

В.О.Федотов, О.В.Грушко

**ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З
ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ**

Міністерство освіти і науки України

Вінницький державний технічний університет

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як збірник завдань для студентів бакалаврського напрямку 6.091400 – Комп'ютеризовані системи автоматики та управління.
Протокол №12 від 30 травня 2002 р.

Вінниця ВДТУ 2002

УДК 531: 620 (075)
Ф 34

Рецензенти:

В.Ф. Анісімов, д.т.н., професор
С.Й. Ткаченко, д.т.н., професор
В.М. Михалевич, д.т.н., професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

Федотов В.О., Грушко О.В.

Ф34 Збірник завдань для самостійної роботи з технічної механіки.

Збірник завдань. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 111 с.

Збірник завдань відповідає програмі з дисципліни “Технічна механіка для студентів спеціальності 7.091401 – системи управління автоматики і є переробленим і доповненим із навчального видання “Федотов В.О. Механіка. Методичні матеріали та розрахунково – графічні завдання. Збірник завдань. – Вінниця: ВДТУ. 2000. – 101 с.”

Для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 531:620(075)
© В.Федотов, В.Грушко, 2002

Зміст

1	Порядок та основні вимоги виконання роботи.....	5
2	Теоретична механіка.....	5
2.1	Сила.....	7
2.2	Момент сили відносно центра.....	7
2.3	Момент сили відносно осі.....	8
2.4	Поняття про пару сил.....	8
2.5	Класифікація сил.....	9
2.5.1	Класифікація в'язей та їх реакції.....	9
2.6	Закони механіки.....	12
2.7	Динаміка точки.....	13
2.7.1	Швидкість та прискорення точки.....	13
2.7.2	Диференціальні рівняння руху точки.....	14
2.8	Динаміка матеріальної системи.....	17
2.8.1	Момент інерції тіла відносно осі.....	17
2.8.2	Метод кінетостатики.....	19
2.9	Завдання розрахунково-графічної роботи (РГР) з теоретичної механіки.....	21
TM1	Збіжна система сил.....	21
TM2	Плоска система паралельних сил.....	26
TM3	Кінематика точки.....	35
TM4	Кінематичне дослідження руху точки на ЕОМ.....	39
TM5	Обертальний рух тіла.....	42
TM6	Плоский рух твердого тіла.....	47
TM7	Дослідження руху матеріальної точки.....	54
TM8	Дослідження обертального руху тіла.....	57
3.	Опір матеріалів.....	65
3.1	Основна задача опору матеріалів для спеціальності “Системи управління автоматики”.....	65
3.2	Теорія внутрішніх сил.....	67
3.3	Основні гіпотези і припущення в опорі матеріалів.....	68
3.4	Побудова епюр внутрішніх силових факторів.....	68
3.4.1	Побудова епюри внутрішніх нормальних сил при розтягу.....	69
3.4.2	Побудова епюри крутних моментів.....	71
3.4.3	Побудова епюри внутрішніх силових факторів при плоскому згині.....	73
3.5	Розрахунки на міцність та жорсткість при простому опорі.....	75
3.5.1	Розтяг та стиск.....	75
3.5.2	Зсув.....	76
3.5.3	Кручення.....	76

3.5.4 Плоский згин.....	79
3.6 Завдання РГР з опору матеріалів.....	81
ОМ1 Центр ваги пластини.....	84
ОМ2 Визначення поперечного перерізу балки при плоскому згині.....	84
ОМ3 Визначення діаметра вала при крученні.....	84
4. Кабелі та з'єднання.....	89
4.1 Оптичні кабелі.....	89
4.2 Завдання РГР з розрахунку елементів з'єднання деталей.....	94
Д1 Розрахунок клемового з'єднання.....	94
Д2 Розрахунок закріплення фланця.....	97
Д3 Розрахунок закріплення фланцевого електродвигуна.....	100
Д4 Розрахунок шпонки.....	103
Література.....	104
Додаток А Контрольні запитання з технічної механіки.....	105
Додаток Б Метрична різьба.....	107
Додаток В Двотаврова балка.....	109
Додаток Г Шпонкові з'єднання.....	110

1 ПОРЯДОК ТА ОСНОВНІ ВИМОГИ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

З дисципліни “Технічна механіка” (спеціальність – 7.091401 “Системи управління автоматики”) студенти денної форми навчання виконують три розрахунково-графічні роботи, а заочної – одну контрольну роботу варіанти задач якої вибирають за двом останніми цифрами залікової книжки (шифр) з таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Варіант	Шифр			
1	01,	31,	61,	91
2	02,	32,	62,	92
3	03,	33,	63,	93
...	...	...	...	...
29	29,	59,	89,	
30	30,	60,	90,	

Студенти денної форми навчання оформляють розрахунково-графічне завдання у відповідності до діючих стандартів ЄСКД(2.105 і 2.106 для текстових конструкторських документів та 2.104 – для основних надписів).

Студенти заочної форми навчання виконують завдання в зошитах. На титульній сторінці зошита вказують номер контрольної роботи, назву дисципліни, прізвище та ініціали студента, шифр, факультет, групу і домашню адресу.

Розв’язання кожної задачі потрібно починати на розвороті зошита (з лівої сторінки), так, щоб розрахункова схема та формули, складені за нею, знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і приводиться коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові схеми (рисунок) виконують за допомогою креслярських приладів. Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями. На кожній сторінці залишаються поля для зауважень рецензента. Якщо робота висилається на повторну перевірку (при виконанні її у другому зошиті) обов’язково прикладається незарахована робота.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити роботу. Графік приїзду студентів на захист планується деканатом.

5. ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Механіка – наука про загальні закони механічного руху матеріальних точок та тіл. *Механічний рух* – це переміщення точок та тіл у просторі з

перебігом часу.

Теоретична механіка спирається на певну сукупність узгоджених законів і фактів, встановлених дослідною механікою, які вважаються істинними. На цій основі засобами математики дедуктивним шляхом встановлюються нові факти і закони руху.

Класична (за Ньютоном) має справу з макроскопічними тілами, які рухаються із швидкістю, набагато меншою від швидкості світла ($3 \cdot 10^8$ м/с). Межі істинності класичної механіки встановлюються, з одного боку, спеціальною та загальною теорією відносності (А.Пуанкаре, Н.Бор, А.Ейнштейн), а з іншого боку – квантовою теорією (М.Планк, Н.Бор, В.Гейзенберг, Л. де Бройль). В подальшому будемо розглядати тільки класичну теоретичну механіку яка є основою теорії інших механічних дисциплін: опору матеріалів, теорії механізмів і машин, деталей машин, гідромеханіки і т. д.

Теоретична механіка і математика з часів Ньютона мають тісний зв'язок. Варто вказати на те, що визначні вчені механіки були одночасно і математиками; до часів М.Е.Жуковського теоретичну механіку викладали як суто математичну дисципліну. Для розуміння механіки потрібні знання фундаментальних розділів математики – аналітичної геометрії, векторної алгебри і аналізу, теорії тензорів, варіаційного числення, теорії диференціальних рівнянь, методів обчислювальної математики.

Знання теоретичної механіки потрібні інженерам, бакалаврам немеханічних спеціальностей, які розробляють нову техніку, оскільки в більшості випадків кінцеві ланки складних автоматичних систем —це механізми: електричні двигуни, прилади різного призначення, трансмісії, апарати, маніпулятори і т. і. В наш час, коли на протязі життя доводиться змінювати характер діяльності, оволодіння фундаментальною наукою – теоретичною механікою може стати важливою складовою частиною успішної інженерної діяльності.

Основні поняття (абстракції) механіки запроваджені як ідеалізовані образи (моделі), що мають певні, означені властивості, запозичені у реальних об'єктів. Це – простір, час, матеріальна точка, абсолютне тверде тіло, сила.

Простір розглядається як абсолютний тримірний евклідовий, що вміщує рухомі та нерухомі тіла.

Абсолютний же протікає рівномірно і однаково у всіх частинах простору і на нього не впливає рух матерії або спостерігача.

Матеріальна точка – матеріальне тіло, розмірами якого можна знехтувати при вивченні його руху.

Система матеріальних точок – сукупність матеріальних точок, в якій положення і рух однієї з цих точок залежить від положення і руху решти точок.

Абсолютно тверде тіло – система матеріальних точок, відстані між

якими у процесі руху залишаються незмінними і які заповнюють простір, що займає тіло.

2.1 Сила

У теоретичній механіці одним із основних є поняття сили. У механіці під силою розуміють кількісну міру механічної взаємодії матеріальних тіл, у результаті якої тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення або деформуватися (змінювати свою форму). Із цього означення випливають два методи вимірювання сили:

- а) динамічний, в основі якого лежить вимірювання прискорення тіла в інерціальній системі відліку;
- б) статичний, побудований на вимірюванні деформації пружних тіл.

Те, що в основу механіки було покладено кількісні закони сил, дозволило І.Ньютону сформулювати закони, не вивчаючи фізичних явищ, які виникають при взаємодії тіл. Більш того, в деяких випадках можна встановити кількісний зв'язок між механічними і немеханічними формами матерії при їх взаємних перетвореннях.

Модель сили визначається трьома головними кількісними умовами: величиною, напрямом дії і точкою прикладання.

Такому означенню сили повністю відповідає поняття вектора, довжина якого в обраному масштабі дорівнює значенню сили, прикладеної в даній точці. Вектор напрямлений в бік дії сили. Силу позначимо символом $\vec{F}$ (рис. 2.1). Пряму ab , на якій відкладений відрізок, що зображує силу, називають лінією дії сили.

Для вимірювання модуля сили її порівнюють з іншою силою, яку вважають еталоном. У системі SI за одиницю сили (еталон) прийнято Ньютон (Н). Використовуються також більші одиниці вимірювання сил: мега-ньютон ($1 \text{ Мн} = 10^6 \text{ н}$); кіло-ньютон ($1 \text{ кН} = 10^3 \text{ н}$).

Сила, як векторна величина, підпорядкована всім законам векторного числення.

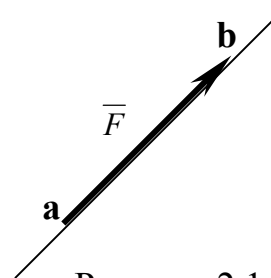


Рисунок 2.1

2.2 Момент сили відносно центра

Моментом сили $\vec{F}$ (рис. 2.2) відносно центра називається векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного із точки O до точки прикладення сили $\vec{F}$, на вектор сили $\vec{F}$:

$$m_0 \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Модуль векторного добутку:

$$|m_0 \vec{F}| = \vec{r} \cdot \vec{F} \cdot \sin \alpha = F \cdot h$$

де h – плече сили, тобто перпендикуляр, проведений із центра на лінію дії сили.

Наслідок 1. Із означення ясно, що момент сили $\vec{F}$ відносно центра не зміниться, якщо силу $\vec{F}$ перенести по лінії дії.

Наслідок 2. Момент сили відносно центра дорівнює нулю, якщо лінія сили проходить через центр O моменту.

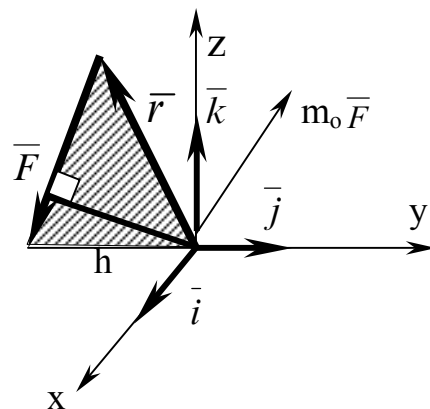


Рисунок 2.2

2.3 Момент сили відносно осі

Силу $\vec{F}$ прикладено в точці A (рис. 2.3). На площину, яку проведено перпендикулярно до осі z спроектуємо вектор $\vec{F}$. Із точки O перетину площини з віссю z опустимо перпендикуляр на лінії дії вектора $\vec{F}_{np}$,

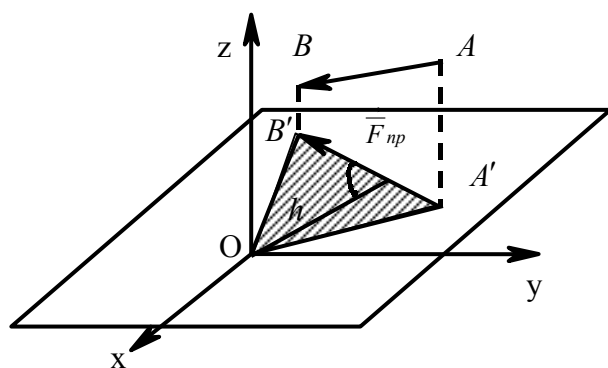


Рисунок 2.3

Моментом вектора $\vec{F}$ відносно осі z є скалярна величина $m_z \vec{F}$, яка дорівнює добутку модуля вектора $\vec{F}_{np}$ на плече h цього вектора:

$$m_z \vec{F} = \pm F_{np} \cdot h$$

Додатний знак беремо в тому випадку, коли, дивлячись назустріч осі z , бачитимемо рух вектора $\vec{F}$ навколо неї проти годинникової стрілки.

Наслідок 1. Момент сили відносно осі не змінюється при переміщенні сили $\vec{F}$ по лінії дії.

Наслідок 2. Якщо сила $\vec{F}$ і вісь z лежать в одній площині, то момент сили $\vec{F}$ відносно осі z дорівнює нулю.

2.4 Поняття про пару сил

Парою сил називається система двох колінеарних сил, що мають однакові модулі та протилежні напрями (рис. 2.4).

Площина, в якій лежать сили $\vec{F}$ і $-\vec{F}$, називається площиною пари. Найкоротша відстань між лініями дії пари сил називається плечем пари сил.

Момент пари сил $(\vec{F}, -\vec{F})$ не залежить від вибору центра:

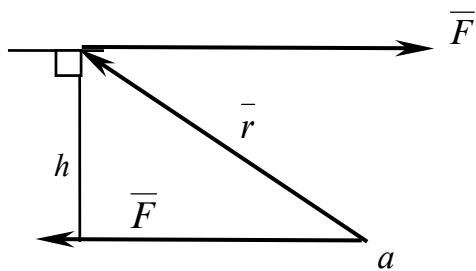


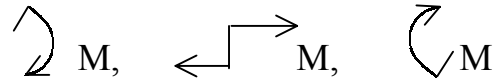
Рисунок 2.4

$$\vec{M} = m \cdot (\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Модуль моменту пари:

$$|\vec{M}| = F \cdot h.$$

Пара сил на рисунках умовно зображається:



Як впливає із означення пари сил, головний вектор пари $\vec{R}$ сил дорівнює нулю.

$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0.$$

2.5 Класифікація сил

В механіці, опорі матеріалів навантаження, що діє на вільне тверде тіло, називається зовнішніми силами. Ці сили розділяються на активні та реакції в'язей.

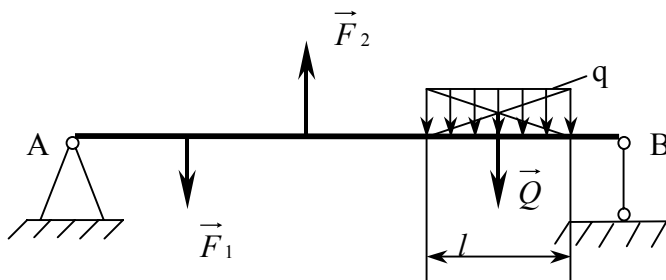


Рисунок 2.5

Активні сили визначаються службовим призначенням деталі (твердого тіла): тиск газів або води; вага стержня; вага снігу на покрівлі; корисне навантаження і т.п. Активні сили розділяються на зосереджені $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (рис. 2.3) та

розподілені, що характеризується навантаженням q (інтенсивність), яке діє на одиницю довжини тіла або площі. Найбільш поширене розподілене навантаження у формі прямокутника (рис. 2.5).

Розподілення навантаження можна замінити однією силою $\vec{Q}$, що прикладена у центрі мас (рис. 2.5).

Реакції в'язей це сили з якими в'язі (тіла) діють на вибране тіло, що досліджується.

2.5.1 Класифікація в'язей, та їх реакції

За своєю природою в'язі можна розділити на два класи.

До першого класу належать в'язі, напрям реакцій яких не залежить від величини і напрямку активних сил, прикладених до тіла, що перебуває у стані рівноваги. Наприклад: троси, нитки (рис. 2.6, а) ідеальні стержні (рис. 2.7, а, в); гладенькі поверхні (рис. 2.8, а, б); рухомі шарніри (рис. 2.8, в).

