Барковська А. А., Дереч В. Д.

ВИЩА МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

Барковська А. А., Дереч В. Д.

ВИЩА МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2012

УДК 517.1(075)
ББК 22.161я73
Б25

Рецензенти:

С. І. Перевозніков, доктор технічних наук, професор

Ф. М. Сохацький, доктор фізико-математичних наук, професор

В. С. Трохименко, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 7 від 24.02.2011 р.)

Барковська, А. А.

Б25 Вища математика. Математичний аналіз. Границя функції та неперервність : навчальний посібник / Барковська А. А., Дереч В. Д. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 73 с.

У навчальному посібнику розглянуто фундаментальні поняття класичного математичного аналізу, якими є границя і неперервність функції. Детально розглянуто теорію границь послідовностей і функцій дійсної змінної. На різноманітних прикладах показано методи знаходження границь функцій. Аналізуються типові помилки при знаходженні границь. Запропоновано 30 варіантів завдань для самостійної роботи студентів.

УДК 517.1(075)
ББК 22.161я73

ЗМІСТ

Вступ...4

1 Границя послідовності 8

1.1 Основи теорії границі послідовності.......................................8
1.2 Дії над границями 10
1.3 Збереження порядку при граничному переході 16
1.4 Один критерій існування границі 18
1.5 Константа е..20

2 Границя функції 21

2.1 Основні означення 21
2.2 Фундаментальні теореми про границі функції 25
2.3 Теореми про нескінченно малі функції 25
2.4 Нескінченно велика функція і її зв'язок з нескінченно малою функцією..26
2.5 Операції над границями функцій...27

3 Стандартні границі 28

3.1 Перша стандартна границя..28
3.2 Друга стандартна границя 30
3.3 Друга стандартна границя в іншій формі...................................32

4 Еквівалентність нескінченно малих...33
5 Неперервність функції 35
6 Правило Лопіталя 38
7 Невизначені вирази 43
8 Техніка обчислення границь 44

8.1 Еквівалентні перетворення під знаком границі 44
8.2 Застосування еквівалентних нескінченно малих............................46
8.3 Розкриття невизначеності типу 1^{∞} 47
8.4 Застосування правила Лопіталя 48

9 Аналіз типових помилок при знаходженні границі 52
10 Класифікація точок розриву 54
11 Варіанти прикладів для самопідготовки студентів 60
Література...70
Глосарій 71

ВСТУП

Поняття границі функції є одним з основних у вищій математиці. Воно лежить в основі таких фундаментальних категорій, до яких належить похідна, інтеграл, сума функціонального ряду, неперервність і таке інше. Інтуїтивне уявлення про границю функції (зокрема послідовності) закладається ще у середній школі. Проте залишатись на інтуїтивному рівні розуміння цього важливого поняття аж ніяк не можна. Адже в більшості випадків наша інтуїція "мовчить", в багатьох випадках вона нас "обманює", і лише в деяких найпростіших ситуаціях вона підказує нам правильний результат. Приміром, якщо вчорашнього абітурієнта, який щойно став студентом, запитати, чому дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, то він без вагань дасть правильну відповідь. Але якщо того ж студента запитати чому дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, то, трохи подумавши, він, найімовірніше, дасть неправильну відповідь (дорівнює одиниці). Причому його міркування на перший погляд здаються цілком правдоподібними. Він мислить приблизно так. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$. Оскільки будь-який степінь одиниці дає одиницю, то, остаточно, ми одержуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1.$$

Згодом (ще в першому семестрі) студент дізнається про хибність своїх міркувань, адже насправді

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2,7.$$

Тепер, коли студент вже знає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx e$ $(e\approx 2,718182)$, лектору варто поставити перед аудиторією питання: оцінити (на око) величину границі

$$\lim_{n\to\infty}\left(1,00001+\frac{1}{n}\right)^n.$$

У багатьох студентів (і це підтверджує реальна педагогічна практика) сумнівів немає: остання границя приблизно дорівнює числу e. При цьому наводиться нібито цілком логічне обґрунтування. А саме: число 1,00001 близьке до числа 1, величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ мало відрізняється від величини $\left(1{,}00001+\frac{1}{n}\right)$. В свою чергу величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ мало відрізняється від величини $\left(1{,}00001+\frac{1}{n}\right)^n$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx \lim\limits_{n\to\infty}\left(1{,}00001+\frac{1}{n}\right)^n \approx e$.

Такі міркування хибні. Цей результат виявився неправильним. Акуратні математичні викладки, що переконливо підкріплюються комп'ютерним експериментом, показують, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1{,}00001+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty$.

Наведемо ще один приклад «правдоподібних» міркувань, які, проте, часом призводять до неправильних результатів.

Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$? Недосвідчений студент може міркувати приблизно так. Величина $\sqrt{x^2+2}$ для дуже великих x майже збігається з x. Отже, замінюючи під знаком границі $\sqrt{x^2+2}$ на еквівалентну їй величину x, ми одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}(x-x)=0.$$

Строгими методами ми можемо підтвердити, що тут нас інтуїція не підвела. Тепер давайте трохи "підправимо" наш приклад і розглянемо таку границю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right).$$

Здається ситуація практично не змінилася. Адже величина $\sqrt{x^2+2x}$ еквівалентна величині x на нескінченності. Таким чином, як і в попередньому прикладі

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}(x-x)=0.$$

І отут ми "зловилися". Точними методами ми можемо спростувати цей результат . Дійсно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)= \text{(домножимо і поділимо на спряжений вираз)} =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1.$$

Наведені вище приклади правдоподібних міркувань, які, проте, часом приводять до неправильних результатів, взяті з реальної практики викладання вищої математики у технічному університеті.

Як переконати студента, який мислить в рамках здорового глузду, що він все-таки в деяких тонких моментах помиляється? Можна, звичайно, проаналізувати хід його міркувань і виявити деякі сумнівні логічні переходи. Але, мабуть, в багатьох випадках було б доцільніше порадити йому виконати на комп'ютері або калькуляторі числовий експеримент. Адже ніщо так не переконує, як практика. Скажімо, у студента виникла гіпотеза про те, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1.$$

Ця гіпотеза буде легко спростована, якщо студент обчислить послідовність $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\left(1+\frac{1}{4}\right)^4,\left(1+\frac{1}{16}\right)^{16},\left(1+\frac{1}{32}\right)^{32},\ldots$

З іншого боку цілком покладатися на комп'ютер теж не варто. Хоча комп'ютер, безумовно, є могутнім знаряддям інтелектуальної праці, проте, зрозуміло, він не може цілком замінити гнучкий інтелект людини, її багату інтуїцію, здатність мислити за аналогією, врешті, її здоровий глузд. Примі-ром, якщо людина хоч трохи (хай на інтуїтивному рівні) володіє поняттям границі, то для неї не складатиме проблеми знайти $\lim_{n\to\infty}\lg(\lg n)$. Знаючи елементарні властивості логарифмічної функції ми легко одержимо правильний результат:

$$\lim_{n\to\infty} \lg(\lg n) = +\infty.$$

Якщо ж цю простеньку задачку на експериментальному рівні виконувати на калькуляторі або на комп'ютері, то виявиться, що відповідь далеко не очевидна, адже послідовність $\lg(\lg n)$ зростає надзвичайно повільно. Приміром, число $\lg(\lg 10^{100})$ дорівнює лише 2.

Отже зробимо висновки.

Для знаходження границі функції (як ми вже переконались) в багатьох випадках інтуїтивного уявлення про границю недостатньо і наші правдоподібні міркування часом призводять до хибних результатів. Таким чином, виникає необхідність точного означення границі функції (зокрема послідовності) і доведення цілого ряду теорем. Проте, з усього вищесказаного зовсім не випливає, що викладач повинен вести непримиренну боротьбу з правдоподібними міркуваннями і орієнтувати студента виключно на рафіноване абсолютно точне мислення. Навпаки, для продуктивного інженерного інтелекту притаманна сміливва антологія, багата інтуїція, логічні стрибки і тому подібне. Висока культура інженерного мислення полягає не в тому, щоб подовгу зупинятися на деталях, прискіпливо аналізуючи кожен маленький логічний крок, а скоріш в тому, щоб оперативно просуватись вперед, довіряючи своїй багатій інтуїції та досвіду. Проте, в разі одержання парадоксального або, принаймні, підозрілого результату, висококласний інженер приблизно знає, де шукати помилку, адже він чітко усвідомлює, де знаходяться слабкі ланки його логічних конструкцій.

1 ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

1.1 Основи теорії границі послідовності

1.1.1 Означення. Число a називається *границею послідовності* (**limit of sequence**) $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться натуральне число N таке, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими за N, виконується *нерівність* **(inequality)** $|x_n - a| < \varepsilon$.

Розкривши модуль, нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ можна розписати так: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Той факт, що послідовність $\{x_n\}$ має границю, яка дорівнює числу a, записують таким чином:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a.$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ то кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа a.

Треба зазначити, що таке *означення* (**definition**) границі послідовності не викликає у більшості студентів ентузіазму, воно сприймається досить важко і навіть породжує певний скептицизм – мовляв навіщо таке зарозуміле означення для такого простого поняття. Проте, якщо студенту – скептику запропонувати дати своє означення границі послідовності, то виявиться, що в точних термінах математики це зробити досить важко. Формалізація інтуїтивного уявлення про границю виявилась непростою справою.

Звичайно, до точного означення границі студента можна було б підвести поступово, спираючись на його інтуїтивне уявлення про границю і аналізуючи прості, але різноманітні приклади. Проте, в умовах технічного ВНЗу, з огляду на обмеженість годин, це неприпустима розкіш. З іншого боку, викладачеві варто хоча б на простому прикладі показати, що наведене означення цілком узгоджується з інтуїтивним уявленням про границю. Приміром, інтуїтивно цілком зрозуміло, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Доведемо, що і за нашим означенням границя послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ дорівнює 0. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Візьмемо натуральне число N таке, що

$\frac{1}{N} < \varepsilon$. Оскільки послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, очевидно, монотонно спадаюча, то для будь-якого $n(n > N)$ виконується нерівність $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ або $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ ми знайшли натуральне число N таке, що для всіх членів послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ з номерами, більшими за N, виконується нерівність $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Це і означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Звичайно, знаходження границі послідовності лише на основі означення є в більшості випадків важкою або дуже важкою задачею. Тому в курсі вищої математики доводять цілий ряд теорем, які, так би мовити, забезпечують нас технікою знаходження границь.

1.1.2 Теорема. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю, то вона єдина.

Доведення. Припустимо, що послідовність $\{x_n\}$ має принаймні дві границі a та b. Для конкретності будемо вважати, що $a < b$. Нехай додатне число ε таке, що $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ (очевидно, що таке число ε існує). Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то існує натуральне число N_1 таке, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими за N_1, виконується нерівність

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{1}$$

З іншого боку, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то існує натуральне число N_2 таке, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими за N_2, виконується нерівність

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon. \tag{2}$$

Далі, нехай натуральне число N таке, що $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді очевидно, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими за N, одночасно виконуються нерівності (1) та (2). Тобто для всіх $n > N$ маємо

$$b - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Але число ε було вибрано таким чином, що $a+\varepsilon<b-\varepsilon$. Отже, ми одержали суперечність.

1.1.3 Означення 1. Кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *обмежена зверху* (**bounded above**), якщо існує число M таке, що $x_n < M$ для будь-якого n.

Означення 2. Кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *обмежена знизу* (**bounded below**), якщо існує число K, таке що $K < x_n$ для будь-якого n.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ обмежена і зверху, і знизу, то її називають *обмеженою* (**bounded sequence**).

