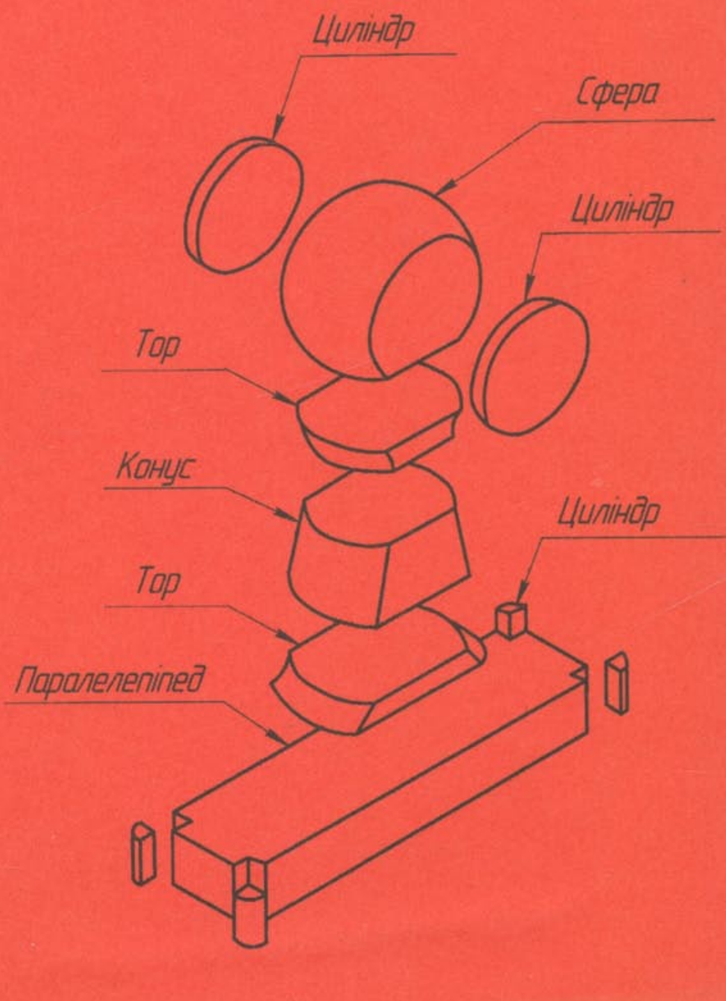
А. Г. Буда

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з нарисної геометрії для студентів машинобудівних спеціальностей



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. Г. Буда

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з нарисної геометрії для студентів машинобудівних спеціальностей

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як конспект лекцій для студентів машинобудівних спеціальностей денної та заочної форм навчання. Протокол № 10 від 24 травня 2007 р.

Вінниця ВНТУ 2008

УДК 744(075)
Б 90

Рецензенти:

В. Ф. Анісімов, доктор технічних наук, професор (ВДАУ)
Ю. А. Бурєнніков, кандидат технічних наук, професор (ВНТУ)
Р . Д. Іскович-Лотоцький, доктор технічних наук, професор (ВНТУ)

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Буда А. Г.
Б 90 **Конспект лекцій для студентів машинобудівних спеціальностей.**
Конспект лекцій. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 120 с.

Конспект повністю відповідає програмі курсу Міністерства освіти і науки України з нарисної геометрії для студентів напряму підготовки «Інженерна механіка» та «Автомобільний транспорт». Пропонується прийнята сучасна система позначень. Викладення тем курсу, які містять проекційні відображення, здебільшого поєднуються з наочними зображеннями об'єктів, що значною мірою сприяє кращому засвоєнню предмета. З врахуванням того, що предмет не вивчається в школі, частина задач пояснюється послідовністю побудов, що дозволяє більш глибоко зрозуміти сутність головних понять та методів проекцій нарисної геометрії.

Конспект лекцій підготовлено для студентів машинобудівних спеціальностей денної та заочної форм навчання і є необхідним для підготовки до колоквіумів та іспиту, передбачених програмою курсу. Він може бути корисним студентам інших спеціальностей, для яких передбачається вивчення запропонованих тем нарисної геометрії.

УДК 744(075)

ЗМІСТ

Прийняті позначення

1. Точки в просторі позначаються великими буквами латинського алфавіту *A, B, C, ...*, а також цифрами.
2. Лінії в просторі (прямі та криві) – малими літерами латинського алфавіту *a, b, c, d, ...* .
3. Площини та кути – малими літерами грецького алфавіту.
4. Лінії окремого положення – малими літерами латинського алфавіту, а саме: горизонталь – *h*, фронталь – *f*, профільна пряма – *p*.
5. Площини проекцій – великими буквами українського алфавіту, а саме: $П_1$ – горизонтальна, $П_2$ – фронтальна, $П_3$ – профільна, ...– додаткова площина проекцій.
6. Проекції точок:
   – на горизонтальну площину $П_1$ – A_1, B_1, C_1;
   – на фронтальну площину $П_2$ – A_2, B_2, C_2;
   – на профільну площину $П_3$ – A_3, B_3, C_3.
7. Осі проекцій – малими літерами латинського алфавіту x_{12}, y_{13}, z_{23}; початок координат – великою літерою *O*.
8. Позначення площин, які задані слідами:
   – горизонтальний слід площини h^0,
   – фронтальний слід площини f^0,
   – профільний слід площини p^0.

Для проекціювальних площин краще задати слід-проекцію цієї площини:
– горизонтально-проекціювальна площина α_1;
– фронтально-проекціювальна площина α_2;
– профільно-проекціювальна площина α_3.

Найбільш поширені символи

$\parallel$	паралельність
$\perp$	перпендикулярність
$=$	дорівнює, результат дії
$\equiv$	збігається, конкурує
$\in$	належить, є елементом
$\ni$	проходить, включає в собі
$\cap$	перетин (прямих, площин)
$\Rightarrow$	логічний наслідок
$\dot{-}$	мимобіжність
$\underline{\Omega}$	дотик
{...}	сукупність або складається з ...
α^β	кут, кут між площинами α та β
н.в.	натуральна величина.

1 МЕТОДИ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

Метод, за допомогою якого в нарисній геометрії отримують зображення, називається методом проекцій. Проекціювання полягає в проведенні через кожну точку *A*, *B*, *C*, ... об'єкта та вибраний певним чином центр проекцій *S* прямої лінії (променя), яку називають проекціювальним променем. Перетин цього променя з деякою площиною проекцій Π_1 (пі) дає точку, яка є проекцією даної точки. Кожній точці просторового об'єкта, наприклад, *A*, *B*, *C* , ... відповідатиме тільки одна точка – відповідна проекція A_1, B_1, C_1, ... , причому центр проекцій не належить площині проекцій *П*. Сукупність всіх цих точок просторового об'єкта (*A*, *B*, *C*, ...) дає відображення (проекцію) просторового об'єкта на площині Π_1, тобто на площині креслення.

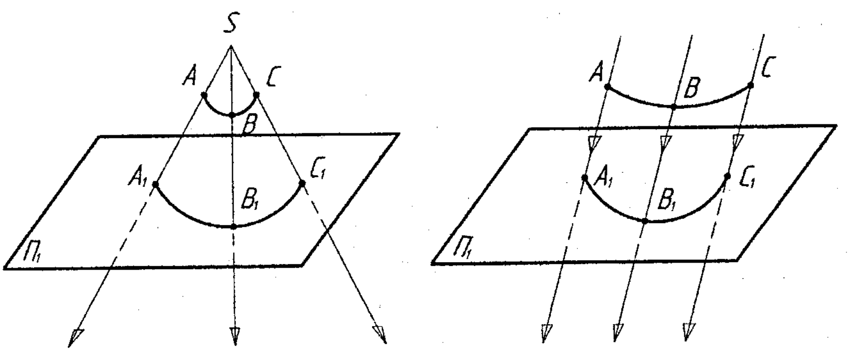
1.1 Різновиди проекціювання

Проекції утворюються за допомогою центрального та паралельного проекціювання.

Центральне проекціювання – проекціювання, при якому всі промені виходять із однієї точки *S* , центра проекцій (рис. 1, а).

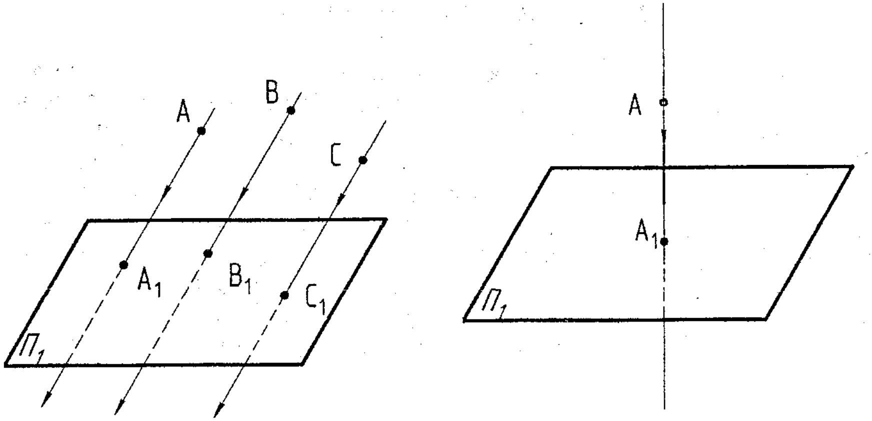
Паралельне проекціювання – проекціювання, при якому всі промені паралельні між собою (рис. 1, б). Вважається, що паралельні проекції отримані проекціюванням із безмежно віддаленої точки *S* простору.

До найбільш поширеного відносять паралельне проекціювання, яке може бути косокутним або ортогональним (прямокутним) (рис. 2, а, б).



а) центральне проекціювання б) паралельне проекціювання

Рисунок 1 – Різновиди проекціювань



а) косокутне б) ортогональне

Рисунок 2 – Паралельне проекціювання

1.2 Ортогональне проекціювання. Означення та позначення

Ортогональні зображення мають свої переваги, оскільки забезпечують наочність при зображенні великих розмірів деталей машин та дозволяють більш легко проводити на них вимірювання.

Положення точки, прямої, будь-якої геометричної фігури найбільш зручно визначити в декартовій системі координат, яка складається з трьох взаємно перпендикулярних площин. Для визначення положення точок в просторі французький математик XVI ст. Декарт запропонував систему координат.

Лінії перетину площин проекцій утворюють осі координат: X_{12} – вісь абсцис, Y_{13} – вісь ординат, X_{23} – вісь аплікат, O – початок координат або точка перетину координатних осей. В нарисній геометрії використовують три площини проекцій. Площини проекцій позначають великою грецькою літерою Π (пі) з відповідним індексом: Π_1 – горизонтальна площина проекцій; Π_2 – фронтальна площина проекцій; Π_3 – профільна площина проекцій. В більшості країн світу прийнята система розташування площин проекцій, в якій напрями осей X та Y задають від початку координат вліво, вісь Y – до спостерігача, вісь Z – вверх від початку координат. Координатні площини ділять простір на 8 частин – октантів.

Надалі будемо розглядати положення точок в чотирьох октантах, виключаючи від'ємний напрямок осі X. Всі об'єкти будемо розташовувати між площиною проекцій та спостерігачем. Всі промені при проекціюванні ортогональні.

2 ТОЧКА

2.1 Координати точки та її визначник

Визначником точки у просторі є її координати *X, Y, Z*, тобто відстані від трьох координатних площин. Умовний запис визначника, наприклад, точки *A*, записують так:

$$A\,(X, Y, Z).$$

Епюр, плоский рисунок, може складатись з двох або трьох ортогональних проекцій. Зображення точки на двох будь-яких площинах проекцій повністю відповідають положенню її у просторі (рис. 3). За двома зображеннями можна побудувати третє.

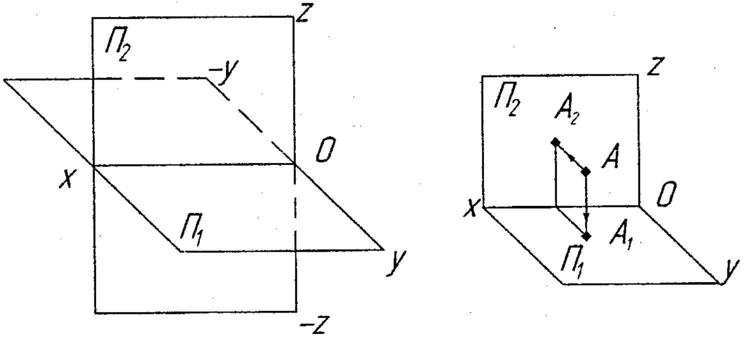


Рисунок 3 – Положення точки *A* в просторі відносно двох площин проекцій

Зображення точки виконується за її визначником відповідно в першому, другому, третьому, четвертому октантах (чверті нумеруються як *I, II, III, IV* октанти). Побудова кожної із точок простору на відповідні площини проекцій відповідає побудові паралелепіпеда, у якого *X* – довжина, *Y* – ширина, *Z* – висота. З врахуванням напрямку осей (відповідних знаків «+» та «–») для означених точок (рис. 4) введемо відповідні символьні позначення: $A(x, y, z) \in I$; $B(x, -y, z) \in II$; $D(x, y, -z) \in IV$.

2.2 Епюр точок, що знаходяться в октантах

Епюр точки (її плоский рисунок) одержують суміщенням горизонтальної Π_1 та фронтальної Π_2 площин проекцій відносно осі *Z*, тобто обертанням горизонтальної Π_1 та профільної Π_3 площин проекцій навколо їх ліній перетину *X* та *Z* в одну площину, яка суміщається з фронтальною площиною проекцій. При суміщенні вказаних площин площини проекцій Π_1 та Π_3 роз'єднані вздовж осі *Y*. Тому надалі під позначенням осі *Y* будемо розуміти відповідно Y_1 (як та, що належить Π_1) та Y_3 (як та, що належить Π_3).

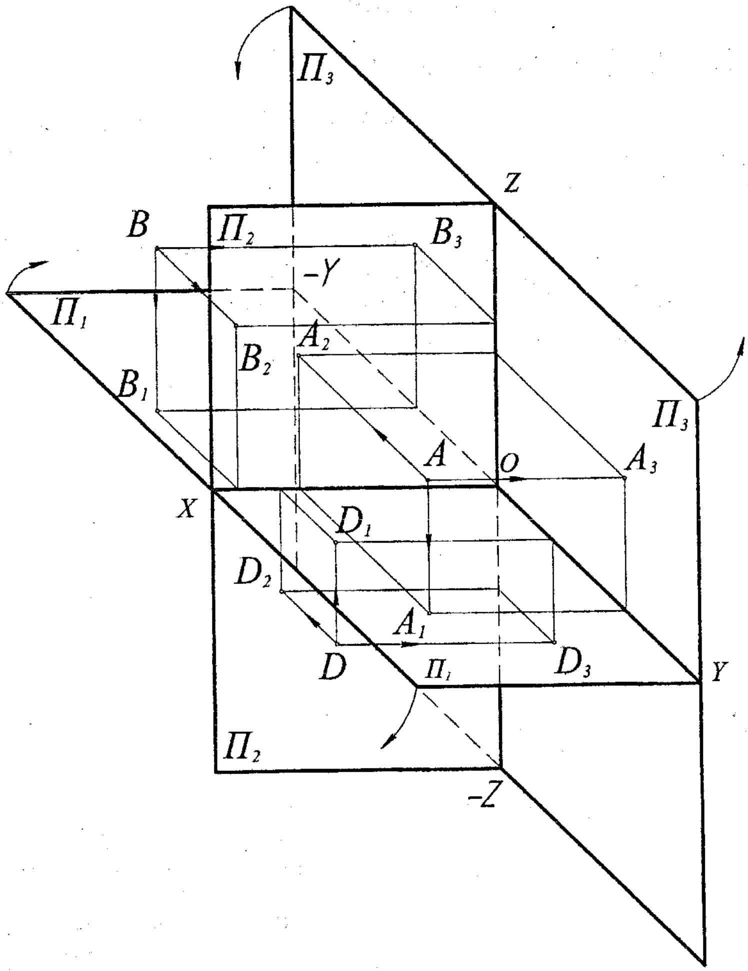
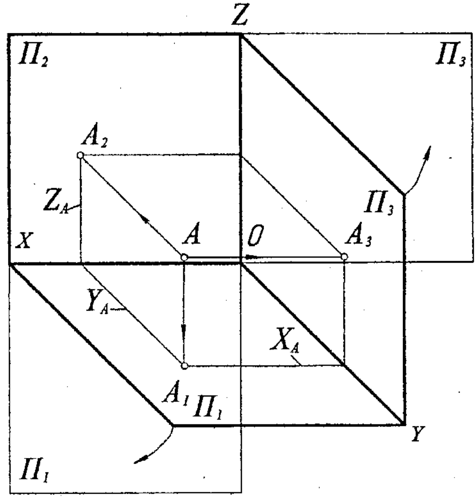


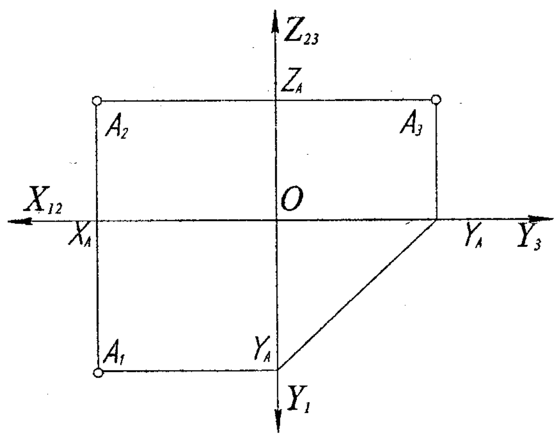
Рисунок 4 – Положення точок в октантах

Винесемо *I* октант та утворимо епюр (рис. 5, а, б). Надалі будемо використовувати такі умовні позначення та назви: A_1 – горизонтальна проекція точки *A*; A_2 – фронтальна проекція точки *A*; A_3 – профільна проекція точки *A*.

Кожна із проекцій точок будується на перетині горизонтальних та вертикальних ліній, які обмежують відповідні координати *X, Y, Z* заданої точки. Тому відповідні проекції, наприклад, точки *A*, можна символьно записати такими визначниками: $A_1(x, y)$, $A_2(x, z)$, $A_3(y, z)$. Лінії A_1A_2 та A_2A_3 називаються, відповідно, вертикальною та горизонтальною лініями зв'язку.



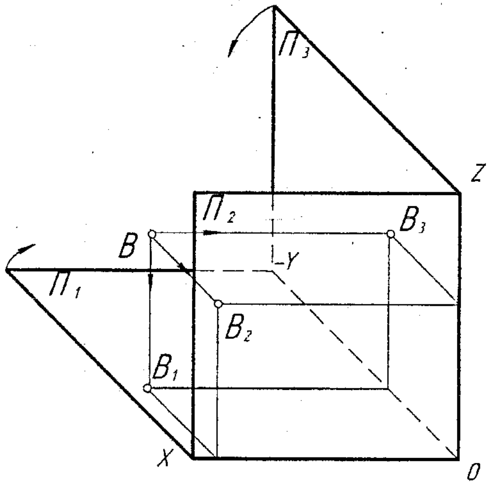
а) наочне зображення точки *A* та суміщення площин проекцій



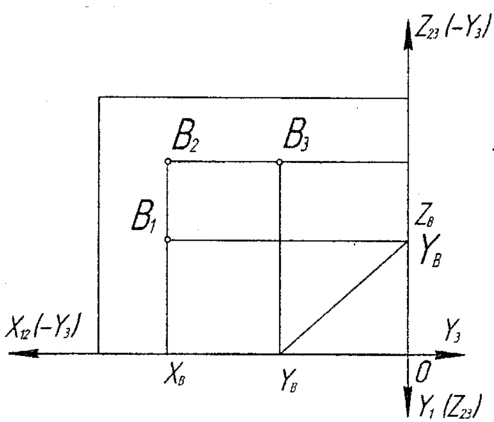
б) епюр точки *A*

Рисунок 5 – Утворення епюра точки *A*

Винесемо *II* октант та побудуємо епюр точки *B* (рис. 6, а, б, в).



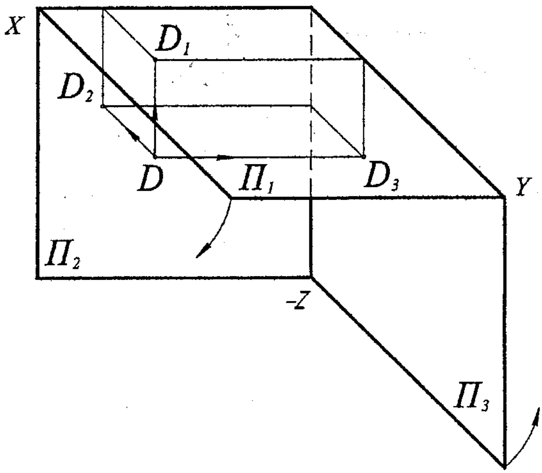
а) наочне зображення точки *B* та та суміщення площин проекцій



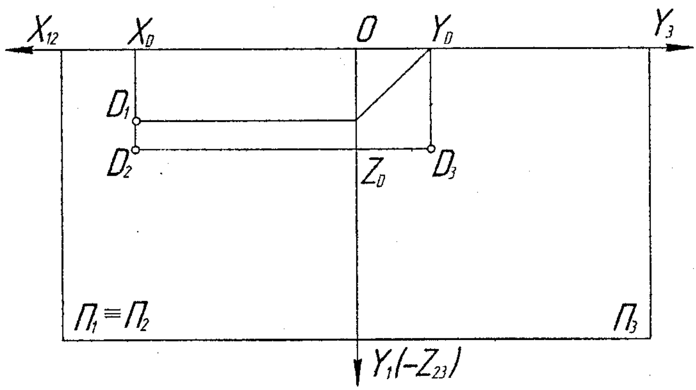
б) епюр точки *B*

Рисунок 6 – Утворення епюра точки *B*

Винесемо *IV* октант та покажемо епюр точки *D* (рис. 7, а, б, в).



а) наочне зображення точки D та суміщення площин проекцій



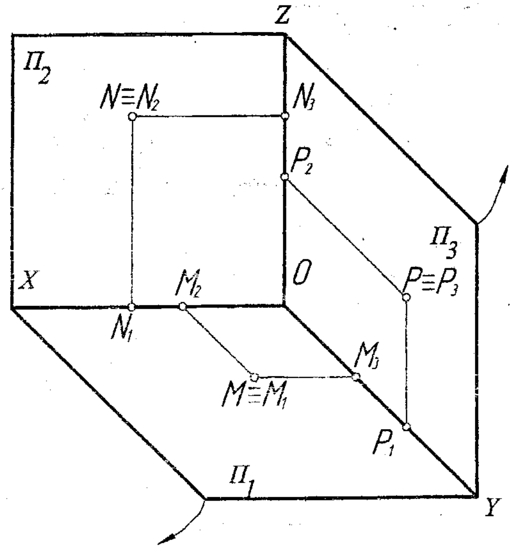
б) епюр точки D

Рисунок 7 – Утворення епюра точки D

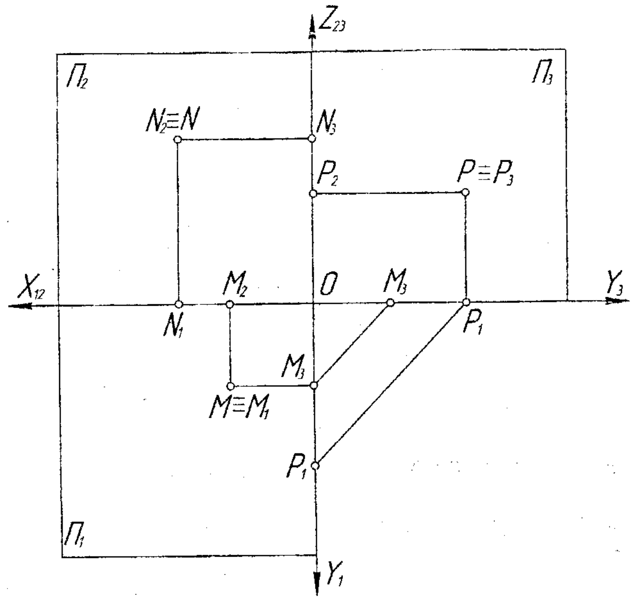
2.4 Епюри точок, що знаходяться в площинах проекцій

Точка належить одній із площин проекцій, якщо у неї відсутня одна із координат (рис. 8, а, б).

Якщо абсциса точки $X=0$, то точка належить $П_1$; ордината $У=0$, то точка належить $П_2$; апліката $Z=0$, то точка належить $П_3$. Наприклад, якщо точка N належить площині проекцій $П_2$ ($N \in П_2$), то умовний запис визначника такий: $N\,(X, 0\,, Z)$.



а) наочне зображення точок

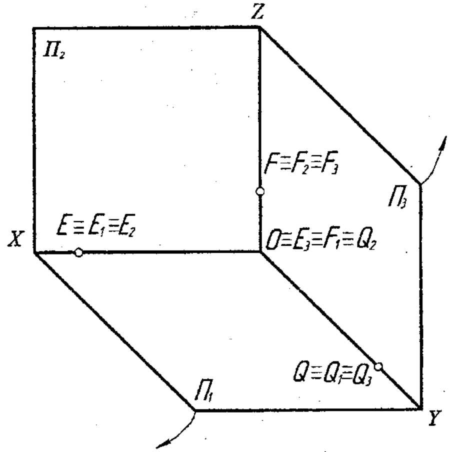


б) епюри точок

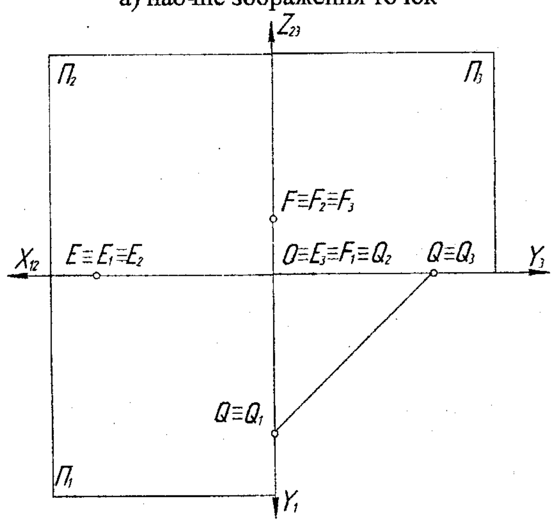
Рисунок 8 – Відображення проекцій точок, що знаходяться в площинах проекцій

2.5 Епюри точок, що знаходяться на координатних осях

Точка належить одній із координатних осей, якщо у неї відсутні дві координати (рис. 9, а, б). Якщо у точки координати *У, Z=0*, то точка належить осі абсцис *X*; якщо у точки координати *X, Z=0*, то точка належить осі ординат *У*; якщо у точки координати *X, У=0*, то точка належить осі аплікат *Z*.



а) наочне зображення точок



б) епюри точок

Рисунок 9 – Відображення проекцій точок, що знаходяться на координатних осях

Примітка. Для закріплення цієї теми студенту пропонується здійснити аналогічні побудови стосовно винесення *III* октанта та побудови в цьому октанті трьох проекцій точки *C*. Координати точки *C* вибираються довільно.

Якщо розглядати в просторі декілька точок, то за взаємним положенням вони можуть бути рівновіддалені від певної площини проекцій. Згідно з трьома координатами будь-якої точки абсциса X характеризує віддаленість від площини проекцій $П_3$, ордината $У$ – від $П_2$, апліката Z – від $П_1$. Наприклад, точки K та L рівновіддалені від $П_3$, значить їх аплікати Z за модулем характеризуються однаковими числовими значеннями, тобто $|Z_K|=|Z_L|$. Точки G та Q, які рівновіддалені від $П_2$, мають однакові ординати $|Y_G|=|Y_Q|$, аналогічно, якщо $|X_E|=|X_F|$, то точки E та F рівновіддалені від $П_3$.

Надалі при побудові епюрів площини проекцій обмежуватися певними розмірами не будемо, а розглядатимемо їх як безмежні.

2.5 Питання, які виносяться на СРС

1. Історія розвитку нарисної геометрії.
2. Побудова проекцій точки *C*, яка знаходиться в *III* октанті.
3. Державні стандарти ЄСКД; ГОСТ-и 2.301-68 – 2.304-80.

2.6 Теоретичні питання

1. Які види проекціювання вам відомі?
2. Що називають проекцією точки, проекцією площини?
3. На скільки октантів можна поділити простір площинами проекцій?
4. Дайте означення епюра чи комплексного креслення.
5. Дайте означення осі проекцій.
6. Назвіть головні площини проекцій.
7. Скільки координат і скільки проекцій визначають положення точки в просторі?
8. Запишіть визначник точки, яка знаходиться в просторі.
9. Запишіть визначник точки, яка належить одній із площин проекцій.
10. Запишіть визначник точки, яка належить одній із координатних осей.

3 ПРЯМА

3.1 Способи задання

Пряму в просторі можна задати двома точками або точкою з відповідним напрямом.

Визначником прямої у просторі є дві точки, умовний запис визначника прямої: *l* (*A*, *B*). На рис. 10 (а, б) пряму визначають двома проекціями прямої: AB (A_1B_1, A_2B_2) або (l_1, l_2).

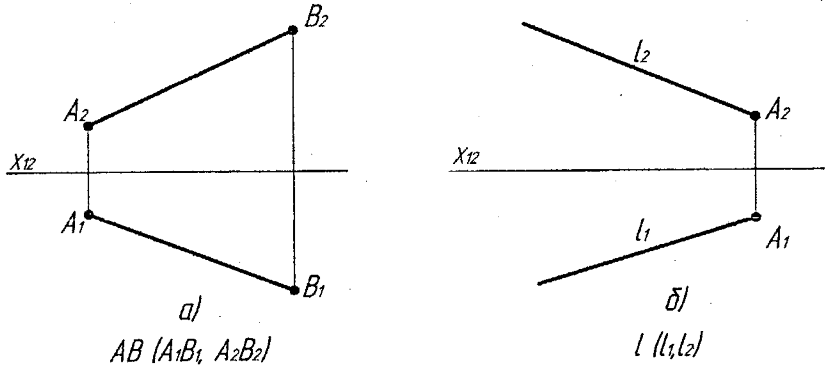


Рисунок 10 – Задання прямої на епюрі

3.2 Різновиди прямих. Означення

Прямі бувають загального та окремого положення. В свою чергу, до прямих окремого положення відносять прямі рівня та проекціювальні.

Пряма загального положення – пряма, яка непаралельна і неперпендикулярна ні до жодної з площин проекцій (рис. 10, а, б; 11, а, б).

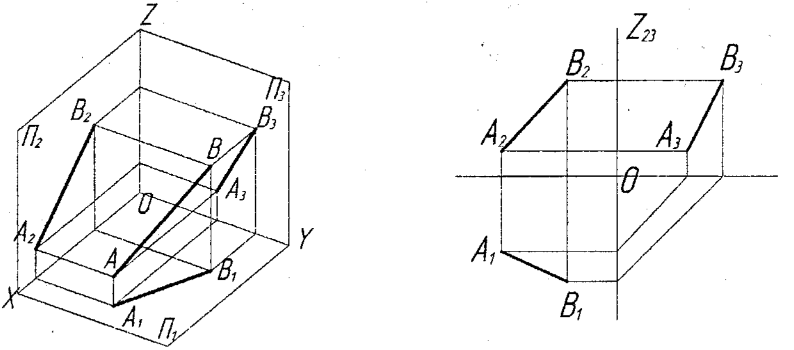
Пряма окремого положення – пряма, яка паралельна тільки одній із площин проекцій або перпендикулярна тільки до однієї із площин проекцій. До цих прямих відносять: прямі рівня та проекціювальні.

Пряма рівня паралельна тільки одній із площин проекції та утворює кути нахилу з двома іншими. Прямим рівня відповідають назви площин проекцій, яким вони паралельні.

Проекціювальна пряма перпендикулярна лише до однієї із площин проекцій та паралельна двом іншим площинам проекцій. Назви цих прямих відповідають назвам площин, до яких ці прямі перпендикулярні.

3.3 Епюри прямих

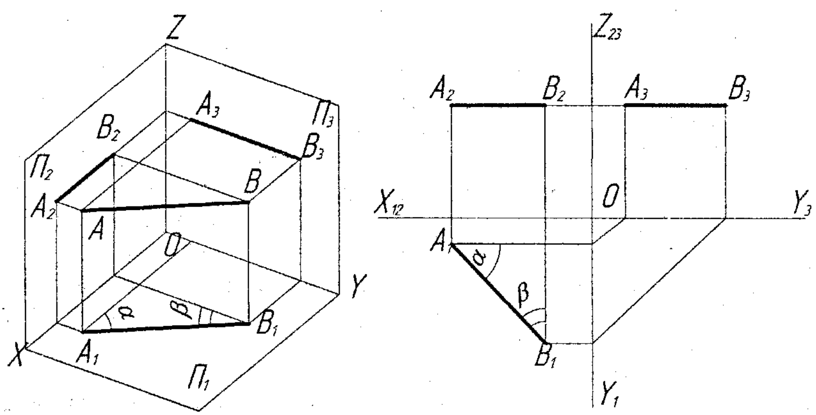
Розглянемо відображення прямої загального положення на горизонтальну $П_1$, фронтальну $П_2$ та профільну $П_3$ площини проекцій (рис. 11, а, б) та прямих окремого положення (рис. 12 – 17).



а) наочне зображення б) епюр

Рисунок 11 – Відображення проекцій прямої загального положення

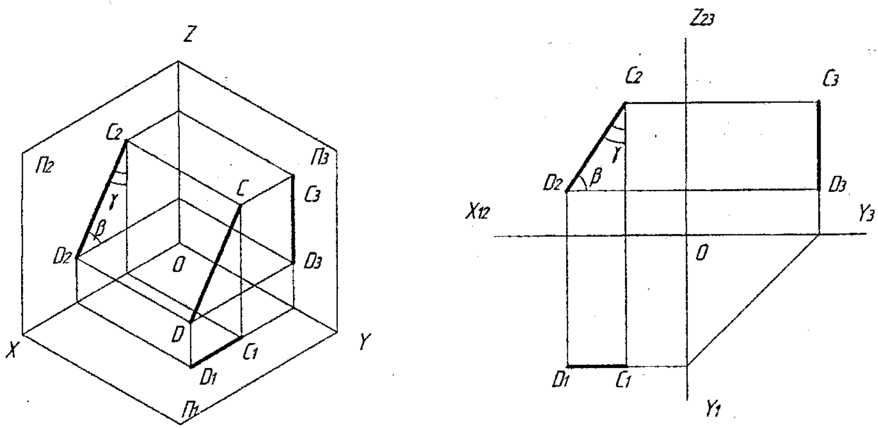
Горизонтальна пряма (горизонталь) – пряма, яка паралельна горизонтальній $П_1$ площині проекцій та утворює кути нахилу з фронтальною $П_2$ та профільною $П_3$ площинами проекцій (рис. 12, а, б).