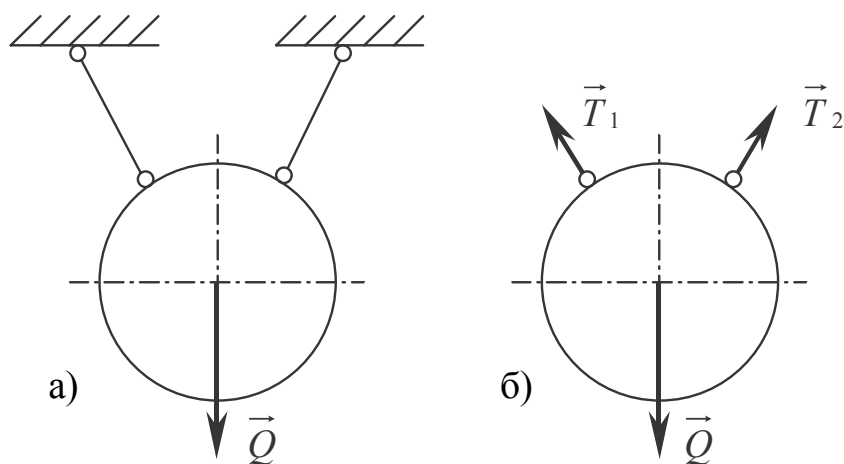


Рисунок 2.6

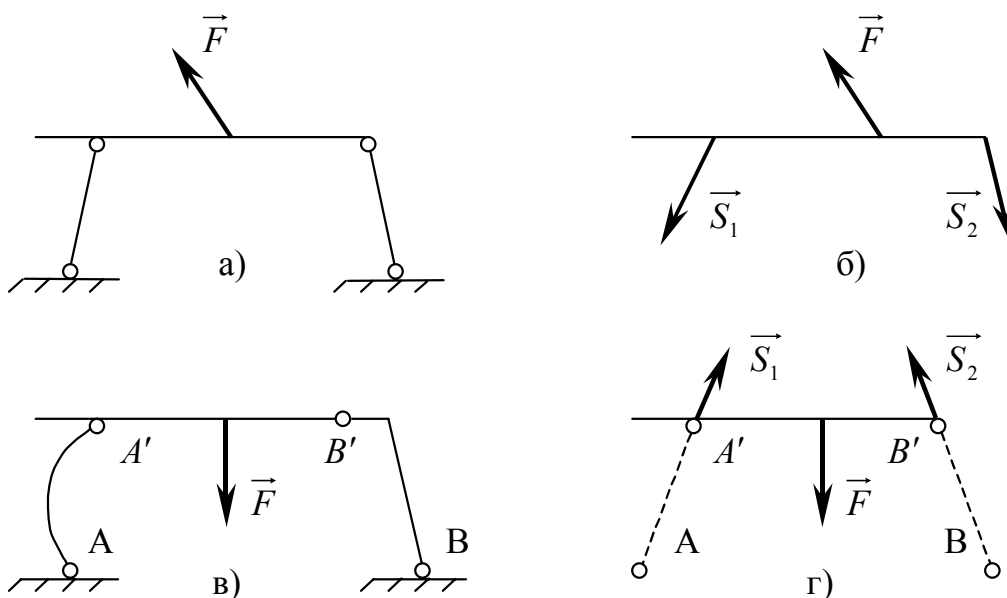


Рисунок 2.7

Реакції в'язей троса, нитки, ланцюга напрямлені по тросу, нитці, ланцюгу, причому ці тіла можуть тільки розтягуватися (рис. 2.6, б), тобто чинять протидію тільки дії розтягання. Невагомий стержень, до якого не прикладено сили (активні та реакції в'язей), називається ідеальним. Реакції в'язі ідеального стержня напрямлені по лінії, яка сполучає початок і кінець стержня (рис. 2.7, б, г), причому ідеальний стержень може стискатися або розтягуватися.

Гладенькими, з точки зору статки, називаються такі поверхні, в яких реакції в'язей в точці контакту з іншими тілами напрямлені по загальній нормалі до дотичних поверхонь (рис. 2.8, а, б).

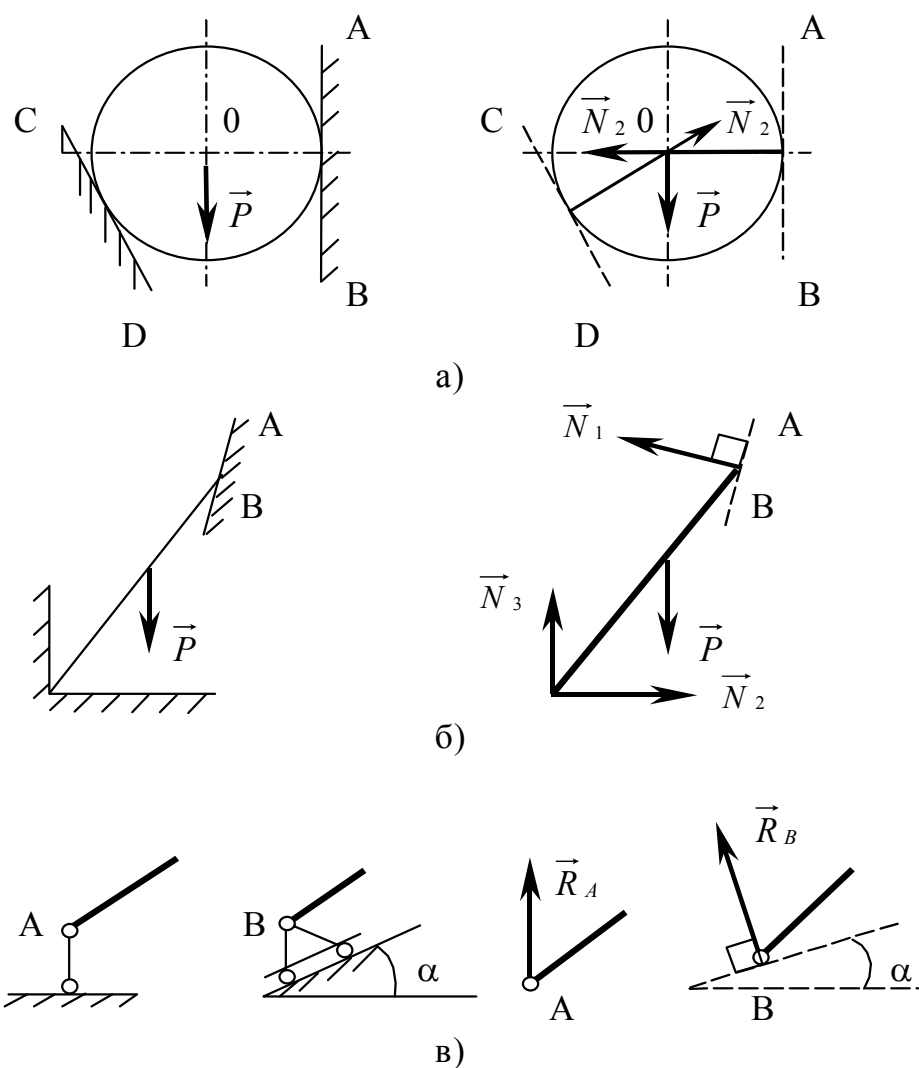


Рисунок 2.8

До другого класу належать в'язі, напрям реакцій яких повністю визначається напрямом і величиною активних сил. Такими в'язями є защемлення (рис. 2.9, а), циліндричний (рис. 2.10, а) і сферичний (рис. 2.11, с) шарніри. На рис. 2.11, а показано циліндричний шарнір разом із горизонтальною гладенькою поверхнею. Реакції в'язей другого класу зображено на рис. 2.9, б; 2.10, б; 2.11, б.

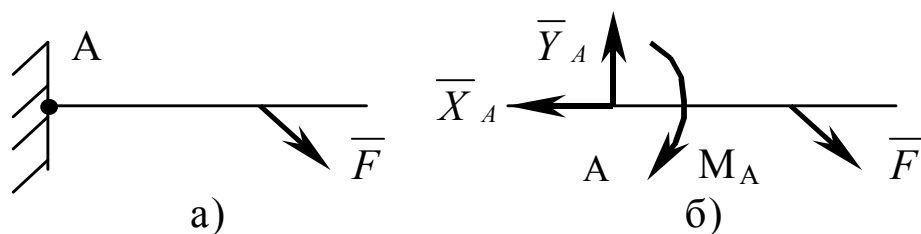


Рисунок 2.9

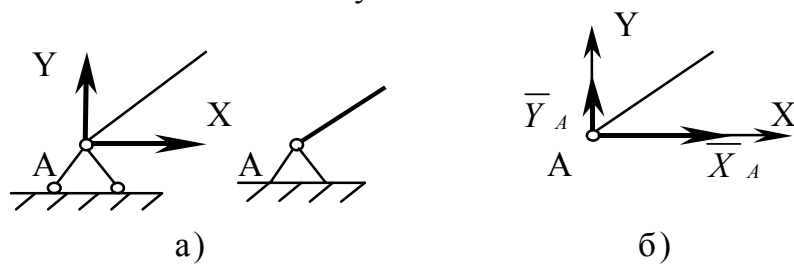


Рисунок 2.10

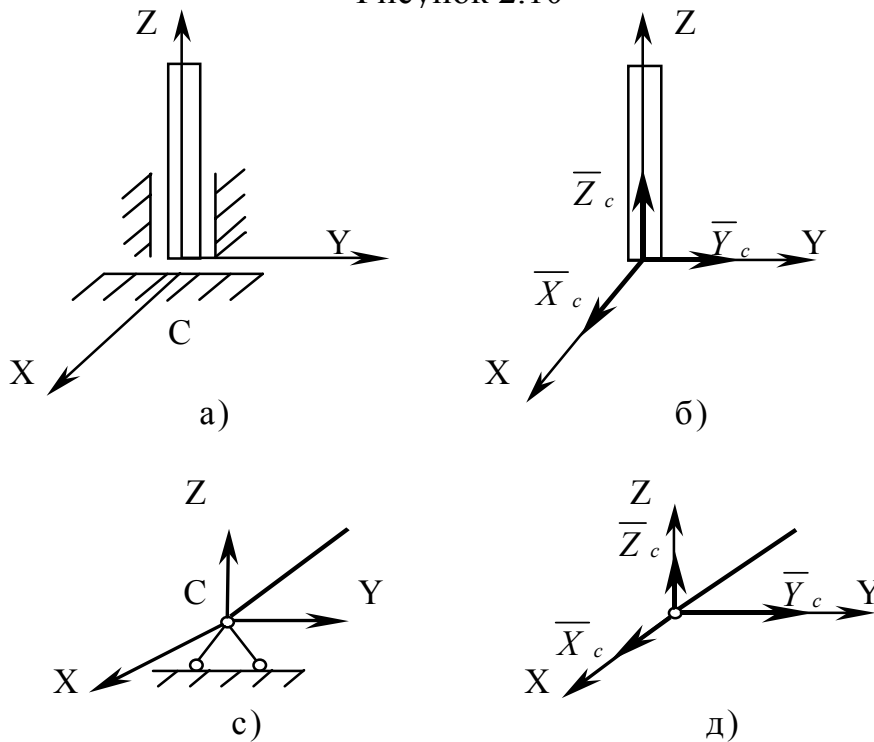


Рисунок 2.11

Рухомий шарнір еквівалентний одному ідеальному стержню; нерухомий (циліндричний) – двом ідеальним стержням; защемлення – трьома ідеальними стержнями.

2.6 Закони механіки

В основі теоретичної механіки лежать закони І.Ньютона, що викладені ним у книзі “Математичні початки натуральної філософії” (1687р.).

І -й закон Ньютона. Ізольована матеріальна точка знаходиться у спокої або рухається рівномірно по прямолінійній траєкторії.

Ізольованою називається матеріальна точка, яка не взаємодіє з іншими тілами або до якої прикладена врівноважена система сил.

ІІ -й закон Ньютона (основний закон механіки). Прискорення $\bar{a}$, що набуває точка масою m під дією сили $\bar{F}$, пропорційне цій силі і має напрямок сили.

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F} \quad (2.1)$$

III -й закон Ньютона. Сили взаємодії двох тіл, рівні за величиною, направлені по одній прямій в протилежні сторони.

2.7 Динаміка точки

2.7.1 Швидкість та прискорення точки

Перш ніж перейти до поняття швидкості та прискорення, встановимо математичні способи визначення руху.

Рух точки визначається трьома основними способами: векторним, координатним і натуральним.

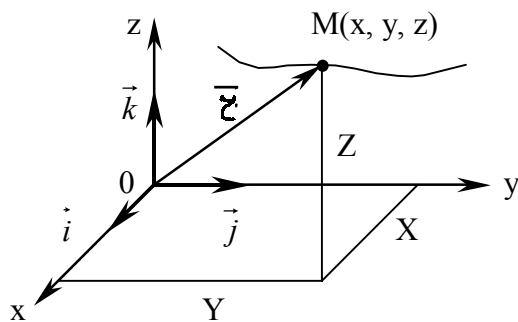


Рис. 2.12

Векторний (інваріантний) спосіб визначення руху найчастіше застосовується в теорії. Параметр руху – це радіус-вектор $\vec{r}$ (рис. 2.12)

Рівняння руху точки має вигляд:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.2)$$

Траєкторія – це годограф радіуса вектора $\vec{r}$.

Рівняння руху точки M (рис. 2.12) в координатній формі мають вигляд:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (2.3)$$

Радіус-вектор також може бути виражений через координати точки:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \quad (2.4)$$

Залежність (2.4) встановлює зв'язок між координатним та векторним способами визначення руху точки.

Натуральний спосіб визначення руху точки M полягає в тому, що задається:

- траєкторія точки (рис. 2.13);
- початок відліку (точка 0 криволінійної координати S, що має розмірність довжини);
- додатний та від'ємний напрями відліку S;
- закон руху по траєкторії у вигляді залежності дугової координати S від часу:



Рис. 2.13

$$S = S(t). \quad (2.5)$$

Потрібно розрізняти шлях, що є величиною додатною, від дугової координати S , яка може бути і від'ємною.

Кінематичними мірами (характеристиками) руху точки є швидкість та прискорення. Почнемо розгляд з векторного способу.

За традицією, наслідуючи Ньютона, в механіці похідна від змінної величини за часом позначається крапкою над величиною, наприклад:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}. \quad (2.6)$$

Швидкість точки є похідна від радіуса-вектора цієї точки за часом t , у системі відліку, що розглядається (рис. 2.14) $\vec{r}$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Вектор $\vec{V}$ швидкості точки напрямлений по дотичній до траєкторії.

Прискорення точки є похідна від вектора швидкості $\vec{V}$ за часом або друга похідна за часом від радіуса-вектора $\vec{r}$ у системі відліку, що розглядається:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.7)$$

Якщо рух точки заданий координатним способом у декартовій прямокутній системі координат x, y, z (формули 2.3), то можна перейти до векторного способу виразом (2.4):

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Оскільки в даній системі відліку $\vec{i} = const$, $\vec{j} = const$, $\vec{k} = const$, то

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0.$$

Тоді, диференціюючи вираз для $\vec{r}$ за часом t , одержимо:

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}. \quad (2.8)$$

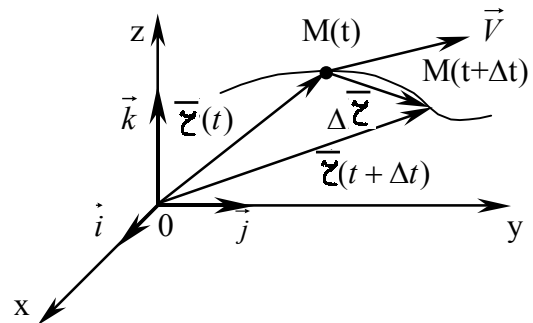


Рисунок 2.14

Проектуючи векторну рівність (3.8) на осі x, y, z , отримуємо:

$$V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z}.$$

Знайдемо модуль швидкості точки:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (2.9)$$

Проекції вектора прискорення можна одержати, міркуючи аналогічно:

$$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k},$$

звідки отримаємо:

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z},$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (2.10)$$

Знайдемо швидкість та прискорення точки при натуральному способі визначення руху. Встановимо зв'язок з векторним способом, формально подаючи $\vec{r}$ через S як складну функцію:

$$\vec{r} = \vec{r}[S(t)].$$

Диференціюючи її, дістанемо вектор швидкості:

$$\bar{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \dot{S} \bar{\tau}. \quad (2.11)$$

або

$$\bar{V} = V_{\tau} \cdot \bar{\tau}.$$

Вектор $\bar{\tau}$ (рис. 2.15) направлений по дотичній до траєкторії руху точки в даному напрямку відліку дугової координати.

Потрібно розрізняти позначення $\bar{V}$, V , V_{τ} .

$\bar{V}$ – вектор швидкості; V – швидкість (модуль вектора $\bar{V}$); V_{τ} – проекція вектора швидкості на вісь $[\tau]$, $V_{\tau} = \pm V$; $V_{\tau} < 0$, коли точка рухається у напрямі зменшення S .

Вектор прискорення одержимо, диференціюючи формулу (2.11) по параметру t :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot (\dot{S} \cdot \vec{\tau}) = \ddot{S} \cdot \vec{\tau} + \dot{S} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (2.12)$$

Величину та напрям другого доданку в (2.12) з'ясуємо, вважаючи, що $\vec{\tau} = \vec{\tau}[S(t)]$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{\dot{S}}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (2.13)$$

Нормальний одиничний вектор $\vec{n}$ направлений перпендикулярно до вектора $\vec{\tau}$ в сторону угнутості траєкторії руху точки.

