І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк, В. О. Краєвський

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк, В. О. Краєвський

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей та форм навчання. Протокол № 10 від 27 березня 2008р.

Вінниця ВНТУ 2009

УДК 517.3 (075)
Х 76

Рецензенти:

І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор
В. І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
Д. А. Найко, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Хом'юк І. В., Хом'юк В. В., Краєвський В. О.
Х 76 **Теорія ймовірностей та математична статистика.** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 189 с.

У навчальному посібнику подано теоретичні відомості з тем теорії ймовірностей з елементами математичної статистики у вигляді означень, теорем, властивостей. Розглянуті розв'язування прикладів з кожної теми, надається 30 варіантів завдань для типових розрахунків з кожної теми та завдання для студентів заочної форми навчання.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 517.3 (075)

© Хом'юк І. В., Хом'юк В. В., Краєвський В. О. 2009

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета даного посібника полягає у викладанні основ теорії ймовірностей – математичної науки, яка вивчає закономірності випадкових явищ. Під час вивчення курсу «Теорія ймовірностей з елементами математичної статистики» мета якого формування базових знань з основ застосування ймовірнісно-статистичного апарата для розв'язування теоретичних і практичних задач, як і під час вивчення курсу вищої математики, найбільшу трудність викликає застосування теорії до розв'язування практичних задач. Саме тому даний навчальний посібник розрахований надати допомогу в оволодінні методикою розв'язування задач з теорії ймовірності і в використанні методів теорії ймовірностей та математичної статистики до розв'язування практичних задач.

Даний посібник написаний на основі досвіду викладення теорії ймовірностей у вищому технічному навчальному закладі, а також досвіду використання ймовірностних методів для розв'язування практичних задач.

Посібник складається із 4 розділів. У теоретичній частині подані основні формули, теореми, означення, які підкріплюються різними прикладами. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим курсом лекцій.

Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 30 варіантів для типових розрахунків з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Якщо в групі більше студентів і викладач бажає видати всім різні варіанти, це можна зробити використовуючи літери прізвища, які відповідають алфавіту, поділеному на частини з номерами від 1 до 30 або скорелювати набір випадкових чисел. Наприклад, Іванов – 2, 8, 6, 5, 1, 4, 3; Петров – 30, 1, 8, 6, 25, 4, 17 і т. д. У даному посібнику наведені також завдання для виконання яких передбачають застосування інформаційних технологій.

У посібнику вміщено значну кількість докладних розв'язань прикладів, що дає змогу використовувати їх для самостійного вивчення теорії ймовірностей, зокрема студентами-заочниками, крім того розроблені завдання для контрольної роботи заочної форми навчання.

В кінці підручника наведені таблиці, які слід використовувати під час розв'язування задач.

Навчальний посібник можна використовувати як для підготовки до колоквіумів, практичних занять з поданих тем, так і для типових розрахунків, контрольних домашніх робіт. Даний посібник можна розглядати як дистанційний курс навчання з даної дисципліни.

1 ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей

1.1.1 Предмет теорії ймовірностей

Виникнення теорії ймовірностей як науки відноситься до середини XVII ст. і пов'язана з іменами Паскаля (1623 – 1662), Ферма (1601 –1665), Гюйгенса (1629 – 1695). Хоча окремі задачі, що стосувалися підрахунку шансів у азартних іграх, розглядалися раніше – в XV-XVI ст. італьянськими математиками (Кардано, Пачолі, Тарталья та ін.), перші загальні методи розв'язування таких задач були в знаменитій переписці між Паскалем і Ферма, яка розпочалася в 1654 р., та в першій книзі з теорії ймовірностей «De Ratiociniis in Aleae Ludo» («О расчетах в азартной игре»), яка була опублікована Гюйгенсом в 1657 р. Істинна теорія ймовірностей починається з роботи Я. Бернуллі (1654 – 1705) «Ars Conjectandi» («Искусство предположения»), яка опублікована в 1713 р., в ній була доведена перша гранична теорема теорії ймовірностей – «закон великих чисел», і роботи Муавра (1667 – 1754). Якобу Бернуллі належить заслуга введення в науку «класичного» означення «ймовірність події», саме він перший розрізняв поняття «ймовірність» події та «частота» її появи. Муавр визначив такі поняття, як «незалежність», «математичне сподівання», «умовна ймовірність». У 1812 р. вийшов великий трактат Лапласа (1749 – 1827) «Аналітична теорія ймовірностей», в якому він виклав свої власні результати в області теорії ймовірностей, а також результати своїх попередників. Перший підручник з теорії ймовірності був написаний математиком Віктором Яковичем Буняковським у XIX ст. (родом з Бара).

Теорія ймовірностей вивчає математичні моделі експериментів з випадковими результатами (наслідками). Будь-який результат інтерпретується як випадкова подія, яка може відбутися або не відбутися в результаті експерименту. Випадкові події можна порівнювати між собою за певною мірою можливості їх появи. Ймовірністю випадкової події і називають деяку чисельну міру об'єктивної можливості появи випадкової події.

1.1.2 Елементи комбінаторики

Комбінаторика – розділ математики, присвячений розв'язанню задач вибору і розміщення елементів деякої скінченної множини згідно з певним правилом. Найпростішими комбінаціями елементів є розміщення, перестановки і сполучення.

Нехай $M^{(n)} = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ – довільна n-елементна множина.

Означення 1. Упорядкована k-елементна підмножина множини $M^{(n)}$ називається розміщенням з n елементів по k. Число всіх таких розміщень A_n^k обчислюють за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1), \quad 0! = 1. \tag{1.1}$$

Означення 2. При $k = n$ розміщення є перестановкою елементів множини $M^{(n)}$, причому їх число дорівнює

$$P_n = A_n^n = n! \tag{1.2}$$

Розміщення вважають різними, якщо вони відрізняються складом елементів або порядком їх розташування.

Означення 3. Будь-яка невпорядкована k-елементна підмножина множини $M^{(n)}$ називається сполученням з n елементів по k. Число різних таких сполучень позначається символом C_n^k і виражається формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \tag{1.3}$$

Сполучення вважаються різними, якщо вони відрізняються складом елементів.

Приклад 1. Нехай маємо множину $M = \{1,2,3\}$. Розміщенням по два елементи є (1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1) і (3,2), а їх число $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Перестановками елементів множини М є (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (3,1,2), (2,3,1) і (3,2,1), а їх число $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Сполученнями по два елементи є (1,2), (1,3), (2,3), а їх число $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$.

Будь-який набір з k елементів множини $M^{(n)}$ назвемо вибіркою (рядком) довжиною k. Вибірка є впорядкованою, а її компоненти можуть повторюватися.

Означення 4. Розміщенням з повторенням з n елементів по k називається будь-яка вибірка довжиною k, утворена з елементів множини $M^{(n)}$. Два розміщення з повторенням вважаються різними, якщо принаймні на одному місці вони мають різні елементи. Число різних розміщень з повтореннями з n елементів по k обчислюють за формулою

$$\overline{A_n^k} = n^k \qquad (1.4)$$

Для множини $M = \{1,2,3\}$ число розміщень з повтореннями по 2 елементи є $\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$. До розглянутих вище розміщень (без повторень) слід додати ще такі: (1,1), (2,2) і (3,3).

Означення 5. Будь-яка невпорядкована вибірка довжиною k, утворена з елементів множини $M^{(n)}$, називається сполученням з повторенням з n елементів по k. Два сполучення з повтореннями вважаються різними, якщо принаймні для одного номера i $(1 \le i \le n)$ в одному з цих сполучень елемент x_i повторюється більше число разів, ніж в іншому. Число різних сполучень з повтореннями з n елементів по k визначається за формулою

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (1.5)$$

Для множини $M = \{1,2,3\}$ сполученнями з повтореннями по 2 елементи будуть такі: (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,3), а їх число $\overline{C_3^2} = C_4^2 = 6$.

Означення 5. Перестановками з повторенням заданого складу $(k_1, k_2, ..., k_n)$ із елементів даної множини $M^{(n)}$ називається довільна впорядкована вибірка об'єму $m = k_1 + k_2 + ... + k_n$, складена із елементів цієї множини так, що елемент x_1 повторюється k_1 разів, x_2 повторюється k_2 разів і т.д., елемент x_n повторюється k_n разів. Число всіх різних перестановок з повтореннями вказаного складу $(k_1, k_2, ..., k_n)$ позначається символом $P_m\,(k_1, k_2, ..., k_n)$ і визначається за формулою

$$P_m\,(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{m!}{k_1! k_2! ... k_n!}. \quad (1.6)$$

Основні властивості розміщень і сполучень

$$\text{а) } A_n^0 = A_0^0 = 1, \;\; \text{б) } C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}, \;\; \text{в) } C_n^k = C_n^{n-k}, \;\; \text{г) } C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k, \quad k < n. \quad (1.7)$$

Правило добутку. Якщо об'єкт А можна вибрати k способами і після кожного з цих виборів об'єкт В, в свою чергу, можна вибрати l способами, то вибір А і В можна здійснити kl способами.

Приклад 2. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох чоловік для чергування, якщо: а) один з них має бути старшим; б) старшого не повинно бути?

Розв'язування:

а) оскільки роль чергуючих різна, то кількість способів виділення двох чергових дорівнює числу розміщень з 30 елементів по 2, тобто $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$;

б) у даному випадку маємо число сполучень з 30 елементів по 2: $C_{30}^2 = 435$.

Приклад 3. На полиці розміщено 7 книг різних авторів і тритомник одного автора. Скількома способами можна розставити ці книги на полиці так, щоб книги одного автора стояли поруч?

Розв'язування

Уявимо собі три книги одного автора як одну книгу. Тоді отримуємо 8 книг, які можна розставити на полиці P_8 способами. Враховуючи при цьому, що 3 книги одного автора можна переставляти одну з одною P_3 способами і, враховуючи правило добутку, знаходимо загальне число всіх способів розстановки книг на полиці при вказаній умові: $P_3 \cdot P_8 = 3! \cdot 8! = 241920$.

1.1.3 Алгебра подій

Випробуванням називається експеримент, який можна проводити в однакових умовах (принаймні теоретично) будь-яке число разів. Найпростіший результат випробування називається **елементарною подією** або наслідком і позначається ω. При випробуванні обов'язково настає лише один наслідок. Множина всіх можливих наслідків випробування називається основним простором або **простором елементарних подій** і позначається Ω. **Випадковою подією** (подією) називається будь-яка підмножина A простору Ω, тобто будь-яка множина наслідків. Наслідки, які утворюють подію A, називають **сприятливими** для A ($\omega \in$ A). Подія A настає тоді і тільки тоді, коли настає елементарна подія (наслідок), сприятлива для A. Порожня множина $\varnothing$ і сама множина Ω, розглядувані як підмножини основного простору, називають відповідно **неможливою і вірогідною** подіями.

Оскільки подію ми визначаємо як множину елементарних подій, то над подіями можна проводити такі ж операції, як і над множинами.

Сумою подій A і B називається така подія C, яка настає тоді, коли настає принаймні одна з подій A або B, і позначається C = A+B або C = A$\cup$B.

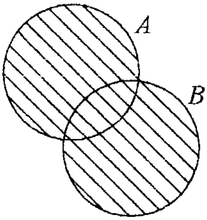
Добутком (суміщенням) подій A і B називається така подія C, яка настає тоді й тільки тоді, коли настають обидві події A і B, і позначається C = AB або A$\cap$B.

Різницею подій A і B є подія C = A – B (C = A\B), яка полягає в тому, що A відбувається, а B не відбувається.

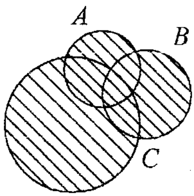
Подія $\overline{A} = \Omega - A$ називається **протилежною** події А (доповненням множини А до Ω). Ця подія полягає в тому, що А не відбувається. Очевидно, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$.

Події А і В називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої, тобто $AB = \varnothing$.

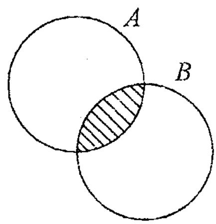
Події A_i $(i = \overline{1,n})$ утворюють **повну групу**, якщо в результаті випробування обов'язково настане принаймні одна з них, тобто $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.



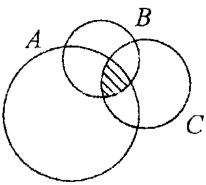
$A \cup B$



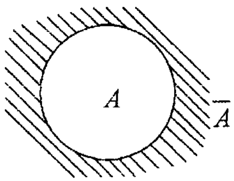
$A \cup B \cup C$

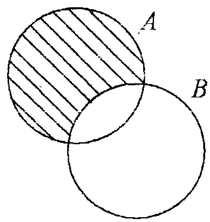


$A \cap B$



$A \cap B \cap C$





$A \setminus B$

Приклад 1. Дослід полягає у підкиданні трьох монет. Нехай монети занумеровано і події O_1, O_2, O_3 означають випадання орла відповідно на першій, другій і третій монетах. Виразити через ці події такі події: А – випадання одного орла і двох решок, В – випадання не більше одного орла, С – число випадань орлів менше за число решок, D – випадання принаймні двох орлів.

Розв'язування

Подія А відбудеться, якщо настане принаймні одна з подій $O_1\overline{O_2 O_3}$ (випадання орла на першій монеті і решок на другій і третій) або $O_2\overline{O_3 O_1}$ або $O_3\overline{O_2 O_1}$. Отже, А є сумою цих трьох подій: А = $O_1\overline{O_2 O_3} + O_2\overline{O_3 O_1} +$ $+ O_3\overline{O_2 O_1}$. Подія В означає, що випаде решка на всіх трьох монетах або випаде один орел (на першій, другій або третій монетах). Отже, В = $O_1\overline{O_2 O_3} +$ $+ O_2\overline{O_3 O_1} + O_3\overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 O_2 O_3}$. Очевидно, С = В. Подія D полягає в тому, що випаде або два, або три орли. Це означає, що обов'язково відбудеться одна з подій $O_1 O_2\overline{O_3}$ або $O_1\overline{O_2}O_3$, або $\overline{O_1}O_2 O_3$, або $O_1 O_2 O_3$. Отже, D = $O_1 O_2\overline{O_3} +$ $+ O_1\overline{O_2}O_3 + \overline{O_1}O_2 O_3 + O_1 O_2 O_3$.

1.1.4 Аксіоматичне та класичне означення ймовірностей

Означення 1. Імовірністю Р(А) події А називається числова функція, яка визначається на множині подій і задовольняє такі три умови (аксіоми ймовірності):

а) для довільної події $A \subset \Omega$ справедлива нерівність $P(A) \geq 0$;

б) $P(\Omega)=1$ (ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці);

в) ймовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k)$ (**аксіоматичне означення ймовірності**).

Оскільки $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\omega_k)$, то ймовірність подій А дорівнює сумі ймовірностей всіх елементарних подій ω_k, які входять до множини А, то в механічній інтерпретації ймовірність Р(А) вказує на те, яка частка всієї ймовірності, розподіленої на множині Ω всіх елементарних подій, припадає на множину А, так само як число $P(\omega_k)$ вказує, яка частка всієї одиничної ймовірності припадає на елемент ω_k.

Будь-яке випробування, при якому простір елементарних подій Ω є скінченною множиною **рівноймовірних наслідків** (тобто

$P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$), називається **класичною схемою або схемою урн.** У цьому випадку ймовірність будь-якої події $A \subset \Omega$ визначається так:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n}, \tag{1.8}$$

де $N(A) = m$ – число елементів множини A (число наслідків, які сприяють події A);

$N(\Omega) = n$ –число елементів множини Ω (число всіх наслідків випробування) **(класичне означення ймовірності)**.

Неважко перевірити, що так визначена функція P(A) має властивості:

$0 \le P(A) \le 1$, $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A+B) = P(A) + P(B)$, якщо $AB = \varnothing$.

Класичне означення ймовірності передбачає, що: 1) число елементарних наслідків скінченне; 2) ці наслідки рівноможливі (рівноймовірні). Це звужує його застосування.

Нехай при n-разовому здійсненні досліду подія A відбулася k разів. Тоді відношення $\frac{k}{n} = W_n$ називається **частотою випадкової події**, а границя $\lim\limits_{n \to \infty} W_n = P(A)$ – **ймовірністю** цієї події **(статистичне означення ймовірності)**.

Приклад 1. З десяти білетів книжкової лотереї виграшними є два. Навмання купують 5 білетів. Визначити ймовірність того, що серед них: а) один виграшний (подія A); б) два виграшних (подія B);

Розв'язування

Число всіх можливих способів взяти 5 білетів із 10 дорівнює $n = N(\Omega) = C_{10}^5$. Сприятливими для події A є випадки, коли із загальної кількості виграшних білетів (2) взято 1 (це можна зробити C_2^1 способами), а останні 5-1=4 білети взято невиграшні, тобто їх взято із загальної кількості

10 – 2 =8 невиграшних білетів (число таких способів дорівнює C_8^4). Тому за правилом добутку $m = N(A) = C_2^1 \cdot C_8^4$. Отже, шукана ймовірність $P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_8^4}{C_{10}^5} = \frac{5}{9}$.

Аналогічно попередньому $P(B) = \frac{C_2^2 \cdot C_8^3}{C_{10}^5} = \frac{2}{9}$.

Приклад 2. У лотереї 2000 білетів. На один з білетів припадає виграш 100 грн, на 4 – по 50 грн, на 20 – по 20 грн, на 55 – по 10 грн, на 150 – по 5 грн, на 500 – по 1грн. Решта білетів невиграшні. Навмання вибирається один білет. Яка ймовірність виграти не менше 5 грн?

Розв'язування

Маємо $n = 2000$, $m = 1 + 4 + 20 + 55 + 150 = 230$.

Тоді $P = \frac{230}{2000} = 0{,}115$.

1.1.5 Геометричні ймовірності

Класичне означення ймовірності передбачає, що число випробувань n скінченне. Коли воно нескінченне, то це означення використовувати не можна. В таких випадках користуються іншими підходами, наприклад, вводячи геометричну ймовірність.

Розглянемо довільний відрізок АВ, на ньому виберемо інший довільний відрізок СК. А_______С_____К___________В. На відрізок навмання кинемо точку. Подія A – точка попала на відрізок СК. Тоді ймовірність $P(A) = \frac{|CK|}{|AB|}$.

Отже, ймовірність попадання точки на відрізок l (l складає частину відрізка L) пропорційна довжині цього відрізка і не залежить від його розміщення відносно відрізка L, визначають ймовірність попадання точки на відрізок l за формулою:

Р = довжина l / довжину L.

Візьмемо на площині довільну область Д і всередині неї область Ф. Ймовірність того, що довільно кинута точка попаде в площу Ф дорівнює:

$p(A) = S_Ф / S_Д$.

Приклад. Задача про зустріч.

Два студенти домовилися зустрітися між 15 і 16 годинами. За умови, що той хто прийде першим, чекає 15 хв після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбулася (подія А).

Розв'язування

Час чекання $\frac{1}{4}$ години. $|y-x| \le \frac{1}{4}$. Розкриваючи модуль отримаємо два випадки: а) $y-x \ge 0, y-x \le \frac{1}{4}$. Звідки $y \le \frac{1}{4} + x$;

б) $y-x \le 0, \quad -(y-x) \le \frac{1}{4}$. Звідки $y \ge x - \frac{1}{4}$.

$S_{кв} = 1 \cdot 1 = 1; \quad S_{фіг} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$. Тоді $P(A) = \frac{S_{фіг}}{S_{кв}} = \frac{7/16}{1} = \frac{7}{16}$.

1.1.6 Завдання для самоперевірки

Задача 1. Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Сумісні чи несумісні події A і B, якщо A – перший стрілець влучив у мішень, B – другий стрілець влучив у мішень.

Відповідь. Сумісні.

Задача 2. Перевірити, чи утворюють повну групу такі події:

а) A – випадання не менше трьох очок, B – випадання не більше трьох очок у випробуванні – підкиданні грального кубика;

б) A – один промах, B – два влучення у випробуванні – стрільба в ціль двома пострілами.

Чи є протилежними події A і B у кожному з цих випробуваннях.

Відповідь. У всіх випадках події не утворюють повної групи нодій і не є протилежними.

Задача 3. Студент на екзамені відповідає на білет, у якому три питання. Нехай A_i – студент відповів на i-те питання. Виразити через A_i такі події:

A – студент відповів принаймні на два питання,

B – студент не відповів на жодне питання,

C – студент відповів тільки на одне питання.

Відповідь. $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$, $B = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$, $C = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$.

Задача 4. У студентську раду інституту обрано 8 студентів. Скількома способами можна обрати керівну групу у складі голови, заступника та секретаря?

Відповідь. 336 способів.

Задача 5. У деканаті знаходиться 10 студентських книжок. Шестеро студентів, які зайшли до деканату, навмання беруть по одній студентській книжці. Яка ймовірність того, що:

а) усі студенти взяли свої студентські книжки;

б) 4 студенти взяли свої студентські книжки?

Відповідь. а) $P = \frac{1}{148200}$; б) $P = \frac{5}{2016} \approx 0,0025$.

Задача 6. На дев'яти картках написано літери «м», «с», «к», «н», «е», «о», «і», «т»,»о». Знайти ймовірність того, що, навмання викладаючи ці картки, ви отримаєте слово «економіст».

Відповідь. $P = \frac{1}{181440}$.

1.2 Теореми додавання і множення ймовірностей

1.2.1 Теорема додавання для несумісних подій

Теорема. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.9}$$

Доведення: Нехай можливі наслідки експерименту зводяться до сукупності випадків, які ми для наочності зобразимо у вигляді n точок:

$$\underbrace{\overbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}^{m\sim A}\cdots\overbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}^{k\sim B}\cdots\cdots}_{n}$$

Припустимо, що із цих випадків m сприятливих для події A, а k – події B. Тоді $P(A)=\dfrac{m}{n}$; $P(B)=\dfrac{k}{n}$. Оскільки події A і B несумісні, то немає таких випадків, які б були сприятливими для A і B разом. Відповідно, для події $A+B$ сприятливі $m+k$ випадків і $P(A+B)=\dfrac{m+k}{n}$.

Підставляючи отриманий вираз у формулу (1.9), отримаємо тотожність. Теорема доведена.

Очевидно, методом повної індукції можна узагальнити теорему додавання для довільного числа несумісних подій. Припустимо, що вона справедлива для n подій: $A_1, A_2, \dots, A_n$, і доведемо, що вона буде справедлива для $n+1$ подій: $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$. Позначимо: $A_1 + A_2 + \dots + A_n = C$.

Тоді маємо: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + A_{n+1}) = P(C + A_{n+1}) = P(C) + P(A_{n+1})$. Але оскільки для n подій ми вважаємо теорему вже доведеною, то $P(C) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Звідки $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1})$, що й потрібно було довести.

Із даної теореми випливають такі наслідки.

Наслідок 1. Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці: $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Доведення. Оскільки події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу, то поява хоча б однієї з них – достовірна подія: $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1$. Оскільки $A_1, A_2, ..., A_n$ – несумісні події, то до них можна застосувати теорему додавання ймовірностей $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. Звідки $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, що й треба було довести.

Означення 1. Протилежними подіями називаються дві несумісні події, що утворюють повну групу.

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Цей наслідок є частинним випадком наслідку 1.

Приклад 1. Кругова мішень складається із трьох зон: I, II, III. Ймовірність влучення в першу зону при одному пострілі 0,15, в другу – 0,23, в третю – 0,17. Знайти ймовірність промаху.

Розв'язування

Позначимо A – промах, $\overline{A}$ – попадання. Тоді $\overline{A} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$, де $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – попадання відповідно в першу, другу і третю зони $P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) + P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_3}) = 0,15 + 0,23 + 0,17 = 0,55$.

Звідки $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0,45$.

Означення 2. Ймовірність події A, обчислена при умові, що мала місце інша подія B, називається умовною ймовірністю події A і позначається $P(A/B)$.

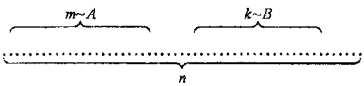
Означення 3. Подія A називається залежною від події B, якщо ймовірність події A змінюється в залежності від того, відбулася подія B чи ні. Події A і B називаються незалежними, якщо поява однієї з них не зумовлена появою іншої.

1.2.2 Теорема множення ймовірностей

Теорема. Ймовірність добутку двох довільних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій і умовної ймовірності другої за умови, що перша подія відбулася, тобто:

$$P(AB) = P(A)P(B/A). \qquad (1.10)$$

Доведення: Доведемо теорему множення для схеми випадків. Нехай можливі наслідки експерименту зводяться до сукупності випадків, які ми для наочності зобразимо у вигляді n точок:



Припустимо, що із цих випадків m сприятливих для події A, а k – для події B. Оскільки ми не припускали, що події A і B несумісні, то існують випадки, сприятливі для подій A і B одночасно. Нехай число таких випадків дорівнює l. Тоді $P(AB) = \frac{l}{n}$; $P(A) = \frac{m}{n}$. Обчислимо $P(A/B)$, тобто умовну ймовірність події B, в припущенні, що A мала місце. Якщо відомо, що подія A відбулася, то із раніше можливих n випадків залишаються можливими тільки ті m, які сприяли події A. Із них l випадків сприятливих для події B. Таким чином, $P(B/A) = \frac{l}{m}$. Підставляючи вирази $P(AB), P(A), P(B/A)$ у формулу (1.10), отримаємо тотожність. Теорема доведена.

Наслідок 1. Якщо подія A не залежить від події B, то і подія B не залежить від події A.

Наслідок 2. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Приклад 1. В урні 2 білих і 3 чорних кульки. Із урни виймають підряд дві кульки. Знайти ймовірність того, що обидві кульки білі.

Розв'язування

Позначимо через A – появу двох білих кульок. Подія A являє собою добуток двох подій: $A = A_1A_2$, де A_1 – поява білої кульки при першому вийманні, A_2 – поява білої кульки при другому вийманні. За теоремою множення ймовірностей маємо: $P(A) = P(A_1)P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$.

1.2.3 Ймовірність появи лише однієї події

Нехай A_1, A_2, A_3 – незалежні події, причому $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_3) = p_3$. Тоді відповідно $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – протилежні їм події, що мають ймовірність: $P(\overline{A_1}) = q_1 = 1 - p_1$, $P(\overline{A_2}) = q_2 = 1 - p_2$, $P(\overline{A_3}) = q_3 = 1 - p_3$. Подія $A = A_1\overline{A_2\,A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + A_3\overline{A_1\,A_2}$. Тоді шукана ймовірність дорівнює:

$$P(A) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + p_3q_1q_2. \tag{1.11}$$

Приклад 1. Ймовірність влучення першого стрілка в ціль 0,7, другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що в ціль влучить лише один стрілок.

Розв'язування

За умовою маємо:

$p_1 = 0{,}7,\ p_2 = 0{,}9$. Тоді $q_1 = 0{,}3,\ q_2 = 0{,}1$. Таким чином, за наведеною вище формулою шукана ймовірність дорівнює

$P(A) = p_1q_2 + q_1p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}34.$

1.2.4 Ймовірність появи хоча б однієї події

Нехай в результаті випробування може з'явитися одна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Ймовірності цих подій позначимо відповідно через $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Тоді подія A – з'явиться хоча б одна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$. Розглянемо протилежні події $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k}$, ймовірності протилежних подій: $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Тоді подія $\overline{A}$ – жодна з подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k}$ не з'явиться. $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_k}$. Ймовірність протилежної події обчислимо як $P(\overline{A}) = q_1 q_2 \ldots q_k$, а тоді ймовірність шуканої події дорівнює:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_k. \tag{1.12}$$

Якщо $q_1 = q_2 = \ldots = q_k$, то $P(A) = 1 - q^k$. (1.13)

1.2.5 Теорема додавання для сумісних подій

Розглянемо дві сумісні події A і B, з ймовірностями появи, відповідно $P(A) = p_1, P(B) = p_2$. Тоді подія $A + B$ означає появу хоча б однієї з цих подій. Знайдемо ймовірність цієї події:

$P(A + B) = 1 - q_1 q_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - 1 + p_2 + p_1 - p_1 p_2$. Отже,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.14}$$

Таким чином, ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку.

1.2.6 Формула повної ймовірності

Наслідком теорем додавання та множення ймовірностей є формула повної ймовірності.

Нехай потрібно визначити ймовірність деякої події A, яка може відбутися разом з однією із подій: $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу несумісних подій. Ці події будемо називати **гіпотезами.** Доведемо, що в цьому випадку

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i). \tag{1.15}$$

Ця формула носить назву формули повної ймовірності.

Доведемо її.

Оскільки гіпотези $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу, то подія A може з'явитися тільки в комбінації з будь-якою із цих гіпотез:

$$A = H_1A + H_2A + ... + H_nA$$

Оскільки гіпотези $H_1, H_2, ..., H_n$ несумісні, то і комбінації $H_1A, H_2A, ..., H_nA$ також несумісні; використовуючи до них теорему додавання, отримаємо:

$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + ... + P(H_nA) = \sum_{i=1}^{n} P(H_iA)$. Використовуючи до події H_iA теорему множення, отримаємо: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$, що й треба було довести.

Приклад 1. Є три однакові урни: в першій урні 2 білих і 1 чорна кулька; в другій – 3 білих і 1 чорна кулька; в третій – 2 білих і 2 чорних кульки. Дехто вибирає навмання одну із урн і виймає із неї кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька біла.

Розв'язування

Розглянемо три гіпотези: H_1 – вибір першої урни, H_2 – вибір другої урни, H_3 – вибір третьої урни і подія A – поява білої кульки.

Оскільки гіпотези, за умовою задачі, рівноможливі, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Умовні ймовірності події A при цих гіпотезах відповідно рівні: $P(A/H_1) = \frac{2}{3}$, $P(A/H_2) = \frac{3}{4}$, $P(A/H_3) = \frac{1}{2}$. Тоді за формулою повної ймовірності маємо: $P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{23}{36}$.

1.2.7 Формула Бейєса

Наслідком теореми множення і формули повної ймовірності є так звана теорема гіпотез або формула Бейєса.

Нехай є повна група несумісних гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$. Ймовірності цих гіпотез $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Виконується дослід в результаті якого спостерігається поява деякої події A. Знайти умовну ймовірність $P(H_i / A)$ для кожної гіпотези. За теоремою множення маємо:

$P(AH_i) = P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A / H_i) \quad (i = 1,2,...,n)$, або відкидаючи ліву частину, $P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A / H_i) \quad (i = 1,2,...,n)$, звідки

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)} \quad (i = 1,2,...,n).$$

Виражаючи $P(A)$ за допомогою формули повної ймовірності, маємо:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)} \quad (i = 1,2,...,n). \tag{1.16}$$

Формула (8) носить назву **формули Бейєса** або теореми гіпотез.