а) наочне зображення б) епюр

Рисунок 12 – Відображення проекцій горизонтальної прямої

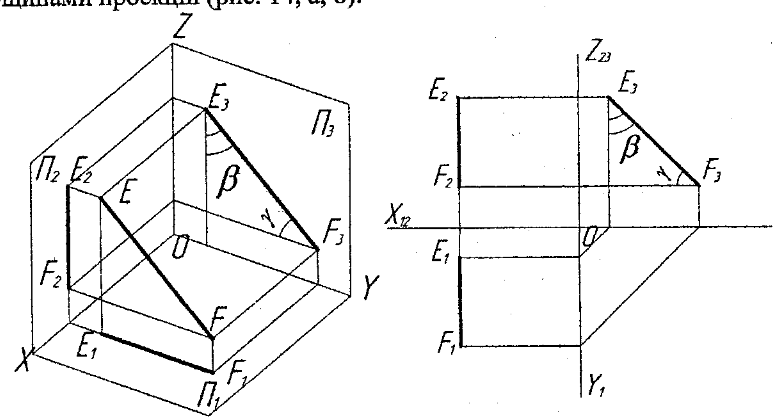
Фронтальна пряма (фронталь) – пряма, яка паралельна фронтальній $П_2$ площині проекцій, та утворює кути нахилу з горизонтальною $П_1$ і профільною $П_3$ площинами проекцій (рис. 13, а, б).



а) наочне зображення б) епюр

Рисунок 13 – Відображення проекцій фронтальної прямої

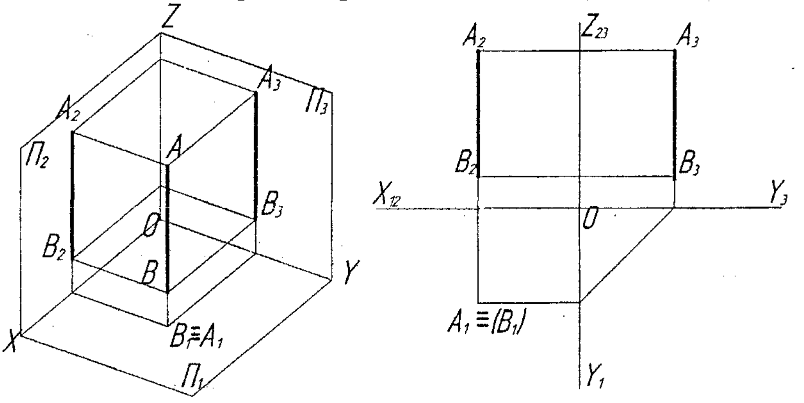
Профільна пряма – пряма, яка паралельна профільній $П_3$ площині проекцій, та утворює кути нахилу з горизонтальною $П_1$ і фронтальною $П_2$ площинами проекцій (рис. 14, а, б).



а) наочне зображення б) епюр

Рисунок 14 – Відображення проекцій профільної прямої

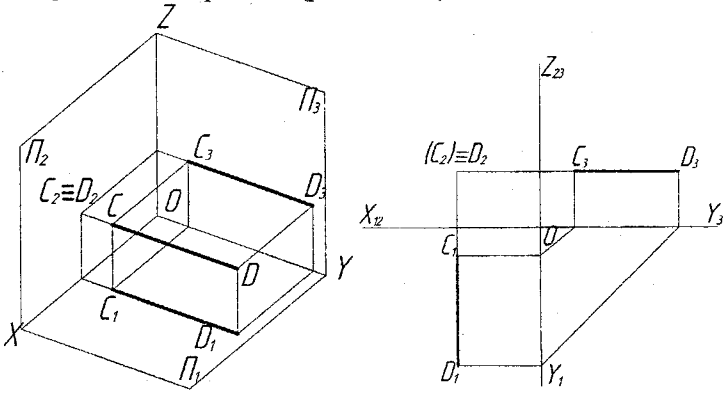
Горизонтально-проекціювальна пряма – пряма, яка перпендикулярна до горизонтальної $П_1$ площини проекцій та паралельна фронтальній $П_2$ і профільній $П_3$ площинам проекцій (рис. 15, а, б).



а) наочне зображення б) епюр

Рисунок 15 – Відображення проекцій горизонтально-проекціювальної прямої

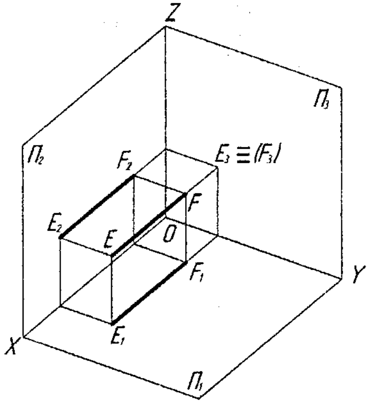
Фронтально-проекціювальна пряма – пряма, яка перпендикулярна до фронтальної $П_2$ площини проекцій та паралельна горизонтальній $П_1$ і профільній $П_3$ площинам проекцій (рис. 16, а, б).



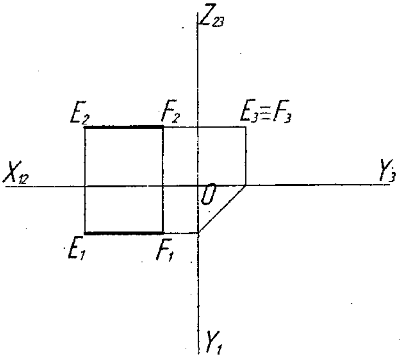
а) наочне зображення б) епюр

Рисунок 16 – Відображення проекцій фронтально-проекціювальної прямої

Профільно-проекціювальна пряма – пряма, яка перпендикулярна до профільної $П_3$ площини проекцій та паралельна горизонтальній $П_1$ і фронтальній $П_2$ площинам проекцій (рис. 17, а, б).



а) наочне зображення

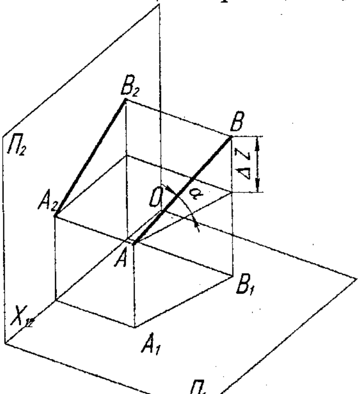


б) епюр

Рисунок 17 – Відображення проекцій фронтально-проекціювальної прямої

3.4 Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення

Натуральна величина (н.в) відрізка прямої загального положення визначається величиною гіпотенузи прямокутного трикутника, в якому один із катетів дорівнює проекції відрізка (A_1B_1), а другий катет трикутника дорівнює різниці (ΔZ) відстаней кінців цього відрізка від горизонтальної площини проекцій $П_1$ (рис. 18).



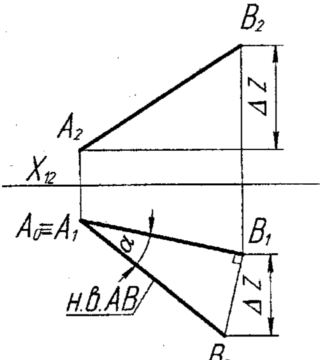
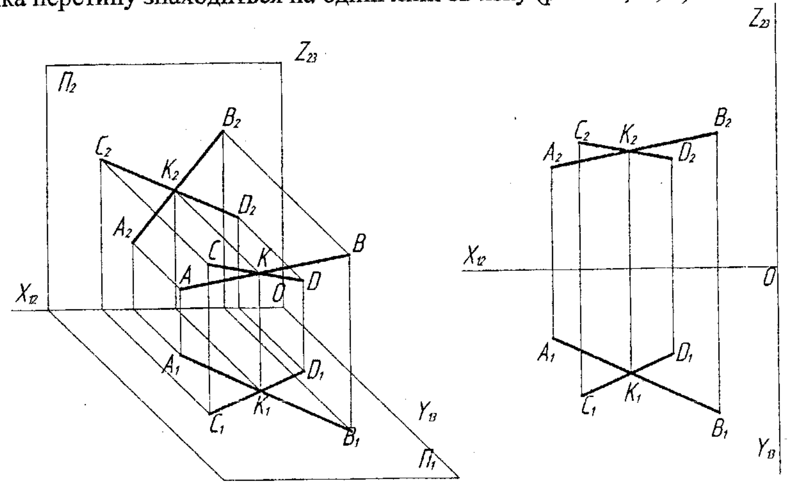


Рисунок 18 – Визначення н.в. відрізка прямої загального положення

3.5 Взаємне положення прямих

Прямі перетинаються, якщо їх однойменні проекції перетинаються, а точка перетину знаходиться на одній лінії зв'язку (рис. 19, а, б).



а) наочне зображення б) епюр

Рисунок 19 – Відображення проекцій прямих, що перетинаються

Прямі паралельні, якщо їх однойменні проекції паралельні (рис. 20).

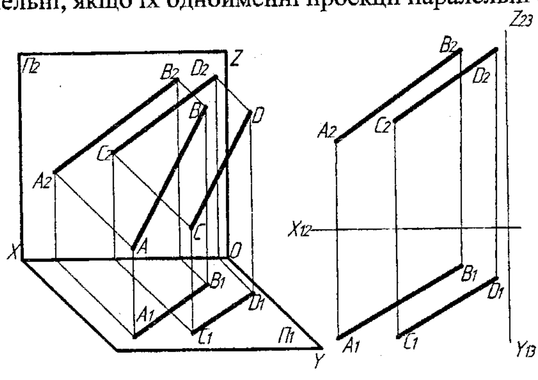
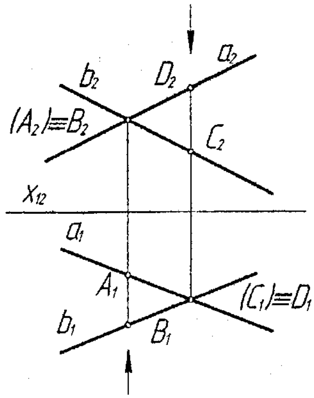


Рисунок 20 – Паралельні прямі

Мимобіжні прямі – прямі, які не перетинаються та непаралельні, тобто не належать одній площині (рис. 21).



Точки A і B конкурують на Π_2, точки C і D конкурують на Π_1.

Символьний запис:

$$a \overset{\circ}{-} b \Rightarrow \begin{cases} a_1 \overset{\circ}{-} b_1, \\ a_2 \overset{\circ}{-} b_2. \end{cases}$$

Рисунок 21 – Мимобіжні прямі

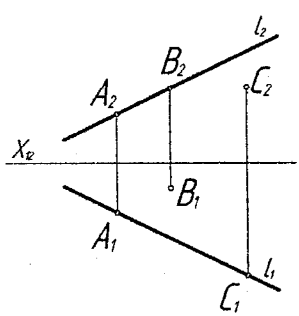
Точки A, B та C, D – конкурують. Конкуруючі точки – точки, які знаходяться на одному проекціювальному промені.

В даному випадку потрібно визначати видимість точок. Видимість точок визначають за віддаленістю від площини проекцій, на якій вони конкурують. Оскільки в нарисній геометрії ми розглядаємо об'єкти проекціювання між площиною проекцій та спостерігачем, то видимою точкою буде та, яка знаходиться далі від площини проекцій (ближче до спостерігача), тобто має більшу координату: точка D – видима на Π_1, оскільки $Y_D > Y_C$; точка B – видима на Π_2, оскільки $Z_B > Z_A$.

3.6 Інцидентність точки прямій

Умова інцидентності – точка належить прямій, якщо її проекції належать однойменним проекціям цієї прямої (рис. 22).

Символьний запис:



$$A \subset l \Rightarrow \begin{cases} A_1 \subset l_1, \\ A_2 \subset l_2. \end{cases}$$

Рисунок 22 – Інцидентність точки прямій

3.7 Сліди прямої

Сліди прямої – точки перетину прямої з площинами проекцій і визначаються як особливі точки прямої, одна із координат яких дорівнює нулю (рис. 23).

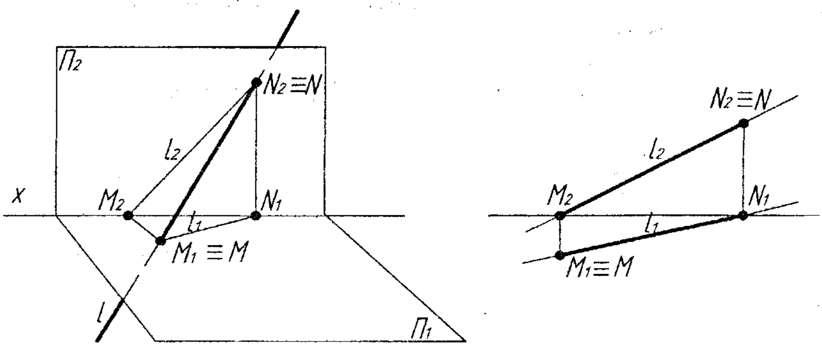


Рисунок 23 – Побудова горизонтального та фронтального слідів прямої

Позначення на рис. 23 слід читати так.

1. Точка *M* – горизонтальний слід, який на епюрі визначається проекціями точок M_1 (горизонтальна проекція горизонтального сліду) та M_2 (фронтальна проекція горизонтального сліду). У цієї точки відсутня координата *Z*, тобто $Z_M = 0$.

2. Точка *N* – фронтальний слід, який на епюрі визначається проекціями точок N_1 (горизонтальна проекція фронтального сліду) та N_2 (фронтальна проекція фронтального сліду). У цієї точки відсутня координата *У*, тобто $У_N = 0$.

3.8 Питання, які виносяться на СРС

1. Побудова епюрів однієї із прямих рівня та проекціювальної.
2. Визначення видимості точок на проекціювальних прямих.
3. Побудова слідів прямих окремого положення.

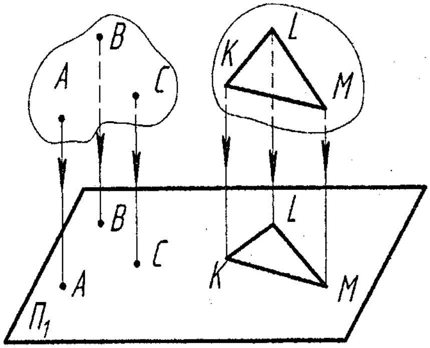
3.9 Теоретичні питання

1. Які положення прямих вам відомі?
2. Які прямі окремого положення ви знаєте?
3. За якими ознаками можна визначити прямі рівня?
4. За якими ознаками можна визначити проекціювальні прямі?
5. Які точки називають конкуруючими?
6. Ознаки паралельних та мимобіжних прямих.
7. Ознаки прямих, які перетинаються.

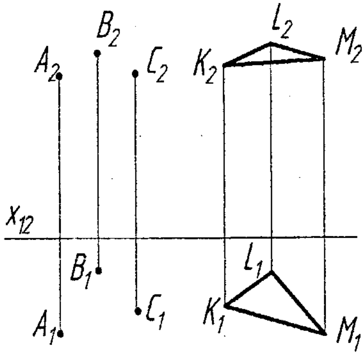
4 ПЛОЩИНА

4.1 Способи задання площини

Площина у просторі нескінченна. Положення площини у просторі визначається трьома точками, які не лежать на одній прямій. На підставі цього можна переходити до задання площини плоскою фігурою, наприклад, трикутником (рис. 24, а, б) та іншими способами.



а) наочне зображення



б) епюр

Рисунок 24 – Приклад задання площини плоскою фігурою

Крім цього, площину задають ще відомими способами: прямою та точкою, яка не лежить на цій прямій; двома паралельними прямими; двома прямими, які перетинаються; слідами.

4.2 Класифікація площин. Означення

Відносно площин проекцій $П_1, П_2, П_3$ площини можуть займати такі положення: бути паралельними або перпендикулярними до площин проекцій, непаралельними та неперпендикулярними до площин проекцій.

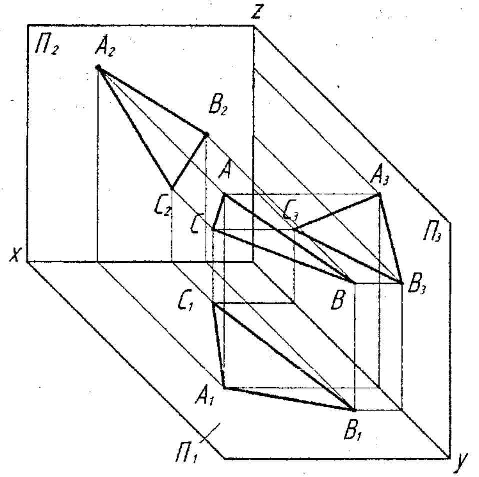
Площини бувають загального та окремого положення. До площин окремого положення відносять площини рівня та проекціювальні.

Площина окремого положення – це площина, яка паралельна або перпендикулярна до однієї з координатних площин проекцій. Площини окремого положення мають особливу властивість, а саме: вироджуються (перетворюються) в пряму лінію та проекціюються в слід-проекцію.

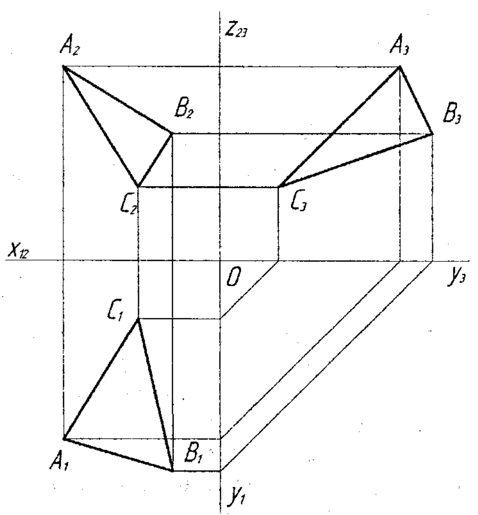
Площина загального положення – це площина, яка непаралельна та неперпендикулярна ні до жодної з площин проекцій.

4.3 Епюри площин

Відображення площини загального положення на горизонтальну $П_1$, фронтальну $П_2$ та профільну $П_3$ площини проекцій показано на рис. 25, а, б; площин окремого положення – на рис. 26 – 31.



а) наочне зображення

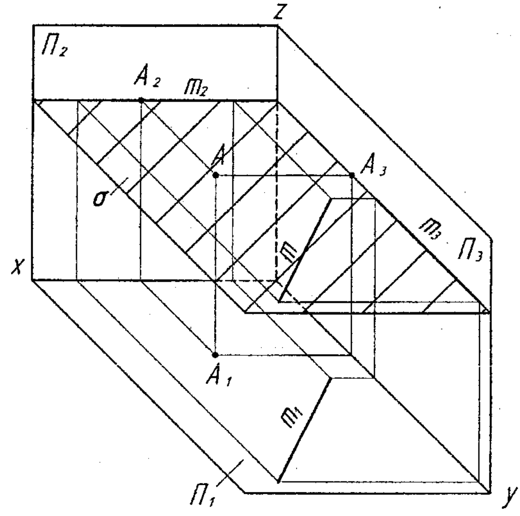


б) епюр

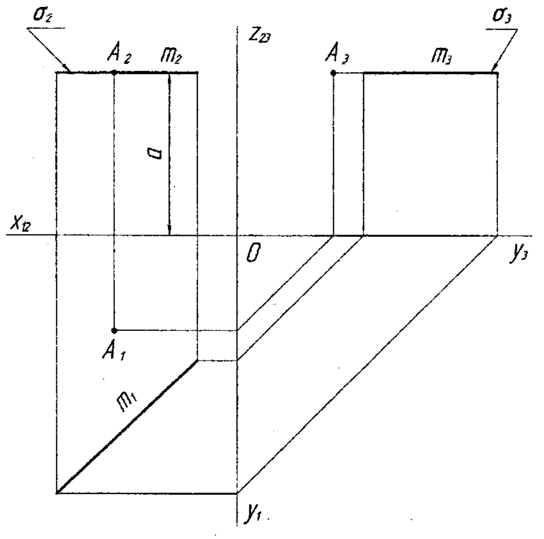
Рисунок 25 – Відображення площини загального положення

Площини, паралельні одній із координатних площин, називають площинами рівня.

Горизонтальна площина – площина, яка паралельна горизонтальній Π_1 площині проекцій та перпендикулярна до фронтальної Π_2 і профільної Π_3 площин проекцій (рис. 26, а, б).



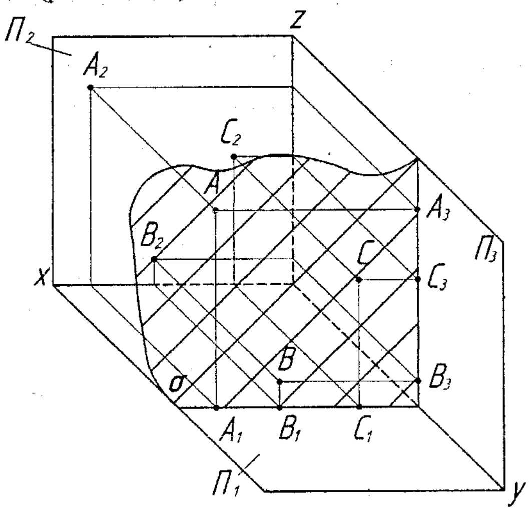
а) наочне зображення



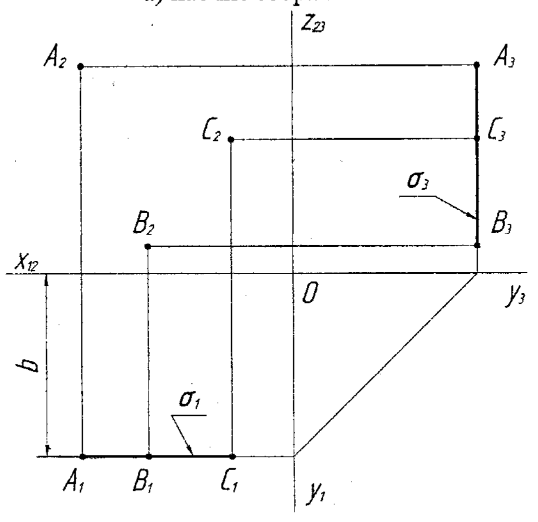
б) епюр

Рисунок 26 – Відображення горизонтальної площини

Фронтальна площина – площина, яка паралельна фронтальній $П_2$ площині проекцій та перпендикулярна до горизонтальної $П_1$ і профільної $П_3$ площин проекцій (рис. 27, а, б).



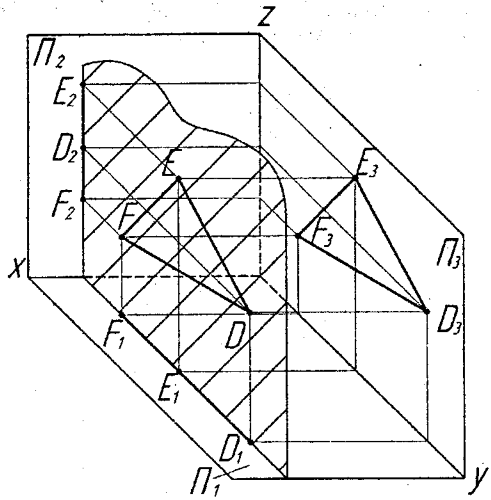
а) наочне зображення



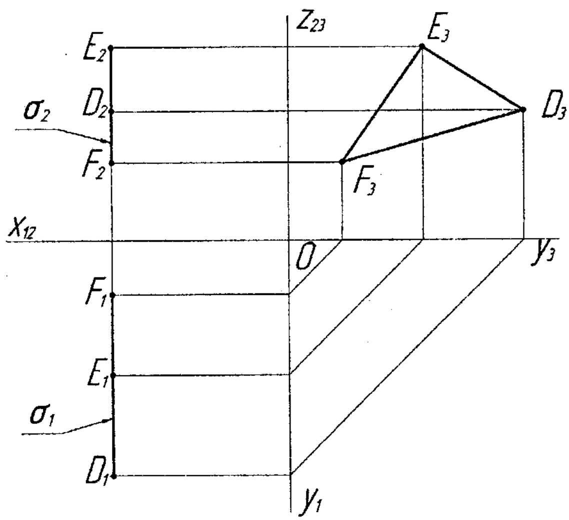
б) епюр

Рисунок 27 – Відображення фронтальної площини

Профільна площина – площина, яка паралельна фронтальній Π_3 площині проекцій та перпендикулярна до горизонтальної Π_1 і фронтальної Π_2 площин проекцій (рис. 28, а, б).



а) наочне зображення

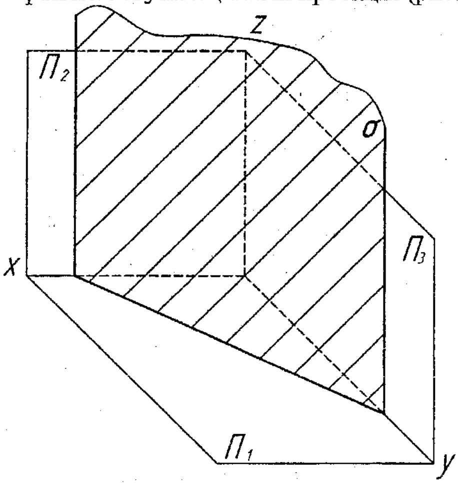


б) епюр

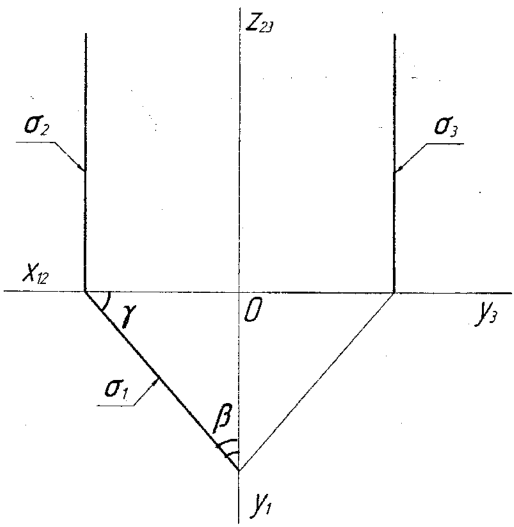
Рисунок 28 – Відображення профільної площини

Площини, які перпендикулярні одній із координатних площин, називаються проекціювальними.

Горизонтально-проекціювальна площина – площина, яка перпендикулярна до горизонтальної Π_1 площини проекцій та утворює кути нахилу з фронтальною Π_2 і профільною Π_3 площинами проекцій (рис. 29, а, б).



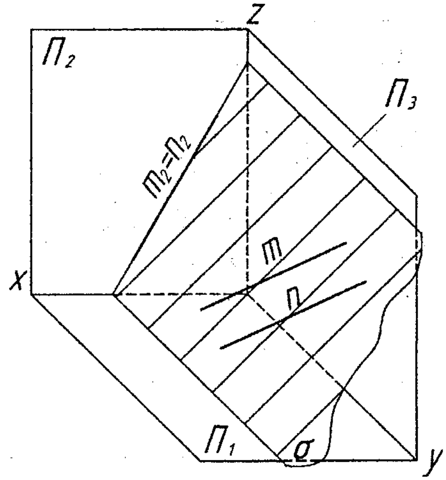
а) наочне зображення



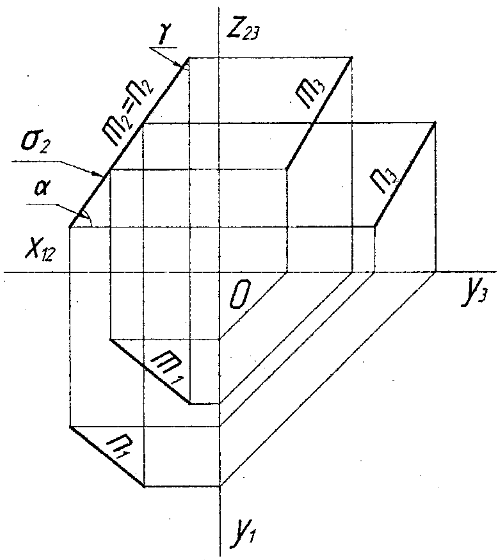
б) епюр

Рисунок 29 – Відображення горизонтально-проекціювальної площини

Фронтально-проекціювальна площина – площина, яка перпендикулярна до фронтальної Π_2 площини проекцій та утворює кути нахилу з горизонтальною Π_1 і профільною Π_3 площинами проекцій (рис. 30, а, б).



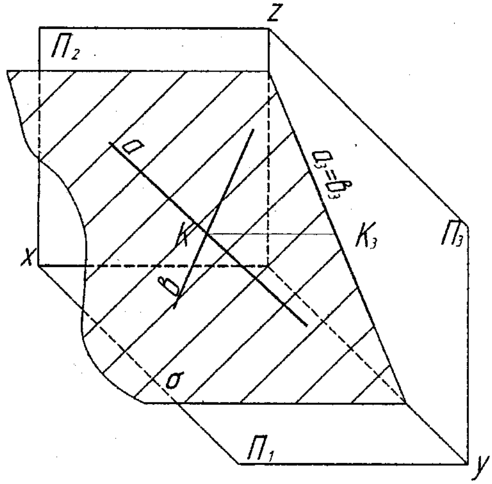
а) наочне зображення



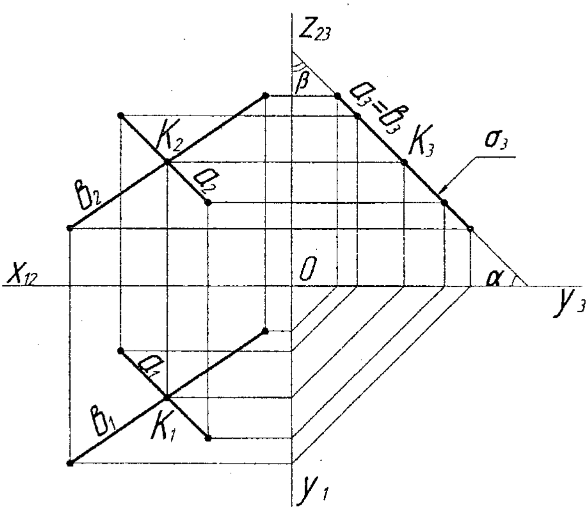
б) епюр

Рисунок 30 – Відображення фронтально-проекціювальної площини

Профільно-проекціювальна площина – площина, яка перпендикулярна до профільної $П_3$ площини проекцій та утворює кути нахилу з горизонтальною $П_1$ і фронтальною $П_2$ площинами проекцій (рис. 31, а, б).



а) наочне зображення



б) епюр

Рисунок 31 – Відображення фронтально-проекціювальної площини

Висновки

1. На паралельну їй координатну площину площина рівня проекціюється без спотворення. На дві інші координатні площини площина рівня проекціюється в лінії перетину її з цими координатними площинами і називаються вони виродженими проекціями цієї площини.

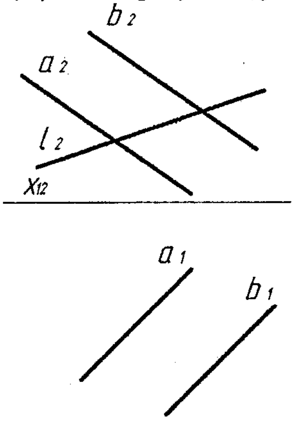
2. На перпендикулярну до неї координатну площину проекціювальна площина проекціюється в лінію перетину її з цією координатною площиною, тобто утворює вироджену проекцію цієї площини. На цю ж площину проекції проекціюються без спотворення кутів нахилу проекціювальної площини до двох інших.

4.4 Умови інцидентності

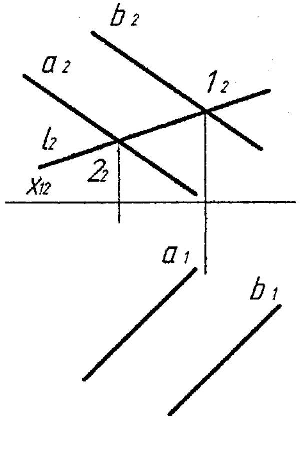
1-а умова – пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, які належать цій площині (рис. 32, а – в).

2-а умова – точка належить площині, якщо вона належить прямій, яка знаходиться в цій площині (рис. 33, а – г).

Поетапно твердження *1-ї умови* інцидентності можна подати сукупністю рисунків (рис. 32, а – в).

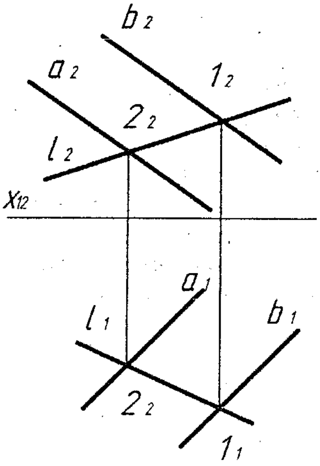


а) задана фронтальна проекція прямої *l*



б) проекціюють проекції точок *1*, *2* прямої *l* на $П_1$

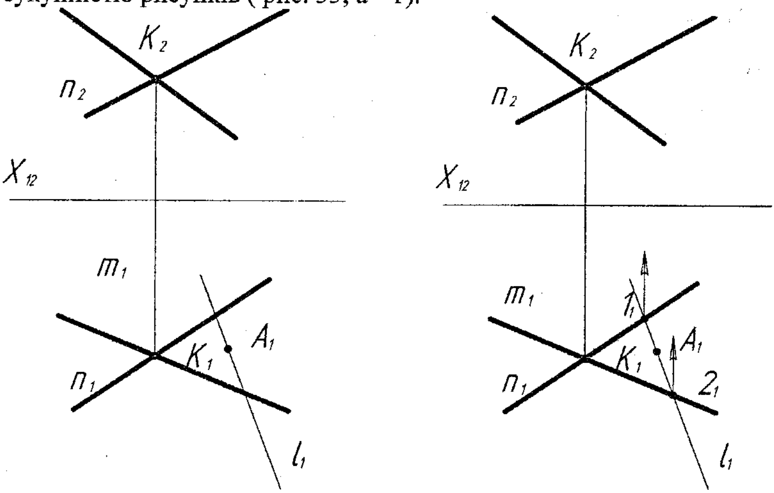
Рисунок 32 – Побудова проекцій прямої, що належить площині



в) визначають проекції прямої на $П_1$, тобто $l \in \Sigma(a \parallel в)$

Рисунок 32

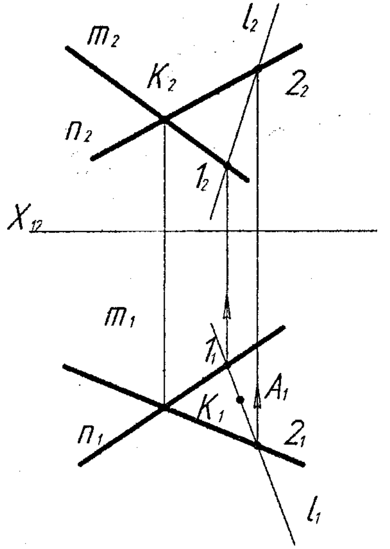
Поетапно твердження *2-ї умови* інцидентності можна подати сукупністю рисунків (рис. 33, а – г).