Зазначимо, що точки, які зображають обмежену послідовність, розташовані на скінченному відрізку. Важливою є така теорема.

Теорема. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю, то вона обмежена.

Доведення. Позначимо через a границю послідовності $\{x_n\}$. Зафіксуємо деяке додатне число ε. За означенням границі існує натуральне число N таке, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими за N, виконується нерівність $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$.

Отже, за межами проміжку $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ міститься лише *скінченна кількість* (**finite number**) членів послідовності $\{x_n\}$, а саме, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Таким чином, послідовність $\{x_n\}$ обмежена.

1.2 Дії над границями

1.2.1 В попередніх пунктах ми дали означення границі, а також виявили деякі найпростіші властивості послідовності, що має границю. Цілком природно поставити питання: як узгоджується операція граничного переходу з основними арифметичними операціями, а також з відношенням порядку? Іншими словами, знаючи границі двох послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, що ми можемо сказати про границю *суми* (**sum**) послідовностей $\{x_n + y_n\}$, *добутку* (**product**) $\{x_n \cdot y_n\}$, *частки* (**ratio**) $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ і т. д.? Найпростіше на всі ці питання можна дати відповідь, коли розглянути послідовності, що прямують до нуля. Завдяки результату п. 1.2.4 майже всі інші теореми цього напрямку є простим наслідком відповідних теорем про арифметичні операції над нескінченно малими.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно малою* **(infinitesimal)**, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Теорема. Якщо послідовність $\{x_n\}$ обмежена, а послідовність $\{y_n\}$ нескінченно мала, то послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$ – нескінченно мала.

Доведення. За умовою послідовність $\{x_n\}$ обмежена. Отже, існує число $M > 0$ таке, що для будь-якого n виконується нерівність

$$|x_n| < M. \tag{3}$$

Нехай ε – довільне додатне число, тоді число $\frac{\varepsilon}{M}$ теж додатне. З означення границі випливає існування натурального числа N такого, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими за N, виконується нерівність

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{4}$$

Перемножимо нерівності (3) та (4) при $n > N$. Одержимо:

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Таким чином $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$. Тобто послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$ – нескінченно мала.

Наслідок. Якщо послідовність $\{x_n\}$ – нескінченно мала, а послідовність $\{y_n\}$ має границю, то $\{x_n \cdot y_n\}$ – нескінченно мала послідовність.

Доведення. За умовою послідовність $\{y_n\}$ має границю. Отже, за теоремою п. 1.1.3 вона обмежена. Таким чином, згідно з щойно доведеною теоремою, послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$ – нескінченно мала.

1.2.2 Тепер розглянемо арифметичні операції над нескінченно малими послідовностями. Як простий наслідок теорем п. 1.1.3 та п. 1.2.1 ми одержуємо такі дві теореми.

Теорема 1. Якщо послідовність $\{\alpha_n\}$ нескінченно мала і c – довільне число, то послідовність $\{c \cdot \alpha_n\}$ теж нескінченно мала.

Теорема 2. Якщо $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ – нескінченно малі послідовності, то їх добуток $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ є нескінченно малою послідовністю.

1.2.3 Трохи важче довести теорему про суму двох нескінченно малих.

Теорема. Якщо $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ – нескінченно малі послідовності, то їх сума $\{\alpha_n + \beta_n\}$ теж нескінченно мала послідовність.

Доведення. Нехай ε – довільне додатне число. За означенням нескінченно малої послідовності існує натуральне число N_1 таке, що для всіх членів послідовності $\{\alpha_n\}$ з номерами, більшими за N_1, виконується така нерівність

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Аналогічно для послідовності $\{\beta_n\}$ існує натуральне число N_2 таке, що для всіх членів послідовності $\{\beta_n\}$ з номерами, більшими за N_2, виконується нерівність

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Число $\max\{N_1, N_2\}$ позначимо через N. Нерівності (5) та (6) виконуються одночасно для всіх $n > N$. Додамо (при $n > N$) ці нерівності. Одержимо:

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon.$$

Тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = 0.$

Примітка. Нічого конкретного відносно границі частки двох нескінченно малих послідовностей ми не можемо сказати. Дійсно, нехай a – довільне число. Розглянемо дві нескінченно малі послідовності $\{x_n\} = \frac{a}{n}$ і $\{y_n\} = \frac{1}{n}$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n}:\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n}\cdot\frac{n}{1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a = a.$ Тобто границя ділення двох нескінченно малих послідовностей (якщо вона існує) може бути будь – яким числом.

Важлива роль нескінченно малих пояснюється результатами кількох наступних пунктів.

1.2.4 Теорема. Для того, щоб число a було границею послідовності $\{x_n\}$, необхідно і достатньо, щоб існувала нескінченно мала послідовність $\{\alpha_n\}$, така, що $x_n = a + \alpha_n$ для будь-якого n.

Доведення. Спочатку доведемо першу частину теореми – тобто необхідність. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має границю, яка дорівнює a. Тоді, згідно з означенням границі, для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N таке, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими за N, виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ або $|(x_n - a) - 0| < \varepsilon$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$. Тобто послідовність $\alpha_n = \{x_n - a\}$ – нескінченно мала. Крім того, $x_n = a + (x_n - a) = a + \alpha_n$.

Достатність. Нехай тепер послідовність $\{x_n\}$ можна подати у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, де $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала. Нехай ε – довільне додатне число. Тоді, за означенням нескінченно малої, існує натуральне число N таке, що для всіх членів послідовності $\{\alpha_n\}$ з номерами, більшими за N, виконується нерівність $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$.

А це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

1.2.5 Теорема. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ існує, причому $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Доведення. За умовою $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, та $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, отже, згідно з теоремою попереднього пункту, існують нескінченно малі послідовності $\{\alpha_n\}$

та $\{\beta_n\}$, такі, що $a_n = a + \alpha_n$ та $b_n = b + \beta_n$. Додавши останні дві рівності, одержимо:

$$a_n + b_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Але, за теоремою п. 1.2.3, послідовність $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – нескінченно мала. Отже, згідно з теоремою п. 1.2.4, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

1.2.6 Теорема. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ існує, причому $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то, згідно з теоремою п. 1.1.7, існують нескінченно малі послідовності $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ такі, що $a_n = a + \alpha_n$ та $b_n = b + \beta_n$. Перемножимо останні дві рівності. Одержимо:

$$a_n \cdot b_n = ab + a\cdot\beta_n + b\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n \tag{7}$$

Згідно з теоремами п. 1.2.2 послідовності $\{a\cdot\beta_n\}$, $\{b\cdot\alpha_n\}$ та $\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ є нескінченно малими. Отже, послідовність $\{a\cdot\beta_n + b\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n\}$ також є нескінченно малою (див. п. 1.2.3). Враховуючи рівність (7) і застосувавши теорему п. 1.2.4, робимо остаточний висновок: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

1.2.7 Для одержання відповідного результату про границю відношення двох послідовностей ми попередньо доводимо таку лему.

Лема. Якщо $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то $\left\{\dfrac{1}{1+\alpha_n}\right\}$ – обмежена послідовність.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ таке число, що $1-\varepsilon > 0$. Позаяк за умовою $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то існує натуральне число N таке, що для всіх членів послідовності $\{\alpha_n\}$ з номерами, більшими за N, виконується нерівність

$$-\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon.$$

З останньої нерівності випливає: $0 < 1-\varepsilon < 1+\alpha_n < 1+\varepsilon$.

Отже,

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{1}{1+\alpha_n} < \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Таким чином, послідовність $\left\{\frac{1}{1+\alpha_n}\right\}$ – обмежена.

Теорема. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, причому $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ існує, причому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ та $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то згідно з теоремою п. 1.2.4 існують нескінченно малі послідовності $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ такі, що $a_n = a + \alpha_n$ та $b_n = b + \beta_n$.

Тоді

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a\cdot\beta_n}{b(b+\beta_n)}. \tag{8}$$

Послідовність $\frac{1}{b+\beta_n} = \frac{1}{b\left(1+\frac{\beta_n}{b}\right)}$, згідно з попередньою лемою, обмежена. Послідовності $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ є нескінченно малими послідовностями. Тому, згідно з теоремою п. 1.2.1, послідовності $\frac{\alpha_n}{b+\beta_n}$ та $\frac{a\cdot\beta_n}{b(b+\beta_n)}$ – нескінченно малі. Отже, (див. п. 1.2.3) послідовність $\frac{\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a\cdot\beta_n}{b(b+\beta_n)}$ теж нескінченно мала. Враховуючи рівність (8) і застосовуючи теорему п. 1.2.4, ми робимо висновок:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

1.2.8 В цьому пункті ми дамо означення нескінченно великої послідовності і знайдемо простий зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими послідовностями.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою* (**infinitely large**), якщо для будь-якого додатного числа M знайдеться натуральне число N таке, що всі члени послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими за N, задовольняють нерівність $|x_n| > M$.

Пропонуємо самостійно довести наступну теорему.

Теорема. Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – нескінченно мала послідовність, і навпаки, якщо $\{y_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – нескінченно велика послідовність.

Зауваження. Не слід плутати поняття «нескінченно велика послідовність» і «необмежена послідовність». Цілком зрозуміло, що нескінченно велика послідовність є необмеженою. Але зворотне твердження неправильне. Для прикладу розглянемо послідовність $x_n = n\left(1+(-1)^n\right)$. Ясна річ, що ця послідовність необмежена, але вона не є нескінченно великою.

1.3 Збереження порядку при граничному переході

1.3.1 Природним чином постає питання: чи зберігається нерівність при граничному переході? Інтуїція нам підказує ствердну відповідь.

Теорема. Нехай послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ такі, що починаючи з деякого натурального числа N_1 виконується нерівність $x_n \geq y_n$. Крім того, існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ та $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тоді $a \geq b$.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто $a < b$. Тоді знайдеться число $\varepsilon > 0$ таке, що $a+\varepsilon < b-\varepsilon$. Згідно з означенням границі послідовності, знайдеться натуральне число N_2 таке, що всі члени послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшим за N_2, задовольняють нерівність

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon.$$

Аналогічно знайдеться натуральне число N_3 таке, що для всіх членів послідовності $\{y_n\}$ з номерами, більшими за N_3, виконується нерівність

$$b-\varepsilon < y_n < b+\varepsilon.$$

Зафіксуємо натуральне число m таке, що $m > \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тоді виконується нерівність:

$$a+\varepsilon > x_m \geq y_m > b-\varepsilon.$$

Таким чином ми одержали суперечність (оскільки ε ми вибрали так, що $a+\varepsilon < b-\varepsilon$). Теорема доведена.

Примітка. Зазначимо, що строга нерівність при граничному переході не зберігається. Тобто з нерівності $x_n > y_n$, взагалі кажучи, не випливає нерівність $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Так, наприклад, очевидно, що $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$, проте $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$

1.3.2 Важливу роль в теорії границь відіграє така теорема.

Теорема. Нехай для послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, починаючи з деякого натурального числа N_1, виконується нерівність

$$x_n \leq y_n \leq z_n. \tag{9}$$

Крім того, існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ та $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Тоді послідовність $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ теж має границю, до того ж $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доведення. Нехай ε довільне додатне число. Згідно з означенням границі існує натуральне число N_2 таке, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими за N_2, виконується нерівність

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon. \tag{10}$$

Аналогічно, існує натуральне число N_3 таке, що для всіх членів послідовності $\{y_n\}$ з номерами, більшими за N_3, має місце нерівність

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \qquad (11)$$

Зафіксуємо натуральне число $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. При $n > N$ виконуються всі три нерівності (9), (10), (11). Отже, для будь-якого $n > N$ маємо:

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon .$$

Таким чином, згідно з означенням границі послідовності маємо:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = a.$$

Примітка. Цікаво зазначити, що в математичному фольклорі ця теорема має жартівливу інтерпретацію: якщо два міліціонери з обох боків під руки ведуть хулігана у відділок міліції, то хулігану нема куди подітися – він іде туди, куди його ведуть міліціонери.