Для попереднього прикладу, наприклад,

$$P(H_1 / A) = \frac{(2/3) \cdot 1/3}{23/36} = \frac{2 \cdot 36}{9 \cdot 23} = \frac{8}{23}.$$

1.2.8 Завдання для самоперевірки

Задача 1. У першій урні міститься 7 білих і 3 чорних кульки; у другій – 5 білих і 5 чорних кульок; у третій – 4 білих і 6 чорних кульок. З кожної урни навмання виймають по одній кульці. Знайти ймовірність того, що серед вибраних кульок виявиться:

а) лише одна біла кулька; б) дві білі кульки; в) три білі кульки; г) хоча б одна біла кулька.

Відповідь. а) $P = 0{,}36$; б) $P = 0{,}41$; в) $P = 0{,}14$; г) $P = 0{,}91$.

Задача 2. Робітник обслуговує одночасно три верстати. Імовірність порушення роботи протягом години для першого верстата дорівнює 0,1, для другого – 0,15, для третього – 0,2. Яка ймовірність того, що:

а) усі три верстати працюватимуть протягом години; б) хоча б один із них вийде з ладу?

Відповідь. а) $P = 0,712$; б) $P = 0,329$.

Задача 3. Імовірність того, що під час роботи комп'ютера станеться збій в арифметичному пристрої, у оперативній пам'яті або в пристрої введення співвідносяться як 2:1:3. Імовірність віднайти збій у цих пристроях відповідно дорівнюють 0,9; 0,75; 0,7. Знайти ймовірність знаходження збою в роботі комп'ютера.

Відповідь. $P = 0,775$.

Задача 4. Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Імовірність зробити помилку для першого економіста дорівнює 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Під час перевірки навмання взятий із папки документ виявився з помилкою. Знайти ймовірність того, що його склав перший економіст.

Відповідь. $P = 0,25$.

1.3 Повторні випробування

1.3.1 Схема дослідів Бернуллі

Якщо проводиться декілька випробувань, причому ймовірність події А в кожному випробуванні не залежить від наслідків інших випробувань, то такі випробування називають незалежними відносно події А. У різних незалежних випробуваннях подія А може мати або різні ймовірності, або одну і ту ж ймовірність.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в яких ймовірність появи події A однакова і дорівнює p ($0<p<1$). Тоді ймовірність того, що при n випробуваннях подія A з'явиться рівно k разів (незалежно в якій послідовності) дорівнює

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{1.17}$$

де $q = 1 - p$.

Виведемо дану формулу. Ймовірність однієї складної події, яка полягає в тому, що в n незалежних випробуваннях подія А відбудеться k разів і не відбудеться $n-k$ разів, за теоремою множення ймовірностей незалежних подій, дорівнює $p^k q^{n-k}$. Таких складних подій може бути стільки, скільки можна скласти сполучень із n елементів по k елементів, тобто C_n^k. Оскільки ці складні події несумісні, то за теоремою додавання ймовірностей незалежних подій, шукана ймовірність дорівнює сумі ймовірностей всіх можливих складних подій. Оскільки ймовірності всіх цих складних подій однакові, то шукана ймовірність дорівнює ймовірності однієї складної події, помноженій на їх число, тобто: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, що і потрібно було довести.

Отриману формулу називають формулою Бернуллі.

Ймовірність того, що подія відбудеться: а) менше k разів; б) більше k разів; в) не менше k разів; г) не більше k разів – знаходять відповідно за формулами:

а) $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1)$, б) $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n)$,

в) $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$, г) $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$.

Приклад

Монета підкидається 5 разів. Знайти ймовірність, що 3 рази випаде герб.

Розв'язування

За умовою задачі маємо: $n = 5, k = 3, p = \frac{1}{2}, \quad q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Тоді $P_5(3) = C_5^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^{5-3} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

Примітка. Коли у формулі Бернуллі число n велике, то нею користуватися незручно.

1.3.2 Локальна теорема Лапласа

Використовувати формулу Бернуллі при великих значеннях n досить важко, оскільки формула потребує виконання дій над великими числами. Виникає питання, чи не можна обчислити шукану ймовірність не використовуючи формулу Бернуллі. Виявляється, можна. Локальна теорема Лапласа і дає асимптотичну формулу, яка дозволяє наближено знайти ймовірність появи події рівно k разів в n випробуваннях, якщо число випробувань достатньо велике. Замітимо, шо для частинного випадку, а саме для $p=\frac{1}{2}$, асимптотична формула була знайдена в 1730 р. Муавром; в 1783 р. Лаплас узагальнив формулу Муавра для довільного p, відмінного від 0 і 1. Тому теорему іноді називають теоремою Муавра-Лапласа.

Теорема. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність події A дорівнює p $(0<p<1)$, подія відбудеться рівно k разів (незалежно в якій послідовності), наближено дорівнює

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\phi(x), \qquad (1.18)$$

де $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\qquad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Таблиця функції $\phi(x)$ для додатних значень x наведена у збірниках задач з теорії ймовірності; для від'ємних значень x використовують цю ж саму таблицю, оскільки функція $\phi(x)$ парна ($\phi(-x)=\phi(x)$).

Приклад

Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,25.

Розв'язування

За умовою задачі маємо:

$n = 243, k = 70, p = 0,25, \quad q = 1 - 0,25 = 0,75$. Тоді

$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{9,25}{6,75} = 1,37$. За таблицею знаходимо

$\phi(1,37) = 0,1561$. Тоді шукана ймовірність дорівнює

$P_{243}(70) = \frac{1}{6,75} \cdot 0,1561 = 0,0231$.

1.3.3 Інтегральна теорема Лапласа

Теорема. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність події A дорівнює p ($0<p<1$), подія відбудеться не менше k_1 разів і не більше k_2 разів, наближено дорівнює

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (1.19)$$

де $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$

Лаплас розглянув непарну функцію $\Phi(x) = = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, яка отримала назву функції Лапласа. Таким чином,

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{x_1}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= -\Phi(x_1) + \Phi(x_2).$$

Враховуючи попередні перетворення інтегральна теорема Лапласа набере вигляду:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \qquad (1.20)$$

Примітка. Таблиця функції $\Phi(x)$ для додатних значень $x\,(0 \le x \le 5$ наведена у збірниках задач з теорії ймовірності; для значень $x>5$ приймають $\Phi(x)$=0,5; для від'ємних значень x використовують цю ж саму таблицю, враховуючи, що функція $\Phi(x)$ непарна ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Приклад

Ймовірність того, що деталь не пройшла перевірку ВТК дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей виявиться не перевіреними від 70 до 100 деталей.

Розв'язування

За умовою задачі маємо: $n = 400, p = 0{,}2, q = 0{,}8, \quad k_1 = 70, k_2 = 100$.
Знайдемо значення x_1 і x_2:

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 80}{\sqrt{64}} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}5;$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 80}{\sqrt{64}} = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4} = -1{,}25.$$

Тоді шукана ймовірність дорівнює

$$P_{400}(70;100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}4980 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

1.3.4 Найімовірніше число появи події в незалежних випробуваннях

Означення. Число k_0 (появи події в незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p) називають найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія відбудеться в цих випробовуваннях k_0 разів, перевищує (або, принаймні, не менше) ймовірності решти можливих наслідків випробувань.

Найімовірніше число k_0 визначається із подвійної нерівності

$$np - q \le k_0 < np + p, \qquad (1.21)$$

причому:

а) якщо число $np-q$ – дробове, то існує одне найімовірніше число k_0;

б) якщо число $np-q$ – ціле, то існують два найімовірніших числа, а саме: k_0 і k_0+1;

в) якщо число np – ціле, то найімовірніше число $k_0 = np$.

Приклад

Випробовується кожний із 15 елементів деякого пристрою. Ймовірність того, що елемент витримає випробовування, дорівнює 0,9. Знайти найімовірніше число елементів, які витримають випробовування.

Розв'язування

За умовою $n=15; p=0{,}9; q=0{,}1$.

Знайдемо найімовірніше число k_0 із подвійної нерівності: $np-q \le k_0 < np+p$.

Підставимо сюди дані задачі, отримаємо

$$15\cdot 0{,}9-0{,}1 \le k_0 < 15\cdot 0{,}9+0{,}9,$$

або $13{,}4 \le k_0 < 14{,}4$.

Оскільки k_0 – ціле число і між числами 13,4 і 14,4 міститься одне ціле число, а саме 14, то шукане найімовірніше число $k_0 = 14$.

1.3.5 Ймовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події А постійна і дорівнює $p(0<p<1)$.

Необхідно знайти ймовірність того, що відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від постійної ймовірності p за абсолютною величиною не перевищує заданого числа $\varepsilon > 0$. Тобто знайти ймовірність виконаня нерівності

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon. \qquad (1.22)$$

Цю ймовірність будемо позначати так: $P(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon)$. Замінимо нерівність (6) їй рівносильними:

$$-\varepsilon\le\frac{m}{n}-p\le\varepsilon,\ \text{або}\ -\varepsilon\le\frac{m-np}{n}\le\varepsilon.$$

Домножимо ці нерівності на додатний множник $\sqrt{\frac{n}{pq}}$, отримаємо нерівності рівносильні вихідній:

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Використаємо інтегральну теорему Лапласа, поклавши

$x'=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ і $x''=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, отримаємо:

$$P(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})=2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}).$$

Замінюючи нерівності, які знаходяться в дужках, рівносильною їм вихідною нерівностю, отримаємо кінцевий результат:

$$P(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon)\approx2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}). \qquad (1.23)$$

Приклад

Ймовірність того, що деталь нестандартна $p=0,1$. Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 400 деталей відносна частота появи нестандартних деталей відхилиться від ймовірності $p=0,1$ за абсолютною величиною не більше ніж на 0,03.

Розв'язування

За умовою задачі: $n=400$; $p=0,1$; $q=0,9$; $\varepsilon=0,03$.

Потрібно знайти ймовірність $P(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03)$. Використовуючи формулу $P(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le \varepsilon)\approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$, маємо:

$$P(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03)\approx 2\Phi(0{,}03\sqrt{\frac{400}{0{,}1\cdot 0{,}9}})=2\Phi(2).$$

За таблицею знаходимо $\Phi(2)=0{,}4772$. Відповідно, $2\Phi(2)=0{,}9544$. Отже, якщо досить велике число проб по 400 деталей в кожній, то приблизно в 95, 44% цих проб відхилення відносної частоти від постійної ймовірності $p=0{,}1$ за абсолютною величиною не перевищить 0,03.

1.3.6 Завдання для самоперевірки

Задача 1. Оглядову лекцію мають прослухати 100 студентів. Імовірність бути присутнім на цій лекції для кожного студента дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що на лекцію прийде більше половини студентів.

Відповідь. $P_{100}(m>50)\approx 0{,}99998$.

Задача 2. У магазин зайшло вісім покупців. Імовірність того, що будь-який з них не вийде з магазину без покупки, дорівнює 0,4:

а) знайти ймовірність того, що троє з них щось куплять;

б) яка ймовірність того, що жоден з них нічого не купить?

Відповідь. а) $P_8(3)\approx 0{,}2787$; б) $P_8(0)\approx 0{,}0168$.

Задача 3. У процесі виробництва ймовірність дефектів у кожній партії продукції становить 0,1. Яка ймовірність того, що з десяти партій дефекти матимуть менше двох партій?

Відповідь. $P_{10}(m<2)\approx 0{,}7361$.

Задача 4. В одержаній партії текстильних виробів 0,6% браку. Яка ймовірність при випадковому відборі 1000 виробів виявити:

а) шість бракованих виробів;

б) хоча б один бракований виріб?

Відповідь. а) $P_{1000}(6) \approx 0,1606$; б) $P_{1000}(m \geq 1) \approx 0,9975$.

Задача 5. Припустимо, що ймовірності народитися у будь-який з днів року однакові. Знайти ймовірність того, що серед 500 учнів школи:

а) троє народилися 8-го березня;

б) жоден не народився 1-го січня.

Відповідь. а) $P_{500}(3) \approx 0,1089$; б) $P_{500}(0) \approx 0,2541$.

Задача 6. Імовірність вчасної реалізації зі складу однієї пари взуття дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що вчасно буде реалізовано не менше 75 пар, якщо на склад завезено 100 пар взуття. Знайти найімовірнішу кількість вчасно реалізованих пар взуття.

Відповідь. а) $P_{1000}(m \geq 75) \approx 0,8943$; $m_0 = 80$. б) $P_{1000}(m \geq 1) \approx 0,9975$.

1.4 Випадкові величини

Означення 1. Випадковою називається величина, яка в результаті випробування приймає певне значення, яке наперед передбачити неможливо.

Приклад. Число дівчаток серед ста новонароджених є випадкова величина, яка має такі можливі значення: 0, 1, 2, …, 100.

Означення 2. Випадкові величини, називаються дискретними, якщо вони приймають окремі ізольовані значення з певними ймовірностями. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або нескінченним.

Означення 3. Випадкова величина називається неперервною, якщо вона приймає всі значення з деякого проміжку (скінченного або нескінченного). Очевидно, число можливих значень неперервної випадкової величини – нескінченне.

Означення 4. Законом розподілу дискретної випадкової величини називається правило, яке встановлює відповідність між значеннями цієї величини та їх ймовірностями.

Випадкові величини позначаються великими літерами, а їх значення – малими.

Закон розподілу може задаватися таблично, аналітично і графічно.

X	x_1	x_2	....	x_i	....	....	x_n
p	p_1	p_2	....	p_i	....	....	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Для наочності закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно, для цього в прямокутній системі координат будують точки (x_i, p_i), а потім з'єднують їх відрізками прямих. Отриману фігуру називають многокутником розподілу.

1.4.1 Біноміальний розподіл

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може з'явитися або не з'явитися. Ймовірність появи події в усіх випробовуваннях постійна і дорівнює p (відповідно, ймовірність непояви $q = 1 - p$). Розглянемо як дискретну випадкову величину X число появи події A в цих випробуваннях.

Означення 1. Закон розподілу ймовірностей, який встановлюється за допомогою формули Бернуллі, називається біноміальним законом $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Запишемо біноміальний закон у вигляді таблиці:

X	0	1	....	n
p	$C_n^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	....	p^n

Приклад

З гармати по цілі зроблено 3 постріли, ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,7. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа влучень в ціль.

Розв'язування

X	0	1	2	3
p	0,027	0,189	0,441	0,343

$P_3(0)=C_3^0(0,7)^0(0,3)^3=0,027$

$P_3(1)=C_3^1(0,7)^1(0,3)^2=\frac{3!}{1!2!}\cdot 0,7\cdot 0,09=$
$=0,189$

$P_3(2)=C_3^2(0,7)^2(0,3)^1=3\cdot 0,49\cdot 0,3=0,441$

$P_3(3)=C_3^3(0,7)^3(0,3)^0=0,49\cdot 0,7=0,343$

Контроль:0,027+0,189+0,441+0,343=1,000.

1.4.2 Розподіл Пуассона

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному із яких ймовірність появи події A дорівнює p. Для визначення ймовірності k появ події в цих випробуваннях використовують формулу Бернуллі. Якщо ж n велике, то використовують асимптотичну формулу Лапласа. Однак ця формула непридатна, якщо ймовірність події мала $(p \le 0,1)$. У випадку, коли n дуже велике, а p мале, локальна теорема Лапласа дає велику похибку. Саме тому в даному випадку користуються асимптотичною формулою Пуассона

$$P_n(k)=\frac{(np)^k e^{-np}}{k!}, \tag{1.24}$$

де $\lambda = np$.

Закон ймовірностей, який визначається формулою Пуассона має назву розподілу Пуассона.

Приклад 1

Завод відправив на базу 5000 деталей. Ймовірність того, що при транспортуванні деталь зіпсується, дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде три пошкоджених деталі.

Розв'язування

За умовою $n=5000$, $p=0,0002$, $k=3$.

Знайдемо λ: $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$. Тоді ймовірність за формулою Пуассона наближено дорівнює: $P_{5000}(3) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \dfrac{e^{-1}}{3!} = \dfrac{1}{6e} \approx 0{,}06$.

Означення 1. Потоком подій називають послідовність подій, які відбуваються в довільні моменти часу.

Прикладами потоків можуть бути: надходження викликів на АТС, на пункт швидкої допомоги, прибуття літаків в аеропорт та ін.

Означення 2. Інтенсивністю потоку λ називають середнє число подій, які відбуваються за одиницю часу.

Якщо постійна інтенсивність потоку відома, то ймовірність появи k подій простішого потоку за час t визначається формулою Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \qquad (1.24)$$

Приклад 2

Середнє число викликів, які надійшли на АТС за одну хвилину, дорівнює двом. Знайти ймовірність того, що за 5 хвилин надійде: а) 2 виклика; б) менше двох викликів.

Розв'язування

За умовою задачі $\lambda = 2, t = 5, k = 2$. Використаємо формулу Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

1. Шукана ймовірність того, що за 5 хвилин надійде 2 виклика

$$P_5(2) = \frac{10^2 \cdot e^{-10}}{2!} = \frac{100 \cdot 0{,}000045}{2} = 0{,}000025.$$

Ця подія практично неможлива.

2. Шукана ймовірність того, що за 5 хвилин надійде менше двох викликів, за теоремою додавання

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + \frac{10 \cdot e^{-10}}{1!} = 0{,}000495.$$

Ця подія практично неможлива.

1.4.3 Геометричний розподіл

Нехай проводиться скільки завгодно випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A однакова і дорівнює p. Тоді ймовірність того, що подія A вперше з'явиться під час k випробувань дорівнює

$$P(x) = q^{k-1} p, \tag{1.25}$$

де $q = 1 - p$.

Якщо $k = 1,2,3 - p, qp, q^2 p, q^3 p$ – геометрична прогресія.

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Приклад

Монету підкинули декілька разів. Знайти ймовірність появи герба на третьому кидку.

Розв'язування

За умовою $k = 3$, $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$.

Використовуючи геометричний розподіл: $q^{k-1} p = (\frac{1}{2})^2 \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

1.5 Дискретні випадкові величини. Їх числові характеристики

Дискретна випадкова величина повністю визначається її законом розподілу. Але в деяких випадках потрібно випадкову величину оцінити в цілому, навіть не знаючи її закону розподілу. Для цього в розгляд ввели так звані числові характеристики випадкової величини. Розглянемо 3 такі характеристики: 1) математичне сподівання; 2) дисперсія; 3) середнє квадратичне відхилення.

1.5.1 Математичне сподівання та його властивості

Означення. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх її значень на їх ймовірності.

X	x_1	x_2	....	x_i	....	....	x_n
p	p_1	p_2	....	p_i	....	....	p_n

$M(X)$ - математичне сподівання

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_i p_i + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (1.26)$$

Приклад 1

Знайти математичне сподівання випадкової величини X заданої законом розподілу:

X	1	2	4
p	0,4	0,2	0,4

Розв'язування

$M(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,4 = 0,4 + 0,4 + 1,6 = 2,4$.

Математичне сподівання для заданої величини є конкретне число, що приблизно дорівнює середньому значенню випадкової величини.

Властивості математичного сподівання

Властивість 1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій величині.

Доведення

X	C
p	1

$M(X) = M(C) = C \cdot 1 = C$.

Отже, $M(C) = C$

Наслідок: $M[M(X)] = M(X)$.

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(CX) = C \cdot M(X)$.

Доведення

Нехай випадкова величини X задана законом розподілу ймовірностей:

X	x_1	x_2	....	x_i	......	....	x_n
p	p_1	p_2	.....	p_i	.....	....	p_n

Запишемо закон розподілу випадкової величини CX.

CX	Cx_1	Cx_2	....	Cx_n
p	p_1	p_2	....	p_n

Математичне сподівання випадкової величини CX:

$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + ... + Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n) = CM(X)$.

Отже, $M(CX) = C \cdot M(X)$.

Властивість 3. Якщо X і Y незалежні випадкові величини, то $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Доведення

Задамо закони розподілу заданих випадкових величин X і Y.

X	x_1	x_2
p	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
p	k_1	k_2

$$p_1 + p_2 = 1, \quad k_1 + k_2 = 2 \quad M(Y) = y_1k_1 + y_2k_2 \qquad (1.27)$$

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 \qquad (1.28)$$

Складемо закон розподілу для добутку випадкових величин.

XY	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
p	p_1k_1	p_1k_2	p_2k_1	p_2k_2

$M(XY) = x_1y_1p_1k_1 + x_1y_2p_1k_2 + x_2y_2p_2k_2 = y_1k_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2k_2(x_1p_1 + x_2p_2) =$

$= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1k_1 + y_2k_2) = M(X) \cdot M(Y)$ (використовуючи (1.27) і (1.28).

Властивість 4. Якщо X і Y незалежні випадкові величини, то $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

Наслідок. Якщо є три незалежні випадкові величини X, Y та Z, то $M(X+Y+Z) = M(X) + M(Y) + M(Z)$.

Приклад 2

Проведено три постріли з ймовірністю влучення в ціль $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}6$. Знайти математичне сподівання загального числа влучень.

Розв'язування

Нехай X_1 – влучення першої гармати; X_2 – влучення другої гармати; X_3 – влучення третьої гармати. Для кожної з цих випадкових величин запишемо закон розподілу, приймаючи за 0 – промах, 1 – влучення.

X_1	0	1
p	0,6	0,4

X_2	0	1
p	0,7	0,3

$$M(X_1) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4;\ M(X_2) = 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3;$$

X_3	0	1
p	0,4	0,6

$M(X_3) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6$.

$M(X_1 + X_2 + X_3) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 1{,}3$.

1.5.2 Відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

Нехай задана випадкова величина X, для якої математичне сподівання дорівнює $M(X)$.

Означення. Різниця $X - M(X)$ називається відхиленням випадкової величини від її математичного сподівання.

Теорема. Математичне сподівання відхилення випадкової величини дорівнює нулю.

Доведення

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

1.5.3 Математичне сподівання числа появи події в незалежних випробуваннях

Теорема. Математичне сподівання $M(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події в кожному випробуванні:

$M(X) = np.$

Доведення

Будемо розглядати як випадкову величину X – число появи події A в n незалежних випробуваннях. Очевидно, що загальне число X появи події A в цих випробуваннях складається із чисел появи події в окремих випробуваннях. Тому, якщо X_1 – число появи події в першому випробуванні, X_2 – в другому, ..., X_n – в n-му, то загальне число появи події $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. За третьою властивістю математичного сподівання маємо:

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n) \tag{1.29}$$

Кожний із доданків правої частини рівності є математичне сподівання числа появи події в одному випробуванні: $M(X_1)$ – в першому, $M(X_2)$ – в другому і т.д. Оскільки математичне сподівання числа появи події в одному випробуванні дорівнює ймовірності події, то $M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n) = p$. Підставляючи в праву частину рівності (4) замість кожного доданка p, отримаємо $M(X) = np$, що й треба було довести.

Приклад

Ймовірність влучення в ціль при стрільбі із гармати $p = 0,6$. Знайти математичне сподівання загального числа влучень, якщо буде виконано 10 пострілів.

Розв'язування

Влучення при кожному пострілі не залежить від наслідків інших пострілів, тому події, що розглядаються, незалежні і відповідно шукане математичне сподівання дорівнює

$M(X) = np = 10 \cdot 0,6 = 6$ (влучень).

1.5.4 Дисперсія дискретної випадкової величини та її властивості

Означення. Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини називають математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання.

Позначається $D(X)$ - дисперсія.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2. \qquad (1.30)$$

Приклад

Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	2
p	0,4	0,6

Знайти її дисперсію.

$M(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 0,4 + 1,2 = 1,6.$

Розв'язування

Складемо таблицю для відхилення

$X - M(X)$	-0,6	0,4
p	0,4	0,6

$1 - 1,6 = -0,6$

$2 - 1,6 = 0,4$

Складаємо таблицю для квадрата відхилення.

$\left[X - M(X)\right]^2$	0,36	0,16
p	0,4	0,6

$D(X) = 0,36 \cdot 0,4 + 0,16 \cdot 0,6 = 0,24.$

Для обчислення дисперсії можна отримати дещо іншу формулу, а саме:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 = M\left[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\right] = M(X^2) -$$

$2M(X)\cdot M[M(X)]+M\left[M^2(X)\right]=M(X^2)-2M^2(X)+M^2(X)=$
$=M(X^2)-M^2(X)$.

$$\text{Отже, } D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2 \quad (1.31)$$

Властивості дисперсії

Властивість 1. Дисперсія постійної величини C дорівнює нулю: $D(C)=0$.

Доведення

За означенням дисперсії маємо $D(C)=M[C-M(C)]^2$. Використовуючи першу властивість математичного сподівання (математичне сподівання постійної величини дорівнює цій величині), отримаємо

$D(C)=M\left[(C-C)\right]^2=M(0)=0$. Отже, $D(C)=0$.

Властивість стає зрозумілою, якщо врахувати, що постійна величина зберігає одне і те ж значення і розсіювання немає.

Властивість 2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрата: $D(CX)=C^2D(X)$.

Доведення

За означенням дисперсії, маємо $D(CX)=M[CX-M(CX)]^2$. Використовуючи другу властивість математичного сподівання (постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання), отримаємо

$D(CX)=M\left[(CX-CM(X)\right]^2=MC^2\left[X-M(X)\right]^2=C^2M\left[X-M(X)\right]^2$
$=C^2D(X)$.

Отже, $D(CX)=C^2D(X)$.

Властивість 3. Дисперсія суми двох незалежних величин дорівнює сумі дисперсій цих величин: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Доведення

За формулою для обчислення дисперсії маємо:

$D(X+Y)=M\left[(X+Y)^2\right]-\left[M(X+Y)\right]^2$.

Розкриваючи дужки та використовуючи властивість математичного сподівання суми декількох величин і добутку двох незалежних величин, отримаємо:

$$D(X+Y)=M\left[X^2+2XY+Y^2\right]-[M(X)+M(Y)]^2=$$
$$=M(X^2)+2M(X)\cdot M(Y)+M(Y^2)-M^2(X)-2M(X)M(Y)-M^2(Y)=$$
$$=M(X^2)-\left[M(X)^2\right]+M(Y^2)-\left[M(Y)^2\right]=D(X)+D(Y).$$

Отже, $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Властивість 4. Дисперсія різниці двох незалежних величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Доведення

За третьою властивістю $D(X-Y)=D(X)+D(-Y)$.

За другою властивістю

$D(X-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)$, або $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

1.5.5 Дисперсія числа появи події в незалежних випробуваннях

Теорема. Дисперсія числа появи події A в n незалежних випробуваннях, в кожному із яких ймовірність p появи події постійна, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи і непояви події в одному випробуванні:

$$D(X)=npq. \tag{1.32}$$

1.5.6 Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини

Означення. Середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини називається корінь квадратний з її дисперсії.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \tag{1.33}$$

Приклад

Знайти за загальною формулою дисперсії її середнє квадратичне відхилення випадкової величини X заданої законом розподілу:

X	1	2
p	0,4	0,6

Розв'язування

Знайдемо математичне сподівання: $M(X)=1,6$.

Складемо закон розподілу для випадкової величини X^2:

X^2	1	4
p	0,4	0,6

$M(X^2)=1\cdot 0,4+4\cdot 0,6=2,8$.

Обчислимо дисперсію $D(X)$:

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=2,8-(1,6)^2=2,8-2,56=0,24$

$\sigma(X)=\sqrt{0,24}\approx 0,49.$

1.5.7 Завдання для самоперевірки

Задача 1. У групі із 20 студентів є 3 відмінника. Випадково вибирається 4 студенти. Знайти числові характеристики випадкової величини ξ, яка дорівнює кількості відмінників серед вибраних студентів.

Відповідь. $M(\xi)=0,6;\ D(\xi)=\dfrac{204}{475}\approx 0,43;\quad \sigma(\xi)=\sqrt{\dfrac{204}{475}}\approx 0,66.$

Задача 2. Стрілець робить по одному пострілу по чотирьох мішенях. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості влучень, вважаючи, що ймовірність влучення при одному пострілі 0,7.

Відповідь. $M(X)=2,8;\ D(X)=0,84;\quad \sigma(X)=\sqrt{0,84}\approx 0,92.$

Задача 3. Знайти числові характеристики випадкової величини Y яка дорівнює кількості вгаданих номерів у лотереї «5 із 36».

Відповідь. $M(Y)\approx 0,69;\ D(Y)\approx 0,53;\quad \sigma(Y)\approx 0,73.$

Задача 4. Магазин отримав 10000 пляшок мінеральної води. Імовірність того, що при перевезенні пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,0004. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості розбитих пляшок.

Відповідь. $M(X)=4; D(X)=4; \quad \sigma(X)=2.$

1.6 Закони великих чисел

1.6.1 Закон великих чисел. Нерівність Чебишова

Цей закон пов'язаний з його автором російським математиком Чебишовим (1821-1894). Поставимо своєю задачею оцінити ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання не перевищує за абсолютною величиною додатного числа ε. П. Л. Чебишов довів нерівність, яка дозволяє дати оцінку, що нас цікавить.

Нерівність Чебишова. Ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною менше додатного числа ε не менше ніж $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Використовуючи цю нерівність Чебишов довів теорему.

Теорема Чебишова. Якщо $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно незалежні випадкові величини, причому дисперсії їх рівномірно обмежені (не перевищують постійного числа C), то яким би малим не було число ε, ймовірність нерівності

$$\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon \quad (1.34)$$

буде як завгодно близько наближатись до 1, якщо число випадкових величин достатньо велике.

Іншими словами, в умові теореми

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1 \quad (1.35)$$

Доведення

Введемо в розгляд нову випадкову величину – середнє арифметичне випадкових величин $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$. Знайдемо математичне сподівання $\overline{X}$. Використовуючи властивості математичного сподівання (постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань доданків), отримаємо

$$M\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n} \quad (1.36)$$

Використовуючи до величини $\overline{X}$ нерівність Чебишова, маємо

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-M\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

або враховуючи (3),

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geq$$
$$\geq 1-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}. \quad (1.37)$$

Використовуючи властивості дисперсії (постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрата; дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій доданків), отримаємо

$$D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}{n^2}.$$

За умовою дисперсії всіх випадкових величин обмежені постійним числом C, тобто мають місце нерівності:

$D(X_1)\leq C, D(X_2)\leq C, ..., D(X_n)\leq C$, тому

$$\frac{D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}{n^2} \le \frac{C+C+...+C}{n^2} = \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Отже,

$$D(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}) \le \frac{C}{n} \quad (1.38)$$

Підставляючи праву частину (1.38) в нерівність (1.37), маємо

$$P(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Звідси, переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon) \ge 1.$$

Нарешті враховуючи, що ймовірність не може перевищувати одиницю, остаточно отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon) = 1.$$

Теорема доведена.