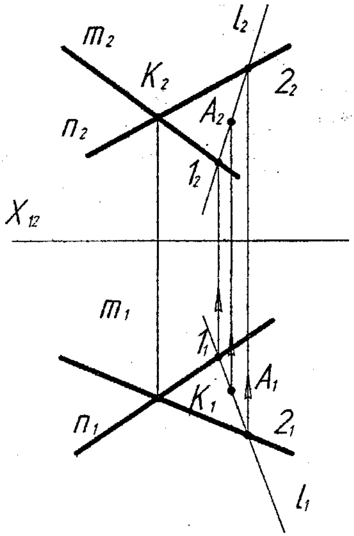
а) через горизонтальну проекцію точки A_1 проводять горизонтальну проекцію прямої l (l_1)

б) фіксують проекції точок 1_1, 2_1 перетину l_1 з площиною

Рисунок 33 – Побудова проекцій точки А, що належить площині



в) визначають відсутню проекцію прямої l (l_2)



г) будують відсутню проекцію точки A, тобто $A \in (m \cap n = K)$

Рисунок 33

4.5 Головні лінії площини

До головних ліній площини відносять: горизонталь h (h_1, h_2) та фронталь f (f_1, f_2). Побудову горизонталі та фронталі виконаємо для площини загального положення, яка задана трикутником ABC.

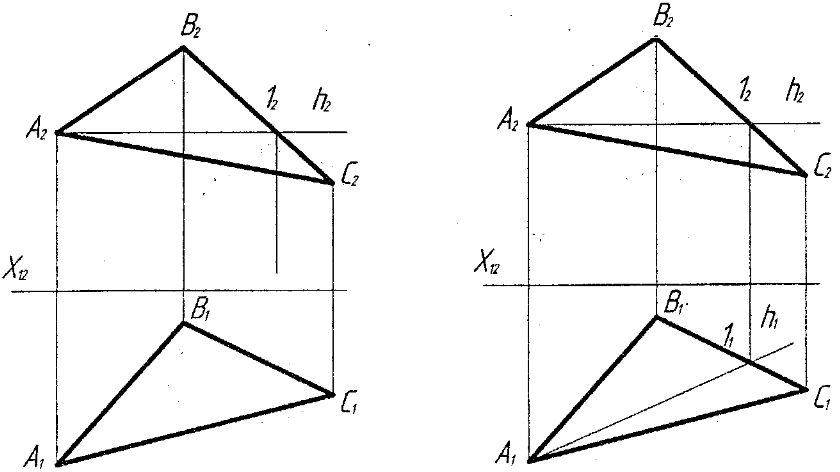
Горизонталь площини – пряма, яка належить площині та паралельна горизонтальній площині проекцій (рис. 34, а, б).

Фронталь площини – пряма, яка належить площині та паралельна фронтальній площині проекцій (рис. 35, а, б).

Побудову проекцій горизонталі h та фронталі f починають, враховуючи їх ознаки на епюрі: для $h[A, 1] - h_2 \parallel X_1$, $f[C, 2] - f_1 \parallel X_{12}$.

Тобто, h_2, f_1 – вихідні проекції, відповідно, горизонталі h та фронталі f. Для зручності головні лінії (лінії рівня) проведені через точку A (горизонталь) та точку C (фронталь) площини ΔABC.

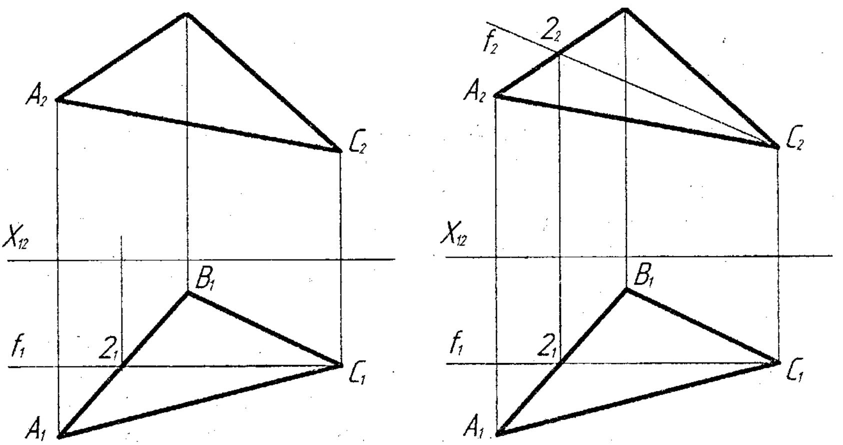
Примітка. Для будь-якого способу задання площини вихідною проекцією горизонталі h (h_1, h_2) є її фронтальна проекція h_2 ($h_2 \parallel X_1$), а для фронталі f (f_1,f_2) – горизонтальна проекція f_1 ($f_1 \parallel X_{12}$).



а) h_2 – вихідна проекція горизонталі h (h_2)

б) побудова відсутньої проекції горизонталі h (h_1)

Рисунок 34 – Побудова проекцій горизонталі площини



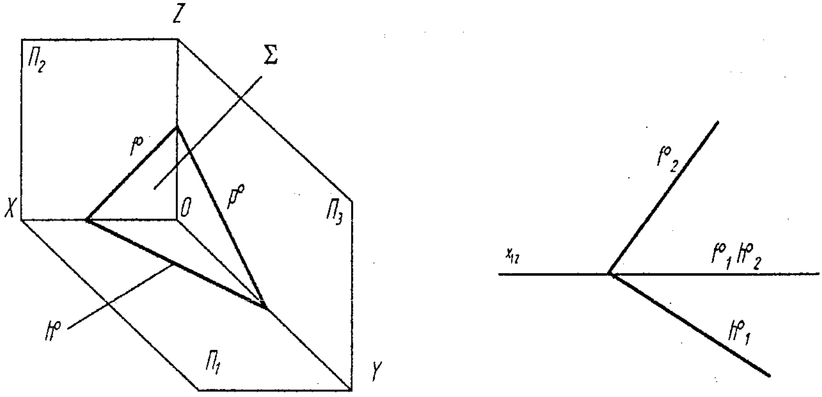
а) f_1 – вихідна проекція фронталі f (f_1)

б) побудова відсутньої проекції фронталі f (f_2)

Рисунок 35 – Побудова проекцій фронталі площини

4.6 Сліди площини

Сліди площини – лінії перетину площини з площинами проекцій. На рис. 36 (а, б) показані, відповідно, наочне зображення площини, заданої слідами, та її епюр. Позначення: f^{0} – фронтальний слід площини Σ; h^{0} – горизонтальний слід площини Σ; p^{0} – профільний слід площини Σ; X_{Σ} – точка збігу горизонтального та фронтального слідів.



а) наочне зображення б) епюр

Рисунок 36 – Сліди площини

Для проекціювальних площин та площин рівня було введено поняття виродженої проекції площини. Вироджена проекція площини також утворює слід площини.

4.7 Питання, які виносяться на СРС

1. Виконання побудов (комплексного рисунка та епюра) площин, що задаються відомими шістьма способами.
2. Побудова однієї з площин рівня та проекціювальної на відповідні площини проекцій

4.8 Теоретичні питання

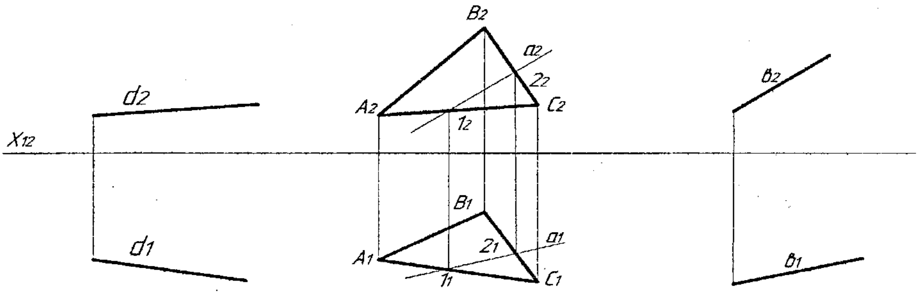
1. Які способи задання площини на епюрі ви знаєте?
2. Які положення площин вам відомі?
3. Графічні ознаки проекціювальних площин та площин рівня?
4. Яка властивість характерна для площин окремого положення?
5. Сутність умов інцидентності точки та прямої площині.
6. З якої площини проекцій доцільно починати побудову горизонталі, фронталі площини?

5 ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Пряма відносно площини може займати різні положення: належати площині; бути паралельною; перетинати її; бути перпендикулярною (є окремим випадком перетину).

5.1 Паралельність прямої площині

Означення: пряма паралельна площині, якщо вона паралельна прямій, яка знаходиться в цій площині (рис. 37).



а) окремий випадок б) загальний випадок

Рисунок 37 – Побудова прямої, паралельної площині

Для пояснення розв'язування задачі (загальний випадок) введемо символьні позначення.

Дано: σ (Δ *ABC*).

Побудувати: *в* || σ (Δ *ABC*).

План розв'язання:

1. В площині довільно проведемо пряму *a [1, 2]*, тобто $a \in \Delta ABC$.
2. Через точку *D* проведемо пряму *в*, паралельну прямій *a*, що належить площині трикутника *ABC*, тобто:

$$[(в \ni D) \parallel a] \rightarrow \begin{cases} (в_1 \ni D_1) \parallel a_1, \\ (в_2 \ni D_2) \parallel a_2. \end{cases}$$

Отже, пряма *в* паралельна площині *Σ (Δ ABC)*.

5.2 Перетин прямої з площиною

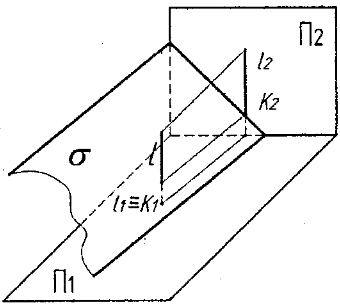
Результатом перетину прямої з площиною є точка. Розглянемо випадки перетину прямої з площиною, а саме, коли, в залежності від положення заданої площини та прямої, проекції точок визначаються безпосередньо або за рахунок допоміжних побудов.

5.2.1 Окремі випадки перетину прямої з площиною

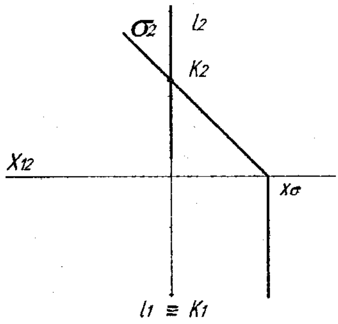
1. Проекціювальна пряма l перетинає площину σ окремого положення (рис. 38, а, б).

Фронтальна проекція точки K знаходиться на перетині фронтального сліду-проекції з проекцією прямої $l_2 : l_2 \cap \sigma_2 = K_2$. Горизонтальна проекція точки K збігається з виродженою проекцією прямої $l : l_1 \equiv K_1$. Умовний запис твердження такий: $\sigma\ (\sigma_2) \cap l = K$.

Висновок: дві проекції точки перетину K визначаються безпосередньо в тому разі, якщо пряма займає проекціювальне положення, а площина – проекціювальне або положення рівня.



а) наочне зображення

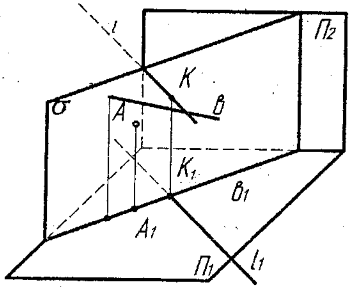


б) епюр

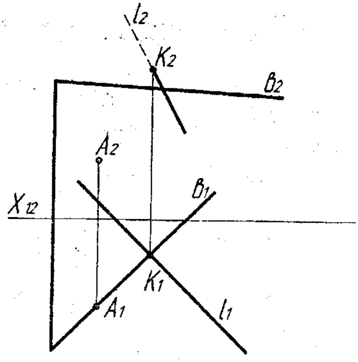
Рисунок 38 – Визначення проекцій точок перетину горизонтально-проекціювальної прямої l з фронтально-проекціювальною площиною σ

2. Пряма загального положення або рівня перетинає площину окремого положення (рис. 39, а, б).

Вихідна проекція точки перетину K – горизонтальна (перетин горизонтальної проекції l_1 зі слідом-проекцією σ_1), тобто: $l_1 \cap \sigma_1 = K_1$ знаходиться в точці перетину l_2 з вертикальною лінією зв'язку ($K_2 \in l_2$).



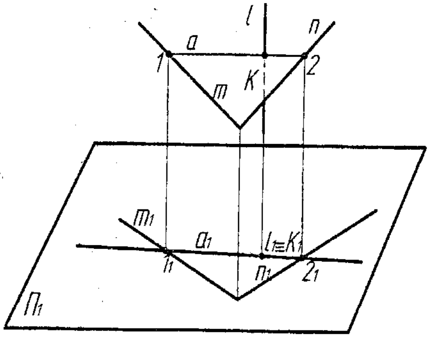
а) наочне зображення



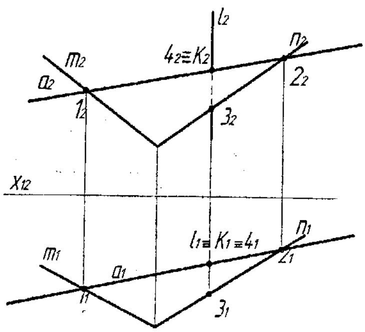
б) епюр

Рисунок 39 – Визначення проекцій точок перетину прямої l з горизонтально-проекціювальною площиною σ

1. Проекціювальна пряма перетинає площину загального положення (рис. 40, а, б).



а) наочне зображення



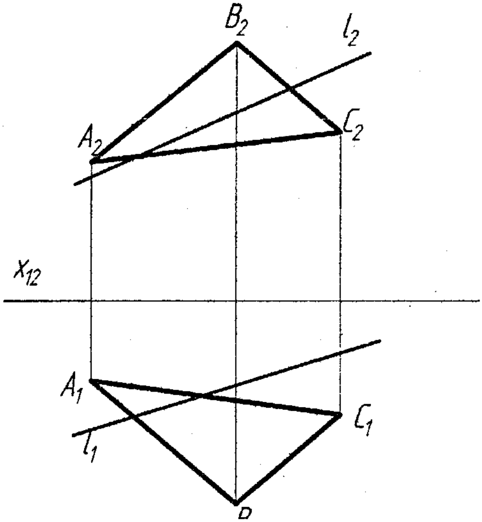
б) епюр

Рисунок 40 – Визначення проекцій точок перетину горизонтально-проекціювальної прямої з площиною загального положення

Вихідна проекція точки перетину K – горизонтальна проекція K_1, вона збігається з виродженою проекцією l_1 заданої горизонтально-проекціювальної прямої l. Відсутня проекція знайдена з умови належності точки K площині σ ($K \in a$, $a \in \sigma$), проекція K_2 фіксується на перетині проекції l_2 з a_2, тобто: $l_2 \cap a_2 = K_2$. Прямі l і n площини мимобіжні, відповідно, точки 3 та 4 цих прямих конкурують на $П_2$, точка 3 належить видимій стороні n площини σ ($y_3 > y_4$).

5.2.2 Загальні випадки перетину прямої з площиною

Приклад. Побудуйте проекції точок перетину прямої з площиною. Визначте видимість прямої l. Розв'язок цієї задачі демонструється поетапними побудовами з відповідними рисунками (рис. 41 – 46).



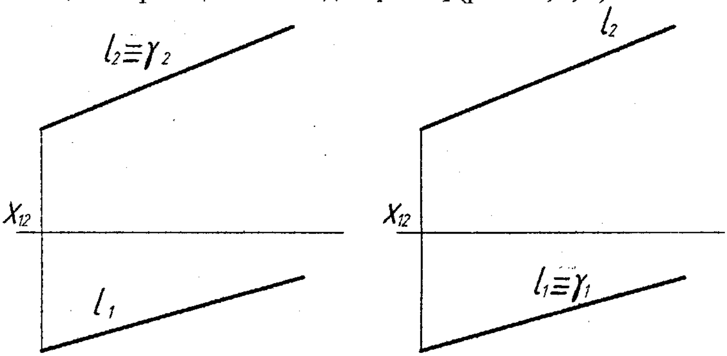
Дано: σ (ΔABC) – площина;
l (l_1, l_2) – пряма;
$l \cap \sigma = K$ – точка перетину.

Побудувати:

1. K (K_1, K_2) – проекції точки перетину.
2. Видимість l (l_1, l_2).

Рисунок 41 – Умова задачі

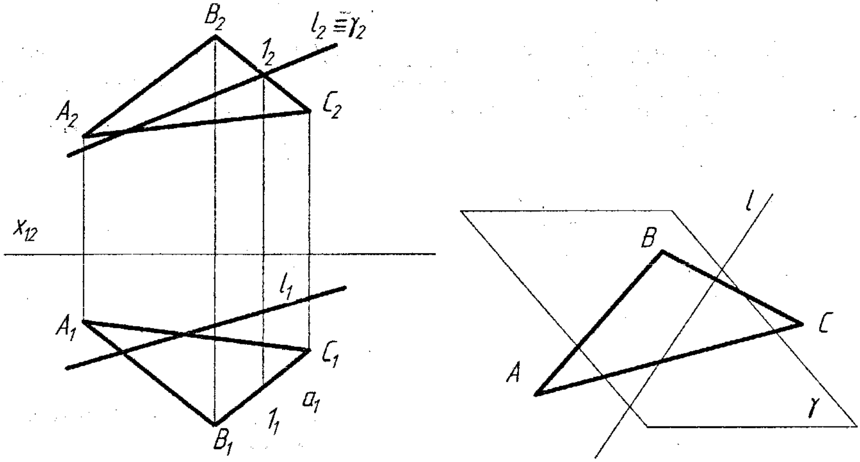
1. Через пряму l проводять допоміжну січну площину, здебільшого – рівня або проекціювальну. Можливі такі варіанти введення допоміжної січної площини: проекціювальної до Π_1 чи Π_2 (рис. 42, а, б).



а) γ – фронтально-проекціювальна б) γ – горизонтально-проекціювальна

Рисунок 42 – Варіанти введення допоміжної січної площини γ

Наприклад, обираємо фронтально-проекціювальну площину (рис. 43, а, б).

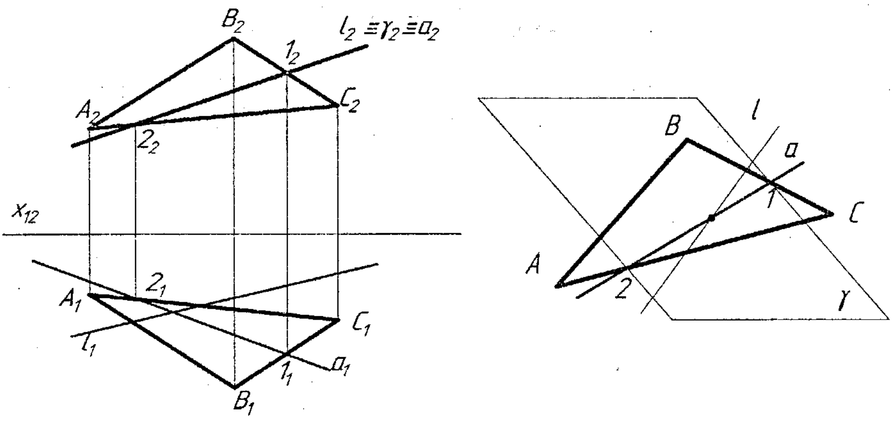


а) варіант проекціювальної площини γ (γ_2)

б) наочне зображення

Рисунок 43 – Вибір варіанта проекціювальної площини γ (γ_2)

2. Визначаємо лінію перетину *a [1, 2]* площини σ з введеною γ (γ_2) (рис. 44, а, б).



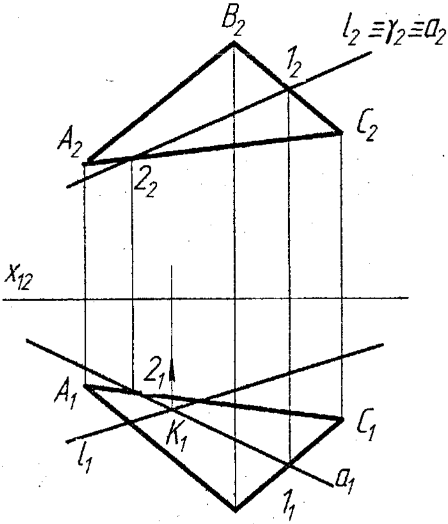
а) $\sigma \cap \gamma = a\ [1, 2]$

б) наочне зображення

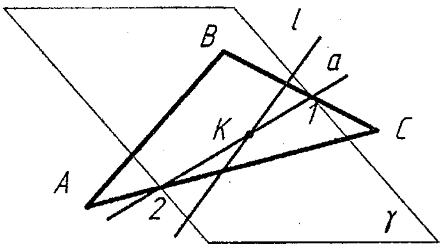
Рисунок 44 – Побудова лінії взаємного перетину *a [1, 2]* заданої площини σ із введеною проекціювальною площиною γ (γ_2)

Для цього вздовж фронтального сліду площини γ_2 фіксуємо фронтальні проекції точок перетину 1_2 та 2_2, відсутні проекції (1_1 та 2_1) яких знаходимо за проекційним зв'язком (рис. 44, а).

3. На перетині лінії a_1 з проекцією l_1 фіксуємо горизонтальну проекцію точки K (K_1), тобто K_1 – вихідна проекція точки K. Використовуючи умову інцидентності, знаходимо фронтальну проекцію точки K (K_2), тобто $a_1 \cap l_1 = K_1$, $K_2 \in l_2, a_2$ (рис. 45, а, б).



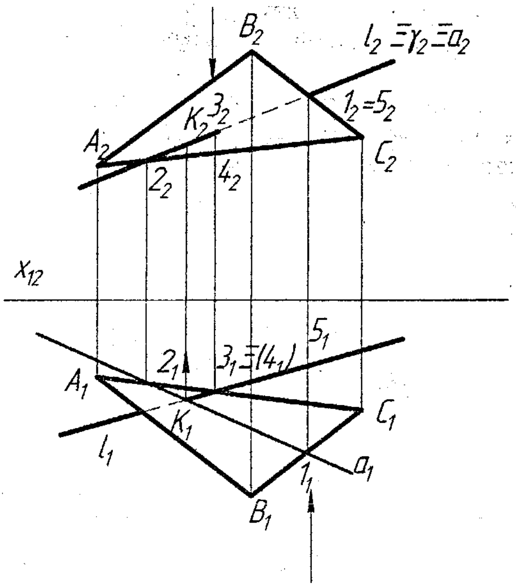
а) $l_1 \cap a_1 = K_1$, $K_2 \in l_2, a_2$



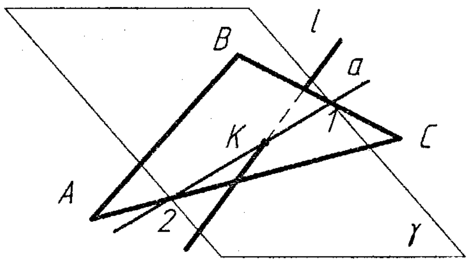
б) $l \cap a = K(K_1, K_2)$

Рисунок 45 – Побудова проекцій точки $K(K_1, K_2)$ перетину з заданою площиною σ (ΔABC)

4. Визначаємо видимість проекцій прямої l (l_1, l_2) (рис. 46, а, б).



а) епюр



б) наочне зображення

Рисунок 46 – Перетин прямої l з площиною σ (Δ ABC)

Для визначення видимості проекції l_1 скористаємося конкуруючими точками прямої l із стороною AC на Π_1, тобто 3, 4 ($3 \in l$, $4 \in AC$). Поглядом, позначеним стрілкою, спочатку зустрічаємо проекцію l_2, значить, ця частина проекції прямої l_1 до проекції точки K_1 видима.

Для визначення видимості проекцій l_2 скористаємось конкуруючими точками прямої l із стороною BC на Π_2, це – 1, 5 ($1 \in BC$, $5 \in l$). Першою поглядом зустрічаємо точку *1*, яка належить стороні $\Delta\ ABC$, це означає, що $\Delta\ ABC$ на означеному проміжку на Π_2 перекриває пряму до точки *K*.

Алгоритм розв'язання цієї задачі в символьній формі такий.

1. $l \equiv \gamma,\ \gamma \perp \Pi_2$. 2. $\gamma \cap \sigma = a$.

3. $l \cap a = K \Rightarrow \begin{cases} l_1 \cap a_1 = K_1, \\ K_2 \in l_2, a_2. \end{cases}$ 4. Видимість $l\ (l_1,\ l_2)$.

Висновки

1. Дві проекції точки перетину *K* визначаються безпосередньо в тому разі, якщо пряма займає проекціювальне положення, а площина – проекціювальне або положення рівня.
2. Якщо пряма загального положення або рівня перетинає площину окремого положення, то одна із проекцій шуканої точки перетину *K* знаходиться на перетині сліду-проекції площини з проекцією прямої. Відсутня проекція визначається за лінією зв'язку до перетину з другою проекцією прямої.
3. Якщо проекціювальна пряма перетинає площину загального положення, то одна із проекцій шуканої точки перетину *K* збігається з виродженою проекцією цієї прямої. Відсутня проекція точки перетину визначається як точка, яка належить площині.

5.3 Питання, які виносяться на СРС

1. Побудова прямої, паралельної площинам окремого положення.
2. Побудова проекцій точок перетину прямої з площиною окремого положення.

5.4 Теоретичні питання

1. Дайте означення паралельності прямої площині.
2. В чому відміни при побудовах окремих та загальних випадків паралельності прямої площині?
3. Які випадки перетину прямої з площиною ви знаєте?
4. Які спрощення існують при визначенні проекцій точок перетину в окремих випадках?
5. Алгоритм побудови точки перетину прямої з площиною.

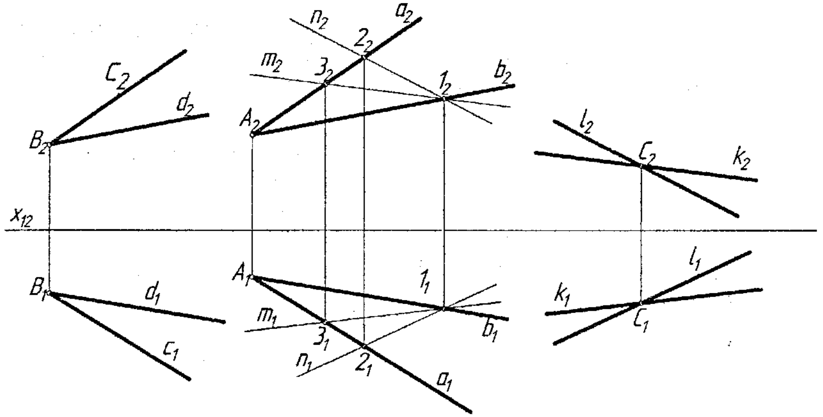
6 ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПЛОЩИН

За взаємним положенням площини можуть бути:

– паралельними;
– перетинатися;
– перпендикулярними (є окремим випадком перетину).

6.1 Паралельність площин

Означення: якщо дві прямі однієї площини, що перетинаються, паралельні двом прямим другої площини, що перетинаються, то ці площини паралельні між собою (рис. 47).



а) окремий випадок б) загальний випадок

Рисунок 47 – Випадки паралельності двох площин

Окремий випадок (рис. 47, а) передбачає побудову паралельної площини β, прямі c, d якої відповідно паралельні двом прямим a, b площини σ, тобто $\sigma\,(a \cap b = A) \parallel \beta\,(c \cap d = B) \Rightarrow \begin{cases} (a_1 \cap b_1 = A_1) \parallel (c_1 \cap d_1 = B_1), \\ (a_2 \cap b_2 = A_2) \parallel (c_2 \cap d_2 = B_2). \end{cases}$

Загальний випадок (рис. 47, б) передбачає побудову площини Σ, паралельної заданій σ, причому прямі $m \cap n$ в площині σ введені довільно. Це означає, що попередньо в заданій площині σ можна побудувати безліч пар прямих, які перетинаються (відповідає означенню паралельності двох площин) та належать цій площині. Символьно розв'язок записується так:

$$\sigma\,(n \cap m = 1) \parallel \Sigma\,(l \cap k = C) \Rightarrow \begin{cases} (n_1 \cap m_1 = 1_1) \parallel (l_1 \cap k_1 = C_1), \\ (n_2 \cap m_2 = 1_2) \parallel (l_2 \cap k_2 = C_2). \end{cases}$$

6.2 Перетин площин

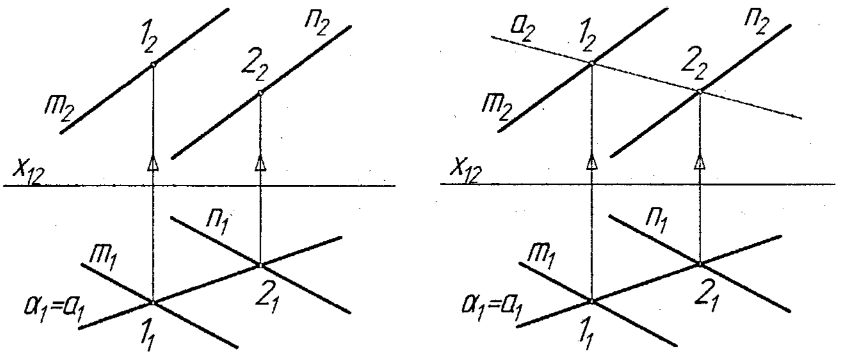
Лінія перетину двох площин визначається двома точками, що одночасно належать двом площинам, або однією загальною точкою і відомим напрямом цієї лінії.

6.2.1 Окремі випадки перетину

1. Дві площини окремого положення перетинаються по прямій, яка займає проекціювальне положення (завдання на СРС).

2. Площину загального положення σ перетинає площина окремого положення α (рис. 48, а, б).

Символьний запис: $\alpha \cap \sigma\ (m \parallel n) = a[1, 2]$



а) a_1 – вихідна проекція

б) лінія перетину a будується за двома точками *1* та *2*

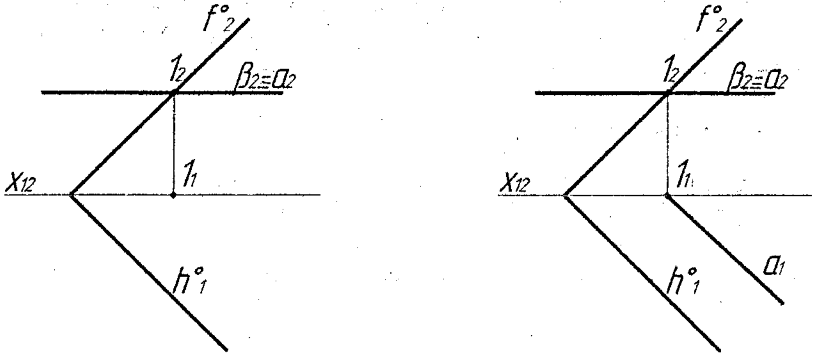
Рисунок 48 – Окремий випадок перетину площин

Вихідна проекція лінії перетину $a(a_1)$ визначається безпосередньо за допомогою двох точок *1* та *2* (рис. 48, а) на слід-проекції площини $\alpha(\alpha_1)$.

3. Перетин двох площин, заданих слідами.

В першому випадку лінія перетину визначається за точкою *1* та напрямом. В конкретній задачі напрям лінії перетину паралельний горизонтальним проекціям горизонтальних слідів двох площин, оскільки ці сліди паралельні між собою. Точка перетину *1* визначається на перетині фронтальних проекцій фронтальних слідів ($f_2^0 \cap \overline{\beta_2} = 1_2$) (рис. 49).

Символьний запис: $\Sigma \cap \beta = a\ (a_1, a_2)$.



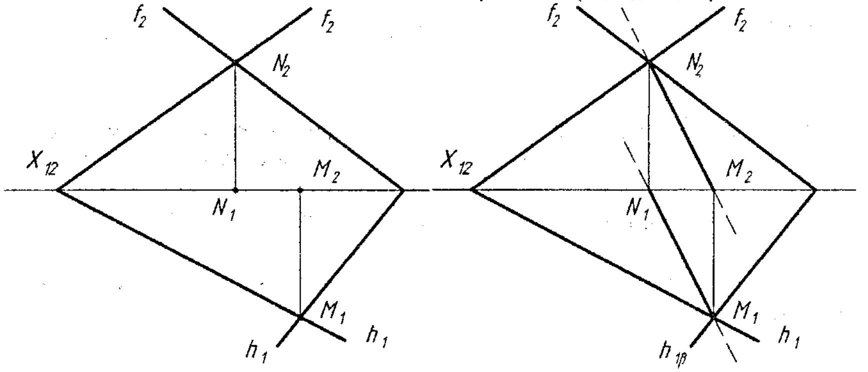
а) a_2 – вихідна проекція

б) a_1 будується за точкою *1* і напрямом паралельним h^0_1

Рисунок 49 – Лінія перетину площин, заданих слідами

В другому випадку дві точки перетину визначають як точки перетину однойменних слідів: горизонтальних, що дає точку *M* (M_1, M_2); фронтальних, що дає точку *N* (N_1, N_2) (рис. 50, а). Проекції лінії перетину *MN* (M_1N_1, M_2N_2) отримані як результат з'єднання відповідних їм проекцій точок (рис. 50, б).

Символьний запис: $\Sigma \cap \beta = MN\ (M_1N_1, M_2N_2)$.



а) *M* та *N* – точки перетину горизонтальних та фронтальних слідів

б) *MN* – лінія перетину заданих площин

Рисунок 50 – Лінія перетину площин, заданих слідами

6.2.2 Загальні випадки перетину

В даному випадку дві площини займають загальне положення. Точки, що належать лінії перетину двох площин, визначаються методом допоміжних січних площин (площин-посередників).

1. Допоміжні січні площини, проекціювальні або рівня, вводять додатково.

2. Допоміжні січні площини вводять, використовуючи задані елементи площин (прямі або сторони плоских фігур).