Питання: хто в даній теоремі міліціонери, а хто хуліган ?

1.4 Один критерій існування границі

1.4.1 В теоремах попередніх пунктів ми, в основному, розглядали різноманітні властивості границь, виходячи з припущення, що вона (границя) існує. Але досі ми не маємо жодного критерію існування границі. Один з таких критеріїв буде з розглянуто в п. 1.4.2. В ньому задіяне поняття точної верхньої (нижньої) межі.

Отже, почнемо з означень.

Нехай A – довільна числова множина.

Означення 1. Число b називають *верхньою (нижньою) межею* (**upper (lower) bound**)множини A, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується нерівність $a \le b$ $(b \le a)$.

Приклад 1. Нехай A – відкритий проміжок $(2; 6)$. Будь-яке число ≥ 6 є верхньою межею множини A. Будь-яке число ≤ 2 є нижньою межею множини A.

Приклад 2. Нехай A – множина всіх додатних дійсних чисел. Очевидно, ця множина не має верхньої межі. Будь-яке число ≤ 0 – нижня межа множини A.

Означення 2. Найменша (найбільша) верхня (нижня) межа множини A називається *точною верхньою (точною нижньою) межею* (**least upper (greatest lower) bound**) множини A.

Приклад 3. Число 6 є точною верхньою межею множини $(2;6)$. А число 2 є точною нижньою межею цієї множини.

Чи кожна обмежена зверху числова множина має точну верхню межу? Відповідь залежить від того, яку числову систему ми розглядаємо. Для поля раціональних чисел відповідь на це питання негативна. Дійсно, розглянемо для прикладу множину всіх раціональних чисел, які задовольняють умову $x^2 < 2$. Очевидно, ця множина обмежена зверху. Тобто для неї існує верхня межа (наприклад, число 3). Але точна верхня межа цієї множини в полі раціональних чисел не існує, оскільки число $\sqrt{2}$ не є раціональним. (Детальніше на цю тему можна прочитати в [1]).

Інша ситуація має місце для поля дійсних чисел. Відповідне *твердження* (**assertion**) сформулюємо у вигляді аксіоми.

Аксіома. В *полі дійсних чисел* (**real number field**) кожна обмежена зверху (знизу) множина має точну верхню (нижню) межу.

1.4.2 Тепер ми можемо сформулювати критерій існування границі послідовності. Цей критерій широко застосовується в різних розділах математичного аналізу.

Теорема. Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає і обмежена зверху, то вона має границю.

Доведення. За умовою послідовність $\{x_n\}$ обмежена зверху, отже, згідно з аксіомою попереднього пункту, множина $\{x_n\}$ має точну верхню межу. Позначимо її через a. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Нехай $\varepsilon > 0$ довільне додатне число. Покажемо, що існує натуральне число N таке, що $x_N > a - \varepsilon$. Припустимо протилежне, тобто для будь-якого натурального n має місце нерівність $x_n \le a - \varepsilon$. В такому разі число $a - \varepsilon$ буде верхньою межею множини $\{x_n\}$. Крім того, $a - \varepsilon < a$, отже, число a не буде точною верхньою межею множини $\{x_n\}$. Ми одержали суперечність. Таким чином, існує натуральне число N таке, що $x_N > a - \varepsilon$. Оскільки за умовою послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою, то для будь-якого $n > N$ виконується нерівність $x_n > a - \varepsilon$. Крім того, $x_n \le a < a + \varepsilon$ для будь-якого n. Отже, для $n > N$ має місце нерівність:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

А це і означає (див. означення границі послідовності), що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

1.5 Константа е

1.5.1 В цьому пункті за допомогою критерію, сформульованого в пункті 1.4.2, ми визначимо одну з найважливіших констант, яку позначають через e. За допомогою цієї константи визначають експоненту, тобто функцію виду $A \cdot e^{\alpha x}$. Багато процесів природи (радіоактивний розпад, процес охолодження нагрітого тіла при постійній температурі зовнішнього середовища, зростання популяції бактерій при певних умовах і таке інше) описуються (моделюються) саме експонентою.

В навчальній літературі існує принаймні два підходи до визначення числа e.

Докладніше зупинимося на тому підході, де число e визначають як границю послідовності $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Для доведення наступної теореми нам знадобиться одна тотожність, яка має назву *біном Ньютона*:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^n x^n,$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k!)}$.

Теорема. Послідовність $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонно зростає і обмежена зверху.

Доведення. Застосуємо *біном Ньютона* (**binominal formula**).

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots +$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \tag{12}$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Якщо від x_n перейти до x_{n+1} , тобто збільшити n на одиницю, то добавиться додатний $(n+2)-$ий член. Кожний же з написаних $(n+1)$ членів збільшиться, позаяк множник в дужках виду $\left(1-\frac{S}{n}\right)$ заміниться більшим множником, а саме $\left(1-\frac{S}{n+1}\right)$. Звідси і випливає, що $x_{n+1} > x_n$, тобто послідовність $\{x_n\}$ зростаюча. Тепер покажемо, що вона обмежена зверху. Якщо у виразі (12) "ліквідувати " всі множники в дужках, то тим самим ми тільки збільшимо його. Отже,

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Далі, замінивши кожний множник в знаменниках дробів (починаючи з третього) числом 2, ми тим самим ще збільшимо одержаний вираз. Отже,

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Але геометрична прогресія (що починається числом $\frac{1}{2}$), має суму <1. Тому $y_n < 3$, а, отже, $x_n < 3$.

Число e ірраціональне. $e \approx 2{,}718281828\ldots$

2 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

В цьому розділі ми розглянемо теорію границь функції дійсної змінної. Оскільки ця теорія в багатьох ситуаціях аналогічна теорії границь послідовностей, то її виклад буде не таким детальним, як це зроблено для границь послідовностей в розділі 1.

2.1 Основні означення

2.1.1 Означення. Число b називається *границею функції* **(limit of function)** $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти число M таке, що для всіх $x > M$ виконується нерівність

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Той факт, що число b є границею функції $y = f(x)$ (при $x \to +\infty$) коротко записують так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Геометрична ілюстрація означення 1 на рис. 1 Для фіксованого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число M таке, що для всіх $x > M$ графік функції розташований в заштрихованій смузі. Зазначимо також, що нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$, розкривши модуль, можна записати в розгорнутому вигляді $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

2.1.2 Означення. Число b називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти число M таке, що для всіх $x < M$ виконується нерівність

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

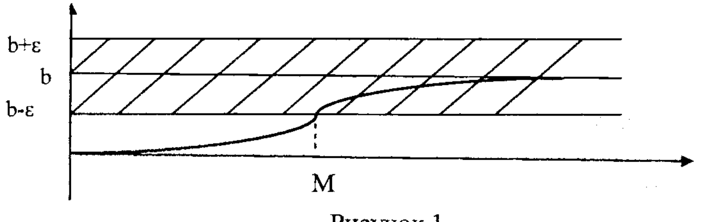

Рисунок 1

Той факт, що число b є границею функції $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, коротко записують так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Геометрична ілюстрація означення 2.1.2 дана на рис. 2.

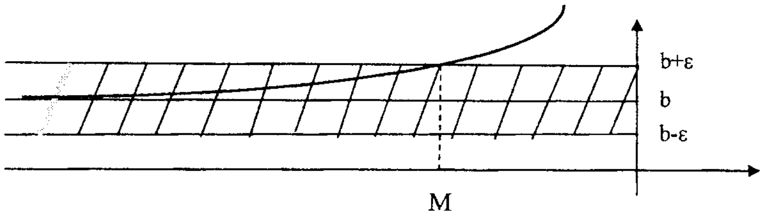

Рисунок 2

2.1.3 Означення. Число b називається границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до a справа (**right-hand limit**), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $M(M > a)$ таке, що для всіх x, які належать проміжку (a, M), виконується нерівність

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Той факт, що число b є границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до a справа, коротко записують так: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b.$

Геометрична ілюстрація означення 2.1.3 дана на рис 3.

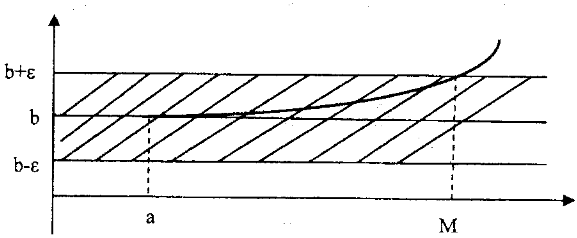

Рисунок 3

2.1.4 Означення. Число b називається границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до a зліва (**left-hand limit**), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $K(K < a)$ таке, що для всіх x, які належать проміжку (K, a), виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Той факт, що число b є границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до a зліва, коротко позначається так: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b.$

Геометрична ілюстрація означення 2.1.4 дана на рис. 4.

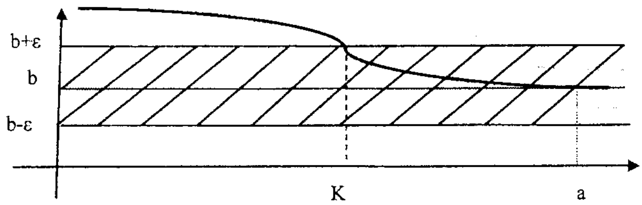

Рисунок 4

2.1.5 Означення. Число b називається *границею функції* (**limit of function**) $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх аргументів x, що задовольняють умову $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Той факт, що число b є границею функції $y = f(x)$ при $x \to a$, коротко записують так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Геометрична ілюстрація означення 2.1.5 дана на рис. 5.

Рисунок 5

2.1.6 Важливо зазначити, що для всіх наведених вище означень існують еквівалентні означення на мові послідовностей. Для прикладу наведемо еквівалентний аналог означення 2.1.5. Всі інші означення (тобто коли $x \to a^{+}$, $x \to a^{-}$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$) пропонуємо сформулювати самостійно.

Означення. Число b називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якої послідовності аргументів $\{x_n\}$, яка збігається до числа a, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа b.

В деяких випадках вигідніше користуватись означенням з п. 2.1.5, в інших – означенням з п. 2.1.6.

2.2 Фундаментальні теореми про границю функції

2.2.1 Теорема. Число b є границею функції $y = f(x)$ при $x \to a$ тоді і лише тоді, коли односторонні границі $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ існують, причому

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b.$$

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з означень попередніх пунктів. Пропонуємо опрацювати це самостійно.

2.2.2 Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ має границю при $x \to a$ (або $x \to a^+$, $x \to a^-, x \to +\infty$, $x \to -\infty$)), то ця границя єдина.

Ідея доведення цієї теореми цілком аналогічна ідеї доведення відповідної теореми про послідовність (див. п. 1.1.2).

2.2.3 Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ має границю при $x \to a^+$, то вона обмежена в деякому правому околі точки a.

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з означення пункту 2.1.3. Аналогічний результат має місце і в інших випадках (тобто коли $x \to a^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$).

2.3 Теореми про нескінченно малі функції

В цьому підрозділі дамо означення нескінченно малої функції і сформулюємо кілька теорем.

2.3.1 Означення. Функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою **(infinitesimal)** при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Аналогічне означення нескінченно малої функції при $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

2.3.2 Теорема. Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ є нескінченно малими при $x \to a$, то їх *сума* (**sum**)$(f(x) \pm \varphi(x))$ теж нескінченно мала функція.

