І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк, В.Л.Карпенко

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ЧАСТИНА II

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк, В.Л.Карпенко

Математичне програмування

Частина II

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей та форм навчання. Протокол № 4 від 25 листопада 2004р.

Вінниця ВНТУ 2005

УДК 517.3 (075)
Х 76

Рецензенти:

О.В. Мороз, доктор економічних наук, професор
В.І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Хом'юк І.В., Хом'юк В.В., Карпенко В.Л.
Х 76 **Математичне програмування.** Частина 2:Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. - 123 с.

У навчальному посібнику подано теоретичні відомості з тем математичного програмування: двоїсті та транспортні задачі лінійного програмування (ЛП), двоїстий симплекс-метод, цілочисельне, дробово-лінійне та нелінійне програмування, задачі теорії ігор та метод множників Лагранжа у вигляді означень, теорем, властивостей. Розглянуті розв'язування прикладів з кожної теми, надається 30 варіантів завдань для лабораторних робіт та завдань для типових розрахунків з кожної теми для самостійного розв'язування.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 517.3 (075)

Зміст

ВСТУП

Сучасні умови виробництва продукції в різних галузях на рівні окремих підприємств, а також на вищому макроекономічному рівні супроводжується наростаючими інформаційними течіями, які надходять до економічних й управлінських органів. Різко зростає кількість операцій щодо переробки інформації, необхідної для пошуку найкращих (оптимальних) варіантів розвитку виробництва й прийняття рішень.

Таким чином, пошук найкращого (оптимального) плану (варіанта) простим перебором і порівнянням всіх можливих планів стає вкрай непосильною задачею, при цьому не враховується той факт, що на складання одного варіанта плану також витрачається дуже багато часу. Так виникла потреба впровадження математичних методів в економічні розрахунки.

У посібнику описано і поставлено деякі техніко-економічні задачі й показано, що розв'язання таких задач зводиться до розв'язання задач математичного програмування та їх економічної інтерпритації.

Даний навчальний посібник, який є продовженням "Математичного програмування. Частина 1" містить у собі відомості з тем: "Двоїсті задачі лінійного програмування", "Транспортна задача", "Цілочисельні задачі лінійного програмування", "Задачі дробово-лінійного програмування", "Задачі теорії ігор і лінійне програмування", "Задачі нелінійного програмування" та "Метод множників Лагранжа", які вивчаються студентами технічних вищих навчальних закладів на I, II та III курсах навчання. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим курсом лекцій. Ці відомості підтверджуються прикладами. Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 30 варіантів для лабораторних робіт з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Якщо в групі більше студентів і викладач бажає видати всім різні варіанти, це можна зробити використовуючи літери прізвища, які відповідають алфавіту, поділеному на частини з номерами від 1 до 30 або скорелювати набір випадкових чисел. Наприклад, Іванов – 2, 8, 6, 5, 1, 4, 3; Петров – 30, 1, 8, 6, 25, 4, 17 і т. д. У даному посібнику наведені також завдання для виконання типових розрахунків, які передбачають застосування інформаційних технологій.

Навчальний посібник можна використовувати як для підготовки до колоквіумів, практичних занять з поданих тем, так і для типових розрахунків, контрольних домашніх робіт для студентів заочної форми навчання.

1 Двоїсті задачі лінійного програмування

1.1 Поняття про двоїстість у лінійному програмуванні

З кожною задачею лінійного програмування можна поєднати деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають двоїстою або спряженою. Первісну задачу називають вихідною. Дамо означення двоїстої задачі по відношенню до загальної задачі лінійного програмування, яка полягає в знаходженні максимального значення функції

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad (1)$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \ldots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,l}, \quad l \le n). \qquad (3)$$

Означення 1. Задача, яка полягає в знаходженні мінімального значення функції

$$F^*(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \qquad (4)$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_l \ge c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \ldots + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + \underline{a_{mn}}y_m = c_m, \end{cases} \qquad (5)$$

C_n

$$y_i \ge 0 \qquad (i = \overline{1,k}, \quad k \le m), \qquad (6)$$

називається двоїстою по відношенню до задачі (1) – (3).

Означення 2. Задачі (1) – (3) і (4) – (6) утворюють пару задач, яку називають в лінійному програмуванні двоїстою парою.

Порівнюючи дві сформульовані задачі, можна помітити, що між ними існує зв'язок. Наведемо правила, за якими складається двоїста задача по відношенню до вихідної задачі:

1. Цільова функція вихідної задачі (1) – (3) задається на максимум, а цільова функція двоїстої (4) – (6) – на мінімум.

2. Матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

яка складена із коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень (2) вихідної задачі (1) – (3), і аналогічна матриця

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

в двоїстій задачі (4) – (6) отримується шляхом транспонування, тобто заміною рядків стовпцями, а стовпців – рядками.

3. Кількість змінних у двоїстій задачі (4) – (6) дорівнює кількості співвідношень в системі (2) вихідної задачі (1) – (3), а кількість обмежень в системі (5) двоїстої задачі – кількості змінних у вихідній задачі.

4. Коефіцієнти при невідомих в цільовій функції (4) двоїстої задачі (4) – (6) є вільними членами в системі (2) вихідної задачі (1) – (3), а вільними членами в співвідношеннях системи (5) двоїстої задачі – коефіцієнти при невідомих у цільовій функції (1) вихідної задачі.

5. Якщо змінна x_j вихідної задачі (1) – (3) може приймати лише додатні значення, то j – е обмеження в системі (5) двоїстої задачі (4) – (6) є нерівністю вигляду "$\geq$". Якщо ж змінна x_j може приймати як додатні , так і від'ємні значення, то j – е обмеження в системі (5) має вид рівняння. Аналогічні зв'язки існують між обмеженнями (2) вихідної задачі (1) – (3) і змінними двоїстої задачі (4) – (6). Якщо i – е співвідношення в системі (2) вихідної задачі є нерівністю, то i – а змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$. В іншому випадку змінна y_i може приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Зауваження 1:

1. Застосовуючи правила побудови двоїстих задач до задачі(4)-(6), дістанемо вихідну задачу (1) - (3).
2. Аналогічні правила побудови двоїстої задачі можна записати для вихідної задачі мінімізації.

Двоїсті пари задач зазвичай поділяють на симетричні і несиметричні. В симетричній парі двоїстих задач обмеження (2) прямої задачі і співвідношення (5) двоїстої задачі є нерівностями виду "$\leq$". Таким чином, змінні обох задач можуть приймати лише невід'ємні значення.

Зауваження 2: Несиметричні останні дві пари називаються тому, що мають обмеження у вихідних задачах виду "=".

Наведемо приклади пар двоїстих задач.

Несиметричні задачі

1. ***Вихідна задача***

$$F_{\min} = \vec{C}\vec{X},\quad A\vec{X} = \vec{B},\quad \vec{X} \geq 0.$$

Двоїста задача

$$F^{*}_{\max} = \vec{W}\vec{B},\quad \vec{W}A \leq \vec{C}.$$

2. ***Вихідна задача***

$$F_{\max} = \vec{C}\vec{X},\quad A\vec{X} = \vec{B},\quad \vec{X} \geq 0.$$

Двоїста задача

$$F^{*}_{\min} = \vec{W}\vec{B},\quad \vec{W}A \geq \vec{C}.$$

Симетричні задачі

1. ***Вихідна задача***

$$F_{\min} = \vec{C}\vec{X},\quad A\vec{X} \geq \vec{B},\quad \vec{X} \geq 0.$$

Двоїста задача

$$F^{*}_{\max} = \vec{W}\vec{B},\quad \vec{W}A \leq \vec{C},\quad \vec{W} \geq 0.$$

2. ***Вихідна задача***

$$F_{\max} = \vec{C}\vec{X},\quad A\vec{X} \leq \vec{B},\quad \vec{X} \geq 0.$$

Двоїста задача

$$F^{*}_{\min} = \vec{W}\vec{B},\quad \vec{W}A \geq \vec{C},\quad \vec{W} \geq 0.$$

Найпростішими властивостями взаємно двоїстих задач є такі:

1. Якщо X – деякий план вихідної задачі (1) – (3), а Y – довільний план двоїстої задачі (4) – (6), то $F(X) = F^{*}(Y)$.
2. Якщо X і Y - допустимі розв'язки відповідно прямої і двоїстої задач, і $F(X) = F^{*}(Y)$, то X і Y - оптимальні розв'язки цих задач.

Приклад. Побудувати задачу, двоїсту до вихідної:

$$F(x) = 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 5 \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Розв'язування

Щоб побудувати двоїсту задачу, вихідну необхідно звести до стандартного вигляду. Для цього помножимо обидві частини першого обмеження на (-1), дістанемо:

$$F(x) = 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 \le -3 \\ -x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 5 \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad x_2 \ge 0 \ , \ x_3 \ge 0$$

Тоді двоїста задача матиме вигляд:

$$F^*(x) = -3y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 2y_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} -4y_1 - y_2 + 6y_3 - 2y_4 = 4 \\ 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 3y_4 \ge -3 \\ -5y_1 - 6y_2 + 2y_3 - 2y_4 \ge 4 \end{cases}$$

$y_1 \ge 0, y_3 \ge 0 \quad y_2, y_4$ – довільні

Вихідна задача має кількість обмежень m = 4, тому двоїста задача має 4 змінні: y_1, y_2, y_3, y_4. Кількість змінних вихідної задачі m =3, тому двоїста задача має 3 обмеження. Змінна x_1 вихідної задачі не обмежена за знаком, тому перше обмеження двоїстої задачі має вигляд рівності, друге та четверте обмеження вихідної задачі мають вигляд рівності, отже, змінні y_2 та y_4 двоїстої задачі не обмежені за знаком.

1.2 Основні теореми двоїстості в лінійному програмуванні

Розглянемо пару двоїстих задач, яку утворено з основної задачі лінійного програмування і двоїстої до неї.

Вихідна задача: знайти максимум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{10}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{11}$$

Двоїста задача: знайти мінімум функції

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{12}$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1,n}). \tag{13}$$

Кожна із задач двоїстої пари (9) – (11) і (12), (13) є самостійною задачею лінійного програмування і може бути розв'язана незалежно одна від одної.

Існують залежності між розв'язками прямої і двоїстої задач, які можна задати у вигляді теорем.

Теорема 1 (перша теорема двоїстості). Якщо одна із пари двоїстих задач (9) – (11) і (12), (13) має оптимальний план, то і друга має оптимальний план, причому значення цільових функцій на оптимальних планах збігаються, тобто $F_{\max} = F^{*}_{\min}$.

Якщо ж цільова функція однієї із пари двоїстих задач не обмежена (для вихідної (9) – (11) – зверху, для двоїстої (12), (13)– знизу), то друга задача взагалі не має планів.

Теорема 2 (друга теорема двоїстості). Для того щоб допустимі плани X^* і Y^* пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно і достатньо виконання умов:

$$X^*_j\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i - c_j\Big) = 0 \ (j = \overline{1,n}); \tag{14}$$

$$Y^*_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*_j - b_i\Big) = 0 \ (i = \overline{1,m}); \tag{15}$$

Теорема 3. Якщо в разі підстановки компонентів оптимального плану в систему обмежень вихідної задачі i – те обмеження перетворюється на нерівність, то i – та компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо i – та компонента оптимального плану двоїстої задачі додатна, то i – те обмеження вихідної задачі задовольняє її оптимальний розв'язок як строга нерівність.

Умови (14), (15) дають можливість за оптимальним планом (розв'язком) однієї із взаємно двоїстих задач знайти оптимальний план другої задачі.

Використовуючи другу теорему двоїстості сформулюємо критерій оптимальності для допустимого розв'язку задачі лінійного програмування.

Критерій оптимальності. Нехай X^* – допустимий розв'язок задачі (9) – (11). Вектор X^* є оптимальним розв'язком цієї задачі тоді і тільки тоді, коли серед розв'язків системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j = 0, \text{ якщо } x^*_j \neq 0 \tag{16}$$

$$y_i = 0, \text{ якщо } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*_j > b_i \tag{17}$$

існує хоч би один допустимий розв'язок задачі (12), (13), двоїстої до задачі (9) – (11).

1.3 Розв'язання двоїстих задач

Сформульовані теореми двоїстості дають можливість отримати розв'язок однієї задачі, знаючи оптимальний розв'язок двоїстої до неї задачі. Якщо вихідна та двоїста задачі мають дві змінних, то під час їх розв'язування зручно використовувати графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Приклад 1. Для даної задачі лінійного програмування скласти двоїсту та знайти розв'язок задач геометричним методом

$$F = 2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + 4x_2 \le 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування

1. Знайдемо розв'язок вихідної задачі. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $x_1 + x_2 = 3$, яка проходить через точки (0;3) та (3;0);
2) l_2: $x_1 + 4x_2 = 9$, яка проходить через точки (0;9/4) та (9;0);
3) $l_3 : x_1 = 0$;
4) l_4: $x_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.1).

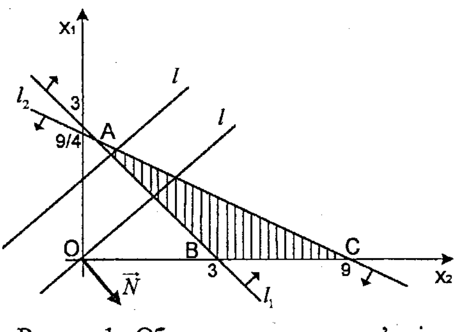

Рисунок 1 – Область допустимих розв'язків вихідної задачі

Отже, допустимою областю D є трикутник ABC, який зображено на рис.1. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\overline{N} = \{2; -1\}$. Проведемо пряму

l: $2x_1 - x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N}$ (рис. 1).

Умовно переміщуємо пряму l: $2x_1 - x_2 = 0$ паралельно самій собі по області D у напрямі вектора $\overrightarrow{N} = \{2; -1\}$ до тих пір, поки вона не почне перетинати область D. Найменшого значення лінійна функція $F = 2x_1 - x_2$ досягатиме в найближчій вершині А многокутника ABC, тобто у точці входу прямої l у дану область. Знайдемо координати точки А $(x_1^*; x_2^*)$. Точка А лежить на перетині прямих l_1 і l_2. Для знаходження координат точки А необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + 4x_2 = 9. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння перше, в результаті чого отримаємо:

$3x_2 = 6$ або $x_2^* = 2$. Тоді $x_1^* = 3 - x_2 = 3 - 2 = 1$. Тобто точка А має координати $(1;2)$.

Отже, найменше значення лінійної функції:

$F_{\min} = F(A) = 2 \cdot 1 - 2 = 0.$

2. Складемо задачу двоїсту до даної. Для цього помножимо обидві частини другого обмеження на (-1), дістанемо:

$$F = 2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ -x_1 - 4x_2 \geq -9, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді двоїста задача матиме вигляд:

$$F^*(x) = 3y_1 - 9y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \leq 2 \\ y_1 - 4y_2 \leq -1 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для знаходження області допустимих розв'язків множини D_1 побудуємо граничні прямі:

5) l_1: $y_1 - y_2 = 2$, яка проходить через точки (0;-2) та (2;0);

6) l_2: $y_1 - 4y_2 = -1$, яка проходить через точки (0;1/4) та (-1;0);

7) $l_3: y_1 = 0$;

8) l_4: $y_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D_1 (рис.2).

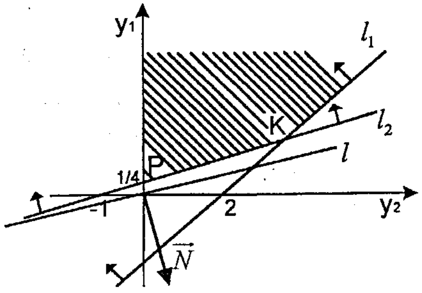

Рисунок 2 – Область допустимих розв'язків двоїстої задачі

Отже, допустимою областю D_1 є необмежена область, яка зображена на рис.2. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\overrightarrow{N}=\{3;-9\}$. Проведемо пряму l: $3y_1-9y_2=0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N}$ (рис. 1).

Умовно переміщуємо пряму l: $3y_1-9y_2=0$ паралельно самій собі по області D_1 у напрямі вектора $\overrightarrow{N}=\{3;-9\}$ до тих пір, поки вона не перестане перетинати область D_1. Найбільшого значення лінійна функція $F=3y_1-9y_2$ досягатиме в найбільш віддаленій вершині K області допустимих розв'язків, тобто у точці виходу прямої l з даної області. Знайдемо координати точки K ($y_1^*;y_2^*$). Точка K лежить на перетині прямих l_1 і l_2. Для знаходження координат точки K необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1-y_2=2 \\ y_1-4y_2=-1. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння перше, в результаті чого отримаємо:

$3y_2=3$ або $y_2^*=1$. Тоді $y_1^*=2+y_2=2+1=3$. Тобто точка K має координати (3;1).

Отже, найбільше значення лінійної функції:

$F^*_{\min}=F(K)=3\cdot3-9\cdot1=0.$

Отже, значення цільових функцій прямої і двоїстої задач при їх оптимальних планах рівні між собою, тобто $F_{\max}=F^*_{\min}$.

Розглянемо на прикладі процес одержання розв'язку вихідної задачі на основі оптимального розв'язку двоїстої задачі.

Приклад 2. Розв'язати пряму задачу лінійного програмування, використовуючи перехід до двоїстої задачі та графічний метод розв'язання одержаної двоїстої задачі:

$$F(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 \le 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,4})$$

Розв'язання. Побудуємо двоїсту задачу до даної. Вона має вигляд:

$$F^*(y) = y_1 + 3y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 2, \\ -y_1 + y_2 \ge 1, \\ y_1 \ge 1 \\ y_2 \ge -1 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \qquad y_2 \ge 0$$

Знайдемо розв'язок двоїстої задачі, скориставшись графічним методом. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $y_1 + 2y_2 = 2$, яка проходить через точки (0;1) та (2;0);

2) l_2: $-y_1 + y_2 = 1$, яка проходить через точки (0;1) та (-1;0);

3) $l_3 : y_1 = 1$;

4) l_4: $y_2 = -1$;

5) $l_5 : y_1 = 0$;

6) $l_6 : y_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.3).

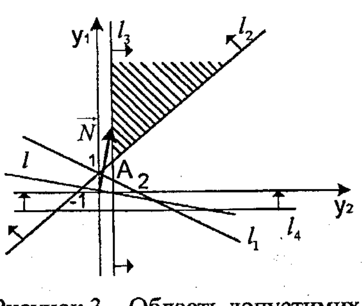

Рисунок 3 – Область допустимих розв'язків

Отже, допустимою областю D є необмежена область, яка зображена на рис.3. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\overrightarrow{N}=\{1;3\}$. Проведемо пряму l: $y_1+3y_2=0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N}$ (рис. 3). Найменшого значення лінійна функція $F^*=y_1+3y_2$ досягатиме в найближчій вершині А області D. Знайдемо координати точки А $(y_1^*;y_2^*)$. Точка А лежить на перетині прямих l_3 і l_2. Для знаходження координат точки А необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1=1, \\ -y_1+y_2=1. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=1, \\ y_2=2. \end{cases}$$

Тобто, точка А має координати $(1;2)$ і $F^*_{\min}=1\cdot1+3\cdot2=7$.

Знайдемо розв'язок вихідної задачі на основі оптимального плану двоїстої до неї задачі.

Підставимо в обмеження двоїстої задачі значення змінних $y_1^*=1, y_2^*=2$ в оптимальному плані:

$$\begin{cases} 1+2\cdot2\ge2, \\ -1+2\ge1, \\ 1\ge1, \\ 1\ge-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5>2, \\ 1=1, \\ 1=1, \\ 1>-1. \end{cases}$$

Використовуючи другу теорему двоїстості змінні вихідної задачі x_1 та x_4 рівні нулю, оскільки перше і четверте обмеження перетворилися у строгі нерівності при підставленні оптимального плану двоїстої задачі $(x_1^*=0, x_4^*=0)$.

Оскільки змінні y_1 та y_2 в оптимальному плані мають додатні значення $(y_1^*=1>0, y_2^*=2>0)$, то відповідні їм обмеження вихідної задачі при підставленні в них її оптимального плану перетворюються у рівності. Враховуючи те, що $x_1=0$ та $x_4=0$, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_2+x_3=1, \\ x_2=3 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_3=4. \\ x_2=3 \end{cases}$$

Оптимальний план вихідної задачі буде $X^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)=(0;3;4;0)$. Тоді $F_{\max}=2\cdot0+3+4-0=7$.

1.4 Економічна інтерпретація двоїстих задач в ЛП

Двоїсті задачі відіграють велику роль в економічному аналізі результатів розрахунків. Пояснимо це на прикладі використання ресурсів.

Підприємство, що має m видів ресурсів у кількості b_i одиниць $(i=1,2,...,m)$, виробляє n видів продукції. Для виробництва однієї одиниці продукції витрачається a_{ij} одиниць i-го ресурсу, вартість одиниці продукції становить c_j. Треба скласти план випуску продукції, який забезпечив би максимальний прибуток..

Позначимо через $x_j (j = 1,2,...,n)$ кількість одиниць j – ї продукції. Тоді вихідну задачу формулюють так.

Знайти невід'ємний розв'язок системи обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,...,n), \end{cases}$$

який перетворює лінійну функцію $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ у максимум. Оцінимо ресурси, необхідні для виготовлення продукції. За одиницю вартості ресурсів візьмемо одиницю вартості виготовленої продукції. Позначимо через $y_i (i = 1,2,...,m)$ вартість одиниці i – го ресурсу. Тоді вартість усіх витрачених ресурсів, що йдуть на виготовлення одиниці j – ї продукції, дорівнюватиме $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m \quad (j = 1,2,...,n)$. Вартість витрачених ресурсів не може бути меншою за вартість кінцевого продукту, тому виконується нерівність $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m \ge c_j \quad (j = 1,2,...,n)$. Вартість усіх ресурсів, що є в наявності, дорівнюватиме $b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$. Отже, двоїсту задачу можна сформулювати так. Знайти невід'ємний розв'язок системи обмежень

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \\ x_i \ge 0 \quad (i = 1,2,...,m), \end{cases}$$

який перетворює в мінімум функцію $F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$.

Розглянуті вихідну та двоїсту задачі можна інтерпретувати економічно так.

Вихідна задача. Скільки і якої продукції $x_j (j = 1,2,...,n)$ треба виробити, щоб при заданих вартостях $c_j (j = 1,2,...,n)$ одиниці продукції і розмірах наявних ресурсів $b_i (i = 1,2,...,m)$ максимізувати прибуток підприємства.

Двоїста задача. Якою повинна бути ціна одиниці кожного з ресурсів, щоб при заданих кількостях ресурсів b_i та величинах вартості одиниці продукції c_j мінімізувати загальну вартість витрат.

Змінні y_i називають оцінками або обліковими неявними цінами.

2 Транспортна задача

Загальна постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезення деякого однорідного вантажу із m пунктів відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$ у n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$. При цьому в якості критерію оптимальності зазвичай беруть або мінімальну вартість перевезень всього вантажу, або мінімальний час його доставки. Розглянемо транспортну задачу, як критерій оптимальності якої взята мінімальна вартість перевезення всього вантажу. Позначимо через c_{ij} тарифи перевезення одиниці вантажу із i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення, через a_i – запаси вантажу в i-му пункті відправлення, через b_j – потреби у вантажі в j-му пункті призначення, а через x_{ij} – кількість одиниць вантажу, що перевозять із i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

при умовах $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (j= 1, n), (2)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i \text{ (i= 1, m)}, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ (j= 1, n; i= 1, m)}. \tag{4}$$

Означення 1. Довільний невід'ємний розв'язок систем лінійних рівнянь (2) і (3), що визначається матрицею X=(x_{ij}^*) $(j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m})$ називається планом транспортної задачі.

Означення 2. План X=(x_{ij}^*) $(j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m})$, при якому функція (1) приймає своє мінімальне значення, називається оптимальним планом транспортної задачі.

Очевидно, загальна кількість вантажу у постачальників дорівнює $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а загальна потреба у вантажі в пунктах призначеннях рівна $\sum_{j=1}^{n} b_j$ одиниць. Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення рівна запасу вантажу в пунктах відправлення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,, \tag{5}$$

то модель такої транспортної задачі називається закритою. Якщо ж дана умова не виконується, то модель транспортної задачі називається відкритою.

Теорема 1. Для того, щоб транспортна задача мала розв'язок необхідно і достатньо, щоб запаси вантажу в пунктах відправлення були рівні потребам у вантажі в пунктах призначення, тобто щоб виконувалась рівність (5).

У випадку переважання запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний (n+1)-й пункт призначення з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{in+1} = 0$ $(i = \overline{1,m})$. Отримана задача є транспортною задачею, для якої виконується рівність (5).

Аналогічно, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводиться (m +1)- й пункт відправлення із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1j}=0$ $(j = \overline{1,n})$. Цим задача зводиться до звичайної транспортної задачі, із оптимального плану якої отримується оптимальний план вихідної задачі. В подальшому будемо розглядати закриту модель транспортної задачі.

