

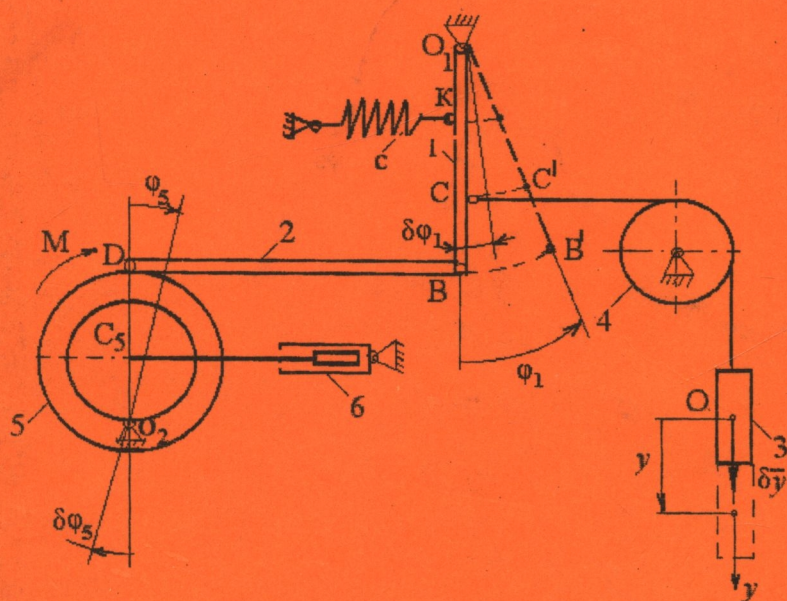
531.3(075)

Ф34

В. О. Федотов, О. Д. Панкевич

АНАЛІТИЧНА ДИНАМІКА

Розрахунково-графічні та контрольні завдання



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Федотов, О. Д. Панкевич

АНАЛІТИЧНА ДИНАМІКА
Розрахунково-графічні та контрольні завдання
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напрямку підготовки "Системна інженерія". Протокол № 11 від 24 квітня 2008 р.

Вінниця ВІТУ 2009

Рецензенти:

Р. Н. Кветний, доктор технічних наук, професор

В. О. Поджаренко, доктор технічних наук, професор

В. Ф. Анісімов, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Федотов В. О., Панкевич О. Д.

Ф 34 Аналітична динаміка. Розрахунково-графічні та контрольні завдання. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 125 с.

Збірник уміщує 9 завдань із аналітичної динаміки матеріальної системи. Кожне завдання має триста варіантів. До кожного завдання подано приклад виконання.

Для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 531 (075)

ЗМІСТ

Порядок та основні вимоги до виконання роботи.....	4
Розрахунково – графічні та контрольні завдання.....	5
1 Дослідження обертального руху тіла.....	5
2 Дослідження поступального та обертального рухів тіла.....	15
3 Дослідження руху матеріальної системи.....	27
4 Додаткові динамічні реакції в'язей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.....	42
5 Дослідження обертального та поступального рухів тіл з застосуванням загального рівняння динаміки.....	57
6 Застосування рівняння Лагранжа 2-го роду для дослідження матеріальної системи	63
7 Дослідження вільних коливань матеріальної системи.....	74
8 Малі коливання механічної системи біля положення стійкої рівноваги при наявності сил опору.....	91
9 Змуслені коливання механічної системи з одним ступенем вільності з урахуванням сил опору середовища.....	107
Список найуживаніших термінів.....	123
Література.....	124

ПОРЯДОК ТА ОСНОВНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

З кожної теми студенти виконують одну розрахунково-графічну роботу або контрольну задачу. Студенти вибирають варіант схеми (рисунки) задачі за двома останніми цифрами (шифр) залікової книжки з таблиці 1, а дані для розрахунку – за останньою цифрою шифру з таблиць, які наведені в завданнях.

Таблиця 1

Варіант	Шифр
1	01, 31, 61, 91
2	02, 32, 62, 92
...	
29	29, 59, 89, –
30	30, 60, 90, 00

Студенти денної форми навчання оформляють розрахунково-графічне завдання відповідно до діючих стандартів ЄСКД (2.105 і 2.106 для текстових конструкторських документів та 2.104 – для основних надписів).

Студенти заочної форми навчання можуть виконувати завдання в зошитах. На титульній сторінці зошита вказується номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, шифр, факультет, група і домашня адреса.

Розв'язання кожної задачі потрібно починати на розвороті зошита (з лівої сторінки), так, щоб розрахункова схема та формули, складені за нею, знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і наводиться коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові схеми (рисунки) виконуються за допомогою креслярських приладів. Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями. На кожній сторінці залишають поля для зауважень рецензента. Якщо робота висилається на повторну перевірку (при виконанні її у другому зошиті) обов'язково прикладається незарахована робота.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити роботу. Графік захисту планується деканатом.

РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНІ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1 ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТІЛА

Тонкий *стержень* (pivot) вагою P (рис. 1.1 – 1.5) жорстко скріплений з круговим диском (парні варіанти) або тонким кільцем (непарні варіанти) вагою Q та радіусом r . Система обертається навколо горизонтальної осі в вертикальній площині із стану спокою під дією моменту M . Знайти кутове прискорення, кутову швидкість та *зусилля в опорах* (effort in the bearing) осі при повороті системи на кут α .

Стержень, диск, кільце вважати *однорідними тілами* (solid bodies); тертям в *підшипниках* (bearing) знехтувати. Дані для розрахунку наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Варіант	P, H	Q, H	r, m	AB, m	$M, H \cdot m$	$\alpha, \text{град}$
1	5	2	0,1	0,3	4	30
2	10	3	0,3	0,9	8	120
3	15	4	0,4	1,0	5	60
4	20	5	0,1	0,4	30	45
5	5	6	0,2	0,6	20	90
6	6	7	0,3	1,0	15	30
7	7	1	0,4	1,2	2	45
8	8	2	0,1	0,3	20	60
9	9	3	0,2	0,5	4	90
0	10	4	0,3	0,8	2	120

Приклад виконання завдання

Система тіл, що складається з стержня 1 вагою P , однорідного диска 2 та кільця 3, що мають відповідно вагу Q_2 та Q_3 та радіус R , обертається навколо горизонтальної осі O (рис. 1.6) під дією пари сил з моментом M . Знайти кутове прискорення, кутову швидкість та зусилля в опорах осі при повороті матеріальної системи на кут α , якщо в початковий момент часу система знаходилася в спокої.

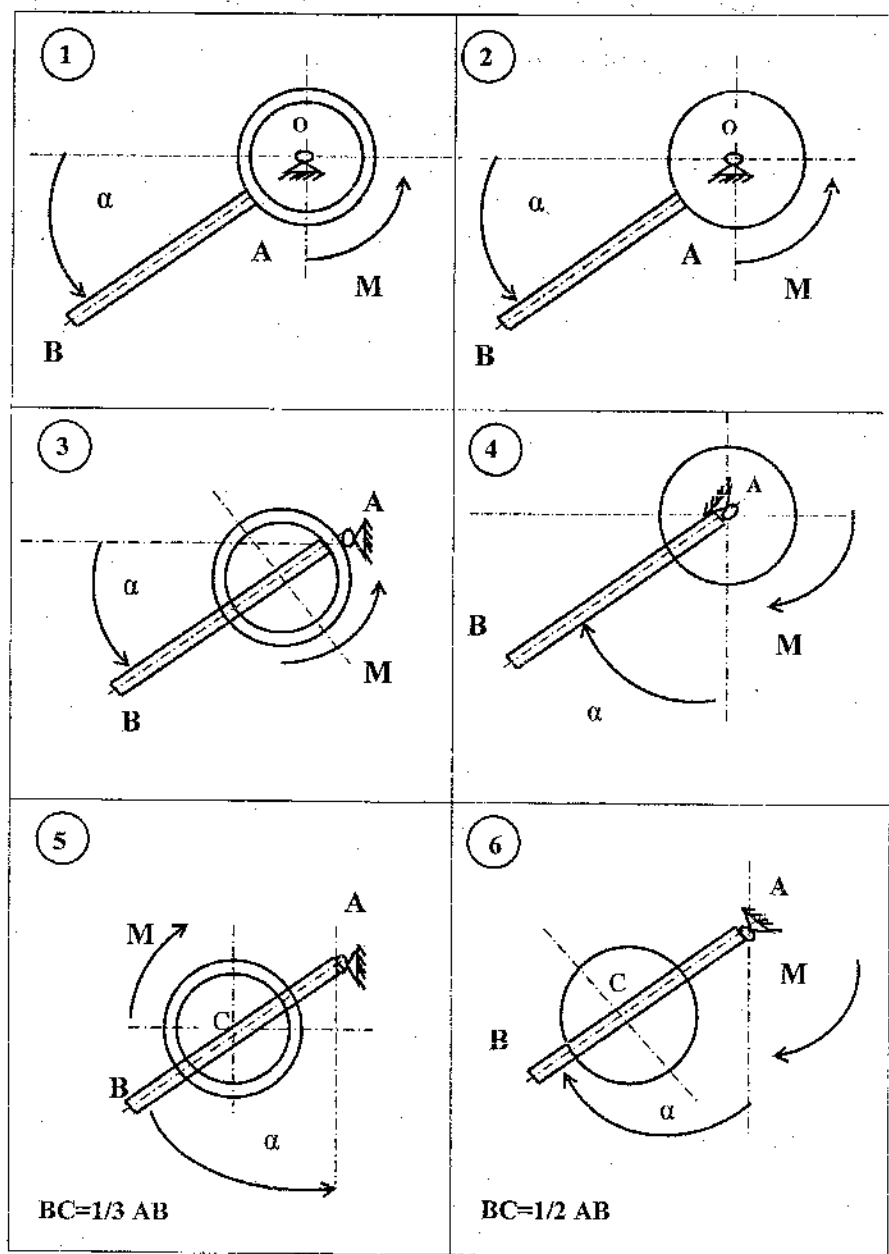


Рисунок 1.1

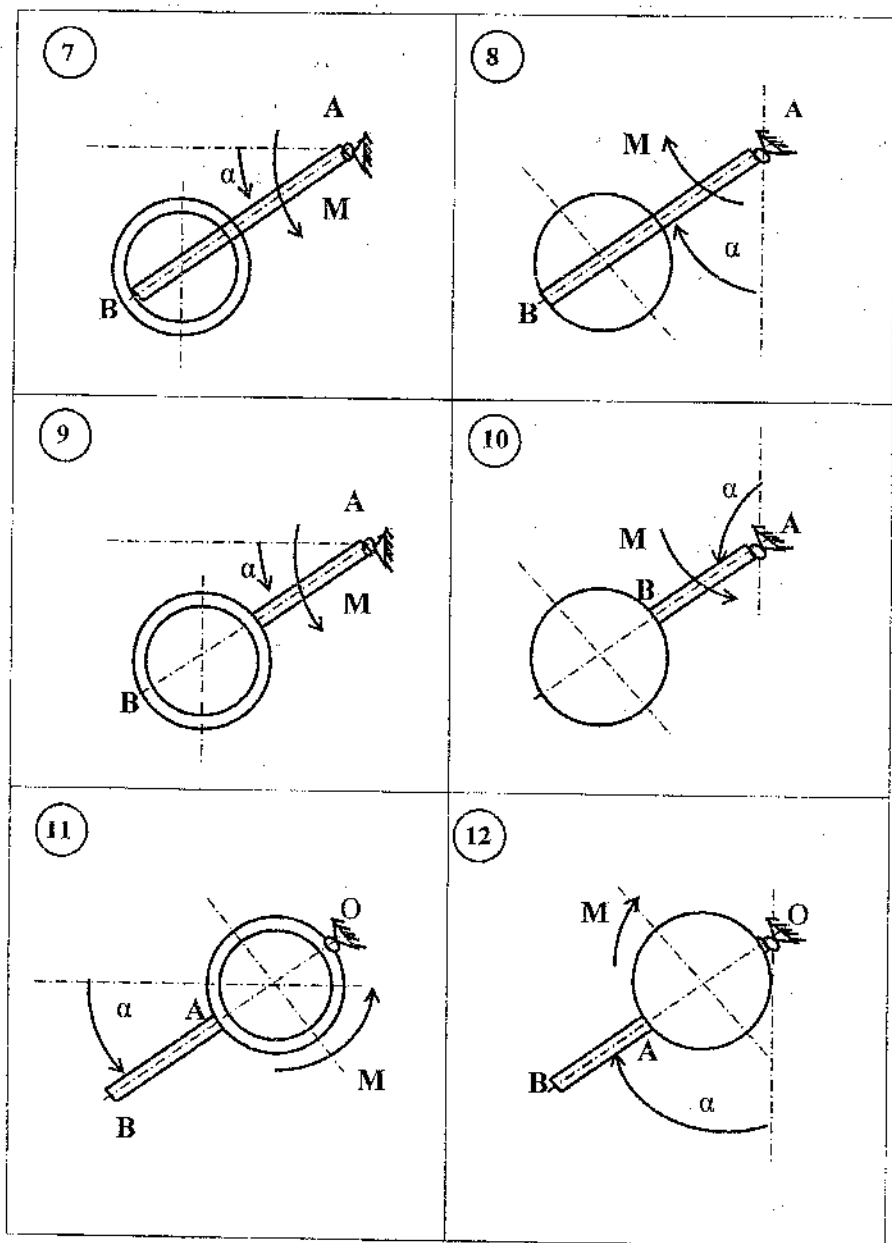


Рисунок 1.2

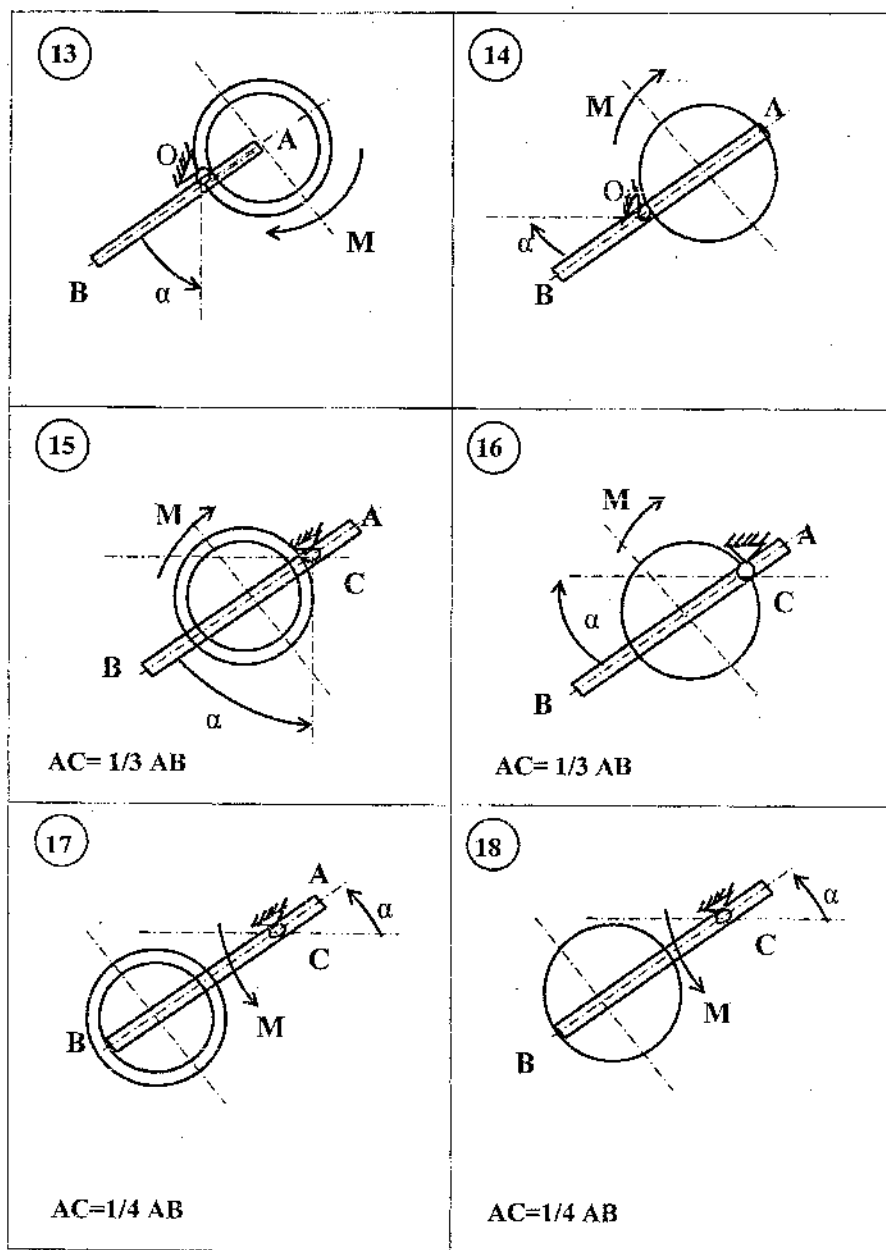
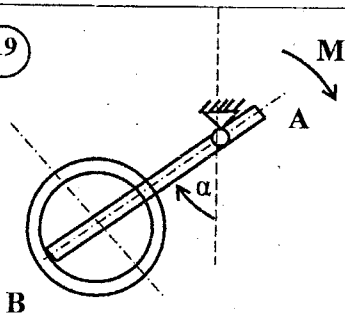


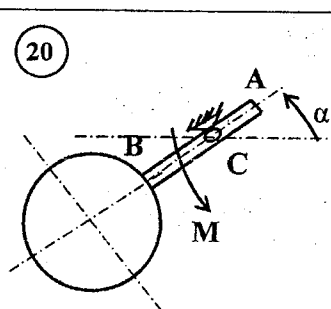
Рисунок 1.3

19



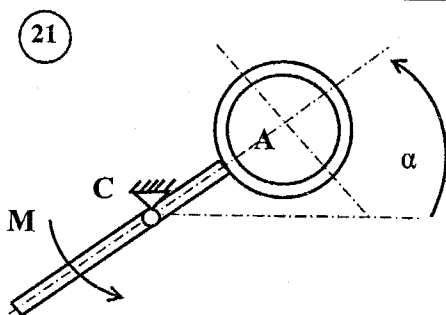
$$AC = 1/3 AB$$

20



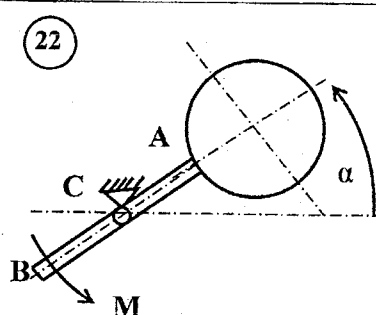
$$AC = 1/3 AB$$

21



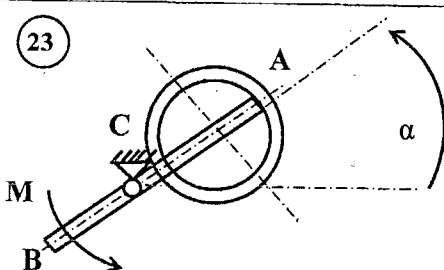
$$BC = 1/4 AB$$

22



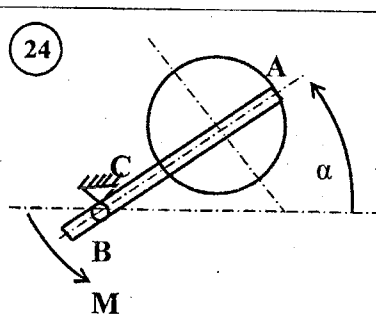
$$BC = 1/3 AB$$

23



$$BC = 1/6 AB$$

24



$$BC = 1/6 AB$$

Рисунок 1.4

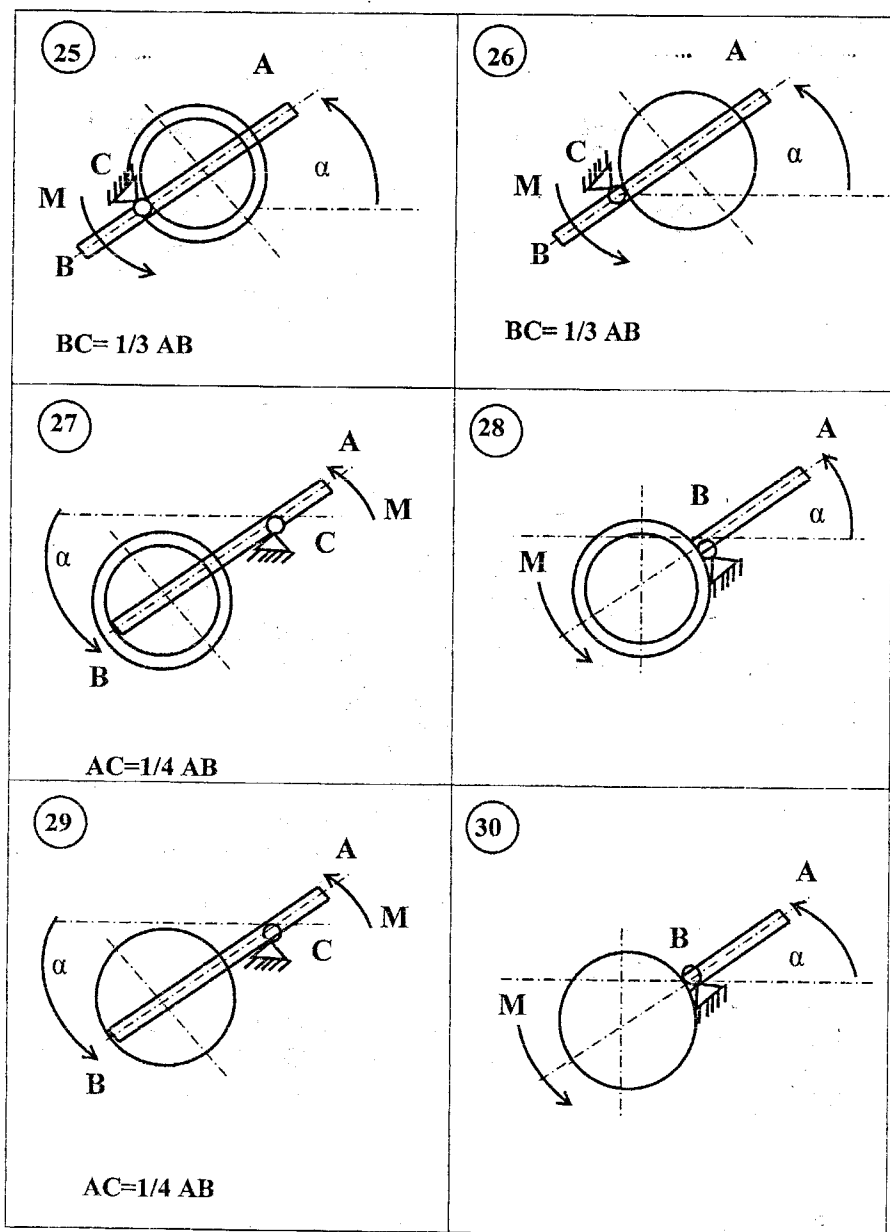


Рисунок 1.5

Прийняти: $P=10\text{Н}$; $Q_2=20\text{Н}$; $M=30\text{Нм}$; $Q_3=10\text{Н}$; $R=0,2\text{м}$; $\angle O=0,8\text{м}$; $\alpha=60^\circ$.

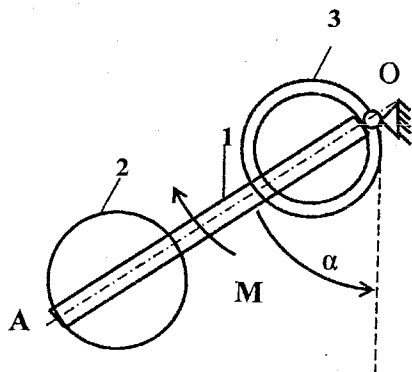


Рисунок 1.6

Розв'язання. Для дослідження системи використаємо метод кінетостатики (kinetostatics method) в проєкціях на осі x , y для плоскої довільної системи сил.

$$\begin{aligned} F_x + R_x + F_x^{\text{in}} &= 0 \\ F_y + R_y + F_y^{\text{in}} &= 0 \\ M_z^R + M_z^F + M_z^{\text{in}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Визначення кутового прискорення ε системи тіл

Кутове прискорення тіл знайдемо на підставі третього рівняння системи (1.1)

$$M_z^R + M_z^F + M_z^{\text{in}} = 0. \quad (1.2)$$

На систему тіл діють активні сили (active force) $\overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \overline{P}$ та пара сил з моментом M (рис. 1.7); переміщенню тіл перешкоджає в'язь: циліндричний шарнір O (immovable bearing), дію якого на тіло, на підставі аксіом звільнення від в'язів (liberation from tie), замінюємо реакціями в'язей (force tie) $\overline{X}_O$ та $\overline{Y}_O$.

Знайдемо головний момент сил інерції (moment of force inertia) M_z^{in}

$$M_z^{\text{in}} = I_z \cdot \varepsilon. \quad (1.3)$$

Момент інерції тіл I_z , відносно осі Z , знайдемо як суму моментів інерції тіл 1, 2, 3 відносно осі Z :

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}.$$

Момент інерції диска 2 відносно осі Z:

$$I_{z2} = \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (OA - R)^2 = \frac{Q_2}{g} \left[\frac{1}{2} R^2 + (OA - R)^2 \right] = \\ = \frac{20}{9,81} \left[\frac{1}{2} 0,2^2 + (0,8 - 0,2)^2 \right] = 0,775 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент інерції кільця 3 відносно осі Z:

$$I_{z3} = m_3 R^2 + m_3 R^2 = 2 \frac{Q_3}{g} R^2 = 2 \cdot \frac{10}{9,81} \cdot 0,2^2 = 0,082 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент інерції стержня 1 відносно осі Z:

$$I_{z1} = \frac{1}{3} m_1 \cdot OA^2 = \frac{1}{3} \frac{P_1}{g} \cdot OA^2 = \frac{1}{3} \cdot 9,81 \cdot 0,8^2 = 0,217 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тоді $I_z = 0,775 + 0,082 + 0,217 = 1,07 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

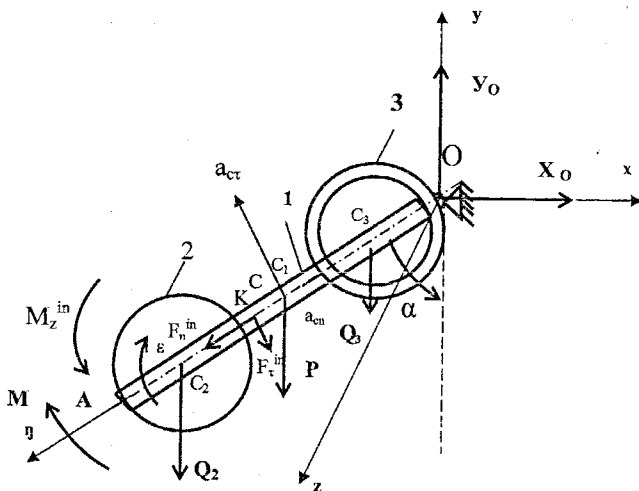


Рисунок 1.7

Головний момент сил інерції M_z^{in} направлений в напрямку, протилежному кутовому прискоренню ε . Запишемо рівняння (1.2) для системи сил, що прикладена до тіл 1, 2, 3 (рис 1.7).

$$-M + Q_2 \cdot OC_2 \sin \alpha + P \cdot OC_1 \sin \alpha + Q_3 \cdot OC_3 \sin \alpha + M_z^{\text{in}} = 0 \\ I_z \varepsilon = M - (Q_2 \cdot OC_2 + P \cdot OC_1 + Q_3 \cdot OC_3) \sin \alpha.$$

Звідки:

$$\varepsilon = \frac{M}{I_z} \cdot \frac{Q_2 \cdot OC_2 \sin \alpha + P \cdot OC_1 \sin \alpha + Q_3 \cdot OC_3}{I_z} \cdot \sin \alpha,$$

$$\varepsilon = \frac{30}{1,074} - \frac{20 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,2}{1,074} \cdot \sin \alpha = 27,93 - 16,76 \cdot \sin \alpha.$$

(1.4)

При $\alpha = 60^\circ$ $\varepsilon = 27,93 - 16,76 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13,4 \text{ } 1/c^2$.

Визначення кутової швидкості

Оскільки

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d\omega}{d\alpha} = \omega \frac{d\omega}{d\alpha},$$

то вираз (1.4) запишеться

$$\omega \frac{d\omega}{d\alpha} = 27,93 - 16,76 \cdot \sin \alpha. \quad (1.5)$$

При $t = 0$; $\omega = \omega_0 = 0$; $\alpha = 0$,

При $t = t_1$; $\omega_1 = \omega_\alpha$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Інтегруємо рівняння (1.5)

$$\int_0^{\omega_\alpha} \omega d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 27,93 d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 16,76 \sin \alpha d\alpha,$$

$$\frac{\omega_\alpha^2}{2} = 27,93 \cdot \frac{\pi}{3} + 16,76 \cos \frac{\pi}{3} - 16,76,$$

$$\omega_\alpha = \sqrt{2 \cdot (27,93 \frac{3,14}{3} + 16,76 \frac{1}{2} - 16,76)} = 6,46 \frac{1}{c},$$

$$\omega_\alpha = 6,46 \frac{1}{c}.$$

Визначення реакцій опор

Знайдемо координати *центра мас* (centre of mass) системи тіл.

$$\eta_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \eta_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{m_1 \cdot OC_1 + m_2 \cdot OC_2 + m_3 \cdot OC_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$\eta_c = \frac{P \cdot 0,4 + Q_2 \cdot 0,6 + Q_3 \cdot 0,2}{P + Q_2 + Q_3} = \frac{10 \cdot 0,4 + 20 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,2}{10 + 20 + 10} = 0,45 \text{ м.}$$

Проекції прискорення центра мас при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ на *натуральні осі* (natural axle) координат:

$$a_{ct} = \varepsilon \cdot \eta_c = \varepsilon \cdot OC = 13,4 \cdot 0,45 = 6,03 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{cn} = \omega_\alpha^2 \cdot \eta_c = \omega_\alpha^2 \cdot OC = 6,46 \cdot 0,45 = 18,78 \text{ м/с}^2.$$

Запишемо перші два рівняння системи (1.1) для сил, що прикладені до тіл 1, 2, 3 (рис. 1.7).

$$X_0 - F_n^{\text{in}} \sin \alpha + F_\tau^{\text{in}} \cos \alpha = 0,$$

$$Y_0 - P - Q_2 - Q_3 - F_n^{\text{in}} \cos \alpha - F_\tau^{\text{in}} \sin \alpha = 0,$$

де:

$$F_n^{\text{in}} = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_{cn} = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g} \cdot a_{cn} = \frac{10 + 20 + 10}{9,81} \cdot 18,78 = 76,57 \text{ Н,}$$

$$F_\tau^{\text{in}} = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_{ct} = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g} \cdot a_{ct} = \frac{10 + 20 + 10}{9,81} \cdot 6,03 = 24,59 \text{ Н.}$$

Сили інерції $\bar{F}_n^{\text{in}}$ та $\bar{F}_\tau^{\text{in}}$ прикладені в точці К стержня ОА.

$$OK = \frac{I_z \cdot \varepsilon}{F_\tau^{\text{in}}} = \frac{13,4 \cdot 1,074}{24,59} = 0,59 \text{ м.}$$

Звідси знаходимо реакції опор X_0 та Y_0 .

$$X_0 = \bar{F}_n^{\text{in}} \sin \alpha - \bar{F}_\tau^{\text{in}} \cos \alpha = 76,57 \sin 60^\circ - 24,59 \cos 60^\circ,$$

$$X_0 = 54,02 \text{ Н.}$$

$$Y_0 = P + Q_2 + Q_3 + \bar{F}_n^{\text{in}} \cos \alpha + \bar{F}_\tau^{\text{in}} \sin \alpha,$$

$$Y_0 = 10 + 20 + 10 + 76,57 \cos 60^\circ + 24,59 \sin 60^\circ,$$

$$Y_0 = 99,58 \text{ Н.}$$

Відповідь: $\omega_\alpha = 6,46 \frac{1}{\text{с}}$; $\varepsilon = 13,4 \frac{1}{\text{с}^2}$; $X_0 = 54,02 \text{ Н}$; $Y_0 = 99,58 \text{ Н}$.

2 ДОСЛІДЖЕННЯ ПОСТУПАЛЬНОГО ТА ОБЕРТАЛЬНОГО

РУХІВ ТІЛА

Матеріальна система (рис 2.1 – 2.5) приводиться до руху моментом M . Знайти прискорення тіла 3, *натяг пасів* (force belt), зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t = t_1$.

Масами пасів та їх ковзанням (slip) по шківих знехтувати.

Натяг у ведучій частині нескінченного паса (варіанти 2, 5, 6, 11, 14, 17, 19, 20, 23, 24, 28) вдвічі більший від натягу у веденій частині. Однорідний диск 1 та *східчастий шків* (stepped pulley) 2 обертаються навколо горизонтальних осей.

В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання f .

Дані для розрахунків взяті з таблиці 2.1, де прийняті такі позначення: m_1, m_2, m_3 – маси тіл 2 та 3; i_2 – *радіус інерції* (radius inertia) тіла 2 відносно горизонтальної осі, що проходить через центр мас тіла; R_1, R_2, r_2 – розміри тіл 1 та 2; l – відстань між опорами тіла 3.

Таблиця 2.1

Варіант	R_1 , м	R_2 , м	r_2 , м	i_2 , м	l , м	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	M , Н·м	t_1 , с	f
1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,4	0,2	2	1	$1+3t$	2	0,2
2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,5	0,3	3	2	$2+t^2$	1	0,3
3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,6	0,4	4	3	$3+2t^2$	3	0,4
4	0,5	0,6	0,4	0,5	0,7	0,5	5	4	$4+t^2$	4	0,1
5	0,6	0,55	0,25	0,4	0,8	0,6	6	3	$6+5t$	5	0,15
6	0,1	0,15	0,1	0,1	0,9	0,1	1	1	$2+3t^2$	6	0,25
7	0,15	0,2	0,15	0,2	0,85	0,15	1,5	1	$4+5t$	2	0,35
8	0,25	0,3	0,2	0,25	0,75	0,25	2,5	2	$5+3t^2$	1	0,45
9	0,35	0,4	0,2	0,3	0,65	0,35	3,5	3	$7+2t$	3	0,4
0	0,45	0,5	0,4	0,45	0,5	0,45	4,5	4	$9+t^2$	2	0,15

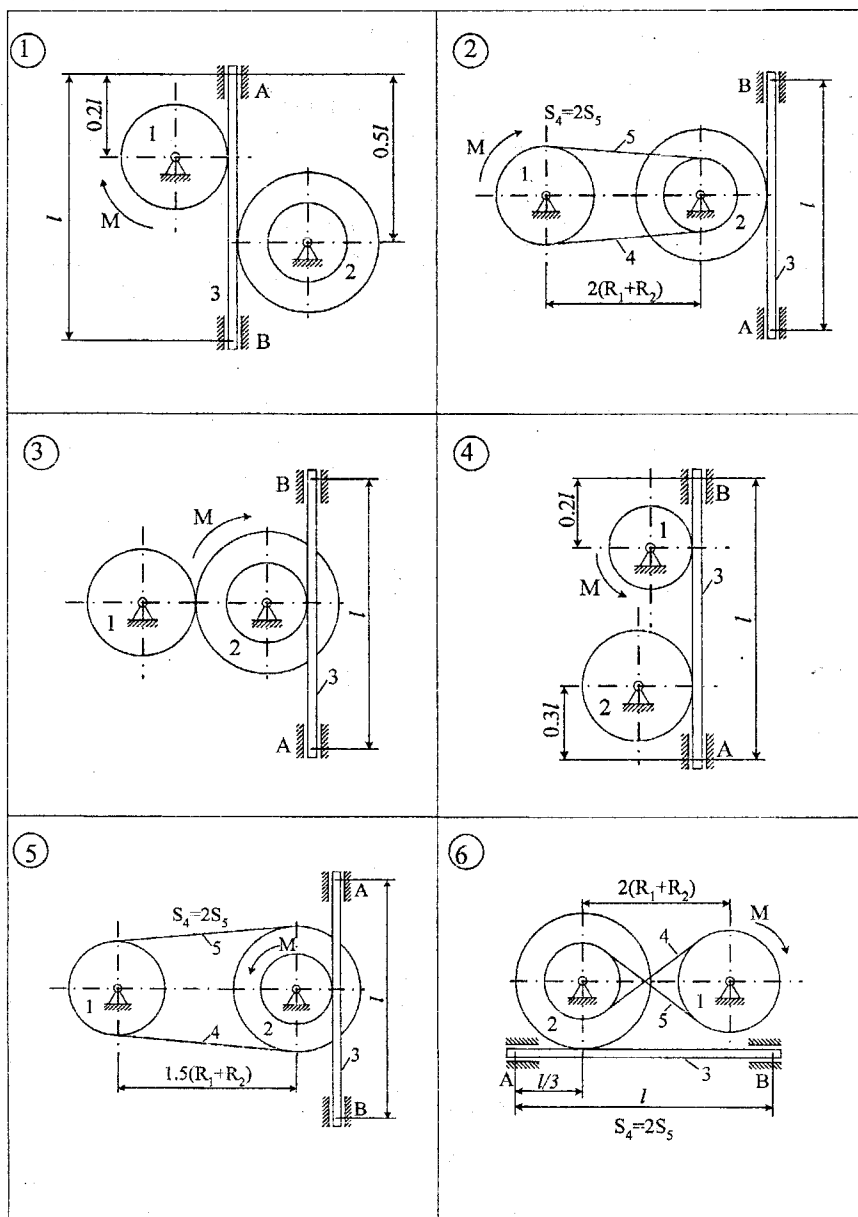


Рисунок 2.1

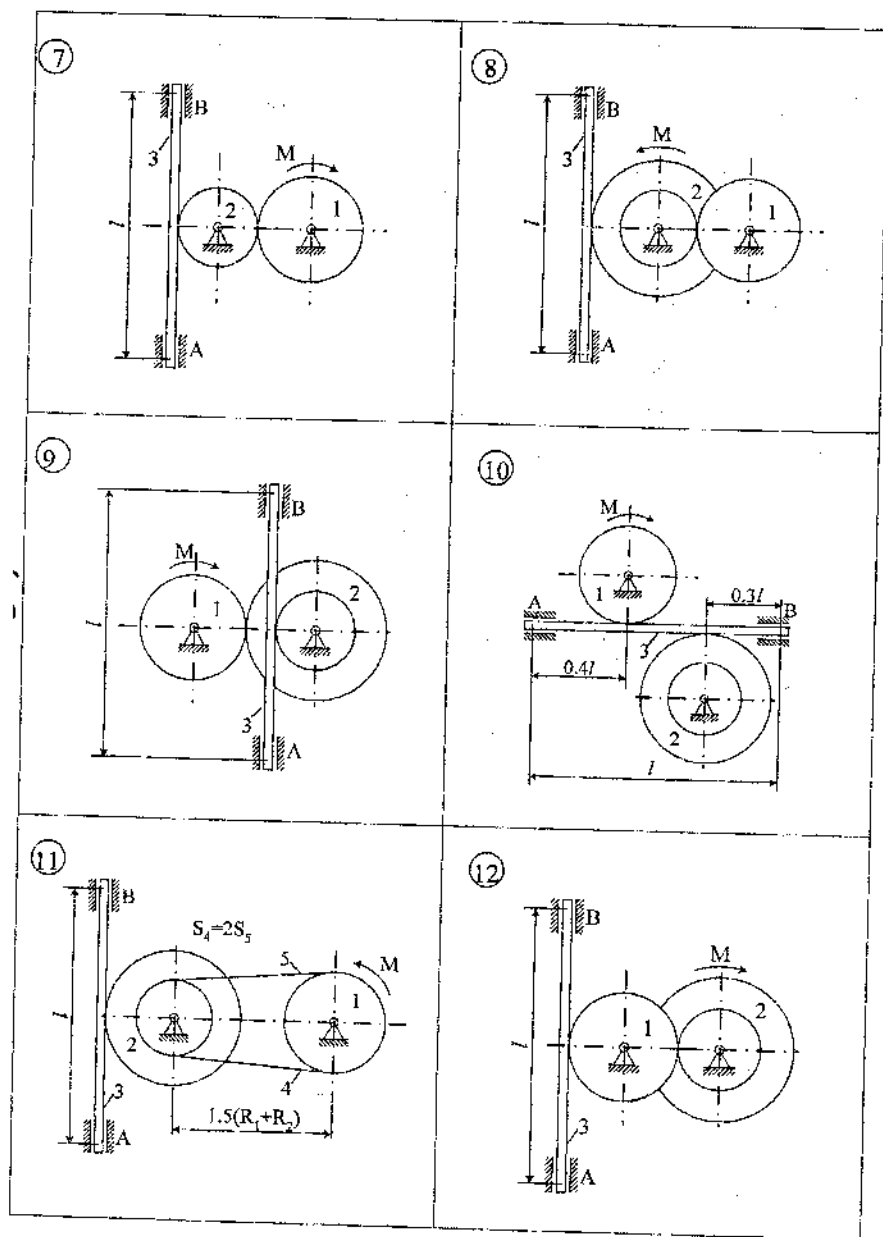


Рисунок 2.2

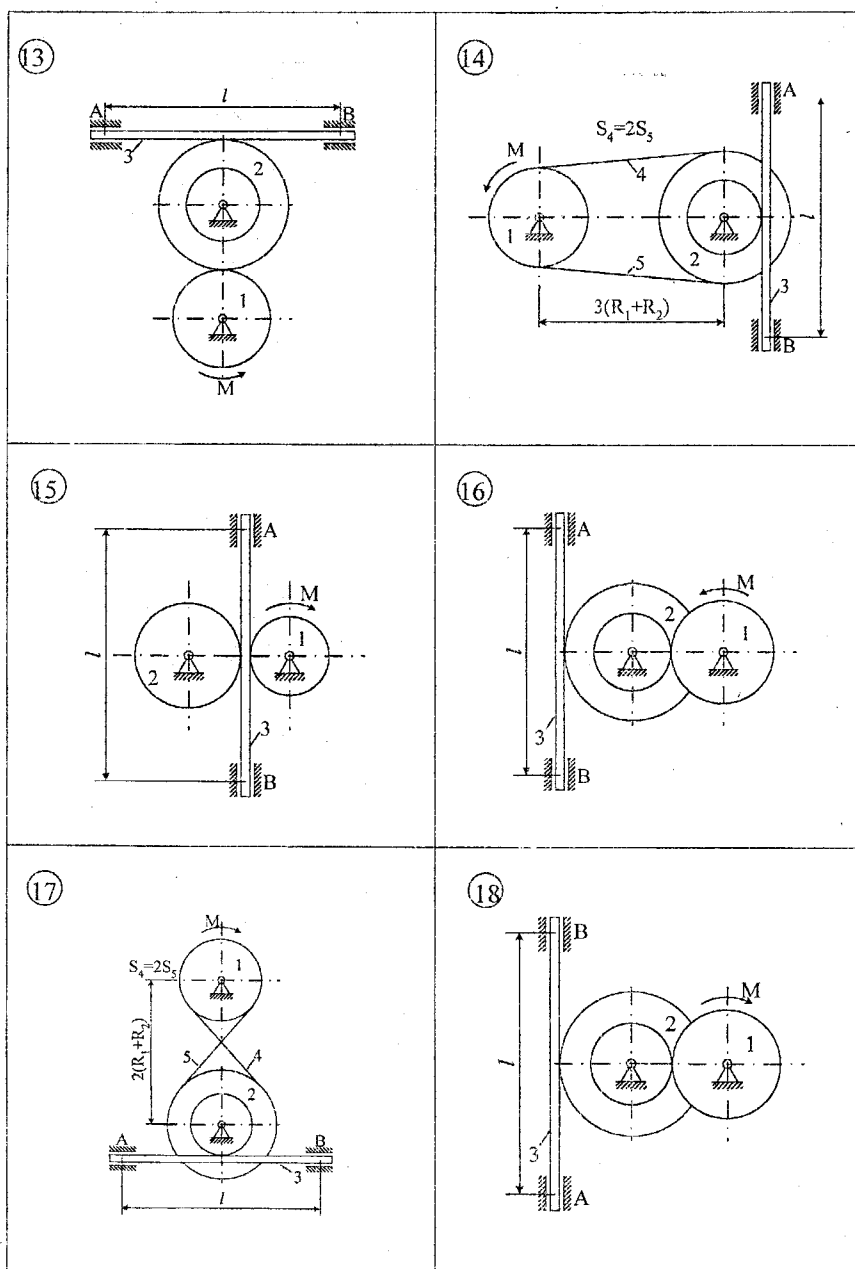
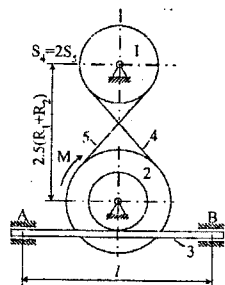
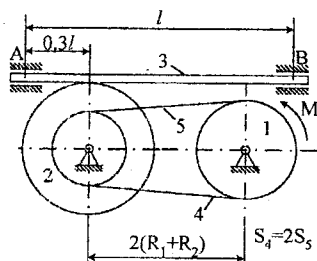