2.3.3 Теорема. Якщо функція $f(x)$ нескінченно мала при $x \to a$, а функція $\varphi(x)$ обмежена в деякому околі точки a, то добуток $f(x) \cdot \varphi(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to a$.

2.3.4 Теорема. *Добуток* (**product**) нескінченно малих функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ при $x \to a$ є нескінченно малою функцією.

Теореми трьох попередніх пунктів доводяться цілком аналогічно відповідним теоремам про послідовності (див. п. 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3). Зазначимо, що всі теореми цього пункту виконуються і в інших випадках (тобто коли $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$).

2.4 Нескінченна велика функція і її зв'язок з нескінченно малою функцією

2.4.1 Означення. Функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to a$, якщо для будь-якого додатного числа M знайдеться окіл точки a такий, що для будь-якого x з цього околу (крім хіба що самої точки a) виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Якщо функція $f(x)$ нескінченно велика при $x \to a$, то коротко це записується так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Аналогічні визначення нескінченно великої функції при $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

2.4.2 Теорема. Якщо функція $f(x)$ нескінченно велика при $x \to a$, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала при $x \to a$ і навпаки, якщо $\alpha(x)$ — нескінченно мала при $x \to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — нескінченно велика при $x \to a$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми про послідовності (див. п. 1.2.8).

2.5 Операції над границями функцій

2.5.1 Теорема. Число b є границею функції $f(x)$ при $x \to a$, тоді і тільки тоді, коли існує нескінченно мала функція $\alpha(x)$ (при $x \to a$), така, що

$$f(x) = b + \alpha(x).$$

Ця теорема доводиться аналогічно теоремі п. 1.2.4. Вона також виконується при $x \to a^-, x \to a^+, x \to +\infty, x \to -\infty$. Скориставшись теоремою п. 2.5.1, а також теоремами 2.3.2 і 2.3.4, легко довести таке.

2.5.2 Теорема. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ і $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = c$, то функції $f(x) \pm \varphi(x)$ та $f(x)\cdot\varphi(x)$ також мають границю при $x \to a$, причому $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm \varphi(x)\big) = b \pm c$ і $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big) = b\cdot c$.

Наведена теорема доводиться аналогічно теоремам п. 1.2.5 та 1.2.6. Вона має місце і в тих випадках, коли $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

2.5.3 Теорема. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ і $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = c$, причому $c \neq 0$, то функція $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ також має границю при $x \to a$, причому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{b}{c}$.

Теорема 2.5.3 доводиться аналогічно теоремі п. 1.2.7. Вона має місце і при $x \to a^-, x \to a^+, x \to +\infty, x \to -\infty$.

2.5.4 Важливу роль в теорії границь відіграє теорема про "двох міліціонерів " (див. п. 1.3.2). Сформулюємо її для випадку функцій дійсного аргументу.

Теорема. Нехай в деякому околі точки a для функцій $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ виконується нерівність $f(x)\le\psi(x)\le\varphi(x)$. Крім того, існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$, причому $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$. Тоді існує границя $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)$, причому $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=b$.

Ця теорема доводиться аналогічно теоремі п. 1.3.2. Подібні твердження мають місце і в інших випадках (тобто коли $x\to a^-$, $x\to a^+$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$).

3 СТАНДАРТНІ ГРАНИЦІ

Тепер ми цілком готові знайти важливі стандартні границі.

А саме: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ та $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

3.1 Перша стандартна границя

Будемо виходити з геометричних міркувань.

На рис. 6 зображено коло, радіус якого дорівнює 1. Кут x вимірюється в радіанах, тобто довжиною дуги, на яку він спирається.

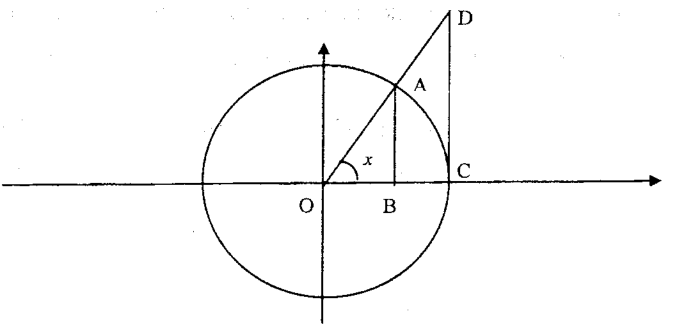

Рисунок 6

Нехай $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Очевидно, що має місце нерівність $0<\sin x<x$. Безпосередньо з означення границі випливає $\lim\limits_{x\to 0}x=0$. Крім того, очевидно $\lim\limits_{x\to 0}0=0$. Застосувавши теорему п. 2.5.4, одержуємо:

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0.$$

Доведемо тепер, що $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$. Застосуємо відому тригонометричну формулу: $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$. Одержуємо :

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 - 2\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 - 2\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 1 - 2\cdot 0\cdot 0 = 1.$$

Тепер, після допоміжних викладок, перейдемо до розгляду границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

З рис. 6 безпосередньо видно:

$$S_{\Delta AOB} < \text{площ. сектора } AOC < S_{\Delta DOC} \qquad (13)$$

Але $S_{\Delta AOB} = \frac{AB\cdot OB}{2} = \frac{\sin x\cdot\cos x}{2}$; пл. сектора $AOC = \frac{AO\cdot CO}{2}\cdot x = \frac{1}{2}\cdot x$,

$S_{\Delta DOC} = \frac{DC\cdot OC}{2} = \frac{tgx\cdot 1}{2} = \frac{tgx}{2}$.

Підставивши одержані значення площ в нерівність (13), матимемо:

$$\frac{\sin x\cdot\cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2}.$$

Всі члени останньої нерівності помножимо на 2 та поділимо на $\sin x$. Одержимо :

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{або} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \qquad (14)$$

Нерівність (14) було одержано за умови, що $x > 0$. Але вона виконується і для $x < 0$, позаяк $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$; $\cos(-x) = \cos x$ та $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$.

Вище вже було показано, що $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Крім того, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1$. Застосувавши теорему п. 2.5.4 до нерівності (2), остаточно одержуємо :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Ця важлива границя називається **першою стандартною границею.** Вона часто застосовується в фізиці.

3.2 Друга стандартна границя

В цьому пункті ми доведемо ще одну важливу границю. А саме:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Нам треба розглянути два випадки: $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$. Спочатку покажемо, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. Скористаємось на цей раз визначенням границі функції на мові послідовностей (див. п. 2.1.6).

Нехай $\{x_k\}$ — послідовність додатних чисел, що прямує до $+\infty$. Позначимо через n_k цілу частину числа x_k (цілою частиною даного числа називається найближче ціле число, що не перевищує дане число). Тоді очевидно, $n_k \le x_k < n_k + 1$. Звідси $\dfrac{1}{n_k+1} < \dfrac{1}{x_k} \le \dfrac{1}{n_k}$. Додавши до всіх частин останньої нерівності одиницю, одержимо $1+\dfrac{1}{n_k+1} < 1+\dfrac{1}{x_k} \le 1+\dfrac{1}{n_k}$. З останньої нерівності випливає: $\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x_k} \le \left(1+\dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$. Покажемо, що

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = e. \qquad (15)$$

Дійсно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1-1}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\cdot\left(\frac{n_k+1}{n_k+2}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{n_k+1}{n_k+2}\right).$$

Оскільки $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}=e$ (див. п. 1.5.1) і $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{n_k+1}{n_k+2}\right)=1$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=e.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=e. \tag{16}$$

Враховуючи нерівність $\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x_k}\le\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$, а також рівності (15) і (16), на підставі теореми «про двох міліціонерів» (див. п. 2.5.4) одержуємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Тепер покажемо, що $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Для цього скористаємося заміною змінної . Нехай $x<-1$. Введемо заміну $y=-x$. Якщо $x\to-\infty$, то $y\to+\infty$. Далі, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot1=e.$$

Таким чином, при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$ функція $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ прямує до числа e. Коротко цей факт записується так:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Ця границя відіграє виключно важливу роль в математичному аналізі. Її називають **другою стандартною границею**.

3.3 Друга стандартна границя в іншій формі

В цьому пункті одержимо важливі наслідки результату попереднього пункту. Спочатку покажемо, що другу стандартну границю можна подати і в іншій формі. А саме:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Дійсно, введемо заміну $y=\dfrac{1}{x}$, тоді $x=\dfrac{1}{y}$. Крім того, якщо $x \to 0$, то $y \to \infty$. Переходимо до змінної y під знаком границі:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Далі одержимо важливі узагальнення. Покажемо, що для будь-якого числа a має місце границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Справді, введемо заміну змінної $y=\dfrac{x}{a}$. Якщо $x \to \infty$, то $y \to \infty$. Під знаком границі переходимо до змінної y:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y\cdot a} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a = e^a.$$

Аналогічно ми одержуємо границю:

$$\lim_{x\to 0}(1+a\cdot x)^{\frac{1}{x}}=e^{a}.$$

4 ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ФУНКЦІЙ

4.1 Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ — нескінченно малі функції при $x\to a$ (або $x\to a^-$, $x\to a^+$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$).

Означення 1. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то кажуть, що $\alpha(x)$ — *нескінченно мала більш високого порядку, ніж* $\beta(x)$ ($\alpha(x)$ **is infinitesimal with respect to** $\beta(x)$ **if** $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ **is infinitesimal**).

Означення 2. Дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ (при $x\to a$) *називаються еквівалентними* (**equivalent infinitesimals**) , якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Еквівалентність нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ позначається символом $\sim$. Наприклад $\sin x\sim x$ (при $x\to 0$).

4.2 В цьому підрозділі доведемо основні теореми про нескінченно малі.

Теорема 1. Якщо $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі функції (при) $x\to a$ і $\beta(x)$— нескінченно мала більш високого порядку, ніж $\alpha(x)$, то $(\alpha(x)+\beta(x))\sim\alpha(x)$.

Доведення.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1+\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1+0=1.$$

Теорема 2. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ (при $x\to a$) є еквівалентними тоді і лише тоді, коли їх різниця є нескінченно малою більш високого порядку малості, аніж $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

Доведення.

1. Нехай $\alpha(x)\sim\beta(x)$ (при $x\to a$). Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1-1=0.$$

Аналогічно $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0$.

Отже, $(\alpha(x)\sim\beta(x))$ є нескінченно малою більш високого порядку малості, ніж $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

2. Нехай тепер нескінченно мала $(\alpha(x)-\beta(x))$ є більш високого порядку малості, ніж $\alpha(x)$ та $\beta(x)$. Треба довести, що $(\alpha(x)\sim\beta(x))$. Дійсно,

$$0=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1-\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$. Тобто, $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Теорема 3. Нехай $\alpha_1(x)\sim\beta_1(x)$ та $\alpha_2(x)\sim\beta_2(x)$ при $x\to a$. Якщо існує $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$, причому ці границі рівні.

Доведення. Маємо:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}\frac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}=$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)} \cdot 1 = \lim_{x \to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}.$$

Теорема 3 досить широко використовується для знаходження границь функцій. Але для її застосування необхідно створити достатній запас "табличних еквівалентностей". Отже, нехай функція $\beta(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$.

Мінімальна таблиця еквівалентних нескінченно малих (при $x \to a$) має вигляд:

1. $\sin\beta(x) \sim \beta(x)$;
2. $\arcsin\beta(x) \sim \beta(x)$;
3. $\left(1 - \cos\beta(x)\right) \sim \dfrac{\left(\beta(x)\right)^2}{2}$;
4. $\ln\left(1 + \beta(x)\right) \sim \beta(x)$;
5. $tg\beta(x) \sim \beta(x)$;
6. $arctg\beta(x) \sim \beta(x)$;
7. $\left(e^{\beta(x)} - 1\right) \sim \beta(x)$.