2.1 Методи розв'язування транспортної задачі

Для визначення опорного плану існує декілька методів. Розглянемо три з них: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента і метод апроксимації Фотеля. Сутність цих методів полягає в тому, що опорний план знаходять послідовно за n+m-1 кроків, на кожному із яких у таблиці умов задачі заповнюють одну клітинку, яку називають заповненою. Заповнення однієї із клітинок показує: або забезпечення потреби у вантажі одного із пунктів призначення (того, в стовпці якого знаходиться заповнена клітинка), або вивезення вантажу із одного із пунктів відправлення (із того, в рядку якого знаходиться заповнена клітинка).

Метод північно-західного кута. При знаходженні опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута на кожному кроці розглядають перший із пунктів відправлення, що залишився і перший із пунктів призначення , що залишився. Заповнення клітинок таблиці умов починається із лівої верхньої клітинки для невідомого x_{11}("північно-західний кут") і закінчується клітинкою для невідомого x_{mn}, тобто іде як би по діагоналі таблиці.

Метод мінімального елемента. У методі північно-західного кута на кожному кроці потреба першого із пунктів призначення, що залишилися, задовольнялася за рахунок запасів першого із пунктів відправлення, що залишився. Очевидно, вибір пунктів призначення і відправлення доцільно проводити, орієнтуючись на тарифи перевезення, а саме: на кожному кроці слід вибрати будь-яку клітинку, яка відповідає мінімальному тарифу (якщо таких клітинок декілька, то слід вибрати довільну із них), і розглядати пункти призначення і відправлення, відповідні вибраній клітинці. Сутність методу мінімального елемента і полягає у виборі клітинки з мінімальним тарифом. Слід відмітити, що цей метод, як правило, дозволяє знайти опорний план транспортної задачі, при якому загальна вартість перевезень вантажу менша, ніж загальна вартість перевезення при плані, що знайдений для даної задачі за допомогою методу північно-західного кута.

Метод апроксимації Фогеля. При визначенні оптимального плану транспортної задачі методом апроксимації Фогеля на кожній ітерації по всіх стовпцях і по всіх рядках знаходять різницю між двома записаними в них мінімальними тарифами. Ці різниці записують в спеціально відведені для цього рядки та стовпці в таблиці умови задачі. Серед вказаних різниць вибирають мінімальну. У рядку (або стовпці), якому дана різниця відповідає, визначають мінімальний тариф. Клітинку, в якій він записаний, заповнюють на даній ітерації. Якщо мінімальний тариф однаковий для декількох клітинок даного рядка (стовпця), то для заповнення вибирають клітинку, яка розміщена в стовпці (рядку), що відповідає найбільшій різниці між двома мінімальними тарифами, що знаходяться в даному стовпці (рядку).

2.2 Визначення оптимального плану транспортної задачі

Для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблено декілька методів. Однак найбільш часто використовують метод потенціалів і метод диференціальних рент. Зупинимося на розгляді *методу потенціалів.*

Теорема 2. Якщо для деякого опорного плану $X=(x_{ij}^*)$ $(j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m})$, транспортної задачі існують такі числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$, що $\beta_j-\alpha_i=c_{ij}$ при

$$x_{ij}\geq 0 \tag{7}$$

і $\beta_j-\alpha_i\leq c_{ij}$ при $x_{ij}=0$ (8)

для всіх $j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m}$, то $X^*=(x_{ij}^*)$ – оптимальний план транспортної задачі.

Означення 3. Числа $\alpha_i,\beta_j\ (j=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m})$ називаються потенціалами відповідно пунктів призначення і пунктів відправлення.

Процес знаходження розв'язку транспортної задачі методом потенціалів включає такі етапи:

1. Знаходять опорний план. При цьому число заповнених клітинок повинно бути рівним n+m-1.

2. Знаходять потенціали β_j,α_i відповідно пунктів призначення і відправлення. Ці числа знаходять із системи рівнянь

$$\beta_j-\alpha_i=c_{ij} \tag{9}$$

де c_{ij} –тарифи, що знаходяться у заповнених клітинках таблиці умов транспортної задачі. Оскільки число заповнених клітинок дорівнює n+m-1, то система (9) з n+m невідомими містить n+m-1 рівнянь. Оскільки число невідомих перевищує на одиницю число рівнянь, одне із невідомих можна прийняти рівним довільному числу, наприклад $\alpha_1 = 0$, і знайти послідовно із рівнянь (9) значення решти невідомих.

3. Для кожної вільної клітинки визначають число α_{ij} за формулою:

$$\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij} \tag{10}$$

Якщо серед чисел α_{ij} немає додатних, то отриманий оптимальний план транспортної задачі; якщо ж вони присутні, то переходять до нового опорного плану.

4. Серед додатних чисел α_{ij} вибирають максимальне, будують для вільної клітинки, якій воно відповідає, цикл перерахунку і виконують зсув по циклу перерахунку.

Означення 4. Циклом у таблиці умов транспортної задачі називається ламана лінія, вершини якої розміщені в заповнених клітинках таблиці, а ланцюги – вздовж рядків і стовпців, причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно два ланцюги, один з яких знаходиться в рядку, а інший – в стовпці.

Якщо ламана, яка утворює цикл, перетинається, то точки самоперетину не є вершинами. При правильній побудові опорного плану для довільної вільної клітинки можна побудувати лише один цикл. Після того як для вибраної вільної клітинки він побудований, слід перейти до нового опорного плану. Для цього слід перемістити вантажі в межах клітинок, пов'язаних з даною вільною клітинкою. Це переміщення виконують за такими правилами:

1) кожній із клітинок, які пов'язані циклом з даною вільною клітинкою, приписують певний знак, причому вільній клітинці – знак плюс, а всім останнім клітинкам – по-черзі знаки мінус і плюс (будемо називати ці клітинки мінусовими і плюсовими);

2) в дану вільну клітинку переносять менше із чисел x_{ij}, що знаходяться в мінусових клітинках. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розташовані в плюсових клітинках, і віднімають від чисел, що знаходяться в мінусових клітинках. Клітинка, яка була раніше вільною, стає заповненою, а мінусова клітинка, в якій знаходилось мінімальне із чисел x_{ij}, вважається вільною.

В результаті вказаних раніше переміщень вантажів в межах клітинок, що пов'язані циклом з даною вільною клітинкою, визначають новий опорний план транспортної задачі.

Описаний перехід від одного опорного плану транспортної задачі до другого її опорного плану називається зсувом за циклом перерахунку.

5. Отриманий опорний план перевіряють на оптимальність, тобто знову повторюють всі дії, починаючи з етапу 2.

Приклад 1. Чотири підприємства даного економічного району для виготовлення продукції використовують три види сировини. Потреби кожного з підприємств : 120, 50, 190, 110 од., сировина розташована в трьох місцях і її запаси – 160, 140, 170 од., на кожне з підприємств сировина може завозитись з довільної бази. Тарифи перевезень задаються матрицею C:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Скласти план перевезень, що мінімізує витрати на перевезення.

Розв'язування: Будемо шукати опорний план за методом *північно-західного кута.*

За цим методом послідовно (починаючи з лівого верхнього кута x_{11}) заповнюється таблиця перевезень задовольняючи повністю або потреби (виключаємо стовпчик) або повністю використовуючи повний запас A_i (виключаємо відповідний рядок) і переходячи до сусіднього елемента таблиці (зміщуємось вправо і вниз). За *m+n-1* крок отримуємо оптимальний план, причому на останньому кроці запас дорівнює потребі.

Пункти відправлення	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	7 120	8 40	1	2	160
A_2	4	5 10	9 130	8	140
A_3	9	2	3 60	6 110	170
Потреби	120	50	190	110	470

Отримаємо опорний план $X_1 = \begin{bmatrix} 120 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 110 \end{bmatrix}$

При цьому опорному плані значення цільової функції:
$F(x_1) = 120 \cdot 7 + 40 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 130 \cdot 9 + 60 \cdot 3 + 110 \cdot 6 = 3220$

Приклад 2. Використовуючи метод апроксимації Фогеля знайти опорний план та перевірити його на оптимальність методом потенціалів:

Пункти відправлення	Пункти призначення			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	7	1	60
A_2	12	3	4	50
A_3	6	5	2	20
Потреби	40	20	70	130

Розв'язування

Таблиця 2

Пункти відправлення	Пункти призначення			Запаси	Різниці по рядках		
	B_1	B_2	B_3				
A_1	– 4	– 7	1 60	60	3	–	–
A_2	2 40	3 10	– 4	50	1	1	1
A_3	– 6	5 10	2 10	20	3	3	3
Потреби	40	20	70	130			
Різниці по стовпцях	2	2	1				
	4	2	2				
	–	2	2				

Для кожного рядка і стовпця таблиці умов знайдемо різниці між двома мінімальними тарифами, що записані в даному рядку або стовпцю, і помістимо їх у відповідний додатковий стовпець або додатковий рядок таблиці 2. Так, у рядку A_1 мінімальний тариф дорівнює 1, а наступний за ним дорівнює 4, різниця між ними $4 - 1 = 3$. Так само різниця між мінімальними елементами в стовпці B_1 рівна $4 - 2 = 2$. Обчисливши всі різниці, бачимо, що найбільша із них відповідає рядку A_1 та рядку A_3. Для заповнення вибираємо рядок, що містить мінімальний тариф. Порівнюючи тарифи даних рядків знаходимо, що мінімальний тариф записаний у клітинці, яка знаходиться на перетині рядка A_1 та стовпця B_3. Таким чином, цю клітинку слід заповнити. Заповнюючи її, тим самим вважаємо, що запаси пункту A_1 повністю вичерпані, а потреби в пункті B_3 стали рівними 70 – 60 = 10 од. Виключимо із розгляду рядок A_1. Після цього визначимо наступну клітинку для заповнення. Знову знайдемо різниці між двома мінімальними тарифами, що залишилися в кожному із рядків і стовпців і запишемо їх у другий додатковий рядок і стовпець таблиці 2. Як видно із цієї таблиці, найбільша вказана різниця відповідає стовпцю B_1. Мінімальний тариф у цьому стовпці записаний у клітинці, що знаходиться на перетині її з рядком A_2. Відповідно заповнюємо цю клітинку. Помістивши в неї число 40, тим самим вважаємо, що задовольнимо потреби пункту B_1. Тому, виключимо із розгляду стовпець B_1 і будемо рахувати запаси пункту A_2: 50 – 40 = 10 од. Продовжуючи ітераційний процес, послідовно заповнюємо клітинки, що знаходяться на перетині рядка A_2 і стовпця B_2, рядка A_3 і стовпця B_3, рядка A_3 і стовпця B_2. В результаті отримаємо опорний план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 40 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

При цьому плані загальна вартість перевезень така:

$$F(x) = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 240$$

Перевіримо знайдений план на оптимальність методом потенціалів.

Знайдемо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення. Для визначення потенціалів отримаємо систему:

$$\beta_3 - \alpha_1 = 1,$$
$$\beta_1 - \alpha_2 = 2,$$
$$\beta_2 - \alpha_2 = 3,$$
$$\beta_2 - \alpha_3 = 5,$$
$$\beta_3 - \alpha_3 = 2,$$

яка містить п'ять рівнянь з шістьма невідомими. Покладаючи $\alpha_1 = 0,$ знаходимо $\beta_3 = 1, \alpha_3 = -1, \beta_2 = 4, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1.$

Для кожної вільної клітинки обчислимо число $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$: $\alpha_{11} = -3, \alpha_{12} = -3, \alpha_{23} = -6, \alpha_{31} = -4$. Оскільки серед знайдених чисел немає додатних, то знайдений план є оптимальним.

3 Двоїстий симплекс-метод

Двоїстий симплекс-метод, як і симплекс-метод, використовується при знаходженні розв'язку задачі лінійного програмування, записаної в формі основної задачі, для якої серед векторів P_j, складених із коефіцієнтів при невідомих в системі рівнянь, є m одиничних. Разом з тим двоїстий симплекс-метод можна використовувати при розв'язуванні задачі лінійного програмування, вільні члени системи рівнянь якої можуть бути довільними числами (при розв'язуванні задачі симплекс-методом ці числа передбачалися невід'ємними).

Розглянемо задачу лінійного програмування, попередньо припустивши, що одиничними є вектори $P_1, P_2, ..., P_m$, причому задача полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad (1)$$

при умовах

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_mP_m + ... + x_nP_n = P_0 \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}) \quad (3)$$

де $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, ...; $P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$; ...; $P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}$; $P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$

і серед чисел b_i $(i = \overline{1,m})$ є від'ємні.

В даному випадку $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (2). Однак цей розв'язок не є планом задачі (1)-(3), оскільки серед його компонент є від'ємні числа.

Означення. Розв'язок $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$ системи лінійних рівнянь (2), яка визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, називається псевдопланом задачі (1)-(3), якщо $\Delta_j \geq 0$ для довільного j $(j = \overline{1,n})$. (Δ_j – коефіцієнти індексного рядка, оцінки).

Теорема 1. Якщо в псевдоплані $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$, що визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, є хоча б одне від'ємне число $b_i < 0$, таке, що $a_{ij} \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$, то задача (1)-(3) взагалі не має планів.

Теорема 2. Якщо в псевдоплані $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$, який визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$, є від'ємні числа $b_i < 0$ такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij} < 0$, то можна перейти до нового псевдоплану, при якому значення цільової функції задачі (1)-(3) не зменшиться.

Розглянемо задачу лінійного програмування

$$F = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq c_2, \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Перейдемо від нерівностей до рівностей, шляхом введення невід'ємних балансових змінних.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = c_2, \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Помножимо рівняння системи на (-1):

$$\begin{cases} -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + x_{n+1} = -c_1, \\ -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + x_{n+2} = -c_2, \\ \end{cases}$$

Тоді $X = (0;0;\ldots,0;-c_1;-c_2)$ розв'язок системи. Цей розв'язок задовольняє всі умови, крім того, що $x_i \geq 0$, ми отримали псевдоплан даної задачі.

Для випадку, коли в індексному рядку початкової симплекс таблиці немає від'ємних оцінок, але при цьому деякі з вільних членів системи є від'ємними був розроблений метод знаходження опорного розв'язку задач лінійного програмування, який і називається двоїстим симплекс-методом.

Таким чином, знаходження розв'язку задачі (1)-(3) двоїстим симплекс-методом включає такі етапи:

1. Знаходять псевдоплан задачі.
2. Перевіряють цей псевдоплан на оптимальність. Якщо псевдоплан оптимальний, то знайдено розв'язок задачі. В іншому випадку або встановлюють, що задача розв'язків не має, або переходять до нового псевдоплану.
3. У стовпці вільних членів вибирають від'ємне число, найбільше за абсолютною величиною. Рядок, який відповідає цьому числу приймають за розв'язний.
4. За розв'язний елемент вибирають від'ємний елемент розв'язного рядка a_{ij} для якого відношення $\frac{-\Delta_j}{a_{ij}}$ є мінімальним.

Приклад

Використовуючи двоїстий симплекс-метод, розв'язати задачу лінійного програмування :

$$f = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \geq 24, \\ \qquad\qquad\qquad x_i \geq \ 0 \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо початкову задачу лінійного програмування у формі основної задачі: знайти найбільше значення цільової функції

$$F = -5x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \qquad = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad - x_6 = 24, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{cases}$$

Помноживши перше і друге рівняння системи обмежень останньої задачі на (- 1), перейдемо до задачі :

$$F = -5x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -1{,}5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \qquad = -18, \\ -3x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 \qquad + x_6 = -24, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Оскільки серед вільних членів останньої системи обмежень є від'ємні числа, то розв'язувати задачу (1) звичайним симплексним методом ми не можемо. Складемо для задачі (1) двоїсту задачу:

$$f^* = -18y_1 - 24y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -1{,}5y_1 - 3y_2 \geq -5, \\ -3y_1 - 2y_2 \geq -6, \\ y_1 \qquad \geq -1, \\ -y_1 + \ y_2 \geq -1, \\ y_1 \qquad \geq \ 0, \\ \qquad y_2 \geq \ 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Після цього складаємо симплексну таблицю для задачі (1):

b_i	Базис	0	-5	-6	-1	-1	0	0
		c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	-18	-1,5	-3	1	-1	1	0
0	x_6	-24	$\boxed{-3}$	-2	0	1	0	1
	f_1^*	0	5	6	1	1	0	0

У цій таблиці всі елементи Δ_i індексного рядка – невід'ємні числа. Тому планом двоїстої задачі (2) є $Y_1 = \{ 0; 0 \}$, при якому

$f_1^* = 0$. Крім того, з цієї таблиці видно, що задача (1) має псевдоплан $X_1 = \{0;\ 0;\ 0;\ 0;\ -18;\ -24\}$. Оскільки у стовпчику вільних членів є два від'ємних числа, а в індексному рядку від'ємних чисел немає, то у відповідності до алгоритму двоїстого симплекс - методу переходимо до нової симплексної таблиці. (У даному випадку це можливо, оскільки у рядках базисів x_5 і x_6 є від'ємні числа. Якщо б їх не було, то задача не мала б розв'язку.) Розв'язувальний рядок визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом, яке стоїть у стовпчику вільних членів. У даному випадку таким числом є (-24). Таким чином, виключаємо з базису змінну x_6. Щоб визначити, яку змінну необхідно ввести у базис, знаходимо $\min\limits_j(-\Delta_j/a_{2j})$, де $a_{2j} < 0$. Маємо :

$$\min_j \frac{-\Delta_j}{a_{2j}} = \min\left\{\frac{-5}{-3};\ \frac{-6}{-2}\right\} = \frac{5}{3}.$$

Тому вводимо в базис змінну x_1.

b_i	Базис	0	-5	-6	-1	-1	0	0
		c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	-6	0	$\boxed{-2}$	1	-3,5	1	-0,5
-5	x_1	8	1	2 / 3	0	-1 / 3	0	-1/3
	f_2^*	-40	0	8 / 3	1	8 / 3	0	5/3

Із цієї таблиці видно, що ми одержали новий план двоїстої задачі $Y_2 = \left\{0;\ \frac{5}{3}\right\}$, *при якому* $f_2^* = -40$. Таким чином, за допомогою алгоритму двоїстого симплекс - методу ми зробили перехід від одного плану двоїстої задачі до іншого.

Оскільки у стовпчику вільних членів стоїть від'ємне число (- 6), то розглянемо елементи першого рядка. Серед них є три від'ємні числа: - 2; - 3,5; - 0,5. Якщо б такі числа були відсутні, то задача не мала б розв'язку. Знаходимо:

$$\min_j \frac{-\Delta_j}{a_{1j}} = \min\left\{\frac{-8/3}{-2};\frac{-8/3}{-3/2};\frac{-5/3}{-1/2}\right\} = \frac{-8/3}{-2} = \frac{4}{3}.$$

Тому за розв'язний елемент беремо (- 2) і переходимо до нової симплексної таблиці:

b_i	Базис	0	-5	-6	-1	-1	0	0
		c_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-6	x_2	3	0	1	-1 / 2	3 / 4	-1 / 2	1 / 4
-5	x_1	6	1	0	1 / 3	-5 / 6	1 / 3	-1 / 2
	f^*	- 48	0	0	7 / 3	2 / 3	4 / 3	1

Як видно з останньої таблиці, ми знайшли оптимальні розв'язки прямої задачі (1) і двоїстої задачі (2). Цими розв'язками є:

$$X^*_{опт} = \{\ 6;\ 3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\ \}\ \ i\ \ Y^*_{опт} = \left\{\ \frac{4}{3};\ 1\ \right\},\ при\ \ яких\ \ F_{max} = f^*_{min} = -48.$$

Тоді оптимальним розв'язком початкової задачі буде :

$$X_{опт} = \{\ 6;\ 3;\ 0;\ 0\ \},\ при\ \ якому\ \ f_{min} = -\ F_{max} = 48.$$

4 Цілочисельні задачі лінійного програмування

4.1 Економічна і геометрична інтерпретація задачі цілочисельного програмування

Означення. Екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілочисельні значення, називається задачею цілочисельного програмування.

У математичній моделі задачі цілочисельного програмування як цільова функція, так і функції в системі обмежень можуть бути лінійними, нелінійними і змішаними. Обмежимося випадком, коли цільова функція і система обмежень задачі є лінійними.

Приклад. Для обладнання нової виробничої дільниці виділено 30 тис. грн.. Підприємство може замовити обладнання двох типів. Комплект обладнання I виду коштує 6000грн., а II виду – 5000грн. Придбання одного комплекту обладнання I виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 2 од., а одного комплекту обладнання II виду – на 3 од. Обладнання II виду треба розмістити на площі, не більшій ніж 3 м^2. Визначити такий набір додаткового обладнання, який дасть можливість максимально збільшити випуск продукції.

Розв'язування. Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 комплектів обладнання I виду і x_2 комплектів обладнання II виду. Тоді змінні x_1 і x_2 повинні задовольняти такі нерівності:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 30, \\ x_2 \le 3, \end{cases} \tag{1}$$

Якщо підприємство придбає вказану кількість обладнання, то загальне збільшення випуску продукції складе

$$F = 2x_1 + 3x_2 \tag{2}$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 і x_2 можуть приймати лише цілі невід'ємні значення, тобто

$$x_1, x_2 \ge 0, \tag{3}$$

$$x_1, x_2 - цілі \tag{4}$$

Таким чином, приходимо до такої математичної задачі: знайти максимальне значення лінійної функції (2) при виконанні умов (1), (3) і (4). Оскільки невідомі можуть приймати тільки цілі значення, то дана задача є задачею цілочисельного програмування. Оскільки число невідомих задачі дорівнює двом, то розв'язок задачі можна знайти, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Для цього перш за все побудуємо многокутник розв'язків задачі, яка полягає у визначені максимального значення лінійної функції (2) при виконанні умов (1) і (3) без врахування цілочисельності розв'язків (4).

Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $6x_1 + 5x_2 = 30$, яка проходить через точки (0;6) та (5;0);

2) l_2: $x_2 = 3$;

3) l_3: $x_1 = 0$;

4) l_4: $x_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.1).

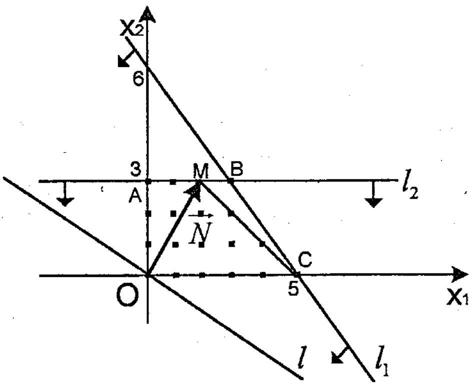

Рисунок 1 – Область допустимих розв'язків

Отже, допустимою областю D є многокутник OABC, який зображено на рис.1. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, знайдемо вектор $\vec{N} = \{2; 3\}$. Проведемо пряму l: $2x_1 + 3x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\vec{N}$ (рис. 1).

Умовно переміщуємо пряму l: $2x_1 + 3x_2 = 0$ паралельно самій собі по області D у напрямі вектора $\vec{N} = \{2; 3\}$ до тих пір, поки вона не почне перетинати область D. Найбільшого значення лінійна функція $F = 2x_1 + 3x_2$ досягатиме в найбільш віддаленій вершині B многокутника OABC, тобто у точці виходу прямої l з даної області. Знайдемо координати точки В $(x_1^*;x_2^*)$. Точка В лежить на перетині прямих l_1 і l_2. Для знаходження координат точки В необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 30, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Підставимо x_2 в перше рівняння , в результаті чого отримаємо:

$6x_1 = 15$ або $x_1^* = \frac{5}{2}$. Тобто точка В має координати $(\frac{5}{2};3)$.

Отже, найбільше значення лінійної функції:

$$F_{\min} = F(B) = 2 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot 3 = 14.$$

Оскільки одна із знайдених координат дробова, то знайдений розв'язок не є розв'язком задачі цілочисельного програмування.

Координати всіх точок побудованого многокутника розв'язків $OABC$ задовольняють систему лінійних нерівностей і умову невід'ємності розв'язків. Разом з тим умову цілочисельності змінних задовольняють координати 18 точок, що відмічені на рис.1.

Щоб знайти точку, координати якої визначають розв'язок вихідної задачі, замінимо многокутник $OABC$ многокутником $OAMC$, який містить всі допустимі точки з цілими координатами. Отже, якщо знайти точку максимуму даної функції на многокутнику $OAMC$, то координати цієї точки і визначають оптимальний план.

Переміщуючи побудовану пряму l: $2x_1 + 3x_2 = 0$ в напрямку вектора $\vec{N}$ до тих пір, поки вона не пройде через останню точку даного многокутника $OAMC$. Координати цієї точки і визначають оптимальний план, а значення цільової функції в ній є максимальним.

В даному випадку шуканою є точка $M(2;3)$, в якій цільова функція приймає максимальне значення $F_{\max} = 13$.

