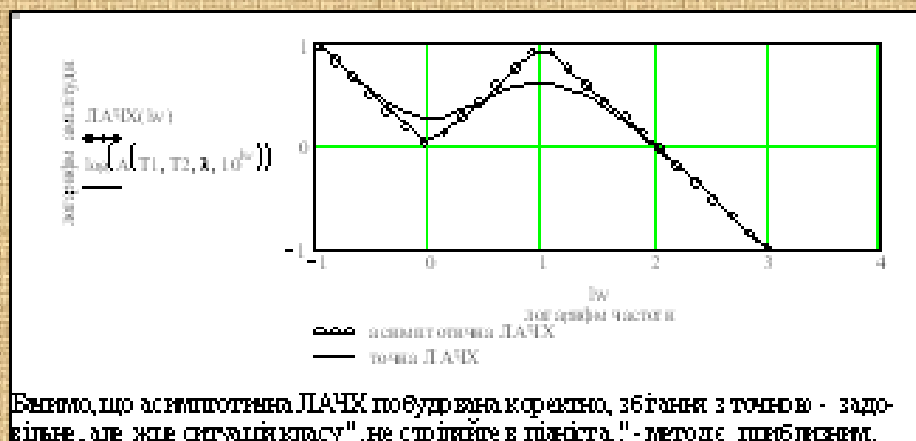
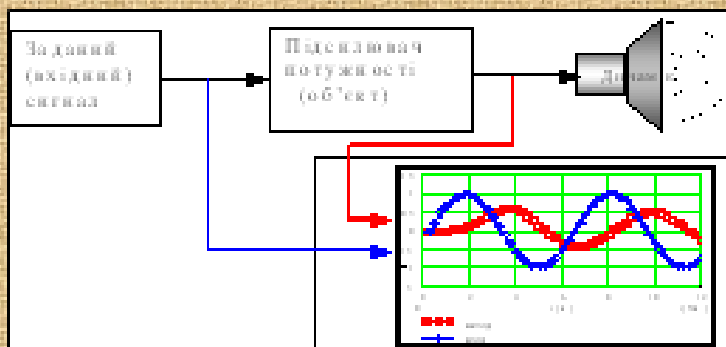
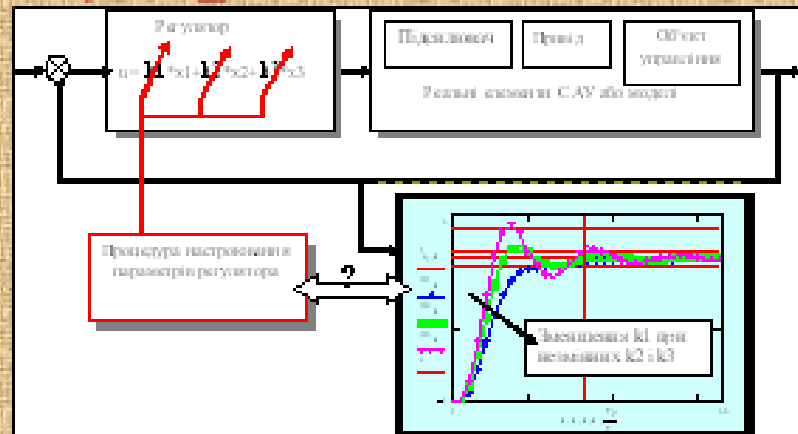


Т. М. Боровська, В. А. Северілов, А. С. Васюра

Теорія автоматичного управління



Частина 1. Аналіз САУ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Т. М. Боровська, В. А. Северілов, А. С. Васюра

**ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ.
ЧАСТИНА 1. АНАЛІЗ САУ**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як
навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

УНІВЕРСУМ-Вінниця 2008

УДК 62.50
Б 31

Рецензенти:

В. Н. Лисогор, доктор технічних наук, професор (ВДАУ)

С. В. Юхимчук, доктор технічних наук, професор (ВНТУ)

І. І. Хаймзон, доктор технічних наук, професор (ВНМУ)

Рекомендовано до видання Міністерством освіти і науки України.
Лист № 14/182 – 1922 від 17.11.03

Боровська Т. М., Северілов В. А., Васюра А. С.
Б 31 **Теорія автоматичного управління. Частина 1. Аналіз САУ.**
Навчальний посібник. - Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 97 с.

ISBN 978-966-641-277-8

В посібнику розглянуто ряд задач, що складають основу першої частини стандартного курсу теорії управління. Посібник має дві форми – електронна книга, що повністю відповідає стандартам на електронні книги і звичайний „паперовий” посібник. Це дає багато переваг, зокрема, дозволяє інтенсифікувати навчання. Посібник є частиною комплексу методичного забезпечення, що повністю охоплює весь стандартний курс теорії автоматичного управління. В електронній формі посібник є також автоматизованою системою навчання. Посібник призначено для широкого кола інженерних та інженерно-економічних спеціальностей.

УДК 681.5

ISBN 978-966-641-277-8

© Т. Боровська, В. Северілов, А. Васюра 2008

ЗМІСТ

Передмова	4
1. Дослідження часових характеристик САУ	5
1.1 Одержання та дослідження еквівалентних математичних моделей динаміки неперервних лінійних САУ	6
1.2 Дослідження реакції САУ на заданий сигнал	15
1.3 Дослідження часових характеристик САУ при варіації параметрів	27
1.4 Розробка та дослідження системи самонастроювання САУ	34
1.5 Знаходження аналітичних розв'язань для лінійних неперервних та імпульсних систем	43
2. Дослідження частотних характеристик САУ	49
2.1 Одержання та дослідження частотних характеристик	50
2.2 Ідентифікація САУ по логарифмічним частотним характеристикам	56
3. Аналіз стійкості САУ	63
3.1 Дослідження стійкості САУ альтернативними методами	64
3.2 Дослідження усталених помилок САУ	73
3.3 Дослідження стійкості САУ. Стійкість САУ із запізненням	80
4. Оцінка якості регулювання по перехідних процесах	88
4.1 Оцінка якості регулювання по перехідних процесах. Альтернативи	89
Література	96

Передмова

Для студентів

Цей посібник - орієнтований на комп'ютер практикум з **першої частини стандартного курсу теорії автоматичного управління – “Аналіз САУ”**.

Він містить дещо більше робіт, ніж виділено згідно з існуючою програмою. Це резерв для самостійної роботи. Посібник має дві форми існування з відповідними формами вживання. У формі **паперової книги** він призначений для апріорного освоєння та апостеріорного осмислення результатів, отриманих при роботі з посібником у формі електронної книги.

В останній формі він дозволяє майже все – експерименти в реальному часі, символічні обчислення, вбудовані засоби оптимізації і розв'язання будь-яких рівнянь, створення анімацій. Тобто практикум дещо замінює об'єктивну реальність. Чи не є це занадто, тобто шкідливим? А як же робота з реальними системами управління. З практики підготовки пілотів відомо, що 100 годин польотів на тренажері + 10 годин реальних польотів краще, ніж 200 годин реальних польотів. І тут теж треба десь дібрати 10 годин високоякісної реальності.

Деякі психологи вважають диригентів найщасливішими людьми – їх бажання, дії одразу ж втілюються у звуках музики. Не завжди це так, але...

Теж саме і при виконанні цих робіт – під руками сотні готових модулів і функцій, кожна Ваша розумна дія онлайново втілюється у красивий, а іноді - неочікуваний результат.

Посібник не є посібником з вивчення програмної платформи – для цього є зручний фірмовий Help.

Для педагогів

Посібник дозволяє інтенсифікувати навчання, виконати значно більший обсяг вправ, виконати складні і об'ємні дослідження докомп'ютерного аспірантського рівня

Не рекомендується для категорії “товаришу лаборант, покажіть студенту”.

Рекомендується не використовувати в навчальному процесі й тим, хто не мав власних програмних розробок – студенти рано, чи пізно спіймають на якійсь дрібничці.

Головний недолік посібника – те, що раз зроблено, моментально копіюється і тиражується. Але завдання неважко повністю індивідуалізувати.

Головна перевага – посібник легко неперервно оновлювати та розмножувати невеликими тиражами.

Особливість посібника в тому, що кожна задача розв'язується декількома альтернативними методами. Класична задача – перевірка стійкості системи виконується п'ятьма різними способами.

Відомо, що у світі існують дві науки, два процеси – просто наука і “наука підручників”. У цьому плані можна виділити останній розділ посібника, де наочно показано, що САУ, оптимальна за інтегральним квадратичним критерієм, є **комплексно найгіршою** серед САУ, оптимізованих за іншими розповсюдженими критеріями якості регулювання.

Практикум є частиною комплексу методичного забезпечення, що повністю охоплює весь стандартний курс ТАУ.

Практикум може використовуватись як автоматизована система навчання і контролю знань - він має вбудовані тести і програми обробки результатів роботи. Будь-який фрагмент книги легко закривається від копіювання і переглядання.

Зауваження. З термінів „регулювання”, „керування”, „управління” вибрано останній, як найбільш загальний, що відповідає суті посібника і певним мовним нюансам.

1 Дослідження часових характеристик САУ

У цьому розділі розглядаються:

- ✓ Побудова неперервних та еквівалентних дискретних математичних моделей лінійних динамічних систем.
- ✓ Дослідження реакції САУ на заданий сигнал.
- ✓ Дослідження часових характеристик САУ при варіації параметрів.
- ✓ Розробка та дослідження системи самонастроювання САУ.
- ✓ Знаходження аналітичних розв'язань для неперервної та імпульсної динамічних систем.

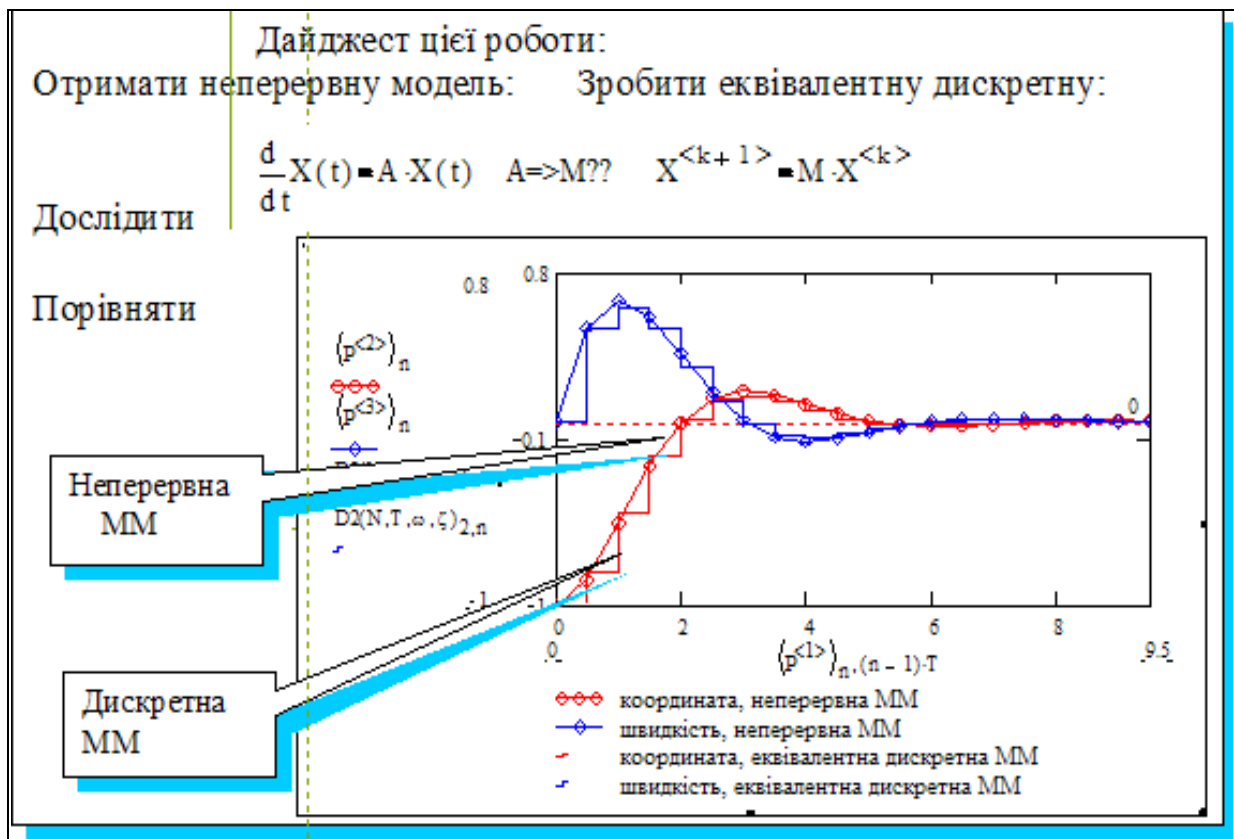
Після вивчення цього розділу ви **зможете:**

1. Привести систему диференціальних рівнянь САУ до канонічної форми Коші. Записати розв'язання диференціального рівняння в формі Коші.
2. Отримати систему еквівалентних різницевих рівнянь САУ різного ступеня наближення.
3. Знаходити розв'язання диференціальних та різницевих рівнянь альтернативними методами.
4. Знаходити реакції САУ на довільні вхідні сигнали альтернативними методами.
5. Експериментально підбирати (= настроювати) параметри регулятора так, щоб перехідний процес задовольняв задані вимоги.
6. Будувати системи самонастроювання регулятора. І оцінити проблеми, що виникають при цьому.
7. Освіжити і узагальнити знання з методів знаходження і властивостей розв'язань диференціальних та різницевих рівнянь – альтернативних моделей лінійних динамічних систем.
8. Дати визначення термінам:

1. Динамічна система.	5. Перехідна функція стану.
2. Лінійне/нелінійне дифрівняння.	6. Перехідний процес.
3. Еквівалентне різницеве рівняння.	7. Імпульсна перехідна функція.
4. Форма Коші подання системи диференціальних рівнянь.	8. Форма Коші подання розв'язання системи диференціальних рівнянь.

1.1. Дослідження часових характеристик САУ. Одержання та дослідження еквівалентних математичних моделей динаміки неперервних лінійних САУ

Ціль даної роботи - отримання та дослідження часових характеристик, набуття навичок у розробці і реалізації у середовищі математичного пакета еквівалентних математичних моделей динаміки неперервних систем. Робота довга, тому корисно при виконанні її постійно тримати (у свідомості) "суть справи в трьох словах". Саме це і подано нижче.



Вступ

З багатьох причин цифрова обчислювальна машина (ЦОМ) - найбільш зручний і потужний інструмент для дослідження неперервних динамічних систем. Ця зручність зростає ну занадто швидко: продуктивність праці дослідника і проєктанта зростає, але виникає можливість деградації спеціалістів: розв'язує дифференціальні рівняння, оптимізує, виконує алгебраїчні перетворення, розкладає в ряди ЦОМ, точніше відповідний САД-пакет (Computer Aided Design, наш еквівалент - САПР), а що залишається спеціалісту? - ввести-вивести дані? Фундаментом оптимізму тут є той факт, що в країнах з повальною автомобілізацією людина тільки дещо поширшала в талії, але ходити не розучилася. Сьогоднішні системи управління реалізуються мікропроцесорними і мікроконтролерними системами. Об'єкти і процеси управління, звичайно є неперервними. Для аналізу і синтезу таких систем необхідно замінити неперервну математичну модель (ММ) - **систему диференціальних рівнянь еквівалентною дискретною ММ - системою різницевих рівнянь**, що будуть досить точно наближувати розв'язання системи диференціальних рівнянь.

Щоб зробити цю процедуру узагальненою і уніфікованою треба спочатку привести задану систему дифрівнянь до форми Коші:

$$dx/dt = A*x + B*u + D*v, \quad (1)$$

де x, u, v - вектори стану, управління, збурень, відповідно; A, B, D - матриці відповідної розмірності. Розв'язання цього рівняння у формі Коші (= розв'язання без урахування збурень) має вигляд [1-4]:

$$x[(k+1)*T] = F(T)*x[k*T] + G(T)*B*u[k*T], \quad (2)$$

де T - крок обчислень, k - номер кроку; функції $F(T)$ і $G(T)$ - нескінченні ряди:

$$F(T) = I + A*T + (A*T)^2/2! + (A*T)^3/3! + \dots; \quad (3)$$

$$G(T) = I*T + A*T^2/2! + A^2*T^3/3! + \dots$$

Рівняння (2) фактично є різницеvim, в ньому значення вектора стану x у поточний момент часу $(k+1)*T$ визначається через значення вектора стану x та вектора управління u у попередній момент часу $k*T$.

Проблема тільки в тому, що для того, щоб розв'язання рівняння (2) точно збігалось з розв'язанням рівняння (1), треба взяти нескінченне число членів рядів у виразах (3). На практиці беруть скінченне число членів рядів, так щоб забезпечити потрібну точність. Можемо бачити, що, чим менше крок обчислень T , тим швидше сходяться ряди (3), тобто, потрібну точність дискретної моделі можна забезпечувати як зменшенням T , так і збільшенням кількості членів рядів. Розглянемо САУ, що описується дифрівнянням 3-го порядку:

$$d^3x(t)/dt^3 + a_2*d^2x(t)/dt^2 + a_1*dx(t)/dt + a_0*x = f(t), \text{ де}$$

$x(t)$ - регульована змінна (тиск, напруга, відстань, температура, ...);

$f(t)$ - зовнішня дія на САУ;

a_2, a_1, a_0 - параметри математичної моделі, значення яких беруться згідно з варіантом.

Завдання

1. Отримати еквівалентні дискретні моделі різного рівня точності (1-3-го порядків). 6 б
2. Отримати еталонні розв'язання диференціального рівняння - аналітичні і числові (за допомогою вбудованих функцій). 14 б
3. Дослідити залежність точності ММ від кроку квантування T . 8 б
4. Дослідити залежність точності ММ від порядку моделі. 12 б
5. Знайти кроки квантування для еквівалентних за точністю ММ 1-3-го порядків. 10 б

Варіанти значень параметрів

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a2	3.	3	2	2	2.	1.0	1.75	2.5	3.0	2.0	1.0	2.0	2.5	3.5	3.5	3.14	2.73
a1	3	3	1	1.5	2	2	2.15	3	3.5	1.7	3	2.5	2	3	2.5	2.73	3.14
a0	1	2	1	1	1	2	1	1	1.5	1	1	1	1.2	1	1.2	1.1	1.1

Зразок виконання

1. Отримання еквівалентних дискретних моделей 1-3-го порядків

Вводимо параметри об'єкта **згідно з варіантом**, задаємо поки довільний крок обчислень T : $a_2 := 1$; $a_1 := 3$; $a_0 := 1$; $T := .4$; $ORIGIN := 1$.

Приводимо задане дифрівняння до форми Коші. Для цього вводимо нові змінні: $x_1 = x$; $x_2 = dx/dt$; $x_3 = d^2x/dt^2$. Отримуємо систему дифрівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -a_0 \cdot x_1 - a_1 \cdot x_2 - a_2 \cdot x_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подаємо отриману систему у матрично-векторному вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x \quad \text{де} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Згідно з (3) записуємо перші три наближення для перехідної функції стану (ПФС) і виводимо їх значення. Виходячи з очевидних міркувань подаємо ПФС як функцію кроку квантування T . Для конкретного значення: $T = 0.4$ виводимо ПФС 1-го, 2-го і 3-го порядків.

$$\begin{aligned} \text{ММ1} \quad F_1(T) &:= I + A \cdot T & F_1(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0.4 \\ -0.4 & -1.2 & 0.6 \end{pmatrix} \\ \text{ММ2} \quad F_2(T) &:= I + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!} & & \\ \text{ММ3} \quad F_3(T) &:= I + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!} + \frac{A^3 \cdot T^3}{3!} & F_2(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.08 \\ -0.08 & 0.76 & 0.32 \\ -0.32 & -1.04 & 0.44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Бачимо, що при кроці $T = 0.2$ різниця між елементами матриць F_2 і F_3 менше відсотка

$$F_3(.2) - F_2(.2) = \begin{pmatrix} -0.133 & -0.4 & -0.133 \\ 0.133 & 0.267 & -0.267 \\ 0.267 & 0.933 & 0.533 \end{pmatrix} \% \quad F_3(T) = \begin{pmatrix} 0.989 & 0.368 & 0.069 \\ -0.069 & 0.781 & 0.299 \\ -0.299 & -0.965 & 0.483 \end{pmatrix} .$$

Задаємо період моделювання, крок обчислень (квантування), початкові значення вектора стану в альтернативних формах:

$$\text{Period} := 8 \quad T_0 := .1 \quad K_h := \frac{\text{Period}}{T} \quad K_h = 20 \quad k := 1..K_h \quad \begin{pmatrix} x_{31,1} \\ x_{32,1} \\ x_{33,1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

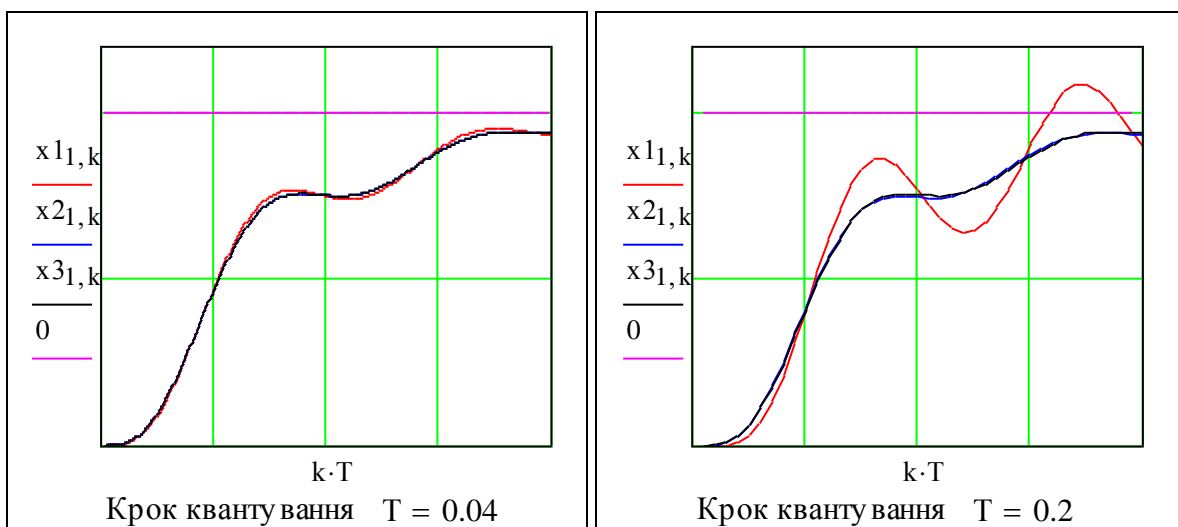
$$x_1^{(1)} := (-1 \ 0 \ 0)^T \quad x_2^{(1)} := x_1^{(1)}$$

Виводимо для контролю вектори стану для першого кроку процесу

$$x_1^T = (-1 \ 0 \ 0); \quad x_2^T = (-1 \ 0 \ 0); \quad x_3^T = (-1 \ 0 \ 0).$$

Записуємо три різницеві рівняння – наближення 1-го, 2-го і 3-го порядків на базовій мові пакета і тестуємо їх – будемо графіки перехідних процесів.

$$x_1^{(k+1)} := F_1(T) \cdot x_1^{(k)} \quad x_2^{(k+1)} := F_2(T) \cdot x_2^{(k)} \quad x_3^{(k+1)} := F_3(T) \cdot x_3^{(k)} \quad (5)$$



Як видно з поданих вище графіків модель 1-го порядку явно незадовільна для $T = 0.2$ с. Результати обчислень за моделями 2-го і 3-го порядків збігається при $T = 0.2$ с. Це дає підстави вважати моделі 2-го і 3-го порядків досить точними для кроків $T \leq 0.2$ с. Але, щоб остаточно впевнитись в цьому нам необхідний еталон - точне розв'язання дифференціального рівняння і кількісні міри, тобто критерії точності моделей.

Для поставлених цілей зручно визначити перехідний процес в динамічній системі не у вигляді різничевого рівняння (5), а як функцію користувача. Зробимо це на базі засобів написання програм в середовищі пакету.

Визначимо функцію користувача $P(M, x_0, T)$ через програму. Аргументи цієї функції M - перехідна матриця ЕДМ, x_0 - початкове значення вектора стану, T - крок квантування - скаляр.

Можна було розширити список аргументів функції за рахунок кількості кроків та ін., але (дослідіть самостійно) швидкодія програми може суттєво зменшитись.

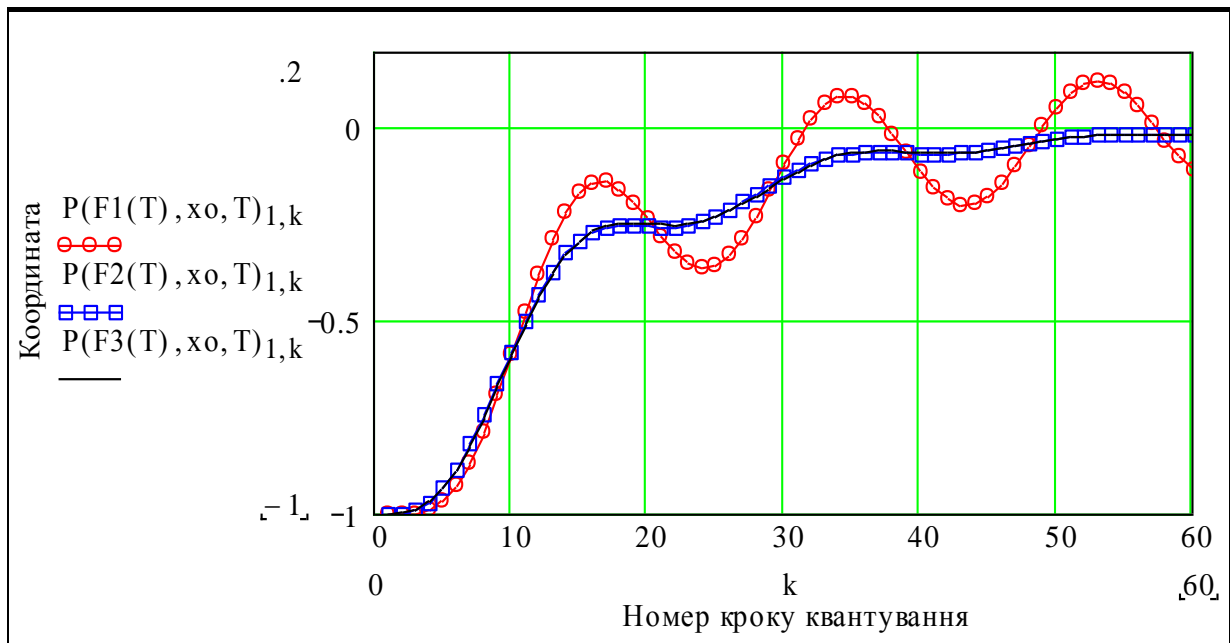
Задаємо вхідні параметри програми $N := 3 \cdot K_h$; $k := 1..N$; $x_0 := (-1 \ 0 \ 0)^T$; $T := 0.2$

$P(M, x_0, T) :=$ $X^{(1)} \leftarrow x_0$ $\text{for } k \in 1..N$ $\left \begin{array}{l} X^{(k+1)} \leftarrow M \cdot X^{(k)} \\ \text{sto} \leftarrow 100 \end{array} \right.$ X	<ul style="list-style-type: none"> - початкові умови. - цикл по кроках процесу. - центр програми (порівняйте з (5)) - рядок для естетизації програми - те що повертає програма.
---	--

(6)

Порівняємо альтернативні моделі (5) і (6). В (5) для кожного рівня ПФС - свій вираз, свої змінні. В програму (6) замість M можна підставити $F_1(T)$, $F_2(T)$, $F_3(T)$...

Тестуємо програму - будуємо графіки процесів для тих же даних, що й при тестуванні (5). Отримуємо ідентичні результати.



2. Отримання еталонних розв'язань диференціального рівняння

В даній роботі розглядаються тільки лінійні динамічні системи – такі, що описуються лінійними диференціальними рівняннями. Лінійні диференціальні рівняння мають загальні аналітичні розв'язання виду:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} + \dots + C_n \cdot e^{s_n \cdot t},$$

де C_i - постійні, що визначаються з граничних умов, s_i - корені характеристичного рівняння, $i = 1 \dots n$, n - порядок динамічної системи.

На практиці об'єкти управління - нелінійні, нестационарні, і не мають аналітичних розв'язань для загальних випадків.

Останні версії пакета мають вбудовані функції числового розв'язання диференціальних рівнянь. Використаємо їх для отримання еталонних розв'язань для лінійних і нелінійних динамічних систем. Для лінійних систем додатково використаємо аналітичні розв'язання. Пакет має декілька вбудованих функцій для числового інтегрування диференціальних рівнянь, помірно зручних. Використаємо два методи. Подаємо формат вбудованих функцій нижче.

Процес = Bulstoe(поч_умови, to, tk, кільк_кроківправа_частина);

Процес = rkfixed(поч_умови, to, tk, кільк_кроківправа_частина);

Підставимо у ці функції дані нашої задачі. Зверніть увагу на те, що функція D(t,X) - це права частина системи дифрівнянь в формі Коші (4).

$$Av(a) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \quad \frac{dX}{dt} = Av(a) \cdot X \quad Av(a) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ -a_1 \cdot X_1 - a_2 \cdot X_2 - a_3 \cdot X_3 \end{pmatrix}$$

ORIGIN := 0

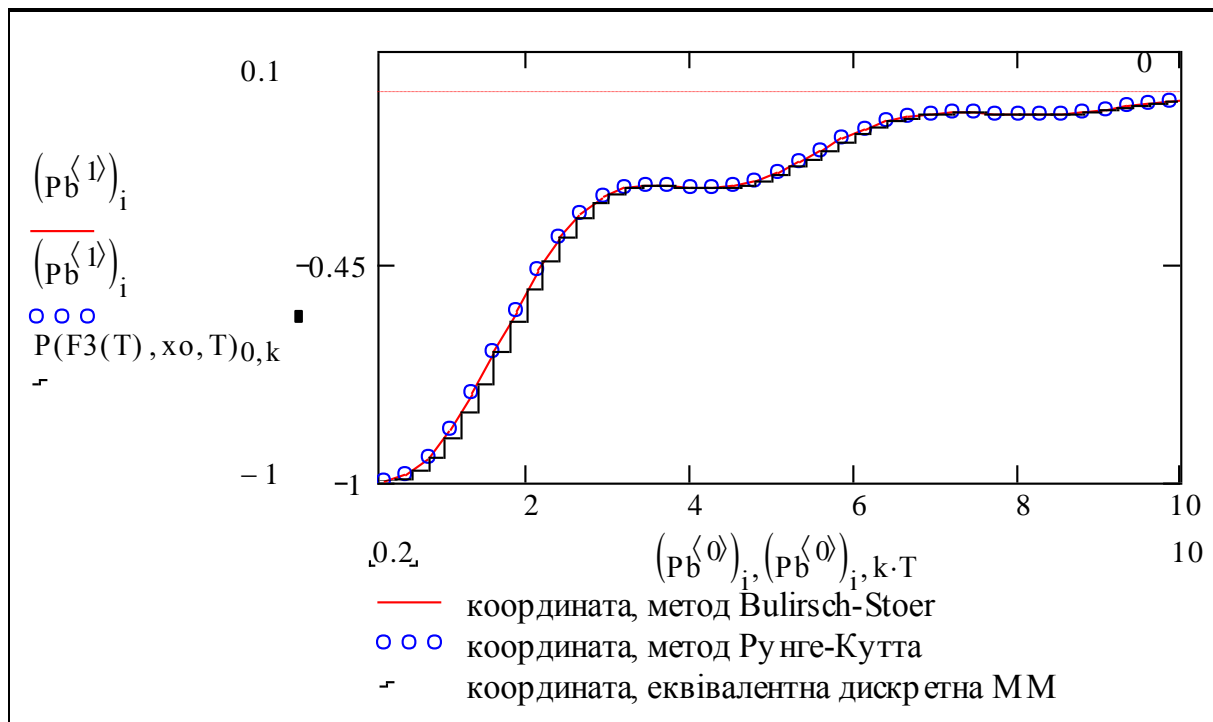
Kh = 20 Period := 16 Xo := -1

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -a_0 \cdot X_0 - a_1 \cdot X_1 - a_2 \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

i := 1..N N = 60

Запишемо рівняння еталонного процесу і будемо графіки.

$$Pb := Bulstoe \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, \text{Period}, N, D \right] \quad Pr := rkfixed \left[\begin{pmatrix} Xo \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, \text{Period}, N, D \right] \quad (7)$$



Дивимось на графік і бачимо, що еквівалентна дискретна модель дає досить близькі до еталонної результати.

Виведемо також числові результати, розберемося із структурою вихідних масивів (ми їх транспонували, для зручності). Стовпці - кроки процесу, перший рядок - моменти часу, інші рядки - значення координат вектора стану в ці моменти.

$$Pb^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.267	0.533	0.8	1.067	1.333	1.6	1.867	2.133	2.4
1	-1	-0.997	-0.979	-0.936	-0.866	-0.774	-0.669	-0.561	-0.46	-0.376
2	0	0.032	0.112	0.212	0.307	0.376	0.407	0.397	0.35	0.278
3	0	0.226	0.355	0.381	0.318	0.193	0.038	-0.112	-0.231	-0.3

$$Pr^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.267	0.533	0.8	1.067	1.333	1.6	1.867	2.133	2.4
1	-1	-0.997	-0.979	-0.936	-0.866	-0.774	-0.669	-0.561	-0.461	-0.376
2	0	0.032	0.112	0.212	0.307	0.376	0.407	0.397	0.351	0.279
3	0	0.226	0.355	0.381	0.318	0.193	0.038	-0.112	-0.23	-0.3

Бачимо, що еталонні процеси мають високу збіжність. Переходимо до наступного пункту завдання.

3. Дослідження залежності точності ММЗ від кроку квантування

В завданні не задано критерій оптимальності моделі. Деталізуємо і конкретизуємо поняття оптимальності еквівалентної дискретної моделі. Очевидно, при зменшенні кроку квантування T точність збільшується, але одночасно збільшуються потрібні для моделювання САУ на заданому інтервалі (періоді) часу а) пам'ять, б) час обчислень. Тому, інтуїтивно, оптимальність означає певний компроміс між *точністю моделі і витратами обчислювальних ресурсів*. Цей компроміс можна побудувати так: задати як обмеження точність моделі K_m , і знайти максимальний крок обчислення, який ще забезпечує цю точність.

Наступний крок конкретизації задачі - вибір і конструювання числової міри (**критерію**) точності моделі. Розглянемо дві альтернативи - **локальний** критерій - функція тільки від параметрів якогось одного кроку процесу (наприклад, помилка в кінці періоду моделювання), та **інтегральний** критерій - функція від параметрів усіх кроків процесу (наприклад, інтегральна квадратична помилка).

Очевидно інтегральний критерій є більш повноцінною мірою тотожності модельованого і істинного процесу - виберемо критерій - інтеграл від модуля помилки (можна було б вибрати інтеграл від квадрата помилки). Природно, в дискретній моделі замість інтеграла беремо суму:

$$Крит = \left(\frac{1}{N} \right) \cdot \left(\sum_n \left| \frac{x_{e_n} - x_{m_n}}{x_{e_n}} \right| \right), \quad (8)$$

де $n = 1..N$ - індекс (номер) кроку процесу; x_{e_n} , x_{m_n} - поточні значення вибраної координати вектора стану для "точної" моделі і еквівалентної дискретної моделі динаміки об'єкта..

Виберемо координату x_1 - це власне регульована змінна. "Фізичний смисл" цього критерію - **середня відносна** помилка координати еквівалентної дискретної моделі відносно еталонної (точної).

Усі завдання (пункти 3-5) будуть розв'язані легко і економно, якщо ми зможемо подати критерій (8) як функцію кроку квантування та порядку ЕДМ.

$$dT := .2 \quad Pm := 8 \quad N := \frac{Pm}{dT} \quad N = 40 \quad x_0^T = (-1 \ 0 \ 0)$$

Модифікуємо програму (6) - додаємо в список аргументів ще N - число кроків.

$Pe(M, x_0, dT, N) :=$	$X^{(0)} \leftarrow x_0$ $\text{for } k \in 0..N-1$ $\quad \left \begin{array}{l} X^{(k+1)} \leftarrow M \cdot X^{(k)} \\ sto \leftarrow 100 \end{array} \right.$ X
------------------------	--

Беремо вираз (7) і підставляємо те, що треба підставити у такому вигляді, щоб інтерпретатор (мови програмування C++) "бачив" явну залежність значення критерію від dT :

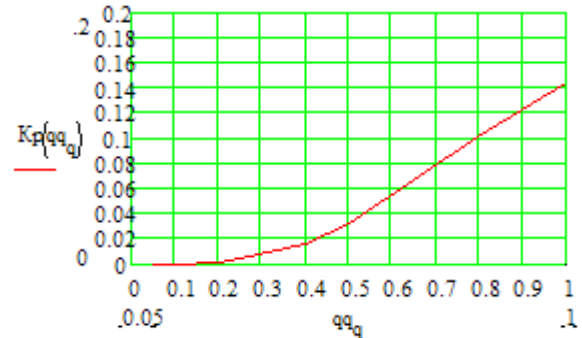
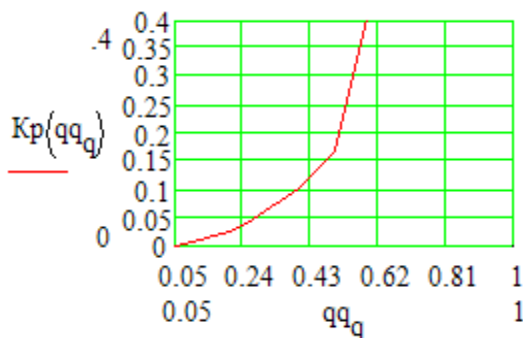
$$Kp(dT) := \left(\frac{dT}{Pm} \right) \cdot \left[\sum_{i=0}^{Pm/dT} \left| \frac{\left(\text{Bulstoe} \left(x_0, 0, Pm, \frac{Pm}{dT}, D \right)^{(1)} \right)_i - Pe \left(F2(dT), x_0, dT, \frac{Pm}{dT} \right)_{0,i}}{\left(\text{Bulstoe} \left(x_0, 0, Pm, \frac{Pm}{dT}, D \right)^{(1)} \right)_i} \right| \right] \quad (9)$$

Те, що записано вище - досить складна конструкція мови програмування: визначення функції користувача $Kp(dT)$ через вбудовану функцію $\text{Bulstoe}(\cdot)$ і функцію користувача $Pe(\cdot)$. Ця функція є синтаксично коректною, але працює повільно. Для осмислення запишемо її у "псевдокодах":

$$\text{Критерій(крок_квант)} = \text{сума} \left(\text{модуль} \left(\frac{\text{коорд_етал} - \text{коорд_ЕДМ}}{\text{коорд_етал}} \right) \right).$$

Задаємо вектор значень кроку квантування dT, будемо **графіки залежності помилки від кроку квантування для моделі 2-го і 3-го порядків.**

$$qq := (.05 \ .1 \ .2 \ .25 \ .4 \ .5 \ .8 \ 1) \quad qq := qq^T \quad q := 0..last(qq) \quad last(qq) = 7$$



Зауважимо, що отримана функція (8) працює неприпустимо повільно. Причини цього – проблеми програмних середовищ і профілів програми.

Як видно з графіків, завжди можна підібрати (зменшуючи) крок квантування так, щоб забезпечити задану точність, наприклад 5%, відносно еталонного процесу.

Знайдемо максимальні кроки квантування, що забезпечують задану точність 5% при використанні ЕДМ 1-го, 2-го, 3-го порядків. Для розв'язання поставленої задачі використовуємо принцип мінімуму зусиль - послідовно підставимо у (9) $F_1(dT)$, $F_2(dT)$, $F_3(dT)$ і просто підбираємо такі dT , що дають задану точність. Не забороняється зробити це більш елегантно. Функція (9) має *особливість* - вона працює тільки для кроків кратних R_m .

Маємо такі результати

для моделі 1-го порядку:

2-го:

і

3-го:

$$K_p(0.04) = 0.051 \blacksquare$$

$$K_p(0.5) = 0.171$$

$$K_p(0.5) = 0.032 \blacksquare$$

Бачимо, що у моделі 3-го порядку при однаковій точності допустимий крок обчислень на порядок більше ніж у моделі 1-го порядку.

Працювали: Ф.Грач, М.Артилерист, Л.Козак, Б.Крік 22/02/2022 гр. ЗАУ 09

Контрольні запитання

1. Запишіть розв'язання звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння через корені характеристичного рівняння.
2. Що таке матрична експонента?
3. Запишіть розв'язання звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння у формі Коші.
4. Подайте звичайне лінійне диференціальне рівняння n -го порядку у формі Коші.
5. Що таке "перехідна функція стану"?
6. Запишіть розкладення у ступеневий ряд для матричної експоненти.
7. Що таке "еквівалентне різницеве рівняння"?
8. Які числові методи розв'язання диференціальних рівнянь ви знаєте?
9. Які зміни треба зробити в еквівалентній дискретній математичній моделі неперервного об'єкта, щоб при збільшенні кроку обчислень зберегти потрібну точність?
10. Що означають терміни "еквівалентна дискретна модель 1-го порядку", "еквівалентна дискретна модель 3-го порядку"?
11. Чим відрізняється ТАК від ТАУ, а керування від управління?
12. Що таке "динамічна система"?

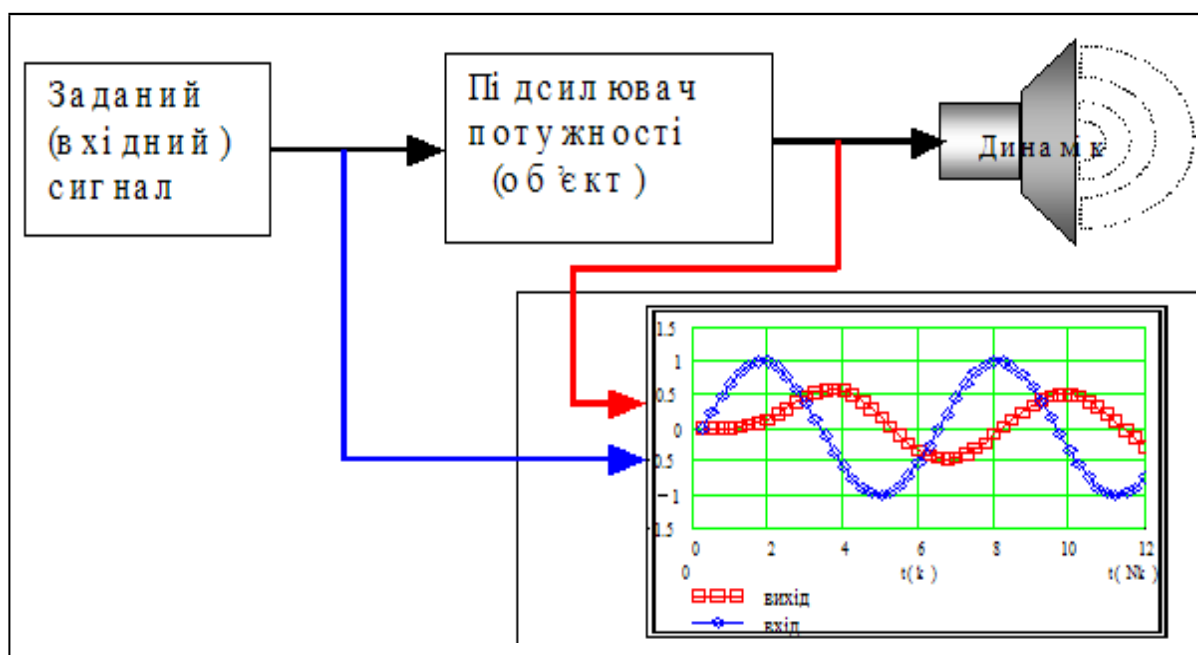
Зауваження. Останнє запитання є узагальнюючим, тому що об'єктом ТАУ є саме динамічні системи будь-якої природи. Це питання є одночасно і простим і складним. Можна визначити динамічну систему на мові теорії множин, можна – на мові якісної теорії диференціальних рівнянь та ін. Спробуйте дати комплексне (системне) визначення цього поняття.

