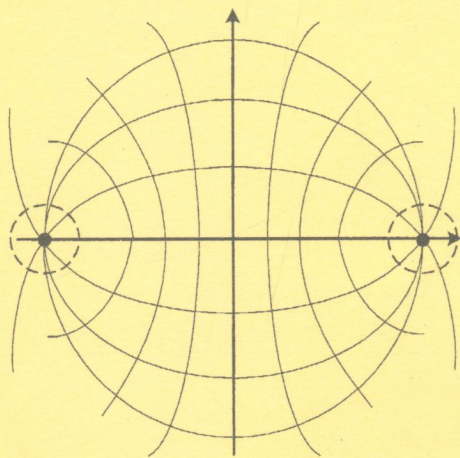


621.3.01 (075)
К 26

Карпов Ю. О.

Кухарчук В. В.

**ТЕОРЕТИЧНІ
ОСНОВИ
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**



**ЕЛЕКТРИЧНЕ
ПОЛЕ**

**Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет**

Ю.О.Карпов, В.В.Кухарчук

**ТЕОРЕТИЧНІ
ОСНОВИ
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ
ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ**

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як
навчальний посібник для студентів електротехнічних
спеціальностей вищих навчальних закладів**

УНІВЕРСУМ – Вінниця 2004

Рецензенти:

В. І. Сенько, доктор технічних наук професор (НТУУ «КПІ»)

П. Д. Лежнюк, доктор технічних наук професор (ВНТУ)

Ю. О. Скрипник, доктор технічних наук професор (КНТУТД)

Рекомендовано до видання Міністерством освіти і науки України.
Лист № 14/18.2--696 від 07.04.04

Карпов Ю.О., Кухарчук В.В.

К 26 **Теоретичні основи електротехніки. Електричне поле.** Навчальний посібник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 143с.

ISBN 966-641-108-3

У навчальному посібнику викладена теорія електростатичного і електричного полів в провідному середовищі. Матеріал подано в обсязі, необхідному для розрахунку даних полів. Наведено велику кількість прикладів розрахунку і побудови картини полів та визначення параметрів різних електротехнічних пристроїв, які зустрічаються в електроенергетиці, радіотехніці, засобах автоматики та вимірювальної техніки. Навчальний посібник призначений для студентів і аспірантів електротехнічних і енергетичних спеціальностей вищих навчальних закладів і може бути корисним інженерам, які займаються теорією поля.

УДК 621.3

ISBN 966-641-108-3

ЗМІСТ

ВСТУП	5
I ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ	14
1.1 Закон Кулона.....	14
1.2 Напруженість електричного поля.....	15
1.3 Теорема Гаусса.....	19
1.4 Поляризація діелектриків.....	23
1.5 Потенціал електростатичного поля.....	28
1.6 Зв'язок між потенціалом і напруженістю поля.....	33
1.7 Рівняння Пуассона і Лапласа.....	35
1.8 Граничні умови на поверхні розділу двох діелектриків.....	37
1.9 Граничні умови на поверхні розділу діелектрика і провідника.....	42
1.10 Електростатична ємність.....	44
1.11 Енергія електростатичного поля.....	45
1.12 Сили в електростатичному полі, які діють на заряджені тіла.....	50
1.13 Теорема єдиності розв'язку.....	52
II МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ	56
2.1 Коротка характеристика задач електростатики та методів їхнього розв'язування.....	56
2.2 Застосування співвідношень, які пов'язані з законом Кулона і методом накладання.....	57
2.3 Застосування теореми Гаусса.....	63
2.4 Метод дзеркальних зображень.....	90
2.5 Розподіл потенціалів і зарядів в системі заряджених тіл.....	94
2.6 Застосування рівнянь Пуассона і Лапласа.....	99

III	ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНИХ СТРУМІВ	
	В ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ.....	115
3.1	Електричний струм. Густина електричного струму.....	115
3.2	Закон Ома в диференціальній формі.....	118
3.3	Напруженість сторонніх сил. Електрорушійна сила.....	120
3.4	Закони Кірхгофа в диференціальній формі.....	123
3.5	Диференціальна форма закону Джоуля-Ленца.....	126
3.6	Електричне поле в провідному середовищі на межі двох середовищ.....	127
3.7	Аналогія між електричним полем в провідному середовищі і електростатичним полем.....	131
3.8	Приклади розрахунку електричних полів в провідному середовищі.....	134
	ЛІТЕРАТУРА.....	142

ВСТУП

Теорія електромагнітного поля, яка вивчається в дисципліні теоретичних основ електротехніки має за мету якісне і кількісне дослідження електромагнітних полів, що зустрічаються в різних електротехнічних пристроях. Широка сфера застосування електромагнітних процесів роблять цю теорію важливим інструментом пізнання законів природи.

Як відомо з фізики, усі тіла в природі складаються з елементарних частинок, які між собою пов'язані різною взаємодією. Однією з форм такої взаємодії є *електромагнітна*, яка проявляється в силах відштовхування або притягування частинок речовини.

Частинки, які володіють такими властивостями, називаються електрично зарядженими. До елементарних електричних частинок відносять електрони і протони. Здатність електрично заряджених частинок до електромагнітного впливу (дії) оцінюється кількістю *електричного заряду* даної частинки. Завдяки тому, що електрично заряджені частинки можуть відштовхуватись або притягуватись, розрізняють *позитивні і негативні* заряди. Однойменно заряджені частинки відштовхуються, різнойменно – притягуються. Найменший негативний заряд має електрон, а найменший позитивний – протон. Кількісно заряди електрона і протона рівні між собою.

В електротехнічній практиці за одиницю кількості електрики приймають *кулон* (Кл), який містить $6.2 \cdot 10^{18}$ зарядів електрона. Величину електричного заряду прийнято позначати буквою q або Q .

Якщо тіло складається з однакової кількості рівномірно розподілених електронів і протонів, то в цілому таке тіло електрично нейтральне. Зарядженим тіло буде тільки у випадку отримання ним надлишку зарядів будь-якого знаку.

Елементарні електричні частинки входять до складу атомів і молекул речовин, але можуть також знаходитись і у вільному стані. Вони знахо-

дяться в неперервному русі і навколо них є *електромагнітне поле*, завдяки чому електричні частинки взаємодіють одна з одною.

Заряджені частинки і електромагнітне поле нерозривно зв'язані і впливають одне на одного і є двома різними видами матерії. Відмінність між частинками і полем як видами матерії полягає в такому. Частинки речовини дискретні і займають деяку обмежену область простору. Зайнятий об'єм простору однією частинкою не може бути одночасно зайнятим другою частинкою. Електромагнітні поля неперервні, займають весь простір і взаємопроникні, тобто можуть накладатися один на одного. Частинки речовини під дією зовнішніх сил можуть переміщуватися в просторі з різними швидкостями, в той час коли електромагнітні поля завжди розповсюджуються тільки з однією швидкістю – швидкістю світла.

Простір між сукупністю частинок матерії (речовиною) прийнято називати *пустотою*.

Електромагнітне поле характеризується наявністю електричного і магнітного полів, зв'язаних неперервним взаємним перетворенням. Ці поля представляють собою дві сторони одного електромагнітного поля, різні його прояви. Розподіл електромагнітного поля на дві його складові умовний, він залежить перш за все від системи координат, в якій проводяться дослідження. Спостерігач, який знаходиться в одній системі координат з нерухомим зарядом, спостерігатиме тільки електричне поле, тоді як спостерігач, який знаходиться в другій системі координат, яка рухається з певною швидкістю відносно першої, спостерігає в цьому ж просторі і електричне і магнітне поля.

В процесі вивчення електромагнітного поля методично доцільно розглядати спочатку окремо незмінне в часі електричне поле і його взаємодію з нерухомими зарядженими тілами. Потім зручно досліджувати незмінне в часі магнітне поле і його взаємодію з тілами, по яких протікає постійний

струм. Після цього доцільно перейти до вивчення законів електромагнітного поля і розповсюдження електромагнітних хвиль.

Більшість фізичних величин, які характеризують електромагнітне поле, є вектори, тому висвітлимо основні положення векторної алгебри.

Векторна величина або вектор характеризується не тільки числовим значенням цієї величини, але і напрямком її дії в просторі. Її позначають буквою з рисочкою зверху, наприклад, \vec{A}, \vec{B} . Буква без рисочки (A) характеризує числове значення (модуль) вектора. Вектор можна записати у вигляді:

$$\vec{A} = A \vec{a}^0,$$

де \vec{a}^0 – одиничний вектор (орт), направлений так само, як і вектор \vec{A} .

В тривимірному просторі будь-який вектор можна виразити через його проєкції на три координатні осі. В прямокутній системі координат (рис.В.1,а) одиничним векторам присвоєно такі позначення: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – відповідно до напрямку по осях x, y, z . Отже, якщо позначити проєкції вектора \vec{A} на осі координат відповідно A_x, A_y, A_z , то

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}. \quad (\text{В.1})$$

В процесі розв'язування конкретних задач часто зручніше використовувати циліндричну (рис.В.1, б) або сферичну (рис.В.1, в) системи координат. В циліндричній системі координат (r, α, z) одиничні вектори позначають: радіальний - \vec{i}_r , дотичний - \vec{i}_α , осьовий - \vec{k} . В сферичній системі (r, θ, α) - радіальний - \vec{i}_r , меридіанний - \vec{i}_θ , довготний - \vec{i}_α .

Результатом суми двох векторів \vec{A} і \vec{B} є вектор \vec{C} ($\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$), який є діагоналлю паралелограма (рис.В.2).

Віднімання двох векторів \vec{A} і \vec{B} можна звести до операції суми

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}).$$

Розрізняють два види перемноження векторів \vec{A} і \vec{B} - скалярне і векторне.

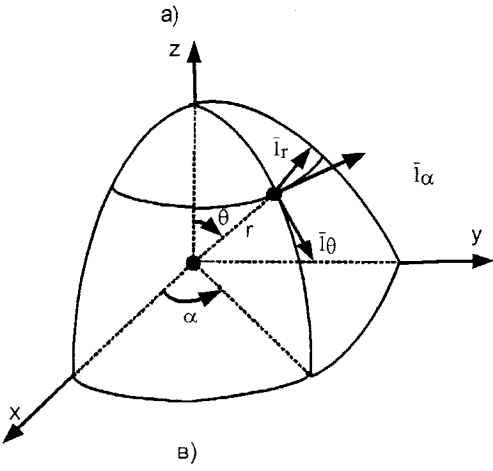
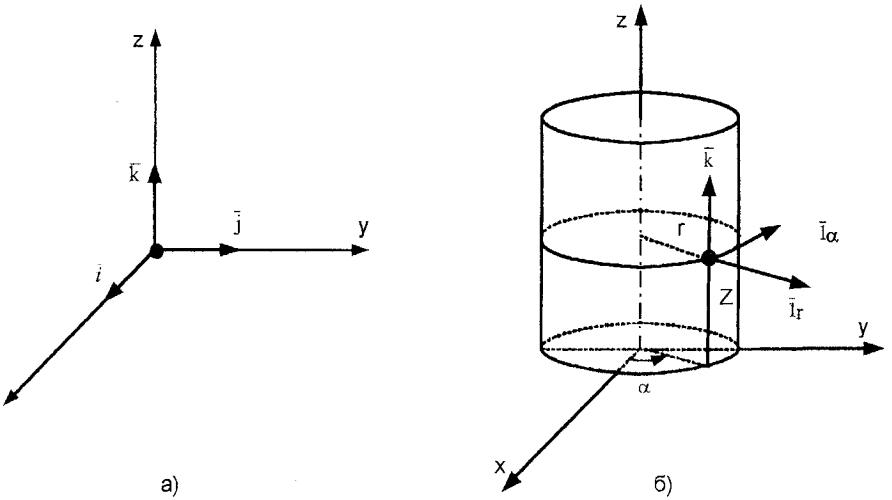


Рисунок В.1

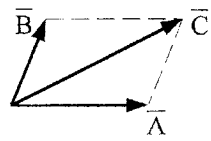


Рисунок В.2

Результатом скалярного добутку є скалярна величина і цю дію подають у вигляді

$$C = \overline{A\overline{B}} = AB \cos \alpha, \quad (\text{B.2})$$

де α - кут між векторами \overline{A} і \overline{B} .

Скалярний добуток двох однойменних одиничних векторів

$$\overline{i\overline{i}} = 1, \quad \overline{j\overline{j}} = 1, \quad \overline{k\overline{k}} = 1, \quad (\text{B.3})$$

тому що кут між цими векторами дорівнює нулю.

Скалярний добуток двох різнойменних одиничних векторів

$$\overline{i\overline{j}} = 0, \quad \overline{i\overline{k}} = 0, \quad \overline{j\overline{k}} = 0, \quad (\text{B.4})$$

завдяки тому що кут між векторами дорівнює 90° .

Визначимо скалярний добуток між векторами через їхні проєкції в прямокутній системі координат

$$\overline{A\overline{B}} = (A_x \overline{i} + A_y \overline{j} + A_z \overline{k}) (B_x \overline{i} + B_y \overline{j} + B_z \overline{k}).$$

Врахувавши (B.3) і (B.4), отримаємо

$$\overline{A\overline{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{B.5})$$

Із цього співвідношення видно, що має місце рівність

$$\overline{A\overline{B}} = \overline{B\overline{A}}. \quad (\text{B.6})$$

Векторним добутком двох векторів \overline{A} і \overline{B} називають новий вектор \overline{C} , направлений перпендикулярно площині, в якій розміщені вектори \overline{A} і \overline{B} , і чисельно рівний

$$C = AB \sin \alpha.$$

Дану операцію записують у вигляді:

$$\overline{C} = [\overline{A\overline{B}}]. \quad (\text{B.6})$$

Позитивний напрямок вектора \overline{C} визначають за правилом правоходового гвинта (рис.В.3).

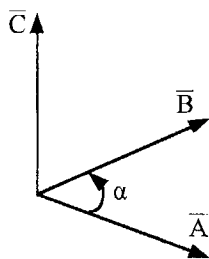


Рисунок В.3

Якщо обертати гвинт в площині векторів \vec{A} і \vec{B} від першого вектора (\vec{A}) до другого (\vec{B}) по дузі, меншій ніж 180° , то поступальний рух гвинта вказує напрямком вектора \vec{C} . З цього правила видно, що

$$[\vec{A}\vec{B}] = -[\vec{B}\vec{A}]. \quad (\text{В.7})$$

Векторний добуток можна записати через проекції векторів. В прямокутній системі координат

$$[\vec{A}\vec{B}] = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x).$$

Зручно даний вираз записати також у вигляді визначника

$$[\vec{A}\vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (\text{В.8})$$

Запишемо ще два добутки:

$$[\vec{A}\vec{B}]\vec{C} = \vec{A}[\vec{B}\vec{C}] = \vec{B}[\vec{C}\vec{A}], \quad (\text{В.9})$$

$$[[\vec{A}\vec{B}]\vec{C}] = \vec{B}(\vec{C}\vec{A}) - \vec{A}(\vec{B}\vec{C}). \quad (\text{В.10})$$

Якщо вектори є неперервними функціями координат, то над ними можна проводити операції диференціювання. У векторному аналізі розрізняють три види диференціальних операцій.

Векторна просторова похідна (\vec{A}) від скалярної функції $B(x,y,z)$. Якщо похідна взята в напрямку найбільшого зростання функції, то вона називається *градієнтом* скалярної функції

$$\vec{A} = \text{grad } B. \quad (\text{В.11})$$

В *прямокутній* системі координат

$$\text{grad } B = \frac{\partial B}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial B}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial B}{\partial z} \vec{k}, \quad (\text{В.12})$$

в *циліндричній*

$$\text{grad } B = \frac{\partial B}{\partial r} \bar{l}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \bar{l}_\alpha + \frac{\partial B}{\partial z} \bar{k}, \quad (\text{B.13})$$

в сферичній

$$\text{grad } B = \frac{\partial B}{\partial r} \bar{l}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} \bar{l}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \bar{l}_\alpha \right). \quad (\text{B.14})$$

Для позначення операції просторового диференціювання часто використовують символ ∇ (читається «набла»), який називають диференціальним оператором або оператором Гамільтона, і формально його розглядають як умовний вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}. \quad (\text{B.15})$$

Вираз градієнта (B.11) можна розглядати як добуток вектора ∇ на скалярну величину B

$$\bar{A} = \nabla B.$$

Скалярна просторова похідна A від векторної функції $\bar{B}(x, y, z)$ називається *дивергенцією* векторної функції \bar{B}

$$A = \text{div } \bar{B}. \quad (\text{B.16})$$

Застосувавши символ ∇ , можна записати (B.16) у вигляді скалярного добутку двох векторів

$$A = \nabla \bar{B}. \quad (\text{B.16})$$

Для прямокутної системи координат

$$\text{div } \bar{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (\text{B.17})$$

для циліндричної

$$\text{div } \bar{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (\text{B.18})$$

для сферичної

$$\text{div } \bar{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(B_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} \right]. \quad (\text{B.19})$$

Векторна просторова похідна \bar{A} від векторної функції $\bar{B}(x, y, z)$ називається *ротором* функції \bar{B}

$$\bar{A} = \text{rot } \bar{B}. \quad (\text{B.20})$$

В різних системах координат цю похідну зручно записувати у вигляді визначника.

В *прямокутній* системі координат

$$\text{rot } \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad (\text{B.21})$$

в *циліндричній*

$$\text{rot } \bar{B} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \bar{l}_r & \bar{l}_\alpha & \frac{1}{r} \bar{l}_k \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_r & r B_\alpha & B_z \end{vmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

в *сферичній*

$$\text{rot } \bar{B} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \bar{l}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \bar{l}_\theta & \frac{1}{r} \bar{l}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ B_r & r B_\theta & r B_\alpha \sin \theta \end{vmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Вираз (B.20) можна записати як векторний добуток векторів ∇ і \bar{B}

$$\bar{A} = [\nabla \bar{B}]. \quad (\text{B.24})$$

Згадаємо ще декілька співвідношень

$$\operatorname{div}(a\bar{A}) = \nabla(a\bar{A}) = a\nabla\bar{A} + \bar{A}\nabla a = a\operatorname{div}\bar{A} + \bar{A}\operatorname{grad}a, \quad (\text{B.25})$$

$$\operatorname{div}[\bar{A}\bar{B}] = \nabla[\bar{A}\bar{B}] = \bar{B}[\nabla\bar{A}] - \bar{A}[\nabla\bar{B}] = \bar{B}\operatorname{rot}\bar{A} - \bar{A}\operatorname{rot}\bar{B}. \quad (\text{B.26})$$

Теорема Остроградського-Гаусса

$$\oint_S \bar{A}d\bar{S} = \int_V \operatorname{div}\bar{A}dV. \quad (\text{B.27})$$

Інтеграл від вектора \bar{A} по замкненій поверхні S дорівнює інтегралу від дивергенції даного вектора по об'єму V , що обмежений поверхнею S .

Теорема Стокса

$$\oint_l \bar{A}dl = \int_S \operatorname{rot}\bar{A}dS. \quad (\text{B.28})$$

Інтеграл від вектора \bar{A} вздовж замкненого контуру l дорівнює інтегралу від ротора вектора \bar{A} по поверхні S , що обмежена контуром l .

І ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ

1.1 Закон Кулона

Електричне поле, яке створене нерухомими і не залежними в часі зарядами, називається *електростатичним*. Будь-яке електричне поле володіє розподіленою в просторі енергією, за рахунок якої дане поле діє на розташовані в його межах інші заряди. Наявність електричного поля у просторі може бути виявлено за силою, з якою це поле діє на який-небудь інший заряд. Хоча всі заряджені тіла мають кінцеві розміри, проте, якщо розміри заряджених тіл малі порівняно з відстанями між ними, то можна вважати, що такі заряди зосереджені в точках, які збігаються з їхніми центрами. Такі заряди називають *точковими*.

Французький вчений Шарль Кулон дослідним шляхом отримав (1795р.) залежність сили взаємодії двох точкових зарядів від їхньої величини, відстані між ними і властивостей середовища, в якому вони знаходяться. Дану залежність називають *законом Кулона* і аналітично подають у вигляді

$$F = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

де q_1 і q_2 – точкові заряди, одиниця вимірювання яких *кулон* [Кл];

r – відстань між зарядами в метрах [м];

ϵ_a – діелектрична проникність середовища, одиниця вимірювання якої фарада на метр [$\Phi/м$].

Сила взаємодії в даному випадку подається в ньютонках [Н].

Діелектрична проникність пустоти позначається ϵ_0 і дорівнює

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 910^9} \left[\frac{\Phi}{м} \right].$$

Для характеристики діелектричних властивостей середовища часто застосовують поняття відносної діелектричної проникності

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}.$$

Сила взаємодії направлена по прямій, яка з'єднує заряди q_1 і q_2 (рис.1.1).

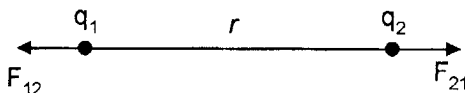


Рисунок 1.1

У векторній формі закон Кулона можна записати у вигляді

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_o, \quad (1.2)$$

де \vec{r}_o – одиничний вектор відстані.

В зв'язку з тим, що $\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}$, то (1.2) подають так

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}. \quad (1.3)$$

Очевидно, що $F_{12} = F_{21}$ і $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Сили відштовхування, якщо заряди однойменні, вважаються позитивними, сили притягання, якщо заряди різнойменні - негативними.

1.2 Напруженість електричного поля

Інтенсивність електричного поля можна характеризувати за механічною (силовою) взаємодією на *пробне* точкове позитивно заряджене тіло (пробний заряд), значення заряду якого (q_o) достатньо мале, щоб його внесення не викликало ніяких змін в досліджуваному полі.

Границя відношення сили, з якою поле діє на нерухомий пробний заряд, розміщений у будь-якій точці поля, до значення цього заряду, коли він

прямує до нуля, називається *напруженістю* електричного поля і позначається буквою E

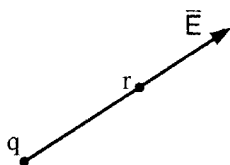
$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

В полі, створеному точковим зарядом q , сила, що діє на пробний заряд q_0 , розміщений в точці на відстані r від заряду q

$$F = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \frac{qq_0}{r^2},$$

а напруженість в даній точці визначається

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \frac{q}{r^2}. \quad (1.4)$$



Напруженість поля – величина векторна і збігається за напрямком з вектором сили (рис.1.2), тому

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (1.5)$$

Рисунок 1.2

Одиницею вимірювання електричного поля є вольт на метр $[B/M]$.

Із (1.5) видно, що поле точкового заряду має сферичну симетрію, тобто рівномірно розподіляється по всіх напрямках. Якщо точковий заряд описати сферою радіусом r , то в будь-якій точці цієї сфери напруженість матиме одно і теж значення, але різне за напрямком.

Необхідно відмітити, що, хоча напруженість електростатичного поля характеризується силою взаємодії поля на пробний заряд, сама вона не є силою. Якщо в полі відсутній пробний заряд, то механічна сила взаємодії відсутня, але напруженість поля \vec{E} в кожній точці поля відмінна від нуля.

Розподіл вектора \vec{E} в полі зручно показувати *силовими лініями*. Силова лінія – це така лінія, в кожній точці якої дотична до неї збігається за напрямком з вектором напруженості поля. Для поля точкового заряду сило-

ві лінії являють собою радіальні прями, що виходять з точки, в якій розташовано заряд (рис. 1.3).

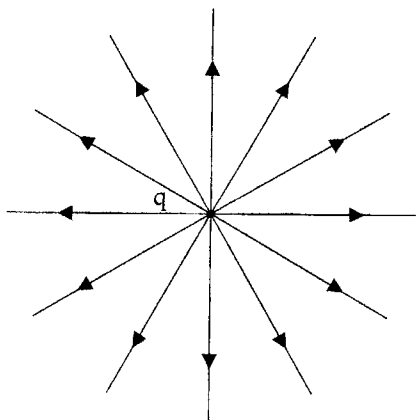


Рисунок 1.3

Дослідами підтверджено, що для електростатичного поля дієвим є принцип накладання. Кожний заряд створює своє поле незалежно від полів інших зарядів і воно накладається на поля інших зарядів. Тому, якщо поле створене декількома точковими зарядами q_1, q_2, q_3, \dots (рис.1.4), то результуюча напруженість поля дорівнює сумі векторів напруженостей, які створені кожним окремим зарядом

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots, \quad (1.6)$$

при цьому

$$\vec{E}_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_k^3} \vec{r}_k.$$

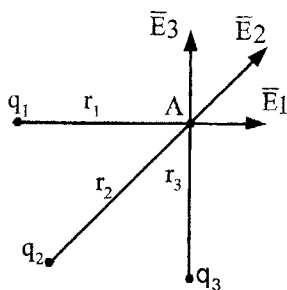


Рисунок 1.4

В багатьох випадках розмірами зарядженого тіла нехтувати не можна, тобто не можна вважати заряд точковим. Відповідно не можна застосовувати (1.5) для визначення напруженості. В таких випадках визначають напруженість поля $d\vec{E}$ від окремих елементарних зарядів dq , приймаючи їх за точкові (рис.1.5), і результуючу напруженість визначають як векторну суму усіх напруженостей.

визначають як векторну суму усіх напруженостей.

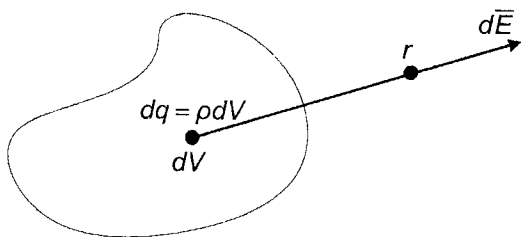


Рисунок 1.5

Для характеристик зарядів тіл в таких випадках введено поняття *об'ємної густини зарядів*

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (1.7)$$

Тоді

$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \frac{dq}{r^3} \bar{r}$$

і

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r^3} \bar{r}. \quad (1.8)$$

Із (1.7) можна зробити висновок, що якщо відома об'ємна густина заряду у всіх точках об'єму зарядженого тіла, то

$$q = \int_V \rho dV. \quad (1.9)$$

Якщо для всіх точок об'ємна густина заряду однакова (рівномірно заряджене тіло), то

$$q = \rho V. \quad (1.10)$$

Якщо заряджена тільки поверхня тіла, то має місце *поверхнева густина заряду*

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (1.11)$$

де dS – елемент поверхні,

і напруженість поля визначають за формулою

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{\sigma d\vec{S}}{r^3} \vec{r}. \quad (1.12)$$

У випадках довгого і дуже тонкого зарядженого тіла користуються лінійною густиною заряду

$$\tau = \frac{dq}{dl} \quad (1.13)$$

і тоді

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{\tau dl}{r^3} \vec{r}. \quad (1.14)$$

Знаходження напруженості поля безпосередньо за (1.8), (1.12) і (1.14) можливо тільки в найпростіших випадках. Більш загальну залежність між напруженістю поля і зарядами, які створюють це поле, встановлює *теорема Гаусса*.

1.3 Теорема Гаусса

Введемо поняття *потіку вектора* \vec{E} через деяку поверхню. Розглянемо в електростатичному полі поверхню S , обмежену деяким контуром (рис.1.6).

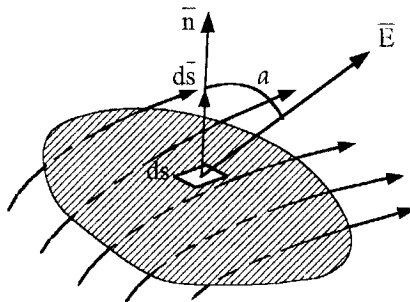


Рисунок 1.6

Виділимо на цій поверхні елементарну площину dS , яку можна вважати плоскою. Таку елементарну площину характеризують вектором $d\vec{S}$, значення якого чисельно дорівнює поверхні елементарної площини dS , а його напрямок збігається з напрямком нормалі \vec{n} до цього елемента. Для всіх точок елементарної площини будемо вважати напруженість поля постійною.