4.2 Визначення оптимального плану задачі цілочисельного програмування

Розглянемо задачі цілочисельного програмування, у яких як цільова функція, так і функції в системі обмежень є лінійними. У зв'язку з цим сформулюємо основну задачу лінійного програмування, у якій змінні можуть приймати тільки цілі значення. У загальному випадку цю задачу можна записати так: знайти максимум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=\overline{1,m}), \tag{6}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}), \tag{7}$$

$$x_j - \textit{цілі} \quad (j=\overline{1,n}). \tag{8}$$

Якщо знайти розв'язок задачі (5) – (8) симплексним методом, то він може виявитися або цілочисельним, або дробовим (прикладом задачі лінійного програмування, розв'язок якої завжди є цілочисельним, служить транспортна задача).

У загальному ж випадку для визначення оптимального плану задачі (5) – (8) застосовуються спеціальні методи. В даний час існує декілька таких методів, з яких найбільш відомим є метод Гоморі, в основі якого лежить описаний вище симплексний метод.

4.3 Метод Гоморі

Знаходження розв'язку задачі цілочисельного програмування методом Гоморі починають з визначення симплексним методом оптимального плану задачі (5) – (7) без врахування цілочисельності змінних. Після того як цей план знайдений, переглядають його компоненти. Якщо серед компонентів немає дробових чисел, то знайдений план є оптимальним планом задачі цілочисельного програмування (5) – (8). Якщо ж в оптимальному плані задачі (5) – (7) змінна x_j приймає дробове значення, то до системи рівнянь (6) додають нерівність

$$\sum_j f(a_{ij}^*)x_j \geq f(b_i^*) \tag{9}$$

і знаходять розв'язок задачі (5) – (7), (9).

У нерівності (9) a_{ij}^* і b_i^* – перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких узяті з останньої симплекс-таблиці, а $f(a_{ij}^*)$ і $f(b_i^*)$ – дробові частини чисел (під дробовою частиною деякого числа a розуміється найменше невід'ємне число b таке, що різниця між a і b є цілою). Якщо в оптимальному плані задачі (5) – (7) дробові значення приймають декілька змінних, то додаткова нерівність (9) визначається найбільшою дробовою частиною.

Якщо в знайденому плані задачі (5) – (7), (9) змінні приймають дробові значення, то знову додають одне додаткове обмеження і процес обчислень повторюють. Проводячи кінцеве число ітерацій або одержують оптимальний план задачі цілочисельного програмування (5) – (8), або встановлюють, що вона не має розв'язку.

Означення. Якщо вимога цілочисельності (8) відноситься лише до деяких змінних, то такі задачі називаються **частково цілочисельними**.

Їх розв'язок також знаходять послідовним розв'язуванням задач, кожну з яких отримують з попередньої за допомогою введення додаткового обмеження. У цьому випадку таке обмеження має вигляд

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \geq f(b_i^*) \qquad (10)$$

де γ_{ij} визначаються з таких співвідношень:

1) для x_j, що можуть приймати не цілі значення,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \; при \quad a_{ij}^* \geq 0, \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} \left| a_{ij}^* \right| \quad при \; a_{ij}^* < 0; \end{cases} \qquad (11)$$

2) для x_j, що можуть приймати тільки цілочисельні значення,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}) \; при \quad f(a_{ij}^*) \leq f(b_i^*), \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} \left[1 - f(a_{ij}^*) \right] \quad при \; f(a_{ij}^*) > f(b_i^*). \end{cases} \qquad (12)$$

З викладеного вище випливає, що процес визначення оптимального плану задачі цілочисельного програмування методом Гоморі включає такі основні етапи:

1. Використовуючи симплексний метод, знаходять розв'язок задачі (5) – (7) без врахування вимоги цілочисельності змінних.

2. Складають додаткове обмеження для змінної, яка в оптимальному плані задачі (5) – (7) має максимальне дробове значення, а в оптимальному плані задачі (5) – (8) повинна бути цілим значенням.

3. Використовуючи двоїстий симплекс-метод, знаходять розв'язок задачі, що виходить із задачі (5) – (7) у результаті приєднання додаткового обмеження.

4. У разі потреби складають ще одне додаткове обмеження і продовжують ітераційний процес до одержання оптимального плану задачі (5) – (8) чи встановлення, що вона не має розв'язку.

Приклад. Методом Гоморі знайти максимальне значення функції

$$F = 2x_1 + 3x_2 \qquad (13)$$

при умовах

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 30, \\ x_2 \qquad + x_4 \quad = 3, \end{cases} \qquad (14)$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1,4}), \qquad (15)$$

$$x_j - цілі \quad (j = \overline{1,4}). \qquad (16)$$

Дати геометричну інтерпретацію розв'язку задачі.

Розв'язування. Для визначення оптимального плану задачі (13) – (16) спочатку знаходимо оптимальний план задачі (13) – (15). Зведемо задачу до стандартного вигляду: $f = -F = -2x_1 - 3x_2 \to \min$

Таблиця 1

Базисні невідомі	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
x_3 x_4	6 0	5 1	1 0	0 1	30 3	30/5 3/1
f	-2	-3	0	0	0	
$X^{(1)} = (0;0;30;3)$						
x_3 x_2	6 0	0 1	1 0	-5 1	15 3	
f	-2	0	0	3	9	
$X^{(2)} = (0;3;15;0)$						
x_1 x_2	1 0	0 1	1/6 0	-5/6 1	5/2 3	
f	0	0	1/3	4/3	14	
$X^{(3)} = (\frac{5}{2};3;0;0)$						

Як видно із табл. 1, знайдений оптимальний план $X^{(3)} = (5/2;\ 3;\ 0;\ 0)$ задачі (13) – (15) не є оптимальним планом задачі (13) – (16), оскільки компонента x_1 має дробове значення. Складемо додаткове обмеження для змінної x_1. З останньої симплекс-таблиці (табл.1) маємо

$$x_1 + (1/6)x_3 - (5/6)x_4 = 5/2.$$

Таким чином, до системи обмежень задачі (13) – (15) додаємо нерівність

$$f(1)x_1 + f(1/6)x_3 + f(-5/6)x_4 \geq f(5/2), \text{ або}$$

$$(1/6)x_3 + (1/6)x_4 \geq 1/2, \text{ тобто}$$

$$x_3 + x_4 \geq 3.$$

Останнє обмеження зводиться до вигляду $-x_3 - x_4 + x_5 = -3$ (17). Знаходимо тепер максимальне значення функції (13) при виконанні умов (14), (15) і (17).

Таблиця2

Б.Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1/6	-5/6	0	5/2
x_2	0	1	0	1	0	3
x_5	0	0	-1	-1	1	-3
f	0	0	1/3	4/3	0	14

Оскільки в стовпці вектора b_i є від'ємне значення, а в рядку f від'ємних значень немає, то у відповідності із алгоритмом двоїстого симплекс-методу перейдемо до нового кроку перетворень. (В даному випадку це можливо зробити, оскільки в рядку вектора x_5 є від'ємні значення. Якщо б вони були відсутні, то задача не мала б розв'язку.) Вектор, що виключається із базису, визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом, яке знаходиться у стовпці b_i. В даному випадку це число (–3). Відповідно із базису виключаємо вектор x_5. Щоб визначити, який вектор слід ввести у базис, знаходимо $\min_j(-\Delta_j/a_{3j})$, $де\ a_{3j}<0$. Маємо $\min((-\frac{1}{3})/(-1);(-\frac{4}{3})/(-1))=\frac{1}{3}$. Отже, у базис вводять вектор x_3. Переходимо до нової симплекс-таблиці.

Б.Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	1/6	-5/6	0	5/2
x_2	0	1	0	1	0	3
X_3	0	0	1	1	-1	3
f	0	0	1/3	4/3	0	14

Б.Н.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	-1	1/6	2
x_2	0	1	0	1	0	3
x_5	0	0	1	1	-1	3
f	0	0	0	1	1/3	13

З таблиці 2 видно, що вихідна задача цілочисельного програмування має оптимальний план $X^*=(2;\ 3;\ 3;\ 0)$. При цьому плані значення цільової функції дорівнює $F_{max}=13$. Дамо геометричну інтерпретацію розв'язку задачі. Областю припустимих розв'язків задачі (13) – (15) є многокутник ОАВС (рис. 2). З рис.2 видно, що максимальне значення цільова функція приймає в точці В (5/2; 3), тобто що $X=(5/2;\ 3;\ 0;\ 0)$ є оптимальним планом. Це безпосередньо видно і з табл. 1. Оскільки Х = (5/2; 3; 0; 0) не є оптимальним планом задачі (13) – (16) (число 5/2 - дробове), то вводиться додаткове обмеження $x_3+x_4\geq 3$. Виключаючи із нього x_3 та x_4, підставляючи замість них відповідні значення із рівнянь системи обмежень отримаємо $x_1+x_2\leq 5$. Цій нерівності відповідає півплощина, обмежена прямою $l_5 : x_1 + x_2 = 5$, що відтинає від многокутника ОАВС трикутник МВС.

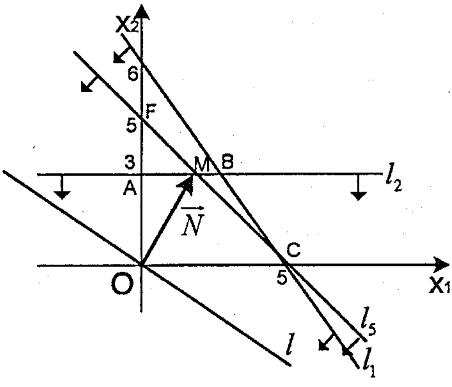

Рисунок 2 – Область допустимих розв'язків

Як видно з рис. 2, областю припустимих розв'язків отриманої задачі є многокутник ОАМС. У точці М (2; 3) цього многокутника цільова функція даної задачі приймає максимальне значення. Оскільки координати точки М – цілі числа і невідомі x_3, x_4 приймають цілі значення при підстановці в рівняння (14) значень $x_1 = 2$ і $x_2 = 3$, то X^* = (2; 3; 0; 0) є оптимальним планом задачі (13) – (16). Це й випливає із таблиці 2.

5 Задачі дробово-лінійного програмування

5.1 Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування

Загальна задача дробово-лінійного програмування полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{F_1}{F_2} \qquad (1)$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (3)$$

де c_j, d_j, b_i, a_{ij} – деякі постійні числа, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n})$ і $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$ в області невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь (2). При цьому будемо вважати, що $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$ (така умова не порушить сутності задачі, оскільки в тому випадку, якщо ця величина від'ємна, знак мінус можна віднести до чисельника).

Як і у випадку основної задачі лінійного програмування, своє максимальне значення цільова функція задачі (1)-(3) приймає в одній із вершин многокутника розв'язків, що визначається системою обмежень (2) і (3) (при умові, що задача має оптимальний план). Якщо максимальне значення цільова функція задачі (1) приймає більш ніж в одній вершині многокутника розв'язків, то вона досягає його також в довільній точці, що є випуклою комбінацією даних вершин.

Розглянемо задачу, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \tag{4}$$

при умовах

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \quad (i=\overline{1,m}), \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{6}$$

Будемо вважати, що $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$.

Щоб знайти розв'язок задачі (4)-(6) спочатку знаходимо многокутник розв'язків, що визначається обмеженнями (5) і (6). Припускаючи, що цей многокутник не пустий, покладемо значення функції рівним деякому числу h, так що пряма

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = h, \tag{7}$$

яка проходить через початок координат, має спільні точки з многокутником розв'язків. Обертаючи побудовану пряму (7) навколо початку координат в напрямку руху годинникової стрілки, або визначають вершину (вершини), в якій (яких) функція (4) приймає максимальне значення, або встановлюють необмеженість функції на множині планів задачі.

Процес знаходження розв'язку задачі (4)-(6) включає такі етапи:

1. У системі обмежень задачі змінюють знаки нерівностей на знаки точних рівностей і будують прямі, що визначаються цими рівностями.

2. Знаходять півплощини, що визначаються кожною із нерівностей обмежень задачі.

3. Знаходять многокутник розв'язків задачі.

4. Будують пряму (7), рівняння якої отримують, якщо покласти значення цільової функції (4) рівним деякому постійному числу.

5. Визначають точку максимуму або встановлюють, що задача розв'язків не має.

6. Знаходять значення цільової функції в точці максимуму.

Приклад. Розв'язати геометричним методом задачу дробово-лінійного програмування

$$F = \frac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min \tag{8}$$

при умовах

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \geq 27, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \end{cases} \tag{9}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{10}$$

Розв'язування

Щоб знайти розв'язок задачі перш за все побудуємо многокутник розв'язків. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $3x_1 + 9x_2 = 27$, яка проходить через точки (0;3) та (9;0);
2) l_2: $2x_1 + x_2 = 6$, яка проходить через точки (0;6) та (3;0);
3) $l_3: 5x_1 + 6x_2 = 30$, яка проходить через точки (0;5) та (6;0);
4) $l_4 : x_1 = 0$;
5) l_5: $x_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.3).

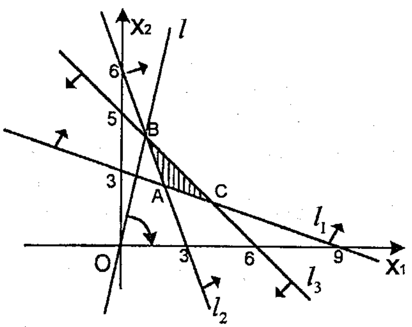

Рисунок 3 – Область допустимих розв'язків

Як видно із рис.3 ним є трикутник ABC. Значить функція (8) приймає мінімальне значення в одній із точок: B, C або A. Щоб зобразити цільову функцію, покладемо її як лінійну функцію аргументу x_1, розв'язавши відносно x_2:

$$F(x_1 + x_2) = 4x_1 + 3x_2,$$
$$Fx_2 - 3x_2 = 4x_1 - Fx_1,$$
$$x_2(F-3) = (4-F)x_1,$$
$$x_2 = \frac{(4-F)}{(F-3)}x_1.$$

Одержане рівняння є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $k = \dfrac{4-F}{F-3}$.

Розглядаючи k, як функцію від F, знайдемо її похідну:

$$k' = \frac{-(F-3)-(4-F)}{(F-3)^2} = \frac{-F+3-4+F}{(F-3)^2} = -\frac{1}{(F-3)^2}.$$

А це означає, що функція $k = \dfrac{4-F}{F-3}$ є монотонно спадною, тобто із збільшенням F величина k зменшується, що відповідає обертанню прямої навколо точки O за годинниковою стрілкою. Звідси випливає, що найменшого значення функція F набуває у вершині B, координати якої є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на (-6) і додамо до другого, в результаті чого отримаємо:

$-7x_1 = -6$ або $x_1^* = \dfrac{6}{7}$. Тоді $x_2^* = 6 - 2\cdot\dfrac{6}{7} = 6 - \dfrac{12}{7} = \dfrac{30}{7}$. Тобто точка B має координати $(\dfrac{6}{7};\dfrac{30}{7})$.

Отже, найменше значення лінійної функції:

$$F_{\min} = F(B) = \frac{4\cdot\frac{6}{7} + 3\cdot\frac{30}{7}}{\frac{6}{7}+\frac{30}{7}} = \frac{57}{18} \approx 3{,}16.$$

Практично знайти точку мінімуму можна простіше. Оскільки область допустимих розв'язків є випуклий многокутник, то як відомо екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин B або C. Знайдемо координати цих точок: $B(\dfrac{6}{7};\dfrac{30}{7})$, $C(4;\dfrac{5}{3})$. Значення функції в цих точках відповідно дорівнюють: $F(B) = \dfrac{57}{18}$, $F(C) = \dfrac{63}{17}$. Оскільки $F(B) < F(C)$, то можна стверджувати, що в точці B цільова функція приймає мінімальне значення. Одночасно з цим відмітимо, що в точці С функція приймає максимальне значення.

При розв'язування задач дробово-лінійного програмування графічним методом можуть бути різні випадки:

1) Многогранник розв'язків обмежений, максимум і мінімум досягаються в його кутових точках.

2) Многогранник розв'язків не обмежений, але існують кутові точки, в яких цільова функція задачі приймає відповідно максимальне і мінімальне значення.

3) Многогранник розв'язків не обмежений, і один із екстремумів досягається. Наприклад, мінімум досягається в одній із вершин многогранника розв'язків і функція має так званий асимптотичний максимум.

4) Многогранник розв'язків не обмежений, а максимум і мінімум є асимптотичними.

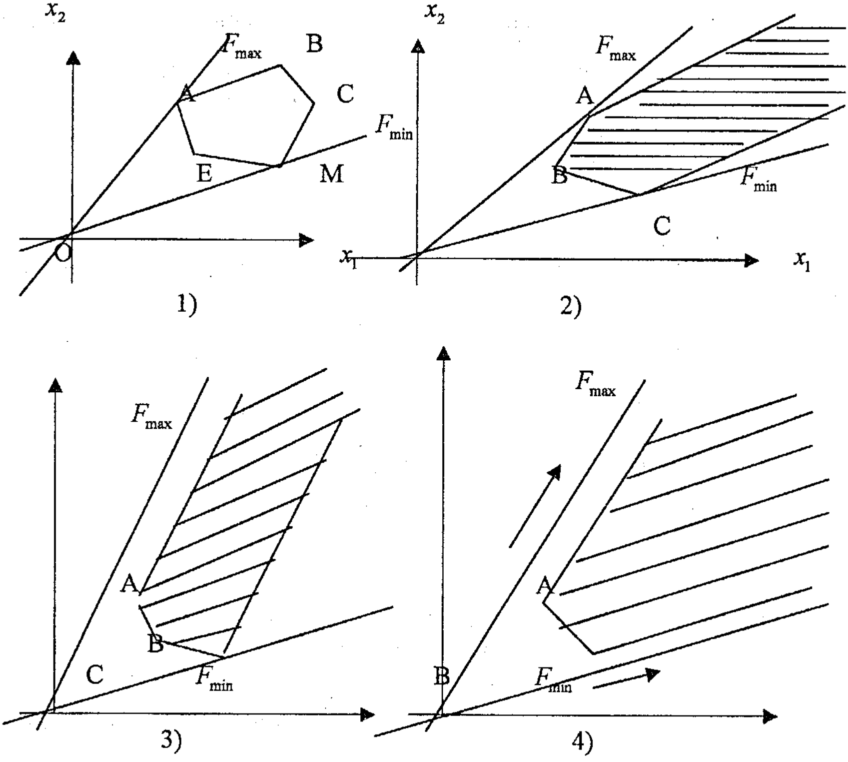

Рисунок 4 – Області допустимих розв'язків

5.2 Зведення задач дробово-лінійного програмування до задач лінійного програмування

Шляхом певної заміни цільову функцію в задачах дробово-лінійного програмування можна звести до лінійного вигляду, в результаті чого ми прийдемо до звичайних задач лінійного програмування.

Нехай задана задача дробово-лінійного програмування

$$F=\frac{b_1x_1+b_2x_2}{d_1x_1+d_2x_2}\to\max(\text{чи}\min) \qquad (1)$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=c_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=c_2,\end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j\ge 0. \qquad (3)$$

Нехай

$$d_1x_1+d_2x_2=\frac{1}{y_2},$$

$$x_1=\frac{y_1}{y_2}.$$

Тоді $d_2x_2=\dfrac{1}{y_2}-d_1x_1=\dfrac{1}{y_2}-\dfrac{d_1y_1}{y_2}$; $\quad x_2=\dfrac{1-d_1y_1}{d_2y_2}$.

Враховуючи наведену заміну цільова функція набере вигляду:

$F=\dfrac{b_1\dfrac{y_1}{y_2}+b_2\dfrac{1-d_1y_1}{d_2y_2}}{\dfrac{1}{y_2}}=b_1y_1+\dfrac{b_2}{d_2}(1-d_1y_1)$ – цільова функція стає лінійною функцією.

Приклад 1. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування шляхом переходу до задачі лінійного програмування:

$$F=\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}\to\min$$

$$\begin{cases}x_1+4x_2\le 13,\\ x_1+x_2\ge 4,\\ 4x_1+x_2\le 13,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0.$$

Розв'язування

Нехай $x_1+x_2=\dfrac{1}{y_2}$; $\quad x_1=\dfrac{y_1}{y_2}$; $\quad x_2=\dfrac{1}{y_2}-x_1=\dfrac{1}{y_2}-\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{1-y_1}{y_2}$.

Тоді $F = \dfrac{2 \cdot \dfrac{y_1}{y_2} + 3 \cdot \dfrac{1-y_1}{y_2}}{\dfrac{1}{y_2}} = 2y_1 + 3 - 3y_1 = -y_1 + 3 \to \min$

Перетворимо систему обмежень:

$$\begin{cases} \dfrac{y_1}{y_2} + 4 \cdot \dfrac{1-y_1}{y_2} \le 13, \\ \dfrac{y_1}{y_2} + \dfrac{1-y_1}{y_2} \ge 4, \\ 4 \cdot \dfrac{y_1}{y_2} + \dfrac{1-y_1}{y_2} \le 13, \\ y_j \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 4 - 4y_1 \le 13y_2, \\ y_1 + 1 - y_1 \ge 4y_2, \\ 4y_1 + 1 - y_1 \le 13y_2, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13y_2 + 3y_1 \ge 4, \\ 4y_2 \le 1, \\ 3y_1 - 13y_2 \le -1, \\ y_j \ge 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 13y_2 + 3y_1 \ge 4, \\ 4y_2 \le 1, \\ -3y_1 + 13y_2 \ge 1, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

Зведемо задачу до основного вигляду:

$F = -y_1 + 3 \to \min$

$$\begin{cases} 13y_2 + 3y_1 - y_3 = 4, \\ 4y_2 + y_4 = 1, \\ -3y_1 + 13y_2 - y_5 = 1, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

Введемо штучні змінні, в результаті чого отримаємо:

$$\begin{cases} 13y_2 + 3y_1 - y_3 + y_6 = 4, \\ 4y_2 + y_4 = 1, \\ -3y_1 + 13y_2 - y_5 + y_7 = 1, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

$F = -y_1 + 3 + M(y_6 + y_7) \to \min$

Складаємо таблицю симплексних перетворень.

БН	y_1	y_2	l_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b_i
y_4	3	13	-1	0	0	1	0	4
y_6	0	4	0	1	0	0	0	1
y_7	-3	13	0	0	-1	0	1	1
оцінки	-1	0	0	0	0	M	M	-3
оцінки	-1-3M	-13M	M	0	0	0	M	-3-4M
оцінки	-1	-26M	M	0	M	0	0	-3-5M
$Y^{(1)}=(0;0;0;1;0;4;1)$								
	3	13	-1	0	0	1	0	4
	0	4	0	1	0	0	0	1
	-3/13	1	0	0	-1/13	0	1/13	1/13
оцінки	-1	-26M	M	0	M	0	0	-3-5M
y_4	6	0	-1	0	1	1		3
y_2	12/13	0	0	1	4/13	0		9/13
y_6	-3/13	1	0	0	-1/13	0		1/13
оцінки	-1-6M	0	M	0	-M	0		-3-3M
$Y^{(2)}=(0;1/13;0;9/13;0;3;0)$								
	1	0	-1/6	0	1/6	1/6		1/2
	12/13	0	0	1	4/13	0		9/13
	-3/13	1	0	0	-1/13	0		1/13
оцінки	-1-6M	0	M	0	-M	0		-3-3M
y_1	1	0	-1/6	0	1/6			1/2
y_2	0	0	2/13	1	2/13			3/13
y_4	0	1	-1/26	0	-11/26			5/26
оцінки	0	0	-1/6	0	1/6			-5/2
$Y^{(3)}=(1/2;5/26;0;3/13;0;0;0)$								
	1	0	-1/6	0	1/6			1/2
	0	0	1	13/2	1			3/2
	0	1	-1/26	0	-11/26			5/26
оцінки	0	0	-1/6	0	1/6			-5/2
y_1	1	0	0	13/12	1/3			3/4
y_2	0	0	1	13/2	1			3/2
y_3	0	1	0	1/4	-5/13			1/4
оцінки	0	0	0	13/12	1/3			-9/4
$Y^{(4)}=(3/4;1/4;3/2;0;0;0;0)$								

$Y_{опт}=(3/4;1/4;3/2)$. Тоді $x_1=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{3}{4}:\dfrac{1}{4}=3$; $\quad x_2=\dfrac{1}{y_2}-x_1=\dfrac{1}{\frac{1}{4}}-3=1$.

Отже, $X_{опт}=(3;1)$ і $F_{\min}=\dfrac{9}{4}$.

6 ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ІГОР І ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

6.1 Економічна і геометрична інтерпретації задач теорії ігор

Якщо є кілька конфліктуючих сторін (осіб), кожна з яких приймає деяке рішення, обумовлене заданим набором правил, і кожній відомо можливий кінцевий стан конфліктної ситуації із заздалегідь визначеними для кожної зі сторін платежами, то говорять, що має місце *гра*. Задача теорії ігор складається у виборі такої лінії поведінки даного гравця, відхилення від якої може лише зменшити його виграш.

Означення 1. Ситуація називається ***конфліктною***, якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких повністю або частково протилежні.

Означення 2. ***Гра*** — це дійсний чи формальний конфлікт, у якому присутні принаймні два учасники (гравця), кожний з який прагне до досягнення власних цілей.

Означення 3. Припустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення деякої мети, називаються ***правилами гри***.