Деякі з наведених співвідношень (1, 3, 5) ми, по суті, вже одержали (див. підрозділ 3.1). Інші ми обґрунтуємо в підрозділі 5.4, попередньо розглянувши поняття неперервності функції.

5 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Більш-менш повне викладення теорії границь неможливо без розгляду поняття неперервності функцій. В цьому розділі ми торкнемося деяких аспектів теорії неперервних функцій, принаймні тих, які будуть використані в подальшому викладі.

5.1 Поняття неперервності починається з розгляду двох рисунків:

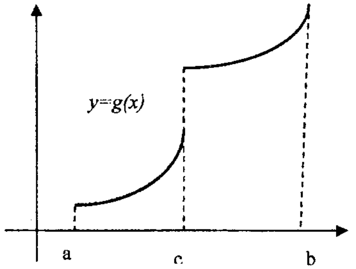

Рисунок 7

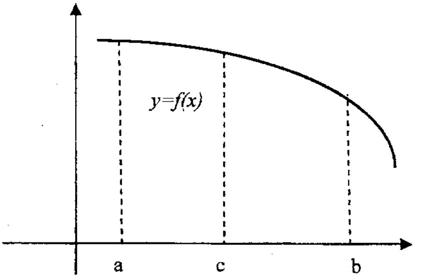

Рисунок 8

Графік функції $g(x)$, що зображений на рис. 7 неможливо нарисувати на відрізку [a, b], не відриваючи ручки від паперу. В цьому випадку ми говоримо, що крива має розрив. Що стосується графіка функції $f(x)$, що зображений на рис. 8, то на відрізку [a, b] його можна нарисувати, не відриваючи ручки від паперу.

Тепер наша задача полягає в тому, щоб ці дуже прості інтуїтивні спостереження перекласти на точну мову математичних термінів. Чим принципово відрізняється поведінка графіка функції $g(x)$ в точці c від поведінки графіка функції $f(x)$ в цій же точці? Для графіка функції $f(x)$ наше спостереження таке: яким би маленьким не був окіл U точки $f(c)$, існує окіл W точки c такий, що для будь-якого $x \in W$ має місце $f(x) \in U$. Легко помітити, що аналогічна властивість для функції $g(x)$ в точці c не виконується. Отже, вищенаведені спостереження можна покласти в основу визначення неперервності функції в точці.

Означення 1. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці a, якщо (**the function $f(x)$ is said to be continuous at a iff**):

1) вона визначена в деякому околі точки a (**neighborhood of a point a**);

2) для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для будь-якого x, що задовольняє умову $|x - a| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Якщо наведене означення зіставити з означенням границі (див. п. 2.1. 5), то ми переконаємось, що для неперервної функції $f(x)$ в точці a має місце рівність

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Наведене означення неперервності на мові " ε – δ " іноді викликає певне заперечення. Проте існує цілком переконлива аргументація на його користь. Адже це означення просто говорить нам про те, з якою точністю треба знаходити значення аргументу функції для того, щоб одержувати значення самої функції з заданою точністю. Необхідність розуміння цього не викликає жодних сумнівів у прикладників.

Означення 2. Функція $y = f(x)$ називається неперервною на множині X, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

5.2 Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні в точці a. Цілком закономірно виникає питання: чи будуть функції

$$f(x) \pm \varphi(x),\ f(x) \cdot \varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

теж неперервними в точці a? Позитивна відповідь на це питання безпосередньо випливає з означення неперервної функції та відповідних теорем про границі (див. підрозділ 2.5).

Дещо окремо стоїть питання про неперервність суперпозиції двох функцій. Тут має місце такий результат.

Теорема. Якщо функція $\varphi(x)$ неперервна в точці c, а функція $f(x)$ неперервна в точці $\varphi(c)$, то складна функція $f(\varphi(x))$ неперервна в точці c.

Доведення. Нехай U – довільний окіл точки $f(\varphi(c))$. Оскільки за умовою функція $f(x)$ неперервна в точці $\varphi(c)$, то існує окіл Ω точки $\varphi(c)$ такий, що

$$f(\Omega) \subseteq U. \tag{17}$$

Але, за умовою, функція $\varphi(x)$ неперервна в точці c, тому існує окіл W точки c такий, що

$$\varphi(W) \subseteq \Omega. \tag{18}$$

З (17) та (18) випливає:

$$f(\varphi(W)) \subseteq U.$$

Останнє включення і означає, що складена функція $f(\varphi(x))$ неперервна в точці c.

5.3 Відомо, що основні елементарні функції неперервні в області визначення. Будь-яку елементарну функцію ми одержуємо з основних елементарних з допомогою скінченного числа алгебраїчних операцій, а також операцій суперпозиції. Спираючись на результати попереднього пункту, ми можемо зробити важливий висновок.

Теорема. Будь-яка елементарна функція в області визначення є неперервною.

5.4. Вище ми вже відмітили, що для неперервної в точці a функції $f(x)$ має місце рівність $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)=f(a)$. Тобто ми можемо міняти місцями знак функції f та знак границі $\lim$.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$ (згідно з підрозділом 3.3 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$) $=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1$. Отже, нескінченно малі $\ln(1+x)$ та x (при $x\to 0$) є еквівалентними.

Приклад 2. Довести, що $\left(e^x-1\right)\sim x$ при $x\to 0$.

Доведення. Нехай $e^x-1=y$, тоді $e^x=y+1$ і $x=\ln(1+y)$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$. Але $\ln(1+y)\sim y$ при $y\to 0$ (див. приклад 1). Отже $\left(e^x-1\right)\sim x$.

Таким чином, ми обґрунтували еквівалентності, що наведені в таблиці підрозділу 4.2.

6 ПРАВИЛИ ЛОПІТАЛЯ

Одним з найпотужніших методів знаходження границь є правило Лопіталя. Для того, щоб хоч частково обґрунтувати це правило, нам доведеться торкнутися поняття похідної і довести теорему Коші.

6.1 Нехай $f(x)$ – функція дійсної змінної x. Зафіксуємо точку a, яка належить області визначення функції $f(x)$ і надамо аргументу приріст Δx. Відповідний приріст функції буде $\Delta f(a,\Delta x)=f(a+\Delta x)-f(a)$.

Означення. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$, то вона називається *похідною функції* $f(x)$ *в точці* a *і позначається символом* $f'(a)$. **(the derivative of $f(x)$ at a and is denoted by $f'(a)$).** Якщо похідна функції $f(x)$ в точці a існує, то кажуть, що функція диференційована в точці a.

6.2 Фундаментальне значення в математичному аналізі має теорема Ролля.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$:

1) визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$;

2) диференційована на відкритому проміжку (a,b);

3) $f(a)=f(b)=0$.

Тоді знайдеться точка c така, що $c\in(a,b)$ і $f'(c)=0$.

Доведення цієї теореми можна знайти в будь-якому підручнику з математичного аналізу.

Тепер доведемо теорему, яка безпосередньо використовується при виведенні правила Лопіталя.

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні на замкненому проміжку $[a,b]$;
2) диференційовані на відкритому проміжку (a,b);
3) $g'(x)\neq 0$ на проміжку (a,b).

Тоді на проміжку (a,b) знайдеться точка c така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x)=\left(f(x)-f(a)\right)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\left(g(x)-g(a)\right).$$

Легко перевірити, що ця функція задовольняє умови теореми Ролля. Дійсно, функція $F(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ оскільки функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на цьому відрізку. Похідна $F'(x)$ на проміжку (a,b) існує, причому

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x).$$

Використовуючи теорему Ролля з останньої рівності одержуємо остаточний результат

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

6.3 Скориставшись теоремою Коші, в цьому підрозділі доведемо правило Лопіталя. В багатьох випадках при знаходженні границь цей метод є найкращим для розкриття невизначеностей.

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють такі умови:

1) вони визначені на проміжку $(a,b]$;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;
3) на проміжку $(a,b]$ існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$,

причому $g'(x)\neq 0$;

4) існує границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$.

Тоді існує і границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доведення. Доповнимо функції $f(x)$ та $g(x)$, поклавши $f(a)= = g(a)=0$. Тоді ці функції стануть неперервними на всьому замкненому проміжку $[a,b]$. Згідно з теоремою Коші (умови цієї теореми виконуються), існує число c (де $a<c<x$) таке, що має місце рівність:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Коли $x\to a$, то, очевидно, $c\to a$. Таким чином,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=k.$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що ми розглянули випадок, коли a є лівим кінцем проміжку і змінна x прямує до a справа. Аналогічно можна було б розглянути той випадок, коли a є правим кінцем відрізка і x прямує до нього зліва.

Теорему 1 легко поширити на той випадок, коли $x\to\pm\infty$. Тобто має місце теорема 2.

Теорема 2. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$:

1) визначені на проміжку $[c,+\infty)$;
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;
3) на проміжку $[c,+\infty)$ функції $f(x)$ та $g(x)$ мають скінченні похідні, причому $g'(x)\neq 0$;
4) існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує і границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Доведення. Введемо заміну змінної за формулою $x=\frac{1}{t}$, тоді $t=\frac{1}{x}$.

Якщо $x\to+\infty$, то $t\to 0^+$ і навпаки. Згідно з умовою 2 маємо:

$$\lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0^+} g\left(\frac{1}{t}\right)=0.$$

За умовою 4 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=k$. До функцій $f\left(\frac{1}{t}\right)$ та $g\left(\frac{1}{t}\right)$ можна застосувати теорему 1. Матимемо:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=k.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k.$

Сформулюємо (без доведення) ще один випадок правила Лопіталя.

Теорема 3. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$:

1) визначені на проміжку $(a,b]$;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$;
3) на проміжку $(a,b]$ існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$, причому $g'(x)\neq 0$;
4) існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k.$

Тоді існує і границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}.$

Всі три теореми цього підрозділу в сукупності утворюють правило Лопіталя.

7 НЕВИЗНАЧЕНІ ВИРАЗИ

В теоремах про границі (див. п. 2.7) ми розглянули границі функцій $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ маючи на увазі, що $\lim f(x)$ та $\lim g(x)$ скінченні величини.

Задача обчислення границі значно ускладнюється, якщо умови теорем про границю добутку, ділення, різниці двох функцій не виконуються. Нехай, наприклад, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Для обчислення границі $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ми не можемо скористатися теоремою п. 2.5.3 позаяк $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. В таких випадках кажуть, що ми маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Це означає, що залежно від конкретного виду функцій $f(x)$ та $g(x)$ границя їх відношення може набувати тих чи інших значень.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то границю $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ називають невизначеністю типу $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то границю $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ називають невизначеністю типу $(0\cdot\infty)$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то границю $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)$ називають невизначеністю типу $(\infty-\infty)$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то границю $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ називають невизначеністю типу 1^{∞}.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, то границю $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ називають невизначеністю типу 0^0.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, то границю $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ називають невизначеністю типу ∞^0.

Зазначимо, що всі щойно наведені означення мають місце і у випадку, коли $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

8 ТЕХНІКА ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

Тепер ми вже володіємо досить потужним апаратом для знаходження границь елементарних функцій. Розглянемо кілька методів, ілюструючи їх прикладами. Теореми про границі будемо використовувати без детального посилання на них.

8.1 Еквівалентні перетворення під знаком границі

Приклад 1. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Чисельник і знаменник розкладаємо на лінійні множники: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)}{(x+2)}=\dfrac{4}{3}$.

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Під знаком границі помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника, а саме на $\sqrt{x-1}+3$. Одержимо:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{\left(\sqrt{x-1}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)}{(x-10)\cdot\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$.