Сутність використання площин-посередників пояснюється таким чином: нехай задані дві площини α та β, які перетинаються по лінії d. Допоміжною січною площиною τ водночас перетнемо задані площини α та β, результатом перетину якої будуть прямі a та b. Оскільки ці прямі належать одній і тій же площині τ, то вони перетинаються в точці E, яка одночасно належить площинам α та β (рис. 51).

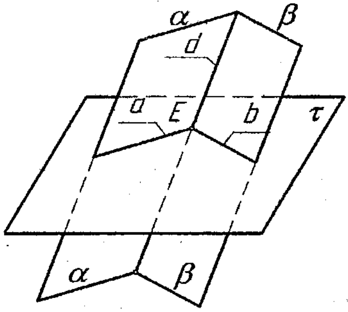


Рисунок 51 – Сутність використання площини-посередника τ

Задача. Використовуючи метод допоміжних січних площин побудуйте лінію взаємного перетину двох площин загального положення, одна з яких задана слідами σ ($h^0 \cap f^0$), а друга – двома прямими, що перетинаються γ ($m \cap n$) (рис. 52).

Розв'язування цієї задачі пояснюється послідовністю побудов, які демонструються рисунками 53 – 57.

1. Задаємо графічну умову задачі (рис. 52).

2. Введемо першу площину-посередник τ^1 та визначимо лінії, по яким вона перетинає дві площини σ та γ (рис. 53).

В даному разі площина-посередник паралельна горизонтальній площині проекцій. Як площини-посередники можна вибирати будь-які площини, здебільшого, окремого положення (рівня або проекціювальні).

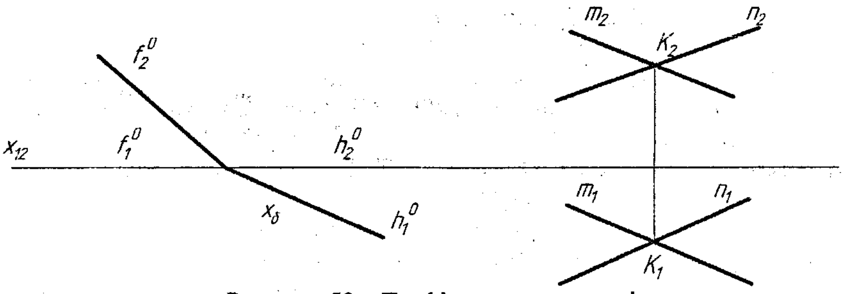


Рисунок 52 – Графічна умова задачі

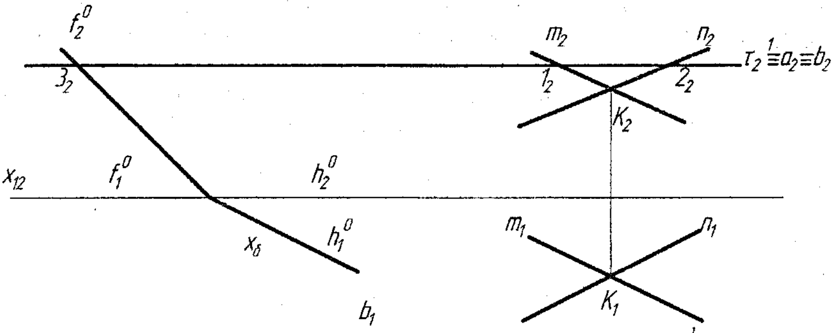


Рисунок 53 – Введення площини-посередника τ^1

Січна площина-посередник τ^1 перетинає площину γ ($m \cap n$) по лінії $a[1,\ 2]$, а площину σ ($h^0 \cap f^0$) – по лінії b. Причому, лінія b задається точкою 3 із фронтальним слідом f^0 та напрямом, паралельним горизонтальному сліду h^0 площини σ (рис. 54).

3. Знайдемо відсутні проекції ліній перетину a та b, тобто a_1 та b_1, та зафіксуємо їх спільну точку перетину E (E_1, E_2) (рис. 54).

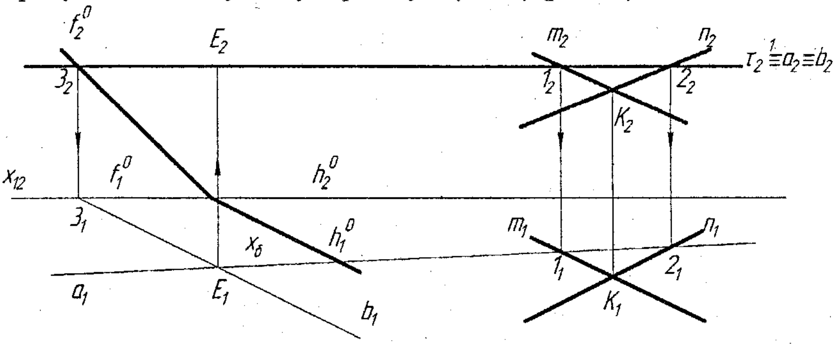


Рисунок 54 – Побудова точки перетину E (E_1,E_2)

4. Введемо другу площину-посередник τ^2, яка паралельна попередній та визначимо лінії, по яких вона перетинає задані площини σ та γ (рис. 55).

З метою спрощення побудов друга площина-посередник τ^2 введена паралельно попередній через точку K площини γ.

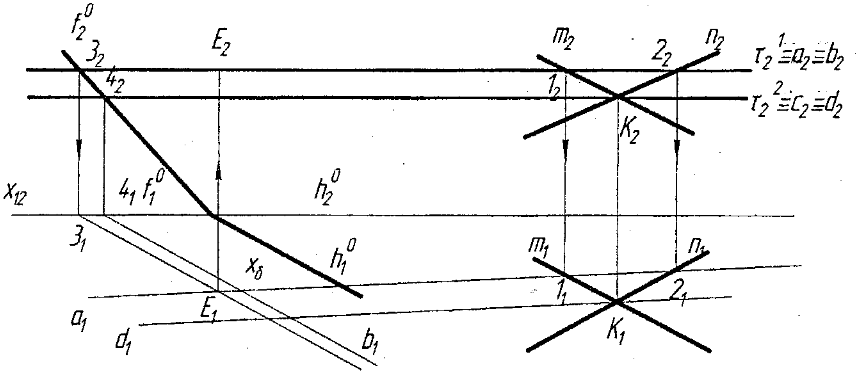


Рисунок 55 – Введення площини-посередника τ^2

Побудуємо лінії, по яких перетинає друга площина-посередник τ^2. Площину σ площина τ^2 перетинає в точці *4* по лінії d; площину γ площина τ^2 перетинає в точці K. Оскільки площини-посередники τ^1 та τ^2 паралельні між собою, то в символьній формі це можна виразити таким чином:

$$\tau^1 \parallel \tau^2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \parallel c_1,\ b_1 \parallel d_1; \\ a_2 \parallel c_2,\ b_2 \parallel d_2. \end{cases}$$

5. Зафіксуємо точку перетину F (F_1, F_2), що є результатом перетину означених ліній c та d (рис. 56).

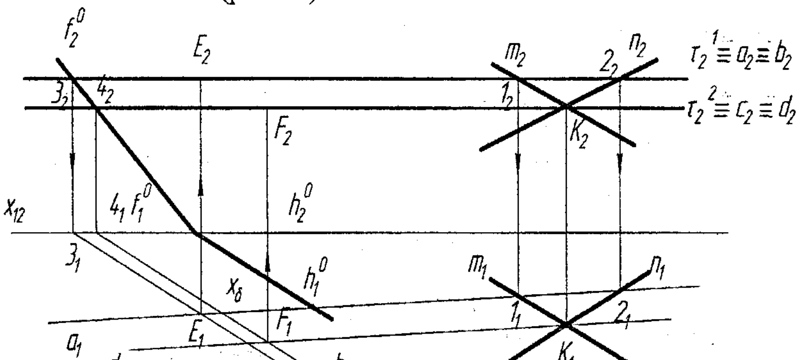


Рисунок 56 – Побудова точки перетину F (F_1, F_2)

6. Визначаємо лінію взаємного перетину двох площин.

Лінія взаємного перетину двох площин визначається по двох точках E та F (рис. 57), кожна з яких отримана відповідною площиною-посередником τ^1 та τ^2.

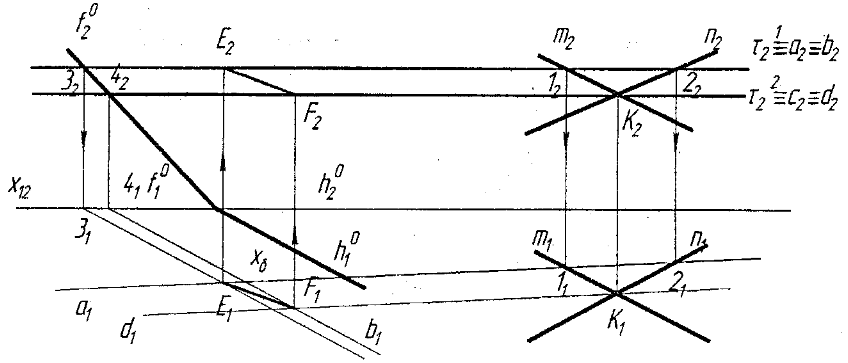


Рисунок 57 – Побудова проекцій лінії взаємного перетину двох площин загального положення

Задача. Використовуючи метод допоміжних січних площин, побудуйте лінію взаємного перетину площин $\alpha\,(m||n)$ та $\beta\,(\Delta\,ABC)$ (рис. 58).

Алгоритм розв'язання

1. Введемо першу площину-посередник τ^1 ($\tau^1||\Pi_1$).

2. Знайдемо лінії перетину площини, площини-посередника τ^1 з площинами α та β, відповідно: a^1 $[1, 2]$ та b^1 $[C, 3]$.

3. Визначаємо точку перетину E лінії a^1 та b^1.

4. Введемо другу площину-посередник τ^2, яка паралельна попередній τ^1.

5. Знайдемо лінії перетину площини-посередника τ^2 з площинами α, β – a^2 та b^2, причому ($a^1||a^2$, $b^1||b^2$).

6. Визначимо точку перетину F ліній a^2 та b^2.

7. Через точки E (E_1, E_2), F (F_1, F_2) проведемо пряму EF (E_1F_1, E_2F_2), яка визначає лінію взаємного перетину двох заданих площин α та β.

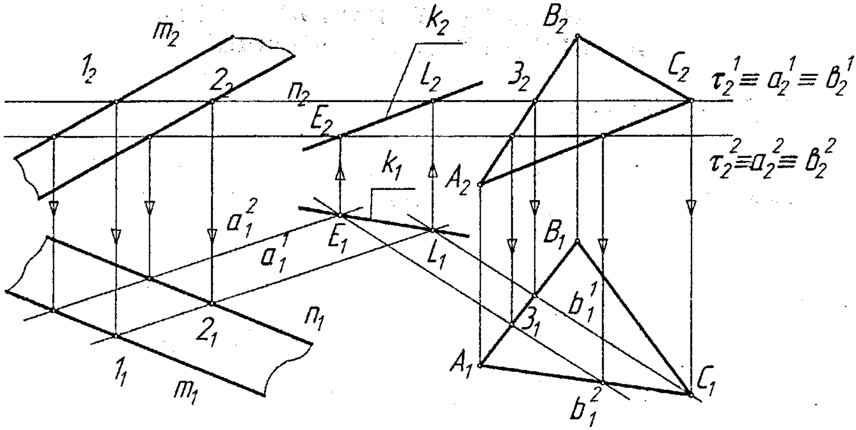


Рисунок 58 – Побудова проекцій ліній взаємного перетину двох площин шляхом введення допоміжних січних площин

6.3 Питання, які виносяться на СРС

1. Побудова проекцій паралельних площин рівня.
2. Побудова проекцій паралельних проекціювальних площин.
3. Побудова проекцій лінії перетину площин окремого положення.

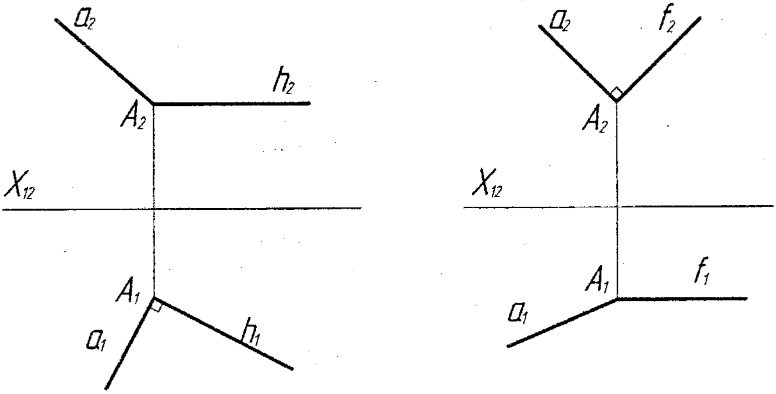
6.4 Теоретичні питання

1. Дайте означення двох паралельних площин.
2. Відміни побудов окремих та загальних випадків паралельності двох площин.
3. Які випадки перетину двох площин вам відомі? В чому їх різниця?
4. Які два випадки побудов лінії перетину для площин, заданих слід-проекцією, вам відомі?
5. Сутність введення площин-посередників.
6. Яке положення здебільшого займають введені площини-посередники?
7. Який алгоритм побудови лінії взаємного перетину двох площин шляхом введення допоміжних січних площин?

7 ПЕРПЕНДИКУЛЯР ДО ПЛОЩИНИ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН

7.1 Властивості прямого кута

Прямий кут проекціюється в натуральну величину на $\Pi_1(\Pi_2)$, якщо одна з його сторін $h(f)$ паралельна площині проекцій $\Pi_1(\Pi_2)$ (рис. 59, а, б).



а) a_1^ h_1=90° б) a_2^ f_2=90°

Рисунок 59 – Властивості прямого кута

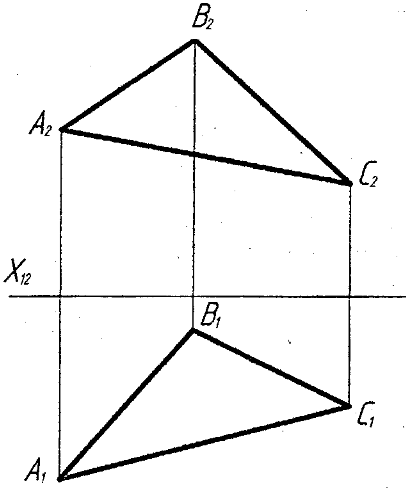
7.2 Перпендикуляр до площини

Введемо означення перпендикуляра, враховуючи властивості прямого кута: у перпендикуляра p до площини його горизонтальна проекція p_1 перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі h_1 ($p_1 \perp h_1$), а фронтальна проекція перпендикуляра p_2 перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі f_2 ($p_2 \perp f_2$).

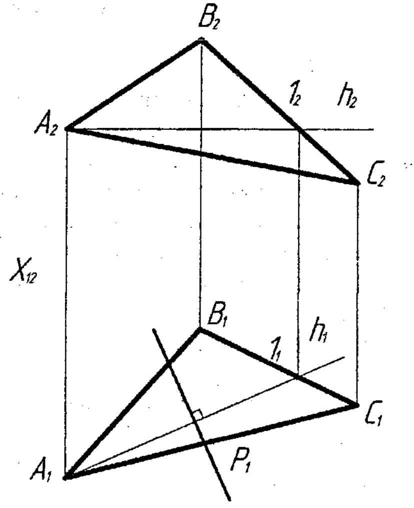
Задача. Через точку E провести перпендикуляр до площини β (Δ ABC).

Дано: точка E,
площина β (Δ ABC).
Побудувати: $p \perp \beta$, $p \ni E$.

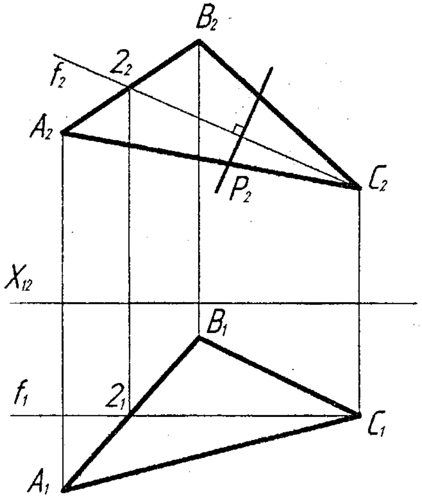
Розв'язування цієї задачі демонструється поетапними побудовами з відповідними рисунками (рис. 60, а – г). Алгоритм розв'язування описано нижче.



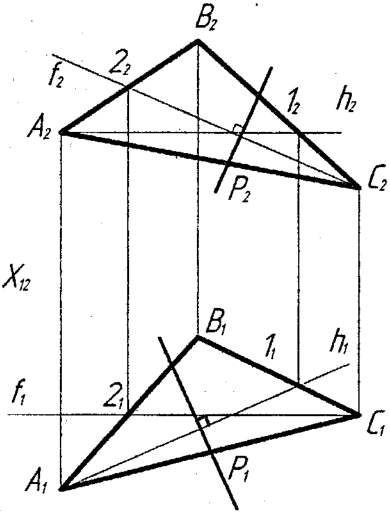
а) умова задачі



б) побудова горизонтальної проекції перпендикуляра *p* (*p*$_1$)



в) побудова фронтальної проекції перпендикуляра *p* (*p*$_2$)



г) кінцевий результат

Рисунок 60 – Побудова проекцій перпендикуляра до площини

Алгоритм розв'язання

1. В заданій площині будуємо горизонталь h (h_1, h_2) та фронталь f (f_1, f_2) площини, причому вихідною проекцією у горизонталі є h_2, у фронталі – f_1. Тобто, $h_2||x_{12}$ (рис. 60, б) проводимо через проекцію A_2 точки A, а $f_1||x_{12}$ (рис. 61, в) проводимо через проекцію C_1 точки C.

2. Будуємо проекції перпендикуляра. Згідно з означенням, горизонтальна проекція перпендикуляра p_1 повинна проходити перпендикулярно (рис. 60, б) до горизонтальної проекції горизонталі $h_1(p_1 \perp h_1)$, фронтальна проекція p_2 – до фронтальної проекції фронталі $f_2(p_2 \perp f_2)$ (рис. 60, г).

В символьному вигляді алгоритм розв'язку можна записати так:

1. $h_2||x_{12}$ – побудова горизонталі h (h_1, h_2);
2. $f_1||x_{12}$ – побудова фронталі f (f_1, f_2);
3. $p_1 \perp h_1$ – побудова горизонтальної проекції перпендикуляра p_1;
4. $p_2 \perp f_2$ – побудова фронтальної проекції перпендикуляра p_2.

7.3 Перпендикулярність площин

Означення: площина γ перпендикулярна до заданої площини $\sum$, якщо вона (γ) може бути задана двома прямими, які перетинаються, причому одна із цих прямих є перпендикуляром до заданої площини.

З елементарної геометрії відома теорема: пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих площини, які перетинаються (h та f).

Задача. Через точку A провести площину, перпендикулярну до заданої площини σ (a || $в$).

Пояснення

Розв'язання задачі, що міститься на рис. 61, складається з таких послідовних побудов:

1) в площині σ (a || $в$) довільно проведені лінії рівня – горизонталь h (h_1, h_2) та фронталь f (f_1, f_2);

2) через проекції точки A (A_1, A_2) побудовані проекції перпендикуляра p(p_1, p_2) до заданої площини, а саме – $p_1 \perp h_1$, $p_2 \perp f_2$;
3) перпендикулярна площина τ задана двома прямими, які перетинаються τ ($p \cap n$).

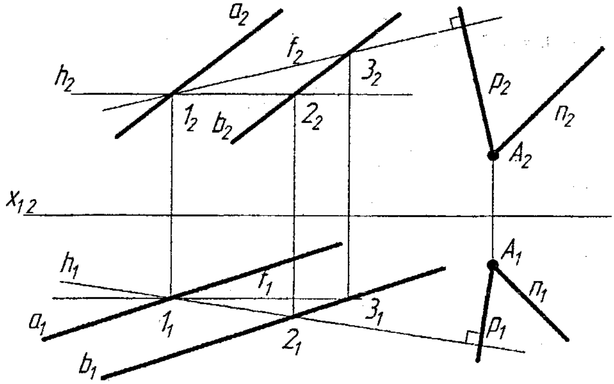
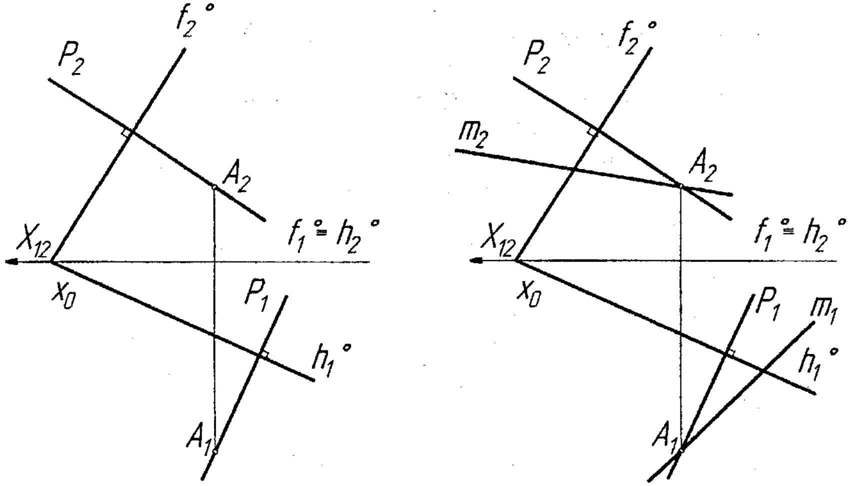


Рисунок 61 – Проведення площини $\tau\,(p \cap n = A)$, перпендикулярної до $\sigma\,(a \parallel в)$

Побудова перпендикуляра до площини, перпендикулярної до заданої, значно спрощується, якщо ставиться задача побудови перпендикуляра (перпендикулярної площини) до площини, яка задана слідами (рис. 62, а, б). Спрощений варіант розв'язання пояснюється тим, що для площин, які задані слідами, горизонталь та фронталь площини проводити необов'язково.



а) $p \perp \sigma\,(h^{\circ} \cap f^{\circ})$ б) $\tau\,(p \cap m = A) \perp \sigma\,(h^{\circ} \cap f^{\circ})$

Рисунок 62 – Побудова перпендикуляра p та площини τ, перпендикулярної до заданої площини σ

Символьний запис до розв'язання цих задач такий:

1. $p_1 \perp h_1, \quad p_2 \perp f_2.$

2. $p = \gamma, \qquad \gamma = \Pi_2.$

3. $\gamma \cap \sigma = d\ [1, 2].$

4. $d \cap p = K \Rightarrow \begin{cases} d_1 \cap p_1 = K_1, \\ K_2 \in d_2, p_2. \end{cases}$

7.4 Питання, які виносяться на СРС

1. Побудова проекцій перпендикуляра до площин окремого положення.
2. Побудова проекцій перпендикуляра до площин, заданих слідами.
3. Побудова проекцій перпендикулярної площини до площин окремого положення.
4. Побудова проекцій перпендикулярної площини до площин, заданих слідами.

7. 5 Теоретичні питання

1. Дайте означення перпендикуляра до площини.
2. Якого положення набувають проекції перпендикуляра, що будується до площин рівня?
3. Якого положення набувають проекції перпендикуляра, що будується до проекціювальних площин ?
4. Які головні лінії слід попередньо побудувати в площині?
5. В яких випадках попередня побудова проекцій ліній рівня площини необов'язкова?
6. Дайте означення взаємно перпендикулярних площин.
7. Скільки способів задання перпендикулярної площини можна використати при її побудові?
8. Які спрощення застосовують для побудови перпендикулярної площини, якщо попередня задана слідами?
9. Сутність властивостей прямого кута.

8 МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕНЬ

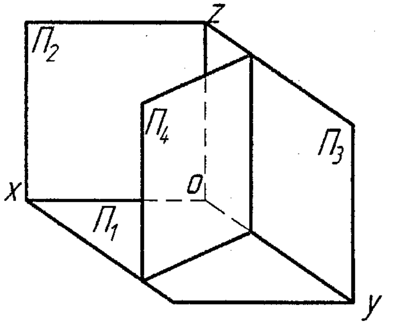
8.1 Загальні положення

Задання прямих ліній та плоских фігур, які займають окреме положення, дозволяє спростити побудови та розв'язання задач.

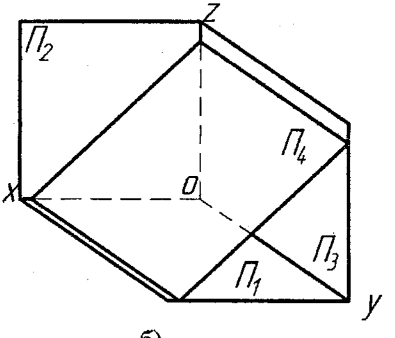
Якщо прямі лінії та плоскі фігури займають загальне положення відносно площин проекцій $П_1$ та $П_2$, то за рахунок способів перетворень можна розв'язувати ряд метричних задач. Причому, для геометричних побудов, пов'язаних з прямими та точками, використовують алгоритм, який дозволяє визначати відстані між двома точками, паралельними та мимобіжними прямими; від точки до прямої, кути нахилу прямих до горизонтальної та фронтальної площин проекцій. Для метричних задач, що стосуються площин, використовують інший алгоритм, яким користуються для визначення натуральних величин плоских фігур (площа, периметр), кутів нахилу заданих площин до площин проекцій, відстаней від точки до площини, між двома паралельними площинами.

8.2 Спосіб заміни площин проекції

Сутність методу: об'єкт проекціювання (пряма та площина) залишають нерухомим, а нову площину проекції вводять так, як це зручно для розв'язання задачі. Причому, додаткова площина проекцій, яка замінює попередню $П_2$ ($П_1$), повинна бути перпендикулярною до тієї, що залишається, тобто $П_4 \perp П_1$ ($П_4 \perp П_2$) (рис. 63, а, б).



а)



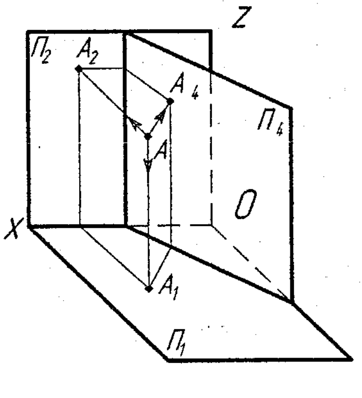
б)

Рисунок 63 – Введення допоміжної площини проекцій відносно основних площин проекцій $П_1$ та $П_2$

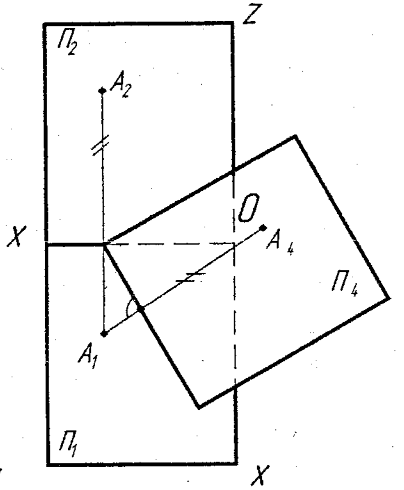
При утворенні епюра для подальших побудов профільна площина проекцій $П_3$ до уваги не береться.

Як видно з рис. 64, при заміні площини проекцій $П_2$ на $П_4$ незмінна площина проекцій $П_1$ входить до обох систем $П_2 – П_1$ та $П_1 – П_4$. Тому горизонтальна проекція точки A (A_1) відноситься (рис. 64, а, б) і до системи $П_1 – П_4$. При проекціюванні точки A на площину проекцій $П_4$ (рис. 64, б, в) отримуємо проекцію точки A (A_4) з врахуванням сталості координати Z_A.

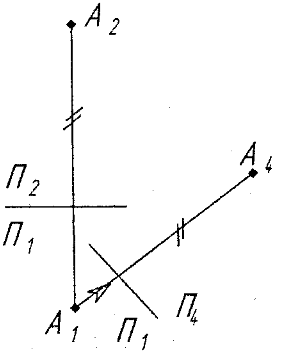
Слід звернути увагу на те, що лінія зв'язку при утворенні епюра в новій координатній системі $П_1 – П_4$ проводиться перпендикулярно до осі $П_1/П_4$.



а) проекціювання точки A на нову площину проекцій $П_4$



б) утворення епюра при введенні нової площини проекцій $П_4$



в) епюр точки A в новій площині проекцій $П_4$

Рисунок 64 – Побудова проекцій точки A в новій площині проекцій $П_4$

Задача 1. Прямій EF надайте окремі положення та визначте кути нахилу цієї прямої до площин проекцій $П_1$ та $П_2$ (рис. 65).

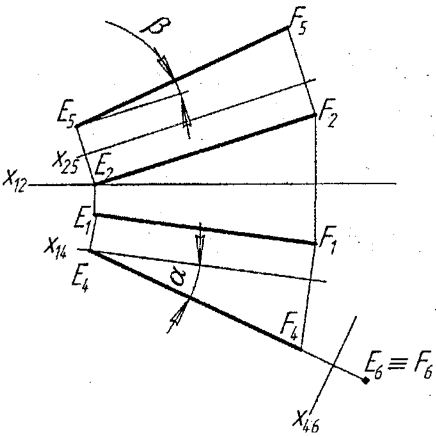


Рисунок 65 – Основні положення прямої EF

Алгоритм розв'язання

1. Для визначення кута нахилу прямої EF до горизонтальної площини $П_1$ нову площину проекцій $П_4$ вводять таким чином, щоб вона була перпендикулярною до $П_1$ та паралельною прямій EF. Ознакою цих побудов є: $П_1 \cap П_4 = X_{14}$, $X_{14} \parallel E_1F_1$.

2. Будуємо фронтальну проекцію прямої EF в новій площині проекцій $П_4$. Для цього ортогонально до нової осі X_{14} проекціюємо точки E та F, враховуючи сталість координати Z, тобто: $Z_{E,F} = const$. В новій площині проекцій натуральна величина (н.в.) $EF = E_4F_4$, причому пряма EF утворює кут нахилу з горизонтальною площиною проекцій $П_1$, який дорівнює α, тобто $E_4F_4 \wedge П_1 = \alpha$.

3. Шляхом введення нової площини проекцій $П_6$ на підставі аналогічних побудов, які пояснюються в пунктах 1, 2, знаходимо натуральну величину відрізка прямої EF та кут нахилу β до фронтальної площини проекцій. Символьно хід розв'язання можна записати так:

$$X_{25} \parallel E_2F_2, \quad Y = const, \quad E_5F_5 = н.\ в.\ EF, \quad E_5F_5 \wedge П_2 = \beta.$$

4. Пряма загального положення EF може бути перетворена в проекціювальну в тому випадку, якщо попередньо вона перетворена в

пряму рівня. Тоді наступна нова площина проекцій вводиться перпендикулярно до натуральної величини цієї прямої, наприклад, до $E_4 F_4$, тобто: $X_{46} \perp E_4 F_4$.

Задача 2. Площині загального положення (трикутник *ABC*) надайте окремі положення. Для побудов передбачаються два етапи:

1) перетворення площини в проекціювальну;
2) перетворення проекціювальної площини в площину рівня.

Рис. 66 демонструє перший етап перетворення площини Δ *ABC* у проекціювальну. Нова площина проекцій $П_4$ проводиться перпендикулярно до $П_1$ та горизонталі площини *h*, тобто $П_1 \perp П_4 = X_{14}$ та $h\ (h_1) \perp П_4$.

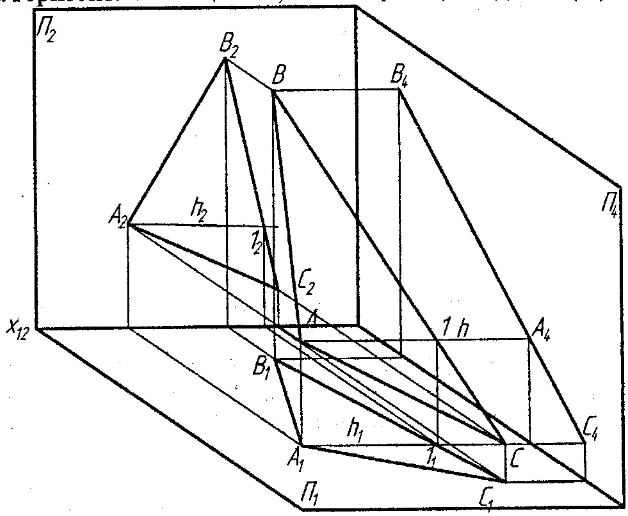


Рисунок 66 – Перетворення площини загального положення у проекціювальну

Для виконання другого етапу побудов слід замість горизонтальної площини проекцій $П_1$ ввести нову $П_5$. Нова площина проекцій $П_5$ повинна бути паралельною сліду проекціювальної площини σ_4 ($\Delta\ A_4B_4C_4$), тобто $X_{45} \parallel \sigma_4$ (рис. 67).

В новій площині проекцій побудована натуральна величина Δ *ABC*, що в залежності від поставленої задачі може передбачати визначення периметра трикутника ($p = A_5 B_5 + C_5 A_5 + C_5 B_5$) або площі трикутника (слід додатково побудувати висоту трикутника).

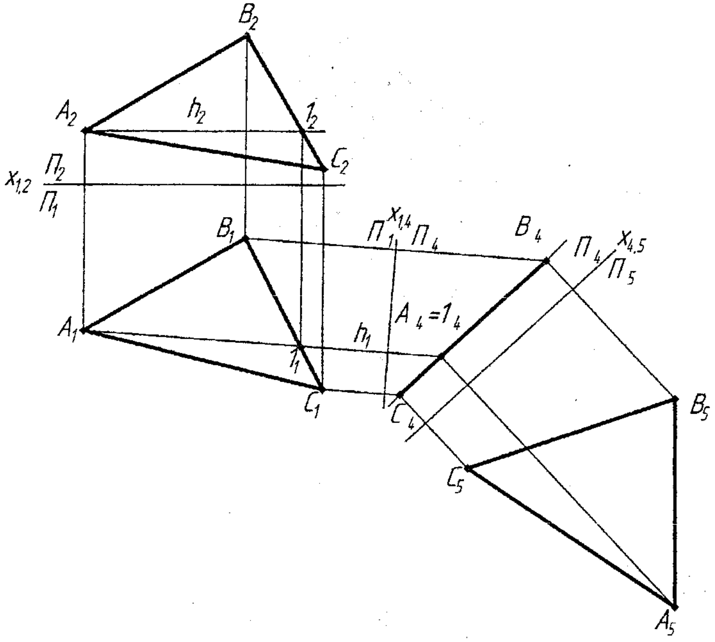


Рисунок 67 – Побудова натуральної величини ΔABC

Задача 3. Визначити натуральну величину відстані між двома паралельними прямими (рис. 68).