Означення 4. Кількісна оцінка результатів гри називається ***платежем***.

Означення 5. Гра називається ***парною***, якщо в ній беруть участь тільки дві сторони (дві особи).

Означення 6. Парна гра називається ***грою з нульовою сумою***, якщо сума платежів дорівнює нулю, тобто якщо програш одного гравця дорівнює виграшу другого.

Означення 7. Однозначний опис вибору гравця в кожній з можливих ситуацій, при якій він повинен зробити особистий хід, називається ***стратегією*** гравця.

Означення 8. Стратегія гравця називається ***оптимальною***, якщо при багатократному повторенні гри вона забезпечує гравцю максимально можливий середній виграш (або, це те саме, що мінімально можливий середній програш).

Нехай є два гравці, один із яких може вибрати i-ту стратегію з m своїх можливих стратегій $(i=\overline{1,m})$, а другий, не знаючи вибору першого, вибирає j-ту стратегію з n своїх можливих стратегій $j=(\overline{1,n})$. У результаті перший гравець виграє величину a_{ij}, а другий програє цю величину.

З чисел a_{ij} складемо матрицю

$$A=a_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рядки матриці A відповідають стратегіям першого гравця, а стовпці – стратегіям другого. Ці стратегії називаються ***чистими***.

Означення 9. Матриця A називається ***платіжною*** (або *матрицею гри).*

Означення 10. Гру, що визначається матрицею A, яка має m рядків і n стовпців, називають *кінцевою грою розмірності* $m \times n$.

Означення 11. Число $\alpha = \max_i(\min_j a_{ij})$ (1) називається ***нижньою ціною*** *гри* або максіміном, а відповідна йому стратегія (рядок) – максімінною.

Означення 12. Число $\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$ (2) називається *верхньою ціною гри* або мінімаксом, а відповідна йому стратегія гравця (стовпець) – мінімаксною.

Теорема 1. Нижня ціна гри завжди не перевищує верхньої ціни гри.

Означення 13. Якщо $\alpha = \beta = v$, то число v називається ***ціною гри.***

Означення 14. Гра, для якої $\alpha = \beta$, називається ***грою із сідловою точкою.***

Для гри із сідловою точкою знаходження розв'язку полягає у виборі максімінної і мінімаксної стратегій, що є оптимальними.

Якщо гра, задана матрицею, не має сідлової точки, то для знаходження її розв'язку використовуються змішані стратегії.

Означення 15. Вектор, кожна з компонентів якого показує відносну частоту використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається ***змішаною стратегією*** даного гравця.

З даного означення безпосередньо випливає, що сума компонентів вказаного вектора дорівнює одиниці, а самі компоненти невід'ємні. Зазвичай змішану стратегію першого гравця позначають як вектор $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$, а другого гравця–як вектор $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, де $u_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$, $z_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$,

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1, \sum_{j=1}^{n} z_j = 1 \tag{3}$$

Якщо U^* – оптимальна стратегія першого гравця, а Z^* – оптимальна стратегія другого гравця, то число

$$v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* z_j^* \tag{4}$$

є ціною гри.

Визначення оптимальних стратегій і ціни гри і складає процес знаходження розв'язку гри.

Теорема 2. Усяка матрична гра з нульовою сумою має розв'язок в змішаних стратегіях.

Теорема 3. Для того щоб число v було ціною гри, а U^* і Z^* – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \ge v \quad (j=\overline{1,n}) \text{ і } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j^* \le v \quad (i=\overline{1,m}) \tag{5}$$

Якщо теорема 2 дає відповідь на питання про існування розв'язку гри, то наступна теорема дає відповідь на питання, як знайти цей розв'язок для ігор $2\times 2, 2\times n, n\times 2$, приклади яких приведені нижче.

Теорема 4. Якщо один із гравців застосовує оптимальну змішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри v незалежно від того, з якими частотами буде застосовувати другий гравець стратегії, що ввійшли в оптимальну (у тому числі і чисті стратегії).

Узагальнюючи викладені вище результати знаходження розв'язку гри 2×2, можна вказати основні етапи знаходження розв'язку гри $2\times n$ чи $n\times 2$.

1. Будують прямі, що відповідають стратегіям другого (першого) гравця.
2. Визначають нижню (верхню) границю виграшу.
3. Знаходять дві стратегії другого (першого) гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з максимальною (мінімальною) ординатою.
5. Визначають ціну гри й оптимальні стратегії.

6.2. Алгебраїчний метод розв'язування ігор

Нехай матрична гра з платіжною матрицею

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

не має сідлової точки. Тоді змішані стратегії гравців $U=(u_1;u_2)$, $Z=(z_1;z_2)$ та ціну гри v можна обчислити за формулами:

$$u_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}; \quad u_2=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}};$$
$$z_1=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}; \quad z_2=\frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}; \tag{7}$$
$$v=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}.$$

Приклад 1. Використовуючи алгебраїчний метод знайти розв'язок гри, що визначається матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування

Насамперед перевіримо наявність сідлової точки в даній матриці. Для цього знайдемо мінімальні елементи в кожному з рядків (1 і 2) і максимальні елементи в кожному зі стовпців (6 і 9). Виходить, нижня ціна гри $\alpha = \max(1;2) = 2$, а верхня ціна гри $\beta = \min(6;9) = 6$. Оскільки $\alpha = 2 \neq \beta = 6$, то розв'язком гри є змішані оптимальні стратегії, а ціна гри v знаходиться в межах $2 \leq v \leq 6$.

Використовуючи алгебраїчний метод знайдемо змішані стратегії гравців та ціну гри. За формулами:

$$u_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{2-6}{1-9-6+2} = \frac{1}{3};$$

$$u_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{1-9}{1-9-6+2} = \frac{2}{3};$$

$$z_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{2-9}{1-9-6+2} = \frac{7}{12};$$

$$z_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{1-6}{1-9-6+2} = \frac{5}{12};$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{1 \cdot 2 - 9 \cdot 6}{1-9-6+2} = \frac{13}{3}.$$

Тоді змішані стратегії гравців $U = (\frac{1}{3};\frac{2}{3})$, $Z = (\frac{7}{12};\frac{5}{12})$ і ціна гри $v = \frac{13}{3}$.

Приклад 2. Знайти розв'язок гри, що задана матрицею $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, і дати геометричну інтерпретацію цього розв'язку.

Розв'язування. Насамперед перевіримо наявність сідлової точки в даній матриці. Для цього знайдемо мінімальні елементи в кожному з рядків (3 і 4) і максимальні елементи в кожному зі стовпців (6 і 8). Виходить, нижня ціна гри $\alpha = \max(3;4) = 4$, а верхня ціна гри $\beta = \min(6;8) = 6$. Оскільки $\alpha = 4 \neq \beta = 6$, то розв'язком гри є змішані оптимальні стратегії, а ціна гри v знаходиться в межах $4 \leq v \leq 6$.

Припустимо, що для гравця A стратегія задається вектором $U = (u_1;u_2)$. Тоді на підставі теореми 4 при застосуванні гравцем B чистої стратегії B_1 чи B_2 гравець A одержить середній виграш, що дорівнює ціні гри, тобто

$3u_1^* + 6u_2^* = v$ (*при стратегії* B_1),

$8u_1^* + 4u_2^* = v$ (*при стратегії* B_2).

Крім двох записаних рівнянь відносно u_1^* і u_2^* додамо рівняння, що пов'язує частоти u_1^* і u_2^*: $u_1^* + u_2^* = 1$. Розв'язуємо отриману систему трьох рівнянь із трьома невідомими методом Крамера:

$$\begin{cases} 3u_1^* + 6u_2^* - v = 0, \\ 8u_1^* + 4u_2^* - v = 0, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(5+2) = -7;$$

$$\Delta_{u_1^*} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2;$$

$$\Delta_{u_2^*} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -(-3+8) = -5;$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 48 = -36.$$

Обчислимо $u_1^* = \dfrac{\Delta_{u_1^*}}{\Delta} = \dfrac{2}{7}$; $u_2^* = \dfrac{\Delta_{u_2^*}}{\Delta} = \dfrac{5}{7}$; $v = \dfrac{\Delta_v}{\Delta} = \dfrac{36}{7}$.

Знайдемо тепер оптимальну стратегію для гравця *B*. Нехай стратегія для даного гравця задається вектором $Z = (z_1, z_2)$. Тоді

$$\begin{cases} 3z_1^* + 8z_2^* = 36/7, \\ 6z_1^* + 4z_2^* = 36/7, \\ z_1^* + z_2^* = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, що складена з будь-яких двох рівнянь, узятих з останньої системи, одержимо $z_1^* = 3/7, z_2^* = 4/7$. Отже, розв'язком гри є змішані стратегії $U^* = (2/7;\ 5/7)$ і $Z^* = (3/7;\ 4/7)$, а ціна гри $v = 36/7$.

Дамо тепер геометричну інтерпретацію розв'язку даної гри. Для цього на площині uOz введемо систему координат і на осі Ou відкладемо відрізок одиничної довжини A_1A_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію $U = (u_1; u_2) = (u_1, 1 - u_1)$ (рис. 2). Зокрема, точці $A_1(0;\ 1)$ відповідає стратегія A_1, точці A_2 (1; 0) –стратегія A_2 і т.д.

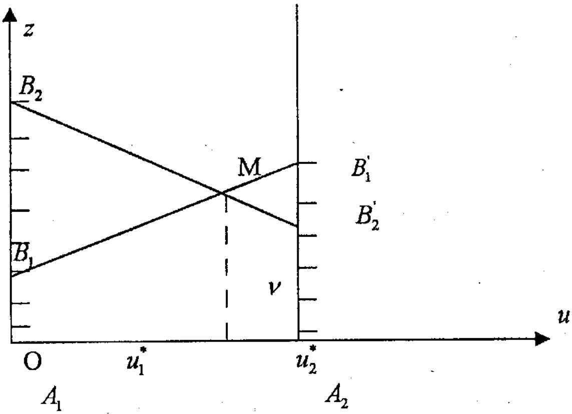

Рисунок 1 – Геометрична інтерпретація

У точках A_1 і A_2 поставимо перпендикуляри і на отриманих прямих будемо відкладати виграш гравців. На першому перпендикулярі (у даному випадку він збігається з віссю Oz) відкладемо виграш гравця A при стратегії A_1, а на другому – при стратегії A_2. Якщо гравець A застосовує стратегію A_1, то його виграш при стратегії B_1 гравця B дорівнює 3, а при стратегії B_2 він дорівнює 8. Числам 3 і 8 на осі Oz відповідають точки B_1 і B_2.

Якщо ж гравець A застосовує стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 гравця B дорівнює 6, а при стратегії B_2 він дорівнює 4. Ці два числа визначають дві точки B_1' і B_2' на перпендикулярі, що поставлений у точці A_2. З'єднуючи між собою точки B_1 і B_1', B_2 і B_2', одержимо дві прямі, відстань до яких від осі Ou визначає середній виграш при будь-якому сполученні відповідних стратегій. Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізка B_1B_1' до осі Ou визначає середній виграш v_1 при будь-якому сполученні стратегій A_1 і A_2 (з частотами u_1 і u_2) і стратегії B_1 гравця B. Ця відстань дорівнює $3u_1 + 6u_2 = v_1$. Аналогічно, середній виграш при застосуванні стратегії B_2 визначається ординатами точок, що належать відрізку B_2B_2'.

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній B_1MB_2', визначають мінімальний виграш гравця A при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці M;

отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $U^* = (u_1^*; u_2^*)$, а її ордината дорівнює ціні гри v. Координати точки M знаходимо як координати точки перетинання прямих B_1B_1' і B_2B_2'. Відповідні три рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 3u_1^* + 6u_2^* = v, \\ 8u_1^* + 4u_2^* = v, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему рівнянь, одержуємо $u_1^* = 2/7; u_2^* = 5/7; v = 36/7.$ Аналогічно знаходиться оптимальна стратегія для гравця B. Для її визначення маємо рівняння

$$\begin{cases} 6z_1^* + 4z_2^* = 36/7, \\ z_1^* + z_2^* = 1, \end{cases}$$

або $z_1^* = 3/7, z_2^* = 4/7.$

Отже, розв'язком гри є змішані стратегії U^* = (2/7; 5/7) і Z^* = (3/7; 4/7), а ціна гри v = 36/7. До такого висновку ми прийшли і вище.

Приклад 3. Швейне підприємство планує до масового випуску нову модель одягу. Попит на цю модель не може бути точно визначений. Однак можна припустити, що його величина характеризується трьома можливими станами (I, II, III). З урахуванням цих станів аналізуються три можливих варіанти випуску даної моделі *(А, Б, В)*. Кожний з цих варіантів вимагає своїх витрат і забезпечує в кінцевому рахунку різний ефект. Прибуток (тис. грн.), що одержує підприємство при даному обсязі випуску моделі і відповідному стані попиту, визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} I & II & III \\ 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix}.$$

Потрібно знайти обсяг випуску моделі одягу, що забезпечує середню величину прибутку при будь-якому стані попиту.

Розв'язування. Насамперед перевіримо, чи має вихідна матриця сідлову точку. Для цього знаходимо мінімальні елементи в її рядках (22; 21; 20) і максимальні – у стовпцях (22; 23; 24). Максимальним серед мінімальних елементів рядків є число α = 22, а мінімальним серед максимальних елементів стовпців – число β = 22. Таким чином, $\alpha = \beta = 22$. Число 22 є ціною гри. Гра має сідлову точку, що відповідає I варіанту випуску моделі одягу. Обсяг випуску моделі, що відповідає даному варіанту, забезпечує прибуток у 22 тис. грн.при будь-якому стані попиту.

6.3 Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування

Розглянемо гру $m \times n$, що визначається матрицею

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Відповідно до теореми 3, для оптимальної стратегії першого гравця $U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ і ціни гри v виконується нерівність $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \geq v \; (j = \overline{1,n})$.

Припустимо для визначеності, що $v > 0$. Це завжди може бути досягнуто завдяки тому, що шляхом додавання до всіх елементів матриці A того самого сталого числа С не приводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки лише збільшує ціну гри на С.

Розділивши тепер обидві частини останньої нерівності на v, одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{u_i^*}{v} \geq 1 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Покладемо $u_i^* / v = y_i^*$, тоді

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* \geq 1 \quad (j = \overline{1,n}); \quad y_i^* \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}).$$

Використовуючи введене позначення, перепишемо умову $\sum_{i=1}^{m} u_i^* = 1$ у вигляді $\sum_{i=1}^{m} y_i^* = 1/v$.

Оскільки перший гравець прагне одержати максимальний виграш, то він повинний забезпечити мінімум величині $1/v$. З врахуванням цього„ визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до знаходження мінімального значення функції $F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$ при умовах $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \, (j = \overline{1,n}); \, y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$.

Аналогічні міркування показують, що визначення оптимальної стратегії другого гравця зводиться до знаходження максимального значення функції $F = \sum_{j=1}^{n} x_j$ при умовах $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \, (i = \overline{1,m}); \, x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$. Тут $x_j = z_j / v$.

Таким чином, щоб знайти розв'язок даної гри, що визначається матрицею A, потрібно скласти наступну пару двоїстих задач і знайти їхній розв'язок.

Пряма задача: знайти максимальне значення функції $F=\sum_{j=1}^{n} x_j$ при умовах $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1\ (i=\overline{1,m});\ x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n})$.

Двоїста задача: знайти мінімальне значення функції $F^*=\sum_{i=1}^{m} y_i$ при умовах $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge 1\ (j=\overline{1,n});\ y_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,m})$.

Використовуючи розв'язок пари двоїстих задач, одержуємо формули для визначення стратегій і ціни гри:

$$u_i^*=\frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}=vy_i^*;\quad z_j^*=\frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*}=vx_j^*;$$

$$v=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*};\quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).$$

Отже, процес знаходження розв'язку гри з використанням методів лінійного програмування включає такі етапи:

1. Складають пари двоїстих задач лінійного програмування, еквівалентних даній матричній грі.

2. Визначають оптимальні плани пари двоїстих задач.

3. Використовуючи співвідношення між планами пари двоїстих задач і оптимальними стратегіями і ціною гри, знаходять розв'язок гри.

Приклад 4. Знайти розв'язок гри, що визначається матрицею

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язування. Складемо двоїсту пару задач лінійного програмування: пряма задача: знайти максимум функції $F=x_1+x_2+x_3$ при умовах

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+4x_3\le 1, \\ \qquad 2x_2+3x_3\le 1, \\ x_1+x_2+2x_3\le 1, \end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3\ge 0;$$

двоїста задача: знайти мінімум функції $F^*=y_1+y_2+y_3$ при умовах

$$\begin{cases} 2y_1 + y_3 \ge 1, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1, \\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

Знаходимо оптимальні плани прямої і двоїстої задач.

Базисні невідомі	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b_i
X_4 X_5 X_6	2 0 1	1 2 1	4 3 2	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1 1 1
f	-1	-1	-1	0	0	0	0
$X^{(1)} = (0;0;0;1;1;1)$							
X_1 X_5 X_6	1 0 0	1/2 2 1/2	2 3 0	1/2 0 -1/2	0 1 0	0 0 1	1/2 1 1/2
f	0	-1/2	1	1/2	0	0	1/2
$X^{(2)} = (1/2;0;0;0;1;1/2)$							
X_1 X_2 X_6	1 0 0	0 1 0	5/4 3/2 -3/4	1/2 0 -1/2	-1/4 1/2 -1/4	0 0 1	1/4 1/2 1/4
f	0	0	7/4	1/2	1/4	0	3/4
$X^{(3)} = (1/4;1/2;0;0;0;1/4)$							

З таблиці видно, що вихідна задача має оптимальний план $X^* = (1/4;1/2;0)$, двоїста задача – оптимальний план $Y^* = (1/2;1/4;0)$.

Отже, ціна гри $v = \dfrac{1}{(1/4)+(1/2)} = \dfrac{4}{3}$, а оптимальні стратегії гравців

$$u_1^* = v \cdot y_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}; \quad u_2^* = v \cdot y_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3};$$

$$z_1^* = v \cdot x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}; \quad z_2^* = v \cdot x_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Отже, $U^* = (2/3;1/3;0)$; $Z^* = (1/3;2/3;0)$.

Як було показано, що для всякої матричної гри можна записати симетричну пару двоїстих задач. Справедливо і протилежне: для всякої симетричної пари двоїстих задач можна записати матричну гру.

Нехай задана симетрична пара двоїстих задач:

пряма задача: $F = CX$, $AX \le B$, $X \ge 0$;

двоїста задача: $F^* = BY$, $YA^T \geq C, Y \geq 0$. Тоді цій симетричній парі двоїстих задач можна поставити у відповідність гру, що визначається матрицею

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{pmatrix}$$

де індекс Т означає операцію транспонування.

Слід зазначити, що якщо кожна матрична гра має оптимальні стратегії, то не всяка задача лінійного програмування має розв'язок.

Приклад 5. Побудувати гру, що визначається даною парою двоїстих задач: пряма задача:

$$F = x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

двоїста задача:

$$F^* = 4y_1 + 9y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \geq 1, \\ y_1 + 3y_2 \geq 3, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Тут

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad B^T = (4 \quad 9); \quad C = (1;3), \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, вихідній симетричній парі двоїстих задач можна поставити у відповідність матричну гру, що визначається матрицею

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -9 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

7 Задачі нелінійного програмування

7.1 Економічна і геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

У загальному вигляді задача нелінійного програмування полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

за умови, що її змінні задовольняють співвідношення

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i & (i = \overline{1,k}), \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i & (i = \overline{k+1,m}), \end{cases} \tag{2}$$

де f і g_i – деякі відомі нелінійні функції n змінних, а b_i — задані числа.

Тут маємо на увазі, що в результаті розв'язування задачі буде визначена точка $X^*=(x_1^*;x_2^*;...;x_n^*)$, координати якої задовольняють співвідношення (2) і така, що для довільної іншої точки $X=(x_1;x_2;...;x_n)$, яка задовольняє умови (2), виконується нерівність $f(x_1^*;x_2^*;...;x_n^*) \ge f(x_1;x_2;...;x_n)$ $\left[f(x_1^*;x_2^*;...;x_n^*) \le f(x_1;x_2;...;x_n)\right]$

Якщо f і g_i – лінійні функції, то задача (1), (2) є задачею лінійного програмування.

Співвідношення (2) утворять систему обмежень і містять у собі умови невід'ємності змінних, якщо такі умови є. Умови невід'ємності змінних можуть бути задані і безпосередньо.

В евклідовому просторі E_n система обмежень (2) визначає область допустимих розв'язків задачі. На відміну від задачі лінійного програмування вона не завжди є опуклою.

Якщо визначена область допустимих розв'язків, то знаходження розв'язку задачі (1), (2) зводиться до визначення такої точки цієї області, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня: $f(x_1;x_2;...;x_n) = h$. Зазначена точка може знаходитися як на границі області допустимих розв'язків, так і усередині її.

Процес знаходження розв'язку задачі нелінійного програмування (1), (2) з використанням її геометричної інтерпретації включає такі етапи:

1. Знаходять область допустимих розв'язків задачі, що визначається співвідношеннями (2) (якщо вона порожня, то задача не має розв'язку).

2. Будують гіперповерхню $f(x_1;x_2;...;x_n) = h$.

3. Визначають гіперповерхню найвищого (найнижчого) рівня чи встановлюють, що задача не має розв'язку через необмеженість функції (1) зверху (знизу) на множині допустимих розв'язків.

4. Знаходять точку області допустимих розв'язків, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня, і визначають у ній значення функції (1).

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення цільової функції для даної задачі нелінійного програмування

$$F = -x_1^2 + 16x_1 + x_2 - 3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 11x_2 \le 33, \\ 4x_1 - 5x_2 \ge 20, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування

1. Оскільки число невідомих задачі дорівнює двом, то розв'язок задачі можна знайти, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Для цього перш за все побудуємо многокутник розв'язків задачі. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $3x_1 + 11x_2 = 33$, яка проходить через точки (0;3) та (11;0);

2) l_2: $4x_1 - 5x_2 = 20$, яка проходить через точки (0;-4) та (5;0);

3) $l_3: x_1 = 0$;

4) l_4: $x_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область D (рис.1).

Отже, допустимою областю D є трикутник BCK, який зображено на рис.1.

2. Надамо цільовій функції F деяке стале значення h:

$$-x_1^2 + 16x_1 + x_2 - 3 = h,$$

$$x_2 = x_1^2 - 16x_1 + 3 + h,$$

$$x_2 = (x_1 - 8)^2 - 64 + 3 + h = (x_1 - 8)^2 - 61 + h.$$

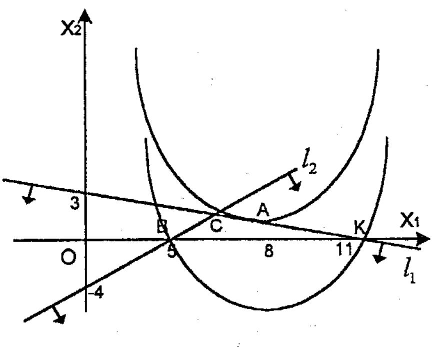

Рисунок 1 – Область допустимих розв'язків

3. Найбільшого значення функція F набуває у точці А, яка є точкою дотику прямої l_1 і параболи. Координати точки А є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 = x_1^2 - 16x_1 + 3 + h \\ 3x_1 + 11x_2 = 33. \end{cases}$$

$$3x_1 + 11(x_1^2 - 16x_1 + 3 + h) = 33$$

$$11x_1^2 - 173x_1 + 33 + 11h = 33$$

$$11x_1^2 - 173x_1 + 11h = 0$$

$$x_1 = \frac{173 \pm \sqrt{173^2 - 4 \cdot 11 \cdot h}}{22}; \quad 173^2 - 4 \cdot 11 \cdot h = 0.$$

$$x_1 = \frac{173}{22}.$$

Тоді $3 \cdot \frac{173}{22} + 11x_2 = 33$, $x_2 = \frac{207}{242}$. Отже, точка А має координати: $x_1 = \frac{173}{22}$; $x_2 = \frac{207}{242}$. Тоді $F_{\max} = F(A) = h = \frac{173^2}{4 \cdot 121} = \frac{29929}{484}$.

4. Знайдемо координати точок B і K: B(5;0) і $K(11;0)$

$$F(B) = -25 + 80 - 3 = 52,$$

$$F(K) = -121 + 176 - 3 = 52.$$

$$F_{\min} = 52 \quad в\ т.B \quad і \quad т.K.$$

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 - коло$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ 18x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

<u>*1 спосіб.*</u>

1. Для знаходження області допустимих розв'язків множини D' побудуємо граничні прямі:

1) l_1: $3x_1 + 2x_2 = 7$, яка проходить через точки (0;7/2) та (7/3;0);
2) l_2: $10x_1 - 5x_2 = 8$, яка проходить через точки (0;-8/5) та (8/10;0);
3) l_3: $18x_1 + 4x_2 = 12$; яка проходить через точки (0;3) та (2/3;0);
4) l_4: $x_2 = 0$;
5) l_5: $x_1 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв'язок та знайдемо спільну область допустимих розв'язків – область $D^{'}$ (рис.2).