1.2. Дослідження часових характеристик САУ. Визначення реакції САУ на заданий сигнал

Ціль даної роботи - набуття навичок у розробці і реалізації у програмному середовищі математичного пакета робочих (тобто програмно виконуваних) моделей динаміки неперервних систем при наявності зовнішніх входів - управляючих, або збурюючих.

В неформальному плані це, наприклад, така задача - на вхід верстата з ЧПУ подається програма фрезерування прямокутного контура. Система автоматичного управління відпрацьовує управляючий сигнал неточно – із запізненням, перерегулюванням. Ціль моделювання - точно обчислити помилки, вибрати задовільні параметри і режими обробки.

Другий приклад: - треба дослідити, як високоякісний аудіопідсилювач відтворює (амплітудні і фазові відхилення) гармонічний сигнал певної частоти, або як він реагує на випадковий сигнал (шум). Нижче подано схему такої задачі:



Як обчислити реакцію на заданий вхідний сигнал? Існує декілька альтернатив визначення реакції САУ на зовнішній (вхідний) сигнал:

- обчислення інтеграла згортки (= інтеграла Дюамеля);
- безпосереднє обчислення за еквівалентним різницеvim рівнянням;
- інші альтернативи (знайдіть самостійно).

Суть першої альтернативи в обчисленні інтеграла згортки:

$$X_{vyx}(t) = \int_0^t X_{vx}(\tau) \cdot g(t - \tau) dt; \quad g(t) = \frac{d}{dt} h(t); \quad L^{-1}\{W(s)\} = g(t); \quad L^{-1}\{W(s)/s\} = h(t),$$

де $X_{vyx}(t)$ - вихідний сигнал динамічної системи (об'єкта управління);

$X_{vx}(t)$ - вхідний сигнал;

$g(t)$ - імпульсна перехідна функція (ІПХ) - реакція на одиничну імпульсну функцію $d(t)$;

$h(t)$ - перехідна функція (ПХ) - реакція на одиничну ступінчасту функцію $1(t)$;

t - змінна інтегрування.

Проблема в знаходженні аналітичного виразу для ПХ. Для цього треба або знайти аналітичне розв'язання диференціального рівняння, або зворотне перетворення Лапласа від передаточної функції. Але головний недолік цієї альтернативи в тому, що вона "працює" тільки для лінійних систем. В факультативному підрозділі наведено модуль для обчислення реакції системи за інтегралом згортки. Цей модуль базується на символічних обчисленнях.

Обчислення за **другою альтернативою** однаково працездатне для лінійних і нелінійних систем, не так швидко ускладнюється при збільшенні порядку системи. Єдиний недолік альтернативи - ми не маємо аналітичного виразу для виходу.

Далі розглядається метод безпосереднього числового інтегрування диференціального рівняння з правою частиною - вхідним сигналом управління $u(t)$ і (або) збурення $v(t)$.

Так само, як і в розділі 1.1, починаємо розробку документа (програми) з узагальнених базових моделей, форма яких не залежить від порядку системи і значень параметрів. Щоб зробити цю процедуру узагальненою і уніфікованою, треба спочатку привести задану систему диференціальних рівнянь до форми Коші:

$$\frac{dx}{dt} = A*x + B*u + D*v, \quad (1)$$

де x, u, v - вектори стану, управління, збурень, відповідно; A, B, D - матриці відповідної розмірності. Розв'язання цього рівняння у формі Коші (= розв'язання без урахування збурень) має вигляд:

$$x[(k+1)*T] = F(T)*x[k*T] + G(T)*B*u[k*T], \quad (2)$$

де T - крок обчислень, k - номер крока; функції $F(T)$ і $G(T)$ - нескінченні ряди:

$$F(T) = I + A*T + (A*T)^2/2! + (A*T)^3/3! + \dots; \quad (3)$$

$$G(T) = I*T + A*T^2/2! + A^2*T^3/3! + \dots$$

Розглядаємо САУ, що описується диференціальним 3-го порядку:

$$d^3x(t)/dt^3 + a_2*d^2x(t)/dt^2 + a_1*dx(t)/dt + a_0*x = f(t),$$

де $x(t)$ - регульована змінна (тиск, напруга, відстань, температура, ...); $f(t)$ - зовнішня дія на САУ; a_2, a_1, a_0 - параметри математичної моделі, значення яких беруться згідно з варіантом.

Завдання

- | | |
|--|------|
| 1. Отримати еквівалентні дискретні моделі 3-го порядку. | 4 б |
| 2. Побудувати реакції САУ на усі задані вхідні сигнали. | 8 б |
| 3. Визначити усталені помилки для всіх вхідних сигналів <i>експериментально</i> . | 8 б |
| 4. Визначити усталені помилки для всіх вхідних сигналів <i>аналітично</i> . | 15 б |
| 5. Розробити документ для знаходження $X_{vux}(t)$ за допомогою інтеграла згортки. | 15 б |
| 6. Розробити документ для знаходження $X_{vux}(t)$ іншими способами. | 20 б |

Варіанти значень параметрів

Параметри об'єкта	Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	a2	3.0	2.0	1.0	1.75	2.5	3.0	2.0	1.0	2.0	2.5	3.5	3.5
	a1	3	2	2	2.15	3	3.5	1	3	2.5	2	3	2.5

Зразок виконання

1. Отримання еквівалентної дискретної моделі

Вводимо параметри об'єкта (згідно з варіантом), задаємо крок обчислень:

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad a2 := 1.2 \quad a1 := 3 \quad a0 := 1 \quad T := .25$$

Приводимо задане дифрівняння до форми Коші. Для цього вводимо нові змінні: $x1=x$; $x2=dx/dt$; $x3=d^2x/dt^2$, і далі просто копіюємо відповідні фрагменти розділу 1.1.

Подаємо систему у матрично-векторному вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u,$$

$$\text{де } A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a0 & -a1 & -a2 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з (3) записуємо наближення другого порядку для перехідної функції стану (ПФС) і виводимо їх значення. Виходячи з очевидних міркувань подаємо ПФС як функцію кроку квантування T .

$$F2(T) := I + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!} \quad F2(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.031 \\ -0.031 & 0.906 & 0.213 \\ -0.213 & -0.669 & 0.651 \end{pmatrix}$$

Записуємо також складову ПФС для зовнішнього входу:

$$G2(T) := I \cdot T + A \cdot \frac{T^2}{2!} \quad G2(T) = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.031 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.031 \\ -0.031 & -0.094 & 0.213 \end{pmatrix}.$$

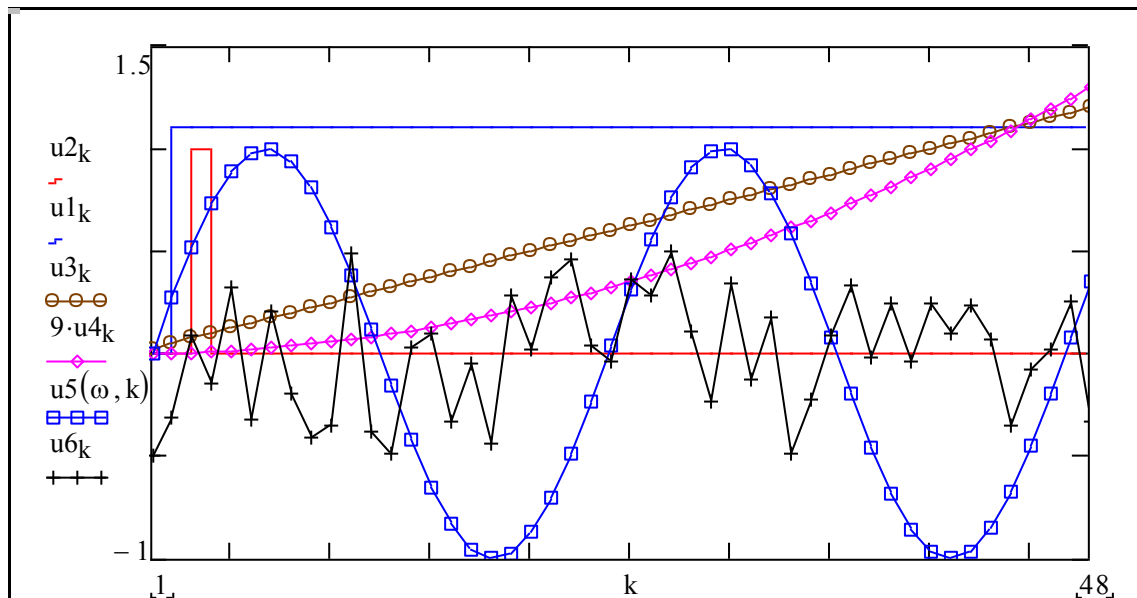
Задаємо період моделювання, крок квантування та кількість кроків

$$\text{Period} := 12 \quad T := .25 \quad Nk := \frac{\text{Period}}{T} \quad Nk = 48 \quad k := 1..Nk$$

2. Типові тестові сигнали

Якість системи автоматичного управління оцінюється по тому, як вона відпрацьовує певні тестові сигнали. Звичайно використовуються дельта-функція (імпульс), ступінчастий сигнал, сигнали, що зростають лінійно та квадратично. Ця група тестових сигналів пов'язана між собою операцією інтегрування. Дійсно, інтеграл від дельта функції – ступінчаста функція, інтеграл від ступінчастої функції - функція, що зростає лінійно. Широко також використовуються гармонічні і випадкові сигнали. Конструємо з програмних ресурсів пакету типові тестові функції для САУ.

Імпульсна	Ступінчаста	Лінійно зростаюча
$u_{2k} := \Phi(k - 2.2) - \Phi(k - 4)$	$u_{1k} := \Phi(k - 2) \cdot 1.1$	$u_{3k} := .1 \cdot (k \cdot T)$
Квадратично зростаюча	Гармонічна	Випадкова.
$u_{4k} := .001 \cdot (k \cdot T)^2$	$u_5(\omega, k) := \sin[\omega \cdot (k - 1) \cdot T]$	$\omega := 1.1$
		$u_{6k} := (\text{rnd}(1) - .5)$



На цьому графіку подано шість типових тестових сигналів для САУ. Самостійно визначіть де саме який з них.

3. Визначення реакції САУ на типові тестові сигнали

Ми виконали підготовчу роботу - отримали математичну модель реакції динамічної системи на довільний зовнішній сигнал і моделі типових входних сигналів. Тепер неважко визначити реакції на довільні входні сигнали.

При виконанні роботи застосуємо елемент "нових інформаційних технологій", таких звичних, що ми їх вже не помічаємо. Створимо блок з об'єктів: "початкові умови", "вхідний сигнал", "динаміка САУ" та "графіки перехідних процесів". Потім будемо тільки копіювати цей блок і підставляти в нього потрібний вхідний сигнал.

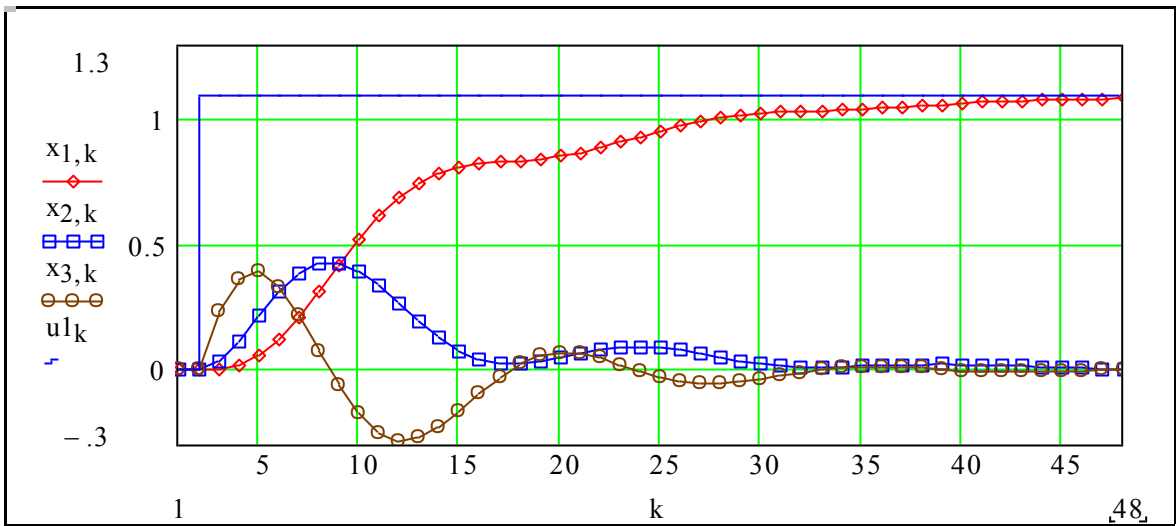
Реакція на ступінчастий сигнал

Запишемо початкові умови, вхідний сигнал і робоче рівняння, будемо графіки.

$$x^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{1k} := \Phi(k - 2) \cdot 1.1$$

$$x^{(k+1)} := F_2(T) \cdot x^{(k)} + G_2(T) \cdot B \cdot u_{1k}$$

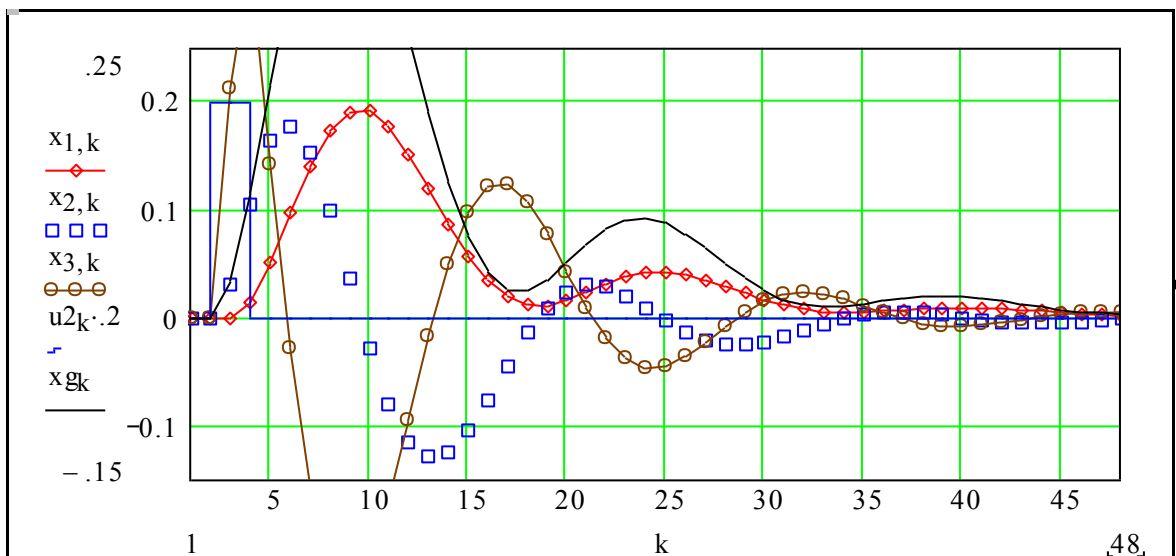


Визначте будь-яким методом усталену помилку координати (тобто x_{1k} при $k \rightarrow \infty$).

Реакція на імпульсний сигнал

Копіюємо попередній модуль і в робочому рівнянні замінюємо u_{1k} на u_{2k} . Початкові умови - тіж самі. Для порівняння виводимо також похідну від реакції на ступінчастий

сигнал: $x_{gk} := x_{2,k}$; $u_{2k} := \Phi(k-2) - \Phi(k-4)$; $x^{<k+1>} := F2(T) \cdot x^{<k>} + G2(T) \cdot B \cdot u_{2k}$.



При яких умовах графіки $x_{1,k}$ та $x_{g,k}$ будуть однаковими? Чи можливо це?

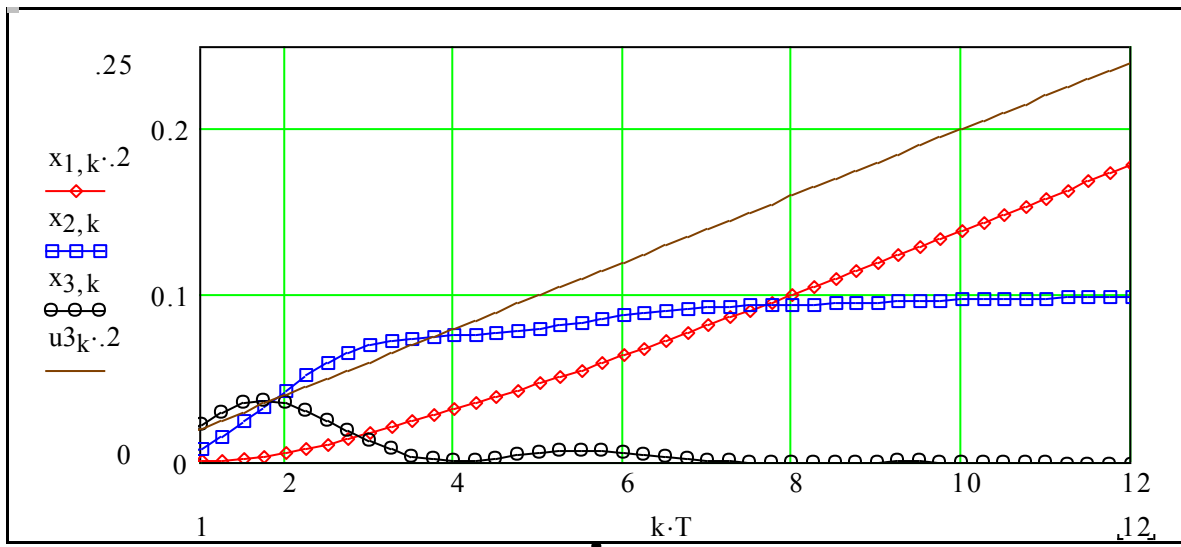
Реакція на лінійно зростаючий сигнал

Копіюємо попередній модуль і в робочому рівнянні замінюємо u_{1k} на u_{3k} .

$$x^{<1>} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{3k} := .1 \cdot (k \cdot T)$$

$$x^{<k+1>} := F2(T) \cdot x^{<k>} + G2(T) \cdot B \cdot u_{3k}$$

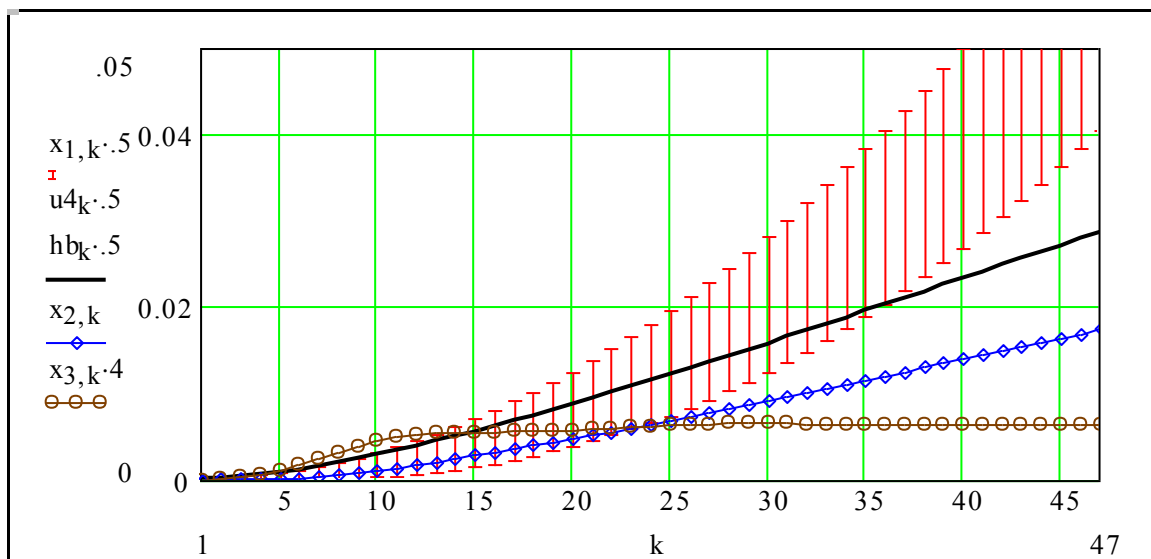


Визначте усталену помилку координати (тобто x_{1k} при $k \Rightarrow \infty$)

Реакція на квадратично зростаючий сигнал

Копіюємо попередній модуль і в робочому рівнянні замінюємо u_{1k} на u_{4k} .

$$u_{4k} := .001 \cdot (k \cdot T)^2 \quad x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot u_{4k} \quad hb_k := (u_{4k} - x_{1,k})$$



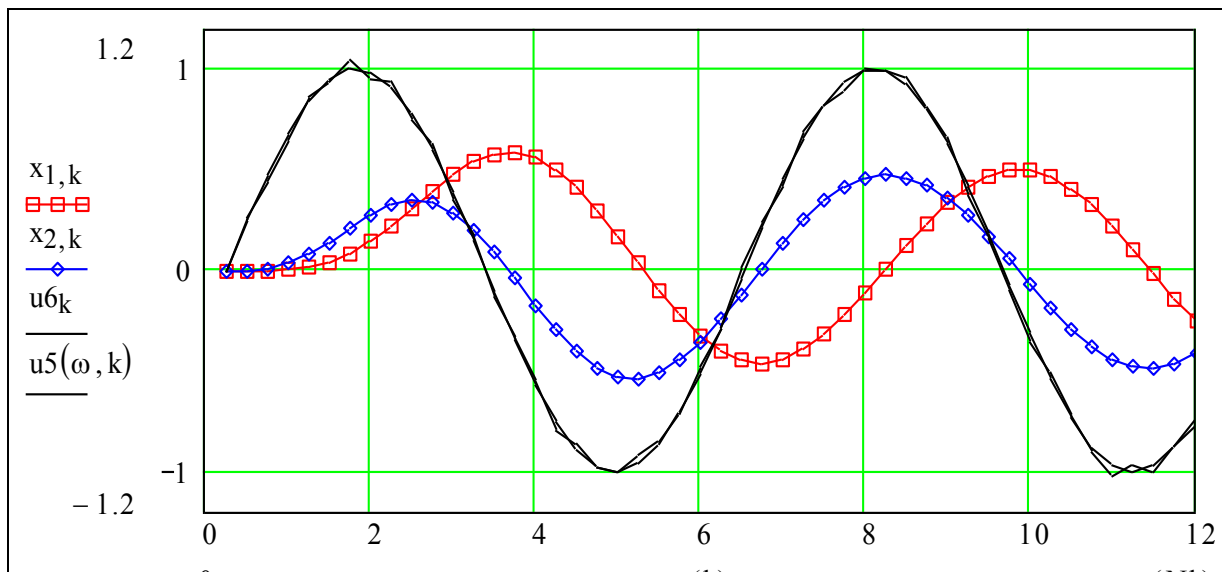
Визначте усталену помилку координати (тобто x_{1k} при $k \Rightarrow \infty$)

Реакція на гармонічний сигнал + шум

Копіюємо попередній модуль. В робочому рівнянні замінюємо u_{1k} на u_{6k} . Формуємо вхідний сигнал як суму періодичного сигналу і шуму. Задаємо значення параметрів: амплітуда шуму $A_h := .1$; частота $\omega := 1$; поточний час $t(k) := T \cdot k$.

Задаємо періодичний сигнал $u_5(\omega, k) := \sin[\omega \cdot (k - 1) \cdot T]$, шум $shu(k) := (rnd(1) - .5) \cdot A_h$. Записуємо вираз для періодичного сигналу з шумом

$$u_{6k} := u_5(\omega, k) + shu(k); \quad x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot u_{6k}.$$



Подивіться на ці графіки. Знайдіть вхідний і вихідний сигнали. Візьміть більший період моделювання, подивіться, до чого сходиться вихідний сигнал. Чи існує в даному випадку усталений режим? Як визначити помилки цього усталеного режиму? Як вимірювати **амплітуду і фазу** вихідного сигналу відносно вхідного? Чи дорівнює частота вихідного сигналу частоті вхідного? Наведіть приклади, коли це не так.

Працювали: Макитра М.М., Глечик Г.Г., Горшков П.П., Джек Пот. 13.13.2013

Контрольні запитання

1. Дайте приклади ситуації, коли САУ повинна відпрацьовувати деякий змінний програмний сигнал.
2. Який вид має вхідний сигнал підсилювача акустичного сигналу?
3. Дайте визначення однорідного і неоднорідного диференціальних рівнянь.
3. Запишіть систему неоднорідних лінійних різницевих рівнянь у матрично-векторному вигляді.
4. Запишіть перехідну функцію стану для еквівалентного різницевого рівняння з ненульовою правою частиною.
5. Опишіть усталені режими для типових тестових вхідних сигналів.
6. Як визначити реакцію САУ на вхідний сигнал за допомогою згортки.
7. Що таке "інтеграл згортки".

Факультатив для ОАА (бали не начислюються)

Визначення реакції САУ на заданий сигнал за допомогою інтеграла згортки

Щоб знайти реакцію САУ на заданий сигнал з використанням інтеграла згортки, спочатку необхідно визначити імпульсну перехідну функцію. Зробимо це, використавши зворотне перетворення Лапласа від передаточної функції.

Беремо для прикладу динамічну систему 2-го порядку з диференціальними:

$$\frac{d^2}{dt^2}x + a_1 \cdot \frac{d}{dt}x + a_0 \cdot x = u(t).$$

Записуємо передаточну функцію для виходу $x(t)$ по входу $u(t)$:

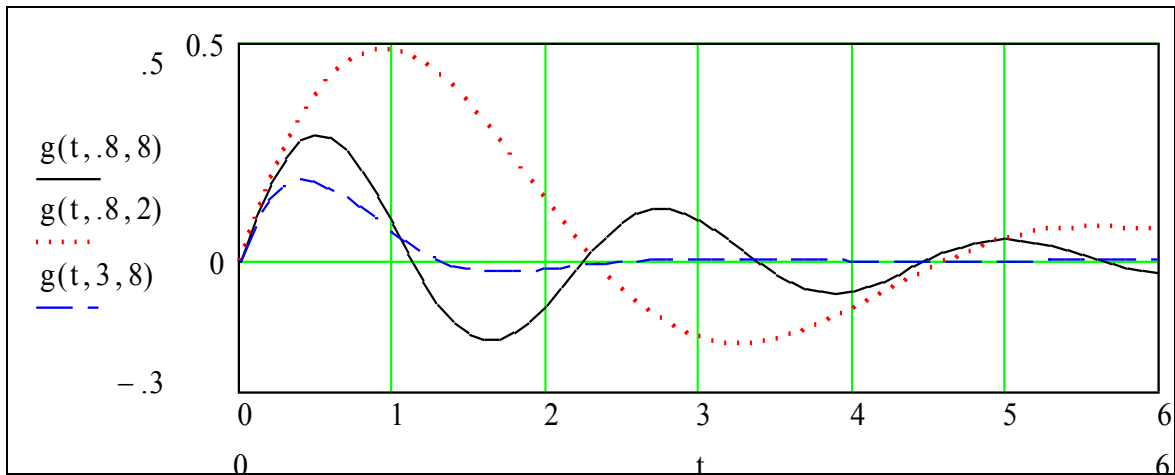
$$W(s, a_1, a_0) = \frac{1}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{x(s)}{u(s)}.$$

Виділяємо вираз для передаточної функції, вказуємо курсором на змінну s і в меню символьних операцій вибираємо пункт "зворотне перетворення Лапласа" і отримуємо вираз для імпульсної перехідної функції (ІПФ):

$$g(t, a_1, a_0) := 2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot a_1 \cdot t\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2} \cdot t\right)}{\sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2}}$$

Увага! Присвоєння: $g(t, a_1, a_0) := ..$ треба робити самостійно в режимі редагування.

Будуємо для контролю графіки імпульсних перехідних функцій при різних значеннях параметрів. Задаємо діапазон $t := 0, 0.1 .. 6$.



Спробуємо зробити теж саме для системи 3-го порядку і порівняємо результати з обчисленням реакції за допомогою еквівалентного різницевого рівняння. Для цього скопіюємо відповідний модуль:

$$a_2 := 2 \quad a_1 := 3 \quad a_0 = 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \quad x^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u1_k := \Phi(k-2) \quad u5(\omega, k) := \sin[\omega \cdot (k-1) \cdot T]$$

$$F2(T) := I + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!} \quad G2(T) := I \cdot T + A \cdot \frac{T^2}{2!} \quad T = 0.25 \quad x1^{(1)} := x^{(1)}$$

$$x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot u2_k$$

$$x1^{(k+1)} := F2(T) \cdot x1^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot u5(\omega, k)$$

Беремо динамічну систему 3-го порядку з дифрівнянням:

$$\frac{d^3}{dt^3}x + a_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}x + a_1 \cdot \frac{d}{dt}x + a_0 \cdot x = u(t)$$

Записуємо також передаточну функцію для виходу $x(t)$ по входу $u(t)$:

$$W1(s, a_2, a_1, a_0) := \frac{1}{s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$

Символьний процесор вже не може дати вираз для ПФ, аналогічний попередньому, тому що для коренів алгебраїчних рівнянь вище другої степені нема кінцевих аналітичних виразів. Тому знаходимо корені числовим методом (за допомогою вбудованої

функції `polyroots(..)`; `poly roots`

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2.325 \\ -0.338 + 0.562i \\ -0.338 - 0.562i \end{pmatrix} .$$

Записуємо тепер передаточну функцію у вигляді:

$$\frac{1}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3)} = \frac{1}{(s + 2.325) \cdot (s + 0.338 - 0.562i) \cdot (s + 0.338 + 0.562i)}$$

Але символьний процесор "не знає", що робити з уявними величинами. Робимо ще один крок назустріч (символьному процесору) - перемножуємо вирази зі спряженими комплексними коренями:

$$(s + 0.338 - 0.562 \cdot 1i) \cdot (s + 0.338 + 0.562 \cdot 1i) \left| \begin{array}{l} \text{expand, 1i} \\ \text{float, 2} \end{array} \right. \rightarrow s^2 + .68 \cdot s + .43$$

і отримуємо вираз передаточної функції без комплексних чисел:

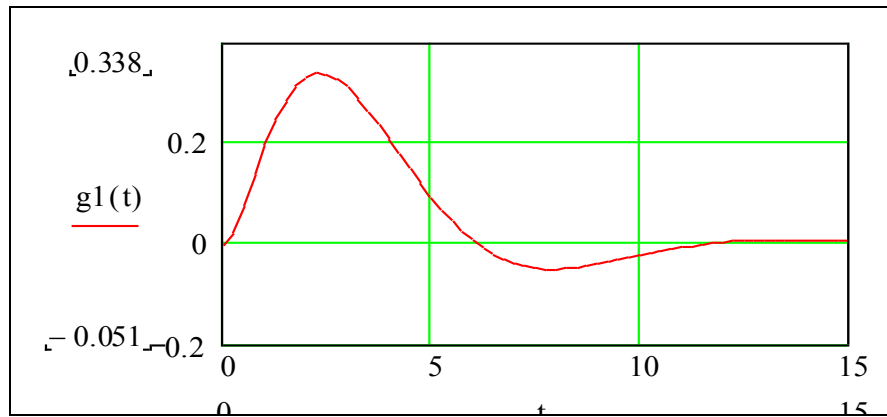
$$W1(s) = \frac{1}{(s + 2.325) \cdot (s^2 + .676 \cdot s + .430)}$$

І от, для такого подання передаточної функції, символьний процесор видає зворотне перетворення Лапласа, яке є імпульсною перехідною функцією (ПФ). Прокоментуємо те, що подано нижче. Для заданої функції комплексної змінної s виконується: зворотне перетворення Лапласа (`invlaplace`), спрощення (`simplify`) та виведення виразу з двома знаками після крапки (`float, 2`) у коефіцієнтах.

$\frac{1}{(s + 2.32) \cdot (s^2 + .68 \cdot s + .43)}$	<code>invlaplace</code>
	<code>simplify</code> $\rightarrow .24 \cdot \exp(-2.3 \cdot t) - .24 \cdot \exp(-.34 \cdot t) \cdot \cos(.56 \cdot t) + .83 \cdot \exp(-.34 \cdot t) \cdot \sin(.56 \cdot t)$
	<code>float 2</code>

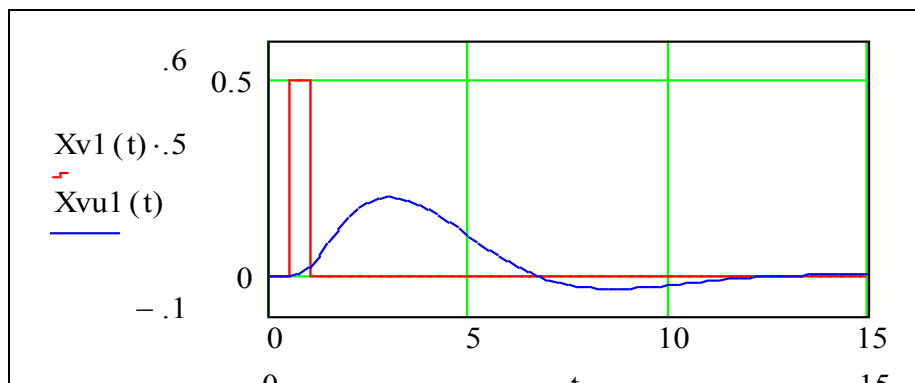
$$g1(t) := .2345 \cdot \exp(-2.325 \cdot t) + .8293 \cdot \exp(-.338 \cdot t) \cdot \sin(.562 \cdot t) - .2345 \cdot \exp(-.338 \cdot t) \cdot \cos(.562 \cdot t) |$$

Будуємо для контролю графік отриманої імпульсної перехідної функції для системи 3-го порядку. Задаємо діапазон $t := 0, 0.25.. 15$.

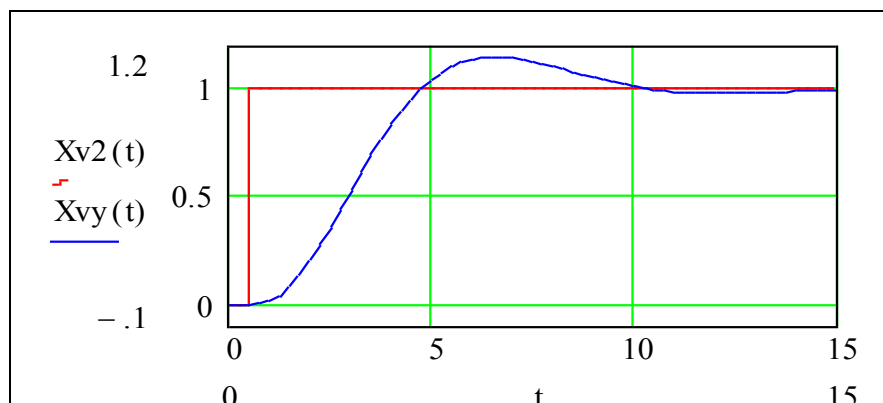


Тепер, коли ми отримали ПФ, просто обчислити реакцію на типові вхідні дії САУ за інтегралом згортки. Зробимо це і порівняємо результати з обчисленими за еквівалентним різницеvim рівнянням.

Реакція на імпульс: $X_{v1}(t) := \Phi(t - .4) - \Phi(t - 1)$, $X_{v1}(t) := \int_0^t X_{v1}(t - \tau) \cdot g_1(\tau) d\tau$

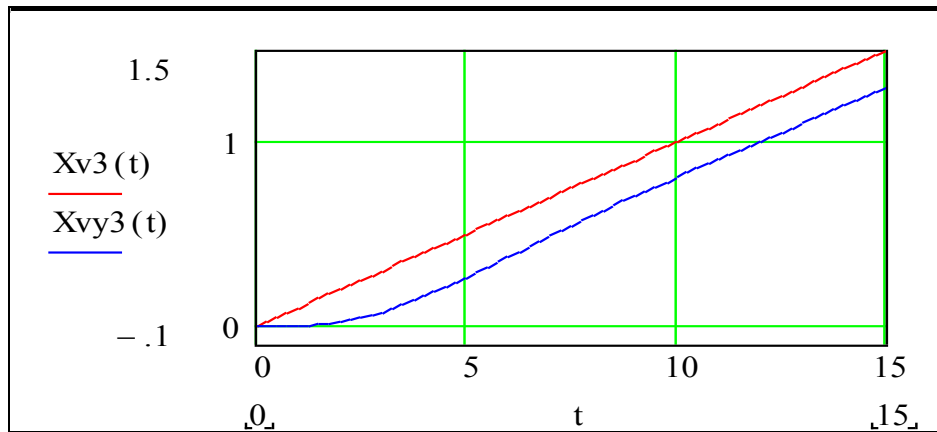


Реакція на ступінчастий сигнал: $X_{v2}(t) := \Phi(t - .5)$, $X_{vy}(t) := \int_0^t X_{v2}(t - \tau) \cdot g_1(\tau) d\tau$



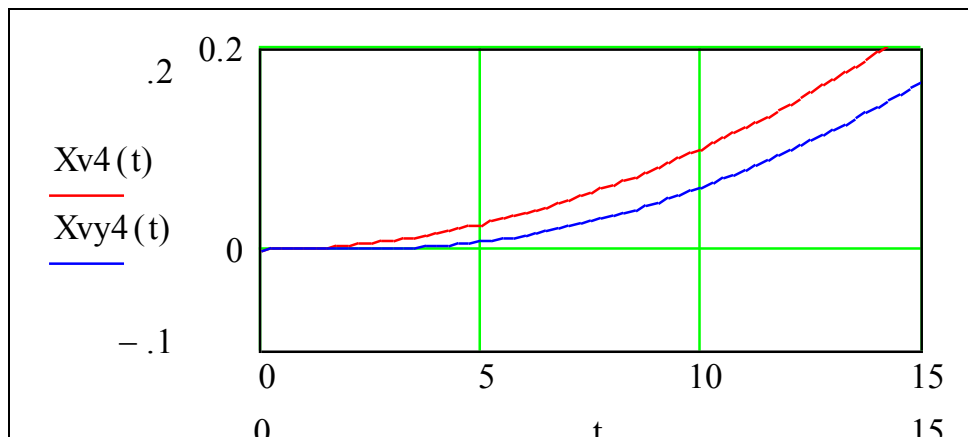
Реакція на сигнал, що зростає лінійно:

$$X_{v3}(t) := .1 \cdot (t), \quad X_{vy3}(t) := \int_0^t X_{v3}(t - \tau) \cdot g_1(\tau) d\tau$$



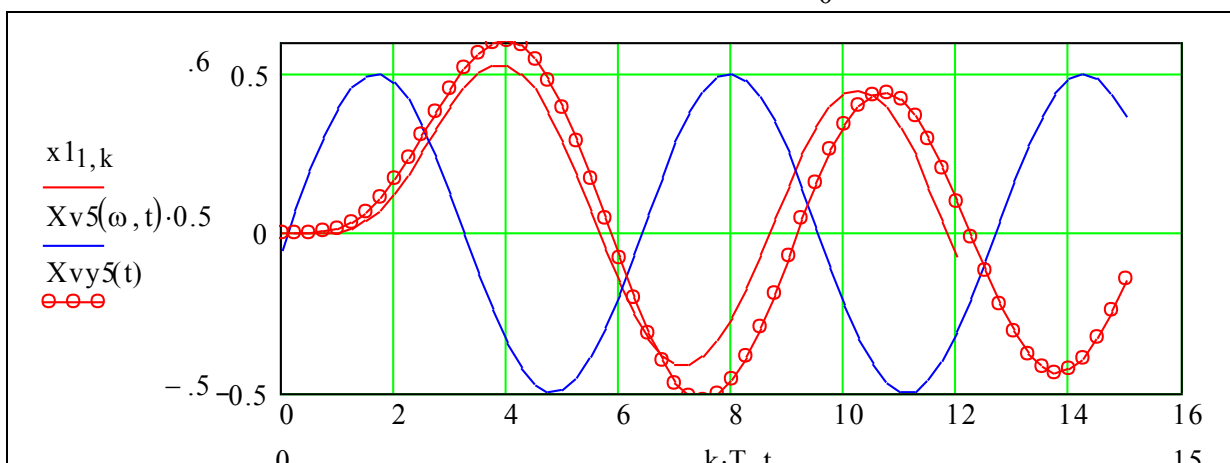
Реакція на сигнал, що зростає квадратично:

$$Xv4(t) := .001 \cdot (t)^2, \quad Xvy4(t) := \int_0^t Xv4(\tau) \cdot g1(t - \tau) d\tau$$



Реакція на гармонічний сигнал:

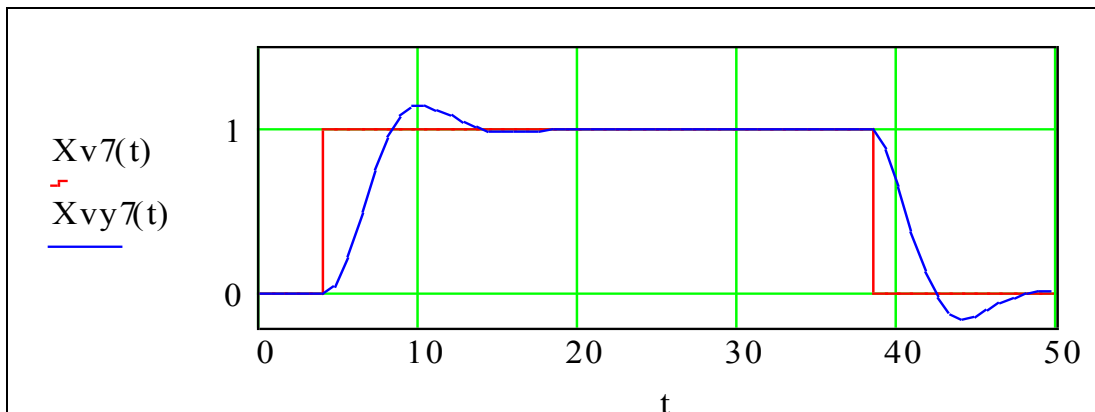
$$Xv5(\omega, t) := \sin[\omega \cdot (t - .1)], \quad \omega := 1, \quad Xvy5(t) := \int_0^t Xv5(\omega, \tau) \cdot g1(t - \tau) d\tau$$



На цьому графіку подано вхідний сигнал $Xv5(\omega, t)$, вихідний сигнал $Xvy5(t)$ та вихідний інтеграл розрахований за різницевиими рівняннями. Спробуйте пояснити, чому збігання вихідних сигналів, що розраховані альтернативними методами є задовільним.

Побудуємо також **реакцію на довгий імпульс**:

$$X_{v7}(t) := \Phi(t - 4) - \Phi(t - 38), \quad t := 0, 0.8..50, \quad X_{vy7}(t) := \int_0^t X_{v7}(t - \tau) \cdot g_1(\tau) \, d\tau$$



Спробуйте змінювати довжину імпульсу, зробіть висновки.

Контрольні запитання до факультативу

1. Запишіть формулу для інтеграла згортки.
2. Запишіть формулу для перетворення Лапласа від інтеграла згортки.
3. Що таке імпульсна перехідна функція, як вона пов'язана з передаточною функцією?
4. Що таке перехідна функція?

5. Задана імпульсна перехідна функція САУ: $2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot a_1 \cdot t\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2} \cdot t\right)}{\sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2}}$.

Чому дорівнює перетворення Лапласа від неї?

6. Чому дорівнює зворотне перетворення Лапласа $L^{-1}\{W(s)\} = ?$ від передаточної функції стійкої САУ?

7. На скільки зміниться інтеграл згортки: $X_{vu1}(t) := \int_0^t X_{v1}(t - \tau) \cdot g_1(\tau) \, d\tau$, якщо в

ньому отак поміняти множники: $X_{vu1}(t) := \int_0^t g_1(t - \tau) \cdot X_{v1}(\tau) \, d\tau$?

Виберіть відповідь: а) не зміниться, б) зміниться у π (≈ 3.14) раз, в) зміниться в 40 раз.