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Помножимо і поділимо вираз під знаком границі на спряжений. Одержимо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)}=0.$$

Приклад 4. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $(\infty - \infty)$. Помножимо і поділимо вираз під знаком границі на спряжений вираз. Одержимо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{\left(\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-3}\right)}=$$ [*одержимо невизначеність типу* $\frac{\infty}{\infty}$. *Поділимо чисельник і знаменник на* x] $=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}\right)}=$

$$=\frac{3+0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0}}=\frac{3}{2}.$$

Перед тим як розглянути черговий приклад, нагадаємо формулу:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Вираз $\left(a^2+ab+b^2\right)$ називається неповним квадратом суми.

Приклад 5. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(\sqrt[3]{5+x^3}-\sqrt[3]{3+x^3}\right).$

Розв'язання. Помножимо і поділимо вираз під знаком границі на неповний квадрат суми, тобто на $\left(5+x^3\right)^{\frac{2}{3}}+\left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(3+x^3\right)^{\frac{1}{3}}+\left(3+x^3\right)^{\frac{2}{3}}$.

Одержимо:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(\sqrt[3]{5+x^3}-\sqrt[3]{3+x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(5+x^3-3-x^3\right)}{\left(5+x^3\right)^{\frac{2}{3}}+\left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(3+x^3\right)^{\frac{1}{3}}+\left(3+x^3\right)^{\frac{2}{3}}}=$$

= [*поділимо чисельник і знаменник на* x^2] =

$$=2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{5+x^3}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{5+x^3}{x^3}\right)}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{3+x^3}{x^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{3+x^3}{x^3}\right)^2}}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{5}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{5}{x^3}\right)}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x^3}\right)^2}}=$$

$$=2\frac{1}{\sqrt[3]{(1+0)^2}+\sqrt[3]{1+0}\cdot\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[3]{(1+0)^2}}=\frac{2}{3}.$$

8.2 Застосування еквівалентних нескінченно малих

В деяких випадках для знаходження границь вигідно скористатись теоремою 3 підрозділу 4.2 та таблицею еквівалентностей, що наведена в кінці цього ж пункту.

Приклад 1. Обчислити $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}$.

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{e\cdot\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}=[\text{ }при\ x\to1\, маємо\ \left(e^{x-1}-1\right)\sim(x-1)]=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{e\cdot(x-1)}{x-1}=e.$$

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg2x}{e^{\sin3x}-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg2x}{e^{\sin3x}-1}$ = [*при* $x\to0$ *маємо еквівалентності* $arctg2x\sim2x$ *і* $\left(e^{\sin3x}-1\right)\sim\sin3x\sim3x$] $=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$.

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}$ = [*при* $x\to0$ *маємо еквівалентність* $\ln(1+\cos x-1)\sim(\cos x-1)$] $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$ = [*при* $x\to0$ *застосуємо еквівалентність* $(1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}$] $=-\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$.

Приклад 4. Обчислити:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln(x+2)-x\ln(x+1)\right].$$

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність типу($\infty-\infty$). Виконуємо такі дії:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln(x+2)-x\ln(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+2)-\ln(x+1)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\frac{x-1+3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)=$$

$$\left[\text{\textit{при } } x\to\infty \text{\textit{ застосуємо еквівалентність }} \ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\sim\frac{3}{x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot 3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-\frac{1}{x}}=3.$$

Приклад 5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Оскільки функції $y=3x$ і $y=2x$ не є нескінченно малими при $x\to\pi$, то пряме застосування таблиці еквівалентностей є грубою помилкою. Тому спочатку введемо заміну змінної, а саме: $t=x-\pi$. Якщо $x\to\pi$, то $t\to 0$. Під знаком границі перейдемо до змінної t. Одержимо:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3(t+\pi)}{\sin 2(t+\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3t+3\pi)}{\sin(2t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3t+\pi+2\pi)}{\sin 2t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3t+\pi)}{\sin 2t}=\left[\text{\textit{за формулою зведення }}\sin(3t+\pi)=-\sin 3t\right]=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t}{\sin 2t}=$$

$$=\left[\text{при } t\to 0\ \sin 3t\sim 3t \text{ і } \sin 2t\sim 2t\right]=\lim_{t\to 0}\frac{-3t}{2t}=-\frac{3}{2}.$$

8.3 Розкриття невизначеності типу 1^∞

Невизначеність типу 1^∞ розкривається за допомогою границі $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u=e$ або їй еквівалентній $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$.

Приклад 1. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{x+1}\right)^x$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність типу 1^∞.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{(x+1)\cdot\frac{x}{x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{x}{x+1}}=$$

$= [$*застосуємо другу стандартну границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x+1}\right]=e^2$ $]=$

$$=e^{2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}}=e^2.$$

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to1}(6x-5)^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу 1^∞.

$\lim\limits_{x\to1}(6x-5)^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\left(1+6(x-1)\right)^{\frac{1}{x-1}}=[$ *нехай* $(x-1)=t$, *якщо* $x\to1$, то

$t\to0$ $]= =\lim\limits_{t\to0}(1+6t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to0}(1+6t)^{\frac{6}{6t}}=\lim\limits_{t\to0}\left[(1+6t)^{\frac{1}{6t}}\right]^6=e^6.$

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{(\cos x-1)}{(\cos x-1)\sin x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x}}=$$

$=[$ застосуємо еквівалентності $\sin x\sim x$ і $(1-\cos x)\sim\dfrac{x^2}{2}$ $]$ $=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2}{2x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x}{2}}=e^0=1.$

8.4 Застосування правила Лопіталя

В багатьох випадках найбільш ефективним методом знаходження границь є правило Лопіталя (див. підрозділ 6.3)

Теореми підрозділу 6.3 безпосередньо використовуються для розкриття невизначеності типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ та $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Більш детально зупинимось на застосуванні правила Лопіталя для розкриття невизначеності типу $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}.

1. Для обчислення $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)$, де $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, слід виконати такі перетворення:

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)}.$$

В результаті невизначеність типу $0\cdot\infty$ трансформується у невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, до якої застосовуємо правило Лопіталя.

2. Для обчислення $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$, де $f(x)$ і $\varphi(x)$ — нескінченно великі при $x\to a$, різницю $(f(x)-\varphi(x))$ подамо у вигляді $f(x)\cdot\left(1-\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$.

Далі, за допомогою правила Лопіталя розкриваємо невизначеність $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-\varphi(x))=\infty$.

Якщо ж $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=1$, то ми одержуємо невизначеність типу $(\infty\cdot 0)$ (див. п. 1).

3. Для розкриття невизначеності типу 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} діємо таким чином. Спочатку логарифмуємо вираз під знаком границі (цей вираз має вигляд $y=[f(x)]^{g(x)}$. Далі знаходимо границю виразу $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$. Після цього обчислюємо границю $\lim[f(x)]^{g(x)}$. Зазначимо, що в усіх трьох випадках $\lim(\ln y)=\lim(g(x)\cdot\ln f(x))$ є невизначеністю типу $(0\cdot\infty)$, метод розкриття якої ми розглянули вище (див. п. 1).

Тепер наші загальні викладки детально проілюструємо на конкретних прикладах.

Приклад 1. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Дiємо за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Дiємо за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$.

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Застосуємо правило Лопіталя тричі підряд. Матимемо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

Приклад 4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln^2 x$.

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність типу $(0\cdot\infty)$. Дiємо за правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln^2 x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0^+}\ln x\cdot x=-2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}=2\lim_{x\to 0^+}x=0.$$

Приклад 5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Розв'язання. Тут ми маємо невизначеність типу $(\infty-\infty)$.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}==\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}==\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x\ln x+x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність типу 1^{∞}. Прологарифмуємо вираз під знаком $\lim$ і знайдемо границю при $x\to\infty$. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos x))'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x\cdot\cos x}=0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[(\cos x)\right]^{\frac{1}{\sin x}}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)=0.$ Звідси $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}=1.$

Зазначимо, що цей приклад іншим методом було розв'язано в підрозділі 8.3.

Приклад 7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу 0^0. Логарифмуємо вираз під знаком $\lim$ і переходимо до границі. Маємо:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0^+}x=0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^x=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+}x^x\right)=0.$ Звідси $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^x=1.$

9 АНАЛІЗ ТИПОВИХ ПОМИЛОК ПРИ ЗНАХОДЖЕННІ ГРАНИЦЬ

9.1 До грубих помилок слід віднести нееквівалентні перетворення під знаком границі. Часом студент, прагнучи до спрощення виразу під знаком границі, виконує безпідставні дії (підносить до квадрата, домножує на якийсь вираз і под.).

Наведемо приклад.

Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$.

Іноді трапляються такі "розв'язання":

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-x\right)=2.$$

В "розв'язанні" цього прикладу студент припускається грубої помилки — він абсолютно безпідставно "спрощує" вираз під знаком lim, домноживши його на спряжений. Для одержання правильного результату слід було б виконати еквівалентне перетворення. А саме: помножити і поділити вирази під знаком границі на спряжений.

9.2 До найпоширеніших помилок (вони досить детально обговорювались у вступній частині навчального посібника) належать помилки, коли студент оперує з нескінченністю як з числом. Приписуючи нескінченності властивості числа, деякі студенти одержують результат типу:

$$1^{\infty}=1,\ \frac{\infty}{\infty}=1,\ \infty-\infty=0 \text{ і под.}$$

Звичайно, викладачеві слід підкреслити, що вирази виду $\left(\infty-\infty\right)$, 1^{∞}, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\frac{0}{0}$ належать до невизначеностей, тобто результат залежить від конкретної умови. Крім того, ми повинні діяти, чітко посилаючись (явно чи неявно) на відомі теореми.

Відповідні приклади розглянуто в розділі 8.

9.3 В свій час, оволодівши технікою знаходження границь за допомогою еквівалентних нескінченно малих (див. підрозділи 4.2 та п. 8.2), деякі студенти намагаються незаконно розширити сферу застосування цього методу. Приміром, часом забувають, що функція $\sin\alpha(x)$ буде нескінченно малою тільки тоді, коли $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина. В результаті іноді трапляються такі "розв'язання":

Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin 3x}{6x}$.

"Розв'язання". Оскільки $\sin 3x \sim 3x$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 3x}{6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{6x}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Тут припускається груба помилка, адже $\sin 3x \sim 3x$ лише тоді, коли $x\to 0$. Правильні дії такі: функція $\dfrac{1}{6x}$ нескінченно мала при $x\to+\infty$, а функція $\sin 3x$ – обмежена. Як відомо (див. п. 2.3.3), добуток нескінченно малої на обмежену функцію є нескінченно малою. Отже,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 3x}{6x}=0.$$

Іноді студенти помиляються, переходячи до границі під знаком границі. Можливо ця помилка не так поширена. Проте… В реальній педагогічній практиці одного разу виникла така ситуація. На одному з практичних занять, коли розглядався метод знаходження границь за допомогою еквівалентних нескінченно малих, студентам було запропоновано розв'язати такий приклад:

$$\text{знайти } \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}.$$

Через деякий час студентами А, Б, В було дано три різні відповіді, а саме $\dfrac{1}{2}$; 1; $\dfrac{3}{2}$.

Викладки студента А були такі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=(\text{позаяк } \lim_{x\to 0}e^{x^2}=1)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\left((1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\cdot x^2}=\frac{1}{2}.$$

Студент Б запропонував інший варіант розв'язування:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=(\text{оскільки } \lim_{x\to 0}\cos x=1)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=$$

$$= \left(e^{x^2} - 1 \sim x^2\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Студент В діяв таким чином:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2} = = \begin{bmatrix} \left(e^{x^2} - 1\right) \sim x^2 \\ (1 - \cos x) \sim \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Лише студент В не помилився. Його дії цілком обґрунтовані.