Скалярний добуток

$$\vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \alpha = dN_E$$

називають елементарним потоком вектора \vec{E} через площину dS (α – кут між нормаллю \vec{n} і вектором \vec{E}).

Потік вектора напруженості через всю поверхню S дорівнює

$$N_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.15)$$

Потік вектора напруженості поля величина скалярна.

Розглянемо в однорідному середовищі ($\epsilon_a = \text{const}$) замкнену поверхню, яка обмежена частиною простору, де знаходиться точкове тіло з зарядом q

(рис.1.7).

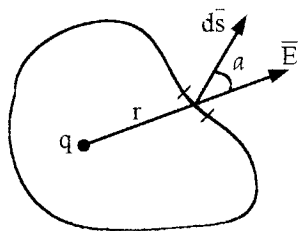


Рисунок 1.7

Визначимо потік вектора \vec{E} через цю замкнену поверхню, маючи на увазі, що позитивні значення вектора $d\vec{S}$ направлені з замкненої поверхні.

Виділимо на поверхні елементарну площину і визначимо елементарний потік вектора \vec{E} через неї

$$dN_E = \vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \alpha.$$

В зв'язку з тим, що заряд точковий, то

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \frac{q}{r^2}$$

$$dN_E = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \frac{q}{r^2} dS \cos \alpha.$$

З геометрії відомо, що

$$\frac{dS \cos \alpha}{r^2} = d\Omega$$

елементарний просторовий кут (рис.1.8), під яким розглянутий елемент поверхні dS видно з точки розташування заряду q .

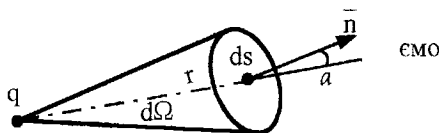


Рисунок 1.8

Потік вектора \vec{E} через всю замкнену поверхню визначається

$$N_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi \epsilon_a \Omega} \oint d\Omega.$$

В останній формулі інтеграл визначає повний просторовий кут, під яким видно всю замкнену поверхню з точки всередині цієї поверхні. Цей кут дорівнює 4π , тому

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}. \quad (1.16)$$

Отримане рівняння носить назву теореми Гаусса:

потік вектора напруженості електростатичного поля через замкнену поверхню в однорідному середовищі дорівнює відношенню величини електричного заряду, розміщеного всередині цієї поверхні, до діелектричної проникності середовища.

Якщо всередині досліджуваної поверхні є декілька точкових зарядів, то

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_k}{\epsilon_a}. \quad (1.17)$$

Коли всередині замкненої поверхні знаходиться заряджене тіло з заданою об'ємною густиною, то теорему Гаусса подають у вигляді

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_a} \int_V \rho dV \quad (1.18)$$

і називають теоремою Гаусса в *інтегральній формі*.

Якщо всередині замкненої поверхні заряди відсутні, то

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0.$$

Застосуємо до правої частини рівності (1.18) теорему Остроградського-Гаусса (В.27)

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_a} \int_V \rho dV.$$

Оскільки в останньому виразі інтегрування ведеться по одному і тому ж об'єму, то можна записати

$$\int_V \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_a} \right) dV = 0.$$

При виведенні теореми Гаусса в інтегральній формі (1.18) не вводилось ніяких обмежень на величину або форму замкненої поверхні і на об'єм, обмежений нею, тому остання рівність справедлива для довільного об'єму інтегрування V . Отже, підінтегральна функція повинна дорівнювати нулю.

Завдяки цьому

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (1.19)$$

Вираз (1.19) є теоремою Гаусса в *диференціальній формі* і її можна пояснити так.

Якщо в деякій точці простору дивергенція вектора \vec{E} не дорівнює нулю і позитивна (об'ємна густина заряду $\rho > 0$), то в даній точці має місце джерело ліній вектора \vec{E} . Тут починаються лінії вектора \vec{E} (силові лі-

нії). Якщо $\rho < 0$, то в даній точці поля сходяться лінії вектора \vec{E} . Лінії вектора \vec{E} завжди мають початкову і кінцеву точки.

Вирази $\text{div} \vec{E}$ для різних систем координат наведені у вступі.

Теорему Гаусса у вигляді (1.18) або (1.19) можна використовувати для розрахунку електростатичних полів тільки однорідних середовищ ($\epsilon_a = \text{const}$).

1.4 Поляризація діелектриків

Систему, яка складається з двох, рівних за величиною але протилежних за знаком точкових зарядів q_0 , розміщених на малій відстані h один від одного (рис.1.9) називають *електричним диполем*.

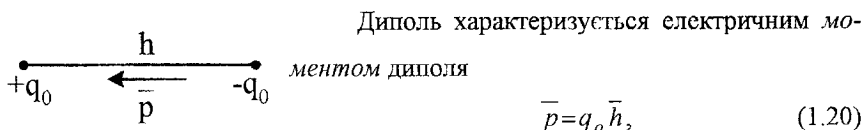
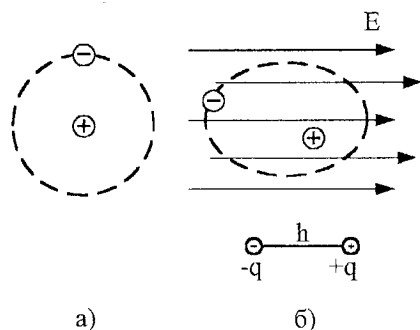


Рисунок 1.9 який є векторною величиною і направлений від негативного заряду до позитивного.

Ідеальний діелектрик, на відміну від провідника, немає вільних зарядів, які під дією електричного поля можуть вільно рухатись. В діелектрику заряди *зв'язані*, тобто входять до складу атомів або молекул. Коротко розглянемо процеси в діелектрику при внесенні його в електричне поле. Під дією електричного поля елементарні заряджені частинки, що входять до складу молекул речовини, під дією механічних сил зміщуються одна відносно одної. Відбувається *поляризація* діелектрика.

В діелектрику можуть бути *неполярні* молекули, тобто молекули, в яких при відсутності зовнішнього поля центри дії позитивно заряджених нерухомих ядер і центри дії негативно заряджених електронів, які обертаються навколо ядер (рис.1.10, а), збігаються і не створюють власного електричного поля. Під дією зовнішнього поля в результаті зміщення зарядів

молекул їхні центри дії не будуть збігатись (рис.1.10, б) і в зовнішньому просторі молекула сприймається як електричний диполь.

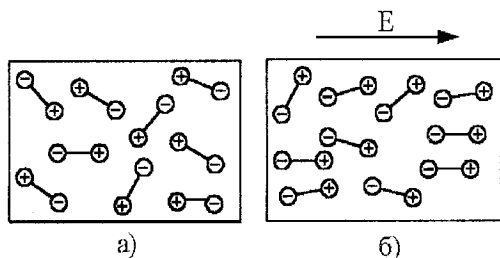


Така поляризація називається *деформаційною*.

Існує клас діелектриків, в яких молекули є диполями навіть при відсутності зовнішнього електричного поля. Такі молекули називаються *полярними*.

Рисунок 1.10

Тепловий рух молекул приводить диполі в хаотичне розташування і електричне поле окремих диполів взаємно компенсується (рис.1.11, а). Під дією зовнішнього електричного поля окремі диполі будуть прагнути розташуватися своїми осями вздовж лінії поля (рис.1.11, б), що викликає *орієнтаційну* поляризацію.



Поляризація речовини може відбуватись не тільки під дією електричного поля, але й в процесі дії механічної напруги (*п'єзоелектричний ефект*).

Рисунок 1.11

Ступінь поляризації діелектриків в заданій точці характеризується *вектором поляризації* \bar{P} , який дорівнює відношенню суми електричних моментів окремих диполів, що знаходяться в деякому об'ємі речовини, до величини цього об'єму, коли він прямує до нуля

$$\bar{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum \bar{p}}{V} \quad (1.21)$$

Якщо позначити через n кількість диполів в одиниці об'єму, то можна записати

$$\bar{P} = n \bar{p}. \quad (1.22)$$

Для більшості діелектриків вектор поляризації пропорціональний напруженості зовнішнього електричного поля (*ізотропне середовище*)

$$\bar{P} = \alpha \bar{E}. \quad (1.23)$$

Коефіцієнт α називають *діелектричним сприйняттям* речовини.

При поляризації загальна сума зарядів в діелектрику не змінюється, вона залишається рівною нулю, тому що заряди зв'язані і не можуть вільно рухатися. Разом з тим поляризація діелектрика вносить зміни в картину поля, тому що диполі створюють свої електричні поля, які накладаються на зовнішнє поле.

Розглянемо поле точкового заряду в діелектрику. Обмежимо точковий заряд довільною замкненою поверхнею S . Під дією поля відбувається поляризація діелектрика, при цьому частина диполів перерізається замкненою поверхнею (рис.1.12.).

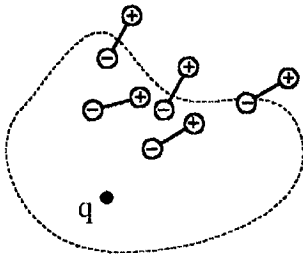


Рисунок 1.12

Дана обставина приводить до того, що всередині замкненої поверхні крім вільного заряду q з'явиться від'ємний зв'язаний заряд $-Q$, тому що частина позитивних зарядів "перерізаних" диполів залишилась за межами замкненої поверхні.

В зв'язку з цим можна розглядати поле в діелектрику як накладання двох полів у пустоті ($\epsilon_a = \epsilon_o$) – поля від вільного заряду q і поля від зв'язаного заряду $-Q$.

Згідно з теоремою Гаусса

$$\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{1}{\epsilon_o} (q - Q), \quad (1.23)$$

яка вказує на те, що наявність діелектрика послаблює електричне поле.

Визначимо величину зв'язаного заряду Q . В цю величину входять заряди тих диполів, які перерізані замкнутою поверхнею S . Такі диполі знаходяться на відстані від цієї поверхні, яка не перевищує h . Тому весь об'єм, в якому розміщені ці диполі, дорівнює $\oint_S \bar{h} d\bar{S}$. В зв'язку з тим, що в одиниці об'єму знаходиться n диполів, то всього поверхнею S буде перерізано

$$N = n \oint_S \bar{h} d\bar{S}$$

диполів. Позначимо заряд одного диполя через q_o , тоді

$$Q = q_o N = q_o n \oint_S \bar{h} d\bar{S}.$$

Врахувавши (1.20) і (1.22) отримаємо

$$Q = \oint_S \bar{P} d\bar{S}. \quad (1.24)$$

В цьому випадку (1.23) прийме вигляд

$$\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{1}{\epsilon_o} \left(q - \oint_S \bar{P} d\bar{S} \right)$$

або

$$\oint_S \epsilon_o \bar{E} d\bar{S} + \oint_S \bar{P} d\bar{S} = q.$$

В лівій частині цієї рівності інтегрування здійснюється по одній і тій же поверхні, тому

$$\oint_S (\epsilon_o \bar{E} + \bar{P}) d\bar{S} = q. \quad (1.25)$$

Позначають підінтегральну функцію

$$\bar{D} = \epsilon_o \bar{E} + \bar{P} \quad (1.26)$$

і називають *вектором електричного зміщення*. Одиницею вимірювання вектора електричного зміщення \bar{D} , так само як і вектора поляризації \bar{P} є кулон на квадратний метр $\left[\frac{Кл}{м^2} \right]$.

Для ізотропного середовища з урахуванням (1.23) можна записати

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \alpha \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}. \quad (1.27)$$

Отже, діелектрична проникність ізотропного середовища

$$\epsilon_a = \epsilon_o + \alpha.$$

Теорему Гаусса (1.25) з урахуванням (1.27) можна записати у вигляді

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (1.28)$$

Якщо поле створено не точковим зарядом, то аналогічно (1.18)

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (1.29)$$

Останнє співвідношення встановлює рівність потоку вектора електричного зміщення через будь-яку замкнену поверхню величини вільного заряду, що охоплює цю поверхню. Вираз (1.29) називають *узагальненою* теоремою Гаусса в інтегральній формі, тому що її можна застосувати для будь-якого середовища, не тільки для однорідного.

Застосувавши до (1.29) теорему Остроградського-Гаусса, отримаємо узагальнену теорему Гаусса в диференціальній формі

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (1.30)$$

Таким чином встановлено, що в діелектрику, який розміщено у зовнішньому полі, за рахунок явища поляризації створюється внутрішнє поле, яке послаблює зовнішнє поле. Ступінь цього послаблення характеризує діелектрична проникність речовини ϵ_a .

При великих напруженостях зовнішнього поля внутрішні сили, які зв'язують заряди в молекулах діелектрика, можуть виявитися недостатніми. З'являться вільні заряди. Діелектрик втрачає свої властивості – відбувається *пробій* діелектрика. Значення напруженості електричного поля, при якому пробивається діелектрик називається *пробійною* напруженістю або *електричною міцністю* діелектрика.

1.5 Потенціал електростатичного поля

Напруженість електричного поля являє собою силову характеристику електричного поля в даній точці, але в зв'язку з тим, що електричне поле має здатність здійснювати роботу, то для характеристики поля вводять скалярну величину, яка зв'язана з енергетичним станом поля.

Припустимо, що є електричне поле, яке створене точковим зарядом q (рис.1.13).

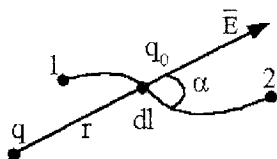


Рисунок 1.13

Розглянемо роботу сил поля на переміщення пробного заряду q_0 з точки 1 в точку 2 на деяку відстань. На пробний заряд діє сила

$$\vec{F} = q_0 \vec{E},$$

тому для його переміщення на відстань dl поле виконує роботу

$$dA = q_0 E dl \cos \alpha = q_0 \vec{E} d\vec{l},$$

де через $d\vec{l}$ позначено вектор, який за величиною дорівнює елементарній відстані dl і направлений по дотичній до цієї відстані в сторону переміщення заряду q_0 . Кут α – кут між векторами \vec{E} і $d\vec{l}$.

В зв'язку з тим, що вектори напруженості \vec{E} і елементу відстані $d\vec{l}$ не збігаються, то робота визначається скалярним добутком цих векторів.

Вся робота, яку виконує поле, при переносі заряду з точки 1 в точку 2 визначається

$$A = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Робота, яка витрачається силами поля на переміщення одиничного позитивного заряду, називається *різницею потенціалів* ($\varphi_1 - \varphi_2$) або напругою U_{12} між точками 1 і 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.31)$$

Знайдемо потенціал точки 1

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \varphi_2. \quad (1.32)$$

Якщо прийняти потенціал точки 2 рівним нулю ($\varphi_2 = 0$), то потенціал довільної точки поля можна визначити як роботу, яка витрачається силами поля, на переміщення одиничного позитивного заряду з даної точки поля в точку, потенціал якої прийнято рівним нулю. Часто за точку нульового потенціалу приймають точку, віддалену в нескінченність, або точку землі. Напруженість і потенціал вимірюють у вольтах [В].

Нехай в електростатичному полі переміщується точкове тіло з зарядом q по замкненому контуру $1a2b1$ (рис.1.14).

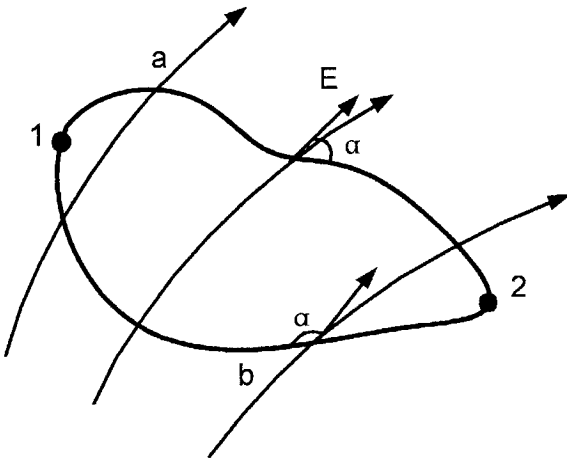


Рисунок 1.14

На тих ділянках шляху, де $\alpha < 90^\circ$ ($\cos \alpha > 0$) робота позитивна, тобто виконується за рахунок сил поля. На ділянках шляху де $\alpha > 90^\circ$ ($\cos \alpha < 0$) робота від'ємна, тобто виконується зовнішніми силами проти сил поля.

Сумарна робота, яка витрачається на переміщення тіла з зарядом q по всьому замкненому контуру повинна дорівнювати нулю.

В протилежному випадку завжди можна було б повторити обхід контуру будь-яку кількість разів і отримати при кожному обході кінцеву позитивну роботу, вертаючись кожен раз у вихідну точку, що суперечить закону збереження енергії.

Отже,

$$q \oint \bar{E} d\bar{l} = 0 \quad \text{або} \quad \oint \bar{E} d\bar{l} = 0. \quad (1.33)$$

В електростатичному полі лінійний інтеграл від напруженості поля, взятий вздовж любого замкненого шляху, дорівнює нулю. Це означає, що різниця потенціалів між двома точками не залежить від шляху інтегрування. Дійсно (рис.1.14),

$$\oint_{1a2b1} \bar{E} d\bar{l} = \int_{1a2} \bar{E} d\bar{l} + \int_{2b1} \bar{E} d\bar{l} = \int_{1a2} \bar{E} d\bar{l} - \int_{1b2} \bar{E} d\bar{l} = 0.$$

Звідки

$$\oint_{1a2} \bar{E} d\bar{l} = \int_{1b2} \bar{E} d\bar{l}.$$

Поля, для яких виконується співвідношення (1.33), називають *потенціальними*.

Застосуємо до (1.33) теорему Стокса (В.28)

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = \int_S \text{rot } \bar{E} d\bar{S} = 0.$$

В зв'язку з тим що поверхня, яка обмежує контур інтегрування не дорівнює нулю, то

$$\text{rot } \bar{E} = 0. \quad (1.34)$$

Якщо ротор деякої векторної функції відмінний від нуля в довільній точці, то ця обставина є ознакою існування навколо цієї точки вихрів вектора цієї функції, тобто замкненості його силових ліній. Оскільки ротор вектора \bar{E} в будь-якій точці поля завжди дорівнює нулю, то це свідчить про те, що силові лінії напруженості поля E не замкнені. Раніше було по-

казано, що силові лінії вектора \vec{E} завжди починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних.

Знайдемо потенціал точки поля, що створене точковим зарядом, на відстані r від місця знаходження заряду, прийнявши рівним нулю потенціал нескінченно віддаленої точки (рис. 1.13). У відповідності з (1.32)

$$\varphi = \int_l^{\infty} \vec{E} dl.$$

В зв'язку з тим, що різниця потенціалів не залежить від шляху інтегрування, інтегрування здійснимо вздовж радіуса r . При цьому напрямок вектора напруженості поля \vec{E} і елемента відстані $d\vec{l} = d\vec{r}$ збігаються і тому скалярний добуток $\vec{E}d\vec{l}$ перетворюється у звичайний добуток $E dr$. Отже

$$\varphi = \int_r^{\infty} E dr.$$

Напруженість поля точкового заряду (1.4)

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

тому

$$\varphi = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_r^{\infty}.$$

Звідки

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (1.35)$$

Якщо електричне поле створене декількома точковими зарядами, то згідно з принципом накладання, потенціал точки визначається як алгебраїчна сума потенціалів даної точки від кожного заряду окремо

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k}. \quad (1.36)$$

Якщо поле створене зарядженим тілом з об'ємною густиною ρ , то

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}. \quad (1.37)$$

В електростатичному полі завжди можна виділити поверхні, в яких потенціали точок мають однакові значення. Такі поверхні називаються *еквіпотенціальними*. Лінії, що отримуються при перерізі цих поверхонь будь-якою площиною, називаються *еквіпотенціальними лініями*. На рисунках еквіпотенціальні лінії проводять таким чином, щоб різниця потенціалів між сусідніми лініями залишалась постійною. Рівняння еквіпотенціальної поверхні має вигляд

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

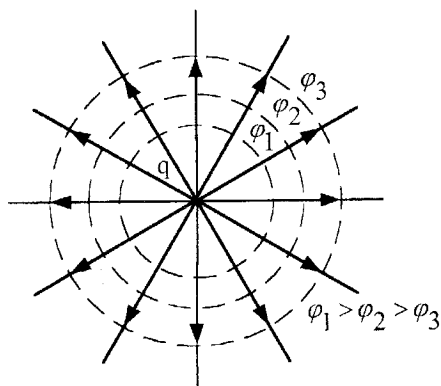


Рисунок 1.15

Картина поля стає особливо наочною, коли разом зображені силові і еквіпотенціальні лінії. На рис.1.15 наведена картина поля, створеного точковим зарядом q .

Суцільні лінії – силові лінії, пунктирні – еквіпотенціальні, які являють собою кола, тому що еквіпотенціальні поверхні такого поля є сферичними поверхнями.

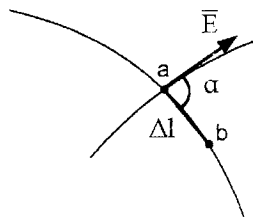


Рисунок 1.16

Покажемо, що силові лінії завжди пересікають еквіпотенціальні поверхні під прямим кутом.

Візьмемо на еквіпотенціальній поверхні дві точки a і b , які знаходяться одна відносно одної на малій відстані Δl , так що у всіх точках цього відрізка напруженість можна вважати величиною сталою (рис.1.16).

Різниця потенціалів між точками a і b визначається

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \overline{E} d\bar{l} = E \Delta l \cos \alpha.$$

Потенціали точок a і b однакові за визначенням (поверхні екіпотенціальні), тому

$$E \Delta l \cos \alpha = 0.$$

Ні E , ні Δl нулю не дорівнюють, тому

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{і} \quad \alpha = 90^\circ.$$

1.6 Зв'язок між потенціалом і напруженістю поля

Потенціал електростатичного поля в конкретній точці можна знайти за (1.32). Визначимо потенціали різних точок поля як функції координат $\varphi(x, y, z)$, прийнявши потенціал точки 2 за сталу величину ($\varphi_2 = \text{const}$). В цьому випадку

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x, y, z}^2 \overline{E} d\bar{l} + \varphi_2 = - \int_2^{x, y, z} \overline{E} d\bar{l} + \varphi_2. \quad (1.38)$$

В зв'язку з тим, що верхня межа інтеграла змінна величина, а значення потенціалу φ_2 можна розглядати як постійну інтегрування, то (1.38) зручно записати у вигляді невизначеного інтеграла

$$\varphi = - \int \overline{E} d\bar{l} \quad (1.39)$$

з наступним визначенням постійної інтегрування в залежності від умов конкретної задачі.

Отже, (1.39) дозволяє знайти потенціал поля як функцію координат, якщо відомий закон зміни напруженості поля $\overline{E}(x, y, z)$ від координат.

В багатьох випадках необхідно розв'язати обернену задачу, тобто за відомою потенціальною функцією необхідно знайти напруженість поля.

З цією метою розглянемо дві близько розташовані еквіпотенціальні поверхні на відстані Δn одна від одної (рис.1.17).

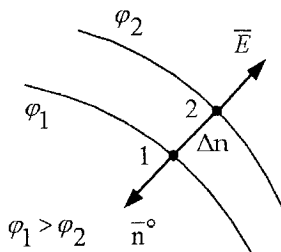


Рисунок 1.17

Різниця потенціалів між цими поверхнями визначається

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Виберемо найкоротший шлях інтегрування між точками 1 і 2 по нормалі до еквіпотенціальних поверхонь та прийнемо, що напруженість поля при малих Δn для всіх точок шляху інтегрування однакова. В цьому випадку числове значення приросту потенціалу

$$\Delta\varphi = E \Delta n,$$

в зв'язку з тим, що напрямки шляху інтегрування і напруженості поля збігаються на протязі всього шляху інтегрування і $E = const$.

Якщо перейти до нескінченно малих величин і ввести одиничний вектор нормалі \vec{n}^o (рис.1.17), який направлений в сторону зростання потенціалу (назустріч вектору \vec{E}), то в векторній формі

$$\vec{E} = - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}^o. \quad (1.40)$$

Швидкість зміни скалярної функції, взятої в напрямку її найбільшого зростання, називається *градієнтом* цієї функції (див. вступ), тому

$$\vec{E} = - grad\varphi \quad \text{або} \quad \vec{E} = - \nabla\varphi. \quad (1.41)$$

В прямокутній системі координат (В.12)

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Звідси визначаються проєкції напруженості поля по осях координат

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.42)$$

Останній вираз показує, що потенціал поля як функція координат є *неперервною* функцією, тому що для іншого випадку в тих точках, де потенціальна функція мала б розрив, напруженість поля прийняла б нескінченне значення, що немає фізичного тлумачення.

1.7 Рівняння Пуассона і Лапласа

Якщо відомий закон розподілу об'ємної густини заряду в деякій області простору $\rho(x, y, z)$, то вираз (1.37)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \varepsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r}$$

принципово дозволяє знайти потенціальну функцію, а потім за (1.42) складові напруженості електричного поля, тобто повністю описати картину поля. Проте шлях прямого визначення потенціалу за (1.37) не завжди зручний, тому що необхідно виконувати дуже складні обчислення. Часто задача розв'язується значно простіше, якщо її звести до розв'язування диференціального рівняння.

Для отримання такого диференціального рівняння підставимо в диференціальну форму теорема Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

вираз напруженості через потенціал (1.41)

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \varphi.$$

Тоді отримуємо

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (1.43)$$

Запишемо отримане рівняння через оператор набла

$$\nabla(\nabla \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$$

або

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (1.44)$$

Рівняння (1.44) називають *рівнянням Пуассона* і воно є основним рівнянням електростатичного поля.

В областях поля, в яких відсутні вільні заряди ($\rho = 0$) рівняння (1.44) матиме вигляд

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.45)$$

і називається *рівнянням Лапласа*.

Оператор ∇^2 називають *оператором Лапласа* або *лапласіаном* і інколи позначають також символом Δ .

Запишемо рівняння (1.44) в прямокутній системі координат. У вступі було показано, що

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k},$$

тому (1.44) подамо у вигляді

$$\nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Виконавши почленно перемноження та врахувавши співвідношення (В.3) і (В.4), отримаємо рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \quad (1.46)$$

та рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.47)$$

Наведемо вирази для $\nabla^2 \varphi$ в циліндричній

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (1.48)$$

і сферичній

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}, \quad (1.49)$$

системах координат.

Рівняння Пуассона і Лапласа, як будь-які інші диференціальні рівняння в частинних похідних, задовільняють множинам різних функцій, які представляють частинні розв'язки. В склад таких функцій входять невідзначені постійні, які знаходять із граничних умов. Під граничними розуміють умови, яким підпорядковані поля на границях розділу середовищ з різними електричними властивостями.

1.8 Граничні умови на поверхні розділу двох діелектриків

Розглянемо границю двох діелектриків з діелектричними проникностями ε_{a1} і ε_{a2} відповідно (рис.1.18).

Для більш повного узагальнення припустимо, що вздовж поверхні розділу розташовано вільний заряд q з поверхневою густиною σ . Проведемо замкнену циліндричну поверхню так, щоб вона пересікала поверхню розділу (рис.1.18) і вирізала на зарядженій поверхні площину ΔS з поверхневим зарядом $\sigma \Delta S$ на ній.