Для визначення натуральної величини між двома паралельними прямими слід виконати два перетворення: прямим надати положення рівня (AB, $CD \parallel \Pi_4$), потім перетворити ці прямі у проекціювальні (AB, $CD \perp \Pi_5$).

Натуральну величину відстані між двома паралельними прямими будують на Π_5 як перпендикуляр d_5 між проекціями A_5B_5 та C_5D_5, відсутні проекції перпендикуляра $d(d_4, d_1, d_2)$ визначають за проекційним зв'язком.

Задача 4. Визначити натуральну величину відстані між двома паралельними площинами (рис. 69).

Для визначення натуральної величини між двома паралельними площинами виконують лише одне перетворення: площинам надається проекціювальне положення. Натуральну величину відстані між двома паралельними площинами будують на Π_4 як перпендикуляр d_4 між слідами-проекціями заданих площин, відсутні проекції перпендикуляра $d(d_1, d_2)$ визначають за проекційним зв'язком.

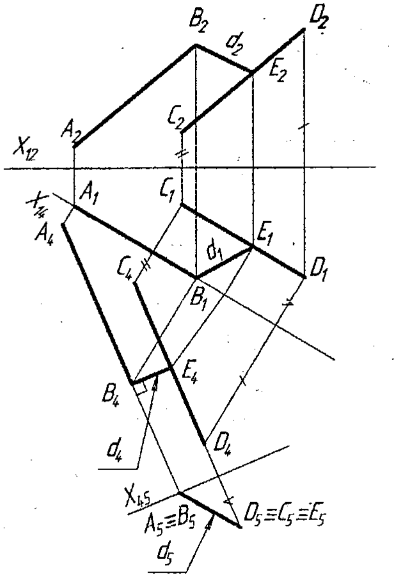


Рисунок 68 – Побудова натуральної величини відстані між двома паралельними прямими

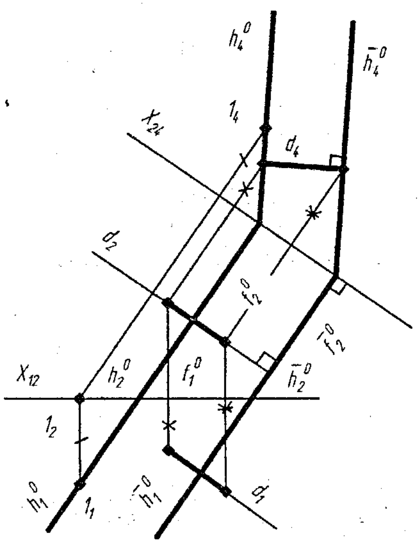
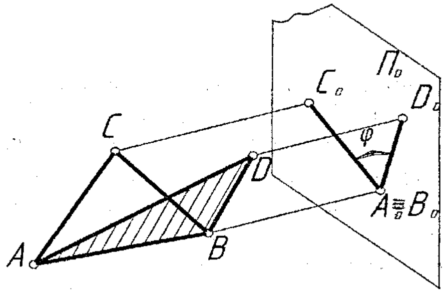


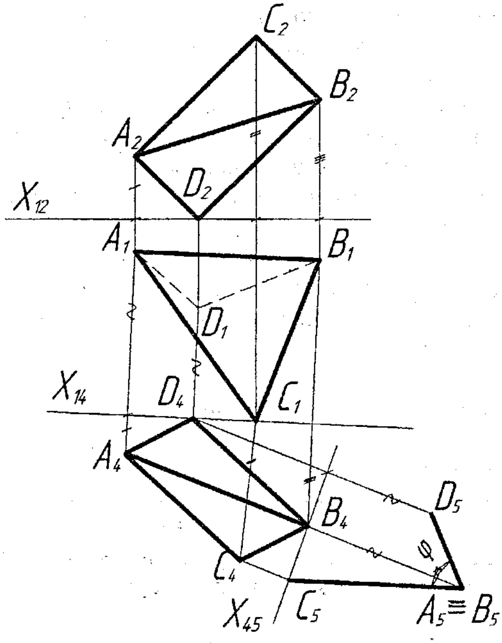
Рисунок 69 – Побудова натуральної величини відстані між двома паралельними площинами

Задача 5. Визначити натуральну величину двогранного лінійного кута при ребрі *AB* (рис. 70, а, б).

Для визначення натуральної величини двогранного лінійного кута φ слід попередньо проаналізувати, яке положення займає ребро *AB* (*AB* – ребро загального положення). В даному випадку ребро *AB* за допомогою двох перетворень перетворюють у проекціювальне.



а) наочне зображення



б) епюр

Рисунок 70 – Побудова натуральної величини лінійного кута при ребрі *AB*

Лінійний кут при ребрі *AB* фіксують на $П_5$ як кут між виродженими проекціями граней *ABC* та *ABD*.

Примітка. Для самостійної роботи студенту слід обґрунтувати доцільність побудов, що показані в задачах 3, 4, та чітко визначити етапи побудов на підставі вищенаведених пояснень суті теми «Заміна площин проекцій».

Висновки

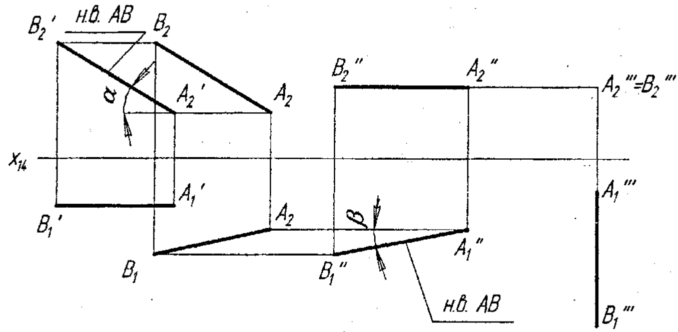
1. Для визначення натуральних величин відстаней до двох точок, до точки та прямої або до двох прямих використовують алгоритм перетворення прямої загального положення в окремі положення.
2. Для визначення натуральних величин відстаней, які мають відношення до площини, до двох площин, точки та площини, використовують алгоритм перетворення площини загального положення в окремі положення. Для здійснення таких побудов попередньо в площині трикутника слід будувати лінію рівня – горизонталь h (h_1, h_2) або фронталь f (f_1, f_2). Відносно лінії рівня площині можна надати горизонтально-проекціювальне ($f_2 \perp X_{24}$) або фронтально-проекціювальне ($h_1 \perp X_{14}$) положення.
3. Якщо пряма займає положення рівня, то можна визначити: натуральну величину відстані між двома точками; кути нахилу прямої до $П_1$ та $П_2$.
4. Якщо пряма займає проекціювальне положення, то можна визначити: відстані від точки до прямої, відстані між двома паралельними та двома мимобіжними прямими.
5. Якщо площина займає проекціювальне положення, то можна визначити: кути нахилу площини до $П_1$ та $П_2$, натуральні величини відстаней від точки до площини, між двома площинами, які паралельні або перетинаються.
6. Якщо площина займає положення рівня, то можна визначити такі метричні характеристики, як площу та периметр.

8.3 Спосіб плоско-паралельного переміщення

Сутність методу: площини проекції $П_1$ та $П_4$ залишаються нерухомими, а об'єкт проекціювання розташовують так, як зручно для розв'язання задачі. Тобто зміною положення прямої лінії або плоскої фігури (обертанням навколо деякої осі) таким чином, щоб пряма або фігура зайняли окреме положення відносно нерухомих площин проекції $П_1$ та $П_2$.

Задача 1. Прямій *AB* надайте окремі положення та визначте кути нахилу цієї прямої до площин проекції $П_1$ та $П_2$ (рис. 71).

В даному випадку виконані два перетворення прямої, що займає положення рівня (паралельній Π_1 та Π_2); третє перетворення дозволяє отримати положення проекціювальної прямої (перпендикулярно до Π_2).



Символьні позначення:

$AB \parallel \Pi_2$, $A'B' \wedge \Pi_1 = \alpha$, $z=const$.

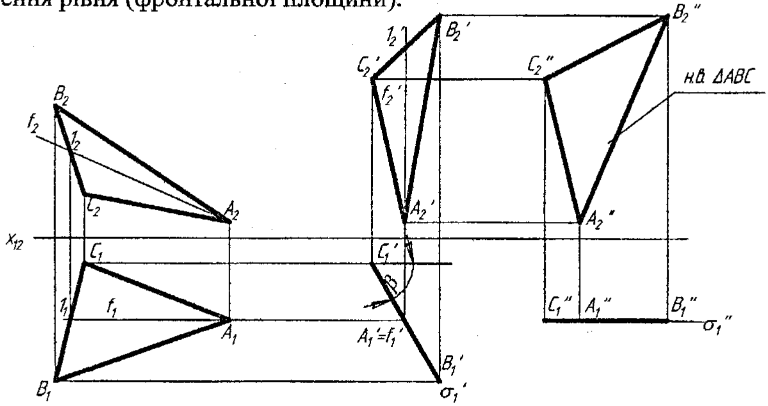
$AB \parallel \Pi_1$, $A''B'' \wedge \Pi_2 = \beta$, $z=const$.

$AB \perp \Pi_2$, $y=const$.

Рисунок 71 – Основні положення прямої AB

Задача 2. Площині ΔABC надайте окремі положення (рівня та проекціювальне) (рис. 72).

За допомогою фронталі на першому етапі перетворень надамо площині горизонтально-проекціювальне положення, на другому – положення рівня (фронтальної площини).



Символьні позначення:

$f_2' \perp X_{12}$, $\sigma(\Delta ABC) \perp \Pi_1$, $\sigma \wedge \Pi_2 = \beta$.

$\sigma_1'' \parallel X_{12}$, $\sigma(\Delta ABC) \parallel \Pi_2$.

Рисунок 72 – Надання площині ΔABC проекціювального та положення рівня

Задача 3. Визначити натуральну величину відстані від точки *K* до прямої *AB* (рис. 73).

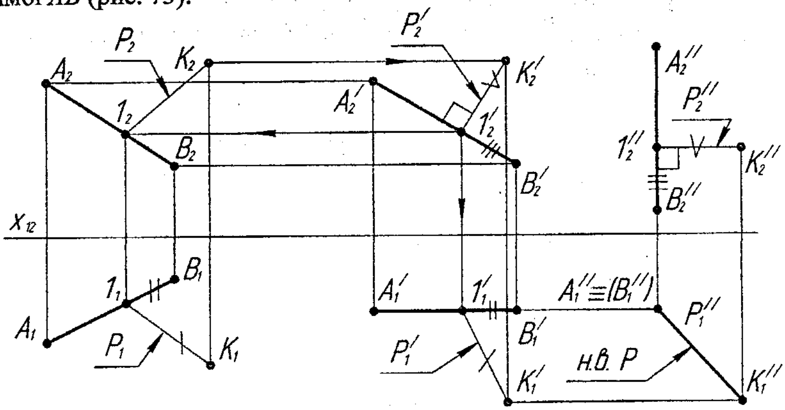
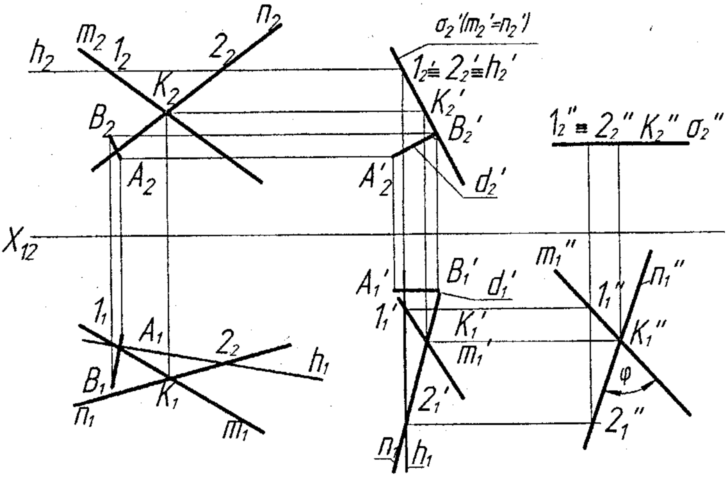


Рисунок 73 – Побудова натуральної величини відстані від точки *K* до прямої *AB*

Примітка. Для самостійної роботи студенту слід обґрунтувати доцільність побудов, що показані в задачі 3 та чітко визначити етапи побудов.

Приклад. Визначте відстань від точки *A* до площини та натуральну величину кута між двома прямими, які перетинаються.



Символьні позначення	$h\ (h_1, h_2)$	$h_1 \perp X_{12}$, $\sigma' \perp \Pi_2, y = const;$	$\sigma_2'' \parallel \Pi_1$, $m'' \wedge n''\ \ z = const.$

Розв'язання прикладу

В площині σ ($m \cap n = K$) попередньо проведена горизонталь площини h (h_1, h_2).

В першому перетворенні площина займає фронтально-проекціювальне положення ($\sigma' \perp \Pi_2$) і шукана відстань визначається від проекції точки A_2' до сліду – проекції площини σ'' за перпендикуляром d_2' Відсутня проекція d_1' перпендикулярна до $h_1'(d_1' \perp h_1')$.

В другому перетворенні слід-проекцію площини σ_2 необхідно розташувати так, щоб площина зайняла окреме положення, тобто $\sigma_2 \parallel X_{12}$. В площинах рівня завжди можна визначити основні метричні характеристики. В даному випадку – це величина лінійного кута φ, під яким перетинаються дві прямі площини m та n.

8.3 Спосіб обертання навколо проекціювальної осі

Сутність методу: площини проекцій Π_1 та Π_2 залишають нерухомими, а пряму (площину) обертають навколо введеної осі i, яка займає окреме положення відносно Π_1 або Π_2 (рис. 58).

Задача. Прямій AB загального положення надайте проекціювальне положення (рис. 74).

На першому етапі відносно осі i ($i \perp \Pi_1$) пряму повертають до положення, коли вона паралельна фронтальній площині проекцій ($A'B' \parallel \Pi_2$). На другому етапі вводять нову вісь i' ($i \perp \Pi_2$), відносно якої пряму $A''B''$ повертають перпендикулярно до Π_1 ($A''B'' \perp \Pi_1$)

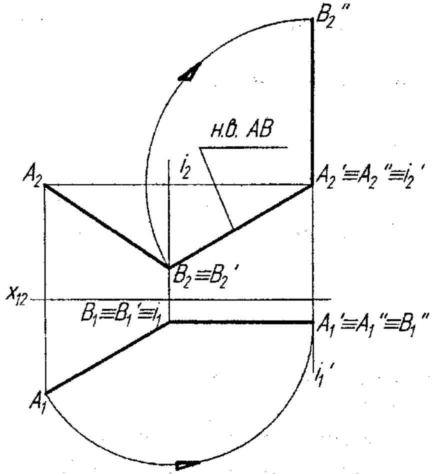
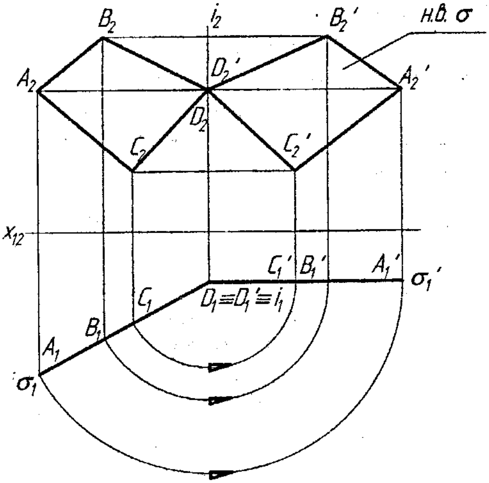


Рисунок 74 – Перетворення прямої загального положення в проекціювальне

Задача. Визначте натуральну величину чотирикутника $ABCD$ (рис. 75).

Через точку D чотирикутника проводимо вісь i ($i \perp \Pi_1$). Слід-проекцію площини σ_1 ($A_1B_1C_1D_1$) повертаємо до положення, паралельного фронтальній площині проекції ($\sigma_1 \parallel X_{12}$). На Π_2 отримуємо натуральну величину ($A'B'C'D'$) чотирикутника $ABCD$. Периметр плоскої фігури визначається як сума його сторін.



$$p = A_2'B_2' + B_2'D_2' + D_2'C_2' + C_2'A_2'$$

Рисунок 75 – Визначення периметра плоскої фігури

8.4 Питання, які виносяться на СРС

1. Застосування методів перетворень.
2. Розв'язання однієї із запропонованих лектором задач методом обертання навколо проекціювальної осі.
3. Пошук алгоритму розв'язку до задач епюра.

8.5 Теоретичні питання

1. Сутність методів заміни площин проекцій та плоско-паралельного переміщення.
2. Скільки потрібно виконати перетворень, щоб прямій загального положення надати проекціювальне положення (положення рівня)?
3. Скільки потрібно виконати перетворень, щоб площині загального положення надати проекціювальне положення (положення рівня)?

9 КРИВІ ЛІНІЇ ТА ПОВЕРХНІ

9.1 Загальні положення

Криві лінії – геометричне місце послідовних положень точки, яка безперервно рухається в просторі.

Область застосування кривих ліній досить широка: кулачки, профілі зубців, елементи будівельних конструкцій. За їх допомогою можна задати або описати: обриси різноманітних інженерних конструкцій; траєкторії руху складних частин механізмів; рельєф місцевості; виконувати дослідження у вигляді графіків залежності між різними параметрами.

Способи задання кривої:

а) аналітичний – коли крива лінія задається математичним рівнянням;

б) графічний – коли крива лінія задається візуально на носії графічної інформації;

в) табличний – коли крива лінія задається координатами послідовного ряду його точок.

В нарисній геометрії використовують графічний метод. До різновидів кривих відносять плоскі та просторові криві. Однією із найпоширеніших плоских кривих є коло. Проекціями кола можуть бути: коло, пряма, еліпс.

В нарисній геометрії поверхня визначається як слід руху лінії або іншої поверхні.

Лінія, за допомогою якої утворюється поверхня, називається твірною. Лінія, яка задає закон руху твірної, називається напрямною. Твірна та напрямна можуть бути прямі та криві.

Поверхня, яка утворена за допомогою певного закону, називається закономірною (правильною), і навпаки – незакономірною (неправильною).

Поверхні, у яких твірна є прямою лінією, називаються лінійчастими, і навпаки, якщо твірна є кривою лінією, то поверхні називаються нелінійчастими.

9.2 Класифікація поверхонь

Поверхні класифікують за такими ознаками.

1. За способом утворення:
   1.1 поверхні обертання,
   1.2 поверхні переносу,
   1.3 гвинтові.

2. За формою кривої:
   2.1 лінійчасті,
   2.2 нелінійчасті

3. За законом утворення:
   3.1 закономірні,
   3.2 незакономірні.

4. За суміщенням поверхні з площиною:
   4.1 розгортні,
   4.1 нерозгортні.

9.3 Способи задання поверхонь

Поверхні задають такими способами.

1. Каркасом – двома сімействами ліній, перетин яких утворює сітку.
2. Обрисом – лініями, які обмежують поверхню на кресленні.
3. Визначником – сукупністю умов, які однозначно задають поверхню.

Визначник складається з двох частин:

а) геометричної частини (ГЧ) – точки, лінії, поверхні (елементи, за допомогою яких позначаються: твірні, напрямні);

б) алгоритмічної частини (АЧ) – символьний запис закону утворення поверхні з використанням знаків (перетину, паралельності, мимобіжності та под.)

9.4 Поверхні обертання

Поверхні обертання можна отримати, якщо деяку твірну l, обертати навколо вісі i, причому як твірна може бути плоска або просторова крива (рис. 76, а) або пряма (рис. 76, б).

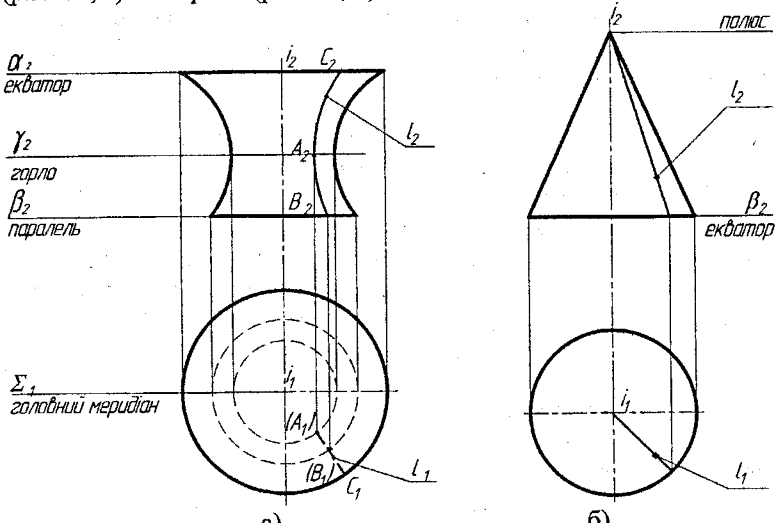


Рисунок 76 – Утворення поверхонь обертання

Умовний запис визначника поверхонь – Ω (l, i) (рис.76, а, б),

де ГЧ $\begin{cases} l \text{ – твірна (пряма або крива);} \\ i \text{ – вісь обертання.} \end{cases}$ АЧ $\begin{cases} l \circlearrowleft i, \\ i \perp \Pi_1 \end{cases}$

На поверхні обертання найпростішою лінією є коло. Кола отримуємо, якщо поверхню перетнути площинами, які перпендикулярні до осі обертання поверхні, і надалі будемо їх називати паралелями (отримані площиною β).

Паралель найменшого радіуса, отримана площиною γ, називається горлом. Паралель найбільшого радіуса, отримана площиною α, називається екватором.

Лінія, отримана перерізом поверхні площиною, яка проходить через вісь обертання i, називається меридіаном.

Головний меридіан – меридіан, який знаходиться в площині, що паралельна одній з площин проекцій (отримана площиною Σ). Головний меридіан утворює обрис поверхні та дозволяє визначати видимість поверхні.

Поверхні обертання з плоскою твірною другого порядку мають назву меридіана, аналогічну назві цієї твірної (для параболоїда обертання – парабола, еліпсоїда – еліпс і под.) Ці поверхні відносять до закономірних.

9.4.1 Різновиди поверхонь обертання

Тор – поверхня, що може бути отримана обертанням твірної (кола) навколо осі i (рис. 77, а, б).

На рис. 77, а точка C належить екватору, точка В – горлу, точка D – головному меридіану, точка A – паралелі певного радіуса (R_A). Паралель та її радіус визначаються в площині, яка перпендикулярна до осі обертання i, на площині проекцій Π_2, радіус паралелі R_A вимірюють від осі обертання до обрису поверхні. Точка A (рис. 77, а) на Π_2, видима, оскільки знаходиться перед головним меридіаном. Згідно з рис. 77, б точка A на Π_2 – невидима, оскільки знаходиться за головним меридіаном.

Визначник поверхні тора такий:

$\Omega\ (l,\ i\ )$ – загальний для відкритого та закритого тора.

1. Тор відкритий

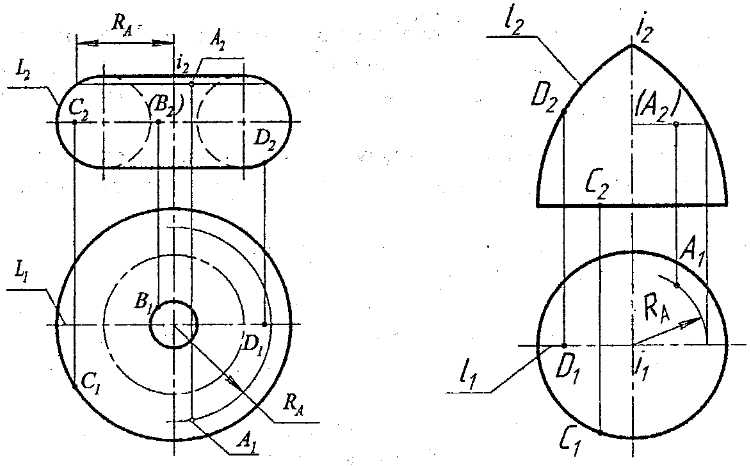
$$ГЧ\begin{cases} l - \text{твірна, коло;} \\ i - \text{вісь обертання.} \end{cases}$$

$$АЧ\begin{cases} l \circlearrowleft i, \\ l \not\cap i. \end{cases}$$

2. Тор закритий

$$ГЧ\begin{cases} l - \text{твірна, частина кола ;} \\ i - \text{вісь обертання.} \end{cases}$$

$$АЧ\begin{cases} l \circlearrowleft i, \\ l \cap i. \end{cases}$$



а) відкритий б) закритий

Рисунок 77 – Різновиди поверхні тора

Алгоритм визначення проекцій точок на поверхнях обертання

При визначенні проекцій точок слід пам'ятати, що деякі із них можуть бути визначені безпосередньо, оскільки знаходяться на характерних (обрисових) лініях цих поверхонь (екваторі, горлі, головному меридіані).

Поверхні обертання:

а) з криволінійною твірною:

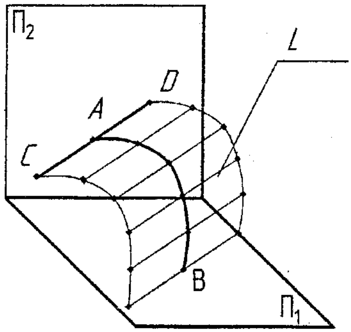
- проекції точок визначають тільки за допомогою паралелей;
- через проекцію точки проводять паралель, яка перпендикулярна до осі обертання;
- визначають радіус паралелі (від осі обертання вздовж паралелі до обрисового меридіана для однієї проекції або від сліду осі обертання до проекції точки – для другої проекції);
- за характерними лініями (екватор, обрисовий меридіан) визначають видимість проекцій точок.

б) з прямолінійною твірною:

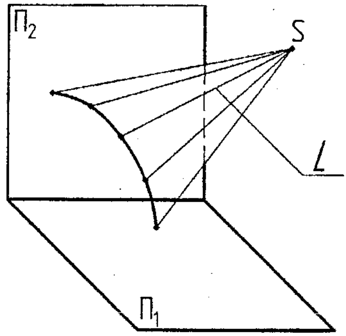
- проекції точок можна визначити з допомогою паралелей або твірних;
- паралелі, їх радіуси визначають аналогічно попередньому алгоритму;
- твірні проводять, використовуючи алгоритм утворення поверхні.

9.5 Лінійчасті поверхні

До цих поверхонь відносяться поверхні: циліндр та конус обертання, конічна та циліндрична поверхні загального положення (рис. 78, а, б), поверхні Каталана та торса. Ці поверхні утворюють переміщенням прямої – твірної *l* вздовж другої лінії (кривої чи прямої), яка називається напрямною.



а)

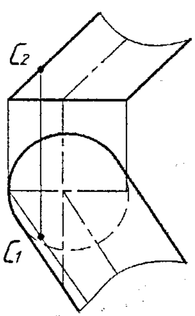


б)

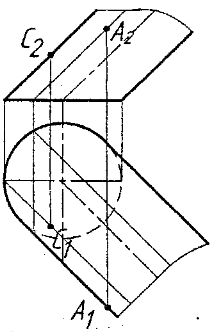
Рисунок 78 – Утворення лінійчатих поверхонь

9.5.1 Лінійчаті поверхні з однією напрямною

1. Циліндр загального положення – прямолінійна твірна l_l переміщається вздовж криволінійної напрямної *m*, причому всі твірні залишаються паралельними між собою (рис. 79, а – в).

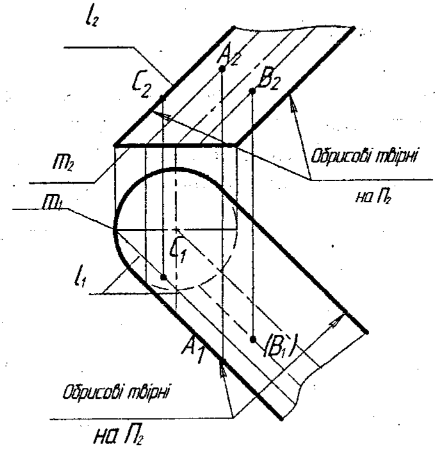


а)



б)

Рисунок 79 – Точки на циліндричній поверхні

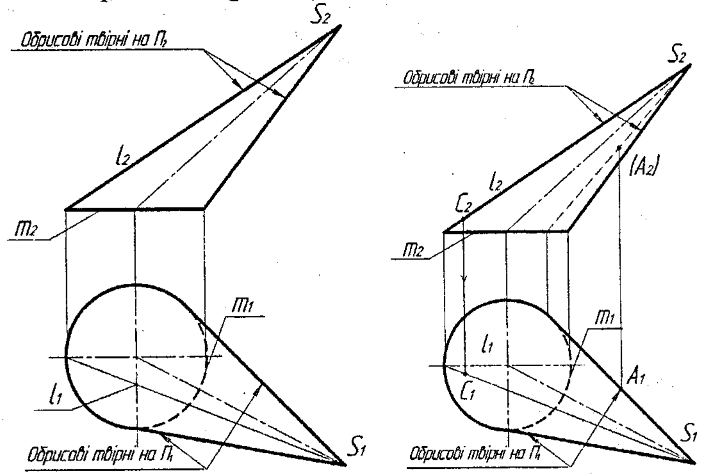


в)

Рисунок 79

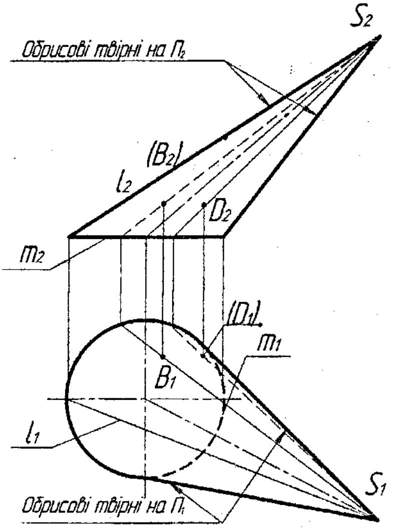
Межу видимості на $П_1$ утворюють твірні, які є дотичними до проекції кола. Точка C належить обрисовій твірній на $П_1$ (рис. 79, а), точка A – на $П_2$ (рис. 79, б). Для побудови проекцій точка B (рис. 79, в) проводять твірні, які паралельні обрисовим твірним циліндричної поверхні та перетинають напрямну m.

2. Конус загального вигляду – прямолінійна твірна l переміщається вздовж деякої напрямної m, яка проходить через одну і ту ж точку, яку називають вершиною S (рис. 80).

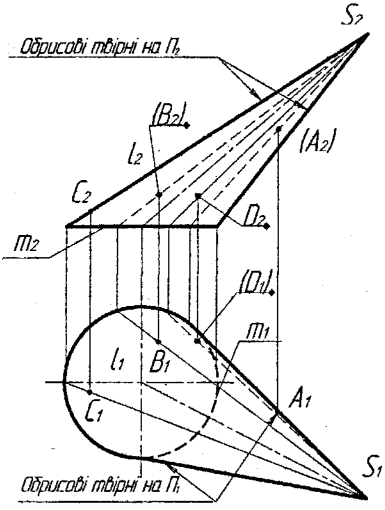


а) б)

Рисунок 80 – Точки на конічній поверхні



в)



г)

Рисунок 80

Точки A та C належать обрисовим твірним (рис. 80, а, б). Проекції точок B та D знаходять, використовуючи алгоритмічну частину визначника (рис. 80, в, г). Проекції точок, що позначені в дужках, слід розуміти як ті, які невидимі.

Визначники у цих поверхонь такі:

(m, l, S) – конус загального положення,

де

$$\text{ГЧ}\begin{cases} m \text{ – напрямна, коло;} \\ l \text{ – твірна, пряма;} \\ S \text{ – вершина.} \end{cases}$$

$$\text{АЧ}\begin{cases} l \cap l^i = S, \\ l \cap m, \\ m \parallel \Pi_1 \end{cases}$$

(m, l) – циліндр загального положення,

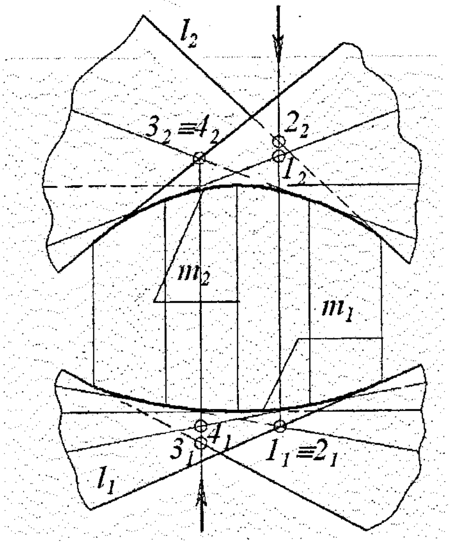
$$\text{ГЧ}\begin{cases} m \text{ – напрямна, коло;} \\ l \text{ – твірна, пряма.} \end{cases}$$

$$\text{АЧ}\begin{cases} l \parallel l^i, \\ l \cap m, \\ l \parallel \Pi_1. \end{cases}$$

1. Торс – поверхня з ребром повороту. (Tors – витий, кручений).

Утворюється безперервним рухом прямолінійної твірної l, яка дотикається до деякої просторової криволінійної напрямної m (рис. 81).

$\varnothing (l, m)$ – загальний визначник, де



l – твірна, пряма;
m – напрямна, просторова крива.

$$\text{АЧ} \begin{cases} l^i \,\underset{-}{\circ}\, l, \\ l \,\underline{\Omega}\, m. \end{cases}$$

Читання знаків:

$\underset{-}{\circ}$ – мимобіжність;

$\underline{\Omega}$ – дотик.

Поверхні з однією напрямною відносяться до розгортних поверхонь.

Рисунок 81 – Побудова поверхні торса

Питання для СРС. Визначте видимість конкуруючих точок *1*, *2* та *3*, *4*.

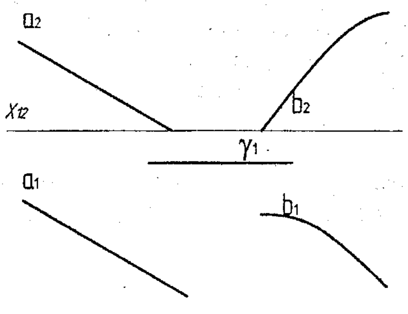
9.5.2 Поверхні з двома напрямними (Поверхні Каталана)

Каталан – бельгійський математик, який досліджував властивості цих поверхонь.