Приклад

Дано ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання $\ge 0,9$. Знайти ε.

Розв'язування

$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 0,9$

$D(X) = 0,004$

На основі нерівності Чебишева ми маємо:

$$1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 0,9$$

$$1 - \frac{0,004}{\varepsilon^2} = 0,9.$$

Звідки $\frac{0,004}{\varepsilon^2} = 0,1$, а тому $\varepsilon^2 = 0,04$; $\quad \varepsilon = \sqrt{0,04} = 0,2$.

1.7 Інтегральна функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

Розглянемо випадкову величину X, значення якої повністю заповнюють проміжок (a,b). Таку випадкову величину за допомогою закону розподілу задати не можна, тому що вона має безліч значень. Тому для таких випадкових величин вводиться в розгляд нове поняття – функція розподілу (або інтегральна функція розподілу).

Означення. Інтегральною функцією називають функцію $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \qquad (1.39)$$

Геометрично рівність (1) можна інтерпретувати так: $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке зображається на числовій осі точкою, що лежить лівіше точки x.

1.7.1 Властивості інтегральної функції

Властивість 1. Значення інтегральної функції належать відрізку $[0;1]$: $0 \le F(x) \le 1$.

Доведення

Властивість випливає із означення інтегральної функції як ймовірності: ймовірність завжди є невід'ємним числом, що не перевищує одиниці.

Властивість 2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто

$F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Доведення

Нехай $x_2 > x_1$. Подію, яка полягає в тому, що X прийме значення менше x_2, можна розділити на дві несумісні події: 1) X прийме значення менше x_1 з ймовірністю $P(X < x_1)$; 2) X прийме значення, що задовольняє нерівності $x_1 \le X \le x_2$, з ймовірністю $P(x_1 \le X < x_2)$. За теоремою додавання маємо

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Звідки $P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$, або

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2). \qquad (1.40)$$

Оскільки довільна ймовірність є число невід'ємне, то $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$ або $F(x_2) \ge F(x_1)$, що й потрібно було довести.

Наслідок 1. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, що належать інтервалу (a,b), дорівнює приросту інтегральної функції на цьому інтервалі:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (1.41)$$

Цей наслідок випливає із формули (2), якщо покласти $x_2 = b, x_1 = a$.

Приклад

Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \le -1; \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \quad \text{при } -1 < x \le 3; \\ 1 \quad \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення з інтервалу $(0;2)$.

Розв'язування

Скористаємося формулою (2) $P(0 < x < 2) = F(2) - F(0)$.

Оскільки в інтервалі $(0;2)$ за умовою $F(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, то

$$F(2) - F(0) = (\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}.$$

Наслідок 2. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме одне певне значення дорівнює нулю.

Доведення

Дійсно, поклавши у формулі (31), $a = x_1, b = x_1 + \Delta x$, маємо

$P(x_1 \le X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$.

Спрямуємо Δx до нуля. Оскільки X – неперервна випадкова величина, то функція $F(x)$ неперервна. В силу неперервності $F(x)$ в точці x_1 різниця $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ також буде прямувати до нуля, а отже, $P(X = x_1) = 0$.

Властивість 3. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a,b), то:

1) $F(x) = 0$ *при* $x \le a$;

2) $F(x) = 1$ *при* $x \ge b$.

Доведення

1. Нехай $x_1 \le a$. Тоді подія $X < x_1$ неможлива (оскільки значень менших за x_1 величина X за умовою не приймає), і відповідно її ймовірність дорівнює нулю.

2. Нехай $x_2 \ge b$. Тоді подія $X < x_2$ достовірна (оскільки всі можливі значення ε менші за x_2), і відповідно її ймовірність дорівнює одиниці.

Наслідок. Якщо можливі значення неперервної випадкової величини розміщені на всій осі x, то справедливе таке граничне співвідношення:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

1.7.2 Графік інтегральної функції

Доведені властивості дозволяють показати, як виглядає графік інтегральної функції неперервної випадкової величини.

Графік розміщений в полосі, що обмежена прямими $y = 0$, $y = 1$ (перша властивість). При зростанні x в інтервалі (a,b), якому належать всі можливі значення випадкової величини, графік піднімається вверх (друга властивість). При $x \le a$ ординати графіка дорівнюють нулю; при $x \ge b$ ординати графіка дорівнюють одиниці (третя властивість).

1.8 Диференціальна функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

Задання неперервної випадкової величини за допомогою інтегральної функції не єдине. Неперервну випадкову величину можна задати також використовуючи диференціальну функцію.

Означення. Диференціальною функцією розподілу (щільність ймовірності) $f(x)$ називають першу похідну від інтегральної функції:

$$f(x) = F'(x) \tag{1.42}$$

Часто замість терміна «диференціальна функція» використовують термін «щільність ймовірності».

1.8.1 Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал

Знаючи диференціальну функцію, можна обчислити ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, яке належить заданому інтервалу.

Теорема. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення, що належать інтервалу (a,b), дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції, взятому в межах від a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1.43}$$

Доведення

Використаємо співвідношення: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

За формулою Ньютона – Лейбніца:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Таким чином, $P(a \le X < b)=\int_a^b f(x)dx$.

Оскільки $P(a \le X < b)=P(a < X < b)$, то остаточно отримаємо

$$P(a < X < b)=\int_a^b f(x)dx\ ,$$

що й треба було довести.

З геометричної точки зору отриманий результат трактується як ймовірність того, що неперервна випадкова величини прийме значення, що належать інтервалу (a,b), дорівнює площі криволінійної трапеції, що обмежена віссю x, кривою розподілу $f(x)$ і прямими $x=a$ та $x=b$.

Примітка. Якщо $f(x)$ – парна функція і кінці інтервалу симетричні відносно початку координат, то $P(-a < X < a)=P(|X| < a)=2\int_0^a f(x)dx$.

Приклад

Дана диференціальна функція випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le 0; \\ 2x & при 0 < x \le 1; \\ 0 & при\ x > 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, що належать інтервалу $(0,5;1)$.

Розв'язування

Шукана ймовірність: $P(0,5 < X < 1)=2\int_{0,5}^{1} xdx=0,75$.

1.8.2 Властивості диференціальної функції

Властивість 1. Диференціальна функція невід'ємна: $f(x) \geq 0$.

Доведення

Інтегральна функція є неспадною функцією, відповідно, її похідна $F'(x) = f(x)$ є функція невід'ємна. Геометрично ця властивість означає, що точки, що належать графіку диференціальної функції, розміщені або над віссю x, або на цій осі.

Властивість 2. Невласний інтеграл від диференціальної функції в межах від $-\infty$ до ∞ дорівнює одиниці: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Доведення

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ виражає ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина прийме значення, що належить інтервалу $(-\infty, \infty)$. Очевидно, така подія є достовірною, і тому її ймовірність дорівнює одиниці.

Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини, належать інтервалу (a, b), то $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

1.8.3 Знаходження інтегральної функції

Знаючи диференціальну функцію $f(x)$, можна знайти інтегральну функцію $F(x)$ за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{1.44}$$

Дійсно, ми позначили через $F(x)$ ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, менші x, тобто

$$F(x) = P(X < x).$$

Очевидно, нерівність $X < x$ можна записати у вигляді подвійної нерівності $-\infty < X < x$, тоді

$$F(x) = P(-\infty < X < x). \tag{1.45}$$

Поклавши $a = -\infty, b = x,$ маємо

$$P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).$$

Замінюючи $P(-\infty < X < x)$ через $F(x)$, врахувавши (1.45), остаточно отримаємо

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Таким чином, знаючи диференціальну функцію розподілу, можна знайти інтегральну функцію.

Приклад

Знайти інтегральну функцію за даною диференціальною функцією

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при\ x \le a; \\ \dfrac{1}{b-a} \quad при\ a < x \le b; \\ 0 \quad при\ x > b. \end{cases}$$

Розв'язування

Для знаходження $F(x)$ потрібно розглянути кожен із трьох інтервалів. Використаємо формулу $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

I. $F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx = 0.$

II. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx =$

$= \frac{1}{b-a}(x-a) = \frac{x-a}{b-a}.$

III. $F(x)=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{x} f(x)dx=0+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dx+0=\frac{b-a}{b-a}=1.$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad при\ x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad при\ a<x\le b;\\ 1 \quad при\ x>b.\end{cases}$$

1.8.4 Закон рівномірного розподілу ймовірностей

Означення. Розподіл ймовірностей називають рівномірним, якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення випадкової величини, диференціальна функція приймає постійне значення.

Знайдемо диференціальну функцію рівномірного розподілу, вважаючи, що всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a,b), на якому диференціальна функція зберігає постійне значення $f(x)=C$.

За умовою X не приймає значень поза інтервалом (a,b), тому $f(x)=0$ при $x<a$ і $x>b$. Знайдемо значення постійної C. Оскільки всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a,b), то повинна виконуватись рівність: $\int_{a}^{b} f(x)dx=1$, або $\int_{a}^{b} Cdx=1$. Звідки $C=1/\int_{a}^{b} dx=\frac{1}{b-a}$.

Отже, закон рівномірного розподілу аналітично можна записати так:

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad при\ x\le a;\\ \dfrac{1}{b-a} \quad при\ a<x\le b;\\ 0 \quad при\ x>b.\end{cases} \tag{1.46}$$

1.9 Нормальний закон розподілу

1.9.1 Числові характеристики неперервних випадкових величин

Нехай неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією $f(x)$. Припустимо, що всі можливі значення X належать відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n часткових відрізків довжиною $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ і виберемо на кожному із них довільну точку x_i $(i=1,2,...,n)$. Визначаючи математичне сподівання неперервної випадкової величини за аналогією з дискретною, складемо суму добутків можливих значень x_i та ймовірностей попадання їх в інтервал Δx_i (нагадаємо, що добуток $f(x)\Delta x$ наближено дорівнює ймовірності попадання X в інтервал Δx):

$$\sum x_i \cdot f(x_i)\Delta x_i .$$

Переходячи до границі при прямуванні до нуля довжини найбільшого із частинних відрізків, отримаємо визначений інтеграл $\int_a^b xf(x)dx$.

Означення 1. Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[a,b]$, називається визначений інтеграл:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx. \qquad (1.47)$$

Якщо можливі значення належать всій осі x, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \qquad (1.49)$$

За аналогією з дисперсією дискретної випадкової величини визначається дисперсія неперервної величини.

Означення 2. Дисперсією неперервної випадкової величини називають математичне сподівання квадрата її відхилення.

Якщо можливі значення X належать відрізку $[a,b]$, то

$$D(X)=\int_a^b [x-M(x)]^2 f(x)dx. \quad (1.50)$$

Для обчислення дисперсії можна отримати і іншу формулу. Дійсно

$$D(x)=\int_a^b\left[x^2-2xM(x)+M^2(x)\right]f(x)dx=\int_a^b x^2 f(x)dx-2\int_a^b xM(x)f(x)dx+$$

$$+\int_a^b M^2(x)f(x)dx=\int_a^b x^2 f(x)dx-2M^2(x)+M^2(x)=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

Отже,

$$D(x)=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X). \quad (1.51)$$

Якщо можливі значення належать всій осі x, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(x)]^2 f(x)dx \text{ або } D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X). \quad (1.52)$$

Означення 3. Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається так, як і для величини дискретної, рівністю

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \quad (1.53)$$

Серед числових характеристик неперервних випадкових величин розрізняють також моду та медіану.

У випадку, коли X є неперервною випадковою величиною, то модою M_0 є те x при якому функція щільності $f(x)$ має найбільше значення.

У випадку, коли функція неперервна, то медіана визначає ймовірність того, що $P(X<M_e(X))=P(X>M_e(X))$. Геометрично медіану можна трактувати як точку, в якій ордината $f(x)$ ділить пополам площу, що обмежена кривою розподілу.

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx=\int_{M_e}^{+\infty} f(x)dx.$$

Приклад 1

Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\sin 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Знайти: $a, f(x), M(X), D(X), \sigma(X), M_0, M_e$.

Розв'язування

1. $$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2a\cos 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

2. Параметр a знайдемо з умови: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$; $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2a\cos 2xdx=1$. Обчисливши інтеграл, знаходимо, що $a=1$. Тоді $f(x)$ набере вигляду:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2\cos 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

3. $$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\cdot 2\cos 2xdx=\begin{bmatrix}u=x,\\ dv=2\cos 2xdx,\\ du=dx,\\ v=\sin 2x\end{bmatrix}=(x\cdot\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-$$

$$-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}-0+(\frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$ Отже, $M(X)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cdot 2\cos 2x dx-(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})^2=$$

$$=\begin{bmatrix} u=x^2, \\ dv=2\cos 2xdx, \\ du=2xdx, \\ v=\sin 2x \end{bmatrix}=(x^2\cdot\sin 2x)_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x\cdot\sin 2xdx-(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})^2.$$

Після остаточного обчислення, отримаємо, що $D(X)=\dfrac{\pi-3}{4}$.

4. $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\dfrac{\pi-3}{4}}=\dfrac{\sqrt{\pi-3}}{2}$.

5. Будуємо графік функції $f(x)$.

Мода $M_0=0$.

Знайдемо медіану M_e. $\int_0^{M_e} 2\cos 2xdx=\int_{M_e}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2xdx$. Звідки:

$\sin 2x_0^{M_e}=\sin 2x_{M_e}^{\frac{\pi}{4}}$. Або після підстановки меж інтегрування:

$\sin 2M_e-0=\sin\dfrac{\pi}{2}\sin 2M_e$;

$2\sin 2M_e=1$ або $\sin 2M_e=\dfrac{1}{2}$. Звідки $2M_e=\dfrac{\pi}{6}$ і $M_e=\dfrac{\pi}{12}$.

Приклад 2

Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, що задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x\le 0; \\ x^2 & при\ 0<x\le 1; \\ 1 & при\ x>1. \end{cases}$$

Розв'язування

Знайдемо диференціальну функцію

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0; \\ 2x & при\ 0 < x \le 1; \\ 0 & при\ x > 1. \end{cases}$$

Обчислимо числові характеристики:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x \cdot 2xdx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot 0dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X) = \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2xdx - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

1.9.2 Нормальний розподіл ймовірностей

Означення. Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається нормальним, якщо його щільність визначається функцією

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1.54}$$

Для нормального розподілу обчислимо математичне сподівання, дисперсію і середнє відхилення. При обчисленнях будемо використовувати відому формулу Пуассона: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

Обчислимо математичне сподівання.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t, \\ x = \sigma t + a, \\ dx = \sigma dt \end{array} \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma t) e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sigma dt =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma te^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}d(-\frac{t^2}{2})=$$

$$a-(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}})\to 0=a-0+0=a.$$

Отже,

$$M(X)=a \qquad (1.55)$$

Аналогічно можна знайти, що дисперсія для нормального розподілу дорівнює σ^2.

$$D(X)=\sigma^2 \qquad (1.56)$$

Отже,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma \qquad (1.57)$$

1.9.3 Графік щільності нормального розподілу

Для нормального розподілу щільність виражається формулою $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Дослідимо цю функцію.

1. Функція визначена на всій числовій осі $x\in(-\infty;+\infty)$.
2. В області визначення неперервна, тому точок розриву немає.
3. $f(x)=e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ – парна, тому дана функція симетрична відносно прямої $x=a$.
4. Досліджуємо функцію на екстремум, для цього знайдемо першу

похідну: $$y'=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2(x-a)}{2\sigma^2}\right]\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{-(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

$y'=0$, $x-a=0, x=a-$ критична точка.

x	$(-\infty;a)$	a	$(a;+\infty)$
y'	+	0	–
y	↗ зростає	max $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	↘ спадає

5. Дослідимо функцію на точки перегину.

Для цього знайдемо похідну другого порядку

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - \frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-2(x-a)}{2\sigma^2}\right] \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left[-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} + \frac{(x-a)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\right] = \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left[-\sigma^2 + (x-a)^2\right]$$

$$y'' = 0, \quad -\sigma^2 + (x-a)^2 = 0; \quad (x-a)^2 = \sigma^2; \quad x - a = \pm\sigma.$$

Звідки

$x_1 = a - \sigma;$

$x_2 = a + \sigma.$

x	$(-\infty; a-\sigma)$	$a-\sigma$	$(a-\sigma; a+\sigma)$	$a+\sigma$	$(a+\sigma; +\infty)$
y''	+	0	–	0	+
y	ввігнутий	$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$	випуклий	$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$	ввігнутий

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}.$$

6. Асимптоти.

Вертикальних асимптот графік не має, оскільки функція визначена на всій числовій осі. Знайдемо похилі асимптоти, рівняння яких $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} \cdot x \cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} = 0.$$

Отже, вісь x служить горизонтальною асимптотою.

7. Будуємо графік.

1.9.4 Ймовірність попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини

Ми вже знаємо, що ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення, що належать інтервалу (a,b), дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції, взятому в межах від a до b: $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$.

Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Тоді ймовірність того, що X прийме значення, що належать інтервалу $(\alpha;\beta)$, дорівнює: $P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$.

Перетворимо цю формулу так, щоб можна було користуватися готовими таблицями. Введемо нову змінну $t=\frac{x-a}{\sigma}$. Звідки $x=t\sigma+a$, $dx=\sigma dt$. Знайдемо нові границі інтегрування. Якщо $x=\alpha$, то $t=\frac{\alpha-a}{\sigma}$; якщо $x=\beta$, то $t=\frac{\beta-a}{\sigma}$.

Таким чином, маємо

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}(\sigma dt)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt .$$

Використовуючи функцію Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, остаточно отримаємо:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}). \qquad (1.58)$$

Приклад

Випадкова величини X розподілена нормально. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення цієї величини відповідно рівні 30 і 10. Знайти ймовірність того, що X прийме значення, що належать інтервалу (10;50).

Розв'язування

За умовою задачі $\alpha = 10, \beta = 50, \quad a = 30, \sigma = 10$, а тому

$$P(10 < X < 50) = \Phi(\frac{50-30}{10}) - \Phi(\frac{10-30}{10}) = 2\Phi(2).$$

За таблицею знаходимо $\Phi(2) = 0,4772$. Звідки шукана ймовірність $P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$.

1.9.5 Обчислення ймовірності заданого відхилення

Часто виникає потреба обчислити ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X за абсолютною величиною менше заданого додатного числа a, тобто потрібно знайти ймовірність здійснення нерівності $|X - a| < \delta$. Замінимо цю нерівність рівносильною їй подвійною нерівністю $-\delta < X - a < \delta$ або $a - \delta < X < a + \delta$.

Використовуючи формулу (1.58), за умови, що функція Лапласа непарна, отримаємо

$$P(|X-a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right] =$$

$$= \Phi(\frac{\delta}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\delta}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}).$$

Отже,

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi(\delta / \sigma). \qquad (1.59)$$

Якщо $a = 0$, то $P(|X| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$.

1.9.6 Правило трьох сигм

Перетворимо формулу $P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$, поклавши $\delta=\sigma t$.

Тоді отримаємо $P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t)$.

Якщо $t=3$ і, відповідно $\sigma t=3\sigma$, то $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=$ $=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$, тобто ймовірність того, що відхилення за абсолютною величиною буде менше потроєного середнього квадратичного відхилення, дорівнює 0,9973.

Правило трьох сигм. Якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення.

1.9.7 Поняття про теорему Ляпунова

Відомо, що нормально розподілені випадкові величини широко розповсюджені на практиці. З чим це пов'язано? Відповідь на це питання дав відомий російський математик А. М. Ляпунов (центральна гранична теорема теорії ймовірності).

Наслідок із теореми Ляпунова. Якщо випадкова величина X являє собою суму дуже великого числа взаємно незалежних випадкових величин, кожна з яких має на цю суму як завгодно малий вплив, то величина X має розподіл близький до нормального.

На практиці найбільш часто зустрічаються саме такі випадкові величини.

1.10 Числові характеристики показникового розподілу

Для показникового розподілу функція щільності має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при\ x\ge 0.\end{cases}$$

Знайдемо числові характеристики даного розподілу.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\begin{bmatrix} u=x, \\ dv=\lambda e^{-\lambda x}dx, \\ du=dx, \\ v=-e^{-\lambda x} \end{bmatrix}=x\cdot e^{-\lambda x}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}.$$

Отже, $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Аналогічно можемо знайти дисперсію $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Тоді $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Знайдемо інтегральну функцію показникового розподілу:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}.$$

2 МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

2.1 Основні поняття математичної статистики

2.1.1 Вибірковий метод

Математична статистика займається збиранням і дослідженням інформації для наукових і практичних цілей. Перша задача статистики – вказати способи збирання і групування статистичних даних. Друга задача математичної статистики – розроблення методів аналізу статистичних даних, в залежності від мети дослідження. Математична статистика виникла (XVIIст.) і створювалась паралельно з теорією ймовірностей. Великий внесок у розвиток статистики (друга половина XIX ст. і початок XX ст.) зробили П. Л. Чебишов, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, К. Гаусс, К. Пірсон. В XX ст. значний внесок у розвиток математичної статистики зробили російські математики В. І. Романовський, А. Н. Колмогоров, Н. В. Смірнов та ін.

Розглянемо довільну скінченну або нескінченну множину Ω, елементами якої є об'єкти довільної природи. Це можуть бути дерева.

Означення 1. Вибіркою називається довільна скінченна множина елементів випадково відібраних із множини Ω. Кількість відібраних елементів зветься **об'ємом вибірки**. Причому множина Ω, з якої зроблена вибірка, називається **генеральної сукупністю**.

Означення 2. Елементи, що входять до вибірки позначаються $x_1, x_2, \ldots, x_k$ і називаються варіантами. Кожна варіанта може зустрічатися у вибірці декілька разів. Нехай x_1 зустрічається n_1 разів, $x_2 - n_2, \ldots; x_k - n_k$. Числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ називаються **частотами варіантів**. Якщо розглянути їх, то $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Сума частот – це об'єм вибірки.

Означення 3. Відношення $\frac{n_i}{n} = p_i$ називають відносними частотами варіанти. Якщо варіанти вибірки виписати в один рядок $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (в порядку зростання), то така послідовність зветься варіаційним рядом.

Розрізняють два види вибірки.

1. Повторна вибірка – це вибірка, при якій при виборі наступного елементу попередній повертають у генеральну сукупність.

2. Безповторна вибірка – це вибірка, при якій відібраний елемент генеральної сукупності не повертається.

Для того, щоб на основі вибірки можна було б зробити правильні висновки про властивості генеральної сукупності, необхідно, щоб об'єкти вибірки правильно відображали пропорції генеральної сукупності. Іншими словами вибірка повинна бути репрезентативною.

2.1.2 Статистичний розподіл

Статистичним розподілом називається закон розподілу, який встановлює зв'язок між варіантами вибірки і їх частотами (або їх відносними частотами). Такий розподіл записують у вигляді таблиці: перший рядок – варіанти, другий – частоти або відносні частоти, третій – відносні частоти.

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	....	n_k
p_i	p_1	p_2	p_3	....	p_k

Контроль: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Статистичний розподіл можна задати також у вигляді послідовності інтервалів і відповідних їм частот (як частоту, що відповідає даному інтервалу, приймають суму частот, які попали в цей інтервал).

Якщо у статистичному розподілі число варіант невелике, як правило, не більше 10, то такий розподіл називається **найпростішим**.

2.1.3 Емпірична функція розподілу

Нехай відомо статистичний розподіл частот. Введемо позначення:

n_x – число спостережень, при яких спостерігалось значення ознаки менше x,

n – загальна кількість спостережень (об'єм вибірки).

Зрозуміло, що відносна частота події $X < x$ дорівнює $\frac{n_x}{n}$.

Якщо x буде змінюватися, то буде змінюватися і відносна частота $\frac{n_x}{n}$, яка є функцією від x. Оскільки ця функція знаходиться емпіричним (дослідним) шляхом, то її називають емпіричною.

Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки) називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$.

За означенням $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$,

де n_x – число варіант менших x, n – об'єм вибірки.

Таким чином, для того, щоб знайти, наприклад, $F^*(x_2)$ треба число варіант менших x_2, розділити на об'єм вибірки: $F^*(x_2) = \frac{n_{x_2}}{n}$.

На відміну від емпіричної функції розподілу вибірки, інтегральну функцію $F(x)$ розподілу генеральної сукупності називають **теоретичною функцією розподілу**. Різниця між емпіричною і теоретичною функціями полягає в тому, що теоретична функція $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$, а емпірична функція $F^*(x)$ визначає відносну частоту цієї ж події. Із теореми Бернуллі випливає, що відносна частота події $X < x$, тобто $F^*(x)$ прямує по ймовірності до ймовірності $F(x)$ цієї ж події. Іншими словами ці функції мало чим відрізняються, звідси випливає доцільність використання емпіричної функції розподілу вибірки для наближеного подання теоретичної функції розподілу генеральної сукупності.

Приклад

З генеральної сукупності зроблена вибірка, в результаті якої одержали такі варіанти:

0,4,2,0,5,1,1,3,0,4,2,2,3,2,3,0,4,5,1,3,2,2,1,5,2,2,0,2,2,3,2,2,2,6,2,1,3,1,3,1,5,4,4, 6,2,3,4,3,2,4.

Необхідно: а) побудувати статистичний розподіл; б) знайти емпіричну функцію розподілу.

Розв'язування

1. Знайдемо частоти варіант: 0–5, 1–7, 2–16, 3–9, 4–7, 5–4, 6–2.

Знайдемо об'єм вибірки: n=50.

Складаємо статистичний розподіл.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	5	7	16	9	7	4	2
p_i	0,1	0,14	0,32	0,18	0,15	0,08	0,04

$p_1 = 5:50 = 0{,}1,$ $\quad p_5 = 7:50 = 0{,}14,$

$p_2 = 7:50 = 0{,}14,$ $\quad p_6 = 4:50 = 0{,}08,$

$p_3 = 16:50 = 0{,}32,$ $\quad p_7 = 2:50 = 0{,}04.$

$p_4 = 9:50 = 0{,}18,$

2. Далі знаходимо емпіричну функцію розподілу.

$(-\infty;0)$: $F^*(x) = 0,$

$[0;1)$: $F^*(x) = 0 + 0{,}1 = 0{,}1,$

$[1;2)$: $F^*(x) = 0{,}1 + 0{,}14 = 0{,}24,$

$[2;3)$: $F^*(x) = 0{,}24 + 0{,}32 = 0{,}56,$

$[3;4)$: $F^*(x) = 0{,}56 + 0{,}18 = 0{,}74,$

$[4;5)$: $F^*(x) = 0{,}74 + 0{,}14 = 0{,}88,$

$[5;6)$: $F^*(x) = 0{,}88 + 0{,}08 = 0{,}96,$

$[6;+\infty)$: $F^*(x) = 0{,}96 + 0{,}04 = 1.$

2.1.4 Полігон і гістограма

З метою наочності будують різні графіки статистичного розподілу, а саме: полігон і гістограму.

Означення 1. Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки з координатами $(x_i;n_i)$. Для побудови полігона частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат – відповідні їм частоти n_i.

Означення 2. Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки з координатами $(x_i;p_i)$. Для побудови полігона відносних частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат – відповідні їм відносні частоти p_i.

Означення 3. Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, яка складається із прямокутників, основою яких є часткові інтервали довжиною h, а висоти рівні відношенню $\frac{n_i}{h}$ (щільність частоти).

Для побудови гістограми частот на осі абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізки, які паралельні осі абсцис на відстані $\frac{n_i}{h}$. Площа i-го прямокутника рівна $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ – сумі частот варіант i-го інтервалу; відповідно, площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки.

Означення 4. Гістограмою відносних частот називають ступінчасту фігуру, яка складається із прямокутників, основою яких є часткові інтервали довжиною h, а висоти рівні відношенню $\frac{p_i}{h}$ (щільність відносних частот).

Для побудови гістограми відносних частот на осі абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізки, які паралельні осі абсцис на відстані $\frac{p_i}{h}$. Площа i-го прямокутника рівна $h \cdot \frac{p_i}{h} = p_i$ – відносній частоті варіант, що попали до i-го інтервалу; відповідно площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

2.2 Числові характеристики вибірки

2.2.1 Генеральна і вибіркова середні

Розглянемо генеральну сукупність об'єму N. Будемо досліджувати будь-яку випадкову ознаку X цієї сукупності. Нехай X приймає значення $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, які всі різні. Якщо елементи вибірки зустрічаються лише по одному разу, то закон розподілу можна подати:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_N
N	1	1	1	.....	1
p	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	......	$\frac{1}{N}$

Генеральною середньою називають середнє арифметичне значення ознаки генеральної сукупності, тобто

$$\overline{x_Г} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} \qquad (2.1)$$

Можливі випадки, коли варіанти $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ мають відповідні частоти $N_1, N_2, N_3, ..., N_k$, тобто зустрічаються по декілька разів, причому $N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_k = N$.

X	x_1	x_2	......	x_i	....	x_k
N	N_1	N_2	....	N_i	....	N_k
p	$\frac{N_1}{N}$	$\frac{N_2}{N}$	....	$\frac{N_i}{N}$	....	$\frac{N_k}{N}$

Тоді генеральна середня дорівнює

$$\overline{x_Г} = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k = M(X) \qquad (2.2)$$

Зробимо із генеральної сукупності вибірку об'єму $n = N$. Якщо елементи вибірки зустрічаються лише по одному разу, то закон розподілу можна подати:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
n	1	1	1	.....	1
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	.....	$\frac{1}{n}$

Тоді вибірковою середньою $\overline{x_B}$ називають середнє арифметичне значення ознаки вибіркової сукупності, тобто

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \qquad (2.3)$$

Якщо значення ознаки $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ мають відповідні частоти $n_1, n_2, ..., n_k$, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$\overline{x_B} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_n}{n} \quad \text{або} \quad \overline{x_B} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}. \qquad (2.4)$$

Отже, $\overline{x_B} = \sum_{i=1}^{n} p_i^* x_i = M_B$.

2.2.2 Генеральна і вибіркова дисперсії

Для того, щоб охарактеризувати розсіювання значень кількісної ознаки X генеральної сукупності навколо свого середнього значення, вводять характеристику – генеральну дисперсію.

Генеральною дисперсією $D_Г$ називають середнє арифметичне квадратів відхилення значень ознаки генеральної сукупності від їх середнього значення $\overline{x_Г}$.