Згідно узагальненій теоремі Гаусса виконаємо інтегрування по циліндричній поверхні

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sigma \Delta S.$$

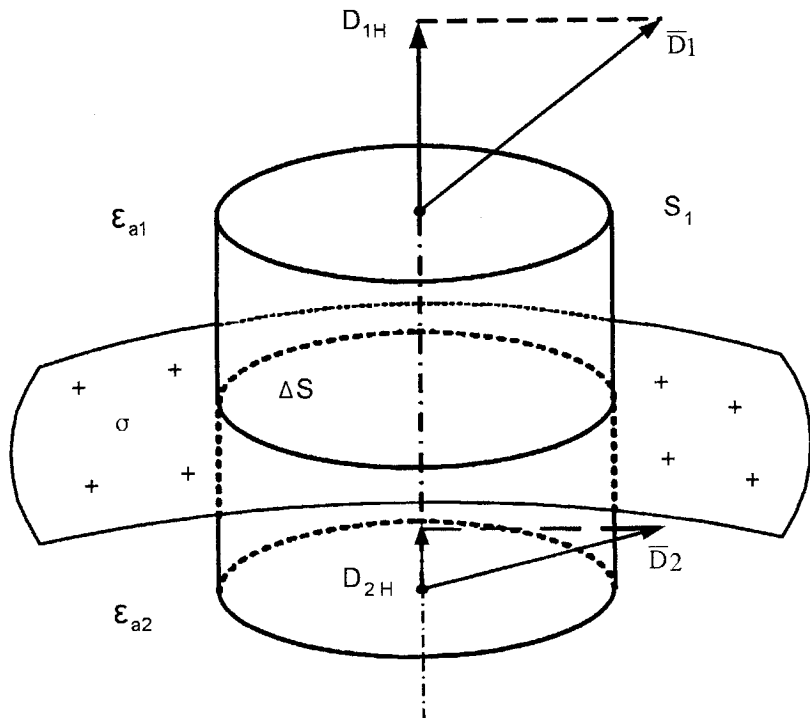


Рисунок 1.18

Розділимо поверхню інтегрування на три частини – дві основи циліндра (ΔS) і бокова поверхня (S_1). Тому

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_{\Delta S} \bar{D}_1 d\bar{S} + \int_{\Delta S} \bar{D}_2 d\bar{S} + \int_{S_1} \bar{D} d\bar{S}.$$

Виберемо площину ΔS настільки малою, щоб вважати для всіх точок цієї площини вектор D однаковим.

Висоту циліндра прийемо нескінченно малою величиною, такою, що третім членом в останньому рівнянні можна знехтувати.

В цьому випадку

$$\int_{\Delta S} \bar{D}_1 d\bar{S} = D_{1H} \Delta S, \quad \int_{\Delta S} \bar{D}_2 d\bar{S} = -D_{2H} \Delta S,$$

де D_{1H} , D_{2H} – нормальні складові векторів \bar{D}_1 і \bar{D}_2 (рис.1.18).

Знак мінус біля другого інтеграла з'явився тому, що вектор елементу $d\vec{S}$ завжди направлений із замкненої поверхні. Тому вектори \vec{D}_{2H} і $d\vec{S}$ направлені в протилежні сторони.

Отже

$$D_{1H} \Delta S - D_{2H} \Delta S = \sigma \Delta S$$

або

$$D_{1H} - D_{2H} = \sigma. \quad (1.50)$$

При наявності вільних зарядів на поверхні розділу двох діелектриків нормальна складова вектора \vec{D} стрибком змінюється на величину поверхневої густини вільних зарядів.

Якщо на поверхні розділу вільні заряди відсутні ($\sigma = 0$), то

$$D_{1H} = D_{2H}, \quad (1.51)$$

тобто на поверхні розділу двох діелектриків при відсутності вільних зарядів нормальні складові векторів електричного зміщення рівні між собою (неперервні).

Замінивши складові вектора \vec{D} на складові вектора напруженості \vec{E} , отримаємо

$$\varepsilon_{a1} E_{1H} = \varepsilon_{a2} E_{2H} \quad (1.52)$$

або

$$\frac{E_{1H}}{E_{2H}} = \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}}. \quad (1.53)$$

Нормальні складові напруженості електричного поля на границі діелектриків обернено пропорціональні діелектричним постійним.

Для отримання ще однієї граничної умови, проведемо прямокутник перпендикулярно поверхні розділу (рис.1.19).

Візьмемо лінійний інтеграл від вектора напруженості \vec{E} вздовж замкненого контуру 1 – 2 – 3 – 4 за напрямком, який збігається з напрямком руху часової стрілки. Такий інтеграл згідно з (1.33) дорівнює нулю. Тому розіб'ємо контур інтегрування на чотири ділянки і отримаємо

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_{12} \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_{23} \vec{E} d\vec{l} + \int_{34} \vec{E}_2 d\vec{l} + \int_{41} \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

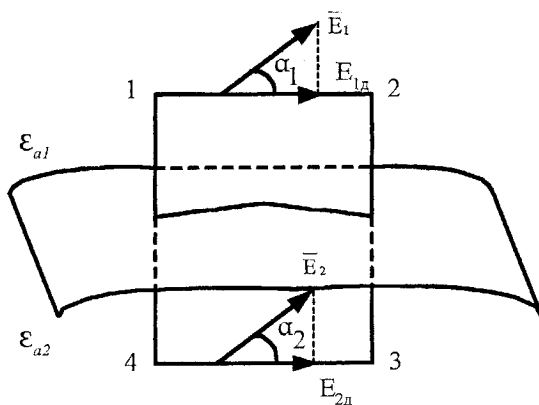


Рисунок 1.19

Припустимо, що відрізки Δl ділянок 1 – 2 і 3 – 4 такої малої довжини, що вектор напруженості \vec{E} можна вважати однаковим по його довжині. Відрізки 2 – 3 і 4 – 1 можна вибрати нескінченно малими. Тому перший і четвертий інтеграли дорівнюють нулю. Тоді

$$\vec{E}_1 \Delta l - \vec{E}_2 \Delta l = 0$$

або

$$E_1 \Delta l \cos \alpha_1 - E_2 \Delta l \cos \alpha_2 = 0.$$

Знак мінус з'явився тому, що на ділянці 3 – 4 напрямок обходу і напрямок вектора \vec{E}_2 протилежні. В зв'язку з тим, що $E_1 \cos \alpha_1 = E_{1\tau}$ і $E_2 \cos \alpha_2 = E_{2\tau}$ є дотичні (тангенціальні) складові векторів напруженості \vec{E} , то

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (1.54)$$

На границі розділу двох діелектриків дотичні (тангенціальні) складові векторів напруженості електричного поля рівні між собою (неперервні).

Співвідношення (1.53) і (1.54) дозволяють знайти ступінь зміни напрямку векторів напруженості поля при переході через границю розділу (заломлення поля).

Виділимо невелику плоску ділянку границі розділу (рис.1.20) діелектриків.

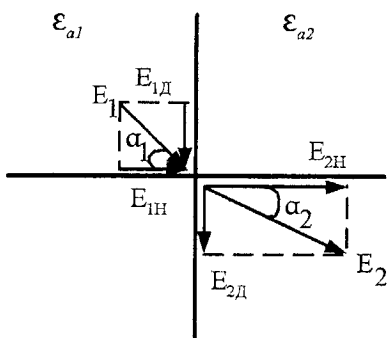


Рисунок 1.20

Позначимо кут між напрямом вектора напруженості і нормаллю до поверхні розділу символом α .

Граничні умови при відсутності вільних зарядів

$$E_{1д} = E_{2д},$$

$$\epsilon_{a1} E_{1н} = \epsilon_{a2} E_{2н}.$$

З рис.1.20 видно, що

$$E_1 \cos \alpha_1 = E_{1н}, \quad E_2 \cos \alpha_2 = E_{2н},$$

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_{1д}, \quad E_2 \sin \alpha_2 = E_{2д}.$$

Підставимо ці значення в граничні умови і отримаємо

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2,$$

$$\epsilon_{a1} E_1 \cos \alpha_1 = \epsilon_{a2} E_2 \cos \alpha_2.$$

Поділимо перше рівняння на друге і матимемо

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\varepsilon_{a1}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\varepsilon_{a2}}$$

або

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}. \quad (1.55)$$

Тангенс кутів падіння (α_1) і заломлення (α_2) відносяться як діелектричні проникності середовищ.

Зауважимо, що неоднакова кількість нормальних складових вектора напруженості електричного поля на межі двох середовищ означає, що кількість ліній поля вектора \vec{E} , яка приходить на одиницю поверхні, неоднакова з однієї і з іншої сторони границі розділу. На поверхні розділу з'явилися джерела ліній поля, які являють собою зв'язані заряди, що зумовлені неоднаковою здатністю середовищ до поляризації.

1.9 Граничні умови на поверхні розділу діелектрика і провідника

Провідник відрізняється від діелектрика наявністю вільних зарядів, які під дією сил поля можуть вільно переміщатися. Внесемо незаряджений провідник в електростатичне поле з напруженістю \vec{E} . Під дією сил поля від'ємні заряди (електрони) переміщуються на поверхню провідника в сторону з більш високим потенціалом (рис.1.21).

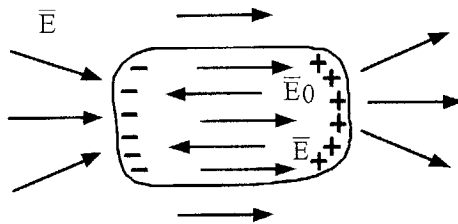
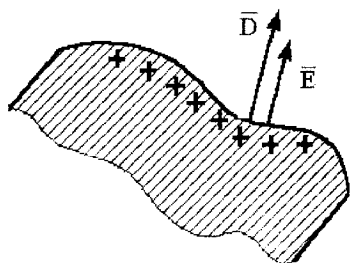


Рисунок 1.21

Поверхня протилежної сторони провідника заряджається позитивно. Такий перерозподіл зарядів відбувається до тих пір, поки створюване внутрішніми зарядами поле всередині провідника \vec{E}_o не компенсує зовнішнє поле ($\vec{E}_o = \vec{E}$). В результаті цього напруженість поля всередині провідника стане рівною нулю. Такий перерозподіл в провідниках під дією зовнішнього поля називається *електростатичною індукцією*.

Всі точки провідника будуть мати один потенціал. Якщо припустити, що між двома деякими точками провідника є різниця потенціалів, то під дією цієї різниці потенціалів почали би переміщуватися вільні заряди. В зв'язку з тим, що розглядається електростатичне поле (поле нерухомих зарядів), то таке припущення неможливе. Оскільки всі точки провідника ма-



ють однаковий потенціал, то його поверхня *еквіпотенціальна*. Тому вектор напруженості \vec{E} і електричного зміщення \vec{D} поля зовні провідника на його поверхні перпендикулярні поверхні провідника і не мають дотичних складових (рис. 1.22).

Всередині провідника $\vec{D} = 0, \vec{E} = 0$.

В результаті електростатичної індукції на поверхні провідника виявляється вільний заряд з поверхневою густиною σ . Тому з (1.50), врахувавши що $D_{2H} = 0, D_{1H} = D$, отримуємо

$$D = \sigma. \quad (1.56)$$

Вектор електричного зміщення в довільній точці діелектрика, яка безпосередньо межує з поверхнею провідника, чисельно дорівнює поверхневій густині заряду цього тіла і направлений перпендикулярно до цієї поверхні.

Якщо провідник заряджений, то завдяки силам відштовхування од-
нойменних зарядів вони розташовуються на поверхні так, щоб було відсу-
тнє поле всередині провідника.

Якщо в провіднику, який знаходиться у зовнішньому електричному
полі, видалити всю внутрішню частину, залишивши тільки тонку поверх-
ню, то картина поля не зміниться. Поле, всередині провідника, що обмеже-
на металевою оболонкою, відсутнє. Така провідна оболонка називається
екраном. Вона екранує внутрішню частину провідника і все, що там знахо-
диться від зовнішніх електростатичних полів. Стіни такого екрана не
обов'язково повинні бути суцільними, їх можна робити з металевої сітки.

1.10 Електрична ємність провідного тіла

Електричною ємністю тіла провідника називають його властивість
накопичувати і утримувати на своїй поверхні електричний заряд q при пе-
вній величині потенціалу φ .

Відношення величини заряду q до потенціалу φ є мірою цієї влас-
тивості і позначається буквою C . Одиницею вимірювання ємності є *фара-
да* $[F]$. Отже,

$$C = \frac{q}{\varphi}, \quad (1.57)$$

при цьому рівним нулю приймається потенціал точки, яка віддалена у не-
скінченність.

Електрична ємність ізольованого тіла залежить від геометричних па-
раметрів цього тіла та від діелектричних властивостей середовища, в якому
воно знаходиться.

Частіше кажуть про ємність між двома провідними тілами, які роз-
межовані діелектриком і несуть на собі рівні за величиною та протилежні
за знаком заряди ($+q$ і $-q$). В цьому випадку під ємністю між двома тіла-

ми розуміють відношення абсолютної величини заряду на одному з тіл до напруги між ними

$$C = \frac{q}{U}, \quad (1.58)$$

де $U = \varphi_1 - \varphi_2$.

Така ємність залежить від геометричних розмірів тіл, їхньої конфігурації, взаємного розташування та від діелектричних властивостей середовища.

Пристрій, який призначений для отримання певного значення ємності, називають *конденсатором*. Конденсатори можуть бути плоскі, циліндричні, сферичні та ін. Приклад розрахунку ємності наведено у другому розділі.

1.11 Енергія електростатичного поля

В електростатичному полі, створеному електричними зарядами, є певна кількість енергії, що розподіляється з різною густиною в об'ємі всього простору, на який розповсюджується дане поле. Ця енергія визначається роботою, яка витрачається зовнішніми силами на розподіл і переміщення зарядів. За рахунок цієї енергії електростатичне поле переміщує заряди і здійснює роботу. При цьому енергія поля зменшується. Якщо заряди переміщуються під дією зовнішніх сил, то енергія поля збільшується.

Для визначення кількості накопиченої в електростатичному полі енергії приймемо такі умови.

1. Потенціал поля і напруженість в нескінченно віддалених точках дорівнюють нулю.
2. Всі процеси створення електростатичного поля відбуваються досить повільно, так щоб можна було не враховувати магнітні поля, які виникають в процесі руху зарядів.

3. Величина енергії поля не залежить від того, яким шляхом воно створюється, тобто в якій послідовності переміщувались заряди.

Нехай система провідних тіл $1, 2, 3, \dots, n$ поступово заряджається до тих пір, поки заряди на них не стануть рівними $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$. При збільшенні заряду тіла k , що має потенціал φ_k , на величину dq_k витрачається елементарна робота $\varphi_k dq_k$.

Якщо тіло k зарядиться від нуля до q_k , то робота, яка витрачається на цей процес визначається

$$A_k = \int_0^{q_k} \varphi_k dq_k.$$

Після зарядки всіх n тіл повна робота

$$A = \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \int_0^{q_k} \varphi_k dq_k. \quad (1.59)$$

Енергія створеного при цьому електростатичного поля дорівнює виконаній роботі

$$W_E = A.$$

При виконанні третьої умови можна вважати, що заряди на всіх тілах зростають пропорціонально один відносно одного, тобто

$$q_S = \gamma_{kS} q_k. \quad (1.60)$$

Потенціал φ_k k -го тіла залежить від зарядів усіх тіл. В зв'язку з тим, що між потенціалами і зарядами є лінійна залежність, то у відповідності з принципом накладання

$$\varphi_k = \alpha_{k1} q_1 + \alpha_{k2} q_2 + \dots + \alpha_{kn} q_n.$$

Звідки

$$\varphi_k = \alpha_{k1} \gamma_{k1} q_k + \alpha_{k2} \gamma_{k2} q_k + \dots + \alpha_{kn} \gamma_{kn} q_k$$

або

$$\varphi_k = (\alpha_{k1} \gamma_{k1} + \alpha_{k2} \gamma_{k2} + \dots + \alpha_{kn} \gamma_{kn}) q_k = \gamma_k q_k, \quad (1.61)$$

де $\gamma_k = const$.

Таким чином, підставивши (1.61) в (1.59) отримаємо

$$W_E = \sum_{k=1}^n \int_0^{q_k} \gamma_k q_k dq_k = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k q_k^2}{2}, \quad (1.62)$$

або

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k. \quad (1.63)$$

Енергія електростатичного поля системи заряджених тіл дорівнює половині суми добутків потенціалів тіл на їхні заряди.

Електростатичне поле створюється не тільки зарядженими провідними тілами, але і розподіленими зарядами з об'ємною густиною ρ .

В цьому випадку

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k + \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV. \quad (1.64)$$

Для перетворення (1.64) використаємо векторне співвідношення (В.25)

$$\operatorname{div}(\varphi \bar{D}) = \varphi \operatorname{div} \bar{D} + \bar{D} \operatorname{grad} \varphi.$$

Врахувавши, що $\operatorname{div} \bar{D} = \rho$ (1.30), а $\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ (1.41) отримаємо

$$\varphi \rho = \operatorname{div}(\varphi \bar{D}) + \bar{E} \bar{D}.$$

Тоді (1.64) запишемо у вигляді

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \bar{D}) dV + \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dV.$$

Перетворимо перший інтеграл за теоремою Остроградського-Гауса (В.27)

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k + \frac{1}{2} \oint_S \varphi \bar{D} \bar{dS} + \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dV. \quad (1.65)$$

Перший інтеграл береться по всій поверхні S , що обмежує об'єм V , в якому знаходиться поле. Ця поверхня включає в себе поверхню сфери S_∞ нескінченно великого радіуса і поверхню S_k провідних тіл, тому що в них поле відсутнє (рис. 1.23).

При інтегруванні по поверхні S_∞ можна розглядати сумарний заряд, що розташований в обмеженій області простору як точковий, тому потенціал такого заряду зменшується з відстанню r , як $1/r$ (1.35), а електричне зміщення D , як $1/r^2$ (1.4).

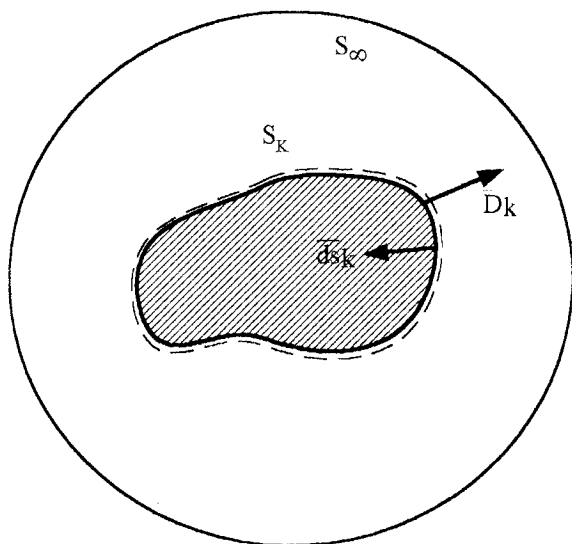


Рисунок 1.23

Отже, підінтегральний вираз в першому інтегралі (1.65) зменшується як $1/r^3$. Площа інтегрування сфери збільшується пропорційно r^2 . Тому при $r \rightarrow \infty$ перший інтеграл при інтегруванні по поверхні S_∞ прямує до нуля.

При інтегруванні по поверхні провідників S_k , врахуємо, що вектор елементарної поверхні направлений завжди з об'єму, який обмежує поверхню інтегрування (рис.1.23.), а вектор електричного зміщення на поверхні провідника направлений по нормалі до його поверхні в протилежну сторону, тому

$$\bar{D}_k d\bar{S}_k = -D_k dS_k.$$

На поверхні провідника, як витікає з граничних умов, $D_k = \sigma_k$, а потенціал довільної точки провідного тіла має одне і те ж значення φ_k , тому при наявності декількох провідних тіл перший інтеграл в (1.65) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{2} \oint_S \varphi \bar{D} d\bar{s} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k \oint_{S_k} \sigma dS = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k.$$

Звідси енергія електростатичного поля

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dV. \quad (1.66)$$

Дана формула визначає енергію електростатичного поля як суму нескінченно малих складових вигляду

$$dW_E = \frac{\bar{E} \bar{D}}{2} dV,$$

які виражають елементарну енергію, що припадає на елементарний об'єм поля.

Звідси об'ємна густина енергії електростатичного поля

$$W_{OE} = \frac{\partial W_E}{\partial V} = \frac{\bar{E} \bar{D}}{2}. \quad (1.67)$$

Для ізотропного середовища $\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}$, тому

$$W_{OE} = \frac{E D}{2} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2} = \frac{D^2}{2 \varepsilon_a},$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_a E^2 dV. \quad (1.68)$$

1.12 Сили в електростатичному полі, які діють на заряджені тіла

Механічні сили взаємодії точкових заряджених тіл можна визначити за допомогою закону Кулона. В загальному вигляді зручно пов'язувати сили з енергією поля.

Припустимо, що поле створене декількома зарядженими тілами (рис.1.24), причому тільки одне тіло (тіло n) може переміщуватися в напрямку координати g . Інші заряджені тіла нерухомі.

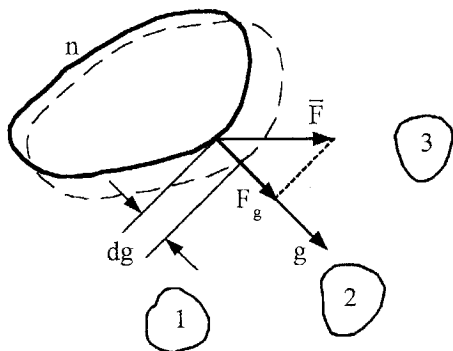


Рисунок 1.24

При переміщенні тіла n на відстань dg під дією сили \vec{F} поле виконує елементарну роботу

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{g} = F_g dg, \quad (1.69)$$

тому енергія поля зменшується на ту ж саму величину, тобто

$$dW_E = -dA = -F_g dg. \quad (1.70)$$

Якщо всі тіла системи ізольовані, то заряди на них залишаються незмінними, а потенціали всіх точок поля зменшуються.

З (1.69) визначимо силу, яка діє на заряджене тіло, коли на тілах системи заряди не змінюються ($q_i = const$)

$$F_g = -\frac{\partial W_E}{\partial g}. \quad (1.71)$$

Припустимо, що всі тіла з'єднані з джерелом електричних зарядів для того, щоб при переміщенні зарядженого тіла залишались незмінними потенціали цих тіл. Для цього всі заряджені тіла повинні отримати додаткові заряди. Енергія, яка витрачається джерелом при нескінченно малій зміні заряду всіх тіл, дорівнює

$$dW_{\text{доп}} = \sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k. \quad (1.72)$$

Ця енергія витрачається на здійснення роботи (dA) переміщення тіла n на відстань dg і на приріст енергії (dW_E) електростатичного поля, тому що при незмінному потенціалі ($\varphi_k = \text{const}$) збільшились заряди тіл

$$dW_{\text{доп}} = dA + dW_E. \quad (1.73)$$

В зв'язку з тим, що енергія електростатичного поля системи заряджених тіл (1.63) дорівнює

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k,$$

то при $\varphi_k = \text{const}$ і зміні зарядів на dq_k приріст енергії становить

$$dW_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k,$$

тобто рівно половині енергії, яка витрачається зовнішнім джерелом (1.72).

Використавши (1.69), (1.72), подамо (1.73) у такому вигляді

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k = F_g dg + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k.$$

Звідси

$$F_g dg = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k = dW_E.$$

Отже, якщо в системі заряджених тіл підтримуються постійні потенціали ($\varphi_k = \text{const}$) за рахунок зовнішнього джерела, то сила визначається

$$F_g = \frac{\partial W_E}{\partial g}. \quad (1.74)$$

і чисельно (за значенням) збігається з (1.71).

Різні знаки біля виразів для сили F_g в (1.71) і (1.74) показують не на зміну напрямку дії сили, а на те, що при переміщенні зарядженого тіла в першому випадку енергія поля зменшується, а в другому – збільшується за рахунок зовнішнього джерела.

Якщо замість довільної координати g і проєкції не неї сили F_g розглянути прямокутну систему координат, то проєкції вектора сили \bar{F} на координатні осі будуть визначатися за (1.71) і (1.74), тобто

$$F_x = -\frac{\partial W_E}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial W_E}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial W_E}{\partial z}, \quad q_k = const,$$

$$F_x = \frac{\partial W_E}{\partial x}, F_y = \frac{\partial W_E}{\partial y}, F_z = \frac{\partial W_E}{\partial z}, \quad \varphi_k = const.$$

а

$$\bar{F} = -\left(\frac{\partial W_E}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial W_E}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial W_E}{\partial z} \bar{k} \right), \quad q_k = const,$$

$$\bar{F} = \left(\frac{\partial W_E}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial W_E}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial W_E}{\partial z} \bar{k} \right) \varphi_k = const.$$

Останній вираз можна подати ще більш стисло

$$\left. \begin{aligned} \bar{F} &= -\operatorname{grad} W_E \quad q_k = const, \\ \bar{F} &= \operatorname{grad} W_E \quad \varphi_k = const. \end{aligned} \right\} \quad (1.75)$$

1.13 Теорема єдиності розв'язку

Як було показано раніше, електростатичне поле повністю описується рівняннями Пуассона і Лапласа, які є рівняннями в частинних похідних. Єдиний розв'язок конкретної задачі знаходиться, якщо задані граничні

умови. В тому, що такий розв'язок існує і він єдиний, переконує *теорема єдиності розв'язку*, яка доводиться від протилежного.

Припустимо, що при заданих граничних умовах є два різних розв'язки, тобто знайдено вектори \vec{E}_1 і вектор \vec{E}_2 . Обидва розв'язки повинні задовольняти такі рівності

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_1 &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \operatorname{div} \vec{E}_2 &= \frac{\rho}{\epsilon_a} \\ \operatorname{rot} \vec{E}_1 &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Знайдемо дивергенцію і ротор різниці цих двох розв'язків $\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= \operatorname{div} \vec{E}_1 - \operatorname{div} \vec{E}_2 = 0, \\ \operatorname{rot}(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= \operatorname{rot} \vec{E}_1 - \operatorname{rot} \vec{E}_2 = 0. \end{aligned}$$

Отже, у всіх точках поля у вектора \vec{E} і дивергенція і ротор дорівнюють нулю, а це означає, що такий вектор також дорівнює нулю. Тому $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$, тобто має місце тільки один розв'язок, що і доводить теорему.

Дана теорема має два дуже важливі наслідки, які дуже корисні для розв'язування цілого класу задач:

- електростатичне поле в деякому об'ємі, обмеженому еквіпотенціальними поверхнями, не змінюється, якщо ці поверхні замінити провідниковими поверхнями і надати їм відповідні потенціали;

- електростатичне поле з однієї сторони поверхні S не зміниться, якщо з другої сторони цієї поверхні змінити параметри середовища і розподіл зарядів так, щоб збереглися граничні умови на поверхні S .

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Чому поле, яке розглядається в даному розділі, називають електростатичним ?
2. Чи є напруженість в точці електростатичного поля, якщо в даній точці відсутній пробний заряд ?
3. З якими фізичними властивостями електростатичного поля пов'язані поняття напруженості і потенціалу ?
4. Якими двома основними співвідношеннями пов'язані напруженість і потенціал ?
5. Як розташовані в електростатичному полі один відносно одного силові лінії і еквіпотенціальні поверхні ?
6. Чому силові лінії завжди розташовані по нормалі до еквіпотенціальних поверхонь ?
7. Що характеризує об'ємна, поверхнева і лінійна густина зарядів ?
8. Чи існують області електростатичного поля, в яких інтеграл від напруженості поля по замкненій поверхні дорівнює нулю ?
9. Чому дорівнює дивергенція вектора зміщення в точках простору, в яких є поле, але відсутні вільні заряди ?
10. Що собою являє електричний диполь ?
11. Який диференціальний вираз характеризує наявність точок поля, в яких починаються або закінчуються силові лінії напруженості поля ?
12. Яке співвідношення пов'язує між собою вектори електричного зміщення і напруженості електростатичного поля ?
13. Які одиниці вимірювання напруженості електростатичного поля, електричного зміщення і потоку вектора зміщення ?
14. Що таке діелектрична міцність діелектрика ?

