}(-x)$; б) $\operatorname{ctg}(-x)$; в) $\operatorname{tg}(x+\pi)$; г) $\operatorname{ctg}(x-\pi)$; д) $tg\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)$; е) $ctg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$?

9. В якій чверті міститься точка P_t якщо:

а) |ctg t| = ctg t; б) |tg(-t)| = -tg t?

10 Яке з чисел більше:

а) $tg\frac{3\pi}{5}$ чи $tg\frac{3\pi}{8}$; б) $ctg\frac{\pi}{4}$ чи $ctg\frac{\pi}{5}$?

2.10.6 Перетворення графіків тригонометричних функцій

1. Який найменший додатний період має функція:

а) $y=\sin 3x$; б) $y=\cos\frac{x}{2}$; в) $y=\sin\pi x$; г) $y=tg\frac{x}{3}$; д) $y=ctg 2x$;

е) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$?

2. Як побудувати графік функції:

а) $y=\cos x$, знаючи графік функції $y=\sin x$;

б) $y=\sin x$, знаючи графік $y=\cos x$?

3. Як, знаючи графік функції $y=\sin x$, побудувати графік функції:

а) $y=-2\sin x$; б) $y=\sin x-2$; в) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$?

4. Точка виконує обертальний рух по колу. Її проекція на горизонтальний діаметр виконує при цьому гармонічне коливання, яке визначається формулою $x=2\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$.

а) Скільки повних обертів робить рочка за 2π одиниць часу?

б) Чому дорівнює радіус кола, по якому рухається точка?

в) Чому дорівнює період коливань?

г) Яке початкове положення займає точка?

д) Скільки разів проекція рухомої точки за один період коливання пройде через точки: (2;0); (-2;0); (1;0); $\left(-\frac{1}{2};0\right)$?

5. Нехай маємо графік функції $y=\sin x$. Графік якої функції симетричний до нього відносно:

а) осі y; б) початку координат; в) осі x; г) прямої $y = 1$; д) прямої $x = \frac{\pi}{2}$?

6. Знайдіть множину значень функції:

а) $y=\frac{1}{2}\cos 2x$; б) $y=3\sin\frac{x}{2}$; в) $y=\cos x-2$; г) $y=\cos(1-x)$.

7. Чи симетричний відносно прямої $x = \pi$ графік функції $y=\sin x$?

8. Якого найбільшого й якого найменшого значень набуває функція:

а) $y=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$; б) $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$?

9. При яких значеннях k найменший додатний період функції $y=\sin kx$ дорівнює:

а) π; б) 5π; в) $\frac{\pi}{5}$; г) 1?

2.10.7 Розв'язування рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$

1. Чи може не мати розв'язків рівняння:

а) $\sin x = a$; б) $\cos x = a$?

2. Чи існує функція, обернена до функції:

а) $y=\cos x$; б) $y=\cos x$, $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$; в) $y=\cos x$, $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right]$?

3. Скільки розв'язків на проміжку $[0; 7\pi]$ має рівняння:

а) $\sin x=\frac{1}{2}$; б) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$?

4. Які з чисел 0, $\frac{\pi}{2}$; π, $\frac{3\pi}{2}$; 2π, $\frac{5\pi}{2}$; 3π, $\frac{7\pi}{2}$ на проміжку $\left(0;\frac{7\pi}{2}\right)$ є розв'язками рівняння:

а) $\sin x=0$; б) $\sin x=1$; в) $\sin x=-1$; г) $\cos x=0$; д) $\cos x=1$; е) $\cos x=-1$?

5. Яких із значень $-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3};-1;-0,5;\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};4$ не може набувати $\arccos a$?

6. Яких із значень $-\frac{3\pi}{5}; -1{,}5; 0; 0{,}5; \frac{8\pi}{15}; \frac{2\pi}{3}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}$ не може набувати $\arcsin a$?

7. Знайдіть два проміжки, на кожному з яких має при $|a|<1$ рівно два корені рівняння: а) $\sin x = a$; б) $\cos x = a$?