Рисунок 2.3

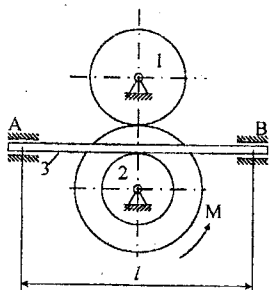
19



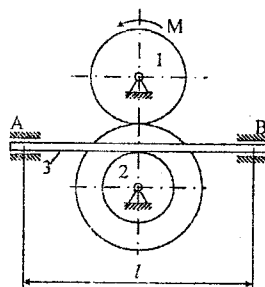
20



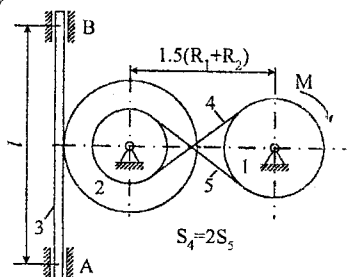
21



22



23



24

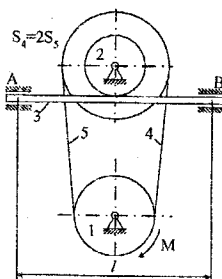
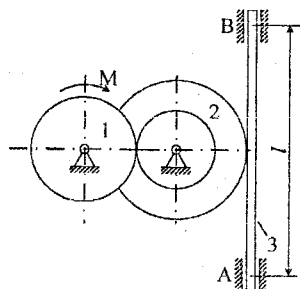
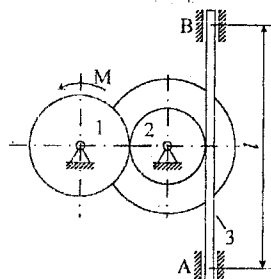


Рисунок 2.4

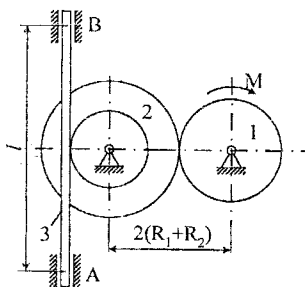
25



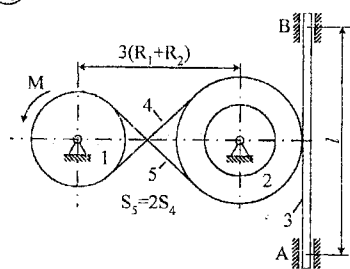
26



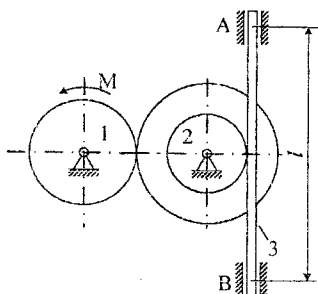
27



28



29



30

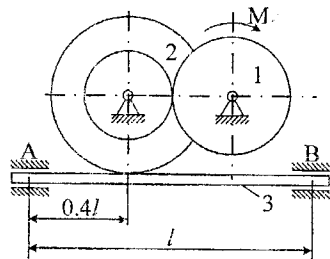


Рисунок 2.5

Приклад виконання завдання

Матеріальна система (рис. 2.6) починає рухатись із стану спокою під дією моменту M , що прикладається до тіла 1. Осі тіл 1 та 2 горизонтальні. Коефіцієнт тертя ковзання f . В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Масою паса знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3, натяг S_5 у веденій 5 та ведучій 4 (S_4) частині паса (прийняти $S_4=2S_5$), зусилля в точці контакту тіл 1 та 2, реакції в'язей циліндричних (нерухомих) шарнірів тіл 1, 2 та 3.

Прийняти: $R_1 = 0,25\text{м}$; $R_2 = 0,45\text{м}$; $r_2 = 0,15\text{м}$; $i_2 = 0,4\text{м}$; $L = 0,7\text{м}$; $m_1 = 0,5\text{кг}$; $m_2 = 5\text{кг}$; $m_3 = 4\text{кг}$; $M = 3\text{т}^3 \text{ Н}\cdot\text{М}$; $t_1 = 2\text{с}$; $f = 0,4$.

Розв'язання. Для дослідження руху матеріальної системи (рис.2.6) використаємо метод кінестатики для плоскої довільної системи сил.

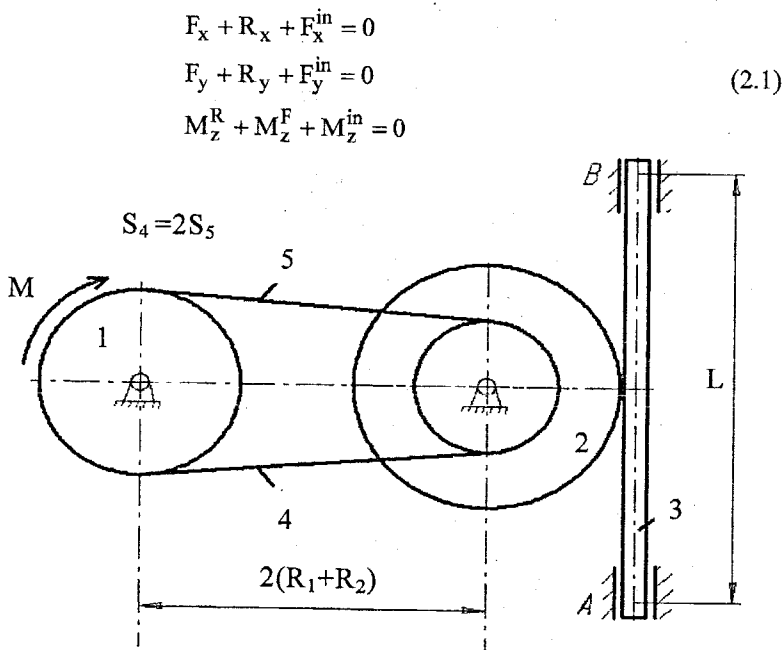


Рисунок 2.6

Визначення прискорення тіла 3

Розглянемо окремо рух кожного тіла матеріальної системи (рис.2.6). Однорідне тіло 1 обертається навколо горизонтальної осі під дією моменту M (рис. 2.7) і до нього прикладені сили: сила тяжіння $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}$; реакції

циліндричного шарніра X_1 та Y_1 , зусилля у ланках паса $\bar{S}_5$ та $\bar{S}_4$.

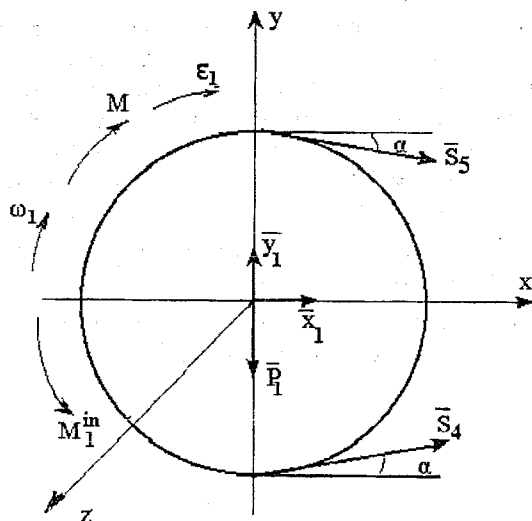


Рисунок 2.7

Головний вектор сил інерції дорівнює нулю, оскільки центр мас тіла знаходиться на нерухомій осі Z . Головний момент сил інерції M_1^{in} за напрямком протилежний кутовому прискоренню ϵ_1 тіла і знаходиться за формулою:

$$M_1^{in} = I_{z1} \ddot{\phi}_1.$$

Запишемо третє рівняння системи (2.1):

$$M_1^{in} - M - S_5 R_1 + S_4 R_1 = 0.$$

Або:

$$I_{z1} \ddot{\phi}_1 - M - S_5 R_1 + S_4 R_1 = 0. \quad (2.2)$$

Момент інерції тіла 1 відносно осі Z

$$I_{z1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2.$$

На тіло 2 (рис 2.8) під час руху діють сили: сила тяжіння $\bar{P}_2 = m_2 \bar{g}$, реакції нерухомого шарніра X_2 та Y_2 , зусилля у ланках паса $\bar{S}'_5$ та $\bar{S}'_4$, реакції тіла 1 – $\bar{S}_2$ та $\bar{N}_2$, головний момент сил інерції M_2^{in} .

Знайдемо момент активних сил, реакцій в'язей та сил інерції відносно осі Z .

$$M_2^{\text{in}} + S_5' r_2 - S_4' r_2 + S_2 R_2 = 0,$$

де $M_2^{\text{in}} = I_{z2} \ddot{\phi}_2$, $I_{z2} = m_2 i_2^2$, $S_5 = S_5'$, $S_4 = S_4'$.

Тоді $I_{z2} \ddot{\phi}_2 + S_5' r_2 - S_4' r_2 + S_2 R_2 = 0$. (2.3)

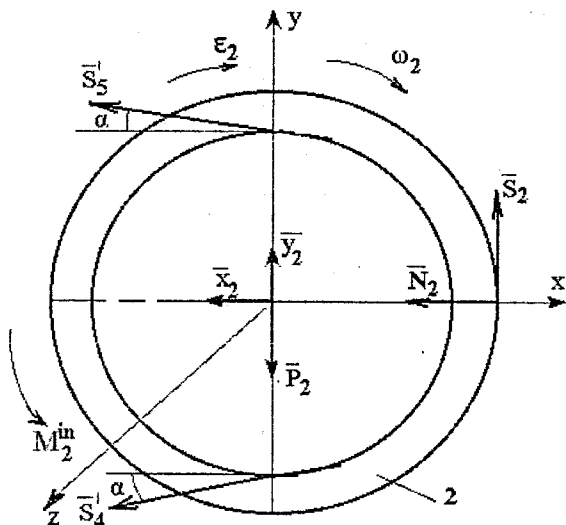


Рисунок 2.8

Для тіла 3 (рис. 2.9), що переміщується під дією сили тяжіння $\bar{P}_3 = m_3 \bar{g}$, реакції нерухомих шарнірів $\bar{N}_A$ та $\bar{N}_B$, реакції $\bar{S}_2'$ та $\bar{N}_2'$ тіла 2, сила інерції $\bar{F}_3^{\text{in}}$ має напрямок протилежний прискоренню $\bar{a}_3 = \bar{y}_3$ тіла.

Знайдемо проекцію сил на вісь Y:

$$P_3 + S_2' - F_3^{\text{in}} = 0. \quad (2.4)$$

Оскільки $F_3^{\text{in}} = m_3 \ddot{y}_3$, $S_2 = S_2'$, $P_3 = m_3 g$, то рівняння (2.4) набуває вигляду:

$$m_3 g + S_2 - m_3 \ddot{y}_3 = 0. \quad (2.5)$$

Якщо диференціальні рівняння (2.2), (2.3) і (2.5) розглянути з кінематичними співвідношеннями

$$\ddot{y}_3 = \ddot{\phi}_2 R_2, \quad \ddot{\phi}_2 r_2 = \ddot{\phi}_1 R_1. \quad (2.6)$$

Тоді отримаємо п'ять рівнянь з невідомими $\ddot{y}_3, \ddot{\phi}_2, \ddot{\phi}_1, S_5, S_2 (S_4 = 2S_5)$

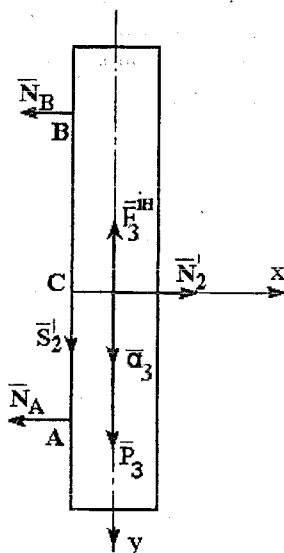


Рисунок 2.9

Розв'язуючи систему рівнянь (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) маємо:

$$S_5 = \frac{M}{R_1} - \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2}{R_2} \ddot{y}_3,$$

$$S_2 = m_3(\ddot{y}_3 - g),$$

$$\ddot{y}_3 = \frac{Mr_2 + m_3 R_1 R_2 g}{R_1(m_2 \frac{i_2^2}{R_2} + \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2^2}{R_2} + m_3 R_2)}.$$

Або, підставляючи дані умови задачі, отримаємо:

$$\ddot{y}_3 = 4,92 + 0,5t^3,$$

$$S_2 = 4\ddot{y}_3 - 39,24,$$

$$S_5 = 12t^3 - 0,083\ddot{y}_3.$$

$$\text{При } t_1=2\text{с: } \ddot{y}_3 = 8,92 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, S_5 = 95,26 \text{Н}, S_2 = -3,6 \text{Н}.$$

Визначення реакцій в'язей циліндричних шарнірів та зусиль між тілами.

Для тіл 1 та 2 запишемо перші два рівняння системи (2.1)
Тіло 1 (рис. 2.7)

$$\begin{aligned}x_1 + S_4 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha &= 0, \\y_1 + S_4 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha - P_1 &= 0.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Тіло 2 (рис 2.8)

$$\begin{aligned}-x_2 - N_2 - S'_5 \cos \alpha - S'_4 \cos \alpha &= 0, \\y_2 - P_2 + S_2 + S'_5 \sin \alpha - S_4 \sin \alpha &= 0.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Для тіла 3 (рис. 2.9) в проекціях на вісь X:

$$N'_2 - N_B - N_A = 0. \quad (2.9)$$

В рівняннях (2.7) – (2.9) $F_3^{\text{ін}} = 0, F_2^{\text{ін}} = 0, F_{3x}^{\text{ін}} = 0$, оскільки центри мас тіл 1, 2 знаходяться на нерухомих осях обертання тіл, а координата X_{C3} тіла 3 є сталою величиною.

Отримали систему п'яти рівнянь

$$\begin{aligned}x_1 + (S_4 + S_5) \cos \alpha &= 0, \\y_1 + (S_4 - S_5) \sin \alpha - P_1 &= 0, \\x_2 + N_2 + (S_4 + S_5) \cos \alpha &= 0, \\y_2 - P_2 + S_2 + (S_5 - S_4) \sin \alpha &= 0, \\N_2 - N_B - N_A &= 0,\end{aligned}\quad (2.10)$$

в якій сім невідомих величин: $x_1, y_1, x_2, y_2, N_2, N_B, N_A$.

Додаткові два рівняння отримаємо, використовуючи закон Амонта-Кулона

$$S_2 = fN_2, \quad (2.11)$$

та знайшовши суму моментів сил тіла 3 відносно осі Z, що проходить через центр мас C (рис. 2.9) тіла 3

$$N_B \frac{AB}{2} - N_A \frac{AB}{2} = 0. \quad (2.12)$$

Тіло 3 рухається поступально і тому $\ddot{y}_3 = 0$. Таким чином, із (2.12) маємо:

$$N_B = N_A. \quad (2.13)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.10), (2.11) і (2.13), отримаємо:

$$\begin{aligned}x_1 &= -(S_4 + S_5) \cos \alpha, \\y_1 &= m_1 g - (S_4 - S_5) \sin \alpha,\end{aligned}$$

$$x_2 = -N_2 - (S_4 + S_5)\cos\alpha,$$

$$y_2 = m_2g - S_2 + (S_4 - S_5)\sin\alpha,$$

$$N_2 = \frac{S_2}{f}, N_B = N_A = \frac{S_2}{2f},$$

$$\text{де } \sin\alpha = \frac{R_1 - r_2}{\sqrt{4(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - r_2)^2}} = 0,071,$$

$$\cos\alpha = \frac{2(R_1 + R_2)}{\sqrt{4(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - r_2)^2}} = 0,997.$$

$$\text{При } t_1 = 2\text{с},$$

$$y_1 = -1,86\text{ Н};$$

$$x_1 = -284,92\text{ Н};$$

$$y_2 = 59,41\text{ Н};$$

$$x_2 = -293,92\text{ Н};$$

$$N_2 = 9\text{ Н};$$

$$N_B = N_A = 4,5\text{ Н}.$$

Відповідь: $\ddot{y}_3 = 8,92 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $S_5 = 95,26\text{ Н}$, $S_2 = -3,6\text{ Н}$, $y_1 = -1,86\text{ Н}$,
 $x_1 = -284,92\text{ Н}$, $y_2 = 59,41\text{ Н}$, $x_2 = -293,92\text{ Н}$, $N_2 = 9\text{ Н}$, $N_B = N_A = 4,5\text{ Н}$.

3 ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Електродвигун 1 (рис. 3.1 – 3.10) масою m_1 приспінюється до системи нездеформованих пружин (undeformation spring). На тілі 2 масою m_2 (однорідний диск радіуса R – варіант 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28; кільце радіуса R – варіант 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29; однорідний стержень $OA = R$ – варіант 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30), що з'єднане з ротором електродвигуна 1, закріплена матеріальна точка масою m_A на відстані OA від осі ротора електродвигуна. Ротор обертається з постійною кутовою швидкістю ω . Пружини приєднані до електродвигуна 1 таким чином, що його статор переміщується *поступально* (translation movement), а точка O по осі x .

Знайти закон руху корпусу електродвигуна, центр мас якого O переміщується по вертикалі, побудувати графік руху точки O протягом двох періодів при кутовій швидкості $\omega = n \cdot \rho$ (ρ – частота, при якій спостерігається явище резонансу), якщо в початковий момент часу точка O зміщена із положення рівноваги на величину λ_0 і їй була надана швидкість v_0 в додатному напрямку осі x , а тіло 2 почало обертатись навколо горизонтальної осі O з кутовою швидкістю ω .

Необхідні для розрахунку дані наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Варіант	m_1 , кг	m_2 , кг	m_A , кг	R , м	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	c_3 , Н/м	n	λ_0 , м	v_0 , м/с
1	15	2	0,6	0,2	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^3$	0,7	$3 \cdot 10^{-2}$	0
2	18	3	0,7	0,21	$3 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	0,65	$2,5 \cdot 10^{-2}$	1,5
3	21	4	0,8	0,22	$4 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	1,2	$2 \cdot 10^{-2}$	0,5
4	23	5	0,9	0,25	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	0,63	$-1,5 \cdot 10^{-2}$	2
5	25	6	1,0	0,3	$6 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	0,75	-10^{-2}	-1,5
6	10	1	0,5	0,15	$1 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	0,8	0	3
7	12	1,5	0,6	0,16	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	0,55	$5 \cdot 10^{-2}$	4
8	13	2,5	0,7	0,17	$3 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	1,3	$4 \cdot 10^{-2}$	-2,5
9	17	3,5	0,8	0,18	$4 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	1,25	$-3,5 \cdot 10^{-2}$	0,5
0	19	4,5	0,9	0,19	$5 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	1,3	$0,5 \cdot 10^{-2}$	-2,5

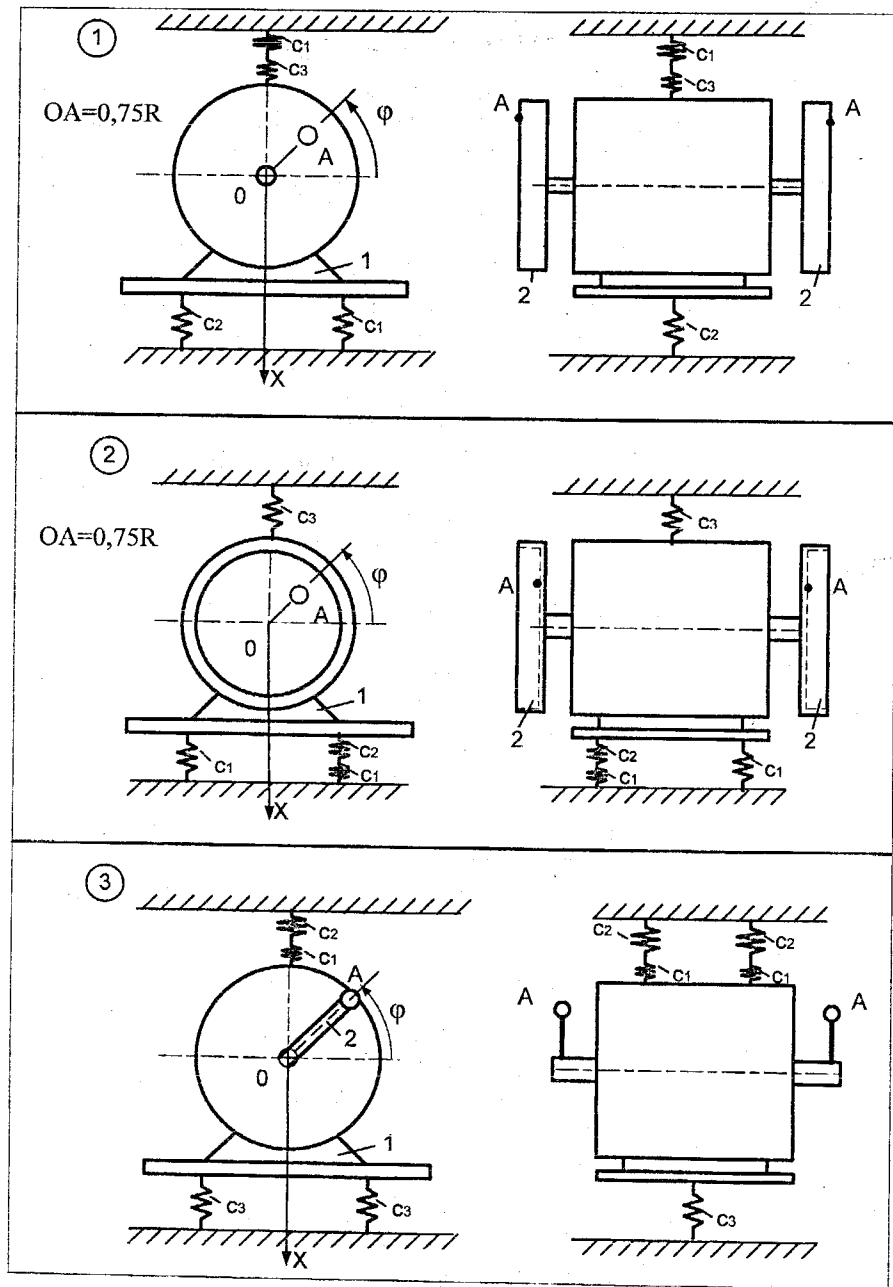
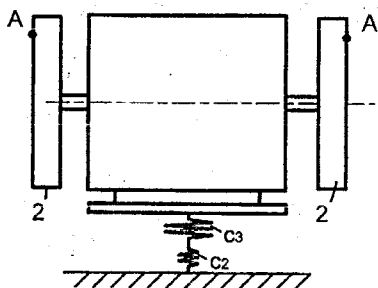
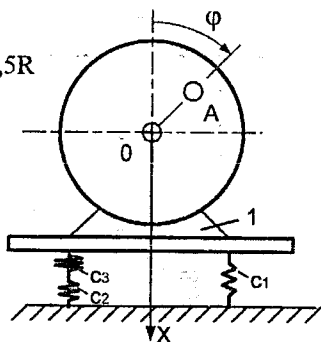


Рисунок 3.1

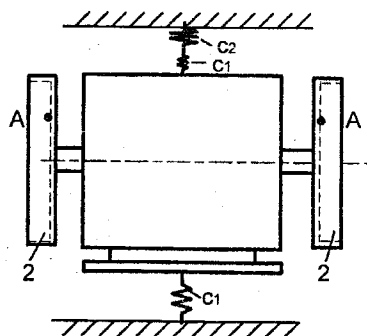
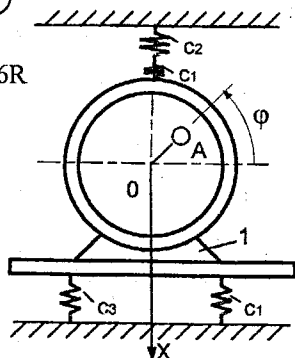
④

$$OA = 0,5R$$



⑤

$$OA = 0,6R$$



⑥

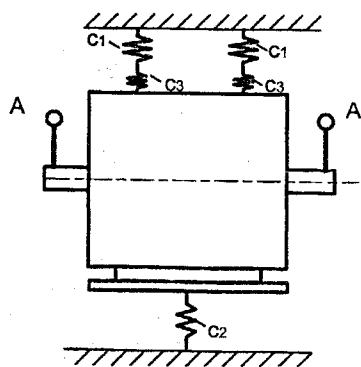
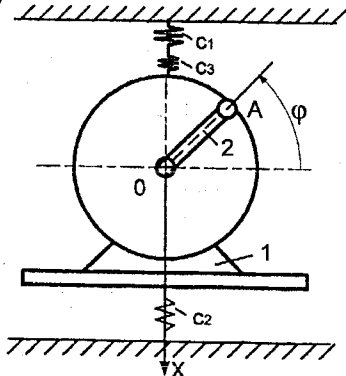


Рисунок 3.2

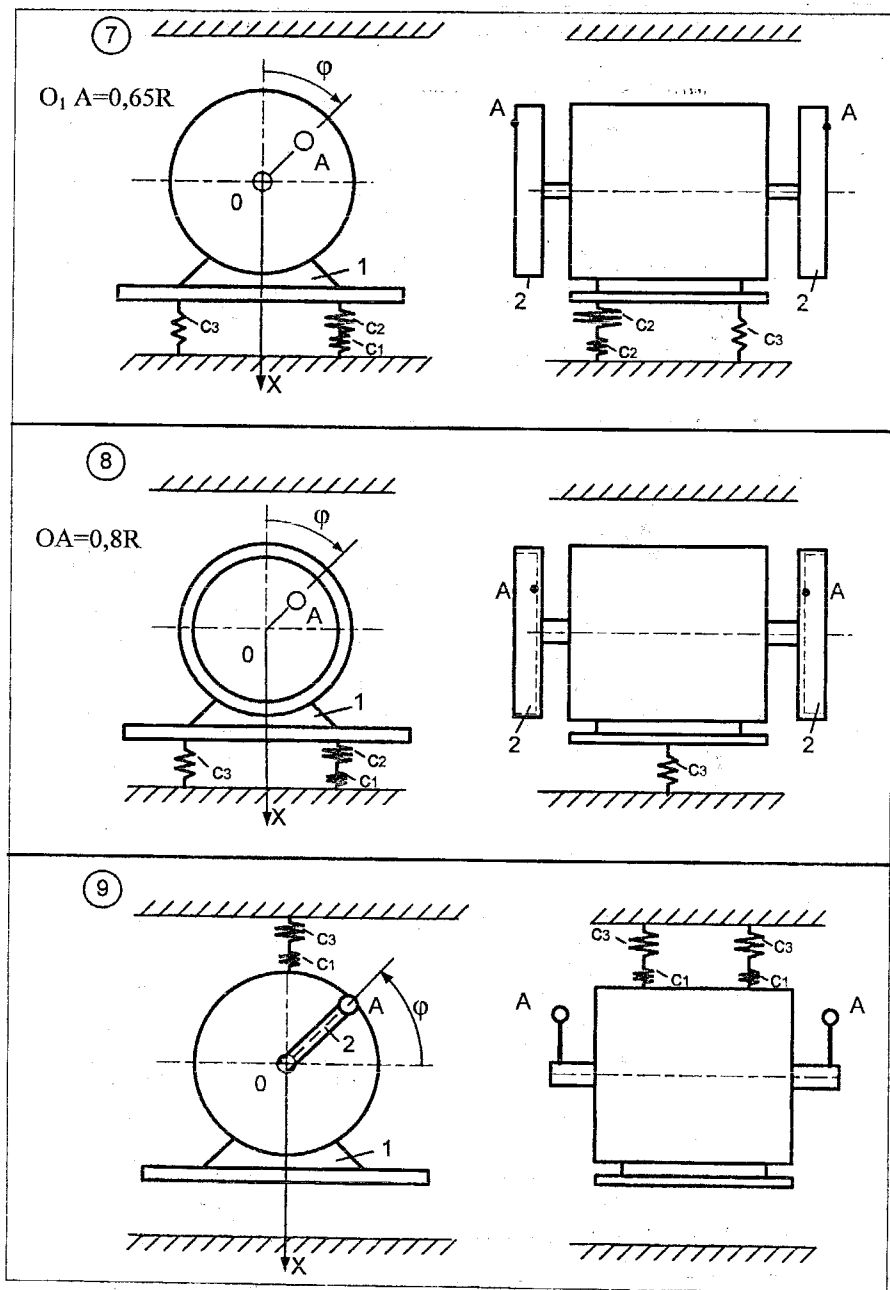
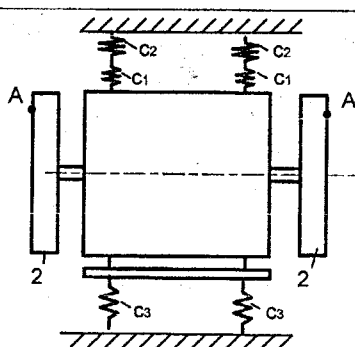
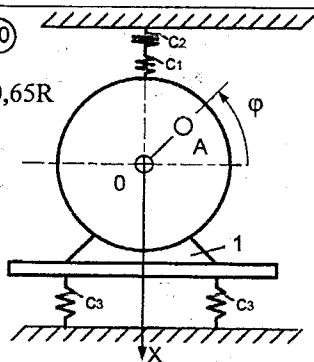


Рисунок 3.3

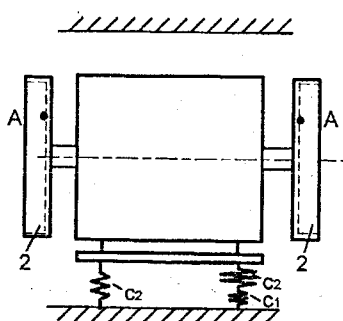
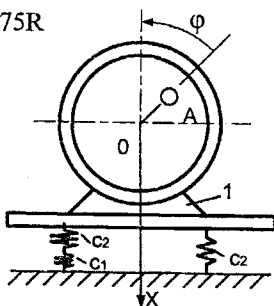
10

$$OA = 0,65R$$



11

$$OA = 0,75R$$



12

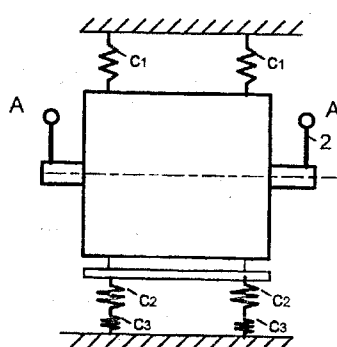
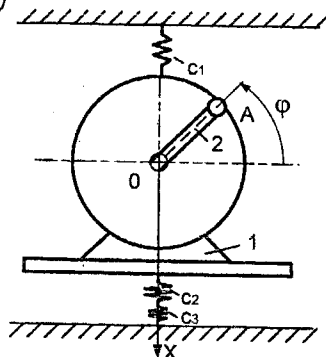


Рисунок 3.4

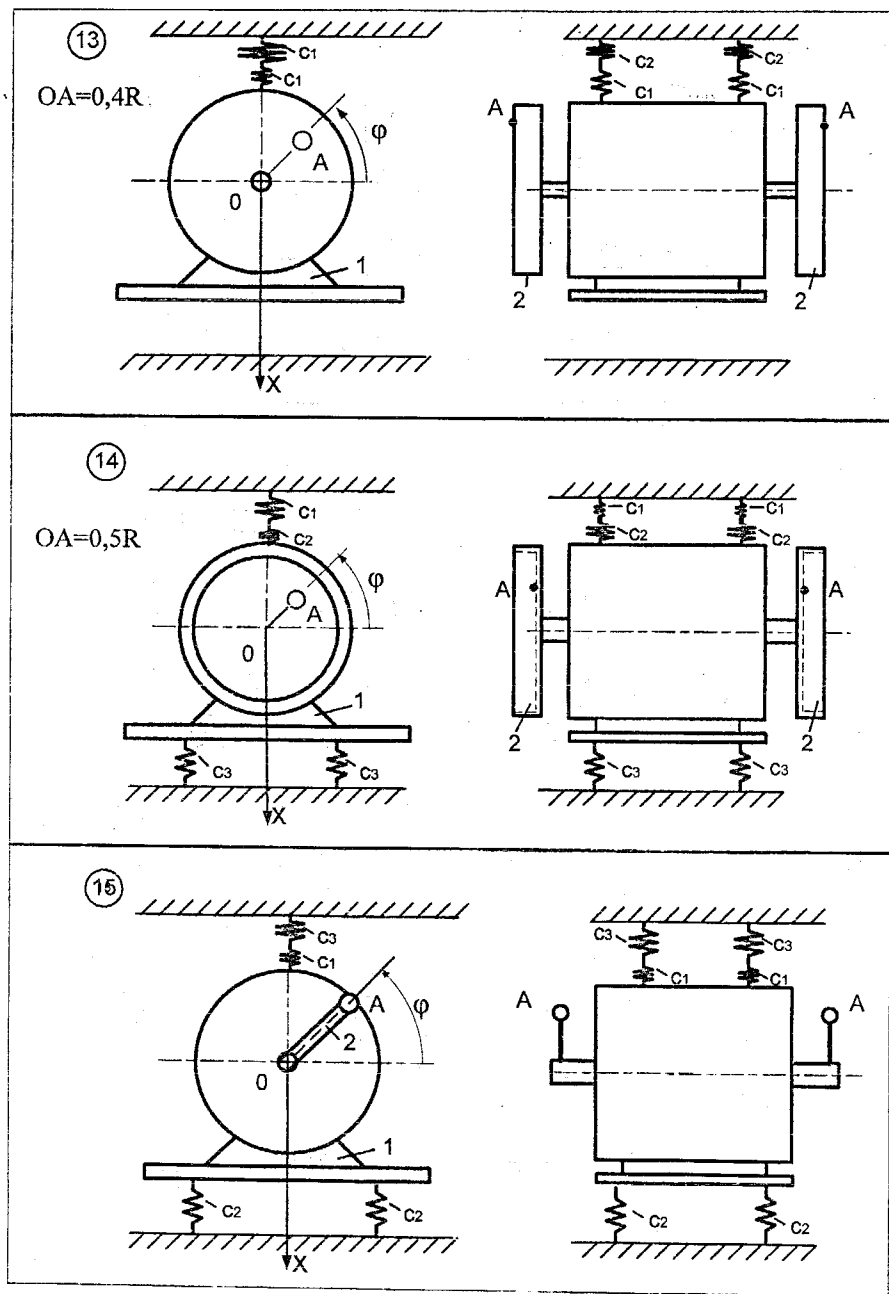
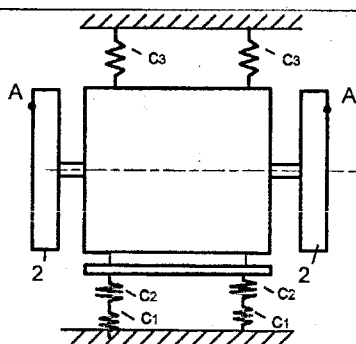
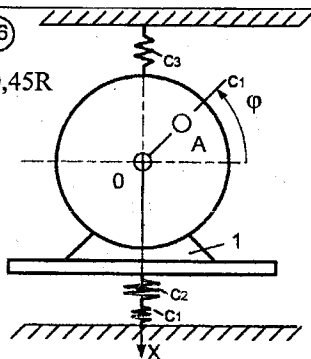


Рисунок 3.5

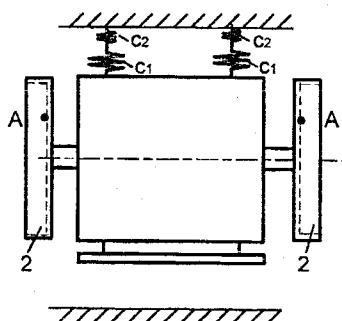
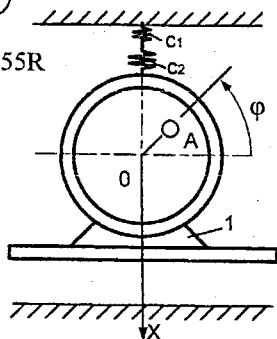
16

$$OA = 0,45R$$



17

$$OA = 0,55R$$



18

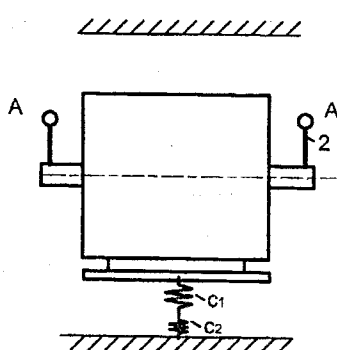
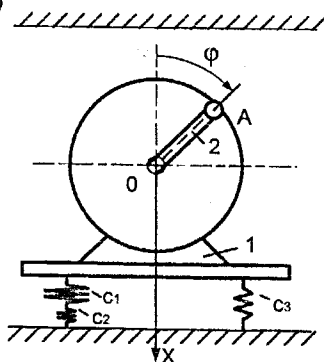
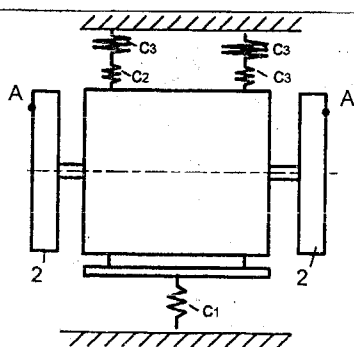
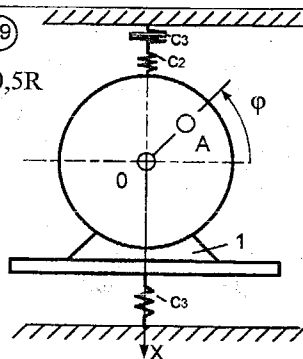