Вектори $\vec{\tau}$ та $\vec{n}$ утворюють площину, що найбільш щільно прилягає до траєкторії руху у даній точці. Така площина називається стичною. Вираз (2.12) з врахуванням (2.13) запишеться:

$$\vec{a} = \ddot{S} \cdot \vec{\tau} + \frac{\dot{S}^2}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (2.14)$$

Вираз (2.14) є розкладання вектора $\vec{a}$ на тангенціальне (дотичне) прискорення $\vec{a}_\tau$ та нормальне прискорення $\vec{a}_n$ (рис. 2.15) (за напрямками натуральних осей):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}, \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_\tau &= \ddot{S} \\ \vec{a}_n &= \frac{\dot{S}^2}{\rho} \\ a_b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Це означає, що вектор прискорення завжди лежить у стичній площині. Враховуючи перпендикулярність $\vec{\tau}$ та $\vec{n}$, можемо записати:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (2.17)$$

Тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$, визначає зміну вектора $\vec{V}$ за модулем: коли a_τ та V_τ одного знака, швидкість $\vec{V}$ зростає; коли різного знака –

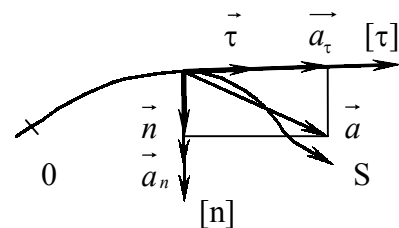


Рисунок 2.15

зменшується. Якщо $a_\tau < 0$, то це ще не означає сповільнення.

Нормальне прискорення $\vec{a}_n$ характеризує зміну вектора $\vec{V}$ за напрямком: $a_n = 0$, коли рух прямолінійний ($\rho \rightarrow \infty$), у точках перегину ($\rho \rightarrow \infty$), у місцях перегину ($V = 0$).

2.7.2 Диференціальні рівняння руху точки

Розглянемо рух матеріальної точки масою m під дією сили $\vec{F}$ (рис.2.16), що може залежати від часу, швидкості, відстані $\vec{F} = \vec{F}(r, v, t)$.

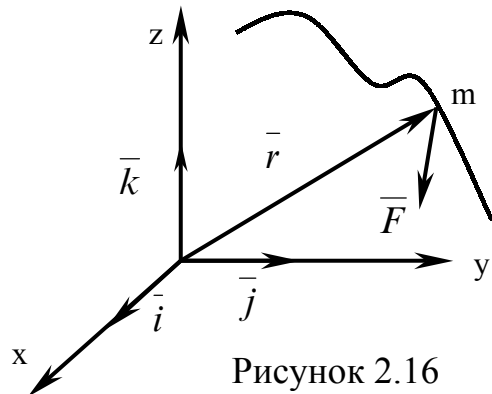


Рисунок 2.16

Прискорення $\vec{a}$ точки запишемо як другу похідну за часом від радіуса-вектора $\vec{r}$

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.18)$$

Враховуючи (2.18), закон (2.1) запишеться у вигляді:

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (2.19)$$

Отримали диференціальне рівняння руху точки у векторній формі.

Рівняння (2.19) у векторній формі еквівалентне трьом скалярним:

а) декартова система координат; б) натуральна система координат

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned} \right| \quad \left. \begin{aligned} m\ddot{S} \frac{2}{\rho} &= F_n, \\ m\ddot{S} &= F_\tau, \\ 0 &= F_\nu. \end{aligned} \right|$$

2.8 Динаміка матеріальної системи

2.8.1 Момент інерції тіла відносно осі

У твердому тілі (рис. 2.17) виділимо елементарний об'єм масою dm , що знаходиться на відстані ρ від осі z .

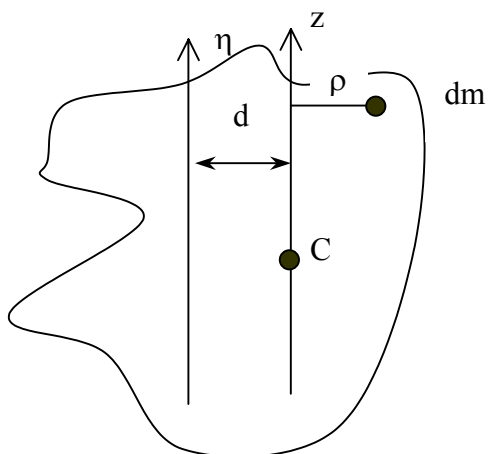


Рисунок 2.17

Скалярний добуток маси dm на квадрат її відстані від осі називається *моментом інерції точки відносно осі*.

$$dI_Z = \rho^2 dm. \quad (2.20)$$

Момент інерції тіла відносно осі z .

$$I_Z = \int_M \rho^2 dm, \quad (2.21)$$

де M – маса тіла.

Нехай вісь z проходить через центр маси C тіла. Тоді, у відповідності з теоремою Гюйгенса-Штейнера, момент інерції тіла відносно осі буде складатися із моменту інерції тіла відносно паралельної осі z , що

проходить через центр маси C та добутку маси M тіла на квадрат відстані між осями

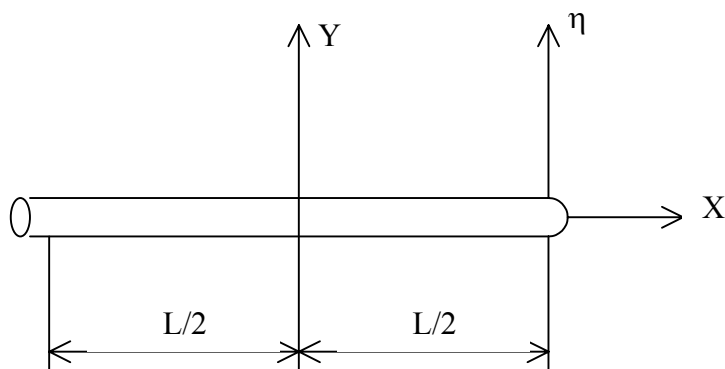


Рисунок 2.18

$$I_\eta = I_Z + M \cdot d^2. \quad (2.22)$$

Момент інерції тонкого стержня (рис.2.18) відносно осей Y та η :

$$I_y = \frac{1}{12} M l^2, \quad (2.23)$$

$$I_\eta = \frac{1}{12} M l^2 + M \frac{l^2}{4} = \frac{M l^2}{3}. \quad (2.24)$$

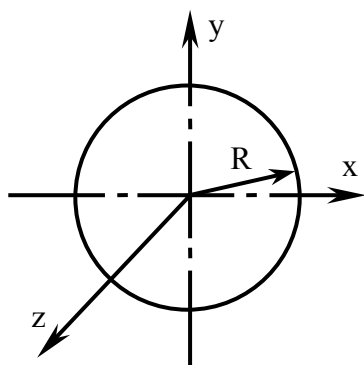


Рисунок 2.19

Моменти інерції тонкої круглої платини відносно головних центральних осей:

$$I_Z = \frac{MR^2}{2},$$

$$I_Z = \frac{MR^2}{2}.$$

2.8.2 Метод кінетостатики

Розглянемо рух k -ї точки невільної матеріальної системи (рис.2.20). Дію в'язей, що обмежують переміщення k -ї точки системи замінюємо силами (реакціями в'язей), головний вектор яких позначаємо $\overline{R}_k$.

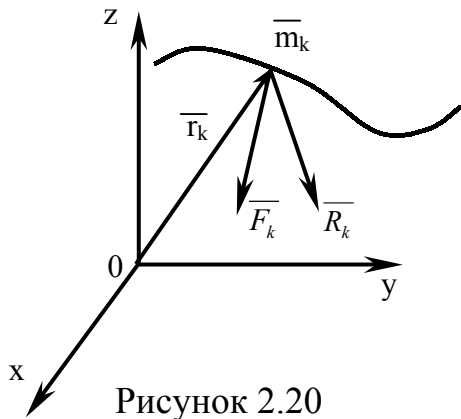


Рисунок 2.20

Головний вектор активних сил прикладених до k -ї точки, позначимо $\overline{F}_k$.

Запишемо рівняння (2.19) для k -ї точки:

$$m_k \cdot \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k + \overline{R}_k,$$

або

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0. \quad (2.25)$$

Доданок $\overline{\Phi}_k = -m_k \cdot \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = -m_k \overline{a}_k$ -

називається даламберовою силою інерції.

Метод кінетостатики (принцип Д'Аламбера): для невільної матеріальної системи в кожний момент часу векторна сума головних векторів та головних моментів активних сил, реакцій в'язей та сил інерції відносно довільної точки дорівнюють нулю.

$$\left. \begin{aligned} \overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} &= 0 \\ \overline{M}_0^F + \overline{M}_0^R + \overline{M}_0^\Phi &= 0 \end{aligned} \right|, \quad (2.26)$$

де $\overline{F} = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k$; $\overline{R} = \sum_{k=1}^n \overline{R}_k$; $\overline{\Phi} = \sum_{k=1}^n \overline{\Phi}_k$;

$$\overline{M}_0^F = \sum_{k=1}^n \overline{r}_k \times \overline{F}_k; \quad \overline{M}_0^R = \sum_{k=1}^n \overline{r}_k \times \overline{R}_k; \quad \overline{M}_0^\Phi = \sum_{k=1}^n \overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k.$$

Головний вектор сил інерції $\overline{\Phi} = -\frac{d\overline{Q}}{dt}$, або

$$\overline{\Phi} = -M \cdot \overline{a}_c, \quad (2.27)$$

де $\overline{a}_c$ — прискорення центра маси системи; $\overline{Q}$ — головний вектор

кількості руху, $\overline{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \overline{V}_k$.

Головний момент сил інерції відносно центра O:

$$\overline{M}_0^\Phi = -\frac{d\overline{k}_0}{dt}, \quad (2.28)$$

де $\overline{k}_0 = \sum_{k=1}^n \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k$ — головний момент кількості руху матеріальної системи відносно центра О.

Запишемо рівняння (2.26) в проекціях на осі декартової системи координат:

$$\left. \begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0 \\ F_x + R_x + \Phi_x &= 0 \\ F_x + R_x + \Phi_x &= 0 \\ M_x^F + M_x^R + M_x^\Phi &= 0 \\ M_y^F + M_y^R + M_y^\Phi &= 0 \\ M_z^F + M_z^R + M_z^\Phi &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.29)$$

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі Z, то:

$$K_Z = I_Z \cdot \omega. \quad (2.30)$$

де ω — кутова швидкість тіла.

Тоді на підставі останнього рівняння системи (2.29) та (2.28) отримаємо:

$$I_Z \cdot \ddot{\phi} = M_z^F + M_z^R, \quad (2.31)$$

де $\ddot{\phi} = \frac{d\omega}{dt}$ — кутове прискорення тіла.

У випадку коли система матеріальних точок знаходиться у рівновазі то сили, що прикладені до точок системи, підкоряються умовам:

$$\left. \begin{aligned} \overline{F} + \overline{R} &= 0, \\ \overline{M}_0^F + \overline{M}_0^R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Отримали аксіому рівноваги: для того, щоб система сил була врівноважена необхідно і достатньо, щоб головний вектор та головний момент активних сил та реакцій в'язей відносно довільного центра О дорівнювали нулю.

Запишемо умови (2.32) в проекціях на декартові осі координат для плоскої врівноваженої довільної системи сил (рис. 2.21):

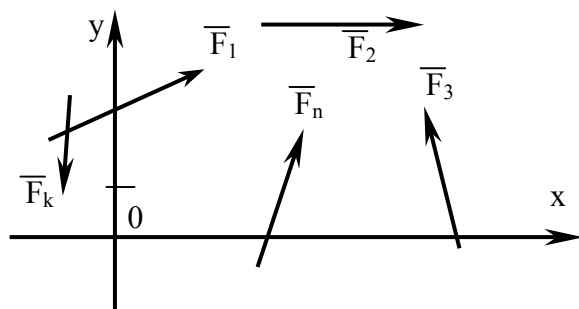


Рисунок 2.21

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = F_x + R_x &= 0, \\ \sum F_y = F_y + R_y &= 0, \\ \sum m_0 F = M_0^F + M_0^R &= 0. \end{aligned} \right| \quad (2.33)$$

Якщо у врівноваженій системі сил ($\{\bar{F}_k\} \sim 0$) усі сили лежать в одній площині і перетинаються в одній точці (рис. 2.22), то умови (2.33) запишуться у вигляді:

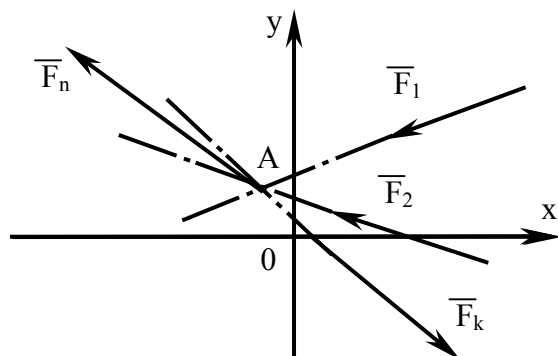


Рисунок 2.22

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = F_x + R_x &= 0, \\ \sum F_y = F_y + R_y &= 0. \end{aligned} \right| \quad (2.34)$$

2.9 Завдання розрахунково-графічної роботи (РГР) з теоретичної механіки

ТМ1 Збіжна система сил

На схемах (рис 2.24-2.26) приведені варіанти підвісу ліхтаря вагою Q . Знайти зусилля у тросі BC та тязі AB . Дані для розрахунку приведені в таблиці 2.1.

Приклад. Дано: схема підвісу ліхтаря (рис. 2.23);
 $Q=165\text{H}$, $\alpha=60^\circ$; $\beta=45^\circ$; $\gamma=150^\circ$.

Розглянемо рівновагу блока D (рис 2.23). Зусилля в кабелі на якому висить ліхтар дорівнює вазі ліхтаря Q (нехтуємо тертям кабелю по блоку D). Відкидаємо тягу AB та трос BC і їх дію замінюємо силами R_A, R_C

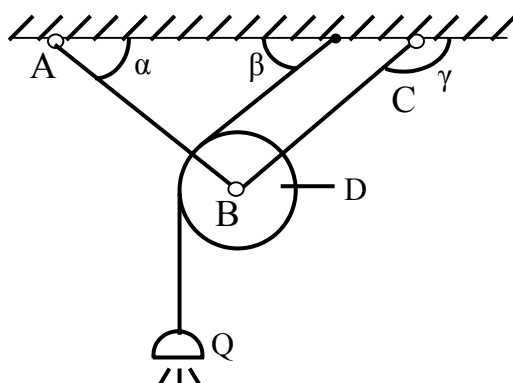


Рисунок 2.23

Таблиця 2.1

Варіант	Q, Н	α , град	β , град	γ , град	Варіант	Q, Н	α , град	β , град	γ , град
1	50	30	45	–	16	150	30	45	75
2	40	30	60	–	17	200	45	60	–
3	60	60	30	–	18	250	60	150	–
4	100	30	120	–	19	50	60	30	60
5	150	30	60	–	20	60	75	60	60
6	60	30	60	–	21	70	45	60	30
7	70	60	30	45	22	80	30	60	45
8	30	60	75	–	23	90	30	45	30
9	80	30	–	–	24	100	60	–	75
10	150	60	30	45	25	150	30	60	30
11	300	30	60	–	26	160	45	60	15
12	400	30	60	–	27	170	60	–	30
13	350	–	60	–	28	180	30	60	15
14	60	60	45	–	29	190	15	45	–
15	400	30	60	–	30	200	60	30	150

Q, з якими вони діють на блок D.

При цьому враховуємо, що кабель та трос працюють тільки на розтяг, а тяга АВ (стержень) може як стискатись так і розтягуватись.

Під дією системи сил $\{\overline{Q}, \overline{R_C}, \overline{R_A}\}$ блок D знаходиться у рівновазі ($\{\overline{Q}, \overline{R_C}, \overline{R_A}\} \sim 0$). Запишемо умови (2.34) для сил що прикладені до блока D

$$\sum F_x = 0;$$

$$Q \cdot \cos 45^\circ + R_A \cdot \cos 30^\circ - R_C \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$-Q + Q \cdot \sin 45^\circ + R_C \cdot \sin 60^\circ + R_A \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

Звідки знаходимо:

$$\begin{aligned}
 R_A &= Q \frac{1 - \sin 45 - \cos 45 \cdot \operatorname{tg} 60}{\sin 30 + \cos 30 \cdot \operatorname{tg} 60} = \\
 &= -76,40 H.
 \end{aligned}$$

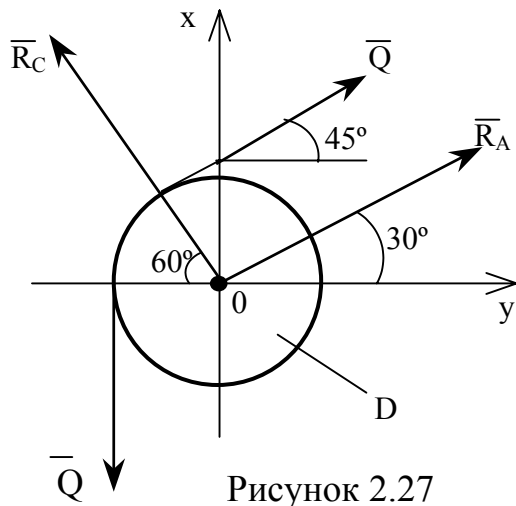


Рисунок 2.27

$$R_C = \frac{Q \cdot \cos 45 + R_A \cdot \cos 30}{\cos 60} = -100,30 \text{ Н.}$$

Відповідь: $R_A = -76,40 \text{ Н}$; $R_C = 100,30 \text{ Н}$.