Отже, допустимою областю $D^{'}$ є трикутник ABC, який зображено на рис.2.

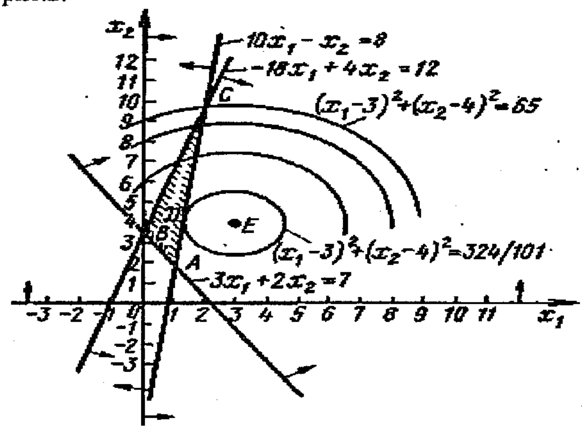

Рисунок 2 – Область допустимих розв'язків

2. Маємо дві екстремальні точки – це точки С і Д. Координати зазначених точок знайдемо, розв'язавши відповідні системи рівнянь.

$$C:\begin{cases}10x_1 - x_2 = 8,\\ -18x_1 + 4x_2 = 12\end{cases}\qquad C(2;12);\quad F_{\max} = 65.$$

$$D:\begin{cases}(x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 = h^2,\\ 10x_1 - x_2 = 8.\end{cases}$$

Знайдемо h. Нехай маємо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ і деяку точку $P(x_0;y_0)$. Тоді відстань від точки до прямої обчислюється за формулою: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Відповідно для даної задачі маємо:

$$h = \frac{|10\cdot 3 - 1\cdot 4 - 8|}{\sqrt{100+1}} = \frac{18}{\sqrt{101}}.$$

$$\begin{cases}(x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 = \dfrac{324}{101},\\ 10x_1 - x_2 = 8.\end{cases}$$

Із другого рівняння системи виражаємо $x_2 = 10x_1 - 8$ та підставимо у перше рівняння , після чого отримаємо:

$$(x_1-3)^2 + (10x_1 - 12)^2 = \frac{324}{101},$$

$$101x_1^2 - 246x_1 + 153 = \frac{324}{101},$$

$$x_1 = \frac{123}{101}, \quad x_2 = \frac{1230}{101} - 8 = \frac{422}{101}.$$

Отже, точка $D(\frac{123}{101}; \frac{422}{101})$ і $F_{min} = F(D) = (\frac{123}{101} - 3)^2 + (\frac{422}{101} - 4)^2 = \frac{324}{101}$.

<u>*2 спосіб.*</u>

Для знаходження координати точки D розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h, \\ 10x_1 - x_2 = 8,\end{cases}$$

$$x_2 = 10x_1 - 8,$$

$$101x_1^2 - 246x_1 + 153 - h = 0$$

$$x_1 = \frac{246 \pm \sqrt{246^2 - 4 \cdot 101(153 - h)}}{2 \cdot 101}; \quad 246^2 - 4 \cdot 101(153 - h) = 0, h = \frac{324}{101}.$$

Розв'язавши систему рівнянь маємо $x_1 = \frac{123}{101}, x_2 = \frac{422}{101}$.

Отже, $F_{min} = F(D) = h = \frac{324}{101}$.

Приклад 3. Знайти максимальне значення функції

$$F = 3x_1 + 4x_2$$

при умовах

$$\begin{cases}x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1 x_2 \quad \ge 4,\end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Розв'язування. Область розв'язків даної задачі зображена на рис.3. На цьому рисунку побудовані дві лінії рівня, що представляють собою прямі. З рис. 3 видно, що максимальне значення цільова функція задачі приймає в точці E, у якій пряма дотикається кола $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Для визначення координат точки E скористаємося рівністю кутових коефіцієнтів прямої $3x_1 + 4x_2 = h$, (де h - деяка стала) і дотичної до окружності в точці E. Розглядаючи x_2 як неявну функцію змінної x_1, почленно диференціюємо рівняння кола $x_1^2 + x_2^2 = 25$ і одержимо

$$2x_1 + 2x_2 x_2' = 0, \text{ або } x_2' = -x_1 / x_2.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до кола:

$$\begin{matrix} 3x_1 + 4x_2 = h, & \text{або} & x_2 = -(3/4)x_1 + h/4, \\ 4x_2 = -3x_1 + h & & k = -(3/4) - \textit{кутовий коефіцієнт} \end{matrix}$$

Прирівнюючи знайдені кутові коефіцієнти:

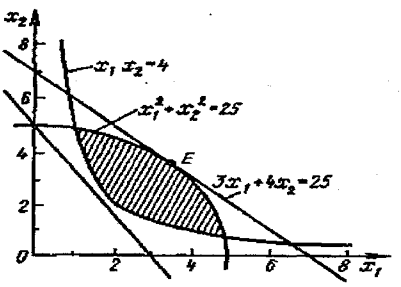

Рисунок 3 – Область допустимих розв'язків

$k = -\dfrac{3}{4}$ і $k = -\dfrac{x_1}{x_2}$. Тоді $-\dfrac{3}{4} = -\dfrac{x_1}{x_2}$, $x_1 = \dfrac{3}{4}x_2$. Для визначення координати точки Е одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4}x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4}x_2, \\ \dfrac{9}{4}x_2^2 + x_2^2 = 25, \end{cases} \quad x_2^2 = 16$$

Звідки $x_1^* = 3$; $x_2^* = 4$. Отже, $F_{\max} = 3^2 + 4^2 = 25$.

8 Метод множників Лагранжа

Розглянемо окремий випадок загальної задачі нелінійного програмування (1), (2), припускаючи, що система обмежень (2) містить тільки рівняння, відсутні умови невід'ємності змінних і $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функції, неперервні разом зі своїми частинними похідними

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \quad (\min); \tag{3}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \quad (i = \overline{1,m}). \tag{4}$$

У курсі математичного аналізу задачу (3), (4) називають задачею на умовний екстремум або класичною задачею оптимізації.

Щоб знайти розв'язок цієї задачі, вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, які називають ***множниками Лагранжа***, складають функцію Лагранжа

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \right] \qquad (5)$$

знаходять частинні похідні $\dfrac{\partial F}{\partial x_j} (j = \overline{1,n})$ і $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} (i = \overline{1,m})$ і розглядають систему $n + m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1,n}); \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \end{cases} \qquad (6)$$

з $n + m$ невідомими $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Довільний розв'язок системи рівнянь (19) визначає точку $X = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, у якій може мати місце екстремум функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Отже, розв'язавши систему рівнянь (6), одержують усі точки, у яких функція (3) може мати екстремальні значення. Подальше дослідження знайдених точок проводять так само, як і у випадку безумовного екстремуму.

Таким чином, визначення екстремальних точок задачі (3), (4) методом множників Лагранжа включає такі етапи:

1. Складають функцію Лагранжа.

2. Знаходять частинні похідні від функції Лагранжа за змінними x_j і λ_i і прирівнюють їх до нуля.

3. Розв'язуючи систему рівнянь (6), знаходять точки, у яких цільова функція задачі може мати екстремум.

4. Серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, у яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції (3) у цих точках.

У випадку функції $z = f(x, y)$ при рівнянні зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ функція Лагранжа має вигляд

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y).$$

Система рівнянь (6) складається із трьох рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Нехай $P_0(x_0, y_0)$, λ – довільний розв'язок цієї системи і

$$\Delta=-\begin{pmatrix} 0 & \varphi_x'(P_0) & \varphi_y'(P_0) \\ \varphi_x'(P_0) & F_{xx}''(P_0,\lambda) & F_{xy}''(P_0,\lambda) \\ \varphi_y'(P_0) & F_{xy}''(P_0,\lambda) & F_{yy}''(P_0,\lambda) \end{pmatrix}$$

Якщо $\Delta<0$, то функція $z=f(x,y)$ має в точці $P_0(x_0,y_0)$ умовний максимум; якщо $\Delta>0$ – то умовний мінімум.

Приклад 1. Знайти умовний екстремум функції $z=x+2y$ при $x^2+y^2=5$.

Розв'язування. Складемо функцію Лагранжа:

$$F(x,y,\lambda)=x+2y+\lambda(x^2+y^2-5).$$

Маємо $\dfrac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2+2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-5$.

Система (6) прийме вигляд

$$\begin{cases} 1+2\lambda x=0, \\ 2+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Система має два розв'язки: $x_1=-1, y_1=-2, \lambda_1=\frac{1}{2}$; $x_2=1, y_2=2, \lambda_2=-\frac{1}{2}$.

Дослідимо дані точки на екстремум. Для цього обчислимо: $\varphi_x'=2x, \varphi_y'=2y, \varphi_x'(-1,-2)=-2, \varphi_y'(-1,-2)=-4, F_{xx}''=1, F_{yy}''=1, F_{xy}''=0$ якщо $\lambda=\frac{1}{2}$; тоді відповідно,

$\Delta=-\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}=20>0,$ тобто функція має умовний мінімум в точці $P_1(-1,-2)$. Аналогічно для точки $P_2(1,2)$ $\Delta=-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}=-20<0,$ тобто $P_2(1,2)$ - точка умовного максимуму.

Приклад 2. За планом виробництва продукції підприємству необхідно виготовити 180 виробів. Ці вироби можуть бути виготовлені двома технологічними способами. При виробництві x_1 виробів I способом витрати рівні $4x_1+x_1^2$ грн, а при виготовленні x_2 виробів II способом вони складають $8x_2 + x_2^2$ грн. Визначити, скільки виробів кожним зі способів доцільно виготовити, так щоб загальні витрати на виробництво продукції були мінімальними.

Розв'язування. Математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \tag{7}$$

при умовах

$$x_1 + x_2 = 180, \tag{8}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{9}$$

Спочатку знайдемо розв'язок задачі, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Областю допустимих розв'язків вихідної задачі є відрізок

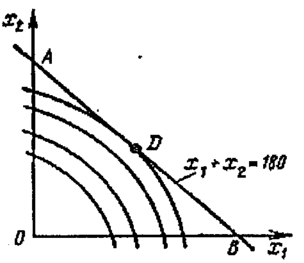

Рисунок 1 – Область допустимих розв'язків

прямої AB (рис. 1), а лініями рівня – кола з центром у точці (- 2; - 4).

Проводячи з точки E кола різних радіусів, бачимо, що мінімальне значення цільова функція приймає в точці D. Щоб знайти координати цієї точки, скористаємося тим, що кутовий коефіцієнт кола $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = C$ в точці D збігається з кутовим коефіцієнтом прямої $x_1 + x_2 = 180$ і, отже, дорівнює -1. Розглядаючи x_2 як неявну функцію від x_1 і диференціюючи рівняння кола, маємо

$$4 + 2x_1 + 8x_2' + 2x_2x_2' = 0, \text{ або } x_2' = -\frac{(2 + x_1)}{(4 + x_2)}.$$

Прирівнюючи отриманий вираз до числа -1, одержуємо одне з рівнянь для визначення координат точки D. Приєднуючи до нього рівняння прямої, на якій лежить точка D, маємо систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180, \end{cases}$$

звідки $x_1^* = 91; x_2^* = 89$. Це означає, що якщо підприємство виготовить 91 виріб I технологічним способом і 89 виробів II способом, то загальні витрати будуть мінімальними і складуть 17278 грн.

Розв'яжемо тепер задачу, використовуючи метод множників Лагранжа. Знайдемо мінімальне значення функції (7) за умови (9), тобто без врахування умови невід'ємності змінних. Для цього складемо функцію Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

обчислимо її частинні похідні за x_1, x_2, λ і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Переносячи в праві частини перших двох рівнянь λ і прирівнюючи їхні ліві частини, одержимо

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2, \text{ або } x_1 - x_2 = 2.$$

Розв'язуючи останнє рівняння в поєднанні з рівнянням $x_1 + x_2 = 180$, знаходимо $x_1^* = 91$ і $x_2^* = 89$, тобто одержали координати точки D, що задовольняє умову (9). Ця точка є підозрілою на екстремум. Використовуючи другі частинні похідні, можна показати, що в точці D функція f має умовний мінімум. Цей результат і був отриманий вище.

Слід зазначити, що такий же результат ми одержимо й у тому випадку, якщо дослідження на умовний екстремум функції f зведемо до дослідження на безумовний екстремум функції f_1, що отримана з f у результаті її перетворень. А саме: якщо з рівняння зв'язку (8) знайдемо $x_2 = 180 - x_1$ і підставимо цей вираз в (7), то одержимо функцію однієї змінної x_1:

$$f_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8(180 - x_1) + (180 - x_1)^2.$$

Знайдемо стаціонарну точку цієї функції з рівняння $\dfrac{df_1}{dx_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2(180 - x_1) = 0$, або $4x_1 - 364 = 0$, звідки $x_1^* = 91$ і $x_2^* = 89$.

Так само як і вище, установлюємо, що в даній точці функція f має мінімальне значення.

Приклад 3. Знайти точки екстремуму функції $f = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 = 5$.

Розв'язування. Складемо функцію Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2),$$

знайдемо її частинні похідні за x_1, x_2 і λ та прирівняємо їх до нуля. У результаті одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

З першого і другого рівнянь маємо $x_1 - x_2 = 0$. Розв'язуючи це рівняння разом із третім із системи (11), знаходимо $x_1 = 5/2$; $x_2 = 5/2$.. Таким чином, у точці (5/2; 5/2) дана функція може мати умовний екстремум. Щоб визначити, чи досягається в цій точці умовний екстремум, потрібно провести додаткові дослідження. Зокрема, використовуючи другі частинні похідні, можна показати, що в цій точці функція має умовний мінімум і $F_{\min} = 25/2$.

Метод множників Лагранжа можна застосовувати й у тому випадку, коли умови зв'язку представляють собою нерівності. Так, якщо потрібно знайти екстремум функції $z = f(X)$ за умови $g(X) \le b$, то спочатку варто знайти точки безумовного екстремуму функції $z = f(X)$ з рівнянь $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (k = \overline{1,n})$, після чого серед цих точок вибрати ті, координати яких задовольняють умову зв'язку $g(X) < b$, і, нарешті, визначити точки, що задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_k} = 0 \quad (k = \overline{1,n}), \\ g(X) = b. \end{cases}$$

Точки, знайдені в результаті розв'язування цієї системи, разом із точками, які визначені на першому етапі і задовольняють умову $g(X) \le b$, підлягають подальшому дослідженню, як і при знаходженні безумовного екстремуму.

9 Завдання для лабораторних робіт

9.1 Лабораторна робота №1

Тема Двоїсті задачі лінійного програмування

Завдання 1

Скласти пару двоїстих задач, маючи вихідну задачу лінійного програмування.

1.1.
$$F = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 12, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_3 \ge 19, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.2.
$$F = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 9, \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_3 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.3.
$$F = 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_3 \le 17, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 8, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.4.
$$F = 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 7, \\ 4x_1 + 9x_2 = 12, \\ 2x_2 + 2x_3 \le 17, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.5.
$$F = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge 13, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.6.
$$F = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7, \\ 9x_1 + 3x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.7.
$$F = 2x_1 + x_2 + 7x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 8, \\ x_1 + 9x_2 + 5x_3 \ge 11, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.8.
$$F = 7x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 19, \\ x_1 + 5x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.9.
$$F = x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 \le 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.10.
$$F = -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 \ge 13, \\ -4x_1 + 7x_3 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.11. $$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14, \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 9, \\ 9x_1 + 6x_2 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.12. $$F = 9x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 21, \\ 2x_1 - 4x_2 \ge 23, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.13. $$F = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 = 13, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \le 8, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \ge 19, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.14. $$F = x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 \le 27, \\ 4x_2 + x_3 \ge 32, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.15. $$F = x_1 + x_2 + 9x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 11, \\ 2x_1 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 \ge 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.16. $$F = 3x_1 + x_2 + 7x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 6, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.17. $$F = x_1 - 6x_2 + 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_3 \ge 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 19, \\ 4x_2 - x_3 \le 11, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.18. $$f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5, \\ 2x_1 + 4x_3 - 5x_4 = 3, \\ -3x_2 + x_3 + x_4 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.19. $$F = x_1 - 4x_2 + 7x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 \ge 13, \\ x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.20. $$F = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ge 7, \\ x_1 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 \le 11, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.21. $$F = -x_1 + 2x_2 + 6x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \ge 13, \\ 2x_2 = 9, \\ x_3 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1.22. $$f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1.23. $F=-2x_1+3x_2+4x_3\to\max$

$$\begin{cases}x_1+7x_2+2x_3\ge 13,\\ x_1+2x_2=8,\\ 2x_1+4x_3\le 5,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0$.

1.24. $F=7x_1-11x_2+28x_3-4x_4\to\max$

$$\begin{cases}-2x_1+3x_2-x_3+x_4=-2,\\ 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4\le 7,\\ x_1+x_2+2x_3\ge 3,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_3\ge 0$.

1.25. $F=-2x_1+4x_2-2x_3\to\min$

$$\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3\ge 7,\\ x_1+5x_3\le 19,\\ 2x_1-3x_2+5x_3=18,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_3\ge 0$.

1.26. $F=-3x_1+2x_2-4x_4\to\min$

$$\begin{cases}2x_1-4x_2-2x_3+x_4=8,\\ 2x_1+x_2-4x_3=5,\\ -x_1+7x_2-3x_4\ge 9,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_3\ge 0$.

1.27. $F=4x_1+x_3\to\min$

$$\begin{cases}-x_1+4x_2+5x_3\le 7,\\ 3x_2-5x_3\ge 4,\\ 3x_1-x_2-4x_3=2,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_3\ge 0$.

1.28. $F=3x_1-4x_3+x_4\to\min$

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3-5x_4=7,\\ 2x_1-4x_2-x_3+7x_4\le 3,\\ 3x_2+x_3-4x_4=1,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0$.

1.29. $f=-2x_1+x_2\to\max$

$$\begin{cases}-3x_1+5x_2-7x_3=8,\\ 2x_1-x_2+2x_3\le 3,\\ -4x_1+3x_2-x_3\ge 4,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_3\ge 0$.

1.30. $F=-x_1+4x_2+x_3-5x_4+x_5\to\max$

$$\begin{cases}-x_1-3x_2+4x_4+5x_5=7,\\ 2x_1-3x_2+5x_3-x_4-x_5\ge 9,\\ -3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0$.

Завдання 2

Для даної задачі лінійного програмування скласти двоїсту та знайти розв'язок задач геометричним методом

2.1. $F=x_1+4x_2\to\max$

$$\begin{cases}2x_1+4x_2\le 7,\\ 10x_1+3x_2\le 15,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0$.

2.2. $F=2x_1+3x_2\to\max$

$$\begin{cases}x_1+4x_2\le 14,\\ 2x_1+3x_2\le 12,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0$.

2.3. $F=x_1+2x_2\to\max$

$$\begin{cases}5x_1+7x_2\le 21,\\ -x_1+3x_2\le 8,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0$.

2.4. $F=3x_1+5x_2\to\min$

$$\begin{cases}3x_1+x_2\ge 9,\\ x_1+3x_2\ge 8,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

2.5. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

2.6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1 + x_2 \le 7, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

2.8. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + 3x_2 \to \max$$

2.9. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

2.10. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 9, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

2.11. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

2.12. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

2.13. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

2.14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

2.15 $\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \le 75, \\ 12x_1 + 7x_2 \le 55, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

2.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

2.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to \min$$

2.19. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 16, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

2.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

2.21. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 4x_1 + 8x_2 \to \min$$

2.22. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 3, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

2.23. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 30, \\ 2x_1 - 2x_2 \le 5, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 5x_1 + 10x_2 \to \max$$

2.24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 7x_2 \le 30, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

2.25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

2.26. $\begin{cases} 10x_1 - 6x_2 \le 50, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$

2.27. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 15, \\ 5x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 12x_1 + 15x_2 \to \max$$

2.28. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

2.29. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 5x_1 + 6x_2 \to \max$$

2.30. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 24, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Завдання 3

На виготовлення двох видів продукції – $П_1$ і $П_2$ витрачається три види ресурсів A_1, A_2, A_3. Запаси ресурсів, норми їх затрат і прибуток від реалізації одиниці продукції задані в таблиці. За допомогою симплекс-методу знайти такий план виробництва, який забезпечував би найбільший прибуток. Скласти двоїсту задачу до вихідної і виписати її оптимальний план з останньої симплекс-таблиці розв'язаної задачі. Розкрити її економічний зміст.

варіант	Затрати ресурсів на одиницю продукції						Наявність ресурсів			Прибуток	
	A_1		A_2		A_3		A_1	A_2	A_3	$П_1$	$П_2$
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$					
1	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8
2	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24
4	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12
5	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8
6	14	15	1	2	9	5	400	49	220	21	18
7	11	6	1	2	15	14	324	60	500	10	7
8	2	1	1	5	4	15	48	100	225	12	9
9	3	8	7	2	1	1	187	143	29	10	6
10	2	7	1	1	6	1	126	30	120	20	15
11	9	4	3	2	2	2	175	65	60	15	10
12	2	3	2	2	3	2	80	58	75	10	12
13	5	2	2	3	1	8	125	83	152	12	10
14	3	2	4	1	7	8	65	70	235	30	20
15	2	2	7	2	3	8	58	143	197	15	21
16	1	1	12	5	1	4	37	360	100	12	9
17	2	1	2	5	3	4	34	105	91	9	7
18	4	7	5	14	2	1	196	350	68	15	30
19	14	15	2	1	6	11	500	60	324	14	10
20	14	3	2	2	2	13	280	62	260	15	18
21	3	2	2	2	2	3	75	58	80	15	18
22	5	2	4	3	3	6	98	84	91	18	10
23	1	2	4	1	2	15	51	120	300	6	9
24	2	5	4	3	2	4	80	91	68	15	12
25	18	15	5	11	13	4	591	335	379	12	22
26	14	3	5	4	1	4	266	136	88	8	12
27	3	2	2	2	2	3	99	74	101	14	12
28	3	4	7	2	2	15	113	161	285	9	15
29	3	6	4	3	10	4	102	91	210	18	15
30	3	2	1	1	2	5	273	100	380	10	8

Завдання 4

Розв'язати задану пряму задачу лінійного програмування, використовуючи перехід до двоїстої задачі та графічний метод розв'язання одержаної двоїстої задачі.

3.1.
$$F = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

3.2.
$$F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

3.3.
$$F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 10, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

3.4.
$$F = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

3.5.
$$F = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

3.6.
$$F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

3.7.
$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

3.8.
$$F = 2x_1 + x_2 + 7x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

3.9.
$$F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

3.10.
$$F = 4x_1 + 30x_2 + 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

3.11. $F=-x_1-2x_2+x_3 \to \min$
$$\begin{cases} 7x_1-x_2+4x_3\le 18, \\ 2x_1+x_2+3x_3\ge 22, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.12. $F=-2x_1+3x_2-x_3 \to \min$
$$\begin{cases} 4x_1+5x_2-x_3\le 2, \\ 5x_1+3x_2+4x_3\ge 8, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.13. $F=-x_1+5x_2-6x_3 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1+5x_2-x_3\ge 12, \\ 3x_1+x_2+x_3\ge 8, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.14. $F=-2x_1+3x_2-7x_3 \to \min$
$$\begin{cases} -2x_1+4x_2-x_3\ge -8, \\ 5x_1+3x_2-x_3\ge 6, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.15. $F=3x_1-5x_2-8x_3 \to \min$
$$\begin{cases} 4x_1+x_2\ge 12, \\ 7x_1-x_2+3x_3\ge 18, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.16. $F=-4x_1-x_2-7x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\ge 16, \\ 7x_1-x_2-x_3\ge 2, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.17. $F=2x_1-x_2-x_3 \to \min$
$$\begin{cases} -2x_1-x_2-2x_3\ge 18, \\ 3x_1+2x_2+x_3\ge 36, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.18. $F=4x_1+x_2-4x_3 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3\le 12, \\ 2x_1+5x_2-6x_3\le 11, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.19. $F=x_1+4x_2+3x_3 \to \max$
$$\begin{cases} x_1+6x_2-x_3\le 14, \\ 2x_1+x_2+x_3\le 45, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.20. $F=3x_1-7x_2+5x_3-x_4 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3-x_4\le 6, \\ 2x_1+x_2\le 8, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,4}).$

3.21. $f=7x_1+15x_2+6x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3\ge 8, \\ x_1+x_2+2x_3\ge 4, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

3.22. $F=x_1+2x_2+x_3 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1-x_2\le 8, \\ 5x_1+x_2+3x_3\le 20, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, (j=\overline{1,3}).$

$f = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min$

3.23. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 8, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$

$F = x_1 - x_2 \to \max$

3.24. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 14, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 8, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$

$f = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \to \min$

3.25. $\begin{cases} 3x_1 + x_4 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \ge 18, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$

$F = x_1 - 5x_2 \to \max$

3.26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 10, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 8, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$

$f = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min$

3.27. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 3x_4 \ge 12, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$

$F = 12x_1 - x_2 + x_3 \to \max$

3.28. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$

$f = 8x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 14x_4 \to \min$

3.29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 14, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 \ge 4, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$

$F = 5x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$

3.30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 22, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 \le 4, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$

Питання до захисту лабораторної роботи №1

1. Що являє собою двоїста задача лінійного програмування?
2. В чому відмінність симетричних задач двоїстої пари від несиметричних?
3. Які варіанти розв'язків можуть мати місце при дослідженні пари двоїстих задач?
4. Сформулюйте основні теореми про двоїсті задачі ЛП.
5. Сформулюйте критерій оптимальності.
6. Як за розв'язком вихідної задачі, знайти розв'язок двоїстої задачі і навпаки?
7. Дайте економічну інтерпретацію задачі, двоїстої до задачі про використання ресурсів.
8. Які найпростіші властивості взаємно двоїстих задач?