8. Чи можна стверджувати, що:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}$; б) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\pi}{7}$;

в) $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}$; г) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)=\frac{6\pi}{5}$?

9. Чи має зміст вираз:

а) $\arccos\left(\sqrt{6}-3\right)$; б) $\arccos\left(\sqrt{7}-2\right)$; в) $\arccos\left(2-\sqrt{10}\right)$; г) $\arcsin\left(\sqrt{5}-2\right)$; д) $\arcsin\left(\sqrt{5}-3\right)$; е) $\arcsin\left(3-\sqrt{26}\right)$?

10. Чи можна стверджувати, що при $1 \geq x_2 > x_1 \geq -1$ виконується нерівність:

а) $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$; б) $\arccos x_1 > \arccos x_2$?

11. В яких точках перетинається графік функції $y = 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ з прямою:

а) $x = 1{,}5\pi$; б) $y = -1$?

12. Назвіть хоча б одне рівняння, розв'язками якого були б числа:

а) $\pi n,\ n \in Z$ б) $2\pi n,\ n \in Z$; в) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z$;

г) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$; д) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$?

2.10.8 Розв'язування рівнянь tg $x = a$, ctg $x = a$

1. Чи може не мати розв'язків рівняння:

а) $\operatorname{tg} x = a$; б) $\operatorname{ctg} x = a$, при $a \in R$?

2. Чи існує функція, обернена до функції:

а) $y = \operatorname{ctg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$; в) $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$?

3. Скільки розв'язків на проміжку $\left[-\frac{3\pi}{4};4\pi\right]$ має рівняння:

а) $\operatorname{tg} x = 2$; б) $\operatorname{tg} x = -3$; в) $\operatorname{ctg} x = 1,5$; г) $\operatorname{ctg} x = -1$?

4. Які з чисел $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}; 3\pi; \frac{7\pi}{2}$ на проміжку $\left(0;\frac{7\pi}{2}\right)$ є розв'язками рівняння:

а) $\operatorname{tg} x = 0$; б) $\operatorname{ctg} x = 0$?

5. Яких з чисел –3; -1,2; $-\frac{\pi}{2}$; -1; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; 1; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt{3}$; 0,7; 1,6; π не може набувати arctg a ?

6. Яких із значень $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; 3,2; 3,5; $\frac{5\pi}{6}$; π не може набувати arctg a ?

7. Знайдіть два проміжки, на кожному з яких при $\alpha \in R$ рівно два корені рівняння: а) $\operatorname{tg} x = a$; б) $\operatorname{ctg} x = a$.

8. Чи можна стверджувати, що:

а) $arctg\left(tg\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{2\pi}{9}$; б) $arctg\left(\frac{5\pi}{9}\right)$; в) $arcctg\left(ctg\frac{5\pi}{9}\right)=\frac{5\pi}{9}$; г) $arcctg\left(\frac{10\pi}{9}\right)=\frac{10\pi}{9}$?

9. При яких значеннях x виконується рівність:

а) $arctg(5x-1)=\frac{\pi}{4}$; б) $arctg\left(\sqrt{3}-x\right)=\frac{5\pi}{6}$?

2.10.9 Розв'язування тригонометричних нерівностей

1. При яких значеннях a всі дійсні числа задовольняють нерівність:

а) $\cos x > a$; б) $\cos x \geq a$; в) $\cos x < a$; г) $\cos x \leq a$?

2. Чи має розв'язки нерівність:

а) $\cos x < -1$; б) $\sin x \geq 1$; в) $\sin x > 1$?

3. Знайдіть всі розв'язки нерівності:

а) $\cos x \leq -1$; б) $\cos x \geq 1$; в) $\sin x \leq -1$; г) $\sin x \geq 1$.

4. При яких значеннях $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ вирази $\frac{1}{2} - \sin x$ і $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x$ мають протилежні знаки?

5. Які з чисел $\frac{\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}; \frac{10\pi}{9}; \frac{11\pi}{9}; \frac{13\pi}{9}; \frac{14\pi}{9}; \frac{16\pi}{9}; \frac{17\pi}{9}$ задовольняють нерівність:

а) $\sin x \geq 0{,}5$; б) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$?