10 КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК РОЗРИВУ

10.1 В розділі 5 ми розглянули поняття неперервності функції. В цьому пункті ми дамо означення точок розриву функції і класифікуємо їх. Спочатку визначимо, яка точка називається граничною точкою множини.

Означення 1. Точка b називається *граничною точкою* числової множини A (**a boundary point of the set** A), якщо будь-який окіл точки b містить як точки які належать множині A так і точки які не належать цій множині.

Приклад 1. Розглянемо замкнений відрізок $[2, 4]$. Граничними точками цієї числової множини є дві точки: 2 і 4. Обидві ці точки належать відрізку $[2, 4]$.

Приклад 2. Розглянемо відкритий проміжок $(2, 4)$. Граничними точками цієї числової множини є ті самі (що і в попередньому прикладі) точки. Обидві вони не належать проміжку $(2, 4)$.

Означення 2. Точка b називається *точкою розриву* (**point of discontinuity**) функції $y = f(x)$ в двох випадках:

1) якщо вона належить області визначення функції $y=f(x)$ і не є точкою неперервності;

2) якщо вона не належить області визначення функції $y=f(x)$ і є граничною точкою області визначення.

Наведемо приклади.

Приклад 3. Розглянемо функцію $f(x)=\begin{cases} x, \text{ якщо } x\le 0; \\ x^2+1, \text{ якщо } x>0 \end{cases}$ (див. рис. 9).

Областю визначення цієї функції є всі дійсні числа. Точка 0 є точкою розриву, оскільки вона не є точкою неперервності.

Приклад 4. Розглянемо функцію $y=\frac{1}{x^2}$ (див. рис. 10). Областю визначення цієї функції є множина $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Точка 0 – єдина точка розриву даної функції. Вона не належить області визначення функції $y=\frac{1}{x^2}$, але є граничною точкою області визначення.

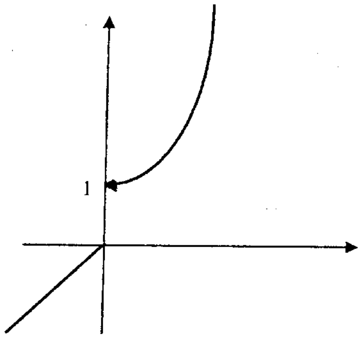

Рисунок 9

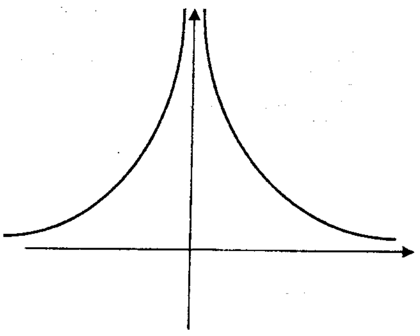

Рисунок 10

Тепер приступимо до класифікації точок розриву функції.

Означення 3. Точка розриву a функції $y=f(x)$ називається точкою розриву *першого роду*, якщо існують односторонні скінченні границі $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Означення 4. Точка розриву a функції $y = f(x)$ називається точкою розриву *другого роду*, якщо вона не є точкою розриву першого роду. Іншими словами, якщо хоча б одна з односторонніх границь функції в цій точці або дорівнює нескінченності, або не існує.

Слід зазначити, що серед точок розриву першого роду окремо виділяють точки *усувного розриву*.

Означення 5. Точка розриву a першого роду функції $y = f(x)$ називається точкою *усувного розриву* (**removable discontinuity**), якщо односторонні границі $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ рівні між собою.

Наведемо приклади.

Приклад 5. Функцію $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ дослідити на неперервність і знайти точки розриву.

Розв'язання. Очевидно, що $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x > 0; \\ -1, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$ Дана функція неперервна на проміжку $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Точка $x = 0$ – єдина точка розриву цієї функції. Оскільки односторонні границі існують ($\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ і $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$), то точка $x = 0$ є точкою розриву першого роду. Графік цієї функції на рис. 11.

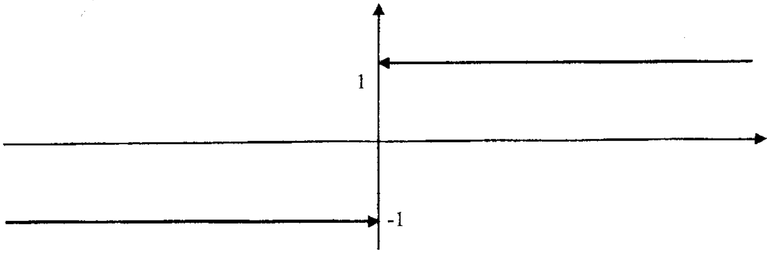

Рисунок 11

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ і знайти її точки розриву.

Розв'язання. Дана функція неперервна на проміжку $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Точка $x = 0$ – єдина точка розриву. Щоб з'ясувати, до якого типу вона належить, знайдемо односторонні границі. Якщо $x \to 0^+$, то $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Звідси $\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{+\infty} = +\infty$. Якщо ж $x \to 0^-$, то $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Отже, $\lim\limits_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{-\infty} = 0$. Оскільки правостороння границя функції (при $x \to 0^+$) є нескінченістю, то точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду. Ескіз графіка даної функції на рис. 12.

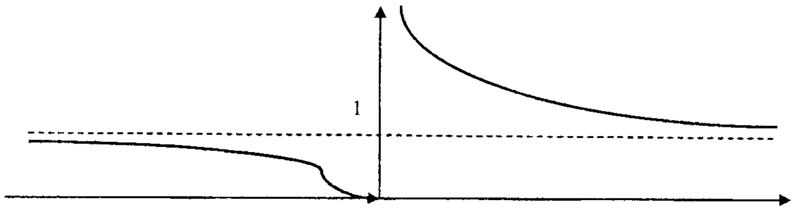

Рисунок 12

Приклад 7. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ і знайти її точки розриву.

Розв'язання. Дана функція неперервна на проміжку $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Точка $x = 1$ – єдина точка розриву. Оскільки $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, то в області визначення функція $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ дорівнює функції $(x + 2)$. Позаяк $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$, то точка $x = 1$ є точкою усувного розриву. Ескіз графіка даної функції на рис. 13.

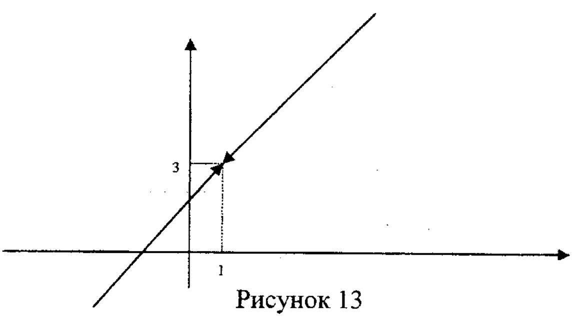

Рисунок 13

10.2 Тепер сформулюємо фундаментальні теореми про неперервні функції на відрізку і проілюструємо ці теореми на графіках.

Теорема 1. (Перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях набуває значень різних знаків, то всередині відрізка $[a;b]$ знайдеться принаймні одна точка $x=c$, в якій функція дорівнює нулю: $f(c)=0,\ a<c<b.$

Риунок 14 переконливо ілюструє цю важливу теорему.

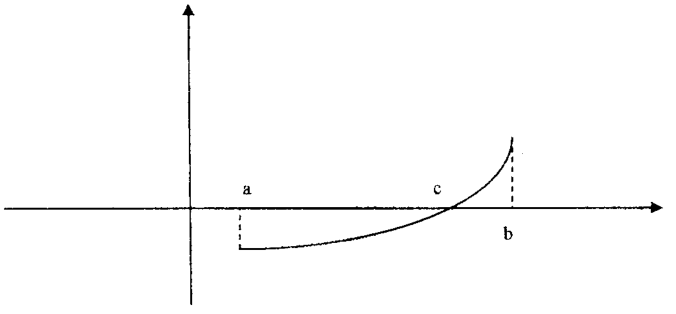

Рисунок 14

Теорема 2. (Друга теорема Больцано-Коші). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Нехай число K таке, що $m \le K \le M$ (де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$). Тоді для знайдеться таке число $c \in (a;b)$, що $f(c)=K.$

Зміст теореми 2 ілюструється на рис. 15.

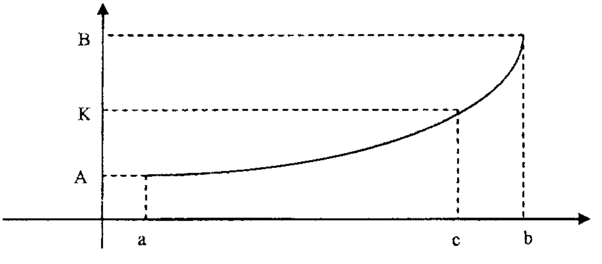

Рисунок 15

Теорема 3 (Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше.

Розглянемо всі можливі випадки:

1 - ий випадок. На відрізку $[a;b]$ неперервна функція $f(x)$ монотонно зростає. Тоді $m=f(a)$ і $M=f(b)$ (рис. 16).

2 - й випадок. На відрізку $[a;b]$ неперервна функція $f(x)$ монотонно спадна. Тоді $m=f(b)$ і $M=f(a)$ (рис. 17).

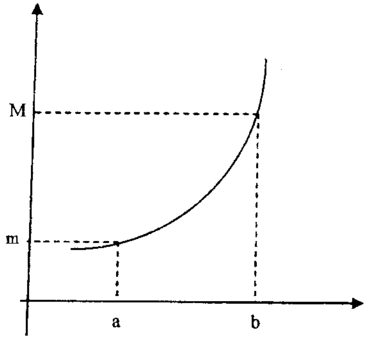

Рисунок 16

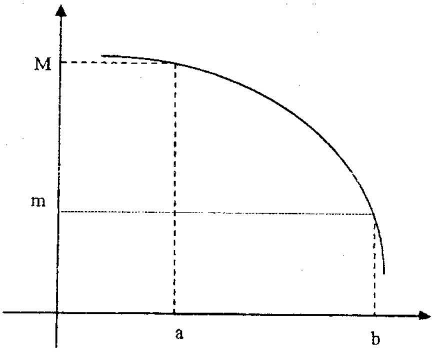

Рисунок 17

3 - ій випадок. Найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ досягається у внутрішніх точках відрізка (рис. 18).

4 - ий випадок. Найбільше (найменше) значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ досягається в кінцевій точці відрізка, а найменше (найбільше) значення досягається у внутрішній точці відрізка $[a;b]$ (рис. 19).

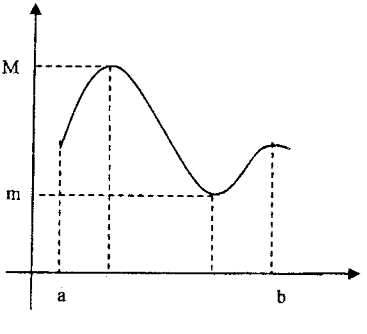

Рисунок 18

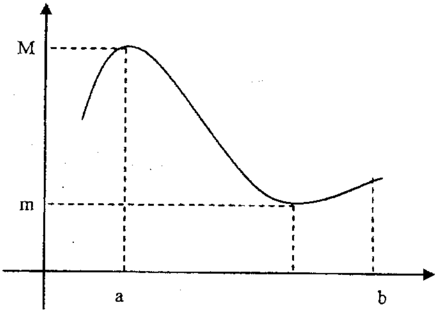

Рисунок 19

11 ВАРІАНТИ ПРИКЛАДІВ ДЛЯ САМОПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ

Варіант 1

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-4x+5}{3x^3+6x-1}$, 2) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3}$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{\ln(e-x)-1}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(6-5x)^{\frac{1}{1-x}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=3^{\frac{1}{x-2}}$; *b*) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

Варіант 2

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+4x-1}{5x^4+7x}$, 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4}$,

3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$, 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin5x}{\sin4x}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=2^{\frac{1}{x-1}}$; *b*) $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}$.