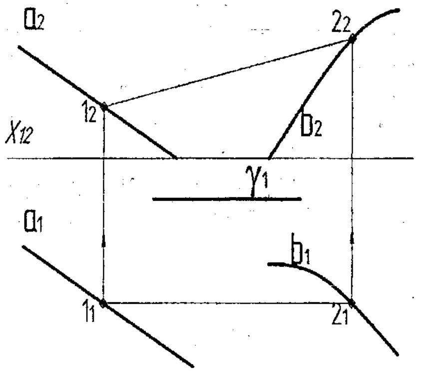
Ці поверхні утворюються рухом прямої лінії, яка для всіх своїх положень зберігає паралельність деякій заданій площині (площина паралелелізма) та перетинає напрямні. До них відносять: коноїд, гіперболічний параболоїд (коса площина) та циліндроїд.

1. Коноїд – поверхня використовується в гідротехнічному будівництві для формування будівництва поверхні підвалин мостових опор.

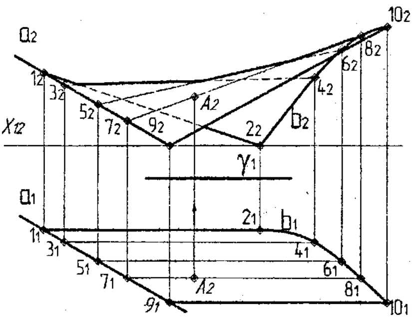
Розв'язок цієї задачі, а також визначення проекцій точок *A* та *B* на заданій поверхні, демонструється поетапними побудовами з відповідними рисунками (рис. 82, а – г).



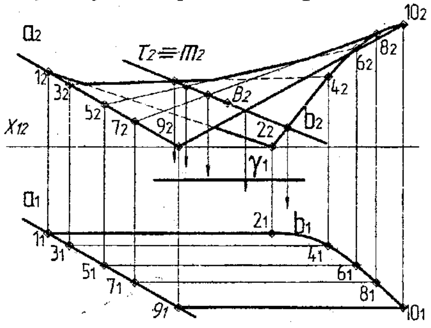
а) умова задачі



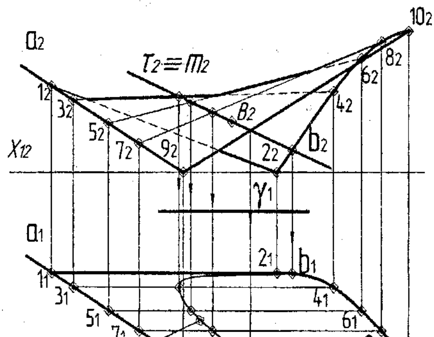
б) побудова проекцій твірної



в) побудова проекцій точки A (A_1, A_2)



г) введення допоміжної січної τ (τ_2)



д) побудова лінії перерізу m (m_1, m_2)

Рисунок 82 – Побудова проекцій поверхні та проекцій точок A, B

Відсутню проекцію точки A (A_2) будують за рахунок введення твірної $l(l_1)$, яка паралельна площині паралелелізму $\gamma(\gamma_1)$. Відсутню проекцію точки B (B_1) будують за рахунок введення допоміжної січної площини τ ($\tau \perp \Pi_2$). Ця площина перерізає поверхню коноїда по кривій m, на яку і проекціюємо відсутню проекцію точки B.

2. Гіперболічний параболоїд (коса площина) – використовується в інженерно-будівельній практиці при формуванні поверхонь укосів та насипів (рис. 83).

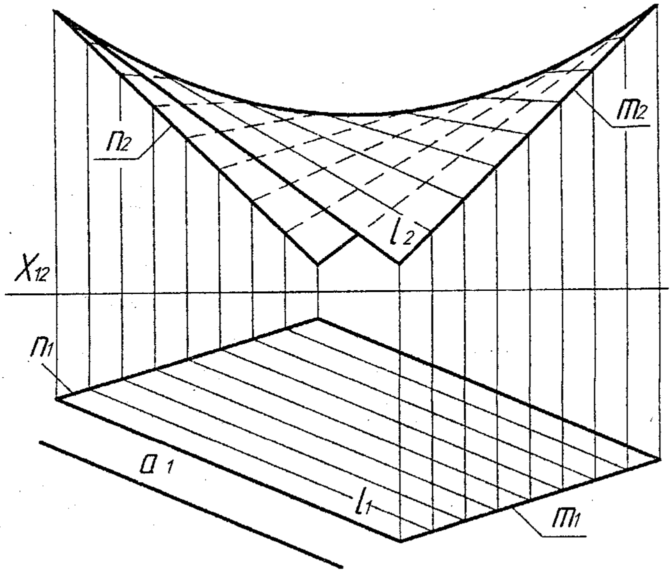


Рисунок 83 – Гіперболічний параболоїд

3. Циліндроїд (область застосування циліндроїда студент опрацьовує самостійно).

Загальний визначник поверхонь Каталана:

$$\varnothing\ (l, m, n, \alpha),$$

де

$$\text{ГЧ}\begin{cases} l - \text{твірна;} \\ m, n - \text{напрямні;} \\ \alpha - \text{площина паралелізму.} \end{cases} \qquad \text{АЧ}\begin{cases} l \cap m, n; \\ l \parallel \alpha, \\ \alpha - \text{займає певне положення.} \end{cases}$$

Примітка. Для самостійної роботи студенту слід самостійно виконати таке: вказати область застосування циліндроїда; побудувати проекції циліндроїда; конкретно для кожної із поверхонь Каталана записати визначник.

Алгоритм визначення проекцій точок на поверхнях Каталана

Отже, якщо слід побудувати одну із поверхонь Каталана, то необхідною умовою є задання геометричної частини визначника будь-якої із цих поверхонь та положення площини паралелелізму. Відсутні проекції точок, що належать цим поверхням, будують:

а) за допомогою проекції твірної, використовуючи алгоритмічну частину визначника поверхні (рис. 82, в);

б) за допомогою січної площини (якщо для заданої проекції точки неможливо застосувати алгоритмічну частину визначника), яка перетинає твірні, що знаходяться поблизу заданої проекції точки (рис. 82, г, д).

9.6 Гелікоїди

До них (гелікоїдів) відносяться гвинтові поверхні з прямолінійною твірною – гвинти, свердла, пружини, поверхні лопатей турбін, апарелі та сходини.

Основними характеристиками гелікоїдів є: крок t, діаметр d гвинтової лінії.

До визначника поверхні входять вісь i (вона може бути також і напрямною), дві напрямні, твірна.

Напрямними гелікоїдів можуть бути:

а) вісь i та гвинтова лінія m;

б) дві гвинтові лінії m та n.

В залежності від кута нахилу φ твірної l до осі i гелікоїди називаються прямими ($\varphi = 90^{\circ}$) та косими ($0 < \varphi < 90^{\circ}$).

1. Прямий відкритий гелікоїд (гвинтовий циліндроїд) (рис. 84)

$$\varnothing\ (i, m, n, l),$$

де

$$\text{ГЧ} \begin{cases} i \text{ – вісь гелікоїда;} \\ m, n \text{ – напрямні, гвинтові лінії;} \\ l \text{ – твірна.} \end{cases} \qquad \text{АЧ} \begin{cases} l \cap m, n; \\ l \perp i. \end{cases}$$

Гелікоїд називають відкритим тому, що твірна l $[AB]$ не перетинає вісь i, а є мимобіжною відносно неї. Один кінець твірної – точка A – переміщується за зовнішньою гвинтовою лінією m, другий кінець твірної – точка B – за внутрішньою гвинтовою лінією n. В усіх своїх положеннях твірна l залишається паралельною Π_1. Побудова зовнішньої гвинтової лінії m починається з точки A, внутрішньої n – з точки B.

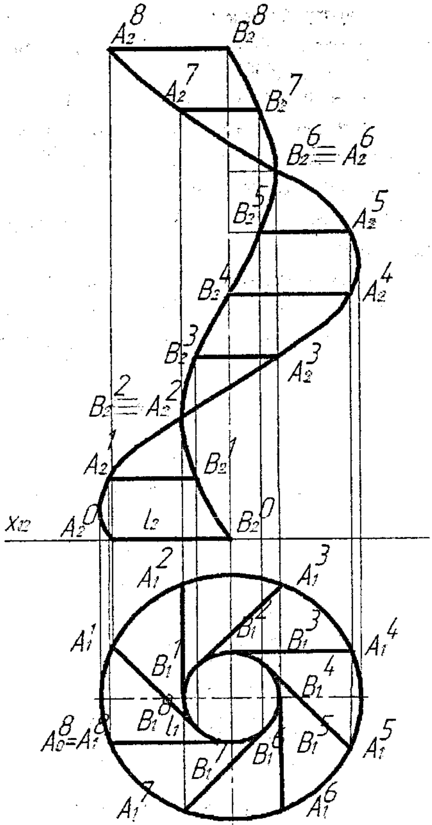


Рисунок 84 – Побудова проекцій прямого відкритого гелікоїда

2 Косий закритий гелікоїд (гвинтовий коноїд) (рис. 85).

$$\varnothing\,(m, l, l', i\,),$$

де

ГЧ:
- i – напрямна та вісь гелікоїда;
- m – напрямна, гвинтова лінія;
- l – твірна;
- l – твірна напрямного конуса.

АЧ:
- $l \cap m, i$;
- $l \parallel l'$

Попередньо будується один виток гвинтової лінії, починаючи від точки A. Для цього коло діаметра d та крок t гвинтової лінії треба поділити на вісім рівних частин. Коли точка A на $1/8$ оберту (проти годинникової стрілки) повернеться навколо осі i та переміститься на $1/8$ кроку t, то отримаємо положення точки A^1. При послідовному переміщенні на $1/8$ кроку t та на $1/8$ оберту навколо осі i отримуємо положення гвинтової лінії m, траєкторія якої задана вісьмома точками ($A^0 – A^7$).

Положення твірних поверхні визначає напрямний конус. Кут нахилу твірної l (A, B) до осі i дорівнює куту нахилу твірної l' конуса, в кожному положенні $l \parallel l'$.

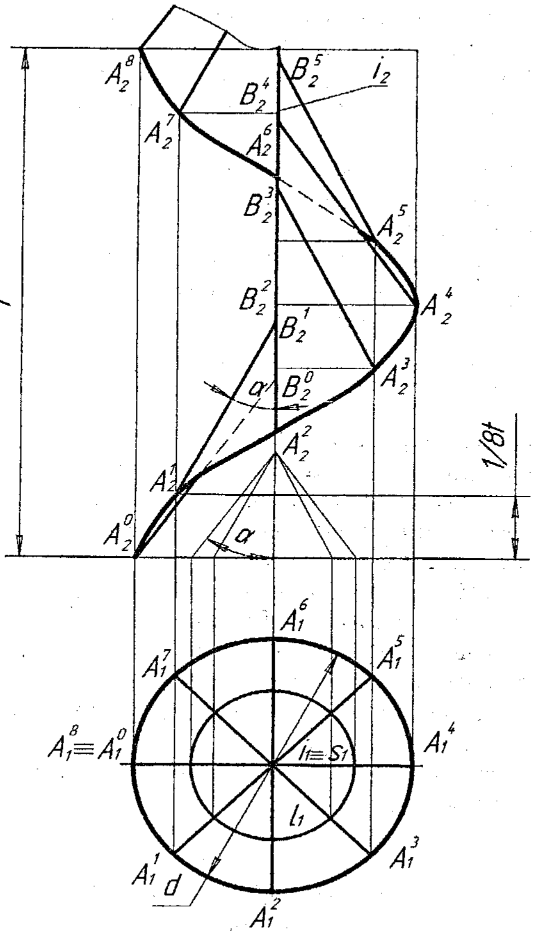


Рисунок 85 – Побудова проекцій закритого гвинтового гелікоїда

Відмітимо також і те, що другий кінець твірної l – точка B – також переміщується вздовж осі i на $1/8$ кроку та на $1/8$ оберту. Тому на рисунку слід розуміти, що $i_1 \equiv S_1 \equiv B_1^0 \equiv B_1^1 \equiv ... \equiv B_1^7$, тобто твірна l перетинає вісь i, тому гелікоїд називають закритим (рис. 85).

9.7 Питання, які виносяться на СРС

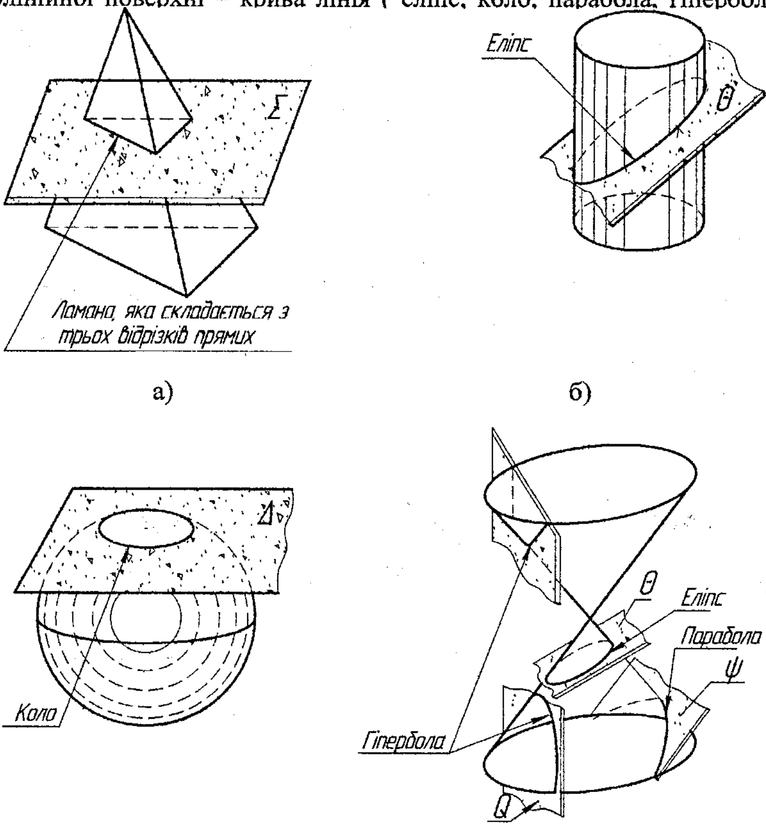
1. Криві лінії другого порядку.
2. Закономірні поверхні обертання окремого виду.
3. Побудова однієї з поверхонь переносу за визначником, яка показана на лекції, але її треба закінчити самостійно.
4. Визначте видимість вказаних конкуруючих точок 1, 2 та 3, 4 для поверхні торса.
5. Область застосування поверхонь Каталана.
6. Побудова проекцій однієї з поверхонь Каталана за визначником (пропонується лектором).
7. Гвинтові лінії, різновиди гелікоїдів та область їх застосування.
8. Побудова проекцій однієї з гвинтових поверхонь за визначником (пропонується лектором).

9.8 Теоретичні питання

1. Дайте означення кривої лінії.
   Відміни між плоскою та просторовою кривою.
2. В чому різниця між закономірною та незакономірною кривими?
3. Як утворюється циліндрична та конічна гвинтові лінії?
   Що таке крок гвинтової лінії?
4. Які способи задання поверхонь на кресленні вам відомі?
5. Що називають каркасом, обрисом поверхні?
6. Дайте поняття визначника поверхні.
7. Як утворюються поверхні обертання? Визначник поверхні.
8. Як побудувати на поверхні обертання паралель, меридіан, головний меридіан?
9. Які окремі види поверхонь обертання вам відомі?
10. Як утворюються поверхні переносу? Визначник поверхні.
11. Які поверхні називають лінійчатими? Скільки напрямних можуть мати лінійчаті поверхні?
12. Скільки напрямних мають поверхні Каталана та гвинтові поверхні? Визначник поверхонь.
14. За якою ознакою гвинтові поверхні поділяють на відкриті та закриті?
15. Наведіть приклади застосування кривих поверхонь в науці та техніці.

10 ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ

Для побудови лінії перерізу поверхні площиною слід враховувати характерні форми тієї чи іншої поверхні (рис. 86, а – г) . При перерізі многогранної поверхні площиною утворюється ламана лінія, при перерізі криволінійної поверхні – крива лінія (еліпс, коло, парабола, гіпербола і под.).



а) б)

в) г)

Рисунок 86 – Різновиди перерізів на поверхнях

10.1 Окремі випадки перерізу

1. Січна площина займає окреме положення (рис. 87, а – ж).

Для многогранних поверхонь (рис. 87, а – в) визначаємо точки перетину з відповідними ребрами – *1*, *2*, *3*. Вихідна проекція лінії перерізу знаходиться на $П_2$ і належить сліду проекції α_2. Лінія перерізу – ламана лінія (трикутник). В гранях, які є видимі на $П_1$, лінія взаємного перерізу видима. Грань BSC на $П_1$ невидима, значить, лінія $2_1 3_1$ також невидима.

Для поверхонь обертання (рис. 87, г – е) визначаємо сукупність точок, кожна з яких отримана як точка, що належить поверхні обертання.

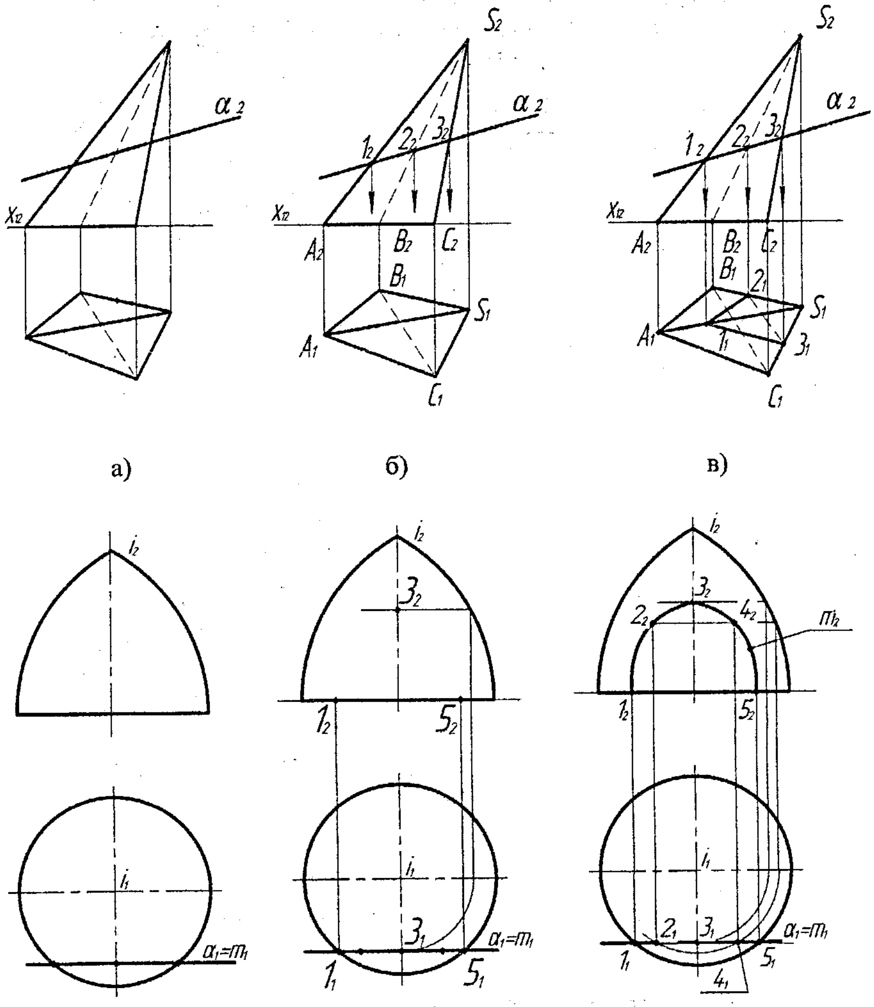
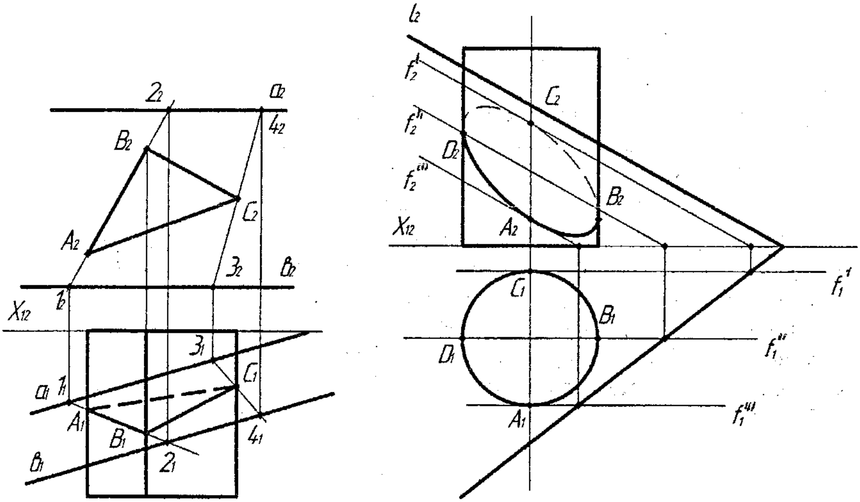


Рисунок 87 – Переріз поверхонь січною площиною окремого положення

Вихідна проекція лінії перерізу m_1 знаходиться на $П_1$ і належить сліду проекції α_1. Визначаємо характерні точки: 1, 3, 5. Точка 3 – найвища (розташована найближче до осі обертання i_1 від сліду площини α_1), точки *1* та *5* належить екватору закритого тора. Проміжні точки *2* та *4* будують за допомогою паралелі. Лінія перетину *m* на $П_2$ видима, оскільки знаходиться перед головним меридіаном поверхні закритого тора.

Висновок: у випадку, коли площина займає окреме положення, лінія перерізу належить сліду січної площини та визначається за сукупністю точок, які належать поверхні.

2. Січна площина займає загальне положення, а бічна поверхня – проекціювальне положення (рис. 88, а, б).



а) $\sum(a \parallel b)$ б) $\sum(f^0 \cap h^0)$

Рисунок 88 – Переріз поверхні, бічна поверхня якої займає окреме положення, з площиною загального положення

Оскільки бічні поверхні призми (ребра перпендикулярні до $П_2$) та циліндра обертання (твірні перпендикулярні до $П_1$) вироджуються в лінію (трикутник – для призми; коло – для циліндра), то проекція лінії взаємного перерізу на одній із площин проекцій відома і є вихідною.

Вихідна проекція лінії перерізу знаходиться на $П_2$. Відсутні проекції точок *A*, *B*, *C* знаходять (рис. 88, а) на прямих *[1, 2]* та *[3, 4]*, що належать площині $\sum(a \parallel b)$.

Вихідна проекція лінії перерізу знаходиться на $П_1$. Відсутні проекції точок еліпса (рис. 88, б) знаходять за допомогою ліній рівня (фронталей), які належать площині $\sum(f^0 \cap h^0)$.

Висновок: у випадку, коли бічна поверхня займає проекціювальне положення, то лінія перерізу належить цій бічній поверхні і її точки визначаються з умови, що вони належать заданій площині.

10.1.1 Конічні перерізи

При перерізі конуса площиною можна отримати такі лінії: трикутник, коло, еліпс, параболу та гіперболу (рис. 86).

Примітка. Студенту пропонується самостійно опрацювати виконання побудов, які можна отримати в результаті перерізу поверхні січними площинами.

10.2 Загальні випадки перерізу

Лінію перерізу будь-якої поверхні площиною загального положення рекомендується будувати методом заміни площин проекцій.

Площини проекцій замінюють так, щоб січна площина загального положення у новій системі стала проекціювальною. Проекція шуканої лінії перерізу на новій площині проекцій зобразиться прямою лінією. Отже, задачу у новій системі можна розв'язати так, як і задачу перерізу поверхні площиною окремого положення. Потім розв'язання переноситься на площину, яка замінювалась на нову.

Задача. Побудувати проекції лінії взаємного перерізу конуса обертання Ω з січною площиною θ ($a \cap b$). Умова задачі показана на рис. 89.

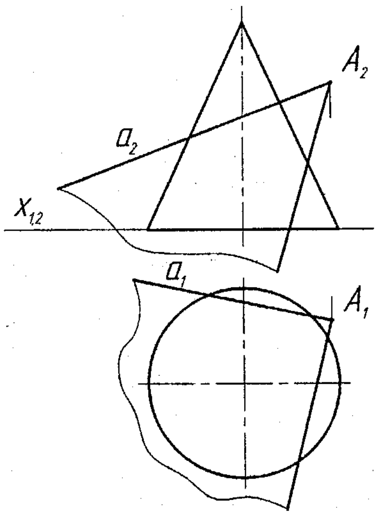


Рисунок 89 – Умова задачі

Алгоритм розв'язання задачі

1. Визначаємо, яку площину проекцій слід замінити на нову.

Для цього слід звернути увагу на поверхню, а саме розташування основи поверхні Ω відносно площин проекцій $П_1 - П_2$. В даному випадку основа конуса належить площині проекцій $П_1$, значить для збереження стійкості основи горизонтальну площину проекцій $П_1$ залишаємо без змін.

2. Проводимо горизонталь h (h_1, h_2, де h_2 – вихідна проекція) і відносно горизонтальної проекції горизонталі h_1 вводимо нову площину проекцій $П_4$ ($X_{14} \perp h_1$). В новій площині проекцій $П_4$ будуємо проекції заданої поверхні Ω (конуса обертання) та площини θ ($a \cap b$). (рис. 90).

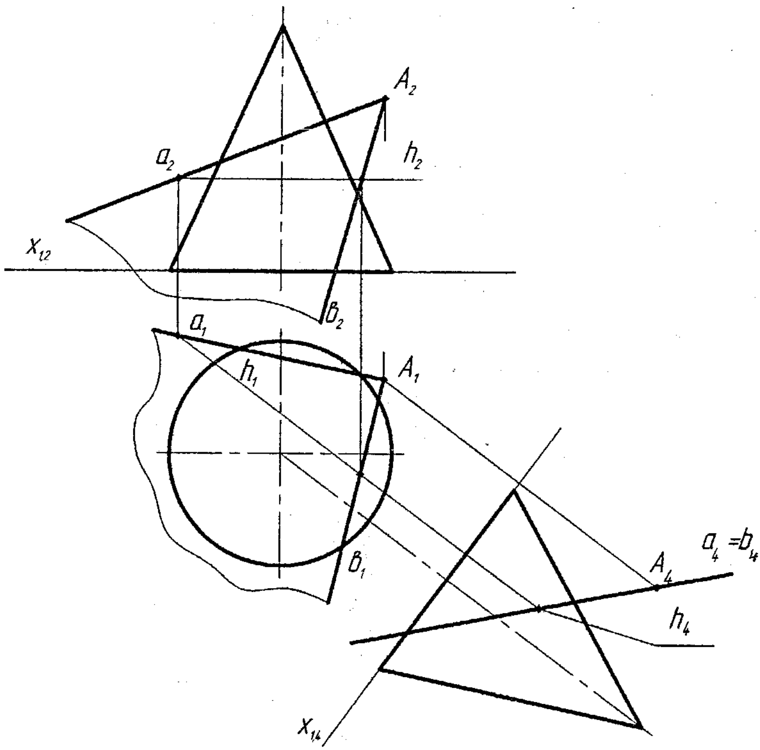


Рисунок 90 – Проекції Ω конуса обертання Ω та площини θ
в новій площині проекцій $П_4$

Вісь X_{14} визначає лінію перерізу двох площин проекцій $П_1$ та $П_4$ ($П_1 \cap П_4 = X_{14}$). Нову площину проекцій $П_4$ слід розташовувати відносно січної площини θ ($a \cap b$) так, щоб площина θ перетворилась у слід-проекцію θ_4 ($\theta_4 \equiv a_4 \equiv b_4$). Для цього необхідно знати, що будь-яка площина може бути перетворена в слід-проекцію (пряму лінію) в тому випадку, якщо лінія рівня цієї площини (h або f) в новій площині проекцій займе проекціювальне положення .

При заміні площини проекцій Π_2 на нову Π_4 ($\Pi_2 \rightarrow \Pi_4$) залишається сталість координати Z ($Z=const$). Для конуса обертання Ω будуємо його вісь, на якій відкладаємо вершину конуса та позначаємо радіус нижньої основи. Площина θ в новій площині проекцій перетворюється у слід-проекцію θ_4, тобто, січна площина стала проекціювальною, а шукана лінія перерізу на новій площині проекції зображається прямою лінією ($\theta_4 \equiv a_4 \equiv b_4$). Оскільки січна площина θ перерізає всі твірні конуса Ω, то в перерізі буде еліпс.

3. Позначаємо характерні точки, що належать обрису поверхні (1_4, $2_4 \equiv 3_4$) шуканої лінії перерізу (рис. 91).

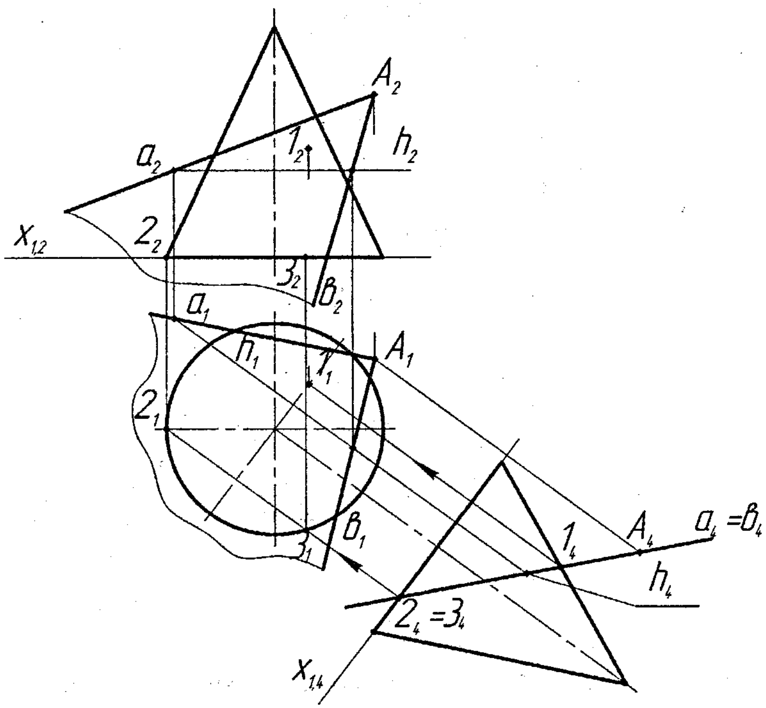


Рисунок 91 – Фіксація характерних точок лінії перерізу

4. Будуємо проміжні точки $4_4 \equiv 5_4$ лінії перерізу поверхні січною площиною, які визначаються тільки за допомогою паралелі. Інші проміжні точки можна визначати за допомогою паралелей та твірних (рис. 92).

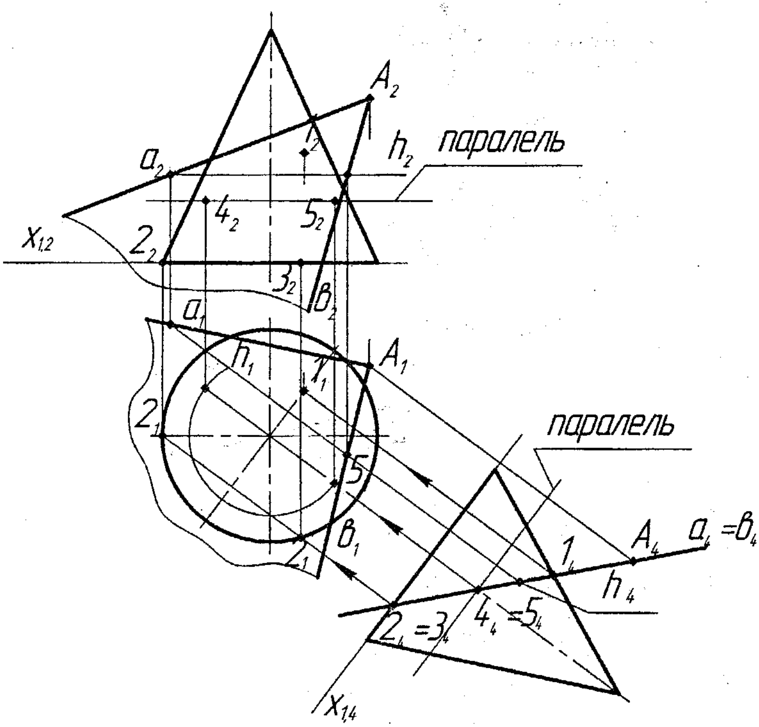


Рисунок 92 – Побудова проміжних точок лінії перерізу

5. Будуємо проекції лінії перерізу та визначаємо видимість кривої (рис. 93).

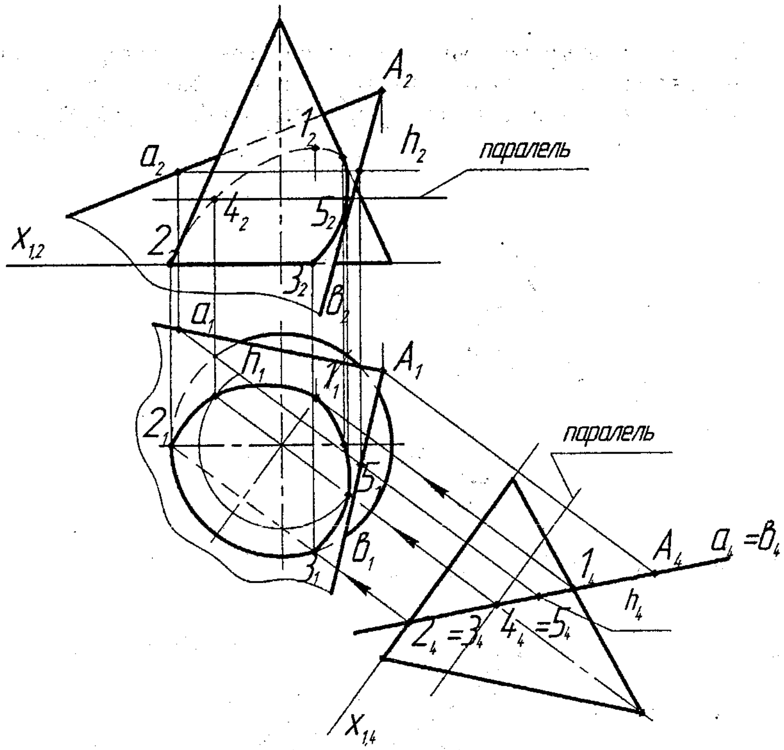


Рисунок 93 – Побудова проекцій лінії перерізу

10. 3 Питання, які виносяться на СРС

1. Побудова проекцій конічних перерізів та визначення їх назв.
2. Побудова проекцій перерізу для многогранних поверхонь.

10.4 Теоретичні питання

1. Яке положення може займати січна площина при перерізі з поверхнею?
2. Які плоскі фігури можна отримати в перерізі многогранних поверхонь, конуса та циліндра січною площиною?
4. Яке положення повинна займати січна площина або поверхня, щоб стверджувати, що одна із проекцій лінії перерізу поверхні з площиною уже відома?
5. В яких випадках для побудови лінії перерізу площини з поверхнею застосовують методи перетворень ?