ТМ2 Плоска система паралельних сил

Балка (рис. 2.30-2.36) завантажена силою F , розподіленим навантаженням інтенсивністю q та парою сил з моментом M . Знайти реакції в'язей. Дані розрахунку приведені в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Варіант	M , кН·м	F , кН	q , кН/м	a , м	b , м	c , м	d , м
1	5	4	2	2	3	4	—
2	6	3	1	3	2	5	—
3	1	5	2	1	2	4	3
4	4	1	2	2	3	5	1
5	6	8	1	3	2	4	2
6	3	5	2	1	3	5	2
7	4	6	1	2	3	4	1
8	5	7	2	3	2	5	2
9	6	8	1	1	2	4	—
10	5	3	2	2	3	5	3
11	4	6	1	3	2	4	2
12	3	5	2	1	3	5	1
13	10	5	1	2	1	4	2
14	8	5	2	3	2	5	1
15	7	4	1	1	3	4	1
16	6	8	2	2	2	5	—
17	5	3	1	3	2	4	2
18	4	8	2	1	3	5	1
19	3	6	1	2	1	4	2
20	2	5	2	3	4	5	1

Продовження таблиці 2.2

21	8	5	1	1	2	4	2
22	6	4	2	2	3	5	2
23	10	3	1	3	2	4	1
24	9	6	2	1	3	5	—
25	8	5	1	2	3	4	2
26	7	4	2	3	2	5	—
27	6	3	1	1	2	4	1
28	5	10	2	2	3	5	—
29	4	8	1	3	2	4	1
30	3	9	2	2	3	5	1

Приклад 1: Для балки (Рис.2.28) знайти опорні реакції якщо $F=3$ кН, $q=1$ кН/м.

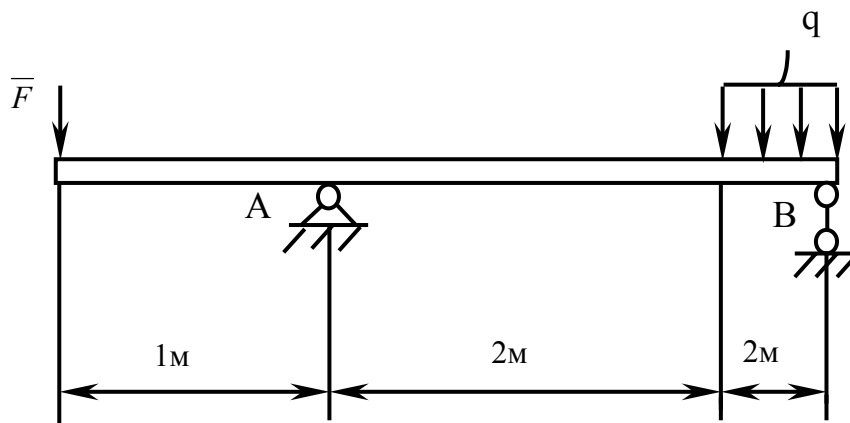


Рисунок 2.28

Розглянемо балку АВ, що знаходиться у рівновазі (спокої).

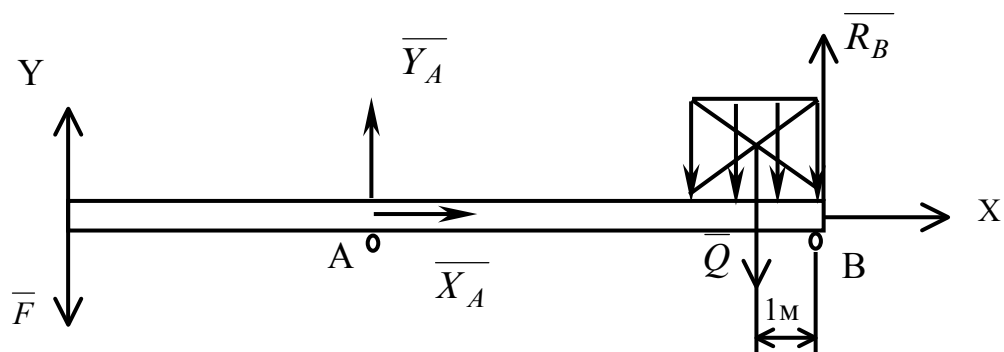


Рисунок 2.29

На балку діють активні сили: зосереджена сила $\bar{F}$ та розподілене навантаження q , яке еквівалентне зосередженій силі $\bar{Q}$.

$$Q = q \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН.}$$

Дію циліндричного шарніра А та рухомого В замінюємо їх реакціями $\overline{Y_A}, \overline{X_A}, \overline{R_B}$ (рис.2.29). Для врівноваженої системи сил $\{\overline{F}, \overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{Q}, \overline{R_B}\} \infty 0$ запишемо умови рівноваги:

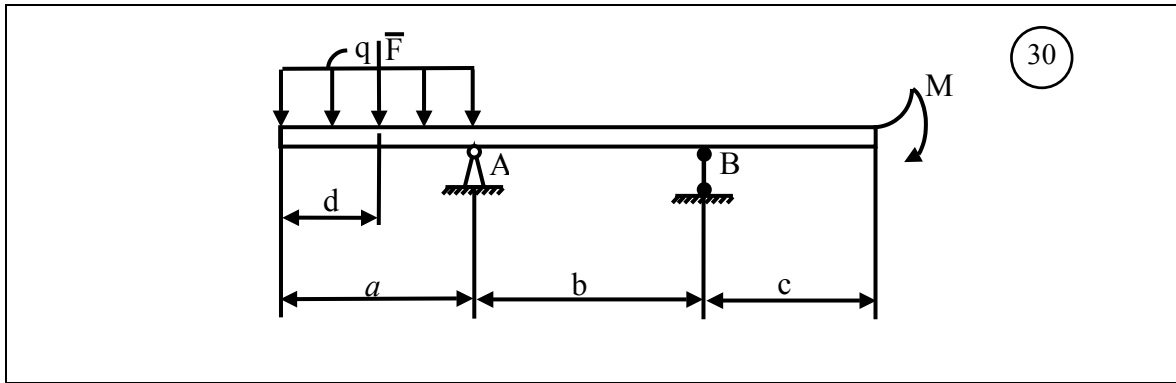


Рисунок 2.36

$$\begin{aligned}\sum F_X &= 0; \quad X_A = 0, \\ \sum m_A \bar{F} &= 0; \quad F \cdot 1 - Q \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0, \\ \sum m_B \bar{F} &= 0; \quad F \cdot 5 - Y_A \cdot 4 + Q \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Тоді: $R_B = 0,75 \text{ кН}$, $Y_A = 4,25 \text{ кН}$, $X_A = 0$.

Достовірність отриманих результатів можна перевірити записавши ще одне рівняння, рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum F_Y &= 0; \quad -F + Y_A - Q + R_B = 0, \\ -3 + 4,25 - 2 + 0,75 &= 0.\end{aligned}$$

Приклад 2: Для консольної балки (рис. 2.37) знайти реакції жорсткого защемлення якщо $F = 2 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

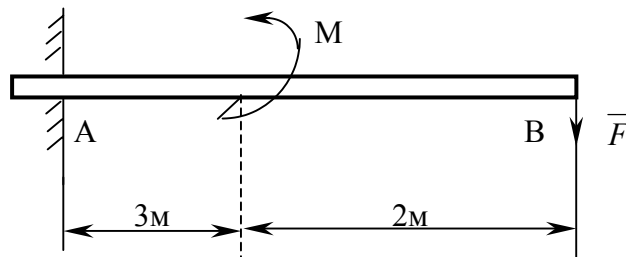


Рисунок 2.37

На балку AB діють: активна сила F , пара сил з моментом M ; її руху перешкоджає в'язь – жорстке защемлення в точці A . Відкидаємо в'язь в

точці A , і на підставі аксіоми звільнення від в'язей її дію замінюємо силами $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ та моментом M_A (рис.2.38).

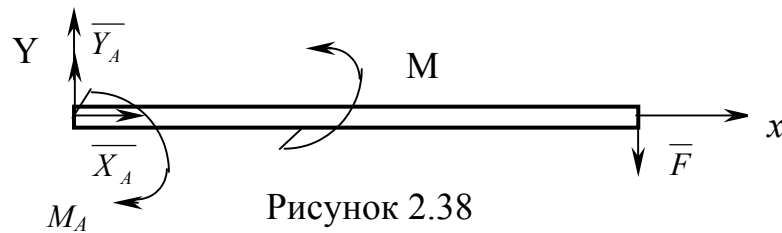


Рисунок 2.38

Запишемо умови рівноваги для системи сил $\{\overline{X}_A, \overline{Y}_A, M_A, M, \overline{F}\} \in 0$.

$$\begin{aligned}\sum F_X &= 0; X_A = 0; \\ \sum F_Y &= 0; Y_A - F = 0; \\ \sum m_A \overline{F} &= 0; -M_A + M - F \cdot 5 = 0.\end{aligned}$$

Звідки знаходимо:

$$\begin{aligned}Y_A &= F = 2\text{кН} \\ M_A &= M - 5 \cdot F = 5 - 5 \cdot 2 = -5\text{кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Відповідь: $X_A = 0; Y_A = 2\text{кН}; M_A = -5\text{кН} \cdot \text{м}$.

ТМ3 Кінематика точки

Рух точки задається рівняннями $x = f_1(t)$ та $y = f_2(t)$ (табл.2.3). Знайти рівняння траєкторії в координатній формі $y = f(x)$, визначити при $t_2 = t_1$ (табл. 2.3) швидкість V_1 , прискорення a_1 точки і радіус кривизни ρ_1 у відповідній точці траєкторії.

Приклад: Точка рухається в площині xOy за законом:

$$\begin{aligned}x &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) + 2(\text{м}), \\ y &= 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) - 3(\text{м}).\end{aligned}$$

Знайти: $y = f(x), V_1, a_1, \rho_1$ при $t_1 = 1\text{с}$.

Параметричні рівняння руху $x = f_1(t)$ та $y = f_2(t)$ запишемо у вигляді:

Таблиця 2.3.

Варіант	$x = f_1(t), м$	$y = f_2(t), м$	$t, с$
1	$3 \sin 2\pi t$	$6 \cos \pi t$	$1/6$
2	$3 \sin (\pi t^2/3)$	$2 + \cos (\pi t^2/3)$	1
3	$2 - \cos t^2$	$2 \sin t^2$	$\sqrt{\pi}/2$
4	$1 + 3 \cos \pi t$	$4 - 3 \sin \pi t$	$1/3$
5	$3t$	$-3/t$	3
6	$5 \cos (\pi t/2)$	$-3 \sin (\pi t/2)$	$0,5$
7	$3 \cos (0,5t^2) - 1$	$-3 \sin(0,5t^2) + 2$	$\sqrt{\pi} / \sqrt{2}$
8	$\sin t$	$1 - \cos^2 t$	$\pi/3$
9	$2 \sin (\pi t/3)$	$5 \cos (\pi t/3) - 2$	1
10	$2 + \cos t^2$	$3 \sin t^2$	$\sqrt{\pi} / \sqrt{3}$
11	$3 \cos t$	$4 \sin (2t)$	$\pi/3$
12	$1 + 3 \cos 2t$	$6 \sin t$	$\pi/3$
13	$2 \cos^2 t$	$1 + \sin t$	$\pi/3$
14	$4 + 5 \cos \pi t$	$3 + 2 \sin \pi t$	$\pi/6$
15	$\cos \pi t$	$3 \sin(0,5\pi t)$	$1/3$
16	$3 \sin \pi t$	$4 \cos (2\pi t)$	$1/3$
17	$4 \cos 2t$	$2 - 5 \sin 2t$	$\pi/6$
18	$5 \sin^2 \pi t$	$4 \cos \pi t$	$1/3$
19	$2 + 3 \sin 2\pi t$	$1 - 3 \cos 2\pi t$	$1/6$
20	$\cos \pi t^2$	$4 - \sin \pi t^2$	$1/2$
21	$2t + 2$	$2/(1+t)$	1
22	$4 - 3 \sin \pi t$	$\cos \pi t$	$1/3$
23	$6 - 2 \sin t^2$	$3 \cos t^2 + 1$	$\sqrt{\pi} / \sqrt{3}$
24	$4 \sin (\pi t/3)$	$1 + 4 \cos (\pi t/3)$	1
25	$5 - 3 \cos t$	$1 + 3 \sin t$	$\pi/3$
26	$4 - 5 \cos \pi t$	$5 \sin \pi t - 1$	$1/3$
27	$4 \sin (\pi t^2)$	$3 \cos (\pi t^2)$	$1/2$
28	$1 - 3 \cos \pi t$	$3 \sin \pi t + 2$	$1/3$
29	$5 \sin \pi t + 1$	$5 \cos \pi t$	$1/4$
30	$3t + 1$	$3/(3t + 1)$	1

$$\frac{x-2}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right),$$

$$\frac{y+3}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right).$$

Враховуючи, що $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) = 1$, з рівнянь руху отримаємо траєкторію руху точки в координатній формі:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Будуємо траєкторію руху точки (еліпс) і знаходимо положення точки на траєкторії при $t_l = 1\text{ c}$ (рис.2.39).

$$x_1 = 3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 = 3,5,$$

$$y_2 = 4 \cos \frac{\pi}{6} - 3 = 0,46.$$

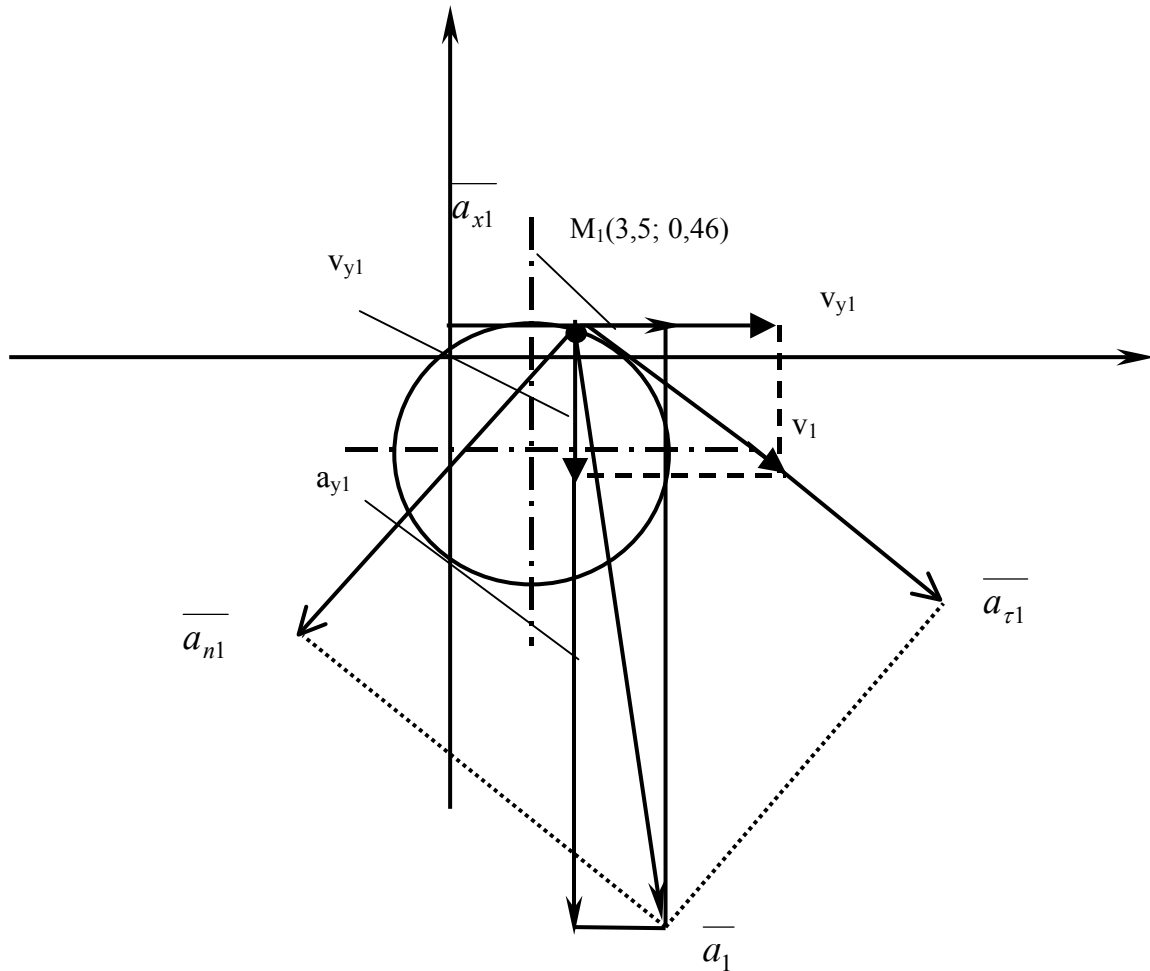


Рисунок 2.39

Знаходимо швидкість точки.

$$V_X = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pi + \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)m/c,$$

$$V_Y = \dot{y} = -\frac{4}{3}\pi t \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)m/c,$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{При } t_I = 1 \quad V_{x1} &= \pi \cos \frac{\pi}{6} = 2,72 \text{ м/с}, \\ V_{y1} &= -\frac{4}{3} \pi \sin \frac{\pi}{6} = -2,09 \text{ м/с}. \\ V_1 &= \sqrt{2,72^2 + 2,09^2} = 3,43 \text{ м/с}.\end{aligned}$$

Показуємо V_{x1}, V_{y2}, V_1 (рис. 2.39) у вибраному масштабі швидкостей $\mu_V = 1 \text{ см} : 1 \text{ м/с}$.