Рисунок 3.6

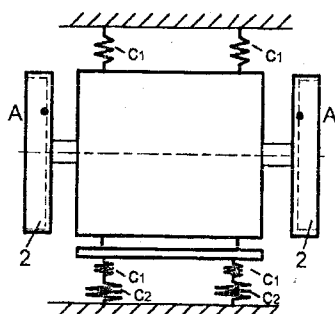
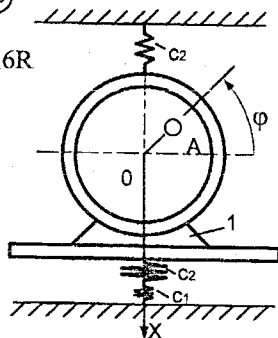
19

$$OA = 0,5R$$



20

$$OA = 0,6R$$



21

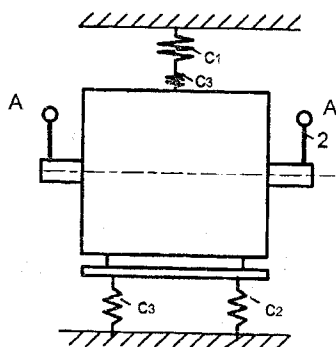
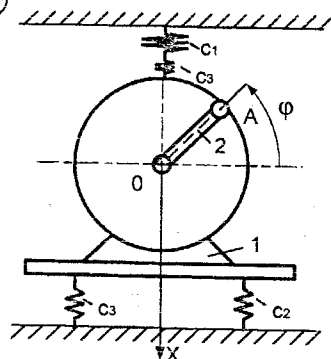
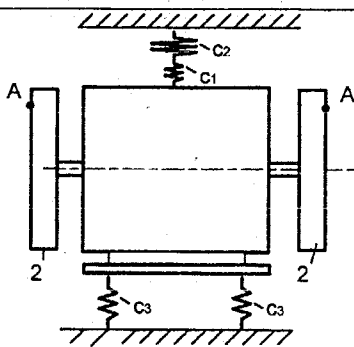
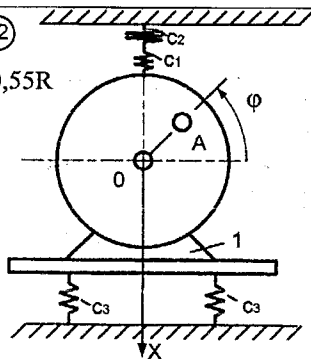


Рисунок 3.7

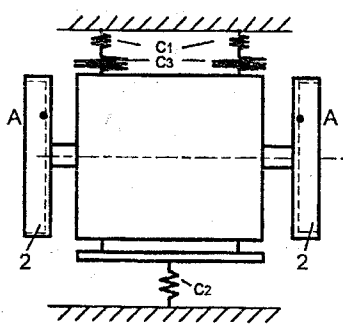
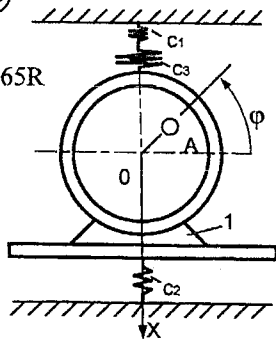
22

$$OA = 0,55R$$



23

$$OA = 0,65R$$



24

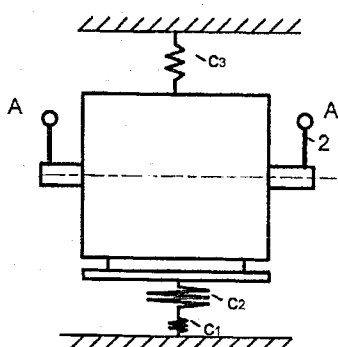
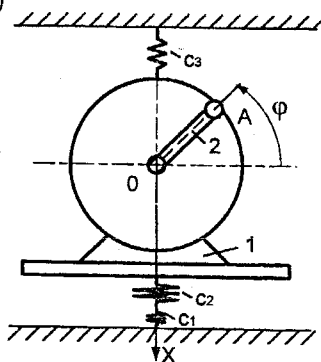


Рисунок 3.8

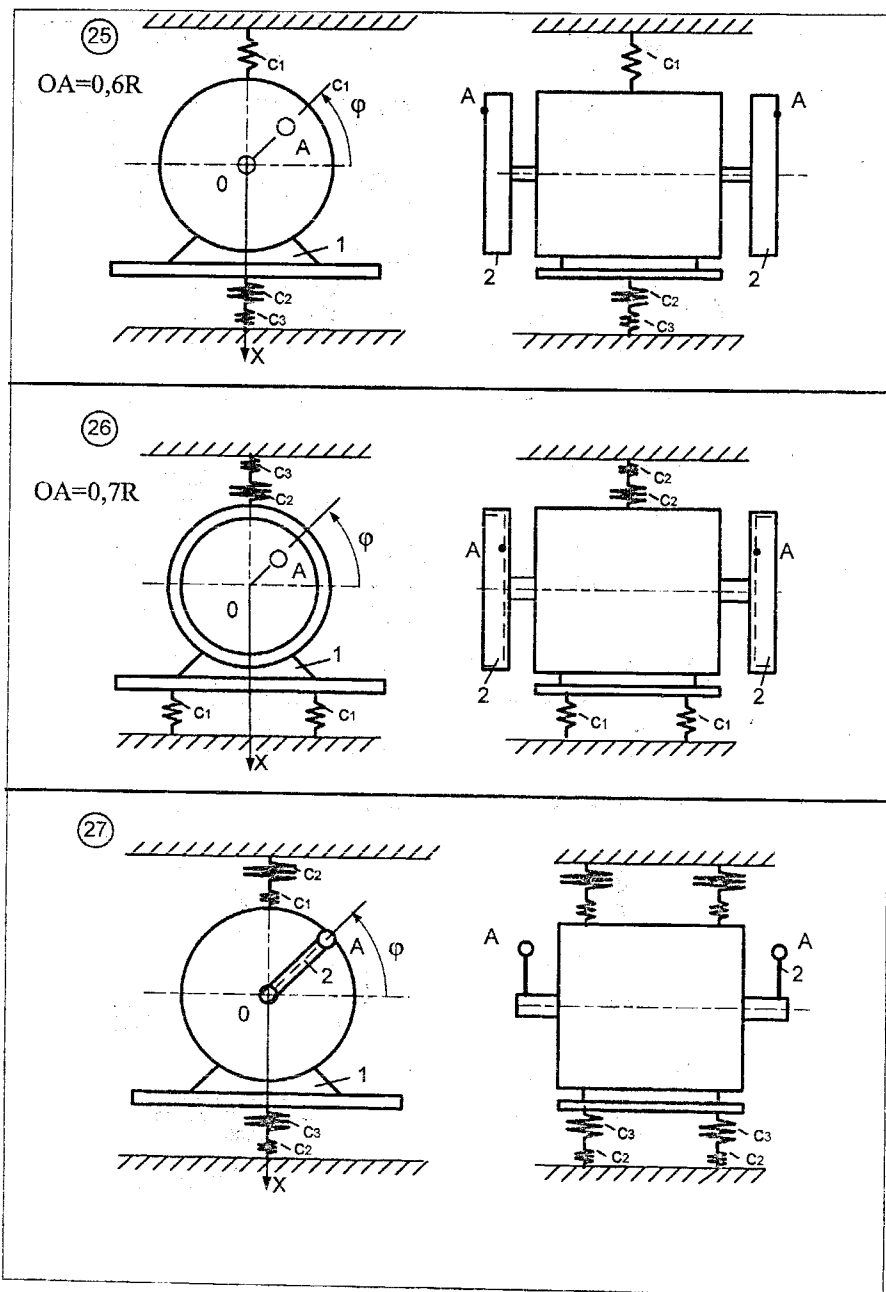
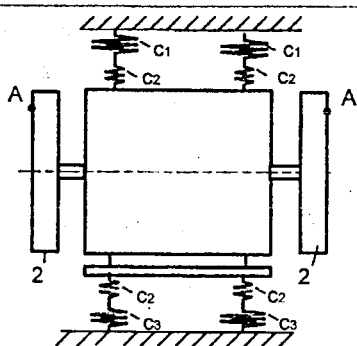
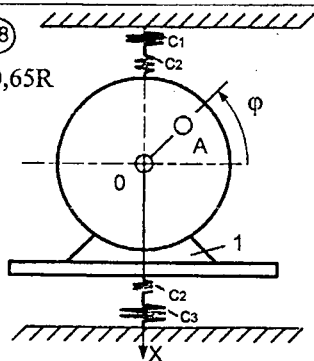


Рисунок 3.9

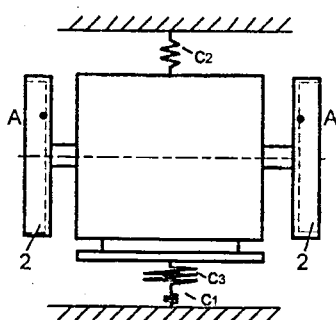
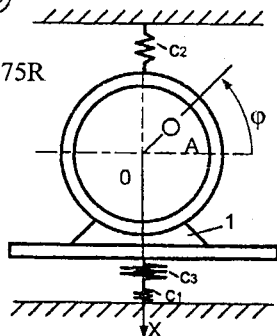
28

$$OA = 0,65R$$



29

$$OA = 0,75R$$



30

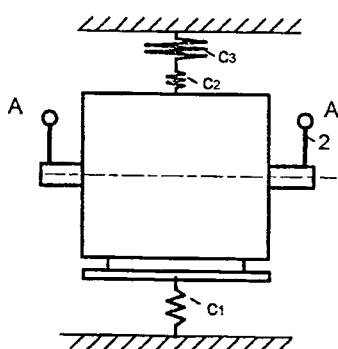
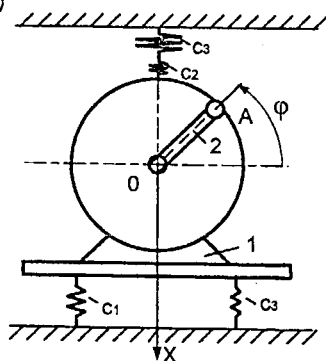


Рисунок 3.10

Приклад виконання завдання

Система тіл (рис. 3.11), до якої входить: електродвигун 1 масою $m_2 = 20$ кг, однорідний стержень 2 масою $m_2 = 2$ кг та довжиною $l = 0,4$ м, матеріальна точка масою $m_A = 0,5$ кг, яка знаходиться в точці А ($OA = 2/3 \cdot l$).

Система пружин жорсткістю $C_1 = 2 \cdot 10^3$ Н/м, $C_2 = 3 \cdot 10^3$ Н/м, та $C_3 = 4 \cdot 10^3$ Н/м знаходиться у положенні статичної рівноваги.

В деякий момент часу точку О зміщують із положення рівноваги вверх на $x_0 = 2$ см і надають швидкість $v_0 = 3$ м/с вертикально вниз. Одночасно ротор електродвигуна починає обертатись із постійною кутовою швидкістю $\omega = 1/2 \cdot \rho$ (ρ – частота збурювальної сили) навколо горизонтальної осі.

Знайти закон та побудувати графік руху (при $t \geq 2 \cdot T$, де T – період) центра мас (точки О) електродвигуна.

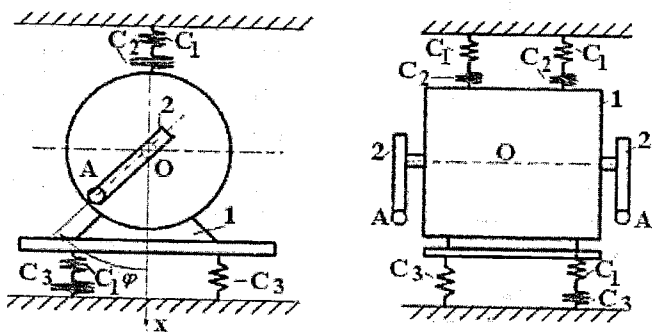


Рисунок 3.11

Розв'язання. Систему пружин замінюємо однією еквівалентною пружиною жорсткістю C .

$$C = 2C_{12} + 2C_3 + 2C_{13} = \left(2 \cdot 1,2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{4}{3} \right) \cdot 10^3 = 13,07 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$\text{де } C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 1,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$C_{13} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

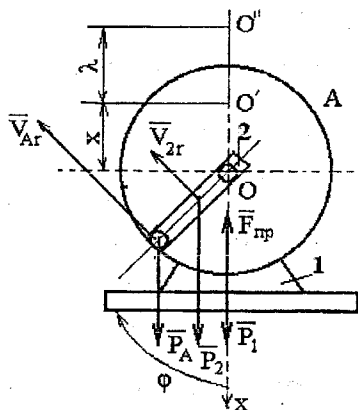


Рисунок 3.12

Розглянемо рух невільної системи тіл (рис. 3.12): електродвигуна 1, двох однорідних стержнів 2, двох матеріальних точок А. Центр мас О електродвигуна зміщений із положення статичної рівноваги О' на величину x (рис. 3.12), а стержні 2 повернулися на кут φ навколо горизонтальної осі О. Дію в'язі (пружину жорсткістю C) замінюємо реакцією в'язі – силою $F_{\text{пр}}$. Оскільки в точці О'' деформація (deformation) пружин дорівнює нулю, то

$$F_{\text{пр}} = C \cdot (x + \lambda), \quad (3.1)$$

де λ – статична деформація пружин, яка знаходиться за формулою:

$$\lambda = (P_1 + 2P_2 + 2P_A)/C,$$

де P_1, P_2, P_A – вага відповідно тіл 1, 2 та матеріальної точки А.

Кутова швидкість обертання ротора

$$\omega = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m_1 + 2m_2 + 2m_A}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13,07 \cdot 10^3}{20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5}} = 11,43 \frac{1}{c},$$

оскільки при явищі резонансу частота збудовувальної сили p дорівнює власній частоті коливань системи $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ (m – маса системи).

Для дослідження руху корпусу електродвигуна (рис. 3.12) використаємо принцип Д'Аламбера

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}^{\text{ін}} = 0, \quad (3.2)$$

в проекції на вісь x :

$$F_x + R_x + F_x^{\text{ін}} = 0, \quad (3.3)$$

де $F_x = P_1 + 2P_1 + 2P_A$ ($P_1 = m_1g, P_2 = m_2g, P_A = m_Ag$) — проекція активних сил на вісь x ;

$R_x = -F_{пр}$ — проекція реакцій в'язей на вісь x ;

$F_x^{ин} = -\frac{dQ_x}{dt}$ — проекція сил інерції на вісь x .

Проекція головного вектора кількості руху системи Q на вісь x

$$Q_x = m_1\dot{x} + 2m_2V_{2x} + 2m_A V_{Ax}, \quad (3.4)$$

де $\dot{x}$ — швидкість центра мас електродвигуна 1,

V_{2x} — проекція швидкості центра мас тіла 2 на вісь x ;

V_{Ax} — проекція швидкості точки A на вісь x .

Використовуючи теорему додавання швидкостей, отримаємо проекцію швидкості точки A і швидкості центра мас тіла 2 на вісь x (рис. 3.12):

$$V_{Ax} = \dot{x} + (\bar{V}_{Ar})_x = \dot{x} - \frac{2}{3}l\omega \sin \omega t, \quad (3.5)$$

$$V_{2x} = \dot{x} + (\bar{V}_{2r})_x = \dot{x} - \frac{1}{6}l\omega \sin \omega t.$$

Тепер формула (3.4), враховуючи (3.5), запишеться :

$$Q_x = \dot{x}(m_1 + 2m_2 + 2m_A) - \left(\frac{1}{3}m_2 + \frac{4}{3}m_A\right)l\omega \sin \omega t. \quad (3.6)$$

Підставляючи значення Q_x (3.6) в формулу (3.3), отримаємо диференціальне рівняння:

$$\dot{x}(m_1 + 2m_2 + 2m_A) + cx = \left(\frac{1}{3}m_2 + \frac{4}{3}m_A\right)l\omega^2 \sin \omega t.$$

Або
$$\dot{x} + k^2x = h_0 \cos \omega t, \quad (3.7)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{m_1 + 2m_2 + 2m_A} = \frac{13,07 \cdot 10^3}{20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5} = 522,8 \frac{1}{c^2},$$

$$h_0 = \frac{(m_2 + 4m_A)l\omega^2}{3 \cdot (m_1 + 2m_2 + 2m_A)} = \frac{(2 + 4 \cdot 0,5) \cdot 0,4 \cdot 11,43^2}{3 \cdot (20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5)} = 2,79 \frac{m}{c^2}.$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.7) складатиметься із загального розв'язку однорідного диференціального рівняння $\dot{x}_1 + k^2x_1 = 0$, а саме :

$$x_1 = B_1 \cos kt + B_2 \sin kt, \quad (3.8)$$

та частинного розв'язку x_2 неоднорідного диференціального рівняння (3.7), яке будемо шукати у вигляді:

$$x_2 = B_3 \cos \omega t \quad (3.9)$$

Із (3.7) враховуючи (3.9), знаходимо B_3

$$-\omega^2 B_3 \cos \omega t + k^2 B_3 \cos \omega t = h_0 \cos \omega t$$

$$B_3 = \frac{h_0}{k^2 - \omega^2} = \frac{2,79}{522,8 - 130,6} = 0,007.$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.7)

$$x = x_1 + x_2 = B_1 \cos(22,86t) + B_2 \sin(22,86t) + 0,007 \cos(11,43t). \quad (3.10)$$

Постійні інтегрування B_1 та B_2 визначимо із початкових умов:

$$\text{при } t=0; \quad x_0 = -0,02\text{м}, \quad \dot{x}_0 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3.11)$$

Швидкість V точки O (рис.3.12):

$$V = \dot{x} = -22,86B_1 \sin(22,86t) + 22,86B_2 \cos(22,86t) - 0,08 \sin(11,43t) \quad (3.12)$$

Із рівнянь (3.10), (3.12) та початкових умов (3.11) знаходимо постійні інтегрування B_1 та B_2 .

$$-0,02 = B_1 + 0,007,$$

$$3 = 22,86 \cdot B_2,$$

$$B_2 = 0,13\text{м}; B_1 = -0,027\text{м}.$$

Тепер рівняння (3.10) руху точки O електродвигуна запишеться:

$$x = -0,027 \cos(22,86t) + 0,13 \sin(22,86t) + 0,007 \cos(11,43t). \dots\dots\dots (3.13)$$

Графік руху O корпусу електродвигуна, який отриманий на підставі формули (3.13), наведений на рис.3.13.

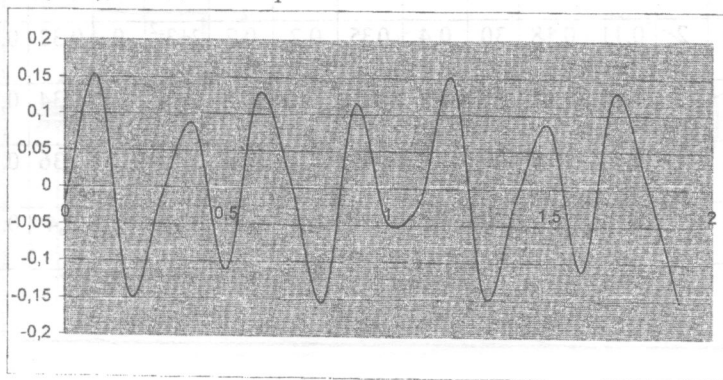


Рисунок 3.13

Відповідь: $x = -0,027 \cos(22,86t) + 0,13 \sin(22,86t) + 0,007 \cos(11,43t).$

4 ДОДАТКОВІ ДИНАМІЧНІ РЕАКЦІЇ В'ЯЗЕЙ ТВЕРДОГО ТІЛА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

Однорідні тіла 1 та 2 (рис. 4.1 – 4.10) обертаються навколо нерухомої осі z під дією моменту M . Центри мас тіл зміщені від осі обертання (статична нерівноваженість тіл) на величини e_1 та e_2 , відповідно. Знайти додаткові динамічні реакції циліндричних шарнірів A і B при $t = t_1$, і порівняти їх зі статичними, якщо при $t = 0$ кутова швидкість тіл ω_0 .

Дані для розрахунку наведені в табл. 4.1. Якщо ω_0 (табл. 4.1) має від'ємний знак, то початкова кутова швидкість направлена в протилежну сторону моменту M .

Таблиця 4.1

Варіант	m_1 , кг	m_2 , кг	e_1 , мм	e_2 , мм	α , град	l_1 , м	l_2 , м	a , м	b , м	M , Н·м	ω_0 , с ⁻¹	R_1 , м	R_2 , м	t_1 , с
1	2	3	0,1	0,2	30	0,2	0,3	0,1	0,15	$6+4t^2$	10	0,2	0,35	2
2	3	4	0,15	0,19	45	0,3	0,4	0,15	0,14	$4+3t$	-5	0,22	0,33	3
3	4	5	0,18	0,1	60	0,4	0,5	0,13	0,13	$8+3t^2$	0	0,24	0,31	4
4	1	2	0,19	0,11	30	0,1	0,2	0,12	0,12	$8t$	15	0,26	0,29	1
5	2	3	0,2	0,12	45	0,2	0,3	0,11	0,11	$7+3t^3$	-10	0,28	0,26	2
6	3	4	0,1	0,13	60	0,3	0,4	0,1	0,1	$3+t^2$	5	0,3	0,25	2
7	4	2	0,11	0,18	30	0,4	0,35	0,2	0,2	$2+3t^2$	0	0,32	0,23	3
8	5	2	0,12	0,17	45	0,5	0,2	0,19	0,19	$1+6t^3$	-15	0,34	0,21	4
9	1	3	0,13	0,16	60	0,1	0,3	0,18	0,18	$5+3t^2$	10	0,36	0,19	2
0	2	4	0,14	0,15	30	0,2	0,4	0,17	0,17	$3+5t$	-5	0,4	0,15	3