Якщо всі значення $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ ознаки генеральної сукупності об'єму N різні, то

$$D_Г = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x_Г})^2}{N}. \tag{2.5}$$

Якщо значення ознаки $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ мають відповідні частоти $N_1, N_2, N_3, ..., N_k$, тобто зустрічаються по декілька разів, причому $N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_k = N$, то

$$D_Г = \frac{\sum_{i=1}^{k}N_i(x_i - \overline{x_Г})^2}{N}. \tag{2.6}$$

Для того, щоб охарактеризувати розсіювання спостережуваних значень кількісної ознаки вибірки навколо свого середнього значення $\overline{x_B}$ вводять таку характеристику як вибіркову дисперсію.

Вибірковою дисперсією D_B називають середнє арифметичне квадратів відхилення спостережуваних значень ознаки від їх середнього значення $\overline{x_B}$.

Якщо всі значення $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ознаки вибірки об'єму n різні, то

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_B)^2}{n}. \tag{2.7}$$

Якщо значення ознаки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ мають відповідні частоти $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x_B})^2}{n}. \qquad (2.8)$$

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням (стандартним) називають квадратний корінь із вибіркової дисперсії: $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Генеральним середнім квадратичним відхиленням (стандартним) називають квадратний корінь із генеральної дисперсії: $\sigma_Г = \sqrt{D_Г}$.

2.2.3 Формула для обчислення дисперсії

Обчислення дисперсії генеральної або вибіркової можна спростити, використовуючи теорему.

Теорема. Дисперсія дорівнює середньому квадратів значень ознаки мінус квадрат загальної середньої $D = \overline{x^2} - \left[\overline{x}\right]^2$.

Доведення. Справедливість теореми випливає із перетворень:

$$D = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i (x_i^{\,2} - 2\overline{x}_i x + \left[\overline{x}\right]^2)}{n} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - 2\overline{x}\frac{\sum n_i x_i}{n} + \left[\overline{x}\right]^2 \frac{\sum n_i}{n} =$$

$$= \overline{x^2} - 2\overline{x} \cdot \overline{x} + \left[\overline{x}\right]^2 = \overline{x}^2 - \left[\overline{x}\right]^2.$$

Тому $$D = \overline{x^2} - \left[\overline{x}\right]^2, \qquad (2.9)$$

де $\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}$, $\overline{x^2} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n}$.

Враховуючи, що і генеральне і вибіркове середнє є математичним сподіванням за останніми формулами одержимо:

$$D_Г = \overline{x_Г^{\,2}} - \left[\overline{x_Г}\right]^2 \text{ і } D_B = \overline{x_B^{\,2}} - \left[\overline{x_B}\right]^2. \qquad (2.10)$$

2.3 Оцінка генеральної дисперсії на основі "виправленої" вибіркової дисперсії

Нехай досліджується будь-яка ознака α генеральної сукупності. Для цього робиться вибірка і у вибірці находиться α^*, як правило, ознака α оцінюється на основі вибірки α^*.

Означення. Оцінка α^* називається незміщеною, якщо математичне сподівання $M(\alpha^*) = \alpha$. У протилежному випадку називається зміщеною.

Для вибіркової середньої математичне сподівання дорівнює $\overline{x_Г}$, тобто $M(\overline{x_B}) = \overline{x_Г}$. Це означає, що вибіркова середня є незміщеною оцінкою генеральної середньої.

У випадку дисперсії, математичне сподівання вибіркової дисперсії дорівнює $M(D_B) = \frac{n-1}{n} \cdot D_Г$. Це означає, що вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії.

Для того, щоб одержати незміщену оцінку дисперсії, обидві частини останньої рівності помножимо на $\frac{n}{n-1}$. Одержимо

$$\frac{n}{n-1} \cdot M(D_B) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot D_Г \text{ або } D_Г = D_Г.$$

$$M\left(\frac{n}{n-1} \cdot D_B\right) = D_Г.$$

Величина, що стоїть під математичним сподіванням позначається $\overline{S^2} = \frac{n}{n-1} \cdot D_B$ і називається **виправленою вибірковою дисперсією**. Виправлена вибіркова дисперсія є незміщеною оцінкою генеральної дисперсії.

Величину $\sqrt{S^2} = s$ називають виправленим середнім квадратичним відхиленням або стандартним відхиленням.

2.4 Мода і медіана

Означення 1. Модою M_0 називається значення варіанти, яка має найімовірніше значення (найбільшу частоту).

Наприклад:

x	1	2	3
n	10	20	15

$M_0 = 2$

Означення 2. Медіаною M_e називається варіанта, для якої число варіант, які лежать зліва від неї, дорівнюють числу варіант, що лежать справа.

Наприклад:

M_e: 2; 3; 5; 6; 7. $M_e = 5$.

M_e: 2; 3; 5; 6; 7; 8. $M_e = 5{,}5$.

2.5 Довірчі інтервали

2.5.1 Надійність

Точковою називають оцінку, яка визначається одним числом. Якщо вибірка малого об'єму, то точкова оцінка може значно відрізнятися від параметра, що оцінюється, і приводить до значних похибок. З цієї причини, якщо вибірка малого об'єму, слід використовувати інтервальні оцінки.

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу. Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність і надійність оцінок.

Нехай досліджується невідомий параметр θ генеральної сукупності. Для цього з генеральної сукупності робиться вибірка і знаходиться відповідний параметр θ^* для вибірки. Зрозуміло, що θ^* тим точніше визначає параметр θ, чим менша абсолютна величина різниці $|\theta - \theta^*|$. Іншими словами, якщо $\delta > 0$ і $|\theta - \theta^*| < \delta$, то чим менше δ, тим оцінка точніша. Таким чином, додатне число δ характеризує точність оцінки.

Але статистичні методи не дозволяють категорично стверджувати, що оцінка θ^* задовольняє нерівності $|\theta - \theta^*| < \delta$; можна лише говорити про ймовірність γ, з якою ця нерівність виконується.

Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки θ за θ^* називають ймовірність γ, з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Зазвичай надійність оцінки задається наперед, причому як γ беруть число, близьке до одиниці. Найбільш частіше задають надійність, що дорівнює 0,95; 0,99; 0,999.

Нехай ймовірність того, що $|\theta - \theta^*| < \delta$ дорівнює γ:

$$P\left[|\theta - \theta^*| < \delta\right] = \gamma .$$

Замінимо нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$ рівносильною їй подвійною нерівністю $-\delta < \theta - \theta^* < \delta$ або $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$,

маємо

$$P\left[\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right] = \gamma.$$

Це співвідношення слід розуміти так: ймовірність того, що інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ заключає в собі (покриває) невідомий параметр θ дорівнює γ.

Довірчим називають інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, який покриває невідомий параметр із заданою надійністю γ.

Метод довірчих інтервалів розроблений американським статистиком Ю. Нейманом, виходячи із ідей англійського статистика Р. Фішера.

2.5.2 Довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання нормального розподілу при відомому σ

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, причому середнє квадратичне відхилення σ цього розподілу відоме. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання a за вибірковою середньою $\overline{x}$. Поставимо своєю задачею знайти довірчі інтервали, що покривають параметр a з надійністю γ.

Будемо розглядати вибіркову середню $\overline{x}$ як випадкову величину $\overline{X}$ ($\overline{x}$ змінюється від вибірки до вибірки) і вибіркові значення ознаки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ як однаково розподілені незалежні випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Математичне сподівання кожної із цих величин дорівнює a і середнє квадратичне відхилення – σ.

Приймемо без доведення, що якщо випадкова величина X розподілена нормально, то вибіркова середня $\overline{X}$, що знайдена під час незалежних спостережень, також розподілена нормально. Параметри розподілу $\overline{X}$ такі: $M(\overline{X}) = a$, $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Нехай виконується співвідношення $P(|\overline{X} - a| < \delta) = \gamma$, де γ – задана надійність.

Використовуючи формулу $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$, і замінивши X через $\overline{X}$ і σ через $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, отримаємо $P(|\overline{X} - a| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}) = 2\Phi(t)$, де $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$.

Знаходячи із останньої рівності $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, можемо записати

$$P(|\overline{X} - a| < t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t).$$

Прийнявши до уваги, що ймовірність P задана і дорівнює γ, остаточно отримаємо (щоб отримати робочу формулу вибіркову середню позначимо через $\bar{x}$):

$$P(\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) = \gamma. \qquad (2.11)$$

Смисл отриманого співвідношення такий: з надійністю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал $(\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ покриває невідомий параметр a; точність оцінки $\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Число t визначається із рівності $2\Phi(t) = \gamma$ або $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$; використовуючи таблиці функції Лапласа знаходять аргумент t, якому відповідає значення функції Лапласа, що дорівнює $\frac{\gamma}{2}$.

2.5.3 Довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання a нормального розподілу при невідомому σ

Такий довірчий інтервал має вигляд

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma \bar{s}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma \bar{s}}{\sqrt{n}}, \qquad (2.12)$$

де

$\bar{s}$ – стандартне квадратичне відхилення вибірки;

n – об'єм вибірки;

$\bar{x}$ – середнє арифметичне вибірки.

Цей інтервал побудував англійський математик Стьюдент. Для знаходження t_γ існують спеціальні таблиці $t_\gamma = t(\gamma; n)$.

2.5.4 Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності нормального розподілу

Невідоме середнє квадратичне відхилення σ генеральної сукупності можна оцінити з надійністю γ за допомогою довірчого інтервалу

$$\bar{s}(1-q) < \sigma < \bar{s}(1+q), \tag{2.13}$$

де $q = q(\gamma; n)$ – знаходять за допомогою таблиць.

2.6 Дослідження експериментальних даних (даних вибірки)

2.6.1 Побудова інтервального статистичного розподілу

Нехай задана вибірка:

10,12	10,23	10,21	10,15	10,17	10,32	10,21
10,23	10,19	10,24	10,18	10,33	10,27	10,29
10,25	10,20	10,22	10,17	10,26	10,25	10,24
10,33	10,14	10,22	10,27	10,31	10,18	10,18
10,25	10,11	10,28	10,30	10,18	10,22	10,22
10,27	10,28	10,24	10,32	10,17	10,23	10,28
10,25	10,31	10,17	10,21	10,24	10,24	10,35
10,21						

Об'єм вибірки $n = 50$.

$x_{\min} = 10{,}11 \quad x_{\max} = 10{,}35,$

$x_{\max} - x_{\min} = 10{,}35 - 10{,}11 = 0{,}24,$

$h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{8} = \dfrac{0{,}24}{8} = 0{,}03.$

Отримаємо такі інтервали:

$[10{,}11 - 10{,}14]$	$[10{,}14 - 10{,}17]$	$[10{,}17 - 10{,}2]$	$[10{,}2 - 10{,}23]$
$[10{,}23 - 10{,}26]$	$[10{,}26 - 10{,}29]$	$[10{,}29 - 10{,}32]$	$[10{,}32 - 10{,}35]$

Домовимось число варіант, які попали на межу двох сусідніх інтервалів ділити пополам і додавати до кожного з цих інтервалів. Одержані результати запишемо у вигляді так званого інтервального статистичного ряду.

інтервали	$\begin{bmatrix}10{,}11- \\ 10{,}14\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10{,}14- \\ 10{,}17\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10{,}17- \\ 10{,}2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10{,}2- \\ 10{,}23\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10{,}23- \\ 10{,}26\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10{,}26- \\ 10{,}29\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10{,}29- \\ 10{,}32\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10{,}32- \\ 10{,}35\end{bmatrix}$
n^*	2,5	3,5	7,5	10	11	7	4,5	4
p^*	0,05	0,07	0,15	0,2	0,22	0,14	0,09	0,08

На основі цього ряду побудуємо гістограму.

Гістограмою є ступінчаста фігура, основа якої складається з прямокутників, основами яких є знайдені інтервали , а висоти дорівнюють $\frac{p^*}{h}$.

Для побудови гістограми обчислимо висоти прямокутників:

$$\frac{p_1^*}{h}=\frac{0{,}05}{0{,}03}=1{,}7; \quad \frac{p_2^*}{h}=\frac{0{,}07}{0{,}03}=2{,}3; \quad \frac{p_3^*}{h}=\frac{0{,}15}{0{,}03}=5; \quad \frac{p_4^*}{h}=\frac{0{,}2}{0{,}03}=6{,}7;$$

$$\frac{p_5^*}{h}=\frac{0{,}22}{0{,}03}=7{,}3; \quad \frac{p_6^*}{h}=\frac{0{,}14}{0{,}03}=4{,}7; \quad \frac{p_7^*}{h}=\frac{0{,}09}{0{,}03}=3; \quad \frac{p_8^*}{h}=\frac{0{,}08}{0{,}03}=2{,}7.$$

Площа гістограми дорівнює 1.

Будуємо гістограму.

Знайдемо вибіркову або емпіричну функцію розподілу $F^*(X)$.

$$F^*(X)=\begin{cases}0, & x\le 10{,}11 \\ 0{,}05 & 10{,}11<x\le 10{,}14 \\ 0{,}12 & 10{,}14<x\le 10{,}17 \\ 0{,}27 & 10{,}17<x\le 10{,}2 \\ 0{,}47 & 10{,}2<x\le 10{,}23 \\ 0{,}69 & 10{,}23<x\le 10{,}26 \\ 0{,}83 & 10{,}26<x\le 10{,}29 \\ 0{,}92 & 10{,}29<x\le 10{,}32 \\ 1 & 10{,}32<x\le 10{,}35\end{cases}$$

Побудуємо графік цієї функції.

2.6.2 Зведення інтервального статистичного розподілу до найпростішого статистичного розподілу

Посередині кожного інтервалу візьмемо варіанту і будемо вважати, що вона має частоту всього інтервалу.

$\overline{x_i}$	10,125	10,155	10,185	10,215	10,245	10,273	10,305	10,335
n^*	2,5	3,5	7,5	10	11	7	4,5	4
p^*	0,05	0,07	0,15	0,2	0,22	0,14	0,09	0,08

Обчислимо числові характеристики вибірки.

$\overline{x_B} = 10{,}125 \cdot 0{,}05 + 10{,}155 \cdot 0{,}07 + 10{,}185 \cdot 0{,}15 + 10{,}215 \cdot 0{,}2 + 10{,}245 \cdot 0{,}22 +$
$+ 10{,}275 \cdot 0{,}14 + 10{,}309 \cdot 0{,}09 + 10{,}335 \cdot 0{,}08 = 10{,}2345.$

Знайдемо вибіркову дисперсію.

$\overline{x_B^{\,2}} = 10{,}125^2 \cdot 0{,}05 + 10{,}155^2 \cdot 0{,}07 + 10{,}185^2 \cdot 0{,}15 + 10{,}215^2 \cdot 0{,}2 +$
$+ 10{,}245^2 \cdot 0{,}22 + 10{,}275^2 \cdot 0{,}14 + 10{,}309^2 \cdot 0{,}09 + 10{,}335^2 \cdot 0{,}08 = 104{,}74798.$

$D_B = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 104{,}74798 - (10{,}2345)^2 = 0{,}00299.$

Шукаємо виправлення.

$$\overline{s^2} = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{50}{49} \cdot 0{,}00299 = 0{,}0035,$$

$$\overline{s} = \sqrt{\overline{s^2}} = \sqrt{0{,}0035} = 0{,}0055,$$

$$a = \overline{x} = 10{,}2345,$$

$$\sigma = \overline{s} = 0{,}0055.$$

Якщо побудувати за найпростішим розподілом точки з координатами $(\overline{x_i}; p_i^*)$ і з'єднати ці точки відрізками ламаної, то одержимо полігон відносних частот.

2.6.3 Вирівнювання статистичних експериментальних рядів

Будуючи інтервальний розподіл ми, взагалі кажучи, число інтервалів вибираємо довільно, тому при обчисленнях будуть спостерігатися деякі відхилення від дійсних значень генеральної сукупності. Щоб запобігти цьому одержані статистичні ряди вирівнюють, вважаючи, що генеральна сукупність має певний теоретичний розподіл – чи нормальний, чи розподіл Пуассона, чи біноміальний. Найбільш поширено використовують закон нормального розподілу. Для такого розподілу відома теоретична функція розподілу $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Крім того, для нормального розподілу відома формула попадання випадкової величини у заданий інтервал: $P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})$. Використовуючи цю формулу виправимо інтервальний ряд, підрахувавши ймовірності попадання випадкової величини в кожний з інтервалів.

Припустимо, що випадкова величина X генеральної сукупності має нормальний розподіл. Тоді ймовірність попадання випадкової величини в певний інтервал обчислюється за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma}). \tag{2.14}$$

Значення a і σ ми одержали, досліджуючи вибірку:

$a=\bar{x}=10,2345$

$\sigma=\bar{s}=0,0055.$

Обчислимо ймовірності попадання випадкової величини в кожний з інтервалів, використовуючи формулу (2.14).

$-(-\infty;10,14): p_1=\Phi(\frac{10,14-10,2345}{0,055})-\Phi(-\infty)=\Phi(-1,72)+0,5=$

$=-0,4573+0,5=0,0427$

$p_1=0,0427$

$$-(10{,}14;10{,}17): p_2 = \Phi(\frac{10{,}17-10{,}2345}{0{,}055}) - \Phi(\frac{10{,}14-10{,}2345}{0{,}055}) = \Phi(-1{;}17) -$$

$$-\Phi(-1{,}72) = -0{,}379 + 0{,}4573 = 0{,}0783$$

$$p_2 = 0{,}0783$$

$$-(10{,}17;10{,}2): p_3 = \Phi(\frac{10{,}2-10{,}2345}{0{,}055}) - \Phi(\frac{10{,}17-10{,}2345}{0{,}055}) = \Phi(-0{,}63) -$$

$$-\Phi(-1{,}17) = -0{,}2357 + 0{,}379 = 0{,}1432$$

$$p_3 = 0{,}1432$$

$$-(10{,}2;10{,}23): p_4 = \Phi(\frac{10{,}23-10{,}2345}{0{,}055}) - \Phi(\frac{10{,}2-10{,}2345}{0{,}055}) = \Phi(-0{,}082) -$$

$$-\Phi(-0{,}63) = -0{,}0319 + 0{,}2357 = 0{,}2038$$

$$p_4 = 0{,}2038$$

$$-(10{,}23;10{,}26): p_5 = \Phi(\frac{10{,}26-10{,}2345}{0{,}055}) - \Phi(\frac{10{,}23-10{,}2345}{0{,}055}) = \Phi(0{,}46) -$$

$$-\Phi(-0{,}082) = 0{,}1772 + 0{,}0319 = 0{,}2091$$

$$p_5 = 0{,}2091$$

$$-(10{,}26;10{,}29): p_6 = \Phi(\frac{10{,}29-10{,}2345}{0{,}055}) - \Phi(\frac{10{,}26-10{,}2345}{0{,}055}) = \Phi(1) - \Phi(0{,}46) =$$

$$= 0{,}3438 - 0{,}1772 = 0{,}1666$$

$$p_6 = 0{,}166$$

$$-(10{,}29;10{,}32): p_7 = \Phi(\frac{10{,}32-10{,}2345}{0{,}055}) - \Phi(\frac{10{,}29-10{,}2345}{0{,}055}) = \Phi(1{,}55) - \Phi(1) =$$

$$= 0{,}4394 - 0{,}3438 = 0{,}0956$$

$$p_7 = 0{,}0956$$

$$-(10{,}32;+\infty): p_8 = \Phi(+\infty) - \Phi(\frac{10{,}32-10{,}2345}{0{,}055}) = \Phi(+\infty) - \Phi(1{,}55) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}4394 = 0{,}0606$$

$$p_8 = 0{,}0606$$

Обчислимо теоретичні частоти, використавши формулу

$$n_i' = n \cdot p_i \tag{2.15}$$

Оскільки об'єм вибірки $n=50$, то:

$n_1' = 50 \cdot p_1 = 50 \cdot 0,0427 = 2,135;$

$n_2' = 50 \cdot p_2 = 50 \cdot 0,0783 = 3,915;$

$n_3' = 50 \cdot p_3 = 50 \cdot 0,1432 = 7,16;$

$n_4' = 50 \cdot p_4 = 50 \cdot 0,2038 = 10,19;$

$n_5' = 50 \cdot p_5 = 50 \cdot 0,2091 = 10,455;$

$n_6' = 50 \cdot p_6 = 50 \cdot 0,1666 = 8,38;$

$n_7' = 50 \cdot p_7 = 50 \cdot 0,0956 = 4,78;$

$n_8' = 50 \cdot p_8 = 50 \cdot 0,0606 = 3,03$

Після цього здійснимо контроль.

Контроль: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1;\quad \sum_{i=1}^{n} n_i' = 50$.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0,0427 + 0,0783 + 0,1433 + 0,2038 + 0,2091 + 0,1665 + 0,0956 + 0,0606 \approx$$
$$\approx 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} n_i' = 2,135 + 3,915 + 7,16 + 10,19 + 10,455 + 8,38 + 4,78 + 3,03 \approx 50.$$

Складемо таблицю теоретичного розподілу.

інтервали	$\begin{bmatrix}10,11- \\ 10,14\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10,14- \\ 10,17\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10,17- \\ 10,2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10,2- \\ 10,23\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10,23- \\ 10,26\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10,26- \\ 10,29\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10,29- \\ 10,32\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10,32- \\ 10,35\end{bmatrix}$
n_i'	2,135	3,915	7,16	10,19	10,455	8,38	4,78	3,03
p_i	0,0427	0,0783	0,1432	0,2038	0,2091	0,1666	0,0956	0,0606

2.7 Критерій згоди Пірсона. Системи випадкових величин

2.7.1 Критерій згоди χ^2 Пірсона

Припускаючи, що генеральна сукупність має нормальний розподіл, ми тим самим визнали деяку гіпотезу. Ця гіпотеза може бути правильною, а може бути неправильною, тому виникає необхідність її перевірки. Оскільки перевірку здійснюють статистичними методами, то її називають статистичною. В результаті такої перевірки у двох випадках можуть прийняти неправильні рішення, тобто можна допустити помилки двох видів.

1. Помилка першого виду полягає в тому, що буде відхилена правильна гіпотеза;

2. Помилка другого виду полягає в тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза.

Означення 1. Ймовірність допущення помилки першого виду позначають через α і називають рівнем значущості $\alpha = 0,05$ або $\alpha = 0,01$.

Означення 2. Критерієм згоди називається критерій перевірки гіпотези про закон, що передбачається для невідомого розподілу.

Формування критерію згоди Пірсона

Для того, щоб на заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, слід знайти значення критерію, що спостерігається

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}} \tag{2.16}$$

і порівняти його з критичними значеннями критерію $\chi^2_{таб}$, $\chi^2_{таб}$ взяти із таблиці.

Якщо $\chi^2 < \chi^2_{таб}$ – гіпотеза спостереження приймається.

Якщо $\chi^2 > \chi^2_{таб}$ – гіпотеза спостереження відкидається.

Критичне значення вибирають на основі значень f і k.

k – це число ступенів свободи, значення якого знаходять за формулою

$$k = s - 1 - r, \tag{2.17}$$

де s – число часткових інтервалів вибірки;

r – число параметрів закону розподілу, що передбачається, які оцінені за даними вибірки (в даному випадку нормального розподілу a і σ).

Для даного прикладу $k = 8 - 2 - 1 = 5$.

Формула для обчислення χ^2 спостереження

$$\chi^2_{спост} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \sum \frac{n_i^2 - 2n_i \cdot n_i' + (n_i')^2}{n_i'} = \sum (\frac{n_i^2}{n_i'} - 2n_i + n_i') = \sum \frac{n_i^2}{n_i} -$$

$$-2\sum n_i + \sum n_i' = \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - 2n + n = (\sum n_i = n, \sum n_i' = n) = \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n$$

Отже,

$$\chi^2_{спост} = \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n. \tag{2.18}$$

2.7.2 Перевірка гіпотези про нормальний розподіл за критерієм Пірсона

Користуючись виведеною формулою, обчислимо χ^2, що спостерігається.

$$\chi^2_{спост} = \frac{2,5^2}{2,135} + \frac{3,5^2}{3,915} + \frac{7,5^2}{7,16} + \frac{10^2}{10,19} + \frac{11^2}{10,455} + \frac{7^2}{8,38} + \frac{4,5^2}{4,78} + \frac{4^2}{3,03} - 50 =$$

$$= 50,692 - 50 = 0,692$$

$$\chi^2_{спост} = 0,692.$$

Після цього вибираємо рівень значущості $\alpha = 0,05$, обчислимо число ступенів свободи $k = 8 - 3 = 5$. За таблицею критичних точок розподілу χ^2 на основі рівня значущості α і числа ступенів свободи $k = 8 - 3 = 5$, знаходимо критичну точку $\chi^2_{табл}(\alpha;k) = 11,1$. Оскільки $0,692 < 11,1$, то за критерієм згоди Пірсона робимо висновок, що гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності є правильною.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{0{,}055\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10{,}2345)^2}{0{,}00605}}.$$

2.7.3 Системи випадкових величин

Розглянемо дві випадкові величини X і Y, причому випадкова величина X приймає значення $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, випадкова величина Y – $y_1, y_2, y_3 \ldots, y_n$.

Означення. Функцією розподілу двох випадкових величин X і Y називають ймовірність того, що ці величини приймуть значення $X < x$, $Y < y$.

За означенням маємо

$$F(x,y)=P\left[(X<x, Y<y)\right]. \tag{2.19}$$

Пару випадкових величин можна зображати як точки на площині.

2.7.4 Кореляційна залежність. Коефіцієнт кореляції

Розглянемо систему двох випадкових величин X і Y.

Означення 1. Якщо кожному значенню однієї випадкової величини відповідає певний розподіл ймовірностей другої випадкової величини, то кажуть, що між випадковими величинами X і Y існує кореляційна залежність.

Можливі два випадки. Якщо X і Y незалежні випадкові величини, тоді за властивостями математичного сподівання $M(XY)=M(X)\cdot M(Y)$. Якщо X і Y залежні випадкові величини, то в загальному випадку $M(XY)\neq M(X)\cdot M(Y)$.

Означення 2. Коефіцієнтом кореляції випадкових величин X і Y називається безрозмірна величина

$$r(X,Y)=\frac{M(XY)-M(X)\cdot M(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}. \qquad (2.20)$$

Ця величина характеризує щільність зв'язку між випадковими величинами X і Y .

Властивості коефіцієнта кореляції

1. Абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиниці, тобто кореляційне відношення задовольняє подвійну нерівність: $0 \le r \le 1$

2. Очевидно, коли X і Y незалежні випадкові величини, то коефіцієнт кореляції $r(X,Y)=0$.

3. Якщо абсолютна величина коефіцієнта кореляції $|r|=1$, то між X і Y існує функціональна лінійна залежність $y=kx+b$.

4. Із зростанням абсолютної величини коефіцієнта кореляції лінійна кореляційна залежність стає більш тісною і якщо $|r|=1$ переходить у функціональну залежність.

Із наведених властивостей випливає зміст коефіцієнта кореляції: коефіцієнт кореляції характеризує лінійний зв'язок між кількісними ознаками у вибірці: чим ближче $|r|$ до 1, тим зв'язок сильніший; чим ближче $|r|$ до 0, тим зв'язок слабший.

5. Якщо r – додатне, то при зростанні X зростає і Y. Якщо $r<0$, то при зростанні X , Y – спадає.

Приклад

Два стрілки, незалежно один від одного роблять по 2 постріли, кожен по своїй мішені; X – кількість влучень першим стрілком, а Y – другим стрілком. Ймовірність влучення для першого стрілка $p_1=0,7$, для другого – $p_2=0,4$. Побудувати матрицю розподілу $P_{ij}(x,y)$ і закони розподілу X та Y , знайти коефіцієнт кореляції цих випадкових величин.

Розв'язування

1. Запишемо всі можливі значення пар

(x_i, y_j): $(0,1), (1,0), (2,0), (0,0), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2), (2,2)$.

2. Знайдемо ймовірності $P_{ij}(x,y)$:

$P_{00} = P\{x=0,\ y=0\} = q_1 q_2 = 0{,}3^2 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}0324;$

$P_{01} = P\{x=0,\ y=1\} = q_1^2 \cdot C_2^1 \cdot p_2^1 q_2^1 = 0{,}3^2 \cdot 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}0432;$

$P_{02} = P\{x=0,\ y=2\} = q_1^2 \cdot C_2^2 \cdot p_2^2 q_2^0 = 0{,}3^2 \cdot 1 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}0144;$

$P_{10} = P\{x=1,\ y=0\} = C_2^1 \cdot p_1^1 q_1^1 \cdot q_2^0 = 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}1512;$

$P_{11} = P\{x=1,\ y=1\} = C_2^1 \cdot p_1^1 q_1^1 \cdot C_2^1 \cdot p_2^1 q_2^1 = 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}2016;$

$P_{12} = P\{x=1,\ y=2\} = C_2^1 \cdot p_1^1 q_1^1 \cdot C_2^2 \cdot p_2^2 q_2^0 = 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 1 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^0 =$
$= 0{,}0672;$

$P_{20} = P\{x=2,\ y=0\} = C_2^2 \cdot p_1^2 q_1^0 \cdot q_2^2 = 1 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}1764;$

$P_{21} = P\{x=2,\ y=1\} = C_2^2 \cdot p_1^2 q_1^0 \cdot C_2^1 \cdot p_2^1 q_2^1 = 1 \cdot 0{,}7^2 \cdot 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}2352;$

$P_{22} = P\{x=2,\ y=2\} = C_2^2 \cdot p_1^2 q_1^0 \cdot C_2^2 \cdot p_2^2 q_2^0 = 1 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}0784$.

Побудуємо матрицю розподілу $P_{ij}(x,y)$.

Y \ X	0	1	2
0	0,0324	0,0432	0,0144
1	0,1512	0,2016	0,0672
2	0,1764	0,2352	0,0784

3. Знайдемо закони розподілу для випадкових величини X і Y.

$P_{x_1} = 0{,}0324 + 0{,}0432 + 0{,}0144 = 0{,}9;$ $P_{y_1} = 0{,}0324 + 0{,}1512 + 0{,}1764 = 0{,}36;$

$P_{x_2} = 0{,}1512 + 0{,}2016 + 0{,}0672 = 0{,}42;$ $P_{y_2} = 0{,}0432 + 0{,}2016 + 0{,}2352 = 0{,}48;$

$P_{x_3} = 0{,}1764 + 0{,}2352 + 0{,}0784 = 0{,}49;$ $P_{y_3} = 0{,}0144 + 0{,}0672 + 0{,}0784 = 0{,}16.$

Запишемо закон розподілу випадкової величини X.

X	x_1	x_2	x_3
	0	1	2
p_i	0,09	0,42	0,49

Аналогічно запишемо закон розподілу для випадкової величини Y.

