Т.О. Данилюк, С.І. Резнік, С.Г. Авдєєв

Задачі з фізики
та методи їх розв'язування

(для слухачів Інституту довузівської підготовки)

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Т. О. Данилюк, С. І. Резнік, С. Г. Авдєєв

ЗАДАЧІ З ФІЗИКИ

та методи їх розв'язування

(ДЛЯ СЛУХАЧІВ ІНСТИТУТУ ДОВУЗІВСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ)

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для слухачів Інституту довузівської підготовки. Протокол № 6 від 29 грудня 2005 р.

Вінниця ВНТУ 2008

УДК 53(075)
Д 18

Рецензенти:

П. М. Зузяк, доктор фізико-математичних наук, професор
В. І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
В. Г. Дзись, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Данилюк Т. О., Резнік С. І., Авдєєв С. Г.
Д 18 **Задачі з фізики та методи їх розв'язування (для слухачів Інституту довузівської підготовки).** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 146 с.

Даний навчальний посібник буде корисним для слухачів Інституту довузівської підготовки та учнів старших класів.

УДК 53 (075)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Посібник з фізики призначається для самостійної роботи слухачів факультету довузівської підготовки.

В посібнику вміщено задачі різної складності. До всіх розділів посібника подані короткі вказівки щодо методики розв'язування задач та перелік основних формул, які використовуються під час розв'язування.

При розв'язуванні задач слід виконувати такі дії:

1. Прочитати умову задачі та вникнути в фізичну суть явищ або процесів, що розглядаються. Виясчити мету розв'язування та виділити відомі та невідомі величини.

2. Коротко записати умову задачі та перевести значення всіх фізичних величин в СІ. Зробити рисунок або схему, де вказати всі векторні величини (швидкості, прискорення, сили, імпульсу, напруженості електричного поля, індукцію магнітного поля тощо).

3. З'ясувати, за допомогою яких фізичних законів можна описати ситуацію, що розглянута в задачі. Якщо в закон входять векторні величини, то записати цей закон у векторному вигляді. Вибрати систему координат і записати векторні співвідношення в проекціях на координатні осі у вигляді скалярних рівнянь, які зв'язують відомі та невідомі величини.

4. Розв'язати одержане рівняння (або систему рівнянь) в загальному вигляді.

5. Перевірити правильність розв'язування задачі, знайшовши розмірність одержаних величин.

6. Підставити в загальне розв'язування числові значення фізичних величин та провести необхідні обчислення.

7. Проаналізувати одержаний результат та оцінити його реальність. Записати відповідь в одиницях СІ або в тих одиницях, які вказані в умові задачі.

8. Вияснити, чи є інші способи розв'язування задачі. Подумати, чи зміниться результат, якщо внести зміни в умову задачі. Проаналізувати граничні або окремі випадки загального розв'язку.

Недоліки, які часто зустрічаються на письмових іспитах з фізики:

1. Неуважність при написанні даних умови задачі, неправильне переведення фізичних величин з одних одиниць в інші.

2. Не врахування того, що векторні величини додаються геометрично за правилом паралелограма, а не алгебраїчно.

3. Досить часто одна і та ж величина позначається різними буквами, або різні величини – однаковими буквами. Результат – помилки в алгебраїчних перетвореннях і, отже, неправильна відповідь.

4. Підводить також і техніка обчислень, а також невміння вибирати з одержаного математичного розв'язку відповідь, що відповідає умові задачі.

МЕХАНІКА

Розділ 1. Кінематика поступального і обертального руху

Кінематика вивчає різноманітні механічні рухи, не розглядаючи причин, які зумовлюють ці рухи. При розв'язуванні задач на тему "Кінематика" рекомендується:

- вибрати систему відліку (тіло відліку, систему координат і початок відліку часу). При виборі напрямків координатних осей варто враховувати напрямок векторів переміщень, швидкостей та прискорень;
- зобразити траєкторію руху частинки (матеріальної точки) у вибраній системі відліку, вказати на рисунку напрямки векторів переміщень, швидкостей та прискорень;
- записати закон руху та відповідні йому рівняння спочатку у векторному вигляді ($\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$), а потім записати ці рівняння в проекціях на осі координат і одержати систему рівнянь у скалярному вигляді;
- при необхідності доповнити одержану систему рівнянь і знайти шукані величини.

Основні поняття

Рівняння шляху рівномірного прямолінійного руху:

$$S = \upsilon t, \tag{1}$$

де S - шлях;
υ - швидкість руху;
t - час руху.

Середня швидкість нерівномірного руху:

$$\upsilon_{cp} = \frac{S}{t}, \tag{2}$$

де S - шлях;
t - час руху.

Прискорення рівнозмінного руху:

$$\vec{a} = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t}, \tag{3}$$

де $\vec{\upsilon}_0$ - початкова швидкість;
$\vec{\upsilon}$ - кінцева швидкість;
t - тривалість руху.

Швидкість рівнозмінного руху:

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at, \tag{4}$$

де v_0 - початкова швидкість;
a - прискорення;
v - кінцева швидкість.

Шлях рівнозмінного руху:

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \tag{5}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2aS, \tag{6}$$

де v_0 - початкова швидкість;
v - кінцева швидкість;
a - прискорення.

Тривалість польоту тіла, кинутого під кутом α до горизонту:

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}. \tag{7}$$

Дальність польоту тіла, кинутого під кутом α до горизонту:

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \tag{8}$$

де v_0 - початкова швидкість;
α - кут кидання тіла;
g - прискорення вільного падіння.

Висота підйому тіла, кинутого під кутом α до горизонту:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{9}$$

Кутова швидкість рівномірного обертового руху:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \tag{10}$$

де φ - кут повороту;
t - час повороту.

Кутова швидкість і період обертання зв'язані між собою співвідношеннями:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{або} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{11}$$

Частота обертання і період обертання зв'язані між собою співвідношеннями:

$$\nu = \frac{1}{T}, \text{ або } \quad T = \frac{1}{\nu}. \tag{12}$$

Кутова швидкість дорівнює:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{13}$$

Лінійна швидкість дорівнює:

$$\upsilon = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu. \qquad (14)$$

Швидкість руху частинки відносно нерухомої системи відліку (закон додавання швидкостей)

$$\vec{\upsilon} = \vec{U} + \vec{\upsilon}', \qquad (15)$$

де $\vec{U}$ - швидкість рухомої системи відліку відносно нерухомої (переносна швидкість);
$\vec{\upsilon}'$ - швидкість частинки відносно рухомої системи відліку (відносна швидкість);
$\vec{\upsilon}$ - швидкість частинки відносно нерухомої системи відліку (абсолютна швидкість).

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Автомобіль проїхав першу половину дороги зі швидкістю $\upsilon_1 = 90$ *км/год*, другу зі швидкістю $\upsilon_2 = 60$ *км/год*. Знайти середню швидкість автомобіля на всьому шляху.

$\upsilon_1 = 90$ *км/год*	$\upsilon_1 = 25$ *м/с*
$\upsilon_2 = 60$ *км/год*	$\upsilon_2 = 16,6$ *м/с*
$\upsilon_{сер}$ - ?	$\upsilon_{сер}$ - ?

Розв'язування

Середню швидкість визначають за формулою $\upsilon_{сер} = \dfrac{S}{t}$.

Вибираємо систему відліку і виконуємо рисунок.

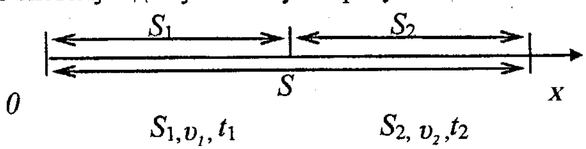


Рис. 1

Рух тіла змінний. Рівняння руху має вигляд

$$\upsilon_{сер} = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} \,. \qquad (1)$$

В проекції на вісь x швидкість дорівнює

$$\upsilon_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{S}{2t_1},\ \upsilon_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{S}{2t_2}.$$

Підставляючи ці значення в формулу (1), маємо

$$\upsilon_{сер} = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}.$$

Перевіримо розмірність і обчислимо:

$$\frac{м}{с} = \frac{\frac{м}{с}\cdot\frac{м}{с}}{\frac{м}{с}+\frac{м}{с}} = \frac{м}{с};$$

$$\upsilon_{сер} = \frac{2\cdot 25\cdot 16,6}{26+16.6} \approx 19,5\frac{м}{с}.$$

Відповідь: $19,5\ \frac{м}{с}$.

Задача 2. Тіло, що має початкову швидкість *4 м/с*, пройшло за шосту секунду руху шлях *2,9 м*. Знайти прискорення тіла, де S_5 і S_6 - шляхи, які пройшло тіло за п'ять і шість секунд, відповідно.

Дано	Розв'язування
$\upsilon_0 = 4$ *м/с* $t_6 - t_5 = 1$ *с* $\Delta S = 2,9$ *м* $a = ?$	Шлях, пройдений тілом за шосту секунду руху, $\Delta S = S_6 - S_5 = \left(\upsilon_0 t_6 + \frac{at_6^2}{2}\right) - \left(\upsilon_0 t_5 + \frac{at_5^2}{2}\right),$ де S_5 і S_6 - шляхи, що пройшло тіло за п'ять і шість секунд, відповідно. Звідси

$$\Delta S = \upsilon_0(t_6 - t_5) + \frac{a}{2}(t_6^2 - t_5^2),$$

$$a = \frac{2\left(\Delta S - \upsilon_0(t_6 - t_5)\right)}{t_6^2 - t_5^2} = 0,2\frac{м}{с^2}.$$

Відповідь: $a = -0,2$ *м/с*^{2}. Тіло рухалось сповільнено з прискоренням, що направлене протилежно до швидкості.

Задача 3. Рівняння руху тіла має вигляд $x = 15t + 0{,}4t^2$. Знайти прискорення руху тіла. Визначити початкову швидкість тіла і його швидкість через 5 с.

$X = 15t + 0{,}4t^2$ $t = 5c$
a - ? υ_0 - ? υ - ?

Розв'язування

Порівняємо дане рівняння руху тіла з рівнянням руху у загальному вигляді:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2};\ x = 15t + 0{,}4t^2.$$

Очевидно, що $x_0 = 0$, $\upsilon_0 = 15$ *м/с*, $\frac{a}{2} = 0{,}4\frac{м}{с^2}$, звідси $a = 0{,}8$ *м/с*^{2}.
Швидкість тіла через *5 с* знайдемо з рівняння:

$$\upsilon = \upsilon_0 + a\,t;$$

тоді $\upsilon = 15 + 0{,}8 \cdot 5 = 19$ *м/с*.

Відповідь: $a = 0{,}8$ *м/с*; $\upsilon_0 = 15$ *м/с*; $\upsilon = 19$ *м/с*.

Задача 4. З висоти *1000 м* падає тіло без початкової швидкості. Одночасно з висоти *1100 м* падає друге тіло з деякою початковою швидкістю. Обидва тіла досягають Землі в один і той же момент часу. Знайти початкову швидкість другого тіла. Опором повітря знехтувати.

$h = 1000$ *м* $H = 1100$ *м* $t_1 = t_2$
υ_{02} - ?

Розв'язування

Позначимо час падіння обох тіл буквою t.

Тоді:
$$h = \frac{gt^2}{2};$$
$$H = \upsilon_{02}t + \frac{gt^2}{2}.$$

Підставляючи значення t з першого рівняння в друге:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

одержимо:

$$H = \upsilon_{02}\sqrt{\frac{2h}{g}} + h,\ \text{або}\ \upsilon_{02} = \frac{H - h}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{H - h}{2h}\cdot\sqrt{2gh} \approx 7\ м/с.$$

Відповідь: $\upsilon_{02} \approx 7$ *м/с*.

Задача 5. Тіло кинуте з висоти H у горизонтальному напрямі з швидкістю υ_0. Визначити, як залежить від часу координата тіла і його повна швидкість. Вивести рівняння траєкторії.

Розв'язування

Візьмемо систему координат $X0Y$ (рис.2), початок якої розміщений на поверхні землі, вісь $0X$ спрямована в бік початкової швидкості, а вісь $0Y$ - вертикально вгору. Рух тіла можна уявити як суму рівномірного руху з швидкістю υ_0 в горизонтальному напрямі і рівноприскореного руху без початкової швидкості у вертикальному напрямі з прискоренням $a_Y = -g$, направленим донизу. Складові швидкості по осях координат:

$$\upsilon_x = \upsilon_0, \qquad (1)$$

$$\upsilon_Y = -gt, \qquad (2)$$

повна швидкість

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}. \qquad (3)$$

Закони руху для координат:

$$x = \upsilon_0 t, \qquad (4)$$

$$y = H - \frac{gt^2}{2}. \qquad (5)$$

Виключивши з виразів (4) і (5) час t, дістанемо рівняння траєкторії:

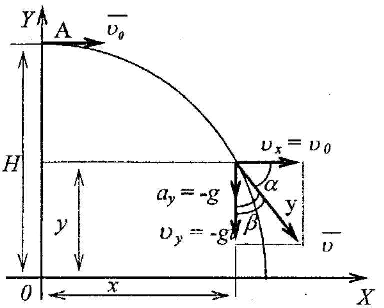


Рис. 2

$$y = H - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}.$$

Це рівняння параболи.

Відповідь: *Це рівняння параболи.*

Задача 6. З вертольоту, що знаходиться на висоті 300 м, скинуто тягар. Через який час тягар досягне Землі, якщо вертоліт:

1) нерухомий;
2) опускається зі швидкістю *5 м/с* ;
3) піднімається зі швидкістю *5 м/с*?

$Y_0 = 300$ *м*
$\upsilon_0 = 5$ *м/с*
t - ?

Розв'язування.

Направимо вісь Y вертикально вниз, початок осі помістимо на висоті Y_0 від поверхні Землі (рис.3).

1. Якщо вертоліт нерухомий, то рівняння руху тягаря

$$Y = \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Коли тягар досягає поверхні Землі ($t = t_1$, $Y = Y_0$), рівняння (1) прийме вигляд:

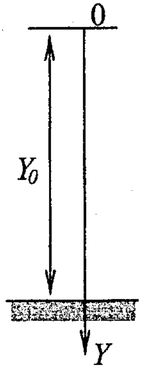


Рис. 3

$$Y_0 = \frac{gt_1^2}{2},$$

звідси час падіння тягаря на Землю

$$t_1 = \sqrt{\frac{2Y_0}{g}},\ t_1 = 7{,}8\ c.$$

2. Оскільки перед падінням тягар опускається разом з вертольотом зі швидкістю υ_0, то рівняння руху тягаря

$$Y = \upsilon_0 t + \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Коли тягар досягне поверхні Землі ($t = t_2$, $Y = Y_0$), рівняння (2) прийме вигляд:

$$Y_0 = \upsilon_0 t_2 + \frac{gt_2^2}{2},$$

звідси

$$t_2^2 + \frac{2\upsilon_0}{g}\cdot t_2 - \frac{2Y_0}{g} = 0.$$

Розв'язуючи отримане рівняння, знайдемо $t_2 = \dfrac{-\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gY_0}}{g}$;

$t_2 \approx 7{,}3\ c$, від'ємний корінь $t_2 = -8{,}3$ відкидаємо, отже, $t_2 \approx 7{,}3\ c$.

3. Складаємо рівняння руху тягаря:

$$Y = \upsilon_0 t + \frac{gt^2}{2}, \qquad (3)$$

(оскільки перед падінням тягар піднімається разом з вертольотом зі швидкістю υ_0). В момент досягнення тягарем Землі ($t = t_3$, $Y = Y_0$) рівняння (3) має вигляд:

$$Y_0 = -\upsilon_0 t_3 + \frac{gt_3^2}{2},$$

звідси

$$t_3^2 - \frac{2\upsilon_0}{g} t_3 - \frac{2Y_{y0}}{g} = 0.$$

Розв'язуючи отримане рівняння, знайдемо

$$t_3 = \frac{-\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gY_0}}{g}.$$

Відкидаючи від'ємний корінь $t_3 = -7{,}3$, одержуємо $t_3 \approx 8{,}3\ c$.

Відповідь: $t_1 = 7{,}8\ c$; $t_2 = 7{,}3\ c$; $t_3 = 8{,}3\ c$.

***Задача** 7.* Тіло кинуте під кутом α_0 до горизонту з швидкістю v_0. Знайти залежність координат тіла від часу (закони руху тіла) і написати рівняння траєкторії.

α_0
v_0

$x(t)$ - ?
$Y(t)$ - ?
$Y(x)$ - ?

Розв'язування

Візьмемо прямокутну систему координат у тому місці, звідки кинуто тіло (рис.4). Вісь x направимо горизонтально в той бік, куди кинуто тіло, а вісь $0Y$ - вертикально вгору (рис.4). У цій системі координат рух можна подати у вигляді суми рівномірного руху вздовж горизонтальної осі з швидкістю $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$ і рівноприскореного руху вздовж вертикальної осі з початковою швидкістю $v_{0Y} = v_0 \sin \alpha_0$ і прискоренням $a_Y = -g$. Проекції швидкості на осі координат у цьому випадку будуть:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 , \qquad (1)$$

$$v_Y = v_{0Y} - gt = v_0 \sin \alpha_0 - gt. \qquad (2)$$

Закони руху для координат будуть:

$$x = (v_0 \cos \alpha_0) \cdot t, \qquad (3)$$

$$Y = (v_0 \sin \alpha_0) \cdot t - \frac{gt^2}{2} \qquad (4)$$

Рівняння траєкторії тіла дістанемо, виключивши час t з цих рівнянь:

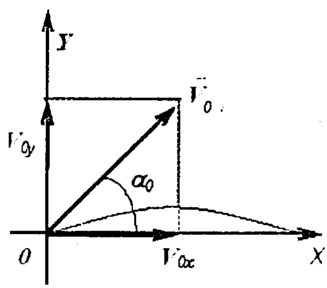


Рис. 4

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}, \quad Y = (v_0 \sin \alpha_0)\frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} - \frac{g\left(\dfrac{x}{v_0 \cos \alpha_0}\right)^2}{2},$$

$$Y = x tg\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}.$$

Відповідь: *це рівняння параболи.*

Задача 8. Пружинний пістолет, встановлений на горизонтальній поверхні так, що його дуло направлено під кутом α до горизонту. При якому значенні кута α дальність польоту кулі при пострілі буде максимальною? Знайти максимальну дальність польоту кулі при швидкості вильоту $\upsilon_0 = 7$ *м/с*.

$l = l_{max}$

$\upsilon_0 = 7$ *м/с*

α - ?

l_{max} -?

$\alpha_{l_{max}}$?

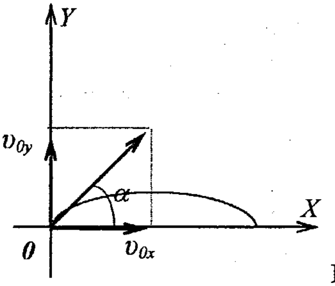


Рис. 5

Розв'язування

Вздовж осі x куля рухається рівномірно зі швидкістю $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$. Тому її координата x змінюється з часом згідно з формулою:

$$x = (\upsilon_0 \cos\alpha) \cdot t. \tag{1}$$

У вертикальному напрямі куля рухається зі сталим прискоренням $a = g$ (воно направлене вниз), початкова швидкість кулі в цьому напрямі $\upsilon_{0Y} = \upsilon_0 \sin\alpha$. Координату Y кулі в момент часу t можна знайти за формулою

$$Y = \upsilon_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = (\upsilon_0 \sin\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Знайдемо час руху кулі t_0. У момент t_0 падіння її на Землю $Y = 0$. Отже, ми можемо записати:

$$0 = (\upsilon_0 \sin\alpha)\, t_0 - \frac{gt_0^2}{2},$$

Звідси

$$l_{max} = (\upsilon_0 \cos\alpha) t_0 = \frac{2\upsilon_0^2}{g} \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Дальність буде максимальною, якщо $\sin 2\alpha = 1$, тобто $2\alpha = 90°$; $\alpha = 45°$. Отже, максимальна дальність польоту:

$$l_{max} = \frac{\upsilon_0^2}{g}; l_{max} = 5\text{м}.$$

Відповідь: $\alpha = 45°$; $l_{max} = 5$ *м*.

Задача 11. Визначити доцентрове прискорення точок земної поверхні на екваторі, на широті $45°$ і на полюсі, що викликане обертанням Землі.

$T = 24$ *год* $= 8{,}64 \cdot 10^4$ *с*

$\varphi = 45°$

$a_{доц}$ - ?

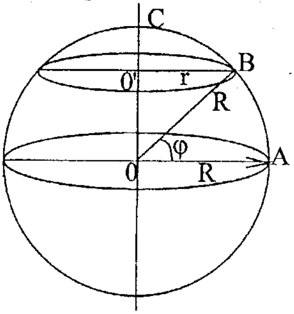


Рис. 6

Розв'язування

1. Точка A земної поверхні на екваторі здійснює разом з Землею за добу один повний оберт (рис.6). Отже, лінійна швидкість:

$$v = \frac{l_e}{t} = \frac{2\pi R}{T},$$

де l_e - довжина кола земного екватора, R - радіус Землі.

Доцентрове прискорення точки A: $a_{доц} = \dfrac{v^2}{R}$. Підставивши v у вираз для $a_{доц}$, одержимо: $a_{доц} = \dfrac{4\pi^2 R^2}{RT^2} = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$; $a_{доц1} = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ *м/с*^{2}.

2. Лінійна швидкість точки B земної поверхні, що знаходиться на широті φ, дорівнює $v = \dfrac{l}{T} = \dfrac{2\pi r}{T}$, де r - радіус кола, який описує точка B. З рисунка знаходимо, що $r = R\cos\varphi$. За означенням доцентрове прискорення точки B:

$$a_{доц} = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}\cos\varphi,$$

$a_{доц2} = 2{,}4 \cdot 10^{-2}$ *м/с*^{2}.

3. Лінійна швидкість точки C земної поверхні, що знаходиться на полюсі: $v = 0$. Отже $a_{доц3} = 0$.

Відповідь: $a_{доц1} = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ *м/с*^{2}, $a_{доц2} = 2{,}4 \cdot 10^{-2}$ *м/с*^{2}, $a_{доц3} = 0$.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Матеріальна точка, рухаючись у певному напрямку, подолала шлях *3 м*, потім після зупинки і повороту на $90°$, рухаючись по прямій, пройшла ще *4 м*. Знайти весь шлях і модуль повного переміщення.

Відповідь: *7 м, 5 м.*

Задача 2. Швидкість поздовжньої подачі різця токарного верстата *12 см/хв*, поперечної - *5 см/хв*. Яка його швидкість у системі відліку, пов'язаній з корпусом верстата?

Відповідь: *13 см/хв.*

Задача 3. Першу половину часу автомобіль проїхав із середньою швидкістю $\upsilon_1 = 40$ *км/год*, другу - із середньою швидкістю $\upsilon_2 = 60$ *км/год*. Знайти середню швидкість на всьому шляху.

Відповідь: $\upsilon_{сер.} = (\upsilon_1 + \upsilon_2)/2 = 50$ *км/год.*

Задача 4. Вагон завширшки $b = 3{,}6$ *м* рухався зі швидкістю $\upsilon_1 = 15$ *м/с*. Його стінки пробила куля, що летіла перпендикулярно до напрямку руху вагона. Відносне зміщення дірок у стінках вагона $S = 9{,}0$ *см*. Знайти швидкість υ_2 кулі.

Відповідь: $\upsilon_2 = b\upsilon_1 / S = 600$ м/с.

Задача 5. Спостерігач чує, ніби літак перебуває в зеніті, а бачить його під кутом *60°* до горизонту. Яка швидкість літака? Швидкість звуку в повітрі *340 м/с*.

Відповідь: *196,3 м/с.*

Задача 6. Два поїзди рухаються назустріч один одному зі швидкостями *54 км/год* та *72 км/год*. Пасажир першого поїзда помічає, що другий поїзд рухається повз нього протягом *4 с*. Яка довжина другого поїзда?

Відповідь: *140 м.*

Задача 7. Поїзд завдовжки $l_1 = 300$ *м* їде через міст завдовжки $l_2 = 200$ *м* зі швидкістю *72 км/год*. За який час поїзд переїде через міст?

Відповідь: *25 с.*

Задача 8. Дві прямі дороги перетинаються під кутом *60°*. Від перехрестя віддаляються два автомобілі зі швидкостями *40 км/год* та *80 км/год*. Знайти швидкість першого автомобіля відносно другого.

Відповідь: *69 км/год, 106 км/год.*

Рівноприскорений прямолінійний рух

Задача 9. Через *10с* після початку руху швидкість поїзда дорівнює *0,6 м/с*. Через який час після початку руху швидкість поїзда дорівнюватиме *3 м/с?*

Відповідь: *через 50с.*

Задача 10. Кулька котиться по жолобу без початкової швидкості і за першу секунду проходить *10 см*. Який шлях вона пройде за час *3 с*? Який шлях вона пройде за третю секунду?

Відповідь: *90 см, 50 см.*

Задача 11. Схил завдовжки *100 м* лижник пройшов за *20 с*, рухаючись з прискоренням $0,3\ м/с^2$. Яка швидкість лижника на початку і в кінці схилу?

Відповідь: *2 м/с, 8 м/с.*

Задача 12. Тіло падає з висоти *78,4 м.* Знайти його переміщення за останню секунду падіння.

Відповідь: *34,3 м.*

Задача 13. Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю *19,6 м/с.* Знайти координату і швидкість тіла через *3 с*, а також шлях, пройдений за цей час.

Відповідь: $h = 14,7\ м$, $v = -9,8\ м/с$, $S = 24,5\ м$.

Задача 14. Людина, що кинула камінь у прірву, почула звук падіння через $t = 6\ с$. Знайти глибину прірви. Швидкість звуку *340 м/с.*

Відповідь: $h = 151\ м$.

Задача 15. Тіло мало початкову швидкість $v_0 = 1\ м/с$. Через деякий час, рухаючись рівноприскорено, воно досягло швидкості $v_k = 7\ м/с$. Яка була швидкість тіла на середині пройденого шляху?

Відповідь: $v = \sqrt{\dfrac{v_0^2 + v_k^2}{2}} = 5\dfrac{м}{с}$.

Задача 16. Тіло, яке вільно падає, пройшло за останню секунду третину всього шляху. Знайти час падіння і висоту, з якої впало тіло.

Відповідь: *5,45 с, 146 м.*

Криволінійний рух

Задача 17. З башти заввишки $h = 25\ м$ кинули горизонтально камінь з початковою швидкістю $v_0 = 10\ м/с$. На якій відстані від башти він впаде на землю?

Відповідь: $S = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 22,6 м.$

Задача 18. Камінь кинули горизонтально з даху будинку з початковою швидкістю $v_0 = 25\ м/с$. На землю він впав під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. Яка висота h будинку?

Відповідь: $h = \dfrac{(v_0 tg\alpha)^2}{2g} = 94 м.$

Задача 19. Дальність польоту тіла, кинутого горизонтально зі швидкістю $v = 9,8\ м/с$, дорівнює висоті, з якої його кинули. З якої висоти h його кинули ?

Відповідь: $h = \dfrac{2v^2}{g} = 19,6 м.$

Задача 20. З вертольота, який летить на висоті $H = 125$ м із швидкістю $\upsilon_0 = 90$ *км/год*, скинули вантаж. На якій висоті його швидкість буде направлена під кутом $45°$ до горизонту?

Відповідь: $h = H - \frac{\upsilon_0^2 tg^2\alpha}{2g} = 93\,м.$

Задача 21. Під яким кутом до горизонту треба кинути із землі камінь, щоб його максимальна висота підйому дорівнювала дальності польоту?

Відповідь: $\alpha = arctg4 = 76°.$

Задача 22. Камінь, кинутий під кутом до горизонту, впав через $t = 4$ *с*. Чому дорівнюють висота і дальність польоту каменя, якщо відомо, що його максимальна швидкість вдвічі більша за мінімальну?

Відповідь: $H = \frac{1}{8}gt^2 = 19{,}6м; S = \frac{1}{2\sqrt{3}}gt^2 = 45{,}3м.$

Задача 23. Автомобіль проїхав *3 км* по прямій дорозі, яка переходить у кільцеву радіусом *2 км*. Знайти відношення пройденого шляху до модуля переміщення в момент повороту автомобіля на *180°*.

Відповідь: *1,86.*

Задача 24. Лінійна швидкість точок обода диска, що обертається, дорівнює $\upsilon_1 = 3$ *м/с*, а точок, що лежать на відстані $d = 10$ см від обода, дорівнює $\upsilon_2 = 2$ *м/с*. Знайти частоту обертання диска.

Відповідь: $n = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2\pi d} = 1{,}66 с^{-1} = 97 хв^{-1}.$

Розділ 2. Динаміка поступального і обертального руху

При розв'язуванні задач на тему "Основи динаміки" рекомендується:

- зробити рисунок, зобразити на ньому всі сили, які діють на кожне тіло, вибрати систему координат, осі якої направити у відповідності з напрямом вектора прискорення руху системи тіл або одного з них;

- при русі тіла по колу одну з координатних осей зручно направити в напрямку нормального (доцентрового) прискорення, тобто до центра кола;

- записати у векторній формі другий та третій закон Ньютона для кожного тіла окремо: $m\vec{a} = \vec{F}$, потім записати це рівняння в проекціях на осі координат і одержати систему рівнянь у скалярному вигляді;

- при необхідності використати формули кінематики і закони збереження, розв'язати отриману систему рівнянь і визначити шукані величини.

При розв'язуванні задач на *закон збереження імпульсу* рекомендується:

- зробити рисунок, вказати на ньому всі сили, що діють на тіла, які входять у систему, що розглядаємо;

- зобразити на ньому імпульси (швидкості) для всіх тіл системи до і після взаємодії;

- вибрати систему відліку, визначити напрям координатних осей;

- записати векторні рівняння в проекціях на осі координат і одержати систему рівнянь у скалярному вигляді. При цьому необхідно слідкувати, щоб імпульси всіх тіл були виражені в одній системі відліку;

- у випадку необхідності використати кінематичні і динамічні рівняння, розв'язати одержану систему рівнянь і визначити шукані величини.

Основні поняття

Другий закон Ньютона

$m\vec{a} = \vec{F}, \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - сума всіх сил, які діють на тіло (частинку) масою m, $\vec{a}$ - прискорення, з яким рухається тіло.

Імпульс тіла

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon},$$

де m – маса;
$\vec{\upsilon}$ - швидкість тіла.

Закон зміни імпульсу

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t,$$

де $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ - зміна імпульсу тіла за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$.

Сила пружності (закон Гука)

$$F = -k \cdot \Delta l,$$

де k - коефіцієнт пружності (жорсткості) тіла;
Δl - величина деформації.

Модуль сили тертя ковзання

$$F_m = \mu \cdot N,$$

де μ - коефіцієнт тертя ковзання;
N - модуль сили нормальної реакції опори.

Закон всесвітнього тяжіння

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де F - модуль сили притягання між двома тілами з масами m_1 і m_2, що знаходяться на відстані r один від одного, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $Н \cdot м^2/кг^2$ - гравітаційна стала.

Залежність прискорення вільного падіння від висоти h над поверхнею Землі

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \cdot g_0,$$

де M - маса Землі;
R - радіус Землі.

Прискорення вільного падіння біля поверхні Землі

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}\ .$$

Модуль сили тяжіння

$$F_m = mg,$$

де m - маса тіла;
g - прискорення вільного падіння.

Релятивістська маса частинки m

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

де m_0 - маса спокою частини;
υ - швидкість частини;
$\beta = \frac{\upsilon}{c}$; $c = 3\cdot 10^8$ м/с - швидкість світла у вакуумі.

Перша космічна швидкість на висоті h над поверхнею Землі

$$\upsilon_I = R\sqrt{\frac{g}{R+h}},$$

біля поверхні Землі

$$\upsilon_I = \sqrt{g_0 R}\ .$$

Друга космічна швидкість

$$\upsilon_{II} = \sqrt{2}\cdot\upsilon_1.$$

Закон збереження імпульсу в замкненій системі

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = const\ ,$$

де $\vec{p}_i = m_i\vec{\upsilon}_i$ - імпульс *i-го* тіла;
при $\vec{F} = 0,\ \Delta\vec{p} = 0,\ \vec{p} = const$.

Робота сили

$$A = F\cdot S\cos\ \alpha,$$

де F - модуль сили;
S - модуль переміщення;
α - кут між векторами $\vec{F}$ і S.

Потужність сили

$$N = \frac{A}{t} = F\upsilon\cdot\cos\alpha\ ,$$

де A - робота сили, що виконується за проміжок часу t;
υ - модуль швидкості частинки (тіла).

Кінетична енергія тіла

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

де m - маса;
v - модуль швидкості тіла.

Теорема про зміну кінетичної енергії

$$T_1 - T_2 = A,$$

де A - робота всіх сил, що прикладені до тіла.

Робота потенціальної (консервативної) сили

$$A = U_1 - U_2,$$

де U_1 і U_2 - потенціальна енергія в початковому і кінцевому станах;
$U_1 - U_2$ - зменшення потенціальної енергії.

Потенціальна енергія тіла, що підняте над поверхнею Землі

$$U(h) = mgh,$$

де m - маса тіла;
g - прискорення вільного падіння;
h - висота підйому $h << R$, R – радіус Землі.

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла

$$U(x) = \frac{kx^2}{2},$$

де x - модуль вектора пружної деформації тіла.

Механічна енергія тіла (системи тіл)

$$E = T + U,$$

де T - кінетична енергія;
U - потенціальна енергія тіла (системи тіл).

Закон зміни механічної енергії:

$$E_2 - E_1 = A,$$

де A - робота всіх непотенціальних (дисипативних) сил, що діють на тіло (систему тіл).

Закон збереження механічної енергії

$$E = T + U = const,$$

де E - механічна енергія системи тіл, які створюють замкнену систему і взаємодіють між собою за допомогою потенціальних сил (сили тяжіння, пружності, кулонівські сили).

Коефіцієнт корисної дії механізму (машини)

$$\eta = \frac{A_k}{A_з} \cdot 100\% = \frac{N_k}{N_з} \cdot 100\%,$$

де $A_к$ і $N_к$ - корисні робота і потужність;
$A_з$ і $N_з$ - затрачені (повні) робота і потужність.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Тіло масою *3 кг* падає в повітрі з прискоренням $8\ м/с^2$. Знайти силу опору.

$m = 3кг$

$a = 8\ м/с^2$

F - ?

Розв'язування

На тіло, що падає в повітрі діють: $m\vec{g}$ - сила тяжіння і $\vec{F}$ - сила опору повітря (рис.7). Оскільки рух рівноприскорений, то вектор прискорення направлений в бік напрямку руху.

Запишемо для тіла другий закон Ньютона у векторному вигляді:

$$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}\ .$$

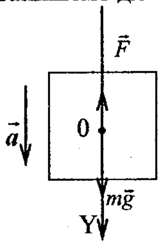


Рис. 7

Проведемо вісь Y в напрямку руху тіла і, спроектувавши на вісь Y сили, запишемо рівняння руху в скалярному вигляді:

$$mg - F = ma,$$

звідси

$$F = mg - ma = m\,(g - a) = 5{,}4\ Н.$$

Відповідь: $F = 5{,}4\ Н$.

Задача 2. Яку силу потрібно прикласти для підйому вагонетки масою *600 кг* по естакаді з кутом нахилу *20°*, якщо коефіцієнт опору рухові дорівнює *0,05*?

$M = 600\ кг$

$\angle\alpha = 20°$

$\mu = 0{,}05$

F - ?

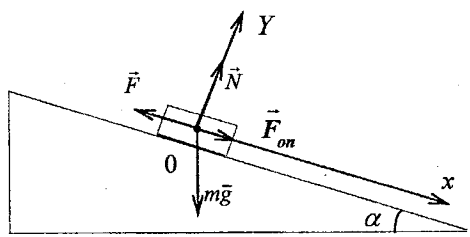


Рис. 8

Розв'язування

Рух вагонетки прямолінійний рівномірний (рис.8). Рівняння руху

$$m\vec{g} + \vec{F}_{оп} + \vec{N} + \vec{F} = 0\ .$$

У проекціях на вісь x (вздовж похилої площини) рівняння руху має вигляд:

$$-mg\,sin\alpha - F_{оп} + F = 0,$$

звідси проекція на вісь Oy: $N\text{-}mgcos\alpha=0,$

$$F = mg\,sin\alpha + F_{оп}\,;\ N=mgcos\alpha;$$

$$F_{оп} = \mu N = \mu\,mgcos\alpha\,;$$

$$F = mg\,sin\alpha + \mu\,mgcos\alpha = mg\,(sin\alpha + \mu\,cos\alpha) = 2{,}3\ кН.$$

Відповідь: $F = 2{,}3\ кН$.