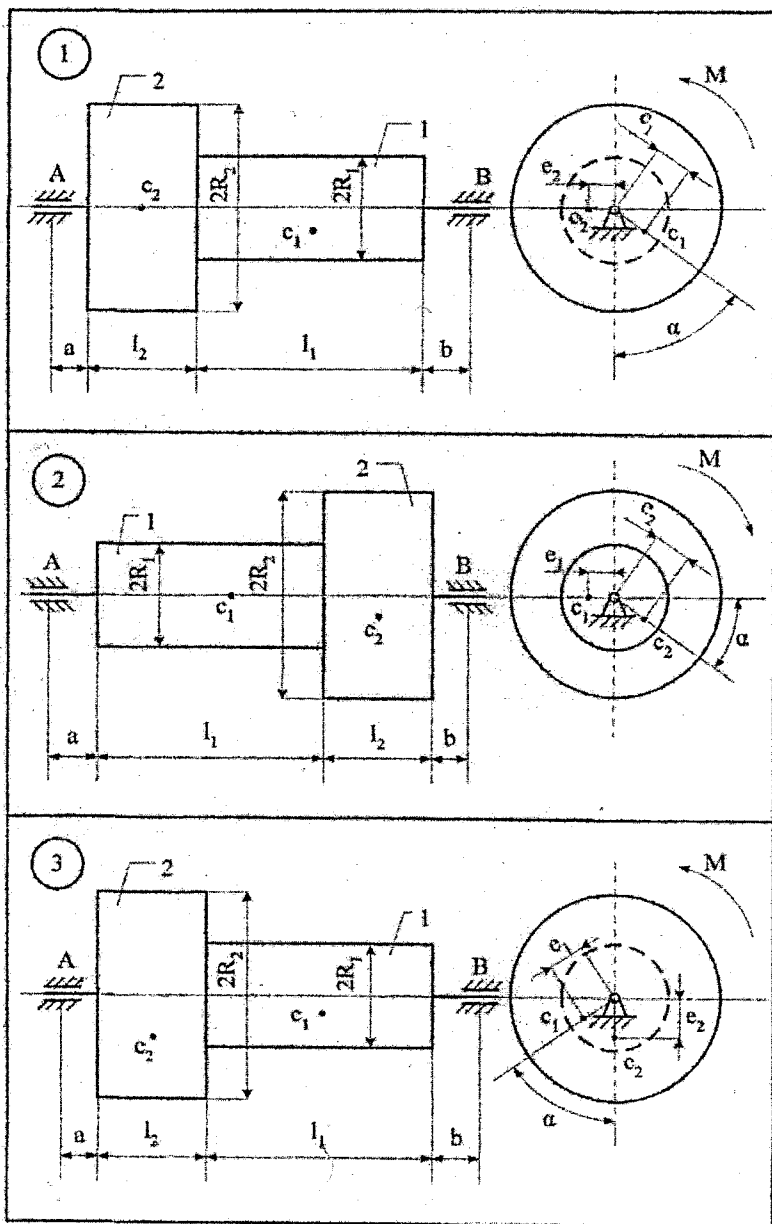


Рисунок 4.1

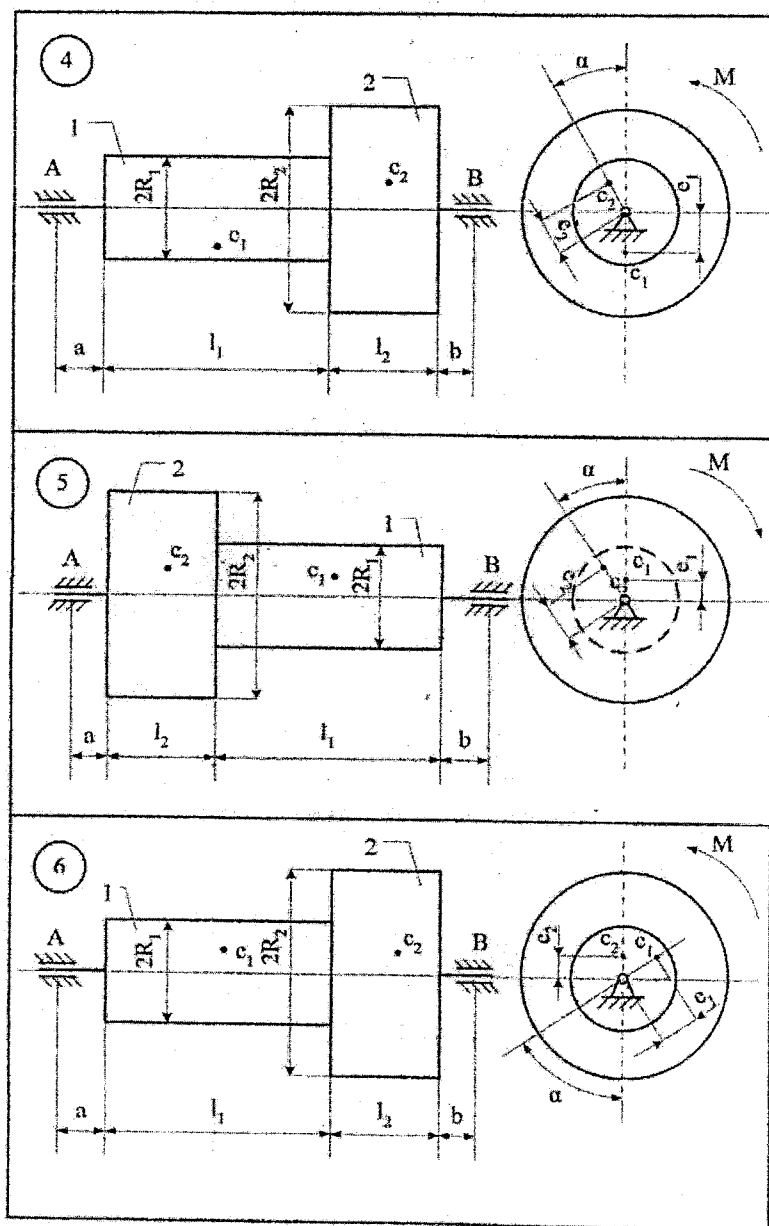


Рисунок 4.2

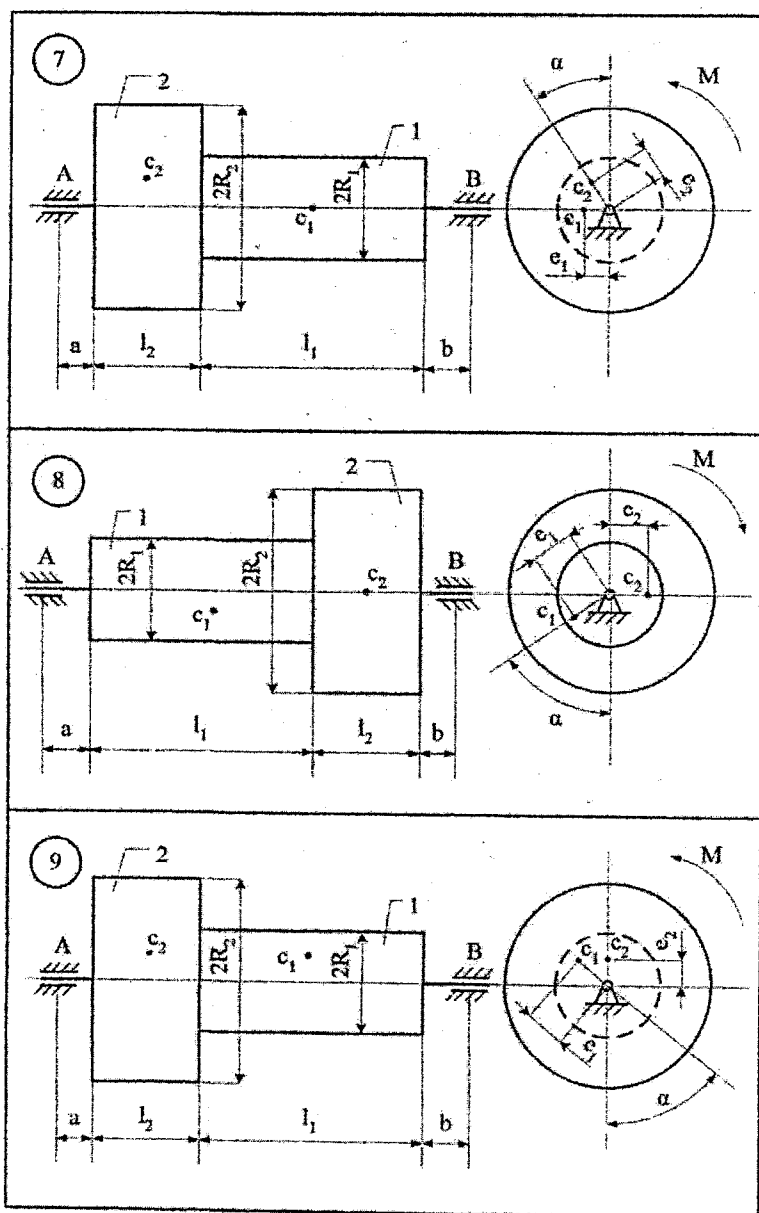


Рисунок 4.3

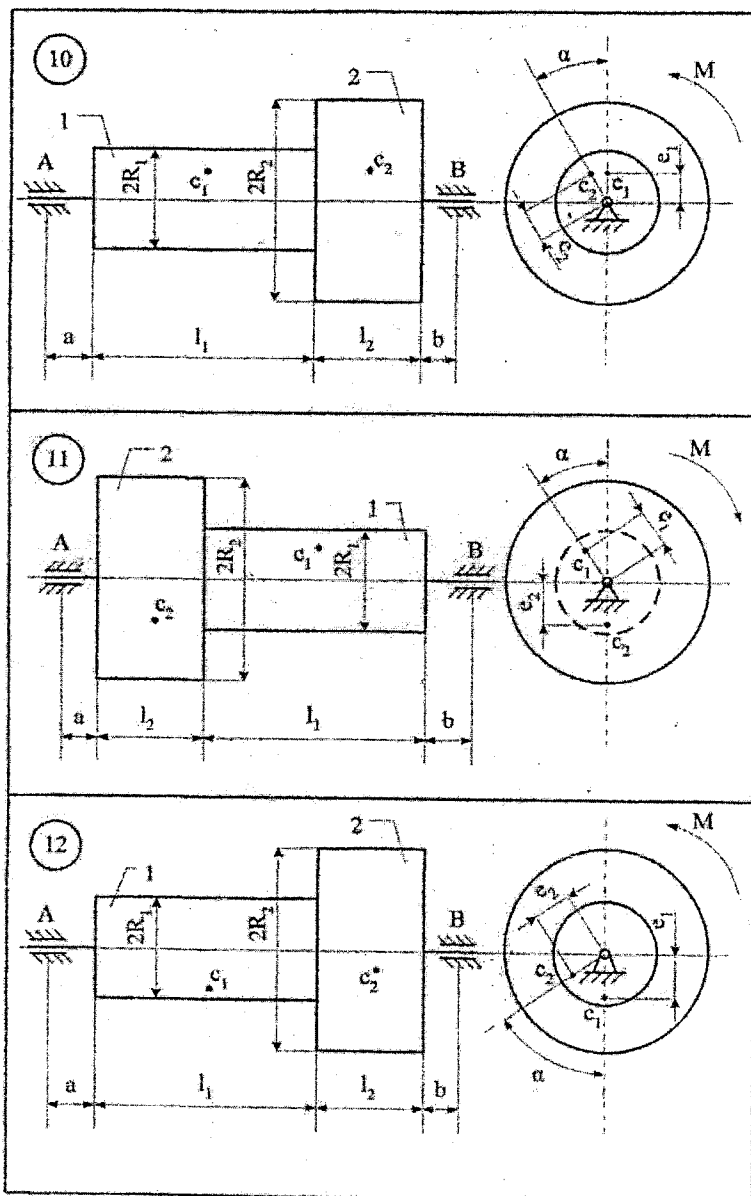


Рисунок 4.4

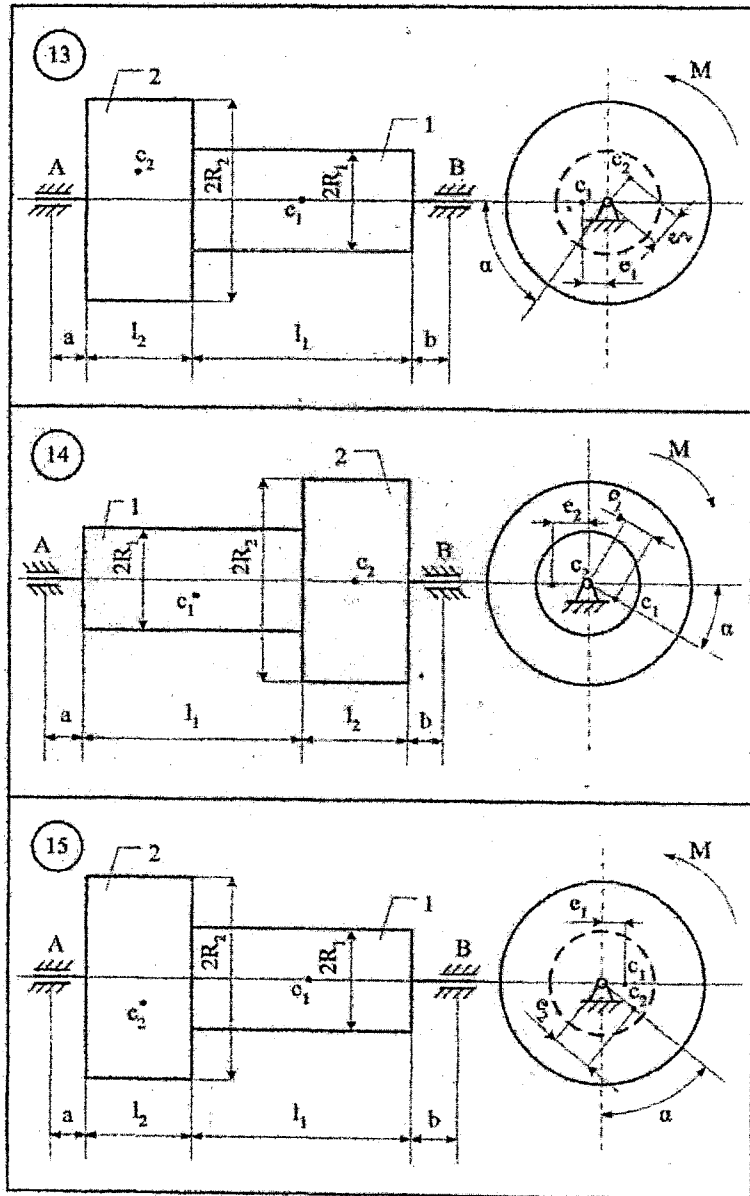


Рисунок 4.5

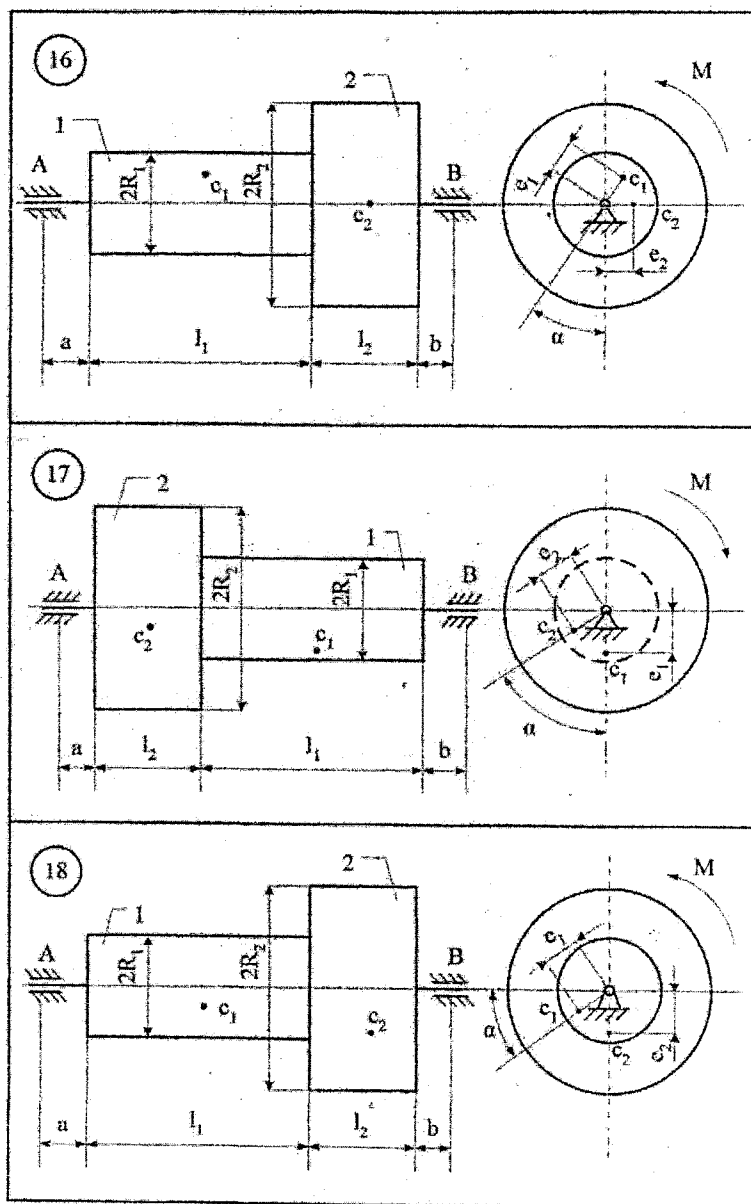


Рисунок 4.6

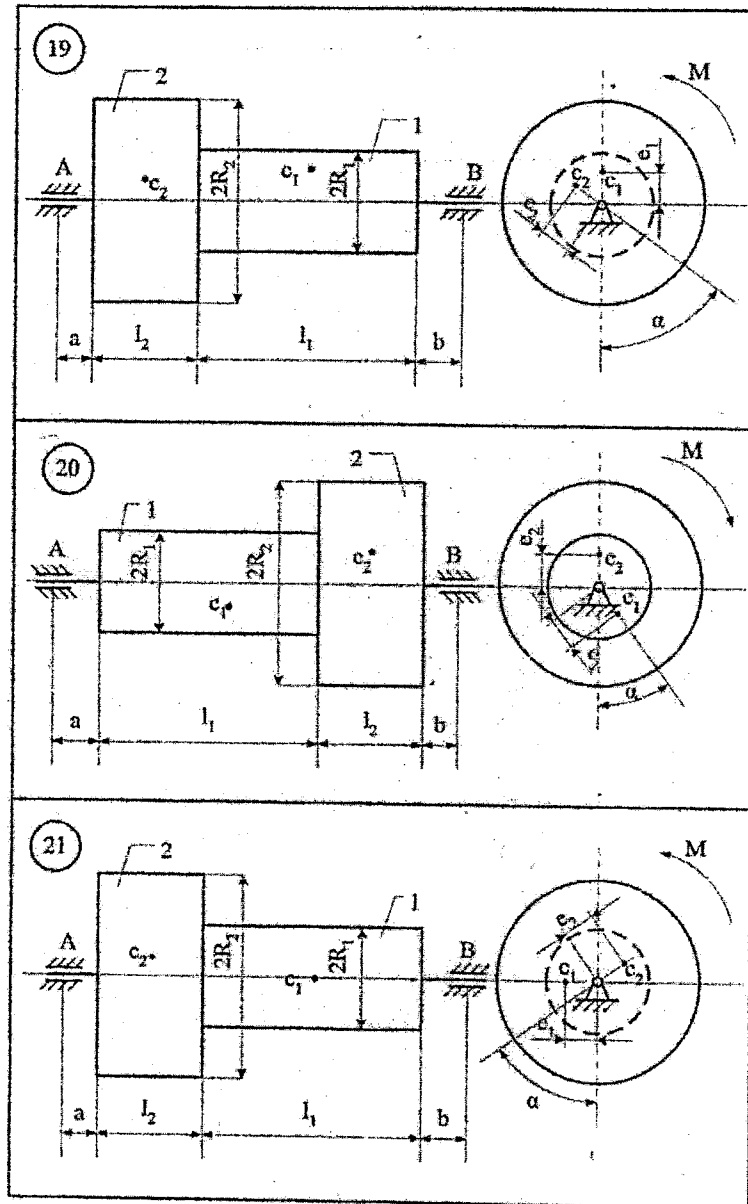


Рисунок 4.7

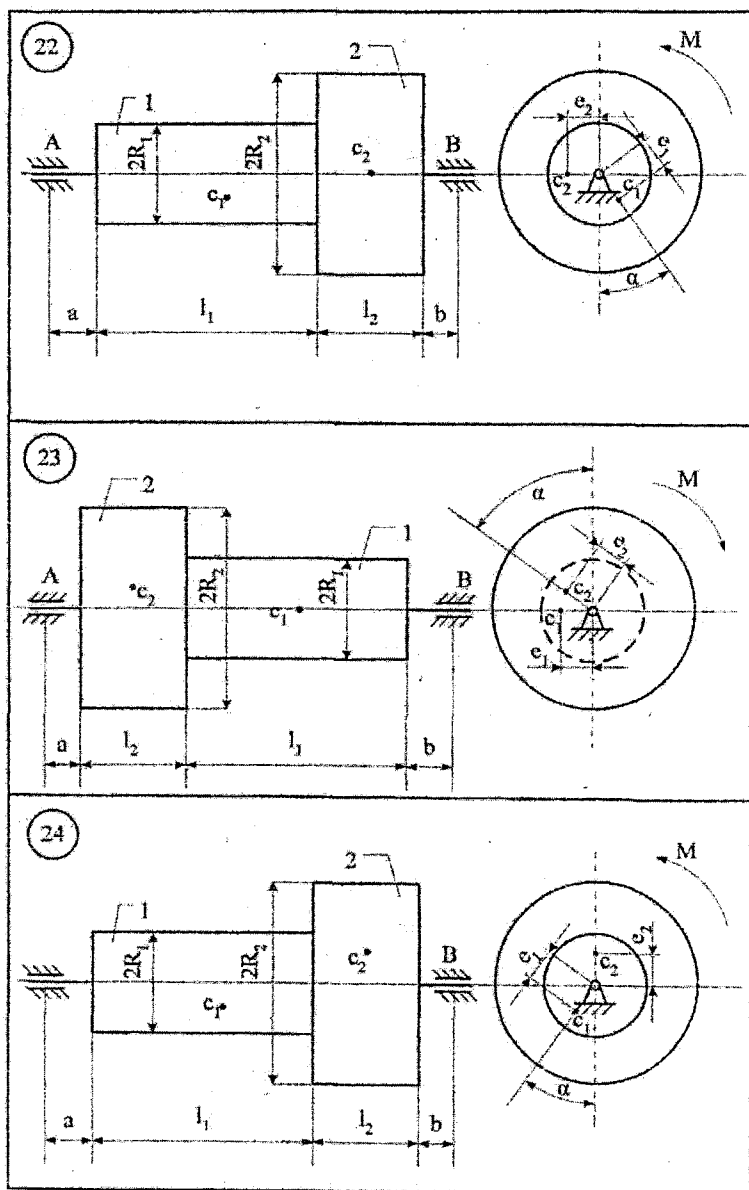


Рисунок 4.8

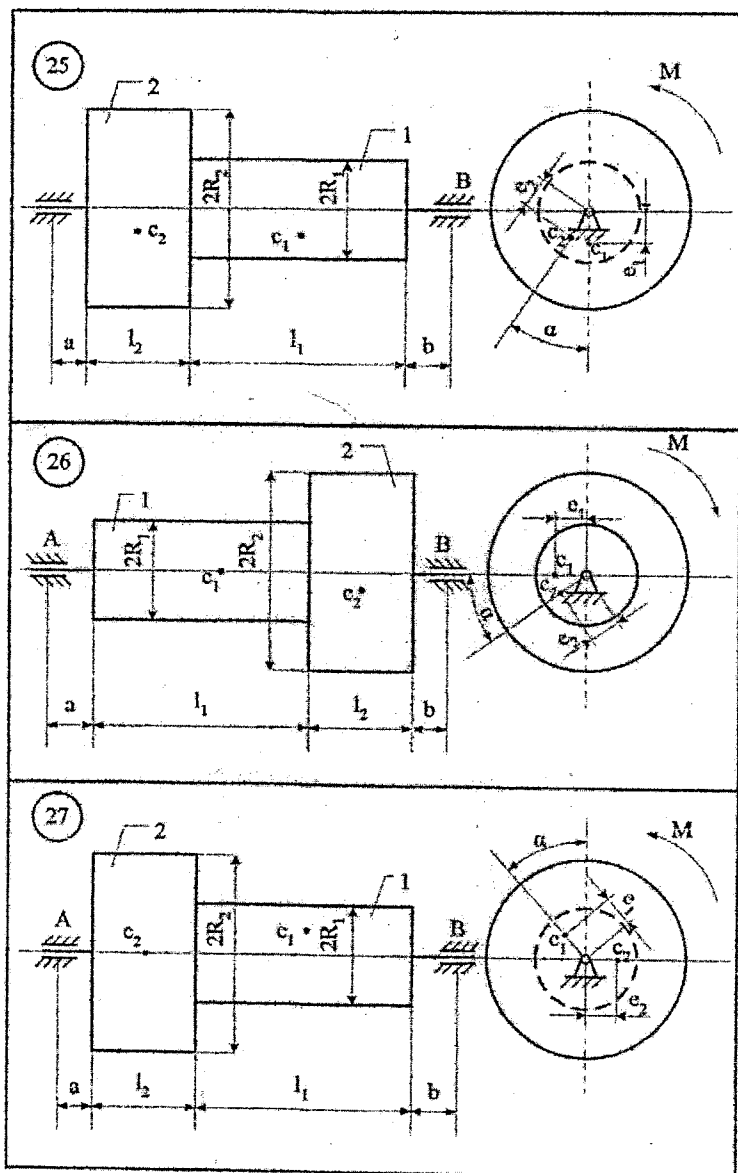


Рисунок 4.9

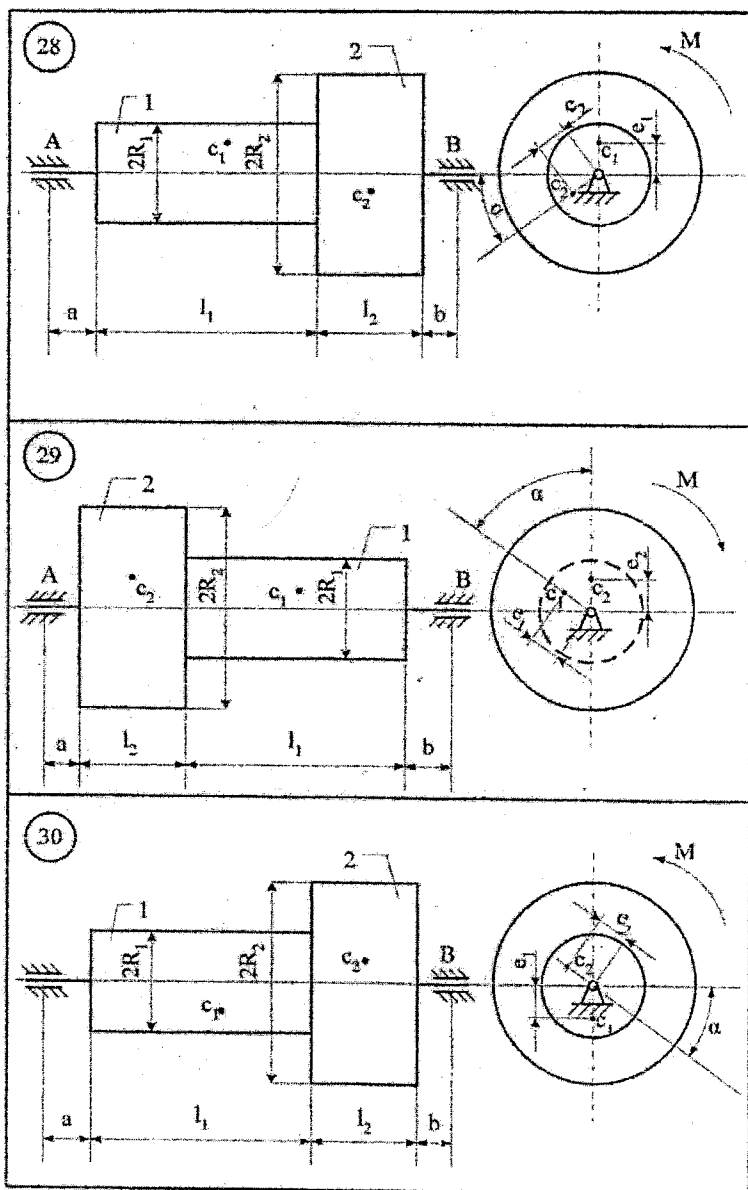


Рисунок 4.10

Приклад виконання завдання

До системи однорідних тіл 1 та 2 (рис. 4.11), що обертаються з кутовою швидкістю $\omega_0 = 6\text{ с}^{-1}$, прикладається обертальний момент $M = (3 + 7t)\text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти статичні та додаткові динамічні реакції циліндричних шарнірів А і В при $t_1 = 2\text{ с}$, якщо: $m_1 = 3\text{ кг}$; $m_2 = 5\text{ кг}$; $e_1 = 0,1\text{ мм}$; $e_2 = 0,3\text{ мм}$; $l_1 = 0,25\text{ м}$; $l_2 = 0,25\text{ м}$; $a = 0,05\text{ м}$; $b = 0,15\text{ м}$; $R_1 = 0,1\text{ м}$; $R_2 = 0,2\text{ м}$.

Розв'язання. Переміщенню тіл 1 та 2 (рис. 4.11) перешкоджають в'язі: нерухомі (циліндричні) шарніри А і В. На підставі аксіоми звільнення від в'язей, дію шарнірів А і В на тіла замінюємо реакціями в'язей – Y_A , X_A , Y_B , X_B (рис. 4.12).

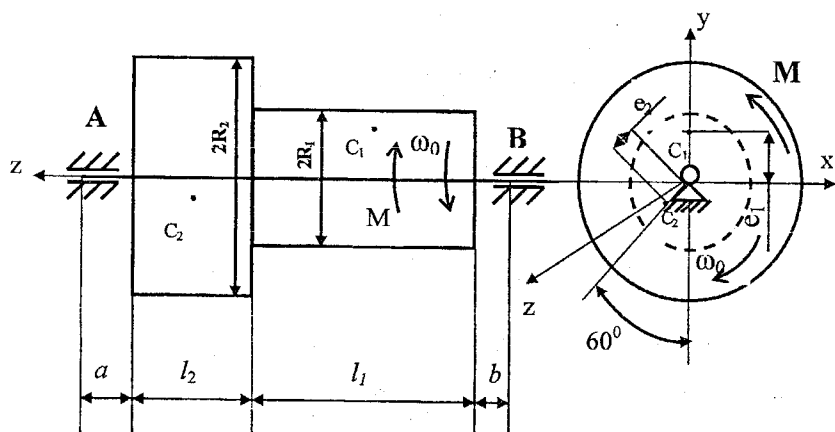


Рисунок 4.11

Реакції Y_A , X_A , Y_B , X_B запишемо як суму статичних Y_A^c , X_A^c , Y_B^c , X_B^c та додаткових динамічних реакцій Y_A^Δ , X_A^Δ , Y_B^Δ , X_B^Δ .

$$Y_A = Y_A^c + Y_A^\Delta, \quad X_A = X_A^c + X_A^\Delta,$$

$$Y_B = Y_B^c + Y_B^\Delta, \quad X_B = X_B^c + X_B^\Delta. \quad (4.1)$$

Статичні реакції в'язей визначаються при $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ за такими рівняннями (рис. 4.12):

$$\sum F_y = 0; \quad Y_A^c - P_1 - P_2 + Y_B^c = 0,$$

$$\sum F_x = 0; \quad X_A^c + X_B^c = 0,$$

$$\sum m_x \bar{F} = 0; \quad -P_2 \left(a + \frac{l_2}{2} \right) - P_1 \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2} \right) + Y_B^c (a + b + l_1 + l_2) = 0, \quad (4.2)$$

$$\sum m_y \bar{F} = 0; \quad -X_B^c (a + b + l_1 + l_2) = 0,$$

де $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$.

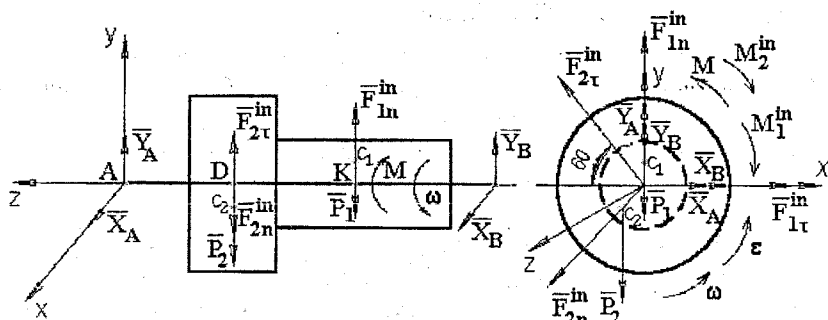


Рисунок 4.12

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо:

$$X_B^c = 0; \quad X_A^c = 0,$$

$$Y_B^c = g \frac{m_2(a + 0,5l_2) + m_1(a + l_2 + 0,5l_1)}{a + b + l_1 + l_2} =$$

$$= 9,81 \frac{5(0,05 + 0,05) + 3(0,05 + 0,1 + 0,125)}{0,05 + 0,15 + 0,25 + 0,1} = 23,63 \text{ Н.}$$

$$Y_A^c = g(m_1 + m_2) - Y_B^c = 9,81(3 + 5) - 23,63 = 54,85 \text{ Н,}$$

таким чином маємо: $R_A^c = 54,85 \text{ Н}$, $R_B^c = 23,63 \text{ Н}$.

Для визначення реакцій циліндричних шарнірів А і В (рис.4.12), використаємо принцип Д'Аламбера:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{F}^{in} = 0,$$

$$\bar{M}_A^F + \bar{M}_A^R + M_A^{in} = 0.$$

В проекціях на осі X, Y, Z

$$\begin{aligned} F_{1\tau}^{in} - F_{2\tau}^{in} \cos 60^\circ - F_{2n}^{in} \sin 60^\circ + X_A + X_B &= 0, \\ -P_1 - P_2 + F_{1n}^{in} + F_{2\tau}^{in} \sin 60^\circ - F_{2n}^{in} \cos 60^\circ + Y_A + Y_B &= 0, \\ F_{2\tau}^{in} \cdot AD \sin 60^\circ - P_2 \cdot AD - F_{2n}^{in} \cdot AD \cos 60^\circ + F_{1n}^{in} \cdot AK - P_1 \cdot AK + Y_B \cdot AB &= 0, \\ -F_{1\tau}^{in} \cdot AK + F_{2\tau}^{in} \cdot AD \cos 60^\circ + F_{2n}^{in} \sin 60^\circ \cdot AD - X_B \cdot AB &= 0, \\ M - M_1^{in} - M_2^{in} &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де M_1^{in}, M_2^{in} – моменти інерції тіл відносно осі Z;

$M = (3+7t)$ – діючий момент;

$F_{1n}^{in}, F_{1\tau}^{in}, F_{2n}^{in}, F_{1\tau}^{in}$ – сили інерції, зведені до центрів D і K;

$$F_{1n}^{in} = m_1 e_1 \omega^2, F_{1\tau}^{in} = m_1 e_1 \varepsilon, F_{2n}^{in} = m_2 e_2 \omega^2, F_{2\tau}^{in} = m_2 e_2 \varepsilon,$$

де ε – кутове прискорення;

ω – кутова швидкість тіл.

Із останнього рівняння системи (4.3) знайдемо кутову швидкість ω та кутове прискорення ε тіл.

$$M - I_{z1}\varepsilon - I_{z2}\varepsilon = 0,$$

де I_{z1}, I_{z2} – осьовий моменти інерції тіл відносно осі Z;

$$I_{z1} \cong \frac{1}{2} m_1 R_1^2, I_{z2} \cong \frac{1}{2} m_2 R_2^2.$$

Оскільки $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, тоді

$$(I_{z1} + I_{z2}) \frac{d\omega}{dt} = 3 + 7t. \quad (4.4)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (4.4) при початкових умовах: при $t_1=0$, $\omega_0 = -3 \text{ c}^{-1}$,

$$I_z(\omega + 3) = t(3 + 3.5t),$$

$$\text{Звідки:} \quad \omega = -3 + \frac{t}{I_z}(3 + 3.5t). \quad (4.5)$$

Визначимо кутове прискорення $\varepsilon = \ddot{\phi}$ (4.3) та кутову швидкість (4.5) при $t_1 = 2 \text{ c}$.

$$\varepsilon_1 = \frac{3 + 7t}{I_z} = \frac{3 + 7 \cdot 2}{0,115} = 147,8 \text{ c}^{-2},$$

$$\omega_1 = -3 + \frac{2}{0,115} \cdot (3 + 3,5 \cdot 2) = 170,9 \text{ c}^{-1}$$

$$\text{де } I_z \cong \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \cong 0,115 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Додаткові динамічні реакції опор A і B знайдемо із перших чотирьох рівнянь системи (4.3), враховуючи (4.1) та (4.2):

$$F_{1\tau}^{in} - F_{2\tau}^{in} \cos 60^\circ - F_{2n}^{in} \sin 60^\circ + X_A^\Delta + X_B^\Delta = 0,$$

$$F_{1n}^{in} + F_{2\tau}^{in} \sin 60^\circ - F_{2n}^{in} \cos 60^\circ + Y_A^\Delta + Y_B^\Delta = 0,$$

$$F_{2\tau}^{in} \cdot AD \sin 60^\circ - F_{2n}^{in} \cdot AD \cos 60^\circ + F_{1n}^{in} \cdot AK + Y_B^\Delta \cdot AB = 0,$$

$$-F_{1\tau}^{in} \cdot AK + F_{2\tau}^{in} \cdot AD \cos 60^\circ + F_{2n}^{in} \sin 60^\circ \cdot AD - X_B^\Delta \cdot AB = 0.$$

$$\text{де } AD = a + \frac{l_2}{2}, AK = a + l_2 + \frac{l_1}{2}, AB = a + l_2 + l_1 + b.$$

Або:

$$\begin{aligned} \varepsilon(m_1 e_1 - m_2 e_2 \cos 60^\circ) - m_2 e_2 \omega^2 \sin 60^\circ + X_A^\Delta + X_B^\Delta &= 0, \\ \omega^2(m_1 e_1 - m_2 e_2 \cos 60^\circ) + m_2 e_2 \varepsilon \sin 60^\circ + Y_A^\Delta + Y_B^\Delta &= 0, \\ m_2 e_2 (\varepsilon \sin 60^\circ - \omega^2) \cdot \left(a + \frac{l_2}{2}\right) + m_1 e_1 \omega^2 \cdot \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2}\right) - Y_B^\Delta \cdot (a + l_2 + l_1 + b) &= 0, \\ -m_1 \cdot e_1 \cdot \varepsilon \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2}\right) + \varepsilon \cdot m_2 \cdot e_2 (\varepsilon \cos 60^\circ + \omega^2 \sin 60^\circ) \cdot \left(a + \frac{l_2}{2}\right) - \\ - X_B^\Delta \cdot (a + l_2 + l_1 + b) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Із рівнянь (4.6) знаходимо складові додаткових динамічних реакцій циліндричних шарнірів: $X_A^\Delta, X_B^\Delta, Y_A^\Delta, Y_B^\Delta$, при $t_1 = 2c$ ($\varepsilon = \varepsilon_1, \omega = \omega_1$).

$$Y_B^\Delta = - \frac{m_2 \cdot e_2 (\varepsilon_1 \sin 60^\circ - \omega_1^2 \cos 60^\circ) \cdot \left(a + \frac{l_2}{2}\right) + m_1 \cdot e_1 \cdot \omega_1^2 \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2}\right)}{a + l_2 + l_1 + b} = 3,95 \text{ Н.}$$

$$X_B^\Delta = \frac{m_2 \cdot e_2 (\varepsilon_1 \cos 60^\circ + \omega_1^2 \sin 60^\circ) \cdot \left(a + \frac{l_2}{2}\right) - m_1 \cdot e_1 \cdot \varepsilon_1 \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2}\right)}{a + l_1 + l_2 + b} = 6,90 \text{ Н.}$$

$$Y_A^\Delta = -Y_B^\Delta - m_2 \cdot e_2 \cdot \varepsilon_1 \sin 60^\circ - \omega_1^2 (m_1 \cdot e_1 - m_2 \cdot e_2 \cos 60^\circ) = 7,73 \text{ Н.}$$

$$X_A^\Delta = -X_B^\Delta - \varepsilon_1 (m_1 \cdot e_1 - m_2 \cdot e_2) \cos 60^\circ + m_2 \cdot e_2 \cdot \omega_1^2 \sin 60^\circ = 31,0 \text{ Н.}$$

Додаткові динамічні реакції циліндричних шарнірів А і В

$$R_A^\Delta = \sqrt{(X_A^\Delta)^2 + (Y_A^\Delta)^2} = \sqrt{31,0^2 + 7,73^2} = 31,94 \text{ Н.}$$

$$R_B^\Delta = \sqrt{(X_B^\Delta)^2 + (Y_B^\Delta)^2} = \sqrt{6,9^2 + 3,95^2} = 7,95 \text{ Н.}$$

При $t_1 = 2c$ додаткові динамічні реакції шарнірів складають 58% для шарніра А та 33,6% для шарніра В від статичних реакцій в'язей.

Відповідь: $R_A^\Delta = 31,94 \text{ Н; } R_B^\Delta = 7,95 \text{ Н.}$

5 ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЕРТАЛЬНОГО ТА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХІВ ТІЛ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

Матеріальна система (рис 2.1 – 2.5) приводиться до руху моментом M . Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів і зусилля між тілами в момент часу $t = t_1$.

Масами пасів та їх ковзанням по шківках знехтувати.

Натяг у ведучій частині нескінченного паса (варіанти 2, 5, 6, 11, 14, 17, 23, 24, 28) вдвічі більший від пятагу у веденій частині. Однорідний диск 1 та ступінчатий шків 2 обертаються навколо горизонтальних осей.

В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання f .

Дані для розрахунків взяти з таблиці 5.1, де прийняті такі позначення: m_1, m_2, m_3 – маси тіл 2 та 3; i_2 – радіус інерції тіла 2 відносно горизонтальної осі, що проходить через центр мас тіла; R_1, R_2, r_2 – розміри тіл 1 та 2.

Таблиця 5.1

10 Варі ант	R_1 , м	R_2 , м	r_2 , м	i_2 , м	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	M , н м	t_1 , с	f
1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	2	1	$1+3t$	2	0,2
2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,3	3	2	$2+t^2$	1	0,3
3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,4	4	3	$3+2t^2$	3	0,4
4	0,5	0,6	0,4	0,5	0,5	5	4	$4+t^2$	4	0,1
5	0,6	0,55	0,25	0,4	0,6	6	3	$6+5t$	5	0,15
6	0,1	0,15	0,1	0,1	0,1	1	1	$2+3t^2$	6	0,25
7	0,15	0,2	0,15	0,2	0,15	1,5	1	$4+5t$	2	0,35
8	0,25	0,3	0,2	0,25	0,25	2,5	2	$5+3t^2$	1	0,45
9	0,35	0,4	0,2	0,3	0,35	3,5	3	$7+2t$	3	0,4
0	0,45	0,5	0,4	0,45	0,45	4,5	4	$9+t^2$	2	0,15

Приклад виконання завдання

Матеріальна система (рис.5.6) починає рухатись із стану спокою під дією моменту M , що прикладається до тіла 1. Осі тіл 1 та 2 горизонтальні. Коефіцієнт тертя ковзання f . В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Масою паса знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3, натяг S_5 у веденій 5 та ведучій 4 – S_4 частині паса (прийняти $S_4=2S_5$) і зусилля в точці контакту тіл 1 та 2 при $t=t_1$.

Прийняти : $R_1=0,25\text{м}$; $R_2=0,45\text{м}$; $r_2=0,15\text{м}$; $i_2=0,4\text{м}$; $L=0,7\text{м}$; $m_1=0,5\text{кг}$; $m_2=5\text{кг}$; $m_3=4\text{кг}$; $M=3\text{т}^3\text{ Н м}$; $t_1=2\text{с}$; $f=0,4$.

Розв'язання. Для дослідження руху матеріальної системи (рис.5.1) застосуємо загальне рівняння динаміки.

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{\text{ін}} \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (5.1)$$

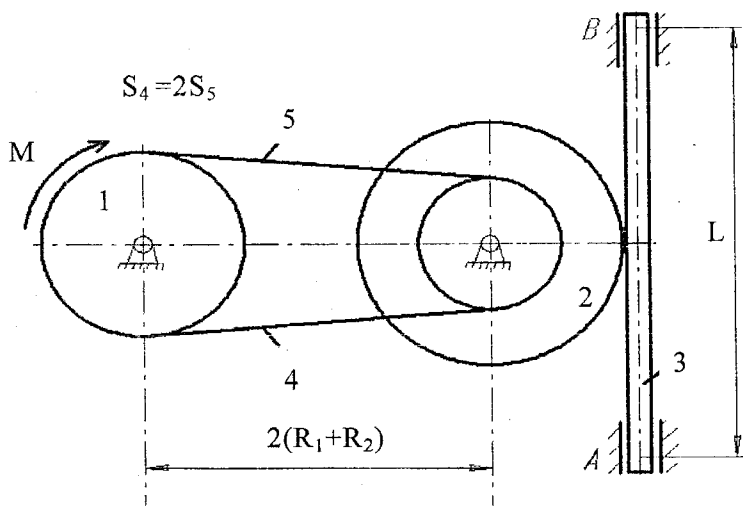


Рисунок 5.1

Визначення прискорення тіла 3

Однорідне тіло 1 обертається навколо горизонтальної осі під дією моменту M (рис. 5.2) з кутовим прискоренням ε_1 . Рух від тіла 1 до тіла 2 передається пасом, прискорення точок якого на прямолінійних ділянках $\bar{a}_n$.

$$a_n = \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 r_2. \quad (5.2)$$

Для того, щоб рух матеріальної системи відбувався без ударів, прискорення тіла 3 $\bar{a}_3$ повинне дорівнювати дотичному прискоренню точок тіла 2, що знаходиться на відстані R_2 від осі обертання.

$$a_3 = \varepsilon_2 R_2. \quad (5.3)$$

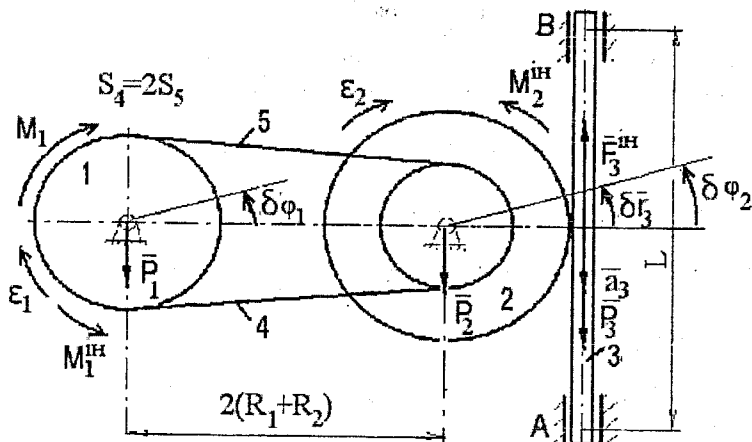


Рисунок 5.2

До матеріальної системи (рис. 5.2) прикладені активні сили: момент M , вага $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, ($\bar{P}_1 = m_1 g, \bar{P}_2 = m_2 g, \bar{P}_3 = m_3 g$) відповідно тіл 1, 2 та 3. Центр мас тіл 1 та 2 знаходиться на осі обертання, тому головні вектори сил інерції тіл 1 та 2 дорівнюють нулю. Головні моменти сил інерції тіла 1 M_1^{in} та 2 M_2^{in} направлені протилежно кутовим прискоренням тіл ε_1 та ε_2 .

$$M_1^{\text{in}} = I_1 \varepsilon_1, M_2^{\text{in}} = I_2 \varepsilon_2, \quad (5.4)$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$, $I_2 = m_2 i_2^2$ – моменти інерції тіл 1 та 2 відносно осі обертання.

Головний вектор сил інерції $\bar{F}_3^{\text{in}}$ тіла 3 направлений в протилежну сторону прискорення $\bar{a}_3$ (рис. 5.2).

$$\bar{F}_3^{\text{in}} = m_3 \bar{a}_3. \quad (5.5)$$

Якщо тіло 3 *віртуально перемістити* (virtual move) $\delta \vec{r}_3$, то тіло 2 повернеться на кут $\delta \varphi_2$, а тіло 1 – кут $\delta \varphi_1$ (рис.5.2).

Знайдемо взаємозв'язок між віртуальними переміщеннями тіл системи.

$$\begin{aligned}\delta r_3 &= \delta \varphi_2 R_2, \\ \delta \varphi_2 r_2 &= \delta \varphi_1 R_1.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Запишемо загальне рівняння динаміки (5.1) для системи сил, прикладеної до досліджуваної матеріальної системи (рис.5.2).

$$-P_3 \cdot \delta r_3 + F_3^{\text{ін}} \cdot \delta r_3 + M_2^{\text{ін}} \cdot \delta \varphi_2 + M_1^{\text{ін}} \cdot \delta \varphi_1 - M \cdot \delta \varphi_1 = 0 \quad (5.7)$$

Або враховуючи (5.2) – (5.6):

$$-m_3 g \delta r_3 + m_3 a_3 \delta r_3 + m_2 i_2^2 a_3 \frac{1}{R_2^2} \delta r_3 + \frac{1}{2} m_1 R_1^2 a_3 \frac{r_2^2}{R_2^2 R_1^2} \delta r_3 - M \frac{r_2}{R_2 R_1} \delta r_3 = 0.$$

Оскільки $\delta r_3 \neq 0$, то маємо:

$$-m_3 g + m_3 a_3 + m_2 i_2^2 a_3 \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{2} m_1 R_1^2 a_3 \frac{r_2^2}{R_2^2 R_1^2} - M \frac{r_2}{R_2 R_1} = 0.$$

Звідки знаходимо прискорення a_3 тіла 3.

$$a_3 = \frac{m_3 g + M \frac{r_2}{R_2 R_1}}{m_3 + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2}}. \quad (5.8)$$

Підставляючи дані умови задачі, отримуємо:

$$a_3 = 4,92 + 0,5t^3. \quad (5.9)$$

При $t_1 = 2\text{с}$, $a_3 = 8,92 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Визначення натягу в пасажі і зусилля між тілами

Розглянемо рух тіла 3. Сили $\vec{N}_2$ та $\vec{S}_2$, з якими тіло 2 діє на тіло 3, віднесемо до активних сил (рис.5.3).

Надаємо тілу 3 віртуальне переміщення $\delta \vec{r}_3$ і знаходимо роботу активних сил $\vec{P}_3, \vec{S}_2, \vec{N}_2$ та сил інерції $\vec{F}_3^{\text{ін}}$ на цьому переміщенні (5.1).

$$-P_3 \cdot \delta r_3 - S_2 \cdot \delta r_3 + F_3^{\text{ін}} \cdot \delta r_3 = 0.$$

Оскільки $\delta \bar{r}_3 \neq 0$, тоді

$$-P_3 - S_2 + F_3^{\text{in}} = 0.$$

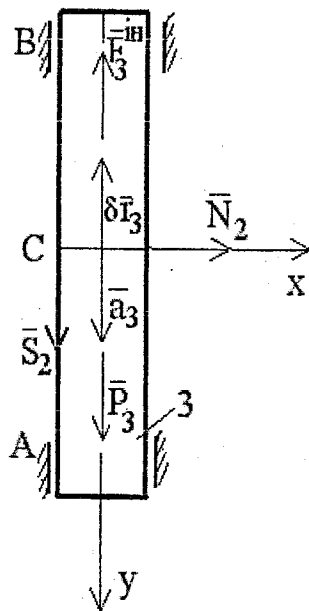


Рисунок 5.3

Звідки, враховуючи (5.4) та (5.9), знаходимо:

$$S_2 = m_3(4.92 + 0.5t^3) - m_3g.$$

При $t_1 = 2\text{с}$, $S_2 = -3,6\text{Н}$.

За законом Амонтона-Кулона: $S_2 = |fN_2|$, тоді $N_2 = \left| \frac{S_2}{f} \right|$.

При $t_1 = 2\text{с}$, $N_2 = 9\text{Н}$.

Для визначення зусиль в пасах розглянемо рух тіла 2 (рис.5.4).

Реакції в'язей $\bar{S}_2$, $\bar{N}_2$, $\bar{S}_5$, $\bar{S}_4$ відносно до активних сил. Причому

$$\bar{S}_2 = -\bar{S}_2, \quad \bar{N}_2 = -\bar{N}_2.$$

Головний момент сил інерції тіла 2 $M_2^{\text{ін}}$ направлений в протилежну сторону кутового прискорення ϵ_2 тіла (рис.5.4). Надаємо тілу 2 віртуальне переміщення $\delta\varphi_2$ і запишемо загальне рівняння динаміки (5.1.):

$$S_2' R_2 \cdot \delta\varphi_2 + M_2^{\text{ін}} \cdot \delta\varphi_2 + S_5 r_2 \cdot \delta\varphi_2 - S_4 r_2 \cdot \delta\varphi_2 = 0.$$

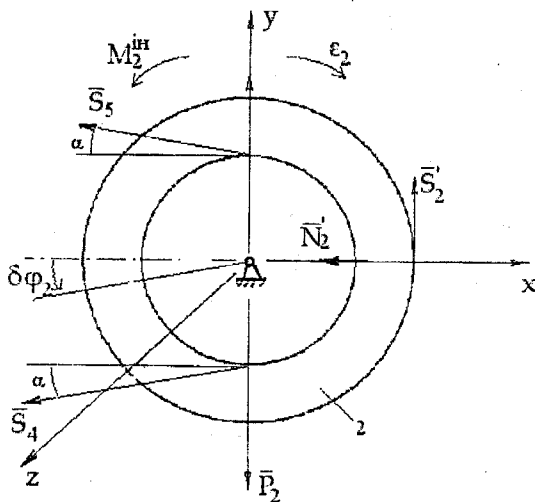


Рисунок 5.4.

Враховуючи, що $\delta\varphi_2 \neq 0$ і $S_4 = 2S_5$, знаходимо:

$$S_5 = 12t^3 - 0,083a_3.$$

При $t_1 = 2\text{с}$ $S_5 = 95,26\text{Н}$, $S_4 = 190,52\text{Н}$.

Відповідь: $a_3 = 8,92 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $S_2 = -3,6\text{Н}$, $N_2 = 9\text{Н}$, $S_4 = 2 \cdot S_5 = 190,52\text{Н}$

6 ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА 2-ГО РОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Матеріальна система (рис.6.1 – 6.5) рухається із стану спокою під дією сили тяжіння. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях S ($S = 0,4\text{м}$). Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Тіла котяться по поверхнях без ковзання.

Величини для розрахунків наведені в табл. 6.1, де прийнято такі позначення: m_1, m_2, m_3 – маси тіл 1, 2, 3; R_2, r_2, R_3, r_3 – найбільші та найменші розміри ступінчастих шківів тіл 2 та 3; ρ_{2x}, ρ_{3x} – радіуси інерції ступінчастих шківів 2 та 3 відносно осі обертання; α, β – кути нахилу площин до горизонту. Якщо тіла (шківів) 2 або 3 однорідні, тоді при розрахунках брати R_2, R_3 . Шнури (flex) над похилими площинами паралельні цим площинам.

Таблиця 6.1

Варіант	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	ρ_{2x} , м	ρ_{3x} , м	α , град
1	6	1	2	0.6	0.5	0.5	0.3	0.6	0.4	30
2	8	2	2	0.8	0.6	0.7	0.4	0.7	0.6	45
3	10	3	3	0.65	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	60
4	5	0.5	1.5	0.5	0.4	0.45	0.2	0.45	0.3	30
5	4	0.75	1.25	0.4	0.3	0.3	0.15	0.35	0.2	45
6	9	4	1	0.4	0.35	0.35	0.25	0.3	0.3	60
7	3	0.3	1	0.3	0.2	0.25	0.15	0.2	0.2	30
8	2	0.2	0.3	0.2	0.15	0.25	0.2	0.2	0.25	45
9	11	4	2	0.7	0.6	0.6	0.3	0.65	0.5	60
10	12	5	1	0.75	0.65	0.65	0.45	0.7	0.5	30