11 ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПРЯМОЮ ЛІНІЄЮ

При перетині поверхні прямою лінією утворюються точки, які прийнято називати точками перетину (проникнення) поверхні прямою, а пряму – січною прямою або січною.

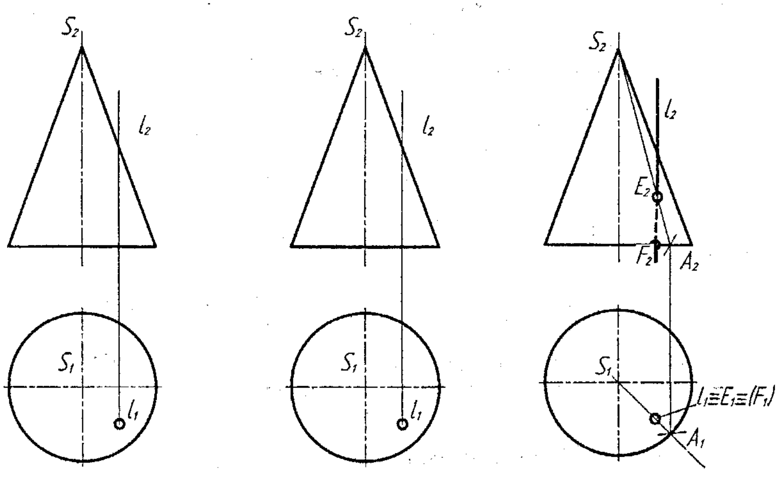
11.1 Окремі випадки перетину

1. Проекціювальна пряма *l* перетинає поверхню (рис. 94, 95).

В цьому випадку одна із проекцій точок перетину *E* , *F* уже відома і є вихідною (рис. 94, а). Відсутні проекції точок визначаються за алгоритмом побудови точок на поверхнях.

В першому випадку (рис. 94, в) точка *E* знаходиться на твірній *SA* конуса обертання, точка *F* – на основі. Для сфери (рис. 95, б) точки *E*, *F* знайдені за допомогою паралелі.

Крім побудов проекцій точок перетину прямої з поверхнею ще визначають видимість проекцій прямої, для чого до уваги слід взяти характерні лінії поверхні (головний меридіан, екватор та інше). Для конуса обертання (рис. 94, а) пряма *l* знаходиться перед головним меридіаном, тому пряма до точка *E* – видима. Січна *l*, яка перетинає поверхню сфери (рис. 95, а) знаходиться нижче екватора, тому дві її точки перетину *E*, *F* на $П_1$ невидимі (рис. 95, в), а проекція l_1 стає видимою за межами обрису сфери (екватора).



а) б) в)

Рисунок 94 – Перетин конуса обертання проекціювальною прямою

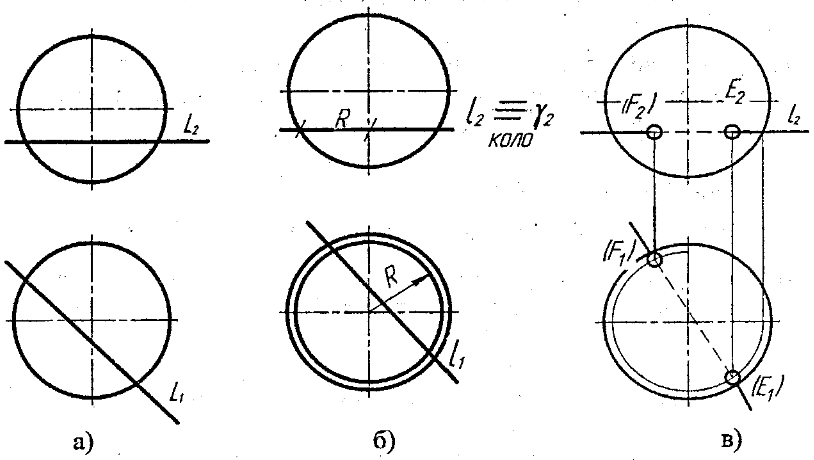
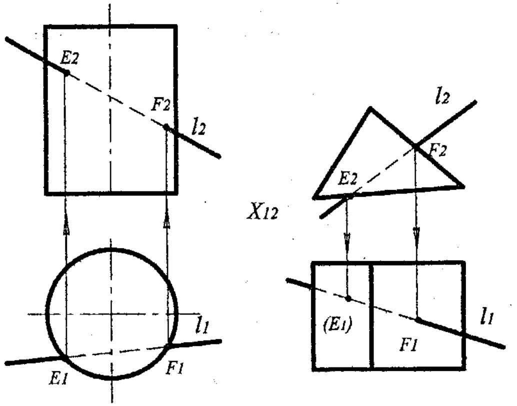


Рисунок 95 – Перетин сфери проекціювальною прямою

1. Бічна поверхня займає проекціювальне положення (рис. 96, а, б).



а) точки E_1, F_1 – вихідні проекції б) точки E_2, F_2 – вихідні проекції

Рисунок 96 – Бічна поверхня при перетині з прямою займає проекціювальне положення

11.2 Загальні випадки перетину

11.2.1 Введення допоміжної січної площини окремого положення

Допоміжна січна площина перерізає призму по трикутнику (рис. 97), закритий тор (рис. 98) – по кривій (частині еліпса). Фіксують проекції точок E, F (E_1, F_1) перетину прямої l (l_1) з контуром перерізу (трикутника – для призми; кривої – для закритого тора). Визначають видимість проекцій прямої l (l_1, l_2).

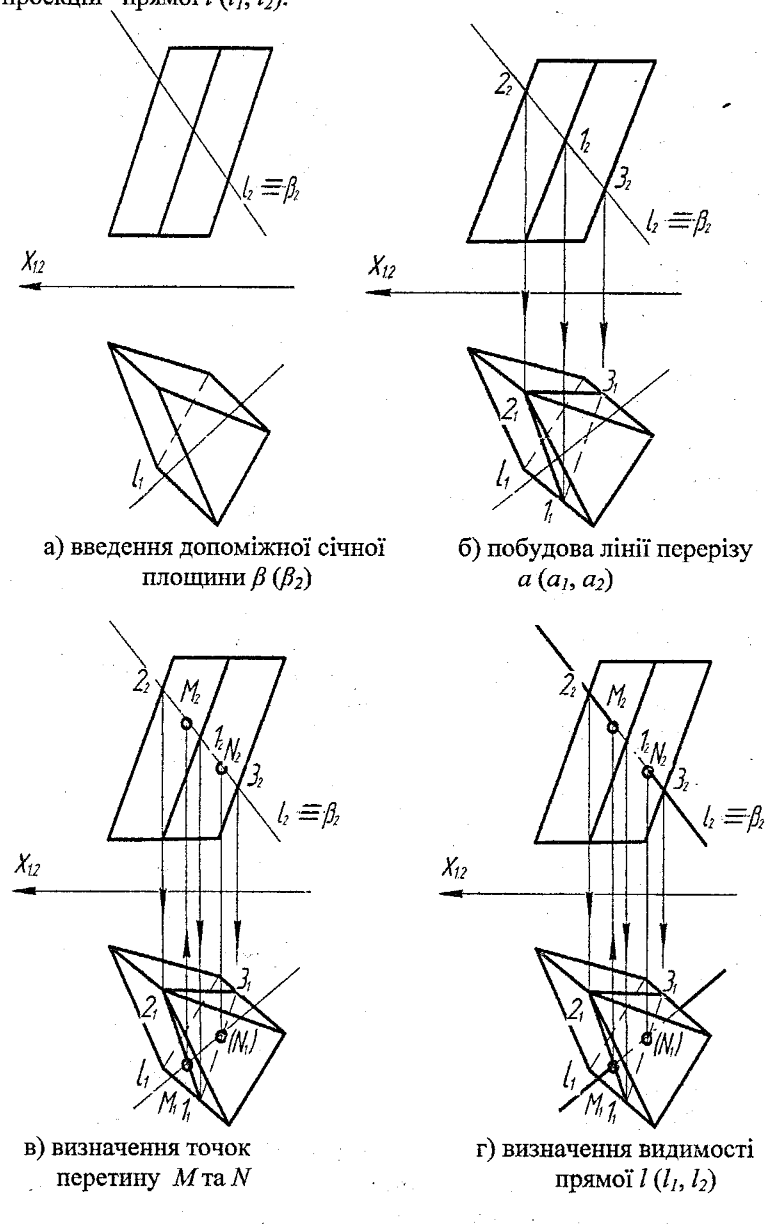
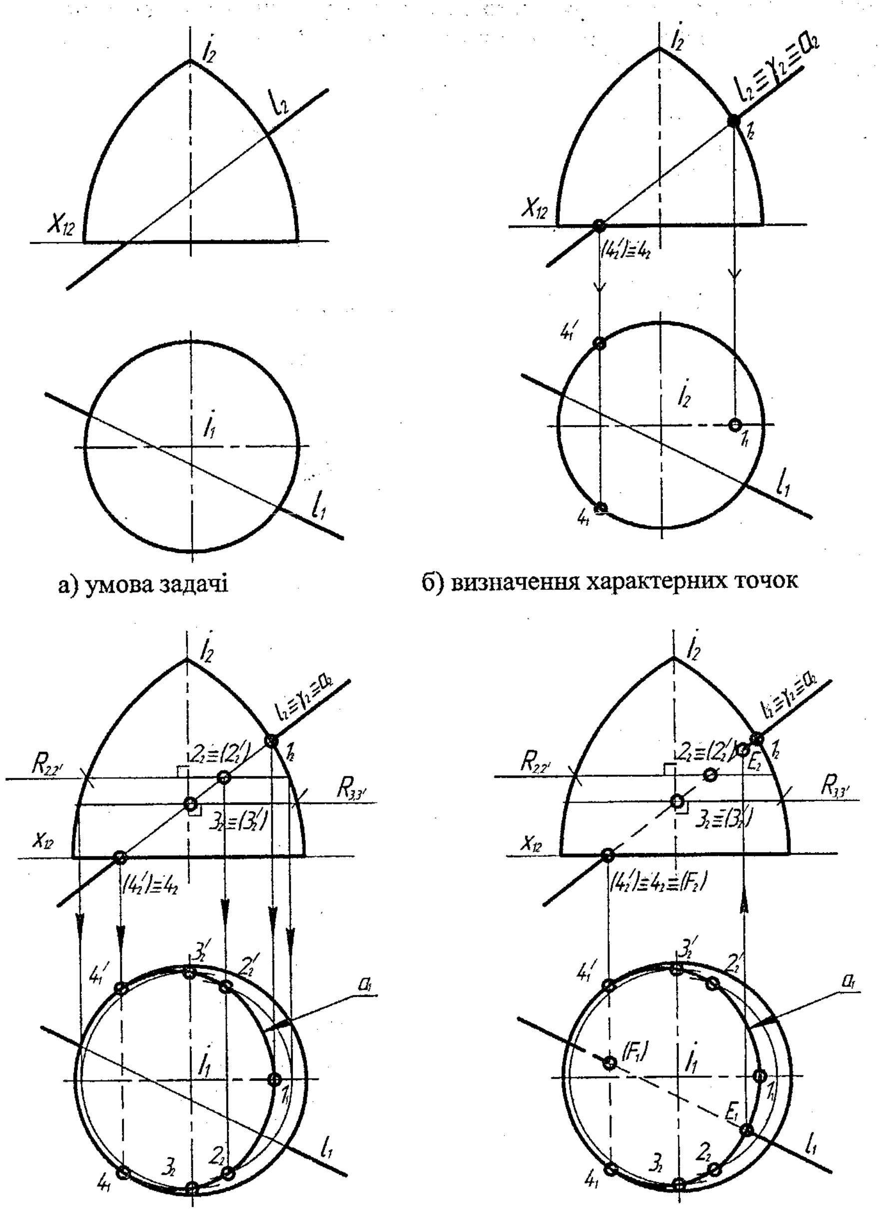


Рисунок 97 – Загальний випадок перетину прямої з призмою



а) умова задачі

б) визначення характерних точок

в) побудова лінії перерізу

г) визначення точок перетину

Рисунок 98 – Загальний випадок перетину прямої з поверхнею обертання

Розв'язування задач цієї теми виконується з дотримуванням певної послідовності дій (алгоритму).

1. Через пряму проводять допоміжну січну площину, яка по можливості повинна давати найпростіший переріз (твірні, кола, трикутник).

2. Будують лінію перерізу допоміжної січної площини із заданою поверхнею.

3. Фіксують точки перетину заданої прямої з побудованою лінією на поверхні.

4. Визначають видимість проекцій прямої.

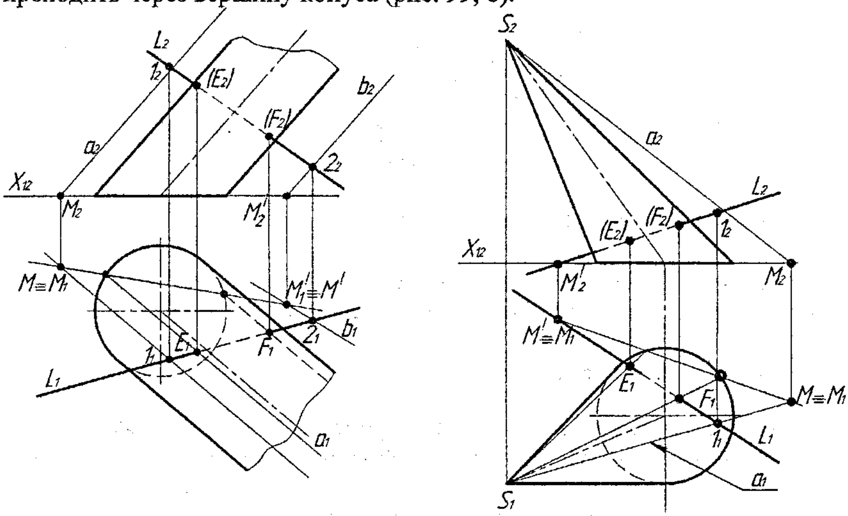
11.2.2 Введення допоміжної січної площини загального положення

1. Як допоміжну січну площину через пряму вводять площину загального положення, яка перерізає поверхню по прямолінійних твірних.

Цю площину рекомендується вводити для конічної та циліндричної поверхонь, з перезаданням цієї площини слідами (слідом-проекцією).

Для отримання найпростішого перерізу (чотирикутник або твірні) на циліндричній поверхні допоміжна площина задається прямими, що паралельні твірним циліндра (рис. 99, а).

Для отримання найпростішого перерізу (трикутник або твірні) на конічній поверхні через пряму l введена допоміжна площина, яка проходить через вершину конуса (рис. 99, б).



а) твірні на циліндрі б) твірні на конусі

Рисунок 99 – Введення допоміжної січної площини при перетині циліндричної та конічної поверхні з прямою

2. Допоміжну січну площину рівня вводять, застосовуючи методи перетворень.

Методи перетворень дозволяють отримувати більш прості фігури перерізу, що забезпечує менші витрати часу на точні побудови.

Якщо ввести заміну площини проекцій ($\Pi_2 \rightarrow \Pi_4$) таким чином, щоб в новій площині проекцій Π_4 пряма займала положення рівня ($l \parallel \Pi_4$), тоді найпростішим перерізом буде коло (рис. 100).

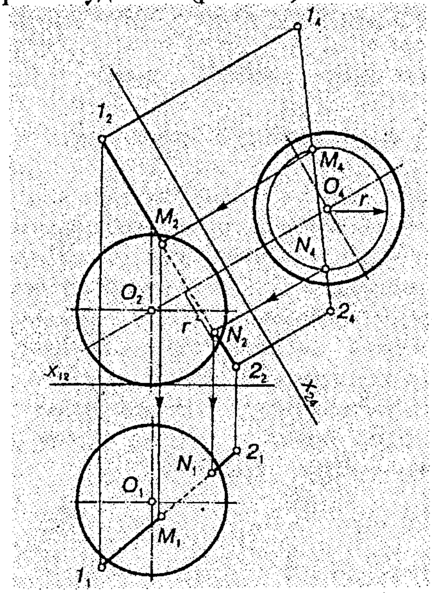


Рисунок 100 – Для визначення точок перетину застосовують методи перетворень

11.4 Питання, які виносяться на СРС

1. Побудова проекцій точок перетину з прямими рівня та проекціювальними прямими; аналіз перерізів за заданими побудовами.

11.5 Теоретичні питання

1. В чому заключається доцільність розташування допоміжної січної площини відносно заданої поверхні при побудові точок перетину прямої з поверхнею?
2. Сутність загального алгоритму побудови точок перетину прямої лінії з криволінійною поверхнею.
3. Скільки точок перетину і для яких конкретно поверхонь можна отримати при перетині прямої лінії з криволінійною поверхнею?

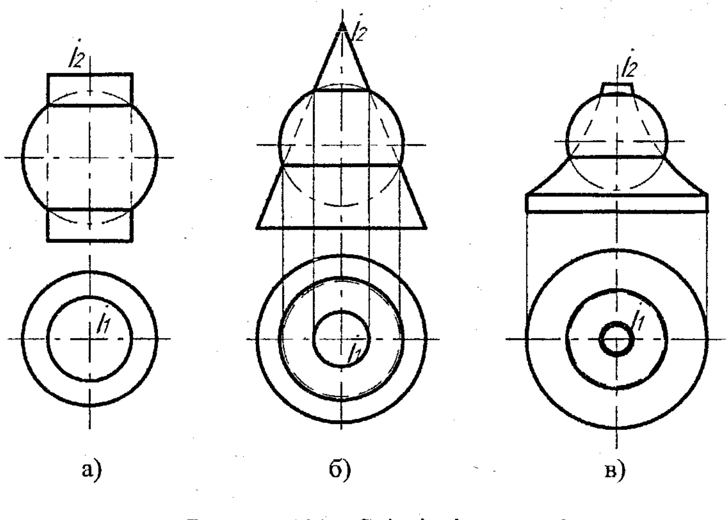
12 ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

Лінія перетину являє собою геометричне місце точок, які мають подвійну належність. В загальному випадку ця лінія є просторовою кривою, складність якої залежить від складності поверхонь, що перетинаються та їх взаємного положення в просторі. В деяких випадках лінія перетину може утримувати в собі плоскі криві.

Лінію перетину поверхонь, як і лінію перетину поверхні площиною, будують за сукупністю точок. В першу чергу звертають увагу на характерні точки обрисів (опорні точки, найбільш високі та низькі) та ті, що розташовані на осях симетрії.

12.1 Окремі випадки перетину

1. Поверхні, які перетинаються, мають спільну вісь обертання *i* (рис. 101).



а) б) в)

Рисунок 101 – Співвісні поверхні

На рис. 101 показані три приклади: а) циліндр та сфера, б) конус та сфера, в) поверхня обертання та сфера. Лінією перетину є коло (паралель).

2. Поверхні обертання, які описані навколо спільної для них сфери (рис. 102).

В цьому випадку розв'язання задач підпорядковується положенню, яке відоме під назвою теореми Монжа: «*дві поверхні другого порядку, які описані навколо третьої поверхні другого порядку (сфери), перетинаються між собою по двох кривим другого порядку*».

Дійсно, згідно з рис. 102, перетинаються поверхні обертання: циліндр і конус, еліпсоїд і конус, два конуси, лінією яких є еліпси.

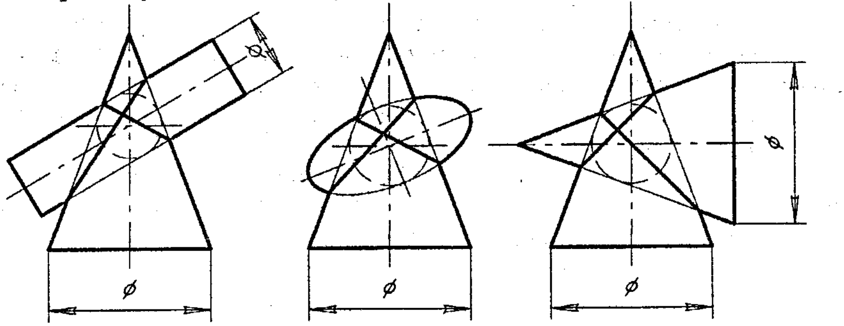
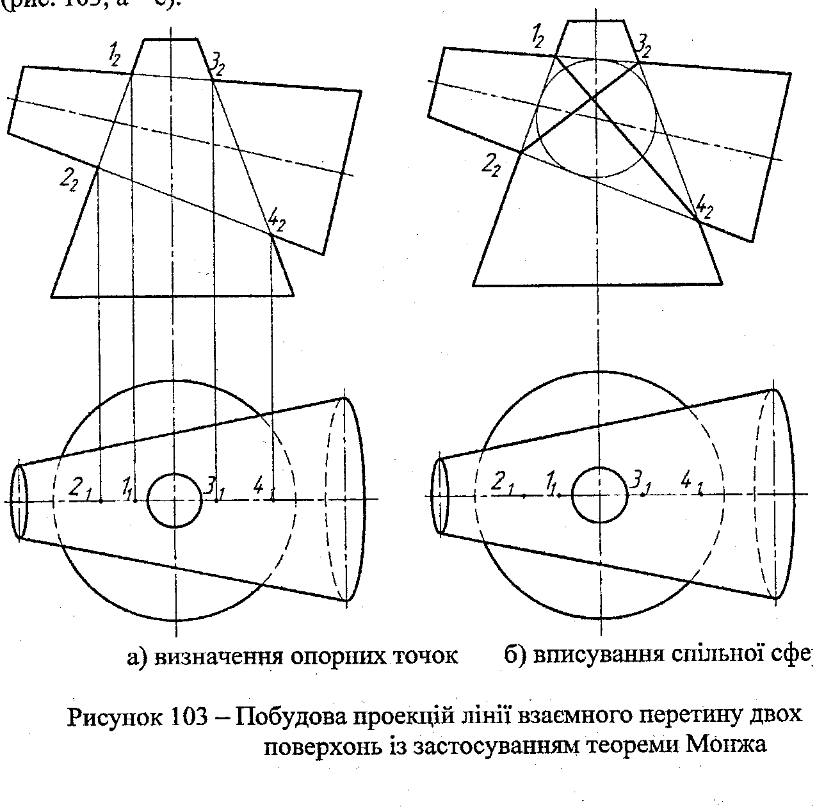


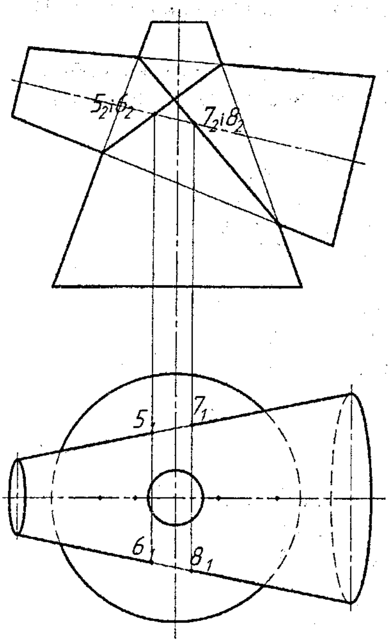
Рисунок 102 – Поверхні, які перетинаються, описані навколо спільної сфери

Побудова проекцій лінії взаємного перетину поверхонь обертання із застосуванням теореми Монжа демонструється послідовністю побудов (рис. 103, а – е).

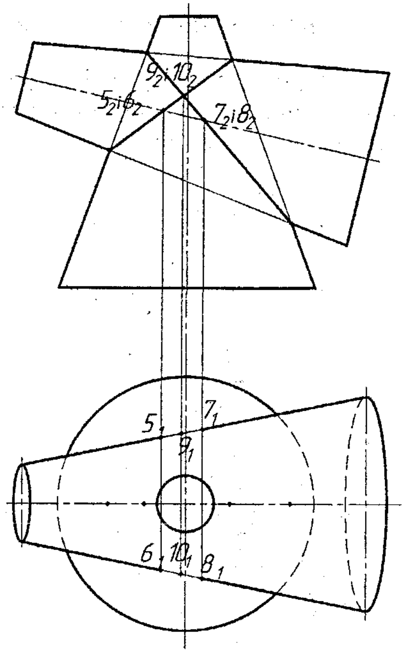


а) визначення опорних точок б) вписування спільної сфери

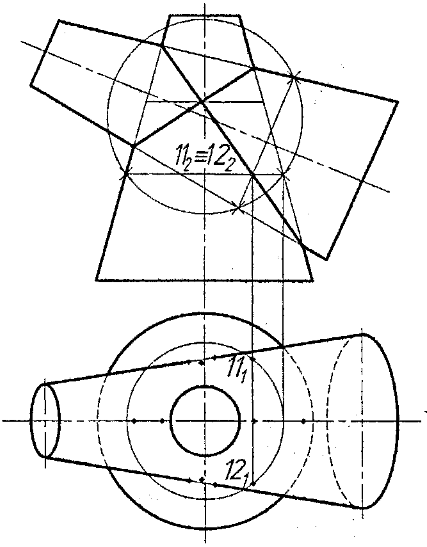
Рисунок 103 – Побудова проекцій лінії взаємного перетину двох поверхонь із застосуванням теореми Монжа



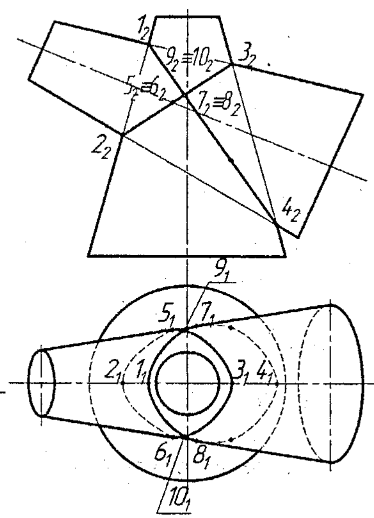
в) визначення обрисових точок *5 - 8*



г) визначення характерних точок *9, 10*



д) визначення проміжних точок *11, 12*

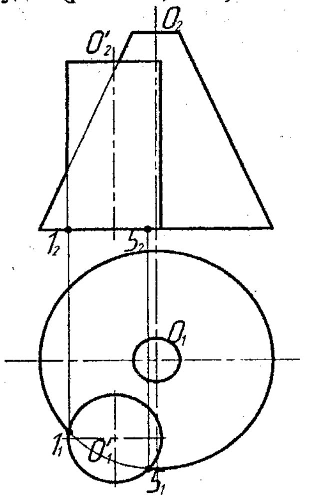


е) кінцевий результат

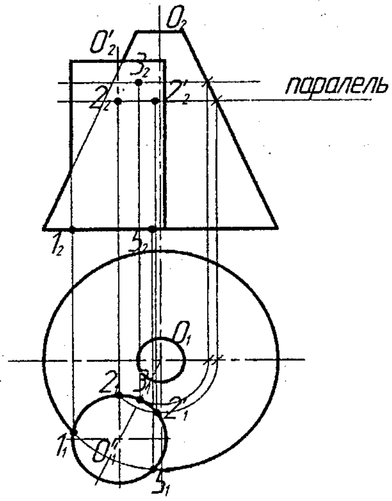
Рисунок 103

3.Одна із поверхонь займає проекціювальне положення (рис. 104).

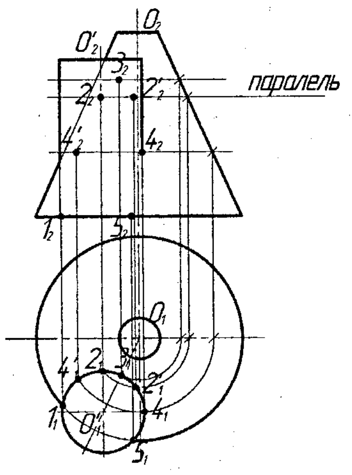
Побудова проекцій лінії взаємного перетину поверхонь проекціювального циліндра з конусом обертання демонструється послідовністю побудов (рис. 104, а – е).



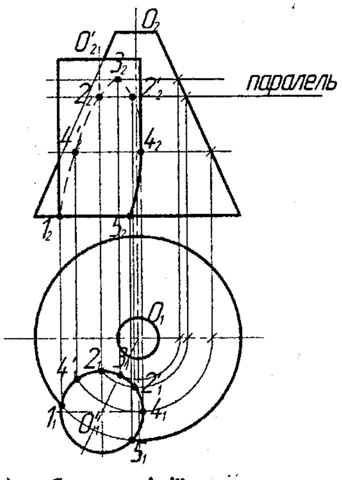
а) фіксація опорних точок *1*, *5*



б) побудова проекцій точок *2*, *2′*, *3*



в) побудова проекцій точок *4*, *4′*



г) побудова лінії взаємного перетину

Рисунок 104 – Бічна поверхня циліндра займає проекціювальне положення

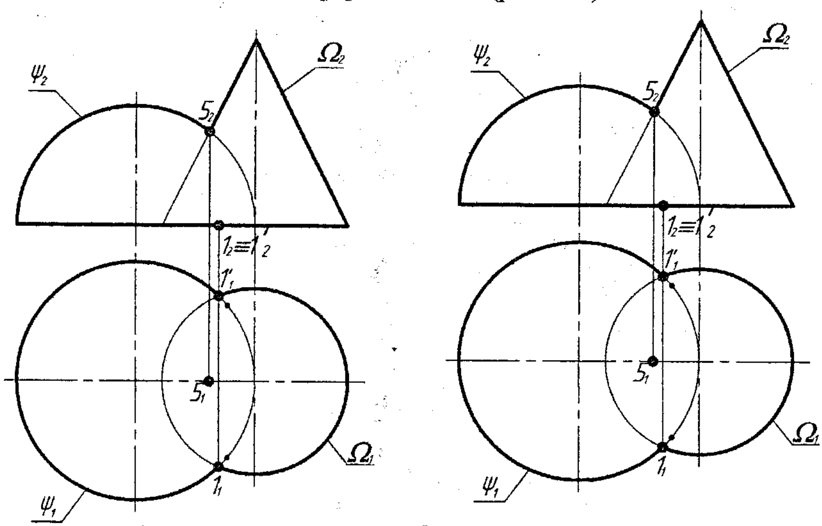
Вихідна проекція шуканої лінії перетину збігається з виродженою проекцією проекціювальної поверхні. Друга проекція лінії взаємного перетину визначається за її належністю до поверхні загального положення. До характерних точок в даному випадку відносять такі: *1*, *5* – найнижчі, *3* – найвища, *4* – та, що визначає видимість поверхонь. Точки *2*, *2'*, *4'* є проміжними. Фронтальні проекції точок *1*, *6* визначаються безпосередньо (належать основам конуса та циліндра), інші фронтальні проекції точок *2*, *2'*, *3*, *4*, *4'* знаходять за допомогою паралелей на конусі. Видимою частиною є лінія перетину, що складається із точок *5*, *4*; решту з'єднують невидимим контуром.

12.2 Загальні випадки перетину

В цьому разі застосовують площини-посередники або сфери-посередники. Сутність методу: для двох поверхонь, які перетинаються, вводять третю таким чином, щоб в перерізі отримати найпростіші лінії (кола, твірні). Ці лінії належать одній і тій же площині (поверхні), і між собою перетинаються в одній або декількох точках. Отримані точки одночасно належать заданим поверхням.

12.2.1 Метод січних площин

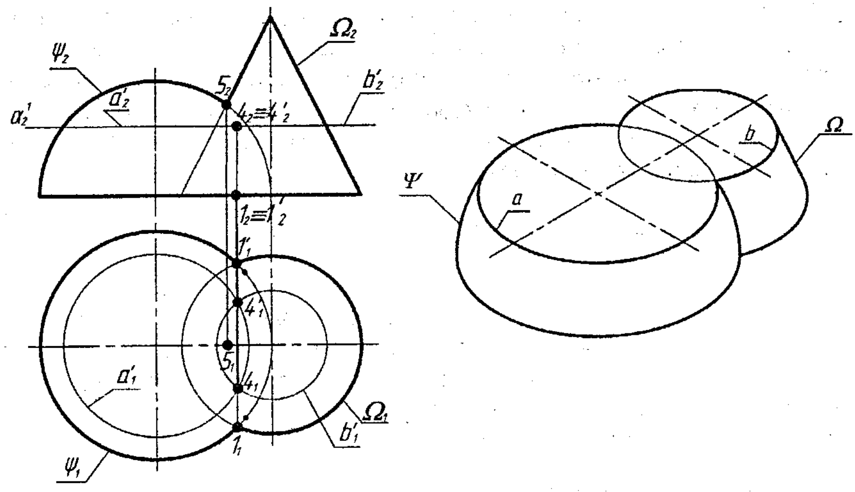
Площини-посередники α^1-α^3 вибирають такі, які перетинають задані поверхні по найпростіших за формою лініях (рис. 105).



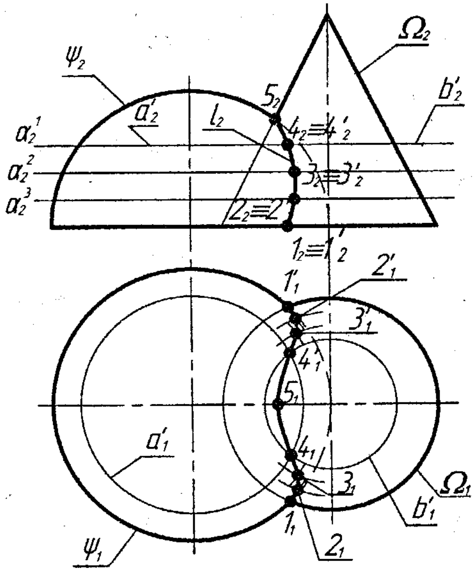
а) умова задачі б) визначення опорних точок *1*, *1'*, *5*

Рисунок 105 – Метод січних площин

Найбільш простими лініями для поверхонь θ (півсфери) та Ω (конуса) будуть кола a та $в$, тому вводять горизонтальні площини $\alpha(\alpha_2)$. Рис. 105 (а, б) пояснює побудови, що подаються на комплексному рисунку та аксонометричному зображенні, при визначенні проекцій точок 4, $4'$.



в) площина-посередник α^1 перетинає поверхні по колах a та $в$



г) кінцевий результат

Рисунок 105

Аналогічно знаходять точки *3*, *3'* та *2*, *2'* лінії перетину. Найвища точка *5* визначається на перетині обрисів поверхонь на $П_2$, найнижчі точки *1*, *1'* фіксують як результат перетину екваторів заданих поверхонь.

Алгоритм графічних побудов

1. Вибрати площини-посередники, які перетинають задані поверхні по найпростіших за формою лініях.

2. Визначити характерні точки лінії перетину:

а) точки, які належать обрисам проекцій поверхонь;

б) екстремальні точки (найвищі, найнижчі).