Задача 3. Тіло масою $45\ кг$ переміщується по горизонтальній площині під дією сили $294\ Н$, що направлена під кутом $30°$ до горизонту. Коефіцієнт тертя тіла об площину $0,1$. Визначити прискорення руху тіла.

$F = 294\ Н$

$m = 45\ кг$

$k = 0,1$

$\alpha = 30°$

---

a - ?

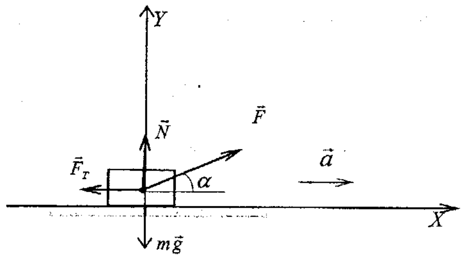


Рис. 9

Розв'язування

На тіло діють: $m\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{N}$ - сила нормальної реакції площини, $\vec{F}$ - сила тяги, $\vec{F}_T$ - сила тертя. Вектор $\vec{a}$ спрямований паралельно площині направо (рис. 9).

Запишемо для даного тіла рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_T = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Вибравши напрям осей OX і OY і знайшовши проекції сил на осі, запишемо рівняння (1) у скалярному вигляді

$$F\cos\alpha - F_T = ma, \qquad (2)$$

$$N + F\sin\alpha - mg = 0. \qquad (3)$$

З рівняння (3) знаходимо, що $N = mg - F\sin\alpha$.

Враховуючи, що $F_T = \mu N = \mu\,(mg - F\sin\alpha)$, підставимо це рівняння в рівняння (2)

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma,$$

звідси:

$$a = \frac{F\cos\alpha - k(mg - F\sin\alpha)}{m} \approx 5{,}0\,м/с^2.$$

Відповідь: $a \approx 5{,}0\ м/с^2$.

Задача 4. На кінцях нитки, яка перекинута через блок, що підвішений до стелі, закріплені два тягарці загальною масою $30\ кг$. Тягарці рухаються з прискоренням $a = 0{,}3\,g$, яке для правого тягарця направлене вниз. Знайти маси обох тягарців. Масою блока, нитки, а також тертям в осі блока знехтувати.

Розв'язування

$m_1 + m_2 = 30$ *кг*

$a = 0{,}3\ g$

m_1 - ? m_2 - ?

Розглянемо рух лівого тягарця (рис.10). До нього прикладені сила тяжіння $m_1\vec{g}$, сила натягу нитки $\vec{T}$:

$$\vec{T} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}.$$

Для проекцій цих сил на вісь x ми можемо записати

$$T - m_1 g = m_1 a.$$

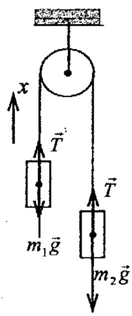


Рис. 10

Аналогічно для правого тягарця маємо: $\vec{T} + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}$, що в проекціях на вісь x дає: $\vec{T} - m_2 g = -m_2\vec{a}$. Віднімаючи від першого рівняння друге, отримуємо:

$$(m_2 - m_1)g = (m_2 + +m_1)a$$

Звідси: $m_2 - m_1 = \dfrac{(m_2 + m_1)a}{g}$.

Підставляючи сюди відомі величини, знайдемо

$$m_2 - m_1 = 9\ кг.$$

Відповідь: $m_1 = 10{,}5$ *кг*, $m_2 = 19{,}5$ *кг.*

Задача 5. Літак, швидкість якого *720 км/год*, описує вертикальну петлю радіусом *400 м*. Яке перенавантаження відчуває пілот у верхній і нижній точках петлі? Маса пілота *80 кг*.

Розв'язування

$\upsilon = 720$ *км/год* $= 200$ *м/с*

$R = 400$ *м*

$m = 80$ *кг*

n_A - ? n_B - ?

Перенавантаження визначається відношенням ваги пілота до його сили тяжіння. Розглянемо сили, що діють на пілота, коли літак знаходиться у верхній точці вертикальної петлі (рис.11, а):

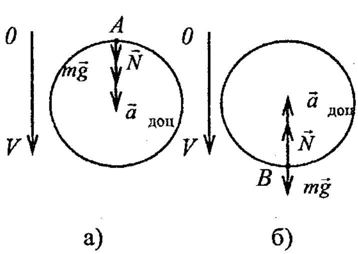


Рис. 11

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{доц}.$$

В проекціях на вісь OY:

$$mg + N = ma_{доц},$$
$$N = ma_{доц} - mg,$$
$$P_A = ma_{доц} - mg.$$

Перенавантаження в точці A:

$$n_A = \frac{P_A}{mg} = \frac{ma_{доц} - mg}{mg} = \frac{a_{доц} - g}{g} = \frac{a_{доц}}{g} - 1,$$

$$\text{при} \quad a_{доц} = \frac{v^2}{R} \; n_A = 9.$$

У нижній точці B вертикальної петлі (рис.11, б) рівняння руху пілота запишеться так: $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{доц}$. В проекціях на вісь OY:

$$mg - N = ma_{доц}; \qquad -N = -ma_{доц} - mg;$$
$$N = ma_{доц} + mg; \qquad P_B = ma_{доц} + mg.$$

Перенавантаження в точці B:

$$n_B = \frac{P_B}{mg} = \frac{ma_{доц} + mg}{mg} = \frac{a_{доц} + g}{g} = \frac{a_{доц}}{g} + 1 = \frac{V^2}{Rg} + 1 = 11;$$

Відповідь: $n_A = 9, \quad n_B = 11.$

Задача 6. Автомобіль з вантажем масою *5 т* проходить по випуклому мосту зі швидкістю *21,6 км/год*. З якою силою він тисне на середину моста, якщо радіус кривизни моста *50 м* ?

Розв'язування

$m = 5 \cdot 10^3$ *кг*
$V = 21{,}6$ *км/год* $=$
$= 6$ *м/с*
$R = 50$ *м*

На автомобіль діють: $m\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{N}$ - сила нормальної реакції моста (рис.12). Спрямуємо вісь Y вертикально вниз по радіусу моста. Запишемо для автомобіля рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Проектуючи рівняння на вісь Y, одержимо:

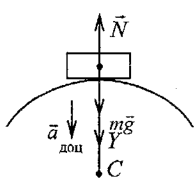


Рис.12

$$mg - N = ma_y,$$

де $a_y = a_{доц} = \frac{V^2}{R}$. Тоді $\quad mg - N = m\frac{V^2}{R}$,

звідси:

$$N = mg - m\frac{V^2}{R} = m\left(g - \frac{V^2}{R}\right).$$

За третім законом Ньютона, з такою ж силою автомобіль буде тиснути на міст, тобто $F = N$, або $F = m\left(g - \frac{V^2}{R}\right) = 4{,}5 \cdot 10^4\ H$.

Відповідь: $F = 4{,}5 \cdot 10^4\ H$.

Задача 7. Знайти швидкість, яку буде мати супутник Землі на коловій орбіті, що знаходиться на висоті *1600 км* над поверхнею Землі. Радіус Землі *6400 км*, прискорення вільного падіння біля поверхні Землі *9,8 м/с²*.

Дано
$H = 1600$ *км*
$R = 6400$ *км*
$g = 9{,}8$ *м/с²*
V - ?

Розв'язування

На висоті H над поверхнею Землі на супутник діє сила тяжіння:

$$F = G\frac{M \cdot m}{(R+H)^2},$$

де M - маса Землі;
m - маса супутника.

Оскільки супутник обертається по коловій орбіті радіуса $R + H$, то сила F надає супутнику доцентрове прискорення $a_{доц} = \frac{\upsilon^2}{R+H}$. За другим законом Ньютона:

$$G\frac{Mm}{(R+H)^2} = \frac{m\upsilon^2}{R+H},$$

звідси

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R+H}}.$$

Біля поверхні Землі сила тяжіння $F_{тяж} = G\frac{Mm}{R^2}$ надає тілу маси m прискорення g. Тому $G\frac{Mm}{R^2} = mg$, тобто $GH = gR^2$. Враховуючи це, одержимо:

$$V = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}} = R\sqrt{\frac{g}{R+H}} = 7{,}1 \text{ км/с}.$$

Відповідь: $\upsilon = 7{,}1$ *км/с.*

Задача 8. Повітряна куля масою M опускається з сталою швидкістю. Яку кількість баласту m треба викинути, щоб куля піднімалась з тією самою швидкістю? Підйомна сила кулі F_A.

Дано
M
F_A
m -?

Розв'язування

При опусканні зі сталою швидкістю сума сил, які діють на кулю, дорівнює нулю:

$$Mg - F_A - F = 0, \qquad (1)$$

де F - сила опору повітря кулі.

При підніманні кулі сила опору матиме, як і раніше, величину F, оскільки за умовою задачі швидкість зберігає свою величину, але тепер ця сила направлена вниз. Сума всіх сил з урахуванням зменшення маси кулі за рахунок викинутого баласту, як і раніше, дорівнює нулю:

$$(M - m)\, g - F_A + F = 0. \qquad (2)$$

З рівняння (1) знаходимо F і підставляємо в рівняння (2):

$$F = Mg - F_A,$$

$$(M - m)\, g - F_A + Mg - F_A = 0,$$

$$Mg - mg - F_A + Mg - F_A = 0,$$

$$2Mg - mg - 2F_A = 0,$$

$$mg = 2Mg - 2F_A, \qquad m = 2\left(M - \frac{F_A}{g}\right).$$

Відповідь: $m = 2\left(M - \dfrac{F_A}{g}\right)$.

Задача 9. М'яч масою $m = 150\ г$ вдаряється в гладеньку стінку під кутом $\alpha = 30°$ до неї і відскакує без втрати швидкості. Знайти середню силу $<F>$, яка діє на м'яч з боку стінки, якщо швидкість м'яча $v = 10\ м/с$, а тривалість удару $\Delta t = 0,1\ с$.

$m = 150\ г = 0.150\ кг$
$\alpha = 30°$
$V = 10\ м/с$
$\Delta t = 0,1\ с$

$<F> - ?$

Розв'язування

Оскільки стінка гладенька, то при зіткненні складова кількості руху м'яча вздовж стінки не зміниться (рис.13). На рисунку зображено вектори кількості руху м'яча перед ударом $\vec{P}_1$ і після удару $\vec{P}_2$.

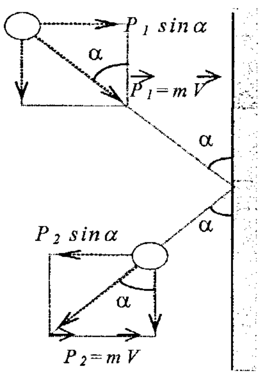


Рис.13

Складова імпульсу, що перпендикулярна до стінки, змінює знак. Внаслідок цього м'яч відскакує під кутом α до стінки. Зміна проекції кількості руху на напрям, перпендикулярний до стінки,

$$\Delta p = mv \cdot \sin\alpha - (-m\, v \sin\alpha) = 2m\, v \sin\alpha.$$

Шукана сила:

$$< F >= \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv \sin\alpha}{\Delta t} = 15\, H.$$

Відповідь: $<F> = 15\ H$.

Задача 10. Визначити вагу тіла масою $m = 1000\ кг$ на екваторі і на полюсі, якщо відомо, що середній радіус Землі $R = 6,37 \cdot 10^6\ м$, маса Землі

$M = 5{,}98\cdot10^{24}$ *кг*, гравітаційна стала $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $Нм^2/кг^2$. Тіло знаходиться в стані спокою відносно Землі.

Дано:
$m = 1000$ *кг*
$R = 6{,}37\cdot10^{6}$ *м*
$M = 5{,}98\cdot10^{24}$ *кг*
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $Н\cdot м^2/кг^2$
P_n - ? P_e - ?

Розв'язування

На полюсі на тіло діють дві сили: гравітаційна $\vec{F}$, реакція опори $\vec{N}_n$. (рис. 14), при цьому гравітаційна сила надає тілу прискорення вільного падіння $F = mg_n$. За третім законом Ньютона вага тіла, тобто сила, з якою тіло діє на опору, дорівнює за модулем силі реакції опори $P_n = N_n$. Тіло знаходиться у рівновазі, тому $N_n = F$. Отже, вага тіла, яке знаходиться у стані спокою, на полюсі чисельно дорівнює силі гравітації $P_n = F$.

За законом всесвітнього тяжіння

$$F = G\frac{mM}{R^2}.$$

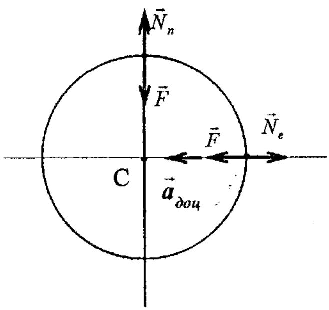


Рис.14

Отже, на полюсі тіло має вагу, яку можна обчислити за формулою:

$$P_n = G\frac{mM}{R^2}.$$

На екваторі на тіло діють: сила гравітації $\vec{F}$ і сила реакції опори $\vec{N}_e$, при цьому тіло обертається навколо земної осі, тобто рухається по колу з доцентровим прискоренням $a_{доц}$, направленим до осі обертання. Доцентрове прискорення за модулем дорівнює: $a_{доц} = \omega^2 R$ (ω - кутова швидкість обертання Землі: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T - тривалість доби).За другим законом Ньютона $\vec{F} + \vec{N}_e = m\vec{a}_{доц}$. Враховуючи напрями цих векторів на екваторі та значення їх модулів, можна записати рівняння другого закону Ньютона в проекції на напрям вздовж радіуса Землі до її центру:

$$F - N_e = m\omega^2 R = \frac{4\pi^2 mR}{T^2},$$

звідки

$$N_e = F - \frac{4\pi^2 mR}{T^2} = N_n - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

Отже, вага тіла на екваторі може бути обчислена за формулою:

$$P_e = P_n - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

Отже, знаходимо:

а) на полюсі $P_n = 9{,}83\cdot10^{3}$ *Н;*

б) на екваторі $P_e = 9,78 \cdot 10^3$ Н.

Відповідь: $P_n = 9,83 \cdot 10^3$ Н, $P_e = 9,78 \cdot 10^3$ Н.

Задача 11. На екваторі деякої планети тіло важить вдвоє менше, ніж на полюсі. Густина речовини цієї планети 3 г/см^3. Визначити період обертання планети навколо своєї осі.

$P_e = \frac{P_n}{2}$

$\rho = 3 г/см^3 = 3 \cdot 10^3 кг/м^3$

T - ?

Розв'язування

На тіло, що знаходиться на поверхні планети, діють: $\vec{F}$ - сила тяжіння з боку планети, $\vec{N}$ - сила нормальної реакції планети (рис. 14) (різницею між силою притягання і силою тяжіння нехтуємо):

$$F = G\frac{M \cdot m}{R^2},$$

де M - маса планети;

m - маса тіла;

R - радіус планети.

Маса планети $M=\rho V$,

де V - об'єм планети, $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Тоді $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, F = G\frac{4\pi R^3 \rho m}{3R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho m R$. (1)

Сила нормальної реакції N чисельно дорівнює силі тяжіння mg тіла і спрямована вздовж радіуса від центру C планети.

Запишемо для тіла рівняння другого закону Ньютона в скалярному вигляді:

$$F - N = ma_{доц}. \quad (2)$$

З врахуванням формули (1) перетворюємо рівняння другого закону Ньютона:

$$\frac{4}{3}\pi G\rho m R - N = ma_{доц}. \quad (3)$$

Розглянемо два можливі випадки руху тіла:

1. Тіло знаходиться на полюсі. Оскільки на полюсі $r = 0$, то лінійна швидкість тіла $V = \frac{2\pi r}{T} = 0$. Отже, рівняння (3) матиме вигляд

$$\frac{4}{3}\pi G\rho m R - N_n = 0,$$

звідси

$$N_n = \frac{4}{3}\pi G\rho m R, \quad (4)$$

де N_n - сила нормальної реакції поверхні на полюсі.

2. Тіло знаходиться на екваторі. У цьому випадку $r = R$ і $V = \frac{2\pi R}{T}$. Тоді рівняння (3) матиме вигляд:

$$\frac{4}{3}\pi G\rho mR - N_e = m\frac{(2\pi R)^2}{RT^2},$$

звідси:

$$T = \sqrt{\frac{m4\pi^2 R}{\frac{4\pi G\rho mR}{3} - N_e}},$$

де N_e - сила нормальної реакції поверхні на екваторі.

За умовою задачі, $P_e = \frac{P_n}{2}$. Оскільки $P = N$, то $N_e = \frac{N_n}{2}$, або з урахуванням виразу (4):

$$N_e = \frac{2}{3}G\pi\rho mR.$$

Підставимо формулу (6) в (5):

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 mR}{\frac{4\pi G\rho mR}{3} - \frac{2\pi G\rho mR}{3}}} = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}} = 9{,}7\cdot 10^3\ c.$$

Відповідь: $T = 9{,}7\cdot 10^3\ c$.

Задача 12. Велосипедист при повороті по колу радіусом R нахиляється всередину закруглення так, що кут між площиною велосипеда і землею дорівнює α. Визначити швидкість υ велосипедиста.

α R
V - ?

Розв'язування

На велосипедиста і велосипед діють три сили: вага - $m\vec{g}$, реакція опори $\vec{N}$ і сила тертя $\vec{F}$ (рис 15).

Оскільки центр ваги не переміщується по вертикалі, то $N - mg = 0$.

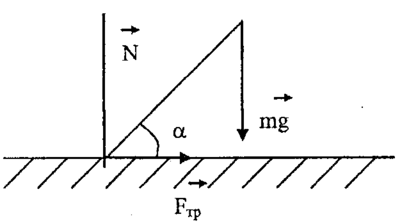


Рис. 15

Необхідного для руху по колу доцентрового прискорення надає сила тертя: $\frac{m\upsilon^2}{R} = F$. Напрям результуючої сили $\vec{N} + \vec{F}$ збігається з напрямом уздовж велосипеда до центра ваги системи "велосипедист - велосипед".

Тому

$$F = N\,ctg\,\alpha = mg\,ctg\,\alpha.$$

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = mgctg\ \alpha;$$

$$\upsilon = \sqrt{g \cdot Rctg\ \alpha}.$$

Підставляючи це значення F у рівняння руху, одержуємо:

Відповідь: $V = \sqrt{g \cdot Rctg\alpha}.$

Задача 13. Гармата, яка стоїть на дуже гладенькій горизонтальній площадці, стріляє під кутом $\alpha = 30^o$ до горизонту. Маса снаряда $m = 20$ *кг*, початкова швидкість $\upsilon = 200$ *м/с*. Якої швидкості набуває гармата під час пострілу, коли її маса $M = 500$ *кг*?

$\alpha = 30^o$

$m = 20$ *кг*

$\upsilon = 200$ *м/с*

$M = 500$ *кг*

U - ?

Розв'язування

Імпульс системи гармата-снаряд уздовж горизонтального напрямку, що дорівнює нулю, до пострілу, за час пострілу не змінюється, бо в цьому напрямку зовнішні сили не діють. У цьому випадку постріл зроблено під кутом α до горизонту і проекція вектора імпульсу снаряда на горизонтальний напрям дорівнює $m\upsilon\cos\alpha$ (рис. 16).

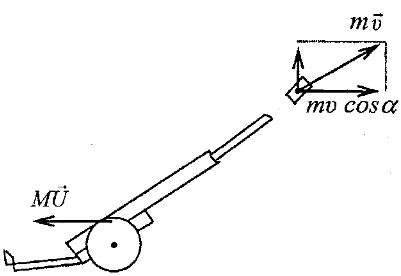


Рис. 16

За законом збереження імпульсу

$$MU + m\upsilon\cos\alpha = 0.$$

Звідси

$$U = -\frac{m\upsilon\cos\alpha}{M} = -7 \text{ м/с}.$$

Відповідь: -7 *м/с*.

Задача 14. Невелике тіло зісковзує без тертя з вершини півсфери радіусом R. На якій висоті тіло відірветься від поверхні півсфери ?

R

h - ?

Розв'язування

Якщо тіло, ще не покинуло поверхню півсфери, то на нього, крім сили тяжіння $m\vec{g}$, діє реакція опори $\vec{N}$ (рис. 17).

Другий закон Ньютона для руху по півсфері визначає рівність добутку маси тіла на доцентрове прискорення і суми проекцій на радіус півсфери сил, що діють на тіло:

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = mg\cos\alpha - N.$$

Кут α визначає положення тіла на півсфері.

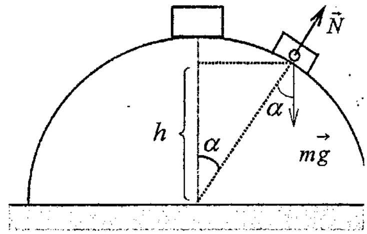


Рис. 17

У момент, коли N дорівнює нулю, тіло відривається від півсфери.

Значення відповідного кута α визначаємо за рівнянням

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = mg\cos\alpha.$$

Використовуючи закон збереження енергії, можна записати:

$$mgR = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgR\cos\alpha.$$

Отже, $2(1-\cos\alpha)=\cos\alpha$, звідси $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Шукана висота $h = R\cos\alpha = \frac{2R}{3}.$

Відповідь : $h = \frac{2R}{3}.$

Задача 15. Відбувається зіткнення двох абсолютно пружних куль, маси яких m_1 і m_2. Їх початкові швидкості υ_1 і υ_2. Знайти швидкості куль після зіткнення. Удар вважати центральним, швидкості куль напрямлені вздовж лінії, яка з'єднує їх центри.

m_1
m_2
υ_1
υ_2
U_1 - ?
U_2 - ?

Розв'язування

На підставі законів збереження кількості руху і енергії можна записати такі рівняння:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2,$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1U_1^2}{2} + \frac{m_2U_2^2}{2},$$

де U_1 і U_2 - швидкості куль після зіткнення. Або в скалярному вигляді:

$$\begin{cases} m_1V_1 + m_2V_2 = m_1U_1 + m_2U_2, \\ \dfrac{m_1V_1^2}{2} + \dfrac{m_2V_2^2}{2} = \dfrac{m_1U_1^2}{2} + \dfrac{m_2U_2^2}{2}. \end{cases}$$

Щоб розв'язати цю систему рівнянь, зручно в обох рівняннях з одного боку знака рівності об'єднати величини, що стосуються першої кулі, а другого - другої, після чого поділити друге рівняння на перше. Внаслідок дістанемо рівняння першого степеня:

$$m_1\upsilon_1 + m_1U_1 = m_2U_2 + m_2\upsilon_2,$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_1U_1^2}{2} = \frac{m_2U_2^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2},$$

$$m_1(\upsilon_1 - U_1) = m_2(U_2 - \upsilon_2),$$

$$m_1(\upsilon_1^2 - U_1^2) = m_2(U_2^2 - \upsilon_2^2)$$

$$\frac{m_1(\upsilon_1 + U_1)\quad(\upsilon_1 - U_1)}{m_1(\upsilon_1 - U_1)} = \frac{m_2(U_2 - \upsilon_2)(U_2 - \upsilon_2)}{m_2(U_2 - \upsilon_2)},$$

$$U_2 = \upsilon_1 \; U_1 - \upsilon_2$$

$$m_1(\upsilon_1 - U_1) = m_2(\upsilon_1 + U_1 - \upsilon_1 - \upsilon_2),$$

$$m_1\upsilon_1 - m_1U_1 = m_2\upsilon_1 + m_2U_1 - 2m_2\upsilon_2;$$

$$(m_1 + m_2)U_1 = m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_1 - 2m_2\upsilon_2$$

$$U_1 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, U_2 = \frac{(m_2 - m_1)\cdot\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Відповідь: $U_1 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, U_2 = \frac{(m_2 - m_1)\cdot\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_2}{m_1 + m_2}$.

Задача 16. Кулю масою *m*, яка підвішена на нерозтяжній нитці довжиною *l*, відхиляють на кут *90°* від вертикалі і дають можливість коливатися. Визначити максимальний натяг нитки.

m

l

α=90° = 1,57 рад

T_{max} - ?

Розв'язування

Максимальний натяг нитки спостерігається при проходженні кулею точки *B* (рис. 18). У точці *B* на кулю діють сили: $m\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{T}_{max}$, - сила натягу нитки. Запишемо для кулі рівняння динаміки відносно осі *y*

$$T_{max} - mg = ma_{доц}, \qquad (1)$$

де $a_{доц} = \frac{\upsilon^2}{R}$ - доцентрове прискорення, $R = l$ (рис.18).

Враховуючи це, запишемо $T_{max} \quad mg = \frac{m\upsilon^2}{l}$,

$$T_{max} = mg + \frac{m\upsilon^2}{l}. \qquad (2)$$

Швидкість кулі в точці B визначається із закону збереження енергії для точок A і B:

$W_A = W_B$, де $W_A = mgl$;

$$W_B = \frac{m\upsilon^2}{2}. \quad (3)$$

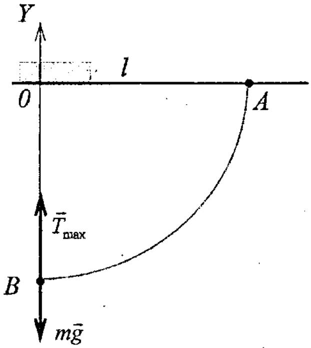


Рис. 18

Тоді рівняння (3) матиме вигляд:

$$mgl = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

звідси

$$\upsilon^2 = 2gl.$$

$$T_{max} = mg + \frac{m2gl}{l} = 3mg.$$

Відповідь: $T_{max} = 3mg$.

Задача 17. В маятник масою M ударяє куля масою m, що летить горизонтально зі швидкістю υ_1 і застряє в ньому. На яку висоту h підніметься маятник? Яка частина механічної енергії кулі, що летить, перетворюється в механічну енергію маятника з кулею?

M
m
υ_1
h - ?
$\frac{E_2}{E_1}$ - ?

Розв'язування

При влучанні кулі в маятник механічна енергія кулі частково перетворюється у внутрішню енергію внаслідок тертя і деформації тіл при проникненні кулі в маятник і лише частково перетворюється в механічну (кінетичну) енергію маятника з кулею. Ця частина всієї механічної енергії кулі потім, коли маятник відхилиться до найбільшої висоти h (рис. 19), перетворюється в потенціальну енергію маятника і кулі.

Знайдемо швидкість, з якою починає рухатися маятник разом з кулею, в момент, що йде за влучанням кулі. Для цього запишемо закон збереження імпульсу в проекціях на горизонтальну вісь: $m\upsilon_1 = (m + +M)\ \upsilon_2$, звідки горизонтальна швидкість маятника з кулею $\upsilon_2 = \frac{m\upsilon_1}{m+M}$.

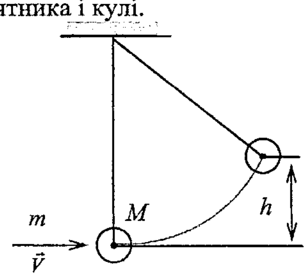


Рис. 19

Кінетична енергія маятника з кулею на початку їх руху:

$$E_2 = \frac{(m+M)\upsilon_2^2}{2} = \frac{m+M}{2}\left(\frac{m\upsilon_1}{m+M}\right)^2 = \frac{m^2\upsilon_1^2}{2(m+M)}.$$

Відношення цих енергій

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{\dfrac{m^2\upsilon_1^2}{2(m+M)}}{\dfrac{m\upsilon_1^2}{2}}=\frac{m}{m+M}.$$

Тепер кінетичну енергію маятника з кулею на початку руху прирівнюємо до їх потенціальної енергії в крайньому положенні, коли їх загальна швидкість дорівнює нулю:

$$\frac{(m+M)\,\upsilon_2^2}{2}=(m+M)gh,$$

звідси максимальна висота підйому маятника

$$h=\frac{\upsilon_2^2}{2g}=\left(\frac{m}{m+M}\right)^2\frac{\upsilon_1^2}{2g}.$$

Відповідь: $h=\dfrac{\upsilon_2^2}{2g}=\left(\dfrac{m}{m+M}\right)^2\dfrac{\upsilon_1^2}{2g}$, $\dfrac{E_2}{E_1}=\dfrac{m}{m+M}$.

Задачі для самостійного розв'язування

Закони Ньютона

Задача 1. Візок, рухаючись із стану спокою під дією сили, пройшов шлях *40 см* за деякий час. Коли на візок поклали тягарець масою *20 г*, то під дією тієї самої сили він за той самий час пройшов шлях *20 см*. Яка маса візка?

Відповідь: *20 г.*

Задача 2. Парашутист масою *90 кг* опускається зі сталою швидкістю. Знайти силу опору повітря.

Відповідь: *0,88 кН.*

Задача 3. Дріт витримує вантаж масою m_{max} = *450 кг*. З яким максимальним прискоренням можна підіймати вантаж масою m = *400 кг*, щоб дріт не обірвався?

Відповідь: $a=g\left(\dfrac{m_{\max}}{m}-1\right)=1{,}2\dfrac{м}{с^2}$.

Задача 4. Мотузка витримує вантаж масою m_1 = *110 кг* при його русі з прискоренням, спрямованим угору, і вантаж масою m_2 = *690 кг* при русі з тим самим прискоренням, спрямованим униз. Якої маси вантаж витримає ця мотузка при підйомі його зі сталою швидкістю?

Відповідь: $m=\dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}=190\,кг.$

Задача 5. На тіло масою *0,2 кг*, що перебувало в стані спокою, протягом *5 с* діє сила *0,1 Н*. Якої швидкості набуло тіло та який шлях воно пройшло?

Відповідь: *2,5 м/с, 6,25 м.*

Задача 6. З якою силою людина масою *70 кг* тисне на підлогу ліфта, який рухається з прискоренням $0{,}8\ м/с^2$, спрямованим: вгору, вниз? З яким прискоренням має рухатись ліфт, щоб людина не тиснула на підлогу?

Відповідь: $P_1 = 740\ Н;\ P_2 = 630\ Н;\ a = g.$

Задача 7. Через блок, що підвішений на динамометрі, перекинуто шнур, на кінцях якого закріплено тіла з масами $m_1 = 1$ кг та $m_2 = 100\ кг$. Знайти силу натягу T шнура під час руху тіл.

Відповідь: $T = \dfrac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g = 19{,}4 Н.$

Задача 8. Через блок, що підвішений на динамометрі, перекинуто шнур, на кінцях якого закріплені тіла з масами $m_1 = 2\ кг$ та $m_2 = 8\ кг$. Що покаже динамометр?

Відповідь: $F = \dfrac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g = 63\ Н.$

Задача 9. Два тіла масами m_1 та m_2 висять на кінцях нитки, перекинутої через блок. Відстань між ними дорівнює h. Початкові швидкості дорівнюють нулю. Через який час t тіла будуть на одній висоті?

Відповідь: $t = \sqrt{\dfrac{h(m_1 + m_2)}{g(m_2 - m_1)}}.$

Задача 10. Автомобіль масою $m = 2000\ кг$ рухається зі швидкістю $\upsilon = 36\ км/год$ по увігнутому мосту, радіус кривизни якого $R = 100\ м$. З якою силою F автомобіль тисне на міст на його середині.

Відповідь: $F = mg + \dfrac{mV^2}{R} = 21{,}6 кН.$

Задача 11. Літак робить "мертву петлю" радіусом *1 км* зі сталою швидкістю. При цьому максимальна сила тиску пілота на сидіння втричі перевищує мінімальну. Знайти швидкість літака.

Відповідь: *140 м/с.*

Задача 12. Хлопчик масою *40 кг* гойдається на гойдалці з довжиною підвісу *4 м.* З якою силою він тисне на сидіння при проходженні положення рівноваги зі швидкістю *6 м/с?*

Відповідь: *0,75 кН.*

Задача 13. Камінь, підвішений до стелі на мотузці, рухається в горизонтальній площині по колу, відстань від якого до стелі $h = 1,25м$. Знайти період обертання каменя.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} = 2,25с.$

Задача 14. Кулька, підвішена на нитці, обертається в горизонтальній площині з частотою ν. Кут відхилення нитки від вертикалі дорівнює α, маса кульки - m. Знайти швидкість і прискорення кульки, силу натягу нитки і її довжину.

Відповідь: $V = \frac{g}{2\pi\nu}tg\alpha$; $a = g\cdot tg\alpha$; $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$; $l = \frac{g}{4\pi^2\nu^2\cos\alpha}$.

Закон всесвітнього тяжіння

Задача 15. Радіус Марса становить *0,53* від радіуса Землі, маса – *0,11* від маси Землі. Знайти прискорення вільного падіння на Марсі.

Відповідь: $3,8\ м/с^2$.

Задача 16. На якій відстані від поверхні Землі сила тяжіння в *100* разів менша, ніж на поверхні?

Відповідь: $h = 9R$ Землі.

Задача 17. Знайти радіус орбіти супутника Землі, якщо період обертання *1* доба. Радіус Землі *6400* км.

Відповідь: *42,4 Мм.*

Задача 18. Відстань між центрами Землі і Місяця дорівнює *60* земним радіусам, а маса Місяця у *81* раз менша від маси Землі. У якій точці прямої, що сполучає їх центри, тіло притягувалось би Землею і Місяцем з однаковою силою?

Відповідь: на відстані 6 земних радіусів від центра Місяця.

Задача 19. При якій тривалості доби на Землі тіла на екваторі були б невагомими? Радіус Землі *6400* км.

Відповідь: *85 хв.*

Задача 20. З якою швидкістю рухається релятивістська частинка, якщо її маса збільшилася вдвічі.

Відповідь: $\upsilon = 2,6\cdot 10^8\ м/с$.

Сила пружності. Сила тертя

Задача 21. Знайти видовження троса з жорсткістю $k = 100\ кН/м$ під час буксирування автомобіля масою $m = 2\ т$ з прискоренням $a = 0,5\ м/с^2$. Тертям знехтувати.

Відповідь: $x = \frac{ma}{k} = 1см.$

Задача 22. Дві паралельно з'єднані пружини з жорсткостями k_1, k_2 треба замінити однією. Яка її жорсткість?

Відповідь: $k = k_1 + k_2$.

Задача 23. Дві послідовно з'єднані пружини з жорсткостями k_1 *і* k_2 треба замінити однією. Яка її жорсткість ?

Відповідь: $k = \dfrac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$.

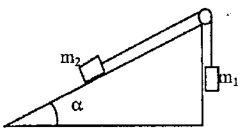
Задача 24. Яка початкова швидкість шайби, пущеної по поверхні льоду, якщо вона зупинилась через *40с* ? Який шлях вона пройшла? Коефіцієнт тертя шайби об лід дорівнює *0,05*.

Відповідь: *20 м/с, 400 м.*

Задача 25. Знайти прискорення тіла, що ковзає по похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 30°$ з горизонталлю. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu = 0,3$.

Відповідь: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 2,45$ *м/с*^{2}.

Задача 26. Два тіла масами $m_1 = 10$ *г* та $m_2 = 15$ *г* зв'язані ниткою, перекинутою через блок, який встановлено на гладенькій похилій площині (див. рисунок). Площина утворює кут $\alpha = 30°$ з горизонталлю. Знайти прискорення, з яким рухається тіло.



Відповідь: $a = g\dfrac{m_2 \sin a \quad m_1}{m_1 \quad m_2} = \quad 0,98\dfrac{м}{с^2}$.

Задача 27. Санки з'їжджають з гори заввишки h і далі їдуть горизонтально. Кут нахилу гори до горизонту α. Коефіцієнт тертя однаковий на всьому шляху і дорівнює μ. Виняток становить короткий відрізок шляху, де схил плавно переходить у горизонтальну дорогу; тут коефіцієнт тертя дорівнює нулю. Знайти шлях, який санки проходять по горизонтальній ділянці до повної зупинки.

Відповідь: $S = \dfrac{h(1 - \mu ctg\alpha)}{\mu}; \mu < tg\alpha$.

Задача 28. Який має бути мінімальний коефіцієнт тертя μ між шинами автомобіля та асфальтом, щоб автомобіль, який їде зі швидкістю $\upsilon = 50$ *км/год*, зміг зробити поворот по дузі кола радіусом $R = 100$ *м*?

Відповідь: $\mu = \frac{v^2}{Rg} = 0,2.$

Задача 29. Велосипедист під час повороту по дузі радіусом R нахиляється до центра дуги так, що кут між площиною велосипеда і поверхнею землі дорівнює α. Знайти швидкість v велосипедиста.

Відповідь: $V = \sqrt{g \cdot R \cdot ctg\alpha}.$

Задача 30. Людина тягне санки масою m з силою F, спрямованою під кутом α до горизонту. Коефіцієнт тертя між санками і дорогою дорівнює μ. Знайти прискорення санок. При якій силі F_0 рух буде рівномірним?