9.2Лабораторна робота №2
Тема Розв’язування транспортних задач

Завдання 1. ***Закрита модель транспортної задачі.***
Мінімізувати транспортні витрати на доставку вантажів від постачальників $A_1, A_2, ..., A_m$ до споживачів $B_1, B_2, ..., B_n$ якщо задані обсяги поставок $a_1, a_2, ..., a_m$ і потреб $b_1, b_2, ..., b_n$ $(\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j)$, а також тарифи c_{ij} на доставку одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача. Визначити початковий план трьома способами: а) методом північно-західного кута; б) методом мінімального елемента; в) методом апроксимації Фотеля.

1.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 60	B_3, 40
A_1, 15	1 15	2	3
A_2, 45	4 5	3 40	5
A_3, 60	4	3 20	6 40

1.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 45	B_3, 50
A_1, 25	4	2	3
A_2, 40	4	7	9
A_3, 65	1	2	7

1.3.

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 30	B_3, 35
A_1, 35	5	2	4
A_2, 20	3	6	9
A_3, 35	4	5	1

1.4

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 40	B_3, 10
A_1, 30	2	9	6
A_2, 10	7	3	5
A_3, 25	5	4	9

1.5

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 30	B_2, 55	B_3, 35
A_1, 25	7	6	5
A_2, 55	6	2	4
A_3, 40	3	1	5

1.6

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 50	B_3, 10
A_1, 10	5	1	4
A_2, 25	6	9	3
A_3, 45	2	6	8

1.7

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 10	B_3, 70
A_1, 50	3	5	2
A_2, 85	4	6	1
A_3, 20	8	9	7

1.8

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 30	B_3, 70
A_1, 20	6	9	4
A_2, 60	3	1	5
A_3, 45	7	1	4

1.9

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 45	B_3, 50
A_1, 25	1	4	6
A_2, 40	9	3	2
A_3, 65	7	9	5

1.10

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 75	B_3, 25
A_1, 55	8	3	9
A_2, 20	4	7	2
A_3, 40	1	5	6

1.11

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 40	B_2, 15	B_3, 65
A_1, 25	5	1	4
A_2, 55	6	9	3
A_3, 40	2	6	8

1.12

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 25	B_3, 55
A_1, 50	2	9	6
A_2, 85	7	3	5
A_3, 20	4	4	1

1.13

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1,55	B_2, 15	B_3, 10
A_1, 10	7	6	5
A_2, 25	6	2	4
A_3, 45	3	1	5

1.14

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 10	B_3, 10
A_1, 30	6	9	4
A_2, 10	1	7	5
A_3, 25	8	5	7

1.15

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 35	B_3, 85
A_1, 25	4	2	3
A_2, 40	5	4	3
A_3, 65	5	7	4

1.16

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 40	B_3, 25
A_1, 65	10	5	8
A_2, 15	6	9	5
A_3, 20	2	4	7

1.17

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 65	B_3, 20
A_1, 20	4	6	9
A_2, 85	4	5	7
A_3, 15	6	8	4

1.18

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 75	B_3, 30
A_1, 50	2	5	3
A_2, 40	6	8	5
A_3, 25	9	6	4

1.19

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 10	B_3, 55
A_1, 35	7	1	6
A_2, 40	1	5	9
A_3, 15	4	5	7

1.20

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 85	B_2, 30	B_3, 30
A_1, 25	2	5	8
A_2, 50	4	6	5
A_3, 70	7	5	3

1.21

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 15	B_3, 55
A_1, 55	8	2	4
A_2, 45	6	5	3
A_3, 25	1	5	7

1.22

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 20	B_3, 35
A_1, 25	2	4	2
A_2, 30	3	6	8
A_3, 10	8	4	4

1.23

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 80	B_2, 15	B_3, 45
A_1, 50	9	5	6
A_2, 65	3	4	6
A_3, 25	4	2	1

1.24

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 30	B_3, 65
A_1, 60	7	4	6
A_2, 75	8	4	2
A_3, 20	6	7	5

1.25

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 25	B_3, 55
A_1, 40	8	5	4
A_2, 80	6	8	5
A_3, 25	2	5	1

1.26

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 40	B_3, 20
A_1, 20	3	5	2
A_2, 10	4	6	1
A_3, 55	8	9	7

1.27

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 10	B_3, 40
A_1, 55	6	9	4
A_2, 15	3	1	7
A_3, 25	6	8	2

1.28

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 55	B_3, 35
A_1, 85	4	2	3
A_2, 30	5	4	3
A_3, 50	5	7	1

1.29

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 35	B_3, 30
A_1, 25	5	8	6
A_2, 75	9	3	2
A_3, 10	3	7	1

1.30

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 70	B_2, 10	B_3, 25
A_1, 10	4	6	9
A_2, 65	8	4	7
A_3, 30	6	5	5

Завдання 2 ***Відкрита модель транспортної задачі***

Мінімізувати транспортні витрати на доставку вантажів від постачальників $A_1, A_2, ..., A_m$ до споживачів $B_1, B_2, ..., B_n$ якщо задані обсяги поставок $a_1, a_2, ..., a_m$ і потреб $b_1, b_2, ..., b_n$ $(\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j)$, а також тарифи c_{ij} на доставку одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача, використавши метод апроксимації Фотеля.

2.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 55	B_2, 25	B_3, 35
A_1, 40	2	5	8
A_2, 45	4	6	5
A_3, 25	3	1	5

2.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 75	B_3, 25
A_1, 15	8	2	4
A_2, 10	6	5	3
A_3, 65	7	5	9

2.3

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 65	B_3, 50
A_1, 85	7	4	6
A_2, 35	8	4	2
A_3, 20	6	7	5

2.4

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 45	B_3, 60
A_1, 40	3	8	5
A_2, 15	1	5	4
A_3, 50	2	3	5

2.5

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 85	B_2, 30	B_3, 40
A_1, 55	3	6	8
A_2, 10	5	1	3
A_3, 35	2	1	7

2.6

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 40	B_2, 15	B_3, 55
A_1, 55	9	1	2
A_2, 35	4	7	3
A_3, 65	6	7	2

2.7

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 50	B_2, 70	B_3, 65
A_1, 85	4	5	7
A_2, 75	9	3	9
A_3, 45	6	4	2

2.8

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 25	B_3, 60
A_1, 25	6	8	5
A_2, 35	9	6	4
A_3, 30	5	2	8

2.9

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 15	B_3, 50
A_1, 10	5	9	8
A_2, 30	3	5	6
A_3, 40	4	5	4

2.10

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 20	B_3, 10
A_1, 40	10	6	5
A_2, 15	7	5	3
A_3, 25	8	4	1

2.11

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 20	B_3, 15
A_1, 15	6	5	3
A_2, 10	3	3	1
A_3, 55	5	9	6

2.12

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 80	B_2, 25	B_3, 30
A_1, 85	3	6	8
A_2, 25	8	4	4
A_3, 10	2	2	5

2.13

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 55	B_3, 65
A_1, 40	4	7	5
A_2, 30	1	5	2
A_3, 30	3	4	2

2.14

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 35	B_3, 65
A_1, 40	8	4	2
A_2, 40	6	1	3
A_3, 25	6	9	5

2.15

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 50	B_2, 40	B_3, 45
A_1, 50	6	8	5
A_2, 35	2	1	3
A_3, 65	5	6	5

2.16

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 10	B_3, 15
A_1, 45	4	6	1
A_2, 15	8	9	7
A_3, 20	5	3	9

2.17

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 30	B_3, 45
A_1, 30	3	1	5
A_2, 25	6	8	5
A_3, 50	7	1	5

2.18

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 25	B_3, 40
A_1, 65	5	4	3
A_2, 30	5	7	4
A_3, 35	3	6	3

2.19

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 30	B_2, 50	B_3, 55
A_1, 75	9	1	2
A_2, 60	4	7	3
A_3, 25	6	8	8

2.20

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 35	B_3, 40
A_1, 80	1	6	5
A_2, 40	6	2	4
A_3, 55	3	1	5

2.21

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 70	B_2, 15	B_3, 30
A_1, 75	3	1	1
A_2, 25	7	9	4
A_3, 35	2	4	10

2.22

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 40	B_2, 65	B_3, 75
A_1, 85	2	2	6
A_2, 50	5	9	5
A_3, 25	1	2	3

2.23

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 80	B_2, 35	B_3, 45
A_1, 70	7	8	2
A_2, 55	3	2	1
A_3, 25	5	8	4

2.24

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 70	B_2, 50	B_3, 45
A_1, 65	4	4	8
A_2, 55	2	1	3
A_3, 25	6	5	4

2.25

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 50	B_3, 15
A_1, 15	7	5	3
A_2, 10	1	3	3
A_3, 50	2	2	8

2.26

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 50	B_3, 35
A_1, 55	8	1	1
A_2, 60	9	7	6
A_3, 15	6	4	2

2.27

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 55	B_3, 75
A_1, 40	9	2	2
A_2, 40	1	4	6
A_3, 25	6	7	5

2.28

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 60	B_3, 15
A_1, 25	8	8	3
A_2, 35	1	2	3
A_3, 30	7	8	9

2.29

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 60	B_3, 20
A_1, 40	8	4	2
A_2, 15	3	1	1
A_3, 50	7	6	8

2.30

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 60	B_2, 65	B_3, 40
A_1, 45	1	2	4
A_2, 50	4	9	1
A_3, 25	3	5	10

Питання до захисту лабораторної роботи №2

1. Що називається планом транспортної задачі ?
2. Який план називається оптимальним планом транспортної задачі?
3. Яка необхідна умова існування розв'язку транспортної задачі?
4. Які методи існують для визначення початого плану транспортної задачі? Охарактеризувати їх.
5. Що таке потенціали пунктів відправлення і призначення?
6. Назвати етапи знаходження розв'язку транспортної задачі методом потенціалів.
7. Що таке цикл у таблиці умов транспортної задачі?

За якими правилами здійснюють переміщення у транспортній таблиці?

9.3 Лабораторна робота №3
Тема Двоїстий симплекс-метод

Завдання. Використовуючи двоїстий симплекс - метод, розв'язати задачу лінійного програмування.

Варіанти :

№№ 1 - 2

$$F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 3 – 4

$$F = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18, \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \ge 24, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 5 - 6

$$F = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 27, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 24, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№ 7 - 8

$$F = -x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 8x_5 + 3x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 18, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \geq 24, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№ 9 - 10

$$F = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 24, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \geq 12, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№ 11 - 12

$$F = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 30, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 16, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№ 13 - 14

$$F = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 30, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№15-16

$$F = -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№ 17 - 18

$$F = -5x_1 - 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq 18, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 24, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 36, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№ 19 - 20

$$F = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_4 \geq 10, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 12, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 25, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№ 21 - 22

$$F = -4x_1 - 3x_2 - 5x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 18, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 30, \\ -2x_1 + 8x_3 \leq 32, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№ 23 - 24

$$F = 3x_1 - 5x_2 - 3x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_5 = 34, \\ 4x_1 - 3x_3 + 2x_5 \geq 28, \\ -3x_1 - 3x_5 \leq 24, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

№№ 25 - 26

$$F = 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 27 - 28

$$F = -6x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \ge 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 \le 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \ge 18, \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

№№ 29 - 30

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 \le 24, \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Відповіді:

№№ 1 - 2. $X_{опт} = \{3; 0; 0; 0{,}5\}$, $F_{\max} = -14{,}5$.

№№ 3 - 4. $X_{опт} = \{8; 2; 0; 0\}$, $f_{\min} = 52$.

№№ 5 - 6. $X_{опт} = \{2; 0; 0; 5\}$, $f_{\min} = 12$.

№№ 7 - 8. $X_{опт} = \{3; 0; 0; 0; 9; 0\}$, $F_{\max} = -75$.

№№ 9 - 10. $X_{опт} = \{0; 3; 10; 0; 19\}$, $F_{\max} = 11$.

№№ 11 -12. $X_{опт} = \{4;\ 0;\ 4;\ 0;\ 26\}$, $F_{\max} = 48$.

№№ 15 - 16. $X_{опт} = \left\{\frac{28}{3}; 0; \frac{1}{3}; 0\right\}$, $f_{\min} = -\frac{50}{3}$.

№№ 17 - 18. $X_{опт} = \{0; 6; 18\}$, $F_{\max} = -36$.

№№ 19 - 20. $X_{опт} = \{0; 5; 0; 0\}$, $F_{\max} = 40$.

№№ 21 - 22. $X_{опт} = \{12; 30; 0\}$, $F_{\max} = -138$.

№№ 23 - 24. $X_{опт} = \{7; 48; 0; 0; 0\}$, $F_{\max} = -219$.

№№ 25 - 26 . $X_{опт} = \{ 0; 2{,}4; 1{,}8; 2{,}8 \}$, $F_{\max} = 5{,}8$.

№№ 27 - 28 . $X_{опт} = \{ 0; 7; 0; 0 \}$, $F_{\max} = -7$.

№№ 29 - 30 . $X_{опт} = \{ 0; 0; 18; 0; 16 \}$, $F_{\max} = -82$.

Питання до захисту лабораторної роботи №3

1. Коли використовується двоїстий симплекс-метод?
2. Який розв'язок називається псевдорозв'язком задачі лінійного програмування?
3. Коли при двоїстому симплекс-методі задача лінійного програмування немає розв'язку?
4. В чому полягає теорема про розв'язок задачі лінійного програмування двоїстим симплекс-методом?
5. Як вибирається розв'язний рядок та розв'язний елемент при двоїстому симплекс-методі?
6. Сформулювати етапи знаходження розв'язку задачі лінійного програмування двоїстим симплекс-методом.

9.4 Лабораторна робота №4
Тема Задачі цілочисельного лінійного програмування

Завдання. Вважаючи, що $x_1, x_2 \geq 0$ *і* x_1, x_2 – цілі, розв'язати задачу цілочисельного лінійного програмування :

а) геометричним методом ;

б) методом Гоморі.

Варіанти :

№ 1 - 2
$$F = -72x_1 + 11x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \geq 24, \\ x_1 + 4x_2 \leq 8. \end{cases}$$

№ 3 - 4
$$F = 6x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7, \\ 4x_1 + x_2 \leq 14. \end{cases}$$

№ 5 - 6
$$F = 15x_1 - 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 9, \\ 9x_1 - 4x_2 \leq 24. \end{cases}$$

№ 7 - 8
$$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 28, \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 28. \end{cases}$$

№ 9 - 10
$$F = 13x_1 + 60x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 + 8x_2 \leq 10. \end{cases}$$

№ 11 - 12
$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 4x_1 - x_2 \geq 4. \end{cases}$$

№ 13 - 14
$$F = -6x_1 + 11x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 2. \end{cases}$$

№ 15 - 16
$$F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 12. \end{cases}$$

№ 17 - 18
$$F = -2x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6. \end{cases}$$

№ 19 - 20
$$F = -5x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -7, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 17, \\ 7x_1 - 2x_2 \le 28. \end{cases}$$

№ 21 - 22
$$F = 5x_1 + 7x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 \le 8. \end{cases}$$

№ 23 - 24
$$F = -2x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \ge 35, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 35. \end{cases}$$

№ 25 - 26
$$F = 6x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 8x_1 + 3x_2 \le 24. \end{cases}$$

№ 27 - 28
$$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 3. \end{cases}$$

№ 29 - 30
$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 8. \end{cases}$$

Відповіді :

№ 1-2 $X = \{3; 1\}, F_{\max} = -205.$

№ 3-4 $X = \{2; 6\}, F_{\max} = 18.$

№ 5-6 $X = \{4; 3\}, F_{\max} = 45.$

№ 7-8 $X = \{6; 2\}, F_{\max} = 24.$

№ 9-10 $X = \{2; 1\}, F_{\max} = 86.$

№ 11-12 $X = \{2; 2\}, F_{\max} = 0.$

№ 13-14 $X = \{2; 2\}, F_{\max} = 10.$

№ 15 -16 $X = \{3; 3\}, F_{\max} = 21.$

№ 17-18 $X = \{2; 3\}, F_{\max} = 8.$

№ 19-20 $X = \{0; 5\}, F_{\max} = 20.$

№ 21-22 $X = \{2; 2\}, F_{\max} = 24.$

№ 23-24 $X = \{4; 2\}, F_{\max} = -4.$

№ 25-26 $X = \{2; 2\}, F_{\max} = 20.$

№ 27-28 $X = \{2; 1\}, F_{\max} = -5,$

Питання до захисту лабораторної роботи №4

1. Яка задача називається задачею цілочисельного програмування?
2. Сформулювати задачу цілочисельного програмування?
3. В чому полягає геометричний метод розв'язування задач цілочисельного програмування?
4. Який вигляд має нерівність Гоморі?

5. Що називається дробовою частиною деякого числа? Чому дорівнює дробова частина чисел: 1/2 і (-1/2) ?
6. Які задачі лінійного програмування називаються частково цілочисельними?
7. Який вигляд додаткого обмеження для частково цілочисельних задач?
8. Які етапи знаходження оптимального розв'язку задач цілочисельного програмування включає в себе метод Гоморі?

9.5 Лабораторна робота №5
Тема Задачі дробово-лінійного програмування

Завдання. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування вважаючи, що $x_j \geq 0$:

а) геометричним методом;

б) шляхом переходу до задачі лінійного програмування.

Варіанти:

№1-2

$$F = \frac{-x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 7x_2 \leq 91, \\ 5x_1 - 3x_2 \geq 8. \end{cases}$$

№3-4

$$F = \frac{-4x_1 + 2x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 13x_1 + 8x_2 \leq 92, \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 74. \end{cases}$$

№5-6

$$F = \frac{x_1 + 2x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 7x_2 \leq 91, \\ 5x_1 - 3x_2 \geq 11. \end{cases}$$

№7-8

$$F = \frac{-3x_1 + 4x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \leq 88, \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 75. \end{cases}$$

№9-10

$$F = \frac{-2x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \leq 92, \\ 6x_1 - 2x_2 \geq 23. \end{cases}$$

№11-12

$$F = \frac{-2x_1 + 3x_2}{x_1 - 5x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \leq 90, \\ 7x_1 + 8x_2 \geq 77. \end{cases}$$

№13-14

$$F = \frac{-2x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \leq 90, \\ 5x_1 - 2x_2 \geq 10. \end{cases}$$

№15-16

$$F = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 - 3x_2} \to \max$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \leq 90, \\ 7x_1 + 11x_2 \geq 77. \end{cases}$$

№17-18 $F=\dfrac{2x_1-7x_2}{x_1-3x_2}\to\max$ $\begin{cases}13x_1+8x_2\le 94,\\ 6x_1+12x_2\ge 72.\end{cases}$

№19-20 $F=\dfrac{x_1+4x_2}{x_1-3x_2}\to\max$ $\begin{cases}12x_1+7x_2\le 96,\\ 7x_1-3x_2\ge 9.\end{cases}$

№21-22 $F=\dfrac{x_1-5x_2}{x_1-4x_2}\to\max$ $\begin{cases}15x_1+7x_2\le 91,\\ 3x_1+11x_2\ge 69.\end{cases}$

№23-24 $F=\dfrac{2x_1+5x_2}{x_1-2x_2}\to\max$ $\begin{cases}12x_1+7x_2\le 95,\\ 8x_1-3x_2\ge 10.\end{cases}$

№25-26 $F=\dfrac{-2x_1+3x_2}{x_1-2x_2}\to\max$ $\begin{cases}11x_1+7x_2\le 91,\\ 3x_1+11x_2\ge 69.\end{cases}$

№27-28 $F=\dfrac{-x_1+3x_2}{x_1-2x_2}\to\max$ $\begin{cases}12x_1+7x_2\le 94,\\ 8x_1-5x_2\ge 11.\end{cases}$

№29-30 $F=\dfrac{-3x_1+4x_2}{x_1+x_2}\to\max$ $\begin{cases}12x_1+5x_2\le 99,\\ 8x_1-5x_2\ge 8.\end{cases}$

Відповіді:

№1-2 $X_{опт}=x_1\approx 4{,}838;\quad x_2\approx 5{,}397,\quad F_{\max}\approx 0{,}582.$

№3-4 $X_{опт}=x_1\approx 4{,}741;\quad x_2\approx 3{,}796,\quad F_{\max}\approx 1{,}71.$

№5-6 $X_{опт}=x_1\approx 5{,}147;\quad x_2\approx 4{,}912,\quad F_{\max}\approx -1{,}561.$

№7-8 $X_{опт}=x_1\approx 4{,}362;\quad x_2\approx 4{,}702,\quad F_{\max}\approx -0{,}524.$

№9-10 $X_{опт}=x_1\approx 5{,}145;\quad x_2\approx 3{,}934,\quad F_{\max}\approx 0{,}116.$

№11-12 $X_{опт}=x_1\approx 1{,}080;\quad x_2\approx 8{,}680,\quad F_{\max}\approx -0{,}564.$

№13-14 $X_{опт}=x_1\approx 4{,}154;\quad x_2\approx 5{,}385,\quad F_{\max}\approx 0{,}386.$

№15-16 $X_{опт}=x_1\approx 6{,}319;\quad x_2\approx 2{,}979,\quad F_{\max}\approx 3{,}691.$

№17-18 $X_{опт}=x_1\approx 5{,}111;\quad x_2\approx 3{,}444,\quad F_{\max}\approx 2{,}660.$

№19-20 $X_{опт}=x_1\approx 4{,}129;\quad x_2\approx 6{,}635,\quad F_{\max}\approx -1{,}944.$

№21-22 $X_{опт}=x_1\approx 3{,}597;\quad x_2\approx 5{,}292,\quad F_{\max}\approx 1{,}301.$

№23-24 $X_{опт}=x_1\approx 3{,}859;\quad x_2\approx 6{,}957,\quad F_{\max}\approx -4{,}227.$

№25-26 $X_{опт}=x_1\approx 5{,}180;\quad x_2\approx 4{,}860,\quad F_{\max}\approx -0{,}930.$

№27-28 $X_{опт}=x_1\approx 4{,}716;\quad x_2\approx 5{,}245,\quad F_{\max}\approx -1{,}895.$

№29-30 $X_{опт}=x_1\approx 5{,}350;\quad x_2\approx 6{,}960,\quad F_{\max}\approx 0{,}958.$

Питання до захисту лабораторної роботи №5

1. Яка задача називається задачею дробово-лінійного програмування?
2. Які етапи знаходження розв'язку задачі дробово-лінійного програмування геометричним методом?
3. Які випадки можна отримати при розв'язуванні задач дробово-лінійного програмування графічним методом?
4. Формули переходу від задач дробово-лінійного програмування до задач лінійного програмування?

9.6 Лабораторна робота №6
Тема Задачі теорії ігор і лінійне програмування

Завдання1. а) Знайти розв'язок гри, що визначається даною матрицею та дати його геометричну інтерпретацію; **б)** знайти розв'язок гри алгебраїчним методом; **в)** шляхом переходу до задач ЛП.