Y	y_1	y_2	y_3
	0	1	2
p_j	0,36	0,48	0,16

4. Коефіцієнт кореляції знайдемо за формулою

$$r(X,Y)=\frac{M(XY)-M(X)\cdot M(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}.$$

$$M(X)=0\cdot 0{,}09+1\cdot 0{,}42+2\cdot 0{,}49=1{,}4,$$
$$M(Y)=0\cdot 0{,}36+1\cdot 0{,}48+2\cdot 0{,}16=0{,}8,$$
$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=0{,}42+4\cdot 0{,}49-1{,}4^2=0{,}42,$$
$$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2=0{,}48+4\cdot 0{,}16-0{,}8^2=0{,}48,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}42},$$
$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{0{,}48}.$$

Математичне сподівання добутку обчислюється за формулою

$$M(X,Y)=\sum\sum x_i y_j p_{ij}.$$

$$M(X,Y)=0\cdot 0\cdot 0{,}0324+0\cdot 1\cdot 0{,}0432+0\cdot 2\cdot 0{,}0144+1\cdot 0\cdot 0{,}1512+$$
$$+1\cdot 1\cdot 0{,}2016+1\cdot 2\cdot 0{,}0672+2\cdot 0\cdot 0{,}1764+2\cdot 1\cdot 0{,}2352+2\cdot 2\cdot 0{,}0784=1{,}12,$$

$$r(X,Y)=\frac{1{,}12-1{,}4\cdot 0{,}8}{\sqrt{0{,}48}\cdot\sqrt{0{,}42}}=\frac{0}{0{,}44}=0.$$

Оскільки $r=0$, то випадкова величина X з величиною Y не зв'язана лінійною кореляційною залежністю.

2.7.5 Функції лінійної регресії

Розглянемо систему двох випадкових величин X і Y. Поставимо умову, що $X=x$, після чого ми одержимо одну випадкову величину Y. Щільність цієї випадкової величини називають умовною щільністю $\varphi_x(Y)$. Знаючи щільність можна знайти умовне математичне сподівання

$$M_x(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\varphi(y)dy. \qquad (2.21)$$

Кожному значенню x буде відповідати своє умовне математичне сподівання, а це означає, що одержане умовне математичне сподівання є функцією від x, тобто

$$M_x(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \varphi_x(y)dy = f(x). \tag{2.22}$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається функцією регресії Y на X. Графік цієї функції називають лінією регресії Y на X.

Аналогічно якщо зафіксувати випадкову величину Y, поклавши $Y = y$, то ми одержимо, що щільність випадкової величини $\varphi_y(X)$, тоді умовне математичне сподівання

$$M_y(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi_y(x)dy. \tag{2.23}$$

Кожному значенню y буде відповідати своє умовне математичне сподівання, а це означає, що одержане умовне математичне сподівання є функцією від y, тобто

$$M_y(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi_y(x)dx = g(y). \tag{2.24}$$

Функція $x = g(y)$ називається функцією регресії X на Y, а її графік називається лінією регресії.

Знаючи функцію регресії можна записати рівняння прямих, які визначають лінійну залежність між випадковими величинами X і Y.

Для оцінювання параметрів лінійної функції $y = a_0 + a_1 x$ використовують метод найменших квадратів:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{cases} \tag{2.25}$$

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

3.1 Завдання з теорії ймовірностей

Завдання 3.1.1

Підкидають дві монети. Знайти ймовірність того, що:

1) на двох монетах з'явиться "герб";
2) хоча б на одній монеті з'явиться "герб";
3) на жодній монеті не з'явиться "герб".

Підкидають три монети. Знайти ймовірність того, що:

4) на всіх монетах з'явиться "герб";
5) хоча б на одній монеті з'явиться "герб";
6) тільки на двох монетах з'явиться "герб";
7) тільки на одній монеті з'явиться "герб";
8) на жодній монеті не з'явиться "герб".

Підкидають чотири монети. Знайти ймовірність того, що:

9) на всіх монетах з'явиться "герб";
10) хоча б на одній монеті з'явиться "герб";
11) тільки на одній монеті з'явиться "герб";
12) тільки на двох монетах з'явиться "герб";
13) тільки на трьох монетах з'явиться "герб";
14) на жодній монеті не з'явиться "герб".

Підкидають гральну кістку. Знайти ймовірність того, що на верхній грані з'явиться:

15) парне число;
16) "1" або "6".

Підкидають дві гральні кості. Знайти ймовірність того, що на верхніх гранях з'являться такі числа:

17) тільки парні;
18) одне парне, друге непарне;

19) сума яких парна;

20) сума яких непарна;

21) сума яких більша , ніж їх добуток;

22) сума яких менша шести;

23) сума яких більша восьми.

Підкидають три гральні кості. Знайти ймовірність того, що на верхніх гранях з'являться такі числа:

24) тільки парні;

25) одне парне, решта непарні;

26) сума яких парна;

27) сума яких непарна;

28) числа всі однакові;

29) числа всі різні;

30) сума яких ділиться на чотири;

31) сума яких ділиться на п'ять.

Завдання 3.1.2

0. Студент знає 45 із 60 питань програми. У кожному білеті 3 питання. Знайти ймовірність того, що студент знає лише два питання.

1. У ящику 3 червоні та 7 білих куль. Виймають одну кулю, а потім другу. Знайти ймовірність того, що перша куля буде червоною, а друга білою.

2. Чому дорівнює ймовірність того, що при киданні трьох кубиків, 6 очок випаде хоча б на одному кубику ?

3. Ймовірність того, що деталь з першого набору деталей стандартна, дорівнює 0,8, а з другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь, взята з навмання вибраного набору, буде стандартною.

4. У наборі є десять карток білого, червоного, зеленого і жовтого кольорів. На картках кожного кольору написані цифри від 1 до 10. Навмання взято одну картку. Знайти ймовірність того, що вона буде біла і матиме одну з цифр 5, 6 або 7.

5. У першому ящику деталей першого сорту 30%, а в другому ящику – 40%. Виймають по одній деталі з кожного ящика. Знайти ймовірність того, що обидві деталі будуть першого сорту.

6. Серед 15 білетів лотереї 10 виграшних. Яка ймовірність виграти, маючи 5 лотерейних квитків?

7. Ймовірність попадання в ціль при кожному пострілі з двох із п'яти гвинтівок дорівнює 0,8, а в останніх трьох дорівнює 0,9. Знайти ймовірність попадання в ціль при одному пострілі з навмання взятої гвинтівки.

8. В урні 30 куль: 20 білих і 10 чорних. Вийняли підряд 4 кулі, причому кожна куля повертається в урну перед вийманням наступної і кулі в урні перемішуються. Яка ймовірність того, що серед вийнятих чотирьох куль будуть дві білі кулі?

9. У двох ящиках знаходяться деталі: у першому 10 (з них 3 стандартні), у другому 15 (з них 6 – стандартні). Знайти ймовірність того, що дві деталі, вийняті по одній з кожного ящика, будуть стандартними.

10. У телевізійній студії 3 камери. Для кожної з них ймовірність того, що в даний момент вона включена, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний момент включена хоча б одна камера.

11. Бібліотечка складається з 10 різних книг, причому 5 книг коштують по 4 гривні кожна, 3 книги – по 1 гривні і дві книги по 3 гривні. Знайти ймовірність того, що взяті навмання дві книги коштують 5 гривен.

12. Завод виготовляє 95 % деталей стандартних, причому з них 86 % першого сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться першого сорту.

13. Ймовірність того, що стрілець при одному пострілі набере 10 очок, дорівнює 0,1; ймовірність набрати 9 очок дорівнює 0,3; ймовірність вибити 8 або менше очок, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілець виб'є не менше 9 очок.

14. Є чотири урни. У першій урні 1 біла і 1 чорна кулі, у другій урні 2 білі і 3 чорні кулі, у третій урні 3 білі і 5 чорних куль, у четвертій урні 4 білі і 7 чорних куль. З навмання вибраної урни виймають кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

15. Гральний кубик кидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що 2 рази випаде шістка і 3 рази не шістка.

16. 15 куль, серед яких 10 білих і 5 червоних, навмання розклали на групи по 3. Знайти ймовірність того, що в кожній групі буде по дві білі кулі.

17. В одній коробці міститься 20 радіоламп, із яких 16 стандартних, у другій коробці 12 радіоламп, із яких 10 стандартних. Із другої коробки навмання переклали радіолампу в першу коробку. Знайти ймовірність того, що радіолампа, навмання взята з першої коробки, буде стандартною.

18. Є три класи. У одному з них половина відмінників, в другому відмінники становлять третю частину учнів класу, а в третьому відмінників немає. З цих класів навмання вибрали один клас, а з нього навмання викликали учня, який виявився відмінником. Знайти ймовірність того, що при цьому було вибрано: а) перший клас; б) другий клас; в) третій клас.

19. Кожний з двох танків зробив по одному пострілу по деякому об'єкту. Ймовірність влучення в ціль першим танком 0,8, а другим 0,4. Об'єкт знищений одним попаданням. Знайти ймовірність того, що це зробив перший танк.

20. Яка ймовірність витягнути з колоди карт (52 карти) підряд 13 карт однієї масті?

21. На полиці навмання розставляють 10 томів енциклопедії. Знайти ймовірність того, що перший, другий і третій томи не виявляться поставленими поруч у порядку зростання номерів.

22. Серед 350 механізмів 160 першого типу, 110 – другого типу і 80 – третього типу. Ймовірність браку серед механізмів першого типу 0,01, серед механізмів другого типу – 0,02 , серед механізмів третього типу – 0,04. Взяли один механізм. Знайти ймовірність того, що він справний.

23. Є 12 пластмасових кульок білого, зеленого і червоного кольорів, причому у кожному кольорі по 4 кульки з номерами від 1 до 4. Є 12 металевих кульок тих же кольорів і з тими ж номерами. Є також 12 дерев'яних кульок білого і червоного кольорів з номерами від 1 до 6. Навмання вибирається одна кулька. Знайти ймовірність то-

го, що вона не металева, не зелена і на ній стоїть номер, не менший від двох.

24. Зроблено три послідовні постріли по мішені. Ймовірність влучення при першому пострілі 0,3, при другому – 0,6, при третьому – 0,8. При одному влученні ймовірність ураження цілі 0,4, при двох влученнях – 0,7, при трьох – 1,0. Визначити ймовірність ураження цілі при трьох пострілах.

25. Відомо, що 90 % деталей стандартні. Контролюючий пристрій стандартну деталь може визнати придатною для використання з ймовірністю 0,95, а нестандартну – з ймовірністю 0,15. Знайти ймовірність того, що деталь, визнана придатною для використання, стандартна.

26. Учень навмання відповідає на поставлене запитання доти, поки відповідь виявиться правильною. При цьому ймовірність того, що перша відповідь буде правильною, дорівнює 0,5, а кожного наступного разу ймовірність правильної відповіді збільшується на 0,1. Знайти ймовірність того, що правильну відповідь учень знайде не більше ніж за 3 спроби.

27. По цілі проводиться 5 незалежних пострілів. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,2. Для ураження цілі достатньо трьох влучень. Знайти ймовірність знищення цілі.

28. У клубі 17 перших місць виділили 17 кращим учням випускних класів, серед яких Іра К. і Боря С. Якщо ці місця займають довільно, то яка ймовірність того, що Іра і Боря сидітимуть поруч ?

29. У класі 25 учнів, серед яких 20 вчаться на " 7 " і " 10 ". Знайти ймовірність того, що серед 10 навмання вибраних учнів буде вісім таких, що вчаться на " 7 " і " 10 ".

30. Є дві урни, в кожній з яких по 6 білих і по 4 червоних кульок. З кожної урни навмання вибирається по одній кульці, а потім з цих двох кульок навмання береться одна. Знайти ймовірність того, що остання кулька біла.

Завдання 3.1.3

Слово складене з карток, на кожній з яких написана одна буква. Картки перемішують і виймають по одній навмання, не повертаючи назад. Знайти ймовірність того, що букви будуть вийняті у порядку заданого слова.

Варіанти

0. Математика
1. Програма
2. Програмування
3. Менеджмент
4. Підручник
5. Статистика
6. Подія
7. Випадковість
8. Ймовірність
9. Алгоритм
10. Підпрограма
11. Процедура
12. Напівпровідник
13. Транзистор
14. Інтеграл
15. Калькулятор
16. Економіка
17. Маркетинг
18. Бухгалтер
19. Фінансист
20. Кредитування
21. Процент
22. Бізнесмен
23. Відносини
24. Аудитор
25. Аудиторія
26. Прибуток
27. Знання
28. Здобуток
29. Коридор
30. Визнання

Завдання 3.1.4

Як і в попередній задачі знайти ймовірність події, коли заданим словом є ваше прізвище і ваше ім'я.

Завдання 3.1.5

У скриньці міститься К чорних і Н білих куль. Навмання виймають М куль. Знайти ймовірність того, що серед них буде :

а) Р білих куль;

б) менше ніж Р, білих куль;

в) хоча б одна біла куля.

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
К	5	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7	6	6	4	8	5
Н	6	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4	6	5	6	6	6
М	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5
Р	2	3	2	3	2	2	3	4	2	3	2	3	3	3	2	4
Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
К	7	5	6	5	6	6	6	8	6	5	6	5	6	6	4	
Н	4	7	5	7	7	8	5	6	7	7	7	7	8	7	7	
М	5	4	5	5	5	5	5	5	4	4	6	5	5	5	4	
Р	3	3	2	4	3	4	4	3	3	2	3	3	3	2	2	

Завдання 3.1.6

Пристрій складається із трьох незалежно працюючих елементів, які працюють протягом часу T безвідмовно з ймовірностями p_1, p_2, p_3. Знайти ймовірність того, що за час T вийде із ладу: 1) тільки один елемент; 2) хоча б один елемент. Значення параметрів обчислити за формулами: $k = |14{,}9 - V| : 100$; $p_1 = 1 - k$, $p_2 = 0{,}9 - k$, $p_3 = 0{,}85 - k$.

Завдання 3.1.7

У першій скриньці міститься К білих і L чорних куль, а у другій – М білих і N чорних куль. З першої скриньки навмання виймають Р куль, а з другої – Q куль. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль:

а) всі кулі одного кольору;

б) лише три білі кулі;

в) хоча б одна біла куля.

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	6	5	4	7	5	5	5	5	6	6	6	6	3	3	3	3
L	4	5	5	3	4	6	7	8	3	5	6	7	8	7	6	5
M	5	4	5	6	7	7	6	7	5	5	5	5	5	6	6	6
N	7	8	8	3	4	3	4	5	6	3	5	4	7	4	5	6
P	3	2	2	3	1	3	2	4	3	2	4	2	2	3	1	4
Q	2	2	3	1	4	2	2	1	3	2	1	3	3	3	4	1
Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
K	3	5	4	4	4	4	4	4	4	7	7	7	7	7	7	
L	4	3	9	8	7	6	5	4	3	2	4	5	6	7	8	
M	6	4	7	7	8	7	7	7	7	4	8	4	4	4	8	
N	7	9	3	4	3	5	6	7	8	8	5	6	7	4	5	
P	2	2	3	2	4	2	3	3	1	4	3	2	3	1	3	
Q	2	3	3	3	1	2	2	3	4	1	3	2	2	4	3	

Завдання 3.1.8

У скриньці міститься K чорних і білих куль, до яких додають L білих куль. Після цього з скриньки навмання виймають M куль. Знайти ймовірність того, що всі вийняті кулі білі.

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	4	3	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3
L	2	4	3	2	4	4	4	3	3	3	4	4	4	4	4	4
M	3	4	4	3	4	2	3	2	3	4	2	3	4	5	2	3
Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
K	3	3	3	3	3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
L	4	5	5	5	5	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	
M	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	

Завдання 3.1.9

У одній скриньці міститься K білих і L чорних куль, а в другій - M білих і N чорних куль. З першої скриньки навмання виймають P куль і кладуть у другу скриньку. Після цього з другої скриньки також навмання виймають R куль. Знайти ймовірність того, що всі кулі, вийняті з другої скриньки, білі.

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6
L	6	5	4	3	2	3	4	5	6	7	8	8	7	6	5	4
M	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	3	3	3	3
N	8	7	6	5	4	3	5	4	6	7	8	9	3	4	5	6
P	3	2	3	2	3	3	4	2	3	2	3	3	4	3	4	4
R	4	3	3	4	4	2	3	4	3	4	3	4	3	2	3	2
Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
K	6	6	3	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	
L	3	2	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7	
M	3	3	6	6	6	6	6	6	6	2	2	2	2	2	2	
N	7	8	8	7	6	5	4	3	2	8	6	5	4	3	2	
P	3	3	2	2	3	3	2	3	3	2	2	3	3	2	3	
R	3	4	4	3	3	4	5	2	3	3	2	2	4	2	4	

Завдання 3.1.10

В піраміді стоять R гвинтівок, із них L з оптичним прицілом. Стрілець, стріляючи із гвинтівки з оптичним прицілом, може влучити в мішень з ймовірністю p_1, а стрілець із гвинтівки без оптичного прицілу – з ймовірністю p_2. Знайти ймовірність того, що стрілець влучить в мішень, стріляючи із навмання взятої гвинтівки:

$$k = |14 - V|,\ p_1 = 0{,}95 - \frac{k}{100}, p_2 = 0{,}6 - \frac{k}{100},\ R = 5 + k$$

$$L = \begin{cases} 3, & V \le 14, \\ 4, & V > 14. \end{cases}$$

Завдання 3.1.11

В монтажному цеху до пристрою приєднують електродвигун. Електродвигуни постачаються трьома заводами. На складі є електродвигуни цих заводів відповідно в кількості M_1, M_2, M_3 штук, які можуть безвідмовно працювати до кінця гарантійного строку з ймовірностями, відповідно p_1, p_2, p_3. Робітник бере випадково один електродвигун і монтує його до пристрою. Знайти ймовірність того, що вмонтований і працюючи безвідмовно до кінців гарантійного строку електродвигун, поставлений відповідно першим, другим і третім заводами постачальниками.

$$k=|14-V|,\ p_1=0{,}99-\frac{k}{100},\ p_2=0{,}9-\frac{k}{100},\ p_3=0{,}85-\frac{k}{100},$$

$$M_1=5+k,\quad M_2=20-k,\quad M_3=25-k.$$

Завдання 3.1.12

У кожному із n незалежних випробувань подія A відбувається з постійною ймовірністю p. Обчислити всі ймовірності p_k, $k=0,1,2,...,n$, де k – частота події A. Побудувати графік ймовірностей p_k. Знайти найімовірнішу частоту. Значення параметрів n і p обчислити за формулами:

$$n=\begin{cases}11, & V\le 10\\ 10, & 10<V\le 20\\ 9, & V>20\end{cases},$$

$$p=0{,}3+\frac{V}{100}.$$

Завдання 3.1.13

У кожному із n незалежних випробувань подія A відбувається з постійною ймовірністю p. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться :

а) точно M разів;

б) менше ніж M і більше ніж L разів;

в) більше ніж M разів.

$$n=700+V\cdot 10,\qquad p=0{,}35+\frac{V}{50},$$

$$M=270+V\cdot 10,\qquad L=M-40-V.$$

Завдання 3.1.14

У кожному із n незалежних випробувань подія A відбувається з постійною ймовірністю p. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться :

а) точно G разів;

б) точно L разів;

б) менше ніж M і більше ніж F разів;

в) більше ніж R разів.

$$n = 500 + V \cdot 10, \qquad p = 0,4 + \frac{V}{100}, \qquad G = 220 + V \cdot 10, \qquad L = G - 30,$$

$$M = G + 20 + V, \quad F = G - 40 + V, \qquad R = G + 15.$$

Завдання 3.1.15

На телефонній станції неправильне з'єднання відбувається з ймовірністю p. Знайти ймовірність того, що серед n з'єднань має місце:

а) точно G неправильних з'єднань;

б) менше ніж L неправильних з'єднань;

в) більше ніж M неправильних з'єднань.

$$D = V \cdot 100 + 200, \quad p = \frac{1}{D}, \qquad S = остача\,(\frac{V}{7}) + 1,$$

$$n = S \cdot D, \qquad G = остача\,(\frac{V}{5}) + 1,$$

$$L = остача\,(\frac{V}{6}) + 3, \qquad M = остача\,(\frac{V}{8}) + 2..$$

Завдання 3.1.16

Випадкова величина X задана рядом розподілу

X	x_1	x_2	x_3	x_4
p	p_1	p_2	p_3	p_4

Знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік. Обчислити для X її математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і моду M_0.

$$R = остача\,(\frac{V}{4}) + 2,$$

$$x_1 = V + 3, \quad x_2 = x_1 + R, \quad x_3 = x_2 + R, \quad x_4 = x_3 + 2R,$$

$$p_1 = \frac{1}{R+5}, \quad p_2 = \frac{1}{R+3}, \quad p_3 = \frac{41 + 33R + R^2 - R^3}{(R+3)(R+5)(8-R)}, \quad p_4 = \frac{1}{8-R}.$$

Завдання 3.1.17

Випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{k} & при \quad 0 < x \le R, \\ 0 & при \quad x > R. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу F(x) випадкової величини X. Побудувати графіки функцій f(x) і F(X). Обчислити для X математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду M_0 і медіану M_e.

$$k = V + 2, \; R = \sqrt{2k}, \; де \;\; V \; - \; номер \;\; варіанта.$$

Завдання 3.1.18

Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;\; при \;\; x \le 0, \\ \dfrac{x}{k} \;\; при \;\; 0 < x \le k, \\ 1 \;\; при \;\; x > k. \end{cases}$$

Знайти функцію щільності $f(x)$ випадкової величини X. Побудувати графіки функцій f(x) і F(X). Обчислити для X математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду M_0 і медіану M_e.

$k = V + 3,$ *де* V *– номер варіанта.*

Завдання 3.1.19

Задана випадкова величина X розподілена нормально із математичним сподіванням a і середнім квадратичним відхиленням σ. Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина приймає значення:

а) в інтервалі $[c,b]$;

б) менше K;

в) більше L;

г) відрізняється від свого середнього значення за абсолютною величиною не більше ніж на ε.

$$a = V,\quad \sigma = остача\,(\frac{V}{8}) + 2,\quad S = остача\,(\frac{V}{5}) + 1,$$

$$c = V - S,\quad b = V + 2S,\quad k = V - S,\quad L = V + 2S,\quad \varepsilon = S.$$

3.2 Завдання для контрольної перевірки

1. Із 1000 ламп 400 належать до першої партії , 300 до другої, а решта до третьої. В першій партії 8%, в другій – 5%, в третій – 4% бракованих ламп. Навмання вибирається одна лампа. Знайти ймовірність того, що вибрана лампа – бракована.

2. У першій урні 9 білих і 1 чорна куля, в другій 2 білих і 6 чорних. З першої урни в другу переклали 3 кулі , потім з другої урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що вона – біла.

3. В альбомі 18 чистих і 10 погашених марок. З них навмання виймаються три марки (серед яких можуть бути як чисті, так і погашені), погашаються і повертаються в альбом. Після цього знов навмання виймаються три марки. Знайти ймовірність того, що ці марки – чисті.

4. До магазину надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає – 60%, другий – 30%, третій – 10%. Серед виробів першого заводу – 85%, другого – 70%, третього – 80% першосортних. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб є першосортним і випущений третім заводом.

5. Відомо, що 92% випущених заводом виробів, відповідає стандартам. Спрощена схема контролю визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,96 і нестандартну з ймовірністю 0,06. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, не відповідає стандартові.

6. Три стрільці роблять по одному пострілу в одну і ту ж саму мішень. Ймовірність влучень у мішень при одному пострілі для першого – 0,6, для другого – 0,4, для третьго-0,8. Яка ймовірність того, що другий стрілець промахнувся, якщо після пострілу в мішені виявилося два патрони.

7. У двох партіях 71% і 47% доброякісних виробів, відповідно. Навмання вибирають по 1 виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них :

а) хоча б один бракований виріб;

б) два браковані вироби;

в) один бракований виріб.

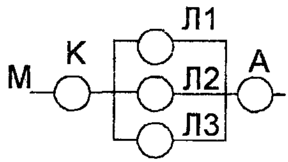
8. Імовірність того, що ціль вражена при одному пострілі першим стрільцем – 0,61, другим – 0,55. Перший зробив 2, а другий – 3 постріли. Знайти ймовірність того, що ціль не вражена.

9. Два стрільці роблять по одному пострілу у мішень. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця – 0,7 для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі в мішень влучить тільки один із стрільців.

10. При увімкненні запалювання двигун починає працювати з імовірністю р. Знайти ймовірність того, що двигун почне працювати при другому увімкненні запалювання.

11. Ділянка електричного кола має вигляд:

Елемент	К1	К2	Л1	Л2	Л3
Імовірність	0,6	0.5	0,4	0,7	0,9



Вихід з ладу за час Т різних елементів – незалежні події, які мають імовірності (табл.). Знайти ймовірність розриву кола за зазначений проміжок часу Т.

3.3 Завдання з математичної статистики

Завдання 3.3.1

За даними вибірки скласти найпростіший статистичний розподіл, побудувати полігон і гістограму, знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік, обчислити числові характеристики вибірки – середнє арифметичне $\bar{x}$, дисперсію $\bar{S}^2$, стандартне відхилення s, моду M_0 і медіану M_e.

1.

3	6	4	1	0	5	1	1	3	1	4	2	2	3	2	3	0	4	5	1	3	1	5	2	2
0	2	2	3	2	2	3	6	2	1	3	1	1	5	4	2	3	2	4	3	2	4	2	1	3

2.

3	5	3	5	7	5	4	5	4	4	3	7	6	2	7	6	1	6	4	6	9	4	5	2	4
2	5	1	2	1	6	4	5	7	6	3	5	5	3	2	3	1	4	2	5	4	1	5	3	5

3.

0	1	2	1	0	3	1	2	0	2	1	0	1	0	2	4	3	2	1	1	0	5	4	0	3
4	4	1	1	3	4	0	0	2	2	1	2	1	3	2	3	2	4	3	4	2	5	2	5	2

4.

3	5	5	3	3	3	4	3	1	3	1	3	0	0	3	0	0	2	5	3	6	3	7	5	4
3	6	1	3	1	3	2	5	1	4	1	3	1	3	1	0	2	5	4	0	2	6	4	3	1

5.

0	1	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	2	1	1	0
0	2	0	1	0	2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2	0	2	1	0	0	0	1	0	1

6.

4	1	10	11	5	5	10	5	6	4	7	8	7	4	8	6	7	8	3	9	5	1	3	5	7
8	2	11	10	8	5	10	7	9	7	7	4	7	6	4	6	7	3	8	7	3	6	8	2	5

7.

2	0	3	1	0	2	4	0	1	2	0	2	1	0	2	3	1	3	2	4	3	4	5	1	4
3	1	7	0	1	0	1	3	3	3	6	3	3	4	5	2	4	3	4	3	2	1	2	1	2

8.

8	6	7	5	2	6	4	7	4	5	6	8	4	7	4	7	10	6	7	11	4	6	11	5	8
8	8	9	7	1	2	7	5	7	5	4	3	6	7	9	5	11	1	6	10	5	4	10	6	5

9.

2	0	3	1	2	0	2	0	2	3	0	2	0	3	0	1	3	2	1	0	4	3	2	4	2
1	3	0	2	0	2	3	2	3	1	0	2	0	3	0	4	0	4	3	4	3	3	2	1	2

10.

3	5	4	8	2	5	2	9	4	6	4	8	6	4	9	5	7	3	4	2	3	5	3	4	8
5	3	4	3	6	5	4	2	6	2	2	4	8	1	5	6	5	2	6	3	3	9	3	5	5

11.

4	5	6	1	1	6	2	2	8	4	5	5	4	2	3	4	7	5	4	7	5	3	3	4	4
3	8	4	3	5	5	2	1	4	3	5	1	4	3	3	3	5	1	0	2	2	1	7	5	2

12.

6	7	8	7	3	7	3	3	7	9	5	7	4	7	2	7	4	5	1	5	6	0	4	5	9
8	6	5	2	1	0	3	4	8	4	0	6	8	3	5	0	6	7	3	1	8	5	8	6	7

13.

1	0	1	1	1	2	0	2	2	1	0	0	0	1	0	3	1	2	1	1	1	0	0	1	1
2	0	3	4	2	3	4	1	1	0	0	1	1	3	0	2	0	3	2	1	1	1	2	2	1

14.

6	6	5	6	11	8	7	4	4	8	3	2	3	9	7	6	9	5	8	8	7	8	6	9	9
6	3	5	7	10	9	3	8	6	8	9	9	3	8	4	4	6	9	2	8	7	7	7	8	4

15.

2	0	1	2	0	0	2	2	1	1	0	0	0	0	1	2	0	4	0	0	1	0	4	1	1
0	2	1	0	0	2	1	1	1	0	1	1	3	1	2	2	1	3	0	2	4	3	0	2	1

16.

5	4	4	4	5	0	3	7	2	2	3	0	5	6	3	4	6	1	2	5	3	2	3	6	6
2	3	1	7	2	3	2	2	5	2	0	2	2	6	1	3	2	6	7	7	2	0	4	6	1

17.

4	8	4	11	7	7	5	8	9	6	7	4	6	5	8	4	7	4	8	5	6	5	7	4	8
7	4	3	10	2	8	7	5	0	4	7	6	3	5	7	2	6	6	5	8	8	3	8	6	6

18.

5	3	3	3	5	4	5	3	3	4	2	1	5	2	4	0	2	2	3	2	1	3	3	1	2
4	6	6	4	1	2	4	3	1	5	2	4	3	6	8	4	5	1	1	2	0	2	3	3	2

19.

2	2	0	1	3	0	3	3	3	3	1	0	1	0	0	1	4	1	0	0	0	2	0	1	1
0	1	2	1	2	2	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	2	1	0	0	1	1	1	0	3

20.

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	2	5	3	6	6	5	5	3	5	6	7
8	5	2	5	4	5	6	6	3	6	6	5	3	4	5	9	7	5	9	3	3	4	9	2	3

21.

3	5	1	4	5	3	4	1	7	5	4	7	3	3	6	7	4	5	7	4	0	6	6	9	1
6	5	2	4	1	3	2	3	5	5	3	6	7	5	4	6	1	2	1	5	2	4	5	2	4

22.

2	3	1	0	2	3	2	3	1	3	0	4	2	2	0	1	5	2	3	2	5	2	1	3	4
2	3	2	3	1	2	1	2	2	0	0	4	3	1	1	4	4	2	1	3	4	2	3	2	3

23.

7	4	5	1	3	4	6	7	6	5	4	5	1	4	0	6	3	4	5	1	5	3	5	4	1
3	4	3	2	0	4	5	2	0	1	3	1	3	1	4	1	5	2	3	3	1	3	1	6	3

24.