Визначаємо прискорення точки

$$\begin{aligned}a_X &= \frac{dV_X}{dt} = \ddot{x} = \pi \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) - \frac{\pi^2 t^2}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right), \\ a_Y &= \ddot{y} = -\frac{4}{3} \pi \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) - \frac{4}{9} \pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right), \\ a &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \\ a_{X1} &= \pi \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^2}{3} \sin \frac{\pi}{6} = 1,08 \text{ м/с}^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{При } t_I = 1 \text{ с} \quad a_{Y1} &= -\frac{4}{3} \pi \sin \frac{\pi}{6} - \frac{4}{9} \pi^2 \cos \frac{\pi}{6} = -5,88 \text{ м/с}^2, \\ a_1 &= \sqrt{1,08^2 + 5,88^2} = 5,98 \text{ м/с}^2.\end{aligned}$$

У масштабі прискорень $\mu_a = 1 \text{ см} : 1 \text{ м/с}^2$ показуємо a_{X1}, a_{Y1}, a_1 (рис. 2.39).

Радіус кривизни траєкторії точки при $t_I = 1 \text{ с}$

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}},$$

де a_{n1} - проекція прискорення точки на нормальну вісь

$$\begin{aligned}a_{n1} &= \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2}, \\ a_{\tau} &= \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y}}{V}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{При } t_I = 1 \text{ с} \quad \rho_1 &= \frac{v_1^2}{a_{n1}}, \\ a_{n1} &= \sqrt{5,98^2 - 4,44^2} = 4,0 \text{ м/с}^2, \\ \rho_1 &= \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{3,43^2}{4} = 2,94 \text{ м}.\end{aligned}$$

ТМ 4 Кінематичне дослідження руху точки на ЕОМ

Рух точки задається координатним способом.

Парні варіанти:

$$x = A_1 \cdot \cos(k_1 t^\alpha + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(k_2 t + \varphi_2),$$

$$y = A_2 \cdot \sin(k_2 t^\beta + \varphi_2).$$

Непарні варіанти:

$$x = A_1 \cdot \sin(k_1 t^\alpha + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cdot \sin(k_1 t^\beta + \varphi_2) + A_1 \cdot \cos(k_2 t + \varphi_1).$$

Побудувати траєкторію руху точки $y=f(x)$ в межах $0 \leq t \leq 2c$. Для $t=t_1$ (табл. 2.4) знайти та показати на траєкторії швидкість $\vec{V}$, прискорення $\vec{a}$ точки та їх проекцій на Декартові (V_x, V_y, a_x, a_y) та натуральні осі (a_n, a_τ) координат; знайти радіус кривизни ρ_1 траєкторії.

Таблиця 2.4

Варіант	A_1 , см	A_2 , см	κ_1	κ_2	φ_1	φ_2	α	β	t_1 , с
1	4,5	1	1,3 π	1,1 π	0,5 π	0,9 π	0,6	1,3	0,7
2	4	2	0,9 π	0,2 π	1,7 π	2 π	0,6	0,7	1
3	3	3	2,0 π	0,6 π	1,6 π	1,4 π	0,8	0,6	1
4	3,5	1,5	1,5 π	0,2 π	1 π	0,2 π	1,1	1,2	1,3
5	4,5	1	1,8 π	0,8 π	2 π	1,7 π	0,7	0,8	1
6	3,5	1,5	1,6 π	1 π	1,9 π	0,3 π	1,1	0,6	0,8
7	3	3	1,6 π	0,9 π	1,9 π	0,6 π	1	0,7	1
8	3	1	1,7 π	0,5 π	1 π	1,9 π	0,6	1,2	1,4
9	3,5	2	1,7 π	0,9 π	1,9 π	1,3 π	0,8	1,4	0,8
10	3	2	1,7 π	1 π	1,9 π	0,4 π	1,1	1,5	1
11	3,5	1	0,9 π	0,9 π	1,9 π	1,3 π	0,8	1,5	1
12	3	3	1,1 π	0,4 π	1,2 π	0,8 π	0,9	0,9	1
13	3,5	2,5	0,8 π	0,7 π	2 π	0,8 π	0,9	0,9	0,3
14	3,5	1,5	1,4 π	0,3 π	1,8 π	1,8 π	0,7	1	1,5
15	3,5	1,5	1,6 π	0,9 π	1,9 π	1,9 π	0,6	1	1,6
16	3	4,5	0,8 π	0,7 π	2 π	1,7 π	0,7	1,5	1
17	4,5	1	1,8 π	0,4 π	1,5 π	1,6 π	0,7	0,7	0,6
18	4	2	1,7 π	0,9 π	1,9 π	0,9 π	0,9	0,8	1
19	6	1,5	0,7 π	0,4 π	1,4 π	0,6 π	1	1,5	1
20	3	2	1 π	1 π	1,9 π	1,3 π	0,8	0,6	1
21	4,5	1	1 π	0,5 π	1 π	0,9 π	0,9	1	0,8
22	5	3	1,5 π	0,6 π	0,2 π	0,1 π	0,9	0,7	1
23	3	3	1,5 π	0,9 π	1,9 π	0,4 π	1,1	0,6	1
24	4	2,5	0,5 π	0,7 π	2 π	0,6 π	0,9	1,5	1

Продовження таблиці 2.4

25	4,5	1,5	1,7 π	0,9 π	1,9 π	1,4 π	0,8	0,6	1,5
26	3,5	2	1,1 π	0,5 π	0,8 π	0,4 π	1,1	1,6	1
27	3	3	1,2 π	0,7 π	2 π	0 π	0,9	1,3	1
28	3,5	2,5	0,7 π	0,8 π	2 π	0,9 π	0,9	0,8	0,8
29	4,5	1,5	1,5 π	0,5 π	1 π	0,3 π	1,1	1,1	1,4
30	5	3,5	1 π	0,4 π	1,3 π	0,9 π	0,9	1	1

Приклад. Точка рухається в площині за законом:

$$x = 4,5 \cdot \sin(1,5\pi \cdot t) + 1,5 \cdot \cos(0,8\pi \cdot t) \text{ (см)},$$

$$y = 4,5 \cdot \cos(0,8\pi \cdot t) + 1,5 \cdot \sin(1,3\pi \cdot t) \text{ (см)}.$$

У вибраному масштабі побудувати траєкторію руху точки за перші дві секунди руху. Знайти і показати для $t_I=0,9$ с: $\vec{V}, V_x, V_y, a_x, a_y, \vec{a}, a_n, a_\tau$; визначити радіус кривизни ρ_1 траєкторії.

Величина швидкості точки:

$$V_x = \dot{x} = 6,75\pi \cdot \cos(1,5\pi \cdot t) - 1,2\pi \cdot \sin(0,8 \cdot t) \text{ (см/с)},$$

$$V_y = \dot{y} = -3,6\pi \cdot \sin(0,8\pi \cdot t) + 1,95\pi \cdot \cos(1,3 \cdot t) \text{ (см/с)},$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Величина прискорення точки:

$$a_x = \ddot{x} = -10,125\pi^2 \cdot \sin(1,5\pi \cdot t) - 0,96\pi^2 \cdot \sin(0,8\pi \cdot t) \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_y = \ddot{y} = -2,88\pi^2 \cdot \cos(0,8\pi \cdot t) - 2,535\pi^2 \cdot \cos(1,3\pi \cdot t) \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}.$$

Проекція прискорення на натуральні осі координат:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y}}{V},$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Радіус кривизни ρ траєкторії:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

Використовуючи ЕОМ (пакети прикладних програм, наприклад Mathcad або власні програми), за рівняннями руху точки $x=f(t)$, $y=f(t)$ отримуємо для $0 \leq t \leq 2$ с траєкторію руху (рис. 2.40) та величини

швидкості, прискорення точки і їх проєкцій на осі декартової та натуральної систем координат при $t_1=0,9$ с

$V_x=-1,30$ м/с; $V_y=-1,42$ м/с; $V=1,925$ м/с; $a_x=9,75$ м/с²; $a_y=3,52$ м/с²; $a_n=10,37$ м/с²; $a_n=4,65$ м/с²; $a_\tau=8,55$ м/с².

У вибраному масштабі ($\mu_v = 1$ см : 5 см/с, $\mu_a = 1$ см : 15 см/с²) показуємо в точці M_1 ($t_1=0,9$ с) траєкторії вектори швидкості $\vec{V}$, прискорення $\vec{a}$ точки та їх складові: $V_x, V_y, a_x, a_y, a_n, a_\tau$ (рис. 2.40).

Знаходимо радіус кривизни ρ_1 траєкторії при $t_1=0,9$ с

$$\rho_1 = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(1,925)^2}{4,65} = 0,797 \text{ м.}$$

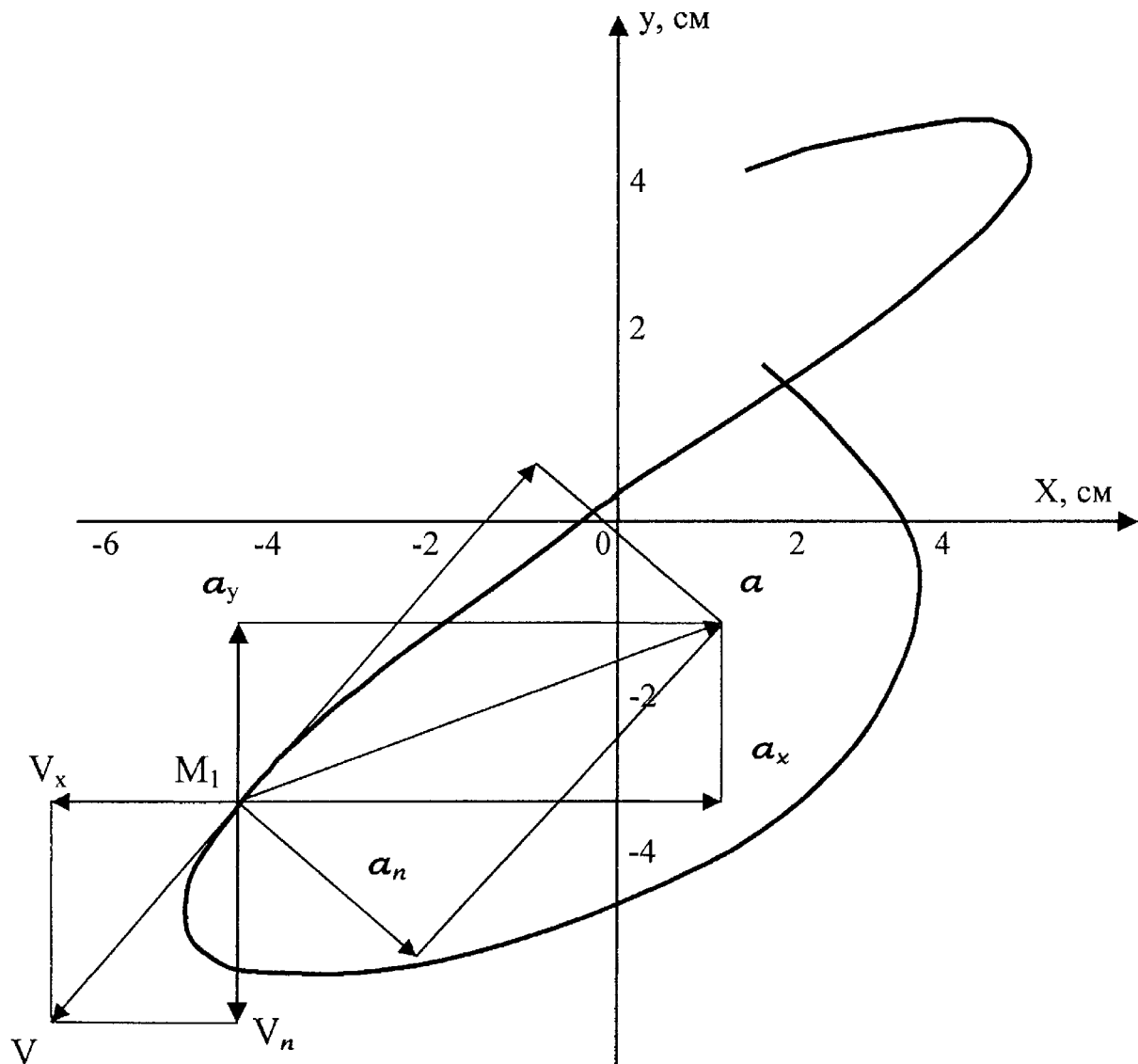


Рисунок 2.40

ТМ5 Обертальний рух тіла

Механізм складається з трьох тіл: ступеневого шківів 2, тіла 1 та шківів 3 (рис. 2.42–2.44). Тіло 1 рухається за законом $x = f(t)$. Визначити при $t_1 = 1\text{с}$ швидкість та прискорення точок A та M . Дані для розрахунку в табл.2.5.

Таблиця 2.5

Варіант	$R_2, \text{м}$	$r_2, \text{м}$	$R_3, \text{м}$	$x=f(t), \text{м}$
1	0,1	0,05	0,3	$4t^2+3$
2	0,3	0,2	0,15	$5\sin t^2$
3	0,4	0,3	0,1	$5t^3+3t^2$
4	0,3	0,15	0,2	$6\cos t$
5	0,2	0,1	0,15	$6t^3$
6	0,3	0,15	0,2	$3t^2-4$
7	0,2	0,1	0,15	$2\sin^2 t$
8	0,1	0,05	0,3	$4\cos t^2$
9	0,2	0,1	0,3	$5\sin 4t^2$
10	0,3	0,2	0,15	$7t^3+1$
11	0,3	0,15	0,2	$8t^2-4t$
12	0,2	0,1	0,3	$4+\sin t$
13	0,1	0,05	0,3	$8-\cos t^2$
14	0,3	0,2	0,05	$8t^2-3t$
15	0,2	0,15	0,3	$3t^3-t$
16	0,4	0,35	0,05	$16t^3-8t^2$
17	0,2	0,1	0,6	$7-\cos t^2$
18	0,3	0,2	0,05	$5t^4+3t$
19	0,2	0,1	0,05	$6t^3-3t^2$
20	0,6	0,45	0,1	$7t^2-2t$
21	0,6	0,2	0,1	$8t$
22	0,2	0,15	0,3	$3t^3-2t$
23	0,1	0,05	0,2	$3+\sin 2t$
24	0,3	0,2	0,25	$6t+8$
25	0,2	0,1	0,3	$5t^2-7$
26	0,3	0,2	0,1	$7t^3-3t$
27	0,2	0,15	0,3	$8t^2+t$
28	0,1	0,05	0,2	$9t^4-7t^3$
29	0,3	0,25	0,15	$10t+2$
30	0,2	0,1	0,3	$11t^2-4t$

Приклад: Для механізму (рис.2.41) знайти швидкість і прискорення точок A і M при $t_1=1\text{с}$ якщо тіло 2 рухається за законом

$$\varphi_2=8t^3-3t^2 \quad (R_2=0,1\text{м}; R_1=0,4\text{м}; r_1=0,15\text{м}).$$

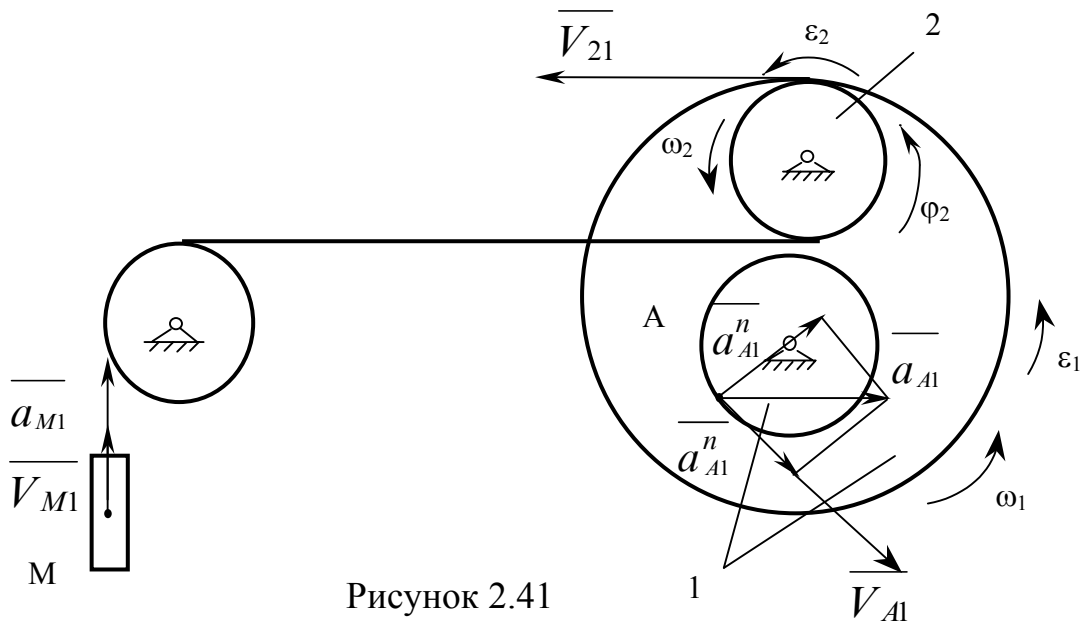


Рисунок 2.41

Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення тіла 2.