8. Що виконувється в цьому виразі:

$$2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot a_1 \cdot t\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2} \cdot t\right)}{\sqrt{4 \cdot a_0 - a_1^2}} \left| \begin{array}{l} \text{laplace, tt} \\ \text{simplify} \\ \text{collect, s} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{(s^2 + s \cdot a_1 + a_0)} ?$$

1.3. Дослідження часових характеристик САУ при варіації параметрів

Ціль даної роботи - набуття навичок у розробці і реалізації у програмному середовищі математичного пакета робочих (тобто програмно виконуваних) моделей динаміки, орієнтованих на дослідження впливу варіацій параметрів регулятора і об'єкта управління.

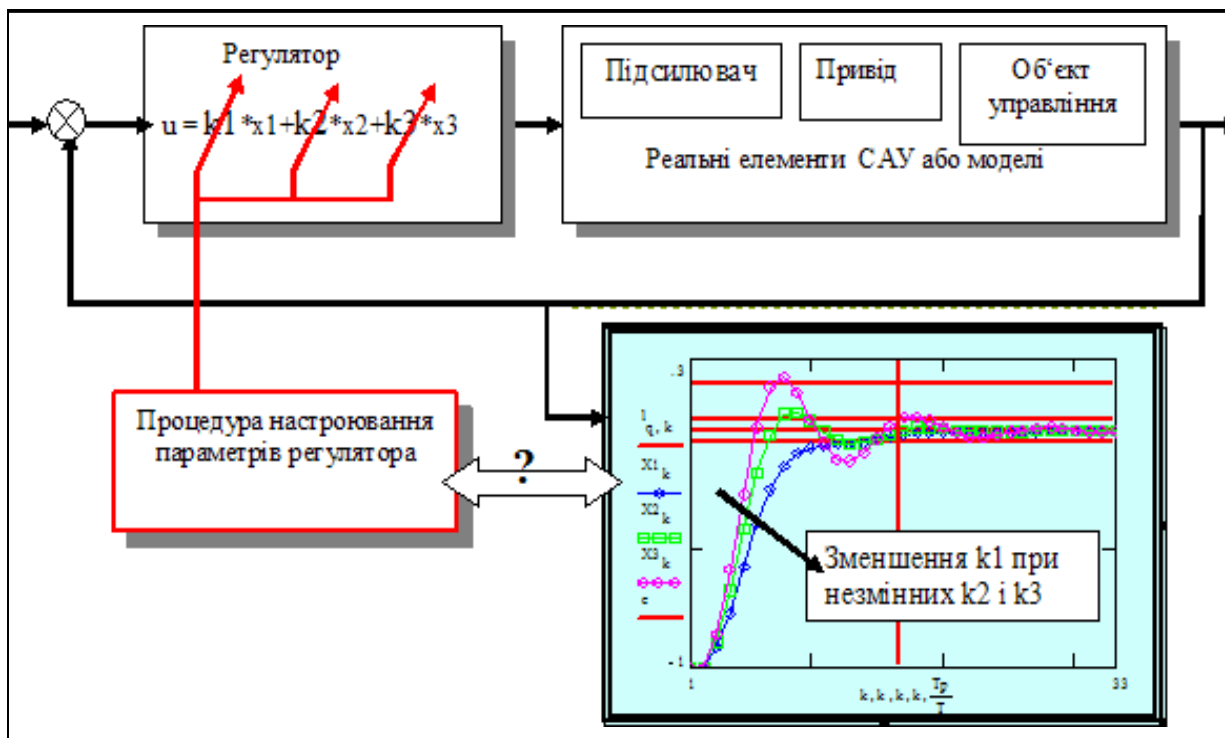
В неформальному плані це, наприклад, така задача - зібрано реальну САУ (див. схему) - підсилювач, привід (виконавчий елемент), об'єкт управління, вимірювачі параметрів вектора стану (на схемі не показані) і регулятор, що замикає контур.

Об'єкт, привод, підсилювач - нелінійні елементи. На базі їх лінеаризованих моделей розраховано параметри регулятора k_1, k_2, k_3 . Реальна САУ при таких значеннях параметрів може бути незадовільною, або, взагалі, нестійкою.

Задача - настроїти (підібрати) параметри регулятора так, щоб САУ була задовільною (ще краще - оптимальною). Методи цього пошуку найрізноманітніші - від чистого методу випадкових проб і помилок до математично витончених та "інтелектуальних" методів оптимізації і адаптації. Потім для настроєного регулятора знаходяться границі допусків на значення *параметрів*, в межах яких САУ: **1) задовільна, 2) стійка**.

Процедуру настроювання може виконувати: а) спеціаліст з досвідом, б) автоматична система, в) спеціаліст в діалозі із автоматичною системою настроювання.

В даній роботі на повністю контрольованій, прозорій моделі об'єкта імітується ця заключна процедура створення САУ - **настроювання, випробування, сертифікація**.



Для оцінки якості і функціональної придатності САУ існує більш-менш стандартизований набір показників. В даній роботі використовуються такі показники (відповідні горизонтальні і вертикальні (червоні) лінії на графіку-"осцилографі", поданому вище):

- **тривалість перехідного процесу (ПП)** - час до входу в допуск помилки - T_p ;
- **викид (перерегулювання)** - максимальне значення помилки у ПП - h_m та багато інших...

Сьогодні САУ реалізують мікроконтролерами і мікропроцесорами. Тому вони самоконтролюються, самокалібруються і самонастроюються. **Надзадача** в цій роботі - розробити систему самонастроювання **регулятора**, що приводить показники ПП САУ до заданих значень. (Оптимальні і адаптивні САУ розглядаються в другій частині посібника).

Завдання

1. Налаштувати регулятор вручну, методом пошуку. 6 б
2. Оцінити якість САУ при заданому розкиді заданого параметра. 8 б
3. Визначити допустимий діапазон зміни заданого параметра, в якому САУ ще залишається стійкою. 8 б
4. Визначити характер зміни ПП при заданому характері зміни всіх параметрів об'єкта управління. 11 б
5. Розробити модулі обчислення залежності показників якості ПП від параметрів САУ і збурень. 67 б

Варіанти значень параметрів

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a2	3.0	2.0	1.0	1.75	2.5	3.0	2.0	1.0	2.0	2.5	3.5	3.5	3.3	2.8
a1	3	2	2	2.15	3	3.5	1	3	2.5	2	3	2.5	1.5	2.5
що_дослід	a1	a2	a3	a3	a2	a1	a1	a2	a3	a3	a2	k1	k1	k2
жувати	k1	k2	k3	k2	k1	k2	k3	k3	k1	a1	a3	k2	k3	k3

Зразок виконання

1. Отримання еквівалентної дискретної моделі

Приводимо задане дифрівняння до форми Коші. Для цього вводимо нові змінні:

$x_1=x$; $x_2=dx/dt$; $x_3=d^2x/dt^2$, і далі просто копіюємо відповідні фрагменти з роботи №1.1. Подаємо систему у матрично-векторному вигляді:

система: $\frac{dx}{dt} = A_0 \cdot x + B \cdot u$; регулятор: $u = K \cdot x$, де ORIGIN:=1

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{00} & -a_{10} & -a_{20} \end{pmatrix}; I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; K := (k_1 \ k_2 \ k_3); x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи (необов'язково, бо вирази прості) символний процесор, розкриваємо відповідні матрично-векторні вирази:

$$u = K \cdot x \rightarrow u = (k_1 \cdot x \ k_2 \cdot x \ k_3 \cdot x); (k_1 \ k_2 \ k_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3$$

$$A_0 \cdot x + B \cdot u = A_0 \cdot x + B \cdot K \cdot x = (A_0 + B \cdot K) \cdot x; A := A_0 + B \cdot K; \frac{dx}{dt} = A \cdot x$$

Виводимо символні вирази для матриці замкненої системи та її окремих елементів. Для цього досить набрати замість "=" стрілку \rightarrow (взяти з інструментальної палітри). Ці вирази нам потрібні для розробки робочої матмоделі, орієнтованої на дослідження впливу варіацій параметрів. Можна було їх вивести "вручну". **Але у нас при змінах у матрицях A_0, B, K усі вирази зі стрілками будуть переобчислюватись** (символьно).

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 & -a_2 + k_3 \end{pmatrix} A_0 + B \cdot K \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 & -a_2 + k_3 \end{pmatrix}$$

Нарешті переходимо безпосередньо до побудови робочої моделі (програми). Далі виділено кольорами (highlight) *майже* все те, без чого вона не працюватиме:

параметри об'єкта управління: $a_{20} := 1$; $a_{10} := 1$; $a_{00} := -2$; крок обчислень: $T := .25$

кількість кроків: $N := 37$; $i := 1..N$; дискретний час: $t_i := T \cdot (i - 1)$.

Параметри замкненої системи записуємо як функції від параметрів об'єкта і регулятора:

$$a_2(k_3) := a_{20} + k_3; \quad a_1(k_2) := a_{10} + k_2; \quad a_0(k_1) := a_{00} + k_1.$$

Записуємо перехідну функцію стану, як функцію параметрів регулятора

$$A(k_1, k_2, k_3) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(k_1) & -a_1(k_2) & -a_2(k_3) \end{pmatrix}$$

$$S_2(k_1, k_2, k_3) := I + A(k_1, k_2, k_3) \cdot T + \frac{A(k_1, k_2, k_3)^2 \cdot T^2}{2!}$$

Задаємо ранжовані змінні та початковий стан САУ
 $l := -1, -9..1.5$; $TT := N \cdot T$; $tt := T_p, (T_p + T)..TT$.

$$x_2^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Підготовча робота виконана. Можемо перейти до наступного пункту завдання.

2. Настроювання регулятора на задані: тривалість T_p ; викид hm

Цю операцію зручно виконувати, якщо k_1, k_2, k_3 вводяться поближче до графіка ПП, тому **робоча модель САУ**

$$x_2^{(i+1)} := S_2(k_1, k_2, k_3) \cdot x_2^{(i)}$$

зроблена компактною функцією k_1, k_2, k_3 . Біля графіка вводимо також задані значення викиду hm і тривалості перехідного процесу T_p (згідно з варіантом).

Підбираємо k_1, k_2, k_3 , що дають потрібні hm і T_p . Треба власне знайти такі значення k_1, k_2, k_3 , щоб координата x_1 ніде не перевищувала значення hm , а після заданої тривалості ПП T_p не виходила за межі допуску (дві лінії ± 0.05 на графіку нижче), бажано також, щоб значення суми $(k_1 + k_2 + k_3)$ було б мінімальним (це оцінка потрібної потужності управління).

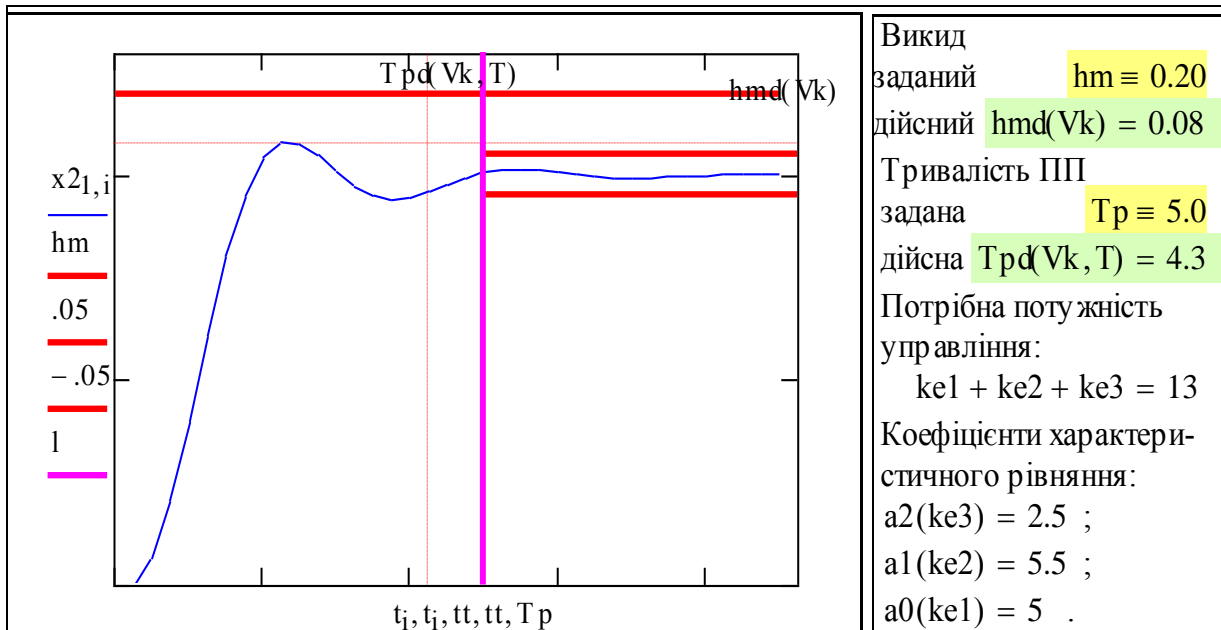
Виводимо те, що обчислила робоча модель САУ:

$$x_2 = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -0.934 & -0.794 & -0.6 & -0.389 & -0.197 & -0.048 & 0.045 & 0.084 \\ 2 & 0 & 0.156 & 0.433 & 0.682 & 0.815 & 0.807 & 0.679 & 0.478 & 0.258 & 0.065 \\ 3 & 0 & 0.859 & 1.03 & 0.736 & 0.224 & -0.293 & -0.671 & -0.846 & -0.822 & -0.65 \end{array}$$

Перший рядок цієї таблиці - послідовність значень регульованої координати. Виділяємо вектор значень координати $V_k := (x_2^T)^{\langle 1 \rangle}$. На цих даних визначаємо тривалість ПП та викид (*програми для обчислення цих параметрів сховані* - їх треба зробити **самостійно**). Обчислюємо тривалість $T_{pd}(V_k, T) = 4.25$ і викид $hmd(V_k) = 8.4\%$.

Тут вводимо значення параметрів регулятора:

$$ke_1 \equiv 7; \quad ke_2 \equiv 4.5; \quad ke_3 \equiv 1.5$$



На цьому графіку пунктирними лініями (це "маркери") подано дійсні значення викиду і тривалості ПП.

3. Визначення області стійкості для заданого параметра (k_1)

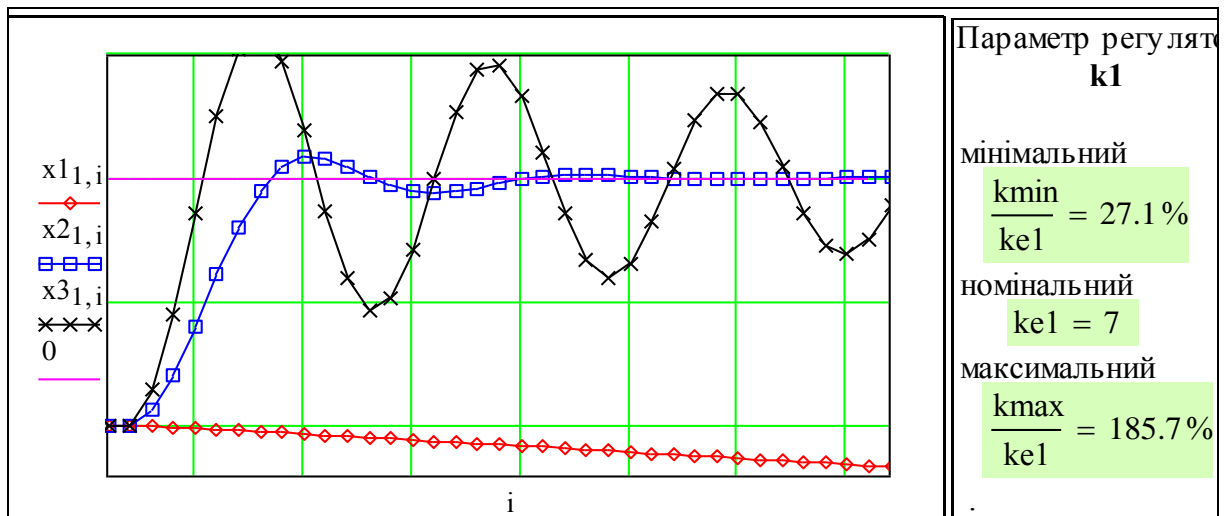
Краще шукати верхню та нижню границі стійкості одночасно, для чого двічі розв'язуємо рівняння динаміки (змінні x_1 і x_3) при значеннях $k_{min} < k_1 < k_{max}$. **Зменшуємо k_{min} і збільшуємо k_{max} , поки САУ не стане нестійкою.**

Початкові умови: $x_3^{\langle 1 \rangle} := x_2^{\langle 1 \rangle}; \quad x_1^{\langle 1 \rangle} := x_2^{\langle 1 \rangle}$.

Тут вводимо значення параметра регулятора:

$$k_{min} := 1.9; \quad ke_1 = 7; \quad k_{max} := 13.$$

$$x_1^{\langle i+1 \rangle} := S_2(k_{min}, ke_2, ke_3) \cdot x_1^{\langle i \rangle}; \quad x_3^{\langle i+1 \rangle} := S_2(k_{max}, ke_2, ke_3) \cdot x_3^{\langle i \rangle}.$$



Бачимо, що при знайдених значеннях k_{min} і k_{max} САУ аперіодично і коливально нестійка. Діапазон зміни k_1 є досить великим. *Зауваження:* об'єкт може бути стійким і без регулятора, в цьому випадку мінімальне значення k_1 буде від'ємним.

4. Дослідження ПП при пропорційній зміні параметрів САУ

Уявіть собі, що ви, або програма самонастроювання, знайшли параметри k_1, k_2, k_3 , що дають оптимальний за всіма показниками, крім тривалості, перехідний процес.

Як треба змінювати параметри регулятора при настроюванні, щоб змінювалась тільки тривалість, а характер ПП був би незмінним? Така залежність для лінійних систем відома (виведення подано в другій частині посібника - "Синтез САУ"). Ця залежність використовується при моделюванні, синтезі, самонастроюванні САУ.

Копіюємо попередню ММ, але робимо її функцією від параметра ω а не k_1, k_2, k_3 . Параметр ω - "власна частота" характеризує тривалість ПП. Для того, щоб характер ПП був незмінним, коефіцієнти слід змінювати так:

$$A_2(\omega) := a_2(k_3) \cdot \omega; \quad A_1(\omega) := a_1(k_2) \cdot \omega^2; \quad A_0(\omega) := a_0(k_1) \cdot \omega^3.$$

Записуємо вирази для перехідної функції стану, виводимо для контролю значення $A(\omega)$.

$$A(\omega) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -A_0(\omega) & -A_1(\omega) & -A_2(\omega) \end{pmatrix}$$

$$A(1) = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -5.5 & -2.5 \end{array}$$

$$A(10) = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5000 & -550 & -25 \end{array}$$

$$S_3(\omega) := I + A(\omega) \cdot T + \frac{(A(\omega) \cdot T)^2}{2!}$$

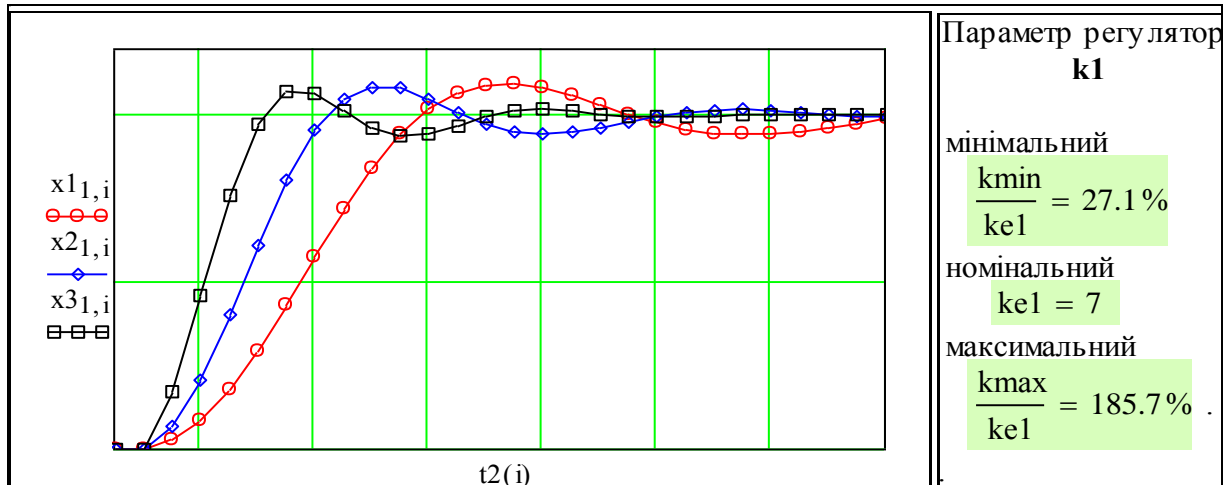
$$S_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.03 \\ -0.16 & 0.83 & 0.17 \\ -0.86 & -1.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Щоб розібратись у логіці зміни коефіцієнтів системи запишемо характеристичне рівняння нашої неперервної динамічної системи у такому вигляді:

$$\omega^0*s^3 + a2(k3)*\omega^1*s^2 + a1(k2)*\omega^2*s^1 + a0(k1)*\omega^3*s^0 = 0$$

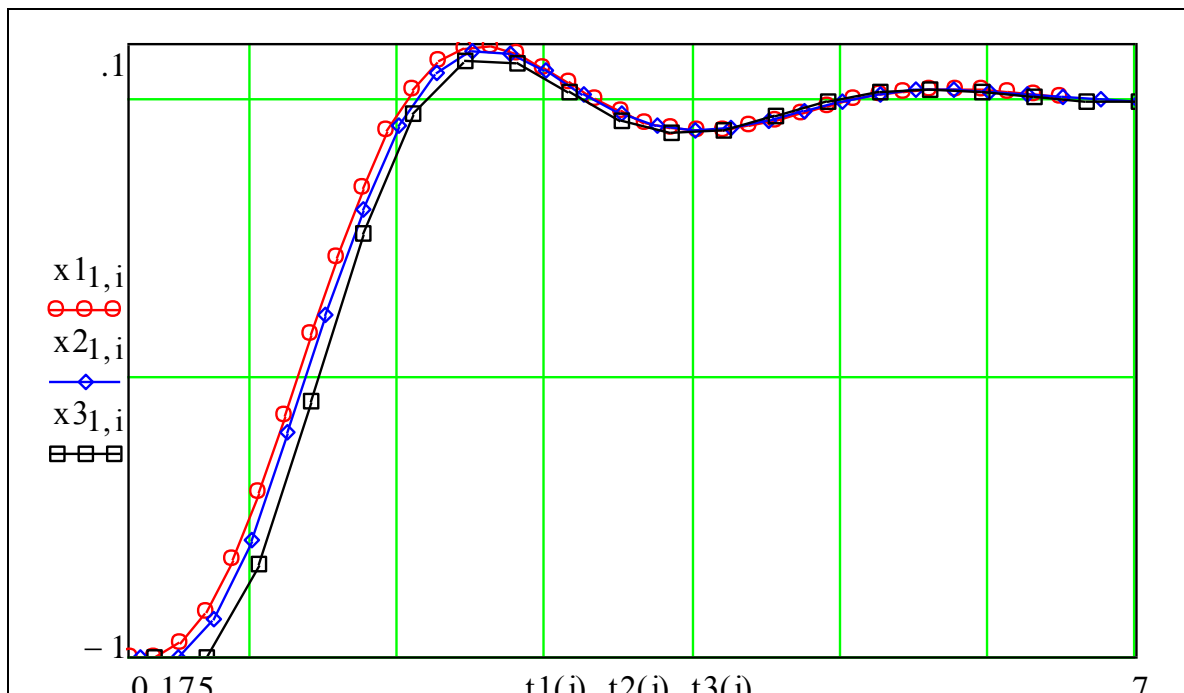
Бачимо - сума ступеней змінних s і ω є постійною = 3, а розмірність у них однакова - 1/сек.

$$t2(i) := T \cdot i; \quad x1^{(i+1)} := S3(\omega mi) \cdot x1^{(i)}; \quad x3^{(i+1)} := S3(\omega ma) \cdot x3^{(i)}.$$



Перевіримо, що параметр ω змінює тільки тривалість перехідного процесу. Змінимо масштаби часу для кожного з перехідних процесів пропорційно значенню параметра ω :

$$t2(k) := T \cdot k; \quad t1(k) := t2(k) \cdot \omega mi; \quad t3(k) := t2(k) \cdot \omega ma.$$



Практичний висновок очевидний - якщо при настроюванні лінійної динамічної системи ми хочемо змінити тільки тривалість ПП, не змінюючи його форми, слід змінювати параметри замкненої системи згідно з поданими вище залежностями.

Працювали: Суховій П., Тетеря П., Безпалій І., Многогрішний Д. 17.17.1663

Контрольні запитання

1. Назвіть показники якості перехідного процесу.
2. Дайте визначення показника "тривалість перехідного процесу".
3. Наведіть приклади об'єктів управління для яких перерегулювання є небезпечним.
4. Запишіть диференціальне рівняння для лінійної динамічної системи 3-го порядку з одним входом і одним виходом.
5. Що таке форма Коші для запису системи диференціальних рівнянь?
6. Запишіть матрично-векторне диференціальне рівняння для лінійної динамічної системи 3-го порядку з одним входом і одним виходом.
7. Запишіть еквівалентну дискретну модель - матрично векторне різницеве рівняння для лінійної динамічної системи 3-го порядку.
8. Чому регулятор доводиться налаштовувати? Хіба не можна аналітично розрахувати потрібні значення параметрів регулятора?
9. Напишіть документ або програму для обчислення одразу трьох перехідних процесів: при номінальних значеннях параметрів, при $k_2 = 0.75 \cdot k_2$ і $k_2 = 1.25 \cdot k_2$.
10. Запропонуйте алгоритм визначення тривалості ПП.
11. Запропонуйте критерії, що оцінювали б перехідний процес в цілому.

1.4. Розробка та дослідження системи самонастроювання САУ

Вступ

Ціль даної роботи - набуття навичок у розробці і реалізації у програмному середовищі математичного пакета робочих моделей динаміки та алгоритмів самонастроювання параметрів регулятора. Це продовження роботи 1.3. Там Ви вручну, дивлячись на перехідний процес, методом проб і помилок підбирали параметри регулятора, що забезпечують стійкість і потрібні показники якості. На рис.1 подана схема системи. Об'єкт, привід, підсилювач звичайно є нелінійними. Тільки на базі їх **лінеаризованих** моделей можна розрахувати параметри регулятора k_1, k_2, k_3 . Реальна ж САУ при так розрахованих значеннях параметрів може виявитись незадовільною.

Постановка задачі

Треба а) **підібрати параметри регулятора**, так щоб САУ була задовільною, б) **розробити і реалізувати алгоритм самонастроювання САУ**. Перша частина завдання - повторення роботи 1.3, з осмисленням властивостей САУ і формалізацією Вашої логіки настроювання регулятора. Друга частина - розробка та дослідження системи самонастроювання регулятора. Звичайно такі системи робляться на базі пошукових методів. Діапазон тут широкий - від фундаментального методу Вальдеца-Шеклі (об'єкт пошуку обов'язково прийде до суб'єкта пошуку, якщо той буде залишатись на місці протягом $T_{\text{пошуку}} \rightarrow \infty$) до чистого методу випадкових проб і помилок. В середині цього діапазону безліч методів і алгоритмів, наприклад, "нейронні мережі", "генетичні алгоритми", "штучні соціальні системи", "нечітка логіка".

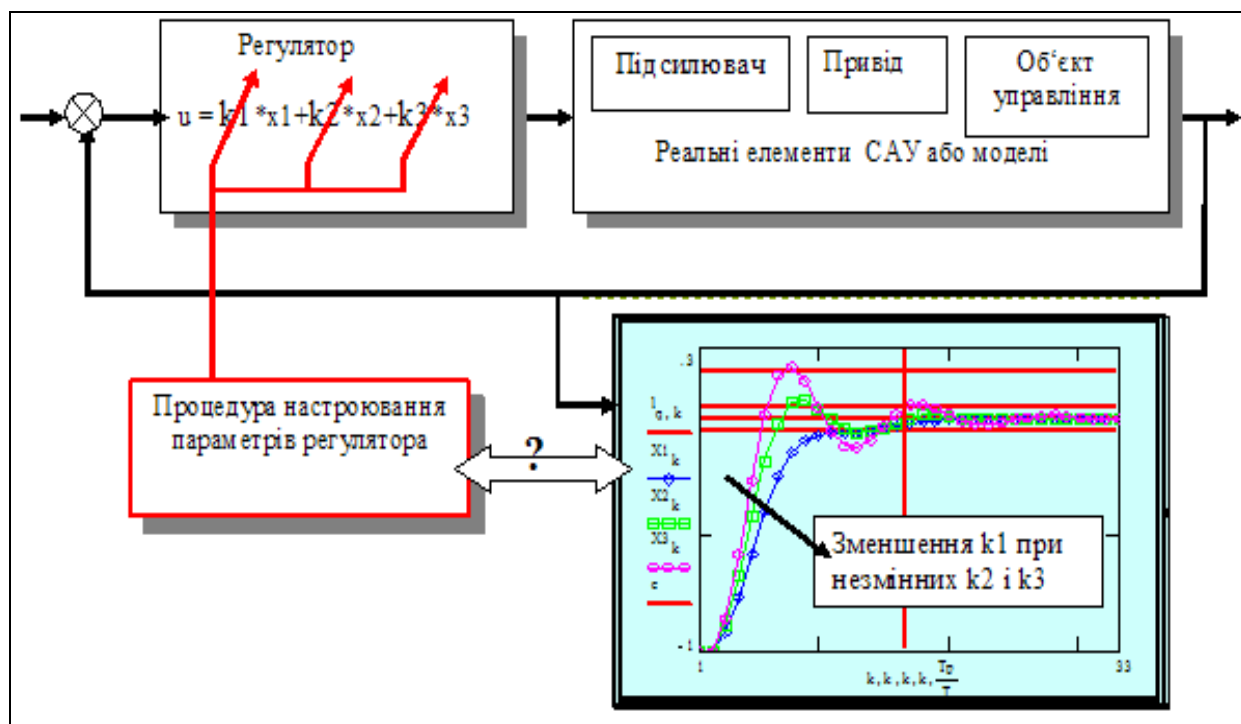


Рис. 1. Схема системи

Оптимальні і адаптивні САУ розглядаються в другій частині посібника. Якщо ви бажаєте вже зараз більш глибоко освоїти цей науковий напрям, рекомендуємо дійсно фундаментальні книги:

Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией [2];

Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах [20].

В даній роботі на відкритій моделі САУ Ви можете експериментально перевірити принцип, що є фундаментом песімізму відносно створення безпечних інтелектуальних систем: **те, що легко робить людина, є важким для комп'ютера, і навпаки.**

Використаємо такі показники якості перехідного процесу:

- **тривалість перехідного процесу (ПП)** - час до входу в допуск помилки - T_p ;
- **викид (перерегулювання)** - максимальне значення регульованої змінної у перехідному процесі - h_m та ін.

Сьогодні САУ реалізують мікроконтролерами і мікропроцесорами. Практично не існує апаратних обмежень для реалізації складних алгоритмів самоконтролю, самокалібровки і самонастроювання. Проблема - дефіцит ефективних алгоритмів. Тому **надзадача** в цій роботі - розробити працездатну систему самонастроювання **регулятора**, що приводить показники ПП САУ до заданих значень.

Завдання

- | | |
|--|------|
| 1. Налаштувати регулятор вручну, методом пошуку. | 8 б |
| 2. Оцінити якість САУ при заданому розкиді заданого параметра. | 2 б |
| 3. Визначити допустимий діапазон зміни заданого параметра, в якому САУ ще залишається стійкою. | 2 б |
| 4. Побудувати функції залежності показників якості ПП від настроюваних параметрів. | 13 б |
| 5. Розробити документ для автоматичного настроювання регулятора. | 75 б |

Варіанти значень параметрів

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a2	3.0	2.0	1.0	1.75	2.5	3.0	2.0	1.0	2.0	2.5	3.5	3.5	3.3	2.8
a1	3	2	2	2.15	3	3.5	1	3	2.5	2	3	2.5	1.5	2.5
що_дослід	a1	a2	a3	a3	a2	a1	a1	a2	a3	a3	a2	k1	k1	k2
жувати	k1	k2	k3	k2	k1	k2	k3	k3	k1	a1	a3	k2	k3	k3

Зразок виконання

1. Отримання еквівалентної дискретної моделі

Приводимо задане диференціальне рівняння до форми Коші. Для цього вводимо нові змінні:

$x_1=x$; $x_2=dx/dt$; $x_3=d^2x/dt^2$, і далі просто копіюємо відповідні фрагменти з роботи №1.3. Подаємо систему у матрично-векторному вигляді:

система: $\frac{dx}{dt} = A_0 \cdot x + B \cdot u$; регулятор: $u = K \cdot x$, де ORIGIN := 1

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{00} & -a_{10} & -a_{20} \end{pmatrix}; \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad K := (k_1 \quad k_2 \quad k_3); \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи символний процесор, розкриваємо матрично-векторні вирази:

$$u = K \cdot x \rightarrow u = (k_1 \cdot x \quad k_2 \cdot x \quad k_3 \cdot x); \quad (k_1 \quad k_2 \quad k_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3$$

$$A_0 \cdot x + B \cdot u = A_0 \cdot x + B \cdot K \cdot x = (A_0 + B \cdot K) \cdot x; \quad A := A_0 + B \cdot K; \quad \frac{dx}{dt} = A \cdot x.$$

Виводимо символні вирази для матриці замкненої системи та її окремих елементів. Для цього досить набрати замість "=" стрілку \rightarrow (взяти з інструментальної палітри). Ці вирази нам потрібні для розробки робочої матмоделі, орієнтованої на дослідження впливу варіацій параметрів. Можна було їх вивести "вручну". Але наші формули "живі" - при змінах у матрицях A_0, B, K усі вирази зі стрілками будуть переобчислюватись.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{00} + k_1 & -a_{10} + k_2 & -a_{20} + k_3 \end{pmatrix} A_0 + B \cdot K \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{00} + k_1 & -a_{10} + k_2 & -a_{20} + k_3 \end{pmatrix}$$

Будуємо робочу модель (програму). Виділяємо кольорами (в електронній версії книги) ключові об'єкти - зони введення, виведення, головні формули і рівняння. Вводимо параметри об'єкта управління: $a_{20} := 1$; $a_{10} := 1$; $a_{00} := -2$; крок обчислень: $T := .25$ кількість кроків: $N := 37$; $i := 1..N$; дискретний час: $t_i := T \cdot (i - 1)$. Параметри замкненої системи записуємо як функції від параметрів об'єкта і регулятора:

$$a_2(k_3) := a_{20} + k_3; \quad a_1(k_2) := a_{10} + k_2; \quad a_0(k_1) := a_{00} + k_1.$$

Записуємо перехідну функцію стану, як функції параметрів регулятора:

$$A(k_1, k_2, k_3) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(k_1) & -a_1(k_2) & -a_2(k_3) \end{pmatrix}$$

$$S_2(k_1, k_2, k_3) := I + A(k_1, k_2, k_3) \cdot T + \frac{A(k_1, k_2, k_3)^2 \cdot T^2}{2!}$$

Задаємо ранжовані змінні та початковий стан САУ
 $l := -1, -9..1.5$; $TT := N \cdot T$; $tt := T_p, (T_p + T)..TT$.

$$x^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Настроювання регулятора на задані: тривалість T_p ; викид hm

Цю операцію зручно виконувати, якщо K_1, K_2, K_3 вводяться поряд з графіком ПП, тому **робоча модель САУ**:

$$x^{(i+1)} := S_2(K_1, K_2, K_3) \cdot x^{(i)} \quad \text{зроблена функцією } K_1, K_2, K_3.$$

Виділяємо з масиву x вектор значень координати $V_k := \begin{pmatrix} T \\ x \end{pmatrix}^{(1)}$. На цих даних визначаємо тривалість ПП та викид. Нагадаємо, що тут подано тільки початок таблиць даних.

$$x^T =$$

	1	2	3
1	-1	0	0
2	-1	0.188	0.375
3	-0.941	0.366	0.445
4	-0.836	0.508	0.36
5	-0.698	0.6	0.207

$$\left(x^T\right)^{\langle 1 \rangle} =$$

	1
1	-1
2	-1
3	-0.941
4	-0.836
5	-0.698

Подаємо приклад програми ппп (показники перехідного процесу) для визначення викиду і тривалості ПП. Поряд з текстом програми подаємо "розпаковку" її виходу.

<pre> ппп (Vd, dT) := N ← length(Vd) Викид ← -9.81 Твкд ← -3.14 for i ∈ ORIGIN.. N Трр ← i if Vd_i > 0.05 0 otherwise умова ← Викид > Vd_i Викид ← умова·Викид + ¬умова·Vd_i Твкд ← умова·Твкд + ¬умова·i Тривалість ← max(Трр) dT Випрог ← $\begin{pmatrix} \text{Тривалість} \\ \text{Викид} \\ \text{Твкд} \cdot dT \end{pmatrix}$ </pre>	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>7.25</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.25</td></tr> <tr><td>3</td><td>3.5</td></tr> </table> <pre> ппп (Vk, T) = Трpd := ппп (Vk, T)₁ hmd := ппп (Vk, T)₂ Тhm := ппп (Vk, T)₃ ППУ := K1 + K2 + K3 </pre>		1	1	7.25	2	0.25	3	3.5
	1								
1	7.25								
2	0.25								
3	3.5								

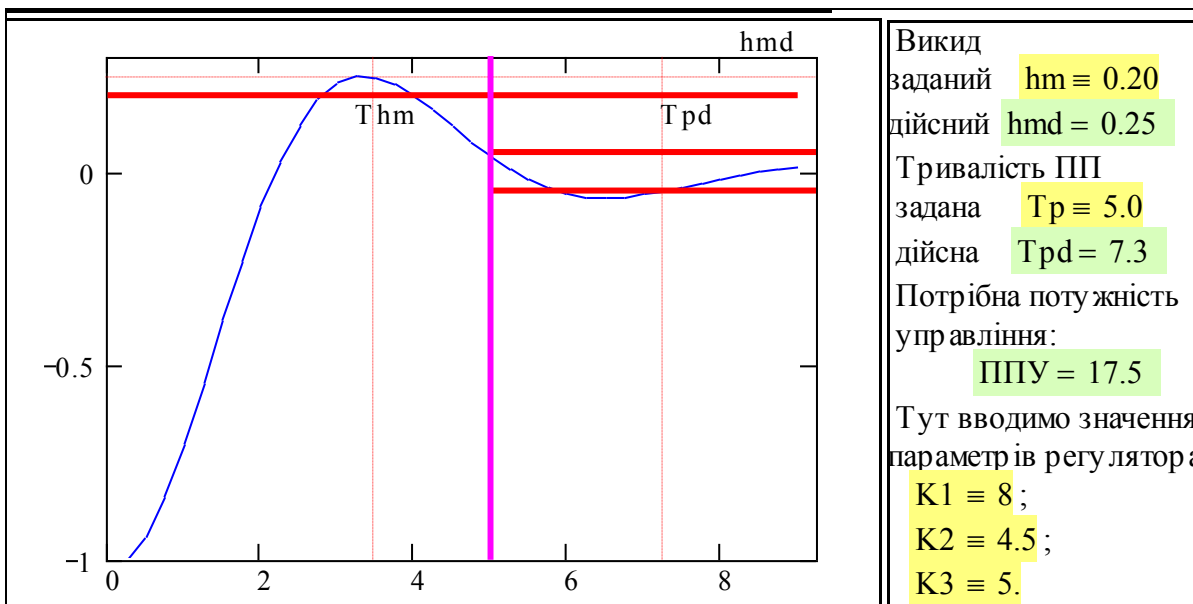


Рис. 2. Стенд для настроювання регулятора

Підбираємо K1, K2, K3, що дають потрібні hm і Tr. Треба знайти такі значення K1, K2, K3, щоб координата x1 ніде не перевищувала значення hm, а після заданої тривалості процесу Tr не виходила за межі допуску (дві лінії ± 0.05 на графіку вище), бажано також, щоб значення суми ($|K1| + |K2| + |K3|$) було б мінімальним (це оцінка потрібної потужності управління). Подумайте, чому ми беремо суму модулів коефіцієнтів?

Увага! Стенд подано в ситуації, коли регулятор ненастроєний. На графіку подано три маркерні лінії (пунктири). Дві лінії задають положення викиду, і ще одна - точку закінчення перехідного процесу.

3. Побудова системи автоматичної настройки регулятора

Серйозні вчені - спеціалісти з теорії управління, теорії систем, програмування застерігали, що інтелект - здібність до навчання, накопичення досвіду для прогнозування в певних умовах може бути шкідливим [2, 20]. Форрестер писав про антиінтуїтивну поведінку складних нелінійних систем, з якими не можна працювати на базі простої "лінійної" логіки. Наводився і такий гіпотетичний приклад: серед нью-йоркських щурів шанс вижити має той, що нікому не вірить і нічому не навчається (щурів спочатку привчають до якісної приманки, потім підкладають отруєну). Але фундаментом для оптимізму (в області штучного і природного інтелекту) є факт, що нью-йоркські щури у підозрілих випадках надають право випробування нижчим в ієрархії, тобто **вчатьсЯ виключно на чужих помилках**).

Чи має це якесь відношення до самонастроювання систем автоматичного управління? Має, наприклад, є метод навчання на моделі системи, в прискореному часі. Критичні варіанти управління, що небезпечні для реальної системи, виконуються на моделі.

Далі подана досить примітивна спроба автоматизувати процес настроювання, що так легко виконується системою з природним інтелектом. Спробуйте розробити щось краще.

Перший крок в розробці такої системи - розширення вектора стану - крім координат вектора стану об'єкта - x1, x2, x3 вводимо вектор параметрів регулятора - k1, k2, k3.

Другий крок - задаємо не один перехідний процес, а цілу серію - KP, а тривалість кожного беремо рівною потрібній тривалості ПП, тобто $N = Tr/T$ кроків моделювання.

Третій крок - розробка алгоритмів зміни параметрів регулятора в залежності від спостережуваних показників ПП.

$$Tr = 5 \quad T := .1 \quad Tr := 8 \quad N := \text{ceil}\left(\frac{Tr}{T}\right) \quad KP := 5 \quad M := KP \cdot N \quad i := 1..M$$

$$\text{ORIGIN} = 1 \quad Nm := N - 4 \quad N = 80 \quad M = 400$$

Задаємо початкові значення:

вектор стану:	параметри регулятора	параметри об'єкта	задані значення
$\begin{pmatrix} x1_1 \\ x2_1 \\ x3_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k1_1 \\ k2_1 \\ k3_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -2.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A0 \\ A1 \\ A2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	x1z := 0 x2z := 0 x3z := 0

```

(X
 K) :=
ORIGIN ← 1
x11 ← -1
x21 ← 0
x31 ← 0
k11 ← -7
k21 ← -5
k31 ← -2.6
for i ∈ 1..M
  ym ← mod(i,N) = Nm
  x1i+1 ← (x1i + x2i·T) → ym + ym·x11
  x2i+1 ← (x2i + x3i·T) → ym
  tmp ← x3i + [(k1i - A0)·x1i + (k2i - A1)·x2i + (k3i - A2)·x3i]·T
  x3i+1 ← tmp → ym
  k1i+1 ← k1i + [11·(x1i - x1z)]·ym
  k2i+1 ← k2i + [4·(x1i - x1z) + (max(x1) - hm)·11]·ym
  k3i+1 ← k3i + [5·(x1i - x1z)]·ym
X1 ← stack(x1T, x2T, x3T)
K1 ← stack(k1T, k2T, k3T)
(X1
 K1)

```

Прокоментуємо програму. Вона має дві "голови" - там де у класичних програм було ім'я, стоїть структура з двох елементів. Давайте "спитаємо", чим вони є (після подвійного

імені напишемо "дорівнює") $\begin{pmatrix} X \\ K \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & [3,401] \\ \hline 2 & [3,401] \\ \hline \end{array}$ - це означає, що виходом програми є

два масиви у 3 x 401 елементи кожний. Тепер виведемо окремо X та K:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
X =	1	-1	-1	-1	-0.995	-0.982	-0.959	-0.925	-0.881	-0.828	-0.766
	2	0	0	0.05	0.132	0.231	0.337	0.44	0.533	0.613	0.676
	3	0	0.5	0.82	0.995	1.055	1.027	0.935	0.797	0.631	0.45

$$K =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7
2	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
3	-2.6	-2.6	-2.6	-2.6	-2.6	-2.6	-2.6	-2.6	-2.6	-2.6

Ці два масиви - значення координат вектора стану об'єкта управління x_1, x_2, x_3 та значення параметрів регулятора k_1, k_2, k_3 .