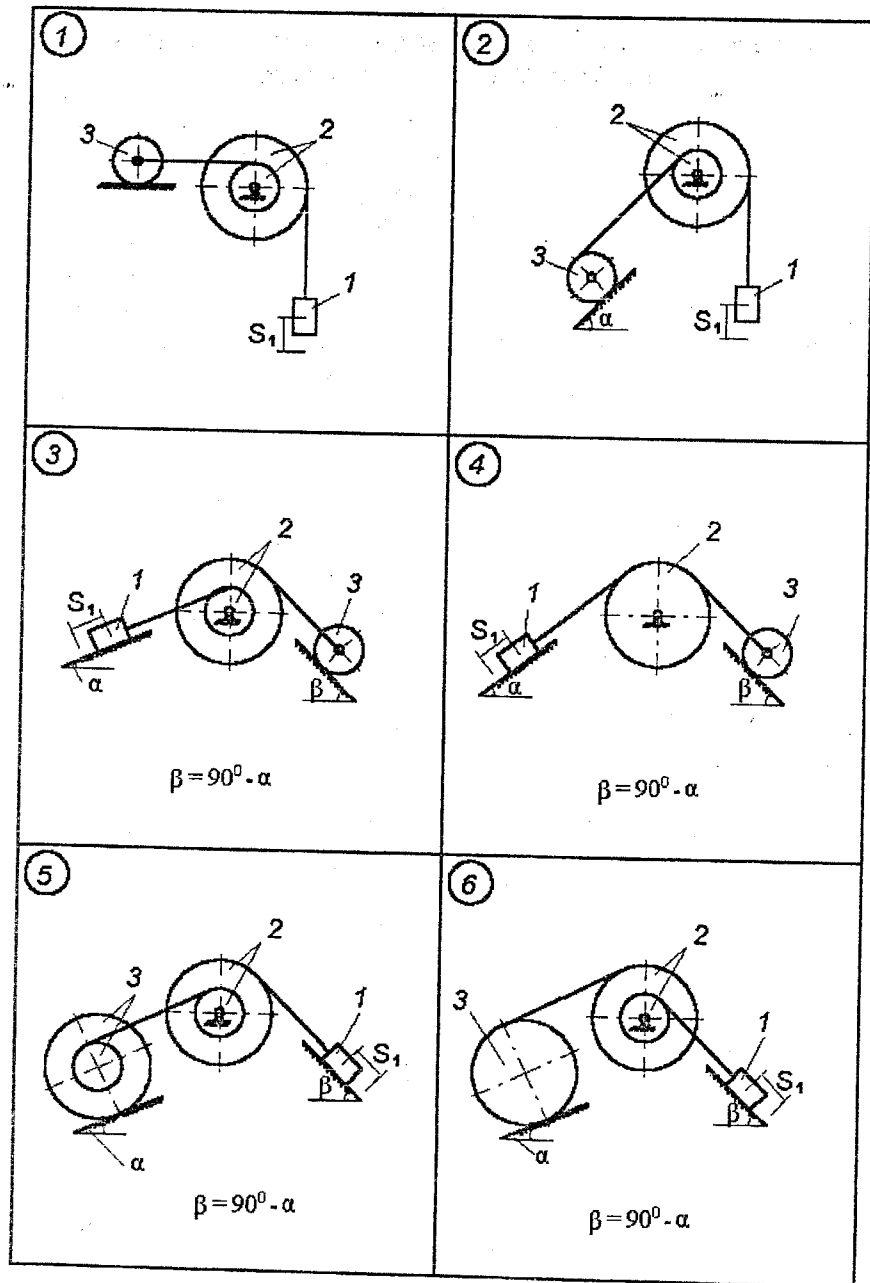


Рисунок 6.1

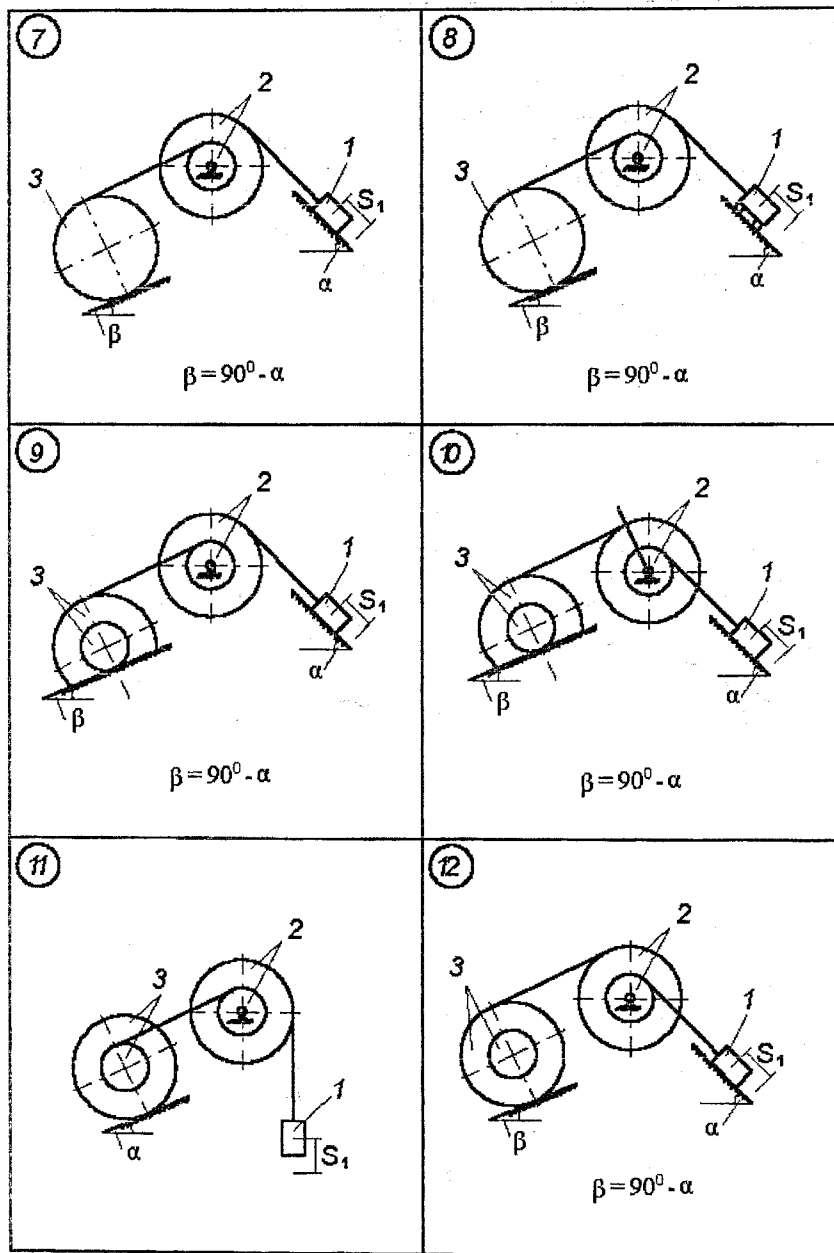


Рисунок 6.2

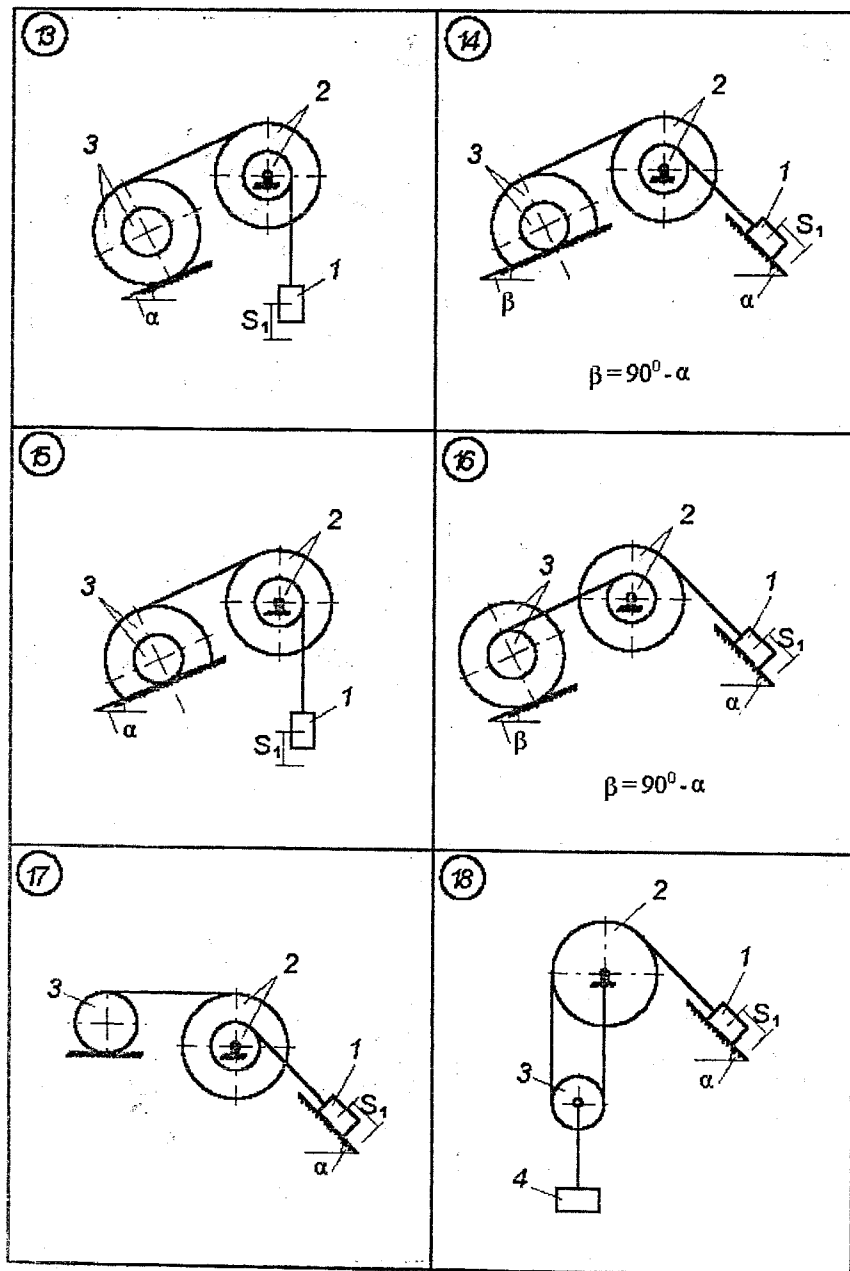


Рисунок 6.3

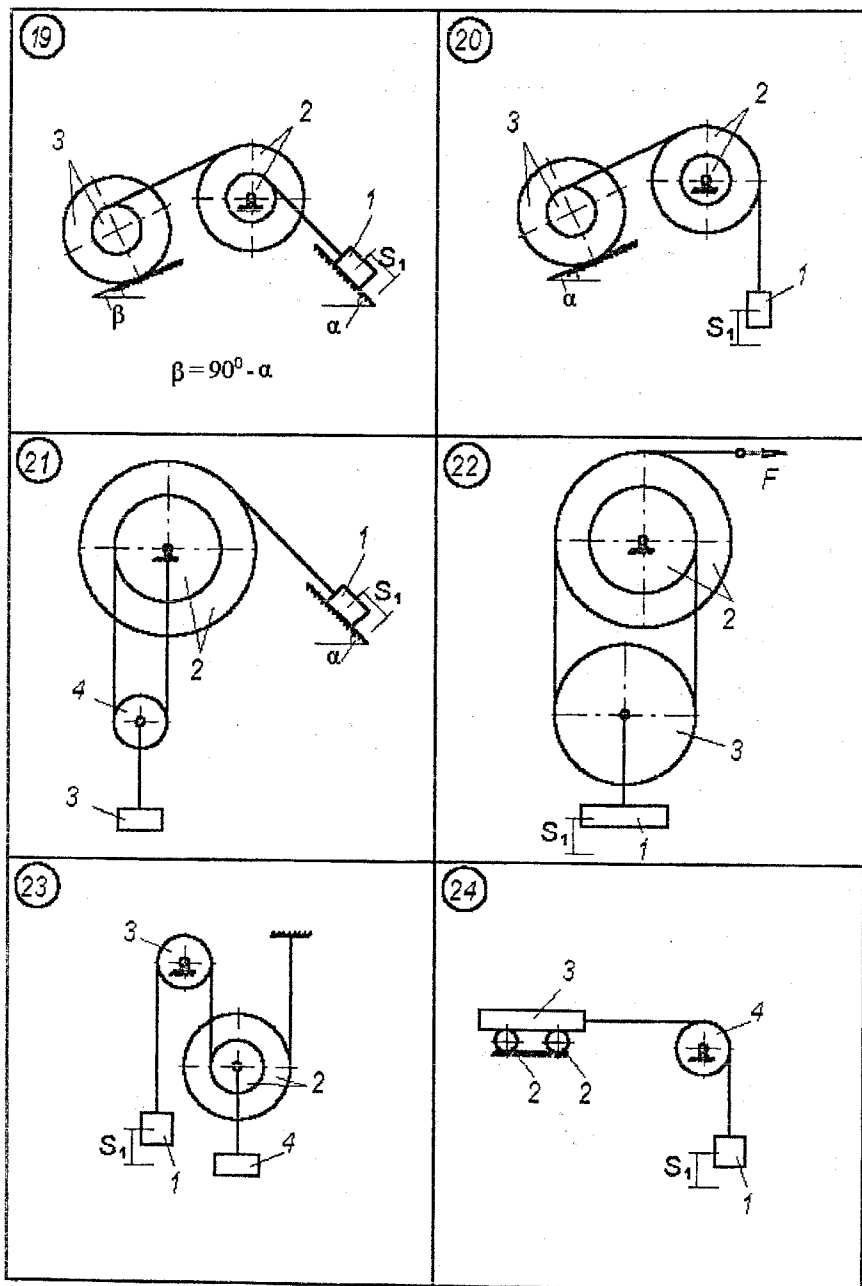


Рисунок 6.4

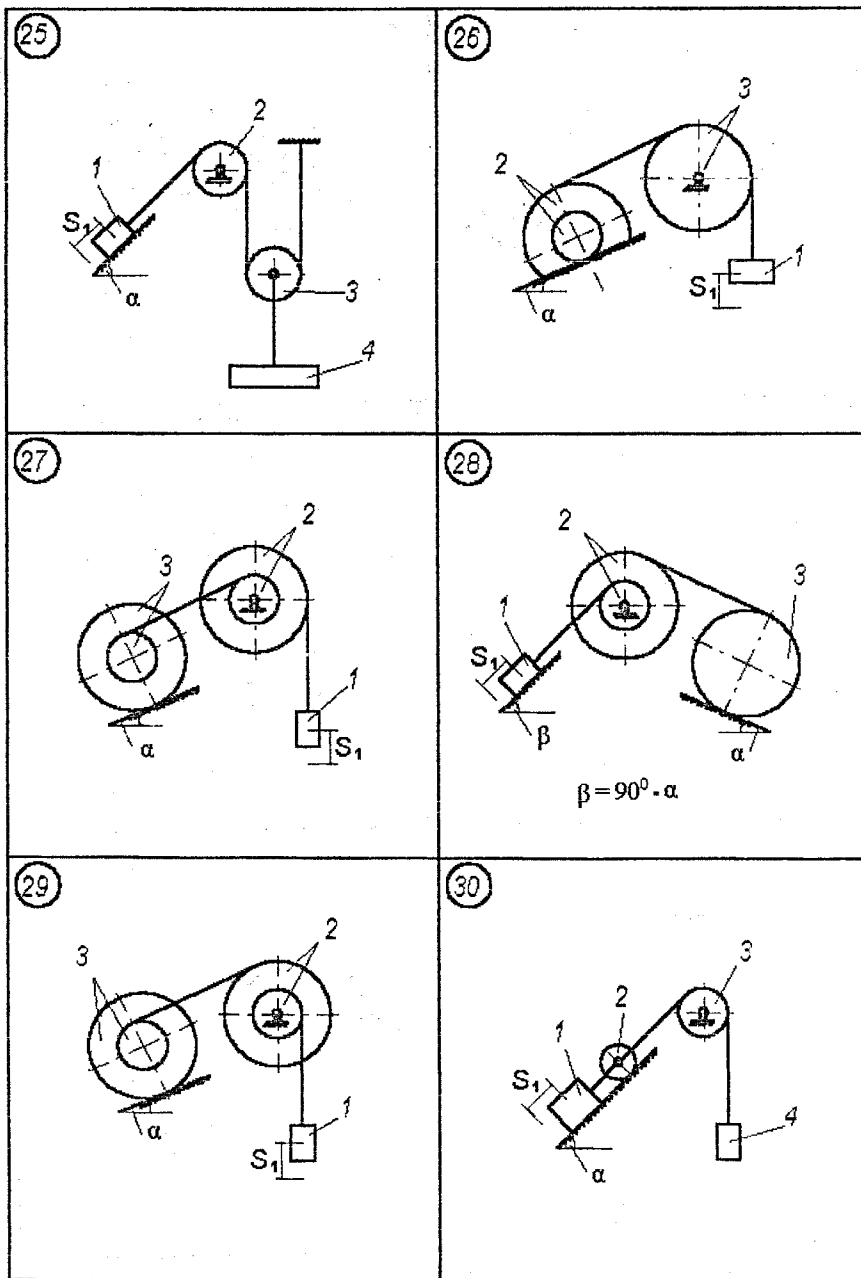


Рисунок 6.5

Приклад виконання завдання

Знайти прискорення та швидкість центра мас тіла 1 (рис. 6.6), коли він пройде відстань S_1 , якщо матеріальна система починає рухатися із стану спокою. Масою тросів знехтувати. Тіла 1 та 3 переміщуються без ковзання. Прийняти: $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 1$ кг; $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $r_3 = 0,2$ м; $\rho_2 = 0,3$ м; $\rho_3 = 0,25$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $S_1 = 0,4$ м.

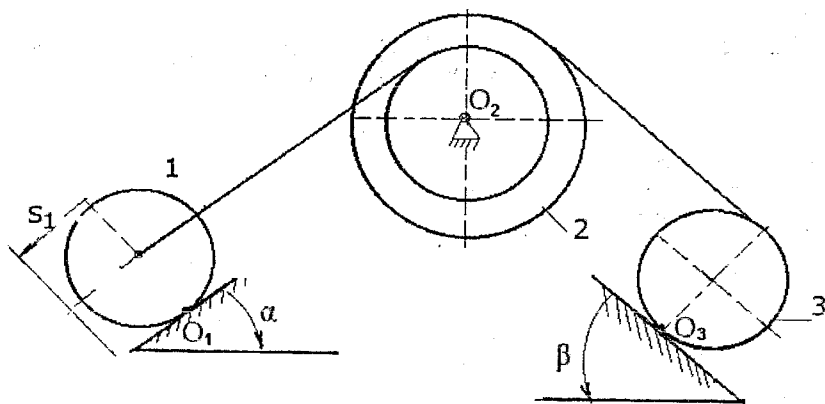


Рисунок 6.6

Розв'язання. Положення тіл системи (рис. 6.7) визначаємо узагальною координатою x (generalized coordinate).

Для дослідження руху матеріальної системи застосуємо рівняння Лагранжа 2-го роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad (6.1)$$

де x – узагальнена координата;

$\dot{x} = V_1$ – узагальнена швидкість;

Q_x – узагальнена сила;

$T = T_1 + T_2 + T_3$ – кінетична енергія системи;

T_i ($i = 1, 2, 3$) – кінетична енергія відповідно 1, 2 та 3 тіл.

Знайдемо кінематичні співвідношення між швидкостями точок, кутовими швидкостями тіл, записавши їх через швидкість V_1 центра мас тіла 1.

Кутова швидкість тіла 1, враховуючи, що миттєвий центр швидкості тіла 1 знаходиться в точці O_1 (рис. 6.7) :

$$\omega_1 = \frac{V_1}{R_1}, \quad (6.2)$$

де R_1 – радіус однорідного суцільного диска (тіла) 1.

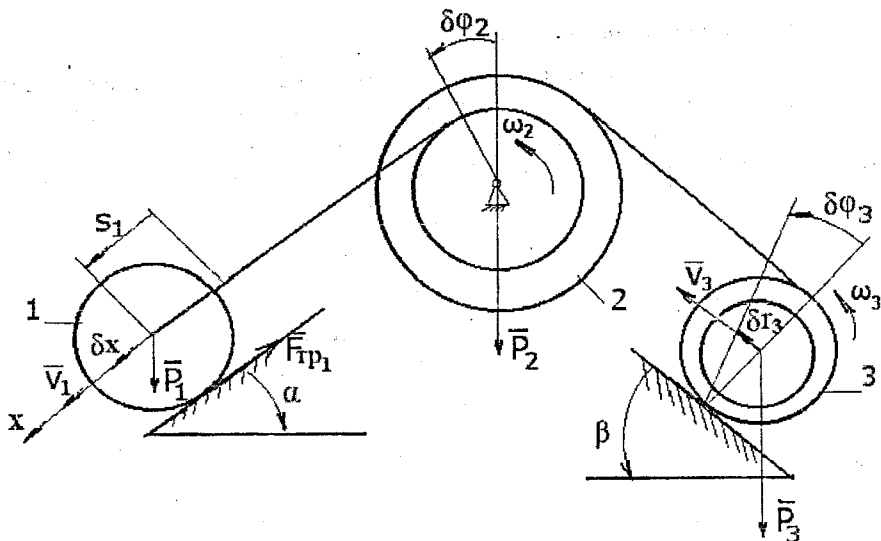


Рисунок 6.7

Кутова швидкість тіла 2:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} . \quad (6.3)$$

Швидкість точки А, враховуючи, що тіла 2 та 3 з'єднані нерозтяжним шнуром:

$$V_A = \omega_2 R_2 . \quad (6.4)$$

Оскільки точка O_3 – миттєвий центр швидкості тіла 3, тоді

$$V_A = \omega_3 2R_3 . \quad (6.5)$$

Із (6.4) та (6.5) визначаємо кутову швидкість тіла 3:

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{2R_3} = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3} . \quad (6.6)$$

Швидкість V_3 центра мас тіла 3:

$$V_3 = \omega_3 R_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2} . \quad (6.7)$$

Знайдемо переміщення центра мас тіла 3.

$$\text{Оскільки} \quad V_1 = \frac{dS_1}{dt}, \quad V_3 = \frac{dS_3}{dt}, \quad (6.8)$$

і, враховуючи (6.7), отримаємо:

або

$$\frac{dS_3}{dt} = \frac{dS_1}{dt} \cdot \frac{R_2}{2r_2},$$

$$dS_3 = \frac{R_2}{2r_2} \cdot dS_1. \quad (6.9)$$

При $t = 0$, $S_1 = 0$ та $S_3 = 0$ і після інтегрування (6.9) маємо:

$$S_3 = S_1 \cdot \frac{R_2}{2r_2}. \quad (6.10)$$

Кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2 та 3

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (6.11)$$

Кінетична енергія тіла 1, що рухається плоскопаралельно

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2,$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$ – момент інерції тіла 1 відносно центральної осі.

Тоді, враховуючи (6.2)

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \frac{V_1^2}{R_1^2} = \frac{3}{4} m_1 V_1^2. \quad (6.12)$$

Тіло 2 обертається навколо горизонтальної осі і кінетична енергія знаходиться за формулою:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2,$$

де $I_2 = \frac{1}{2} m_2 \rho_2^2$ – момент інерції тіла 2 відносно головної центральної осі;

ω_2 – кутова швидкість тіла 2 (6.3).

Тоді

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_1^2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2}. \quad (6.13)$$

Кінетична енергія тіла 3

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

де $I_3 = m_3 \rho_3^2$ – момент інерції тіла 3 відносно головної центральної осі;

ω_3 – кутова швидкість тіла 3 (6.6);

$V_3 = \omega_3 R_3$ – швидкість центра мас тіла 3.

Тоді

$$T_3 = \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \frac{R_2^2 \rho_3^2}{r_2^2 R_3^2}. \quad (6.14)$$

Тепер кінетичну енергію (6.11) системи, враховуючи (6.12) – (6.14), визначимо за формулою:

$$T = V_1^2 \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right) \right),$$

або

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{зв}} V_1^2, \quad (6.15)$$

$$\text{де } m_{\text{зв}} = \frac{3}{2} m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{4} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right) - \text{зведена маса системи.}$$

Знайдемо ліву частину рівняння (6.1)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_{\text{зв}} V.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m_{\text{зв}} a_1, \quad (6.17)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{dV_1}{dt}.$$

Узагальнену силу Q_x знайдемо за формулою:

$$Q_x = \frac{\sum \delta A}{\delta x}, \quad (6.18)$$

де $\sum \delta A$ – сума віртуальних робіт активних сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ і $\vec{F}_{\text{тр.1}}$ (рис. 6.7),

δx – *варіація* (variation) узагальненої координати x .

Віртуальна робота активних сил:

$$\sum \delta A = P_1 \cdot \delta x \sin \alpha - P_3 \cdot \delta r_3 \sin \beta, \quad (6.19)$$

$$\text{де } P_1 = m_1 g, \quad P_3 = m_3 g, \quad \delta r_3 = \delta x \frac{R_2}{2r_2}.$$

$$\text{Тепер} \quad \sum \delta A = g \left(m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta \right) \cdot \delta x. \quad (6.20)$$

Тоді з формули (6.18), враховуючи (6.20), отримаємо:

$$Q_x = g \left(m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta \right). \quad (6.21)$$

Рівняння Лагранжа 2-го роду (6.1) при врахуванні (6.16), (6.17) і (6.21) набуває вигляду:

$$m_{зв} a_1 = g \left(m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta \right),$$

звідки:

$$a_1 = \frac{g}{m_{зв}} \left(m_1 \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \cdot \sin \beta \right). \quad (6.22)$$

Або, підставляючи дані умови задачі,

$$a_1 = \frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0,4}{2 \cdot 0,3} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{3}{2} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0,35^2}{0,3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0,4^2}{0,3^2} \left(1 + \frac{0,25^2}{0,3^2} \right)} \cdot 9,81 = 2,41 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки $a_1 = \frac{dV_1}{dt} \cdot \frac{dS_1}{dS_1} = V_1 \cdot \frac{dV_1}{dS_1}$, тоді із формули (6.22) знаходимо швидкість V_1 :

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{S_1 \cdot g \left(m_1 \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \cdot \sin \beta \right)}{m_{зв}}}.$$

Підставляючи числові дані, отримаємо:

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0,4}{2 \cdot 0,3} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{3}{2} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0,35^2}{0,3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0,4^2}{0,3^2} \left(1 + \frac{0,25^2}{0,3^2} \right)}} = 1,3 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $a_1 = 2,41 \text{ м/с}^2$, $V_1 = 1,3 \text{ м/с}$.

7 ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Матеріальна система (рис.7.1 – 7.10) перебуває в положенні *стійкої* (steadfastness) рівноваги (при статичній деформації пружини жорсткістю C).

Знайти рівняння руху $y = y(t)$ вантажу 3, амплітуду, частоту, період коливань механічної системи при наданні тілу 3 *збурень* (perturbation) $y_0, \dot{y}_0$. За початок відліку координати y прийняти положення спокою тіла 3.

Дані для розрахунку наведені в табл. 7.1, але на схемах 1 – 25, 28, 30 (рис.7.1 – 7.10) прийняти $m_2 = 0$.

Прийняті позначення : m_i – маса тіла ($i = 1 - 5$); l_1, l_2 – довжина однорідних стержнів 1, 2; r_4 – радіус однорідного диска 4; R_5, r_5 – розміри східчастого диска 5; C – жорсткість пружини; y_0 – початкове відхилення тіла 3 по вертикалі від положення спокою; $\dot{y}_0$ – проекція початкової швидкості тіла 3 на вісь y .

Масою пружин та троса знехтувати.

Таблиця 7.1

Варіант	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	l_1	l_2	r_4	r_5	R_5	i_5	c	y_0	$\dot{y}_0$
	кг					м						н/м	м	м/с
1	2	2	1	3	2	0,6	0,9	0,2	0,1	0,2	0,15	2000	0,001	$-1 \cdot 10^{-2}$
2	1	4	2	4	3	0,9	0,3	0,05	0,2	0,4	0,3	3000	0,002	$-1,5 \cdot 10^{-2}$
3	2	1	1	5	4	0,3	0,6	0,1	0,1	0,2	0,15	4000	0,003	$-2 \cdot 10^{-2}$
4	1	2	2	3	2	0,6	0,9	0,2	0,2	0,4	0,3	5000	-0,001	$3 \cdot 10^{-2}$
5	2	4	1	4	3	0,9	0,3	0,05	0,1	0,2	0,15	6000	-0,002	$2 \cdot 10^{-2}$
6	1	3	2	5	4	0,3	0,6	0,1	0,2	0,4	0,3	2000	-0,003	$1 \cdot 10^{-2}$
7	2	1	1	3	2	0,6	0,9	0,2	0,1	0,2	0,15	3000	0,001	$-2 \cdot 10^{-2}$
8	1	3	2	4	3	0,3	0,3	0,05	0,2	0,4	0,3	4000	0,002	$-1 \cdot 10^{-2}$
9	2	2	1	5	4	0,6	0,6	0,05	0,1	0,2	0,15	5000	0,03	$-2 \cdot 10^{-2}$
0	1	3	2	3	2	0,9	0,9	0,1	0,2	0,4	0,3	6000	-0,01	$2 \cdot 10^{-2}$

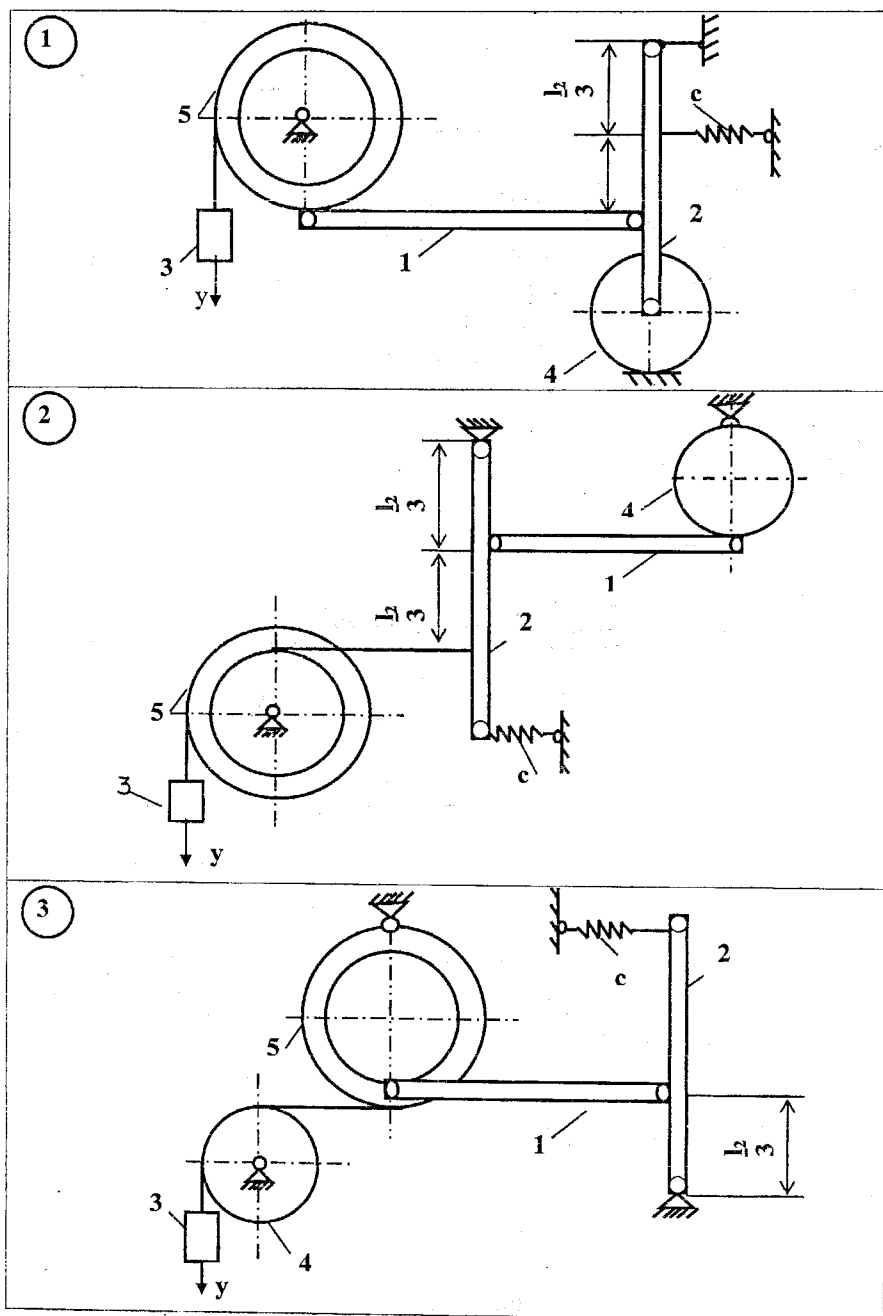


Рисунок 7.1

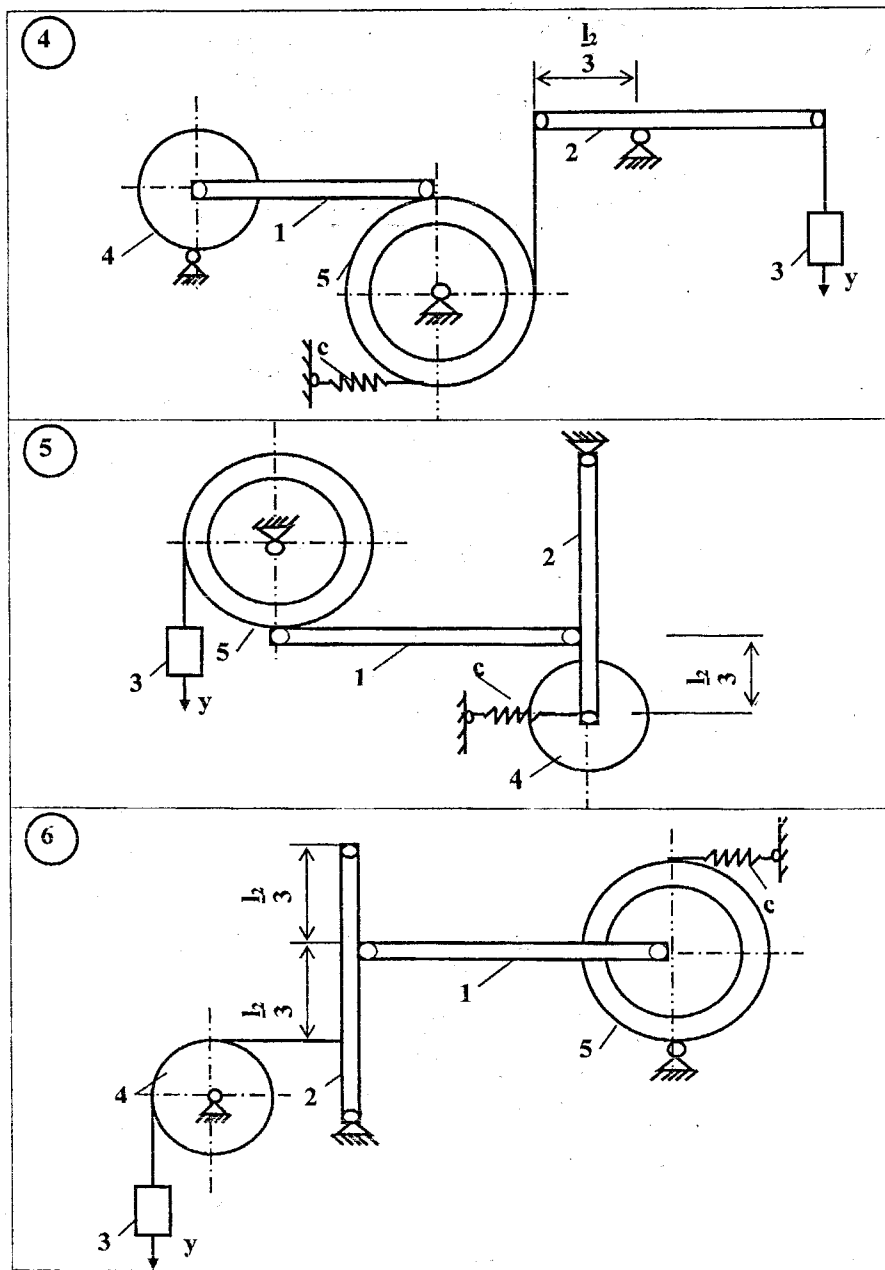


Рисунок 7.2

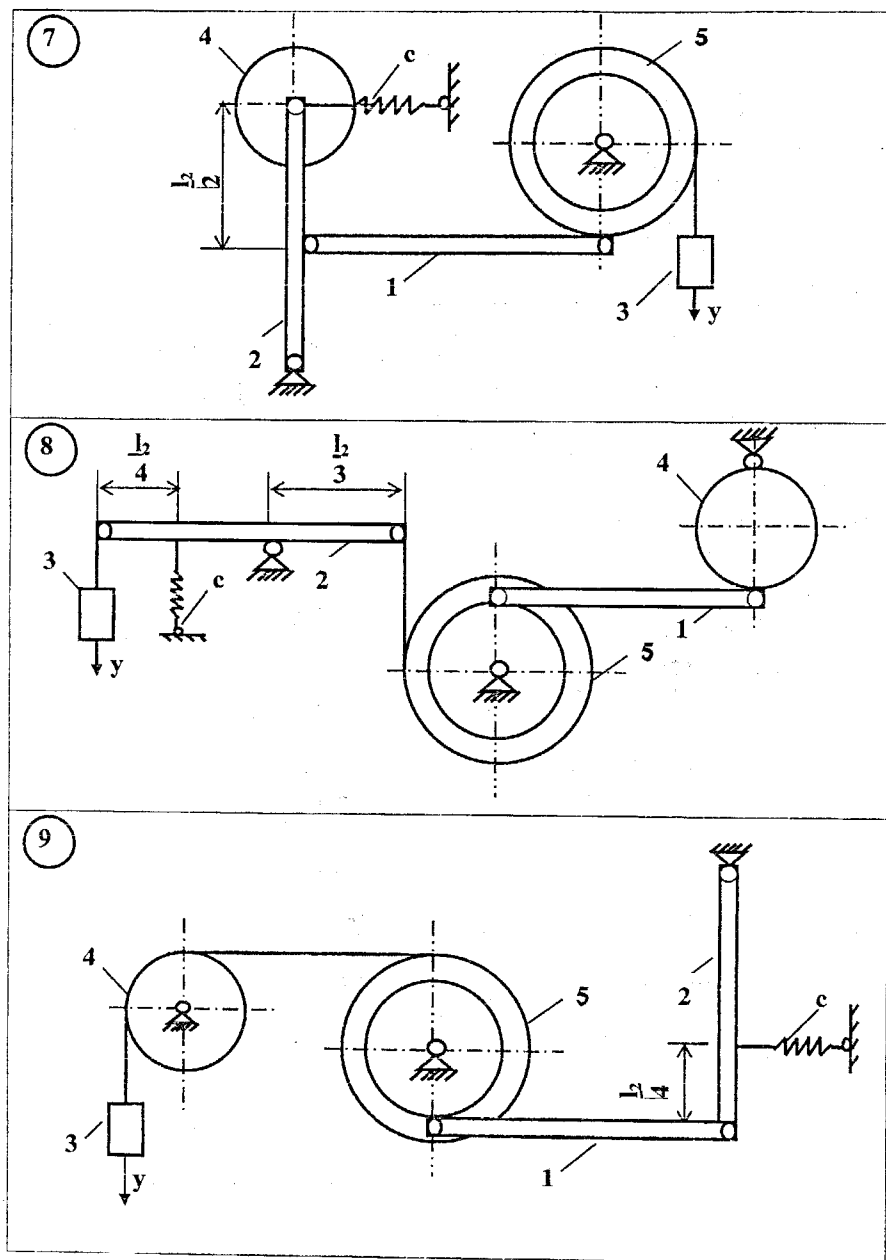


Рисунок 7.3

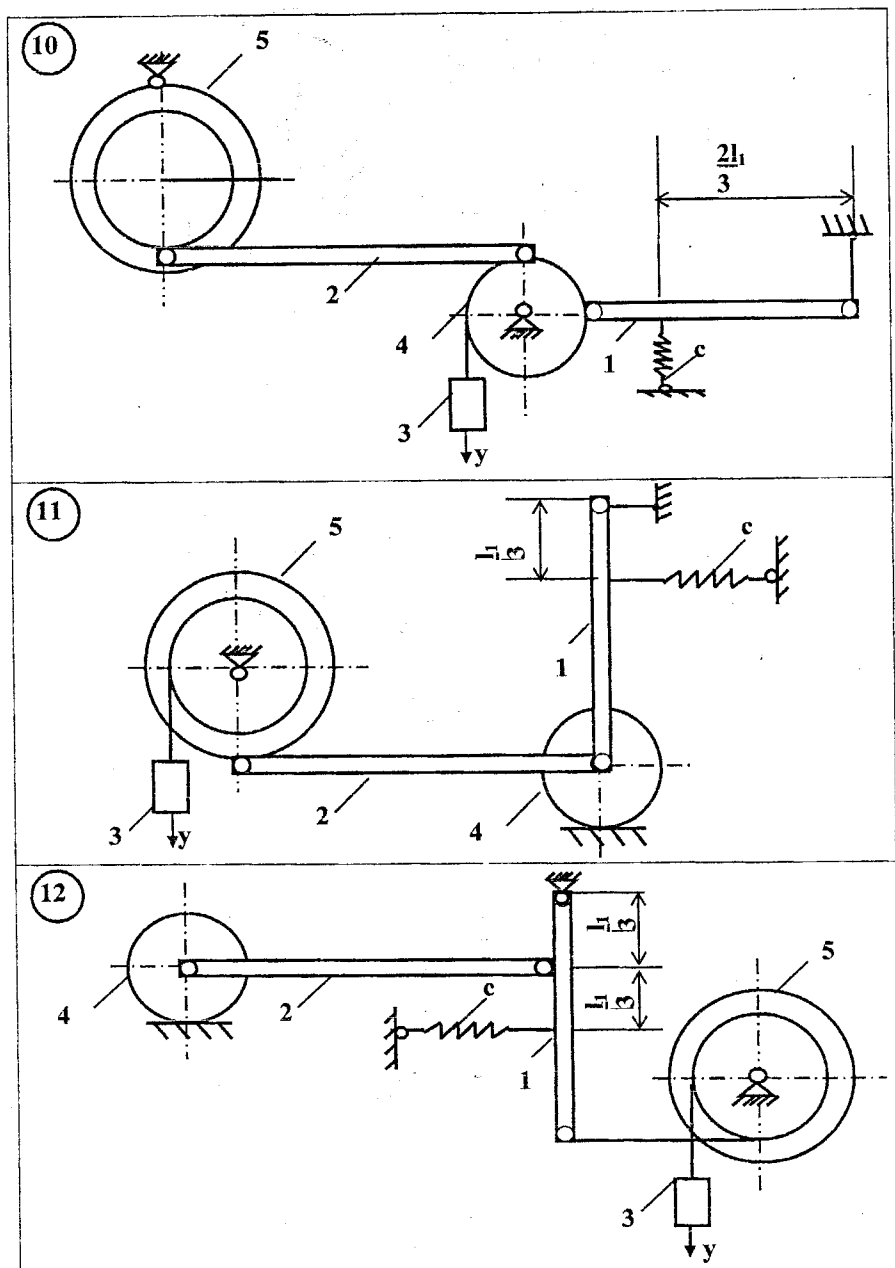


Рисунок 7.4

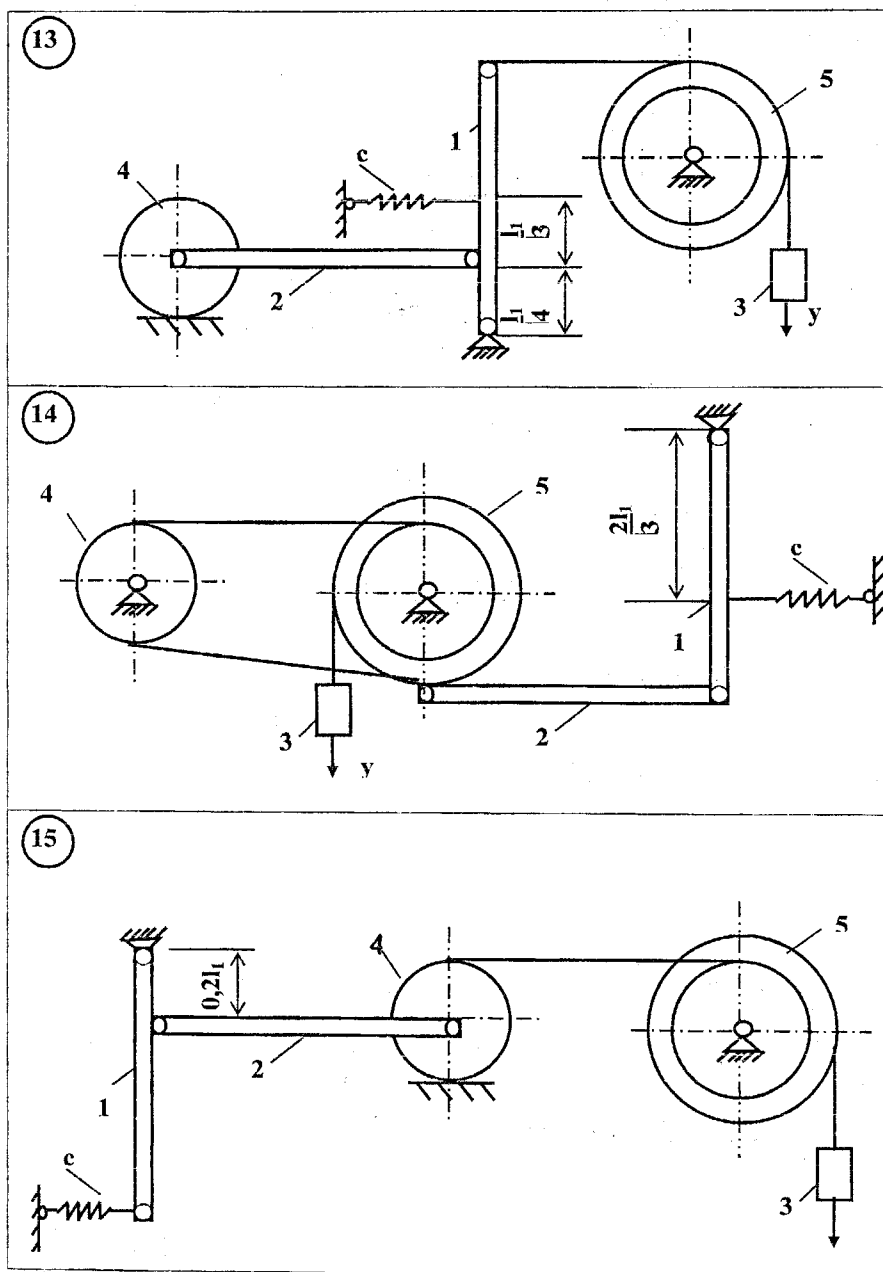
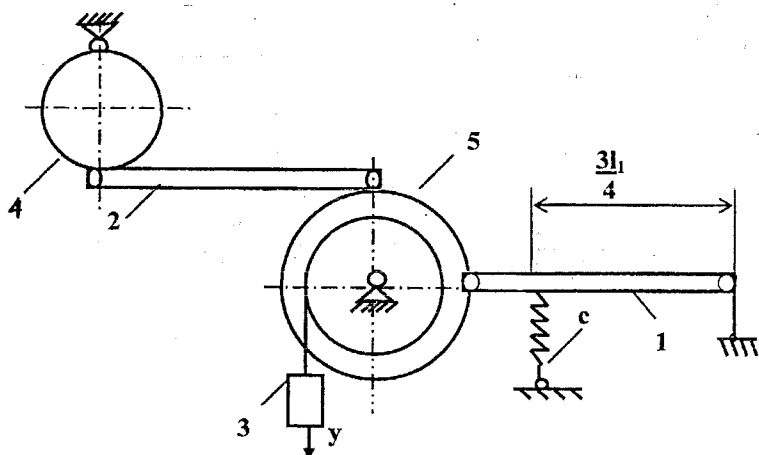
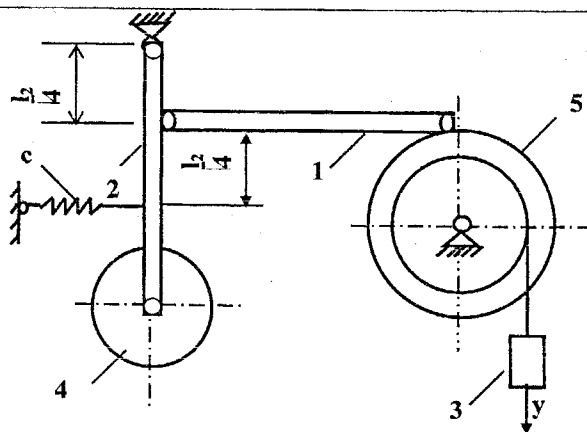