15. Що характеризує різниця потенціалів між двома точками з енергетичної точки зору ?
16. В яких випадках поля називаються потенціальними ?
17. Які величини, що характеризують електростатичне поле, входять в рівняння Пуассона ?
18. В яких точках простору, де є поле, справедливо рівняння Лапласа ?
19. Як записують символ набла (∇) в прямокутній системі координат ?
20. Чому дорівнює електричне зміщення в електростатичному полі на поверхні зарядженого провідника ?
21. Як ведуть себе нормальні і дотичні складові векторів напруженості і зміщення при переході з одного середовища в інше ?
22. Під яким кутом до поверхні провідного тіла направлені силові лінії напруженості електричного поля ?
23. Чому дорівнює напруженість електростатичного поля в області, де потенціал має постійне значення, яке не залежить від координат ?
24. Чому дорівнює функція $\text{grad } \phi$ в середині провідного тіла ?
25. В напрямку вектора \vec{n} потенціал змінює своє значення з максимальною швидкістю. В якому напрямку потенціал не змінює своє значення ?
26. Яке значення приймає функція $\text{div } \vec{D}$:
 - в середині зарядженого провідника,
 - в оточуючому його діелектрику,
 - на поверхні зарядженого провідника ?

2.1 Коротка характеристика задач електростатики та методів їхнього розв'язування

Самими простими задачами електростатики є задачі, коли задано закон зміни потенціалу $\varphi(x, y, z)$ в просторі і необхідно знайти закони розподілу напруженості поля $\vec{E}(x, y, z)$ і об'ємної густини зарядів $\rho(x, y, z)$, які створили дане поле. Такого роду задачі розв'язуються дворазовим диференціюванням потенціальної функції згідно з рівняннями Пуассона.

Більш складними є зворотні задачі, коли для заданого закону розподілу вільних зарядів у просторі $\rho(x, y, z)$ необхідно визначити залежність зміни напруженості $\vec{E}(x, y, z)$ і потенціалу $\varphi(x, y, z)$ від координат. Розв'язування таких задач зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь Пуассона або Лапласа з використанням граничних умов.

Досить часто зустрічаються задачі, коли задано розміри і просторове розташування тіл, їхні заряди або їхні потенціали, а необхідно визначити закономірність зміни напруженості поля і потенціалу для всіх точок простору.

В окремих випадках, коли поле, створене тілами, має який-небудь вид симетрії (циліндрична, сферична та ін.), такі задачі розв'язуються за допомогою теореми Гаусса. При цьому необхідно враховувати, що, якщо середовище, в якому створено поле, є неоднорідним (різні діелектричні проникності), то зручно розв'язок отримувати для кожної області окремо, узгоджуючи розв'язки один відносно одного таким чином, щоб виконувались граничні умови.

Розв'язування останнього типу задач в загальному вигляді, для довільної конфігурації заряджених тіл, є досить складним. В таких випадках застосовують спеціальні методи:

- метод зображень;
- метод розділу змінних;
- чисельні методи;
- метод конформних перетворень;
- графічні методи;
- методи моделювання та ін.

2.2 Застосування співвідношень, які пов'язані з законом Кулона і методом накладання

Приклад 2.1

Два позитивних точкових заряди $q_1 = q$ і $q_2 = 3q$ (рис.2.1) розташовані на відстані d один відносно одного.

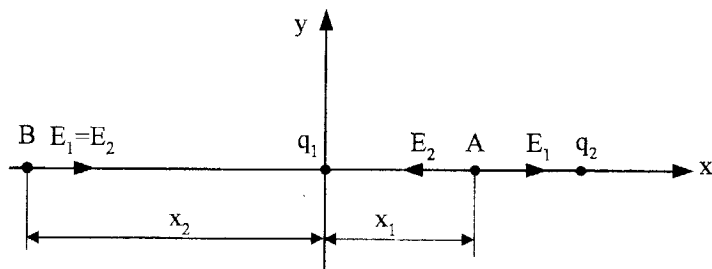


Рисунок 2.1

Знайти на прямій, яка з'єднує ці заряди, точку A , напруженість в якій дорівнює нулю, і точку B , в якій напруженості, що створені кожним зарядом рівні і однаково направлені. Знайти також потенціали цих точок.

Розв'язування. В зв'язку з тим, що напруженість поля направлена від позитивного заряду, то точка A повинна знаходитись між зарядами q_1 та q_2 і ближче до меншого заряду q_1 . Якщо позначити відстань між зарядом q_1 і точкою A через x , то повинна виконуватись рівність

$$E_1 = E_2.$$

Величина напруженості поля від точкового заряду визначається за (1.4), тому

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a x^2}; \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_a (d-x)^2}.$$

Врахувавши те, що за умовою задачі $q_2 = 3q$, отримаємо

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_a x^2} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_a (d-x)^2}.$$

Після перетворень отримаємо квадратне рівняння

$$2x^2 + 2dx - d^2 = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є два значення x

$$x_1 = 0.365d \quad \text{і} \quad x_2 = -1.365d.$$

Перше значення визначає положення точки A на відстані x_1 від заряду q_1 вправо, друге значення характеризує положення точки B на відстані x_2 вліво від заряду q_2 (рис.2.1).

Застосувавши принцип накладання і (1.35) для визначення потенціалу від точкового заряду, отримаємо потенціали в точках A і B

$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a x_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_a (d-x_1)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{3}{d-x_1} \right),$$

$$\varphi_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a x_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_a (d+x_2)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{x_2} + \frac{3}{d+x_2} \right).$$

Приклад 2.2

Визначити силу, яка діє в пустоті на заряд q_2 і напруженість поля в точці A (рис.2.2), якщо задано: точкові заряди $q_1 = 3 \cdot 10^{-12}$ [Кл], $q_2 = 10 \cdot 10^{-12}$ [Кл], $q_3 = -16 \cdot 10^{-12}$ [Кл], відстань $a = 3$ [мм], $b = 4$ [мм],

$$\epsilon_o = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} [\Phi/М].$$

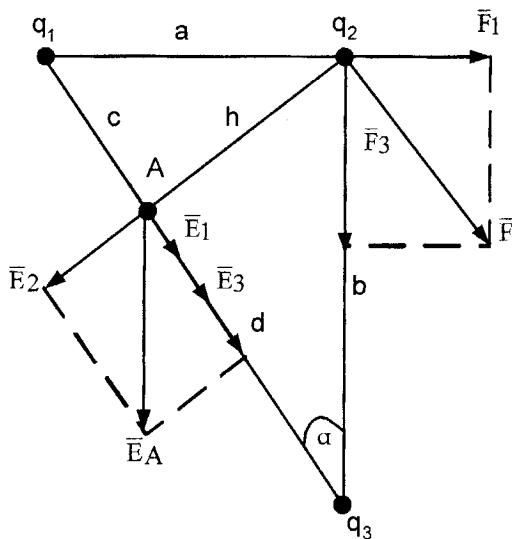


Рисунок 2.2

Розв'язування. На заряд q_2 діє дві сили – від заряду q_1 і від заряду q_3 . За законом Кулона

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ [H]},$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{b^2} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot (4 \cdot 10^{-3})^2} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ [H]}.$$

Напрямок дії сил показано на рис.2.2. В зв'язку з тим, що прями a і b розташовані під прямим кутом, то результуюча сила дорівнює

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 9.5 \cdot 10^{-8} \text{ [H]}.$$

Для визначення напруженості в точці A необхідно знайти відстані c, h і d . З прямокутного трикутника знаходимо

$$(c+d) = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \text{ [мм]}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c+d} = 0.8.$$

Звідси

$$d = b \cos \alpha = 3.2 \text{ [мм]}, c = 1.8 \text{ [мм]}, h = \sqrt{b^2 - d^2} = 2.4 \text{ [мм]}.$$

Знаходимо напруженість в точці A від кожного заряду

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{c^2} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-12}}{4\pi (1.8 \cdot 10^{-3})^2} = 8.33 \cdot 10^3 \text{ [В/м]},$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{h^2} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-12}}{4\pi (2.4 \cdot 10^{-3})^2} = 5.6 \cdot 10^3 \text{ [В/м]},$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{d^2} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot 10^{-12}}{4\pi (3.2 \cdot 10^{-3})^2} = 14.05 \cdot 10^3 \text{ [В/м]},$$

В зв'язку з тим, що заряд q_3 від'ємний, то напруженості E_1 і E_3 направлені в одну сторону, тому результуюча напруженість в точці A визначається за теоремою Піфагора

$$E_A = \sqrt{(E_1 + E_3)^2 + E_2^2} = 27.3 \cdot 10^3 \text{ [В/м]}.$$

Приклад 2.3

В електричному полі позитивного точкового заряду q напруга між точками A і B дорівнює 25 [В] (рис.2.3). Визначити величину і напрямок напруженості поля в точці C , якщо $a=3 \text{ [см]}$, $b=7 \text{ [см]}$, $d=5 \text{ [см]}$.

Розв'язування. Напругу в електростатичному полі знаходимо як різницю потенціалів

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}.$$

Звідси знаходимо величину заряду

$$q = \frac{U_{AB} 4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}.$$

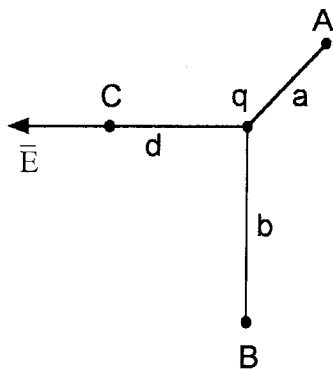


Рисунок 2.3

Напруженість в точці C

$$E_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{U_{AB}}{\left(\frac{l}{a} - \frac{l}{b}\right) d^2} = \frac{25}{\left(\frac{l}{3 \cdot 10^{-2}} - \frac{l}{7 \cdot 10^{-2}}\right) \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2} = 525 \text{ [В/м]}.$$

Напрялена напруженість по прямій d в сторону від позитивного заряду q .

Приклад 2.4

Визначити в точці A напруженість поля, створеного зарядом q тонкого прямолінійного тіла, геометричні розміри якого наведені на рис.2.4.

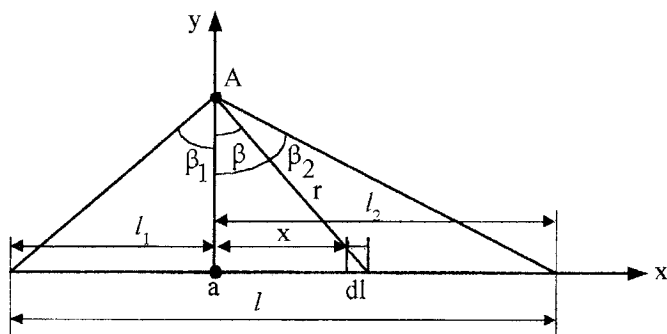


Рисунок 2.4

Розв'язування. Припустимо, що тіло заряджене рівномірно з лінійною густиною заряду $\tau = q/l$.

Будемо розв'язувати задачу в прямокутній системі координат і для знаходження напруженості електричного поля використаємо (1.14)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau d\vec{l}}{r^3} \vec{r}. \quad (2.1)$$

Виділимо елемент $dl = dx$ на відстані r від точки A . Вектор \vec{r} направлений від елемента dl до точки A , тому в прямокутній системі координат

$$\vec{r} = -x\vec{i} + a\vec{j}, \quad r = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Підставимо ці значення в (2.1) та врахуємо, що межами інтегрування є значення $-l_1$ і l_2 . Тоді

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\tau dx}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} (-x\vec{i} + a\vec{j}).$$

Ввівши нову змінну – кут β , зручно взяти даний інтеграл. В зв'язку з тим, що

$$x = a \operatorname{tg} \beta, \quad r = \frac{a}{\cos \beta}, \quad dx = \frac{a d\beta}{\cos^2 \beta}, \quad \vec{r} = -a \operatorname{tg} \beta \vec{i} + a \vec{j},$$

то

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau a d\beta \cos^3 \beta}{\cos^2 \beta a^3} (-a \operatorname{tg} \beta \vec{i} + a \vec{j}) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau}{a} (-\sin \beta \vec{i}) d\beta + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau}{a} \cos \beta \vec{j} d\beta \right] = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \left[-\vec{i} (-\cos \beta)_{\beta_1}^{\beta_2} + \vec{j} (\sin \beta)_{\beta_1}^{\beta_2} \right] = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \left[(\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \vec{i} + (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \vec{j} \right]. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Вираз (2.2) показує, що напруженість поля в точці A має складові по осі x

$$E_x = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_a a} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

і по осі y

$$E_y = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_a a} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1).$$

Величина загальної напруженості

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Для випадку, коли довжина зарядженого тіла l значно більша відстані a ($l \gg a$), то $\beta_1 \approx -90^\circ$, $\beta_2 \approx 90^\circ$ і

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a a},$$

тобто напруженість поля направлена перпендикулярно довгому зарядженому тілу, а її величина визначається

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a a}. \quad (2.3)$$

2.3 Застосування теореми Гаусса

Приклад 2.5

Електростатичне поле ізольованої зарядженої провідної кулі

Нехай куля радіуса R має заряд q (рис.2.5). Всередині провідного тіла електростатичне поле відсутнє. Оскільки поле зовні кулі має сферичну симетрію, то можна застосувати інтегральну форму теореми Гаусса (1.16).

Обведемо заряджену кулю сферичною поверхнею S радіусом r ($r > R$) і запишемо теорему Гаусса

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

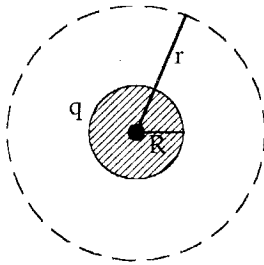


Рисунок 2.5

В зв'язку з симетрією напруженість поля для усіх точок сфери має одне і те ж саме значення і направлена нормально до поверхні сфери, тому вектори \vec{E} і $d\vec{S}$ збігаються за напрямком і можна записати

$$E \oint_S dS = \frac{q}{\epsilon_a}$$

внес $4\pi r^2$, то

Оскільки $\oint_S dS$ вся поверхня сфери радіуса r , дорівнює $4\pi r^2$, то

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_a}$$

і

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_a r^2}, \quad r > R$$

Даний вираз збігається з виразом напруженості точкового заряду, якщо вважати його розташованим в центрі провідної кулі.

Потенціал поля в будь-якій точці зовні кулі визначається

$$\varphi = - \int \vec{E} d\vec{l}$$

Якщо шлях інтегрування вибрати по радіусу ($d\vec{l} = d\vec{r}$), то в зв'язку з тим що вектори \vec{E} і $d\vec{r}$ збігаються за напрямком

$$\varphi = - \int \frac{q dr}{4\pi \epsilon_a r^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_a r^2} + C,$$

де C – постійна інтегрування.

Прийнявши потенціал точки, яка віддалена в нескінченність ($r \rightarrow \infty$), рівним нулю, отримуємо $C = 0$ і тоді

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \epsilon_a r} \tag{2.4}$$

Потенціал самої кулі ($r = R$) визначається

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a R}.$$

Ємність відокремленої зарядженої кулі становить

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi \varepsilon_a R.$$

Ємність земної кулі при

$$\varepsilon_a = \varepsilon_o = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9} \left[\frac{\Phi}{M} \right] \quad R = 6 \cdot 10^6 [M]$$

$$C = \frac{4\pi \cdot 6 \cdot 10^6}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 0.667 \cdot 10^{-3} [\Phi].$$

Приклад 2.6

Мильна кулька, радіусом $R_1 = 10 [см]$ з товщиною стінки $\delta = 3.3 \cdot 10^{-6} [см]$ заряджена до потенціалу $\varphi_1 = 100 [В]$ лопнула і перетворилась в краплю, яка має об'єм, що дорівнює об'єму стінки кульки. Визначити потенціал краплі, якщо на ній зберігся той самий заряд.

Розв'язування. Позначимо заряд мильної кульки через q і використаємо (2.4) для його визначення

$$q = \varphi_1 4\pi \varepsilon_a R_1.$$

Знайдемо об'єм стінок мильної кульки

$$V = 4\pi R_1^2 \delta = 4\pi 0.1^2 3.3 \cdot 10^{-8} = 4.15 \cdot 10^{-9} [м^3].$$

Вважаючи, що крапля має сферичну форму, знайдемо її радіус R_2

$$V = \frac{4}{3}\pi R_2^3,$$

звідки

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 10^{-3} [M].$$

Потенціал краплі

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a R_2} = \frac{\varphi_1 R_1}{R_2} = \frac{100 \cdot 0.1}{10^{-3}} = 10 [кВ].$$

Приклад 2.7

Поле діелектричної зарядженої кулі

Нехай в пустоті розміщено кулю радіусом R з діелектричною проникністю ϵ_a , заряд q якої рівномірно розподілений по об'єму (рис.2.6).

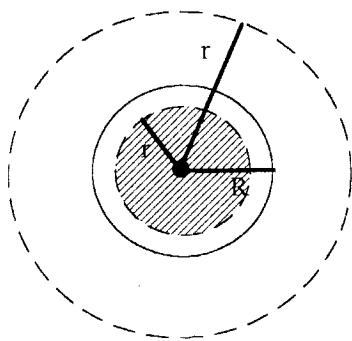


Рисунок 2.6

В зв'язку з тим, що куля і середовище, в якому вона знаходиться, різні, застосуємо теорему Гаусса два рази – всередині і зовні кулі.

Проведемо сферичну поверхню радіусом $r < R$ і запишемо теорему Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_a}$$

Всередині цієї поверхні знаходиться частина заряду q_1 рівна заряду q , який знайдемо через об'ємну густину заряду

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

$$q_1 = \rho V_1 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}.$$

Як і в попередньому прикладі

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_S dS,$$

тому

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{qr^3}{R^3 \epsilon_a}$$

і

$$E_1 = \frac{qr}{4\pi \epsilon_a R^3}, \quad r < R \quad (2.6)$$

Всередині кулі напруженість лінійно зростає від центра кулі до її поверхні.

Для визначення напруженості зовні кулі опишемо заряд сферичного поверхнею радіусом $r > R$. Застосувавши ті ж самі міркування, що і раніше, отримаємо

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad E_2 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}, \quad r > R.$$

Поле зовні кулі таке ж саме, як і поле точкового заряду q , зосередженого в центрі кулі.

Знайдемо закон зміни потенціалу в полі зовні кулі

$$\varphi = - \int \vec{E} d\vec{l},$$

для чого проінтегруємо за радіусом

$$\varphi_1 = - \int \frac{q dr}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} + A_1,$$

де A_1 – постійна інтегрування.

Прийнявши потенціал нескінченно віддаленої точки ($r \rightarrow \infty$) рівним нулю, отримаємо

$$A_1 = 0 \quad \text{і} \quad \varphi_1 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} \quad r > R \quad (2.7)$$

Потенціал поля всередині кулі визначається

$$\varphi_2 = - \int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{q r dr}{4\pi \epsilon_a R^3} = - \frac{q r^2}{8\pi \epsilon_a R^3} + A_2.$$

Постійну інтегрування A_2 знаходимо із граничних умов. На межі розділу середовищ потенціальна функція неперервна, тому

$$\varphi_1(R) = \varphi_2(R),$$

тобто

$$\frac{q}{4\pi \epsilon_a R} = - \frac{q}{8\pi \epsilon_a R} + A_2.$$

Звідки

$$A_2 = \frac{q}{4\pi R} \left(\frac{1}{\varepsilon_a} + \frac{1}{2\varepsilon_o} \right)$$

i

$$\varphi_2 = -\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_o R^3} + \frac{q}{4\pi R} \left(\frac{1}{\varepsilon_a} + \frac{1}{2\varepsilon_o} \right)$$

На рис.2.7 наведені графіки зміни потенціалу і напруженості в залежності від відстані r .

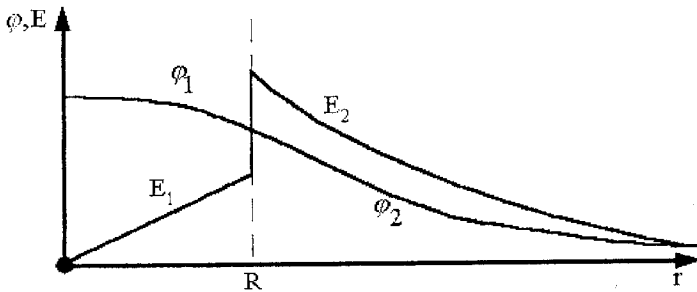


Рисунок 2.7

На межі розділу середовищ напруженість поля має розрив, в зв'язку з тим, що виконується гранична умова

$$\varepsilon_a E_1 = \varepsilon_o E_2$$

Знайдемо енергію електростатичного поля, використавши для цього (1.68).

Енергія поля всередині кулі визначається

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{V_1} \varepsilon_a E_1^2 dV$$

Елемент об'єму представимо як добуток сферичної поверхні $4\pi r^2$ на елемент радіуса dr

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Отже

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_0^R \epsilon_a \frac{q^2 r^2 4\pi r^2}{(4\pi \epsilon_a R^3)^2} dr = \frac{q^2}{40\pi \epsilon_a R}. \quad (2.8)$$

Енергія поля зовні кулі

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_o E_2^2 dV$$

або

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_R^\infty \epsilon_o \frac{q^2 4\pi r^2}{(4\pi \epsilon_o)^2 r^4} dr = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_o R}. \quad (2.9)$$

Загальна енергія всього поля визначається

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q}{8\pi R} \left(\frac{1}{5\epsilon_a} + \frac{1}{\epsilon_o} \right). \quad (2.10)$$

Якщо мати на увазі, що $\epsilon_a > \epsilon_o$, то (2.10) показує, що більша частина енергії припадає на поле в охоплюючому кулю просторі.

Приклад 2.8

Поле зарядженої осі

Під зарядженою віссю розуміють тонкий і дуже довгий прямолінійний провідник. Нехай тонка вісь має рівномірно розподілений заряд q з лінійною густиною $\tau = q/l$ (рис.2.8).

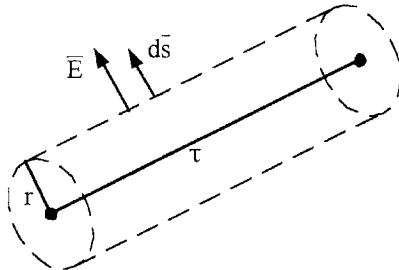


Рисунок 2.8

Дана задача розглянута в прикладі 2.4. Застосуємо для її розв'язання теорему Гаусса. Оскільки поле тонкої осі має циліндричну симетрію, обведемо її циліндричною поверхнею S радіусом r і запишемо теорему Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

Завдяки симетрії вектор напруженості поля \vec{E} скрізь нормальний до поверхні S , має одне і те ж саме значення і збігається за напрямком з вектором $d\vec{S}$, тому

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_S dS.$$

Всю замкнену поверхню циліндра подамо як суму бокової поверхні і двох її торцевих поверхонь. Для дуже довгої осі потоком вектора \vec{E} через торцеві поверхні можна знехтувати. Отже,

$$E \oint_S dS = E 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_a},$$

де l — довжина осі.

Звідки

$$E = \frac{q}{2\pi \epsilon_a l r} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_o r}. \quad (2.11)$$

Вираз (2.11) збігається з (2.3), але отримано його простіше.

Потенціал точок поля, що знаходиться на відстані r від осі, можна визначити

$$\varphi = - \int \vec{E} d\vec{l}.$$

Проінтегрувавши за радіусом і врахувавши те, що вектори \vec{E} і $d\vec{l} = d\vec{r}$ збігаються за напрямком, отримаємо

$$\varphi = - \int \frac{\tau}{2\pi \epsilon_o r} dr = - \frac{\tau}{2\pi \epsilon_o} \ln r + A_o, \quad (2.12)$$

де A_o — постійна інтегрування.

Її величина залежить від вибору точки, потенціал якої приймають рівним нулю.

Приклад 2.9

Поле нескінченно великої провідної площини

Нескінченно велика провідна площина має рівномірно розподілений заряд q з поверхневою густиною σ . Розглянемо напруженість поля в точці A (рис.2.9, а), яка знаходиться на відстані a від площини.

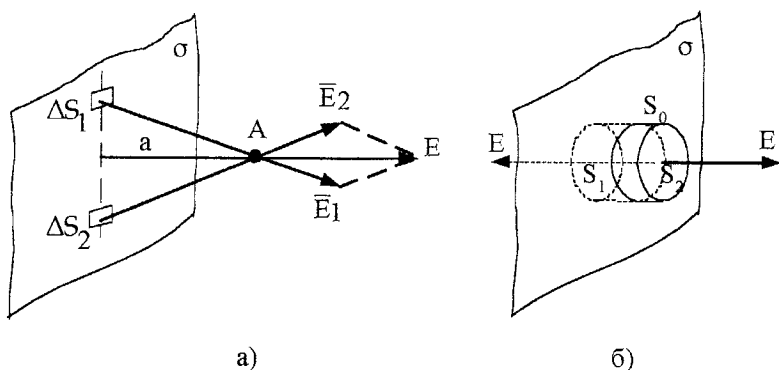


Рисунок 2.9

Зауважимо, що на площині завжди знаходяться дві симетрично розташовані, рівні за величиною площинки ΔS_1 і ΔS_2 , заряди яких $\sigma \Delta S_1$ і $\sigma \Delta S_2$ в точці A дають напруженості E_1 і E_2 , рівні за величиною і направлені під одним і тим же кутом до перпендикулярної лінії. Сума значень напруженостей \vec{E} буде нормальна до зарядженої площини. Даний висновок справедливий для будь-якої точки, що знаходиться на відстані a від площини і тим самим показує, що для усіх точок простору, які знаходяться на відстані a від зарядженої площини, напруженість поля нормальна до цієї площини і має одне і те ж саме значення.

Обведемо частину простору циліндричною поверхнею, яка пересікає заряджену площину (рис.2.9, б). Бокова поверхня дорівнює S_o , а торцеві поверхні $S_1 = S_2 = S$ паралельні до зарядженої площини. Знайдемо потік вектора напруженості поля через цю замкнену поверхню, розбивши її на три частини S_o, S_1, S_2

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_o} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_1=S} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2=S} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_a} = \frac{\sigma S}{\epsilon_a}.$$

Перший інтеграл дорівнює нулю, тому що вектор \vec{E} і вектор площинки $d\vec{S}$ бокової поверхні перпендикулярні один до одного. В двох інших інтегралах вектори \vec{E} і $d\vec{S}$ паралельні, напруженість поля для всіх точок поверхонь S_1 і S_2 має одне і те ж саме значення, тому

$$ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_a}.$$

Звідки

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_a}. \quad (2.13)$$

Отже, напруженість поля, яка створюється нескінченно зарядженою пластиною не залежить від відстані до цієї пластини, має у всіх точках простору одне і те ж саме значення (2.13) і направлена нормально до пластини. Таке поле називають *однорідним*.

Приклад 2.10

Електростатичне поле плоского конденсатора

Розташуємо дві плоскі нескінченні пластини A і B , що заряджені протилежними зарядами з однаковою поверхневою густиною σ на відстані d одна від одної (рис.2.10).

У відповідності з принципом накладання поля від двох заряджених пластин накладаються одне на одне, тому напруженість поля у всіх точках між пластинами

$$E = E_A + E_B = 2 \frac{\sigma}{2\varepsilon_a} = \frac{\sigma}{\varepsilon_a}. \quad (2.14)$$

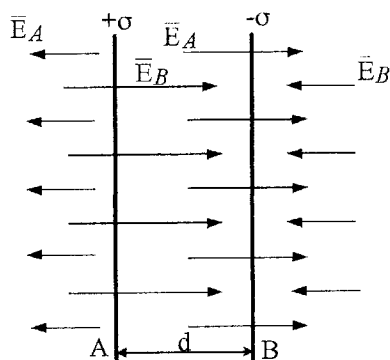


Рисунок 2.10

В просторі зовні пластин напрямок напруженостей E_A і E_B протилежний і тому

$$E = E_A - E_B = 0, \quad (2.15)$$

тобто поле зовні пластин відсутнє.