1	0	0	0	1	1	2	1	0	0	0	1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	2	0
2	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	2	0	1	1	1	0	0	0	0	1	2	1

25.

3	0	4	3	6	4	9	8	9	6	3	6	3	4	7	3	5	7	8	2	8	6	3	7	8
3	7	6	4	6	7	7	4	7	9	5	8	7	5	7	6	5	3	8	3	5	8	7	6	8

26.

5	1	4	1	0	3	2	3	4	3	1	4	2	1	2	1	2	4	2	4	3	2	3	4	3
4	2	3	4	3	3	6	3	3	2	1	7	1	0	1	1	3	4	3	4	2	3	1	2	1

27.

5	6	7	4	0	4	6	4	3	6	1	7	6	1	5	7	5	9	0	6	9	7	6	3	0
4	5	7	2	1	7	9	0	8	0	8	5	8	3	1	6	8	5	6	5	3	9	7	5	8

28.

4	3	2	4	2	4	1	0	2	4	2	3	2	1	2	3	2	3	2	0	1	3	0	1	2
0	3	0	4	1	4	3	0	3	1	3	1	0	3	4	3	4	4	0	3	0	2	0	1	3

29.

5	1	4	1	7	4	5	3	4	0	4	3	9	4	6	4	7	7	5	5	3	9	5	3	3
6	2	5	5	7	3	2	1	5	6	7	7	8	3	6	2	4	2	8	4	7	5	8	7	5

30.

1	4	5	2	7	5	3	7	4	1	7	2	3	2	2	6	2	9	3	3	4	3	2	4	8
6	4	5	4	1	4	4	5	4	8	1	1	2	6	2	5	7	1	2	2	0	1	5	3	3

Завдання 3.3.2

За даними вибірки скласти:

а) інтервальний розподіл, знайти частоти і відносні частоти, побудувати гістограму і полігон частот, скласти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік, обчислити числові характеристики вибірки – $\bar{x}$, $\bar{S}^2$, $\bar{s}$, M_o, M_e;

б) побудувати наближено графік щільності імовірності випадкової величини, побудувати графік статистичної функції розподілу;

в) визначити оцінку середньої величини у генеральній сукупності; оцінку, яку слід прийняти за дисперсію генеральної сукупності; довірчий інтервал для генеральної середньої за даною довірчою імовірністю $\beta = 0{,}95$ двома способами: припускаючи розподіл випадкової величини близьким до нормального; використовуючи розподіл Стьюдента;

г) перевірити статистичну гіпотезу про нормальність вибіркового розподілу, використовуючи критерій згоди Пірсона.

1.

126,145	126,123	126,109	126,135	126,147
126,151	126,143	126,137	126,158	126,175
126,127	126,167	126,159	126,118	126,152
126,134	126,117	126,172	126,137	126,203
126,172	126,137	126,203	126,215	126,142
126,105	126,179	126,151	126,096	126,113
126,180	126,067	126,169	126,137	126,132
126,162	126,131	126,087	126,173	126,093
126,215	126,142	126,139	126,144	126,138
126,139	126,144	126,138	126,172	126,137

2.

126,9	127,3	126,3	126,8	126,8
126,9	126,9	126,6	127,4	126,7
127,1	126,4	127,0	126,7	126,8
127,3	126,9	126,9	126,8	127,6
127,6	127,1	127,2	126,3	127,2
127,1	126,6	126,9	127,1	127,9
127,2	127,2	127,3	126,7	127,4
127,3	127,8	126,1	127,7	126,9
126,8	126,6	128,0	126,9	127,2
126,7	126,9	126,9	127,2	126,9

3.

0,5792	0,5784	0,5798	0,5782	0,5795
0,5800	0,5760	0,5777	0,5768	0,5775
0,5797	0,5796	0,5799	0,5779	0,5796
0,5804	0,5777	0,5818	0,5803	0,5785
0,5794	0,5797	0,5887	0,5807	0,5817
0,5783	0,5795	0,5789	0,5792	0,5788
0,5775	0,5805	0,5801	0,5808	0,5814
0,5793	0,5803	0,5781	0,5793	0,5803
0,5786	0,5828	0,5776	0,5799	0,5797
0,5782	0,5785	0,5791	0,5794	0,5784

4.

0,3622	0,3633	0,3625	0,3601	0,3605
0,3671	0,3541	0,3687	0,3654	0,3673
0,3641	0,3608	0,3672	0,3621	0,3718
0,3585	0,3647	0,3618	0,3683	0,3685
0,3623	0,3705	0,3652	0,3580	0,3645
0,3635	0,3675	0,3648	0,3679	0,3615
0,3604	0,3654	0,3677	0,3671	0,3652
0,3682	0,3689	0,3657	0,3632	0,3593
0,3695	0,3590	0,3682	0,3635	0,3605
0,3645	0,3618	0,3611	0,3648	0,3619

5.

7,634	7,645	7,654	7,692	7,648
7,587	7,583	7,692	7,746	7,725
7,673	7,688	7,718	7,732	7,679
7,734	7,684	7,684	7,731	7,658
7,773	7,674	7,679	7,635	7,687
7,669	7,678	7,607	7,594	7,685
7,712	7,639	7,558	7,636	7,573
7,624	7,618	7,651	7,683	7,714
7,593	7,645	7,602	7,613	7,688
7,691	7,615	7,634	7,631	7,634

6.

20,3	15,3	24,1	20,5	23,5
22,1	21,2	20,7	21,1	25,9
21,6	21,8	17,7	19,8	20,5
23,2	23,7	20,3	20,5	21,5
16,8	22,1	16,8	20,3	18,3
19,7	23,6	21,8	17,8	21,8
24,2	24,3	18,3	17,3	22,3
18,5	18,4	22,0	20,1	19,4
17,4	21,3	24,2	20,1	19,5
22,3	21,9	18,8	22,1	23,1

7.

1,26	1,37	1,10	1,23	1,50
1,05	1,25	1,05	1,25	1,20
1,16	1,15	1,45	1,33	1,46
1,25	1,05	1,32	1,30	1,15
1,49	1,03	1,15	1,25	1,40
1,32	1,08	1,19	1,45	1,37
1,20	1,33	1,30	1,08	1,25
1,06	1,44	1,25	1,00	1,20
1,20	1,26	1,12	1,38	1,33
1,30	1,25	1,37	1,10	1,16

8.

0,7415	0,7403	0,7418	0,7412	0,7397
0,7440	0,7356	0,7449	0,7450	0,7458
0,7435	0,7425	0,7447	0,7423	0,7426
0,7413	0,7391	0,7453	0,7398	0,7430
0,7452	0,7448	0,7431	0,7429	0,7453
0,7396	0,7429	0,7394	0,7427	0,7419
0,7420	0,7431	0,7376	0,7285	0,7443
0,7408	0,7423	0,7411	0,7408	0,7384
0,7434	0,7409	0,7377	0,7493	0,7468
0,7433	0,7442	0,7471	0,7459	0,7464

9.

1,9622	1,9633	1,9625	1,9601	1,9641
1,9671	1,9541	1,9687	1,9654	1,9673
1,9641	1,9608	1,9572	1,9621	1,9718
1,9685	1,9647	1,9618	1,9683	1,9685
1,9623	1,9705	1,9652	1,9580	1,9645
1,9635	1,9675	1,9648	1,9579	1,9615
1,9604	1,9654	1,9671	1,9677	1,9652
1,9682	1,9689	1,9657	1,9632	1,9593
1,9695	1,9590	1,9682	1,9635	1,9605
1,9645	1,9618	1,9611	1,9648	1,9619

10.

0,0145	0,0123	0,0109	0,0135	0,0147
0,0151	0,0143	0,0137	0,0158	0,0175
0,0127	0,0167	0,0159	0,0118	0,0152
0,0134	0,0117	0,0172	0,0137	0,0203
0,0129	0,0135	0,0193	0,0116	0,0195
0,0105	0,0179	0,0151	0,0113	0,0096
0,0180	0,0067	0,0169	0,0137	0,0132
0,0162	0,0131	0,0084	0,0173	0,0092
0,0215	0,0142	0,0139	0,0114	0,0138
0,0147	0,0134	0,0154	0,0199	0,0178

11.

80,5284	80,5307	80,5315	80,5320	80,5327
80,5291	80,5308	80,5315	80,5321	80,5330
80,5295	80,5309	80,5316	80,5355	80,5321
80,5300	80,5312	80,5317	80,5325	80,5357
80,5304	80,5313	80,5319	80,5326	80,5342
80,5287	80,5308	80,5315	80,5320	80,5328
80,5293	80,5308	80,5310	80,5321	80,5332
80,5297	80,5309	80,5317	80,5324	80,5356
80,5300	80,5312	80,5318	80,5326	80,5338
80,5305	80,5314	80,5310	80,5327	80,5399

12.

5,792	5,784	5,798	5,782	5,795
5,800	5,788	5,814	5,772	5,768
5,797	5,798	5,799	5,779	5,796
5,804	5,777	5,818	5,803	5,785
5,797	5,807	5,776	5,737	5,812
5,783	5,795	5,789	5,792	5,788
5,775	5,773	5,805	5,801	5,808
5,793	5,803	5,781	5,793	5,803
5,786	5,828	5,799	5,812	5,794
5,782	5,785	5,791	5,794	5,784

13.

1,721	1,733	1,731	1,743	1,731
1,739	1,731	1,727	1,733	1,734
1,742	1,731	1,748	1,731	1,728
1,736	1,731	1,728	1,731	1,739
1,728	1,731	1,733	1,751	1,742
1,730	1,724	1,734	1,730	1,736
1,731	1,730	1,740	1,728	1,737
1,734	1,733	1,730	1,727	1,730
1,730	1,727	1,730	1,736	1,731
1,730	1,745	1,746	1,764	1,737

14.

3,302	3,307	3,465	3,343	3,375
3,241	3,315	3,308	3,318	3,367
3,402	3,342	3,287	3,306	3,345
3,332	3,305	3,274	3,304	3,363
3,271	3,304	3,458	3,312	3,371
3,337	3,302	3,434	3,279	3,318
3,308	3,426	3,335	3,482	3,512
3,317	3,367	3,311	3,280	3,319
3,318	3,281	3,312	3,396	3,342
3,213	3,332	3,319	3,427	3,286

15.

33,375	33,343	33,465	33,307	33,302
33,367	33,308	33,315	33,308	33,241
33,345	33,306	33,287	33,342	33,402
33,363	33,274	33,305	33,274	33,332
33,371	33,312	33,458	33,304	33,271
33,318	33,279	33,434	33,392	33,337
33,512	33,482	33,335	33,426	33,318
33,319	33,280	33,311	33,367	33,317
33,342	33,395	33,312	33,281	33,318
33,286	33,427	33,319	33,332	33,213

16.

28,586	28,631	28,680	28,580	28,585
28,625	28,601	28,639	28,576	28,574
28,600	28,592	28,570	28,639	28,616
28,619	28,543	28,599	28,602	28,586
28,654	28,615	28,631	28,545	28,604
28,561	28,557	28,598	28,618	28,677
28,607	28,627	28,611	28,605	28,635
28,650	28,655	28,608	28,591	28,660
28,581	28,641	28,612	28,624	28,618
28,613	28,564	28,647	28,659	28,651

17.

39,4	43,6	41,5	42,3	40,3
40,5	41,8	43,2	40,9	40,5
41,7	39,1	38,1	38,0	42,3
42,8	41,3	41,2	40,2	43,8
40,8	39,1	43,2	41,8	39,5
41,2	42,1	37,8	41,1	42,7
42,4	43,7	41,0	41,9	41,8
40,3	42,8	43,7	44,0	40,6
44,0	42,4	38,4	39,1	38,9
41,4	41,7	40,7	37,9	41,6

18.

84,3368	84,3335	84,3386	84,3371	84,3372
84,3323	84,3240	84,3296	84,3423	84,3429
84,3285	84,3413	84,3442	84,3317	84,3402
84,3461	84,3290	84,3367	84,3369	84,3475
84,3397	84,3392	84,3385	84,3471	84,3438
84,3403	84,3371	84,3419	84,3357	84,3351
84,3371	84,3365	84,3381	84,3379	84,3374
84,3385	84,3379	84,3354	84,3503	84,3391
84,3417	84,3463	84,3435	84,3471	84,3373
84,3515	84,3414	84,3348	84,3396	84,3345

19.

6,0	10,5	9,0	6,0	5,5
3,0	4,2	3,5	7,5	2,2
8,5	5,5	1,0	5,0	1,0
0,0	8,5	6,5	2,0	6,0
5,0	6,0	10,0	6,0	6,0
1,5	9,0	14,0	0,5	12,0
15,0	4,8	4,5	3,0	4,5
3,5	7,0	8,0	8,0	8,0
1,2	11,0	4,0	18,0	7,0
12,0	8,5	4,0	5,0	10,0

20.

208	125	70	266	201
130	144	101	82	169
190	189	204	250	92
115	177	171	156	197
143	276	110	185	153
205	138	80	75	102
183	157	122	180	168
70	220	160	150	276
191	184	169	186	280
158	199	144	280	162

21.

124,36	124,41	124,39	124,43	124,31
124,49	124,43	124,42	124,33	124,29
124,56	124,48	124,54	124,35	124,29
124,29	124,28	124,33	124,39	124,42
124,23	124,36	124,39	124,41	124,29
124,36	124,42	124,33	124,29	124,22
124,39	124,21	124,20	124,22	124,32
124,32	124,21	124,20	124,37	124,41
124,32	124,44	124,46	124,34	124,31
124,28	124,45	124,48	124,50	124,34

22.

12,8	14,3	12,9	14,1	15,2
12,9	14,2	14,4	15,3	13,0
14,2	15,3	13,9	14,6	13,7
13,9	15,0	15,4	13,6	13,9
13,0	15,2	16,0	14,5	15,4
16,8	14,7	15,0	14,0	13,1
13,9	14,8	15,2	16,1	13,8
15,3	16,4	16,2	15,8	14,7
15,7	14,8	13,9	14,3	15,1
15,1	13,2	13,3	14,6	14,8

23.

0,716	0,732	0,694	0,701	0,722
0,741	0,746	0,759	0,742	0,743
0,728	0,741	0,759	0,711	0,719
0,728	0,739	0,714	0,724	0,752
0,710	0,730	0,750	0,742	0,731
0,736	0,725	0,721	0,745	0,760
0,729	0,752	0,756	0,719	0,731
0,725	0,746	0,751	0,720	0,736
0,731	0,745	0,753	0,7170	0,748
0,722	0,735	0,749	0,738	0,758

24.

124,39	124,46	124,52	124,47	124,32
124,49	124,43	124,42	124,33	124,29
124,58	124,46	124,55	124,36	124,27
124,29	124,28	124,33	124,39	124,42
124,23	124,36	124,49	124,46	124,29
124,35	124,41	124,39	124,28	124,23
124,39	124,21	124,20	124,22	124,32
124,32	124,23	124,25	124,37	124,44
124,32	124,44	124,46	124,34	124,31
124,28	124,43	124,48	124,50	124,33

25.

84,3379	84,3335	84,3381	84,3369	84,3321
84,3325	84,3241	84,3296	84,3423	84,3429
84,3284	84,3413	84,3442	84,3317	84,3402
84,3461	84,3290	84,3367	84,3369	84,3475
84,3395	84,3392	84,3386	84,3471	84,3438
84,3403	84,3373	84,3418	84,3355	84,3357
84,3371	84,3365	84,3381	84,3378	84,3371
84,3383	84,3379	84,3354	84,3502	84,3412
84,3417	84,3463	84,3435	84,3471	84,3373
84,3515	84,3415	84,3349	84,3396	84,3343

26.

5,798	5,788	5,797	5,783	5,796
5,802	5,787	5,814	5,779	5,768
5,797	5,798	5,799	5,779	5,796
5,808	5,773	5,818	5,803	5,785
5,796	5,807	5,777	5,737	5,812
5,787	5,793	5,792	5,796	5,789
5,776	5,773	5,805	5,801	5,807
5,793	5,803	5,781	5,793	5,803
5,785	5,828	5,799	5,812	5,795
5,782	5,784	5,792	5,794	5,786

27.

9,798	9,784	9,798	9,782	9,795
9,806	9,788	9,814	9,772	9,768
9,797	9,798	9,799	9,779	9,796
9,804	9,777	9,818	9,803	9,785
9,797	9,807	9,776	9,737	9,812
9,783	9,795	9,789	9,792	9,789
9,775	9,773	9,805	9,801	9,808
9,793	9,803	9,781	9,793	9,803
9,786	9,828	9,799	9,812	9,794
9,782	9,785	9,791	9,794	9,785

28.

0,4628	0,4633	0,4625	0,4622	0,4612
0,4671	0,4541	0,4687	0,4654	0,4673
0,4641	0,4608	0,4672	0,4621	0,4718
0,4585	0,4647	0,4618	0,4683	0,4685
0,4623	0,4703	0,4652	0,4580	0,4645
0,4635	0,4675	0,4648	0,4679	0,4619
0,4604	0,4654	0,4677	0,4671	0,4652
0,4682	0,4689	0,4657	0,4632	0,4593
0,4695	0,4590	0,4682	0,4635	0,4605
0,4644	0,4618	0,4617	0,4648	0,4639

29.

0,7149	0,7128	0,7139	0,7137	0,7148
0,7151	0,7143	0,7137	0,7158	0,7175
0,7127	0,7167	0,7159	0,7118	0,7152
0,7134	0,7117	0,7172	0,7137	0,7203
0,7129	0,7135	0,7193	0,7116	0,7195
0,7115	0,7179	0,7151	0,7116	0,7140
0,7180	0,7067	0,7169	0,7137	0,7132
0,7162	0,7131	0,7084	0,7173	0,7132
0,7215	0,7142	0,7139	0,7114	0,7138
0,7147	0,7134	0,7154	0,7199	0,7178

30.

3,0149	3,0129	3,0109	3,0137	3,0148
3,0151	3,0143	3,0137	3,0158	3,0175
3,0127	3,0167	3,0159	3,0118	3,0152
3,0134	3,0117	3,0172	3,0137	3,0203
3,0131	3,0135	3,0193	3,0126	3,0195
3,0180	3,0177	3,0152	3,0114	3,0099
3,0180	3,0067	3,0169	3,0137	3,0132
3,0162	3,0131	3,0084	3,0173	3,0092
3,0215	3,0142	3,0139	3,0114	3,0138
3,0149	3,0134	3,0155	3,0199	3,0179

4 КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Таблиця 4.1 – Варіанти завдань

Варіант	Задачі									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	09	13	25	3	16	22	01	05	09
2	04	07	05	18	16	07	24	20	18	10
3	24	29	17	12	06	24	01	22	10	01
4	08	12	26	29	19	04	20	03	03	05
5	20	01	25	01	09	11	01	25	29	08
6	07	07	07	15	08	01	13	11	05	03
7	01	19	09	10	20	15	23	01	03	02
8	03	03	23	06	23	20	05	30	01	04
9	09	29	27	19	15	06	06	27	17	05
10	20	03	11	04	02	30	22	29	01	09
11	11	03	01	08	05	15	05	03	07	02
12	05	08	03	06	06	25	26	07	16	03
13	28	07	17	13	07	04	13	02	17	10
14	03	27	27	21	03	08	05	11	16	03
15	12	17	03	08	30	13	19	04	16	10
16	04	07	04	09	25	06	03	13	08	08
17	05	21	16	26	14	15	27	18	27	03
18	19	30	08	27	02	26	19	30	01	09
19	02	05	05	22	17	08	06	27	24	05
20	13	13	06	15	18	05	02	24	14	03
21	20	25	22	17	22	28	16	22	18	06
22	03	22	08	07	14	05	20	23	10	09
23	30	23	30	17	07	11	19	02	27	02
24	08	22	22	06	02	14	30	26	12	10
25	23	10	29	26	04	11	10	20	01	09
26	09	20	12	24	24	18	02	08	26	06
27	25	16	15	13	01	06	08	29	24	07
28	23	19	16	05	18	28	27	24	25	03
29	26	20	04	09	28	05	21	08	20	05
30	09	29	07	09	05	27	17	16	02	08
31	22	10	22	12	01	30	12	09	24	07
32	20	20	01	09	21	20	06	26	19	04
33	24	29	17	12	06	24	01	22	10	01

Продовження таблиці 4.1

Варі-ант	Задачі									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
34	29	19	26	10	02	22	22	26	04	03
35	06	06	11	13	08	30	17	17	22	06
36	27	30	17	06	04	01	16	30	18	09
37	03	18	10	09	14	23	12	23	04	06
38	05	04	09	20	15	17	01	25	29	10
39	28	12	30	08	17	20	03	13	11	01
40	17	05	22	02	16	15	22	22	09	06
41	14	23	05	01	18	07	03	27	26	07
42	13	25	21	05	05	09	18	02	23	04
43	06	29	27	07	28	06	22	08	27	08
44	09	12	09	05	14	14	10	01	12	04
45	16	21	30	22	23	03	20	35	08	10
46	20	11	11	16	08	01	29	16	12	05
47	21	03	07	15	25	14	30	18	25	07
48	06	28	21	09	30	15	16	05	01	01
49	16	02	02	15	12	14	04	17	15	10
50	24	08	08	16	26	04	14	04	07	03
51	08	17	13	09	23	06	07	28	12	05
52	04	15	14	11	05	03	10	03	19	02
53	10	11	04	19	24	16	26	03	04	05
54	25	16	22	08	21	26	06	02	28	06
55	20	01	25	01	09	11	01	25	29	08
56	07	30	28	09	26	23	25	30	03	07
57	01	07	26	22	30	02	18	25	25	03
58	20	27	04	02	29	27	13	29	09	10
59	23	23	02	05	03	24	20	01	30	05
60	15	09	29	06	03	22	03	15	22	04
61	02	12	17	07	08	23	30	10	05	02
62	05	04	23	03	07	02	08	06	21	07
63	06	17	10	30	27	26	23	19	27	08
64	07	07	06	25	17	20	09	04	09	02
65	03	05	09	14	07	08	13	08	30	04
66	30	04	18	02	21	29	23	06	11	07
67	25	02	18	17	30	24	26	13	07	02
68	14	29	09	18	15	08	09	21	21	04
69	02	17	22	22	05	16	22	08	02	06
70	17	23	10	14	25	09	20	09	08	01
71	18	10	07	07	22	26	29	26	13	08
72	22	06	01	02	23	26	06	27	14	07
73	14	09	09	04	22	17	09	22	04	05

Продовження таблиці 4.1

Варі-ант	Задачі									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
74	07	18	23	24	10	30	12	15	22	01
75	02	01	30	01	23	07	04	17	28	03
76	04	15	05	18	09	03	17	10	26	02
77	24	20	09	28	23	30	27	20	05	08
78	01	06	05	05	13	25	05	19	06	04
79	18	30	02	18	26	14	04	06	07	05
80	28	15	29	10	09	02	02	30	03	02
81	05	25	17	03	22	17	29	18	30	07
82	01	04	23	29	20	18	17	04	25	06
83	21	08	10	05	29	22	23	12	14	01
84	02	13	06	11	06	24	10	05	02	05
85	08	06	09	01	19	07	06	23	17	08
86	04	15	18	17	23	02	05	25	18	04
87	14	26	23	21	30	04	19	29	22	03
88	03	03	01	06	23	20	05	30	01	04
89	12	08	15	27	05	13	18	12	14	08
90	17	05	20	16	09	05	09	21	07	05
91	16	28	06	15	05	21	22	11	02	10
92	11	24	22	02	04	26	10	03	14	06
93	05	08	05	07	02	25	18	28	12	03
94	28	20	26	08	25	07	10	02	04	05
95	14	07	13	17	17	09	03	08	24	07
96	23	01	05	09	30	23	29	17	01	06
97	08	03	19	06	27	27	05	15	18	05
98	25	09	03	14	29	01	17	11	28	07
99	30	20	27	03	03	11	01	16	05	09
00	06	16		01	07	29	17	30	03	03

4.1 Завдання з теорії ймовірностей

4.1.1 Класичне та статистичне означення ймовірності. Відносна частота. Геометричні ймовірності

1. У групі 25 студентів: 15 дівчат і 10 юнаків. Відповідати викликали двох студентів. Яка ймовірність того, що обидва студенти – юнаки?

2. На склад надійшло 20 халатів, серед яких 10 синіх. Навмання відібрано 6 халатів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних халатів 2 синіх.

3. Із 20 карбюраторів, які надійшли на склад, навмання для перевірки відбирають 3 карбюратори. Серед 20 карбюраторів 5 зіпсованих. Яка ймовірність того, що серед відібраних:

а) усі три карбюратори справні;

б) лише зіпсовані;

в) один зіпсований і два справні карбюратори?

4. У бригаді 25 чоловік, серед яких 10 хлопців. Розігрується п'ять лотерейних квитків. Знайти ймовірність того, серед власників квитків буде два хлопці.

5. На ремонтний завод надійшло 15 тракторів. Відомо, що в шести з них треба замінити двигуни. Майстер з ремонту навмання відбирає 5 тракторів. Яка ймовірність того, що у двох з них треба замінити двигуни?

6. У групі 14 студентів, серед яких 8 відмінників. У будівельний загін записалося 12 студентів. Знайти ймовірність того, що серед студентів, які записалися, 7 відмінників.

7. Для проведення конкурсу механізаторів 16 учасників розбито на дві групи (по 8 учасників у кожній) за жеребкуванням. Знайти ймовірність того, що два найкваліфікованіших знаючих механізатори виявляться:

а) у різних групах;

б) в одній групі.

8. У кошику 8 червоних і 22 білих яблука. Яка ймовірність того, що взяті навмання одночасно два яблука будуть білими?

9. У партії з 12 виробів є 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що з 5 взятих навмання виробів буде 3 стандартних.

10. У цех для ремонту поступило 15 сівалок. Відомо, що 6 з них потребують загального регулювання. Майстер бере навмання перших 5 сівалок. Яка ймовірність того, що дві з них потребують загального регулювання?

11. На заводі дану деталь виготовляють на станках трьох типів: станки 1-го типу дають 10% загального випуску деталей; станки 2-го типу – 30%, станки 3-го типу – 60%. Процент браку для станків 1-го типу – 3%; для станків 2-го типу – 1%; для станків 3-го типу – 0,5. За день виготовлено 1000 деталей, які на складі виявились випадково змішаними. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться бракованою?

12. На складання бурякозбиральних комбайнів поступило 2500 деталей з одного заводу і 7500 деталей з другого. Перший завод дає 0,2% браку, а другий – 0,3% браку. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь із нерозсортованої продукції заводів виявиться бракованою.

13. Серед 17 працівників колективу, з яких 8 дівчат, розігрується 7 квитків, причому кожен може виграти лише один квиток. Яка ймовірність того, що серед власників квитків виявиться 4 дівчини?

14. На складі є 12 виробів, які мало відрізняються один від одного. З них чотири 1-го, по два 2, 3 і 4-го сортів. Яка ймовірність того, що серед шести взятих одночасно виробів три виявляться 1-го сорту, два 2-го і один 3-го?

15. Яка ймовірність того, що навмання поставлена в кулю точка виявиться усередині вписаного в неї куба?

16. Яка ймовірність того, що навмання поставлена точка виявиться всередині вписаного в круг:

а) правильного трикутника;

б) квадрата;

в) правильного шестикутника?

17. У лотереї розігруються 1000 квитків. Серед них два виграші по 50 гривень, п'ять – по 25 гривень, десять – по 10 гривень, 25 – по 5 гривень і 50 - по 3 гривні. Ви купуєте один квиток. Знайти ймовірність:

а) виграшу не менше 25 гривень;

б) будь-якого виграшу.

18. Контролер, перевіряючи якість 500 ящиків черешень, встановив, що десять з них відносяться до другого сорту, решта – до першого. Визначити відносну частоту ящиків черешень першого сорту, другого сорту, а також суму цих частот.

19. У 25 екзаменаційних білетах по три питання, які не повторюються. Студент знав відповіді лише на 60 питань. Яка ймовірність того, що студент взяв білет з підготовленими ним питаннями?

20. У цеху брак становить в середньому 2% загального випуску виробів. Серед стандартних виробів першосортні становлять 98%. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб буде:

а) із числа виробів, які пройшли перевірку;

б) із загальної маси виготовленої продукції?

21. Кинули два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що випадуть різні числа.

22. На відрізку довжиною $L = 20$ см розміщено менший відрізок довжиною $l = 10$ см. Знайти ймовірність того, що точка, яку навмання поставили на більший відрізок, попаде також і на менший відрізок.

23. З 10 лотерейних квитків 2 виграшні. Визначити ймовірність того, що серед взятих навмання п'яти квитків:

а) один виграшний;

б) два виграшні;

в) принаймні один виграшний.

24. Дев'ять пасажирів розміщуються в трьох вагонах. Кожний пасажир вибирав вагон навмання. Яка ймовірність того, що:

а) в кожний вагон сяде по три пасажири;

б) в один вагон сяде чотири;

в) в другий – три, а в третій – два пасажири?

25. На полиці лежать десять різних книжок, причому п'ять книжок коштують по 4 гривні кожна, три книжки – по 1 гривні і дві книжки – по 3 гривні. Яка ймовірність того, що дві взяті навмання книжки разом коштують 5 гривень?

26. Площину поділено паралельними прямими, які знаходяться одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кинуто монету радіусом $r < a$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної з прямих.

27. При наборі телефонного номера абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи, що ці цифри непарні і різні. Знайти ймовірність того, що номер набрано правильно.

28. Всередині кола радіусом R розміщено менше коло радіусом r. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута в більше коло, попаде також і в мале коло.

29. В групі 12 студентів, з яких 7 відмінників. За списком навмання відібрано 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів п'ять відмінників.

30. Навмання взято два додатних числа x та y, кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy буде не більшим за 1, а дріб x/y не більшим за 2.

4.1.2 Теореми додавання і множення ймовірностей. Імовірність появи принаймні однієї події

1. Для сигналізації про аварію встановлено два сигналізатори, що працюють незалежно. Імовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,8, другий – 0,95. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює лише один сигналізатор.

2. Два мисливці стріляли у вовка. Імовірність влучення при одному пострілі для першого мисливця дорівнює 0,8, а для другого – 0,85. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі у вовка влучить лише один із стрільців.

3. Два орендарі підготували свої ділянки до сівби. Імовірність того, що перший засіє свою ділянку гречкою дорівнює 0,8, для другого орендаря ця ймовірність дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що один орендар засіє свою ділянку гречкою.

4. Контролер перевіряє зерно на вологість. Імовірність того, що зерно вологе, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених вантажних машин лише одна з вологим зерном.

5. У ящику 50 електричних ламп, з яких 2 нестандартні. Беремо навмання 3 лампи одночасно або послідовно без повернення. Яка ймовірність того, що всі три лампи нестандартні?