6. Які з чисел $\frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{5\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{8\pi}{7}; \frac{9\pi}{7}; \frac{10\pi}{7}; \frac{11\pi}{7}; \frac{12\pi}{7}; \frac{13\pi}{7}$ задовольняють нерівність:

а) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x > -0{,}5$; в) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

7. Які з чисел $\frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}; \frac{6\pi}{5}; \frac{7\pi}{5}; \frac{8\pi}{5}; \frac{9\pi}{5}$ задовольняють нерівність:

а) $\operatorname{tg} x > 1$; б) $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{tg} x < -1$?

8. При яких значення x виконується нерівність:

а) $|\cos x| = \cos x$; б) $|\sin x + 1| = -1 - \sin x$;

в) $|\cos x - 1| = \cos x - 1$; г) $|\sin x| = -\sin x$?

9. Знайдіть всі розв'язки нерівності:

а) $-1 \leq \sin x \leq 1$; б) $-1 < \cos x < 1$?

10. При яких значеннях a не мають жодного розв'язку нерівності:

а) $\sin x > a$; б) $\sin x \geq a$; в) $\sin x < a$; г) $\sin x \leq a$?

2.10.10 Тригонометричні формули

1. Чому дорівнює $\cos \alpha$, якщо α - гострий кут, $\sin \alpha = \frac{t}{s}$, де $t>0$, $s>0$ $t \neq s$?

2. При яких значеннях $x \in [0; 2\pi]$ справджується нерівність $\sin 2x < 2\sin x$?

3. При яких значеннях $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ справджується нерівність $tg 2x < 2tg x$?

4. Чи вірно, що:

а) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2}$; б) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$?

5. Чи вірно, що:

а) $\cos 40^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{2}\cos 10^\circ$; б) $\cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 2\cos 10^\circ$?

6. Відомо, що $\sin 25^\circ = a$. Чому дорівнює $\sin 50^\circ$?

7. Відомо, що $\cos\frac{\pi}{18}=a$. Чому дорівнює $\cos\frac{\pi}{9}$?

8. Чи вірно, що:

а) $tg\frac{5\pi}{12}+tg\frac{7\pi}{12}=0$; б) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin 64^\circ \sin 36^\circ - \sin 56^\circ \sin 116^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

9. Чому дорівнює $\mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = a$?

10. При яких значеннях x має зміст вираз $\sqrt{\sin 2x - 1}$?

11. Чи існує таке значення x, при якому виконується рівність:

а) $\sin x \cos x = \frac{2}{5}$; б) $\cos x \sin x = \frac{5}{8}$?

12. Чи правильні співвідношення:

а) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$; б) $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha$?

2.10.11 Додавання гармонічних коливань

1. Чому дорівнює амплітуда коливання $y=\sqrt{3}\sin 2t+\cos 2t$?

2. Чому дорівнюють амплітуда, частота, початкова фаза суми двох гармонічних коливань $y_1 = 2\sin 2t$; $y_2 = 2\cos 2t$?

3. Скільки повних обертів за одиницю часу виконує точка, що рухається по колу, якщо закон руху її проекції на вісь абсцис описується сумою двох гармонічних поливань:

$$x=5\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\text{ і } x=12\cos\left(6\pi t-\frac{5\pi}{6}\right)?$$

4. Якого найбільшого значення набуває функція $y=12\sin 5t+5\cos 5t$?

5. Чому дорівнює найменший додатний період функції:

а) $y=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+7\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=3\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{2\pi}{7}\right)$?

6. Чи буде гармонічним коливанням сума коливань:

а) $y=\sin 2t$ і $y=6\cos 2t$; б) $y=5\sin 2t$ і $y=6\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$?

7. Як записати закон руху проекції на вісь x точки, що рухається по колу радіусом 2 з кутовою швидкістю 3 і починає всій рух з точки:

а) (2;0); б) ($\sqrt{3}$;1); в) (0;2)?