Якщо пластини мають певні розміри (*плоский конденсатор*), але відстань між ними d значно менша порівняно з розмірами пластин, то співвідношення (2.14) і (2.15) є справедливими для всього простору між пластинами, виключаючи їхні краї, де поле суттєво спотворюється.

Вираз (2.14) показує, що силовими лініями поля є прями, що перпендикулярні пластинам (рис.2.11 суцільні лінії).

Для знаходження потенціалу виберемо прямокутну систему координат. Тоді

$$\varphi = - \int \bar{E} d\bar{x} = - E x + A.$$

Для визначення постійної інтегрування A вважаємо, що потенціал пластини B дорівнює нулю, тобто граничні умови:

$$\text{при } x = d \quad \varphi_B = 0.$$

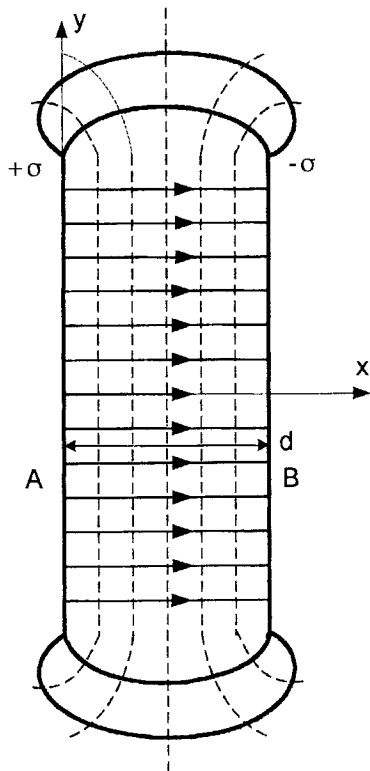


Рисунок 2.11

Звідси

$$A = E d = \frac{\sigma d}{\epsilon_a}$$

і

$$\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_a} x + \frac{\sigma d}{\epsilon_a}. \quad (2.16)$$

Еквіпотенціальні поверхні ($\varphi = const$) представляють собою площини, які паралельні обкладкам конденсатора (рис.2.11 пунктирні лінії).

Потенціал пластини A при $x = 0$ визначається

$$\varphi_A = \frac{\sigma d}{\varepsilon_a}.$$

Напруга між пластинами

$$U = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\sigma d}{\varepsilon_a} = E d. \quad (2.17)$$

В зв'язку з тим, що

$$\sigma = q/S,$$

де S – поверхня однієї пластини,

то

$$U = \frac{q d}{\varepsilon_a S}.$$

Тоді ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_a S}{d}.$$

Енергія поля плоского конденсатора визначається

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k = \frac{1}{2} (\varphi_A q - \varphi_B q) = \frac{1}{2} q U.$$

Можна також записати

$$W_e = \frac{C U^2}{2}, \quad W_e = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.19)$$

Нехай плоский конденсатор має площу однієї пластини $S = 200 [\text{см}^2]$, $d = 0.6 [\text{см}]$, діелектричну проникність діелектрика між обкладками $\varepsilon_a = 4.3 \varepsilon_0$.

Пробивна напруга діелектрика $E_{np} = 15 \cdot 10^3 [\text{кВ/м}]$. Знайти ємність конденсатора і ту напругу U_{np} , при якій діелектрик конденсатора буде пробито, тобто втраяться його діелектричні властивості.

Ємність конденсатора (2.18) визначається

$$C = \frac{\varepsilon_a S}{d} = \frac{4.3 \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0.6 \cdot 10^{-2}} = 127 \cdot 10^{-12} [\text{Ф}].$$

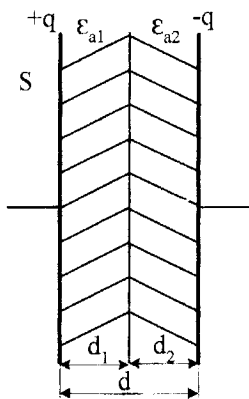
Напряга, при якій діелектрик може пробитися становить

$$U_{np} = E_{np} d = 15 \cdot 10^3 \cdot 0.6 \cdot 10^{-2} = 90 \text{ [кВ]}.$$

Приклад 2.11

Плоский конденсатор з двошаровим діелектриком

Нехай в плоскому конденсаторі два діелектрика (рис.2.12) – один з діелектричною проникністю ϵ_{a1} товщиною d_1 , другий з діелектричною проникністю ϵ_{a2} , товщиною d_2 .



Для неоднорідного середовища зручно застосувати вектор електричного зміщення, який для даного випадку в кожній точці поля конденсатора має одне і те ж саме значення, що дорівнює поверхневій густині заряду (1.56)

$$D = \sigma = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

Звідси напруженості для першого і другого шарів визначаються

Рисунок 2.12

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_{a1}}, \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_{a2}}$$

i

$$E_1 \epsilon_{a1} = E_2 \epsilon_{a2}. \quad (2.20)$$

Напряга між пластинами в однорідному полі становить

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{D}{\epsilon_{a1}} d_1 + \frac{D}{\epsilon_{a2}} d_2 = \frac{q}{S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_{a1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{a2}} \right). \quad (2.21)$$

Ємність конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{l}{\frac{1}{S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_{a1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{a2}} \right)} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_{a1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{a2}}}. \quad (2.22)$$

Розглянемо як змінюється ємність і електрична міцність плоского конденсатора, якщо в його діелектрику (приклад 2.10) з'являється повітряний прошарок ($\varepsilon_{a2} = \varepsilon_o$) навколо однієї пластини товщиною $d_2 = 0.05 [см]$. Пробивна напруга повітря $E_{np} = 3 \cdot 10^3 [кВ / м]$.

Товщина першого шару $d_1 = d - d_2 = 0.55 [см]$.

Знайдемо нову ємність конденсатора

$$C = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{a1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{a2}}} = \frac{200 \cdot 10^{-4}}{\frac{0.55 \cdot 10^{-2}}{4.3} + \frac{0.05 \cdot 10^{-2}}{1}} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 = 100 \cdot 10^{-12} [Ф]$$

Виразимо напругу конденсатора через напруженість повітряного прошарку E_2 . Із (2.20) випливає, що

$$E_1 = E_2 \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_{a1}}$$

Підставимо це значення в (2.21) і отримаємо

$$U = E_2 \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_{a1}} d_1 + E_2 d_2 = E_2 \left(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_{a1}} d_1 + d_2 \right)$$

Звідси пробивна напруга

$$U_{np} = E_{2np} \left(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_{a1}} d_1 + d_2 \right) = 3 \cdot 10^3 \left(\frac{0.55 \cdot 10^{-2}}{4.3} + 0.05 \cdot 10^{-2} \right) = 5.3 [кВ]$$

Порівнявши отримані результати з результатами прикладу 2.10 бачимо, що прошарок мало змінив ємність конденсатора (на 21%), але в 17 разів зменшив електричну міцність конденсатора.

Ємність конденсатора з двошаровим діелектриком можна знайти і іншим шляхом. Площина розділу діелектриків є екіпотенціальною поверхнею (паралельна обкладкам конденсатора), тому, згідно з першим наслідком теореми єдиності розв'язку, її можна замінити тонким провідним листом, по обидві сторони якого зосереджується така ж кількість протилежних зарядів, як і на обкладках конденсатора (внаслідок електростатичної

індукції). Конденсатор для цього випадку можна розглядати як два послідовно з'єднаних конденсатора, що мають одну спільну обкладку. Ємності цих конденсаторів відповідно дорівнюють

$$C_1 = \frac{\epsilon_{a1} S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_{a2} S}{d_2},$$

а загальна ємність визначається

$$C = \frac{l}{\frac{l}{C_1} + \frac{l}{C_2}} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_{a1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{a2}}}.$$

Приклад 2.12

Електростатичне поле коаксіального кабелю

Коаксіальний кабель має внутрішній провідник радіусом R_1 і зовнішній провідник у вигляді труби радіуса

R_2 (рис.2.13).

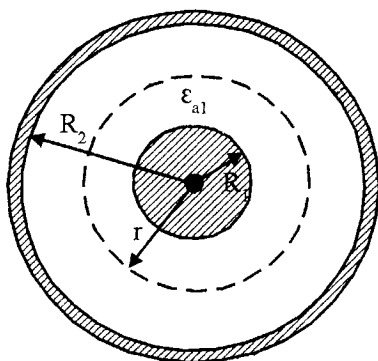


Рисунок 2.13

Обидва провідники мають спільну вісь і розділені діелектриком. Радіуси провідників значно менші їхньої довжини l . Внутрішній провідник заряджений до заряду $+q$, а зовнішній – до $-q$. Всередині провідників поле відсутнє.

Поле зовні коаксіального кабелю також відсутнє, тому що зовнішня оболонка кабелю є екран.

Для знаходження поля між провідниками коаксіального кабелю обведемо внутрішній провідник циліндричною поверхнею радіусом $R_1 < r < R_2$ і застосуємо теорему Гаусса

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

В зв'язку з симетрією напруженість поля \vec{E} для всієї поверхні інтегрування однакова і збігається за напрямком з вектором поверхні $d\vec{S}$. Оскільки бокова поверхня циліндра $S = 2\pi r l$, то

$$E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_a r l}. \quad (2.23)$$

Потоком вектора \vec{E} через торцеві поверхні циліндра в силу їхньої малості знехтуємо.

Тоді напруга між провідниками кабелю визначається

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q dr}{2\pi \varepsilon_o l r} = \frac{q}{2\pi \varepsilon_a l} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.24)$$

Ємність кабелю

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_o l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Ємність кабелю на одиницю довжини становить

$$C_o = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \varepsilon_o}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (2.25)$$

Для кабелю з параметрами:

$$R_1 = 1 [\text{мм}], R_2 = 4 [\text{мм}], \varepsilon_a = 2.5 \varepsilon_o, \varepsilon_o = \frac{l}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \left[\frac{\Phi}{\text{м}} \right],$$

$$\text{ємність } C_o = \frac{2\pi \cdot 2.5}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ln 4} \approx 100 \left[\frac{\text{н}\Phi}{\text{м}} \right].$$

Визначити, яку найбільшу допустиму напругу U_d можна прикласти до даного кабелю, щоб запас електричної міцності був не менше п'яти. Пробивна напруга $E_{np} = 25 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{кВ}}{\text{м}} \right]$.

Запасом електричної міцності називають відношення напруги U_{np} (пробивної напруги), при якій відбувається пробій діелектрика, до найбільшої допустимої напруги U_d .

Максимальна напруженість кабелю, як видно із (2.23) біля поверхні внутрішнього провідника при $r = R_1$

$$E_{max} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 R_1 l}. \quad (2.26)$$

Напругу між провідниками кабелю (2.24) запишемо з урахуванням (2.26)

$$U = E_{max} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Пробивна напруга кабелю визначається

$$U_{np} = E_{np} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1},$$

а допустима напруга з урахуванням п'ятикратного запасу міцності становить

$$U_d = \frac{E_{np} R_1}{5} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{5} \ln 4 = 6.9 \text{ [кВ]}.$$

Приклад 2.13

Електростатичне поле двопровідної повітряної лінії

Розглянемо електричне поле двох заряджених провідників, радіус яких R значно менше ніж відстань між осями провідників $d = 2a$ і довжина лінії l (рис.2.14). Такі провідники також можна назвати осями.

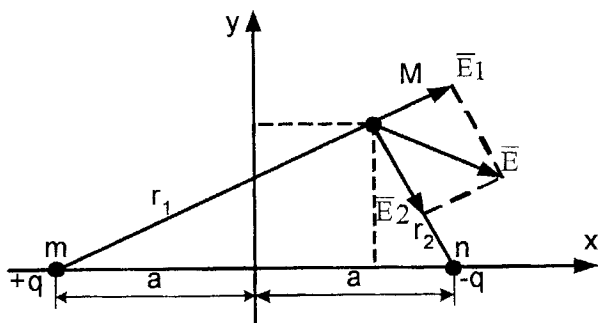


Рисунок 2.14

Для точки M , що розташована на відстані r_1 від позитивно зарядженого провідника і на відстані r_2 від негативно зарядженого згідно з принципом накладання та формулами (2.11) і (2.12), які отримані під час розгляду зарядженої осі (приклад 2.8), матимемо

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

$$E_1 = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l r_1}, \quad E_2 = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l r_2}. \quad (2.27)$$

Якщо провідники заряджені рівномірно, то лінійна густина заряду визначається

$$\tau = \frac{q}{l}$$

і відповідно

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r_1}, \quad E_2 = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r_2}.$$

Потенціал точки M

$$\varphi_M = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \ln r_2 + A = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + A.$$

Приймемо потенціал рівним нулю в точках, де $r_1 = r_2$ (вісь y). Тоді постійна інтегрування $A = 0$ і

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.28)$$

Виразимо відстань r_2 і r_1 через координати x, y і відстань між осями провідників $d = 2a$. З рис. 2.14 видно, що

$$r_1 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2},$$

тому

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}}.$$

Рівняння еквіпотенціальних ліній (сліди перетину поверхонь рівні потенціалу площиною $z = const$)

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} = k = const.$$

Ця формула представляє собою сім'ю рівнянь кіл (для різних k), центри яких розташовані на осі x і розміщені від початку координат на відстані x_0 . При цьому

$$x_0^2 = a^2 \left(1 + \frac{2}{k^2 - 1} \right)^2. \quad (2.29)$$

Радіуси даних кіл визначаються

$$R = \frac{2ka}{\left| k^2 - 1 \right|}. \quad (2.30)$$

Задавшись різними значеннями k , можна отримати центри і радіуси еквіпотенціальних ліній. При $k = 0$ радіус кола перетворюється в нескінченність, що відповідає прямій лінії з нульовим потенціалом, яка проходить паралельно лінії, що з'єднує заряджені провідники.

Силові лінії нормальні до еквіпотенціальних поверхонь. Можна показати, що вони є колами, які проходять через заряджені осі. Центри цих кіл розташовані на осі y в точках $\pm y_0$. Силові лінії проводять так, щоб потоки вектора напруженості ΔN_E , які проходять в просторі між поверхнями, на яких розташовані сусідні силові лінії і припадають на одиницю довжини осі, були однаковими.

Потік вектора напруженості N_E пропорційний куту θ між віссю x і хордою силової лінії, яка проведена через вісь $+z$ і точку силової лінії при $x = 0$ (точка A на рис.2.15)

$$N_E = \frac{\tau \theta}{\pi}.$$

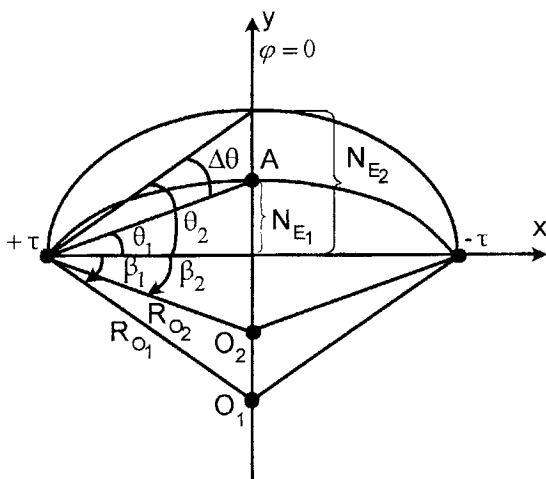


Рисунок 2.15

Отже, потік N_{E1} пропорційний куту θ_1 , потік N_{E2} — куту θ_2 . Тому, для отримання однакових потоків між сусідніми силовими лініями приріст кута θ при переході від хорди до хорди повинен бути однаковим, тобто

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{m},$$

де m — кількість силових ліній.

Положення центра кола силової лінії, яке відповідає потоку N_{E1} , знаходиться так. Від осі $+ \tau$ необхідно провести пряму лінію, що утворює з віссю x кут (рис.2.15)

$$\beta_1 = 2\theta_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Точка перетину цієї прямої з віссю y і є центром O_1 шуканого кола.

Повна картина поля в площині перпендикулярній провідникам показана на рис.2.16.

Якщо картину поля розглядати в різних площинах, паралельних тій, що показана на рис.2.16, то для всіх таких площин картина поля буде од-

наковою. Поля, які мають такі властивості, називають *плоско-паралельними*.

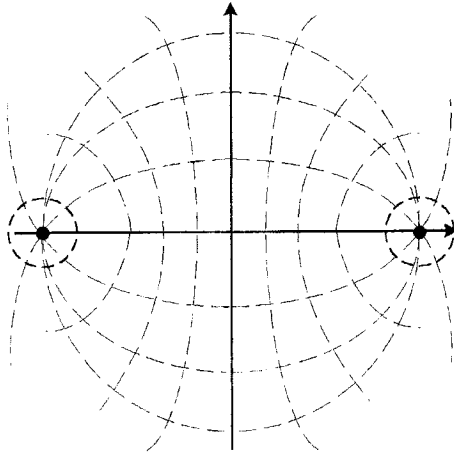


Рисунок 2.16

Напругу між провідниками знайдемо як різницю потенціалів між точками m і n (рис.2.14), які знаходяться на поверхні провідників. Для точки m $r_1 = R$, $r_2 = d - R$, для точки n $r_1 = d - R$, $r_2 = R$, тому

$$\varphi_m = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-R}{R}, \quad \varphi_n = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{d-R}.$$

Напруга між провідниками визначається

$$U = \varphi_m - \varphi_n = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{d-R}{R} - \ln \frac{R}{d-R} \right) = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-R}{R}. \quad (2.31)$$

При виконанні умови $d \gg R$

$$U = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{R}. \quad (2.32)$$

Ємність двопровідної повітряної лінії

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{d}{R}}. \quad (2.33)$$

Ємність на одиницю довжини лінії

$$C_o = \frac{\pi \epsilon_o}{\ln \frac{d}{R}} \quad (2.34)$$

Знайдемо ємність на одиницю довжини двопровідної лінії з параметрами:

радіус провідника $R = 2 [мм]$, відстань між осями провідників $d = 40 [см]$.

$$C_o = \frac{\pi}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ln \frac{0.4}{0.002}} = 5.24 \left[\frac{нкФ}{м} \right]$$

Визначимо яку максимальну напругу можна прикладати між провідниками для п'ятикратного запасу електричної міцності. Пробивна напруженість повітря $E_{np} = 3 \cdot 10^3 [кВ/м]$.

Максимальна напруженість знаходиться в точці m або n (рис.2.14)

$$E_{max} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_o R} + \frac{\tau}{2\pi \epsilon_o (d - R)}$$

В зв'язку з тим, що $d \gg R$, можна знехтувати другим доданком, і тоді

$$E_{max} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_o R}$$

Підставимо значення

$$\frac{\tau}{\pi \epsilon_o} = 2R E_{max}$$

в (2.32) і отримаємо

$$U = 2 E_{max} R \ln \frac{d}{r}$$

Напруга, при якій починається електричний розряд, визначається

$$U_{np} = 2 E_{np} R \ln \frac{d}{r} = 2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \ln \frac{0.4}{2 \cdot 10^{-3}} = 63.58 [кВ]$$

Для п'ятикратного запасу електричної міцності допустима напруга становить

$$U_{д} = \frac{U_{np}}{5} = 12.7 \text{ [кВ]}.$$

Якщо збільшити відстань між осями провідників до 10 [м] , а радіус провідника до 1 см , то пробивна напруга збільшиться до

$$U_{np} = 2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} \ln \frac{10}{10^{-2}} = 414 \text{ [кВ]},$$

а допустима напруга

$$U_{д} = \frac{U_{np}}{5} = 82.8 \text{ [кВ]}.$$

Подальше збільшення розмірів d і R в силу конструктивних і економічних показників недоцільне. Для того, щоб можна було включати лінію на більш високу напругу на високовольтних лініях електропередач застосовують так зване *розчеплення* проводу, коли окремий електричний провід заміняють групою із декількох провідників (двох, трьох, чотирьох), зсунутих один відносно одного, але електрично з'єднаних між собою (рис.2.17).

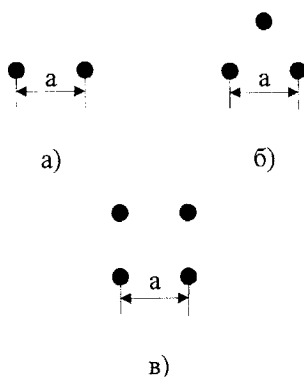


Рисунок 2.17

В цьому випадку значно збільшується радіус еквівалентного проводу. Наближено можна вважати, що для:

- випадку а) $R_e = 0.5 a$;

- випадку б) $R_e = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

- випадку в) $R_e = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Розрахуємо допустиму напругу для розчеплених проводів, якщо $a = 20$ см:

- випадок а) $U_{\text{д}} = 553$ [кВ],

- випадок б) $U_{\text{д}} = 618$ [кВ],

- випадок в) $U_{\text{д}} = 723$ [кВ].

Опираючись на наслідок 1 теореми єдиності розв'язку можна вважати розв'язаними стільки нових задач, скільки є на рис.2.16 різних за взаємним розташуванням пар рівнопотенціальних поверхонь, які можна розглядати як поверхні провідних тіл. Декілька таких пар показано на рис.2.18.

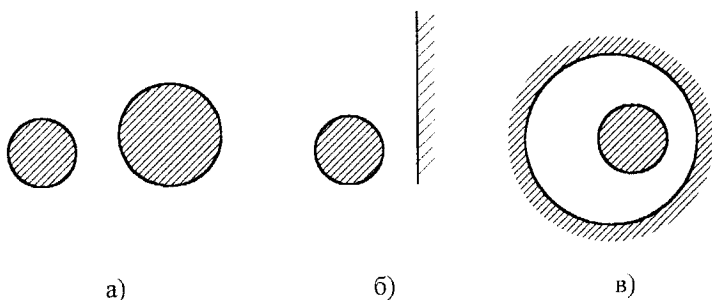


Рисунок 2.18

Приклад 2.14

Електростатичне поле провідних паралельних циліндрів

Нехай два довгих провідних циліндра радіусами R_1 і R_2 заряджені рівними різнойменними зарядами з лінійною густиною $+\tau$ і $-\tau$ та розташовані на відстані d один від одного (рис.2.19).

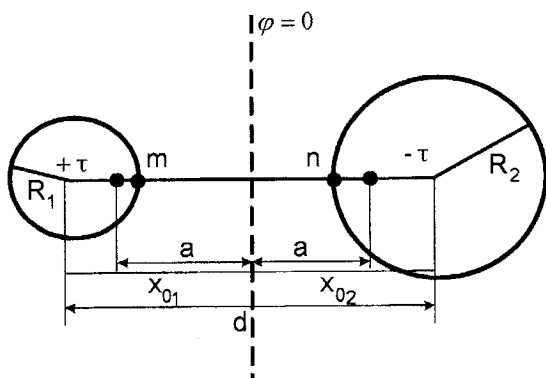


Рисунок 2.19

Для розв'язання цієї задачі необхідно використати результати попереднього прикладу, розглянувши провідні циліндри як еквіпотенціальні поверхні.

Для того, щоб звести дану задачу до попередньої, необхідно знайти положення заряджених електричних осей $+\tau$ і $-\tau$. Використавши формули (2.29) і (2.30), отримаємо

$$x_o^2 - R^2 = a^2 \left[1 + \frac{4}{k^2 - 1} + \frac{4}{(k^2 - 1)^2} - \frac{4k^2}{(k^2 - 1)^2} \right] = a^2.$$

Отже,

$$x_{o1}^2 - R_1^2 = a^2, \quad x_{o2}^2 - R_2^2 = a^2. \quad (2.35)$$

Враховавши те, що $x_{o1} + x_{o2} = d$ і розв'язавши сумісно ці рівняння, отримаємо вирази, які дозволять знайти положення електричних осей і середину відстані між ними

$$x_{o1} = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d}, \quad x_{o2} = \frac{d^2 + R_2^2 - R_1^2}{2d}, \quad a = \sqrt{x_{o1}^2 - R_1^2} = \sqrt{x_{o2}^2 - R_2^2}. \quad (2.36)$$

Напруженість поля і потенціал будь-якої точки M поля можна визначити за (2.27) і (2.28), якщо відраховувати відстані r_1 і r_2 до точки M від електричних осей.

В зв'язку з тим, що відстані до поверхні першого циліндра (точка m) від зарядженої осі $- \tau$ $r_2 = x_{o1} + a - R_1$, а від зарядженої осі $+ \tau$ $r_1 = R_1 - (x_{o1} - a)$, то потенціал поверхні першого циліндра визначається

$$\varphi_1 = \varphi_m = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_a} \ln \frac{x_{o1} + a - R_1}{R_1 - (x_{o1} - a)}. \quad (2.37)$$

Аналогічно запишемо потенціал поверхні другого циліндра

$$\varphi_2 = \varphi_n = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_a} \ln \frac{R_2 - (x_{o2} - a)}{x_{o2} + a - R_2}. \quad (2.38)$$

Перепишемо рівності (2.35) у вигляді

$$R_1^2 = x_{o1}^2 - a^2 = (x_{o1} - a)(x_{o1} + a),$$

$$R_2^2 = x_{o2}^2 - a^2 = (x_{o2} - a)(x_{o2} + a)$$

або

$$\frac{R_1}{x_{o1} + a} = \frac{x_{o1} - a}{R_1}, \quad \frac{R_2}{x_{o2} + a} = \frac{x_{o2} - a}{R_2}.$$

Використаємо останню рівність для перетворення виразів під знаком логарифма в (2.37) і (2.38) та отримаємо

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_a} \ln \frac{x_{o1} + a}{R_1},$$

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_a} \ln \frac{x_{o1} - a}{R_2}.$$

Напрута між двома циліндрами визначається

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_a} \ln \frac{(x_{o1} + a)R_2}{(x_{o2} - a)R_1}. \quad (2.39)$$

Ємність системи на одиницю довжини складає

$$C_o = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi \varepsilon_a}{\ln \frac{(x_{o1} + a)R_2}{(x_{o2} - a)R_1}}. \quad (2.40)$$

2.4 Метод дзеркальних зображень

Метод дзеркальних зображень засновано на застосуванні наслідків теореми єдиності розв'язку. Поле електричних зарядів, що розташовані поряд з провідною поверхнею, можна знайти, якщо замінити вплив всієї провідної поверхні (вплив наведених на ній зарядів) полем дзеркального зображення даних зарядів з протилежним знаком.

Якщо заряд розташований в непровідному діелектричному середовищі з плоскою границею розділу середовищ, то розрахунок такого поля зводиться до розрахунку двох полів в однорідних середовищах. Вплив неоднорідності враховується введенням таких фіктивних зарядів, щоб виконувалися граничні умови.

Приклад 2.15

Поле одного провідника, що знаходиться над поверхнею землі

Нехай тонкий прямолінійний провідник радіуса r знаходиться над поверхнею землі на висоті h (рис.2.20), і має заряд лінійної густини τ .

Розв'язування: Земля є провідним тілом, тому її поверхня екіпотенціальна і, відповідно, картина поля над поверхнею землі буде така сама, як ліва частина (рис.2.16) картини поля від екіпотенціальної поверхні, потенціал якої дорівнює нулю. В нижній півплощині (рис.2.20), що представляє собою землю (провідне середовище), поле відсутнє.

Тому для знаходження величини напруженості або потенціалу довільної точки M поля можна застосувати всі співвідношення прикладу 2.13,

якщо в провідному середовищі на глибині h розмістити дзеркальне зображення фіктивного провідника з зарядом, протилежним за знаком заряду дійсного провідника.

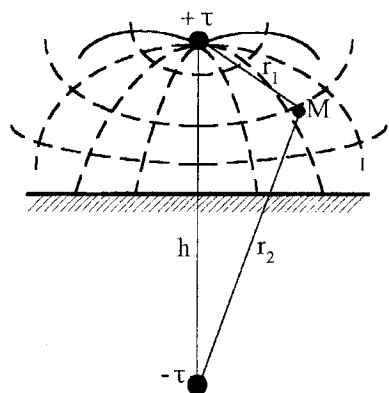


Рисунок 2.20

Потенціал точки M визначається

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (2.41)$$

де r_2 – відстань від точки M до фіктивного негативно зарядженого провідника, r_1 – відстань від точки M до позитивно зарядженого провідника.