Варіанти:

1.1 $A=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **1.2** $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ **1.3** $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ **1.4** $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

1.5 $A=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$ **1.6** $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **1.7** $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ **1.8** $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

1.9 $A=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **1.10** $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ **1.11** $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ **1.12** $A=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

1.13 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **1.14** $A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ **1.15** $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ **1.16** $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

1.17 $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ **1.18** $A=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$ **1.19** $A=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$ **1.20** $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

1.21 $A=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ **1.22** $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ **1.23** $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ **1.24** $A=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

1.25 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ **1.26** $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ **1.27** $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$ **1.28** $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1.29 $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **1.30** $A=\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

Завдання 2. Для даної задачі лінійного програмування побудувати двоїсту та для знайденої симетричної пари двоїстих задач побудувати матричні ігри

2.1 $F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \quad + x_3 \le 14, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 16, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.2 $F = 5x_1 + 7x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \quad 5x_3 \le 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \le 24, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.3 $F = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.4 $F = 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.5 $F = 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.6 $F = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \le 0, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.7 $F = 6x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 4, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.8 $F = 6x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 1, \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 5, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.9 $F = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.10 $F = 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 \le 14, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 \le 1, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.11 $F = x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 \le 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2.12 $F = 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 \le 0, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

$$F = 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 \to \max$$
2.13 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \le 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 6x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$
2.14 $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$
2.15 $$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \to \max$$
2.16 $$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 4, \\ -7x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 4x_1 + 7x_2 + x_3 \to \max$$
2.17 $$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 11x_3 \le 1, \\ 7x_1 + x_2 + 5x_3 \le 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \le 12, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 \to \max$$
2.18 $$\begin{cases} -6x_1 - 4x_2 + 6x_3 \le 1, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 \le 0, \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 3, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 6x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$
2.19 $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 \to \max$$
2.20 $$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 \le 4; \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 \le 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 6x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$
2.21 $$\begin{cases} -4x_1 - 8x_2 + x_3 \le 1, \\ 9x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 5, \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 \le 0, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 2x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$$
2.22 $$\begin{cases} -11x_1 - x_2 + 5x_3 \le 4, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 \le 2, \\ 10x_1 + 4x_2 + x_3 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 7x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$$
2.23 $$\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 7x_3 \le 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le 2, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$F = 5x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$
2.24 $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 7x_3 \le 1, \\ 5x_1 - 7x_2 + x_3 \le 3, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 \le 7, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

2.25
$$F = 2x_1 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} -6x_1 - 5x_2 + 4x_3 \le 2, \\ 3x_1 \quad - 5x_3 \le 4, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

2.26
$$F = 7x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} -6x_1 - x_2 - 3x_3 \le 4, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 \le 2, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 \le 0, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

2.27
$$F = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 - 4x_3 \le 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 \le 0, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

2.28
$$F = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 4, \\ 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

2.29
$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 \le 1, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 \le 3, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

2.30
$$F = 6x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 \le 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Питання до захисту лабораторної роботи №6

1. Яка ситуація називається конфліктною?
2. Що таке гра, правила гри, парна гра та гра з нульовою сумою?
3. Що таке стратегія гравця та яка стратегія називається оптимальною?
4. Що називають платіжною матрицею, верхньою та нижньою ціною?
5. Яка гра називається грою із сідловою точкою?
6. Що називають змішаною стратегією гравця?
7. Яка гра завжди має розв'язок у змішаних стратегіях?
8. Необхідна і достатня умова існування ціни гри.
9. Етапи знаходження розв'язку гри $2 \times n$ чи $n \times 2$.
10. Для яких ігор можна використовувати алгебраїчний метод знаходження розв'язку?
11. Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування?
12. Які етапи знаходження розв'язку гри з використанням методів лінійного програмування?

9.7 Лабораторна робота №7
Тема Задачі нелінійного програмування

Завдання 1

Вважаючи, що невідомі невід'ємні, розв'язати геометричним методом задачу нелінійного програмування, визначивши найбільше і найменше значення цільової функції.

Варіанти:

№1-2

$$F = -x_1^2 + x_2 - 6$$
$$\begin{cases} 13x_1 + 5x_2 \le 65, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = -3,889;$ $X_{1onm} = (0,333;2,222);$ $F_{\min} = -36;$ $X_{2onm} = (5;0).$

№3-4

$$F = -x_1^2 + 12x_1 + x_2 - 33$$
$$\begin{cases} 13x_1 + 5x_2 \le 65, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 2,090;$ $X_{1onm} = (4,7;0,78);$ $F_{\min} = -33;$ $X_{2onm} = (0;0).$

№5-6

$$F = -x_1^2 + 22x_1 + x_2 - 123$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 17x_2 \le 102, \\ -18x_1 - 7x_2 \le -126. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 0,149;$ $X_{1onm} = (10,82;2,18);$ $F_{\min} = -29,167;$ $X_{2onm} = (5,41;4,09).$

№7-8

$$F = -x_1^2 + 10x_1 + x_2 + 25$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 17x_2 \le 102, \\ -18x_1 - 7x_2 \le -126. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 53,92;$ $X_{1onm} = (5,41;4,09);$ $F_{\min} = -94;$ $X_{2onm} = (17;0).$

№9-10

$$F = -x_1^2 + 2x_1 + x_2 - 1$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 17x_2 \le 102, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 3,89;$ $X_{1onm} = (1,38;4,03);$ $F_{\min} = -256;$ $X_{2onm} = (17;0).$

№11-12

$$F = -x_1^2 + 10x_1 + x_2 - 3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \le -10, \\ 12x_1 + 11x_2 \le 132. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 28,84;$ $X_{1onm} = (4,46;7,14);$ $F_{\min} = -1;$ $X_{2onm} = (0;2).$

№13-14

$$F = x_1^2 - 10x_1 + x_2 + 5$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \le -10, \\ 12x_1 + 11x_2 \le 132. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 17;$ $X_{1опт} = (0;12);$ $F_{\min} = -16,04;$ $X_{2опт} = (4,80;3,92).$

№15-16

$$F = -x_1^2 + x_2 + 7$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 \le 14, \\ 12x_1 + 11x_2 \le 132. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 19;$ $X_{1опт} = (0;12);$ $F_{\min} = -2,643;$ $X_{2опт} = (4,139;7,485).$

№17-18

$$F = -x_1^2 + 2x_1 + x_2 + 4$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 \le 14, \\ 12x_1 + 11x_2 \le 132. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 16,207;$ $X_{1опт} = (0,455;11,504);$ $F_{\min} = 4;$ $X_{2опт} = (0;0).$

№19-20

$$F = -x_1^2 + 4x_1 + x_2 + 8$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \le -14, \\ 12x_1 + 11x_2 \le 132. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 15,063;$ $X_{1опт} = (3,756;6,125);$ $F_{\min} = -69;$ $X_{2опт} = (11;0).$

№21-22

$$F = -x_1^2 + 16x_1 + x_2 - 10$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \le -14, \\ 12x_1 + 11x_2 \le 132. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 57,57;$ $X_{1опт} = (7,455;3,868);$ $F_{\min} = 18;$ $X_{2опт} = (2;0).$

№23-24

$$F = x_1^2 - 16x_1 + x_2 + 6$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \le -14, \\ 12x_1 + 11x_2 \le 132. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = -22;$ $X_{1опт} = (2;0);$ $F_{\min} = -58;$ $X_{2опт} = (8;0).$

№25-26

$$F = -x_1^2 + 4x_1 + x_2 - 9$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 15x_2 \le 105, \\ -10x_1 + 3x_2 \le -30. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = -5,556;$ $X_{1опт} = (3,667;2,222);$ $F_{\min} = -174;$ $X_{2опт} = (15;0).$

№27-28

$F = -x_1^2 + 20x_1 + x_2 - 11$

$\begin{cases} 7x_1 + 15x_2 \le 105, \\ -10x_1 + 3x_2 \le -30. \end{cases}$

Відповідь: $F_{max} = 91{,}388;$ $X_{1опт} = (9{,}767; 2{,}442);$ $F_{min} = 64;$ $X_{2опт} = (15; 0).$

№29-30

$F = -x_1^2 + 4x_1 + x_2 - 5$

$\begin{cases} 7x_1 + 15x_2 \le 105, \\ 10x_1 - 3x_2 \le 30. \end{cases}$

Відповідь: $F_{max} = 5{,}121;$ $X_{1опт} = (1{,}767; 6{,}176);$ $F_{min} = -5;$ $X_{2опт} = (0; 0).$

Завдання 2

Вважаючи, що невідомі невід'ємні, розв'язати геометричним методом задачу нелінійного програмування, визначивши найбільше і найменше значення цільової функції.

Варіанти:

№1-2 $F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$

$\begin{cases} 7x_1 + 15x_2 \le 105, \\ 10x_1 - 3x_2 \ge 30. \end{cases}$

Відповідь: $F_{max} = 185;$ $X_1 = (15; 0)$ $F_{min} = 4{,}44;$ $X_2 = (4{,}018; 3{,}394).$

№3-4 $F = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 3)^2$

$\begin{cases} 7x_1 + 15x_2 \le 105, \\ 10x_1 - 3x_2 \ge 30. \end{cases}$

Відповідь: $F_{max} = 73;$ $X_1 = (3; 0)$ $F_{min} = 1{,}055;$ $X_2 = (10{,}566; 2{,}069).$

№5-6 $F = (x_1 - 3{,}5)^2 + (x_2 + 2)^2$

$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 63, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10. \end{cases}$

Відповідь: $F_{max} = 32{,}473;$ $X_1 = (4{,}153; 3{,}661)$ $F_{min} = 4;$ $X_2 = (3{,}5; 0).$

№7-8 $F = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$

$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 63, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10. \end{cases}$

Відповідь: $F_{max} = 45;$ $X_1 = (0; 0)$ $F_{min} = 1{,}108;$ $X_2 = (5{,}169; 2{,}354).$

№9-10 $F = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 1)^2$

$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \le -14, \\ 12x_1 + 11x_2 \le 132. \end{cases}$

Відповідь: $F_{max} = 50{,}245;$ $X_1 = (4{,}139; 3{,}485)$ $F_{min} = 0;$ $X_2 = (7; 1).$

№11-12 $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$

$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \le -14, \\ 12x_1 + 11x_2 \le 132. \end{cases}$

Відповідь: $F_{max} = 89;$ $X_1 = (11; 0)$ $F_{min} = 0{,}17;$ $X_2 = (3{,}396; 4{,}887).$

№13-14 $F=(x_1-3)^2+(x_2-11)^2$ $\begin{cases}7x_1-2x_2\le 14,\\ 12x_1+11x_2\le 132.\end{cases}$

Відповідь: $F_{max}=130;\quad X_1=(0;0)$ $F_{min}=2{,}358;$ $X_2=(1{,}868;9{,}962).$

№15-16 $F=(x_1-4)^2+(x_2-2)^2$ $\begin{cases}7x_1-2x_2\le 14,\\ 12x_1+11x_2\le 132.\end{cases}$

Відповідь: $F_{max}=116;\quad X_1=(0;12)$ $F_{min}=1{,}887;\quad X_2=(2{,}649;2{,}377).$

№17-18 $F=(x_1-1)^2+(x_2-7)^2$ $\begin{cases}-2x_1+5x_2\ge 10,\\ 12x_1+11x_2\le 132.\end{cases}$

Відповідь: $F_{max}=37{,}942;$ $X_1=(6{,}707;4{,}683)$ $F_{min}=0;\quad X_2=(1;7).$

№19-20 $F=(x_1-5)^2+(x_2-1)^2$ $\begin{cases}-2x_1+5x_2\ge 10,\\ 12x_1+11x_2\le 132.\end{cases}$

Відповідь: $F_{max}=146;\quad X_1=(0;17)$ $F_{min}=7{,}759;\quad X_2=(3{,}966;3{,}586).$

№21-22 $F=(x_1-6)^2+(x_2-8)^2$ $\begin{cases}6x_1+17x_2\le 102,\\ 3x_1-4x_2\ge -12.\end{cases}$

Відповідь: $F_{max}=185;\quad X_1=(17;0)$ $F_{min}=15{,}077;$ $X_2=(4{,}708;4{,}338).$

№23-24 $F=(x_1-4)^2+(x_2-1)^2$ $\begin{cases}6x_1+17x_2\le 102,\\ -18x_1-7x_2\le -126.\end{cases}$

Відповідь: $F_{max}=170;\quad X_1=(17;0)$ $F_{min}=5{,}922;\quad X_2=(6{,}268;1{,}882).$

№25-26 $F=(x_1-16)^2+(x_2-3)^2$ $\begin{cases}6x_1+17x_2\le 102,\\ -18x_1-7x_2\le -126.\end{cases}$

Відповідь: $F_{max}=113{,}357;$ $X_1=(5{,}409;4{,}091)$ $F_{min}=6{,}231;$ $X_2=(15{,}169;0{,}646).$

№27-28 $F=(x_1-1)^2+(x_2-4)^2$ $\begin{cases}13x_1+5x_2\le 65,\\ 2x_1-3x_2\ge -6.\end{cases}$

Відповідь: $F_{max}=32;\quad X_1=(5;0)$ $F_{min}=1{,}231;\quad X_2=(1{,}615;3{,}077).$

№29-30 $F=(x_1+1)^2+(x_2-5)^2$ $\begin{cases}13x_1+5x_2\le 65,\\ 2x_1-3x_2\ge -6.\end{cases}$

Відповідь: $F_{max}=61;\quad X_1=(5;0)$ $F_{min}=9{,}308;\quad X_2=(0{,}692;2{,}462).$

Завдання 3

Вважаючи, що невідомі невід'ємні, розв'язати геометричним методом задачу нелінійного програмування:

Варіанти:

№1-2

$F = x_1 x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 24; \quad X_{опт} = (6;4).$

№3-4

$F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 \quad - x_2 \le 6, \\ \qquad x_2 \le 4. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\min} = 16; \quad X_{опт} = (5;4).$

№5-6

$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \le 0, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 37; \quad X_{опт} = (5{,}8;4{,}6).$

№7-8

$F = x_1 x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 12{,}5; \quad X_{опт} = (2{,}5;5).$

№9-10

$F = 4(x_1 - 1)^2 + 9(x_2 - 5)^2 \to \min$

$$\begin{cases} 6x_1 + 13x_2 \le 78, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 15, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 79{,}404;$ $X_{опт} = (4{,}081;3{,}632).$

№11-12

$F = 4(x_1 - 9)^2 + 9(x_2 - 3)^2 - 36 \to \min$

$$\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 \le 84, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 15, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 12{,}861;$ $X_{опт} = (5{,}743;2{,}155).$

№13-14

$$F = 36x_1^2 - 648x_1 + 49x_2^2 - 784x_2 + 6052 \to \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 17x_2 \ge 102, \\ -2x_1 + 7x_2 \le 14, \\ 12x_1 - 11x_2 \le 132. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\min} = 518,4;$ $x_1 = 10,2$ $x_2 = 4,914$

№15-16

$$F = 64(x_1 - 18)^2 + 9(x_2 - 4)^2 \to \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 17x_2 \ge 102, \\ 12x_1 - 11x_2 \le 132, \\ -2x_1 + 7x_2 \le 14. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 71,287;$ $X_{опт} = (16,663; 6,178).$

№17-18

$$F = 8x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 9x_1^2 + 64x_2^2 \le 576, \\ -x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 67,357;$ $X_{опт} = (7,601; 0,935).$

№19-20

$$F = x_1 x_2 + 2 \to \max$$

$$\begin{cases} (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 16, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 11,861;$ $X_{опт} = (2,431; 4,056).$

№21-22

$$F = x_1 x_2 + 6 \to \max$$

$$\begin{cases} (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \ge 16, \\ 11x_1 + 5x_2 \le 55. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 11,861;$ $X_{опт} = (2,431; 4,056).$

№23-24

$$F = 2x_1 x_2 + 1 \to \max$$

$$\begin{cases} (x_1 - 5)^2 + x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 7x_2 \ge 28. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 131,681;$ $X_{опт} = (7,751; 8,429).$

№25-26

$$F = x_1 + 2x_2 - 3 \to \max$$

$$\begin{cases} (x_1 - 5)x_2 - 2(x_1 - 5) \le 1, \\ 9x_1^2 + 25x_2^2 \le 225. \end{cases}$$

Відповідь: $F_{\max} = 4,810;$ $X_{опт} = (3,201; 2,305).$

№27-28

$F = x_1^2 + x_2 + 5 \to \min$

$\begin{cases} (x_1-6)^2 + (x_2-7)^2 \le 49, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 90. \end{cases}$

Відповідь: $F_{\min} = 7,906;$ $X_{опт} = (0,605; 2,540).$

№29-30

$F = -(x_1-6)^2 + x_2 + 3 \to \max$

$\begin{cases} (x_1-6)^2 + (x_2-7)^2 \le 49, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 90. \end{cases}$

Відповідь: $F_{\max} = 6,803;$ $X_{опт} = (5,550; 4,005).$

Питання до захисту лабораторної роботи №7

1. Яка задача називається задачею нелінійного програмування?
2. Що таке гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня?
3. Яким способом можна знайти розв'язок задачі нелінійного програмування?
4. Етапи знаходження розв'язку задач нелінійного програмування.

9.8 Лабораторна робота №8
Тема Метод множників Лагранжа

Завдання. Знайти умовні екстремуми функцій

1.1 $f = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4$ *при умові* $x_1 + x_2 + 3 = 0$

$f_{\min} = -\frac{19}{4}; (-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$

1.2 $f = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ *при умові* $x_1 + x_2 = 2$ $\quad f_{\min} = 2;\ (1;1)$

1.3 $f = \frac{x_1 - x_2 - 4}{\sqrt{2}}$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $\quad f_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}; (-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$

$f_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}; (\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$

1.4 $f = x_1x_2^2$ *при умові* $x_1 + 2x_2 = 1$ $\quad f_{\min} = 0; (1;0), f_{\max} = \frac{1}{27}; (\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

1.5 $f = 2x_1 + x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $\quad f_{\min} = -\sqrt{5}; (-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}),$

$f_{\max} = \sqrt{5}; (\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}})$

1.6 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $x_1 + x_2 = 2$ $\quad f_{\min} = 2;\ (1;1)$

1.7 $f = x_1x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 18$ $f_{\min} = -9; (3;-3), (-3;3),$

$f_{\max} = 9; (3;3), (-3;-3)$

1.8 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $3x_1 + 4x_2 = 12$ $f_{\min} = \frac{144}{25}; (\frac{36}{25}; \frac{48}{25})$

1.9 $f = \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $f_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

$f_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}; (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

1.10 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $3x_1 + 2x_2 = 6$ $f_{\min} = \frac{36}{13};\quad (\frac{18}{13}; \frac{12}{13})$

1.11 $f = x_1x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 2$ $f_{\min} = -1;\quad (1;-1), (-1;1),$

$f_{\max} = 1;\quad (1:1), (-1;-1)$

1.12 $f = x_1^3 + x_2^3$ *при умові* $x_1 + x_2 = 2$ $f_{\min} = 2;\quad (1;1)$

1.13 $f = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ *при умові* $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$ $f_{\min} = -\sqrt{2};\quad (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}),$

$f_{\max} = \sqrt{2};\quad (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

1.14 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $x_1 + x_2 = 3$ $f_{\min} = \frac{81}{18};\quad (\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$

1.15 $f = 6 - 4x_1 - 3x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $f_{\min} = 1;\quad (\frac{4}{5}; \frac{3}{5}),$

$f_{\max} = 11;\quad (-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5})$

1.16 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} = 0$ $f_{\min} = \frac{32}{9};\quad (\frac{16}{9}; \frac{8}{9})$

1.17 $f = x_1^4 + x_2^4$ *при умові* $x_1 + x_2 = 2$ $f_{\min} = 2;\quad (1;1)$

1.18 $f = x_1x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 32$ $f_{\min} = -16;\quad (4;-4), (-4;4),$

$f_{\max} = 16;\quad (4;4), (-4;-4)$

1.19 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $x_1 + x_2 = 4$ $f_{\min} = 8;\quad (2;2)$

1.20 $f = \frac{x_1}{2} + x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $f_{\min} = -\frac{\sqrt{5}}{2};\quad (-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}),$

$f_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{2};\quad (\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}})$

1.21 $f = x_1x_2$ *при умові* $2x_1 + 3x_2 = 6$ $f_{\max} = \frac{3}{2};\quad (\frac{3}{2}; 1)$

1.22 $f = x_1^4 + x_2^4$ *при умові* $x_1 + x_2 = 4$ $f_{\min} = 32;\quad (2;2)$

1.23 $f=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ *при умові* $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{1}{9}$ $f_{\min}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$; $(-3\sqrt{2};-3\sqrt{2})$,

$f_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{3}$; $(3\sqrt{2};3\sqrt{2})$

1.24 $f=x_1x_2$ *при умові* $2x_1+3x_2-5=0$ $f_{\max}=\frac{25}{24}$; $(\frac{5}{4};\frac{5}{6})$

1.25 $f=x_1+2x_2$ *при умові* $x_1^2+x_2^2=5$ $f_{\min}=-5$; $(-1;-2)$,

$f_{\max}=5$; $(1;2)$

1.26 $f=x_1x_2$ *при умові* $x_1+x_2=1$ $f_{\max}=\frac{1}{4}$; $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

1.27 $f=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ *при умові* $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{1}{4}$ $f_{\min}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$,

$f_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $(2\sqrt{2};2\sqrt{2})$

1.28 $f=x_1^3+x_2^3$ *при умові* $x_1+x_2=4$ $f_{\min}=16$; $(2;2)$

1.29 $f=\frac{x_1}{3}+x_2$ *при умові* $x_1^2+x_2^2=1$ $f_{\min}=-\frac{\sqrt{10}}{3}$; $(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}})$,

$f_{\max}=\frac{\sqrt{10}}{3}$; $(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}})$

1.30 $f=x_1x_2$ *при умові* $x_1^2+x_2^2=50$ $f_{\min}=-25$; $(5;-5),(-5;5)$,

$f_{\max}=25$; $(5;5),(-5;-5)$

Питання до захисту лабораторної роботи №8

1. Яку задачу називають задачею на умовний екстремум або класичною задачею оптимізації?
2. Що таке множники та функція Лагранжа?
3. Які етапи визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа?
4. Функція Лагранжа для випадку двох змінних.

10 Завдання для типових розрахунків та приклади їх розв'язування

10.1 Двоїсті задачі. Транспортна задача

Завдання 1.

Для заданої задачі лінійного програмування скласти двоїсту задачу і обидві задачі розв'язати за допомогою програми " Пошук рішень " у електронних таблицях Excel, вважаючи, що $x_j \ge 0$.

Варіанти :

№ 1

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

№ 2

$$F = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 30, \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le -50, \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 \le -18, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

№ 3

$$F = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 280, \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 80, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 250, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

№ 4

$$F = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \le 25, \\ -6x_1 - 5x_2 - 2x_3 \le -118, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 22, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

№ 5

$$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

№ 6

$$F = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \le 38, \\ -6x_1 - 5x_2 - 2x_3 \le -82, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

№ 7

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 393, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 203{,}2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 100, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

№ 8

$$F = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 3x_3 \le 69, \\ 4x_1 - 5x_3 \le 5, \\ -3x_1 + 2x - x_3 \le -13, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

№ 9

$$F = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \to \min$$
$$\begin{cases} 2{,}5x_1 - 2{,}375x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 0{,}75x_5 + x_6 \ge 12, \\ 2{,}2x_1 - 0{,}125x_2 + 2x_3 + 2{,}25x_5 + 3x_6 \ge 18, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_4 - 2x_5 + 8x_6 \ge 32, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

№ 10
$$F = x_1 + 6x_2 + 5x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 27, \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 \le 162, \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \le 9, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

№ 11
$$F = 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 11x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 310{,}5, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 205, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 81, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

№ 12
$$F = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20, \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \le -19, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

№ 13
$$F = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 - 2x_6 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \le 36, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 24, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_5 - x_6 \ge 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \ge 12, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

№ 14
$$F = 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 220, \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 90, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 260, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

№ 15
$$F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

№ 16
$$F = x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 228, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 246, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

№ 17
$$F = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max$$

№ 18
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0.$$

$$F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \to \max$$

№ 19
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + 6x_6 = 32, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0.$$

$$F = 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max$$

№ 20
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 20{,}7, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31{,}9, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 120{,}8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0.$$

$$F = 8x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_6 \to \max$$

№ 21
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0.$$

$$F = 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 8x_4 - 5x_5 \to \max$$

№ 22
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 41, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 8x_5 = 139, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0.$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max$$

№23
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0.$$

$$F = 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 8x_4 - 5x_5 \to \max$$

№ 24 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 29, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 63, \end{cases}$

$$x_j \geq 0.$$

$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$$

№ 25 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + 6x_6 = 32, \end{cases}$

$$x_j \geq 0.$$

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \to \max$$

№ 26 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320, \end{cases}$

$$x_j \geq 0.$$

$$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$$

№ 27 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$

$$x_j \geq 0.$$

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

№ 28 $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$

$$x_j \geq 0.$$

$$F = x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max$$

№ 29 $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 8, \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \end{cases}$

$$x_j \geq 0.$$

$$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$$

№ 30 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_5 + 5x_6 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$

$$x_j \geq 0.$$

Приклад1

Для заданої задачі лінійного програмування

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 8, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

скласти двоїсту задачу і обидві задачі розв'язати за допомогою програми "Пошук рішень" у електронних таблицях Excel.

Розв'язування

Для заданої задачі ЛП скласти двоїсту задачу:

$$f = 8y_1 - 8y_2 - 4y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ 4y_1 - y_2 - y_3 \ge 2, \\ -2y_1 - 2y_2 + 2y_3 \ge -1, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Розв'яжемо початкову задачу за допомогою програми "Пошук рішень". Одержимо:

Значення невідомих:	2,4	3,2	1,2	Цільова функція	
	1	2	-1	7,6	
	-1	4	-2	8	8
	-1	-1	-2	-8	-8
	2	-1	2	4	4

Таким чином, $F_{\max} = 7,6$ при $X_{опт.} = (2,4; 3,2; 1,2)$.

Після цього, використавши програму "Пошук рішень", розв'язати двоїсту задачу:

Значення невідомих:	1,1	0,9	1,5	Цільова функція	
	8	-8	4	7,6	
	-1	-1	2	1	1
	4	-1	-1	2	2
	-2	-2	2	-1	-1

Таким чином, $f_{\min} = 7,6$ при $Y_{опт.} = (1,1; 0,9; 1,5)$. Задача розв'язана.