Відповідь: $a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu \sin\alpha) - \mu g;\quad F_0 = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$

Задача 31. Дерев'яний брусок масою *2 кг* рівномірно тягнуть по дерев'яній донці за допомогою пружини з жорсткістю *100 Н/м*. Коефіцієнт тертя *0,3*. Знайти видовження пружини.

Відповідь: *6 см.*

Задача 32. Хлопчик масою *40 кг*, з'їхавши на санках з гірки, проїхав по горизонтальному шляху до повної зупинки *20 м* за *10 с*. Знайти силу тертя та коефіцієнт тертя.

Відповідь: *16 Н, 0,04.*

Задача 33. З вершини похилої площини завдовжки $l = 10$ *м* і заввишки $h = 5$ *м* зісковзує тіло. Знайти час руху тіла по похилій площині та швидкість, яку воно матиме. Коефіцієнт тертя $\mu = 0,2$.

Відповідь: $t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 2,5c; V = \sqrt{2al} = 8\frac{м}{c};$ *де* $a = g\frac{h - \mu\sqrt{l^2 - h^2}}{l}.$

Імпульс

Задача. 34. Снаряд масою m_1 летить горизонтально й паралельно рейкам зі швидкістю v_1 і влучає в платформу з піском масою m_2. З якою швидкістю починає рухатись платформа, якщо снаряд застряв у піску?

Відповідь: $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$

Задача 35. Граната, що летить зі швидкістю *10 м/с*, розірвалась на два осколки. Більший осколок, маса якого складає *60 %* маси гранати, продовжує рухатися в тому самому напрямку, але зі швидкістю *25 м/с*. Знайти швидкість меншого осколка.

Відповідь: *12,5 м/с.*

Задача 36. Два непружних тіла масами *2 кг* і *6 кг* рухаються назустріч одне одному зі швидкістю *2 м/с* кожне. Знайти модуль і напрямок швидкості тіл після їх зіткнення.

Відповідь: *1 м/с;* в напрямку руху більшого тіла.

Задача 37. Поїзд масою *2000 т*, рухаючись прямолінійно, збільшив швидкість із *36 км/год* до *72 км/год*. Знайти зміну імпульсу поїзда.

Відповідь: $\Delta p = 2 \cdot 10^7$ *кг·м/с.*

Розділ 3. Робота і енергія

При розв'язуванні задач *на закон збереження енергії* рекомендується:

- зробити рисунок, вибрати рівень відліку потенціальної енергії, зобразити на рисунку всі сили, що діють на тіла системи, а також швидкості, імпульси тіл і їх розташування в початковому і кінцевому станах, вибрати систему відліку, визначити напрям координатних осей;
- якщо система тіл замкнена і в ній діють тільки потенціальні сили, то використати закон збереження механічної енергії:

$$E_{поч.стану} = E_{кінц.стану},$$

де $E = E_к + U$ - сума кінетичної $E_к$ і потенціальної U енергій системи;

- якщо при переході системи з початкового стану в кінцевий на тіла діяли зовнішні сили, а між тілами системи - сили тертя, то використовувати закон зміни механічної енергії системи:

$$\Delta E = A + A_{терт.},$$

де ΔE - зміна механічної енергії системи;

A - робота зовнішніх сил;

$A_{терт}$ - робота сил тертя;

- при необхідності доповнити одержані рівняння кінематичними і динамічними співвідношеннями, розв'язати ці рівняння і визначити шукані величини.

Для розв'язування задач використовуємо формули попереднього розділу.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти швидкість вильоту снаряда з пружинного пістолета масою *m* при пострілі вертикально вгору, якщо жорсткість пружини *k*, а стискування дорівнює *x*.

Дано	Розв'язування
m k x	Стиснута пружина має потенціальну енергію, яка витрачається на здійснення роботи з подолання сили тяжіння снаряду та надання йому кінетичної енергії. Потенціальна
V - ?	

енергія пружини дорівнює роботі змінної сили $F_{пружн} = -kx$ на переміщення x:

$$E_n = \frac{kx^2}{2}; E_n = mgx + \frac{mv^2}{2}; \frac{kx^2}{2} = mgx + \frac{mv^2}{2}.$$

Звідки:

$$V = \sqrt{\frac{x(kx-2mg)}{m}}.$$

Відповідь: $V = \sqrt{\frac{x(kx-2mg)}{m}}$.

Задача 2. Трактор має тягову потужність на гакові, що дорівнює *72 кВт*. З якою швидкістю цей трактор може тягнути причіп масою *5 т* на підйомі з нахилом, що дорівнює *0,2*, при коефіцієнті тертя *0,4* ?

$P = 72$ кВт $= 72 \cdot 10^3$ Вт

$m = 5$ т $= 5 \cdot 10^3$ кг

$\sin\alpha = 0{,}2$

$\mu = 0{,}4$

V - ?

Розв'язування

Рівняння руху (рис. 20) має вигляд:

$$\vec{F}_{тяги} + \vec{F}_{тертя} + m\vec{g} + \vec{N} = 0$$

(рух рівномірний).

Спроектуємо це рівняння на вісь x, яка спрямована вгору по похилій площині:

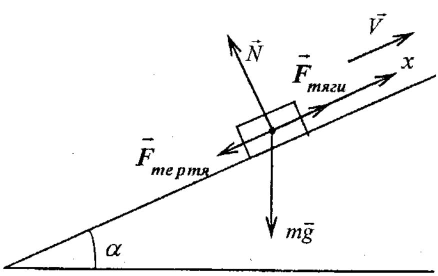


Рис. 20

$$F_{тяги} = F_{тертя} + mg\sin\alpha,$$

де $F_{тертя} = \mu mg\cos\alpha$.

Тягова потужність, що розвивається трактором, визначається за формулою:

$$P = F_{тяги}\,v.$$

Звідси

$$v = \frac{P}{F_{тяги}} = \frac{P}{mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)} = 2{,}4$$ м/с, тут враховано, що $\cos = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Відповідь: $v = 2{,}4$ м/с.

Задача 3. Яку роботу виконує автомобіль "Жигулі" масою *1,3 т* після початку руху з місця на перших *75 м* шляху, якщо цю відстань автомобіль проходить за *10 с*, а коефіцієнт опору рухові дорівнює *0,05*?

$m = 1.3\ т = 1{,}3 \cdot 10^3\ кг$ $S = 75\ м$ $\mu = 0{,}05$ $\upsilon = 0$ $t = 10\ с$	
A - ?	

Розв'язування

$$A = F_{тяги} \cdot S;\ \vec{F}_{тяги} + \vec{F}_{опору} = m\vec{a};$$

$$F_{тяги} = ma + F_{опору} = ma + \mu mg;$$

$$A = m\,(a + \mu g)\,S;$$

$$S = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}, \upsilon_0 = 0; a = \frac{2S}{t^2}.$$

$$A = m\left(\frac{2S}{t^2} + \mu g\right)S = 195\ Дж.$$

Відповідь: $A = 195\ Дж$.

Задача 4. Яку роботу виконує людина при підйомі тіла масою $2\ кг$ на висоту $1\ м$ з прискоренням $3\ м/с^2$?

$m = 2\ кг$ $S = 1\ м$ $a = 3\ м/с^2$	
A - ?	

Розв'язування

Робота, що здійснюється силою $\vec{F}$ на відстані S:

$A = F \cdot S \cos\alpha\ (\alpha = 0);\ A = F \cdot S.$

Рівняння руху:

$$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Вісь x спрямуємо вертикально вниз і одержимо:

$$F = ma + mg;\ A = m(g + a) \cdot S = 26\ Дж.$$

Відповідь: $A = 26\ Дж$.

Задача 5. Тіло кинуте вертикально вгору з швидкістю $10\ м/с$. На якій висоті кінетична енергія буде дорівнювати потенціальній енергії? Відлік потенціальної енергії тіла в полі тяжіння проводиться від точки кидання. Опором повітря знехтувати.

$\upsilon_0 = 10\ м/с$ $E_к = E_p$ $g = 10\ м/с^2$	
h - ?	

Розв'язування

За умовою задачі опором повітря можна знехтувати, і, отже, повна механічна енергія тіла в процесі руху залишається постійною і дорівнює початковій кінетичній енергії тіла в момент відриву від поверхні Землі:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgh, \qquad (1)$$

де $\frac{m\upsilon^2}{2}$ - кінетична енергія на висоті h,

mgh - потенціальна енергія тіла на висоті h.

За умовою задачі кінетична і потенціальна енергії на шуканій висоті h рівні, тобто

$$\frac{mv^2}{2} = mgh. \qquad (2)$$

Підставляючи вираз (2) в (1), одержимо:

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh, \text{ звідси } h = \frac{v_0^2}{4g} = 2{,}5\ м.$$

Відповідь: $h = 2{,}5\ м.$

Задача 6. Для піднімання води з колодязя глибиною $h = 20\ м$ встановили насос потужністю $N = 3{,}7\ кВт$. Визначити масу і об'єм води, яка піднята за час $t = 7\ год$, якщо к.к.д. насоса $\eta = 80\ \%$.

Дано	Розв'язування
$h = 20\ м$ $N = 3{,}7\ кВт = 3{,}7 \cdot 10^3 Вт$ $t = 7\ год$ $\eta = 80\ \% = 0{,}80$ m - ?, V - ?	Відомо, що потужність насоса з врахуванням к.к.д. визначається за формулою: $$N = \frac{A}{t\eta}, \qquad (1)$$

де A - робота, що здійснюється при підніманні вантажу без прискорення на висоту h.

Робота A дорівнює потенціальній енергії $П$, яку має вантаж на цій висоті, тобто:

$$A = П = mgh, \qquad (2)$$

де g - прискорення вільного падіння.

Підставивши вираз роботи A з (2) в (1), одержимо

$$N = \frac{mgh}{t\eta},$$

звідки

$$m = \frac{Nt\eta}{gh} = 3{,}80 \cdot 10^5\ кг. \qquad (3)$$

Щоб визначити об'єм води, потрібно її масу розділити на густину:

$$V = \frac{m}{\rho} = 380\ м^3.$$

Відповідь: $380\ м^3$.

Задача 7. На вершині горба висотою $10\ м$ знаходилась бочка масою $200\ кг$ (рис. 21). Її торкнули, вона покотилась і зупинилась на горизонтальній поверхні. Яку роботу доведеться виконати, щоб повернути її тим же шляхом в початкове положення ?

$H = 10\ м$
$m = 200\ кг$
A - ?

Розв′язування

Спочатку бочка мала потенціальну енергію $E_п = mgH$. В кінцевому положенні у бочки немає ні потенціальної, ні кінетичної енергії, оскільки $E_п$ була витрачена на виконання роботи проти сили тертя на шляху скочування бочки.

Отже,

$$E_п = mgH = A_1.$$

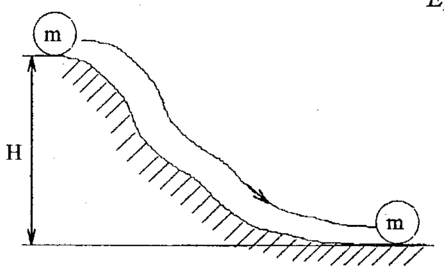


Рис. 21

Повертаючи бочку назад, необхідно підняти її на висоту H (робота піднімання $A_1 = mgH = E_п$) і виконати роботу A_2 проти сили тертя. Таким чином, загальна робота повернення бочки у початкове положення обчислюється за формулою

$$A = A_1 + A_2 = mgH + mgH = 2\,mgH = 4 \cdot 10^4\ Дж.$$

Відповідь : $A = 4 \cdot 10^4\ Дж.$

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Хлопчик тягне санки за мотузку з силою $100\ Н.$ Мотузка утворює кут $30°$ з горизонтом. Яку роботу виконає хлопчик на шляху $50\ м$?

Відповідь: *4,3 кДж.*

Задача 2. Яку роботу треба виконати, щоб однорідний стержень завдовжки $2\ м$ масою $100\ кг$ перевести з горизонтального положення у вертикальне?

Відповідь: *1 кДж.*

Задача 3. Яку роботу треба виконати, щоб підняти грунт на поверхню, риючи колодязь завглибшки $h=10 м$ з площею поперечного перерізу

$S=2м^2$? Вважати, що ґрунт розсипають тонким шаром по поверхні землі. Густина ґрунту $\rho = 2 \cdot 10^3$ *кг/м³*.

Відповідь: $A = \dfrac{S\rho g h^2}{2} = 2 МДж.$

Задача 4. Знайти потенціальну та кінетичну енергії тіла масою *5 кг*, яке вільно падає з висоти *3 м*, на відстані *2 м* від поверхні землі.

Відповідь: *98 Дж, 49 Дж.*

Задача 5. Тіло кинули зі швидкістю υ_0 під кутом до горизонту. Знайти його швидкість на висоті *h*.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}.$

Задача 6. Швидкість тіла, що вільно падає, масою *4 кг* зросла від *2 м/с* до *8 м/с*. Знайти роботу сили тяжіння.

Відповідь: *120 Дж.*

Задача 7. Імпульс тіла дорівнює *8 кг·м/с*, а кінетична енергія - *16 Дж*. Знайти масу і швидкість тіла.

Відповідь: *2 кг, 4м/с.*

Задача 8. Початкова швидкість кулі $\upsilon=600$ *м/с*, її маса $m = 10$ *г*. Під яким кутом до горизонту вона вилетіла з рушниці, якщо її кінетична енергія в найвищій точці траєкторії дорівнює $W_K = 450$ *Дж*?

Відповідь: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\upsilon}\sqrt{\dfrac{2W_K}{m}} = \dfrac{1}{2};\quad \alpha = 60°.$

Задача 9. Тролейбус масою *20 т* рушає з прискоренням *2 м/с²*. Знайти роботу сили тяги та роботу сили опору на перших *20 м* шляху, якщо коефіцієнт опору дорівнює *0,05*. Яку кінетичну енергію набув тролейбус?

Відповідь: $A_1 = 1$ *МДж*; $A_2 = -0{,}2$ *МДж*; $W_K = 0{,}8$ *МДж.*

Задача 10. Камінь масою $m=1$ *кг* падає з висоти $h=20$ *м* і в момент падіння на землю має швидкість $\upsilon=18$ *м/с*. Яка робота сили опору при падінні?

Відповідь: $A = \dfrac{1}{2}m\left(\upsilon^2 - 2gh\right) = 34 Дж.$

Задача 11. Яку роботу виконує сила $F=40$ *Н* за $t=8$ *с*, що піднімає із землі вертикально вгору вантаж масою $m=2$ *кг*?

Відповідь: $A = \dfrac{F \cdot t^2}{2m}\left(F - mg\right) = 13 кДж.$

Задача 12. Динамометр, розрахований на *40 Н*, має пружину з жорсткістю *500 Н/м*. Яку треба виконати роботу, щоб розтягнути пружину від середини динамометра до останньої поділки?

Відповідь: *1,2 Дж.*

Задача 13. Залізничний вагон масою *20 т* наштовхується на перешкоду із швидкістю *0,2 м/с.* Обидві буферні пружини вагона при цьому стиснулися на *4 см.* Знайти максимальне значення сили, яка діє на пружину.

Відповідь: *10 кН.*

Задача 14. Швидкість тіла перед абсолютно пружним зіткненням з другим тілом була $\upsilon_1=3$ *м/с*, після нього стала $\upsilon_2=2$ *м/с.* Знайти швидкість другого тіла, якщо до удару воно не рухалось.

Відповідь: $U_2 = \upsilon_1 + U_1 = 5\ \upsilon/с$; $U_2 = \upsilon_1 - U_1 = 1$ *м/с.*

Задача 15. Кулька масою $m=100$ *г*, що підвішена на нитці завдовжки $l=40$ *см,* описує коло в горизонтальній площині. Яка кінетична енергія кульки, якщо під час руху нитка утворює кут $\alpha = 60°$ з вертикаллю?

Відповідь: $W_K = \frac{1}{2} mgl \sin\alpha \cdot tg\alpha = 0{,}3$ *Дж.*

Задача 16. Тіло після абсолютно непружного удару об нерухоме тіло, почало рухатися в $n=4$ рази повільніше. Визначити частину енергії, яка перейшла у внутрішню.

Відповідь: $\frac{\Delta E}{E} = 1 - n^{-1} = 0{,}75.$

Задача 17. З похилої площини завдовжки l і кутом нахилу α до горизонталі зісковзує тіло. Яка швидкість тіла біля основи площини, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ?

Відповідь: $V = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}.$

Задача 18. Знайти ККД похилої площини завдовжки *1м* і заввишки *0,6 м*, якщо коефіцієнт тертя при русі по ній тіла дорівнює *0,1.*

Відповідь: *88%.*

Задача 19. Яку роботу треба виконати, щоб по похилій площині з кутом нахилу *30°* підняти вантаж масою *400 кг* на висоту *2 м* при коефіцієнті тертя $\mu = 0{,}3$? Який при цьому ККД?

Відповідь: *12 кДж; 67%.*

Задача 20. Трактор на оранці долає силу опору *10 кН,* розвиваючи корисну потужність *40 кВт*. З якою швидкістю рухається трактор?

Відповідь: *4 м/с.*

При розв'язуванні задач на рівновагу тіл рекомендується:

- зробити рисунок, показати всі сили, що діють на тіло (або тіла системи), які знаходяться в стані рівноваги, вибрати систему координат і визначити напрям координатних осей;

- для тіла що не має осі обертання, записати першу умову рівноваги у векторному вигляді $\sum_i \vec{F}_i = 0$, потім записати цю умову рівноваги в проекціях на осі координат і одержати рівняння в скалярному вигляді;

- для тіла із закріпленою віссю обертання потрібно визначити плечі всіх сил відносно цієї осі і використати другу умову рівноваги (правило моментів): $\sum_i \vec{M}_i = 0$, враховуючи при цьому знаки ("+" або "-") моментів сил.

При розв′язуванні задач, в яких розглядається рівновага або рух твердих тіл в рідині та газі, слід врахувати закон Архімеда і використати рекомендації, що наведені на початку даного розділу і в темі "Основи динаміки".

Основні поняття

Момент сили відносно осі:

$$M = F \cdot d,$$

де F - модуль сили;
d - найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили (плече сили);

Умови рівноваги твердого тіла:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0; \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0;$$

1) $M_i > 0$ (обертання за годинниковою стрілкою),
2) $M_i < 0$ (обертання проти годинникової стрілки).

Тиск:

$$p = \frac{F}{S},$$

де F - модуль сили, що рівномірно розподілена по поверхні площею S (сила перпендикулярна до поверхні).

Гідростатичний тиск всередині рідини

$$p = \rho g h,$$

де ρ - густина рідини;
g - прискорення вільного падіння;
h - глибина занурення.

Сила Архімеда:

$$F_A = \rho g V,$$

де ρ - густина рідини;

g - прискорення вільного падіння;
V - об'єм зануреної в рідину частини тіла.

Рівні рідин різної густини, на яких вони встановилися в сполучених посудинах, зв'язані з їх густинами ρ_1 і ρ_2 співвідношенням:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Для гідравлічного пресу:

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 ,$$

де F_2 - сила, що діє на тіло з боку великого поршня з площею поперечного перерізу S_2;
F_1 - сила, що діє на малий поршень з площею поперечного перерізу S_1.

Сила поверхневого натягу рідини

$$F = \sigma l,$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу;
l - довжина межі поверхневого шару рідини;

$$\sigma = \frac{W}{S},$$

де W - потенціальна енергія поверхневого шару, яка припадає на одиницю площі.

Висота підняття (опускання) рідини в капілярі при повному змочуванні (незмочуванні)

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R},$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу рідини;
ρ - густина рідини;
g - прискорення вільного падіння;
R - радіус капіляра.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Визначити роботу, яку потрібно здійснити, щоб видути мильну бульбашку діаметром $d = 10$ *см*.

$d = 10$ *см* $= 10^{-1}$ *м*
$\sigma = 40 \cdot 10^{-3}$ *Н/м*
A - ?

Розв'язування

Робота, яку потрібно здійснити, щоб, розтягуючи плівку, збільшити її поверхню на ΔS, виражається формулою

$$A = \sigma \Delta S, \quad \text{або} \quad A = \sigma(S - S_0).$$

В даному випадку S - загальна площа двох сферичних поверхонь плівки мильної бульбашки, S_0 - загальна площа двох поверхонь плоскої плівки, яка затягує отвір трубки до видування бульбашки. Нехтуючи S_0, знайдемо

$$A \approx \sigma S = 2\pi d^2 \sigma = 2{,}5\ мДж.$$

Відповідь: $A = 2{,}5\ мДж.$

Задача 2. Якою повинна бути сила F, яка утримує брусок масою m на гладенькій похилій площині, якщо кут нахилу площини до горизонту дорівнює α, а сила паралельна похилій площині? Тертям між бруском і площиною знехтувати. Знайти силу реакції площини N.

m
α
N - ?
F - ?

Розв′язування

Оскільки брусок знаходиться в рівновазі, то сума проекцій на осі x і y всіх сил, що діють на брусок, повинні дорівнювати нулю.

$$F - mg\sin\alpha = 0,$$

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Звідси

$$F = mg\sin\alpha,$$
$$N = mg\cos\alpha.$$

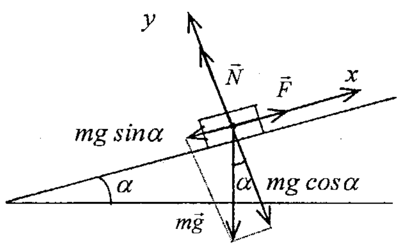


Рис. 22

Відповідь: $F = mg\sin\alpha$, $N = mg\cos\alpha$.

Задача 3. Тягарець масою m, підвішений з допомогою двох ниток таким чином, що одна з них утворює з вертикаллю кут α, а інша проходить горизонтально. Знайти сили натягу ниток.

m
α
T_1 - ?
T_2 - ?

Розв′язування

Умова рівноваги тіла (рис.23) запишеться у вигляді:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = 0.$$

У проекціях на осі координат одержимо:

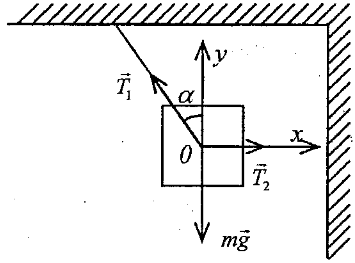
OX: $T_2 - T_1 \sin\alpha = 0$

OY: $T_1 \cos\alpha - mg = 0$.

Звідси знаходимо:

$$T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha};$$

$$T_2 = mg\,tg\,\alpha.$$



Відповідь:

$$T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha}; T_2 = mg\,tg\,\alpha.$$

Рис. 23

Задача 4. Якою повинна бути висота циліндричної посудини радіусом *5 см*, яка наповнена водою, щоб сила тиску води на дно посудини була рівна силі її тиску на бічну поверхню.

$R = 5\ см = 5 \cdot 10^{-2}\ м$
h - ?

Розв'язування

За означенням сила тиску на дно посудини

$$F = p \cdot S. \qquad (1)$$

Оскільки тиск на дно посудини $p = \rho gh$ (ρ- густина води, h - висота посудини, $S = \pi R^2$ - площа дна посудини), то вираз (1) прийме вигляд

$$F = \rho gh\pi R^2.$$

Аналогічно, сила тиску на бокову поверхню посудини:

$$F = <p> \cdot S_{бічне}$$

де $<p>=\frac{p}{2}$ - середній тиск води на бічну поверхню посудини;

$S_{бічне}$ - площа бічної поверхні посудини.

Враховуючи, що

$$p = \rho gh \text{ і } S_{бічне} = 2\pi R \cdot h,$$

одержимо:

$$F_{бічне} = \rho g\pi Rh^2.$$

За умовою задачі $F = F_{бічне}$, або $\rho gh\pi R^2 = \rho g\pi Rh^2$,

звідси $h = R = 5 \cdot 10^{-2} м = 5\ см$.

Відповідь: $h = 5\ см$.

Задача 5. Динамометр, до якого підвішений шматок сплаву, який складається з міді і срібла, показує в повітрі силу P_1, а в воді P_2. Силою Архімеда у повітрі знехтувати. Знайти масу срібла m_c та масу міді $m_м$.

P_1
P_2
m_M - ? m_C- ?

Розв'язування

При зважуванні в повітрі на шматок металу діють:

$m\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{P}_1$- сила натягу пружини (рис. 24, а).

Запишемо умову рівноваги тіла в скалярному вигляді відносно вибраного напряму осі Y:

$$-mg + P_1 = 0,$$

звідси $mg = P_1$; $m = \dfrac{P_1}{g}$.

При зважуванні у воді на шматок металу діють: $m\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{P}_2$ - сила натягу пружини, $\vec{F}_A$ - виштовхувальна сила води.

Запишемо умову рівноваги тіла у воді у векторному вигляді:

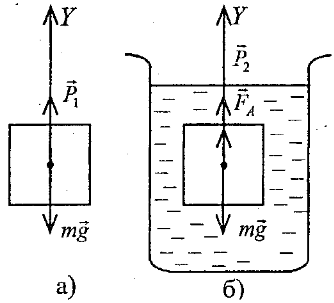


Рис. 24

$$m\vec{g} + \vec{P}_2 + \vec{F}_A = 0. \qquad (1)$$

Враховуючи, що $mg = P_1$ і $F_A = \rho g V$, де V - об'єм тіла, ρ- густина води, перетворимо рівняння (1):

$$P_2 - P_1 + \rho g V = 0. \qquad (2)$$

З іншого боку, маса тіла в повітрі і його об'єм відповідно дорівнюють:

$$m = m_M + m_C, \qquad (3)$$

$$V = V_M + V_C,$$

або

$$V = \frac{m_M}{\rho_M} + \frac{m_C}{\rho_C}, \qquad (4)$$

де m_M і m_C - маса міді і срібла в шматкові сплаву;
ρ_M і ρ_C - густини міді і срібла.

Розв'язуючи спільно рівняння (2)-(4), одержимо:

$$m_C = \frac{\rho_C \rho_M}{(\rho_C - \rho_M)g}\left(\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{P_1}{\rho_M}\right), \qquad m_C = 0{,}210\ кг.$$

Враховуючи, що $m = \dfrac{P_1}{g}$, з рівняння (3) знайдемо:

$$m_M = m - m_C = \frac{P_1}{g} - m_C, \qquad m_M = 0{,}0356\ кг.$$

Відповідь: $m_M = 0{,}0356\ кг$, $\quad m_C = 0{,}210\ кг$.

Задача 6. У циліндричний посуд налито однакові маси ртуті і води. Загальна висота двох шарів рідин *29,2 см*. Визначити тиск рідини на дно посуду.

$\rho_1 = 1{,}36 \cdot 10^4$ *кг/м³*
$\rho_2 = 1 \cdot 10^3$ *кг/м³*
$h = 29{,}2$ *см* $= 0{,}292$ *м*

---

p - ?

Розв'язування

Повний тиск рідин на дно посуду (рис.25)

$$p = p_1 + p_2\ . \qquad (1)$$

Тут $p_1 = \rho_1 g h_1$ і $p_2 = \rho_2 g h_2$ - тиск ртуті та води на дно посуду, де ρ_1 і ρ_2 - густини ртуті і води відповідно.

Підставляючи вирази p_1 і p_2 в рівняння (1), одержимо:

$$p = g\,(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2), \qquad (2)$$

причому

$$h = h_1 + h_2. \qquad (3)$$

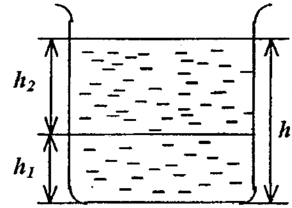


Рис. 25

За умовою задачі, маси стовпів рідин однакові, отже, $m_1 = m_2$, або $\rho_1 h_1 S = \rho_2 h_2 S$.
Звідси

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2, \qquad (4)$$

де S - площа основи посудини.

З рівнянь (3) і (4) знайдемо:

$$h_1 = \frac{h\rho_2}{\rho_1 + \rho_2};\ h_2 = \frac{h\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}. \qquad (5)$$

Підставляючи вираз (5) в рівняння (2), знайдемо:

$$p = g\left(\frac{\rho_1\rho_2 h}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{\rho_1\rho_2 h}{\rho_1 + \rho_2}\right) = \frac{2\rho_1\rho_2 g h}{\rho_1 + \rho_2}\ ; \qquad p = 5{,}3 \cdot 10^3\ Па.$$

Відповідь: $p = 5{,}3 \cdot 10^3$ *Па*.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Який стовп води відповідав би нормальному атмосферному тиску при користуванні водяним барометром? Густина ртуті $13{,}6 \cdot 10^3$ *кг/м³*, води 1000 *кг/м³*.

Відповідь: $h = 10{,}3$ *м*.

Задача 2. Під час піднімання вантажу масою m_0 за допомогою гідравлічного преса виконана робота A. При цьому малий поршень зробив n ходів, переміщуючись за один хід на висоту h. У скільки разів площа S великого поршня більша за площу s малого?

Відповідь: $\dfrac{S}{s} = \dfrac{mghn}{A}$.

Задача 3. Малий поршень гідравлічного преса за один хід опускається на $h = 0{,}2$ *м*, а великий піднімається на $H = 1$ *см*. З якою силою F діє прес на затиснуте в ньому тіло, якщо на малий поршень діє сила $f = 500$ *Н*? ККД преса η дорівнює $0{,}95$.

Відповідь: $F = \eta f h/H = 9,5$ *кН*.

Задача 4. Тіло вільно падає з деякої висоти і занурюється у воду на таку саму глибину. Знайти густину тіла. Густина води 10^3 *кг/м*^{3}.

Відповідь: $0,5 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}.

Задача 5. До якого значення можна збільшити силу тиску за допомогою гідравлічного преса, якщо до малого поршня прикласти силу $f=100$ *Н*, а площі перерізів поршнів $S_1=5$ *см*^{2} та $S_2=500$ *см*^{2}? ККД преса $\eta = 0,8$.

Відповідь: $F = \eta f S_2/S_1 = 8$ *кН*.

Задача 6. Аеростат масою *500 кг* і об'ємом 600 *м*^{3} піднімається вгору рівноприскорено. Знайти висоту підйому аеростата за перші *10 с*. Густина повітря *1,3 кг/м*^{3}.

Відповідь: *274 м*.

Задача 7. Знайти найменшу площу плоскої крижини завтовшки $H = 20$ *см*, яка здатна утримати на воді людину масою $m = 80$ *кг*. Густина льоду $\rho_л = 900$ *кг/м*^{3}, води $\rho_в = 10^3$ *кг/м*^{3}.

Відповідь: $S = \dfrac{m}{H(\rho_в - \rho_л)} = 4\,м^2$.

Задача 8. Порожниста куля зі сталі розтягує пружину динамометра у повітрі з силою *6 Н*, у воді - з силою *5 Н*. Знайти об'єм порожнини. Густина сталі $8 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}.

Відповідь: *24 см*^{3}.

Задача 9. З води з глибини *5 м* піднімають на поверхню камінь об'ємом *0,6 м*^{3}. Густина каменю *2500 кг/м*^{3}, води - *1000 кг/м*^{3}. Знайти виконану роботу.

Відповідь: *45 кДж*.

Задача 10. З води з глибини *10 м* кран підіймає стальний зливок масою *780 кг*. Знайти роботу сили пружності троса, якщо зливок підняли на висоту *4 м* над поверхнею води. Густина сталі *7800 кг/м*^{3}, води - 1000 *кг/м*^{3}.

Відповідь: *99 кДж*.

Задача 11. Землесос виймає *500 м*^{3} ґрунту за годину. Об'єм пульпи (ґрунту, змішаного з водою) в *10* разів більший за об'єм ґрунту. Яка швидкість руху пульпи у трубі діаметром *0,6 м*?

Відповідь: *4,9 м/с*.

Задача 12. У капілярній трубці радіусом *0,5 мм* рідина піднімається на *11 мм*. Знайти густину рідини, якщо її коефіцієнт поверхневого натягу дорівнює *0,022 Н/м*.

Відповідь: *820 кг/м*^{3}.

Задача 13. Знайти ККД капіляра (відношення потенціальної енергії стовпчика рідини до роботи, виконаної силами поверхневого натягу при підйомі рідини по капіляру).

Відповідь: *0,5*.

Молекулярна фізика й термодинаміка

Розділ 5. Основи молекулярно-кінетичної теорії. Газові закони

При розв'язуванні задач на цю тему рекомендується:

- використати рівняння Менделєєва-Клапейрона, вважаючи стан газу рівноважним;

- якщо в задачі розглядаються декілька станів газу, то параметри цих станів позначають так:

1-ий стан: m_1, p_1, V_1, T_1 ;

2-ий стан: m_2, p_2, V_2, T_2 і т.д., а потім використовують для кожного з цих станів рівняння Менделєєва-Клапейрона (якщо маса газу m змінюється) або рівняння Клапейрона $p_1V_1 / T_1 = p_2V_2 / T_2$ (якщо маса газу не змінюється);

- якщо один з параметрів газу залишається сталим і маса газу не змінюється, то використовують один із законів ідеального газу Бойля-Маріотта (при $T = const$), Гей-Люсака (при $p = const$) і Шарля (при $V=const$).

Основні поняття

Кількість речовини:

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A},$$

де m - маса;

μ - молярна маса речовини;

N - число структурних елементів (атомів, молекул, іонів та ін.),

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ *моль*$^{-1}$ – стала Авогадро.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle \ ,$$

де p – тиск ідеального газу;

m_0 - маса молекули;

$n = \dfrac{N}{V}$ - концентрація молекул;

V- об'єм газу;

$\langle v^2\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2$ - середнє значення квадрата швидкості молекул;

N - число молекул.

Середня квадратична швидкість молекул ідеального газу

$$v_{kb} = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

де $R = k\cdot N_A = 8,31$ $Дж/(К\cdot моль)$; R - молярна газова стала;
$k=1,38\cdot 10^{-23}$ $Дж/К$ - стала Больцмана;
$T = t + 273$ - термодинамічна температура;
t - температура за шкалою Цельсія.

Середня енергія теплового руху молекул одноатомного газу:

$$\langle \varepsilon\rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Тиск ідеального газу

$$p = n\,k\,T,$$

де n - концентрація молекул;
k - стала Больцмана;
T - термодинамічна температура.

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона)

$$pV = \nu RT,$$

де p – тиск;
V - об'єм газу.

Об'єднаний закон газового стану (рівняння Клапейрона)

$$\frac{PV}{T} = const,$$

при $m = const$,
де p – тиск;
V - об'єм;
T - термодинамічна температура ідеального газу.

Тиск суміші хімічно не взаємодіючих ідеальних газів

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

де p_i - парціальний тиск i-ої компоненти суміші (закон Дальтона).

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Скільки атомів знаходиться в *1 кг* кисню? Яка кількість речовини знаходиться в цій масі? Знайти масу однієї молекули і одного атома кисню.

$m = 1кг$ $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ $моль^{-1}$ $\mu = 3,2 \cdot 10^{-3}$ $кг/моль$	
N - ? ν - ? m_{02} - ? m_{01} -?	

Розв'язування

1.Число молекул N в даній масі газу визначається за формулою:

$$N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A,$$

де m - маса газу,
μ - молярна маса,
ν - кількість речовини,
N_A- число Авогадро.

$$N = \frac{1}{0,032} 6,02 \cdot 10^{23} = 1,88 \cdot 10^{25}.$$

2. Кількість речовини $\nu = \frac{m}{\mu} = 31,25$ $моль.$

3. Маса молекули кисню визначається відношенням молярної маси кисню до сталої Авогадро:

$$m_{0_2} = \frac{\mu}{N_A},$$

$$m_{0_2} = \frac{0.032}{2 \ \ 10^{23}} = 5,316 \cdot 10^{-26} кг, \qquad m_0 = 2,658 \cdot 10^{-26} кг,$$

Маса атома кисню в 2 рази менша маси молекули, тому що молекула складається з двох атомів: $m_0 = \frac{m_{0_2}}{2}$.

Відповідь: $m_0 = 2,658 \cdot 10^{-26} кг$; $m_{0_2} = 5,316 \cdot 10^{-26} кг$,

Задача 2. Густина кисню $\rho = 0,2$ $кг/м^3$, тиск $p = 1,01 \cdot 10^5$ *Па*. Визначити при цих умовах середню квадратичну швидкість молекул кисню, а також концентрацію молекул кисню.

$\rho = 0,2$ $кг/м^3$ $p = 1,01 \cdot 10^5$ *Па* $\mu = 0,032$ $кг/моль$	
V-? n-?	

Розв'язування

В основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газу $p = \frac{1}{3} m_0 n V^2$ входить концентрація молекул n і маса однієї молекули m_0.