Побудуємо графіки процесу самонастроювання. Можна бачити, що система "в принципі" працездатна... позитивом цього результату є те, що залишається не використаною маса можливостей для вдосконалення системи самонастроювання.

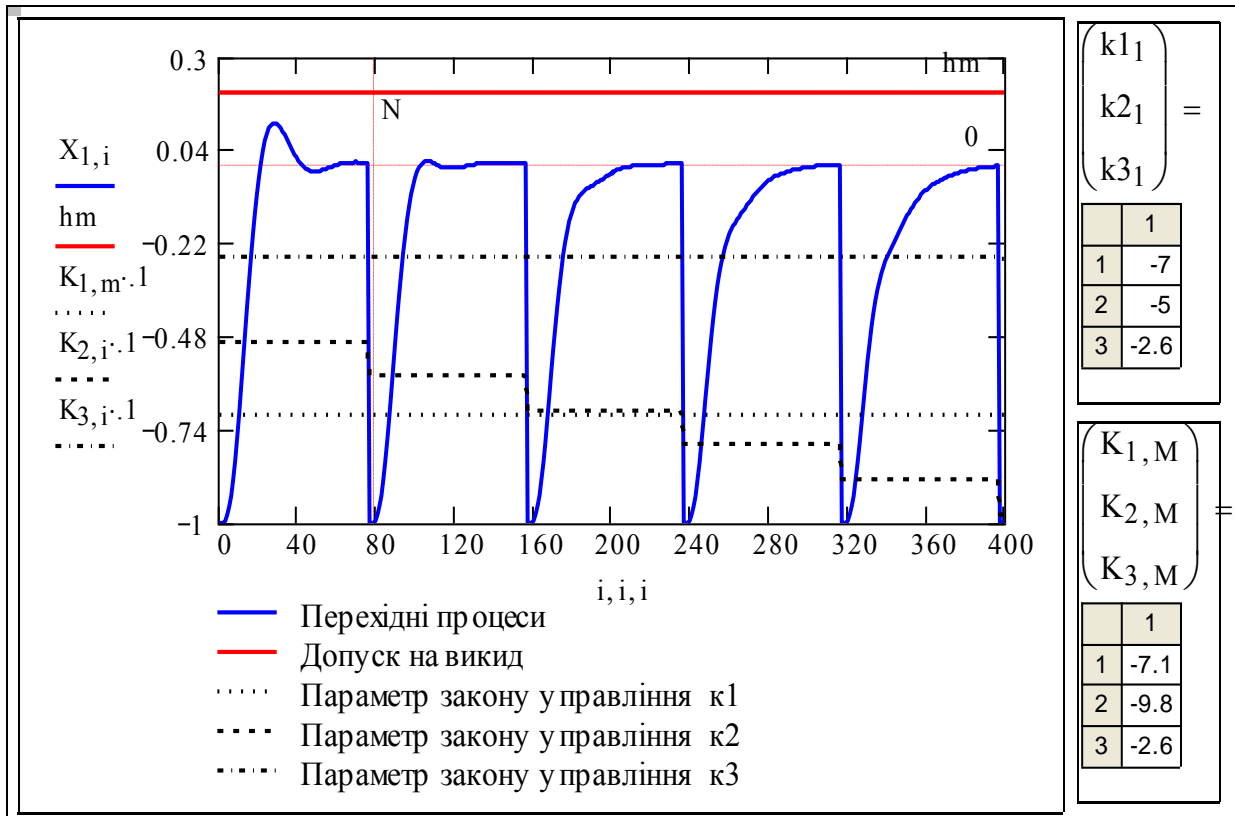


Рис. 3. Приклад процесу самонастроювання регулятора (копія екрану)

Перше, що треба завжди пам'ятати - САУ з контуром самонастроювання - нелінійна. Для неї не працюють критерії стійкості лінійних систем, у неї нема звичних частотних характеристик - вони нестаціонарні та залежать від амплітуди. Загальний шлях верифікації таких систем - це проведення обчислювальних експериментів - на виявлення областей непрацездатності системи з самонастроюванням. Нестійкість системи з контуром самонастроювання може бути трьох типів: 1) основний контур - нестійкий, контур самонастроювання - стійкий (0-1); 2) основний контур - стійкий, контур самонастроювання - нестійкий (1-0); 3) обидва контури є нестійкими (0-0).

На рис. 4 подано приклад з серії випробувань - випадок виникнення нестійкості в основному контурі системи. Цей приклад пояснює, чому **на практиці намагаються по можливості не використовувати "інтелектуальні" регулятори.**

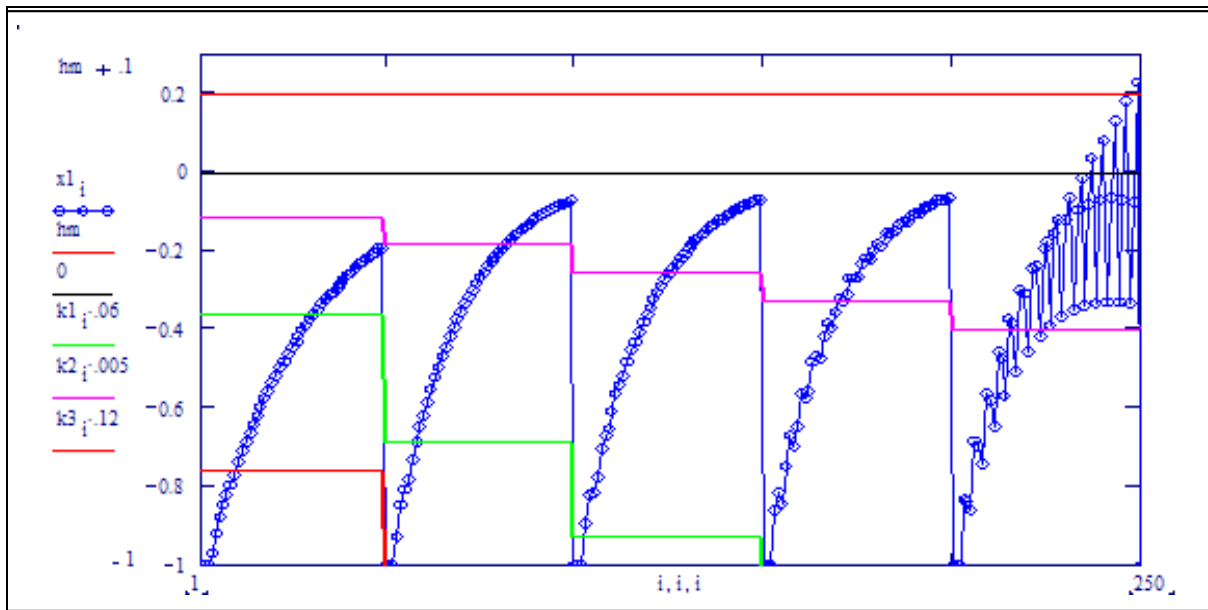


Рис. 4. Приклад виникнення нестійкості в процесі самонастроювання

Працездатних алгоритмів самонастроювання небагато, ще менше їх у підручниках. Поданий вище алгоритм самонастроювання є незадовільним концептуально: ми чекаємо закінчення перехідного процесу і тільки тоді змінюємо параметри регулятора. Таке самонастроювання буде дуже повільним. Далі подано два приклади "швидких" алгоритмів настроювання - з швидкістю перехідного процесу в основному контурі.

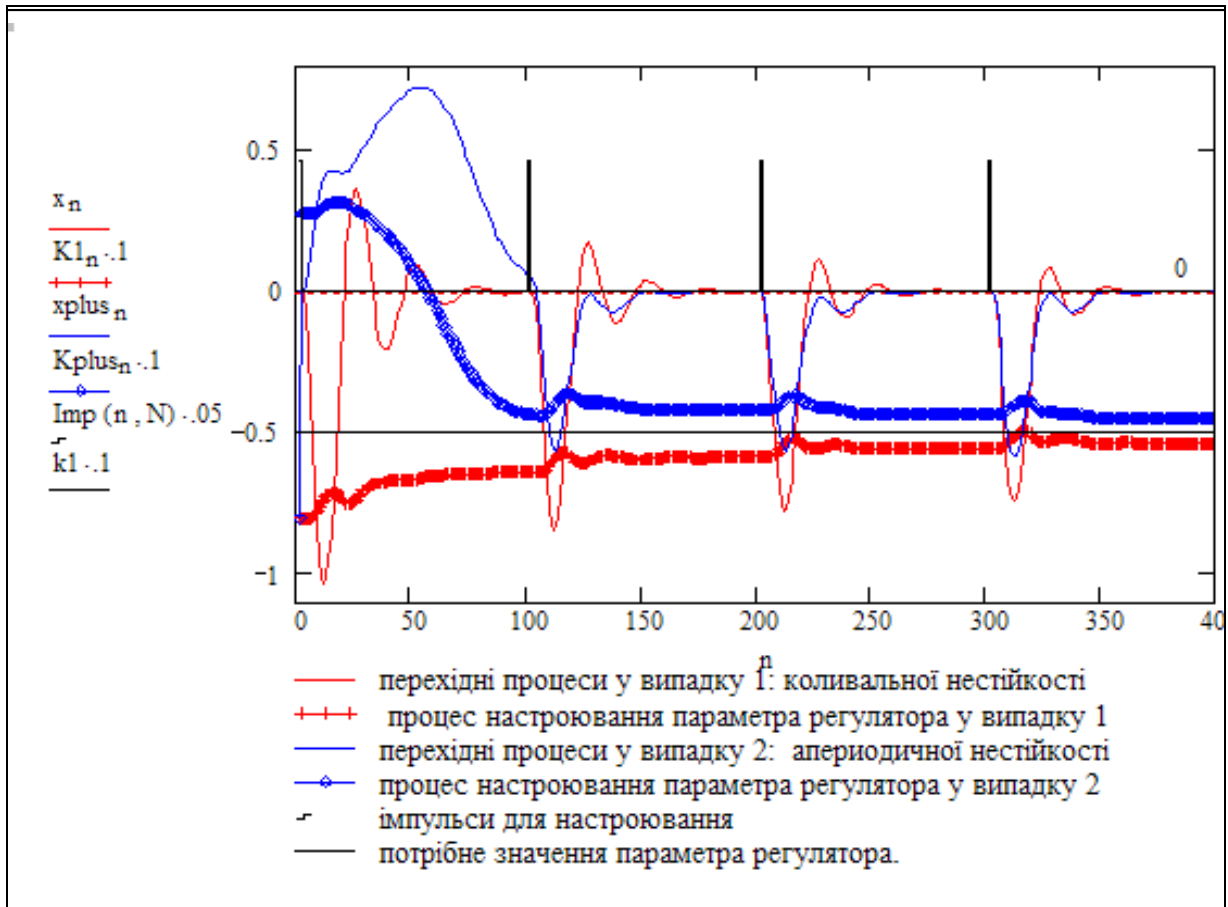


Рис. 5. Процеси в САУ з самонастроюванням по власній частоті

На рис. 5 подані перехідні процеси в САУ з самонастроюванням по власній частоті. Контур самонастроювання працює за дуже простою логікою - якщо частота коливань у перехідному процесі більша норми - параметр регулятора K_1 зменшується, тим швидше, чим більшою є помилка, і - навпаки. Можемо бачити, що навіть, якщо основний контур спочатку є нестійким, система самонастроювання швидко стабілізує його і не допускає великих відхилень від стану рівноваги.

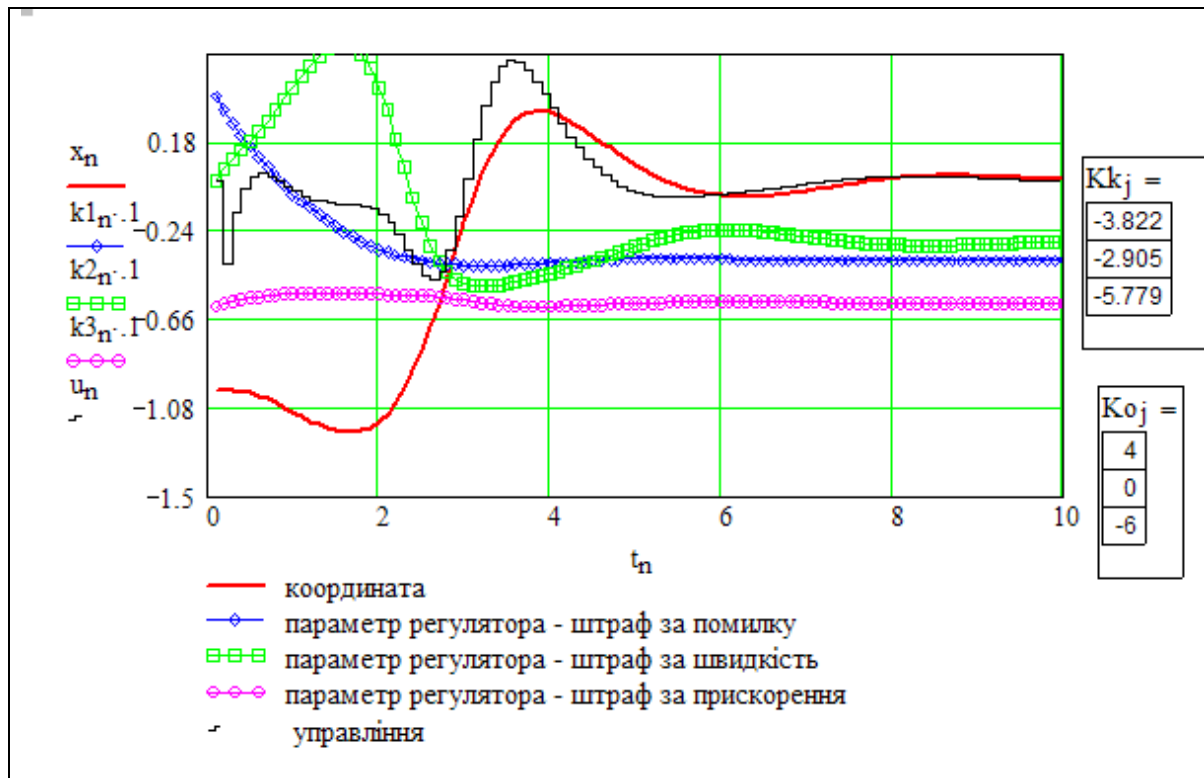


Рис. 6. Процеси в САУ з самонастроюванням на базі правил

На рис. 6 подані перехідні процеси в САУ з самонастроюванням на базі правил. Як можна бачити, система самонастроювання теж встигає зробити основний контур стійким без великих відхилень від стану рівноваги.

Контрольні запитання

1. Назвіть показники якості перехідного процесу.
2. Дайте визначення показника "тривалість перехідного процесу".
3. Дайте визначення показника "викид".
3. Сформулюйте правила настроювання параметрів регулятора за зразком:
"якщо САУ стійка, тривалість ПП більше норми, перерегулювання менше норми, то параметри регулятора слід змінювати так: k_1 - збільшити, k_2 - збільшити, k_3 - не змінювати".
4. Чому система з контуром самонастроювання буде обов'язково нелінійною?

1.5. Знаходження аналітичних розв'язань для лінійних неперервних та імпульсних систем

Ціль даної роботи - набуття твердих навичок у використанні математичного апарату для аналізу і синтезу неперервних та імпульсних динамічних систем.

Математика - найбільш прикладна наука з усіх абстрактних наук, бо прикладається до абсолютно усього. В природі, те що без ужитку, редукується, елімінується. Так і математика 1-2-го курсів встигає вивітритись до 4-го курсу, якщо було, чому вивітритись.

В цьому розділі подані методи розв'язання лінійних диференціальних та різницевих рівнянь, що номінально вивчалися у відповідних розділах вищої математики.

Професійне володіння цими розділами - **необхідна** умова при вивченні ТАК, ТАУ, економічної та екологічної динаміки та ін.

Завдання

- | | |
|---|------|
| 1. Перевірити отримані результати для інших числових даних. | 6 б |
| 2. Модифікувати документ для рівнянь третього порядку. | 29 б |
| 3. Розробити документ для дослідження відповідності між s-коренями дифрівняння та z-коренями еквівалентного різницевого рівняння. | 58 б |
| 4. Відповісти на контрольні питання (по пам'яті). | 7 б |

1. Отримання характеристичного рівняння лінійного дифрівняння

У дифрівняння $\frac{d^2}{dt^2}x(t) + a_1 \cdot \frac{d}{dt}x(t) + a_0 \cdot x(t) = 0$ підставляємо: $s = \frac{d}{dt}x$; $s^2 = \frac{d^2}{dt^2}x$

і отримуємо: $s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0$ – характеристичне рівняння (для даного дифрівняння).

Визначаємо (числовим методом, або в аналітичному вигляді) корені характеристичного рівняння):

$$s_1(a_1, a_0) := \frac{-1}{2} \cdot a_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_0} \quad s_2(a_1, a_0) := \frac{-1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_0}$$

$$s_1(0.7, 0.04) = -0.637 \quad s_2(0.7, 0.04) = -0.063$$

З прадавніх книг відомо, що робити щось добре - вміти робити це багатьма способами. В середовищі пакета корені характеристичного рівняння можна знайти так:

спосіб 1:

$$\text{root}\left[\left(s^2 + a_1 \cdot s + a_0\right), s\right] \rightarrow \left[\frac{-1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot \left(a_1^2 - 4 \cdot a_0\right)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{-1}{2} \cdot a_1 - \frac{1}{2} \cdot \left(a_1^2 - 4 \cdot a_0\right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

спосіб 2:

$$\text{Giver } s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0; \text{ Find}(s) \rightarrow \left[\frac{-1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot \left(a_1^2 - 4 \cdot a_0\right)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{-1}{2} \cdot a_1 - \frac{1}{2} \cdot \left(a_1^2 - 4 \cdot a_0\right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Необхідні і достатні умови стійкості: для лінійної неперервної системи мають вигляд (*дійсні частини s-коренів менші нуля*)

$$\operatorname{Re}(s_1(a_1, a_0)) < 0; \quad \operatorname{Re}(s_2(a_1, a_0)) < 0.$$

Дивимся на вирази для коренів і бачимо: для виконання цих умов у випадку диференціального рівняння 2-го порядку необхідно і достатньо, щоб: $a_1 > 0; a_0 > 0$.

Перевіримо це експериментально: $\operatorname{Re}(s_1(3, 2)) < 0 = 1$; $\operatorname{Re}(s_2(1, 0)) < 0 = 0$
(ці два незвичних для "чистих" математиків вирази означають: перше логічне висловлювання є істинним, а друге - ні).

2. Отримання еквівалентного різницевого рівняння

(наближення 1-го порядку)

Замінюємо похідні (назвемо їх p_0 і p_1) кінцевими різницями (**Ctrl+c** потрібний вираз, а потім **Substitute** його через пункт у меню **Symbolic**):

$$p_0 + a_1 \cdot p_1 + a_0 \cdot p_0 ;$$

$$p_0 = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{x(n \cdot T) - 2 \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T]}{T^2}$$

$$p_1 = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]}{T} \quad p_0 = x(n \cdot T)$$

$$\frac{[x(n \cdot T) - 2 \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T]]}{T^2} + a_1 \cdot \frac{[x(n \cdot T) - x[(n-1) \cdot T]]}{T} + a_0 \cdot x(n \cdot T)$$

$$x(n \cdot T) - 2 \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T] + a_1 \cdot T \cdot x(n \cdot T) - a_1 \cdot T \cdot x[(n-1) \cdot T] + a_0 \cdot x(n \cdot T) \cdot T^2 = 0$$

Виконуємо алгебраїчні перетворення (групуємо по тактах - n , $(n-1)$, $(n-2)$)

$$(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2) \cdot x(n \cdot T) + (-a_1 \cdot T - 2) \cdot x[(n-1) \cdot T] + x[(n-2) \cdot T].$$

Виконуємо z-перетворення, множимо праву і ліву частини на z^2 , щоб позбавитись від'ємних степеней.

$$\left[(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2) \cdot X(z) + (-a_1 \cdot T - 2) \cdot X(z) \cdot z^{-1} + X(z) \cdot z^{-2} \right] \cdot z^2 = 0 \cdot z^2;$$

$$\left[(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2) \cdot z^2 + (-a_1 \cdot T - 2) \cdot z + 1 \right] \cdot X(z) = 0;$$

$$(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2) \cdot z^2 + (-a_1 \cdot T - 2) \cdot z + 1 = 0.$$

Нарешті отримуємо Z-характеристичне рівняння

$$z^2 + \frac{-a_1 \cdot T - 2}{(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2)} \cdot z + \frac{1}{(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2)} = 0, \text{ або: } z^2 + A_1 \cdot z + A_0 = 0,$$

$$\text{де } A_1(T, a_1, a_0) := \frac{-a_1 \cdot T - 2}{(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2)}; \quad A_0(T, a_1, a_0) := \frac{1}{(a_1 \cdot T + 1 + a_0 \cdot T^2)}.$$

Записуємо вирази для коренів характеристичного рівняння (знайдені за допомогою символьного процесора):

$$Z1(T, a1, a0) := \frac{-A1(T, a1, a0) + \sqrt{A1(T, a1, a0)^2 - 4 \cdot A0(T, a1, a0)}}{2};$$

$$Z2(T, a1, a0) := \frac{-A1(T, a1, a0) - \sqrt{A1(T, a1, a0)^2 - 4 \cdot A0(T, a1, a0)}}{2}.$$

Задаємо кілька значень кроку квантування: $T_e := 0, 1..6$ і виводимо відповідні значення коренів (це копія екрану!):

$Z1(T_e, 0.7, 0.04)$	$Z2(T_e, 0.7, 0.04)$	$Z1(T_e, 0.2, 0.3)$	$Z2(T_e, 0.2, 0.3)$
1	1	1	1
0.941	0.611	0.733+0.359i	0.733-0.359i
0.888	0.44	0.462+0.414i	0.462-0.414i
0.842	0.343	0.302+0.376i	0.302-0.376i
0.799	0.282	0.212+0.326i	0.212-0.326i
0.761	0.239	0.158+0.283i	0.158-0.283i
0.726	0.207	0.123+0.249i	0.123-0.249i

Необхідні і достатні умови стійкості для лінійної дискретної системи мають вигляд (*модулі Z-коренів повинні бути менші одиниці*)

$$|Z1(T, a1, a0)| < 1; \quad |Z2(T, a1, a0)| < 1.$$

Перевіримо це експериментально:

$$|Z1(0.1, 0.1, 1)| = 0.99; \quad |Z2(0.5, -0.1, 1)| = 0.913.$$

3. Отримання аналітичних розв'язань диференціального та різницевого рівнянь

Знайдемо точні розв'язання диференціального та відповідного різницевого рівняння і побудуємо перехідні процеси.

Частина I. Загальновідомо, що загальне розв'язання однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$x(t) = C1 \cdot e^{s1(a1, a0) \cdot t} + C2 \cdot e^{s2(a1, a0) \cdot t}, \quad (1)$$

а похідна від нього буде:

$$\frac{d}{dt} x(t) = C1 \cdot s1(a1, a0) \cdot e^{s1(a1, a0) \cdot t} + C2 \cdot s2(a1, a0) \cdot e^{s2(a1, a0) \cdot t}. \quad (2)$$

Задаємо граничні умови: $x(0) = -1$; $\frac{d}{dt} x(0) = 0$. ORIGIN := 1

Підставляємо у (1) і (2): $t = 0$, отримуємо два рівняння для визначення постійних $C1$ і $C2$.

$$x(0) = C1 + C2 = -1; \quad \frac{d}{dt} x(t) = C1 \cdot s1(a1, a0) + C2 \cdot s2(a1, a0) = 0.$$

Використовуємо розв'язуючий блок для знаходження C1, C2. Задаємо початкові значення шуканих змінних (вони можуть бути і комплексними): C1 := -1 + i; C2 := 1 - i.

Given

$$C1 + C2 = -1$$

$$C1 \cdot \left(\frac{-1}{2} \cdot a1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a1^2 - 4 \cdot a0} \right) + C2 \cdot \left(\frac{-1}{2} \cdot a1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a1^2 - 4 \cdot a0} \right) = 0$$

Розв'язання шукаємо як функцію параметрів a1 та a0:

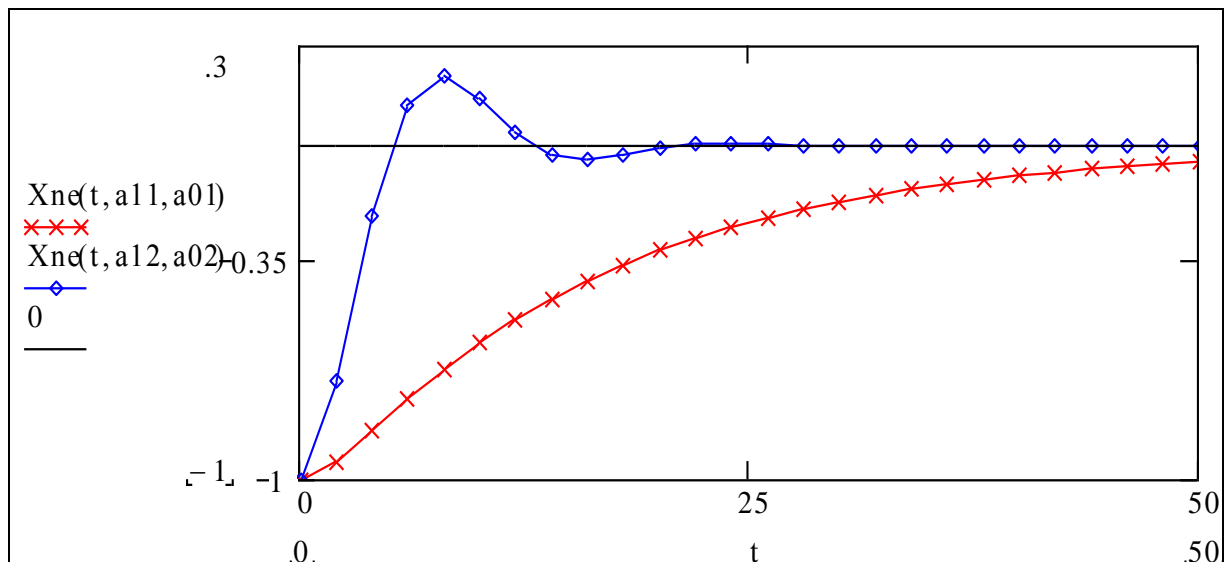
$$Cv(a1, a0) := \text{Find}(C1, C2)$$

$$Oc1(a1, a0) := Cv(a1, a0)_1$$

$$Oc2(a1, a0) := Cv(a1, a0)_2$$

Тепер запишемо остаточний вираз для точного розв'язання і будемо графіки

$$Xn(t, a1, a0) := Oc1(a1, a0) \cdot e^{s1(a1, a0) \cdot t} + Oc2(a1, a0) \cdot e^{s2(a1, a0) \cdot t}; \quad t := 0, 2..50.$$



На цьому графіку побудовано два перехідних процеси для різних значень параметрів лінійної неперервної динамічної системи, а саме:

$$a11 \equiv 0.7; \quad a01 \equiv 0.04; \quad \text{та} \quad a12 \equiv 0.4; \quad a02 \equiv 0.2.$$

Завдання для самостійного виконання. Приведіть вираз для перехідного процесу до такого вигляду $X(t) = \text{Amp} \cdot \sin(\omega c \cdot t + \phi)$. Підказка: згадайте формулу Ейлера для синуса та ін.

Частина 2. А тепер теж саме робимо для імпульсної (різницевої) системи. Майже загальновідомо, що загальне розв'язання однорідного різницевого рівняння

$$z^2 + A1(T, a1, a0) \cdot z + A0(T, a1, a0) = 0$$

має вигляд (див. довідник з математики):

$$X(k, T, a1, a0) = c1 \cdot Z1(T, a1, a0)^k + c2 \cdot Z2(T, a1, a0)^k.$$

Для визначення постійних c1 та c2 враховуємо граничні умови $X(0) = -1; X(1) = -1$.

Маємо два рівняння з двома невідомими

$$X(0, T, a1, a0) = c1 \cdot Z1(T, a1, a0)^0 + c2 \cdot Z2(T, a1, a0)^0 = c1 + c2 = -1;$$

$$X(1, T, a1, a0) = c1 \cdot Z1(T, a1, a0)^T + c2 \cdot Z2(T, a1, a0)^T = -1.$$

Розв'язуємо їх вбудованим числовим методом. Задаємо початкові значення

$$c1 := -1 + i ; \quad c2 := -1 - i.$$

<p>Given</p> $c1 + c2 = -1$ $c1 \cdot Z1(T, a1, a0)^T + c2 \cdot Z2(T, a1, a0)^T = -1$ $cv(T, a1, a0) := \text{Find}(c1, c2)$	}
---	---

$$cd1(T, a1, a0) := cv(T, a1, a0)_1 \qquad cd2(T, a1, a0) := cv(T, a1, a0)_2$$

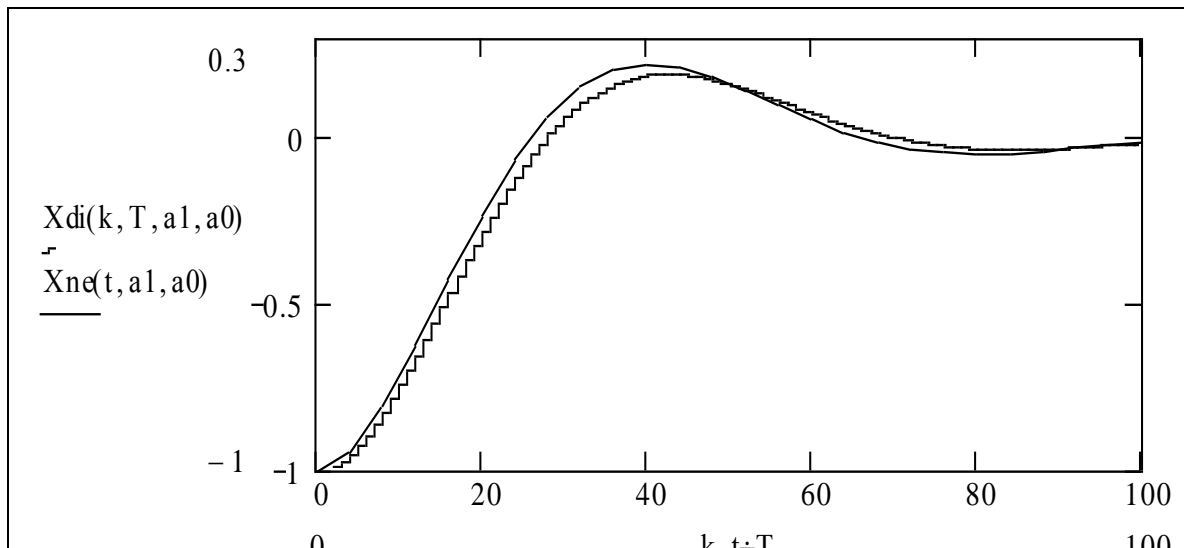
$$cv(0.1, 0.7, 0.4) = \begin{pmatrix} -0.5 + 0.353i \\ -0.5 - 0.353i \end{pmatrix}$$

Нарешті отримуємо аналітичне розв'язання ЕРР (Еквівалентного Різницевого Рівняння)

$$Xdi(k, T, a1, a0) := cd1(T, a1, a0) \cdot Z1(T, a1, a0)^k + cd2(T, a1, a0) \cdot Z2(T, a1, a0)^k$$

Порівнюємо розв'язання для різницевого і диференціального рівняння

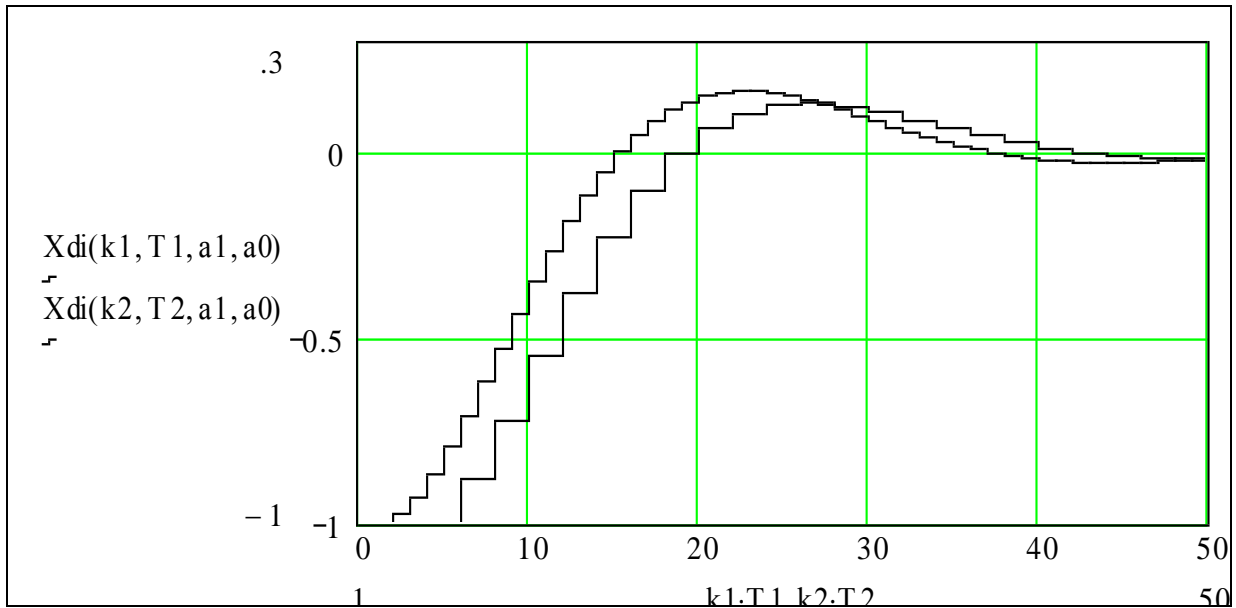
$$Tm := 50; \quad T := 0.5; \quad k := 1..Tm \div T; \quad a1 := 0.15; \quad a0 := 0.03.$$



Бачимо певне запізнення дискретизованого перехідного процесу відносно неперервного. Неважко здогадатись, що це **запізнення на два кроки дискретизації**. Якщо ви працюєте з електронною версією цієї книги, перевірте це експериментально: введіть значення $T = 0.2$; $T = 1.0$. Доведіть це, виходячи з виразу для різницевого рівняння.

Порівняємо дискретні процеси при різних кроках обчислень. Задаємо параметри:

$$T1 := 2; \quad T2 := 1; \quad k1 := 1..Tm \div T1; \quad k2 := 1..Tm \div T2.$$



Нагадаємо, що матеріал цього розділу належить до обов'язкового мінімуму знань спеціаліста будь-якої спеціальності - соціолога, економіста, електроніка, та ін. Дійсно усі вони звичайно мають справу з дискретними і неперервними процесами - соціальними, економічними, електромагнітними, тепловими. Але це тільки мінімум, він не замінить фундаментальну математичну літературу і літературу з спеціальності. Після вивчення цього розділу ви зможете класифікувати цю літературу. Наприклад, спробуйте розв'язати неперервне чи дискретне рівняння динаміки на базі таких досить поширених книг, результати будуть такими:

Сигорский В.П. Математический аппарат инженера (є все крім потрібного).

Коршунов. Ю.М. Математические основы кибернетики (окремі уривки в окремих розділах).

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров (є все потрібне).

Вагапов В.Б. Основы теории радиоэлектронных автоматических систем (є все потрібне в систематизованому вигляді) [8].

Изерман Р. Цифровые системы управления (є все потрібне) [11].

Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления (є все потрібне) [12].

Контрольні запитання

1. Запишіть розв'язання звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння 3-го степеня через корені характеристичного рівняння.
2. Запишіть розв'язання лінійного однорідного різницевого рівняння через корені його характеристичного рівняння.
3. Як отримуються характеристичні рівняння для диференціального і різницевого рівнянь.
4. Необхідні і достатні умови стійкості для неперервних та імпульсних ЛДС.
6. Що таке "еквівалентне різницеве рівняння"?
7. Що і як треба змінювати в ЕРР для підвищення еквівалентності (точності)?
8. Прокоментуйте фразу: "корені повинні бути лівими".
9. Прокоментуйте фразу: "корені повинні лежати в середині одиничного кола".

2

Дослідження частотних характеристик САУ

У цьому розділі розглядаються:

- ✓ Дослідження частотних характеристик. Одержання та аналіз частотних характеристик. Дослідження реакції САУ на заданий сигнал.
- ✓ Дослідження частотних характеристик. Ідентифікація САУ за логарифмічними частотними характеристиками.

Після вивчення цього розділу ви **зможете:**

1. Отримувати вирази для частотних характеристик по передаточних функціях.
2. Переходити від диференціальних рівнянь до передаточних функцій і частотних характеристик і навпаки.
3. Будувати амплітудно-фазові частотні характеристики (годографи).
4. Будувати точні і приблизні (асимптотичні) логарифмічні амплітудні частотні характеристики.
5. Знаходити характерні точки частотних характеристик – власні частоти, частоти спряження асимптот.
6. Визначати запаси стійкості системи по амплітуді і фазі.
7. Виконувати ідентифікацію передаточної функції за логарифмічною амплітудною частотною характеристикою.
8. Мати уяву про отримання частотної характеристики за реакцією динамічної системи на довільний вхідний сигнал.

9. Дати визначення термінам:

1. Амплітудна частотна характеристика (АЧХ).	5. Фазова частотна характеристика (ФЧХ).
2. Логарифмічна амплітудна частотна характеристика (ЛАЧХ).	6. Власна частота, частота спряження.
3. Смуга пропускання.	7. Частота зрізу.
4. Запас стійкості по фазі.	8. Запас стійкості по амплітуді.



2.1. Дослідження частотних характеристик. Одержання та аналіз частотних характеристик

Вступ

Ціль даної роботи - набуття навичок у розробці і реалізації в програмному середовищі математичного пакета, орієнтованих на реалізацію у мікроконтролерах програм обчислення частотних характеристик за різними вхідними даними і різними методами.

В попередній роботі ми оцінювали якість лінійної стаціонарної САУ за її **часовими характеристиками** - перехідними процесами. Існує альтернатива, суть якої в тому, що якість лінійної стаціонарної САУ можна оцінювати за усталеною реакцією на гармонічний сигнал - **частотними характеристиками**.

Між частотними і часовими характеристиками є взаємооднозначні зв'язки. У частотних і часових методів аналізу і синтезу САУ є свої переваги і вади і тому вони використовуються в теорії і практиці, як правило, комплексно. Можна виділити такі альтернативи отримання частотних характеристик (ЧХ) лінійної стаціонарної динамічної системи:

1. Експериментально, вимірюючи **амплітуду** $A(\omega)$ і **фазу** $F(\omega)$ усталеного виходу: $y(t)$, $t \rightarrow \infty$ при гармонічному вході: $x(t) = \sin(\omega \cdot t)$;
2. Математичною обробкою (**перетворення Фур'є**) виходу САУ при будь-якому вхідному: $W(j\omega) = F\{y(t)\}/F\{x(t)\}$, де $W(j\omega)$ - "частотна передаточна функція", $F\{.\}$ - перетворення Фур'є;
3. Математичною обробкою (**спектральний аналіз**) виходу САУ при довільному, або випадковому (шум) вхідному сигналі;
4. По передаточній функції: $A(\omega) = \text{mod}(W(j\omega))$, $F(\omega) = \text{arg}(W(j\omega))$, для чого, природно, треба мати аналітичний вираз для передаточної функції.

Частотні характеристики лінійних систем не залежать від амплітуди вхідного сигналу. Для нелінійних систем ЧХ залежатимуть і від амплітуди, а для нестационарних систем - від часу.

Завдання

Для свого варіанта передаточної функції $W(s)$

1. **Отримати** вручну аналітичні вирази для $A(\omega)$, $F(\omega)$, $M(\omega) = \text{Re}(W(j\omega))$, $N(\omega) = \text{Im}(W(j\omega))$.
2. **Побудувати графіки** $A(\omega)$, $F(\omega)$, $M(\omega)$, $N(\omega)$, $N(M)$ - АФЧХ та логарифмічні характеристики за аналітичними виразами та з допомогою вбудованих функцій Mathcad - $|s|$, $\text{arg}(s)$, $\text{Im}(s)$, $\text{Re}(s)$, та інших.
3. Дослідити вплив варіацій вибраних (≥ 2) параметрів передаточної функції.

Варіанти передаточних функцій

$$W1(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1} \quad \text{1} \quad \text{2}$$

$$W2(s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1}$$

$$W3(s) = \frac{T2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \lambda \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1} \quad \begin{matrix} \text{3} \\ \text{4} \\ \text{5} \\ \text{6} \end{matrix}$$

$$W4(s) = \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s + 1)}$$

$$W5(s) = \frac{T2^2 \cdot s^2 + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1} \quad W6(s) = \frac{T2^2 \cdot s^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot (T3^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T3 \cdot \lambda \cdot s + 1)}$$

$$W7(s) = \frac{T2 \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1} \quad \begin{matrix} \text{7} \\ \text{8} \\ \text{9} \\ \text{10} \end{matrix}$$

$$W8(s) = \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1}$$

$$W9(s) = \frac{T2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \lambda \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1}$$

$$W10(s) = \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s - 1)}$$

Зразок виконання

1. Отримання частотних характеристик за передаточної функції

1.1 Виконаємо все спочатку при мінімальних витратах інтелекту (і часу) – використаємо вбудовані функції пакету. Записуємо вираз для уявної одиниці j (є вбудована - i), задаємо діапазон частот і значення параметрів передаточної функції.

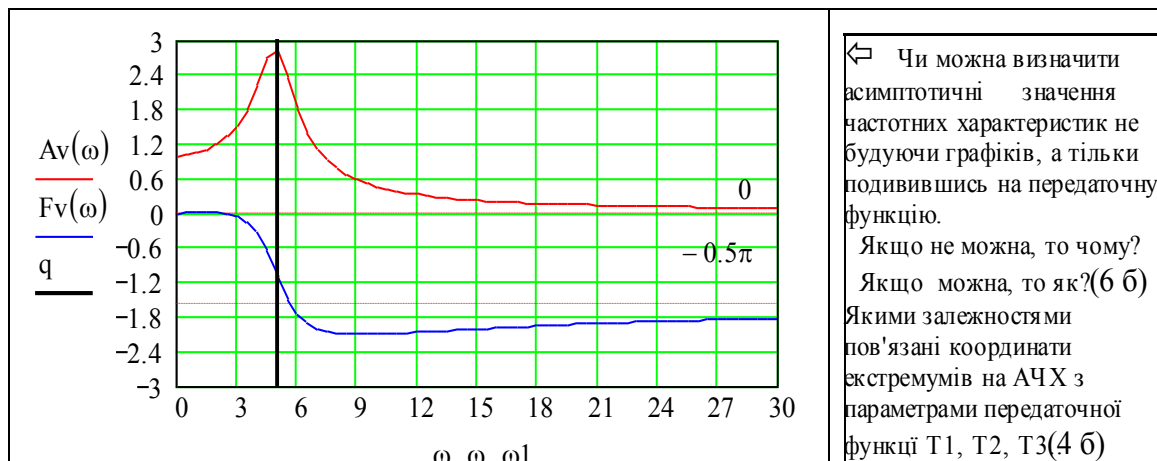
$$j := \sqrt{-1} \quad \omega := 0, 0.5 .. 40 \quad T1 := .2 \quad T2 := .1 \quad \lambda := .2 \quad T3 := .07$$

Набираємо або копіюємо звідти передаточну функцію і записуємо, використовуючи вбудовані функції пакету, вирази для амплітудної, фазової, дійсної та уявної ЧХ

$$W1(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1} \quad \begin{matrix} Av(\omega) := |W1(j \cdot \omega)| & Fv(\omega) := \arg(W1(j \cdot \omega)) \\ \text{Дійсна}(\omega) := \text{Re}(W1(j \cdot \omega)) & \text{Уявна}(\omega) := \text{Im}(W1(j \cdot \omega)) \end{matrix}$$

2. Побудова графіків частотних характеристик

Будуємо графіки АЧХ і ФЧХ, будуємо їх асимптоти та координати характерних точок - максимуми, точки перегину. $q := -10, -9 .. 10$; $\omega1 := 1 \div T1$ (варіант знака "розділити").