Приклад 2

За допомогою електронних таблиць Excel, використовуючи двоїстий симплекс - метод, розв'язати задачу лінійного програмування:

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \qquad - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad \ge 20, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \qquad \le 24, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо систему обмежень до системи лінійних рівнянь з одиничним базисом:

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \qquad - 2x_4 + x_5 = 16, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad \le -20, \\ -\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \quad \le 24, \\ \quad x_j \ge 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \qquad - 2x_4 + x_5 \qquad = 16, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad + x_6 \quad = -20, \\ -\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \qquad + x_7 = 24, \\ \quad x_j \ge 0. \end{cases}$$

Останню задачу розв'яжемо за допомогою електронних таблиць Excel. Розмістимо:

- шукані невідомі у комірках B2 : H2 ;
- матрицю системи рівнянь у масиві B4 :H6 ;
- вільні члени системи у комірках J4 : J6 ;
- цільову функцію у комірках B3 : H3 .

За цільову приймаємо комірку I3, яка дорівнює сумі добутків (\$B\$2:\$H\$2 ; B3:H3).

Після цього, виділивши комірку I3, помістимо стрілку курсора у її нижній правий кут (з'явиться чорний хрестик) і перетягнемо її на комірки I4:I6. Виділимо цільову комірку I3. Натиснемо курсором клавішу "Сервіс" і у меню, що з'явиться, вибираємо "Пошук рішень". У ньому вибираємо :

- цільову комірку I3 ;
- максимальне значення ;
- зміну комірок B2 : H2 ;
- обмеження I4 : I6 = J4 : J6.

Натискаємо клавішу "Параметри" і встановлюємо для збіжності "Невід'ємні значення" та знімаємо вимогу "Лінійна модель". Натиснувши клавішу ОК, повертаємось у "Пошук рішень". Запускаємо програму обчислень, натиснувши клавішу "Виконати".

Результати обчислень приведено у такій таблиці :

2,286	0	13,143	0	20,571	0	0		
2	3	-1	-1	-5	0	0	-111,429	
-2	-3	0	-2	1	0	0	16	16
-3	-2	-1	0	0	1	0	-20	-20
-1	3	2	4	0	0	1	24	24

Відповідь: $X_{опт} = \{2,286; 0; 13,143; 0; 20,571\}$, $F_{\max} = -111,429$.

Завдання 2

За допомогою програми "Пошук рішень" розв'язати транспортну задачу для випадків закритої і відкритої моделі.

Варіанти:

1.

1.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 120	B_2, 50	B_3, 190	B_4, 110
A_1, 160	7	8	1	2
A_2, 140	4	5	9	8
A_3, 170	9	2	3	6

1.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 12	B_2, 15	B_3, 20	B_4, 35
A_1, 18	1	2	1	3
A_2, 14	4	3	1	1
A_3, 36	6	4	3	2

2.

2.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 133	B_2, 76	B_3, 194	B_4, 131
A_1, 261	1	8	4	2
A_2, 98	4	5	9	7
A_3, 175	8	2	3	6

2.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 158	B_2, 223	B_3, 315	B_4, 52
A_1, 170	1	2	2	3
A_2, 225	4	3	1	1
A_3, 340	2	4	3	10

3.

3.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 351	B_2, 185	B_3, 297	B_4, 218
A_1, 320	4	9	1	2
A_2, 517	3	4	10	7
A_3, 214	8	2	3	6

3.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 58	B_2, 28	B_3, 38	B_4, 62
A_1, 48	1	2	2	3
A_2, 37	4	3	4	1
A_3, 89	2	4	3	9

4.

4.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 53	B_2, 84	B_3, 192	B_4, 208
A_1, 94	1	4	1	2
A_2, 321	7	2	5	7
A_3, 122	4	5	3	6

4.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 40	B_2, 19	B_3, 31	B_4, 42
A_1, 35	1	2	2	3
A_2, 24	4	4	3	8
A_3, 63	2	3	4	1

5.

5.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 150	B_2, 250	B_3, 120	B_4, 180
A_1, 180	9	2	3	12
A_2, 160	3	4	8	7
A_3, 140	4	5	6	12
A_4, 220	7	1	5	6

5.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 108	B_2, 83	B_3, 136	B_4, 116
A_1, 118	1	2	2	3
A_2, 142	4	4	3	4
A_3, 163	5	3	4	12

6.

6.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 212	B_2, 340	B_3, 152	B_4, 180
A_1, 150	9	2	9	5
A_2, 260	3	4	8	7
A_3, 134	4	5	6	12
A_4, 340	7	1	5	6

6.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 118	B_2, 224	B_3, 236	B_4, 130
A_1, 276	1	2	2	3
A_2, 210	4	4	3	4
A_3, 198	5	3	4	12

7.

7.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 140	B_2, 370	B_3, 86	B_4, 214
A_1, 360	1	2	3	4
A_2, 80	6	4	8	7
A_3, 130	4	5	6	16
A_4, 240	7	3	5	6

7.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 19	B_2, 102	B_3, 84	B_4, 125
A_1, 126	3	8	2	3
A_2, 109	5	4	3	4
A_3, 78	2	3	5	2

8.

8.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 42	B_2, 36	B_3, 50	B_4, 53
A_1, 60	2	4	3	5
A_2, 25	8	5	1	6
A_3, 44	3	1	2	2
A_4, 52	5	2	4	9

8.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 142	B_2, 138	B_3, 164	B_4, 223
A_1, 240	1	2	6	3
A_2, 165	6	4	2	4
A_3, 207	2	3	3	9

9.

9.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 8	B_2, 11	B_3, 15	B_4, 49
A_1, 12	1	3	3	3
A_2, 25	3	4	1	4
A_3, 14	2	1	2	2
A_4, 32	3	2	4	1

9.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 19	B_2, 102	B_3, 84	B_4, 125
A_1, 131	3	8	2	3
A_2, 88	5	4	3	4
A_3, 109	2	3	3	2

10.

10.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 13	B_2, 21	B_3, 19	B_4, 59
A_1, 23	3	6	3	3
A_2, 32	4	4	2	4
A_3, 41	2	3	5	2
A_4, 16	5	1	4	1

10.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 142	B_2, 138	B_3, 164	B_4, 223
A_1, 249	1	2	6	3
A_2, 198	6	4	2	4
A_3, 183	2	3	3	2

11.

11.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 230	B_2, 322	B_3, 19	B_4, 59
A_1, 125	3	6	3	3
A_2, 112	4	4	2	4
A_3, 238	2	3	5	2
A_4, 155	5	1	4	1

11.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 133	B_2, 128	B_3, 154	B_4, 221
A_1, 145	7	2	6	3
A_2, 239	6	4	2	4
A_3, 216	2	3	3	2

12.

12.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 79	B_2, 63	B_3, 28	B_4, 28
A_1, 66	3	2	1	3
A_2, 55	2	4	2	4
A_3, 44	1	3	3	2
A_4, 33	4	1	4	1

12.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 106	B_2, 120	B_3, 65	B_4, 120
A_1, 136	1	2	5	3
A_2, 109	6	4	2	1
A_3, 133	5	3	3	2

13.

13.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 98	B_2, 120	B_3, 41	B_4, 132
A_1, 110	1	2	5	3
A_2, 95	6	4	2	4
A_3, 104	2	3	3	2
A_4, 82	3	1	2	6

13.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 120	B_2, 50	B_3, 190	B_4, 110
A_1, 160	7	8	1	2
A_2, 138	4	5	9	3
A_3, 158	9	2	3	6

14.

14.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 106	B_2, 120	B_3, 65	B_4, 120
A_1, 116	1	2	5	3
A_2, 99	6	4	2	1
A_3, 123	5	3	3	2
A_4, 73	3	7	4	6

14.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 127	B_2, 53	B_3, 190	B_4, 112
A_1, 153	3	8	1	2
A_2, 140	4	5	9	4
A_3, 169	8	2	3	8

15.

15.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 140	B_2, 370	B_3, 86	B_4, 214
A_1, 360	7	2	6	3
A_2, 80	6	4	2	4
A_3, 130	2	3	3	2
A_4, 240	3	7	5	6

15.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 133	B_2, 76	B_3, 194	B_4, 131
A_1, 251	1	8	4	2
A_2, 98	4	5	9	7
A_3, 172	8	2	3	8

16.

16.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 142	B_2, 138	B_3, 164	B_4, 223
A_1, 220	1	2	6	3
A_2, 160	6	4	2	4
A_3, 190	2	3	3	2
A_4, 97	3	5	5	3

16.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 138	B_2, 78	B_3, 196	B_4, 129
A_1, 257	6	9	1	2
A_2, 101	3	4	10	7
A_3, 163	8	2	3	9

17.

17.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 19	B_2, 102	B_3, 84	B_4, 125
A_1, 98	3	8	2	3
A_2, 89	5	4	3	4
A_3, 76	2	3	3	2
A_4, 67	2	2	5	3

17.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 351	B_2, 185	B_3, 297	B_4, 218
A_1, 318	4	9	1	2
A_2, 212	3	4	10	7
A_3, 514	8	2	3	6

18.

18.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 127	B_2, 53	B_3, 190	B_4, 112
A_1, 163	7	8	1	2
A_2, 140	4	5	9	7
A_3, 179	8	2	3	6

18.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 151	B_2, 185	B_3, 197	B_4, 208
A_1, 120	4	9	1	2
A_2, 190	3	4	10	7
A_3, 427	8	2	3	6

19.

19.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 138	B_2, 78	B_3, 196	B_4, 129
A_1, 267	6	9	1	2
A_2, 101	3	4	10	7
A_3, 173	8	2	3	9

19.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 53	B_2, 84	B_3, 192	B_4, 208
A_1, 94	1	4	3	2
A_2, 122	7	2	5	7
A_3, 310	4	5	3	6

20.

20.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 151	B_2, 185	B_3, 197	B_4, 208
A_1, 120	4	9	1	2
A_2, 430	3	4	10	7
A_3, 194	8	2	3	6

20.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 153	B_2, 184	B_3, 318	B_4, 138
A_1, 120	2	3	4	1
A_2, 320	7	5	2	7
A_3, 343	6	3	6	4

21.

21.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 153	B_2, 184	B_3, 318	B_4, 138
A_1, 120	2	3	4	1
A_2, 340	7	5	2	7
A_3, 333	6	3	6	4

21.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 52	B_2, 36	B_3, 73
A_1, 60	2	4	3
A_2, 25	8	5	1
A_3, 44	3	1	2
A_4, 52	5	2	4

22.

22.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 210	B_2, 340	B_3, 150	B_4, 180
A_1, 150	1	2	3	4
A_2, 260	6	4	8	7
A_3, 130	4	5	6	12
A_4, 340	7	3	5	6

22.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 49	B_2, 11	B_3, 15
A_1, 12	1	3	3
A_2, 25	3	4	1
A_3, 14	2	1	2
A_4, 32	3	2	4

23.

23.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 110	B_2, 300	B_3, 86	B_4, 114
A_1, 160	1	2	3	4
A_2, 80	6	4	8	7
A_3, 130	4	5	6	16
A_4, 240	7	3	5	6

23.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 43	B_2, 31	B_3, 25
A_1, 23	3	6	3
A_2, 32	4	4	2
A_3, 41	2	3	5
A_4, 16	5	2	4

24.

24.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 140	B_2, 370	B_3, 96	B_4, 214
A_1, 360	1	9	3	3
A_2, 80	6	4	8	7
A_3, 130	4	5	6	16
A_4, 250	7	3	5	2

24.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 230	B_2, 332	B_3, 49
A_1, 125	3	6	3
A_2, 112	4	4	2
A_3, 238	2	3	5
A_4, 155	5	2	4

25.

25.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 118	B_2, 224	B_3, 236	B_4, 130
A_1, 240	2	1	2	3
A_2, 180	4	4	3	4
A_3, 178	1	3	6	2
A_4, 110	2	2	5	10

25.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 38	B_2, 63	B_3, 79
A_1, 66	3	2	1
A_2, 55	2	4	2
A_3, 44	1	1	3
A_4, 33	4	2	4

26.

26.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 108	B_2, 83	B_3, 136	B_4, 116
A_1, 128	1	2	2	3
A_2, 95	4	4	3	4
A_3, 132	5	3	4	2
A_4, 88	2	2	5	12

26.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 128	B_2, 188	B_3, 49
A_1, 110	1	2	5
A_2, 95	6	4	2
A_3, 104	2	3	3
A_4, 82	3	1	2

27.

27.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 40	B_2, 19	B_3, 31	B_4, 42
A_1, 32	1	2	2	3
A_2, 23	4	4	3	1
A_3, 16	5	3	4	2
A_4, 61	2	2	5	8

27.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 188	B_2, 350	B_3, 135
A_1, 180	9	2	3
A_2, 160	3	4	8
A_3, 140	4	5	6
A_4, 220	7	1	5

28.

28.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 58	B_2, 28	B_3, 38	B_4, 62
A_1, 43	1	2	2	3
A_2, 34	4	3	4	1
A_3, 27	5	4	3	2
A_4, 82	2	2	5	9

28.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 270	B_2, 360	B_3, 230
A_1, 150	1	2	3
A_2, 260	6	4	8
A_3, 130	4	5	6
A_4, 340	7	3	5

29.

29.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 158	B_2, 223	B_3, 315	B_4, 52
A_1, 110	1	2	2	3
A_2, 210	4	3	1	1
A_3, 88	5	4	3	2
A_4, 340	2	2	5	9

29.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 199	B_2, 252	B_3, 394
A_1, 150	9	2	3
A_2, 260	3	4	8
A_3, 134	4	5	3
A_4, 340	7	1	5

30.

30.1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 15	B_2, 19	B_3, 52	B_4, 68
A_1, 18	1	2	4	3
A_2, 14	4	3	1	1
A_3, 36	6	4	3	2
A_4, 86	2	2	5	9

30.2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 160	B_2, 340	B_3, 86
A_1, 160	1	2	3
A_2, 80	6	4	8
A_3, 130	4	5	6
A_4, 240	7	3	5

Приклад

За допомогою програми "Пошук рішень" розв'язати транспортну задачу для випадку закритої і відкритої моделі:

Закрита модель

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби			
	B_1, 126	B_2, 245	B_3, 246	B_4, 200
A_1, 121	1	2	1	3
A_2, 215	4	3	1	1
A_3, 145	6	4	3	2
A_4, 336	2	2	5	10

Відкрита модель

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 140	B_2, 206	B_3, 420
A_1, 360	1	2	3
A_2, 80	6	4	8
A_3, 130	4	5	6
A_4, 240	7	3	5

Розв'язування

1. *Випадок закритої моделі.*

Значення запасів A_i помістимо у комірки A2:A5.

Значення потреб B_j помістимо у комірки C7:F7.

Матрицю вартості перевезень розмістимо у комірки G2:J5.

Шукану матрицю оптимального плану перевезень будемо розміщати у комірках C2:F5.

Покладемо:

B2 = $\sum$ (C2:F2), B3 = $\sum$ (C3:F3), B4 = $\sum$ (C4:F4), B5 = $\sum$ (C5:F5), C6 = $\sum$ (C2:C5), D6 = $\sum$ (D2:D5), E6 = $\sum$ (E2:E5), F6 = $\sum$ (F2:F5).

Введемо обмеження:

(A2:A5) = (B2:B5); (C6:F6) = (C7:F7); (C2:F5) – невід'ємні.

За цільову візьмемо комірку C9 як суму добутків (C2:F5; G2:J5).

Після цього, змінюючи комірки (C2:F5), за допомогою програми "Пошук рішень" знаходимо мінімальне значення цільової функції:

121	121	35	0	86	0	1	2	1	3
215	215	0	0	160	55	4	3	1	1
145	145	0	0	0	145	6	4	3	2
336	336	91	245	0	0	2	2	5	10
		126	245	246	200				
		126	245	246	200				
		1298							

Відповідь:

$$f_{\min} = 1298$$

$$X_{onm} = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 86 & 0 \\ 0 & 0 & 160 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 145 \\ 91 & 245 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Випадок відкритої моделі.

Для цього випадку $\sum A_i \neq \sum B_j$. Тому в таблицю вводимо уявний пункт призначення B_4, вважаючи, що вартість перевезень вантажів до цього пункту дорівнює нулю. Застосувавши програму "Пошук рішень", одержимо:

360	360	10	0	350	0	1	2	3	0
80	80	0	36	0	44	6	4	8	0
130	130	130	0	0	0	4	5	6	0
240	240	0	170	70	0	7	3	5	0
		140	206	420	44				
		140	206	420	44				
		2584							

Відповідь:

$$f_{\min} = 2584$$

$$X_{onm} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 350 \\ 0 & 36 & 0 \\ 130 & 0 & 0 \\ 0 & 170 & 70 \end{pmatrix}$$

10.2 Нелінійне програмування

Задача № 1

Розв'язати задачу цілочисельного лінійного програмування за допомогою електронних таблиць Excel :

$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_j \ge 0, \\ x_j - \text{цілі}. \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо систему обмежень до системи лінійних рівнянь з одиничним базисом:

$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_4 = -8, \\ x_j \ge 0, \\ x_j - \text{цілі}. \end{cases}$$

Розв'яжемо останню задачу за допомогою електронних таблиць Excel, використавши програму "Пошук рішень", у якій додано обмеження B2 : H2 - цілі.

Одержимо:

2	1	0	0	0	0	0		
-5	5	0	0	0	0	0	-5	
1	3	1	0	0	0	0	5	5
-3	-2	0	1	0	0	0	-8	-8
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Відповідь : $X_{onm} = \{2;1\}$, $F_{\max} = -5$.

Задача № 2

Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування за допомогою електронних таблиць Excel:

$$F = \frac{-3x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 \le 95, \\ 8x_1 - 5x_2 \ge 5, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Зведемо систему обмежень до системи лінійних рівнянь з одиничним базисом:

$$F = \frac{-3x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 + x_3 \quad = 95, \\ -8x_1 + 5x_2 \quad + x_4 = -5, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Останню задачу розв'яжемо за допомогою електронних таблиць Excel. Розмістимо:

- шукані невідомі у комірках B2 : E2;
- матрицю системи рівнянь у масиві B5 :E6;
- вільні члени системи у комірках G5 : G6;

- чисельник цільової функції у комірках B3 : E3;
- знаменник цільової функції у комірках B4 : E4.

За цільову приймаємо комірку F2 = F3 / F4 , де F3 – сума добутків ($B$2:$E$2 ;B3:E3). Оскільки на нуль ділити не можна, то за початкові значення невідомих візьмемо $x_j = 1$.

Після цього, виділивши комірку F3, помістимо стрілку курсора у нижній правий кут (з'явиться чорний хрестик) і перетягнемо її на комірки F4 : F6. Виділимо цільову комірку F2. Натиснемо курсором клавішу "Сервіс" і у меню, що з'явиться, вибираємо " Пошук рішень ". У ньому вибираємо:
- цільову комірку F2;
- максимальне значення;
- зміну комірок B2 : E2;
- обмеження F5 : F6 = G5 : G6.

Натискаємо клавішу "Параметри" і встановлюємо для збіжності "Невід'ємні значення" та знімаємо вимогу "Лінійна модель". Натиснувши клавішу OK, повертаємось у "Пошук рішень". Запускаємо програму обчислень, натиснувши клавішу "Виконати".

Результати обчислень приведено у таблиці:

5	7	0	0	0,5	
-3	3	0	0	6	
1	1	0	0	12	
12	5	1	0	95	95
-8	5	0	1	-5	-5

Відповідь : $X_{опт} = \{5; 7\}$, $F_{\max} = 0,5$.

Задача № 3

Знайти найбільше і найменше значення цільової функції для задачі нелінійного програмування за допомогою електронних таблиць Excel

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

При розв'язуванні задач лінійного і дробово-лінійного програмування, надаючи цільовій функції стале числове значення, ми одержували рівняння прямої лінії. Тому в цих задачах екстремум цільової функції знаходиться в граничних спільних точках випуклого многокутника допустимих розв'язків і деяких прямих. Такими граничними точками у загальному випадку завжди є вершини многокутника. Інша справа буде у випадку, коли цільова функція є нелінійною. Надаючи такій функції конкретне числове значення, ми одержуємо рівняння деякої кривої лінії. А крива лінія граничною спільною точкою з випуклим многокутником допустимих розв'язків має не обов'язково вершину цього многокутника. Такою спільною точкою може бути точка дотику кривої до сторони многокутника. У першому випадку дві нерівності з системи обмежень перетворюються у рівності. А у другому випадку – лише одна нерівність. Ці особливості слід враховувати при розв'язуванні задачі нелінійного програмування за допомогою програми "Пошук рішень".

Задану задачу розв'яжемо за допомогою програми "Пошук рішень" в таблицях Excel. Помістимо:

- невідомі в комірки B2 : C2;
- матрицю системи обмежень в масив B4 : C6;
- вільні члени системи обмежень у комірки F4 : F6.

За цільову візьмемо комірку E3 = (B2 - 3)^2 + (C2 - 4)^2 .

Покладемо, крім того:

E4 = сума добутків (B2 : C2; B4 : C4),

E5 = сума добутків (B2 : C2; B5 : C5),

E6 = сума добутків (B2 : C2; B6 : C6).

У меню "Параметри" програми "Пошук рішень" знімаємо вимогу "Лінійні модель" і ставимо вимогу "Невід'ємні значення".

За допомогою таблиць Excel знаходимо значення цільової функції для випадків, коли графік останньої проходить через вершину многокутника допустимих розв'язків:

Випадок перший.

Обмеження : E4 $\geq$ F4; E5 = F5; E6 = F6

2	12	0	0	
			65,00001	
3	2	0	30	7
10	-1	0	8,000001	8
-18	4	0	12	12

У цьому випадку $F_1 = 65,\ X_1 = \{2; 12\}$..

Випадок другий

Обмеження: E4 = F4; E5 $\leq$ F5; E6 = F6

0,083	3,375			
			8,8976	
3	2		7	7
10	-1		-2,542	8
-18	4		12	12

У цьому випадку $F_2 = 8{,}898,\ X_2 = \{0{,}083; 3{,}375\}$.

Випадок третій

Обмеження: E4 = F4; E5 = F5; E6 ≤ F6

1	2			
			8	
3	2		7	7
10	-1		8	8
-18	4		-10	12

У цьому випадку $F_3 = 8$, $X_3 = \{1; 2\}$.

Після цього за допомогою таблиць Excel знаходимо значення цільової функції для випадків, коли графік останньої дотикається до сторони многокутника допустимих розв'язків :

Випадок четвертий.

Обмеження: E4 = F4; E5 ≤ F5; E6 ≤ F6

0,692	2,4615			
			7,6923	
3	2		7	7
10	-1		4,4615	8
-18	4		-2,615	12

У цьому випадку $F_4 = 7{,}692$, $X_4 = \{0{,}692; 2{,}462\}$.

Випадок п'ятий.

Обмеження: E4 ≥ F4; E5 = F5; E6 ≤ F6

1,218	4,1782			
			3,2079	
3	2		12,01	7
10	-1		8	8
-18	4		-5,208	12

У цьому випадку $F_5 = 3{,}208$, $X_5 = \{1{,}218; 4{,}178\}$.

Після цього серед значень $F_1 - F_5$ вибираємо найбільше і найменше.

Відповідь : $F_{\max} = 65$ *при* $x_1 = 2,\ x_1 = 12$

$F_{\min} = 3{,}208$ *при* $x_1 = 1{,}218,\ x_2 = 4{,}178.$

Література:

1. Ермольев Ю.М. и др. Математические методы исследования операций. – М.: Высшая школа, 1998.
2. Калихман И.Л. Линейная алгебра и математическое программирование - М.: Высшая школа, 1967.
3. Карпелевич Ф.М., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука, 1967.
4. Кузнецов Ю.Н., Козубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.
5. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
6. Новіков В.В., Яценко С.А. Лінійне і нелінійне програмування.: Навч. посібник /МВО Укр.–К.: НМК ВО, 1992.
7. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. – М.: Статистика, 1972.
8. Балашевич В.А. Основы математического программирования. – Мн: Высш. шк., 1985.
9. Кігель В.Г. Елементи лінійного, цілочисельного лінійного і нелінійного програмування: Навч. пос. –К.: ІСДО, 1995.
10. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування.: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001.
11. Мину Мишель. Математическое программирование: Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990.
12. Новіков В.В., Яценко С.А. Лінійне і нелінійне програмування.: Навч. посібник / МВО України. –К.: НМК ВО, 1992.
13. Худли Дж.Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир, 1967.
14. Линейное и нелинейное программирование. – Киев: Вища школа, 1975.
15. Карандаев И.С. Решение двойственных задач в оптимальном планировании. – М.: Статистика, 1976.
16. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969.

Навчальне видання

Ірина Володимирівна Хом'юк
Віктор Вікторович Хом'юк
Володимир Леонідович Карпенко

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ЧАСТИНА II

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Хом'юк І.В.

Редактор В.О. Дружиніна
Коректор З.В. Поліщук

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 14.05.05 р.
Формат 29,7×42 1/4
Друк різографічний
Тираж 100 прим.
Зам. № 2005-079

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 6.75

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