3. Побудувати лінії перетину поверхонь вказаними посередниками і знайти проміжні точки перетину побудованих ліній у кожному посереднику.

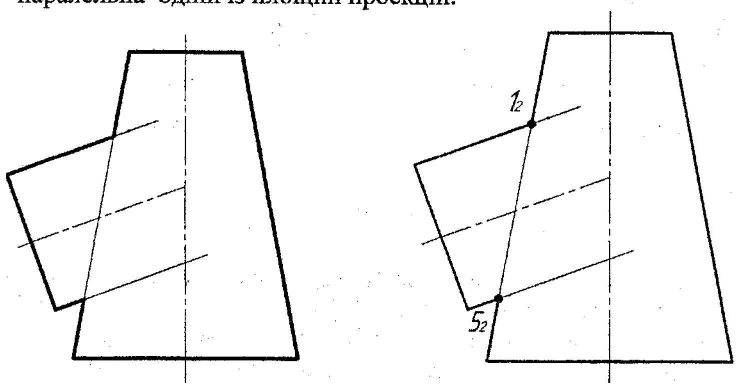
4. З'єднати точки з врахуванням видимості частин перетину поверхонь.

12.2.2 Метод сфер

В цьому випадку застосовують концентричні або ексцентричні сфери. Сфери проводять таким чином, щоб в перетині з кожною поверхнею утворювались кола.

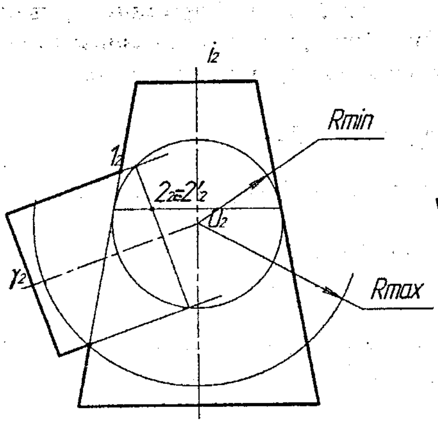
При використанні методу концентричних сфер (рис. 106) враховують, що:

1) перетинаються поверхні обертання;
2) осі цих поверхонь перетинаються в одній точці, яка визначає спільний центр сфер;
3) осі поверхонь обертання знаходяться в одній площині симетрії, яка паралельна одній із площин проекцій.

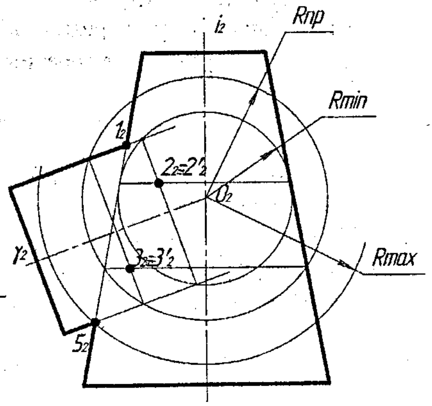


а) умова задачі б) фіксація опорних точок

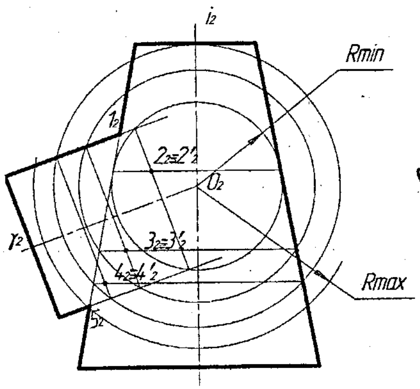
Рисунок 106 – Метод концентричних сфер



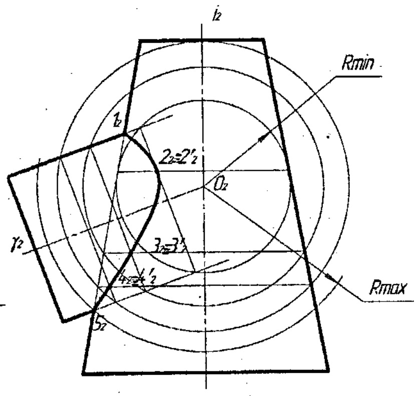
в) побудова найглибших точок *2, 2'*



г) побудова проміжних точок *3, 3'*



д) побудова проміжних
точок *4, 4'*



е) кінцевий результат

Рисунок 106

У випадку застосування концентричних січних сфер на перетині прямолінійних осей обертання *i*, *j* знаходять спільний центр *O*, який надалі використовується для проведення концентричних сфер.

Сфера мінімального радіуса R_{min} визначає положення найглибших точок *2, 2'* і проводиться таким чином, щоб вона була вписана в одну з поверхонь (конус) та перетинала обрисові твірні іншої поверхні (циліндра).

Сфера максимального радіуса R_{max} має проходити через одну із характерних точок *5* (точки перетину обрисових твірних). Всі проміжні сфери мають значення радіуса $R_{min} < R_{np} < R_{max}$. Кожна введена концентрична сфера співвісна з заданими поверхнями і має найпростіший переріз з ним – коло, перетин яких дає спільні точки, наприклад *4*, *4'*, лінії взаємного перетину.

Введення декількох концентричних сфер дозволяє побудувати сукупність точок *1*; *2*, *2'*; *3*, *3'*; *4*, *4'*; *5*, які визначають лінію перетину.

Якщо порушується одна з умов використання методу концентричних сфер, то слід проводити посередники-сфери, але з різних центрів. Спосіб, який використовується на підставі таких сфер, має назву ексцентричних сфер (рис. 107).

У випадку застосування ексцентричних сфер для визначення кожної пари точок, наприклад, *2*, *2'*; *3*, *3'*, насамперед треба знайти ряд паралельних між собою перерізів, кожний з яких може бути прийнятий за паралель сфери, центр *O* якої беремо на осі *i* поверхні циліндра.

На відміну від попереднього випадку, для побудови лінії перетину необхідно мати декілька центрів сфер, відносно яких знаходяться фронтальні проекції шуканої лінії взаємного перетину.

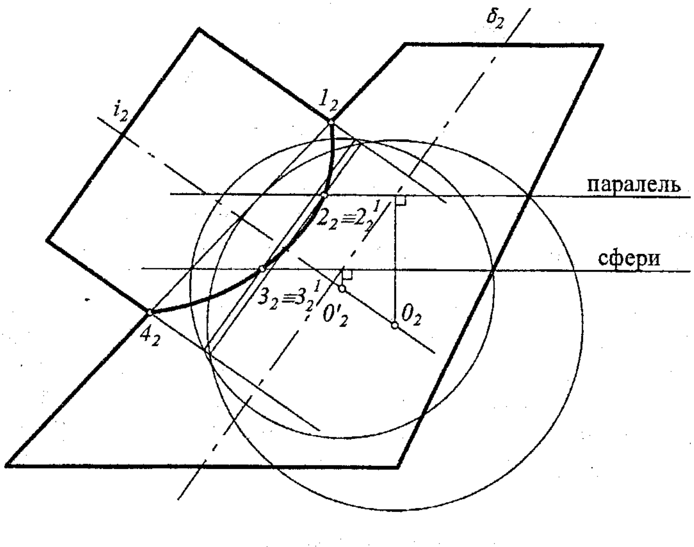


Рисунок 107 – Побудова ексцентричних сфер

На рис. 108 показана побудова фронтальної проекції лінії перетину відкритого тора з конусом обертання, якщо відомо, що обидві поверхні мають загальну площину симетрії, яка паралельна фронтальній площині проекцій Π_2.

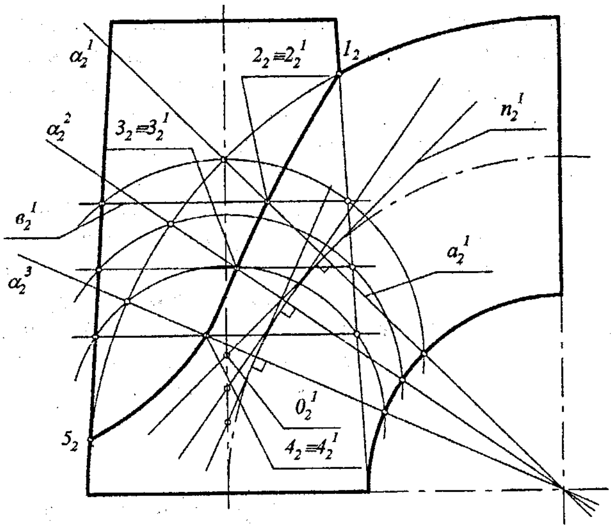


Рисунок 108 – Побудова ексцентричних сфер

Відомо, що будь-яка площина, яка проходить через вісь тора, перетинає його по колу. Тому при введені фронтально-проекціювальної площини $\alpha^1(\alpha^1{}_2)$ результатом перетину з тором буде коло $a^1(a^1{}_2)$.

Щоб визначити центр сфери, яка може дати цей же переріз (коло a^1), слід провести дотичну $n^1{}_2$ в точці перетину кола $a^1{}_2$ з віссю обертання конуса та зафіксувати як центр $O^1{}_2$. Аналогічно, за допомогою фронтально-проекціювальних площин α^2, α^3 знаходять ще два центри допоміжних ексцентричних сфер. Кожна точка лінії взаємного перетину отримана як результат перетину двох кіл (для тора – кола a, для конуса – кола $в$).

Алгоритм графічних побудов

1. Визначити вид посередника – сферичної поверхні (концентричні або ексцентричні сфери) та знайти центр (центри) сфер. Для цього слід врахувати умови використання концентричних сфер.

2. Визначити характерні точки лінії перетину:

а) точки, які належать обрисам проекцій поверхонь;

б) екстремальні точки (найглибші), положення яких знаходять за допомогою сфери мінімального радіуса, яка дотикається до більшої із заданих поверхонь та перетинає меншу.

3. Побудувати лінії перетину поверхонь сферами-посередниками і знайти проміжні точки перетину побудованих ліній у кожному посереднику.

4. З'єднати точки з врахуванням видимості частин перетину поверхонь.

12.3 Питання, які виносяться на СРС

1. Побудова проекцій лінії взаємного перетину співвісних поверхонь.
2. Побудова проекцій лінії взаємного перетину поверхонь із застосуванням теореми Монжа.
3. Навчитись правильно аналізувати положення заданих поверхонь і пропонувати відповідний спосіб побудов.

12.4 Теоретичні питання

1. Які поверхні називають співвісними?
2. Наведіть приклади застосування на практиці співвісних поверхонь.
3. Сутність методу січних площин. В яких випадках застосовують метод січних площин?
4. Сутність методу січних сфер. В яких випадках застосовують цей метод?
5. Умови застосування методу січних сфер.
6. В яких випадках застосовують метод ексцентричних сфер?
7. Як визначають центри для проведення ексцентричних сфер?
8. Дайте формулювання теореми Монжа.
9. По яких кривих перетинаються поверхні другого порядку, якщо застосовується теорема Монжа? Наведіть приклади.
10. Які положення повинні займати бічні криволінійні та многогранні поверхні, щоб для розв'язування задач можна застосовувати алгоритм окремих випадків перетину.

13 РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Розгорткою поверхні називають плоску фігуру, яка побудована послідовним суміщенням усіх плоских елементів цієї поверхні з однією площиною без утворення розривів і складок.

Розгортки бувають точні та наближені. На кресленнях розгортку позначають знаком  .

Точні розгортки – це ті, які базуються на точних побудовах, і можуть бути підтверджені математично.

13.1 Спосіб розгортання

13.1.1 Розгортання циліндра обертання (рис. 109).

Вихідні дані:
R – радіус основи циліндра, h – висота циліндра.

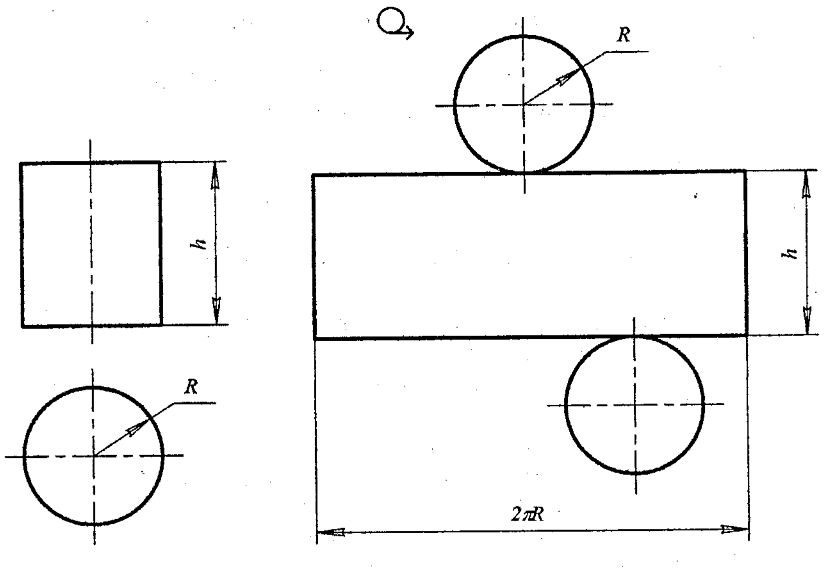


Рисунок 109 – Розгортка циліндра обертання

Довжина розгорнутої бічної поверхні циліндра обертання визначається як довжина кола, що дорівнює $2\pi R$ ($\pi = 3,14$).

13.1.2 Розгортання конуса обертання (рис. 110).

Вихідні дані:
R – радіус основи конуса, l – довжина твірної конуса, S – вершина конуса.

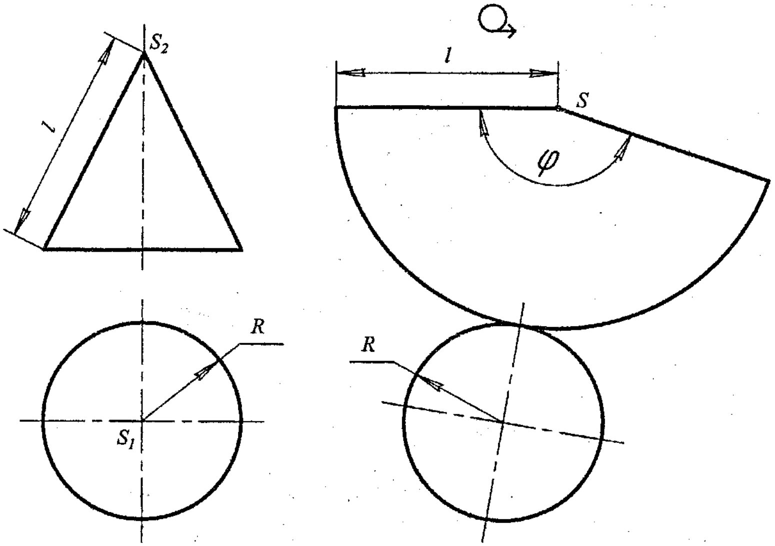


Рисунок 110 – Розгортка конуса обертання

Лінійний кут φ сектора бічної поверхні конуса визначається за формулою $\varphi = (2\pi R)/l$ $(\pi=180^{o})$.

13.2 Спосіб нормального перерізу

Використовується для розгортання призм (рис. 111). Переріжемо призму горизонтально-проекціювальною площиною Σ, що перпендикулярна до ребер, які відображаються на горизонтальній площині проекцій в натуральну величину.

Способом заміни площин проекцій знайдемо натуральну величину перерізу $A^0B^0C^0$.

Примітка. Якщо бічні ребра призми відносно площин проекцій Π_1 та Π_2 займають загальне положення, то необхідно одним із методів перетворень побудувати призму так, щоб її бічні ребра зайняли положення рівня.

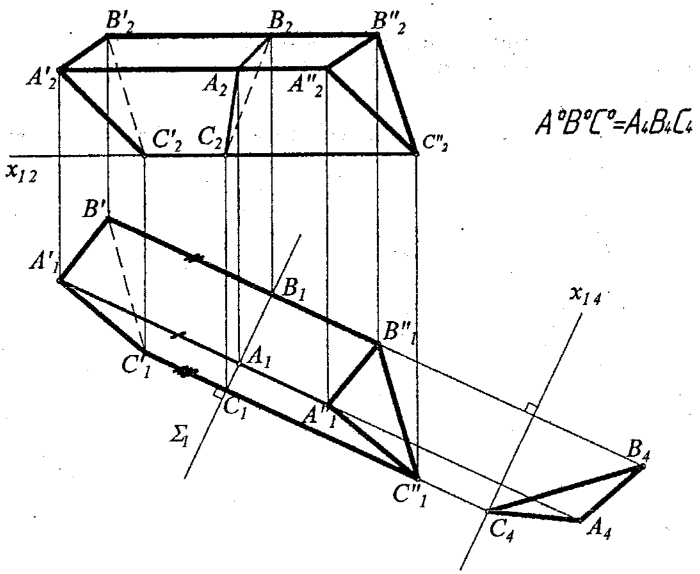


Рисунок 111 – Визначення натуральної величини перерізу $A^0B^0C^0$

Оскільки для побудови бічної поверхні призми треба мати натуральні величини периметра нормального перерізу та бічних ребер призми, то виконаємо послідовно такі побудови.

1. Вздовж довільної лінії *a* (рис. 112) від деякої точки *A* послідовно відкладемо відрізки *AB*, *BC*, *CA*, які дорівнюють відповідним сторонам трикутника нормального перерізу $A^0B^0C^0$. Ці величини треба взяти на площині проекцій Π_4, а саме: A_4B_4, B_4C_4, C_4A_4.

2. Через точки *A*, *B*, *C*, *A* проведемо прямі, які перпендикулярні до *a*, та відкладемо на них від точок *A*, *B*, *C*, *A* відрізки, які дорівнюють відрізкам бічних ребер призми. Ребра призми є відрізками рівня, їх горизонтальні проекції дорівнюють натуральним величинам довжин ребер.

3. Отримані точки з'єднаємо відрізками прямих.

4. Плоска фігура $AB'C'A'A''C''B''A''$ являє собою розгортку бічної поверхні призми.

5. Повну розгортку призми отримуємо за допомогою розгортання основ призми $AB'C'$ та $AB'C'$ (рис. 112).

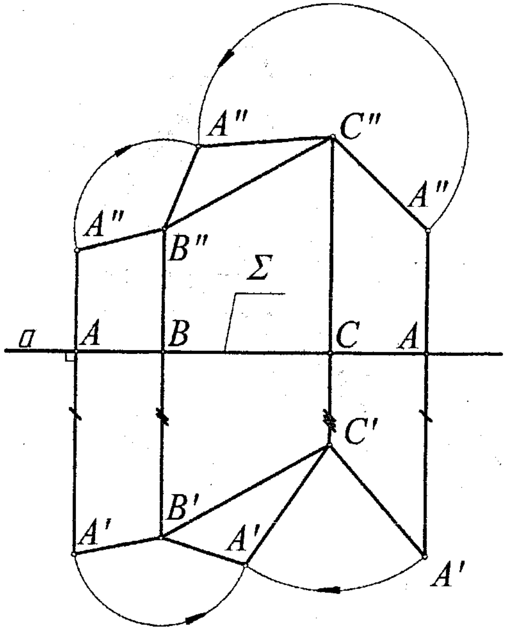


Рисунок 112 – Розгортка призми

13.3 Спосіб тріангуляції (трикутників)

Як точна розгортка може бути ілюстрована розгортка трикутної піраміди.

Для виконання розгортки слід виконати аналіз ребер бічної поверхні та основи піраміди. Основа піраміди *ABCD* займає горизонтальне положення, тобто ребра *AB*, *BC*, *CA*, *CD* на горизонтальну площину проекцій $П_1$ проекціюються в натуральну величину. Натуральні величини ребер *SA, SB, SC, SD* бічної поверхні піраміди знайдені обертанням цих ребер до положення, паралельного фронтальній площині проекцій (рис. 113). Нові положення ребер *SA, SB, SC, SD* відзначені як натуральні величини $S'_2A'_2$, $S'_2B'_2$, $S'_2C'_2$, $S'_2D'_2$.

Відносно вибраної точки *S* проводиться довільний відрізок, який дорівнює *SA*. Відносно сторони *SA* на перетині засічок радіусами, які дорівнюють натуральним величинам ребер *AB* та *SA*, отримуємо точку *B* трикутника *SAB*. Далі ведеться побудова точки *C* Δ *BSC* радіусами, що дорівнюють натуральним величинам ребер *BC* та *SC*. Аналогічні побудови виконані для точок *A* та *D* .

Повна розгортка піраміди показана на рис. 114.

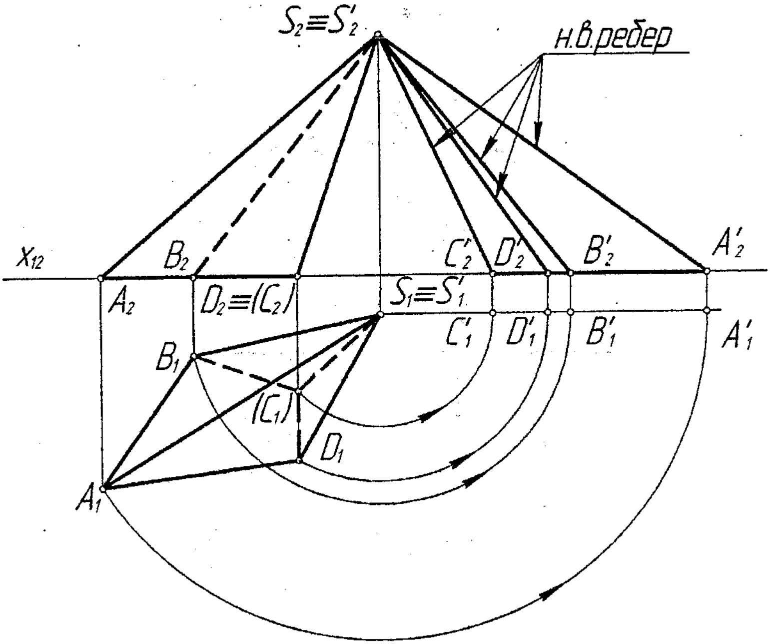


Рисунок 113 – Визначення натуральних величин бічних ребер піраміди

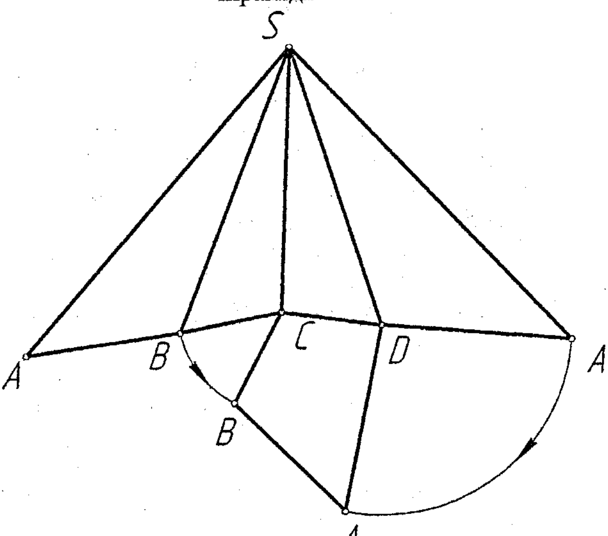


Рисунок 114 – Розгортка піраміди

13.4 Наближені розгортки

Наближені розгортки для циліндричних та конічних поверхонь будуються вписуванням правильних плоских фігур (многокутників) в бічну поверхню.

Теоретична розгортка поверхні вважається більш точною, чим більше число сторін містить многокутник. Отже величина кожного відрізка ламаної лінії (хорди вписаного многокутника) повинна наближатися до величини довжини дуги розгорненого кола основи ($2\pi R$).

13.4.1 Розгортка циліндричної поверхні

Циліндричну поверхню замінюють (апроксимують) призматичною поверхнею, яка вписана в циліндричну. Для цього основу циліндра (коло) ділять на рівне число сторін, наприклад, вісім. Всі твірні циліндричної поверхні паралельні площині проекцій Π_2. Тобто при розгортанні бічної частини циліндра враховується натуральна величина твірної L, що береться на її фронтальній проекції.

Розгортання бічної поверхні почнемо виконувати відносно обрисової твірної. Для цього подумки розріжемо поверхню циліндра по твірній, потім здійснимо розгортання бічної поверхні відносно твірних в напрямку, перпендикулярному до кожної із них, на величину *1/8* хорди кола основи навколо твірної L. Аналогічні побудови слід здійснити відносно кожної наступної *1/8* точки кола основи циліндра. Всі твірні бічної поверхні циліндра та точки хорд при основах рівні між собою, які потім з'єднані плавною кривою (рис. 115).

13.4.2 Розгортка конічної поверхні

Ця задача розв'язується подібно до побудови бічної поверхні піраміди методом трикутника. Для цього бічна конічна поверхня апроксимується вписаною в неї многогранною пірамідальною поверхнею.

На рис. 116 показана розгортка поверхні піраміди, яка вписана в задану конічну поверхню. Чим більше число граней у вписаної піраміди, тим менша різниця між дійсною та наближеною розгортками конічної поверхні.

Для побудови розгортки попередньо визначені натуральні величини твірних конічної поверхні методом обертання твірних навколо вершини до положення, паралельного Π_2. Кожна з точок наступної твірної віддалена на відстань, що дорівнює *1/8* хорди кола (основи конічної поверхні).

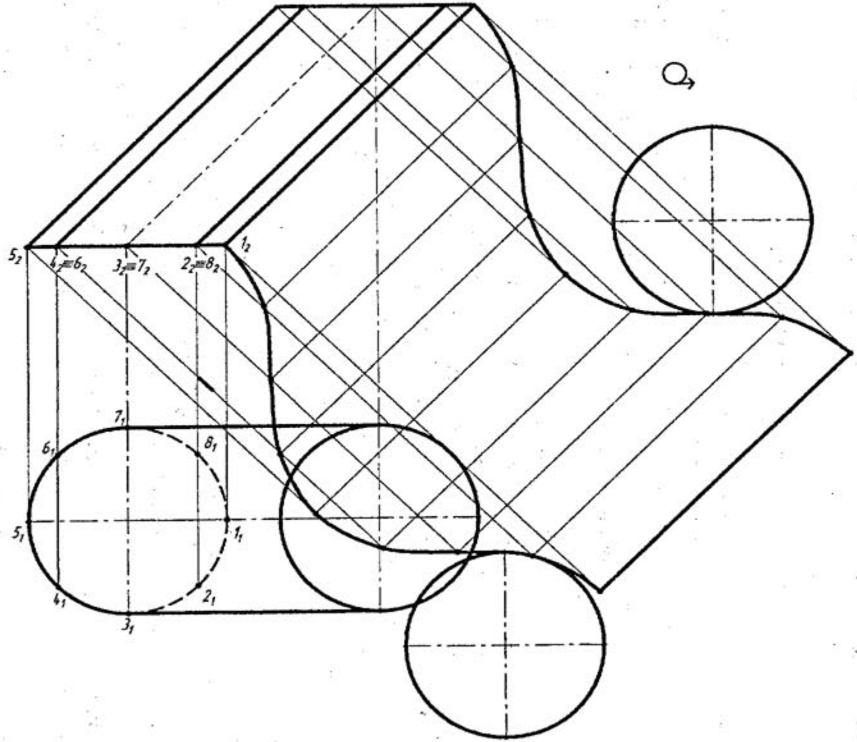


Рисунок 115 – Розгортка циліндричної поверхні

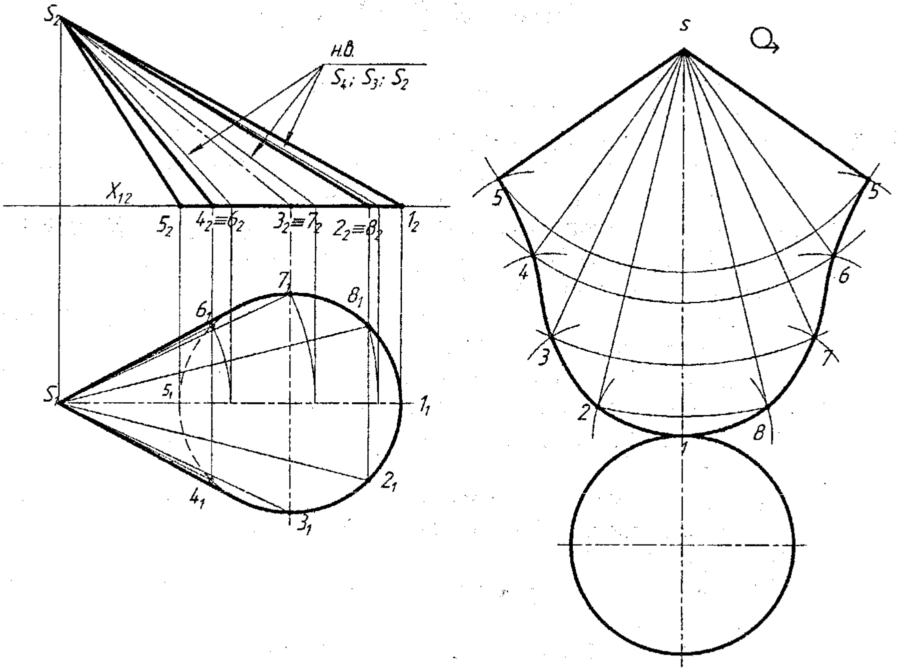


Рисунок 116 – Розгортка конічної поверхні

13.5 Питання, які виносяться на СРС

1. Побудова однієї із точних розгорток, яка буде показана на лекції, але її треба закінчити самостійно.
2. Побудова однієї із наближених розгорток, яка буде показана на лекції, але її треба закінчити самостійно.
3. Ознайомитись з прикладами побудов деяких форм кривих поверхонь.

13.6 Теоретичні питання

1. Які поверхні називають розгортними?
2. Які з поверхонь відносять до розгортних? Яку твірну мають ці поверхні?
3. Які з лінійчатих поверхонь відносять до нерозгортних?
4. В якому випадку побудова наближеної розгортки вважається більш точною?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1985. – 416 с.
2. Буда А. Г. Нарисна геометрія. Збірник прикладів та задач з теоретичними відомостями для студентів машинобудівних спеціальностей. Збірник задач. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 142 с.
3. Інженерна та комп'ютерна графіка: Підручник / В. Є. Михайленко, В. М. Найдиш, А. М. Підкоритов, І. А. Скидан; За ред. В. Є.Михайленко, – К.: Вища шк., 2000. – 342 с.
4. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 1988. – 270 с.
5. Гордон В. О., Иванов Ю. Б., Солнцева Т. Е. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. – М.: Наука, 1973. – 351 с.
6. Кузнєцов Н. С. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1981. – 496 с.
7. Сборник задач по начертательной геометрии с элементами программирования / Под общей ред. Михайленко В. Е. – М.: Высшая школа, 1976. – 222 с.
8. Фролов С. А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1978. – 238 с.
9. Фролов С. А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1980. – 224 с.
10. Государственные стандарты единой системы конструкторской документации (ЕСКД).
11. Збірник задач з нарисної геометрії для студентів бакалаврських напрямків 6.0902, 6.0923 спеціальностей 7.090202, 7.090203, 7.090215, 7.092304 ступеневої підготовки спеціалістів з вищою технічною освітою / Буда А. Г. – Вінниця: ВДТУ, 1996. – 59 с.
12. Методичні рекомендації з нарисної геометрії для розв'язання позиційних задач до тем «Пряма та площина» для студентів бакалаврських напрямків 6.0902, 6.0923 спеціальностей 7.090202, 7.090203, 7.090215, 7.092304 / Буда А. Г. – Вінниця: ВДТУ, 1997. – 48 с.
13. Методичні рекомендації до виконання графічних завдань з нарисної геометрії та варіанти завдань для студентів бакалаврських напрямків 6.0902 – «Інженерна механіка», 6.0923 – «Зварювання» ступеневої підготовки спеціалістів з вищою технічною освітою / Буда А. Г., Король О. В. – Вінниця: ВДТУ, 1996. – 41 с.
14. Буда А. Г., Король О. В., Пащенко В. Н. Проектування форм технічних деталей та аксонометричні проекції. Навчальний посібник.– Вінниця: ВДТУ, 2001. – 92 с.

ПИТАННЯ

для підготовки до іспиту з нарисної геометрії

1. Наука нарисна геометрія, її структура, мета, задачі, місце в підготовці спеціаліста політехнічного профілю.

2. Метод проекцій. Центральне та паралельне проекціювання. Ортогональне проекціювання.

3. Точка. Ортогональні проекції точки відносно двох та трьох площин проекції. Прямокутні координати точки в 4-х октантах, в площинах проекцій та на координатних осях.

4. Пряма. Проекціювання прямої на дві і три площини проекцій. Положення прямої відносно площини проекцій. Проекції паралельних, мимобіжних прямих, та прямих, що перетинаються. Конкуруючі точки. Інцидентність точки прямій.

5. Площина. Проекціювання площини на дві і три площини проекцій. Положення площини відносно площин проекцій. Головні лінії площини. Інцидентність точки та прямої площині. Сліди прямої та площини.

6. Основні позиційні задачі на площині та алгоритми їх розв'язання. Взаємне положення прямої та площини, двох площин. Паралельність прямої площині, двом площинам. Перпендикулярність прямої до площини та двох площин. Перетин прямої з площиною та двох площин.

7. Криві лінії. Визначення і зображення кривих. Плоскі і просторові криві. Криві другого порядку. Гвинтові лінії.

8. Поверхні. Класифікація. Способи утворення та завдання поверхонь (визначник, каркас, обрис). Поверхні обертання. Окремі різновиди поверхонь обертання. Лінійчаті поверхні (переносу, з однією та двома напрямними, торси, гвинтові поверхні).

9. Основні позиційні задачі на поверхні та алгоритми їх розв'язання Точка і лінія на поверхні, вирізи на поверхнях. Перетин поверхні з прямою і площиною. Конічні перерізи. Перетин поверхонь. Окремі та загальні випадки перетину прямої з поверхнею, двох поверхонь.

10. Метричні задачі та алгоритми їх розв'язання (визначення натуральної величини кутів, плоских фігур, відстаней та інші).

11. Способи перетворень проекцій, різновиди. Надання прямим лініям та площині окремого положення відносно площин проекцій. Застосування методів для розв'язання позиційних задач на поверхні. Використання методів в курсі інженерної графіки.

12. Розгортки поверхонь. Побудова точних розгорток та з наближенням.

Навчальне видання

Антоніна Героніївна Буда

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з нарисної геометрії для студентів машинобудівних спеціальностей

Конспект лекцій

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор О. Д. Скалоцька

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 3.10.08 р. Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7× 42 $1/4$ Папір офсетний
Друк різографічний Ум. друк. арк. 7.5
Тираж 85 прим.
Зам. № 2008-130

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