8. При яких значеннях a має розв'язки рівняння:

а) $5\sin 3x-6\cos 3x=a$; б) $7\cos\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}=a$?

2.10.12 Розв'язування тригонометричних рівнянь

1. Які з чисел: $\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}$ - є розв'язками рівняння $\sin x+\sin 5x=1$?

2. Які з чисел: $\frac{\pi}{10};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$ - є розв'язками рівняння $\sin 3x=\cos 2x$?

3. Які з чисел $0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2}$ - є розв'язками рівняння $\frac{1-soc4x}{\cos^4 x}=0$?

4. Які з чисел: $-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2}$ - є розв'язками рівняння $\cos x\sqrt{\sin x}=0$?

5. Які з чисел: $\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$ - є розв'язками рівняння:

$$\sqrt{2ctgx-1-tg^2x}+\cos 2x=0$$

6. Чи еквівалентні рівняння:

а) $\sin x=0$ і $\sin 2x=0$; б) $\sin x=0$ і $\sqrt{\sin x}=0$;

в) $\sin x=\cos x$ і $\cos 2x=0$; г) $\cos x=0$ і $\cos x\sqrt{\sin x}=0$;

д) $\sin x=4$ і $\sqrt{\sin x}=-2$?

7 Які з наведених нижче рівнянь є однорідними відносно $\sin x$ і $\cos x$:

а) $\sin x+3\cos x=0$; б) $\sin^2 x+2\cos x-3\cos^2 x=0$;

в) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x=0$; г) $\cos^2 2x+sn^2x=0$;

г) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x = 0$?

8. Коренями якого рівняння є числа $\frac{\pi}{4}$ і $-\frac{\pi}{4}$?

9. Чи має розв'язки рівняння:

а) $\frac{\sin x}{\sin 2x} = 0$; б) $\frac{\cos x}{\cos 2x} = 0$; в) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$; г) $\frac{tg 2x}{tg x} = 0$?

10. Які із розв'язків рівняння $\cos 4x = 1$ задовольняють умову $\sin x > 0$?

11. Чи правильно розв'язане рівняння:

$\cos^2 x - \cos x = 0$; $\cos x - 1 = 0$; $\cos x = 1$; $x = 2k\pi$, $k \in Z$?

2.11 Контрольна робота до розділу "Тригонометричні функції"

К-2 **Варіант 1**

Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$.

1. Доведіть тотожність $f(x) = \cos 2x$.

2. Знайдіть найменший додатний період функції $y = f(x)$.

3. Побудуйте графік функції $y = f(x)$

4. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з прямими: $x = \frac{\pi}{3}$; $y = -0,5$.

5. Чому дорівнюють амплітуда, частота, початкова фаза гармонічного коливання $y = \cos 2x$?

6. Обчисліть $f(x)$, якщо:

а) $x = 53°29'$ (з точністю до 0,01); б) $\sin x = 0,6$.

7. При яких значеннях x графік функції $y = f(x)$ проходить над прямою $y = -0,5$

8. Розв'яжіть рівняння $(\cos 2x + 0,5)\sqrt{\sin x} = 0$.

К-2 **Варіант 2**

Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = 1 - (\sin x - \cos x)^2$.

1. Доведіть тотожність $f(x) = \sin 2x$.

2. Знайдіть найменший додатний період функції $y = f(x)$.

3. Побудуйте графік функції $y = f(x)$

4. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з прямими: $x = -\frac{\pi}{12}$; $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Чому дорівнюють амплітуда, частота, початкова фаза гармонічного коливання $y = \sin 2x$?

6. Обчисліть $f(x)$, якщо:

а) $x = 63°35'$ (з точністю до 0,01); б) $tgx = \frac{4}{3}$.

7. При яких значеннях x графік функції $y = f(x)$ проходить під прямою $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{2}\sin 2x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

К-2 **Варіант 3**

Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = \sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x$.

1. Доведіть тотожність $f(x) = -\frac{1}{4}\sin 4x$.

2. Знайдіть найменший додатний період функції $y = f(x)$.