Рисунок 7.5

16



17



18

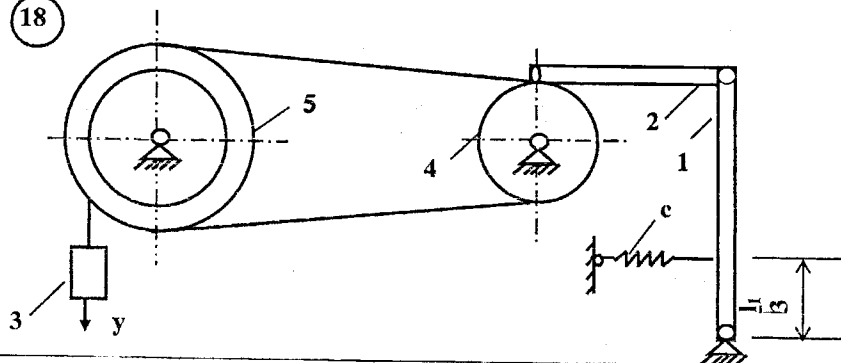
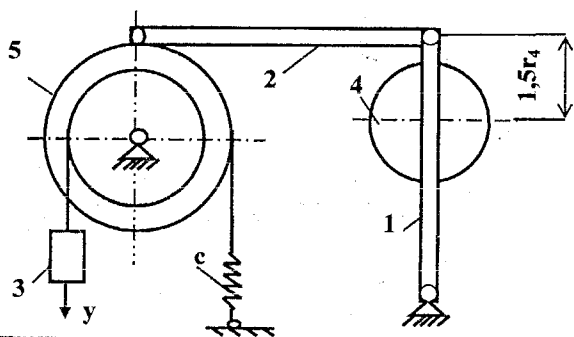
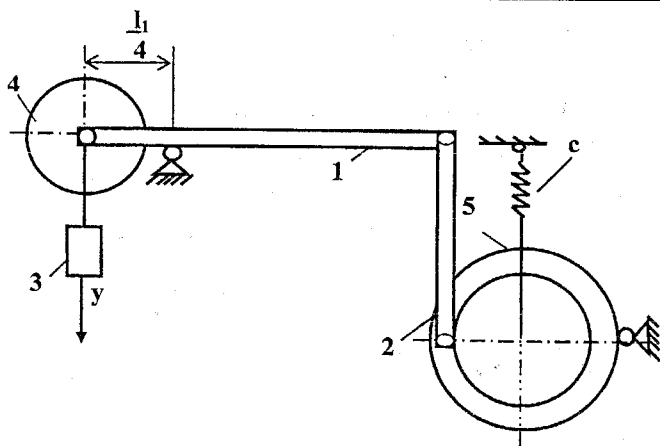


Рисунок 7.6

19



20



21

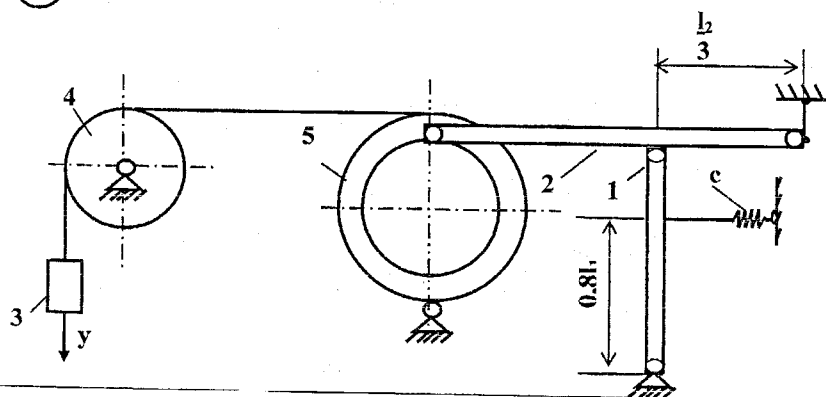
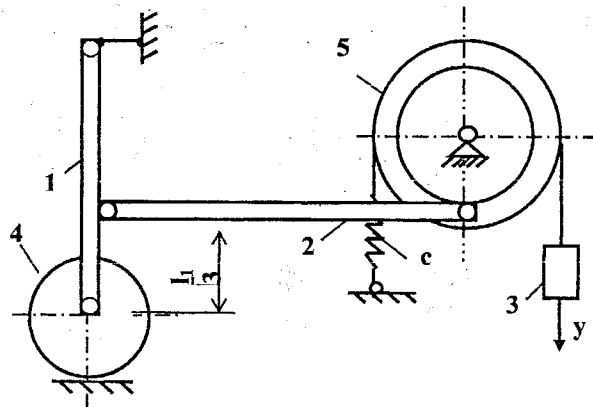
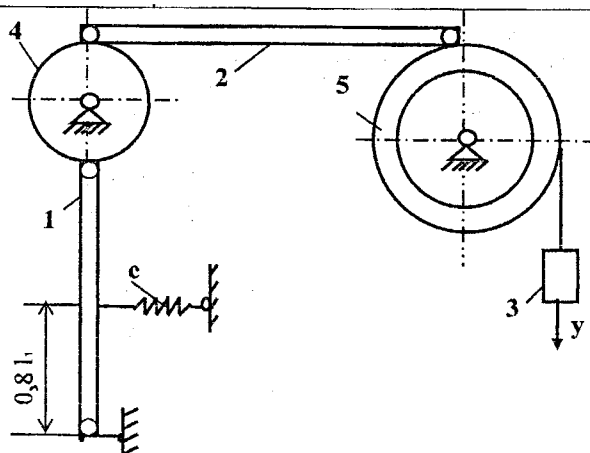


Рисунок 7.7

22



23



24

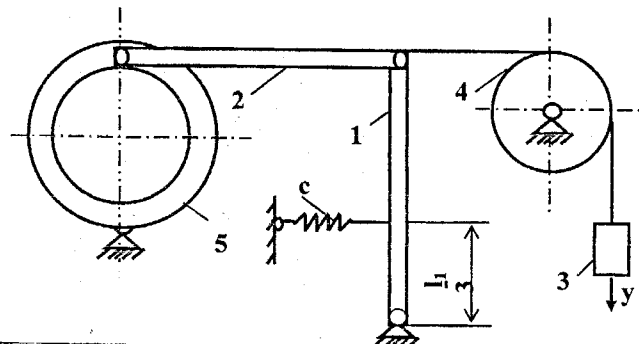
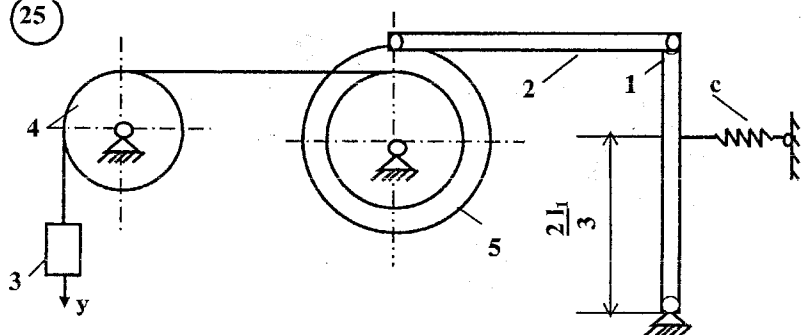
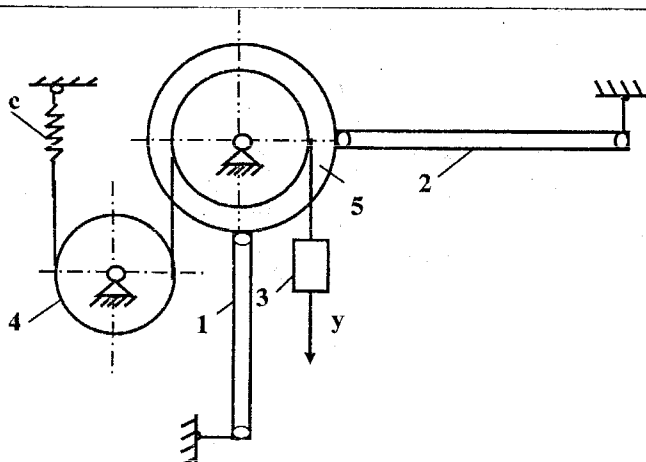


Рисунок 7.8

25



26



27

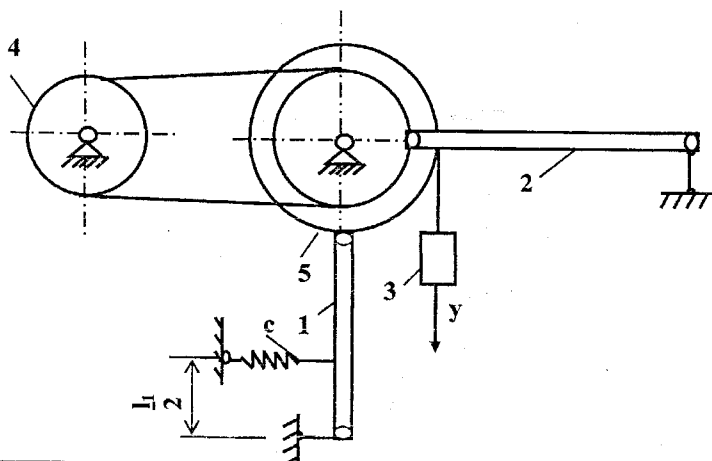
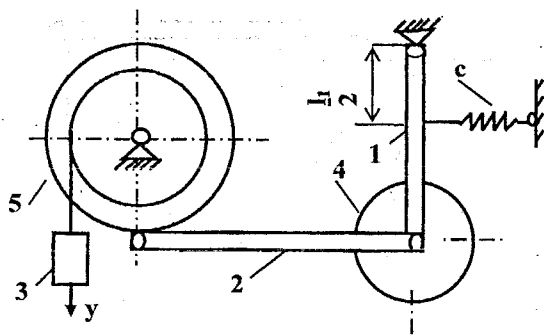
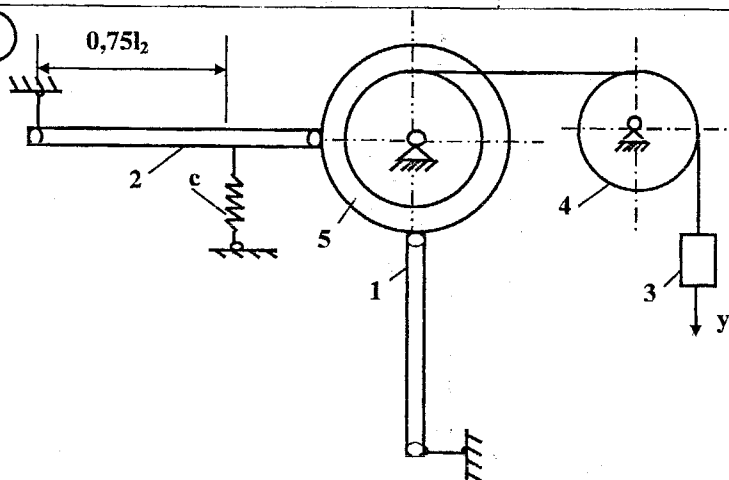


Рисунок 7.9

28



29



30

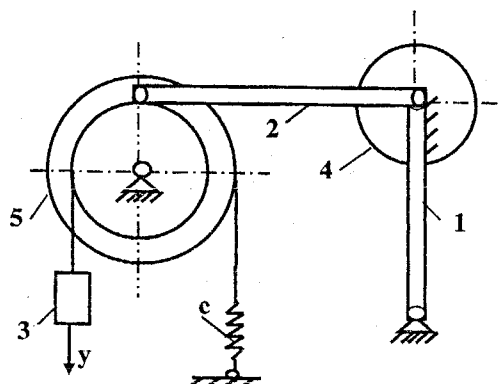


Рисунок 7.10

Приклад виконання завдання

У матеріальній системі (рис 7.11) в положенні стійкої рівноваги при статичній деформації λ пружини жорсткістю C стержень 1 масою m_1 вертикальний. Тіло 5 масою m_5 знаходиться на *шорсткій поверхні* (not smoothly surface).

Тіло 3 масою m_3 переміщується із стану рівноваги на $y_0 = 0,004\text{ м}$ і одночасно надається швидкість $\dot{y}_0 = 2\text{ м/с}$ вертикально верх.

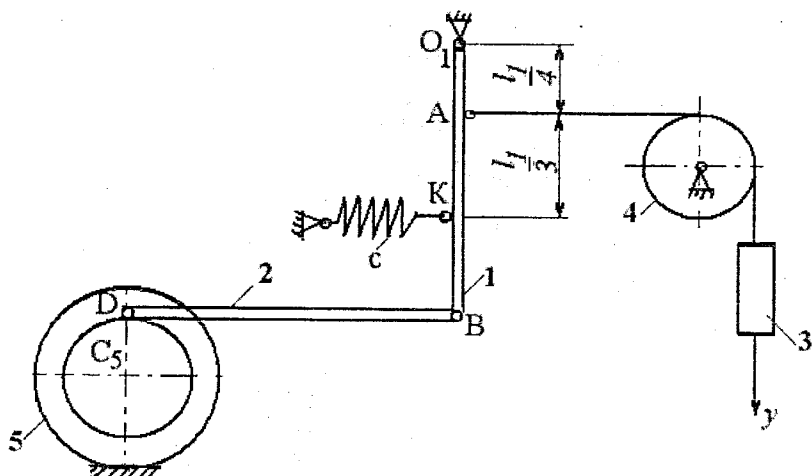


Рисунок 7.11

Знайти рівняння руху $y = y(t)$ тіла 3, амплітуду, частоту, період вільних коливань матеріальної системи якщо: $m_1 = 1\text{ кг}$; $m_2 = 0\text{ кг}$; $m_3 = 2\text{ кг}$; $m_4 = 2\text{ кг}$; $m_5 = 6\text{ кг}$; $l_1 = 0,6\text{ м}$; $l_2 = 0,4\text{ м}$; $R_5 = 2r_5 = 0,3\text{ м}$; $i_5 = 0,2\text{ м}$; $C = 7000\text{ Н/м}$.

За початок відліку координати y прийнято положення тіла 3. Вагою троса і його ковзання по поверхні тіла 4 нехтувати. Тіло 5 рухається по горизонтальній шорсткій поверхні без ковзання.

Розв'язування. Для дослідження руху матеріальної системи використаємо рівняння Лагранжа другого роду для консервативної системи:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (7.1)$$

де y – узагальнена координата (вертикальне переміщення тіла 3 від положення стійкої рівноваги);

$L = (T - \Pi)$ – функція Лагранжа;

T – кінетична енергія системи;

Π – потенціальна енергія системи.

Знайдемо кінетичну енергію матеріальної системи як суму кінетичних енергій тіл 1 – 5.

$$T = T_1 + T_3 + T_4 + T_5, \quad (7.2)$$

$$\text{де } T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2; T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2; T_4 = \frac{1}{2} I_4 \omega_4^2; T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_5^2 + \frac{1}{2} I_5 \omega_5^2.$$

Знайдемо швидкості точок тіл $\bar{V}_3$, $\bar{V}_B$, $\bar{V}_5$ та кутові швидкості тіл 1, 4, 5 через узагальнену швидкість $\dot{y}$ (рис. 7.12)

$$V_3 = \dot{y}, \quad \omega_4 = \frac{\dot{y}}{R_4}, \quad \omega_1 = \frac{4\dot{y}}{l_1}, \quad V_D = V_B = \omega_1 l_1 = 4\dot{y}_1 \quad - \quad \text{тіло 2}$$

переміщується миттєво поступально

$$\omega_5 = \frac{V_D}{PD} = \frac{V_D}{R_5 + r_5} = \frac{\dot{y}}{R_5 + r_5}, \quad V_5 = \omega_5 R_5 = \dot{y} \frac{R_5}{R_5 + r_5} \quad -$$

швидкість центра мас тіла 5.

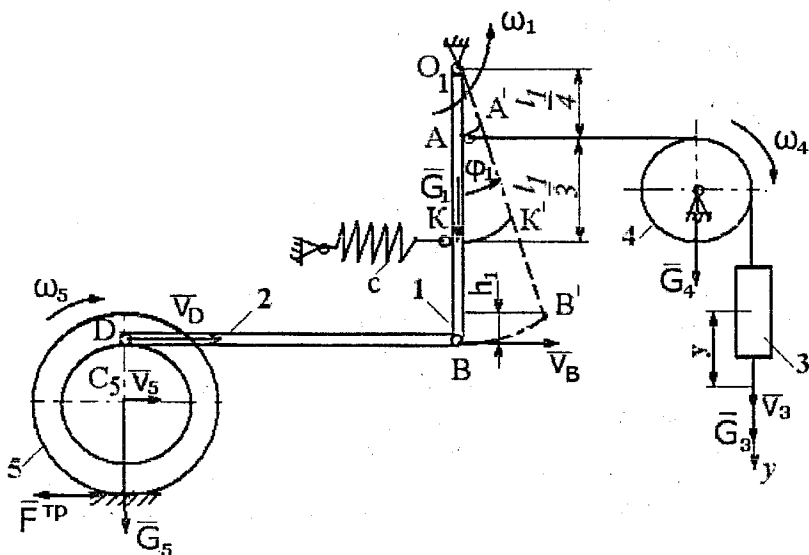


Рисунок 7.12

Момент інерції I_4 тіла 4 відносно головної центральної осі (вісь обертання).

$$I_4 = \frac{1}{2} m_4 R_4^2.$$

Момент інерції I_1 тіла 1 відносно головної осі, що проходить через точку O_1

$$I_1 = I_{c1} + m_1 \cdot OC_1^2 = \frac{m_1 l_1^2}{12} + \frac{m_1 l_1^2}{4} = \frac{m_1 l_1^2}{3}.$$

Момент інерції I_5 тіла 5 відносно головної центральної осі, що проходить через центр мас C_5 тіла

$$I_5 = m_5 i_5^2.$$

Кінетична енергія тіл системи:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \frac{16\dot{y}^2}{l_1^2} = \frac{8}{3} m_1 \dot{y}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_3 \dot{y}^2,$$

$$T_4 = \frac{1}{2} I_4 \omega_4^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_4 R_4^2 \frac{\dot{y}^2}{R_4^2} = \frac{1}{4} m_4 \dot{y}^2,$$

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 \frac{R_5^2}{(R_5 + r_5)^2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_5 i_5^2 \frac{\dot{y}^2}{(R_5 + r_5)^2} = \frac{1}{2} m_5 \dot{y}^2 \frac{R_5^2 + i_5^2}{(R_5 + r_5)^2}.$$

Підставляємо отримані значення кінетичних енергій тіл в формулу (7.2)

$$T = \frac{\dot{y}^2}{12} \left(32m_1 + 6m_3 + 3m_4 + 6m_5 \frac{R_5^2 + i_5^2}{(R_5 + r_5)^2} \right). \quad (7.3)$$

Знайдемо потенціальну енергію системи, прийнявши за нульовий рівень положення стійкої рівноваги.

Потенціальна енергія системи знаходиться як робота сил $\bar{G}_i$ ($i=1,3,4,5$) ваги тіл системи і сил пружності $\bar{F}_{\text{пр}}$ на переміщеннях системи, коли тіло 3 має координату y в нульовому положенні.

$$\Pi = \Pi(\bar{G}_i) + \Pi(\bar{F}_{\text{пр}}). \quad (7.4)$$

Робота сил $\bar{G}_4$ та $\bar{G}_5$ дорівнює нулю. Потенціальна енергія, що відповідає силам ваги $\bar{G}_3$ та $\bar{G}_1$:

$$\Pi(\bar{G}_i) = -G_3 y + G_1 \frac{h_1}{2}, \quad (7.5)$$

де h_1 – вертикальне переміщення точки В стержня 1;

$$G_1 = m_1 g, \quad G_3 = m_3 g.$$

Знайдемо h_1 з точністю до величини другого порядку мализни. З рис. 7.11 маємо, що:

$$h_1 = l_1 - l_1 \cos \varphi_1, \quad (7.6)$$

$$\text{де } \varphi_1 = \frac{4y}{l_1}.$$

Якщо розкласти $\cos \varphi_1$ в степеневий ряд

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2!} + \frac{\varphi_1^4}{4!} - \frac{\varphi_1^6}{6!} + \dots, \quad (7.7)$$

обмежитись величинами φ_1^2 , то формула (7.6) набуває вигляду:

$$h_1 = \frac{8y^2}{l_1}.$$

Таким чином (7.5):

$$\Pi(\bar{G}_1) = gy \left(m_1 \frac{4y}{l_1} - m_3 \right). \quad (7.8)$$

Потенціальна енергія, що відповідає силі пружності деформованої пружини:

$$\Pi(F_{\text{пр}}) = \frac{c}{2} (\lambda_{\text{ст}} + \lambda_{\text{к}}) - \frac{1}{2} c \lambda_{\text{ст}}^2, \quad (7.9)$$

де $\lambda_{\text{ст}}$ – статична деформація пружини в положенні стійкої рівноваги матеріальної системи;

$\lambda_{\text{к}}$ – переміщення точки пружини К при зміщенні тіла 3 із положення рівноваги на величину y .

Із рисунка (7.11):

$$\lambda_{\text{к}} = \left(\frac{l_1}{3} + \frac{l_1}{4} \right) \cdot \varphi_1 = \frac{7}{3} y.$$

Тепер потенціальна енергія (7.9) запишеться:

$$\Pi(\bar{F}_{\text{пр}}) = \frac{7}{3} cy \left(\lambda_{\text{ст}} + \frac{7}{6} y \right). \quad (7.10)$$

Потенціальна енергія (7.4), враховуючи (7.7) та (7.10), набуває вигляду:

$$\Pi = gy \left(m_1 \frac{4y}{l_1} - m_3 \right) + \frac{7}{3} cy \left(\lambda_{\text{ст}} + \frac{7}{6} y \right). \quad (7.11)$$

Відповідно до теореми Лагранжа – Діріхле

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0,$$

тоді із виразу (7.11) маємо:

$$-gm_3 + \frac{7}{3}c\lambda_{ст} = 0.$$

Таким чином отримуємо кінцевий вираз для потенціальної енергії (7.11):

$$\Pi = 4m_1g\frac{y^2}{l_1} + \frac{49}{18}cy^2. \quad (7.12)$$

Запишемо функцію Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{\dot{y}^2}{12} \left(32m_1 + 6m_3 + 3m_4 + 6m_5 \frac{R_5^2 + i_5^2}{(R_5 + r_5)^2} \right) - 4m_1g\frac{y^2}{l_1} - \frac{49}{18}cy^2.$$

Або, враховуючи дані умови задачі:

$$L = 23,43\dot{y}^2 - 21843,2y^2.$$

Похідні від функції Лагранжа за узагальненою координатою та узагальненою швидкістю:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -43686,4y,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 46,86\dot{y}.$$

Підставляємо отримані величини в диференціальне рівняння (7.1).

$$\frac{d}{dt}(46,86\dot{y}) + 43686,4y = 0,$$

або:

$$\ddot{y} + k^2y = 0, \quad (7.13)$$

$$\text{де } k^2 = 932,27 \frac{1}{c^2}.$$

Інтегруючи диференціальне рівняння (7.13), отримуємо рівняння руху тіла 3

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (7.14)$$

де $k = 30,53c^{-1}$ – циклічна частота вільних коливань;

C_1, C_2 – сталі інтегрування, які визначаються із початкових умов:

$$\text{при } t=0, y_0 = 0,004\text{м}, \dot{y}_0 = -v_0 = -2\frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (7.15)$$

Знайдемо залежність узагальненої швидкості від часу із рівняння (7.14)

$$\dot{y} = C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (7.16)$$

Із рівняння (7.14), (7.16) та початкових умов знаходимо C_1 та C_2

$$C_1 = 0,004\text{м},$$

$$C_2 = \frac{-\dot{y}_0}{k} = -0,066\text{м}.$$

Рівняння руху тіла 3

$$y = 0,004 \cos(30,53t) - 0,066 \sin(30,53t)\text{м}.$$

Період вільних коливань

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0,206\text{с}.$$

Амплітуда вільних коливань:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,06612\text{м}.$$

Відповідь: $y = 0,004 \cos(30,53t) - 0,066 \sin(30,53t)\text{м};$

$$k = 30,53\text{с}^{-1}; T = 0,206\text{с}; A = 0,06612\text{м}.$$

8 МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ БІЛЯ ПОЛОЖЕННЯ СТІЙКОЇ РІВНОВАГИ ПРИ НАЯВНОСТІ СИЛ ОПОРУ

Матеріальна система (рис.8.1 – 8.10) перебуває в положенні стійкої рівноваги (при статичній деформації пружини жорсткістю C).

Знайти рівняння руху та побудувати графік $y = y(t)$ вантажу 3 при наданні тілу 3 збурень y_0 , $\dot{y}_0$, якщо сила опору руху $\bar{R} = -\alpha \cdot \bar{v}$ (v – швидкість точки А демпфера 6, α – коефіцієнт пропорційності). За початок відліку координати y (направлена по вертикалі вниз) взяти положення спокою тіла 3. Тіло 3 переміщується поступально.

Дані для розрахунків наведені в табл.8.1, але на схемах 1 – 19, 22, 24 – 30 (рис.8.1 – 8.10) прийняти $m_2 = 0$.

Прийняті позначення: m_i – маса тіла ($i = 1 - 5$); l_1, l_2 – довжина однорідних стержнів 1 та 2; r_4 – радіус однорідного диска 4; R_5, r_5 – розміри східчастого диска 5; C – жорсткість пружини; y_0 – початкове відхилення тіла 3 по вертикалі від положення спокою; $\dot{y}_0$ – проекція початкової швидкості тіла 3 на вісь y .

Масою пружини, демпфера та троса знехтувати.

Таблиця 8.1

Варіант	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	l_1	l_2	r_4	r_5	R_5	i_5	α	C	y_0	$\dot{y}_0$
	кг					м						кг/с	н/м	м	м/с
1	2	3	1	4	1	0,6	0,3	0,1	0,2	0,4	0,3	200	4000	-0,002	0,05
2	1	2	2	3	2	0,9	0,6	0,2	0,1	0,2	0,15	150	3000	0,005	-0,04
3	2	3	1	4	3	0,3	0,9	0,1	0,2	0,4	0,3	100	5000	-0,008	0,01
4	1	2	2	3	1	0,3	0,9	0,1	0,1	0,2	0,15	50	6000	0,005	0,03
5	2	2	1	4	2	0,6	0,3	0,2	0,2	0,4	0,3	250	3000	0,006	-0,06
6	1	2	2	3	3	0,9	0,6	0,2	0,1	0,2	0,15	200	4000	0,008	0,02
7	2	3	1	4	1	0,9	0,3	0,1	0,2	0,4	0,3	150	5000	0,007	0,01
8	1	2	2	3	2	0,6	0,9	0,2	0,1	0,2	0,15	100	6000	0,005	-0,03
9	2	3	1	4	3	0,3	0,6	0,1	0,2	0,4	0,3	50	5000	-0,01	-0,03
0	1	2	2	3	1	0,9	0,3	0,1	0,1	0,2	0,15	250	6000	0,008	-0,03

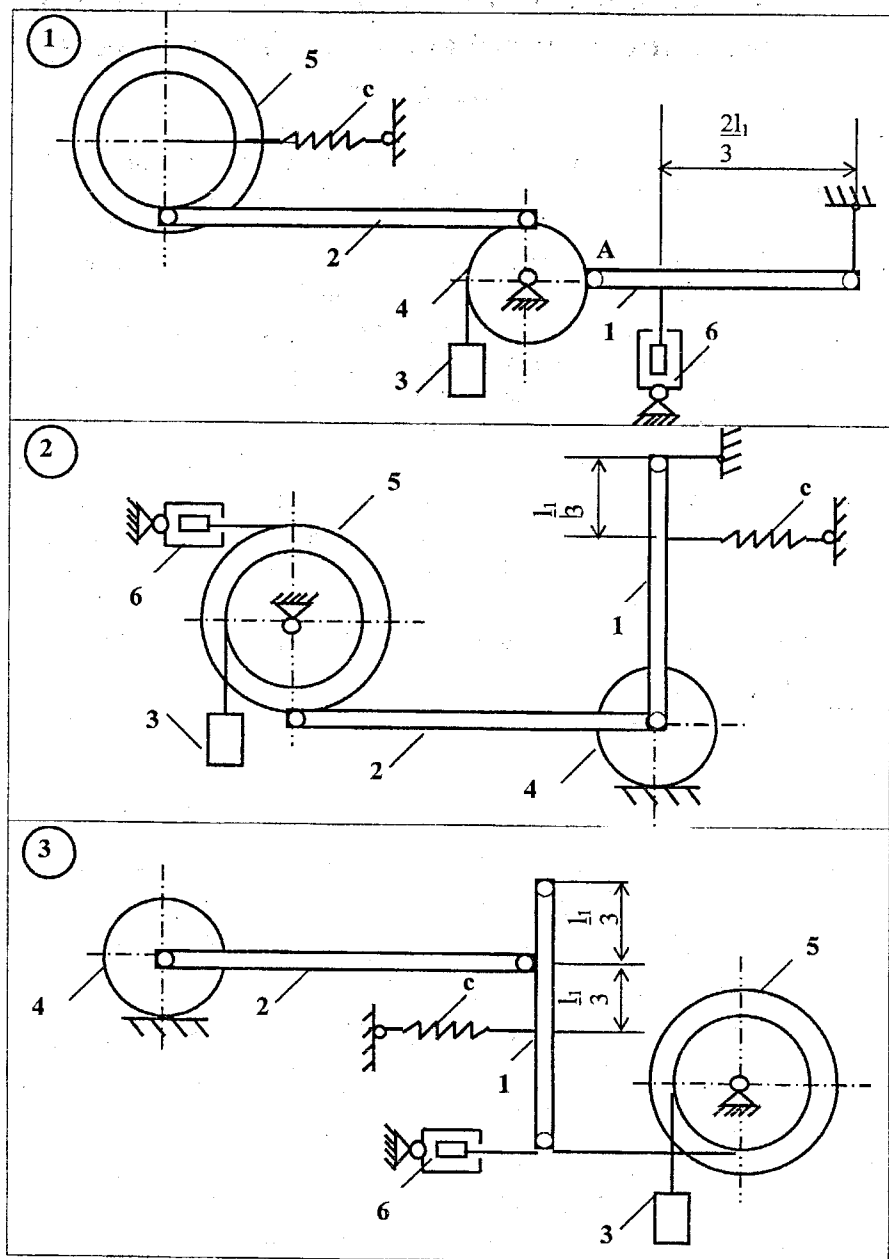


Рисунок 8.1

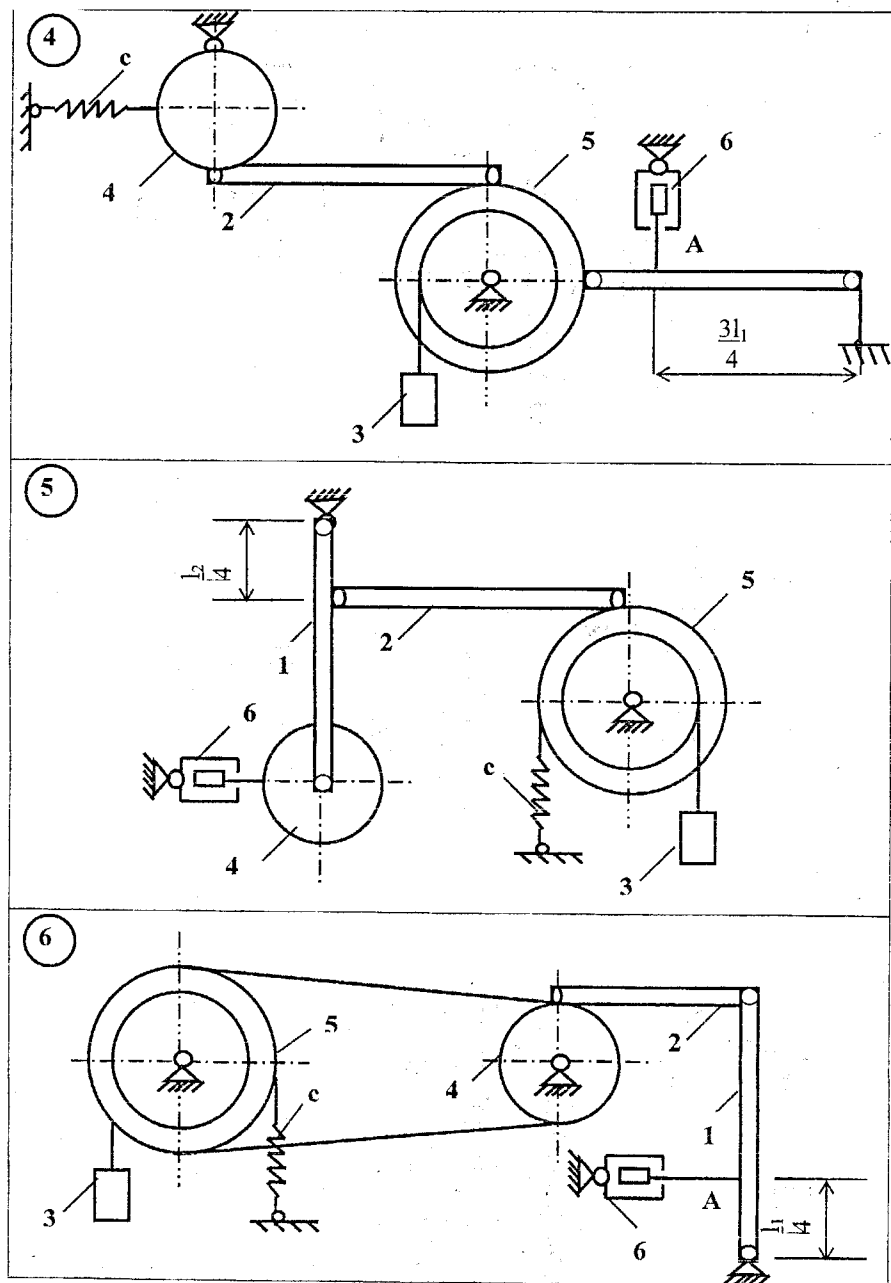
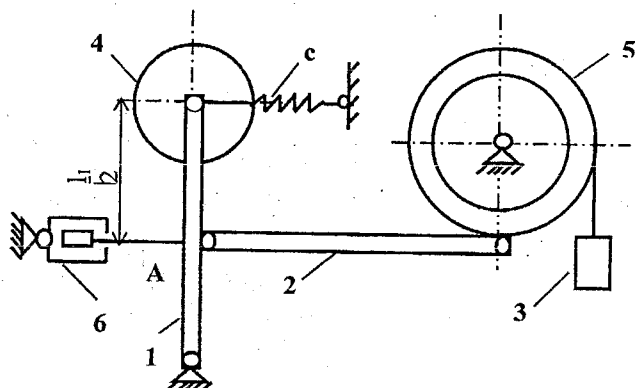
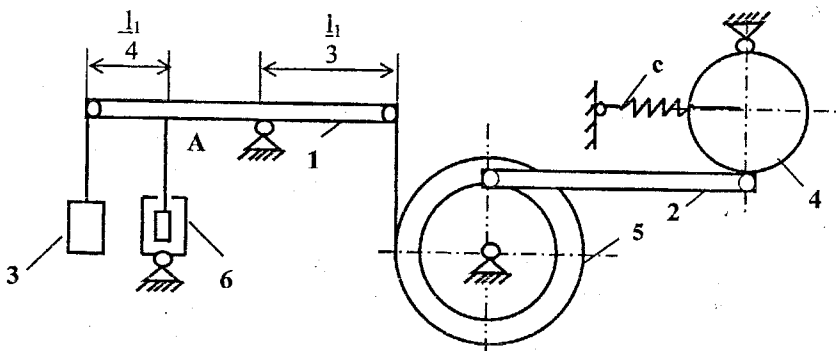


Рисунок 8.2

7



8



9

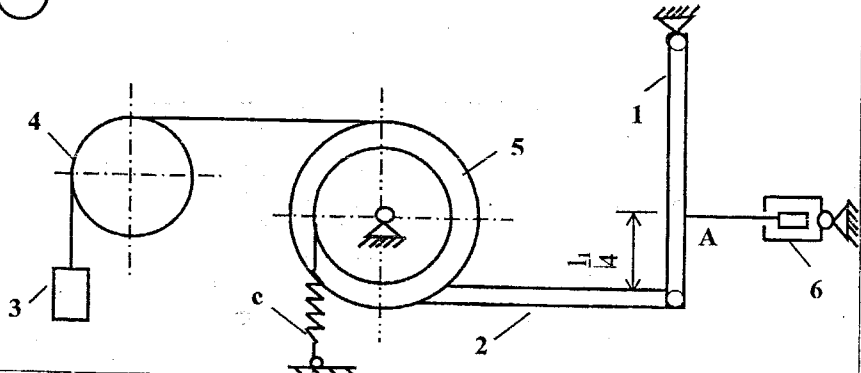
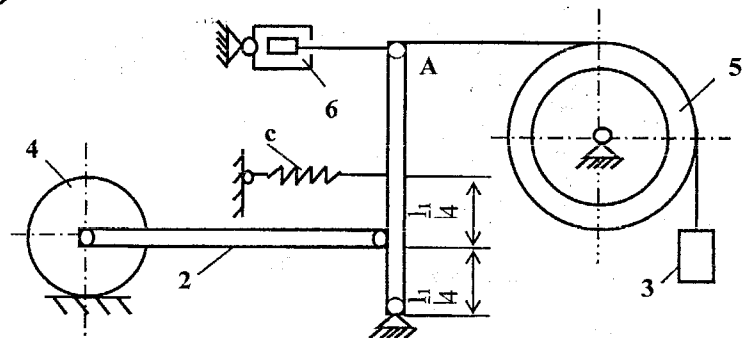
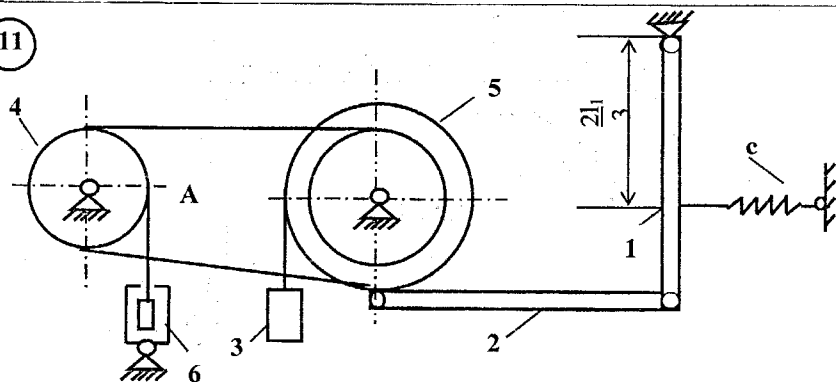