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = 24t^2 - 6t,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = 48t - 6.$$

При $t_1 = 1\text{с}$

$$\omega_{21} = 24 - 6 = 18 \frac{1}{\text{с}},$$

$$\varepsilon_{21} = 48 - 6 = 42 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Знайдемо швидкість V_{21} точок контакту тіл 2 та 1.

$$V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot R_1,$$

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = 0,25\omega_2.$$

Визначимо швидкість точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = 0,25 \cdot 0,15 \cdot \omega_2 = 0,0375 \cdot \omega_2.$$

Прискорення точки A

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau},$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_1} = \omega_1^2 r_1 = 9,375 \cdot \omega_2^2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_A^\tau = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot r_1 = 0,25 \cdot \varepsilon_2 \cdot r_1 = 0,0375 \cdot \varepsilon_2,$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0,25 \cdot \varepsilon_2,$$
$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2}.$$

При $t_1 = 1\text{с}$;

$$V_{A1} = 0,0375 \cdot \omega_{21} = 0,0375 \cdot 1,8 = 0,675 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$
$$a_{A1}^n = 9,375 \cdot \omega_{21}^2 \cdot 10^{-3} = 9,375 \cdot 1,8^2 \cdot 10^{-3} = 3,038 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$
$$a_{A1}^\tau = 0,0375 \cdot \varepsilon_{21} = 0,0375 \cdot 42 = 1,575 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$
$$a_{A1} = \sqrt{3,038^2 + 1,575^2} = 3,42 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Визначимо швидкість та прискорення точки M .

$$V_M = V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = 0,1 \cdot \omega_2,$$
$$a_M = \frac{dV_M}{dt} = 0,1 \cdot \varepsilon_2.$$

При $t_1 = 1\text{с}$

$$V_{M1} = 0,1 \cdot \omega_{21} = 1,8 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$
$$a_{M1} = 0,1 \cdot \varepsilon_{21} = 4,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Показуємо на рис.2.41 вектори $\overline{V_{A1}}, \overline{a_{A1}^n}, \overline{a_{A1}^\tau}, \overline{a_{A1}}, \overline{V_{M1}}, \overline{a_{M1}}$.

ТМ6 Плоский рух твердого тіла

Визначити для заданого положення механізма швидкість та прискорення точок A і B , кутову швидкість та кутове прискорення ланки AB . Схеми механізмів приведенно на рис.2.46–2.48, а дані для розрахунку приведені в табл. 2.6.

Приклад: Для механізма, зображеного на рис. 2.45, знайти швидкість і прискорення точок A , B та кутову швидкість, кутове прискорення ланок AB і BC . Прийняти: $OA = 0,3\text{ м}$; $AB = 0,6\text{ м}$; $BC = 0,5\text{ м}$; $\omega = 0,5\text{ 1/с}$; $\varepsilon = 3\text{ с}^{-2}$.

Розв'язування. Визначимо швидкості точок A , B та кутові швидкості ланок AB і BC

$$V_A = \omega \cdot OA = 0,5 \cdot 0,3 = 1,5\text{ м/с}.$$

Таблиця 2.6

Варіант	r,м	l,м	$\omega, 1/c$	$\xi, 1/c^2$	v, м/с
1	0,1	0,6	10	0	-
2	0,3	0,4	12	0	-
3	0,2	0,3	15	0	-
4	0,1	0,3	18	0	-
5	0,3	0,2	10	0	-
6	0,1	0,8	11	0	-
7	0,2	0,3	12	0	-
8	0,3	0,6	13	0	-
9	0,2	0,4	14	0	-
10	0,1	0,6	15	0	-
11	0,3	0,6	16	0	-
12	0,2	0,4	17	0	-
13	0,1	0,2	18	0	-
14	0,2	0,4	-	-	4
15	0,3	0,6	-	-	6
16	0,3	0,45	-	-	8
17	0,2	0,3	6	0	-
18	0,1	0,25	7	2	-
19	0,2	0,3	8	4	-
20	0,3	0,5	9	6	-
21	0,3	0,6	21	8	-
22	0,2	0,7	22	10	-
23	0,1	0,3	23	12	-
24	0,3	0,5	24	-	-
25	0,2	0,9	25	-	-
26	0,1	0,3	11	-	-
27	0,2	0,6	12	2	-
28	0,3	0,9	13	-	-
29	0,2	0,6	14	-	-
30	0,1	0,3	10	-	-

Швидкість точки А направлена перпендикулярно до ланки ОА у напрямку кутової швидкості ω . По лінії, яка перпендикулярна до ланки ВС, буде направлена швидкість точки В (лінія в-в, рис. 2.45). Тоді миттєвий центр швидкостей ланки АВ буде в точці О

$$\omega = \frac{VA}{AO} = \frac{VB}{BO}.$$

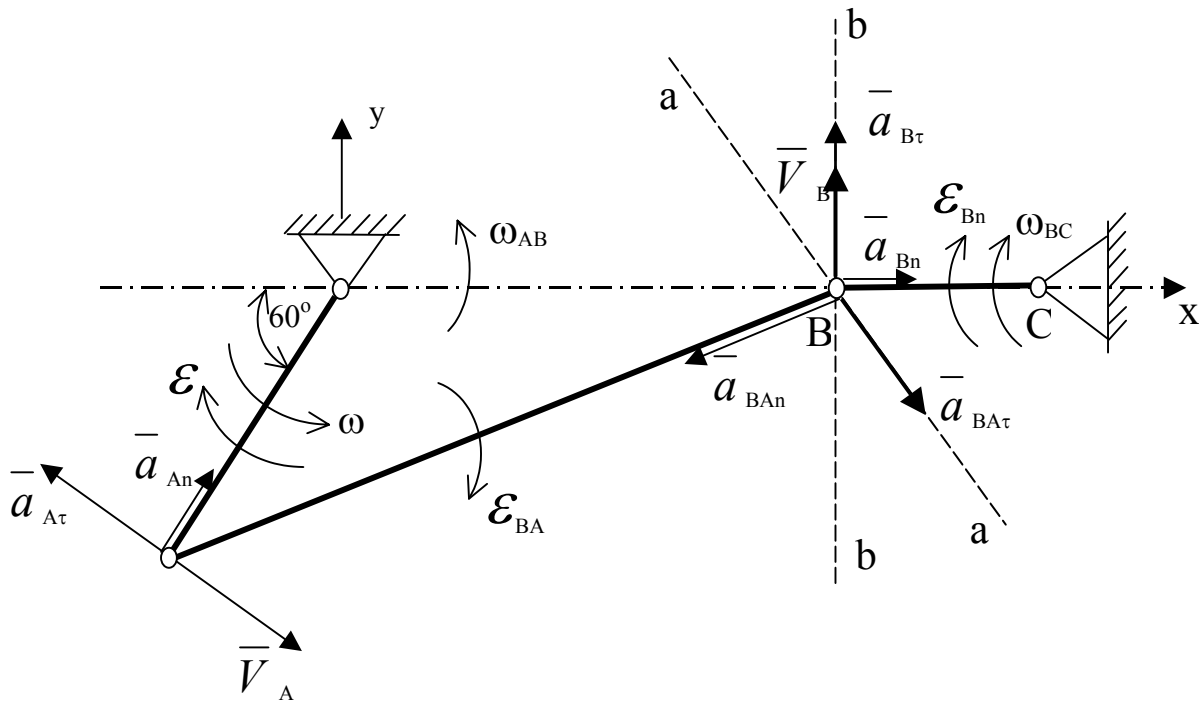


Рисунок 2.45

$$OA = OB,$$

$$V_B = V_A = 1.5 \text{ м/с}, \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = 5 \text{ } \frac{1}{\text{с}}.$$

Напрямок швидкості точки В визначається напрямком кутової швидкості ω_{AB} (рис. 2.45). Тоді :

$$\omega_{CB} = \frac{v_B}{BC} = \frac{1,5}{0,5} = 3 \text{ } \frac{1}{\text{с}}.$$

Знайдемо тепер прискорення точок А, В та кутові прискорення ланок АВ та ВС

$$\overline{a_A} = \overline{a_{An}} + \overline{a_{A\tau}},$$

$$a_{An} = \omega^2 \cdot OA = 5^2 \cdot 0.3 = 7.5 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{A\tau} = \varepsilon \cdot OA = 3 \cdot 0.3 = 0.9 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A = \sqrt{a_{An}^2 + a_{A\tau}^2} = \sqrt{7.5^2 + 0.9^2} = 7.55 \text{ м/с}^2.$$

Прийmemo точку А за полюс. Тоді розглядаючи рух ланки АВ, запишемо:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}}, \quad (2.35)$$

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA_n}} + \overline{a_{BA\tau}}, \quad (2.36)$$

$$a_{BA_n} = \omega_{BA}^2 \cdot AB = 5^2 \cdot 0,6 = 15 \text{ м/с}.$$

Прискорення $\vec{a}_{BA_n}$ направлене по прямій АВ від точки В до полюса, а прискорення $\vec{a}_{BA\tau}$ - перпендикулярно до прямої АВ (лінія а-а, рис. 2.45).

Оскільки точка В належить ланці ВС, то

$$\begin{aligned} \overline{a_B} &= \overline{a_{Bn}} + \overline{a_{B\tau}}, \\ \overline{a_{Bn}} &= \overline{\omega_{CB}} \cdot BC = 3^2 \cdot 0,5 = 4,5 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Прискорення $\vec{a}_{BA\tau}$ направлена по прямій в-в.

Вираз (2.35), враховуючи (2.36) та (2.37), запишеться:

$$\overline{a_{Bn}} + \overline{a_{B\tau}} = \overline{a_{An}} + \overline{a_{A\tau}} + \overline{a_{BA_n}} + \overline{a_{BA\tau}}. \quad (2.38)$$

Спроекуємо векторне рівняння (2.38) на осі Х та Y.

Вісь Х:

$$a_{Bn} = a_{An} \cdot \cos 60^0 - a_{A\tau} \cdot \sin 60^0 - a_{BA_n} \cdot \cos 30^0 + (\overline{a_{BA\tau}})_x. \quad (2.39)$$

Вісь Y:

$$(\overline{a_{B\tau}})_y = a_{An} \cdot \sin 60^0 - a_{A\tau} \cdot \cos 60^0 - a_{BA_n} \cdot \sin 30^0 + (\overline{a_{BA\tau}})_y. \quad (2.40)$$

У виразах (2.39) та (2.40) дві невідомих величини $\vec{a}_{BA\tau}$ та $\vec{a}_{B\tau}$.

$$\begin{aligned} (\overline{a_{BA\tau}})_x &= a_{Bn} + a_{A\tau} \cdot \sin 60^0 + a_{BA_n} \cdot \cos 30^0 - a_{An} \cdot \cos 60^0 = 4,5 + 0,9 \cdot \sqrt{3}/2 + \\ &+ 1,5 \cdot \sqrt{3}/2 - 7,5 \cdot 0,5 = 14,52, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{a_{BA\tau}})_x &= a_{Bn} + a_{A\tau} \cdot \sin 60^0 + a_{BA_n} \cdot \cos 30^0 - a_{An} \cdot \cos 60^0 = 4,5 + 0,9 \cdot \sqrt{3}/2 + \\ &+ 1,5 \cdot \sqrt{3}/2 - 7,5 \cdot 0,5 = 14,52, \end{aligned}$$

$$(\overline{a_{BA\tau}})_x = a_{BA\tau} \cdot \cos 60^0 = 14,52,$$

$$a_{BA\tau} = \frac{14,5^2}{\cos 60^0} = 29,04 \text{ м/с}^2,$$

$$(\overline{a_{B\tau}})_y = a_{An} \cdot \sin 60^0 + a_{A\tau} \cdot \cos 60^0 - a_{BA_n} \cdot \sin 30^0 + a_{BA\tau} \cdot \cos 30^0 =$$

$$= 7,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,9 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{2} - 29,04 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24,56 \text{ м/с}^2.$$

Кутові прискорення ланок АВ та ВС.

$$\varepsilon_{BA} = \frac{a_{BA\tau}}{AB} = \frac{29.04}{0.6} = 48.4 \frac{1}{c^2},$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_{B\tau}}{BC} = \frac{24.56}{0.5} = 49.12 \frac{1}{c^2}.$$

Напрямок прискорень ε_{BA} та ε_{BC} визначається напрямком векторів $\overline{\alpha_{B\tau}}$ і $\overline{\alpha_{BA\tau}}$.

ТМ7 Дослідження руху матеріальної точки

Точка масою m (рис.2.49) рухається від точки А до точки В (парні варіанти) або на ділянці ВС (непарні варіанти).

На початку руху (точки А-парні варіанти; точки В-непарні варіанти;) матеріальна точка має швидкість V_0 . Під час руху, на ділянці АВ на точку діє постійна сила P та вага точки, а на ділянці ВС точка рухається під дією ваги точки. Дані для розрахунку та величини, що потрібно знайти приведені в таблиці 2.7.

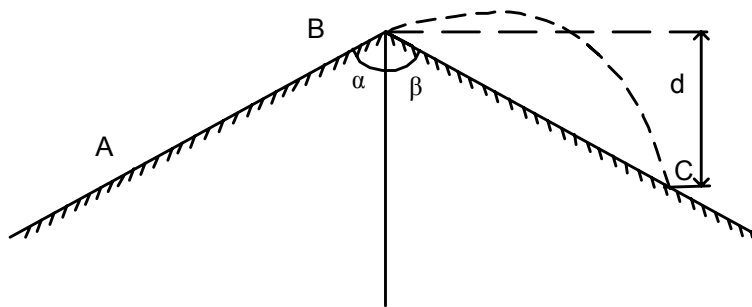


Рисунок 2.49

Приклад. Матеріальна точка m рухається під дією сили $\overline{F}$ на ділянці АВ (рис.2.50). Знайти час τ руху точки відстань DC, якщо: $m=5$ кг, $V_A=3$ м/с, $F=30$ Н, $d=4$ м, $AB=11$ м.

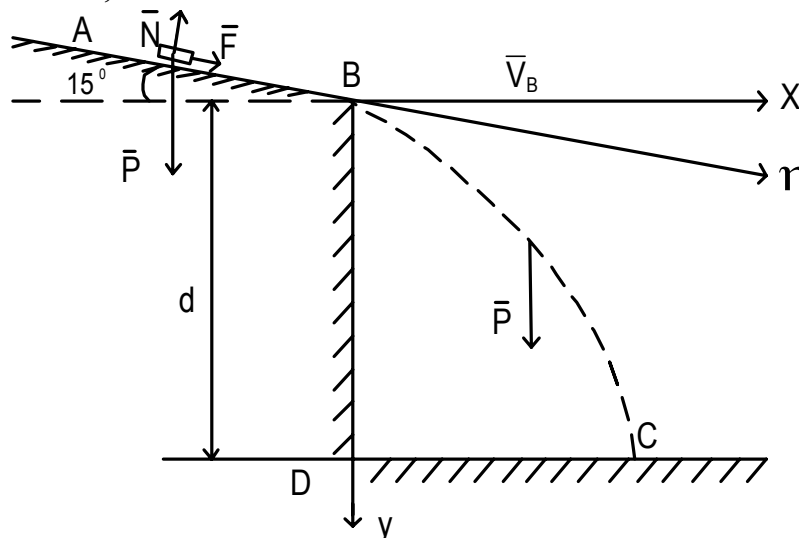


Рисунок 2.50

Таблиця 2.7

Варіант	m, кг	V ₀ , м/с	α, град	β, град	d, м	AB, м	P _x , Н	Знайти
1	4	2	30	30	-	-	-	V _c
2	3	0.5	105	-	-	4	15	V _B
3	2	4	60	-	4	-	-	β
4	1	13	70	-	-	5	10	V _B
5	1	2	105	60	-	-	-	V _C
6	2	3	120	-	-	6	15	V _B
7	3	10	60	-	5	-	-	V _C
8	4	19	75	-	-	7	20	V _B
9	5	8	105	30	-	-	-	D
10	1	7	75	-	-	8	15	V _B
11	2	6	60	-	6	-	-	V _C
12	3	5	150	-	-	9	25	V _B
13	4	4	30	90	-	-	-	V _C
14	5	3	120	-	-	10	15	V _B
15	1	10	30	-	7	-	-	β
16	2	6	105	-	-	11	10	V _B
17	3	7	60	30	-	-	-	V _C
18	4	8	150	-	-	12	25	V _B
19	5	9	30	-	8	-	-	β
20	1	10	75	-	-	13	15	V _B
21	2	2	60	45	-	-	-	V _C
22	3	3	105	-	-	14	10	V _B
23	4	5	30	-	9	-	-	β
24	5	6	120	-	-	15	25	V _B
25	1	7	60	45	-	-	-	V _C
26	2	8	150	-	-	16	20	V _B
27	3	9	30	-	10	-	-	β
28	4	10	135	-	-	17	25	V _B
29	5	11	60	45	-	-	-	V _C
30	6	12	105	-	-	18	15	V _B

Точка на ділянці АВ рухається під дією сили ваги Р та сили F. Запишемо диференціальне рівняння руху точки в проекціях на вісь η.

$$m\ddot{\eta} = F + P \sin 15^\circ,$$

$$\ddot{\eta} = \frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ.$$

При $t=0$; $\eta=V_A$; $\eta=0$;

При $t=\tau$; $\eta=V_B$; $\eta=AB$.