Оскільки $\rho = m_0 n$, то

$$p = \frac{1}{3} \rho V^2;$$

звідси $$V = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 1231 \text{ м/с}.$$

$$n = \frac{\rho}{m_0}; m_0 = \frac{\mu}{N_A}; n = \frac{\rho N_A}{\mu} = 3{,}763 \cdot 10^{24}\ м^{-3}.$$

Відповідь: $n = 3{,}763 \cdot 10^{24}\ м^{-3}$.

Задача 3. У балоні знаходиться суміш азоту і водню, кількість речовини в якій $\nu_1 = 5$ *моль* і $\nu_2 = 10$ *моль,* відповідно, при температурі $t = 7\,°C$ і тиску $p_c = 2{,}5$ *МПа*. Знайти густину суміші.

$\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ *кг/моль*
$\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ *кг/моль*
$\nu_1 = 5$ *моль*
$\nu_2 = 10$ *моль*
$t = 7^0\,C$
$p_c = 2{,}5$ *МПа*
$T_1 = 280K$
ρ - ?

Розв'язування:

На основі означення поняття густини (як фізичної величини) для даного випадку маємо

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V}, \tag{1}$$

де m_1 і m_2 - маси азоту і водню виражені відповідно через кількість речовини і молярну масу:

$$m_1 = \nu_1\mu_2; \qquad m_2 = \nu_2\mu_2. \tag{2}$$

Для визначення об'єму газу в балоні використаємо рівняння Менделєєва-Клапейрона для суміші газів:

$$p_c V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) RT = (\nu_1 + \nu_2) RT,$$

де R - молярна газова стала;
T - термодинамічна температура.

Звідси знайдемо:

$$V = \frac{(\nu_1 + \nu_2)RT}{p_c}. \tag{3}$$

Підставивши вирази m_1 і m_2 та V, одержимо

$$\rho = \frac{(V_1\mu_1 + V_2\mu_2)p_c}{(V_1 + V_2)RT} = 11{,}5кг/м^3.$$

Відповідь: $\rho = 11{,}5кг/м^3$.

Задача 4. Об'єм бульбашки повітря при піднятті її з дна озера на поверхню збільшується в *3* рази. Яка глибина озера?

$V_2 = 3V_1$
h-?

Розв'язування:

Вважаємо, що температура води в озері на довільній глибині стала. Тоді за законом Бойля-Маріотта маємо:

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

де p_1, p_2 - тиски повітря в бульбашці біля дна і поверхні озера.

Очевидно, що тиск повітря в бульбашці біля поверхні озера p_2 дорівнює атмосферному тиску p_0, тобто $p_2 = p_0$.

Тоді: $$p_1V_1 = 3p_0V_1,$$
звідси $$p_1 = 3p_0.$$

Отже, збільшення тиску біля дна озера дорівнює:
$$\Delta p = p_1 - p_0 = 3p_0 - p_0 = 2p_0.$$

З іншого боку, як відомо з гідростатики,
$$\Delta p = \rho g h,$$
де ρ - густина води;
h - глибина озера.

Прирівнюючи праві частини двох останніх рівнянь, маємо:
$$2p_0 = \rho g h,$$
звідси $$h = \frac{2p_0}{\rho g} = 20{,}6\ м.$$

Відповідь: $h = 20{,}6\ м.$

Задача 5. Визначити початкову температуру газу, що знаходиться у закритій посудині, якщо при збільшенні тиску на *0,4%* від початкового тиску температура виросла на *1 К*.

$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = 0{,}4 \cdot 10^{-2}$

$\Delta T = T_2 - T_1 = 1K$

T_1 - ?

Розв'язування

На основі рівняння Менделєєва-Клапейрона:
$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}; \quad V_1 = V_2 = const,$$
$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}; \quad \frac{p_2}{p_1} \ \ 1 = \frac{T_2}{T_1} \ \ 1,$$
звідси $$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}.$$

Знаходимо T_1: $$T_1 = \frac{p_1 \Delta T}{p_2 - p_1} = 250\ K.,$$

Відповідь: $T_1 = 250\ K.$

Задача 6. З балона місткістю *10 л* із стиснутим воднем внаслідок несправності вентиля витікає газ. При температурі $7^0\ C$ манометр показує $5 \cdot 10^6 Па$. Показання манометра не змінилось і при температурі $17^0\ C$. Визначити, скільки газу витекло.

$V = 10\ л = 10^{-2} м^3$

$T_1 = 273^0 C + 7^0 C = 280^0 K$

$p = 5 \cdot 10^6\ Па$

$T_2 = 273^0 C + 17^0 C = 290^0 K$

Δm - ?

Розв'язування:

Використовуючи рівняння Менделєєва-Клапейрона, запишемо:
$$pV = \frac{m_1}{\mu} R T_1.$$

Знайдемо звідси початкову масу водню:

$$m_1 = \frac{pV\mu}{RT_1}.$$

Аналогічно знайдемо масу m_2 водню після витікання:

$$m_2 = \frac{pV\mu}{RT_2}.$$

Отже маса газу, що витік, дорівнює:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{pV\mu}{RT_1} - \frac{pV\mu}{RT_2} = \frac{pV\mu}{R} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ кг.$$

Відповідь: $\Delta m = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ кг.$

***Задача** 7.* Є дві посудини з газом: одна - місткістю *3 л*, друга - *4 л*. В першій посудині газ знаходиться під тиском 2 атм, в другій - *1 атм*. Під яким тиском буде знаходитися газ, якщо з'єднати ці посудини між собою? Вважати, що температура в посудинах однакова і стала.

$V_1 = 3л = 3 \cdot 10^{-3} м^3$

$V_2 = 4л = 4 \cdot 10^{-3} м^3$

$p_1 = 2атм = 2{,}02 \cdot 10^5\ Па$

$p_1 = 1атм = 1{,}02 \cdot 10^5\ Па$

$p = ?$

Розв'язування

За законом Дальтона:

$$p = p_3 + p_4. \qquad (1)$$

Оскільки процес ізотермічний, то парціальний тиск газу в кожній посудині можна знайти за законом Бойля-Маріотта:

$$p_1V_1 = p_3V;\ p_2V_2 = p_4V;\ V = V_1 + V_2.$$

Звідси парціальний тиск газу в першій посудині після їх з'єднання:

$$p_3 = \frac{p_1V_1}{V}, \qquad (2)$$

в другій

$$p_4 = \frac{p_2V_2}{V}. \qquad (3)$$

Підставляючи вирази (2), (3) в рівняння (1), одержимо:

$$p = \frac{p_1V_1}{V} + \frac{p_2V_2}{V} = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V} = 1{,}41 \cdot 10^5\ Па.$$

Відповідь: $p = 1{,}41 \cdot 10^5\ Па.$

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Який тиск азоту, якщо середньоквадратична швидкість його молекул *500 м/с,* а густина *1,35 кг/м*^{3}?

Відповідь: *0,11 МПа.*

Задача 2. Знайти середню кінетичну енергію молекули газу при тиску *20 кПа*. Концентрація молекул $3 \cdot 10^{25}\ м^{-3}$.

Відповідь: 10^{-21} *Дж.*

Задача 3. Яка температура T газу, що перебуває під тиском $p = 0{,}5$ *МПа*, якщо в посудині об'ємом $V = 15$ *л* міститься $N = 1{,}8 \cdot 10^{24}$ молекул?

Відповідь: $T = \dfrac{pVN_A}{NR} = 301K.$

Задача 4. Яка внутрішня енергія одноатомного газу, який при температурі T займає об'єм V, якщо концентрація його молекул n?

Відповідь: $U = \dfrac{3}{2} nVkT.$

Задача 5. Яка середньоквадратична швидкість руху молекул газу, якщо, маючи масу *6 кг*, він займає об'єм *5* $м^3$ при тиску *200 кПа*?

Відповідь: *700 м/с.*

Задача 6. Дві посудини, заповнені повітрям при тисках $p_1 = 0{,}8$ *МПа* та $p_2 = 0{,}6$ *МПа*, мають об'єми $V_1 = 3$ *л* та $V_2 = 5$ л. Їх з'єднують трубкою, об'ємом якої можна знехтувати. Знайти, який тиск p установиться в посудинах. Температуру вважати сталою.

Відповідь: $p = \dfrac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 675$ *кПа.*

Газові закони

Задача 7. Яка кількість речовини міститься в газі, якщо при тиску *200 кПа* і температурі *240 К* його об'єм дорівнює *40 л*?

Відповідь: *4 моля.*

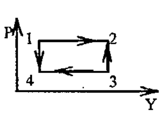
Задача 8. Під час нагрівання газу на $\Delta T = 1\ K$ при сталому тиску його об'єм збільшився вдвічі. В якому інтервалі температур нагрівали газ?

Відповідь: $T_1 = \dfrac{V_1 \Delta T}{V_2 \quad V_1} = 1K; \quad T_2 = \dfrac{V_2 \Delta T}{V_2 \quad V_1} = 2K$

Задача 9. Вертикальний циліндр з важким поршнем заповнено киснем, маса якого $m = 10$ *г*. Після збільшення температури на $\Delta T = 50\ K$ поршень піднявся на висоту $h = 7$ *см*. Знайти масу поршня M, якщо тиск газу над ним $p_0 = 0{,}1$ *МПа*. Площа поршня $S = 100$ $см^2$, молярна маса кисню $\mu = 0{,}032$ *кг/моль*.

Відповідь: $M = \dfrac{mR\Delta T}{\mu gh} \quad \dfrac{p_0 S}{g} = 85$*кг.*

Задача 10. На рисунку подано графік зміни стану ідеального газу в координатах p, V. Подати цей круговий процес (цикл) у координатах p, T і V, T.



Задача 11. Знайти густину азоту при температурі $t = 27°C$ і тиску $p=0,1МПа$. Молярна маса азоту $\mu = 0,028$ *кг/моль.*

Відповідь: $\rho = \frac{\mu p}{RT} = 1,12\frac{кг}{м^3}$.

Задача 12. Скільки молекул повітря виходить з кімнати об'ємом $V_0=120м^3$ при підвищенні температури від $t_1 = 15°C$ до $t_2=25°C$? Атмосферний тиск $p_0 = 10^5$ *Па.*

Відповідь: $N = \frac{p_0V_0(T_2 - T_1)N_A}{RT_1 - T_2} = 10^{25}$.

Задача 13. Яка температура газу в закритій посудині, якщо при нагріванні його на *140 К* тиск підвищився у *1,5* рази?

Відповідь: *7° С.*

Задача 14. При зменшенні об'єму газу вдвічі тиск підвищився на *120 кПа,* а абсолютна температура - на *10 %.* Яким був початковий тиск?

Відповідь: *100 кПа.*

Задача 15. З балона із стиснутим киснем випустили стільки газу, що тиск його впав з $p_1 = 10$ *МПа* до $p_2 = 8$ *МПа.* Яку частину маси кисню випустили?

Відповідь: $\frac{p_1 - p_2}{p_1} = 0,2$.

Задача 16. У балоні міститься газ при температурі *15° С.* У скільки разів зменшиться тиск газу, якщо *40%* його вийде з балона, а температура при цьому знизиться до *8° С?*

Відповідь: в *1,7* рази.

Задача 17. Яка різниця мас Δm повітря, що заповнює приміщення об'ємом $V = 50\ м^3$ взимку і влітку, якщо влітку температура в приміщенні досягає $t_1 = 40°\ C$, а взимку спадає до $t_2 = 0°\ C$? Атмосферний тиск $p_0 = 0,1МПа$. Молярна маса повітря $\mu = 0,029$ *кг/моль.*

Відповідь: $\Delta m = \frac{p_0V\mu}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = 8,2\,кг$.

Розділ 6. Основи термодинаміки

При розв'язуванні задач на цю тему рекомендується:

- встановити, які тіла входять у термодинамічну систему, що розглядається, а також виявити, що є причиною зміни внутрішньої енергії тіл системи;
- у випадку ізольованої замкнутої системи слід встановити, у яких тіл системи внутрішня енергія збільшується, а у яких зменшується;

- виявснити, чи відбуваються в системі тіл фазові переходи (випаровування або конденсація, плавлення або кристалізація);

- скласти рівняння теплового балансу $\sum Q_i = 0$, при цьому слід пам'ятати, що в цю суму доданки, що відповідають теплоті плавлення твердих тіл або теплоті пароутворення рідин входять зі знаком "+", а доданки, що відповідають теплоті кристалізації твердих тіл або теплоті конденсації пари, зі знаком "-";

- при розгляданні процесів, в яких відбувається теплообмін з навколишнім середовищем і здійснюється механічна робота, перший закон термодинаміки записується у вигляді $Q = \Delta U + A$, де Q - кількість теплоти, що передана системі, ΔU - зміна її внутрішньої енергії, A - робота, яку здійснює система.

Основні поняття

Внутрішня енергія ідеального одноатомного газу

$$U = \frac{3}{2}\nu RT,$$

зміна внутрішньої енергії

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R\Delta T,$$

де ν - кількість речовини;
T - термодинамічна температура,
$R = 8{,}31 Дж/моль \cdot К$ – газова стала.

Елементарна робота, що здійснюється газом при зміні об'єму dV

$$dA = pdV,$$

де p – тиск;

при зміні об'єму від V_1 до V_2 робота $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} pdV$,

при ізобарному процесі: $A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$.

Кількість теплоти, що необхідна для нагрівання тіла масою m від температури T_1 до температури T_2:

$$Q = cm\,(T_2 - T_1) = cm\Delta T,$$

де c - питома теплоємність речовини;
$C = c\,m$ – теплоємність тіла.

Перший закон термодинаміки

$$Q = \Delta U + A,$$

де Q - кількість теплоти, що передана газу (системі);
ΔU - зміна внутрішньої енергії ідеального газу,
A - робота, яку виконує газ.

При ізохорному процесі - $\Delta V=0$, $A=0$, $\Delta U=Q$, $Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$.

При ізобарному процесі $Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + p\Delta V = \frac{5}{2}\nu R\Delta T$.

При ізотермічному процесі $\Delta T = 0$, $\Delta U = 0$, $\Delta Q = A$. При адіабатичному процесі $\Delta Q = 0$, $A = -\Delta U$ (стискання газу – нагрівання, розширення газу – охолодження).

Коефіцієнт корисної дії теплового двигуна

$$\eta = \frac{A}{Q_1}100\% = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}100\%,$$

де A - робота, яку виконує двигун;

Q_1 - кількість теплоти, що одержана від нагрівника;

Q_2 - кількість теплоти, що передана холодильнику.

Для ідеальної теплової машини (цикл Карно) $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}100\%$,

де T_1 - температура нагрівника;

T_2 - температура холодильника.

Кількість теплоти, що виділяється при повному згоранні палива масою m

$$Q = qm,$$

де q - питома теплота згорання палива.

Кількість теплоти, що необхідна для плавлення кристалічного тіла масою m

$$Q = \lambda m,$$

де λ - питома теплота плавлення.

Кількість теплоти, що необхідна для випаровування рідини масою m

$$Q = rm,$$

де r - питома теплота пароутворення.

Сила поверхневого натягу рідини

$$F = \sigma l,$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу;

l - довжина границі (межі) поверхневого шару рідини.

Висота підняття (опускання) рідини в капілярі при повному змочуванні (незмочуванні)

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R},$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу;

ρ - густина рідини;

g - прискорення вільного падіння;

R - радіус капіляра.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Яку кількість теплоти потрібно передати *2 кг* льоду, взятому при температурі *–10° С*, щоб лід розплавити, а одержану воду нагріти до *100 °*С і випаровувати?

$m = 2кг$

$T_1 = 273^0C - 10^0C = 263\ K$

$T_{пл} = 273\ K$

$T_{пр} = 373\ K$

$Q - ?$

Розв'язування

Приймемо, що $\Delta U_1 = c_1 m\ (T_{пл} - T_1)$ - зміна внутрішньої енергії при нагріванні льоду до точки плавлення, $\Delta U_2 = \lambda m$ - зміна внутрішньої енергії при плавленні льоду; $\Delta U_3 = c_2 m\ (T_{пр} - T_{пл})$ - зміна внутрішньої енергії при нагріванні розплавленого льоду до точки пароутворення; $\Delta U_4 = rm$ - зміна внутрішньої енергії при випаровуванні води, де c_1 і c_2 питомі теплоємності льоду і води, відповідно.

Тоді повна кількість теплоти, яку потрібно передати тілу

$$Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + \Delta U_4.$$

Підставляючи в це рівняння вирази для ΔU_1, ΔU_2, ΔU_3, ΔU_4 знайдемо

$$Q = cm(T_{пл} - T_1) + \lambda m + c_2 m(T_{пр} - T_{пл}) + rm =$$

$$= m[c_1(T_{пл} - T_1) + \lambda + c_2(T_{пр} - T_{пл}) + r] = 6 \cdot 10^6\ Дж.$$

Відповідь: $Q = 6 \cdot 10^6\ Дж.$

Задача 2. Свинцева куля, що летить зі швидкістю *100 м/с,* пробиває дошку і вилітає з неї зі швидкістю *60 м/с*. На скільки нагрівається дробинка, якщо вважати, що на збільшення її внутрішньої енергії іде 0,4 втраченої кінетичної енергії? Питома теплоємність свинцю *с=125 Дж/(кг · К).*

$\upsilon_1 = 100 м/с$

$\upsilon_2 = 60 м/с$

$\alpha = 0,4$

$c = 125\ Дж/(кг \cdot К)$

$\Delta T - ?$

Розв'язування:

Зменшення кінетичної енергії кулі, що пробила дошку :

$$\Delta W_k = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_2^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right).$$

На нагрівання кулі потрібно витратити кількість теплоти, що дорівнює:

$$Q = cm\Delta T\ .$$

Має місце рівність: $cm\Delta T = \alpha \Delta W_k$.

Звідси знаходимо:

$$\Delta T = \frac{\alpha \Delta W_k}{cm} = \frac{\alpha\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right)}{2c} = 10\,°C.$$

Відповідь: $\Delta T = 10^0 C$.

Задача 3. Автомобіль витрачає *5,67 кг* бензину на шлях *50 км.* Знайти потужність *N,* що розвиває двигун автомобіля, якщо швидкість руху *72 км/год* і К.К.Д. двигуна *22 %.* Питома теплота згорання бензину *45 МДж/кг.*

$m = 5.67 кг$

$S = 50 \text{ км}$

$\upsilon = 72 \text{ км/год}$

$\eta = 22\% = 0,22$

$q = 45 МДж/кг$

N -?

Розв'язування

Кількість теплоти, що виділяється при згоранні бензину

$$Q = mq\ .$$

Корисна робота складає $\eta = 0,22$ від цієї кількості теплоти: $A = 0,22\ Q$.

Потужність двигуна: $N = \dfrac{A}{t} = \dfrac{0,22mq}{t}$,

де $t = \dfrac{S}{\upsilon}$ час, за який витрачається маса палива m .

Тому $$N = 0,22\frac{mq\upsilon}{S} = 22,5\ кВт.$$

Відповідь: $N = 22,5\ кВт.$

Задача 4. Скільки дров потрібно спалити в печі з К.К.Д. $\eta = 40\%$, щоб одержати з *200 кг* снігу, взятого при температурі $-10^0\ C$, воду при $20\ ^0C$.

$m = 200\ кг$

$t_1 = -10\ ^0C\ ,\ T_1 = 263^0\ C$

$t_2 = 20\ ^0C\ ,\ T_2 = 293^0\ C$

$t\ = 0\ ^0C\ ,\quad T\ = 273^0\ C$

$\eta = 40\% = 0,40$

$\lambda_{л} = 330\ 10^3 Дж/кг$

$c_л = 2,1\quad 10^3\ Дж/(кг\ К)$

$c_в = 4,2\quad 10^3\ Дж/(кг\ К)$

$q_{др} = 10^7\ Дж/кг$

$m_{др}$ - ?

Розв'язування

Для одержання з снігу води при температурі 20^0 С необхідно сніг нагріти до 0^0 С, розплавити його, а потім нагріти одержану воду:

$$Q_{нс} + Q_{плс} + Q_{нв} = \eta\ m_{др} q_{др},$$

$$c_л m\Delta T_1 + \lambda_л m\ + c_в m\Delta T_2 = \eta\ m_{др} q_{др},$$

$$m_{др} = \frac{c_в m\Delta T_2 + \lambda_с m\ + c_л m\ \Delta T_1}{q_{др}\eta} = 22\ кг.$$

Відповідь: $m_{др} = 22\ кг.$

Задачі для самостійного розв'язування

Внутрішня енергія і способи її зміни

Задача 1. Після занурення у воду з температурою *10° С* тіла, нагрітого до *100° С*, через деякий час установилась температура *40° С.* Якою стане температура води, якщо, не виймаючи першого тіла, в неї занурити ще одне таке саме, нагріте до *100° С*?

Відповідь: *55 °С.*

Задача 2. Свинцева куля летить із швидкістю *200 м/с* і попадає в земляний вал. На скільки підвищилась температура кулі, якщо *78%* її кінетичної енергії перейшло у внутрішню? Питома теплоємність свинцю *0,13 кДж/(кг·К).*

Відповідь: *на 120 К.*

Задача 3. Для приготування ванни ємністю *200 л* змішали холодну воду при *10° С* з гарячою при *60° С*. Які об'єми холодної та гарячої води треба взяти, щоб установилась температура *40° С*?

Відповідь: *80 л і 120 л.*

Задача 4. З висоти h вільно падає шматок металу, питома теплоємність якого c. На скільки зросла його температура при ударі об землю, якщо вважати, що k% механічної енергії перейшло у внутрішню?

Відповідь: $\Delta t = \dfrac{kgh}{100c}$.

Задача 5. Стальний осколок, падаючи з висоти *500 м,* мав біля поверхні землі швидкість *50 м/с*. На скільки зросла температура осколка, якщо вважати, що вся робота сили опору повітря пішла на його нагрівання? Питома теплоємність сталі *0,46 кДж/(кг·К).*

Відповідь: *на 8 К.*

Задача 6. Під час згоряння *1* $м^3$ природного газу за нормальних умов виділяється *36 МДж* енергії. Скільки енергії виділиться під час згоряння *10* $м^3$ газу, що перебуває під тиском *110 кПа* при температурі *7° С*?

Відповідь: *390 МДж.*

Задача 7. Під час ізобаричного нагрівання *800* молів газу на *500 К* йому надали кількість теплоти *9,4 МДж*. Знайти виконану роботу та приріст внутрішньої енергії газу.

Відповідь: *3,3 МДж, 6,1 МДж.*

Задача 8. У циліндрі об'ємом $V_1 = 190$ $см^3$ під поршнем міститься газ при температурі $T_1 = 323$ *К*. Знайти роботу, виконану під час нагрівання газу на $\Delta T = 100$ *К*. Маса поршня $m = 120$ *кг*, його площа $S = 50$ $см^2$. Атмосферний тиск $p_0 = 0,1$ *МПа.*

Відповідь: $A = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) V_1 \frac{\Delta T}{T_1} = 20$ *Дж* .

Задача 9. Під час ізотермічного розширення ідеального газу виконано роботу $A = 20$ *Дж*. Яку кількість теплоти надано газу?

Відповідь: $Q = A = 20$ *Дж.*

Задача 10. Наскільки змінилась внутрішня енергія $\nu = 10$ *моль* одноатомного газу під час його ізобаричного нагрівання на $\Delta T = 100$ *К*? Яку роботу виконано при цьому і яку кількість теплоти надано газу?

Відповідь: $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R \Delta T = 12.4$ *кДж*; $A = \nu R \Delta T = 8{,}3$ *кДж*;

$Q = \frac{5}{2}\nu R \Delta T = 20{,}7$ *кДж.*

Задача 11. У циліндрі двигуна внутрішнього згоряння утворюються гази з температурою $t_1 = 727°$ *С*. Температура відпрацьованих газів $t_2 = 100°$ *С*. Двигун споживає за одиницю часу $m_t = 36$ *кг/год* палива. Яку максимальну потужність може розвинути цей двигун? Питома теплота згоряння палива $q = 43$ *МДж/кг*.

Відповідь: $N = m_\tau q \frac{T_1 \quad T_2}{T_1} = 263$ *кВт.*

Задача 12. Температура нагрівника ідеальної теплової машини *117° С*, а холодильника – *27° С*. За *1с* нагрівник отримує *60 кДж* теплоти. Обчислити *ККД* машини, її потужність, а також кількість теплоти, яку дістає холодильник за *1с*.

Відповідь: *23%, 14кВт, 46 кДж.*

Задача 13. В ідеальній тепловій машині кожному кілоджоулю енергії, яку вона отримує від нагрівника, відповідає робота *300 Дж*. Знайти *ККД* машини і температуру нагрівника, якщо температура холодильника *280 К*.

Відповідь: *30 %, 400 К.*

Задача 14. Трактор розвиває потужність *60 кВт* і при цьому витрачає *18 кг* дизельного палива за годину. Питома теплота згоряння палива *42 МДж/кг*. Знайти ККД двигуна.

Відповідь: *29%.*

Задача 15. Алюмінієвий чайник масою $M = 400$ *г*, в якому міститься $m = 2$ *кг* води при $t_1 = 10°$ *С*, поставили на газовий пальник з

ККД $\eta=0,4\%$. Яка потужність N пальника, якщо через τ = *10 хв* вода закипіла, причому m_n = *20 г* води википіло? Питома теплоємність алюмінію c_{Al} =*0,88 кДж/кг·К*, води - c = *4,2 кДж/(кгК)*, питома теплота пароутворення r=*2,3 МДж/кг*.

Відповідь: $N = \dfrac{rm_n + (t_2 - t_1)(cm + c_a M)}{\eta\tau} = 3{,}5 кВт$, де t_2 = *100°C*.

Розділ 7. Електростатика

При розв'язуванні задач на тему "Електростатика" рекомендується:

- зробити рисунок, показати на ньому заряди, провідники, ємності;

- зобразити напрям силових ліній електричних полів, а також всі сили, які діють на заряджені тіла;

- визначити силу взаємодії між зарядами за законом Кулона тільки в тому випадку, якщо заряди можна вважати точковими;

- для визначення числових значень зарядів, після того, як заряджені тіла дотикаються один одного, застосовувати закон збереження електричних зарядів;

- при дії на заряджене тіло декількох сил або полів застосовувати принцип суперпозиції;

- у випадку рівноваги системи заряджених тіл використовувати для кожного з них загальні умови рівноваги ($\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i = 0$);

- при розрахунку переміщень, швидкостей, прискорень і мас електричних зарядів використовувати формули кінематики, другий закон Ньютона і закон збереження енергії.

Основні поняття

Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

де F - модуль сили взаємодії двох точкових зарядів q_1 і q_2 ;

q_1 і q_2 - модулі зарядів: однойменні заряди відштовхуються, різнойменні - притягуються;

r - відстань між зарядами. $\qquad \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9 \dfrac{м}{Ф};$

ε_0 - електрична стала; ε_0 = *8.85·10*$^{-12}$ *Ф/м;*

ε- діелектрична проникність середовища.

Закон збереження електричного заряду

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = const \text{ (для електрично ізольованої системи).}$$

Напруженість електростатичного поля в даній точці

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

де $\vec{F}$ - сила, з якою електростатичне поле діє на розміщений в даній точці поля позитивний точковий (пробний) заряд q_0.

Принцип суперпозиції полів

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i,$$

де $\vec{E}_i$ - напруженість поля, що створює окремий заряд q_i;
$\vec{E}$ - результуюча напруженість поля, що створена в даній точці поля всіма зарядами.

Модуль напруженості електростатичного поля

а) точкового заряду q на відстані r від нього:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2};$$

б) нескінченної рівномірно зарядженої площини :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

де $\sigma = \frac{q}{S}$ – поверхнева густина електричного заряду.

в) між двома рівномірно зарядженими нескінченними площинами з поверхневою густиною заряду σ:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon};$$

г) зарядженої провідної сфери (кулі) радіусом R на відстані r $(r \geq R)$ від центра сфери

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2},$$

де q - заряд сфери;
при $r < R$ (всередині сфери) $\quad E = 0.$

Потенціал електростатичного поля

а) точкового заряду q на відстані r від нього $\quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q}{r};$

б) зарядженої провідної сфери (кулі) радіусом R на відстані r $(r > R)$ від центра сфери :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q}{r},$$

де q - заряд сфери;

при $r \le R$ (всередині сфери) $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q}{R}$.

Робота сил електростатичного поля з переміщення заряду Q

$$A = Q\,(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ - різниця потенціалів між точками поля.

Якщо q і Q точкові заряди, то

$$A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Зв'язок між модулем напруженості однорідного електричного поля і різницею потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l},$$

де l - відстань між точками поля з потенціалами φ_1 і φ_2.

Електроємність провідника

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

де q - заряд, а φ - потенціал провідника.

Електроємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де S - площа кожної з пластин конденсатора;
d - відстань між пластинами.

Електроємність провідної сфери (кулі) радіусом R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Електроємність n конденсаторів, з'єднаних паралельно

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

і послідовно

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i},$$

де C_i - ємність окремого конденсатора.

Енергія електричного поля конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де q - заряд,
U - напруга між пластинами конденсатора з електроємністю C.

Об'ємна густина енергії електричного поля

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2,$$

де V - об'єм, що займає електричне поле з напруженістю E.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Дві однакові невеликі кульки масою *0,1 г* кожна, підвішені на нитках довжиною *25 см*. Після того, як кулькам було передано однакові заряди, вони розійшлись на відстань *5 см*. Визначити заряди кульок.

$m_1 = m_2 = m = 0{,}1\ г = 10^{-4}\ кг$

$l_1 = l_2 = l = 25 см = 25 \cdot 10^{-2}\ м$

$r = 5 см = 5 \cdot 10^{-2}\ м$

$q - ?$

Розв'язування

На кожну з відхилених кульок діють: $m\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{T}$ - сила натягу нитки, $\vec{F}$ - електрична сила взаємодії кульок (рис. 26). Запишемо умову рівноваги кульок в векторній формі під дією прикладених сил:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0\,.$$

Запишемо це рівняння в проекціях на вибрані напрями осей X і Y:

$$-T\sin\alpha + F = 0\,, \qquad (1)$$
$$T\cos\alpha - mg = 0.$$

Враховуючи, що $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, запишемо рівняння (1) у вигляді :

$$T\sin\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, T\cos\alpha = mg.$$

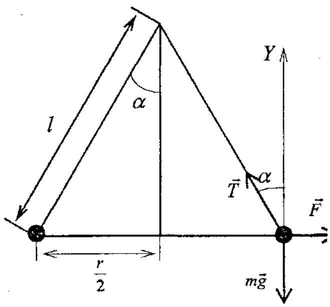


Рис. 26

Розділивши почленно перше рівняння на друге, одержимо

$$tg\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 mg}.$$

Оскільки кут α малий, то $tg\alpha \approx \sin\alpha = \dfrac{r}{2l}$, тоді

$$\frac{r}{2l} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 mg},$$

звідси

$$q = r\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r m g}{l}}, \quad q = 5{,}2 \cdot 10^{-9}\ Кл.$$

Відповідь: $q = 5{,}2 \cdot 10^{-9}\ Кл.$

Задача 2. Дві однакові металеві кульки з однойменними зарядами відштовхувались з певною силою. Однією кулькою доторкнулись до поверхні другої і повернули їй початковий стан, від чого сила відштовхування збільшилась вдвічі. Знайти початкове відношення зарядів.

$r_1 = r_2 = r$	
$F_2 = 2F_1$	
$\frac{q_2}{q_1}$ - ?	

Розв′язування

Позначимо через q_1 і q_2 заряди на обох кульках. Після дотику на них будуть однакові заряди $0,5(q_1 + q_2)$.

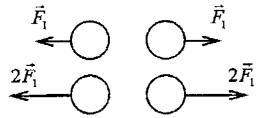


Рис. 27

Враховуючи умову задачі для співвідношення сил, можна записати

$$F_1 = \frac{F_2}{2} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{(q_1 + q_2)^2}{4r^2} \Rightarrow q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_2^2 = 0\,.$$

Вводячи співвідношення $x = \frac{q_2}{q_1}$, приходимо до квадратного рівняння, розв'язок якого $x_{1,2} = 1$.

Відповідь: $\frac{q_2}{q_1} = 1$.

Задача 3. У вершинах квадрата знаходяться однакові позитивні заряди q. Який заряд необхідно розмістити в центрі квадрата зі стороною a, щоб система була в рівновазі?

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$	
a	
q_x - ?	

Розв′язування

На рисунку вкажемо розташування зарядів і покажемо сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, з якими три заряди діють на четвертий (рис. 28).

Для зрівноважування результуючої $\vec{F}_4$ усіх цих сил необхідно ввести в центр квадрата негативний заряд ($-q_x$), притягання до якого має бути рівним і протилежним до $\vec{F}_4$. Обчислюємо модуль результуючої сили $\vec{F}$, враховуючи, що $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, а довжина діагоналі квадрата в $\sqrt{2}$ разів більша від довжини сторони:

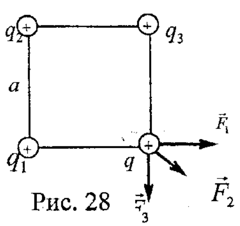


Рис. 28

$$F_4 = \sqrt{2}F_1 + F_3 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{\sqrt{2}}{a^2} \quad \frac{1}{2a^2}\ ,$$

де a - сторона квадрата.

Прирівнюючи F_4 і силу притягання до шуканого заряду, приходимо до рівняння, з якого визначаємо модуль заряду:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q q_x \cdot \frac{2}{a^2} \Rightarrow q_x = q\frac{2\sqrt{2}+1}{4}.$$

Відповідь: $q_x = q\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$.

Задача 4. Порошинка масою 10^{-8} *г* висить між пластинами плоского повітряного конденсатора, до якого прикладена напруга *5000 В*. Відстань між пластинами дорівнює *5 см*. Яка величина заряду порошинки ?

$m = 10^{-8} г = 10^{-11}$ *кг*
$U = 5 \cdot 10^{3}$ *В*
$d = 5 \cdot 10^{-2}$ *м*
q - ?

Розв′язування

На порошинку в електричному полі діють: $m\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{F}$ - електрична сила з боку поля (рис.29).

Запишемо умову рівноваги порошини в скалярній формі відносно осі Y:

$$F - mg = 0,$$

звідси

$$F = mg.$$

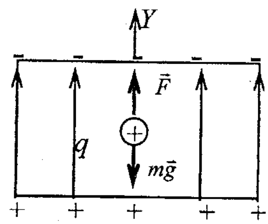


Рис. 29

Враховуючи, що $F = qE$ і $E = \dfrac{U}{d}$,

одержимо:

$$\frac{qU}{d} = mg,$$

звідси

$$q = \frac{mgd}{U} = 9{,}8 \cdot 10^{-16} \text{ Кл}.$$

Відповідь: $q = 9{,}8 \cdot 10^{-16}$ *Кл*.

Задача 5. Яку швидкість має електрон, що пролетів прискорювальну різницю потенціалів *200 В* (рис.30).

$U = 200$ *В*
υ - ?

Розв′язування

На електрон в електричному полі діє електрична сила $F=|e|\cdot E$, під дією якої він летить рівноприскорено проти напряму поля.

При цьому електрична сила буде здійснювати роботу з переміщення електрона проти поля, що дорівнює зміні кінетичної енергії електрона:

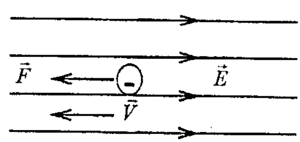


Рис. 30

$$A = \Delta W_к = W_к - W_{ко.}.$$

Враховуючи, що

$$A = /e/U,\ W_к = \frac{mv^2}{2},\quad W_{к0} = 0,$$

одержимо

$$|e|U = \frac{mv^2}{2},$$

звідси:

$$v = \sqrt{\frac{2|e|U}{m}} = 8{,}4 \cdot 10^6\ м/с.$$

Відповідь: $v = 8{,}4 \cdot 10^6\ м/с.$

Задача 6. Три заряджені краплі води радіусом *1 мм* кожна зливаються в одну велику краплю. Знайти потенціал великої краплі, якщо заряд малої 10^{-10} *Кл.*

$n = 3$	Розв'язування
$r = 1мм = 10^{-3}\ м$	Потенціал великої краплі
$q = 10^{-10}\ Кл$	
φ - ?	

$$\varphi = \frac{Q}{C}, \tag{1}$$

де $Q = nq;$ $\qquad C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$

Радіус великої краплі R знаходимо з умови

$$M = nm, \tag{2}$$

де $m = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ - маса маленької краплі,

$M = \rho V_1 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$ - маса великої краплі.