Варіант 3

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^4+7x}$, 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3x-10}{x+2}$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$, 6) $\lim\limits_{x\to2}(9-4x)^{\frac{1}{x-2}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка. *a*) $y=arctg\dfrac{1}{x-1}$; *b*) $y=\dfrac{x-1}{|x-1|}$.

Варіант 4

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+x^2-6x}{x^5+7x^4+5}$, 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+6x-7}$, 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-2}\right)^{x+2}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(4-3x)^{\frac{1}{x-1}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^2-1 & (x>0),\\ -x & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 5

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^2+6}{5x^4+x^2+5x}$, 2) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+11x+28}{x^2+4x}$, 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{3x}$, 6) $\lim\limits_{x\to3}(10-3x)^{\frac{1}{x-3}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=4^{\frac{1}{1-x}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^3+1 & (x>0),\\ -x^2 & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 6

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-6x}{x^3-4x^2+5}$, 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2+x-12}$, 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{2x}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(5-4x)^{\frac{1}{1-x}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=arctg\dfrac{1}{x}$; *b*) $y=\begin{cases}x+1 & (x>0),\\ -x^3 & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 7

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^3-x}{x^4-2x^3+5}$, 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$,

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{x\cdot\left[\ln(x+3)-\ln x\right]\right\}$, 6) $\lim\limits_{x\to 4}(13-3x)^{\frac{1}{4-x}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=3^{\frac{2}{x-3}}$; *b*) $y=\begin{cases}\sin x & (x>0),\\ 1-x & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 8

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-4x}{x^3-2x^2+7}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-3^x}{\sin x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^x$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=arctg\dfrac{1}{x-4}$; *b*) $y=\dfrac{x^2+8x+15}{x+3}$.

Варіант 9

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6+x^4+4}{x^6-6x-8}$, 2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3x}{2+3x}\right)^x$, 6) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=3^{\frac{1}{x}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^2+1 & (x>0),\\ -2 & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 10

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2+3x}{x^3-2x+8}$, 2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{tgx}$, 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{5+x}\right)^{3x-1}$, 6) $\lim\limits_{x\to2}(9-4x)^{\frac{1}{x-2}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: $a)\ y=4^{\frac{1}{x-2}}$; $b)\ y=\begin{cases}2x^2-1 & (x>0),\\ 1 & (x\le0).\end{cases}$

Варіант 11

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-4}{3x^2-2x+9}$, 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6^x-2^x}{tgx}$, 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$, 5) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+1}\right)^{x+1}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: $a)\ y=arctg\dfrac{1}{x+2}$; $b)\ y=\dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$.

Варіант 12

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+3}{4x^3+x+9}$, 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-4x+3}$, 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-3^{-x}}{\arcsin 4x}$,

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+2x}{5+2x}\right)^x$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(4-3x)^{\frac{1}{x-1}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: $a)\ y=3^{\frac{1}{1-x}}$; $b)\ y=\begin{cases}x^2+1 & (x>0),\\ x & (x\le0).\end{cases}$

Варіант 13

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+x}{4x^3-x+7}$, 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$, 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{tgx}$,

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{x-1}$, 6) $\lim\limits_{x\to3}(x-2)^{\frac{1}{3-x}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=3^{\frac{2}{2x-1}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^3-1 & (x>0),\\ 2 & (x\le0).\end{cases}$

Варіант 14

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x-4}{3x^3-2x^2+3x}$, 2) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+4x-5}$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+arctgx}$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$, 5) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{tgx}}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{3x+1}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=arctg\dfrac{1}{x-1}$; *b*) $y=\dfrac{x^2+3x}{x+3}$.

Варіант 15

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^4+6x+9}$, 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+7x+6}$, 3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin2x}{\sin3x}$,

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^{3x}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(6x-5)^{\frac{1}{1-x}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=4^{\frac{1}{x+1}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^3+1 & (x>0),\\ x-2 & (x\le0).\end{cases}$

Варіант 16

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2+5x}{x^3-x+1}$, 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+6x+8}$,

3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sin(x+2)}{4x+8}$, 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+x}{3+x}\right)^{3x}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(4x-3)^{\frac{1}{x-1}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=5^{\frac{2}{x-1}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^3+1 & (x>0),\\ 2x & (x\le0).\end{cases}$

Варіант 17

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{x^3+2x^2+x}$, 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, 5) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{3x}}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{x+1}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=arctg\dfrac{1}{3-x}$; *b*) $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$.

Варіант 18

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2+5}{5x^3+x+9}$, 2) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+5x}$, 3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\sin7x}$,

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x^2\right)$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+3x}{3+3x}\right)^{4x}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(7x-6)^{\frac{1}{1-x}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=2^{\frac{1}{x+3}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^3-1 & (x>0),\\ x+2 & (x\le0).\end{cases}$

Варіант 19

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+x}{6x^3-x+7}$, 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-6x-7}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}\right)$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+4x}{6+4x}\right)^{x^2}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(5x-4)^{\frac{1}{x-1}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=e^{\frac{2}{x-3}}$; *b*) $y=\begin{cases}2x^3+1 & (x>0),\\ -x^2 & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 20

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-7}{x^4+x^2+3x}$, 2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$, 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-2x}$,

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2}}{x}$, 5) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 3x)^{\frac{1}{tgx}}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{3x+1}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=arctg\dfrac{1}{4-x}$; *b*) $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$.

Варіант 21

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2+5}{7x^3+x^2+3x}$, 2) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9}$, 3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$,

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^{4x}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=4^{\frac{1}{x-3}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^3+1 & (x>0),\\ 2x-1 & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 22

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^2+2x-1}{6x^4-2x+7}$, 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x-18}$,

3) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right)$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x$, 6) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=2^{\frac{4}{x-1}}$; *b*) $y=\begin{cases}3x^2+1 & (x>0),\\ -x^3 & (x\le0).\end{cases}$

Варіант 23

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-7}{4x^3+x+3}$, 2) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+9x+14}$,

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$, 5) $\lim\limits_{x\to2}(17-8x)^{\frac{1}{x-2}}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=arctg\dfrac{2}{1-x}$; *b*) $y=\dfrac{x^2+9x+20}{x+4}$.

Варіант 24

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x^3+5x}{5x^4+x^2+3}$, 2) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+11x+28}$,

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+16}-4}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{6x}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=3^{\frac{1}{x-4}}$; *b*) $y=\begin{cases}2x^3+2 & (x>0),\\ x-1 & (x\le0).\end{cases}$

Варіант 25

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2-4x}{3x^4-2x^2+5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-4x-21}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-5^x}{3x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{x\cdot\left[\ln(2x+3)-\ln 2x\right]\right\}$, 6) $\lim\limits_{x\to 2}(15-7x)^{\frac{1}{x-2}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=4^{\frac{2}{x-5}}$; *b*) $y=\begin{cases}\cos x & (x>0),\\ 2-x & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 26

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+6x^3-4}{2x^5-x^2+9x}$, 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2+9x+8}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-2^x}{\sin x}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}$, 5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{tgx}}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{x+2}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; *b*) $y=\dfrac{x^2+8x+15}{x+3}$.

Варіант 27

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x+1}{x^3+2x-7}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+8x-9}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{-x}}{\mathrm{arc}tg2x}$,

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^5}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{5+x}\right)^{2x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 2}(9-4x)^{\frac{1}{x-2}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=2^{\frac{1}{3-x}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^2+1 & (x>0),\\ 2x-1 & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 28

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+x}{3x^3-x+8}$, 2) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6^x-6^{-x}}{x}$, 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5+x}-x}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+4x}{2+4x}\right)^{x-1}$, 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=2^{\frac{1}{x-3}}$; *b*) $y=\begin{cases}x^2+1 & (x>0),\\ 3 & (x\le 0).\end{cases}$

Варіант 29

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x+5}{x^3+x^2+4x}$, 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin x}$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x^2}$, 5) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{tgx}}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{4x+1}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=arctg\dfrac{1}{x-5}$; *b*) $y=\dfrac{x^2+9x+18}{x+3}$.

Варіант 30

Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-6x^2+4x}{2x^5+3x+8}$, 2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-12}$, 3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 4x}{\sin 6x}$,

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\sqrt{x}\right)$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^{7x}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}(12x-11)^{\frac{1}{1-x}}$.

Дані функції дослідити на неперервність, знайти точки розриву і класифікувати їх. Побудувати ескіз графіка: *a*) $y=7^{\frac{1}{x-3}}$; *b*) $y=\begin{cases}3x^3-1 & (x>0),\\ 2x+2 & (x\le 0).\end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : «А. С. К», 2005. – 647 с.

2. Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : «А.С.К.», 2005. – 479 с.

3. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі / Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. – К. : «Академія», 2003. – 621 с.

4. Шкіль М. І. Вища математика. Вступ до математичного аналізу / Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. П. – К. : «Либідь», 1994. – 278 с.

5. Кулініч Г. Л. Вища математика. Основні означення приклади і задачі / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва. – К. : «Либідь», 1994. – 307 с.

6. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Р. Курант. — М. : Наука, 1967. – 704 с.

Глосарій

Границя послідовності - **limit of sequence** (C. 8).

Нерівність – **inequality** (C. 8).

Означення – **definition** (C. 8).

Обмежена зверху – **bounded above** (C. 10).

Обмежена знизу - **bounded below** (C. 10).

Обмежена послідовність - **bounded sequence** (C. 10).

Скінченна кількість – **finite number** (C. 10).

Сума – **sum** (C. 10).

Добуток – **product** (C. 10).

Частка – **ratio** (C. 10).

Нескінченно мала – **infinitesimal** (C. 11).

Нескінченно велика – **infinitely large** (C. 16).

Верхня межа – **upper bound** (C. 18).

Нижня межа – **lower bound** (C. 18).

Точна верхня межа – **least upper bound** (C. 19).

Точна нижня межа – **greatest lower bound** (C. 19).

Границя функції – **limit of function** (C. 22).

Правостороння границя – **right -hand limit of function** (C. 23).

Лівостороння границя – **left-hand limit of function** (C. 23).

$\alpha(x)$ — нескінченно мала більш високого порядку ніж $\beta(x)$ – $\alpha(x)$ **is infinitesimal with respect to** $\beta(x)$ **if** $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ **is infinitesimal** (C. 33).

Еквівалентні нескінченно малі – **equivalent infinitesimals** (C. 33).

Окіл точки a – **neighborhood of a point** a (C. 36).

Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці a, якщо – **the function** $f(x)$ **is said to be continuous at** a **iff** (C. 36).

Похідна функції $f(x)$ в точці a і позначається символом $f'(a)$ - **the derivative of** $f(x)$ **at** a **and is denoted by** $f'(a)$) (C. 39).

Гранична точка множини A - **a boundary point of the set** A (C. 54).

Точка розриву – **point of discontinuity** (C. 54).

Усувний розрив – **removable discontinuity** (C. 56).

Навчальне видання

Барковська Алла Андріївна

Дереч Володимир Дмитрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено В. Деречем

Підписано до друку 26.09.2012 р.
Формат 29,7× 42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. др. арк. 4,5.
Наклад 100 прим. Зам. № 2011-118

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНТК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.