6. Токар обслуговує 3 верстати. Імовірність того, що впродовж години потребує налагодження перший верстат дорівнює 0,6; імовірність того, що потребує налагодження другий верстат – 0,8 і для третього – 0.7. Знай-

ти ймовірність того, що впродовж години принаймні один верстат потребуватиме налагодження.

7. На фермі користуються п'ятьма доїльними апаратами. Імовірність нормальної роботи першого апарата 0,95; другого – 0,9; третього – 0,85; четвертого – 0,82; п'ятого – 0,75. Яка ймовірність нормальної роботи всіх апаратів і яка ймовірність того, що жоден апарат не працюватиме нормально?

8. Два стрільці роблять по одному пострілу у ціль. Імовірність влучення у ціль першим стрільцем дорівнює 0,8, а ймовірність влучення у ціль другим стрільцем дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що у ціль буде влучено або першим, або другим стрільцем.

9. Імовірність встановлення у даній місцевості тривалого снігового покриття з листопада дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що в найближчі два роки в цій місцевості тривале снігове покриття з листопада не встановиться жодного разу.

10. Механік обслуговує три сівалки. Відомо, що ймовірність безперебійної роботи впродовж однієї доби після налагодження дорівнює для першої сівалки 0,7, для другої – 0,8 і для третьої – 0,9. Знайти ймовірність того, що за цей час лише одна сівалка зіпсується і потребуватиме втручання механіка.

11. У кошику 4 груші – 2 жовтих і 2 зелених. З кошика беремо підряд 2 груші. Визначити ймовірність того, що перша груша виявиться жовтою, а друга – зеленою. Обчислення ймовірностей зробити за двох припущень:

а) перша вийнята груша повертається в кошик, після чого груші змішуються;

б) перша вийнята груша в кошик не повертається.

12. Господарством послано автомашину за різними запчастинами до тракторів на чотири бази. Імовірність наявності потрібної запчастини на першій базі дорівнює 0,9, на другій – 0,95, на третій – 0,8, на четвертій – 0,6. Знайти ймовірність того, що лише на одній базі не виявиться потрібної запчастини.

13. Екзаменаційний білет містить три питання. Імовірності того, що студент дасть відповідь на перше і друге питання, однакові і дорівнюють 0,9, на третє – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент здав екзамен, якщо для цього необхідно відповісти:

а) на всі три питання;

б) в крайньому разі на два питання білета.

14. Чотири мисливці домовились стріляти по дичині в цілком визначеній послідовності. Наступний мисливець виконує постріл лише у випадку промаху попереднього. Імовірності влучення у ціль кожним із мисливців однакові і дорівнюють 0,8. Знайти ймовірність того, що буде зроблено:

а) один;

б) два;

в) три;

г) чотири постріли.

15. У механізм входять три однакові деталі. Робота механізму порушується, якщо при його складанні будуть встановлені всі деталі, більші або менші позначеного на кресленні розміру. У складальника залишилось 15 деталей, 4 з яких за розміром більші, решта – менші за потрібні. Знайти ймовірність ненормальної роботи першого складеного з цих деталей механізму, якщо складальник бере деталі навмання.

16. Імовірність виграшу на один лотерейний квиток дорівнює 1/5. Яка ймовірність того, що власник п'яти квитків виграє:

а) на всі п'ять;

б) ні на один;

в) принаймні на один квиток?

17. У мішку змішано тарілки, серед яких 40% білих, решта – голубі. Визначити ймовірність того, що вийняті навмання дві тарілки виявляться:

а) одного кольору;

б) різних кольорів.

18. Два стрибуни пробують взяти висоту 2м 20см. Нехай імовірність взяття висоти першим стрибуном дорівнює 0,8, а другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що висоту візьмуть: а) обидва; б) лише один; в) жоден не візьме.

19. Агроном перевірив 100 ящиків яблук, серед яких виявив 5 бракованих. 50 ящиків вивезли на базар. Знайти ймовірність того, що серед ящиків, які вивезли на базар, виявилось не більше одного бракованого.

20. У першій партії міститься 90 виробів першого і 10 виробів другого сорту. У другій партії 80 виробів першого і 20 виробів другого сорту. З кожної партії навмання беруть по одному виробу. Знайти ймовірність того, що: а) обидва вироби виявляться першого сорту; б) один виріб першого, а другий другого сорту; в) принаймні один виріб другого сорту; г) жодного виробу першого сорту.

21. На прополювання буряків вийшли дві жінки. Імовірність того, що перша жінка виконає норму дорівнює 0,9, для другої ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) обидві жінки виконають норму; б) жодна жінка не виконає норму.

22. Колективне господарство придбало автомобіль, трактор і комбайн. Імовірність того, що впродовж гарантійного терміну автомобіль не вийде з ладу дорівнює 0,9; для трактора і комбайна ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,8 і 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) лише одна із придбаних машин витримає гарантійний термін; б) лише дві машини витримають гарантійний термін; в) усі три машини витримають гарантійний термін; г) принаймні одна із придбаних машин витримає гарантійний термін.

23. На склад надійшло 12 мішків муки, з яких 8 вищого сорту. Завідувач складом навмання для перевірки взяв два мішки. Знайти ймовірність того, що мука в обох мішках вищого сорту.

24. Для преміювання робітниць профспілковий комітет закупив 10 вишневих і 5 білих шерстяних хусток. Три премійованих робітниці вибрали по одній хустці. Знайти ймовірність того, що всі вибрані хустки будуть вишневими.

25. Ймовірність, що абітурієнт академії стане студентом – 0,4. Якщо три абітурієнти вибираються навмання, то яка ймовірність, що:

а) усі три стануть студентами;

б) жодного не приймуть;

в) приймуть лише одного?

26. Студент оцінює ймовірність отримання оцінки "відмінно" в 0,2 і "добре" в 0,4. Яка ймовірність, що студент:

а) не отримає бала "відмінно";

б) не отримає бала "добре";

в) не отримає ні "відмінно", ні "добре"?

27. Кошик містить чотири м'ячі у зелені цятки, шість м'ячів у зелені смужки, вісім м'ячів у блакитні цятки і два м'ячі у блакитні смужки. Якщо вибрати навмання м'яч із кошика, то яка ймовірність, що м'яч буде:

а) зеленим чи у смужку;

б) в цятки;

в) блакитним чи в цятки?

28. У крамницю завезли 28 м'ясорубок і 32 чайники. Два відвідувачі вирішили зробити по одній покупці. Яка ймовірність того, що буде куплено:

а) дві м'ясорубки;

б) два чайники;

в) м'ясорубку і чайник?

29. Агенція оцінює стан кредиту, що визначає кредит особи як "відмінний", "добрий", "задовільний" і "поганий". Ймовірність того, що особа отримає відмінний рейтинг – 0,25, добрий – 0,3, задовільний – 0,3. Яка ймовірність того, що особа:

а) не матиме відмінного рейтингу;

б) не буде мати ні доброго, ні відмінного рейтингу;

в) матиме не більше ніж добрий рейтинг?

30. Ймовірність того, що ціна окремої акції зростатиме протягом ділового дня дорівнює 0,4. Якщо природа зміни ціни будь-якого дня є незалежною від того, що сталося попереднього дня (днів), то яка ймовірність того, що ціна буде: а) зростати чотири дні підряд; б) залишиться такою ж чи спадатиме три дні підряд; в) зростатиме два з трьох днів?

4.1.3 Формула повної ймовірності. Імовірність гіпотез. Формула Бейєса

1. У сільгосптехніку надійшли комбайни, які виготовлені на трьох заводах. Відомо, що на першому заводі з кожних 100 комбайнів випуска-

ють в середньому 90 без браку, на другому – 95, на третьому – 85. Комбайни цих заводів становлять відповідно 50, 30 і 20% усіх комбайнів. Знайти ймовірність придбання комбайна без браку.

2. На трьох автоматичних верстатах виготовляють однакові деталі. Відомо, що 30% продукції виготовляється на першому верстаті, 25% – на другому, 45% – на третьому. Імовірність виготовлення деталі, що відповідає стандарту, на першому верстаті дорівнює 0,99, на другому – 0,998 і на третьому – 0,98. Виготовлені впродовж дня на трьох верстатах непосортовані деталі надходять на склад. Визначити ймовірність того, що взята навмання деталь не відповідає стандарту.

3. У ящику 12 деталей, виготовлених на заводі №1, 20 деталей – на заводі №2 і 18 деталей – на заводі №3. Імовірність того, що деталь виготовлена на заводі №1 відмінної якості дорівнює 0,9, для деталей виготовлених на заводах 2 і 3, ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,6 і 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться відмінної якості.

4. Мінеральні добрива поступають з двох хімічних комбінатів на склад господарства, причому з першого комбінату поступає добрив в 2 рази більше, ніж з 2-го. Імовірність події, що міндобриво з першого комбінату задовольняє стандарт дорівнює 0,8, а відповідна ймовірність для другого комбінату дорівнює 0,9. Обчислити ймовірність події A – взяте для аналізу на складі господарства добриво задовольняє стандарт.

5. На склад завозять льон з фермерських господарств: з першого – 60%, з другого – 30% і з третього – 10%. У продукції першого господарства – 80% льону першого сорту, у продукції другого – 90% льону першого сорту, у продукції третього – 95% першого сорту. Для контролю взято волокна льону. Яка ймовірність того, що вони виявляться першого сорту?

6. У складальний цех надходять однотипні вироби з 4 цехів. Імовірності браку в кожному з цехів відповідно дорівнюють 0,04; 0,03; 0,06; 0,02. Перший цех постачає 30, другий – 20, третій – 50 і четвертий – 25 виробів. Яка ймовірність того, що взятий навмання виріб виявиться бракованим?

7. Мисливська бригада отримала 10 рушниць, з яких 7 пристріляних і 3 непристріляних. Імовірність влучення у ціль з пристріляної рушниці становить 0,8, а з непристріляної (за цих самих умов) – 0,4. Яка ймовірність того, що мисливець, який взяв навмання рушницю і зробив з неї постріл, влучить у ціль?

8. Нехай маємо 2 кошики: у першому 25 яблук, серед яких одне червоне і 24 жовтих, а в другому 15 яблук, серед яких одне червоне і 14 жовтих. З цих кошиків вибирається один і з нього навмання вибирається яблуко. Знайти ймовірність того, що це яблуко червоне.

9. На двох столах лежать зошити. На першому столі 50 зошитів, на другому 100 зошитів, причому на кожному столі є 25 зошитів у клітинку, решта – у лінійку. З першого столу навмання береться один зошит і перекладається на другий, після чого з другого столу навмання береться один зошит. Знайти ймовірність події A, яка полягає в тому, що цей останній зошит виявиться в клітинку.

10. Колгосп заготовив для посіву зерно жита в основному 1-го сорту з невеликими домішками 2-го, 3-го і 4-го сортів. Імовірність того, що навмання взята зернина виявиться 1-го сорту дорівнює 0,95, 2-го сорту – 0,05, 3-го сорту – 0,04, 4-го сорту – 0,02. Умовна ймовірність того, що з зерна жита 1-го сорту виросте колосок, в якому не менше 25 зерен, дорівнює 0,60, з зерна жита 2-го сорту – 0,20, з зерна 3-го сорту – 0,15, з зерна 4-го сорту – 0,10. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок матиме не менше 25 зерен.

11. Гостям принесли три підноси з грушами. На кожному підносі 12 груш: у першому 8 жовтих і 4 зелених груші, у другому – 6 жовтих і 6 зелених, у третьому 5 жовтих і 7 зелених. З вибраного навмання підноса взяли також навмання грушу. Яка ймовірність того, що ця груша жовта?

12. В одній коморі лежать шість мішків проса і чотири мішки гороху, в другій – три мішки проса і п'ять мішків гороху. З першої комори переклали у другу два мішки, після цього з другої взяли один мішок. Яка ймовірність того, що цей мішок виявився з просом?

13. Колектив спортсменів складається з 25 велосипедистів, 5 стрибунів і 20 мотоциклістів. Імовірність виконати норму 1-го розряду для велосипедиста становить 0,8; для стрибуна – 0,9; для мотоцикліста – 0,75. Знайти ймовірність того, що спортсмен, викликаний навмання, виконає норму 1-го розряду.

14. Два автомати виготовляють деталі, які надходять на загальний конвейєр. Імовірність виготовити деталь, яка не задовольняє стандарт, для першого автомата дорівнює 0,08, для другого – 0,12. Продуктивність другого автомата в три рази більша ніж першого. Знайти ймовірність того, що навмання взята з конвейєра деталь, не задовольнятиме стандарт.

15. Світильники виготовляють на чотирьох заводах. Перший завод виготовляє 25% загальної кількості світильників, другий – 15%, третій – 40%, четвертий – 20%. Продукція першого заводу становить 80% вищої якості, другого – 85%, третього – 90%, четвертого – 95%. У господарський магазин надходять світильники з усіх чотирьох заводів. Яка ймовірність того, що придбаний в магазині світильник, буде вищої якості?

16. В одній із трьох торбинок 6 білих і 4 червоних яблук, у другій – 7 білих і 3 червоних, а в третій – лише 8 білих. Навмання беремо одну з трьох торбинок і з неї знову навмання беремо одне яблуко. Воно виявилося

білим. Яка ймовірність того, що це яблуко взято з другої торбинки?

17. Імовірність влучення в кожному кидкові для трьох баскетболістів дорівнює відповідно 0,2; 0,4; 0,6. При одночасному киданні всіх трьох баскетболістів у три кошики мало місце одне влучення. Визначити ймовірність того, що влучив у кошик перший баскетболіст.

18. З 10 студентів, які прийшли на екзамен з математики, троє підготувалися відмінно, четверо – добре, двоє – задовільно, а один зовсім не готувався – думав, що все пам'ятає. У білетах 20 питань. Студенти, які відмінно підготувалися, можуть відповісти на всі 20 питань, добре – на 16 питань, задовільно – на 10 і ті, що не готувалися – на 5 питань. Кожен студент отримує навмання 3 питання. Яка ймовірність того, що навмання вибраний студент, відповість на всі питання білета?

19. Один з трьох спортсменів викликається на старт і робить два постріли. Імовірність влучення у ціль в одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,3, другим – 0,5 і третім – 0,8. У ціль не влучено. Знайти ймовірність того, що постріли виконано першим стрільцем.

20. На цукровому заводі буряки для перевірки норми цукристості надходять до двох контролерів. Імовірність попадання цукрових буряків до першого контролера дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Імовірність того, що буряки, які містять норму цукристості, буде визнано такими, що задовольняють нормативи, першим контролером, дорівнює 0,95, а другим – 0,93. Буряки, які містять норму цукристості, було визнано такими, що задовольняють нормативи. Яка ймовірність того, що ці буряки перевіряв перший контролер?

21. У рибалки є 3 улюблених місця ловлі риби. Ці місця він відвідує з однаковою ймовірністю. Імовірність того, що риба клюне в першому місці 1/3, у другому – 1/2, у третьому – 1/4. Відомо, що рибалка закидав вудочку

3 рази, але впіймав лише одну рибу. Яка ймовірність того, що він рибачив у першому з його улюблених місць?

22. Мандрівник може купити квиток в одній із трьох кас автобусного вокзалу. Імовірність того, що він звернеться до першої каси 1/2, до другої – 1/3, до третьої – 1/5 . Імовірності того, що квитків в касах уже немає, відповідно дорівнюють: у першій касі 1/5, у другій – 1/6, у третій – 1/8. Мандрівник звернувся до однієї із кас і одержав квиток. Визначити ймовірність того, що він звернувся до першої каси.

23. На поле вивезли три однакових на вигляд ящики з кавунами. В першому ящику 10 білих кавунів, у другому 5 білих і 5 зелених кавунів, у третьому – 10 зелених кавунів. Робітниця із вибраного навмання ящика взяла білий кавун. Обчислити ймовірність того, що кавун взято з першого ящика.

24. На підприємство надійшло 500 гайок. З них 100 виготовлені на заводі №1, 230 – на заводі №2, 170 – на заводі №3. Імовірність того, що гайка виявилась з дефектом, для заводу №1 дорівнює 0,04, для заводу №2 – 0,02 і для заводу №3 – 0,01. Взята навмання гайка виявилась з дефектом. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на заводі №2?

25. Дві з чотирьох незалежно працюючих ламп приладу відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перша та друга лампи, якщо ймовірності відмови першої, другої, третьої та четвертої ламп відповідно дорівнюють: $p_1 = 0{,}1,\ p_2 = 0{,}2,\ p_3 = 0{,}3,\ p_4 = 0{,}4.$

26. У цеху виготовляють овочеві консерви. Перша зміна виробляє 20%, друга – 45%, третя – 35% усіх консервів. У їх продукції брак складає відповідно 1%, 3%, 4%.

а) яка ймовірність того, що випадково вибрані консерви з дефектом?

б) випадково вибрані з продукції консерви виявились з дефектом. Яка ймовірність того, що вона була виготовлена першою, другою, третьою зміною?

27. Подія A може відбутися за умови появи однієї з несумісних подій (гіпотез) B_1, B_2, B_3, що утворюють повну групу подій. Після появи події A було переоцінено ймовірності гіпотез, тобто були знайдені умовні ймовірності цих гіпотез, причому виявилось, що $P_A(B_1)=0{,}6$ та $P_A(B_2)=0{,}3$. Чому дорівнює умовна ймовірність $P_A(B_3)$ гіпотези B_3?

28. В першій урні є 14 кульок, з яких 9 білих; в другій урні – 25 кульок, з яких 6 білих. З кожної урни навмання взято по одній кульці, а потім з цих двох кульок навмання взято одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька виявиться білою.

29. Три стрільці зробили по одному пострілу, причому дві кулі влучили в мішень. Знайти ймовірність того, що третій стрілець влучив у мішень, якщо ймовірність влучення в мішень першим, другим та третім стрільцями відповідно дорівнюють 0,6, 0,5 та 0,4.

30. Два з трьох незалежно працюючих елементи деякого приладу відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили другий та третій елементи, якщо ймовірності відмови першого, другого та третього елементів відповідно дорівнюють 0,1, 0,3, та 0,4.

4.1.4 Повторні випробування. Формула Бернуллі Найймовірніша кількість

1. Проростання зерен гречки становить 90%. Знайти ймовірність того, що з 5 посіяних зерен проростуть:

а) 4;

б) не менше 4;

в) менше 4.

2. У партії волокон конопель є довгі і короткі волокна. Імовірність того, що взяте волокно є коротким дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 12 взятих волокон коротких виявилось 4?

3. Посіяли 8 зерен соняшника з проростанням 80%. Яка ймовірність того, що проростуть принаймні 6?

4. На фермі народилося 5 телят. Знайти ймовірність того, що серед цих телят:

а) два бички;

б) не більше двох бичків;

в) більше двох бичків;

г) не менше двох і не більше трьох бичків.

Імовірність народження бичка дорівнює 0,51.

5. Проростання зерен проса дорівнює 95%. Відібрано 6 зерен. Яка ймовірність того, що проросте не менше 5 зерен?

6. У ставку коропи складають 85%. Знайти ймовірність того, що з 10 спійманих в цьому ставку риб виявиться:

а) 8 коропів;

б) не менше 8 коропів.

7 У квартирі 4 електролампочки. Для кожної лампочки ймовірність того, що вона залишиться справною впродовж року, дорівнює 5/6. Яка ймовірність того, що впродовж року доведеться замінити не менше половини лампочок?

8. Механік обслуговує чотири посівні агрегати. Імовірність того, що впродовж доби агрегат потребуватиме регулювання, дорівнює 1/3. Яка ймовірність того, що впродовж доби механікові доведеться регулювати 2 агрегати?

9. Проростання зерен даної рослини становить 70%. Знайти ймовірність того, що з п'яти посіяних зерен проростуть:

а) менше трьох;

б) більше трьох;

в) рівно три.

10. За даними статистики ймовірність народження дівчинки становить 0,482. Знайти ймовірність того, що серед 5 новонароджених:

а) три хлопчики;

б) не більше двох дівчаток.

11. Імовірність виграти на один квиток спортивної лотереї дорівнює 0,01. Яка ймовірність, маючи 10 квитків, виграти:

а) на два квитки;

б) на чотири квитки;

в) не менше ніж на чотири квитки;

г) ні на один квиток.

12. Проростання зерен кукурудзи становить 95%. Яка ймовірність того, що із 6 посіяних зерен проросте принаймні 4?

13. Імовірність проростання насіння редьки дорівнює 0,4. Визначити ймовірність того, що з 10 посіяних насінин проростуть не більше трьох.

14. На оранці поля працюють п'ять тракторів. Імовірність безвідмовної роботи впродовж зміни кожного трактора становить 0,8. Знайти ймовірність того, що за зміну відмовлять:

а) менше трьох тракторів;

б) більше трьох тракторів;

в) не менше трьох тракторів;

г) не більше трьох тракторів.

15. Частина яблук, які заражені хворобою, складає 40%. Випадково вибираємо 4 яблук. Знайти ймовірність того, що ми вибрали:

а) не більше двох заражених;

б) більше двох заражених.

16. Імовірність того, що верстат впродовж години потребуватиме уваги робітника, дорівнює 0,6. Припускаючи, що недоліки в роботі на верстатах незалежні, знайти ймовірність того, що впродовж години уваги робітника потребуватиме будь-який верстат із чотирьох, які обслуговуються ним.

17. Для нормальної роботи автопарку на лінії повинно бути не менше 8 автомашин, а їх є десять. Імовірність невиїзду кожної автомашини на лінію дорівнює 0,1. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку найближчого дня.

18. Нехай імовірність того, що покупцеві потрібне чоловіче взуття 42-го розміру дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що із шести покупців, у крайньому разі, не менше як двом потрібне взуття 42-го розміру.

19. Імовірність виготовлення стандартного виробу дорівнює 0,95. Яка ймовірність того, що серед десяти виробів не більше ніж один нестандартний?

20. При налагодженому технологічному процесі на фабриці виробляється 80% продукції вищої якості. Знайти найімовірніше число виробів вищої якості у партії із 250 виробів.

21. У результаті багатолітніх спостережень встановлено, що ймовірність випадання дощу 1 жовтня у даному селі дорівнює 1/7. Визначити найімовірніше число дощових днів 1 жовтня в цьому селі за 40 років.

22. Проростання гарбузових зерен становить в середньому 90%. Знайти найімовірніше число зерен, які проросли серед 40 посіяних.

23. Імовірність одягу з дефектами, який шиє швейний цех, дорівнює 0,05. Скільки костюмів повинно бути у партії, щоб найімовірніше число костюмів з дефектом дорівнювало 20?

24. Митниця дає офіційну оцінку того, що 20% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларує весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково відібрати 6 осіб, які повертаються з-за кордону, то яка ймовірність того, що не менше трьох з них не задекларує товар, який обкладається податком?

25. Служба податків визначила, що 50% всіх особистих декларацій про прибуток містить принаймні одну помилку. Якщо випадково відібрати десять декларацій, то яка ймовірність того, що рівно 6 із них будуть містити принаймні одну помилку?

26. У ящику 100 зелених і 80 червоних яблук. З ящика виймають навмання n яблук з поверненням кожного вийнятого яблука. Найімовірніше число появи зеленого яблука дорівнює 11. Знайти n.

27. У вузі 70% студентів отримує деякий вид стипендії. Якщо для перевірки випадково відібрано 10 студентів, то яка ймовірність того, що більше ніж 8 студентів мають стипендію? Яке найімовірніше число студентів мають стипендію?

28. Банк видає кредитні картки VISA. Було встановлено, що 40% усіх рахунків оплачуються повністю за їх допомогою. З попереднього року вибрали навмання 6 рахунків. Яка ймовірність, що 4 з них оплачені за допомогою карток VISA? не більше чотирьох?

29. Чому дорівнює ймовірність того, що грошовий автомат, при опусканні однієї монети, спрацює правильно, якщо найімовірніше число випадків правильної роботи автомата дорівнює 100 із 103 випадків?

30. Ймовірність правильної відповіді на одне запитання для студента, що складає залік – 0,8. Яка ймовірність, що студент знає 18 питань з 30? Яка ймовірність, що він складе залік, якщо для цього потрібно дати правильну відповідь не менше ніж на 70% питань?

4.1.5 Локальна та інтегральна теореми Лапласа. Формула Пуассона. Імовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності в незалежних випробуваннях

1. Імовірність появи події A у кожному з 825 випробувань дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що подія A у цих випробуваннях з'явиться рівно 315 разів.

2. Імовірність народження дівчинки за статистикою дорівнює 0,485. Яка ймовірність того, що серед 200 новонароджених хлопчиків буде 120?

3. В інкубатор закладено 750 яєць. Імовірність того, що з яйця вилупиться курочка, дорівнює 0,5. Яка ймовірність того, що вилупиться рівно 428 курочок?

4. Імовірність появи успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що у 330 випробуваннях успіх настане:

а) рівно 75 разів?

б) рівно 85 разів?

5. Серед зерен ячменю 0,8% бур'янів. Яка ймовірність того, що при випадковому відбиранні 1000 зернин, серед них виявиться 8 зерен бур'янів?

6. Імовірність появи бракованої деталі дорівнює 0,1%. Знайти ймовірність того, що серед 2000 випадково відібраних деталей виявиться, 5 бракованих?

7. На консервному заводі робітниця за зміну виготовляє 400 банок консервів. Імовірність того, що консерви виявляться першого сорту дорівнює 0,75. Яка ймовірність того, що консервів першого сорту буде рівно 330 штук?

8. Імовірність того, що покупцеві потрібне взуття 45-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з 500 покупців 50 потрібне взуття 45-го розміру.

9. Книгу видано тиражем 100000 екземплярів. Імовірність того, що у книзі є дефект дорівнює 0,01%. Знайти ймовірність того, що тираж містить 5 книг з дефектами.

10. Господарство відправило на базар 1000 доброякісних кавунів. Імовірність того, що у дорозі кавун пошкодиться дорівнює 0,04. Знайти ймовірність того, що на базар привезуть 5 непотрібних кавунів.

11. Імовірність виживання бактерій після радіоактивного опромінення дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що після опромінення з 1000 бактерій не менше 4 бактерій виживе.

12. Поява зерен бур'яну серед зерна пшениці дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що серед 3000 зерен пшениці число зерен бур'янів не буде перевищувати 3.

13. Імовірність народження теляти з якими-небудь захворюваннями дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що серед 400 новонароджених телят з якими-небудь захворюваннями буде четверо.

14. Проростання зерен цукрового буряку 75%. Яка ймовірність того, що з 100 посіяних зернин проросте від 72 до 84?

15. Імовірність ураження паршою яблунь в деякому кварталі дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з 100 яблунь число вражених паршою, буде:

а) не менше 15 і не більше 30;

б) не менше 15;

в) не більше 14?

16. Імовірність пошкодження колорадським жуком листя картоплі на деякій ділянці дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що серед 500 кущів картоплі, колорадським жуком буде пошкоджено в межах від 48 до 55 кущів?

17. Проростання зерна соняшника дорівнює 80%. Яка ймовірність того, що серед посіяних 100 зерен число тих, що проросте, становитиме від 72 до 84?

18. Проростання зерен сої дорівнює 90%. Яка ймовірність того, що серед посіяних 400 зерен сої число тих, що проросте, становитиме від 345 до 372?

19. Нехай імовірність того, що покупцеві потрібне жіноче взуття 37-го розміру, дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що серед 2000 покупців

таких виявиться:

а) не менше ніж 575;

б) від 570 до 630 включно.

20. При штампуванні деталей до автомобіля отримують в середньому 95% придатних. Знайти ймовірність того, що при перевірці 100 деталей, відносна частота деталей придатних відхилиться від імовірності появи придатної деталі (за абсолютною величиною) не більше ніж на 0,02.

21. Ймовірність браку виробництва складає 15%. Яке буде найімовірніше значення браку для 500 виготовлених деталей? Яка ймовірність того, що бракованих деталей буде від 150 до 300? рівно 220?

22. Імовірність попиту на жіночі чобітки на базарі становить 0,95. Яка ймовірність того, що серед 500 покупців відносна частота, бажаючих купити жіночі чобітки, відхилиться від імовірності 0,95 не більше ніж на 0,01 (за абсолютною величиною)?

23. Ймовірність своєчасної реалізації одиниці продукції дорівнює 0,8. Визначити ймовірність своєчасної реалізації не менше ніж 312 одиниць продукції з 400, що надійшли на реалізацію.

24. Ймовірність несплати податку для кожного з 400 підприємців дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що податки не сплатять не більше 37 підприємців?

25. Імовірність того, що із взятого навмання яйця вилупиться півник, дорівнює 0,5. Скільки треба взяти яєць, щоб з імовірністю 0,95 гарантувати відхилення відносної частоти появи півника від його імовірності менше за 0,002?

26. На фірмі є 500 працівників. Знайти ймовірність того, що у двох осіб день народження припаде на Новий рік. Вважати, що ймовірність народитися у фіксований день дорівнює 1/365.

27. У науково-дослідному інституті землеробства перевіряється проростання кукурудзи. Скільки зерен кукурудзи треба посіяти з імовірністю проростання 0,98, щоб відносна частота проростання відрізнялася від імовірності 0,94 менше, ніж на 0,01?

28. У селищі 2500 жителів. Кожен з них приблизно 6 разів на місяць їздить на поїзді до міста, який курсує один раз за добу, вибираючи дні поїздки випадково і незалежно від інших. Якої найменшої місткості повинен бути поїзд, щоб він був переповнений у середньому не більше одного разу за 100 днів?

29. Імовірність ураження пшениці борошняною росою дорівнює 0,2. Знайти межі відхилення відносної частоти враження пшениці борошняною росою від імовірності, яку можна гарантувати з надійністю 0,824, якщо обстежується 500 кущів пшениці.

30. Імовірність наявності клейковини у кожній пробі зерна дорівнює 0,4. Приймаючи, що подія, ймовірність якої 0,997 – вірогідна, знайти межі числа проб з наявністю клейковини серед 1000 проб.

4.1.6 Випадкові величини. Закони розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини. Числові характеристики дискретних випадкових величин

1–15. Дано закон розподілу випадкової величини X у вигляді таблиці (у першому рядку вказано можливі значення випадкової величини, у другому – ймовірності цих значень). Треба знайти:

а) математичне сподівання $M(X)$;

б) дисперсію $D(X)$;

в) середнє квадратичне відхилення.

Побудувати многокутник розділу і показати на ньому математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

1.

X	10	12	14	16	18
P	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1

2.

X	–10	0	10	20	30
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3.

X	110	120	130	140	150
P	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

4.

X	–5	–1	3	7	11
P	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

5.

X	2	3	4	5	6
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

6.