З врахуванням написаних виразів для m і M рівність (2) можна привести до вигляду

$$\rho\ \ \frac{4}{3}\pi R^3 = n\rho\frac{4}{3}\pi V^3,$$

звідси $R = r\sqrt[3]{n}$. Підставляючи вираз для Q, C і R в рівняння (1), отримаємо

$$\varphi = \frac{nq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r\sqrt[3]{n}} = 1{,}87 \cdot 10^3\ B.$$

Відповідь: $\varphi = 1{,}87 \cdot 10^3\ B.$

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Заряд однієї з двох однакових металевих кульок у *5* разів більший, ніж іншої. Однією кулькою доторкнулись до другої, а потім знову відвели на попередню відстань. У скільки разів змінилася сила їх взаємодії, якщо заряди кульок однойменні? різнойменні?

Відповідь: *збільшилась у 1,8 рази; зменшилась у 1,25 рази.*

Задача 2. Два точкових заряди, розміщені у повітрі на відстані $r_1 = 5$ *см*, взаємодіють із силою $F_1 = 120$ *мкН*. Ці самі заряди, розміщені у рідкому діелектрику на відстані $r_2 = 10$ *см*, взаємодіють із силою $F_2 = 15$ *мкН*. Яка діелектрична проникність діелектрика?

Відповідь: $\varepsilon = \dfrac{F_1 r_1^2}{F_2 r_2^2} = 2.$

Задача 3. Дві однаково заряджені кульки, які підвішені на нитках однакової довжини в одній точці, розійшлись у повітрі на кут α. Яка густина матеріалу кульок, якщо при їх зануренні в гас кут між нитками не змінився? Густина гасу $\rho = 800$ *кг/м*^{3}, діелектрична проникність $\varepsilon = 2$.

Відповідь: $\rho = \dfrac{\varepsilon \rho_2}{\varepsilon - 1} = 1600 кг/м^3.$

Задача 4. Електрон рухається в напрямку однорідного електричного поля з напруженістю $E = 120$ *В/м*. Яку відстань пролетить електрон до повної втрати швидкості, якщо його початкова швидкість $\upsilon = 1000$ *км/с*? За який час буде пройдено цю відстань? Питомий заряд електрона $\gamma = \dfrac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Відповідь: $S = \dfrac{\upsilon^2}{2\gamma E} = 2{,}37 см; \; t = \dfrac{V}{\gamma E} = 47 нс.$

Задача 5. У скільки разів і як треба змінити відстань між зарядами при збільшенні одного з них у *4* рази, щоб сила взаємодії лишилась однією і тією ж?

Відповідь: *збільшити вдвічі.*

Задача 6. Відстань між однаковими металевими кульками, які мають заряди q та $4q$, дорівнює r. Якою має бути відстань x між ними після того, як однією з них доторкнулись до іншої, щоб сила взаємодії не змінилась?

Відповідь: $x = 1{,}25r$.

Задача 7. Відстань між двома зарядами $q_1 = 0{,}27$ *мкКл* і $q_2 = 0{,}17$ *мкКл* дорівнює $l = 20$ *см*. Визначити, в якій точці на прямій між зарядами напруженість поля дорівнює нулю.

Відповідь: на відстані $r_1 = \frac{l}{\sqrt{\frac{q_2}{q_1}+1}} = 11{,}2 см$ від заряду q_1.

Задача 8. Позитивно заряджена кулька масою *0,18 г* з густиною речовини *1800 кг/м^3* перебуває в підвішеному стані в рідкому діелектрику з густиною *900 кг/м^3*. У діелектрику діє електричне поле з напруженістю *45 кВ/м*, спрямованою вгору. Знайти заряд кульки.

Відповідь: *20 нКл.*

Задача 9. Між двома пластинами, розміщеними горизонтально у вакуумі на відстані *4,8 мм* одна від одної, перебуває у рівновазі заряджена крапля масла масою *10 нг*. Скільки "надлишкових" електронів має крапля, якщо до пластин прикладена напруга *1 кВ*? Після опромінення краплі світлом вона почала рухатись униз з прискоренням *6 м/с^2*. Скільки електронів втратила крапля?

Відповідь: *2940, 1800.*

Задача 10. У двох точках напруженість поля точкового заряду відрізняється в *4* рази. У скільки разів відрізняються потенціали у цих точках?

Відповідь: у *2 рази.*

Задача 11. Потік електронів, які набули швидкості під дією напруги $U_1 = 5000\ В$, влітає між обкладинками плоского конденсатора паралельно їм. Яку найменшу напругу U_2 треба прикласти до конденсатора, щоб електрони не вилітали з нього, якщо довжина конденсатора $l = 5\ см$, а відстань між обкладинками $d = 1\ см$?

Відповідь: $U_2 = \frac{2d^2U_1}{l^2} = 400\,В.$

Задача 12. Деяку кількість N однакових круглих крапель ртуті заряджені до одного і того самого потенціалу φ. Знайти потенціал великої краплі, що утвориться після злиття цих крапель.

Відповідь: $\Phi = \sqrt[3]{N^2}$.

Задача 13. Електрон, рухаючись під дією електричного поля, збільшує швидкість від *10* до *30 Мм/с*. Знайти різницю потенціалів між початковою і кінцевою точками переміщення.

Відповідь: *-2,3 кВ.*

Задача 14. Відстань між зарядами *10 нКл* і *-1 нКл* дорівнює *1,1м*. Знайти напруженість поля в точці на прямій, що з'єднує заряди, в якій потенціал дорівнює нулю.

Відповідь: *990 В/м.*

Задача 15. Електрон перемістився в електричному полі із точки з потенціалом *200 В* у точку з потенціалом *300 В.* Знайти кінетичну енергію електрона, зміну потенціальної енергії взаємодії його з полем і набуту електроном швидкість. Початкова швидкість електрона дорівнює нулю.

Відповідь: $W_к = 1{,}6\cdot 10^{-17}$ *Дж;* $\Delta W_п = -1{,}6\cdot 10^{-17}$ *Дж;* $\upsilon = 5{,}9$ *Мм/с.*

Задача 16. Заряди по *0,1 мкКл* кожний розміщено на відстані *6 см* один від одного. Знайти напруженість і потенціал у точці, яка лежить на відстані *5 см* від кожного із зарядів. Розв'язати задачу для випадків:а) обидва заряди позитивні; б) заряди різнойменні.

Відповідь: *а) 576 кВ/м; 36 кВ; б) 432 кВ/м; 0.*

Задача 17. Яка ємність провідника, потенціал якого змінюється на *10 кВ*, якщо йому надати заряд *5 нКл*?

Відповідь: *0,5 пФ.*

Задача 18. Площа кожної обкладки плоского конденсатора дорівнює *520* $см^2$. Якою має бути відстань між ними у повітрі, щоб ємність конденсатора дорівнювала *46 пФ?*

Відповідь: *1 см.*

Задача 19. Якої ємності конденсатор треба приєднати до конденсатора ємністю *400 пФ*, щоб ємність батареї конденсаторів дорівнювала *80 пФ?* Як його треба приєднати (послідовно чи паралельно)?

Відповідь: *100 пФ; послідовно.*

Енергія електричного поля

Задача 20. Імпульсна лампа живиться від конденсатора ємністю *800 мкФ*, зарядженого до напруги *300 В.* Знайти енергію спалаху і його середню потужність, якщо тривалість розряду конденсатора *2,4 мс.*

Відповідь: *36 Дж, 15 кВ.*

Задача 21. Який заряд q надали кулі, якщо її зарядили до потенціалу $\varphi = 100$ *В* і при цьому енергія електричного поля кулі $W = 2{,}02$ *Дж*?

Відповідь: $q = \dfrac{2W}{\varphi} = 0{,}4\,мКл.$

Задача 22. Пластинка з діелектрика повністю заповнює простір між обкладинками плоского конденсатора. Діелектрична проникність пластинки ε, ємність конденсатора з пластинкою *C*, його заряд *q*. Яку роботу *A* треба виконати, щоб витягнути пластинку з конденсатора? Вважати, що пластинка ковзає по обкладинках без тертя.

Відповідь: $A = \dfrac{q^2(\varepsilon - 1)}{2C}$.

Задача 23. Відстань між пластинами плоского конденсатора з діелектриком, який має діелектричну проникність *2,1*, дорівнює *2 мм*, а напруга між пластинами *200 В*. Знайти густину енергії поля.

Відповідь: *93 мДж/м³*.

Задача 24. Під час розрядження батареї, що складається з $n = 20$ паралельно з'єднаних конденсаторів однакової ємності $C = 4$ *мкФ*, виділилась кількість теплоти $Q = 10$ *Дж*. До якої різниці потенціалів були заряджені конденсатори?

Відповідь: $U = \sqrt{\dfrac{2Q}{nC}} = 500B.$

Розділ 8. Постійний струм

При розв'язуванні задач на тему "Постійний струм" рекомендується:

- зобразити електричну схему, вказати на ній всі елементи електричного кола і напрями струмів;
- визначити, якщо це необхідно, точки з однаковими потенціалами, враховуючи при цьому, що струм між такими точками електричного кола не проходить;
- у складному електричному колі виділити ділянки послідовного і паралельного з'єднання провідників, спростити схему, замінивши окремі ділянки еквівалентними їм відносно опору;
- з'ясувати суть описаних у задачі явищ, визначити, що в даній ситуації слід розуміти як корисну потужність чи роботу і чи можна знехтувати втратами потужності у підвідних провідниках;
- використати основні співвідношення між величинами, виконати алгебраїчні перетворення і визначити шукану величину.

Основні поняття

Сила електричного струму

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \text{ або } I = \frac{q}{t},$$

де Δq - заряд, що проходить через поперечний переріз провідника *S* за проміжок часу Δt.

Густина електричного струму

$$\vec{j} = en < \upsilon >,$$

де e - $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ $Кл$ - елементарний електричний заряд (заряд носіїв);
n - концентрація носіїв;
$\langle \upsilon \rangle$ - середня швидкість впорядкованого руху носіїв заряду;

$$j = \frac{I}{S}.$$

Закон Ома для ділянки кола

$$I = \frac{U}{R},$$

де I - сила струму;
U - напруга на кінцях ділянки кола;
$R = \rho \frac{l}{S}$ - опір провідника довжиною l і площею S;
ρ- питомий опір матеріалу провідника.

Опір n резисторів, з'єднаних:

1) послідовно $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$;

2) паралельно $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$,

де R_i - опір окремого резистора.

Залежність питомого опору провідника від температури

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

де ρ_0 - питомий опір провідника при температурі 0°С;
α - температурний коефіцієнт опору.

Закон Ома для замкненого кола

$$I = \frac{E}{R + r},$$

де $E = \frac{A_c}{q}$ - електрорушійна сила джерела струму;
A_C - робота сторонніх сил (сил неелектричного походження) по переміщенню електричного заряду q по замкненому колу;
R - зовнішній опір (опір навантаження);
r - внутрішній опір (опір джерела струму).

Сила струму в замкненому колі

а) при послідовному з'єднанні n однакових джерел струму

$$I = \frac{nE}{R + n \cdot r},$$

де E - ЕРС одного джерела;
r - його внутрішній опір;
R - опір навантаження.

б) при паралельному з'єднанні n однакових джерел струму

$$I = \frac{E}{R + \frac{r}{n}}.$$

Робота A і потужність P електричного струму

$$A = qU = IUt = I^2Rt = \frac{U^2t}{R};$$

$$P = \frac{A}{t} = IU = I^2R = \frac{U^2}{R},$$

де I - сила струму;
U - напруга;
R - опір;
t - час.

Закон Джоуля-Ленца

$$Q = I^2Rt,$$

де Q - кількість теплоти, що виділяється в провіднику з опором R протягом часу t;
I - сила струму в провіднику.

Повна потужність, що розвивається джерелом струму

$$P = IE = \frac{E^2}{R+r}.$$

Корисна потужність, тобто потужність, що виділяється на навантаженні R,

$$P_0 = IU = \frac{E^2R}{(R+r)}.$$

$$P_0 = P_{0\,max} \text{ при } R = r.$$

ККД джерела струму

$$\eta = \frac{P_0}{P}100\% = \frac{R}{R+r}100\%.$$

Приклади розв'язування задач

Задача 1. По залізному провіднику, діаметр якого $d = 0{,}6$ *мм*, тече струм силою $I = 16\ A$. Визначити середню швидкість $\langle\upsilon\rangle$ направленого руху електронів, вважаючи, що концентрація n вільних електронів дорівнює концентрації n' атомів провідника.

Дано	Розв'язування
$d = 0{,}6$ *мм* $I = 16\ A$	Середню швидкість $\langle\upsilon\rangle$ направленого упорядкованого руху електронів визначають за формулою
$\langle\upsilon\rangle$ - ?	

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{l}{t}, \qquad (1)$$

де l - довжина провідника;

t - час, протягом якого всі вільні електрони, що знаходяться у відрізку провідника між двома перерізами, перенесуть заряд $q = eN$ і створять струм силою

$$I = \frac{q}{t} = \frac{eN}{t}, \qquad (2)$$

де e - елементарний заряд;

N - число електронів у відрізку провідника об'ємом V.

$$N = nV = nlS, \qquad (3)$$

де S- площа перерізу.

За умовою задачі $n = n'$. Густина тіла $\rho = n \cdot m_0$, де m_0 - маса однієї молекули.

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A},$$

де μ - молярна маса;

N_A - стала Авогадро.

Тому

$$n = \frac{\rho}{m_0} = \frac{\rho N_A}{\mu},$$

$$N = \frac{\rho N_A}{\mu} lS,$$

$$I = \frac{\rho N_A}{\mu t} l \Rightarrow l = \frac{I\mu t}{N_A \rho S e}.$$

Підставивши вираз l в формулу (1) одержимо

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{I\mu t}{N_A \rho S e t} = \frac{I\mu}{N_A \rho S e} = 4{,}20\ мм/с.$$

Відповідь: $\langle v \rangle = 4{,}20\ мм/с.$

Задача 2. Амперметр, розрахований на струм не більше *0,1 А*, вирішили використати для вимірювання струмів до *5 А*. Обчислити опір шунта, якщо внутрішній опір амперметра $R_A = 4\ Ом$. Яким повинен бути поперечний переріз шунта з міді, якщо його довжина $l = 10\ см$ (питомий опір міді $1{,}72 \cdot 10^{-8}\ Ом{\cdot}м$) ?

$I_a = 0,1\ A$

$I = 5\ A$

$R_A = 4\ Ом$

$l = 10\ см = 0.10\ м$

$\rho = 1,72 \cdot 10^{-8}\ Ом \cdot м$

$R_ш$ - ? $S_ш$ - ?

Розв′язування

Зробимо таке розгалуження кола, щоб через амперметр ішов струм, який не перевищує максимально допустимий для нього I_a.

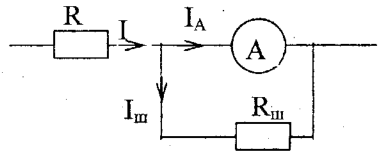


Рис. 31

На ділянці з шунтом струм I розгалужується на I_A та $I_ш$, причому виконуються очевидні співвідношення: $I = I_A + I_ш$; $U_ш = U_A$.

Згідно із законом Ома для ділянки кола постійного струму останню рівність записуємо:

$$I_ш R_ш = I_A \cdot R_A.$$

$$\begin{cases} I = I_A + I_ш \\ I_ш R_ш = I_A R_A \end{cases},$$

$$I = I_A\left(1 + \frac{R_A}{I_ш}\right).$$

Звідси

$$R_ш = \frac{R_A}{\left(\frac{I}{I_A} - 1\right)} = 0,081\, Ом.$$

З формули

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

визначимо переріз шунта

$$S_ш = \frac{\rho l}{R_ш} = 0,21 мм^2.$$

Відповідь: $R_ш = 0,081$ Ом; $S_ш = 0,21\ мм^2$.

Задача 3. Вольтметр з внутрішнім опором $R_B = 10$ *кОм* розрахований на вимірювання напруг до *5 В*. Виникла необхідність вимірювати за його допомогою напруги до *30 кВ*. Обчислити додатковий опір для таких вимірювань.

$R_B = 10$ кОм

$U_B = 5$ В

$U = 30 \cdot 10^3$ В

$R_д$ – ?

Розв′язування

Вольтметр під’єднують паралельно до ділянки з вимірюваним значенням напруги. Для того, щоб на його клемах напруга не перевищувала *5 В*, послідовно з ним необхідно під’єднати додатковий опір так, як показано на рис. 32.

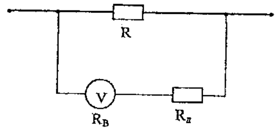


Рис. 32

Для з'єднання послідовно вольтметра з R_B і додаткового опору $R_д$ можна записати систему рівнянь

$$\begin{cases} U = U_B + U_д \\ \dfrac{U_д}{R_д} = \dfrac{U_B}{R_B} \end{cases}.$$

Розв′язуючи її, знайдемо формулу обчислення напруги U через U_B і під'єднаний опір :

$$\mathrm{U} = \mathrm{U_B}\left(1 + \frac{R_д}{R_B}\right).$$

Звідси

$$R_д = R_B\,(U \cdot U_B^{-1} - 1) = 59{,}99 \cdot 10^6\ Ом = 59{,}99\ МОм.$$

Відповідь: $R_д = 59{,}99\ МОм.$

Задача 4. При зовнішньому опорі R_1 по колу іде струм I_1. При зовнішньому опорі R_2 по колу іде струм I_2. Знайти ЕРС і внутрішній опір джерела струму.

$I_1 = I_1$
$R_1 = R_1$
$R_2 = R_2$
$I_2 = I_2$
E - ? r - ?

Розв'язування:

Запишемо закон Ома для першого і другого випадку:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + r}, \qquad I_2 = \frac{E}{R_2 + r}.$$

Поділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\dfrac{E}{R_1 + r}}{\dfrac{E}{R_2 + r}} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}.$$

Перетворюємо:

$$I_1R_1 + I_1r = I_2R_2 + I_2r,$$

$$r = \frac{I_2R_2 \quad I_1R_1}{I_1 \quad I_2}.$$

Підставляючи величину r, наприклад, в перше рівняння, знайдемо ЕРС джерела струму:

$$E = I_1(R_1 + r) = I_1\left(R_1 + \frac{I_2R_2 - I_2}{I_1 - I_2}\right) =$$

$$= \frac{I_1(I_1R_1 - I_2R + I_2R_2 - I_1R_1)}{I_1 - I_2} = \frac{I_1I_2(R_2 - R_1)}{I_1 - I_2}.$$

Відповідь: $E = \dfrac{I_1I_2(R_2 - R_1)}{I_1 - I_2}$; $r = \dfrac{I_2R_2 - I_1R_1}{I_1 - I_2}$.

Задача 5. В електричному колі при зовнішніх опорах *12 Ом* і *3 Ом* виділяється однакова потужність. Знайти внутрішній опір джерела.

$N_1 = N_2 = N$ $R_1 = 12$ *Ом* $R_2 = 3$ *Ом*	
r-?	

Розв'язування

За законом Ома для замкненого кола, для двох значень зовнішнього опору маємо:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + r}, \qquad I_2 = \frac{E}{R_1 + r}$$

або

$$E = I_1(R_1 + r), \qquad E = I_2(R_2 + r). \tag{1}$$

Сила струму зв'язана з потужністю співвідношенням $N = I^2R$, звідси

$$I = \sqrt{\frac{N}{R}}$$

Підставивши $I_1 = \sqrt{\dfrac{N}{R_1}}$ і $I_2 = \sqrt{\dfrac{N}{R_2}}$ у вираз (1), одержуємо:

$$E = \sqrt{\frac{N}{R_1}}(R_1 + r); E = \sqrt{\frac{N}{R_2}}(R_2 + r). \tag{2}$$

Прирівнюючи праві частини виразів (2) і, перетворюючи одержану рівність, знаходимо:

$$r = \frac{\sqrt{R_1}R_2 \quad \sqrt{R_2}R_1}{\sqrt{R_2} \quad \sqrt{R_1}} = \frac{\sqrt{R_1R_2}\left(\sqrt{R_2} \quad \sqrt{R_1}\right)}{\sqrt{R_2} \quad \sqrt{R_1}} = \sqrt{R_1R_2} = 6 \text{ Ом}.$$

Відповідь: $r = 6$ *Ом.*

Задача 6. Яким має бути опір споживача *R*, щоб на ньому виділялась максимальна потужність, якщо струм створюється джерелом з ЕРС *12 В* і внутрішнім опором *2 Ом*? Який при цьому *ККД* джерела струму?

$E = 12$ *В* $r = 2$ *Ом*	
R - ? η - ?	

Розв'язування

Наведемо схему (рис. 33).

За формулою

$$N_R = I^2 R$$

обчислимо ту потужність, яку виділяє струм I на споживачі (корисна потужність)

$$N_R = I^2 R.$$

Враховуючи закон Ома для повного кола $I = \frac{E}{R+r}$, маємо

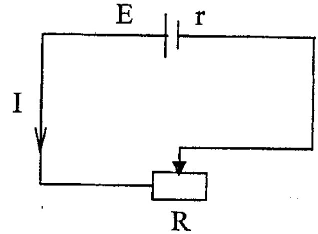


Рис. 33

$$N_R = \frac{E^2 R}{(R+r)^2} = \frac{E^2}{R + 2r + r^2 \cdot R^{-1}}.$$

Очевидно максимальне значення потужності відповідає мінімальному значенню функції у знаменнику. Для обчислення екстремального значення $x + 2r + \frac{r^2}{x}$, знайдемо похідну цієї функції, де $x = R$ змінна величина, і прирівнюємо її до нуля:

$$1 - \frac{r^2}{x_0^2} = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно x_0, дістанемо

$$x_0 = r \rightarrow R = r.$$

Отже, екстремальне значення N_R досягається при рівності опору споживача і внутрішнього опору джерела струму:

$$N_R^{max} = \frac{E^2}{4r} = 18 \ Вт.$$

Відношення корисної потужності джерела $N_R = I^2 R$ до її повної потужності називається ККД джерела. У нашому випадку

$$\eta = \frac{N_R}{N} = \frac{I^2 R}{I^2 (R+r)} = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Отже, виділяючи максимальну потужність у споживачі, таку саму потужність джерело всередині себе перетворює у теплоту.

Відповідь: $R = r = 2$ *Ом*; $\eta = 50$ %.

***Задача** 7.* Електродвигун з опором обмотки $R = 4$ *Ом* споживає постійний струм $I = 10$ *А* при напрузі $U = 220$ *В*. Обчислити повну потужність, механічну потужність і ККД двигуна.

$R = 4$ *Ом*
$I = 10$ *А*
$U = 220$ *В*
N = ? $N_{мех}$ - ? η - ?

Розв'язування

Повна потужність двигуна - добуток струму в ньому на підведену напругу:

$$N = I \cdot U = 2{,}2 \ кВт.$$

Механічна потужність менша від повної на потужність теплових втрат, тому

$$N_{мех} = I \cdot U - I^2 \cdot R = I\,(U - IR) = 1{,}8\ кВт.$$

Коефіцієнт корисної дії дорівнює

$$\eta = \frac{N_{мех}}{N} = 81{,}8\%.$$

Відповідь: $N = 2{,}2\ кВт$; $N_{мех} = 1{,}8\ кВт$; $\eta = 81{,}8\%$.

Задачі для самостійного розв'язування
Сила струму. Опір. Закон Ома для ділянки кола

Задача 1. Конденсатор ємністю *100 мкФ* зарядили до напруги *500 В* за *0,5 с*. Яке було середнє значення сили струму під час його заряджання?

Відповідь: *0,1 А.*

Задача 2. Знайти швидкість упорядкованого руху електронів у мідному проводі з площею перерізу $25\ мм^2$ при силі струму *50 А*, вважаючи, що на кожний атом міді припадає один електрон провідності. Густина міді $8900\ кг/м^3$, маса *1* моля *0,064 кг*.

Відповідь: *0,0015 м/с.*

Задача 3. Скільки електронів проходить через поперечний переріз провідника за *1 нс* при силі струму *32 мкА?*

Відповідь: $2 \cdot 10^5$ *електронів.*

Задача 4. Послідовно з'єднали *n* однакових резисторів. У скільки разів зміниться опір кола, якщо їх з'єднати паралельно?

Відповідь: *зменшиться в* n^2 *разів.*

Задача 5. Опір двох послідовно з'єднаних провідників $R = 5\ Ом$, а тих самих провідників, з'єднаних паралельно, $R_0 = 1{,}2\ Ом$. Знайти опір кожного провідника.

Відповідь: $R_1 = 2\ Ом$; $R_2 = 3\ Ом$.

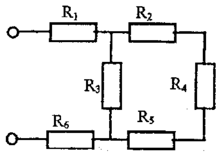
Задача 6. На скільки однакових частин треба розрізати провідник, що має опір $R = 36\ Ом$, щоб їх опір становив $R_0 = 1\ Ом$, коли ці частини з'єднати паралельно?

Відповідь: $n = \sqrt{\dfrac{R}{R_0}} = 6$ *частин.*

Задача 7. Які опори можна отримати, маючи три резистори по 6 кОм кожний?

Відповідь: *у кілоомах: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18.*

Задача 8. Знайти загальний опір провідників, з'єднаних за схемою, показаною на рисунку, якщо опори $R_1=R_2=R_5=R_6=1\ Ом$, $R_3 = 10\ Ом$, $R_4 = 8\ Ом$.



Відповідь: $R = 7\ Ом$.

Задача 9. Визначити опір мідного проводу з площею перерізу $S = 0{,}1мм^2$ і масою $m = 0{,}3\ кг$. Питомий опір міді $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ Ом{\cdot}м$, її густина $\gamma = 8{,}9\ г/см^3$.

Відповідь: $R = \dfrac{\rho m}{\gamma S^2} = 57{,}3 Ом.$

Задача 10. Яка напруженість електричного поля в алюмінієвому проводі з площею перерізу $1{,}4\ мм^2$ при силі струму $1\ A$? Питомий опір алюмінію $2{,}8 \cdot 10^{-8}\ Ом{\cdot}м$.

Відповідь: *20 мВ/м.*

Задача 11. Міліамперметром з межею вимірювання $I_o = 25\ мА$ необхідно вимірювати силу струму до $I = 5\ A$. Яким має бути опір шунта $R_ш$? Опір приладу $R = 10\ Ом$.

Відповідь: $R_щ = \dfrac{I_0 R}{I - I_0} = 0{,}05 Ом.$

Задача 12. Якщо до амперметра, розрахованого на максимальну силу струму $I = 2\ A$, приєднати шунт опором $r = 0{,}5\ Ом$, то ціна поділки шкали амперметра збільшиться в *10* разів. Визначити, який додатковий опір треба приєднати до цього амперметра, щоб його можна було використовувати як вольтметр для вимірювання напруги до $U = 220\ B$.

Відповідь: *105,5 Ом.*

Задача 13. Ціна поділки гальванометра $2 \cdot 10^{-4}\ A$. Шкала рівномірна і має *100* поділок. Опір гальванометра *50 Ом*. Розрахувати додаткові опори, які слід під'єднати до гальванометра, щоб перетворити його на вольтметр з двома межами вимірювань: *3 В* і *15 В*.

Відповідь: *100 Ом, 700 Ом.*

Задача 14. Яка ЕРС гальванічного елемента, якщо вольтметр з внутрішнім опором $R_1 = 20\ Ом$ показує на його затискачах напругу

$U_1 = 1{,}37\ B$, а коли елемент замкнути на резистор з опором $R_2 = 10\ Ом$, то сила струму, який йде через нього, дорівнює $I_2 = 0{,}132\ A$?

Відповідь: $E = 1{,}42\ B$.

Задача 15. Сила струму, що йде у провіднику з опором *2 Ом*, який підключили до гальванічного елемента з ЕРС *1,1 В*, дорівнює *0,5 А*. Яка буде сила струму при короткому замиканні елемента?

Відповідь: *5,5 А*.

Задача 16. Амперметр з опором $R_1 = 2\ Ом$, підключений до джерела струму, показує силу струму $I_1 = 5$ А. Якщо до цього джерела підключити вольтметр з опором $R_2 = 150\ Ом$, він покаже напругу $U = 12\ B$. Знайти силу струму короткого замикання джерела.

Відповідь: $I_{K.} = \dfrac{I_1 U(R_2 - R_1)}{R_2(U - I_1 R_1)} = 29{,}6\ A.$

Задача 17. При під'єднанні до батареї гальванічних елементів опору в *16 Ом* сила струму в колі була *1 А*, а при підключенні опору *8 Ом* вона зросла до *1,8 А*. Знайти ЕРС та внутрішній опір батареї.

Відповідь: *18 В, 2 Ом*.

Задача 18. При замиканні гальванічного елемента на резистор опором $R_1 = 4\ Ом$ сила струму у колі $I_1 = 0{,}2\ A$, а на резистор опором $R_2 = 7\ Ом$ - сила струму $I_2 = 0{,}14\ A$. Знайти струм короткого замикання гальванічного елемента.

Відповідь: $I_{КЗ.} = \dfrac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_2 R_2 - I_1 R_1} = 0{,}47\ A..$

Задача 19. Вольтметр, приєднаний до джерела струму з ЕРС $E = 120\ B$ і внутрішнім опором $r = 50\ Ом$, показує напругу $U = 118\ B$. Знайти опір вольтметра R.

Відповідь: $R = -\dfrac{Ur}{E - U} = 2{,}95\ кОм.$

Задача 20. При замиканні джерела струму на резистор з опором $R_1 = 14\ Ом$ напруга на затискачах джерела $U_1 = 28\ B$, а при замиканні на резистор з опором $R_2 = 29\ Ом$ напруга на затискачах $U_2 = 29\ B$. Знайти внутрішній опір джерела струму.

Відповідь: $r = \dfrac{R_1 R_2 (U_2 - U_1)}{U_1 R_2 - U_2 R_1} = 1 Ом.$

Задача 21. На одній лампі написано *40 Вт, 220 В*, на іншій - *100 Вт, 220 В*. Порівняти потужності ламп при послідовному ввімкненні. Зміну опору з температурою не враховувати.

Відповідь: *потужність першої лампи в 2,5 рази більша.*

Задача 22. Тролейбус масою *11 т* рухається рівномірно зі швидкістю *36 км/год.* Знайти силу струму, що йде через двигун, якщо напруга на ньому *550 В* і ККД *80%.* Коефіцієнт опору рухові *0,02.*

Відповідь: *50 А.*

Задача 23. Нагрівальний елемент апарата для випаровування води має при температурі $t = 100°$ *С* опір *10 Ом*. Знайти силу струму, який треба через нього пропускати, щоб апарат випаровував $m = 100$ *г* води за $\tau = 1$ *хв.* Питома теплота пароутворення води $r = 2,3$ *МДж/кг.*

Відповідь: $I = \sqrt{\frac{rm}{\tau R}} = 19,4 A.$

Задача 24. Електричний чайник має два нагрівальних елементи. Коли ввімкнути один з них, вода в чайнику закипить через $\tau_1 = 15$ *хв,* а коли ввімкнути інший – через $\tau_2 = 30$ *хв.* Через який час закипить вода, якщо ввімкнути обидва елементи: 1) послідовно; 2) паралельно?

Відповідь: 1) $\tau_{посл} = \tau_1 + \tau_2 = 45$ *хв.*; $\tau_{парал} = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 10$ *хв.*

Задача 25. ЕРС джерела струму $E = 2$ *В,* його внутрішній опір $r = 1$ *Ом.* Визначити силу струму, якщо зовнішнє коло споживає потужність $P = 0,75$*Вт.*

Відповідь: *1,5 А; 0,5 А.*

Задача 26. В електричній плитці, розрахованій на напругу *220 В,* є дві спіралі опором *120 Ом* кожна. За допомогою перемикача можна ввімкнути в мережу одну спіраль, дві спіралі послідовно чи дві спіралі паралельно. Знайти потужність плитки в кожному випадку.

Відповідь: *400 Вт, 200 Вт; 800 Вт.*

Задача 27. Знайти опір R_1 зовнішнього кола, при якому потужність, що в ньому виділяється, така сама, як і при опорі $R_2 = 10$ *Ом*. Внутрішній опір джерела струму $r = 2,5$ *Ом.*

Відповідь: $R_1 = 0,625$ *Ом.*

Задача 28. При вмиканні електродвигуна в мережу з напругою $U = 120$ *В* сила струму, який через нього йде $I = 15$ *А*. Знайти потужність, що споживається двигуном, і його ККД, якщо опір обмотки двигуна $R = 1$ *Ом.*

Відповідь: $N = IU = 1{,}8\,кВт$; $\eta = \frac{(U - IR)}{U} = 0{,}875$.

Задача 29. Електродвигун підйомного крана працює під напругою *380 В* при силі струму *20 А*. Який його ККД, якщо вантаж масою *1 т* кран рівномірно піднімає на висоту *19 м* за *50 с*?

Відповідь: *50 %.*

Задача 30. Знайти внутрішній опір і ЕРС джерела струму, якщо при силі струму *30 А* потужність у зовнішньому колі дорівнює *180 Вт*, а при силі струму *10 А* ця потужність *100 Вт.*

Відповідь: *0,2 Ом, 12 В.*

Розділ 9. Магнітне поле

При розв'язуванні задач на тему "Магнітне поле" рекомендується:

- зробити рисунок, показати на ньому заряди і провідники зі струмом, напрями магнітних полів, а також напрями магнітного поля Землі, якщо цього вимагає умова задачі. При цьому слід пам'ятати, що за напрям струму приймається напрям руху додатних зарядів;
- показати на рисунку напрями всіх сил, які діють на заряди та провідники зі струмом, при наявності декількох полів і сил різної природи використовувати принцип суперпозиції;
- у випадку рівноваги системи зарядів або провідників зі струмом використати для кожного з них загальні умови рівноваги $\sum \vec{F}_i = 0; \sum \vec{M}_i = 0$;
- при розрахунку ЕРС індукції і самоіндукції використовувати закон електромагнітної індукції (закон Фарадея) і правило Ленца. При цьому слід пам'ятати, що зміна магнітного потоку через поверхню, яка обмежена провідним контуром, буде визначатися як зміною індукції магнітного поля (зміна сили струму в контурі) або форми контуру, так і рухом контуру (провідника) в магнітному полі;
- при розрахунку переміщень, швидкостей, прискорень і мас електричних зарядів (провідників зі струмом) використовувати формули кінематики, другий закон Ньютона і закон збереження енергії.

Основні поняття

Магнітна індукція

$$B = \frac{M_{\max}}{P_m},$$

де M_{max} - максимальний момент сили, що діє на контур (виток) зі струмом в магнітному полі;
$P_m = IS$ - магнітний момент контуру;

напрям вектора $\vec{P}_m$ визначається за допомогою правого гвинта ("свердлика") по відношенню до напряму струму в контурі,
I - сила струму в контурі.

Модуль сили, що діє на провідник зі струмом I в магнітному полі (сила Ампера)

$$F_A = IB\,l\sin\alpha,$$

де B - магнітна індукція;
l - довжина провідника;
α - кут між вектором магнітної індукції $\vec{B}$ і вектором густини струму $\vec{j}$ в провіднику.

Модуль сили, який діє на частинку із зарядом q, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$ в магнітному полі (сила Лоренца)

$$F = q\upsilon\cdot B\sin\alpha,$$

де B - магнітна індукція;
α - кут між вектором магнітної індукції $\vec{B}$ і вектором швидкості υ .

Магнітний потік

$$\Phi = B\cdot S\cos\alpha,$$

де B - магнітна індукція;
S - площа контуру;
α - кут між вектором індукції $\vec{B}$ і вектором нормалі до площини контуру.

Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея)

$$E_i = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де E_i - ЕРС індукції;
$\Delta\Phi$ - зміна магнітного потоку, який пронизує контур за час Δt.

Знак "-" відповідає правилу Ленца, відповідно до якого магнітний потік індукційного струму, що виникає, протидіє зміні магнітного потоку зовнішнього поля.

ЕРС індукції в провіднику, що рухається в однорідному магнітному полі

$$E_i = B\,l\,\upsilon\sin\alpha,$$

де l – довжина;
υ - швидкість провідника;
B - індукція магнітного поля;
α - кут між вектором магнітної індукції $\vec{B}$ і вектором швидкості провідника υ .

ЕРС самоіндукції

$$E_{si} = -L\frac{dI}{dt},$$

де $L = \frac{\Phi}{I}$ - індуктивність контуру;

Φ - магнітний потік, який пронизує контур при проходженні в ньому електричного струму силою I;

$\frac{dI}{dt}$ - швидкість зміни сили струму.

Енергія магнітного поля

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

де L - індуктивність контуру;
I - сила струму в контурі.