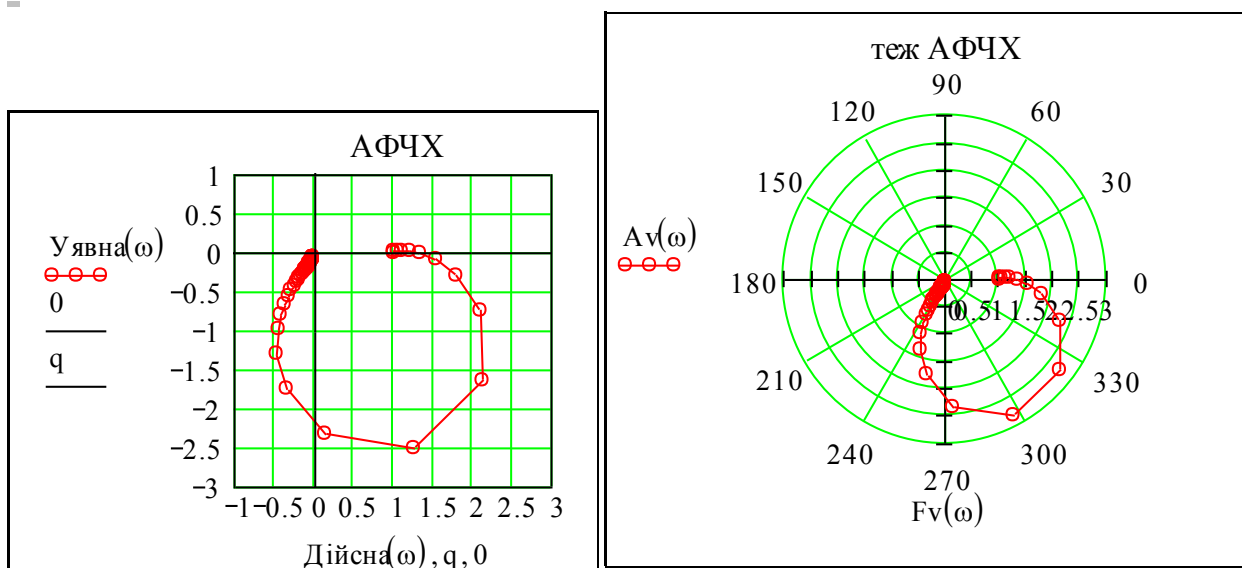


Різні види ЧХ - $A(\omega)$, $F(\omega)$, $M(\omega)$, $N(\omega)$ пов'язані між собою певними залежностями. Запишемо їх і перевіримо, чи дійсно воно так:

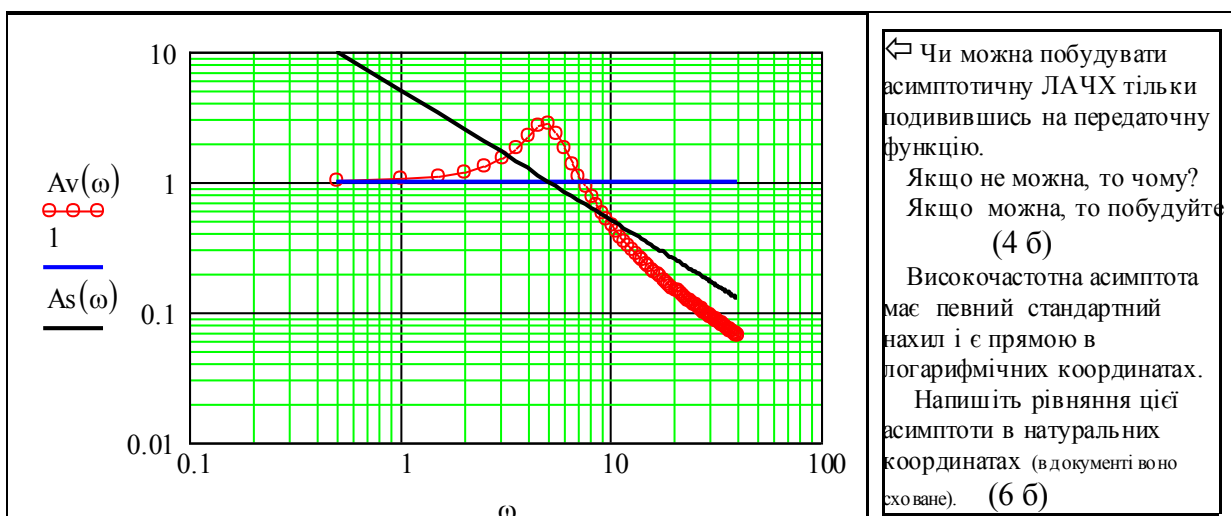
$$A_m(\omega) := \sqrt{\operatorname{Re}(W1(j\cdot\omega))^2 + \operatorname{Im}(W1(j\cdot\omega))^2} \quad F_m(\omega) := \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(W1(j\cdot\omega))}{\operatorname{Re}(W1(j\cdot\omega))}\right)$$

$$\begin{aligned} A_m(0) = A_v(0) = 1 & \quad A_m(7.40) - A_v(7.40) = 0 & \quad F_m(0) = F_v(0) = 1 \\ A_m(9) = A_v(9) = 1 & \quad A_m(13) - A_v(13) = 0 & \quad F_m(10) - F_v(10) = 3.142 \\ & & \quad F_m(10) - \pi = F_v(10) = 1 \end{aligned}$$

Будуємо амплітудно-фазову частотну характеристику використовуючи альтернативні засоби пакета графіки в декартових і полярних координатах.



Будуємо ЛАЧХ (тобто логарифмічну амплітудно-частотну характеристику) методом форматування графіка (вибираємо логарифмічні масштаби по обох осях). ЛАЧХ має дві асимптоти, які і побудовані на графіку.



3. Дослідження частотних характеристик при варіації заданого параметра

Спочатку, в навчальних цілях, знайдіть вручну аналітичні вирази для ЧХ (для зміцнення знань та на випадок відсутності математичного пакета).

Увага! Далі введено спеціальні змінні без значень для виконання символьних обчислень, наприклад $Tc2$ замість $T2$, λc замість λ , w замість ω . Підставляємо $s := i \cdot w$ у вираз:

$$W1c(s) := \frac{Tc2 \cdot s + 1}{Tc1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot Tc1 \cdot \lambda c \cdot s + 1}$$

і отримуємо:

$$W1c(i \cdot w) \rightarrow \frac{(i \cdot Tc2 \cdot w + 1)}{(-Tc1^2 \cdot w^2 + 2 \cdot i \cdot Tc1 \cdot \lambda c \cdot w + 1)}$$

Модуль частотної передаточної функції (АФЧХ) - це амплітудна частотна характеристика (АЧХ):

$$Aa(w) := |W1c(i \cdot w)|$$

Розкриваємо її, враховуємо, що $(i \cdot w)^2 \rightarrow -w^2$; $(i \cdot w)^3 \rightarrow -i \cdot w^3$; $(i \cdot w)^4 \rightarrow w^4$.

$$Aa(w) \begin{cases} \text{expand, w} \\ \text{simplify} \\ \text{collect, w} \\ \text{float, 2} \end{cases} \rightarrow \left[\frac{(w^2 \cdot Tc2^2 + 1)}{(Tc1^4 \cdot w^4 - 2 \cdot Tc1^2 \cdot w^2 + 1 + 4 \cdot Tc1^2 \cdot \lambda c^2 \cdot w^2)} \right]^{.50}$$

Відомо, що модуль частки комплексних чисел дорівнює частці модулів. Визначимо АЧХ альтернативним способом. Отримуємо теж саме, але трохи в іншому виді.

$$\frac{|Tc2 \cdot i \cdot wc + 1|}{|Tc1^2 \cdot (i \cdot w)^2 + 2 \cdot Tc1 \cdot \lambda c \cdot i \cdot wc + 1|} \rightarrow \frac{(1 + Tc2^2 \cdot wc^2)^{\frac{1}{2}}}{(Tc1^4 \cdot w^4 - 2 \cdot Tc1^2 \cdot w^2 + 1 + 4 \cdot Tc1^2 \cdot \lambda c^2 \cdot wc^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Повертаємось до початкових змінних і записуємо АЧХ у звичній формі

$$Aa(\omega) := \frac{\sqrt{T2^2 \cdot \omega^2 + 1}}{\sqrt{T1^4 \cdot \omega^4 - 2 \cdot T1^2 \cdot \omega^2 + 1 + 4 \cdot T1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \omega^2}}$$

Аналогічно отримуємо вираз для ФЧХ

$$Fa(\omega) = \arg \left[\frac{(i \cdot T2 \cdot \omega + 1)}{(-T1^2 \cdot \omega^2 + 2i \cdot \lambda \cdot T1 \cdot \omega + 1)} \right] = \text{atan} \left(\frac{T2 \cdot \omega}{1} \right) - \text{atan} \left[\frac{(2i \cdot \lambda \cdot T1 \cdot \omega)}{(1 - T1^2 \cdot \omega^2)} \right]$$

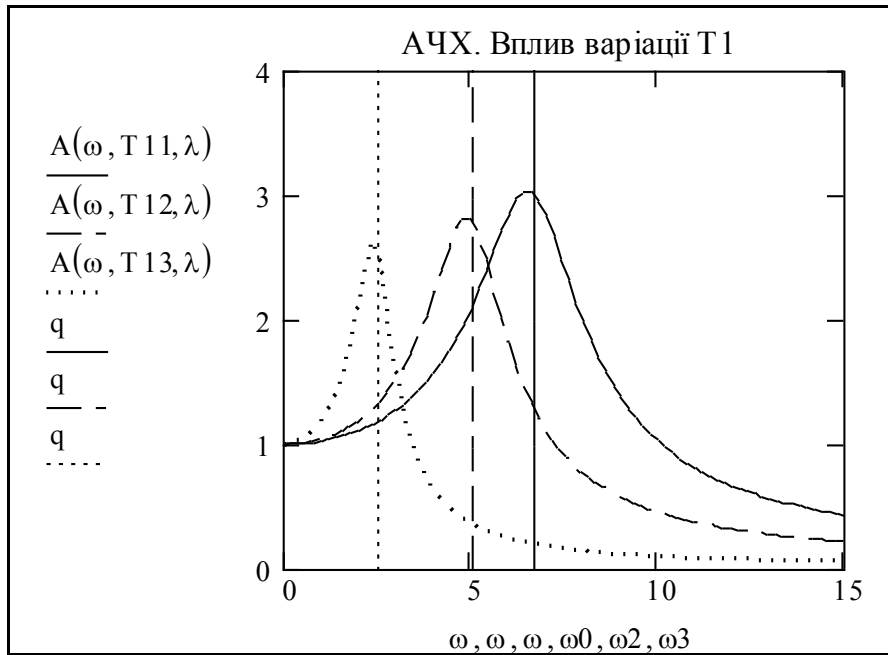
Зауваження. Використання символьного процесора - не для нервових: треба враховувати такі особливості роботи символьного процесора: 1) підставляти саме "штатну" уявну одиницю i а не $\sqrt{-1}$; 2) підставляти w замість ω , $Tc2$ замість $T2$ та ін.

Запишемо робочі вирази для АЧХ і ФЧХ як функції користувача від параметрів, вплив яких досліджуємо.

$$A(\omega, T1, \lambda) := \sqrt{\frac{(1 + \omega^2 \cdot T2^2)}{(T1^4 \cdot \omega^4 - 2 \cdot T1^2 \cdot \omega^2 + 1 + 4 \cdot T1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \omega^2)}}$$

$$F(\omega, T1, \lambda) := \arg\left[\frac{(i \cdot T2 \cdot \omega + 1)}{(-T1^2 \cdot \omega^2 + 2i \cdot \lambda \cdot T1 \cdot \omega + 1)}\right]$$

$\omega := 0, 0.2..20$



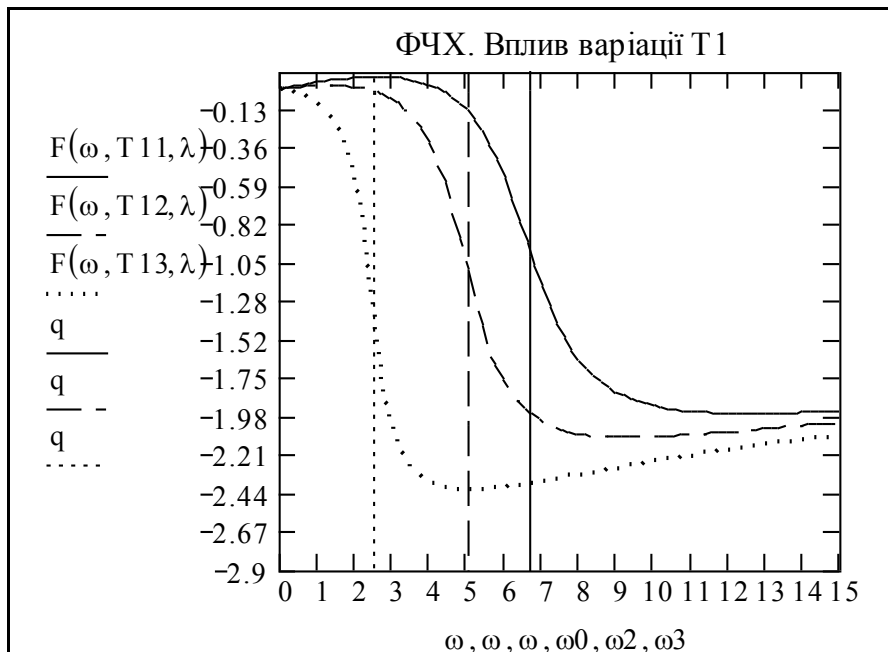
Змінюючи значення T11, T12, T13, можемо тут же бачити відповідну зміну АЧХ та ФЧХ.

Неважко зробити це для дослідження впливу T2 та λ .

T11 \equiv .15

T12 \equiv .20

T13 \equiv .40

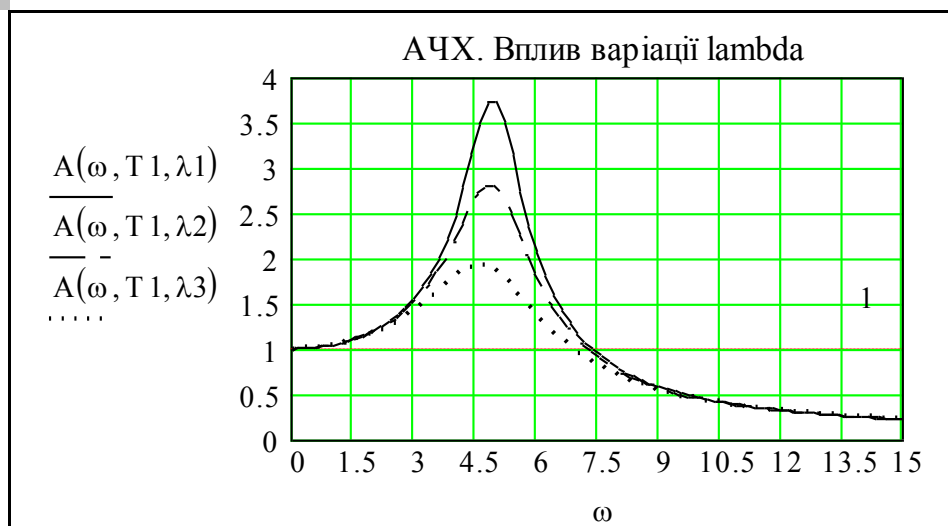


$\omega_0 \equiv \frac{1}{T11} \quad \omega_0 = 6.67$

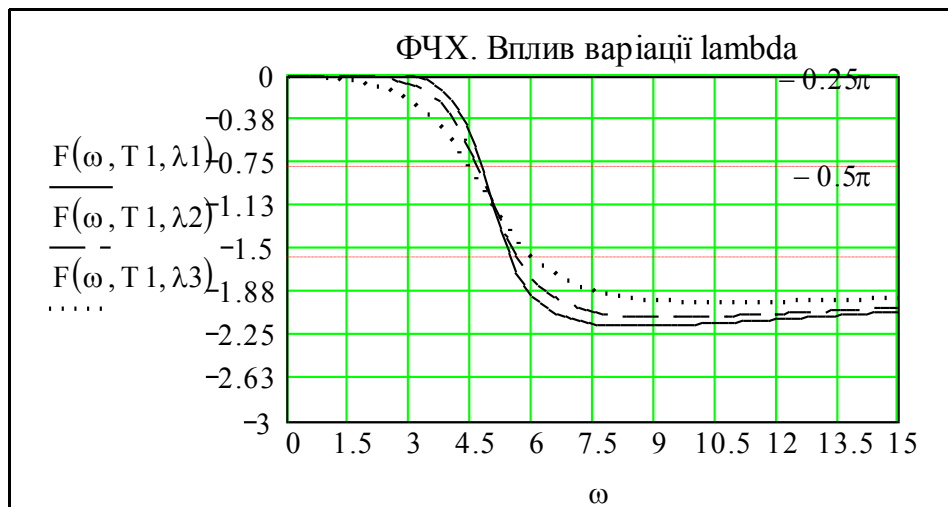
$\omega_2 \equiv \frac{1}{T12} \quad \omega_2 = 5$

$\omega_3 \equiv \frac{1}{T13} \quad \omega_3 = 2.5$

Аналогічно досліджуємо вплив варіації параметра λ . Ці три характеристики звичайно мають таку інтерпретацію: "плюс-характеристика" - при додатних можливих відхиленнях параметрів, "мінус-характеристика" - при від'ємних відхиленнях і номінальна характеристика.



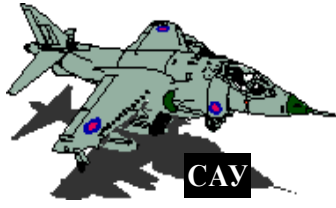
$\lambda = 0.2$
 $\lambda_1 \equiv .15$
 $\lambda_2 \equiv .20$
 $\lambda_3 \equiv .30$



Працювали: Верба В., Грушка В., Вишнячок Г. 01.02.33.

Контрольні запитання

1. Способи отримання ЧХ.
2. Зв'язок між АЧХ, ФЧХ, $M(\omega)$, $N(\omega)$.
3. Що таке "власні частоти"?
4. Як будуються асимптотичні ЛАЧХ?
5. Чи можна за ЛАЧХ ідентифікувати передаточну функцію ЛДС?
6. Чому дорівнює натуральний нахил характеристики 20дБ/декаду?
7. Що таке смуга пропускання?
8. Чи можна за часовою характеристикою визначити частотну і навпаки?
9. Як за реакцією на довільний сигнал визначити частотні характеристики?
10. Як за частотними характеристиками побудувати перехідний процес?
11. Як за частотними характеристиками побудувати реакцію на довільний сигнал?
12. Як за частотними характеристиками отримати передаточну функцію?



2.2. Дослідження частотних характеристик. Ідентифікація САУ за логарифмічними частотними характеристиками

Вступ

Ціль даної роботи - набуття навичок у розробці і реалізації у програмному середовищі математичного пакета програм дослідження логарифмічних частотних характеристик (ЛЧХ), вивчення властивостей цих характеристик і розробки орієнтованих на реалізацію у мікроконтролерах методів ідентифікації передаточної функції об'єкта управління.

Особливість логарифмічних амплітудно-частотних характеристик в тому, що порядок і параметри передаточної функції можна *безпосередньо побачити* на цій характеристиці - як асимптоти, точки перетину асимптот, нахили асимптот.

ЛЧХ стали дуже популярними в епоху логарифмічних лінійок, тому що дозволяли будувати ЛЧХ за передаточною функцією і навпаки взагалі без обчислень. В епоху тотальної комп'ютеризації ЛАЧХ зберегли своє значення (*в 1940-1960 роках логарифмічна лінійка була символом професії інженера. Ось тепер все повертається з hand-helded комп'ютерами і "продуктовими лінійками"*). На базі ЛЧХ розроблені широко вживані методи аналізу і синтезу динамічних систем. Але, є декілька але:

- методи, що базуються на ЛЧХ, - приблизні, правила, за якими робляться висновки - нечіткі (*наприклад, "САУ має задовільний перехідний процес, якщо на частоті зрізу характеристика має приблизно лінійну ділянку довжиною $(4-10)*\omega$ і нахил -20дБ/дек "*), а якщо їх (методи і правила) зробити точними, вони втрачають свою ефективність;

- людина легко розпізнає на логарифмічних амплітудних характеристиках (ЛАЧХ) асимптотичні ділянки і точки стику асимптот, без ускладнень інтерпретує екстремуми, але побудувати машинні програми для автоматичної ідентифікації дуже важко (*майже всім відомо, що напрямок "штучний інтелект" існує завдяки закону психофізики: "те, що легко виконує людина, важко виконати комп'ютеру і навпаки"*). Тому в цій роботі поряд з рутинними завданнями ставиться і неможливе - розробити працюючу систему автоматичної ідентифікації САУ за ЛАЧХ.

Завдання

1. Побудувати для базового варіанта графік **точної** ЛАЧХ з асимптотами і розміткою власних частот. Побудувати графік **асимптотичної** ЛАЧХ і графік відхилень (помилки) асимптотичної ЛАЧХ відносно натуральної. - 8 б
2. Для свого варіанта передаточної функції $W(s)$ зробити **теж саме** для 2-х різних наборів параметрів T_1, T_2, T_3, λ . - 14 б
3. Для свого варіанта передаточної функції побудувати сумісно ЛАЧХ, ЛФЧХ і визначити: (графічно і аналітично) **частоту зрізу, запаси стійкості по амплітуді і фазі**. -20 б
4. Запропонувати методи автоматичної ідентифікації передаточної функції динамічної системи за ЛАЧХ. - 15 б
5. Розробити програму автоматичної ідентифікації передаточної функції динамічної системи за ЛАЧХ. - 110 б

Варіанти завдань

$$W1(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot s}$$

👉 1 2 👈

$$W2(s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot s}$$

$$W3(s) := \frac{T2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \lambda \cdot s + 1}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot s}$$

👉 3 4 👈

$$W4(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s + 1) \cdot s}$$

👉 5

6 👈

$$W5(s) := \frac{T2^2 \cdot s^2 + 1}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot s}$$

$$W6(s) := \frac{T2^2 \cdot s^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s + 1) \cdot (T3^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T3 \cdot \lambda \cdot s + 1)}$$

$$W7(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1) \cdot s}$$

👉 7 8 👈

$$W8(s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1) \cdot s}$$

$$W9(s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)}{T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1}$$

👉 9 10 👈

$$W10(s) := \frac{T2 \cdot s + 1}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T3 \cdot s - 1) \cdot s}$$

Зразок виконання

1. Побудова ЛАЧХ елементарних ланок

Як базовий приклад візьмемо "зразкову" систему, що складається тільки з елементарних ланок першого порядку - аперіодичних та форсуючих. Параметри передаточної функції - постійні часу цих ланок беремо такими, щоб відстань між точками спряження асимптот дорівнювала одній декаді, тобто $T2 = 0.1 \cdot T1$, $T3 = 0.1 \cdot T4$ і т.д.

Запишемо передаточні функції для елементарних ланок першого порядку -

аперіодичної: $W_{\text{ape}}(s, T) := \frac{1}{T \cdot s + 1}$; форсуючої: $W_{\text{for}}(s, T) := T \cdot s + 1$;

інтегруючої: $W_{\text{int}}(s, T) := \frac{1}{T \cdot s}$; диференціюючої: $W_{\text{dif}}(s, T) := T \cdot s$.

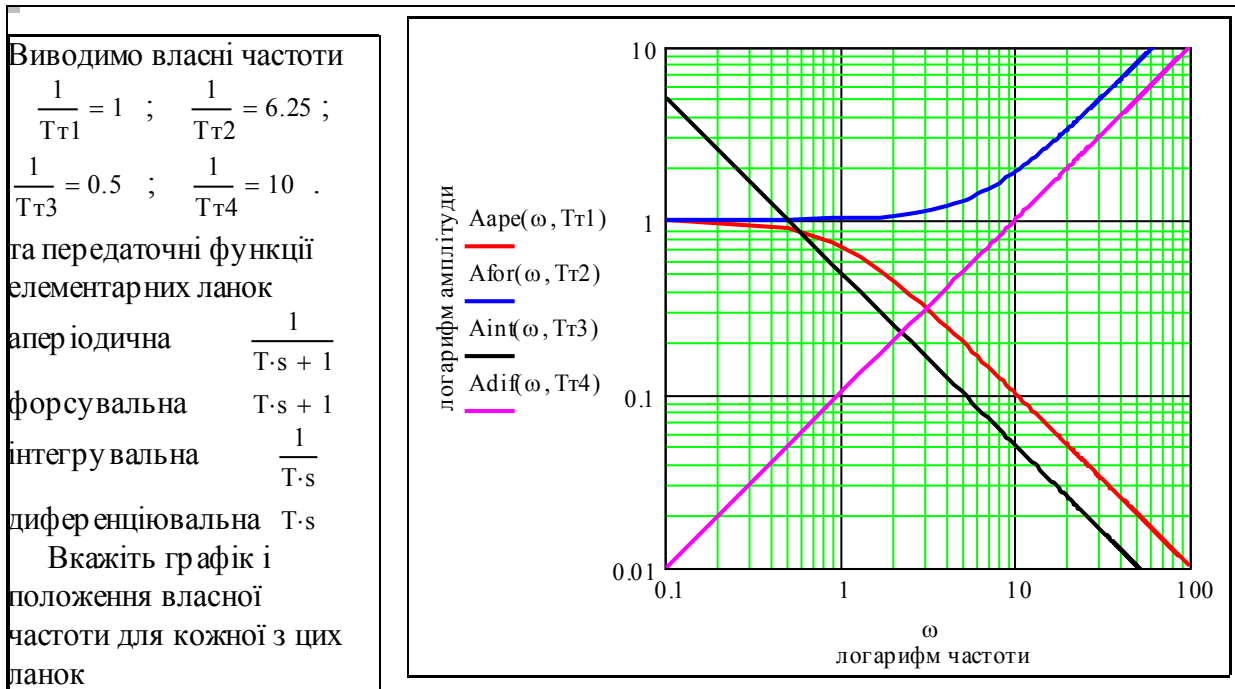
Задаємо діапазон частот: $\omega := 0.1, \dots, 100$. Запишемо вирази для АЧХ цих ланок:

$$A_{\text{ape}}(\omega, T) := |W_{\text{ape}}(i \cdot \omega, T)|; \quad A_{\text{for}}(\omega, T) := |W_{\text{for}}(i \cdot \omega, T)|; \quad A_s(\omega) := 10^{11} \cdot \omega^{-1};$$

$$A_{\text{int}}(\omega, T) := |W_{\text{int}}(i \cdot \omega, T)|; \quad A_{\text{dif}}(\omega, T) := |W_{\text{dif}}(i \cdot \omega, T)|.$$

Будуємо (в логарифмічних масштабах по обох осях) графіки. Задаємо для кожної ланки різні значення постійної часу T . Бачимо, що ЛАЧХ інтегруючої та диференціювальної ланок збігається з своїми асимптотами, а для аперіодичної та форсуючої ланки ділянки з різними нахилами переходять одна в другу досить плавно.

Задаємо значення параметрів $T_{T1} := 1$; $T_{T2} := 0.1$; $T_{T3} := 2$; $T_{T4} := 0.1$.



2. Побудова ЛАЧХ для базового варіанта

Записуємо передаточну функцію базового варіанта і її параметри.

T1 := .000001 T2 := .0001 T3 := .01 T4 := .1 T5 := 1 ORIGIN := 1

$$W_{\text{raz}}(s) := \frac{(T4s + 1) \cdot (T5s + 1)}{(T1s + 1) \cdot (T2s + 1) \cdot (T3s + 1)}$$

Задаємо діапазон частот, кількість кроків і робимо крок таким, щоб у логарифмічному масштабі він був **постійним**. Перевірте це - прологарифмуйте вираз для $\omega(j)$.

Diap := 100000000 Kolhag := 50 j := -1 .. Kolhag lhag := $\frac{\log(\text{Diap})}{\text{Kolhag}}$ $\omega(j) := 10^{j \cdot \text{lhag}}$

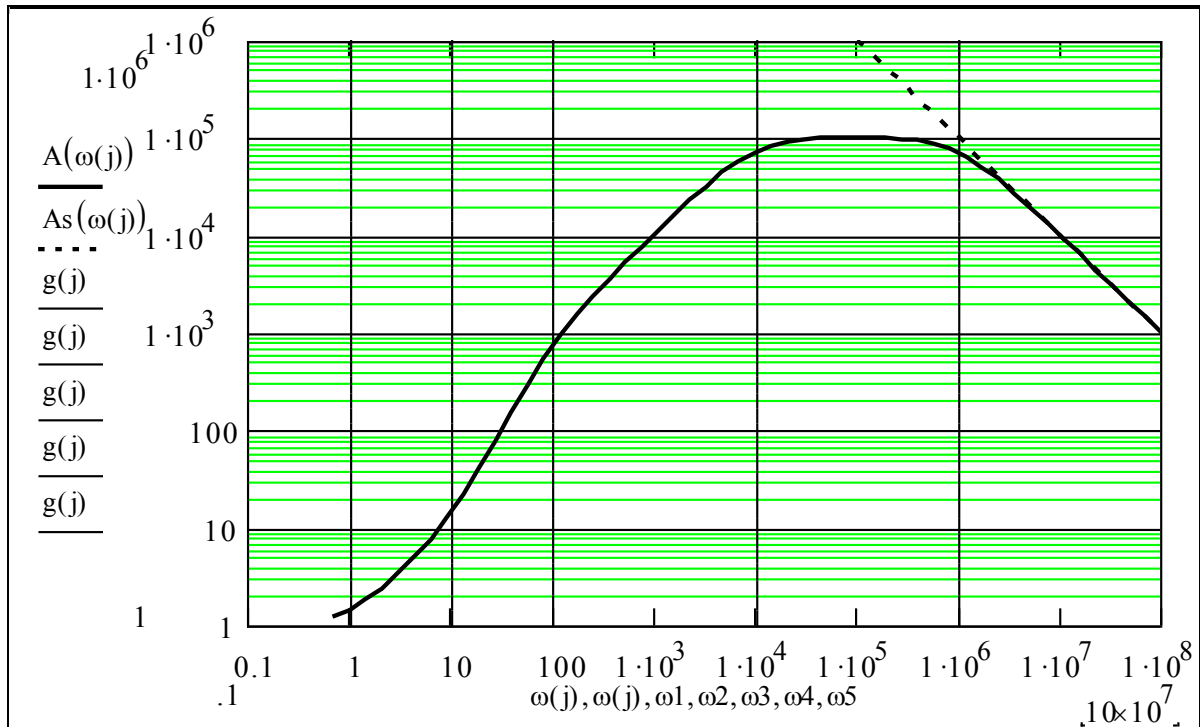
Записуємо вираз для АЧХ: $A(\omega) := |W_{\text{raz}}(i \cdot \omega)|$

Визначаємо так звані "власні частоти" - зворотні величини від постійних часу - параметрів системи, вводимо допоміжну змінну $q(j)$ для побудови вертикальних ліній.

$\omega_1 := \frac{1}{T_1}$ $\omega_2 := \frac{1}{T_2}$ $\omega_3 := \frac{1}{T_3}$ $\omega_4 := \frac{1}{T_4}$ $\omega_5 := \frac{1}{T_5}$ $g(j) := 10^{j \cdot \text{lhag}}$ Diap = 1×10^8

Будуємо графік ЛАЧХ. Бачимо, що власним частотам відповідають злами - зміни нахилу на графіку. Але навіть на цій спеціально сформованій характеристиці (коли постійні часу відрізняються як мінімум на декаду) ідентифікувати границі асимптотичних ділянок не просто.

Завдання. На графіку побудована одна асимптота. Напишіть рівняння цієї асимптоти $A_s(\omega)$. Використайте розкладання передаточної функції на елементарні ланки.



3. Побудова асимптотичної ЛАЧХ

На відміну від попередніх розділів, де ми просто використали опцію "логарифмічні масштаби", побудуємо "натуральну" логарифмічну характеристику - прологарифмуємо відповідні вирази і побудуємо графіки. Задаємо функції користувача, що відтворюють асимптотичні ЛАЧХ для аперіодичної та форсуючої ланок.

$$\text{lap}(lw, T) := \Phi\left(lw - \log\left(\frac{1}{T}\right)\right) \cdot \left(\log\left(\frac{1}{T}\right) - lw\right) \quad \text{lfo}(lw, T) := \Phi\left(lw - \log\left(\frac{1}{T}\right)\right) \cdot \left(lw - \log\left(\frac{1}{T}\right)\right)$$

$$\Phi(-1) = 0 \quad \Phi(-.00001) = 0 \quad \Phi(0) = 1 \quad \Phi(1) = 1$$

Ці функції визначені за допомогою функції Хевісайда. Може виникнути проблема - як набрати або вибрати з меню цю функцію.

Phi - Heaviside step function: 1 if x is greater than or equal to 0 and 0 otherwise. To type Phi, press F+Ctrl+G. На українську це перекладається так: є функція Хевісайда, щоб набрати її треба:

або знати, що треба на вільному місці екрану набрати F, потім натиснути Ctrl+G і з'явиться Φ, до них треба домалювати і заповнити дужки отак: Φ(x);

або відкрити меню Insert, а в ньому меню Function, а вже в ньому - знати, що треба знайти функцію Phi(0), клацнути по ній мишею і на екрані з'явиться Φ().

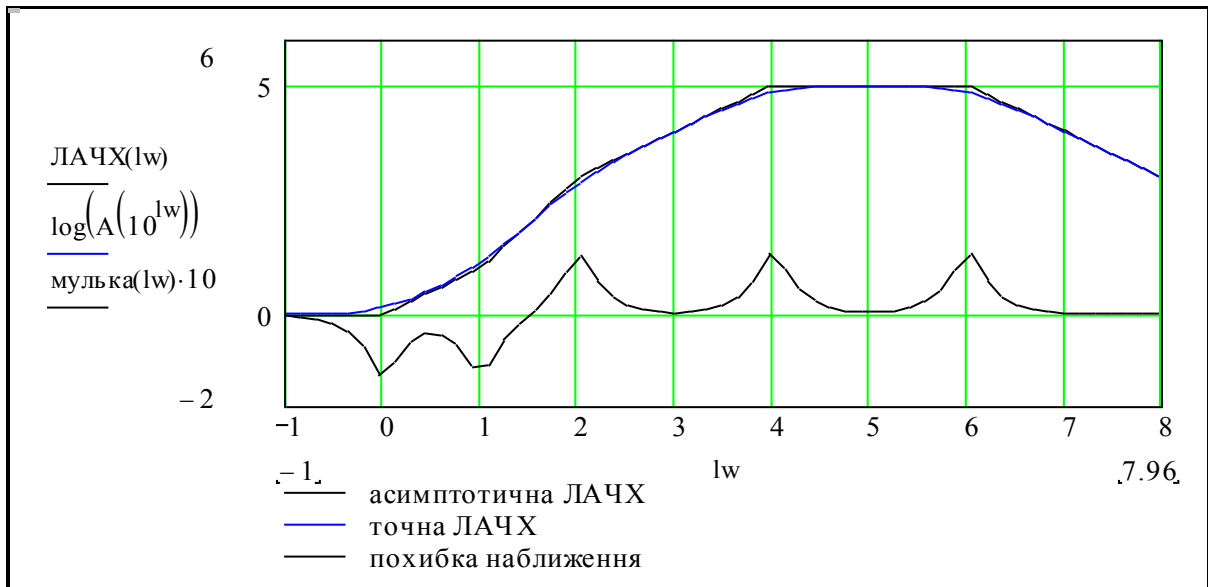
Задаємо ранжовану змінну lw - логарифм частоти, з таким же кроком, як і раніше. Записуємо асимптотичну ЛАЧХ як суму ЛАЧХ елементарних ланок, що складають задану передаточну функцію.

$$lw := -1, lhag - 1 .. \log(\text{Diap})$$

$$\text{ЛАЧХ}(lw) := (\text{lap}(lw, T1) + \text{lap}(lw, T2)) + (\text{lap}(lw, T3) + \text{lfo}(lw, T4) + \text{lfo}(lw, T5))$$

$$\text{Kolhag} = 50 \quad \text{Kolhag} := 50 \quad T1 := .0001 \quad T2 := .001 \quad T3 := .01 \quad T4 := .1 \quad T5 := 1$$

Будуємо разом точну і асимптотичну ЛАЧХ. Бачимо, що важко не помітити, що вони досить повно збігаються.

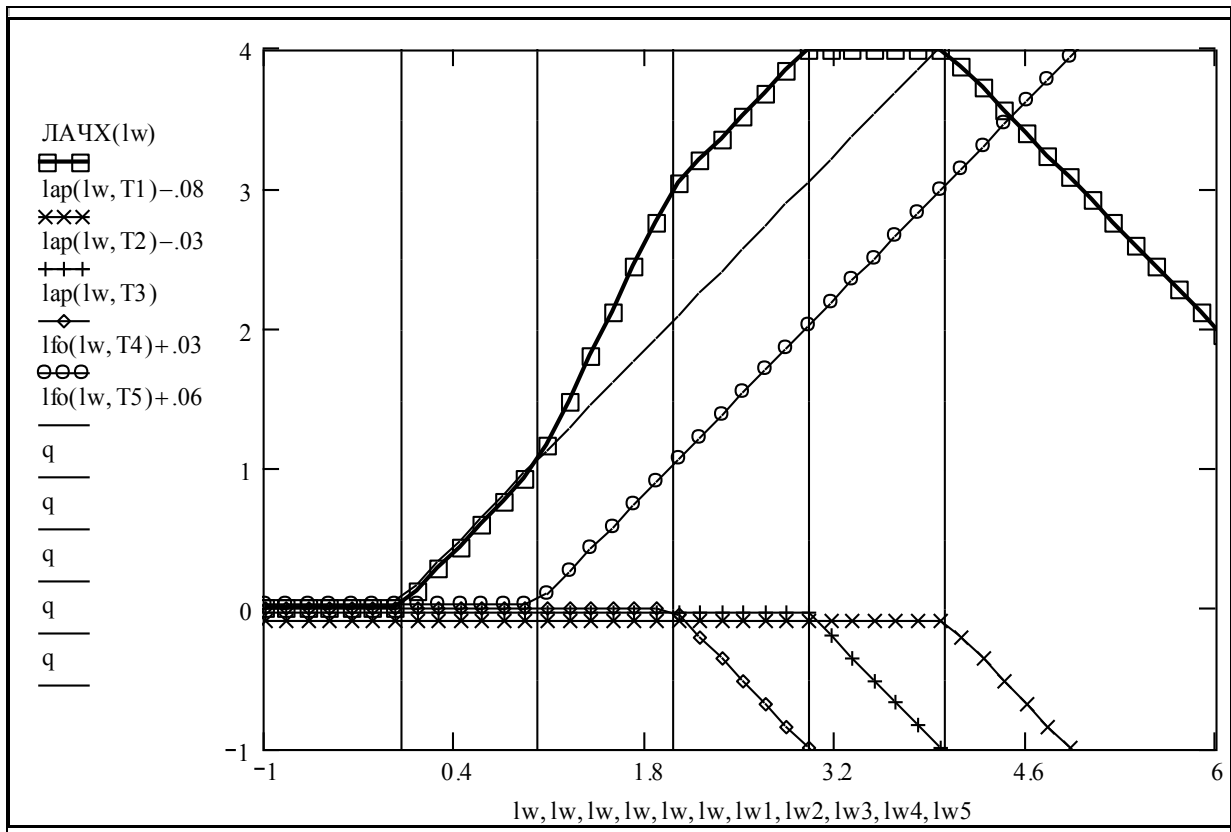


Перевага логарифмічних частотних характеристик в тому, що передаточна функція складної системи розкладається у послідовність елементарних ланок. ЛАЧХ системи знаходиться як сума ЛАЧХ складових цієї системи. Асимптотичні ЛАЧХ можна складати майже без обчислень - на графіку. Побудуємо ЛАЧХ та її елементарні складові.

$$\text{ЛАЧХ}(lw) := \text{lap}(lw, T1) + \text{lap}(lw, T2) \dots + \text{lap}(lw, T3) + \text{lfo}(lw, T4) + \text{lfo}(lw, T5)$$

$$W_{\text{raz}}(s) := \frac{(T4s + 1) \cdot (T5s + 1)}{(T1s + 1) \cdot (T2s + 1) \cdot (T3s + 1)}$$

$$q := -5, -4.5, -10 \quad lw1 := \log\left(\frac{1}{T1}\right) \quad lw2 := \log\left(\frac{1}{T2}\right) \quad lw3 := \log\left(\frac{1}{T3}\right) \quad lw4 := \log\left(\frac{1}{T4}\right) \quad lw5 := \log\left(\frac{1}{T5}\right)$$



4. Побудова ЛАЧХ для заданого варіанта

4.1. Побудова точної ЛАЧХ

Копіюємо попередні фрагменти (модулі) документа, замінюємо передаточну функцію, значення її параметрів. Настроюємо діапазон частот, масштаби на графіках.

$$T1 := 0.1 \quad T2 := 1 \quad \lambda := .7 \quad \omega1 := \frac{1}{T1} \quad \omega2 := \frac{1}{T2} \quad \omega := 0.1, .3.. 100 \quad q := -5, -4.5.. 10$$

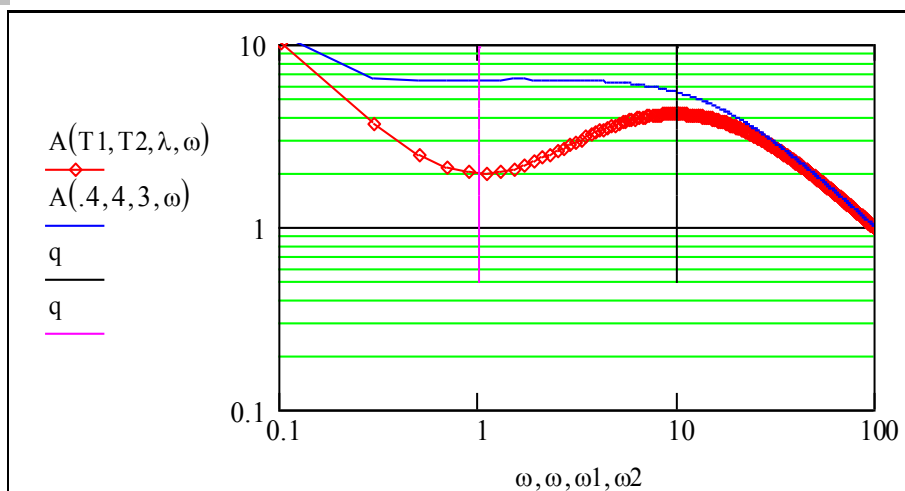
$$W8(T1, T2, \lambda, s) := \frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1) \cdot s}$$

$$T1 = 0.1$$

Записуємо вираз для АЧХ:

$$A(T1, T2, \lambda, \omega) := |W8(T1, T2, \lambda, i \cdot \omega)|$$

$$T2 = 1$$



Будемо графік ЛАЧХ. Бачимо, що при певних значеннях параметрів система має на високих частотах пік підсилення. На частоті зрізу (100 рад/сек) нахил асимптоти -20дБ/дек.