Рисунок 8.3

10



11



12

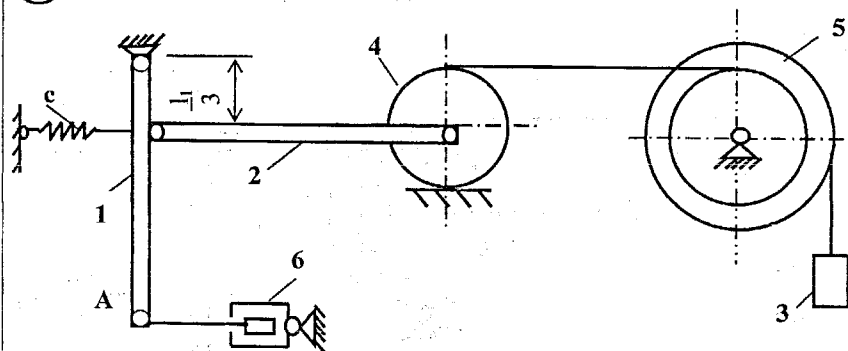


Рисунок 8.4

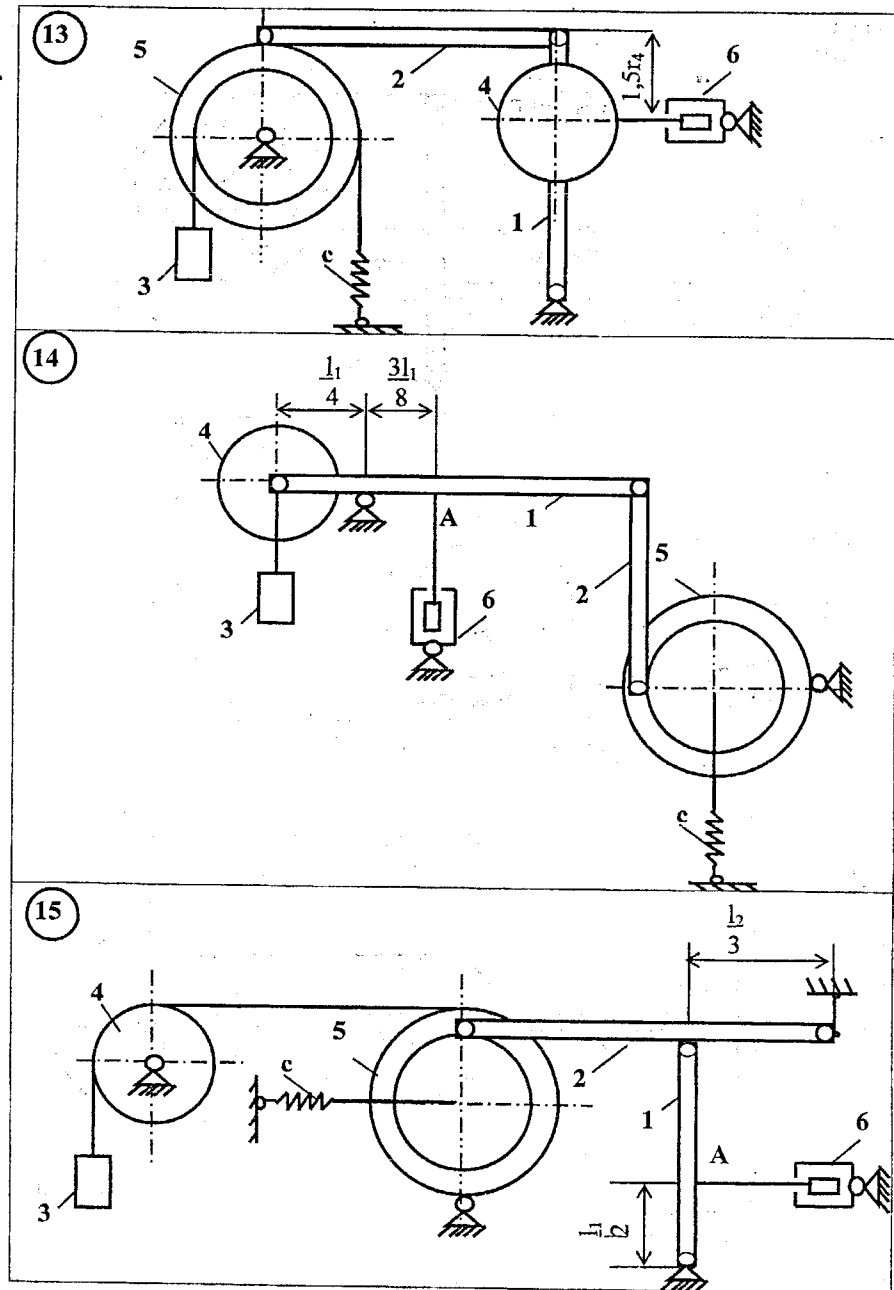


Рисунок 8.5

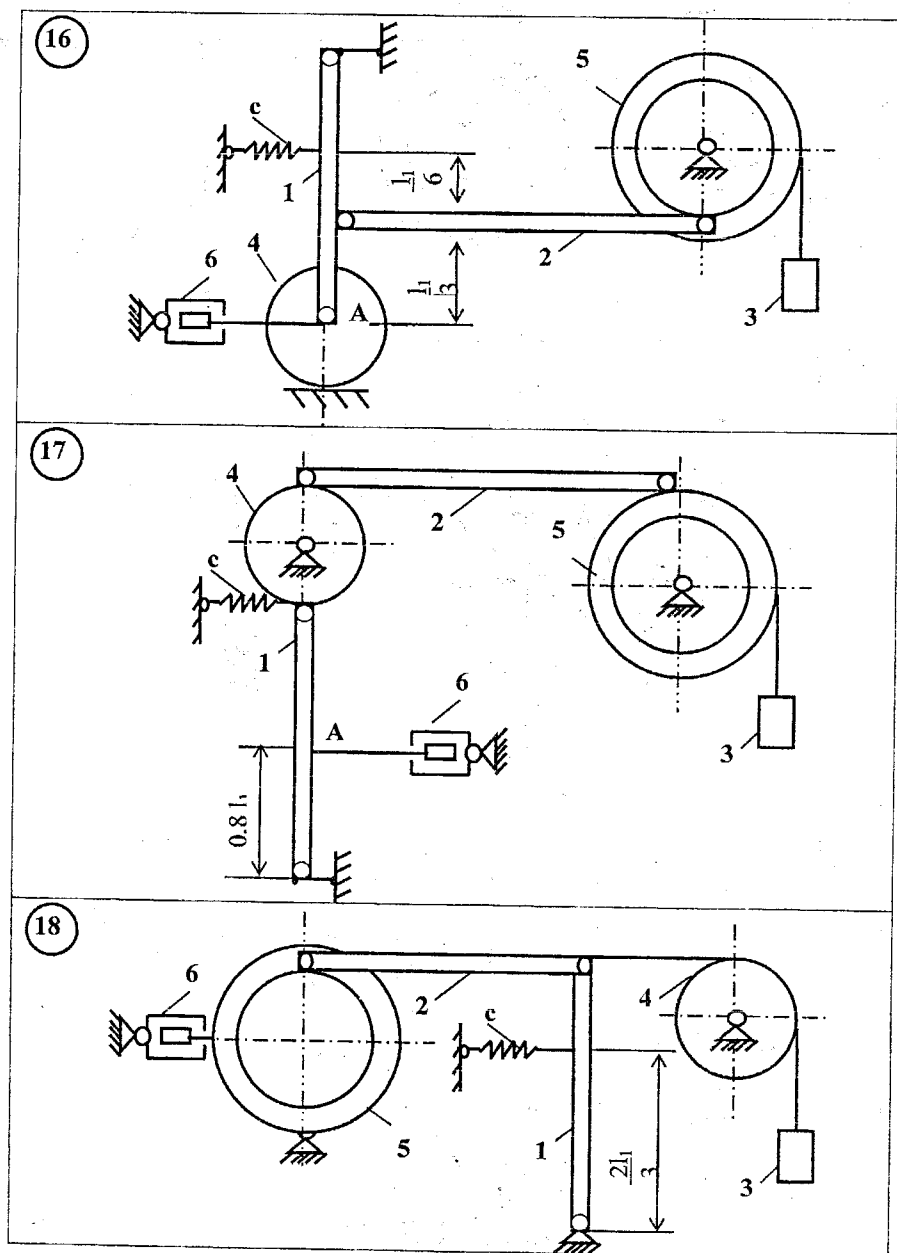


Рисунок 8.6

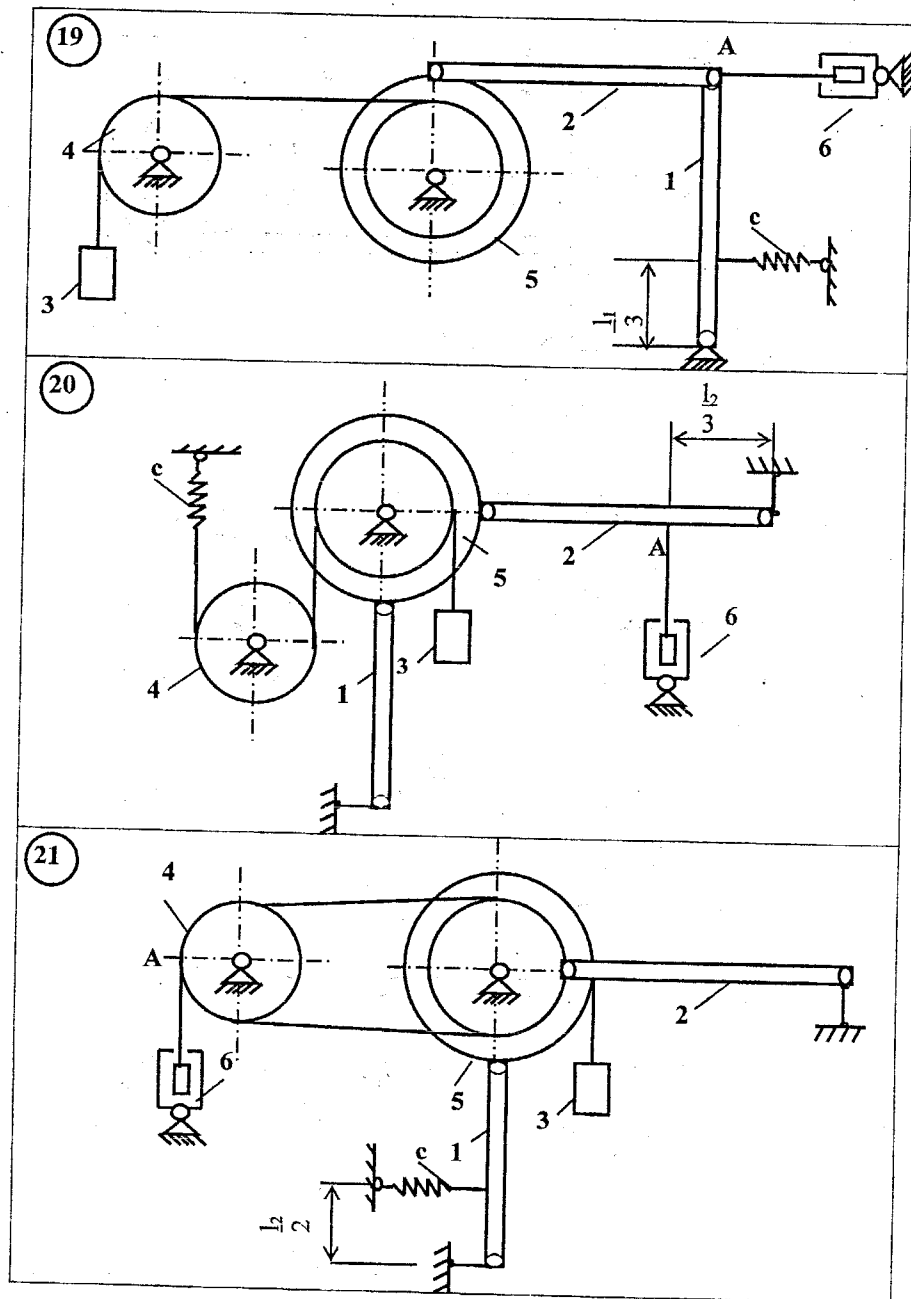


Рисунок 8.7

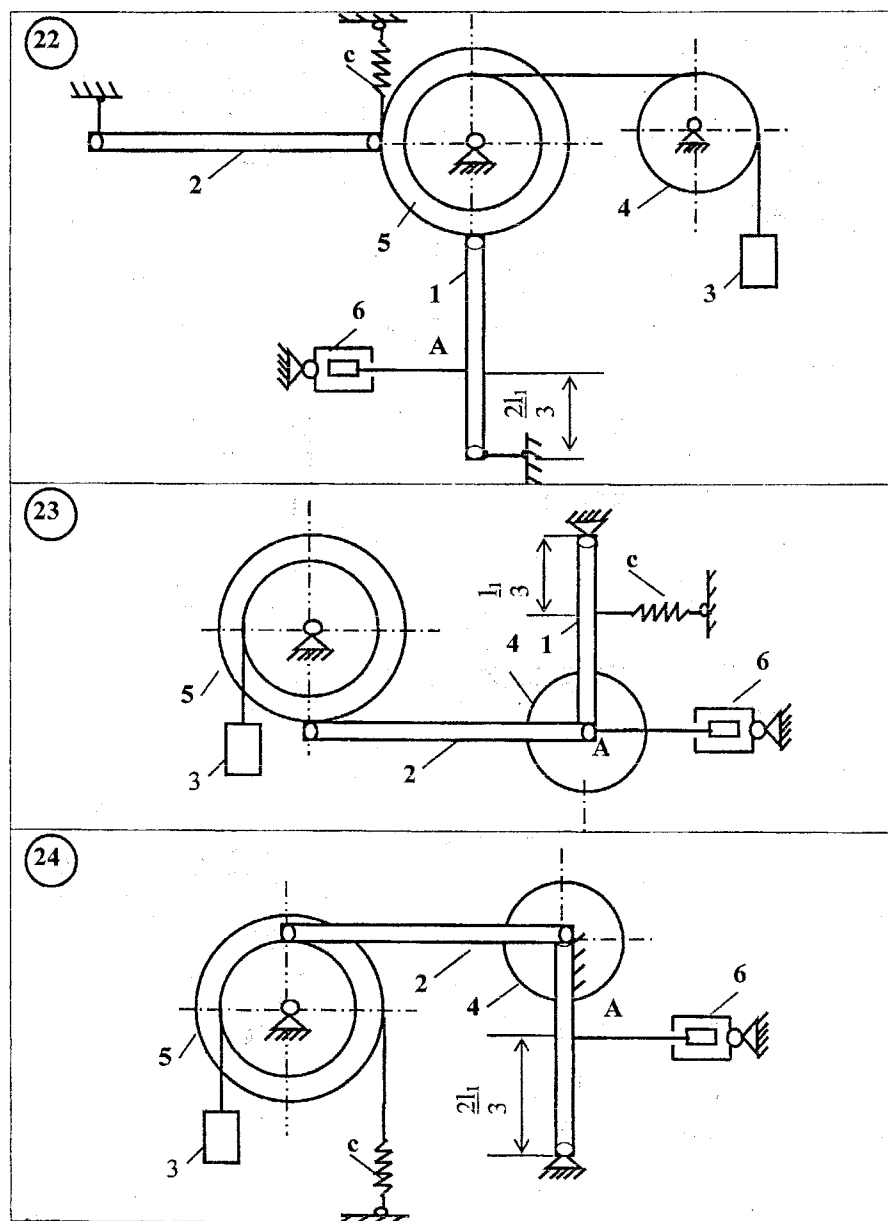
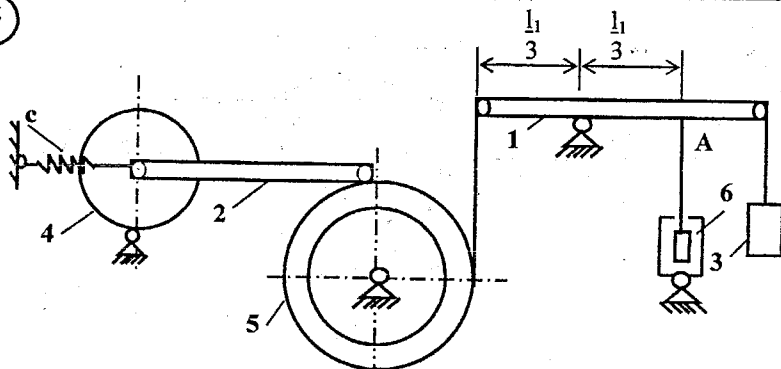
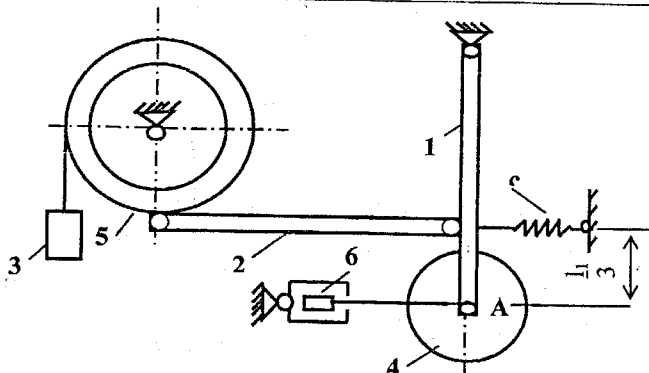


Рисунок 8.8

25



26



27

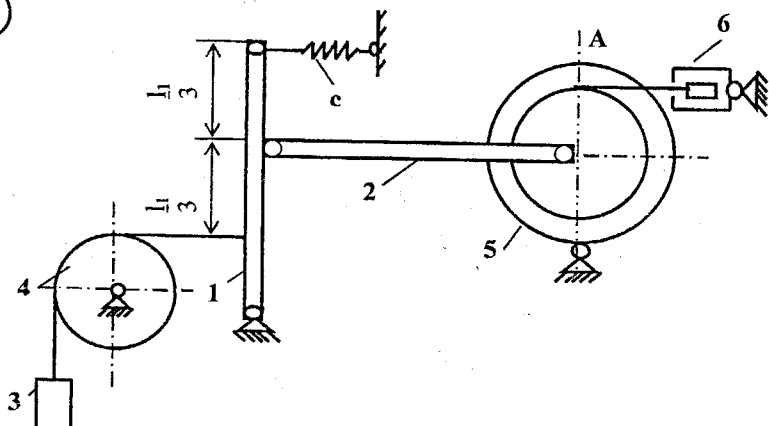


Рисунок 8.9

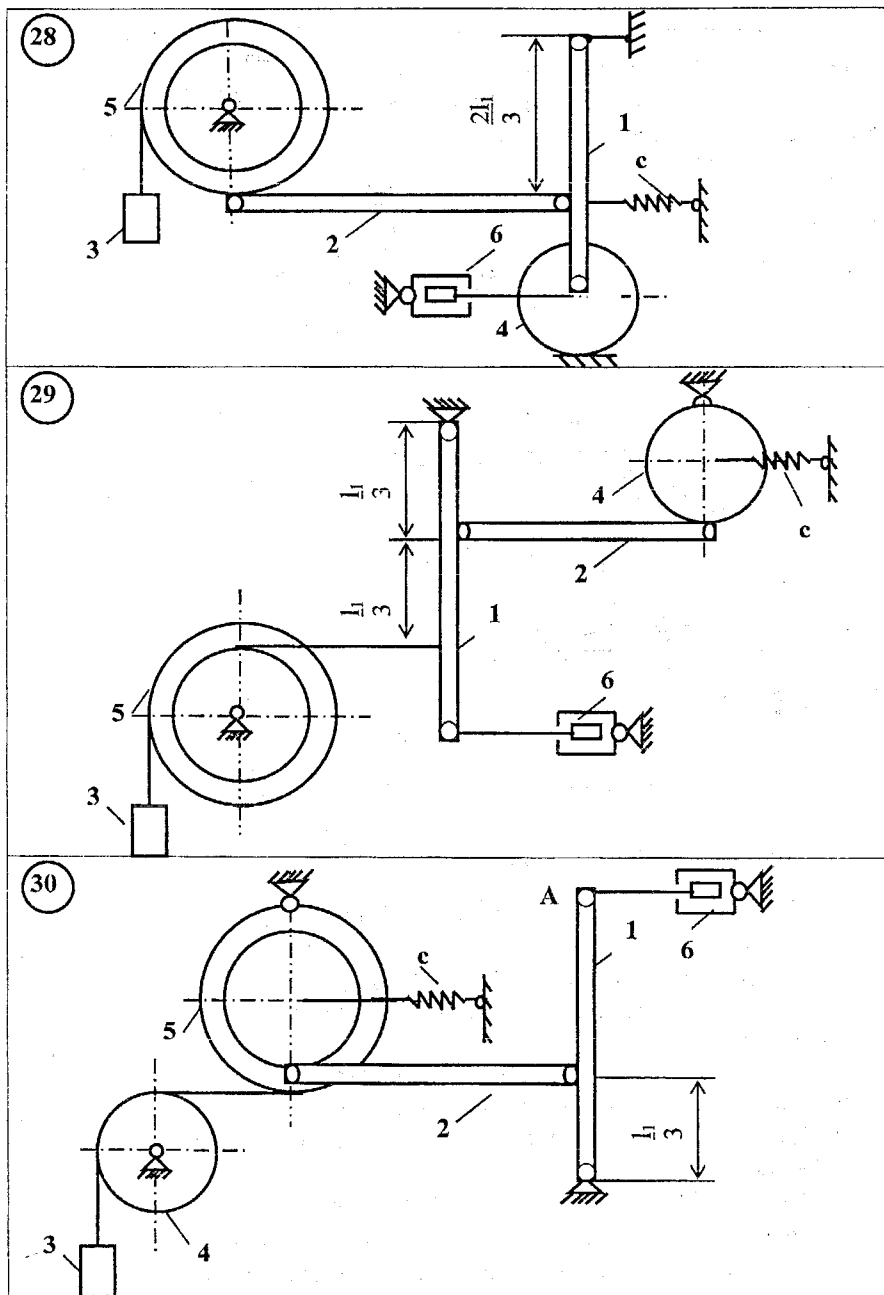


Рисунок 8.10

Приклад виконання завдання

В положенні стійкої рівноваги стержень 1 масою m_1 матеріальної системи (рис. 8.11) вертикальний, а стержень 2 масою m_2 горизонтальний. У східчастого диска 5 масою m_5 центр мас C_5 знаходиться на одній вертикальній прямій з точкою підвішування O_2 тіла.

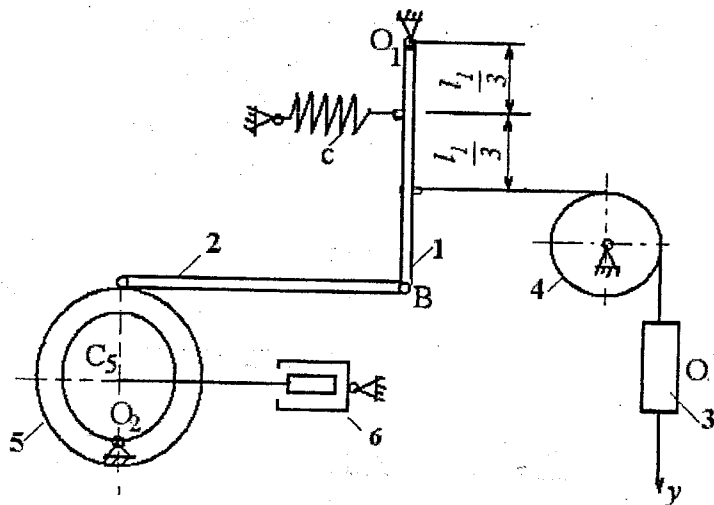


Рисунок 8.11

Тіло 3 масою m_3 зміщується в додатному напрямку осі y із спокою рівноваги на $y_0 = 0,004\text{ м}$ і одночасно йому надається швидкість $v_0 = 0,02\text{ м/с}$ вертикально вгору.

Знайти рівняння руху та побудувати графік $y = y(t)$ вантажу 3, якщо сила опору руху демпфера 3 $\bar{R} = -8 \cdot \bar{v}_{C5}$ ($\bar{v}_{C5}$ – швидкість точки переміщення демпфера до східчастого блока 5), якщо: $m_1 = 1\text{ кг}$; $m_2 = 0\text{ кг}$; $m_3 = 2\text{ кг}$; $m_4 = 2\text{ кг}$; $m_5 = 6\text{ кг}$; $l_1 = 0,6\text{ м}$; $l_2 = 0,4\text{ м}$; $R_5 = 2r_5 = 0,3\text{ м}$; $i_5 = 0,2\text{ м}$; $C = 800\text{ Н/м}$.

За початок відліку координати y прийняти положення спокою тіла 3 (при статичній деформації пружини жорсткістю C). Вважати, що тіло 2 переміщується поступально при малих відхиленнях тіла 3 від положення стійкої рівноваги.

Масою пружини, демпфера 6 та троса знехтувати.

Розв'язання. Будемо досліджувати рух матеріальної системи (рис. 8.12), застосовуючи диференціальне рівняння Лагранжа другого роду.

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}}, \quad (8.1)$$

де T – кінетична енергія системи;

Π – потенціальна енергія;

Φ – дисипативна функція Релея;

y — узагальнена координата;

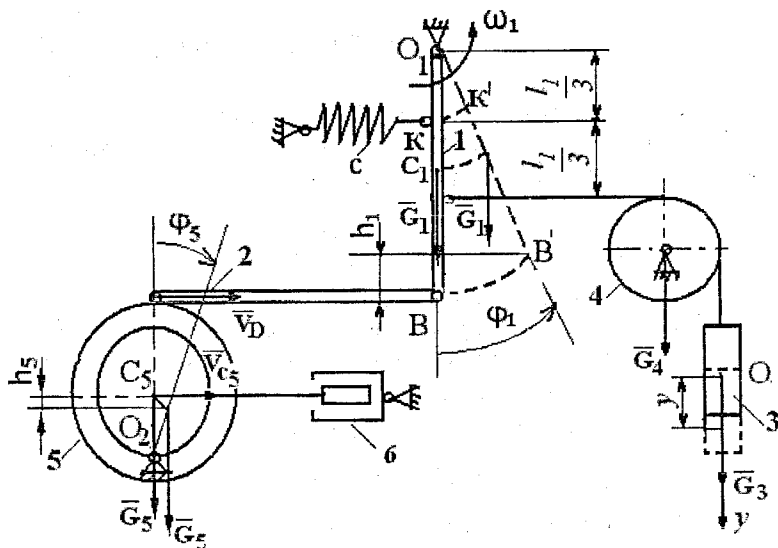
 $\dot{y}$ - узагальнена швидкість.

Рисунок 8.12

Кінетична енергія системи:

$$T = T_1 + T_3 + T_4 + T_5, \quad (8.2)$$

$$\text{де } T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2; T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2; T_4 = \frac{1}{2} I_4 \omega_4^2; T_5 = \frac{1}{2} I_5 \omega_5^2.$$

Знайдемо швидкості точок тіл $\bar{V}_3$, $\bar{V}_{C5}$ та кутові швидкості тіл ω_4 , ω_1 , ω_5 через узагальнену швидкість $\dot{y}$ (рис.8.12).

$$V_3 = \dot{y}, \quad \omega_4 = \frac{\dot{y}}{R_4}, \quad \omega_1 = \frac{3\dot{y}}{2l_1}, \quad V_D = V_B = \omega_1 l_1 = \frac{3\dot{y}_1}{2},$$

$$\omega_5 = \frac{V_D}{R_5 + r_5} = \frac{3\dot{y}}{2(R_5 + r_5)}, \quad V_{C5} = \omega_5 R_5 = \frac{3\dot{y} \cdot r_5}{2(R_5 + r_5)}.$$

Момент інерції тіл 1, 4:

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2, \quad I_4 = \frac{1}{2} m_4 R_4^2$$

Момент інерції тіла 5 відносно головної осі, що проходить через точку O_2 .

$$I_5 = I_{C5} + m_5 (OC)^2 = m_5 i_{C5}^2 + m_5 r_5^2.$$

Таким чином кінетична енергія системи (8.2) запишеться у вигляді:

$$T = \frac{\dot{y}^2}{8} \cdot \left(3m_1 + 4m_3 + 2m_4 + 9m_5 \frac{r_5^2 + i_{C5}^2}{(R_5 + r_5)^2} \right). \quad (8.3)$$

Визначимо потенціальну енергію вважаючи, що в положенні стійкої рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю, а центр мас тіла 3 перемістився на величину y (рис.8.12).

$$\Pi = -G_3 y + G_1 \frac{h_1}{2} - G_5 h_5 + \frac{1}{2} c (\lambda_{ст} + \lambda_K)^2 - \frac{1}{2} c \lambda_{ст}^2, \quad (8.4)$$

де h_1 – вертикальне переміщення точки В стержня 1;

h_5 – вертикальне переміщення центра мас C_5 тіла 5;

$\lambda_{ст}$ – статична деформація пружини в положенні стійкої рівноваги матеріальної системи;

λ_K – переміщення точки К пружини ($\lambda_K \cong KK_1$);

$$G_1 = m_1 g, \quad G_3 = m_3 g, \quad G_5 = m_5 g, \quad KK_1 = \frac{1}{2} y.$$

З рис. 8.12 з точністю до величини другого порядку малих знаходимо:

$$h_1 = l_1 (1 - \cos \varphi_1) \cong \frac{l_1}{2} \varphi_1^2 = \frac{9y^2}{8l_1},$$

$$h_5 = (R_5 + r_5) (1 - \cos \varphi_5) \cong \frac{l_1}{2} (R_5 + r_5) \varphi_5^2 = \frac{9y^2}{8(R_5 + r_5)},$$

$$\text{де } \varphi_1 = \frac{3y}{2l_1}, \quad \varphi_5 = \frac{3y}{2(R_5 + r_5)}.$$

Таким чином потенціальну енергію визначимо за формулою

$$\Pi = -m_3 g y + \frac{9m_1 g y^2}{16l_1} - \frac{9m_2 g y^2}{8(R_5 + r_5)} + \frac{1}{2} c \lambda_{ст} + \frac{1}{8} c y^2. \quad (8.5)$$

У положенні статичної рівноваги

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad -m_3 g + \frac{1}{2} c \lambda_{cr} = 0.$$

Тоді формула (8.5) запишеться:

$$\Pi = \frac{y^2}{8} \left(9m_1 g \left(\frac{1}{2l_1} + \frac{1}{R_5 + r_5} \right) + c \right). \quad (8.6)$$

Дисипативна функція Релея:

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot 8V_{C5}^2 = 9 \frac{r_5^2 \cdot \dot{y}^2}{(R_5 + r_5)^2}. \quad (8.7)$$

Визначаємо частинні похідні, що входять в рівняння (8.1).

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = \frac{\dot{y}}{4} \left(3m_1 + 4m_3 + 2m_4 + 9m_5 \frac{i_5^2 + r_5^2}{(R_5 + r_5)^2} \right).$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{y}{4} \left(c + 9m_1 g \left(\frac{1}{2l_1} - \frac{1}{R_5 + r_5} \right) \right). \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} = 18 \frac{\dot{y} \cdot r_5^2}{(R_5 + r_5)^2}.$$

І диференціальне рівняння Лагранжа другого роду (8.1) набуває вигляду:

$$\frac{\ddot{y}}{4} \left(3m_1 + 4m_3 + 2m_4 + 9m_5 \frac{i_5^2 + r_5^2}{(R_5 + r_5)^2} \right) - \frac{18r_5^2}{(R_5 + r_5)^2} \dot{y} - \frac{1}{4} \left(c + 9m_1 g \left(\frac{1}{2l_1} - \frac{1}{R_5 + r_5} \right) \right) y = 0.$$

$$\text{Або} \quad \ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = 0, \quad (8.9)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{a}{\beta}, \quad 2n = \frac{b}{\beta}, \quad a = \frac{1}{4} \left(c + 9m_1 g \left(\frac{1}{2l_1} - \frac{1}{R_5 + r_5} \right) \right), \quad b = 18 \frac{r_5^2}{(R_5 + r_5)^2},$$

$$\beta = \frac{1}{4} \left(3m_1 + 4m_3 + 2m_4 + 9m_5 \frac{i_5^2 + r_5^2}{(R_5 + r_5)^2} \right).$$

Підставляючи дані умови задачі визначаємо:

$$k = 15,77 \frac{1}{c}, \quad n = 0,126 \frac{1}{c}.$$

Оскільки $k > n$, то маємо згасаючі коливання і розв'язок однорідного диференціального рівняння (8.9) запишеться у вигляді:

$$y = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t), \quad (8.10)$$

$$\text{де } k^* = \sqrt{k^2 - n^2} = 15,769 \frac{1}{\text{с}},$$

C_1, C_2 – постійні інтегрування, які визначаються із початкових умов: при $t=0, y_0 = 0,004\text{м}, \dot{y}_0 = -0,02\frac{\text{м}}{\text{с}}$. (8.11)

З рівняння (8.10) знаходимо узагальнену швидкість $\dot{y}$.

$$\dot{y} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k^*t + C_2 \sin k^*t) + k^*e^{-nt}(C_2 \cos k^*t - C_1 \sin k^*t). \quad (8.12)$$

За умов (8.11) із рівнянь (8.10) та (8.12) визначаємо

$$C_1 = 0,004\text{м},$$

$$C_2 = -0,0013\text{м}.$$

Запишемо рівняння (8.10) руху тіла 3.

$$y = e^{-0,126t}(0,004\cos(15,769t) - 0,0013\sin(15,769t)).$$

Будуємо графіку $y = y(t)$ руху вантажу 3 при $t \geq 3T$ (T – період згасаючих коливань $T = \frac{2\pi}{k^*} = 0,398\text{с}$).

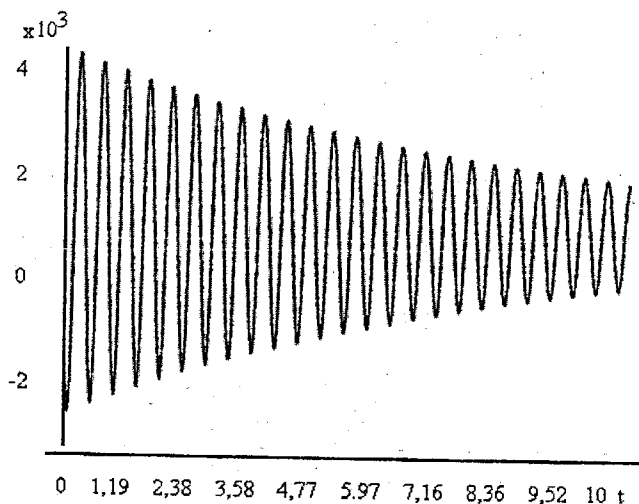


Рисунок 8.13

Відповідь: $y = e^{-0,126t}(0,004\cos(15,769t) - 0,0013\sin(15,769t))$ м.

9 ЗМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ СЕРЕДОВИЩА

Матеріальна система (рис.9.1 – 9.10) перебуває в положенні стійкої рівноваги (при статичній деформації пружини жорсткістю C).

Знайти рівняння руху та побудувати графік $y = y(t)$ вантажу 3, якщо при наданні тілу 3 збурень $y_0, \dot{y}_0$, на тіло 5 діє збурювальний момент $M = M_0 \sin pt$. Тіло 3 переміщується поступально. Сила опору руху $\bar{R} = -\alpha \cdot \bar{v}$ (v – швидкість точки А демпфера 6, α – коефіцієнт пропорційності). За початок відліку координати y (направлена по вертикалі вниз) взяти положення спокою тіла 3.

Дані для розрахунків наведені в табл. 9.1, але на схемах 1 – 4, 6, 7, 9 – 30 (рис.9.1 – 9.10) прийняти $m_2 = 0$.

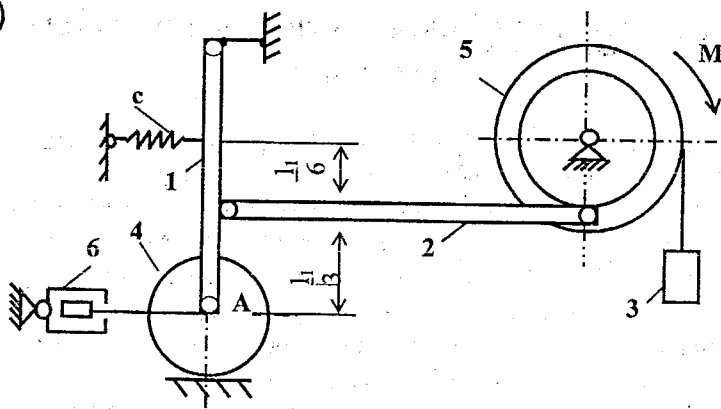
Прийняті позначення: m_i – маса тіла ($i = 1 - 5$); l_1, l_2 – довжина однорідних стержнів 1 та 2; r_4 – радіус однорідного диска 4; R_5, r_5 – розміри східчастого диска 5; C – жорсткість пружини; y_0 – початкове відхилення тіла 3 по вертикалі від положення спокою; $\dot{y}_0$ – проекція початкової швидкості тіла 3 на вісь y .

Масою пружини, демпфера та троса знехтувати.