3. Побудуйте графік функції $y = f(x)$

4. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з прямими: $x = -\frac{\pi}{12}$; $y = \frac{1}{8}$.

5. Чому дорівнюють амплітуда, частота, початкова фаза гармонічного коливання $y = -\frac{1}{4}\sin 4x$?

6. Обчисліть $f(x)$, якщо:

а) $x = 37°14'$ (з точністю до 0,01); б) $tg2x = \frac{5}{12}$.

7. При яких значеннях x графік функції $y = f(x)$ проходить над прямою $y = \frac{1}{8}$?

8. Знайдіть ті розв'язки рівняння $-\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{8}$, які задовольняють умову $\cos x < 0$

К-2 **Варіант 4**

Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = \sin x + \cos x$.

1. Доведіть тотожність $f(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$.

2. Чому дорівнює найменший додатний період функції $y = f(x)$.

3. Побудуйте графік функції $y = f(x)$

4. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з прямими: $x = -\frac{\pi}{2}$; $y = -1$.

5. Чому дорівнюють амплітуда, частота, початкова фаза гармонічного коливання $y = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$?

6. Обчисліть $f(x)$, якщо:

а) $x = 1{,}72$ (з точністю до 0,01); б) $\cos x = 0{,}6$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

7. При яких значеннях x графік функції $y = f(x)$ проходить над прямою $y = -1$?

8. Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right)\sqrt{-\sin x} = 0$.

К-2 **Варіант 5**

Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)\right)$.

1. Доведіть тотожність $f(x) = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$.

2. Чому дорівнює найменший додатний період функції $y = f(x)$.

3. Побудуйте графік функції $y = f(x)$

4. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з прямими: $x = \frac{3\pi}{2}$; $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Чому дорівнюють амплітуда, частота, початкова фаза гармонічного коливання $y = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$?

6. Обчисліть $f(x)$, якщо:

а) $x = 1{,}36$ (з точністю до 0,01); б) $\cos x = 0{,}8$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

7. При яких значеннях x графік функції $y = f(x)$ проходить над прямою $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$?

8. Розв'яжіть рівняння $\left(2\cos\frac{x}{2} + 1\right)\sqrt{\sin x} = 0$.

К-2 **Варіант 6**

Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = \cos 2x + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

1. Доведіть тотожність $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Чому дорівнює найменший додатний період функції $y = f(x)$.

3. Побудуйте графік функції $y = f(x)$

4. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з прямими: $x = \frac{7\pi}{6}$; $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Чому дорівнюють амплітуда, частота, початкова фаза гармонічного коливання $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$?

6. Обчисліть $f(x)$, якщо:

а) $x=1{,}06$ (з точністю до 0,01); б) $\cos 2x=-0{,}8$, $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

7. При яких значеннях x графік функції $y=f(x)$ проходить під прямою $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$?

8. Розв'яжіть рівняння $\frac{2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{\sin x}}=0$.

Література

1. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. "Вища математика." – Київ: Вища школа. 1984р.
2. Шкіль М.І., Колесник Т.В., "Вища математика."Книга 2. – Київ: "Либідь". 1994р.
3. Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р. "Математичний аналіз." – Київ: "Либідь". 1995р.
4. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. "Алгебра і початки аналізу." Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ: "Зодіак-ЕКО." 2002р.
5. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. "Алгебра і початки аналізу." Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ: "Зодіак-ЕКО." 2002р.
6. Мордкович А.Г. . "Алгебра і початки аналізу." – Москва: "Вища школа." 1979р.

Навчальне видання

Алла Андріївна Барковська
Анатолій Олександрович Сироватка

Вступ до математичного аналізу
"Тригонометричні функції, рівняння та нерівності"

Навчальний посібник

Оригінал – макет підготовлено авторами

Редактор В.О. Дружиніна
Коректор З.В. Поліщук

Навчально – методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 5.11.2003р.
Формат 29,7×42 1/4 Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний Папір офсетний
Тираж 75 прим. Ум. друк. арк. 4,35
Зам. № 2003-169

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