4.2 Побудова асимптотичної ЛАЧХ

До функцій асимптотичних ЛАЧХ аперіодичої та форсуючої ланок добавимо ще ЛАЧХ інтегруючої та диференціюючої ланок. Ланки другого порядку будемо відображувати як добуток двох відповідних ланок першого порядку (метод ЛАЧХ - приблизний).

$$\text{lint}(lw, T) := \left(\log\left(\frac{1}{T}\right) - lw \right)$$

$$\text{ldif}(lw, T) := \left(lw - \log\left(\frac{1}{T}\right) \right)$$

$$lw := -1, lhag - 1.. \log(\text{Diap})$$

Дивлячись на передаточну функцію і враховуючи спрощення, записуємо вираз для асимптотичної ЛАЧХ. Копіюємо те, що треба з попереднього розділу і маємо...

$$\frac{(T2 \cdot s + 1)^2}{(T1^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T1 \cdot \lambda \cdot s - 1) \cdot s}$$

$$\log(|W8(\omega)|) = 2 \log(|T2 \cdot j \cdot \omega + 1|) - 2 \log(|T1 \cdot j \cdot \omega + 1|) - \log(|j \cdot \omega|)$$

$$\text{ЛАЧХ}(lw) := \text{lap}(lw, T1) + \text{lap}(lw, T1) + \text{lint}(lw, 1) + \text{lfo}(lw, T2) + \text{lfo}(lw, T2)$$

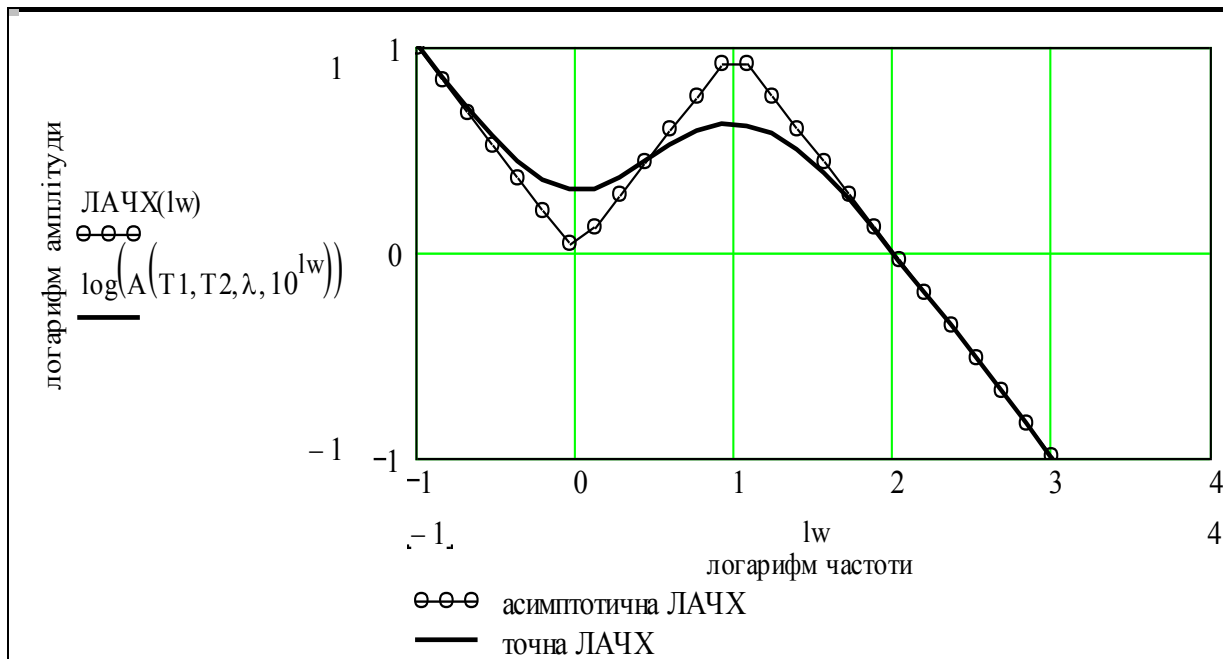
Задасмо значення постійних часу - параметрів передаточної функції

"старі значення":

"нові значення" (можемо змінити):

$T_1 = 0.1$; $T_2 = 1$; $K_{olhag} = 50$;

$T_1 := .1$; $T_2 := 1$; $K_{olhag} = 50$.



Бачимо, що асимптотична ЛАЧХ побудована коректно, збігання з точною - задовільне, але ж це ситуація класу "не стріляйте в піаніста."- метод ЛАЧХ є приблизним.

Працювали: Ошурко М., Тирса Г., Глухенький П., 09.09.09

Контрольні запитання

1. Способи отримання ЧХ.
2. Зв'язок між АЧХ, ФЧХ, $M(\omega)$, $N(\omega)$.
3. Що таке "власні частоти"?
4. Як будуються асимптотичні ЛАЧХ?
5. Чи можна за ЛАЧХ ідентифікувати передаточну функцію ЛДС?
6. Чому дорівнює нахил характеристики 20дБ/декаду?
7. Що таке смуга пропускання?
8. Чи можна за часовою характеристикою визначити частотну і навпаки?
9. Якщо при зміні частоти в 10 разів амплітуда зменшується в 10 разів, чому дорівнює нахил ЛАЧХ?
10. Якщо при зміні частоти в 10 разів амплітуда зменшується в 3.33 рази, чому дорівнює нахил ЛАЧХ?
11. "Підсилення дорівнює 40дб" - перекладіть це з мови спеціалістів на загальну: "маємо підсилення у *xixixi* разів".

3

Аналіз стійкості САУ

У цьому розділі розглядаються:

- ✓ Дослідження стійкості САУ альтернативними методами.
- ✓ Дослідження усталених помилок САУ.
- ✓ Дослідження стійкості САУ. Стійкість САУ із запізненням.

Після вивчення цього розділу ви **зможете:**

1. Перевіряти систему на стійкість за критеріями стійкості: Найквіста, Михайлова, Гурвиця.
2. Безпосередньо перевіряти стійкість системи обчисленням коренів її характеристичного рівняння.
3. Безпосередньо перевіряти стійкість системи обчисленням її перехідного процесу.
4. При будь якій формі опису САУ (диференціальними рівняннями, передаточними функціями, частотними характеристиками) отримувати певним методом необхідні для аналізу стійкості вхідні дані:
 - передаточні функції розімкненої системи,
 - передаточні функції замкненої системи,
 - характеристичне рівняння замкненої системи,
 - диференціальне рівняння системи,
 - систему диференціальних рівнянь в формі Коші.
5. Мати уяву про побудову корневих годографів – траєкторій коренів характеристичного рівняння при зміні певного параметра системи.
6. Визначати ступінь астатизму САУ.
7. Дати визначення термінам:

1. Необхідна і достатня умова стійкості, „ліві корені”.	5. Передаточна функція розімкненої системи.
2. Необхідна умова стійкості (неперервних лінійних динамічних систем).	6. Передаточна функція замкненої системи.
3. Годограф Найквіста.	7. Передаточна функція для помилки.
4. Годограф Михайлова.	8. Усталена помилка, астатизм.
5. Визначник Гурвиця.	9. Запаси стійкості по амплітуді та частоті.



3.1. Дослідження стійкості САУ альтернативними методами

Вступ

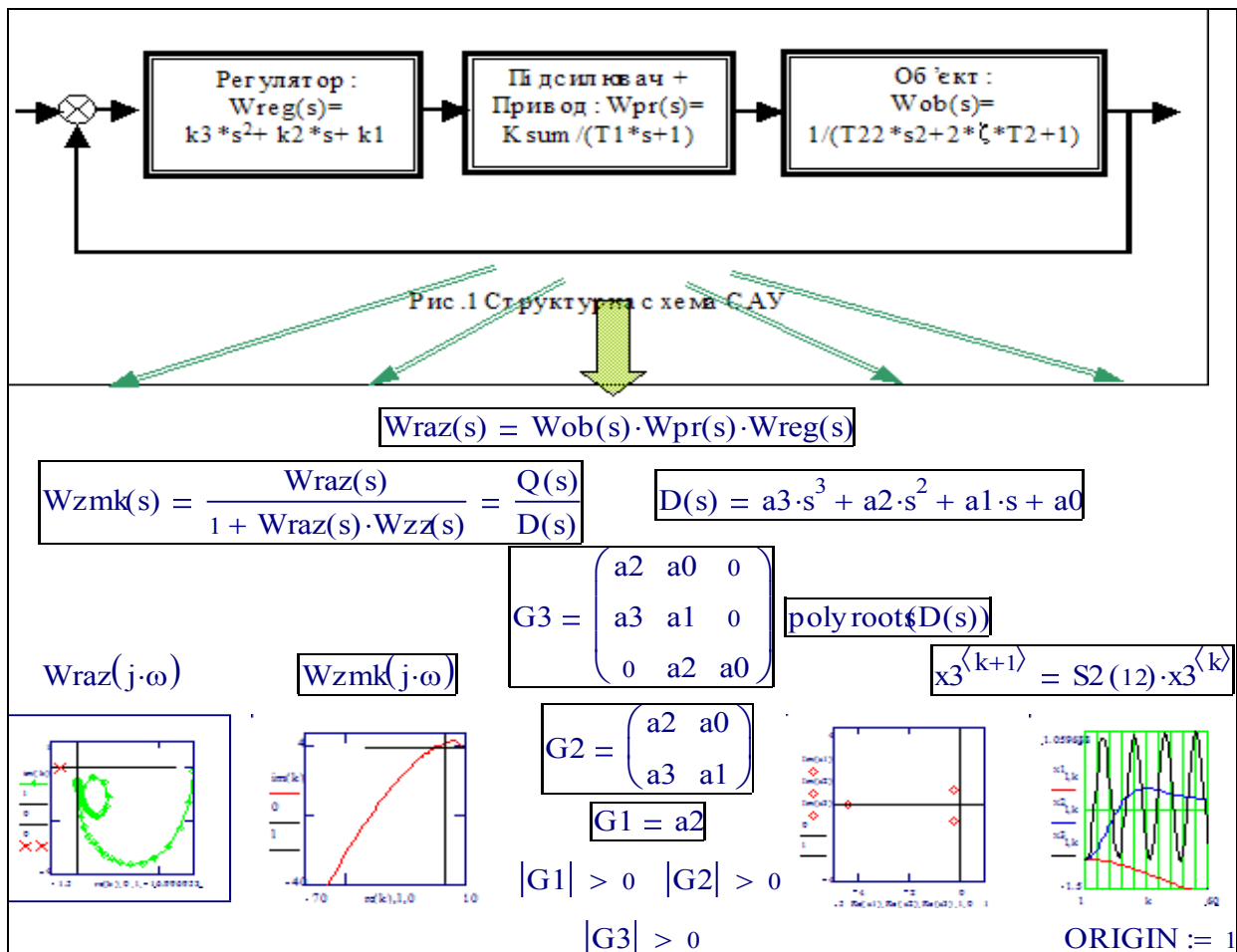
Ціль даної роботи - одержання навичок використання критеріїв стійкості та методів аналізу стійкості, наприклад, перевірки стійкості типової САУ з зворотним зв'язком. Використання альтернативних методів перевірки на стійкість забезпечує надійність результатів - виявлення помилок. Слід враховувати, що в інженерній практиці приходиться перевіряти на стійкість системи, що задані:

- ☞ диференціальними рівняннями; ☞ частотними характеристиками;
- ☞ алгебраїчними рівняннями перехідних процесів; ☞ передаточними функціями.

До виконання цієї роботи необхідно вивчити відповідний розділ і мати чітку уяву про:

- ☞ визначення стійкості за Ляпуновим;
- ☞ необхідні і достатні умови стійкості лінійних динамічних систем;
- ☞ зв'язок між коренями характеристичного рівняння і частотними характеристиками.

Крім конкретних знань і навичок, робота дає відповідь на питання: "який з методів перевірки на стійкість є оптимальним". Нижче подано структурну схему САУ і дайджест роботи:



Як об'єкт дослідження розглядається слідкуюча САУ (з одиничним зворотним зв'язком)

Задані:

Передаточна функція регулятора: $W_{reg}(s) = u(s)/x(s) = k_3*s^2 + k_2*s + k_1$

Передаточна функція об'єкта + підсилювача + привода:

$$W_{obj}(s) = x(s)/u(s) = +1/(T_1*s+1)*(T_2^2*s^2+2*\zeta*T_2*s+1)$$

Завдання

1. Перевірити САУ на стійкість за критеріями Михайлова, Найквіста, Гурвиця. - 21 б
2. Знайти корені характеристичного рівняння. - 5 б
3. Побудувати перехідні процеси. Експериментально визначити границі стійкості за заданим параметром (згідно варіанту). - 14 б
4. Визначити запаси стійкості САУ по амплітуді та фазі (самостійно). - 20 б

Зміною заданого параметру зробіть САУ нестійкою і перевіряйте на стійкість паралельно стійку і нестійку САУ – ну, як у зразку виконання.

Варіанти завдання

Варіант - це відповідний стовпчик цієї таблиці, його можна відповідно зчитати.

Номер варіанта	$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 1 & 0.3 & 0.3 & .5 & 0.2 & 1 & 1 & 2 & 0.3 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & .6 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & .2 & .4 & .3 \\ 1 & 1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.2 & 0.3 & .2 & .1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 2 & 0.5 & 0.4 & .4 & .5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 4 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_1 & k_2 & T_2 & k_1 & \zeta & k_3 & T_1 & T_2 & k_2 \end{pmatrix}$	$M_1^{(10)} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ .3 \\ .2 \\ .2 \\ .3 \\ .4 \\ 3 \\ 99 \end{pmatrix}$
T1=		
T2=		
$\zeta =$		
k1=		
k2=		
k3=		
Заданий парам.		

Номер варіанта	$M_2 := \begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 2 & 1 & 0.3 & 0.3 & .5 & 0.2 & 1 & 1 & 2 & 0.3 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0.4 & 0.7 & 0.2 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & .2 & .1 & .2 \\ 1 & 1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.2 & 0.3 & .1 & .2 \\ 0.4 & 0.6 & 0.9 & 1.5 & 1.6 & 2 & 1 & 1 & 0.7 & 0.5 & .8 & .66 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 4 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_1 & k_2 & k_3 & \zeta & k_2 & k_3 & T_1 & T_2 & \zeta \end{pmatrix}$	$M_2^{(9)} := \begin{pmatrix} \text{Var} \\ T_1 \\ T_2 \\ \zeta \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ P_v \end{pmatrix}$
T1=		
T2=		
$\zeta =$		
k1=		
k2=		
k3=		
Заданий парам.		

Зразок виконання

Варіант:13-б. Вводимо (вручну?) значення параметрів САУ згідно з варіантом

ПАРАМЕТРИ ОБ'ЄКТА УПРАВЛІННЯ			Варіант:	ПАРАМЕТРИ РЕГУЛЯТОРА		
T1 = 2	T2 = 0.5	$\zeta = 0.2$	Var = 9	k3 = 4	k2 = 0.5	k1 = 0.2

Вводимо ЧИСЛО КРОКІВ ОБЧИСЛЕНЬ ДИАПАЗОН ЧАСТОТ

kilkkrok = 100 n := 1.. kilkkrok $\omega_0 := .01$ $\omega_k := 8.01$

КРОК ОБЧИСЛЕНЬ $krok := \frac{\omega_k - \omega_0}{kilkkrok}$; СЕРІЯ ЗНАЧЕНЬ ЧАСТОТИ $\omega_n := \omega_0 + (n - 1) \cdot krok$.

Записуємо передаточні функції

регулятора $W_{reg}(s, k1, k2, k3) := (k1 + k2s + k3s^2),$

привода $W_{pr}(s) := \frac{1}{(T1s + 1)},$

об'єкта $W_{ob}(s) := \frac{1}{(T2s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s + 1)}.$

Записуємо передаточну функцію розімкненої системи:

$$W_{raz}(s, k1, k2, k3) := W_{ob}(s) \cdot W_{pr}(s) \cdot W_{reg}(s, k1, k2, k3)$$

1. Критерій Найквіста

Для перевірки САУ на стійкість за критерієм Найквіста потрібно побудувати АФЧХ розімкненої САУ, тобто годограф $W_{raz}(i \cdot \omega)$. Якщо розімкнута САУ стійка (а це виконано), то замкнута САУ буде стійка, якщо годограф не охоплює точку з координатами $-1, i \cdot 0$ при зміні частоти $0 < \omega < \infty$ (і навпаки...).

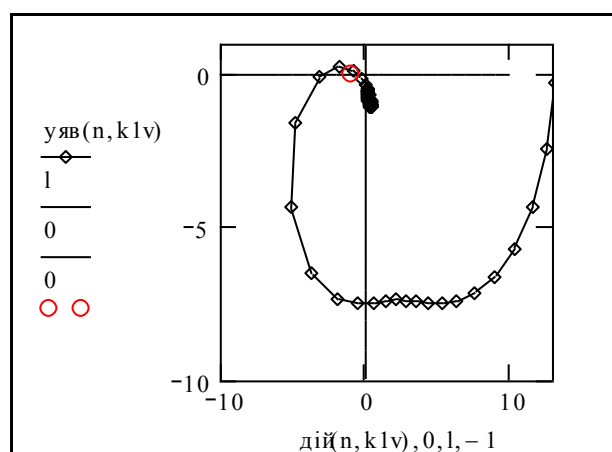
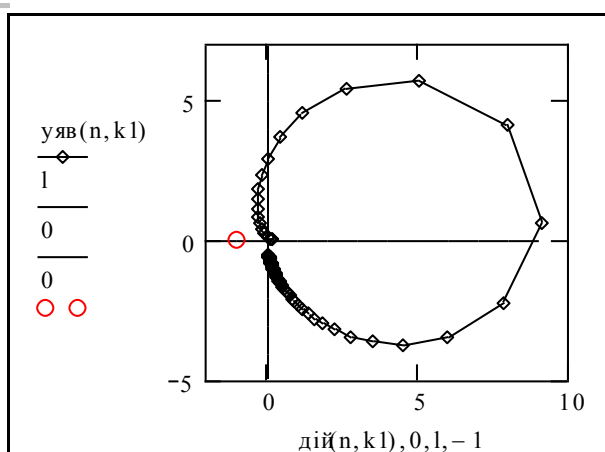
Уявна одиниця i кодується як $1i$, але можна визначити її самостійно: $j := \sqrt{-1}$.

Підставляємо $s = i \cdot \omega$ у $W_{raz}(s...)$ і записуємо уявну та дійсну частини

$$уяв(n, k1) := \text{Im}(W_{raz}(i \cdot \omega_n, k1, k2, k3)), \quad дій(n, k1) := \text{Re}(W_{raz}(i \cdot \omega_n, k1, k2, k3)).$$

Нагадуємо суть завдання: на одному графіку подана характеристика САУ при заданих параметрах. САУ може бути і стійкою і не стійкою. **Наприклад,** вона стійка, тоді так змініть заданий параметр $-\infty < k1v < \infty$, щоб САУ стала не стійкою. Результати ваших пошуків відображуються на другому графіку. Бачимо: номінальна САУ – **стійка**, а при зміненому параметрі $k1v$ – **навпаки**: бачимо, що годограф охоплює – точку з координатами $(-1, 0 \cdot i)$. Пакет не може поставити стрілки і числа на графіку – **зробіть це Ви, вкажіть**, де $\omega = 0$, а де $\omega = \infty$. Зробіть таку функцію-індикатор:

САУ($k1$) = "СТІЙКА". При зміні $k1 = 0.2$ на $k1v = 13$: САУ($k1v$) = "НЕСТІЙКА"



Зауваження. Повідомлення: САУ($k1$)="СТІЙКА" – результат роботи програми, що розглянута в кінці розділу.

Подаємо $W_{raz}(s)$ у явному вигляді і виводимо для контролю параметри.

$$W_{raz}(s) := \frac{k1 + k2s + k3s^2}{(T2s^2 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta \cdot s + 1) \cdot (T1s + 1)}$$

$T1 = 2$	$T2 = 0.5$	$\zeta = 0.2$
$k3 = 4$	$k2 = 0.5$	$k1 = 0.2$

2. Критерій Михайлова

Для перевірки САУ на стійкість за критерієм Михайлова потрібно побудувати годограф $D(i^*w)$, $0 < w < \infty$, де $D(s)$ – характеристичний поліном замкненої САУ. **Якщо САУ стійка, годограф починається на додатній дійсній напівосі і ПОСЛІДОВНО проходить, ніде не обертаючись в нуль N квадрантів. (N – степінь $D(s)$) в додатному напрямку (І НАВПАКИ...).**

Записуємо передаточну функцію замкненої САУ та виділяємо знаменник $K(s)$.

$$W_{zam}(s) := \frac{W_{raz}(s)}{1 + W_{raz}(s)} \quad T1 = 2 \quad T2 = 0.5 \quad \zeta = 0.2 \quad K(s) := 1 + W_{raz}(s)$$

$$k3 = 4 \quad k2 = 0.5 \quad k1 = 0.2$$

Підставляємо у загальний вираз для $W_{zam}(s)$ вирази для відповідних передаточних функцій. Це можна зробити а) за допомогою символічного процесора, б) вручну. Коментуємо вираз, що внизу. Символічний процесор видає потрібний вираз, але а) примусово підставляє числові значення змінних, які його мають; б) не завжди за допомогою доступних символічних операцій можна привести вираз до "красивого" виду.

$$\frac{W_{raz}(s)}{1 + W_{raz}(s)} \rightarrow \frac{(0.2 + 0.5s + 4s^2)}{(0.5s^2 + 0.20s + 1) \cdot (2s + 1) \cdot \left[1 + \frac{(0.2 + 0.5s + 4s^2)}{(0.5s^2 + 0.20s + 1) \cdot (2s + 1)} \right]}$$

$$W_{zam}(s) = \frac{(40 - 3s + 5k3s^2)}{(5 \cdot T2s^3 \cdot T1 + 5 \cdot T2s^2 + 10 \cdot T2\zeta s^2 \cdot T1 + 10 \cdot T2\zeta s + 5 \cdot T1s + 45 - 3s + 5 \cdot k3s^2)}$$

В данному випадку легше написати вираз вручну:

$$W_{zam}(s) := \frac{(k1 + k2s + k3s^2)}{(T2s^2 + 2 \cdot T2\zeta s + 1) \cdot (T1s + 1) + (k1 + k2s + k3s^2)}$$

Знаменник $W_{zam}(s)$ - це ж $D(s)$, тобто **характеристичний поліном**. Виділяємо його, виконуємо алгебраїчні перетворення і отримуємо:

$$(T2s^2 + 2 \cdot T2\zeta s + 1) \cdot (T1s + 1) + (k1 + k2s + k3s^2)$$

Застосували до цього виразу операцію Expand:

$$T2s^3 \cdot T1 + T2s^2 + 2 \cdot T2\zeta s^2 \cdot T1 + 2 \cdot T2\zeta s + T1s + 1 + k1 + k2s + k3s^2$$

Ставимо курсор на будь-яке s і застосуємо операцію Collect:

$$T2s^3 \cdot T1 + (k3 + T2 + 2 \cdot T2\zeta \cdot T1) \cdot s^2 + (T1 + 2 \cdot T2\zeta + k2) \cdot s + 1 + k1$$

Нарешті записуємо вираз для характеристичного полінома замкненої системи

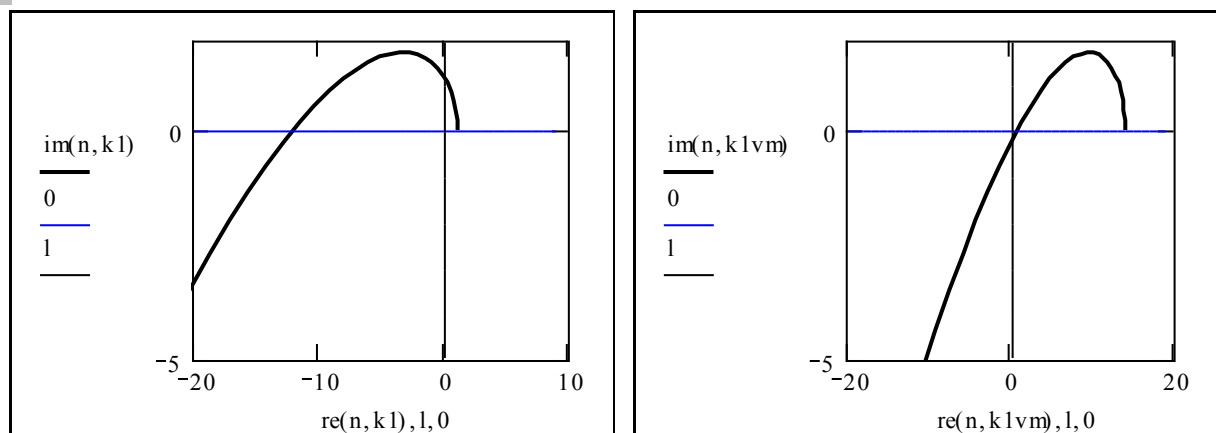
$$D(s, k1) := T2 \cdot T1 \cdot s^3 + (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \cdot s^2 + (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \cdot s + (1 + k1)$$

Беремо уявну та дійсну частини $D(i^*\omega, k1)$:

$$\text{im}(k, k1) := \text{Im}(D(i \cdot \omega_k, k1)); \quad \text{re}(k, k1) := \text{Re}(D(i \cdot \omega_k, k1)); \quad 1 := -40..40; \quad k1 = 0.2$$

Будуємо графіки - годографи Михайлова для тих же самих даних, що і в розділі 2 (критерій Найквіста). Знову бачимо - для $k_1 = 13$ система нестійка (годограф іде через 1-4-3 квадранти); для $k_1 = 0.2$ - стійка (годограф іде через 1-2-3 квадранти в додатному напрямі). Самостійно поставте стрілки - напрям зростання частоти на годографах.

Номинальна САУ(k_1)="СТІЙКА". При зміні $k_1=0.2$ на $k_{1vm}:=13$ САУ(k_{1vm})="НЕСТІЙКА"



“Пограйтеся” з цим “стендом” – підберіть параметр k_{1vm} (або інший, згідно варіанту) так, щоб точніше визначити границю стійкості. Зверніть увагу на лівий графік.

Контроль: $T_1 = 2$ $T_2 = 0.5$ $\zeta = 0.2$ $k_3 = 4$ $k_2 = 0.5$ $k_1 = 0.2$

3. Критерій Гурвіца

Для перевірки САУ на стійкість за критерієм Гурвиця потрібно з коефіцієнтів характеристичного полінома $D(s) = s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0$ побудувати визначники (детермінанти) Гурвиця. **Якщо усі детермінанти будуть більше нуля, САУ стійка, і навпаки.**

Копіюємо з розділу 2 **характеристичне рівняння замкнутої САУ:**

$$D(s, k_1) := T_2 T_1 s^3 + (T_2 + 2 \cdot T_1 \cdot T_2 \zeta + k_3) \cdot s^2 + (T_1 + 2 \cdot T_2 \zeta + k_2) \cdot s + (1 + k_1).$$

Нагадаємо, що в паперових підручниках детермінант матриці позначається як $\det(M)$, або $\text{mod}(M)$. В математичному пакеті ці означення використані для інших функцій і детермінант позначається так: $|M|$. Це, між іншим, відповідає концепції поліморфізму в об'єктноорієнтованому програмуванні. Бачимо, що для об'єктів різних класів застосовується одна і та ж функція:

$$|-17| = 17, \quad |-3 + 4 \cdot 1i| = 5, \quad \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| \rightarrow a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Введемо такі означення для коефіцієнтів полінома $D(s)$:

$$a_3(k_1) := T_2 T_1; \quad a_2(k_1) := (T_2 + 2 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot \zeta + k_3); \quad a_1(k_1) := (T_1 + 2 \cdot T_2 \cdot \zeta + k_2); \quad a_0(k_1) := (1 + k_1).$$

Зауваження. Ми робимо відповідні об'єкти аналізу - частотні характеристики, детермінанти, елементи детермінантів... функціями тих параметрів, вплив яких потрібно дослідити. В даному випадку для прикладу вибрано k_1 . Дуже просто замінити цей параметр на інший. Запишемо матриці Гурвиця:

$$G_3(k_1) := \begin{pmatrix} a_2(k_1) & a_0(k_1) & 0 \\ a_3(k_1) & a_1(k_1) & 0 \\ 0 & a_2(k_1) & a_0(k_1) \end{pmatrix} \quad G_2(k_1) := \begin{pmatrix} a_2(k_1) & a_0(k_1) \\ a_3(k_1) & a_1(k_1) \end{pmatrix} \quad G_1(k_1) := a_2(k_1).$$

Самостійно(вважається, що ви освоїли теоретичні основи) **визначте** правила, за якими формується головна матриця $G3$ і за якими з неї “нарізаються” матриці $G2$ та $G1$. Якщо ви зрозуміли ці правила, то вам не важко буде записати матриці $G4, G3, G2$ та $G1$ для системи 4-го порядку.

Необхідна і достатня умова стійкості: $\text{determinant}(G_i(k1)) > 0, i = 1..3$. Обчислюємо детермінанти для тих же самих значень, що і в розділах 1 і 2. Ну дуже очевидно, в якому випадку САУ нестійка.

$k1 = 0.2$	$ G1(k1) = 4.9$	$ G2(k1) = 12.03$	$ G3(k1) = 14.436$	САУ(k1) = "СТІЙКА"
$k1vg := 13$	$ G1(k1vg) = 4.9$	$ G2(k1vg) = -0.77$	$ G3(k1vg) = -10.78$	САУ(k1vg) = "НЕСТІЙКА"

4. Безпосереднє обчислення коренів характеристичного рівняння

Маючи під рукою комп'ютер можна просто обчислити корені характеристичного рівняння $D(s)=0$. Згідно з теоремою Ляпунова про стійкість лінійних систем **необхідна і достатня умова стійкості: усі корені характеристичного рівняння мають бути "ліви́ми"**.

Копіюємо сюди, *просто, щоб ще раз подивитись (у електронній книзі можна поставити гіперпосилання з поверненням назад)*, характеристичне рівняння замкненої САУ:

$$D(s, k1) := T2 \cdot T1 \cdot s^3 + (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \cdot s^2 + (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \cdot s + (1 + k1).$$

Знаходимо для надійності і тренажу корені характеристичного рівняння двома альтернативними способами.

4.1 Використання функції root(). Вбудована функція **root(P(x),x)** шукає значення найближчого до стартової точки кореня числовим методом. Щоб знайти усі три кореня можна зробити й так: задаємо початкове (старт) значення кореня: $s = 1+1i$ і послідовно визначаємо корені (тому, хто знає шкільну алгебру, тут все ясно).

$$s := 1 + i \quad s1 := \text{root}(D(s, k1), s) \quad s2 := \text{root}\left(\frac{D(s, k1)}{s - s1}, s\right) \quad s3 := \text{root}\left[\frac{D(s, k1)}{(s - s1) \cdot (s - s2)}, s\right].$$

Повторюємо (копіюємо, правимо) це для $k1 = 0.2$ (беремо інші імена для коренів)

$$k1d = 0.2 \quad r1 := \text{root}(D(s, k1d), s) \quad r2 := \text{root}\left(\frac{D(s, k1d)}{s - r1}, s\right) \quad r3 := \text{root}\left[\frac{D(s, k1d)}{(s - r1) \cdot (s - r2)}, s\right].$$

Виводимо корені випадків стійкої і нестійкої САУ. Ще раз переконуємось в коректності попередніх результатів.

$k1 = 0.2$	$s1 = -0.279 + 0.445i$	$s2 = -0.279 - 0.446i$	$s3 = -4.341 + 0i$
$k1v = 13$	$r1 = 0.014 + 1.685i$	$r2 = 0.014 - 1.685i$	$r3 = -4.929$

4.2 Використання функції polyroots(). Зробимо теж саме за допомогою функції **polyroots (Вектор_коэф)**, функції якої зрозумілі з назви. Копіюємо сюди, щоб бачити вхідні дані, з якими працюємо, вирази для коефіцієнтів характеристичного рівняння замкненої САУ:

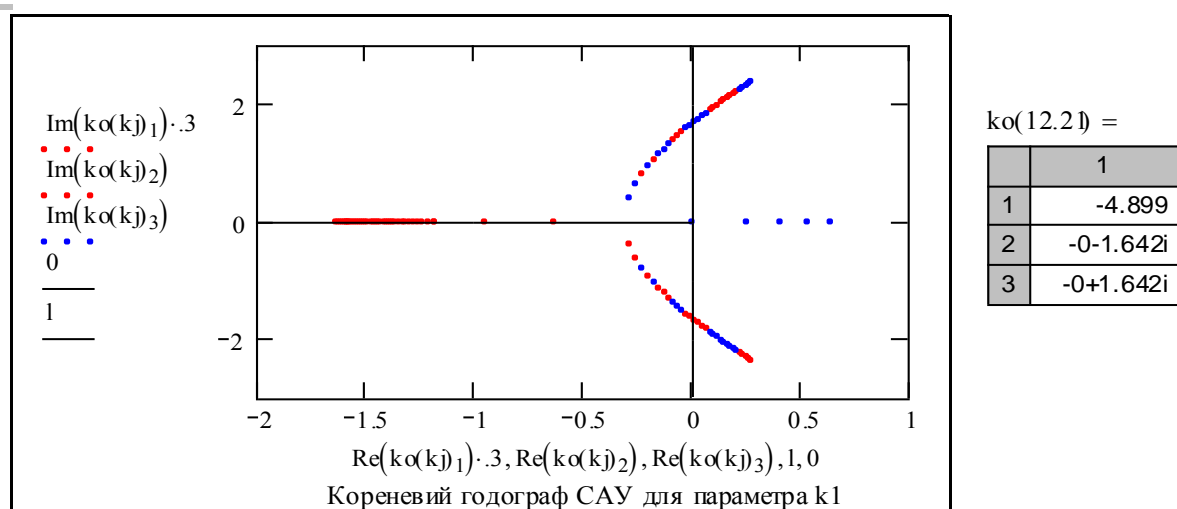
$$a3(k1) := T2 \cdot T1; \quad a2(k1) := (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3); \quad a1(k1) := (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2); \quad a0(k1) := (1 + k1).$$

Формуємо вектор-функцію, що обчислює (=повертає) значення усіх коренів в залежності від значення параметра регулятора $k1$ - "штрафа за помилку координати".

$$\text{vektkoef}(k1) := \begin{bmatrix} (1 + k1) \\ (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \\ (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \\ T2 \cdot T1 \end{bmatrix} \quad \text{ko}(k1) := \text{polyroots} \begin{bmatrix} (1 + k1) \\ (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \\ (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \\ T2 \cdot T1 \end{bmatrix}$$

Тепер ми можемо побудувати на комплексній площині замість якогось одного розподілення коренів, що відповідає певному набору параметрів об'єкта, траєкторії цих коренів при зміні певного параметра – **кореневі годографи**, що є основою одного з колись потужних методів аналізу і синтезу САУ. В докомп'ютерну еру навіть була запатентована логарифмічна лінійка з кутоміром для перемноження векторів (модулів) і складання кутів (аргументів). Для користування годографом на ньому звичайно дається розбивка за значеннями параметра.

Задаємо діапазон зміни $k1$: $kj := -5, -4..3\zeta$, (беремо для ранжованої змінної інше ім'я), будемо годограф коренів. **Самостійно поставте стрілки - напрям зростання $k1$ на годографах.**



Прокоментуємо отримані результати. При малих $k1$ САУ аперіодично нестійка - один корінь - правий. При збільшенні $k1$ корені зближуються, система стає стійкою, корені стають кратними і після цього система стає коливальною. Швидкодія САУ збільшується, але одночасно зменшується загасання, бо пара комплексних коренів підходить до уявної осі. При певному **критичному значенні $k1_{\text{крит}}$** (ТЕСТ: угадайте $k1_{\text{крит}}$ з одного разу з точністю до двох знаків після крапки) комплексні корені виходять у праву напівплощину - САУ стає коливально нестійкою.

5. Перевірка стійкості по перехідних процесах

Маючи під рукою комп'ютер можна просто розв'язати числовими методами диференціального САУ при відповідних початкових умовах, як це було зроблено в роботі 1.1, і дивитись, чи сходиться перехідний процес. Як вхідні дані використовуємо характеристичне рівняння замкненої САУ. Зробимо старший коефіцієнт рівняння одиничним.

$$d := \frac{1}{T1 \cdot T2}; \quad A3 := 1; \quad A1(k1) := ((T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2)) \cdot d;$$

$$A2(k1) := (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \cdot d; \quad A0(k1) := (1 + k1) \cdot d.$$

Характеристичне рівняння, як відомо - операторна форма запису диференціального рівняння системи, тобто, характеристичному рівнянню:

$$D(s, k1) := A3 \cdot s^3 + A2(k1) \cdot s^2 + A1(k1) \cdot s + A0(k1) = 0$$

відповідає однорідне дифврівняння: $A3 \cdot \frac{d^3}{dt^3}x + A2(k1) \cdot \frac{d^2}{dt^2}x + A1(k1) \cdot \frac{d}{dt}x + A0(k1) = 0.$

Наприклад, згідно з варіантом, треба дослідити вплив на стійкість параметра k1. Робимо відповідні вирази функціями цього параметра. **Робимо ВСЕ згідно з методикою Розділу 1.1.** Задаємо крок обчислень T := .2; та кількість кроків k := 1..6, ORIGIN:=1.

Виводимо задане значення k1 і тут же поряд з ним підбираємо мінімальне і максимальне значення, за яких САУ втрачає стійкість:

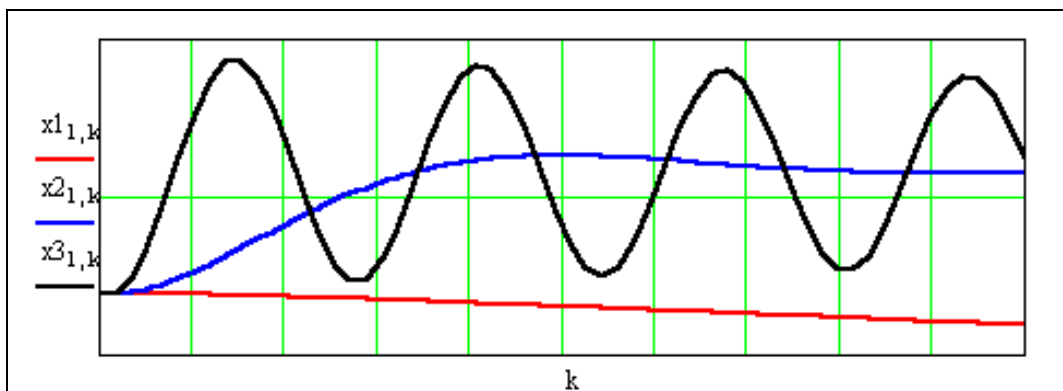
$$k1mi := -1.05 \quad k1 = 0.2 \quad k1ma := 11$$

$$x1^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A(k1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -A0(k1) & -A1(k1) & -A2(k1) \end{pmatrix}$$

$$x2^{(1)} := x1^{(1)} \quad x3^{(1)} := x1^{(1)}$$

$$S2(k1) := I + A(k1) \cdot T + \frac{(A(k1) \cdot T)^2}{2}$$

$$x1^{(k+1)} := S2(k1mi) \cdot x1^{(k)} \quad x2^{(k+1)} := S2(k1) \cdot x2^{(k)} \quad x3^{(k+1)} := S2(k1ma) \cdot x3^{(k)}$$



Працювали: Красноштан В., Білоручка., Авторучка А. 01.04.03.

Висновки

1. *Конкретні.* Проведено комплексне дослідження стійкості САУ. Розроблено документ, що дозволяє при мінімальних модифікаціях вести дослідження цілого класу систем автоматичного управління.

2. *Абстрактні.* З переходом до нового ми не тільки отримуємо нові можливості, але часто щось втрачаємо. Справжня наука певним чином сама себе закреслює. Ви мабуть здогадалися, що критерії Гурвиця, Михайлова сьогодні певним чином непотрібні. Як арбалет в епоху автоматів з лазерними прицілами? Доведення критерію Гурвиця займає 5-6 сторінок тексту. Тепер ці витончені, доступні тільки одиницям методи під загрозою вимирання? Сьогодні найбільш цінне в класичних методах - методології.

А все те, що розглянуто вище, можна замінити простою програмою. Далі подано приклад такої програми. Можна зробити більш радикальну версію.


```

САУ(k1) :=
  ORIGIN ← 1
  вирок ← 1
  koreni ← polyroots [
    (1 + k1)
    (T1 + 2·T2·ζ + k2)
    (T2 + 2·T1·T2·ζ + k3)
    T2·T1
  ]
  Ns ← length(koreni)
  for i ∈ 1..Ns
    вирок ← вирок · (Re(koreni)i < 0)
  повідомляємо ← "СТІЙКА" if вирок = 1
                  "НЕСТІЙКА" otherwise

```

$$ko(k1) := \text{polyroots} \begin{bmatrix} (1 + k1) \\ (T1 + 2 \cdot T2 \cdot \zeta + k2) \\ (T2 + 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \zeta + k3) \\ T2 \cdot T1 \end{bmatrix}$$

$$\text{length}(ko(k1)) = 3$$

$$ko(k1) = \begin{matrix} \overrightarrow{\text{Re}(ko(k1))} = \text{Re}(ko(k1)) < 0 : \\ \begin{matrix} -4.34 \\ -0.28+0.45i \\ -0.28-0.45i \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

САУ(-1.0) = "НЕСТІЙКА"

САУ(0.2) = "СТІЙКА"

САУ(13) = "НЕСТІЙКА"

Подивіться на програму вгорі – там все очевидне. Поряд з нею – “коментарі”: те, що ми закладаємо в програму, слід переглянути і перевірити. Таким чином, ми зробили програму, що для класу лінійних динамічних систем просто обчислює корені і дає відповідь на питання “стійка чи нестійка?”

Годографи, визначники, частотні характеристики тепер немовби і непотрібні? Відповідь очевидна: потрібна постійна ревізія та синтез нового і старого.

Ще одно совкове питання: який з шести розглянутих способів є кращим? Відповідь очевидна (читайте прадавню фундаментальну літературу): усі способи разом і чим більше, тим краще.

Контрольні запитання

1. Визначення поняття стійкості по Ляпунову.
2. Необхідна і достатня умови стійкості ЛДС.
3. Формулювання критерія Найквіста.
4. Формулювання критерія Михайлова.
5. Формулювання критерія Гурвиця.
6. Як можна знайти корені лінійного алгебраїчного рівняння N-ступеню?
7. Що таке "характеристичне рівняння"?
8. Що таке "кореневий годограф" (КГ), як можна по КГ визначити нестійкість САУ?
9. Що таке "запас стійкості по фазі", "запас стійкості по амплітуді"?



3.2. Дослідження усталених помилок САУ

Вступ

Система автоматичного регулювання (САУ) повинна забезпечувати не тільки стійкість, потрібну швидкодію, але й потрібну точність в усталених станах. Для того, щоб вихідний сигнал в усталеному стані точно дорівнював вхідному, передаточна функція розімкненої САУ повинна мати певну кількість інтеграторів. САУ, що не має усталеної помилки для певного вхідного сигналу називається астатичною. Якщо САУ без усталеної помилки відпрацьовує постійний сигнал, то кажуть, що вона має астатизм першого порядку, якщо вона відпрацьовує сигнал, що лінійно змінюється - це буде система з астатизмом другого порядку, і так далі.

Розв'язання задач забезпечення астатизму потрібного порядку та визначення усталених помилок - обов'язкова, і дуже мала складова підготовки спеціаліста. Задачі аналізу і синтезу сучасних систем управління набагато складніші. **Ціль роботи** - отримати тверді навички аналізу усталених помилок регулювання.

Постановка задачі

Розглянемо задачу з програми певної олімпіади. Задача рутинна і елементарна (при наявності дійсної підготовки), щоб це не було очевидним, вона формулюється так:

"Визначити максимальне ціле число μ , при якому для вхідного сигналу $q = t^\mu$ усталена похибка стеження ϵ в системі, що подана на рис.1 буде дорівнювати нулю". В перекладі на звичайну мову це означає "визначити порядок астатизму $(\mu+1)$ заданої САУ". Маємо задачу з глибокої класики, від 30-х років. Відомо, що порядок астатизму визначається кількістю інтеграторів у передаточній функції розімкненої САУ.