X	3	8	13	18	23
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

7.

X	10	15	20	25	30
P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

8.

X	5	15	25	35	45
P	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

9.

X	25	30	35	40	45
P	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

10.

X	–1	6	13	20	27
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

11.

X	1	3	4	7	8
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

12.

X	2	–3	5	8	9
P	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2

13.

X	4	–2	2	5	8
P	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2

14.

X	2	1	5	6	12
P	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1

15.

X	–1	2	–4	5	6
P	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1

16-20. Стадо овець обробили дезінфікуючою речовиною від заразних хвороб. Ветеринарний лікар дає запевнення, що вівці не заразяться хворобою в p%. Скласти закон розподілу числа здорових овець серед n відібраних після оброблення.

16. $p = 75; n = 5;$

17. $p = 80; n = 6;$

18. $p = 85; n = 7;$

19. $p = 90; n = 8;$

20. $p = 95; n = 9;$

21-25. Внаслідок вивчення роботи картоплезбирального комбайна встановлено, що ймовірність механічного пошкодження кожної бульби дорівнює p. Обчислити ймовірність того, що серед n бульб пошкоджених не більше k.

21.	$p = 0{,}004$	$n = 1000$	$k = 15$.
22.	$p = 0{,}0025$	$n = 2000$	$k = 12$.
23.	$p = 0{,}002$	$n = 3000$	$k = 12$.
24.	$p = 0{,}0025$	$n = 4000$	$k = 11$.
25.	$p = 0{,}0012$	$n = 5000$	$k = 10$.

26. Обчисліть відповідні математичні сподівання та середньоквадратичні відхилення для двох розподілів ймовірностей даних таблиці.

X_1	500					
$P(X_1)$	1					
X_2	0	100	300	500	700	900
$P(X_2)$	0,1	0,125	0,2	0,25	0,2	0,125

27. Побудуйте дискретний розподіл ймовірності для триразового підкидання монети. Випадкова змінна X дорівнює кількості "решок" в трьох спробах. Яка ймовірність появи більш ніж одного "герба"? Двох чи більше – "решок"?

28. Визначте математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення розподілу ймовірностей поданих у таблиці.

X	9	10	23	40	50
$P(X)$	0,1	0,15	0,15	0,4	?

29. У пологовому будинку 52% усіх новонароджених чоловічої статі. Одного дня народилось 5 малюків. Запишіть відповідний закон розподілу. Яка ймовірність того, що троє чи більше з них – хлопчики? Яке математичне сподівання для цього розподілу ($n = 5$)? Яке середньоквадратичне відхилення?

30. Товариство, що веде спостереження за НЛО, зібрало дані про частоту повідомлень в Європі. В таблиці наведений розподіл ймовірностей про число спостережень. Підрахуйте математичне сподівання. Підрахуйте середньоквадратичне відхилення та дисперсію.

Число повідомлень за день (x)	0	1	2	3	4	5
Ймовірність $P(x)$	0,32	0,24	0,2	0,15	0,05	0,04

4.1.7 Неперервні випадкові величини. Інтегральна та диференціальна функції розподілу ймовірностей. Числові характеристики неперервних випадкових величин

1-25. Випадкову величину X задано інтегральною функцією (функцією розподілу). Треба:

а) знайти диференціальну функцію (щільність імовірності);

б) знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення;

в) побудувати графіки інтегральної і диференціальної функцій.

$$1.\ F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ x^2, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 1;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$$

$$2.\ F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \sqrt{2};\\ 1, & \text{якщо} \quad x>\sqrt{2}.\end{cases}$$

$$3.\ F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{3}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \sqrt{3};\\ 1, & \text{якщо} \quad x>\sqrt{3}.\end{cases}$$

4. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 2;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>2.\end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{5}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \sqrt{5};\\ 1, & \text{якщо} \quad x>\sqrt{5}.\end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ (x-1)^2, & \text{якщо} \quad 1\le x\le 2;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>2.\end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{16}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 4;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>4.\end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{6}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \sqrt{6};\\ 1, & \text{якщо} \quad x>\sqrt{6}.\end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ (x-2)^2, & \text{якщо} \quad 2\le x\le 3;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>3.\end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ (x-3)^2, & \text{якщо} \quad 3\le x\le 4;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>4.\end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<4;\\ (x-4)^2, & \text{якщо} \quad 4\le x\le 5;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>5.\end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{7}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \sqrt{7};\\ 1, & \text{якщо} \quad x>\sqrt{7}.\end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{25}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 5;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>5.\end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<5;\\ (x-5)^2, & \text{якщо} \quad 5\le x\le 6;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>6.\end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{36}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 6;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>6.\end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<6;\\ (x-6)^2, & \text{якщо} \quad 6\le x\le 7;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>7.\end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{8}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \sqrt{8};\\ 1, & \text{якщо} \quad x>\sqrt{8}.\end{cases}$

18. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<7;\\ (x-7)^2, & \text{якщо} \quad 7\le x\le 8;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>8.\end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{49}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 7;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>7.\end{cases}$

20. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<9;\\ (x-9)^2, & \text{якщо} \quad 9\le x\le 10;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>10.\end{cases}$

21. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{64}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 8;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>8.\end{cases}$

22. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{11}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \sqrt{11};\\ 1, & \text{якщо} \quad x>\sqrt{11}.\end{cases}$

23. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 3;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>3.\end{cases}$

24. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<10;\\ (x-10)^2, & \text{якщо} \quad 10\le x\le 11;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>11.\end{cases}$

25. $F(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x<0; \\ \dfrac{x^2}{81}, & якщо \quad 0\le x\le 9; \\ 1, & якщо \quad x>9. \end{cases}$

26-30. На основі заданої функції розподілу $F(x)$ ймовірностей прибутку підприємця потрібно визначити:

а) математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення прибутку підприємця;

б) ймовірність того, що прибуток підприємця прийме значення з інтервалу (α,β).

26. Параметр N натуральне число і $N\le 10$, $\alpha=N+2$, $\beta=N+6$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le N; \\ \dfrac{(x-N)^{\frac{5}{2}}}{32}, & при \quad N<x\le N+4; \\ 1, & при \quad x>N+4. \end{cases}$$

27. Параметр N натуральне число і $10<N\le 20$, $\alpha=N-3$, $\beta=N+1$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le N; \\ \dfrac{(x-N)^{\frac{3}{2}}}{8}, & при \quad N<x\le N+4; \\ 1, & при \quad x>N+4. \end{cases}$$

28. Параметр N натуральне число і $20<N\le 30$, $\alpha=N+1$, $\beta=N+7$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le N; \\ \dfrac{(x-N)^{4}}{256}, & при \quad N<x\le N+4; \\ 1, & при \quad x>N+4. \end{cases}$$

29. Параметр N натуральне число і $30 < N \le 40$, $\alpha = N - 5$, $\beta = N + 3$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le N; \\ \dfrac{(x-N)^3}{216}, & при \quad N < x \le N + 6; \\ 1, & при \quad x > N + 6. \end{cases}$$

30. Параметр N натуральне число і $40 < N \le 50$, $\alpha = N + 7$, $\beta = N + 12$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le N; \\ \dfrac{(x-N)^2}{1000}, & при \quad N < x \le N + 10; \\ 1, & при \quad x > N + 10. \end{cases}$$

4.1.8. Закон великих чисел. Нерівність Чебишова. Теореми Чебишова та Бернуллі. Рівномірний, нормальний та показниковий розподіли ймовірностей неперервної випадкової величини

1-5. Імовірність проростання зерна дорівнює p. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що при посіві n зерен відхилення частоти зерен, які проросли, від імовірності того, що проросте кожне з них, не перевищить за абсолютною величиною ε. Значення p, n, ε дано.

1.	$p = 0{,}9$	$n = 5000$	$\varepsilon = 0{,}02$.
2.	$p = 0{,}85$	$n = 6000$	$\varepsilon = 0{,}01$.
3.	$p = 0{,}8$	$n = 7000$	$\varepsilon = 0{,}03$.
4.	$p = 0{,}75$	$n = 8000$	$\varepsilon = 0{,}02$.
5.	$p = 0{,}7$	$n = 9000$	$\varepsilon = 0{,}01$.

6-10. Урожай, який щорічно збирає колективне господарство, розподілений за нормальним законом. Середній врожай (математичне сподівання) дорівнює a, середнє квадратичне відхилення – σ. Знайти:

а) ймовірність того, що щорічний врожай буде в межах від α до β;

б) ймовірність того, що врожай відхилиться від математичного сподівання не більше ніж на δ. Значення a, σ, α, β, δ дано.

6.	$a = 60$	$\sigma = 5$	$\alpha = 54$	$\beta = 70$	$\delta = 8$.
7.	$a = 50$	$\sigma = 5$	$\alpha = 45$	$\beta = 52$	$\delta = 3$.
8.	$a = 48$	$\sigma = 4$	$\alpha = 45$	$\beta = 56$	$\delta = 3$.
9.	$a = 40$	$\sigma = 3$	$\alpha = 34$	$\beta = 43$	$\delta = 1{,}5$.
10.	$a = 35$	$\sigma = 4$	$\alpha = 27$	$\beta = 37$	$\delta = 2$.

11-15. Діаметр деталі, що виготовляється у цеху, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з параметрами a см (математичне сподівання) і σ см (середнє квадратичне відхилення). Знайти ймовірність того, що діаметр взятої навмання деталі відрізняється від математичного сподівання не більше ніж на δ см. Значення a, σ, δ дано.

11.	$a = 2$	$\sigma = 0{,}025$	$\delta = 0{,}03$.
12.	$a = 4$	$\sigma = 0{,}03$	$\delta = 0{,}04$.
13.	$a = 3$	$\sigma = 0{,}02$	$\delta = 0{,}04$.
14.	$a = 5$	$\sigma = 0{,}01$	$\delta = 0{,}02$.
15.	$a = 1$	$\sigma = 0{,}04$	$\delta = 0{,}05$.

16-20. Випадкові значення ваги зернини розподілені за нормальним законом. Математичне сподівання ваги зернини дорівнює a, середнє квадратичне відхилення дорівнює σ. Нормально проростає зерно, вага якого більша за c. Знайти:

а) процент зерен, від яких слід чекати нормального проростання;

б) вагу зернини, яка не буде перевищена з імовірністю p.

16. $a = 0{,}12$ $\sigma = 0{,}04$ $c = 0{,}2$ $p = 0{,}95$.

17. $a = 0{,}15$ $\sigma = 0{,}05$ $c = 0{,}1$ $p = 0{,}97$.

18. $a = 0{,}13$ $\sigma = 0{,}03$ $c = 0{,}3$ $p = 0{,}98$.

19. $a = 0{,}11$ $\sigma = 0{,}02$ $c = 0{,}2$ $p = 0{,}96$.

20. $a = 0{,}14$ $\sigma = 0{,}01$ $c = 0{,}4$ $p = 0{,}99$.

21-25. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, який має щільність імовірності: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ для $x \geq 0$; і $f(x) = 0$ для $x < 0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X попаде в інтервал $(a;в)$.

21. $\lambda = 2$ $a = 0{,}2$ $в = 0{,}7$.

22. $\lambda = 4$ $a = 0{,}4$ $в = 0{,}8$.

23. $\lambda = 3$ $a = 0{,}3$ $в = 0{,}7$.

24. $\lambda = 5$ $a = 0{,}6$ $в = 0{,}8$.

25. $\lambda = 3$ $a = 0{,}2$ $в = 0{,}6$.

26. Імовірність своєчасної реалізації одиниці продукції дорівнює $8/k$, де $11 \leq k \leq 20$. Оцінити ймовірність того, що у 1000 незалежно реалізованих одиниць продукції відхилення відносної частоти реалізації від імовірності $8/k$ за абсолютним значенням буде не меншим від 0,1, та порівняти з точним значенням.

27. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X) < 0{,}1|$, якщо $D(X) = 0{,}01$.

28. Середній дохід на душу населення X розподілений за нормальним законом розподілу з параметрами (α, β). Оцінити за нерівністю Чебишова ймовірність $P(|X-\alpha|) > 2\sigma$ та порівняти її з точним значенням.

29. Підприємство, що випускає продукти харчування на експорт, оцінює ризик банкрутства не більше ніж 1/9. У справу вкладається капітал у 200000 грн. Очікуваний рівень рентабельності дорівнює 10 k/35, $31 \le k \le 40$. Обчислити, яким повинно бути значення середньоквадратичного відхилення рівня рентабельності від очікуваної величини.

30. Випадкові похибки 10 бухгалтерських звітів $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ розподілені за нормальним законом розподілу з параметрами $M(X_i) = a$, $D(X_i) = 0{,}01k^2$, $1 \le k \le 10$, $(i = 1,2,\ldots,10)$. Знайти відхилення ε_k, якщо $P = \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}}{10} - a \right| < \varepsilon_k \right) = 0{,}99$ та порівняти його з відповідною оцінкою за допомогою нерівності Чебишова.

4.2 Завдання з математичної статистики

4.2.1 Числові характеристики вибірки. Полігон. Гістограма

Задана генеральна сукупність, яка характеризує річний прибуток фермерів (в тис. грн). З неї зроблено вибірку з 20 елементів. Виконати такі вправи:

а) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;

б) обчислити числові характеристики вибірки та зробити з їх допомогою висновок про генеральну сукупність;

в) побудувати полігони частот і відносних частот та гістограму, розбивши інтервал на 4 рівних підінтервали;

г) знайти моду, медіану, розмах та коефіцієнт варіації.

Таблиця 4.2

варіант	**Вибірка**
1	7,10,9,10,11,12,13,14,13,15,14,15,14,16,12,14,16,14,16,15
2	12,13,14,13.15,14,15,14,16,12,14,16,14,16,15,5,7,8,5,7.
3	14,15,14,16,12,14,16,14,16,15,5,7,8,5,7,9,10,9,8,4.
4	14,16,14,16,15,16,18,14,16,11,9,10,9,8,4,7,8,10,9,4.
5	5,7,8,5,7,9,10,16,18,14,16,1110,9,4,8,11,9,11,8.
6	9,10,9,8,4,7,8,10,9,4,8,11,9,11,8,10,11,12,9,12.
7	7,8,10,9,4,8,11,9,11,8,10,11,12,9,12,7,6,8,5,3.
8	8,11,9,11,8,10,11,12,9,12,7,6,8,5,3,6,9,10,6,5.
9	10,11,12,9,12,7,6,11,14,19,16,21,10,6,5,11,9,7,6,7.
10	7,6,8,5,3,6,9,10,6,5,11,9,7,6,7,10,9,8,11,6.
11	6,9,10,6,5,11,9,7,6,7,10,9,8,11,11,14,19,16,21,6.
12	11,9,7,6,7,10,9,8,11,6,5,10,8,7,6,9,8,10,7,10.
13	10,9,8,11,6,5,10,8,7,6,9,8,10,7,10,12,7,8,10,12.
14	5,10,8,7,6,9,8,10,7,10,12,7,8,10,12,11,9,10,8,11.
15	9,8,10,7,10,12,7,8,10,12,11,9,10,8,11,12,14,10,8,14.
16	12,7,8,10,12,11,9,10,8,11,12,14,10,8,14,7,10,8,12,13.
17	11,9,10,8,11,12,14,10,8,14,7,10,8,12,13,10,9,13,12,14.
18	12,14,10,8,14,7,10,8,12,13,10,9,13,12,14,10,12,14,15,13.
19	7,10,8,12,13,10,9,13,12,14,10,12,14,15,13,14,12,12,13,15.
20	10,9,13,12,14,10,12,14,15,13,14,12,12,13,15,14,12,9,16,10.
21	10,12,14,15,13,14,12,12,13,15,14,12,9,16,10,12,15,16,10,14.
22	14,12,12,13,15,14,12,9,16,10,12,15,16,10,14,17,18,17,14,12.
23	14,12,9,16,10,12,15,16,10,14,17,18,17,14,12,15,16,18,14,15.
24	12,15,16,10,14,17,8,17,14,12,15,16,18,14,15,12,15,14,16,12.
25	17,18,17,14,12,15,6,18,14,15,12,15,14,16,12,16,21,18,12,15.
26	15,16,18,14,15,12,15,14,16,12,16,21,18,12,15,8,20,16,15,12.
27	12,15,14,16,12,16,21,18,12,15,18,20,16,15,12,9,12,21,20,16.
28	16,21,18,12,15,18,20,16,15,12,9,12,21,20,16,12,9,8,12,12.
29	18,20,16,15,12,9,12,21,20,16,12,9,8,12,12,8,18,16,18,14.
30	9,12,21,20,16,12,9,8,12,12,8,18,16,18,14,11,16,18,21,19.

4.2.2 Перевірка гіпотези про вид розподілу. Довірчий інтервал

Вивчається відсоткове відношення номінальної і ринкової цін на акції на фондовому ринку *(X)* за певний період. Вибірка, зроблена випадковим способом, за акціями 50 різних підприємств задається даними, наведеними в таблицях 4.3 і 4.4.

Таблиця 4.3

98,01 + a_1	100,2 + a_2	98,1 – a_3	96,2 + a_4	99,8 + a_5
101,2 + a_1	99,2 + a_2	104,1 – a_3	102,6 + a_4	103,8 + a_5
101,2 + a_1	99,4 + a_2	106,1 – a_3	100,6 + a_4	98,8 + a_5
96,2 + a_1	98,2 + a_2	101,1 – a_3	100,6 + a_4	99,8 + a_5
100,8 + a_1	98,2 + a_2	100,1 – a_3	101,6 + a_4	96,1 + a_5
101,2 + a_1	97,2 + a_2	102,1 – a_3	96,3 + a_4	96,8 + a_5
98,8 + a_1	94,2 + a_2	102,01 – a_3	96,3 + a_4	98,8 + a_5
99,2 + a_1	100,6 + a_2	100,1 – a_3	98,6 + a_4	100,8 + a_5
100,5 + a_1	98,2 + a_2	103,5 – a_3	100,1 + a_4	98,8 + a_5
100,4 + a_1	96,2 + a_2	102,1 – a_3	101,6 + a_4	100,8 + a_5

Необхідно:

а) за допомогою критерію Пірсона перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу відсоткового відношення номінальної і ринкової цін на акції на фондовому ринку при рівні значимості α (α = 0,05, якщо варіант парний і α = 0,01, якщо варіант непарний).

б) у випадку, коли закон розподілу виявиться нормальним, з надійністю γ (γ = 0,95, якщо варіант парний і γ = 0,99, якщо варіант непарний) побудувати довірчі інтервали для параметрів α і σ.

Параметри a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, вибираються з табл. 4.3 залежно від варіанта.

Таблиця 4.4 – Значення параметрів

Варіант	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	0,1	0,12	0,13	0,2	0
2	0,15	0,22	0,03	0,2	0,14
3	0,15	0,12	0,1	0,21	0,24
4	0,05	0,12	0,03	0,3	0,24
5	0	0,2	0,1	0,2	0,14
6	0,2	0,2	0,03	0,02	0,2
7	0,15	0,22	0,03	0,22	0
8	0,25	0,22	0,1	0,12	0,14
9	0,15	0,22	0	0,2	0,14
10	0,05	0,2	0,2	0,12	0,17

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1. Імовірність події

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

2. Відносна частота події

$$W(A)=\frac{m}{n}; \quad W(A)\approx P(A).$$

3. Розміщення

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

4. Перестановки

$$P_n=n! \qquad 0!=1.$$

5. Комбінації

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=C_n^{n-m}.$$

6. Геометричні ймовірності

$$P(g)=\frac{mg}{mG}; \quad P=\frac{l}{L}; \quad P=\frac{Sd}{SD}; \quad P=\frac{v}{V}.$$

7. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B); \quad P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

8. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

9. Теорема множення ймовірностей незалежних подій

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B);$$

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

10. Теорема множення ймовірностей залежних подій

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P_B\cdot P_B(A);$$

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_n}(A_n).$$

11. Імовірність повної групи несумісних подій

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

12. Сума ймовірностей протилежних подій

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

13. Імовірність появи принаймні однієї із подій $A_1, A_2, ..., A_n$.

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot ...\cdot q_n;$$

$$P(A)=1-q^n, \text{ якщо } P(A_1)=P(A_2)=...=P(A_n)=p.$$

14. Формула повної ймовірності

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A),$$

$$\text{якщо } P(B_1)+P(B_2)+...+P(B_n)=1.$$

15. Формула Бейєса

$$\mathrm{P_A(B_i)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \quad (i=1, 2, 3, ..., n),$$

де $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$.

16. Формула Бернуллі

$$P_n(k)=C_n^k\, p^k\, q^{n-k}.$$

17. Локальна теорема Лапласа

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

де $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

18. Інтегральна теорема Лапласа

$$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

де $\Phi(x)=\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, $x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

$$\Phi(x)=0{,}5 \text{ для } x>5.$$

19. Відхилення відносної частоти від сталої ймовірності у незалежних випробуваннях

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

20. Найімовірніше число появи події в незалежних випробуваннях

$$np-q\le k_0<np+p.$$

21. Біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини

$$X=k,\ \ k=1,2,\dots,n,\quad \text{де}\ \ P(X=k)=P_n(k)=C_n^k\,p^k\,q^{n-k}$$

22. Закон Пуассона розподілу дискретної випадкової величини

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \ \text{де}\ \ \lambda=np.$$

23. Найпростіший потік подій

$$P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

24. Числові характеристики дискретних випадкових величин

а) математичне сподівання

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i.$$

б) дисперсія

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

в) середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

25. Інтегральна функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

$$F(x)=P(X<x),$$

$$\text{або}\ F(X)=P\left(X\in(-\infty;x)\right),\quad x\in(-\infty;\infty).$$

26. Диференціальна функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

$$f(x)=F'(x),$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

27. Математичне сподівання неперервної випадкової величини

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \quad \text{для} \quad x\in R.$$

$$M(X)=\int_{a}^{b} x f(x)dx \quad \text{для} \quad x\in(a;b).$$

28. Дисперсія неперервної випадкової величини

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx, \quad x\in R;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-(M(X))^2, \quad x\in R;$$

$$D(X)=\int_{a}^{b}(x-M(X))^2 f(x)dx, \quad x\in(a;b);$$

$$D(X)=\int_{a}^{b}x^2 f(x)dx-(M(X))^2, \quad x\in(a;b).$$

29. Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

30. Рівномірний розподіл

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad \text{для} \quad x\in(a;b);$$

$$f(x)=0 \qquad \text{для} \quad x\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty).$$

31. Нормальний розподіл

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – математичне сподівання;

σ – середнє квадратичне відхилення.

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

$$\text{де}\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

32. Показниковий розподіл і його числові характеристики

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x\ge 0,\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & при \quad x\ge 0,\end{cases}$$

де λ – стала додатна величина

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b},$$

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

33. Розподіл χ^2 (“хі квадрат”)

Якщо

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2,$$

де X_i (i = 1, 2, ..., n) – розподілені нормально, попарно незалежні, тоді величина χ^2 розподілена за законом “хі квадрат” з k – n ступенями вільності.

34. Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – вибірка, то

середня вибірки

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n};$$

вибіркова дисперсія

$$\overline{S}_B = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 \frac{n_i}{n};$$

зміщена вибіркова дисперсія

$$D_B = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 \frac{n_i}{n};$$

середнє квадратичне вибірки

$$\sigma_B = \sqrt{S_B};$$

n – об'єм вибірки; n_i – частота значення x_i.

Вимоги до точкових оцінок: незміщеність, ефективність, змістовність.

35. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомій дисперсії σ^2:

$$\left(\overline{x}_B - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x}_B + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

де t_γ визначається з умови $2\Phi\left(t_\gamma\right) = \gamma$.

36. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомій дисперсії σ^2:

$$\left(\overline{x}_B - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{x}_B + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

37. Мода M – це варіанта, що має найбільшу частоту.

38. Медіана m – це варіанта, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівних по числу варіант.

39. Розмах P – це різниця між найбільшою і найменшою варіантами.

40. Коефіцієнт варіації

$$V = \frac{\sigma_B}{\overline{x}_B} \cdot 100\%,$$

(служить для порівняння розсіювання двох варіаційних рядів).

41. Довірчий інтервал для оцінки середньоквадратичного відхилення σ нормального розподілу

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad (q < 1),$$

де $q = P(\chi^2 > x^2), \quad \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}.$

$$q > 1 \Rightarrow 0 < \sigma < s(1+q).$$

ЗАЛІКОВІ ПИТАННЯ

1. Випадкова подія. Відносна частота випадкової події. Ймовірність випадкової події.
2. Класичне означення ймовірності. Приклади.
3. Сума подій. Імовірність суми сумісних та несумісних подій.
4. Повна група подій. Протилежні події. Приклади.
5. Незалежні події. Ймовірність добутку незалежних подій.
6. Залежні події. Поняття умовної ймовірності. Ймовірність добутку залежних подій.
7. Формула повної ймовірності.
8. Формула Бейєса.
9. Схема випробувань Бернуллі. Формула Бернуллі.
10. Локальна теорема Лапласа. Приклад.
11. Інтегральна теорема Лапласа. Приклад.
14. Дискретна випадкова величина. Ряд розподілу дискретної випадкової величини.
15. Математичне сподівання дискретної випадкової величини та його властивості. Моменти випадкових величин.
16. Дисперсія дискретної випадкової величини та її властивості. Середнє квадратичне відхилення.
17. Функція від випадкової величини та її ряд розподілу.
18. Неперервна випадкова величина. Функція розподілу.
19. Властивості функції розподілу.
20. Функція щільності ймовірностей випадкової величини та її властивості.
21. Математичне сподівання та дисперсія неперервної випадкової величини.
26. Нормальний розподіл (означення), щільність ймовірностей нормального розподілу.

27. Математичне сподівання нормального розподілу.
28. Дисперсія нормального розподілу.
40. Вибірковий метод. Статистичний розподіл вибірки, об'єм вибірки, об'єм генеральної сукупності.
41. Емпірична функція розподілу та її властивості. Приклад.
42. Полігон та гістограма частот.
43. Точкова оцінка. Емпіричне математичне сподівання.
44. Емпірична дисперсія.
48. Інтервальні оцінки параметрів випадкових величин. Довірчий інтервал.
49. Довірчий інтервал для математичного сподівання нормального розподілу при відомій дисперсії.
50. Довірчий інтервал для дисперсії та середньоквадратичного відхилення нормального розподілу.

Література

1. Ширяев А. Н. Вероятность: Учеб.пособ. для вузов. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Наука, 1989. – 640 с.

2.Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей: Учебник. – К.: Выща шк., 1990. – 328 с.

3. Овчинников П. П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.

4. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов /Под ред. А. В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 428 с.

5. Гурский Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Минск: Вышэйша школа, 1975. – 250 с.

6. Жалдак М. И., Квитко А. Н. Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум: Учеб. пособие /Под общ. ред. М. И. Ядренко. – К.: Выща шк., 1989. – 263 с.

7. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

8. Гихман И. Л., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Выща шк., 1988. – 440 с.

9. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973. – 366 с.

10. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч.закл. / Р. К. Чорней, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. Р. К. Чорнея. – К.: МАУП, 2003. – 328 с.

11. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища шк., 1994. – 156 с.

12. Жлуктечко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики. – К.: НМК ВО, 1991.

13. Математическая статистика: Учебник. – М.: Высш. шк., 1981. – 371 с.

14. Андрухаев Х. М. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Просвещение, 1985. – 160 с.

15. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1972. – 368 с.

16. Турчин В. М. Математична статистика: Навч. посіб. – К.: «Академія», 1999. – 240 с.

17. Діденко М. П. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей. – Харків, 1996. – 208 с.

18. Колемаев В. А. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: ГУУ, 2001. – 87 с.

19. Фигурин В. А., Оболонкин В. В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для студ. естеств. спец. вузов. – Минск : Новое знание, 2000. – 206 с.

20. Тимченко Л. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів економічних спеціальностей. Харків: ХДПУ, 1999. – 140 с.

Глосарій

Варіанта – variant

Варіаційний ряд – variational row

Вибіркове середнє – selective average

Випадкова величина – random quantity

Випадкова подія – casual event

Випробування – test

Гіпотеза – hypothesis

Гістограма – histogram

Дисперсія – dispersion

Дослід – experience

Закон розподілу – law of the distribution

Інтервал – interval

Ймовірність – probability

Кореляція – correlation

Коефіцієнт кореляції – factor to correlations

Критерій – criterion

Математичне сподівання – mathematics expectation

Медіана – median

Многокутник розподілу – polygonal figure of the distribution

Мода – mode

Область – area

Перестановка – transposition

Подія – event

Розміщення – accomodation

Середнє квадратичне відхилення – average square deflection

Сполучення – combination

Частота – frequency

Щільність – density

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Продовження таблиці А.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ДОДАТОК Б

Таблиця Б.1 – Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495

Продовження таблиці Б.1

0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

ДОДАТОК В

Таблиця В.1 – Таблиця значень функції $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	–	0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	–	–	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	–	–	–	–	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7	–	–	–	–	–	–	0,00001	0,00002	0,00004

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01074	0,00500
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14307	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176
9	–	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884	0,10141	0,12408	0,13176
10	–	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858
11	–	0,00001	0,00022	0,00193	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702
12	–	–	0,00006	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07276
13	–	–	0,00001	0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038
14	–	–	–	0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238
15	–	–	–	0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943
16	–	–	–	–	0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093
17	–	–	–	–	0,00001	0,00012	0,00059	0,00212	0,00579
18	–	–	–	–	–	0,00004	0,00023	0,00094	0,00289
19	–	–	–	–	–	0,00001	0,00008	0,00040	0,00137

ДОДАТОК Г

Таблиця Г.1 – Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ДОДАТОК Д

Таблиця Д.1 – Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

ДОДАТОК Е

Таблиця Е.1 – Критичні точки розподілу χ^2

Кількість степенів вільності k	Рівень значимості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,6	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ДОДАТОК Ж

Таблиця Ж.1 – Критичні точки розподілу Стьюдента

Кіл. ступенів вільності k	Рівень значимості α (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,68	3,09	3,29

ДОДАТОК И

Таблиця И.1 – Критичні точки розподілу F Фішера – Снедекора
k_1 – кількість ступенів вільності більшої дисперсії,
k_2 – кількість ступенів вільності меншої дисперсії

Рівень значимості $\alpha = 0{,}01$												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,85	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Навчальне видання

Ірина Володимирівна Хом'юк

Віктор Вікторович Хом'юк

Володимир Олександрович Краєвський

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено І. В. Хом'юк
Редактор О. Д. Скалоцька

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 25.05.09 р.
Формат 29,7 х 42 ¼
Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний

Друк різографічний
Тираж 100 прим.
Зам № 2009-109
Ум. друк. арк. 12

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