Потенціал провідника

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-r}{r}.$$

В зв'язку з тим, що потенціал землі приймаємо рівним нулю ($\varphi_2 = 0$), то напруга між провідником і землею становить

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-r}{r}.$$

Ємність одиночного провідника на одиницю довжини

$$C_o = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h-r}{r}}.$$

При $2h \gg r$

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r}, \quad C_o = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r}}.$$

Приклад 2.16

Поле зарядженої осі, що знаходиться поблизу плоскої границі розділу двох діелектриків

Нехай заряджена вісь з лінійною густиною заряду τ_1 розташована в діелектрику (ϵ_{a1}) паралельно площині, яка відділяє його від другого діелектрика (ϵ_{a2}), на відстані h від площини розділу (рис.2.21).

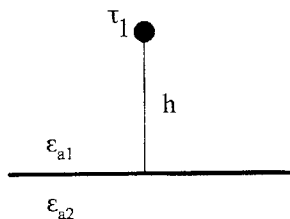


Рисунок 2.21

Вплив зв'язаних зарядів, що з'явилися на границі розділу внаслідок неоднакової поляризації діелектриків, необхідно враховувати введенням фіктивних зарядів τ_2 і τ_3 . Отже, розв'язування цієї задачі зводиться до розв'язування двох більш простих задач.

В першій задачі необхідно розрахувати поле в однорідному діелектрику з проникністю ϵ_{a1} і двома зарядженими осями з лінійною густиною τ_1 і τ_2 на відстані h від границі розділу (рис.2.22, а).

Розв'язок цієї задачі визначає поле в першій області ($\epsilon_a = \epsilon_{a1}$). Поле в другій області ($\epsilon_a = \epsilon_{a2}$) (друга задача) визначається як поле в однорідному діелектрику з проникністю ϵ_{a2} , що створене зарядженою віссю з лінійною густиною τ_3 , яка знаходиться на відстані h від границі розділу (рис.2.22, б).

Величини τ_2 і τ_3 невідомі і їх необхідно визначити за допомогою граничних умов.

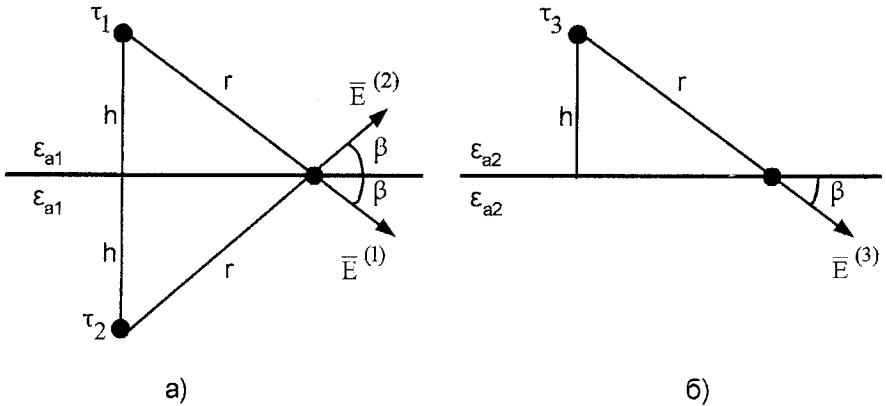


Рисунок 2.22

Раніше показано (п.1.8), що на границі двох діелектриків повинні виконуватися такі умови:

- дотичні складові векторів електричного зміщення між собою рівні $E_{1\partial} = E_{2\partial}$;

- нормальні складові векторів електричного зміщення також рівні між собою $D_{1n} = D_{2n}$ або $\epsilon_{a1} E_{1n} = \epsilon_{a2} E_{2n}$.

З рис.2.22 видно, що для будь-якої точки, що знаходиться на границі розділу на відстані r від зарядженої осі, можна записати

$$E_{1\partial} = E^{(1)} \cos \beta + E^{(2)} \cos \beta, \quad E_{2\partial} = E^{(3)} \cos \beta.$$

$$E_{1n} = E^{(1)} \sin \beta - E^{(2)} \sin \beta, \quad E_{2n} = E^{(3)} \sin \beta.$$

Позитивний напрямок нормалі до поверхні розділу вибрано від зарядженої осі τ_1 .

Величини напруженостей визначимо з (2.11)

$$E^{(1)} = \frac{\tau_1}{2\pi \epsilon_{a1} r}, \quad E^{(2)} = \frac{\tau_2}{2\pi \epsilon_{a1} r}, \quad E^{(3)} = \frac{\tau_3}{2\pi \epsilon_{a2} r}.$$

Підставивши ці значення в граничні умови, отримасмо

$$\frac{\tau_1}{2\pi \epsilon_{a1} r} \cos \beta + \frac{\tau_2}{2\pi \epsilon_{a1} r} \cos \beta = \frac{\tau_3}{2\pi \epsilon_{a2} r} \cos \beta$$

$$\varepsilon_{a1} \left[\frac{\tau_1}{2\pi \varepsilon_{a1} r} \sin \beta - \frac{\tau_2}{2\pi \varepsilon_{a1} r} \sin \beta \right] = \frac{\varepsilon_{a2} \tau_3}{2\pi \varepsilon_{a2} r} \sin \beta.$$

Звідки

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\varepsilon_{a1}} = \frac{\tau_3}{\varepsilon_{a2}}, \quad \tau_1 - \tau_2 = \tau_3.$$

Розв'язавши сумісно, отримаємо величини введених фіктивних зарядів

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}} \tau_1, \quad \tau_3 = \frac{2\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}} \tau_1. \quad (2.42)$$

Знаючи величини фіктивних зарядів з лінійною густиною τ_2 і τ_3 , не важко розрахувати електричні поля в однорідних середовищах, що показані на рис.2.22, а та на рис.2.22, б.

Знаки лінійних зарядів τ_1 і τ_3 завжди однакові. Знаки лінійних зарядів τ_1 і τ_2 однакові за умови $\varepsilon_{a1} > \varepsilon_{a2}$ і протилежні при $\varepsilon_{a1} < \varepsilon_{a2}$.

2.5 Розподіл потенціалів і зарядів в системі заряджених тіл

Якщо електричне поле створюється декількома зарядженими тілами, то потенціал кожного тіла визначається і зарядом цього тіла, і зарядами інших тіл, що входять в систему заряджених тіл. Нехай система складається із тіл, кожне з яких має відповідні заряди q_1, q_2, \dots, q_m . Згідно з принципом накладання потенціал будь-якої точки поля, що створене системою заряджених тіл, можна визначити як суму потенціалів, зумовлених зарядами першого, другого і т.д. тіл. Таким чином, потенціал першого тіла

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} + \dots + \varphi_{1m},$$

причому кожна складова прямо пропорційна відповідному заряду, тобто

$$\varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \dots + \alpha_{1m} q_m.$$

Аналогічно записавши вирази для потенціалів інших тіл, отримаємо систему лінійних рівнянь, що однозначно пов'язують значення потенціалів і зарядів:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \dots + \alpha_{1m} q_m, \\ \varphi_2 &= \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \dots + \alpha_{2m} q_m, \\ &\dots \\ \varphi_m &= \alpha_{m1} q_1 + \alpha_{m2} q_2 + \dots + \alpha_{mm} q_m, \end{aligned} \quad (2.43)$$

Коефіцієнти α залежать як від форми і розмірів заряджених тіл, так і від їхнього взаємного розташування і називаються *потенціальними коефіцієнтами*.

Коефіцієнт α_{kk} називають *власним* потенціальним коефіцієнтом. Він дорівнює потенціалу тіла k , якщо його заряд дорівнює одиниці, а всі інші тіла не заряджені ($q_k = 1, q_1 = q_2 = \dots = q_m = 0$).

Взаємний потенціальний коефіцієнт α_{kn} дорівнює потенціалу тіла k , коли заряд тіла n дорівнює одиниці, а всі інші тіла не заряджені.

Потенціальні коефіцієнти завжди позитивні, в зв'язку з тим, що в полі, створеному позитивним (негативним) зарядом, будь-яке внесене в нього тіло отримує також позитивний (негативний) потенціал.

Система (2.43) дозволяє безпосередньо розв'язати задачу про розподіл потенціалів в системі заряджених тіл, якщо відомі їхні заряди і потенціальні коефіцієнти.

Якщо в системі заряджених тіл задані їхні потенціали, а необхідно знайти розподіл зарядів, то систему (2.43) необхідно розв'язати відносно зарядів q_k

$$\begin{cases} q_1 = \beta_{11} \varphi_1 + \beta_{12} \varphi_2 + \dots + \beta_{1m} \varphi_m, \\ q_2 = \beta_{21} \varphi_1 + \beta_{22} \varphi_2 + \dots + \beta_{2m} \varphi_m, \\ \dots \\ q_m = \beta_{m1} \varphi_1 + \beta_{m2} \varphi_2 + \dots + \beta_{mm} \varphi_m, \end{cases} \quad (2.44)$$

Отримана система називається системою рівнянь з *ε*-нісними коефіцієнтами β , які визначаються через потенціальні із розв'язку системи (2.43)

$$\beta_{kn} = \frac{\Delta_{kn}}{\Delta},$$

де визначник системи (2.43)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ & & \dots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix},$$

а алгебраїчні доповнення Δ_{kn} отримують із Δ шляхом викреслювання k -го рядка і n -го стовпчика та помноження отриманого таким чином визначника на $(-1)^{k+n}$.

Перетворимо систему (2.44). Запишемо перше рівняння системи у вигляді:

$$\begin{aligned} q_1 &= \beta_{11}\varphi_1 - \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \beta_{12}\varphi_1 - \beta_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) + \beta_{13}\varphi_1 - \dots - \beta_{1m}(\varphi_1 - \varphi_m) + \beta_{1m}\varphi_1 = \\ &= (\beta_{11} + \beta_{12} + \dots + \beta_{1m})\varphi_1 - \sum_{n=2}^m \beta_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n). \end{aligned}$$

В останньому співвідношенні заряд першого тіла виражено через різницю потенціалів між першим і другим тілами і між першим тілом і землею (перший доданок), якщо вважати потенціал землі рівним нулю. Аналогічно можна записати вирази для зарядів всіх інших тіл.

Якщо ввести позначення

$$\begin{cases} C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{km}, \\ C_{kn} = -\beta_{kn} \end{cases}, \quad (2.45)$$

то систему (2.44) можна записати так:

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + C_{1m}(\varphi_1 - \varphi_m), \\ q_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\varphi_2 + \dots + C_{2m}(\varphi_2 - \varphi_m), \\ \dots \\ q_m = C_{m1}(\varphi_m - \varphi_1) + C_{m2}(\varphi_m - \varphi_2) + \dots + C_{mm}\varphi_m \end{cases}. \quad (2.46)$$

Постійні коефіцієнти C , що входять в цю систему, називаються частковими ємностями.

Власна часткова ємність C_{kk} представляє собою ємність тіла k відносно землі (рис.2.23).

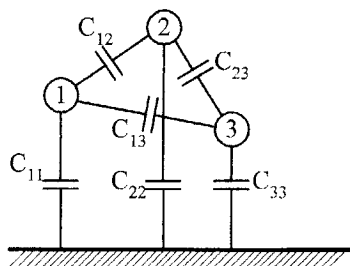


Рисунок 2.23

рівність відповідних взаємних ємнісних коефіцієнтів

$$\beta_{kn} = \beta_{nk} \quad (2.47)$$

Приклад 2.17

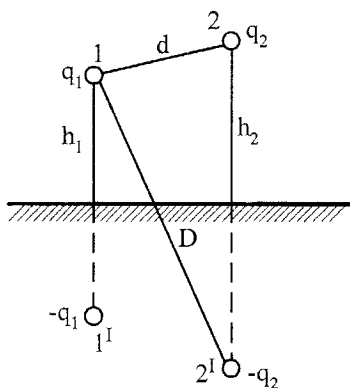


Рисунок 2.24

Визначити потенціальні коефіцієнти і часткові ємності двопровідної лінії з урахуванням впливу землі (рис.2.24).

Радіуси провідників R , їхні заряди відповідно q_1 і q_2 , інші геометричні розміри показані на рисунку і мають такі значення:

$R=2\text{ мм}$, $d=0.5\text{ м}$, $h_1=8\text{ м}$, $h_2=10\text{ м}$, довжина лінії $l=100\text{ [м]}$.

Розв'язування. Для розрахунку поля в даній задачі зручно використати метод дзеркальних зображень (п.2.4).

Потенціал на поверхні першого провідника від власної пари заряджених провідників $(l-l')$ знаходимо за (2.41), врахувавши, що $r_2 = 2h_1 - R$, $r_1 = R$

$$\varphi_{11} = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{2h_1 - R}{R},$$

від сусідньої пари заряджених провідників $(2-2')$

$$\varphi_{12} = \frac{q_2}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{D-R}{d-R},$$

тому що в цьому випадку $r_2 = D - R$, $r_1 = d - R$.

Якщо врахувати, що $2h_1 \gg R$, $2h_2 \gg R$, $D \gg R$, $d \gg R$, то

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{2h_1}{R} + \frac{q_2}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{D}{d}. \quad (2.48)$$

Аналогічно знайдемо потенціал на поверхні другого провідника

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{D}{d} + \frac{q_2}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{2h_2}{R}. \quad (2.49)$$

Звідси знаходимо потенціальні коефіцієнти

$$\alpha_{11} = \frac{\ln \frac{2h_1}{R}}{2\pi \epsilon_0 l} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ln \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 10^{-3}}}{2\pi \cdot 100} = 161.8 \cdot 10^7 \left[\frac{1}{\Phi} \right],$$

$$\alpha_{22} = \frac{\ln \frac{2h_2}{R}}{2\pi \epsilon_0 l} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ln \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 10^{-3}}}{2\pi \cdot 100} = 165.8 \cdot 10^7 \left[\frac{1}{\Phi} \right],$$

$$\alpha_{12} = \frac{\ln \frac{D}{d}}{2\pi \epsilon_0 l} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ln \frac{17.9}{0.5}}{2\pi \cdot 100} = 64.4 \cdot 10^7 \left[\frac{1}{\Phi} \right].$$

Величина D визначена із рис.2.24

$$D = \sqrt{(h_2 + h_1)^2 + d^2} - (h_2 - h_1) = 17.9 \text{ [м]}.$$

Розв'язавши сумісно рівняння (2.48) і (2.49) відносно зарядів провідників, отримаємо

$$q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2,$$

$$q_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2,$$

де

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = 7.31 \cdot 10^{-10} [\Phi],$$

$$\beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = 7.13 \cdot 10^{-10} [\Phi],$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = -2.84 \cdot 10^{-10} [\Phi]$$

Знаючи ємнісні коефіцієнти, знаходимо часткові ємності

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} = 4.47 \cdot 10^{-10} [\Phi],$$

$$C_{22} = \beta_{22} + \beta_{21} = 4.29 \cdot 10^{-10} [\Phi],$$

$$C_{12} = C_{21} = -\beta_{12} = 2.84 \cdot 10^{-10} [\Phi].$$

2.6 Застосування рівнянь Пуассона і Лапласа

Приклад 2.18

Між двома плоскими пластинами, що знаходяться на відстані $2a = 2\text{ см}$ одна від одної, розподілений в діелектрику ($\epsilon_a = 2\epsilon_0$) об'ємний заряд з густиною $\rho = -2 \cdot 10^{-6} [\text{Кл}/\text{м}^3]$. Розміри електродів набагато більші ніж відстані між ними (рис.2.25). Визначити закон зміни потенціалу і напруженості поля.

Розв'язування. Параметри поля будемо знаходити в двох областях – в області, що містить об'ємний заряд (між пластинами) і в області, де об'ємний заряд відсутній.

В першій області виберемо прямокутну систему координат і, врахувавши, що при великих розмірах пластин потенціал і напруженість поля залежать тільки від координати x , запишемо рівняння Пуассона (1.46)

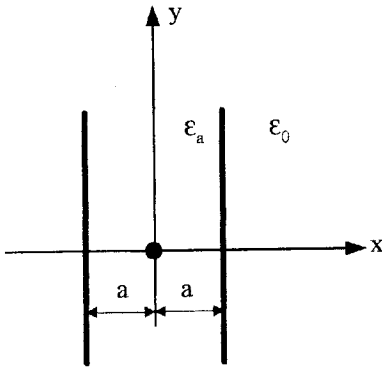


Рисунок 2.25

Напруженість поля пов'язана з потенціалом так

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi.$$

В прямокутній системі координат

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}.$$

Для нашого випадку

$$\vec{E}_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \vec{i} = \left(\frac{\rho x}{\varepsilon_a} - C_1 \right) \vec{i}. \quad (2.51)$$

Постійні інтегрування C_1 і C_2 знаходимо із граничних умов.

Оскільки точку з нульовим потенціалом можна вибрати довільно, прийемо, що нульовий потенціал має точка на початку координат ($x=0$), тобто при $x=0$, $\varphi_1=0$. Підставимо цю умову в (2.50) і отримаємо $C_2=0$.

В зв'язку з симетрією поля відносно осі ординат наступна гранична умова буде рівність потенціалів пластин

$$\varphi_1(a) = \varphi_1(-a).$$

Тоді

$$-\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_a} + C_1 a = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_a} - C_1 a;$$

Звідки

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Проінтегрувавши дане рівняння один раз, отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} x + C_1.$$

Після другого інтегрування матимемо

$$\varphi_1 = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_a} + C_1 x + C_2. \quad (2.50)$$

$$C_1 = 0$$

Отже, в області, зайнятій об'ємним зарядом ($x < a$)

$$\varphi_1 = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_a} = -\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot x^2}{2 \cdot 2} = 5.65 \cdot 10^4 \cdot x^2 [B]. \quad (2.52)$$

Вектор напруженості поля

$$\vec{E} = \frac{\rho x}{\varepsilon_a} \vec{i} = -\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot x \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{2} \vec{i} = -1.13 \cdot 10^5 \cdot x \cdot \vec{i}. \quad (2.53)$$

Величина напруженості поля

$$E_1 = -1.13 \cdot 10^5 \cdot x \left[\frac{B}{M} \right].$$

В області, яка не зайнята об'ємним зарядом, використаємо рівняння Лапласа в прямокутній системі координат, знову ж врахувавши те, що при дуже великих розмірах пластин E і φ залежать тільки від координати x

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Після інтегрування отримаємо

$$\varphi_2 = C_3 x + C_4, \quad (2.54)$$

$$\vec{E}_2 = -C_3 \vec{i}. \quad (2.55)$$

На межі розділу двох діелектриків ($x = a$) рівні потенціали

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) \quad (2.56)$$

і нормальні складові векторів електричного зміщення

$$D_{1n}(a) = D_{2n}(a) \quad \text{або} \quad \varepsilon_a E_1(a) = \varepsilon_o E_2(a). \quad (2.57)$$

Підставивши в (2.57) значення E_1 і E_2 з (2.53) та (2.55), отримаємо

$$\varepsilon_a \frac{\rho a}{\varepsilon_a} = -C_3 \varepsilon_o, \quad \varepsilon_o = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} [\Phi / M].$$

Звідки

$$C_3 = -\frac{\rho a}{\varepsilon_o} = -\left(-2 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 = 2.261 \cdot 10^3 [B / M].$$

Після підстановки (2.52) і (2.54) в (2.56) при $x = a$ отримаємо

$$-\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_a} = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} a + C_4.$$

Врахувавши, що $\varepsilon_a = 2\varepsilon_0$

$$C_4 = \frac{3\rho a^2}{4\varepsilon_0} = \frac{3(-2 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-4} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{4} = -16.96 \text{ [B]}.$$

Отже, для $x > a$

$$\bar{E}_2 = \frac{\rho a}{\varepsilon_0} \bar{i} = -2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \bar{i} = -2.261 \cdot 10^3 \bar{i} \text{ [B/M]}.$$

$$E_2 = 2.261 \cdot 10^3 \text{ [B/M]}.$$

Напруженість поля зовні пластин величина постійна.

Потенціал поля ($x > a$)

$$\varphi_2 = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} x + \frac{3\rho a^2}{4\varepsilon_0} = 2.261 \cdot 10^3 x - 16.96 \text{ [B]}.$$

На рис.2.26 наведені графіки зміни потенціалу і модуля напруженості поля в залежності від координати x .

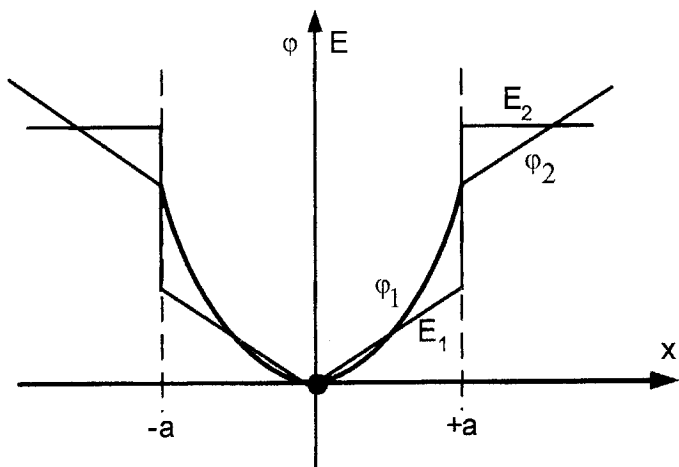


Рисунок 2.26

Приклад 2.19

В коаксіальному кабелі, радіус внутрішнього провідника якого $R_1 = 1 [мм]$, а зовнішньої провідної оболонки $R_2 = 4 [мм]$, потенціал змінюється за таким законом

$$\varphi_1 = ar^2 + b \ln \frac{r}{R_2} + c,$$

де r – відстань від осі циліндрів до довільної точки (рис.2.27);

$$a = -6 \cdot 10^6 [В/м^2], \quad b = -10В, \quad c = 96 [В].$$

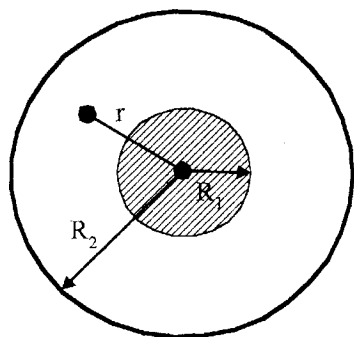


Рисунок 2.27

Діелектрична проникність середовища всередині кабелю $\epsilon_{a1} = 2\epsilon_0$. Зовні кабелю діелектрична проникність середовища $\epsilon_{a2} = \epsilon_0$.

Знайти закон розподілу напруженості поля і об'ємної густини заряду всередині кабелю, напругу між внутрішнім провідником і оболонкою, а також закон розподілу напруженості і потенціала

поля зовні кабелю.

Розв'язування. Для розв'язування задачі всередині коаксіального кабелю використаємо рівняння Пуассона в циліндричних координатах (1.48), врахувавши те, що і напруженість і потенціал в зв'язку з циліндричною симетрією залежать тільки від координати r

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = - \frac{\rho}{\epsilon_{a1}}.$$

Застосувавши послідовно операцію диференціювання, отримаємо

$$r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = r \frac{\partial \left(ar^2 + b \ln \frac{r}{R_2} + c \right)}{\partial r} = r \left(2ar + \frac{b}{r} \right) = 2ar^2 + b,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(2ar^2 + b)}{\partial r} = 4a = -\frac{\rho}{\epsilon_{a1}}$$

Звідси об'ємна густина заряду

$$\rho = -4a\epsilon_{a1}$$

або

$$\rho = -4(-6 \cdot 10^6) \frac{2 \cdot 1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 4.24 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right]$$

є постійною величиною.

Напруженість електричного поля

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

В циліндричній системі координат, коли величина E залежить тільки від координати r

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \vec{1}_r.$$

Звідси закон зміни напруженості поля всередині циліндра ($R_1 < r < R_2$)

$$\vec{E}_1 = -\left(2ar + \frac{b}{r}\right) \vec{1}_r = \left(2 \cdot 10^6 r + \frac{10}{r}\right) \vec{1}_r.$$

Напруга між внутрішнім провідником і зовнішньою оболонкою

$$U = \varphi_1(R_1) - \varphi_2(R_2)$$

$$U = \left(aR_1^2 + b \ln \frac{R_1}{R_2} + c \right) - \left(aR_2^2 + b \ln \frac{R_2}{R_2} + c \right) = a(R_1^2 - R_2^2) + b \ln \frac{R_1}{R_2}.$$

Підставивши числові значення, отримаємо

$$U = 103.8 \text{ [В]}.$$

Отже, всередині кабелю закон зміни напруженості поля в залежності від відстані r матиме вигляд

$$E_1 = -\left(2ar + \frac{b}{r}\right).$$

Зовні кабелю заряди відсутні, тому застосуємо рівняння Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0.$$

Після двократного інтегрування отримаємо

$$\varphi_2 = C_1 \ln r + C_2.$$

Запишемо граничні умови для знаходження постійних інтегрування.

Зовнішня оболонка є еквіпотенціальною поверхнею і в силу неперервності потенціалу має місце рівність

$$\varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_2)$$

або

$$aR_2^2 + c = C_1 \ln R_2 + C_2.$$

В зв'язку з тим, що

$$aR_2^2 + c = -6 \cdot 10^6 \cdot 16 \cdot 10^{-6} + 96 = 0$$

то

$$C_2 = -C_1 \ln R_2$$

і

$$\varphi_2 = C_1 \ln r - C_1 \ln R_2 = C_1 \ln \frac{r}{R_2}.$$

Другою граничною умовою є рівність на межі розділу двох середовищ нормальних складових вектора електричного зміщення ($r = R_2$)

$$D_{1n} = D_{2n}$$

або

$$\varepsilon_a E_{1n} = \varepsilon_o E_{2n}.$$

Знайдемо спочатку закон зміни напруженості поля зовні кабелю

$$\bar{E}_2 = - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \bar{I}_r = - \frac{C_1}{r} \bar{I}_r.$$

В зв'язку з тим, що вектор напруженості нормальний до поверхні розділу середовищ, то друга гранична умова така

$$-\varepsilon_a \left(2aR_2 + \frac{b}{R_2} \right) = -\frac{C_1}{R_2} \varepsilon_0.$$

Звідси при $\varepsilon_a = 2\varepsilon_0$

$$C_1 = 2R_2 \left(2aR_2 + \frac{b}{R_2} \right) = -404 [B].$$

Отже зовні кабелю ($r > R_2$)

$$\varphi_2 = -404 \cdot \ln 250 r,$$

$$E_2 = \frac{404}{r}.$$

На рис.2.28 наведені графіки зміни потенціалу і напруженості поля в залежності від відстані. При $r < R_1$ поле відсутнє, $E = 0$, потенціал $\varphi = const$.

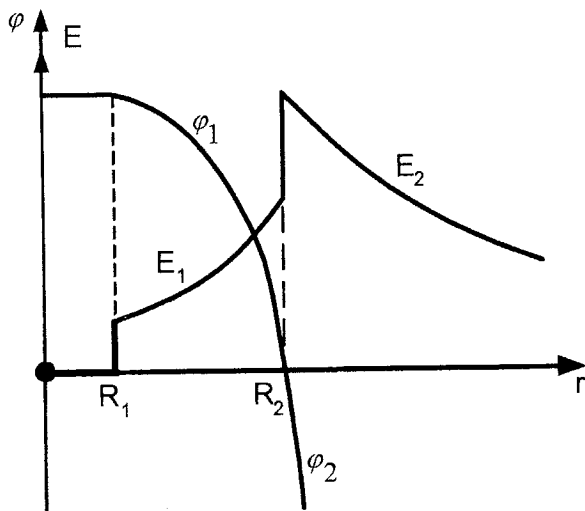


Рисунок 2.28

Приклад 2.20

Поле сферичного конденсатора з двошаровим діелектриком

Визначимо закон зміни напруженості, потенціалу в залежності від радіуса та знайдемо ємність сферичного конденсатора.