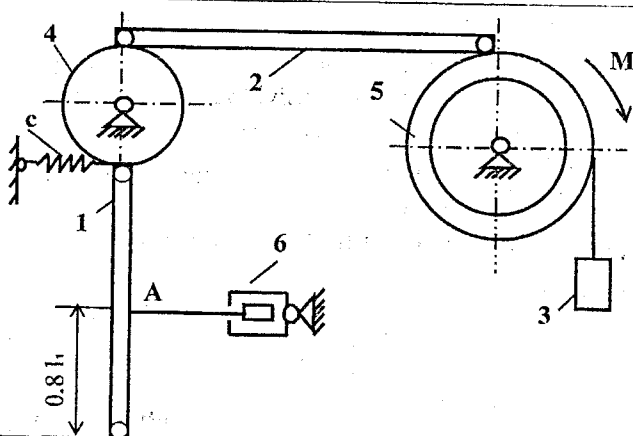
Таблиця 9.1

Вариант	m	m	m	m	m	l_1	l_2	r_4	r_5	R_5	i_5	α	M_0	p	C	y_0	$\dot{y}_0$		
	1	2	3	4	5	кг						м			кг/с	Нм	с ⁻¹	Н/м	м
1	2	3	1	4	1	0,6	0,3	0,1	0,2	0,4	0,3	200	0,02	20	4000	-0,002	0,05		
2	1	2	2	3	2	0,9	0,6	0,2	0,1	0,2	0,15	150	0,03	15	3000	0,005	-0,06		
3	2	3	1	4	3	0,3	0,9	0,1	0,2	0,4	0,3	90	0,04	10	5000	-0,008	0,01		
4	1	2	2	3	1	0,3	0,9	0,1	0,1	0,2	0,15	50	0,05	5	6000	0,005	0,06		
5	2	3	1	4	2	0,6	0,3	0,2	0,2	0,4	0,3	250	0,02	20	3000	0,006	-0,04		
6	1	2	2	3	3	0,9	0,6	0,2	0,1	0,2	0,15	200	0,03	15	4000	0,008	0,03		
7	2	3	1	4	1	0,9	0,3	0,1	0,2	0,4	0,3	150	0,04	10	5000	0,007	-0,04		
8	1	2	2	3	2	0,6	0,9	0,2	0,1	0,2	0,15	90	0,05	5	6000	0,005	0,02		
9	2	3	1	4	3	0,3	0,6	0,1	0,2	0,4	0,3	50	0,02	25	5000	-0,01	0,01		
0	1	2	2	3	1	0,9	0,3	0,1	0,1	0,2	0,15	250	0,03	20	6000	0,008	-0,03		

1



2



3

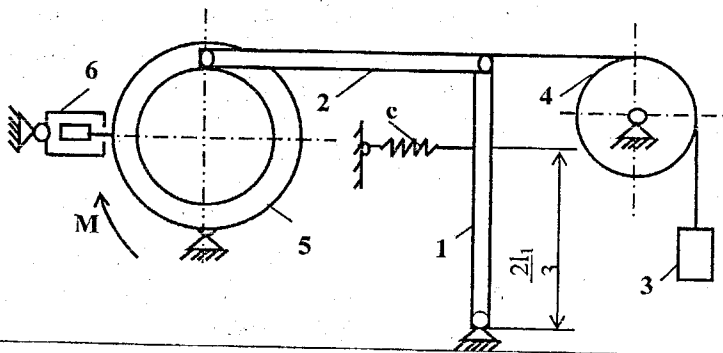


Рисунок 9.1

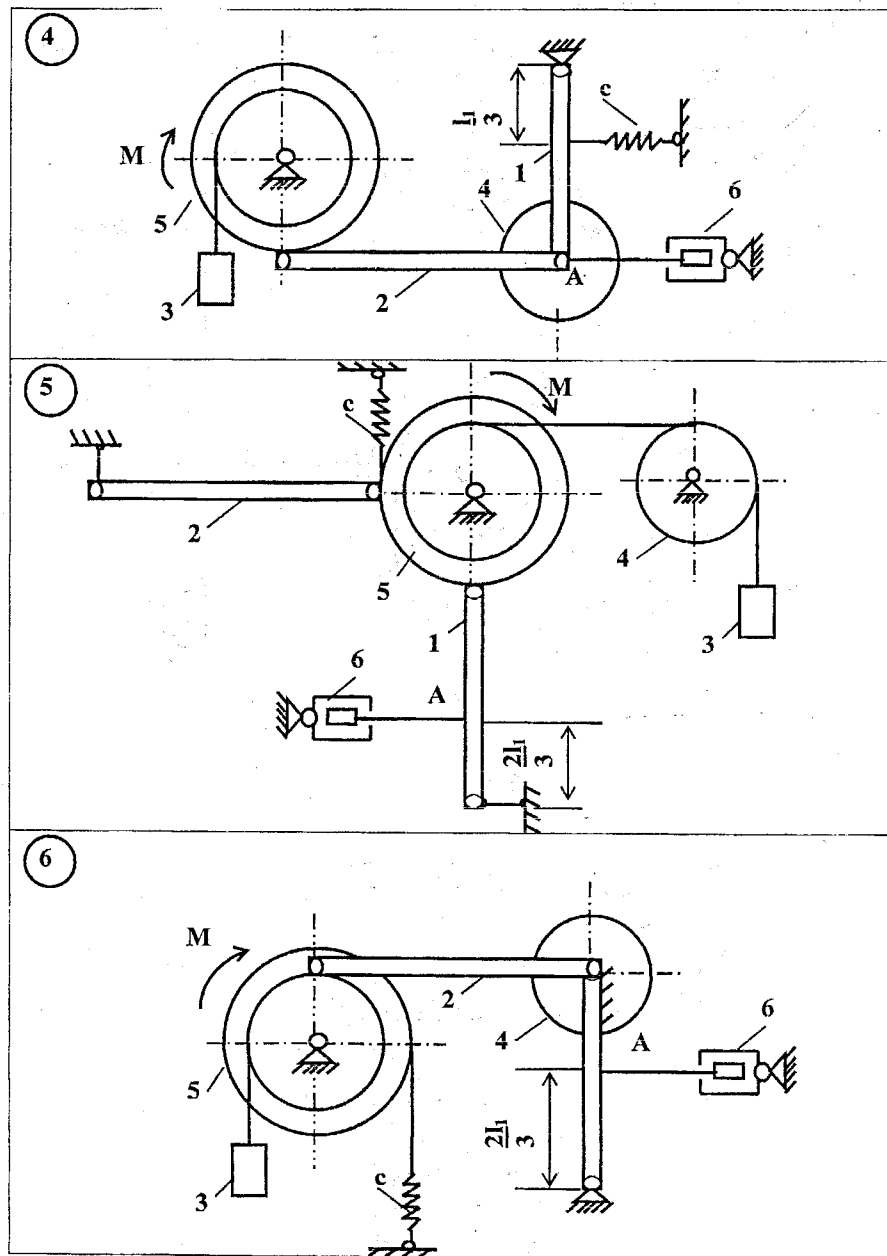


Рисунок 9.2

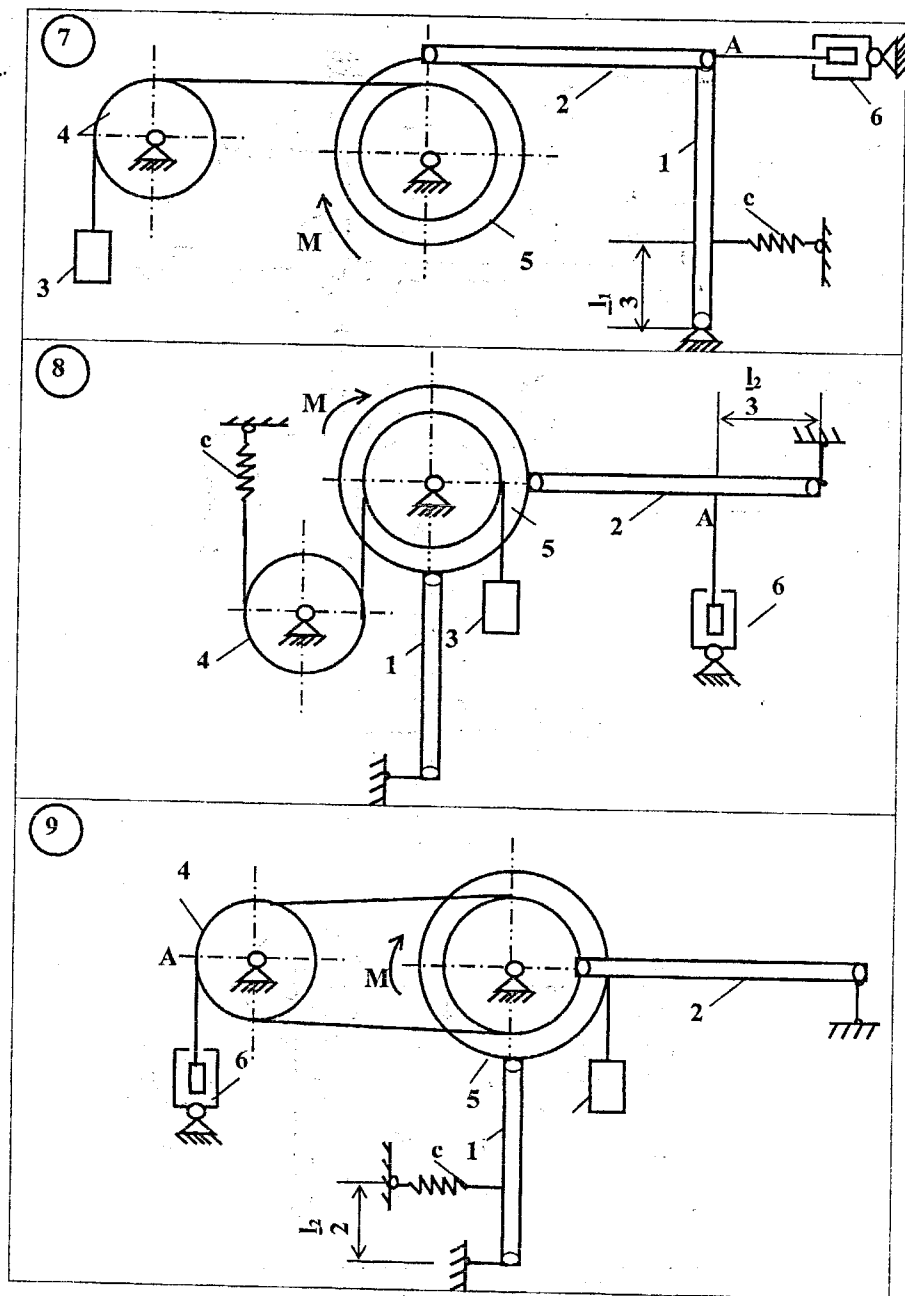


Рисунок 9.3

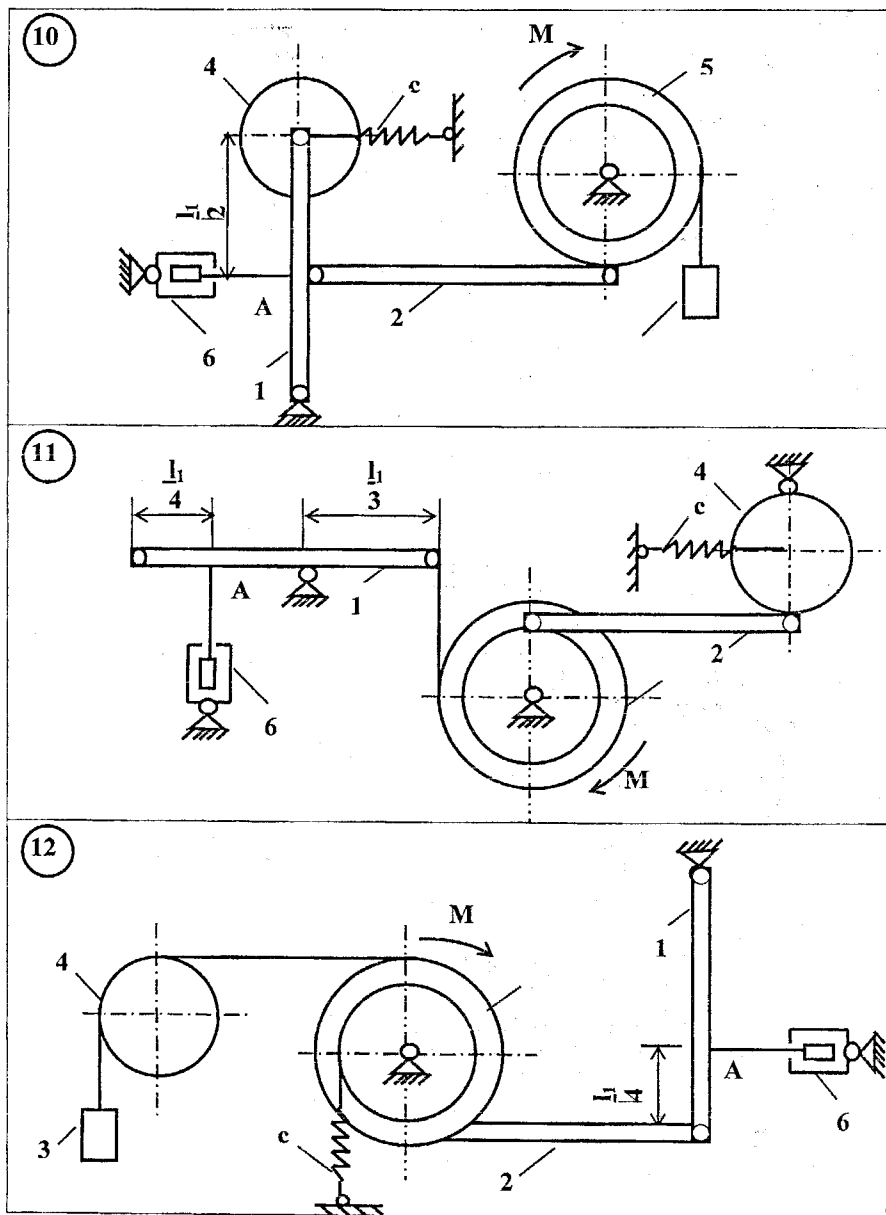


Рисунок 9.4

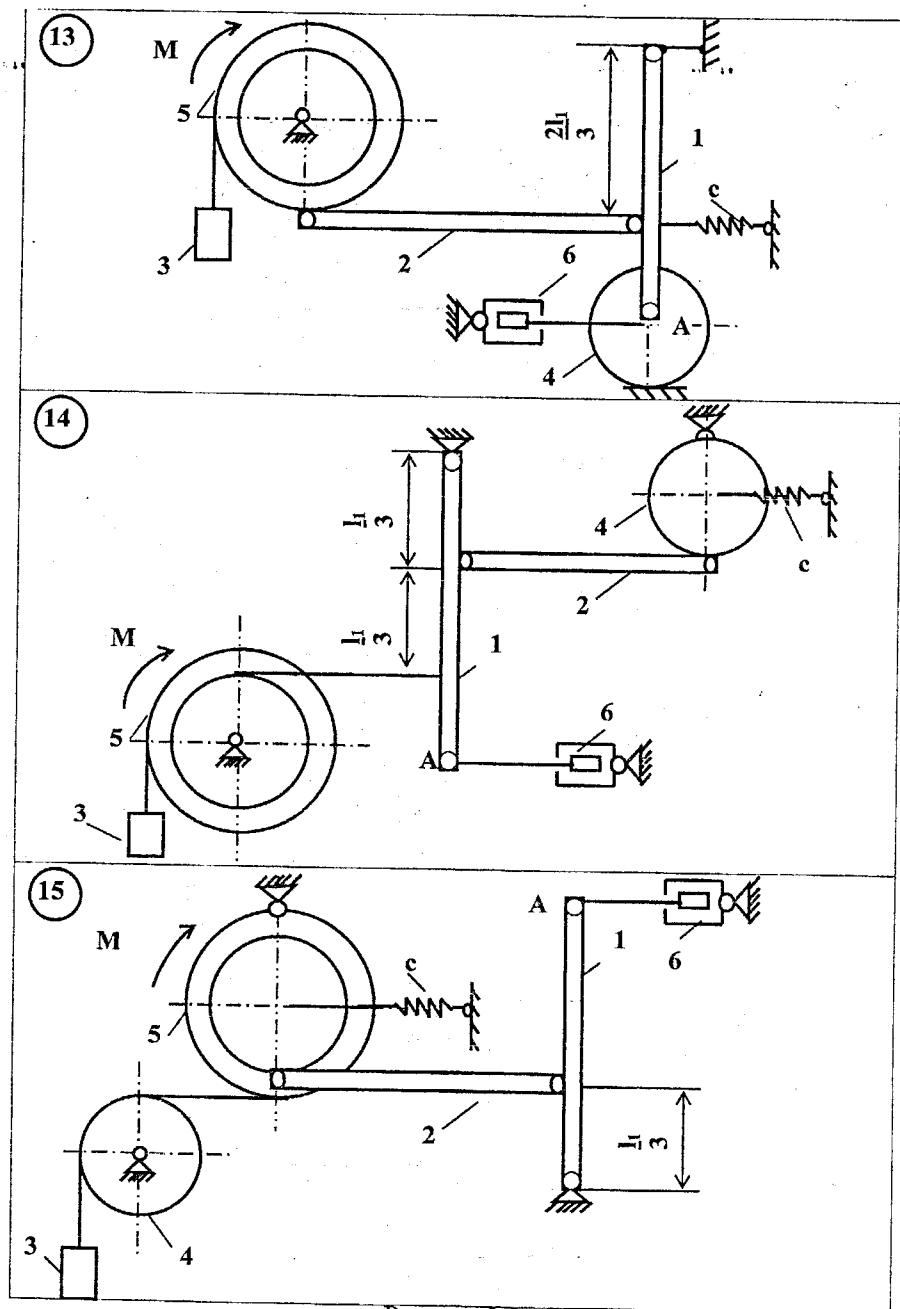


Рисунок 9.5

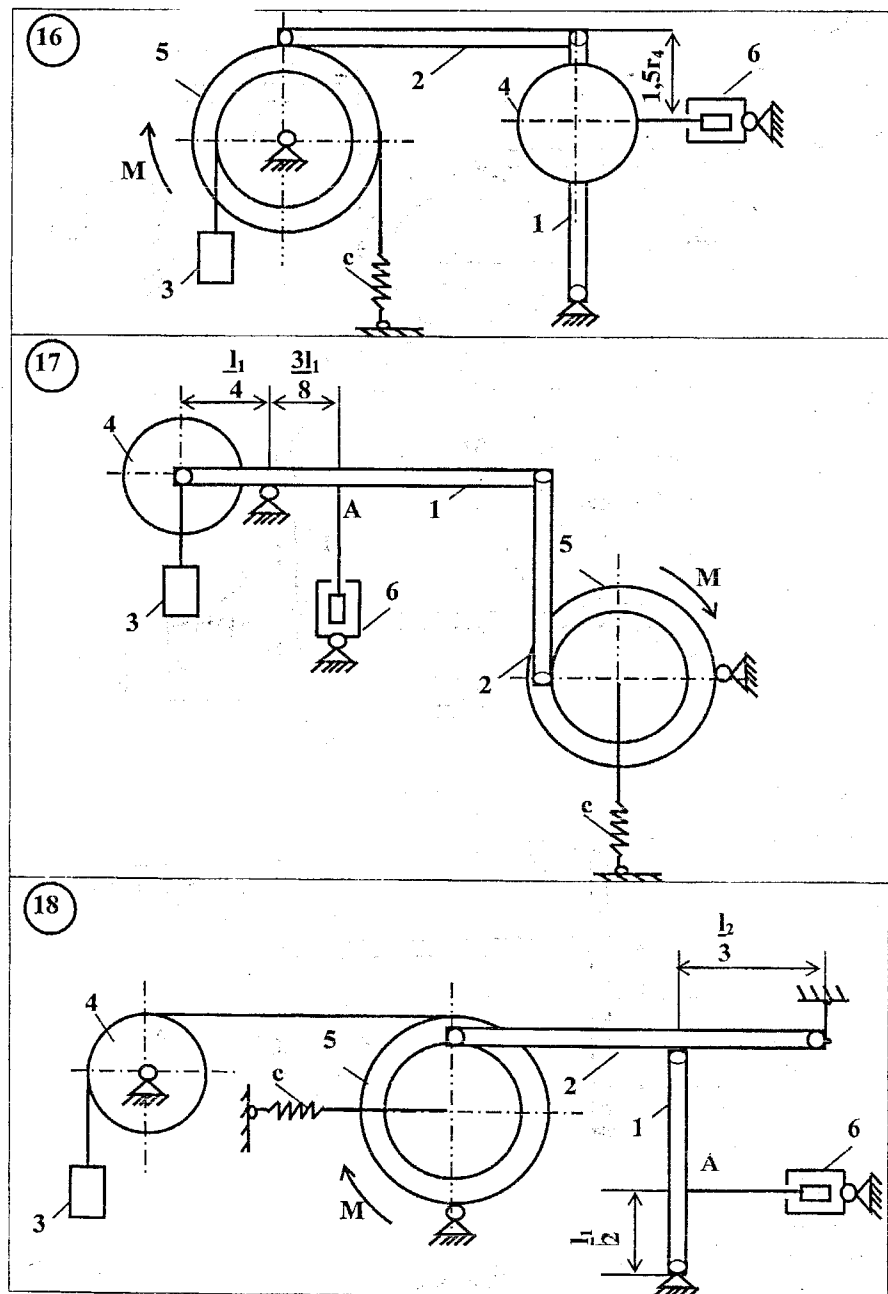
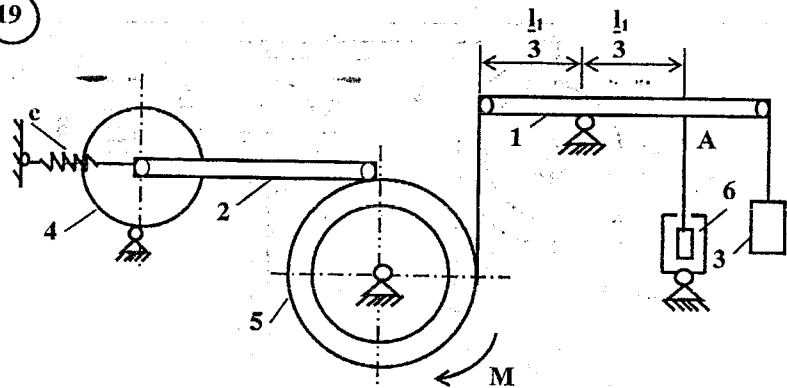
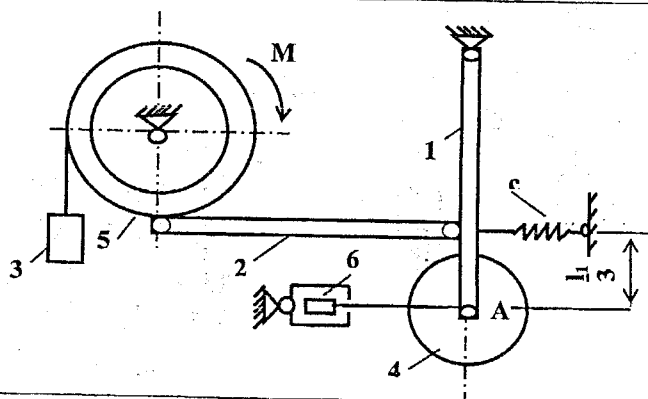


Рисунок 9.6

19



20



21

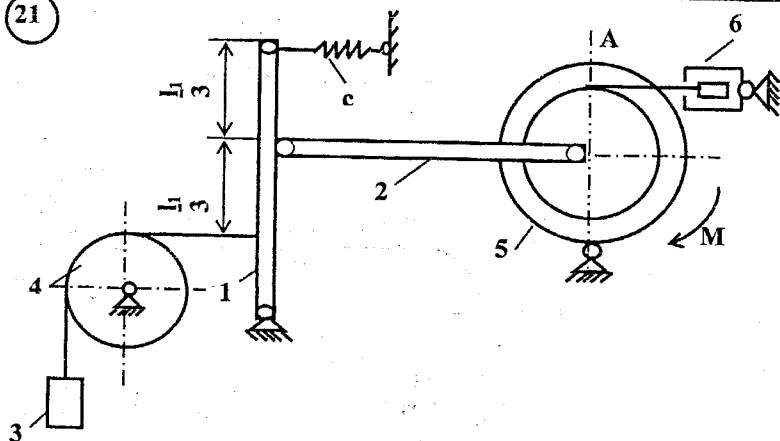


Рисунок 9.7

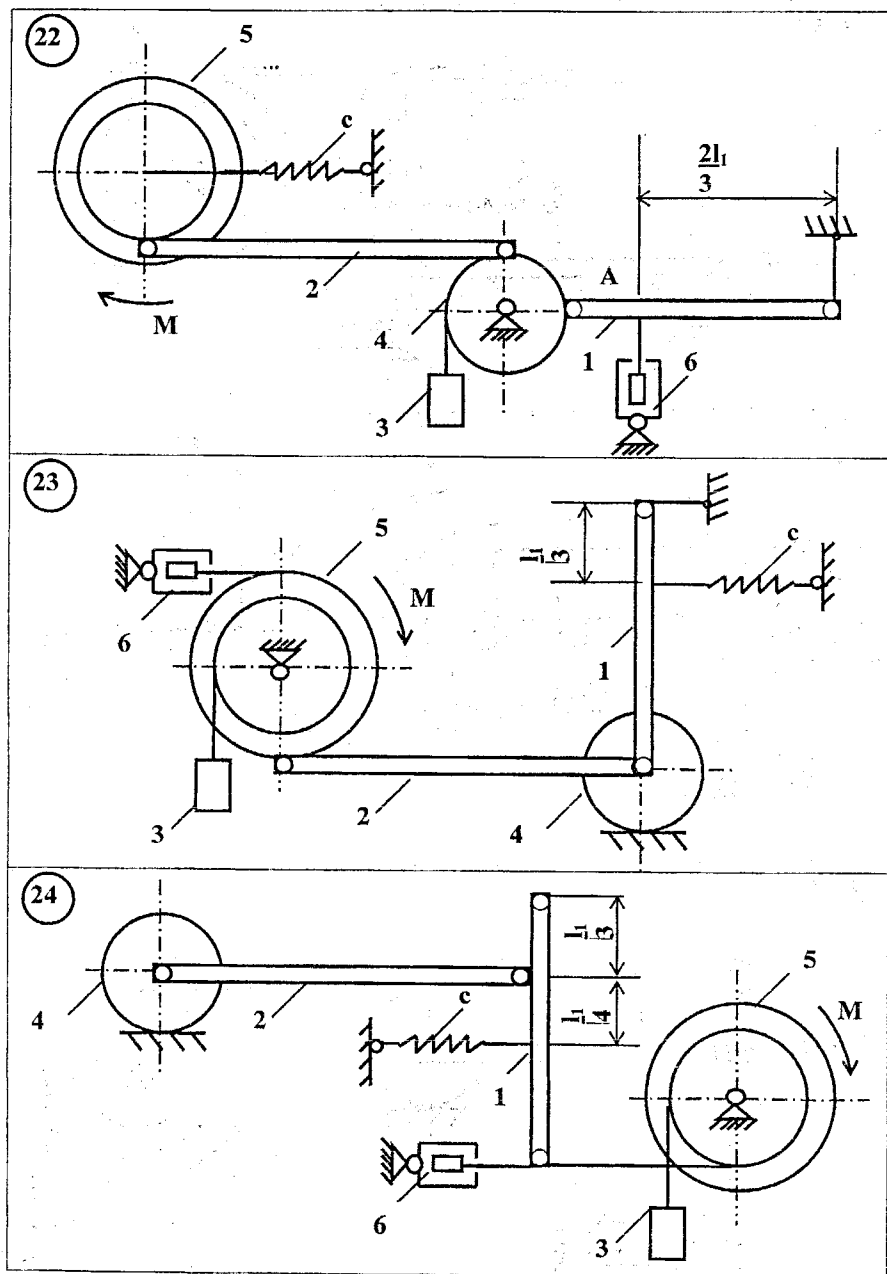
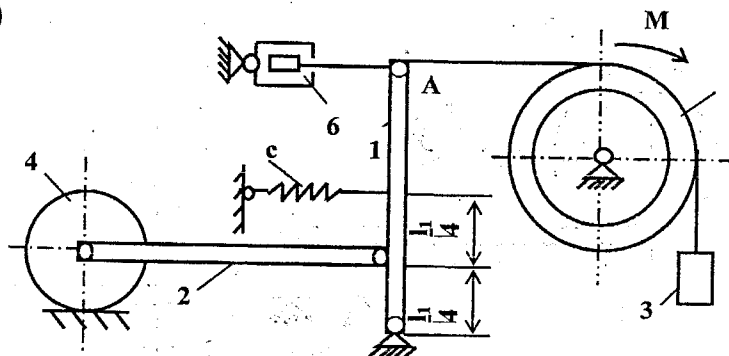
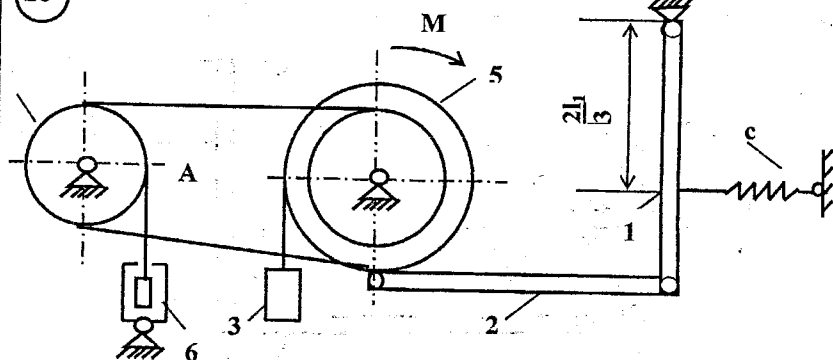


Рисунок 9.8

25



26



27

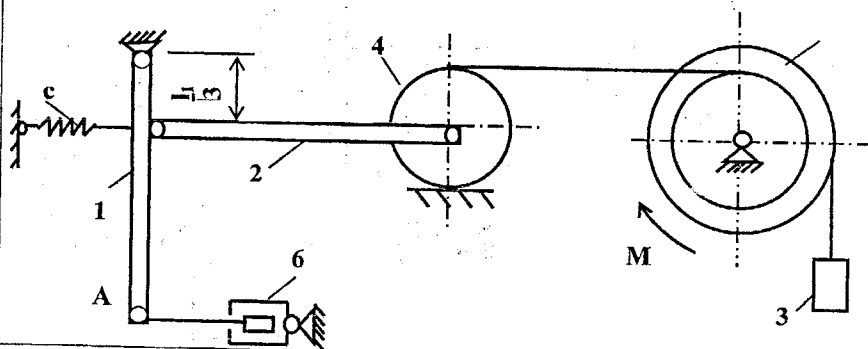


Рисунок 9.9

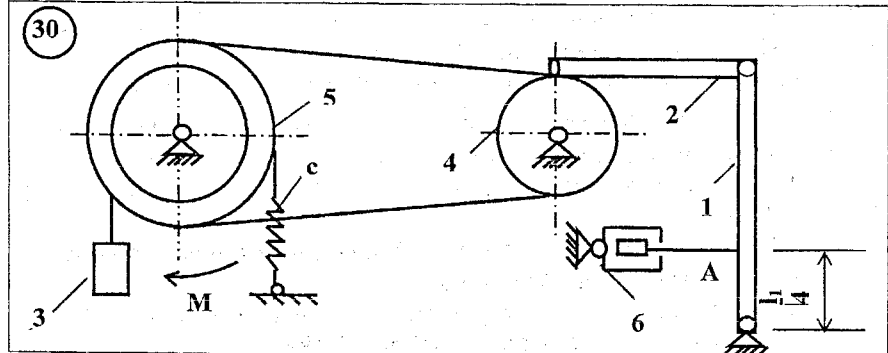
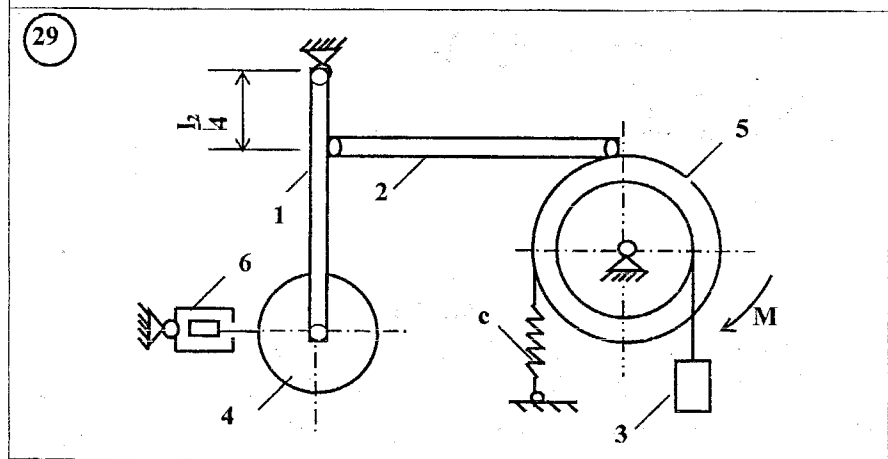
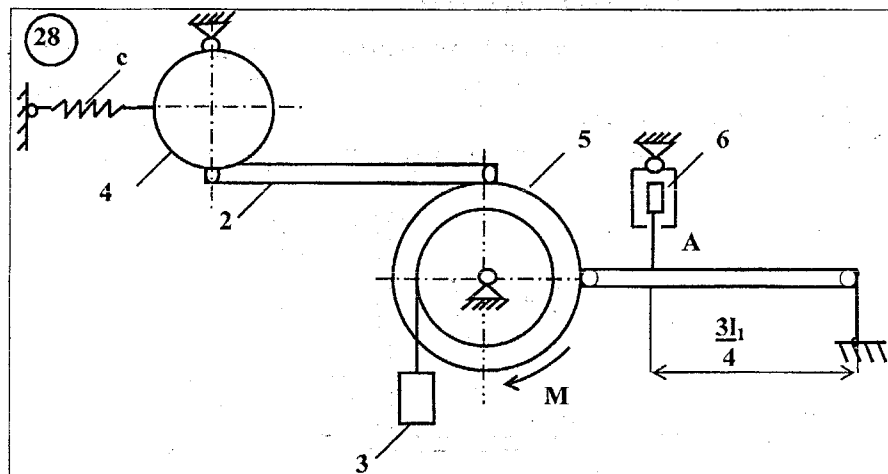


Рисунок 9.10

Приклад виконання завдання

В положенні стійкої рівноваги стержень 1 масою m_1 матеріальної системи (рис. 9.11) вертикальний, а стержень 2 масою m_2 — горизонтальний. У східчастого диска 5 масою m_5 центр мас C_5 знаходиться на одній вертикальній прямій з точкою підвішування O_2 тіла.

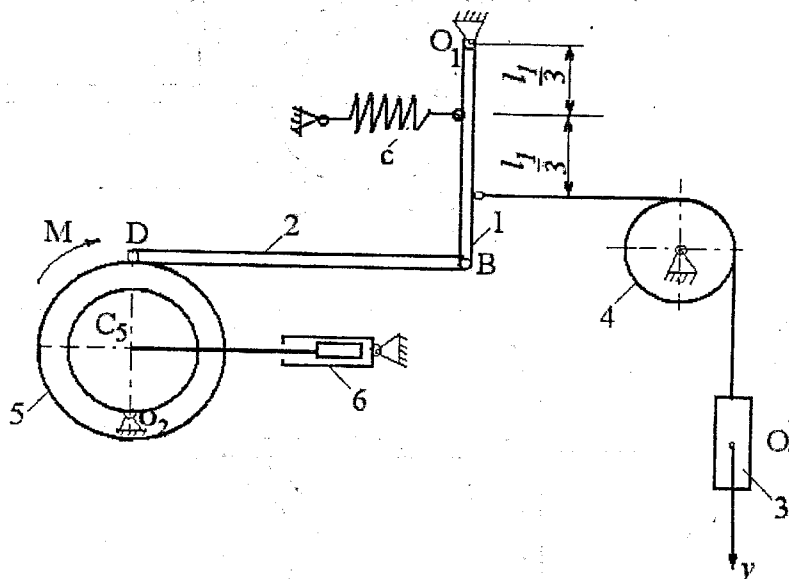


Рисунок 9.11

Тіло 3 масою m_3 зміщується поступально в додатному напрямку осі y із стану рівноваги (при статичній деформації пружини) на $y_0 = 0,004$ м і йому також надається швидкість $v_0 = 0,02$ м/с вертикально вгору. Одночасно з кінематичним збудженням y_0, v_0 на тіло 5 починає діяти момент $M = 0,01 \sin 20t$ нм (силове збудження).

Знайти рівняння руху та побудувати графік $y = y(t)$ вантажу 3, якщо сила опору руху демпфера 3 $\bar{R} = -8 \cdot \bar{v}_{C5}$ ($\bar{v}_{C5}$ — швидкість точки переміщення демпфера до східчастого блока 5), якщо: $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 0$ кг; $m_3 = 2$ кг; $m_4 = 2$ кг; $m_5 = 6$ кг; $l_1 = 0,6$ м; $l_2 = 0,4$ м; $R_5 = 2r_5 = 0,3$ м; $i_5 = 0,2$ м; $C = 800$ н/м.

За початок відліку координати y прийняти положення спокою тіла 3 (при статичній деформації пружини жорсткістю C).

Вважати, що тіло 2 переміщується поступально при малих відхиленнях тіла 3 від положення стійкої рівноваги.

Масою пружини, демпфера 6 та троса знехтувати.

Розв'язання. За узагальнену координату приймемо вертикальне переміщення y тіла 3 (рис. 9.12).

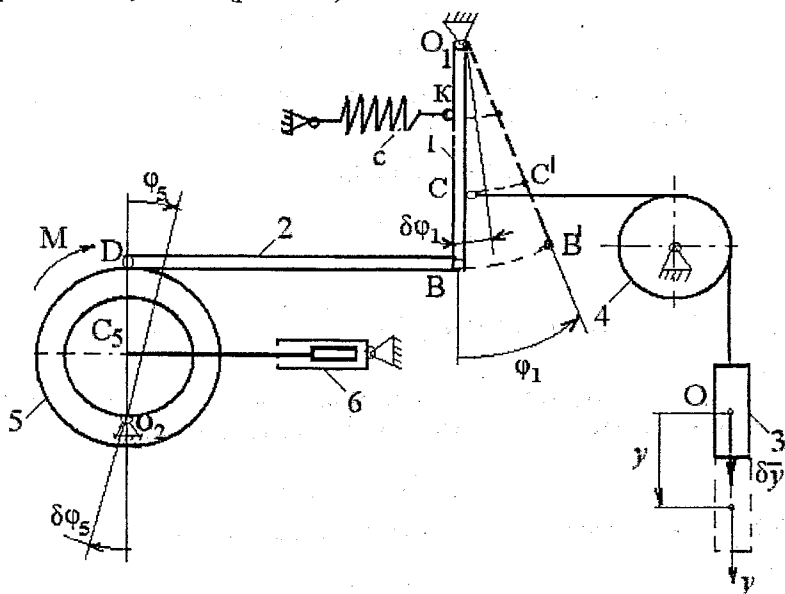


Рисунок 9.12

Диференціальне рівняння Лагранжа другого роду для системи з одним ступенем вільності за наявності збудовальної сили і сили опору середовища має вигляд.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} + Q_y, \quad (9.1)$$

де T – кінетична енергія системи;

Π – потенціальна енергія;

Φ – дисипативна функція Релея;

y – узагальнена координата;

$\dot{y}$ – узагальнена швидкість;

$$Q_y = M \frac{\delta \phi_5}{\delta y};$$

δy – можливе переміщення тіла 3;

$\delta \phi_5$ – можливе переміщення тіла 5 (рис.9.12).

Знайдемо взаємозв'язок між можливими переміщеннями.

$$\delta \phi_1 = \frac{3}{2} l_1 \cdot \delta y; \quad \delta \phi \cdot l_1 = \delta \phi_5 (r_5 + R_5); \quad \delta \phi_5 = \frac{3 \delta y}{2(r_5 + R_5)}.$$

Тепер узагальнена сила Q_y визначиться за формулою:

$$Q_y = \frac{3M}{2(r_5 + R_5)} = \frac{0,015}{r_5 + R_5} \sin 20t \quad (9.2)$$

Оскільки інші складові диференціального рівняння (9.1) визначені в підрозділі А.8 (формули (8.2) – (8.8)) тоді маємо:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = h_0 \sin 20t, \quad (9.3)$$

$$\text{де } k = 15,77, n = 0,126, h_0 = \frac{0,015}{\beta(R_5 + r_5)},$$

$$\beta = \frac{1}{4} \left(3m_1 + 4m_3 + 2m_4 + 9m_5 \frac{i_5^2 + r_5^2}{(r_5 + R_5)^2} \right) = 7,9167 \text{ кг.}$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (9.3) буде складатися із загального y_1 , що відповідає однорідному рівнянню:

$$\ddot{y}_1 + 2n\dot{y}_1 + k^2 y_1 = 0, \quad (9.4)$$

і частинного y_2 неоднорідного диференціального рівняння (9.3):

$$y = y_1 + y_2.$$

Розв'язок y_1 отримали в підрозділі 8 (8.10):

$$y_1 = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t), \quad (9.5)$$

$$\text{де } k^* = \sqrt{k^2 - n^2} = 15,769 \frac{1}{c};$$

C_1, C_2 – постійні інтегрування.

Частинний розв'язок будемо шукати в формі:

$$y_2 = C_3 \sin(20t + \varepsilon)$$

де C_3, ε – невідомі постійні величини.

Тоді із диференціального рівняння (9.3) при $\ddot{y}_2 = 20C_3 \cos(20t + \varepsilon)$, $\dot{y}_2 = -400C_3 \sin(20t + \varepsilon)$ отримаємо:

$$C_3 (k^2 - 400) \sin(20t + \varepsilon) + 40nC_3 \cos(20t + \varepsilon) = h \sin 20t. \quad (9.6)$$

Якщо використати співвідношення, що:

$$\sin 20t = \sin(20t + \varepsilon - \varepsilon) = \sin(20t + \varepsilon) \cos(-\varepsilon) + \cos(20t + \varepsilon) \sin(-\varepsilon),$$

тоді із рівняння (9.6) будемо мати:

$$C_3(k^2 - 400) = h \cos \varepsilon,$$

$$40nC_3 = -h \sin \varepsilon.$$

Звідки

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{40n}{k^2 - 400} = -\frac{40 \cdot 0,126}{15,77^2 - 400} = 0,0333,$$

$$\varepsilon \cong \operatorname{tg} \varepsilon = 0,0333.$$

$$C_3 = \frac{h}{\sqrt{1600n^2 + (k^2 - 400)^2}} = \frac{0,0421}{\sqrt{1600 \cdot 0,126^2 + (15,77 - 4000)^2}} = 0,00277 \text{ м.}$$

Отримали загальний інтеграл (розв'язок) диференціального рівняння (9.3)

$$y_1 = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) + 0,00277 \sin(20t + 0,0333). \quad (9.7)$$

Для визначення постійних інтегрування C_1 та C_2 знайдемо узагальнену швидкість $\dot{y}_1$.

$$\dot{y}_1 = -ne^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) + k^* e^{-nt} (C_2 \cos k^* t - C_1 \sin k^* t) + 0,0554 \cos(20t + 0,0333) \quad (9.8)$$

Із рівняння (9.8) та (9.9), використовуючи початкові умови:

при $t = 0, y_0 = 0,004 \text{ м}, \dot{y}_0 = -0,02 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ знаходимо невідомі C_1, C_2 .

$$0,004 = C_1 + 0,00277 \sin 0,033,$$

$$-0,02 = -0,126 \cdot C_1 + 15,769 \cdot C_2 + 0,0554 \cos 0,033,$$

$$C_1 \cong 0,004 \text{ м}, C_2 = -0,0749 \text{ м.}$$

Рівняння руху тіла 3:

$$y = e^{-0,126t} (0,004 \cos(15,769t) - 0,0749 \sin(15,769t)) + 0,00277 \sin(20t + 0,033)$$

Будуємо графік $y = y(t)$ руху вантажу 3 при $t \geq 3T$ (T – період

згасаючих коливань $T = \frac{2\pi}{k^*} = 0,398 \text{ с}$).

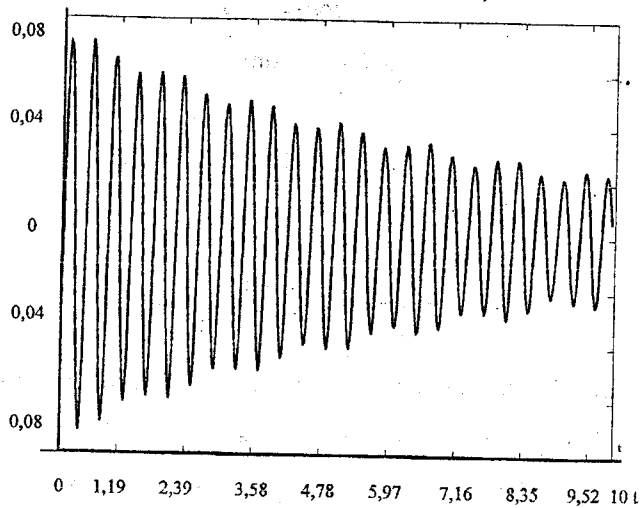


Рисунок 9.13

Відповідь:

$$y = e^{-0,126t} (0,004 \cos(15,769t) - 0,0749 \sin(15,769t)) + 0,00277 \sin(20t + 0,033)$$

СПИСОК НАЙУЖИВАНІШИХ ТЕРМІНІВ

Стержень	— pivot
Зусилля в опорах	— effort in the bearing
Однорідні тіла	— solid bodies
Підшипники	— bearing
Метод кінетостатики	— kinetostatics method
Активна сила	— active force
Циліндричний шарнір	— immovable bearing
Звільнення від в'язей	— liberation from tie
Реакції в'язей	— force tie
Момент сил інерції	— moment of force inertia
Центр маси	— centre of mass
Натуральні осі	— natural axle
Натяг пасів	— force belt
Ковзання	— slip
Східчастий шків	— stepped pulley
Радіус інерції	— radius inertia
Недеформована пружина	— undeformation spring
Пружина	— spring
Поступально	— translation movement
Деформація	— deformation
Шнур	— flex
Узагальнена координата	— generalized coordinate
Варіація	— variation
Стійкість	— steadfastness
Збурення	— perturbation
Шорстка поверхня	— not smoothly surface

1. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1971. – 264с.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Гос. изд. физико-матем. литер., 1961. – 824с.
3. Мещерский И. В. Сборник по теоретической механике. Учебн. пособ. – 35-е изд. перер. под. ред. Н. В. Бутенина и др. – М.: Наука, 1981. – 400с.
4. Павловский М. А., Заплатный В. І. Аналітична механіка. Навч. посіб. – К.: УМК ВО, 1990. – 144с.
5. Пятницкий Е. С. и др. Сборник задач по аналитической механике. – М.: Наука, 1980. – 320с.
6. Сборник заданий для КР по теоретической механике. Учеб. пособ. для техн. вузов /Яблонский А. А. и др.: Под ред. А. А. Яблонского. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: ВШ, 1985. – 367с.
7. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка: Методи й задачі: Навч. посіб. – К.: Либідь, 2006. – 440с.