Об′ємна густина енергії магнітного поля $\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}$,

де B - магнітна індукція;
V - об′єм, який займає магнітне поле.

Приклади розв′язування задач

Задача 1. Виток дроту діаметром *20 см* знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого 10^{-3} *Тл*. При пропусканні по витку струму в *2 А* виток повернувся на *90°*. Який момент сил діяв на виток?

$d = 2 \cdot 10^{-1}$ *м*
$B = 10^{-3}$ *Тл*
$\alpha = 90°$
$I = 2$ *А*
M - ?

Розв′язування

Модуль моменту сил, який діє на виток зі струмом в магнітному полі

$$M = p_m B \sin\alpha,$$

де $p_m = I \cdot S$ – магнітний момент витка;
S - площа витка;

α - кут між векторами $\vec{P}_m$ і вектором нормалі до площини.

Оскільки $\alpha = 90°$, то

$$M = \frac{I\pi d^2}{4} B = 6{,}3 \cdot 10^{-5}\ H \cdot м.$$

Відповідь: $M = 6{,}3 \cdot 10^{-5}\ H \cdot м$.

Задача 2. Дріт з міді розташований упоперек магнітного поля з індукцією $1 \cdot 10^{-3}$ *Тл*. Якою має бути густина струму в провіднику для того, щоб він міг без опори висіти в повітрі? Густина міді *8930 кг/м*^{3}.

$B = 1 \cdot 10^{-3}$ *Тл*
$\rho = 8930$ *кг/м*^{3}
j - ?

Розв′язування

Очевидно, що урівноважування сили тяжіння mg для дроту пов′язане з дією на нього сили Ампера $F_A = I\ l\ B\ \sin\alpha$ з боку магнітного поля, а не сили Архімеда з боку повітря. Тому необхідну густину струму для зависання провідника у повітрі визначаємо з рівності вказаних сил (враховуючи, що $I = j \cdot S$)

$$mg = F_A \Rightarrow \rho lSg = jSlB \Rightarrow j = \frac{\rho g}{B} = 88 \ А/мм^2.$$

Відповідь: $j = 88$ $А/мм^2$.

Задача 3. У деякому об'ємі існують схрещені однорідні електричне поле з напруженістю $E = 17$ *кВ/м* і магнітне поле з індукцією $B = 0{,}01$ *Тл*. Певний іон прискорили напругою $U_0 = 15$ *кВ* і під час цього руху в схрещених полях виявилось, що його траєкторія строго прямолінійна. Що це за іон?

$E = 17$ *кВ/м*
$B = 0{,}01$ *Тл*
$U_0 = 15$ *кВ*
$\frac{q}{m} = ?$

Розв'язування

З умови задачі випливає, що для іона в схрещених полях зрівноважуються дві сили: $F = qE$ з боку електричного поля, яка не залежить від швидкості іона, і $F_л = q \cdot \upsilon \cdot B$ з боку магнітного поля, яка залежить від швидкості іона υ.

Останню знайдемо з рівності $\frac{m\upsilon^2}{2} = qU_0 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$. Прирівнюючи сили і врахувавши значення швидкості, обчислюємо $\frac{q}{m}$ для іона:

$$qE = q \cdot \upsilon \cdot B \Rightarrow E = B\frac{\sqrt{2qU_0}}{m} \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{E^2}{2B^2U_0} = 1 \cdot 10^8 \ Кл/кг.$$

За допомогою таблиць визначаємо, що значення $\frac{q}{m}$ відповідає іону водню - протону.

Відповідь: $\frac{q}{m} = 1 \cdot 10^8$ *кл/кг*, що відповідає протону.

Задача 4. Електрон, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів $U = 400$ *В*, влетів в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 1{,}5$ *мТл*. Визначити: 1) радіус R кривизни траєкторії; 2) частоту n обертання електрона в магнітному полі. Вектор швидкості електрона перпендикулярний лініям індукції.

$U = 400$ *В*
$B = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ *Тл*
R - ? n - ?

Розв'язування

1. На електрон, що рухається в магнітному полі, діє сила Лоренца $F_л$ (дією сили тяжіння можна знехтувати). Вектор сили Лоренца перпендикулярний вектору швидкості, а отже, за другим законом Ньютона надає електрону доцентрове прискорення $a_{доц}$: $F = ma_{доц}$. Підставивши вирази для F і $a_{доц}$, одержимо:

$$|e|\upsilon B sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{R}, \qquad (1)$$

де e, υ, m - заряд, швидкість, маса електрона;
B - індукція магнітного поля;
R - радіус кривизни траєкторії;
α - кут між напрямом вектора швидкості $\vec{\upsilon}$ і індукції $\vec{B}$ (у нашому випадку $\vec{\upsilon}$ перпендикулярний $\vec{B}$ і $\alpha = 90°$, $sin\ \alpha = 1$).

З формули (1) знайдемо:

$$R = \frac{m\upsilon}{|e| \cdot B}. \qquad (2)$$

Імпульс $m\upsilon$, який входить в формулу (2), виразимо через кінетичну енергію електрона:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = W_к \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2W_к}{m}}, \qquad (3)$$

$$m\upsilon = \sqrt{2mW_к}.$$

Кінетична енергія електрона, який пройшов прискорювальну різницю потенціалів U: $W_к = |e| \cdot U$. Підставивши цей вираз $W_к$ в формулу (3), одержимо $m\upsilon = \sqrt{2m|e|U}$. Тоді

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|e|}} = 45\ мм. \qquad (4)$$

2. Визначимо частоту обертання електрона з формули

$$\upsilon = 2\pi R \cdot n \Rightarrow n = \frac{\upsilon}{2\pi R} = \frac{\sqrt{\frac{2W_к}{m}}}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|e|}{m} \cdot B = 4{,}20 \cdot 10^7 c^{-1}.$$

Відповідь: $R = 45\ мм$; $n = 4{,}20 \cdot 10^7\ c^{-1}$.

Задача 5. В магнітному полі з індукцією $0{,}1\ Тл$ знаходиться стержень довжиною $1\ м$, який обертається перпендикулярно до напряму ліній магнітної індукції. Вісь обертання проходить через один із кінців стержня. Визначити потік магнітної індукції через поверхню, яку утворює стержень при кожному оберті.

$L = 1 м$	
$B = 0{,}1\ Тл$	
$\alpha = 0$	
Φ - ?	

Розв'язування

Потік магнітної індукції, що пронизує площину S:

$$\Phi = B\ S cos\alpha,$$

де α - кут, між вектором індукції і нормаллю до площини, що утворює стержень, який обертається.

Отже,

$$\Phi = B\pi l^2 = 0{,}3\ Вб.$$

Відповідь: $\Phi = 0{,}3\ Вб$.

Задача 6. Магнітний потік через кільце з опором *0,03 Ом* змінився на *0,012 Вб* за інтервал часу *2 с*. Обчислити силу струму в кільці, якщо потік змінювався рівномірно.

$R = 0{,}03$ *Ом*
$\Delta\Phi = 0{,}012$ *Вб*
$\Delta t = 2$ *с*
I - ?

Розв'язування

Використаємо формули закону Фарадея для явища електромагнітної індукції $E = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ і закон Ома для кільця у вигляді

$$I = \frac{E}{r},$$

де r - опір кільця. Сила струму у кільці в процесі зміни магнітного потоку:

$$I = \frac{E}{r} = \frac{1}{r}\left|-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = 0{,}2A.$$

Відповідь: $I = 0{,}2$ *А*.

Задача 7. Перпендикулярно однорідному горизонтально направленому магнітному полю з індукцією 10^{-2} *Тл* розміщена вертикальна жорстка рамка з металевих стержнів в формі букви П шириною *50 см* (рис.34). По рамці ковзає без тертя і без порушення контакту перемичка *ав* з дроту масою *1 г* зі сталою швидкістю *1 м/с*. Визначити опір R перемички, якщо опором рамки можна знехтувати.

$B = 10^{-2}$ *Тл*
$l = 0{,}5$ *м*
$m = 10^{-3}$ *кг*
$\upsilon = 1$ *м/с.*
R - ?

Розв'язування

Відповідно до закону збереження і перетворення енергії, потенціальна енергія піднятої перемички переходить в роботу сили тяжіння mg на шляху Δx за час Δt

$$A = F\Delta x = mg \cdot \upsilon \cdot t.$$

Робота сили тяжіння перетворюється в енергію індукованого струму, яка в свою чергу, переходить у теплоту, нагріваючи перемичку. Таким чином:

$$mg\upsilon\Delta t = \frac{E_i^2\Delta t}{R},$$

або

$$mg\,\upsilon = \frac{\left(-\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)^2}{R} = \frac{B^2 l^2 \upsilon^2}{R},$$

звідси:

$$R = \frac{B^2 l^2 \upsilon}{mg} = 2{,}6 \cdot 10^{-3}\ Ом.$$

Відповідь: $R = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$ *Ом.*

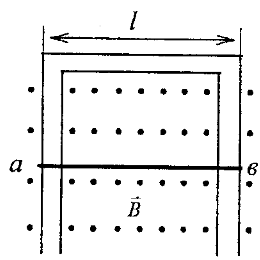


Рис. 34

Задача 8. Знайти енергію магнітного поля соленоїда, в якому при силі струму *10 А* виникає магнітний потік *0,5 Вб*.

$I = 10\ А$	Розв'язування
$\Phi = 0,5\ Вб$	Енергія магнітного поля соленоїда:
$W_м$ - ?	$W_м = \frac{LI^2}{2}$.

Магнітний потік $\Phi = LI$, тому

$$W_м = \frac{\Phi I}{2} = 2,5\ Дж.$$

Відповідь: $W_м = 2,5\ Дж.$

Задачі для самостійного розв'язування. Магнітне поле. Електромагнітна індукція

Задача 1. Яка індукція магнітного поля, в якому на провідник зі струмом силою *25 А* діє сила *50 мН*? Індукція магнітного поля перпендикулярна до напрямку протікання струму. Довжина активної частини провідника *5 см*.

Відповідь: $B = 40\ мТл$.

Задача 2. Плоска прямокутна котушка з *200* витків дроту зі сторонами *10* і *5* см міститься в однорідному магнітному полі з індукцією *0,05 Тл*. Який максимальний обертальний момент може діяти на котушку в цьому полі, якщо сила струму в ній дорівнює *2 А*?

Відповідь: $M_{max} = 0,1\ Н \cdot м$.

Задача 3. Між полюсами магніту на двох тонких вертикальних дротинах підвішений горизонтальний лінійний провідник масою $m = 10\ г$ завдовжки $l = 20\ см$. Індукція однорідного магнітного поля спрямована вертикально і дорівнює $B = 0,25\ Тл$. На який кут α від вертикалі відхиляються дротини, що підтримують провідник, якщо по ньому проходить струм силою $I = 2\ А$? Масою дротин знехтувати.

Відповідь: $\alpha = arctg\left(\frac{BIl}{mg}\right) = 45°$.

Задача 4. Горизонтальні рейки прокладені на відстані $l = 0,3\ м$ одна від одної. На них, перпендикулярно до рейок, лежить стержень. Якою має бути індукція магнітного поля, щоб стержень почав рухатись, коли по ньому пропускати струм силою $I = 50\ А$? Коефіцієнт тертя стержня і рейок $\mu = 0,2$. Маса стержня $m = 0,5\ кг$.

Відповідь: $B = \frac{\mu mg}{Il} = 6,5 \cdot 10^{-2}\ Тл$.

Задача 5. З якою силою діє магнітне поле з індукцією *10 мТл* на прямолінійний провідник, через який йде струм, якщо довжина його активної частини (на яку діє магнітне поле) *0,1 м*? Сила струму дорівнює *50 А*. Напрями індукції магнітного поля і струму взаємно перпендикулярні.

Відповідь: $F = 50$ *мН*.

Задача 6. У провіднику з довжиною активної частини *8 см* сила струму дорівнює *50 А*. Він міститься в однорідному магнітному полі з індукцією *20 мТл*. Знайти роботу, виконану при переміщенні провідника на *10 см* перпендикулярно до ліній індукції

Відповідь: *8 мДж.*

Задача 7. В однорідне магнітне поле з індукцією $B = 10$ *мТл* перпендикулярно до ліній індукції влітає електрон з кінетичною енергією $W = 30$ *кеВ*. Який радіус кривизни траєкторії руху електрона? Заряд електрона $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ *Кл*, його маса $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*.

Відповідь: $r = \dfrac{\sqrt{2mW}}{eB} = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ *м.*

Задача 8. Два іони, які мають однаковий заряд і однакову кінетичну енергію, влітають у однорідне магнітне поле. Перший іон рухається по колу радіусом $r_1 = 4$ *см*, другий $r_2 = 2$ *см*. Знайти відношення мас іонів.

Відповідь: $\dfrac{m_1}{m_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 = 4.$

Задача 9. Протон і α-частинка влітають в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Порівняти радіуси кіл, які вони описують, якщо у них однакові; в) швидкості; б) енергії.

Відповідь: *а) для* α *-частинки вдвічі більший; б) однакові.*

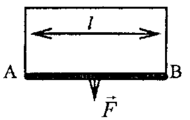
Задача 10. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 4$ *мТл*. Знайти період T обертання електрона. Питомий заряд електрона $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ *Кл/кг*.

Відповідь: *8,9 нс.*

Задача 11. Електрон, прискорений електричним полем, рухається перпендикулярно до ліній індукції магнітного поля по колу радіусом R. Індукція поля B. Знайти різницю потенціалів, яка прискорила електрон. Початкова швидкість електрона дорівнює нулю.

Відповідь: $U = \dfrac{eB^2R^2}{2m}.$

Задача 12. Довжина рухомого провідника AB дорівнює l. Його опір R (див. рисунок). Опір нерухомого провідника, по якому ковзає провідник AB, мізерно малий. Перпендикулярно до площини провідників прикладена магнітне поле з індукцією B. Яку силу треба прикласти до провідника AB для того, щоб він рухався зі сталою швидкістю v? Система провідників розміщена в горизонтальній площині.



Відповідь: $F = \frac{B^2 l^2 v}{R}$.

Задача 13. Реактивний літак, що має розмах крил $l = 50$ *м*, летить горизонтально зі швидкістю $v = 800$ *км/год*. Визначити різницю потенціалів, що виникає між кінцями крил, якщо вертикальна складова індукції магнітного поля Землі дорівнює $B_B = 5 \cdot 10^{-5}$ *Тл*.

Відповідь: $U = B_B\, l\, v = 0{,}55$ *В*.

Задача 14. Знайти індуктивність провідника, в якому рівномірна зміна сили струму на *2 А* протягом *0,25 с* збуджує ЕРС самоіндукції *20 мВ*.

Відповідь: *2,5мГн*.

Задача 15. Через соленоїд, індуктивність якого *0,4 мГн*, а площа поперечного перерізу 10 *см*^{2}, йде струм. Яка індукція магнітного поля всередині соленоїда, якщо в ньому *100* витків? Сила струму дорівнює *0,5 А*. Поле вважати однорідним.

Відповідь: *2 мТл*.

Задача 16. Знайти швидкість зміни магнітного потоку в соленоїді з *2000* витків при збудженні в ньому ЕРС індукції *120 В*.

Відповідь: *60 мВб/с*.

Задача 17. В однорідному магнітному полі розміщено виток, площа якого $S = 50$ *см*^{2}. Перпендикуляр до площі витка утворює з напрямком індукції магнітного поля кут $\alpha = 60°$. Чому дорівнює ЕРС індукції E, що виникає у витку під час вимикання поля, якщо початкова індукція магнітного поля $B = 0{,}2$ *Тл*, і воно спадає до нуля за лінійним законом протягом $\Delta t = 0{,}02$ *с*?

Відповідь: $E = \frac{B\ \ S\cos\alpha}{\Delta t} = 23$ *мВ*.

Задача 18. За *5 мс* у соленоїді з *500* витків з дроту магнітний потік рівномірно зменшується від *7* до *3 мВб.* Знайти ЕРС індукції в соленоїді.

Відповідь: *400 В.*

Задача 19. Однорідне магнітне поле з індукцією *B* перпендикулярне до площини мідного кільця (питомий опір міді $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ *Ом·м*), діаметр якого $D = 20$ *см*, а товщина $d = 2$ *мм*. З якою швидкістю має змінюватись з часом магнітна індукція *B*, щоб сила індукційного струму у кільці дорівнювала *10 А*?

Відповідь: $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{16\rho I}{\pi D d^2} = 1{,}12 \frac{Тл}{с}$.

Задача 20. До рейок залізничної колії приєднано вольтметр. Над ним зі сталою швидкістю проходить поїзд. Якими будуть покази вольтметра під час наближення поїзда? Вертикальна складова індукції магнітного поля Землі $B = 5 \cdot 10^{-5}$ *Тл*, ширина колії $l = 1,2$ *м*. Швидкість поїзда $\upsilon = 60$ *км/год*.

Відповідь: $U = B_B l \upsilon = 10^{-3} В$.

Задача 21. Знайти індуктивність провідника, в якому при рівномірній зміні сили струму на *2 А* протягом *0,25 с* збуджується ЕРС самоіндукції *20 мВ*.

Відповідь: *2,5 мГн.*

Задача 22. Якою має бути сила струму в обмотці дроселя з індуктивністю *0,5 Гн*, щоб енергія магнітного поля дорівнювала *1 Дж*?

Відповідь: *2 А.*

Задача 23. У котушці з індуктивністю *0,6 Гн* сила струму дорівнює *20 А*. Яка енергія магнітного поля котушки? Як зміниться енергія поля, якщо силу струму зменшити вдвічі?

Відповідь: *120 Дж; зменшиться в 4 рази.*

Розділ 10 Механічні коливання і хвилі

При розв'язуванні задач на тему "Механічні коливання і хвилі" рекомендується:

- записати задане в задачі рівняння і рівняння гармонічних коливань в загальному вигляді, зіставити ці рівняння і визначити основні характеристики (зміщення, амплітуду, період, частоту, фазу) у відповідності з умовою задачі;

- швидкість і прискорення матеріальної точки при гармонічних коливаннях, а також максимальне значення цих величин визначити з рівняння гармонічних коливань, параметри якого відповідають даним задачі;

- період гармонічних коливань в різних ситуаціях визначати за формулою $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, де ω - циклічна частота коливань, $\omega^2 = \frac{k}{m}$. При цьому слід враховувати, що модуль прискорення точки, що коливається, $a = \frac{k}{m}x$, де x - зміщення точки з положення рівноваги. Визначити прискорення з другого закону Ньютона, знайти коефіцієнт жорсткості k, а потім і період коливань;

- використовувати закон збереження енергії в задачах про математичний та пружинний маятники.

Основні поняття

Рівняння гармонічних коливань

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),\ \text{або}\ x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

де $A = |x_{max}|$ - амплітуда коливань;

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ - циклічна (кругова) частота коливань;

ν - частота;

T - період коливань;

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ - фаза коливань;

φ_0 - початкова фаза;

t – час;

x - зміщення величини, яка коливається, від положення рівноваги в даний момент часу.

Проекція швидкості частинки, що здійснює гармонічне коливання

$$\upsilon_x = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Проекція прискорення частинки, що здійснює гармонічне коливання

$$a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Період коливань

а) пружинного маятника $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,

де m - маса тягарця;

k - коефіцієнт жорсткості пружини;

б) математичного маятника $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,

де l - довжина математичного маятника;

g - прискорення вільного падіння.

Енергія механічних коливань

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2,$$

де m - маса частинки, що коливається;
ω - циклічна частота;
A - амплітуда коливань.

Довжина хвилі

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu},$$

де υ - фазова швидкість хвилі;
ν - частота;
T - період коливань.

Різниця фаз двох точок, що коливаються, які знаходяться на відстанях r_1 і r_2 від джерела коливань, дорівнює

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}.$$

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Написати рівняння гармонічного коливання, амплітуда якого *10 см*, період *10 с*, початкова фаза дорівнює нулю. Знайти зміщення, швидкість і прискорення тіла, яке коливається, через *12 с* після початку коливань.

$A = 10\ см = 0{,}1\ м$
$T = 10\ с$
$\varphi_0 = 0$
$t_1 = 12\ с$

$x(t)$ - ? υ_1 - ? a_1 - ?

Розв'язування

Запишемо рівняння гармонічного коливання:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right).$$

Підставимо в це рівняння дані задачі :

$$x(t) = 0{,}1 sin \; \frac{2 \quad 3.14}{10} t \; = 0{,}1 sin\, 0{,}628t.$$

Для моменту t_1 : $x_1 \approx 0{,}095\ м.$

Швидкість тіла, що коливається,

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),$$

або з урахуванням даних задачі

$$\upsilon = 0{,}1 \cdot 0{,}628 \cos 0{,}628t = 0{,}0628 \cos 0{,}628t.$$

Для моменту t_1 швидкість $\upsilon_1 = 1{,}9 \cdot 10^{-2}\ м/с$.

Прискорення тіла, що коливається:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

або з урахуванням даних задачі

$$a = -0,1 \cdot 0,628t = -0,0393 \sin 0,628t.$$

Для моменту t_1, прискорення $a_1 = 3,7 \cdot 10^{-2}$ $м/с^2$.

Відповідь: $x = 0,1 \sin 0,628t$; $\upsilon_1 = 1,9 \cdot 10^{-2}$ $м/с$; $a_1 = 3,7 \cdot 10^{-2} м/с^2$.

Задача 2. Матеріальна точка масою *10 г* коливається за законом $x = 0,05 \sin(0,6t+0,8) м$. Знайти максимальну силу, що діє на точку і повну енергію точки, що коливається.

$m = 10 г = 10^{-2} кг$
$x = 0,05 \sin (0,6t + 0,8) м$
F_{max} - ? E - ?

Розв'язування

Зіставляючи загальне рівняння гармонічного коливання

$$x = A \sin (\omega t + \varphi_0)$$

з рівнянням, приведеним в задачі

$$x = 0,05 \sin (0,6t + 0,8) \text{ м},$$

знаходимо, що $A = 5 \cdot 10^{-2}$ $м$, $\omega = 0,6$ $рад/с$, $\varphi_0 = 0,8$ $рад$.

З виразу для сили, яка викликає гармонічні коливання

$$F = mA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

одержуємо

$$F_{max} = mA\omega^2 = 180 \text{ мкН}.$$

Повна енергія точки, яка коливається

$$E = \frac{1}{2} mA\omega^2 = 4,5 \text{ мкДж}.$$

Відповідь: $F_{max} = 180$ $мкН$, $E = 4,5$ $мкДж$.

Задача 3. За яку частину періоду частинка, яка здійснює гармонічні коливання, проходить першу половину шляху від середнього положення до крайнього? Другу половину цього шляху?

$x_1 = \dfrac{A}{2}$
$x_2 = A$
t_1 - ? t_2 - ?

Розв'язування

Вибираючи початок відліку часу в момент проходження тілом середнього положення, можна записати закон зміни його координати у вигляді

$$x = A \sin \omega t = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

На середині шляху від середнього положення до крайнього $x_1 = \dfrac{A}{2}$ тіло знаходиться в моменти часу, що визначається з рівняння

$$\frac{A}{2} = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

Найменше додатне значення t_1, що відповідає цій умові, можна знайти з рівняння

$$\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)=\frac{1}{2},$$

звідси

$$2\pi\frac{t_1}{T}=\frac{\pi}{6},\ t_1=\frac{T}{12}.$$

В крайньому положенні ($x_2 = A$) тіло знаходиться в момент часу t_2, який відповідає умові $\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)=1$, звідси

$$2\pi\frac{t_2}{T}=\frac{\pi}{2},\ t_2=\frac{T}{4}.$$

Отже, другу половину шляху тіло проходить за проміжок часу $\Delta t=t_2-t_1=\frac{T}{4}-\frac{T}{12}=\frac{T}{6}$.

Відповідь: $t_1=\frac{T}{12}$, $\Delta t=\frac{T}{6}$.

Задача 4. Середина струни, яка здійснює гармонічні коливання, має максимальне прискорення $a_{max} = 2{,}02 \cdot 10^3$ *м/с²*. Визначити частоту коливань, якщо амплітуда коливань *2,00 мм*.

$a_{max} = 2{,}02 \cdot 10^3$ м/с^2	Розв'язування
$A = 2{,}00 \cdot 10^{-3}$ м	Максимальне прискорення відповідає максимальному зміщенню точки від положення рівноваги
ν - ?	

$$a_{max}=\omega^2 A=4\pi^2\nu^2 A,$$

звідки

$$\nu=\sqrt{\frac{a_{\max}}{4\pi^2 A}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_{\max}}{A}}\approx 160c^{-1}.$$

Відповідь: $= 160\ c^{-1}$.

Задача 5. Пружинний маятник здійснює гармонічні коливання з амплітудою $A = 0{,}04$ *м*. При зміщенні $x = 0{,}03$ *м* сила пружності дорівнює $F = 9\cdot10^{-5}$ *Н*. Визначити потенціальну і кінетичну енергії, що відповідають заданому зміщенню, і повну енергію маятника.

$x = 0{,}03$ м	Розв'язування
$A = 0{,}04$ м	Повна енергія маятника дорівнює:
$F = 9 \cdot 10^{-5}$ Н	$E = E_к + E_p$,
E_p - ? $E_к$ - ?	де $E_к$ - кінетична енергія;
E - ?	E_p - потенціальна енергія.

Повна енергія дорівнює

$$E = \frac{kA^2}{2},$$

де k - коефіцієнт квазіпружної сили:

$$k = \frac{F}{x}.$$

Тоді повну енергію коливань маятника можна знайти за формулою:

$$E = \frac{FA^2}{2x} = 2{,}4 \quad 10^{\ 6}\ Дж.$$

Потенціальна енергія маятника дорівнює

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{Fx}{2} = 1{,}35 \quad 10^{\ 6}\ Дж.$$

Отже, кінетична енергія дорівнює

$$E_к = E - E_p = 2{,}4 \cdot 10^{-6} - 1{,}35 \cdot 10^{-6} = 1{,}05 \cdot 10^{-6}\ Дж.$$

Відповідь: $E_p = 1{,}35 \cdot 10^{-6}$ *Дж*, $E_к = 1{,}05 \cdot 10^{-6}$ *Дж*, $E = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ *Дж*.

Задача 6. Яким має бути вертикальне прискорення ракети при підйомі, щоб маятниковий годинник ішов удвічі швидше, ніж перед стартом ?

$T_1 = \frac{T}{2}$
a - ?

Розв'язування

Використаємо рівняння коливань маятника і формулу періоду $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Для зменшення періоду необхідно, щоб прискорення вільного падіння збільшилось.

Це можливо, коли ракета рухається прискорено вгору і вага маятника збільшується, а ефективне прискорення набуває значення $g^* = g + a$.

За умовою задачі виконується рівність

$$\frac{T}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{(g+a)}}.$$

Підставляючи в неї

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

знаходимо значення прискорення ракети по вертикалі вгору:

$$a = 3g = 30\ м/с^2.$$

Відповідь: $a = 3g = 30$ *м/с*^{2}.

Задача 7. Два маятники, довжини яких відрізняються на *22 см*, здійснюють в одному і тому ж місці за деякий час один - *30* коливань, другий - *36* коливань. Знайти довжини маятників.

$\Delta l = 22$ *см* $N_1 = 30$ $N_2 = 36$
l_1 - ? l_2 - ?

Розв′язування

Очевидно, що маятник більшої довжини здійснює меншу кількість коливань. Періоди коливань першого і другого маятників:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}; \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}.$$

Їх співвідношення:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}. \qquad (1)$$

З іншої сторони

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2}. \qquad (2)$$

Прирівнюємо праві частини виразів

$$\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{N_1}{N_2}, \text{ або } \frac{l_1}{l_2} = 1{,}44, \text{ тобто}$$

$$l_1 = 1{,}44\, l_2. \qquad (3)$$

За умовою задачі

$$\Delta l = l_1 - l_2 \qquad (4)$$

Розв′язуючи систему рівнянь (3) і (4), знаходимо $l_1 = 72$ *см*, $l_2 = 50$ *см*.
Відповідь: $l_1 = 72$ *см*, $l_2 = 50$ *см*.

Задача 8. Маятник довжиною *1,2 м* підвішений до стелі вагона, який рухається горизонтально по прямій з прискоренням *2,2* $м/с^2$. Знайти положення рівноваги і період коливання маятника.

$l = 1{,}2$ *м* $a = 2{,}2$ $м/с^2$
T - ? α - ?

Розв′язування

Розглянемо спочатку положення рівноваги маятника в системі відліку, зв′язаній з точкою його підвішування. В цьому положенні сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила натягу підвісу $\vec{F}$ повинні забезпечувати маятникові прискорення, що дорівнює прискоренню вагона $\vec{a}$: $m\vec{g}+\vec{F}=m\vec{a}$.

З рисунка 35 видно, що

$$tg\alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}; \; tg\alpha = 0{,}2205.$$

При малих кутах $\alpha \approx tg\alpha = 0{,}2205 рад = 13°$.

Маятник буде коливатися відносно положення рівноваги під кутом $\alpha = 13°$ до вертикалі. Період коливань маятника такий же, як і для маятника такої ж довжини, що коливається під дією сили натягу, яка в положенні рівноваги дорівнює:

$$F_H = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}.$$

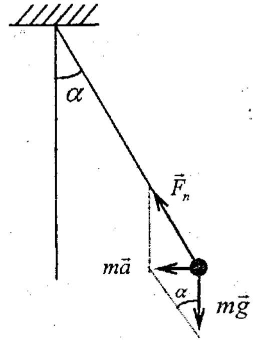


Рис. 35

Тому період коливань маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де $g' = \dfrac{F_H}{m} = \sqrt{g^2 + a^2}$.

Таким чином одержуємо

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} = 2{,}2 \text{ с.}$$

Відповідь: $\alpha = 13°$, $T = 2{,}2$ *с.*

Задача 9. Хвиля з частотою *5 Гц* розповсюджується в просторі зі швидкістю *3 м/с*. Знайти в градусах різницю фаз хвиль в двох точках простору, що знаходяться одна від одної на відстані *20 см* і розташовані на прямій, яка збігається з напрямом розповсюдження хвилі.

$\nu = 5$ *Гц*
$\upsilon = 3$ *м/с*
$l = 20$ *см*
$\Delta\varphi$ - ?

Розв′язування

Довжина хвилі $\lambda = \dfrac{\upsilon}{\nu} = 0{,}60 м$. Оскільки на відстані довжини хвилі λ різниця фаз дорівнює 2π, то на відстані l різниця фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}; \; \Delta\varphi = 120°.$$

Відповідь: $\Delta\varphi = 120°$.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Амплітуда коливань точки струни *1 мм*, частота *1кГц*. Який шлях пройде ця точка за *0,2 с*?

Відповідь: *80 см.*

Задача 2. Вантаж на пружині коливається вздовж прямої з амплітудою *A=2 см*. Період коливань *T=2 с*. У початковий момент часу вантаж проходив положення рівноваги. Знайти швидкість і прискорення вантажу через час *t=0,25 с*.

Відповідь: $V = A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}$; $t = 4{,}4\frac{см}{с}$; $a = -A\frac{4\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}$; $t = -14\frac{см}{с^2}$..

Задача 3. При фазі $\frac{1}{3}\pi$ зміщення дорівнює *1 см*. Знайти амплітуду коливань і зміщення при фазі $\frac{3}{4}\pi$.

Відповідь: *2 см, –1,4 см.*

Задача 4. За один і той самий час один математичний маятник робить *50*, а інший – *30* коливань. Знайти їх довжини, якщо один з них на *32 см* коротший від іншого.

Відповідь: *18 см, 50 см.*

Задача 5. У скільки разів зміниться частота коливань автомобіля на ресорах після того, як у нього поклали вантаж, маса якого дорівнює масі порожнього автомобіля?

Відповідь: *зменшиться в* $\sqrt{2}$ *разів.*

Задача 6. Дві пружини з жорсткостями k_1 і k_2 з'єднані один раз послідовно, а другий – паралельно. У скільки разів будуть відрізнятися періоди вертикальних коливань вантажу, підвішеного на пружинах, у цих двох випадках?

Відповідь: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1 k_2}}$.

Задача 7. Яку частину періоду *T* тягарець маятника перебуває не далі *1 см* від положення рівноваги, якщо амплітуда коливань дорівнює *2 см?*

Відповідь: $\frac{1}{3}T$.

Задача 8. Частинка гармонічно коливається вздовж осі *x* навколо положення рівноваги *x=0*. Частота коливань *ω=4 рад/с*. Визначити, в який момент часу після проходження положення рівноваги частинка буде мати координату *x=25 см* і швидкість υ_x*=100 см/с*.

Відповідь: $t = \frac{1}{\omega} arctg\frac{x\omega}{\upsilon_x} = 0{,}2\ с$.

Задача 9. У нерухомому ліфті висить маятник, період коливань якого T_1*=1 с*. З яким прискоренням рухається ліфт, якщо період коливань маятника став T_2*=1,1 с*?

Відповідь: $a = g\left(1 - \frac{T_1^2}{T_2^2}\right) = 1{,}7\ м/с^2$.

Задача 10. Вантаж масою *400 г* коливається на пружині з жорсткістю *250 Н/м.* Амплітуда коливань *15 см.* Знайти повну механічну енергію коливань і найбільшу швидкість руху вантажу.

Відповідь: *2,8 Дж, 3,8 м/с.*

Задача 11. Яка довжина хвилі в повітрі відповідає частоті звуку *16 Гц*? Швидість звуку в повітрі *340 м/с.*

Відповідь: *21,3 м.*

Задача 12. Хвиля біжить зі швидкістю $\upsilon=360$ *м/с* при частоті $\nu=450$ *Гц*. Яка різниця фаз у двох точках хвилі, відстань між якими $\Delta x=20$ см?

Відповідь: $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi\nu\Delta x}{V} = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 13. При якій швидкості поїзда маятник завдовжки $l=11$ *см*, підвішений у вагоні, особливо сильно розгойдується? Довжина рейок $L=12{,}5$ *м.*

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{L}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}} = 68\ км/год$.

Задача 14. У скільки разів зміниться довжина звукової хвилі при переході звуку з повітря у воду? Швидкість звуку у воді $\upsilon_1=1450$ *м/с*, у повітрі $\upsilon_2=340$ *м/с.*

Відповідь: $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 4{,}26$.

Задача 15. Швидкість звуку у воді $\upsilon=1450$ *м/с.* На якій відстані лежать найближчі точки, які коливаються в протилежних фазах, якщо частота коливань $\nu=725$ *Гц*?

Відповідь: $\Delta x = \dfrac{\upsilon}{2\nu} = 1\ м$.

Розділ 11. Електромагнітні коливання і хвилі

При розв'язуванні задач на тему "Електромагнітні коливання і хвилі" рекомендується:

- при розгляданні процесів, які відбуваються в коливальному контурі, використовувати закон збереження і перетворення енергії, а також загальний підхід, що застосовується при розв'язуванні задач на гармонічні коливання;

- врахувати, що змінний струм - це вимушені електричні коливання, при розгляді яких використовують ті ж характеристики, що і для механічних коливань;

- пам'ятати, що електромагнітні хвилі розповсюджуються у вакуумі зі швидкістю світла $c = 3 \cdot 10^8$ *м/с*, а в середовищі - зі швидкістю $v = c/n$, де n - показник заломлення середовища.

Основні поняття

Напруга в колі змінного електричного струму

$$U = U_0 \cos \omega t;$$

де U_0 - амплітудне (максимальне) значення напруги;

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ - циклічна частота;

T - період змінного струму;

t - час.

Закон Ома для кола змінного струму, що складається з послідовно включених резистора з омічним (активним) опором R, конденсатора з електроємністю C і котушки з індуктивністю L:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z},$$

де U_0 і I_0 - амплітудні значення сили струму і напруги, $Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$ - повний опір кола при наявності в ньому активного (R), індуктивного ($x_L = \omega L$) та ємнісного $x_C = \dfrac{1}{\omega C}$ опорів.

Період електромагнітних коливань в коливальному (електромагнітному) контурі

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Діючі ефективні значення напруги і сили змінного струму

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}},\ I = \frac{I_0}{\sqrt{2}},$$

де I_0 і U_0 - амплітудні значення сили струму і напруги.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Напруга на кінцях ділянки кола, по якому іде змінний струм, змінюється з часом за законом $U = U_0 \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right) \cdot B$. В момент часу $t = \dfrac{T}{12}$ миттєве значення напруги дорівнює *10 В*. Знайти амплітуду напруги.

$t = \frac{T}{12}$ c
$U = 10\ В$
U_0 - ?

Розв′язування

В рівняння $U = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$, підставляємо значення U і t і, враховуючи, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$, одержимо

$$10 = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} + \frac{\pi}{6}\right)$$

або $10 = U_0 \cos\frac{\pi}{3}$, звідси

$$U_0 = \frac{10}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20В.$$

Відповідь: $U_0 = 20\ В$.