Розв'язування. Нехай радіус внутрішньої провідної сфери R_1 , радіус зовнішньої сфери R_2 , радіус межі розділу діелектриків a (рис.2.29). Заряд конденсатора q і потенціал зовнішньої сфери дорівнює нулю. Поле внутрішньої сфери (провідне середовище) відсутнє.

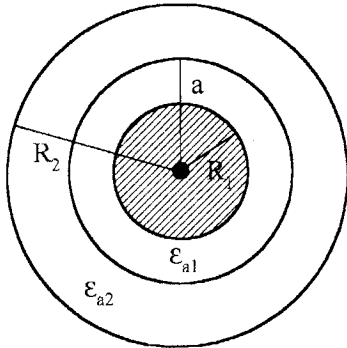


Рисунок 2.29

Оскільки між обкладками конденсатора немає вільних зарядів, то використаємо рівняння Лапласа окремо для області з проникністю ϵ_{a1} і для області з ϵ_{a2} .

Застосовуємо сферичну систему координат, врахувавши те, що при сферичній симетрії потенціал і напруженість поля залежать тільки від координати r .

Для першої області ($R_1 < r < a$)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) = 0.$$

Після першого інтегрування

$$r^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = C_1 \quad \text{або} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}.$$

Проінтегрувавши ще раз, матимемо

$$\varphi_1 = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Напруженість поля

$$\bar{E}_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \bar{l}_r = \frac{C_1}{r^2} \bar{l}_r.$$

Для другої області ($a < r < R_2$)

$$\varphi_2 = -\frac{C_3}{r} + C_4$$

$$\bar{E}_2 = -\frac{C_3}{r^2} \bar{l}_r. \quad (2.58)$$

Знайдемо граничні умови. На поверхні внутрішньої сфери ($r = R_1$) електричне зміщення дорівнює поверхневій густині заряду

$$D_1(R_1) = \sigma = \frac{q}{4\pi R_1^2}.$$

Звідки

$$E_1(R_1) = \frac{D_1(R_1)}{\varepsilon_{a1}} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a1} R_1^2} = -\frac{C_1}{R_1^2}$$

і

$$C_1 = -\frac{q}{4\pi \varepsilon_{a1}}, \quad E_1 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a1} r^2} \quad (R_1 < r < a). \quad (2.59)$$

На межі розділу двох діелектриків рівні нормальні складові векторів електричного зміщення

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

В зв'язку з тим, що вектори електричного зміщення нормальні до поверхні розділу діелектриків, то

$$D_1(a) = D_2(a)$$

або

$$\varepsilon_{a1} E_1(a) = \varepsilon_{a2} E_2(a).$$

Звідси з урахуванням (2.58) і (2.59)

$$\varepsilon_{a1} \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a1} a^2} = -\varepsilon_{a2} \frac{C_3}{a^2}, \quad C_3 = -\frac{q}{4\pi \varepsilon_{a2}}.$$

Отже

$$E_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a2} r^2}, \quad (a < r < R_2)$$

Потенціал зовнішньої сфери за умовою задачі дорівнює нулю, тому

$$\varphi_2(R_2) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a2} R_2} + C_4 = 0$$

і

$$C_4 = -\frac{q}{4\pi \varepsilon_{a2} R_2}.$$

В зв'язку з тим, що потенціал функція неперервна, то

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$$

або

$$\frac{q}{4\pi \varepsilon_{a1} a} + C_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a2} a} - \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a2} R_2}.$$

Звідси

$$C_2 = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{1}{\varepsilon_{a2}} - \frac{1}{\varepsilon_{a1}} \right) - \frac{1}{\varepsilon_{a2} R_2} \right].$$

Отже, в першій області ($R_1 < r < a$)

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a1} r} + \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{1}{\varepsilon_{a2}} - \frac{1}{\varepsilon_{a1}} \right) - \frac{1}{\varepsilon_{a2} R_2} \right]$$

$$E_1 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a1} r^2},$$

в другій області ($a < r < R_2$)

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a2} r} - \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a2} R_2},$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_{a2} r^2}.$$

Напруга на обкладках конденсатора

$$U = \varphi_1(R_1) - \varphi_2(R_2) = \frac{q}{4\pi a} \left[\frac{a - R_1}{\varepsilon_{a1} R_1} + \frac{R_2 - a}{\varepsilon_{a2} R_2} \right].$$

Ємність конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi a}{\frac{a - R_1}{\varepsilon_{a1} R_1} + \frac{R_2 - a}{\varepsilon_{a2} R_2}}. \quad (2.60)$$

Приклад 2.21

Поле між двома зарядженими пластинами, що розташовані одна відносно одної під кутом

Дві квадратні металеві пластини великої довжини зі сторонами довжиною b знаходяться в повітрі ($\varepsilon_a = \varepsilon_o$), утворюють, не доторкуючись одна до одної, двогранний кут α (рис.2.30). Потенціал першої пластини $\varphi_1 = 0$. Напруга між пластинами $U = \varphi_2 - \varphi_1$. Найменша відстань між пластинами d ($d \ll b$).

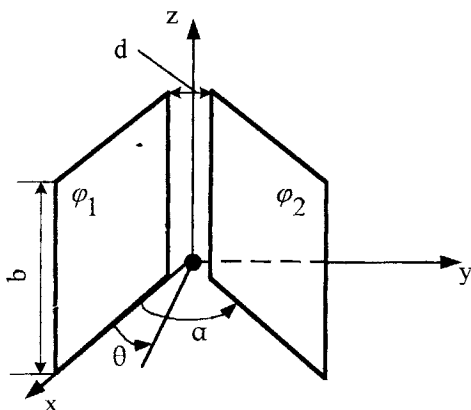


Рисунок 2.30

Розв'язування. Встановимо залежність зміни потенціалу і напруженості поля між пластинами від координат, не враховуючи поля на краях пластин.

Використаємо рівняння Лапласа в циліндричній системі координат. Із умов симетрії величина потенціалу φ залежить тільки від координати θ і не залежить від координат z і r . Вісь z проведемо через уявну лінію перетину металевих пластин (точка O на рис.2.31).

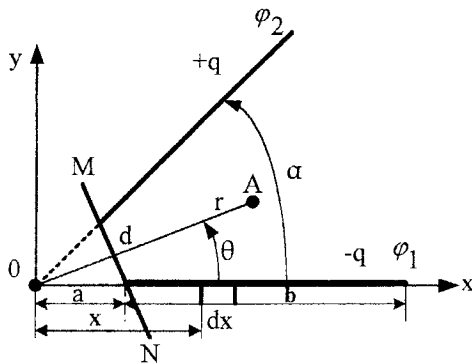


Рисунок 2.31

При даних умовах для будь-якої точки A $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0$.

Після першого інтегрування

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = C_1.$$

Після другого

$$\varphi = C_1 \theta + C_2. \quad (2.61)$$

Граничні умови:

$$\theta = 0, \varphi = 0, \text{ при } \theta = \alpha \varphi = U.$$

Підставимо дані граничні умови в (2.61) і отримаємо

$$C_2 = 0, C_1 = \frac{U}{\alpha}.$$

Отже,

$$\varphi = \frac{U}{\alpha} \theta. \quad (2.62)$$

Еквіпотенціальні поверхні ($\theta = const$) мають вигляд півплощин (рис.2.32, пунктирні лінії) і сходяться на площині, слідом якої є лінія MN .

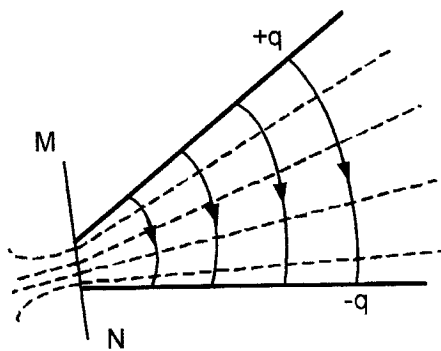


Рисунок 2.32

Далі екіпотенціальні поверхні змінюють свою форму. Визначення вигляду цих форм проводити не будемо.

Напруженість електричного поля $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ має тільки одну складову, що залежить від координати θ . В циліндричній системі координат

$$\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{I}_\theta.$$

Отже,

$$\vec{E} = -\frac{U}{r\alpha} \vec{I}_\theta.$$

Знак мінус показує на те, що напруженість поля направлена від позитивно зарядженої пластини до від'ємно зарядженої. Силкові лінії представляють собою дуги кіл, які починаються на позитивно зарядженій пластині і закінчуються на від'ємно зарядженій, і перпендикулярні до них. Картина поля наведена на рис.2.32.

Знайдемо ємність $C = q/U$. Для цього необхідно визначити заряд пластин. Відомо, що на провідній поверхні електричне зміщення D дорівнює поверхневій густині σ . Тому поверхнева густина заряду на провідній поверхні, яка розташована на осі x , визначається

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_0 U}{r \alpha}.$$

В зв'язку з тим, що σ залежить від координати r , то пластини заряджені не рівномірно.

Для визначення заряду всієї пластини використаємо вираз

$$q = \int_S \sigma dS,$$

в якому інтегрування повинно проводитися по всій поверхні пластини.

В прямокутній системі координат (рис.2.31) елемент поверхні $dS = b dx$, а межами інтегрування будуть значення $x_1 = a$ і $x_2 = a + b$, тому

$$q = \int_a^{a+b} \frac{\varepsilon_0 U b}{x \alpha} dx = \frac{\varepsilon_0 U b}{\alpha} \ln \frac{a+b}{a} = \frac{\varepsilon_0 U b}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right). \quad (2.63)$$

Величину a (відстань від початку координат до початку поверхні) зручно виразити через кут α і відстань d

$$a = \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

тому

$$q = \frac{\varepsilon_0 U b}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{2b \sin \frac{\alpha}{2}}{d} \right).$$

Звідси визначимо ємність

$$C = \frac{\varepsilon_0 b}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{2b \sin \frac{\alpha}{2}}{d} \right). \quad (2.64)$$

Наприклад, $d = 5$ [мм], $b = 20$ [см], $\alpha = 60^\circ$. В цьому випадку

$$C = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{0.2}{\pi/3} \ln \left(1 + \frac{2 \cdot 0.2 \sin 30^\circ}{5 \cdot 10^{-3}} \right) = 6.27 \cdot 10^{-12} [\Phi].$$

При $\alpha = 90^\circ$

$$C = 4.95 \cdot 10^{-12} [\Phi].$$

Якщо кут $\alpha = 0$, то отримаємо плоский конденсатор. Безпосередня підстановка α в (2.64) приводить до невизначеності. Розкривши цю невизначеність за правилом Лопітала, отримаємо

$$C = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_0 b}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{2b \sin \frac{\alpha}{2}}{d} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_0 b \cdot 2b \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\left(1 + \frac{2b \sin \frac{\alpha}{2}}{d} \right) d} = \frac{\varepsilon_0 b^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

що збігається з виразом, отриманим у прикладі 2.10.

При $\alpha = 0$

$$C = \frac{0.2^2}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 70.7 \cdot 10^{-12} [\Phi].$$

III ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНИХ СТРУМІВ В ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

3.1 Електричний струм. Густина електричного струму

Як було показано в попередньому розділі, в провідному тілі, що розміщене в електростатичному полі, під дією сил поля вільні заряди переміщуються до тих пір, поки створене електричне поле всередині провідника не компенсує зовнішнє поле. Після цього рух вільних зарядів відсутній і поле всередині провідника відсутнє. Потенціали всіх точок провідного тіла однакові.

Якщо між двома частинами провідника якимись способом створити і постійно підтримувати різницю потенціалів, то між цими частинами буде неперервний рух зарядів.

Упорядкований рух електричних зарядів називають *електричним струмом*.

Природа носіїв заряду може бути різною. В провідному середовищі такими носіями можуть бути вільні електрони (тверді провідні тіла) або іони речовини (позитивно або від'ємно заряджені молекули, або атоми в різних розчинах) і в таких випадках ведуть мову про *струм провідності*. Коли електричні заряди переносяться зарядженими частинками, що рухаються у вільному просторі (потік електронів у вакуумі), то таке переміщення зарядів називають *струмом переносу*.

Рух зарядів може відбуватися і в діелектрику. Якщо діелектрик розмістити в змінному електричному полі, тобто полі, яке змінюється в часі, то в діелектрику змінюється напрямок поляризації і виникає струм, який називають *струмом зміщення*.

В цьому розділі розглядається тільки поле постійного струму провідності.

Наявність будь-якого виду струму можна виявити за такими явищами:

- теплова дія струму (провідники, по яких протікає струм, нагріваються);
- магнітна дія (струм, який протікає, викликає появу магнітного поля);
- хімічна дія (в процесі проходження електричного струму через деякі розчини відбувається їхнє розкладання на складові частини).

Електричний струм є величиною скалярною, але в залежності від напрямку вектора напруженості електричного поля заряджені частинки можуть переміщуватись в різних напрямках.

Прийнято вважати *позитивним напрямком* струму напрямок руху його позитивно заряджених частинок. Для кількісної оцінки струму вводять поняття *величини або сили струму*.

Величиною струму (силою струму) називають кількість зарядів, які проходять через поперечний *переріз* провідника за одиницю часу, тобто

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (3.1)$$

Одиницею вимірювання електричного струму є *ампер* [A].

Струм, значення і напрямок якого не змінюється в часі, називається *постійним* і частіше всього позначається великою літерою *I*. Постійний струм, що протікає через різні перерізи одного провідника, має одне і теж саме значення, тому що в протилежному випадку в окремих місцях провідника мало би місце неперервне зростання накопичення зарядів і зростання потенціалу в цих місцях до нескінченності, що явно неможливо.

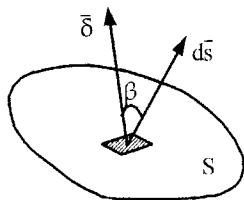
Під час протікання будь-яких струмів, в тому числі і постійних, виникає магнітне поле, але в зв'язку з тим що ці поля також незмінні в часі, то вони ніяк не впливають на електричне поле і тому можна вивчати рух зарядів в провіднику не враховуючи дії магнітних полів.

Електричний струм є інтегральною характеристикою руху зарядів, який характеризує цей рух по всій площі поперечного перерізу провідника. В деяких випадках заряджені частинки переміщуються нерівномірно по перерізу провідника і тому зручніше користуватися поняттям *густини струму*, яке характеризує рух зарядів через нескінченно малу площинку перерізу провідника.

Густина струму є відношення величини струму (di), який протікає через елементарну поверхню (dS), що перпендикулярно направлена рухові зарядів, до величини цієї поверхні

$$\delta = \frac{di}{dS}. \quad (3.2)$$

Густина струму – величина векторна, що збігається за напрямком з напрямком руху позитивних зарядів. Одиницею вимірювання густини струму є ампер на квадратний метр [A/m^2]. Густина струму є диференційною характеристикою упорядкованого руху зарядів.



Якщо вектор $\bar{\delta}$ складає з нормаллю до поверхні кут β (рис. 3.1), то електричний струм di через елементарну поверхню dS визначається

$$di = \delta dS \cos \beta = \bar{\delta} d\bar{S}.$$

Рисунок 3.1
кінцевих розмірів S , дорівнює

Струм, який протікає через всю поверхню

$$i = \int_S \bar{\delta} d\bar{S}. \quad (3.3)$$

Іншими словами, електричний струм можна розглядати як потік вектора густини струму через деяку поверхню.

3.2 Закон Ома в диференціальній формі

Встановимо зв'язок між густиною струму δ і напруженістю поля E , під дією якої рухаються заряджені частинки.

Для досягнення цієї мети виділимо в провіднику невеликий паралелепіпед об'ємом ΔV (рис.3.2). Довжина ребра паралелепіпеда Δl , площа поперечного перерізу ΔS . Розташуємо цей об'єм так, щоб напруженість в ньому була направлена паралельно ребру Δl .

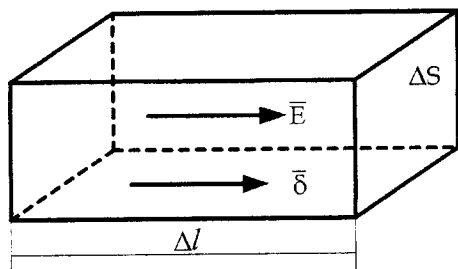


Рисунок 3.2

Напрямок вектора густини струму збігається з напрямком вектора напруженості, і відповідно, нормально до поперечного перерізу. В зв'язку з тим, що об'єм малий, можна вважати, що

для всього елементарного об'єму напруженість E і густина струму δ мають одне і те ж саме значення.

Струм, який проходить крізь поверхню ΔS , визначається

$$I = \int_S \delta \, d\vec{S} = \delta \Delta S.$$

Оскільки розглядається постійний струм, то для його позначення використана велика літера I .

Напруга між кінцями паралелепіпеда дорівнює

$$U = \int_l \vec{E} \, d\vec{l} = E \Delta l.$$

Постійна напруга і струм, як відомо, визначаються за законом Ома

$$U = IR,$$

де $R = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S}$ – опір паралелепіпеда електричному струму, γ – провідність

середовища, одиниця вимірювання сіменс на метр $\left[\frac{C_M}{M} \right]$.

Підставимо значення U, I, R в (3.1) і отримаємо

$$E \Delta l = \delta \Delta S \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S},$$

звідки

$$\delta = \gamma E.$$

У векторній формі

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}. \quad (3.5)$$

Співвідношення (3.5) називають *диференціальною формою закону Ома*.

На відміну від електростатичного поля потенціали точок в провідному середовищі при проходженні через нього електричного струму не дорівнюють один одному (наприклад, точки 1 і 2 на рис.3.3), тому на поверхні провідника, по якій протікає струм, напруженість поля не перпендикулярна до цієї поверхні.

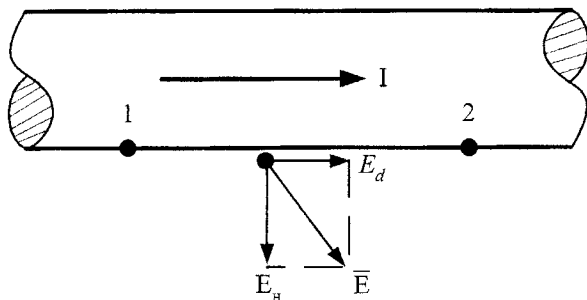


Рисунок 3.3

Вона має як нормальну складову E_n , так і дотичну E_d , під дією якої і переміщуються заряди (рис.3.3). Для розв'язування практичних задач, які

пов'язані з визначенням параметрів поля зовні провідників, величиною E_0 нехтують, тому що вона в багато разів менша нормальної складової E_n .

3.3 Напруженість сторонніх сил. Електрорушійна сила

Як було показано раніше, для тривалого протікання струму в провіднику необхідно на його кінцях підтримувати постійно різницю потенціалів. Розглянемо проєси протікання струму у провіднику, кінці якого закінчуються електродами A і B (рис.3.4).

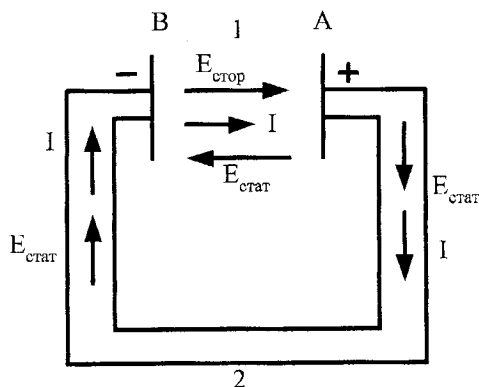


Рисунок 3.4

З даного рисунку видно, що протікання струму від електрода A до електрода B зумовлене постійним переміщенням по провіднику позитивних зарядів від A до B . При цьому по всій довжині провідника, при наявності зарядів на електродах, існує електричне поле, напруженість якого називають *електростатичною напруженістю* і позначають $E_{стат}$. Електростатична напруженість має місце і між електродами A і B , яка направлена від позитивно зарядженого електрода до негативно зарядженого (рис.3.4).

Для тривалого протікання електричного струму необхідно постійно переміщувати позитивні заряди від електрода B до електрода A проти сил електростатичного поля. Таке переміщення може здійснювати тільки зовнішні (сторонні) сили, що створюють поле з *напруженістю сторонніх сил* $E_{стор}$, яка має бути більшою за величиною ніж $E_{стат}$, і направлена від електрода B до електрода A . Ці зовнішні сили повинні також компенсувати витрати енергії, що виникають під час протікання струму через провідник.

Такими сторонніми силами можуть бути джерела енергії, які перетворюють різні види енергії (механічну, хімічну, теплову та ін.) в електричну.

Відмітимо, що рух зарядів (електричний струм) відбувається як в провіднику (від A до B), так і всередині джерела (від B до A), що характеризує неперервність електричного струму.

В джерелі електричної енергії існує електричне поле з результируючою напруженістю

$$\bar{E} = \bar{E}_{стор} + \bar{E}_{стат}. \quad (3.6)$$

Лінійний інтеграл від сторонньої напруженості поля, взятий всередині джерела (від B до A), називається *електрорушійною силою* (е.р.с) джерела

$$e = \int_B^A \bar{E}_{стор} d\bar{l}. \quad (3.7)$$

Візьмемо лінійний інтеграл від результируючої напруженості поля вздовж замкненого контуру $A2B1A$

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = \oint_l (\bar{E}_{стор} + \bar{E}_{стат}) d\bar{l}.$$

В зв'язку з тим, що стороння напруга діє тільки на ділянці $B1A$, то

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = \int_B^A \bar{E}_{стор} d\bar{l} + \oint_l \bar{E}_{стат} d\bar{l}.$$

Перший інтеграл згідно з (3.7) є електрорушійною силою, а другий інтеграл, як показано в п.1.5, завжди дорівнює нулю, тому

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = e. \quad (3.8)$$

Вираз (3.8) показує, що електричне поле сторонніх сил не є потенціальним і що умова $\oint \bar{E} d\bar{l} = 0$ виконується тільки в області простору за межами джерел енергії.

Лінійний інтеграл напруженості результуючого поля на будь-якій ділянці називається напругою цієї ділянки

$$U_{1,2} = \int_1^2 \bar{E} d\bar{l}. \quad (3.9)$$

В електростатичному полі лінійний інтеграл від напруженості поля на будь-якій ділянці представляє собою різницю потенціалів початкової і кінцевої точок цієї ділянки

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \bar{E}_{\text{стат}} d\bar{l}. \quad (3.10)$$

Встановимо зв'язок між е.р.с, напругою і різницею потенціалів. Візьмемо лінійний інтеграл від результуючої напруженості поля на шляху BA , що має ділянку зі сторонньою напруженістю

$$\int_B^A \bar{E} d\bar{l} = \int_B^A \bar{E}_{\text{стат}} d\bar{l} + \int_B^A \bar{E}_{\text{стор}} d\bar{l}. \quad (3.11)$$

Врахувавши (3.8), (3.9) і (3.10) запишемо

$$U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A + e. \quad (3.12)$$

Отриманий вираз показує, що в електричному полі в провідному середовищі на ділянках, які мають сторонню напруженість, напруга і різниця потенціалів не дорівнюють одна одній.

Напруга U_{BA} в (3.12) представляє собою спад напруги на внутрішньому опорі джерела ($R_{\text{внутр}}$), тобто

$$U_{BA} = IR_{\text{внутр}}.$$

Неважко побачити, якщо коло (рис.3.4) розімкнути, то струм в ньому протікати не буде, відповідно не буде переміщення зарядів, напруженості між електродами, стороння і статична, будуть рівні за величиною і протилежні за напрямком, тобто

$$\bar{E}_{\text{стат}} = -\bar{E}_{\text{стор}} \quad (3.12)$$

і, як видно з (3.11) і (3.12) $U_{BA} = 0$, а

$$\varphi_A - \varphi_B = e.$$

На ділянці кола $A2B$ стороння напруженість відсутня і для замкненого кола

$$U_{A2B} = \varphi_A - \varphi_B.$$

3.4 Закони Кірхгофа в диференціальній формі

Визначимо потік вектора густини струму $\bar{\delta}$ (електричний струм I) через замкнену поверхню S , яка включає в себе декілька відгалужень зі струмами, які сходяться в одному вузлі (рис.3.5).

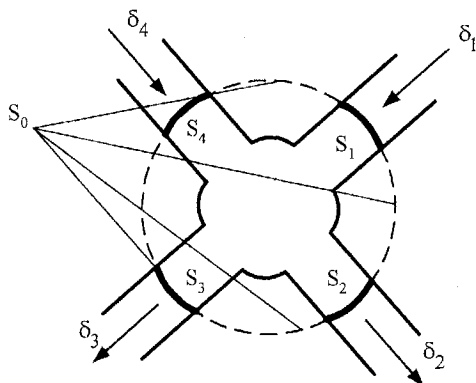


Рисунок 3.5

Як показано раніше, в будь-якому місці кола не можуть постійно накопичуватися заряди при протіканні струму, тому сума вхідних струмів (I_1, I_4) в об'ємі, що обмежений поверхнею S , повинна дорівнювати сумі вихідних струмів із даного об'єму (I_2, I_3).

Розіб'ємо всю замкнену поверхню на поверхню S_0 , що не включає в себе поперечний переріз провідників, і на поверхні, які представляють собою поперечний переріз провідників S_1, S_2, S_3, S_4

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

тоді

$$\oint_S \bar{\delta} d\bar{S} = \int_{S_0} \bar{\delta}_0 d\bar{S} + \int_{S_1} \bar{\delta}_1 d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{\delta}_2 d\bar{S} + \int_{S_3} \bar{\delta}_3 d\bar{S} + \int_{S_4} \bar{\delta}_4 d\bar{S},$$

де $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ – густина струму у відповідних перерізах.

В зв'язку з тим, що $\delta_0 = 0$ (S_0 – поверхня, що не включає провідники), а

$$\int_{S_1} \bar{\delta}_1 d\bar{S} = -I_1, \int_{S_2} \bar{\delta}_2 d\bar{S} = I_2, \int_{S_3} \bar{\delta}_3 d\bar{S} = I_3, \int_{S_4} \bar{\delta}_4 d\bar{S} = -I_4,$$

то

$$\oint \bar{\delta} d\bar{S} = -I_1 + I_2 + I_3 - I_4.$$

Знак мінус біля струмів I_1 і I_4 поставлено тому, що усі вектори $d\bar{S}$ направлені із об'єму (позитивний напрям), а вектори густини струмів $\bar{\delta}_1$ і $\bar{\delta}_4$ направлені в об'єм, що розглядається.

В зв'язку з тим, що сума вхідних і вихідних струмів повинна бути рівною між собою (перший закон Кірхгофа), то

$$\oint \bar{\delta} d\bar{S} = 0. \quad (3.13)$$

Отже, інтеграл від густини струму по замкненій поверхні завжди дорівнює нулю. Рівняння (3.13) виражає перший закон Кірхгофа в інтегральній формі.

Якщо до (3.13) застосувати теорему Остроградського-Гаусса (В-27),

то

$$\operatorname{div} \bar{\delta} = 0. \quad (3.14)$$

Останнє співвідношення називають першим законом Кірхгофа в диференціальній формі. Воно показує, що лінії густини постійного струму

завжди замкнені, в них немає початку і вони ніколи не закінчуються. Дивергенція густини струму завжди дорівнює нулю, що виражає принцип неперервності електричного струму.