Інтегруємо диференціальне рівняння руху точки.

$$\frac{d\dot{n}}{dt} = \frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^\circ,$$

$$\int_{V_0}^{\dot{n}} d\dot{n} = \left(\frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^\circ \right) \int_0^t dt,$$

$$\dot{n} - V_A = \left(\frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^\circ \right) \cdot t,$$

$$\dot{n} - V_A = \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) \cdot t,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) t,$$

$$\int_0^{AB} d\eta = \int_0^\tau V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) t \cdot dt,$$

$$AB = V_A \cdot \tau + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) \frac{\tau^2}{2},$$

або

$$4,27 \cdot \tau^2 + 3\tau - 11 = 0,$$

Звідки:

$$\tau_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 11 \cdot 4,27}}{2 \cdot 4,27} = \frac{-3 \pm 14}{8,57}.$$

Так як $\tau \geq 0$, то час руху точки на ділянці АВ: $\tau = 1,28$ с.

Визначимо швидкість точки в пункті В.

$$V_B = V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) \cdot \tau = 3 + \left(\frac{30}{6} + 9,81 \cdot 0,2588 \right) \cdot 1,28,$$

$$V_B = 19,93 \text{ м/с}.$$

Розглянемо рух точки на ділянці ВС (рис.2.50)

$$m\ddot{x} = 0; \quad \ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = P; \quad \ddot{y} = g.$$

При $t=0$

$$\dot{x} = V_B \cdot \cos 15^\circ;$$

$$\dot{y} = V_B \cdot \sin 15^\circ;$$

$$x = 0, y = 0.$$

При $t = t_1$; $y = d$; $x = DC$.

Інтегруємо диференціальне рівняння

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = g; \quad \int_{V_B \cdot \sin 15^\circ}^{\dot{y}} d\dot{y} = g \int_0^t dt;$$

$$y = V_B \cdot \sin 15^\circ \cdot t + gt^2/2;$$

$$\frac{dy}{dt} = V_B \cdot \sin 15^\circ + gt;$$

$$\int_0^d dy = \int_0^{t_1} V_B \cdot \sin 15^\circ \cdot dt + \int_0^{t_1} gt \cdot dt;$$

$$d = V_B \cdot \sin 15^\circ \cdot t_1 + g \frac{t_1^2}{2}.$$

Підставляючи дані, отримаємо:

$$4.95 t_1^2 + 5.158 t_1 - 4 = 0.$$

$$\text{Тоді } t_{12} = \frac{-5.18 \pm \sqrt{5.18^2 + 4 \cdot 4.95}}{2 \cdot 4.905}; \text{ Звідки } t_1 = 0.52 \text{ с.}$$

З рівняння $\ddot{x} = 0$, та початкових умов маємо: $\dot{x} = V_B \cdot \cos 15^\circ = 19.25$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 19.25,$$

$$\int_0^{BC} d\dot{x} = 19.25 \int_0^{t_1} dt,$$

$$BC = 19.25 \cdot t_1 = 19.25 \cdot 0.52 = 10 \text{ м.}$$

ТМ8 Дослідження обертального руху тіла

Тонкий стержень вагою P (рис.2.52-2.54) жорстко скріплений з круговим диском (парні варіанти) або тонким кільцем (непарні варіанти) вагою та радіусом r . Система обертається навколо горизонтальної осі в вертикальній площині із стану спокою під дією моменту M . Знайти кутове прискорення, кутову швидкість та зусилля в опорах осі при повороті системи на кут α .

Стержень диск, кільце вважати однорідними тілами; тертям в підшипниках знехтувати. Дані для розрахунку приведені в таблиці 2.8.

Таблиця 2.8.

Варіант	P, Н	Q, Н	r, м	AB, м	BC, м	M, Н·м	α , градусах
1	5	2	0,1	0,3	-	4	30
2	10	3	0,3	0,9	-	8	120
3	15	4	0,4	1,0	-	5	60
4	20	5	0,1	0,4	-	30	45
5	5	6	0,2	0,6	0,3	20	90
6	6	7	0,3	1,0	0,5	15	30
7	7	1	0,4	1,2	-	2	45
8	8	2	0,1	0,3	-	20	60
9	9	3	0,2	0,5	-	4	90
10	10	4	0,3	0,8	-	2	120
11	11	5	0,4	1,0	-	30	30
12	12	6	0,1	0,6	-	35	45
13	13	7	0,2	0,5	-	25	60
14	14	8	0,3	1,2	-	6	90
15	15	4	0,4	1,5	1,2	40	120
16	16	5	0,1	0,3	0,25	45	30
17	17	6	0,2	0,8	0,4	2	45
18	18	4	0,3	1,0	0,5	4	60
19	19	5	0,4	1,5	-	50	90
20	20	6	0,1	0,4	-	4	120
21	18	4	0,2	0,8	-	15	30
22	16	5	0,3	2,0	-	5	40
23	14	6	0,4	1,5	0,2	20	60
24	12	4	0,1	0,3	0,05	25	90
25	10	5	0,2	0,6	0,1	30	120
26	8	6	0,3	1,0	0,2	10	30
27	6	7	0,4	1,2	1,1	5	45
28	4	8	0,1	0,4	0,3	2	60
29	5	9	0,2	0,8	-	5	90
30	6	10	0,3	1,2	-	8	120

Приклад: Система тіл, що складається з стержня 1 вагою P , однорідного диска 2 та кільця 3, що мають відповідно вагу Q_2 та Q_3 діаметр D , обертається навколо горизонтальної осі O (рис.2.51) під дією пари сил з моментом M . Знайти кутове прискорення, кутову швидкість та зусилля в опорах осі при повороті матеріальної системи на кут α , якщо в початковий момент часу система знаходилася в спокої.

Прийняти: $P = 10 \text{ Н}$; $Q_2 = 20 \text{ Н}$; $M = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $Q = 10 \text{ Н}$; $R = 0,2 \text{ м}$; $AO = 0,8 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$.

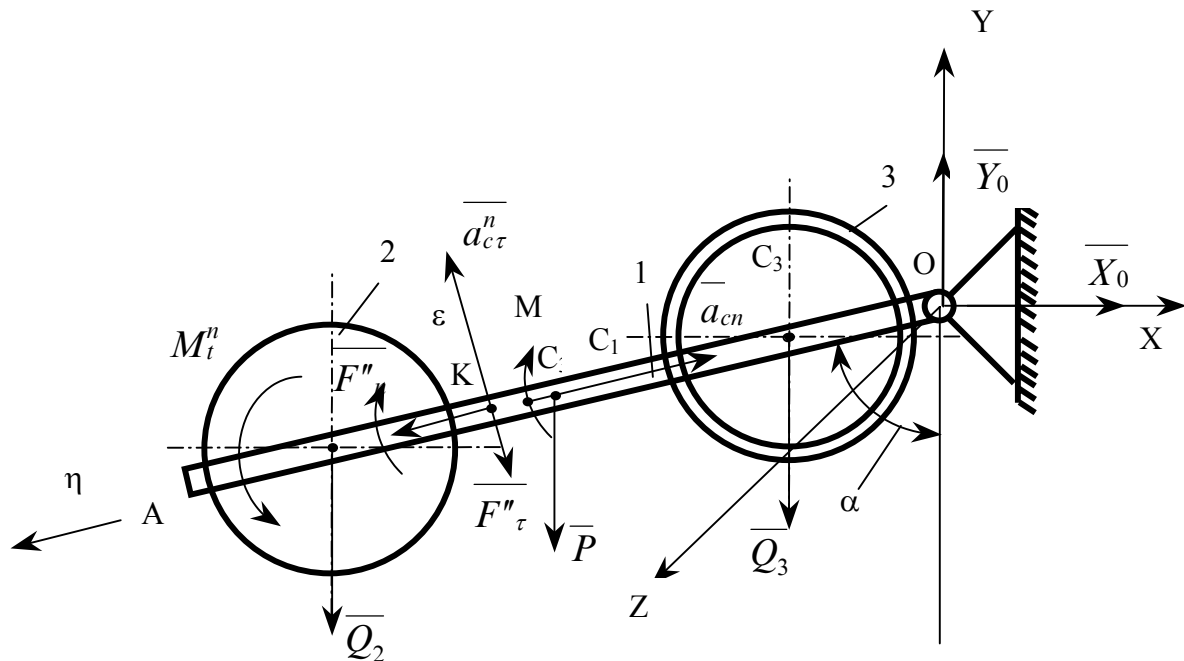


Рисунок 2.51

Для дослідження системи використаємо метод кінетостатики в проекціях на осі для плоскої довільної системи сил.

$$\begin{aligned} F_x + R_x + F_x^n &= 0, \\ F_y + R_y + F_y^n &= 0, \\ M_z^R + M_z^F + M_z^n &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

1. Визначення кутового прискорення ε системи тіл.

Кутове прискорення тіл знайдемо на підставі третього рівняння системи (2.41)

$$M_z^R + M_z^F + M_z^n = 0. \quad (2.42)$$

На систему тіл діють активні сили $\overline{Q_2}$, $\overline{Q_3}$, $\overline{P}$ та пара сил M (рис. 2.51) переміщенню тіл перешкоджає в'язь: циліндричний шарнір O , дію якого на тіло, на підставі аксіоми звільнення від в'язів замінюємо реакціями в'язей $\overline{X_0}$, $\overline{Y_0}$.

Знайдемо головний момент сил інерції M_z^n

$$M_z^n = I_z \cdot \varepsilon. \quad (2.43)$$

Момент інерції сил I_z відносно осі суму моментів інерції тіл 1, 2, 3 відносно осі Z

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}.$$

Момент інерції диска відносно осі Z

$$\begin{aligned} I_{z2} &= \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (OA - R)^2 = \frac{Q_2}{g} \left[\frac{1}{2} R^2 + (OA - R)^2 \right] = \\ &= \frac{20}{9,81} \left[\frac{1}{2} 0,2^2 + (0,8 - 0,2)^2 \right] = 0,775 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Момент інерції кільця 3 відносно осі Z:

$$I_{z3} = m_3 R^2 + m_3 R^2 = 2 \frac{Q_3}{g} R^2 = 2 \frac{10}{9,81} \cdot 0,2^2 = 0,082 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент інерції стержня 1 відносно осі Z:

$$I_{z1} = \frac{1}{3} m_1 \cdot OA^2 = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 0,8^2 = 0,217 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тоді: $I_z = 0,775 + 0,02 + 0,217 = 1,07 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Головний момент сил інерції направлений в напрямку протилежному кутовому прискоренню. Запишемо рівняння (2.41) для системи сил, що прикладена до тіл 1, 2, 3 (рис 2.51)

$$-M + Q_2 \cdot OC_2 \cdot \sin \alpha + P \cdot OC_1 \sin \alpha - Q_3 \cdot OC_3 \cdot \sin \alpha + M_z^n = 0,$$

$$I_z \cdot \varepsilon = M - (Q_2 \cdot OC_2 + P \cdot OC_1 + Q_3 \cdot OC_3) \cdot \sin \alpha.$$

Звідки:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{I_z} - \frac{Q_2 \cdot OC_2 + P \cdot OC_1 + Q_3 \cdot OC_3}{I_z} \cdot \sin \alpha, \\ \varepsilon &= \frac{30}{1,074} - \frac{20 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,2}{1,074} \cdot \sin \alpha = 27,93 - 16,76 \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\text{При } \alpha = 60^\circ \quad \varepsilon = 27,93 - 16,76 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13,4 \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

2. Визначення кутової швидкості.

Так, як

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d\omega}{d\alpha} = \omega \frac{d\omega}{d\alpha},$$

то вираз (2.44) запишеться

$$\omega \frac{d\omega}{d\alpha} = 27,93 - 16,76 \cdot \sin \alpha, \quad (2.45)$$

При $t = 0$; $\omega_0 = 0$; $\alpha = 0$,

При $t = t_1$; $\omega_1 = \omega_2$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Інтегруємо рівняння (2.45)

$$\int_0^{\omega_2} \omega \cdot d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 27,93 \cdot d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 16,76 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha,$$

$$\frac{\omega_2^2}{2} = 27,93 \cdot \frac{\pi}{3} + 16,76 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - 16,76,$$

$$\omega_\alpha = \sqrt{2 \cdot (27,93 \cdot \frac{3,14}{3} + 16,76 \cdot \frac{1}{2} - 16,76)} = 7,08 \frac{1}{c},$$

$$\omega_\alpha \cong 7,1 \frac{1}{c}.$$

3. Визначення реакцій опор.

Знайдемо координати центра мас системи тіл .

$$\eta_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_i \eta_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot OC_1 + m_2 \cdot OC_2 + m_3 \cdot OC_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$\eta_c = \frac{P \cdot 0,4 + Q_2 \cdot 0,6 + Q_3 \cdot 0,2}{P + Q_2 + Q_3} = \frac{10 \cdot 0,4 + 20 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,2}{10 + 20 + 10} = 0,45 \text{ м}$$

Проекції прискорення центра мас при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ на натуральні осі координат

$$a_{c\tau} = \varepsilon \cdot \eta_c = \varepsilon \cdot OC = 13,4 \cdot 0,45 = 6,03 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_{cn} = \omega_\alpha^2 \cdot \eta_c = \omega_\alpha^2 \cdot OC = 7,1^2 \cdot 0,45 = 22,68 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Запишемо перші два рівняння системи (2.41) для сил, що прикладені до тіл 1, 2, 3 (рис. 2.51)

$$x_0 - F''_n \cdot \sin \alpha + F''_\tau \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$y_0 - P - Q_2 - Q_3 - F''_n \cdot \cos \alpha - F''_\tau \cdot \sin \alpha = 0.$$

Звідси знаходимо реакції опор x_0 та y_0

$$x_0 = F''_n \cdot \sin \alpha - F''_\tau \cdot \cos \alpha = 92,48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 24,59 \cdot \frac{1}{2} = 67,8 \text{ Н},$$

$$y_0 = P + Q_2 + Q_3 + F''_n \cdot \cos \alpha + F''_\tau \cdot \sin \alpha = 10 + 20 +$$

$$+ 10 + 92,48 \cdot \frac{1}{2} + 24,59 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 107,54 \text{ Н},$$

$$\text{де: } F''_n = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_{cn} = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g} \cdot a_{cn} = 92,48 \text{ Н},$$

$$F''_\tau = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_{c\tau} = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g} \cdot a_{c\tau} = 24,59 \text{ Н},$$

$$OK = \frac{I_z \cdot \varepsilon}{F''_\tau} = \frac{13,4 \cdot 1,074}{24,59} = 0,59 \text{ м}.$$

2 ОПІР МАТЕРІАЛІВ

3.1 Основна задача опору матеріалів для спеціальності “Системи управління автоматики”

У програмі підготовки бакалавра будь-якої спеціальності передбачено вивчення науки про опір матеріалів, яка являє собою об'єднання теорії та практики розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів машин, приладів та споруд.

Міцність – це здатність деталей та механізмів виконувати не руйнуючись свої функції під дією зовнішнього навантаження. Під жорсткістю розуміють здатність деталей та механізмів протистояти зміні розмірів та форми при дії зовнішніх сил. При роботі деяких елементів механізмів (тонкі та довгі стержні при стиску, тонкостінні циліндричні конструкції в процесі закручування та ін.) під навантаженням вони можуть раптово втратити пружну рівновагу (стійкість), при цьому руйнування конструкції відбувається дуже швидко. Таким чином, під стійкістю будемо вважати здатність елементів конструкції зберігати стан пружної рівноваги під дією зовнішніх сил.

Нескінчену різноманітність твердих тіл за їх формою можна розділити на три групи:

1. Тіла, у яких всі три розміри є величинами одного порядку (рис. 3.1а). До числа таких тіл відносять масивні фундаменти споруд і машин, катки. Такі тіла називаються масивними.
2. Тіла, у яких два розміри суттєво більші третього (рис. 3.1б). До таких тіл, що називаються пластинами або оболонками, відносяться фундаментні плити, стіни і дно чанів, тонкостінні резервуари, куполи споруд, мембрани тощо.

3. Тіла, у яких один розмір (довжина) значно більший двох інших (рис. 3.1в). До числа тіл третьої групи відносять вали, осі, балки, важелі, тяги і т.і. Такі тіла називаються брусом, стержнем, балкою, кабелем.

Основною задачею опору матеріалів для даної спеціальності є вивчення змін, що відбуваються в брусі під дією зовнішніх сил.

Що повинно задаватися? Перш за все — зовнішні сили, характер їх прикладання до стержня. Потім матеріал. Що є кінцевою метою розрахунків? Економічні і надійні розміри поперечного перерізу стержня. Довжина стержня, звичайно, відома за його службовим призначенням. Розміри поперечного перерізу стержня будуть економічними в тому випадку, якщо його площа буде мінімальна. Але розміри повинні бути надійними, тобто мати відповідний запас міцності, достатню жорсткість, необхідну гарантію від можливої втрати стійкості.