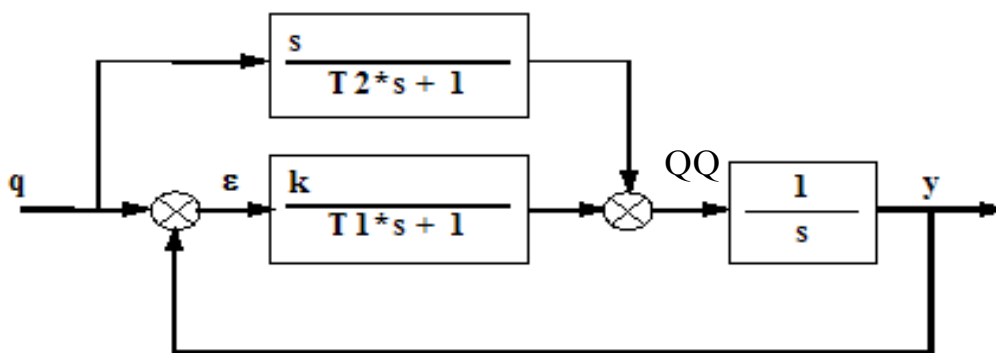


Рис. 1. Структурна схема системи

Зразок виконання завдання

1. **Визначимо передаточну функцію САУ.** Для цього треба виконати ряд структурних перетворень, щоб привести злегка накручену схему до фундаментальної одноконтурної системи із 33.

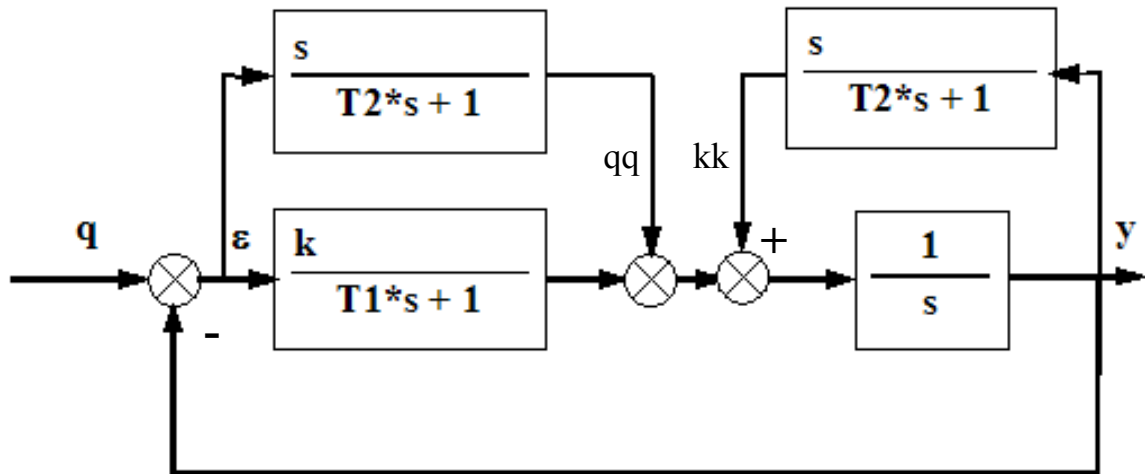


Рис. 2. Структурна схема системи після переносу точки розгалуження через суматор

Перенесемо точку розгалуження вхідного сигналу через суматор (увага - сигнал Зворотного Зв'язку (ЗЗ (зе-зе), а не ЗЗ (тридцять три)) подається із знаком мінус - це від'ємний ЗЗ). Щоб нічого не змінилось на виході, ми в точку підсумовування (суммирования) сигналів додаємо втрачену при переносі складову. **Дивимось одночасно** на рис.1 та рис.2 і бачимо, що сума відповідних сигналів у новій структурній схемі $qq + kk$ дає той же сигнал, що на схемі рис.1, тобто: $qq + kk = QQ$ тому, що $\varepsilon = q - y$.

Тепер **дивимось тільки** на рис. 2 і бачимо там два стандартних з'єднання ланок - паралельне і "зустрічно паралельне" тобто контур із ЗЗ. Ми можемо замінити ці з'єднання ланками з відповідними передаточними функціями $W_{para}(s)$, $W_{zvzv}(s)$. Дивимось вже на рис.3, і бачимо: отримано елементарну одноконтурну систему.

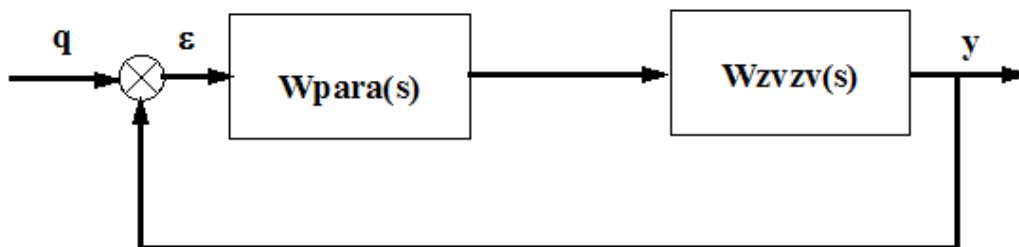


Рис. 3. Структурна схема системи після заміни елементарних з'єднань еквівалентними ПП (передаточними функціями.)

Тепер виконаємо алгебраїчні перетворення відповідно до перетворень структурної схеми. Введемо означення для передаточних функцій заданої схеми (дивимось на рис. 1).

$$W1(s) := \frac{k}{T1 \cdot s + 1} \quad W2(s) := \frac{s}{T2 \cdot s + 1} \quad W3(s) := \frac{1}{s}$$

Знову таки дивимось одночасно на рис.1 та рис.2 і запишемо

$$W_{para}(s) := W1(s) + W2(s)$$

$$W_{para}(s) \rightarrow \frac{k}{(T1 \cdot s + 1)} + \frac{s}{(T2 \cdot s + 1)} \text{ simplify } \rightarrow \frac{(k \cdot T2 \cdot s + k + T1 \cdot s^2 + s)}{(T1 \cdot s + 1) \cdot (T2 \cdot s + 1)}$$

$$\frac{(k \cdot T_2 \cdot s + k + T_1 \cdot s^2 + s)}{[(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)]} \text{ collect, s} \rightarrow \frac{T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$$

Отримали першу ланку для еквівалентної схеми на рис.3 і згадали, що світові стандарти забороняють виконувати алгебраїчні перетворення вручну (помилки коштують дорого).

$$W_{\text{para}}(s) := \frac{[T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$$

$$W_{\text{zvz}}(s) := \frac{W_3(s)}{1 - W_3(s) \cdot W_2(s)}$$

$$W_{\text{zvz}}(s) \rightarrow \frac{1}{s \cdot \left[1 - \frac{1}{(T_2 \cdot s + 1)} \right]} \text{ simplify} \rightarrow \frac{(T_2 \cdot s + 1)}{s^2 \cdot T_2} \quad W_{\text{zvz}}(s) := \frac{(T_2 \cdot s + 1)}{s^2 \cdot T_2}$$

Знову дивимось, але тільки на рис.2 і записуємо передаточну функцію (y(s) по q(s)) розімкненої системи

$$W_{\text{yqRoZ}}(s) := W_{\text{para}}(s) \cdot W_{\text{zvz}}(s); \quad W_{\text{yqRoZ}}(s) \rightarrow \frac{[T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot s^2 \cdot T_2}$$

Дивимось, тепер у підручник з ТАУ (частина 1) і записуємо передаточну функцію замкненої системи:

$$W_{\text{yqZam}}(s) := \frac{W_{\text{yqRoZ}}(s)}{(1 + W_{\text{yqRoZ}}(s))};$$

.. і передаточну функцію для помилки по вхідному сигналу:

$$W_{\text{eq}}(s) := \frac{1}{(1 + W_{\text{yqRoZ}}(s))};$$

$$W_{\text{eq}}(s) \left\{ \begin{array}{l} \text{expand, s} \\ \text{simplify} \rightarrow (T_1 \cdot s + 1) \cdot s^2 \cdot \frac{T_2}{[s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]} \\ \text{collect, s} \end{array} \right.$$

$$W_{\text{eq}}(s) := \frac{T_2 \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot s^2}{[s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}$$

А тепер трошки теорії і математики: розкладемо рівняння для помилки в степеневий ряд по змінній s

$$W_{\text{eq}}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{q(s)}; \quad \varepsilon(s) = W_{\text{eq}}(s) \cdot q(s); \quad \varepsilon(s) = \left(C_0 + C_1 \cdot s + C_2 \cdot \frac{s^2}{2} \dots + \blacksquare \right) \cdot q(s). \quad (1)$$

Загальновідомо, що коефіцієнти степеневого ряду визначаються так:

$$C_0 = W_{\varepsilon q}(s); C_1 = \frac{d}{ds} W_{\varepsilon q}(s); C_2 = \frac{d^2}{ds^2} W_{\varepsilon q}(s); C_3 = \dots$$

В цих формулах потрібно підставити $s = 0$, що відповідає усталеному стану. Виконаємо цю підстановку за допомогою символного процесора.

$$W_{\varepsilon q}(s) \text{ substitutes } = 0 \rightarrow 0 \quad \text{- тобто отримали: } C_0 = 0$$

Іноді символний процесор гальмує і не доганяє, тому підкладемо йому явний вираз

$$(T_1 \cdot s + 1) \cdot s^2 \cdot \frac{T_2}{\left[s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k \right]} \text{ substitutes } = 0 \rightarrow 0 \quad .$$

Тепер, ми повинні знайти вирази для похідних, підставити туди $s = 0$. Це, якщо ми не озброєні символним процесором. Зробимо спочатку так:

$$\frac{d}{ds} W_{\varepsilon q}(s) \text{ simplify } \rightarrow T_2 \cdot s \cdot \frac{\left(T_1^2 \cdot s^3 + 2 \cdot T_1 \cdot s^2 \cdot k \cdot T_2 + 2 \cdot T_1 \cdot s^2 + 3 \cdot T_1 \cdot s \cdot k + k \cdot T_2 \cdot s + s + 2 \cdot k \right)}{\left(s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + T_1 \cdot s^2 + s^2 \cdot T_2 + k \cdot T_2 \cdot s + s + k \right)^2}$$

Бачимо на власні очі множник s , який "обнуляє" увесь вираз, але не віримо їм (очам) і записуємо: (похідна, якщо підставити $s = 0$, дорівнює нулю)

$$\frac{d}{ds} W_{\varepsilon q}(s) \text{ substitutes } = 0 \rightarrow 0; \quad \text{- таким чином } C_1 = 0.$$

Виявляється, що так можна і не знаходити вирази для похідних, а прямо записувати загальні вирази, а комп'ютер зробить усю рутину:

$$\frac{d^2}{ds^2} W_{\varepsilon q}(s) \text{ substitutes } = 0 \rightarrow 2 \cdot \frac{T_2}{k}; \quad \text{- маємо ненульовий коефіцієнт } C_2 = 2 \cdot T_2/k.$$

Так це і є власне розв'язання задачі, яке було видиме ще спочатку - подивіться на вираз для передаточної функції розімкнутої системи - бачимо s^2 у знаменнику - система має астатизм другого порядку і відпрацьовує постійні і лінійно зростаючі сигнали без усталених помилок.

$$W_{yqRoz}(s) \rightarrow \frac{\left[T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k \right]}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot s^2 \cdot T_2}$$

Доведемо задачу до кінця. Виконаємо зворотне перетворення Лапласа від розкладення виразу для помилки в степеневий ряд (1)

$$\varepsilon(s) = \left(C_0 + C_1 \cdot s + C_2 \cdot \frac{s^2}{2} \dots + \blacksquare \right) \cdot q(s) \implies \varepsilon(t) = C_0 \cdot q(t) + C_1 \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{C_2}{2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) \dots$$

Для нашої конкретної задачі маємо: $C_0 = 0$; $C_1 = 0$; $C_2 = 2 \cdot T_2$, тому:

$$\varepsilon(t) = 0 \cdot q(t) + 0 \cdot \frac{d}{dt} q(t) + 2 \cdot \frac{T_2}{k} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) \dots$$

тобто "максимальне ціле число μ , при якому для вхідного сигналу $q = t^\mu$ ustalena похибка стеження ε в системі буде дорівнювати нулю" **дорівнює $\mu = 1$** .

У випадку, коли система нелінійна, то єдиним універсальним засобом визначення астатизму є моделювання. Так промодельюємо систему.

Моделювання САУ

Беремо передаточну функцію замкненої системи, виконуємо зворотне перетворення Лапласа - отримуємо дифрівняння системи.

$$WyqZan(s) := \frac{WyqRoZ(s)}{(1 + WyqRoZ(s))};$$

$$\frac{WyqRoZ(s)}{(1 + WyqRoZ(s))} \begin{cases} \text{expand, s} \\ \text{simplify} \\ \text{collect, s} \end{cases} \rightarrow \frac{[T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}{[s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]};$$

$$WyqZan(s) = \frac{[T_1 \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}{[s^3 \cdot T_2 \cdot T_1 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (k \cdot T_2 + 1) \cdot s + k]}.$$

Зворотне перетворення Лапласа:

$$T_2 \cdot T_1 \cdot \frac{d^3}{dt^3} y + (T_1 + T_2) \cdot \frac{d^2}{dt^2} y + (k \cdot T_2 + 1) \cdot \frac{d}{dt} y + k \cdot y = T_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} q + (k \cdot T_2 + 1) \cdot \frac{d}{dt} q + k \cdot q \quad (2)$$

Дифрівняння системи приводимо до форми Коші - вводимо нові змінні: $x_1 = y$;

$$x_2 = \frac{d}{dt} y; \quad x_3 = \frac{d^2}{dt^2} y, \quad \text{записуємо канонічну систему дифрівнянь: } \frac{d}{dt} x = A \cdot x + B \cdot q,$$

$$\text{де } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-kK}{T_2 \cdot T_1} & \frac{-(kK \cdot T_2 + 1)}{(T_2 \cdot T_1)} & -\left[\frac{(T_1 + T_2)}{(T_2 \cdot T_1)} \right] \end{bmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad kK = 1.$$

Побудуємо еквівалентну дискретну модель динаміки:

$$x^{(k+1)} = F_2(T) \cdot x^{(k)} + G_2(T) \cdot B \cdot q_k.$$

Записуємо компоненти ПФС (перехідної функції стану) для цієї моделі. Беремо наближення 2-го порядку:

$$F2(T) := \text{identity}(3) + A \cdot T + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!}; \quad G2(T) := \text{identity}(3) \cdot T + A \cdot \frac{T^2}{2!}.$$

Задаємо число кроків, крок обчислень, початковий стан

$$\text{ORIGIN} := 0 \quad \text{Kh} := 125 \quad \text{Period} := 25 \quad \text{Xo} := 0 \quad k := 0.. \text{Kh} - 1 \quad T := \frac{\text{Period}}{\text{Kh}}.$$

Реакція на постійний сигнал

Ретельно записуємо вхідну функцію $U_{\text{lin}}(t)$ - праву частину виразу (2). Створюємо зону введення параметрів $T1, T2, k$ - це дає можливість експериментувати.

$$x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q(t) := 0.7$$

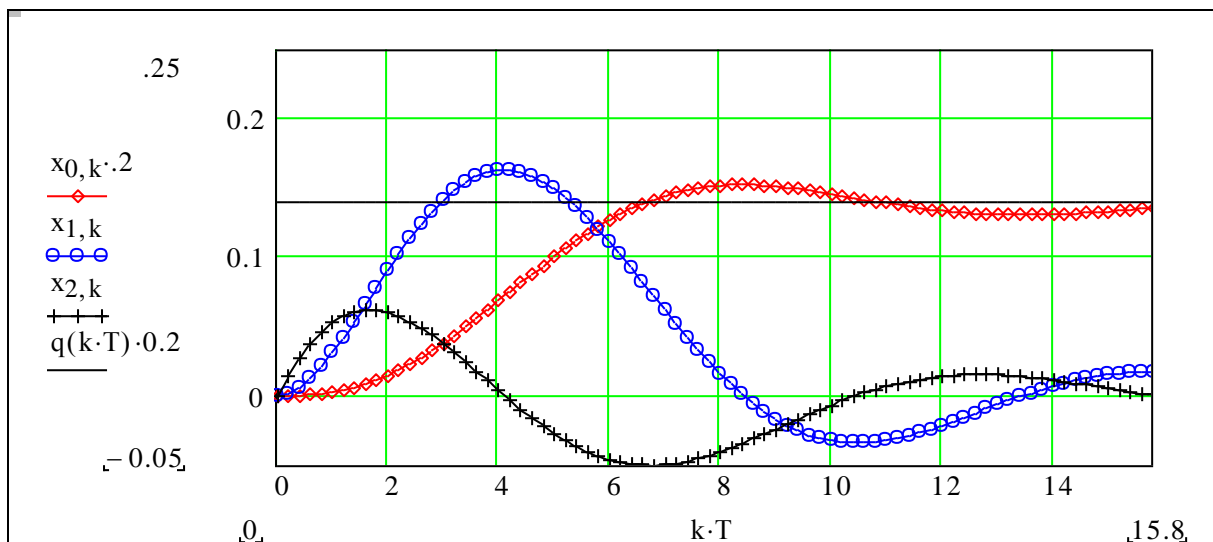
$$U_{\text{lin}}(t) := \frac{Tt1}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) + \frac{(kK \cdot Tt2 + 1)}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{kK}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot q(t)$$

$$Tt1 \equiv 1$$

$$Tt2 \equiv 1$$

$$kK \equiv 1$$

$$x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot U_{\text{lin}}(k \cdot T)$$



Ми навмисне зробили систему коливальною. Неважко перевірити, що помилка усталеного стану близька до нуля: $x_{0, \text{Kh}} = 0.685$.

Реакція на лінійно зростаючий сигнал

Замінюємо вхідний сигнал q і маємо те, що показано.

$$x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

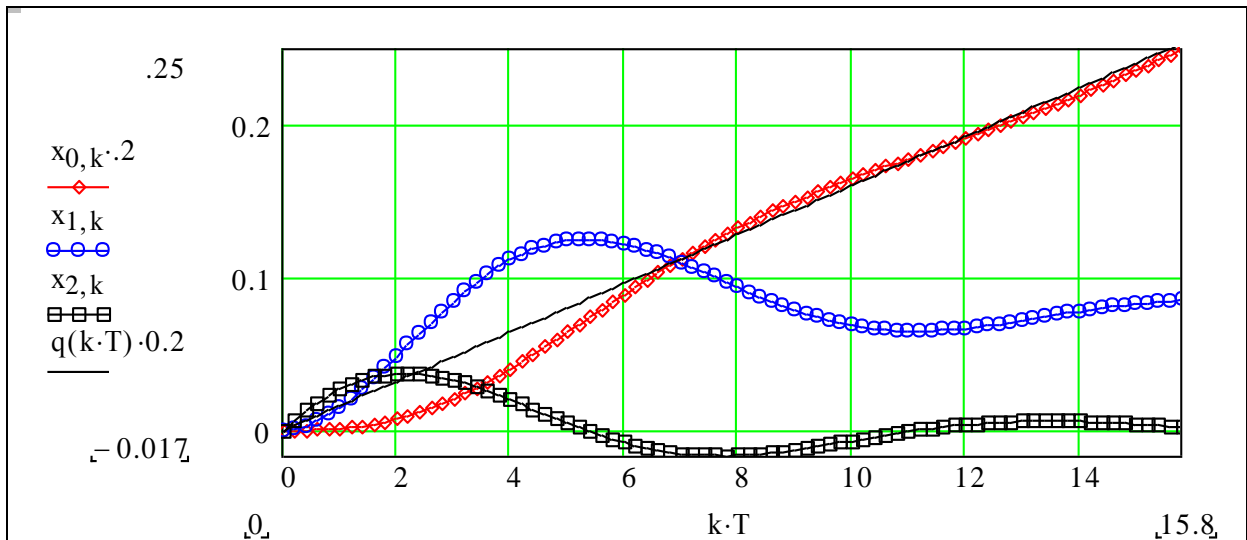
$$q(t) := 0.08 \cdot t$$

$$U_{\text{lin}}(t) := \frac{Tt1}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) + \frac{(kK \cdot Tt2 + 1)}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{kK}{Tt2 \cdot Tt1} \cdot q(t)$$

$$Tt1 \equiv 3$$

$$kK \equiv 1$$

$$x^{(k+1)} := F2(T) \cdot x^{(k)} + G2(T) \cdot B \cdot U_{\text{lin}}(k \cdot T)$$



Бачимо, що САУ без усталеної помилки відпрацьовує лінійно зростаючий сигнал.

Реакція на квадратично зростаючий сигнал

Знову підправляємо вхідний сигнал q і маємо те, що показано.

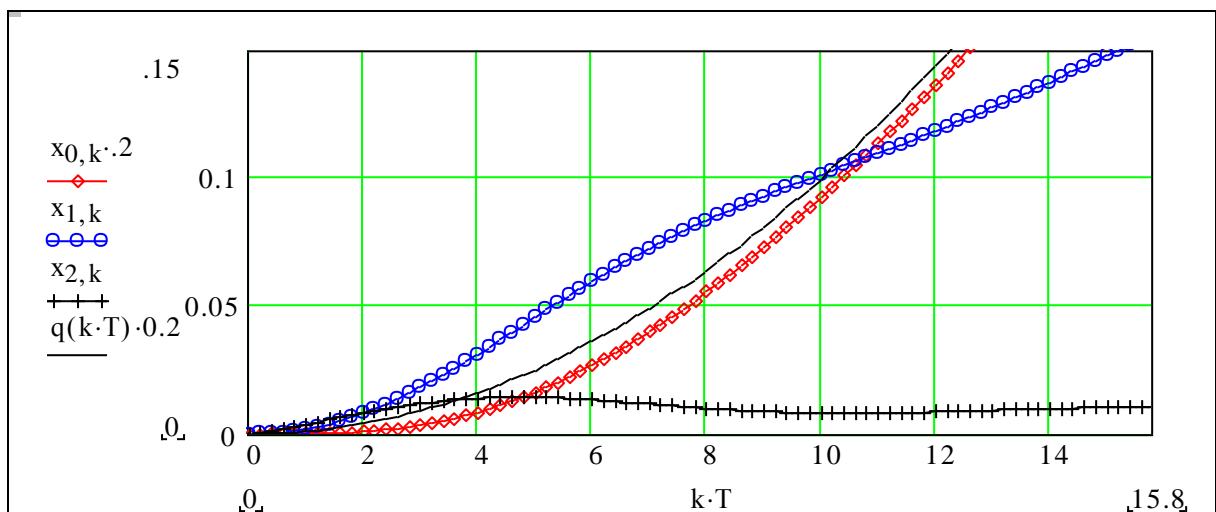
$$q(t) := 0.005 \cdot t^2$$

$$U_{\text{lin}}(t) := \frac{Tt_1}{Tt_2 \cdot Tt_1} \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) + \frac{(kK \cdot Tt_2 + 1)}{Tt_2 \cdot Tt_1} \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{kK}{Tt_2 \cdot Tt_1} \cdot q(t)$$

$$Tt_2 \equiv 6$$

$$kK \equiv 1$$

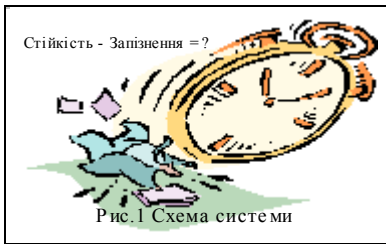
$$x^{(k+1)} := F_2(T) \cdot x^{(k)} + G_2(T) \cdot B \cdot U_{\text{lin}}(k \cdot T)$$



Бачимо, що квадратичний сигнал відпрацьовується з постійної помилкою $2 \cdot Tt_2$

Контрольні запитання

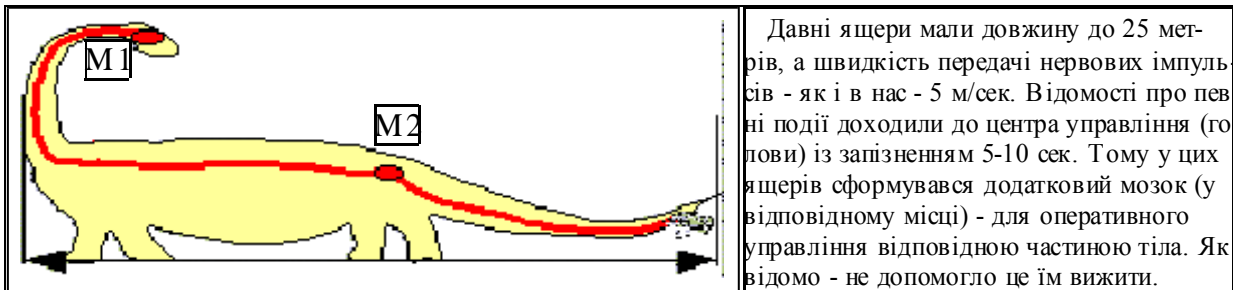
1. Визначте поняття "астатизм", "порядок астатизму".
2. Як визначити усталену помилку САУ?
3. Запишіть передаточну функцію для помилки по вхідному сигналу.
4. Чи можна за передаточною функцією САУ визначити без складних обчислень усталену помилку при постійному вхідному сигналі?



3.3. Дослідження стійкості САУ. Стійкість САУ із запізненням

Вступ

Ціль №1 даної роботи - набуття навичок у аналізі стійкості систем із запізненням. Ціль №2 - освоєння сучасних засобів і технологій автоматизації праці інженера. Сьогодні спеціаліст, коли йому треба розв'язати якусь задачу, знаходить або розробляє зручну діалогову програму для розв'язання **цілого класу задач**. От тому, ціль №3 даної роботи - розробка саме *зручної діалогової програми* для аналізу стійкості систем із запізненням. Але, чи актуальна ця тема для народного господарства, взагалі, і для кожного з нас, зокрема? Розглянемо відповідний актуальний приклад.

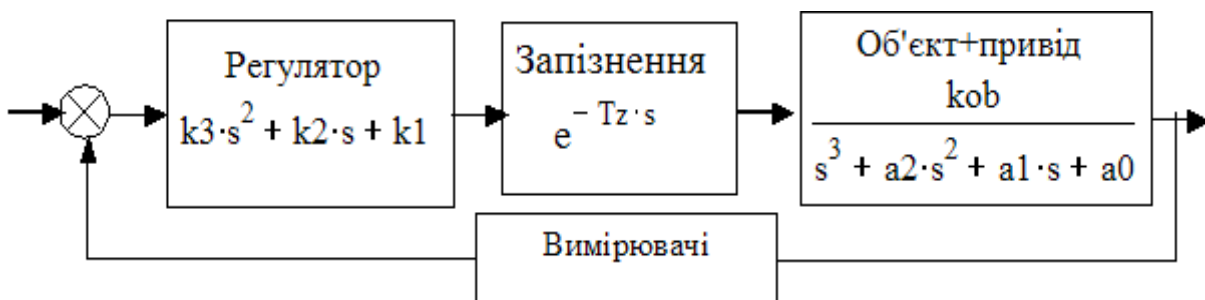


Запізнення в САУ виникає при передачі сигналів по каналах зв'язку в розподілених системах управління, при транспортуванні матеріалів конвеєрами, енергії та тепла трубопроводами, при обробці даних в ЦОМ, у виробництві (реактори, технологічні установки..) і в багатьох інших випадках. Запізнення змінює поведінку динамічної системи - спричиняє до коливань і, навіть, до втрати стійкості. У цій роботі аналіз стійкості систем із запізненням виконується за допомогою критерію стійкості Найквіста. Нагадаємо, що цей критерій відноситься до групи частотних і використовує характеристику, яку легко отримати експериментально або аналітично - амплитудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ) розімкненої САУ.

Рівняння елемента запізнення має вигляд: $X_{вих}(t) = X_{вих}(t - T_z)$.

Передаточна функція елемента запізнення буде: $W_{zap}(s) = 1e^{-T_z s}$, ось чому:

$W_{zap}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$, тому АЧХ елемента запізнення $A(\omega) = 1$; а ФЧХ $\phi(\omega) = -T_z \omega$. Задано структурну схему САУ та передаточні функції її елементів:



На цій структурній схемі елемент запізнення розташований після регулятора. Це можна інтерпретувати, і як запізнення управління і як запізнення в об'єкті. Виникає питання: Чи залежать частотні характеристики та стійкість лінійної САУ від положення елемента управління? В лінійних системах - не залежать.

Завдання

1. Побудувати для заданого варіанта графіки АФЧХ та ЛЧХ системи із запізненням. 8б
2. Визначити граничне запізнення і запаси стійкості альтернативними методами. 14 б
3. Побудувати серії АФЧХ та перехідних процесів для ряду запізнень. 20 б
4. Запропонувати методи компенсації впливу запізнень. 20-70 б

Варіанти параметрів передаточних функцій

vd :=	{	"Варіант:"	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	a0, a1, a2 - параметри об'єкта управління. k1, k2, k3 - параметри регулятора Tz - сумарне запізнення в різних ланках системи.
		"Tz"	1	-2	1	1	0	-1	1	-3	2	0	0	2	1	
		"a1"	1	2	3	2	2	2	2	2	2	0	0	-1	4	
		"a2"	1	-2	3	2	2	2	3	1	2	3	2	1	1	
		"k1"	2	3	0	3	3	2	3	2	1	3	2	3	2	
		"k2"	1	2	0	4	1	2	3	4	5	6	7	8	1	
		"k3"	2	3	2	4	3	1	5	2	2	3	3	4	4	

Параметри a0 := 1 та kob := 1- ОДНАКОВІ ДЛЯ УСІХ ВАРІАНТІВ

Реєстрація. Введіть (в лапках, замість зрачка) своє прізвище **Прб := "Жерстюк В.О."**

Повідомлення = "Ваше прізвище Жерстюк В.О.? Ви впевнені?"

Методичні вказівки до виконання роботи

1. Побудова АФЧХ

Дивимось на структурну схему і записуємо вирази для передаточних функцій елементів САУ: регулятора: об'єкта: та запізнення:

$$W_{reg}(s) := k3 \cdot s^2 + k2 \cdot s + k1$$

$$W_{ob}(s) := \frac{kob}{s^3 + a2 \cdot s^2 + a1 \cdot s + a0}$$

$$W_{zap}(s) := e^{-Tz \cdot s}$$

Отримаємо спочатку характеристики САУ без запізнення. Вони будуть для нас базовими, еталонними. Вплив запізнення ми будемо оцінювати порівнянням характеристик САУ із запізненням з цими еталонними.

Передаточна функція розімкненої САУ без запізнення: $W_{роз}(s) := W_{reg}(s) \cdot W_{ob}(s)$.

$$W_{роз}(s) \rightarrow \frac{(k3 \cdot s^2 + k2 \cdot s + k1)}{(s^3 + a2 \cdot s^2 + a1 \cdot s + 1)} \quad (1)$$

Передаточна функція розімкненої САУ із запізненням:

$$W_{pz}(s) := W_{reg}(s) \cdot W_{ob}(s) \cdot W_{zap}(s)$$

$$W_{p3z}(s) \rightarrow \frac{(k_3 \cdot s^2 + k_2 \cdot s + k_1)}{(s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1)} \cdot \exp(-.35 \cdot s) \quad (2)$$

Для аналізу стійкості за критерієм Найквіста треба побудувати годограф функції $W_{p3z}(j \cdot \omega)$. Це можна зробити двома способами:

Альтернатива 1. Залежність уявної $\text{Im}(W_{p3z}(j \cdot \omega))$ від дійсної частини $\text{Re}(W_{p3z}(j \cdot \omega))$ - графік в декартових координатах, або

Альтернатива 2. Залежність - модуля: $|W_{p3z}(j \cdot \omega)|$ (це АЧХ) від аргумента $\arg(W_{p3z}(j \cdot \omega))$ (це ж ФЧХ) - графік в полярних координатах.

Вводимо згідно з варіантом значення параметрів об'єкта: $a_2:=1$; $a_1:=1.6$; $a_0:=1$; $kob:=1$; параметрів регулятора: $k_3 := 2$; $k_2 := 3.2$; $k_1 := 6$ і запізнення (ритуально, бо дійсне введення далі, на стенді) $T_z = 0.35$.

Тепер коли задано числові значення, записуємо вирази для передаточних функцій (1) і (2), що були отримані за допомогою символічного процесора. Нагадуємо, що ми пишемо програми, програмуємо у мові "cі", але непрямо. За словом "записуємо" стоїть визначення функції користувача, фактично - підпрограми. Передаточна функція розімкненої САУ без запізнення:

$$W_{p3z}(s) := \frac{kob \cdot (k_3 \cdot s^2 + k_2 \cdot s + k_1)}{(s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0)} \quad (3)$$

Передаточна функція розімкненої САУ з запізненням: $j := \sqrt{-1}$

$$W_{p3z}(s) = W_{p3z}(s) \cdot e^{-T_z s} \quad \left| W_{p3z}(s) := \frac{kob \cdot (k_3 \cdot s^2 + k_2 \cdot s + k_1) \cdot e^{-T_z s}}{(s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0)} \right| \quad (4)$$

Записуємо уявні і дійсні частини відповідних передаточних функцій. Тут ми використовуємо вбудовані функції пакета. Наші функції введено в методичних цілях і для скорочення відповідних виразів.

Без запізнення:

$$I(\omega) := \text{Im}(W_{p3z}(j \cdot \omega))$$

$$R(\omega) := \text{Re}(W_{p3z}(j \cdot \omega))$$

З запізненням:

$$I_z(\omega, T_z) := \text{Im}(W_{p3z}(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot T_z})$$

$$R_z(\omega, T_z) := \text{Re}(W_{p3z}(j \cdot \omega) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot T_z})$$

Контроль результатів А тепер визначаємо для контролю уявні і дійсні частини альтернативними способами. *Не довіряйте! Не тільки собі, іншим - теж. І в пакетах те можуть бути помилки і "особливості".*

Амплітуда і фазова частотні характеристики САУ без запізнення

$$A(\omega) := |W_{p3z}(j \cdot \omega)|$$

$$\phi(\omega) := \arg(W_{p3z}(j \cdot \omega))$$

Перша альтернатива. Згадуємо з курсу математики: "модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів множників, аргумент добутку - сумі аргументів множників", тобто:

$$A_1 \cdot e^{j \cdot f_1} \cdot A_2 \cdot e^{j \cdot f_2} \text{ simplify} \rightarrow A_1 \cdot A_2 \cdot \exp[i \cdot (f_1 + f_2)]$$

Для нашого випадку маємо $W_{I\text{proz}}(j, \omega) := A(\omega) \cdot e^{j \cdot \phi(\omega)}$ $W_{I\text{pz}}(j, \omega) := A(\omega) \cdot e^{j \cdot (\phi(\omega) - \omega \cdot Tz)}$

Враховуємо: $a \cdot e^{j \cdot w} = a \cdot \cos(w) + a \cdot j \cdot \sin(w)$

Отримуємо: $Iz(\omega, Tz) := A(\omega) \cdot \sin(\phi(\omega) - \omega \cdot Tz)$ $Rz(\omega, Tz) := A(\omega) \cdot \cos(\phi(\omega) - \omega \cdot Tz)$

Друга альтернатива Вираз $W_{pz}(j \cdot \omega) = W_{proz}(j \cdot \omega) \cdot e^{-Tz \cdot j \cdot \omega}$ можна подати як добуток комплексних чисел: $(a + b \cdot j) \cdot (c + d \cdot j)$ expand $\rightarrow a \cdot c + i \cdot a \cdot d + i \cdot b \cdot c - b \cdot d$.

Використовуємо символний процесор:

$a \cdot c + i \cdot a \cdot d + i \cdot b \cdot c - b \cdot d$ collect, i $\rightarrow (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i + a \cdot c - b \cdot d$. Отримуємо:

$$Iz(\omega, tz) := -R(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot tz) + I(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot tz)$$

$$Rz(\omega, tz) := R(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot tz) + I(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot tz)$$

Перевіряємо, дивимось чи збігаються результати? Багатоверсійні обчислення не є ритуалом - завдяки цьому контролю знайдено загублений мінус у базовому виразі.

Контроль №1 - для вас. Знайдіть і виправте помилку у виразах.

$$Iz(1, .2) = -5.474$$

$$Rz(1, .2) = 3.903$$

$$Iz(1, .2) = -7.593 \quad I2z(1, .2) = -7.593 \quad Rz(1, .2) = 3.903 \quad R2z(1, 0.2) = 3.903$$

Повідомлення = "Ваше прізвище Жерстюк В.О.? Ви впевнені?"

Результат_пошуку_помилки= "завдання не виконано"

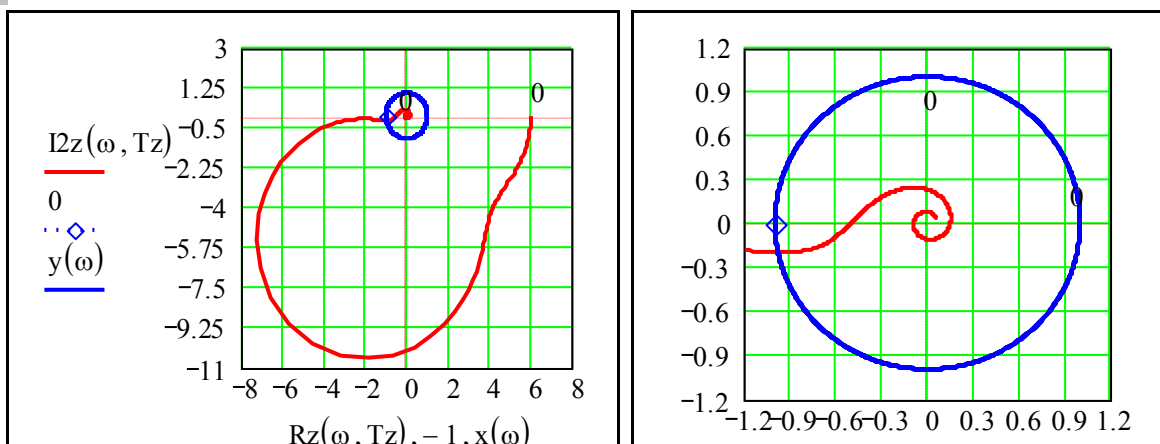
Побудуємо графіки АФЧХ системи із запізненням. Вводимо послідовно: допоміжні змінні для побудови одиничного кола, діапазон частот і, головне, - запізнення

$$y(\omega) := \sin(\omega) \quad x(\omega) := \cos(\omega) \quad \omega := 0, .02.. 30 \quad \text{ORIGIN} := 1 \quad Tz \equiv .35$$

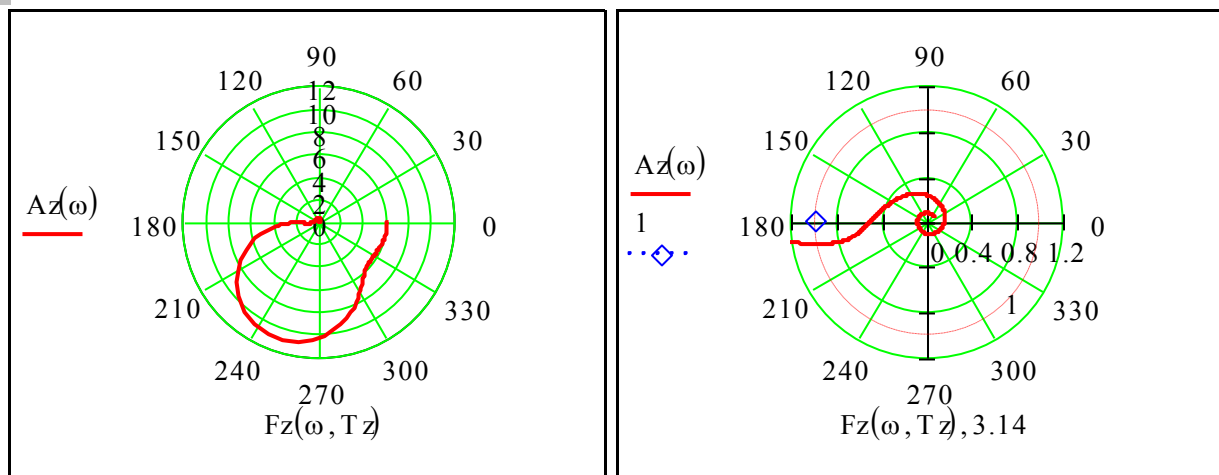
Записуємо робочі формули для частотних характеристик $A(\omega)$, $F(\omega)$.

$$A(\omega) := |W_{proz}(i \cdot \omega)| \quad Az(\omega) := A(\omega) \quad Az(\omega) := |W_{raz}(i \cdot \omega) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot tz)| \quad (5)$$

$$F(\omega) := \arg(W_{proz}(i \cdot \omega)) \quad Fz(\omega, Tz) := F(\omega) - Tz \cdot \omega \quad Fz(\omega) := \arg(W_{raz}(i \cdot \omega) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot tz))$$



Контроль №2 - для вас. Побудуйте на цих графіках також частотні характеристики без запізнення - для попереднього порівняльного аналізу.



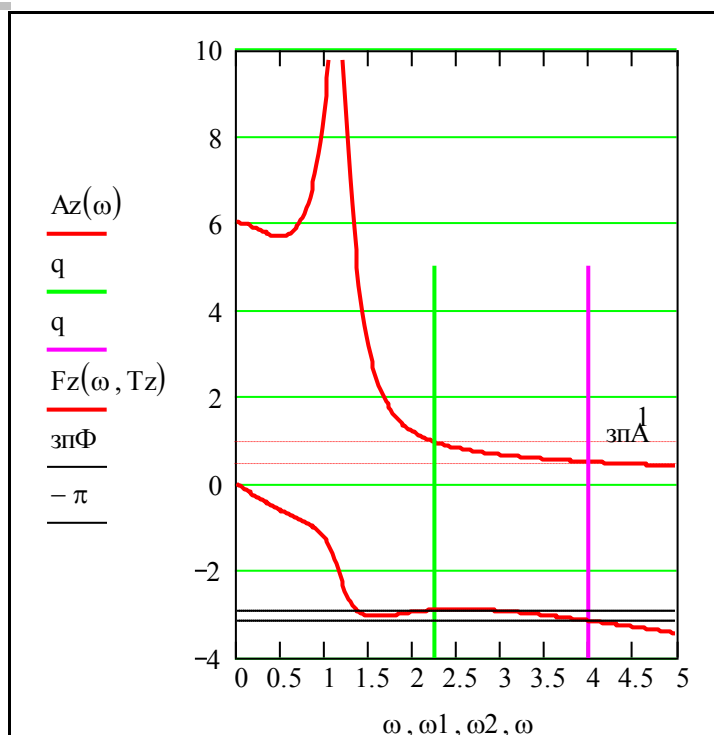
Тут подана альтернативна форма побудови графіків - у полярних координатах.
Контроль №3 - для вас. Побудуйте на цих графіках маркери: $mark1 := 33$; $mark2 := 3.14$, що проходять через точки АФЧХ, де $F(\omega) = -180^\circ$, $A(\omega) = 1$.