Задача 2. Коливальний контур повинен працювати у передавачі, який випромінює хвилі довжиною *300 м*. Яким має бути період його коливань? Як забезпечити цей період, якщо індуктивність котушки конденсатора дорівнює $1\,мкГн$?

$\lambda = 300\ м$
$L = 1\ мкГн = 10^{-6}\ Гн$
T - ?

Розв′язування

Швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі можна виразити через їх довжину і період:

$$c = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T}.$$

Отже, період коливань контуру

$$T = \frac{\lambda}{c} = 1 \cdot 10^{-6}\,c = 1\,мкс.$$

Використовуючи формулу періоду коливань контуру $T = 2\pi\sqrt{LC}$, знаходимо необхідну для цього електроємність

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = \frac{\lambda^2}{4\pi c^2 L} = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\,Ф = 0{,}025\,мкФ.$$

Відповідь: $T = 1\ мкс$, $C = 0{,}025\ мкФ$.

Задача 3. Коливальний контур, який складається з повітряного конденсатора з двома пластинами площею $S = 100\ см^2$ кожна, і котушки з індуктивністю $L = 1\ мкГн$, резонує на хвилю довжиною $\lambda = 10\ м$. Визначити відстань d між пластинами конденсатора.

$S = 100\ см^2 = 10^{-2}\ м^2$	
$L = 1 \cdot 10^{-6}\ Гн$	
$\lambda = 10\ м$	
d - ?	

Розв'язування

Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

де ε - діелектрична проникність середовища, яке заповнює конденсатор.

Звідси $$d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{C}.$$

З формули періоду коливань в електричному контурі $T = 2\pi\sqrt{LC}$, знаходимо електроємність $C = \dfrac{T^2}{4\pi^2 L}$.

Із співвідношення $\lambda = cT$ маємо $T = \dfrac{\lambda}{c}$;

тому

$$d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S 4\pi^2 L}{T^2} = \frac{c^2 4\pi^2 \varepsilon_0 SL}{\lambda^2} = 3{,}14\ мм.$$

Відповідь: $d = 3{,}14\ мм$.

Задача 4. Коливальний контур складається з конденсатора з електроємністю *400 пФ* і котушки індуктивності з індуктивністю *10 мГн*. Визначити амплітуду сили струму, якщо максимальний заряд конденсатора контуру дорівнює *200 нКл*.

$C = 400\ пФ = 400 \cdot 10^{-12}\ Ф$	
$L = 10\ мГн = 10 \cdot 10^{-3}\ Гн$	
$q_m = 200\ нКл = 200 \cdot 10^{-9}\ Кл$	
I_m - ?	

Розв'язування

З формули зв'язку конденсатора q і напруги на ньому U маємо:

$$q = CU \rightarrow U = \frac{q}{c}.$$

Використаємо закон збереження енергії для коливального контуру:

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \Rightarrow I_m = U_m\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{q_m}{C}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{q_m}{\sqrt{LC}} = 0{,}1A.$$

Відповідь: $I_m = 0{,}1\ A$.

Задача 5. Електропіч, опір якої *22 Ом*, живиться від генератора змінного струму. Визначити кількість теплоти, яку виділяє піч за *1 год*, якщо амплітуда струму *10 А*.

$t = 1\ год = 3{,}6 \cdot 10^3\ с$	
$I_0 = 10\ A$	
$R = 22\ Ом$	
Q - ?	

Розв'язування

За законом Джоуля-Ленца для кола змінного струму:

$$Q = I^2 Rt = \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 Rt = 3{,}96 \cdot 10^6\ Дж.$$

Відповідь: $Q = 3{,}96 \cdot 10^6\ Дж$.

Задача 6. Первинна обмотка замкнутого трансформатора з коефіцієнтом трансформації $k = 10$ ввімкнена в коло з напругою *220 В*. Опір вторинної обмотки $r_2 = 2$ *Ом*, струм в ній $I_2 = 5A$. Який опір навантаження і яка напруга на контактах вторинної обмотки?

$k = 10$	
$U = 220$ *В*	
$r_2 = 2$ *Ом*	
$I_2 = 5$ *А*	
R - ?	
U - ?	

Розв'язування

ЕРС, яка індукується у вторинній обмотці:

$$E = \frac{U_1}{k} = 22B.$$

Нехтуючи індуктивним опором вторинної обмотки, використаємо для неї закон Ома для повного кола постійного струму $I_2 = E_2(R + r_2)^{-1}$, що дозволить визначити опір навантаження вторинної обмотки:

$$R = \frac{E_2 - I_2 r_2}{I_2} = \frac{\frac{U_1}{k} - I_2 r_2}{r_2} = 2{,}4\ Ом.$$

Напруга на вторинній обмотці, прикладена до резистора R, дорівнює

$$U_2 = E - I_2 r_2 = 12\ B.$$

Відповідь: $R = 2{,}4$ *Ом*, $U_2 = 12$ *В*.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Рамка площею $S=400\ см^2$ має $n=100$ витків і обертається в однорідному магнітному полі з індукцією $B=10^{-2}$ *Тл*, причому період обертання $T=0{,}1$ *с*. Визначити максимальне значення ЕРС в рамці, коли вісь обертання перпендикулярна до силових ліній.

Відповідь: *2,5 В*.

Задача 2. Яке значення напруги через *10, 15 і 30 мс*, якщо амплітуда напруги *200 В*, а період *60 мс*?

Відповідь: *100 В; 0; –200 В*.

Задача 3. У коло змінного струму з частотою *400 Гц* увімкнена котушка індуктивністю *0,1 Гн*. Якої ємності конденсатор треба ввімкнути в це коло, щоб мав місце резонанс?

Відповідь: *1,6 мкФ*.

Задача 4. Трансформатор, що знижує напругу з коефіцієнтом трансформації *10*, увімкнений у мережу з напругою *220 В*. Яка напруга на виході трансформатора, якщо опір вторинної обмотки *0,2 Ом*, а опір корисного навантаження *2 Ом*?

Відповідь: *20 В*.

Задача 5. Амплітуда струму в коливальному контурі *1 мА,* а амплітуда коливань заряду конденсатора *10 мкКл.* Знайти період вільних коливань.

Відповідь: *63 мс.*

Задача 6. Сила струму в первинній обмотці трансформатора $I_1=0,5$ *А*, напруга на її кінцях $U_1=220$ *В*. Сила струму у вторинній обмотці трансформатора $I_2=11$ *А*, напруга на її кінцях $U_2=9,5$ *В*. Знайти ККД трансформатора.

Відповідь: *95%.*

Задача 7. Коливальний контур складається з котушки і двох однакових конденсаторів, увімкнених паралельно. У скільки разів зміниться частота коливань, якщо конденсатори ввімкнути послідовно?

Відповідь: *збільшиться вдвічі.*

Задача 8. Через 1/6 періоду миттєве значення ЕРС дорівнює *50 В*. Яке значення ЕРС при фазі $\frac{1}{4}\pi$ рад?

Відповідь: *71 В.*

Задача 9. У коло змінного струму ввімкнені послідовно активний опір *15 Ом*, індуктивний опір *30 Ом* і ємнісний опір *22 Ом*. Який повний опір кола?

Відповідь: *17 Ом.*

Задача 10. Трансформатор підвищує напругу з *220 В* до *600 В* і має в первинній обмотці *840* витків. Який коефіцієнт трансформації? Скільки витків у вторинній обмотці? В якій обмотці провід більшого перерізу?

Відповідь: *1/3; 2520; у первинній.*

Електромагнітні хвилі

Задача 11. Яка може бути максимальна кількість імпульсів, що випромінює радіолокатор за *1 с* при розвідуванні цілі, розміщеної за *30 км* від нього?

Відповідь: *5000.*

Задача 12. Коливальний контур радіоприймача настроєний на частоту *9 МГц*. Як треба змінити його ємність, щоб він був настроєний на довжину хвилі *50 м?*

Відповідь: *збільшити в 2,25 рази.*

Задача 13. Скільки коливань відбувається в електромагнітній хвилі з довжиною хвилі *30 м* протягом одного періоду звукових коливань з частотою *200 Гц?*

Відповідь: $5{\cdot}10^4$.

Задача 14. Електромагнітні хвилі поширюються в однорідному середовищі зі швидкістю $\upsilon_{сер}=2\cdot10^8 м/с$. Яка довжина хвилі електромагнітних коливань у цьому середовищі, якщо їх частота у вакуумі $f_0=1\ МГц$?

Відповідь: $\lambda=\dfrac{\upsilon_{сер}}{f_0}=200\ м$.

Задача 15. Знайти довжину хвилі, яку випромінює контур з ємністю *141 пФ*, якщо при зміні сили струму в його котушці на *1 А* за *0,6 с* у ній виникає ЕРС *0,2 мВ*.

Відповідь: *245 м*.

Розділ 12. Геометрична оптика

При розв'язуванні задач на тему "Геометрична оптика" рекомендується:

- нарисувати хід променів в оптичній системі, показати при цьому різними лініями промені, які створюють дійсні зображення, і продовження променів, які створюють уявні зображення;
- записати формули, що виражають закони геометричної оптики, а також співвідношення, які випливають з геометричних побудов;
- провести алгебраїчні перетворення, розв'язати одержану систему рівнянь і знайти шукану величину.

Основні поняття

Закон заломлення світла

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21},$$

де α - кут падіння;
β - кут заломлення;
$\upsilon_1=\dfrac{c}{n_1}$ і $\upsilon_2=\dfrac{c}{n_2}$ - фазова швидкість світла в першому і другому середовищах;
$c=3\cdot10^8 м/с$ - швидкість світла в вакуумі;
n_{21} - відносний показник заломлення другого середовища відносно першого.

Граничний кут α_0 повного відбиття визначається із співвідношення

$$\sin\alpha_0=\frac{n_2}{n_1},$$

де n_1 і n_2 - абсолютні показники заломлення першого і другого середовища.

Формула тонкої лінзи

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{d},$$

де F - фокусна відстань;
f - відстань від лінзи до зображення;
d - відстань від лінзи до предмета.

Для збиральної лінзи $F > 0$, $d > 0$, для дійсного зображення $f > 0$, для уявного зображення $f < 0$.

Оптична сила лінзи

$$D=\frac{1}{F}=(n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

де F - фокусна відстань;
n - відносний показник заломлення речовини лінзи відносно зовнішнього середовища;
R_1 і R_2 - радіуси кривизни поверхонь лінзи, для опуклої поверхні $R > 0$, для плоскої поверхні $R = \infty$, для увігнутої поверхні $R < 0$.

Лінійне збільшення лінзи

$$\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d},$$

де f і d - відстань від лінзи до зображення і від лінзи до предмета;
H - висота зображення;
h - висота предмета.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Частота потужних імпульсів випромінювання радіолокатора аеропорту $\nu = 500\ Гц$. Який радіус його дії? Як довго ціль, що рухається зі швидкістю $\upsilon = 900\ км/год$, летітиме від краю зони спостереження до точки розташування радіолокатора?

$\nu = 500\ c^{-1}$
$\upsilon = 900\ км/год$
R - ? t - ?

Розв'язування

Між двома імпульсами проходить час $T=\dfrac{1}{\nu}= 0{,}02$ с. За цей час імпульс може дійти до цілі, відбитися і повернутися до приймача локатора.

Отже, радіус дії $R=\dfrac{cT}{2}=300\ км$, де c - швидкість світла у вакуумі.

Таку відстань ціль пройде за час $t=\dfrac{R}{\upsilon}=20\ хв$.

Відповідь: $R = 300$ *км*, $t = 20$ *хв*.

Задача 2. На скляну пластинку, показник заломлення якої *1,5*, падає промінь світла. Знайти кут падіння променя, якщо кут між відбитим і заломленим променями $90°$.

$n = 1{,}5$	Розв'язування:
$\gamma = 1{,}57$ *рад*	З рисунка видно, що $i + \gamma + r = \pi$, звідси $r = \pi - \gamma - i$.
$i = ?$	Тоді, враховуючи значення γ,

$$r = \frac{\pi}{2} - i. \qquad (1)$$

З іншого боку, за законом заломлення світла,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin r} = n. \qquad (2)$$

Враховуючи вираз (1), одержимо

$$\sin r = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \cos i.$$

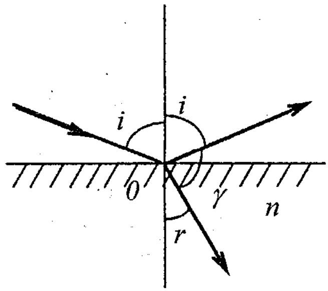


Рис. 36

Тоді рівняння (2) можна привести до вигляду

$$\frac{\sin i}{\cos i} = tg\, i = n,$$

звідси $i = arctg\, n = 0{,}98$ *рад*, або $57°$.

Відповідь: $i = 57°$.

Задача 3. Абсолютні показники заломлення алмазу і скла відповідно рівні *2,42* і *1,5*. Яким повинне бути відношення товщин цих речовин, щоб час розповсюдження світла в них був однаковим?

$n_1 = 2{,}42$	Розв'язування
$n_2 = 1{,}5$	Абсолютні показники заломлення алмазу n_1 і скла n_2 зв'язані з швидкістю розповсюдження світла в середовищах υ_1 і υ_2 співвідношенням:
$\frac{l_2}{l_1} - ?$	

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}. \qquad (1)$$

Оскільки світло розповсюджується в однорідному середовищі зі сталою швидкістю, то

$$\upsilon_1 = \frac{l_1}{t}, \upsilon_2 = \frac{l_2}{t},$$

де t- час проходження світла через речовину;

l_1 – товщина алмазу;
l_2 – товщина скла.

Поділивши почленно два останніх вирази, одержимо

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{l_2}{l_1}. \qquad (2)$$

Прирівнюючи рівняння (1) і (2), знайдемо

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{n_1}{n_2} = 1{,}61.$$

Відповідь: $\frac{l_2}{l_1} = 1{,}61$.

Задача 4. Знайти граничний кут падіння променя на межу розділу скла і води.

$n_1 = 1{,}5$	
$n_2 = 1{,}33$	
i_0 - ?	

Розв'язування

Граничний кут падіння, при якому спостерігається явище повного відбиття, знаходимо з умови

$$\sin i_0 = \frac{n_2}{n_1},$$

звідси

$$i_0 = \arcsin\frac{n_2}{n_1} = 1{,}08\ рад.$$

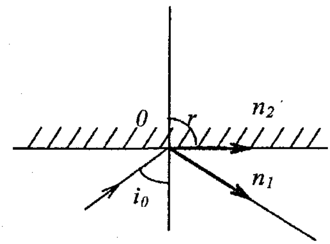


Рис. 37

Відповідь: $i_0 = 1{,}08\ рад$.

Задача 5. Пучок паралельних променів світла шириною $5\ см$ падає під кутом $\alpha = 60°$ на поверхню скла (показник заломлення $n = \frac{5}{3}$) товщиною $10\ см$. Знайти зміщення пучка від початкового напряму і його ширину в склі.

$a = 5 \cdot 10^{-2}\ м$	
$\alpha = 60°$	
$n = 5/3$	
$d = 0{,}10\ м$	
h - ?, a_1 - ?	

Розв'язування

Хід пучка променів зображений на рис. 38, де a_1 - ширина пучка в склі, h - його зміщення після виходу із скляної пластинки. Закон заломлення світла

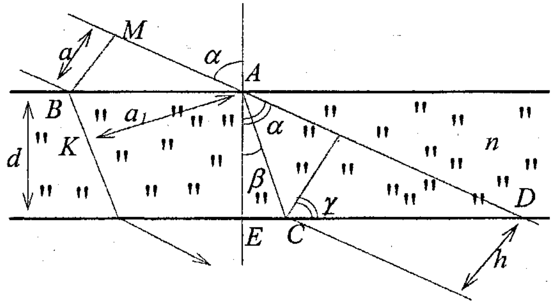


Рис. 38

$$\frac{sin\alpha}{sin\beta}=n.$$

$\gamma = \alpha$, тому $h = CD\,cos\,\gamma = CD\,cos\,\alpha$, $AE = d$, $CD = d\,tg\,\alpha - d\,tg\,\beta$.

Підставимо CD у формулу $h = CD\ cos\ \alpha$ і виконаємо алгебраїчні перетворення:

$$h=d\sin\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2\quad\sin^2\alpha}}\right)=6{,}74\,см.$$

Для знаходження a_1 розглянемо трикутники ABM і AKB зі спільною гіпотенузою і гострими кутами α і β.

Тоді

$$AB=\frac{a}{cos\,\alpha}=\frac{a_1}{cos\,\beta}.$$

Звідси: $a_1=\dfrac{a\cos\beta}{\cos\alpha}=\dfrac{a\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{n\cos\alpha}=8{,}5\ см.$

Відповідь: $h = 6{,}74$ *см*, $a_1 = 8{,}5$ *см.*

Задача 6. Свічка стоїть на відстані $L = 3{,}75$ *м* від стіни. Рухаючи між ними лінзу, двічі одержали чітке зображення полум'я на стіні. Відстань між двома положеннями лінзи, у яких вона дає чітке зображення, $l = 75$ *см*. Обчислити фокусну відстань лінзи.

Розв'язування

$L = 3{,}75$ *м* $l = 75$ *см* $= 0{,}75$ *м* F - ?	Неважко зрозуміти, що обидва зображення були перевернуті і дійсні, одне – збільшене, друге – зменшене.

Запишемо для цих положень рівняння лінзи:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F};\ \frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}. \qquad (1)$$

Одночасно виконується пара таких рівностей: $d_1 + f_1 = L$; $d_2 + f_2 = L$, а за умовою задачі $|d_1 - d_2| = |f_1 - f_2| = l$.

Якщо знайти $f_1 = L - d_1$, і підставити це значення в перше рівняння з (1), то приходимо до квадратного рівняння для d_1, корені якого дають нам d_1 і d_2, а саме

$$d^2 - Ld + FL = 0 \Rightarrow d_{1,2} = 0{,}5L \pm \sqrt{0{,}25L^2 - FL}.$$

Звідси: $l^2 = (d_2 - d_1)^2 = 0{,}25L^2 - FL \Rightarrow F = \dfrac{L^2 - l^2}{4L} = 0{,}9$ м.

Відповідь: $F = 0{,}9$ *м*.

Задача 7. Знайти фокусну відстань двояковипуклої скляної лінзи, що знаходиться у воді, якщо відомо, що її фокусна відстань в повітрі *20 см*.

$F_1 = 0{,}2$ *м*

F_2 - ?

Розв'язування:

Фокусна відстань опуклої лінзи зв'язана з абсолютними показниками заломлення речовини лінзи n_1 і навколишнього середовища n_2 таким співвідношенням:

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

де R_1 і R_2 - радіуси кривизни сферичних поверхонь.

Для лінзи, яка знаходиться в повітрі,

$$\frac{1}{F_1} = (n_1 - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

аналогічно, для лінзи, яка знаходиться у воді,

$$\frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{n_1 - n_2}{n_2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (2)$$

Поділивши почленно співвідношення (1) і (2), одержимо

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(n_1 - 1)n_2}{n_1 - n_2}, \text{ звідси } F_2 = \frac{F_1 \cdot n_2 (n_1 - 1)}{n_1 - n_2} = 0{,}78 \text{ м.}$$

Відповідь: $F_2 = 0{,}78$*м*.

Задача 8. Зображення предмета на матовому склі фотоапарата з відстані, що дорівнює *5 м*, має висоту *30 мм*, а з відстані *9 м* - висоту *51 мм*. Знайти фокусну відстань об`єктива.

$d_1 = 15$ *м*	
$h_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ *м*	
$d_2 = 9$ *м*	
$h_2 = 5,1 \cdot 10^{-2}$ *м*	
F-?	

Розв'язування

Застосовуючи формулу збиральної лінзи для відстаней d_1 і d_2, одержимо

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F};\ \frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}. \qquad (1)$$

Використовуючи формулу збільшення лінзи для тих же відстаней, знайдемо

$$\frac{h}{h_1}=\frac{d_1}{f_1};\ \frac{h}{h_2}=\frac{d_2}{f_2},$$

звідси

$$f_1=\frac{h_1d_1}{h};\ f_2=\frac{h_2d_2}{h},$$

де h - висота предмета.

Підставляючи вирази для f_1 і f_2 в рівняння (1), одержимо

$$\frac{1}{d_1}+\frac{h}{h_1d_1}=\frac{1}{F};\ \frac{1}{d_2}+\frac{h}{h_2d_2}=\frac{1}{F}. \qquad (2)$$

Спільно розв`язуючи рівняння (2), одержимо

$$F=\frac{d_2h_2 \quad d_1h_1}{h_2 \quad h_1}=0,43\ \text{м}.$$

Відповідь: $F = 0,43$ *м.*

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. При падінні на плоску межу двох середовищ з показниками заломлення n_1 і n_2 промінь світла частково відбивається, а частково заломлюється. При якому куті падіння відбитий промінь перпендикулярний до заломленого?

Відповідь: $\alpha = arctg\frac{n_2}{n_1}$.

Задача 2. У дно водойми глибиною *2,0 м* забита паля, що на *0,75 м* виступає з води. Знайти довжину тіні від палі на поверхні і дні водойми, якщо висота Сонця над горизонтом 45°.

Відповідь: $x_1=0,75$ *м*, $x_2=2$ *м.*

Задача 3. Два взаємноперпендикулярні промені падають з повітря на рідину. Який показник заломлення рідини, якщо один промінь заломлюється під кутом 36°, а другий під кутом 20°?

Відповідь: *1,5*.

Задача 4. Знайти показник заломлення скипидару і швидкість поширення світла в ньому, якщо при куті падіння $\alpha = 45°$ кут заломлення $\beta = 30°$. Швидкість світла у вакуумі $c = 3 \cdot 10^8$ *м/с*.

Відповідь: $n=1,4$, $v=c/n=2,14 \cdot 10^8$ *м/с*.

Задача 5. Кут між заломленим і відбитим променями дорівнює $90°$. Знайти відносний показник заломлення, якщо промінь падає на плоску межу двох середовищ під кутом α, для якого $\sin\alpha = 0,8$.

Відповідь: $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 1,33$.

Задача 6. Під яким кутом має впасти промінь на поверхню скла ($n=1,6$), щоб кут заломлення був удвічі менший від кута падіння?

Відповідь: $74°$.

Задача 7. Граничний кут повного внутрішнього відбиття дорівнює $30°$. Знайти показник заломлення.

Відповідь: *2*.

Задача 8. Свічка міститься на відстані *12,5 см* від збиральної лінзи. Знайти відстань від лінзи до зображення. Яке воно? Оптична сила лінзи *10 дптр*.

Відповідь: *50 см; збільшене у 4 рази*.

Задача 9. Уявне зображення предмета міститься на відстані $f=1$ *м* від збиральної лінзи з фокусною відстанню $F=0,25$ *м*. Яка відстань d від лінзи до предмета?

Відповідь: $d = \dfrac{f \cdot F}{f+F} = 0,2\,м$.

Задача 10. Збиральна лінза дає зображення предмета зі збільшенням $k=2$. Відстань від предмета до лінзи більша за її фокусну відстань на $a = 6$ *см*. Знайти відстань f від лінзи до екрана.

Відповідь: $f = k(k+1)a = 36$ *см*.

Задача 11. На якій відстані f від об'єктива проекційного апарата з фокусною відстанню $F=0,1$ *м* треба розмістити екран, щоб зображення на екрані було в $k=50$ разів більшим за предмет на діапозитиві?

Відповідь: $f = (k+1)F = 5,1$ *м*.

Задача 12. Збиральна лінза дає зображення предмета, який розташований на відстані *d=9,9 см* від неї, зі збільшенням *k=10.* Знайти фокусну відстань *F* лінзи у випадках дійсного та уявного зображень.

Відповідь: $F=\dfrac{kd}{k+1}=9\ см$, $\quad F=\dfrac{kd}{k-1}=11\ см$.

Задача 13. Знайти показник заломлення скла, з якого виготовлено збиральну лінзу з радіусами кривизни поверхонь *20 см,* якщо дійсне зображення предмета, який міститься на відстані *25 см* від лінзи, перебуває на відстані *1 м* від неї.

Відповідь: *1,5.*

Задача 14. Предмет міститься на фокальній площині тонкої лінзи. Знайти висоту предмета *h,* якщо висота зображення *H=0,5 см.*

Відповідь: *h=2H=1 см.*

Задача 15. На якій відстані від лінзи з фокусною відстанню *12 см* треба поставити предмет, щоб його дійсне зображення було втричі більше за сам предмет?

Відповідь: *16 см.*

Задача 16. Свічка стоїть на відстані *a* від екрана. Між екраном і свічкою помістили збиральну лінзу, яка дає на екрані чітке зображення свічки при двох положеннях лінзи. Знайти відстань *b* між цими положеннями лінзи, якщо фокусна відстань дорівнює *F.*

Відповідь: $b=\sqrt{a^2-4aF}$.

Задача 17. Предмет заввишки *h=0,03 м* розміщено на відстані *d=0,15 м* від розсіювальної лінзи з фокусною відстанню *F=0,3 м.* Яка відстань *f* від лінзи до зображення? Яка висота *H* зображення?

Відповідь: $f=\dfrac{F\ \ d}{F+d}=0{,}1\ м$; $\quad H=\dfrac{hF}{F+d}=0{,}02\ м$.

Розділ 13. Хвильова оптика

При розв'язуванні задач на тему "Хвильова оптика" рекомендується:

- визначити оптичну різницю ходу між інтерферуючими променями, записати умови максимумів і мінімумів інтенсивності в інтерференційній картині, визначити шукані величини з цих співвідношень;

- записати умови головних максимумів для дифракції на дифракційній решітці, доповнивши їх необхідними геометричними співвідношеннями і визначити шукані величини. При цьому слід врахувати, що дифракційна картина симетрична відносно центрального максимуму.

Основні поняття

Умови інтерференційних максимумів (посилення світла)

$$\Delta = \frac{2k\lambda}{2},$$

де Δ - оптична різниця ходу хвилі;
λ - довжина хвилі;
$k = 1; 2; 3...$

Умови інтерференційних мінімумів (ослаблення світла)

$$\Delta = (2k + 1)\ \lambda/2,$$

де Δ - оптична різниця ходу хвилі;
λ - довжина хвилі;
$k = 1; 2; 3...$

Умови головних максимумів в спектрі дифракційної решітки

$$d \cdot \sin\varphi = \pm k\lambda,$$

де d – період дифракційної решітки;
φ - кут дифракції;
$k = 1; 2; 3$ - порядок максимуму;
λ - довжина плоскої монохроматичної хвилі, що падає нормально на поверхню решітки.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Довжина хвиль червоних променів світла у повітрі *700 нм*. Яка довжина хвилі цих променів у воді?

$\lambda_1 = 700нм = 7 \cdot 10^{-7} м$

$\lambda_2 - ?$

Розв'язування

Довжина світлової хвилі у повітрі λ_1 і у воді λ_2 зв`язані і з швидкостями розповсюдження цих хвиль у повітрі υ_1 і у воді υ_2 таким співвідношенням:

$$\lambda_1 = \frac{\upsilon_1}{\nu} \quad і \quad \lambda_2 = \frac{\upsilon_2}{\nu},$$

де ν - частота світлових коливань, яка не змінюється при переході світла з одного середовища до іншого.

Поділивши почленно ці рівняння, одержимо

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}.$$

Швидкості розповсюдження світла у повітрі і у воді зв`язані з абсолютними показниками заломлення цих середовищ співвідношенням

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Звідси $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \lambda_2=\frac{\lambda_1 n_1}{n_2}=5{,}26\cdot 10^{-7}\,м.$

Відповідь: $\lambda_2 = 5{,}26\cdot 10^{-7}\,м.$

Задача 2. У вакуумі світло має довжину хвилі $\lambda_0 = 600\ нм$. Яка різниця ходу Δ двох таких хвиль відповідає їх різниці фаз $\Delta\varphi = 0{,}4\,\pi$? Якій різниці фаз відповідає ця різниця відстаней у склі з показником заломлення $n = 1{,}5$?

$\lambda_0 = 6\cdot 10^{-7}\,м$
$\Delta\varphi = 0{,}4\,\pi$
$n = 1{,}5$
$\Delta\varphi_1$ - ?

Розв'язування

Відстані $l = \lambda_0$ відповідає у вакуумі різниця фаз 2π, тому з очевидного відношення $\frac{x}{\lambda_0}=\frac{0{,}4\pi}{2\pi}$ знаходимо шукану різницю ходу $\Delta = x = 0{,}2\lambda_0 = \frac{\lambda_0}{5}$.

У склі довжина хвилі зменшується в $n = 1{,}5$ разу, тому вказана відстань відповідає в $1{,}5$ разу більшій різниці фаз, тобто 6π.

Відповідь: $\Delta\varphi_1 = 6\pi$.

Задача 3. Визначити найбільший порядок спектра, який може утворити дифракційна решітка, що має 500 штрихів на $1мм$, якщо довжина хвилі, що падає на неї $590\ нм$. Яку найбільшу довжину хвилі можна спостерігати в спектрі цієї решітки?

$N_0 = 5\cdot 10^{5}\,м^{-1}$
$\lambda = 5{,}9\cdot 10^{-7}\,м$
k_m - ? λ_m - ?

Розв'язування

З формули дифракційної решітки $d\cdot\sin\varphi = k\lambda$ знайдемо:

$$k = d\cdot\sin\frac{\varphi}{\lambda}\ . \qquad (1)$$

Враховуючи, що $d=\frac{1}{N_0}$, перетворимо формулу (1)

$$k=\frac{\sin\varphi}{\lambda N_0}\ . \qquad (2)$$

З виразу (2) маємо, що при заданій λ і N_0 найбільший порядок спектра можна спостерігати при найбільшому значенні $\sin\varphi_m = 1$, тобто

$$k_m=\frac{\sin\varphi_m}{\lambda N_0}=\frac{1}{\lambda N_0}\approx 3.$$

Найбільша довжина хвилі, яку можна спостерігати за допомогою цієї решітки, дорівнює $\lambda_m = \dfrac{d\sin\varphi_m}{k_m} = \dfrac{1}{k_m N_0} = 6{,}67\cdot10^{-7}\,м.$

Відповідь: $k_m \approx 3$; $\lambda_m = 6{,}67\cdot10^{-7}$ *м.*

Задача 4. На дифракційну решітку, нормально до її поверхні, падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі *0,5 мкм*. Розміщена поблизу решітки лінза проектує дифракційну картину на плоский екран, віддалений на відстань $L = 1м$. Відстань між двома максимумами інтенсивності першого порядку, що спостерігається на екрані, дорівнює *20,2см*. Знайти: 1) постійну d дифракційної решітки; 2) число n штрихів на *1см*; 3) число максимумів, які дає при цьому дифракційна решітка; 4) максимальний кут відхилення променів, що відповідають останньому дифракційному максимуму.

$\lambda = 5\cdot10^{-7}\,м$

$L = 1\,м$

$l = 20{,}2\cdot10^{-3}\,м$

d-?

n-?

k_{max}-?

$_{max}$?

Розв'язування

1. З формули дифракційної решітки $d\sin\varphi = k\lambda$, знайдемо, що $d = \dfrac{k\lambda}{\sin\varphi}$. У даному випадку $k = 1$, $\sin\varphi = tg\,\varphi$ (тому, що $\dfrac{l}{2} << L$),

$$tg\,\varphi = \frac{\frac{l}{2}}{L} \text{ (рис.39).}$$

З урахуванням цього

$$d = \frac{2\lambda L}{l} = 4{,}59 \text{ мкм.}$$

2. Число штрихів на *1 см* знайдемо з формули

$$n = \frac{1}{d} = 2{,}02 \quad 10^3 см^{\ 1}.$$

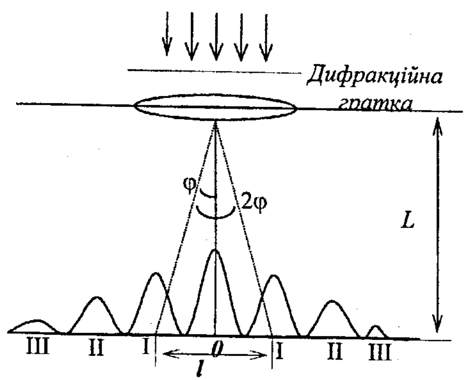


Рис. 39

3. Для визначення числа максимумів, обчислимо спочатку максимальне значення k_{max}, виходячи з того, що максимальний кут відхилення променів решіткою не може перевищувати 90^0, тому

$$k_{max} = \frac{d\sin 90°}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = 9{,}9.$$

Число k повинно бути цілим, тому $k_{max} = 9$. Загальне число максимумів, враховуючи центральний нульовий максимум

$$N = 2k_{max} + 1 = 19,$$

оскільки зліва і справа від центрального нульового буде спостерігатися однакове число максимумів, тобто всього максимумів $2k_{max}$.

4. Визначимо максимальний кут відхилення променів, що відповідають останньому дифракційному максимуму

$$\sin\varphi_{max} = k_{max} \cdot \frac{\lambda}{d}.$$

Звідси $\varphi_{max} = \arcsin\left(k_{\max} \cdot \frac{\lambda}{d}\right) = 65{,}4^0$.

Відповідь: $d = 4{,}95$ *мкм*; $n = 2{,}02 \cdot 10^3$ *см* $^{-1}$; $N = 19$; $\varphi_{max} = 65{,}4^0$.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Дифракційна решітка має *120* штрихів на *1 мм*. Знайти довжину хвилі монохроматичного світла, що падає на решітку, якщо кут між спектрами першого порядку дорівнює $8°$.

Відповідь: *580 нм*.

Задача 2. Яка ширина спектра першого порядку (довжина хвиль від *400* до *760 нм)*, отриманого на екрані, відстань від якого до дифракційної решітки з періодом *0,01 мм* дорівнює *3 м*?

Відповідь: *11 см*.

Задача 3. Різниця ходу когерентних хвиль від двох джерел світла дорівнює $0{,}4\lambda$. Знайти різницю фаз цих хвиль.

Відповідь: $0{,}8\pi$.

Задача 4. На дифракційну решітку, що має $N=500$ штрихів на $l=1$*мм*, падає плоска монохроматична хвиля $(\lambda=480$ *нм*$)$. Визначити найбільший порядок спектра k, який можна спостерігати при нормальному падінні променів на решітку.

Відповідь: $k = \dfrac{l}{N\lambda} = 4$.

Задача 5. Дифракційна решітка має *2000* штрихів на *1 см*. На її поверхню нормально падає пучок світла $(\lambda=694$ *нм*$)$. Знайти: 1) напрямок максимуму в спектрі першого порядку; 2) максимальний порядок дифракційної картини.

Відповідь: $8°$, *7*.

Розділ 14. Квантова оптика

При розв'язуванні задач на тему "Квантова оптика" рекомендується:

- врахувати зв'язок між хвильовими та квантовими характеристиками частинок;
- застосувати закони збереження енергії та імпульсу при розгляданні взаємодії фотонів з іншими частинками (наприклад з електронами);
- враховувати, що на основі положень квантової фізики, радіус орбіти електрона, енергія атома, а також енергія кванта, що поглинається або випромінюється, має тільки дискретні значення.

Основні поняття

Енергія фотона

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

де $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – стала Планка;
ν - частота;
λ - довжина хвилі світла;
c – швидкість світла в вакуумі.

Імпульс фотона

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Рівняння Ейнштейна для фотоефекту

$$h\nu = A + \frac{m\upsilon^2}{2},$$

де A – робота виходу електрона з металу;
m – маса електрона;
υ – швидкість електрона.

Червона границя фотоефекту

$$\nu_{\min} = \frac{A}{h}, \lambda_{\max} = \frac{hc}{A}.$$

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Обчислити енергію фотона, якщо відомо, що в середовищі з показником заломлення $n = \frac{4}{3}$ його довжина хвилі $5{,}89 \cdot 10^{-7}$ *м.*

Дано	Розв'язування
$n = \frac{4}{3}$ $\lambda = 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ *м* E - ?	Енергія фотона обчислюється за формулою $$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0},$$

де ν - частота світла;

$\lambda_0 = \dfrac{c}{\upsilon}$ - довжина хвилі у вакуумі, дорівнює $\lambda_0 = n\lambda$;

λ - довжина хвилі в середовищі, тому $E = \dfrac{hc}{\lambda n} = 2{,}5 \cdot 10^{-19}$ *Дж.*

Відповідь : $E = 2{,}5 \cdot 10^{-19}$ *Дж.*

Задача 2. Яку довжину хвилі повинен мати γ- квант, щоб його енергія досягла одного джоуля? У скільки разів його маса перевищуватиме масу спокою протона?