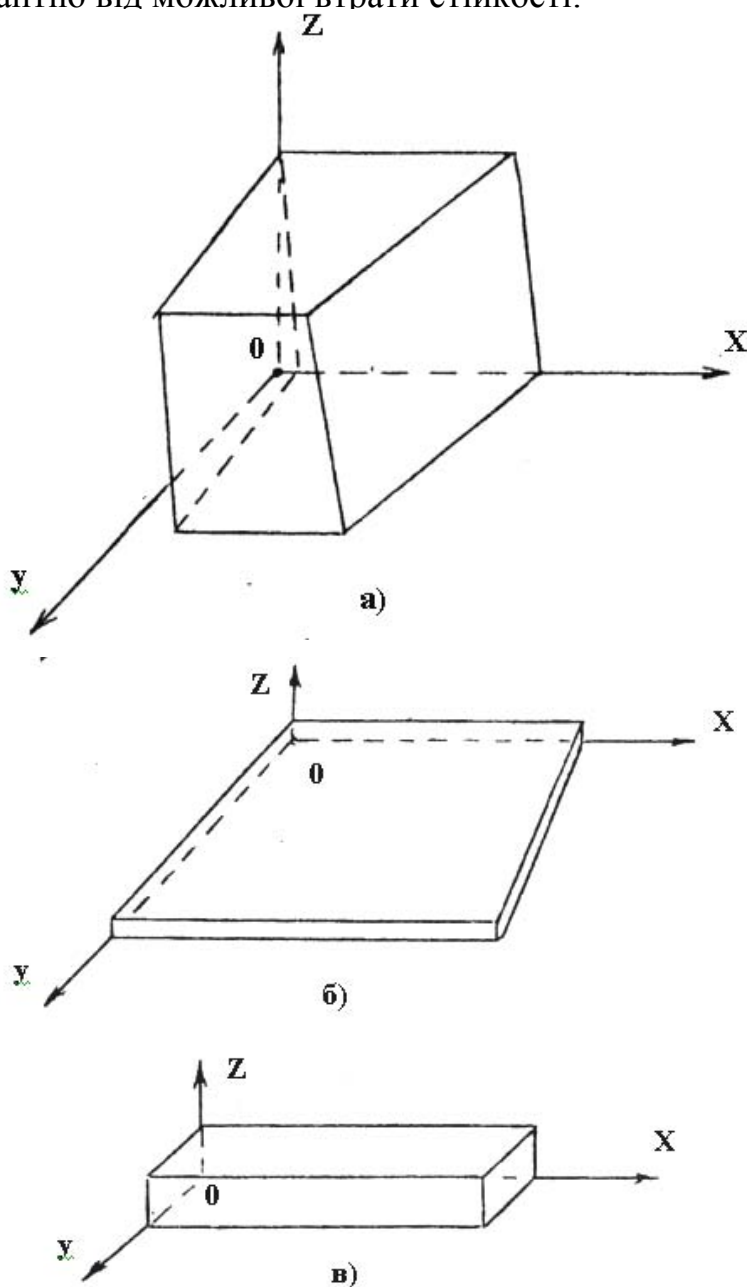


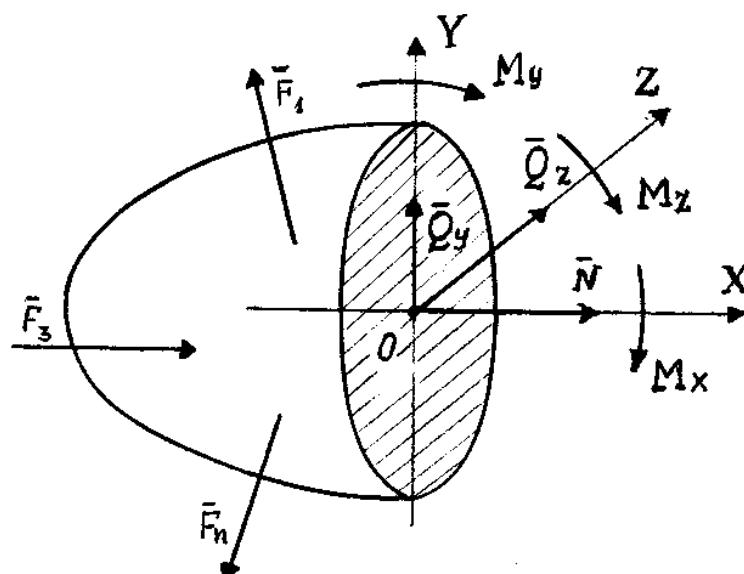
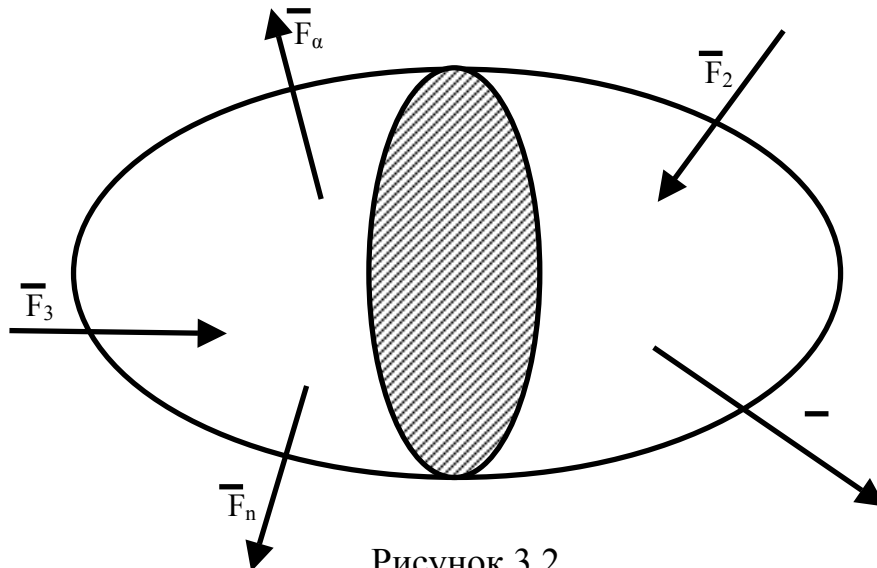
Рисунок 3.1

3.2 Теорія внутрішніх сил

Нехай на стержень змінного перерізу діють одночасно декілька сил: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$ (рис. 3.2). Необхідно розрахувати цей стержень на міцність. Як врахувати дію кожної сили?

Кожна сила деформує (змінює форму, розміри) не тільки ділянку стержня, що розташована біля точки прикладання цієї сили, але і сусідні, а значить і все тіло. Можна передбачити, що у загальному випадку будь-яка ділянка твердого тіла чинить опір кожній із діючих на тіло сил. Зовнішні сили змінюють взаємодію між частинами тіла. В тілі виникають внутрішні сили. Ось виходячи на внутрішні сили і необхідно вести розрахунок стержня.

Величину внутрішніх сил можна визначити методами теоретичної механіки. Для цього розріжемо стержень площиною перпендикулярною до осі стержня



(рис. 3.2), і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини. Якщо тіло знаходилось у рівновазі, то будь-яка його частина також буде знаходитись у рівновазі, враховуючи сили з якими права відрізана частина буде діяти на ліву. Ці сили, які називаємо внутрішніми, можна звести до головного вектора та головного моменту, які можна показати через їх проекції на координатні осі X, Y, Z (рис.3.3). Отримали довільну просторову систему сил для якої можна записати шість умов рівноваги для визначення невідомих внутрішніх силових факторів: три сили N, Q_y, Q_z та три моменти M_x, M_y, M_z . Сила N називається нормальною силою; Q_y, Q_z — поперечними силами. Проекція головного моменту на вісь x (M_x) називається крутним моментом, а на осі y та z — згинальними моментами і позначаються відповідно M_y і M_z .

Це все — теоретична механіка. Але і перший крок в науку про опір матеріалів. Якщо діє тільки один силовий фактор, деформація буде простою. При одночасній дії декількох внутрішніх силових факторів деформація буде складною. Для спеціальності “Системи управління автоматики” обмежимося розглядом простих деформацій. Для того, щоб знайти розрахункове значення внутрішнього силового фактора необхідно дослідити зміну його числового значення вздовж осі стержня, скласти рівняння і побудувати графік. Такий графік називається епюрою відповідного внутрішнього силового фактора.

3.3 Основні гіпотези і припущення в опорі матеріалів

Ні одна наука не може обійтися без деяких абстракцій, ідеалізації, умовностей. Численні експериментальні дослідження та практична діяльність підтверджують такі гіпотези і припущення.

1. *Гіпотеза про неперервність матеріалу.* Вважається, що матеріал повністю і рівномірно заповнює зайнятий ним об’єм тіла.
2. *Гіпотеза однорідності і ізотропності матеріалу.* Фізико-математичні властивості матеріалу однакові в будь-якій частині тіла.
3. *Гіпотеза малості та лінійності деформації тіла.* Ця гіпотеза (закон) в найпростішій формі була встановлена Р. Гуком і сформульована ним: яка деформація розтягу — така сила.
4. *Гіпотеза ідеальної пружності.* У відповідності з цією гіпотезою, тіло повністю відновлює свою форму і розміри після припинення дії зовнішніх сил.
5. *Гіпотеза суперпозиції дії сил.* Однорідні фактори (внутрішні сили, напруги, деформації) від декількох зовнішніх сил додаються.

3.4 Побудова епюр внутрішніх силових факторів

Числові значення внутрішніх силових факторів в загальному випадку залежать не тільки від зовнішніх сил, але і від того в якому перерізі вони

визначаються.

Графік, що показує зміну внутрішніх силових факторів по довжині стержня називається епюрою відповідного силового фактора.

Побудову епюр будемо розглядати для балок завантажених зовнішніми силами, що розташовані в площині симетрії балки (плоска система сил).

При визначенні значень внутрішніх сил в балках будемо користуватись такими правилами:

а) нормальна сила N додатна, коли у перерізі на лівій частині балки вона діє зліва направо, а на правій – в зворотному напрямку (рис. 3.4).

$$N = -\sum_{\text{лів}} F_x = \sum_{\text{пр}} F_x ;$$

б) поперечна сила Q додатна, коли у перерізі на лівій відрізаний частині балки вона направлена зверху вниз, а на правій – знизу вверху (рис.2.1).

$$Q = \sum_{\text{лів}} F_y = -\sum_{\text{пр}} F_y ;$$

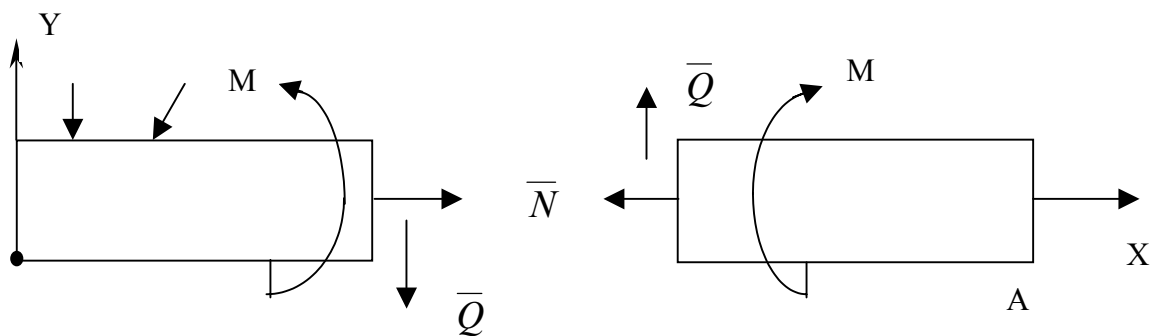


Рисунок 3.4

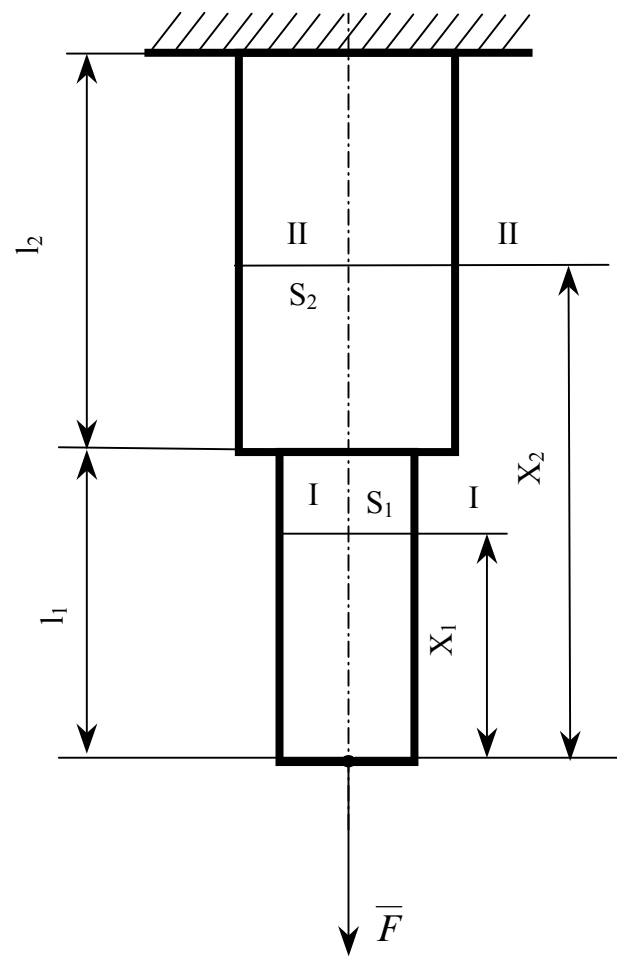
в) згинальний момент M додатний, коли у перерізі на лівій відрізаний частині балки він направлений проти годинникової стрілки, а на правій – за годинниковою стрілкою (рис. 3.4)

$$M = -\sum_{\text{лів}} M_0 = \sum_{\text{пр}} M_A .$$

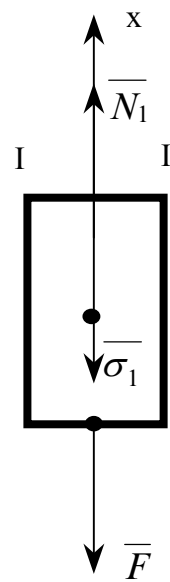
3.4.1 Побудова епюри внутрішніх нормальних сил при розтягу

Розглянемо стержень, що завантажений силою F (рис. 3.5а). Необхідно побудувати епюру внутрішніх сил з врахуванням ваги стержня.

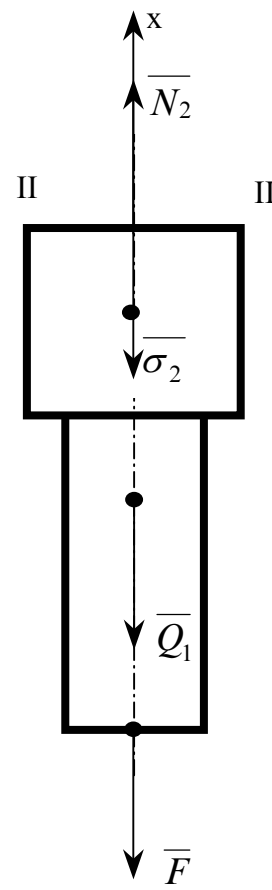
Для побудови епюри нормальних поздовжніх сил складемо рівняння, що зв'язує ці сили з координатами перерізу. Проведемо переріз на відстані X_1 від точки B (рис. 3.5а). Розглянемо рівновагу нижньої частини стержня (рис. 3.5,б). Запишемо аксіому рівноваги в проекціях на вісь X



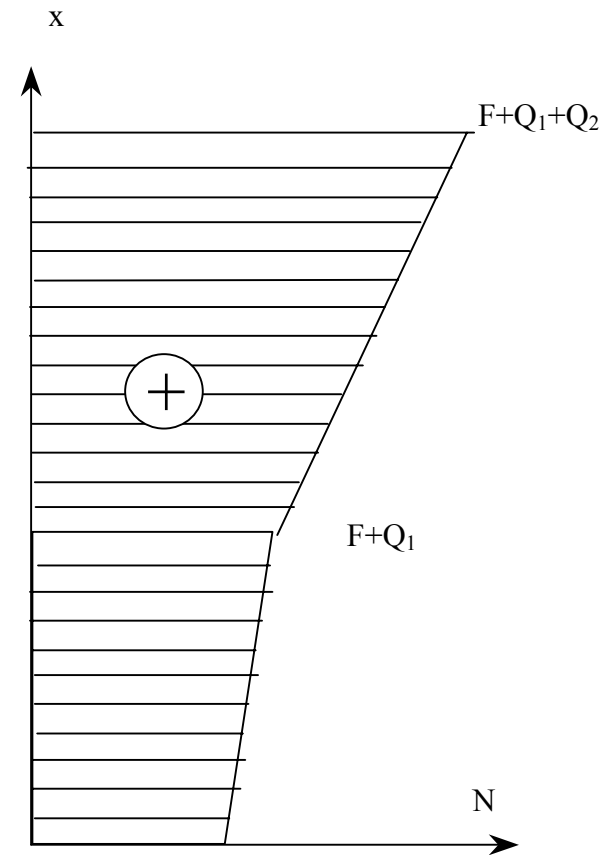
а)



б)



в)



г)

Рисунок 3.5