Запишемо диференціальну форму закону Ома (3.5) при наявності сторонньої напруги

$$\bar{\delta} = \gamma (\bar{E}_{\text{стор}} + \bar{E}_{\text{емат}})$$

або

$$\frac{\bar{\delta}}{\gamma} = \bar{E}_{\text{стор}} + \bar{E}_{\text{емат}}. \quad (3.15)$$

Візьмемо лінійний інтеграл від обох частин рівняння (3.15) по замкнутому контуру електричного кола

$$\oint_l \frac{\bar{\delta}}{\gamma} d\bar{l} = \oint_l \bar{E}_{\text{стор}} d\bar{l} + \oint_l \bar{E}_{\text{емат}} d\bar{l}. \quad (3.16)$$

Перетворимо інтеграл в лівій частині останнього рівняння так. Помножимо і розділимо підінтегральний вираз на площу поперечного перерізу провідника S . При постійному струмі густина струму по всьому перерізу постійна і збігається за напрямком з елементом довжини $d\bar{l}$, тому

$$I = \delta S$$

і

$$\oint_l \frac{\delta S d\bar{l}}{\gamma S} = \oint_l \frac{I d\bar{l}}{\gamma S} = I R.$$

Якщо в контурі є відгалуження з різними за значенням струмами і опорами, то

$$\oint_l \frac{\bar{\delta} d\bar{l}}{\gamma} = \sum I_k R_k,$$

де $R_k = \frac{l_k}{\gamma S_k}$ — опір окремих ділянок контуру.

В правій частині рівняння (3.16) другий інтеграл дорівнює нулю (замкнений інтеграл береться від напруженості електростатичного поля), а

перший інтеграл представляє собою суму е.р.с. (3.8), що входять в досліджуваній контур. Отже,

$$\sum I_k R_k = \sum e_k, \quad (3.17)$$

що відповідає рівнянню, яке отримують для другого закону Кірхгофа. Тому рівняння (3.15) називають другим законом Кірхгофа в диференціальній формі.

3.5 Диференціальна форма закону Джоуля-Ленца

Нехай елементарний заряд Δq , який зосереджено в паралелепіпеді (рис.3.2) рухається під дією сил електричного поля. Сила, яка переміщує заряд, дорівнює $E \Delta q$. Робота, що витрачається для переміщення заряду на відстань Δl

$$\Delta A = E \Delta q \Delta l.$$

Якщо заряд проходить відстань Δl за проміжок часу Δt , то потужність

$$\Delta P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{E \Delta q \Delta l}{\Delta t}.$$

Відношення $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ є струм I , що протікає по досліджуваному об'ємі, тому

$$\Delta P = E I \Delta l = E \delta \Delta S \Delta l.$$

В зв'язку з тим, що $\Delta S \Delta l = \Delta V$ є елементом об'єму, то

$$\Delta P = E \delta \Delta V.$$

Звідси потужність, віднесена до одиниці об'єму (питома потужність)

$$P_o = \frac{\Delta P}{\Delta V} = E \delta = \gamma E^2 = \frac{\delta^2}{\gamma}. \quad (3.18)$$

Рівняння (3.18) називають законом Джоуля-Ленца в диференціальній формі.

Потужність, яка поглинається в деякому провіднику з об'ємом V

$$P = \int_V E \delta dV = \int_V \gamma E^2 dV = \int_V \frac{\delta^2}{\gamma} dV. \quad (3.19)$$

Визначимо потужність через інтегральні характеристики (струм, напругу). Для паралелепіпеда (рис.3.2) напруга між його кінцями $U = E\Delta l$, а струм що в ньому протікає $I = \delta \Delta S$. Замінімо в (3.19) δ і E на струм і напругу

$$P = \int_V \frac{U}{\Delta l} \frac{I}{\Delta S} dV = \frac{UI}{\Delta l \Delta S} \Delta V = UI$$

або

$$P = I^2 R.$$

Останній вираз можна назвати законом Джоуля-Ленца в інтегральній формі.

3.6 Електричне поле в провідному середовищі на межі двох середовищ

На ділянках провідного середовища, де відсутня стороння напруженість, електричне поле потенціальне, тому напруженість поля така ж сама, як і в електростатичному полі і пов'язана з потенціалом таким співвідношенням

$$\vec{E} = - \text{grad } \varphi.$$

Згідно з першим законом Кірхгофа в диференціальній формі (3.14)

$$\text{div } \vec{\delta} = 0.$$

У відповідності з законом Ома

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$$

В однорідному середовищі $\gamma = \text{const}$, тому

$$\text{div } \gamma \vec{E} = \gamma \text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{E} = 0.$$

Звідси

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi)=0$$

або

$$\nabla^2 \varphi=0. \quad (3.20)$$

Отже, електричне поле в провідному середовищі в областях, які не зайняті джерелами, підпорядковані рівнянню Лапласа. Для однозначного розв'язування цього рівняння необхідно використати граничні умови.

Розглянемо межу двох провідних середовищ, провідності яких дорівнюють γ_1 і γ_2 відповідно. Побудуємо циліндричну поверхню S на межі розділу середовищ так, як показано на рис.3.6. Через цю замкнену поверхню потік вектора густини струму дорівнює нулю (3.13)

$$\oint_S \bar{\delta} d\bar{S}=0.$$

Всю поверхню циліндра розділимо на три частини – бокову поверхню ΔS_0 і дві торцеві поверхні ΔS_1 і ΔS_2 . В цьому випадку

$$\oint_S \bar{\delta} d\bar{S} = \int_{\Delta S_0} \bar{\delta} d\bar{S} + \int_{\Delta S_1} \bar{\delta}_1 d\bar{S} + \int_{\Delta S_2} \bar{\delta}_2 d\bar{S} = 0.$$

Висоту циліндра спрямуємо до нуля так, щоб площинки $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$ практично збіглися з граничною поверхнею. В даному випадку струм через бокову поверхню циліндра ΔS_0 стане рівним нулю

$$\int_{\Delta S_0} \bar{\delta} d\bar{S} = 0.$$

Для малих величин площинок ΔS можна вважати, що вектор густини струму у всіх точках площинки має одно і те ж саме значення, тому

$$-\bar{\delta}_1 \Delta \bar{S}_1 + \bar{\delta}_2 \Delta \bar{S}_2 = 0$$

або

$$\delta_{1n} \Delta S = \delta_{2n} \Delta S.$$

Отже

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}. \quad (3.21)$$

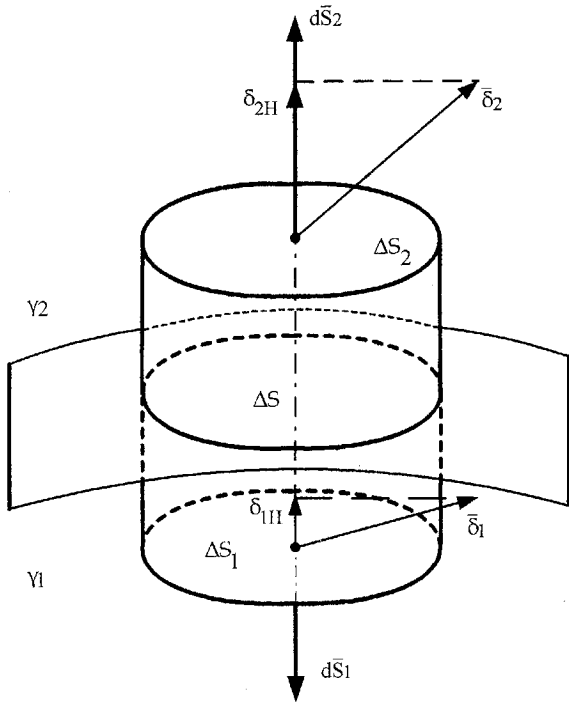


Рисунок 3.6

Нормальна складова густини струму на межі двох середовищ неперервна.

Для визначення другої граничної умови виділимо на межі розділу плоский контур 1234 у вигляді прямокутника (рис.3.7, а) і візьмемо лінійний інтеграл від напруженості поля по цьому контуру.

Якщо відсутня стороння напруга, то

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Сторони прямокутника 1-2 і 3-4 наблизимо до нуля, тоді

$$E_{10} \Delta l = E_{20} \Delta l$$

або

$$E_{10} = E_{20}. \tag{3.22}$$

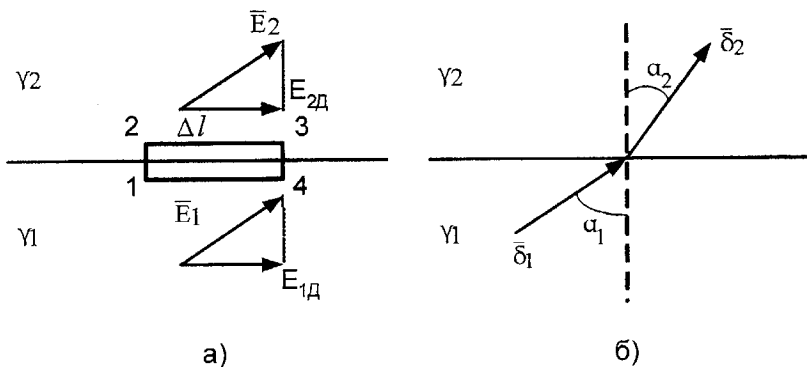


Рисунок 3.7

В областях, які вільні від сторонніх джерел, дотичні складових векторів напруженості електричного поля на межі розділу двох провідних середовищ рівні між собою.

Не важко показати, що при переході із середовища з однією провідністю в середовище з іншою провідністю вектори густини струму і напруженості змінюють свою величину і напрямок (заломлюються) (рис.3.7, б).

З (3.21) і (3.22) випливає, що

$$\begin{aligned} \delta_1 \cos \alpha_1 &= \delta_2 \cos \alpha_2 \\ E_1 \sin \alpha_1 &= E_2 \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

Враховавши те, що

$$\delta_1 = \gamma_1 E_1, \quad \delta_2 = \gamma_2 E_2,$$

отримаємо

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (3.23)$$

3.7 Аналогія між електричним полем в провідному середовищі і електростатичним полем

Вище було зазначено, що електростатичні поля в діелектрику і електричні поля постійних струмів в провідному середовищі поза межами джерел енергії є потенціальними. Ця спільна риса має місце і в подібності цілого ряду математичних співвідношень. Порівняльна характеристика математичних співвідношень, що описують електричні і електростатичні поля, наведена в таблиці.

Таблиця

Електричне поле в провідному середовищі поза межами сторонніх джерел	Електростатичне поле в областях не зайнятих зарядами
$\delta = \gamma \bar{E}$	$\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$
$\text{div} \bar{\delta} = 0$	$\text{div} \bar{D} = 0$
$\oint \bar{E} d\bar{l} = 0$	$\oint \bar{E} d\bar{l} = 0$
$\bar{E} = -\text{grad} \varphi$	$\bar{E} = -\text{grad} \varphi$
$E_{10} = E_{20}, \delta_{1n} = \delta_{2n}$	$E_{10} = E_{20}, D_{1n} = D_{2n}$
$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}$
$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$

Порівняння наведених в таблиці співвідношень показує, що система рівнянь електричного поля постійних струмів поза межами дії джерел енергії *подібна* системі рівнянь електростатичного поля за умови відсутності вільних зарядів. Аналогом вектора густини струму ($\bar{\delta}$) в електростатичному полі є вектор зміщення (\bar{D}), аналогом струму (\bar{I}) є заряд (q). Аналогом провідності середовища (γ) – абсолютна діелектрична проникність (ϵ_a). Аналогічні і граничні умови.

Якщо два поля описуються одним і тим же рівнянням $\nabla^2\varphi=0$ і в них тотожно виконуються граничні умови для подібних величин, то при однаковій формі граничних поверхонь на основі теореми єдиності розв'язку можна стверджувати, що сукупність силових і екіпотенціальних ліній в цих двох полях (картина поля) буде однаковою. Така формальна аналогія двох полів має не тільки теоретичний інтерес, але і велике практичне значення. Наприклад, якщо будь-яке електростатичне поле вже розраховано, то всі відомості про це поле можуть бути перенесені і на геометрично подібне поле в провідному середовищі.

Якщо форма граничних поверхонь складна, то аналітичний розрахунок електростатичного поля часто є дуже трудомісткий. В цьому випадку виконують експериментальне дослідження полів за допомогою моделі, яку реалізовано в провідному середовищі (електролітична ванна, спеціальний папір і ін.).

Аналогія між двома полями часто використовується для визначення провідності між двома електродами.

Якщо напруга між двома електродами 1 і 2, що розташовані в провідному середовищі, дорівнює U_{12} і між ними протікає струм I , то провідність середовища визначається

$$G = \frac{I}{U_{12}}.$$

В зв'язку з тим, що струм

$$I = \int_S \bar{\delta} d\bar{S} = \gamma \int_S \bar{E} d\bar{S},$$

а напруга

$$U_{12} = \int_1^2 \bar{E} d\bar{l},$$

то

$$G = \frac{\gamma \int \bar{E} d\bar{S}}{\int_l \bar{E} d\bar{l}}. \quad (3.24)$$

В електростатичному полі з електродами такої ж форми ємність між електродами, якщо на них розташовані однакові за величиною, але протилежні за знаком заряди q , визначається

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{s \int \bar{D} d\bar{S}}{\int_l \bar{E} d\bar{l}} = \frac{\epsilon_a \int \bar{E} d\bar{S}}{\int_l \bar{E} d\bar{l}}. \quad (3.25)$$

Інтегрування в (3.25) виконується в тих же границях, що і в (3.24).

Якщо поділити (3.25) на (3.24), то після скорочень отримаємо

$$\frac{C}{G} = \frac{\epsilon_a}{\gamma}. \quad (3.26)$$

Останнє співвідношення дозволяє за відомою залежністю для ємності між двома будь-якими тілами отримати вираз для провідності або здійснити обернену операцію.

Наприклад, ємність двопровідної лінії (2.33) на одиницю довжини лінії

$$C_o = \frac{\pi \epsilon_a}{\ln \frac{d}{R}}, \quad (3.27)$$

де d – відстань між осями провідників,

R – радіус провідника.

Для того, щоб отримати вираз для визначення провідності між двома провідниками лінії, яка знаходиться в недосконалому діелектрику, що має певну провідність γ , необхідно згідно з (3.26) зробити заміну в (3.27) ϵ_a на

$$G_o = \frac{\pi \gamma}{\ln \frac{d}{R}}. \quad (3.28)$$

Відмітимо, що аналогія розглянутих полів відноситься тільки до форми рівнянь, що описують ці поля. Вона не стосується характеру процесів, які там протікають.

Принципова відмінність цих полів полягає в тому, що вони пов'язані з якісно різними формами руху матерії. Тоді коли вектор електричного зміщення \vec{D} характеризує процеси в полі *нерухомих* зарядів, його аналог в провідному середовищі – вектор густини струму \vec{j} – є характеристикою руху заряджених частинок речовини. Електричне поле постійних струмів завжди існує разом з магнітним полем і сумісно з ним приймає участь в процесі переносу енергії від джерела до споживача. В самому провідному середовищі енергія електромагнітного поля безперервно перетворюється в теплову енергію. В електростатичному полі енергія накопичується і зберігається.

3.8 Приклади розрахунку електричних полів в провідному середовищі

Приклад 3.1

В провідному середовищі з провідністю $\gamma = 10^{-4} [Cm/m]$ потенціал поля змінюється за таким законом

$$\varphi = k_1 x^2 - k_2 y^2 + k_3,$$

де x і y – координати прямокутної системи координат (рис.3.8),

$k_1 = 1 [B/m^2], k_2 = 2 [B]$ – числові коефіцієнти.

Знайти закономірність зміни густини струму в залежності від координат і визначити силу струму, що протікає через квадратну площину зі стороною $b = 50 [cm]$, яка розташована паралельно площині zOy і знаходиться на відстані $a = 10 [cm]$ від неї.

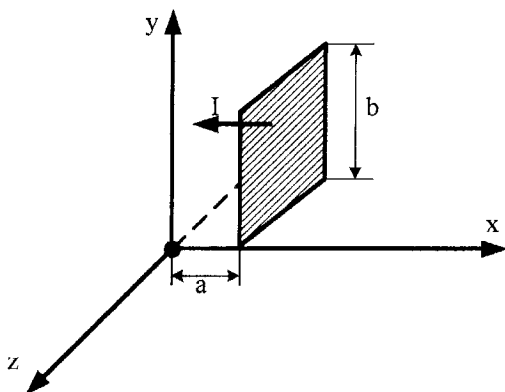


Рисунок 3.8

Розв'язування. В областях без сторонньої напруженості $\vec{E} = -grad\varphi$. В прямокутній системі координат напруженість поля визначається

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -2k_1x\vec{i} + 2k_1y\vec{j}$$

і має складові по осі x $E_x = -2k_1x$ та по осі y $E_y = 2k_1y$.

Вектор густини струму

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E} = -2k_1\gamma x\vec{i} + 2k_1\gamma y\vec{j}$$

також має складові тільки по осі x $\delta_x = -2k_1\gamma x$ і по осі y $\delta_y = 2k_1\gamma y$.

В зв'язку з тим, що площинка через яку необхідно розрахувати величину струму, що протікає, паралельна площині zOy , то через неї проходить тільки складова вектора густини δ_x . Ця складова не залежить ні від координати y , ні від координати z . Тому вона постійна для усіх точок площинки і її величина визначається при $x = a$

$$\delta_x = -2k_1\gamma a.$$

Значення струму визначається як добуток складової δ_x на розмір площадки b^2

$$I = \delta_x b^2 = -2 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 0.1 \cdot 0.5^2 = -0.5 \cdot 10^6 [A].$$

Знак мінус показує на те, що струм протікає справа наліво.

Приклад 3.2

В коаксіальному кабелі (рис.3.9) діелектрик між внутрішнім проводом і оболонкою має провідність $\gamma = 5 \cdot 10^{-6} [Cm/M]$. Радіус внутрішнього провідника $R_1 = 10 [mm]$, радіус оболонки $R_2 = 40 [mm]$. Напряга між провідниками кабелю $U = 5000 [B]$. Визначити провідність ізоляції кабелю на одиницю його довжини, струм витікання і потужність теплових втрат.

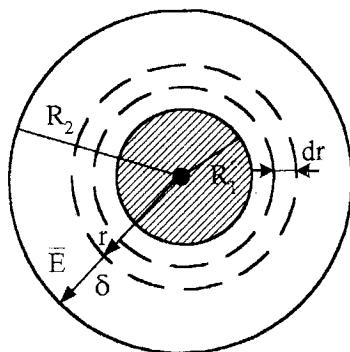


Рисунок 3.9

визначається

$$I = \int_S \bar{\delta} d\bar{S}$$

В зв'язку з тим, що вектори $\bar{\delta}$ і \bar{S} збігаються за напрямком і в силу симетрії величина густини струму на поверхні S всюди однакова, то можна записати

$$I = \int_S \delta dS = \delta 2\pi r l = 2\pi r l \gamma E.$$

Розв'язування. Прийемо потенціал зовнішньої оболонки рівним нулю, тоді вектор напруженості електричного поля \bar{E} і вектор густини струму $\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$ направлені по радіусу від внутрішнього провідника до оболонки. Обведемо внутрішній провідник кабелю циліндричною поверхнею S радіуса r і довжиною l .

Струм, що протікає через цю поверхню

Звідки

$$E = \frac{I}{2\pi\gamma l r}.$$

Напруга між провідниками кабелю визначається

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Провідність ізоляції всього кабелю становить

$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Провідність ізоляції одиниці довжини кабелю

$$G_o = \frac{G}{l} = \frac{2\pi\gamma}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{\ln \frac{40}{10}} = 2.27 \cdot 10^{-5} \left[\frac{Cm}{M} \right].$$

Струм витікання на одиницю довжини кабелю

$$I_o = U G_o = 5000 \cdot 2.27 \cdot 10^{-5} = 0.114 \left[\frac{A}{M} \right].$$

Потужність теплових втрат в ізоляції всього кабелю (3.19)

$$P = \int_V \gamma E^2 dV.$$

За елемент об'єму вибираємо величину $dV = 2\pi l r dr$.

В цьому випадку

$$P = \int_{R_1}^{R_2} \gamma \left(\frac{I}{2\pi\gamma l r} \right)^2 2\pi l r dr = \frac{I^2}{2\pi\gamma l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Потужність теплових втрат ізоляції в одиниці довжини кабелю

$$P_o = \frac{I^2}{2\pi\gamma} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{(0.114)^2}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \ln \frac{40}{10} = 570 \left[\frac{Bm}{M} \right].$$

Цю потужність можна знайти для даного випадку і простіше. На постійному струмі

$$P_o = U I_o = 5000 \cdot 0.114 = 570 \left[\frac{Bm}{M} \right].$$

Приклад 3.3

Півсферичний заземлювач радіусом $a = 1[m]$ розміщено в землі на рівні з її поверхнею (рис.3.10). Відомий струм $I = 500[A]$, що протікає через заземлювач. Визначити опір заземлення і напругу між точками 1 і 2 на поверхні землі (крокову напругу $U_{ш}$). Провідність землі $\gamma = 10^{-2}[См/м]$, $r_1 = 5[м]$, $r_2 = 5.75[м]$.

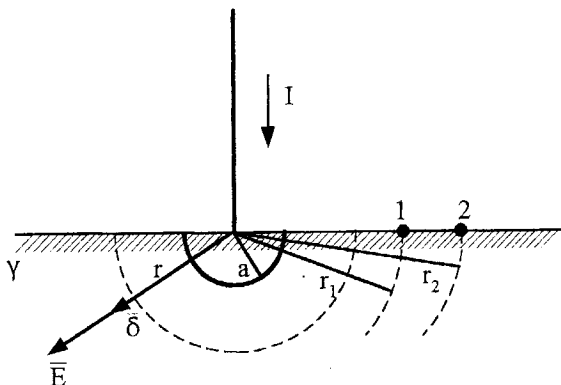


Рисунок 3.10

Розв'язування. Припустимо, що струм I повертається до джерела по землі по другому електроду, який знаходиться достатньо далеко від першого.

Для цього припущення можна вважати, що струм розтікається від заземлювача у всі сторони рівномірно, тому густина струму для всіх точок півсфери радіуса r однакова і дорівнює

$$\delta = \frac{I}{2\pi r^2}.$$

Напруженість поля в точках цієї півсфери знаходимо за законом Ома в диференціальній формі

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}.$$

Вектори \vec{E} і $\vec{\delta}$ направлені по радіусу (рис.3.10).

Якщо прийняти потенціал точки, що знаходиться в нескінченності φ_∞ , рівним нулю, то потенціал на поверхні заземлювача визначається

$$\varphi_a = \int_a^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_a^\infty \frac{I}{2\pi\gamma r^2} dr = \frac{I}{2\pi\gamma a}.$$

Напруга

$$U = \varphi_a - \varphi_\infty = \frac{I}{2\pi\gamma a}$$

називається *напругою розтікання*.

Опір заземлення становить

$$R_s = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma a}.$$

Крокова напруга визначається

$$U_k = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Підставивши числові значення отримаємо

$$R_s = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-2} \cdot 1} = 5.9 [Ом].$$

$$U_{ин} = \frac{500}{2\pi \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5.75} \right) = 207 [В].$$

Приклад 3.4

Провідник, по якому протікає постійний струм $I = 500 [A]$, обірвався і упав на землю на дуже велику довжину $L = 300 [м]$ (рис.3.11).

Визначити крокову напругу, під якою буде знаходитися людина з довжиною кроку $l = 0.65 [м]$, і яка наближається перпендикулярно до провідника. Відстань від провідника до ближньої ноги людини $r_o = 1 [м]$.

Провідність землі $\gamma = 10^{-2} [См/м]$.

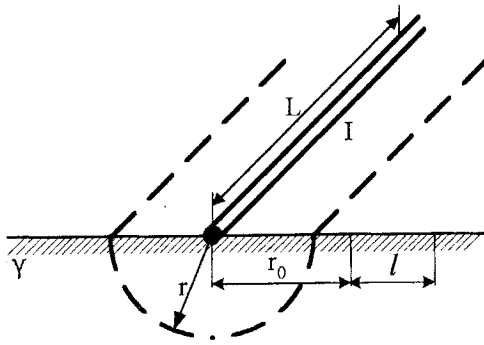


Рисунок 3.11

Розв'язування. Дана задача розв'язується аналогічно попередній. Густина струму в точках півциліндричної поверхні радіуса r від осі провідника

$$\delta = \frac{I}{\pi r L}.$$

Напруженість поля в точках цієї поверхні

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{\pi \gamma L r}.$$

Крокова напруга визначається

$$U_k = \int_{r_0}^{r_0+l} E dr = \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{I}{\pi L \gamma r} dr = \frac{I}{\pi \gamma L} \ln \frac{r_0+l}{r_0}.$$

Підставивши числові значення, отримаємо

$$U_k = \frac{500}{\pi \cdot 10^{-2} \cdot 300} \ln \frac{1+0.65}{1} = 26.6 \text{ [B]}.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Які з наведених нижче фізичних величин є скалярними, а які – векторними: струм, потенціал, напруженість електричного поля, напруга, градієнт потенціалу, густина струму?
2. Як можна записати закон Ома в диференціальній формі, якщо відома не питомі провідність γ , а питомий опір ρ ?
3. Чому дорівнює дивергенція вектора густини струму всередині провідника зі струмом?
4. Яка особливість електричного поля всередині джерела електричної енергії порівняно з пасивними ділянками електричного кола?
5. Записати другий закон Кірхгофа в диференціальній формі, вважаючи відомим питомий опір ρ , а не питомі провідність γ ?
6. Якою залежністю пов'язані між собою електричний струм і густина струму?
7. Вектор напруженості електростатичного поля перпендикулярний до поверхні провідника. Чи виконується дана умова, якщо по провіднику протікає постійний струм? Якщо не виконується, то чому?
8. Чому для довготривалого протікання постійного струму в електричному колі необхідно мати в будь-якому відгалуженні сторонню напруженість?
9. Як створюється стороння напруженість?
10. Яке співвідношення пов'язує між собою сторонню напруженість і електрорушійну силу?
11. В чому полягає принципова різниця між електростатичним полем і полем в провідному середовищі?

ЛІТЕРАТУРА

1. Круг К.А. Основы электротехники. Т.1 и Т.2. -М.: Госэнергоиздат, 1946. -472с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. -М.: Энергия, 1986. -263с.
3. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т.1 и Т.2. -М.: Энергия, 1988. -522с.
4. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля. -М.: Энергоиздат, 1960. -462с.
5. Чиженко И.М., Бойко В.С. Линейные электрические цепи и методы их анализа. -К.: Вища школа, 1979. -112с.
6. Лавров В.М. Теория электромагнитного поля и основы распространения радиоволн. -М.: Связь, 1964. -368с.
7. Нестеренко А.О. Введение в теоретическую электротехнику. -К.: Наукова думка, 1969. - 352с.
8. Купалян С.Д. Теоретические основы электротехники. Ч.3. -М.: Энергия, 1970. -248с.
9. Слободян Л.Р. Електромагнітні поля електротехнологічних установок. -К.: Либідь, 1994. -172с.
10. Теоретические основы электротехники. Ч.2 // Под ред. проф. П.А.Ионкина. -М.: Высшая школа, 1965. -284с.
11. Сборник задач по теоретическим основам электротехники // Под ред. Л.А.Бессонова. -М.: Высшая школа, 1975. -498с.
12. Теоретические основы электротехники: В 3-х т. Учебник для вузов. Т3. - 4-е изд. / К.С. Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровкин, В.Л.Чечурин. / - СПб.: Питер, 2003. - 377с.

Навчальне видання

Карпов Юхим Овдійович

Кухарчук Василь Васильович

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ.
ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено В. В. Кухарчуком

Редактор О. Д. Скалоцька

Видавництво ВНТУ «УНІВЕРСУМ-Вінниця»
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, головний корпус, к. 114
Тел.: (0432) 44-05-32

Підписано до друку 1. 12. 2004 р.
Формат 29,7 x 42 ¼ Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Друк різнографічний Ум. друк. арк. 7,96
Наклад 200 прим. Зам. № 2004-188

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, головний корпус, к. 114
Тел.: (0432) 44-01-59