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с*
$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*
$E_\gamma = 1$ *Дж*
$\lambda - ?\ \dfrac{m_\varphi}{m_p} - ?$

Розв'язування

З формули Планка знаходимо довжину хвилі такого кванта :

$$\lambda = \frac{hc}{E\nu} = 1{,}98 \cdot 10^{-25}\ м.$$

Опираючись на формулу Ейнштейна $E = mc^2$, обчислимо масу такого фотона і знайдемо відношення до маси такого протона

$$\frac{m_\gamma}{m_p} = \frac{E_\gamma}{c^2}\ \frac{1}{m_p} = 6{,}7 \cdot 10^9.$$

Відповідь: $\lambda = 1{,}98 \cdot 10^{-25}$ *м,* $\dfrac{m}{m_p} = 6{,}7 \cdot 10^9.$

Задача 3. Найбільша довжина світлової хвилі, при якій може мати місце фотоефект для вольфраму, дорівнює $2{,}75 \cdot 10^{-7}$ *м.* Знайти роботу виходу електронів з вольфраму; найбільшу швидкість електронів, що вириваються з вольфраму світлом з довжиною хвилі $1{,}8 \cdot 10^{-7}$ *м*, найбільшу енергію цих електронів.

$\lambda_{max} = 2{,}75 \cdot 10^{-7}$ *м*
$\lambda = 1{,}8 \cdot 10^{-7}$ *м*
A - ? υ_m - ? W_m - ?

Розв'язування

Найбільша довжина хвилі λ_{max}, при якому може мати місце фотоефект для даного металу, зв'язана з червоною границею фотоефекту ν_{min} для цього металу співвідношенням

$$\nu_{\min} = \nu_0 = \frac{c}{\lambda_{\max}}.$$

Робота виходу електронів з металу $A = h\nu_{min}$ або $A = \dfrac{hc}{\lambda_{\max}} = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ *Дж.*

За формулою Ейнштейна для фотоефекту

$$\frac{hv}{\lambda}=A+\frac{mv_{max}^2}{2};$$

враховуючи, що $v=\frac{c}{\lambda}$, одержимо

$$\frac{hc}{\lambda}=A+\frac{mv_{max}^2}{2};$$

звідси $\upsilon_{\max}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda}-A\right)}=9{,}1\ \ 10^5\,м/с.$

Знаючи найбільшу швидкість електронів, які вилетіли, знайдемо найбільшу кінетичну енергію, що їм відповідає

$$W_m=\frac{m\upsilon_m^2}{2}=3{,}8\cdot10^{19}\ Дж.$$

Відповідь: $A=7{,}2\cdot10^{-19}$ *Дж*; $U_{max}=9{,}1\cdot10^5$ *м/с*; $W_{max}=3{,}8\cdot10^{-19}$ *Дж.*

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Знайти масу та імпульс фотонів для інфрачервоних ($\nu=10^{12}$ *Гц*) і рентгенівських ($\nu=10^{18}$ *Гц*) променів.

Відповідь: $7{,}3\cdot10^{-39}$ *кг*; $2{,}2\cdot10^{-30}$ *кг·м/с*; $7{,}3\cdot10^{-33}$ *кг*; $2{,}2\cdot10^{-24}$ *кг·м/с.*

Задача 2. Око людини, яка довгий час перебуває в темряві, сприймає світло з довжиною хвилі *0,5 мкм* при потужності $2{,}1\cdot10^{-17}$ *Вт*. Скільки фотонів падає при цьому на сітківку ока за *1 с*?

Відповідь: *53.*

Задача 3. Побудувати графік залежності кінетичної енергії фотоелектронів від частоти світла. Як за допомогою цього графіка знайти сталу Планка?

Задача 4. Яку максимальну швидкість можуть набути вирвані з калію електрони при опроміненні його фіолетовим світлом з довжиною хвилі *0,42 мкм*? Маса електрона $m_e=9{,}11\cdot10^{-31}$ *кг*. Робота виходу дорівнює *2 еВ.*

Відповідь: *580 км/с.*

Задача 5. Під час спостереження фотоефекту з поверхні металу (робота виходу *4,3 еВ*) затримуючий потенціал дорівнює *1,2 В*. Знайти частоту падаючого світла.

Відповідь: $1{,}33\cdot10^{15}$ *Гц.*

Задача 6. Знайти довжину хвилі електромагнітного випромінювання, кванти якого мають таку саму енергію, як і електрон, який пройшов різницю потенціалів *4,1 В.*

Відповідь: *0,3 мкм.*

Задача 7. Який імпульс фотона, енергія якого дорівнює $6{\cdot}10^{-19}$ *Дж*?

Відповідь: $2{\cdot}10^{-27}$ *кгм/с.*

Розділ 15. Будова атома і атомного ядра

При розв'язуванні задач на тему "Будова атома і атомного ядра" слід виробити певні навики при обчисленнях і оперуванні великими і дуже малими параметрами.

Задачі з ядерної фізики поділяються на дві групи: перша використовує формулу обчислення енергії реакцій через дефект мас, друга оперує переважно законами збереження маси, енергії, заряду, імпульсу. Необхідним є знання понять атомної одиниці маси, її енергетичного еквівалента, вміння використань таблиць мас ядер тощо.

Основні поняття

Енергія зв'язку атомного ядра.

$$E_{зв} = \Delta mc^2,$$

де $\Delta m = Zm_p + (A\text{-}Z)m_n - M_я = ZM_{1H}^{1} + (A - Z)m_n - M_A$ - дефект маси,

c - швидкість світла в вакуумі;

A – масове число (число протонів і нейтронів в ядрі);

Z – зарядове число (число протонів в ядрі);

$M_я$ – маса ядра;

M_H – маса атома водню;

m_p – маса протона;

m_n – маса нейтрона;

M_A – маса атома.

Закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 e^{-\lambda t},$$

де N_0 – число радіоактивних ядер в початковий момент часу ($t = 0$);

N - число радіоактивних ядер в момент часу t;

T – період піврозпаду;

$\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ - стала радіоактивного розпаду.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. При розпаді електронів в атомах водню з четвертої стаціонарної орбіти на другу випромінюються фотони з енергією $0{,}04\cdot10^{-19}$ *Дж*. Визначити довжину цієї хвилі в спектрі.

$E = 0{,}04 \cdot 10^{-19}$ *Дж*
λ - ?

Розв'язування

Енергія фотона $h\nu = E_4 - E_2 = E$; $E = h\nu$ при $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$,

одержимо $E = \dfrac{hc}{\lambda}$, звідси $\lambda = \dfrac{hc}{E} = 0{,}5$ *мкм*.

Відповідь: $\lambda = 0{,}5$ *мкм*.

Задача 2. Знайти в мегаелектронвольтах енергію зв'язку ядра ізотопа літію ${}^7_3Li$.

${}_3^7Li$
$m_{li} = 11{,}6475 \cdot 10^{-27}$ *кг*
$m_p = 11{,}6724 \cdot 10^{-27}$ *кг*
$m_n = 11{,}6748 \cdot 10^{-27}$ *кг*
ΔE - ?

Розв'язування

Енергія зв'язку ядра

$$\Delta E = \Delta mc^2. \qquad (1)$$

Оскільки $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_я$, рівність (1) можна привести до вигляду

$$\Delta E = (Zm_p + (A - Z)m_n - M_я)c^2.$$

Підставивши $A = 7$ і $Z = 3$ у вираз (1), одержимо:

$$\Delta E = (3m_p + 4\,m_n - M_я)c^2 = 6{,}2 \cdot 10^{-12}\ Дж = 39\ MeB$$

Тут враховується, що $1MeB = 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ *Дж*.

Відповідь: $\Delta E = 39MeB$.

Задача 3. Яка кількість *урану-235* витрачається за добу на АЕС потужністю *5 МВт* з ККД *17%*? При кожному поділі ядра виділяється енергія *200 МеВ*.

$\mu = 235 \cdot 10^{-3}$ *кг/моль*
$P = 5$ *МВт* $= 5 \cdot 10^6$ *Вт*
$\eta = 17\%$
m - ?

Розв'язування

Визначимо кількість ядер в одиниці маси урану:

$$N = \frac{mN_A}{\mu}.$$

Для роботи станції протягом часу t необхідна енергія $E = \dfrac{Pt}{\eta}$,

де P – її потужність,

η - ККД.

Прирівнюючи виділену ураном енергію $E = N \cdot \Delta E = \Delta E \cdot \dfrac{m}{\mu} N_A$ до необхідної E, обчислюємо масу урану

$$\Delta E \cdot m \cdot \frac{N_A}{\mu} = \frac{Pt}{\eta} \Rightarrow m = \frac{Pt\ \ \mu}{\eta N_A \Delta E} = 31г.$$

Відповідь : $m = 31$ г.

Задача 4. Ядро $^{226}_{88}Ra$ викидає α-частинку з енергією $4,78$ МеВ і γ-квант малої енергії. Нехтуючи імпульсом останнього, обчислити швидкість ядра, якщо спочатку ядро було нерухоме.

$E_\alpha = 4,78$ МеВ

m_α

M

$V_я$ - ?

Розв'язування

Оскільки енергія α-частинки мала у порівнянні з її енергією спокою $E_0 = m_\alpha c^2$, то для обчислення її імпульсу p_α можна використати формули класичної механіки:

$$E_\alpha = \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} \Rightarrow p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha E_\alpha}.$$

Закон збереження імпульсу дозволяє обчислити швидкість ядра

$$(M - m_\alpha)V_я = p_\alpha \Rightarrow V_я = \frac{\sqrt{2m_\alpha E_\alpha}}{M - m_\alpha} = 267 км/с.$$

Відповідь: $\upsilon_я = 267$ км/с.

Задача 5. Активність радіоактивного елемента зменшилась в 4 рази за 8 діб. Знайти період піврозпаду.

$N_0 = 4N$

$t = 8$ діб

T - ?

Розв'язування.

За законом радіоактивного розпаду число атомів, які не розпалися, дорівнює:

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

При заданому значенні $N_0 = 4N$ одержуємо: $N = 4N \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, звідси знаходимо T:

$$\frac{1}{4} = 2^{-\frac{t}{T}};\ 2^{-2} = 2^{-\frac{t}{T}};\ -2 = -\frac{t}{T};\ T = \frac{t}{2} = 4 доби.$$

Відповідь : Т = 4 доби.

Задача 6. Радіоактивний натрій $^{24}_{11}Na$ розпадається з періодом піврозпаду 14,8 год. Обчислити кількість атомів, що розпались в 1мг даного радіоактивного препарату за 10 год.

$\mu = 24 \cdot 10^{3}$ *кг/моль*
$T = 14{,}8$ *год*
$t = 10$ *год*
$m = 1 \cdot 10^{-6}$ *кг*

ΔN - ?

Розв'язування.

Число атомів які розпалися за час t

$$\Delta N = N_0 - N_1 \tag{1}$$

де N_0 – число атомів, які не розпалися в початковий момент часу в 1 *мг* ${}^{24}_{11}Na$;

N - число атомів, які не розпалися через час t.

Оскільки $N = N_0 e^{-\lambda t}$, формулу (1) можна привести до вигляду

$$\Delta N = N - N_1 = N_0 e^{-\lambda t} = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right). \tag{2}$$

Враховуючи, що $\lambda = \dfrac{ln 2}{T}$, перетворимо вираз (2) :

$$\Delta N = N_0\left(1 - e^{-\ln\frac{2t}{T}}\right) = N_0\left[1 - \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T}}\right] = N_0\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right). \tag{3}$$

Оскільки в молі ${}^{24}_{11}Na$ знаходиться число атомів, що дорівнює сталій Авогадро N_A, то в даній масі m знаходиться число N_0 атомів:

$$N_0 = \frac{m}{\mu} N_A . \tag{4}$$

Підставивши формулу (4) в (3) одержимо

$$\Delta N = \frac{m}{\mu} N_A\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right) = 9{,}3 \cdot 10^{18}.$$

Відповідь: $\Delta N = 9{,}3 \cdot 10^{18}$.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Скільки відсотків радіоактивних ядер кобальту розпадеться за *30* днів? Період піврозпаду дорівнює *71* день.

Відповідь: *25%.*

Задача 2. У реакції взаємодії ${}^{27}_{13}Al$ з ${}^{12}_{6}C$ утворюється α- частинка і ядро деякого ізотопу. Знайти кількість нейтронів у цьому ізотопі.

Відповідь: *17.*

Задача 3. Написати пропущені позначення в таких ядерних реакціях:

$${}^{27}_{13}Al + {}^{1}_{0}n \Rightarrow ? + {}^{4}_{2}He,$$

$${}^{12}_{6}C + {}^{1}_{1}H \Rightarrow {}^{13}_{6}C + ?,$$

$$? + {}^{1}_{1}H \Rightarrow {}^{22}_{11}Na + {}^{4}_{2}He,$$

$${}^{55}_{25}Mn + ? \Rightarrow {}^{55}_{26}Fe + {}^{1}_{0}n,$$

$${}^{27}_{13}Al + \gamma \Rightarrow {}^{26}_{12}Mg + ?.$$

Відповідь: ${}^{24}_{11}Na,\ {}^{0}_{+1}e,\ {}^{25}_{12}Mg,\ {}^{1}_{1}H,\ {}^{1}_{1}H$.

Задача 4. У результаті серії α- і β- розпадів ядро урану ${}^{235}_{92}U$ перетворюється на ядро свинцю ${}^{207}_{82}Pb$. Скільки α- і β- розпадів було у цьому ланцюжку перетворень?

Відповідь: *7 α-розпадів, 4 β-розпадів.*

Тестові завдання

Кінематика

1. Тіло, що почало рухатися рівноприскорено зі стану спокою, за першу секунду руху проходить шлях S. Який шлях воно пройде за другу секунду?

1. *S;* 2. *1,5 S;* 3. *2 S;* 4. *3 S;* 5. *4 S.*

2. Лижник спускається з гори за час *T*. За який час він спуститься з гори такої ж форми, але в 4 рази більших розмірів?

1. $\frac{1}{T}$; 2. 16 *T*; 3. *T*; 4. 2 *T*; 5. 8 *T*.

3. Велосипедист проїхав ряд горбів. На підйомах його швидкість дорівнює υ_1, на спусках υ_2. Загальна довжина шляху L, причому підйоми і спуски мають однакові довжини. Яка середня швидкість $\upsilon_{сер}$ велосипедиста?

1. $\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}$; 2. $\frac{2\upsilon_1\cdot\upsilon_2}{\upsilon_1+\upsilon_2}$ 3. $\frac{\upsilon_1\cdot\upsilon_2}{\upsilon_1+\upsilon_2}$; 4. $\left(\frac{1}{\upsilon_1}+\frac{1}{\upsilon_2}\right)L$; 5. $\frac{1}{\upsilon_1}+\frac{1}{\upsilon_2}$.

4. Координата матеріальної точки, що рухається вздовж осі *x*, задана формулою $x = 7 - 3t + t^2$. Яка формула залежності швидкості точки від часу?

1. $-3+2t$; 2. $3t$; 3. $7-3t$; 4. $-3+t$; 5. $-3t+t^2$.

5. Тіло, яке кинули вертикально вгору, перебувало на висоті *50 м* двічі з інтервалом часу *3 с*. Який повний час польоту тіла?

1. *6 с*; 2. *6,2 с*; 3. *7 с*; 4. *9,3 с*; 5. *8,1 с.*

6. Тіло вільно падає з висоти *270 м*. Розділити цю висоту на три частини h_1, h_2, h_3 так, щоб на проходження кожної з них витрачався один і той же час.

1. $h_1 = 30м; h_2 = 90м; h_3 = 150м.$
2. $h_1 = 30м; h_2 = 60м; h_3 = 180м.$

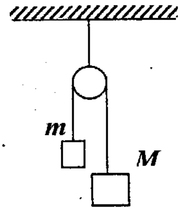
3. $h_1 = 20м; h_2 = 80м; h_3 = 170м.$
4. $h_1 = 25м; h_2 = 85м; h_3 = 160м.$
5. $h_1 = 25м; h_2 = 60м; h_3 = 140м.$

Динаміка

7. У скільки разів зменшиться прискорення вільного падіння тіла внаслідок піднімання його на висоту, що дорівнює діаметру землі?
1. *У 2 рази*; 2. *У 3 рази*; 3. *У 9 разів*; 4. *У 4 рази*; 5. *У 16 разів.*

8. М'яч масою *400 г* плаває у воді, занурившись в неї наполовину. Яка архімедова сила діє на цей же самий м'яч, що плаває у гасі?
1. *2Н*; 2. *3,2Н*; 3. *4Н*; 4. *1,6Н*; 5. *2,4Н.*

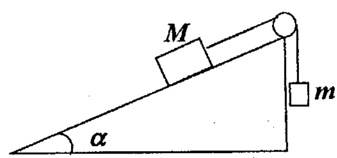
9. Знайти прискорення вантажів *m* і *M*. Маси вантажів *m=500г* і *M=1,0кг.*
1. *10 м/с*^{2}
2. *6,7 м/с*^{2}
3. *5 м/с*^{2}
4. *3,3 м/с*^{2}
5. *6,6 м/с*^{2}



10. Велосипедист проїжджає серединою підвісного моста зі швидкістю *36 км/год*. Міст прогнувся по дузі радіуса *20 м*. З якою силою велосипед тисне на міст, якщо загальна маса велосипедиста і велосипеда *60 кг*?
1. *1200 Н*; 2. *300 Н*; 3. *4500 Н*; 4. *600 Н*; 5. *900 Н.*

11. Маси вантажів *m=1кг* і *M=2кг*. Кут нахилу площини *α=30°*, коефіцієнт тертя між площиною і вантажем дорівнює *0,1*.

Яка сила натягу нитки?
1. *10 Н*
2. *3,3 Н*
3. *5 Н*
4. *13 Н*
5. *6,6 Н*



12. До кінців невагомого важеля довжиною *1 м* підвішені вантажі масою *50* і *150 г*. Де треба розмістити опору, щоб важіль знаходився в рівновазі (відстань відрахувати від вантажу більшої маси)?
1. *0,40 м*; 2. *0,35 м*; 3. *0,25 м*; 4. *0,30 м*; 5. *0,45 м.*

Енергія. Імпульс

13. При рівномірному переміщенні вантажу масою *15 кг* вздовж похилої площини динамометр, прив'язаний до вантажу, показував силу *40 Н*. Обчислити ККД похилої площини, якщо її довжина *1,8 м*, висота *30 см*.

1. *70%*; 2. *82%*; 3. *62,5%*; 4. *75,5%*; 5. *80%*.

14. Визначити середню потужність насоса, який подає *4,5* $м^3$ води на висоту *5 м* за *5 хв*.

1. *735 Вт*; 2. *1500 Вт*; 3. *800 Вт*; 4. *1200 Вт*; 5. *1470 Вт*.

15. З човна вікінгів масою *500 кг*, що рухається зі швидкістю *1 м/с*, стрибає воїн масою *80 кг* в горизонтальному напрямі зі швидкістю *7 м/с*. Якою буде швидкість човна після стрибка воїна, якщо він стрибає в сторону, протилежну рухові човна?

1. *1,5 м/с*; 2. *2,3 м/с*; 3. *2,0 м/с*; 4. *1,8 м/с*; 5. *0,6 м/с*.

16. Людина масою *80 кг* біжить зі швидкістю *9 км/год*. Назустріч їй котиться візок масою *120 кг* зі швидкістю *5 м/с*. З якою швидкістю буде рухатися візок після того, як людина стрибне у нього?

1. *6,6 м/с*; 2. *-2 м/с*; 3. *0,6 м/с*; 4. *-4 м/с*; 5. *1,6 м/с*.

17. Щоб розтягнути пружину на *1 см*, потрібно здійснити роботу *0,2 Дж*. Яку роботу слід здійснити, щоб розтягнути пружину ще на *1 см*?

1. *0,2 Дж*; 2. *0,4 Дж*; 3. *0,6 Дж*; 4. *0,8 Дж*; 5. *1 Дж*.

18. Яку мінімальну роботу слід здійснити, щоб перевернути на іншу грань однорідний куб масою *3 т* з довжиною ребра *1 м?*

1. *30 кДж*; 2. *6,2 кДж*; 3. *42 кДж*; 4. *15 кДж*; 5. *45 кДж*.

Молекулярна фізика

19. У скільки разів густина повітря взимку при температурі мінус 23^oC більша густини повітря влітку при температурі 27^oC? Тиск сталий.

1. *1,5*; 2. *1,2*; 3. *2*; 4. *2,5*; 5. *3*.

20. Тиск ідеального газу зменшився від *800 кПа* до *160 кПа* при сталій температурі. У скільки разів збільшився об'єм газу? Маса газу стала.

1. *2*; 2. *15*; 3. *0,2*; 4. *0,5*; 5. *3*.

21. На скільки процентів слід збільшити температуру газу в закритій посудині постійного об'єму, щоб тиск зріс в *1,25* рази?

1. *50%;* 2. *10%;* 3. *25%;* 4. *20%;* 5. *40%.*

22. При ізохорному нагріванні на *6 К* тиск деякої маси газу збільшився на *2%.* Яка була початкова температура газу?

1. *200 К;* 2. *250 К;* 3. *27^o С;* 4. *227^o С;* 5. *247^o С.*

23. Як змінилася б абсолютна температура *T* і тиск *p* газу в герметично закритому балоні, якщо швидкість кожної молекули збільшилася б удвічі?

1. *T і p збільшилися б у 2 рази;*
2. *T збільшилася б у 2 рази, p - у 4 рази;*
3. *T збільшилася б у 4 рази, p - у 2 рази;*
4. *T і p збільшилися б у 4 рази;*
5. *T збільшилася б у 3 рази, p - у 2 рази.*

Термодинаміка

24. Яка кількість теплоти необхідна, щоб перетворити *1 кг* льоду, що має температуру *-10^o С*, на воду з температурою *10^oС*?

1. *63 кДж;* 2. *390 кДж;* 3. *42 кДж;* 4. *370 кДж;* 5. *36 кДж.*

25. Теплова машина отримала від нагрівача кількість теплоти *500 кДж* та передала холодильнику кількість теплоти *300 кДж.* Який ККД цієї теплової машини?

1. *40%;* 2. *67%;* 3. *25%;* 4. *60%;* 5. *45%.*

26. Внутрішня енергія одноатомного ідеального газу, що знаходиться в балоні об'ємом *0,02 $м^3$*, дорівнює *600 Дж.* Знайти тиск газу.

1. $1\cdot10^5$ *Н/$м^2$;* 2. $5\cdot10^4$ *Н/$м^2$;* 3. $1,5\cdot10^5$ *Н/$м^2$;* 4. $2\cdot10^5$ *Н/$м^2$;* 5. $3\cdot10^5$ *Н/$м^2$.*

27. Скільки молей одноатомного газу нагріли на *10К*, якщо кількість підведеної теплоти дорівнює *249 Дж?* Процес нагрівання ізохорний.

1. *1моль;* 2. *5молів ;* 3. *2 моля;* 4. *3моля;* 5. *4моля.*

28. Знайти різницю температур нагрівника і холодильника ідеальної теплової машини, якщо температура нагрівника *400К*, а максимальний коефіцієнт корисної дії *25%.*

1. *250 К;* 2. *200 К ;* 3. *100 К;* 4. *150 К;* 5. *300 К.*

29. Яку відстань проїде автомобіль масою *4 т*, витративши *5 л* бензину? ККД двигуна *30%*, коефіцієнт опору руху *0,05*, густина бензину *700 кг/$м^3$*. Питома теплота згорання *q= $46\cdot10^6$ Дж/кг.*

1. *34,5 км;* 2. *42 км ;* 3. *24 км;* 4. *16 км;* 5. *32 км.*

Електромагнетизм

30. Знайти відношення сили взаємодії двох однакових точкових зарядів до сили взаємодії тих же зарядів при збільшенні відстані між ними в *4 рази*?

1. *збільшилася в 2 рази;*
2. *зменшилася в 2 рази;*
3. *зменшилася в 16 разів;*
4. *зменшилася в 4 рази;*
5. *збільшилася в 4 рази.*

31. Металевій сфері радіуса *10 см* надано заряд *2 нКл*. Яка напруженість електричного поля на відстані *5 см* від центру сфери?

1. *1,8 кВ/м;* 2. *3,6 кВ/м* ; 3. *0 кВ/м;* 4. *7,2 кВ/м*; 5. *4,8 кВ/м.*

32. Електричне поле утворене накладанням двох однорідних полів з напруженням *300 В/м* і 400 *В/м*. Силові лінії полів взаємно перпендикулярні. Знайти напруженість результуючого поля.

1. *700 В/м;* 2. *500 В/м* ; 3. *100 В/м;* 4. *200 В/м*; 5. *300 В/м.*

33. У скільки разів зменшиться значення напруженості поля точкового заряду при збільшенні відстані до заряду в *3 рази*?

1. У *3 рази;* 2. У *1,5 рази* ; 3. У *9 разів;* 4. У *6 разів*; 5.У *7,5 рази.*

34. Знайти роботу, яка здійснюється електричним полем при проходженні заряду *4 Кл* по ділянці кола з напругою *8 В*.

1. *2 Дж;* 2. *32 Дж* ; 3. *64 Дж;* 4. *10 Дж*; 5. *12 Дж.*

35. Яку різницю потенціалів повинен пройти електрон зі стану спокою, щоб набути кінетичну енергію в *100 еВ*? Заряд електрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ *Кл.*

1. *10 В;* 2. *100 В* ; 3. *66 В;* 4. *15 В*; 5. *30 В.*

36. Напруженість однорідного електричного поля дорівнює *100 В/м*. Яку максимальну роботу може здійснити електричне поле при зміщенні заряду *10 мкКл* на відстань *2 м*?

1. $5 \cdot 10^{-2}$ *Дж;* 2. $2 \cdot 10^{-3}$ *Дж;* 3. $2 \cdot 10^{-2}$ *Дж;* 4. $5 \cdot 10^{-3}$ *Дж*; 5. $7 \cdot 10^{-3}$ *Дж.*

37. Знайти заряд, що проходить крізь поперечний переріз провідника за *1 хв.*, якщо сила струму в провіднику дорівнює *0,2 А*.

1. *0,2 Кл;* 2. *12 Кл* ; 3. *5 Кл;* 4. *4 Кл*; 5. *7,5 Кл.*

38. Який максимальний опір можна одержати, з'єднуючи резистори *5 Ом, 10 Ом* та *20 Ом*?

1. *20 Ом;* 2. *45 Ом* ; 3. *35 Ом;* 4. *2 Ом*; 5. *25 Ом.*

39. Два резистори опором *2 Ом* і *5 Ом* з'єднані послідовно і включені в коло постійної напруги. Яка потужність виділяється на опорі *5 Ом*, якщо на опорі *2 Ом* виділяється потужність *30 Вт*?

1. *80 Вт;* 2. *75 Вт* ; 3. *100 Вт;* 4. *50 Вт*; 5. *60 Вт.*

40. До джерела струму підключено реостат. При опорі реостата *4 Ом* і *9 Ом* одержують однакову корисну потужність, що дорівнює *25 Вт.* Знайти ЕРС джерела струму.

1. *10 В;* 2. *25 В* ; 3. *15 В;* 4. *40 В*; 5. *60 В.*

41. Лампочку, на якій написано "*12 В, 0,3 А*", вмикають послідовно з резистором у мережу з напругою *36 В.* Яким є опір резистора, якщо лампочка горить нормальним жаром?

1. *40 Ом;* 2. *120 Ом* ; 3. *60 Ом;* 4. *80 Ом*; 5. *25 Ом.*

42. Елемент з внутрішнім опором r і ЕРС E замкнутий на три лампочки з опором $3r$ кожна, які з'єднані послідовно. У скільки разів зміниться сила струму в електричному колі, якщо їх з'єднали паралельно?

1. У *5 разів;* 2. У *3 рази;* 3. У *2 рази;* 4. У *4 рази;* 5. У *7 разів.*

43. Електрон влітає, в однорідне магнітне поле зі швидкістю, що напрямлена вздовж ліній магнітної індукції. Як буде рухатися електрон у магнітному полі?

1. *Прямолінійно, швидкість збільшується;*
2. *Рівномірно прямолінійно;*
3. *Прямолінійно, швидкість зменшується;*
4. *По колу;*
5. *По спіралі.*

44. α - частинка, пройшовши прискорювальну різницю потенціалів U, влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до вектора магнітної індукції. Знайти радіус та період обертання α- частинки, маса якої m, заряд q.

1. $R=\beta\sqrt{\dfrac{q}{2mu}}\quad T=\dfrac{q\beta}{2\pi m};$
2. $R=\sqrt{\dfrac{q\beta}{2mu}}\quad T=\dfrac{q\beta}{2m};$
3. $R=\sqrt{\dfrac{mu}{\beta q}}\quad T=\dfrac{2m}{q\beta};$

4. $R=\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2mu}{q}}$ $T=\frac{2\pi m}{q\beta}$;

5. $R=\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{mu}{q}}$ $T=\frac{\pi m}{q\beta}$.

45. Знайти швидкість зміни магнітного потоку в соленоїді з *200* витків при збудженні в ньому ЕРС індукції *120 В*.

1. $6\cdot10^{-2}$ *Вб/с;* 2. $4\cdot10^{-2}$ *Вб/с;* 3. $3\cdot10^{-2}$ *Вб/с;* 4. $2\cdot10^{-2}$ *Вб/с;* 5. $1\cdot10^{-2}$ *Вб/с.*

Коливання і хвилі

46. Точка здійснює гармонічні коливання з частотою *2 Гц*. Знайти циклічну частоту коливань.

1. *12,56 рад/с;* 2. *6,28 рад/с ;* 3. *3,14 рад/с ;* 4. *4 рад/с Гц;* 5. *6 рад/с.*

48. Тіло здійснює гармонічні коливання з амплітудою *1 см* і періодом *1 с*. Знайти максимальне значення прискорення тіла.

1. *0,12 м/с^2;* 2. *0,39 м/с^2;* 3. *0,54 м/с^2;* 4. *0,10 м/с^2;* 5. *0,24 м/с^2.*

49. Знайти період гармонічного коливання, фаза якого збільшилася від *0* до *2* рад за *0,04 с*.

1. *6,28 с;* 2. *0,13 с;* 3. *3,14 с;* 4. *4,12 с;* 5. *6 с.*

50. Тіло здійснює гармонічні коливання в горизонтальній площині на пружині жорсткістю *500 Н/м*. Знайти амплітуду коливань, якщо в ході коливань максимальне значення сили пружності *20 Н*.

1. *6 см;* 2. *8 см;* 3. *4 см;* 4. *2 см;* 5. *1 см.*

51. Секундний математичний маятник встановлено в кабіну автомобіля, що рухається прямолінійно з прискоренням *2 м/с^2*. Знайти період коливання цього маятника.

1. *0,99 с;* 2. *1,0 с;* 3. *1,01 с;* 4. *1,11 с;* 5. *1,12 с.*

52. Знайти довжину математичного маятника, якщо явище резонансу спостерігається при частоті зовнішньої дії *2 Гц*.

1. *10 см;* 2. *6,2 см;* 3. *12 см;* 4. *8 см;* 5. *4 см.*

53. У коливальному контурі радіоприймача індуктивність котушки *40 мкГн*, а ємність конденсатора може змінитися від *25* до *300 пФ*. На яку найменшу довжину хвилі можна настроїти приймач?

1. *600 м;* 2. *300 м;* 3. *181 м;* 4. *1884 м;* 5. *400 м.*

54. Знайти довжину хвилі, яку випромінює контур з ємністю *141 пФ*, якщо при зміні сили струму в його котушці на *1 А* за *0,6 с* у ній виникає ЕРС *0,2 мВ*.

1. *2500 м;* 2. *1,2 м;* 3. *26 м;* 4. *319 м;* 5. *500 м.*

55. Повна енергія коливань в контурі дорівнює $2\cdot 10^{-4}$ Дж. Знайти максимальну силу струму в контурі, якщо індуктивність дорівнює *0,01 Гн.*

1. *0,01 А;* 2. *0,05 А;* 3. *0,2 А;* 4. *0,1 А;* 5. *0,4 А.*

Геометрична і хвильова оптика

56. За допомогою збиральної лінзи на екрані отримали зображення предмета, що збільшене у *2* рази. Оптична сила лінзи *5 дптр*. Яка відстань від предмета до екрана?

1. *20 см;* 2. *640 см;* 3. *60 см;* 4. *90 см;* 5. *45 см.*

57. Промінь світла йде із скла у воду і заломлюється на плоскій межі скло-вода. При якому куті падіння відбитий і заломлений промені перпендикулярні один до одного? $n_{ск} = 1{,}5;\ n_{в} = 1{,}33$.

1. 30^o; 2. 40^o; 3. 54^o; 4. 60^o; 5. 72^o.

58. Знайти граничний кут повного внутрішнього відбиття при переході променя із скла ($n_{ск} = 1{,}5$) у воду ($n_{в} = 1{,}33$).

1. $45{,}2^o$; 2. $62{,}5^o$; 3. 70^o; 4. $75{,}2^o$; 5. 32^o.

59. Коли фотони з частиною 10^{15} Гц падають на поверхню деякого металу, максимальна кінетична енергія вибитих ними електронів дорівнює *1,5 еВ*. За якої мінімальної енергії фотона фотоефект для цього металу є можливим?

1. *1,5 еВ;* 2. *2,6 еВ;* 3. *4,1 еВ;* 4. *5,6 еВ;* 5. *4,5 еВ.*

60. Дифракційна решітка має *120* штрихів на *1 мм*. Знайти довжину хвилі монохромного світла, що падає на решітку, якщо кут між спектрами першого порядку дорівнює 8^o.

1. *520 нм;* 2. *580 нм;* 3. *620 нм;* 4. *680 нм;* 5. *720 нм.*

61. Період піврозпаду радіоактивного ізотопу дорівнює *4 год*. Яка частина атомів розпадеться за *12 год.?*

1. *1/8;* 2. *1/4;* 3. *3/4;* 4. *7/8;* 5. *1/2.*

62. При радіоактивному розпаді ядра $^{238}_{92}U$ випромінюється три α - частинки й дві β - частинки. Яке ядро утворюється в результаті цього розпаду?

1. $^{232}_{90}Th$;   2. $^{226}_{88}Ra$;   3. $^{224}_{87}Fr$;   4. $^{233}_{92}U$;   5. $^{222}_{88}Ra$.

ЛІТЕРАТУРА

1.Підручники з фізики для учнів 6 – 11-го класів.

2.Мясников С. П., Осанова Т. Н. Пособие по физике для подготовительных отделений – 5-е издание переработ. – М., 1981.–391с.

3.Корсак К. В.. Фізика. Письмовий екзамен. – К., 1993. – 224 с.

4.Балаш В. А.. Задачи по физике и методы их решения. Пособие для учителя. – М., 1983. – 432 с.

5.Гончаренко С. У. Конкурсні задачі з фізики. – К., 1980 . – 432 с.

6.Болсун А. И., Галякевич Б. К.. Физика в экзаменационных вопросах и ответах. – М., 1997. – 318 с.

7.Романенко В. І.. Збірник задач з фізики. Самостійні та контрольні роботи для 9-11 класів. – К.: 1998. – 224 с.

8.Гельфгат І. М., Генденштейн Л. Е., Кирик Л. А.. 1001 задача з фізики з відповідями, вказівками, розв'язками, – Х..: 1998. – 352 с.

9.Римкевич А. П.. Збірник задач з фізики для 9 – 11 класів середньої школи. – Х .: Олант, 1989. – 224 с.

Додаткова література:

1. Данилюк Т.О., Резнік С.І., Авдєєв С.Г.. Посібник з фізики для слухачів Інституту довузівської підготовки (механіка, молекулярна фізика та термодинаміка). Навчальний посібник. – Вінниця : ВДТУ, 2002.-127с.

2. Данилюк Т.О., Резнік С.І., Авдєєв С.Г.. Посібник з фізики для слухачів Інституту довузівської підготовки (електромагнетизм, коливання й хвилі, оптика та ядро). Навчальний посібник. – Вінниця : ВДТУ, 2002.-146с.

Навчальне видання

Т. О. Данилюк ,С.І. Резнік,
С. Г. Авдєєв

ЗАДАЧІ З ФІЗИКИ

та методи їх розв'язування

(ДЛЯ СЛУХАЧІВ ІНСТИТУТУ ДО ВУЗІВСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ)

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Данилюк Т. О.

Редактор В. О. Дружиніна
Коректор З. В. Поліщук

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 27.05.2008 р.
Формат 29,7x42¼
Друк різографічний
Тираж 100 прим.

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 9.1

Зам. № 2008-069

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