2а. Визначення запасів стійкості за амплітудою і фазою

Спочатку, для кращого освоєння та осмислення, визначимо запаси стійкості пошуковим методом (=вручну), а потім - як результат розв'язання певних рівнянь

$$\omega_1 := 2.25 \quad \omega_2 := 4 \quad зпФ := -2.9 \quad зпА := 0.51 \quad q := -10, -9.8..5 \quad Tz = 0.35$$

$$запасФ := -(-\pi - зпФ) \quad запасА := 1 - зпА \quad запасФ = 0.242 \quad запасА = 0.49$$



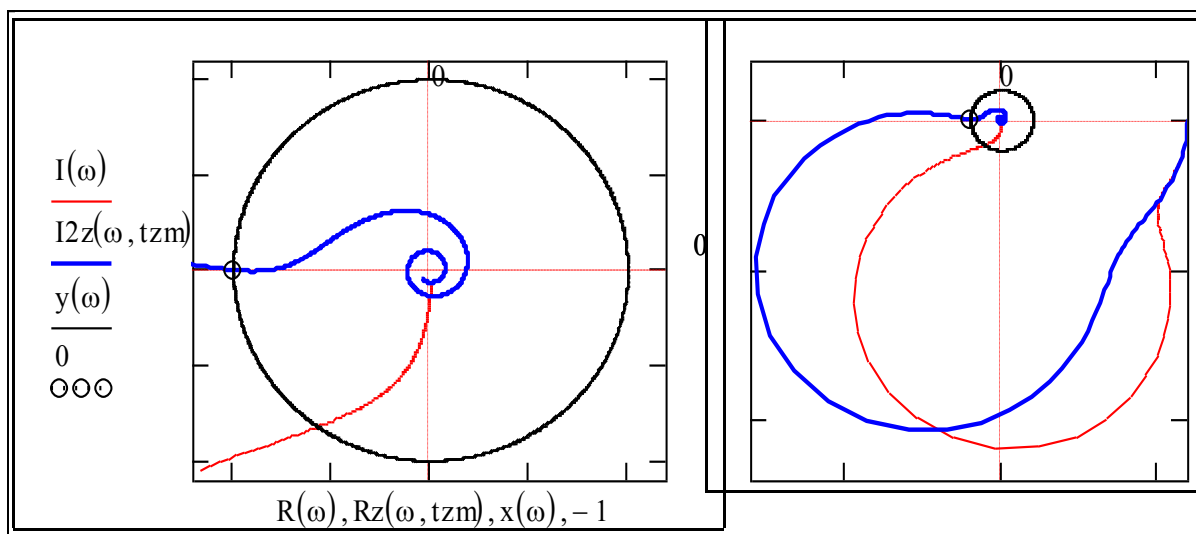
Контроль №4 - для вас. У вашому розпорядженні чотири параметри - ω_1 , ω_2 , $зпФ$, $зпА$. Що це, як розшифровуються назви цих змінних - ви повинні знати. Тут же (вище) виводяться запаси стійкості по Фазі і запаси стійкості по Амплітуді.
Ваша задача - змінювати положення вертикальних і горизонтальних прямих (маркерів) так, щоб вони пройшли через певні характерні точки. (Зелену - на одиницю АЧХ червону - на останній ФЧХ) По координатах цих точок обчислюються запаси стійкості. Їх треба визначити з максимальною точністю. Як це зробити - змінити масштаби на графіках та ін. - **Ваші проблеми** Там, далі буде виставлена оцінка за це завдання.

Увага – в електронній книзі, праворуч, за полями АЧХ, ФЧХ подані на окремих графіках.

2б. Визначення максимального запізнення

Типовою задачею аналізу систем автоматичного управління є визначення граничного, тобто максимального запізнення, при якому система ще стійка (знаходиться на границі стійкості). Для систем невисокого порядку максимальне запізнення можна визначити у вигляді аналітичних виразів - формул, для складніших систем можна знайти його числовими методами. Для будь-яких систем, які можна моделювати на ЦОМ, максимальне запізнення можна визначити експериментально (обчислювальним експериментом).

Контроль №5 - для Вас. У вашому розпорядженні один параметр - tzm - максимальне запізнення. Ваша задача - підібрати значення цієї змінної так, щоб АФЧХ проходила через певну точку (що це за точка і чому через цю точку - ви повинні знати = дивись критерій Найквіста). Значення tzm треба знайти з максимальною точністю. Там, далі вам буде виставлена оцінка за це завдання. $tzm := .44$, $Tz = 0.35$.



Проаналізуємо те, що отримали. Якщо запізнення має розкид, або відоме з певним допуском, то розкид, або допуск повинні не перевищувати $(tzm - Tz) \div Tz = 26\%$ - інакше система стає нестійкою ($a \div b$ - це альтернативна форма операції "розділити").

2в. Визначення максимального запізнення числовим методом

Подивимось на графіки вгорі, згадаємо висновок і формулювання критерію Найквіста і запишемо умови, що виконуються для граничної точки. Словесно це: 1) "уявна складова на критичній частоті і при критичному запізненні дорівнює нулю"; 2) "дійсна складова дорівнює -1. Для розв'язання цієї системи рівнянь використовуємо вбудовану функцію розв'язання систем алгебраїчних рівнянь.

Зуваження. Наша система рівнянь має декілька розв'язань. Треба задати початкові значення змінних поближче до розв'язань. Оці значення можна знайти на відповідних графіках (де саме?). Вводимо початкові значення: $tZ := 0.4$; $w := 3$

Дано: система рівнянь Given $I2z(w, tZ) = 0$; $Rz(w, tZ) = -1$

$$\text{Що шукаємо: } \begin{pmatrix} \omega 1s \\ T 1z \end{pmatrix} := \text{Find}(w, tZ). \text{ Відповідь: } \begin{pmatrix} \omega 1s \\ T 1z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.176 \\ 0.443 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Контроль №6 - для Вас. Далі подано ще дві альтернативи знаходження максимального запізнення (закрито паролем). Напишіть самостійно ці модулі виходячи з словесних описів рівнянь.

Контроль обчислень. Подаємо альтернативне розв'язання на базі іншої системи рівнянь. Записуємо умови для координат тієї ж точки, але в полярних координатах. Ось словесне формулювання: 1) модуль дорівнює одиниці; 2) фаза дорівнює $-\pi$.

Записуємо розв'язувальний блок `Giver` $A(w) = 1$; $Fz(w, tZ) = -\pi$

Що шукаємо: $\begin{pmatrix} \omega 2s \\ T2z \end{pmatrix} := \text{Find}(w, tZ)$; Відповідь: $\begin{pmatrix} \omega 2s \\ T2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.176 \\ 0.443 \end{pmatrix}$ (6)

Контроль обчислень. Подаємо ще одне альтернативне розв'язання на базі вбудованої функції пакета `root(вираз(x),x)` для знаходження нульового кореня рівняння: $\text{вираз}(x) = 0$. Спочатку знаходимо частоту $\omega 1r$, на якій АЧХ дорівнює 1 (АЧХ не залежить від запізнення). Потім записуємо вираз для ФЧХ системи із запізненням (5) $Fz(\omega, Tz) = F(\omega) - Tz\omega$, підставляємо туди знайдену частоту $\omega 1r$ і визначаємо запізнення $T2z$, при якому ФЧХ дорівнює $-\pi$. Можна знайти явний вираз за допомогою символного процесора

$Ff(w1) - T2z w1 = -\pi$ solve, $w1 \rightarrow$ \blacksquare , але зробимо це за допомогою функцій `root(.)`

$\omega 3s := \text{root}[(A(\omega 1) - 1), \omega 1]$ $T3z := \text{root}[(F(\omega 3s) - Tz\omega 3s + \pi), Tz]$

Тепер виводимо результати отримані альтернативними методами. Збігається? - ОК

$\omega 1s = 2.611$ $\omega 2s = 2.611$ $\omega 3s = 2.611$ $T1z = 0.49$ $T2z = 0.49$ $T3z = 0.49$

$\omega 1 = 2.25$ \Leftarrow Оце знайдено вами \Rightarrow $tzm = 0.44$

Визначаємо частоту, на якій ФЧХ дорівнює $-\pi$: і порівнюємо з тим, що визначено пошуком - по графіках $\omega 2r := \text{root}[(Fz(\omega 1, Tz) + \pi), \omega 1]$; $\omega 2r = 3.986$; $\omega 2 = 4$.

Визначаємо запаси стійкості по частоті і амплітуді та порівнюємо з тим, що визначено пошуком

$zpF := \pi + Fz(\omega 1s, Tz)$ $zpF = 0.366$ **запасФ = 0.242**

$zpA := 1 - A(\omega 2r)$ $zpA = 0.458$ **запасА = 0.49**

Запитання. Звідки взяли ці формули? Подивіться на графіки підрозділу 2а "Визначення запасів стійкості за амплітудою і фазою". Очевидно, що:

запас по фазі - це скільки ще залишається до зсуву по фазі у $-\pi$, коли АЧХ = 1;

запас по амплітуді - це скільки ще залишається АЧХ до 1, коли ФЧХ = $-\pi$.

Результат пошуку помилки= "завдання не виконано"

Тут оцінюються: пошук помилки в документі, точність знаходження значень $\omega 1, tzm, \omega 2$, запасФ, запасА. Оцінка за програмні модулі - окремо.

remiz2 =	1	13.8	%
	2	10.3	
	3	13.8	
	4	34.1	
	5	6.9	

Оцінка за настроєння = 8 балів

Додаткові бали можна набрати виконанням факультативних завдань.

Контрольні запитання

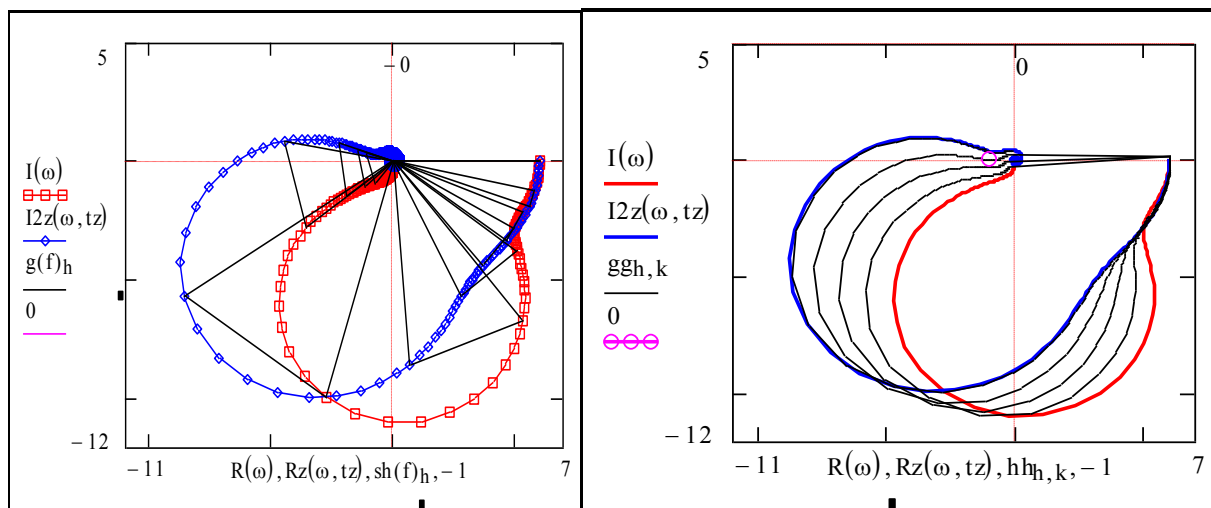
1. Визначення поняття стійкості за Ляпуновим.
2. Необхідна і достатня умови стійкості лінійних динамічних систем.
3. Формулювання критерію Найквіста.
4. Нарисуйте, не роздумуючи, АЧХ та ФЧХ елемента запізнення.
5. Визначення запасів стійкості по фазі, по амплітуді.
7. Що таке "граничне запізнення" і як його визначити?
8. Нарисуйте, не роздумуючи, АФЧХ системи з граничним запізненням.
9. Нарисуйте на АФЧХ запаси стійкості по фазі і амплітуді.
10. Нарисуйте на АЧХ та ФЧХ запаси стійкості по фазі і амплітуді.
11. Наведіть приклади з практики, де має місце запізнення.

Факультатив

Побудова серій АФЧХ та перехідних процесів для ряду запізнень

На поданих нижче графіках показано, як саме еволюціонує АФЧХ САУ при збільшенні запізнення, як пов'язані точки з однаковими частотами для АФЧХ САУ із запізненням і без. Робочі програми закриті**, подано тільки результати їх роботи. Це для вас технічні завдання на розробку своїх версій програм що будують саме такі серії графіків.

$$\begin{aligned}
 &tz := .6 \quad h := 1..4 \quad f := 0, .2..2 \quad T_{sh} := .15 \cdot h \quad k := 1..150 \\
 &sh(\omega) := \begin{pmatrix} 0 \\ R(\omega) \\ Rz(\omega, tz) \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(\omega) := \begin{pmatrix} 0 \\ I(\omega) \\ I2z(\omega, tz) \\ 0 \end{pmatrix} \quad ff_k := -.05 + .03 \cdot k \\
 &gg_{h,k} := I2z(ff_k, T_{sh}) \quad hh_{h,k} := Rz(ff_k, T_{sh})
 \end{aligned}$$



Дивлячись на зразки, розробіть програми для побудови таких серій графіків.

4

Оцінка якості регулювання по перехідних процесах. Альтернативні критерії

У цьому розділі розглядаються:

- ✓ Альтернативні інтегральні критерії оптимальності САУ.
- ✓ Показники якості перехідних процесів – тривалість, викид та ін.
- ✓ Порівняльний аналіз варіантів САУ оптимальних за різними критеріями.

Після вивчення цього розділу ви **зможете:**

1. Обчислювати показники перехідного процесу: тривалість, перерегулювання (викид), максимальне зусилля (перенавантаження).
2. Обчислювати інтегральні критерії якості перехідного процесу.
3. Вибирати потрібний для конкретної ситуації управління еталонний перехідний процес – з мінімальною тривалістю, з мінімальним викидом, з мінімальним перенавантаженням, з мінімальною інтегральною квадратичною помилкою та ін.
4. Виконувати порівняльний аналіз альтернативних варіантів САУ за комплексом інтегральних критеріїв і показників якості регулювання.
5. Будувати документи - засоби автоматизації праці розробника систем автоматичного управління – універсальні, зручні з комплексним числовим і графічним поданням вхідної і вихідної інформації.
6. Дати визначення термінам:

1. Перехідний процес.	6. Стандартні коефіцієнти.
2. Тривалість перехідного процесу.	7. Стандартний розподіл коренів.
3. Викид (перерегулювання).	8. Розподіл з кратними коренями.
4. Інтегральна квадратична помилка.	9. Розподіл Баттерворта.
5. Інтегральна зважена помилка.	10. Підмножина Парето (недомінованих варіантів).



4.1. Оцінка якості регулювання по перехідних процесах. Альтернативи

Вступ

Ціль даної роботи - набуття стійкої природної орієнтації в проблемі оптимізації взагалі і проблемі оптимізації САУ, зокрема.

Оцінка якості регулювання системою автоматичного управління (САУ) по перехідних процесах - один із елементів оцінки САУ при виборі кращого варіанта з множини альтернатив. Під перехідним процесом у даному розділі маємо на увазі реакцію САУ на ступінчастий вхідний сигнал. Оцінка якості САУ залежить від вимог до системи, що залежать від її призначення. Ці вимоги можуть бути подані у вигляді ідеальної або еталонної САУ. Вимоги до САУ можуть бути задані у вигляді **критеріїв оптимальності**, які бажано максимізувати чи мінімізувати. Часто критерії є функціями таких параметрів перехідного процесу (ПП):

- тривалості ПП (=САУ, оптимальні за швидкодією);
- перерегулювання, швидкостей, прискорень (= САУ, оптимальні за перенавантаженнями, що діють на об'єкт);
- похибки в усталеному стані (= САУ, астатичні, інваріантні до різних збурень);
- інтегральних квадратичних помилок (= САУ, оптимальні для захисту дисертацій).

Для лінійних САУ, при певних критеріях можна отримати аналітичні розв'язання у вигляді **потрібних значень коефіцієнтів характеристичного рівняння** замкненої САУ. На цьому базуються **методи модального управління**, зокрема, **метод стандартних коефіцієнтів**. Типові критерії відображують якийсь один аспект вимог до САУ.

В даному документі виконується дещо абсурдистська задача порівняння різних критеріїв оптимальності, і вибір "оптимального критерію оптимальності". Але такі ситуації часто зустрічаються у житті. Наприклад, на чемпіонатах з гімнастики спочатку судді судять спортсменів, потім комісія судить суддів - наскільки об'єктивно кожен з них (згідно з власним критерієм) розставив спортсменів по сходах (до слави).

Розглядаємо чотири альтернативи САУ:

- САУ з мінімальними прискореннями в ПП і мінімальним перерегулюванням;
- САУ з розподіленням Баттерворта, що для усіх мод має однакові власні частоти;
- САУ оптимальна за квадратичним інтегральним критерієм;
- САУ оптимальна за інтегральним зваженим критерієм.

На практиці САУ оцінюють за такими показниками-критеріями:

- тривалість перехідного процесу - T_r ;
- викид (максимальне перерегулювання) - h_m ;
- максимальне прискорення - u_m ;
- інтегральна квадратична помилка - I_{qv} ;
- інтегральна (від модуля) зважена помилка - I_{mz} ;
- стійкість перехідного процесу до варіацій параметрів САУ - Gr_b .

Обчислимо для кожного варіанта САУ значення усіх цих критеріїв і проведемо

порівняльний аналіз і вибір. Спочатку отримаємо еквівалентну дискретну математичну модель САУ, що задана диференціальним рівнянням третього порядку.

1. Отримання базової математичної моделі САУ

Розглядаємо диференціальне рівняння у безрозмірній формі Вишнеградського. В цій формі і перший і останній коефіцієнти диференціальних рівнянь - одиничні.

Записуємо задане диференціальне рівняння САУ:
$$\frac{d^3}{dt^3}x + a_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}x + a_1 \cdot \frac{d}{dt}x + a_0 \cdot x = 0.$$

Записуємо початкові значення параметрів САУ: $a_2 := 3; a_1 := 3; a_0 := 1;$ і значення кроку квантування $T := 0.2$. Подаємо модель САУ у формі Коші, для чого вводимо нові змінні: $x_1 = x, x_2 = dx/dt, x_3 = d^2x/dt^2$, що утворюють вектор стану $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Тоді рівняння можна подати у матрично-векторній формі: $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, де

$$\mathbf{A}(a_2, a_1, a_0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо наближення перехідної функції стану 1-го і 2-го порядків.

$$F_1(a_2, a_1, a_0, T) := \mathbf{I} + \mathbf{A}(a_2, a_1, a_0) \cdot T$$

$$F_2(a_2, a_1, a_0, T) := \mathbf{I} + \mathbf{A}(a_2, a_1, a_0) \cdot T + \frac{\mathbf{A}(a_2, a_1, a_0)^2 \cdot T^2}{2!}.$$

Виводимо для контролю матриці перехідних функцій, порівнюємо. $\text{ORIGIN} := 1$

$$F_1(a_2, a_1, a_0, T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ -0.2 & -0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \quad F_2(a_2, a_1, a_0, T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.02 \\ -0.02 & 0.94 & 0.14 \\ -0.14 & -0.44 & 0.52 \end{pmatrix}$$

Перехідна функція зв'язує значення векторів стану для двох моментів часу - наприклад, t і $t + T$. Далі записані рівняння для обчислення перехідних процесів альтернативних варіантів САУ. Ці рівняння відрізняються параметрами a_2, a_1, a_0 - "стандартними коефіцієнтами". Значення стандартних коефіцієнтів взято з літератури [1-5]. Задаємо початкові умови для всіх варіантів, крок обчислень, період моделювання.

$$x_1^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_4^{(1)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Period} := 10 & N := \frac{\text{Period}}{T} \\ T := .25 \\ h := 1..N & N = 50 \end{matrix}$$

Записуємо рівняння чотирьох процесів:

- 1) з кратними коренями (мінімальний (нульовий) викид, мінімальні прискорення в ПП);
- 2) з розподіленням Баттерворта, що дає процес з рівними власними частотами;

- 3) з розподіленням, оптимальним за критерієм $J_1 = \int_0^{T_k} x(t)^2 dt;$

4) з розподіленням, оптимальним за критерієм $J_2 = \int_0^{T_k} |x(t)| \cdot t \, dt$.

В цих інтегральних критеріях $x(t)$ - поточна помилка в ПП.

$$x1^{<h+1>} := F2(3, 3, 1, T) \cdot x1^{<h>}$$

$$x3^{<h+1>} := F2(1, 2, 1, T) \cdot x3^{<h>}$$

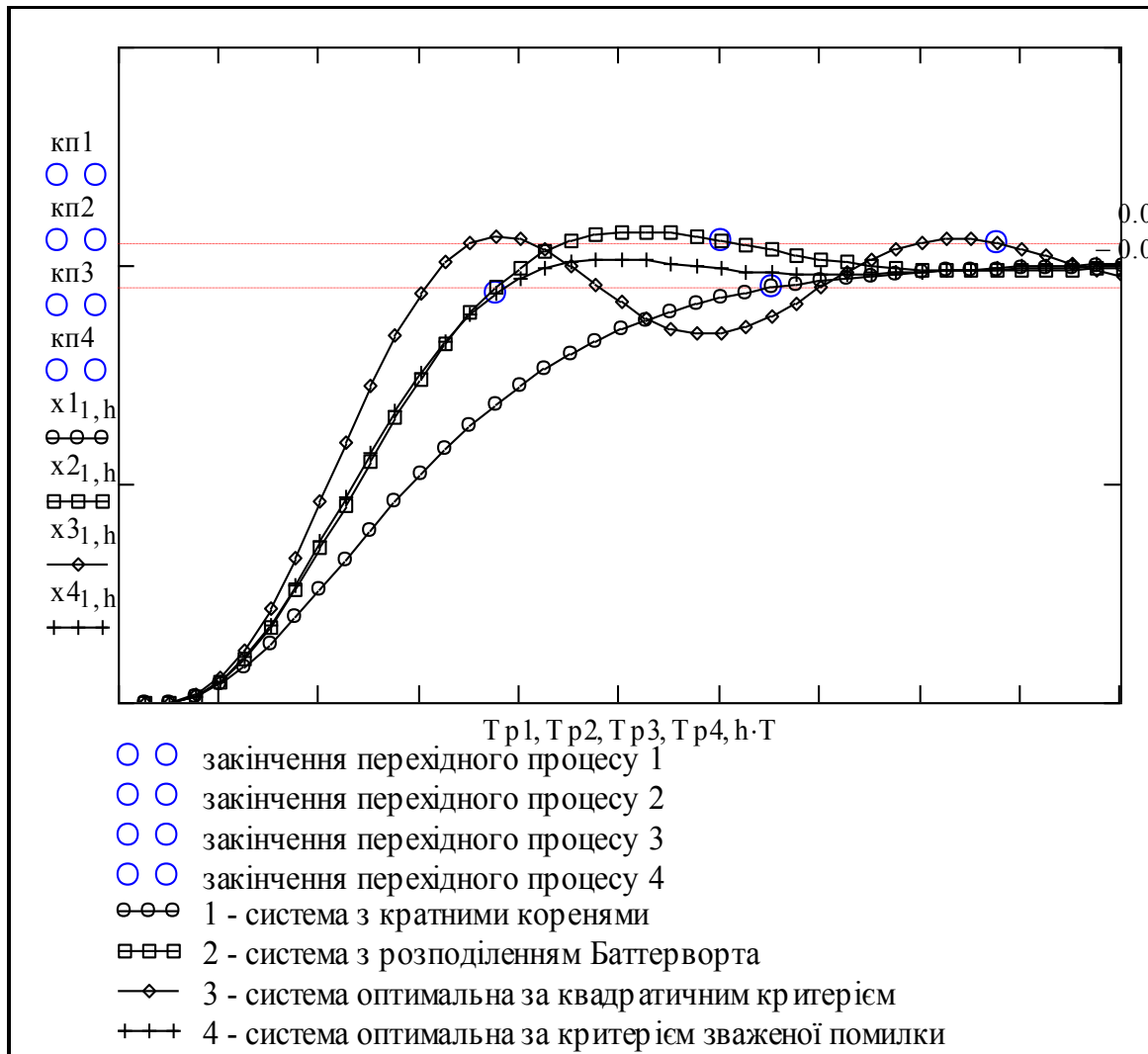
$$x2^{<h+1>} := F2(2, 2, 1, T) \cdot x2^{<h>}$$

$$x4^{<h+1>} := F2(1.75, 2.15, 1, T) \cdot x4^{<h>}$$

2. Обчислення показників якості перехідного процесу

Конструюємо вираз (алгоритм) для обчислення **тривалості перехідного процесу** - T_{pp} . Виходимо з визначення цього поняття, і можливостей пакету - використовуємо функції $if(.)$ та $max(.)$. **Можливі інші альтернативи**. Вводимо: $z := 40$; $k := N, N - 1 \dots 8$.

$$T_{ppk} := if(|x1_{1,k}| > .05, k \cdot T, 0); T_{p1} := max(T_{pp}); \boxed{k_{p1} := x1_{1, \text{round}\left(\frac{T_{p1}}{T}\right)}} .$$



На цьому графіку подані перехідні процеси оптимальні за альтернативними критеріями.

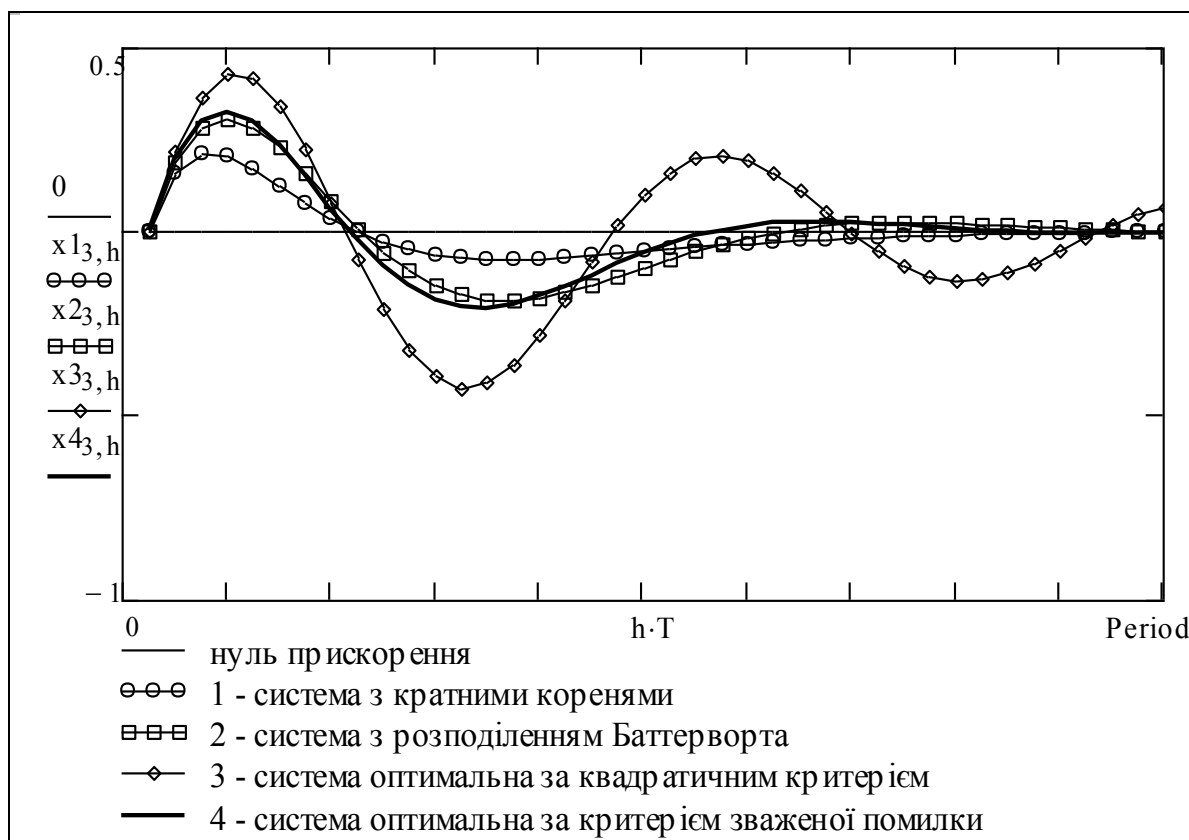
Нагадаємо, що конкретні програми і формули - тільки засоби для досягнення певної цілі. Наприклад, нам треба визначити тривалість ПП - момент часу, після якого координата вже не виходить з певного допуску, наприклад, $-5\% < x_p < +5\%$. Ми беремо досить великий період моделювання, обчислюємо процес. Потім на масиві даних цього процесу знаходимо усі моменти часу, коли модуль помилки перевищує допуск. А потім на множині цих моментів знаходимо максимальний - це і є тривалість ПП.

Може виникнути питання, що робить така дивна конструкція:
$$\text{кп1} := x1_{1, \text{round}\left(\frac{T_{p1}}{T}\right)} ?$$

Це більше, ніж просто: а) $\text{round}\left(\frac{T_{p1}}{T}\right) = 26$ - це номер кроку, коли закінчується ПП, б) $\text{round}()$ - це функція округлення; в) $x1_{1,24} = -7.531\%$ - це значення координати в момент T_{p1} - закінчення ПП, формально це елемент масива з координатами (1, 24). Нам це потрібно, щоб на графіку виділити точку закінчення ПП.

Може виникнути питання, що то за лінія над графіком? Це теж більше, ніж просто: знак сколапсованої зони, де обчислюються тривалості ПП для процесів 2, 3, 4.

Будуємо графіки для прискорень (для об'єкта управління - перевантажень, сил).



Бачимо, що найбільш "обережна" і економна система з кратними коренями, найгірша - оптимальна за інтегральним квадратичним критерієм. Знаходимо максимальні значення координат (= перерегулювання), та прискорень для альтернативних систем.

$$\begin{aligned} v_h &:= x1_{3,h} & um1 &:= \max(v) & v_h &:= x2_{3,h} & um2 &:= \max(v) & um1 &= 0.209 & um2 &= 0.304 \\ v_h &:= x3_{3,h} & um3 &:= \max(v) & v_h &:= x4_{3,h} & um4 &:= \max(v) & um3 &= 0.424 & um4 &= 0.323 \end{aligned}$$

$$v_h := x_{1,h} \quad hm1 := \max(v) \quad v_h := x_{2,h} \quad hm2 := \max(v) \quad hm1 = -0 \quad hm2 = 0.076$$

$$v_h := x_{3,h} \quad hm3 := \max(v) \quad v_h := x_{4,h} \quad hm4 := \max(v) \quad hm3 = 0.065 \quad hm4 = 0.013$$

Обчислюємо значення критеріїв K_{qv} і K_{mz} . Оскільки замість неперервних функцій $x(t)$ маємо $x[h \cdot T]$ (у Mathcad це індексована змінна x_h), то замінюємо інтеграли на суми. "Фізичний смисл" критеріїв можна бачити по їх виразах. Квадратичний критерій відрізняється від інших тим, що тільки для нього існують аналітичні розв'язання варіаційної задачі синтезу. Іноді він є природним для певної задачі, іноді - навпаки, але ж такий зручний!

$$K1_{qv} := \sum_h (x_{1,h})^2 \quad K3_{qv} := \sum_h (x_{3,h})^2 \quad K1_{mz} := \sum_h |x_{1,h}| \cdot h \cdot T \quad K3_{mz} := \sum_h |x_{3,h}| \cdot h \cdot T$$

$$K2_{qv} := \sum_h (x_{2,h})^2 \quad K4_{qv} := \sum_h (x_{4,h})^2 \quad K2_{mz} := \sum_h |x_{2,h}| \cdot h \cdot T \quad K4_{mz} := \sum_h |x_{4,h}| \cdot h \cdot T$$

Виводимо значення критеріїв для чотирьох варіантів САУ.

$$K1_{qv} = 8.73 \quad K2_{qv} = 7.13 \quad K3_{qv} = 6.46 \quad K4_{qv} = 6.99$$

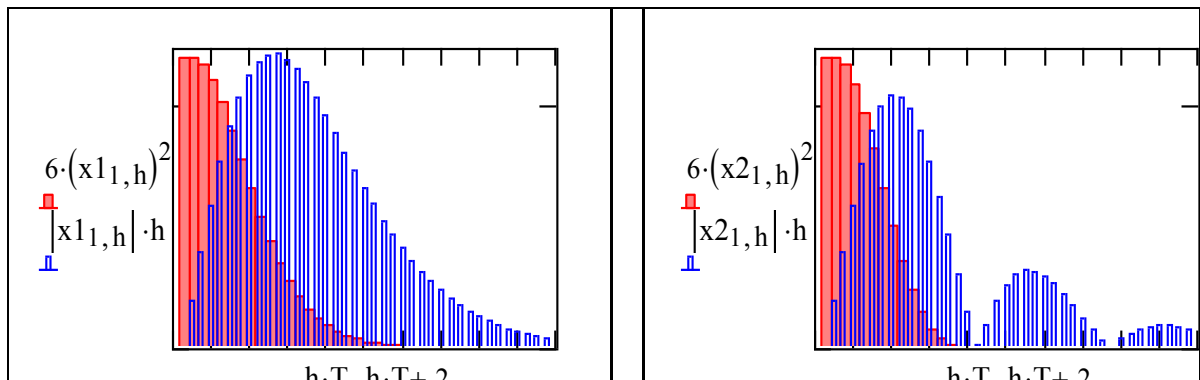
$$K_{qv} = \int_0^{tk} (x(t))^2 dt \quad K_{mz} = \int_0^{tk} |x(t)| \cdot t dt$$

$$K1_{mz} = 27.16 \quad K2_{mz} = 17.21 \quad K3_{mz} = 22.81 \quad K4_{mz} = 14.485$$

Щоб побачити суть інтегральних критеріїв, подаємо графіки підінтегральних виразів.

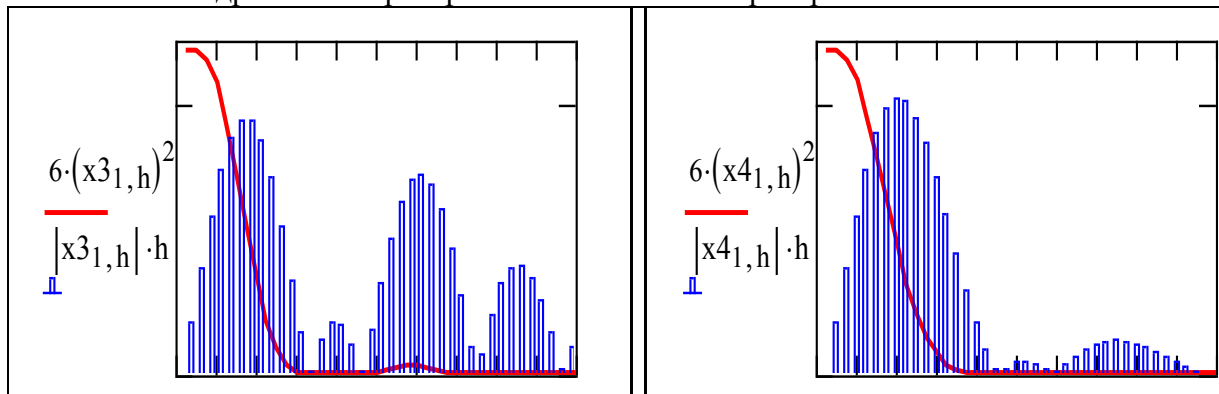
1. Кратні корені

2. Розподіл Баттерворта



3. Квадратичний критерій

4. Критерій зваженої помилки



Тепер, коли обчислені усі критерії для всіх варіантів, сформуємо з них матрицю **K**, кожен рядок якої - значення усіх критеріїв для відповідного варіанта, а стовпчик – значення відповідного критерію для усіх варіантів.

$$\begin{aligned}
 i := 1..4 \quad j := 1..5 \quad K_{1,1} &:= \text{Tp1} \quad K_{1,2} := 0 \quad K_{1,3} := \text{um1} \quad K_{1,4} := \text{K1qv} \quad K_{1,5} := \text{K1mz} \\
 K_{2,1} &:= \text{Tp2} \quad K_{2,2} := \text{hm2} \quad K_{2,3} := \text{um2} \quad K_{2,4} := \text{K2qv} \quad K_{2,5} := \text{K2mz} \\
 K_{3,1} &:= \text{Tp3} \quad K_{3,2} := \text{hm3} \quad K_{3,3} := \text{um3} \quad K_{3,4} := \text{K3qv} \quad K_{3,5} := \text{K3mz} \\
 K_{4,1} &:= \text{Tp4} \quad K_{4,2} := \text{hm4} \quad K_{4,3} := \text{um4} \quad K_{4,4} := \text{K4qv} \quad K_{4,5} := \text{K4mz}
 \end{aligned}$$

$$K = \begin{pmatrix} 6.5 & 0 & 0.209 & 8.731 & 27.162 \\ 6 & 0.076 & 0.304 & 7.134 & 17.208 \\ 8.75 & 0.065 & 0.424 & 6.461 & 22.81 \\ 3.75 & 0.013 & 0.323 & 6.986 & 14.485 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \max(K^{(1)}) &= 8.75 & \max(K^{(2)}) &= 0.076 \\ \max(K^{(3)}) &= 0.424 & \max(K^{(4)}) &= 8.731 \end{aligned}$$

Нормуємо значення критеріїв відносно їх максимального значення

$$K_{\text{norm}}^{(j)} := \frac{K^{(j)}}{\max(K^{(j)})} \quad K_{\text{norm}} = \begin{pmatrix} 0.743 & 0 & 0.492 & 1 & 1 \\ 0.686 & 1 & 0.716 & 0.817 & 0.634 \\ 1 & 0.856 & 1 & 0.74 & 0.84 \\ 0.429 & 0.176 & 0.762 & 0.8 & 0.533 \end{pmatrix}$$

3. Вибір варіанта САУ за комплексним критерієм

Тепер, коли маємо нормовані значення критеріїв, можна науково відповісти на питання **яка ж система краща?** Задаємо коефіцієнти ваги a_j для кожного з критеріїв, ну, наприклад $a_j = 1$. Обчислюємо комплексний критерій і виводимо його значення (пам'ятаємо, що всі критерії є критеріями мінімізації (= чим менше, тим краще)).

Порівнюємо системи, пам'ятаючи, що при інших пріоритетах (інших значеннях a_j) результати будуть іншими. Це результат того, що ні один варіант не є **домінуючим** - кращим за всіма критеріями, також ні один варіант не є **домінованим**.

В нашому випадку кожний з варіантів САУ є найкращим хоч по одному з критеріїв. Це означає, що можна так підібрати коефіцієнти a_j , що комплексно кращим буде який завгодно з варіантів.

Можна сказати, що такі альтернативи є **множиною Парето** - ні один з варіантів не є **кращим одразу за усіма критеріями**.

Обчислюємо глобальний критерій та матрицю нормованих локальних критеріїв для усіх варіантів САУ

$$a_j := 1 \quad \text{Sum}K_i := \sum_j K_{\text{norm},j} \cdot a_j \quad KK := K_{\text{norm}}^T$$

SumK =

	1
1	3.24
2	3.85
3	4.44
4	2.7

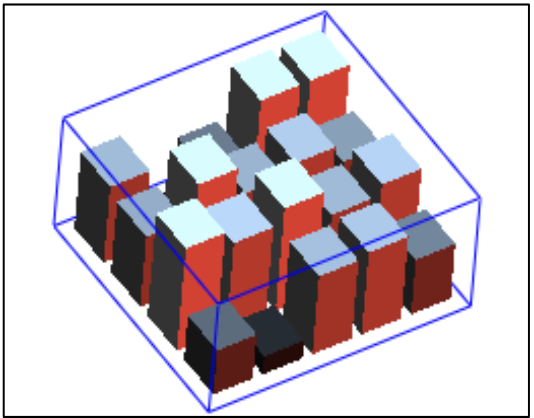
Подаємо значення комплексного критерію та ранг для усіх варіантів

- САУ з кратними коренями **2** місце
- САУ з розподілом Баттерворта **3** місце
- САУ оптимальна за інтегральним квадратичним критерієм **4** місце
- САУ оптимальна за інтегральним зваженим критерієм **1** місце

Подаємо також матрицю нормованих критеріїв - у числах та у кольорах (значення критерію відображається інтенсивністю: чим менше, чим темніше - тим краще).

Knorm =		1	2	3	4	5
	1	0.74	0	0.49	1	1
	2	0.69	1	0.72	0.82	0.63
	3	1	0.86	1	0.74	0.84
	4	0.43	0.18	0.76	0.8	0.53

Якщо Ви працюєте з цим документом на комп'ютері, то можете мишею змінювати ракурс графіка. Знайдіть відповідність між стовпчиками і рядками матриці. Підпишіть графік - де які критерії, де які варіанти САУ.



KK^T

Висновки. Проведено комплексну оцінку 4-ох альтернатив САУ за 5-ма критеріями - показниками якості перехідного процесу.

Найгірша САУ - оптимальна за квадратичним критерієм.

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте словесну формулу тривалості перехідного процесу. 5 б
2. Наведіть приклади об'єктів управління, де обмежується перерегулювання. 7 б
3. Наведіть приклади об'єктів управління, де обмежується прискорення. 8 б
4. Напишіть формули для обчислення всіх використаних критеріїв. 10 б
5. Напишіть документ для оцінки стійкості САУ (=грубості) до варіації параметрів об'єкта a_0, a_1, a_2 та регулятора k_1, k_2, k_3 . 25 б
6. Напишіть документ для дослідження перехідних процесів в САУ 2,3,4,5,6 порядків для одного з розглянутих класів стандартних коефіцієнтів. 20 б
7. Сконструйте критерій для оцінки грубості САУ. 5-50 б
8. Сконструйте критерій для оцінки енергетичних затрат на управління. 7 б
9. Сконструйте критерій для оцінки складності реалізації регулятора на ЦОМ. 10 б
10. Дайте визначення поняття "критерій" для областей: техніка, економіка. 10 б
11. Проведіть дослідження на тему: залежність розглянутих критеріїв від порядку системи (від 2-го до 6-8-го). 35 б

Література

1. Батенко А.П. Управление конечным состоянием движущихся объектов. — М.: Советское радио, 1977. — 277 с.
2. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. — М.: Наука, 1964. — 317 с.
3. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории управления. — М.: Издат. Иностр. Литер., 1962. — 233 с.
4. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1966. — 307 с.
5. Боровська Т.М., Северілов В.А., Васюра А.С. Проблеми розробки адаптивних САУ для масових об'єктів // Вісник ВДТУ. — 1998. — № 6. — С. 12 – 17.
6. Боровська Т.М. Декомпозиційні структури для прикладних програм синтезу регуляторів // Вісник ВДТУ. — 2000. — № 1. — С. 17-22.
7. Боровська Т.М., Северілов В.А. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу ТАУ. — Вінниця: ВПІ, 1992. — 64 с.
8. Вагапов В.Б. Основы теории радиоэлектронных автоматических систем. — Киев: изд. УСХА, 1992. — 237 с.
9. Воронов А.А. Теория автоматического управления. Ч. 1, 2. — М.: Энергия, 1986. — 503 с.
10. Егоров А.И. Оптимальное управление линейными системами. — Киев: Вища школа, 1988. — 356 с.
11. Изерман Р. Цифровые системы управления. — М.: Мир, 1984. — 513 с.
12. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. — М.: Машиностроение, 1986. — 448 с.
13. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высшая школа, 1980. — 288 с.
14. Ли Т.Г., Адамс Г.Э. Управление процессами с помощью вычислительных машин. Моделирование и оптимизация. — М.: Советское радио, 1972. — 313 с.
15. Мерриэм К.У. Теория оптимизации и расчёт систем с обратной связью. — М.: Мир, 1967. — 550 с.
16. Первозванский А.А.. Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1986. — 615 с.
17. Пузырёв В.А. Управление технологическими процессами производства микроэлектронных приборов. — М.: Радио и связь, 1984. — 345 с.
18. Северілов В.А., Боровська Т.М. Принципи побудови модульних мехатронних систем.// Вісник ВДТУ — 1999. — № 2. — С. 6 - 10.
19. Северилов В.А., Боровская Т.Н. Живучесть САУ. — Винница: ВПИ, 1989. — 34 с.
20. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. — М., Наука, 1968. — 400 с.

Навчальне видання

**Таїса Миколаївна Боровська,
Віктор Андрійович Северілов,
Анатолій Степанович Васюра**

**ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ.
ЧАСТИНА 1. АНАЛІЗ САУ**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Т. М. Боровською

Редактор В. О. Дружиніна

Видавництво ВНТУ "Універсум-Вінниця"
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7x42¹/₄
Друк різнографічний
Тираж 100 прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 5.37

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